

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

Facultad de Ingeniería Civil



Evaluación de Capacidad Última
de Losas Armadas en dos Sentidos

T E S I S

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO CIVIL

Walter Cruz Aguilar

PROMOCION 1990-II

LIMA-PERU

1993

INDICE

CAPITULO I : INTRODUCCION	8
1.100 Hipótesis básicas de cálculo.	10
1.101 Ecuaciones de cálculo.	10
1.102 Esquemas de patrones de líneas de fluencia para losas uniformemente cargadas	12
CAPITULO II : MARCO TEORICO DE LAS LINEAS DE FLUENCIA	14
CAPITULO III : ANALISIS DE CAPACIDAD ULTIMA DE LOSAS CUADRADAS Y RECTANGULARES.	26
3.100 Losa cuadrada reforzada isotrópicamente, apoyada en los cuatro bordes y cargada uniformemente.	26
3.101 Losa cuadrada simplemente apoyada sobre dos lados opuestos y libre los dos restantes con carga concentrada y uniformemente.	27
3.102 Losa rectangular con bordes fijos y/o libres cargada uniformemente.	28
3.103 Losa rectangular fija sobre dos lados opuestos y con viga de borde a lo largo de los bordes libres cargada uniformemente.	40
3.104 Losa rectangular con/sin viga de borde apoyada sobre cuatro columnas y fija/apoyada sobre los cuatro bordes cargada uniformemente.	43
3.105 Losa rectangular reforzada isotrópicamente, apoyada sobre dos lados opuestos y libre los bordes restantes cargada uniformemente y/o concentrada.	45
3.106 Losa rectangular fija en un borde y libre las restantes con una carga concentrada.	51
3.107 Losa rectangular uniformemente cargada con abertura	53
3.200 Programa de cómputo	71
3.300 Diseño de losas cuadradas y rectangulares.	77
3.400 Elaboración de abaco para el diseño práctico.	82
CAPITULO IV : ANALISIS DE CAPACIDAD ULTIMA DE LOSAS OBLICUAS.	86
4.100 Losa oblicua fija/apoyada con carga lineal y uniforme.	87
4.101 Losa oblicua fija/apoyada con carga concentrada.	88
4.200 Programa de cómputo.	92
4.300 Diseño de losas oblicuas.	99
4.400 Elaboración de abaco para el diseño práctico	100

CAPITULO V	: ANALISIS DE CAPACIDAD ULTIMA DE LOSAS TRIANGULARES.	101
5.100	Losa triangular fija/apoyada sobre los tres lados cargada uniformemente.	102
5.101	Losa triangular fija/apoyada sobre dos lados cargada uniformemente.	104
5.200	Programa de cómputo.	106
5.300	Diseño de losas triangulares.	112
5.400	Elaboración de abaco para el diseño práctico	113

CAPITULO VI	: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PRACTICAS PARA EL DISEÑO.	115
-------------	--	-----

APENDICE	: TABLAS DE COEFICIENTES PARA LOS MOMENTOS ELASTICOS	117
----------	--	-----

BIBLIOGRAFIA ;

- American Concrete Institute; REGLAMENTO DE LAS CONSTRUCCIONES DE CONCRETO ARMADO (ACI 318-84)
- Johansen, K.W. "YIELD LINE THEORY"
- WOOD, R.H. "PLASTIC AND ELASTIC DESIGN OF SLABS AND PLATES".
- Park, R. "LOSAS REFORZADAS EN DOS SENTIDOS"
- Jones, L.L. "ULTIMATE LOAD ANALYSIS OF REINFORCED AND PRESTRESSED".
- Dubinsky " CALCULO DE LOSAS POR LAS LINEAS DE ROTURA
- Nawy, E.G. "REINFORCED CONCRETE".

CAPITULO I

INTRODUCCION

Usualmente las losas armadas se han venido analizando como si se tratara de un cuerpo elástico homogéneo, que tienen igual resistencia y rigidez en todas las direcciones.

En las condiciones de su utilización las losas no se comportan totalmente elásticas ya que en ellas se producen deformaciones elásticas sometidas a compresión y tracción, se forman fisuras en las zonas sometidas a tracción debido a la rotura local de la adherencia entre el concreto y la armadura. Al aumentar la carga crece el número y las dimensiones de las fisuras y la armadura alcanza, en las zonas de mayor tensión, el límite de fluencia.

Hay que señalar que el cálculo de losas por el método de la teoría de la elasticidad es muy compleja. Debido a eso se recurre en la práctica y en ausencia de tablas, a cálculos aproximados.

Entre tanto el método de la línea de fluencia nos permite resolver los problemas prácticos de manera bastante simple. La aplicación de estos cálculos están corroborados por las investigaciones experimentales. En el presente trabajo se estudia la teoría de línea de fluencia utilizando el principio de trabajo virtual y las ecuaciones de equilibrio. Con ambos métodos y presuponiendo un mecanismo de colapso que sea compatible con las condiciones de frontera se obtienen los momentos últimos o máximos de resistencia de las secciones y la carga última o máxima.

De los dos métodos, lo cual son presentados en el siguiente capítulo, el primero es por lejos el más fácil para comprender, para esto se requiere un poco más de conocimiento de lo que ya ha sido expuesto. A pesar de esto tiene la desventaja que las reacciones de las columnas no pueden ser encontradas sin recurrir al método de equilibrio y en general esto hace un poco más tedioso obtener la solución.

El método de equilibrio tiene la inmediata desventaja que mucho más conocimiento es requerido antes que el método pueda ser usado. La razón para esto es que el equilibrio de cada segmento de losa es estudiada separadamente y antes que los momentos sean tomados alrededor de algún eje apropiado es necesario conocer el valor y distribución de los esfuerzos cortantes o reacciones de un elemento sobre el próximo.

Dentro de un marco teórico se explica ambos métodos más detalladamente. El método de línea de fluencia es un enfoque de Límite superior, por lo tanto se debe tener bastante cuidado al examinar

los posibles patrones de línea de fluencia para asegurarse de que se use en el diseño el que proporcione la carga máxima más baja; de otro modo es posible que se sobrestime la resistencia de la losa. Sin embargo los mecanismos correctos de colapso en casi todos los casos usuales son bien conocidos.

En lo subsiguiente se analizarán las formulas de carga última para losas con diversas formas (cuadrado, rectangular, oblicua, triangular), condiciones de frontera y cargas distintas asumiendo que los patrones críticos de las líneas de fluencia que se presentan en cada uno de ellas es la correcta, basada en investigaciones experimentales.

En cada caso estudiado se plantea un programa de cómputo para ser utilizado en el diseño. Con lo cual elaboraremos un ábaco para un análisis práctico.

Finalmente se dan algunas recomendaciones prácticas de ayuda para el diseño.

SUMARIO

Uno de los propósitos que se tiene al elaborar este trabajo es de tratar de incentivar de alguna manera a todos aquellos profesionales que están ligados con el diseño de losas.

Si bien es cierto que la teoría de las líneas de fluencia tiene sus inicios ya hace algunos años y aprovechando de la experiencia y de la bibliografía proporcionada es conveniente tomar ciertos puntos importantes que nos sirvan de parámetros para quizás reglamentar el diseño de losas basada en esta teoría.

En algunos países que cuentan con un reglamento de diseño para aplicar la teoría de las líneas de fluencia coinciden en un punto y es la de los posibles problemas de servicio que se pueden evitar comprobando las deflexiones y los anchos de las grietas.

Un aspecto importante al utilizar esta teoría es la economía en el acero ya que permite al proyectista la libertad de escoger distribuciones del refuerzo que conduzcan a un detallado simple.

En forma general explicaremos los puntos que se han considerado importantes para aplicarlas al diseño .

En el Capítulo I se describe los puntos más saltantes que se han de tener en cuenta para establecer el adecuado patrón de líneas de fluencia que nos permita encontrar la carga última más baja que se ha de utilizar en el diseño.

En el Capítulo II se esboza todo el marco teórico de las líneas de fluencia. Se explica en detalle los dos métodos existentes (Trabajo virtual y Ecuaciones de equilibrio), que

dependerá del criterio del diseñador en tomar el que le proporcione menos trabajo algebraico al determinar la carga última o máxima.

En el Capítulo III, IV y V apoyado del capítulo anterior se estudian las losas rectangulares, oblicuas y triangulares respectivamente, determinando para cada una de ellas y con diversas condiciones de frontera la carga última más baja que la utilizaremos en el diseño. Para cada una de ellas se elabora un programa de cómputo así como también un abaco que nos permita un diseño práctico.

En el Capítulo VI se dan algunas conclusiones y recomendaciones prácticas para el diseño de losas con diversas condiciones de frontera.

En el apéndice se presentan las tablas de los coeficientes para los momentos elásticos que nos servirán para el chequeo por carga de servicio.

1.100 HIPOTESIS BASICA DE CALCULO

Para predecir el más adecuado patrón de línea de fluencia nos podemos apoyar en las siguientes cuatro condiciones básicas, lo cual nos ayudará en nuestro propósito cualquiera que sea la forma de la losa.

- a) Las líneas de fluencia terminan en una losa límite.
- b) Las líneas de fluencia son rectas.
- c) Una línea de fluencia pasa através de la intersección de los ejes de rotación de segmentos adyacentes de la losa.
- d) Los ejes de rotación generalmente están a lo largo de las líneas de apoyo y pasan sobre una columna.

La teoría de línea de fluencia supone un colapso por flexión, es decir que la losa tiene suficiente resistencia al cortante para impedir la falla por cortante.

1.101 ECUACIONES DE CALCULO

Momento máximo de resistencia en la línea de fluencia.-

Para una línea de fluencia que corre en ángulo recto con respecto al refuerzo, el momento último ó máximo, de resistencia por ancho unitario debido a dicho refuerzo está dado por:

$$m_u = A_s f_y (d - 0.59 A_s f_y / f_c)$$

Para el caso de losas reforzadas en dos direcciones, los momentos últimos o máximos de resistencia por ancho unitario que se presentan en las direcciones x e y serán desiguales debido a que el área de acero y la distancia efectiva del acero en dichas direcciones son diferentes.

Cabe mencionar que no siempre será preciso determinar el momento último o máximo por ancho unitario a lo largo de una línea de fluencia que forma un ángulo de 90° con los ejes x e y.

Cuando no sucede este caso se presentan momentos de torsión así como también momentos últimos o máximos (de flexión). Estos momentos podrán ser hallados usando el criterio de la línea de fluencia escalonada o equivalente.

En la siguiente figura se muestra una línea de fluencia inclinada un ángulo "α" con respecto al eje Y₁ y que cruza los refuerzos de las direcciones X e Y. También se muestra la línea de fluencia

escalonada o equivalente.

Los momentos últimos o máximos de resistencia por ancho unitario en ambas direcciones (m_{ux} , m_{uy}) así como los del momento de torsión por ancho unitario m_{unt} pueden ser calculados considerando el equilibrio del elemento triangular tomado de la línea de fluencia.

Tales momentos se denotan en la figura en forma vectorial.

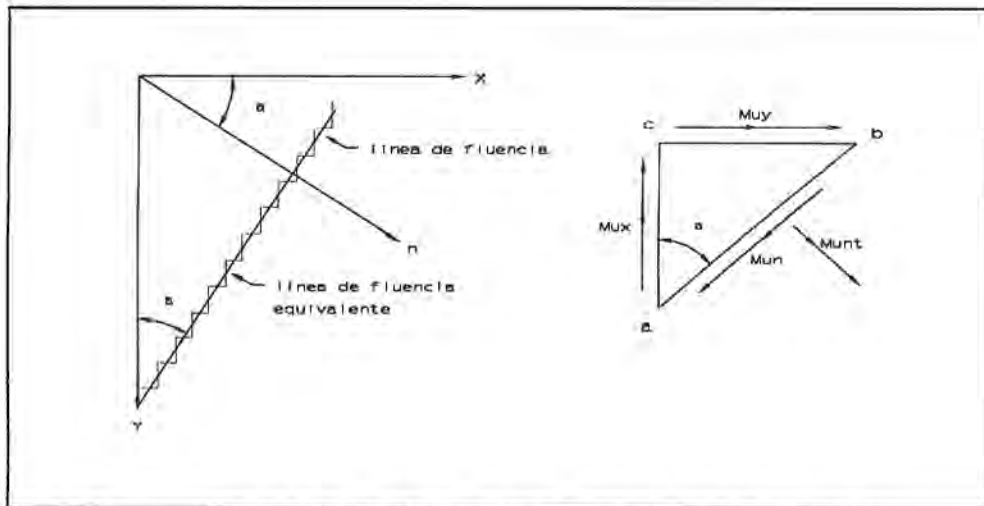


figura 1.01 Línea de fluencia que forma un ángulo cualquiera con el refuerzo ortogonal.

Tomando momento con respecto al lado ab, del elemento, tenemos que el momento último o máximo de resistencia por ancho unitario que actúa normalmente a la línea de fluencia es:

$$m_{un} = m_{ux} \cos^2\alpha + m_{uy} \sin^2\alpha \dots\dots\dots(1.1)$$

De igual modo, pero con respecto a un eje perpendicular a ab tomamos momento y hallamos el momento de torsión por ancho unitario que actúa a lo largo de la línea de fluencia.

$$m_{unt} = (m_{ux} - m_{uy}) \sin\alpha\cos\alpha\dots\dots\dots(1.2)$$

Cuando se tiene que $m_{ux} = m_{uy}$, reemplazando en ambas ecuaciones anteriores se tiene:

$$m_{un} = m_{ux} = m_{uy}$$

$$m_{unt} = 0$$

Cuando sucede esto podemos decir que la losa esta isotrópicamente reforzada.

Cuando $m_{ux} \neq m_{uy}$, donde el momento último o máximo de resistencia por ancho unitario

dependerá de la dirección de la línea de fluencia y si existe momento de torsión en la línea de fluencia podemos decir que la losa está ortotrópicamente reforzada.

El uso de refuerzo ortotrópico es favorable por cuestiones económicas.

1.102 ESQUEMA DE PATRONES DE LINEAS DE FLUENCIA

A manera de convención se presenta los símbolos que se usarán en todo el trabajo para distinguir los tipos de apoyo, ejes de rotación y líneas de fluencia.

Se muestra también algunos ejemplos de patrones de líneas de fluencia para losas uniformemente cargadas de diversas formas y condiciones de frontera.

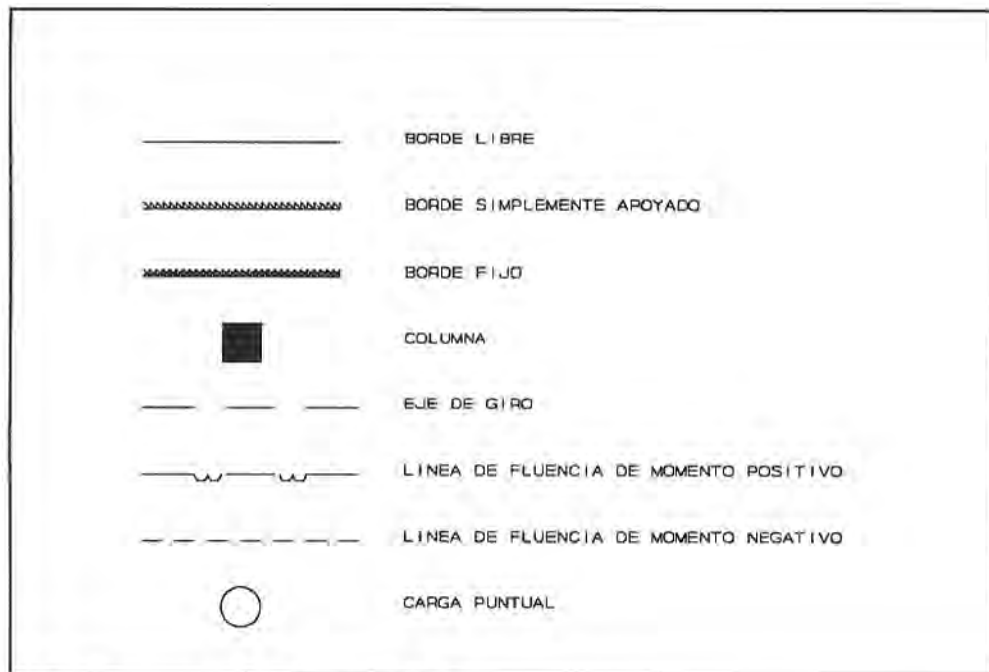


figura 1.02 Símbolos convencionales

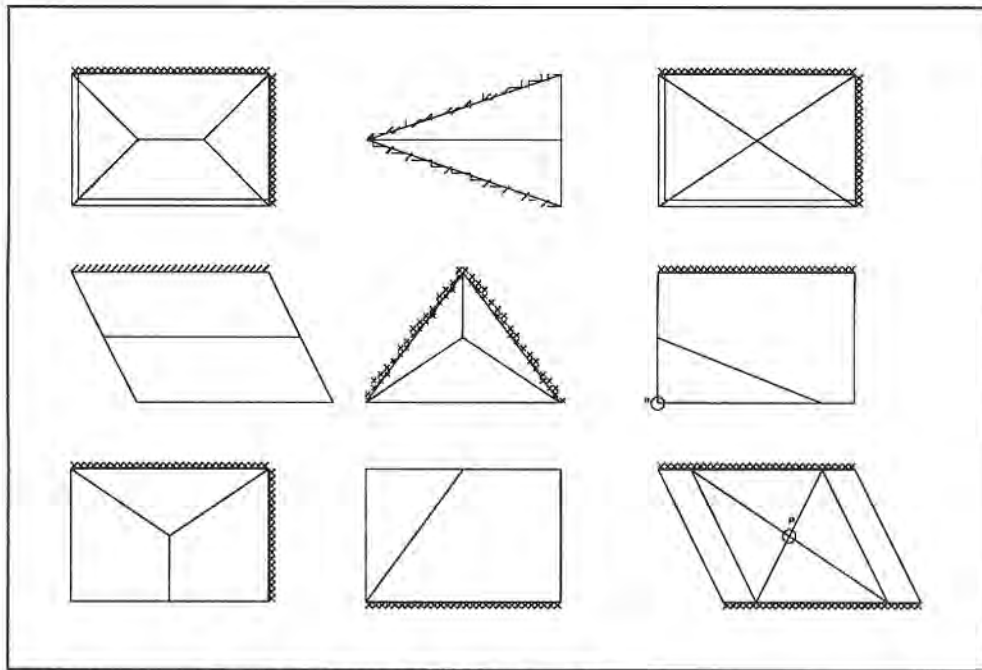


figura 1.03 Esquema de patrones de líneas de fluencia.

CAPITULO II

MARCO TEORICO DE LA TEORIA DE LINEA DE FLUENCIA

Principio del Trabajo Virtual.

Cuando analizamos una losa por el método del trabajo virtual, el primer paso es postular un patrón de línea de fluencia para la losa con la carga ultima o máxima. El próximo paso es elegir un punto conveniente dentro de la losa y dar a este punto un desplazamiento virtual δ .

Los segmentos comprendidos entre las líneas de fluencia lo podemos considerar como cuerpos rígidos ya que las deformaciones y las deflexiones adicionales solo ocurren en las líneas de fluencia. Entonces se podrán hallar los desplazamientos resultantes en todos los puntos de la losa y las rotaciones de los segmentos de la losa alrededor de las líneas de fluencia en termino de δ y de las dimensiones de los segmentos de la losa.

De aquí la pérdida de trabajo debido a este desplazamiento de la carga puede ser calculado de la ecuación.

$$\Sigma W_u \Delta = \int \int W_u \delta(x,y) dx dy \dots \dots \dots (2.01)$$

donde W_u representa la carga total sobre un segmento del patrón de línea de fluencia y Δ viene hacer el movimiento hacia abajo de su centroide.

El trabajo interno realizado en las líneas de fluencia solo se debe a los momentos flexionantes ya que el trabajo efectuado por los momentos torsionantes y la fuerza cortante es cero cuando se efectúa la suma sobre toda la losa y esto es debido a que a cada lado de la línea de fluencia se producen acciones de sentidos contrarios, tal como lo podemos apreciar en la siguiente figura.

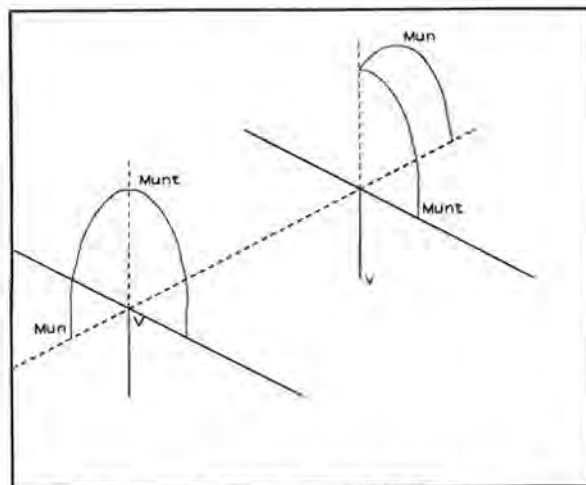


Figura 2.01 Acciones en una línea de fluencia

El trabajo efectuado en la línea de fluencia es el momento total a lo largo de la línea de fluencia multiplicada por la rotación de la línea de fluencia. El trabajo realizado por los momentos flexionantes tendrá signo negativo debido a que actuará en sentido opuesto a la rotación. De aquí el trabajo total efectuado en toda la línea de fluencia está dado por:

$$\text{trabajo interno} = \sum m_{un} \phi L \dots \dots \dots (2.02)$$

donde;

m_{un} es el momento último por ancho unitario

ϕ es la rotación de la línea de fluencia.

L es la longitud de la línea de fluencia.

Ya que hemos supuesto que el cuerpo rígido se encuentra en equilibrio estático bajo un sistema de fuerzas, la suma del trabajo virtual realizado por las fuerzas es cero, por lo tanto sumando el trabajo total realizado por las acciones externas como internas tenemos.

$$\sum \int \int W_u \delta(x,y) dx dy - \sum M_{un} \phi = 0 \dots \dots \dots (2.03)$$

Por conveniencia el primer término de la ecuación se escribirá en la forma corta como $\sum W_u \Delta$, donde tanto W_u como Δ fueron ya definidos anteriormente.

Componentes del Trabajo Interno

Dado que en la práctica los refuerzos están orientados paralelamente a los ejes X e Y y que conocemos los momentos últimos o máximos por ancho unitario que se producen en las direcciones X e Y es conveniente tratar en estas direcciones las componentes del trabajo interno realizado por los momentos últimos.

Suponiendo una línea de fluencia de longitud "L" inclinada un ángulo "α" con respecto al eje Y (ver fig. 2.02), donde X_o , Y_o son las proyecciones de la línea de fluencia en esos ejes y que si los segmentos de la losa sufren una rotación "φ" alrededor de la línea de fluencia tenemos:

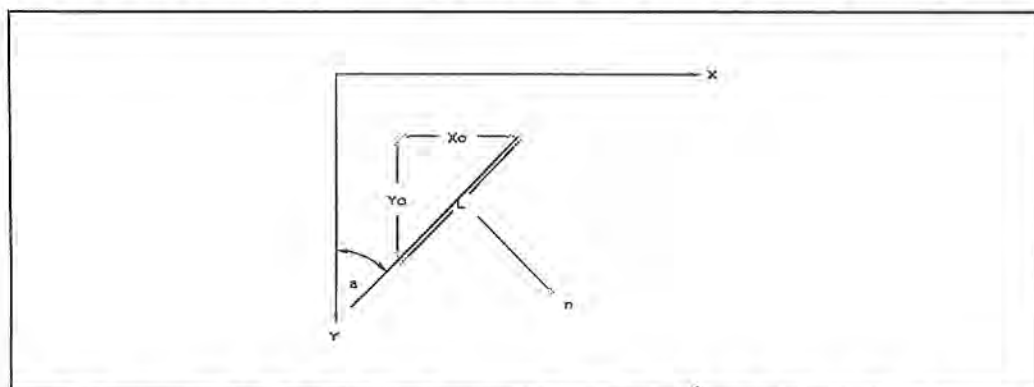


Figura 2.02 Línea de fluencia inclinada con respecto a las direcciones del refuerzo ortogonal.

Haciendo uso de la ecuación (1.1) el trabajo interno realizado será.

$$\begin{aligned} \sum m_{un} \phi &= \sum (m_{ux} \cos^2 \alpha + m_{uy} \sin^2 \alpha) \phi \\ &= \sum m_{ux} \phi \cos \alpha Y_o + \sum m_{uy} \phi \sin \alpha X_o \\ &= \sum m_{ux} \phi_x Y_o + \sum m_{uy} \phi_y X_o, \quad \text{Donde } \phi_x, \phi_y \text{ son los componentes de } \phi. \end{aligned}$$

Luego la ecuación del trabajo virtual se podrá escribir :

$$\sum W_u \Delta = \sum m_{ux} \phi_x Y_o + \sum m_{uy} \phi_y X_o \dots (2.04)$$

Dado que se pueden plantear patrones de línea de fluencia donde se desconozcan ciertas longitudes, tal como se muestra en la fig. (2.03)

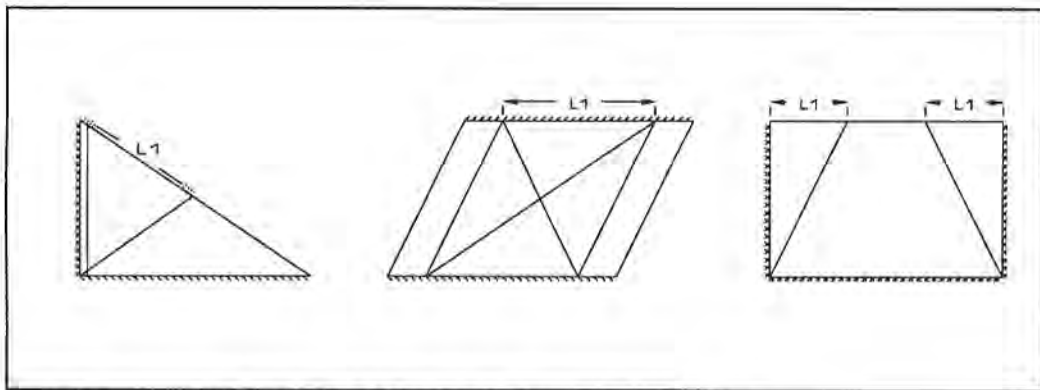


Figura 2.03 Patrones de línea de fluencia con direcciones desconocidas.

y cuando se presentan estos casos, la ecuación del trabajo virtual estará escrito en función de estas longitudes desconocidas y dado que la teoría de línea de fluencia plantea una solución de límite superior las longitudes desconocidas serán tal que produzcan un valor mínimo para W_u . esto se obtendrá resolviendo simultáneamente la derivada parcial.

$$\frac{dW_u}{dL_i} = 0$$

Donde "i" depende del número de longitudes desconocidas para un patrón de líneas de fluencia planteada.

Estos valores obtenidos se reemplazarán en la ecuación de la carga última para obtener la mínima carga última.

Analisis Mediante las Ecuaciones de Equilibrio

Atravez de este método para determinar la carga última de una losa se analizan por separados los segmentos considerándolos en equilibrio bajo la acción de sus fuerzas cortantes, cargas externas, momentos flexionantes y de torsión. Se plantean tantas ecuaciones como sean necesarias que permitan eliminar las dimensiones desconocidas planteadas con el posible patrón de las líneas de fluencia.

El proceso de cálculo que se realiza para la obtención de la carga última, en comparación con el método del trabajo virtual resulta en muchos casos menos complicado.

Para la obtención de una solución por este método, se requieren conocer las magnitudes de las fuerzas cortantes como de los momentos de torsión, cosa que no era necesario al utilizar el método del trabajo virtual, y esto básicamente debido a que los segmentos se consideran por separado. Seguidamente se considerarán las magnitudes de las fuerzas cortantes que actúan sobre las líneas de fluencia, ya que los momentos de torsión han sido ya deducidos anteriormente.

Equivalente estático de las fuerzas cortantes a lo largo de una línea de fluencia.

En la figura 2.04 se presenta un patrón típico de las líneas de fluencia de una losa, donde se observan los momentos de flexión, torsión y las fuerzas cortantes que actúan en un segmento del patrón de las líneas de fluencia.

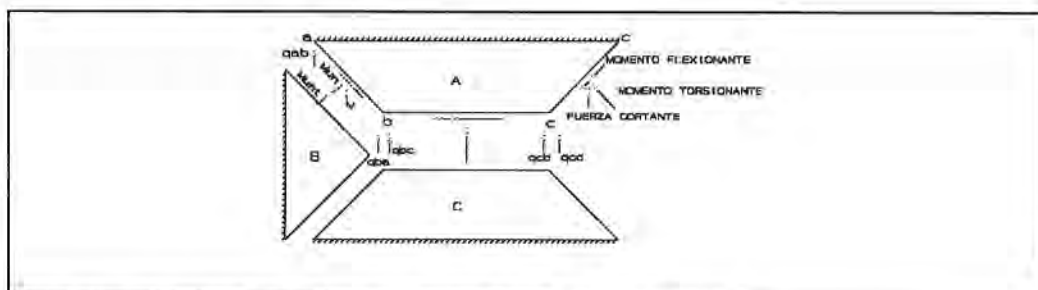


Figura 2.04 Losa rectangular con un patrón típico de líneas de fluencia.

Como se puede ver, para la línea de fluencia abcd en cada segmento de línea (ab, bc y cd), las fuerzas cortantes han sido reemplazadas por dos fuerzas estáticamente equivalentes. Dichas fuerzas son representadas en cada extremo de las líneas mencionadas.

Para la línea ab la fuerza individual será q_{ab} y q_{ba} , de la misma forma se representarán para las líneas bc y cd. De tales fuerzas no se conoce su magnitud ni dirección, pero se tomarán como positivas aquellas que actúan hacia arriba y negativas en caso contrario.

Se designa con el nombre de fuerza nodal aquella fuerza total que actúa sobre un segmento en la intersección de dos líneas de fluencia. De la figura (2.04) la fuerza nodal en el punto "b" para el segmento A será:

$$Q_{Ab} = q_{ba} + q_{bc}$$

De modo similar para el punto "b" del segmento B la fuerza nodal es Q_{Bb} y para el segmento C, Q_{cb} .

Las fuerzas estáticamente equivalentes que actúan en una misma línea de fluencia pero en segmentos diferentes tendrán sentidos opuestos; por ejemplo si para la línea de fluencia ab del segmento A la fuerza estáticamente equivalente q_{ba} tiene sentido positivo para el segmento B dicha fuerza será negativa. El mismo concepto se aplicará para las otras fuerzas estáticamente equivalente que actúan en distintos segmentos.

Teniendo como base lo antedicho se puede enunciar que en la intersección de un número de líneas de fluencia la suma de las fuerzas nodales es cero, que se puede escribir como:

$$Q_{Ab} + Q_{Bb} + Q_{cb} + \dots = 0 \dots\dots\dots (2.05)$$

Para determinar la magnitud de la fuerza nodal se procede a considerar primeramente el equilibrio de un segmento formado por dos líneas de fluencia, lo cuál para cada línea de fluencia existe una retícula diferente. Tal como se muestra en la figura (2.05) los momentos equivalentes de flexión y torsión rejidos por las retículas 1 y 2 para el elemento A' son $(m_{un})_2 - (m_{un})_1$ y $(m_{un})_2 - (m_{un})_1$ respectivamente.

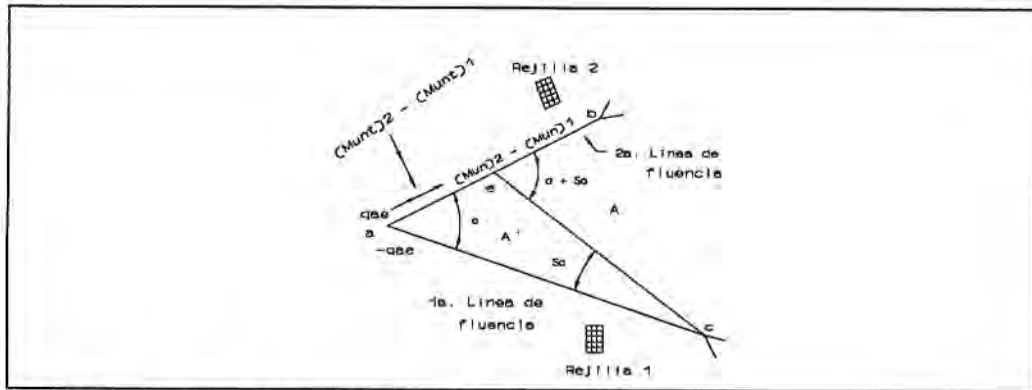


Figura 2.05 Momentos equivalentes a lo largo de ae.

Tomando momentos con respecto al eje ec para el equilibrio del elemento A' se obtiene.

$$(q_{ae} + q_{ac})a \operatorname{sen}(\phi + \delta\phi) = [(m_{un})_2 - (m_{un})_1]a \operatorname{cos}(\phi + \delta\phi) + [(m_{un})_2 - (m_{un})_1]a \operatorname{sen}(\phi + \delta\phi)$$

Dividiendo toda la expresión entre $a \operatorname{sen} \phi$ y considerando $\delta\phi \rightarrow 0$, la expresión quedará reducida a:

$$Q_{A'a} = q_{ae} + q_{ac} = [(m_{un})_1 - (m_{un})_1] \cot \phi + [(m_{un})_2 - (m_{un})_1] \dots (2.06)$$

De forma similar, considerense tres líneas de fluencia que se encuentran en un punto tal como se presenta en la figura (2.06).

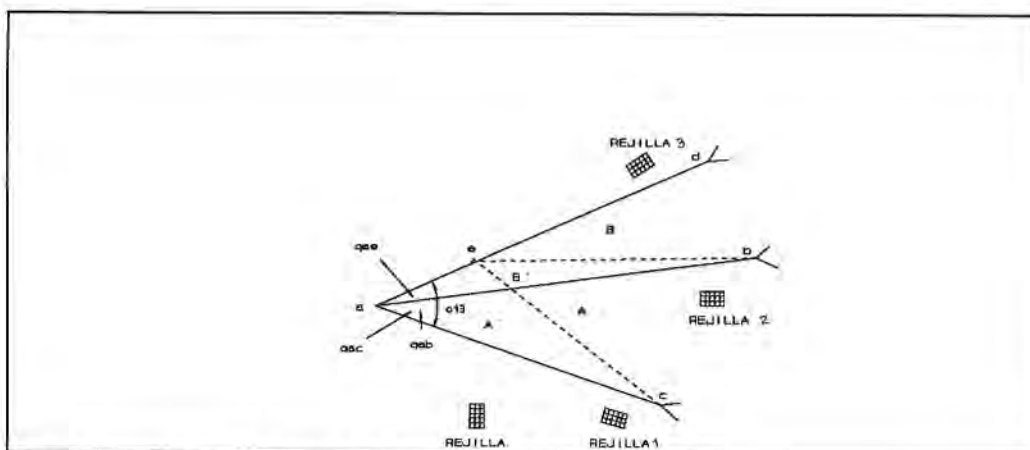


Figura 2.06 Fuerzas nodales en la unión de tres líneas de fluencia.

Considérese el equilibrio del elemento A' limitado por las líneas ac, ce y ea.

Se hace uso de la ecuación (2.06) donde la línea ac es considerado como la "primera" y ad como la "segunda" para las rejillas 1 y 3 respectivamente.

El elemento se convierte en:

$$Q_{A'a} = q_{ae} + q_{ac} = [(m_{un})_3 - (m_{un})_1] \cot \phi_{13} + [(m_{un})_3 - (m_{un})_1] \dots \dots \dots (2.07)$$

Para el equilibrio del elemento B', limitado por las líneas ab, bc y ae, se usa la misma ecuación donde la línea ab y ad son las líneas de fluencia "primera" y "segunda" conformadas por las rejillas 2 y 3 respectivamente, Entonces:

$$Q_{B'a} = q_{ae} + q_{ab} = [(m_{un})_3 - (m_{un})_2] \cot \phi_{23} + [(m_{un})_3 - (m_{un})_2] \dots \dots \dots (2.08)$$

De la ecuación (2.07) y (2.08) se tiene:

$$Q_{A'a} - Q_{B'a} = q_{ac} - q_{ab}$$

Ya que se supuso para el elemento B', la fuerza estáticamente equivalente q_{ab} hacia arriba; para el elemento A formado por las líneas ac y ab será $-q_{ab}$, por lo tanto la fuerza nodal Q_{Aa} está considerada en la ecuación anterior, luego:

$$Q_{Aa} = [(m_{un})_3 - (m_{un})_1] \cot \phi_{13} - [(m_{un})_3 - (m_{un})_2] \cot \phi_{23} + [(m_{un})_2 - (m_{un})_1] \dots \dots \dots (2.09)$$

De la ecuación (2.09) cuando las retículas de refuerzo son las mismas se tiene:

$$(m_{un})_1 = (m_{un})_2 = (m_{un})_3$$

$$(m_{un})_1 = (m_{un})_2$$

Con esto, la ecuación (2.09) resulta nula.

$$Q_{Aa} = 0$$

Se llamará Q_{12} a la fuerza nodal de la ecuación (2.09), debido a que se trata de las líneas de fluencia 1 y 2, que rodean al elemento.

Cuando se trata de una línea de fluencia que se intersecta con un borde libre, como se observa en la figura (2.07), donde el borde es considerado como línea de fluencia de resistencia cero, la ecuación (2.09) quedará;

$$Q_{12} = -(m_{un})_1 \cot\phi_{13} - (m_{un})_1$$

Se observo que :

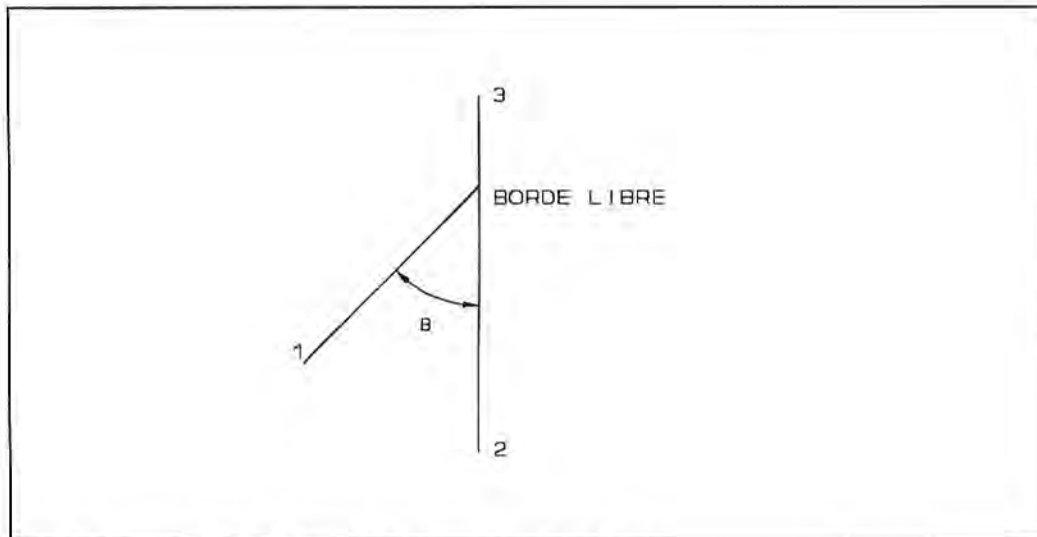


Figura 2.07 Línea de fluencia que intersecta a un borde libre

$$\cot\phi_{13} = \cot(\pi + \beta) = \cot\beta$$

Luego;

$$Q_{12} = -(m_{un})_1 \cot\beta - (m_{un})_1 \dots \dots \dots (2.10)$$

Cuando el refuerzo es colocado paralelo y perpendicularmente al borde libre, se tiene que $(m_{un})_1 = 0$ por lo tanto la ecuación (2.10) resulta:

$$Q_e = - m_{ue} \cot\beta \dots \dots \dots (2.11)$$

Teorema de Afinidad.-

Es encontrar que el comportamiento de ciertas clases de losas con refuerzo ortotrópico sea afín al comportamiento correspondiente de losas con refuerzo isotrópico, para esto son alterados las longitudes de los lados y la carga lo cual van a depender del coeficiente de ortotropía μ . A su vez μ estará en función de los momentos últimos de resistencia por ancho unitario tanto positivos como negativos de ambas direcciones.

Esto es decir que dos correspondientes losas pueden ser descubiertas con la misma deflexión en el correspondiente punto.

Para esto consideramos una región rígida dentro de un modo extensivo de colapso como el mostrado en la figura (2.08) que forma parte del patrón de línea de fluencia de una losa ortotrópica.

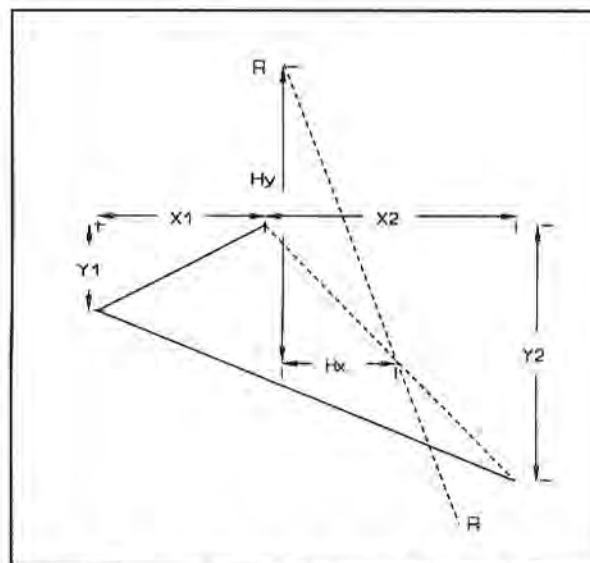


Figura 2.08 Segmento del patrón de líneas de fluencia de la losa ortotrópica.

Esto tiene refuerzo de fondo positivo correspondiente a los momentos plásticos m_{ux} y m_{uy} en la dirección x e y respectivamente; así mismo estos pueden ser refuerzos superiores negativos dados por m'_{ux} , m'_{uy} . Los momentos m_{ux} y m'_{ux} no tienen por que ser iguales, pero el coeficiente μ debe ser el mismo tanto en el fondo como en la superficie y referidos a la misma dirección,

Elegimos el eje de rotación RR de esta porción rígida limitada por los lados ABC donde se aprecia una línea de fluencia positiva, negativa y un borde libre, esta porción rígida la hacemos girar alrededor de dicho eje de tal forma que el punto "O" se desplace hacia abajo una magnitud δ . Luego el trabajo interno realizado por los momentos últimos o máximos será:

$$\Sigma m_{un} \phi = (m_{ux} Y_1 + m'_{ux} Y_2) \delta / h_x + (m_{uy} X_1 + m'_{uy} X_2) \delta / h_y$$

dado que

$$\mu = m'_{uy} / m'_{ux} = m_{uy} / m_{ux}$$

$$\Sigma m_{un} \phi = (m_{ux} Y_1 + m'_{ux} Y_2) \delta / h_x + (m_{ux} X_1 + m'_{ux} X_2) \mu \delta / h_y$$

El trabajo virtual puede ser expresada como :

$$\Sigma [(m_{ux} Y_1 + m'_{ux} Y_2) \delta / h_x + (m_{ux} X_1 + m'_{ux} X_2) \mu \delta / h_y] = \iint W_u \delta(x,y) dx dy \dots\dots\dots(2.12)$$

Ahora consideraremos una losa isotrópica con momentos últimos o máximos m_{ux} , m'_{ux} , positivos y negativos respectivamente, donde la longitud en la dirección X permanece igual a la losa ortotrópica pero la longitud de la dirección Y es multiplicada por una constante "K".

Al igual que la losa ortotrópica este segmento de losa isotrópica desciende una magnitud " δ ", el patrón de línea de fluencia permanece siendo el mismo así como el eje de rotación. Conociendo todo lo ante dicho procedemos a calcular el trabajo interno de la misma forma anterior.

$$\Sigma [(m_{ux} KY_1 + m'_{ux} KY_2) \delta / h_x + (m_{ux} X_1 + m'_{ux} X_2) \delta / Kh_y] = \iint W_u \delta(x,Ky) dx k dy$$

Dividiendo la expresión entre K, tenemos:

$$\Sigma [(m_{ux} Y_1 + m'_{ux} Y_2) \delta / h_x + (m_{ux} X_1 + m'_{ux} X_2) \delta / k^2 h_y] = \iint W_u \delta(x,y) dx dy \dots\dots\dots(2.13)$$

Haciendo la comparación de las ecuaciones (2.12) y (2.13) vemos que serán iguales si $K = 1/\sqrt{\mu}$.

A la losa isotrópica equivalente se le da el nombre de losa afín.

Con todo lo expuesto anteriormente podemos decir que la carga de colapso será la misma si:

- La longitud en el eje X y la carga distribuida es la misma.
- En la losa afín la longitud del eje Y como la carga puntual son divididas por $\sqrt{\mu}$.

Efecto de Esquina.

En los patrones de línea de fluencia que han sido estudiados anteriormente, nosotros hemos asumido que las líneas de fluencia entran directamente a la esquina de la losa.

A pesar de esto también es posible que la línea de fluencia antes de llegar a la esquina se bifurque y se forme lo que ha sido llamado esquina - palanca las dos formas alternativas de esquina palanca son mostrados en la figura (2.09).

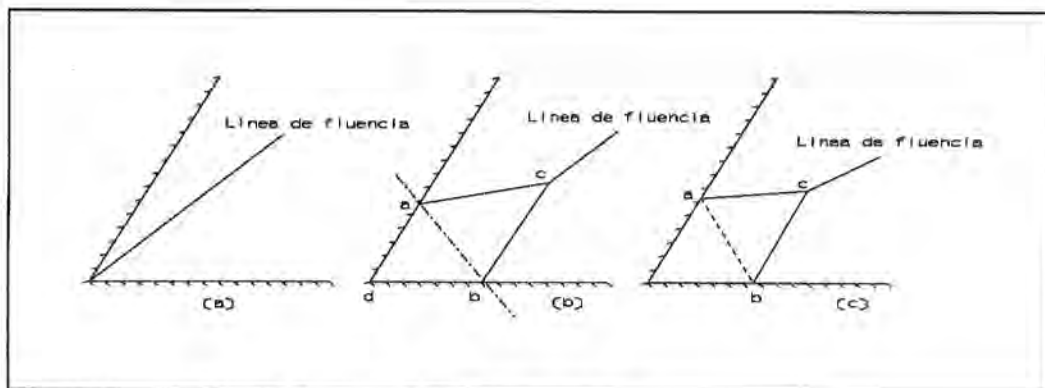


Figura 2.09 Líneas de fluencia en la esquina de una losa.

La figura 2.09b ilustra el tipo de esquina - palanca lo cual ocurrirá si la esquina no es sujeta y muestra el elemento triangular abd levantado y rotando alrededor de la línea ab . La figura 2.09c muestra el tipo de esquina - palanca lo cual se formará cuando la esquina es sujeta.

Cuando no se proporciona acero superior, y la esquina es sujeta, es seguro asumir, que el patrón es de la forma mostrada en la figura 2.09c. En estas circunstancias la línea de fluencia ab se supone que tiene resistencia cero. Cuando se proporciona acero superior y la esquina no es sujeta, la esquina se levanta y consecuentemente el momento de flexión negativo proveído no es usado para la mejor ventaja.

Aunque los patrones de línea de fluencia lo cual tienen esquinas - palancas, generalmente son más críticas que sin estos, ellos han sido descuidados por dos razones. Primero, el error que es introducido por descuidar a ellos es usualmente pequeño y segundo, porque el análisis viene hacer mucho más dificultoso si ellos son tomados en cuenta.

En el presente trabajo se omitirá el efecto de esquina, esto debido principalmente a que muchos investigadores han llegado a la conclusión de que se puede ignorar la reducción en la resistencia última debido a las esquina-palanca, ya que en muchos casos prácticos sobre losas se ha determinado que la teoría de la línea de fluencia es conservativa, debido a que no se tiene en cuenta la acción de membrana en la teoría.

CAPITULO III

ANALISIS DE CAPACIDAD ULTIMA DE LOSAS CUADRADAS Y RECTANGULARES

3.100 LOSA CUADRADA REFORZADA ISOTROPICAMENTE, FIJA/ APOYADA EN LOS CUATRO BORDES Y SUJETO A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA

Dado que la losa esta cargada isotropicamente ($m_{ux} = m_{uy}$), el momento último o máximo de resistencia por unidad de ancho tiene un valor constante m_u en ambas direcciones.

Esto es mostrado, junto con el patrón de línea de fluencia presupuesto en la fig (3.01). Por simetría el punto de unión de las diagonales deberá estar en el centro de la losa; por lo tanto no habrá longitudes desconocidas. Si aplicamos al punto "O" un pequeño desplazamiento " δ " hacia abajo, la..

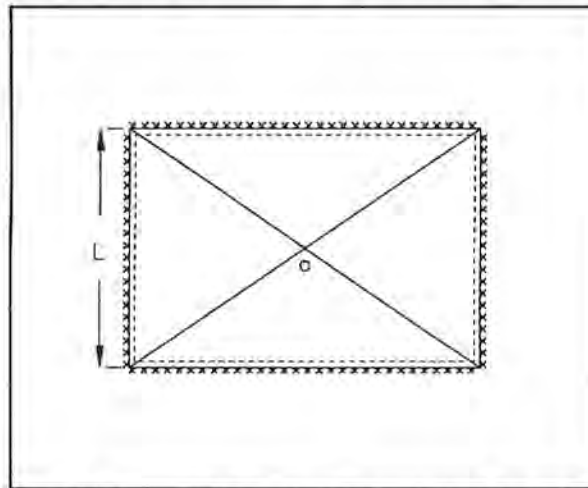


Figura 3.01 Losa cuadrada uniformemente cargada.

.. rotación total de los segmentos alrededor de cada línea de fluencia es 2ϕ , donde $\phi = \delta/(L/\sqrt{2})$. Por lo tanto para las dos líneas diagonales de fluencia, el término del trabajo interno realizado está dado por:

$$\Sigma m_{un} \phi_n = 2[(m_u + m_u) * 2 * (\sqrt{2}\delta/L) * \sqrt{2}L] = 8(m_u + m_u)\delta$$

y el trabajo externo será:

$$\Sigma W_u = 4[w/4 * L^2 * \delta/4] = w_u L^2 \delta/3$$

que representa la carga total sobre los segmentos triangulares, multiplicada por el desplazamiento hacia abajo de su centroide.

De esto y según la ecuación del trabajo virtual, ecuación 2.03 obtenemos:

$$w_u L^2 \delta / 3 = 8 m_u \delta$$

$$w_u = 24(m'_u + m_u) / L^2 \dots \dots \dots (3.01)$$

3.101 LOSA CUADRADA SIMPLEMENTE APOYADA SOBRE DOS LADOS OPUESTOS Y LIBRE LOS DOS RESTANTES CON CARGA CONCENTRADA Y UNIFORME

En la figura 3.02 se muestran los dos posibles patrones de fluencia.

La carga puntual se encuentra ubicado en el medio del borde libre.

El primer modo de falta solo presenta una línea recta que va de borde a borde, en tanto que el segundo modo presenta líneas de momento negativo y líneas radiales de momentos positivos.

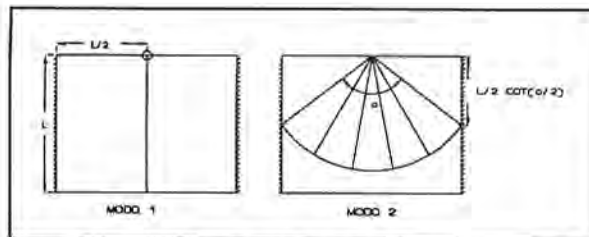


Figura 3.02 Losa cuadrada con carga concentrada y uniforme.

Para el modo 1, se desplaza el centro del borde libre una pequeña distancia δ , hacia abajo. La ecuación del trabajo virtual es:

$$P_u \delta + w_u l^2 \delta / 2 = 2 m_u l 2 \delta / l$$

Por lo tanto

$$P_u + w_u l^2 / 2 = 4 m_u \dots \dots \dots (3.02)$$

Para el modo 2 la ecuación del trabajo virtual es:

$$P_u \delta + w_u \pi / 2 (l/2)^2 \delta / 3 = (m'_u + m_u) \delta \phi$$

$$P_u + w_u \pi l^2 / 24 = (m'_u + m_u) \phi \dots \dots \dots (3.03)$$

3.102 LOSA RECTANGULAR CARGADA UNIFORMEMENTE CON BORDES FIJOS Y/O LIBRES
CARGADA UNIFORMEMENTE.

3.102 a: LOSA RECTANGULAR CON TODOS LOS BORDES FIJOS / APOYADA

La losa y el patrón de líneas presupuesto se presentan en la fig (3.03). Los momentos últimos o máximos negativos lo definiremos en función de las capacidades de momento positivo. Tal como se presentan la losa se observa tres dimensiones desconocidas que van a definir la posición de las líneas de fluencia, por consiguiente aplicando las ecuaciones de equilibrio requeriremos plantear cuatro ecuaciones.

De la teoría expuesta anteriormente sabemos que las fuerzas nodales en las dos uniones intermedias de las líneas de fluencia son cero (E,F)

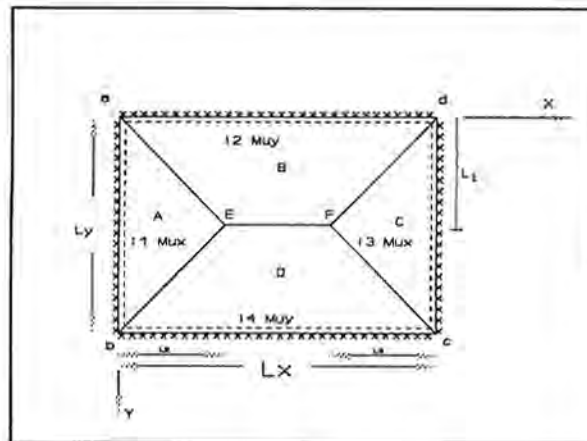


Figura 3.03 Losa rectangular uniformemente cargada con todos los bordes fijos.

Tomando momentos alrededor de cada borde para el equilibrio de los elemento A,B,C Y D, obtenemos:

$$(1+i_1)m_{ux}l_y = w_u l_y l_2^2 / 6 \dots\dots\dots(3.04)$$

$$(1+i_3)m_{ux}l_y = w_u l_y l_3^2 / 6 \dots\dots\dots(3.05)$$

$$(1+i_2)m_{uy}l_x = w_u l_2^2 l_1^2 / 6 + w_u l_3^2 l_1^2 / 6 + w_u (l_x - l_2 - l_3) l_1^2 / 2 \dots(3.06)$$

Elemento B:

$$(1+i_4)m_{uy}l_x = w_u(l_2(l_y-l_1)^2)/6 + w_u(l_3(l_y-l_1)^2)/6 + (w_u(l_x-l_2-l_3)(l_y-l_1)^2)/2 \dots\dots(3.07)$$

De la ecuación (3.04)/(3.05)

$$(1+i_2)/(1+i_3) = (l_2/l_3)^2 ;$$

$$l_2 = l_3[(1+i_1)/(1+i_3)]^{0.5} \dots(3.08)$$

De la ecuación (3.06)/(3.07)

$$(1+i_2)/(1+i_4) = (l_2)^2/(l_y-l_1)^2 ;$$

$$l_1 = l_y(1+i_2)^{0.5}/[(1+i_2)^{0.5} + (1+i_4)^{0.5}] \dots(3.09)$$

suponiendo que $u = m_{uy}/m_{ux}$

$$\alpha = (1+i_1)^{0.5} + (1+i_3)^{0.5}$$

$$\beta = (1+i_2)^{0.5} + (1+i_4)^{0.5}$$

Al sustituir de la ecuación (3.09) en la ecuación (3.06),

se tiene que:

$$(1+i_2)m_{uy}l_x = (w_u/6)(3l_x-2l_2-2l_3)l_y^2(1+i_2)/\beta^2 \dots(3.10)^*$$

Al sustituir de la ecuación (3.08) en la ecuación (3.10)*,

se tiene que:

$$6m_{uy}l_x\beta^2 = w_u l_y^2(3l_x - 2l_3\alpha/(1+i_3)^{0.5}) \dots\dots\dots(3.11)$$

Eliminando w_u con las ecuaciones (3.11) y (3.05), se

obtienen:

$$6(1+i_3)m_{uy}l_3^2 = 6m_{uy}l_x\beta^2/(l_y^2[3l_x - (2l_3\alpha/(1+i_3)^{0.5})])$$

Por consiguiente

$$(l_3/l_y)^2(1/(1+i_3) + l_3/(l_y(1+i_3)^{0.5}))(2\alpha l_y/u\beta^2 l_x - 3/u\beta^2) = 0$$

$$l_3/l_y(1+i_3)^{0.5} = l_y/u\beta l_x[(\alpha/\beta)^2 + 3u(l_x/l_y)^2]^{0.5} - \alpha/\beta \dots\dots(3.12)$$

De la ecuación (3.05) se tiene:

$$w_u = 6(1+i_3)m_{uy}l_3^2$$

y al sustituir para l_3 de la ecuación (3.12) se obtiene:

$$w_u = 6m_{uy}u\beta^2/l_y^2(l_x/l_y)^2\{[(\alpha/\beta)^2 + 3u(l_x/l_y)^2]^{1/2} - \frac{\alpha}{\beta}\}^2 \dots\dots(3.13)$$

De la ecuación (3.13) se obtiene también para una losa

apoyada haciendo cero el valor de i en el borde apropiado.

Losa rectangular apoyada en los cuatro bordes: ($\alpha=\beta=2$)

De la ecuación (3.13), haciendo $i_1=i_2=i_3=i_4=0$, obtenemos

$$w_u = 24m_{uy}u/l_y(l_x/l_y)^2\{[1 + 3u(l_x/l_y)^2]^{1/2} - 1\}^2 \dots\dots\dots(3.13a)$$

3.102 b: LOSA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA, CON TRES BORDES FIJOS/APOYADOS Y UN BORDE LIBRE

En la figura (3.04) se muestra la losa y dos posibles patrones de línea de fluencia. Los momentos últimos negativos lo definimos en función de los momentos últimos positivos, como se observa en la figura. Suponemos que la resistencia de los momentos negativos en los dos bordes en dirección Y, son iguales.

MODO 1: Las fuerzas nodales en E y F del borde libre actúan en las direcciones mostradas, donde se ha tenido en cuenta lo expuesto anteriormente en lo referente al método de equilibrio.

- . Indica una fuerza hacia arriba
- + Indica una fuerza hacia abajo

Según la ecuación planteada en este punto, las fuerzas nodales E y F vienen hacer \pm

$$m_{uy}l_1/l_y$$

Los patrones mostrados tiene una dimensión desconocida, por lo tanto se requiere de dos ecuaciones de equilibrio. Estas ecuaciones las obtendremos tomando momento para cada elemento con respecto a los apoyos como eje.

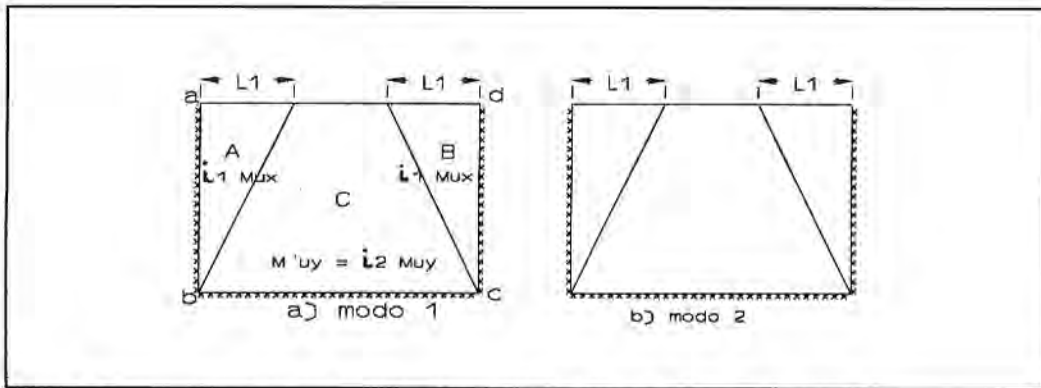


Figura 3.04 Losa rectangular uniformemente cargada con tres bordes fijos y uno libre.

Elemento A:

$$(1+i_1)m_{ux}l_y - m_{uy}l_1^2/l_y = w_u l_1^2/6 \dots\dots\dots(3.14)$$

Elemento C:

$$2m_{uy}l_1 + i_2 m_{ux}l_x + 2m_{uy}l_1 l_x/l_y = 2w_u l_1^2/6 + w_u(l_x - 2l_1)l_y^2/2$$

De (3.14)/(3.15)

$$(l_y^2(1+i_1) - ul_1^2)/u(lx_i_2 + 4l_1) = l_1^2/(3l_x - 4l_1)$$

Por tanto

$$(l_1)^2(3+i_2)(l_x)^2u/[(l_x)^2(1+i_1)(l_y)^2] + 4l_1/l_x - 3 = 0 \dots\dots\dots(3.16)$$

la solución de la ecuación (3.16) da:

haciendo $K=(3+i_2)(l_x)^2u/(1+i_1)(l_y)^2$

$$l_1/l_x = [(4+3K)^{0.5} - 2]/K \dots\dots\dots(3.17)$$

y de la ecuación (3.15), tenemos:

$$w_u = 6m_{uy}[i_2 + (4l_1/l_x)]/l_y^2[3 - (4l_1/l_x)] \dots\dots (3.18)$$

La sustitución de la ecuación (3.17) en la ecuación (3.18) da la carga última unitaria para este patrón de líneas de fluencia, a menos que $l_1 = l_x/2$, en cuyo caso falla el calculo de la fuerza ^{nodal} radial.

MODO 2:

Las fuerzas nodales en el borde libre son cero. Al igual que el supuesto patrón de líneas de fluencia anterior se requiere de dos ecuaciones de equilibrio; el cual la obtendremos tomando momentos, para cada segmento, con respecto a los apoyos como ejes.

Elemento A:

$$(1+i_1)m_{uy}l_y = w_u l_1 l_x^2 / 24 + w_u (l_y - l_1) l_x^2 / 8 \dots\dots\dots(3.19)$$

Elemento C:

$$(1+i_2)m_{uy}l_x = w_u l_x l_1^2 / 6 \dots\dots\dots(3.20)$$

De (3.19)/(3.20)

$$u(1+i_2)/(1+i_1) = 4l_1^2/l_x^2[3 - (2l_x/l_y)]$$

Por tanto

$$(l_1/l_y)^2(1+i_1)(l_y)^2 4/(1+i_2)(l_x)^2 u + 2l_1/l_y - 3 = 0 \dots\dots(3.21)$$

La solución de la ecuación (3.21) da:

$$l_1/l_y = [(1+3K_1)^{0.5} - 1]/K_1 \dots\dots\dots(3.22)$$

de la ecuación (3.20)

$$w_u = 6(1+i_2)m_{uy}/l_1^2 \dots\dots\dots(3.23)$$

La sustitución de la ecuación (3.22) en la ecuación (3.23) da la carga última uniforme para el patrón de líneas de fluencia.

De los dos modos de falla supuesto, el que riga será el que de la carga última más baja.

Para el caso de losa de apoyo simple con un borde libre, se obtendrá haciendo para cada modo $i=0$

MODO 1:
$$K = 3u(l_y/l_x)^2$$

$$l_1/l_x = [(4+3K)^{0.5} - 2]/K$$

$$w_u = 24m_{uy}(l_1/l_x) / l_y^2 [3 - (4l_1/l_x)] \dots\dots\dots(3.24)$$

MODO 2:

$$K_1 = (4/u) (l_y/l_x)^2$$

$$l_1/l_y = [(1+3K_1)^{0.5} - 1]/K_1$$

$$w_u = 6m_{uy}l_1^2 \dots\dots\dots(3.25)$$

3.102 C. LOSA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA CON DOS BORDES ADYACENTES FIJOS Y LOS OTROS DOS BORDES LIBRES.

En la fig. (3.05) se muestra la losa y los patrones alternativos de las líneas de fluencia. Los momentos últimos ó máximos negativos están en función de los momentos últimos positivos. El patrón de las líneas de fluencia mostrado en la fig (3.05a) tiene una incógnita l_1 , y por lo tanto se requiere de dos ecuaciones de equilibrio para su solución. Las fuerzas nodales en E, del borde libre son, según la ecuación (2.11), expuesto anteriormente; $\pm m_{uy} l_1/l_y$, que actúan hacia abajo con el ángulo agudo y hacia arriba con el ángulo obtuso. Las dos ecuaciones de equilibrio se plantearán tomando momentos con respecto a los apoyos para cada elemento.

Modo 1:

Tomando momentos con respecto a ab para el elemento A, se obtiene:

$$w_u = 6m_{ux}(1+i_1)/l_1^2 - 6 m_{uy}/l_y^2 \dots\dots\dots(3.26)$$

Para el elemento B, tomamos momentos con respecto a cb, y obtenemos.

$$w_u = 6m_{uy}(i_2l_x + 2l_1)/l_y^2(3l_x - 2l_1) \dots\dots\dots(3.27)$$

Igualando las ecuaciones (3.26) y (3.27)

$$6m_{ux}(1+i_1)/l_1^2 - 6m_{uy}/l_y^2 = [6m_{uy}(i_2l_x + 2l_1)]/l_y^2(3l_x - 2l_1)$$

por lo tanto:

$$(l_1/l_x)^2 + 2l_1/l_x(l_y/l_x)^2 (1+i_1) \times (1/(3+i_2)u) - 3(l_y/l_x)^2(1+i_1) \times (1/(3+i_2)u) = 0 \dots\dots\dots(3.28)$$

sea

$$K_2 = (l_x/l_y)^2(3+i_2)/(1+i_1) \times u$$

La solución de la ecuación (3.28) da:

$$l_1/l_x = [(1 + 3k_2)^{0.5} - 1]/K_2$$

La carga última o máxima se halla sustituyendo l_1 en la ecuación (3.26) ó (3.27). Nótese que para que el patrón de las líneas de fluencia presupuesto sea válida l_1 no debe ser mayor de l_x .

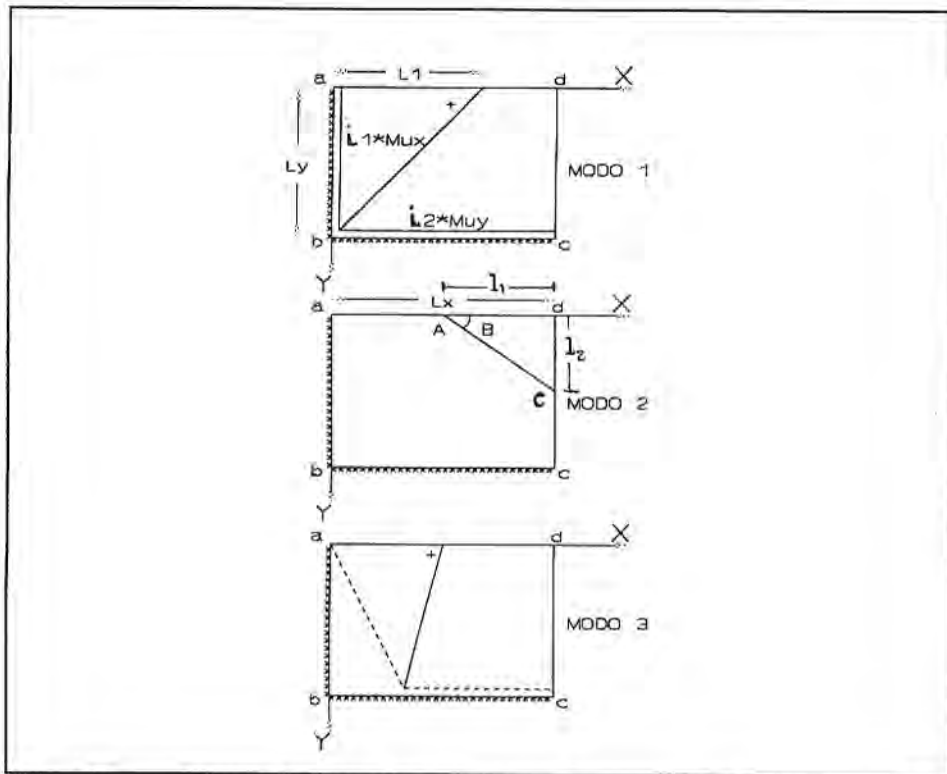


Figura 3.05 Losa rectangular uniformemente cargada con dos bordes fijos y dos bordes libres.

Modo 2:

En la figura se observa que son dos las dimensiones desconocidas. Tomando momento con respecto a ac del elemento A considerando en equilibrio tenemos:

$$w_u = 6 [i_1 m_{ux} / l_1^2 + i_2 m_{uy} / l_2^2] \dots\dots\dots(3.29)$$

Observamos que para que se cumpla w_u mínimo, tanto l_1 como l_2 deben ser máximos; por lo tanto $l_1 = l_x$, $l_2 = l_y$, y el patrón de las líneas de fluencia atraviesa la diagonal de la losa.

Por lo tanto:

$$w_u = 6 [i_1 m_{ux} / l_x^2 + i_2 m_{uy} / l_y^2] \dots\dots\dots(3.30)$$

Modo 3:

El tercer patrón alternativo de las líneas de fluencia es crítico solamente cuando l_x es mucho mayor que l_y , y en el caso que la rija, no suministrará una carga muy diferente de la del modo 1, contiene un límite inferior de capacidad de carga para una losa en voladizo.

El mecanismo alternativo de falla, que rija de los modos 1 y 2 será el que produzca la carga última más baja.

Para el caso de apoyos simples, bastará con considerar $i_1=i_2 = 0$ para cada modo.

Se puede demostrar que un patrón de las líneas de fluencia que difiere ligeramente del patrón correcto dará un resultado que se acerca a la carga última correcta. Por lo tanto para simplificar las ecuaciones presentadas anteriormente se puede recurrir a aproximaciones razonables respecto al patrón de las líneas de fluencia. Seguidamente revisaremos la exactitud de los patrones aproximados para losas rectangulares.

LOSA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA, CON BORDES APOYADOS Y FIJOS.

Para este tipo de losa se obtuvo la ecuación (3.13) que resulta muy larga. Una aproximación bastante aceptable para simplificarla consiste en suponer que las líneas de fluencia de momento positivo entran a las esquinas formando ángulos de 45° con los bordes (esto es $l_1=l_2=l_3=0.5l_y$ en la fig. (3.03))

Con estos detalles y usando la ecuación de trabajo virtual, aplicamos un desplazamiento δ hacia abajo en el centro de la losa y obtenemos:

$$w_u = 12[m'_{ux}+m''_{uy}+2m_{lx}+l_x/l_y (m'_{uy}+m''_{uy}+2m_{ly})]/l^2y[3(l_x/l_y)-1]..... (3.31)$$

Si se considera que el acero superior es tal que $m'_{ux}=m''_{ux}$ y $m'_{ly}=m''_{ly}$, la ecuación anterior se puede reescribir, por conveniencia como sigue, cuando $l_x>l_y$

$$w_u = 12[2(m_{lx}+l_x/l_y m_{ly}) + m_1]/l_y^2[3(l_x/l_y)-1]...(3.32)$$

Donde m_1 depende de las condiciones del apoyo que se dan a continuación para los varios casos mostrados en la figura (3.06).

Caso	m_y	Caso	m_x	Caso	m_y
1	0	4	$m'_{ux} + lx/ly$	7	$2m'_{ox} + lx/ly$
2	m'_{ux}	5	$2m'_{ox}$	8	$m'_{ux} + 2lx/ly$
3	lx/ly	6	$2lx/ly$	9	$2(m'_{ux} + lx/ly)$

La tabla 3.10 que se da a continuación compara la exactitud de la carga última aproximada obtenida por la ecuación (3.32) con la carga última exacta obtenida de la ecuación (3.13) para losas prácticas que tienen $m'_{ux} = m''_{ux}$, $m'_{uy} = m''_{uy}$, $m'_{ux}/m'_{uy} = m''_{ux}/m''_{uy} = 2.0$ y varias relaciones de lx/ly y m_y/m_{ux} y condiciones de los apoyos.

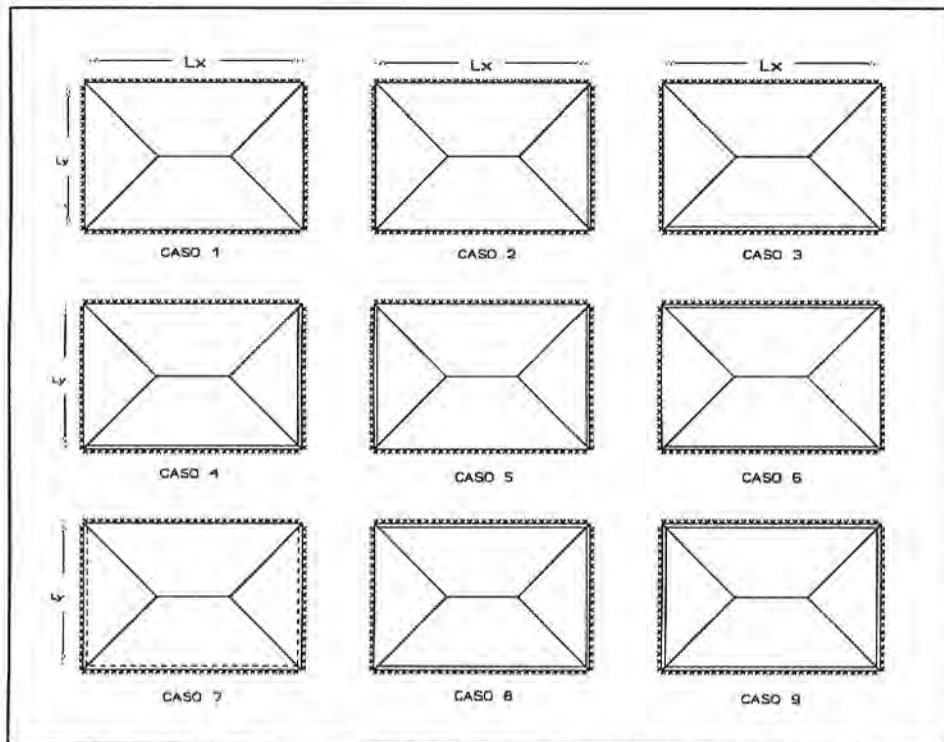


Figura 3.06 Diversos casos de losas uniformemente cargadas apoyadas en los cuatro bordes.

Tabla 3.10. Exactitud al suponer que las líneas de fluencia forman ángulos de 45° en las esquinas, para el caso de las losas rectangulares uniformemente cargadas, y apoyadas en todos sus bordes.

Valor de la relación w_u aproximado/ w_u exacto cuando $m'_{ux} = m''_{ux}$, $m'_{uy} = m''_{uy}$, $m'_{ux}/m'_{uy} = m''_{ux}/m''_{uy} = 2$, para los varios casos de condiciones de apoyo que se muestra en la figura 3.06.

lx/ly	m_y/m_{ux}	Caso1	Caso2	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso7	Caso8	Caso9
1.0	1	1.00	1.06	1.07	1.04	1.04	1.04	1.04	1.04	1.00
1.5	1	1.01	1.10	1.05	1.08	1.11	1.01	1.08	1.02	1.01
1.5	2	1.00	1.04	1.08	1.07	1.03	1.05	1.05	1.03	1.00
1.5	3	1.01	1.02	1.11	1.08	1.01	1.07	1.05	1.04	1.01
1.5	5	1.03	1.02	1.14	1.11	1.00	1.10	1.07	1.07	1.03

l_x/l_y	m_{xy}/m_{ux}	Caso1	Caso2	Caso3	Caso4	Caso5	Caso6	Caso7	Caso8	Caso9
2.0	1	1.02	1.11	1.06	1.09	1.15	1.01	1.10	1.02	1.02
2.0	2	1.00	1.04	1.07	1.07	1.05	1.03	1.06	1.02	1.00
2.0	3	1.01	1.02	1.09	1.08	1.02	1.05	1.06	1.03	1.01
2.0	5	1.02	1.01	1.12	1.09	1.00	1.07	1.07	1.05	1.02
3.0	1	1.02	1.12	1.06	1.10	1.17	1.00	1.12	1.02	1.02
3.0	2	1.00	1.04	1.07	1.07	1.06	1.02	1.07	1.01	1.00
3.0	3	1.00	1.02	1.08	1.07	1.02	1.03	1.06	1.01	1.00
3.0	5	1.01	1.01	1.10	1.08	1.00	1.04	1.07	1.03	1.01

LOSA RECTANGULAR UNIFORMEMENTE CARGADA, CON TRES BORDES APOYADAS O FIJOS Y UNO LIBRE.

Nos basaremos para la obtención de la carga última o máxima según, lo supuesto para el patrón de líneas de fluencia expuesto anteriormente.

Una buena aproximación resulta considerar que las líneas de fluencia forman un ángulo de 45° con los bordes de la losa; para el modo 1 tenemos $l_x=l_y$ y para el modo 2 $l_x = 0.5l_y$. Supuesto estos valores, el modo 1 será aplicable solamente cuando $l_x=2l_y$ y para el modo 2 solamente es aplicable cuando $l_x \leq 2l_y$. Por tanto, el modo que controla depende ahora solamente de las dimensiones de la losa.

Para el modo 1, aplicando a la losa un pequeño desplazamiento δ hacia abajo en el centro del borde libre, la ecuación del trabajo virtual será:

$$w_u = 6[2(m'_{ux}+m_{ux})+(l_x/l_y)m'_{uy}+2m_{uy}]/l_y^2[3(l_x/l_y)-2] \dots \dots \dots (3.33)$$

Para el modo 2.

$$w_u = 12[2l_y/l_x (m'_{ux}+m_{ux}) + m'_{uy} + m_{uy}]/l_x^2[3(l_x/l_y)-0.5] \dots \dots \dots (3.34)$$

Las ecuaciones (3.33) y (3.34) se pueden reescribir en la forma que se muestra a continuación. Si $l_x \geq 2l_y$ para la ecuación (3.33)

$$w_u = 6[2(m_{ux}+m_{uy}) + m_2]/l_y^2[3(l_x/l_y)-2] \dots \dots \dots (3.35)$$

Donde m_2 depende de las condiciones en los apoyos. Se presenta a continuación los valores de m_2 para cada caso:

Caso	1a	2a	3a	4a
m_2	0	$2m'_{ux}(l_x/l_y)$	m'_{uy}	$2m'_{ux} + (l_x/l_y)m'_{uy}$

De la ecuación (3.34), si $lx \leq 2ly$

$$w_u = 12[2(ly/lx)m_{ux} + m_{uy} + m_3]l_x^2[3(l_x/l_y)-0.5] \dots (3.36)$$

Donde m_3 depende de las condiciones de apoyo.

Se da a continuación los valores de m_3 para cada caso.

Caso	1b	2b	3b	4b
m_3	0	$2(ly/lx)m'_{ux}$	m'_{uy}	$2(ly/lx)m'_{ux} + m'_{uy}$

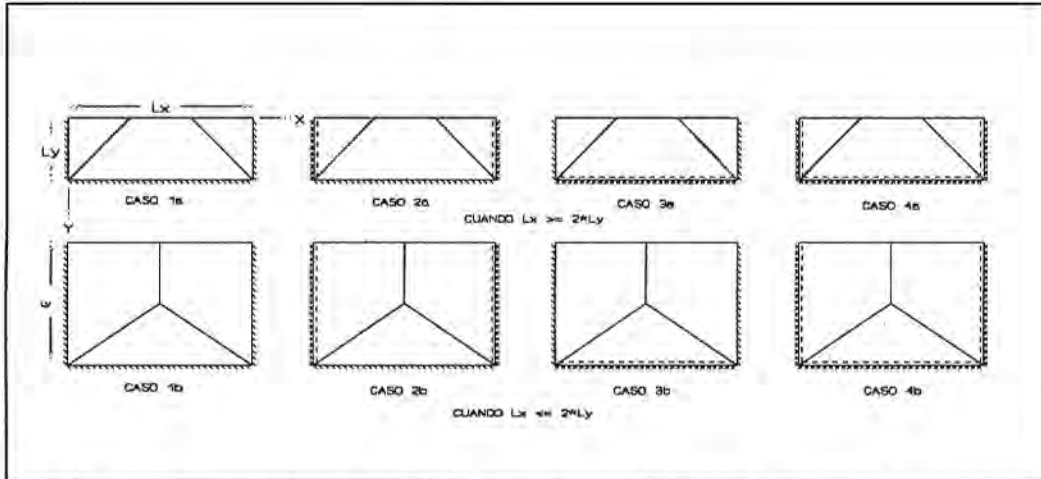


Figura 3.07 Diversos casos de losas uniformemente cargadas, apoyadas en tres bordes.

Tabla 3.20 Exactitud al suponer que las líneas de fluencias forman ángulos de 45° en las esquinas, para el caso de losas rectangulares uniformemente cargadas y apoyadas en tres bordes.

Valor aproximado de la relación $w_u \text{ aproximado} / w_u \text{ exacto}$, cuando $m'_{ux}/m_{ux} = m'_{uy}/m_{uy} = 2$, para los casos de las condiciones de apoyo que se muestran en la figura 3.07.

ly/lx	m_{ux}/m_{uy}	Caso1a	Caso2a	Caso3a	Caso4a
		1b	2b	3b	4b
3.0	1	1.02	1.00	1.14	1.02
	2	1.00	1.01	1.05	1.00
	3	1.00	1.01	1.02	1.00
	5	1.00	1.02	1.00	1.01
2.0	1	1.02	1.00	1.16	1.02
	2	1.00	1.01	1.06	1.00
	3	1.00	1.02	1.02	1.00
	5	1.01	1.03	1.00	1.01

l_y/l_x	m_{ux}/m_{uy}	Casola 1b	Caso2a 2b	Caso3a 3b	Caso4a 4b
1.0	1	1.02	1.01	1.15	1.02
	2	1.00	1.03	1.05	1.00
	3	1.01	1.05	1.02	1.01
	5	1.02	1.07	1.00	1.02
0.5	1	1.08	1.04	1.13	1.01
	2	1.08	1.10	1.04	1.02
	3	1.04	1.14	1.01	1.04
0.333	1	1.03	1.02	1.06	1.00
	2	1.00	1.13	1.01	1.03
	3	1.02	1.21	1.00	1.06

LOSA RECTANGULARES UNIFORMEMENTE CARGADA CON DOS BORDES ADYACENTES FIJOS Y/O APOYADOS; Y LOS RESTANTES LIBRES

De la carga última ó máxima hallada anteriormente para este tipo de losa vemos que para el modo 2 presentado no se puede simplificar en ningún caso la ecuación (3.30).

Sin embargo las ecuaciones (3.26) y (3.28a) correspondiente al modo 1 se puede simplificar suponiendo que la línea de fluencia de momento positivo forma un ángulo de 45° con el borde de la losa. Para $l_x=l_y$ y aplicando un pequeño desplazamiento δ hacia abajo en la esquina libre, la ecuación del trabajo virtual será, cuando $l_x \geq l_y$

$$w_u = 6(m_{ux}+m_{uy}+m_4)/l_y^2[3(l_x/l_y)-1] \dots\dots\dots(3.37)$$

Donde m_4 depende de las condiciones de apoyo. Se presenta a continuación el valor de m_4 para cada caso mostrado en la figura (3.08)

Caso	1	2	3	4
m_4	0	m'_{ux}	$(l_x/l_y)m'_{uy}$	$m'_{ux} + (l_x/l_y)m'_{uy}$

La tabla 3.30 mostrada compara la exactitud de la carga última aproximada obtenida de la ecuación (3.37) con la carga última exacta obtenida de las ecuaciones (3.26) y (3.28a) para losas prácticas que tienen un valor de $m'_{ux}/m_{ux}=m'_{uy}/m_{uy} = 2.0$, varias relaciones de l_x/l_y y m_{uy}/m_{ux} , y las condiciones de apoyo mostradas en la figura.

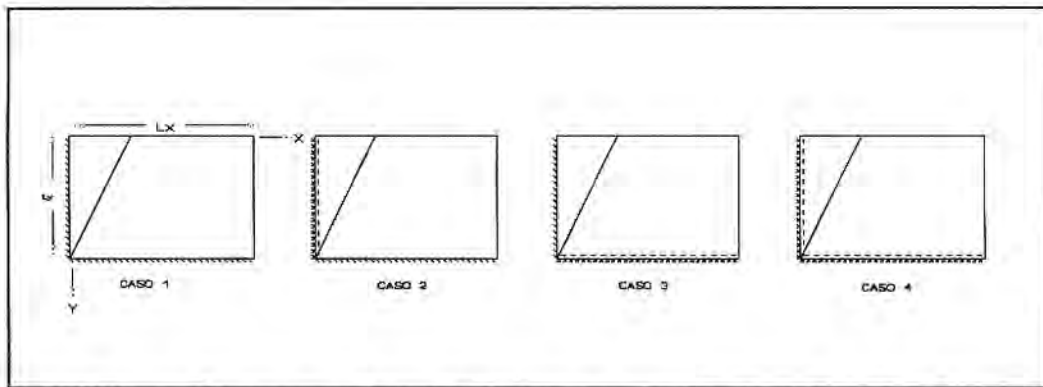


Figura 3.08 Diversos casos de losas uniformemente cargadas, apoyadas en dos bordes adyacentes.

Tabla 3.30 Exactitud al suponer que las líneas de fluencia forman de 45° con las esquinas, para el caso del modo 1 de una losa rectangular uniformemente cargada, apoyada en dos bordes adyacentes.

Valor aproximado de la relación, w_u aproximado/ w_u exacto, cuando $m'_{ux}/m_{ux} = m'_{uy}/m_{uy} = 2$, para los casos de las condiciones de apoyo que se muestran en la figura 3.08

l_x/l_y	m_{ny}/m_{ux}	Caso1	Caso2	Caso3	Caso4
1.0	1	1.08	1.13	1.13	1.01
2.0	1	1.02	1.04	1.04	1.00
	2	1.13	1.00	1.10	1.01
	3	1.26	1.02	1.14	1.04
3.0	1	1.01	1.07	1.02	1.01
	2	1.10	1.00	1.06	1.01
	3	1.22	1.01	1.09	1.02

3.103 LOSA RECTANGULAR FIJA SOBRE LOS LADOS OPUESTOS Y CON VIGA DE BORDE A LO LARGO DE LOS BORDES LIBRES, CARGADA UNIFORMEMENTE.

Un posible patrón de líneas de fluencia para este tipo de losa es mostrada en la figura.

El método de obtener la ecuación de la carga última será el mismo que ha sido usado anteriormente.

La línea de fluencia pasa a través del borde de la viga.

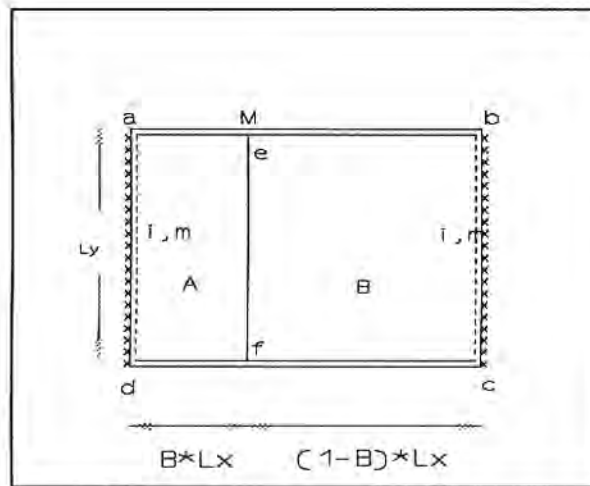


Figura 3.09

Si decimos que el momento último del borde de la viga dentro del paño es M , y el valor en los apoyos 1 y 2 es $-i_1M$ y $-i_2M$, tomando momentos alrededor del apoyo 1 para el equilibrio del elemento A, sabiendo que la fuerza nodal en e y f son cero, nosotros obtenemos:

$$m l_y (1+i_1) + 2M(1+i_1) = w_u l_y B l_x^2 (1/2 B l_x^2)$$

$$m(1+i_1)[1+2M/(m l_y)] = 1/2 w_u B^2 l_x^2 \dots\dots\dots(3.38)$$

Similarmente, si tomamos momentos alrededor del apoyo 2 para el equilibrio del elemento B, encontramos que:

$$m l_y (1+i_2) + 2M(1+i_2) = w_u l_y (1-B) l_x^2 * 1/2 (1-B) l_x$$

$$m(1+i_2)[1+2M/m l_y] = 1/2 w_u (1-B)^2 l_x^2 \dots\dots\dots(3.39)$$

El término B puede ser obtenido dividiendo ambas ecuaciones.

$$1+i_1/(1+i_2) = [(B/(1-B))]^2$$

$$B = (1+i_1)^{0.5} / [\sqrt{(1+i_1)} + \sqrt{(1+i_2)}]$$

Reemplazando este valor en la ecuación (3.38), tenemos:

$$w_u = 2m/l_x^2 (1+2M/(m l_y)) [\sqrt{(1+i_1)} + \sqrt{(1+i_2)}]^2 \dots\dots(3.40)$$

Podrá ser notado que M es el momento de flexión último de la viga, no el momento de flexión por unidad de ancho. Hay de hecho un pequeño error en las tres previas ecuaciones ya que el

momento de la losa fue tomado a través del ancho completo de la losa. Esto puede ser corregido si el esfuerzo de la viga de borde es M más m veces el ancho de la viga de borde. Cuando la losa tiene vigas de borde, antes de encontrar el valor de m , el diseñador tiene que elegir valores para i_1 y i_2 .

Deberá ser notado que también hay un máximo valor que pueda ser tomado por M , porque si las vigas de borde son hechos para resistir la losa actuará como lo pensado y serán apoyados sobre los cuatro lados. Consecuentemente es más probable que la falla ocurrirá de la manera mostrada en la fig. (3.10). Si este patrón ocurre, aparte de una resistencia torsional pequeña, las vigas de borde no contribuyen al esfuerzo de la losa, o mejor, ellos no tienen un rasgo de la ecuación de la carga última.

Por lo tanto la ecuación (3.40) es solo válida cuando m es más grande que el valor calculado para el patrón mostrado en la figura (3.10). Deberá ser notado también que el máximo valor de m está dado por la ecuación (3.40), cuando $M=0$. La solución general del patrón mostrado en la fig.(3.10) fue dado por la ecuación (3.13) deducida para un patrón exacto.

Cuando se usan vigas de borde el diseño procede como sigue:

- Calcular el mínimo valor de m de la ecuación (3.13)
- Calcular el máximo valor de m de la ecuación (3.40) asumiendo $M=0$.
- Seleccionar un valor de m entre estos valores.
- Calcular M de la ecuación (3.40)

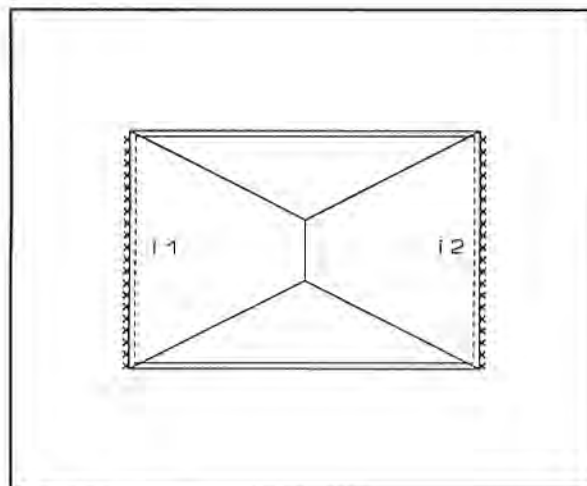


Figura 3.10

Ya que la solución del patrón de líneas de fluencia mostrado en la figura (3.64), cuando $i_1=i_3=0$ ya ha sido encontrado y está dado por la ecuación (3.13a) el procedimiento de diseño puede ser demostrado para una losa apoyada lo cual es un caso especial del problema general.

3.104 LOSA RECTANGULAR CON/SIN VIGA DE BORDE APOYADA SOBRE CUATRO COLUMNAS Y FIJA/APOYADA SOBRE LOS CUATRO BORDES CARGADA UNIFORMEMENTE.

3.104 a.- LOSA RECTANGULAR, APOYADA SOBRE CUATRO COLUMNAS Y SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.

Los dos posibles patrones de líneas de fluencia para la losa son mostradas en la figura (3.11). Si la losa falla de la manera (a), ...

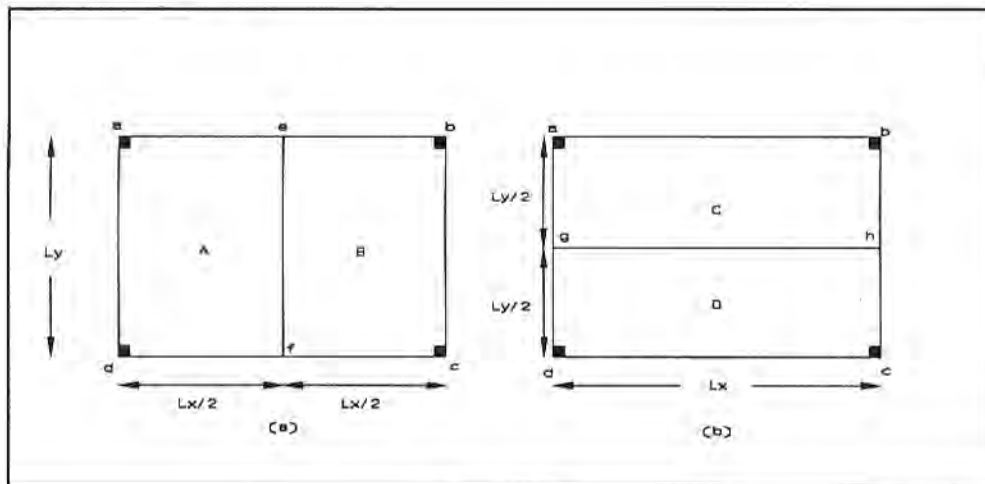


Figura 3.11

descuidando el esfuerzo de flexión de las columnas, tomando momentos alrededor del eje ad para el elemento A, tenemos:

$$m_{ux} = w_u l_x^2 / 8 \dots\dots\dots(3.41)$$

Si la falla es del tipo mostrado en la parte (b), tomando momentos alrededor del eje ab para el equilibrio del elemento c, obtenemos:

$$m_{uy} = 1/8 w_u l_y^2 \dots\dots\dots(3.42)$$

Pero $u = m_{uy} / m_{ux}$; entonces cuando $u = (l_y / l_x)^2$, ocurrirá una combinación de los dos tipos de falla.

3.104 b LOSA RECTANGULAR CON VIGAS DE BORDE, APOYADA SOBRE CUATRO COLUMNAS Y SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.

Sea M_l , el momento de la viga de longitud l_x , y M_α en la longitud l_y .

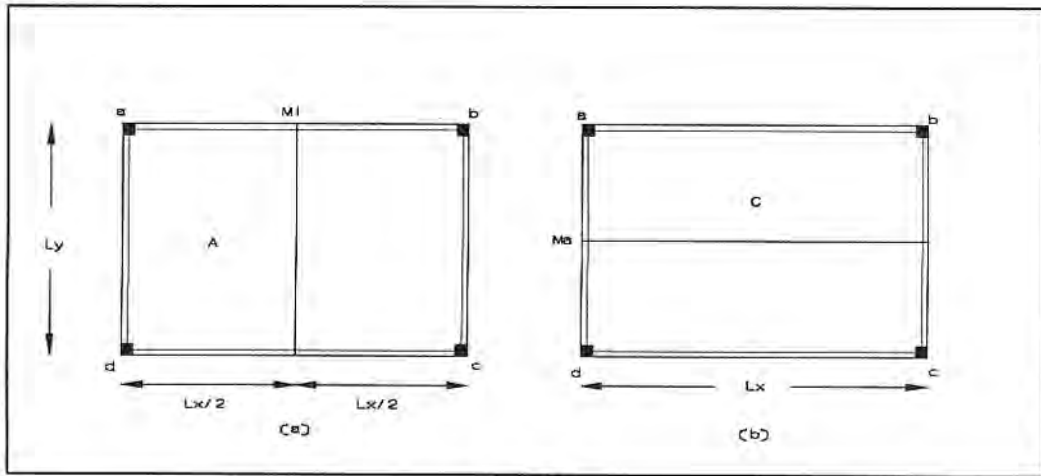


Figura 3.12

Para el patrón de líneas de fluencia mostrado en la figura (3.12)a, tomando momento alrededor del eje ad para el equilibrio del elemento A, tenemos:

$$m_{ux} + 2M/l_y = 1/8 w_u l_x^2 \dots\dots\dots(3.43)$$

Similarmente, para el patrón de líneas de fluencia mostrada en la fig. (3.12)b tomando momentos alrededor del eje ab, para el equilibrio del elemento C, nosotros obtenemos la ecuación.

$$m_{uy} + 2M\alpha/l_x = 1/8 w_u l_y^2 \dots\dots\dots(3.44)$$

Si $u = (l_y/l_x)^2$, ambos tipos de falla son igualmente probables cuando $M\alpha = \alpha M_L$.

3.104c LOSA RECTANGULAR, APOYADA SOBRE CUATRO COLUMNAS Y FIJAS SOBRE LOS CUATRO LADOS, SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS.

Para los dos patrones de líneas de fluencia mostrado en la figura (3.13), si los momentos negativos son $-i_1 m_{ux}$ y $-i_3 m_{uy}$, vemos que las ecuaciones de carga última son:

$$m_{ux}(1+i_1) = 1/8 w_u l_x^2 \dots\dots\dots(3.45)$$

$$m_{uy}(1+i_3) = 1/8 w_u l_y^2 \dots\dots\dots(3.46)$$

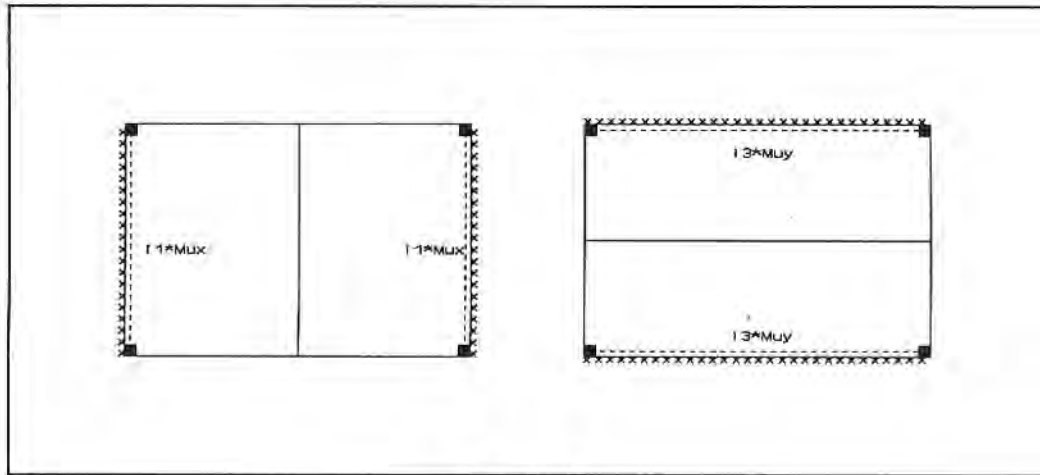


Figura 3.13

3.104d LOSA RECTANGULAR CON VIGAS DE BORDE, APOYADAS SOBRE CUATRO COLUMNAS Y CONTINUA SOBRE LOS CUATRO LADOS, SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA.

Si es asumido que el esfuerzo negativo de las vigas es $-i_1 M_L$ y $-i_3 M_\alpha$, donde M_L y M_α , han sido descritas previamente, las soluciones de carga última para los dos patrones de líneas de fluencia mostrados en la figura (3.13) son:

$$(m_{ux} + 2M_L/ly)(1+i_1) = 1/8 w_u l_x^2 \dots\dots\dots(3.47)$$

$$(m_{uy} + 2M_\alpha/lx)(1+i_3) = 1/8 w_u l_y^2 \dots\dots\dots(3.48)$$

Teniendo elegido los valores para i_1 , i_3 y μ , el mínimo valor de m puede ser encontrado de la ecuación (3.13). Teniendo seleccionado un valor para m , entre los valores dados por las ecuaciones (3.13) y (3.47) cuando $M_L = 0$, los valores de M_L y M_α pueden ser calculados de las ecuaciones (3.47) y (3.48)

3.105. LOSA RECTANGULAR REFORZADA ISOTROPICAMENTE, APOYADA SOBRE DOS LADOS OPUESTOS Y LIBRE LOS BORDES RESTANTES CARGADAS UNIFORMEMENTE Y/O CONCENTRADA.

Si la losa está apoyada por el lado corto, un posible patrón de líneas de fluencia sería el mostrado en la figura (3.14). Teniendo en cuenta que la carga concentrada está aplicada en cualquier parte de la línea central transversal, a la mitad del claro.

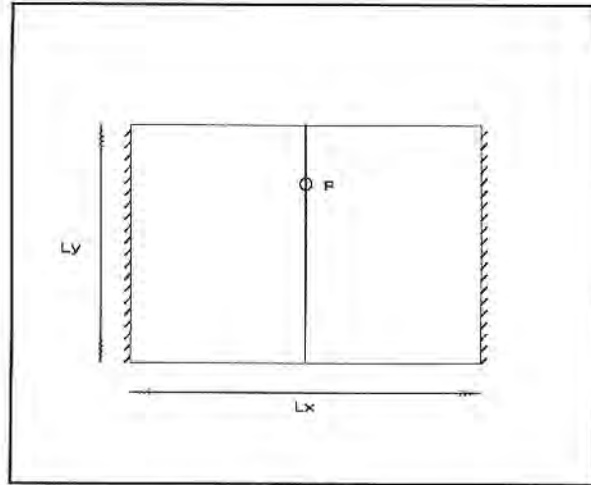


Figura 3.14

Para hallar P_u y w_u , haremos uso del método del trabajo virtual.

Con una carga concentrada solamente.

$$P_u = 4m_u l_y / l_x \dots\dots\dots(3.49)$$

Con una carga Uniformemente y Concentrada.

$$P_u + w_u l_x l_y / 2 = 4m_u (l_y / l_x) \dots\dots\dots(3.50)$$

Variando el punto de aplicación de la carga puntual, tal como se presenta en la siguiente figura (3.15), donde se pueden presentar dos modos de patrones de líneas de fluencia.

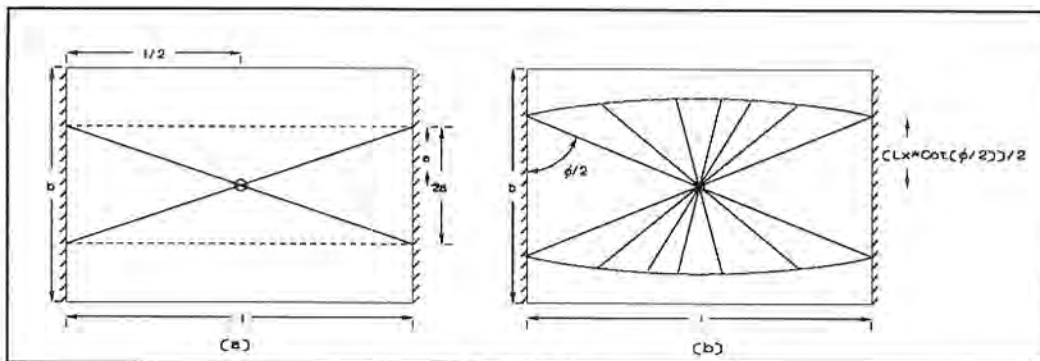


Figura 3.15

Modo 1a.- Este modo está confinado al interior de la losa y está compuesto de segmentos de forma triangular. No se conoce la dimensión "a" del patrón de las líneas de fluencia. Desplazamos la carga una distancia pequeña δ hacia abajo. La ecuación del trabajo virtual es:

Con carga concentrada:

$$P_u = 8m_u a/l + 2(m'_u + m_u)l/a$$

Para P_u mínimo:

$$\begin{aligned} dP_u/da = 0 &= 8m_u/l - 2(m'_u + m_u)l/a^2 \\ a &= 0.5[(m'_u + m_u)/m_u]^{0.5} \end{aligned}$$

Que al sustituirlo en la ecuación para P_u da:

$$P_u = 8[(m'_u + m_u)m_u]^{0.5} \dots\dots\dots(3.51)$$

Con carga uniforme y concentrada.

$$P_u = 8m_u a/l - 2(m'_u + m_u)l/a + 2W_u a/3 \dots\dots(3.51a)$$

$$dP_u/da = 0 = 8m_u/l - 2(m'_u + m_u)l/a^2 - 2/3 w_u l$$

Luego: $a = [2(m'_u + m_u)l / (8m_u/l - 2/3 w_u l)]^{0.5}$

Reemplazando en la ecuación (3.51a) Tenemos:

$$P_u = 4[(4m_u/l - 1/3 w_u l)(m'_u + m_u)l]^{0.5} \dots\dots(3.52)$$

Modo 1b:

Este modo está también confinado al interior de la losa y está compuesto de dos abanicos circulares. No se conoce el ángulo ϕ incluido en cada abanico. Desplazando la carga una distancia pequeña δ hacia abajo. Los momentos realizan trabajo en los dos segmentos triangulares entre los abanicos y en los dos abanicos.

Antes de establecer la ecuación del trabajo virtual, hallaremos el trabajo interno de un abanico circular.

Consideramos una losa isotrópica con momentos últimos o máximos de resistencia por ancho unitario negativos y positivos m'_u y m_u , respectivamente. Según el patrón de líneas de fluencia de la fig (3.16). El trabajo interno realizado por los momentos últimos o máximos del segmento sombreado, si se desplaza el centro del abanico una distancia δ hacia abajo y el segmento gira alrededor de la línea de fluencia de momento negativo, tomada como eje.

$$m_u \Theta_n |_0 = (m'_u + m_u) \delta / r \, r d\phi = (m'_u + m_u) \delta d\phi$$

Por lo tanto para todo el abanico.

$$m_u \Theta_n |_0 = \int (m'_u + m_u) \delta d\phi = (m'_u + m_u) \delta \phi \dots\dots\dots(3.53)$$

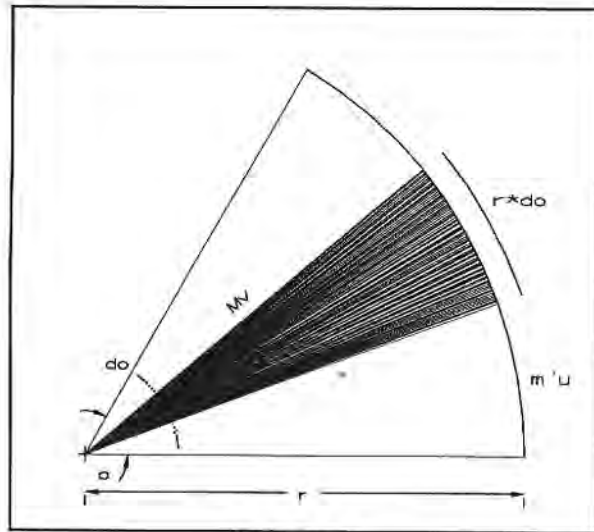


Figura 3.16

Conociendo el trabajo interno de un abanico circular, procedemos a calcular la ecuación del trabajo virtual para el modo 1b.

$$P_u = 4m_u \cot(\phi/2) + 2(m'_u + m_u)\phi \dots\dots\dots(3.54)$$

Para P_u mínimo.

$$dP_u/d\phi = 0 = -2m_u \csc^2(\phi/2) + 2(m'_u + m_u)$$

$$\csc^2(\phi/2) = (m'_u + m_u)/m_u = 1 + m'_u/m_u$$

$$\cot(\phi/2) = (m'_u/m_u) \dots\dots\dots(3.55)$$

Comparando ambos modos para obtener el P_u más crítico. Hacemos

$$m'_u = m_u$$

En la ecuación (3.55) $\cot(\phi/2) = 1$ y $\phi = \pi/2$ rad.

Para el modo 1a, de la ecuación (3.51): $P_u = 11.31m_u$

Para el modo 1b, de la ecuación (3.54): $P_u = 10.28m_u$

Sea $m'_u=0$. En la ecuación (3.55) $\cot(\phi/2) = 0$ y $\phi=\pi$ rad.

Para el modo 1a, de la ecuación (3.51): $P_u = 8m_u$

Para el modo 1b, de la ecuación (3.54): $P_u = 6.28m_u$

Observamos que para estas y otras comparaciones, el modo 1b es siempre más crítico que el modo 1a.

Con carga uniforme y concentrada.

La ecuación del trabajo virtual es, suponiendo $\phi=2\pi$

$$Pu\delta + w_u\pi(l/2)^2\delta/3 = 4m_u\cot(2\pi/2)\delta + 2(m'_u + m_u)2\pi\delta$$

$$Pu + w_u\pi l^2/12 = 4m_u(1+\pi) + 4\pi m'_u \dots\dots\dots(3.56)$$

Planteamos otros dos modos de patrones de líneas de fluencia donde en ambos modos se presenta una línea de fluencia, que se prolonga hasta el borde libre. En el modo 2a se presenta líneas triangulares de fluencia confinadas en el interior de la losa, al otro lado de la carga, no se conoce la dimensión "a" del patrón de líneas de fluencia. El coeficiente τ define la posición de la carga con respecto al borde libre.

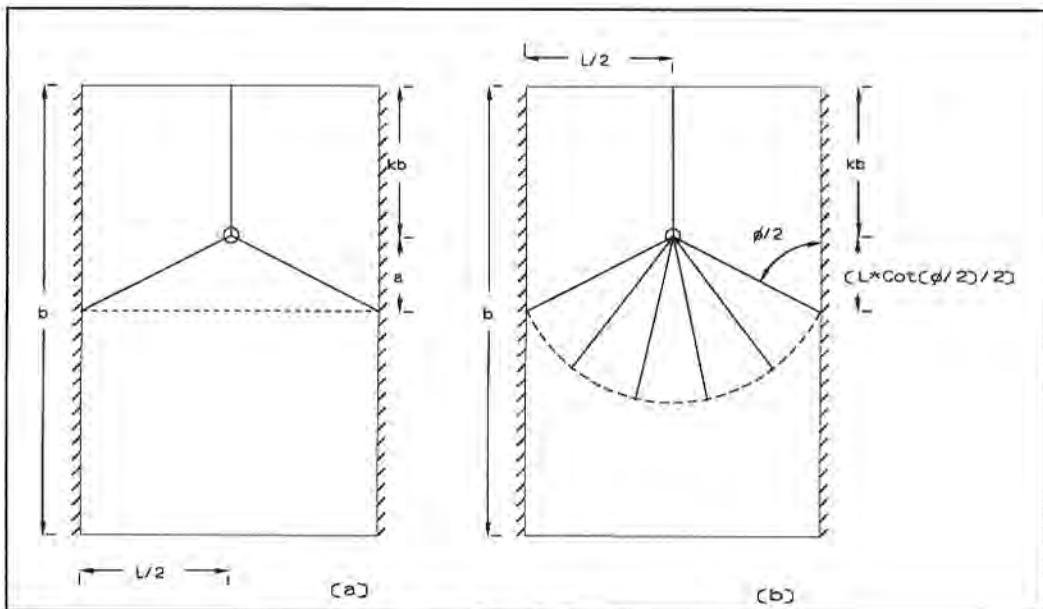


Figura 3.17

El modo 2b tiene un abanico circular en el otro lado de la carga. No se conoce el ángulo ϕ del abanico.

Aplicando en la carga un desplazamiento pequeño δ hacia abajo y aplicando la ecuación del trabajo virtual, tenemos para ambos modos:

MODO 2a

CON CARGA CONCENTRADA.-

$$Pu = 4m_u(a+\tau b)/l + (m'_u + m_u)l/a \dots\dots\dots(3.57)$$

Para P_u mínimo:

$$dP_u/da = 0 = 4m_u/l - (m'_u + m_u)/a^2$$

$$a = 0.5l[(m'_u + m_u)/m_u]^{0.5}$$

Al sustituirlo en la ecuación (3.57) para obtener P_u da:

$$P_u = 4m_u[m_u(m'_u + m_u)]^{0.5} + 4m_u\tau b/l \dots\dots\dots(3.58)$$

MODO 2b

$$P_u\delta = 2m_u(\delta/0.5l)[\tau b + (l/2)\text{ctg}(\phi/2)] + (m'_u + m_u)\delta\phi \dots\dots\dots(3.59)$$

Para P_u mínimo:

$$dP_u/d\phi = 0 = -m_u\text{csc}^2(\phi/2) + (m'_u + m_u)$$

Por lo tanto,

$$\text{csc}^2(\phi/2) = (m'_u + m_u)/m_u = 1 + m'_u/m_u$$

$$\text{ctg}(\phi/2) = [m'_u/m_u]^{0.5} \dots\dots\dots(3.60)$$

Comparando ambos modos para obtener P_u más crítico.

Asumamos $m'_u = m_u$ luego en la ecuación (3.60) $\text{cot}(\phi/2)=1$ y

$$\phi = \pi/2\text{rad}$$

Para el modo 2a, de la ecuación (3.58): $P_u = 5.66m_u + 4m_u\delta b/l$

Para el modo 2b, de la ecuación (3.59): $P_u = 5.14m_u + 4m_u\delta b/l$

Observamos que para estas y otras comparaciones, el modo 2b es siempre más crítico que el modo 2a.

Al analizar una losa con carga concentrada, es necesario examinar los modos 1, 1b y 2b para determinar cuál de ellos es el que da la carga mas pequeña que pueda causar el colapso. Se hallará por lo general, que el modo 1 regirá si la losa es estrecha, el modo 1b regirá si la losa es ancha, con

la carga cercana al centro; y el modo 2b regirá si la losa es ancha con la carga cerca de un borde libre.

CON CARGA UNIFORME Y CONCENTRADA

MODO 2a

$$P_u + w_u[\delta b/2 + a/3] = 4m_u(a+\delta b)/l + (m'_u + m_u)/a \dots\dots\dots(3.61a)$$

MODO 2b

Suponiendo $\phi = \pi/2$, la ecuacion del trabajo virtual

será:

$$P_u + w_u[\pi^2/12 + \delta b/2] = m_u[4\delta b/l + 2 + \pi] + \pi m'_u \dots\dots\dots(3.61b)$$

3.106 LOSA RECTANGULAR FIJA EN UN BORDE Y LIBRE LAS RESTANTES, SUJETA UNA CARGA CONCENTRADA

Consideramos que la losa está isotrópicamente reforzada con momentos últimos o máximo de resistencias negativos y positivos por ancho unitario m'_u y m_u respectivamente. Como podemos apreciar en la figura (3.18), existen tres modos posibles de patrones de líneas de fluencia que la analizaremos cada una para obtener el modo con que se obtiene el P_u más crítico.

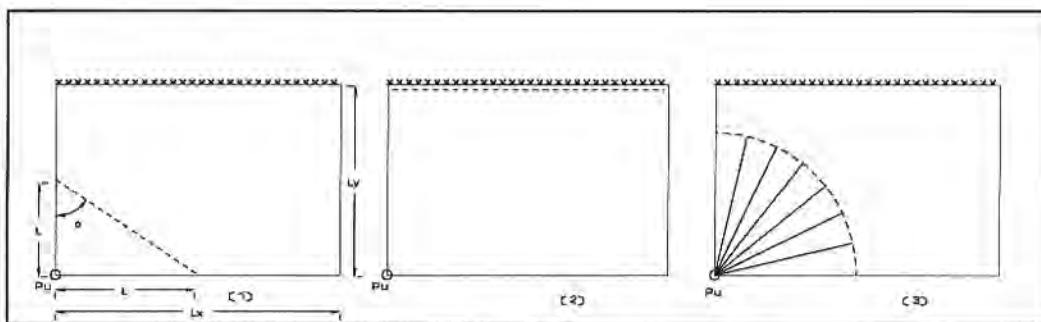


Figura 3.18

MODO 1 Por simetría el ángulo ϕ es de 45° . La ecuación para el equilibrio de los momentos para el segmento triangular, tomados con respecto a la línea de fluencia, es:

$$P_u = 2m'_u \dots\dots\dots(3.62)$$

, podrá tener cualquier valor entre 0 y l_x si $l_x < l_y$.

MODO 2 La ecuación para el equilibrio de los momentos para el segmento, tomados con respecto a la línea de fluencia, es:

$$P_u = m'_u l_x / l_y \dots\dots\dots(3.63)$$

MODO 3 Para este modo de falla en abanico, utilizamos el método del trabajo virtual ya deducido el trabajo interno para el caso de abanicos, suponiendo que la carga se desplaza una pequeña distancia δ hacia abajo. La ecuación del trabajo virtual será:

$$P_u = (m'_u + m_u) \pi / 2 \dots\dots\dots(3.64)$$

El radio del abanico puede tener cualquier valor dentro de la losa. Notamos que si no hay acero inferior de refuerzo, $m_u = 0$ por lo tanto la ecuación (3.64) es más crítica que la ecuación (3.62).

Considerando ahora que la losa dada está ortotrópicamente reforzada y haciendo uso del teorema de afinidad, apoyándonos de la losa isotrópica y recordando que l_x se mantiene igual, l_y se vuelve l_y/\sqrt{u} , P_u se convierte en P_u/\sqrt{u} , m'_u se vuelve m'_{ux} y m_u en m_{ux} tenemos para los tres modos vistos:

MODO 1

$$P_u = 2[m'_{uy} m'_{ux}]^{0.5} \dots\dots\dots(3.65)$$

MODO 2

$$P_u = m'_{uy} l_x / l_y \dots\dots\dots(3.66)$$

MODO 3

$$P_u = (m'_{ux} m'_{uy})^{0.5} + (m_{ux} m_{uy})^{0.5} \pi / 2 \dots\dots\dots(3.67)$$

3.107 LOSA RECTANGULAR UNIFORME CARGADA CON ABERTURA

Por lo general las losas de concreto armado siempre contienen aberturas de diferentes tamaños para ductos, tuberías, ventilación u otros servicios. Pero se sabe que las aberturas tienden a atraer las líneas de fluencia, ya que representan regiones de cero resistencia a la flexión en la losa. Seguidamente se verá el planteamiento de ecuaciones para losas ortotrópicas con aberturas rectangulares de diversos tamaños, fijas o apoyadas uniformemente cargadas.

Para el caso de losas rectangulares uniformemente cargada, existe un gran número de posibles patrones de líneas de fluencia, dependiendo de la ubicación de la abertura. En lo subsiguiente nos encargaremos de analizar losas rectangulares con aberturas, centrales, en esquina, central en el lado corto y central en el lado largo, tal como se observan en las figuras (3.19) a (3.22).

El tamaño de la abertura está definido por el valor de K , por conveniencia se supone que la abertura tiene la misma relación de forma que la losa. Los momentos últimos de resistencia, negativos, se suponen idénticos en los lados opuestos de la losa.

Como se observa en la figura (3.19) a (3.22), hay tres posibles patrones de línea de fluencia para una abertura en el centro de la losa c/u con una dimensión desconocida, cuatro posibles patrones de línea de fluencia para el caso de una abertura en esquina c/u con tres dimensiones desconocidas. Cuando se trata de una abertura central tanto en el lado corto como en el lado largo se presentan tres posibles patrones de fluencia para c/u de ellos con dos dimensiones desconocidas.

Se analizan estos cuatro tipos de aberturas para las condiciones de borde fijos o apoyados reforzadas ortotrópicamente.

Dado que las ecuaciones de carga última para cada caso pueden ser largas ya que en algunos casos dependerán hasta de tres dimensiones desconocidas y tendríamos que hallar dichos valores, resolviendo simultáneamente las ecuaciones $\delta w_u / \delta \beta_1 = 0$, $\delta w_u / \delta \beta_2 = 0$ y $\delta w_u / \delta \beta_3 = 0$ que harán a la carga última mínima, para cada expresión de w_u , pero estas a su vez no son ecuaciones lineales y por ende el trabajo algebraico se vuelve muy largo. Debido a estas dificultades se opta por un procedimiento numérico basado en un programa de computadora para calcular el valor de la carga última para cada modo, para diferentes valores de β_1 , β_2 , y β_3 . Estos valores supuestos deben de encontrarse dentro de un intervalo de valores permisibles. Dichos valores se varían con incrementos adecuados y se realizan todas las posibles combinaciones de valores, una vez determinada el mínimo w_u para cada modo, el valor real de w_u determinado para un tipo de abertura será aquel más bajo dado por los modos para esta abertura.

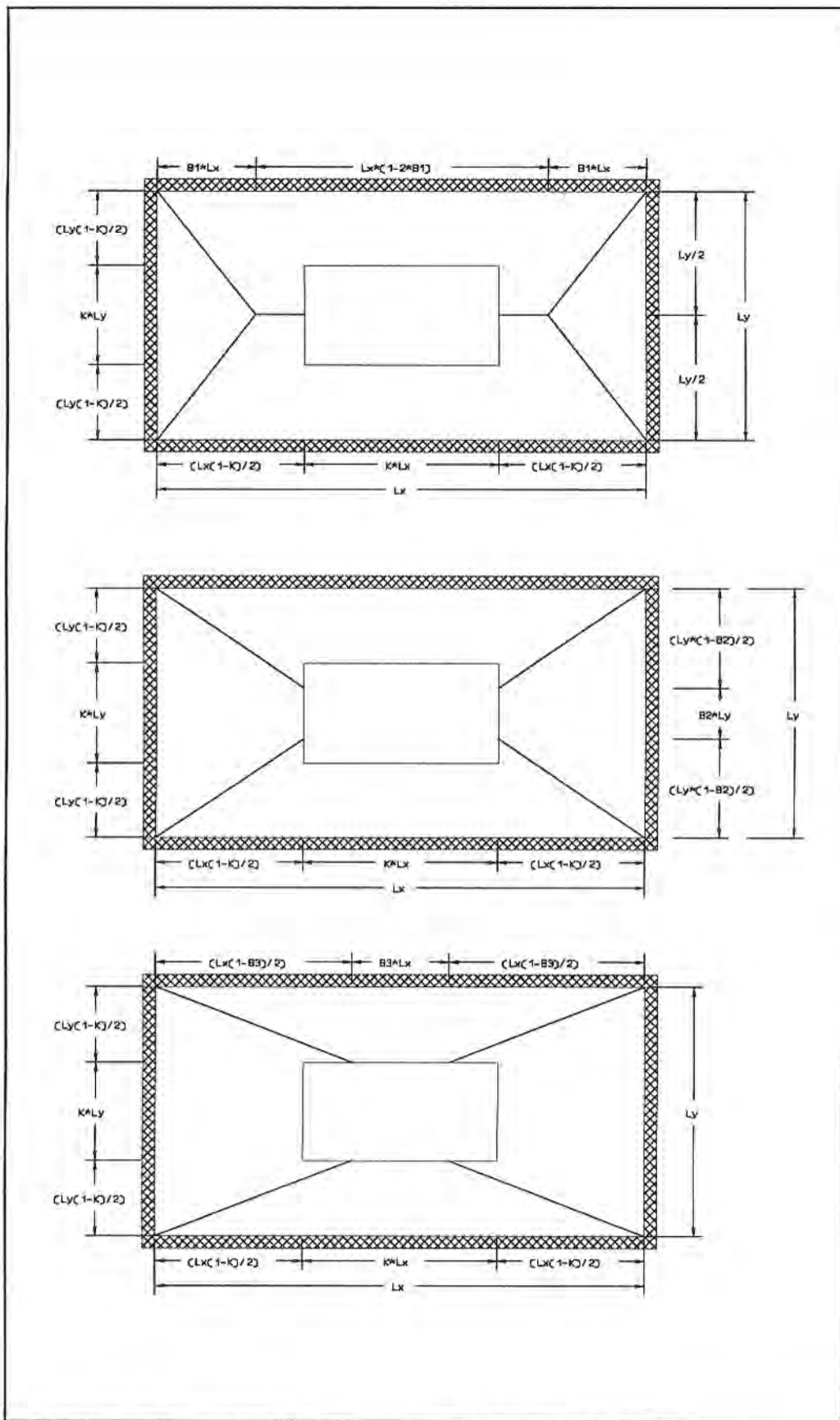


Figura 3.19 Losa rectangular uniformemente cargada, con una abertura central.

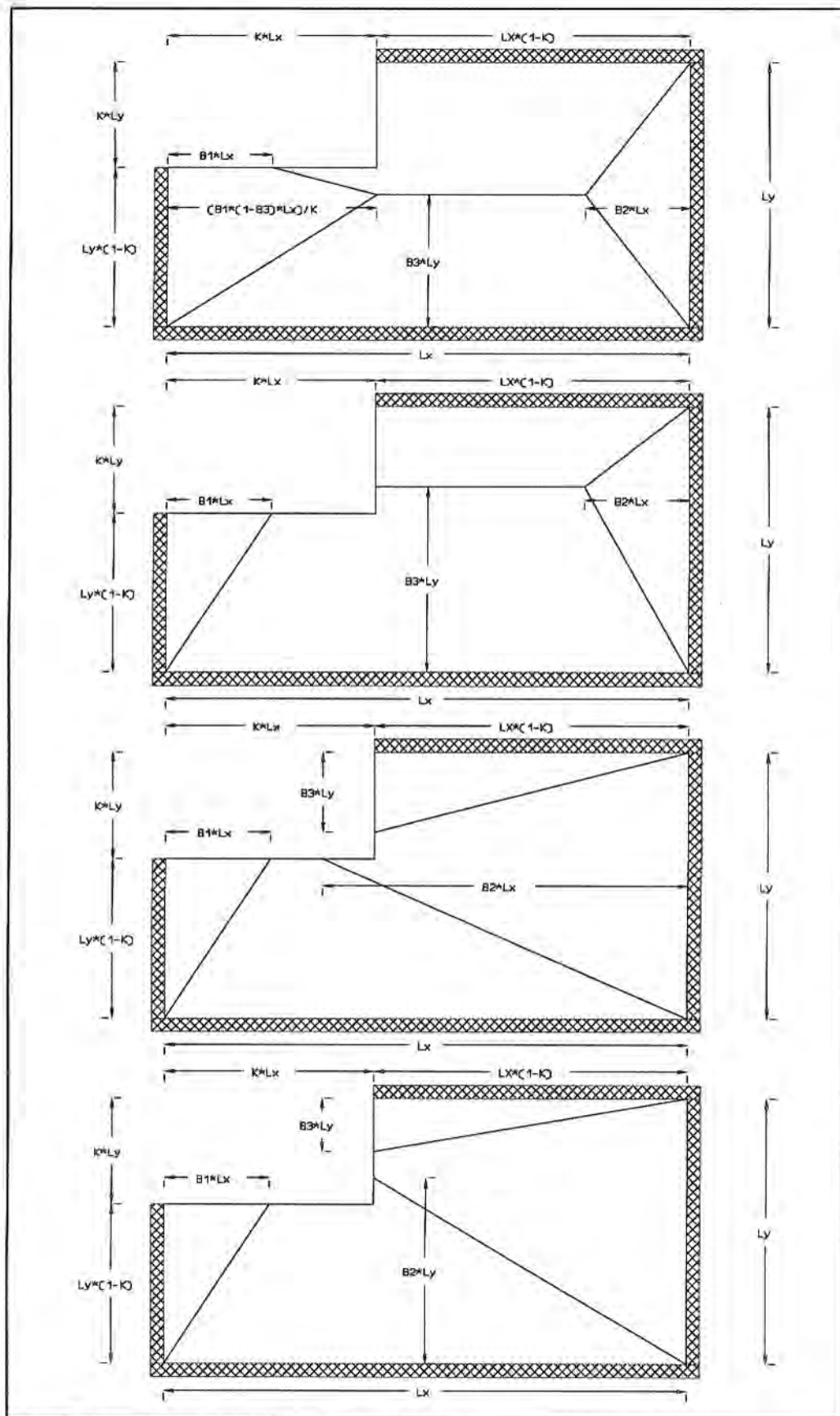
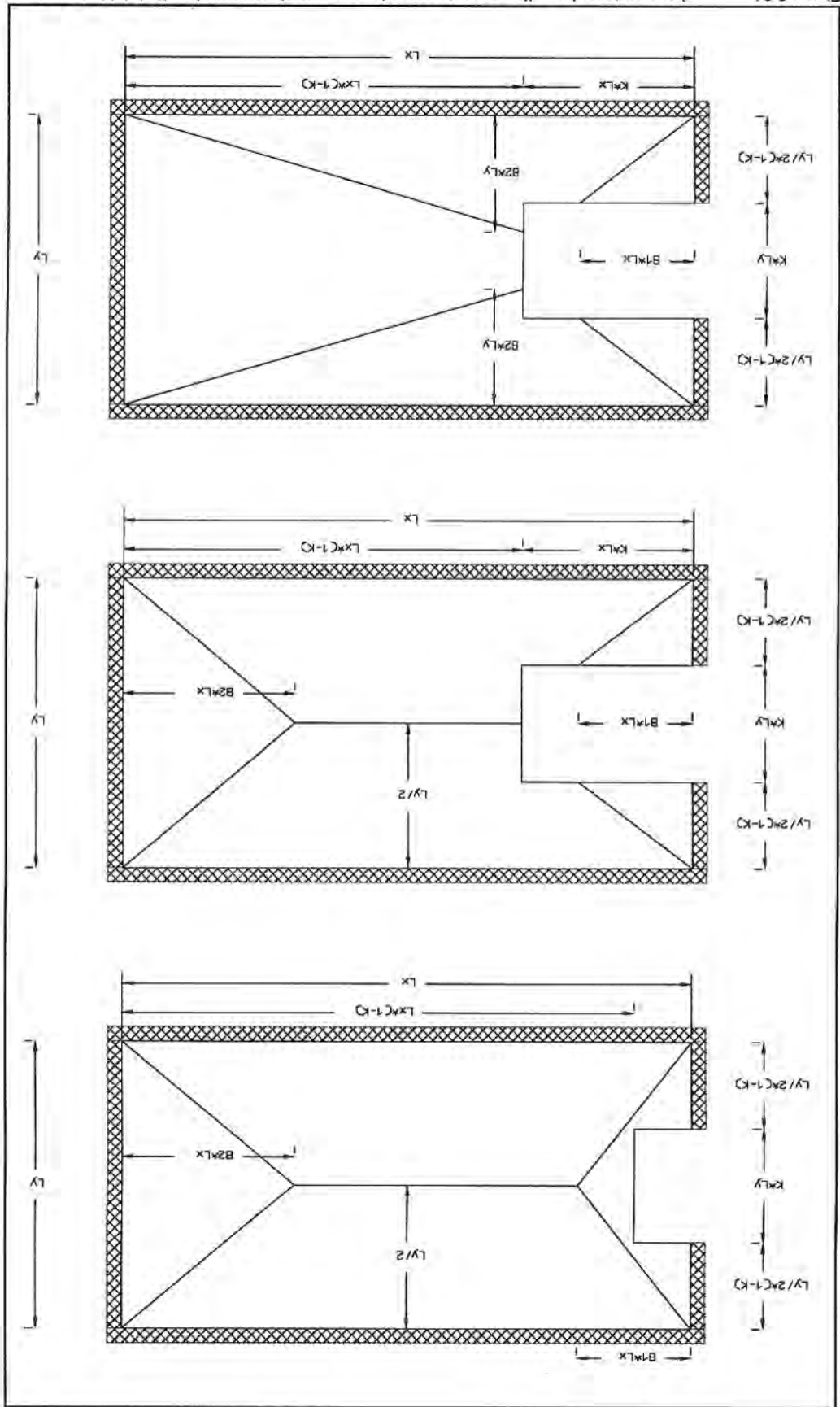


Figura 3.20 Losa rectangular uniformemente cargada, con una abertura en la esquina.

Figura 3.21 Losa rectangular uniformemente cargada, con una abertura en la mitad del lado corto.



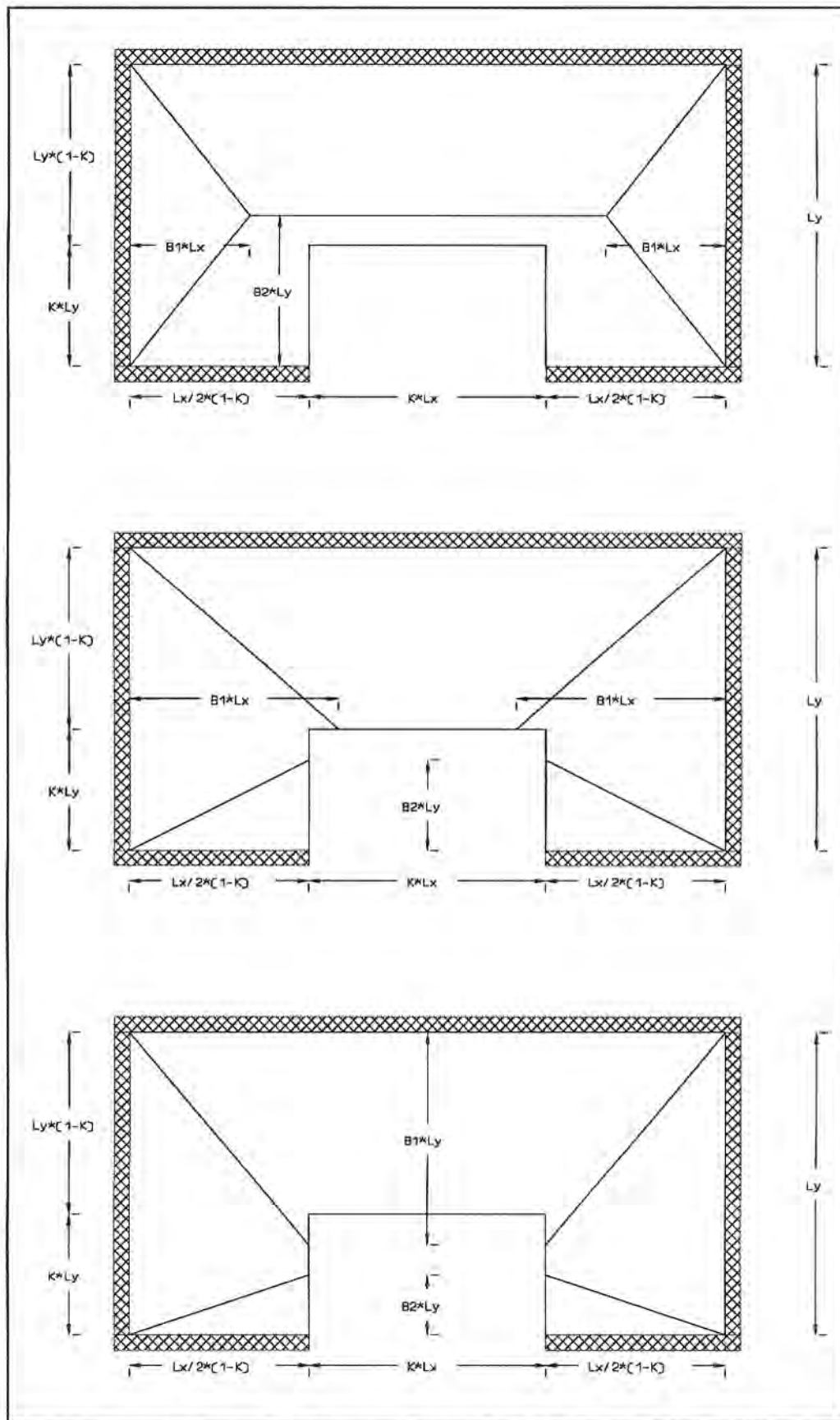


Figura 3.22 — Losa rectangular uniformemente cargada, con una abertura a la mitad del lado largo.

```

program modo1;
uses crt;
var lx,ly,i1,i2,mux,muy,k,b1,wmin,a,b,c,b1min :real;
    cl : integer;

function wu(pa,pb,pc:real):real;
begin
    wu:=pa*(mux*ly*pb/lx+muy*x*pc/ly)/lx/ly
end;

procedure impresion;
begin
    write(' wu: ',wu(a,b,c):1:3);
    write(' k:',k:1:2);
    write(' b1:',b1:2:3);
end;

begin
    clrscr;
    cl:=0;
    writeln('lx ly i1 i2 mux ');
    read(lx);
    read(ly);
    read(i1);
    read(i2);
    read(mux);
    writeln;
    muy:=2*mux;
    k:=0.1;
    repeat
        wmin:=1000000;
        b1:=0.2*(1-k);
        Repeat
            a:=12/(3-3*k*k-2*b1);
            b:=(1+i1)/b1;
            c:=2*(i2+1-k);
            impresion;
            if wmin>wu(a,b,c) then
                begin
                    wmin:=wu(a,b,c);
                    b1min:=b1;
                end;
            b1:=b1+0.075*(1-k)
        Until b1>=0.5*(1-k);
    writeln;
    write('valor minimo de wu:',wmin:1:3);
    write('con k:',k:1:2);
    write('con b1=',b1min:1:2);
    readln;
    k:=k+0.1;
    until k=0.6
end.

```

```

program modo2;uses crt;
var lx,ly,i1,i2,mux,muy,k,b1,b2,b3,wmin,kmin,a,b,c,b1min,b2min,b3min :real;
    cl : integer;
function wu(pa,pb,pc:real):real;
begin
    wu:=pa/lx/ly*(mux*ly*pb/lx+muy*lx*pc/ly)
end;
procedure impresion;
begin
    write(' k:',k:1:2);
    write(' b1:',b1:1:4);
    write(' b2:',b2:1:3);
    write(' b3:',b3:1:3);
    writeln(' wu:',wu(a,b,c):1:3);
end;
begin
    clrscr;
    cl:=0;
    writeln('lx ly i1 i2 mux ');
    read(lx);
    read(ly);
    read(i1);
    read(i2);
    read(mux);
    writeln;
    muy:=2*mux;
    k:=0.1;
    Repeat
        b1:=0.4*k;
        wmin:=10000000;
        Repeat
            b2:=0.15;
            Repeat
                b3:=1-k;
                Repeat
                    a:=6*b3/(1-k)/(3*b3*(1+k)-2*b1*b3-b2*b3+b1*(1-k);
                    b:=(1+i1)*(b2*(1-k)*(1-k)+b1*b3)/b1/b2/b3;
                    c:=(i2*(1-k*b3)+b1*(1-b3)+1-k);
                    impresion;
                    if wmin>wu(a,b,c) then
                        begin
                            wmin:=wu(a,b,c);
                            b1min:=b1;
                            b2min:=b2;
                            b3min:=b3
                        end;
                    b3:=b3+k/8
                Until b3>=1-3*k/8;
                b2:=b2+0.0375;
            Until b2>=0.3375;
            b1:=b1+0.075*k
        until b1>=0.775*k;
        writeln('Valor minimo de Wu para k=',k:1:2,' es --> ',wmin:1:3);
        writeln('con b1=',b1min:1:2,' b2=',b2min:1:2,' y b3=',b3min:1:2);
        readln;
        k:=k+0.1
    Until k=0.6;
end.

```

```

program modo3;
uses crt;
var lx,ly,i1,i2,mux,muy,k,b1,b2,wmin,kmin,a,b,c,b1min,b2min:real;
    cl : integer;
function wu(pa,pb,pc:real):real;
begin
wu:=pa/lx/ly*(mux*ly*pb/lx+muy*lx*pc/ly)
end;
procedure impresion;
begin
    write(' k:',k:1:2);
    write(' b1:',b1:1:3);
    write(' b2:',b2:1:3);
    writeln(' wu:',wu(a,b,c):1:3);
end;
begin
    clrscr;
    cl:=0;
    writeln(' lx   ly   i1   i2   mux ');
    read(lx);
    read(ly);
    read(i1);
    read(i2);
    read(mux);
    writeln;
    muy:=2*mux;
    k:=0.1;
    repeat
        wmin:=100000000;
        b1:=0.2;
        repeat
            b2:= 0.2;
            repeat
                a:=6/(3-2*k*k-b1-b2);
                b:=(b1+b2*(1+i1*(1-k)))/b1/b2;
                c:=4*(1+i2);
                impresion;
                if wmin>wu(a,b,c) then
                    begin
                        wmin:=wu(a,b,c);
                        b1min:=b1;
                        b2min:=b2
                    end;
                b2:= b2+0.02;
            until b2>=0.42;
            b1:=b1+0.02
        until b1>=0.42;
        writeln;
        writeln(' Valor minimo Wu para k=',k:1:2,' es --> ',wmin:1:3);
        writeln(' con b1=',b1min:1:2,' y b2=',b2min:1:2);
        readln;
        k:=k+0.02
    until k=0.22;
end.

```

Cálculo de las cargas últimas (w_u) para cada modo.

De la figura (3.19)

modo 1

Por el principio de trabajo virtual, para cada modo se tabulan los términos de las componentes de rotación y de trabajo.

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$\delta / (\beta_1 l_x)$	-	$m_{ux} (1+i_1) l_y \delta / \beta_1 l_x$	-
B	-	$2\delta / l_y$	-	$2m_{uy} \frac{l_x}{l_y} [i_2+1-K] \delta$
C	$\delta / (\beta_1 l_x)$	-	$m_{ux} (1+i_1) l_y \delta / \beta_1 l_x$	-
D	-	$2\delta / l_y$	-	$2m_{uy} \frac{l_x}{l_y} [i_2+1-K] \delta$

$$\Sigma m_{un} \Theta_n |_o = \Sigma W_u \Delta$$

$$X = 12 / (3 - 3K^2 - 2\beta_1)$$

$$Y = (1 + i_1) / \beta_1$$

$$Z = 2(i_2 + 1 - K)$$

Nodo 2

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$2\delta / (l_x(1-K))$	-	$m_{ux} (1+i_1-\beta_2) 2l_y \delta / l_x(1-K)$	-
B	-	$2\delta / l_y (1-Y)$	-	$m_{uy} [1+i_2-K] \frac{2\delta l_x}{l_y(1-K)}$
C	$2\delta / l_x(1-K)$	-	$m_{ux} (1+i_1-\beta_2) 2l_y \delta / l_x(1-K)$	-
D	-	$2\delta / l_y (1-Y)$	-	$2m_{uy} \frac{l_x}{l_y(1-K)} [1+i_2-K] \delta$

$$X = 24 / (1-K)(2+\beta_2+3K-3K^2)$$

$$Y = (1 + i_1 - \beta_2) / (1-K)$$

$$Z = (i_2 + 1 - K)/(1 - \beta_2)$$

Modo 3

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$2\delta/(l_x(1-\beta_3))$	-	$m_{ux}(1+i_1-k)2\delta l_y$ $l_x(1-\beta_3)$	-
B	-	$2\delta/l_y(1-k)$	-	$m_{uy}[1+i_2-\beta_3]2\delta l_x$ $l_y(1-k)$
C	$2\delta/(l_x(1-\beta_3))$	-	$m_{ux}(1+i_1-k)2\delta l_y$ $l_x(1-\beta_3)$	-
D	-	$2\delta/l_y(1-k)$	-	$m_{uy}[1+i_2-\beta_3]2\delta l_x$ $l_y(1-k)$

$$X = 24/(1-k)(2 + 3k + \beta_3)$$

$$Y = (1 + i_1 - k)/(1-\beta_3)$$

$$Z = (1 + i_2 - \beta_3)/(1-K)$$

Modo 1

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$k\delta/(l_x\beta_1(1-\beta_3))$	-	$m_{ux}(1+i_1)K\delta l_y(1-k)$ $\beta_1(1-\beta_3)k$	-
B	-	$\delta/[l_y(1-\beta_3)]$	-	$m_{uy}[1+i_2-i_2K-\beta_1]\delta l_x$ $(1-\beta_3)l_y$
C	$\delta/l_x\beta_3$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y$ $\beta_2 l_x$	-
D	-	$\delta/l_y\beta_3$	-	$m_{uy}[1+i_2]\delta l_x$ $\beta_3 l_y$

$$X = 6k/(1+k)(\beta_1(\beta_3-\beta_1) - 3k^2) + k(6-\beta_2-3\beta_3)$$

$$Y = (1 + i_1)[\beta_2K(1-K) + \beta_1(1-\beta_3)]/\beta_1 \beta_2 (1-\beta_3)$$

$$Z = (i_2 - i_2K\beta_3 - \beta_1\beta_3)/\beta_3(1-\beta_3)$$

Modo 2

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$(1-k)\delta/l_x\beta_1\beta_3$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y(1-k)^2$ $\beta_1\beta_3 l_x$	-
B	-	$\delta/l_y(1-\beta_3)$	-	$m_{uy}[1+i_2]\frac{\delta l_x}{(1-\beta_3 l_y)}(1-k)$
C	$\delta/l_x\beta_2$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y$ $\beta_2 l_x$	-
D	-	$\delta/l_y\beta_3$	-	$m_{uy}[1+i_2-k+\beta_1]\frac{\delta l_x}{\beta_3 l_y}$

$$X = 6\beta_3/(1-k)[3\beta_3(1+k) - 2\beta_1\beta_3 - \beta_2\beta_3 + \beta_1(1-k)]$$

$$Y = (1 + i_1)(\beta_2(1-k)^2 + \beta_1\beta_3) / \beta_1 \beta_2 \beta_3$$

$$Z = (i_2 - i_2 K \beta_3 + \beta_1 - \beta_1 \beta_3 + 1-k) / \beta_3(1-\beta_3)$$

Modo 3

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$\delta/l_x(1-\beta_2)$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y(1-k)$ $(1-\beta_2)l_x$	-
B	-	$(1-k)\delta/l_y\beta_3\beta_2$	-	$m_{uy}[1+i_2]\frac{\delta l_x}{\beta_2\beta_3 l_y}(1-k)^2$
C	$\delta/l_x\beta_2$	-	$m_{ux}(1+i_1-k+\beta_3)\delta l_y$ $\beta_2 l_x$	-
D	-	$\delta/l_y(1-k)$	-	$m_{uy}[i_2+\beta_1+\beta_2]\frac{\delta l_x}{(1-k)l_y}$

$$X = 6\beta_2(1-\beta_2)/(1-k)[\beta_2^2\beta_2 + (1-\beta_2)[\beta_3-\beta_3k-2\beta_1\beta_2-2\beta_2\beta_3-2\beta_2^2+3\beta_2+3k\beta_2]]$$

$$Y = (1 + i_1)\beta_2(1-k) + (1-\beta_2)(1+i_1-k+\beta_3/\beta_2)(1-\beta_2)$$

$$Z = (1+i_2)(1-k)^3 + \beta_2\beta_3(i_2 + \beta_1 + \beta_2) / \beta_3\beta_2(1-k)$$

Modo 4

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$(1-k)\delta / (l_x \beta_1 \beta_2)$	-	$m_{ux}(1+i_1)l_y \delta \frac{(1-k)^2}{\beta_1 \beta_2 l_x}$	-
B	-	$\delta / l_y (1-\beta_2)$	-	$m_{uy} [1+i_2] \frac{\delta l_x (1-k)}{l_y (1-\beta_2)}$
C	$\delta / l_x (1-K)$	-	$m_{ux}(i_1 - \beta_3 + \beta_2) l_y \delta / l_x (1-k)$	-
D	-	$\delta / l_y (1-\beta_2)$	-	$m_{uy} l_x [1+i_2 - K + \beta_1] \delta / l_y \beta_2$

$$X = 6\beta_2(1 - \beta_2) / (1-k) [(1-\beta_2) [\beta_1(1-k) + \beta_2(3+3k-\beta_2-2\beta_1-2\beta_3)] + \beta_3^2 \beta_2]$$

$$Y = (1 + i_1)(1-k)^2 + \beta_1 \beta_2 (i_1 + \beta_3 + \beta_2) / (1-k) \beta_2 \beta_1$$

$$Z = (i_2 + 1) \beta_2 (1-K) + (1-\beta_2)(i_2 + \beta_1 + 1 - k) / (1 - \beta_2) \beta_2$$

Figura 3.21

Modo 1

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$\delta / (l_x \beta_1)$	-	$m_{ux}(1+i_1 - i_1 k) \delta l_y / l_x \beta_1$	-
B	-	$2\delta / l_y$	-	$m_{uy} [1+i_2] \frac{2\delta l_x}{l_y}$
C	$\delta / (l_x \beta_2)$	-	$m_{ux} \delta l_y / l_x \beta_2$	-
D	-	$2\delta / l_y$	-	$m_{uy} [1+i_2] \frac{2\delta l_x}{l_y}$

$$X = 6 / (3 - \beta_2 - 2k^2 - \beta_1)$$

$$Y = (i + i_1 - i_1 k) / \beta_1 \beta_2$$

$$Z = 4(1 + i_2)$$

Modo 2

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$(1-k)\delta/(l_x\beta_1)$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y(1-k)^2$ $\beta_1 l_x$	-
B	-	$2\delta/l_y$	-	$2m_{uy}[1+i_2-k-\beta_1]\delta l_x$ l_y
C	$\delta/l_x\beta_2$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y$ $\beta_2 l_x$	-
D	-	$2\delta/l_y$	-	$2m_{uy}[1+i_2+\beta_1-k]\delta l_x$ l_y

$$X = 6/(\beta_1(3 - 2\beta_2 - \beta_1 - 3k^2 + 2k\beta_1))$$

$$Y = (1 + i_1)[\beta_2 K(1-K)^2 + \beta_1]/\beta_1 \beta_2$$

$$Z = 4(i_2 + 1 + \beta_1 - k)$$

Modo 3

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$(1-k)\delta/(2l_x\beta_1\beta_2)$	-	$m_{ux}(1+i_1)\delta l_y(1-k)^2$ $2\beta_1\beta_2 l_x$	-
B	-	$\delta/(l_y\beta_2)$	-	$m_{uy}[1+i_2+\beta_1-k]\delta l_x$ $\beta_2 l_y$
C	$\delta/[l_x(1-k)]$	-	$m_{ux}(2\beta_2+i_1)\delta l_y$ $(1-k)l_x$	-
D	-	$\delta/l_y\beta_2$	-	$m_{uy}[1+i_2-k+\beta_1]\delta l_x$ $\beta_2 l_y$

$$X = 12\beta_2/(1-k)[6\beta_2(1+k) + \beta_1(1-k) - 4\beta_2\beta_1 - 4\beta_2^2]$$

$$Y = (1 + i_1)((1-k)^3 + 2\beta_1\beta_2(i_1 + 2\beta_2))/\beta_1 \beta_2(1-k)$$

$$Z = 2(i_2 + 1 + \beta_1 - k)/\beta_2$$

Figura 3.22

Modo 3

Segmento	Θ_x	Θ_y	$m_{ux} \Theta_x Y_o$	$m_{uy} \Theta_y X_o$
A	$2\delta/(l_x(1-k))$	-	$2m_{ux}(i_1+\beta_1+\beta_2)\delta l_y / l_x(1-k)$	-
B	-	$\delta/l_y\beta_1$	-	$m_{uy}[1+i_2-k]\delta l_x / l_y\beta_1$
C	$2\delta/(l_x(1-k))$	-	$2m_{ux}\delta l_y(i_1+\beta_1+\beta_2) / (1-k)l_x$	-
D	-	$\delta/(1-\beta_1)$	-	$m_{uy}[1+i_2]\delta l_x(1-k)^2 / l_y(1-\beta_1)$

$$X = 6(1-\beta_1)/(1-k) [(\beta_1+\beta_2)+3-4\beta_1+3k-2\beta_2-3k\beta_1]$$

$$Y = 4(1 + \beta_1 + \beta_2)/(1-k)$$

$$Z = (1+i_2-k-i_2k\beta_1)/\beta_2(1-\beta_1)$$

Para cada uno de los modos la expresión de la carga última ó maxima (w_u) será:

$$W_u = [m_{ux} Y l_y/l_x + m_{uy} Z l_x/l_y]X/(l_x l_y) \dots \dots (3.71)$$

CUADRO DE RESULTADOS DE LAS DIMENSIONES DESCONOCIDAS SEGÚN EL MODO DE FALLA PARA LOSAS CON ABERTURA CON LAS QUE SE OBTIENE LA CARGA MÍNIMA w_{uj} PARA DISTINTOS VALORES DE "K"

De la figura (3.19) se obtiene la carga mínima (w_{uj}) en el modo 1 para la relación de forma $l_x/l_y = 2.0$. A continuación se dan los valores de la dimensión desconocida para las distintas relaciones de forma del modo 1.

$l_x h y / \beta_1 \backslash K$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.1-1.5	0.32	0.34	0.30	0.26	0.21
1.6-1.7	0.32	0.28	0.30	0.26	0.21
1.8-2.0	0.25	0.28	0.25	0.26	0.21

Estas dimensiones desconocidas son las mismas para los valores de "l" comprendidos entre 1.5 - 2.0

Para la figura (3.20) se obtiene la carga mínima (w_{uj}) para el modo 2. A continuación se dan los valores de las dimensiones desconocidas para dicho modo.

l_x / l_y	K	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.1 -1.5	β_1	0.07	0.14	0.21	0.28	0.35
1.1 -1.5	β_2	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30
1.1 -1.5	β_3	0.96	0.92	0.85	0.80	0.75

Para la relación l_x/l_y comprendido entre 1.6 - 1.9 el valor de β_1 para $K=0.5$ es 0.31, en tanto que $l_x/l_y = 2$ es 0.28, el resto es idéntico al cuadro anterior.

A continuación se dan los valores de las dimensiones desconocidas para el modo 1 de la figura 3.21 que da la carga mínima (w_{uj}) para valores de "k" pequeños, lo que era de esperarse, obteniéndose valores menores de la carga para la relación de forma $l_x/l_y = 2.0$.

l_x / l_y	K	0.10	0.12	0.14	0.16	0.18	0.20
1.1	β_1	0.40	0.40	0.40	0.40	0.38	0.38
	β_2	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
1.2	β_1	0.38	0.38	0.38	0.36	0.36	0.36
	β_2	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24
1.3	β_1	0.36	0.36	0.36	0.34	0.34	0.34
	β_2	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24	0.22
1.4	β_1	0.34	0.34	0.34	0.32	0.32	0.32
	β_2	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22	0.22

1.5	β_1	0.32	0.32	0.32	0.32	0.30	0.30
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
1.6	β_1	0.30	0.30	0.30	0.30	0.30	0.28
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
1.7	β_1	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28	0.28
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
1.8	β_1	0.28	0.28	0.28	0.26	0.26	0.26
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
1.9	β_1	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26	0.26
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
2.0	β_1	0.26	0.24	0.24	0.24	0.24	0.24
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

Para valores de "K" comprendidos entre 0.10 - 0.50, el modo 2 es el que proporciona el menor valor de la carga w_u , por lo tanto es el patrón de falla para este tipo de abertura. Se presenta la menor carga par una relación de $l_x/l_y = 2.0$

l_x/l_y	K	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.5-1.7	β_1	0.08	0.16	0.17	0.14	0.15
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20
1.8 -2.0	β_1	0.08	0.16	0.15	0.12	0.15
	β_2	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

Para el modo 1 de la figura 3.22, donde los valores de "K" varían entre 0.10 - 0.20, se obtiene la carga mínima w_u para la relación de forma $l_x/l_y = 2.0$

K	0.10 - 0.20	
lx/ly	B1	B2
1.1	0.38	0.50
1.2	0.36	0.50
1.3	0.34	0.50
1.4 - 1.5	0.32	0.50
1.6	0.30	0.50
1.7 - 1.8	0.28	0.50
1.9 - 2.0	0.26	0.50

Para la misma figura pero para valores de "K" comprendidos entre 0.10 - 0.50 el modo de falla que predomina para obtener la carga mínima es el modo 3. sus dimensiones desconocidas son:

lx/ly	K	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1.1-2.0	B1	0.90	0.80	0.70	0.60	0.50
	B2	0.02	0.04	0.06	0.08	0.50

```
{Autor: Walter Cruz Aguilar.  
Asesor: Roberto Morales Morales.}  
program fluencia;  
uses Crt;
```

```
var l,M1,N1,k1,J1,L1,fy,fc,J2,lc,c2,h5,caso:integer;  
wd,wl,lx,ly,lrf,Bs,Ec,largo,corto,W1,B2,ga,Kp,h1,h2,hmin,Asmin,x,c4,a2,  
b,c5,B1,Pb,Y,P1,wul,s1,Z,T,R1,r,n2,K,J,G,H3,h,tb,A,T1,Y5,Y6,wu,w,x1,  
x2,y22,y11,cs,css,xx,l2,A1,A22,A3,Y1,Y2,YG1,YG2,h11,h22,h33,h44,l11,  
l2,l3,l4,l5,l6,dn1,dn2,dt :real;  
F,mfi,mf2,MF,bv,hv,c : array [1..6] of integer;  
M,As,s,i1,l,D,A0,d1,m2,lamb1,LR,alf,Fac,C3,Coef,lc1,Kc,Kt,Kec,lcs,lc,ls,  
dc,ds,o1,o2,d2,P,FS,hw : array [1..6] of real;
```

```
Function Pot(v:real;e:integer):real;  
var k:integer;  
p:real;  
begin  
K:=1;  
P:=v;  
repeat  
P:=P*v;  
k:=k+1  
until k=e;  
pot:=p  
end;
```

```
Procedure Acero;  
begin  
write('wd:');readln(wd);  
write('wl:');readln(wl);  
write('lx:');readln(lx);  
write('ly:');readln(ly);  
write('Bs:');readln(Bs);  
write('fy:');readln(fy);  
write('fc:');readln(fc);  
if lx>ly then  
begin  
largo:=lx;  
corto:=ly  
end  
else  
begin  
largo:=ly;  
corto:=lx  
end;  
B:=largo/corto;  
write('ga:');readln(ga);  
write('kp:');readln(kp);  
h1:=largo*(800+0.071*fy)/(36000+5000*B*(1+Bs));write('h1:',h1:2:2);  
h2:=largo*(800+0.071*fy)/36000;write('h2:',h2:2:2);  
hmin:=kp*largo/ga;write('hmin:',hmin:2:2);  
if h1>hmin then  
repeat  
write('h:');readln(h);  
until (h1<h) and (h<h2)  
else  
repeat
```



```

    write('h:');readln(h);
    until (hmin<h) and (h<h2);
wul:=1.4*wd+1.7*wl;
Asmin:=0.0018*h;
As[1]:=Asmin;
write('D[1]:');readln(D[1]);
write('r:');readln(r);
A0[1]:=PI*D[1]*D[1]/4;
d1[1]:=h-(r+1.5*D[1]);
s[1]:=A0[1]/As[1];
m2[1]:=0.9*fy*As[1]*(d1[1]-0.59*fy*As[1]/fc);
for L1:=1 to 4 do
begin
    write('i1[',L1,']');readln(i1[L1]);
end;
write('caso:');readln(caso);
write('lrf:');readln(lrf);
L[1]:=lx;
L[2]:=lrf;
L[3]:=lx;
L[4]:=lrf;
if caso=1 then
begin
    wu:=160000*m2[1]/lrf/lrf;
    m2[2]:=wul*lrf*lrf/160000/(1+i1[2]);
end
else
begin
    writeln('W1:');readln(W1);
    wu:=160000*m2[1]/lrf/lrf-200*W1/ly;
    m2[2]:=(wul+200*W1/ly)*lrf*lrf/160000/(1+i1[2]);
end;
if wu>wul then
begin
    for L1:=1 to 6 do
    begin
        As[L1]:=Asmin;
        A0[L1]:=A0[1];
        s[L1]:=A0[L1]/As[L1];
        D[L1]:=D[1];
        if i1[L1]<>0 then i1[L1]:=1;
    end;
    d1[2]:=h-(r+D[1]/2);
    d1[3]:=d1[1];
    d1[4]:=d1[2];
    d1[5]:=d1[3];
    d1[6]:=d1[4]
end
else
begin
    for J1:=2 to 4 do
    begin
        write('D[,J1:2,]');readln(D[J1]);
        A0[J1]:=PI*D[J1]*D[J1]/4;
    end;
    A0[5]:=A0[3];
    A0[6]:=A0[4];
    d1[2]:=h-(r+D[2]/2);

```

```

d1[3]:=h-(r+D[4]+D[3]/2);
d1[4]:=h-(r+D[4]/2);
d1[5]:=d1[3];
d1[6]:=d1[4];
m2[3]:=i1[1]*m2[1];
m2[4]:=i1[2]*m2[2];
m2[5]:=i1[3]*m2[1];
m2[6]:=i1[4]*m2[2];
for M1:=2 to 6 do
if m2[M1]=0 then
begin
  As[M1]:=Asmin;
  s[M1]:=A0[M1]/As[M1];
end
else
begin
  a2:=0.531*fy*fy/fc;
  b:=-0.9*fy*d1[M1];
  c5:=m2[M1];
  xx:=SQR(b)-4*a2*c5;
  if xx<0 then As[M1]:=Asmin
  else
    As[M1]:=(-b-sqrt(xx))/2/a2;
  if fc<280 then B1:=0.85
  else
    if (280<=fc) and (fc<=560) then B1:=0.85-0.05*(fc-260)/70
    else B1:=0.65;
  Pb:=0.85*B1*fc*6000/fy/(6000+fy);
  Y:=0.75*Pb;
  P[M1]:=As[M1]/d1[M1];
  if P[M1]>=Y then writeln('cambiar de peralte');
  s[M1]:=A0[M1]/As[M1];
end
end;
for N1:=1 to 4 do
begin
  if i1[N1]=0 then i1[N1]:=1;
  lamb1[N1]:=0.5*(1-1/sqrt(1+i1[N1]));
  LR[N1]:=lamb1[N1]*i1[N1]
end;
if D[3]>=D[4] then Z:=12*D[3]
else Z:=12*D[4];
if d1[2]>Z then
begin
  for J1:=1 to 4 do LR[J1]:=LR[J1]+d1[2];
  T:=d1[2];
end
else
begin
  for K1:=1 to 4 do LR[K1]:=LR[K1]+Z;
  T:=Z
end;
end;
n2:=2*1.0E+6/15000/sqrt(fc);
k:=1/(1+0.5*fy/n2/0.45/fc);
j:=1-k/3;
w:=wd+wI;
for l:=1 to 6 do
begin

```

```

write('Coef[,1:1,']');readln(Coef[I]);
M[I]:=Coef[I]*w*Irf*Irf/10000;
FS[I]:=M[I]/j/d1[I]/As[I];
R1:=0.5*fy;
As[I]:=100*As[I];
if FS[I]>R1 then
begin
  s[I]:=s[I]*R1/FS[I];
  As[I]:=100*A0[I]/s[I];
end;
if As[I]<100*Asmin then As[I]:=100*Asmin;
writeln('As[,1:1,]',As[I]:1:3);
writeln('s[,1:1,]',s[I]:1:3);
end;
if fy>2800 then
begin
  G:=r+D[2]+D[1]/2;
  H3:=r+D[4]+D[3]/2;
  if G>=H3 then
  begin
    tb:=G;
    s1:=s[1];
    h5:=1;
  end
  else
  begin
    tb:=H3;
    if s[3]>s[5] then
    begin
      s1:=s[3];
      h5:=3;
    end
    else
    begin
      s1:=s[5];
      h5:=5;
    end
  end
end;
repeat
  A:=2*tb*s1;
  Y6:=tb*A;
  Y5:=exp(1/3*ln(Y6));
  T1:=R1*Y5;
  s1:=s1-0.1
until T1<=25950
end;
As[h5]:=100*A0[h5]/s1;
s[h5]:=100*A0[h5]/As[h5];
writeln('As[,h5,]',As[h5]:1:3);
writeln('s[,h5,]',s[h5]:1:3);
if M[3]>M[4] then
begin
  p1:=M[3]/M[1];
  j2:=1
end
else
begin
  p1:=M[4]/M[2];

```

```

j2:=2
end;
repeat
  if i1[j2]<>0 then
    if p1>i1[j2] then
      begin
        i1[j2]:=p1;
        lamb1[j2]:=0.5*(1-1/sqrt(1+i1[j2]));
        LR[j2]:=lamb1[j2]*rj2+T
      end;
      j2:=j2+2
    until j2>4;
  for k1:=1 to 4 do write('LR[,k1:1,'] : ',LR[k1]:3:2);
end;

```

Procedure Deflexion;

```

begin
  write('bv[1]:');readln(bv[1]);
  write('hv[1]:');readln(hv[1]);
  write('lc:');readln(lc);
  write('bv[2]:');readln(bv[2]);
  write('hv[2]:');readln(hv[2]);
  write('C[1]:');readln(C[1]);
  write('C[2]:');readln(C[2]);
  J2:=0;Ec:=15000*sqrt(fc);
  l[1]:=ly;
  l[2]:=lx;
  for l:=1 to 2 do
    begin
      alf[l]:=2*(bv[l]*pot(hv[l],3)+(hv[l]-h)*pot(h,3))/(l[l]*pot(h,3));
      Fac[l]:=alf[l]*l[l]/[2*1-J2];
      writeln('Fac[,l:1,'] ,Fac[l]);
      write('mfi[,l:1,']);readln(mfi[l]);
      write('mf2[,l:1,']);readln(mf2[l]);
      if mfi[l]>mf2[l] then MF[l]:=mf2[l]
      else MF[l]:=mfi[l];
      x1:=bv[2*1-J2];y1:=hv[2*1-J2];
      hw[l]:=hv[2*1-J2]-h;
      if hw[l]>h then
        begin
          x2:=h; y2:=hw[l]
        end
      else
        begin
          x2:=hw[l]; y2:=h
        end;
      Cs:=(1-0.63*x1/y1)*pot(x1,3)*y1/3;
      Css:=(1-0.63*x2/y2)*pot(x2,3)*y2/3;
      C3[l]:=Cs+2*Css;
      lc1[l]:=C[l]*pot(C[2*1-J2],3)/12;
      Kc[l]:=8*lc1[l]/lc;
      c2:=C[l];l2:=l[l];
      Kt[l]:=18*C3[l]/l2/pot((1-c2/l2),3);
      Kec[l:]=(Kt[l]*Kc[l]*Ec)/(Kt[l]+Kc[l]);
      A1:=l[l]*h;
      A2:=bv[l]*hw[l];
    end;
  end;

```

```

A3:=A1/2;
Y1:=hw[l]+h/2;Y2:=hw[l]/2;
YG1:=(A1*Y1+A22*Y2)/(A1+A22);
YG2:=(A3*Y1+A22*Y2)/(A3+A22);
if hw[l]>YG1 then
begin
  h11:=hw[l]-YG1;h22:=YG1;
  l11:=l[l]*pot(h,3)/12+l[l]*h*pot((h/2+h11),2);
  l2:=bv[l]*pot(h11,3)/3;
  l3:=bv[l]*pot(h22,3)/3;
end
else
begin
  h11:=hv[l]-YG1;
  h22:=h-h11;
  l11:=l[l]*pot(h11,3)/3;
  l2:=l[l]*pot(h22,3)/3;
  l3:=bv[l]*pot(hw[l],3)/12+bv[l]*hw[l]*pot((hw[l]/2+h22),2);
end;
if hw[l]>YG2 then
begin
  h33:=hw[l]-YG2;h44:=YG2;
  l4:=l[l]*pot(h,3)/24+l[l]*h/2*pot((h/2+h33),2);
  l5:=bv[l]*pot(h33,3)/3;
  l6:=bv[l]*pot(h44,3)/3;
end
else
begin
  h33:=hv[l]-YG2;h44:=h-h33;
  l4:=l[l]*pot(h33,3)/6;
  l5:=l[l]*pot(h44,3)/6;
  l6:=bv[l]*pot(hw[l],3)/12+bv[l]*hw[l]*pot((hw[l]/2+h44),2);
end;
lcs[l]:=l11+l2+l3;
lc[l]:=l4+l5+l6;
ls[l]:=l[l]*pot(h,3)/24;
d1[l]:=w*[l]*pot([2*1-J2],4)/(384*1.0E+4*Ec*lcs[l]);
dc[l]:=d1[l]*MF[l]/100*lcs[l]/lc[l];
ds[l]:=d1[l]*(1-MF[l]/100)*lcs[l]/ls[l];
o1[l]:=M[l+2]/Kec[l];
o2[l]:=M[l+4]/Kec[l];
d2[l]:=(o1[l]+o2[l])*[2*1-J2]/8;
dc[l]:=dc[l]+d2[l];
ds[l]:=ds[l]+d2[l];J2:=l+2
end;
dn1:=ds[1]+dc[2];dn2:=ds[2]+dc[1];
dt:=(dn1+dn2)/2;
write('dt:',dt);
end;

```

```

Begin
  clrscr;
  Acero;
  Deflexion;
end.

```

Modelo 1 $\varnothing = 3/8"$



Ix/Iy	Ix	Iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	1.80	39	1.80	39	3.00	24	63	2.82	25	25	3.00	24	63	2.82	25	25
1.2	372	310	1.80	39	1.80	39	2.89	25	66	2.91	24	24	2.89	25	66	2.91	24	24
1.3	390	300	1.80	39	1.80	39	2.75	26	69	2.92	24	24	2.75	26	69	2.92	24	24
1.4	406	290	1.80	39	1.80	39	2.58	27	71	2.88	25	23	2.58	27	71	2.88	25	23
1.5	420	280	1.80	39	1.80	39	2.41	29	73	2.79	25	23	2.41	29	73	2.79	25	23
1.6	432	270	1.80	39	1.80	39	2.24	32	75	2.67	27	22	2.24	32	75	2.67	27	22
1.7	425	250	1.80	39	1.80	39	1.93	37	74	2.34	30	22	1.93	37	74	2.34	30	22
1.8	414	230	1.80	39	1.80	39	1.80	39	72	2.02	35	21	1.80	39	72	2.02	35	21
1.9	399	210	1.80	39	1.80	39	1.80	39	70	1.80	39	20	1.80	39	70	1.80	39	20

Modelo 2 $\varnothing = 3/8"$

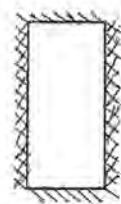


Ix/Iy	Ix	Iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	1.80	39	1.80	39	1.80	39	63	3.26	22	25	3.12	23	63	3.26	22	25
1.2	372	310	1.80	39	1.80	39	1.80	39	66	3.27	22	24	2.89	24	66	3.27	22	24
1.3	390	300	1.80	39	1.80	39	1.80	39	69	3.21	22	24	2.79	25	69	3.21	22	24
1.4	406	290	1.80	39	1.80	39	1.80	39	71	3.1	23	23	2.6	27	71	3.1	23	23
1.5	420	280	1.80	39	1.80	39	1.80	39	73	2.95	24	23	2.41	29	73	2.95	24	23
1.6	432	270	1.80	39	1.80	39	1.80	39	75	2.79	25	22	2.22	32	75	2.79	25	22
1.7	425	250	1.80	39	1.80	39	1.80	39	74	2.43	29	22	1.88	38	74	2.43	29	22
1.8	414	230	1.80	39	1.80	39	1.80	39	72	2.08	34	21	1.80	39	72	2.08	34	21
1.9	399	210	1.80	39	1.80	39	1.80	39	70	1.80	39	20	1.80	39	70	1.80	39	20



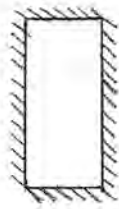
Modelo 3 $\varnothing = 3/8"$

kx/ly	kx	ly	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	1.80	39	1.80	39	4.06	17	63	3.79	19	25	1.80	39	63	1.80	39	25
1.2	372	310	1.80	39	1.80	39	3.95	18	66	3.93	18	24	1.80	39	66	1.80	39	24
1.3	390	300	1.80	39	1.80	39	3.79	19	69	3.97	18	24	1.80	39	69	1.80	39	24
1.4	406	290	1.80	39	1.80	39	3.60	20	71	3.93	18	23	1.80	39	71	1.80	39	24
1.5	420	280	1.80	39	1.80	39	3.40	21	73	3.84	18	23	1.80	39	73	1.80	39	23
1.6	432	270	1.80	39	1.80	39	3.19	22	75	3.71	19	23	1.80	39	75	1.80	39	23
1.7	425	250	1.80	39	1.80	39	2.74	26	74	3.28	22	22	1.80	39	74	1.80	39	22
1.8	414	230	1.80	39	1.80	39	2.33	30	72	2.85	25	21	1.80	39	72	1.80	39	21
1.9	399	210	1.80	39	1.80	39	1.94	37	70	2.42	29	21	1.80	39	70	1.80	39	21



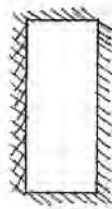
Modelo 4 $\varnothing = 3/8"$

kx/ly	kx	ly	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	1.80	39	1.80	39	1.80	39	63	3.57	20	24	1.80	39	63	3.57	20	24
1.2	372	310	1.80	39	1.80	39	1.80	39	66	3.48	20	24	1.80	39	66	3.48	20	24
1.3	390	300	1.80	39	1.80	39	1.80	39	69	3.36	21	23	1.80	39	69	3.36	21	23
1.4	406	290	1.80	39	1.80	39	1.80	39	71	3.21	22	23	1.80	39	71	3.21	22	23
1.5	420	280	1.80	39	1.80	39	1.80	39	73	3	24	23	1.80	39	73	3.00	24	23
1.6	432	270	1.80	39	1.80	39	1.80	39	75	2.83	25	22	1.80	39	75	2.83	25	22
1.7	425	250	1.80	39	1.80	39	1.80	39	74	2.44	29	22	1.80	39	74	2.44	29	22
1.8	414	230	1.80	39	1.80	39	1.80	39	72	2.07	34	21	1.80	39	72	2.07	34	21
1.9	399	210	1.80	39	1.80	39	1.80	39	70	1.80	39	20	1.80	39	70	1.80	39	20



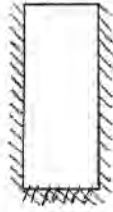
Modelo 5 $\varnothing = 3/8"$

ix/iy	ix	iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	2.36	30	2.41	29	1.80	39	63	1.80	39	58	1.80	39	63	1.80	39	58
1.2	372	310	2.18	32	2.60	27	1.80	39	66	1.80	39	57	1.80	39	66	1.80	39	57
1.3	390	300	2.00	35	2.73	26	1.80	39	69	1.80	39	55	1.80	39	69	1.80	39	55
1.4	406	290	1.81	39	2.81	25	1.80	39	71	1.80	39	54	1.80	39	71	1.80	39	54
1.5	420	280	1.80	39	2.85	25	1.80	39	73	1.80	39	52	1.80	39	73	1.80	39	52
1.6	432	270	1.80	39	2.83	25	1.80	39	75	1.80	39	51	1.80	39	75	1.80	39	51
1.7	425	250	1.80	39	2.57	28	1.80	39	74	1.80	39	48	1.80	39	74	1.80	39	48
1.8	414	230	1.80	39	2.28	31	1.80	39	72	1.80	39	45	1.80	39	72	1.80	39	45
1.9	399	210	1.80	39	1.98	36	1.80	39	70	1.80	39	42	1.80	39	70	1.80	39	42



Modelo 6 $\varnothing = 3/8"$

ix/iy	ix	iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	352	320	1.80	30	1.81	37	1.80	39	63	4.42	16	25	1.80	39	63	1.80	39	24
1.2	372	310	1.80	32	1.98	36	1.80	39	66	4.43	16	24	1.80	39	66	1.80	39	24
1.3	390	300	1.80	35	2.00	36	1.80	39	69	4.37	16	24	1.80	39	69	1.80	39	24
1.4	406	290	1.80	39	1.98	36	1.80	39	71	4.26	17	23	1.80	39	71	1.80	39	23
1.5	420	280	1.80	39	1.93	37	1.80	39	73	4.09	17	23	1.80	39	73	1.80	39	23
1.6	432	270	1.80	39	1.87	38	1.80	39	75	3.90	18	22	1.80	39	75	1.80	39	22
1.7	425	250	1.80	39	1.80	39	1.80	39	74	3.41	21	22	1.80	39	74	1.80	39	22
1.8	414	230	1.80	39	1.80	39	1.80	39	72	2.95	24	21	1.80	39	72	1.80	39	21
1.9	399	210	1.80	39	1.80	39	1.80	39	70	2.50	28	20	1.80	39	70	1.80	39	20



Modelo 7 $\emptyset = 3/8"$ y $\emptyset = 1/2"$

Ix/Iy	Ix	Iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	540	491	2.70	26	4.78	15	7.15	18	48	2.70	47	94	2.70	47	43	2.70	47	94
1.2	545	454	2.70	26	6.42	11	7.097	18	47	2.70	47	95	2.70	47	42	2.70	47	95
1.3	550	423	2.70	26	8.51	8	6.90	18	47	2.70	47	96	2.70	47	41	2.70	47	96
1.4	560	400	2.70	26	11.24	6	6.91	18	47	2.70	47	97	2.70	47	41	2.70	47	97
1.5	570	380	2.70	26	14.62	5	6.67	19	47	2.70	47	99	2.70	47	41	2.70	47	99
1.6	580	363	2.70	26	18.79	4	6.67	19	47	2.70	47	100	2.70	47	41	2.70	47	100



Modelo 8 $\emptyset = 3/8"$ y $\emptyset = 1/2"$

Ix/Iy	Ix	Iy	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	540	491	2.70	26	3.64	19	2.70	47	87	7.10	18	39	2.70	47	87	7.10	18	39
1.2	545	454	2.70	26	3.69	19	2.70	47	82	7.25	17	39	2.70	47	82	7.25	17	39
1.3	550	423	2.70	26	4.25	17	2.70	47	77	7.39	17	40	2.70	47	77	7.39	17	40
1.4	560	400	2.70	26	5.30	13	2.70	47	74	8.32	15	40	2.70	47	74	8.32	15	40
1.5	570	380	2.70	26	6.54	11	2.70	47	71	10.34	12	41	2.70	47	71	10.34	12	41
1.6	580	363	2.70	26	7.94	9	2.70	47	68	12.71	10	41	2.70	47	68	12.71	10	41
1.7	575	338	2.70	26	9.06	8	2.70	47	65	14.64	9	42	2.70	47	65	14.64	9	42
1.8	565	314	2.70	26	9.97	7	2.70	47	61	16.24	8	42	2.70	47	61	16.24	8	42
1.9	555	292	2.70	26	10.92	7	2.70	47	58	17.97	7	41	2.70	47	58	17.97	7	41

Modelo 9 $\phi = 3/8"$ y $\phi = 1/2"$



lx/ly	lx	ly	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
1.1	540	491	2.70	26	3.52	20	20.00	5.22	105	7.10	18	39	2.70	47	87	7.10	18	39
1.2	545	454	2.70	26	3.50	26	20.00	5.35	99	7.22	18	40	2.70	47	82	7.22	18	40
1.3	550	423	2.70	26	3.46	23	21.00	5.35	93	7.32	17	40	2.70	47	77	7.32	17	40
1.4	560	400	2.70	26	4.19	17	17.00	5.53	89	7.53	17	41	2.70	47	74	7.53	17	41
1.5	570	300	2.70	26	5.31	13	13.00	5.61	85	8.32	15	42	2.70	47	71	8.32	15	42
1.6	580	363	2.70	26	6.60	11	11.00	5.74	82	10.44	12	43	2.70	47	68	10.44	12	43
1.7	575	338	2.70	26	7.59	11	9.00	5.59	77	12.11	10	43	2.70	47	65	12.11	10	43
1.8	565	314	2.70	26	8.38	11	8.00	5.31	73	13.46	9	43	2.70	47	61	13.46	9	43
1.9	555	292	2.70	26	9.22	11	8.00	5.02	69	14.91	8	43	2.70	47	58	14.91	8	43

ABACO PARA DETERMINAR AREAS DE ACERO

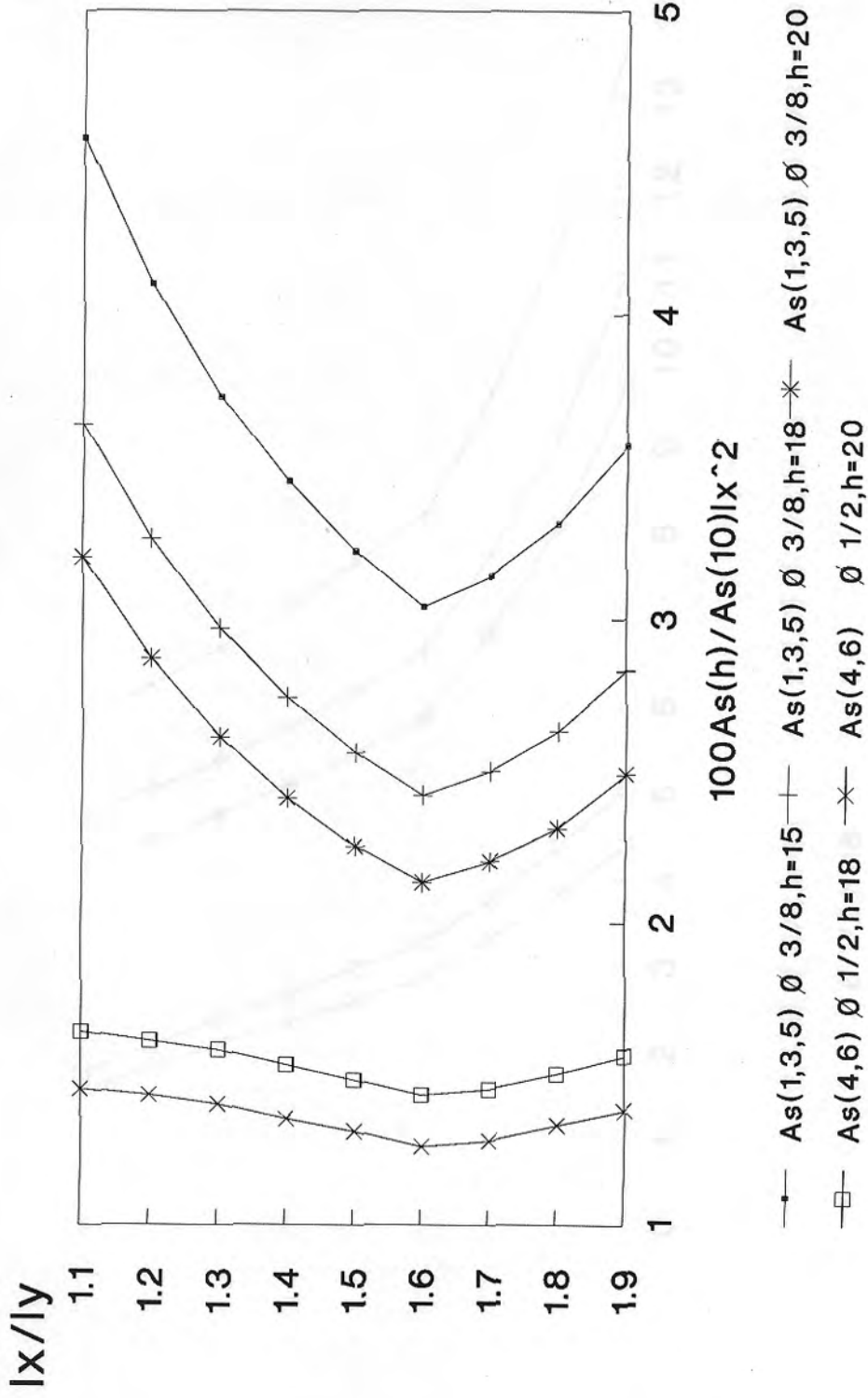


Gráfico N 01 Losa rectangular con bordes fijos, libre y/o apoyados

ABACO PARA DETERMINAR AREAS DE ACERO

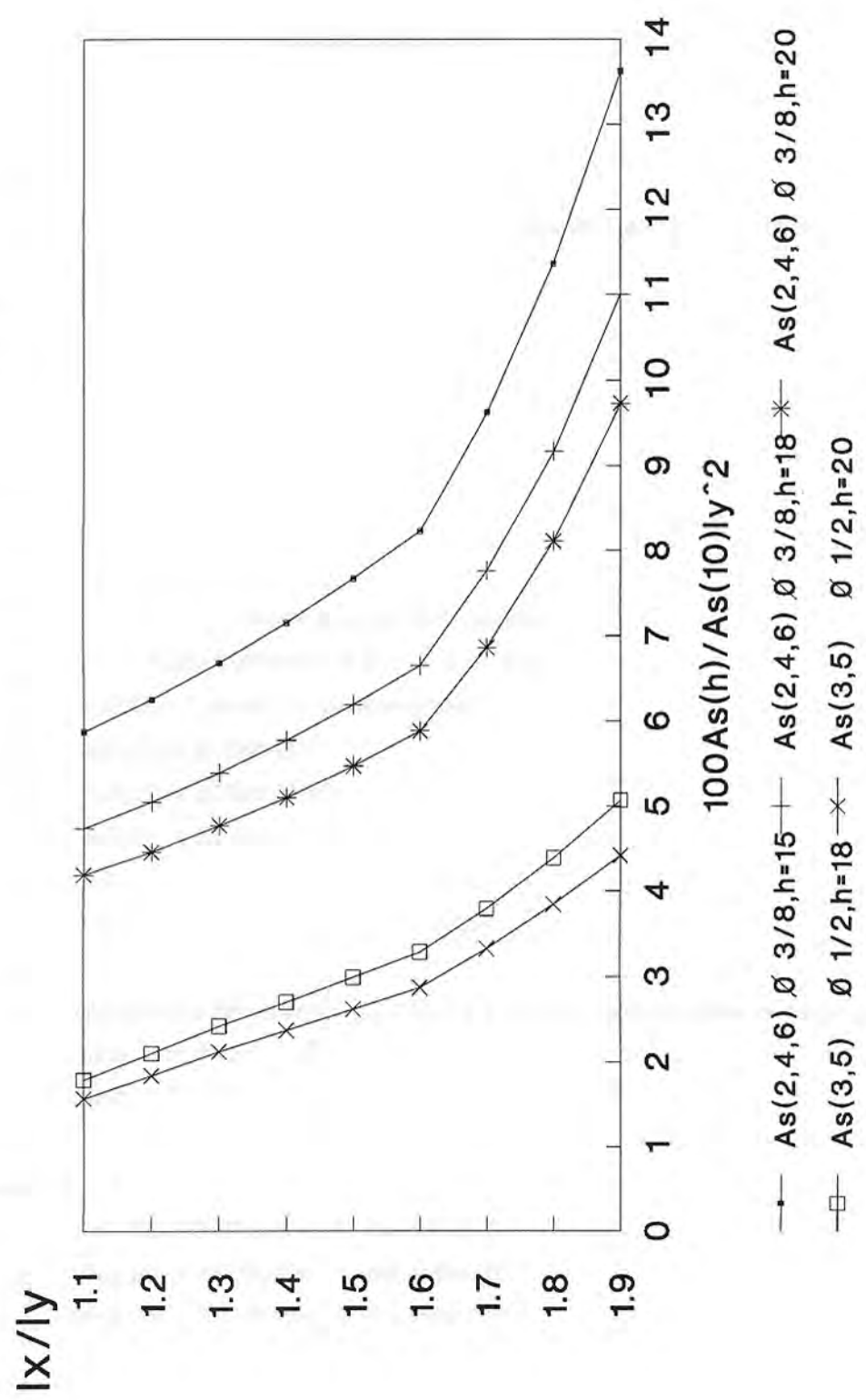
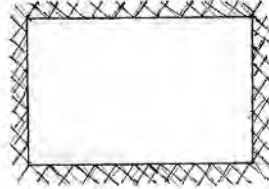


Gráfico N 02 Losa rectangular con bordes fijos, libre y/o apoyados

EJEMPLOS DE APLICACION

Se tiene un panel rectangular para un sistema continuo de piso de losa y viga de 4.95mt. y 4.50mt. de dimensión como se observa en la figura.

El panel resiste una carga última factorizada de 1T/m². El concreto tiene una resistencia de 210kg/cm² y el acero una resistencia de fluencia de 4200kg/cm². Diseñe el panel.



Si se suponen vigas rígidas, el mínimo espesor de la losa según el ACI 318-83 está dado por:

$$h_{min} = k \cdot l_n / \gamma \quad k = 1.1 \text{ para } f_y = 4200$$

$$l_n = 495 \text{ cm.}, \quad \gamma = 44.3$$

$$\alpha_m = 2.$$

$$h_{min} = 12.29 \text{ cm.}$$

$$h_{max} = l_n (800 + 0.071 \cdot f_y) / 36000$$

$$h_{max} = 15.10 \text{ cm.}$$

Tomemos un $h = 15 \text{ cm.}$

Del gráfico 01 que corresponde a losas rectangulares.

$$100 \cdot A_s(15) / [A_s(10) \cdot l_x^2] = 4.58 \quad l_x \text{ en mts.}$$

$$A_s(10) = 1.80 \text{ cm}^2/\text{mt} \text{ para el modelo 1}$$

$$A_s1(15) = 2.70 \text{ cm}^2/\text{mt}$$

$$A_s2(15) = 2.70 \text{ cm}^2/\text{mt} \text{ del gráfico 02}$$

$$A_s3(15) = 3.37 \text{ cm}^2/\text{mt} \text{ del gráfico 01}$$

$$A_s4(15) = 3.35 \text{ cm}^2/\text{mt} \text{ del gráfico 02}$$

$$A_s5(15) = A_s3(15); \quad A_s6(15) = A_s4(15)$$

Si las dimensiones se incrementan a 8.10mts y 4.50mts. manteniendose la carga última.

$$h_{min} = 17.71 \text{ cm} \quad \gamma = 50.3 \text{ para } l_x/l_y = 1.8$$

$$h_{max} = 24.71 \text{ cm}$$

Se toma $h = 20 \text{ cm}$

$$A_s1(20) = 3.60 \text{ cm}^2/\text{mt} \quad \text{del gráfico 01}$$

$$A_s2(20) = 3.60 \text{ cm}^2/\text{mt} \quad \text{del gráfico 02}$$

$$A_s3(20) = 2.73 \text{ cm}^2/\text{mt} \quad \text{del gráfico 01}$$

$$A_s4(20) = 3.98 \text{ cm}^2/\text{mt} \quad \text{del gráfico 02}$$

$$A_s5(20) = A_s3(20); \quad A_s6(20) = A_s4(20)$$

Para el primer ejemplo con una carga última de $2T/m^2$, $h=15cm$

$$As_1(15) = 2.70cm^2/mt$$

$$As_2(15) = 2.70cm^2/mt$$

$$As_3(15) = 2 \cdot 3.37 = 6.74cm^2/mt$$

$$As_4(15) = 2 \cdot 3.35 = 6.70cm^2/mt$$

$$As_5(15) = As_3(15); As_6(15) = As_4(15)$$

Para un $h=20cm$

$$As_1(20) = 3.60cm^2/mt$$

$$As_2(20) = 3.60cm^2/mt$$

$$100 \cdot As_3(20) / [As_3(10) \cdot l_x^2] = 3.31 \text{ del gráfico 01}$$

$$As_3(20) = 2 \cdot 3.9 = 7.80cm^2/mt$$

$$100 \cdot As_4(20) / [As_4(10) \cdot l_y^2] = 11.36 \text{ del gráfico 02}$$

$$As_4(20) = 2 \cdot 4.14 = 8.28cm^2/mt$$

$$As_5(20) = As_3(20) ; As_6(20) = As_4(20)$$

De la misma forma se podrá hallar el área de acero para cualquier losa con diferentes condiciones de frontera haciendo uso de los abacos y de las áreas de acero de los modelos.

CAPITULO IV

ANALISIS DE LA CAPACIDAD ULTIMA DE LOSAS OBLICUAS

A veces es preferible, en losas oblicuas colocar el refuerzo paralelo sobre los bordes para evitar el corte excesivo de las varillas a diferentes longitudes. Si las varillas son paralelas a los bordes de la losa, no estarán en ángulo recto en las dos direcciones para obtener los momentos últimos de resistencia por ancho unitario, a lo largo de una línea de fluencia en una dirección cualquiera para una losa de este tipo, es necesario volver a los primeros principios de calculo.

En la figura (4.01a) se muestra el refuerzo colocado en las direcciones X y r que forman un ángulo ϕ . La figura (4.01b) muestra una línea de fluencia cuya normal n forma un ángulo α con el refuerzo en la dirección x , y que cruza cada juego de varillas de refuerzo. La línea actual de fluencia se puede sustituir por una línea escalonada de fluencia que consiste de pequeños escalones perpendiculares a la dirección del refuerzo. Como lo supuesto anteriormente para el caso de una losa reforzada por varillas en ángulo recto, los momentos de torsión en cada escalón de la línea de fluencia son cero. El momento último de resistencia normal por ancho unitario, m_{un} , se puede determinar considerando el equilibrio de las secciones triangulares de la figura (4.01c) para esto tomamos momentos con respecto a los lados ab , y considerando las componentes de momentos en las direcciones x y r de las varillas.

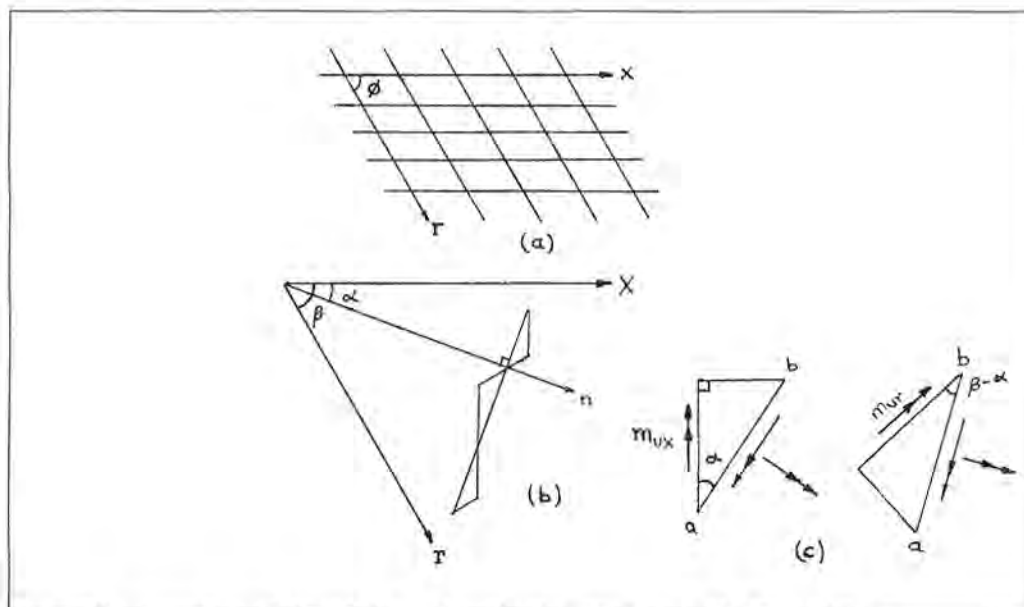


Figura 4.01 Línea de fluencia formando un ángulo cualquiera con el refuerzo oblicuo.

(a) Refuerzo (b) Línea de fluencia (c) Elementos de la losa en la línea de fluencia.

Los momentos últimos de resistencia por ancho unitario en las direcciones x y r son m_{ux} y m_{ur} respectivamente. Para las varillas en la dirección x, la contribución al momento ultimo resistente normal por ancho unitario es $m_{ux}\cos^2\alpha$ para las varillas en la dirección r, la contribución es $m_{ur}\cos^2(\phi-\alpha)$, proveniente del refuerzo en las direcciones X y r es,

$$m_{un} = m_{ux}\cos^2\alpha + m_{ur}\cos^2(\phi-\alpha) \dots\dots\dots(4.01)$$

Notamos que cuando $\phi = 90^\circ$ el caso de las varillas en ángulo recto, el eje r se convierte en el eje y, y el segundo término del lado derecho se convierte en, $m_{ur}\cos^2(90-\alpha) = m_{ur}\sin^2\alpha$, que está de acuerdo con la ecuación (4.01).

De modo similar tomando momentos con respecto a un eje perpendicular a ab, se ve que el momento de torsión por ancho unitario que actúa a lo largo de la línea de fluencia es,

$$m_{unt} = m_{ux}\sin\alpha\cos\alpha - m_{ur}\sin(\phi-\alpha)\cos(\phi-\alpha) \dots\dots\dots(4.02)$$

Igualmente cuando $\phi = 90^\circ$, el caso de las varillas en ángulo recto, el eje r se vuelve en el eje y, y el segundo término del lado derecho se convierte en $-m_{ur}\sin\alpha\cos\alpha$, que está de acuerdo con la ecuación (4.02).

4.100 LOSA OBLICUA FIJA/ APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS UNIFORMEMENTE CARGADA.

La compatibilidad de deformaciones del patrón de las líneas de fluencia requiere que la línea de fluencia sea paralela a los apoyos y la simetría demuestra que la línea de fluencia está a la mitad del claro. Por lo tanto, el ángulo α entre la normal a la línea de fluencia y el eje x es de 90° de la ecuación (4.01)

$$m_{un} = m_{ux}\cos^2 90 + m_{ur}\cos^2(\phi-90)$$

$$m_{un} = m_{ur}\sin^2\phi \dots\dots\dots(4.03)$$

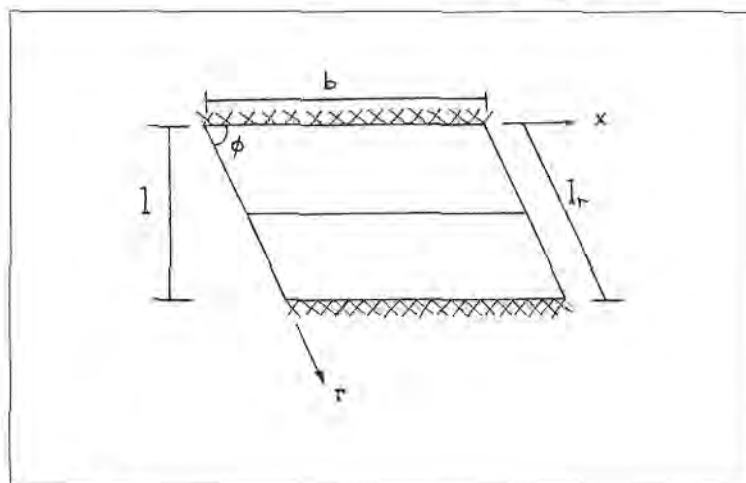


Figura 4.02

En este caso el acero en la dirección x no contribuye a la resistencia de flexión en la línea de fluencia, lo que es de esperarse ya que el acero es paralelo a la línea de fluencia.

Usando el método de trabajo virtual, se imprime a la línea de fluencia un pequeño desplazamiento δ hacia abajo.

Entonces el trabajo interno realizado es.

$$m_{ur} \Theta_n l = m_{ur} (1+i_2) \sin^2 \phi * (2\delta/0.5l) * b = 4m_{ur} (1+i_2) \sin^2 \phi (\delta/l) b \quad (4.04)$$

y el trabajo externo realizado es

$$\Sigma W_{\text{ext}} = w_u l b \delta / 2 \quad \dots\dots\dots (4.05)$$

Luego la ecuación del trabajo virtual será:

$$w_u = 8m_{ur} (1+i_2) / l^2 \quad \dots\dots\dots (4.05a)$$

para el caso de la losa oblicua apoyada en dos bordes opuestos ($i_2=0$)

$$w_u = 8m_{ur} / l^2$$

4.101 LOSA OBLICUA APOYADA EN DOS BORDES OPUESTOS, SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA Y UNA CARGA LINEAL (W) EN LA DIRECCION PARALELA A LOS APOYOS.

La posición más crítica de la carga lineal es cuando está en el centro del paño paralela a los apoyos. El patrón de línea de fluencia para este tipo de carga es mostrada en la figura (4.03).

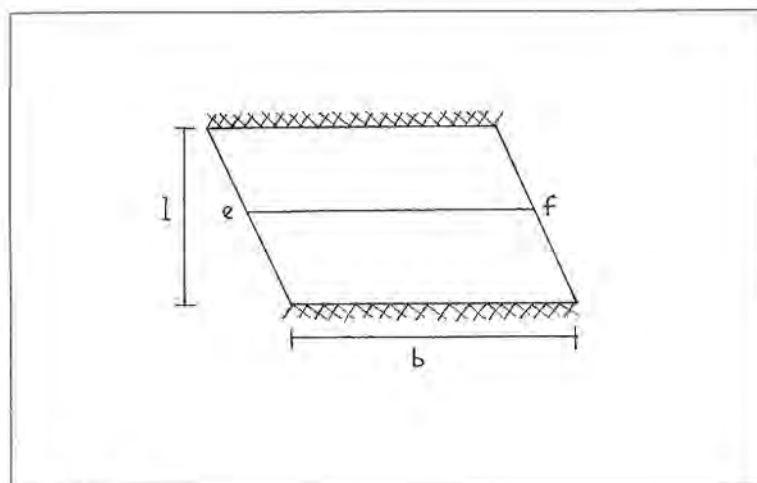


Figura 4.03

El trabajo interno estará dado por:

$$m_{ur}\Theta_n l = 4m_{ur}(l+i_2)\text{sen}^2\phi\delta b/l \quad \dots\dots\dots(4.06)$$

El trabajo externo

$$\Sigma W_{uA} = w_u l b \delta / 2 + w b \delta \quad \dots\dots\dots(4.07)$$

Por lo tanto la ecuación del trabajo virtual será:

$$w_u l + 2w = 8m_{ur}(l+i_2)l/l_r^2 \quad \dots\dots\dots(4.08a)$$

Para el caso de losa apoyada $i_2 = 0$

$$w_u l + 2w = 8m_{ur}l/l_r^2 \quad \dots\dots\dots(4.08b)$$

4.102 LOSA OBLICUA, SIMPLEMENTE APOYADA Y SUJETA A UNA CARGA UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDA Y UNA CARGA PUNTUAL P.

El primer tipo de falla que será considerado se muestra en la figura (4.04). Esta primera solución obtenida es válida para alguna posición de la carga puntual a lo largo de la línea de la mitad del paño (ef) aunque no necesariamente es el más crítico.

Para un desplazamiento pequeño δ hacia abajo de la línea de fluencia ef, como fue visto en la solución pasada el trabajo interno es:

$$m_{ur}\Theta_n l = 4m_{ur}(l+i_2)\text{sen}^2\Theta\delta b/l \quad \dots\dots\dots(4.09)$$

El trabajo externo es:

$$\Sigma w \Delta = (1/2)w_u b l \delta + P \delta \dots\dots\dots(4.10)$$

La ecuación del trabajo virtual.

$$w_u l + 2P/b = 8m_{ur}(1+i_2)/l_r^2 \dots\dots(4.11a)$$

Para una losa apoyada $i_2=0$

$$w_u l + 2P/b = 8m_{ur}/l_r^2 \dots\dots\dots(4.11b)$$

Si la losa es ancha a pesar de eso, el patrón de líneas de fluencia mostrada en la figura (4.05). puede ser más crítica que el patrón estudiado anteriormente.

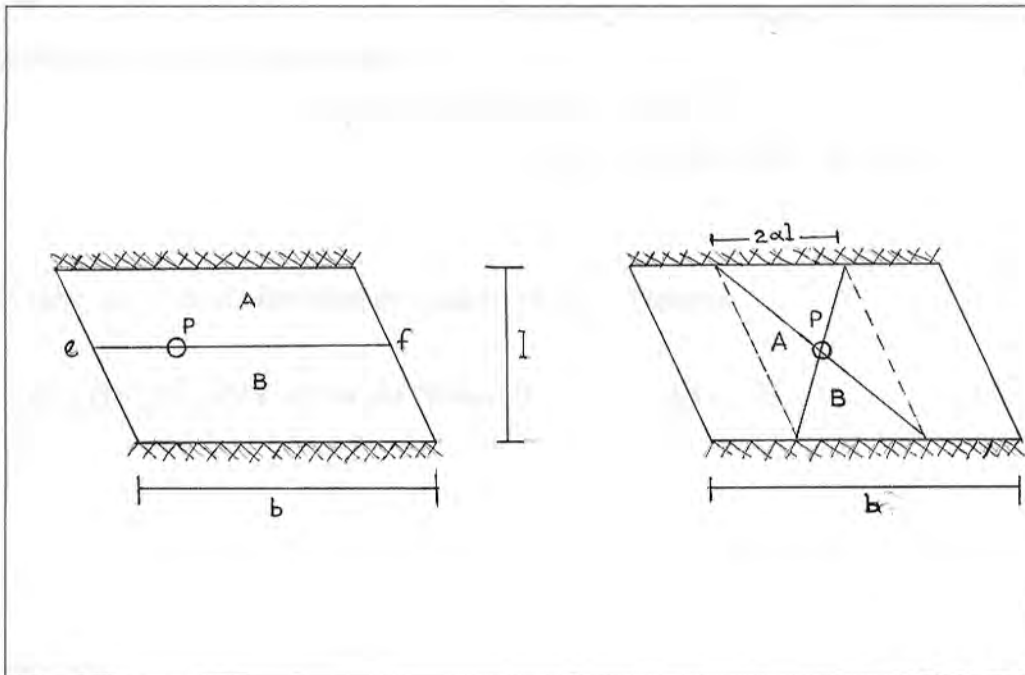


Figura 4.04

Figura 4.05

Obtenemos la ecuación del trabajo virtual dando un desplazamiento δ a la carga puntual.

Para el elemento A :

$$(m_{ux} \Theta_o l) = (m'_{ux} + m_x) \text{sen} \phi \delta / \alpha l$$

$$= m_{ux}(1 + i_1) \delta / \alpha$$

Para el elemento B

$$m_{uy} \Theta_y |y = m_{uy} \sin \phi (2\delta/lr) 2\alpha l$$

$$= 4m_{uy} \alpha L^2/lr^2 \delta$$

El trabajo interno será:

$$\Sigma(m_{un} \Theta_{ol}) = 2m_{ux}(1+i_1)\delta/\alpha + 8m_{uy}\alpha L^2\delta/l^2r \dots\dots\dots(4.12)$$

El trabajo externo será:

$$\Sigma W u_{\Delta} = 2/3 w_u \alpha L l r \delta + P u \delta \dots\dots\dots(4.13)$$

Igualando (4.12) y (4.13), la ecuación del trabajo virtual estará dado por:

$$2/3 w_u \alpha L l r \delta + P u \delta = 2m_{ux}(1+i_1)\delta/\alpha + 8m_{uy}\alpha L^2\delta/l^2r$$

$$P u = 2m_{ux}/\alpha (1+i_1) + 8m_{uy}\alpha L^2/l_r^2 - 2/3 w_u \alpha L l_r \dots\dots\dots(4.14)$$

Ahora Pu será mínimo cuando dp/dα = 0

$$2m_{ux}(1+i_1)/\alpha^2 = 8m_{uy}L^2/l^2r - 2/3 w_u L l_r$$

$$\alpha^2 = 2m_{ux}(1+i_1)/[8m_{uy}L^2/l^2r - 2/3 w_u L l_r] \dots\dots\dots(4.15)$$

Si este valor de "α" es sustituido en la ecuación (4.14). Tenemos

$$P u = 2(2m_{ux}(1+i_1)/8m_{uy}L^2/l^2r - 2/3 w_u L l_r)^{0.5} [8m_{uy}L^2/l^2r - 2/3 w_u L l_r] \dots\dots\dots(4.16)$$

```
{Autor: Walter Cruz Aguilar.  
Asesor: Roberto Morales Morales.}  
program fluencia;  
uses Crt;
```

```
var l,M1,N1,k1,J1,L1,fy,fc,J2,lc,c2,h5:integer;  
    wd,wl,lx,ly,Bs,Ec,largo,corto,B2,ga,Kp,h1,h2,hmin,Asmin,x,c4,a2,  
    b,c5,B1,Pb,Y,P1,wul,s1,Z,T,R1,r,n2,K,J,G,H3,h,tb,A,T1,Y5,Y6,wu,w,x1,  
    x2,y22,y11,cs,css,xx,l2,A1,A22,A3,Y1,Y2,YG1,YG2,h11,h22,h33,h44,l11,  
    l2,l3,l4,l5,l6,dn1,dn2,dt :real;  
    F,mfi,mf2,MF,bv,hv,c : array [1..6] of integer;  
    M,As,s,i1,l,D,A0,d1,m2,lamb1,LR,alf,Fac,C3,Coef,lc1,Kc,Kt,Kec,lcs,lc,ls,  
    dc,ds,o1,o2,d2,P,FS,hw : array [1..6] of real;
```

```
Function Pot(v:real;e:integer):real;  
var k:integer;  
    p:real;  
begin  
    K:=1;  
    P:=v;  
    repeat  
        P:=P*v;  
        k:=k+1  
    until k=e;  
    pot:=p  
end;
```

```
Procedure Acero;  
begin  
    write('wd:');readln(wd);  
    write('wl:');readln(wl);  
    write('lx:');readln(lx);  
    write('ly:');readln(ly);  
    write('Bs:');readln(Bs);  
    write('fy:');readln(fy);  
    write('fc:');readln(fc);  
    if lx>ly then  
        begin  
            largo:=lx;  
            corto:=ly  
        end  
    else  
        begin  
            largo:=ly;  
            corto:=lx  
        end  
    end;  
    if largo<(2*corto) then  
        begin  
            B:=largo/corto;  
            write('ga:');readln(ga);  
            write('kp:');readln(kp);  
            h1:=largo*(800+0.071*fy)/(36000+5000*B*(1+Bs));write('h1:',h1:2:2);  
            h2:=largo*(800+0.071*fy)/36000;write('h2:',h2:2:2);  
            hmin:=kp*largo/ga;write('hmin:',hmin:2:2);  
            if h1>hmin then  
                repeat  
                    write('h:');readln(h);  
                until (h1<h) and (h<h2)
```

```

else
  repeat
    write('h:');readln(h);
    until (hmin<h) and (h<h2);
wul:=1.4*wd+1.7*wl;
Asmin:=0.0018*h;
As[1]:=Asmin;
write('D[1]:');readln(D[1]);
write('r:');readln(r);
A0[1]:=Pi*D[1]*D[1]/4;
d1[1]:=h-(r+1.5*D[1]);
s[1]:=A0[1]/As[1];
m2[1]:=0.9*fy*As[1]*(d1[1]-0.59*fy*As[1]/fc);
for k1:=1 to 4 do
begin
  write('F[,k1:1,]:');readln(F[k1]);
  write('i1[,k1:1,]:');readln(i1[k1]);
end;
x:=6*1.0E+4/ly/ly/(3*(lx/ly)-1);
l[1]:=lx;
l[2]:=ly;
l[3]:=lx;
l[4]:=ly;
l[5]:=lx;
l[6]:=ly;
if F[2]=2 then
begin
  if F[3]=2 then
  begin
    wu:=x*m2[1]*(3+lx/ly);
    m2[2]:=(wul/x-m2[1]*(1+i1[1]))/(1+i1[4]*lx/ly);
  end
  else
  begin
    l[1]:=ly;
    l[2]:=lx;
    l[3]:=ly;
    l[4]:=lx;
    l[5]:=ly;
    l[6]:=lx;
    if lx>=2*ly then
    begin
      c4:=6*1.0E+4/(ly*ly*(3*(lx/ly)-2));
      wu:=c4*m2[1]*(6+lx/ly);
      m2[2]:=(wul/c4-m2[1]*(2+lx*i1[1]/ly))/(2+i1[2]+i1[4]);
    end
    else
    begin
      c4:=12*1.0E+4/lx/lx/(3*(lx/ly)-0.5);
      wu:=2*c4*m2[1]*(2*ly/lx+1);
      m2[2]:=(wul/c4-m2[1]*(1+i1[1]))*lx/ly/(2+i1[2]+i1[4]);
    end
  end
end
end
else
begin
  wu:=8*x*m2[1]*(1+lx/ly);
  m2[2]:=(wul/2/x-m2[1]*(2+i1[1]+i1[3]))*lx/ly/(2+i1[2]+i1[4]);

```

```

end;
if wu>wul then
begin
  for L1:=1 to 6 do
  begin
    As[L1]:=Asmin;
    A0[L1]:=A0[1];
    s[L1]:=A0[L1]/As[L1];
    D[L1]:=D[1];
    if i1[L1]<>0 then i1[L1]:=1
  end;
  d1[2]:=h-(r+D[1]/2);
  d1[3]:=d1[1];
  d1[4]:=d1[2];
  d1[5]:=d1[3];
  d1[6]:=d1[4]
end
else
begin
  for J1:=2 to 4 do
  begin
    write('D[,J1:2,]');readln(D[J1]);
    A0[J1]:=PI*D[J1]*D[J1]/4;
  end;
  A0[5]:=A0[3];
  A0[6]:=A0[4];
  d1[2]:=h-(r+D[2]/2);
  d1[3]:=h-(r+D[4]+D[3]/2);
  d1[4]:=h-(r+D[4]/2);
  d1[5]:=d1[3];
  d1[6]:=d1[4];
  m2[3]:=i1[1]*m2[1];
  m2[4]:=i1[2]*m2[2];
  m2[5]:=i1[3]*m2[1];
  m2[6]:=i1[4]*m2[2];
  for M1:=2 to 6 do
  if m2[M1]=0 then
  begin
    As[M1]:=Asmin;
    s[M1]:=A0[M1]/As[M1];
  end
  else
  begin
    a2:=0.531*fy*fy/fc;
    b:=-0.9*fy*d1[M1];
    c5:=m2[M1];
    xx:=SQR(b)-4*a2*c5;
    As[M1]:=(-b-sqrt(xx))/2/a2;
    if fc<280 then B1:=0.85
    else
      if (280<=fc) and (fc<=560) then B1:=0.85-0.05*(fc-260)/70
      else B1:=0.65;
    Pb:=0.85*B1*fc*6000/fy/(6000+fy);
    Y:=0.75*Pb;
    P[M1]:=As[M1]/d1[M1];
    if P[M1]>=Y then writeln('cambiar de peralte');
    s[M1]:=A0[M1]/As[M1];
  end
end

```

```

end;
for N1:=1 to 4 do
begin
  if i1[N1]=0 then i1[N1]:=1;
  lamb1[N1]:=0.5*(1-1/sqrt(1+i1[N1]));
  LR[N1]:=lamb1[N1]*N1
end;
if D[3]>=D[4] then Z:=12*D[3]
else Z:=12*D[4];
if d1[2]>Z then
begin
  for J1:=1 to 4 do LR[J1]:=LR[J1]+d1[2];
  T:=d1[2];
end
else
begin
  for K1:=1 to 4 do LR[K1]:=LR[K1]+Z;
  T:=Z
end;
n2:=2*1.0E+6/15000/sqrt(fc);
k:=1/(1+0.5*fy/n2/0.45/fc);
j:=1-k/3;
w:=wd+wl;
for l:=1 to 6 do
begin
  write('Coef[,l:1,']);readln(Coef[l]);
  M[l]:=Coef[l]*w*[l]*[l]/10000;
  FS[l]:=M[l]/j/d1[l]/As[l];
  R1:=0.5*fy;
  As[l]:=100*As[l];
  if FS[l]>R1 then
  begin
    s[l]:=s[l]*R1/FS[l];
    As[l]:=100*A0[l]/s[l];
  end;
  if As[l]<100*Asmin then As[l]:=100*Asmin;
  writeln('As[,l:1,'],As[l]:1:3);
  writeln('s[,l:1,'],s[l]:1:3);
end;
if fy>2800 then
begin
  G:=r+D[2]+D[1]/2;
  H3:=r+D[4]+D[3]/2;
  if G>=H3 then
  begin
    tb:=G;
    s1:=s[1];
    h5:=1;
  end
  else
  begin
    tb:=H3;
    if s[3]>s[5] then
    begin
      s1:=s[3];
      h5:=3;
    end
    else

```



```

begin
  s1:=s[5];
  h5:=5;
end
end;
repeat
A:=2*tb*s1;
Y6:=tb*A;
Y5:=exp(1/3*ln(Y6));
T1:=R1*Y5;
s1:=s1-0.1
until T1<=25950
end;
As[h5]:=100*A0[h5]/s1;
s[h5]:=100*A0[h5]/As[h5];
writeln('As[,h5,]',As[h5]:1:3);
writeln('s[,h5,]',s[h5]:1:3);
if M[3]>M[4] then
begin
  p1:=M[3]/M[1];
  j2:=1
end
else
begin
  p1:=M[4]/M[2];
  j2:=2
end;
repeat
  if i1[j2]<>0 then
    if p1>i1[j2] then
      begin
        i1[j2]:=p1;
        lamb1[j2]:=0.5*(1-1/sqrt(1+i1[j2]));
        LR[j2]:=lamb1[j2]*r[j2]+T
      end;
    j2:=j2+2
  until j2>4;
for k1:=1 to 4 do write('LR[,k1:1,]' : ',LR[k1]:3:2);
end
end;

```

Procedure Deflexion;

```

begin
  write('bv[1:]');readln(bv[1]);
  write('hv[1:]');readln(hv[1]);
  write('lc:');readln(lc);
  write('bv[2:]');readln(bv[2]);
  write('hv[2:]');readln(hv[2]);
  write('C[1:]');readln(C[1]);
  write('C[2:]');readln(C[2]);
  J2:=0;Ec:=15000*sqrt(fc);
  l[1]:=ly;
  l[2]:=lx;
  for l:=1 to 2 do
  begin
    alf[l]:=2*(bv[l]*pot(hv[l],3)+(hv[l]-h)*pot(h,3))/(l[l]*pot(h,3));
  end;
end;

```

```

Fac[]:=alf[]*l[]/l[2*1-J2];
writeln('Fac[,l:1,]',Fac[]);
write('mfi[,l:1,]');readln(mfi[]);
write('mf2[,l:1,]');readln(mf2[]);
if mfi[]>=mf2[] then MF[]:=mf2[]
else MF[]:=mf2[];
x1:=bv[2*1-J2];y11:=hv[2*1-J2];
hw[]:=hv[2*1-J2]-h;
if hw[]>h then
begin
  x2:=h; y22:=hw[]
end
else
begin
  x2:=hw[]; y22:=h
end;
Cs:=(1-0.63*x1/y11)*pot(x1,3)*y11/3;
Css:=(1-0.63*x2/y22)*pot(x2,3)*y22/3;
C3[]:=Cs+2*Css;
lc1[]:=C[]*pot(C[2*1-J2],3)/12;
Kc[]:=8*lc1[]/lc;
c2:=C[];l2:=l[];
Kt[]:=18*C3[]/l2/pot((1-c2/l2),3);
Kec[]:=(Kt[]*Kc[]*Ec)/(Kt[]+Kc[]);
A1:=l[]*h;
A22:=bv[]*hw[];
A3:=A1/2;
Y1:=hw[]+h/2;Y2:=hw[]/2;
YG1:=(A1*Y1+A22*Y2)/(A1+A22);
YG2:=(A3*Y1+A22*Y2)/(A3+A22);
if hw[]>YG1 then
begin
  h11:=hw[]-YG1;h22:=YG1;
  l11:=l[]*pot(h,3)/12+l[]*h*pot((h/2+h11),2);
  l2:=bv[]*pot(h11,3)/3;
  l3:=bv[]*pot(h22,3)/3;
end
else
begin
  h11:=hv[]-YG1;
  h22:=h-h11;
  l11:=l[]*pot(h11,3)/3;
  l2:=l[]*pot(h22,3)/3;
  l3:=bv[]*pot(hw[],3)/12+bv[]*hw[]*pot((hw[]/2+h22),2);
end;
if hw[]>YG2 then
begin
  h33:=hw[]-YG2;h44:=YG2;
  l4:=l[]*pot(h,3)/24+l[]*h/2*pot((h/2+h33),2);
  l5:=bv[]*pot(h33,3)/3;
  l6:=bv[]*pot(h44,3)/3;
end
else
begin
  h33:=hv[]-YG2;h44:=h-h33;
  l4:=l[]*pot(h33,3)/6;
  l5:=l[]*pot(h44,3)/6;
  l6:=bv[]*pot(hw[],3)/12+bv[]*hw[]*pot((hw[]/2+h44),2);

```

```

end;
lcs[]:=l1+l2+l3;
lc[]:=l4+l5+l6;
ls[]:=l[]*pot(h,3)/24;
d1[]:=w*l[]*pot(l[2*-J2],4)/(384*1.0E+4*Ec*lcs[]);
dc[]:=d1[]*MF[]/100*lcs[]/lc[];
ds[]:=d1[]*(1-MF[]/100)*lcs[]/ls[];
o1[]:=M[]+2/Kec[];
o2[]:=M[]+4/Kec[];
d2[]:=(o1[]+o2[])*l[2*-J2]/8;
dc[]:=dc[]+d2[];
ds[]:=ds[]+d2[];J2:=l+2
end;
dn1:=ds[1]+dc[2];dn2:=ds[2]+dc[1];
dt:=(dn1+dn2)/2;
write('dt:',dt);
end;

```

```

Begin
  clrscr;
  Acero;
  Deflexion;
end.

```

Cálculo de áreas de acero para losas oblicuas.

sent	lx/lr	lx	ly	lrf	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR	As4	s4	LR	As5	s5	LR	As6	s6	LR
0	1	350	350	350	1.8	39.38	7.21	9.84	1.8	70.38	66.5	1.84	68.71	66.5	2.05	61.68	66.5	1.84	68.71	66.5
0.25	1	350	339	350	1.8	39.38	6.79	10.45	1.8	70.38	66.5	3.94	32.15	66.5	2.05	61.68	66.5	3.94	32.15	66.5
0.5	1	350	303	350	1.8	39.38	5.48	12.94	1.8	70.38	66.5	7.09	17.06	26	2.05	61.68	66.5	7.09	17.86	26
0.7	1	350	250	350	1.8	39.38	3.91	18.11	1.8	70.38	66.5	10.5	12.07	31	2.05	61.68	66.5	10.5	12.07	31
0	1.5	380	253	253	1.8	39.38	3.77	18.83	1.8	39.38	67.05	1.8	39.38	48	1.8	39.38	67.05	1.8	39.38	48
0.25	1.5	380	245	253	1.8	39.38	3.55	20	1.8	39.38	67.05	2.84	25	48	1.8	39.38	67.05	2.84	25	48
0.5	1.5	380	219	253	1.8	39.38	1.86	24.77	1.8	39.38	67.05	4.5	15.75	20.5	1.8	39.38	67.05	4.5	13.75	20.5
0.7	1.5	380	181	253	1.8	39.38	2.02	35.12	1.8	39.38	67.05	6.25	11.34	24	1.8	39.38	67.05	6.25	11.34	24
0	2	400	200	200	1.8	39.38	2.35	30.12	1.8	39.38	70	1.8	39.38	41	1.8	39.38	70	1.8	39.38	41
0.25	2	400	194	200	1.8	39.38	2.22	31.97	1.8	39.38	70	1.97	36.03	41	1.8	39.38	70	1.97	36.03	41
0.5	2	400	173	200	1.8	39.38	1.8	39.38	1.8	39.38	70	3.01	23.56	19	1.8	39.38	70	3.01	23.56	19
0.7	2	400	143	200	1.8	39.38	1.8	39.38	1.8	39.38	70	4.02	17.64	22	1.8	39.38	70	4.02	17.64	22

CAPITULO V

ANÁLISIS DE CAPACIDAD ÚLTIMA DE LOSAS TRIANGULARES

En las losas triangulares las tensiones máximas se concentran en un punto de la zona central de la losa. Evidentemente, en estas losas, aparecerá un solo centro de rotura. Analizaremos el problema de la ubicación de este centro.

Como en el caso general las losas triangulares no son simétricas, tomaremos como centro de rotura un punto arbitrario "o" (figura 5.01).

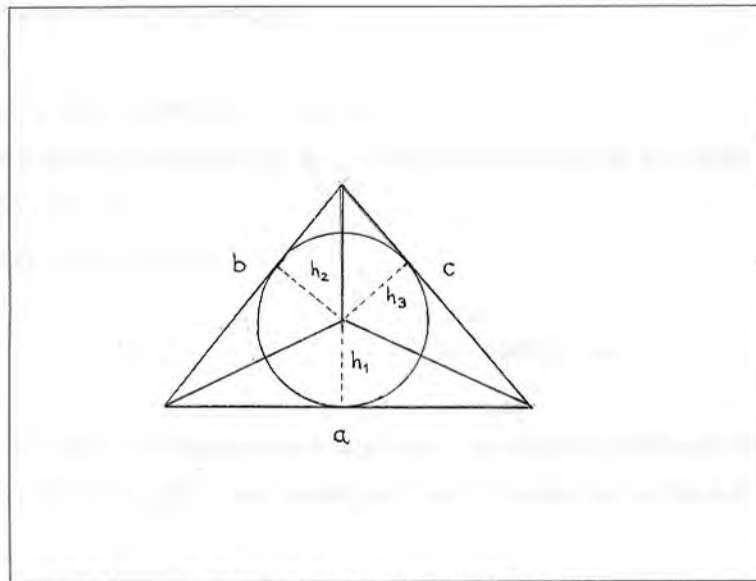


Figura 5.01 Esquema de rotura de una losa triangular

Si en cada uno de los ángulos se cumplieran las condiciones de la fijación total de los ángulos, es decir,

$$u \geq \text{ctg}^2 \alpha$$

$$v \geq 2m_u \text{ctg} \alpha \dots\dots\dots 5.01$$

las líneas coincidirían con las rectas que unen el centro de rotura con los puntos de intersección de los ejes de giro de los elementos, o sea con los vértices del contorno triangular de la losa.

Designando la distancia del centro de rotura a los lados de la losa con h_1 , h_2 , y h_3 y el área de la losa con "A", la ecuación del trabajo virtual tomará la forma, considerando a la losa reforzada isotrópicamente ($m_{ux} = m_{uy} = m_u$)

$$w_u A \delta / 3 = \sum m_u \Theta_o l_o = m_u (a/h_1 + b/h_2 + c/h_3) \delta \dots\dots (5.02)$$

5.101. LOSA TRIANGULAR FIJA/APOYADA EN DOS LADOS Y LIBRE EL TERCER LADO, CARGADA UNIFORMEMENTE.

Un posible patrón de línea de fluencia para esta losa es mostrada en la fig. 5.02

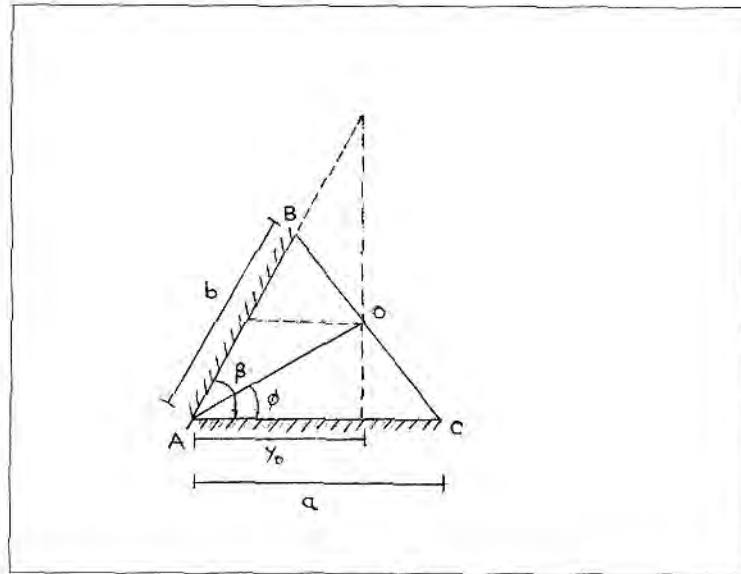


Figura 5.02

La solución se podrá aplicar a losas con diversos valores de los lados y el ángulo interno β .

La incógnita está definido por el ángulo ϕ . Aplicando al punto o un pequeño desplazamiento δ hacia abajo.

El trabajo interno realizado:

$$\Sigma m_u \Theta_o l_o = \Sigma m_{ux} \Theta_x y_o + \Sigma m_{uy} \Theta_y x_o$$

Segmento	Θ_x	Θ_y
ABO	$\delta/Y_o(\cot\phi - \cot\beta)$	$\delta/y_o \cot\phi \tan\beta - Y_o$
AOC	δ/Y_o

$$\Sigma m_u \Theta_o l_o = m_{ux}(1+i_1) \delta Y_o/y_o(\cot\phi - \cot\beta) + m_{uy}(1+i_2) \cot\phi \delta Y_o/y_o(\cot\phi \tan\beta - 1) + m_{uy}(1+i_3) \cot\phi \delta Y_o/y_o$$

El trabajo externo realizado:

$$\Sigma W u \Delta = 1/6 w_u a b \sin\beta \delta$$

$$\Sigma m_u \Theta_o l_o = \Sigma W u \Delta$$

$$w_u = 6/\text{absen}\beta [m_{ux}(1+i_1)/(\text{ctg}\phi - \text{ctg}\beta) + m_{uy}(1+i_2)/(\text{tg}\beta - \text{tg}\phi) + (1+i_3)\text{ctg}\phi] \dots (5.03)$$

Suponiendo que la losa se encuentra reforzada isotrópicamente ($m_{ux}=m_{uy}=m_u$), y los momentos últimos negativos son iguales.

$$w_u = 6m_u(1+i)/\text{absen}\beta [\text{sen}\phi + \text{cos}\beta \text{cos}\phi / \text{sen}(\beta - \phi) + \text{ctg}\phi] \dots (5.04)$$

$$w_u = 6m_u(1+i)/\text{absen}\beta [\text{ctg}(\beta - \phi) + \text{ctg}\phi]$$

Para el mínimo w_u ; $dw_u/d\phi = 0$

$$\text{cosec}^2(\beta - \phi) - \text{cosec}^2\phi = 0$$

$$\beta - \phi = \phi$$

$$\phi = \beta/2$$

Reemplazando el valor de ϕ en la ecuación (5.03)

$$w_u = 6/\text{absen}\beta [m_{ux}(1+i_1)\text{sen}\beta/2 \text{sen}\beta/\text{sen}\beta/2 + m_{uy}((1+i_2)\text{cos}\beta\text{cos}\beta/2/\text{sen}\beta/2 + (1+i_3)\text{ctg}\beta/2)] \dots (5.05)$$

Para el caso de una losa apoyada en dos lados y libre el tercer lado ($i_1=i_3=0$)

$$w_u = 6/\text{absen}\beta [m_{ux}\text{sen}(\beta/2)\text{sen}\beta + m_{uy}\text{cos}\beta\text{cos}(\beta/2)/\text{sen}(\beta/2) + m_{uy}\text{ctg}(\beta/2)] \dots (5.06)$$

{Autor: Walter Cruz Aguilar.

Asesor: Roberto Morales Morales.}

program fluenc1;

uses Crt;

const

E=PI/180;

var L1,I,M,K,k1,K2,K3,K4,J1,fy,fc,U,J2,lc,c2:integer;

w,wd,wl,lx,ly,Bs,largo,corto,B,ga,Kp,h1,h2,hmin,Asmin,r,B2,Y1,Y2,x,aa,

bb,cc,B1,xx,Pb,Y,Y3,P1,wul,s1,Z,T,R1,n,K5,J,R2,G1,HH,h,alf,tb,A,T1,g,x1,x3,

B3,x2,wu,y22,y11,cs,Ec,css,l2,A1,A22,A3,YG1,YG2,h11,h22,h33,h44,l11,

l2,l3,l4,l5,l6,dn1,dn2,dt :real;

F,mfi,mf2,MF,bv,hv,c : array [1..6] of integer;

ME,COEF,As,s,i1,l,D,A0,d1,m2,lamb,alfa,LR,Fac,C3,lc1,Kc,Kt,Kec,lcs,lc,ls,

dc,ds,o1,o2,d2,P,FS,hw : array [1..6] of real;

Function Pot(v:real;e:integer):real;

var k:integer;

p:real;

begin

K:=1;

P:=v;

repeat

P:=P*v;

k:=k+1

until k=e;

pot:=p

end;

Procedure Acero;

begin

write('wd:');readln(wd);

write('wl:');readln(wl);

write('lx:');readln(lx);

write('ly:');readln(ly);

write('Bs:');readln(Bs);

write('fy:');readln(fy);

write('fc:');readln(fc);

if lx>ly then

begin

largo:=lx;

corto:=ly

end

else

begin

largo:=ly;

corto:=lx

end;

B:=largo/corto;

write('ga:');readln(ga);

write('kp:');readln(kp);

h1:=largo*(800+0.071*fy)/(36000+5000*B*(1+Bs));write('h1:',h1:2:2);

h2:=largo*(800+0.071*fy)/36000;write('h2:',h2:2:2);

hmin:=kp*largo/ga;write('hmin:',hmin:2:2);

if h1>hmin then

repeat

write('h:');readln(h);

until (h1<h) and (h<h2)

else


```

repeat
  write('h:');readln(h);
  until (hmin<h) and (h<h2);
wul:=1.4*wd+1.7*wl;
Asmin:=0.0018*h;
As[1]:=Asmin;
write('D[1]:');readln(D[1]);
write('r:');readln(r);
A0[1]:=Pi*D[1]*D[1]/4;
d1[1]:=h-(r+1.5*D[1]);
s[1]:=A0[1]/As[1];
m2[1]:=0.9*fy*As[1]*(d1[1]-0.59*fy*As[1]/fc);
for K:=1 to 3 do
begin
  write('L[,K:1,]:');readln(L[K]);
  write('F[,k:1,]:');readln(F[k]);
  write('i1[,k:1,]:');readln(i1[k]);
  end;
  if F[2]=2 then
  begin
    write('B3:');readln(B3);
    wu:=24*m2[1]*cos(E*B3/2)/(L[3]*L[1]*sin(E*B3)*sin(E*B3/2));
    Y:=wul*L[1]*L[3]*sin(E*B3)/6;
    Y1:=m2[1]*(1+i1[1])*sin(E*B3);
    Y2:=sin(E*B3/2)/cos(E*B3/2)/((1+i1[1])*cos(E*B3)+1+i1[3]);
    m2[2]:=(Y-Y1)*Y2;
  end
  else
  begin
    write('g:');readln(g);
    write('alf:');readln(alf);
    write('B1:');readln(B1);
    R1:=L[3]*sin(E*alf/2)*sin(E*B1/2)/cos(E*g/2);
    X:=L[1]*SQR(sin(E*alf))+L[2]+L[3]+R1*cos(E*alf)*cos(E*alf/2)/sin(E*alf/2);
    wu:=120000*m2[1]*X/(R1*L[3]*L[1]*sin(E*alf));
    X1:=(1+i1[2])*L[2]*SQR(cos(E*B1))+(1+i1[1])*cos(E*alf)*R1;
      *cos(E*alf/2)/sin(E*alf/2)+(1+i1[3])*L[3];
    X2:=m2[1]*(L[1]*(1+i1[1])*SQR(sin(E*alf))+(1+i1[2])*L[2]*SQR(sin(E*B1)))/R1;
    X3:=wul*L[1]*L[3]*sin(E*alf)/60000;
    m2[2]:=(X3-X2)*R1/X1;
  end;
  if wu>=wul then
  begin
    for L1:=1 to 5 do
    begin
      As[L1]:=Asmin;
      A0[L1]:=A0[1];
      s[L1]:=A0[L1]/As[L1];
      D[L1]:=D[1];
      if i1[L1]<>0 then i1[L1]:=1
    end;
    d1[2]:=h-r-D[1]/2;
    d1[3]:=d1[2];
    d1[4]:=d1[2];
    d1[5]:=d1[2];
  end
  else
  begin

```

```

    h22:=h-h11;
    l11:=l[l]*pot(h11,3)/3;
    l2:=l[l]*pot(h22,3)/3;
    l3:=bv[l]*pot(hw[l],3)/12+bv[l]*hw[l]*pot((hw[l]/2+h22),2);
end;
if hw[l]>YG2 then
begin
    h33:=hw[l]-YG2;h44:=YG2;
    l4:=l[l]*pot(h,3)/24+l[l]*h/2*pot((h/2+h33),2);
    l5:=bv[l]*pot(h33,3)/3;
    l6:=bv[l]*pot(h44,3)/3;
end
else
begin
    h33:=hv[l]-YG2;h44:=h-h33;
    l4:=l[l]*pot(h33,3)/6;
    l5:=l[l]*pot(h44,3)/6;
    l6:=bv[l]*pot(hw[l],3)/12+bv[l]*hw[l]*pot((hw[l]/2+h44),2);
end;
lcs[l]:=l11+l2+l3;
lc[l]:=l4+l5+l6;
ls[l]:=l[l]*pot(h,3)/24;
w:=wd+w1;
d1[l]:=w*l[l]*pot(l[2*1-J2],4)/(384*1.0E+4*Ec*lcs[l]);
dc[l]:=d1[l]*MF[l]/100*lcs[l]/lc[l];
ds[l]:=d1[l]*(1-MF[l]/100)*lcs[l]/ls[l];
o1[l]:=ME[l+2]/Kec[l];
o2[l]:=ME[l+4]/Kec[l];
d2[l]:=(o1[l]+o2[l])*l[2*1-J2]/8;
dc[l]:=dc[l]+d2[l];
ds[l]:=ds[l]+d2[l];J2:=l+2
end;
dn1:=ds[1]+dc[2];dn2:=ds[2]+dc[1];
dt:=(dn1+dn2)/2;
write('dt:',dt);
end;

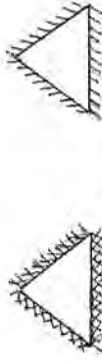
```

```

Begin
  clrscr;
  Acero;
  Deflexion;
end.

```

Modelo 1 y Modelo 2



IX/IV	ix	iv	As1	s1	As2	s2	As3	s3	LR3	As4	s4	LR4	As5	s5	LR5 (1)	LR5 (2)
1.1	385	350	1.80	39	1.80	39	1.80	39	73	1.80	39	67	1.80	39	27	68.00
1.2	384	320	1.80	39	1.80	39	1.80	39	67	1.80	39	65	1.80	39	27	68.00
1.3	390	300	1.80	39	1.80	39	1.80	39	64	1.80	39	63	1.80	39	27	69.00
1.4	398	284	1.80	39	1.80	39	1.80	39	61	1.80	39	62	1.80	39	27	69.00
1.5	405	270	1.80	39	1.80	39	1.80	39	58	1.80	39	64	1.80	39	28	71.00
1.6	413	258	1.80	39	1.80	39	1.80	39	55	1.80	39	62	1.80	39	27	70.00
1.7	408	240	1.80	39	1.80	39	1.80	39	52	1.80	39	64	1.80	39	28	71.00
1.8	396	220	1.80	39	1.80	39	1.80	39	49	1.80	39	61	1.80	39	26	69.00
1.9	380	200	1.80	39	1.80	39	1.80	39	48	1.80	39	56	1.80	39	27	67.00

ABACO PARA DETERMINAR AREAS DE ACERO

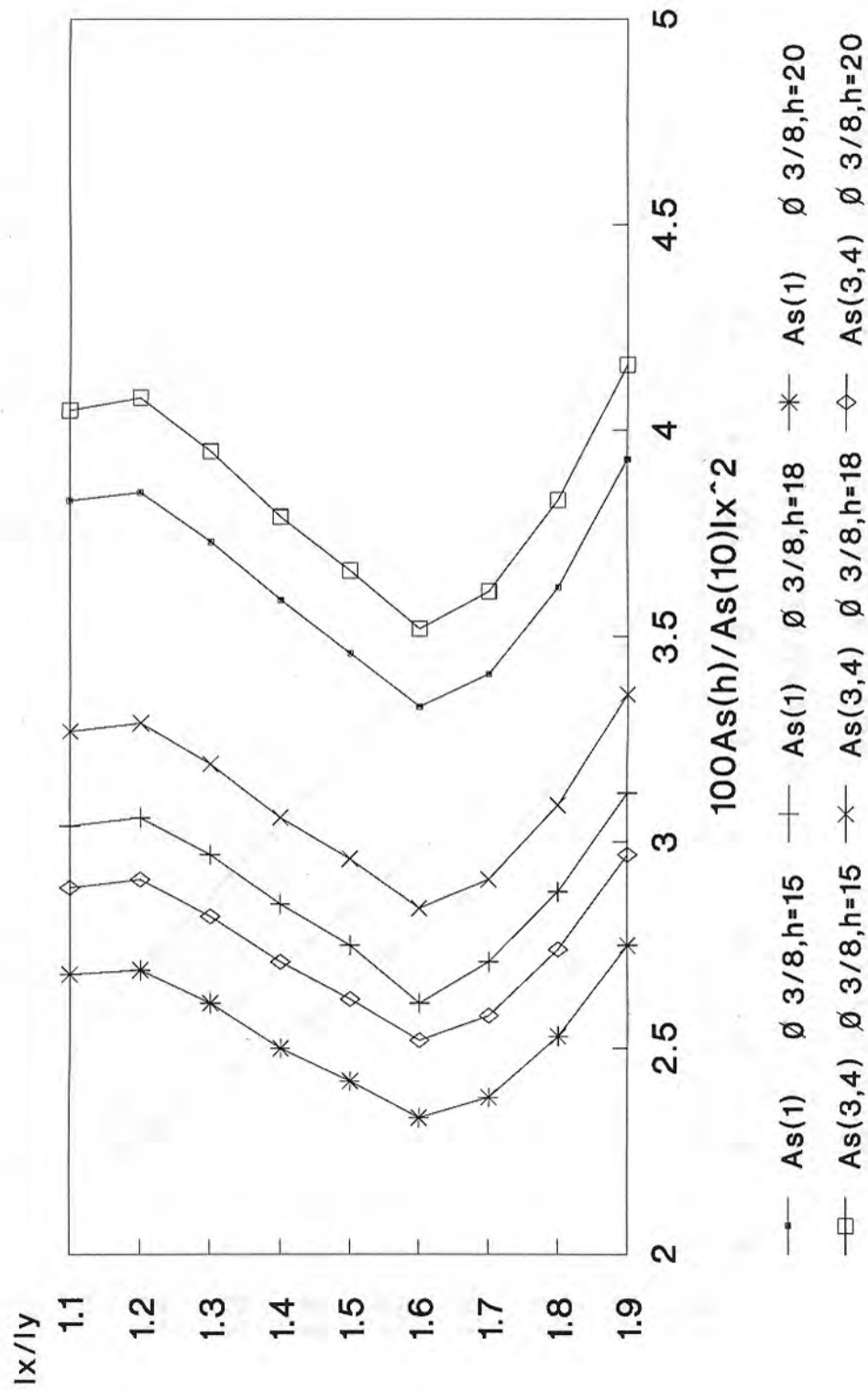


Gráfico N 04 Losa triangular con bordes fijos y/o apoyados

ABACO PARA DETERMINAR AREAS DE ACERO

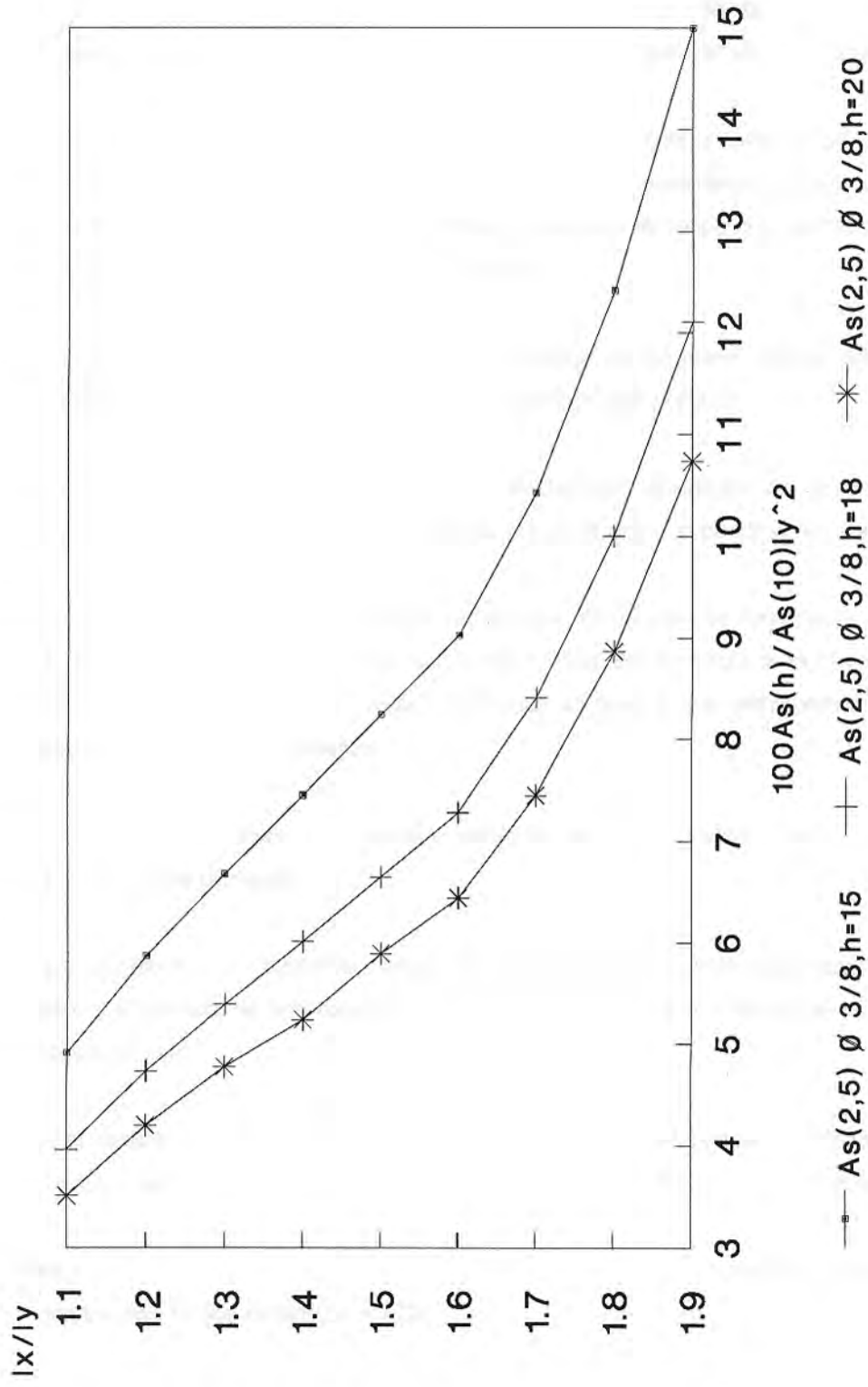


Gráfico No 05 Losa triangular con bordes fijos y/o apoyados

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES PRACTICAS PARA EL DISEÑO

CONCLUSIONES

- Con el diseño basado en la teoría de línea de fluencia, se obtienen losas de la resistencia que se requiere, pero uno de los posibles problemas es la condición de servicio que se evitará comprobando las deflexiones y los anchos de las grietas durante el proceso de diseño.
- Se ha dispuesto de acero mínimo para la dirección en la que la carga no se soporta de una manera más efectiva como es el caso para las losas con borde libre que se dispone de A_{smin} en la dirección perpendicular al borde libre o si se trata de losas con bordes fijos, el A_{smin} corresponderá a la dirección de mayor longitud.

El acero inferior colocado en la dirección contraria al del acero inferior colocado en la dirección contraria al del acero mínimo esta representado por A_{s2} .

A_{s3} y A_{s5} corresponde a las áreas de acero superior recortadas en la dirección que se dispone el acero mínimo, A_{s4} y A_{s6} son las áreas de acero superior en la dirección de A_{s2} .

- Para todas las condiciones de frontera se ha supuesto un valor de $\alpha_m=2$ que representa una rigidez alta a la flexión de las vigas, con lo que no reducirá la rigidez de la losa por debajo del mínimo, tal como lo especifica el ACI y un valor de $\beta_s=0.5$ que corresponde a un paño de esquina el cual es el más crítico.
- todas las áreas de acero en todas las formas y condiciones de frontera han sido determinados para una carga última de $1T/m^2$.

Para el caso de un h cualquiera según las expresiones deducidas determinamos el área de acero y si se trata de una carga de $2T/m^2$ multiplicamos por el valor de la carga al área de acero calculado.

- En el caso de que el $A_{s(i)}$ ($i=1,6$), para la carga de $1T/m^2$ corresponda al área de acero mínimo, esta seguirá siendo A_{smin} para otra carga, dependiendo solamente del peralte.
- Las dimensiones de los paños han sido tomados arbitrariamente, con la única salvedad que cumplan con lo que establece el ACI.
- Los abacos presentados se han obtenido teniendo como base un peralte de 10cm., a partir de ello se puede obtener las áreas de acero para los peraltes de 15,18 y 20cm.

- Los modelos 7,8 y 9 que corresponden a las losas rectangulares con un borde libre han sido las únicas que no satisficieron en un primer momento la verificación a la flexión, debido a ello se cambió el peralte a 15cm. Para estos modelos; dicho de paso el programa nos da un mensaje de *cambio de peralte no cumple la verificación a la flexión.*

RECOMENDACIONES

- Dado que no hay un tipo de diseño reglamentado para losas según la teoría de líneas de fluencia, el tiempo que pueda emplear el diseñador el algún problema en particular es muy *importante, así como tener presente la economía en acero (refuerzo ortotrópico).*
- En vista que los momentos últimos por ancho unitario negativos dependen de los momentos positivos en la misma dirección ($i = m'_{ux}/m'_{ux} = m'_{uy}/m_{uy}$) se recomienda utilizar un valor de "i" comprendido entre (1 - 1,5) si se trata de un borde apoyado y un valor entre (1,5 - 2) para el caso de borde fijo, esto dependerá básicamente de la experiencia diseñador en tomar un valor adecuado.
- cada vez que se va hacer uso de los abacos tener bien en cuenta la forma en que se ha distribuido la numeración de las áreas de acero.
- Para el calculo de la deflexiones, la numeración 1 y 2 se refiere a las direcciones (E-O) y (N-S) respectivamente.
- Los momentos factorizados positivo y negativo son aquellos establecidos por el ACI para franjas de columnas y vigas.
- Los valores de los coeficientes de los Momentos elásticos se presentan en los anexos y dependerán de su relación de forma y condición de frontera.
- Según se trate de un borde apoyada, fijo o libre la numeracion será de 0, 1 ó 2 respectivamente.