

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL OPTIMO PARA UN
PROYECTIL CON GIRO ESTABILIZADO**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRONICO

PRESENTADO POR:

DANIEL ROBERTO CARBONEL OLAZÁBAL

**PROMOCIÓN
1984 - II**

**LIMA – PERÚ
2005**

**DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL OPTIMO PARA UN PROYECTIL
CON GIRO ESTABILIZADO**

SUMARIO

En el CAPITULO I, conoceremos al Giróscopo como elemento sensor para el direccionamiento de vuelo en proyectiles, analizaremos sus características, así como su principio de funcionamiento. Revisaremos algunas aplicaciones aeronáuticas y la importancia que tiene el Giróscopo en la navegación aérea y marítima. Para el caso de naves aéreas, incluso mostramos la Fotografía de un Giróscopo Real, donde se aprecia la disposición mecánica en una estructura de Giróscopo Libre.

En el CAPITULO II, Se hace una descripción y modelado del sistema, misma que emplearemos en el CAPITULO III para su discretización y posterior aplicación (en el CAPITULO IV), para la realización del diseño del sistema de control automático que realizará la variación de velocidad de giro de un proyectil, para mantener estable su dirección ante alguna perturbación que tienda a sacarlo de ruta. Esto permitirá realizar una simulación de la respuesta del sistema completo a una entrada escalón, que nos mostrará el

trabajo de la Ley de Control, en su objetivo de estabilizar el vuelo del proyectil.

Finalmente, anexamos algunas hojas técnicas de empresas que se dedican a la comercialización de Giroscopos, para diferentes aplicaciones comerciales.

ÍNDICE

PRÓLOGO

CAPÍTULO I

FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

1.1	Antecedentes.	3
1.2	Los Giróscopos.	4
1.2.1	Evolución Histórica.	5
1.2.2	Forma en que los encontramos aplicados en la realidad.	7
1.2.3	Propiedades físicas del Giróscopo.	10
	La rigidez ó rigidez giroscópica.	10
	La precesión.	11
1.2.4	Acción Giroscópica.	16
1.3	Aplicaciones aeronáuticas de los los giróscopos.	18
1.3.1	Horizonte Artificial.	19
1.3.2	Indicador de dirección.	21
1.3.3	Indicador de viraje.	23

1.4	Especificaciones de Diseño.	25
-----	-----------------------------	----

CAPÍTULO II

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

2.1	Modelado de la Planta.	28
2.2	Modelado en el Espacio de Estado.	32
2.2.1	Parámetros del sistema.	34
2.3	Linealización del Modelo.	36
2.3.1	Determinación del punto de equilibrio y las Matrices A, B, C y D.	36
2.4	Simulación de la Respuesta del sistema a una entrada en Escalón.	45

CAPÍTULO III

DISCRETIZACIÓN DEL MODELO LINEALIZADO

3.1	Discretización.	49
3.1.1	Determinación del Tiempo de Muestreo.	52
3.1.2	Determinación de la Función de Transferencia en tiempo discreto.	53
3.2	Simulación de la Respuesta del sistema en tiempo discreto a una entrada en Escalón.	53

CAPÍTULO IV

SISTEMA DE CONTROL

4.1	Control Optimo Cuadrático en tiempo discreto.	56
4.1.1	Determinación de la OBSERVABILIDAD del sistema.	56
4.1.2	Determinación de la CONTROLABILIDAD del sistema.	58
4.2	Control Optimo Proporcional Integral.	59
4.2.1	Ecuación de Riccati.	62
4.2.2	Determinación de la Matriz P.	63

4.2.3	Determinación del vector de Ganancias de Retroalimentación (K).	67
4.3	Simulación del Control Optimo Proporcional Integral del proyectil con giro estabilizado.	71
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES		75
APÉNDICE A:	Inercia de Rotación.	79
APÉNDICE B:	Discretización de un sistema oscilador.	84
APÉNDICE C:	Matrices de Ponderación (Q y R).	88
ANEXOS		94
BIBLIOGRAFÍA		99
REFERENCIAS WEB's		100

PRÓLOGO

El propósito de este informe, es el de analizar las ecuaciones que gobiernan a un proyectil y emplear éstas en el diseño de un Sistema de Control Optimo Cuadrático, del Tipo Proporcional Integral en el Tiempo Discreto.

Hoy en día las computadoras han alcanzado tal relevancia en todas las actividades de nuestra vida, que evidentemente su aplicación en el control automático es de trascendental importancia. Es imposible pensar en un sistema de control en tiempo real que no trabaje en forma digital o en forma discreta, es por ello que uno de los objetivos nuestros es el diseño en el Tiempo Discreto, para el logro de nuestros propósitos.

Es importante decir, que no es fácil encontrar información técnica respecto a proyectiles, por que evidentemente éstas informaciones son de estricto carácter confidencial, pero mediante nuestra búsqueda hemos logrado recopilar una cantidad de datos que nos ha permitido alcanzar con éxito nuestro objetivo final.

Al final del trabajo, se encontrará una serie de Referencias Web's, que nos ha permitido conocer un poco más de las aplicaciones de los Giróscopos, así como de la terminología empleada en sistemas aeronáuticos y marítimos, además anexamos unos DATA SHEET de Giroscopos comercializados por algunas empresas que se dedican a éste negocio y que nos da un buen panorama de sus usos.

En la Referencia Web 7, encontramos la descripción de algunos misiles, de los que hemos escuchado muy probablemente en los últimos conflictos Internacionales conocidos por nosotros, pero que no pretende otra cosa sino el dar información genérica de ellos, en lo que se refiere a armamento Aire-Aire y Tierra-Aire.

Esperamos que este trabajo sirva de motivación a otros, para investigar un poco más acerca del Giróscopo, pero por sobre todo a investigar en cuanto a sus aplicaciones y desarrollarlas para que sirvan de material de aprendizaje a los futuros estudiantes de nuestra Facultad.

CAPITULO I

FORMULACION DEL PROBLEMA

1.1 Antecedentes

El objetivo del presente trabajo es mostrar una de las aplicaciones de los giróscopos en naves aéreas y en particular en es el caso del Proyectoil con Giro Estabilizado, aplicando la estrategia de Control Optimo Cuadrático Discreto, para controlar que éste vuelva siempre a su posición de trayectoria deseada a pesar de golpes de aire u otras perturbaciones.

Cada vez que se habla de conflictos bélicos, sale a relucir una basta información de las posibilidades que tiene uno u otro bando en cuanto a sus recursos en armamento. Entre éstos podemos mencionar los proyectiles “Aire-Aire”, “Tierra-Aire”, etc, aunque no es nuestro objetivo detallar las características de los proyectiles en cuanto a poderío ó capacidad explosiva, mostraremos uno de los elementos empleados en ellos que se usa para asegurar su trayectoria, a pesar de elementos externos que traten de desviarlo de ella, llámese fuerzas ó corrientes de aire u otros de ese tipo.

Este elemento es el Giróscopo que incluso se le emplea en gran proporción en aeronaves y embarcaciones de uso comercial y militar.

Es así, que para poder alcanzar con éxito nuestro objetivo de realizar el control de un proyectil con giro estabilizado, debo contar con un elemento sensor que me dé una referencia exacta del posicionamiento que pueda tener el proyectil en cuestión, para de esta manera realizar las correcciones necesarias en ella, si es que se saliese de trayectoria.

Para esto emplearemos el Giróscopo, mismo que describiremos a continuación con algún detalle.

1.2 Los Giróscopos

El nombre de *giróscopo* proviene de las raíces:

gyros, rotación;

scopos, verse o poner de manifiesto;

es decir, dispositivo que pone de manifiesto la rotación o giro de un cuerpo.

Es un artefacto que aprovecha dos propiedades de los cuerpos en rotación que son la *inercia giroscópica* o *rigidez en el espacio* y la *precesión*.

Tal vez en alguna oportunidad hemos realizado experimento de coger una rueda por su eje de giro con las dos manos, si la hacemos girar, veremos que inclinarla resulta ciertamente difícil y más difícil será cuanto más rápido gire la rueda. Además, cuando la rueda gira en su sentido natural, notaremos que también intentará girar con relación a otro eje, un eje vertical imaginario que recorre el sistema de arriba a abajo.

Un gir6scopo es un aparato en el cual una masa que gira velozmente alrededor de su eje de simetría, permite mantener de forma constante su orientaci6n respecto a un sistema de ejes de referencia. Cualquier cuerpo sometido a un movimiento de rotaci6n acusa propiedades girosc6picas, por ejemplo un trompo. Las propiedades girosc6picas fundamentales son: rigidez en el espacio 6 rigidez girosc6pica y precesi6n.

1.2.1 Evoluci6n Hist6rica

Hist6ricamente, el Gir6scopo (cuyo primer prototipo se debe a C.A. Bohnenberger en 1810), consiste en un s6lido r6gido al que se fija al centro de masas de una estructura y que se le permite cualquier rotaci6n en torno a 6sta. El sistema de fuerzas se reduce a una fuerza 6nica que pasa por un punto fijo, es decir, por el centro de masas. Las ecuaciones del movimiento del s6lido libre, indican que el movimiento del s6lido obedece al denominado "Modelo de Poinsot". Si el elipsoide de inercia es de revoluci6n, entonces el eje de rotaci6n del s6lido realiza, en general, una rotaci6n sobre un cono, adem6s cuando la rotaci6n inicial est6 dirigida seg6n el eje de revoluci6n, esta rotaci6n se mantiene y es estable. Una peque1a perturbaci6n en las condiciones iniciales o debida a interacciones con la atm6sfera se traduciría en una rotaci6n pr6xima a una direcci6n fija.

La magnitud de las perturbaciones, medida por la variaci6n del momento cin6tico o de la energía cin6tica, puede reducirse si se dispone de un s6lido girando a alta velocidad, con lo que el gir6scopo representa un

instrumento práctico que pone en evidencia si la rotación del sólido permanece constante respecto a la tierra o por el contrario, evoluciona o gira respecto a ésta, evidenciando con ello su rotación.

El giróscopo de Foucault funciona como una brújula y como un sextante, pues dado que su eje gira en torno al eje terrestre, evidencia la dirección del mismo. El ángulo que forma dicho eje con el plano horizontal determina la latitud y la proyección de ella sobre dicho plano representa la dirección N-S.

Sobre el primer modelo de giróscopo, que presenta como inconveniente la lentitud de las observaciones necesarias para obtener información. En 1890 G.M. Hopkins construyó el primer giróscopo cuyo rotor estaba movido por un motor eléctrico, compensando de esta forma el amortiguamiento de su movimiento.

En 1908 el Dr. H. Anschutz patentó la primera brújula giroscópica que apuntaba al norte, jugando con las propiedades del giróscopo y el amortiguamiento viscoso.

También en 1908, el norteamericano Elmer Sperry patentó otra brújula giroscópica de configuración diferente pero que también buscaba el norte. Poco después de esto, el mismo Sperry, que ya había formado la "Sperry Gyroscope Company" donde desarrolló el estabilizador giroscópico para buques. Desde entonces y hasta 1970 (cuando fue vendida a la British Aerospace) la compañía había desarrollado multitud de aplicaciones de los giróscopos, como los pilotos automáticos, etc.

1.2.2 Forma en que los encontramos aplicados en la realidad

Como ya se ha mencionado, los giróscopos son sistemas mecánicos cuyo elemento fundamental es un sólido rígido de revolución con un punto fijo que gira con gran velocidad. El sistema de sustentación es tal que una vez arrancado y llevado a su velocidad de giro nominal, el momento que se ejerce sobre el eje del giróscopo es nulo.

Existen en Ingeniería muchas aplicaciones del giróscopo, como por ejemplo en los instrumentos de control direccional, así como en los sistemas de guía por inercia, en los pilotos automáticos de aviones y en los sistemas de control de altitud en las naves espaciales. El giróscopo es parte esencial de ellos, él está montado en soportes sin fricción, como se muestra en la fotografía (Figura 1.1), tal giróscopo, llamado giróscopo libre, está libre de momentos externos aplicados a la base, y por lo tanto retiene la orientación mientras la base (o vehículo que lo contiene) puede inclinarse hacia diversos ángulos.



Figura 1.1: Forma real de un Giroscopio libre

Otras aplicaciones del gir6scopo incluyen el girocomp6s (comp6s girosc6pico) y los instrumentos de estabilizaci6n de veh6culos. En el girocomp6s, el arreglo del gir6scopo es tal que la rotaci6n de la Tierra hace que 6l funcione haciendo que el eje de giro apunte siempre hacia el Norte.

Los gir6scopos de la Sonda de NASA "Gravity Probe B" (GPB's) son los objetos m6s redondos que se hayan fabricado, ver fotograf6a siguiente (Figura 1.2). Los ingenieros del Centro de Vuelos Espaciales Marshall de la NASA (NASA Marshall Space Flight Center) los rectificaron hasta una dimensi6n que tiene una tolerancia de 0.01 micras (menor de 40 veces el di6metro de un 6tomo) de esfericidad perfecta.

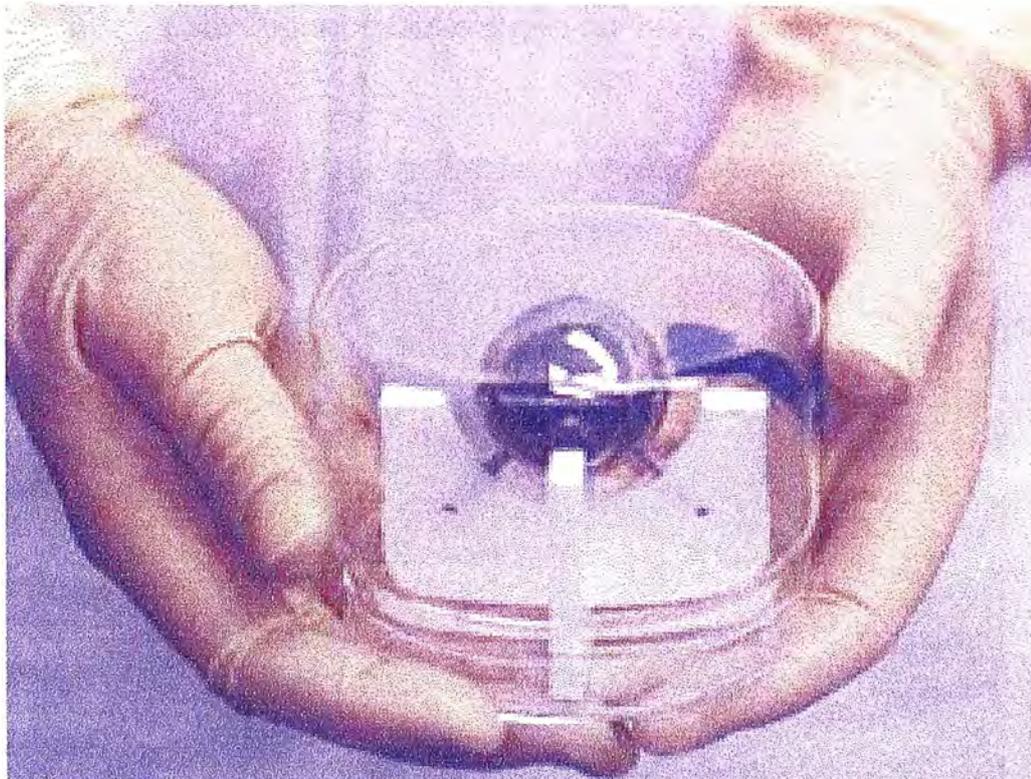


Figura 1.2: Los ingenieros del Centro de Vuelos Espaciales Marshall de la NASA los rectificaron hasta obtener una esfericidad casi perfecta, para evitar que los gir6scopos oscilen por s6 solos, sin la influencia del gravitomagnetismo



Figura 1.3: Vista del encapsulado que contiene al rotor y al rotor mismo

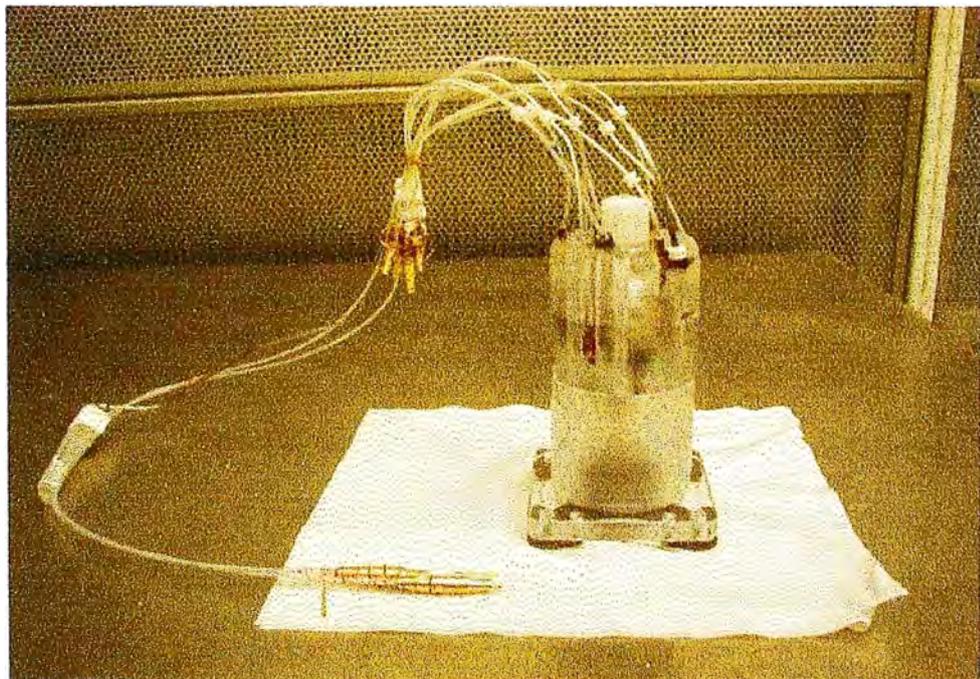


Figura 1.4: Ensamblaje completo, que incluye el encapsulado que contiene al rotor con el rotor mismo y las conexiones eléctricas.

En las Figuras 1.3 y 1.4 anteriores, se observaron (respectivamente), al rotor con el encapsulado que lo contiene y el ensamblaje completo del Giróscopo empleado en la sonda "Gravity Probe B".

1.2.3 Propiedades físicas del Giróscopo

A continuación describiremos las propiedades físicas que caracterizan al Giróscopo en sus aplicaciones, como elemento sensor, estos son: *la Rigidez Giroscópica y la Precesión.*

a) La rigidez ó rigidez giroscópica

La rigidez en el espacio se puede explicar por la 1ª Ley del Movimiento de Newton, que dice: "Un cuerpo en reposo tiende a estar en reposo, y un cuerpo en movimiento tiende a permanecer en movimiento en línea recta, salvo que se le aplique una fuerza externa". Siempre y cuando tenga suficiente velocidad, la fuerza de inercia que genera el trompo la hace girar erguida incluso si inclinamos la superficie sobre la cual gira (Figura 1.5), ofreciendo una gran resistencia a los intentos de volcarla o forzar su inclinación.

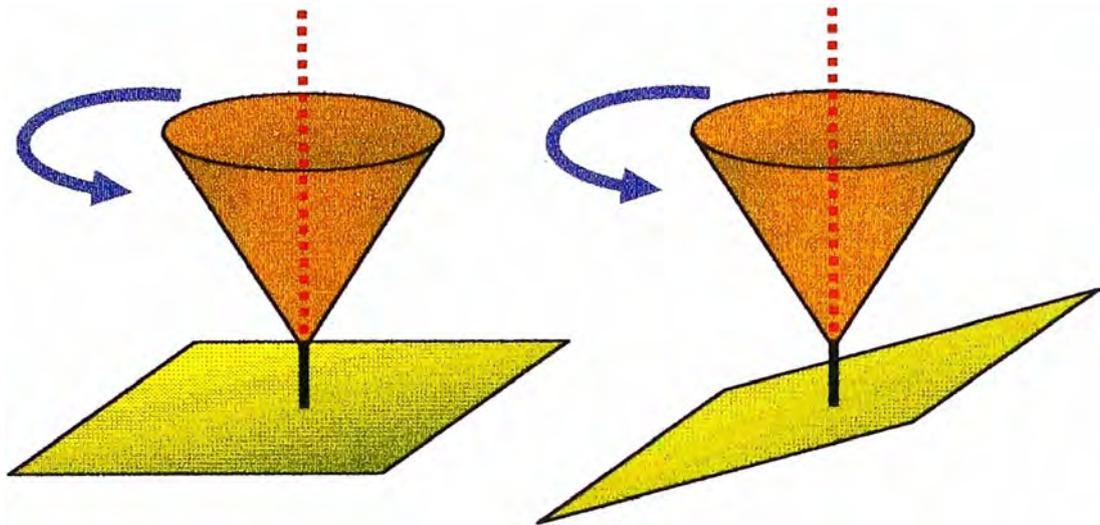


Figura 1.5: A pesar de inclinar el plano en que gira el trompo, dicho trompo mantiene su posición erguida

Un segundo ejemplo es una bala de fusil, que al girar en torno a su eje durante el vuelo, presenta inercia giroscópica y tiende a mantener una trayectoria más recta que si no girara. Y un tercer y último ejemplo es el que alguna vez hemos observado en una carrera de motos, ya que éstas al tomar una curva, se inclinan para girar en dicha curva.

Pues bien, esto es el fundamento del giroscopio, que es uno de los objetos más complicados de describir en Mecánica Clásica.

Por lo anteriormente manifestado, podemos concluir que, **la rigidez giroscópica** es directamente proporcional a la velocidad de giro del rotor.

b) La precesión

La segunda propiedad, precesión, es la respuesta del objeto cuando se le aplica una fuerza deflectiva en algún borde. Volviendo al ejemplo del trompo, es la reacción de ésta cuando en su rápido giro la tocamos en

uno de sus bordes. El resultado de esta reacción es como si el punto de aplicación de la fuerza estuviera desplazado 90° en el sentido de giro del objeto (Figura 1.6). La precesión es inversamente proporcional a la velocidad de giro (a mayor velocidad menor precesión) y directamente proporcional a la cantidad de fuerza de deflexión aplicada.

Este movimiento es causado a la vez por el momento angular del cuerpo en rotación y por la fuerza aplicada.

Otro ejemplo sencillo de precesión se puede observar en un aro infantil. Al hacer rodar el aro en trayectoria recta, para hacer que el aro dé la vuelta a una esquina, no se aplica una presión a la parte delantera o trasera del aro, como podría esperarse, sino sobre la parte superior.

Esta presión, aunque se aplica en torno a un eje horizontal, no hace que el aro se caiga, sino que realice un movimiento de precesión en torno al eje vertical, con lo que el aro da la vuelta y sigue rodando en otra dirección.

Otro ejemplo es el del motociclista mencionado en el punto anterior (Rigidez Giroscópica), el motociclista con sólo inclinarse ya toma la curva sin necesidad de girar el timón. Sin embargo esto sólo ocurre cuando las ruedas de la moto están girando a gran velocidad, ya que si la moto fuera lenta o estuviera en reposo, al inclinarse se caerían al suelo tanto moto como motociclista.

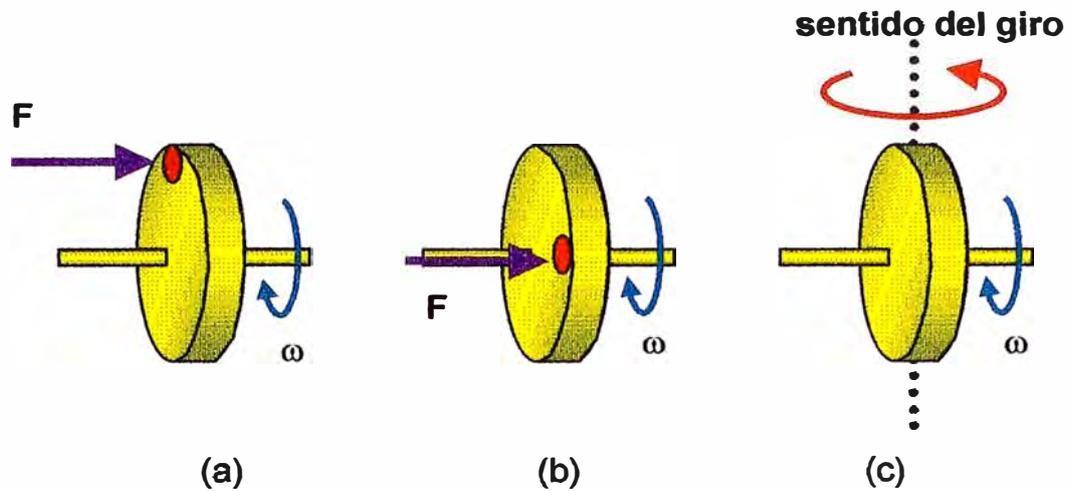


Figura 1.6: (a), se aplica una fuerza F en el punto indicado.
 (b), el rotor reacciona como si la fuerza se hubiese aplicado en otro punto.
 (c), el giroscopio haría el movimiento indicado.

Por ello, nuevamente reafirmamos que el valor de la precesión es directamente proporcional al valor del par perturbador e inversamente proporcional a la velocidad de giro del elemento rotor.

Un giróscopo libre típico (Figura 1.7) es una rueda maciza montada sobre dos pares cojinetes concéntricos y girados 90° en el espacio de modo que es posible hacer girar la rueda, o volante, en cualquier plano. Es decir, un solo giróscopo libre puede medir la rotación con respecto a dos ejes perpendiculares, como para nuestro ejemplo, los ángulos θ y ϕ , cuya información en señales que se pueden interpretar, serán dadas por los transductores, que pueden ser del tipo óptico, eléctrico o mecánico (entre los más comunes).

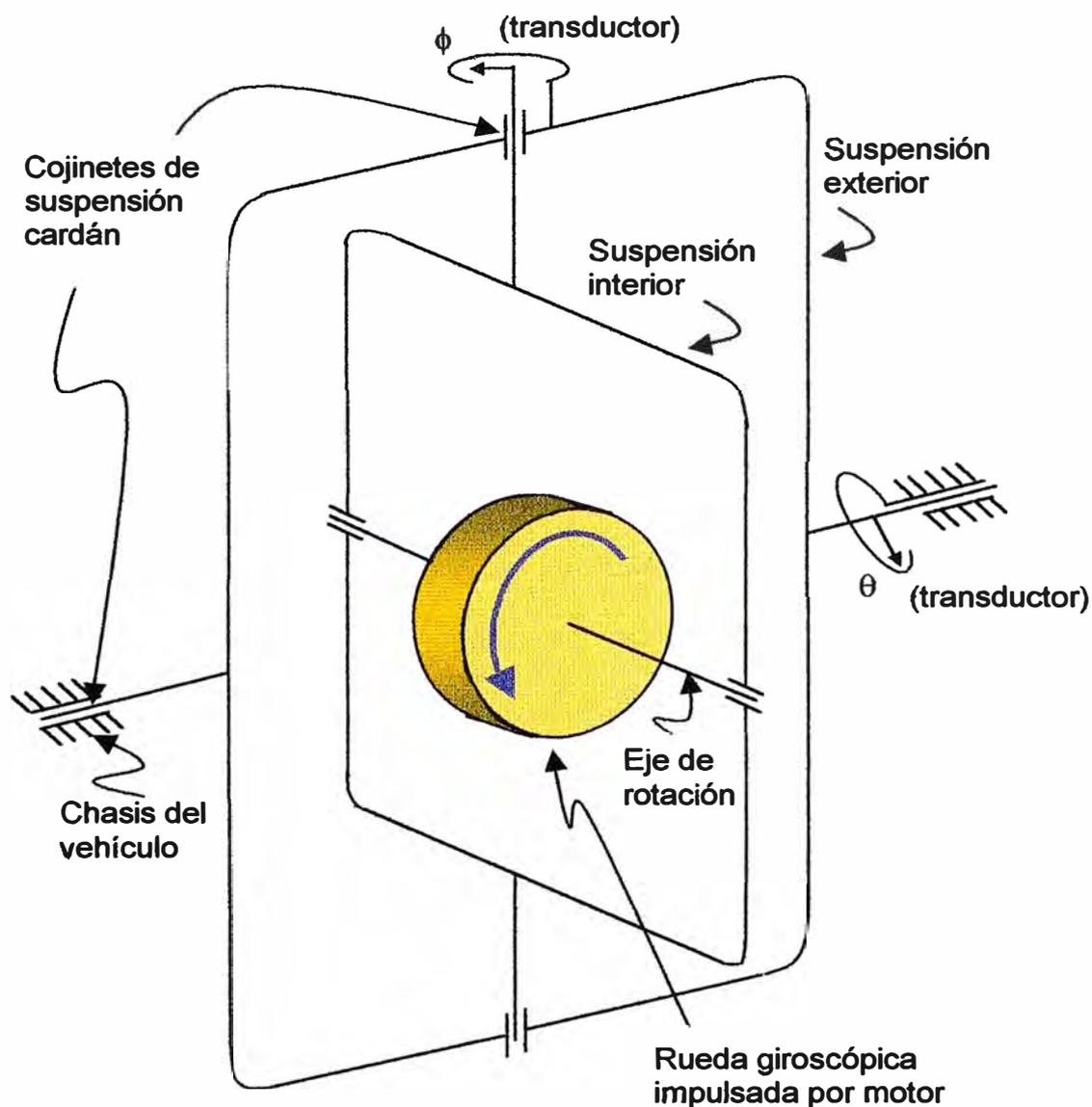


Figura 1.7: Giróscopo libre, con eje de dos posiciones

Entonces, basándose en este principio, los giroscopios son capaces de medir el ángulo de giro de un objeto.

Pero, conozcamos un poco más de los giroscopios, como por ejemplo de su instalación mecánica, en la Figura 1.8., se muestra cómo es que se ubica el disco giroscópico en el interior del proyectil, el giróscopo va en un reservorio sellado, lleno en su interior de un líquido viscoso, que sirve de

amortiguador. El líquido viscoso, que normalmente es silicona líquida, separa la pared interior del reservorio principal del que contiene al giróscopo (el que contiene al disco giroscópico es normalmente un cilindro de nylon).

En la Figura 1.8, no se muestran los transductores, para no densificar demasiado el detalle de la ubicación física del Giróscopo. En esta figura debe notarse las posibilidades de juego (movimiento), que tiene el Giróscopo, para su aplicación en la determinación de cualquier desviación lateral que pueda tener el proyectil o la nave (donde se aplique).

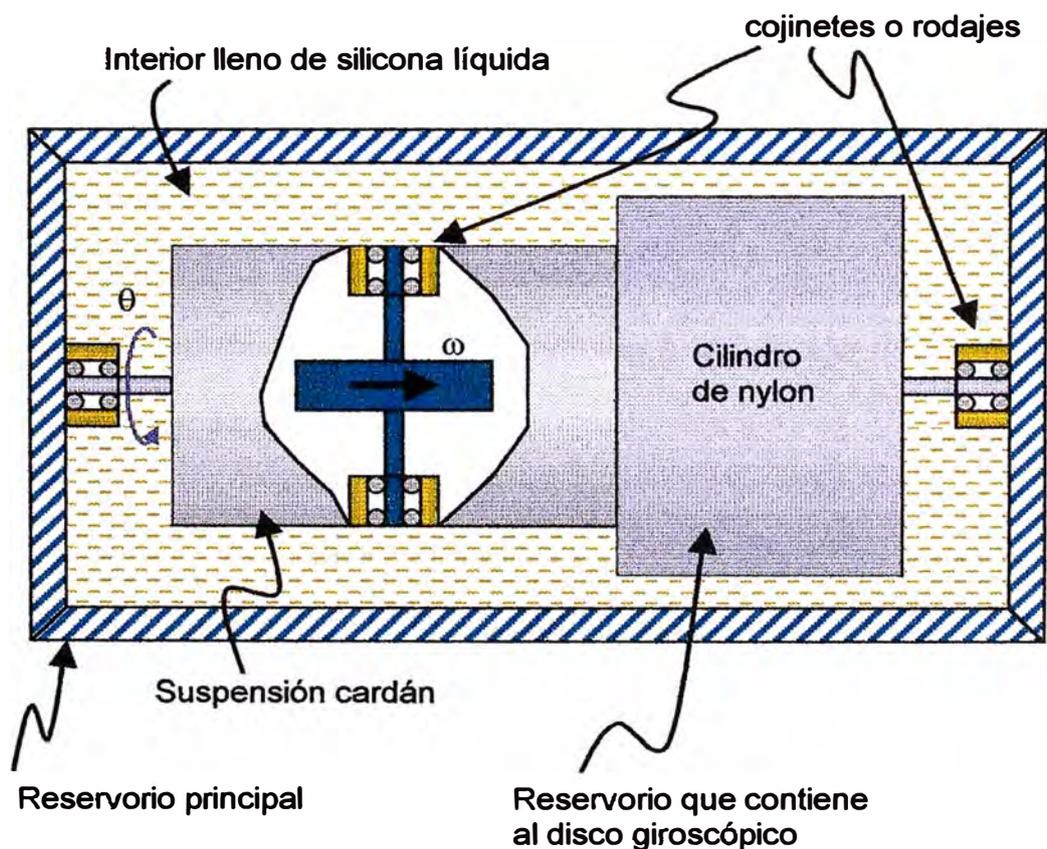


Figura 1.8: Instalación mecánica de un Giróscopo

1.2.4 Acción giroscópica

El movimiento giroscópico se presenta cuando el eje en torno al cual el cuerpo gira, rota asimismo en torno a otro eje. Consideremos el rotor simétrico de la Figura 1.9, que gira en torno al eje z a una alta velocidad p . Si se aplica un par de torsión M en torno al eje x que atraviese el rotor, por ejemplo las fuerzas iguales y opuestas F , entonces, la flecha del rotor no girará en torno al eje x , como sería el caso si ésta no girara; mas bien la flecha rotaría en el plano x - z en torno al eje y , a un ritmo relativamente lento pero constante φ . Así también a la inversa, si el rotor tuviera una rotación constante φ en torno al eje y y en tanto el rotor gira con velocidad p en torno al eje z , entonces el rotor desarrollará el par de torsión giroscópica M contra los soportes.

Estos resultados pueden ilustrarse empleando las ecuaciones de la segunda ley de Newton, que se aplica también a la rotación de partículas y cuerpos rígidos (ver Apéndice A):

$$T_x = J_{xx} \dot{\omega}_x - J_{yy} \Omega_z \omega_y + J_{zz} \Omega_y \omega_z \quad (1.1)$$

$$T_y = J_{yy} \dot{\omega}_y - J_{zz} \Omega_x \omega_z + J_{xx} \Omega_z \omega_x \quad (1.2)$$

$$T_z = J_{zz} \dot{\omega}_z - J_{xx} \Omega_y \omega_x + J_{yy} \Omega_x \omega_y \quad (1.3)$$

Donde para nuestro caso, se sabe que:

$$\Omega_x = 0, \omega_z = p \quad y \quad \dot{\omega}_z = \dot{\omega}_y = 0$$

Por lo que reemplazando en (1), obtenemos:

$$T_x = J_{xx} \dot{\omega}_x + J_{zz} \Omega_y \rho = M \quad (1.4)$$

$$T_y = -J_{zz} \Omega_x \rho \quad (1.5)$$

$$T_z = -J_{xx} \Omega_y \omega_x + J_{yy} \Omega_x \omega_y \quad (1.6)$$

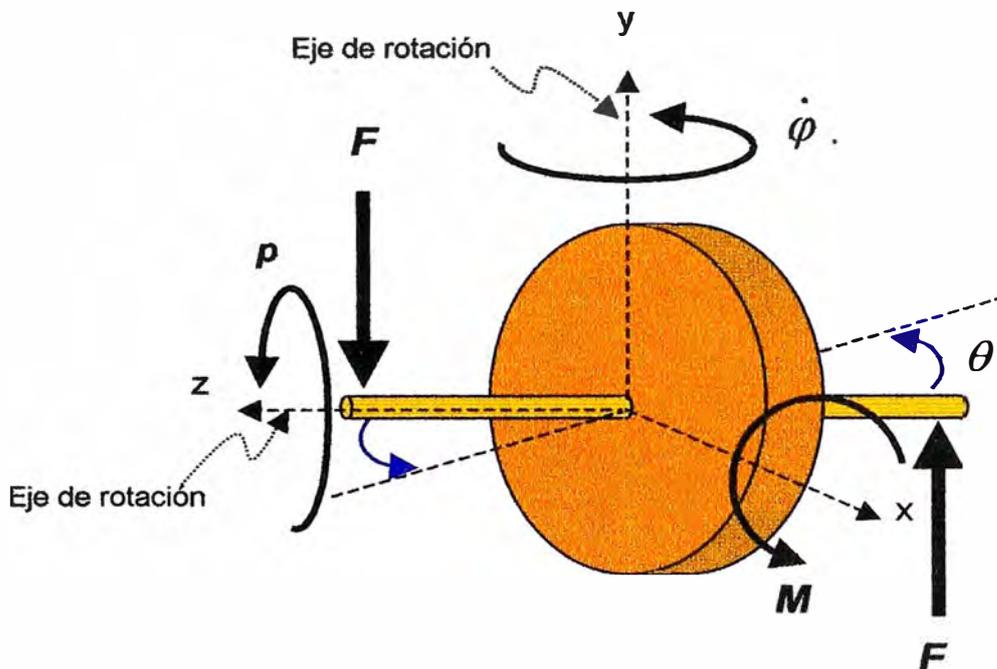


Figura 1.9: Rotor simétrico de rotación

T_y y T_z son ambas cero, ya que el eje y y el eje z están libres de cualquier par de torsión. En consecuencia, $\Omega_x = 0$, como se estableció antes.

Asimismo, $\dot{\omega}_x = \omega_x = 0$, por lo tanto:

$$J_{zz} \Omega_y \rho = M = J_{zz} \dot{\varphi} \rho \quad (1.7)$$

El rotor simétrico demuestra la acción giroscópica para este caso simple en el que el eje de giro es perpendicular al eje de precesión (ver Apéndice B).

1.3 Aplicaciones aeronáuticas de los giróscopos

A la hora de fabricar un giróscopo (Figura 1.10), se procura que el elemento giratorio este construido con un material pesado o de muy alta densidad, con su masa repartida de forma uniforme y que además rote a gran velocidad con el mínimo posible de resistencia por fricción.

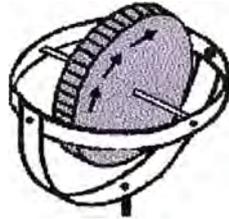


Figura 1.10: Giróscopo

Debido a sus cualidades, los giróscopos proporcionan unos planos fijos de referencia, planos que no deben variar aunque cambie la posición la nave aérea. Gracias a esto, el piloto dispone de instrumentos que le proporcionan la posición espacial de la nave con respecto a distintos ejes o planos de referencia.

Estos instrumentos son:

- Horizonte artificial; también llamado "Indicador de actitud",
- Indicador de giro y virajes denominado también "bastón y bola" (por su antigua constitución), e
- Indicador de dirección.

Mencionemos algo sobre cada uno de ellos.

1.3.1 Horizonte Artificial

El horizonte artificial, también llamado indicador de actitud, es un instrumento que muestra la actitud de la nave aérea respecto al horizonte. Su función consiste en proporcionar al piloto una referencia inmediata de la posición del avión en alabeo y profundidad; es decir, si está inclinado lateralmente, con el morro arriba o abajo, o ambas cosas, con respecto al horizonte. La incorporación del horizonte artificial a los aviones ha sido fundamental para permitir el vuelo en condiciones de visibilidad reducida o nula.

Este instrumento opera en base a una de las propiedades del Giróscopo, concretamente la de rigidez en el espacio.

El horizonte artificial consta de un giróscopo de rotación horizontal montado sobre un sistema de ejes que le confieren tres grados de libertad (montaje universal ó también llamado Giróscopo Libre), dentro de una caja

hermética. Este giróscopo tiene fijada una esfera visible, con una barra horizontal de referencia a la altura del eje de giro, por encima de la cual la esfera es de color azul (cielo) y por debajo marrón (tierra).

Este aparato está conectado al sistema de succión, necesario para producir la corriente de aire que incide sobre los alabes del rotor y hace girar este a unas 16.000 r.p.m. aproximadamente.

En el frontal de la caja, se fija un dial de presentación con un avioncito en miniatura y una escala graduada en el semicírculo superior.

Cuando la nave se incline hacia un lado u otro, suba o baje el morro, o cualquier otro movimiento combinado, la caja y su dial con el avioncito en miniatura realizará el mismo movimiento. Pero por la propiedad de rigidez en el espacio, el giróscopo debe permanecer siempre paralelo al horizonte, y con él su esfera visible con la barra horizontal. De esta manera se proporciona al piloto la referencia del horizonte y la actitud del avión respecto al mismo.

La relación del avión miniatura con el horizonte de referencia es la misma que la de la nave con el horizonte real (Figura 1.11).

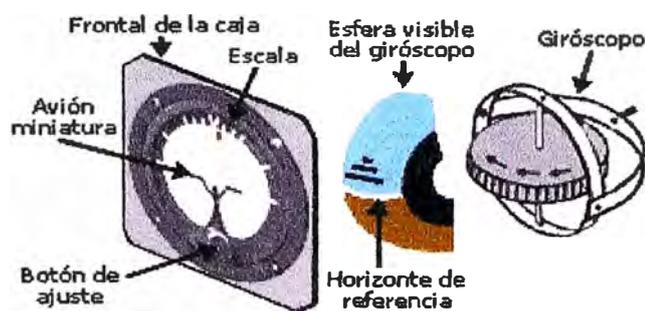


Figura 1.11: Horizonte Artificial

1.3.2 Indicador de dirección

También llamado direccional giroscópica o direccional, este instrumento proporciona al piloto una referencia de la dirección del avión, facilitándole el control y mantenimiento del rumbo.

Antes de la aparición del indicador de dirección, los pilotos navegaban sirviéndose de la brújula y a la vista de las proezas narradas, con bastante eficiencia. Pero la brújula es un instrumento que puede dar lugar a numerosos errores, exigiendo mucha atención y una lectura adecuada, pues son muchos los efectos que alteran su funcionamiento y dan lugar a interpretaciones erróneas. Por ejemplo, no es muy fácil realizar un giro con precisión en base a la brújula, particularmente si el aire es turbulento.

Sin embargo, el indicador de dirección es inmune a las causas que hacen dificultosa la lectura de la brújula, lo que le hace el instrumento adecuado para mantener el control direccional del avión o su rumbo, pues sus indicaciones son más precisas y fiables que las de la brújula. Este instrumento proporciona una indicación de dirección estable y relativamente libre de errores.

Su funcionamiento se basa en la propiedad de rigidez en el espacio que tienen los giroscopos.

Este instrumento consiste en un giróscopo (ver Figura 1.12) cuyo eje de rotación es vertical, acoplado al cual se encuentra una rosa de rumbos graduada de 0° a 359°. La caja del instrumento tiene incrustado en su frontal visible un pequeño avión montado verticalmente cuyo morro siempre apunta al rumbo del avión. Asimismo, dispone de un botón giratorio para ajustar el rumbo.

Al efectuar un cambio de dirección, la caja del instrumento se mueve al unísono con el avión, pero el giróscopo debido a su rigidez en el espacio continua manteniendo la posición anterior. Este desplazamiento relativo de la caja respecto del eje vertical del rotor se transmite a la rosa de rumbos, haciéndola girar de forma que muestre en todo momento el rumbo, enfrentado al morro del avión de miniatura.

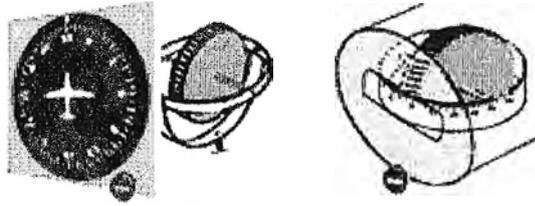


Figura 1.12: Indicador de Dirección

1.3.3 Indicador de viraje

Otra función del indicador de viraje consiste en servir como fuente de información de emergencia en caso de avería en el indicador de actitud (horizonte artificial), aunque este instrumento no dé una indicación directa de la actitud de alabeo del avión. Conviene tener claro que el Horizonte Artificial señala la inclinación (alabeo) del avión en grados mientras que el Indicador de Viraje indica en grados el régimen de viraje (son dos cosas distintas).

Su funcionamiento se basa en la propiedad giroscópica de precesión.

Este instrumento está constituido por un giróscopo, cuyo rotor es accionado por un sistema de vacío o eléctricamente. El giróscopo se monta por lo general en un ángulo de 30° , de forma semirígida, lo cual le permite girar libremente sobre los ejes lateral y longitudinal, pero teniendo restringido el giro alrededor del eje vertical.

Un muelle acoplado al giróscopo (Figura 1.13), mantiene a éste vertical cuando no se le aplica ninguna fuerza deflectiva.

Adicionalmente, un mecanismo de amortiguación impide las oscilaciones excesivas del indicador.

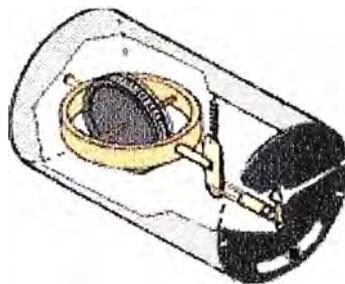


Figura 1.13: Indicador de Viraje

Cuando la nave gira alrededor de su eje vertical, la deflexión aplicada al giróscopo hace que éste precesione, lo cual se traduce en el movimiento del indicador, es decir que el avión en miniatura que aparece en el dial del instrumento se ladee hacia la izquierda o hacia la derecha. A medida que la tasa de giro se incrementa también lo hace la fuerza de precesión. Cuanto más rápido sea el viraje, mayor será la precesión y el ladeo del avión miniatura (Figura 1.14).



Figura 1.14: Principio de funcionamiento del Indicador de Viraje

1.4 Especificaciones del dise1o

Para poder alcanzar con 6xito nuestro objetivo de realizar el control de un proyectil con giro estabilizado, como ya se mencion6, debo contar con un elemento sensor que me d6 una referencia exacta de posicionamiento que pueda tener el proyectil en cuesti6n, para de esta manera realizar las correcciones necesarias en ella.

El control del proyectil con giro estabilizado, es una aplicaci6n del gir6scopo en la gui1a direccional de un proyectil.

As6, cuando un proyectil esta sujeto a una fuerza de resistencia aerodin1mica (a la que llamaremos R), que es opuesta a la velocidad v con que viaja, supondremos que dicho proyectil atraviesa un punto A , que se encuentra a r unidades delante del centro de masas G (como muestra la Figura 1.15).

Para estabilizar al proyectil, se le dá a éste un giro constante p , que lo hace rotar a un ritmo $\dot{\varphi}$ en torno al eje de velocidad (como muestra el diagrama de cuerpo libre, Figura 2.1, del capítulo siguiente).

Con estas condiciones determinaremos un modelo que pueda emplearse para conocer el comportamiento transitorio del proyectil durante un instante corto de su trayectoria de vuelo.

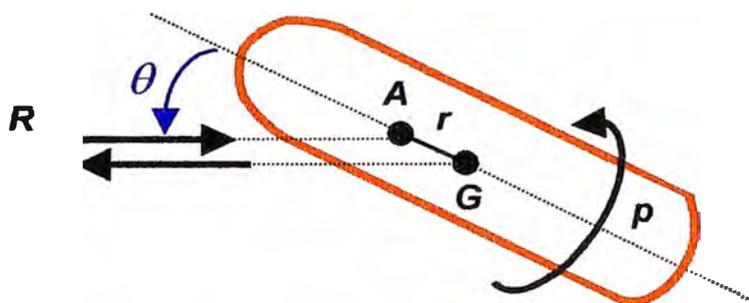


Figura 1.15: Proyectil sometido a una fuerza de resistencia aerodinámica R

Finalmente, determinaremos la expresión de la velocidad mínima de giro en la que el proyectil se estabilizará en su giro (con $\theta = 0$) a una precesión de régimen permanente ($\dot{\varphi} = 0$).

En cuanto a la obtención final de la ley de control, para la aplicación del sistema de Control Óptimo Cuadrático, que controle la velocidad de giro del proyectil, dicha señal de control manejará al elemento final de control, que asegurará los cambios de velocidad necesarios, de acuerdo a la magnitud de las perturbaciones (que hará variar proporcionalmente la

magnitud del ángulo θ). Este elemento final de control son motores que manejarán la posición de los alerones laterales, ubicados en los estabilizadores del proyectil (Figura 1.16 y Figura 1.17).

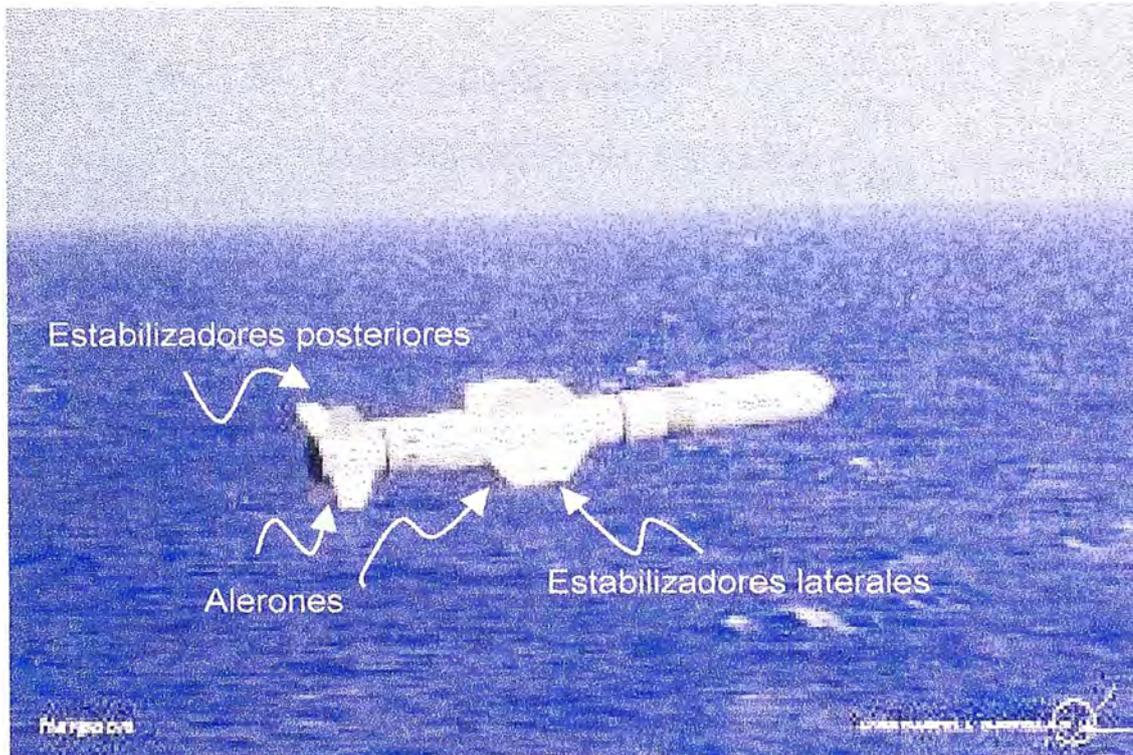


Figura 1.16: Vista de los estabilizadores en un proyectil, en ellas se encuentran los alerones que de acuerdo a su posición provocarán el giro del proyectil.

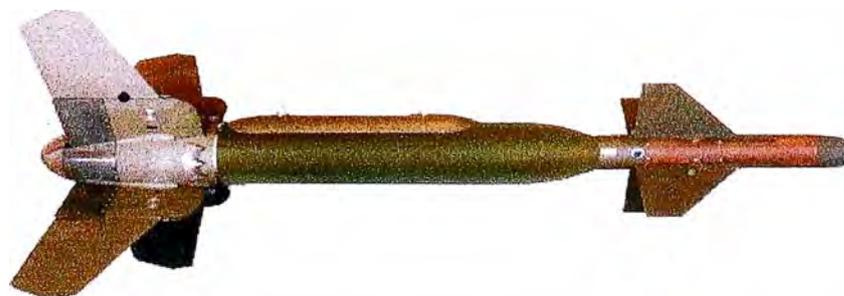


Figura 1.17: Vista de otro proyectil, con características similares al anterior

CAPITULO II

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA

2.1 Modelado de la Planta

Así, para llegar a una solución a nuestros requerimientos debemos considerar el diagrama de cuerpo libre mostrado a continuación (Figura 2.1)

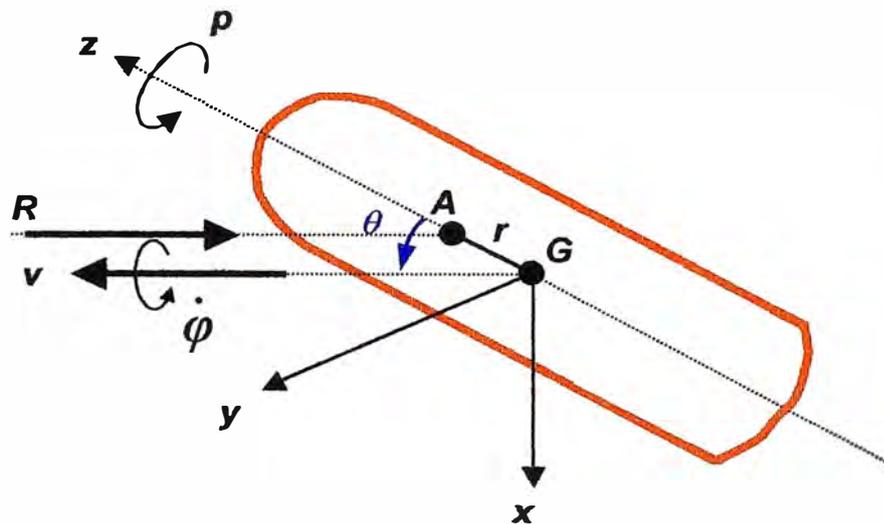


Figura 2.1: Diagrama de cuerpo libre del proyectil de giro estabilizado

Como se ilustra, el eje de velocidad esta contenido en el plano y-z.

Por ello, el par de torsión total del proyectil (en el centro de masa), es:

$$T = T_x i + T_y j + T_z k \quad (2.1)$$

pero para nuestra configuración $T_y = T_z = 0$ y además: $T_x = R r \operatorname{sen} \theta$

Por ello:
$$T = R r \operatorname{sen} \theta i \quad (2.2)$$

Luego, para cualquier punto fijo de rotación, existe un conjunto de direcciones de los ejes unidas al cuerpo en ese punto; éstos se denominan los “ejes principales”, para los cuales los productos de inercia son cero. Si los ejes x-y-z coinciden con los ejes principales, entonces podemos aplicar las ecuaciones A.14 (Apéndice A), mostradas a continuación:

$$T_x = J_{xx} \dot{\omega}_x - J_{yy} \Omega_z \omega_y + J_{zz} \Omega_y \omega_z \quad (2.3)$$

$$T_y = J_{yy} \dot{\omega}_y - J_{zz} \Omega_x \omega_z + J_{xx} \Omega_z \omega_x \quad (2.4)$$

$$T_z = J_{zz} \dot{\omega}_z - J_{xx} \Omega_y \omega_x + J_{yy} \Omega_x \omega_y \quad (2.5)$$

Al recordar que: Ω_x, Ω_y y Ω_z son los componentes de la velocidad angular de las coordenadas x-y-z, además que: ω_x, ω_y y ω_z son los componentes de la velocidad angular del proyectil, podemos determinar que:

$$\Omega_x = \omega_x = -\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_x = -\ddot{\theta} \quad (2.6)$$

$$\Omega_y = \omega_y = \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \quad \Rightarrow \quad \dot{\omega}_y = \ddot{\varphi} \operatorname{sen} \theta + \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta & \Rightarrow \omega_z = \dot{\varphi} \cos\theta + \rho \\ & \Rightarrow \dot{\omega}_z = \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} \cos\theta + \rho \right) \end{aligned} \quad (2.8)$$

Es así, que al sustituir las ecuaciones (2.6), (2.7) y (2.8) en las ecuaciones (2.3), (2.4) y (2.5), notando que debido a la simetría:

$J_{xx} = J_{yy} = J_T$ y sea: $J_{zz} = J$, obtenemos:

$$T_x = -J_T \left(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \sin\theta \cos\theta \right) + J_{zz} \dot{\varphi} \sin\theta \left(\dot{\varphi} \cos\theta + \rho \right) \quad (2.9)$$

$$T_y = J_T \left(\ddot{\varphi} \sin\theta \right) + J_{zz} \dot{\theta} \left(\dot{\varphi} \cos\theta + \rho \right) \quad (2.10)$$

$$T_z = J_{zz} \frac{d}{dt} \left(\dot{\varphi} \cos\theta + \rho \right) = J_{zz} \left(\ddot{\varphi} \cos\theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \sin\theta \right) \quad (2.11)$$

Luego, las ecuaciones obtenidas son las que nos servirán para poder realizar el control del proyectil estabilizando el giro del mismo, aplicando un Giróscopo y a él un transductor que puede ser optoelectrónico (optosensor), me pueda brindar la información de cualquier perturbación en el movimiento normal del proyectil, esto es, estabilizar la trayectoria del proyectil.

Pero de la configuración de trabajo del sistema, recordemos que:

$T_y = T_z = 0$ y además: $T_x = R r \sin\theta$, por lo que en (2.9):

$$R r \operatorname{sen} \theta = -J_T \left(\ddot{\theta} + \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \right) + J_{zz} \dot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \rho \right)$$

$$\therefore \ddot{\theta} = -\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta - \frac{R r \operatorname{sen} \theta}{J_T} + \left(\frac{J_{zz}}{J_T} \right) \left(\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta + \dot{\varphi} \rho \operatorname{sen} \theta \right) \quad (2.12)$$

En (2.10):

$$J_T \left(\ddot{\varphi} \operatorname{sen} \theta \right) + J_{zz} \dot{\theta} \left(\dot{\varphi} \cos \theta + \rho \right) = 0 \quad (2.13)$$

$$\therefore \ddot{\varphi} = - \left(\frac{J_{zz}}{J_T} \right) \cdot \left(\frac{\dot{\varphi} \cos \theta + \rho}{\operatorname{sen} \theta} \right) \dot{\theta} \quad (2.14)$$

En (2.11):

$$J_{zz} \left(\ddot{\varphi} \cos \theta - \dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \right) = 0 \quad (2.15)$$

$$\therefore \ddot{\varphi} = \frac{\dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (2.16)$$

Pero (2.14) = (2.16), por lo que igualando:

$$- \left(\frac{J_{zz}}{J_T} \right) \cdot \left(\frac{\dot{\varphi} \cos \theta + \rho}{\operatorname{sen} \theta} \right) \dot{\theta} = \frac{\dot{\varphi} \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} \quad (2.17)$$

De donde desarrollando obtenemos:

$$-J_{zz} \dot{\varphi} \cos^2 \theta - J_{zz} \cdot \rho \cdot \cos \theta = J_T \dot{\varphi} \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$-J_{zz} \cdot p \cdot \cos\theta = \dot{\varphi} [J_T (1 - \cos^2\theta) + (J_{zz} \cos^2\theta)] \quad (2.18)$$

$$\therefore \dot{\varphi} = \frac{\left(\frac{J_{zz}}{J_T}\right) p \cos\theta}{\left[1 - \left(\frac{J_{zz}}{J_T}\right)\right] \cos^2\theta - 1} \quad (2.19)$$

2.2 Modelado en el Espacio de Estado

Se deberán asignar los componentes de la velocidad angular ω_x , ω_y y ω_z del elemento de masa (proyectil) como las Variables de Estado. Sin embargo con base a todas las ecuaciones

anteriores, $\dot{\varphi}$ y $\dot{\theta}$ parecen ser un conjunto de Variables de Estado independientes que describen el comportamiento del proyectil. Así, de las Ecuaciones (2.12), (2.14) y (2.16), tenemos:

$$\frac{d}{dt} \dot{\theta} = \frac{-Rr \operatorname{sen}\theta}{J_T} - \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta + \frac{J_{zz}}{J_T} \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta (\dot{\varphi} \cos\theta + p) \quad (2.20)$$

$$\frac{d}{dt} \dot{\varphi} = -\frac{J_{zz}}{J_T} \frac{\dot{\theta} \left(\dot{\varphi} \cos\theta + p \right)}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{\dot{\theta} \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} \quad (2.21)$$

Sin embargo, de la ecuación (2.19):

$$\dot{\varphi} = \frac{\left(\frac{J_{zz}}{J_T}\right) p \cos\theta}{\left\{1 - \left(\frac{J_{zz}}{J_T}\right)\right\} \cos^2\theta - 1}$$

Esto último supone una reducción adicional de las variables de estado sólo a $\dot{\theta}$.

Sin embargo la relación entre θ y $\dot{\theta}$ es dinámica, de modo que θ es también una Variable de Estado. Así, el conjunto necesario de ecuaciones de estado esta determinado por las siguientes expresiones:

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta} \quad (2.22)$$

$$\frac{d}{dt}\dot{\theta} = \left[\frac{J_{zz}}{J_T} \right] \dot{\varphi} p \operatorname{sen}\theta - \frac{1}{J_T} Rr \operatorname{sen}\theta - \left[1 - \frac{J_{zz}}{J_T} \right] \dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta \quad (2.23)$$

Donde $\dot{\varphi}$ esta dada en términos de la variable de estado θ y $\dot{\theta}$ en la ecuación (2.18), siendo p la entrada. Para determinar la velocidad mínima de rotación para $\dot{\theta} = 0$, se sustituirá $\frac{d}{dt}\dot{\theta} = 0$ en la ecuación (2.23), para obtener la ecuación cuadrática en términos de $\dot{\varphi}$:

$$\dot{\varphi}^2 (J_T - J_{zz}) \cos\theta - \dot{\varphi} J_{zz} p + Rr = 0$$

cuya solución es:

$$\dot{\varphi} = \frac{J_{zz} p \pm \sqrt{(J_{zz} p)^2 - 4Rr(J_T - J_{zz}) \cos\theta}}{2(J_T - J_{zz}) \cos\theta} \quad (2.24)$$

El p mínimo para que exista una autentica tasa de precisión esta determinado cuando el contenido del radical sea mayor o igual que cero (0):

$$\begin{aligned}
 (J_{zz} p)^2 - 4Rr(J_T - J_{zz}) \cos\theta &\geq 0 \\
 (J_{zz} p)^2 &\geq 4Rr(J_T - J_{zz}) \cos\theta \\
 \therefore p &\geq \left(\frac{2}{J_{zz}}\right) \sqrt{Rr(J_T - J_{zz}) \cos\theta}
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

2.2.1 Parámetros del sistema

Los parámetros a considerar para este sistema son:

$$\begin{aligned}
 J_T &= 1/2 \text{ Kg-m}^2 = 0.5 \text{ Kg-m}^2 \\
 J_{zz} &= 1/8 \text{ Kg-m}^2 = 0.125 \text{ Kg-m}^2 \\
 R &= 2 \text{ Kg-m/sg}^2 \\
 r &= 0.2 \text{ m}
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Entonces reemplazando en (2.20) y (2.19) respectivamente, tenemos:

$$\ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\right) \dot{\varphi} p \text{ sen}\theta - \left(\frac{3}{4}\right) \dot{\varphi}^2 \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta - \left(\frac{4}{5}\right) \text{ sen}\theta \tag{2.27}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{p \text{ cos}\theta}{3 \text{ cos}^2\theta - 1} \tag{2.28}$$

(2.28) en (2.27):

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{p \text{ cos}\theta}{3 \text{ cos}^2\theta - 1}\right) p \text{ sen}\theta - \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{p \text{ cos}\theta}{3 \text{ cos}^2\theta - 1}\right)^2 \text{ sen}\theta \text{ cos}\theta - \left(\frac{4}{5}\right) \text{ sen}\theta$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{p^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{3 \cos^2\theta - 1} \right) - \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{p^2 \cos^2\theta \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{(3 \cos^2\theta - 1)^2} \right) - \left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen}\theta \quad (2.29)$$

pero: $2 \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta = \operatorname{sen}2\theta$

$$2\cos^2\theta = 1 + \cos2\theta$$

Entonces en (2.29):

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{1}{4}\right) \left(\frac{p^2 \operatorname{sen}2\theta}{3 \cos2\theta - 5} \right) - \left(\frac{3}{4}\right) \left(\frac{p^2 (1 + \cos2\theta) \operatorname{sen}2\theta}{(3 \cos2\theta - 5)^2} \right) - \left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen}\theta$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{p^2}{4}\right) \left(\frac{\operatorname{sen}2\theta (3 \cos2\theta - 5) - 3 \operatorname{sen}2\theta - 3 \operatorname{sen}2\theta \cos2\theta}{9 \cos^2 2\theta + 25 - 30 \cos2\theta} \right) - \left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen}\theta$$

Y como: $2 \cos^2 2\theta = 1 + \cos 4\theta$, tendríamos finalmente:

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = \left(\frac{-4 \operatorname{sen}2\theta p^2}{9 \cos 4\theta - 60 \cos 2\theta + 59} \right) - \left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen}\theta \quad (2.30)$$

Por lo que hemos reducido las ecuaciones que representarán en el espacio de estado al sistema (con la forma de (2.22) y (2.23)), tenemos:

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta} \quad (2.31)$$

$$\frac{d\dot{\theta}}{dt} = -\left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen}\theta - \left(\frac{4 \operatorname{sen}2\theta}{9 \cos 4\theta - 60 \cos 2\theta + 59} \right) p^2 \quad (2.32)$$

Que son las ecuaciones dinámicas que emplearemos para la determinación de la Representación en el Espacio de Estado del sistema, para el desarrollo del diseño del sistema de control.

2.3 Linealización del modelo

Como es evidente, de las ecuaciones que representan al sistema en el Espacio de estado, ellas son ecuaciones no lineales, por lo que la alternativa que tomaremos para salvar este inconveniente, será el de linealizar la respuesta del sistema a un tramo, que será el tramo de trabajo para el conjunto, incluido sistema de control. Así, Tomando como variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 = \theta &\Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2 \\ x_2 = \dot{\theta} &\Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{\theta} \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Determinaremos el punto de equilibrio para el funcionamiento del sistema en el tramo linealizado, que se determinará a continuación.

2.3.1 Determinación del punto de equilibrio y las Matrices A, B, C y D

Para ello, debemos tener una referencia del valor de la señal de entrada (p) del sistema, para ello nos valdremos de la ecuación ya obtenida (2.25), así:

$$p \geq \left(\frac{2}{J_{zz}} \right) \sqrt{R \cdot r (J_T - J_{zz}) \cos\theta},$$

donde reemplazaremos los parámetros del sistema (2.26):

$$\rho \geq \left(\frac{2}{\left(\frac{1}{8}\right)} \right) \sqrt{(2)(0.2)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cos\theta} \quad (2.34)$$

El recorrido del proyectil, debe seguir la trayectoria deseada, con un ángulo de desviación (θ) muy cercano a cero (lo ideal es que sea cero), entonces consideremos $\theta = 0$, en (2.34):

$$\rho \geq 6.19677 \text{ rad/seg} \quad \Rightarrow \quad \text{tomemos: } \rho = 7 \text{ rad/seg} \quad (2.35)$$

Ahora, la determinación propiamente del punto de equilibrio, que nos permitirá calcular las matrices **A**, **B**, **C** y **D**, alrededor del mismo punto de equilibrio (ello debido a que el sistema es no lineal), para ello apliquemos las siguientes ecuaciones, para nuestro sistema de 2 x 2:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \quad (2.36)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \quad (2.37)$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\substack{\bar{x} \\ \bar{u}}} \quad (2.38)$$

$$\mathbf{D} = 0 \quad (2.39)$$

Donde f_1 y f_2 provienen del grupo de ecuaciones (2.31) y (2.32), donde reemplazaremos las variables de estado x_1 y x_2 (2.33), entonces tenemos:

$$f_1: \quad \dot{x}_1 = x_2 \quad (2.40)$$

$$f_2: \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{4}{5}\right)\text{sen } x_1 - \left(\frac{4 \text{ sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right) \rho^2 \quad (2.41)$$

$$h_1: \quad y = x_1 \quad (2.42)$$

Esta última es la ecuación de salida ($y = \theta$).

Entonces determinemos el punto de equilibrio, haciendo:

$$f_1 = 0$$

$$f_2 = 0$$

$$h_1 = 0$$

Aplicando, de (2.49):

$$0 = \bar{x}_2 \quad \Rightarrow \quad \bar{x}_2 = 0 \quad (2.43)$$

de (2.41):

$$0 = -\left(\frac{4}{5}\right)\text{sen } x_1 - \left(\frac{4 \text{ sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right) \rho^2$$

$$0 = \frac{\text{sen } x_1}{5} + \left(\frac{\text{sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right) (7)^2$$

$$0 = \left(\frac{\text{sen } x_1 (9 \cos^2 2 x_1 + 25 - 30 \cos 2 x_1) + (5 \text{ sen}^2 x_1) (49)}{(5) (9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59)}\right)$$

$$0 = \text{sen } x_1 (9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59) + (5 \text{ sen}^2 x_1) (49)$$

$$0 = (9 \cos^4 x_1 \operatorname{sen} x_1 + 59 \operatorname{sen} x_1 - 60 \cos^2 x_1 \operatorname{sen} x_1) + (245 \operatorname{sen}^2 x_1)$$

$$0 = (4.5)(\operatorname{sen}^5 x_1 - \operatorname{sen}^3 x_1) + 59 \operatorname{sen} x_1 - 30(\operatorname{sen}^3 x_1 - \operatorname{sen} x_1) + 245 \operatorname{sen}^2 x_1$$

$$0 = (4.5 \operatorname{sen}^5 x_1 - 34.5 \operatorname{sen}^3 x_1) + 245 \operatorname{sen}^2 x_1 + 89 \operatorname{sen} x_1$$

$$\Rightarrow \bar{x}_1 = 0 \quad (2.44)$$

∴ de (2.43) y (2.44) el punto de equilibrio es:

$$(\bar{x}_1; \bar{x}_2) = (0; 0) \quad (2.45)$$

Luego con $p = 7$ rad/seg (de (2.35)), determinemos las matrices **A**, **B**, **C** y **D**, comenzando con la determinación de la matriz **A**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\bar{x}}^{\bar{u}}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & 0 \end{pmatrix}_{\bar{x}}^{\bar{u}} \quad (2.46)$$

nuevamente de (2.41):

$$\dot{x}_2 = -\left(\frac{4}{5}\right) \operatorname{sen} x_1 - \left(\frac{4 \operatorname{sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right) p^2$$

$$\therefore \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\left(\frac{4}{5}\right) \cos x_1 - \left[\left(\frac{4 \operatorname{sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right)\right]' p^2 \quad (2.47)$$

Para la derivada de una fracción aplica la siguiente ecuación:

$$\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right]' = \frac{D(x) \cdot [N(x)]' - N(x) \cdot [D(x)]'}{[D(x)]^2} \quad (2.48)$$

donde:

$$N(x) = 4 \operatorname{sen} 2x_1 \quad \Rightarrow \quad [N(x)]' = 8 \cos 2x_1$$

$$D(x) = 9 \cos 4x_1 - 60 \cos 2x_1 + 59 \quad \Rightarrow \quad [D(x)]' = -36 \operatorname{sen} 4x_1 + 120 \operatorname{sen} 2x_1$$

Por lo que reemplazamos en (2.48):

$$\left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]' = \frac{(9 \cos 4x_1 - 60 \cos 2x_1 + 59)(8 \cos 2x_1) - (4 \operatorname{sen} 2x_1)(120 \operatorname{sen} 2x_1 - 36 \operatorname{sen} 4x_1)}{(9 \cos 4x_1 - 60 \cos 2x_1 + 59)^2}$$

Realizando las simplificaciones trigonométricas, obtenemos finalmente:

$$\left[\frac{N(x)}{D(x)} \right]' = \frac{-72 \cos 6x_1 + 1160 \cos 2x_1 - 960}{91 \cos 8x_1 - 1080 \cos 6x_1 + 5724 \cos 4x_1 - 15240 \cos 2x_1 + 10643} \quad (2.49)$$

Luego (2.49) en (2.47):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\left(\frac{4}{5}\right) \cos x_1 - \left(\frac{-72 \cos 6x_1 + 1160 \cos 2x_1 - 960}{91 \cos 8x_1 - 1080 \cos 6x_1 + 5724 \cos 4x_1 - 15240 \cos 2x_1 + 10643} \right) p^2 \quad (2.50)$$

Luego, con: $x_1 = 0$ y $p = 7$ rad/seg, reemplazamos en (2.50):

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \left(\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{-72 + 1160 - 960}{91 - 1080 + 5724 - 15240 + 10643} \right) (7)^2 = -0.8 - \frac{(49)(128)}{(138)}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -46.24927 \quad (2.51)$$

(2.51) en (2.46):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -46.24927 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

Hallemos la matriz B:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p} \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\bar{u}} \quad \text{así de (2.40) y (2.41):}$$

$$f_1: \quad \dot{x}_1 = x_2$$

$$f_2: \quad \dot{x}_2 = -\left(\frac{4}{5}\right)\text{sen } x_1 - \left(\frac{4 \text{ sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59}\right) p^2$$

$$\text{Por lo que: } B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\partial f_2}{\partial p} \end{pmatrix}_{\bar{u}} \quad (2.53)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial p} = (2p) \left(\frac{4 \text{ sen}^2 x_1}{9 \cos^4 x_1 - 60 \cos^2 x_1 + 59} \right) \quad (2.54)$$

Entonces, con $x_1 = 0$ y $p = 7$ rad/seg, reemplazamos:

$$\therefore \frac{\partial f_2}{\partial p} = 0 \quad (2.55)$$

$$(2.55) \text{ en (2.53): } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

Pero si $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, entonces el sistema es independiente de la entrada, por lo que no habría ley de control que nos ayude a nuestro objetivo.

Por ello tomaremos otro punto de operación, con $\theta = x_1 \neq 0$, así, confeccionemos una tabla donde veamos las variaciones de $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f_2}{\partial p}$ ((2.50) y (2.54)), que nos dé un indicativo de qué valor será el más apropiado para tomar:

Tabla 2.1: Variación de los factores $\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$ y $\frac{\partial f_2}{\partial p}$, en función de θ

θ (°)	θ (rad)	$\frac{\partial f_2}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_2}{\partial p}$
1°	$\pi/180$	- 46.0167	- 0.2439
2°	$\pi/90$	- 45.3222	- 0.4847
3°	$\pi/60$	- 44.1760	- 0.7198
4°	$\pi/45$	- 42.5955	- 0.9464
5°	$\pi/36$	- 40.6062	- 1.1620
6°	$\pi/30$	- 38.2418	- 1.3645
7°	$7\pi/180$	- 35.5450	- 1.5521
8°	$2\pi/45$	- 32.5669	- 1.7234
9°	$\pi/20$	- 29.3661	- 1.8773
10°	$\pi/18$	- 26.0068	- 2.0134
11°	$11\pi/180$	- 22.5563	- 2.1313
12°	$\pi/15$	- 19.0821	- 2.2310
13°	$13\pi/180$	- 15.6492	- 2.3130
14°	$7\pi/90$	- 12.3165	- 2.3780
15°	$\pi/12$	- 9.1352	- 2.4267

Considerando que el valor angular que tomemos, se corregirá posteriormente aplicando la teoría de "CONTROL OPTIMO CUADRATICO" y además como se puede notar por el tipo de sistema con que estamos trabajando, para cualquier valor de $\theta \neq 0$, el sistema será oscilatorio en mayor o menor magnitud, dependiendo del valor de θ .

Por ello, tomemos de la Tabla 2.1: $\theta = 10^\circ = (\pi/18)$ rad

Con ello volveremos a determinar las matrices **A**, **B**, **C** y **D** para estas nuevas condiciones:

Entonces de (2.46) y (2.50), determinemos la matriz **A**:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -\left(\frac{4}{5}\right) \cos x_1 - \left(\frac{-72 \cos 6 x_1 + 1160 \cos 2 x_1 - 960}{91 \cos 8 x_1 - 1080 \cos 6 x_1 + 5724 \cos 4 x_1 - 15240 \cos 2 x_1 + 10643} \right) \rho^2$$

ahora con $x_1 = (\pi/18)$ rad y $\rho = 7$ rad/seg, reemplazamos:

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -26.0068 \quad (2.57)$$

$$(2.57) \text{ en (2.46):} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26.0068 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.58)$$

Hallemos la matriz **B** para las nuevas condiciones, así, de (2.54) y

(2.53):

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = (2\rho) \left(\frac{4 \operatorname{sen} 2 x_1}{9 \cos 4 x_1 - 60 \cos 2 x_1 + 59} \right)$$

ahora con $x_1 = (\pi/18)$ rad y $\rho = 7$ rad/seg, reemplazamos:

$$\frac{\partial f_2}{\partial \rho} = -2.0134 \quad (2.59)$$

$$(2.59) \text{ en (2.53):} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2.0134 \end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Ahora determinemos la matriz **C** para éstas mismas condiciones:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}_{\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{u}}}$$

siendo:

h₁: $y = x_1$ (Ecuación de salida)

Por lo tanto: $C = (1 \ 0)$ (2.61)

Como no existe ecuación de salida en función de la entrada p , entonces:

$$D = 0 \quad (2.62)$$

Por lo que el sistema en el espacio de estado se representará así:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u \\ y &= \mathbf{C} \mathbf{x} \end{aligned}$$

Por lo que reemplazando las matrices **A** (2.58), **B** (2.60) y **C** (2.61), obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26.0068 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2.0134 \end{pmatrix} u \quad (2.63)$$

$$y = (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

Que es la Representación en el espacio de estado del sistema que emplearemos de aquí en adelante para el desarrollo tanto de la discretización del sistema (Capítulo III), como para el mismo diseño del sistema de control (Capítulo IV).

2.4 Simulación de la Respuesta del sistema a una entrada Escalón

Con la representación en el espacio de estado, determinaremos ahora la Función de Transferencia del sistema, así:

$$G(s) = C (sI - A)^{-1} B \quad (2.65)$$

$$sI - A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -26.0068 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s & -1 \\ 26.0068 & s \end{pmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ -26.0068 & s \end{pmatrix}}{s^2 + 26.0068} \quad (2.66)$$

Por lo que de (2.66), (2.60) y (2.61) en (2.65), obtenemos:

$$G(s) = (1 \ 0) \frac{\begin{pmatrix} s & 1 \\ -26.0068 & s \end{pmatrix}}{s^2 + 26.0068} \begin{pmatrix} 0 \\ -2.0134 \end{pmatrix} = (1 \ 0) \frac{\begin{pmatrix} -2.0134 \\ -2.0134s \end{pmatrix}}{s^2 + 26.0068}$$

$$\therefore G(s) = \frac{-2.0134}{s^2 + 26.0068} \quad (2.67)$$

Obtengamos la respuesta temporal a una entrada en escalón unitario, tomando como referencia la Figura 2.2:

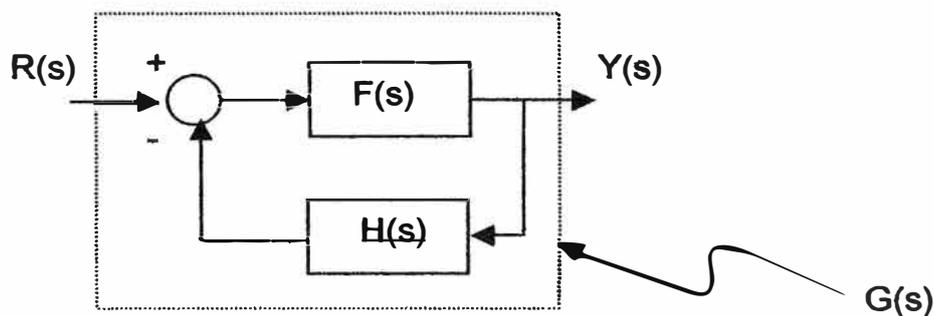


Figura 2.2: Diagrama de bloques representativo de la Función de Transferencia obtenida

Luego, con la ecuación (2.67), que es la Función de Transferencia obtenida para el sistema, apliquémosle una entrada en escalón, así:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} \quad \text{donde:} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow Y(s) = G(s) \cdot R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \left(\frac{-2.0134}{s^2 + 26.0068} \right) \cdot \frac{1}{s} = \left(\frac{-2.0134}{s^2 + (5.1)^2} \right) \cdot \frac{1}{s} \quad (2.68)$$

Aplicando el procedimiento de fracciones parciales para obtener la respuesta temporal:

$$Y(s) = \frac{a}{s - j5.1} + \frac{b}{s + j5.1} + \frac{c}{s} \quad (2.69)$$

$$Y(s) = \frac{a(s + j5.1)s + b(s - j5.1)s + c(s^2 + 26.0068)}{(s - j5.1)(s + j5.1)s}$$

$$Y(s) = \frac{s^2(a + b + c) + j s 5.1(a - b) + c(26.0068)}{(s^2 + 26.0068)s} \quad (2.70)$$

Por lo tanto: (2.70) = (2.68), de donde obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$a + b + c = 0$$

$$a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b$$

$$26.0068 c = -2.0134$$

De donde obtenemos:

$$c = -\frac{1}{12.917} \quad a = b = \frac{1}{25.833} \quad (2.71)$$

(2.71) en (2.69):

$$Y(s) = \frac{a}{s - j5.1} + \frac{b}{s + j5.1} + \frac{c}{s} = \frac{2as}{s^2 + 26.0068} + \frac{c}{s}$$

$$Y(s) = \left(\frac{1}{12.917} \right) \cdot \left[\left(\frac{s}{s^2 + (5.1)^2} \right) - \frac{1}{s} \right] \quad (2.72)$$

Por lo que empleando Tablas de Transformada Inversa de Laplace, obtenemos en el tiempo:

$$y(t) = \left(\frac{1}{12.917} \right) [\cos(5.1 t) - \mu(t)] \quad (2.73)$$

Para su gráfica emplearemos MatLab:

% **Programa 2.1:** Respuesta a un escalón unitario para $G(s) = \frac{-2.0134}{s^2 + 26.0068}$

num=[0 0 -2.0134];

den=[1 0 26.0068];

y=step(num,den);

plot(y)

grid

title('Respuesta a una entrada en escalón unitario de $G(s) = -2.0134 / s^2 + 26.0068$ ');

xlabel('Tiempo (sg)');

ylabel('Amplitud');

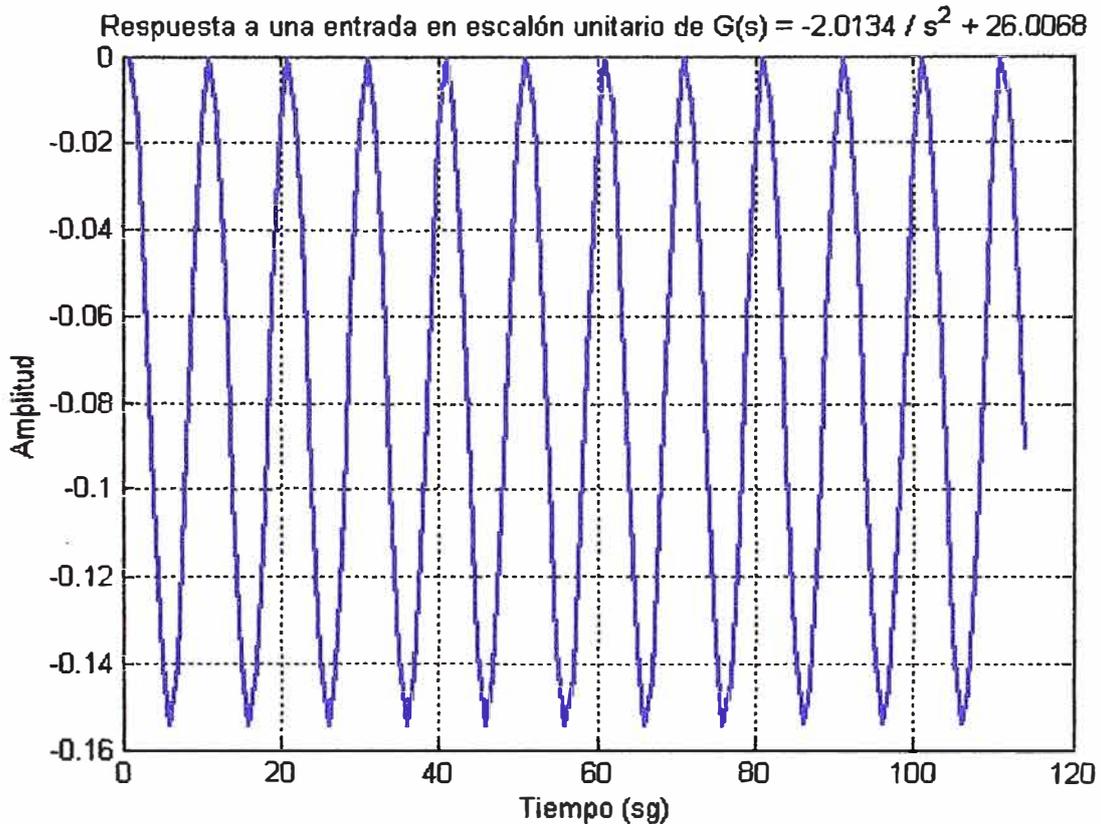


Figura 2.3: · Nótese la respuesta al escalón unitario, que esta montado sobre la constante $(-1/12.917) = -0.0774$

Como podemos observar de la respuesta del sistema, éste es oscilatorio y es la respuesta de un sistema que posee polos en el Eje imaginario. Esto ya lo habíamos previsto ya que por las condiciones similares al del disparo de una bala, que sale del cañón girando a una determinada velocidad, para evitar precisamente éste fenómeno y haga que el proyectil siga una trayectoria mas lineal.

CAPITULO III

DISCRETIZACIÓN DEL MODELO LINEALIZADO

3.1 Discretización

Así para discretizar emplearemos la ecuación que involucra al “retenedor de orden cero”:

$$G(z) = \left(\frac{z-1}{z} \right) \cdot \mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] \quad (3.1)$$

Determinemos primero la Transformada Z de $[G(s)/s]$, así:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left[\left(\frac{-2.0134}{s^2 + 26.0068} \right) \left(\frac{1}{s} \right) \right]$$

que es el mismo desarrollo de (2.78), (2.79) y (2.80), donde se obtuvo:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \mathcal{Z} \left\{ \left(\frac{1}{12.917} \right) \cdot \left[\left(\frac{s}{s^2 + (5.1)^2} \right) - \frac{1}{s} \right] \right\}$$

así, empleando Tablas de Transformada Z, obtenemos:

$$\mathcal{Z} \left[\frac{G(s)}{s} \right] = \left(\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z^2 - z \cos(5.1 T)}{z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1} - \frac{z}{z-1} \right) \quad (3.2)$$

(3.2) en (3.1):

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z-1}{z} \right) \left(\frac{z}{z-1} - \frac{z^2 - z \cos(5.1 T)}{z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(1 - \frac{(z-1)(z^2 - z \cos(5.1 T))}{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1) - (z-1)(z^2 - z \cos(5.1 T))}{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{(z^3 - 2 z^2 \cos(5.1 T) + z) - (z^3 - z^2 \cos(5.1 T) - z^2 + z \cos(5.1 T))}{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{-z^2 \cos(5.1 T) + z + z^2 - z \cos(5.1 T)}{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z^2 (1 - \cos(5.1 T)) + z (1 - \cos(5.1 T))}{(z)(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z (1 - \cos(5.1 T)) + (1 - \cos(5.1 T))}{(z^2 - 2 z \cos(5.1 T) + 1)} \right)$$

Obteniendo finalmente:

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z^{-1}(1 - \cos(5.1 T)) + z^{-2}(1 - \cos(5.1 T))}{(1 - 2 z^{-1} \cos(5.1 T) + z^{-2})} \right) \quad (3.3)$$

Empleando MatLab, para obtener la respuesta del sistema con un tiempo de muestreo que no es necesariamente el óptimo (posteriormente verificaremos el tiempo de muestreo óptimo):

```

*****
% Programa 3.1: Respuesta del sistema discretizado a un tren de pulsos, en forma de
% escalón

T=0.0208; % Tiempo de muestreo aleatorio

co=cos(5.1*T);

numz=[0 1-co 1-co]; denz=[1 -2*co 1]; k= - 0.0774;

numz1=k*numz;

r=ones(1,700); y=filter(numz1,denz,r);

plot(y, '.'); grid

title('Respuesta a un tren de pulsos en escalón');

xlabel('Número de muestras'); ylabel('Amplitud');
*****

```

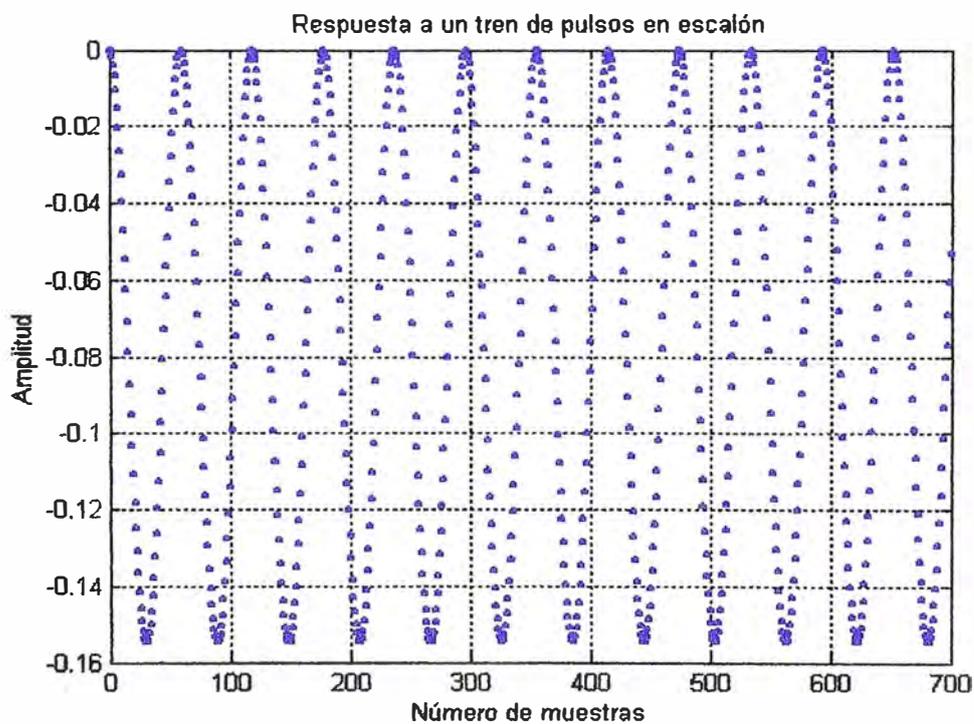


Figura 3.1: Con esta frecuencia de muestreo (que no es necesariamente la más adecuada), la señal es prácticamente igual que la del tiempo continuo.

Antes de cualquier simulación, nuestro objetivo será determinar el Tiempo de Muestreo óptimo para las condiciones dinámicas de nuestro sistema.

3.1.1 Determinación del Tiempo de Muestreo

Por el teorema del muestreo, sabemos que la mínima frecuencia de muestreo es el doble de la máxima frecuencia:

$$f_s \geq 2f_{\text{máx}} \Rightarrow T_s \leq 1/2f_{\text{máx}} \quad (3.4)$$

La práctica nos indica que lo mejor es emplear más de 8 muestras por ciclo, por lo que para nuestro caso la Función de Transferencia del sistema es:

$$G(s) = \frac{-2.0134}{s^2 + 26.0068} = \frac{-2.0134}{s^2 + (5.1)^2}$$

de donde se verifica que: $\omega = 5.1$ rad/sg

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{5.1}{2\pi} = 0.81169 \text{ Hz}$$

Por lo que:
$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0.81169} = 1.232 \text{ sg} \quad (3.5)$$

Entonces de (3.5) y (3.4):

$$T_s \leq \frac{1.232}{2} \text{ sg} \Rightarrow T_s \leq 0.616 \text{ sg}$$

Tomemos entre 12 y 13 muestras por ciclo, por lo que:

$$T_s = 0.098 \text{ sg} \quad (3.6)$$

3.1.2 Determinación de la Función de Transferencia en tiempo discreto

Con el Periodo de Muestreo obtenido en el paso anterior y de la ecuación (3.3), tenemos:

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z^{-1} (1 - \cos((5.1)(0.098))) + z^{-2} (1 - \cos((5.1)(0.098)))}{(1 - 2 z^{-1} \cos((5.1)(0.098)) + z^{-2})} \right)$$

$$G(z) = \left(-\frac{1}{12.917} \right) \left(\frac{z^{-1} (0.1223) + z^{-2} (0.1223)}{(1 - 2 z^{-1} (0.87768) + z^{-2})} \right)$$

$$G(z) = \left(\frac{-(0.00947) z^{-1} - (0.00947) z^{-2}}{(1 - (1.7554) z^{-1} + z^{-2})} \right) \quad (3.7)$$

Que es la Función de Transferencia en Tiempo discreto buscada, misma que emplearemos en el siguiente Capítulo, para el diseño del sistema de control.

Ahora, hagamos una simulación del Respuesta en Tiempo Continuo y otra en Tiempo Discreto, para verificar si el Tiempo de muestreo obtenido en (3.6), se ajusta a nuestras necesidades.

3.2 Simulación de la Respuesta del sistema en tiempo discreto a una entrada en Escalón

Verifiquemos gráficamente nuestros cálculos de determinación del Tiempo de Muestreo, para ello compararemos con MatLab la respuesta en continua y la respuesta discreta con el tiempo de muestreo (T_s) determinado en (3.6):

```
*****
```

```
% Programa 3.2: Respuesta temporal para  $G(s) = -2.0134 / s^2 + 26.0068$ 
num=[0 0 -2.0134]; den=[1 0 26.0068];
y=step(num,den);
subplot(2,1,1),plot(y)
grid
title('Respuesta a una entrada en escalón unitario de  $G(s) = -2.0134 / s^2 + 26.0068$ ');
xlabel('Tiempo (sg)'); ylabel('Amplitud');
% Respuesta del sistema discretizado a un tren de pulsos, en forma de escalón
T=0.098;
co=cos(5.1*T);
numz=[0 co-1 co-1];
denz=[1 -2*co 1];
k= - 0.0774;
numz1=k*numz;
r=ones(1,150)
y1=filter(numz1,denz,r);
subplot(2,1,2),plot(y1, '.'); grid
title('Respuesta a un tren de pulsos en escalón');
xlabel('Número de muestras para  $T=0.098\text{sg}$ ');
ylabel('Amplitud');
```

```
*****
```

Lo que nos devuelve la siguiente gráfica:

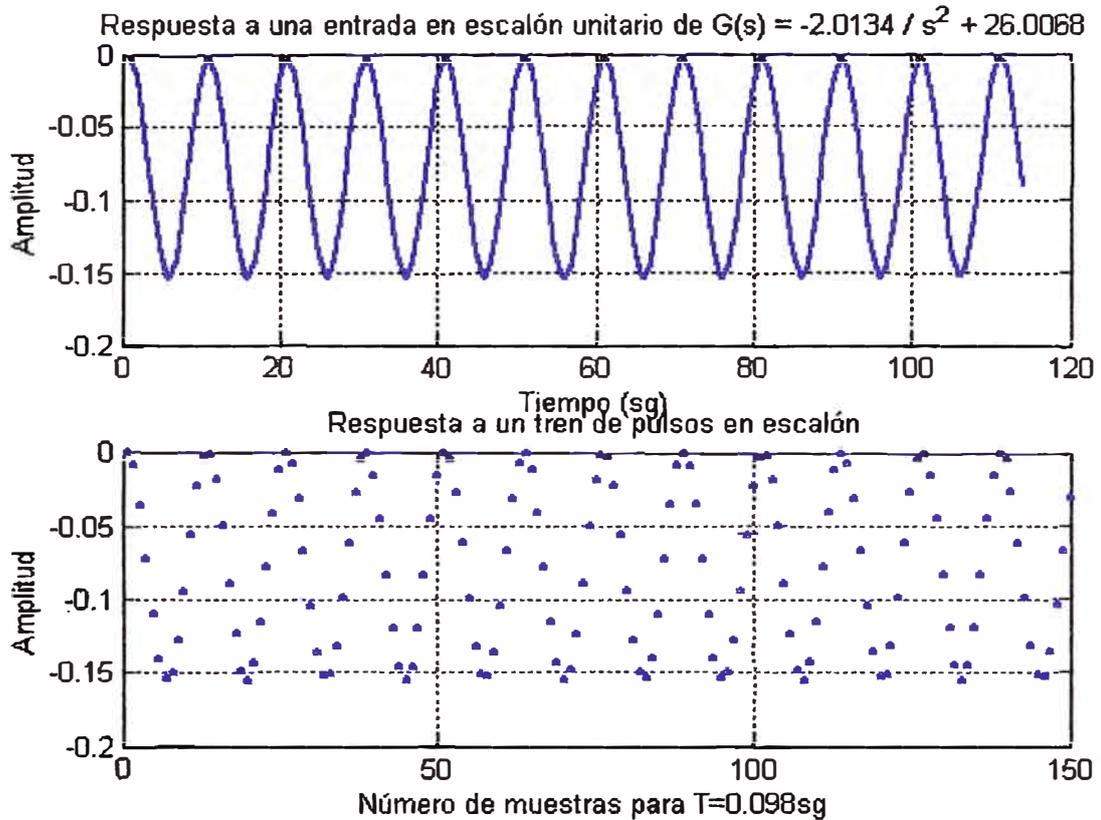


Figura 3.2: Comparación entre las respuestas en tiempo continuo y tiempo discreto (con $T= 0.098$ seg)

Vemos que las respuestas son exactamente iguales, lo que confirma que nuestros cálculos son correctos y el sistema discretizado está trabajando con un Tiempo de Muestreo de $T = 0.098$ seg, que es adecuado.

CAPITULO IV

SISTEMA DE CONTROL

4.1 Control Optimo Cuadrático en tiempo discreto

Para poder alcanzar con éxito nuestro objetivo, debemos verificar que el sistema sea de estado completamente Observable y de estado completamente Controlable, por ello determinemos si el sistema es de Estado completamente OBSERVABLE y CONTROLABLE.

4.1.1 Determinación de la OBSERVABILIDAD del sistema

Un sistema es observable si con el sistema en el estado $\mathbf{x}(0)$, se puede determinar el estado a partir de la observación de los vectores de salida y de control a lo largo de un número finito de periodos de muestreo.

Apliquemos la matriz de observabilidad, en tiempo discreto:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{G}^T \mathbf{C}^T & (\mathbf{G}^T)^2 \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{G}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Como se ha determinado que $T = 0.098\text{sg}$, entonces la ecuación (3.3) se simplifica y tiene la forma obtenida en (3.7):

$$G(z) = \left(\frac{-(0.00947)z^{-1} - (0.00947)z^{-2}}{1 - (1.7554)z^{-1} + z^{-2}} \right)$$

Así, para determinar las matrices, **G**, **H**, **C** y **D** del sistema discreto, emplearemos las fórmulas del Apéndice B, pero considerando que nuestro sistema tiene signo negativo y esta dividido por el Factor 12.917:

Entonces, para hallar **G**, empleamos la ecuación (B-5):

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \cos \omega T & \text{sen } \omega T \\ -\text{sen } \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos [(5.1)(0.098)] & \text{sen} [(5.1)(0.098)] \\ -\text{sen} [(5.1)(0.098)] & \cos [(5.1)(0.098)] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 \\ -0.4794 & 0.8776 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Para hallar **H**, empleamos la ecuación (B-6), misma que dividiremos entre el factor 12.917:

$$\mathbf{H} = -\left(\frac{1}{12.917} \right) \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \text{sen } \omega T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.00947 \\ -0.03711 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

$$\mathbf{C} = (1 \quad 0) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{D} = (0) \quad (4.5)$$

Por lo que de los resultados obtenidos y de (4.1), considerando que nuestro sistema es de 2x2 (n=2), verificamos la observabilidad del sistema con el arreglo:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{C}^T \quad \mathbf{G}^T \mathbf{C}^T] \quad (4.6)$$

donde de (4.2), (4.4) y (4.6):

$$\mathbf{G}^T \mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 \\ -0.4794 & 0.8776 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8776 \\ -0.4794 \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

con \mathbf{C}^T y (4.7) en (4.6):

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} 1 & 0.8776 \\ 0 & -0.4794 \end{pmatrix} \quad \text{Por lo que Rank}(\mathbf{N}) = 2$$

Lo que significa que el sistema es de estado completamente Observable.

4.1.2 Determinación de la CONTROLABILIDAD del sistema.

Se dice que un sistema es controlable si puede mediante un vector de control no acotado, transferir dicho sistema de cualquier estado inicial a cualquier otro estado arbitrario, en un número finito de periodos de muestreo.

Apliquemos la matriz de controlabilidad, en tiempo discreto:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} & \mathbf{G}^2\mathbf{H} & \dots & \mathbf{G}^{n-1}\mathbf{H} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Como para nuestro caso $n = 2$, nuestra matriz de controlabilidad se reduce a:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{GH} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

donde de (4.2) y (4.3):

$$\mathbf{GH} = \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 \\ -0.4794 & 0.8776 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.00947 \\ -0.03711 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0261 \\ -0.0280 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

de (4.10) y (4.9) en (4.3):

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -0.00947 & -0.0261 \\ -0.03711 & -0.0280 \end{pmatrix} \quad \text{Por lo que Rank}(\mathbf{M}) = 2$$

Lo que significa que el sistema es de estado completamente Controlable

4.2 Control Optimo Proporcional Integral

El sistema en análisis es un sistema oscilante, por lo que diseñaremos un sistema de control que regule la posición del proyectil tanto como sea posible. Para ello, como la Función de Transferencia (ecuación 2.67) no posee integrador, alimentaremos la señal de posición y (la cual indica la desviación angular de la trayectoria seguida por el proyectil), de regreso a la entrada y se insertará un integrador en la trayectoria directa, como se muestra en la Figura 4.1

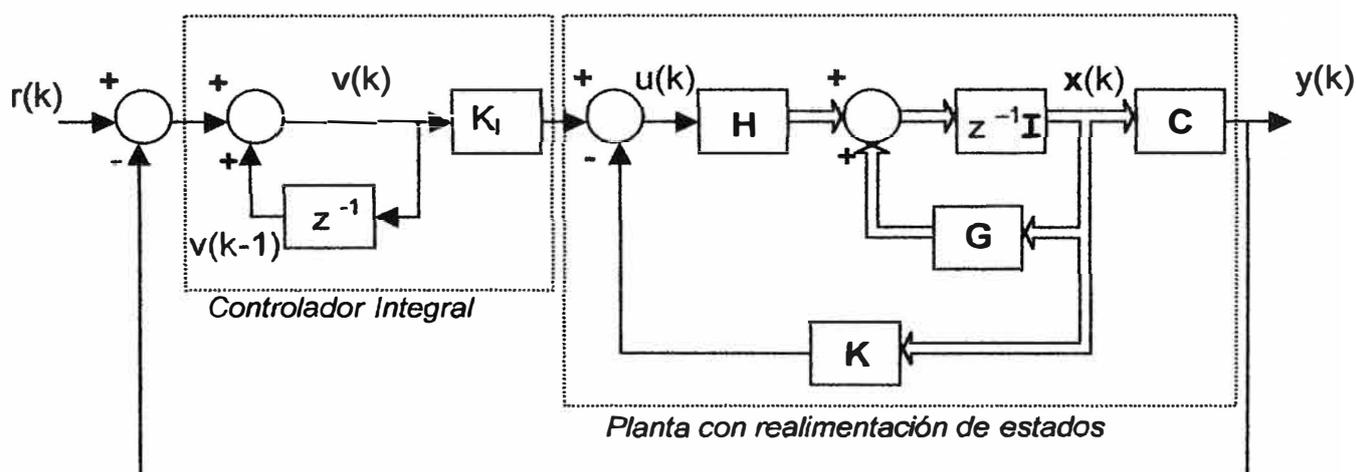


Figura 4.1: Diagrama de Bloques del sistema de Control Optimo Proporcional Integral

El sistema de control a diseñar incluirá realimentación de estados y un integrador en el Lazo Cerrado y es posible emplear este método debido a que el sistema es de estado completamente controlable.

Las variables de diseño son las constantes K_I y el vector K .

Resolveremos este problema de diseño y obtendremos la respuesta al escalón con apoyo del MatLab.

De la Figura 4.1, la representación en el espacio de estado para el sistema de control completo esta dada por:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} u(k) \quad (4.11)$$

$$y(k) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k) \quad (4.12)$$

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (4.13)$$

pero si representamos las ecuaciones (4.12) y (4.13) en adelante::

$$y(k+1) = \mathbf{C} \mathbf{x}(k+1) \quad (4.14)$$

$$v(k+1) = v(k) + r(k+1) - y(k+1) \quad (4.15)$$

$$u(k) = -\mathbf{K} \mathbf{x}(k) + K_I v(k) \quad (4.16)$$

donde:
$$\mathbf{K} = [k_1 \quad k_2] \quad (4.17)$$

de (4.11) en (4.14):

$$y(k+1) = \mathbf{C} [\mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} u(k)] \quad (4.18)$$

luego (4.18) en (4.15):

$$\begin{aligned} v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - \mathbf{C} [\mathbf{G} \mathbf{x}(k) + \mathbf{H} u(k)] \\ v(k+1) &= -\mathbf{C} \mathbf{G} \mathbf{x}(k) + v(k) - \mathbf{C} \mathbf{H} u(k) + r(k+1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Donde combinando (4.11) y (4.19), obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{C}\mathbf{G} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{C}\mathbf{H} \end{pmatrix} u(k) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} r(k+1) \quad (4.20)$$

Donde la entrada r es una función escalón, es decir:

$$r(k) = r(k+1) = r \quad (4.21)$$

Entonces cuando k se aproxima al infinito:

$$\begin{pmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{pmatrix} u(\infty) + \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix} r(\infty) \quad (4.22)$$

Definimos las señales de error:

$$x_e(k) = x(k) - x(\infty)$$

$$v_e(k) = v(k) - v(\infty)$$

Por lo tanto de (4.20):

$$\begin{pmatrix} x_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{pmatrix} u_e(k) \quad (4.23)$$

Observando que:

$$u_e(k) = -K x_e(k) + K_I v_e(k) = -[K \quad -K_I] \begin{pmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

En este momento podemos definir las nuevas matrices del sistema, las cuales denotaremos con el apóstrofe "ˆ", así:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{G}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{pmatrix} & \hat{\mathbf{H}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{pmatrix} \\ \hat{\mathbf{K}} &= (\mathbf{K} \quad -K_I) & w(k) &= u_e(k) \end{aligned} \quad (4.25)$$

Por lo tanto para el caso de nuestro diseño, determinemos las matrices a partir de (4.2), (4.3) y (4.4), donde identificamos:

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 \\ -0.4794 & 0.8776 \end{pmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} -0.00947 \\ -0.03711 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C} = (1 \quad 0) \quad D = 0$$

Que son las matrices a emplear para los cálculos requeridos para determinar (4.25), así:

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{CG} & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{CH} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Por lo tanto calculemos los elementos $-\mathbf{CG}$ y $-\mathbf{CH}$, así:

$$-\mathbf{CG} = -(1 \ 0) \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 \\ -0.4794 & 0.8776 \end{pmatrix} = (-0.8776 \quad -0.4794)$$

$$-\mathbf{CH} = -(1 \ 0) \begin{pmatrix} -0.00947 \\ -0.03711 \end{pmatrix} = 0.00947$$

En (4.26):

$$\hat{\mathbf{G}} = \begin{pmatrix} 0.8776 & 0.4794 & 0 \\ -0.4794 & 0.8776 & 0 \\ -0.8776 & -0.4794 & 1 \end{pmatrix} \quad \hat{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} -0.00947 \\ -0.03711 \\ 0.00947 \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

Además del mismo (4.25):

$$\hat{\mathbf{K}} = (\mathbf{K} \ -K_I) = (k_1 \ k_2 \ k_I) \quad (4.28)$$

4.2.1 Ecuación de Riccati

La Ecuación de Riccati y la ecuación de ganancia del controlador $\hat{\mathbf{K}}$, son respectivamente:

$$\hat{\mathbf{P}} = \hat{\mathbf{Q}} + \hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} - \hat{\mathbf{G}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \left[\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \right]^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{G}} \quad (4.29)$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \left[\hat{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{H}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{A}} \right]^{-1} \hat{\mathbf{A}}^T \hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{G}} \quad (4.30)$$

Para iniciar las iteraciones consideraremos inicialmente que:

$$\hat{\mathbf{P}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Además las matrices de ponderaciones a considerar, son:

$$\hat{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = (0.01) \quad (4.32)$$

La razón de los valores, es por que se le esta dando mayor prioridad, en cuanto a la velocidad de respuesta a la acción de control Integral, la segunda prioridad es la recuperación de la posición angular y la tercera prioridad es la velocidad de la variación angular.

4.2.2 Determinación de la Matriz P

Para ello, reemplacemos (4.31) y (4.32) en (4.29) y apliquemos MatLab para que nos devuelva las matrices P , hasta obtener la que emplearemos para determinar K . Para ello, confeccionamos el siguiente programa:

```
*****
% Programa 4.1: Procedimiento recursivo para determinación de la Matriz Ptilde
Gtilde= [0.8776 0.4794 0; -0.4794 0.8776 0;-0.8776 -0.4794 1];
Htilde = [-0.00947; -0.03711;0.00947];
% Matrices de ponderación
Q = [1 0 0;0 0.1 0;0 0 2]; R = [0.01];
% Cálculo recursivo de la matriz Ptilde y cálculo de Ktilde
T = 15;      % Número de iteraciones
Ptilde = zeros(3,3);
for i=1:T
```

Ptilde = Q + Gtilde*Ptilde*Gtilde -

Gtilde*Ptilde*Htilde*inv(R+Htilde*Ptilde*Htilde)*Htilde*Ptilde*Gtilde

end

La cual nos devuelve los siguientes resultados:

Ptilde =	1.0000	0	0
(it.1)	0	0.1000	0
	0	0	2.0000
Ptilde =	3.2820	1.1825	-1.7131
(it.2)	1.1825	0.8391	-0.9281
	-1.7131	-0.9281	3.9655
Ptilde =	6.3378	3.9985	-3.6761
(it.3)	3.9985	3.7155	-2.6876
	-3.6761	-2.6876	5.3931
Ptilde =	7.2863	5.1097	-4.2573
(it.4)	5.1097	6.1893	-3.4113
	-4.2573	-3.4113	5.7926
Ptilde =	8.2928	5.0030	-4.6005
(it.5)	5.0030	6.6968	-3.4348
	-4.6005	-3.4348	5.9332

Ptilde =	9.9093	5.3616	-4.9961
(it.6)	5.3616	6.8556	-3.5231
	-4.9961	-3.5231	6.0388

Ptilde =	10.8874	5.8222	-5.1179
(it.7)	5.8222	7.0993	-3.5706
	-5.1179	-3.5706	6.0633

Ptilde =	11.0965	5.9731	-5.0988
(it.8)	5.9731	7.2351	-3.5319
	-5.0988	-3.5319	6.0912

Ptilde =	11.1712	5.9811	-5.1517
(it.9)	5.9811	7.2589	-3.5112
	-5.1517	-3.5112	6.1604

Ptilde =	11.3545	6.0346	-5.2581
(it.10)	6.0346	7.2782	-3.5385
	-5.2581	-3.5385	6.2264

Ptilde =	11.5211	6.1157	-5.3287
(it.11)	6.1157	7.3194	-3.5715
	-5.3287	-3.5715	6.2574

$$\begin{array}{l}
 \text{Ptilde} = \quad 11.5879 \quad 6.1616 \quad -5.3482 \\
 \text{(it.12)} \quad 6.1616 \quad 7.3526 \quad -3.5840 \\
 \quad \quad \quad -5.3482 \quad -3.5840 \quad 6.2638
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ptilde} = \quad 11.5980 \quad 6.1709 \quad -5.3499 \\
 \text{(it.13)} \quad 6.1709 \quad 7.3648 \quad -3.5836 \\
 \quad \quad \quad -5.3499 \quad -3.5836 \quad 6.2651
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ptilde} = \quad 11.6047 \quad 6.1712 \quad -5.3538 \\
 \text{(it.14)} \quad 6.1712 \quad 7.3665 \quad -3.5829 \\
 \quad \quad \quad -5.3538 \quad -3.5829 \quad 6.2678
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{Ptilde} = \quad 11.6167 \quad 6.1748 \quad -5.3591 \\
 \text{(it.15)} \quad 6.1748 \quad 7.3679 \quad -3.5843 \\
 \quad \quad \quad -5.3591 \quad -3.5843 \quad 6.2702
 \end{array}$$

Como puede apreciarse, aproximadamente a partir de la iteración #11 (it.11), la Matriz Ptilde, empieza a estabilizarse, es decir los valores son muy cercanos a los de la última iteración (it.15) y ya no variarán, por ello:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 11.6167 & 6.1748 & -5.3591 \\ 6.1748 & 7.3679 & -3.5843 \\ -5.3591 & -3.5843 & 6.2702 \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

Debe hacerse notar que la Matriz Ptilde, es una Matriz simétrica y Positiva definida.

4.2.3 Determinación del vector de Ganancias de Retroalimentación (K)

Ya determinada la Matriz P, por el paso anterior, estamos en condiciones de determinar la Matriz K, aplicando (4.30) y conocida (4.33), así:

$$\hat{K} = \left[\hat{R} + \hat{H}^T \hat{P} \hat{H} \right]^{-1} \hat{H}^T \hat{P} \hat{G}$$

y de (4.28), el resultado representará:

$$\hat{K} = (K \quad -K_I) = (k_1 \quad k_2 \quad k_I)$$

Entonces apliquemos el MatLab, para obtener el resultado de las operaciones Matriciales, para determinar \hat{K} (Ktilde) a partir de la obtención de la Matriz Simétrica y Definida Positiva \hat{P} (Ptilde), así:

% Programa 4.2: Determinación del vector de ganancias K

Gtilde= [0.8776 0.4794 0; -0.4794 0.8776 0;-0.8776 -0.4794 1];

Htilde = [-0.00947; -0.03711;0.00947];

Ptilde=[11.6167 6.1748 -5.3591;6.1748 7.3679 -3.5843;-5.3591 -3.5843 6.2702];

Ktilde = inv(R + Htilde*Ptilde*Htilde)*Htilde*Ptilde*Gtilde

Lo que nos devuelve el siguiente resultado:

Ktilde =

$$\begin{bmatrix} -12.8564 & -21.1200 & 8.2222 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$\hat{K} = (k_1 \quad k_2 \quad k_I) = (-12.8564 \quad -21.12 \quad 8.2222) \quad (4.34)$$

Debe identificarse de la ecuación (4.34), que el resultado involucra la obtención de la Matriz K y de la Ganancia del Bloque Integral incluido en el Lazo Cerrado, así:

$$K = (k_1 \quad k_2) = (-12.8564 \quad -21.12) \quad (4.35)$$

$$k_I = 8.2222 \quad (4.36)$$

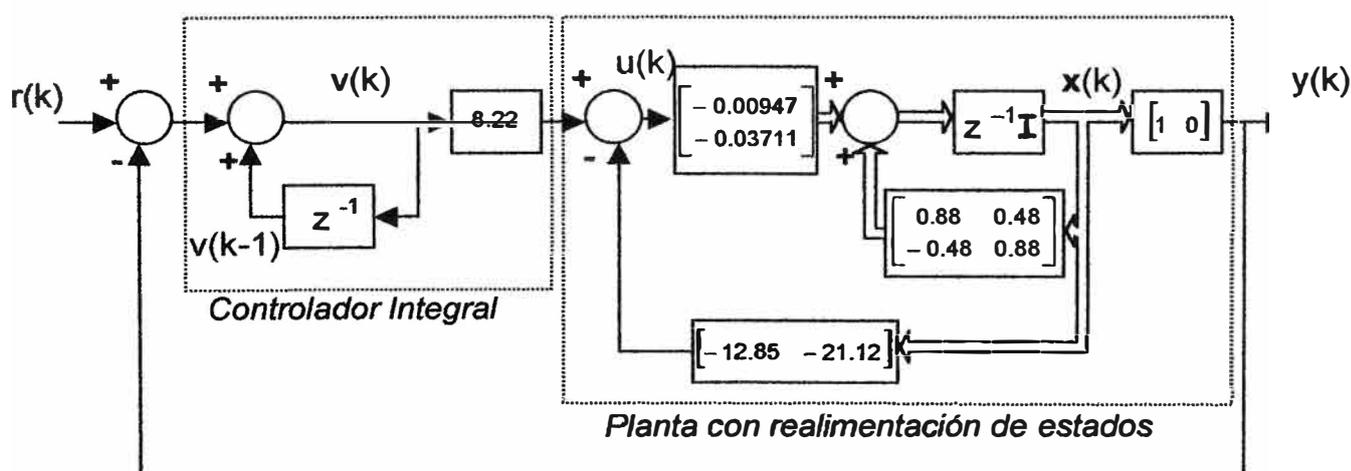


Figura 4.2: Diagrama de Bloques del sistema de Control Optimo Proporcional Integral, con los valores numéricos de G, H, C, K y K_I , obtenidos del diseño

Por lo tanto empleando los datos de las matrices encontradas, podemos realizar la representación del diagrama de Bloques de la Figura 4.2, mostrada anteriormente.

Por lo tanto la ley de control que gobernará el sistemas es, de (4.16):

$$u(k) = - \begin{pmatrix} -12.8564 & -21.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + 8.2222 v(k) \quad (4.37)$$

Que es el resultado Final del Diseño, es decir, ésta es la señal (ó Ley) de Control que logrará el objetivo de restablecimiento del rumbo del proyectil, ante cualquier fuerza perturbadora que pretenda sacarla de rumbo.

Finalmente, con este valor del vector de ganancias **K**, obtengamos una repuesta a una entrada en escalón:

```
% Programa 4.3: Respuesta a un escalón unitario para la salida y la señal de control
% para sistema de control diseñado, para el sistema en tiempo discreto
```

```
clear all
```

```
G= [0.8776 0.4794; -0.4794 0.8776];
```

```
H = [-0.00947; -0.03711];
```

```
C = [1 0];
```

```
D = [0];
```

```
Gtilde= [0.8776 0.4794 0; -0.4794 0.8776 0; -0.8776 -0.4794 1];
```

```
Htilde = [-0.00947; -0.03711; 0.00947];
```

```
T=0.098      % Tiempo de muestreo
```

```

Q = [1 0 0;0 0.1 0;0 0 2]; R = [0.01];    % Matrices de ponderación
% Ganancia del controlador óptimo
% De acuerdo a lo obtenido en el diseño: Ktilde=[-12.8564 -21.12  8.2222]
Ktil(1)= -12.8564;
Ktil(2)= -21.12;
Ktil(3)= 8.2222;
K = [Ktil(1) Ktil(2)]; KI = -Ktil(3);
x = [pi/18;0]; yi=pi/18; v=0; % Condiciones iniciales
NN = 60; r=1;
% Respuesta al escalón r = 1
for k=1:NN
v = v + r - yi;
p(k) = -K*x + KI*v;
x = G*x + H*p(k);
y(k) = x(1); yi = y(k);
end
% Gráficos
t = linspace(0,T*NN,NN);
subplot(2,1,1)
plot(t,y); ylabel('y (rad)'); grid;
subplot(2,1,2)
plot(t,p); ylabel('p (rad/seg)'); grid;
xlabel('Tiempo (s)')

```

```
*****
```

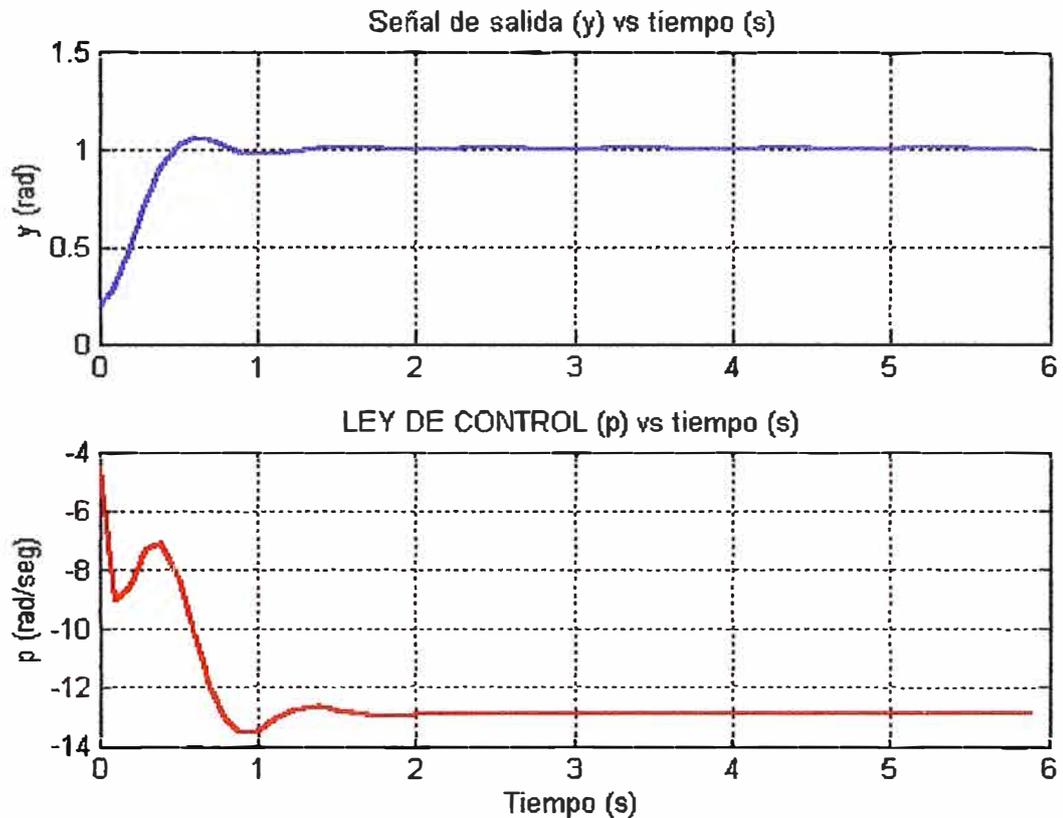


Figura 4.3: Señal de salida y señal de control a un escalón, para el sistema con Controlador discreto Optimo proporcional Integral, diseñado

4.3 Simulación del Control Optimo Proporcional Integral del proyectil con giro estabilizado

Finalmente, aplicaremos MatLab, para la determinación de los parámetros que encontramos en este mismo Capítulo, como son La Matriz P y el vector de Ganancias de Retroalimentación, que serán empleados en la determinación de la señal de control y que servirá para la simulación mostrada a continuación:

% **Programa 4.4:** simulación del Control Optimo Proporcional Integral
 % Desde el tiempo continuo $x=(\pi/18;0)$ y $y_i=\pi/18$

clear all

A = [0 1; -26.0068 0];

B = [0; -2.0134];

Cc = [1 0]; Dc = [0];

% Verificar controlabilidad y observabilidad

M = [B A*B]; N = [Cc' A*Cc']; % de donde se obtiene: $\text{rank}\{M\}=\text{rank}\{N\}=n=2$

% Periodo de muestreo

T = 0.098;

% Discretización

[G,H,C,D] = c2dm(A,B,Cc,Dc,T,'zoh');

Gtilde = [G zeros(2,1); -C*G eye(1,1)]; % orden $n+1=3$

Htilde = [H; -C*H];

% Matrices de ponderación

Q = [1 0 0; 0 0.1 0; 0 0 2]; R = [0.01];

% Ganancia del controlador óptimo

[Ktil,Ptil,E] = dlqr(Gtilde,Htilde,Q,R); % Ktil:

K = [Ktil(1) Ktil(2)]; Kl = -Ktil(3);

% Condiciones iniciales

x = [$\pi/18;0$]; $y_i=\pi/18$;

v=0;

NN = 60; r=1;

% Respuesta al escalón $r = 1$

```

for k=1:NN

v = v + r - yi;

p(k) = -K*x + Kl*v; x = G*x + H*p(k);

y(k) = x(1); yi = y(k);

end

% Gráficos

t = linspace(0,T*NN,NN);

subplot(2,1,1)

plot(t,y);

ylabel('y (rad)'); title('Señal de salida (y) vs tiempo (s)');

grid;

subplot(2,1,2)

plot(t,p);

ylabel('p (rad/seg)'); title('LEY DE CONTROL (p) vs tiempo (s)');

grid;

xlabel('Tiempo (s)')

% Cálculo recursivo de la matriz Ptilde y cálculo de Ktilde

T = 15; Ptilde = zeros(3,3);

for i=1:T

Ptilde = Q + Gtilde'*Ptilde*Gtilde - Gtilde'*Ptilde*Htilde*inv(R+Htilde'*Ptilde*Htilde)*Htilde'*Ptilde*Gtilde;

end

Ktilde = inv(R + Htilde'*Ptilde*Htilde)*Htilde'*Ptilde*Gtilde;

*****

```

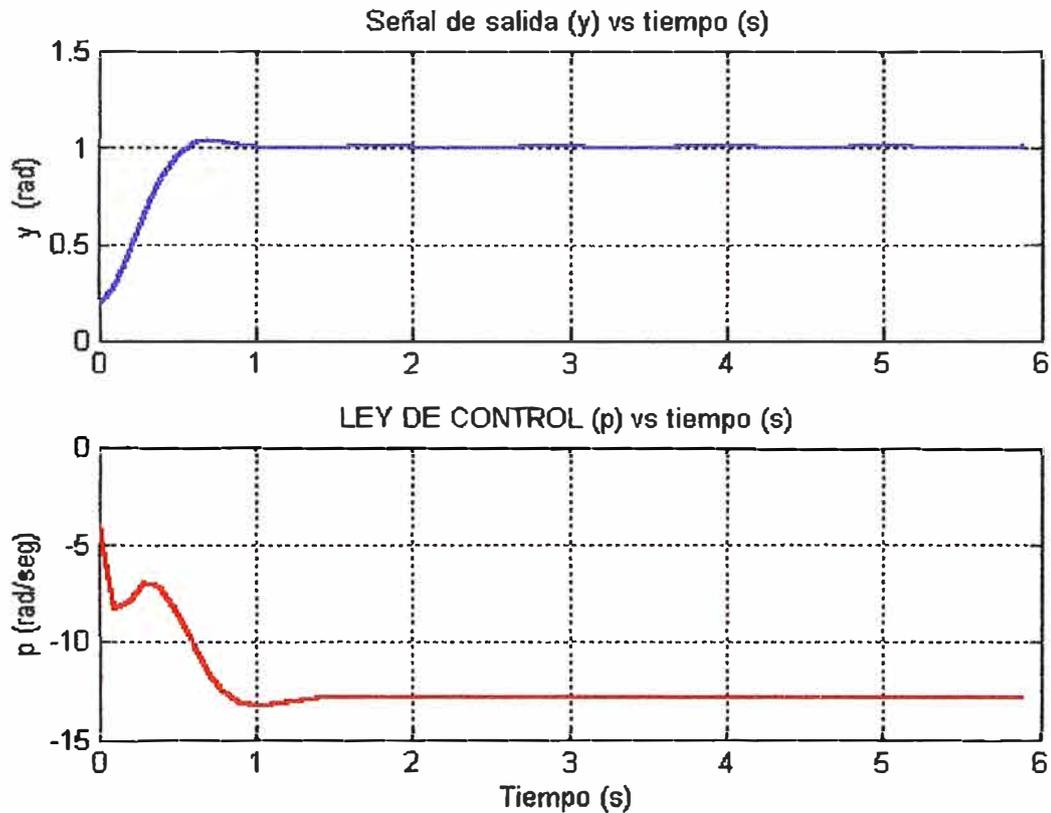


Figura 4.4: Señal de salida y señal de control a un escalón, para el sistema con Controlador discreto Optimo proporcional Integral, obtenido con MatLab

Debe notarse que las respuestas a un escalón para el sistema diseñado y para el obtenido con MatLab, son muy cercanas, lo que significa que los pasos y criterios asumidos en el diseño han sido correctos.

Por tanto la Ley de Control final para el presente diseño, será la ecuación (4.37), es decir:

$$u(k) = - \begin{pmatrix} -12.8564 & -21.12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + 8.2222 v(k)$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Nuestras conclusiones las podemos dividir en dos partes, la primera referente a la aplicación del Giróscopo y la segunda respecto al sistema de control diseñado en este trabajo, así:

Respecto al Giróscopo:

- 1.- Su aplicación en sistemas de vuelo resulta importantísima, sobre todo cuando por problemas del tipo atmosférico, es imposible el vuelo manual y es necesario recurrir al vuelo por instrumentos, mismos que me brindan información de la posición de la nave en el vuelo.
- 2.- Su aplicación no sólo se encuentra en la aeronáutica, sino también en navíos marítimos, incluso son aplicados en los trasatlánticos y brindan gran comodidad en su travesía por los mares.
- 3.- Si fuera nuestra necesidad, la de cambiar la dirección de un proyectil (nuestra aplicación fué de sólo regresarlo a su rumbo), se requerirían dos ó tres giroscopos libres, que puedan sensar cada uno de los tres ejes involucrados.

- 4.- Esta podría ser una recomendación para el Laboratorio de Control, donde se podría Investigar un poco respecto a éste instrumento y realizar un proyecto de construcción de un Giróscopo Libre, para pruebas de aplicación en el mismo Laboratorio.

Respecto al sistema de control diseñado en el presente trabajo:

- 1.- El aplicar el Bloque Integrativo en el Lazo cerrado, fue para asegurar que el error en estado estable se haga cero. Luego, en nuestro caso se le dió la primera prioridad a ésta acción de control, es decir para que luego de cualquier perturbación producida, el sistema vuelva a su trayectoria original. Cosa que no se hubiera conseguido con el sólo empleo de un Control Optimo Proporcional.

Recordemos que la acción Proporcional, luego de una perturbación se estabiliza con un error en estado estable diferente de cero, cosa que elimina la acción de Control Integral.

- 2.- Al realizar el análisis de la Función de Transferencia del sistema proyectil, éste fue el de un sistema oscilante (polos en el eje imaginario), por lo que tuvimos que emplear un punto de equilibrio diferente al obtenido originalmente (0;0), ya que ella no nos permitía obtener una Matriz **B** diferente de cero (dependiente de la ley de control). La elección del nuevo punto de equilibrio permitió realizar todo el posterior diseño del sistema de control deseado y detallado en el Capítulo IV.

3.- La importancia de una buena elección de las Matrices de ponderación Q y R, son un punto neurálgico en el diseño del sistema de control, es decir la importancia de saber elegir y diferenciar a la variable de mayor importancia, para que ella sea la tenga mayor prioridad en el peso de las constantes a elegir para dichas Matrices.

Un ejemplo muy claro de ello, se puede apreciar en el APÉNDICE C, donde con ayuda del MatLab, obtenemos diferentes respuestas para el mismo sistema de control del presente trabajo, pero con diferentes pesos y prioridades en las variables involucradas.

APENDICES

APÉNDICE A

INERCIA DE ROTACIÓN

La segunda Ley de Newton , que afirma que *“el cambio (vectorial) en el momento de inercia de una partícula provocado por la aplicación de una fuerza, es proporcional al impulso de dicha fuerza”*. El momento de inercia de una partícula de masa m con velocidad \mathbf{v} , es $m\mathbf{v}$ y el impulso de una fuerza es igual a la integral de la fuerza con respecto al tiempo. Así, la fórmula matemática de la segunda Ley de Newton es:

$$m\mathbf{v} - (m\mathbf{v})_0 = \int_0^t \mathbf{F} dt \quad (\text{A.1})$$

Al diferenciar la ecuación anterior, es posible escribir la segunda ecuación de Newton como:

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \quad (\text{A.2})$$

Finalmente, si la masa (m) de la partícula es constante (como lo es el giróscopo), la ecuación anterior se convierte en:

$$\mathbf{F} = m \frac{d}{dt} (\mathbf{v}) = m\mathbf{a} \quad (\text{A.3})$$

donde \mathbf{a} es la aceleración de la partícula.

La segunda Ley de Newton se aplica también a la rotación de partículas y cuerpos rígidos. En este caso, hablaremos del momento angular y del par de torsión resultante aplicado ó momento de inercia. Hagamos una breve revisión del tema que nos proporcione la perspectiva apropiada de la aplicación.

El momento resultante (\mathbf{T}) con respecto a un punto fijo (referencia inercial) debido a todas las fuerzas con resultante \mathbf{F} sobre un cuerpo es:

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (\text{A.4})$$

Donde \mathbf{r} es el vector de posición desde el punto fijo al punto de aplicación de la fuerza resultante \mathbf{F} . Así, basándonos en la ecuación (A.2):

$$\mathbf{T} = \mathbf{r} \times \left[\frac{d}{dt} (m\mathbf{v}) \right] = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) \quad (\text{A.5})$$

ya que: $\left(\frac{d}{dt} \mathbf{r} \right) \times m\mathbf{v} = 0$

Si se define el momento angular como (el momento del momento inercial),

$$\mathbf{H} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \quad (\text{A.6})$$

Entonces la segunda ley de Newton correspondiente al momento angular es

$$\mathbf{T} = \frac{d}{dt} \mathbf{H} \quad (\text{A.7})$$

Para un cuerpo rígido que giro en torno a un punto fijo en el mismo cuerpo ó bien en torno a su centro de masa, con una velocidad angular ω , la velocidad instantánea de una partícula de masa m_i con respecto al centro de masa (Figura A.1.a) o a un punto fijo (Figura A.1.b) es:

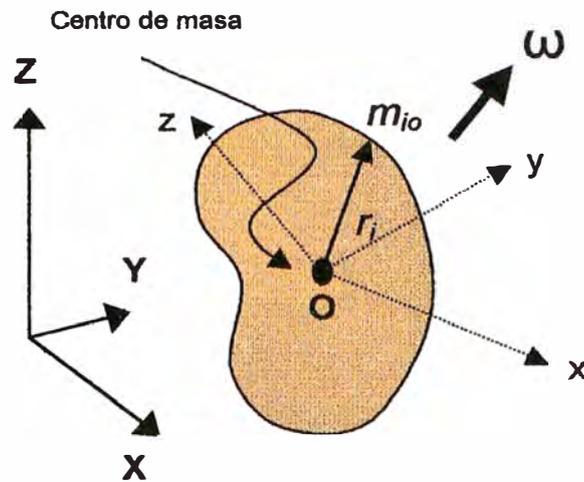


Figura A.1.a: Velocidad instantánea de una partícula respecto al Centro de Masa (O)

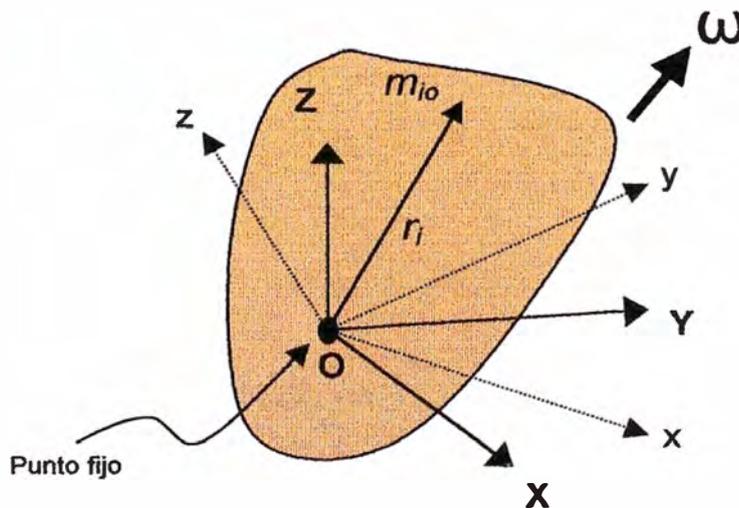


Figura A.1.b: Velocidad instantánea de una partícula respecto a un punto fijo (O)

$$\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i \quad (\text{A.8})$$

donde el vector de posición \mathbf{r}_i se mide en relación con el punto fijo o centro de masa. Así, sustituyendo la ecuación (A.8) en la ecuación (A.6) e integrando sobre todas las partículas que constituyen el cuerpo, se tiene el momento angular para un cuerpo rígido:

$$\mathbf{H} = \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] dm \quad (\text{A.9})$$

La expansión de la ecuación (A.9) respecto a los componentes del marco referencial x-y-z que se anexa al cuerpo en el centro de masa o en el punto fijo (Figura A.1.a y A.1.b) da:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \mathbf{i} \left[\omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int (xy) dm - \omega_z \int (xz) dm \right] + \\ & \mathbf{j} \left[-\omega_x \int (yx) dm + \omega_y \int (z^2 + x^2) dm - \omega_z \int (yz) dm \right] + \\ & \mathbf{k} \left[-\omega_x \int (zx) dm - \omega_y \int (zy) dm - \omega_z \int (x^2 + y^2) dm \right] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

o definiendo los momentos (masa) de inercia J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} y los productos de inercias J_{xy} , J_{xz} , J_{yz} se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \mathbf{i} (J_{xx} \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z) + \\ & \mathbf{j} (-J_{xy} \omega_x + J_{yy} \omega_y - J_{yz} \omega_z) + \\ & \mathbf{k} (-J_{xz} \omega_x - J_{yz} \omega_y + J_{zz} \omega_z) \\ \therefore & \quad \mathbf{H} = \mathbf{i} H_x + \mathbf{j} H_y + \mathbf{k} H_z \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

En el caso general, en donde el sistema de coordenadas x-y-z gira con una velocidad angular $\boldsymbol{\Omega}$, que puede ser distinta de la velocidad angular del cuerpo $\boldsymbol{\omega}$, la razón de cambio del momento angular se da por:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{H} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}$$

de modo que la ecuación de cuerpo rígido (A.7) se convierte en:

$$\mathbf{T} = \left(\frac{d}{dt} \mathbf{H} \right)_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H} \quad (\text{A.12})$$

En cuanto a los componentes, la ecuación (A.12), tenemos:

$$\begin{aligned}
 T_x &= \dot{H}_x - H_y \Omega_z + H_z \Omega_y \\
 T_y &= \dot{H}_y - H_z \Omega_x + H_x \Omega_z \\
 T_z &= \dot{H}_z - H_x \Omega_y + H_y \Omega_x
 \end{aligned}
 \tag{A.13}$$

Donde debe notarse que estas son las sumas de todos los pares de torsión que se aplican en una dirección determinada. La ecuación (A.11) proporciona los componentes de H .

Para cualquier punto fijo de rotación, existe un conjunto de direcciones de los ejes unidas al cuerpo en ese punto; éstos se denominan los “ejes principales”, para los cuales los productos de inercia son cero. Si los ejes x-y-z coinciden con los ejes principales, entonces la ecuación (A.13) se convierte en:

$$\begin{aligned}
 T_x &= J_{xx} \dot{\omega}_x - J_{yy} \Omega_z \omega_y + J_{zz} \Omega_y \omega_z \\
 T_y &= J_{yy} \dot{\omega}_y - J_{zz} \Omega_x \omega_z + J_{xx} \Omega_z \omega_x \\
 T_z &= J_{zz} \dot{\omega}_z - J_{xx} \Omega_y \omega_x + J_{yy} \Omega_x \omega_y
 \end{aligned}
 \tag{A.14}$$

Además, si el movimiento ocurre sólo sobre un conjunto de ejes, por ejemplo el eje z, y se elige $\Omega = \omega$, entonces: $\omega_x = \Omega_x = 0$ y $\omega_y = \Omega_y = 0$, entonces las ecuaciones (A.14) se reducen a sólo:

$$T_z = J_{zz} \dot{\omega}_z \quad \text{ó} \quad T = J \left(\frac{d}{dt} \omega \right)
 \tag{A.15}$$

APÉNDICE B

DISCRETIZACIÓN DE UN SISTEMA OSCILADOR

Sea el sistema oscilador siguiente:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \quad (\text{B-1})$$

Obtendremos la representación en el espacio de estado en tiempo continuo del sistema y la representación en el espacio de estado en tiempo discreto.

1.1 REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO CONTINUO.-

Para la función de Transferencia dada, tenemos la ecuación diferencial:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \omega^2 u \quad (\text{B-2})$$

Se definen las variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \left(\frac{1}{\omega}\right) \dot{y} \end{aligned} \quad (\text{B-3})$$

Entonces se obtiene la representación en el espacio de estado siguiente:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix} u \quad (\text{B-4})$$

$$y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

1.2 REPRESENTACIÓN EN ESPACIO DE ESTADO EN TIEMPO DISCRETO.-

De la representación en tiempo continuo se obtuvieron (B-4):

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

Por definición se tiene:

$$G = e^{AT} = \mathcal{L}^{-1} \left[(sI - A)^{-1} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\begin{pmatrix} s & -\omega \\ \omega & s \end{pmatrix}^{-1} \right]$$

$$G = \mathcal{L}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + \omega^2} & \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \\ \frac{-\omega}{s^2 + \omega^2} & \frac{s}{s^2 + \omega^2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega T & \text{sen } \omega T \\ -\text{sen } \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} \quad (\text{B-5})$$

Además, la matriz **H**:

$$H = \begin{pmatrix} T \\ 0 \end{pmatrix} e^{A\lambda} d\lambda \quad B = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega \lambda & \text{sen } \omega \lambda \\ -\text{sen } \omega \lambda & \cos \omega \lambda \end{pmatrix} d\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \text{sen } \omega T \end{pmatrix} \quad (\text{B-6})$$

Por lo tanto la representación en el espacio de estado en tiempo discreto se convierte en:

$$\begin{pmatrix} x_1((k+1)T) \\ x_2((k+1)T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega T & \text{sen } \omega T \\ -\text{sen } \omega T & \cos \omega T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \text{sen } \omega T \end{pmatrix} u(kT)$$

$$y(kT) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(kT) \\ x_2(kT) \end{pmatrix} \quad (\text{B-7})$$

1.3 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PULSO DEL SISTEMA DISCRETIZADO

Finalmente la Función de Transferencia Pulso del sistema discretizado se puede obtener a partir de:

$$G(z) = C(zI - G)^{-1} H + D \quad (\text{B-8})$$

En nuestro caso $D = 0$, por lo que reemplacemos los valores de **G**, **C** y **H**, en (B-8):

$$G(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z - \cos \omega T & -\text{sen } \omega T \\ \text{sen } \omega T & z - \cos \omega T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \text{sen } \omega T \end{pmatrix}$$

$$G(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{\begin{pmatrix} z - \cos \omega T & \text{sen } \omega T \\ -\text{sen } \omega T & z - \cos \omega T \end{pmatrix}}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1} \begin{pmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \text{sen } \omega T \end{pmatrix} = \frac{(1 - \cos \omega T)(z + 1)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

Por lo que finalmente:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{(1 - \cos \omega T)(1 + z^{-1})z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \quad (\text{B-9})$$

Debe notarse que la Función de Transferencia Pulso obtenida, es la misma que se obtendría al tomar la Transformada z del sistema en tiempo continuo, antecedida por un Retenedor de Orden Cero ('zoh' en MatLab).

Verifiquémoslo:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = Z \left[\left(\frac{1 - e^{-T \cdot s}}{s} \right) \left(\frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2} \right) \right] = (1 - z^{-1}) Z \left[\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right]$$

Aplicando la Transformada z de los términos entre corchetes:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = (1 - z^{-1}) \left(\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1 - z^{-1} \cos \omega T}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \right)$$

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \left(\frac{(1 - \cos \omega T)(1 + z^{-1})z^{-1}}{1 - 2z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \right) \quad (\text{B-10})$$

Por tanto se obtiene la misma Función de Transferencia de Pulso:

$$((\text{B-9}) = (\text{B-10}))$$

ello es debido a que la discretización en el espacio de estado proporciona un equivalente del Retenedor de Orden cero del sistema en tiempo continuo.

APÉNDICE C

MATRICES DE PONDERACIÓN (Q y R)

Como se ha podido apreciar en el diseño del Control Optimo Proporcional Integral, una parte importante de ella es la elección de las Matrices de Ponderación Q y R. Una buena elección hará que el sistema obtenga una buena Respuesta transitoria (Tiempo de establecimiento, Máximo sobrepico, Factor de amortiguamiento, etc.).

A continuación mostramos la Respuesta del sistema, aplicando la simulación del apartado 4.3 (Simulación del Control Optimo Proporcional Integral del proyectil con giro estabilizado), donde se aplicó el Programa 4.4 (simulación del Control Optimo Proporcional Integral desde el tiempo continuo [$x=(\pi/18;0)$ y $y_i=\pi/18$]). En este programa se ha realizado variaciones en las prioridades de control, es decir para el caso del diseño del presente trabajo, la prioridad primera la tenía el eliminar el error en estado estable posterior a una perturbación, ahora cambiaremos las prioridades según se indicará en los gráficos siguientes:

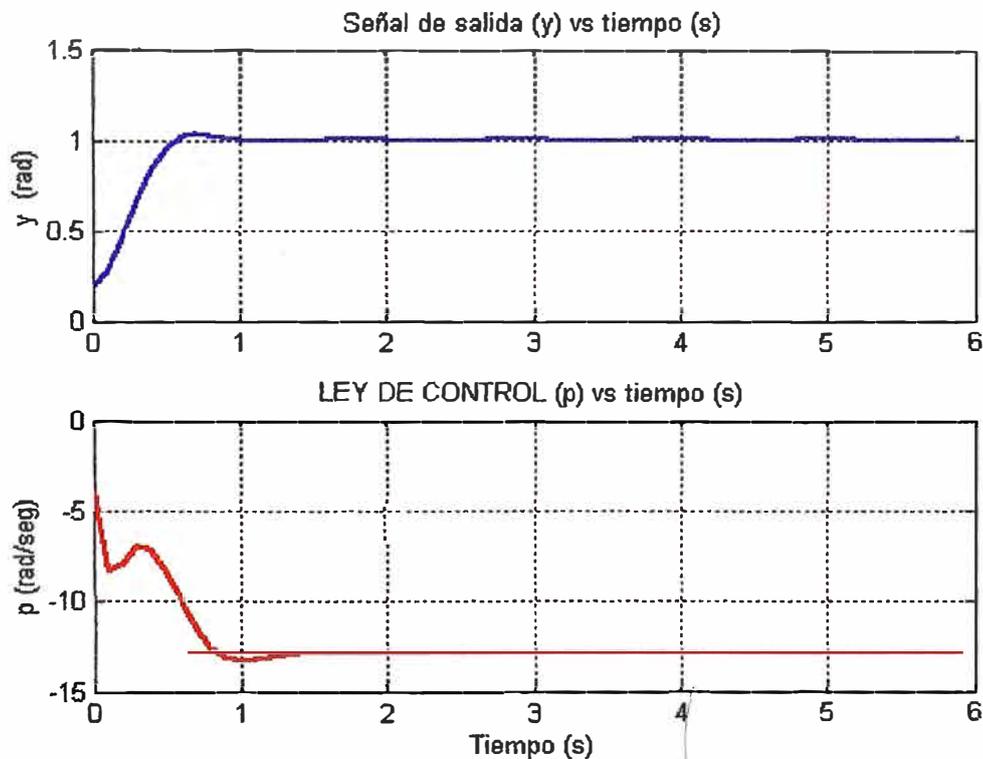
CASO I.-) Que es el mismo empleado en el presente trabajo, es decir las Matrices de Ponderación utilizadas fueron:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = (0.01)$$

$x_1 \rightarrow$ ángulo de desviación θ
 $x_2 \rightarrow$ velocidad de variación del ángulo θ
 $x_3 \rightarrow$ velocidad de acción de la acción Integral

Como se aprecia la primera prioridad la tenía x_3 , es decir la acción Integral en su eliminación del error en estado estable.

Por lo que las gráficas de "ANGULO DE DESVIACIÓN θ ", y "LEY DE CONTROL", son de acuerdo a lo obtenido:

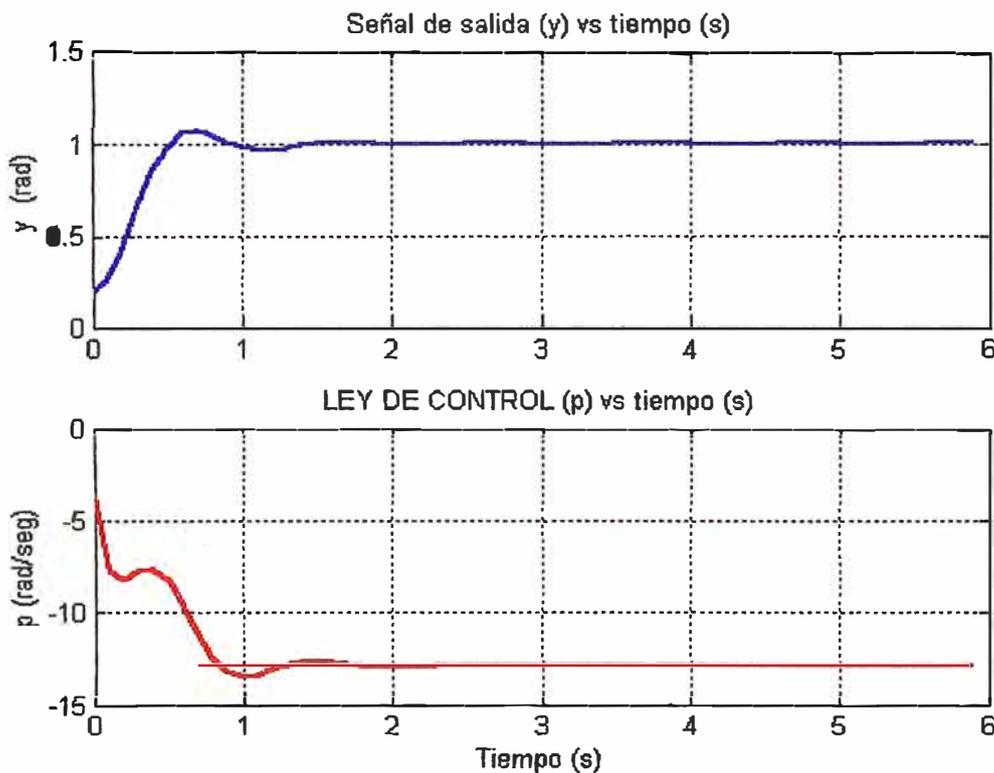


Donde puede Apreciarse un Tiempo de establecimiento de alrededor de 1 seg y un Máximo Sobrepico entre 3% y 5%, que para la aplicación es bastante bueno.

CASO II.-) Donde las Matrices de Ponderación a Utilizar son:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad R = (0.01)$$

Es decir se le dará un mayor énfasis a la acción de control Integral, donde las gráficas a obtener son:

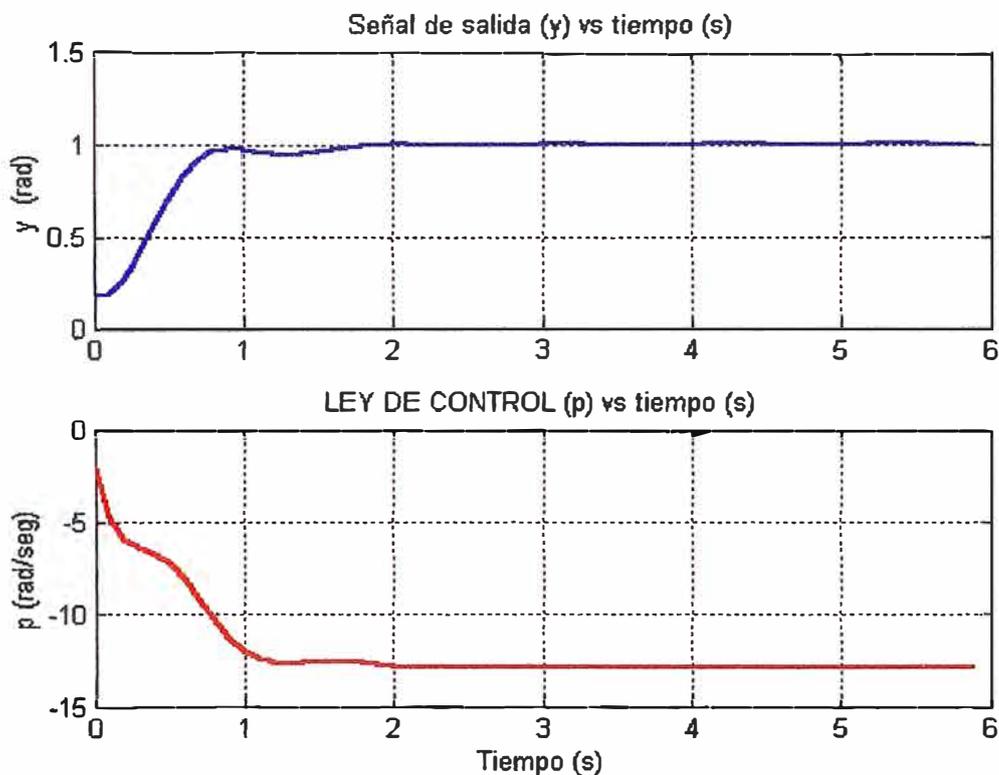


Donde apreciamos que el tiempo d establecimiento se ha incrementado a alrededor de 1.5 seg y e Máximo Sobrepico es de alrededor de 8%.

CASO III.-) Donde las Matrices de Ponderación a Utilizar son:

$$Q = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = (0.01)$$

Es decir se le dará un mayor énfasis a la variable ANGULO DE DESVIACION, donde las gráficas a obtener son:

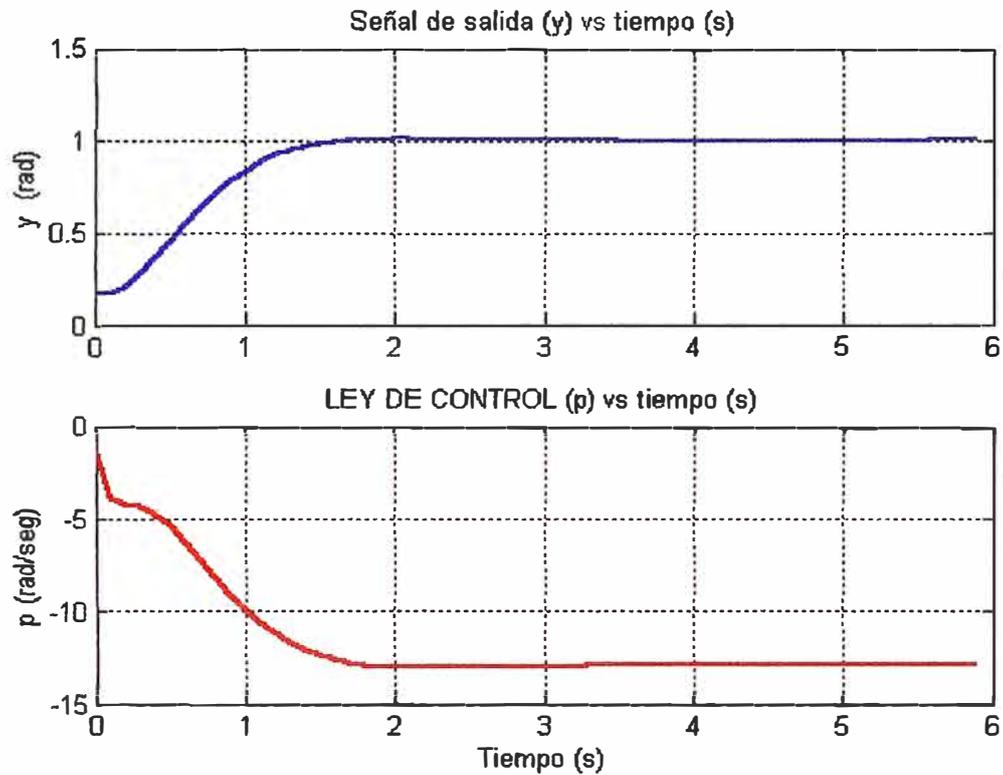


En este caso, se nota que el sistema se vuelve prácticamente sobreamortiguado, con un tiempo de establecimiento de alrededor de 2 seg. y ligeras oscilaciones hasta el set-point.

CASO IV.-) Donde las Matrices de Ponderación a Utilizar son:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = (0.01)$$

Es decir se le dará un mayor énfasis a la variable VELOCIDAD ANGULAR, donde las gráficas a obtener son:

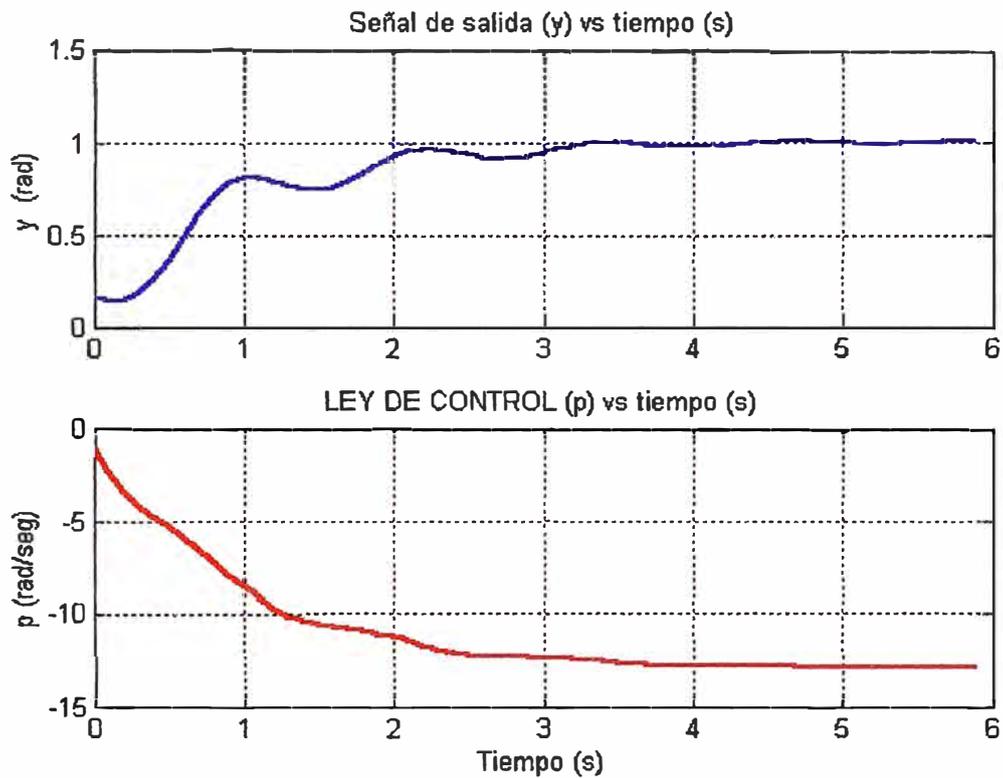


Muy cercano a la respuesta de un sistema críticamente amortiguado, sigue siendo lenta la respuesta, con un tiempo de establecimiento mayor de 2 seg.

CASO V.-) Donde las Matrices de Ponderación a Utilizar son:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad R = (1)$$

Es decir la Matriz Q, vuelve a ser la misma que la empleada en el diseño del presente trabajo, lo que se está variando es el peso de la Matriz R.



Donde puede apreciarse la lentitud mayor de respuesta, comparada con los cuatro casos anteriores. Ahora el tiempo de establecimiento es de aproximadamente 4 seg., y siempre acercándose al punto de consigna, pero más lentamente.

Como se puede apreciar es muy importante una buena elección de las Matrices de ponderación, hasta obtener una que realmente alcance las expectativas en cuanto a la respuesta transitoria del sistema. Saber elegir la variable que debe tener la mayor prioridad, así como la menor, para ello es conveniente probar hasta alcanzar nuestro objetivo final y para ello contamos con el MatLab, que hará rápidamente las simulaciones.

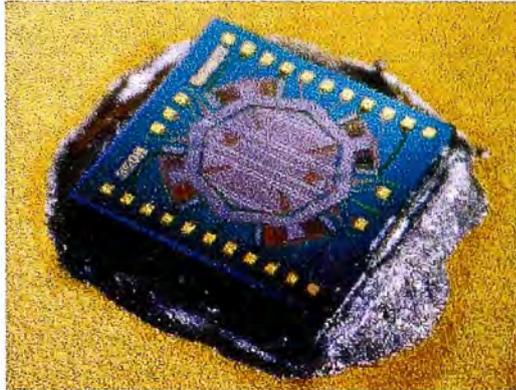
ANEXOS

- 1.- Data Sheet, "Silicon MicroRing Gyro", de MICROSENSORS
- 2.- Data Sheet, "TriRate", de MEMSense

MICROSENSORS

MEMS TECHNOLOGY

Silicon MicroRing Gyro™



FEATURES:

- Highly sensitive angular rate gyroscope
- Surface micromachined silicon and metal structure
- 2.4 mm² sensor based on Coriolis tuning fork gyro principle
- 5 mm² capacitive readout ASIC: low power, ultra-low noise, wide dynamic range
- Decoupled capacitive pickoff
- Available in 8-lead ceramic or metal package

APPLICATIONS:

- **AUTOMOBILE:** leveling control, anti-spin, anti-skid, navigation
- **INDUSTRIAL:** robotics, shipping, motion control, survey equipment
- **CONSUMER:** GPS receiver, VR gear, 3D mouse, camcorder, sports equipment,
- **TOYS:** remote control for cars, helicopter, aircraft, robots
- **MILITARY:** missile guidance, smart munitions, tracker buoys, autonomous vehicles, land navigation, pilot head tracker, marine guidance

DESCRIPTION:

MicroSensors' Silicon MicroRing Gyro is designed for MEMS applications requiring highly sensitive motion sensing. The micro gyro responds to Coriolis forces induced in an oscillating element whenever there is physical rotation about the input axis. The magnitude of these forces is directly proportional to the angular rate of rotation. These minuscule forces, acting on a differential capacitor, are detected and amplified by the readout ASIC.

ELECTRICAL CHARACTERISTICS

Parameter	Min	Typical	Max	Units
Input Supply Voltage	4.5		5.5	V
Input Power			50	mW
Full Range Scale		100		Deg/sec
Bandwidth		50		Hz
Resolution		0.1		Deg/sec
Linearity		1.0		%
Input Axis/Mounting Alignment		1.0		Degree
G Sensitivity			0.25	Deg/sec/g
Shock Resistance		100		g
Temperature Range	0		50	°C
Axis Sensing		Single		
Analog Output Drive Signal			±2	V

For more information, contact National Sales Manager:

Phone: 1-714-444-8831 Fax: 1-714-540-6712 E-mail: info@microsensors.com
 MicroSensors, Inc., 3001 Redhill Avenue, Building 3, Costa Mesa, CA 92656-4529

This document contains preliminary information on a product under development. MicroSensors, Inc., www.microsensors.com, reserves the right to change product specifications or discontinue this product without prior notice. All trademarks and/or registered trademarks are properties of their respective companies. © 1998 MicroSensors, Inc., an Irvine Sensors company. All rights reserved. 9/98

TriRate

Triaxial MEMS Angular Rate Sensor
± 150, ±300 or ±1200 °/s**Functional Description**

The TriRate is a complete triaxial angular rate sensor based on a surface-micromachining technology capable of sensing angular motion about three orthogonal axes. The TriRate provides analog outputs for angular rate and precision references about the X, Y, and Z-axes. A temperature output is also provided allowing the implementation of compensation techniques. Two digital self-test inputs electromechanically excite each axis to test proper operation of both sensors and the signal conditioning circuits.

For pricing information contact MEMSense Sales at 888.668.8743 extension 15 or via email at sales@memsense.com.

The TriRate is available in a custom SMT package measuring 0.70 in × 0.70in × 0.40 in.

Applications

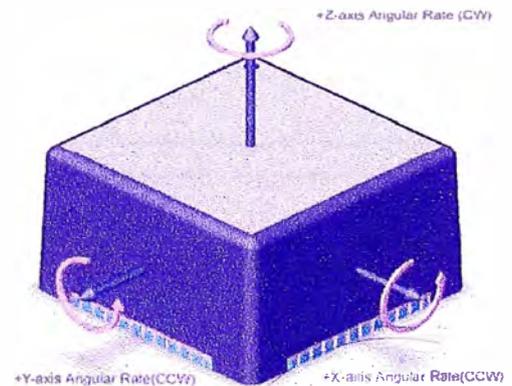
- Antenna Stabilization
- Automotive Control
- Inertial Measurement Units
- Orientation Sensing
- 3D Simulators
- Industrial Automation
- Gaming Devices
- Industrial Automation

**Features**

- Triaxial Angular Rate Sensor
- Solid State MEMS Reliability
- Low Noise
- Low Power
- SMT Miniature Package
- 2000g Powered Shock Operation
- 5 V Single Supply Operation

Ordering Information

Part	Rate (°/s)
TR0150S050	±150
TR0300S050	±300
TR1200S050	±1200

Orientation Diagram

MEMSENSE

www.memsense.com

Page 1

Information provided in this document is believed to be accurate however it is not guaranteed. MEMSense reserves the right to change product specifications at anytime without notice

888.668.8743

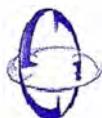
TriRate

Triaxial MEMS Angular Rate Sensor
 ± 150 , ± 300 or ± 1200 °/s

Table 1 – Specifications

Parameter	Specification			Units	Conditions
Sensor					
Operating Voltage Range	4.75 to 5.25			V	
Supply Current	18.0 typical (24 Max)			mA	
Power Supply Rejection	60			db	4.75 Vs to 5.25 Vs
Mass	4 (max)			Grams	
Temperature Range	-40 to +85			°C	Temperature for max and min specifications
Rate Output	TR0150S050	TR0300S050	TR1200S050		
Dynamic Range	± 150	± 300	± 1200	°/s	Full scale range over specified temperature
Sensitivity	12.5	5.0	1.25	mV/°/s	
Nonlinearity	0.1	0.1	0.1	% of FS	Best fit straight line
Zero Rate	2.50	2.50	2.50	V	
Turn On Time	35	35	35	ms	Power on to $\pm 1/2$ °/s of Final
Rate Noise Density	0.05	0.1	0.1	°/s/Hz ^{1/2}	
Bandwidth ¹	50	50	50	Hz	Factory set 3dB point
Rate Reference Output					
Voltage Value	2.5			V	
Temperature Drift	5.0			mV	Deviation from 25°C
Temperature Output					
Voltage at 25 °C	2.50			V	
Scale Factor	8.4			mV/°C	
Absolute Maximum Ratings					
Acceleration Powered	2000 max			g	Any axis 0.5ms
Vdd	-0.3 (min) +6.0 (max)			V	
Operating Temperature	-55 to +125			°C	
Storage Temperature	-65 to +150			°C	
Typical Values at 25°C, Vss = 5 V, 0 °/s, Unless otherwise noted					

1. Other rate bandwidth configurations are available upon request.



MEMSense

www.memsense.com

Page 2

Information provided in this document is believed to be accurate however it is not guaranteed.
 MEMSense reserves the right to change product specifications at anytime without notice

888.668.8743

TriRate

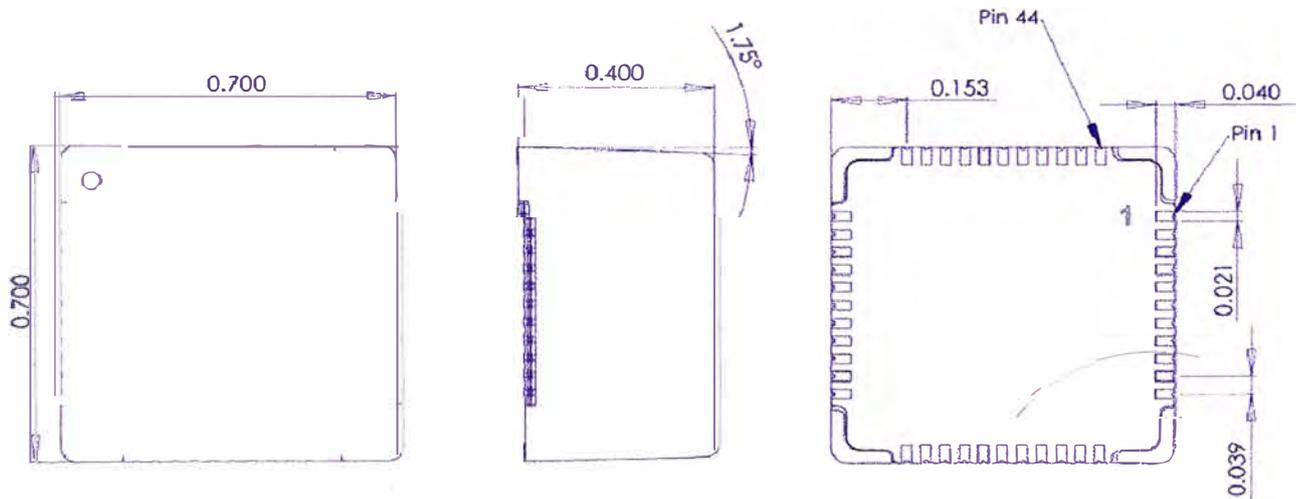
Triaxial MEMS Angular Rate Sensor
 ± 150 , ± 300 or ± 1200 °/s

Table 2 - Pin Function Descriptions

Pin No.	Name	Function
1	XREF	X axis analog precision reference output.
2	XRATE	X axis analog rate signal output.
3	ZREF	Z axis analog precision reference output.
4	ZRATE	Z axis analog rate signal output.
5	TEMPZ	Analog temperature voltage output, Z gyro.
6	AGND	Analog power supply return.
7	TEMPX	Analog temperature voltage output, X gyro.
8	TEMPY	Analog temperature voltage output, Y gyro.
9 - 35		No connect (open) ¹
36	AGND	Analog power supply return.
37	VDDA	Analog power supply.
38	TESTN	High-level activated digital input stimulating X, Y and Z rate to Ref - 660mV. ²
39	TESTP	High-level activated digital input stimulating X, Y and Z rate to Ref +660mV. ²
40 - 42		No connect (open) ¹
43	YREF	Y axis analog precision reference output.
44	YRATE	Y axis analog rate signal output.

1. Physical solder connection recommended.
2. The 300°/s and 1200°/s rate sensor will produce a 270 mV output change.

Figure 1 – TriRate Physical Dimensions



All dimensions in inches
 Hand solder attachment recommended



MEMSENSE

www.memsense.com

Page 3



Information provided in this document is believed to be accurate however it is not guaranteed.
 MEMSense reserves the right to change product specifications at anytime without notice

888.668.8743

BIBLIOGRAFÍA

1. Eronini Umez-Eronini. "Dinámica de Sistemas y Control", Ed. Thomson Learning, Inc.. 2001.
2. Katsuhiko Ogata. "Ingeniería de Control Moderna", Ed. Pretince Hall Inc., Madrid, 4° Edición. 2003.
3. Katsuhiko Ogata. "Sistemas de Control en Tiempo Discreto", Ed. Pretince Hall Hispanoamericana S.A., México, 2° Edición. 1996.
4. Katsuhiko Ogata. "Problemas de INGENIERIA DE CONTROL utilizando MATLAB", Ed. Pretince Hall Iberia SRL, Madrid. 1999.
5. Ernest O. Doeblein. "Diseño y aplicación de Sistemas de Medición", Ed. Diana, Mc Graw-Hill, México 1° Edición. 1980.
6. Olle I. Elgerd. "Control Systems Theory", Ed. Kogakusha Company, Mc Graw-Hill Inc, Tokio, International Student Edition, 1967.

REFERENCIAS WEB'S

1. <http://inicia.es/de/vuelo/indice.html>, (Instrumentación Básica de vuelo) España, M. A. Muñoz, © 2001-2005.
2. <http://inta.es>, Instituto Nacional de técnica Aeroespacial (INTA), Organismo del Ministerio de defensa de España. "Aerodinámica de cohetes. Problemas específicos de los cohetes de artillería", Autores: Jesús Morote y Gabriel Liaño López-Puigcerver, INTA División de Aerodinámica y Propulsión.
3. <http://www.gravityprobeb.com>, Página de la sonda espacial "Gravity Probe B", que se encuentra en el espacio para confirmar la Teoría de la Relatividad de Eintein. Página conjunta de la Universidad de Stanford y NASA.
4. <http://www.dccia.ua.es/dccia/inf/asignaturas/ROB/optativos/Sensores/intro.html>, Página informativa del Departamento de Ciencia de la computación e Inteligencia Artificial (DCCIA), de la Universidad de Alicante, España. Describe algunas aplicaciones de sensores,

particularmente el Giróscopo en el “robot P3” de honda que es posiblemente el robot más famoso del mundo, sobre todo, desde que protagonizo un anuncio publicitario de la multinacional japonesa hace unos meses. En este anuncio se podía ver al robot P3 ejerciendo una de las tareas que ningún otro robot podía hacer hasta entonces (y es posible que todavía no haya ninguno): subir escaleras.

5. <http://www.arrakis.es/~bumblebe/giroscopo.html>, Proveedor Español de InterNet, que entre sus servicios es dar información técnica, entre las cuales están el Giróscopo.
6. <http://mecfunnet.faii.etsii.upm.es/Xitami/webpages/teoria/giros2.htm>, Página de Física Aplicada, de Mecánica Fundamental de InterNet (MecFunNet), de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid.
7. <http://www.aire.org/ea/material/asm.htm>, página con información de algunas características de proyectiles Aire-Superficie y Aire-Aire. Página Española (Asociación Española AIRE: www.aire.org), actualizada al 2004.
8. <http://dpacolombia.8k.com/html/aerodinamic.htm>, página donde explica la aerodinámica del avión, así como las leyes que la gobiernan (leyes de Newton, entre otras), además brinda información conceptual de términos empleados en aeronáutica.