

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**“NEUTRINOS MASIVOS Y MECANISMO DE
SEESAW EN EL MODELO 3-3-1”**

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
CIENCIAS CON MENCIÓN EN FÍSICA

ELABORADO POR:

OSCAR EDUARDO CASTILLO RUIZ

ASESOR:

DR. ORLANDO PEREYRA RAVINEZ

LIMA-PERÚ

2017

Agradecimientos

El presente trabajo es la culminación de un largo camino que empezó con los cursos electivos dictados por el Dr. Orlando Pereyra Ravinez en la maestria de la facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingenieria. Ésta tarea tuvo como vital soporte las reuniones periódicas realizadas con el grupo de Física Fundamental de la Facultad de Ciencias: Área de Fenomenología de Altas Energías. Por lo tanto quiero dedicar un especial agradecimiento al Dr. Pereyra, asesor de esta tesis, por la confianza, dedicación y estímulo impartido durante el desarrollo de la presente investigación. También quiero agradecer al Prof. Vicente Pleitez, al Dr. Daniel Soto y al Dr. Carlos Tello por sus aportes y consejos valiosos. Por último pero no por eso menos importante quisiera agradecer a mi familia por la paciencia y comprensión.

A mi madre.
*Por haberme apoyado en todo momento,
por sus consejos,
sus valores,
por su motivación constante para ser una persona de bien,
pero más que nada, por su amor.*

Resumen

En este trabajo, se ha implementado el mecanismo Seesaw en la parte electrodébil de un modelo 3-3-1. En nuestro caso particular para este modelo, se ha tomado en cuenta un leptón exótico E^+ el cual se transforma como los otros leptones cargados en esta simetría y singletes de neutrinos derechos estériles que no se transforman ya que no poseen ninguna carga en la simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ considerada aquí. Además, se han incluido tres tripletes y un sexteto masivo en el sector escalar. Todos los cálculos se han hecho a nivel de árbol.

Se puede construir una matriz de masa diagonal para los neutrinos usando los términos de masa de Dirac y de Majorana. Esto se pudo lograr añadiendo los nuevos acoplamientos de Yukawa en el modelo. Luego, se reprodujo el mecanismo de Seesaw, lo que significa que se obtuvo una masa muy pequeña para un tipo de neutrino a expensas de otro neutrino con masa muy grande, no detectado aún. Concluimos que este modelo reproduce los mismos resultados obtenidos en otros modelos, y no debe descartarse para la descripción de la nueva física mas allá del Modelo Estándar.

Abstract

In this work, we have implemented the Seesaw mechanism in the electroweak sector of a 3-3-1 model. In our particular case for this model, it has been taken into account an exotic lepton E^+ which transforms like the other charged leptons in this symmetry and right-handed sterile neutrinos singlets that do not transform since they have no charge at all in the $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ symmetry considered here. Furthermore, three triplets and a heavy sextet have been included in the scalar sector. All calculations have been done at the tree level.

A diagonal neutrino mass matrix can be constructed using Dirac and Majorana mass terms. This could be achieved by adding new Yukawa couplings in the model. Then, the Seesaw mechanism was reproduced which means that a very small mass was obtained for one type of neutrino at the expense of another neutrino with very large mass, not detected yet. We concluded that this model reproduces the same results obtained in other models, and it should not be ruled out for the description of new physics beyond the Standard Model.

Índice general

1. Introducción	3
2. Modelo Estándar Electrodébil (MEED)	6
2.1. Descripción	6
2.2. MEED	8
2.2.1. Sector leptónico	8
2.2.2. Simetrías	9
2.2.3. Sector bosónico	11
2.3. Masas en el MEED	12
2.3.1. Términos de masa	12
2.4. Sector escalar o de Higgs	13
2.4.1. La Ruptura Espontánea de la Simetría (RES) y el teorema de Goldstone	13
2.4.2. Mecanismo de Higgs	14
2.5. Sector de Yukawa	16
2.6. Física mas allá del Modelo Estándar	16
3. Masa de los neutrinos en el MEED	18
3.1. Neutrinos de Dirac o de Majorana	18
3.2. Término de masa para los neutrinos masivos	19
3.2.1. Término de masa de Dirac	19
3.2.2. Término de masa de Majorana	20
3.2.3. Término de masa de Dirac+Majorana	22
3.3. Sector de Yukawa agrandado	23
3.3.1. Neutrino de Dirac	23
3.3.2. Neutrino de Majorana	24
3.4. Mecanismo de Seesaw	27
4. Modelo Electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_N$	29
4.1. Sector leptónico	30
4.1.1. Simetrías	30
4.2. Sector bosónico	32
4.3. Sector escalar	33
4.3.1. Mecanismo de Higgs	34
4.4. Sector de Yukawa	35
4.4.1. Masa de los leptones	36
4.4.2. Masa de los bosones	37
4.4.3. Alcances del Modelo	38
5. Neutrinos Masivos en el Modelo $SU(3)_L \otimes U(1)_N$	40
5.1. Sector leptónico	40
5.2. Sector escalar	41
5.3. Sector de Yukawa	43
5.4. Mecanismo de Seesaw	44

6. Conclusiones y Perspectivas	46
Apéndices	48
A. Transformaciones Biunitarias	49
B. Propiedades de la conjugación de carga	50
B.1. Operador Conjugación de Carga	50
B.2. Representación de Dirac	52
B.3. Representación de Majorana	52
C. Autoestados de gauge y de masa	54
D. Mezclas y oscilaciones de neutrinos	56

Capítulo 1

Introducción

“Nos encontramos en los comienzos mismos de la era de la raza humana. No es ilógico que tengamos o que tropecemos con problemas, pero hay decenas de miles de años en el futuro. Es responsabilidad nuestra hacer lo que podamos, aprender lo que podamos, mejorar las soluciones y transmitir las a nuestros sucesores. Es responsabilidad nuestra dejar las manos libres a las generaciones futuras”.

Richard Feynman.

Como es bien sabido, el Modelo Estándar es una teoría de campos cuánticos relativistas, fruto del esfuerzo de los más prominentes físicos de la segunda mitad del siglo veinte como Gell-Mann, Weinberg, Glashow, Salam, Higgs, entre otros. Una teoría que es considerada uno de los más grandes logros de la ciencia en el ámbito de la Física de Partículas [1].

Sus alcances van desde el entendimiento de los procesos físicos involucrados en el Big - Bang hasta la predicción precisa de las masas de las partículas elementales que conforman el cosmos. Además, reduce en un esquema común a la Electrodinámica Cuántica con la interacción débil y por otro lado, incluye a la Cromodinámica Cuántica, que explica la interacción fuerte entre quarks.

Es decir, es una teoría que explica tres de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza de manera eficiente.

Ahora bien, cuando se habla del Modelo Estándar (de ahora en adelante ME) en su forma original, se hace referencia a una teoría cuántica de campos que tiene las siguientes características:

- Es una teoría de gauge. Eso significa que se introducen transformaciones locales que resultan en campos de interacción (llamados también campos de gauge). Dichos campos de interacción, que se dan entre fermiones, se cuantizan en bosones de gauge: la interacción fuerte se considera que se transforma según el álgebra del grupo de simetría $SU(3)_c$ ¹ tiene ocho gluones (uno por cada generador de grupo); la interacción electromagnética

¹ El subíndice “c” hace referencia a la carga de color.

es del grupo $U(1)_Q$ ² tiene un fotón; y la interacción débil del grupo $SU(2)_L$ ³ tiene tres bosones vectoriales W^+ , W^- y Z^0 .

- En el Modelo Estándar (ME), que describe las tres interacciones antes mencionadas, dice que las transformaciones son locales y pertenecen al grupo de simetría $SU(3)_c \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. El sector del ME que describe a la interacción electrodébil (de ahora en adelante MEED), es descrito con transformaciones del subgrupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, mientras que el sector que describe a la interacción fuerte se describe con transformaciones del subgrupo $SU(3)_c$.
- Los fermiones están agrupados en tres familias, cada una con dos quarks y dos leptones. Las tres familias se distinguen una de la otra por su jerarquía de masa.
- Para adjudicar masa a las partículas se define, en la densidad lagrangiana, un sector escalar donde se considera un campo de Higgs, en una representación doblete de $SU(2)$. También se define el sector de Yukawa donde los campos de Higgs van acoplados con los leptones y quarks para que adquieran masa mediante el Mecanismo de Higgs; en el cual, el grupo de simetría de la teoría se rompe espontáneamente hasta $SU(3)_c \otimes U(1)_Q$ y todas las partículas elementales del ME adquieren masa⁴.

Cualquier cambio que se haga a lo descrito para el ME mínimo, es decir al original propuesto por Weinberg, Salam y Glashow, se llama extensión del ME. Estas extensiones pueden estar dentro del grupo de simetría original (cambiando el número de campos de Higgs por ejemplo), o agrandando el grupo de simetría pero que incluya a la del ME.

Hay varias razones para extender el ME mínimo, como se explica en la sección 2.6. Pero, la que despertó nuestro interés y nos hizo explorar el intrincado mundo de los modelos mas allá del ME, fue la histórica dificultad de entender completamente al raudo neutrino, que según el ME mínimo, es no masivo.

Y a decir verdad, para comprender correctamente sus características (las del neutrino), hay que tener en cuenta su masa. Todo indica que el neutrino tiene masa, y por más pequeña que sea, hay que considerarla en las teorías.

Y eso es porque desde hace décadas, la existencia de la masa de los neutrinos ha estado presente en las discusiones teóricas y sus respectivas verificaciones experimentales; y poco a poco, la comunidad científica ha estado convenciéndose más sobre la certeza de la existencia de dicha masa, sobre todo en los experimentos de Oscilaciones de Neutrinos [2] (ver el apéndice D).

Actualmente, es prácticamente unánime el modelamiento del escurridizo neutrino como una partícula masiva, con lo que el Modelo Estándar tendría que ser ampliado, por lo menos, para explicar esto.

Una primera ampliación, es la que se describe en el capítulo 3, donde se considera a los neutrinos con proyección quiral derecha e izquierda⁵. Gracias a ello, se puede construir, y de hecho se hace en ese capítulo, una matriz de masas donde se consideran términos de masa de Dirac y de Majorana y, a partir de ella se efectúa un proceso llamado Mecanismo Seesaw para explicar por qué el neutrino debe tener una masa muy pequeña (a expensas de otro de masa muy grande y no observado experimentalmente).

² El subíndice "Q" hace referencia a la carga electromagnética.

³ El subíndice "L" hace referencia a la quiralidad izquierda con que se transforman los dobletes, como se verá más adelante.

⁴ Menos el fotón, que no va acoplado con un campo de Higgs.

⁵ En el MEED mínimo solo se consideran los neutrinos izquierdos.

En el capítulo 3, también se describe a los neutrinos de Dirac y los de Majorana. En la representación de Dirac, las masas leptónicas aparecen de la ruptura de la simetría del lagrangiano libre del MEED donde los campos de quiralidad izquierda y derecha aparecen simétricamente juntos. En cambio, en la representación de Majorana, los términos de masa aparecen de un lagrangiano libre donde los campos izquierdos y derechos se tratan por separado. En este capítulo se consideran que las dos representaciones (Dirac y Majorana) determinan una expresión conjunta para la matriz de masas de los neutrinos.

Ahora, nada impide modelar al neutrino masivo en otro grupo de simetría. En el grupo de Fenomenología de Altas Energías de la Facultad de Ciencias en la UNI, se ha venido investigando y aportando al desarrollo del modelo 331 (notación resumida del grupo de simetría $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$) como alternativa válida para ampliar al Modelo Estándar; todo eso bajo la dirección del Prof. Orlando Pereyra (UNI) y el Prof. Vicente Pleitez (IFT, Sao Paulo). Los trabajos precedentes, estuvieron enfocados a la caracterización de un bosón exótico⁶ [3], producto del modelo, y a la descripción de nuevos procesos dispersivos⁷ [4], válidos en el esquema 331.

Para completar el esquema que se venía trabajando, faltaba considerar la masa de los neutrinos en esta extensión del ME, la de la simetría 331.

Este modelo, se desarrolla en el capítulo 4 y considera las siguientes diferencias con respecto al ME

- El grupo de simetría es ampliado a $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$, con lo que la parte electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_N$, presenta transformaciones diferentes que las del MEED y por lo tanto, se espera nueva física con la inclusión de bosones y fermiones propios de la nueva simetría.
- En el sector escalar también hay cambios. Gracias a la consideración de un nuevo grupo de simetría, se puede considerar nuevos campos de Higgs (con otras representaciones) con los que se efectúa el Mecanismo de Higgs y se obtiene los nuevos términos de masa.

Si bien es cierto que se han hecho trabajos para determinar la masa de los neutrinos en ciertos modelos 331 [5], no se han hecho en el modelo 331 en particular que se trabaja en nuestro grupo de investigación en la UNI. En esta tesis de maestría se utiliza una extensión del modelo de Pleitez [6] para obtener términos de masa para los neutrinos y así calcular sus masas, utilizando el mecanismo de Seesaw. En el capítulo 5 se explica detalladamente los cambios que se dan sobre el modelo de Pleitez, que quedan resumidos en los siguiente:

- Se consideran neutrinos derechos.
- Se agrega un sexteto escalar.
- Se agrega un término de interacción en el sector de Yukawa (“novedoso”) para obtener los términos de masa para los neutrinos.

El objetivo de este trabajo es demostrar que el modelo 331, particularmente el que se trabaja en el grupo de Física Teórica de la UNI, es consistente con la concepción de la masa de los neutrinos, proveyendo resultados teóricos coincidentes con lo que se tiene en modelos diferentes; algo que se logró como se lee en las conclusiones.

Solo resta decir, que entre otras cosas que se plantearon en esta tesis, es la de considerar a los neutrinos como partículas de Majorana, algo que todavía está en discusión y se busca en experimentos de decaimiento beta doble sin neutrinos [7].

⁶ http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/1233/1/romero_rd.pdf

⁷ http://cybertesis.uni.edu.pe/bitstream/uni/939/1/diaz_cv.pdf

Capítulo 2

Modelo Estándar Electrodébil (MEED)

El Modelo Estándar de la Física de Partículas, es una teoría cuántica de campos que describe a las partículas fundamentales y sus interacciones. Es una teoría muy aceptada debido al enorme éxito que ha tenido para predecir las propiedades de las partículas fundamentales (sin tener conocimiento de su existencia en algunos casos) como la masa los bosones vectoriales W^\pm y Z^0 con una precisión sorprendente¹.

Cantidad	Experimento (GeV)	Predicción (GeV)
Masa del bosón W	$80,385 \pm 0,015$	$80,3900 \pm 0,0180$
Masa del bosón Z	$91,1876 \pm 0,0021$	$91,1874 \pm 0,0021$

Tabla 2.1: Predicciones del Modelo Estándar para los bosones vectoriales.

Sin embargo, existen fenómenos que no se toman en cuenta en esta teoría o no son explicados adecuadamente por ella. El ME deja varios asuntos importantes por resolver como la unificación de las interacciones de gauge, la cuantización de la gravedad, la caracterización de la materia oscura y de la energía oscura, la masa de los neutrinos y la asimetría materia - antimateria. Aún así, el ME sigue siendo consistente con los nuevos resultados experimentales. El éxito mas significativo es el descubrimiento en el LHC de una resonancia alrededor de los 125 GeV con propiedades consistentes con las del bosón de Higgs² [8].

2.1. Descripción

El ME fue construido por bloques, en base a ideas de diversos científicos desde hace más de 50 años, considerando como hechos fundamentales la idealización de los bosones vectoriales en 1957 por Schwinger [9] y en 1959 por Glashow [10], la concepción de los quarks por parte de Murray Gell-Mann y Zweig por separado en 1964 [11, 12] o la unificación de las interacciones electromagnética y débil en 1967 por Weinberg y Salam por separado.

¹ <http://pdg.lbl.gov/2015/listings/rpp2015-list-w-boson.pdf>
<http://pdg.lbl.gov/2015/listings/rpp2015-list-z-boson.pdf>

² Además de este hallazgo, también se han obtenido resultados experimentales compatibles con los tetraquarks (abril del 2014), los pentaquarks (julio del 2015) predichos por el ME y últimamente un nuevo barión de 3 621 MeV de masa (julio del 2017).

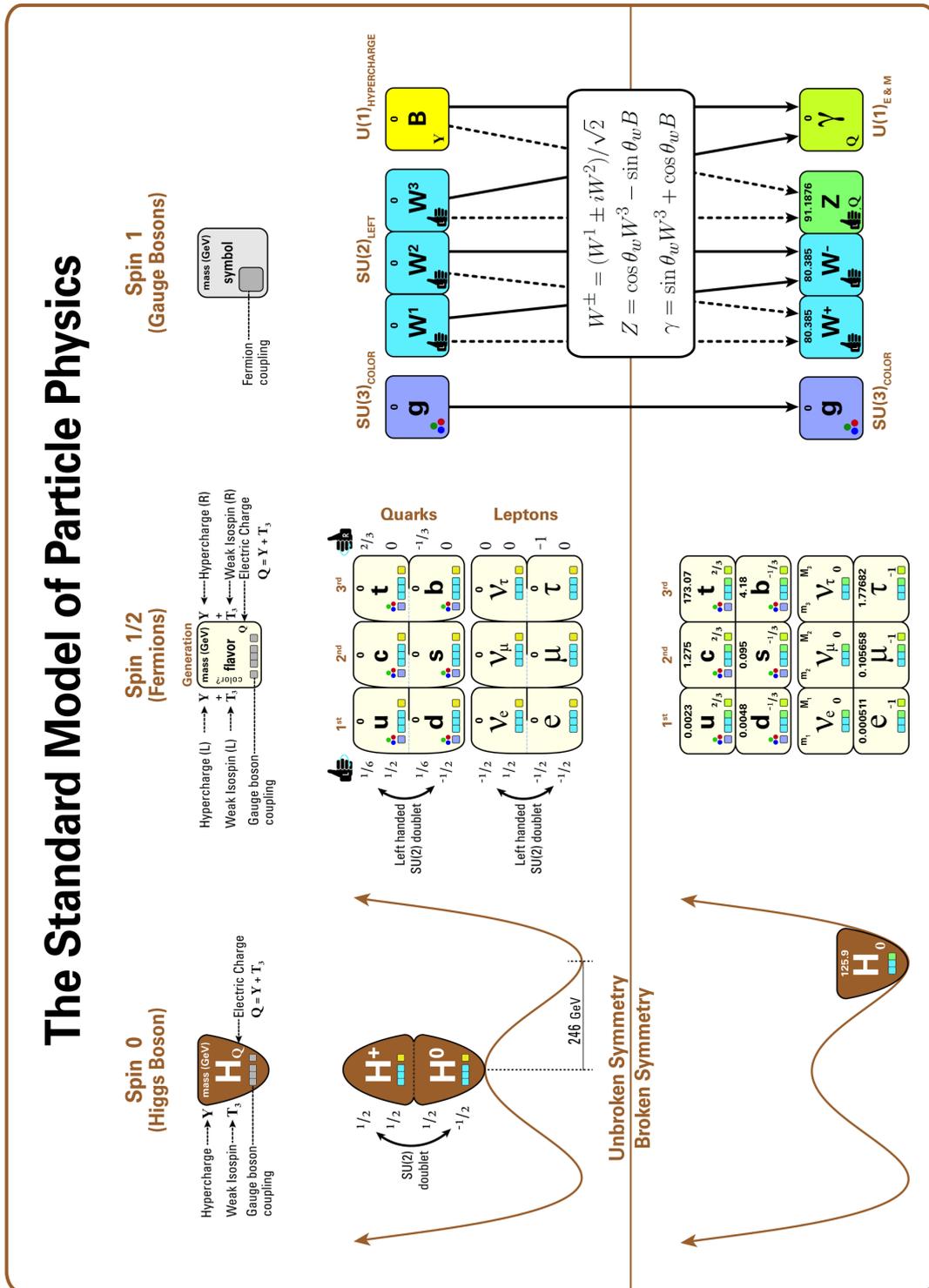


Figura 2.1: Características del Modelo Estándar.
 Tomada de Wikipedia: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Standard_Model_Of_Particle_Physics,_Most_Complete_Diagram.jpg

Este modelo describe a las partículas fundamentales que componen la materia (fermiones) y sus interacciones (bosones) sin tener en cuenta la gravedad. Los campos que describen a los fermiones, a su vez engendran los bosones de gauge, los que aparecen como cuantos de los campos de gauge al efectuar las transformaciones en los lagrangianos y hamiltonianos³ en la simetría que describe la teoría.

2.2. MEED

En el ME, los leptones y los bosones vectoriales son descritos por el Modelo Estándar Electrodébil (MEED), en el cual se juntan las ideas de Schwinger y Glashow, con las de Salam y Weinberg [13, 14]. La teoría queda formalizada las transformaciones que entran en el grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, donde Y es la hipercarga como generador del subgrupo $U(1)$.

En este primer capítulo se describe, de manera resumida, las características principales del MEED analizando su lagrangiano, el cual involucra a los leptones (cargados y neutros), a los bosones (los de gauge y los generadores de masa) y a sus respectivas interacciones. También, mediante un mecanismo algebraico de mezclas y ruptura de simetría, se logra encontrar las masas de los leptones y los nuevos bosones de gauge introducidos por la simetría.

El lagrangiano en su forma más simple, se disgrega en sectores:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^L + \mathcal{L}^B + \mathcal{L}^H + \mathcal{L}^Y, \quad (2.1)$$

donde a \mathcal{L}^L se le conoce como el sector leptónico, \mathcal{L}^B es el sector bosónico, \mathcal{L}^H el sector de Higgs o escalar y \mathcal{L}^Y es conocido como el sector de Yukawa.

2.2.1. Sector leptónico

Los leptones se clasifican en dos tipos: con carga eléctrica (electrón, muón, tauón) y sin ella (neutrino electrónico, muónico y tauónico). Estas partículas, al ser fermiones, satisfacen la ecuación de Dirac y pueden ser representadas como biespinores.

Inicialmente se escribe lagrangiano de Dirac libre asumiendo a los fermiones sin masa, ya que los términos de masa asociados no comparten explícitamente la simetría de gauge del MEED. Estos términos de masa aparecerán luego del Mecanismo de Higgs.

El lagrangiano de este sector es

$$\mathcal{L}_0^L = i [\bar{\psi}_l \not{\partial} \psi_l + \bar{\psi}_{\nu_l} \not{\partial} \psi_{\nu_l}].$$

Aquí, los biespinores ψ_l (con $l = e, \mu, \tau$) describen a los campos de las tres familias leptónicas.

En el MEED, los campos leptónicos son estudiados en diferentes grupos de simetría, dependiendo de su helicidad⁴.

³ En realidad son densidades lagrangianas y hamiltonianas, pero es usual mantener implícita la palabra "densidad".

⁴ En este punto, se habla de helicidad y quiralidad de manera indiferente al estar involucrados leptones sin masa.

Los campos izquierdos y derechos se definen como autoestados del proyector de quiralidad $\psi^{L,R} = P_{L,R}\psi \equiv \frac{1}{2}(1 \mp \gamma_5)\psi$. Luego, el lagrangiano escrito de una manera quiral será,

$$\mathcal{L}_0 = i [\bar{L}_l \not{\partial} L_l + \bar{R}_l \not{\partial} R_l + \bar{R}_{\nu_l} \not{\partial} R_{\nu_l}], \quad (2.2)$$

donde L_l son dobletes $SU(2)$,

$$L_l = \begin{pmatrix} \psi_{\nu_l}^L \\ \psi_l^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l^- \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{2}, -1)$$

y R_{l,ν_l} son singletes $U(1)$,

$$R_{l,\nu_l} = \psi_{e^-, \nu_l}^R = e_R^- \sim (\mathbf{1}, -2), \quad \nu_{lR} \sim (\mathbf{1}, 0).$$

Los pares ordenados describen la representación (doblete o singlete) y la hipercarga, como se describe en la tabla 2.2. Por otro lado, se puede notar por simple inspección, que el lagrangiano (2.2) no guarda una forma simétrica respecto a los campos derechos e izquierdos (asimetría quiral).

2.2.2. Simetrías

El ME presenta tres simetrías de gauge; la de color $SU(3)_c$, la de isospín débil $SU(2)_L$ y la de hipercarga $U(1)_Y$; que están relacionadas con tres de las cuatro interacciones fundamentales, la fuerte, la débil y la electromagnética. En la parte electrodébil (unificación electromagnética y débil) del ME, la teoría se analiza en el grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, en donde los campos izquierdos se transforman como dobletes del grupo $SU(2)_L$ de isospín débil, en tanto que los campos derechos se transforman como singletes del grupo $U(1)_Y$ o de hipercarga.

Hipercarga en el MEED

La hipercarga se define con la fórmula de Gell Mann-Nishijima para el sector electrodébil [15],

$$\frac{Q}{e} = I_3 + \frac{Y}{2}. \quad (2.3)$$

Con tal relación⁵, el espectro de hipercargas del MEED queda definido [16] como sigue

Campo		$(SU(2)_L, U(1)_Y)$
Doblete leptónico	L_l	$(\mathbf{2}, -1)$
electrón derecho	e_R	$(\mathbf{1}, -2)$
neutrino derecho	ν_R	$(\mathbf{1}, 0)$

Tabla 2.2: Campos del MEED. El neutrino derecho está de otro color porque no aparece en el MEED mínimo.

Los neutrinos derechos son estériles para todas las interacciones al no poseer carga alguna como una imposición “a mano” acorde con los resultados experimentales.

⁵ Originalmente, en esta fórmula en lugar de la hipercarga aparecía el número bariónico y los sabores de los quarks.

Simetrías

Las simetrías del MEED vienen definidas para las transformaciones del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ como transformaciones de fase locales.

En este grupo de simetría, los campos leptónicos se transforman de la siguiente manera

$$\begin{aligned} L_l &\rightarrow L'_l = \exp \left[ig \frac{\tau_j}{2} \omega_j(x) + ig' Y_L f(x) \right] L_l, \\ R_l &\rightarrow R'_l = \exp \left[ig' Y_R f(x) \right] R_l, \\ R_{\nu_l} &\rightarrow R'_{\nu_l} = R_{\nu_l}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $\omega_j(x)$, $j = 1, 2, 3$ y $f(x)$ son funciones reales arbitrarias y diferenciables; g y g' son constantes reales de acoplamiento; y $\frac{\tau_j}{2}$ e Y_L son los generadores del grupo $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Las derivadas covariantes reemplazan a las derivadas ordinarias en el lagrangiano (2.2) y se definen en esta simetría como

$$\begin{aligned} \partial^\mu L_l &\rightarrow D^\mu L_l = \left[\partial^\mu + ig \frac{\tau_i}{2} W_i^\mu(x) + ig' Y_L B^\mu(x) \right] L_l, \\ \partial^\mu R_l &\rightarrow D^\mu R_l = \left[\partial^\mu + ig' Y_R B^\mu(x) \right] R_l, \\ \partial^\mu R_{\nu_l} &\rightarrow D^\mu R_{\nu_l} = \partial^\mu R_{\nu_l}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde aparecen los cuatro nuevos campos de gauge, tres campos $W_j^\mu(x)$ para $SU(2)$ y un campo $B^\mu(x)$ para $U(1)$, los que a su vez se transforman como

$$\begin{aligned} W_i^\mu(x) &\rightarrow W_i^{\mu'}(x) = W_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g \epsilon_{ijk} \omega_j(x) W_k^\mu(x), \\ B^\mu(x) &\rightarrow B^{\mu'}(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x). \end{aligned} \quad (2.6)$$

El lagrangiano que queda en lugar de (2.2), luego de las transformaciones, es invariante bajo (2.4) y (2.6) y tiene la forma

$$\mathcal{L}_L = i \left[\bar{L}_l \not{D} L_l + \bar{R}_l \not{D} R_l + \bar{R}_{\nu_l} \not{D} R_{\nu_l} \right]. \quad (2.7)$$

Si se desarrollan de manera explícita las derivadas covariantes en este último lagrangiano según la definición (2.5), se forman los términos de interacción. Estas interacciones se dan entre las corrientes de isospín débil⁶ J_j^μ con los campos de gauge $W_j^\mu(x)$ y entre la corriente de hipercarga débil⁷ J_Y^μ con los campos de gauge $B^\mu(x)$, obteniéndose,

$$\mathcal{L}_L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I,$$

donde,

$$\mathcal{L}_I = -g J_i^\mu W_{i\mu} - g' J_Y^\mu B_\mu. \quad (2.8)$$

Dos de las tres corrientes de isospín débil J_1^μ y J_2^μ se mezclan entre sí para obtener las corrientes leptónicas cargadas, J^μ y $J^{\mu\dagger}$, mientras que la tercera corriente J_3^μ es la corriente leptónica neutra. También se hacen combinaciones entre los campos de gauge para que

⁶ Son las corrientes conservadas que salen de la simetría $SU(2)$.

⁷ Es la corriente conservada que sale de la combinación de la corriente electromagnética y la tercera corriente de isospín débil, de donde se deduce la fórmula de Gell-Man Nijishima. Su carga conservada es la hipercarga débil.

aparezcan los campos físicos⁸ A_μ , W_μ , W_μ^\dagger y Z_μ utilizando el ángulo de mezcla débil (o de Weinberg) θ_W .

Todo ello se logra mediante la siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} J^\mu &= 2[J_1^\mu - iJ_2^\mu] = \bar{e}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l, \\ J^{\mu\dagger} &= 2[J_1^\mu + iJ_2^\mu] = \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e_l, \\ W_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}} (W_{1\mu} - iW_{2\mu}), \\ A_\mu &= B_\mu \cos \theta_W + W_{3\mu} \sin \theta_W, \\ Z_\mu &= -B_\mu \sin \theta_W + W_{3\mu} \cos \theta_W. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Después de la mezcla, el lagrangiano de interacción (2.8) queda

$$\mathcal{L}_I = -s^\mu A_\mu - \frac{g}{2\sqrt{2}} [J^{\mu\dagger} W_\mu + J^\mu W_\mu^\dagger] - \frac{g}{\cos \theta_W} [J_3^\mu - \sin^2 \theta_W s^\mu / e] Z_\mu, \quad (2.10)$$

donde el primer término, corresponde al acoplamiento entre la corriente electromagnética s^μ y el fotón A_μ (QED); en el segundo término se ve el acoplamiento entre las corrientes cargadas J^μ y $J^{\mu\dagger}$ y los bosones vectoriales cargados W_μ^\dagger , W_μ respectivamente; y el tercer término acopla el bosón vectorial neutro Z_μ con la corriente neutra J_3^μ y con la corriente electromagnética⁹.

Este lagrangiano de interacción (2.10), que es invariante bajo transformaciones $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$, fue introducido por primera vez por Glashow en 1961 [17].

2.2.3. Sector bosónico

En la sección anterior, el sector leptónico aparece con cuatro campos de gauge $W_j^\mu(x)$ ($j = 1, 2, 3$) y $B^\mu(x)$, que decantaron en cuatro campos físicos $W_j^\mu(x)$, $W_j^{\mu\dagger}(x)$, Z^μ y $B^\mu(x)$ después de la mezcla.

El caso bosónico se trata de manera similar que el caso del fotón en la QED, que aparece en el lagrangiano a través del tensor electromagnético $F^{\mu\nu}$. Es decir, los bosones de gauge del MEED deben también formar parte del lagrangiano libre mediante su respectivo tensor. Entonces, el sector bosónico libre es

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{i\mu\nu}^\dagger F_i^{\mu\nu}, \quad (2.11)$$

donde $B^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu B^\mu - \partial^\mu B^\nu$ y $F_i^{\mu\nu} \equiv \partial^\nu W_i^\mu - \partial^\mu W_i^\nu + g\epsilon_{ijk} W_j^\mu W_k^\nu$. Este segundo tensor se define como una versión diferente para preservar la invariancia SU(2) al transformar W_i^μ como en (2.6).

Los cuatro campos de gauge presentes en los tensores de (2.11), se combinan utilizando las relaciones de mezcla (2.9) y se obtienen los cuatro campos físicos A^μ , W^μ , $W^{\mu\dagger}$ y Z^μ en

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} W_{\mu\nu}^\dagger W^{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z_{\mu\nu} Z^{\mu\nu} + \dots, \quad (2.12)$$

donde $F^{\mu\nu}(x) = \partial^\nu A^\mu(x) - \partial^\mu A^\nu(x)$, $W^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu W^\mu(x) - \partial^\mu W^\nu(x)$ y $Z^{\mu\nu}(x) \equiv \partial^\nu Z^\mu(x) - \partial^\mu Z^\nu(x)$. El primer término contiene al bosón vectorial A^0 de la QED, el segundo término contiene a los

⁸ El término "físico" se está utilizando en el sentido en el que estos campos decantan directamente en partículas físicas u observables

⁹ Hay que notar que los neutrinos, que se encuentran en la corriente neutra J_3^μ solo interactúan débilmente y por lo tanto, no se acoplan con fotones.

bosones vectoriales cargados W^\pm y el tercer sumando contiene el bosón vectorial neutro Z^0 del MEED.

Los puntos suspensivos corresponden a términos de interacción de “orden” superior. En el lagrangiano bosónico en la QED no aparecen.

2.3. Masas en el MEED

En este punto, hay que notar que el lagrangiano leptónico (2.7), no contiene términos de masa porque estos no son invariantes en la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Para que los términos de masa aparezcan sin inconsistencias, se debe reducir el grupo de simetría de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$, en donde no presentan problemas de invariancia. Este proceso de reducir el grupo de simetría se conoce como “Ruptura Espontánea de la Simetría” (RES) que, para el MEED, se hace vía mecanismo de Higgs¹⁰ [18–20]. En la sección (2.4.2) se describe este proceso, donde aparecen los términos de masa de los leptones y los de todas las partículas del ME.

2.3.1. Términos de masa

Una partícula se la considera de Dirac si es diferente de su antipartícula.¹¹ En el lagrangiano, la masas se identifican como los coeficientes de los términos cuadráticos de los campos en su interacción consigo mismos.

- Para los **fermiones** que se describen con el lagrangiano de Dirac $\mathcal{L}_0 = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi$, los términos de masa de Dirac aparecen de la forma $m\bar{\psi}\psi$, que escritos de manera quiral aparecerán en el lagrangiano como

$$-m(\bar{\psi}_L\psi_R + \bar{\psi}_R\psi_L). \quad (2.13)$$

Por simple inspección, se puede verificar que no es invariante $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ según las transformaciones (2.4). Por otro lado, deben aparecer las dos componentes quirales¹² izquierda y derecha para que la masa del fermión exista.

En el formalismo del MEED, dado por el lagrangiano (2.2), sabemos que los campos de los neutrinos tienen una sola helicidad y por lo tanto no poseen un término de masa completo como en (2.13).

- En el caso de los **campos bosónicos escalares (de espín cero)**, que verifican la ecuación y el lagrangiano de Klein-Gordon $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi^\dagger - m^2\phi^\dagger\phi)$; los términos de masa deben ser,

$$-\frac{1}{2}m^2\phi^\dagger\phi. \quad (2.14)$$

- Para el caso de los **campos bosónicos vectoriales (de espín entero $\neq 0$)** que obedecen la ecuación de Proca, cuyo lagrangiano es $\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{W\mu\nu}^\dagger F_W^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 W_\mu^\dagger W^\mu$, el término de

¹⁰ También se conoce como Mecanismo de Englert-Brout-Higgs-Guralnik-Hagen-Kibble

¹¹ En el ME mínimo todas las partículas son de Dirac. Más adelante se describen las consecuencias de considerar las partículas idénticas a sus antipartículas (partículas de Majorana).

¹² En este contexto también se podría estar haciendo referencia a los autoestados del proyector de helicidad de manera indiferente, siempre y cuando se trabajen a altas energías.

masa es,

$$+ \frac{1}{2} m^2 W_\mu^\dagger W^\mu. \quad (2.15)$$

En el MEED, después de la RES, deben aparecer los términos de masa de todas las partículas del modelo (excluyendo al fotón) cuando la simetría original se rompe a $U(1)_Q$.

2.4. Sector escalar o de Higgs

Como se mencionó antes, se debe dar masa a los leptones y a los bosones de gauge dejando invariante el lagrangiano. La masa de los bosones de gauge aparece en el lagrangiano cuando se define un sector escalar con un nuevo campo bosónico que rompe la simetría del MEED al aplicar el mecanismo de Higgs. La masa de los leptones aparece en el lagrangiano cuando incluimos en él un nuevo sector de interacción (o de Yukawa) que acopla los nuevos campos escalares con los campos leptónicos y también se efectúa el mecanismo de Higgs en este sector.

Es decir, el mecanismo de Higgs es la piedra angular en el ME para la adquisición de masa.

2.4.1. La Ruptura Espontánea de la Simetría (RES) y el teorema de Goldstone

La RES se da cuando un lagrangiano invariante respecto a un grupo de simetría, cae en un estado vacío (de mínima energía) degenerado. El vacío físico (real), es uno entre todos los posibles estados de mínima energía. Cuando la naturaleza lo elige, se rompe la simetría de los estados físicos, aunque se preserva la del lagrangiano.

Si el estado de vacío no es degenerado, no es posible romper su simetría porque no existe otro estado de mínima energía en el cual se pueda definir el estado fundamental y el lagrangiano original permanece inalterado. En cambio, en un estado de vacío degenerado, se puede escoger alguno de ellos como estado basal apareciendo nuevas interacciones y nuevos bosones (como los bosones de Nambu-Goldstone y los de Higgs), así como los términos de masa de los bosones de gauge. Todos estos términos aparecen en el nuevo lagrangiano que adquiere una nueva simetría.

Nambu y Goldstone (1961) propusieron un modelo teórico simple para la RES basado en una simetría global asociada al grupo $U(1)$, utilizando resultados obtenidos de la teoría de superconductores [21, 22]. En el proceso, se encontró una partícula no masiva como resultado de la RES. Este hecho fue generalizado y formalizado teóricamente en lo que se conoce como teorema de Goldstone: "Si un lagrangiano es invariante bajo un grupo continuo de simetría G , pero el vacío es solo invariante bajo un subgrupo $H \subset G$, entonces deben existir tantas partículas no masivas de espín 0 (bosones de Nambu-Goldstone) como generadores rotos (generadores de G que no pertenecen a H)".

2.4.2. Mecanismo de Higgs

En este proceso se generan masas a los bosones W^\pm y Z^0 . En primer lugar, se debe introducir un campo Higgs, definido en el lagrangiano como un doblete escalar complejo¹³ en lugar de un singlete real como lo hizo Goldstone.

El sector escalar es definido como

$$\mathcal{L}^H = (D^\mu \Phi)^\dagger (D_\mu \Phi) - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad (2.16)$$

donde $\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a^+ \\ \phi_b^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{2}, +1)$, es el doblete de Higgs y los campos ϕ_a^+ y ϕ_b^0 son escalares complejos. Este campo sigue siendo un doblete SU(2) y se transforma (como los dobletes leptónicos),

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \exp \left[ig \frac{\tau_j}{2} \omega_j(x) + ig' \frac{Y}{2} f(x) \right] \Phi. \quad (2.17)$$

Las derivadas covariantes para estos campos escalares,

$$D^\mu \Phi = \left[\partial^\mu + ig \frac{\tau_j}{2} W_j^\mu + ig' \frac{Y}{2} B^\mu \right] \Phi. \quad (2.18)$$

Los valores esperados de la energía en el vacío (vev's) se obtienen al calcular $\langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle$, donde el hamiltoniano se minimiza cuando el potencial escalar es mínimo. Por otro lado, los estados del vacío son degenerados cuando $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$. En este caso, si Φ_0 es el mínimo valor del campo para el potencial descrito en (2.16), cumple la condición $|\Phi_0|^2 = |\phi_a|^2 + |\phi_b|^2 = \frac{-\mu^2}{2\lambda} \equiv \frac{v^2}{2}$.

La RES se da cuando escogemos un valor particular para $\langle 0 | \Phi | 0 \rangle = \Phi_0$ como estado fundamental. De todos los valores posibles, lo usual es escoger

$$\Phi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

En este estado fundamental prevalece la segunda componente que es eléctricamente neutra, por lo que Φ_0 adquiere la invariancia de gauge $U(1)_Q$ de la QED donde la transformación $\Phi'_0 = \exp(-iqf(x))\Phi_0$ hace que el lagrangiano (2.16) permanezca invariante. Si efectuamos las transformaciones de simetría de la QED en el nuevo lagrangiano, se verifica que es invariante. El lagrangiano ha experimentado la ruptura al cambiar su grupo de simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y \rightarrow U(1)_Q$.

Ahora se aplica el mecanismo de Higgs parametrizando el campo $\Phi(x)$ a partir de las desviaciones alrededor del valor Φ_0 . Según el teorema de Goldstone, como se han roto los tres generadores de $SU(2)_L$, aparecen tres bosones de Goldstone. Se perturba el vev de la siguiente manera

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \eta_1 + i\eta_2 \\ v + \sigma + i\eta_3 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

En vev del campo de Higgs perturbado aparecen cuatro campos escalares reales que representan a los tres bosones de Goldstone η_i , $i = 1, 2, 3$ y al de Higgs σ , preservando así los grados de libertad. El nuevo campo de Higgs queda

¹³ Este es el MEED mínimo con un doblete escalar. También existen otros modelos como el modelo de dos dobletes de Higgs (2HDM), el de dos dobletes y un singlete (modelo de Zee), el modelo de dos singletes (modelo de Zee-Babu), el de un triplete de Higgs (1HTM), etc.

Se reemplaza este campo en (2.16) y se anulan los campos η_i por no representar ninguna partícula física. El nuevo sector escalar “roto.”^{es}

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^H = \frac{1}{2} \left[(\partial^\mu + igT_j W_j^\mu + ig'Y B^\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} \right]^\dagger \\ \left[(\partial_\mu + igT_j W_{\mu j} + ig'Y B_\mu) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \sigma \end{pmatrix} \right] - \frac{\mu^2}{2}(v + \sigma)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Al cancelar los campos η_i , sus tres grados de libertad deben pasar a la generación de las tres masas de los bosones de gauge, cuyos términos de masa aparecen al reordenar el lagrangiano anterior.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^H = \frac{1}{2} \partial^\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \frac{g^2}{8} (v + \sigma)^2 (W_1^\mu W_{1\mu} + W_2^\mu W_{2\mu}) + \\ + \frac{(v + \sigma)^2}{8} \begin{pmatrix} B^\mu & W_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_{3\mu} \end{pmatrix} + \\ - \frac{\mu^2}{2}(v + \sigma)^2 - \frac{\lambda}{4}(v + \sigma)^4. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Se puede notar en la segunda línea se ha formado un doblete de campos de gauge, pero no es una base que representa un sistema físico ya que la matriz formada (llamada matriz de masas) no es diagonal y la base no es ortogonal. Al diagonalizar la matriz, los autovalores obtenidos serán las masas de los bosones físicos que deberán aparecer en los autoestados de masa.

Para ello, se aplican las transformaciones (2.9) a la ecuación (2.22), y se obtiene para el segundo término

$$\frac{g^2}{8} (v + \sigma)^2 (W_1^\mu W_{1\mu} + W_2^\mu W_{2\mu}) = \frac{g^2 v^2}{4} W_\mu^\dagger W_\mu + \frac{g^2 v}{2} \sigma W_\mu^\dagger W_\mu + \frac{g^2}{4} \sigma^2 W_\mu^\dagger W_\mu.$$

Aquí se puede identificar el término de masa de los campos W_μ , con $m_W = \frac{gv}{2}$.

También se obtiene para el tercer término de (2.22), utilizando las relaciones (2.9)

$$\begin{aligned} \frac{(v + \sigma)^2}{8} \begin{pmatrix} B^\mu & W_3^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g'^2 & -gg' \\ -gg' & g^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_{3\mu} \end{pmatrix} \\ = \frac{(v + \sigma)^2}{8} \begin{pmatrix} A^\mu & Z^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & g^2 + g'^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

con lo que se muestra que el campo A_μ no tiene término de masa y el campo Z_μ tiene un término de masa $\frac{v^2}{8} (g^2 + g'^2) Z^\mu Z_\mu$. Si se compara con (2.15), la masa del bosón vectorial neutro será $m_Z = \frac{v}{2} \sqrt{g^2 + g'^2} \equiv \frac{gv}{2 \cos \theta_W}$.

Además de los términos de masa, se puede ver que existen acoplamientos entre los bosones vectoriales (o de gauge, W^\pm y Z^0) con el bosón escalar (o de Higgs, σ^0) y sus constantes de acoplamiento están relacionadas con las masas de la siguiente forma: $g_{WH} = \frac{2}{v} m_W^2$ y $g_{ZH} = \frac{1}{v} m_Z^2$. Esto significa que las masas adquiridas por estos bosones de gauge aparecen simultáneamente con los acoplamientos a los bosones de Higgs, o dicho de otra manera, las partículas adquieren masa cuando los Higgs se acoplan a estas.

2.5. Sector de Yukawa

La manera de proporcionar masas a los leptones, al igual que en el caso de los bosones, también es acoplado los campos leptónicos con los de Higgs. Para esto se añade a mano los siguientes términos en el sector de Yukawa

$$\mathcal{L}^Y = -g_l [\bar{L}_l \Phi R_l + \bar{R}_l \Phi^\dagger L_l] - g_{\nu_l} [\bar{L}_l \tilde{\Phi} R_{\nu_l} + R_{\nu_l} \tilde{\Phi}^\dagger L_l], \quad (2.23)$$

donde: $\tilde{\Phi}(x) \equiv -i [\Phi^\dagger \sigma_2]^T = \begin{pmatrix} \phi_b^{0*} \\ -\phi_a^{+*} \end{pmatrix}$, es el campo conjugado (de carga) para un doblete de isospín.

En la teoría original, la constante de acoplamiento $g_{\nu_l} = 0$ en \mathcal{L}^Y , cancelando los campos leptónicos que se relacionaban con los neutrinos derechos. Esto era consistente con los resultados experimentales de la época los cuales verificaban la presencia de neutrinos izquierdos solamente.

Por lo tanto, con $g_{\nu_l} = 0$, se efectúa la RES en (2.23),

$$-g_l \left[\begin{pmatrix} \bar{\nu}_l & \bar{e}_l \end{pmatrix}_L \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} e_{lR} + \bar{e}_{lR} \begin{pmatrix} 0 & \frac{v+\sigma}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_l \\ \bar{e}_l \end{pmatrix}_L \right] = -g_l \frac{v}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L)_l - \frac{g_l}{\sqrt{2}} (\bar{e}_L e_R \sigma + \bar{e}_R e_L \sigma)_l.$$

Luego, el término de masa para los leptones cargados es $\frac{g_l v}{\sqrt{2}} \bar{e}_l e_l$ y su respectiva masa es $m_l = \frac{g_l v}{\sqrt{2}}$.

Al igual que para los bosones de gauge, también se observa que la constante de acoplamiento entre estos leptones cargados con el bosón de Higgs tiene la forma, $g_{LH} = \frac{g_l}{\sqrt{2}} = \frac{m_l}{v}$; con lo que se puede inferir, que los leptones cargados adquieren masa cuando se acoplan con los bosones de Higgs.

2.6. Física mas allá del Modelo Estándar

A pesar de todas sus virtudes, el ME no es completo. Existe física que no puede ser explicada por este modelo, por lo que se hacen intentos por ampliarlo y obtener nueva física, en un intento de explicar los fenómenos que elude esta teoría. Esto ha motivado diversas investigaciones que van mas allá del ME. La mayoría de ellas, trata de conceptualizar, entre otras cosas:

- La masa de los neutrinos, cuya cota superior es del orden de los eV.
- La cuantización de la gravedad.
- El problema de las constantes. Se considera poco "elegante" que el modelo requiera de 19 constantes numéricas arbitrarias (determinadas en experimentos). Estas son las tres masas de los leptones cargados (tendríamos que agregar tres mas si consideramos a los neutrinos masivos), las seis masas de los quarks, tres ángulos de mezcla y uno de violación CP en la matriz CKM (habrían más si consideramos la matriz de mezclas para los neutrinos en caso que tuvieran masa), las tres constantes de acoplamiento de los tres grupos de simetría, el parámetro de la QCD (ángulo del vacío), el vev del Higgs y la masa del Higgs.

- El problema de la jerarquía de masas.
- La asimetría materia-antimateria¹⁴.
- La existencia de la materia oscura y la energía oscura¹⁵.

Hay muchas formas de extender al ME, una de ellas es agrandar su grupo de simetría. En todos estos modelos, se puede predecir nueva física. En lo que sigue en este trabajo, se presenta una propuesta para abordar el problema de la masa de los neutrinos, primero en el grupo de simetría del ME y, luego, en un grupo de simetría diferente.

¹⁴ <https://home.cern/topics/antimatter/matter-antimatter-asymmetry-problem>

¹⁵ <https://home.cern/about/physics/dark-matter>

Capítulo 3

Masa de los neutrinos en el MEED

En el capítulo anterior se describió al Modelo Estándar como un modelo en el cual los neutrinos no adquieren masa debido a una arbitrariedad: los neutrinos derechos no deben existir porque no han sido observados¹.

Sin embargo, ahora se sabe que el Modelo Estándar cuenta entre sus deficiencias el hecho de no considerar la masa de los neutrinos. Los experimentos de oscilaciones de neutrinos, en los cuales estos cambian espontáneamente de sabor al viajar una distancia determinada entre la fuente y el detector², demuestran que los neutrinos sí tienen masa, ya que la probabilidad de cambiar de sabor depende de la diferencia del cuadrado de sus masas [2].

3.1. Neutrinos de Dirac o de Majorana

Los neutrinos se pueden conceptualizar de dos maneras diferentes: como partículas de Dirac o de Majorana. Si son de Dirac, los neutrinos son diferentes de sus respectivos antineutrinos y si son de Majorana, el neutrino y su respectivo antineutrino son idénticos. En ambos casos, se requiere un ajuste de los parámetros del Modelo Estándar mínimo si se quiere adjudicarles masa.

La existencia de la masa de los neutrinos implica que están restringidos a moverse con velocidades inferiores a la de la luz. Luego, si suponemos un neutrino izquierdo ν_L que se mueve en cierta dirección, podemos imaginar a un observador (o referencial) que viaja más rápido y sobrepase a este neutrino (haciendo una transformación de Lorentz o un boost adecuado), observándose una partícula derecha (que podría ser ν_R o ν_R^c al no tener carga alguna) y que se mueve en la dirección opuesta con respecto de él³. Al no tenerse evidencias experimentales de los neutrinos derechos, podemos suponer que se trata de un antineutrino derecho ν_R^c , teniendo en cuenta que, al no tener carga alguna (neutrino estéril), lo único que diferencia al neutrino del antineutrino es el número leptónico que no tiene que conservarse necesariamente al ser una cantidad conservada solo porque los experimentos no demuestran lo contrario, no hay argumentos teóricos⁴ que validen dicha conservación.

Todo esto tendría más sentido si el neutrino fuera una partícula de Majorana. Ya que, un

¹ No habría razón aparente por la que no se hubieran detectado los derechos y sí los izquierdos.

² El número leptónico de sabor no se conserva en estos experimentos.

³ La helicidad es un invariante de Lorentz solo para partículas sin masa.

⁴ La carga, la energía, el momentum, etc. son cantidades conservadas que salen teóricamente del teorema de Noether.

neutrino de Majorana es su propio antineutrino, y no hay problema si conceptualizamos a un ν_L para que se observe como un ν_R^c , con un boost apropiado.

Por otro lado, los neutrinos no masivos, pueden ser descritos por espinores de Weyl (de dos componentes) ya que se mueven con una rapidez $v = c$ y un observador no puede sobrepasarlos para verlos como objetos derechos, por lo que no se necesita del ν_R para obtener una imagen covariante (invariante de Lorentz). Eso es lo que se desprende del MEED.

Sin embargo, para describir a los neutrinos masivos como partículas de Dirac, se necesitan de espinores de Dirac (de cuatro componentes) que en su representación quirral, involucran a los campos ν_R y $\bar{\nu}_L$ en la solución de la ecuación aunque no se hayan observado experimentalmente. Pero si los neutrinos masivos son considerados partículas de Majorana, solo se necesitan espinores de dos componentes ya que $\nu = \nu^c$.

Ahora, para corroborar que los neutrinos son partículas de Majorana, se debería poder observar un proceso radiactivo llamado desintegración beta doble, donde los dos neutrinos que se obtienen de la doble desintegración se aniquilan entre sí (algo que solo ocurriría si el neutrino fuera su propia antipartícula). Esto está siendo buscado por muchos experimentos sin resultados positivos, por lo que no se puede concluir a ciencia cierta si los neutrinos son partículas de Dirac o de Majorana [7].

Además, el mecanismo de Higgs en el ME mínimo, no contempla términos de masa del tipo Majorana (3.6), ya que los términos de masa que aparecen después de la quiebra son términos del tipo Dirac (3.1). Entonces, si los neutrinos son tratados de la misma manera que los leptones cargados en la ecuación (2.23), se concluye que si fueran de Majorana, el ME no puede ser una teoría completa; debe existir un mecanismo más allá del modelo estándar que explique cómo obtienen masa este tipo de neutrinos.

El primer intento para describir la posible masa de los neutrinos y obtener una cota superior, fue hecho por Mohapatra y Senjanović en 1980 [23], solo que se hizo con una simetría de gauge diferente que la del MEED. Se utilizó la simetría $SU(2)_L \otimes SU(2)_R \otimes U(1)_Y$, donde se definen dobletes leptónicos no solo para los campos izquierdos sino también para los derechos. *En este trabajo se utiliza la simetría 331 para el cálculo de la masa de los neutrinos, lo que se describe en el siguiente capítulo.*

3.2. Término de masa para los neutrinos masivos

Los términos de masa para los neutrinos, además de determinar su masa, determinan su naturaleza (Dirac o Majorana). Además, estos términos pueden ser del tipo Dirac, del tipo Majorana o una combinación de ambos. En esta sección vamos a explorar estas tres posibilidades dentro del grupo de simetría del MEED.

3.2.1. Término de masa de Dirac

Estos términos de masa se reconocen cuando aparecen en ellos la multiplicación de un campo y de su respectivo conjugado sin el acoplamiento de algún otro. En el marco del MEED, esto se logra en el sector leptónico después del RES (2.13).

Si se considera que el neutrino tiene las dos componentes quirales (izquierda y derecha), entonces en los términos de masa deben aparecer todas las posibilidades de multiplicación de estas componentes, incluyendo los términos cruzados entre sus tres generaciones. Es decir, la

expresión más general del **término de masa de Dirac** para los neutrinos entonces es

$$\mathcal{L}_{Dirac} = - \sum_{ll'} \bar{\nu}_{lL} m_{ll'} \nu_{l'R} + h.c. = - \bar{\nu}_L M^{Dir.} \nu_R + h.c., \quad (3.1)$$

donde los campos ν_l son campos no físicos aún, en el sentido que todavía no representan a ν_e, ν_μ, ν_τ ya que la matriz de masas⁵ $M^{Dir.}$, de elementos $m_{ll'}$ no es diagonal y no se puede obtener las masas directamente. Los índices de la sumatoria corren para las tres familias, $l, l' = 1, 2, 3$.

Estos términos, así como para el resto de leptones, aparecen después de la RES en el sector de Yukawa. Pero, mientras la matriz $M^{Dir.}$ no sea diagonal, los campos ν_L , no pueden representar a los neutrinos físicos.

Para diagonalizar la matriz de masas $M^{Dir.}$ a una matriz $D^{Dir.}$ diagonal, se puede utilizar una transformación biunitaria (ver apéndice A). Es decir, se definen dos matrices unitarias⁶ S y T tales que $SM^{Dir.}T^\dagger = D^{Dir.}$. Dicha transformación viene definida como

$$\nu'_{lL} = \sum_{i=1}^3 S_{li} \nu_{iL} \quad \nu'_{l'R} = \sum_{i=1}^3 T_{li} \nu_{iR} \quad (3.2)$$

Luego, el término de masa (3.1) se escribe como:

$$\mathcal{L}_{Dirac} = - \sum_{l,l',i} \left(\bar{\nu}_{iL} S_{il}^\dagger \right) \left(S_{li} m_{ii} T_{il'}^\dagger \right) (T_{l'i} \nu_{iR}) + h.c. = - \sum_{i=1}^3 \bar{\nu}'_{iL} m_i \nu'_{iR} + h.c. \quad (3.3)$$

donde $m_{ii} = m_i$ son los autovalores de la matriz $M^{Dir.}$ y por lo tanto, elementos de la diagonal de $D^{Dir.}$. Los campos ν_i ahora representan una base adecuada para describir las masas y, los autovalores m_i representan las masas de los neutrinos. Se debe mencionar que en la última igualdad los índices de sabor $l, l' = 1, 2, 3$, dan paso a nuevos índices de masa i ; y que los estados ν'_{iL} son “mezclas” de los estados de masa.

3.2.2. Término de masa de Majorana

Un término de masa de Dirac no es invariante de gauge en el grupo de simetría del MEED; por eso aparece después de la RES, donde sí es invariante en la nueva simetría. Veremos si sucede lo mismo para el término de masa de Majorana.

Como una partícula de Majorana es también su antipartícula, entonces sus cargas conjugadas no deben cambiar con respecto a sus cargas originales. Para ello, el espinor de Majorana ψ debe cumplir con la condición⁷ $\psi^c = \psi$.

En términos de los campos izquierdo y derecho, el espinor se puede escribir como $\psi = \psi_L + \psi_R = \psi_L + \psi_L^c$ (ver (B.11)). Entonces, el campo se puede escribir de manera equivalente como $\psi = \psi_R + \psi_R^c$.

⁵ El superíndice nos hace recordar que se trata de una matriz extraída del término de masa de Dirac.

⁶ Estas matrices están relacionadas con la matriz PMNS (Pontecorvo, Maki, Nakagawa, Sakata) que es la matriz de mezcla de sabores leptónicos.

⁷ El superíndice del campo es conocido como el operador Conjugación de Carga, el cual invierte todas las cargas asociadas al campo ψ . Ver el apéndice B.

Luego, el término de masa de Majorana puede aparecer en dos versiones equivalentes entre sí, la que tiene campos explícitamente izquierdos y la que contiene los campos derechos,

$$\mathcal{L}_{Majorana} = - \sum_{l'} \bar{\nu}_{lL} m_{l'l'}^L \nu_{l'L}^c + h.c. = - \sum_{l'} \bar{\nu}_{lR} m_{l'l'}^R \nu_{l'R}^c + h.c. \quad (3.4)$$

Es por eso que, en el término de masa de Majorana completo, cuando sumamos la representación izquierda y derecha, se debe agregar un factor $\frac{1}{2}$ para que no se duplique.

$$\mathcal{L}_{Majorana} = -\frac{1}{2} \sum_{l'} (\bar{\nu}_{lL} m_{l'l'}^L \nu_{l'L}^c + \bar{\nu}_{lR} m_{l'l'}^R \nu_{l'R}^c) + h.c. \quad (3.5)$$

Estos términos de Majorana, uno que involucra solo a los campos derechos y otro con campos izquierdos solamente, estarán asociados a dos partículas diferentes, como se verá mas adelante.

Si se separan los términos izquierdo y derecho, se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Majorana}^L &= -\frac{1}{2} \sum_{l'} \bar{\nu}_{lL} m_{l'l'}^L \nu_{l'L}^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_{Maj}^L \nu_L^c + h.c., \\ \mathcal{L}_{Majorana}^R &= -\frac{1}{2} \sum_{l'} \bar{\nu}_{lR} m_{l'l'}^R \nu_{l'R}^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_R M_{Maj}^R \nu_R^c + h.c., \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde las componentes $m_{l'l'}^{L,R}$, son entradas de la matriz $M_{Maj}^{L,R}$ también de 3×3 .

Por otro lado, los términos de masa de Majorana se pueden expresar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_{L,R} M_{Maj}^{L,R} \nu_{L,R}^c &= \bar{\nu}_{L,R} \left(M_{Maj}^{L,R} C \bar{\nu}_{L,R}^T \right), \\ &= - \left(\bar{\nu}_{L,R} C^T M_{Maj}^{L,R^T} \right) \bar{\nu}_{L,R}^T, \\ &= \bar{\nu}_{L,R} M_{Maj}^{L,R^T} C \bar{\nu}_{L,R}^T, \\ &= \bar{\nu}_{L,R} M_{Maj}^{L,R^T} \nu_{L,R}^c. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad se han considerado las propiedades de anticonmutación de fermiones y la tercera igualdad se sigue del hecho que la matriz C es antisimétrica⁸.

Esto demuestra que se cumple $M^{L,R} = M^{L,R^T}$ para la matriz de masas. Por lo tanto es simétrica y sus autovectores son ortogonales. Entonces $M_{Maj}^{L,R}$ se puede diagonalizar con una matriz ortogonal U , de tal manera que $U M_{Maj}^{L,R} U^T = D_{Maj}^{L,R}$.

Como $\bar{\nu}_L U = \overline{U^\dagger \nu_L}$ y $U^T \nu_L^c = (U^\dagger \nu_L)^c$, entonces en (3.6) se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Majorana}^L &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M_{Maj}^L \nu_L^c + h.c. = -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L U D_{Maj}^L U^T \nu_L^c + h.c., \\ &= -\frac{1}{2} \left[\overline{U^\dagger \nu_L} D_{Maj}^L (U^\dagger \nu_L)^c + (\overline{U^\dagger \nu_L})^c D_{Maj}^L U^\dagger \nu_L \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

⁸ Ver las propiedades de la matriz C en el apéndice B

Los autoestados de masa (en este caso de Majorana) quedan definidos como

$$\nu_A^M = \underbrace{U^\dagger \nu_L}_{\text{izq}} + \underbrace{(U^\dagger \nu_L)^c}_{\text{der}} = \nu_L^M + \nu_R^M = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}^M. \quad (3.8)$$

Si en la ec. (3.6) se efectúa el mismo procedimiento para $\mathcal{L}_{Majorana}^R$, se consigue otro estado para el neutrino del tipo Majorana ν_B^M , obteniéndose la imagen completa de la diagonalización. Por lo tanto, del término de masa de Majorana completo (izquierdo y derecho), se obtienen dos estados para los neutrinos físicos.

3.2.3. Término de masa de Dirac+Majorana

En general, si sumamos los dos términos de masa anteriores, tendremos un término que abarca todas las posibilidades y en el que están presentes los campos de sabor izquierdos ν_{iL} y los campos de sabor derechos ν_{iR} . Es decir, si se suman (antes de la diagonalización) los términos izquierdo y derecho de Majorana de la ec. (3.6); y el término de masa de Dirac de la ec. (3.1), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D+M} &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}_L M^L \nu_L^c - \bar{\nu}_L M^D \nu_R - \frac{1}{2} \bar{\nu}_R^c M^R \nu_R + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \left(\bar{\nu}_L M^L \nu_L^c + \bar{\nu}_R^c M^{D^T} \nu_L^c + \bar{\nu}_L M^D \nu_R + \bar{\nu}_R^c M^R \nu_R \right) + h.c. \\ &= -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^L & M^D \\ (M^D)^T & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c., \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde, en la segunda igualdad, se puede tomar la propiedad $\nu_L = \nu_R^c$ y $\nu_R = \nu_L^c$ y se llega a $\bar{\nu}_L M^D \nu_R = \bar{\nu}_R^c (M^D)^T \nu_L^c$.

Se puede definir el doblete izquierdo que aparece en el lagrangiano anterior como $n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} \Rightarrow n_L^c = \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix}$ y la matriz de masas Dirac+Majorana, es la matriz simétrica

$$M^{D+M} = \begin{pmatrix} M_L^M & M^D \\ (M^D)^T & M_R^M \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

con lo que el término de masa de la ecuación (3.9) queda,

$$\mathcal{L}_{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{n}_L M^{D+M} n_L^c + h.c. \quad (3.11)$$

La diagonalización de M^{D+M} es un procedimiento idéntico al del caso de Majorana; y se puede escribir, $M^{D+M} = U D^{D+M} U^T$. Luego,

$$\mathcal{L}_{D+M} = -\frac{1}{2} \bar{U}^\dagger n_L D^{D+M} (U^\dagger n_L)^c + h.c. = -\frac{1}{2} \left[\bar{\nu}_L^M D^{D+M} (\nu_L^M)^c + \overline{(\nu_L^M)^c} D^{D+M} \nu_L^M \right], \quad (3.12)$$

donde el campo $\nu_L^M = U^\dagger n_L$ es de seis componentes, ya que cada componente de n_L tiene tres. Además, al ser un campo de Majorana se puede escribir

$$\nu_1^M = \nu_L^M + (\nu_L^M)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \vdots \\ \nu_6 \end{pmatrix}.$$

De la misma manera, si se hubiera utilizado el término de Majorana izquierdo en lugar del derecho en la ec. (3.7), se hubiera obtenido otro estado para el campo del neutrino de Majorana ν_2^M . Por lo tanto, se tienen dos estados para los neutrinos físicos.

En conclusión, al agrandar el lagrangiano del MEED colocando los campos para los neutrinos derechos, se puede obtener cualquiera de los términos de masa considerados y; si el neutrino termina siendo de Dirac o de Majorana, lo único que se haría es cancelar su constante de acoplamiento después de la quiebra.

Por último, se recalca el hecho que no existe una razón fundamental obtenida de primeros principios para no considerar la masa de los neutrinos. No es lo mismo para el fotón, ya que en el lagrangiano de la electrodinámica cuántica, construido a partir de una invariancia de gauge $U(1)_Q$, no aparece el término de masa fotónico per se.

3.3. Sector de Yukawa agrandado

Se ha visto en el capítulo 2 que el modelo estándar está estructurado de tal manera que las masas de los bosones de gauge se obtienen vía ruptura espontánea de la simetría en el sector escalar. En el caso de los fermiones y los bosones de Higgs, sus masas aparecen a partir de la RES en el sector de Yukawa. En el caso de los neutrinos se procede de igual modo, se debe conjeturar extra neutrinos derechos en la teoría y no se necesita ir mas allá del grupo de simetría del MEED para predecir su masa [24].

3.3.1. Neutrino de Dirac

Para los neutrinos derechos, se definen tres nuevos campos neutros, uno por cada familia, ν_{lR} . Al igual que para los leptones cargados derechos, se asume que son singletes de $SU(2)_L$, solo que son estériles; es decir, no interaccionan ya que todas sus cargas deben ser nulas⁹.

El sector leptónico queda como el descrito en (2.7) del MEED, a diferencia del sector de Yukawa, descrito por la ecuación (2.23), donde se introdujo la constante de acoplamiento g_{ν_k} y se dijo que debe anularse. Ahora se asume que no es cero y se integra a los neutrinos derechos en la teoría.

El término que se agrega, es en su forma general (donde se toman en cuenta los términos cruzados entre familias y $g_{\nu_k} \rightarrow g_{l,l'}$),

$$- \sum_{l,l'} g_{l,l'} \bar{L}_l \tilde{\Phi} \nu_{l'R} + h.c., \quad (3.13)$$

donde: $L_l = \begin{pmatrix} \nu_{lL} \\ l_L \end{pmatrix}$ es el doblete leptónico usual, Φ es el doblete de Higgs del MEED y $\tilde{\Phi} \equiv -i [\Phi^\dagger \sigma_2]^T$.

⁹ Eso explica por qué no se habrían detectado.

Al hacerse la RES como en la sección (2.4.2), se elige el valor esperado del vacío como $\langle \Phi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$; luego se definen los campos η_1, η_2, η_3 y σ que hacen pequeñas perturbaciones del potencial alrededor este vev para generar las masas,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_a^+ \\ \phi_b^0 \\ \phi_b^{+*} \end{pmatrix} \Rightarrow \tilde{\Phi}(x) \equiv -i [\Phi^\dagger \sigma_2]^T = \begin{pmatrix} \phi_b^{0*} \\ -\phi_a^{+*} \end{pmatrix} \xrightarrow{RES} \tilde{\Phi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v + \sigma - i\eta_3 \\ -\eta_1 + i\eta_2 \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Luego, el nuevo término (3.13) adscrito al lagrangiano queda

$$-\frac{g_{W'}}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{lL} \quad \bar{l}_L) \begin{pmatrix} v + \sigma - i\eta_3 \\ -\eta_1 + i\eta_2 \end{pmatrix} \nu_{lR} = -\frac{g_{W'} v}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{lL} \nu_{lR} + \bar{\nu}_{lL} \sigma \nu_{lR}).$$

Por lo que el término de masa de Dirac para los neutrinos es

$$-\sum_{l'} \frac{g_{l'W'}}{\sqrt{2}} \bar{\nu}_{lL} \nu_{lR} = -\bar{\nu}_L M^D \nu_R + h.c., \quad (3.15)$$

donde tres de los cuatro grados de libertad en el vev del doblete de Higgs perturbado, que corresponden a los bosones de Goldstone η_i pasan a ser las tres masas de los tres neutrinos ν_{lL} .

En este modelo, se trata a los neutrinos como partículas de Dirac y su masa se determina de la misma manera que se calculó la masa de los leptones cargados. Sin embargo, existen dos deficiencias:

1. La matriz M^D depende de las constantes de acoplamiento $g_{l'W'}$ que son completamente arbitrarias y no se conoce, a priori, sus valores; por lo tanto, en este modelo los autovalores de M^D o las masas de los neutrinos, quedan como nuevos parámetros libres adicionales a los del ME.
2. Para que las masas de los neutrinos sean lo suficientemente pequeñas comparadas con las masas de los otros leptones y sea correcto aproximadamente que no aparezcan en el Modelo Estándar mínimo, las constantes $g_{l'W'}$ deben tener valores muy pequeños comparados con las constantes de acoplamiento para los demás leptones. El modelo descrito no predice una razón teórica para ello.

Además, si el neutrino fuera una partícula de Dirac, este sería el único término necesario, para poder calcular su masa después de la diagonalización de M^D . Sin embargo, si son partículas de Majorana (algo que se debe demostrar experimentalmente) hay que construir los demás términos de la ecuación (3.9).

3.3.2. Neutrino de Majorana

Para obtener los términos de masa de Majorana, además de considerar los neutrinos derechos en el sector de Yukawa, debemos colocar “a mano” los términos de masa de la ecuación (3.6) en el lagrangiano,

$$-\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L M^L \nu_L^c + \bar{\nu}_R M^R \nu_R^c) + h.c.,$$

donde los campos de sabor ν_L y ν_R tienen tres componentes, una por cada familia; y las matrices de masas son simétricas y de tercer orden.

Si se escoge un solo sabor leptónico (puede ser $l = 1, 2, 3$), se efectúa el mismo proceso que el que se hizo para obtener (3.9),

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{D+M} &= -\frac{1}{2}(m_L\bar{\nu}_L\nu_L^c + m_R\bar{\nu}_R\nu_R^c) + m_D\bar{\nu}_L\nu_R + h.c., \\ &= -\frac{1}{2}(m_L\bar{\nu}_L\nu_L^c + m_D\bar{\nu}_R^c\nu_L^c + m_D\bar{\nu}_L\nu_R + m_R\bar{\nu}_R^c\nu_R) + h.c., \\ &= -\frac{1}{2}\bar{n}_L M^{D+M} n_L^c + h.c.,\end{aligned}\tag{3.16}$$

donde $n_L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}$ y $M^{D+M} = \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$.

Luego, la matriz de masas se puede escribir como¹⁰

$$\begin{aligned}M^{D+M} &= \begin{pmatrix} m_L & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m_L + m_R & 0 \\ 0 & m_L + m_R \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(m_R - m_L) & m_D \\ m_D & \frac{1}{2}(m_R - m_L) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \text{Tr} M^{D+M} \mathbb{1}_2 + M,\end{aligned}$$

donde la matriz M es simétrica y se puede diagonalizar como $M_d = O^T M O$ [25].

Escogemos para la diagonalización de M la matriz ortogonal de segundo orden más simple, $O = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$. Entonces, la matriz diagonal de M es

$$\begin{aligned}M_d &= O^T M O \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(m_L - m_R) \cos 2\theta - m_D \sin 2\theta & m_D \cos 2\theta + \frac{1}{2}(m_L - m_R) \sin 2\theta \\ m_D \cos 2\theta + \frac{1}{2}(m_L - m_R) \sin 2\theta & -\frac{1}{2}(m_L - m_R) \cos 2\theta + m_D \sin 2\theta \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Para que la matriz anterior sea diagonal, los elementos de la antidiagonal deben ser cero. La condición para que ello ocurra es

$$\tan 2\theta = \frac{2m_D}{m_R - m_L},\tag{3.17}$$

obteniéndose $M_d = \begin{pmatrix} -d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ con $d = \frac{1}{2}\sqrt{4m_D^2 + (m_R - m_L)^2}$.

Luego, los autovalores de M^{D+M} serán

$$m'_{1,2} = \frac{1}{2}(m_R + m_L) \mp \frac{1}{2}\sqrt{4m_D^2 + (m_R - m_L)^2}.\tag{3.18}$$

¹⁰ Esto lo hacemos para luego aplicar la propiedad de los autovalores que dice que si m es un autovalor de M , entonces $m + k$ es un autovalor de $M + k\mathbb{1}$. Además M y $M + k\mathbb{1}$ comparten los mismos autovectores.

Sin embargo, estos números todavía no representan las masas de los neutrinos porque se verifica que m_1 podría ser negativo.

Entonces, debemos construir una matriz diagonal de elementos positivos. Para ello, hacemos lo siguiente

$$M_d^{M+D} = \underbrace{\begin{pmatrix} |m'_1| & 0 \\ 0 & m'_2 \end{pmatrix}}_D \underbrace{\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_\eta,$$

donde la matriz diagonal η tiene como primer elemento $\eta_1 = \frac{m'_1}{|m'_1|} = \begin{cases} +1 & \text{si } m_1 > 0 \\ -1 & \text{si } m_1 < 0 \end{cases}$ y el segundo elemento es siempre $\eta_2 = 1$.

Los elementos de la matriz D son las masas buscadas y cumplen la relación $m_i = m'_i \eta_i$

Por lo tanto, la diagonalización de M^{D+M} se escribe:

$$M^{D+M} = \underbrace{(O\eta^{1/2})}_U D \underbrace{(\eta^{1/2}O^T)}_{U^T}. \quad (3.19)$$

Y el término de masa correspondiente es:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{D+M} &= -\frac{1}{2} (\bar{n}_L U D U^T n_L^c + h.c.), \\ &= -\frac{1}{2} (\overline{U^\dagger n_L} D (U^\dagger n_L)^c + h.c.), \\ &= -\frac{1}{2} \bar{\nu}^M D \nu^M, \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde n_L es el doblete definido en (3.16) y $\nu^M \equiv U^\dagger n_L + (U^\dagger n_L)^c = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}$ es un campo de Majorana, ya que verifica $\nu^M = (\nu^M)^c$. La matriz de masas D es diagonal y las componentes de su diagonal son las masas de los neutrinos, $m_1 = m_{\nu_1}$ y $m_2 = m_{\nu_2}$.

En resumen, de las ecuaciones (3.16) y (3.20) se se puede encontrar la relación final entre los estados de sabor ν_{lL} , ν_{lR} y los estados de masa ν_i^M ,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \quad \bar{\nu}_R^c) (M^{D+M}) \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix} &= -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_L \quad \bar{\nu}_R^c) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} (\eta^{1/2} D \eta^{1/2}) \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}, \\ &= -\frac{1}{2} (\bar{\nu}_1 \quad \bar{\nu}_2) (D) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} &= \eta^{1/2} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si se despejan las componentes de los dos estados ν^M y n_L :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu_L \sqrt{\eta_1} \cos \theta + \nu_R^c \sqrt{\eta_2} \sin \theta, \\ \nu_2 &= -\nu_L \sqrt{\eta_2} \sin \theta + \nu_R^c \sqrt{\eta_1} \cos \theta, \\ \nu_L &= \nu_1 \sqrt{\eta_1} \cos \theta - \nu_2 \sqrt{\eta_2} \sin \theta, \\ \nu_R^c &= \nu_2 \sqrt{\eta_1} \sin \theta + \nu_1 \sqrt{\eta_2} \cos \theta, \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde $\sqrt{\eta_1} = i$ ó 1 y $\sqrt{\eta_2} = 1$.

Luego, para una sola generación de neutrinos, se encontró que ν_1 y ν_2 son estados del neutrino de Majorana con masas m_1 y m_2 respectivamente. En general para N generaciones, se debería obtener $2N$ partículas de Majorana.

3.4. Mecanismo de Seesaw

Este mecanismo, propuesto a finales de los 70's [23], es un modelo que intenta explicar por qué las masas observadas en experimentos de oscilaciones de neutrinos, del orden de los eV, son tan pequeñas comparadas con las de los quarks o los leptones cargados, que varios órdenes de magnitud más pesados. Este mecanismo se basa en el término de masa de Dirac+Majorana, tratado en la sección anterior.

El modelo seesaw más simple, del tipo I, extiende el MEED añadiendo tres campos de neutrinos derechos, que no interactúan con una escala de masas muy grande.

Se debe recordar que en el término de masa de Dirac+Majorana, los parámetros m_L , m_D y m_R caracterizan a los términos de masa de Majorana izquierdo, de Dirac y Majorana derecho respectivamente. Las partículas de Majorana ν^M , tienen sus masas descritas en la diagonal de la matriz D y el ángulo de mezcla, θ , es con el que se obtiene la matriz que diagonaliza a M^{D+M} .

Ahora, se deben hacer algunas precisiones para el modelo del mecanismo de seesaw:

- Podemos imponer que el término izquierdo de masa de Majorana sea cero con, $m_L = 0$; ya que en el ME mínimo no se puede construir el término $\bar{\nu}_L \nu_L^c$ que sea invariante de gauge a diferencia del término $\bar{\nu}_R \nu_R^c$. Eso significa que la matriz de masas Dirac+Majorana (3.10) queda $M^{D+M} = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}$.
- El término de masa de Dirac para los neutrinos es obtenido por el Mecanismo de Higgs. Eso significa que, si no queremos un problema de jerarquía, el término m_D debería ser de un orden de magnitud parecido al de los otros leptones o quarks de la misma familia.
- Los términos de masa de Majorana violan la conservación del número leptónico, $|\Delta L| = 2$. Sin embargo, se sabe que si el neutrino es de Majorana, la conservación del número leptónico no es una ley que hay que se debe respetar necesariamente. Como ν_R es estéril a las interacciones electrodébiles (hipercarga nula y no acopla con los bosones vectoriales W^\pm, Z^0), no hay restricciones para m_R . Se puede asumir que el número leptónico es violado a escalas mucho mayores que la escala electrodébil ($\sim 10^2$ GeV) e imponer arbitrariamente que $m_R \gg m_D$.

Cuando se asume que $m_R \gg m_D$, el ángulo de mezcla es pequeño, aproximándose a

$$\theta = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{2m_D}{m_R} \right) \approx \frac{m_D}{m_R}.$$

También con la misma imposición, $m_L = 0$ y $m_R \gg m_D$ en la ecuación (3.18),

$$m'_{1,2} = \frac{m_R}{2} \left[1 \mp \sqrt{1 + 4 \frac{m_D^2}{m_R^2}} \right],$$

$$\approx \frac{m_R}{2} \left[1 \mp \left(1 + 2 \frac{m_D^2}{m_R^2} \right) \right].$$

Obteniéndose dos resultados para los autovalores de M_d^{M+D} ,

$$m'_1 \approx -\frac{m_D^2}{m_R},$$

$$m'_2 \approx m_R.$$

Como las masas deben ser positivas, es decir, $m_1 > 0$, entonces $\sqrt{\eta_1} = i$ en la matriz M_d^{M+D} , obteniendo los autovalores de D ,

$$m_1 \approx \frac{m_D^2}{m_R} \ll m_D, \quad (3.22)$$

$$m_2 \approx m_R \gg m_D. \quad (3.23)$$

La ecuación de mezclas (3.21) se puede simplificar con $\sqrt{\eta_1} = i$ y $\sqrt{\eta_2} = 1$

$$\nu_L \approx i\nu_1 - \frac{m_D}{m_R}\nu_2 \approx i\nu_1, \quad (3.24)$$

$$\nu_R^c \approx i\frac{m_D}{m_R}\nu_1 + \nu_2 \approx \nu_2.$$

En conclusión, el neutrino ν_1 (de masa m_1) es mucho mas ligero que los leptones cargados (cuyos órdenes de magnitud son $\sim m_D$). Pero además, el otro neutrino ν_2 (de masa m_2), debe ser mucho más pesado que los otros leptones. Todo esto para una misma familia.

Este mecanismo, con el que se ha obtenido una partícula ligera a expensas de asumir la otra muy pesada, se llama **mecanismo de see-saw**.

Como el término de masa de Dirac está prohibido por las simetrías del ME antes de la RES, podemos restringir $m_D \simeq 10^2$ GeV (escala electrodébil). Por otro lado, se puede conjeturar que ν_R no se observa en las escalas de energía de la simetría del ME y podemos imponer que $m_R \simeq 10^{15}$ GeV (escala de la gran Unificación).

Con estas imposiciones, el neutrino ligero debe tener una masa $m_1 \simeq \frac{m_D^2}{m_R} \simeq 10^{-2}$ eV y el neutrino pesado $m_2 \simeq m_R \simeq 10^{15}$ GeV.

Capítulo 4

Modelo Electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_N$

Por lo expuesto en los dos capítulos anteriores, respecto a la falta de solidez del ME para explicar algunos hechos (ver sección (2.6)), los físicos han estado conjeturando, desde hace décadas, nuevas simetrías de gauge extendidas a la del ME, que arrojan nueva física, como las teorías GUT, las supersimétricas y muchas otras. En algunos de estos modelos, es posible entender el número de familias a partir de la cancelación de anomalías [26]. Este es el caso de los modelos 331 o de simetría $SU(3)_c \otimes SU(3)_L \otimes U(1)_N$ que son las extensiones inmediatas del ME.

En estos modelos, la parte electrodébil predice la existencia de bosones exóticos, aún buscados en el LHC y el Fermilab [27]. En este trabajo tomamos uno de los modelos 331 donde existe también un leptón exótico como se verá luego.

Otra motivación por la que se estudia este modelo es que tiene mayor contenido de partículas y puede corregir la violación de la unitariedad y renormalizabilidad de ciertos procesos de altas energías, sin imponer condiciones a los ángulos de mezclas; sino, haciendo que la teoría sea auto-consistente, independientemente de los valores de dichos ángulos [28]. Esto se logra introduciendo nuevos bosones de gauge doblemente cargados, de la misma manera que en el ME se introdujeron los bosones Z_0 , que restauraron la renormalizabilidad de la interacción débil a altas energías.

En este modelo, el grupo de simetría $SU(2)_L$ se agranda a $SU(3)_L$ y se define la hipercarga N para $U(1)_N$. Dentro de los diversos modelos propuestos en la simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_N$, el que se basa este trabajo es el propuesto por Pleitez y Tonasse [6] con ciertas modificaciones que se irán explicando.

Los generadores del grupo $SU(3)$ son las matrices $\frac{\lambda_i}{2}$, $i = 1, \dots, 8$, donde λ_i son las ocho matrices de Gell-Mann. De estas, solo hay dos que son diagonales. La carga eléctrica se define, en general, como una combinación lineal de estos dos generadores diagonales [29],

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} (\alpha\lambda_3 + \beta\lambda_8) + N. \quad (4.1)$$

En nuestro modelo, se tomarán los valores $\alpha = 1$ y $\beta = -\sqrt{3}$, con los que quedan definidos

la carga e la hipercarga. Luego, el operador de carga queda definido por¹,

$$\frac{Q}{e} = \frac{1}{2} (\lambda_3 - \sqrt{3}\lambda_8) + N. \quad (4.2)$$

Debemos recalcar que el contenido de partículas con relación al MEED cambia. Estos cambios se resumirán de la misma manera que se hizo en el capítulo 1, describiendo el lagrangiano en términos de sus respectivos sectores: leptónico, bosónico, escalar y de Yukawa.

4.1. Sector leptónico

Aquí, la diferencia principal con el MEED, es que campos izquierdos pasan de ser dobletes $SU(2)_L$ a tripletes $SU(3)_L$. En estos tripletes, además de los leptones cargados y neutros del MEED, se agregan tres leptones exóticos cargados pesados E_l^+ (uno por cada familia).

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l^- \\ E_l^+ \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, 0), \quad (4.3)$$

donde $l = e, \mu, \tau$ sigue siendo índice de generación leptónica y la hipercarga queda definida por la relación (4.2) con la que se puede calcular la hipercarga del triplete leptónico de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + N \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow N = 0. \quad (4.4)$$

Los campos derechos siguen siendo singletes $U(1)_N$ con su respectiva hipercarga definida en (4.2),

$$R_l = e_{lR}^- \sim (\mathbf{1}, -1); \quad E_{lR}^+ \sim (\mathbf{1}, +1). \quad (4.5)$$

4.1.1. Simetrías

Al igual que en el ME, se deben presentar las mismas simetrías de gauge: la de color $SU(3)_C$ y la electrodébil $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ antes de la RES, y la de carga eléctrica $U(1)_Q$ asociada a la interacción electromagnética después de la RES. En la parte electrodébil, los campos izquierdos se transforman como tripletes $SU(3)$ y los derechos como singletes $U(1)$.

Hipercarga

Las hipercargas están definidas con la fórmula (4.2) y la del neutrino derecho deben aparecer de tal manera que permanezca estéril como en el ME,

¹ La carga N , va acompañada de una matriz unitaria 3×3 .

Campo	$(SU(3)_L, U(1)_N)$	
triplete leptónico	L_l	(3,0)
electrón derecho	e_R	(1,-1)
leptón exótico derecho	E_R	(1,+1)
neutrino derecho	ν_R	(1,0)

Tabla 4.1: Campos leptónicos del 331. El neutrino derecho está de otro color porque no aparece en el modelo original de Pleitez [6]

Hay que notar que las partículas que se repiten del MEED en (4.3) y (4.5) tienen hipercargas N que difieren de las hipercargas Y del MEED.

Simetrías

Están definidas para las transformaciones del grupo $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ que son transformaciones de fase locales.

Estas transformaciones están definidas para los campos leptónicos como

$$\begin{aligned}
L_l &\rightarrow L'_l = \exp \left[ig \frac{\lambda_j}{2} \omega_j(x) + ig' N_L f(x) \right] L_l, \\
R_l &\rightarrow R'_l = \exp [ig' N_R f(x)] R_l, \\
R_{\nu_l} &\rightarrow R'_{\nu_l} = R_{\nu_l}.
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Las nueve funciones $\omega_j(x)$, $j = 1, \dots, 8$ y $f(x)$, son reales, arbitrarias y diferenciables; g y g' son constantes reales de acoplamiento. Además $\frac{\lambda_j}{2}$ y N son los generadores del grupo.

Al igual que en el MEED, se definen las derivadas covariantes para asegurar la invariancia de gauge local.

$$\begin{aligned}
D^\mu L_l &= \left[\partial^\mu + \frac{ig}{2} \lambda_j A_j^\mu + ig' B^\mu N_L \right] L_l, \\
D^\mu R_l &= [\partial^\mu + ig' B^\mu N_R] R_l, \\
D^\mu R_{\nu_l} &= \partial^\mu R_{\nu_l},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

donde:

- g y g' son las constantes de acoplamiento de la interacción débil y la de hipercarga respectivamente.
- N_L y N_R son las hipercargas del grupo $U(1)_N$ para los campos izquierdo y derecho respectivamente.
- A_j^μ , con $j = 1, \dots, 8$ son los ocho campos de gauge generados a partir de los ocho parámetros λ_j del grupo $SU(3)_L$.
- B^μ es el campo de gauge del grupo $U(1)_N$.

En estas derivadas aparecen nueve campos de gauge, ocho campos A_j^μ de la simetría $SU(3)$ y un campo B^μ de $U(1)$. Estos campos se transforman como

$$\begin{aligned} A_i^\mu(x) &\rightarrow A_i^{\mu'}(x) = A_i^\mu(x) - \partial^\mu \omega_i(x) - g f_{ijk} \omega_j(x) A_k^\mu(x), \\ B^\mu(x) &\rightarrow B^{\mu'}(x) = B^\mu(x) - \partial^\mu f(x), \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $f(x)$ y $\omega_j(x)$ son funciones reales y los números $f_{ijk} = \frac{1}{4i} \text{Tr}\{[\lambda_i, \lambda_j] \lambda_k\}$ son las constantes de estructura definidas para el grupo $SU(3)$. Las matrices λ_j son las ocho matrices de Gell-Mann.

Las constantes que subsisten (diferentes de cero) son

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} &= -f_{156} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = -f_{367} = \frac{1}{2}, \\ f_{458} &= f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Se debe aclarar que también subsisten las constantes con los dos últimos subíndices del mismo valor, pero como van junto con los campos $A_j^\mu A_k^\mu$, se cancelan en la suma (respecto a j, k) ya que las permutaciones anticíclicas dan constantes de signo opuesto.

Luego, el lagrangiano leptónico presenta la misma estructura de su par en el ME (2.7),

$$\mathcal{L}_L = i \sum_l [\bar{L}_l \not{D} L_l + \bar{R}_l \not{D} R_l + \bar{R}_{\nu_l} \not{D} R_{\nu_l}] + \text{h.c.} \quad (4.9)$$

Al igual que en el capítulo 1 para el MEED, las derivadas covariantes se desarrollan de manera explícita según la definición (4.7); apareciendo dos términos de interacción; el primero es la interacción entre las corrientes conservadas $J_{i\mu}^\lambda$ de $SU(3)_L$ con los campos de gauge $A_i^\mu(x)$ y, el segundo entre la corriente de hipercarga débil J_μ^N con los campos de gauge $B^\mu(x)$. El lagrangiano expandido queda,

$$\mathcal{L}_L = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I,$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I &= -g J_{i\mu}^\lambda A_i^\mu - g' J_\mu^N B^\mu, \\ J_{i\mu}^\lambda &= \bar{L}_l \frac{\lambda_i}{2} \gamma_\mu L_l : \text{Corriente de isospín}, \\ J_\mu^N &= \bar{L}_l N_L \gamma_\mu L_l + \bar{L}_l N_R \gamma_\mu L_l : \text{Corriente de hipercarga}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Todas estas corrientes se mezclan entre si para obtener las corrientes físicas, que van a depender de la definición que se hagan para los bosones físicos, como se verá a continuación.

4.2. Sector bosónico

En este sector están los campos de gauge que surgen de la ec. (4.7) en la nueva simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_N$.

El sector bosónico es parecido al del MEED, pero contiene a los nuevos campos de gauge que forman parte del lagrangiano libre

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{i\mu\nu}^\dagger F_i^{\mu\nu}. \quad (4.11)$$

La invariancia de gauge exige que los tensores mencionados tengan la siguiente forma

$$\begin{aligned} B^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu B^\nu - \partial^\nu B^\mu, \\ F_i^{\mu\nu} &\equiv \partial^\mu A_i^\nu - \partial^\nu A_i^\mu + g f_{ijk} A_j^\mu A_k^\nu. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Por otro lado, se definen los siguientes bosones cargados [28]

$$\begin{aligned} \sqrt{2}W^\pm &= -(A^1 \mp iA^2), \\ \sqrt{2}V^\pm &= -(A^4 \pm iA^5), \\ \sqrt{2}U^{\pm\pm} &= -(A^6 \pm iA^7). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Cuando se expande el primer término del lagrangiano de interacción (4.10) y se hace uso de las definiciones de (4.13), aparecen los acoplamientos entre los bosones cargados con sus respectivas corrientes. Aquí, el bosón W^\pm coincide con el bosón vectorial cargado del MEED que se acopla con la corriente cargada usual (2.9) y (2.8) y los otros nuevos bosones cargados V^\pm y $U^{\pm\pm}$ se acoplan con los las corrientes leptónicas, definiendo el lagrangiano de las corrientes cargadas de la siguiente manera [6]

$$\mathcal{L}_{CC} = -\frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_{iL} e_{iL} \gamma^\mu W_\mu^+ + \bar{E}_{iL} \gamma^\mu \nu_{iL} V_\mu^+ + \bar{e}_{iL} \gamma^\mu E_{iL} U_\mu^{--}) + h.c. \quad (4.14)$$

Ahora, de la definición para $F_{\mu\nu}^i$ y $B_{\mu\nu}$ dada en (4.12) y de las definiciones para los bosones cargados dada en (4.13), se pueden obtener los siguientes tensores

$$\begin{aligned} \sqrt{2}W_{\mu\nu}^\pm &= -(F_{\mu\nu}^1 \mp iF_{\mu\nu}^2), \\ \sqrt{2}V_{\mu\nu}^\pm &= -(F_{\mu\nu}^4 \pm iF_{\mu\nu}^5), \\ \sqrt{2}U_{\mu\nu}^{\pm\pm} &= -(F_{\mu\nu}^6 \pm iF_{\mu\nu}^7). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Y con estas relaciones, el lagrangiano bosónico (4.11) toma la forma

$$\mathcal{L}_0^B = -\frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} - \frac{1}{4} \{2W_{\mu\nu}^+ W_{\mu\nu}^- + F_{3\mu\nu}^\dagger F_3^{\mu\nu} + 2V_{\mu\nu}^+ V_{\mu\nu}^- + 2U_{\mu\nu}^{++} U_{\mu\nu}^{--} + F_{8\mu\nu}^\dagger F_8^{\mu\nu}\}. \quad (4.16)$$

Se puede ver de que los campos de gauge A^3 y A^8 , dentro del tercer y del último término respectivamente, no se relacionan con los campos físicos $W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}$. Esa relación debería aparecer después de la RES.

4.3. Sector escalar

En el modelo original de Pleitez y Tonasse [6], se asignó el mismo número leptónico a los tres campos del triplete (4.3), por lo que no se tomó en cuenta el término de masa $\bar{L}_i^c L_i$, ya que está prohibido, si se quiere respetar la conservación del número leptónico. Otra característica de este modelo es que, al no haber introducido el neutrino derecho, no existe el término de masa para los neutrinos. Estos dos detalles no se tendrán en cuenta en el modelo propuesto para este trabajo como se verá en el siguiente capítulo. Por ahora, se describirá el sector escalar del modelo original.

En este sector se introducen tres tripletes con la siguiente estructura:

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} : (\mathbf{3}, 0); \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} : (\mathbf{3}, 1); \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} : (\mathbf{3}, -1). \quad (4.17)$$

Cada uno de estos términos se acopla con los fermiones para darles masa después de la quiebra. Y, el lagrangiano del sector escalar es

$$\mathcal{L}_H = (D_\mu \eta)^\dagger (D^\mu \eta) + (D_\mu \rho)^\dagger (D^\mu \rho) + (D_\mu \chi)^\dagger (D^\mu \chi) - V(\eta, \rho, \chi), \quad (4.18)$$

donde la derivada D^μ es la derivada covariante definida en (4.7), que se usa para cualquier triplete $SU(3)$ y $V(\eta, \rho, \chi)$ es el potencial escalar que se define en (4.20).

4.3.1. Mecanismo de Higgs

En el ME, el mecanismo de Higgs rompe su simetría, creando campos de Goldstone a partir de perturbaciones alrededor del vev para un solo doblete escalar. Aquí, en el modelo 331, existen tres tripletes de Higgs y producirán una ruptura de sus simetrías, descrita en el esquema siguiente

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{\langle \chi \rangle_0} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\langle \rho \rangle_0, \langle \eta \rangle_0} U(1)_Q.$$

En la primera ruptura, los tripletes de $SU(3)_L$, deben descomponerse a representaciones de $SU(2)$. Por ejemplo, para el caso de los leptones,

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l^- \\ E_l^+ \end{pmatrix}_L : (\mathbf{3}, 0) = (\mathbf{2}, 0) \oplus (\mathbf{1}, 0).$$

Aquí, el triplete queda descompuesto en un doblete y un singlete; pero sus hipercargas todavía son las de $SU(3)_L$. Esto se repite para todos los tripletes escalares η, ρ, χ de este modelo.

Para calcular las hipercargas en la primera ruptura $SU(3)_L \otimes U(1)_N \rightarrow SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ se utiliza la relación

$$Y = N - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8, \quad (4.19)$$

que difiere de la referencia [30] cambiando el factor $\sqrt{3} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}$. Esto lo hacemos usando el criterio de tener hipercargas enteras como se ha hecho en el capítulo 2 para el ME.

Luego para el triplete L_l , se puede calcular su hipercarga después de la primera ruptura,

$$Y = N - \frac{\sqrt{3}}{2} \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix},$$

con lo que se recupera la hipercarga del doblete leptónico $SU(2)$ del MEED, $Y_{L_l} = -1/2$ (ver (2.2.2)). Además se obtiene una relación para el $Y_{E_l} = +1$.

En la segunda ruptura, los campos leptónicos reducen a singletes de la simetría $U(1)_Q$.

Por otro lado, con los tres tripletes definidos en (4.17), se tiene el siguiente potencial de Higgs dado en [28], invariante en el grupo de simetría 331:

$$\begin{aligned}
V(\eta, \rho, \chi) &= \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\
&+ (\eta^\dagger \eta) [\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) \\
&+ \sum_{ijk} \epsilon^{ijk} (f \eta_i \rho_j \chi_k + \text{h.c.}),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

donde la constante de acoplamiento f tiene dimensiones de masa [31].

Los valores de expectación del vacío para las componentes neutras de los tripletes de (4.17) son

$$\langle \eta \rangle_0 = \begin{pmatrix} \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v_\rho}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{v_\chi}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \tag{4.21}$$

En el MEED, el vev se expandió considerándolo real. En este análisis, se considera el caso general cuando los vev's pueden ser complejos [32], algo que no se hace usualmente en las referencias que definen el modelo 331². Para ello, se expande a partir de estos vev's [33],

$$\begin{aligned}
\eta^0 &\rightarrow \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H_\eta + iX_\eta}{|v_\eta|} \right), \\
\rho^0 &\rightarrow \frac{v_\rho}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H_\rho + iX_\rho}{|v_\rho|} \right), \\
\chi^0 &\rightarrow \frac{v_\chi}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H_\chi + iX_\chi}{|v_\chi|} \right).
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Si se requiere una expansión infinitesimal, entonces solo se considera el potencial expandido en primera aproximación. Es decir, no debe contener ni los términos lineales en los campos H_i y X_i , con $i = \eta, \rho, \chi$. Luego, si se reemplaza (4.22) en (4.20), se obtienen las siguientes ecuaciones de vínculo,

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 + \lambda_1 |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_4}{2} |v_\rho|^2 + \frac{\lambda_5}{2} |v_\chi|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\eta|^2} \text{Re}(f v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0, \\
\mu_2^2 + \lambda_2 |v_\rho|^2 + \frac{\lambda_4}{2} |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_6}{2} |v_\chi|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\rho|^2} \text{Re}(f v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0, \\
\mu_3^2 + \lambda_3 |v_\chi|^2 + \frac{\lambda_5}{2} |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_6}{2} |v_\rho|^2 + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\chi|^2} \text{Re}(f v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0, \\
\text{Im}(f v_\eta v_\rho v_\chi) &= 0.
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Resultado similar a la ref. [33]. Estas ecuaciones, son las que se consideran como ligaduras en lagrangiano de interacción para obtener las masas de los bosones y leptones.

4.4. Sector de Yukawa

Como en el MEED, los leptones adquieren masa en sus respectivas interacciones con los campos de Higgs definidos anteriormente. Para ello se define el lagrangiano de Yukawa [6]

² En realidad, solo tiene relevancia si se analiza violación de CP.

$$\mathcal{L}_Y = -G_{ab} \bar{L}_a e_{bR} \rho - G'_{ab} \bar{L}_a E_{bR} \chi + \text{h.c.} \quad (4.24)$$

Se ve que este lagrangiano solo depende de los campos de Higgs ρ y χ , ya que no se considera a los neutrinos derechos en este modelo. Estos dos campos de Higgs generarán masa a los leptones. El campo de Higgs η , generará masa a los quarks.

4.4.1. Masa de los leptones

El lagrangiano anterior (4.24) se puede escribir de manera explícita

$$-\mathcal{L}_Y = G_{ab} (\bar{\nu}_{aL} \quad \bar{e}_{aL} \quad \bar{E}_{aL}) e_{bR} \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} + G'_{ab} (\bar{\nu}_{aL} \quad \bar{e}_{aL} \quad \bar{E}_{aL}) E_{bR} \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

$$= G_{ab} (\bar{\nu}_{aL} e_{bR} \rho^+ + \bar{e}_{aL} e_{bR} \rho^0 + \bar{E}_{aL} e_{bR} \rho^{++}) + \quad (4.26)$$

$$+ G'_{ab} (\bar{\nu}_{aL} E_{bR} \chi^- + \bar{e}_{aL} E_{bR} \chi^{--} + \bar{E}_{aL} E_{bR} \chi^0) + \text{h.c.} \quad (4.27)$$

Ahora se hace la quiebra, reemplazando los vev's de la ecuación (4.21). Estos vev's son escogidos, al igual que el MEED para los campos neutros. Los campos cargados no tienen vev's y el lagrangiano queda,

$$-\mathcal{L}_Y = G_{ab} \bar{e}_{aL} e_{bR} \frac{|v_\rho|}{\sqrt{2}} + G'_{ab} \bar{E}_{aL} E_{bR} \frac{|v_\chi|}{\sqrt{2}} + \text{h.c.} \quad (4.28)$$

Se observa que aparecen los términos de masa de Dirac para los leptones cargados y ningún término de masa para los neutrinos, al igual que en el MEED mínimo. Sin embargo, a diferencia del MEED donde los términos de masa para los leptones cargados tenían una sola constante de acoplamiento por familia, ahora las constantes forman matrices 3×3 no diagonales, así que todavía no representan las masas leptónicas. Estas matrices, al diagonalizarlas, igual que en (3.2), forman autovectores que contienen a los campos físicos y sus autovalores, representan sus masas respectivas.

Para ello, se definen los operadores que diagonalizan esta matriz, al igual que (3.3),

$$\begin{aligned} e'_{iL} &= U_{ib}^L e_{bL}, & e'_{iR} &= U_{ib}^R e_{bR}, \\ E'_{iL} &= V_{ib}^L E_{bL}, & E'_{iR} &= V_{ib}^R E_{bR}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Aquí, los índices i (para las tres familias leptónicas) son índices de los campos primados que son una base adecuada para la matriz de masa y representan partículas físicas. Además, si los G_i 's son los autovalores de la matriz G_{ab} y los G'_i 's son los autovalores de la matriz G'_{ab} , entonces los leptones cargados en la base de los campos masivos $\{e_{iL}, e_{iR}, E_{iL}, E_{iR}\}$, tienen las siguientes masas

$$m_{e_i} = G_i \frac{|v_\rho|}{\sqrt{2}}; \quad m_{E_i} = G'_i \frac{|v_\chi|}{\sqrt{2}} \quad (4.30)$$

La primera igualdad es idéntica a la relación encontrada para la masa de los leptones cargadas del MEED mínimo, si asociamos el vev $|v_\rho| \rightarrow v$, que corresponde al vev del campo de Higgs original. La otra igualdad corresponde a las masas de los tres leptones exóticos cargados

que dependen de un segundo vev para un supuesto segundo Higgs que aún no se encuentra en el LHC, pero que está ampliamente estudiado [34]. Podemos asumir que $|v_\chi| \gg |v_{\eta,\rho}|$, razón por cual el leptón exótico es difícil de “encontrar”.

4.4.2. Masa de los bosones

En el lagrangiano escalar (4.18), el desarrollo explícito de su parte cinética (la que depende de las derivadas covariantes), hace posible la obtención de las masas bosónicas, al igual que en el MEED.

Para ello, la derivada covariante definida en la transformación de los tripletes leptónicos en (4.7) es la misma para los tres tripletes escalares,

$$D_\mu \Phi_i = \partial_\mu \Phi_i + \frac{ig}{2} \begin{pmatrix} A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^1 - iA_\mu^2 & A_\mu^4 - iA_\mu^5 \\ A_\mu^1 + iA_\mu^2 & -A_\mu^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} A_\mu^8 & A_\mu^6 - iA_\mu^7 \\ A_\mu^4 + iA_\mu^5 & A_\mu^6 + iA_\mu^7 & -\frac{2}{\sqrt{3}} A_\mu^8 \end{pmatrix} \Phi_i + ig' B_\mu N_{\Phi_i} \Phi_i, \quad (4.31)$$

donde $\Phi_1 = \eta$, $\Phi_2 = \rho$, $\Phi_3 = \chi$; y las hipercargas N_{Φ_i} son las definidas en (4.17).

Si se utilizan los tres valores de hipercarga y los tres vev's, el desarrollo de toda la parte cinética se efectúa reemplazando los campos A_μ^i por los campos físicos $W^\pm, V^\pm, U^{\pm\pm}$. Según la ecuación (4.13), se obtiene

$$\begin{aligned} & \left[\frac{g^2}{4} (|v_\eta|^2 + |v_\rho|^2) \right] W_\mu^- W^{\mu+} + \left[\frac{g^2}{4} (|v_\eta|^2 + |v_\chi|^2) \right] V_\mu^- V^{\mu+} + \left[\frac{g^2}{4} (|v_\rho|^2 + |v_\chi|^2) \right] U_\mu^{--} U^{\mu++} + \\ & + \frac{g^2}{8} (A_\mu^3 \quad A_\mu^8 \quad B_\mu) \begin{pmatrix} |v_\eta|^2 + |v_\rho|^2 & \frac{1}{\sqrt{3}} (|v_\eta|^2 - |v_\rho|^2) & -2\frac{g'}{g} |v_\rho|^2 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} (|v_\eta|^2 - |v_\rho|^2) & \frac{1}{3} (|v_\eta|^2 + |v_\rho|^2 + 4|v_\chi|^2) & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (|v_\rho|^2 + 2|v_\chi|^2) \\ -2\frac{g'}{g} |v_\rho|^2 & \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{g'}{g} (|v_\rho|^2 + 2|v_\chi|^2) & 4\frac{g'^2}{g^2} (|v_\rho|^2 + |v_\chi|^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{3\mu} \\ A^{8\mu} \\ B^\mu \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Los tres primeros términos serán términos de masa para los bosones vectoriales cargados, de donde se deduce sus masas $m_W = \frac{g}{2} \sqrt{|v_\eta|^2 + |v_\rho|^2}$, $m_V = \frac{g}{2} \sqrt{|v_\eta|^2 + |v_\chi|^2}$ y $m_U = \frac{g}{2} \sqrt{|v_\rho|^2 + |v_\chi|^2}$.

Si se quiere compatibilizar estos resultados con los del MEED y con lo que se obtuvo para la masa del bosón W^\pm en el capítulo 1, bastaría agregar a la condición $|v_\chi| \gg |v_{\eta,\rho}|$, obtenida para las masas leptónicas en la sección anterior, que $|v_\chi| \gg |v_\rho| \gg |v_\eta|$. Con esto se puede aproximar

$$\begin{aligned} m_W &= \frac{g}{2} |v_\rho| \sqrt{1 + \left| \frac{v_\eta}{v_\rho} \right|} \approx \frac{g|v_\rho|}{2}, \\ m_V &= \frac{g}{2} |v_\chi| \sqrt{1 + \left| \frac{v_\eta}{v_\chi} \right|} \approx \frac{g|v_\chi|}{2}, \\ m_U &= \frac{g}{2} |v_\chi| \sqrt{1 + \left| \frac{v_\rho}{v_\chi} \right|} \approx \frac{g|v_\chi|}{2}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

De aquí, se deduce que las masas de los nuevos bosones cargados $V^\pm, U^{\pm\pm}$ son mucho mayores que la masa del bosón cargado del Modelo Estándar W^\pm . Otra vez, tenemos la razón por la que no son detectados aún.

Con respecto a los bosones neutros, en (4.32), se ve que su matriz de masas no es diagonal; pero es simétrica y real, por lo que sus autovalores son reales y sus autovectores son ortogonales. Llamemos a esta matriz M^2 , donde su proceso de diagonalización se desarrolla explícitamente en [3]. Se obtiene que la matriz que diagonaliza a M^2 es

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \begin{pmatrix} t & -t\sqrt{3} & 1 \\ -\sqrt{1+3t^2} & t^2\sqrt{\frac{3}{1+3t^2}} & -\frac{t}{\sqrt{1+3t^2}} \\ 0 & \sqrt{\frac{1+4t^2}{1+3t^2}} & \sqrt{\frac{3(1+4t^2)}{1+3t^2}} \end{pmatrix}, \quad (4.34)$$

donde $t = \frac{g'}{g}$.

Luego, la matriz M^2 diagonalizada es

$$UM^2U^T \approx \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}(g^2 + 3g'^2)|v_\chi|^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{g^2}{4} \left[\frac{g^2 + 4g'^2}{g^2 + 3g'^2} \right] (|v_\eta|^2 + |v_\rho|^2) \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

y la base ortonormal, que representa a los campos físicos neutros masivos es

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z'_\mu \\ Z''_\mu \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} A_\mu^3 \\ A_\mu^8 \\ B_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Entonces, la masa de los bosones neutros son $m_A = 0$, $m_{Z'} = \sqrt{\frac{g^2+3g'^2}{3}}|v_\chi|$ y $m_Z = \frac{g}{2} \sqrt{\left[\frac{g^2+4g'^2}{g^2+3g'^2} \right] (|v_\eta|^2 + |v_\rho|^2)}$. El primer y el tercer valor corresponden al fotón y a el bosón vectorial neutro del Modelo Estándar respectivamente. El segundo valor corresponde a la masa de un bosón exótico, resultado de la teoría. Esta última masa es muy grande debido a que depende de $|v_\chi|$ que como dijimos en la sección (4.4.1) es mucho mayor que los otros vev's.

4.4.3. Alcances del Modelo

Como se mencionó anteriormente, el hecho de agrandar el grupo de simetría otorga nueva física. Eso se ve en la inclusión de un nuevo leptón cargado E^+ , de un nuevo bosón neutro Z' y de nuevos bosones de Higgs en la teoría.

Eso significa que se puede obtener nuevos procesos con estas partículas exóticas, como por ejemplo la dispersión Electrón - Positrón en Muón - Antimuón, en donde intervienen como bosones de intercambio, Z' y H_ρ propios de este modelo [4].

Lo que falta hacer es describir cómo cambia el modelo, si es que consideramos a los neutrinos masivos en el modelo. En el siguiente capítulo se obtiene la masa de los neutrinos con variantes impuestas en el modelo descrito en este capítulo. Estas variantes incluyen agregar neutrinos derechos y términos de masa de Majorana, así como un sexteto de Higgs en el sector escalar.

Capítulo 5

Neutrinos Masivos en el Modelo

$SU(3)_L \otimes U(1)_N$

En el capítulo 3, se obtuvo la masa de los neutrinos colocando a mano singletes de neutrinos derechos y términos de masa de Majorana al lagrangiano del MEED mínimo para luego efectuar el mecanismo see-saw.

En este capítulo se plantea hacer algo similar en simetría 331 introducido en el capítulo anterior. Para ello, se efectúan dos ampliaciones al modelo de Pleitez y Tonnasse [6]: primero, colocamos neutrinos derechos en una representación de singletes; y segundo, un sexteto en el sector escalar.

Como el objetivo de este trabajo de tesis es el de obtener la masa de los neutrinos y efectuar el mecanismo see-saw en el modelo 331, solo haremos referencia a los dos sectores del lagrangiano donde se producen las ampliaciones mencionadas, el leptónico y el escalar. Son estos sectores los que interesan para la determinación de la masa de los neutrinos. El sector bosónico quedará idéntico al detallado en el capítulo anterior y, para que eso suceda, se asume en el modelo que el sexteto no se acopla a ningún campo de ese sector y no interviene en la obtención de las masas de los bosones de gauge.

5.1. Sector leptónico

En este sector se considera a los neutrinos derechos. El contenido de partículas queda como sigue:

1. Los campos izquierdos se representan como tripletes del grupo $SU(3)_N$ con hipercarga $N = 0$ [28]

$$L_l = \begin{pmatrix} \nu_l \\ e_l^- \\ E_l^+ \end{pmatrix}_L \sim (\mathbf{3}, 0),$$

donde $l = e, \mu, \tau$ siguen siendo índices de generación leptónica¹.

2. Los campos derechos (incluyendo el “nuevo” neutrino derecho) siguen siendo representados como singletes del grupo $U(1)_N$, con su respectiva hipercarga definida en (4.2).

¹ Este triplete no es un autoestado de la matriz de masas como en los modelos anteriores.

$$R_l = e_{lR}^- \sim (\mathbf{1}, -1), \quad E_{lR}^+ \sim (\mathbf{1}, +1), \quad \nu_{lR} \sim (\mathbf{1}, 0).$$

Este último singlete al tener carga eléctrica e hipercarga nula, es estéril a la interacción electrodébil (antes de la quiebra) así como a la electromagnética (después de la quiebra). Además, la inclusión de este singlete, sigue dejando libre de anomalías al modelo, igual que en el original.

Las derivadas covariantes y el lagrangiano leptónico quedan idénticos a los definidos en (4.7) y (4.9). Este sector no interviene en la generación de masas leptónicas, ya que no hay acoplamiento con los campos de Higgs.

5.2. Sector escalar

Para generar las masas leptónicas, se tienen los tres tripletes de Higgs introducidos en el modelo original,

$$\eta = \begin{pmatrix} \eta^0 \\ \eta_1^- \\ \eta_2^+ \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, 0), \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho^+ \\ \rho^0 \\ \rho^{++} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, 1), \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi^- \\ \chi^{--} \\ \chi^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, -1). \quad (5.1)$$

Por otro lado, para que los leptones, incluidos los neutrinos, adquieran sus masas a nivel de árbol mediante el mecanismo de seesaw usual, se necesita un multiplete de Higgs que se acople con el término $\bar{L}_i(L_i)^c$ [30]; el cual, viola la conservación del número leptónico, pero como hemos discutido en este trabajo, esa conservación no es necesariamente un requerimiento indispensable.

Este multiplete es el sexteto escalar propuesto por Foot, Hernández, Pisano y Pleitez [30], el cual tiene la siguiente estructura:

$$S = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_2^- & h_1^+ \\ h_2^- & H_1^{--} & \sigma_2^0 \\ h_1^+ & \sigma_2^0 & H_2^{++} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{6}, 0). \quad (5.2)$$

Cada uno de estos seis campos se acopla con los tres leptones en el sector de Yukawa para generar los términos de masas leptónicas después de la RES.

Estos multipletes de Higgs producirán una ruptura de las simetrías que sigue el esquema siguiente [30]

$$SU(3)_L \otimes U(1)_N \xrightarrow{\langle \chi \rangle_0} SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\langle \rho \rangle_0, \langle \eta \rangle_0, \langle S \rangle_0} U(1)_Q.$$

Esto significa que el vev del campo χ es el responsable de romper la simetría $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ a $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$; y debe ser de mayor valor que los vev's de los otros tres multipletes. Con ello, se puede conjeturar una escala, para la primera ruptura, mucho mayor que la escala de ruptura electrodébil (segunda ruptura).

En la primera RES, los tres tripletes escalares se descomponen en dobletes y singletes, tal cual se mostró en la sección (4.3.1). En el caso del sexteto, se descompone en un triplete, un doblete y un singlete [35],

$$\Delta = \begin{pmatrix} \sigma_1^0 & h_2^- \\ h_2^- & H_1^{--} \end{pmatrix} \sim (\mathbf{3}, -2), \quad \Phi_3 = \begin{pmatrix} h_1^+ \\ \sigma_2^0 \end{pmatrix} \sim (\mathbf{2}, 1), \quad H_2^{++} \sim (\mathbf{1}, 4). \quad (5.3)$$

En la segunda RES, todo queda en la simetría $U(1)_Q$.

Por otro lado, los cuatro multipletes definidos en (4.17) y en (5.2), definen el potencial escalar invariante en el grupo de simetría 331, dividiéndolo en dos partes [36]:

$$\begin{aligned} V_T(\eta, \rho, \chi) &= \mu_1^2 \eta^\dagger \eta + \mu_2^2 \rho^\dagger \rho + \mu_3^2 \chi^\dagger \chi + \lambda_1 (\eta^\dagger \eta)^2 + \lambda_2 (\rho^\dagger \rho)^2 + \lambda_3 (\chi^\dagger \chi)^2 \\ &+ (\eta^\dagger \eta) [\lambda_4 (\rho^\dagger \rho) + \lambda_5 (\chi^\dagger \chi)] + \lambda_6 (\rho^\dagger \rho) (\chi^\dagger \chi) + \lambda_7 (\rho^\dagger \eta) (\eta^\dagger \rho) \\ &+ \lambda_8 (\chi^\dagger \eta) (\eta^\dagger \chi) + \lambda_9 (\rho^\dagger \chi) (\chi^\dagger \rho) + (f_1 \epsilon^{ijk} \eta_i \rho_j \chi_k + h.c.), \end{aligned} \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned} V_S(\eta, \rho, \chi, S) &= V_T + \mu_4^2 Tr(S^\dagger S) + \lambda_{10} Tr^2(S^\dagger S) + \lambda_{11} Tr[(S^\dagger S)^2] \\ &+ [\lambda_{12} (\eta^\dagger \eta) + \lambda_{13} (\rho^\dagger \rho) + \lambda_{14} (\chi^\dagger \chi)] Tr(S^\dagger S) \\ &+ (f_2 \rho^T S \chi + h.c.), \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde los μ 's y los f 's son parámetros con dimensiones de masa [31] (o energía en unidades naturales), mientras que los λ 's son adimensionales.

Al igual que en el modelo original, se definen los vev's para las componentes neutras de los multipletes escalares (4.17) y (5.2)

$$\langle \eta \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_\eta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \rho \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v_\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \langle \chi \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v_\chi \end{pmatrix}, \quad \langle S \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v_{\sigma_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v_{\sigma_2} \\ 0 & v_{\sigma_2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.6)$$

El vev v_{σ_1} es el que genera masa a los neutrinos en sector de Yukawa, así que lo igualamos a cero si se quiere un modelo donde no se considere dichas masas.

Al hacer la expansión de los vev's se efectúa la misma operación que en (4.22) para los vev's de los tripletes escalares; y para los vev's del sexteto se tiene

$$\sigma_1^0 \rightarrow \frac{v_{\sigma_1}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H_{\sigma_1} + iX_{\sigma_1}}{|v_{\sigma_1}|} \right), \quad \sigma_2^0 \rightarrow \frac{v_{\sigma_2}}{\sqrt{2}} \left(1 + \frac{H_{\sigma_2} + iX_{\sigma_2}}{|v_{\sigma_2}|} \right). \quad (5.7)$$

Para $V_T(\rho, \eta, \chi)$ se tienen las siguientes ecuaciones de vínculo, que difieren a las dadas en (4.23) al estar considerando un potencial diferente,

$$\begin{aligned}
\mu_1^2 + \lambda_1 |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_4}{2} |v_\rho|^2 + \frac{\lambda_5}{2} |v_\chi|^2 + \lambda_{12} \left(\frac{|v_{\sigma_1}|^2}{2} + |v_{\sigma_2}|^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\eta|^2} Re_1 &= 0, \\
\mu_2^2 + \lambda_2 |v_\rho|^2 + \frac{\lambda_4}{2} |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_6}{2} |v_\chi|^2 + \lambda_{13} \left(\frac{|v_{\sigma_1}|^2}{2} + |v_{\sigma_2}|^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\rho|^2} [Re_1 + Re_2] &= 0, \\
\mu_3^2 + \lambda_3 |v_\chi|^2 + \frac{\lambda_5}{2} |v_\eta|^2 + \frac{\lambda_6}{2} |v_\rho|^2 + \lambda_{14} \left(\frac{|v_{\sigma_1}|^2}{2} + |v_{\sigma_2}|^2 \right) + \frac{1}{\sqrt{2}|v_\chi|^2} [Re_1 + Re_2] &= 0, \\
Im f_1 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.8}$$

donde $Re_1 = \text{Re}(f_1 v_\eta v_\rho v_\chi)$ y $Re_2 = \text{Re}(f_2 v_\eta v_\rho v_\chi)$.

Las ecuaciones de vínculo para la segunda parte del potencial, la que depende del sexteto,

$$\begin{aligned}
\mu_4^2 + \lambda_{10} (|u_{\sigma_1}|^2 + 2|u_{\sigma_2}|^2) + \lambda_{11} |u_{\sigma_1}|^2 + \lambda_{12} \frac{|v_\eta|^2}{2} + \lambda_{13} \frac{|v_\rho|^2}{2} + \lambda_{14} \frac{|v_\chi|^2}{2} &= 0, \\
\mu_4^2 + \lambda_{10} (|u_{\sigma_1}|^2 + 2|u_{\sigma_2}|^2) + \lambda_{11} |u_{\sigma_2}|^2 + \lambda_{12} \frac{|v_\eta|^2}{2} + \lambda_{13} \frac{|v_\rho|^2}{2} + \lambda_{14} \frac{|v_\chi|^2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}|v_{\sigma_2}|^2} Re'_2 &= 0, \\
Im f_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{5.9}$$

donde $Re'_2 = \text{Re}(f_2 v_\rho v_\chi v_{\sigma_2})$.

Se puede ver que las ecuaciones de vínculo de (4.23), han sido modificadas por el la inclusión de los nuevos vev's del sexteto, con lo que se puede decir que la matriz de masas para los Higgs de la ref. [36] también cambia y la predicción para las masas de los bosones de Higgs es diferente. Por lo tanto, el hecho de considerar términos de masa para los neutrinos, afecta a la masa de los Higgs.

5.3. Sector de Yukawa

En el modelo 331 mínimo, los neutrinos adquieren su masa en sus respectivas interacciones con los campos de Higgs definidos anteriormente. Para ello se toma el lagrangiano

$$- \mathcal{L}_Y = \frac{1}{2} \sum_{l, l'} (g_{ll'} \bar{L}_l^c S L_{l'} + g_{ll'} \bar{L}_l \nu_{l'R}) + h.c. \tag{5.10}$$

donde l y l' son índices de generación.

En este lagrangiano, solo se consideran los términos necesarios para la generación de masas para los neutrinos. El primer término, es tomado de la ref. [35] de donde se obtiene términos de masa para los neutrinos con el vev de σ_1 . A ello se le agrega un término para introducir a los neutrinos derechos al igual que se hizo en el MEED mínimo. Aquí se evidencia la necesidad de introducir el sexteto S para ser acoplado con los neutrinos y de ahí obtener su masa.

Haciendo la quiebra, expandiendo y tomando en cuenta solo los términos de masa para los neutrinos, se tiene

$$- \mathcal{L}_Y = \frac{v_{\sigma_1}}{2\sqrt{2}} g_{ll'} \bar{\nu}_{lL}^c \nu_{l'L} + \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} g_{ll'} \bar{\nu}_{lL} \nu_{l'R} + h.c., \tag{5.11}$$

donde se tienen los términos de masa de Dirac y de Majorana al igual que en (3.9).

5.4. Mecanismo de Seesaw

La ecuación (5.11) se puede expresar en forma matricial si hacemos

$$\begin{aligned} \frac{v_\eta}{\sqrt{2}} g_W \bar{\nu}_{iL} \nu'_{iR} + h.c. &= \bar{\nu}_L M^{Dir} \nu_R + h.c., \\ \frac{v_{\sigma_1}}{2\sqrt{2}} g_W \bar{\nu}_{iL}^c \nu'_{iL} + h.c. &= \bar{\nu}_L^c M^{Maj} \nu_L + h.c. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Estos términos son idénticos a los que se obtuvieron en la simetría $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ del capítulo 3, ecuaciones (3.1) y (3.4). Por lo tanto, se procede de manera similar y se obtiene la misma matriz que se obtuvo en la ecuación (3.10),

$$-\mathcal{L}_Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{\nu}_L & \bar{\nu}_R^c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M^L & M^D \\ (M^D)^T & M^R \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ \nu_R \end{pmatrix} + h.c.$$

Cada una de las entradas de la matriz de masas es una matriz 3×3 ya que están involucradas las tres familias leptónicas como se ve en la ecuación (5.12). Si se quiere analizar una sola familia leptónica, entonces se puede hacer $M^D \rightarrow m_D$, $(M^D)^T \rightarrow m_D$, $M^R \rightarrow m_R$ y $M^L \rightarrow 0$. La imposición de este último caso se da, al igual que en la sección (3.4) por la conservación de hipercarga.

Luego, la matriz de masa para los neutrinos, en una sola familia leptónica (al igual que en el capítulo 3) se escribe

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_R \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

donde $m_R = g_W \frac{v_{\sigma_1}}{4\sqrt{2}}$ y $m_D = g_W \frac{v_\eta}{\sqrt{2}}$.

El proceso de diagonalización de M fue descrito en la sección (3.3.2) y la parte del lagrangiano de Yukawa para los neutrinos quedaba

$$-\mathcal{L}_Y = \frac{1}{2} \bar{\nu}' D \nu',$$

donde la diagonal de D son las masas de dos neutrinos de Majorana por cada una de las tres familias leptónicas y ν' son neutrinos de Majorana escritos como autoestados de la matriz de masas (neutrinos físicos).

Los valores de la diagonal se relacionan con los vev's que generan masa a los neutrinos a partir de la relación (3.22), donde se consideró que $m_R \gg m_D$

$$\text{Mecanismo de Seesaw} \left\{ \begin{aligned} m_1 &\approx \frac{m_D^2}{m_R} = 4 \frac{v_\eta^2}{v_{\sigma_1}} \ll m_D, \\ m_2 &\approx m_R = \frac{1}{4\sqrt{2}} v_{\sigma_1} \gg m_D. \end{aligned} \right. \quad (5.14)$$

Al igual que en capítulo 3, se obtiene que $m_2 \gg m_1$. También podemos deducir

$$4 \frac{v_\eta^2}{v_{\sigma_1}} \ll m_D \ll \frac{1}{4\sqrt{2}} v_{\sigma_1} \Rightarrow v_\eta \ll v_{\sigma_1}.$$

Hay que recordar que la introducción del vev para σ_1^0 es el resultado de considerar los neutrinos derechos que deben tener una masa mayor que la del Higgs η .

Estos últimos resultados coinciden con los encontrados en las ref. [37] y [38], en donde utilizan un triplete leptónico y un sexteto escalar diferentes a los usados en este modelo.

Si la simetría 331 se rompe en la escala de los TeV [37], el valor más alto que podemos atribuirle a v_{σ_1} no debería exceder a esta misma escala. Por lo tanto, si imponemos que $v_{\sigma_1} \sim 1$ TeV y $v_\eta \sim 1$ MeV, se obtiene $\frac{v_\eta^2}{v_{\sigma_1}} \sim 1$ eV que está en el orden de magnitud de los neutrinos izquierdos.

Entonces, si la constante de acoplamiento la asumimos $g_{ll'} \sim 1$, entonces los neutrinos derechos deberían tener masas del orden de $m_2 \approx v_{\sigma_1} \sim 1$ TeV.

Capítulo 6

Conclusiones y Perspectivas

Aquí vamos a listar algunas conclusiones basadas en la comparación del modelo planteado en este trabajo con lo discutido en otros modelos 331:

- El potencial escalar escogido en (5.4) es renormalizable e invariante de gauge según la ref. [36]. Para este potencial, este trabajo aporta el hecho de utilizar v_{ev} 's complejos en lugar de los reales que usualmente se utilizan. Esto se usa cuando se considera en la teoría violación de CP [33]. Por ello, las ecuaciones de vínculo difieren de las que se encuentran en la referencia y por lo tanto influyen en la matriz de masas en el sector escalar.
- El modelo planteado en este trabajo, mostrado en el capítulo 5, cuenta con un triplete leptónico que incluye un leptón exótico E^+ simplemente cargado. Esto se recupera de la ref. [6]¹ y de los trabajos del grupo de Física Teórica en la facultad de Ciencias en la UNI [33], [3] y en [4]. El aporte está en que se ha colocado en el modelo, la masa de los neutrinos no tomadas en cuenta anteriormente demostrándose que el resultado es compatible con las referencias, con lo que se concluye que los neutrinos derechos y las masa de los neutrinos bien podrían ser conceptualizados en el modelo planteado.
- Los resultados obtenidos en el mecanismo de seesaw en el capítulo 4 son corroborados en las ref. [37] y [38] a pesar de utilizarse otro triplete leptónico y un sexteto escalar diferente, con lo que fortalece la validez del modelo.
- El hecho de obtener los mismos términos que los obtenidos en el mecanismo de seesaw para el MEED mínimo del capítulo 3, comprueba que el modelo empleado incluye a la simetría del Modelo Electrodébil dando un sustento más en la aplicabilidad de la simetría 331 en fenómenos físicos. Este trabajo sirve para no descartar a los neutrinos derechos ni a los leptones exóticos, venidos a menos en la mayoría de modelos 331.

Como perspectivas para realizar como continuación de esta tesis en trabajos subsiguientes, podemos mencionar:

- Utilizar el potencial escalar con los términos trilineales y el sector de Yukawa completo, para obtener las masas de los bosones de Higgs y de los leptones cargados.
- Considerar un modelo que involucre a los leptones exóticos doblemente cargados pesados que se están buscando en el LHC [39].

¹ Este leptón exótico no existe en otras referencias hasta donde sabemos.

- Incluir el leptón exótico y los neutrinos derechos en otras simetrías. Por ejemplo, en las simetrías Left-Right también trabajadas en nuestro grupo de investigación [40].
- Por último, debemos incluir resultados experimentales actualizados para los experimentos involucrados con la masa de los neutrinos y las perspectivas que hay para detectar las partículas exóticas de este modelo.



Apéndices

Apéndice A

Transformaciones Biunitarias

Teorema A.1. Una matriz no singular M , se puede diagonalizar mediante una transformación biunitaria i.e. con dos matrices unitarias S y T , tales que

$$S^\dagger MT = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n) \equiv D, \quad (\text{A.1})$$

donde $m_i \in \mathbb{R}^+$ (masas) y se cumple que las matrices S y T diagonalizan a las matrices MM^\dagger y $M^\dagger M$ respectivamente [16].

Demostración. 1. Se define: $H^2 \equiv MM^\dagger$, la cual es obviamente hermitiana. Por lo tanto se puede diagonalizar con una matriz unitaria S :

$$S^\dagger MM^\dagger S = \text{diag}(m_1^2, \dots, m_n^2) = D^2$$

2. Por otro lado, se puede notar que $H = SDS^\dagger$ satisface la relación anterior, por lo tanto es también es hermitiana, ya que D tiene entradas reales.

3. Se define $V \equiv H^{-1}M$ y se comprueba que es unitaria: $V^\dagger V = M^\dagger (H^{-1})^\dagger H^{-1}M = M^\dagger H^{-1}H^{-1}M = 1$

$$\text{Ya que, } HH = MM^\dagger \Rightarrow (HH)^{-1} = (MM^\dagger)^{-1} \Rightarrow H^{-1}H^{-1} = (M^\dagger)^{-1}M^{-1}$$

4. Se sabe que cualquier matriz M se puede escribir como el producto de una matriz hermitiana H con una matriz unitaria V , entonces $M = HV$.

$$\text{Si se define una matriz unitaria } T \equiv V^\dagger S, \text{ entonces } M = HV = SDS^\dagger ST^\dagger = SDT^\dagger$$

$$\text{Por lo tanto } S^\dagger MT = D$$

5. Por último, se ha visto que la matriz S diagonaliza a la matriz $H^2 = MM^\dagger$ y también se puede verificar que la matriz T diagonaliza a la matriz $M^\dagger M$, ya que $T^\dagger M^\dagger MT = T^\dagger TDS^\dagger SDT^\dagger T = D^2$

□

Apéndice B

Propiedades de la conjugación de carga

Este apéndice es una ampliación de la referencia [24]

B.1. Operador Conjugación de Carga

Se sabe que un neutrino de Majorana es su propia antipartícula. Además, el campo de una antipartícula se describe como el resultado de aplicar el operador conjugación de carga al campo de partícula:

$$\psi^c(x) \equiv C\bar{\psi}^T = C\gamma_0\psi^*(x). \quad (\text{B.1})$$

Una transformación de Lorentz infinitesimal cambia las coordenadas como $x'^{\mu} = x^{\mu} + \omega_{\nu}^{\mu}x^{\nu}$. Luego, el campo de Dirac se transforma como

$$\psi'(x') = \exp\left[-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right]\psi(x),$$

donde $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_{\mu}, \gamma_{\nu}]$. El campo de carga conjugada se transforma como

$$\begin{aligned} \psi^{c'}(x') &= \exp\left[-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right]\psi^c(x), \\ &= \exp\left[-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right]C\gamma_0\psi^*(x). \end{aligned}$$

Esto es si se conjuga el campo y luego se transforma. Pero si se transforma primero y luego se conjuga:

$$\psi'^c(x') = C\gamma_0\psi'^*(x') = C\gamma_0 \exp\left[\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*\omega^{\mu\nu}\right]\psi^*(x).$$

Igualando los dos últimos resultados, la matriz C debe satisfacer

$$C\gamma_0 \exp\left[\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*\omega^{\mu\nu}\right] = \exp\left[-\frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu}\right]C\gamma_0.$$

Como $\omega^{\mu\nu}$ es arbitrario, entonces en una aproximación de primer orden, se puede tomar como condición para la determinación de la matriz C :

$$\begin{aligned} C\gamma_0 \left(1 + \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}^*\omega^{\mu\nu} \right) &= \left(1 - \frac{i}{4}\sigma_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} \right) C\gamma_0, \\ \Rightarrow \sigma_{\mu\nu}C\gamma_0 &= -C\gamma_0\sigma_{\mu\nu}^*, \\ \Rightarrow C^{-1}\sigma_{\mu\nu}C &= -\gamma_0\sigma_{\mu\nu}^*\gamma_0. \end{aligned} \tag{B.2}$$

Por otro lado, una partícula de Majorana debe cumplir que $\psi = \psi^c$. Sin embargo también se acepta que cumpla la siguiente condición, mas general:

$$\psi(x) = e^{i\theta}\psi^c(x). \tag{B.3}$$

Ya que la fase se absorbe en las operaciones con este campo.

Se debe notar que en la ecuación (B.3), podemos exigir que $\psi(x)$ y $\psi^c(x)$ estén normalizados. Para ello, en virtud de la definición (B.1), la matriz $C\gamma_0$ debe ser unitaria y por lo tanto, la matriz C también.

$$\begin{aligned} (C\gamma_0)^\dagger &= (C\gamma_0)^{-1} \Rightarrow \gamma_0^\dagger C^\dagger = (C\gamma_0)^{-1}, \\ &\Rightarrow (\gamma_0 C^\dagger) (C\gamma_0) = 1, \\ &\Rightarrow C^\dagger C = \gamma_0\gamma_0 = 1, \\ &\Rightarrow C^\dagger = C^{-1}. \end{aligned}$$

Entonces, la relación (B.2) se puede simplificar,

$$\begin{aligned} C^{-1}\sigma_{\mu\nu}C &= -\gamma_0\sigma_{\mu\nu}^*\gamma_0, \\ C^{-1}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]C &= -\gamma_0[\gamma_\mu^*, \gamma_\nu^*]\gamma_0, \\ C^{-1}\gamma_\mu C &= -\gamma_0\gamma_\mu^*\gamma_0, \\ &= -(\gamma_0\gamma_\mu^\dagger\gamma_0)^T = -\gamma_\mu^T. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la matriz C se relaciona con las matrices γ de la siguiente manera:

$$C^{-1}\gamma_\mu C = -\gamma_\mu^T \quad \text{o} \quad C^{-1}\gamma_\mu^\dagger C = -\gamma_\mu^*. \tag{B.4}$$

Finalmente, si exigimos que $(\psi^c(x))^c = \psi(x)$, entonces $[\gamma_0 C\psi^*(x)]^c = \gamma_0 C(\gamma_0 C\psi^*(x))^* = \gamma_0 C\gamma_0^* C^* \psi(x)$.

Para que la última expresión sea igual a $\psi(x)$, debe cumplirse que

$$\gamma_0 C\gamma_0^* C^* = 1 \Rightarrow \gamma_0^* C^* = (\gamma_0 C)^{-1}.$$

De la definición de $C, \gamma_0^* = -C^{-1}\gamma_0 C$,

$$\begin{aligned} \Rightarrow -C^{-1}\gamma_0 C C^* &= C^{-1}\gamma_0^{-1}, \\ \Rightarrow \gamma_0 C C^* &= -\gamma_0^{-1}, \\ \Rightarrow C C^* &= -1, \\ \Rightarrow C^* &= -C^\dagger, \\ \Rightarrow C^T &= -C. \end{aligned}$$

También,

$$\overline{\psi^c} = (\psi^c)^\dagger \gamma_0 = (C\gamma_0\psi^*)^\dagger \gamma_0 = \psi^T \gamma_0 C^\dagger \gamma_0 = -\psi^T C^{-1}. \tag{B.5}$$

En resumen, la matriz C es **unitaria**, **antisimétrica** y obedece la relación (B.4). Sin embargo, su forma depende de la representación de las matrices γ .

B.2. Representación de Dirac

En cualquier representación de las matrices gamma, se debe cumplir dos requerimientos: $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu} I_{4 \times 4}$ y $\gamma_0 \gamma^\mu \gamma_0 = \gamma^{\mu\dagger}$. Aparte de estos requisitos, las matrices gamma son arbitrarias y hay diferentes representaciones para escogerlas.

El mismo Dirac escogió:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}; \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix},$$

donde σ^i son las tres matrices de Pauli, con $i = 1, 2, 3$.

En esta representación, la forma explícita de las soluciones de la ecuación de Dirac son $u_r(\vec{p})$ para fermiones y $v_r(\vec{p})$ para antifermiones. Además las propiedades de la matriz C antes descritas permiten que se cumplan las relaciones de la conjugación de los espinores $\gamma_0 C u_r^*(\vec{p}) = v_r(\vec{p})$, $\gamma_0 C v_r^*(\vec{p}) = u_r(\vec{p})$ solamente si

$$C = i\gamma_2 \gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma^2 \\ i\sigma^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.6})$$

Entonces, la conjugación del campo en esta representación queda

$$\psi^c(x) = i\gamma_0 \gamma_2 \gamma_0 \psi^*(x) = i\gamma_2 \psi^*(x). \quad (\text{B.7})$$

También podemos conjuar los campos izquierdo y derecho y ver que las helicidades cambian. Por ejemplo, conjugando el campo derecho tenemos,

$$\begin{aligned} \psi_{R,L}^c &= C \gamma_0 \psi_{R,L}^* = i\gamma_2 \gamma_0 \gamma_0 \psi_{R,L}^* = i\gamma_2 P_{R,L} \psi^*, \\ &= P_{L,R} (i\gamma_2 \psi^*) = P_{L,R} \psi^c = (\psi^c)_{L,R}. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Recordar que al utilizar la representación de Dirac, la matriz $\gamma_5 \equiv i\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3$ es real y los operadores $P_{R,L} = \frac{1 \pm \gamma_5}{2}$ también son reales.

B.3. Representación de Majorana

En esta representación, las matrices gamma tienen la forma,

$$\begin{aligned} \gamma^0 &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i\sigma^3 & 0 \\ 0 & i\sigma^3 \end{pmatrix}; \\ \gamma^2 &= \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^2 \\ \sigma^2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma^1 & 0 \\ 0 & -i\sigma^1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Se ve que todas las matrices son imaginarias y entonces las matrices $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ también son imaginarias. Por lo tanto una matriz C que satisface la condición (B.2), se puede definir como

$$C = \gamma_0. \tag{B.9}$$

Esta matriz también cumple la definición (B.4) y sus propiedades.

En esta representación, el campo conjugado queda

$$\psi^c(x) = \gamma_0 \gamma_0 \psi^*(x) = \psi^*(x). \tag{B.10}$$

Lo cual significa que si es un campo real, representa una partícula de Majorana.

Por último, si ψ es un campo de Majorana, entonces en virtud de la ecuación (B.8),

$$\psi_{R,L}^c = (\psi^c)_{L,R} = \psi_{L,R}. \tag{B.11}$$

Apéndice C

Autoestados de gauge y de masa

En primer lugar, debemos recordar que el MEED es una teoría de campo de gauge (o de calibre). Esto significa que que la interacción entre las partículas tomadas en cuenta en esta teoría son el resultado de introducir transformaciones de gauge locales de un grupo de simetría, en este caso el $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Como resultado de estas interacciones, se conciben las partículas de interacción (en este caso la interacción electrodébil) o los llamados bosones de gauge.

Por otro lado, podemos definir, como usualmente se hace, operadores que posean autoestados descritos por los campos derechos e izquierdos leptónicos de la densidad lagrangiana del MEE y los podemos llamar, autoestados de gauge ψ_l^L y ψ_l^R donde $l = e, \mu, \tau$ (mientras no sea explícita la diferencia en esta notación, los subíndices l incluirán a los neutrinos ν_l).

Por ejemplo, si definimos el operador **número leptónico** como,

$$\begin{aligned} L_i |\psi_j^{L,R}\rangle &= \delta_{ij} |\psi_j^{L,R}\rangle && \text{para leptones,} \\ L_i |\bar{\psi}_j^{L,R}\rangle &= -\delta_{ij} |\bar{\psi}_j^{L,R}\rangle && \text{para antileptones,} \end{aligned} \quad (\text{C.1})$$

define el sabor leptónico cuando el autovalor sea la unidad.

Estos estados no tienen por qué ser autoestados, por ejemplo, del operador de masa M ; es decir, no hay razón alguna para pensar que en el cálculo de los valores esperados de la masa se utilicen los autoestados de gauge, $\langle \psi_i^{L,R} | M | \psi_j^{L,R} \rangle \neq 0$ para $i \neq j$.

Por otro lado, si imponemos que los autoestados del operador de masa $\psi_{m_i}^{L,R}$ satisfagan $\langle \psi_{m_i}^{L,R} | M | \psi_{m_j}^{L,R} \rangle = m_i \delta_{ij}$, entonces estos autoestados no deben ser degenerados y sus autovalores deben cumplir la relación $m_i - m_j \neq 0$. Lo cual significa que las masas no pueden ser todas nulas.

En conclusión, la matriz de masa M no tiene por qué ser diagonal en la base de los autoestados de gauge. Sin embargo, se puede demostrar que los autoestados de gauge y de masa son linealmente dependientes y la matriz de masa se puede diagonalizar a M_d con dos matrices unitarias S y T , tales que

$$S^\dagger M T = M_d. \quad (\text{C.2})$$

(ver apéndice A),

Entonces la relación entre los autoestados de gauge y los autoestados de masa se puede obtener de

$$\begin{aligned}\bar{\psi}_l^L M \psi_l^R &= (\bar{\psi}_l^L S)(S^\dagger M T)(T^\dagger \psi_l^R), \\ &= \bar{\psi}_{m_i}^L M_d \psi_{m_i}^R.\end{aligned}\tag{C.3}$$

Con lo que se demuestra que los autoestados de gauge son combinaciones lineales de los autoestados de masa,

$$\begin{aligned}\psi_l^L &= S \psi_{m_i}^L, \\ \psi_l^R &= T \psi_{m_i}^R.\end{aligned}\tag{C.4}$$

Eso significa que en el lagrangiano del MEED, se pueden obtener los términos de masa a partir de transformaciones lineales transformaciones unitarias (S y T) que a su vez diagonalizan a la matriz de masa M y transforman los autoestados de gauge en autoestados de masa.

Apéndice D

Mezclas y oscilaciones de neutrinos

En el MEED, la falta de masa en los neutrinos implica que la mezcla de neutrinos tendría que ser físicamente inobservable (como veremos más adelante), sin embargo como lo mencionamos en la introducción, existen experimentos que evidencian este fenómeno de mezclas.

Veamos por qué al considerar que los neutrinos poseen masa no nula, puede haber una mezcla de neutrinos observada en los experimentos, explicado por el fenómeno llamado «Oscilación de Neutrinos». En este fenómeno los neutrinos presentan transiciones periódicas de sabor, $\nu_i \Rightarrow \nu_j$, donde $i, j = e, \mu, \tau$.

Del resultado (C.4), que en realidad es un resultado general para los leptones, nos interesa el caso particular de los neutrinos

$$\psi_{\nu_i}^L = S \psi_{\nu_{m_i}} \Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_e^L \\ \nu_\mu^L \\ \nu_\tau^L \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \nu_{m_e}^L \\ \nu_{m_\mu}^L \\ \nu_{m_\tau}^L \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

O de manera resumida, $\nu_i^L = s_{li} \nu_{m_i}^L$ (se replicaría lo mismo con los neutrinos derechos y con la matriz T). De esta última relación, se observa claramente que los autoestados de gauge para los neutrinos se expresan como combinaciones lineales de los autoestados de masa y que la matriz S se puede interpretar como matriz de mezcla de sabores, cuyas componentes se determinan experimentalmente.

El haz de neutrinos producido experimentalmente es una superposición de diferentes autoestados. Mientras el haz se propaga, las componentes (autoestados) evolucionan de tal manera, que la probabilidad de encontrar diferentes autoestados en el haz, varía con el tiempo. Esta consecuencia, de la mezcla de neutrinos, sugerido por primera vez por Pontecorvo se llama «Oscilaciones de Neutrinos».

En el caso de la mezcla de solo dos sabores de neutrinos, la forma más sencilla de definir la matriz S preservando la ortonormalidad de los estados en las dos bases (D.1) es de la siguiente manera [41]:

$$\begin{aligned}\nu_1 &= \nu_{m_1} \cos \theta + \nu_{m_2} \sin \theta, \\ \nu_2 &= -\nu_{m_1} \sin \theta + \nu_{m_2} \cos \theta.\end{aligned}\tag{D.2}$$

Si no existiera mezcla de neutrinos, el ángulo de la matriz de mezcla sería $\theta = 0$ y la matriz de mezcla tendría componentes $s_{ij} = \delta_{ij}$. Si este es el caso y aplicamos el operador de masa M a los autoestados de gauge, obtenemos

$$\begin{aligned}M|\nu_l\rangle &= M|s_{lj}\nu_{m_j}\rangle, \\ &= M\delta_{lj}|\nu_{m_j}\rangle, \\ &= M|\nu_{m_l}\rangle, \\ &= m_l|\nu_{m_l}\rangle.\end{aligned}\tag{D.3}$$

Luego, al no haber mezcla se cumple que $\nu_l = \nu_{m_l}$. Los neutrinos mantienen su identidad y los autoestados de masa son los mismos autoestados de gauge.

Pero, si $\theta \neq 0$ ocurre la mezcla de neutrinos y se pueden explicar ciertos fenómenos. Por ejemplo, si en una fuente se produce un haz de neutrinos de sabor puro ν_1 con momentum \vec{p} en el instante $t = 0$, entonces las componentes de la mezcla ν_{m_1} y ν_{m_2} tendrán energías ligeramente diferentes E_1 y E_2 debido a una pequeña diferencia entre sus masas m_1 y m_2 . La diferencia de energías está asociada a una pequeña diferencia en sus frecuencias de sus funciones de onda correspondientes, las cuales al superponerse producirán pulsos o paquetes de onda de mayor amplitud. Como resultado de esto, uno puede encontrar que del haz original de partículas ν_1 se va desarrollando espontáneamente una componente ν_2 y sus intensidades oscilan mientras viajan a través del espacio.

$$\nu_{m_i}(t) = e^{-iE_i t} \nu_{m_i}.$$

Entonces la evolución temporal de los autoestados de gauge quedarían según (D.2)

$$\begin{aligned}\nu_1(t) &= \cos \theta e^{-iE_1 t} \nu_{m_1} + \sin \theta e^{-iE_2 t} \nu_{m_2}, \\ \nu_2(t) &= -\sin \theta e^{-iE_1 t} \nu_{m_1} + \cos \theta e^{-iE_2 t} \nu_{m_2}.\end{aligned}\tag{D.4}$$

Por otro lado, la densidad de probabilidad de transición entre estados de gauge (oscilación) es:

$$\begin{aligned}|\langle \nu_1 | \nu_2(t) \rangle|^2 &= |(\cos \theta \langle \nu_{m_1} | + \sin \theta \langle \nu_{m_2} |)(-\sin \theta e^{-iE_1 t} |\nu_{m_1}\rangle + \cos \theta e^{-iE_2 t} |\nu_{m_2}\rangle)|^2, \\ &= |-\sin \theta \cos \theta e^{-iE_1 t} + \sin \theta \cos \theta e^{-iE_2 t}|^2, \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta (-e^{-iE_1 t} + e^{-iE_2 t})(-e^{iE_1 t} + e^{iE_2 t}), \\ &= \sin^2 \theta \cos^2 \theta [1 - e^{-i(E_1 - E_2)t} - e^{i(E_1 - E_2)t} + 1], \\ &= 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta [1 - \cos(E_1 - E_2)t], \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{E_1 - E_2}{2} t \right).\end{aligned}$$

Además, la energía de los neutrinos que salen del haz es

$$E_i = \sqrt{p^2 + m_i^2} \approx p + \frac{m_i^2}{2p} \approx E + \frac{m_i^2}{2E}.$$

Esta aproximación tiene lugar si consideramos que $m_i \ll p \approx E$, es decir asumiendo que las masas de los neutrinos son muy pequeñas comparadas con p y con E , que es la energía total del haz en cualquier instante o de los neutrinos que salieron inicialmente de la fuente.

Por lo tanto $E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{2E}$ y la densidad de probabilidad para la transición entre dos sabores de neutrinos en el haz queda,

$$P(\nu_1 \rightarrow \nu_2) = 2 \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{m_1^2 - m_2^2}{4E} \right) t. \quad (\text{D.5})$$

En conclusión, cuando existe mezcla de neutrinos, es decir que el ángulo de mezcla $\theta \neq 0$, entonces existe la probabilidad que los neutrinos cambien de sabor, cuando consideramos que su masa no es degenerada, algo que el MEED no consideraba.

Bibliografía

- [1] Guido ALTARELLI. The Standard model of particle physics. *hep-ph*, 0510281:11, 2005.
- [2] S.M. Bilenky and B. Pontecorvo. Lepton mixing and neutrino oscillations. *Physics Reports*, 41(4):225–261, 1978.
- [3] David Romero. Decaimiento del bosón exótico z'_0 en el modelo electrodébil 331. Master's thesis, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 2010.
- [4] Henry Díaz. Dispersión electrón positrón en muón antimuón en el polo del bosón exótico z'_0 en el modelo electrodébil 331. Master's thesis, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 2011.
- [5] E. Cataño M., R Martínez, and F. Ochoa. Neutrino masses in a 331 model with right-handed neutrinos without doubly charged higgs bosons via inverse and double seesaw mechanisms. *Phys. Rev. D*, 86:073015, Oct 2012.
- [6] V. Pleitez and M. D. Tonasse. Heavy charged leptons in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ model. *Phys. Rev. D*, 48:2353–2355, Sep 1993.
- [7] M. Agostini et al. Search of neutrinoless double beta decay with the {GERDA} experiment. *Nuclear and Particle Physics Proceedings*, 273–275:1876 – 1882, 2016. 37th International Conference on High Energy Physics (ICHEP).
- [8] Dean Carmi, Adam Falkowski, Eric Kuflik, Tomer Volansky, and Jure Zupan. Higgs after the discovery: A status report. *JHEP*, 10:196, 2012.
- [9] Julian Schwinger. A theory of the fundamental interactions. *Annals of Physics*, 2(5):407 – 434, 1957.
- [10] Sheldon L. Glashow. The renormalizability of vector meson interactions. *Nuclear Physics*, 10:107 – 117, 1959.
- [11] Murray Gell-Mann. Nonleptonic weak decays and the eightfold way. *Phys. Rev. Lett.*, 12:155–156, Feb 1964.
- [12] G. Zweig. An $SU(3)$ model for strong interaction symmetry and its breaking. Version 1. 1964.
- [13] Abdus Salam and J. C. Ward. Weak and electromagnetic interactions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 11(4):568–577, 1959.
- [14] Steven Weinberg. A model of leptons. *Phys. Rev. Lett.*, 19:1264–1266, Nov 1967.

-
- [15] Murray Gell-Mann. The interpretation of the new particles as displaced charge multiplets. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 4(2):848–866, 1956.
- [16] Ling-Fong Li Ta-Pei Cheng. *Gauge theory of elementary particle physics*, chapter 11, pages 345–359. Oxford University Press, USA, 2000.
- [17] S. L. Glashow. Partial symmetries of weak interactions. *Nucl. Phys.*, 22:579–588, 1961.
- [18] Peter W. Higgs. Broken symmetries and the masses of gauge bosons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:508–509, Oct 1964.
- [19] F. Englert and R. Brout. Broken symmetry and the mass of gauge vector mesons. *Phys. Rev. Lett.*, 13:321–323, Aug 1964.
- [20] G. S. Guralnik, C. R. Hagen, and T. W. B. Kibble. Global conservation laws and massless particles. *Phys. Rev. Lett.*, 13:585–587, Nov 1964.
- [21] J. Goldstone. Field theories with « superconductor » solutions. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 19(1):154–164, 1961.
- [22] Yoichiro Nambu. Quasi-particles and gauge invariance in the theory of superconductivity. *Phys. Rev.*, 117:648–663, Feb 1960.
- [23] Rabindra N. Mohapatra and Goran Senjanović. Neutrino mass and spontaneous parity nonconservation. *Phys. Rev. Lett.*, 44:912–915, Apr 1980.
- [24] Palash B. Pal R. N. Mohapatra. *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, chapter 4,7, pages 54–61,141–144. World Scientific lecture notes in physics 72. World Scientific, 3rd ed edition, 2004.
- [25] Samoil Bilenky (auth.). *Introduction to the Physics of Massive and Mixed Neutrinos*, chapter 4, pages 70–76. Lecture Notes in Physics 817. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1 edition, 2010.
- [26] Howard Georgi and Sheldon L. Glashow. Gauge theories without anomalies. *Phys. Rev. D*, 6:429–431, Jul 1972.
- [27] T. Aaltonen et al. First search for exotic z boson decays into photons and neutral pions in hadron collisions. *Phys. Rev. Lett.*, 112:111803, Mar 2014.
- [28] F. Pisano and V. Pleitez. $SU(3) \otimes U(1)$ model for electroweak interactions. *Phys. Rev. D*, 46:410–417, Jul 1992.
- [29] Rodolfo A. Diaz, R. Martínez, and F. Ochoa. Scalar sector of the $su(3)_c \otimes su(3)_L \otimes U(1)_X$ model. *Phys. Rev. D*, 69:095009, May 2004.
- [30] Robert Foot, Oscar F. Hernandez, F. Pisano, and V. Pleitez. Lepton masses in an $SU(3)_L \otimes U(1)_N$ gauge model. *Phys. Rev.*, D47:4158–4161, 1993.
- [31] C.A. de Sousa Pires. Neutrino mass mechanisms in 3-3-1 models: A short review. *Physics International*, 6:33 – 41, 2014.
- [32] T.D. Lee. C_p nonconservation and spontaneous symmetry breaking. *Physics Reports*, 9(2):143 – 177, 1974.
- [33] Orlando Pereyra. *Violación de CP en Modelos 3-3-1*. PhD thesis, Instituto de Física Teórica.

Universidade Estadual Paulista, Abril 1998.

- [34] Béranger Dumont, John F. Gunion, Yun Jiang, and Sabine Kraml. Constraints on and future prospects for two-higgs-doublet models in light of the lhc higgs signal. *Phys. Rev. D*, 90:035021, Aug 2014.
- [35] J.C. Montero, C.A. de S. Pires, and V. Pleitez. Neutrino masses through a type {II} seesaw mechanism at tev scale. *Physics Letters B*, 502(1–4):167 – 170, 2001.
- [36] Nguyen Tuan Anh, Nguyen Anh Ky, and Hoang Ngoc Long. The higgs sector sector of the minimal 3-3-1 model revisted. *International Journal of Modern Physics A*, 15(02):283–305, 2000.
- [37] D. Cogollo, H. Diniz, C. A. de S. Pires, and P. S. Rodrigues da Silva. The seesaw mechanism at tev scale in the 3-3-1 model with right-handed neutrinos. *The European Physical Journal C*, 58(3):455, 2008.
- [38] Nguyen Anh Ky and Nguyen Thi Hong Van. Scalar sextet in the 331 model with right-handed neutrinos. *Phys. Rev. D*, 72:115017, Dec 2005.
- [39] S. Biondini and O. Panella. Exotic leptons at future linear colliders. *Phys. Rev. D*, 92:015023, Jul 2015.
- [40] José Reyes. Cálculo de la dispersión electrón positrón en muón antimuón en el polo del bosón exótico z'_0 en el modelo izquierdo-derecho 221. Master's thesis, Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú, 2010.
- [41] L. G. Cabral-Rosetti. Introduction to neutrino oscillations. *Rev. Mex. Fis.*, 48:366–383, 2002.