UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS

“EL PROBLEMA DE LEVI EN $\mathbb{C}^n$”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADO POR:

FELIPE ENRIQUE PASCUAL BELLIDO

ASESOR:

Dr. OSWALDO JOSÉ VELÁSQUEZ CASTAÑÓN

CO-ASESOR:

Dr. RUDY JOSÉ ROSAS BAZÁN

LIMA–PERÚ

2017

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIDAD DE POSGRADO

MAESTRÍA EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

Alumno:	Felipe Enrique Pascual Bellido
Código de estudiante:	20126540 − I
Título de la tesis:	El Problema de Levi en $\mathbb{C}^n$

DETALLE DEL CONTENIDO

El Problema de Levi en $\mathbb{C}^n$

RESUMEN

En el presente trabajo haremos un estudio de dominios de holomorfía y dominios pseudoconvexos en $\mathbb{C}^n$, y probaremos que todo dominio de holomorfía es un dominio pseudoconvexo. Es natural preguntarnos si la implicación inversa es también cierta, este es el famoso problema de E. Levi. Para resolver el problema de E. Levi aplicaremos el método general de K. Oka, y las técnicas de L. Hörmander en espacios de Hilbert en relación con la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos.

The Levi Problem in $\mathbb{C}^n$

ABSTRACT

In the present work we make a study of domains of holomorphy and pseudoconvex domains, and we prove that all domain of holomorphy is a pseudoconvex domain in $\mathbb{C}^n$. It is natural to ask ourselves if the inverse implication is also true, this is the famous E. Levi problem. To solve the problem of E. Levi we apply the general method of K. Oka, and the techniques of L. Hormander in Hilbert spaces in relation to $\overline{\partial}$ equation in pseudoconvex domains.

Introducción

Contenido

Uno de los fenómenos más interesantes observados en el estudio de las funciones holomorfas de varias variables complejas, es la existencia de pares de conjuntos abiertos $U \subset V \subset \mathbb{C}^n$ tales que toda función holomorfa en U necesariamente se extiende a una función que es holomorfa en el abierto V (estrictamente mayor), por ejemplo el

Teorema de Extensión de Hartogs[7]: Si U es un dominio de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ y $K \subset U$ es un compacto tal que $U - K$ es conexo, entonces toda función holomorfa en $U - K$ se extiende holomórficamente hacia U.

Es claramente de algún interés determinar aquellos abiertos $U \subset \mathbb{C}^n$ para los cuales tal extensión no sea posible, estos abiertos serán llamados dominios de holomorfía. Como más adelante veremos, estos dominios desempeñarán un papel fundamental en la Teoría de Varias Variables Complejas. El presente trabajo consta de cuatro capítulos:

En el primer capítulo: Definiremos el concepto de dominio de holomorfía, caracterizaremos los dominios de holomorfía en su forma topológica, esto es, introduciremos la noción de convexidad holomorfa y estableceremos el Teorema de Cartan-Thullen, el cual caracterizará los dominios de holomorfía en términos de convexidad holomorfa.

Extensión hacia un punto: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, $f \in \mathcal{O}(U)$ y $a \in \partial U$. Diremos que la función holomorfa f se extiende holomórficamente hacia a, si existe una vecindad conexa V de a y una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(V)$ tal que $f \equiv g$ en un subconjunto abierto no vacio de $U \cap V$.

Dominio de holomorfía: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que U es un dominio de holomorfía, si existe una función $f \in \mathcal{O}(U)$, el cual no se extiende holomórficamente hacia ningún punto $a \in \partial U$.

Convexidad holomorfa: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $K \subset U$ un compacto. El conjunto

$$\widehat{K}_U^{hol} = \bigcap_{f \in \mathcal{O}(U)} \left\{ z \in U : |f(z)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \right\}$$

es llamado la envolvente convexa holomorfa de K en U. Diremos que U es un dominio holomórficamente convexo si para todo compacto $K \subset U$ la envolvente convexa holomorfa $\widehat{K}_U^{hol}$ es compacta.

Teorema de Cartan-Thullen: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- U es un dominio de holomorfía.
- U es un dominio holomórficamente convexo.

En el segundo capítulo: Introduciremos la noción de función plurisubarmónica (el cual generaliza las funciones subarmónicas a varias variables complejas). Caracterizaremos los dominios de holomorfía (independientemente) en su forma analítica, esto es, vía funciones plurisubarmónicas: dominios pseudoconvexos. Además demostraremos que todo dominio de holomorfía es un dominio pseudoconvexo.

Plurisubarmonicidad: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ semicontinua superiormente. Diremos que f es plurisubarmónica en Ω, si para todo disco complejo $a + \overline{\Delta} \cdot b = \{a + z \cdot b : |z| \leq 1\} \subset \Omega$ $(a, b \in \mathbb{C}^n)$, se cumple la desigualdad del valor medio

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} \cdot b) d\theta.$$

Dominio pseudoconvexo: Diremos que un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ es pseudoconvexo si la función

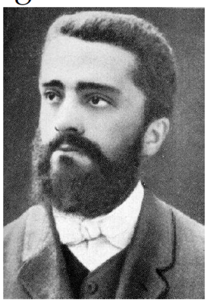
$$U \ni z \mapsto -\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$$

es plurisubarmónica en U.

Teorema: Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, entonces U es un dominio pseudoconvexo.

Es natural preguntarnos si la implicación inversa es también cierta, este problema es conocido como el **Problema de Levi**. Fue planteado por E.E. Levi en 1911. El problema de Levi fue resuelto por K. Oka en 1942 en $\mathbb{C}^2$, y en dimensión arbitraria, fue resuelto independientemente por K. Oka, H. Bremermann, F. Norguet en 1950. Finalmente, en 1965 L. Hörmander publica una prueba usando técnicas en espacios de Hilbert y ecuaciones diferenciales parciales en relación con la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos.

Eugenio Elia Levi



(1883–1917)

En el tercer capítulo: Resolveremos la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos, esto es, el Teorema de Hörmander. El cual será una herramienta fundamental para poder resolver el problema de E. Levi.

Teorema de Hörmander: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces la siguiente secuencia

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^{\infty}_{(0,0)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{C}^{\infty}_{(0,1)}(\Omega) \xrightarrow{\overline{\partial}} \dots \xrightarrow{\overline{\partial}} \mathcal{C}^{\infty}_{(0,n)}(\Omega) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\mathcal{C}^{\infty}_{(p,q)}(\Omega)$ es el espacio de las (p,q)-formas diferenciales con coeficientes en $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$.

En el cuarto capítulo: Demostraremos que las dos caracterizaciones de dominios de holomorfía en su forma topológica y analítica, estudiadas en el primer y segundo capítulo son equivalentes, esto es, precisamente resolver el Problema de Levi en $\mathbb{C}^n$.

Para resolver el problema de E. Levi aplicaremos el método general de K. Oka[4], esto es, resolveremos el problema de E. Levi para una clase muy especial de dominios pseudoconvexos: dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados, el cual será una consecuencia del Teorema de Hörmander. Luego estableceremos el Teorema de Behnke-Stein

Teorema de Behnke-Stein: Si $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots$ es una sucesión creciente de dominios de holomorfía en $\mathbb{C}^n$, entonces la unión

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$$

es también un dominio de holomorfía.

El Teorema de Behnke-Stein será una consecuencia del Teorema de Aproximación de Oka-Weil y del Teorema de Hörmander.

Teorema de Aproximación de Oka-Weil: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $K \subset U$ un compacto tal que

$$K = \widehat{K}_U^{hol}$$

esto es, por definición un compacto holomórficamente convexo, entonces

$$\mathcal{O}(U) \text{ es denso en } \big(\mathcal{O}(K), \tau_c\big)$$

en la topología compacta-abierta.

Finalmente el Teorema de Sard conjuntamente con la Teoría de Funciones Plurisubarmónicas nos permitirá aproximar un dominio pseudoconvexo, por una sucesión creciente de dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados

Teorema de Sard[17]: Si $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (donde U es abierto) es de clase $\mathcal{C}^\infty$, entonces la medida de Lebesgue de los valores críticos

$$\Big\{ f(x) : x \in U, \nabla f(x) = 0 \Big\}$$

es cero.

Aproximación de un dominio pseudoconvexo: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces existe una sucesión $(\Omega_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ de dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados tales que

- $\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1}$ para todo $j \geq 1$.
- $\Omega = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \Omega_j$.

Notación

Antes de comenzar formalmente nuestra discusión del problema de E. Levi enumeramos cierta notación y terminología, que utilizaremos con frecuencia en este trabajo.

Símbolo	**Significado**
$\mathbb{N}$	el conjunto de los números naturales
$\mathbb{R}$	el conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	el conjunto de los números complejos
$\Re z$, $\Im z$, $\lvert z\rvert$	la parte real, parte imaginária y módulo de $z \in \mathbb{C}$
$\lVert x\rVert$	la norma Euclidiana para $x \in \mathbb{R}^n$
$\lVert x\rVert_\infty$	la norma L^∞ para $x \in \mathbb{R}^n$
$d(x, y)$	la métrica Euclidiana para $x, y \in \mathbb{R}^n$
$d_\infty(x, y)$	la métrica L^∞ para $x, y \in \mathbb{R}^n$
$x\cdot y$	el producto interno Euclidiano para $x, y \in \mathbb{R}^n$
$\langle z, w\rangle$	el producto interno complejo para $z, w \in \mathbb{C}^n$
$B(x, r)$	la bola Euclidiana de radio $r > 0$ y centro $x \in \mathbb{R}^n$
$\Delta^n(z, r)$	el polidisco de multiradio r y centro $z \in \mathbb{C}^n$
Δ^n	el polidisco unitario $\Delta^n(0, 1)$
X^c, $\overline{X}$, ∂X, $\mathring{X}$	para un conjunto X de algún espacio métrico,
	el complemento, clausura, frontera e interior
$B(X, \epsilon)$	la ϵ-vecindad de X, $B(X, \epsilon) = \bigcup_{x\in X} B(X, \epsilon)$
$d(x, S)$, $d(T, S)$	para un punto x y conjuntos S y T de algún espacio métrico,
	con métrica d, la distancia de x a S, y la distancia de T a S
$\lVert f\rVert_B$	para una función $f : A \to \mathbb{C}^n$ y subconjunto $B \subset A$
	el supremo de la norma Euclidiana de f en B
$\mathcal{O}(U)$	el espacio de las funciones holomorfas en $U \subset \mathbb{C}^n$
$\mathcal{C}^k(U)$	el espacio de las funciones k-veces continuamente diferenciable
df	el gradiente real de $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
∇g	el gradiente complejo de $g : V \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

Símbolo	**Significado**
$A \subset\subset B$	A es relativamente compacto en B
$\mathrm{conv}(X)$	la envolvente convexa de X
$\mathbb{S}^{n-1}$	la esfera unitaria en $\mathbb{R}^n$
$a + \overline{\Delta} \cdot b \subset \mathbb{C}^n$	disco complejo $a + \overline{\Delta} \cdot b = \{a + z \cdot b : \lvert z \rvert \leq 1\}$ $(a, b \in \mathbb{C}^n)$
vecindad de a	conjunto abierto que contiene al punto a

Capítulo 1

Dominios de holomorfía

Uno de los fenómenos más interesantes observados en el estudio de las funciones holomorfas de varias variables es la existencia de pares de conjuntos abiertos $U \subset V \subset \mathbb{C}^n$ tales que toda función holomorfa en U se extiende holomórficamente hacia V, por ejemplo el Teorema de Extensión de Hartogs[7]: Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio y $K \subset U$ un compacto tal que $U - K$ es conexo, entonces toda función holomorfa en $U - K$ se extiende holomórficamente hacia U. Es claramente de algún interés determinar aquellos abiertos U para los cuales tal extensión no sea posible, estos abiertos seran llamados dominios de holomorfía. Como más adelante veremos, estos dominios desempeñarán un papel fundamental en la Teoría de Varias Variables Complejas.

1.1. Dominios de holomorfía

En el presente trabajo se requiere una introducción a la Teoría de Varias Variables Complejas, recomendamos V. Scheidemann [7], para más detalles. Para una introducción a la Teoría de Una Variable Compleja, recomendamos W. Rudin [5] y J.B. Conway [6].

Definición 1.1.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, $f \in \mathcal{O}(U)$ y $a \in U^c$. Diremos que la función holomorfa f se **extiende holomórficamente** hacia a, si existe una vecindad conexa V de a y una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(V)$ tal que $f \equiv g$ en un subconjunto abierto no vacio de $U \cap V$.

Observaciones:

1. Notemos que no requerimos que las funciones f y g coincidan en todo $U \cap V$, no estamos en el caso en que la función f se extienda a una función holomorfa en $U \cup V$. De este manera, si $f \in \mathcal{O}(U)$ se extiende holomórficamente hacia $a \in U^c$, entonces no necesariamente existe un dominio $W \subset \mathbb{C}^n$ y una función $g \in \mathcal{O}(W)$ tal que $U \subset W$, $a \in W$ y $f \equiv g$ en U. Nosotros usamos esta definición de extensión holomorfa para evitar las funciones multi-valuadas.

2. Por ejemplo, la función
$$z \mapsto \log z$$
definida en el dominio $U = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ se extiende holomórficamente hacia el punto $z = -1$, pero no existe forma de definir esta función holomórficamente en un dominio de $\mathbb{C}$ el cual contenga ambos U y el punto $z = -1$, a menos que trabajemos con funciones multi-valuadas.

Definición 1.1.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que U es un **dominio de holomorfía**, si existe una función $f \in \mathcal{O}(U)$ el cual no se extiende holomórficamente hacia ningún punto $a \in U^c$.

Observaciones:

1. Equivalentemente, $f \in \mathcal{O}(U)$ se extiende holomórficamente hacia a, si existe una vecindad conexa V de a y una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(V)$ tal que $f \equiv g$ en una componente conexa no vacia de $U \cap V$ (Principio de Identidad[7]).

2. Equivalentemente, $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, si existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ el cual no se extiende holomórficamente hacia ningún punto $a \in \partial U$.

La siguiente definición es una reformulación de la definición 1.1.2.

Definición 1.1.3. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que U es un **dominio de holomorfía** si existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que no existen conjuntos abiertos V, W en $\mathbb{C}^n$ y $g \in \mathcal{O}(V)$ con las siguientes propiedades:

a) $\emptyset \neq W \subset U \cap V$.

b) V es conexo y no está contenido en U.

c) $f = g$ en W.

Diremos que un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ es un **dominio de holomorfía** si cada una de sus componentes es un dominio de holomorfía.

La definición 1.1.3 nos permite definir el concepto de dominio de holomorfía débil.

Definición 1.1.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que U es un **dominio de holomorfía débil**, si no existen conjuntos abiertos V y W en $\mathbb{C}^n$ con las siguientes propiedades:

a) $\emptyset \neq W \subset U \cap V$.

b) V es conexo y no está contenido en U.

c) Para todo $f \in \mathcal{O}(U)$ existe una función $g \in \mathcal{O}(V)$ (necesariamente única) tal que $f \equiv g$ en W.

Definición 1.1.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{O}(U)$. Diremos que U es **dominio de existencia** de f o que el dominio U admite una **función singular** f, si no existen conjuntos abiertos V, W en $\mathbb{C}^n$ y $g \in \mathcal{O}(V)$ con las siguientes propiedades:

a) $\emptyset \neq W \subset U \cap V$.

b) V es conexo y no está contenido en U.

c) $f = g$ en W.

La frontera de U es llamado la **frontera natural** de f.

Observaciones:

1. $\mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía por definición.

2. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía entonces U es un dominio de holomorfía débil. Posteriormente mostraremos que los conceptos de dominio de holomorfía y dominio de holomorfía débil son equivalentes.

3. Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ es dominio de holomorfía si y solamente si U es dominio de existencia de alguna función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$.

4. Equivalentemente en las definiciones 1.1.3, 1.1.4, 1.1.5 podemos asumir W una componente conexa de la intersección $U \cap V$ (Principio de identidad[7]).

Definición 1.1.6. Para $n \geq 2$, sea

$$H = \{z \in \Delta^n : |z_1| > q_1 \vee |z_j| < q_j \text{ para } j = 2, \ldots, n\}$$

entonces (Δ^n, H) es llamado una **figura de Hartogs Euclidiana**.

Ejemplos:

1. El disco unitario $\Delta \subset \mathbb{C}$ es un dominio de holomorfía, considerando la función holomorfa

$$\Delta \ni z \mapsto f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} z^{j!} \tag{α}$$

observamos que cuando $r \in (0,1)$ y $\theta \in \mathbb{Q}$ entonces

$$\lim_{r \to 1^-} f(re^{2\pi i\theta}) = +\infty$$

los puntos $e^{2\pi i\theta}$ forman un conjunto denso en $\partial\Delta$.

2. El polidisco unitario $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, considerando la función holomorfa

$$\Delta^n \ni z \mapsto f(z_1) + \cdots + f(z_n)$$

donde f es la función de (α). Notemos que para $\theta \in \mathbb{Q}$ y $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \partial\Delta$ los puntos

$$(e^{2\pi i\theta}, z_2, \ldots, z_n), (z_1, e^{2\pi i\theta}, \ldots, z_n), \ldots, (z_1, z_2, \ldots, e^{2\pi i\theta})$$

forman un conjunto denso en $\partial\Delta^n$.

3. Si (Δ^n, H) es una figura de Hartogs en $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$, entonces toda función holomorfa en H se extiende holomórficamente hacia Δ^n (Fenómeno de Hartogs[7]). Por lo tanto H no es dominio de holomorfía.

4. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio y $K \subset U$ compacto tal que $U - K$ es conexo, entonces toda función holomorfa en $U - K$ se extiende holomórficamente hacia U (Teorema de Extensión de Hartogs[7]). Por lo tanto $U - K$ no es dominio de holomorfía.

Definición 1.1.7. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{O}(U)$. Diremos que f es **esencialmente ilimitado** en ∂U, si para todo abierto conexo V que intersecta a la frontera de U y toda componente conexa W de $U \cap V$ existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset W$ tal que $f(z_j) \longrightarrow \infty$, cuando $j \to \infty$.

El siguiente lema, el cual es un argumento de Topología General[18], será usado frecuentemente, dejamos la prueba al lector.

Lema 1.1.1 (lema técnico)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Sea p un punto en ∂U, sea V una vecindad conexa de p y sea W una componente conexa de $U \cap V$. Entonces*

$$\partial W \cap V \subset \partial U.$$

Proposición 1.1.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{O}(U)$ esencialmente ilimitado en ∂U. Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Supongamos por contradicción, que f se extiende holomórficamente hacia algún punto $b \in \partial U$, entonces existe una vecindad conexa V de b y una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(V)$ tal que

$$f \equiv g \text{ en una componente conexa } W \text{ de } U \cap V.$$

Sea $a \in \partial W \cap V$ entonces por el Lema 1.1.1 $a \in \partial U$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(a,r)} \subset V$. Sea Ω una componente conexa de $B(a,r) \cap W$ entonces Ω es una componente conexa de $B(a,r) \cap U$. Desde que f es esencialmente ilimitado existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset \Omega$ tal que

$$f(z_j) \longrightarrow \infty \;\; (j \to \infty).$$

Como $\Omega \subset W$ se sigue que

$$g(z_j) \longrightarrow \infty \;\; (j \to \infty).$$

Desde que $g \in \mathcal{O}(V)$ la función g es continua en V y por lo tanto acotada en el compacto $\overline{B(a,r)}$. Como $(z_j)_{j\geq 1} \subset \Omega \subset \overline{B(a,r)}$ tenemos que la sucesión $(g(z_j))_{j\geq 1}$ es acotada, lo cual es una contradicción. $\square$

Para muchas aplicaciones el teorema siguiente es suficiente, el cual probaremos posteriormente, mediante el Teorema de Cartan-Thullen.

Teorema 1.1.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y suponer que para cada $a \in \partial U$ existe una función holomorfa $f_a \in \mathcal{O}(U)$ tendiendo al ∞ en a (esto es, si $(z_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión en U con $z_j \to a$ entonces $f_a(z_j) \to \infty$). Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Consideremos algunas consecuencias de este resultado.

Corolario 1.1.1. *Todo domino $U \subset \mathbb{C}$ es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Consideremos para cada $a \in \partial U$ la función holomorfa

$$U \ni z \mapsto \frac{1}{z-a}$$

$\square$

Ejemplo 1.1.1. El polidisco unitario $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, consideremos para cada $a \in \partial \Delta^n$ la función holomorfa

$$\Delta^n \ni z \mapsto \frac{1}{z_j - a_j}$$

donde j es tal que $a_j \in \partial \Delta$.

Ejemplo 1.1.2. La bola Euclidiana $B(0,R) \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, consideremos para cada $a \in \partial B(0,R)$ la función holomorfa

$$B(0,R) \ni z \mapsto \frac{1}{R^2 - \langle z, a \rangle}.$$

Corolario 1.1.2. *Todo dominio convexo $U \subset \mathbb{C}^n$ (esto es, U es convexo considerado como un subconjunto de $\mathbb{R}^{2n}$) es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $a \in \partial U$, entonces existe un hiperplano de soporte[14] para U en a,

$$H = \{z \in \mathbb{C}^n : (z-a) \cdot b = 0\}$$

donde $b \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto la función

$$U \ni z \mapsto \frac{1}{\langle z-a, b \rangle}$$

es holomorfa en U (notar que, $\Re \langle z-a, b \rangle = (z-a) \cdot b$). Entonces U es un dominio de holomorfía.

$\square$

Ejemplo 1.1.3. El triángulo de Hartogs

$$T = \{(z,w) \in \Delta^2 : |z| < |w|\}$$

es un dominio de holomorfía, considerando la función holomorfa

$$T \ni (z,w) \mapsto \frac{1}{z - e^{i\theta}w} \in \mathbb{C} \ \ , \ \ (\theta \in \mathbb{R})$$

para los puntos de la diagonal $(e^{i\theta}w, w) \in \partial T$ y la función holomorfa

$$T \ni (z,w) \mapsto \frac{1}{w - e^{i\theta}} \in \mathbb{C} \ \ , \ \ (\theta \in \mathbb{R})$$

para los puntos $(z, e^{i\theta}) \in \partial T$.

1.2. Dominios holomórficamente convexos

En ésta sección introduciremos la noción de convexidad holomorfa y estableceremos el teorema de H. Cartan y P. Thullen, el cual caracterizará los dominios de holomorfía en términos de convexidad holomorfa.

Para motivar la definición de dominios holomórficamente convexos comenzaremos presentando la siguiente caracterización de dominios convexos[14].

Teorema 1.2.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Entonces Ω es convexo si y solamente si para todo compacto $K \subset \Omega$,*

$$\widehat{K}_\Omega^{lin} = \left\{ x \in \Omega : f(x) \le \sup_{x \in K} f(x) \ \text{ para toda función lineal} \, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \right\}$$

es compacto.

Podemos utilizar el Teorema 1.2.1 como nuestra definición de convexidad. Lo cual nos motiva la noción de convexidad holomorfa, reemplazando funciones lineales por funciones holomorfas.

Definición 1.2.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $K \subset U$ un compacto. El conjunto

$$\widehat{K}_U = \left\{ z \in U : |f(z)| \le \sup_{z \in K} |f(z)| \ \text{ para toda función holomorfa} \, f : U \to \mathbb{C} \right\}$$

Es llamado la **envolvente convexa holomorfa** de K en U, también denotada por $\mathrm{hconv}_U(K)$ o $\widehat{K}_U^{hol}$. Diremos que U es un **dominio holomórficamente convexo** si para todo compacto $K \subset U$ la envolvente convexa holomorfa $\widehat{K}_U$ es relativamente compacta en U, y por tanto compacta. Si $K = \widehat{K}_U$ diremos que K es un compacto **holomórficamente convexo** o $\mathcal{O}(U)$**-convexo**.

Las siguientes propiedades serán usadas frecuentemente, las cuales se deducen claramente de la definición 1.2.1, dejamos la prueba al lector.

Proposición 1.2.1. *Sean $U, V \subset \mathbb{C}^n$ dominios y $K, L \subset U$ compactos. Entonces se cumplen las siguientes propiedades.*

(a) $K \subset \widehat{K}_U \subset U$.

(b) $\widehat{K}_U$ *es acotado y relativamente cerrado en* U.

(c) *Si* $M = \widehat{K}_U$ *es compacto, entonces* $\widehat{M}_U = M$.

(d) *Si* $K \subset L$*, entonces* $\widehat{K}_U \subset \widehat{L}_U$.

(e) *Si* $U \subset V$*, entonces* $\widehat{K}_U \subset \widehat{K}_V$.

(f) *La envolvente convexa holomorfa* $\widehat{K}_U$ *es compacta si y solamente si*

$$d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right) > 0.$$

(g) *Para cada* $M, \epsilon > 0$ *y* $a \in U - \widehat{K}_U$*, existe* $f \in \mathcal{O}(U)$ *tal que*

$$\|f\|_K < \epsilon \text{ y } |f(a)| > M.$$

(h) *Para cada* $f \in \mathcal{O}(U)$, $\|f\|_{\widehat{K}_U} \leq \|f\|_K$.

Demostración: Probaremos la propiedad (b). Sea $r > 0$ tal que $K \subset \overline{\Delta^n(0,r)}$. Dado que las funciones coordenadas $z \mapsto z_j$ son holomorfas en U, entonces para $z \in \widehat{K}_U$ tenemos que $|z_j| \leq \sup_K |z_j| \leq r$. Por lo tanto $\widehat{K}_U \subset \overline{\Delta^n(0,r)}$. □

Proposición 1.2.2. *Todo dominio en $\mathbb{C}$ es holomórficamente convexo.*

Demostración: Sea $K \subset U$ compacto. Supongamos que existe $a \in \overline{\widehat{K}_U} - \widehat{K}_U$, entonces $a \in \partial U$ dado que $\widehat{K}_U$ es cerrado en U. Sea $(z_j)_{j\geq 1} \subset \widehat{K}_U$ tal que $z_j \to a$ y consideremos la función holomorfa

$$f(z) = \frac{1}{z-a} \text{ en } U.$$

Entonces $|f(z_j)| \leq \|f\|_K$, lo cual es una contradicción. □

Para $n \geq 2$ mostraremos que existen dominios que no son holomórficamente convexos.

Ejemplo 1.2.1. La envolvente convexa holomorfa depende del dominio. Consideremos el compacto $K = \mathbb{S}^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$.
Si $U = (\mathbb{C}^n)^*$

$$\widehat{K}_U = \begin{cases} K & , \ n = 1 \\ \overline{B(0,1)} - \{0\} & , \ n \geq 2 \end{cases}$$

Si $n = 1$ entonces $\widehat{K}_U = K$ considerando las funciones $f(z) = 1/z$ y $f(z) = z$ en U. Si $n \geq 2$ el Teorema de extensión de Hartogs[7] implica que $\widehat{K}_U = \overline{B(0,1)} - \{0\}$ conjuntamente con el Principio del Módulo Máximo[7] en la bola compacta $B[0,1]$.
Si $U = \mathbb{C}^n$

$$\widehat{K}_U = \overline{B(0,1)}$$

para todo $n \geq 1$.

Proposición 1.2.3. *Si $K \subset \mathbb{C}^n$ es un compacto, entonces $\widehat{K}_{\mathbb{C}^n} \subset \mathrm{conv}(K)$. En particular si $K \subset U$ es un compacto convexo, entonces K es un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo.*

Demostración: Sea $z_0 \in \widehat{K}_{\mathbb{C}^n}$. Supongamos por contradicción que $z_0 \notin \mathrm{conv}(K)$ entonces existe un hiperplano[14]:

$$\Re\langle z - a, b\rangle = 0$$

que separa z_0 de K, esto es $\Re\langle z - a, b\rangle \leq 0$ para todo $z \in K$ y $\Re\langle z_0 - a, b\rangle > 0$. Consideremos la función entera

$$f(z) = e^{\langle z - a, b\rangle}$$

entonces $|f(z_0)| > 1 \geq \|f\|_K$, lo cual es una contradicción. □

Proposición 1.2.4. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio convexo, entonces U es holomórficamente convexo.*

Demostración: Supongamos por contradicción que U no es holomórficamente convexo, entonces existe $a \in cl\left(\widehat{K}_U\right)$ tal que $a \in \partial U$, luego como U es convexo, existe un hiperplano de soporte[14] para U en a,

$$H = \{z \in \mathbb{C}^n : (z - a) \cdot b = 0\}$$

donde $b \in \mathbb{C}^n$. Por lo tanto la función

$$U \ni z \mapsto \frac{1}{\langle z-a, b\rangle}$$

es holomorfa en U (notar que, $\Re\langle z-a, b\rangle = (z-a)\cdot b$), lo cual es una contradicción dado que $a \in cl\left(\widehat{K}_U\right)$. $\square$

En general, convexidad holomorfa es una propiedad mucho más débil que convexidad lineal (Teorema 1.2.1).

Proposición 1.2.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $K \subset U$ un compacto. Si $M \subset U - K$ es una componente conexa, el cual es relativamente compacta en U, entonces $M \subset \widehat{K}_U$.*

Demostración: Como $\partial M \subset U$ entonces $\partial M \subset K$. Dado que $M \subset\subset U$ entonces $M \subset \widehat{\partial M}_U$ (Principio del Módulo Máximo[7]). $\square$

Definición 1.2.2. Un **disco analítico** es una aplicación continua

$$S : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

cuya restricción a Δ es holomorfa. La **frontera** de un disco analítico S, denotado por ∂S, será la imagen $S(\partial\Delta)$. Para un disco analítico $S : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$, las imágenes $S(\overline{\Delta})$ y $S(\Delta)$ frecuentemente serán denotadas por S y $\mathring{S}$.

Proposición 1.2.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $S \subset U$ es un disco analítico, entonces*

$$S \subset \widehat{\partial S}_U$$

Demostración: Aplicando el Principio del Módulo Máximo[7], obtenemos el principio del módulo máximo vía discos analíticos,

$$\|f\|_S \leq \|f\|_{\partial S}$$

para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$. $\square$

1.3. Lema de Thullen

Definición 1.3.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $a \in U$ y $r \in (0, \infty)^n$ un multiradio, definimos

$$\delta_U^r(a) = \sup\{\lambda > 0 : \Delta^n(a, \lambda r) \subset U\}$$

Observaciones:

1. $\lambda \leq \delta_U^r(a) \Longleftrightarrow \Delta^n(a, \lambda r) \subset U$.

Lema 1.3.1. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio propio y $a \in U$, entonces*

$$d(a, \partial U) = \inf\{\delta_U^r(a) : \|r\| = 1\}$$

Demostración: Denotemos $\lambda = d(a, \partial U)$, $\eta = \inf\{\delta_U^r(a) : \|r\| = 1\}$

$$\lambda \leq \eta \Longleftrightarrow \lambda \leq \delta_U^r(a) \Longleftrightarrow \Delta(a, \lambda r) \subset U$$

pero $\Delta(a, \lambda r) \subset B(a, \lambda) \subset U$ entonces $\lambda \leq \eta$. Supongamos $\lambda < \eta$ entonces $B(a, \eta) \not\subset U$ lo cual implica que existe $z \in B(a, \eta) - U$. Como $\|z - a\| < \eta$ entonces

$$|z_j - a_j| < \frac{\eta |z_j - a_j|}{\|(|z_1 - a_1|, |z_2 - a_2|, \ldots, |z_n - a_n|)\|}$$

lo cual implica que $z \in \Delta(a, \eta r)$ donde

$$r = \frac{(|z_1 - a_1|, |z_2 - a_2|, \ldots, |z_n - a_n|)}{\|(|z_1 - a_1|, |z_2 - a_2|, \ldots, |z_n - a_n|)\|}.$$

Por lo tanto $\Delta(a, \eta r) \not\subset U$. Por la observación $\eta > \delta_U^r(a)$, lo cual es una contradicción. □

Teorema 1.3.1 (Lema de Thullen)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, sea K un compacto contenido en U y sea $r \in (0, \infty)^n$ un multiradio. Si $g \in \mathcal{O}(U)$ tiene la propiedad,*

$$\delta_U^r(a) \geq |g(a)| \;,\; \forall a \in K.$$

Entonces para cada $b \in \widehat{K}_U$ y para cada $f \in \mathcal{O}(U)$ la serie de Taylor de f en b

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(b)}{\alpha!}(z - b)^\alpha$$

converge en el polidisco $\Delta(b, |g(b)| \cdot r)$. En particular, si U es un dominio de holomorfía débil, entonces $\Delta(b, |g(b)| \cdot r) \subset U$.

Demostración: Podemos asumir que $\delta_U^r(a) > |g(a)|$ para todo $a \in K$, desde que g puede ser reemplazado por $(1 - \epsilon)g$ por cualquier $\epsilon \in (0, 1)$, luego hacemos $\epsilon \to 0$. Por demostrar que la serie

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{D^\alpha f(b)}{\alpha!}(z - b)^\alpha$$

converge en el polidisco $\Delta(b, |g(b)|\cdot r)$. Por el Lema de Abel[7], es suficiente probar que el conjunto

$$\left\{ \left| \frac{D^\alpha f(b)}{\alpha!} g^{|\alpha|}(b)\cdot r^\alpha \right| : \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \right\}$$

es acotado. Como

$$\bigcup_{a\in K} \Delta(a, |g(a)|\cdot r) \subset\subset U$$

entonces

$$M = \sup \left\{ |f(z)| : z \in \bigcup_{a\in K} \Delta(a, |g(a)|\cdot r) \right\} < \infty$$

Sea $a \in K - Z_g$, entonces por las estimativas de Cauchy[7] en $\overline{\Delta(a, |g(a)|\cdot r)} \subset U$

$$|\partial^\alpha f(a)| \leq \frac{M\cdot \alpha!}{(|g(a)|\cdot r)^\alpha} \Rightarrow \left| \frac{\partial^\alpha f(a)}{\alpha!} g^{|\alpha|}(a)\cdot r^\alpha \right| \leq M$$

para todo $a \in K$. Como las derivadas parciales de f son holomorfas en U[7] entonces

$$\left| \frac{D^\alpha f(b)}{\alpha!} g^{|\alpha|}(b)\cdot r^\alpha \right| \leq M$$

para todo $b \in \widehat{K}_U$ (Proposición 1.2.1). □

Corolario 1.3.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset U$ un compacto, y $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que*

$$|g(a)| \leq d(a, \partial U) \ , \ \forall a \in K.$$

Si $b \in \widehat{K}_U$ y $f \in \mathcal{O}(U)$ entonces la serie de Taylor de f en b

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(b)}{\alpha!}(z-b)^\alpha$$

converge en la bola $B(b, |g(b)|)$.

Demostración: Consideremos la siguiente identidad

$$B(0,1) = \bigcup_{\|r\|=1} \Delta^n(0, r)$$

conjuntamente con el Lema de Thullen 1.3.1. □

Corolario 1.3.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía débil y sea $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Si*

$$|g(a)| \leq d(a, \partial\Omega) \ \ , \ \ \forall a \in K$$

donde K es un subconjunto compacto de Ω, entonces

$$|g(b)| \leq d(b, \partial\Omega) \ \ , \ \ \forall b \in \widehat{K}_\Omega$$

en particular, si Ω es un dominio de holomorfía débil, entonces la función

$$z \mapsto -\log d(z, \partial\Omega)$$

es plurisubarmónica en Ω (Definición 2.1.3), *esto es*, *Ω es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Sea $b \in \widehat{K}_\Omega$. Entonces por el Corolario 1.3.1 la serie de Taylor de toda $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge en $B(b, |g(b)|)$. Como Ω es un dominio de holomorfía débil, entonces $B(b, |g(b)|) \subset \Omega$. $\square$

Corolario 1.3.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset U$ un compacto y $b \in \widehat{K}_U$. Si $f \in \mathcal{O}(U)$ entonces, la serie de Taylor de f en b,*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \frac{\partial^\alpha f(b)}{\alpha!}(z-b)^\alpha$$

converge en la bola $B(b, d(K, \partial U))$.

Demostración: Consideremos la función constante $g(z) = d(K, \partial U)$ en el Corolario 1.3.1. $\square$

Corolario 1.3.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía débil. Entonces para todo compacto $K \subset U$, se cumple la ecuación*

$$d(K, \partial U) = d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right)$$

donde $d(K, \partial U)$ es la distancia Euclidiana entre K y ∂U.

Demostración: Sea $b \in \widehat{K}_U$. Por el Corolario 1.3.3 la serie de Taylor de toda función $f \in \mathcal{O}(U)$ converge en la bola

$$B(b, d(K, \partial U))$$

como U es un dominio de holomorfía débil entonces

$$B(b, d(K, \partial U)) \subset U.$$

Por lo tanto $d(K, \partial U) \leq d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right)$. $\square$

Corolario 1.3.5. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía débil, entonces U es holomórficamente convexo.*

Demostración: Sea $K \subset U$ un compacto. Como U es un dominio de holomorfía débil entonces por el Corolario 1.3.4,

$$d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right) = d(K, \partial U) > 0.$$

$\square$

1.4. Construcción de funciones holomorfas no acotadas

Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio holomórficamente convexo, nuestro objetivo en esta sección es construir una función holomorfa en U tal que no se extienda holomórficamente hacia ningún punto $z \in \partial U$. Para esto utilizaremos exhaustividades normales.

Definición 1.4.1. Una **exhaustividad normal** de U es una sucesión de compactos $(K_j)_{j \geq 1} \subset U$ tales que:

- $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$, para todo $j \geq 1$.
- $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

Lema 1.4.1 (Descomposición de un abierto en compactos)**.** *Si U es un abierto de $\mathbb{C}^n$, entonces U admite una exhaustividad normal,*

$$U = \bigcup_{j \geq 1} K_j \ ,$$

en particular, si $K \subset U$ es un compacto, entonces K está contenido en algún K_j.

Demostración: Es suficiente con tomar la siguiente sucesión de compactos,

$$K_j = \left\{ z \in U : d(z, \partial U) \geq \frac{1}{j} \ , \ \|z\| \leq j \right\} \ (j = 1, 2, \ldots)$$

$\square$

Lema 1.4.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si U es holomórficamente convexo, entonces U admite una exhaustividad normal,*

$$U = \bigcup_{j \geq 1} K_j \ ,$$

donde cada compacto K_j es $\mathcal{O}(U)$-convexo.

Demostración: Si $U = \mathbb{C}^n$ es suficiente con tomar la sucesión

$$K_j = \overline{B(0,j)} \ \ (j = 1, 2, \ldots)$$

notemos que $K_j \subset \widehat{K}_j \subset \mathrm{conv}(K_j) = K_j$. Supongamos ahora que $U \neq \mathbb{C}^n$. Definamos para cada $j \geq 1$

$$L_j = \left\{ z \in U : d(z, \partial U) \geq 1/j \ , \ \|z\| \leq j \right\}$$

Por el Lema 1.4.1, la sucesión $(L_j)_{j \geq 1} \subset U$ es una exhaustividad para U. Sea

$$K_1 = \left(\widehat{L}_1\right)_U$$

notamos que K_1 es un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo por la Proposición 1.2.1 y $L_1 \subset K_1$. Por el Lema 1.4.1 $K_1 \subset \mathring{L}_{j_2}$ para algún $1 < j_2$. Sea

$$K_2 = \left(\widehat{L}_{j_2}\right)_U$$

notamos que K_2 es un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo por la Proposición 1.2.1, $L_2 \subset K_2$ y $K_1 \subset \mathring{K}_2$. Por el Lema 1.4.1 $K_2 \subset \mathring{L}_{j_3}$ para algún $j_2 < j_3$. Sea

$$K_3 = \left(\widehat{L}_{j_3}\right)_U$$

notamos que K_3 es un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo por la Proposición 1.2.1, $L_3 \subset K_3$ y $K_2 \subset \mathring{K}_3$. Procediendo por inducción obtenemos una sucesión $(K_j)_{j \geq 1} \subset U$ de compactos $\mathcal{O}(U)$-convexos tales que $L_j \subset K_j$ y $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Se sigue que

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{K}_j.$$

Por lo tanto $(K_j)_{j \geq 1} \subset U$ es la sucesión requerida. □

Una consecuencia directa del Lema 1.4.2 es la siguiente proposición.

Proposición 1.4.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces U es holomórficamente convexo si y solamente si U admite una exhaustividad normal $(K_j)_{j \geq 1}$ donde cada compacto K_j es $\mathcal{O}(U)$-convexo.*

Definición 1.4.2. Diremos que $z \in \mathbb{C}^n$ es **racional**, si la parte real e imagniária de cada coordenada de z es racional.

Lema 1.4.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces existe una sucesión $(a_j)_{j\geq 1} \subset U$ densa en U.*

Demostración: Sea

$$D = \{z \in U : z \text{ es racional}\}.$$

Afirmamos que D es denso en U. Sean $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in U$ y $r > 0$ tal que $B(z, r) \subset U$. Dado que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ tenemos que para cada $j \geq 1$, existen $p_j, q_j \in \mathbb{Q}$ tales que

$$p_j \in \left(\Re(z_j) - \frac{r}{\sqrt{2n}}, \Re(z_j) + \frac{r}{\sqrt{2n}}\right)$$

$$q_j \in \left(\Im(z_j) - \frac{r}{\sqrt{2n}}, \Im(z_j) + \frac{r}{\sqrt{2n}}\right)$$

entonces

$$w = (p_1 + iq_1, \ldots, p_n + iq_n) \in (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})^n$$

$$\|w - z\|^2 = |\Re(z_1) - p_1|^2 + |\Im(z_1) - q_1|^2 + \ldots + |\Re(z_n) - p_n|^2 + |\Im(z_n) - q_n|^2 < r^2$$

se sigue que $w \in B(z, r)$, así D es denso en U. Como D es numerable, existe una aplicación biyectiva $a : \mathbb{N} \to D$, $j \mapsto a_j$. Por lo tanto $(a_j)_{j\geq 1}$ es la sucesión requerida. □

Lema 1.4.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $(K_j)_{j\geq 1}$ es una exhaustividad normal de U con*

$$K_j = \widehat{(K_j)}_U \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

y $(z_j)_{j\geq 1}$ es una sucesión con

$$z_j \in K_{j+1} - K_j \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

Entonces existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} |f(z_j)| = \infty.$$

Demostración: Como $z_j \notin K_j = \widehat{(K_j)}_U$ entonces existe una función holomorfa $f_j \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$|f_j(z_j)| > 1 > \|f_j\|_{K_j} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

Sea $p_1 = 1$. Dado que $|f_2(z_2)| > 1$ existe $p_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^2}|f_2(z_2)|^{p_2} - \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k}|f_k(z_2)|^{p_k} \geq 3$$

Dado que $|f_3(z_3)| > 1$ existe $p_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{3^2}|f_3(z_3)|^{p_3} - \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2^k}|f_k(z_3)|^{p_k} \geq 4$$

Dado que $|f_4(z_4)| > 1$ existe $p_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{4^2}|f_4(z_4)|^{p_4} - \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{2^k}|f_k(z_4)|^{p_k} \geq 5$$

Procediendo por inducción obtenemos una sucesión $(p_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{N}$ de modo que para todo $j \geq 2$

$$\frac{1}{j^2}|f_j(z_j)|^{p_j} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2^k}|f_k(z_j)|^{p_k} \geq j+1$$

Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ definido por

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f_k(z)^{p_k} \qquad (\alpha)$$

Por el M-test de Weierstrass[7] la serie (α) converge absolutamente y uniformemente en K_j, para todo $j \geq 1$. Por lo tanto la serie (α) converge uniformemente en partes compactas de U. Se sigue que f es una función holomorfa en U (Teorema de Convergencia de Weierstrass[7]). Para todo $j \geq 2$ tenemos que

$$|f(z_j)| \geq \frac{1}{j^2}|f_j(z_j)|^{p_j} - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{1}{2^k}|f_k(z_j)|^{p_k} - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k}|f_k(z_j)|^{p_k} \geq (j+1) - \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \geq j \quad (\beta)$$

de la estimación (β) se sigue que $f(z_j) \longrightarrow \infty$, cuando $j \to \infty$. □

Para un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$, construiremos ahora una sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset U$, que se acumula en todo punto de la frontera ∂U.

Lema 1.4.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y sea $(K_j)_{j\geq 1}$ una exhaustividad normal de U. Entonces existe una subsucesión $(K_{j_l})_{l\geq 1}$ y una sucesión $(z_l)_{l\geq 1} \subset U$ tales que cumplen lo siguiente:*

a) $z_l \in K_{j_{l+1}} - K_{j_l}$ *para todo* $l \geq 1$.

b) *Para todo $a \in \partial U$, para toda vecindad conexa V de a, y para toda componente conexa W de $U \cap V$, tenemos que*

$$\text{cardinal}\{l \geq 1 : z_l \in W\} = \infty.$$

Demostración: Por el Lema 1.4.3, sea $(a_k)_{k\geq 1} \subset U$ una sucesión densa en U, y para cada $k \geq 1$ sea $B_k = B\,(a_k, r_k) \subset U$ donde $r_k = d\,(a_k, \partial U)$. Ahora sea $(Q_j)_{j\geq 1}$ una sucesión cuyos elementos son elementos de $(B_k)_{k\geq 1}$ de forma que cada B_k se repita un número infinito de veces en $(Q_l)_{l\geq 1}$, por ejemplo

$$(Q_j)_{j\geq 1} = \big(B_1, B_1, B_2, B_1, B_2, B_3, B_1, B_2, B_3, B_4, \ldots\big).$$

Para cada $l \geq 1$ sea (dado que $Q_l \not\subset K_j$ para ningún j)

$$z_l \in Q_l \cap (K_{j_{l+1}} - K_{j_l})$$

Sea V un dominio intersectando a ∂U y W una componente conexa de $U \cap V$. Sea $a \in \partial W \cap V \subset \partial U$ (Lema 1.1.1). Sea $r = d(a, \partial V)$. Como la sucesión $(a_k)_{k\geq 1}$ es densa en U tenemos que $a_k \in B(a, r/2) \cap W \subset U$ para algún k, entonces

$$r_k = d(a_k, \partial U) \leq \|a_k - a\| < \frac{r}{2} < d(a_k, \partial V)$$

se sigue que $B(a_k, r_k) \subset V$, y por conexidad $B_k \subset W$. Por lo tanto tenemos que $B_k = Q_{j_l}$ para una infinidad de indices $\{j_1 < j_2 < \ldots < j_l < \ldots\}$, de donde obtenemos una subsucesión $(z_{j_l})_{l\geq 1} \subset B_k \subset W$. $\square$

Teorema 1.4.1. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es holomórficamente convexo, entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $(K_j)_{j\geq 1} \subset U$ una exhaustividad normal para U, donde cada K_j es $\mathcal{O}(U)$-convexo (1.4.2). Por el Lema 1.4.4 existe una sucesión $z_l \in K_{j_{l+1}} - K_{j_l}$ que se acumula en ∂U, y por el Lema 1.4.5 existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$f(z_l) \longrightarrow \infty \ \ (l \to \infty)$$

entonces f es esencialmente ilimitado en ∂U. Por lo tanto U es un dominio de holomorfía (Proposición 1.1.1) $\square$

Corolario 1.4.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y suponer para cada $a \in \partial U$ existe una función $f_a \in \mathcal{O}(U)$ tendiendo al ∞ en a (esto es, para toda sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset U$ con $z_j \to a$ tenemos que $f_a(z_j) \to \infty$). Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Por el Teorema 1.4.1 es suficiente demostrar que es U holomórficamente convexo. Sea $K \subset U$ un compacto, debemos probar que $\widehat{K}_U$ es compacto, el cual equivale a probar que $d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right) > 0$ (Proposición 1.2.1). Supongamos por contradicción que $d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right) = 0$, entonces existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset \widehat{K}_U$ con

$$d(z_j, \partial U) \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Desde que $\widehat{K}_U \subset\subset U$ podemos asumir que la sucesión converge a un punto $a \in cl\left(\widehat{K}_U\right)$, y desde que $d\left(z_j, \partial U\right) \longrightarrow 0$ tenemos que $a \in \partial U$. Luego existe una función $f_a \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$f_a(z_j) \longrightarrow \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

Por la Proposición 1.2.1, $\|f_a\|_{\widehat{K}_U} \leq \|f_a\|_K < \infty$, lo cual es una contradicción. □

1.5. El teorema de Cartan-Thullen

Ahora podemos enunciar y demostrar un teorema debido a H. Cartan y P. Thullen caracterizando los dominios de holomorfía en términos de convexidad holomorfa.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Cartan-Thullen)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *U es un dominio de holomorfía débil.*

(b) *Para todo compacto $K \subset U$, la ecuación*

$$d(K, \partial U) = d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right)$$

se cumple.

(c) *U es un dominio holomórficamente convexo.*

(d) *U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: La implicación $(a) \Rightarrow (b)$ se sigue del corolorio 1.3.4. La implicación $(b) \Rightarrow (c)$ es clara. La implicación $(c) \Rightarrow (d)$ se sigue del teorema 1.4.1 y la implicación $(d) \Rightarrow (a)$ es clara. □

Definición 1.5.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que un subconjunto $D \subset \Omega$ es **discreto** en Ω, si D no tiene puntos de acumulación en Ω.

Corolario 1.5.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. U es un dominio de holomorfía si y solamente si para todo conjunto infinito $D \subset U$ discreto en U, existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\sup\limits_{D} |f| = \infty$.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Dado que U es holomórficamente convexo (Teorema 1.5.1), existe una exhaustividad normal $(K_j)_{j\geq 1} \subset U$ con $K_j = \widehat{(K_j)}_U$ (Lema 1.4.2), entonces $D \cap K_j$ es finito (o vacio) para todo $j \geq 1$. Sea $z_1 \in D - K_1$ luego $z_1 \in K_{j_2}$ donde $j_2 > 1$. Sea $z_2 \in D - K_{j_2}$ luego $z_2 \in K_{j_3}$ donde $j_3 > j_2$. Procediendo por inducción construimos una sucesión $(z_l)_{l\geq 1}$ tal que

$$z_l \in K_{j_{l+1}} - K_{j_l} \quad (l = 1, 2, \ldots)$$

luego por el Lema 1.4.4 existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$f(z_j) \longrightarrow \infty \text{ cuando } j \to \infty$$

$[\Leftarrow]$ Afirmamos que U es holomórficamente convexo. Sea $K \subset U$ un compacto. Supongamos por contradicción que $\widehat{K}_U$ no es compacto, entonces existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset \widehat{K}_U$ tal que

$$z_j \longrightarrow a \in \partial U \text{ cuando } j \to \infty$$

Sea $D = \{z_j : j \geq 1\}$ entonces existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\sup_{j\geq 1} |f(z_j)| = \infty$$

lo cual es una contradicción, dado que f es acotado sobre $\widehat{K}_U$. Por lo tanto U es un dominio de holomorfía (Teorema 1.5.1). $\square$

Una consecuencia directa del Corolario 1.5.1 es la siguiente proposición.

Proposición 1.5.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. U es un dominio de holomorfía si y solamente si para cada sucesión $(a_j)_{j\geq 1}$ en U convergente a un punto $a \in \partial U$, existe una función $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |f(a_j)| = \infty.$$

1.6. Propiedades de dominios de holomorfía

En ésta sección daremos algunos ejemplos de dominios de holomorfía y algunas propiedades de estabilidad de dominios de holomorfía bajo operaciones de conjuntos.

Proposición 1.6.1. *Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de dominios de holomorfía y sea U una componente conexa del interior de*

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$$

entonces U es un dominio de holomorfía.

Demostración: Sea $K \subset U$ un compacto. Observamos que $\widehat{K}_U \subset \widehat{K}_{U_\lambda}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1

$$d(\widehat{K}_U, \partial U_\lambda) \geq d(\widehat{K}_{U_\lambda}, \partial U_\lambda) = d(K, \partial U_\lambda) \geq d(K, \partial U)$$

Por lo tanto $\Delta(\widehat{K}_U, r) \subset U_\lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$, donde $r = d(K, \partial U) > 0$. Entonces

$$\Delta(\widehat{K}_U, r) \subset \operatorname{int}\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda\right)$$

Desde que $\widehat{K}_U \subset U$ tenemos que $\Delta(\widehat{K}_U, r) \subset U$, esto es, $d(\widehat{K}_U, \partial U) \geq r$. Por lo tanto $d(K, \partial U) = d(\widehat{K}_U, \partial U)$. Por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1 U es un dominio de holomorfía. $\square$

Proposición 1.6.2. *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ dominios y $F \in \mathcal{O}(U, V)$ un mapeo holomorfo propio, entonces U es un dominio de holomorfía, si V es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $K \subset U$ compacto. Desde que $f\left(\widehat{K}_U\right) \subset \widehat{f(K)}_V$, se sigue que $\widehat{K}_U$ es compacto. Por lo tanto U es holomórficamente convexo. $\square$

Proposición 1.6.3. *Sean $U_1 \subset \mathbb{C}^n$, $U_2 \subset \mathbb{C}^m$ dominios de holomorfía. Entonces el producto Cartesiano $U_1 \times U_2 \subset \mathbb{C}^{n+m}$ es también un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $K \subset U_1 \times U_2$ un compacto. Sean

$$\pi_1 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$$

$$\pi_2 : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$$

las proyecciones canónicas. Sea $K_1 = \pi_1(K)$ y $K_2 = \pi_2(K)$, entonces

$$K \subset K_1 \times K_2 \subset U_1 \times U_2$$

Como $K_j \subset U_j$ es compacto, entonces $\widehat{(K_j)}_{U_j}$ es compacto. Desde que

$$\widehat{K}_{U_1 \times U_2} \subset \widehat{(K_1)}_{U_1} \times \widehat{(K_2)}_{U_2}$$

se sigue que $\widehat{K}_{U_1 \times U_2}$ es compacto. Por lo tanto $U_1 \times U_2$ es holomórficamente convexo. $\square$

Proposición 1.6.4. *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$, $V \subset \mathbb{C}^m$ dominios de holomorfía y $f \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ una aplicación holomorfa. Entonces*

$$U_f = \{z \in U : f(z) \in V\}$$

es un dominio de holomorfía.

Demostración: Probaremos que U_f es holomórficamente convexo. Sea $K \subset U_f$ un compacto. Entonces

$$\widehat{K}_{U_f} \subset \widehat{K}_U \subset\subset U.$$

Supongamos que $\widehat{K}_{U_f}$ no es compacto, entonces existe una sucesión $(z_j)_{j \geq 1} \subset \widehat{K}_{U_f}$ tal que $z_j \longrightarrow z_0 \in U \cap \partial U_f$. Notemos que para todo $z \in \widehat{K}_{U_f}$ y $g \in \mathcal{O}(V)$

$$|g(f(z))| \leq \sup_K |g \circ f| = \sup_{f(K)} |g|$$

Por lo tanto

$$f(\widehat{K}_{U_f}) \subset \widehat{f(K)}_V \subset\subset V$$

$$f(z_j) \in \widehat{f(K)}_V \subset\subset V \ , \ j \geq 1$$

luego $f(z_0) \in V$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto U_f es holomórficamente convexo. $\square$

Proposición 1.6.5 (Invarianza bajo cambio de coordenadas)**.** *Sean $U, V \subset \mathbb{C}^n$ dominios y $f : U \to V$ un biholomorfismo. Si V es un dominio de holomorfía entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $K \subset U$ un compacto. Desde que $\widehat{f(K)}_V = f(\widehat{K}_U)$ tenemos que $\widehat{K}_U$ es compacto. Por lo tanto U es holomórficamente convexo. $\square$

Proposición 1.6.6. *Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ una aplicación $\mathbb{C}$-lineal, $V \subset \mathbb{C}^m$ un dominio de holomorfía y sea $U = T^{-1}(V)$. Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $K \subset U$ un compacto. Observamos que

$$\widehat{K}_U \subset T^{-1}\left[\widehat{T(K)}_V\right]$$

y que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\widehat{T(K)}_V + B(0,\epsilon) \subset V$$

entonces $\widehat{K}_U + B(0,\delta) \subset U$, luego U es holomórficamente convexo. □

Proposición 1.6.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y sea $E \subset \mathbb{C}^n$ un subespacio afín. Entonces $\Omega \cap E$ es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $E = a + \mathbb{C}v_1 + \cdots + \mathbb{C}v_k$, donde $k = \dim E$

$$\mathbb{C}^k \ni (z_1, \ldots, z_k) \overset{f}{\longmapsto} a + z_1v_1 + \cdots + z_kv_k \in \mathbb{C}^n$$

entonces $f^{-1}(\Omega) \cong \Omega \cap E$. □

Ejemplo 1.6.1. El triángulo de Hartogs

$$T = \{(z,w) \in \Delta^2 : |z| < |w|\}$$

es un dominio de holomorfía, la aplicación

$$T \ni (z,w) \mapsto (z, z/w) \in \Delta \times \Delta^*$$

mapea biholomórficamente el triángulo de Hartogs T sobre $\Delta \times \Delta^*$.

1.7. Conjuntos holomórficamente acotados

En esta sección presentaremos una nueva clase de conjuntos, el cual llamaremos conjuntos holomórficamente acotados, y estudiaremos su conexión con los dominios de holomorfía.

Definición 1.7.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que $B \subset U$ es **holomórficamente acotado**, o $\mathcal{O}(U)$-**acotado**, si toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ es acotada en B.

Ejemplo 1.7.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces todo subconjunto relativamente compacto de U es holomórficamente acotado. Además para todo compacto $K \subset U$ su envolvente holomorfo $\widehat{K}_U$ es holomórficamente acotado.

Considerando las funciones coordenadas $z \mapsto z_j$ las cuales son funciones holomorfas, obtenemos claramente la siguiente proposición.

Proposición 1.7.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $B \subset U$ es holomórficamente acotado entonces B es acotado.*

Lema 1.7.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $B \subset U$ es holomórficamente acotado, entonces existe un compacto $K \subset U$ tal que $B \subset \widehat{K}_U$.*

Demostración: Sea $(K_j)_{j\geq 1}$ una exhaustividad normal para U. Supongamos por contradicción que $B \not\subset \left(\widehat{K_j}\right)_U$ para todo $j \geq 1$. Entonces existe una sucesión $(z_l)_{l\geq 1} \subset B$ tal que $z_l \in K_{j_{l+1}} - \widehat{K}_{j_l}$ para todo $l \geq 1$. Por el Lema 1.4.4 existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\lim_{l\to\infty} |f(z_l)| = \infty$, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente teorema establece la conexión entre dominios holomórficamente acotados y dominios de holomorfía, el cual es una consecuencia del Lema 1.7.1.

Teorema 1.7.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces U es un dominio de holomorfía si y solamente si los únicos subconjuntos holomórficamente acotados de U son los subconjuntos relativamente compactos de U.*

1.8. Poliedros analíticos

Si observamos la definición de un polidisco

$$\Delta^n = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_j| < 1, 1 \leq j \leq n\}$$

observamos que está generado por las funciones coordenadas $z \mapsto z_j$, si reemplazamos estas funciones coordenadas por funciones holomorfas, estaremos definiendo una nueva clase de conjuntos, llamados poliedros analíticos.

Definición 1.8.1. Sean $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ abiertos y $F = (f_1, \ldots, f_m) \in \mathcal{O}(U, \mathbb{C}^m)$ un mapeo holomorfo. El conjunto

$$\Pi = V \cap F^{-1}(\Delta^m) = \{z \in V : |f_j(z)| < 1, 1 \leq j \leq m\}$$

es llamado un **poliedro analítico** en U si Π es relativamente compacto en V. El conjunto

$$\Pi = V \cap F^{-1}\left(\overline{\Delta}^m\right) = \{z \in V : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$$

es llamado un **poliedro analítico compacto** en U si Π es compacto. La colección de funciones $\{f_1, \ldots, f_m\} \subset \mathcal{O}(U)$ son llamadas las **caras** del poliedro analítico.

Observaciones:

1. Si consideramos $V = U = \mathbb{C}$, el poliedro analítico determinado por $f(z) = z^2 - 1$ no es conexo.

2. Si $\Pi = \{z \in \Omega : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$ es un poliedro analítico compacto, entonces $\mathring{\Pi} = \{z \in \Omega : |f_j(z)| < 1, 1 \leq j \leq m\}$ es también un poliedro analítico.

Con las notaciones de la definición 1.8.1 obtenemos las siguientes proposiciones.

Proposición 1.8.1. *Todo poliedro analítico es un dominio de holomorfía.*

Demostración: En efecto, desde que la aplicación holomorfa $F : \Pi \to \Delta^m$ es propia. $\square$

Proposición 1.8.2. *Sea $\Pi \subset \mathbb{C}^n$ un poliedro analítico compacto. Entonces Π admite una base de vecindades, formada por dominios de holomorfía.*

Demostración: Por definición existen abiertos $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ y funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ tales que

$$\Pi = \{z \in V : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\Omega \subset\subset V$. Sea el abierto $\Pi \subset \Omega \subset\subset W \subset\subset V$. Sea $a \in \overline{W} - \Omega$, entonces $|f_j(a)| > 1$ para algún j. Por la compacidad de $\overline{W} - \Omega$, existe $c > 1$ tal que si $a \in \overline{W} - \Omega$ entonces $|f_j(a)| \geq c$ para algún j. Sea

$$\Sigma = \{z \in W : |f_j(z)| < c, 1 \leq j \leq m\}$$

entonces $\Pi \subset \Sigma \subset \Omega$ y $\Sigma \subset\subset W$. Por lo tanto Σ es un poliedro analítico. $\square$

Proposición 1.8.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Sea $K \subset U$ un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo y $\Omega \subset U$ una vecindad de K. Entonces existe un poliedro analítico compacto Π con caras en $\mathcal{O}(U)$ tal que $K \subset \mathring{\Pi} \subset \Pi \subset \Omega$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\Omega \subset\subset U$. Si $a \in U - K$ entonces existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que $|f(a)| > 1 > \|f\|_K$. Entonces por la compacidad de $\partial\Omega \subset U - K$ existen funciones holomorfas $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ con $\|f_j\|_K \leq 1$ para todo j, tal que si $a \in \partial\Omega$ entonces $|f_j(a)| > 1$ para algún j. Sea

$$\Pi = \{z \in \Omega : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}$$

entonces $K \subset \Pi \subset \Omega$. Dado que Π es acotado y cerrado en Ω, mostrar que Π es compacto es equivalente a mostrar que $d(\Pi, \partial\Omega) > 0$. Supongamos por contradicción que $d(\Pi, \partial\Omega) = 0$ entonces existe una sucesión $(z_k)_{k\geq 1} \subset \Pi$ con $z_k \to a \in \partial\Omega$, por continuidad $|f_j(a)| \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq m$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto Π es el poliedro analítico compacto requerido. $\square$

Mostraremos ahora que todo dominio de holomorfía lo podemos aproximar por poliedros analíticos. Posteriormente mostraremos que solo los dominios de holomorfía son aproximables por poliedros analíticos.

Proposición 1.8.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía. Entonces existe una sucesión $(P_j)_{j\geq 1}$ de poliedros analíticos en U tales que*

(a) $P_j \subset\subset P_{j+1}$*, para todo* $j \geq 1$.

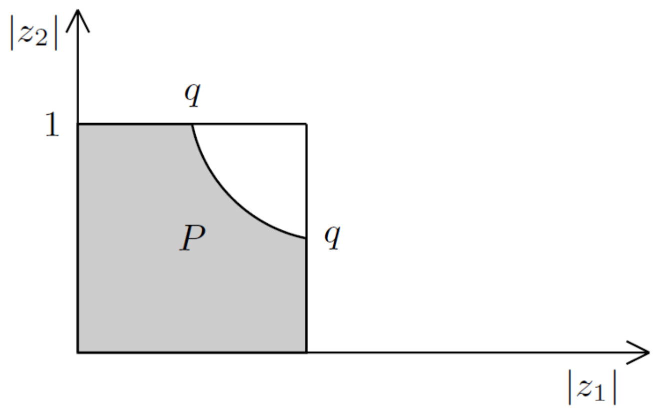
(b) $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} P_j$.

Demostración: Aplicar el Lema 1.4.2 conjuntamente con el Teorema 1.8.3. $\square$

Ejemplo 1.8.1. Sea $q \in (0, 1)$ y

$$P = \left\{z \in \Delta^2 : |z_1 z_2| < q\right\}$$

Entonces P es claramente un poliedro analítico, pero no es un conjunto convexo ni tampoco un producto Cartesiano de dominios en $\mathbb{C}$. Por lo tanto los poliedros analíticos enriquecen nuestro stock de ejemplos de dominios de holomorfía.



1.9. Dominios de holomorfía y la serie de Taylor

En esta sección estudiaremos la relación de un dominio de holomorfía con la serie de Taylor de una función holomorfa, más precisamente con su radio de convergencia.

Definición 1.9.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{O}(U)$. Definamos el radio de convergencia de f en el punto $a \in U$ como

$$r_c f(a) = \sup\left\{r > 0 : \text{la serie de Taylor de } f \text{ en el punto } a \in U \text{ converge en } B(a,r)\right\}$$

Observaciones:

1. Para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$, $r_c f(a) \geq d(a, \partial U)$.

2. Si $r = \text{ínf}\left\{r_c f(a) : f \in \mathcal{O}(U)\right\}$ entonces r es el mayor radio, tal que la serie de Taylor en el punto a, de toda función $f \in \mathcal{O}(U)$, converge en la bola $B(a,r)$.

Teorema 1.9.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) Para cada $a \in U$, $d(a, \partial U) \geq \text{ínf}\left\{r_c f(a) : f \in \mathcal{O}(U)\right\}$.

b) U es un dominio de holomorfía débil.

Demostración: *a)* $\Rightarrow$ *b)* Si U no es dominio de holomorfía, $d(\widehat{K}_U, \partial U) = 0$. Entonces $0 < d(b, \partial U) < d(K, \partial U) = r$ para algún $b \in \widehat{K}_U$. Por el Lema de Thullen 1.3.1 la serie de Taylor en el punto b, de toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$, converge en la bola $B(b,r)$. □

De la definición 1.1.4 es claro el siguiente teorema.

Teorema 1.9.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) *U es un dominio de holomorfía.*

b) *Existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$, tal que para cada $a \in U$*

$$r_c f(a) = d(a, \partial U)$$

Corolario 1.9.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces U es dominio de existencia de $f \in \mathcal{O}(U)$ si y solamente si $r_c f(a) = d(a, \partial U)$ para todo $a \in U$.*

Proposición 1.9.1. *Sea $G \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $f \in \mathcal{O}(G)$, $f \not\equiv 0$. Entonces $U = G - Z_f$ es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Sea $a \in U \subset G$ entonces por demostrar que

$$d(a, \partial U) \geq \inf\{r_c f(a) : f \in \mathcal{O}(U)\}$$

Si $d(a, \partial U) = d(a, \partial G)$ entonces

$$d(a, \partial U) = d(a, \partial G) = \inf\{r_c f(a) : f \in \mathcal{O}(G)\} \geq \inf\{r_c f(a) : f \in \mathcal{O}(U)\}$$

Si $r = d(a, \partial U) < d(a, \partial G)$, entonces existe $b \in \partial\Delta(a, r) \cap Z_f$. Como la función $g = 1/f$ es holomorfa en U, entonces $r_c g(a) = r$. $\square$

Ejemplo 1.9.1. El abierto $GL_n(\mathbb{C}) \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es un dominio de holomorfía, dado que la función $\det : \mathbb{C}^{n^2} \mapsto \mathbb{C}$ es un polinomio holomorfo y $GL_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2} - \det^{-1}\{0\}$.

1.10. Dominios Reinhardt completos

En esta sección estudiaremos la relación entre los dominios de holomorfía y los dominios de convergencia de series de potencias en $\mathbb{C}^n$. Recomendamos la referencia [7], para más detalles.

Proposición 1.10.1. *El dominio de convergencia $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^n$ de una serie de potencias*

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^n} c_\alpha z^\alpha$$

es un dominio Reinhardt completo logarítmicamente convexo.

Demostración: Sea $x, y \in \log\tau(\mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^*)^n) \subset \mathbb{R}^n$ entonces existen $a, b \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^*)^n = U - \{z \in \mathbb{C}^n : z_1 \cdot z_2 \cdots z_n = 0\}$ el cual es un dominio, con $x = \log\tau(a)$ e $y = \log\tau(b)$. Sea $\theta > 1$ tal que $\theta a, \theta b \in \mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^*)^n$ entonces

$$|c_\alpha \cdot (\theta a)^\alpha| = |c_\alpha| \cdot \theta^{|\alpha|} \cdot |a^\alpha| \leq M$$

$$|c_\alpha \cdot (\theta b)^\alpha| = |c_\alpha| \cdot \theta^{|\alpha|} \cdot |b^\alpha| \leq M$$

Por lo tanto para $t \in [0, 1]$

$$|c_\alpha| \cdot \theta^{|\alpha|} \cdot |a^\alpha|^t \cdot |b^\alpha|^{1-t} = \left|c_\alpha \cdot (\theta \cdot |a|^t \cdot |b|^{1-t})^\alpha\right| \leq M$$

Se sigue del Lema de Abel[7] que $z_t = |a|^t \cdot |b|^{1-t} \in \mathcal{D}$, luego $(1-t)x + ty = \log\tau(z_t) \in \log\tau(\mathcal{D} \cap (\mathbb{C}^*)^n)$. $\square$

Proposición 1.10.2. *Sea Ω un dominio Reinhardt completo. Si Ω es logarítmicamente convexo, entonces Ω es holomórficamente convexo.*

Demostración: Sea $K \subset \Omega$ un compacto y $a = (a_1, \ldots, a_n)$ en la clausura (en $\mathbb{C}^n$) de $\widehat{K}_\Omega$. Por demostrar que $a \in \Omega$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a_1, \ldots, a_s \neq 0$, $a_{s+1} = \cdots = a_n = 0$, donde $1 \leq s \leq n$. Como Ω es un dominio Reinhardt completo, entonces existe un número finito de puntos $\xi^1, \ldots, \xi^N \in \Omega \cap \mathbb{R}^n_{>0}$ tal que

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \Delta(0, \xi^j).$$

Por la definición de $\widehat{K}_\Omega$ tenemos que

$$|a_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot a_s^{\alpha_s}| \leq \max_{1 \leq j \leq N} \left\{ \left(\xi_1^j\right)^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot \left(\xi_s^j\right)^{\alpha_s} \right\}, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_s \in \mathbb{Z}_+.$$

Luego (tomando log y dividiendo por $|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_s|$) tenemos que

$$\sum_{\nu=1}^{s} t_\nu \log|a_\nu| \leq \max_{1 \leq j \leq N} \left\{ \sum_{\nu=1}^{s} t_\nu \log \xi_\nu^j \right\}, \quad t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{Q}_+, \ \ t_1 + \cdots t_s = 1,$$

consecuentemente, por continuidad, para todo $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R}_+$ con $t_1 + \cdots t_s = 1$. Por lo tanto el punto $(\log|a_1|, \cdots, \log|a_s|)$ pertenece a la envolvente convexa C_s del conjunto

$$\left\{(\eta_1, \ldots, \eta_s) \in \mathbb{R}^s : \eta \leq \log \xi^j \,\text{para algún}\, j\right\}$$

Observemos que C_s está contenido en la proyección sobre $\mathbb{R}^s$ de la envolvente convexa C_n del conjunto

$$\{(\eta_1, \ldots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \eta \leq \log \xi^j \,\text{para algún}\, j\}$$

Desde que $C_n \subset \Omega^*$, existe un punto $x \in \Omega^*$, tal que $|a_\nu| \leq e^{x_\nu}$, $\nu = 1, \ldots, n$. Por lo tanto $a \in \Omega$. $\square$

Teorema 1.10.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio Reinhardt completo con centro 0. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

- (a) *Ω es dominio de convergencia.*
- (b) *Ω es logarítmicamente convexo.*
- (c) *Ω es holomórficamente convexo.*
- (d) *Ω es dominio de holomorfía.*

Demostración: $(d) \Rightarrow (a)$. Por el Teorema de Cartan-Thullen1.3.1 y la prueba del Teorema 1.5.1, existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ esencialmente ilimitado en $\partial\Omega$. Como Ω es dominio Reinhardt completo, entonces la serie de Taylor de f en el origen, converge en Ω. Por lo tanto no converge en cualquier dominio estrictamente mayor que Ω. $\square$

Ejemplo 1.10.1. Sea $U = \Delta(0, (e, e^2)) \cup \Delta(0, (e^2, e)) \subset \mathbb{C}^2$. Observamos que U es un dominio Reinhardt completo con centro 0. La imagen logarítmica de U es

$$\{(\log|z_1|, \log|z_2|) : (z_1, z_2) \in U,\ z_1 \cdot z_2 \neq 0\} = [(-\infty, 1) \times (-\infty, 2)] \cup [(-\infty, 2) \times (-\infty, 1)]$$

el cual no es convexo. Por lo tanto U no es logarítmicamente convexo, se sigue que U no es un dominio de holomorfía.

1.11. El espacio de las funciones singulares

Dado un dominio de holomorfía U, sabemos que U admite una función singular, una pregunta natural sería que espacio ocupa estas funciones singulares dentro del espacio de las funciones holomorfas en U, en la topología compacta-abierta.

Definición 1.11.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Definamos

$$S_U = \{f \in \mathcal{O}(U) : f \,\text{es singular en}\, U\}$$

Teorema 1.11.1 (Teorema de Categoría de Baire[21])**.** *Sea (X, d) un espacio métrico completo, entonces*

a) X es un espacio de Baire.

b) X es de segunda categoría.

Proposición 1.11.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía débil, entonces se cumplen las siguientes propiedades*

a) $\complement S_U$ es de primera categoría en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$ (en el sentido de Baire).

b) S_U es de segunda categoría en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$ (en el sentido de Baire).

en particular, S_U es denso en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$, y no numerable.

Demostración: Sea V un abierto conexo que intersecta a U, y W una componente conexa de la intersección $U \cap V$. Definamos para cada par (V, W)

$$H(V, W) = \left\{ f \in \mathcal{O}(U) : \text{existe}\, \widehat{f} \in \mathcal{O}(V) \,\text{tal que}\, f \equiv \widehat{f} \,\text{en}\, W \right\}$$

el cual es un subespacio lineal propio de $\mathcal{O}(U)$ dado que U es un dominio de holomorfía débil. Observamos que

$$\complement S_U = \bigcup_{(V,W)} H(V, W).$$

Definamos para cada $m \geq 1$

$$H_m(V, W) = \left\{ f \in H(V, W) : \text{su extensión}\, \widehat{f} \,\text{satisface}\, \sup_V |\widehat{f}| \leq m \right\}$$

Luego

$$\complement S_U = \bigcup_{(V,W),m} H_m(V, W).$$

Afirmamos que cada $H_m(V, W)$ es un suconjunto cerrado de $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$. Sea $f \in \mathcal{O}(U)$ adherente a $H_m(V, W)$, entonces existe una sucesión $(f_j)_{j \geq 1} \subset H_m(V, W)$ tal que $f_j \to f$ en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$. Por el Teorema de Montel[7] existe una subsucesión de $(\widehat{f_{j_k}})_{k \geq 1}$ tal que $\widehat{f_{j_k}} \to g$

en $(\mathcal{O}(V), \tau_c)$. Por lo tanto $f \in H_m(V, W)$ con $\widehat{f} = g$. Si denotamos por Ω a cualquier bola abierta en $\mathbb{C}^n$ de centro y radio racional tal que intersecta a la frontera de U, entonces $\complement S_U$ lo podemos expresar como una unión numerable

$$\complement S_U = \bigcup_{(\Omega, W), m} H_m(\Omega, W).$$

Como $H(\Omega, W)$ es un subespacio lineal propio de $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$ entonces tiene interior vacio en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$, luego cada $H_m(\Omega, W)$ es un subconjunto nunca denso de $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$. $\square$

1.12. Interpolación en dominios de holomorfía

Recordemos que todo dominio en $\mathbb{C}$ admite una interpolación, esto es, podemos construir una función holomorfa con valores prescritos. Pero en $\mathbb{C}^n$ no todo dominio admite una interpolación. Pero entonces cuales son estos dominios? el siguiente teorema responderá esta interrogante.

Definición 1.12.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Decimos que Ω satisface la **propiedad de interpolación** si para toda sucesión de puntos distintos $(z_j)_{j \geq 1} \subset \Omega$ sin puntos límites en Ω, y cualquier sucesión de números complejos $(a_j)_{j \geq 1}$, existe una función holomorfa f en Ω tal que

$$f(z_j) = a_j \ \ , \ \text{para todo}\, j \geq 1.$$

Teorema 1.12.1 (Interpolación en dominios de holomorfía)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces Ω es un dominio de holomorfía si y solamente si Ω satisface la propiedad de interpolación.*

Demostración: $[\Rightarrow]$ Por el Teorema de Cartan-Thullen Ω es holomórficamente convexo, entonces Ω admite una exhaustividad normal tal que

- $\text{hconv}_\Omega(K_j) = K_j$
- $K_j \subseteq \text{int}(K_{j+1})$
- $\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que ninguno de los puntos de la sucesión $(z_j)_{j \geq 1}$ pertenecen a K_1, y que los primeros k_1 términos de la sucesión están en K_1, los siguientes k_2 términos están en K_2. Sea $m_j \geq 1$ el único entero con la propiedad que $z_j \in K_{m_j+1} - K_{m_j}$.

Desde que $z_j \notin \mathrm{hconv}_\Omega(K_{m_j})$, sea $f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que $|f_j(z_j)| > \|f_j\|_{K_{m_j}}$. Haciendo un cambio de escala podemos suponer que $f_j(z_j) = 1$. Sea $p_j \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ un polinomio holomorfo satisfaciendo

$$p_j(z_j) = 1 \ \ , \ \ p_j(z_1) = p_j(z_2) = \cdots = p_j(z_{j-1}) = 0$$

Sea $\lambda_1 = a_1$ y r_1 de modo que

$$\|\lambda_1 p_1 f_1^{r_1}\|_{K_{m_1}} \leq \frac{1}{2}$$

Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_{j-1}$ y $r_1, \ldots, r_{j-1}$ estan definidos, definamos recursivamente λ_j y r_j satisfaciendo

$$\lambda_j = a_j - \sum_{l=1}^{j-1} \lambda_l p_l(z_j) f_l(z_j)^{r_l}$$

$$\left\| \lambda_j p_j f_j^{r_j} \right\|_{K_{m_j}} \leq \frac{1}{2^j}$$

Ahora definamos

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j p_j(z) f_j(z)^{r_j}$$

Afirmamos que la serie converge uniformemente en partes compactas de Ω. Sea $K \subset \Omega$ compacto. Notemos que $\lim_{j\to\infty} m_j = \infty$. Por tanto podemos escojer k suficientemente grande tal que $K \subset K_{m_j}$ para todo $j \geq k$. Podemos también suponer que

$$\sum_{j=q+1}^{p} \frac{1}{2^j} < \epsilon$$

si $p, q \geq k$ donde $p > q$. Entonces para $p, q \geq k$ tenemos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j p_j f_j^{r_j} - \sum_{j=1}^{q} \lambda_j p_j f_j^{r_j} \right\|_K \leq \sum_{j=q+1}^{p} \left\| \lambda_j p_j f_j^{r_j} \right\|_{K_{m_j}} < \epsilon.$$

Además, desde que $p_k(z_j) = 0$ para todo $k > j$, tenemos que

$$f(z_j) = \sum_{l=1}^{j} \lambda_l p_l(z_j) f_l(z_j)^{r_l} = \lambda_j + \sum_{l=1}^{j-1} \lambda_l p_l(z_j) f_l(z_j)^{r_l} = a_j.$$

[$\Leftarrow$] Sea $(z_j)_{j\geq 1} \subset \Omega$ una sucesión inyectiva tal que $z_j \longrightarrow a \in \partial\Omega$, entonces existe una función holomorfa $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal que

$$f(z_j) = j$$

Por lo tanto Ω es holomórficamente convexo.

$\square$

Capítulo 2

Dominios pseudoconvexos

En este capítulo definiremos una nueva clase de dominios, la cual llamaremos dominios pseudoconvexos, para el cual necesitaremos el concepto de función plurisubarmónica.

2.1. Funciones plurisubarmónicas

Definición 2.1.1. Sea (X, τ) un espacio topológico. Diremos que $f : X \to [-\infty, \infty)$ es **semicontinua superiormente** en $a \in X$ si para todo $c \in \mathbb{R}$ tal que $c > f(a)$ existe una vecindad V_a de a tal que $c > f(z)$ para todo $z \in V_a$. Si f es semicontinua superiormente en cada punto de X entonces diremos que f es **semicontinua superiormente** en X.

Presentamos algunas propiedades de las funciones semicontinuas superiormente, dejamos la prueba al lector.

Proposición 2.1.1. *Sea (X, τ) un espacio topológico. El ínfimo de una familia de funciones semicontinuas superiormente en X, es también semicontinua superiormente.*

Proposición 2.1.2. *Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $f : X \to [-\infty, \infty)$ es semicontinua superiormente si y solamente si el conjunto $X_c = \{z \in X : f(z) < c\}$ es abierto en X, para todo $c \in \mathbb{R}$.*

Proposición 2.1.3. *Sea (X, d) un espacio métrico y $a \in X$. Entonces f es semicontinua superiormente en a si y solamente si*

$$\limsup_{x \to a} f(x) \leq f(a)$$

donde

$$\limsup_{x\to a} f(x) = \lim_{\delta\to 0}\left\{\sup_{x\in B(a,\delta)-\{a\}} f(x)\right\}.$$

Proposición 2.1.4. *Sea (X,τ) un espacio topológico. Si $f : X \to [-\infty,\infty)$ es semicontinua superiormente, entonces para cada compacto $K \subset X$ existe $a \in K$ tal que $f(x) \le f(a)$ para todo $x \in K$, además el conjunto*

$$\{z \in K : f(z) = f(a)\}$$

es compacto.

Proposición 2.1.5. *Sea (X,d) un espacio métrico. Entonces cada función semicontinua superiormente $f : X \longrightarrow [-\infty,\infty)$ es el límite puntual de una sucesión decreciente de funciones continuas $f_j : X \longrightarrow \mathbb{R}$.*

Definición 2.1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea $u : \Omega \to [-\infty,\infty)$ semicontinua superiormente. Diremos que f es **subarmónica** en Ω, si para cada $a \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{\Delta(a,r)} \subset \Omega$

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta})d\theta.$$

esto es satisface la **desigualdad del valor medio**. El conjunto de todas las funciones subarmónicas en Ω será denotado por $\mathrm{SH}(\Omega)$.

Más generalmente, tenemos la siguiente definición.

Definición 2.1.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea $u : \Omega \to [-\infty,\infty)$ semicontinua superiormente. Diremos que f es **plurisubarmónica** en Ω, si para todo disco $a + \overline{\Delta}\cdot b \subset \Omega$, se cumple la **desigualdad del valor medio**

$$u(a) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}\cdot b)d\theta.$$

Observemos que u es medible y por la proposición 2.1.4, u está acotada superiormente en cada disco $a + \overline{\Delta}\cdot b \subset \Omega$. Por lo tanto la integral

$$\int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}\cdot b)d\theta$$

está bien definida, posiblemente tome el valor $-\infty$. El conjunto de todas las funciones plurisubarmónicas en Ω será denotado por $\mathrm{PSH}(\Omega)$.

Ejemplo 2.1.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in H(\Omega)$. Entonces $\Re f, \Im f, |f| \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(U)$. En efecto si $a + \overline{\Delta} \cdot b \subset U$ entonces por la fórmula integral de Cauchy

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta} \cdot b) d\theta$$

de donde obtenemos que $\Re f, \Im f, |f| \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(U)$.

La siguiente proposición se deduce directamente de la definición.

Proposición 2.1.6. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto.*

a) Si $f, g \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ entonces $f + g \in \mathrm{PSH}(\Omega)$

b) Si $f \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ y $c > 0$ entonces $cf \in \mathrm{PSH}(\Omega)$

Proposición 2.1.7. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea $u_\alpha : \Omega \to [-\infty, \infty)$ una familia de funciones plurisubarmónicas tal que*

$$u = \sup_{\alpha \in I} u_\alpha : \Omega \to [-\infty, \infty)$$

es semicontinua superiormente, entonces u es plurisubarmónica.

Demostración: En efecto sea $a + \overline{\Delta} \cdot b \subset U$. Entonces existe un índice α tal que $u(a) - \epsilon < u_\alpha(a)$. Por lo tanto

$$u(a) < u_\alpha(a) + \epsilon \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_\alpha(a + e^{i\theta} \cdot b) d\theta + \epsilon \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta} \cdot b) d\theta + \epsilon$$

□

Proposición 2.1.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $f_j : U \to [-\infty, \infty)$ es una sucesión decreciente de funciones plurisubarmónicas el cual converge puntualmente a $f : U \to [-\infty, \infty)$, entonces f es plurisubarmónica en U.*

Demostración: Sea $a + \overline{\Delta} b \subset U$ entonces

$$f(a) \leq f_j(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_j(a + e^{i\theta} b) d\theta$$

para todo $j \geq 1$. Desde que f_1 está acotado superiormente en $a + \overline{\Delta} b$, una aplicación del Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue muetra que

$$\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta} b) d\theta = \lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} f_j(a + e^{i\theta} b) d\theta$$

□

Ejemplo 2.1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in H(\Omega, \mathbb{C}^m)$. Entonces $\|f\| \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}(U)$. En efecto por el Teorema de Hahn-Banach[22]

$$\|f(z)\| = \sup \left\{ |(\varphi \circ f)(z)| : \varphi \in \left(\mathbb{C}^m\right)^* \wedge \|\varphi\| = 1 \right\}$$

para cada $z \in U$. Desde que $\varphi \circ f \in H(U)$ para cada φ, la conclusión se sigue del ejemplo 2.1.1 y la Proposición 2.1.7.

Teorema 2.1.1 (Principio del máximo para funciones plurisubarmónicas)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, y sea $u : U \to [-\infty, \infty)$ una función plurisubarmónica. Si u alcanza el máximo global en U, entonces u debe ser constante. En particular si U es un dominio acotado y $u \in \mathrm{USC}(\overline{U}) \cap \mathrm{PSH}(U)$, entonces*

$$\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u$$

Demostración: Sea $a \in U$ tal que $u(z) \leq u(a)$ para todo $z \in U$. Desde que u es semicontinua superiormente, el conjunto no vacio

$$A = \{z \in U : u(z) = u(a)\} = U - \{z \in U : u(z) < u(a)\}$$

es cerrado en U. Para mostrar que $A = U$ es suficiente probar que A es abierto. Sea $b \in A$ y sea $r > 0$ tal que $B(b, r) \subset U$. Afirmamos que $B(b, r) \subset A$. Supongamos por contradicción que existe $p \in B(b, r)$ tal que $u(p) < u(a)$. Desde que u es semicontinua superiormente existe $\epsilon > 0$ tal que $B(p, \epsilon) \subset B(a, r)$ y $u(z) < u(a)$ para todo $z \in B(p, \epsilon)$. Esto claramente implica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(b + e^{i\theta}(p - b)) d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a) d\theta = u(a) = u(b)$$

lo cual es una contradicción. □

Proposición 2.1.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ un dominio, y sea $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Si $f \equiv -\infty$ en un subconjunto abierto no vacio de Ω, entonces $f \equiv -\infty$ en Ω.*

Demostración: Sea A el conjunto de todos los puntos $a \in \Omega$ tal que $f \equiv -\infty$ en una vecindad de a. Entonces A es abierto y no vacio. Para completar la prueba mostraremos que A es cerrado en Ω. Sea $(a_n)_{n \geq 1}$ una sucesión en A el cual converge a un punto $a \in \Omega$. Consideremos $B(a_n, \epsilon) \subset B(a, r) \subset \Omega$ y $f \equiv -\infty$ en $B(a_n, \epsilon)$. Afirmamos que $f \equiv -\infty$ en $B(a, \epsilon)$. En efecto, si $z \in B(a, \epsilon)$ entonces

$$z + (a_n - a) \in B(a_n, \epsilon)$$

en consecuencia

$$f(z) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z + e^{i\theta}(a_n - a))d\theta = -\infty.$$

Por lo tanto $a \in A$. $\square$

Definición 2.1.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Un **disco complejo** $D \subset U$ es de la forma

$$D = a + \overline{\Delta} \cdot b$$

donde $a \in U$ y $b \in (\mathbb{C}^n)^*$. Denotemos $\partial D = a + \partial\Delta \cdot b$.

Teorema 2.1.2. *Sea $f : U \to [-\infty, \infty)$ una función semicontinua superiormente en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) *Para todo disco $a + \overline{\Delta} \cdot b \subset U$, se cumple la desigualdad del valor medio*

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta} \cdot b)d\theta.$$

(b) *Para cada $a \in U$, $b \in \mathbb{C}^n$ y $\epsilon > 0$, existe $r \in (0, \epsilon)$ tal que $a + r\overline{\Delta} \cdot b \subset U$, y se cumple la desigualdad del valor medio*

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta} \cdot b)d\theta.$$

(c) *Para todo disco complejo $a + \overline{\Delta} \cdot b \subset U$, y para toda función real-valuada h continua en $|\zeta - a| \leq 1$, armónica en $|\zeta - a| < 1$, f satisface la siguiente condición*

$$f(a + \lambda \cdot b) \leq h(\lambda) \text{ para } |\lambda| = 1 \Longrightarrow f(a + \lambda \cdot b) \leq h(\lambda) \text{ para } |\lambda| < 1.$$

(d) *Para todo disco complejo $a + \overline{\Delta} \cdot b \subset U$, y para todo polinomio holomorfo $p(\lambda)$, f satisface la siguiente condición*

$$f(a + \lambda \cdot b) \leq \Re p(\lambda) \text{ para } |\lambda| = 1 \Longrightarrow f(a + \lambda \cdot b) \leq \Re p(\lambda) \text{ para } |\lambda| < 1.$$

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$. La implicación es clara. $(b) \Rightarrow (c)$. Sea h una función real-valuada continua en $|\zeta - a| \leq 1$, armónica en $|\zeta - a| < 1$, y sea $a + \overline{\Delta} b \subset U$. Sea $v(\lambda) = f(a + \lambda b) - h(\lambda)$ para $|\lambda| \leq 1$. Supongamos que $v(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda \in \partial\Delta$ pero $v(\lambda) > 0$ para algún $\lambda \in \Delta$. Entonces $M = \sup_{\overline{\Delta}} v > 0$ y el conjunto $A = \{\lambda \in \overline{\Delta} : v(\lambda) = M\}$ es un compacto no vacio de Δ (Proposición 2.1.4). Por lo tanto $d(A, \partial\Delta) = \delta > 0$ y podemos encontrar un $\lambda_0 \in A$ tal que $d(\lambda_0, \partial\Delta) = \delta$. Por (b) podemos encontrar un $r \in (0, \delta)$ tal que $a + \lambda_0 b + r\overline{\Delta} b \subset U$ y

$$f(a + \lambda_0 b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \lambda_0 b + re^{i\theta} b) d\theta$$

Por nuestra elección de λ_0 es claro que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M d\theta = M$$

Por lo tanto

$$v(\lambda_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\lambda_0 + re^{i\theta}) d\theta < M$$

lo cual es una contradicción, desde que $\lambda_0 \in A$.

$(c) \Rightarrow (d)$. La implicación es clara. $(d) \Rightarrow (a)$. Sea $a + \overline{\Delta} b \subset U$. Sea $\varphi \in \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{R})$ tal que $\varphi(0) = \varphi(2\pi)$ y

$$f(a + e^{i\theta} b) \leq \varphi(\theta) \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

debemos probar que

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta.$$

Sea $\epsilon > 0$. Por el Teorema de Stone-Weierstrass[5] existe un polinomio trigonométrico

$$\psi(\theta) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\theta}$$

tal que $\varphi(\theta) \leq \psi(\theta) \leq \varphi(\theta) + \epsilon$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Definamos $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ por

$$p(\lambda) = c_0 + 2 \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda^k.$$

Desde que $c_k = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} \psi(\theta) e^{ik\theta} d\theta$, se cumple que $\overline{c}_k = c_{-k}$ para $0 \leq k \leq n$, se sigue que $\psi(\theta) = \Re p(e^{i\theta})$ para $0 \leq \theta \leq 2\pi$,

$$f(a + e^{i\theta} b) \leq \varphi(\theta) \leq \psi(\theta) = \Re p(e^{i\theta}) \ , \ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

aplicando (c) tenemos que

$$f(a + \lambda b) \leq \Re p(\lambda) \ , \ |\lambda| \leq 1$$

Por lo tanto

$$f(a) \leq \Re p(0) = c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\theta) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta) d\theta + \epsilon$$

Por la proposición 2.1.5 existe una sucesión decreciente de funciones continuas $\varphi_n : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\varphi_n(0) = \varphi_n(2\pi)$ y $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(\theta) = f(a + e^{i\theta}b)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Por lo tanto

$$f(a + e^{i\theta}b) \leq \varphi_n(\theta)\ ,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_n(\theta)d\theta$$

entonces una aplicación del Teorema de la Convergencia Monótona de Lebesgue muestra que

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + e^{i\theta}b)d\theta.$$

□

El Teorema 2.1.2 nos muestra claramente que plurisubarmonicidad es una propiedad local.

Corolario 2.1.1 (Plurisubarmonicidad es una propiedad local)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Una función $f : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es plurisubarmónica si y solamente si para cada $a \in U$ existe una vecindad V de a en U tal que $f\big|_V$ es plurisubarmónica.*

Corolario 2.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Una función $f : U \longrightarrow [-\infty, \infty)$ es plurisubarmónica si y solamente si para cada $a \in U$ y $\delta \in \mathbb{C}^n$ la función*

$$f_{a,\delta} : U_{a,\delta} \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por $f_{a,\delta}(\lambda) = f(a + \lambda b)$ es subarmónica en la componente conexa de $U_{a,\delta} = \{\lambda \in \mathbb{C} : a + \lambda b \in U\}$ que contiene al origen. Esto es, una función es plurisubarmónica si y solamente si es subarmónica en cada recta compleja.

Corolario 2.1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto.*

(a) Si $f \in H(\Omega)$ entonces $\log|f| \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

(b) Si $f \in H(\Omega, \mathbb{C}^m)$ entonces $\log\|f\| \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

Demostración: (a) Sea $a + \overline{\Delta}b \subset U$ y sea $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$ tal que

$$\log|f(a + \lambda b)| \leq \Re p(\lambda)\ ,\ |\lambda| = 1$$

entonces

$$f(a + \lambda b) \leq e^{\Re p(\lambda)} = \left|e^{p(\lambda)}\right|\ ,\ |\lambda| = 1$$

$$\left| e^{-p(\lambda)} f(a+\lambda b) \right| \leq 1 \ , \ |\lambda| = 1$$

y por lo tanto para $|\lambda| \leq 1$, por el principio del módulo máximo. Se sigue que

$$\log |f(a+\lambda b)| \leq \Re p(\lambda) \ , \ |\lambda| \leq 1$$

(b) Por el Teorema de Hahn-Banach[22]

$$\log \|f(z)\| = \sup\{\log |(\varphi \circ f)(z)| : \varphi \in (\mathbb{C}^m)^* \wedge \|\varphi\| = 1\}$$

□

Lema 2.1.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Entonces una función real-valuada $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ es subarmónica en Ω si y solamente si*

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}}(z) \geq 0 \ , \ z \in \Omega$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad, asumamos $0 \in \Omega$. Definamos

$$M(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(re^{i\theta}) d\theta$$

$$\lim_{r \to 0^+} M(r) = u(0)$$

Por el Teorema de Green[18]

$$\frac{dM}{dr}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x} x e^{i\theta} + \frac{\partial u}{\partial y} y e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi r} \int_{|z|=r} \frac{u}{x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

$$\frac{dM}{dr}(r) = \frac{1}{2\pi r} \iint_{|z| \leq r} \Delta u dx dy$$

□

Definición 2.1.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $u \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ y $a \in U$. La forma Hermitiana

$$\Delta_\delta u(a) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) \delta_j \overline{\delta}_k = \frac{\partial^2 u(a+\lambda\delta)}{\partial \lambda \partial \overline{\lambda}}(0)$$

es llamado la **forma de Levi** de u en a, donde $\delta \in \mathbb{C}^n$, $(a + \lambda\delta \in U)$.

Proposición 2.1.10. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y $u : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2. Entonces u es plurisubarmónica si y sólo si para todo $\delta \in \mathbb{C}^n$ y $a \in U$ se cumple que*

$$\Delta u(a, \delta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) \delta_j \overline{\delta}_k \geq 0$$

Demostración: Calculemos

$$\frac{\partial u(a+\lambda\delta)}{\partial\overline{\lambda}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}(a+\lambda\delta)\overline{\delta}_k$$

$$\frac{\partial^2 u(a+\lambda\delta)}{\partial\lambda\partial\overline{\lambda}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a+\lambda\delta)\delta_j\overline{\delta}_k$$

$$\Delta(u\circ\alpha_{a,\delta})(0,1) = \Delta u(a,\delta)$$

El teorema se sigue del Lema 2.1.1. □

Definición 2.1.6. Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (donde U es abierto) de clase C^2. Entonces f es **estrictamente plurisubarmónica** si

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k > 0$$

para todo $a \in U$ y $\delta \in (\mathbb{C}^n)^*$.

Proposición 2.1.11 (Lema de Urysohn[8]). *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ un compacto, y U una vecindad de K. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$*, $0 \leq \varphi \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ y $\varphi = 1$ en una vecindad de K.*

Proposición 2.1.12. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función no-negativa. Suponer que f es acotado en cada compacto de Ω. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $f(z) \leq \varphi(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración: Sean K_n una sucesión de compactos de Ω de modo que

$$K_n \subset\subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$$

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

Sea

$$M_n = \sup\{f(z) : z \in K_n - K_{n-1}\} \;\; n \geq 3$$

luego escojemos funciones $a_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con las propiedades ($n \geq 3$)

$$0 \leq a_n \leq 1$$

$$a_n \equiv 1 \,\text{en}\, K_n - \mathring{K}_{n-1}$$

$$\text{supp}a_n \subset \mathring{K}_{n+1} - K_{n-2}$$

Definimos

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n a_n(z)$$

donde $a_2 \equiv 1$ y $M_2 = \sup\{f(z) : z \in K_2\}$. □

Lema 2.1.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y sea $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ una función estrictamente plurisubarmónica. Entonces existe una función estrictamente positiva $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) t_j \bar{t}_k \geq \varphi(a) \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2$$

para todo $a \in \Omega$ y $t \in \mathbb{C}^n$.

Demostración: Sea

$$S = \left\{ t \in \mathbb{C}^n : \sum_{j=1}^{n} |t_j|^2 \right\} = 1.$$

Sea Ω_n una sucesión creciente de subconjuntos abiertos relativamente compactos de Ω tal que

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$$

desde que f es estrictamente plurisubarmónica en Ω se sigue que

$$\inf \left\{ \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) t_j \bar{t}_k : a \in \overline{\Omega}_n,\ t \in S \right\} = c_n > 0$$

entonces por la Proposición 2.1.12 existe una función $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$ tal que $\chi \geq 1/c_n$ en $\Omega_n - \Omega_{n-1}$ para todo $n \geq 1$. Definamos $\varphi = 1/\chi$ entonces $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^+)$. Sea $a \in \Omega$ y $t \in S$ entonces $a \in \Omega_n - \Omega_{n-1}$ para algún $n \geq 1$, se sigue que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) t_j \bar{t}_k \geq c_n \geq \frac{1}{\chi(a)} = \varphi(a)$$

□

Lema 2.1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto. Sea u una función subarmónica en Ω y $a \in \Omega$. Para $0 \leq r < d(a, \partial\Omega)$, definamos*

$$A(u, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta$$

entonces $A(r)$ satisface lo siguiente

$$0 < r_1 < r_2 < d(a, \partial\Omega) \Longrightarrow A(u, r_1) \leq A(u, r_2).$$

Demostración: Consideremos una función $\varphi \in \mathcal{C}(\partial\Delta_{r_2})$ tal que $\varphi \geq u$ en $\partial\Delta_{r_2}$. Por el Principio de Dirichlet[6] podemos asumir que φ es continua en la clausura de Δ_{r_2} y armónica en Δ_{r_2}. Entonces φ satisface la propiedad del valor medio, esto es, $A(\varphi, r) = \varphi(a)$ para todo $r \leq r_2$. Desde que u es subarmónica en Ω, tenemos que $u \leq \varphi$ en Δ_{r_2} y

$$A(u, r_1) \leq A(\varphi, r_1) = A(\varphi, r_2)$$

para todo tal φ, se sigue que

$$A(u, r_1) \leq \inf \{A(\varphi, r_2) : \varphi \in \mathcal{C}(\partial\Delta_{r_2}), \varphi \geq u\} = A(u, r_2).$$

$\square$

Lema 2.1.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ y $u \not\equiv -\infty$ en Ω, entonces $u \in L^1(\Omega, loc)$. En particular, $\{z \in \Omega : u(z) = -\infty\}$ tiene medida de Lebesgue cero.*

Demostración: Primero mostraremos que

$$f(a) \leq \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{\overline{\Delta(a,r)}} f dV$$

para cada polidisco compacto $\overline{\Delta(a, r)} \subset U$. En efecto para $0 < \rho \leq r$ tenemos que

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta} e_1) d\theta$$

se deduce que

$$f(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \rho d\rho \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta} e_1) d\theta$$

desde que f está acotada superiormente en cada compacto de U, podemos reemplazar la integral iterada por una doble integral (Teorema de Fubini[5]). Entonces

$$f(a) \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{\overline{\Delta(0,r)}} f(a + z_1 e_1) d\lambda(z_1)$$

Por iteración obtenemos que

$$f(a) \leq \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{\overline{\Delta(0,r)}} d\lambda(z_1) \cdots \int_{\overline{\Delta(0,r)}} f(a + z_1 e_1 + \ldots + z_n e_n) d\lambda(z_n)$$

y otra aplicación del Teorema de Fubini[5]) muestra que

$$f(a) \leq \frac{1}{(\pi r^2)^n} \int_{\overline{\Delta(a,r)}} f dV.$$

Desde que f está acotada superiormente en cada compacto de U

$$f \in L^1(\overline{\Delta(b,r)}) \, \text{si y solamente si} \int_{\overline{\Delta(b,r)}} f dV > -\infty.$$

Ahora mostraremos que f es localmente Lebesgue integrable. En efecto, sea $a \in \Omega$ y $\overline{\Delta(a,2r)} \subset U$. Entonces existe $b \in \Delta(a,r)$ tal que $f(b) > -\infty$. Por lo tanto la función u es Lebesgue integrable en $\overline{\Delta(b,r)}$. □

Corolario 2.1.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces*

(*a*) *Si $f \in \mathrm{PSH}(U)$ no es identicamente $-\infty$, entonces el conjunto*

$$\{z \in U : u(z) = -\infty\}$$

tiene medida de Lebesgue cero.

(*b*) *Si $f \in H(U)$ no es identicamente cero, entonces el conjunto*

$$\{z \in U : u(z) = 0\}$$

tiene medida de Lebesgue cero.

Teorema 2.1.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $\Omega_j = \{z \in \Omega : d(z, \partial\Omega) > 1/j \wedge \|z\| < j\}$. Sea $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, $u \not\equiv -\infty$. Entonces existe una sucesión $(u_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con las siguientes propiedades*

(*a*) *u_j es estrictamente plurisubarmónica en Ω_j.*

(*b*) *$u_j(z) \geq u_{j+1}$ para todo $z \in \Omega_j$.*

(*c*) *$\lim_{j\to\infty} u_j(z) = u(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

(*d*) *Si u es continua entonces la sucesión $(u_j)_{j\geq 1}$ converge hacia u uniformemente en partes compactas de Ω.*

Demostración: Definamos: $u_j : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$u_j(a) = \int_{\Omega_{j+1}} u(\zeta)\Phi_{\delta_j}(a-\zeta)dV(\zeta)\ ,\ \delta_j = \frac{1}{j+1}$$

Para mostrar que $u_j \in \mathrm{PSH}(\Omega_j)$, sea $a \in \Omega_j$ y $w \in \mathbb{C}^n$ tal que $a + \overline{\Delta} w \subset \Omega_j$. Entonces aplicando el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u_j(a+e^{i\theta}w)d\theta &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\overline{B(0,1)}} u(a+e^{i\theta}w-\delta_j\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta)\right]d\theta \\
&= \int_{\overline{B(0,1)}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a-\delta_j\zeta+e^{i\theta}w)d\theta\right]\Phi(\zeta)dV(\zeta) \\
&\geq \int_{\|\zeta\|\leq 1} u(a-\delta_j\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta) \\
&= u_j(a)
\end{aligned}$$

Entonces $u_j \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ desde que $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Por el Lema 2.1.3 aplicado a la función subarmónica $\lambda \mapsto u(a+\lambda(-\zeta))$, la integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a-\delta_j e^{it}\zeta)dt$$

es una función decreciente en j, además

$$u_j(a) = \int_{\overline{B(0,1)}} u(a-\delta_j\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta) = \int_{\overline{B(0,1)}} u(a-\delta_j e^{it}\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta)$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, luego

$$\begin{aligned}
u_j(a) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\overline{B(0,1)}} u(a-\delta_j\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta)\right]dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_{\overline{B(0,1)}} u(a-\delta_j e^{it}\zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta)\right]dt \\
&= \int_{\overline{B(0,1)}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a-\delta_j e^{it}\zeta)dt\right]\Phi(\zeta)dV(\zeta)
\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión $(u_j)_{j\geq 1}$ es decreciente. Aplicando la propiedad del valor submedio a la función subarmónica $\lambda \mapsto u(a+\lambda(-\zeta))$, obtenemos que

$$u_j(a) = \int_{\overline{B(0,1)}}\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a-\delta_j e^{it}\zeta)dt\right]\Phi(\zeta)dV(\zeta) \geq u(a).$$

Como u es semicontinua superiormente tenemos que

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leq u(a)$$

esto es dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$u(a + \delta(-\zeta)) \leq u(a) + \epsilon$$

para todo $|\zeta| \leq 1$. Por lo tanto

$$u(a) \leq u_j(a) = \int_{\overline{B(0,1)}} u(a - \delta_j \zeta)\Phi(\zeta)dV(\zeta) \leq u(a) + \epsilon\ ,\ j + 1 > \frac{1}{\delta}$$

$$v_j(z) = u_j(z) + \frac{1}{j}\|z\|^2$$

□

Lema 2.1.5 (Lema suavizante)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Supongamos que $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función exhaustiva plurisubarmónica continua. Entonces para todo compacto $K \subset \Omega$ y para todo $\epsilon > 0$ existe una función $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ exhaustiva de clase $\mathcal{C}^\infty$ tal que*

(*a*) *φ es estrictamente plurisubarmónica.*

(*b*) *$\varphi \geq u$ en Ω.*

(*c*) *$|\varphi - u| < \epsilon$ en K.*

Demostración: Para cada $j \geq 0$ sea $\Omega_j = \{z \in \Omega : u(z) < j\} \subset\subset \Omega$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $K \subset \Omega_0$. Entonces por el Corolario 2.1.3 existe una sucesión de funciones $(j \geq 1)$

$$u_j : \Omega_j \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde cada u_j es estrictamente plurisubarmónica en Ω_j y de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$u < u_j < u + 1 \quad \Omega_j\ ,\ j \geq 1$$

lo cual implica que

$$u_j - j + 1 < 0 \quad \Omega_{j-2}\ ,\ j \geq 2$$

$$u_j - j + 1 > 0 \quad \Omega_j - \Omega_{j-1}\ ,\ j \geq 2$$

luego escojemos una función $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\left(\chi(t) = \int_0^t e^{-1/s}ds)\right)$

$$\chi(t) = \exp(t - 2t^{-1})\ ,\ t > 0$$

$$\chi(t) = 0\ ,\ t \leq 0$$

$$\chi(t), \chi'(t), \chi''(t) > 0 \ , \ t > 0$$

entonces

$$\chi \circ (u_j - j + 1) \equiv 0 \quad \Omega_{j-2} \ , \ j \geq 2$$

$$\chi \circ (u_j - j + 1) > 0 \quad \Omega_j - \Omega_{j-1} \ , \ j \geq 2$$

calculando la forma de Levi ($j \geq 2$)

$$\chi \circ (u_j - j + 1)$$

es plurisubarmónica en Ω_j y estrictamente plurisubarmónica en $\Omega_j - \Omega_{j-1}$. Sea $a_2 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\varphi_2 = u_1 + a_2 \chi \circ (u_2 - 2 + 1)$$

sea estrictamente plurisubarmónica en Ω_2 y $\varphi_2 \geq u$ en Ω_2. Sea $a_3 > 0$ suficientemente grande tal que

$$\varphi_3 = u_1 + a_2 \chi \circ (u_2 - 2 + 1) + a_3 \chi \circ (u_3 - 3 + 1)$$

sea estrictamente plurisubarmónica en Ω_3 y $\varphi_3 \geq u$ en Ω_3. Procediendo por inducción se construye una sucesión ($m \geq 2$)

$$\varphi_m = u_1 + \sum_{j=2}^{m} a_j \chi \circ (u_j - j + 1)$$

donde cada φ_m es estrictamente plurisubarmónica en Ω_m y $\varphi_m \geq u$ en Ω_m. Consecuentemente

$$\varphi_m \equiv u_1 \quad \Omega_0 \ , \ m \geq 2$$

$$\varphi_m \equiv \varphi_{m-1} \quad \Omega_{m-2} \ , \ m \geq 3.$$

Por lo tanto la función

$$\varphi = \lim_{m \to \infty} \varphi_m$$

es una función estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$ en Ω tal que

$$\varphi \geq u \quad \Omega$$

$$|\varphi - u| < 1 \ \ , \ \ K$$

$\square$

Lema 2.1.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $F \in H(U,V)$ es un mapeo holomorfo y $u \in \mathrm{PSH}(V) \cap \mathcal{C}^2(V)$ entonces $u \circ F$ es $\mathrm{PSH}(V) \cap \mathcal{C}^2(V)$.*

Demostración: Apliquemos la identidad

$$\Delta_\delta(u \circ F)(a) = \Delta(u)(F(a), F'(a)(\delta)) \geq 0$$

$\square$

Corolario 2.1.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si $F \in H(U,V)$ es un mapeo holomorfo y $u \in \mathrm{PSH}(V)$ entonces $u \circ F$ es $\mathrm{PSH}(U)$.*

Demostración: Sea $\Omega \subset\subset U$ y $u \not\equiv -\infty$. Entonces por el Teorema 2.1.3 $u_\epsilon = u * \Phi_\epsilon$ decrece hacia u. Observemos que $u_\epsilon \circ F \in \mathrm{PSH}(U)$ para todo $\epsilon > 0$ pequeño. Por lo tanto la sucesión $u_\epsilon \circ F$ decrece hacia $u \circ F$ en Ω. Desde que plurisubarmonicidad es una propiedad local, entonces $u \circ F$ es plurisubarmónica. $\square$

En conjunción con el Teorema 2.1.1 obtenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1.13 (principio del máximo para funciones plurisubarmónicas vía discos analíticos). *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $S : \overline{\Delta} \to \Omega$ un disco analítico y $u : \Omega \to [-\infty, \infty)$ una función plurisubarmónica, entonces*

$$\sup_S u \leq \sup_{\partial S} u$$

Proposición 2.1.14. *Si u es plurisubarmónica, entonces $\varphi \circ u$ es plurisubarmónica para toda función convexa creciente φ en $\mathbb{R}$ (considerando $\varphi(-\infty) = \lim_{t\to-\infty} \varphi(t) \in [-\infty, \infty)$).*

Demostración: Sea $a + \overline{\Delta} b \subset U$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Dado que φ es una función convexa, entonces existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(t) \geq \varphi(t_0) + k(t - t_0)\ ,\ t \in \mathbb{R}$$

En particular

$$\varphi(u(a + e^{i\theta} b)) \geq \varphi(t_0) + k(u(a + e^{i\theta} b) - t_0)$$

para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, y por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(u(a + e^{i\theta} b)) d\theta \geq \varphi(t_0) + k \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(a + e^{i\theta} b) d\theta - t_0) \right]$$

Si escogemos

$$t_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a+e^{i\theta}b)d\theta$$

entonces obtenemos

$$\varphi(u(a)) \leq \varphi(t_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(u(a+e^{i\theta}b))d\theta$$

□

Proposición 2.1.15. *Si u es estrictamente plurisubarmónica, entonces $\varphi\circ u$ es estrictamente plurisubarmónica, para toda función convexa estrictamente creciente φ en $\mathbb{R}$.*

Demostración: Apliquemos la identidad

$$\Delta_\delta(\varphi\circ u)(a) = g''(u(a))\cdot \left|\left\langle \delta, \overline{\nabla u(a)}\right\rangle\right|^2 + \varphi'(u(a))\cdot \Delta_\delta u(a)$$

□

Proposición 2.1.16. *Sea $U\subset\mathbb{C}^n$ un abierto. Si u es plurisubarmónica en U, entonces*

$$\limsup_{z\to a} u(z) = u(a)$$

para cada punto $a\in U$.

Demostración: Desde que u es semicontinua superiormente,

$$\limsup_{z\to a} u(z) \leq u(a)$$

para todo punto $a\in U$. Supongamos que

$$\limsup_{z\to a} u(z) < u(a)$$

entonces

$$\sup_{z\in B(a,\epsilon)^*} u(z) < u(a)$$

para algún $\epsilon > 0$, lo cual es una contradicción. □

Definición 2.1.7. Sea $U\subset\mathbb{C}^n$ un dominio, $f\in\mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ y $a\in U$. La forma Hermitiana

$$\Delta_\delta f(a) = \Delta f(a,\delta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k = \frac{\partial^2 f_{a,\delta}}{\partial\lambda\partial\overline{\lambda}}(0)\in\mathbb{R}$$

es llamado la **forma de Levi** de f en a, donde $\delta\in\mathbb{C}^n$, $(a+\lambda\delta\in U)$.

Las siguientes propiedades se deducen claramente de la definición y de la regla de la cadena en su versión compleja, dejamos la prueba al lector.

Proposición 2.1.17. *Si $f \in \mathcal{C}^2(U,\mathbb{R})$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^2$, entonces*

$$\Delta_\delta(g \circ f)(a) = g''(f(a))\cdot \left|\left\langle \delta, \overline{\nabla f(a)} \right\rangle\right|^2 + g'(f(a))\cdot \Delta_\delta f(a)$$

Proposición 2.1.18. *Si $F : U \to V$ es un mapeo holomorfo y $g \in \mathcal{C}^2(V,\mathbb{R})$, entonces*

$$\Delta_\delta(g \circ F)(a) = \Delta(g)(F(a), F'(a)(\delta))$$

Proposición 2.1.19. *Si $F \in \mathcal{C}^1(U,V)$ y $g : V \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^1$, entonces*

$$\overline{\nabla(g \circ F)(a)} = [JF(a)]^* \overline{\nabla g(F(a))}$$

donde $[JF(a)]^*$ es la transpuesta de la conjugada de la matriz compleja $JF(a)$.

Proposición 2.1.20. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, entonces*

$$\Delta_\delta(hf)(a) = h(a)\cdot \Delta_\delta f(a) + f(a)\cdot \Delta_\delta h(a) + 2\Re\left\{\overline{\partial} h(a)(\delta)\cdot \partial f(a)(\delta)\right\}$$

Proposición 2.1.21. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f \in \mathcal{C}^2(\Omega,\mathbb{R})$, entonces*

$$\Delta_\delta f(a) = \frac{\mathrm{Hess}_\delta f(a) + \mathrm{Hess}_{i\delta} f(a)}{4}$$

donde $\mathrm{Hess}_\delta f(a)$ es la forma cudrática asociada a la matriz Hessiana de f en el punto $a \in \Omega$.

2.2. Discos analíticos y el principio de continuidad

Definición 2.2.1. Sea $(S_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de subconjuntos de un espacio métrico M y sea $S \subset M$. Decimos que S_n **converge a** S si para todo $\epsilon > 0$ existe $J \in \mathbb{N}$ tal que si $j \geq J$ entonces $S_j \subset B(S,\epsilon)$ y $S \subset B(S_j,\epsilon)$. En este caso escribiremos $S_j \to S$.

Para motivar la definición comenzaremos presentando algunos resultados de dominios convexos[14].

Definición 2.2.2. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Diremos que U satisface el **principio de continuidad** si para toda sucesión de segmentos cerrados $(L_j)_{j\geq 1} \subset U$ satisfaciendo $\partial L_j \to B$ y $L_j \to L$ donde $B \subset U$ y $L \subset \mathbb{R}^n$ son compactos, entonces $L \subset U$.

Teorema 2.2.1. *Un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solamente si satisface el principio de continuidad.*

Proposición 2.2.1 (S. Krantz[14]). *Un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solamente si para todo segmento cerrado $[a, b] \subset U$ la distancia*

$$d([a, b], \partial U)$$

es alcanzada en los extremos del segmento.

Ahora estudiaremos una caracterización de dominios pseudoconvexos, mediante discos analíticos cerrados.

Definición 2.2.3. Un **disco analítico** es una aplicación continua $S : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ cuya restricción a Δ es holomorfa. La **frontera** de un disco analítico S, denotado por ∂S, será la imagen $S(\partial\Delta)$. Un disco analítico $S : \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ y la imagen $S(\overline{\Delta})$ frecuentemente será denotado por S.

Definición 2.2.4. Una **familia continua de discos analíticos** $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathbb{C}^n$ es una aplicación continua de la forma

$$\Phi : [0, 1] \times \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

de modo que cada $\Phi_t(z) = \Phi(t, z)$ es una función holomorfa en Δ.

Definición 2.2.5 (Kontinuitätssatz). Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que U satisface el **principio de continuidad** si para toda sucesión de discos analíticos $(S_j)_{j\geq 1}$ satisfaciendo $S_j \cup \partial S_j \subset U$ para todo $j \geq 1$, tal que $\lim_{j\to\infty}\partial S_j = B$ y $\text{lím}_{j\to\infty} S_j = T$ donde $B \subset U$ y $T \subset \mathbb{C}^n$ son compactos, entonces $T \subset U$.

Propiedades 2.2.1.

(*a*) *Si $X_j \subset Y_j$, $\lim_{j\to\infty}X_j = A$, $\lim_{j\to\infty}Y_j = B$ entonces $A \subset B$.*

(*b*) *Si $\lim_{j\to\infty}X_j = A$, $\lim_{j\to\infty}Y_j = B$ entonces $\lim_{j\to\infty}X_j \cup Y_j = A \cup B$.*

(*c*) *Si $\lim_{j\to\infty}X_j = A$ entonces $\lim_{j\to\infty}X_j = \overline{A}$ y $\lim_{j\to\infty}\overline{X}_j = A$.*

(*d*) *Si $\lim_{j\to\infty}X_j = A$ entonces $a \in A$ si y solo $x_j \to a$.*

(e) *Si* $\lim_{j\to\infty} X_j = A$ *y* $\lim_{j\to\infty} X_j = B$ *entonces* $\overline{A} = \overline{B}$.

(f) *Si* $\lim_{j\to\infty} X_j = A$ *donde cada* X_j *es acotado entonces* A *es acotado.*

(g) *Si* $\lim_{j\to\infty} K_j^{\text{compacto}} = K^{\text{compacto}}$ *donde cada* K_j *es conexo entonces* K *es conexo.*

(h) *Consideremos los discos analíticos* $S_j : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}^n$ $(j \geq 1)$, $S : \overline{\Delta} \to \mathbb{C}^n$, *de modo que la sucesión* $(S_j)_{j\geq 1}$ *converge uniformemente a* S *en* $\overline{\Delta}$, *entonces*

$$\lim_{j\to\infty} \partial S_j = \partial S$$

$$\lim_{j\to\infty} S_j = S \cup \partial S$$

Observaciones:

1. Los compactos B y T en la Definición 2.2.5 son siempre conexos, además $B \subset T \subset \overline{U}$. Esta observación implica lo siguiente:

Proposición 2.2.2. *Sean* $U, V \subset \mathbb{C}^n$ *dominios satisfaciendo el principio de continuidad. Entonces cada componente conexa de* $U \cap V$ *satisface el principio de continuidad.*

Demostración: Sea W una componente conexa de $U \cap V$. Sea $(S_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de discos analíticos satisfaciendo $S_j \cup \partial S_j \subset W$ para todo $j \geq 1$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$$

$$\lim_{j\to\infty} S_j = T$$

donde $B \subset W$ y $T \subset \mathbb{C}^n$ son compactos. Por demostrar que $T \subset W$. Dado que U y V satisfacen el principio de continuidad, $T \subset U \cap V$. Como T es conexo, entonces T está contenido en alguna componente conexa de $U \cap V$. Dado que $B \subset T$ y $B \subset W$ entonces existe un punto $b \in T$ tal que b pertenece a la componente conexa W, la conexidad de T obliga a que todo el conjunto $T \subset W$. Por lo tanto W satisface el principio de continuidad. $\square$

Teorema 2.2.2. *Si* $U \subset \mathbb{C}^n$ *es un dominio de holomorfía entonces* U *satisface el principio de continuidad.*

Demostración: Sea $(S_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de discos analíticos satisfaciendo $S_j \cup \partial S_j \subset U$ para todo $j \geq 1$, tal que

$$\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$$

$$\lim_{j\to\infty} S_j = T$$

donde $B \subset U$ y $T \subset \mathbb{C}^n$ son compactos. Por demostrar que $T \subset U$. Sea $a \in T$. Dado que $\lim_{j\to\infty} S_j = T$, entonces existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1}$ tal que $\lim_{j\to\infty} z_j = a$, donde $z_j \in S_j$ para todo $j \geq 1$. Dilatamos el compacto B, $\Delta(B,r) \subset\subset U$, para algún $r > 0$, denotemos $K = \overline{\Delta(B,r)}$. Como $\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$, entonces existe $j_0 \geq 1$ tal que $\partial S_j \subset \Delta(B,r)$ para todo $j \geq j_0$. Por el Lema 1.2.6 $S_j \subset \widehat{(\partial S_j)}_U \subset \widehat{K}_U$ para todo $j \geq j_0$. Dado que U es un dominio de holomorfía entonces $\widehat{K}_U$ es compacto, y como $(z_j)_{j\geq j_0} \subset \widehat{K}_U$, se sigue que $a \in \widehat{K}_U \subset U$, luego $T \subset U$. Por lo tanto U satisface el principio de continuidad. □

Definición 2.2.6. Una **rotación compleja** es un isomorfismo $\mathbb{C}$-lineal isométrico $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$, esto es, preserva distancias $\|Tz - Tw\| = \|z - w\|$.

Observación. Equivalentemente T es una rotación compleja si T admite la representación $Tz = U \cdot z$, donde $U \subset \mathbb{C}^{n^2}$ es una matriz unitaria ($UU^* = I_n$).

Lema 2.2.1. *Sea $a \in \mathbb{C}^n$ unitario, entonces existe una rotación compleja $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tal que $Ta = e_1$.*

Demostración: Por el proceso de Ghram-Smith, sea $\{a, a_2, \ldots, a_n\}$ una base ortonormal de $\mathbb{C}^n$, luego formamos la matriz unitaria $U = [a\, a_2 \ldots \lambda a_n]$ donde $\lambda^{-1} = \det[a\, a_2 \ldots a_n]$, entonces $Tz = U^{-1}z$ es una rotación compleja tal que $Ta = e_1$, además el $\det T = 1$. □

Proposición 2.2.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ (con $n \geq 2$) un dominio propio tal que $\mathbb{C}^n - U$ es compacto. Entonces U no es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Desde que $\mathbb{C}^n - U$ es compacto, consideremos el punto $a \in \mathbb{C}^n - U$ el más alejado del origen. Sea

$$R : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$

una rotación compleja tal que $Ra = (\|a\|, 0, \ldots, 0)$. Sea $b = Ra$ y $V = R(U)$, entonces b es el punto del compacto $K = \mathbb{C}^n - V$ más alejado al origen. Por demostrar que V no es un dominio de holomorfía. Para cada $j \geq 1$ definamos los discos analíticos

$$S_j : \overline{\Delta} \to V$$

$$S_j(z) = (\|a\| + \frac{1}{j}, z, 0, \ldots, 0)$$

Notamos que

$$\lim_{j\to\infty} \partial S_j = \{(\|a\|, z, 0, \dots, 0) : z \in \partial\Delta\} \subset \overline{B(0, \|a\|)}^c \subset V$$

$$\lim_{j\to\infty} S_j = \{(\|a\|, z, 0, \dots, 0) : z \in \overline{\Delta}\} \not\subset V$$

desde que $b \in \partial K = \partial V$, luego V no satisface el principio de continuidad, se sigue por el Teorema 2.2.2 que V no es un dominio de holomorfía. Dado que U y V son biholomórficamente equivalentes, entonces por la Proposición 1.6.5 U no es un dominio de holomorfía. $\square$

Proposición 2.2.4. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio convexo entonces U satisface el principio de continuidad.*

Demostración: Sea $(S_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de discos analíticos satisfaciendo $S_j \cup \partial S_j \subset U$ para todo $j \geq 1$, tal que $\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$ y $\lim_{j\to\infty} S_j = T$ donde $B \subset U$ y $T \subset \mathbb{C}^n$ son compactos y supongamos que existe $a \in T$ y $a \notin U$ ($a \in \partial U$). Por convergencia $S_j \to T$ existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1}$ tal que $z_j \to a$ con $z_j \in S_j$ para cada j. Por la Proposición, existe un hiperplano de soporte $H = \{z \in \mathbb{C}^n : (z-a)\cdot b = 0\}$ para U en a, donde $b \in \mathbb{C}^n$ tal que $(z-a)\cdot b < 0$ para todo $z \in U$. Sea $r = d(B, \partial U)/2$ entonces $K = \overline{\Delta(B, r)} \subset U$ es compacto. Por convergencia $\partial S_j \to B$ existe $j_0 \geq 1$ tal que si $j \geq j_0$ entonces $\partial S_j \subset \Delta(B, r) \subset K$. Como la función $z \mapsto e^{\langle z-a, b\rangle}$ es holomorfa en U entonces por el principio del módulo máximo para funciones holomorfas respecto a discos analíticos tenemos que $\|f\|_{S_j} \leq \|f\|_{\partial S_j} \leq \|f\|_K$ para todo $j \geq j_0$, entonces $1 \leq e^{(z_0-a)\cdot b}$ para algún $z_0 \in K$, el cual es una contradicción. Por lo tanto todo dominio convexo satisface el principio de continuidad. $\square$

Teorema 2.2.3 (Versiones equivalentes al principio de continuidad). *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) U satisface el principio de continuidad.

b) Para toda familia continua de discos analíticos $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathbb{C}^n$ de modo que $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1)} \subset U$ y $\partial\Phi_1 \subset U$, entonces $\Phi_1 \subset U$.

c) Para toda familia continua de discos analíticos $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathbb{C}^n$ de modo que $\partial\Phi_t \subset U$ para todo $t \in I = [0,1]$, entonces la inclusión $\Phi_t \subset U$ se cumple o bien para todo $t \in I$ o para ningún $t \in I$.

2.3. Pseudoconvexidad global

Para todo dominio $U \subset \mathbb{C}$ la aplicación $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es subarmónica en U. En dimensiones mayores en general no es cierto que la aplicación $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubharmónica para todo dominio U. En esta sección probaremos que esta clase de dominios tal que la aplicación $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubharmónica, contiene la clase de dominios de holomorfía. En efecto en el capítulo mostraremos que estas dos clases son la misma.

Proposición 2.3.1. *Un dominio propio $U \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solamente si la función*

$$x \mapsto -\log d(x, \partial U)$$

es convexa en U.

Teorema 2.3.1. *Un dominio $U \subset \mathbb{R}^n$ es convexo si y solamente si U admite una función exhaustiva convexa continua.*

Proposición 2.3.2. *Para todo dominio $U \subset \mathbb{C}$ la aplicación $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es subarmónica.*

Demostración: $-\log d(z, \partial\Omega) = -\log \inf\{|z-a| : a \in \partial U\} = \sup\{-\log|z-a| : a \in \partial U\}$ es subarmónica en $U \subset \mathbb{C}$. □

Ejemplo 2.3.1. La función $z \mapsto -\log \|z\|$ no es plurisubharmónica en $(\mathbb{C}^n)^*$ para $n \geq 2$.

Demostración: Principio del máximo para funciones subarmónicas (en el punto $a = e_1$ con dirección $\delta = e_2$). □

Definición 2.3.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Diremos que $f : U \to \mathbb{R}, [-\infty, \infty)$ es una **función exhaustiva** si $U_c = \{z \in U : f(z) < c\} \subset\subset U$, para todo $c \in \mathbb{R}$.

Observaciones:

1. Equivalentemente si $c \in \mathbb{Z}^+$.

2. Si f es continua, entonces f es una función exhaustiva si y solamente si $U_c = \{z \in U : f(z) \leq c\}$ es compacto, para todo $c \in \mathbb{R}$.

3. Equivalentemente f es una función exhaustiva, si para todo $c \in \mathbb{R}$, existe un compacto $K \subset U$ tal que para todo $z \in U - K$, $f(z) > c$.

Proposición 2.3.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $f : U \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f es una función exhaustiva si y solamente si para toda sucesión $(z_j)_{j\geq 1} \subset U$ con $z_j \to a \in \partial U$ o $z_j \to \infty$ (esto es, $\|z_j\| \to \infty$) entonces $f(z_j) \to +\infty$.*

Proposición 2.3.4. *Todo dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ admite una función exhaustiva continua.*

Demostración: Sea $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $f(z) = \|z\|^2$ si $\partial U = \emptyset$ y $f(z) = \|z\|^2 - \log \operatorname{dist}(z, \partial U)$ por lo demás (donde $d(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^n$). Afirmamos que f es una función exhaustiva para U. Si $\partial U = \emptyset$ es claro, consideremos el caso cuando $\partial U \neq \emptyset$. Si $z_j \to a \in \partial U$ entonces $\left(\|z_j\|^2\right)_{j\geq 1}$ es acotado y $\log \operatorname{dist}(z_j, \partial U) \to -\infty$, así $f(z_j) \to +\infty$. Si $z_j \to \infty$ entonces $\operatorname{dist}(z_j, \partial U) \leq 2\|z_j\|$ para todo j suficientemente grande y por lo tanto $f(z_j) \geq \|z_j\|^2 - \log \|z_j\| - \log 2$, lo cual implica $f(z_j) \to +\infty$. Observar que $z \mapsto \operatorname{dist}(z, \partial U)$ es lipschitziana, además si U es acotado $f(z) = -\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$ es una función exhaustiva para U. □

Observaciones:

1. Aplicando partición de la unidad en $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(a_n, r_n)$, podemos demostrar que todo dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ admite una función exhaustiva $u = \sum_{n=1}^{\infty} n\varphi_n$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. En general $-\log \operatorname{dist}(z, \partial U)$ podría no ser una exhaustion. Por ejemplo, si $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$.

Definición 2.3.2. Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ es **pseudoconvexo** si admite una función $u : U \to \mathbb{R}$ exhaustiva plurisubarmónica continua. Un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$ es **pseudoconvexo** si cada componente de U es un dominio pseudoconvexo.

Observaciones:

1. Equivalentemente por el Lema 2.1.5, un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ es pseudoconvexo si admite una función $u : U \to \mathbb{R}$ exhaustiva estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$.

2. Pseudoconvexidad es una propiedad invariante bajo biholomorfismos.

Ejemplo 2.3.2. Toda bola Euclidiana $U = B(a, r) \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo. Sea $f : B(a, r) \to \mathbb{R}$ definido por $f(z) = -\log d(z, \partial U)$ claramente f es continua y exhaustiva. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz $|\langle a - z, w - a\rangle| \leq r\|a - z\|$, para todo $w \in \partial U$, luego

$$r^2 - r\|a - z\| \leq r^2 - |\langle a - z, w - a\rangle| \leq |r^2 + \langle a - z, w - a\rangle| = |\langle w - z, w - a\rangle|$$

$$d(z, \partial U) = r - \|a - z\| \leq \left| \left\langle w - z, \frac{w - a}{r} \right\rangle \right|$$

Sea $p \in \partial U$ de modo que $d(z, \partial U) = \|z - p\|$, entonces

$$\left| \left\langle p - z, \frac{p - a}{r} \right\rangle \right| = d(z, \partial U)$$

Por lo tanto

$$d(z, \partial U) = \inf_{w \in \partial U} \left\{ \left| \left\langle w - z, \frac{w - a}{r} \right\rangle \right| \right\}$$

Por la continuidad y monotonía de la función log tenemos que

$$-\log d(z, \partial U) = \sup_{w \in \partial U} \left\{ -\log \left| \left\langle w - z, \frac{w - a}{r} \right\rangle \right| \right\}$$

se sigue de la Proposición 4.8 y 4.9 que f es plurisubarmónica.

Ejemplo 2.3.3. Toda polidisco $\Delta(a, r) \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo.

Proposición 2.3.5. *Sean $U, V \subset \mathbb{C}^n$ dominios pseudoconvexos. Entonces cada componente conexa de $U \cap V$ es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Sean $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones exhaustivas plurisubarmónicas continuas. Sea $W \subset U \cap V$ una componente conexa. Por demostrar que W es un dominio pseudoconvexo. Definimos

$$h : W \to \mathbb{R}$$

$$h(z) = \max\{f(z), g(z)\}$$

entonces h es una función plurisubarmónica continua. Sea $(z_j)_{j \geq 1} \subset W$ una sucesión tal que $\lim_{j \to \infty} z_j = \infty$, entonces $\lim_{j \to \infty} f(z_j) = +\infty$, luego $\lim_{j \to \infty} h(z_j) = +\infty$. Sea $(z_j)_{j \geq 1} \subset W$ una sucesión tal que $\lim_{j \to \infty} z_j = a \in \partial W$. Como $\partial W \subset \partial U \cap \partial V$ entonces $\lim_{j \to \infty} f(z_j) = +\infty$ o $\lim_{j \to \infty} g(z_j) = +\infty$, luego $\lim_{j \to \infty} h(z_j) = +\infty$. Por lo tanto h es una función exhaustiva plurisubarmónica continua, se sigue que W es un dominio pseudoconvexo. $\square$

Teorema 2.3.2. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo, entonces U satisface el principio de continuidad.*

Demostración: Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función exhaustiva plurisubarmónica continua. Sea $(S_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de discos analíticos satisfaciendo $S_j \cup \partial S_j \subset U$ para todo $j \geq 1$

$$\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$$

$$\lim_{j\to\infty} S_j = T$$

donde $B \subset U$ y $T \subset \mathbb{C}^n$ son compactos. Por demostrar que $T \subset U$. Sea $a \in T$, por la convergencia $\lim_{j\to\infty} S_j = T$ existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1}$ tal que $z_j \to a$ donde $z_j \in S_j$ para todo $j \geq 1$. Dilatamos el compacto B, $\Delta(B, r) \subset\subset U$, para algún $r > 0$. Denotemos $K = \overline{\Delta(B, r)}$ y $M = \sup\limits_{K} f$. Por la convergencia $\lim_{j\to\infty} \partial S_j = B$ existe $j_0 \geq 1$ tal que $\partial S_j \subset \Delta(B, r)$ para todo $j \geq j_0$. Por la Proposición 2.1.13

$$f(z_j) \leq \sup_{S_j} f \leq \sup_{\partial S_j} f \leq M$$

para todo $j \geq j_0$, entonces $(z_j)_{j\geq j_0} \subset f^{-1}(-\infty, M]$. Como f es una exhaustion, $a \in f^{-1}(-\infty, M] \subset U$, luego $T \subset U$. Por lo tanto U satisface el principio de continuidad. $\square$

2.4. Propiedades de dominios pseudoconvexos

En ésta sección daremos algunos ejemplos de dominios pseudoconvexos y algunas propiedades de estabilidad de dominios pseudoconvexos bajo operaciones de conjuntos.

Proposición 2.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces U es una región pseudoconvexa si y solamente si cada componente de U es un dominio pseudoconvexo.*

Teorema 2.4.1. *Sea $\left(\Omega_\lambda\right)_{\lambda\in\Lambda} \subset \mathbb{C}^n$ una familia de dominios pseudoconvexos, y sea Ω una componente conexa del interior de $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} \Omega_\lambda$. Entonces Ω es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Observemos que

$$d(z, \partial\Omega) = \inf_{\lambda\in\Lambda} d(z, \partial\Omega_\lambda)$$

para $z \in \Omega$, entonces

$$-\log d(z, \partial\Omega) = \sup_{\lambda\in\Lambda}\{-\log d(z, \partial\Omega_\lambda)\}.$$

$\square$

Proposición 2.4.2. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ y $V \subset \mathbb{C}^m$ son dominios de pseudoconvexos, entonces el producto Cartesiano $U \times V \subset \mathbb{C}^{n+m}$ es un dominio pseudoconvexo. En particular, si $\Omega_1, \ldots, \Omega_n \subset \mathbb{C}$ son abiertos, entonces $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$ es pseudoconvexo en $\mathbb{C}^n$.*

Demostración: Observemos que $\partial(U \times V) = (\partial U \times \overline{V}) \cup (\overline{U} \times \partial V)$. Si $(z, w) \in U \times V$ entonces $d((z, w), \partial(U \times V)) = \min\{d(z, \partial U), d(w, \partial V)\}$. Consecuentemente $-\log d((z, w), \partial(U \times V)) = \max\{-\log d(z, \partial U), -\log d(w, \partial V)\}$ □

Proposición 2.4.3. *Sean $U \subset \mathbb{C}^n$ y $V \subset \mathbb{C}^m$ dominios. Si $f : U \to V$ es un mapeo holomorfo propio y V es pseudoconvexo, entonces U es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Como V es un dominio pseudoconvexo, entonces V admite una función exhaustiva plurisubarmónica continua $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$. Por lo tanto $g \circ f$ es una función exhaustiva plurisubarmónica continua en U. Por lo tanto U es un dominio pseudoconvexo.

□

Proposición 2.4.4. *Sea $T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ una aplicación lineal y $V \subset \mathbb{C}^m$ un dominio pseudoconvexo y sea $U = T^{-1}(V)$. Entonces U es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: $\widehat{K}_U^{psh} \subset T^{-1}\left[\widehat{T(K)}_V^{psh}\right]$, $\widehat{T(K)}_V^{psh} + B(0, \epsilon) \subset V$ entonces $\widehat{K}_U^{psh} + B(0, \delta) \subset U$, luego U es plurisubarmónicamente convexo. □

Definición 2.4.1. Un dominio $T_B \subset \mathbb{C}^n$ es llamado un **dominio tubular** si existe un dominio $B \subset \mathbb{R}^n$, llamado la base de T_B, tal que $T_B = \{z \in \mathbb{C}^n : \Re z \in \Omega\} = B + i\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.4.5. *Un dominio tubular es pseudoconvexo si y solamente si su base es convexa.*

Demostración: Supongamos que T_B es pseudoconvexo. Por demostrar que B es convexo. Sea el segmento $b + [-1, 1] \cdot d \subset B$, entonces por demostrar que la función

$$t \mapsto d(b + td, \partial B) \ , \ t \in [-1, 1]$$

alcanza el mínimo en $+1$ o -1. Equivalentemente por demostrar la función

$$t \mapsto -\log d(b + td, \partial B) \ , \ t \in [-1, 1]$$

alcanza el máximo en $+1$ o -1. Supongamos por contradicción que el máximo es alcanzado en el intervalo $(-1,1)$. Observemos que

$$-\log d(z,\partial T_B) = -\log d(\Re z,\partial B)\ ,\ z\in T_B$$

y que la función

$$\lambda \mapsto -\log d(b+\lambda d,\partial T_B)\ ,\ \lambda\in\Delta$$

es subarmónica. Por lo tanto la función subarmónica admite un máximo global y debe ser constante, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.4.6. *Sean $U\subset\mathbb{C}^n$, $V\subset\mathbb{C}^m$ dominios de pseudoconvexos y $f\in\mathcal{O}(U,\mathbb{C}^m)$. Entonces*

$$U_f = \{z\in U : f(z)\in V\}$$

es un dominio pseudoconvexo.

Demostración: Sea $K\subset U_f$ un compacto. Entonces

$$\widehat{K}^{psh}_{U_f}\subset \widehat{K}^{psh}_{U}\subset\subset U.$$

Supongamos que existe una sucesión $(z_j)_{j\geq 1}\subset \widehat{K}^{psh}_{U_f}$ tal que $z_j\longrightarrow z_0\in U\cap\partial U_f$. Notemos que para todo $z\in\widehat{K}^{psh}_{U_f}$ y $v\in \mathrm{PSH}(V)$

$$v(f(z))\leq \sup_K v\circ f = \sup_{f(K)} v$$

entonces

$$f(\widehat{K}^{psh}_{U_f})\subset \widehat{f(K)}^{psh}_V \subset\subset V$$

$$f(z_j)\in \widehat{f(K)}^{psh}_V \subset\subset V\ ,\ j\geq 1$$

y por lo tanto $f(z_0)\in V$, lo cual es una contradicción. $\square$

Proposición 2.4.7. *Sea $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces para todo subespacio afín complejo $V\subset\mathbb{C}^n$, $\Omega\cap V$ es un dominio pseudoconvexo en V, i.e. para todo $a\in\mathbb{C}^n$ y vectores linealmente independientes $v_1,\dots,v_k\in\mathbb{C}^n$*

$$G=\{(\lambda_1,\dots,\lambda_k)\in\mathbb{C}^k : a+\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_k v_k\in\Omega\}$$

es pseudoconvexo en $\mathbb{C}^k$.

Demostración: Si u es una función exhaustiva plurisubarmónica para Ω, entonces la función

$$v(\lambda) = u(a + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k)\ ,\ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \in G$$

es una función exhaustiva plurisubarmónica para G. Observemos que el resultado también se sigue de la proposición con

$$\mathbb{C}^k \ni (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \overset{f}{\mapsto} a + \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k \in \mathbb{C}^n.$$

$\square$

Corolario 2.4.1. *Sea Ω_j un abierto en $\mathbb{C}^{n_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Entonces $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m$ es pseudoconvexo si y solamente si cada Ω_j es pseudoconvexo, $j = 1, \ldots, m$.*

Proposición 2.4.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudoconvexo. Entonces para todo biholomorfismo*

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \Phi(\Omega)$$

el abierto $\Phi(\Omega)$ es pseudoconvexo.

Demostración: Si u es una función exhaustiva plurisubarmónica para Ω, entonces $u \circ \Phi^{-1}$ es una función exhaustiva plurisubarmónica para $\Phi(\Omega)$. $\square$

2.5. Dominios plurisubarmónicamente convexos

Definición 2.5.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $K \subset U$ compacto. El conjunto

$$\widehat{K}_U^{psh} = \left\{ z \in U : u(z) \leq \sup_k u \ \text{ para toda función plurisubarmónica } u \text{ en } U \right\}$$

Es llamado la **envolvente convexa plurisubarmónica** de K en U. Diremos que U es un **dominio plurisubarmónicamente convexo** si para todo compacto $K \subset U$ la envolvente convexa plurisubarmónica $\widehat{K}_U^{psh}$ es relativamente compacta en U. Similarmente definimos

$$\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}} = \left\{ z \in U : u(z) \leq \sup_k u \ \text{ para toda función plurisubarmónica continua } u \text{ en } U \right\}$$

$$\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}^\infty} = \left\{ z \in U : u(z) \leq \sup_k u \ \text{ para toda función plurisubarmónica } u \text{ de clase } \mathcal{C}^\infty \text{ en } U \right\}$$

Observaciones:

1. La envolvente $\widehat{K}_U^{psh} \subset U$ es acotada desde que $|z_j| \in \mathrm{PSH}(U)$.

2. La envolvente $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}$ es cerrado en U.

3. En general, la envolvente $\widehat{K}_U^{psh}$ no es relativamente cerrado en U.

4. Si $f \in H(U)$ entonces $|f| \in \mathrm{PSH}(U)$.

5. $K \subset \widehat{K}_U^{psh} \subset \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}} \subset \widehat{K}_U^{hol} \subset \widehat{K}_U^{lin} = U \cap \mathrm{conv}(K)$.

6. Si $u \in \mathrm{PSH}(U)$ entonces $\sup\limits_{\widehat{K}_U^{psh}} u \leq \sup\limits_K u$.

7. Todo dominio holomórficamente convexo es plurisubarmónicamente convexo.

8. Las funciones exhaustivas forman una exhaustion en su dominio. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ $(n \geq 1)$ es un dominio de holomorfía, entonces U no admite una exhaustion de la forma $|f|$ donde $f \in H(U)$ (por el Teorema de Extensión de Hartogs y el principio del módulo máximo para funciones holomorfas).

Proposición 2.5.1. *Si $S \subset U$ es un disco analítico cerrado, entonces $S \subset \widehat{(\partial S)}_U^{psh}$.*

Demostración: Principio del máximo para funciones plurisubarmónicas vía discos analíticos. □

Definición 2.5.2 (La función distancia direccional). Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Para cada $\eta \in \mathbb{C}^n$, definamos $d_\eta : U \to \mathbb{R}$ por

$$d_\eta(z) = \sup\{r > 0 : z + r\Delta\cdot \eta \subset U\}$$

Proposición 2.5.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, entonces*

a) La función $z \mapsto d(z, \partial U)$ es Lipschitz-continua en U.

b) La función $z \mapsto d_\eta(z)$ es semicontinua inferiormente en U.

c) $d(a, \partial U) = \mathrm{ínf}_{\|\eta\|=1}\{d_\eta(a)\}$.

Demostración: La función $z \mapsto d_\eta(z)$ es semicontinua inferiormente en U. Sea $0 < c < d_\eta(a)$, entonces

$$a + c\overline{\Delta}\cdot \eta \subset U$$

Dilatamos el compacto $K = a + c\overline{\Delta}\cdot \eta$, $B(K, r) \subset U$, entonces

$$B(a, r) + c\overline{\Delta}\cdot \eta \subset U$$

se sigue que $c < d_\eta(z)$ para todo $z \in B(a, r)$. Por lo tanto $z \mapsto d_\eta(z)$ es semicontinua inferiormente en U. Además, como $B(a, r) = \bigcup_{\|\eta\|=1} \{a + r\Delta\cdot \eta\}$ entonces $d(a, \partial U) = \inf_{\|\eta\|=1}\{d_\eta(a)\}$. $\square$

Teorema 2.5.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

a) La función

$$z \mapsto -\log d_\eta(z)$$

es plurisubarmónica en U, para cada $\eta \in \mathbb{C}^n$.

b) La función

$$z \mapsto -\log d(z, \partial U)$$

es plurisubarmónica en U.

c) U admite una función exhaustiva plurisubarmónica continua.

d) U admite una función exhaustiva plurisubarmónica.

e) U es continuamente plurisubarmónicamente convexo, esto es, para todo compacto $K \subset U$ tenemos que $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}$ es compacto.

f) U es plurisubarmónicamente convexo, esto es, para todo compacto $K \subset U$ tenemos que $\widehat{K}_U^{psh} \subset\subset U$

g) U satisface el principio de continuidad. Para toda familia continua de discos analíticos $\{\Phi_t\}_{t\in[0,1]} \subset \mathbb{C}^n$ de modo que $\partial\Phi_t \subset U$ para todo $t \in I = [0, 1]$, entonces la inclusión $\Phi_t \subset U$ se cumple o bien para todo $t \in I$ o para ningún $t \in I$.

Demostración: El caso $\Omega = \mathbb{C}^n$ es claro. Por lo tanto asumiremos Ω un dominio propio de $\mathbb{C}^n$.

$a) \Rightarrow b)$ $d(z, \partial U) = \inf_{\|\eta\|=1}\{d_\eta(z)\}$.

$b) \Rightarrow c)$ Consideremos la función $z \mapsto \|z\|^2 - \log d(z, \partial U)$, $z \in U$.

$c) \Rightarrow e)$ $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}} \subset \{z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u\} \subset\subset \Omega$

$e) \Rightarrow f)$ $\widehat{K}_U^{psh} \subset \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}} \subset U$.

$f) \Rightarrow g)$ Sea $T = \{t \in [0,1] : \Phi_t \subset U\}$ entonces T es abierto en $[0,1]$. Observemos que

$$\Phi_t \subset \widehat{\partial\Phi_t}_{\mathrm{PSH}(U)} \ , \ t \in T$$

por el principio del máximo para funciones plurisubarmónicas, vía discos analíticos, y que

$$\widehat{\partial\Phi_t}_{\mathrm{PSH}(U)} \subset (\Phi[\widehat{0,1]\times}\partial\Delta)_{\mathrm{PSH}(U)} \subset\subset U \ , \ t \in [0,1]$$

entonces

$$\Phi(T \times \overline{\Delta}) \subset (\Phi[\widehat{0,1]\times}\partial\Delta)_{\mathrm{PSH}(U)} \subset\subset U$$

$$\Phi(\overline{T} \times \overline{\Delta}) \subset \overline{\Phi(T \times \overline{\Delta})} \subset U$$

se sigue que $\overline{T} \subset T$. Por lo tanto T es abierto y cerrado en el espacio conexo $[0,1]$.

$g) \Rightarrow a)$ Sea $a + \overline{\Delta} \subset U$.

$$-\log d_U(a + \lambda b) \leq \Re p(\lambda) \ , \ |\lambda| = 1$$

$$d_U(a + \lambda b) \geq |e^{-p(\lambda)}|$$

$$B(a + \lambda b, |e^{-p(\lambda)}|) \subset U$$

$$a + \lambda b + e^{-p(\lambda)} B(0,1) \subset U \ , \ |\lambda| = 1$$

Sea $w \in B(0,1)$.

$$\Phi : [0,1] \times \overline{\Delta} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$

$$\Phi(t,\lambda) = a + \lambda b + t e^{-p(\lambda)} w$$

$$\Phi_0 \subset U \Longrightarrow \Phi_1 \subset U$$

$$a + \lambda b + e^{-p(\lambda)} B(0,1) \subset U \ , \ |\lambda| \leq 1$$

$$-\log d_U(a + \lambda b) \leq \Re p(\lambda) \ , \ |\lambda| \leq 1$$

$c) \Rightarrow d)$ Es claro.

$d) \Rightarrow f)$ $\widehat{K}_U^{psh} \subset \{z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u\} \subset\subset \Omega$ $\square$

Lema 2.5.1. *Sea* $(U_j)_{j\geq 1}$ *una sucesión de dominios pseudoconvexos en* $\mathbb{C}^n$ *con* $U_j \subset U_{j+1}$ *para cada* $j \geq 1$. *Sea* $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. *Entonces la función*

$$z \mapsto -\log d(z, \partial U)$$

es plurisubarmónica en U, *y por lo tanto* U *es pseudoconvexo.*

Demostración: Sea $k \geq 1$ y $z \in U_k$. Observamos que la sucesión $(d(z, \partial U_j))_{j\geq k}$ es creciente y converge a $d(z, \partial U)$, así por la continuidad de la función log tenemos que $(-\log d(z, \partial U_j))_{j\geq k}$ es decreciente y converge a $-\log d(z, \partial U)$. Por lo tanto cada $z \mapsto -\log d(z, \partial U_j)$ es plurisubarmónica. Se sigue que $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica en U_k. Desde que plurisubarmonicidad es una propiedad local y $U = \bigcup_{j\geq 1} U_j$, se sigue que $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica en U. Luego la función $z \mapsto \|z\|^2 - \log d(z, \partial U)$ es una exhaustion plurisubarmónica continua en U, y por lo tanto U es pseudoconvexo. $\square$

Corolario 2.5.1. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un dominio. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(*a*) *U satisface el principio de continuidad.*

(*b*) *Para todo disco analítico cerrado* $S \subset U$, *tenemos que*

$$d(\partial S, \partial U) = d(S, \partial U)$$

(*c*) *Para toda familia de discos analíticos* $\{\Delta_t\}_t \subset U$, *de modo que* $\bigcup_t \partial\Delta_t \subset\subset U$ *entonces* $\bigcup_t \Delta_t \subset\subset U$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$. Supongamos por contradicción que

$$\|a - b\| = d(\mathring{S}, \partial U) < d(\partial S, \partial U)$$

donde podemos asumir que $a = S(0)$. Ahora definimos los discos analíticos

$$S_t = S + t(b - a)\ ,\ t \in [0, 1)$$

aplicando el principio de continuidad $b \in U$, lo cual es una contradicción.

$(b) \Rightarrow (c)$. Dado que $\Delta_t \subset \widehat{\partial\Delta_t}$ para cada t, entonces $\bigcup_t \Delta_t$ es acotado. Además tenemos que

$$\inf_t d(\Delta_t, \partial U) = \inf_t d(\partial\Delta, \partial U)$$

esto es,

$$d\left(\bigcup_t \Delta_t, \partial U\right) = d\left(\bigcup_t \partial\Delta_t, \partial U\right)$$

Por lo tanto $\bigcup_t \Delta_t \subset\subset U$. $\square$

Corolario 2.5.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si U es* PSH(U)*-convexo, entonces para toda familia de discos analíticos $\{\Delta_t\}_t \subset U$, de modo que $\bigcup_t \partial\Delta_t \subset\subset U$ entonces $\bigcup_t \Delta_t \subset\subset U$.*

Corolario 2.5.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) U es pseudoconvexo.

(b) Para cada compacto $K \subset U$, $d(K, \partial U) = d\left(\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}, \partial U\right)$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$. Sea $K \subset U$ compacto. Desde que la función $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica continua en U, entonces

$$d(K, \partial U) = d\left(\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}, \partial U\right).$$

$(b) \Rightarrow (a)$. Sea $K \subset U$ un compacto, entonces $d\left(\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}, \partial U\right) > 0$. Por lo tanto $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}$ es compacto. $\square$

Corolario 2.5.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio holomórficamente convexo, entonces U es un dominio pseudoconvexo.*

Teorema 2.5.2. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía, entonces U es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Por convexidad holomorfa o por el principio de continuidad. $\square$

Es natural preguntarnos si la implicación inversa es también cierta, este es el famoso **Problema de Levi**, el cual lo estudiaremos en el capítulo IV.

Lema 2.5.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo, sea $K \subset U$ compacto, y sea V una vecindad de $\widehat{K}_U^{psh}$ en U. Entonces existe una función $f \in$ PSH$(U) \cap \mathcal{C}(U)$ tal que:*

a) El conjunto $\{z \in U : f(z) \leq c\}$ es compacto para cada $c \in \mathbb{R}$.

b) $f(z) < 0$ para todo $z \in K$.

c) $f(z) > 0$ *para todo* $z \in U - V$.

Demostración: Sea $u \in \mathcal{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ definido por

$$u(z) = \max\{\|z\|, -\log d(z, \partial U)\} - k$$

donde k es una constante tal que $\sup_K u < 0$. Dado que u es una exhaustion, $K_c = \{z \in U : u(z) \leq c\}$ es compacto para cada $c \in$ R. Si $K_0 - V = \emptyset$ entonces $f = u$. Ahora consideremos $K_0 - V \neq \emptyset$. Desde que K_2 es compacto, $K_2 \subset U_\delta = \{z \in U : d(z, \partial U) > \delta\}$ para algún $\delta > 0$. Para cada $a \in K_0 - V$ existe $\varphi \in \mathcal{PSH}(U)$ tal que $\sup_K \varphi < 0 < \varphi(a)$. Por el Corolario 2.1.3 existe una sucesión decreciente $(\varphi_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{PSH}(U_\delta) \cap \mathcal{C}(U_\delta)$ el cual converge puntualmente a φ en U_δ. Entonces

$$K \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \{z \in U_\delta : \varphi_j(z) < 0\}$$

dado que K es compacto existe $\psi \in \mathcal{PSH}(U_\delta) \cap \mathcal{C}(U_\delta)$ tal que $\sup_K \psi < 0 < \psi(a)$. Desde que $K_0 - V$ es compacto existen $\psi_1, \ldots, \psi_m \in \mathcal{PSH}(U_\delta) \cap \mathcal{C}(U_\delta)$ tal que $\sup_K \psi_j < 0$ para $j = 1, \ldots, m$ y

$$K_0 - V \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{z \in U_\delta : \phi_j(z) > 0\}.$$

Sea $v = \max\{\psi, \ldots, \psi_m\}$. Entonces $v \in \mathcal{PSH}(U_\delta) \cap \mathcal{C}(U_\delta)$, $v(z) < 0$ para todo $z \in K$ y $v(z) > 0$ para todo $z \in K_0 - V$. Sea $M = \sup_{K_2} v > 0$ y definamos $f : U \to \mathbb{R}$ por

$$f(z) = \begin{cases} \max\{M \cdot u(z), v(z)\} \ , & u(z) < 2 \\ M \cdot u(z) & , \ u(z) > 1 \end{cases}$$

Si $1 < u(z) < 2$ entonces $v(z) \leq M < M.\, u(z)$, por lo tanto f está bien definido y pertenece a $\mathcal{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$. Claramente $f(z) < 0$ para todo $z \in K$ y $f(z) > 0$ para todo $z \in U - V$, y desde que

$$\{z \in U : f(z) \leq c\} \subset \{z \in U : M.\, u(z) \leq c\},$$

concluimos que el conjunto $\{z \in U : f(z) \leq c\}$ es compacto para todo $c \in \mathbb{R}$. $\square$

Para llegar a una función estrictamente plurisubarmónica $\mathcal{C}^\infty$ aplicaremos el Lema 2.1.5.

Lema 2.5.3. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un dominio pseudoconvexo, sea* $K \subset U$ *compacto, y sea* V *una vecindad de* $\widehat{K}_U^{psh}$ *en* U. *Entonces existe una función* $f \in \mathcal{SPSH}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$ *tal que:*

a) El conjunto $\{z \in U : f(z) \leq c\}$ *es compacto para cada* $c \in \mathbb{R}$.

b) $f(z) < 0$ *para todo* $z \in K$.

c) $f(z) > 0$ *para todo* $z \in U - V$.

Teorema 2.5.3. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un dominio pseudoconvexo, entonces*

$$\widehat{K}_U^{psh \cap \mathcal{C}} = \widehat{K}_U^{psh}$$

para todo compacto $K \subset U$. *En particular* $\widehat{K}_U^{psh}$ *es compacto para cada compacto* $K \subset U$.

Demostración: Por definición $\widehat{K}_U^{psh} \subset \widehat{K}_U^{pshc}$. Sea $a \in U - \widehat{K}_U^{psh}$. Aplicando el Lema 2.5.2 con $V = U - \{a\}$ existe $f \in \mathcal{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ tal que $\sup_K f < 0 < f(a)$ por lo tanto $a \notin \widehat{K}_U^{pshc}$. $\square$

Corolario 2.5.5. *Si* U *es un dominio pseudoconvexo en* $\mathbb{C}^n$ *y* K *un compacto en* U *entonces* $\widehat{K}_U^{psh} = \widehat{K}_U^{psh \cap \mathcal{C}^\infty}$. *En particular* $\widehat{K}_U^{psh}$ *es compacto.*

Demostración: Claramente $\widehat{K}_U^{p} \subset \widehat{K}_U^{p \cap \mathcal{C}^\infty}$. Consideremos un punto $a \in U - \widehat{K}_U^{p}$, aplicando el Lema 2.5.3 al conjunto compacto y la vecindad $V = U - \{a\}$ en $\widehat{K}_U^{p}$, entonces existe $u \in \mathrm{PSH}(U) \cap \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $u(a) > 0$ y $u < 0$ en $\widehat{K}_U^{p}$. Entonces $u(z) < 0$ en K, se sigue que $a \in U - \widehat{K}_U^{p \cap \mathcal{C}^\infty}$. $\square$

Proposición 2.5.3. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un dominio pseudoconvexo. Sea* $u \in \mathrm{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ *y sea*

$$V = \{z \in U : u(z) < 0\}.$$

Entonces V *es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Sea $K \subset V$ compacto. Entonces

$$\widehat{K}_U^{psh} \subset \{z \in U : u(z) \leq \sup_K u\} \subset V$$

consecuentemente, $\widehat{K}_V^{psh} \subset \widehat{K}_U^{psh} \subset\subset V$. $\square$

Corolario 2.5.6. *Un abierto* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *es pseudoconvexo si y solamente si* $\Omega_\epsilon = \{z \in \Omega : d_\Omega(z) > \epsilon\}$ *es pseudoconvexo para todo* $\epsilon > 0$.

Proposición 2.5.4. *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un dominio pseudoconvexo. Sea* $f \in \mathrm{PSH}(U)$ *y sea*

$$V = \{z \in U : f(z) < 0\}.$$

Entonces V *es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Sea $K \subset V$ compacto. Entonces existe $c < 0$ tal que $f(z) \leq c$ para todo $z \in K$. Se sigue que $f(z) \leq c$ para todo $z \in \widehat{K}_U^{\text{psh}}$ porlo tanto $\widehat{K}_V^{\text{psh}} \subset \widehat{K}_U^{\text{psh}} \subset V$. Desde que $\widehat{K}_U^{\text{psh}}$ es compacto, por el Teorema 2.5.3, concluimos que $\widehat{K}_V^{\text{psh}}$ es relativamente compacto en V. Por lo tanto V es un abierto pseudoconvexo. □

Proposición 2.5.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *U es pseudoconvexo.*

(b) *Para todo compacto $K \subset U$, $\widehat{K}_U^{psh} \subset\subset U$.*

(c) *Para todo compacto $K \subset U$, $\widehat{K}_U^{psh}$ es compacto.*

(d) *Para todo compacto $K \subset U$, $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}}$ es compacto.*

(e) *Para todo compacto $K \subset U$, $\widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}^\infty}$ es compacto.*

Proposición 2.5.6. *Si U es un dominio pseudoconvexo, entonces*

$$\widehat{K}_U^{psh} = \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}} = \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}^1} = \cdots = \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}^k} = \cdots = \widehat{K}_U^{psh\cap\mathcal{C}^\infty}.$$

2.6. Pseudoconvexidad local

Probaremos ahora que pseudoconvexidad como convexidad es en efecto una propiedad local de la frontera.

Teorema 2.6.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio. Entonces U es convexo si y solamente si para cada $a \in \partial U$ existe una vecindad $V \subset \mathbb{R}^n$ de a tal que $V \cap U$ es convexo.*

Definición 2.6.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio y $a \in \partial U$. Entonces U es **localmente pseudoconvexo** en a si existe una vecindad V de a tal que toda componente de $V \cap U$ es pseudoconvexo. Si U es localmente pseudoconvexo en cada $a \in \partial U$ es **localmente pseudoconvexo**.

Teorema 2.6.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces U es pseudoconvexo si y sólo si U es localmente pseudoconvexo.*

Demostración: Si U es pseudoconvexo entonces para todo $a \in \partial U$, cada componente de $U \cap B(a,1)$ es pseudoconvexo. Por lo tanto U es localmente pseudoconvexo. Supongamos ahora que U es localmente pseudoconvexo. Primero supongamos que U es acotado. Sea

$a \in \partial U$ entonces existe una vecindad V de a tal que cada componente de $U \cap V$ es pseudoconvexo. Sea $r_a > 0$ tal que $B(a, r_a) \subset V$ entonces cada componente de $U \cap B(a, r_a)$ es pseudoconvexo. Consideremos las componentes conexas W de $U \cap B(a, r_a)$ tales que $W \cap B(a, r_a/2) \neq \emptyset$. Para $z \in W$ tenemos que $d(z, \partial W) = \min\{d(z, \partial U), d(z, \partial B(a, r_a))\}$. Para $z \in W \cap B(a, r_a/2)$ tenemos que $d(z, \partial U) \leq d(z, a) < r_a/2 < d(z, \partial B(a, r_a))$. Entonces $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica en $W \cap B(a, r_a/2)$, se sigue que $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica en $U \cap B(a, r_a/2)$. Por lo tanto $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ es plurisubarmónica en $X = U \cap \bigcup_{a \in \partial U} B(a, r_a/2)$. Sea $Y = U \cap \bigcup_{a \in \partial U} B(a, r_a/4)$. Observemos que $K = U - Y = \overline{U} - Y$ es compacto y por lo tanto $z \mapsto -\log d(z, \partial U)$ alcanza su valor máximo M en K. Definamos $f : U \to \mathbb{R}$ dado por $f(z) = \max\{-\log d(z, \partial U), M\}$. Desde que plurisubarmonicidad es una propiedad local y $X \cup \mathring{K} = U$, se sigue que f es una función exhaustiva plurisubarmónica continua. Por lo tanto U es pseudoconvexo. Supongamos ahora que U no es acotado. Sea $z_0 \in U$ y consideremos la componente conexa U_j de $U \cap B(z_0, j)$ que contiene a z_0, entonces $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Probaremos que cada U_j es localmente pseudoconvexo, por el resultado anterior cada U_j es pseudoconvexo, se sigue que U es pseudoconvexo. Sea $a \in \partial U_j \subset \partial U \cup \partial B(z_0, j)$. Si $a \in \partial U$ entonces existe una vecindad V_a de a tal que cada componente de $U \cap V_a$ es pseudoconvexo. Observemos que cada componente conexa de $U_j \cap V_a$ es una componente conexa de $[U \cap B(z_0, j)] \cap V_a$ el cual es pseudoconvexo. Si $a \notin \partial U$, entonces $a \in \partial B(z_0, j) \cap U$. Sea $r = d(a, \partial U)$, sea W una componente de $U_j \cap B(a, r/2)$. Para $z \in W$ tenemos que $d(z, \partial W) = \min\{d(z, \partial U_j), d(z, \partial B(a, r/2))\}$, $d(z, \partial U_j) = \min\{d(z, \partial U), d(z, \partial B(z_0, j))\}$. Para $z \in W$ tenemos que $d(z, \partial B(z_0, j)) < r/2 < d(z, \partial U)$. Por lo tanto $z \mapsto -\log d(z, \partial W)$ es plurisubarmónica, se sigue del Teorema 2.5.1 que W es pseudoconvexo. □

Observaciones:

1. El teorema precedente muestra que la pseudoconvexidad de un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ es una propiedad local de ∂U. Si la función $-\log d_U$ es plurisubarmónica en una vecindad abierta de ∂U en U, entonces la función $-\log d_U$ es plurisubarmónica en todo U, desde que

$$z \mapsto \text{máx}\{-\log d(z, \partial B(a, r)), -\log d(z, u)\}$$

   es plurisubarmónica en $B(a, r) \cap U$.

2. Análogamente si U admite un función exhaustiva plurisubarmónica continua cerca a la

∂U entonces U admite un función exhaustiva plurisubarmónica continua global, desde que

$$z \mapsto \max\{-\log d(z, \partial B(a,r)), f(z)\}$$

es una exhaustion plurisubarmónica continua en $B(a,r) \cap U$.

Proposición 2.6.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si existe una función continua plurisubarmónica ρ definida en una vecindad $V_{\partial U}$ de la frontera de U tal que*

$$U \cap V_{\partial U} = \{z \in V_{\partial U} : \rho(z) < 0\}$$

entonces U es pseudoconvexo.

Demostración: Sea $a \in \partial U$ y sea $r > 0$ tal que $\overline{B(a,r)} \subset V_{\partial U}$. Por el Teorema 2.6.2 es suficiente probar que $U \cap B(a,r)$ es pseudoconvexo. Consideremos la función continua plurisubarmónica definido en $V_{\partial U}$ por

$$u(z) = \max\{\|z-a\| - r, \rho(z)\}.$$

Entonces $u < 0$ en $U \cap B(a,r)$ y $u = 0$ en $\partial(U \cap B(a,r))$. Sea $K \subset U \cap B(a,r)$ compacto. Entonces $\sup_K u = c < 0$ y

$$\widehat{K}^{psh}_{U\cap B(a,r)} \subset \{z \in U \cap B(a,r) : u(z) < c\} \subset\subset U \cap B(a,r),$$

se sigue que $U \cap B(a,r)$ es pseudoconvexo. □

2.7. Función de definición global

Definición 2.7.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que la frontera $\partial\Omega$ **es de clase** $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ si para cada $a \in \partial\Omega$ existe una función

$$\varrho : U_a \longrightarrow \mathbb{R}$$

de clase $\mathcal{C}^k$ no-degenerado en $U_a \cap \partial\Omega$, tal que

$$U_a \cap \Omega = \{z \in U_a : \varrho(z) < 0\}$$

la funcion ϱ es llamada una **función de definición local** para Ω.

Presentamos una definición equivalente, aplicando el Teorema de la función implícita

Definición 2.7.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que la frontera $\partial\Omega$ **es de clase** $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ si para cada $a \in \partial\Omega$ existe una función

$$\varrho : U_a \longrightarrow \mathbb{R}$$

de clase $\mathcal{C}^k$ no-degenerado en $U_a \cap \partial\Omega$, tal que

$$U_a \cap \Omega = \{z \in U_a : \varrho(z) < 0\}$$

$$U_a \cap \partial\Omega = \{z \in U_a : \varrho(z) = 0\}$$

la funcion ϱ es llamada una **función de definición local** para Ω.

Observaciones:

1. $U_a \cap \partial\Omega$ es una superficie en $\mathbb{R}^{2n}$ de clase $\mathcal{C}^k$, $(2n-1)$-dimensional (dado que $0 \in \mathbb{R}$ es un valor regular de ϱ).

2. Presentamos una definición equivalente, pegando todas las definiciones locales (esto es, aplicamos $\mathcal{C}^\infty$-partición de la unidad).

Definición 2.7.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que la frontera $\partial\Omega$ **es de clase** $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ si existe una función

$$\varrho : U_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de clase $\mathcal{C}^k$ no-degenerado en $\partial\Omega$, tal que

$$\Omega \cap U_{\partial\Omega} = \{z \in U_{\partial\Omega} : \varrho(z) < 0\}$$

$$\partial\Omega = \{z \in U_{\partial\Omega} : \varrho(z) = 0\}$$

la funcion ϱ es llamada una **función de definición global** para Ω.

Observaciones:

1. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio, entonces $\partial\Omega \in \mathcal{C}^k$ si y solamente si $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^{2n}$ es una superficie de clase $\mathcal{C}^k$, $(2n-1)$-dimensional. Por lo tanto podemos considerar el espacio tangente $T_a(\partial\Omega)$ a $\partial\Omega$ en el punto $a \in \partial\Omega$.

2. Presentamos una nueva definición equivalente, extendiendo la función de definición global hacia una vecindad $U_{\overline{\Omega}}$ o hacia todo $\mathbb{C}^n$ (mediante el Lema de Urysohn).

Definición 2.7.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que la frontera $\partial\Omega$ **es de clase** $\mathcal{C}^k$ $(1 \leq k \leq \infty)$ si existe una función

$$\varrho : U_{\overline{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

de clase $\mathcal{C}^k$ no-degenerado en $\partial\Omega$, tal que

$$\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} : \varrho(z) < 0\}$$

$$\partial\Omega = \{z \in U_{\overline{\Omega}} : \varrho(z) = 0\}$$

la funcion ϱ es llamada una **función de definición global** para Ω.

Ejemplo 2.7.1. Consideremos la bola Euclidiana $\mathbb{B}(a, r) \subset \mathbb{C}^n$, la cual admite una función de definición global $\varrho(z) = \|z - a\|^2 - r^2$ de clase $\mathcal{C}^\infty$, entonces $\partial\mathbb{B}(a, r) \in \mathcal{C}^\infty$.

Proposición 2.7.1 (forma compleja)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Sean ϱ_1, ϱ_2 dos funciones de definicion global para Ω en una vecindad $U_{\partial\Omega}$. Entonces existe una función positiva $h \in \mathcal{C}(U_{\partial\Omega})$ tal que*

a) $\varrho_2 = h\varrho_1$ *en* $U_{\partial\Omega}$.

b) $\nabla\varrho_2 = h\nabla\varrho_1$ *en* $\partial\Omega$.

Demostración: Sea $a \in \partial\Omega$. Por el Teorema de la Función Implícita existe un $\mathcal{C}^1$-difeomorfismo (es decir, un cambio de coordenadas)

$$\Phi_a : W_a \longrightarrow B(0, \epsilon) \subset \mathbb{C}^n$$

de modo que

$$\Phi_a(W_a \cap \Omega) = \{x \in B(0, \epsilon) : x_{2n} < 0\}$$

$$\Phi_a(W_a \cap \partial\Omega) = \{x \in B(0, \epsilon) : x_{2n} = 0\}$$

Definimos

$$r_1 = \varrho_1 \circ \Phi_a^{-1} \in \mathcal{C}^1(B(0, \epsilon))$$

$$r_2 = \varrho_2 \circ \Phi_a^{-1} \in \mathcal{C}^1(B(0, \epsilon))$$

$$h_1(x', x_{2n}) = \int_0^1 \frac{\partial r_1}{\partial x_{2n}}(x', tx_{2n})dt$$

$$h_2(x', x_{2n}) = \int_0^1 \frac{\partial r_2}{\partial x_{2n}}(x', tx_{2n})dt$$

Notamos que r_1, r_2 son funciones de definición local del plano $x_{2n} = 0$ en el origen. Por la regla de Leibniz $h_1, h_2 \in \mathcal{C}(B(0,\epsilon))$, y por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$r_1(x', x_{2n}) = r_1(x', x_{2n}) - r_1(x', 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{r_1(x', tx_{2n})\right\} dt = x_{2n} h_1(x', x_{2n})$$

$$r_2(x', x_{2n}) = r_2(x', x_{2n}) - r_2(x', 0) = \int_0^1 \frac{d}{dt}\left\{r_2(x', tx_{2n})\right\} dt = x_{2n} h_2(x', x_{2n})$$

entonces

$$\frac{\partial r_1}{\partial x_{2n}}(0) = h_1(0)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial x_{2n}}(0) = h_2(0)$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $h_1, h_2 > 0$ en $B(0,\epsilon)$. Entonces $r_2 = \frac{h_2}{h_1} r_1$, se sigue que $\varrho_2 = h_a \varrho_1$ en W_a, donde $h_a = \frac{h_2}{h_1} \circ \Phi_a$. Por lo tanto para cada $a \in \partial\Omega$ existe una bola $B_a \subset U_{\partial\Omega}$ y una función continua $h_a \in \mathcal{C}(B_a)$ tal que $\varrho_2 = h_a \varrho_1$ en B_a. Definimos $h : U_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$h(z) = \begin{cases} \frac{\varrho_2(z)}{\varrho_1(z)} & , \; z \in U_{\partial\Omega} - \partial\Omega \\ h_a(z) & , \; z \in B_a \end{cases}$$

$\square$

Observaciones:

1. La función h es única.

2. Si $U \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio con $\partial U \in \mathcal{C}^1$ entonces admite un espacio tangente bien-definido (esto es, no depende de la función de definición) en cada punto $a \in \partial U$ (dado que ∂U es una superficie) denotado por $T_a(\partial U)$, si ϱ_a es una función de definición local en una vecindad V_a, entonces (dado que $V_a \cap \partial U = \varrho^{-1}\{0\}$, donde 0 es un valor regular)

$$T_a(\partial U) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot d\varrho(a) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : d\varrho(a)(x) = 0\}$$

el cual es un subespacio real $(2n-1)$-dimensional.

3. Como la función $\varrho : V \to \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ es real-valuada, entonces

$$d\varrho(a) = \partial\varrho(a) + \overline{\partial}\varrho(a) = 2\Re\partial\varrho(a)$$

4. Identifiquemos $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ mediante $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n)$ donde $z_j = x_j + iy_j$ para todo $1 \leq j \leq n$. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio con $\partial U \in \mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ entonces

$$T_a(\partial U) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \Re \left\langle z, \overline{\nabla \varrho(a)} \right\rangle = 0 \right\}$$

Definamos el **espacio tangente complejo** a ∂U en a

$$T_a^{\mathbb{C}}(\partial U) = T_a(\partial U) \cap iT_a(\partial U)$$

si ϱ es una función de definición para U, entonces

$$T_a^{\mathbb{C}}(\partial U) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \left\langle z, \overline{\nabla \varrho(a)} \right\rangle = 0 \right\} = \operatorname{Ker}(\partial \varrho)(a) = \{\delta \in \mathbb{C}^n : \partial \varrho(a)(\delta) = 0\}$$

el cual es un subespacio complejo $(n-1)$-dimensional, donde

$$\nabla \varrho(a) = \left(\frac{\partial \varrho}{\partial z_1}(a), \frac{\partial \varrho}{\partial z_2}(a), \ldots, \frac{\partial \varrho}{\partial z_n}(a) \right)$$

es el **gradiente complejo** de ϱ en a.

5. Equivalentemente el espacio tangente complejo, es el mayor $\mathbb{C}$-subespacio de $\mathbb{C}^n$, contenido en el espacio tangente real.

6. $\nabla \varrho(a) \neq 0$ si y solo si $d\varrho(a) \neq 0$.

Definición 2.7.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ y $a \in U$. La forma Hermitiana

$$\Delta_\delta f(a) = \Delta f(a, \delta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) \delta_j \overline{\delta}_k = \frac{\partial^2 f_{a,\delta}}{\partial \lambda \partial \overline{\lambda}}(0) \in \mathbb{R}$$

es llamado la **forma de Levi** de f en a, donde $\delta \in \mathbb{C}^n$, $(a + \lambda\delta \in U)$.

Observaciones:

1. La forma de Levi $\Delta_\delta f(a)$ es $\mathbb{R}$-lineal en f.

Ejemplo 2.7.2. Si $f(z) = \|z\|^2 = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z}_j$ entonces $\Delta_\delta f(a) = \|\delta\|^2$.

2.8. Dominios Levi pseudoconvexos

Para dominios de $\mathbb{C}^n$ con fronteras suaves, existen caracterizaciones alternativas de pseudoconvexidad, análogamente a los dominios convexos de $\mathbb{R}^n$ con fronteras suaves.

Teorema 2.8.1 (S. Krantz[14]). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces U es convexo si y solamente si para cada $a \in \partial U$*

$$\mathrm{Hess}(\varrho)(a,\delta) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x_j \partial x_k}(a)\delta_j\delta_k \geq 0$$

para todo $\delta \in T_a(\partial U)$.

Definición 2.8.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Diremos que U satisface la **condición de Levi** en $a \in \partial U$ si la forma de Levi

$$\Delta_\delta \varrho(a) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k \geq 0$$

es semidefinida positiva en $T_a^{\mathbb{C}}(\partial U)$. Diremos que U satisface la **condición estricta de Levi** en $a \in \partial U$ si la forma de Levi

$$\Delta_\delta \varrho(a) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k > 0$$

es definida positiva en $T_a^{\mathbb{C}}(\partial U)^*$. Diremos que U es **Levi pseudoconvexo** si satisface la condición de Levi en cada punto $a \in \partial U$. Si U es un dominio acotado, diremos que U es **estrictamente pseudoconvexo** si satisface la condición estricta de Levi en cada punto $a \in \partial U$.

Lema 2.8.1. *Si $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en $z = a$ con $f(a) = 0$, y $h : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ es continua en $z = a$. Entonces hf es diferenciable en $z = a$, además*

$$\nabla(hf)(a) = h(a) \cdot \nabla f(a)$$

Proposición 2.8.1. *Las condiciónes de Levi no dependen de la elección de la función de definición local o global, y ellos son invariantes bajo mapeos biholomorfos.*

Demostración: Si $\varrho_2 = h\varrho_1$ es otra función de definición local, entonces

$$\Delta_\delta \varrho_2(a) = \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho_2}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k =$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial z_k}(a)\frac{\partial \varrho_1}{\partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial h}{\partial \overline{z}_k}(a)\frac{\partial \varrho_1}{\partial z_j}(a)\delta_j\overline{\delta}_k + h(a)\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a)\delta_j\overline{\delta}_k$$

$$\Delta_\delta \varrho_2(a) = h(a) \cdot \Delta_\delta \varrho_1(a) + 2\Re\left\{\overline{\partial} h(a)(\delta) \cdot \partial \varrho_1(a)(\delta)\right\}$$

Si restringuimos la forma de Levi al espacio tangente complejo $\delta \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial U)$ entonces

$$\Delta_\delta \varrho_2(a) = h(a) \cdot \Delta_\delta \varrho_1(a)$$

el cual difiere por solo un factor escalar positivo. En particular el número de autovalores negativos y positivos de la forma de Levi es independiente de la elección de la función de definición local o global. □

Ejemplo 2.8.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Si $a \in \partial U$ es un punto de convexidad, entonces es un punto de Levi pseudoconvexidad, el recíproco no es cierto $(\Delta(r, R) \times \mathbb{C})$.

Ejemplo 2.8.2. $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^4 + |z_2|^4 < 1\}$ es un dominio Levi pseudoconvexo pero no estrictamente pseudoconvexo.

Ejemplo 2.8.3. Las bolas son dominios estrictamente pseudoconvexos, $z \mapsto \|z\|^2 - 1$.

Ejemplo 2.8.4. Sea Φ una función entera en $\mathbb{C}^2$ tal que $\nabla\Phi \neq 0$ en $|\Phi| = 1$. Sea

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |\Phi(z_1, z_2)| < 1\}$$

entonces Ω es un dominio Levi pseudoconvexo.

Ejemplo 2.8.5. Si Ω es el exterior de la bola unitaria en $\mathbb{C}^2$,

$$\Omega = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 > 1\}$$

entonces Ω no es Levi pseudoconvexo en ningún punto frontera.

2.9. La función distancia orientada

Teorema 2.9.1 (Teorema de Rademacher[12]). *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ es Lipschitz-continua, entonces f es diferenciable en casi todo punto en U, esto es, los puntos en U en el cual f no es diferenciable forman un conjunto de medida de Lebesgue cero.*

Proposición 2.9.1 (H. Federer [19]). *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Si f es una función Lipschitz-continua en U, y g una función continua en U, tal que*

$$\nabla f(x) = g(x)$$

para casi todo $x \in U$, entonces

$$\nabla f(x) = g(x)$$

para todo $x \in U$, y por lo tanto $f \in \mathcal{C}^1(U)$.

Lema 2.9.1 (S. Krantz [20])**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces la* ***función distancia orientada*** $\theta : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(x) = \begin{cases} -\text{dist}(x, \partial U) \ , \ x \in U \\ \\ \ \text{dist}(x, \partial U) \ , \ x \in \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

es una función de definición global en una vecindad de ∂U, de clase $\mathcal{C}^2$, no-degenerado en ∂U, y Lipschitz-continua.

Demostración: Sea $a \in \partial U$, entonces existe una función $\varrho : V_a \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $V_a \cap U = \{x \in V_a : \varrho(x) < 0\}$ y $\nabla\varrho(a) \neq 0$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(a) > 0$, entonces por el teorema de la función implícita existen $B(a', \delta) \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $I_\epsilon(a_n) \subset \mathbb{R}$ y una función $\xi : B(a', \delta) \to I_\epsilon(a_n)$ de clase $\mathcal{C}^2$ tal que $\varrho^{-1}(0) \cap (B(a', \delta) \times I_\epsilon(a_n)) = \{(x', x_n) \in B(a', \delta) \times I_\epsilon(a_n) : x_n = \xi(x')\}$. Por lo tanto la restricción $\varrho : V'_a \to \mathbb{R}$ ($V'_a = B(a', \delta) \times I_\epsilon(a_n)$) es una función de definición local para U en $a \in \partial U$, de modo que

$$V'_a \cap U = \{x \in V'_a : \varrho(x) < 0\} = \{(x', x_n) \in V'_a : x_n < \xi(x')\}$$

$$V'_a \cap \partial U = \{x \in V'_a : \varrho(x) = 0\} = \{(x', x_n) \in V'_a : x_n = \xi(x')\}$$

además por convención de definición local, el gradiente $\nabla\varrho(x)$ es un vector normal a ∂U dirigido hacia el exterior de U, en cada punto $x \in V'_a \cap \partial U$. Como $U = \{x \in \mathbb{R}^n : \theta(x) < 0\}$, entonces demostraremos que θ es de clase $\mathcal{C}^2$, y con gradiente no-degenerado en una vecindad del punto $a \in \partial U$. Definamos la aplicación $\Phi : B(a', \delta) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

$$\Phi(x', t) = (x', \xi(x')) + t\cdot \nabla\varrho(x', \xi(x'))$$

calculemos el determinante de la matriz Jacobiana de $\Phi(x', t)$

$$\begin{bmatrix} 1 + t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1\partial x_1} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right) & \cdots & t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_{n-1}\partial x_1} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_1}\frac{\partial\xi}{\partial x_{n-1}}\right) & \frac{\partial\varrho}{\partial x_1} \\ t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1\partial x_2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_2}\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right) & \cdots & t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_{n-1}\partial x_2} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_2}\frac{\partial\xi}{\partial x_{n-1}}\right) & \frac{\partial\varrho}{\partial x_2} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_{n-1}}\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right) & \cdots & 1 + t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_{n-1}\partial x_{n-1}} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_{n-1}}\frac{\partial\xi}{\partial x_{n-1}}\right) & \frac{\partial\varrho}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial\xi}{\partial x_1} + t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_1\partial x_n} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_n}\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right) & \cdots & \frac{\partial\xi}{\partial x_{n-1}} + t\left(\frac{\partial^2\varrho}{\partial x_{n-1}\partial x_n} + \frac{\partial^2\varrho}{\partial x_n\partial x_n}\frac{\partial\xi}{\partial x_{n-1}}\right) & \frac{\partial\varrho}{\partial x_n} \end{bmatrix} =$$

$$\det J_\Phi(x',t) = \det \begin{bmatrix} I_{n-1} + t\cdot A(x') & \nabla_{x'}\varrho(x',\xi(x')) \\ \nabla\xi(x') + t\cdot b(x') & \varrho_{x_n}(x',\xi(x')) \end{bmatrix}$$

donde $A(x')$ es una $(n-1)\times(n-1)$-matriz continua y $b(x')$ es un $(n-1)$-matriz fila continua. Diferenciando $\varrho(x',\xi(x')) = 0$ para $x' \in B(a',\delta)$ tenemos que

$$\det J_\Phi(x',t) = \det \begin{bmatrix} I_{n-1} + t\cdot A(x') & -\frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(x',\xi(x'))\cdot\nabla\xi(x') \\ \nabla\xi(x') + t\cdot b(x') & \frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(x',\xi(x')) \end{bmatrix}$$

Evaluando el determinante de la matriz Jacobiana de Φ en el punto $(a',0)$

$$\begin{aligned} \det J(a',0) &= \frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(a',\xi(a'))\det \begin{bmatrix} I_{n-1} & -\nabla\xi(a') \\ \nabla\xi(a') & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(a',\xi(a'))\det \begin{bmatrix} I_{n-1} & -\nabla\xi(a') \\ 0 & 1 + \|\nabla\xi(a')\|^2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial\varrho}{\partial x_n}(a)\cdot(1 + \|\nabla\xi(a')\|^2) \neq 0. \end{aligned}$$

Por el teorema de la función inversa existe $\epsilon > 0$ y una vecindad W_a tal que

$$\Phi : B(a',\delta)\times(-\epsilon,\epsilon) \longrightarrow W_a$$

es un difeomorfismo de clase $\mathcal{C}^1$, además $\Phi\left(B(a',\delta)\times\{0\}\right) = W_a \cap \partial U$. Observamos que si $y \in W_a$ entonces y admite una escritura única de la forma

$$y = \Phi(x',t) = (x',\xi(x')) + t\cdot\nabla\varrho(x',\xi(x'))$$

Ahora definamos $\pi : B(a',\delta)\times(-\epsilon,\epsilon) \to B(a',\delta)\times(-\epsilon,\epsilon)$ por $\pi(x',t) = (x',0)$ y la aplicación proyección de clase $\mathcal{C}^1$

$$p = \Phi\circ\pi\circ\Phi^{-1} : y = x + t\cdot\nabla\varrho(x) \mapsto x$$

para todo $x \in W_a \cap \partial U$. Sea el compacto $K = \Phi\left(B[a,\delta/2]\times[-\epsilon/2,\epsilon/2]\right)$, luego dilatamos $B(K,r) \subset W_a$, donde $r < \epsilon/2$, entonces para todo $y \in \Phi\left(B(a,\delta/2)\times(-r,r)\right)$ tenemos que $B(y,\|y-x\|) \subset \Phi\left(B(a,\delta)\times(-\epsilon,\epsilon)\right)$. Por lo anterior haciendo δ y ϵ suficientemente pequeños tenemos que

$$\theta(y) = \begin{cases} -\|y-p(y)\|\ , \ y \in W_a \cap \overline{U} \\ \ \ \|y-p(y)\|\ , \ y \in W_a \cap U^c \end{cases}$$

Entonces θ es una función de clase $\mathcal{C}^1$ en W_a excepto talvez en ∂U. Si $y \in W_a - \partial U$, entonces

$$\nabla\theta(y) = \begin{cases} -\dfrac{(I_n - Dp(y))^* \, (y - p(y))}{\|y - p(y)\|} & , \; y \in W_a \cap \overline{U} - \partial U \\ \\ \dfrac{(I_n - Dp(y))^* \, (y - p(y))}{\|y - p(y)\|} & , \; y \in W_a \cap U^c - \partial U \end{cases}$$

Desde que $\varrho \circ p(y) = 0$ se sigue que $Dp(y)^*(\nabla\varrho(x)) = 0$. Pero $y - p(y) = t \cdot \nabla\varrho(x)$

$$Dp(y)^*(y - p(y)) = 0.$$

Entonces

$$\nabla\theta(y) = \begin{cases} -\dfrac{y - p(y)}{\|y - p(y)\|} & , \; y \in W_a \cap \overline{U} - \partial U \\ \\ \dfrac{y - p(y)}{\|y - p(y)\|} & , \; y \in W_a \cap U^c - \partial U \end{cases} = \left\{ \dfrac{\nabla\varrho(p(y))}{\|\nabla\varrho(p(y))\|} \; , \; y \in W_a - \partial U \right.$$

Por lo tanto el campo vectorial $\nabla\theta(y)$ es de clase $\mathcal{C}^1$ y no-degenerado en W_a. $\square$

Observaciones:

1. $\|\nabla\theta(x)\| = 1$ para todo $x \in \partial U$.

2. Si N es el campo normal unitario hacia el exterior de U, entonces $N\big|_{\partial U} = \nabla\theta$.

3. $x - \pi(x) = \theta(x)N(x)$

4. Si $U = B(a, r)$, entonces $\theta(z) = \|z - a\| - r$

5. La frontera ∂U admite una vecindad $V_{\partial U}$, tal que para todo $x \in V_{\partial U}$ existe exactamente un punto $\pi(x) \in \partial U$ tal que

$$\operatorname{dist}(x, \partial U) = \|x - \pi(x)\|$$

6. La proyección $x \mapsto \pi(x)$ es de clase $\mathcal{C}^1$.

2.10. El teorema de Levi

Lema 2.10.1. *Suponer $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 y con gradiente no-degenerado y que para algún conjunto $S \subset\subset U$ tengamos $\Delta_\delta f(z) \geq 0$ para todo $z \in S$ y para todo $\delta \in \mathbb{C}^n$ con $\left\langle \delta, \overline{\nabla f(z)} \right\rangle = 0$. Entonces existe $c \geq 0$ tal que $\Delta_\delta f(z) \geq -c\|\delta\| \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla f(z)} \right\rangle \right|$ para todo $z \in S$ y $\delta \in \mathbb{C}^n$.*

Demostración: Definamos

$$d = \sum_{j,k=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} \right\|_S, \; c = 4d \left\| \frac{1}{\|\nabla f\|} \right\|_S$$

Sean $z \in S$ y $\delta \in \mathbb{C}^n$. Denotemos $\theta = \nabla f(z)/\|\nabla f(z)\|$, $\delta' = \left\langle \delta, \overline{\theta} \right\rangle \overline{\theta}$, $\delta'' = \delta - \delta'$ entonces $\langle \delta'', \overline{\theta} \rangle = 0$ por lo cual $\left\langle \delta'', \overline{\nabla f(z)} \right\rangle = 0$ y $\|\delta'\|, \|\delta''\| \leq \|\delta\|$ dado que $\langle \delta', \delta'' \rangle = 0$. Como $\left\langle \delta'', \overline{\nabla f(z)} \right\rangle = 0$ entonces $\Delta_{\delta''} f(z) \geq 0$. Como $|\Delta_{\delta'} f(z)| \leq d\|\delta'\|^2 \leq d\|\delta\|\|\delta'\|$ y $\left| \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)(\delta''_j \overline{\delta'_k} + \delta'_j \overline{\delta''_k}) \right| \leq 2d\|\delta'\|\|\delta''\| \leq 2d\|\delta\|\|\delta'\|$ tenemos que

$$\Delta_\delta f(z) = \Delta_{\delta''} f(z) + \Delta_{\delta'} f(z) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)(\delta''_j \overline{\delta'_k} + \delta'_j \overline{\delta''_k}) \geq -3d\|\delta\|\|\delta'\|$$

$$\Delta_\delta f(z) \geq -3d\|\delta\| \frac{1}{\|\nabla f(z)\|} \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla f(z)} \right\rangle \right| \geq -c\|\delta\| \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla f(z)} \right\rangle \right|$$

□

Teorema 2.10.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo con frontera ∂U de clase C^2. Entonces U es Levi pseudoconvexo.*

Demostración: Dado que $\partial U \in \mathcal{C}^2$ podemos manufacturar una función de definición global para ∂U. Sea $\theta : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ la función distancia orientada dada por el Lema 2.9.1, el cual es una función de definición global en una vecindad V de ∂U, de clase $\mathcal{C}^2$, no-degenerado en la frontera ∂U. Dado que U es pseudoconvexo la función

$$f(z) = -\log(-\theta(z)) = -\log d(z, \partial U)$$

es plurisubarmónica en U. Dado que θ es de clase $\mathcal{C}^2$ en $V_{\partial U} \cap U$ entonces por la regla de la cadena tenemos que

$$0 \leq \Delta_\delta f(z) = \frac{1}{\theta(z)^2} \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \theta(z)} \right\rangle \right|^2 - \frac{1}{\theta(z)} \Delta_\delta \theta(z)$$

y como $\theta < 0$ en U entonces

$$\Delta_\delta \theta(z) \geq 0$$

para todo $z \in V_{\partial U} \cap U$ con $\left\langle \delta, \overline{\nabla \theta(z)} \right\rangle = 0$. Sea $a \in \partial U$. Afirmamos que $\Delta_\delta \theta(a) \geq 0$ para todo $\delta \in T_a^{\mathbb{C}}(\partial U)$. Sea $W = B(a,r) \cap U$ donde $\overline{B(a,r)} \subset V_{\partial U}$ entonces $a \in \overline{W}$. Luego $\Delta_\delta \theta(z) \geq 0$ para todo $z \in W$ con $\left\langle \delta, \overline{\nabla \theta(z)} \right\rangle = 0$. Por el Lema 2.10.1 existe $c \geq 0$ tal que

$$\Delta_\delta \theta(z) \geq -c\|\delta\| \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \theta(z)} \right\rangle \right|$$

para todo $z \in W$ y para todo $\delta \in \mathbb{C}^n$. Dado que las primeras y segundas derivadas de θ son continuas y $a \in \overline{W}$ entonces $\Delta_\delta \theta(a) \geq -c\|\delta\| \left|\left\langle \delta, \overline{\nabla\theta(a)} \right\rangle\right| = 0$.

$\square$

Lema 2.10.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Si la función*

$$z \mapsto -\log d_U(z)$$

es plurisubarmónica cerca a la frontera de U, entonces U es un dominio pseudoconvexo.

Demostración: Probaremos que U es localmente pseudoconvexo. Sea $a \in \partial U$ y $r > 0$ tal que $B(a,r) \subset V_{\partial U}$, entonces

$$-\log d(z, \partial(B(a,r) \cap U)) = \text{máx}\{-\log d(z, \partial B(a,r), -\log d(z, \partial U)\}.$$

Por lo tanto la función

$$-\log d(z, \partial(B(a,r) \cap U))$$

es plurisubarmónica en $B(a,r) \cap U$. $\square$

Teorema 2.10.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio con frontera $\partial U \in \mathcal{C}^2$. Si U es un dominio Levi pseudoconvexo, entonces U es un dominio pseudoconvexo.*

Demostración: Como $\partial U \in \mathcal{C}^2$ entonces la función distancia orientada $\theta : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\theta(z) = \begin{cases} -d_U(z) \ , \ z \in U \\ \ \ d_U(z) \ , \ z \in \mathbb{R}^n - U \end{cases}$$

es una función de definición global para U, de clase $\mathcal{C}^2$ en una vecindad $V_{\partial U}$ de ∂U. Supongamos por contradicción que U no es pseudoconvexo. Entonces la función

$$z \mapsto -\log d_U(z)$$

de clase $\mathcal{C}^2$ en $V_{\partial U} \cap U$ no es plurisubarmónica (Lema 2.10.2). Entonces

$$\Delta_\delta(-\log d_U(z))(a) = -2r < 0$$

o equivalentemente

$$\frac{\partial^2 \log d_U(a + z\delta)}{\partial z \partial \overline{z}}(0) = 2r > 0$$

Por la fórmula de Taylor en su forma compleja en $z = 0$

$$\log d_U(a + z\delta) = \log d_U(a) + \Re p(z) + 2r|z|^2 + o(|z|^2)$$

Consecuentemente

$$\log d_U(a + z\delta) \geq \log d_U(a) + \Re p(z) + r|z|^2 \ , \ |z| < \epsilon$$

$$d_U(a + z\delta) \geq d_U(a) \left| e^{p(z)} \right| e^{r|z|^2} \ , \ |z| < \epsilon$$

consideremos el disco analítico $F : \Delta(0, \epsilon) \longrightarrow V_{\partial U}$

$$F(z) = a + z\delta + (b - a)e^{p(z)}$$

donde $d_U(a) = \|a - b\|$. Notemos que $F(0) = b \in \partial U$ y que cuando $0 < |z| < \epsilon$ entonces $e^{r|z|^2} > 1$

$$d_U(a + z\delta) > \left\| (b - a)e^{p(z)} \right\|$$

luego $F(z) \in U$, el disco analítico $F : \Delta(0, \epsilon) \to \mathbb{C}^n$ es tangente a ∂U en $F(0)$. Para $0 < |z| < \epsilon$

$$\begin{aligned} d_U(F(z)) &\geq d_U(a + z\delta) - \left\| (a - b)e^{p(z)} \right\| \\ &\geq d_U(a)(e^{r|z|^2} - 1) \left| e^{p(z)} \right| \\ &\geq r d_U(a) \left| e^{p(z)} \right| |z|^2 \end{aligned}$$

Notamos que $f(z) = -\theta(F(z))$ alcanza un mínimo local en $z = 0$. Por la fórmula de Taylor en $z = 0$, tenemos que

$$f(z) = \Re \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0) z^2 \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}(0)|z|^2 + o(|z|^2) \geq r\|b - a\| \left| e^{p(z)} \right| |z|^2$$

haciendo $z = te^{i\varphi}$

$$\frac{\partial - \theta(F(z))}{\partial z}(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 - \theta(F(z))}{\partial z \partial \overline{z}}(0) > 0$$

Escribiendo $F = (f_1, \ldots, f_n)$ y usando la forma compleja de la regla de la cadena

$$\left\langle F'(0), \overline{\nabla\theta(b)} \right\rangle = 0$$

$$\Delta(\theta)(b, F'(0)) < 0$$

Desde que θ es una función de definición global para U, esto muestra que U no es un dominio Levi pseudoconvexo. $\square$

Teorema 2.10.3 (Teorema de Levi). *Un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ con frontera de clase $\mathcal{C}^2$ es un dominio pseudoconvexo si y solamente si es un dominio Levi pseudoconvexo.*

2.11. Dominios estrictamente pseudoconvexos

Teorema 2.11.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio acotado con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) U es un dominio estrictamente pseudoconvexo.

(b) U admite una función de definición global estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^2$.

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$. Sea ϱ una función de definición global para U en una vecindad de ∂U. Observemos que para $A > 0$ suficientemente grande

$$\varrho_A = e^{A\varrho} - 1$$

es también una función de definición global para U, además

$$\Delta_\delta \varrho_A(a) = Ae^{A\varrho(a)} \left[\Delta_\delta \varrho(a) + A \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \rho(a)} \right\rangle \right|^2 \right]$$

Definamos los compactos

$$K = \partial U \times S^{2n-1}$$

$$L = \{(a, \delta) \in K : \Delta_\delta \varrho(a) \leq 0\}$$

entonces $\left\langle \delta, \overline{\nabla \rho(a)} \right\rangle \neq 0$ para todo $(a, \delta) \in L$. Sean

$$M = \inf \{\Delta_\delta \varrho(a) : (a, \delta) \in K\} > -\infty$$

$$C = \inf \left\{ \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \varrho(a)} \right\rangle \right|^2 : (a, \delta) \in L \right\} > 0$$

Sea $A > 0$ suficientemente grande tal que $M + AC > 0$. Entonces

$$\Delta_\delta \varrho_A(a) = A \left[\Delta_\delta \varrho(a) + A \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \varrho(a)} \right\rangle \right|^2 \right] \geq A(M + AC) > 0$$

para todo $(a, \delta) \in L$ y

$$\Delta_\delta \varrho_A(a) > A^2 \left| \left\langle \delta, \overline{\nabla \varrho(a)} \right\rangle \right|^2 \geq 0$$

para todo $(a, \delta) \in K - L$. Luego $\Delta_\delta \varrho_A(a) > 0$ para todo $a \in \partial U$ y para todo $\delta \in \mathbb{C}^n$ unitario. Por continuidad y compacidad, ϱ_A es estrictamente plurisubarmónica en una vecindad de ∂U. $\square$

Observaciones:

1. Si U es un dominio estrictamente pseudoconvexo entonces U es pseudoconvexo, $B(a,r)\cap U \ni z \mapsto \text{máx}\{-\log d(z, \partial B(a,r), -\log(-\varrho(z))\}$.

Teorema 2.11.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio estrictamente pseudoconvexo con frontera de clase $\mathcal{C}^2$. Entonces existe una $\mathcal{C}^2$-función estrictamente plurisubarmónica*

$$\varrho : U_{\overline{\Omega}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\nabla\varrho(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial\Omega$, y

$$\Omega = \left\{z \in U_{\overline{\Omega}} : \varrho(z) < 0\right\}$$

$$\partial\Omega = \left\{z \in U_{\overline{\Omega}} : \varrho(z) = 0\right\}$$

Demostración: Por el Teorema Ω admite una $\mathcal{C}^2$-función de definición global

$$\varrho_0 : U_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

estrictamente plurisubarmónica. Sea $\delta > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$K = \{z \in U_{\partial\Omega} : -\delta \leq \varrho_0(z) \leq 0\}$$

sea compacto, y escojamos una función real-valuada $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que

$$\chi(t) = -\delta \ \ , \ \ t \in (-\infty, -\delta]$$

$$\chi(0) = 0$$

$$\frac{d^2\chi}{dt^2}(t) \geq 0 \ \ , \ \ t \in \mathbb{R}$$

$$\frac{d\chi}{dt}(t) > 0 \ \ , \ \ t \in (-\delta, \infty).$$

Definamos

$$\varrho_1 : \Omega \cup U_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varrho_1 = \begin{cases} -\delta & , \ \Omega - K \\ \chi \circ \varrho_0 & , \ U_{\partial\Omega} \end{cases}$$

entonces

- ϱ_1 es una $\mathcal{C}^2$-función plurisubarmónica en $\Omega \cup U_{\partial\Omega}$.
- ϱ_1 es estrictamente plurisubarmónica en

$$V = \{z \in U_{\partial\Omega} : \varrho_0(z) > -\delta\}.$$

- $\nabla\varrho_1(z) \neq 0$ para todo $z \in \partial\Omega$.
- $\Omega = \{z \in \Omega \cup U_{\partial\Omega} : \varrho_1(z) < 0\}$.

Se sigue del Lema 2.1.5 que Ω admite una $\mathcal{C}^\infty$-función

$$\varrho_2 : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

exhaustiva estrictamente plurisubarmónica. Sea $t \in \mathbb{R}$ suficientemente grande tal que

$$\{z \in \Omega \cup U_{\partial\Omega} : \varrho_1(z) \leq -\delta/2\} \subset L = \{z \in \Omega : \varrho_2(z) \leq t\}$$

Sea $\psi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega, [0,1])$ tal que $\psi = 1$ en una vecindad de L. Definamos

$$\varrho_3 : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varrho_3 = \begin{cases} \psi\varrho_2 \ , \ \Omega \\ 0 \quad\ \ , \ \mathbb{C}^n - \mathrm{supp}\psi \end{cases}$$

Entonces para todo $c > 0$ la función

$$\varrho : \Omega \cup U_{\partial\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\varrho = \varrho_1 + c\varrho_3$$

es estrictamente plurisubarmónica en una vecindad de L (desde que $\varrho = \varrho_1 + c\varrho_2$ y ϱ_2 es estrictamente plurisubarmónica), es estrictamente plurisubarmónica en $U_{\partial\Omega} - \mathrm{supp}\psi$ (desde que $\varrho = \varrho_1$ y $U_{\partial\Omega} - \mathrm{supp}\psi \subset V$). Además, es claro que para $c > 0$ suficientemente pequeño la función ϱ es estrictamente plurisubarmónica en una vecindad de $(\mathrm{supp}\psi) - L$ y negativo en $\mathrm{supp}\psi$. Por lo tanto, para $0 < c \ll 1$, la función ϱ es la función de definición global requerida. $\square$

2.12. Exhaustividad de dominios pseudoconvexos

Los dominios pseudoconvexos pueden ser aproximados por dominios estrictamente pseudoconvexos.

Definición 2.12.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio acotado que admite una función de definición global estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$ no-degenerado en ∂U. Diremos que U es un dominio **estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado**.

Ejemplo 2.12.1. Sea $U = B(c, r) \subset \mathbb{C}^n$ y sea $\varrho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ definido por $\varrho(z) = \|z - c\|^2 - r^2$, entonces U es un dominio con frontera de clase $\mathcal{C}^\infty$, $\nabla\varrho(z) = \overline{z} - \overline{c}$. Además para todo $a \in \partial U$ y $\delta \in \mathbb{C}^n$, $\Delta_\delta \varrho(a) = \|\delta\|^2$, se sigue que U es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado.

Teorema 2.12.1 (Teorema de Sard[17])**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Entonces la medida de Lebesgue n-dimensional de $\{f(x) : x \in U, \nabla f(x) = 0\}$ es cero.*

Una aplicación del Teorema de Sard es el siguiente Lema.

Lema 2.12.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^\infty$. Si $V \subset \mathbb{R}$ es un abierto no vacio, entonces existe $y \in V$ tal que $\nabla f(z) \neq 0$ para todo $z \in f^{-1}(y)$.*

Una aplicación del Teorema de la Función Implícita es el siguiente Lema.

Lema 2.12.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$. Sea $c \in f(U)$ un valor regular y sea $V \subset\subset U$ una componente de $f^{-1}(-\infty, c)$. Entonces $z \mapsto f(z) - c$ es una función de definición global para V, en alguna vecindad de $\overline{V}$.*

Teorema 2.12.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces existe una sucesión $(U_j)_{j \geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ de dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados tal que*

(a) $U_j \subset\subset U_{j+1}$ *para todo* $j \geq 1$.

(b) $U = \bigcup_{j=1}^\infty U_j$.

Demostración: Dado que U es pseudoconvexo existe una función exhaustiva plurisubarmónica continua

$$f : U \to \mathbb{R}.$$

Como f es plurisubarmónica por el Corolario 2.1.3 existe una sucesión de dominios acotados $(V_j)_{j\geq 1} \subset U$ tal que $V_j \subset\subset V_{j+1}$, $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ y una sucesión decreciente de funciones estrictamente plurisubarmónicas $\mathcal{C}^\infty$

$$f_j : V_j \to \mathbb{R}$$

el cual converge puntualmente a f. Sea $z_0 \in V_1$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f_1(z_0) \leq 0$ (caso contrario consideramos una traslación). Dado que f es una exhaustion y $f(z_0) \leq 0$ tenemos que $[0, \infty) \subset f(U)$ por el teorema del valor intermedio. Como f es una exhaustion $K_j = f^{-1}(-\infty, j+1/2]$ es compacto. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $K_j \subset V_j$ para todo $j \geq 1$ (caso contrario consideramos una subsucesión de $(V_j)_{j\geq 1}$). Dado que $j + 1/2 \in f(U)$ existe $a_j \in K_j$ tal que $f(a_j) = j + 1/2$ luego $f_j(a_j) \geq j + 1/2$ entonces por el teorema del valor intermedio $[0, j+1/2] \subset f_j(V_j)$. Por el Teorema de Sard 2.12.1 existe $r_j \in (j - 1/2, j + 1/2) \subset f_j(V_j)$ (observar que r_j es estrictamente creciente y $r_j \to \infty$) de modo que $\nabla f_j(z) \neq 0$, para todo $z \in f_j^{-1}(r_j)$. Sea $U_j = f_j^{-1}(-\infty, r_j) \subset K_j$. Observamos que $\overline{U_j} \subset U_{j+1}$ (si $z \in \overline{U_j}$ entonces $f_j(z) \leq r_j$ luego $f_{j+1}(z) \leq f_j(z) \leq r_j < r_{j+1}$), y que $U = \bigcup_{j\geq 1} U_j$ (si $z \in U$ entonces $f(z) < r_k$ para algún k y por la convergencia $f_j(z) \to f(z)$ tenemos que $f_l(z) < r_l$ para algún l, luego $z \in U_l$). Ahora reemplazamos cada U_j por la componente de U_j que contiene a z_0, las propiedades $\overline{U_j} \subset U_{j+1}$ (la clausura de un conexo es conexo) y $U = \bigcup_{j\geq 1} U_j$ (como U es dominio, es conexo por $\mathcal{C}^1$-caminos) se conservan. Luego por el Lema 2.12.2

$$z \mapsto f_j(z) - r_j$$

es una función de definición global para U_j en una vecindad de $\overline{U}_j$, no-degenerado en ∂U_j, siendo además estrictamente plurisubarmónica y de clase $\mathcal{C}^\infty$. Por lo tanto U_j es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado. $\square$

Observaciones:

1. Si $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo, entonces U admite una función exhaustiva estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$. Por el Teorema de Sard, U_c es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado ($f^{-1}(-\infty, c) \subset\subset \Omega$), para casi todo $c \in \mathbb{R}$. Por lo tanto todo dominio pseudoconvexo admite una exhaustion formada por dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados.

Capítulo 3

La Ecuación $\overline{\partial}$ En Dominios Pseudoconvexos

En este capítulo, resolveremos la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos, esto es, el Teorema de Hörmander. El cual será una herramienta indispensable para poder resolver el problema de E. Levi.

3.1. Operadores densamente definidos en espacios de Hilbert

En esta sección daremos la definición y las propiedades elementales de la Teoría de los Operadores Densamente Definidos en Espacios de Hilbert, el cual será una herramienta fundamental, para resolver la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos. Recomendamos la referencia [8], para más detalles.

En lo que sigue, H_1 y H_2 representarán espacios de Hilbert.

Definición 3.1.1. Sea $T : \mathcal{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador lineal cuyo **dominio** $\mathcal{Dom}(T)$ es un subespacio de H_1. Denotaremos por $\mathcal{Nu}(T)$ el **núcleo** de T, por $\mathcal{Ran}(T)$ el **rango** de T, y por $\mathcal{G}(T)$ la **gráfica** de T, esto es

$$\mathcal{Nu}(T) = \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = 0\}\ ,\ \mathcal{Ran}(T) = \{Tx : x \in \mathcal{D}(T)\}\ ,\ \mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in \mathcal{D}(T)\}$$

El operador T se dice **densamente definido** si $\mathcal{Dom}(T)$ es denso en H_1. El operador T se dice **cerrado** si el subespacio $\mathcal{G}(T)$ es cerrado en $H_1 \times H_2$.

Definición 3.1.2. Sea $T : \mathcal{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador lineal densamente definido. Definamos el subespacio $\mathcal{Dom}(T^*)$, formado por los $y \in H_2$, para el cual existe $y^* \in H_1$ tal que

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, y^*\rangle_1 \ , \ \forall x \in \mathcal{Dom}(T)$$

Equivalentemente si $y \in H_2$, entonces $y \in \mathcal{Dom}(T^*)$ si existe una constante $c = c(y) > 0$ tal que

$$|\langle Tx, y\rangle_2| \leq c\|x\|_1$$

para todo $x \in \mathcal{Dom}(T)$. Desde que $\mathcal{Dom}(T)$ es denso en H_1, y^* es único siempre que exista. El operador

$$T^* : \mathcal{D}_{T^*} \subset H_2 \to H_1$$

definido por $T^*y = y^*$ es llamado el operador **adjunto** de T. Por lo tanto tenemos que

$$\langle Tx, y\rangle_2 = \langle x, T^*y\rangle_1 \ , \ \forall x \in \mathcal{Dom}(T) \ , \ \forall y \in \mathcal{Dom}(T^*).$$

Proposición 3.1.1. *Sea $T : \mathcal{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador lineal, densamente definido. Entonces $T^* : \mathcal{Dom}(T^*) \subset H_2 \to H_1$ es un operador lineal cerrado.*

Proposición 3.1.2. *Sea $T : \mathcal{Dom}(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador lineal cerrado, densamente definido. Entonces $T^* : \mathcal{Dom}(T^*) \subset H_2 \to H_1$ es un operador lineal cerrado, densamente definido, con $T^{**} = T$.*

Proposición 3.1.3. *Sea $T : \mathcal{Dom}(T) \to H_2$ un operador lineal cerrado, densamente definido. Entonces $\mathcal{Nu}(T)$ es un subespacio cerrado, además*

$$\mathcal{Ran}(T)^{\perp} = \mathcal{Nu}(T^*)$$

$$\mathcal{Nu}(T)^{\perp} = \overline{\mathcal{Ran}(T^*)}$$

Proposición 3.1.4. *Supongamos que $T : \mathcal{Dom}(T) \to H_2$ es un operador lineal cerrado, densamente definido. Entonces T es sobreyectivo si y solamente si existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|T^*y\| \geq c\|y\|$$

para todo $y \in \mathcal{Dom}(T^*)$. En caso afirmativo $\mathcal{Ran}(T^*)$ es cerrado en H_1.

El siguiente teorema central de esta sección, es una consecuencia del Teorema de categoría de Baire 4.5.9, del Principio de la acotación uniforme 4.5.10, del Teorema de extensión de Hahn-Banach 4.5.11, y del Teorema de representación de Riesz 4.5.12.

Teorema 3.1.1. *Supongamos que $T : \mathcal{D}om(T) \subset H_1 \to H_2$ es un operador lineal cerrado, densamente definido. Sea F un subespacio cerrado de H_2 tal que $\mathcal{R}an(T) \subset F$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) $\mathcal{R}an(T) = F$

(*b*) *Existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\|T^*v\|_1 \geq c\|v\|_2 \ , \ \forall v \in \mathcal{D}om(T^*) \cap F$$

En este caso:

(*c*) *Para cada $v \in F$, existe $u \in \mathcal{D}om(T) \cap \mathcal{R}an(T^*)$ tal que*

$$Tu = v$$

$$\|u\|_1 \leq c\|v\|_2.$$

(*d*) *Para cada $u \in \mathcal{N}u(T)^{\perp}$, existe $v \in \mathcal{D}om(T^*) \cap F$ tal que*

$$T^*v = u$$

$$\|v\|_2 \leq c\|u\|_1.$$

Corolario 3.1.1. *Sea $T : \mathcal{D}om(T) \subset H_1 \to H_2$ un operador lineal cerrado, densamente definido. Si $\mathcal{R}an(T)$ es cerrado, entonces $\mathcal{R}an(T^*)$ es cerrado también.*

Ejemplo 3.1.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sea

$$\mathcal{D}om(\partial^\alpha) = \left\{ f \in L^2(U) : \partial^\alpha f \in L^2(U) \text{ en el sentido de distribuciones} \right\}.$$

Entonces para cada multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$ el operador

$$\partial^\alpha : \mathcal{D}om(\partial^\alpha) \subset L^2(U) \longrightarrow L^2(U)$$

define un operador lineal cerrado, densamente definido, donde su operador adjunto $(\partial^\alpha)^* = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha$.

3.2. Formas diferenciales de tipo (p, q)

En esta sección daremos la definición y las propiedades elementales de la teoría de formas diferenciales de tipo (p, q). Recomendamos la referencia [8], para más detalles.

Definición 3.2.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Una k-**forma diferencial** sobre U es una función

$$\omega : U \to \bigcup_{p \in U} \bigwedge^k (\mathbb{R}^n_p)$$

que a cada punto $p \in U$ le asocia $\omega(p) \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n_p)$, entonces ω admite una representación única

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} a_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

Denotemos por $\Omega^k(U)$ al espacio de las k-**formas diferenciales de clase** $\mathcal{C}^\infty$, esto es, las funciones coordenadas $a_{i_1 \ldots i_k} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$. Esta representación puede ser escrita en una forma más compacta como

$$\omega = \sum_{|\alpha| = k} a_\alpha \, dx^\alpha$$

Si $f \in \Omega^0(U) = \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$ entonces

$$df = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \in \Omega^1(U)$$

La **diferencial exterior** de $\omega \in \Omega^k(U)$ se define como

$$d\omega = \sum_{|\alpha| = k} da_\alpha \wedge \, dx^\alpha \in \Omega^{k+1}(U)$$

Con las operaciones de suma y producto por funciones, $\Omega^k(U)$ es un $\mathcal{C}^\infty(U)$-módulo.

Proposición 3.2.1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean $\omega \in \Omega^k(U)$, $\eta \in \Omega^l(U)$, $\theta \in \Omega^r(U)$ y $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, entonces*

(a) $d : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$ *es un operador lineal.*

(b) $d(f\omega) = df \wedge \omega + f d\omega$.

(c) $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta$.

(d) $d(d\omega) = 0$.

Definición 3.2.2. Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos. Sea $F \in \mathcal{C}^\infty(U,V)$. Si $\omega \in \Omega^k(V)$, definimos el **pull-back de** ω **bajo** F, denotado por $F^*(\omega)$ como

$$F^*(\omega) : U \longrightarrow \bigcup_{p\in U} \bigwedge^k(\mathbb{R}^m_p)$$

$$p \mapsto [F^*(\omega)]_p = (F'(p))^*(\omega_{F(p)})$$

Observaciones:

1. Si $\omega \in \Omega^k(V)$ entonces $F^*(\omega) \in \Omega^k(U)$.

2. Si $g \in \Omega^0(V)$ entonces $F^*(g) = g \circ F$.

Proposición 3.2.2. *Si $F \in \mathcal{C}^\infty(U,V)$, entonces*

(a) *El operador $F^* : \Omega^k(V) \longrightarrow \Omega^k(U)$ es lineal.*

(b) $F^*(f\omega) = F^*(f)F^*(\omega)$.

(c) $F^*(\omega \wedge \eta) = F^*(\omega) \wedge F^*(\eta)$.

Teorema 3.2.1. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ abiertos, $F^\infty(U,V)$ y $\omega \in \Omega^k(V)$ entonces*

$$d(F^*(\omega)) = F^*(d\omega).$$

Definición 3.2.3. Una forma diferencial $\eta \in \Omega^k(U)$ se dice **cerrada** si $d\eta = 0$, y se dice **exacta** si existe una forma diferencial $\omega \in \Omega^{k-1}(U)$ tal que $d\omega = \eta$. Por la proposición anterior toda forma diferencial exacta es cerrada.

Ejemplo 3.2.1. Sea $U = \left(\mathbb{R}^2\right)^*$. La forma diferencial $\omega \in \Omega^1(U)$ definido por

$$\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$$

es cerrada pero no es exacta.

Teorema 3.2.2 (Lema de Poincaré)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un dominio con forma de estrella. Entonces toda forma cerrada en $\Omega^k(U)$ es exacta.*

Definición 3.2.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Identificando $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ mediante $(z_1, \ldots, z_n) \mapsto (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ tenemos que

$$dz_j = dx_j + idy_j$$

$$d\overline{z}_j = dx_j - idy_j$$

lo cual induce en $\Omega^k(U)$ la siguiente descomposición en suma directa de subespacios

$$\Omega^k(U) = \bigoplus_{p+q=k} \Omega^{(p,q)}(U)$$

donde $\Omega^{(p,q)}(U)$ es el espacio de las (p,q)-**formas diferenciales**. Si $\omega^{(p,q)} \in \Omega^{(p,q)}(U)$, entonces $\omega^{(p,q)}$ admite una representación única, el cual es llamado la representación canónica de $\omega^{(p,q)}$

$$\omega^{(p,q)} = \sum_{\substack{1\leq i_1<\cdots<i_p\leq n\\ 1\leq j_1<\cdots<j_q\leq n}} a_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}$$

donde las funciones coordenadas $a_{i_1\ldots i_p j_1\cdots j_q} \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{C})$. Esta representación puede ser escrita en su forma más compacta

$$\omega = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\ |\beta|=q}} a_{\alpha\beta}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

Para $a \in \mathcal{C}^\infty(U)$ definimos

$$\partial a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial z_j} dz_j$$

$$\overline{\partial} a = \sum_{j=1}^n \frac{\partial a}{\partial \overline{z}_j} d\overline{z}_j$$

Si $a \in \Omega^0(U)$ entonces a nivel de funciones

$$da = \partial a + \overline{\partial} a \in \Omega^{(1,0)}(U) \oplus \Omega^{(0,1)}(U)$$

Si $\omega^{(p,q)} \in \Omega^{(p,q)}(U)$ la ∂-**diferencial exterior** y la $\overline{\partial}$-**diferencial exterior** de $\omega^{(p,q)}$ se definen como

$$\partial \omega^{(p,q)} = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\ |\beta|=q}} \partial a_{\alpha\beta} \wedge\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

$$\overline{\partial} \omega^{(p,q)} = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\ |\beta|=q}} \overline{\partial} a_{\alpha\beta} \wedge\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

entonces $d\omega^{(p,q)} = \partial\omega^{(p,q)} + \overline{\partial}\omega^{(p,q)} \in \Omega^{(p+1,q)}(U) \oplus \Omega^{(p,q+1)}(U)$. Si $\omega \in \Omega^k(U)$ la **∂-diferencial exterior** y la **$\overline{\partial}$-diferencial exterior** de $\omega = \sum_{p+q=k} \omega^{(p,q)}$ se definen como

$$\partial\omega = \sum_{p+q=k} \partial\omega^{(p,q)}$$

$$\overline{\partial}\omega = \sum_{p+q=k} \overline{\partial}\omega^{(p,q)}$$

Observaciones:

1. Los operadores $\partial : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$, $\overline{\partial} : \Omega^k(U) \longrightarrow \Omega^{k+1}(U)$ son lineales.

2. $\partial : \Omega^{(p,q)}(U) \longrightarrow \Omega^{(p+1,q)}(U)$, $\overline{\partial} : \Omega^{(p,q)}(U) \longrightarrow \Omega^{(p,q+1)}(U)$.

Proposición 3.2.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $\omega \in \Omega^k(U)$ y $\eta \in \Omega^l(U)$ entonces*

(a) $d\omega = \partial\omega + \overline{\partial}\omega$.

(b) $\partial^2\omega = 0$, $\partial\overline{\partial}\omega + \overline{\partial}\partial\omega = 0$, $\overline{\partial}^2\omega = 0$.

(c) $\partial(\omega \wedge \eta) = \partial\omega \wedge \eta + (-1)^k\omega \wedge \partial\eta$, $\overline{\partial}(\omega \wedge \eta) = \overline{\partial}\omega \wedge \eta + (-1)^k\omega \wedge \overline{\partial}\eta$.

(d) $\partial(f\omega) = \partial f \wedge \omega + f\partial\omega$, $\overline{\partial}(f\omega) = \overline{\partial} f \wedge \omega + f\overline{\partial}\omega$.

Teorema 3.2.3. *Sea $F \in \mathcal{O}(U, V)$, entonces*

(a) Si $\omega \in \Omega^{(p,q)}(V)$ entonces $F^*(\omega) \in \Omega^{(p,q)}(U)$.

(b) $\partial(F^*\omega) = F^*(\partial\omega)$ y $\overline{\partial}(F^*\omega) = F^*(\overline{\partial}\omega)$, para todo $\omega \in \Omega^k(V)$.

Proposición 3.2.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $f \in \mathcal{C}^1(U)$ y $\overline{\partial} f = 0$, entonces $f \in \mathcal{O}(U)$.*

La siguiente proposición extiende esta propiedad a formas diferenciales.

Proposición 3.2.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $\omega \in \Omega^{(p,0)}(U)$. Entonces $\overline{\partial}\omega = 0$ en U si y solamente si ω es una $(p, 0)$-forma holomorfa en U, esto es, cada una de sus coordenadas es holomorfa.*

En este capítulo estudiaremos la ecuación $\overline{\partial}\omega = \eta$, el cual constituye uno de los problemas centrales.

Definición 3.2.5. Una forma diferencial $\eta \in \Omega^{(p,q)}(U)$ se dice $\overline{\partial}$**-cerrada** si $\overline{\partial}\eta = 0$, y se dice $\overline{\partial}$**-exacta** si existe una forma diferencial $\omega \in \Omega^{(p,q-1)}(U)$ tal que $\overline{\partial}\omega = \eta$.

Por la proposición anterior toda (p,q)-forma diferencial $\overline{\partial}$-exacta es $\overline{\partial}$-cerrada, y nos gustaría conocer cuando el recíproco es cierto. En esta capítulo resolveremos este problema.

Definición 3.2.6. Definimos el **soporte** de una forma diferencial $\omega \in \Omega^{(p,q)}(U)$ como

$$\text{supp}\omega = \bigcup_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \text{supp}\omega_{\alpha\beta}.$$

Teorema 3.2.4. *Toda forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada en $\Omega^{(p,q+1)}(\mathbb{C}^n)$ con soporte compacto, es $\overline{\partial}$-exacta.*

Resolver la ecuación $\overline{\partial}$ en $\mathbb{C}^n$, nos permite demostrar el Teorema de Extensión de Hartogs.

Teorema 3.2.5 (Teorema de Extensión de Hartogs)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto $(n \geq 2)$, y sea K un compacto en U tal que $U - K$ es conexo. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(U - K)$, existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $g = f$ en $U - K$.*

El siguiente teorema, es la versión compleja del lema de Poincaré.

Teorema 3.2.6 (Lema de Dolbeault)**.** *Sea $U = \Delta^n(a, r) \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco, con $r \in (0, \infty]$. Si $\eta \in \Omega^{(p,q+1)}(U)$ es una forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada, entonces η es $\overline{\partial}$-exacta.*

3.3. Teoría elemental de distribuciones

En esta sección daremos la definición y las propiedades elementales de la teoría de distribuciones. Recomendamos la referencia [8], para más detalles.

Definición 3.3.1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Definimos el **soporte** de una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \cap U$$

Definición 3.3.2. Denotaremos por $\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ el espacio vectorial de todos los $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ con soporte compacto, donde f será llamado una **función de prueba**. Si U es un abierto de $\mathbb{C}^n$ entonces denotaremos por $\mathscr{D}(U)$ el espacio vectorial de todos los $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\text{supp}(f) \subset U$. Similarmente, si K es un compacto de $\mathbb{C}^n$.

Definición 3.3.3. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces el espacio vectorial $\mathcal{E}(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ será equipado con la topología localmente convexa, generado por las seminormas

$$f \mapsto \|f\|_{m,K} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha f|$$

donde m recorre todos los enteros $\mathbb{Z}_+$, y K todos los compactos de Ω. Actualmente $\mathcal{E}(\Omega)$ es un espacio de Fréchet, cuya convergencia está caracterizada del siguiente modo

$$f_j \stackrel{\mathcal{E}(\Omega)}{\longrightarrow} f \Longleftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \partial^\alpha f_j \longrightarrow \partial^\alpha f \,\text{uniformemente en compactos de}\, \Omega.$$

Definición 3.3.4. Sea $K \subset \mathbb{C}^n$ un compacto. Entonces el espacio vectorial $\mathscr{D}(K)$ será equipado con la topología localmente convexa, generada por las seminormas

$$f \mapsto \|f\|_{m,K} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_K |\partial^\alpha f|$$

donde m recorre todos los enteros $\mathbb{Z}_+$. Actualmente $\mathscr{D}(K)$ es un espacio de Fréchet, cuya convergencia está caracterizada del siguiente modo

$$f_j \stackrel{\mathscr{D}(K)}{\longrightarrow} f \Longleftrightarrow \forall\alpha \in \mathbb{Z}_+^n : \partial^\alpha f_j \longrightarrow \partial^\alpha f \,\text{uniformemente en}\, K.$$

Observaciones:

1. La aplicación $\partial^\alpha : \mathcal{E}(\Omega) \to \mathcal{E}(\Omega)$ es lineal y continua.

2. Si $K \subset \Omega$ es un compacto, $\mathscr{D}(K)$ es cerrado en $\mathcal{E}(\Omega)$.

Definición 3.3.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea $(K_j)_{j\geq 1} \subset U$ una exhaustion normal. Equipamos el espacio vectorial

$$\mathscr{D}(U) = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{D}(K_j)$$

con la más fina topología localmente convexa para el cual todas las inclusiones

$$\mathscr{D}(K_j) \mapsto \mathscr{D}(U)$$

son continuas, cuya convergencia está caracterizada del siguente modo

$$\varphi_j \stackrel{\mathscr{D}(U)}{\longrightarrow} \varphi \Longleftrightarrow \exists K \subset\subset \Omega : \{\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\} \subset \mathscr{D}(K) \;,\; \varphi_j \stackrel{\mathscr{D}(K)}{\longrightarrow} \varphi.$$

Propiedades:

(a) $\mathscr{D}(U)$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo, completo, no metrizable.

Definición 3.3.6. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces una **distribución** en U es un funcional lineal continuo en $\mathscr{D}(U)$. Denotaremos por $\mathscr{D}'(U)$ el espacio vectorial de todas las distribuciones en U.

Proposición 3.3.1. *Sea T un funcional lineal en $\mathscr{D}(\Omega)$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) T es continuo.

(b) T es secuencialmente continuo.

(c) La restricción de T a cada $\mathscr{D}(K)$ es continuo.

(d) Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe una constante $C > 0$ y un entero $m \in \mathbb{Z}_+$ tal que

$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_{m,K}$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}(K)$.

El siguiente lema es una consecuencia del Teorema de diferenciación de Lebesgue 4.5.13

Lema 3.3.1 (du Bois-Raymond)**.** *Si $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$ y*

$$\int_U f\varphi dV = 0 \ , \ \forall\varphi \in \mathscr{D}(U)$$

entonces $f(x) = 0$ para casi todo $x \in U$.

Ejemplo 3.3.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces, cada función $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$ define una distribución $T_f \in \mathscr{D}'(U)$ dado por

$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_U \varphi f dV \ , \ \forall\varphi \in \mathscr{D}(U).$$

Aplicando el Lema 3.3.1, podemos mostrar que la aplicación lineal

$$L^1(U, \mathrm{loc}) \ni f \mapsto T_f \in \mathscr{D}'(U)$$

es una inyección continua. Por lo tanto podemos identificar cada $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$ con su imagen $T_f \in \mathscr{D}'(U)$ y hablar de la distribución f.

Ejemplo 3.3.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y $a \in U$. La distribución delta de Dirac $\langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a)$ no es regular, es decir, no lo podemos identificar con una función $f \in L^1(U, loc)$.

Dado que podemos identificar $\mathcal{C}^\infty(U)$ con un subespacio vectorial de $\mathscr{D}'(U)$, nos gustaría extender el operador diferencial ∂^α de $\mathcal{C}^\infty(U)$ hacia todo $\mathscr{D}'(U)$. Para motivar la definición tomemos $f \in \mathcal{C}^k(U)$ y $\varphi \in \mathscr{D}(U)$. Desde que φ tiene soporte compacto se sigue de la fórmula de integración por partes[11],

$$\int_U \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j} dV = -\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} f dV$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Luego por inducción tenemos que

$$\int_U \varphi D^\alpha f dV = (-1)^{|\alpha|} \int_U f D^\alpha \varphi dV$$

para todo multi-índice $|\alpha| \leq k$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.7. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $T \in \mathscr{D}'(U)$. Para cada multi-índice α definimos $\partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(U)$ por

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}(U)$.

Desde que la aplicación $\mathscr{D}(U) \ni \varphi \mapsto D^\alpha \varphi \in \mathscr{D}(U)$ es lineal y continua, es claro que $\partial^\alpha T$ es en efecto una distribución en U. En particular, toda función $u \in L^1(\Omega, \mathrm{loc})$ tiene todas las derivadas en el sentido distribucional. Es claro también que si $f \in \mathcal{C}^k(U)$ entonces la derivada $\partial^\alpha f$ en el sentido de distribuciones coincide con la derivada $\partial^\alpha f$ en el sentido clásico. Es decir, si $u \in \mathcal{C}^k(\Omega)$, entonces $\partial^\alpha T_u = T_{\partial^\alpha u}$, para todo $|\alpha| \leq k$.

Ejemplo 3.3.3. La derivada de la función de Heaviside $\chi'_{[0,\infty)} = \delta_0$.

Definición 3.3.8. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. El espacio vectorial $\mathscr{D}'(U)$ será equipado con la **topología débil estrella** $\sigma(\mathscr{D}'(U), \mathscr{D}(U))$, esto es, la topología de la convergencia puntual,

$$T_j \xrightarrow{w^*} T \iff \langle T_j, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \ , \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(U).$$

Entonces el siguiente resultado es claro.

Proposición 3.3.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces el operador*

$$\mathscr{D}'(U) \ni T \mapsto \partial^\alpha T \in \mathscr{D}'(U)$$

es lineal y continuo, para todo multi-índice α.

Definición 3.3.9. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Dado $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y $T \in \mathscr{D}'(U)$ definimos el producto $aT \in \mathscr{D}'(U)$ por

$$\langle aT, \varphi \rangle = \langle T, a\varphi \rangle$$

para todo $\varphi \in \mathscr{D}(U)$.

Desde que la aplicación $\varphi \in \mathscr{D}(U) \mapsto a\varphi \in \mathscr{D}(U)$ es lineal y continua, es claro que aT es en efecto una distribución en U. Si $f \in L^1(U, \text{loc})$ entonces el producto af en el sentido de distribuciones coincide con el producto en el sentido clásico. Es decir si $f \in L^1(\Omega, \text{loc})$, entonces $aT_f = T_{af}$.

Proposición 3.3.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces el operador*

$$\mathscr{D}'(U) \ni T \mapsto aT \in \mathscr{D}'(U)$$

es un operador lineal y continuo.

Proposición 3.3.4 (Regla de Leibniz)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, sea $a \in \mathcal{C}^\infty(U)$ y sea $T \in \mathscr{D}'(U)$, entonces*

$$\partial^\alpha(aT) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta a \cdot \partial^{\alpha-\beta} T$$

para todo multi-índice α.

Dado una distribución $T \in \mathscr{D}'(U)$, aplicando $\mathcal{C}^\infty$-partición de la unidad podemos demostrar la existencia del mayor abierto $V \subset U$ tal que $T \equiv 0$ en V.

Definición 3.3.10. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $T \in \mathscr{D}'(U)$. Si V es el mayor abierto en U tal que $T \equiv 0$ en V, entonces el conjunto $U - V$ es llamado el **soporte** de T y lo denotaremos por $\text{supp}T$.

Ejemplo 3.3.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in L^1(U, loc)$. Entonces $\text{supp}T_f = \text{supp}f$.

Definición 3.3.11. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Para cada $\epsilon > 0$ definimos el abierto

$$U_\epsilon = \{z \in U : d(z, \partial U) > \epsilon\}$$

Dado $T \in \mathscr{D}'(U)$ definimos su **convolución** $T * \Phi_\epsilon : U_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C}$ por

$$(T * \Phi_\epsilon)(z) = \langle T, w \mapsto \Phi_\epsilon(z - w) \rangle.$$

Denotaremos $f_\epsilon = f * \Phi_\epsilon$.

Si $f \in L^1(U, \text{loc})$ entonces es claro que la convolución $f * \Phi_\epsilon$ en el sentido de distribuciones coincide con la convolución $f*\Phi_\epsilon$ en el sentido de funciones. Es decir si $f \in L^1(U, \text{loc})$, entonces $T_f * \Phi_\epsilon = f * \Phi_\epsilon$.

Proposición 3.3.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $T \in \mathscr{D}'(U)$, entonces*

(a) $T * \Phi_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\epsilon)$.

(b) $\partial^\alpha(T * \Phi_\epsilon) = T * \partial^\alpha \Phi_\epsilon = \partial^\alpha T * \Phi_\epsilon$.

(c) $\operatorname{supp}(T * \Phi_\epsilon) \subset \operatorname{supp} T + \overline{B(0, \epsilon)}$.

En particular $T * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}(U_\epsilon)$ si el soporte de T es un compacto de $U_{2\epsilon}$.

Proposición 3.3.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Las distribuciones en U con soporte compacto forman un subconjunto secuencialmente denso en $\mathscr{D}'(U)$.*

Proposición 3.3.7. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y sea $T \in \mathscr{D}'(U)$ una distribución con soporte compacto. Entonces $T * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}(U)$ cuando $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, y $T * \Phi_\epsilon \longrightarrow T$ en $\mathscr{D}'(U)$ cuando $\epsilon \to 0$.*

Teorema 3.3.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, entonces $\mathscr{D}(U)$ es secuencialmente denso en $\mathscr{D}'(U)$.*

Teorema 3.3.2 (du Bois-Rymond). *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y sean $f, g \in \mathcal{C}(U)$. Entonces si*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$$

para algún $j \in \{1, 2, \ldots, 2n\}$ en el sentido de distribuciones, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = g$$

en el sentido clásico.

Corolario 3.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea f una función continua en Ω*

a) Si

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = 0 \, (\textit{en el sentido de distribuciones})$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, entonces f es una función constante.

b) *Si*

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(\Omega)\,(\textit{en el sentido de distribuciones})$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, *entonces* $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

Proposición 3.3.8. *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto. Si* $f_j \to f$ *en* $L^1(U, loc)$, *entonces* $f_j \to f$ *en* $\mathscr{D}'(U)$.

3.4. El operador $\overline{\partial}$ en espacios de Hörmander

En esta sección extenderemos el operador $\overline{\partial}$ de los espacios de formas diferenciales con coeficientes funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ a ciertos espacios de formas diferenciales con coeficientes como distribuciones. Nuestro objetivo es aplicar las técnicas estudiadas en espacios de Hilbert, a la solución de la ecuación $\overline{\partial}$ en dominios pseudoconvexos. Recomendamos la referencia [2], para más detalles.

Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Para $p, q \in \mathbb{Z}^+$ sea $\mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$ el espacio de todas las formas diferenciales de tipo (p, q) con coeficientes (en su forma canónica) en $\mathscr{D}'(\Omega)$. Si

$$T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} T_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge \overline{z}_\beta \in \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$$

Los operadores ∂ y $\overline{\partial}$ definidos en $\mathcal{C}^\infty_{(p,q)}(\Omega)$ pueden ser extendidos a $\mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$, esto es,

$$\partial : \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'_{(p+1,q)}(\Omega)$$

$$\partial T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \partial T_{\alpha\beta} \wedge\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

$$\overline{\partial} : \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$\overline{\partial} T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \overline{\partial} T_{\alpha\beta} \wedge\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

Tengamos en cuenta que su forma canónica de $\overline{\partial}T$ es

$$\overline{\partial} T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} \underbrace{\left[(-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^\gamma_{j\beta} \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}T} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\gamma.$$

Definamos también los operadores

$$\partial^{\alpha,\beta} : \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$$

$$\partial^{\alpha,\beta} T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \left(\partial^{\alpha,\beta} T_{\alpha\beta}\right) dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$$

$$\vartheta : \mathscr{D}'_{(p,q+1)}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$$

$$\vartheta T = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T_{\alpha,j\beta}}{\partial z_j} \right) dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \ , \ (q \geq 0)$$

donde para cada $\beta = (j_1, \ldots, j_q)$

$$T_{\alpha,j\beta} = \begin{cases} \quad 0 & , \ \text{si existe}\, k \in \{1, 2, \ldots, q\} \,\text{tal que}\, j = j_k \\ (-1)^r T_{\alpha\gamma} & , \ \gamma = (j_1, \ldots, j_r, j, j_{r+1}, \ldots, j_q) \end{cases}$$

Para cada $\eta \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ y $T \in \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$ definamos

$$\mathcal{A}_{\eta} : \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}'_{(p,q-1)}(\Omega)$$

$$\mathcal{A}_{\eta}(T) = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \eta}{\partial z_j} T_{\alpha,j\gamma} \right) dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma}.$$

Proposición 3.4.1. *(a)* $\partial^2 = 0$, $\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial = 0$, $\overline{\partial}^2 = 0$.

(b) $\partial^{\alpha,\beta} \circ \partial = \partial \circ \partial^{\alpha,\beta}$, $\partial^{\alpha,\beta} \circ \overline{\partial} = \overline{\partial} \circ \partial^{\alpha,\beta}$.

(c) $\vartheta \circ \vartheta = 0$, $\vartheta \circ \partial^{\alpha,\beta} = \partial^{\alpha,\beta} \circ \vartheta$.

(d) Para $\eta \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ *y* $T \in \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$ *se cumple que* $\vartheta(\eta T) = \eta \vartheta T + \mathcal{A}_{\eta}(T)$.

Lema 3.4.1. *Si* $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$*, entonces* $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$.

Demostración: Dado $K \subset \Omega$ un compacto, entonces existe constantes $c_1 > 0$ y $c_2 > 0$ tal que

$$c_1 \leq e^{-\varphi(z)} \leq c_2$$

para todo $z \in K$, entonces

$$\int_K |f|^2 dV \leq \frac{1}{c_1} \int_K |f|^2 e^{-\varphi} dV < \infty$$

lo cual implica que $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$.

$\square$

Proposición 3.4.2 (Lema de Urysohn)**.** *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Sean A y B dos subconjuntos cerrados disjuntos de U. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ en U, $\varphi \equiv 1$ en una vecindad de A en U, y $\varphi \equiv 0$ en una vecindad de B en U.*

Lema 3.4.2. *Si $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$, entonces existe $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$.*

Demostración: Sean K_n una sucesión de compactos en Ω (Lema 1.4.1) de modo que

$$K_n \subset\subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$$

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

Sea

$$c_n = \int_{K_n} |f|^2 dV$$

Para $n \geq 2$ escojemos funciones $a_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con las propiedades (Lema de Urysohn 4.5.8)

$$0 \leq a_n \leq 1$$

$$a_n \equiv 1 \,\text{en}\, K_n - \mathring{K}_{n-1}$$

$$\text{supp} a_n \subset \mathring{K}_{n+1} - K_{n-2}$$

Definimos

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \big(\log n^2(c_n + 1)\big) a_n(z)$$

entonces $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi} dV &= \int_{K_1} |f|^2 e^{-\varphi} dV + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{K_n - K_{n-1}} |f|^2 e^{-\varphi} dV \\
&\leq c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{K_n - K_{n-1}} |f|^2 e^{-\log n^2(c_n+1)} dV \\
&\leq c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2(c_n + 1)} c_n \\
&\leq c_1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

lo cual implica que $f \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$. $\square$

Definición 3.4.1. Para

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} f_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$$

definimos

$$\overline{\partial} f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} \underbrace{\left[(-1)^{|\alpha|} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma}$$

por el Lema 3.4.1, $\overline{\partial} f$ existe en el sentido de distribuciones.

Definición 3.4.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^{\infty}(U, \mathbb{R})$ tres funciones de peso.

(a) Denotaremos como

$$H_1 = L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)\ ,\ H_2 = L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)\ ,\ H_3 = L^2_{(p,q+2)}(\Omega, \varphi_3)$$

(b) Sea $\mathcal{Dom}(T)$ el subespacio de todas las formas $f \in H_1$ tal que $\overline{\partial} f \in H_2$. Sea

$$T : \mathcal{Dom}(T) \subset H_1 \longrightarrow H_2$$

definido por $Tf = \overline{\partial} f$.

(c) Sea $\mathcal{Dom}(S)$ el subespacio de todas las formas $g \in H_2$ tal que $\overline{\partial} g \in H_3$. Sea

$$S : \mathcal{Dom}(S) \subset H_2 \longrightarrow H_3$$

definido por $Sg = \overline{\partial} g$.

Observaciones: $(\Omega \subset \mathbb{C}^n)$

1. Desde que $\mathscr{D}(\Omega)$ es denso en $L^2(\Omega, \varphi)$, entonces $\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega)$ es denso en $L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi)$.

2. La restricción $\overline{\partial}$ a $\mathcal{C}^{\infty}_{(p,q)}(\Omega)$ coincide con la definición en el sentido clásico.

3. $L^2(\Omega, \varphi)$ es un espacio de Hilbert.

4. Los espacios de Hörmander $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_j)$ $(j=1,2,3)$ son espacios de Hilbert, con producto interno

$$\langle f,g\rangle_j = \int_\Omega f\overline{g}e^{-\varphi_j}dV$$
$$\|f\|_j^2 = \int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi_j}dV$$

donde φ es llamada **función de peso**.

Teorema 3.4.1. *Sea $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ un abierto y sean $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\in\mathcal{C}^\infty(\Omega,\mathbb{R})$ funciones de peso, por definición*

$$L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1)\xrightarrow{T}L^2_{(p,q+1)}(\Omega,\varphi_2)\xrightarrow{S}L^2_{(p,q+2)}(\Omega,\varphi_3)$$

entonces

(a) *T es un operador lineal cerrado densamente definido, en particular $\mathcal{N}u(T)$ es un subespacio cerrado de H_1.*

(b) *S es un operador lineal cerrado densamente definido, en particular $\mathcal{N}u(S)$ es un subespacio cerrado de H_2.*

(c) *$\mathcal{R}an(T)\subset\mathcal{N}u(S)$.*

Demostración: (a) Como $\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega)$ es denso en $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1)$ y $\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega)\subset\mathscr{D}_T$ entonces $\mathscr{D}_T$ es denso en $L^2_{(p,q)}(\Omega,\varphi_1)$. Sea f_n una sucesión en $\mathscr{D}_T$ tal que f_n converge a f en H_1, y Tf_n converge a g en H_2. Denotemos

$$g_n = Tf_n$$
$$f=\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} f_{\alpha\beta}\,dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta$$
$$f_n=\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} f^n_{\alpha\beta}\,dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta$$
$$g=\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}} g_{\alpha\gamma}\,dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma$$
$$g_n=\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}} g^n_{\alpha\gamma}\,dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma$$

entonces para cada $|\alpha| = p$, $|\beta| = q$

$$f^n_{\alpha\beta} \longrightarrow f_{\alpha\beta} \text{ en } L^2(\Omega, \varphi_1), \text{ cuando } n \to \infty$$

$$g^n_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} \text{ en } L^2(\Omega, \varphi_2), \text{ cuando } n \to \infty$$

aplicando la desigualdad de Schwarz

$$f^n_{\alpha\beta} \longrightarrow f_{\alpha\beta} \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty$$

$$g^n_{\alpha\beta} \longrightarrow g_{\alpha\beta} \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty$$

$$g^n_{\alpha\gamma} = (-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial f^n_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \longrightarrow (-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty$$

$$g^n_{\alpha\gamma} \longrightarrow g_{\alpha\gamma} \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega), \text{ cuando } n \to \infty$$

Por lo tanto $\overline{\partial} f = g$ en el sentido distribucional.

(b) Similar a la prueba (a).

(c) Denotemos

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} f_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \in \mathcal{D}_T$$

$$\overline{\partial} f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} \underbrace{\left[(-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma}$$

$$\overline{\partial}^2 f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \underbrace{\left[(-1)^p \sum_{k+\gamma=\theta} \epsilon^{\theta}_{k\gamma} \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \underbrace{\left\{ (-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right\}}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} f} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}^2 f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\theta}$$

$$\overline{\partial}^2 f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \underbrace{\left[\sum_{k+\gamma=\theta} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\theta}_{k\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}^2 f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\theta}$$

observamos que $\epsilon^{\theta}_{kj\beta} = -\epsilon^{\theta}_{jk\beta}$, entonces

$$\overline{\partial}^2 f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \underbrace{\left[\sum_{k+j+\gamma=\theta} \epsilon^{\theta}_{kj\beta} \frac{\partial^2 f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_k \partial \overline{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}^2 f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\theta} = 0$$

Por lo tanto $\overline{\partial} f \in \mathcal{Dom}(S)$. $\square$

Lema 3.4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, entonces*

(a) *Si $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{Dom}(T)$, entonces $\eta f \in \mathcal{Dom}(T)$ y*

$$T(\eta f) = \overline{\partial}\eta \wedge f + \eta T f.$$

(b) *Si $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $g \in \mathcal{Dom}(S)$, entonces $\eta g \in \mathcal{Dom}(S)$ y*

$$S(\eta g) = \overline{\partial}\eta \wedge g + \eta S g.$$

(c) *Si $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{Dom}(T^*)$, entonces $\eta f \in \mathcal{Dom}(T^*)$.*

Demostración: (b) Dado que $g \in H_2$ entonces $\eta g \in H_2$

$$\begin{aligned} \|\eta g\|_2^2 &= \int_\Omega |\eta g|^2 e^{-\varphi_2} dV \\ &\leq \|\eta\|_\infty^2 \int_\Omega |g|^2 e^{-\varphi_2} dV \\ &= \|\eta\|_\infty^2 \|g\|_2^2. \end{aligned}$$

Denotemos

$$g = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} g_{\alpha\beta}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

$$\overline{\partial} g = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+2}} \underbrace{\left[(-1)^{|\alpha|} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon_{j\beta}^{\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j}\right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} g} dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\gamma$$

entonces por la regla de Leibniz, en el sentido distribucional

$$\underbrace{\left[(-1)^{|\alpha|} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon_{j\beta}^{\gamma} \frac{\partial (\eta g_{\alpha\beta})}{\partial \overline{z}_j}\right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}(\eta g)} = \eta \underbrace{\left[(-1)^{|\alpha|} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon_{j\beta}^{\gamma} \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j}\right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} g} + \underbrace{\left[(-1)^{|\alpha|} \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon_{j\beta}^{\gamma} \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} g_{\alpha\beta}\right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial}\eta \wedge g}$$

de donde observamos que las coordenadas de $\overline{\partial}(\eta g)$ pertenecen a $L^2(\Omega, \varphi_3)$. Por lo tanto

$$\eta g \in \mathcal{D}_S$$

$$\overline{\partial}(\eta g) = \eta \overline{\partial} g + \overline{\partial}\eta \wedge g.$$

(c) Dado que $f \in H_2$ entonces $\eta f \in H_2$. Por demostrar que existe una constante $c = c(\eta, f) > 0$ tal que

$$|\langle Tg, \eta f\rangle_2| \leq c\|g\|_1$$

para todo $g \in \mathcal{D}_T$.

$$\begin{aligned}
|\langle Tg, \eta f\rangle_2| &= |\langle \overline{\eta} Tg, f\rangle_2| \\
&= |\langle T(\overline{\eta} g) - T\overline{\eta} \wedge g, f\rangle_2| \\
&\leq |\langle T(\overline{\eta} g), f\rangle_2| + |\langle T\overline{\eta} \wedge g, f\rangle_2| \\
&= \left|\langle g, \eta T^* f\rangle_1\right| + \left|\langle \overline{\partial}\overline{\eta} \wedge g, f\rangle_2\right| \\
&\leq \|g\|_1 \|\eta T^* f\|_1 + \|\overline{\partial}\overline{\eta} \wedge g\|_2 \|f\|_2.
\end{aligned}$$

Por la desigualdad de Schwarz

$$\left|\overline{\partial}\overline{\eta} \wedge g\right|^2 \leq \binom{n}{q+1} \left|\overline{\partial}\overline{\eta}\right|^2 |g|^2$$

$$\|\overline{\partial}\overline{\eta} \wedge g\|_2^2 \leq c(\eta)\|g\|_1^2$$

$$\left|\langle Tg, \eta f\rangle_2\right| \leq \left(\|\eta T^* f\|_1 + \sqrt{c(\eta)}\|f\|_2\right)\|g\|_1.$$

□

Lema 3.4.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una función no-negativa. Suponer que f es acotado en cada compacto de Ω. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $f(z) \leq \varphi(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración: Sean K_n una sucesión de compactos de Ω (Lema 1.4.1) de modo que

$$K_n \subset\subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$$

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$$

Sea

$$M_n = \sup\{f(z) : z \in K_n - K_{n-1}\} \ \ (n \geq 3)$$

por el Lema de Urysohn 4.5.8 escojemos funciones $a_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ con las propiedades $(n \geq 3)$

$$0 \leq a_n \leq 1$$

$$a_n \equiv 1 \,\text{en}\, K_n - \mathring{K}_{n-1}$$

$$\text{supp} a_n \subset \mathring{K}_{n+1} - K_{n-2}$$

Definamos

$$\varphi(z) = \sum_{n=2}^{\infty} M_n a_n(z)$$

donde $a_2 \equiv 1$ y $M_2 = \sup\{f(z) : z \in K_2\}$. Por lo tanto φ es la función requerida. $\square$

Lema 3.4.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Sea $(K_j)_{j\geq 0}$ una sucesión de compactos en Ω tales que*

$$K_{j-1} \subset\subset \mathring{K}_j \ , \ (j \geq 1)$$

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} K_j = \Omega.$$

Para cada $j \geq 1$, sea $\eta_j \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$ tal que $\eta_j \equiv 1$ en K_{j-1}, $\text{supp}(\eta_j) \subset \mathring{K}_j$ y $0 \leq \eta_j \leq 1$. Entonces existe una función $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ tal que

$$|\overline{\partial}\eta_j|^2 = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta_j}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 \leq e^{\psi}$$

para todo $j \geq 1$.

Demostración: Definamos

$$f(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta_j}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 & , \ z \in K_j - K_{j-1} \ , \ (j \geq 1) \\ \quad 0 & , \ z \in K_0 \end{cases}$$

Entonces f es acotado en cada compacto de Ω y satisface

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial \eta_j}{\partial \overline{z}_k} \right|^2 \leq f(z) \quad (j = 1, 2, \cdots).$$

Por el Lema 3.4.4, existe una función $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ tal que $f \leq \psi \leq e^{\psi}$ en Ω. $\square$

Definición 3.4.3. Para $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega, \mathbb{R})$, definimos

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi, \ \ \varphi_2 = \varphi - \psi, \ \ \varphi_3 = \varphi$$

Si ψ es como en el Lema 3.4.5 entonces

$$e^{-\varphi_3} \left|\overline{\partial}\eta_j\right|^2 \leq e^{-\varphi_2}, \ e^{-\varphi_2} \left|\overline{\partial}\eta_j\right|^2 \leq e^{-\varphi_1} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

Lema 3.4.6. *Sean $\eta_1, \eta_2, \ldots$ las funciones definidas en el Lema 3.4.5. Si $f \in \mathcal{D}om(S)$,*

$$\|S(\eta_j f) - \eta_j S(f)\|_3 \longrightarrow 0 \textit{ cuando } j \to \infty.$$

Demostración: Por la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned}
|S(\eta_j f) - \eta_j S(f)|^2 e^{-\varphi_3} &= \left|\overline{\partial}\eta_j \wedge f\right|^2 e^{-\varphi_3} \\
&\leq c\left|\overline{\partial}\eta_j\right|^2 |f|^2 e^{-\varphi_3} \\
&\leq c|f|^2 e^{-\varphi_2}
\end{aligned}$$

de la primera desigualdad notamos que

$$|S(\eta_j f) - \eta_j S(f)|^2 e^{-\varphi_3} \longrightarrow 0$$

puntualmente cuando $j \to \infty$, entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue[5]

$$\int_\Omega |S(\eta_j f) - \eta_j S(f)|^2 e^{-\varphi_3} dV \longrightarrow 0 \ \ (j \to \infty).$$

esto es,

$$\|S(\eta_j f) - \eta_j S(f)\|_3 \longrightarrow 0 \ \ (j \to \infty).$$

□

Proposición 3.4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces*

(*a*) $\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega) \subset \mathcal{D}om(T)$.

(*b*) $\mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega) \subset \mathcal{D}om(S)$.

(*c*) $\mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega) \subset \mathcal{D}om(T^*)$.

Demostración: (a) Es claro de la definición de T.

(b) Es claro de la definición de S.

(c) Sea

$$g = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} g_{\alpha\gamma}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\gamma \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

entonces para cada $f \in \mathcal{D}om(T)$ tenemos que

$$\langle Tf, g\rangle_2 = \left\langle f, \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \left[(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n e^{\varphi_1} \left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{-\varphi_2} g_{\alpha,j\beta}\right)\right\}\right] dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta \right\rangle_1$$

lo cual muestra que $g \in \mathcal{Dom}(T^*)$ y que

$$T^*g = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \underbrace{\left[(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2} g_{\alpha,j\beta} \right) \right\} \right]}_{\text{coordenadas de } T^*g} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$$

□

Lema 3.4.7. *Si* $f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} f_{\alpha\gamma}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma} \in \mathcal{Dom}(T^*)$, *entonces*

$$T^*f = e^{\varphi_1} \vartheta (e^{-\varphi_2} f)$$

$$T^*f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \underbrace{\left[(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2} f_{\alpha,j\beta} \right) \right\} \right]}_{\text{coordenadas de } T^*f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$$

Demostración: Denotemos

$$T^*f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} (T^*f)_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \in H_1$$

Sea

$$\varphi = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \varphi_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \in \mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega) \subset \mathcal{D}_T$$

entonces

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \left\langle (T^*f)_{\alpha\beta} \,, \overline{\varphi}_{\alpha\beta} e^{-\varphi_1} \right\rangle =$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} \int_{\Omega} (T^*f)_{\alpha\beta}\, \overline{\varphi}_{\alpha\beta} e^{-\varphi_1} dV =$$

$$\langle T^*f, \varphi \rangle_1 =$$

$$\langle f, T\varphi \rangle_2 =$$

$$\left\langle f, \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} \left[(-1)^p \sum_{j+\beta=\gamma} \epsilon^{\gamma}_{j\beta} \frac{\partial \varphi_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right] dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma} \right\rangle_2 =$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}}\int_\Omega\left[(-1)^p\sum_{j+\beta=\gamma}\epsilon^{\gamma}_{j\beta}\frac{\partial\overline{\varphi}_{\alpha\beta}}{\partial z_j}f_{\alpha\gamma}\right]e^{-\varphi_2}dV=$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}}\int_\Omega\left[(-1)^p\sum_{j+\beta=\gamma}\frac{\partial\overline{\varphi}_{\alpha\beta}}{\partial z_j}f_{\alpha,j\beta}\right]e^{-\varphi_2}dV=$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\int_\Omega\left[(-1)^p\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\overline{\varphi}_{\alpha\beta}}{\partial z_j}f_{\alpha,j\beta}\right]e^{-\varphi_2}dV=$$

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\left\langle\left[(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{-\varphi_2}f_{\alpha,j\beta}\right)\right\}\right],\overline{\varphi}_{\alpha\beta}e^{-\varphi_1}\right\rangle$$

entonces

$$\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\left\langle(T^*f)_{\alpha\beta},\varphi_{\alpha\beta}\right\rangle=\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\left\langle\left[(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{-\varphi_2}f_{\alpha,j\beta}\right)\right\}\right],\varphi_{\alpha\beta}\right\rangle$$

para todo $\varphi\in\mathscr{D}_{(p,q)}(\Omega)$ de donde

$$(T^*f)_{\alpha\beta}=(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{n}e^{\varphi_1}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{-\varphi_2}f_{\alpha,j\beta}\right)\right\}$$

para todo $|\alpha|=p$, $|\beta|=q$ en el sentido de distribuciones. □

Corolario 3.4.1. $e^{\varphi_2-\varphi_1}T^*=\vartheta-\mathcal{A}_{\varphi_2}$

Demostración:

$$e^{\varphi_2-\varphi_1}T^*f=$$

$$(-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{\alpha,j\beta}}{\partial z_j}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}f_{\alpha,j\beta}\right]dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta=$$

$$(-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial f_{\alpha,j\beta}}{\partial z_j}\right]dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta-(-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{\partial\varphi_2}{\partial z_j}f_{\alpha,j\beta}\right]dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\beta=$$

$$\vartheta f-\mathcal{A}_{\varphi_2}f$$

□

Lema 3.4.8. *Sean $\eta_1, \eta_2, \ldots$ las funciones definidas en el Lema 3.4.5. Si $f \in \mathcal{D}om(T^*)$, entonces*

$$\|T^*(\eta_l f) - \eta_l T^*(f)\|_1 \to 0$$

cuando $l \to \infty$.

Demostración: Denotemos

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q+1}} f_{\alpha\gamma}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\gamma$$

$$T^*(\eta_l f) - \eta_l T^*(f) = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} g^l_{\alpha\beta}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta \in H_1$$

se sigue del Lema 3.4.7 y de la regla de Leibniz 3.3.4 que

$$g^l_{\alpha\beta} =$$

$$(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n e^{\varphi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2} \eta_l f_{\alpha,j\beta} \right) \right\} - (-1)^{p-1} \eta_l \sum_{j=1}^n e^{\varphi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\varphi_2} f_{\alpha,j\beta} \right) \right\} =$$

$$(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^n \left[e^{\varphi_1} \frac{\partial \eta_l}{\partial z_j} e^{-\varphi_2} f_{\alpha,j\beta} \right]$$

Por el Lema 3.4.5 y la desigualdad de Schwarz

$$\begin{aligned} \left| g^l_{\alpha\beta} \right|^2 &\leq e^{2(\varphi_1 - \varphi_2)} \left[\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \eta_l}{\partial z_j} \right|^2 \right] \left[\sum_{j=1}^n |f_{\alpha,j\beta}|^2 \right] \\ &\leq e^{\varphi_1 - \varphi_2} \sum_{j=1}^n |f_{\alpha,j\beta}|^2 \end{aligned}$$

De la primera desigualdad observamos que

$$\left| g^l_{\alpha\beta} \right|^2 \longrightarrow 0$$

se sigue que

$$|T^*(\eta_l f) - \eta_l T^*(f)|^2 \, e^{-\varphi_1} \longrightarrow 0.$$

Además

$$
\begin{aligned}
|T^*(\eta_l f) - \eta_l T^*(f)|^2 e^{-\varphi_1} &= \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} \left|g^l_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi_1} \\
&\leq \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha,j\beta}|^2 e^{-\varphi_2} \\
&= (q+1) \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}} |f_{\alpha\gamma}|^2 e^{-\varphi_2} \\
&= (q+1)|f|^2 e^{-\varphi_2}
\end{aligned}
$$

Por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue[5] tenemos que

$$\|T^*(\eta_l f) - \eta_l T^*(f)\|_1 \longrightarrow 0.$$

$\square$

Teorema 3.4.2. *Sean $\eta_1, \eta_2, \ldots$ las funciones definidas en el Lema 3.4.5.*

(a) *Si $f \in H_2$,*

$$\|\eta_j f - f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

(b) *Si $f \in \mathcal{D}om(T^*)$,*

$$\|T^*(\eta_j f) - T^* f\|_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

(c) *Si $f \in \mathcal{D}om(S)$,*

$$\|S(\eta_j f) - Sf\|_3 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Demostración: (a)

$$\|\eta_j f - f\|_2^2 = \int_\Omega |\eta_j f - f|^2 e^{-\varphi_2} dV$$

observemos que

$$|\eta_j f - f|^2 e^{-\varphi_2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

$$|\eta_j f - f|^2 e^{-\varphi_2} \leq |f|^2 e^{-\varphi_2}$$

entonces por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue[5]

$$\|\eta_j f - f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

(b) Similarmente por (a)

$$\|\eta_j T^* f - T^* f\|_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

se sigue del Lema 3.4.8 que

$$\|T^*(\eta_j f) - T^* f\|_1 \leq \|T^*(\eta_j f) - \eta_j T^* f\|_1 + \|\eta_j T^* f - T^* f\|_1 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

(c) Similarmente por (a)

$$\|\eta_j S f - S f\|_3 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

sigue del Lema 3.4.6 que

$$\|S(\eta_j f) - S f\|_3 \leq \|S(\eta_j f) - \eta_j S f\|_3 + \|\eta_j S f - S f\|_3 \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

$\square$

Definición 3.4.4. Para $g \in \mathcal{D}om(T^*) \cap \mathcal{D}om(S)$, definimos la norma de la gráfica

$$\|g\|_{\mathcal{G}}^2 = \|g\|_2^2 + \|T^* g\|_1^2 + \|Sg\|_3^2.$$

Una consecuencia directa del Teorema 3.4.2 es el siguiente corolario.

Corolario 3.4.2. *Sean $\eta_1, \eta_2, \ldots$ las funciones definidas en el Lema 3.4.5. Entonces para $f \in \mathcal{D}om(T^*) \cap \mathcal{D}om(S)$,*

$$\|\eta_j f - f\|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0 \textit{ cuando } j \to \infty.$$

Definición 3.4.5. Si

$$T = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} T_{\alpha\beta} dz_\alpha \wedge \overline{z}_\beta \in \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$$

entonces definimos su **convolución**

$$T * \Phi_\epsilon = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q}} T_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon dz_\alpha \wedge \overline{z}_\beta \in \mathcal{C}^\infty_{(p,q)}(\Omega_\epsilon)$$

Proposición 3.4.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto.*

a) Si $f \in \mathcal{D}om(T)$,

$$T(f * \Phi_\epsilon) = T(f) * \Phi_\epsilon$$

b) *Si* $g \in \mathcal{D}om(S)$,

$$S(g * \Phi_\epsilon) = S(g) * \Phi_\epsilon$$

c) *Si* $f \in \mathscr{D}'_{(p,q)}(\Omega)$,

$$\vartheta(f * \Phi_\epsilon) = \vartheta f * \Phi_\epsilon$$

Demostración: (b) Dado que S es un operador diferencial lineal

$$\begin{aligned}
S(f * \Phi_\epsilon) &= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \left[(-1)^p \sum_{j+\gamma=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\gamma} \frac{\partial (f_{\alpha\gamma} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} \right] dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\theta \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \left[(-1)^p \sum_{j+\gamma=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\gamma} \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z}_j} \right] * \Phi_\epsilon \, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\theta \\
&= S(f) * \Phi_\epsilon
\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.9. *Sea* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *un abierto y sean* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$. *Si* $g \in H_2$ *tiene soporte compacto con* $\operatorname{supp}(g) \subset \Omega_{2\epsilon}$, *entonces*

$$g_\epsilon = g * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$\|g_\epsilon - g\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

Demostración: Por la Proposición 3.3.5

$$g * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

y por la Proposición 4.5.6

$$\|g * \Phi_\epsilon - g\|_{L^2{}_{(p,q+1)}(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

consecuentemente

$$\|g * \Phi_\epsilon - g\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

□

Lema 3.4.10. *Supongamos que* $f \in \mathcal{D}om(S)$ *con* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$, *entonces*

$$\|S(f_\epsilon) - S(f)\|_3 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

Demostración: Notemos que

$$S(f) = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\theta|=q+2}} \underbrace{\left[(-1)^p \sum_{j+\gamma=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\gamma} \frac{\partial f_{\alpha\gamma}}{\partial \overline{z}_j}\right]}_{\text{coordenadas en } H_3 \text{ con soporte compacto}} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\theta}$$

por el Lema 3.4.9

$$\|S(f) * \Phi_\epsilon - S(f)\|_{\varphi_3} \longrightarrow 0$$

y por la Proposición 3.4.4

$$S(f) * \Phi_\epsilon = S(f * \Phi_\epsilon).$$

□

Lema 3.4.11. *Sea* $f \in \mathcal{D}om(T^*)$ *con* $\operatorname{supp}(f) \subset\subset \Omega$, *entonces*

$$\|T^*(f_\epsilon) - T^* f\|_{\varphi_1} \longrightarrow 0.$$

Demostración: Denotemos

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q+1}} f_{\alpha\gamma}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma} \in \mathcal{D}om(T^*)$$

$$T^* f = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q}} \underbrace{\left[(-1)^{p-1} \sum_{j=1}^{n} e^{\phi_1} \left\{ \frac{\partial}{\partial z_j} \left(e^{-\phi_2} f_{\alpha, j\beta} \right) \right\} \right]}_{\text{las coordenadas de } T^* f \text{ tienen soporte compacto}} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta}$$

por el Corolario 3.4.1, la Proposición 3.4.4 ($a = \mathcal{A}_{\varphi_2}$)

$$e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^* f = (\vartheta - a) f$$

$$e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^* f_\epsilon = (\vartheta - a) f_\epsilon$$

$$(\vartheta - a)(f * \Phi_\epsilon) = \vartheta(f * \Phi_\epsilon) - a(f * \Phi_\epsilon)$$

$$((\vartheta - a) f) * \Phi_\epsilon = \vartheta(f) * \Phi_\epsilon - (af) * \Phi_\epsilon$$

$$\vartheta(f * \Phi_\epsilon) = \vartheta(f) * \Phi_\epsilon$$

$$(\vartheta - a)(f * \Phi_\epsilon) = ((\vartheta - a) f) * \Phi_\epsilon + (af) * \Phi_\epsilon - a(f * \Phi_\epsilon)$$

por la Proposición 4.5.6

$$\|((\vartheta - a) f) * \Phi_\epsilon - (\vartheta - a) f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\|(af) * \Phi_\epsilon - af\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\|a(f * \Phi_\epsilon) - af\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

entonces

$$\|(\vartheta - a)(f * \Phi_\epsilon) - (\vartheta - a)f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

consecuentemente

$$\|T^*(f_\epsilon) - T^* f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\|T^*(f_\epsilon) - T^* f\|_{\varphi_1} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

□

Una consecuencia directa de los Lemas 3.4.9, 3.4.10, y 3.4.11 es el siguiente teorema.

Teorema 3.4.3. *Si $g \in \mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$ con soporte compacto, entonces*

$$\|g_\epsilon - g\|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

Teorema 3.4.4. *El espacio $\mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$ es denso en $\mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$ con respecto a la norma de la gráfica*

$$\mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S) \ni f \mapsto \|f\|^2_{\mathcal{G}} = \|f\|^2_2 + \|T^* f\|^2_1 + \|Sf\|^2_3.$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$. Por el Corolario 3.4.2

$$\|\eta_j f - f\|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty.$$

Observamos que cada $\eta_j f$ es un elemento en $\mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$ con soporte compacto. Por el Teorema 3.4.3 podemos aproximar elementos $g \in \mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$ con soporte compacto, por elementos de $\mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$ con respecto a la norma de la gráfica. □

Lema 3.4.12. *Sea $f \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$*

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} f_{\alpha\beta}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$$

entonces

$$\left|\overline{\partial} f\right|^2 = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2 - \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \bar{z}_k}\right] \overline{\left[\frac{\partial f_{\alpha,k\gamma}}{\partial \bar{z}_j}\right]}.$$

Demostración: Desde que

$$\overline{\partial} f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \underbrace{\left[(-1)^p \sum_{j+\beta=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right]}_{\text{coordenadas de } \overline{\partial} f} dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\theta}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
\left|\overline{\partial} f\right|^2 &= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \left| (-1)^p \sum_{j+\beta=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right|^2 \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \left[\sum_{j+\beta=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right] \left[\sum_{k+\lambda=\theta} \epsilon^{\theta}_{k\lambda} \frac{\partial \overline{f_{\alpha\lambda}}}{\partial z_k} \right] \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\theta|=q+2}} \left[\sum_{j+\beta=\theta, k+\lambda=\theta} \epsilon^{\theta}_{j\beta} \epsilon^{\theta}_{k\lambda} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \frac{\partial \overline{f_{\alpha\lambda}}}{\partial z_k} \right] \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1 \\ |\lambda|=q+1}} \left[\sum_{j,k=1}^{n} \epsilon^{k\lambda}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha\lambda}}{\partial \overline{z}_k}} \right]
\end{aligned}$$

en el caso $j = k$ tenemos que

$$\lambda = \beta, \quad j \notin \beta$$

en el caso $j \neq k$ tenemos que

$$j \in \lambda, \quad k \in \beta, \quad \gamma = \beta - \{k\} = \lambda - \{j\}, \quad \beta = k + \gamma, \quad \lambda = j + \gamma$$

$$\epsilon^{k\lambda}_{j\beta} = -\epsilon^{jk\gamma}_{j\beta} \epsilon^{k\lambda}_{kj\gamma}$$

$$\epsilon^{k\lambda}_{j\beta} = -\epsilon^{k\gamma}_{\beta} \epsilon^{\lambda}_{j\gamma}$$

$$f_{\alpha,k\gamma} = \epsilon^{\beta}_{k\gamma} f_{\alpha\beta}$$

$$f_{\alpha,j\gamma} = \epsilon^{\lambda}_{j\gamma} f_{\alpha\lambda}$$

se sigue que

$$
\begin{aligned}
\left|\overline{\partial} f\right|^2 &= \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1\\|\lambda|=q+1}} \left[\sum_{j=k} \epsilon^{k\lambda}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha\lambda}}{\partial \bar{z}_k}}\right] + \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1\\|\lambda|=q+1}} \left[\sum_{j\neq k} \epsilon^{k\lambda}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha\lambda}}{\partial \bar{z}_k}}\right] \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left[\sum_{j\notin\beta} \left|\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2\right] + \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1\\|\lambda|=q+1}} \left[\sum_{j\neq k} \epsilon^{k\lambda}_{j\beta} \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha\lambda}}{\partial \bar{z}_k}}\right] \\
&= \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left[\sum_{j\notin\beta} \left|\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2\right] - \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \left[\sum_{j\neq k} \frac{\partial f_{\alpha,k\gamma}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \bar{z}_k}}\right]
\end{aligned}
$$

además

$$
\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left[\sum_{j\in\beta} \left|\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2\right] = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2\right]
$$

entonces

$$
\left|\overline{\partial} f\right|^2 = \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left[\sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j}\right|^2\right] - \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \left[\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial f_{\alpha,k\gamma}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \bar{z}_k}}\right]
$$

□

Definición 3.4.6. Para $g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ definimos el operador

$$
\delta_j g = e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_j}(g e^{-\varphi}) = \frac{\partial g}{\partial z_j} - g\frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \quad (j = 1, \dots, n).
$$

Para $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ definimos el operador

$$
\left[\delta_j, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}\right] f = \delta_j \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial(\delta_j f)}{\partial \bar{z}_k} \quad (j, k = 1, \dots, n).
$$

Observaciones:

1. El operador

$$
T = -\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} : L^2(\Omega, \varphi) \longrightarrow L^2(\Omega, \varphi)
$$

es un operador lineal cerrado densamente definido, con su operador adjunto δ_j (en el sentido de distribuciones).

$$
\begin{aligned}
\left\langle T^{*}g, e^{-\varphi}\overline{\theta}\right\rangle &= \int_{\Omega} T^{*}g e^{-\varphi}\overline{\theta} dV \\
&= \langle T^{*}g, \theta\rangle_{\varphi} \\
&= \left\langle g, -\frac{\partial\theta}{\partial\overline{z}_j}\right\rangle_{\varphi} \\
&= -\int_{\Omega} g\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z_j}e^{-\varphi}dV \\
&= \left\langle \delta_j g, e^{-\varphi}\overline{\theta}\right\rangle
\end{aligned}
$$

2. Si

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} f_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha}\wedge d\overline{z}^{\beta} \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

entonces

$$e^{\psi}T^{*}f = (-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}}\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{\alpha,j\gamma}\, dz^{\alpha}\wedge d\overline{z}^{\gamma} + (-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}}\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha,j\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\, dz^{\alpha}\wedge d\overline{z}^{\gamma}$$

donde ψ es como en el Lema 3.4.5 y $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$, $\varphi_2 = \varphi - \psi$, $\varphi_3 = \varphi$.

3. Para $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$

$$\left[\delta_j, \frac{\partial}{\partial\overline{z}_k}\right] f = f\frac{\partial^2\varphi}{\partial\overline{z}_j\partial z_k} \quad (j,k = 1,\ldots,n).$$

Lema 3.4.13. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^d$ un abierto. Sea Ω_n una sucesión creciente de conjuntos abiertos cuya unión es Ω, y sea c_n una sucesión de números reales no-negativos. Entonces existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ tal que $\varphi \geq c_n$ en $\Omega_n - \Omega_{n-1}$ para todo $n \geq 1$ ($\Omega_0 = \varnothing$).*

Demostración: Definamos $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f(z) = c_n\ ,\ z \in \Omega_n - \Omega_{n-1}$$

Entonces por el Lema 3.4.4 existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega,\mathbb{R})$ tal que $\varphi \geq f$ en Ω. □

Lema 3.4.14. *Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función no-negativa el cual es acotada en cada intervalo acotado. Asumir que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(t) = 0$ para todo $t \leq a$. Entonces existe una función creciente convexa $\chi \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que*

$$\chi(t) \geq f(t)\ \ ,\ \ \chi'(t) \geq f(t)\ \ ,\ \ \chi''(t) \geq 0 \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Demostración: Por el Lema de Urysohn 4.5.8, para cada $n \in \mathbb{Z}$, escogemos una función $a_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \le a_n \le 1$, y

$$a_n(t) = \begin{cases} 1 \ , \ t \in [n-2, n] \\ 0 \ , \ t \in [n-3, n+1]^c \end{cases}$$

definamos

$$M_n = \sup_{[n-2,n]} f$$

$$\varphi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} M_n a_n$$

entonces $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ y $\varphi \ge f$. Dado $n-1 \le x \le n$ tenemos que

$$\chi_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt \ge \int_{n-2}^{n-1} \varphi(t)dt \ge \int_{n-2}^{n-1} M_n a_n(t)dt = M_n \ge f(x)$$

analogamente, existe una función $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\theta \ge \text{máx}\{\chi_1'', 0\}$. Definamos

$$\chi(x) = \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \theta(y)dy \right\} dt$$

entonces

$$\chi'(x) = \int_{-\infty}^{x} \theta(y)dy \ge \int_{-\infty}^{x} \chi_1''(y)dy = \chi_1'(x) \ge f(x)$$

$$\chi(x) \ge \int_{-\infty}^{x} \left\{ \int_{-\infty}^{t} \chi_1''(y)dy \right\} dt = \chi_1(x) \ge f(x)$$

$$\chi''(x) = \theta(x) \ge 0.$$

□

Teorema 3.4.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo y sea $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$. Sea $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función exhaustiva estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$. Entonces existe una función creciente convexa $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\varphi = \chi \circ \Phi$ es una función exhaustiva estrictamente plurisubarmónica tal que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \ge 2 \left(\left|\overline{\partial}\psi\right|^2 + e^{\psi} \right) \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \ , \ \forall w \in \mathbb{C}^n$$

$$\varphi(z) \ge \rho(z) \ , \ \forall z \in \Omega.$$

Demostración: Como Φ es estrictamente plurisubarmónica en Ω, entonces por el Lema 2.1.2 existe una función continua $a:\Omega\to\mathbb{R}^+$ tal que

$$\Delta_w\Phi(z)=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)w_j\overline{w}_k\geq a(z)\|w\|^2$$

para todo $z\in\Omega$ y $w\in\mathbb{C}^n$. Definamos

$$\Omega_t=\{z\in\Omega:\Phi(z)\leq t\}\subset\subset\Omega\ \ (t\in\mathbb{R})$$

$$g(t)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in\Omega_t}\rho(z)\ , & t>\min\limits_{\Omega}\Phi\\[2ex] 0 & , \ t\leq\min\limits_{\Omega}\Phi\end{cases}$$

$$h(t)=\begin{cases}\sup\limits_{z\in\Omega_t}\left\{\dfrac{2\left(\left|\overline{\partial}\psi(z)\right|^2+e^{\psi(z)}\right)}{a(z)}\right\}\ , & t>\min\limits_{\Omega}\Phi\\[2ex] 0 & , \ t\leq\min\limits_{\Omega}\Phi\end{cases}$$

Notemos que $g(t)$, $h(t)$ son crecientes para $t\geq\min\limits_{\Omega}\Phi$. Por el Lema 3.4.14 existe una función creciente convexa $\chi_1\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi_1(t)\geq g^+(t)$, $\chi_1'(t)\geq g^+(t)$, y una función creciente convexa $\chi_2\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi_2(t)\geq h(t)$, $\chi_2'(t)\geq h(t)$. Entonces obtenemos una función creciente convexa $\chi\in\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\chi(t)\geq g(t)$, $\chi'(t)\geq h(t)$. Definamos

$$\varphi(z)=(\chi\circ\Phi)(z)$$

entonces

$$\varphi(z)=\chi(\Phi(z))\geq g(\Phi(z))=\sup_{w\in\Omega_{\Phi(z)}}\rho(w)\geq\rho(z)$$

aplicando la Proposición 2.1.17

$$\begin{aligned}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)w_j\overline{w}_k&=\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2(\chi\circ\Phi)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)w_j\overline{w}_k\\&=\Delta_w(\chi\circ\Phi)(z)\\&=\chi''(\Phi(z))\cdot\left|\left\langle w,\overline{\nabla\Phi(z)}\right\rangle\right|^2+\chi'(\Phi(z))\cdot\Delta_w\Phi(z)\\&\geq h(\Phi(z))a(z)\|w\|^2\\&\geq 2\left(\left|\overline{\partial}\psi(z)\right|^2+e^{\psi(z)}\right)\|w\|^2\end{aligned}$$

□

3.5. Un teorema de existencia para el operador $\overline{\partial}$

Observaciones:

a) Para cada $j = 1, 2, \ldots, n$, sea $\delta_j : \mathscr{D}(\Omega) \longrightarrow \mathscr{D}(\Omega)$ definido por

$$\delta_j f = e^{\varphi} \frac{\partial}{\partial z_j}(f e^{-\varphi}) = \frac{\partial f}{\partial z_j} - f \frac{\partial \varphi}{\partial z_j}$$

entonces, para todo $f, g \in \mathscr{D}(\Omega)$ tenemos que (aplicando integración por partes)

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j} \overline{g} e^{-\varphi} dV = -\int_{\Omega} f \cdot \overline{\delta_j g} \cdot e^{-\varphi} dV$$

$$\Big\langle -\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}, g \Big\rangle_{\varphi} = \big\langle f, \delta_j g \big\rangle_{\varphi}$$

b)

$$\delta_j \frac{\partial f}{\partial \overline{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \delta_j f = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} f.$$

Teorema 3.5.1 (L^2-estimaciones de Hörmander)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$, y $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$, $\varphi_2 = \varphi - \psi$, $\varphi_3 = \varphi$, entonces*

$$2\|T^* f\|_1^2 + \|Sf\|_3^2 + 2(q+1)\int_{\Omega} |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV \geq$$

$$\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}_j \partial z_k} f_{\alpha, j\gamma} \overline{f_{\alpha, k\gamma}} e^{-\varphi} dV + \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \left|\overline{\partial} f_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi} dV$$

para todo $f \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$, en particular para $\varphi = \psi = 0$, tenemos que

$$2\|\vartheta f\|_{L^2}^2 + \|\overline{\partial} f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right\|_{L^2}^2$$

Demostración: Para

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} f_{\alpha\beta}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\beta} \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$
\begin{aligned}
T^*f &= \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \underbrace{\left[(-1)^{p-1}\sum_{j=1}^{n} e^{\varphi_1}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{-\varphi_2} f_{\alpha,j\gamma}\right)\right\}\right]}_{\text{coordenadas de } T^*f} dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma \\
&= (-1)^{p-1}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\left[\sum_{j=1}^{n} e^{\varphi-2\psi}\left\{\frac{\partial}{\partial z_j}\left(e^{\psi-\varphi} f_{\alpha,j\gamma}\right)\right\}\right] dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma \\
&= (-1)^{p-1}e^{-\psi}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{\alpha,j\gamma}\, dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma + (-1)^{p-1}e^{-\psi}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j=1}^{n} f_{\alpha,j\gamma}\frac{\partial\psi}{\partial z_j}\, dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma \\
&\equiv A+B
\end{aligned}
$$

aplicando la desigualdad $\|x+y\|^2_{\varphi_1}\leq 2\|x\|^2_{\varphi_1}+2\|y\|^2_{\varphi_1}$ tenemos que

$$2\|T^*f\|^2_{\varphi_1}\geq \|A\|^2_{\varphi_1}-2\|B\|^2_{\varphi_1}$$

donde

$$
\begin{aligned}
\|A\|^2_{\varphi_1} &= \left\|(-1)^{p-1}e^{-\psi}\sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j=1}^{n}\delta_j f_{\alpha,j\gamma}\, dz^\alpha\wedge d\overline{z}^\gamma\right\|^2_{\varphi_1} \\
&= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j,k=1}^{n}\delta_j f_{\alpha,j\gamma}\overline{\delta_k f_{\alpha,k\gamma}}e^{-\varphi}dV \\
&= \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j,k=1}^{n}\delta_j f_{\alpha,j\gamma}\frac{\partial\left\{\overline{f_{\alpha,k\gamma}}e^{-\varphi}\right\}}{\partial\overline{z}_k}dV \\
&= -\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial(\delta_j f_{\alpha,j\gamma})}{\partial\overline{z}_k}\overline{f_{\alpha,k\gamma}}e^{-\varphi}dV
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|B\|^2_{\varphi_1} &= \left\| (-1)^{p-1} e^{-\psi} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha,j\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial z_j}\, dz^{\alpha} \wedge d\overline{z}^{\gamma} \right\|^2_1 \\
&= \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \left| \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha,j\gamma} \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \right|^2 e^{-\varphi} dV \\
&\leq \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \left[\sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha,j\gamma}|^2 \right] \left[\sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \overline{z}_j} \right|^2 \right] e^{-\varphi} dV \\
&= (q+1) \int_{\Omega} |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
2\|T^* f\|^2_1 \geq -\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial(\delta_j f_{\alpha,j\gamma})}{\partial \overline{z}_k} \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_{\Omega} |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV
$$

Por otro lado

$$
\begin{aligned}
\|Sf\|^2_3 &= \int_{\Omega} \left|\overline{\partial} f\right|^2 e^{-\varphi_3} dV \\
&= \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dV - \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \overline{z}_k} \right] \overline{\left[\frac{\partial f_{\alpha,k\gamma}}{\partial \overline{z}_j} \right]} e^{-\varphi} dV \\
&= \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dV + \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \overline{z}_k} e^{-\varphi} \right] \overline{f_{\alpha,k\gamma}} dV \\
&= \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \right|^2 e^{-\varphi} dV + \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \delta_j \left[\frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial \overline{z}_k} \right] \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV
\end{aligned}
$$

Consecuentemente

$$
2\|T^* f\|^2_1 + \|Sf\|^2_3 \geq
$$

$$
\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left|\overline{\partial} f_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_{\Omega} |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV + \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \left[\delta_j, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} \right] f_{\alpha,j\gamma} \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV =
$$

$$
\int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}_j \partial z_k} f_{\alpha,j\gamma} \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV + \int_{\Omega} \sum_{\substack{|\alpha|=p\\|\beta|=q+1}} \left|\overline{\partial} f_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_{\Omega} |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV
$$

$\square$

Teorema 3.5.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, y $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$, $\varphi_2 = \varphi - \psi$, $\varphi_3 = \varphi$. Asumamos que*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} w_j \overline{w}_k \geq 2\left(\left|\overline{\partial}\psi\right|^2 + e^{\psi}\right) \sum_{j=1}^{n} |w_j|^2 \ , \ \forall w \in \mathbb{C}^n.$$

Entonces

$$\|T^* f\|_1^2 + \|Sf\|_3^2 \geq \|f\|_2^2$$

para todo $f \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$.

Demostración:

$$2\|T^* f\|_1^2 + \|Sf\|_3^2 \geq$$

$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \overline{z}_j \partial z_k} f_{\alpha,j\gamma} \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV + \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \left|\overline{\partial} f_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_\Omega |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV \geq$$

$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} 2\left(\left|\overline{\partial}\psi\right|^2 + e^{\psi}\right) |f_{\alpha,j\gamma}|^2 e^{-\varphi} dV + \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \left|\overline{\partial} f_{\alpha\beta}\right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_\Omega |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV \geq$$

$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} 2\left(\left|\overline{\partial}\psi\right|^2 + e^{\psi}\right) |f_{\alpha,j\gamma}|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_\Omega |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV =$$

$$2\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha,j\gamma}|^2 e^{\psi-\varphi} dV + 2\int_\Omega \left[\sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha,j\gamma}|^2 \right] \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_\Omega |f|^2 \left|\overline{\partial}\psi\right|^2 e^{-\varphi} dV =$$

$$2\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha,j\gamma}|^2 e^{\psi-\varphi} dV \geq$$

$$2\|f\|_2^2$$

$\square$

Teorema 3.5.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Para $f \in \mathcal{Dom}(T^*) \cap \mathcal{Dom}(S)$, tenemos que*

$$\|T^* f\|_1^2 + \|Sf\|_3^2 \geq \|f\|_2^2.$$

Demostración: Por el Teorema 3.4.4 existe una sucesión $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$ tal que

$$\|f_j - f\|_{\mathcal{G}} \longrightarrow 0 \text{ cuando } j \to \infty$$

y por el Teorema 3.5.2

$$\|f_j\|_2^2 \leq \|T^*(f_j)\|_1^2 + \|S(f_j)\|_3^2$$

haciendo tender $j \to \infty$ tenemos que

$$\|f\|_2^2 \leq \|T^*(f)\|_1^2 + \|S(f)\|_3^2.$$

□

Una consecuencia directa del Teorema 3.1.1 y el Teorema 3.5.3 es el siguiente teorema de existencia para el operador $\overline{\partial}$.

Teorema 3.5.4. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Sea $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ como en el Teorema 3.4.5, $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ como en el Lema 3.4.5, y $\varphi_1 = \varphi - 2\psi$, $\varphi_2 = \varphi - \psi$, $\varphi_3 = \varphi$. Supongamos que $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ satisface $\overline{\partial} f = 0$, entonces existe $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ tal que $\overline{\partial} u = f$.*

Teorema 3.5.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Supongamos que $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ satisface $\overline{\partial} f = 0$. Entonces existe $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$ tal que $\overline{\partial} u = f$.*

Demostración: Por el Lema 3.4.2 existe una función $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \lambda)$. Supongamos que φ satisface la condición del Teorema 3.4.5 para $\rho = \psi + \lambda$. Desde que

$$\int_\Omega |f|^2 e^{-\varphi_2} dV \leq \int_\Omega |f|^2 e^{-\lambda} dV < \infty$$

tenemos que $f \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$. Por el Teorema 3.5.4 existe $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ tal que $\overline{\partial} u = f$. Se sigue del Lema 3.4.1 que $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, loc)$. □

3.6. Regularización para el operador $\overline{\partial}$

Lema 3.6.1 (Solución canónica)**.** *Sean φ y ψ como en el Teorema 3.5.4. Sean*

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi \ \ , \ \ \varphi_2 = \varphi - \psi \ \ , \ \ \varphi_3 = \varphi$$

Si $f \in \mathcal{N}u(S)$, entonces existe una única solución $u \in \mathcal{N}u(T)^\perp$ de la ecuación $Tu = f$.

Demostración: Dado que T es un operador cerrado, entonces $\mathcal{N}u(T)$ es cerrado en H_1. Por lo tanto

$$H_1 = \mathcal{N}u(T) \oplus \mathcal{N}u(T)^{\perp}.$$

Por el Teorema 3.5.4 $\mathcal{R}an(T) = \mathcal{N}u(S)$, entonces existe $g \in \mathcal{D}om(T)$ tal que $Tg = f$. Definamos

$$u = g - \text{proyección}_{\mathcal{N}u(T)} g$$

entonces $u \in \mathcal{N}u(T)^{\perp}$ el cual es también una solución de $Tu = f$. Si $v \in \mathcal{N}u(T)^{\perp}$ es otra solución de $Tv = f$, entonces $u - v \in \mathcal{N}u(T)^{\perp}$ y $u - v \in \mathcal{N}u(T)$, se sigue que $u = v$. □

Definición 3.6.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Definamos los espacios de Sobolev de orden $k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$

$$\mathcal{W}^k(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} f \in L^2(\Omega), |\mu| \leq k \right\}$$

$$\mathcal{W}^k(\Omega, loc) = \left\{ f \in L^2(\Omega, loc) \,\middle|\, \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} f \in L^2(\Omega, loc), |\mu| \leq k \right\}$$

Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, obtenemos la siguiente notación compleja (identificando $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$)

$$\mathcal{W}^k(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) \,\middle|\, \partial^{\alpha,\beta} u = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{\beta} u \in L^2(\Omega), |\alpha| + |\beta| \leq k \right\}$$

$$\mathcal{W}^k(\Omega, loc) = \left\{ f \in L^2(\Omega, loc) \,\middle|\, \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\mu} \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^{\eta} f \in L^2(\Omega, loc), |\mu| + |\eta| \leq k \right\}$$

Denotemos como $\mathcal{W}^k_{(p,q)}(\Omega)$, $\mathcal{W}^k_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})$ los correspondientes espacios de formas (en su forma canónica).

Lema 3.6.2. *Si $\varphi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, entonces*

$$\sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \right| dV.$$

Demostración: Sea $a \in \mathbb{R}^n$. Por el Teorema Fundamental del Cálculo en una variable

$$\varphi(a) = \int_{-\infty}^{a_n} \cdots \int_{-\infty}^{a_2} \int_{-\infty}^{a_1} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

$$\varphi(a) = \int_{\prod_{j=1}^{n}(-\infty, a_j]} \frac{\partial^n \varphi}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} dV$$

□

Proposición 3.6.1. *Sea $n \geq 1$, entonces*

$$\mathcal{W}_c^n(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$$

esto es, si $f \in \mathcal{W}^n(\mathbb{R}^n)$ tiene soporte compacto, entonces después de una corrección en un conjunto de medida cero f es continua en $\mathbb{R}^n$.

Demostración: Escojamos una función $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi dV = 1, \;\; \mathrm{supp}(\Phi) = \overline{B(0,1)}.$$

Definamos para cada $\epsilon > 0$

$$\Phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right).$$

Sea $f \in \mathcal{W}^n(\mathbb{R}^n)$ un función con soporte compacto. Por el Lema 3.6.2

$$\begin{aligned}\sup_{\mathbb{R}^n} |f * \Phi_\epsilon - f * \Phi_\delta| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial^n (f * \Phi_\epsilon - f * \Phi_\delta)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \right| dV \\ &\leq M \left\| \frac{\partial^n (f * \Phi_\epsilon - f * \Phi_\delta)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \right\|_2 \text{(desigualdad de Schwarz)}\end{aligned}$$

donde $M = \sqrt{V\left[\mathrm{supp}\,(f) + \overline{B(0,1)}\right]}$. Como $f \in \mathcal{W}^n(\mathbb{R}^n)$ tenemos que

$$\left\| \frac{\partial^n (f * \Phi_\epsilon - f * \Phi_\delta)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} \right\|_2 = \left\| \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} * \Phi_\epsilon - \frac{\partial^n f}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n} * \Phi_\delta \right\|_2 \longrightarrow 0$$

cuando $\epsilon, \delta \to 0$, entonces la sucesión $(f * \Phi_\epsilon)_\epsilon$ converge uniformemente a una función $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ con soporte compacto, consecuentemente

$$\|f * \Phi_\epsilon - g\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

y por otro lado, por la Proposición 4.5.6

$$\|f * \Phi_\epsilon - f\|_2 \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

concluimos que $f(x) = g(x)$ para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. □

Lema 3.6.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces*

$$\mathcal{W}^n(\Omega, loc) \subset \mathcal{C}(\Omega)$$

Demostración: Sea $f \in \mathcal{W}^n(\Omega, loc)$. Sea $(\Omega_j)_{j\geq 1}$ una sucesión creciente de abiertos ($\Omega_j \subset\subset \Omega_{j+1} \subset\subset \Omega$). Por el Lema de Urysohn 4.5.8, para cada $j \geq 1$, sea $\eta_j \in \mathscr{D}(\Omega)$ con $\eta_j \equiv 1$ en $\overline{\Omega}_j$ y supp$\eta_j \subset \Omega_{j+1}$. Sea $\eta \in \mathscr{D}(U)$ entonces

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} \eta f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

para todo multi-indice $|\alpha| \leq n$. Por la Proposición 3.6.1 existe una función $a \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta f = a$ para casi todo punto. Luego para cada $j \geq 1$, existe $a_j \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta_j f = a_j$ para casi todo punto. Sea $a(x) = a_j(x)$ si $x \in \Omega_j$, entonces $a \in \mathcal{C}(\Omega)$. Por lo tanto $f(x) = a(x)$ para casi todo $x \in \Omega$. □

Teorema 3.6.1 (Teorema de incrustración de Sobolev)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, entonces*

$$\mathcal{W}^{n+k}(\Omega, loc) \subset \mathcal{C}^k(\Omega)$$

Demostración: Sea $k = 1$. Sea $f \in \mathcal{W}^{n+1}(\Omega, loc)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{W}^n(\Omega, loc).$$

Por el Lema 3.6.3

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}(\Omega)$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, se sigue del Lema de Bois-Raymond 3.3.2 que $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.
Sea $k = 2$. Sea $f \in \mathcal{W}^{n+2}(\Omega, loc)$, entonces

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{W}^{n+1}(\Omega, loc).$$

Por el caso $k = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$$

para $j = 1, 2, \ldots, n$, se sigue del Lema de Bois-Raymond 3.3.2 que $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.
Procediendo por inducción logramos que

$$\mathcal{W}^{n+k}(\Omega, loc) \subset \mathcal{C}^k(\Omega).$$

□

Observaciones:

1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ y $\varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$. Desde que φ tiene soporte compacto se sigue del Teorema de Fubini y de la fórmula de integración por partes que

$$\int_\Omega \varphi \frac{\partial f}{\partial x_j} dV = -\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} f dV$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Luego por inducción tenemos que

$$\int_\Omega \varphi \partial^\alpha f dV = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f \partial^\alpha \varphi dV$$

para todo multi-índice α.

Lema 3.6.4. *Para $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$, tenemos que*

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2}$$

para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

Demostración: Como $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ entonces por la observación anterior

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{C}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right|^2 dV = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial f}{\partial z_j} \frac{\partial \overline{f}}{\partial \bar{z}_j} dV = -\int_{\mathbb{C}^n} f \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} dV$$

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{C}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 dV = \int_{\mathbb{C}^n} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \overline{f}}{\partial z_j} dV = -\int_{\mathbb{C}^n} f \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial \bar{z}_j \partial z_j} dV$$

aplicando la identidad de Schwarz

$$-\int_{\mathbb{C}^n} f \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial z_j \partial \bar{z}_j} dV = -\int_{\mathbb{C}^n} f \frac{\partial^2 \overline{f}}{\partial \bar{z}_j \partial z_j} dV.$$

□

Lema 3.6.5. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Supongamos que $f \in L^2(\Omega)$ tiene soporte compacto y que*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \in L^2(\Omega) \ , \ \forall j = 1, 2, \dots, n$$

entonces

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} \in L^2(\Omega) \ , \ \forall j = 1, 2, \dots, n$$

esto es, $f \in \mathcal{W}^1(\Omega)$ con

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2} \ , \ \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\Omega = \mathbb{C}^n$ ($\mathrm{supp} f \subset\subset \Omega$). Sea $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Escojamos una función $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \Phi dV = 1, \;\; \mathrm{supp}(\Phi) = \overline{B(0,1)}.$$

Definamos para cada $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño)

$$\Phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^{2n}} \Phi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$$

entonces $f_\epsilon = f * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$. Por la Proposición 4.5.6

$$\left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} * \Phi_\epsilon - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

Por el Lema 3.6.4

$$\left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j} - \frac{\partial f_\delta}{\partial z_j} \right\|_{L^2} = \left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f_\delta}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon, \delta \to 0$$

entonces $\left(\dfrac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j}\right)_\epsilon$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(\mathbb{C}^n)$. Por completitud existe $g \in L^2(\mathbb{C}^n)$ tal que

$$\left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j} - g \right\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0.$$

Por la Proposición 4.5.6

$$\|f_\epsilon - f\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

en particular

$$f_\epsilon \longrightarrow f \text{ en } L^1(\Omega, \mathrm{loc}) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

Por la Proposición 3.3.8 y la Proposición 3.3.2

$$f_\epsilon \longrightarrow f \text{ en } \mathscr{D}'(\mathbb{C}^n) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial z_j} \text{ en } \mathscr{D}'(\mathbb{C}^n) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

por otro lado

$$\frac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j} \longrightarrow g \text{ en } \mathscr{D}'(\mathbb{C}^n) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

concluimos que

$$\frac{\partial f}{\partial z_j} = g \in L^2(\mathbb{C}^n).$$

Por el Lema 3.6.4

$$\left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial z_j} \right\|_2 = \left\| \frac{\partial f_\epsilon}{\partial \bar{z}_j} \right\|_2$$

tomando límite cuando $\epsilon \to 0$ (conjuntamente con la Proposición 4.5.6)

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial z_j} \right\|_2 = \left\| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j} \right\|_2$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n$. □

Definición 3.6.2. Sea

$$f = \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} f_{\alpha\beta}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega).$$

Definamos el operador diferencial ϑ con coeficientes constantes

$$\vartheta f = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_{\alpha,j\gamma}}{\partial z_j}\, dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\gamma$$

en el sentido de distribuciones.

Lema 3.6.6. *Sea $g \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega)$ con soporte compacto de modo que*

$$\overline{\partial} g \in L^2_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta g \in L^2_{(p,q)}(\Omega)$$

entonces $g \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega)$.

Demostración: Para $f \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$ hacemos $\psi = \varphi = 0$ en la prueba del Teorema 3.5.1

$$2\|T^* f\|_1^2 + \|Sf\|_3^2 \geq$$

$$\int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\gamma|=q}} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \bar{z}_j \partial z_k} f_{\alpha,j\gamma} \overline{f_{\alpha,k\gamma}} e^{-\varphi} dV + \int_\Omega \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \left| \overline{\partial} f_{\alpha\beta} \right|^2 e^{-\varphi} dV - 2(q+1) \int_\Omega |f|^2 \left| \overline{\partial} \psi \right|^2 e^{-\varphi} dV$$

entonces

$$2\|\vartheta f\|_{L^2}^2 + \|\overline{\partial} f\|_{L^2}^2 \geq \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial f_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} \right\|_{L^2}^2.$$

Luego escogemos una función $\Phi \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ tal que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \Phi dV = 1, \;\; \operatorname{supp}(\Phi) = \overline{B(0,1)}$$

Definamos para cada $\epsilon > 0$ (suficientemente pequeño)

$$\Phi_\epsilon(z) = \frac{1}{\epsilon^{2n}} \Phi\left(\frac{z}{\epsilon}\right).$$

Por las Proposiciones 4.5.8, 3.4.4, 4.5.6 tenemos que

$$g_\epsilon = g * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$\overline{\partial} g_\epsilon = \overline{\partial}(g * \Phi_\epsilon) = \left(\overline{\partial} g\right) * \Phi_\epsilon$$

$$\vartheta g_\epsilon = \vartheta(g * \Phi_\epsilon) = (\vartheta g) * \Phi_\epsilon$$

$$\|g_\epsilon - g\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\|\overline{\partial} g_\epsilon - \overline{\partial} g\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

$$\|\vartheta g_\epsilon - \vartheta g\|_{L^2} \longrightarrow 0 \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

de la desigualdad

$$2\|\vartheta g_\delta - \vartheta g_\epsilon\|_{L^2}^2 + \|\overline{\partial} g_\delta - \overline{\partial} g_\epsilon\|_{L^2}^2 \geq \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q+1}} \sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\delta)}{\partial \overline{z}_j} - \frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} \right\|_{L^2}^2$$

observamos que la sucesión

$$\left(\frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j}\right)_{\epsilon > 0}$$

es de Cauchy. Por completitud existe $h_{\alpha\beta}^j \in L^2(\Omega)$ tal que

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} \longrightarrow h_{\alpha\beta}^j \text{ en } L^2(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

en particular

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} \longrightarrow h_{\alpha\beta}^j \text{ en } L^1(\Omega, loc) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

por la Proposición 3.3.8

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} \longrightarrow h_{\alpha\beta}^j \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

por las Proposiciones 3.3.5, 3.3.7

$$\frac{\partial(g_{\alpha\beta} * \Phi_\epsilon)}{\partial \overline{z}_j} = \frac{\partial(g_{\alpha\beta})}{\partial \overline{z}_j} * \Phi_\epsilon \longrightarrow \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \overline{z}_j} \text{ en } \mathscr{D}'(\Omega) \text{ cuando } \epsilon \to 0$$

se sigue que

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \bar{z}_j} = h^j_{\alpha\beta} \in L^2(\Omega)$$

en el sentido de distribuciones. Aplicando el Lema 3.6.5

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial z_j} \in L^2(\Omega)$$

para cada $j = 1, \ldots, n$ y por lo tanto $g \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega)$. $\square$

Observaciones:

(a) $\mathcal{C}^k_{(p,q)}(\Omega) \subset \mathcal{W}^k_{(p,q)}(\Omega, loc)$, $k \geq 0$.

(b) $\overline{\partial}(\mathcal{W}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)) \subset \mathcal{W}^k_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$, $k \geq 0$.

(c) $\vartheta(\mathcal{W}^{k+1}_{(p,q+1)}(\Omega, loc)) \subset \mathcal{W}^k_{(p,q)}(\Omega, loc)$, $k \geq 0$.

En lo que sigue el siguiente lema será usado frecuentemente, la prueba es por inducción, dejamos la prueba al lector.

Lema 3.6.7 (lema técnico)**.** *Sea $u \in L^2(\Omega, loc)$ y $k \in \mathbb{Z}_+$. Entonces $u \in \mathcal{W}^k(\Omega, loc)$ si y solamente si $\eta u \in \mathcal{W}^k(\Omega)$ para todo $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$.*

Lema 3.6.8. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces*

$$\mathcal{W}^{k+1}_{(p,0)}(\Omega, \mathrm{loc}) = \left\{ u \in L^2_{(p,0)}(\Omega, \mathrm{loc}) : \overline{\partial} u \in \mathcal{W}^k_{(p,1)}(\Omega, \mathrm{loc}) \right\}$$

para todo $p, k \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración: Procederemos por inducción en la regularidad k. Para $k = 0$

$$f = \sum_{|\alpha|=p} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha j}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}_j \in W^0_{(p,1)}(\Omega, loc) = L^2_{(p,1)}(\Omega, loc)$$

$$u = \sum_{|\alpha|=p} u_\alpha\, dz^\alpha \in L^2_{(p,0)}(\Omega, loc)$$

de la ecuación $\overline{\partial} u = f$, se sigue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \bar{z}_j} \in L^2(\Omega, loc)$$

para todo multi-índice $|\alpha| = p$ y para todo $j = 1, \dots, n$. Para $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tenemos que

$$\frac{\partial(\eta u_\alpha)}{\partial \overline{z}_j} = \eta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} u_\alpha \in L^2(\Omega)$$

Por el Lema 3.6.5 $\eta u_\alpha \in W^1(\Omega)$, entonces $u_\alpha \in W^1(\Omega, loc)$ (Lema 3.6.7), esto es

$$u \in W^1_{(p,0)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 1$. De la ecuación $\overline{\partial} u = f$ se sigue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{z}_j} \in W^1(\Omega, loc)$$

para todo multi-índice $|\alpha| = p$ y para todo $j = 1, \dots, n$. Para $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tenemos que

$$\frac{\partial(\eta u_\alpha)}{\partial \overline{z}_j} = \eta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} u_\alpha \in W^1(\Omega)$$

Para $|a| + |b| \leq 1$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b (\eta u_\alpha) \right\} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} (\eta u_\alpha)\right) \in L^2(\Omega)$$

Por el Lema 3.6.5 $\eta u_\alpha \in W^2(\Omega)$, entonces $u_\alpha \in W^2(\Omega, loc)$ (Lema 3.6.7), esto es

$$u \in W^2_{(p,0)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 2$. De la ecuación $\overline{\partial} u = f$ se sigue que

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{z}_j} \in W^2(\Omega, loc)$$

para todo multi-índice $|\alpha| = p$ y para todo $j = 1, \dots, n$. Para $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$ tenemos que

$$\frac{\partial(\eta u_\alpha)}{\partial \overline{z}_j} = \eta \frac{\partial u_\alpha}{\partial \overline{z}_j} + \frac{\partial \eta}{\partial \overline{z}_j} u_\alpha \in W^2(\Omega)$$

Para $|a| + |b| \leq 2$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b (\eta u_\alpha) \right\} = \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}_j} (\eta u_\alpha)\right) \in L^2(\Omega)$$

Por el Teorema 3.6.5 $\eta u_\alpha \in W^3(\Omega)$, entonces $u_\alpha \in W^3(\Omega, loc)$ (Lema 3.6.7), esto es

$$u \in W^3_{(p,0)}(\Omega, loc)$$

Procediendo por inducción logramos que $u \in W^{k+1}_{(p,0)}(\Omega, loc)$. $\square$

Lema 3.6.9. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces*

$$\mathcal{W}^{k+1}_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc}) = \left\{ u \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \mathrm{loc}) : \overline{\partial} u \in \mathcal{W}^k_{(p,q+2)}(\Omega, \mathrm{loc}) \ , \ \vartheta u \in \mathcal{W}^k_{(p,q)}(\Omega, \mathrm{loc}) \right\}$$

para todo $p, q \geq 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Demostración: Procederemos por inducción en la regularidad k. Para $k = 0$. Sea $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$, entonces

$$\overline{\partial}(\eta u) = \overline{\partial}\eta \wedge u + \eta \overline{\partial} u \in \mathcal{W}^0_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta(\eta u) = \eta \vartheta(u) + \mathcal{A}_\eta(u) \in \mathcal{W}^0_{(p,q)}(\Omega)$$

esto es

$$\overline{\partial}\,(\eta u) \in L^2_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta\,(\eta u) \in L^2_{(p,q)}(\Omega)$$

Por el Lema 3.6.6

$$\eta u \in \mathcal{W}^1_{(p,q)}(\Omega)$$

entonces

$$u \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 1$. Sea $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$, entonces

$$\overline{\partial}(\eta u) = \overline{\partial}\eta \wedge u + \eta \overline{\partial} u \in \mathcal{W}^1_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta(\eta u) = \eta \vartheta(u) + \mathcal{A}_\eta(u) \in \mathcal{W}^1_{(p,q)}(\Omega)$$

Para $|a| + |b| \leq 1$

$$\overline{\partial} \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^b (\eta u) \right\} \in L^2_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^b (\eta u) \right\} \in L^2_{(p,q)}(\Omega)$$

Por el Lema 3.6.6

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}} \right)^b (\eta u) \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$\eta u \in \mathcal{W}^2_{(p,q+1)}(\Omega)$$

entonces

$$u \in \mathcal{W}^{1+1}_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 2$. Sea $\eta \in \mathscr{D}(\Omega)$, entonces

$$\overline{\partial}(\eta u) = \overline{\partial}\eta \wedge u + \eta\overline{\partial}u \in \mathcal{W}^2_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta(\eta u) = \eta\vartheta(u) + \mathcal{A}_\eta(u) \in \mathcal{W}^2_{(p,q)}(\Omega)$$

Para $|a| + |b| \leq 2$

$$\overline{\partial}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b (\eta u)\right\} \in L^2_{(p,q+2)}(\Omega)$$

$$\vartheta\left\{\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b (\eta u)\right\} \in L^2_{(p,q)}(\Omega)$$

Por el Lema 3.6.6

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^a \left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\right)^b (\eta u) \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega)$$

$$\eta u \in \mathcal{W}^3_{(p,q+1)}(\Omega)$$

entonces

$$u \in \mathcal{W}^{2+1}_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

Procediendo por inducción logramos que

$$u \in \mathcal{W}^{k+1}_{(p,q+1)}(\Omega, loc).$$

$\square$

Teorema 3.6.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un abierto pseudoconvexo. Entonces*

$$\overline{\partial}\left(\mathcal{W}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})\right) = \left\{v \in \mathcal{W}^k_{(p,q+1)}(\Omega, \text{loc}) : \overline{\partial}v = 0\right\}\ ,\ p, q \geq 0\ ,\ k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

Demostración: El caso $q = 0$.

$$\overline{\partial}\left(\mathcal{W}^{k+1}_{(p,0)}(\Omega, \text{loc})\right) = \left\{v \in \mathcal{W}^k_{(p,1)}(\Omega, \text{loc}) : \overline{\partial}v = 0\right\}\ ,\ p \geq 0\ ,\ k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

Sea $v \in \mathcal{W}^k_{(p,1)}(\Omega, \text{loc})$ tal que $\overline{\partial}v = 0$. Por el Teorema 3.5.5 existe $u \in L^2_{(p,0)}(\Omega, loc)$ tal que $\overline{\partial}u = v$. Por lo tanto, aplicando el Lema 3.6.9 $u \in \mathcal{W}^{k+1}_{(p,0)}(\Omega, \text{loc})$.
El caso $q \geq 1$.

$$\overline{\partial}\left(\mathcal{W}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega, \text{loc})\right) = \left\{v \in \mathcal{W}^k_{(p,q+1)}(\Omega, \text{loc}) : \overline{\partial}v = 0\right\}, p \geq 0,\ q \geq 1,\ k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

Desde que $v \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$, por el 3.4.2 existe $\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $v \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \lambda)$. Si φ satisface las propiedades del Teorema 3.4.5 para $\rho = \psi + \lambda$, entonces para

$$\varphi_1 = \varphi - 2\psi \ , \ \varphi_2 = \varphi - \psi \ , \ \varphi_3 = \varphi$$

$v \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$. Debido al Lema 3.6.1 existe $u \in L^2_{(p,q)}(\Omega, \varphi_1)$ tal que $\overline{\partial} u = v$ con $u \in \mathcal{N}u(T)^\perp$. Desde que $\mathcal{R}an(T) = \mathcal{N}u(S)$, $\mathcal{R}an(T)$ es cerrado. Por el Corolario 3.1.1 $\mathcal{R}an(T^*)$ es cerrado y por la Proposición 3.1.3

$$u \in \mathcal{N}u(T)^\perp = \overline{\mathcal{R}an(T^*)} = \mathcal{R}an(T^*)$$

entonces existe $v \in L^2_{(p,q+1)}(\Omega, \varphi_2)$ tal que $u = T^* v = e^{\varphi_1} \vartheta(e^{-\varphi_2} v)$ (Lema 3.4.7). Se sigue que $\vartheta(e^{-\varphi_1} u) = 0$ (Proposición 3.4.1)

$$\vartheta u = (-1)^{p-1} \sum_{\substack{|\alpha|=p \\ |\beta|=q-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_j} u_{\alpha, j\beta} \right) dz^\alpha \wedge d\overline{z}^\beta$$

Procederemos por inducción en la regularidad k. Para $k = 0$. Notamos que

$$\overline{\partial} u \in \mathcal{W}^0_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

$$\vartheta u \in \mathcal{W}^0_{(p,q-1)}(\Omega, loc)$$

entonces (Lema 3.6.9)

$$u \in \mathcal{W}^{0+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 1$. Notamos que

$$\overline{\partial} u \in \mathcal{W}^1_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

$$\vartheta u \in \mathcal{W}^1_{(p,q-1)}(\Omega, loc)$$

entonces (Lema 3.6.9)

$$u \in \mathcal{W}^{1+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$$

Para $k = 2$. Notamos que

$$\overline{\partial} u \in \mathcal{W}^2_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$$

$$\vartheta u \in \mathcal{W}^2_{(p,q-1)}(\Omega, loc)$$

entonces (Lema 3.6.9)

$$u \in \mathcal{W}^{2+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$$

Procediendo por inducción logramos que

$$u \in \mathcal{W}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega, loc).$$

$\square$

Corolario 3.6.1 (Teorema de Hörmander)**.** *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces*

$$\overline{\partial}\left(\mathcal{C}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega)\right) \supset \left\{v \in \mathcal{C}^{2n+k}_{(p,q+1)}(\Omega) : \overline{\partial}v = 0\right\}\ ,\ p, q \geq 0\ ,\ k \in \mathbb{Z}_+ \cup \{\infty\}$$

En particular, si $v \in \mathcal{C}^{\infty}_{(p,q+1)}(\Omega)$ satisface $\overline{\partial}v = 0$, entonces existe $u \in \mathcal{C}^{\infty}_{(p,q)}(\Omega)$ satisfaciendo $\overline{\partial}u = v$.

Demostración: Como $\mathcal{C}^{2n+k}_{(p,q+1)}(\Omega) \subset \mathcal{W}^{2n+k}_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$ entonces $v \in \mathcal{W}^{2n+k}_{(p,q+1)}(\Omega, loc)$. Entonces por el Teorema 3.6.2 existe $u \in \mathcal{W}^{2n+k+1}_{(p,q)}(\Omega, loc)$ satisfaciendo $\overline{\partial}u = v$. Por el Teorema de incrustración de Sobolev 3.6.1

$$\mathcal{W}^{2n+k+1}_{(p,q)}(\Omega, loc) \subset \mathcal{C}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega)$$

entonces después de una corrección en un conjunto de medida cero $u \in \mathcal{C}^{k+1}_{(p,q)}(\Omega)$. $\square$

Capítulo 4

El problema de Levi

Presentamos una versión débil del Teorema de Hörmander 3.6.1, recomendamos la referencia [3]. Es posible debilitar la solución del problema de E. Levi, de tal forma que solo necesitemos la versión débil del Teorema de Hörmander.

Teorema 4.0.3 (Teorema de Hörmander)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado y sea f una $(0,1)$-forma con coeficientes de clase $\mathcal{C}^\infty$ en una vecindad de la clausura de U, tal que $\overline{\partial} f = 0$ en U, entonces existe $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$ tal que $\overline{\partial} u = f$.*

4.1. El teorema de aproximación de Oka-Weil

El Teorema de Aproximación de Oka-Weil generaliza el Teorema de Runge [6] a varias variables complejas, herramienta fundamental para resolver el problema de E. Levi.

Definición 4.1.1. Sean $A \subset B \subset \mathbb{C}^n$ conjuntos tales que, para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(A)$, cualquier compacto $K \subset A$ y cualquier $\epsilon > 0$, existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(B)$ tal que $\|f - g\|_K < \epsilon$. Entonces diremos que A **es Runge en** B o (A, B) es un **par de Runge**. Si A es compacto, es suficiente con tomar $K = A$.

Recordemos que una función holomorfa en un conjunto arbitrario $X \subset \mathbb{C}^n$ (no necesariamente abierto), es una función holomorfa en una vecindad de X.

Proposición 4.1.1. *Sea $(K_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ una sucesión de conjuntos compactos tales que*

$$K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$$

$$K_j \textit{ es Runge en } K_{j+1}$$

para todo $j \geq 1$. *Entonces* K_1 *es Runge en* $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{K}_j$.

Demostración: Sean $f \in \mathcal{O}(K_1)$, $\epsilon > 0$ y denotemos $g_1 = f$. Desde que K_1 es Runge en K_2 existe $g_2 \in \mathcal{O}(K_2)$ tal que

$$\|g_2 - g_1\|_{K_1} < \frac{\epsilon}{2^1}.$$

Desde que K_2 es Runge en K_3 existe $g_3 \in \mathcal{O}(K_3)$ tal que

$$\|g_3 - g_2\|_{K_2} < \frac{\epsilon}{2^2}.$$

De este modo obtenemos una sucesión de funciones holomorfas $(g_j)_{j\geq 1}$ tal que

$$\|g_{j+1} - g_j\|_{K_j} < \frac{\epsilon}{2^j}$$

para todo $j \geq 1$. Analizemos la siguiente serie funciones

$$g = g_1 + (g_2 - g_1) + (g_3 - g_2) + (g_4 - g_3) + \cdots$$

aplicando el M-test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en K_1, entonces

$$\|f - g\|_{K_1} < \epsilon$$

$$g = g_2 + (g_3 - g_2) + (g_4 - g_3) + (g_5 - g_4) + \cdots$$

aplicando el M-test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en K_2. entonces

$$g = g_3 + (g_4 - g_3) + (g_5 - g_4) + (g_6 - g_5) + \cdots$$

aplicando el M-test de Weierstrass, la serie converge uniformemente en K_3. De este modo, observamos que la serie está bien definida en todo U, además la serie converge uniformemente en cada compacto de U. Por lo tanto $g \in \mathcal{O}(U)$ (Teorema de Convergencia de Weierstrass). $\square$

Lema 4.1.1. *Sea* $K \subset \mathbb{C}^n$ *un poliedro analítico compacto y* U *una vecindad de* $K \times \overline{\Delta}$. *Entonces existe un conjunto abierto* X *donde cada componente es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado tal que* $K \times \overline{\Delta} \subset X \subset\subset U$.

Demostración: Dilatando el compacto $K \times \overline{\Delta} \subset U$, sea W una vecindad de K y $r > 1$ tal que

$$K \times \overline{\Delta} \subset W \times \Delta(0,r) \subset U.$$

Por la Proposición 1.8.2 existe un dominio de holomorfía Z tal que $K \subset Z \subset W$ entonces

$$K \times \overline{\Delta} \subset Z \times \Delta(0,r) \subset U.$$

Por la Proposición 1.6.3 cada componente conexa Y_j de

$$Z \times \Delta(0,r) = \bigcup_{j=1}^{\infty} Y_j$$

es un dominio de holomorfía, y por lo tanto pseudoconvexo (Teorema 2.5.2). Como $K \times \overline{\Delta}$ no intersecta la frontera de $Z \times \Delta(0,r)$, entonces no intersecta la frontera de ningún Y_j, luego $\big(K \times \overline{\Delta}\big) \cap Y_j$ es compacto. Por el Teorema 2.12.2

$$Y_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_{jk} \ \ (j = 1, 2, \ldots)$$

donde cada X_{jk} es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado, entonces $\big(K \times \overline{\Delta}\big) \cap Y_j \subset X_{jk_j} \subset Y_j$ para algún k_j. Se sigue que

$$K \times \overline{\Delta} \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} X_{jk_j} \subset Z \times \Delta(0,r) \subset U.$$

Por lo tanto

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_{jk_j}$$

satisface las condiciones del teorema. □

Lema 4.1.2. *Sea $K \subset \mathbb{C}^n$ un compacto y $G \in \mathcal{O}(K \times \overline{\Delta})$. Entonces existe una vecindad $U \times \Delta(0,r)$ de $K \times \overline{\Delta}$ tal que*

$$G(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) w^j$$

para todo $(z,w) \in U \times \Delta(0,r)$, donde cada $a_j \in \mathcal{O}(K)$, además la serie converge uniformemente en $K \times \overline{\Delta}$.

Demostración: Sea $U \times \Delta(0,r)$ una vecindad de $K \times \overline{\Delta}$ tal que G es continua en $\overline{U \times \Delta(0,r)}$ y holomorfa en $U \times \Delta(0,r)$. Denotemos como (z,w) las coordenadas de $U \times \Delta(0,r)$. Definamos

$$a_j(z) = \frac{1}{j!}\frac{\partial^j G}{\partial w^j}\bigg|_{(z,0)} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

entonces cada $a_j \in \mathcal{O}(U)$. Para cada $z \in U$, la función

$$w \mapsto G(z,w)$$

es continua en $\overline{\Delta(0,r)}$ y holomorfa en $\Delta(0,r)$, entonces

$$G(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j G}{\partial w^j}\bigg|_{(z,0)} w^j = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) w^j$$

para todo $(z,w) \in U \times \Delta(0,r)$. Por las estimativas de Cauchy, para $z \in K$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^j G}{\partial w^j}\bigg|_{(z,0)} \right| &\leq \frac{j! \|G\|_{\{z\} \times \overline{\Delta(0,r)}}}{r^j} \\ &\leq \frac{j! \|G\|_{K \times \overline{\Delta(0,r)}}}{r^j} \end{aligned}$$

aplicando el M-test de Weierstrass la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z) w^j$$

converge uniformemente en $K \times \overline{\Delta}$. □

Lema 4.1.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, $K \subset U$ un poliedro analítico compacto, $f \in \mathcal{O}(U)$ y*

$$L = \{z \in K : |f(z)| \leq 1\}.$$

Entonces L es Runge en K.

Demostración: Sea $g \in \mathcal{O}(L)$ y $\epsilon > 0$. Sea $L_0 \subset U$ una vecindad de L tal que $g \in \mathcal{O}(L_0)$. Sea V un abierto tal que $L \subset V \subset\subset L_0$. Supongamos el caso $K - V = \varnothing$, entonces

$$L \subset K \subset V \subset L_0$$

Para el resto de la demostración supondremos $K - V \neq \varnothing$. Sea

$$\chi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$$

$$\text{supp}(\chi) \subset\subset L_0$$

$$\chi \equiv 1 \text{ en } V$$

Como el $\min\limits_{K-V}|f| > 1$, entonces existe una vecindad $W \subset U$ de $K - V$ tal que $|f| > r$ en W, donde $r > 1$. Entonces

$$\eta(z,w) = \begin{cases} \dfrac{g(z)}{f(z)-w}\overline{\partial}\chi(z) & ,(z,w) \in (L_0 \cap W) \times \Delta(0,r) \\ 0 & ,(z,w) \in V \times \Delta(0,r) \\ 0 & ,(z,w) \in (\text{supp}(\chi)^c \cap W) \times \Delta(0,r) \end{cases}$$

es una (0,1)-forma con coordenadas en $\mathcal{C}^\infty((V \cup W) \times \Delta(0,r))$ con

$$\overline{\partial}\eta(z,w) = \frac{g(z)\overline{\partial}^2\chi(z,w)}{f(z)-w} + \overline{\partial}\left(\frac{g(z)}{f(z)-w}\right) \wedge \overline{\partial}\chi(z,w)$$

como f y g son funciones holomorfas

$$\overline{\partial}\left(\frac{g(z)}{f(z)-w}\right) = 0$$

y como el operador $\overline{\partial}^2 = 0$ tenemos que $\overline{\partial}\eta = 0$. Desde que $(V \cup W) \times \Delta(0,r)$ es una vecindad de $K \times \overline{\Delta}$, entonces por el Lema 4.1.1 existe un abierto X tal que

$$K \times \overline{\Delta} \subset X \subset (V \cup W) \times \Delta(0,r)$$

donde cada componente conexa de X es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado. Por el Teorema de Hörmander 4.0.3 existe una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(X)$ tal que $\overline{\partial}\phi = \eta$. Extendamos el dominio del producto $g\chi$,

$$g(z)\chi(z) = \begin{cases} g(z)\chi(z) & ,z \in L_0 \\ 0 & ,z \in \text{supp}(\chi)^c \end{cases}.$$

Definamos

$$G(z,w) = g(z)\chi(z) - (f(z)-w)\phi(z,w)$$

entonces $G(z,w)$ es una función de clase $\mathcal{C}^\infty(X)$ con $\overline{\partial}G(z,w) = 0$

$$\overline{\partial}G(z,w) = g(z)\overline{\partial}\chi(z,w) - (f(z)-w)\eta(z,w) = 0$$

Por lo tanto $G \in \mathcal{O}(K \times \overline{\Delta})$. Por el Lema 4.1.2 existe $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{O}(K)$ tal que

$$G(z,w) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) w^j$$

en una vecindad de $K \times \overline{\Delta}$, y además la serie converge uniformemente en $K \times \overline{\Delta}$. Dado que

$$L = \{z \in K : |f(z)| \leq 1\}$$

la serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) f(z)^j$$

converge uniformemente en L, y por otro lado

$$g(z) = G(z, f(z)) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j(z) f(z)^j.$$

Por lo tanto para algún $m \geq 1$ suficientemente grande

$$\left\| g - \sum_{j=1}^{m} a_j f^j \right\|_L < \epsilon$$

esto es, L es Runge en K. $\square$

El Lema 4.1.3 admite la siguiente generalización.

Corolario 4.1.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, y sean $K \subset U$ y $L \subset K$ poliedros analíticos compactos tales que el marco de L está contenido en $\mathcal{O}(U)$. Entonces L es Runge en K.*

Demostración: Sean $f_1, \ldots, f_m \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$L = \{z \in U : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\} = \{z \in K : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\}.$$

Por el Lema 4.1.3

$$\{z \in K : |f_1(z)| \leq 1\} \text{ es Runge en } K$$

$$\{z \in \{z \in K : |f_1(z)| \leq 1\} : |f_2(z)| \leq 1\} \text{ es Runge en } \{z \in K : |f_1(z)| \leq 1\}$$

por transitividad, se sigue que

$$\{z \in K : |f_1(z)| \leq 1, |f_2(z)| \leq 1\} \text{ es Runge en } K$$

aplicando m veces el proceso anterior

$$\{z \in K : |f_j(z)| \leq 1, 1 \leq j \leq m\} \text{ es Runge en } K.$$

$\square$

Demostraremos el Teorema de aproximación de Oka-Weil, para una clase especial de compactos.

Proposición 4.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $K \subset U$ un poliedro analítico compacto con marco en $\mathcal{O}(U)$. Entonces K es Runge en U.*

Demostración: Sea $(K_j)_{j\geq 1}$ una sucesión de compactos tales que

$$K \subset \mathring{K}_j \subset K_j \subset \mathring{K}_{j+1} \ \ (j = 1, 2, \ldots)$$

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{K}_j$$

Por el Teorema 1.8.3 existe un poliedro analítico compacto L_j con marco en $\mathcal{O}(U)$ tal que

$$\left(\widehat{K_j}\right)_U \subset L_j \subset U \ \ (j = 1, 2, \ldots)$$

se sigue que

$$\mathring{K}_j \subset \mathring{L}_j \subset U \ \ (j = 1, 2, \ldots)$$

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{L}_j.$$

Pasando a una subsucesión si fuese necesario podemos asumir que $L_j \subset \mathring{L}_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Sea $L_0 = K$, y consideremos la sucesión $(L_j)_{j\geq 0}$. Por el Corolario 4.1.1 L_j es Runge en L_{j+1} para todo $j \geq 0$. Por la Proposición 4.1.1, se sigue que K es Runge en U. □

Teorema 4.1.1 (Teorema de aproximación de Oka-Weil)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $K \subset U$ un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo. Entonces K es Runge en U.*

Demostración: Sea $f \in \mathcal{O}(K)$ y $\epsilon > 0$. Desde que $f \in \mathcal{O}(K)$ existe una vecindad $K_0 \subset U$ de K tal que $f \in \mathcal{O}(K_0)$. Por la Proposición 1.8.3 existe un poliedro analítico compacto L con marco en $\mathcal{O}(U)$ tal que $K \subset L \subset K_0$. Por la Proposición 4.1.2 L es Runge en U. □

Lema 4.1.4 (Lema técnico)**.** *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía, $K \subset U$ un compacto y $V \subset U$ una vecindad de K tal que $\widehat{K}_U \cap \partial V = \varnothing$. Entonces $\widehat{K}_U \subset V$.*

Demostración: Denotemos $W = \operatorname{Ext}(V)$ el exterior de V. Entonces $\widehat{K}_U \subset V \cup W$. Sea $f \in \mathcal{O}(V \cup W)$ tal que

$$f \equiv 0 \text{ en } V$$

$$f \equiv 1 \text{ en } W$$

Por el Teorema de aproximación de Oka-Weil 4.1.1 $\widehat{K}_U$ es Runge en U. Luego existe $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\|f - g\|_{\widehat{K}_U} < \frac{1}{2}.$$

Afirmamos que $\widehat{K}_U \cap W = \varnothing$. En efecto, si $z \in \widehat{K}_U \cap W$ tenemos que

$$|g(z)| > \frac{1}{2} > \|g\|_K$$

lo cual es una contradicción, dado que $z \in \widehat{K}_U$. Por lo tanto $\widehat{K}_U \subset V$. □

Definición 4.1.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía. Se dice un subconjunto abierto $V \subset U$ es $\mathcal{O}(U)$**-convexo** si para todo compacto $K \subset V$ se cumple que $\widehat{K}_U^{hol} \subset V$. En particular V es un dominio de holomorfía.

Una consecuencia directa del Lema 1.4.2 y del Teorema de aproximación de Oka-Weil 4.1.1 es el siguiente corolario.

Corolario 4.1.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía, y sea $V \subset U$ un abierto $\mathcal{O}(U)$-convexo. Entonces $\mathcal{O}(U)$ es denso en $(\mathcal{O}(V), \tau_c)$, en la topología compacta-abierta.*

Corolario 4.1.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía, y sea $K \subset U$ un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo. Entonces para cada vecindad W de K, existe un abierto $\mathcal{O}(U)$-convexo V tal que $K \subset V \subset W$.*

Demostración: Por la Proposición 1.8.3 $K \subset V \subset W \subset U$ donde

$$V = \{z \in W : |f_j(z)| < 1 \ , \ 1 \leq j \leq m\}$$

aplicando el lema técnico 4.1.4, el abierto V es $\mathcal{O}(U)$-convexo. □

El siguiente corolario mejora el Teorema de aproximación de Oka-Weil, el cual es una consecuencia directa de los Corolarios 4.1.2, 4.1.3.

Corolario 4.1.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía. Sea $K \subset U$ un compacto $\mathcal{O}(U)$-convexo. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(K)$ existe una sucesión $(f_j)_{j \geq 1} \in \mathcal{O}(U)$ tal que $(f_j)_{j \geq 1}$ converge uniformemente hacia f en una vecindad de K.*

Observaciones:

1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $K \subset U$ un compacto. Entonces cada componente conexa de $\widehat{K}_U$ intersecta a K.

2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y $K \subset U$ un compacto conexo. Entonces $\widehat{K}_U$ es conexo.

4.2. El teorema de Behnke-Stein

Lema 4.2.1. *Sea $(K_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ una sucesión de compactos tales que*

$$K_j \subset K_{j+1}$$

$$K_j \text{ es Runge en } K_{j+1}$$

para todo $j \geq 1$. Sea $U = \bigcup_{j\geq 1} \mathring{K}_j$ y suponer que existe una sucesión $(U_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ de dominios de holomorfía tales que $K_j \subset U_j \subset U_{j+1} \subset U$ para cada $j \geq 1$. Entonces U es un dominio de holomorfía.

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $K_j \subset \mathring{K}_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Por la Proposición 4.1.1, K_j es Runge en U para todo $j \geq 1$. Sea $K \subset U$ compacto. Sea $a \in U$ tal que $d(K, \partial U) > d(a, \partial U)$. Notemos que

$$d(K, \partial U_j) > d(a, \partial U_j) \text{ para todo } j \text{ suficientemente grande}$$

$$\{a\} \cup K \subset K_j \text{ para todo } j \text{ suficientemente grande}$$

Fijemos un $j \geq 1$ tal que

$$d(K, \partial U_j) > d(a, \partial U_j) \text{ y } \{a\} \cup K \subset K_j.$$

Por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1 $a \notin \widehat{K}_{U_j}$. Luego existe una función $f \in \mathcal{O}(U_j)$ tal que $\epsilon = |f(a)| - \|f\|_K > 0$. Notemos que U es un dominio, desde que $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Dado que K_j es Runge en U, existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\|g - f\|_{K_j} < \epsilon/2$. Entonces

$$|g(a)| - \|g\|_K \geq (|f(a)| - \|g - f\|_{K_j}) - (\|g - f\|_{K_j} + \|f\|_K) > 0$$

se sigue que $a \notin \widehat{K}_{\mathcal{O}(U)}$. Por lo tanto

$$d(K, \partial U) \leq d(a, \partial U) \ , \ \forall a \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(U)}$$

Por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1 U es dominio de holomorfía.

□

Lema 4.2.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, sea $z_0 \in U$ y suponer que la componente conexa de $U \cap \Delta(z_0, r)$ que contiene a z_0, es un dominio de holomorfía, para todo $r > 0$. Entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Para cada $j \geq 1$ sea U_j la componente de $U \cap \Delta(z_0, j)$ que contiene a z_0. Entonces cada U_j es un dominio de holomorfía y $U_j \subset U_{j+1}$. Sea $K \subset U_j$ compacto. Entonces por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1

$$d\left(\widehat{K}_{\Delta(z_0,j+1)}, \partial\Delta(z_0, j+1)\right) = d(K, \partial\Delta(z_0, j+1)) > 1$$

se sigue que

$$\widehat{K}_{\Delta(z_0,j+1)} \subset \Delta(z_0, j)$$

$$\widehat{K}_{U_{j+1}} \subset U \cap \Delta(z_0, j).$$

Dado que $\widehat{K}_{U_{j+1}}$ es un compacto y U_j es una componente conexa de $U \cap \Delta(z_0, j)$,

$$\widehat{K}_{U_{j+1}} \cap \partial U_j = \varnothing.$$

Por el lema técnico 4.1.4

$$\widehat{K}_{U_{j+1}} \subset U_j.$$

Por lo tanto si $K \subset U_j$ es compacto entonces $\widehat{K}_{U_{j+1}} \subset U_j$. Sea $\epsilon = d(z_0, \partial U)/2$. Para cada $j \geq 1$ sea L_j la componente de

$$\{z \in U : d(z, \partial U) \geq \epsilon/j\} \cap \overline{\Delta^n(z_0, j-1)}$$

que contiene a z_0. Entonces para cada $j \geq 1$

$$L_j \text{ es compacto } , \ L_j \subset U_j \ , \ L_j \subset \mathring{L}_{j+1}$$

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{L}_j$$

Para cada $j \geq 1$, sea $K_j = \left(\widehat{L}_j\right)_{U_{j+1}} \subset U_j$. Notemos que para cada $j \geq 1$

$$K_j \subset K_{j+1} \ , \ L_j \subset K_j \subset U_j \subset U_{j+1} \subset U$$

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{K}_j.$$

Por el Teorema de aproximación de Oka-Weil 4.1.1 K_j es Runge en U_{j+1} (dado que K_j es $\mathcal{O}(U_{j+1})$-convexo), se sigue que K_j es Runge en K_{j+1} (dado que $K_j \subset K_{j+1} \subset U_{j+1}$). Por lo tanto U es un dominio de holomorfía (Lema 4.2.1). $\square$

Lema 4.2.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía y sea $z_0 \in U$. Entonces para cada $\epsilon > 0$ con $d(z_0, \partial U) > \epsilon$, la componente de*

$$\{z \in U : d(z, \partial U) > \epsilon\}$$

que contiene a z_0 es un dominio de holomorfía. En particular U admite una exhaustion

$$U_1 \subset\subset U_2 \subset\subset U_3 \subset\subset \cdots$$

formada por dominios de holomorfía.

Demostración: Sea W la componente de

$$\{z \in U : d(z, \partial U) > \epsilon\}$$

que contiene a z_0. Sea $K \subset W$ un compacto. Por el Teorema de Cartan-Thullen 1.5.1,

$$d\left(\widehat{K}_U, \partial U\right) = d(K, \partial U) > \epsilon.$$

Se sigue que

$$\widehat{K}_U \subset \{z \in U : d(z, \partial U) > \epsilon\}$$

$$\widehat{K}_U \cap \partial W = \varnothing.$$

Entonces por el lema técnico 4.1.4 $\widehat{K}_U \subset W$. Dado que $\widehat{K}_W \subset \widehat{K}_U \subset W$, $\widehat{K}_W$ es compacto. Por lo tanto W es holomórficamente convexo. $\square$

Teorema 4.2.1 (Teorema de Behnke-Stein)**.** *Sea $(U_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{C}^n$ una sucesión de dominios de holomorfía tales que*

$$U_j \subset U_{j+1} \text{ para todo } j \geq 1.$$

Entonces

$$U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$$

es un dominio de holomorfía.

Demostración: Sea $z_0 \in U_1$ y $\epsilon = d(z_0, \partial U_1)/2$. Para cada $j \geq 1$ sea V_j la componente de $\{z \in U_j : d(z, \partial U_j) > \epsilon/j\}$ que contiene a z_0. Por el Lema 4.2.3 cada V_j es un dominio de holomorfía. Notemos que

$$\overline{V}_j \subset V_{j+1}\,,\, U = \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j.$$

Por lo anterior podemos asumir en la hipótesis del Teorema sin pérdida de generalidad que $\overline{U}_j \subset U_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Como primer caso supongamos que U es acotado. Sea $V_1 = U_1$. Sea $j_2 > 1$ tal que el compacto $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_1, \partial U)\} \subset U_{j_2}$. Sea $V_2 = U_{j_2}$.

Observemos que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_2, \partial U)\} \subset U_j$ para todo j suficientemente grande, y $\sup_{z \in \partial V_2} d(z, \partial U_j) < d(V_1, \partial U_j)$ para todo j suficientemente grande. Sea $j_3 > j_2$ tal que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_2, \partial U)\} \subset U_{j_3}$ y $\sup_{z \in \partial V_2} d(z, \partial U_{j_3}) < d(V_1, \partial U_{j_3})$. Sea $V_3 = U_{j_3}$. Entonces

$$\sup_{z \in \partial V_2} d(z, \partial V_3) < d(V_1, \partial V_3)$$

Observemos que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_3, \partial U)\} \subset U_j$ para todo j suficientemente grande, y $\sup_{z \in \partial V_3} d(z, \partial U_j) < d(V_2, \partial U_j)$ para todo j suficientemente grande. Sea $j_4 > j_3$ tal que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_3, \partial U)\} \subset U_{j_4}$ y $\sup_{z \in \partial V_3} d(z, \partial U_{j_4}) < d(V_2, \partial U_{j_4})$. Sea $V_4 = U_{j_4}$. Entonces

$$\sup_{z \in \partial V_3} d(z, \partial V_4) < d(V_2, \partial V_4)$$

Observemos que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_4, \partial U)\} \subset U_j$ para todo j suficientemente grande, y $\sup_{z \in \partial V_4} d(z, \partial U_j) < d(V_3, \partial U_j)$ para todo j suficientemente grande. Sea $j_5 > j_4$ tal que $\{z \in U : d(z, \partial U) \geq d(V_4, \partial U)\} \subset U_{j_5}$ y $\sup_{z \in \partial V_4} d(z, \partial U_{j_5}) < d(V_3, \partial U_{j_5})$. Sea $V_5 = U_{j_5}$. Entonces

$$\sup_{z \in \partial V_4} d(z, \partial V_5) < d(V_3, \partial V_5)$$

Procediendo por inducción construimos una subsucesión $(V_k)_{k \geq 1}$ de $(U_j)_{j \geq 1}$ tal que para todo $k \geq 2$

$$\sup_{z \in \partial V_k} d(z, \partial V_{k+1}) < d(V_{k-1}, \partial V_{k+1})$$

Entonces $U = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$, V_k es un dominio de holomorfía y $\overline{V}_k \subset V_{k+1}$. Por lo anterior podemos asumir en la hipótesis del Teorema sin pérdida de generalidad que $\overline{U}_j \subset U_{j+1}$ para todo $j \geq 1$, y que para todo $j \geq 2$

$$\sup_{z \in \partial U_j} d(z, \partial U_{j+1}) < d(U_{j-1}, \partial U_{j+1})$$

Sean $L_j = \overline{U}_j$ para $j \geq 1$ y $K_j = \left(\widehat{L}_{j-1}\right)_{U_{j+1}}$ para $j \geq 2$. Dado que $L_{j-1} \subset U_j \subset U_{j+1}$, $d(U_{j-1}, \partial U_{j+1}) = d(L_{j-1}, \partial U_{j+1}) = d(K_j, \partial U_{j+1})$ lo cual implica que $K_j \cap \partial U_j = \varnothing$. Por el Lema técnico 4.1.4 tenemos que $K_j \subset U_j$ para todo $j \geq 1$. Notemos que $K_j \subset K_{j+1}$, $U_{j-1} \subset L_{j-1} \subset K_j \subset U_j \subset U_{j+1} \subset U$, y $U = \bigcup_{j=2}^{\infty} \mathring{K}_j$. Por el Teorema de aproximación de

Oka-Weil K_j es Runge en U_{j+1} (dado que K_j es $\mathcal{O}(U_{j+1})$-convexo), y como $K_j \subset K_{j+1} \subset U_{j+1}$, K_j es Runge en K_{j+1}. Por lo tanto $K_j \subset K_{j+1}$, K_j es Runge en K_{j+1}, $U = \bigcup_{j\geq 1} \mathring{K}_j$, y $K_j \subset U_j \subset U_{j+1} \subset U$ para todo $j \geq 1$. Por el Lema 4.2.1 U es un dominio de holomorfía. Como segundo caso supongamos ahora que U es no acotado. Sea $z_0 \in U_1$ y $r > 0$. Para cada $j \geq 1$ sea V_j la componente de $U_j \cap \Delta(z_0, r)$ que contiene a z_0. Por la Proposición 1.6.1 cada V_j es un dominio de holomorfía y $V_j \subset V_{j+1}$ para todo $j \geq 1$. Observamos que $\bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$ es la componente de $U \cap \Delta(z_0, r)$ que contiene a z_0. Entonces por el primer caso y por el Lema 4.2.2, U es un dominio de holomorfía. □

4.3. Construcción de funciones holomorfas no acotadas

Lema 4.3.1 (Fórmula de Taylor en su forma compleja). *Sea $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^2$ entonces para cada $a \in U$ y $h \in U_a = \{h \in \mathbb{C}^n : a + h \in U\}$:*

$$f(a+h) = f(a) + 2\Re \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) h_j + \Re \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k}(a) h_j h_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) h_j \overline{h}_k + o(\|h\|^2)$$

$$f(a+h) = f(a) + \Re(P(h)) + \Delta_h f(a) + o(\|h\|^2)$$

donde $P(z)$ es un polinomio holomorfo cuadrático.

Demostración: Identificando $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$ entonces

$$h = (h_1, \ldots, h_j, \ldots, h_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{2j-1}, x_{2j}, \ldots, x_{2n-1}, x_{2n})$$

donde $h_j = x_{2j-1} + i x_{2j}$. Por la fórmula de Taylor

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) x_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) x_j x_k + o(\|h\|^2)$$

$$\sum_{j=1}^{2n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) x_j = 2\Re \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial z_j}(a) h_j$$

$$\frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a) x_j x_k = \Re \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial z_k}(a) h_j h_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) h_j \overline{h}_k$$

□

Lema 4.3.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado y sea $a \in \partial U$. Entonces existe una función entera $g \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ y una bola abierta $B(a,r) \subset \mathbb{C}^n$ tal que $g(a) = 0$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in \big(\overline{U} \cap B(a,r)\big) \setminus \{a\}$.*

Demostración: Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $a = 0$ (el caso general se reduce a este caso mediante una traslación $z \mapsto z - a$). Sea $\varrho : W \to \mathbb{R}$ (donde W es una vecindad de $\overline{U}$) una función de definición global para U, estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$. Aplicando la fórmula de Taylor a la función ϱ en $a \in \partial U$ (en su forma compleja) tenemos que

$$\varrho(z) = 2\Re \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(a) z_j + \Re \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial z_k}(a) z_j z_k + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) z_j \overline{z}_k + o(\|z\|^2)$$

para todo $z \in W$. Sea

$$g(z) = 2 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varrho}{\partial z_j}(a) z_j + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial z_k}(a) z_j z_k$$

Observamos que g es un polinomio holomorfo cuadrático y por lo tanto una función entera con $g(a) = 0$. Desde que la aplicación

$$z \mapsto \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) z_j \overline{z}_k$$

es continua y la esfera $\{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| = 1\}$ compacta y dado que ϱ es estrictamente plurisubarmónica, entonces existe $M > 0$ tal que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) z_j \overline{z}_k \geq M$$

para todo $\|z\| = 1$. Sea $r > 0$ tal que $\left|\frac{o(\|z\|^2)}{\|z\|^2}\right| \leq \frac{M}{2}$ para todo $z \in B(a,r) - \{a\}$. Entonces para todo $z \in \big(\overline{U} \cap B(a,r)\big) \setminus \{a\}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\varrho(z) &\leq 0 \\
\varrho(z) &= \Re g(z) + \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \varrho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(a) z_j \overline{z}_k + o(\|z\|^2) \\
&\geq \Re g(z) + M\|z\|^2 - \frac{M}{2}\|z\|^2 \\
&= \Re g(z) + \frac{M}{2}\|z\|^2
\end{aligned}$$

de donde $\Re g(z) < 0$. $\square$

Proposición 4.3.1. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado y sea $a \in \partial U$. Entonces existe una función $f \in \mathcal{O}(U)$ tendiendo al ∞ en a.*

Demostración: Por el Lema 4.3.2 existe una función entera $g \in H(\mathbb{C}^n)$ y una bola $\overline{B(a,3r)} \subset \mathbb{C}^n$ tal que $g(a) = 0$ y $g(z) \neq 0$, para todo $z \in \overline{U} \cap \overline{B(a,3r)} - \{a\}$. Por la continuidad de g en $\partial U \cap \overline{B(a,3r)} - \{a\}$, existe una vecindad V de $\overline{U} - \{a\}$ tal que $g(z) \neq 0$ para todo $z \in V \cap B(a,3r)$. Por el Lema de Urysohn, existe una función $\chi \in \mathcal{C}^\infty$ tal que $\operatorname{supp}(\chi) = \overline{B(a,2r)}$ y $\chi \equiv 1$ en $\overline{B(a,r)}$. Sea $\Omega = V \cup B(a,r)$, el cual es una vecindad de $\overline{U}$. Entonces

$$w = \begin{cases} \dfrac{\overline{\partial}\chi}{g} & , V \cap B(a,3r) \\ 0 & , B(a,r) \cup \left(\overline{B(a,2r)}^c \cap V\right) \end{cases}$$

es una (0,1)-forma con coordenadas en $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ con

$$\overline{\partial} w = \frac{\overline{\partial}^2 \chi}{g} + \overline{\partial}(\frac{1}{g}) \wedge \overline{\partial}\chi$$

como g es holomorfa $\overline{\partial}(\frac{1}{g}) = 0$, y como el operador $\overline{\partial}^2 = 0$ tenemos que $\overline{\partial} w = 0$. Sea

$$\varrho : Z \to \mathbb{R}$$

una función de definición global para U, estrictamente plurisubarmónica de clase $\mathcal{C}^\infty$, no degenerado en ∂U (reduciendo Z, podemos asumir $Z \subset\subset \Omega$). Sea $\epsilon \in \varrho(Z) \cap (0,\infty)$ de modo que la componente de $\varrho^{-1}(-\infty,\epsilon)$ que contiene a $\overline{U}$ sea relativamente compacto en Z. Como $(0,\epsilon) \subset \varrho(Z)$, entonces por el Lema existe $c \in (0,\epsilon)$ tal que c es un valor regular de ϱ, y por el Lema la aplicación

$$z \mapsto \varrho(z) - c$$

es una función de definición global para la componente Y de $\varrho^{-1}(-\infty,c)$ que contiene a $\overline{U}$. Por lo tanto Y es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado. Notemos que $U \subset\subset Y \subset\subset Z \subset\subset \Omega$. Entonces por el teorema de Hörmander existe una función $\phi \in \mathcal{C}^\infty(Y)$ tal que $\overline{\partial}\phi = w$. Entonces

$$\psi = \begin{cases} \dfrac{\chi}{g} & , U \cap B(a,3r) \\ 0 & , \overline{B(a,2r)}^c \cap U \end{cases}$$

$$f = \psi - \phi$$

es una función de clase $\mathcal{C}^\infty(U)$ con $\overline{\partial} f = 0$

$$\overline{\partial} f = \frac{\overline{\partial}\chi}{g} + \chi\overline{\partial}(\frac{1}{g}) - \overline{\partial}\phi = w - \overline{\partial}\phi = 0$$

se sigue que $f \in \mathcal{O}(U)$. Cuando $z \to a$ (con $z \in U$) tenemos que

$$\chi(z) \to 1,\ g(z) \to 0 \text{ y } \phi(z) \to \phi(a)$$

entonces $f(z) \to \infty$. Por lo tanto f tiende al infinito en $a \in \partial U$. □

En conjunción con el Corolario 1.4.1 obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 4.3.1 (El problema de Levi para dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados)**.** *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio estrictamente pseudoconvexo suavemente acotado entonces U es un dominio de holomorfía.*

Teorema 4.3.1 (El problema de Levi)**.** *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo entonces U es un dominio de holomorfía.*

Demostración: Por el Teorema 2.12.2 existe una sucesión $(U_j)_{j\geq 1}$ de dominios estrictamente pseudoconvexos suavemente acotados tales que $U_j \subset U_{j+1}$ para todo $j \geq 1$ y $U = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$. Por el Corolario 4.3.1 cada U_j es un dominio de holomorfía, y por lo tanto aplicando el Teorema de Behnke-Stein, U es un dominio de holomorfía. □

4.4. Grupos de cohomología de Dolbeault

Definición 4.4.1. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Para cada (p,q) tal que $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$, definimos el grupo de cohomología de Dolbeault:

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(U) = \frac{\mathcal{Nu}\left\{\overline{\partial} : \Omega^{(p,q)}(U) \longrightarrow \Omega^{(p,q+1)}(U)\right\}}{\mathcal{Ran}\left\{\overline{\partial} : \Omega^{(p,q-1)}(U) \longrightarrow \Omega^{(p,q)}(U)\right\}}$$

Observaciones:

1. $H^{p,q}_{\overline{\partial}}(U) = \{0\}$ si y solamente si toda (p,q)-forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada en U, es $\overline{\partial}$-exacta.

Una consecuencia directa del problema de Levi 4.3.1, es el siguiente teorema.

Teorema 4.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces el grupo de cohomología de Dolbeault*

$$H^{p,q}_{\overline{\partial}}(\Omega) = \{0\}$$

para todo (p, q) tal que $0 \leq p \leq n$, $1 \leq q \leq n$.

Lema 4.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio, donde $n \geq 2$, tal que el grupo de cohomología de Dolbeault*

$$H^{0,1}_{\overline{\partial}}(\Omega) = \{0\}.$$

Sea $U = \Omega \cap \mathbb{C}^{n-1}$. Entonces toda función holomorfa en $U \subset \mathbb{C}^{n-1}$, se extiende holomórficamente hacia Ω.

Demostración: Sea $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la proyección canónica. Observamos que U es cerrado en Ω y abierto en $\mathbb{C}^{n-1}$. Por el Lema de Urysohn 4.5.8 existe una función $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ tal que

$$\chi \equiv 1 \text{ , en una vecindad de } U$$

$$\chi \equiv 0 \text{ , en una vecindad de } \Omega - \pi^{-1}(U)$$

Sea $f \in \mathcal{O}(U)$, definamos $g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ por

$$g = \chi(f \circ \pi) - z_n u$$

donde $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ se escogerá de tal modo que $\overline{\partial} g = 0$. La ecuación $\overline{\partial} g = 0$ es equivalente a la ecuación $\overline{\partial} u = v$, donde

$$v = \frac{f \circ \pi}{z_n} \overline{\partial} \chi$$

observamos que v es una $(0, 1)$-forma $\overline{\partial}$-cerrada en Ω (Proposición 3.2.3). Entonces existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que $\overline{\partial} u = v$. Por lo tanto $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ con la propiedad $f \equiv g$ en U.

□

Teorema 4.4.2. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio $(n \geq 2)$. Si el grupo de cohomología de Dolbeault*

$$H^{0,q}_{\overline{\partial}}(\Omega) = \{0\}$$

para todo $1 \leq q \leq n - 1$, entonces Ω es un dominio de holomorfía.

Demostración: Demostraremos el teorema por inducción en la dimensión compleja n. Asumamos que el teorema se cumple en dimensión $n-1$. Primero observemos que el conjunto

$$\Lambda = \{p \in \partial\Omega : p \in \partial B(a,r) \text{ para alguna bola } B(a,r) \subset \Omega\}$$

es denso en $\partial\Omega$. Sea $p \in \Lambda$ (cualesquiera, fijo). Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $p, a \in \mathbb{C}^{n-1}$, entonces $p \in \partial(\Omega \cap \mathbb{C}^{n-1})$. Afirmamos que

$$U = \Omega \cap \mathbb{C}^{n-1}$$

es u dominio de holomorfía (considerado como un abierto de $\mathbb{C}^{n-1}$). Sea $i : U \longrightarrow \Omega$ la inyección canónica. Sea $\pi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^{n-1}$ la proyección canónica. Fijemos $1 \leq q \leq n-2$. Sea v una $(0,q)$-forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada en U, entonces el pull-back π^*v es una $(0,q)$-forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada en $V = \pi^{-1}(U)$ (Teorema 3.2.3). Por el Lema de Urysohn 4.5.8 existe una función $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ tal que

$$\chi \equiv 1 \text{ , en una vecindad de } U$$

$$\chi \equiv 0 \text{ , en una vecindad de } \Omega - V$$

Definamos una $(0,q+1)$-forma diferencial en Ω

$$u = \begin{cases} \dfrac{\overline{\partial}\chi(z) \wedge (\pi^*v)(z)}{z_n} & , \ z \in V \\ 0 & , \ z \in \Omega - V \end{cases}$$

Por lo tanto u es una $(0,q+1)$-forma diferencial $\overline{\partial}$-cerrada en Ω (Teorema 3.2.3). Desde que $H^{0,q+1}(\Omega) = 0$, entonces existe una $(0,q)$-forma diferencial f en Ω tal que $\overline{\partial}f = u$. Entonces

$$\overline{\partial}(\chi\pi^*v - z_n f) = \overline{\partial}\chi \wedge \pi^*v - z_n\overline{\partial}f = z_n(u - \overline{\partial}f) = 0$$

en Ω. Desde que $H^{0,q}(\Omega) = 0$, entonces existe una $(0,q-1)$-forma diferencial g en Ω tal que

$$\overline{\partial}g = \chi\pi^*v - z_n f.$$

Consideremos el pull-back $h = i^*g$, entonces h es una $(0,q-1)$-forma diferencial en U tal que

$$\overline{\partial}h = i^*(\chi\pi^*v - z_n f) = v.$$

Por lo tanto

$$H^{(0,q)}(U) = 0 \text{ , } \forall\, 1 \leq q \leq n-2.$$

Se sigue que U es dominio de holomorfía. Entonces existe $f \in \mathcal{O}(U)$ tal que no se extiende holomórficamente hacia ningún punto de la frontera de U. Por el lema 4.4.1 f se extiende holomórficamente hacia Ω, llamemos $F \in \mathcal{O}(\Omega)$ tal extensión, en particular F no se extiende holomórficamente hacia $p \in \Lambda$. Dado que Λ es denso en $\partial\Omega$, Ω es un dominio de holomorfía.

□

Teorema 4.4.3. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) *Ω es un dominio de holomorfía.*

(b) *Ω es holomórficamente convexo.*

(c) *Ω es un dominio pseudoconvexo.*

(d) *$H^{0,q}(\Omega) = 0$ para todo $1 \leq q \leq n-1$.*

Definición 4.4.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Diremos que Ω es **localmente un dominio de holomorfía** si cada punto $a \in \partial\Omega$ admite una vecindad U tal que $U \cap \Omega$ es un dominio de holomorfía.

Corolario 4.4.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un dominio. Entonces Ω es un dominio de holomorfía si y solamente si Ω es localmente un dominio de holomorfía.*

Definición 4.4.3. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y V un subconjunto abierto de U. Diremos que V es **Runge** en U, si $\mathcal{O}(U)$ es denso en $(\mathcal{O}(V), \tau_c)$. Si V es Runge en $\mathbb{C}^n$ simplemente diremos que V es Runge (equivalentemente V es Runge en $\mathbb{C}^n$, si $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ es denso en $(\mathcal{O}(V), \tau_c)$).

Definición 4.4.4. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Un subconjunto abierto V de U se dice U-**pseudoconvexo**, si $\widehat{K}_U^{psh} \subset V$ para todo compacto $K \subset V$.

Observaciones: Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo, entonces

(a) Cada dominio convexo $V \subset U$ es U-pseudoconvexo.

(b) Para cada $f \in \mathrm{PSH}(U)$, el abierto $V = \{z \in U : f(z) < 0\}$ es U-pseudoconvexo.

(c) Si V es U-pseudoconvexo, entonces V es pseudoconvexo.

Teorema 4.4.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo, y $K \subset U$ un compacto plurisubarmónicamente convexo. Entonces para cada vecindad V de K en U, existe un abierto U-pseudoconvexo W tal que $K \subset W \subset V$.*

Demostración: Sea $\Delta \subset \mathbb{C}^n$ un polidisco tal que $K \subset \Delta$. Si $\Delta \subset V$ entonces es suficiente tomar $W = \Delta$. Si $\Delta \not\subset V$ entonces para cada $a \in \overline{\Delta} - V$ existe $u \in \mathrm{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ tal que $\sup\limits_K u < 0 < u(a)$. Desde que $\overline{\Delta} - V$ es compacto, existen $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ tales que $\sup\limits_K u_j < 0$ para cada $j = 1, \ldots, m$ y

$$\overline{\Delta} - V \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{z \in U : u_j(z) > 0\}.$$

Por lo tanto es suficiente tomar $W = \{z \in \Delta : u_j(z) < 0 \ , \ 1 \leq j \leq m\}$ □

Lema 4.4.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Sea $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(U)$ estrictamente plurisubarmónica tal que el conjunto*

$$K_c = \{z \in U : \Phi(z) \leq c\}$$

es compacto para cada $c \in \mathbb{R}$. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(K_0)$ existe una sucesión $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\int_{K_0} |f_j - f|^2 dV \longrightarrow 0.$$

Demostración: Debemos demostrar que $\mathcal{O}(K_0) \subset \overline{\mathcal{O}(U)}$ en el espacio de Hilbert $L^2(K_0)$. Por lo cual es suficiente demostrar que, $\mathcal{O}(U)^\perp \subset \mathcal{O}(K_0)^\perp$ en $L^2(K_0)$. Sea $f_0 \in L^2(K_0)$ tal que

$$\int_{K_0} f_0 \overline{f} dV = 0 \ , \ \forall f \in \mathcal{O}(U).$$

Por demostrar que

$$\int_{K_0} f_0 \overline{f} dV = 0 \ , \ \forall f \in \mathcal{O}(K_0).$$

Definamos $f_0 = 0$ en $U - K_0$, de modo que $f_0 \in L^2(U)$. Consideremos $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ funciones de peso, y el complejo

$$L^2(U, \varphi_1) \xrightarrow{\overline{\partial}=T} L^2_{(0,1)}(U, \varphi_2) \xrightarrow{\overline{\partial}=S} L^2_{(0,2)}(U, \varphi_3)$$

Por el lema de Weyl 4.5.16 tenemos que $\mathcal{N}u(T) \subset \mathcal{O}(U)$, se sigue que $f_0 e^{\varphi_1} \perp \mathcal{N}u(T)$. Supongamos por un momento que

$$\|g\|^2_{\varphi_2} \leq \|T^* g\|^2_{\varphi_1} + \|Sg\|^2_{\varphi_3} \ , \ \forall g \in \mathcal{D}om(T^*) \cap \mathcal{D}om(S) \qquad (\alpha)$$

entonces por el Teorema 3.1.1 existe $g \in \mathcal{Dom}(T^*)$ tal que

$$T^* g = f_0 e^{\varphi_1}$$

$$\|g\|_{\varphi_2} \leq \|T^* g\|_{\varphi_1}$$

Si $g = \sum_{j=1}^{n} g_j d\overline{z}_j$ entonces por el Lema 3.4.7

$$f_0 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big(g_j e^{-\varphi_2}\Big).$$

Denotemos $h = g e^{-\varphi_2}$, luego

$$h \in L^2_{(0,1)}(U, -\varphi_2)$$

$$f_0 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j}{\partial z_j}$$

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 e^{\varphi_2} dV \leq \int_U |f_0|^2 e^{\varphi_1} dV.$$

Sea $(\theta_p)_{p\geq 1} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ una sucesión creciente de funciones convexas crecientes, tal que $\theta_p(t) = 0$ para todo $t \leq 0$ y $\lim_{p\to\infty} \theta_p(t) = +\infty$ para todo $t > 0$, por ejemplo

$$\theta_p(t) = \int_{-\infty}^{t} \lambda_p(t) dt$$

$$\lambda_p(t) = \begin{cases} pe^{-1/t^2} & , \ t > 0 \\ 0 & , \ t \leq 0 \end{cases}$$

Sea χ la función en el Teorema 3.4.5. Definamos $\chi_p = \chi + \theta_p$ para todo $p \geq 1$. Entonces $(\chi_p)_{p\geq 1} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ es una sucesión creciente de funciones convexas crecientes, tal que $\chi_p(t) = \chi(t)$ para todo $t \leq 0$ y $\lim_{p\to\infty} \chi_p(t) = +\infty$ para todo $t > 0$. Se sigue del teorema 3.4.5 que

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2(\chi_p \circ \Phi)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} b_j \overline{b}_k \geq 2\left(\left|\overline{\partial}\psi\right|^2 + e^{\psi}\right) \sum_{j=1}^{n} |b_j|^2 \quad (b \in \mathbb{C}^n)$$

Definamos para cada $p \geq 1$, $\varphi^p = \chi_p \circ \Phi$

$$\varphi_1^p = \varphi^p - 2\psi \ , \ \varphi_2^p = \varphi^p - \psi \ , \ \varphi_3^p = \varphi^p$$

Por lo tanto el Teorema 3.5.2 garantiza la validez de la desigualdad (α) para las funciones de peso φ_1^p, φ_2^p, $\varphi_3^p \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$. Entonces por el argumento precedente, existe una sucesión de formas diferenciales $(h^p)_{p\geq 1}$ tales que

$$h^p = \sum_{j=1}^{n} h_j^p d\overline{z}_j \in L^2_{(0,1)}(U, -\varphi_2^p)$$

$$f_0 = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j^p}{\partial z_j}$$

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} |h_j^p|^2 e^{\chi_p \circ \Phi - \psi} dV \leq \int_U |f_0|^2 e^{\chi_p \circ \Phi - 2\psi} dV$$

Desde que $f_0 = 0$ en $U - K_0$, y $\chi_p(t) = \chi(t)$ para todo $t \leq 0$, se sigue que

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} |h_j^p|^2 e^{\chi_p \circ \Phi - \psi} dV \leq \int_{K_0} |f_0|^2 e^{\chi \circ \Phi - 2\psi} dV$$

Sea $c = \displaystyle\int_{K_0} |f_0|^2 e^{\chi \circ \Phi - 2\psi} dV$. Desde que la sucesión (χ_p) es creciente, concluimos que para cada $q \geq 1$

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} |h_j^p|^2 e^{\chi_q \circ \Phi - \psi} dV \leq c \ , \ \forall p \geq q$$

Entonces para cada $q \geq 1$, la sucesión $(h^p)_{p=q}^{\infty}$ es acotada en $L^2_{(0,1)}(U, \psi - \chi_q \circ \Phi)$. Desde que toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert admite una subsucesión w-convergente (Teorema 4.5.17), un argumento inductivo muestra la existencia de una forma diferencial

$$h = \sum_{j=1}^{n} h_j d\overline{z}_j \in \bigcap_{q=1}^{\infty} L^2_{(0,1)}(U, \psi - \chi_q \circ \Phi)$$

tal que para cada $q \geq 1$, h es un punto w-límite de $(h^p)_{p=q}^{\infty}$ en $L^2_{(0,1)}(U, \psi - \chi_q \circ \Phi)$. Entonces por el Teorema 4.5.18

$$\int_U \sum_{j=1}^{n} |h_j|^2 e^{\chi_q \circ \Phi - \psi} dV \leq c \ , \ \forall q \geq 1$$

Desde que $\lim_{p \to \infty} \chi_p(t) = +\infty$ para todo $t > 0$, una aplicación del teorema de la convergencia monótona muestra que $h = 0$ casi en todo punto en $U - K_0$. Por otro lado

$$\int_U f_0 \overline{f} dV = -\int_U \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h_j^p}{\partial z_j} \overline{f} dV = \int_U \sum_{j=1}^{n} h_j^p \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}} dV$$

para toda función $f \in \mathscr{D}(U)$ y $p \geq 1$, de donde se sigue que

$$\int_U f_0 \overline{f} dV = \int_U \sum_{j=1}^{n} h_j \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}} dV$$

para toda función $f \in \mathscr{D}(U)$ (Teorema 4.5.19). Desde que $K_0 \subset U$ es compacto y $f_0 = h = 0$ en $U - K_0$, tenemos que

$$\int_{K_0} f_0 \overline{f} dV = \int_{K_0} \sum_{j=1}^{n} h_j \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}} dV$$

para toda función $f \in \mathcal{C}^\infty(K_0)$. En particular para todo $f \in \mathcal{O}(K_0)$

$$\int_{K_0} f_0 \overline{f} dV = \int_{K_0} \sum_{j=1}^{n} h_j \overline{\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}} dV = 0.$$

□

Lema 4.4.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces para cada compacto K y cada abierto V con $K \subset V \subset U$, existe una constante $c > 0$ tal que*

$$\sup_K |f| \leq c \int_V |f| dV$$

para toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(U)$.

Demostración: (a) Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto y sean Δ_1 y Δ_2 dos discos abiertos tales que

$$\Delta_1 \subset\subset \Delta_2 \subset\subset U.$$

Afirmamos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\sup_{\Delta_1} |f| \leq c \int_{\Delta_2} |f| dV \ , \ \forall f \in \mathcal{O}(U).$$

En efecto, sea $\varphi \in \mathscr{D}(\Delta_2)$ tal que $\varphi \equiv 1$ en una vecindad de $\overline{\Delta}_1$. Entonces por la fórmula integral de Cauchy generalizada 4.5.15 aplicada al producto φf obtenemos que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta_2} \frac{f(z)}{z-a} \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} dz \wedge d\overline{z}$$

para todo $f \in \mathcal{O}(U)$, para todo $a \in \Delta_1$. Desde que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \equiv 0$ en una vecindad de $\overline{\Delta}_1$ existe $\delta > 0$ tal que $|z - a| \geq \delta$ para todo $a \in \Delta_1$, para todo $z \in \operatorname{supp} \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}}$. Si denotamos $c = \dfrac{1}{2\pi\delta} \sup_{\Delta_2} \left| \dfrac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}} \right|$ entonces

$$|f(a)| \leq c \int_{\Delta_2} |f| dV$$

para todo $f \in H(U)$, para todo $a \in \Delta_1$, como se afirma.

(b) Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto, y sean Δ_1 y Δ_2 dos polidiscos tales que

$$\Delta_1 \subset\subset \Delta_2 \subset\subset U.$$

Luego por aplicaciones repetidas de (a) podemos encontrar un constante $c > 0$ tal que

$$\sup_{\Delta_1} |f| \leq c \int_{\Delta_2} |f| dV \ , \ \forall f \in \mathcal{O}(U).$$

(c) Desde que, cada compacto en $\mathbb{C}^n$ puede ser cubierto por un número finito de polidiscos, el caso general se sigue de (b).

$\square$

Teorema 4.4.5. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Sea $K \subset U$ un compacto tal que*

$$\widehat{K}_U^{psh} = K.$$

Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(K)$ existe un un abierto V con $K \subset V \subset U$, y una sucesión $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{O}(U)$, tal que $f \in \mathcal{O}(V)$ y $(f_j)_{j\geq 1}$ converge uniformemente a f en V.

Demostración: Sea V un abierto tal que $K \subset V \subset U$ y $f \in \mathcal{O}(V)$. Por el Lema existe una función $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$ estrictamente plurisubarmónica tal que:

(a) El conjunto $K_c = \{z \in U : u(z) \leq c\}$ es compacto para cada $c \in \mathbb{R}$.

(b) $u(z) < 0$ para todo $z \in K$.

(c) $u(z) > 0$ para todo $z \in U - V$.

Desde que $u(z) < 0$ para todo $z \in K$, existe una constante $c < 0$ tal que $u(z) < c$ para todo $z \in K$. Entonces $K \subset \mathring{K}_c \subset K_c \subset \mathring{K}_0 \subset K_0 \subset V$. Por el lema 4.4.2 existe una sucesión $(f_j)_{j\geq 1} \subset \mathcal{O}(U)$ tal que

$$\int_{K_0} |f_j - f|^2 dV \longrightarrow 0$$

Por el lema 4.4.3 se sigue que

$$\sup_{K_c} |f_j - f|^2 \longrightarrow 0.$$

$\square$

Corolario 4.4.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo y sea $V \subset U$ un abierto U-pseudoconvexo. Entonces V es Runge en U.*

Demostración: Dado que V es U-pseudoconvexo, V admite una exhaustion normal $(K_j)_{j\geq 1}$, formado por compactos PSH(U)-convexos. Sea $f \in \mathcal{O}(V)$. Por el Teorema de aproximación de Oka-Weil para cada $j \geq 1$, existe $f_j \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\|f_j - f\|_{K_j} < \dfrac{1}{j}$. Por lo tanto para cada compacto $K \subset V$, $\|f_j - f\|_K \to 0$ cuando $j \to \infty$. $\square$

Definición 4.4.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía. Se dice un subconjunto abierto $V \subset U$ es $\mathcal{O}(U)$**-convexo** si para todo compacto $K \subset V$ se cumple que $\widehat{K}_U^{hol} \subset V$. En particular V es un dominio de holomorfía.

Teorema 4.4.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio de holomorfía. Entonces para cada abierto $V \subset U$ las siguientes condiciones son equivalentes:*

(*a*) *$\widehat{K}_U^{hol} \cap V$ es compacto, para todo compacto $K \subset V$.*

(*b*) *V es un abierto $\mathcal{O}(U)$-convexo.*

(*c*) *V es dominio de holomorfía y V es Runge en U.*

(*d*) *V es dominio de holomorfía y $\widehat{K}_V^{hol} = \widehat{K}_U^{hol} \cap V$ para todo compacto $K \subset V$.*

Demostración: $(a) \Rightarrow (b)$ Sea $K \subset V$ un compacto. Supongamos por contradicción que $\widehat{K}_U^{hol} \not\subset V$, entonces podemos escribir

$$\widehat{K}_U^{hol} = A \cup B$$

donde $A = \widehat{K}_U^{hol} \cap V$ y $B = \widehat{K}_U^{hol} - V$. Entonces A y B son compactos disjuntos. Si definimos $f \equiv 0$ en una vecindad de A, y $f \equiv 1$ en una vecindad de B, entonces $f \in \mathcal{O}(\widehat{K}_U^{hol})$. Por el Teorema de aproximación de Oka-Weil, existe una función holomorfa $g \in \mathcal{O}(U)$ tal que $\|f - g\|_{\widehat{K}_U^{hol}} < \frac{1}{2}$, lo cual es una contradicción, desde que $B \subset \widehat{K}_U^{hol}$.
$(b) \Rightarrow (c)$ Como V es un abierto $\mathcal{O}(U)$-convexo, entonces V admite una exhaustividad normal $(K_j)_{j\geq 1}$ formada por compactos $\mathcal{O}(U)$-convexos. Por lo tanto V es Runge en U (Teorema de aproximación de Oka-Weil).
$(c) \Rightarrow (d)$ Desde que $\mathcal{O}(U)$ es denso en $(\mathcal{O}(V), \tau_c)$ tenemos que $\widehat{K}_V^{hol} = \widehat{K}_U^{hol} \cap V$. □

El siguiente corolario contiene el problema de Levi.

Corolario 4.4.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un dominio pseudoconvexo. Entonces*

$$\boxed{\widehat{K}_U^{psh} = \widehat{K}_U^{hol}}$$

para todo compacto $K \subset U$.

Demostración: Sea V una vecindad de $\widehat{K}_U^{psh}$ en U. Por el Lema 2.5.2 existe una función $u \in \mathrm{PSH}(U) \cap \mathcal{C}(U)$ tal que

(a) $u < 0$ en K.

(b) $u > 0$ en $U - V$.

Sea

$$W = \{z \in U : u(z) < 0\}$$

entonces W es pseudoconvexo por la Proposición 2.5.3. Observemos que $K \subset W \subset V$ y $\widehat{L}_U^{psh} \subset W$ para todo compacto $L \subset W$, es decir, W es U-pseudoconvexo. Por lo tanto W es Runge en U por el Corolario 4.4.2. Desde que U y W son ambos pseudoconvexos, se sigue del Problema de Levi que U y W son ambos dominios de holomorfía. Entonces una aplicación del Teorema 4.4.6 muestra que $\widehat{L}_U^{hol} \subset W$ para todo compacto $L \subset W$. Desde que V es una vecindad cualesquiera de $\widehat{K}_U^{psh}$ en U, concluimos que $\widehat{K}_U^{hol} \subset \widehat{K}_U^{psh}$. □

4.5. Dominios polinomialmente convexos

En esta sección estudiaremos una clase especial de dominios en $\mathbb{C}^n$, el cual nos permitirá extender el Teorema de Runge.

Teorema 4.5.1 (Teorema de Runge I[6]). *Sea $K \subset \mathbb{C}$ un compacto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) *K es Runge.*

(2) *$\mathbb{C} - K$ es conexo.*

Teorema 4.5.2 (Teorema de Runge II[6]). *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes*

(1) *U es Runge.*

(2) *$U \subset \mathbb{C}$ es un abierto simplemente conexo.*

Definición 4.5.1. La **envolvente convexa polinomialmente** de un compacto $K \subset \mathbb{C}^n$ se define como

$$\widehat{K}_{\mathbb{C}^n}^{pol} = \bigcap_{p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)} \{z \in \mathbb{C}^n : |p(z)| \leq \|p\|_K\}$$

donde $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n) = \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$ es el espacio vectorial de los polinomios holomorfos. Un compacto $K \subset \mathbb{C}^n$ se dice **polinomialmente convexo** si

$$\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} = K.$$

Ejemplos:

(a) Todo compacto convexo de $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo.

(b) Todo polidisco compacto es polinomialmente convexo. Más generalmente, todo poliedro polinomial compacto

$$\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : |p_j(z)| \leq 1\ ,\ 1 \leq j \leq m\}$$

es polinomialmente convexo, donde $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{C}[z_1, \ldots, z_n]$.

Lema 4.5.1. *Sea $K \subset \mathbb{C}^n$ un compacto polinomialmente convexo, y sea U una vecindad de K. Entonces existe un poliedro polinomial compacto L tal que $K \subset L \subset U$.*

Demostración: Sea D un polidisco compacto conteniendo K. Si $D \subset U$ entonces es suficiente tomar $L = D$. Si $D \not\subset U$ entonces para cada $a \in D - U$ existe un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\|p\|_K < 1 < |p(a)|$. Desde que $D - U$ es compacto, existen polinomios $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\|p_j\|_K < 1$ para todo $j = 1, \ldots, m$ y

$$D - U \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{z \in \mathbb{C}^n : |p_j(z)| > 1\}.$$

Por lo tanto es suficiente tomar

$$L = \{z \in D : |p_j(z)| \leq 1\ ,\ 1 \leq j \leq m\}.$$

□

Definición 4.5.2. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Diremos que U es **polinomialmente convexo** si

$$\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} \cap U = \widehat{K}^{pol}_{U} = \bigcap_{p \in H(\mathbb{C}^n)} \{z \in U : |p(z)| \leq \|p\|_K\}$$

es compacto, para todo compacto $K \subset U$, y que U es **fuertemente polinomialmente convexo** si

$$\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} \subset U$$

para todo compacto $K \subset U$.

Ejemplos:

(1) Todo dominio convexo en $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo.

(2) Todo poliedro polinomial $\Pi = \{z \in \mathbb{C}^n : |p_j(z)| < 1 \ , \ 1 \leq j \leq m\}$ es polinomialmente convexo.

Observaciones:

(a) Si $K \subset \mathbb{C}^n$ es un compacto, entonces $\widehat{K}^{hol}_{\mathbb{C}^n} = \widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n}$.

(b) Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un abierto y $K \subset U$ un compacto, entonces $\widehat{K}^{hol}_{U} \subset \widehat{K}^{pol}_{U}$.

Teorema 4.5.3. *Un abierto U de $\mathbb{C}^n$ es polinomialmente convexo si y solamente si U es fuertemente polinomialmente convexo.*

Demostración: Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto polinomialmente convexo, y sea $K \subset U$ un compacto. Supongamos por contradicción que $\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} \not\subset U$, entonces podemos escribir

$$\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} = A \cup B$$

donde $A = \widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} \cap U$ y $B = \widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n} - U$. Entonces A y B son dos compactos disjuntos. Si definimos $f = 0$ en una vecindad de A, y $f = 1$ en una vecindad de B, entonces $f \in \mathcal{O}(\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n})$. Por el Teorema de aproximación de Oka-Weil existe un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tal que $|f - p| < \frac{1}{2}$ en $\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n}$, lo cual es una contradicción, desde que $B \subset \widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n}$. $\square$

Teorema 4.5.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto polinomialmente convexo. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(U)$ existe una sucesión de polinomios $(p_j)_{j \geq 1} \subset \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$, el cual converge a f uniformemente en cada compacto de U.*

Demostración: Como U es fuertemente polinomialmente convexo, entonces U admite una exhaustividad por compactos polinomialmente convexos, la conclusión del teorema se sigue del Teorema aproximación de Oka-Weil. $\square$

Observaciones:

(a) Si $K \subset \mathbb{C}^n$ es un compacto, entonces cada componente conexa de $\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n}$ intersecta a K.

(b) Si $K \subset \mathbb{C}^n$ es un compacto conexo, entonces $\widehat{K}^{pol}_{\mathbb{C}^n}$ es también conexo.

Proposición 4.5.1. *Sea $K \subset \mathbb{C}^n$ un compacto polinomialmente convexo, y sea U una vecindad de K. Entonces existe un abierto polinomialmente convexo V tal que $K \subset V \subset U$.*

Demostración: Sea D un polidisco conteniendo K. Si $D \subset U$ entonces es suficiente tomar $V = D$. Si $D \not\subset U$ entonces para cada $a \in D - U$ existe un polinomio $p \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\|p\|_K < 1 < |p(a)|$. Desde que $D - U$ es compacto, existen polinomios $p_1, \ldots, p_m \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\|P_j\|_K < 1$ para todo $j = 1, \ldots, m$ y

$$D - U \subset \bigcup_{j=1}^{m} \{z \in \mathbb{C}^n : |p_j(z)| > 1\}.$$

Por lo tanto es suficiente tomar

$$V = \{z \in D : |p_j(z)| < 1\ ,\ 1 \leq j \leq m\}$$

□

Teorema 4.5.5. *Sea $K \subset \mathbb{C}^n$ un compacto polinomialmente convexo. Entonces para cada $f \in \mathcal{O}(K)$ existe una vecindad V de K, y una sucesión de polinomios $(p_j)_{j\geq 1}$ tal que $f \in \mathcal{O}(V)$ y $(p_j)_{j\geq 1}$ converge a f uniformemente en V.*

Demostración: Consecuencia del Teorema 4.5.4 y de la Proposición 4.5.1. □

Teorema 4.5.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Entonces U es polinomialmente convexo si y solamente si U es holomórficamente convexo y Runge (esto es, $\mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ es denso en $(\mathcal{O}(U), \tau_c)$).*

Demostración: Consecuencia del Teorema 4.5.4 y del Teorema 4.4.6. □

Teorema 4.5.7. *Si $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía y Runge, entonces*

$$\boxed{\widehat{K}_U^{psh} = \widehat{K}_U^{hol} = \widehat{K}_{\mathbb{C}^n}^{pol}}$$

para todo compacto $K \subset U$.

Demostración: Consecuencia del Teorema 4.4.6 □

Conclusiones

- El problema de E. Levi en $\mathbb{C}^n$ es precisamente demostrar la siguiente caracterización: $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio de holomorfía si y solamente si U es un dominio pseudoconvexo. Intuitivamente un dominio de holomorfía $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio maximal, esto es, existe una función holomorfa en U el cual no puede extenderse holomórficamente hacia ningún punto de la frontera de U.

- Dado un dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ en general, un primer problema es determinar, si es dominio de holomorfía, el Teorema de Cartan-Thullen nos ofrece una caracterización topológica (vía funciones holomorfas), el cual es efectivo para muchos casos. Pero el problema de E. Levi nos ofrece una caracterización analítica (vía funciones plurisubarmónicas). Tengamos en cuenta que las funciones plurisubarmónicas son mucho más flexibles que las funciones holomorfas, esto es, pueden adaptarse a condiciones iniciales, mientras que las funciones holomorfas son muy rígidas. Por lo tanto es más factible demostrar que $U \subset \mathbb{C}^n$ es un dominio pseudoconvexo.

- Uno de los problemas fundamentales en una variable compleja es el Problema de Interpolación Discreta, el cual se demuestra mediante el Teorema de Weiertrass conjuntamente con el Teorema de Mittag-Leffler. En varias variables complejas no todo dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ admite interpolación. Los dominios de holomorfía caracterizan precisamente quienes son estos dominios, esto es, solo los dominios de holomorfía admiten interpolación.

- Uno de los teoremas fundamentales en una variable compleja es el Teorema de Weiertrass conjuntamente con el Teorema de Mittag-Leffler. En varias variables complejas sus homólogos serían el Problema Multiplicativo de Cousin y el Problema Aditivo de Cousin[2]. Pero no en todo dominio $U \subset \mathbb{C}^n$ podemos resolver el Problema Aditivo de

Cousin. Los dominios de holomorfía caracterizan precisamente quienes son estos dominios, esto es, solo en dominios de holomorfía podemos resolver el Problema Aditivo de Cousin. Para el caso de el Problema Multipliccativo de Cousin solo existen condiciones suficientes.

- En una variable compleja, la ecuación $\overline{\partial}$ admite solución en todo dominio $U \subset \mathbb{C}$. En varias variables complejas, solo en dominios pseudoconvexos, la ecuación $\overline{\partial}$ admite solución, más aún, si nuestro dominio es pseudoconvexo en el sentido de Levi la solución de la ecuación $\overline{\partial}$ admite una representación integral, mediante la fórmula integral de Bochner-Martinelli.

- Los dominios de holomorfía admiten una caracterización vía los grupos de cohomología de Dolbeaut
$$H^{p,q}_{\overline{\partial}} = \{0\}.$$

- En una variable compleja uno de los teoremas fundamentales de aproximación polinomial es el Teorema de Runge[6]. La generalización del Teorema de Runge a varias variables complejas es el Teorema de Aproximación de Oka-Weil en dominios de holomorfía.

- El problema de E. Levi en $\mathbb{C}^n$ lo podemos generalizar a espacios de Banach[8], donde primeramente hay que definir el concepto de holomorfía. El problema de E. Levi en $\mathbb{C}^n$ también lo podemos generalizar a variedades analíticas complejas (variedades de Stein)[10], espacios vectoriales topológicos localmente convexos[23].

Apéndice

Funciones suavizantes

En esta sección daremos la definición y las propiedades elementales del operador convolución, una herramienta fundamental en el análisis, el cual nos permitirá suavizar funciones localmente integrables, citamos la referencia [8], para más detalles.

Definición 1. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Definimos el **soporte** de una función $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$\mathrm{supp}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}} \cap U$$

Definición 4.5.3. Denotaremos por $\mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ el espacio vectorial de todas las funciones $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ con soporte compacto. Cada $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ es llamado una **función de prueba**. Si U es un abierto de $\mathbb{C}^n$ entonces denotaremos por $\mathscr{D}(U)$ el espacio vectorial de todas las funciones $f \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ tal que $\mathrm{supp}(f) \subset U$.

Definición 4.5.4. Sea $\Phi : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$\Phi(z) = \begin{cases} c \exp\left(\dfrac{-1}{1 - \|z\|^2}\right) & , \|z\| < 1 \\ 0 & , \|z\| \geq 1 \end{cases}$$

donde la constante $c > 0$ es tal que

$$\int_{\mathbb{C}^n} \Phi dV = 1.$$

Entonces $\Phi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n)$ con $\mathrm{supp}(\Phi) = \overline{B(0,1)}$. Más generalmente, para cada $\epsilon > 0$ sea $\Phi_\epsilon \in \mathscr{D}(\mathbb{C}^n)$ definido por

$$\Phi_\epsilon(z) = \epsilon^{-2n}\Phi(\frac{z}{\epsilon})$$

Entonces
$$\int_{\mathbb{C}^n} \Phi_\epsilon dV = 1$$
y $\operatorname{supp}(\Phi_\epsilon) = \overline{B(0,\epsilon)}$. Las funciones Φ_ϵ serán llamadas **funciones suavizantes**.

Definición 4.5.5. Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Para cada $\epsilon > 0$ definimos el abierto
$$U_\epsilon = \{z \in U : d(z, \partial U) > \epsilon\}$$
Dado $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$ definimos su **convolución**
$$f * \Phi_\epsilon : U_\epsilon \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f * \Phi_\epsilon(z) = \int\limits_U f(w)\Phi_\epsilon(z-w)dw = \int\limits_{B(0,\epsilon)} f(z-w)\Phi_\epsilon(w)dw.$$
Denotaremos $f_\epsilon = f * \Phi_\epsilon$.

Teorema 4.5.8. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto. Si $f \in L^1(U, \mathrm{loc})$, entonces*

(*a*) $f * \Phi_\epsilon \in \mathcal{C}^\infty(U_\epsilon)$.

(*b*) $\partial^\alpha(f * \Phi_\epsilon) = f * \partial^\alpha \Phi_\epsilon$ *para todo multi-índice* α.

(*c*) $\operatorname{supp}(f * \Phi_\epsilon) \subset \operatorname{supp}(f) + \overline{B(0,\epsilon)}$, *en particular* $f * \Phi_\epsilon \in \mathscr{D}(U)$ *si el soporte de* f *es un compacto de* $U_{2\epsilon}$.

(*d*) *Si* $f \in \mathcal{C}^k(U)$, $\partial^\alpha(f * \Phi_\epsilon) = \partial^\alpha f * \Phi_\epsilon$ *para todo multi-índice* $|\alpha| \leq k$.

Proposición 4.5.2. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in L^1(U, loc)$, entonces $f * \Phi_\epsilon \longrightarrow f$ casi en todo punto de U, cuando $\epsilon \to 0$.*

Proposición 4.5.3. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in \mathcal{C}(U)$. Entonces $f * \Phi_\epsilon$ converge hacia f uniformemente en partes compactas de U, cuando $\epsilon \to 0$.*

Proposición 4.5.4. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in \mathcal{C}_c(U)$. Entonces $f * \Phi_\epsilon$ converge hacia f uniformemente en U, cuando $\epsilon \to 0$.*

Proposición 4.5.5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto. Si $f \in \mathscr{D}(U)$, entonces $f * \Phi_\epsilon \longrightarrow f$ en $\mathscr{D}(U)$.*

Proposición 4.5.6. *Sea $U \subset \mathbb{C}^n$ un abierto y sea $f \in L^p(U)$, con soporte compacto, $p \in [1, \infty)$, entonces*

(a) $\|f * \Phi_\epsilon\|_p \leq \|f\|_p$, *siempre que* $\operatorname{supp}(f) \subset U_{2\epsilon}$.

(b) $f * \Phi_\epsilon \longrightarrow f$ *en* $L^p(U)$, *cuando* $\epsilon \to 0$.

Corolario 4.5.1. *Si* $U \subset \mathbb{C}^n$ *es un abierto, entonces* $\mathscr{D}(U)$ *es denso en* $L^p(U)$, *donde* $p \in [1, \infty)$.

Teoremas auxiliares

Teorema 4.5.9 (Teorema de categoría de Baire[21])**.** *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo, entonces*

a) X *es un espacio de Baire.*

b) X *es de segunda categoría.*

Teorema 4.5.10 (Principio de la acotación uniforme[21])**.** *Supongamos que* X, Y *son espacios de Banach y* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *es una familia de operadores lineales acotados de* X *en* Y. *Si* $\{T_\alpha\}_{\alpha \in A}$ *es puntualmente acotada, entonces es uniformemente acotada.*

Teorema 4.5.11 (Teorema de extensión de Hahn-Banach[21])**.** *Sea* Y *un subespacio de un espacio normado* X. *Si* $f \in Y^*$ *entonces existe* $F \in X^*$ *tal que* $F\big|_Y = f$ *y* $\|F\|_{X^*} = \|f\|_{Y^*}$.

Teorema 4.5.12 (Teorema de representación de Riesz[21])**.** *Sea* H *un espacio de Hilbert. Para todo* $f \in H^*$, *existe un único* $a \in H$ *tal que* $f(x) = \langle x, a \rangle$ *para todo* $x \in H$. *La aplicación* $f \mapsto a$ *es una isometría conjugada-lineal de* H^* *sobre* H.

Proposición 4.5.7 (Funcion de corte[8])**.** *Sea* $K \subset \mathbb{R}^n$ *un compacto, y* U *una vecindad de* K. *Entonces existe una función* $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\operatorname{supp}(\varphi) \subset U$, $0 \leq \varphi \leq 1$ *en* $\mathbb{R}^n$ *y* $\varphi = 1$ *en una vecindad de* K.

Proposición 4.5.8 (Lema de Urysohn[8])**.** *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto. Sean* A *y* B *dos subconjuntos cerrados disjuntos de* U. *Entonces existe una función* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$ *tal que* $0 \leq \varphi \leq 1$ *en* U, $\varphi \equiv 1$ *en una vecindad de* A *en* U, *y* $\varphi \equiv 0$ *en una vecindad de* B *en* U.

Teorema 4.5.13 (Teorema de diferenciación de Lebesgue[11])**.** *Sea* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ *localmente integrable. Entonces, para c.t.p.* $x \in \mathbb{R}^n$ *tenemos que*

$$\frac{1}{\operatorname{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)| dy \longrightarrow 0 \ , \ r \to 0^+$$

en particular, para c.t.p. $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(y)dy \longrightarrow f(x) \ , \ r \to 0^+.$$

si $x \in \mathbb{R}^n$ *satisface el límite anterior, será llamado punto de Lebesgue de* f.

Teorema 4.5.14 (Partición de la unidad[8]). *Sea* $U \subset \mathbb{C}^n$ *un abierto. Si* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ *es una cobertura abierta de* U, *entonces existe una partición de la unidad* $(\varphi_\alpha)_{\alpha \in A} \subset \mathcal{C}^\infty(U)$ *en* U, *la cual está subordinada a* $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.

Teorema 4.5.15 (Fórmula integral de Cauchy generalizada[2]). *Sea* $f : U \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *una función de clase* $\mathcal{C}^1(U)$. *Entonces para* $w \in \Delta(a,r) \subset\subset U$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta(a,r)} \frac{f(z)}{z-w} dz + \frac{1}{2\pi i} \iint_{\Delta(a,r)} \frac{\partial f(z)}{\partial \overline{z}} \frac{dz \wedge d\overline{z}}{z-w}$$

Teorema 4.5.16 (Lema de Weyl[10]). *Sea* $U \subset \mathbb{R}^n$ *un abierto. Si* $u \in L^1(U, loc)$ *es una solución débil de la ecuación de Laplace* $\Delta u = 0$, *entonces (después de una correción en un conjunto de medida cero)* $u \in \mathcal{C}^\infty(U)$, *y satisface* $\Delta u = 0$ *en el sentido clásico.*

Teorema 4.5.17 (Bolzano-Weirstrass[22]). *Toda sucesión acotada en un espacio de Hilbert, contiene una subsucesión débilmente convergente.*

Teorema 4.5.18 (Semicontinuidad de la norma[22]). *En un espacio de Hilbert, la norma es débilmente semicontinua inferiormente, esto se, si* x_n *converge débilmente a* x, *entonces* x_n *es acotada y*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Teorema 4.5.19 (Convergencia débil en espacios de Hilbert[22]). *Sea* $\big(H, \langle \cdot , \cdot \rangle\big)$ *un espacio de Hilbert. Una sucesión de puntos* $(x_n)_{n \geq 1}$ *en* H *converge débilmente hacia el punto* $x \in H$ *(esto es, en la topología débil) si y solamente si*

$$\langle x_n, y \rangle \longrightarrow \langle x, y \rangle$$

para todo $y \in H$.

Bibliografía

[1] Harry J. Slatyer. *The Levi Problem in $\mathbb{C}^n$: A Survey.*
`http://arxiv.org/pdf/1411.0363.pdf`

[2] M. Jarnicki. *Lectures On Holomorphic Functions Of Several Complex Variables.*
`http://www2.im.uj.edu.pl/MarekJarnicki/lectures/scv.pdf`

[3] H. Boas. *Lecture notes on several complex variables.*
`http://www.math.tamu.edu/~boas/courses/650-2013c/notes.pdf`

[4] J. Noguchi. *Analytic Function Theory of Several Variables.* Springer. 2016.

[5] W. Rudin. *Real and Complex Analysis.* Third Edition. McGraw-Hill. 1987.

[6] J.B. Conway. *Functions of One Complex Variable.* Second Edition. Springer-Verlag. 1984.

[7] V. Scheidemann. *Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Birkhäuser Verlag. 2005.

[8] J. Mujica. *Complex Analysis in Banach Spaces.* Elsevier Sciencie Publishers B.V. 1991.

[9] S. Krantz. *Function Theory of Several Complex Variables.* Wadsworth & Brooks/Cole. 1992.

[10] M. Jarnicki and P. Pflug. *Extension of Holomorphic Functions.* Walter de Gruyter GmbH & Co. KG. 2000.

[11] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Partial Differential Equations.* Second Edition. American Mathematical Society. 2010.

[12] L.C. Evans. *Measure Theory and Fine Properties of Functions.* Revised Edition. Taylor & Francis Group. 2015.

[13] D.M. Pellegrino. *Fundamentos de Análise Funcional.*

[14] S. Krantz. *Convex Analysis.* Taylor & Francis Group. 2015.

[15] L. Schwartz. *Théorie des Distributions.* Hermann. 1978.

[16] R.A. Adams. and J.F. Fournier. *Sobolev Spaces.* Elsevier. 2003.

[17] J.W. Milnor. *Topology from the Differentiable Viewpoint.* Princeton University, 1997.

[18] E.L. Lima *Curso de Análise.* Vol. 2. Projeto Euclides. IMPA. 1981.

[19] H. Federer. *Curvature Measures.* American Mathematical Society. 1959.

[20] S. Krantz and H. Parks. *Distance to $\mathcal{C}^k$ Hypersurfaces.* Academic Press. 1981.

[21] C.R. de Oliveira. *Introdução à análise funcional.*

[22] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations.* Springer. 2011.

[23] A. Bayoumi. *Foundations of Complex Analysis in Non Locally Convex Spaces.* Elsevier B.V. 2003.