UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST–GRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS, MENCIÓN: MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

VARIEDADES INVARIANTES DE PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

PRESENTADO POR:

Mamani Cayani, Juan Mesías

LIMA – PERÚ

1999

AGRADECIMIENTO

Agradezco de manera especial al Dr. Mario Renato Benazic Tomé por su apoyo y enseñanza, que me permite concluir el presente trabajo de investigación.

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN

El presente trabajo de investigación, generaliza las Propiedades de las Variedades Invariantes de Punto Fijos Hiperbólicos en Espacios Vectoriales de Dimensión Finita a Espacios de Dimensión Infinita *Espacios de Banach*, utilizando para ello argumentos de Analisis Funcional y Teoría de Variedades diferenciables modelados en Espacios de Banach.

INTRODUCCIÓN

En la Teoría Cualitativa de Ecuaciones Diferenciales se estudia la Estructura local de puntos singulares y órbitas periódicas hiperbólicas, sobre espacios de dimensión finita, en el cual se conoce las aplicaciones del Teorema de Hartman en Espacios de Banach y también en campos vectoriales y flujos. En el presente trabajo se responde a la siguiente pregunta muy interesante:

¿Se podrá generalizar las propiedades de las Variedades Estables e Inestables, a Espacios de Dimensión Infinita ?

Para ello en el Capítulo I y II realizamos un bosquejo de análisis funcional de operadores lineales sobre espacios de Banach y también incluimos el teorema de la descomposición Espectral y el complejificado de un Espacio de Banach y el operador lineal.

También como ejemplo damos un especial resultado de las condiciones que deben cumplir los coeficientes de un operador lineal en $\mathbb{R}^2$ para ser Hiperbólico.

En el Capítulo III, es muy inportante ya que en el se demuestra (Teorema de Grobman-Hartman) que la conjugación local es válida cuando se trabaja en espacios vectoriales de dimensión infinita (Espacios de Banach), es decir, que si h es la conjugación local entre dos operadores, h llega a ser sólo un homeomorfismo no dejando de lado el estudio de la estabilidad de los puntos fijos hiperbólicos, cuyas conclusiones se utilizan en tema de variedades.

Finalmente, en el Capítulo IV, desarrollamos las propiedades de las variedades estables e inestables de un homeomorfismo con un punto fijo hiperbólico, para luego realizar la demostración de un resultado fundamental, el Teorema de la transformación del Gráfico que nos permite lograr nuestro objetivo, demostrar el teorema de la Variedades Estable e Inestable para un punto fijo de una función de Lipschitz en Espacios de dimensión infinita que con mucha satisfacción damos todo nuestros esfuerzos.

Capítulo 1

PRERREQUISITOS DE ANÁLISIS FUNCIONAL

1.1 Operadores lineales sobre espacios de Banach

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Denotemos por:

$$\mathcal{L}(E, F) = \{L : E \longrightarrow F : \quad L \quad \text{es lineal y contínua}\}$$

Si los elementos de este conjunto cumplen

$$\Big(L_1 + L_2\Big)(x) = L_1 x + L_2 x \;\text{ y }\; \Big(\lambda L\Big)(x) = \lambda L x$$

entonces $(\mathcal{L}(E, F), +, \mathbb{K}, \cdot)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Si consideramos la norma del supremo (i.e. $\|L\| = \sup\limits_{x \in E} \|Lx\|_F$) se concluye que el par $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Si $E = F$ tenemos $\mathcal{L}(E, E) = \mathcal{L}(E)$.

Denotemos por $GL(E)$ al conjunto denominado "grupo lineal"

$$GL(E) = \{L \in \mathcal{L}(E) / \quad L \quad \text{es biyectiva}\}$$

Observese que L es contínua y lineal, y por el teorema de la aplicación abierta $L^{-1} \in \mathcal{L}(E)$.

Teorema 1.1 *Sea $T \in \mathcal{L}(E)$ y $L \in GL(E)$ tal que $\|T\| < \|L^{-1}\|^{-1}$. Entonces:*

i) $(L - T) \in GL(E), \;\; (L-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} T^k \;\; \wedge$

$$\|(L-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|T\|}$$

ii) $(L + T) \in GL(E), \;\; (L+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^{-(k+1)} T^k \;\; \wedge$

$$\|(L+T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \|T\|}$$

Demostración: Está dada en (8).

Definición 1.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{C}$-espacio de Banach y $T \in \mathcal{L}(E)$. El resolvente de T, denotado $\rho(T)$, es el conjunto de números complejos λ tales que $\lambda I - T \in GL(E)$.*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \quad \lambda I\text{-}T \in GL(E)\}.$$

El espectro de T, denotado $\Sigma(T)$ es el complemento en $\mathbb{C}$ de $\rho(T)$, $\quad \Sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$.

Teorema 1.2 (Descomposición espectral) *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo y $T \in \mathcal{L}(E)$ tal que $\Sigma(T) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ en donde $\Sigma_1 \subseteq B_1(0)$*

$\wedge \quad \Sigma_2 \subseteq \mathbb{C} \setminus B_1(0)$. *Entonces, existe una descomposición de E en subespacios cerrados E_1, E_2 tal que:*

i) $E = E_1 \oplus E_2$

ii) $T_1 = T|_{E_1} \in \mathcal{L}(E_1) \ \wedge T_2 = T|_{E_2} \in \mathcal{L}(E_2)$

iii) $\Sigma(T_1) = \Sigma_1 \ \wedge \ \Sigma(T_2) = \Sigma_2$.

Los resultados de los operadores lineales y contínuas definidos en espacios de Banach son varias e interesantes, es claro que se cumplen en espacios de Banach complejos también del siguiente modo.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, le asociamos un $\mathbb{C}$-espacio de Banach construido de la misma forma como $\mathbb{C}$ se construye a partir de $\mathbb{R}$.

Definición 1.2 *Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, el complejificado de E, denotado por $E_{\mathbb{C}}$ es el conjunto*

$$E_{\mathbb{C}} = \{x + iy : \quad x, y \in E\}.$$

A continuación, dotaremos a $E_{\mathbb{C}}$ de una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

Teorema 1.3 *En $E_{\mathbb{C}}$ definimos las operaciones de suma y producto escalar.*

$$\begin{array}{rlcl} + : & E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}} \\ & (z_1, z_2) & \longmapsto & z_1 + z_2 = (x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') \\ \cdot : & \mathbb{C} \times E_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}} \\ & (\alpha + i\beta, x + iy) & \longmapsto & (\alpha + i\beta) \cdot (x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x) \end{array}$$

Entonces $(E_{\mathbb{C}}, +, \mathbb{C}, \cdot)$ es un espacio vectorial.

La Prueba está dada en (8).

Teorema 1.4 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio real, entonces* $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ *es también un espacio de Banach, en donde:*

$$\|(x+iy)\|_{\mathbb{C}} = \max\{\|x\|, \|y\|\}.$$

Como $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$ es un espacio de Banach, podemos considerar $\mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$ el espacio de las aplicaciones lineales y contínuas en $E_{\mathbb{C}}$.

A continuación asociaremos a cada $T \in \mathcal{L}(E)$ un operador $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$.

Teorema 1.5 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach real y* $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_C)$ *su complejificado. Sea* $T \in \mathcal{L}(E)$*, definimos* $T_{\mathbb{C}}$ *por:*

$$\begin{array}{rccl} T_{\mathbb{C}}: & E_{\mathbb{C}} & \longrightarrow & E_{\mathbb{C}} \\ & (x+iy) & \longmapsto & T_{\mathbb{C}}(x+iy) = Tx + iTy. \end{array}$$

Entonces $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}) \quad \wedge \quad \|T_{\mathbb{C}}\| = \|T\|.$

La demostración se da en (8).

Teorema 1.6 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *espacio de Banach real, definimos* $\mathbb{C}$ *como*

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{C}: & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}}) \\ & T & \longmapsto & \mathbb{C}(T) = T_{\mathbb{C}}. \end{array}$$

La aplicación $\mathbb{C}$ *satisface las siguientes propiedades:*

i) $\mathbb{C}(T+T') = \mathbb{C}(T) + \mathbb{C}(T'), \quad \forall T, T' \in \mathcal{L}(E).$

ii) $\mathbb{C}(\alpha T) = \alpha\mathbb{C}(T), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \forall T \in \mathcal{L}(E).$

iii) $\mathbb{C}(T \circ T') = \mathbb{C}(T) \cdot \mathbb{C}(T'), \quad \forall T, T' \in \mathcal{L}(E).$

iv) $\|\mathbb{C}(T)\| = \|T\|, \quad \forall T \in \mathcal{L}(E)$.

La Prueba se presenta en (8).

Definición 1.3 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real y $T \in \mathcal{L}(E)$. Definimos* **resolvente** *de T, denotado por $\rho(T)$ como el resolvente de $T_{\mathbb{C}}$:*

$$\rho(T) = \rho(T_{\mathbb{C}}).$$

Con esta definición hemos logrado nuestro objetivo, como $T_{\mathbb{C}} \in \mathcal{L}(E_{\mathbb{C}})$ siendo $(E_{\mathbb{C}}, \|\cdot\|_C)$ un espacio de Banach todos los resultados obtenidos para $T \in \mathcal{L}(E)$ vía la Definición 1.3. De ahora en adelante no haremos distinción entre espacios de Banach reales y complejos.

Capítulo 2

OPERADORES LINEALES HIPERBÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

Definición 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $T \in GL(E)$.*

$$T \text{ es hiperbólico} \iff \Sigma(T) \cap S' = \Phi.$$

$\mathrm{Hip}(E)$ denotará el conjunto de los operadores hiperbólicos en $(E, \|\cdot\|)$:

$$\mathrm{Hip}(E) = \{T \in GL(E) : \quad T \text{ es hiperbólico}\}.$$

El siguiente, es un teorema muy importante, el cual nos dice que todo operador lineal hiperbólico divide al espacio de Banach, donde está definido, en dos subespacios cerrados e invariantes el cual es una contracción si lo restringimos a uno de ellos, y una dilatación, si lo restringimos al otro.

Teorema 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $L \in Hip(E)$. Entonces existen dos subespacios cerrados E_u, E_s, una norma $\|\cdot\|_*$ equivalente a la inicial $\|\cdot\|$ y una constante a, $0 < a < 1$ tal que:*

i) $E = E_u \oplus E_s$

ii) $L_u = L|_{E_u} \in \mathcal{L}(E_u) \quad \wedge \quad \|L_u^{-1}x\|_u \leq a\|x_u\|_u, \ \forall x_u \in E_u$

$L_s = L|_{E_s} \in \mathcal{L}(E_s) \quad \wedge \quad \|L_s x\|_s \leq a\|x_s\|_s, \ \forall x_s \in E_s$

iii) $\|x\|_* = \max\{\|x_u\|_u, \|x_s\|_s\}, \quad x = x_u + x_s.$

Es evidente que los subespacios invariantes dependen del operador $L \in \text{Hip}(E)$ Entonces $E = E_u(L) \oplus E_s(L)$.

$E_u = E_u(L)$ lo llamaremos **espacio inestable** y

$E_s = E_s(L)$ lo llamaremos **espacio estable**,

y a $\|\cdot\|_*$ **norma adaptada** al operador $L \in \text{Hip}(E)$, de ahora en adelante esta será la norma considerada en E.

Proposición 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Se cumple*

i) $E_u = E_u(L) = \{x \in E : \quad L^{-n}x \longrightarrow 0, \ \textit{cuando } n \to \infty\}$

ii) $E_s = E_s(L) = \{x \in E : \quad L^{n}x \longrightarrow 0, \ \textit{cuando } n \to \infty\}$

La prueba de esto, se da en (8).

Corolário 2.1 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Entonces*

$$L^{-1} \in Hip(E) \quad \wedge \quad E_u(L^{-1}) = E_s(L) \quad \wedge \quad E_s(L^{-1}) = E_u(L).$$

Ejemplos de Aplicación

Ejemplo 2.1 *Sea el operador*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (x+y, 2x+2y) \end{array}$$

Se desea analizar e identificar si T es un operador hiperbólico o no lo es:

Para ello se conoce que:

T es Hiperbólico $\Longleftrightarrow T$ es invertible y $\Sigma(T) \cap S' = \Phi$.

Luego veamos que:

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Como la determinante de su matriz de coeficientes de T es cero (det(A)=0); concluimos que T no es invertible.

$$T \epsilon \text{ Hip}(\mathbb{R}^2) \text{ siendo } \mathbb{R}^2 \text{ un Espacio de Banach.}$$

Ejemplo 2.2 *Sea T un operador en $E = \mathbb{R}^2$, Espacio de Banach definido*

$$\begin{aligned} T: \quad \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto T(x,y) = (\tfrac{3}{2}x + \tfrac{y}{3}; \tfrac{3}{2}x + y) \end{aligned}$$

a) *analizar si T es un operador Hiperbólico.*

b) *Si es, entonces ilustre los autoespacios E_u y E_s que induce T en $\mathbb{R}^2$ tal que $\mathbb{R}^2 = E_\mu \oplus E_s$.*

Solución

a) Sea

$$T(x,y) = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = AX$$

T es invertible pues $det(A) = 1 = 0$.

Tenemos también el polinomio característico de T

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{3}{2} & \lambda - 1 \end{vmatrix} \\ &= (2\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \end{aligned}$$

luego los valores propios de sus correspondientes autovectores son:

$\lambda_1 = \frac{1}{2}$ y $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$; genera $E_s(T)$ pues $\lambda_1 < 1$

$\lambda_2 = 2$ y $V_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$; genera $E_\mu(T)$ pues $\lambda_1 > 1$

Se sabe que como V_1 y V_2 son linealmente independientes

$$\mathbb{R}^2 = S_p\{V_1, V_2\}$$

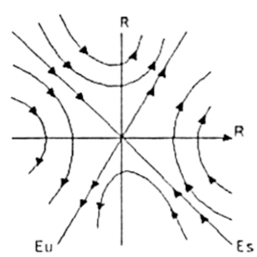


Figura 2.1: Ilustración

Luego $\mathbb{R}^2 = E_s(T) \oplus E_\mu(T)$.

Ejemplo 2.3 *Sea :*

$$\begin{array}{rccl} T: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & T(x,y) = (ax+by, cx+dy) \end{array}$$

¿Qué condiciones debe cumplir a, b, c y d para que T sea hiperbólica?

Solución:

Para responder la interrogante tan importante a pesar que parece ser sencillo.

Tenemos

$$T(x,y) = (ax+by, cx+dy) = \underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Por definición de Operador Hiperbólico, T debe ser invertible ($\det(A) \neq 0$) y sus valores propios deben ser diferentes de 1 (i.e. $|\lambda| \neq 1$).

Luego analizando el polinomio característico de T.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc \\ &= \lambda^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{Traza de A}} \lambda + \underbrace{(ad - bc)}_{\text{Determinante de A}} = 0 \end{aligned}$$

Se ve, que puede expresarse P en función de los parámetros traza y determinante de la matriz de coeficientes A de T.

$$Tr(A) = t$$

$$det(A) = \delta$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + \delta = 0$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{t \pm \sqrt{t^2 - 4\delta}}{2} \ldots\ldots\ldots (*)$$

Nos proponemos a responder una pregunta equivalente al inicial.

¿Que conclusiones deben cumplir t y δ de la matriz de coeficientes del operador T, para que T no sea hiperbólica ?

$$T \text{ no es hiperbólica} \iff \delta = 0 \vee \exists i \in I \text{ tal que } |\lambda_i| = 1;\ I = \{1,2\}$$

En $(*)$. Existen dos casos.

I CASO :

Si: $t^2 - 4\delta \geq 0$, se tiene $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Y además se conoce que:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Se concluye $\lambda_1 + \lambda_2 = t$ y $\lambda_1\lambda_2 = \delta$

$$\begin{aligned} \text{Para que T no sea hiperbólica} &\iff \delta = 0 \vee (\lambda_1 = 1 \vee \lambda_1 = -1) \\ &\iff \delta = 0 \vee (\lambda_2 = \delta \vee \lambda_2 = -\delta) \\ &\iff \delta = 0 \vee (\lambda_1 + \lambda_2 = \pm(1+\delta)) \\ &\iff \delta = 0 \vee (t = \pm(1+\delta)) \end{aligned}$$

II CASO :

Si: $t^2 - 4\delta < 0$, se tiene $\lambda_1 = \overline{\lambda_1} = \lambda_2 \in \mathbb{C}$. Es decir que los autovalores son conjugados.

$$\begin{aligned} T \text{ no sea hiperbólica} &\iff |\lambda_1| = |\frac{t}{2} \pm \frac{\sqrt{4\delta - t}}{2} i| \\ &\iff |\lambda_1| = \sqrt{(\frac{t}{2})^2 + (\pm\sqrt{\frac{4\delta - t}{4}})^2} = 1 \\ &\iff \delta = 1 \end{aligned}$$

Conclusión:

i) Si $t^2 - 4\delta \geq 0 \Rightarrow T$ es Hiperbólica $\iff \delta \neq 0 \wedge t \neq \pm(1+\delta)$.

ii) Si $t^2 - 4\delta < 0 \Rightarrow T$ es Hiperbólica $\iff \delta \neq 1$.

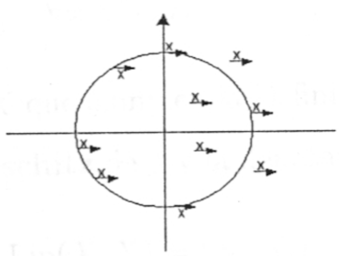
Observaciones:

i) Está probado que Hip(E) es abierto en $\mathcal{L}(E)$. Entonces podemos afirmar que: $\exists\epsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que:

$$\text{Si } \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \in \text{Hip}(\mathbb{R}^2) \Longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\varepsilon & \varepsilon \\ 1+\varepsilon & 2+\varepsilon \end{pmatrix} \in \text{Hip}(\mathbb{R}^2)$$

Es decir que si: $\lambda \notin S^1$. Entonces con una μ pequeña se garantiza que $\lambda + \mu$ no está en S^1.

ii) Se sabe que Hip(E) es denso en $\mathcal{L}(E)$, una manera de ver un operador con $\lambda \in S^1$. Entonces si agregamos una μ se ve que $\lambda + \mu \notin S^1$.



2.1 Aplicaciones de Lipschitz

No todos los operadores a considerarse en lo posterior están definidos en espacios de Banach, para ello necesitaremos estudiar operadores no necesariamente lineales definidos en los llamados espacios métricos y debemos ser capaces de invertir esos operadores.

Definición 2.2 *Sean (X, d_x), (Y, d_y) dos espacios métricos, y $f : X \longrightarrow Y$. Decimos que f es* **Lipschitz** *si y sólo si $\exists K \in \mathbb{R}^+$ tal que:*

$$d_y(f(x), f(x')) \leq K d_x(x, x'), \quad \forall x, x' \in X.$$

Denotaremos por $\mathrm{Lip}(X, Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones de Lipschitz de X a Y

$$\mathrm{Lip}(X, Y) = \{f : X \longrightarrow Y : \quad f \text{ es Lipschitz}\}.$$

Observaciones:

1. Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados y $f : E \longrightarrow F$. Decimos que f es de Lipschitz $\iff$ $\exists\ K > 0$ tal que: $\|f(x) - f(x')\|_F \leq k\|x - x'\|_E, \quad \forall x, x' \in E.$

2. La mínima de las constantes K que cumplen la Definición 2.2 recibe el nombre de **constante de Lipschitz** de f y la denotaremos por $\mathrm{lip}(f)$.

3. Cuando $X = Y$, denotaremos $\mathrm{Lip}(X, X) = \mathrm{Lip}(X,)$.

Los siguientes resultados serán útiles en el tema de estudio.
Cuya demostración se dan en (8). Que es una investigación paralela.

Teorema 2.2 *Sean (X, d_X), (Y, d_Y) dos espacios métricos. Se cumple*

$$Lip(X, Y) \subseteq C(X, Y).$$

El conjunto de operadores Lipschitzianas esta contenida en el conjunto de operadores contínuas.

Teorema 2.3 *Sean* $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ *dos espacios normados. Se cumple*

$$\mathcal{L}(E,F) \subseteq Lip(E,F) \quad \wedge \quad lip(f) = \|f\|, \forall f \in \mathcal{L}(E,F).$$

Si un operador ya es lineal. Entonces dicho operador es Lipschitziana.

Teorema 2.4 *Sean* (X, d_x), (Y, d_y), (Z, d_z) *espacios métricos,* $f \in Lip(X,Y)$, $g \in Lip(Y,Z)$. *Entonces*

$$g \circ f \in Lip(X,Z) \quad \wedge \quad lip(g \circ f) \leq lip(g) \cdot lip(f).$$

Teorema 2.5 *Sea* (X, d) *un espacio métrico completo,* $f \in lip(X)$ *tal que* $lip(f) \leq C < 1$. *Entonces* $\exists!\ x_0 \in X$ *tal que*

i) $f(x_0) = x_0$, (x_0) *es un punto fijo.*

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$, $\forall x \in X$ *(x_0 es un atractor).*

Teorema 2.6 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach y denotemos por* $E(r)$ *la bola cerrada en* E *de radio* r *y centro* 0, *i.e.* $E(r) = \{x \in E / \|x\| < r\}$. *Sea* $f \in Lip(E(r), E)$ *tal que* $lip(f) < 1$. *Entonces:*

i) $I - f$ *es invertible sobre su imagen* $U = [I - f][E(r)]$

ii) $(I - f)^{-1} \in Lip(U, E(r)) \wedge\ lip(()(I-f)^{-1}) \leq \frac{1}{1 - lip(f)}$

iii) *Si* $f(0) = 0$ *entonces* $E(r') \subseteq U$, *donde* $r' = r(1 - lip(f))$.

Corolário 2.2 *Sea* $(E, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach,* $T \in GL(E)$ *y* $f \in Lip(E(r), E)$ *tal que* $lip(f) \leq \|T^{-1}\|^{-1}$. *Entonces:*

i) $T - f$ *es invertible sobre su imagen* $U = [T - f][E(r)]$

ii) $(T-f)^{-1} \in Lip(U, E(r)) \wedge lip([)(T-f)^{-1}] \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|^{-1} - lip(f)}$

iii) *Si* $f(0) = 0$ *entonces* $E(r') \subseteq U$, *donde* $r' = r(\|T^{-1}\|^{-1} - lip(f))$.

Teorema 2.7 (De la aplicación fija) *Sea (X, d_x) espacio métrico completo y (Y, d_x) espacio métrico.*

$$\text{Sea} \quad \begin{array}{rccc} f: & X \times Y & \longrightarrow & X \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

definimos

$$\begin{array}{rcccl} f_y: & X & \longrightarrow & X & \quad y \in Y \\ & x & \mapsto & f_y(x) = f(x,y) & \\ f_x: & Y & \longrightarrow & Y & \quad x \in X \\ & y & \mapsto & f_x(y) = f(x,y) & \end{array}$$

Supongamos que se cumple:

i) $f_y \in lip(X) \quad \wedge \quad lip(f_y) \leq k < 1, \ \forall y \in Y$

ii) $f_x \in C(Y, X), \quad \forall x \in X$.

Entonces si denotamos x_y el único punto fijo de f_y $(y \in Y)$ la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & Y & \longrightarrow & X \\ & y & \mapsto & \varphi(y) = x_y \end{array}$$

llamada **aplicación fija** *de f es contínua y satisface:*

$$d_x(\varphi(y), \varphi(y')) \leq \frac{1}{1-k} d_x(f_y(x_y), f_{y'}(x_y)), \ \forall y, y' \in Y.$$

Capítulo 3

TEOREMA DE GROBMAN – HARTMAN

Para su demostración del teorema en mención será de necesidad algunas definiciones y afirmaciones demostrables que incluiremos a continuación.

Definición 3.1 *Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) dos espacios métricos y $f : X_1 \to X_2$ una función. Se dice que f es un homeomorfismo si es biyectiva, contínua y tal que la función inversa $f^{-1} : X_2 \to X_1$ También es continua.*

Definición 3.2 *Un difeomorfismo f entre abiertos de X_1 y X_2 es simplemente un homeomorfismo diferenciable cuya inversa f^{-1} también es diferenciable. Ahora si podemos definir lo que es un punto hiperbólico de un difeomorfismo en espacios de Banach.*

Definición 3.3 *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach; U una vecindad del $0 \in E$ y $f : U \to E$ un difeomorfismo sobre su imagen. Decimos que 0 es un punto hiperbólico de f si y sólo si:*

i) $f(0) = 0$.

ii) $Df(0) \in Hip(E)$.

Recordemos que si $L \in Hip(E)$ *entonces existen subespacios cerrados de* E *que son* E_μ *y* E_s *con sus respectivas normas* $\|.\|_\mu$ *y* $\|.\|_s$ *que cumplen ciertas propiedades mencionadas en el teorema (2.1), A continuación enunciamos la afirmación.*

AFIRMACION:

$(C_b(E,F), \|.\|_{(E,F)})$ es un espacio de Banach.

donde: $\|f\|_{(E,F)} = \sup\limits_{x \in E} \|f(x)\|_F$

También es interesante una propiedad que la descomposición de E. en E_μ y E_s induce una descomposición en $C_b(E)$ considerando la norma $\|.\| = \|.\|_*$

AFIRMACION:

Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach y E_μ, E_s subespacios de E como ya se conoce. Entonces

$$C_b(E) = C_b(E, E_\mu) \oplus C_b(E, E_s)$$

La prueba detallada se dá en (8). Luego podemos aclarar que $(C_b(E,E), \|.\|_{(E,F)})$, $(C_b(E,E_\mu), \|.\|_{(E,E_\mu)})$ y $(C_b(E,E_s), \|.\|_{(E,E_s)})$ son espacios de Banach. La relación que existe entre sus normas la enunciamos mediante la siguiente afirmación.

AFIRMACION:

La Norma de f en E está definida como sigue:

$$\|f\|_{(E,E)} = \max\{\|f_\mu\|_{(E,E_\mu)} \ ; \ \|f_s\|_{(E,E_s)}\}, \ \forall f \in C_b(E).$$

Estamos tratando a $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de U sobre su imagen en donde $(E, \|.\|)$ es un espacio de Banach, U es un abierto de E y $0 \in U$. Es posible averiguar que si 0 es un punto fijo hiperbólico de f, entonces f es localmente conjugado a $Df(0)$ i.e. $\exists h \in Hom(E)$ tal que $h \circ Df(0) = f \circ h$ en una vecindad de $0 \in E$. Antes de probar ello, debemos probar el Lema siguiente.

Lema 3.1 *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $U \in E$ abierto donde $0 \in U$ $f : U \longrightarrow E$ es de clase C^1 sobre su imagen tal que $f(0) = 0$ y denotamos por $L = Df(0) \in Lip(E, E)$. Entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists r = r(\epsilon) > 0$ y $\exists$ φ, $\varphi \in C_b(E) \bigcap Lip(E)$ tal que $f = L + \varphi$ en $B_r(0) \subseteq E$.*

Para su demostración se define una función $\Phi : U \longrightarrow E$

$$x \longmapsto \Phi(x) = f(x) - L(x)$$

Es claro que 0 va ha ser un punto fijo de Φ y además:

$$D\Phi = Df - L \Rightarrow D\Phi(0) = Df(0) - L = 0$$

La idea es extender continuamente Φ a todo E de tal forma que su extensión sea también continua y acotada y además de lipchitz.
Consideremos además el siguiente resultado.

Lema 3.2 *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\forall \varphi$, $\Psi \in Lip(E) \bigcap C_b(E)$ con $lip(\varphi)$, $lip(\Psi) < \epsilon$.*
La ecuación funcional:

$$(L + \varphi) \circ (I + \omega) = (I + \omega) \circ (L + \Psi),$$

tiene una única solución en $C_b(E)$.

La idea de la demostración es primeramente averiguar la posible forma de la incógnita ω de la ecuación funcional, que posiblemente. Sea como sigue.

$$\omega = (I - l)^{-1} \circ L^{-1} \circ (\Psi - \varphi \circ (I + \omega)) = T(\omega).$$

Luego si T fuera una contracción, ω seria el único punto fijo de T, el cual es efectivamente solución de nuestra ecuación.

Corolário 3.1 *Sea $(E, \|.\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$ además $0 < \epsilon < (1-a)\|L^{-1}\|^{-1}$. Entonces $(L+\varphi)$ y $(L+\Psi)$ son conjugados $\forall \varphi,\ \Psi \in C_b(E) \bigcap lip(E)$. Tales que $lip(\varphi)$, $lip(\Psi) < \epsilon$.*

Teorema 3.1 (De Grobman-Hartman) *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach U un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen y sea 0 punto fijo hiperbólico de f denotemos por $L = Df(0) \in Hip(E)$. Entonces f es localmente conjugado a L. i.e. $\exists h \in Hom(E)$ tal que $L \circ h = h \circ f$ en $B_r(0) \subseteq E$*

Prueba: Sea $\epsilon \leq (1-a)\|L^{-1}\|^{-1}$; por el Lema 3.1; existe $r > 0$ y $\exists \varphi = 0 \in C_b(E) \bigcap \mathrm{lip}(E)$, con $\mathrm{lip}(\varphi) < \epsilon$ tal que $f = L + \varphi$ en $B_r(0) \subseteq E$, entonces $Lip(\Psi) = 0 < \varepsilon \leq (1-a)\|L^{-1}\|^{-1}$. Luego por el corolario anterior $L + \varphi$ y L son conjugados. Entonces $\exists h \in Hom(E)/L \circ h = h \circ (L + \varphi)$ luego, si $x \in B_r(0)$, se tiene:$L \circ h(x) = h \circ (L + \varphi)(x) = h \circ f(x)$. Por lo tanto L y f son conjugados en $B_r(0)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "L+\varphi"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r, "L"'] & E \end{tikzcd}$$

ESTABILIDAD LOCAL DE PUNTO FIJOS HIPERBOLICOS

Primeramente incluiremos una definición de "Funciones suficientemente cercanas". Recordemos que $C^1(U, E)$ denota el conjunto de toda las funciones una vez continuamente diferenciables en U, es decir:

$$C^1(U, E) = \{g : U \longrightarrow E/g \text{ es diferenciable en } U \text{ y } Dg \in C^1(U, \mathcal{L}(E))\}.$$

También $C_b^1(U, E)$ es el conjunto:

$$C_b^1(U, E) = \{g \in C^1(U, E)/g \text{ y } Dg \text{ son acotados en } U\}.$$

Definición 3.4 *Decimos que "g está suficientemente cerca de f" si* $g, f \in C^1(U, E)$ *entonces* $\|g - f\|_1 < \epsilon$.

$$i.e. \ \|g(x) - f(x)\|_1 < \epsilon \ \ y \ \ \|Dg(x) - Df(x)\|_1 < \epsilon, \quad \forall x \in U.$$

También recordemos que la prueba del Lema 3.2 empleamos el hecho de que si $\varphi, \Psi \in C_b(E) \bigcap \mathrm{Lip}(E)$ con $\mathrm{lip}(\varphi)$, $\mathrm{lip}(\Psi) < (1 - a)\|L^{-1}\|^{-1}$. Entonces T es una contracción de $C_b(E)$ en el mismo y su único punto fijo ω, satisface:

$$(L + \varphi) \circ (I + \omega) = (I + \omega) \circ (L + \Psi) \text{ con } (I + \omega) \in Hom(E).$$

A su vez denotemos $Y = \{\varphi \in C_b(E) \bigcap Lip(E)/Lip(\varphi) < (1-a)\|L^{-1}\|^{-1}\}$ con $L \in Hip(E)$. Definimos:

$$\begin{aligned} d: \ & Y \times Y \longrightarrow \mathbb{R} \\ & (\Psi, \varphi) \longmapsto d(\Psi, \varphi) = \|\Psi \circ \varphi\|_{(E,E)} \end{aligned}$$

Se prueba que (Y, d) es un espacio métrico. Además:

$$\begin{aligned} T: \ & C_b(E) \times Y \times Y \longrightarrow C_b(E) \\ & (\omega, \Psi, \varphi) \longmapsto T(\omega, \Psi, \varphi) = (I - L_\varphi)^{-1} \circ L^{-1} \circ (\Psi - \varphi \circ (I + \omega)), \end{aligned}$$

es una contracción $\forall\varphi, \Psi \in Y$.

Si fijamos $\varphi \in Y$, tendríamos:

$$\begin{aligned} T: \ & C_b(E) \times Y \longrightarrow C_b(E) \\ & (\omega, \Psi) \longmapsto T(\omega, \Psi), \end{aligned}$$

que T_Ψ es una contracción. Denotemos por $\omega_\Psi \in C_b(E)$ el único punto fijo de T_Ψ, entonces la aplicación fija:

$$\begin{aligned} \theta: \ & Y \longrightarrow C_b(E), \\ & \Psi \longmapsto \theta(\Psi) = \omega_\Psi \end{aligned}$$

está bien definida y además es continua.

Teorema 3.2 (ESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS HIPERBOLICOS) *Sea $(E, \|.\|)$ espacio de Banach. U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \to E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen y 0 un punto fijo hiperbólico de f. Entonces $\exists r > 0$ y $\exists \epsilon > 0$ tal que $g \in B_\epsilon(f) \subseteq C^1(U, E)$.Entonces g es localmente conjugado a f. Además si h es la conjugación entre f y g, se tiene que $h(0) \in B_r(0) \subseteq E$ y $h(0)$ es un punto fijo hiperbólico de g.*

Su demostración está detallada en la tesis, de Maestro, de Guillermo Mamani Apaza "Dinámica de Operadores Hiperbólicos en Espacios de Banach", Cap. IV. En la prueba se usa el hecho de que $Hip(E)$ es abierto en $\mathcal{L}(E)$, y también que $f \in C^1$, entonces Df es contínua en U, en particular es contínua en cero. También se considera un $g \in C^1(U, E)$ "suficientemente cerca a f" tal que $g = f + \Psi$ de tal forma que g y f son localmente conjugados en $B_r(0) \subseteq E$ con $\Psi \in C_b(E) \bigcap lip(E)$ y $lip(\Psi) < \frac{\epsilon_0}{2}$.

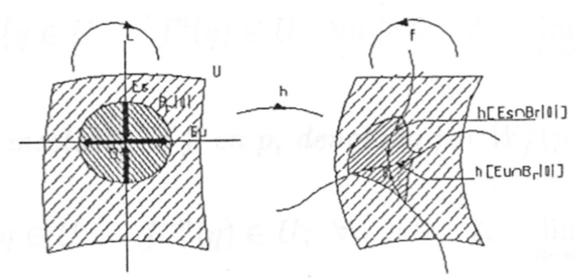
Finalmente se usa $\theta : Y \longrightarrow C_b(E)$ con $\theta(\Psi) = \omega_\varphi$ que es contínua.

En conclusión la conjugación dada por el Teorema de Grabman-Hartman es sólo un homeomorfismo y no siempre llega a ser diferenciable pero es imposible conseguir que h sea diferenciable si los autovalores de $Df(0) \in Hip(E)$ cumplen ciertas relaciones de resonancia.

Capítulo 4

VARIEDADES INVARIANTES DE PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS

Para empezar debemos indicar el contexto del tema, es así que el par $(E, \|\cdot\|)$ denota un espacio de Banach. $U \subseteq E$ abierto que contiene al cero, sea $f : U \longrightarrow E$ difeomorfismo sobre su imagen tal que o es punto fijo hiperbólico de f, entonces por el **teorema de Grobman–Hartman** se tiene que $\exists r > 0$ y $\exists h \in \text{Hom}(E)$ tal que $h \circ L = f \circ h$ en $B_r(0)$ donde $L = Df(0) \in \text{Hip}(E) \quad \wedge \quad h(0) = 0$.



$$
\begin{array}{llll}
\text{Sea} & y \in h[E_s \cap B_r(0)] & \Longrightarrow & \exists x \in E_s \cap B_r(0) \quad \text{tal que} \quad h(x) = y \\
\text{como} & x \in E_s & \Longrightarrow & L^n x \in E_s \cap B_r(0), \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} L^n x = 0 \\
\text{como} & h \in \text{Hom}(E) & \Longrightarrow & \lim_{n \to \infty} h(L^n x) = h(0) \\
\text{pero} & h \circ L = f \circ h & \Longrightarrow & \lim_{n \to \infty} f^n(h(x)) = h(0) \\
 & & \Longrightarrow & \lim_{n \to \infty} f^n(y) = 0.
\end{array}
$$

Si definimos: $W_f^s(0) = \{q \in U : \quad f^n(q) \in U; \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} f^n(q) = 0\}$,

tenemos que: Si $y \in h[E_s \cap B_r(0)] \quad \Longrightarrow \quad h[E_s \cap cB_r(0)] \subseteq W_f^s(0)$

Análogamente si definimos:

$$W_f^u(0) = \{q \in U : \quad f^{-n}(q) \in U; \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} f^{-n}(q) = 0\},$$

tiene la propiedad de que: Si $y \in h[E_u \cap B_r(0)] \Longrightarrow h[E_u \cap B_r(0)] \subseteq W_f^u(0)$.

Definición 4.1 *Sea (M, d) un espacio métrico, $U \subseteq M$ abierto, $f : U \longrightarrow M$ un homeomorfismo sobre su imagen. Sea $p \in M$ un punto fijo de f. Entonces:*

i) *El conjunto estable de f en p, denotado por $W_f^s(p)$ difinimos como sigue*

$$W_f^s(p) = \{q \in U : \quad f^n(q) \in U; \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} d(f^n(q), p) = 0\}$$

ii) *El conjunto inestable de f en p, denotado por $W_f^u(p)$ se define como*

$$W_f^u(p) = \{q \in U : \quad f^{-n}(q) \in U; \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to \infty} d(f^{-n}(q), p) = 0\}$$

iii) *El conjunto estable de tamaño r de f en p. Definimos como sigue*

$$W_f^s(p, r) = \{q \in U : \ f^n(q) \in U; \ \forall n \geq 0 \ \wedge \ d(f^n(q), p) < r; \ \forall n \geq 0\}$$

iv) *El conjunto inestable de tamaño r de f en p. Definiremos como*

$$W_f^u(p,r) = \{q \in U : \; f^{-n}(q) \in U; \; \forall n \geq 0 \wedge d(f^{-n}(q),p) < r; \; \forall n \geq 0\}$$

Una consecuencia del "Teorema de la Transformación del Gráfico", ha demostrarse más adelante, es que los conjuntos definidos en (4.1) son Variedades, es por ello que nos permitiremos en adelante denominarlos como Variedades Estable e Inestable.

Las principales propiedades de las Variedades Estables e Inestables están resumidas en la siguiente:

Proposición 4.1 *Sea (M,d) un espacio métrico. U un abierto de M, $f : U \longrightarrow M$ un homeomorfismo sobre su imagen y $p \in M$ un punto fijo de f. Se cumple:*

i) $W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p) \;\wedge\; W_{f^{-1}}^u(p) = W_f^s(p)$

ii) $W_f^u(p,r) = W_{f^{-1}}^s(p,r) \;\wedge\; W_{f^{-1}}^u(p,r) = W_f^s(p,r)$

iii) $f^{-1}[W_f^u(p)] = W_f^u(p), \; f[W_f^s(p)] = W_f^s(p), \; f[W_f^u(p)] = W_f^u(p),$
$f^{-1}[W_f^s(p)] = W_f^s(p)$

iv) $f^{-1}[W_f^u(p,r)] \subseteq W_f^u(p,r), \; f[W_f^s(p,r)] \subseteq W_f^s(p,r),$
$W_f^u(p,r) \subseteq f[W_f^u(p,r)], W_f^s(p,r) \subseteq f^{-1}[W_f^s(p,r)]$

v) $W_f^s(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}[B_r(p)] \;\wedge\; W_f^u(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^{n}[B_r(p)]$

Prueba:

i)

$$\begin{aligned} \text{Sea } q \in W_f^u(p) \iff & f^{-n}(q) \in U, \; \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim d(f^{-n}(q),p) = 0 \\ \iff & (f^{-1})^n(q) \in U, \; \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim d\left((f^{-1})^n(q),p\right) = 0 \\ \iff & q \in W_{f^{-1}}^s(p) \\ & \text{Por lo tanto} \quad W_f^u(p) = W_{f^{-1}}^s(p). \end{aligned}$$

También $W^u_{f^{-1}}(p) = W^s_{(f^{-1})^{-1}}(p) = W^s_f(p)$ ■

ii)

$$\begin{aligned}
\text{Sea } q \in W^u_f(p,r) &\iff f^{-n}(q) \in U,\ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad d(f^{-n}(q),p) < r,\ \forall n \geq 0\\
&\iff (f^{-1})^n(q) \in U,\ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad d((f^{-1})^n(q),p) < r,\ \forall n \geq 0\\
&\iff q \in W^s_{f^{-1}}(p,r)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\quad W^u_f(p,r) = W^s_{f^{-1}}(p,r)$.

También $W^u_{f^{-1}}(p,r) = W^s_{(f^{-1})^{-1}}(p,r) = W^s_f(p,r)$ ■

iii)

$$\begin{aligned}
\subseteq \text{ Sea } q \in f^{-1}[W^u_f(p)] &\Longrightarrow f(q) \in W^u_f(p)\\
&\Longrightarrow f^{-n}(f(q)) \in U,\ \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^{-n}(f(q)),p] = 0\\
&\Longrightarrow f^{-n}(q) \in U,\ \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^{-n}(q),p] = 0\\
&\Longrightarrow q \in W^u_f(p).
\end{aligned}$$

Luego:
$$f^{-1}[W^u_f(p)] \subseteq W^u_f(p) \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}
(\supseteq) \text{ Sea } q \in W^u_f(p) &\Longrightarrow f^{-n}(q) \in U,\ \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^{-n}(q),p] = 0\\
\text{Suponiendo que } f(q) \in U &\Longrightarrow f^{-n}(f(q)) \in U,\ \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^{-n}(f(q)),p] = 0\\
&\Longrightarrow f^{-n+1}(q) \in U,\ \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^{-n+1}(q),p] = 0\\
\text{Como es } \forall n \geq 0 &\Longrightarrow f(q) \in W^u_f(p)\\
&\Longrightarrow q \in f^{-1}[W^u_f(p)]
\end{aligned}$$

Por lo tanto:
$$W^u_f(p) \subseteq f^{-1}[W^u_f(p)] \tag{4.2}$$

De (4.1) y (4.2) tenemos: $f^{-1}[W^u_f(p)] = W^u_f(p)$.

$*$ también $f[W^s_f(p)] = (f^{-1})^{-1}[W^u_{f^{-1}}(p)] = W^u_{f^{-1}}(p) = W^s_f(p)$

$$\begin{aligned}
* \text{ se conoce } W^u_f(p) = f^{-1}[W^u_f(p)] &\Longrightarrow f[W^u_f(p)] = ff^{-1}[W^u_f(p)]\\
&\Longrightarrow f[W^u_f(p)] = W^u_f(p).
\end{aligned}$$

$*$ Está probado $W_f^s(p) = f[W_f^s(p)] \implies f^{-1}[W_f^s(p)] = f^{-1}f[W_f^s(p)]$

$$\implies f^{-1}[W_f^s(p)] = W_f^s(p).$$

iv)

$$\begin{aligned}
\text{Sea } q \in f^{-1}[W_f^u(p,r)] &\implies f(q) \in W_f^u(p,r) \\
&\implies f^{-n}(f(q)) \in U, \ \wedge \ d[f^{-n}(f(q)),p] < r, \quad \forall n \geq 0 \\
&\implies f^{-n}(q) \in U, \ \wedge \ d[f^{-n}(f(q)),p] < r, \quad \forall n \geq 0 \\
&\implies q \in W_f^u(p,r).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f^{-1}[W_f^u(p,r)] \subseteq W_f^u(p,r)$

$*$ Tenemos $f[W_f^s(p,r)] = (f^{-1})^{-1}[W_{f^{-1}}^u(p,r)] \subseteq W_{f^{-1}}^u(p,r)$

$$\implies f[W_f^s(p,r)] \subseteq W_f^s(p,r).$$

$*$ Se sabe que $f^{-1}[W_f^u(p,r)] \subseteq W_f^u(p,r)$

$$\begin{aligned}
&\implies ff^{-1}[W_f^u(p,r)] \subseteq f[W_f^u(p,r)] \\
&\implies W_f^u(p,r) \subseteq f[W_f^u(p,r)]
\end{aligned}$$

$*$ también $f[W_f^s(p,r)] \subseteq W_f^s(p,r)$

$$\begin{aligned}
&\implies f^{-1}f[W_f^s(p,r)] \subseteq f^{-1}[W_f^s(p,r)] \\
&\implies W_f^s(p,r) \subseteq f^{-1}[W_f^s(p,r)]
\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
(\subseteq) \text{ Sea } q \in W_f^s(p,r) &\implies f^n(q) \in U, \quad d[f^n(q),p] < r, \quad \forall n \geq 0 \\
&\implies q \in \underbrace{f^{-n}[U]}_{\text{abierto}}, \quad \wedge \quad f^n(q) \in B_r(p), \quad \forall n \geq 0 \\
&\implies q \in f^{-n}[U], \quad \wedge \quad q \in f^{-n}[B_r(p)], \quad \forall n \geq 0 \\
&\implies q \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}[B_r(p)].
\end{aligned}$$

$$(\supseteq) \text{ Sea } q \in \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}[B_r(p)] \implies q \in f^{-n}[B_r(p)],\ \forall n \geq 0$$

$$\implies f^n(q) \in B_r(p),\ \forall n \geq 0$$

$$\implies f^n(q) \in U, \forall n \geq 0, \quad d[f^n(q), p] < r,\ \forall n \geq 0$$

$$\implies q \in W^s_f(p, r)$$

Por lo tanto $W^s_f(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^{-n}[B_r(p)]$

También $W^u_f(p,r) = W^s_{f^{-1}}(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} (f^{-1})^{-n}[B_r(p)] = \bigcap_{n\geq 0} f^n[B_r(p)]$

Por lo tanto $W^u_f(p,r) = \bigcap_{n\geq 0} f^n[B_r(p)]$

Proposición 4.2 *Sea (M,d) un espacio métrico. U un abierto de M, $f : U \to M$ un homeomorfismo sobre su imagen y $p \in U$ un punto fijo de f:*

i) $\exists r > 0 : \quad W^s_f(p,r) \subseteq W^s_f(p) \implies W^s_f(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}[W^s_f(p,r)]$

ii) $\exists r > 0 : \quad W^u_f(p,r) \subseteq W^u_f(p) \implies W^u_f(p) = \bigcup_{n\geq 0} f^{n}[W^u_f(p,r)]$

Prueba:

i)

$(\subseteq)$ Sea $q \in W^s_f(p)$ $\implies f^n(q) \in U, \forall n \geq 0 \wedge \lim_{n\to\infty} d[f^n(q), p] = 0$

como $\exists r > 0, \exists N \in \mathbb{Z}^+ : n \geq N$ $\implies d[f^n(q), p] < r, \forall n \geq N$

pero $n + N \geq N$ $\implies d[f^n(f^N(q)), p] < r, \forall n \geq 0$

$\implies f^n[f^N(q)] \in U, \wedge d[f^n(f^N(q)), p] < r, \forall n \geq 0$

$\implies f^N(q) \in W^s_f(p,r)$, N algún entero positivo

$\implies q \in f^{-n}[W^s_f(p,r)], \forall n \geq 0$

$\implies q \in \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}[W^s_f(p,r)]$.

Por lo tanto $W_f^s(p) \subseteq \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p,r)]$.

($\supseteq$) Por hipótesis $W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p)$ para algún $r > 0$.

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow \quad f^{-n}[W_f^s(p,r)] \subseteq f^{-n}[W_f^s(p)] = W_f^s(p), \quad \forall n \geq 0 \\ &\Longrightarrow \quad \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p,r)] \subseteq W_f^s(p). \end{aligned}$$

$$\text{Por lo tanto} \quad W_f^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^{-n}[W_f^s(p,r)]$$

ii)

$$\begin{aligned} \exists r > 0 : \ W_f^u(p,r) \subseteq W_f^u(p) \quad &\Longrightarrow \quad \exists r > 0 : \ W_{f^{-1}}^s(p,r) \subseteq W_{f^{-1}}^s(p) \\ \text{Por el primer resultado mostrado} \quad &\Longrightarrow \quad W_{f^{-1}}^s(p) = \bigcup_{n \geq 0} (f^{-1})^{-n}[W_{f^{-1}}^s(p,r)] \\ &\Longrightarrow \quad W_f^u(p) = \bigcup_{n \geq 0} f^n[W_f^u(p,r)] \end{aligned}$$

■

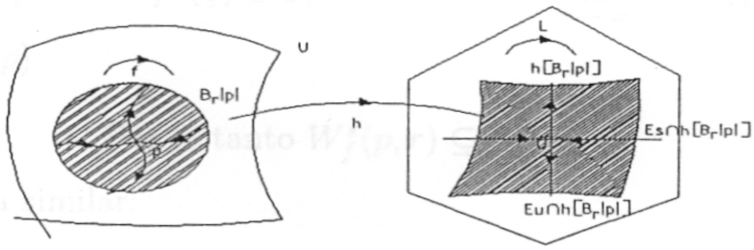
Proposición 4.3 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U un abierto de E, $f : U \to E$ un difeomorfismo de clase C^1 tal que $p \in U$ es un punto fijo hiperbólico de f. Entonces*

$$\exists r > 0 : \quad W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p) \quad \wedge \quad W_f^u(p,r) \subseteq W_f^u(p)$$

Prueba:

Por el Teorema de Grobman–Hartman $\exists r > 0 \quad \wedge \quad \exists h \in \mathrm{Hom}(E)$ tal que $L \circ h = h \circ f$ en $B_r(p)$, donde $L = D_f(p) \in \mathrm{Hip}(E)$ y $h(p) = 0$.

Afirmación: $W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p)$



En efecto:

$$
\begin{aligned}
\text{Sea} \quad q \in W_f^s(p,r) &\implies f^n(q) \in U, \ \forall n \geq 0 \ \wedge \ d[f^n(q),p] < r, \ \forall n \geq 0 \\
&\implies f^n(q) \in U, \ \forall n \geq 0 \ \wedge \ f^n(q) \in B_r(p), \ \forall n \geq 0 \\
&\implies h[f^n(q)] \in h[U], \ \forall n \geq 0 \ \wedge \ h[f^n(q)] \in h[B_r(p)], \ \forall n \geq 0
\end{aligned}
$$

Como h es homeomorfismo $h[U]$ es abierto en $E \quad \wedge \quad h[B_r(p)] \subseteq B_{r'}(0)$, algún $r' > 0$.

$$
\begin{aligned}
\text{Como} \quad L \circ h = h \circ f &\implies L^n[h(q)] \in B_{r'}(0), \ \forall n \geq 0 \\
&\implies \|L^n[h(q)]\| < r', \ \forall n \geq 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Si denotamos} \quad h(q) = x_u + x_s &\implies L^n[h(q)] = L_u^n x_u + L_s^n x_s \\
&\implies \|L_u^n x_u\|_u \leq \|L^n[h(q)]\| < r', \ \forall n \geq 0 \\
&\implies \|L_u^n x_u\|_u < r', \quad \forall n \geq 0 \quad \ldots\ldots(1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Pero} \quad \|x_u\|_u = \|L_u^{-n} L_u^n x_u\| \leq a^n \|L_u^n x_u\|_u &\implies \|L_u^n x_u\|_u \geq a^{-n}\|x_u\|_u, \quad a^{-1} > 1 \\
&\implies \lim_{n\to\infty} \|L_u^n x_u\|_u \geq (\lim_{n\to\infty} a^{-n})\|x_u\|_u,
\end{aligned}
$$

para que (1) sea verdadero debe ser que:

$$\|x_u\| = 0 \quad \iff \quad x_u = 0 \quad \implies \quad L_u^n x_u = 0$$

Luego $h(q) = x_s \in E_s \cap h[U]$

$\implies \quad L^n[h(q)] \longrightarrow 0 \quad$ cuando $n \to \infty$. Entonces $\quad \underbrace{h^{-1}L[h(q)]}_{f} \to h^{-1}(0)$

$\implies \quad f^n(q) \to p \quad$ i.e. $\quad f^n(q) \in U, \ \forall n \geq 0 \quad \wedge \quad \lim_{n\to\infty} d(f^n(q),p) = 0$

$\implies \quad q \in W_f^s(p)$

Por lo tanto $W_f^s(p,r) \subseteq W_f^s(p)$

Nota: De forma similar:

$$W_f^u(p,r) \subseteq W_f^u(p) \qquad \blacksquare$$

Con las propiedades mostradas hasta ahora de variedades estables e inestables, buscaremos probar que:

Si $f : U \longrightarrow E$ es un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen, en donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, $U \subseteq E$ abierto que contiene a p que es un punto fijo hiperbólico de f. Entonces $W_f^u(p,r)$ es el gráfico de alguna función de clase C^1. De forma similar para $W_f^s(p,r)$.

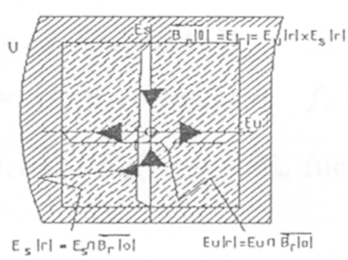
Existen dos pruebas de ello, la primera es:

Teorema 4.1 (Transformación del Gráfico) *$W_f^u(p,r) =$ es el gráfico de alguna función de clase C^1.*

Prueba:

Sea como hipótesis $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $U \subseteq E$ abierto que contiene al cero. Sea $f : U \longrightarrow E$ lipschtziana tal que $f(0) = 0$ y $L \in \mathrm{Hip}(E)$. Como sabemos, existen subespacios cerrados de E, (E_u, E_s) y una constante $a = a(L)$, $0 < a < 1$ tales que; Como U es abierto, $\exists r > 0$ tal que $\overline{B_r(0)} \subseteq U$. Denotemos

$$E_u(r) = E_u \cap \overline{B_r(0)}$$
$$E_s(r) = E_s \cap \overline{B_r(0)}$$
$$E(r) = E_u(r) \times E_s(r) = \overline{B_r(0)}$$



Podemos considerar $f : E(r) \longrightarrow E$ lipschitziana con $f(0) = 0$, f homeomorfismo sobre su imagen. Probaremos que $\exists \varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que; si $\mathrm{lip}(f - L) < \varepsilon$. Entonces $W_f^u(p, r)$ es el gráfico de una función: $\sigma : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$,
lipschitziana con $\mathrm{lip}(\sigma) < 1$ y $\sigma(0) = 0$.
Denotemos por:

$$\Omega(r) = \{\sigma \in \mathrm{Lip}(E_u(r), E_s(r)) : \quad \sigma(0) = 0, \ \mathrm{lip}(\sigma) < 1\}.$$

Consideremos:

$$\begin{array}{rccl} d: & \Omega(r) \times \Omega(r) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\sigma_1, \sigma_2) & \longmapsto & d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup\limits_{x \in E_u(r)} \|\sigma_1(x) - \sigma_2(x)\| \end{array}$$

Probaremos que $\exists \sigma_0 \in \Omega(r)$ tal que $W_f^u(0, r) = G(\sigma_0)$.
Si tal fuera el caso, para $x_u \in E_u(r)$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow (x_u, \sigma_0(u)) \in G(\sigma_0) = W_f^u(0, r) \\
&\Longrightarrow f^{-1}(x_u, \sigma_0(x_u)) \in f^{-1}[W_f^u(0, r)] \subseteq W_f^u(0, r) = G(\sigma_0) \\
&\Longrightarrow f^{-1}(x_u, \sigma_0(x_u)) \in G(\sigma_0) \\
&\Longrightarrow \exists y_0 \in E_u(r) \text{ tal que } f^{-1}(x_u, \sigma_0(x_u)) = (y_u, \sigma_0(y_u)) \\
&\Longrightarrow (x_u, \sigma_0(x_u)) = f(y_u, \sigma_0(y_u))
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{rcccl} x_u & = & f_u(y_u, \sigma_0(y_u)) & = & f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)(y_u) \\ \sigma_0(x_u) & = & f_s(y_u, \sigma_0(y_u)) & = & f_s \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)(y_u) \end{array} \right. \tag{4.3}$$

Suponiendo que $f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma_0) : E_u(r) \longrightarrow E_u$ fuera invertible

$$\Longrightarrow y_u = [f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)]^{-1}(x_u)$$

$$
\begin{aligned}
\text{en (4.3)} \quad \sigma_0(x_u) &= [f_s \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)] \circ [f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)]^{-1}(x_u), \quad \forall x_u \in E_u(r) \\
\Longrightarrow \qquad \sigma_0 &= f_s \circ (\mathrm{id}, \sigma_0) \circ [f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma_0)]^{-1}
\end{aligned}
$$

Luego σ_0 existe con las condiciones impuestas.

Ello motiva a considerar para $\sigma \in \Omega(r)$. Denotaremos:

$$
\begin{aligned}
\psi_f(\sigma) &= f_u \circ (\mathrm{id}, \sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u \\
\varphi_f(\sigma) &= f_s \circ (\mathrm{id}, \sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s
\end{aligned}
$$

Debemos probar:

1. $\psi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$ es invertible.

2. $E_u(r) \subseteq \mathrm{Im}(\psi_f(\sigma))$. Por lo tanto $\exists \psi_f^{-1}(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u(r)$

3. $\varphi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$ es tal que $\mathrm{Im}(\varphi_f(\sigma)) \subseteq E_s(r)$
   Por lo tanto podemos definir $\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f^{-1}(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$

4. $\varphi_f(\sigma) \circ \psi^{-1}(\sigma) \in \mathrm{Lip}(E_u(r), E_s(r))$ y $\mathrm{lip}(\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f^{-1}(\sigma)) < 1$

5. $\varphi_f(\sigma) \circ \psi_f^{-1}(\sigma)(0) = 0$

6. $(\Omega(r), d)$ es un espacio métrico completo. Por lo tanto podemos definir

$$
\begin{aligned}
\Gamma_f : \quad \Omega(r) \quad &\longrightarrow \quad \Omega(r) \\
\sigma \quad &\longmapsto \quad \Gamma_f(\sigma) = \varphi_f(\sigma) \circ \psi^{-1}(\sigma)
\end{aligned}
$$

7. $\Gamma_f \in lip(\Omega(r))$ y $lip(\Gamma_f) < 1$

De esta manera el único punto fijo $\sigma_0 \in \Omega(r)$ de Γ_f será el candidato a cumplir $G(\sigma_0) = W_f^u(0, r)$.

Demostración de (1) - (7):

(1) $\Psi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$ es invertible.

En efecto $\Psi_(f)(\sigma) = \Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) \Rightarrow \Psi_f(\sigma) = L_u + [\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u]$

Luego: Ψ_σ es invertible si:

$\text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) < \|L_u^{-1}\|^{-1} = a^{-1}$ por el Teorema (2.6)

Es claro que:

$$\Pi_u \circ L \circ (id, \sigma)(x_u) = \Pi_u \circ L \circ (x_u, \sigma(x_u)) = L_u x_u, \forall x_u \in E_u(r)$$

$$\Rightarrow \Pi_u \circ L \circ (id, \sigma) = L_u$$

Luego $\text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) = \text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - \Pi_u \circ L \circ (id, \sigma))$

$$\Rightarrow \text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) = \text{lip}(\Pi_u \circ (f - L) \circ (id, \sigma))$$

$$\Rightarrow \text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) \leq \underbrace{\|\Pi_u\|}_{\leq 1} .\text{lip}(f - L)\text{lip}(id, \sigma)$$

$$\Rightarrow \text{lip}(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) \leq \text{lip}(f - L)\text{lip}(id, \sigma) \tag{4.4}$$

Como $\|(id, \sigma)(x_u) - (id, \sigma)(x_u^{'})\| = \max\{\|x_u - x_u^{'}\|_u, \underbrace{\|\sigma(x_u) - \sigma(x_u^{'})\|_s}_{<lip(\sigma)\|x_u - x_u^{'}\|_u}\}$

$$\|(id, \sigma)(x_u) - (id, \sigma)(x_u^{'})\| \leq \|x_u - x_u^{'}\|_u, \text{ pues } lip(\sigma) < 1.$$

Entonces $lip(id, \sigma) \leq 1$.

Si hacemos $lip(f - L) < \epsilon < \|L^{-1}\|^{-1} = a^{-1}$ Reemplazando en (4.4).

$$lip(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) \leq lip(f - L)lip(id, \delta) < \epsilon$$

$$\Rightarrow lip(\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u) < \epsilon < \|L^{-1}\|^{-1} = a^{-1}$$

$$\Rightarrow \Psi_f(\sigma) = L_u + [\Pi_u \circ f \circ (id, \sigma) - L_u].$$

Es invertible mas aún el Teorema (2.6) afirma que:

$$\Psi_f^{-1}(\sigma) \in lip(E_u, E_u(r)) \wedge lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)) \leq \frac{1}{a^{-1} - \epsilon}$$

Luego queda demostrado.

Lema 4.1 *Sea $(E, \|.\|)$ Espacio de Banach, $U \subseteq E$ abierto que contiene el cero $f : U \longrightarrow E$ homeomorfismo sobre su imagen tal que $f \in lip(U, E)$ y $f(0) = 0$. Sea $L \in Hip(E)$. Si $lip(f - L) < \epsilon < a^{-1}$. Entonces la función.*

$$\begin{aligned} \Psi_f(\sigma) : E_u(r) &\longrightarrow E_u \\ x_u &\longmapsto \Psi_f(\sigma)(x_u) = \Pi_u \circ f \circ (id, \sigma)(x_u) \\ &\qquad\qquad\quad = f_u(x_u, \sigma(x_u)) \end{aligned}$$

Es invertible y

$$\Psi_f^{-1}(\sigma) \in Lip(E_u(r), E_u(r)) \wedge lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)) \leq \frac{1}{a^{-1} - \epsilon}, \qquad \forall \sigma \in \Omega(r) \quad \blacksquare$$

(2) $E_u(r) \subseteq Im(\Psi_f(\sigma))$

En efecto:

Sea $y_u \in E_u(r)$ P.D.Q. $\exists x_u \in E_u(r)$ tal que $\Psi_f(\sigma)(x_u) = y_u$.

$\Rightarrow x_u = \Psi_f^{-1}(\sigma)(y_u)$, pues $\Psi_f(\sigma)$ es invertible.

Es claro que: $\Psi_f(\sigma)(0) = f_u \circ (id, \sigma)(0) = \Pi_u \circ f(0, 0) = 0$

$$\Rightarrow \Psi_f^{-1}(\sigma)(0) = 0$$

Luego: (cómo es y qué condiciones tiene x_u buscado)

$$\begin{aligned} \|x_u\|_u &= \|\Psi_f^{-1}(\sigma)(y_u)\|_u = \|\Psi_f^{-1}(\sigma)(y_u) - \Psi_f^{-1}(\sigma)(0)\|_u \\ &\leq lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)\|y_u\|_u \\ \|x_u\| &\leq \frac{1}{(a^{-1} - \epsilon)} r. \quad \text{Entonces es claro que} \end{aligned}$$

$$x_u \in E_u(r) \Longleftrightarrow a^{-1} - \epsilon < 1 \Longleftrightarrow \epsilon < a^{-1} - 1$$

Entonces $\exists x_u \in E_u(r)$ tal que $\Psi_f(\sigma)(x_u) = y_u \in Im(\Psi_f(\sigma))$

por lo tanto $E_u(r) \subseteq Im(\Psi_f(\sigma))$.

Esto se cumple tomando $\epsilon < \min\{a^{-1}, a^{-1} - 1\} = a^{-1} - 1$.

Con ello queda probado el.

Lema 4.2 *Sea* $(E, \|.\|)$ *Espacio de Banach.*

$U \subseteq E$, *con* $0 \in U$, $f : U \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre su imagen tal que* $f \in lip(U.E)$ *y* $f(0) = 0$ *Sea* $L \in Hip(E)$. *Si* $lip(f - L) < \epsilon < a^{-1} - 1$ *Entonces:*

$$E_u(r) \subseteq Im(\Psi_f(\sigma)), \ \forall \sigma \in \Omega(r) \quad \blacksquare$$

(3) $\varphi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$ cumple $Im(\varphi_f(\sigma)) \subseteq E_s(r)$

En efecto: Sea $y_u \in Im(\varphi_f(\sigma)) \Rightarrow \exists x_u \in E_u(r)$, $(\|x_u\|_u \leq r)$, tal que $\varphi_f(\sigma)(x_u) = y_u$

P.D.Q $\|y_u\|_s \leq r$

Sea $\varphi_f(\sigma)(0) = \pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(0) = 0$ observese también:

$\pi_s \circ L \circ (id, \sigma)(x_u) = \pi_s[L_u x_u, L_s\sigma(x_u)] = L_s\sigma(x_u)$

$$\begin{aligned}
\|y_u\|_s &= \|\varphi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_f(\sigma)(0)\|_s \\
&= \|\pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(x_u) - \pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(0)\|_s \\
&\leq \|\pi_s \circ f \circ (id, \sigma)x_u - \pi_s \circ L \circ (id, \sigma)x_u - \pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(0) + \\
&\quad \pi_s \circ L \circ (id, \sigma)(0)\|_s + \|\pi_s \circ L \circ (id, \sigma)x_u - \pi_s \circ L \circ (id, \sigma)(0)\|_s \\
&\leq \|\pi_s \circ (f - L) \circ (id, \sigma)x_u - \pi_s \circ (f - L) \circ (id, \sigma)(0)\|_s + \\
&\quad \|L_s\sigma(x_u) - L_s\sigma(0)\|_s \\
&\leq \underbrace{\|\pi_s\|}_{=1} \underbrace{lip(f - L)}_{<\epsilon} \underbrace{lip(id, \sigma)}_{<1} \underbrace{\|x_u\|_u}_{\leq r} + \underbrace{\|L_s\|}_{<a} \underbrace{lip(\sigma)}_{<1} \underbrace{\|x_u\|}_{\leq r} \\
&\leq \epsilon\text{r} + \text{ar}.
\end{aligned}$$

$\|y_u\|_s \leq (\epsilon + a)r$, si $\epsilon + a < 1 \Leftrightarrow \epsilon < 1 - a$

$$\Rightarrow \|y_u\|_s \leq r \Rightarrow y_u \in E_s(r).$$

Luego $Im(\varphi_f(\sigma)) \subseteq E_s(r)$ con ello hemos probado.

Lema 4.3 *Sea* $(E, \|.\|)$ *un espacio de Banach. Sea* $U \subseteq E$ *abierto que contiene al cero;* $f : U \longrightarrow E$ *homeomorfismo sobre* $f(U)$ *tal que* $f \in Lip(U, E)$ *y* $f(0) = 0$. *Sea* $L = Hip(E)$. *Si* $lip(f - L) < \epsilon < 1 - a$.

Entonces:

$$\varphi_f(\sigma) : E_u(r) \to E_s(r) \text{ cumple } Im(\varphi_f(\sigma)) \subseteq E_s(r),\ \forall \sigma \in \Omega_{(r)} \qquad \blacksquare$$

Ahora de (1), (2) y (3) podemos asegurar que:

$$\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_s(r).$$

Está bien definida.

4) $\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma) \in lip(E_u(r), E_s(r))$ y $lip(\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma)) < 1$.

En efecto. Por el Teorema 2.4 La composición de dos lipschitzianas es lipschitziana. Luego por (1):

$$\Psi_f^{-1}(\sigma) \in lip(E_u(r), E_u(r)) \ \wedge \ lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)) \leq \frac{1}{a^{-1} - \epsilon}.$$

Queda por demostrar que:

$$\varphi_f(\sigma) \in lip(E_u(r), E_s(r)) \ \wedge \ lip(\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma)) < 1.$$

Bien procedamos:

$$\begin{aligned}
\|\varphi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_f(\sigma)(x_u')\|_s &= \|\pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(x_u) - \pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(x_u')\|_s \\
&= \|\pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(x_u) - \pi_s \circ L \circ (id, \sigma)(x_u) - \\
&\quad \pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(x_u') + \pi_s \circ L \circ (id, \sigma)(x_u')\|_s \\
&\quad + \|L_s\sigma(x_u) - L_s\sigma(x_u')\|_s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\pi_s \circ (f-L)\circ (id,\sigma)(x_u) - \\
&\qquad \pi_s \circ (f-L)\circ (id,\sigma)(x_u')\|_s + \\
&\qquad \|L_s\sigma(x_u) - L_s\sigma(x_u')\|_s \\
&\leq \underbrace{\|\pi_s\|}_{=1}\,\underbrace{lip(f-L)}_{<\epsilon}\,\underbrace{lip(id,\sigma)}_{<1}\,\|x_u - x_u'\|_u + \\
&\qquad \underbrace{\|L_s\|}_{<a}\,\underbrace{lip(\sigma)}_{<1}\,\|x_u - x_u'\|
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \|\varphi_f(\sigma)(x_u) - \varphi_f(\sigma)(x_u')\|_s \leq (\epsilon + a)\|x_u - x_u'\|_u$$

$$\Longrightarrow \varphi_f(\sigma) \in lip(E_u(r), E_s(r)) \wedge lip(\varphi_f(\sigma) < \epsilon + a$$

Por último:

$$
\begin{aligned}
lip(\varphi_f(\sigma)\circ \Psi_f^{-1}(\sigma)) &\leq lip(\varphi_f(\sigma)).lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)) \\
&\leq \frac{\epsilon + a}{a^{-1} - \epsilon} < 1 \\
&\Leftrightarrow \epsilon + a < a^{-1} - \varepsilon \\
&\Leftrightarrow 2\epsilon < a^{-1} - a \\
&\Leftrightarrow \epsilon < \frac{a^{-1} - a}{2}
\end{aligned}
$$

(5) Observese que, como $\Psi_f^{-1}(\sigma)(0) = 0$

$$\varphi_f(\sigma)\circ \Psi_f^{-1}(\sigma)(0) = \varphi_f(\sigma)(0) \;=\; \pi_s \circ f \circ (id,\sigma)(0) = 0$$

Luego si $lip(f-L) < \epsilon$ con $\epsilon < \min\{a^{-1} - 1, 1 - a, \dfrac{a^{-1} - a}{2}\}$ Entonces se cumplen todos los resultados y los Lemas (4.1), (4.2), (4.3). También......($\Box$)

$1 - a < a^{-1} - 1 \Leftrightarrow a - a^2 < 1 - a \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$

$1 - a < \frac{a^{-1} - a}{2} \Leftrightarrow 2a - 2a^2 < 1 - a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 > 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 > 0$

$\therefore$ Si $\epsilon < 1 - a$. Se cumple todo lo mencionado en ($\square$).

Luego hemos probado el siguiente:

Teorema 4.2 *$(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $f : E(r) \longrightarrow E$ homeomorfismo sobre su imagen tal que $f \in lip(E(r), E) \wedge f(0) = 0 \wedge L \in Hip(E)$. Si $lip(f - L) < \epsilon < 1 - a$. Entonces:*

i) $\Psi_f(\sigma) : E_u(r) \longrightarrow E_u$. *Es invertible tal que* $\Psi_f^{-1}(\sigma) \in lip(E_u(r))$ *y* $lip(\Psi_f^{-1}(\sigma)) < \frac{1}{(a^{-1}-\epsilon)}$, $\forall \sigma \in \Omega(r)$

ii) $\varphi_f(\sigma) \in lip(E_u(r), E_s(r)) \wedge lip(\varphi_f(\sigma)) < \epsilon + a, \quad \forall \sigma \in \Omega(r)$

iii) $\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma) \in \Omega(r), \quad \forall \sigma \in \Omega(r)$ ■

De esta manera podemos definir:

$$\begin{aligned} \Gamma_f : \Omega(r) &\longrightarrow \Omega(r) \\ \sigma &\longmapsto \Gamma_f(\sigma) = \varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma) \end{aligned}$$

Proposición 4.4 *Sea $\Omega(r) = \{\sigma \in lip(E_u(r), E_s(r)) / lip(\sigma) \leq 1; \; \sigma(0) = 0\}$ con la métrica:*

$$\begin{aligned} d : \Omega(r) \times \Omega(r) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\sigma_1, \sigma_2) &\longmapsto d(\sigma_1, \sigma_2) = \sup_{x \in E_u(r)} \|\sigma_1(x) - \sigma_2(x)\|_s \end{aligned}$$

Entonces $(\Omega(r), d)$ es un espacio métrico completo.

Prueba:

Sea $\sigma \in \Omega(r) \Rightarrow \sigma \in lip(E_u(r), E_s(r)) \subseteq C[E_u(r), E_s(r)]$

además:

$$\begin{aligned} \|\sigma(x)\|_s &= \|\sigma(x) - \sigma(0)\|_s \leq lip(\sigma)\|x\|_u \leq r, \forall x \in E_u(r) \\ &\Longrightarrow \sigma \in C_b[E_u(r), E_s(r)] \\ &\Longrightarrow \Omega(r) \subseteq C_b[E_u(r), E_s(r)] \ldots\ldots\ldots (\alpha) \end{aligned}$$

Como $(E, \|.\|)$ es Banach y $E_s \subseteq E$ cerrado $\Rightarrow (E_s, \|.\|_s)$ Banach.

Sea d_s la métrica inducida $\|.\|_s$.

$$\begin{array}{rcl} d_s : E_s \times E_s & \longrightarrow & R \\ (x,y) & \longmapsto & d_s(x,y) = \|x-y\|_s \end{array}$$

$\Longrightarrow (E_s, d_s)$ Es un espacio métrico completo.

$\Longrightarrow C_b[E_u(r), E_s(r)]$ Es un espacio métrico completo.

Luego de (α). Quedaria por mostrar que $\Omega(r)$ es un subconjunto cerrado de $C_b[E_u(r), E_s(r)]$.

Luego:

Sea $\sigma \in \overline{\Omega(r)} \Rightarrow \exists (\sigma_n) \subseteq \Omega(r)$ tal que $\lim_{n\to\infty} d(\sigma_n, \sigma) = 0$

AFIRMACION: $\sigma \in \Omega(r)$.

En efecto. Sea $x_u, x_u' \in E_u(r)$. Se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \|\sigma_n(x_u) - \sigma(x_u)\|_s & \leq & \sup\limits_{x_u \in E_u(r)} \|\sigma_n(x_u) - \sigma(x_u)\|_s \\ & = & d(\sigma_n, \sigma) \\ \|\sigma_n(x_u') - \sigma(x_u')\|_s & \leq & \sup\limits_{x_u \in E_u(r)} \|\sigma_n(x_u') - \sigma(x_u')\|_s \\ & = & d(\sigma_n, \sigma) \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x_u) - \sigma(x_u)\|_s = 0 \wedge \lim_{n\to\infty} \|\sigma_n(x_u') - \sigma(x_u')\|_s = 0$$

Entonces, dado $\epsilon > 0$, $\exists N \in Z^+$ tal que:

$$\|\sigma_N(x_u) - \sigma(x_u')\|_s < \frac{\varepsilon}{2} \wedge \|\sigma_N(x_u') - \sigma(x_u')\|_s \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Luego:

$$\begin{aligned}
\|\sigma(x_u)-\sigma(x_u')\|_s &\leq \underbrace{\|\sigma(x_u)-\sigma_N(x_u)\|_s}_{<\frac{\epsilon}{2}}+\|\sigma_N(x_u)-\sigma(x_u')\|_s \\
&\leq \tfrac{\epsilon}{2}+\|\sigma_N(x_u)-\sigma_N(x_u')\|_s+\underbrace{\|\sigma_N(x_u')-\sigma(x_u')\|_s}_{<\frac{\epsilon}{2}} \\
&< \tfrac{\epsilon}{2}+\underbrace{lip(\sigma_N)}_{\leq 1}\|x_u-x_u'\|_u+\tfrac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon+\|x_u-x_u'\|_u,\ \forall\epsilon>0 \\
&\leq \|x_u-x_u'\|_u, \forall x_u, x_u' \in E_u(r) \\
\Rightarrow &\quad \sigma\in lip[E_u(r),E_s(r)] \quad \wedge \quad lip(\sigma)\leq 1 \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Falta finalmente que:

$$\|\sigma_n(0)-\sigma(0)\|_s\leq d(\sigma_n,\sigma), \forall n\geq 0,$$

como $\sigma_n\in\Omega(r)\Rightarrow\sigma_n(0)=0$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad 0\leq\|-\sigma(0)\|_s \quad \leq d(\sigma_n,\sigma), \text{ si } n\to\infty \\
&\Longrightarrow \quad \|\sigma(0)\|=0 \quad \Longleftrightarrow \sigma(0)=0 \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

por lo tanto de (4.5) y (4.6), $\sigma\in\Omega(r)$.

La afirmación queda probada, luego $\Omega(r)$ es cerrada.

Por lo tanto $(\Omega(r),d)$ es un espacio métrico completo. ■

De aqui sólo queda por demostrar que Γ_f es contracción.

Luego, si $\sigma_1,\sigma_2\in\Omega(r)$ entonces, como estamos en un espacio métrico completo, tenemos que:

$$d(\Gamma_f(\sigma_1),\Gamma_f(\sigma_2)) = \sup_{x_u\in E_u(r)}\|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u)-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s \ldots\ldots \quad (4.7)$$

Quisieramos acotar el lado derecho de (4.7).

$$\|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u)-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s = \|f_s\circ(id,\sigma_1)\circ\underbrace{[f_u\circ(id,\sigma_1)]^{-1}(x_u)}_{y_u}-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s$$

Si hacemos $y_u = [f_u \circ (id,\sigma_1)]^{-1}(x_u) \Longrightarrow x_u = f_u \circ (id,\sigma_1)(y_u)$

Entonces $f_s \circ (id,\sigma_1)(y_u) = \Gamma_f(\sigma_1)x_1$

$$\Rightarrow \|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u) - \Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\|_s = \|f_s(y_u,\sigma_1(y_u)) - \Gamma_f(\sigma_2[f_u(y_u,\sigma_1(y_u))]\|_s \,..(4.8)$$

Para acotar el lado derecho de (4.8) mostraremos el siguiente:

Lema 4.4 *Sea $(E,\|.\|)$ espacio de Banach $f : E(r) \longrightarrow E$ homeomorfismo sobre su imagen tal que $f \in lip(E(r),E)$ y f(0)=0, sea $L \in Hip(E)$. Si $lip(f-L) < \epsilon < 1-a$. Entonces la función*

$$\begin{aligned} \Gamma_f : \Omega(r) &\longrightarrow \Omega(r) \\ \sigma &\longmapsto \Gamma_f(\sigma) = \varphi_f(\sigma)\circ\Psi_f^{-1}(\sigma) \end{aligned}$$

Satisface la desigualdad:

$$\|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)) - f_s(y_u,y_s)\|_s \leq (a+2\epsilon)\|\sigma(y_u-y_s)\|_s,\ \forall\sigma\in\Omega(r)$$

en donde $(y_u,y_s) \in E(r)$ es tal que $f_u(y_u,y_s) \in E(r)$.

Prueba:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)) - f_s(y_u,y_s)\|_s \;\leq\; & \underbrace{\|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)) - f_s(y_u,\sigma(y_u))\|_s}_{1^0P} + \\ & \underbrace{\|f_s(y_u,\sigma(y_u)) - f_s(y_u,y_s)\|_s}_{2^0P} \end{aligned}$$

Acotaremos 1^0 P: $\|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)) - f_s(y_u,\sigma(y_u))\|_s =$

$$
\begin{aligned}
&= \|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s) - \Gamma_f(\sigma_1)(f_u(y_u,\sigma(y_u)))\|_s \\
&\leq \underbrace{lip\Gamma_f(\sigma)}_{\leq 1} \|f_u(y_u,y_s) - f_u(y_u,\sigma(y_u))\|_s \\
&\leq \|\pi_u \circ f(y_u,y_s) - \pi_u \circ L(y_u,y_s) - \pi_u \circ f(y_u,\sigma(y_u)) \\
&\quad +\pi_u \circ L(y_u,\sigma(y_u)\|_s + \|L_u y_u - L_u y_u\|_s \\
&\leq \|\pi_u \circ (f-L)(y_u,y_s) - \pi_u \circ (f-L)(y_u,\sigma(y_u)\|_s + 0 \\
&\leq \underbrace{\|\pi_u\|}_{=1} \underbrace{lip(f-L)}_{<\epsilon} \underbrace{lip(id,\sigma)}_{\leq 1} \|y_s - \sigma(y_u)\|_s \\
&\leq \epsilon\|y_s - \sigma(y_u)\|_s
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

Acotaremos 2^0 P: $\|f_s(y_u,\sigma(y_u)) - f_s(y_u,y_s)\|_s \leq$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\pi_s \circ f \circ (y_u,\sigma(y_u)) - \pi_s \circ L \circ (y_u,\sigma(y_u)) - \\
&\quad \pi_s \circ f \circ (y_u,y_s) + \pi_s \circ L \circ (y_u,y_s)\|_s + \|L_s\sigma(y_u) - L_s y_s\|_s \\
&\leq \|\pi_s \circ (f-L)(y_u,\sigma(y_u) - \pi_s \circ (f-L)(y_u,y_s)\|_s + \\
&\quad \|L_s\|\|\sigma(y_u) - y_s\|_s \\
&\leq \underbrace{\|\pi_s\|}_{=1} \underbrace{lip(f-L)}_{<\epsilon} \cdot \|\sigma(y_u) - y_s\|_s + a\|\sigma(y_u) - y_s\|_s \\
&\leq (\epsilon + a)\|y_s - \sigma(y_u)\|_s
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Reemplazando (4.9), (4.10) en la desigualdad dada.

$$\|\Gamma_f(\sigma)(f_u(y_u,y_s)) - f_s(y_u,y_s)\|_s \leq (a+2\epsilon)\|\sigma(y_u) - y_s\|_s, \forall \sigma \in \Omega(r)$$

si hacemos $\sigma = \sigma_2$ y $y_s = \sigma_1(y_u)$. En el Lema (4.4).

$$\|\Gamma_f(\sigma_2)(f_u(y_u,\sigma_1(y_u))) - f_s(y_u,\sigma_1(y_u))\|_s \leq (a+2\epsilon)\|\sigma_2(y_u) - \sigma_1(y_u)\|_s$$

$$\leq \ (a+2\epsilon)\underbrace{\max \|\sigma_2(y_u)-\sigma_1(y_u)\|_s}_{=d(\sigma_2,\sigma_1)}$$

$$\leq \ (a+2\epsilon)d(\sigma_2,\sigma_1),$$

luego (4.8) queda acotada. Si tomamos supremo al lado izquierdo de (4.8).

$$\sup_{x_u\in E_u} \|\Gamma_f(\sigma_1)(x_u)-\Gamma_f(\sigma_2)(x_u)\| \ \leq \ (a+2\epsilon)d(\sigma_1,\sigma_2)$$

$$d(\Gamma_f(\sigma_1),\Gamma_f(\sigma_2)) \leq (a+2\epsilon)d(\sigma_1,\sigma_2) \ \ \forall \sigma_1,\sigma_2 \in \Omega(r)$$

$$\Gamma_f \text{ es contractiva } \Leftrightarrow a+2\epsilon<1 \Leftrightarrow \epsilon < \frac{1-a}{2}$$

luego si $\epsilon < \frac{1-a}{2} \Rightarrow \Gamma_f$ es contractiva y por lo tanto tendrá un único punto fijo σ_f.

AFIRMACION : $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$

En efecto:

Observese que: $(x_u,x_s)\in f[G(\sigma)]\bigcap E(r)$

$$\Leftrightarrow \quad \exists y_u \in E(r), \ \ (y_u,\sigma(y_u))\in G(\sigma) \text{ tal que } f(y_u,\sigma(y_u)) = (x_u,x_s)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_u,x_s) = (f_u(y_u,\sigma(y_u)), f_s(y_u,\sigma(y_u)))$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_u = f_u(y_u,\sigma(y_u)) = f_u\circ(id,\sigma)(y_u) \\ & \Rightarrow y_u = [f_u\circ(id,\sigma)]^{-1}(x_u) \\ x_s = f_s(y_u,\sigma(y_u)) = f_s\circ(id,\sigma)(y_u) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_s = [f_s\circ(id,\sigma)]\circ[f_u\circ(id,\sigma)]^{-1}(x_u) \Rightarrow x_s = \Gamma_f(\sigma)(x_u)$$

$$\Leftrightarrow \quad (x_u,x_s)\in G(\Gamma_f(\sigma))$$

Por lo tanto $G(\Gamma_f(\sigma)) = f[G(\sigma)]\bigcap E(r), \forall\sigma\in\Omega(r)$.

Como $\sigma_f\in\Omega(r)$, entonces: $G(\sigma_f) = G(\Gamma_f(\sigma_f)) = f[G(\sigma_f)]\bigcap E(r) \subseteq E(r)$.

$(\subseteq)$

$$\Longrightarrow G(\sigma_f) \subseteq f^{1-1}(E(r))$$

$\vdash G(\sigma_f) \subseteq f^n[E(r)], \quad \forall n \geq 0.$

Supongamos $G(\sigma_f) \subseteq f^{n-1}[E(r)]$, (por Hipótesis Inductiva)

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad f[G(\sigma_f)] \subseteq f^n[E(r)] \\
&\Longrightarrow \quad f[G(\sigma_f)] \bigcap E(r) \subseteq f^n[E(r)], \forall n \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad G[\Gamma_f(\sigma_f)] \subseteq f^n[E(r)], \text{ como } \sigma_f \text{ punto fijo de } \Gamma \\
&\Longrightarrow \quad G[\sigma_f] \subseteq f^n[E(r)], \forall n \geq 0 \\
&\Longrightarrow \quad G[\sigma_f] \subseteq \bigcap f^n[E(r)] = W_f^u(0,r)
\end{aligned} \tag{4.11}$$

($\supseteq$) mostraremos el otro contenido.

Si $(x_u, x_s) \in \bigcap\limits_{n \geq 0} f^n[E(x)] \Longrightarrow (x_u, x_s) \in f^n[E(r)], \forall n \geq 0$

$\Longrightarrow f^{-n}(x_u, x_s) \in E(r), \forall n \geq 0$. Denotemos si es claro $\exists (y_u^n, y_s^n) \in E(r)$ tal que

$\Longrightarrow (y_u^n, y_s^n) = f^{-n}(x_u, x_s), \forall n \geq 0$ entonces para $n+1$ también se cumplirá.

$\Longrightarrow (y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) = f^{-n-1}(x_u, x_s) = f^{-1}[f^{-n}(x_u, x_s)] = f^{-1}[y_u^n, y_s^n]$

$\Longrightarrow f(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) = (y_u^n, y_s^n)$.

Luego hemos formado una sucesión en $E(r)$ que cumple.

$$\begin{cases}
x_u = y_u^0 \quad \wedge \quad y_u^n = f_u(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}); \quad \forall n \geq 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{como: } f_u(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}) \in E_u(r), \forall n \geq 0 \\
x_s = y_s^0 \quad \wedge \quad y_s^n = f_s(y_u^{n+1}, y_s^{n+1}); \quad \forall n \geq 0
\end{cases}$$

como queremos mostrar que $(x_u, x_s) \in G(\sigma_f)$ entonces es claro que $x_s = \sigma_f(x_u)$ trataremos mostrar que $\|\sigma(x_u) - x_s\|_s = 0$, recordando $\Gamma_f(\sigma_f) = \sigma_f$:

$$\begin{aligned}
\|\sigma_f(x_u) - x_s\|_s &= \|\Gamma_f(\sigma_f)(x_u) - x_s\|_s \\
&= \|\Gamma_f(\sigma_f)(f_u(y_u(y_u^1, y_s^1)) - f_s(y_u^1, y_s^1)\|_s \leq, \text{ Por el Lema (4.4)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq (a+2\epsilon)\|\sigma_f(y_u^1) - y_s^1\|_s \\
&\leq \underbrace{\|\Gamma_f(\sigma_f)(f_u(y_u^2, y_s^1)) - f_s(y_u^2, y_s^2\|_s}_{\leq (a+2\epsilon)\|\sigma(y_u^2)-y_s^2\|_s}(a+2\epsilon) \\
&\leq (a+2\epsilon)(a+2\epsilon)\|\sigma(y_u^2) - y_s^2\|_s, \text{ así sucesivamente} \\
&\vdots \\
&\leq (a+2\epsilon)^n\|\sigma(y_u^n) - y_s^n\|_s \text{ si } n \mapsto \infty, \text{ como } (a+2\epsilon) < 1
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \|\sigma_f(x_u) - x_s\|_s = 0 \Longleftrightarrow x_s = \sigma_f(x_u)$$

$$\Longrightarrow (x_u, x_s) \in G(\sigma_f)$$

$$\therefore \bigcap_{n\geq 0} f^n[E(r)] \subseteq g(\sigma_f) \tag{4.12}$$

de (4.11) y (4.12) tenemos que: $G(\sigma_f) = \bigcap\limits_{n\geq 0} f^n[E(r)] = W_f^u(0,r)$

Por lo tanto $G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$. ■

El conjunto inestable de tamaño r de f en 0 es una variedad, pues es el gráfico de una función $\sigma_f : E_u(r) \longrightarrow E_s(r)$ tal que $\sigma_f \in \Omega(r)$ y es punto fijo de $\Gamma_f \in \Omega(r)$. Aqui termina la prueba del Teorema de la "Transformación del Gráfico".

Por último, observese que para $\sigma_f \in \Omega(r)$ definimos, la función:

$$
\begin{aligned}
\pi^* : E_u(r) &\Longrightarrow G(\sigma_f) \\
x_u &\longmapsto \pi^*(x_u) = (x_u, \sigma_f(x_u))
\end{aligned}
$$

Si aplicamos proyección canónica:

$$
\begin{aligned}
\pi_u \circ \pi^*(x_u) = \pi_u(x_u, \sigma_f(x_u)) = x_u &\Longrightarrow \pi_u \circ \pi^*(x_u) = x_u \\
&\Longrightarrow \pi^*(x_u) = \pi_u^{-1}(x_u), \quad \forall x_u \in E_u(r) \\
&\Longrightarrow \pi^* = \pi_u^{-1} \ \ en \ \ E_u(r) \\
&\Longrightarrow (\pi^*)^{-1} = \pi_u
\end{aligned}
$$

Si hacemos composición opuesta:

$$\pi^* \circ \pi_u \circ \pi^*(x_u) = \pi^* \circ \pi_u(x_u, \sigma_f(x_u)) = \pi^*(x_u) = (x_u, \sigma_f(x_u)), \forall x_u \in E_u(r)$$

$$\Longrightarrow \pi^* \circ \pi_u \circ \pi^* = \pi^* \quad \text{en } E_u(r)$$

Luego:

$$\pi^* \circ \pi_u = \pi^* \circ \pi^{*-1}$$

$$\pi^* = \pi_u^{-1}|_{G(\sigma_f)}$$

Además:

$$\begin{aligned}
\|\pi^*(x_u) - \pi^*(x'_u)\| &= \|(x_u, \sigma_f(x_u)) - (x'_u, \sigma_f(x'_u))\| \\
&= \|(x_u - x'_u, \sigma_f(x_u) - \sigma_f(x'_u)\| \\
&= \max\{\|x_u - x'_u\|_u, \|\sigma_f(x_u) - \sigma_f(x'_u)\|_s\} \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Observese que:

$$\|\sigma_f(x_u) - \sigma_f(x'_u)\|_s \leq lip(\sigma_f)\|x_u - x'_u\|_u \leq \|x_u - x'_u\|_u$$

reemplazando (4.13)

$$\|\pi^*(x_u) - \pi^*(x'_u)\| = \|x_u - x'_u\|_u \Longrightarrow \|\pi^*\| = lip(\pi^*) \leq 1$$

Se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E_u(r) \arrow[r, "\Psi_f^{-1}(\sigma_f)"] & E(r) \arrow[d, "\pi^*"] \\
G(\sigma_f) \arrow[u, "\pi_u"] \arrow[r, "f"] & G(\sigma_f)
\end{tikzcd}$$

$\Longrightarrow f = \pi^* \circ \Psi_f^{-1}(\sigma_f) \circ \pi_u$, recordando $\pi^{*-1} = \pi_u \wedge \pi_u^{-1} = \pi^*$

$\Longrightarrow f^{-1} = \pi_u^{-1} \circ \Psi_f(\sigma_f) \circ \pi^{*-1}$

$\Longrightarrow f^{-1} = \pi^* \circ \Psi_f(\sigma_f) \circ \pi_u \wedge lip(f^{-1}) \leq \underbrace{lip(\pi^*)}_{\leq 1} \cdot \underbrace{lip(\Psi_f(\sigma_f))}_{<1} \cdot \underbrace{lip(\pi_u)}_{=1} < 1$

Por lo tanto $f^{-1}|_{G(\sigma_f)=W_f^u(0,r)}$ Es una contracción.

De esta forma hemos probado el siguiente:

Teorema 4.3 (Teorema de la Variedad Inestable de Tamaño r) *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach. $f : E(r) \longrightarrow E$ homeomorfismo sobre su imagen, tal que: $f \in lip(E(r), E)$ y $f(0) = 0$. Sea $L \in Hip(E)$ tal que $lip(f - L) < \varepsilon < \frac{1-a}{2}$. Entonces $\exists!\ \sigma_f \in \Omega(r)$ tal que:*

(i) $G(\sigma_f) = W_f^u(0, r)$.

(ii) $f^{-1}|_{W_f^u(0,r)}$ *es una contracción.* ■

Nuestro objetivo ahora es ver si podemos conseguir un resultado similar con la variedad estable. Considerando el Teorema (2.6).

Si hacemos $lip(f - L) < \epsilon < \|L^{-1}\|^{-1} \Longrightarrow f = L - (L - f)$ es invertible sobre su imagen. La cual contiene una bola. $E(r')$ con $r' = r(\|L^{-1}\|^{-1} - \epsilon)$. Además $f^{-1} \in lip(E(r'), E) \wedge lip(f^{-1}) \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - lip(f - L)}$. Como $L \in Hip(E)$, entonces $L^{-1} \in Hip(E)$.

También:

$$\begin{aligned} E_s(L^{-1}) &= E_u(L) \\ E_u(L^{-1}) &= E_s(L) \\ a(L^{-1}) &= a(L) \end{aligned}$$

Además: $f^{-1} - L^{-1} = f^{-1}(I - fL^{-1}) = f^{-1}(I - f)L^{-1}$

$$\Longrightarrow lip(f^{-1} - L^{-1}) \leq lip(f^{-1}) \cdot lip(L - f)\|L^{-1}\| \leq \frac{lip(L - f)\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1} - lip(f - L)}.$$

Pero:

$$\frac{lip(f-L)\|L^{-1}\|}{\|L^{-1}\|^{-1}-lip(f-L)}<\epsilon \iff lip(f-L)\|L^{-1}\|<\epsilon\ \|L^{-1}\|^{-1}-\epsilon\ lip(f-L)$$

$$\iff lip(f-L)<\frac{\epsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1}\|+\epsilon}.$$

De esta manera, si tomamos $\epsilon < \min\{\ \frac{1-a}{2}\ ,\ \|L^{-1}\|^{-1}\ \}$ y $lip(f-L)<\min\{\epsilon\ ,\ \frac{\epsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1}\|+\epsilon}\ \}$ tenemos $f^{-1}: E(r')\rightarrow E$ lipschitz con $f^{-1}(0)=0$ y $L^{-1}\epsilon Hip(E)$ con $lip(f^{-1}-L^{-1})<\epsilon$. Luego el teorema anterior se cumple para f^{-1} y L^{-1}.

Luego $\exists\sigma_{f^{-1}}\in lip(E_u(r',L^{-1}),E_s(r',L^{-1}))$ tal que $G(\sigma_{f^{-1}})=W^u_{f^{-1}}(0,r')\wedge$ $(f^{-1})^{-1}|_{W^u_{f^{-1}}(0,r')}$ es contracción como $E_u(r',L^{-1})=E_s(r',L)=E_s(r')\wedge$ $E_s(r',L^{-1})=E_u(r',L)=E_u(r')$.

Definiendo: $\sigma^s_f=\sigma_{f^{-1}}$ tenemos que $G(\sigma^s_f)=W^s_f(0,r')\wedge f|_{W^s_f(0,r')}$ es contracción.

Lo cual mejora el Teorema anterior, por el siguiente:

Teorema 4.4 (VARIEDADES PARA UN PUNTO FIJO) *Sea $(E,\|.\|)$ espacio de Banach $f\in lip(E(r),E)$ tal que $f(0)=0$ Sea $L\in Hip(E)$. Si $\epsilon<\min\{\frac{1-a}{2},\|L^{-1}\|^{-1}\}$ y $lip(f-L)<\min\{\epsilon,\frac{\epsilon\|L^{-1}\|^{-1}}{\|L^{-1}\|+\epsilon}\}$. Entonces:*

(i) $\exists!\ \sigma^u_f\in lip(E_u(r),E_s(r))$ *con* $lip(\sigma^u_f)\le 1\wedge\sigma^u_f(0)=0$, *tal que:*

$$G(\sigma^u_f)=W^u_f(0,r)\wedge f^{-1}|_{W^u_f(0,r)}\ \textit{es una contracción.}$$

(ii) $\exists!\ \sigma^s_f\in lip(E_s(r'),E_u(r'))$ *con* $lip(\sigma^s_f)\le 1\wedge\sigma^s_f(0)=0$, *tal que:*

$$G(\sigma^s_f)=W^s_f(0,r^1)\wedge f|_{W^s_f(0,r')}\ \textit{es una contracción:}$$

$$\textit{en donde: } r'=r(\|L^{-1}\|^{-1}-lip(f-L))\qquad\blacksquare$$

Consideremos el conjunto $F(r)$, definido por:

$$F(r) = \{f \in lip(E(r), E) : \ f(0) = 0 \wedge lip(f - L) < \epsilon\}$$

en donde $L \in Hip(E)$ (fijo), $\epsilon < \min\{\frac{1-a}{2}, \|L^{-1}\|^{-1}\}$. Definimos:

$$\begin{array}{rcl} d : F(r) \times F(r) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f_1, f_2) & \longmapsto & d(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in E(r)} \|f_1(x) - f_2(x)\| \end{array}$$

Con las notaciones anteriores observemos que Γ_f está bien definida $\forall f \in F(r)$ luego:

$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \Omega(r) \times F(r) & \longrightarrow & \Omega(r) \\ (\sigma, f) & \longmapsto & \Gamma(\sigma, f) \end{array}$$

Ya probamos que $\Gamma_f : \Omega(r) \longrightarrow \Omega(r)$ es lipschitz y $lip(\Gamma_f) \leq a + 2\epsilon \forall f \in F(r)$

AFIRMACION: $\Gamma_\sigma \in C[F(r), \Omega(r)]$. En efecto:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_\sigma(f)(x_u) - \Gamma_\sigma(f')(x_u)\|_s &= \|\Gamma_f(\sigma)(x_u) - \Gamma_{f'}(\sigma)(x_u)\|_s \\ &= \|\varphi_f(\sigma) \circ \Psi_f^{-1}(\sigma)(x_u) - \varphi_{f'}(\sigma) \circ \Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u)\|_s \\ &\leq \|\varphi_f(\sigma)(\Psi_f^{-1}(\sigma)(x_u)) - \varphi_f(\sigma)(\Psi_{f'}^{1}(\sigma)(x_u))\|_s \\ &\quad + \|\varphi_f(\sigma)(\Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u)) - \varphi_{f'}(\sigma)(\Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u))\|_s \\ &\leq lip(\varphi_f(\sigma))\|\Psi_f^{-1}(\sigma)(x_u) - \Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u))\|_u + \\ &\quad \|\varphi_f(\sigma)(\Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u)) - \varphi_{f'}(\sigma)(\Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u))\|_s \end{aligned}$$

Acotaremos *los dos sumandos* de la derecha, haciendo $y_u = \Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u)$ tenemos $x_u = \varphi_{f'}(\sigma)(y_u) \Rightarrow \Psi_f^{-1}(\sigma)(x_u) = \Psi_f^{-1}(\sigma) \circ \Psi_{f'}(\sigma)(y_u)$

$$\begin{aligned} \|\varphi_f(\sigma)(\Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u) &- \varphi_{f'}(\sigma)(\Psi_{f'}^{1}(\sigma)(x_u))\|_s = \|\varphi_f(\sigma)(y_u) - \varphi_{f'}(\sigma)(y_u)\|_s \\ &= \|\pi_s \circ f \circ (id, \sigma)(y_u) - \pi_s \circ f' \circ (id, \sigma)(y_u)\|_s \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|f\cdot(y_u,\sigma(y_u)) - f'(y_u,\sigma(y_u))\|_s \\
&\leq \sup_{x\in E(r)} \|f'(x) - f(x)\| = d(f,f') \\
&\leq d(f,f') \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\Psi_f^{-1}(\sigma)(x_u) - \Psi_{f'}^{-1}(\sigma)(x_u)\|_u &= \|\Psi_f^{-1}(\sigma)\circ\Psi_{f'}(\sigma)(y_u) - y_u\|_u \\
&= \|\Psi_f^{-1}(\sigma)\circ\Psi_{f'}(\sigma)(y_u) - \Psi_f^{-1}(\sigma)\circ\Psi_f(\sigma)(y_u)\|_u \\
&\leq lip(\Psi_f^{-1}(\sigma))\|\Psi_{f'}(\sigma)(y_u) - \Psi_f(\sigma)(y_u)\|_u \\
&\leq \|\pi_u\circ f'\circ(y_u,\sigma(y_u)) - \pi_u\circ f\circ(y_u,\sigma(y_u))\|_u \\
&\leq \|f'(y_u,\sigma(y_u)) - f(y_u,\sigma(y_u))\|_u \\
&\leq \sup_{x\in E(r)} \|f'(x) - f(x)\| = d(f,f') \\
&\leq d(f,f') \qquad (4.15)
\end{aligned}
$$

Reemplazando (4.14) y (4.15) la desigualdad discutida

$$\|\Gamma_\sigma(f)(x_u) - \Gamma_\sigma(f')(x_u)\|_s \leq 2d(f,f'), \quad \forall x_u \in E_u(r)$$

$$\Rightarrow \sup_{x_u\in E_u(r)} \|\Gamma_\sigma(f)(x_u) - \Gamma_\sigma(f')(x_u)\|_s \leq 2d(f,f')$$

$$\Rightarrow d(\Gamma_\sigma(f),\Gamma_\sigma(f')) < 2d(f,f'), \forall f,f' \in F(r)$$

$$\Rightarrow \Gamma_\sigma \in lip(F(r),\Omega(r)) \wedge lip(\Gamma_\sigma) \leq 2, \forall\sigma\in\Omega(r)$$

$$\Gamma_\sigma \in C[F(r),\Omega(r)].$$

Por el teorema de la aplicación fija; la función θ que asocia a cada $f \in F(r)$ la función $\sigma_f \in \Omega(r)$ es continua:

$$
\begin{aligned}
\theta : F(r) &\longrightarrow \Omega(r) \\
f &\longmapsto \theta(f) = \sigma_f
\end{aligned}
$$

$$\theta \in C[F(r), \Omega(r)] \text{ y como } G(\sigma_f) = W_f^u(0,r)$$

$$\Longrightarrow f \text{ y } f' \text{ están “muy cerca”}.$$

$$\Longrightarrow W_f^u(0,r) \wedge W_{f'}^u(0,r) \text{ también están “muy cerca”}.$$

es decir, la familia $\left\{W_f^u(0,r)\right\}_{f\in F(r)}$.

varía continuamente con $f \in F(r)$.

Corolário 4.1 *Sea $(E, \|.\|)$ un espacio de Banach, $L \in Hip(E)$. Sea*

$$\Omega(r) = \{\sigma \in lip(E_u(r), E_s(r) : \; lip(\sigma) \leq 1 \wedge \sigma(0) = 0\}$$

$$F(r) = \{f \in lip(E(r), E) : \; f(0) = 0 \wedge lip(f - L) < \epsilon\},$$

donde $\epsilon < \min\{ \dfrac{1-a}{2}, \|L^{-1}\|^{-1} \}$, *y considerese:*

$$\begin{aligned} \Gamma : \Omega(r) \times F(r) &\longrightarrow \Omega(r) \\ (\sigma, f) &\longmapsto \Gamma(\sigma, f) = \Gamma_f(\sigma) \end{aligned}$$

Entonces:

i) $\Gamma_\sigma \in C[F(r), \Omega(r)]$ *y satisface:*

$$d(\Gamma_\sigma(f), \Gamma_\sigma(f')) \leq 2d(f, f'); \quad \forall f, f' \in F(r).$$

ii) La aplicación:

$$\begin{aligned} \theta : F(r) &\longrightarrow \Omega(r) \text{ es continua} \\ f &\longmapsto \theta(f) = \sigma_f \end{aligned}$$

iii) $\left\{W_f^u(0,r)\right\}_{f\in F(r)}$ *es una familia que varía continuamente con f* ■

CONCLUSIONES

1. *Un resultado importante es que los Conjuntos Estables e Inestables de Tamaño r son Variedades, pues se logró probar que es el gráfico de una función σ_f Lipschitziana y con Punto Fijo cero.*

2. *Se ha logrado generalizar las propiedades de las Variedades de Dimensión Finita a Espacios de Dimensión Infinita, Espacio de Banach.*

Bibliografía

[1] Banach, S. Théorie des Operations Linéaires, "Monografie Matematyczne", Vol. 1, Warsaw, 1932.

[2] Chumpitaz Mauro R., Análisis Funcional I, W. H. Editorial S.C.R.L.

[3] Fundamentos de Análisis Moderno, Editorial Reverté, S.A. 1979.

[4] Gutierrez, C. y Sotomayor, J., Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces, 18avo. Colóquio Brasilero de Matemática, 1991.

[5] Hirsch, M. W. y Pugh, C. C., Stable Manifolds and Hiperbolic Sets.

[6] Irwin, M., On Stable Mainfold Theorem. Review Bulletin London Mathematics Soc, 1970.

[7] Kreyszig Erwin, Introductory Functional Analysis With Applications. John Wiley y Sons, 1978.

[8] Mamani, A. P., Dinamica de Operadores Hiperbólicos en Espacios de Banach, Tesis de Magister, 1998.

[9] Krasnov, M. L., Kiselev, G. I. y Makérenko, G. I., Funciones de Variable Compleja, Cálculo Operacional. Teoría de la Estabilidad, Mir Muscú, 1981.

[10] Nitecki, Z. Differentiable Dynamics the M.I.T., 1971.

[11] Palis, F. y Takens, F., Hyperbolicity y Sencitive Chaotic Dynamics at Homoclinic Bifurcations, Springer-Verlag,1995.

[12] Palis, J., On the local structure of Hiperbolic points in Banach Spaces, Anars da Academia Brasilera de Ciencias, Volumen 4 número 3, 1968.

[13] Palis, J. y Mello, W., Geometric Theory of Dinamical Systems. Springer-Verlag, 1982.

[14] Palis, J., Seminario de Sistemas Dinámicos, Río de Janairo, 1971.

[15] Rocha, J., Sistemas Dinámicos, Coloquio de Sistemas Dinámicos de Chile, 1991.

[16] Shub, M., Global Stability of Dimical Systems, Springer-Verlag, 1993.

[17] Sotomayor, J., Licoes de Ecuacoes Diferenciais Ordinárias, Proyecto Euclides, 1989.