

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**“SISTEMAS DE CONTROL DE BOMBEO EN
POZOS PETROLEROS”**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRÓNICO

**PRESENTADO POR:
RICARDO MIGUEL SERIDA MORISAKI**

**PROMOCIÓN 1993-II
LIMA-PERÚ
2003**

A mis Padres

A mi Esposa

**SISTEMAS DE CONTROL DE BOMBEO EN POZOS
PETROLEROS**

SUMARIO

El presente estudio trata del análisis del sistema de control de bombeo en pozos de extracción de petróleo mediante un sistema de succión mecánico. Este sistema consiste de una estación de bombeo y una torre de perforación y su empleo se recomienda para aquellos pozos petroleros en donde la presión del depósito carece de la fuerza suficiente para elevar de manera natural el petróleo hacia la superficie.

El sistema de bombeo trabaja como sigue. La estación de bombas produce un torque de entrada, que es capaz de balancear una viga dinámica montada sobre un punto pivote al extremo superior de la torre de perforación. Esta viga acciona un cable metálico muy largo que está introducido en el pozo de petróleo, el cual posee la forma de tubo cilíndrico muy profundo. En el extremo de dicho cable se encuentra el vástago cilíndrico de la bomba, el mismo que es el agente que hace que el petróleo suba hacia la superficie cada vez que dicho vástago se desplace hacia arriba.

El flujo de petróleo producido va a ser controlado a través de varias técnicas que emplean algoritmos lineales de control. La gran dificultad es que, el modelo matemático que describe la dinámica del sistema de bombeo es tremendamente no lineal, hecho que complica en demasía el diseño de los sistemas de control. Una de las conclusiones del presente trabajo determina que mejores resultados en rendimiento, se obtienen con la técnica de control predictivo.

Las técnicas de control que se emplean en este trabajo son: control óptimo cuadrático proporcional integral, control predictivo basado en modelos con algoritmo de control escalar, control predictivo basado en modelos con algoritmo de control matricial, y control adaptivo con autosintonización.

ÍNDICE

| | |
|---|----|
| PRÓLOGO | 1 |
| CAPÍTULO I. | |
| EL PETRÓLEO Y SU EXTRACCIÓN | 2 |
| 1.1. El Petróleo | 2 |
| 1.2. Antecedentes y Formulación del Problema | 3 |
| 1.3. Objetivos de este Estudio | 5 |
| CAPÍTULO II. | |
| MODELADO DEL SISTEMA | 6 |
| 2.1. Descripción del Sistema | 6 |
| 2.2. Modelo Dinámico del Sistema de Bombeo | 8 |
| 2.3. La Ecuación de Estado del Sistema | 10 |
| 2.4. Parámetros Valorados del Sistema . | 14 |
| CAPÍTULO III. | |
| CONTROL ÓPTIMO DEL BOMBEO | 16 |
| 3.1. Introducción | 16 |
| 3.2. Resolviendo el Problema del Control Óptimo . | 16 |
| 3.3. El Regulador Óptimo Proporcional Integral | 19 |
| CAPÍTULO IV. | |
| CONTROL PREDICTIVO DEL BOMBEO | 23 |
| 4.1. Principios del Control Predictivo | 23 |
| 4.2. El Modelo CARIMA del Sistema de Succión | 25 |
| 4.3. El Controlador Predictivo | 27 |

CAPÍTULO V.

| | |
|---|-----------|
| CONTROL ADAPTIVO DEL BOMBEO | 33 |
| 5.1. Introducción | 33 |
| 5.2. Estimación de los Parámetros del Sistema | 34 |
| 5.3. Estimación de Estados | 36 |
| 5.4. Control Adaptivo del Sistema de Bombeo | 36 |
| CONCLUSIONES | 38 |
| ANEXO: LISTADO DE PROGRAMAS | 41 |
| BIBLIOGRAFÍA | 53 |

PRÓLOGO

El presente estudio trata sobre el modelado del comportamiento dinámico del sistema de extracción mecánica de petróleo y el diseño de sistemas de control del flujo de petróleo extraído. El sistema de bombeo mecánico se emplea en pozos petroleros que requieren de presión externa para poder elevar el petróleo hacia la superficie. Este estudio está organizado en siete capítulos que abordan los temas siguientes:

El capítulo **I**, formula el problema por resolver, describe los antecedentes del mismo, así como también los objetivos de este trabajo.

El capítulo **II**, describe brevemente el sistema de succión de petróleo, aborda luego la determinación del modelo dinámico del sistema de succión y discute la forma en que se obtuvieron los parámetros del sistema. Como las técnicas de control a emplearse son del tipo discreto, este capítulo presenta también la transformación del modelo del sistema en el tiempo continuo al modelo correspondiente en el tiempo discreto.

El capítulo **III**, trata sobre el control del flujo de petróleo producido, empleando la técnica de control óptimo cuadrático en su versión proporcional–integral.

El capítulo **IV**, aborda el control del flujo de petróleo producido aplicando la técnica de control predictivo basado en modelos. El algoritmo de control se presenta en sus dos versiones: escalar y matricial.

El capítulo **V**, trata sobre el control del flujo de petróleo producido empleando la técnica de control adaptivo con autosintonización.

Finalmente se presentan las conclusiones del presente estudio y el listado de los programas fuente escritos en código MATLAB (archivos con extensión *.m) empleados en las simulaciones.

CAPÍTULO I

EL PETRÓLEO Y SU EXTRACCIÓN

1.1. El Petróleo

El petróleo es el fluido más abundante en la corteza terrestre, después del agua. Sin embargo, nadie conoce con exactitud su real naturaleza. La teoría, más aceptada, establece que el petróleo se originó en los restos de miles de millones de diminutos animales que, a medida que morían, se acumulaban en el fondo de los mares, mezclándose con el barro. Allí se sumaban a vegetales de origen marino y a fragmentos de plantas terrestres. El conjunto fue enterrándose cada vez más profundamente, comprimido por el peso de los nuevos sedimentos y suavemente recalentado por el calor de la tierra. Este caldo, transformado a lo largo de los siglos, dio origen a lo que hoy conocemos como petróleo. Empujado por la presión de los estratos rocosos, subiendo desde las profundidades, el petróleo migró hacia rocas menos compactas, hasta toparse con algún estrato totalmente impermeable.

No importa cuán fuertes sean los indicios hallados por geólogos y geofísicos: la única forma de determinar la real existencia de hidrocarburos es realizar la perforación de un pozo. El método más utilizado en la actualidad es el de la perforación rotativa, que emplea una torre de perforación de la cual no vamos a entrar en detalle por no ser materia principal de estudio en este trabajo.

Si la búsqueda de petróleo es coronada por el éxito, y los volúmenes de hidrocarburos encontrados justifican su explotación económica, es necesario poner el pozo en producción. El petróleo crudo entrampado en el subsuelo (que puede estar mezclado con gas y agua) se mantiene allí bajo presión. Si las presiones son altas, el petróleo es obligado a desplazarse desde el fondo del pozo y fluye hacia arriba. Una vez terminada la perforación, se instala una cañería de producción que posee una serie de válvulas que permiten cerrar y abrir el pozo a voluntad, regulando su surgencia. El petróleo llega a la superficie y luego es bombeado hacia una planta de procesamiento que separa el gas del petróleo.

El período de surgencia natural de un pozo es el de menor costo de producción, dado que toda la energía utilizada es aportada por el mismo yacimiento. Cuando esta energía deja de ser suficiente, es necesario recurrir a métodos artificiales para continuar extrayendo el petróleo. Los métodos artificiales para extraer petróleo son: bombeo por accionamiento mecánico, bombeo con accionamiento hidráulico, extracción con gas, extracción con pistón accionado a gas, y extracción con bomba centrífuga.

El bombeo por accionamiento mecánico es el más utilizado y es el que emplearemos en este estudio. El vástago de la bomba se baja hasta el fondo de la tubería de producción y se acciona por varillas unidas a manera de un cable dinámico, el cual es movido por una viga dinámica que actúa como balancín, imprimiéndosele un movimiento de vaivén.

El bombeo con accionamiento hidráulico es una variante del anterior, en la que la bomba es accionada sin varillas, desde una estación de bombeo hidráulico. La extracción con gas, también llamada surgencia artificial, consiste en inyectar gas a presión dentro de la tubería, para aligerar la columna de petróleo y llevarlo a la superficie. La extracción con pistón accionado a gas, consiste en un pistón viajero empujado por el gas propio del pozo, que lleva a la superficie el petróleo que se acumula entre viaje y viaje del pistón. La extracción mediante bomba centrífuga con motor eléctrico sumergible utiliza una bomba de paletas, accionada por un motor eléctrico. El conjunto se baja con una tubería especial, y permite bombear grandes volúmenes.

1.2. Antecedentes y Formulación del Problema

Teniendo en cuenta que el flujo de petróleo extraído es proporcional a su velocidad de desplazamiento, entonces el control del bombeo de petróleo empleando accionamiento mecánico se logra mediante dos métodos.

En el primer método se fijan los rpm (revoluciones por minuto) del accionamiento mecánico, sin tener en cuenta las mediciones de posición del vástago de la bomba o de la viga dinámica. Este tipo de control se denomina a lazo abierto o no realimentado, y en realidad no asegura una producción constante del flujo extraído.

El otro tipo de control del sistema de extracción de petróleo, denominado realimentado o a lazo cerrado, sí considera permanentemente las mediciones de

la posición, las cuales son usadas para formar una ley de control que aplicada sobre el sistema, asegure una producción constante del flujo de petróleo. Vale entonces enfatizar que este método de control requiere que las variables de estado del sistema estén disponibles (que sean medibles y que tales mediciones puedan ser procesadas).

En el caso muy frecuente en que no se dispusieran de algunas de las variables de estado, entonces se requiere estimarlos. Felizmente ésta no es nuestra situación, dado que la posición del vástago de la bomba y de la viga dinámica pueden ser detectadas empleando sensores de posición muy confiables. Las otras dos variables de estado del sistema de succión: las velocidades del vástago y de la viga, pueden ser computadas mediante un software de derivación apropiado. Por consiguiente, no necesitamos implementar observadores de estado en nuestro caso.

Este estudio enfrenta el problema del control del flujo de petróleo extraído mediante bombeo por accionamiento mecánico, empleando técnicas de control digital por realimentación para ser implementadas en el dominio discreto, vale decir, digitalmente. Las técnicas de control a ser empleadas son: control óptimo proporcional-integral, control predictivo con leyes de control escalar y matricial, y control adaptivo con autosintonización.

No existen antecedentes reportados relacionados con este estudio. Normalmente los sistemas de control realimentados existentes, emplean controladores convencionales del tipo proporcional-integral que trabajan tanto en el dominio del tiempo continuo como en el discreto. Los sistemas de control a diseñar en este estudio, no pretenden reemplazar a los sistemas existentes, pero sí pretenden ser una gran alternativa de solución en los casos que, los sistemas controlados convencionalmente, no logren satisfacer plenamente las especificaciones de diseño. Estos casos pueden ocurrir por ejemplo, cuando las instalaciones son de naturaleza compleja y requieran para su descripción de un modelo dinámico tremendamente no lineal; aquí los controladores convencionales son menos eficientes que los controladores digitales a diseñar en este estudio.

Las especificaciones de diseño del flujo de petróleo tratado como una señal son: tiempo de estabilización menor de 5 segundos y porcentaje de sobreimpulso menor del 7%. La señal de control, en este caso el torque proporcionado por el sistema de bombeo y necesario para lograr el movimiento del vaivén debe ser

menor que 4000 N–m. Accionamientos mayores se pueden lograr lógicamente con bombas más potentes.

1.3. Objetivos de este Estudio

Las técnicas de control digital a emplearse para el control del flujo extraído requieren de un modelo matemático, que sea capaz de capturar las características dinámicas del sistema. Además, como tales técnicas se implementan en el dominio discreto, entonces es importante determinar el período de muestreo apropiado, de modo tal que las especificaciones de diseño sean satisfechas. Por los considerandos anteriores, los objetivos de este estudio son:

- 1) Deducir el modelo dinámico del sistema de succión de petróleo (Cap. **II**).
- 2) Diseñar sistemas de control de bombeo, que sean capaces de estabilizar el flujo de petróleo extraído en un tiempo de estabilización menor que 6 segundos y con un sobreimpulso menor que 7%, empleando técnicas de control avanzado (capítulos **III, IV y V**).
- 3) Proponer en una de las conclusiones, el esquema de implementación del sistema de control de bombeo con mejor rendimiento.

CAPÍTULO II MODELADO DEL SISTEMA

2.1. Descripción del Sistema

El sistema en estudio (ver referencia [7]) es la versión simplificada del sistema de elevación en un pozo petrolero, que se logra mediante la torre de extracción que se muestra en la figura 2.1. Dicha torre de extracción se emplea para bombear el petróleo, desde aquellos pozos en los cuales la presión del depósito de petróleo no es la suficiente como para elevar de manera natural el petróleo hasta la superficie. La inversión necesaria para lograr que el petróleo llegue a la superficie en forma normal, puede resultar antieconómica e inconveniente. Por ello, a fin de aplicar otro sistema de elevación del petróleo, es que, se requiere modelar el sistema en consideración.

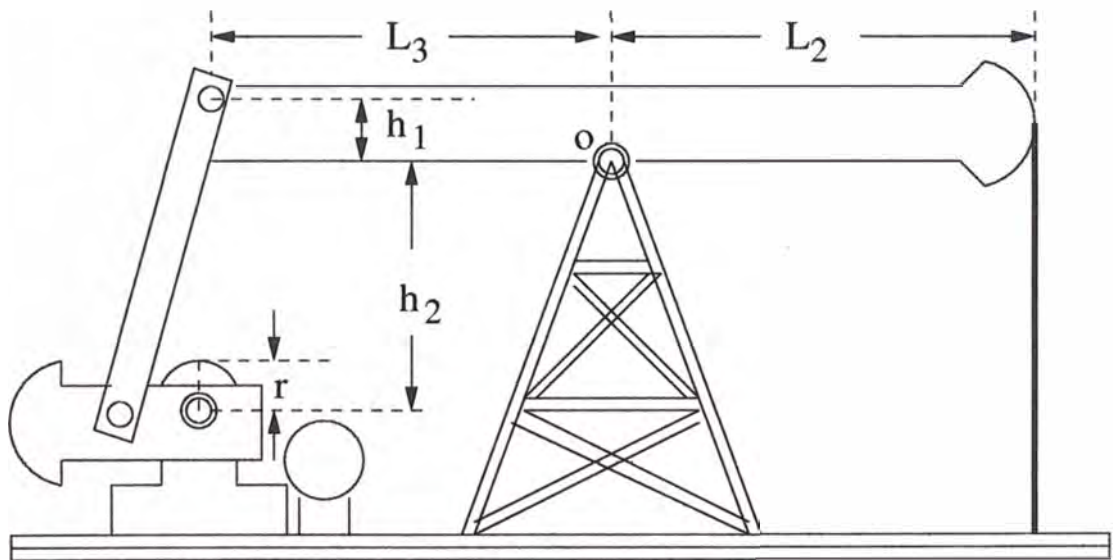


Figura 2.1: Torre de perforación para el bombeo de petróleo.

Para propósitos de simplificación, la maquinaria impulsora que aparece en la figura 2.1 se puede reemplazar mediante un par de torsión (o torque) de entrada

T_{in} , tal como se muestra en la figura 2.2. Dicho torque actúa sobre una viga móvil de masa m_1 y momento de inercia J_1 , la cual puede girar alrededor del punto pivote O , ubicado en la parte superior de la torre de perforación.

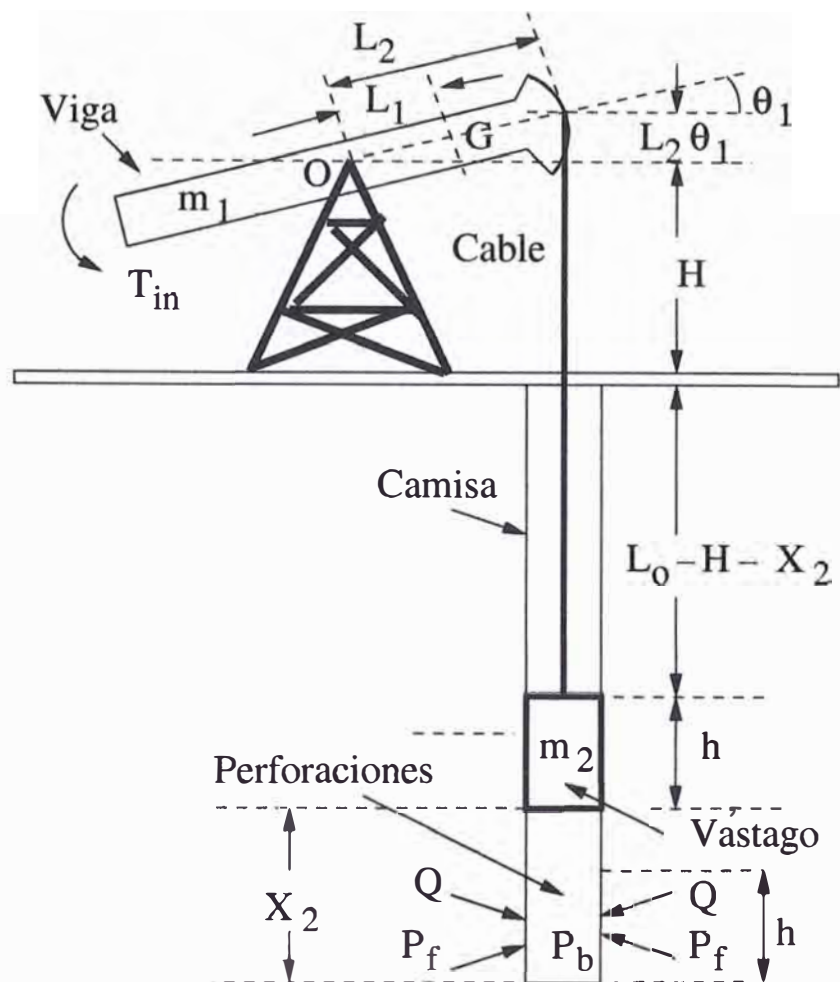


Figura 2.2: Torre de perforación sin maquinaria impulsora.

La figura 2.3 presenta los diagramas de cuerpo libre de los componentes de la torre de bombeo, a saber: la viga móvil de masa, m_1 (figura 2.3(a)) el cable metálico largo montado en la viga móvil (figura 2.3(b)), y el vástago de la bomba de masa m_2 (figura 2.3(c)). Los diagramas de cuerpo libre para la parte superior e inferior del vástago de la bomba, se ilustran en las figuras 2.3(d) y 2.3(e), respectivamente. Tener en cuenta, que el pozo ubicado debajo del vástago incluye la formación rocosa perforada que lo rodea. Desde allí fluye el petróleo, a través de la camisa del pozo y hacia arriba, a medida en que el vástago se desplaza hacia arriba. La presión P_f en la formación rocosa (llamada también depósito de

formación), se considera fija.

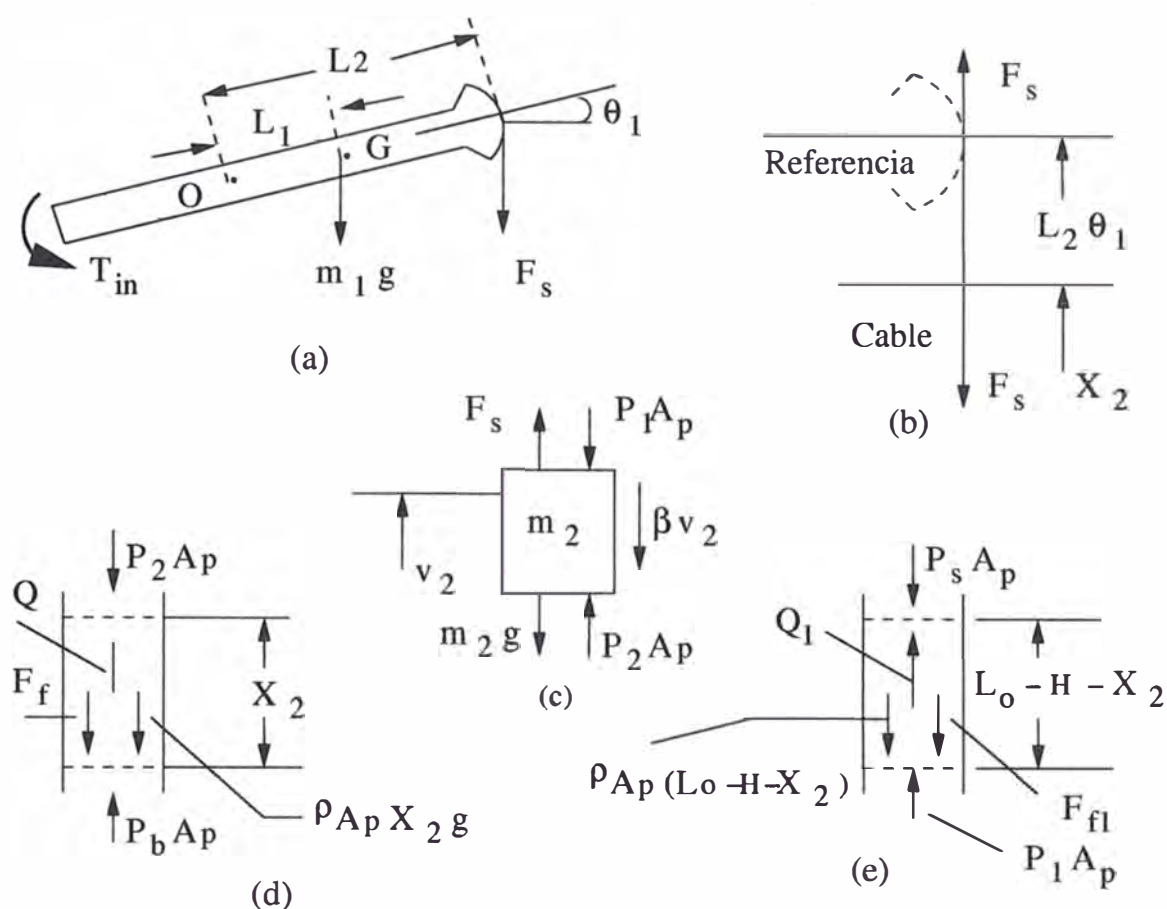


Figura 2.3: Diagramas de cuerpo libre de los componentes de la torre de bombeo. (a) Viga; (b) cable; (c) vástago de succión; (d) tramo de tubería debajo del vástago; (e) tramo de tubería encima del vástago.

2.2. Modelo Dinámico del Sistema de Bombeo

El modelo dinámico del sistema de bombeo, es decir, el movimiento ascendente del vástago de bombeo, asume las consideraciones siguientes: los ángulos de desplazamiento de la viga son pequeños, el petróleo es un fluido incomprensible, el flujo de petróleo ascendente por el pozo es laminar y dicho pozo es bastante profundo.

La segunda ley de Newton aplicada a la viga móvil (figura 2.3(a)), produce:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{in} - m_1 g L_1 \cos \theta_1 - F_s L_2 \quad (2.1)$$

donde ω_1 es la velocidad angular desarrollada por la viga, L_1 y L_2 son las distancias del punto O y del punto G (el centro de gravedad de la viga) al árbol de levas

de dicha viga, g es la aceleración de la gravedad, θ_1 es el desplazamiento angular de la viga y F_s es la fuerza de tensión ejercida por el cable del perforador. Como el desplazamiento angular θ_1 es pequeño, entonces es válido que: $\cos \theta_1 \cong \theta_1$. Por consiguiente, la ecuación (2.1) resulta:

$$J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = T_{in} - m_1 g L_1 - F_s L_2 \quad (2.2)$$

Para el cable dinámico (ver figuras 2.2 y 2.3(b)) valen las relaciones siguientes:

$$F_s = \frac{A_c E \Delta L}{L} \quad \Delta L = L_2 \theta_1 - X_2 \quad L = L_O - X_2$$

donde F_s es la fuerza de estiramiento del cable, A_c es el área de la sección transversal del cable, E es el módulo de elasticidad para el material de dicho cable, $L_2 \theta_1$ es la distancia aproximadamente vertical recorrida por el cabezal ubicado al extremo derecho de la viga móvil, L_O es la distancia entre la línea horizontal trazada a través del punto pivote O y el fondo del pozo, pero excluyendo la longitud h del vástago de succión de masa m_2 . Luego:

$$F_s = A_c E \left[\frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \quad (2.3)$$

La segunda ley de Newton aplicada a la masa m_2 del vástago (figura 2.3(c)) resulta:

$$m_2 \frac{dv_2}{dt} = P_2 A_p + F_s - P_1 A_p - \beta v_2 - m_2 g \quad (2.4)$$

donde A_p es el área de la sección transversal del pozo perforado, β es la constante de amortiguamiento viscoso con relación al vástago de la bomba, P_1 y P_2 son las presiones ejercidas encima y debajo del vástago, y v_2 es la velocidad de desplazamiento del vástago.

Aplicando la ley de conservación de la materia para el tramo de tubería (de longitud bastante considerable) debajo del vástago (figura 2.3(d)) se obtiene:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A_p}{\rho X_2} (P_b - P_2) + \frac{A_p g}{X_2} (0 - X_2) - \frac{F_f}{\rho X_2} \quad (2.5)$$

donde Q es el flujo de petróleo circundante, ρ es la densidad de dicho flujo y P_b es la presión en el fondo del pozo perforado, el cual posee un diámetro d . La fuerza de fricción F_f representa la resistencia al paso del flujo Q a través de la tubería. Según Darcy-Weibach/Hagen-Poiseuille [7], la fuerza F_f producida por

la fricción de un flujo laminar a través de una tubería circular, como en el caso que nos ocupa, es de la forma:

$$F_f = \frac{32\mu X_2 Q}{d^2}$$

donde μ es la viscosidad del fluido y d es el diámetro de la tubería circular. Por tanto, la ecuación (2.5) toma la forma:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{A_p}{\rho X_2} (P_b - P_2) - A_p g - \frac{32\mu X_2 Q}{d^2} \quad (2.6)$$

Aplicando la ley de la conservación de la materia para el tramo de tubería encima del vástago (figura 2.3(e)) se obtiene:

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{A_p}{\rho[L_O - H - X_2]} (P_1 - P_s) - A_p g - \frac{32\mu Q_1}{\rho d^2} \quad (2.7)$$

donde Q_1 es el flujo laminar del fluido en el tramo en estudio, H es la altura de la torre de perforación (ver figura 2.2) y P_s la presión generada en la superficie del vástago de succión, la cual se supone conocida.

2.3. La Ecuación de Estado del Sistema

Para determinar la ecuación de estado del sistema, debemos de seleccionar convenientemente las variables de estado del mismo. Una asignación adecuada se muestra en la tabla 2.1. En esta tabla también se presenta las señales de entrada y salida del sistema. La señal de salida ha sido seleccionada teniendo en cuenta que se desea conocer la cantidad de petróleo que produce el sistema de succión, es decir: $y = Q = A_p v_2 = A_p x_2$.

Assumiendo que no existen fugas a través del vástago de succión (la válvula en realidad) durante la carrera ascendente, y teniendo presente que estamos tratando con un flujo incomprensible, se cumple:

$$Q = A_p v_2 = Q_1 \quad (2.8)$$

Si ahora asumimos que tanto la roca como la camisa perforada actúan como una especie de resistencia tipo tapón poroso al flujo, entonces:

$$R_f Q = P_f - P_b \quad P_f : \text{constante} \quad (2.9)$$

donde R_f es la resistencia al paso del flujo Q . Para el flujo radial de petróleo en la formación rocosa, teniendo en cuenta su geometría cilíndrica, entonces podemos

Cuadro 2.1: Variables de estado del sistema de succión.

| Variable | Descripción |
|-----------------------|--|
| $u = T_{in}$ | Entrada del sistema (torque de succión) |
| $x_1 = X_2$ | Desplazamiento ascendente del vástago de succión |
| $x_2 = v_2 = dX_2/dt$ | Velocidad ascendente del vástago de succión |
| $x_3 = \theta_1$ | Desplazamiento angular de la viga |
| $x_4 = \omega_1$ | Velocidad angular de la viga |
| $y = Q = A_p x_2$ | Salida del sistema (petróleo succionado) |

formular la conocida ley de Darcy [7]:

$$\frac{Q_r}{2\pi r h} = - \left(\frac{k}{\mu} \right) \frac{dP}{dr} \quad (2.10)$$

donde μ es la viscosidad del fluido, k es una medida de la conductividad del fluido del medio poroso llamada permeabilidad, r es la distancia radial, h es la altura (longitud) del cilindro, dP/dr es el gradiente de presión en la dirección del flujo y Q_r es un flujo radial, que por convención es positivo en el sentido de adentro hacia afuera. Integrando la ecuación (2.10) entre un radio interno r_i y un radio externo r_o resulta:

$$\frac{\mu \ln(r_o/r_i)}{2\pi k h} Q_r = P_i - P_o \quad (2.11)$$

Comparando las ecuaciones (2.9) y (2.11) se puede concluir que:

$$R_f = \frac{\mu \ln(r_o/r_i)}{2\pi k h} \quad (2.12)$$

Para nuestro caso en particular, r_i constituye el radio del pozo perforado de diámetro $d = 2r_i$ y r_o es supuestamente igual al radio r_e (extensión radial) del depósito de petróleo. También, $Q = -Q_r$; por consiguiente:

$$\frac{\mu \ln(2r_e/d)}{2\pi k h} Q_r = P_f - P_b \quad R_f = \frac{\mu \ln(2r_e/d)}{2\pi k h} \quad (2.13)$$

Resolviendo las ecuaciones (2.8), (2.9), (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7) para P_1 y P_2

obtenemos:

$$P_1 = \frac{\left\{ \frac{A_p}{m_2} (P_f - R_f A_p v_2) + \left(\frac{A_p}{m_2} + \frac{1}{\rho X_2} \right) U P_s + \left(\frac{32\mu}{\rho d^2} - \frac{\beta}{m_2} \right) v_2 + \frac{A_c E}{m_2} \left[\frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \right\}}{\left\{ \frac{A_p}{m_2} + \left(\frac{A_p}{m_2} + \frac{1}{\rho X_2} \right) U \right\}} \quad (2.14)$$

$$P_2 = P_f - R_f A_p v_2 + U (P_s - P_1) \quad U = \frac{X_2}{L_O - H - X_2} \quad (2.15)$$

Podemos observar que las ecuaciones (2.14) y (2.15) son tremendamente no lineales, lo cual complica el diseño de sistemas de control de elevación de petróleo a desarrollar en los siguientes capítulos. Con el propósito de encontrar relaciones lineales para P_1 y P_2 , procederemos como sigue:

- (1) Operamos algebraicamente en las expresiones de P_1 y P_2 para simplificarlas.
- (2) Eliminaremos los productos de variables de segundo orden o más.
- (3) Como el pozo perforado es bien profundo, sólo luego del paso (2) asumiremos:

$$L_O - X_2 \cong L_O \quad L_O - H - X_2 \cong L_O$$

De este modo la diferencia $P_2 - P_1$ resulta:

$$\begin{aligned} P_2 - P_1 &= \left(\frac{P_f - P_s}{L_O - H} \right) X_2 - R_f A_p v_2 + P_f - \frac{\rho A_p (L_O - H) P_f + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \\ P_2 - P_1 &= \left(\frac{P_f - P_s}{L_O - H} \right) x_1 - R_f A_p x_2 + P_f - \frac{\rho A_p (L_O - H) P_f + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \end{aligned} \quad (2.16)$$

En la segunda ecuación hemos usado las variables de estado definidas en la tabla 2.1. Empleando la notación $dx/dt \equiv \dot{x}$, podemos entonces formular la primera ecuación de estado:

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (2.17)$$

Reemplazando la ecuación (2.3) en (2.4) y usando luego la ecuación (2.16) obtendremos la segunda ecuación de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_2} \left[(P_2 - P_1) A_p + (A_c E) \left(\frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right) - \beta v_2 - m_2 g \right] \\ &= \frac{1}{m_2} \left[(P_2 - P_1) A_p + (A_c E) \left(\frac{L_2 x_3 - x_1}{L_O - x_1} \right) - \beta x_2 - m_2 g \right] \\ &\cong \left[\frac{A_p (P_f - P_s)}{m_2 (L_O - H)} - \frac{A_c E}{L_O m_2} \right] x_1 - \frac{A_p^2 R_f}{m_2} x_2 + \frac{A_c E L_2}{L_O m_2} x_3 + V \\ V &= \frac{A_p}{m_2} \left(P_f - \frac{\rho A_p P_f (L_O - H) + m_2 P_s}{\rho A_p (L_O - H) + m_2} \right) - \frac{\beta}{m_2} - g \end{aligned} \quad (2.18)$$

La tercera ecuación de estado toma la forma:

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (2.19)$$

mientras que la cuarta ecuación de estado se deduce reemplazando la ecuación (2.3) en (2.2):

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{1}{J_1} \left\{ T_i - m_1 g L_1 - (L_2 A_c E) \left[\frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O - X_2} \right] \right\} \\ &\cong \frac{1}{J_1} \left\{ T_i - m_1 g L_1 - (L_2 A_c E) \left[\frac{L_2 \theta_1 - X_2}{L_O} \right] \right\} \\ &= \frac{L_2 A_c E}{J_1 L_O} x_1 - \frac{L_2^2 A_c E}{J_1 L_O} x_3 + \frac{1}{J_1} u - \frac{m_1 g L_1}{J_1} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Las formas matriciales de las ecuaciones de entrada y de salida son:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{F}w \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.21)$$

donde w es un disturbio del tipo escalón unitario, y:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \left[\frac{A_p(P_f - P_s)}{m_2(L_O - H)} \quad \frac{A_c E}{L_O m_2} \right] & -\frac{A_p^2 R_f}{m_2} & \frac{A_c E L_2}{L_O m_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{L_2 A_c E}{J_1 L_O} & 0 & -\frac{L_2^2 A_c E}{J_1 L_O} & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J_1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ V \\ 0 \\ -\frac{m_1 g L_1}{J_1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{C} = [0 \quad 8,64A_p \quad 0 \quad 0]$$

En el dominio discreto, las ecuaciones de estado y de salida toman la forma siguiente:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{E}w \quad y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2.22)$$

donde k es el tiempo discreto definido como $k = t/T$, siendo T el tiempo de discretización. El programa MATLAB (referencia [3]) permite pasar fácilmente de una representación a la otra, tal como se demuestra en el programa conobs.m escrito en código MATLAB (ver listado al final trabajo) y sirve para determinar la respuesta del sistema de bombeo a un escalón de entrada (figura 2.4). Podemos

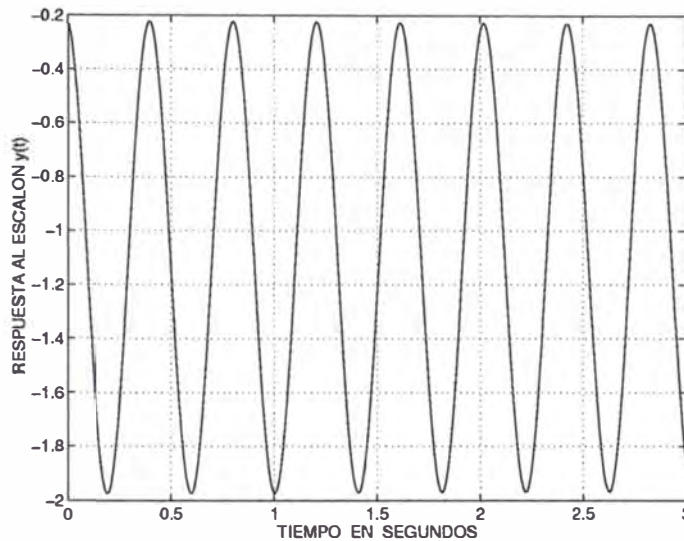


Figura 2.4: Respuesta a un escalón del sistema de succión.

observar en dicha figura que el sistema de succión de petróleo es muy oscilatorio (inestable), dado que posee un eigenvalor en el origen y dos eigenvalores ($\pm 16i$) en el eje imaginario.

La siguiente sección describe brevemente la obtención de las unidades físicas de los parámetros del sistema.

2.4. Parámetros Valorados del Sistema

La tabla 2.2 presenta los parámetros valorados del sistema en estudio. La densidad ρ del petróleo varía de 0.92 a 0.87 gr/cm^3 a 15 $^{\circ}\text{C}$; hemos tomado el valor de 0.9, cuyo equivalente en kg/m^3 es 0.9×10^3 . Las presiones se dan normalmente en $\text{kg-f}/\text{cm}^2$ o bar; por conveniencia las presiones las hemos convertido a N/cm^2 , que se logra multiplicando los $\text{kg-f}/\text{cm}^2$ por $g = 9.81 \text{ m}/\text{s}^2$. El valor original de la viscosidad μ del petróleo es 6 cp (centipoise), lo cual equivale a $6 \times 10^{-3} \text{ N-s}/\text{m}^2$. El valor original del módulo de elasticidad E para el cable de acero es $20.6 \times 10^{10} \text{ N}/\text{m}^2$; el valor que aparece en la tabla está en N/cm^2 .

El momento de inercia J_1 de la viga dinámica se ha calculado aproximadamente con la fórmula:

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 (a^2 + b^2) \quad \text{kg-m}^2$$

asumiendo que $a = 3 \text{ m}$ es su longitud y $b = 0.2 \text{ m}$ es su ancho.

La expresión $Q = A_p x_2$ define el caudal de petróleo extraído, donde A_p se expresa en cm^2 y x_2 en m/s . Para obtener caudales en m^3/dia , el proceso de conversión dicta que debemos multiplicar al producto $A_p x_2$ por el factor 8.64.

Las unidades de la resistencia R_f que aparece en la tabla, ha sido determinada de modo tal que, el producto $R_f A_p x_2$, resulte en N/cm^2 , que son las unidades de presión que estamos empleando en las ecuaciones.

Cuadro 2.2: Parámetros valorados del sistema de succión de petróleo. C.G. significa centro de gravedad.

| Símbolo | Descripción | Valor | Unidades |
|-----------|------------------------------------|--------------------|-----------------------------------|
| β | Amortiguamiento viscoso | 100 | N-s/m |
| ρ | Densidad del petróleo | 0.9×10^3 | kg/m^3 |
| d | Diámetro del pozo | 0.128 | m |
| μ | Viscosidad del petróleo | 0.006 | N-s/m^2 |
| m_2 | Masa del vástago | 80 | kg |
| m_1 | Masa de la viga | 200 | kg |
| L_2 | Longitud pivote-cabezal de la viga | 1.5 | m |
| L_1 | Longitud pivote-C.G. de la viga | 1 | m |
| L_0 | Longitud pivote-fondo del tubo | 900 | m |
| H | Altura de la torre | 5 | m |
| A_p | Sección del pozo | 128.7 | cm^2 |
| A_c | Sección del cable | 0.785 | m^2 |
| E | Módulo de elasticidad del cable | 20.6×10^6 | N/cm^2 |
| J_1 | Momento de inercia de la viga | 150.6 | kg-m^2 |
| P_f | Presión en formación rocosa | 176.6 | N/cm^2 |
| P_s | Presión sobre el vástago | 100 | N/cm^2 |
| R_f | Resistencia al paso del flujo | 245 | $\text{Ns}/(\text{cm}^4\text{m})$ |
| Q_{ref} | Flujo por producir | 100 | m^3/dia |
| Q | Flujo actual | $8.64 A_p x_2$ | m^3/dia |
| g | Aceleración de la gravedad | 9.81 | m/s^2 |

CAPÍTULO III

CONTROL ÓPTIMO DEL BOMBEO

3.1. Introducción

Sabemos que el control óptimo se ocupa de determinar el “mejor” sistema de control, empleando una técnica óptima de diseño. El procedimiento de diseño del sistema de control óptimo consiste en encontrar un extremo (un mínimo o un máximo, dado el caso) de una función de costo, con el propósito de determinar los parámetros óptimos de una ley de control; de allí la denominación óptimo.

Para sistemas de control discretos, la función de costo generalmente posee la forma siguiente:

$$J = \sum_{k=0}^N L(\mathbf{x}(k), \mathbf{r}(k), \mathbf{u}(k)) \quad (3.1)$$

donde k es el tiempo discreto, N es el tiempo discreto final, $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estado, $\mathbf{r}(k)$ es el vector de referencia (entrada al sistema de control) y $\mathbf{u}(k)$ es el vector de control óptimo. Esta ley de control (denominada también fuerza o señal de control) constituye la entrada al proceso a controlar.

Este capítulo desarrolla el procedimiento para diseñar el sistema de control óptimo estacionario, usando una ley de control óptima cuadrática discreta, que emplea las señales del proceso medidas directamente. La configuración usada para el diseño del sistema de control de bombeo de petróleo es la del regulador óptimo proporcional-integral. Esta configuración añade un integrador al controlador, con el propósito de reducir el error en estado estable. El resultado del diseño proporciona una matriz de ganancia, que multiplicada por el vector de estado (real o estimado) del proceso, resulta en una ley de control óptima cuadrática.

3.2. Resolviendo el Problema del Control Óptimo

El problema del control óptimo cuadrático discreto estacionario, consiste en encontrar una adecuada ley de control óptima que sea capaz de trasladar la dinámica del proceso desde un estado inicial $\mathbf{x}(0)$, hacia un estado final deseado

$\mathbf{x}(N)$. La fuerza de control óptima $\mathbf{u}(k)$ se determina a partir de la minimización de una función de costo cuadrática discreta. Esta fuerza de control aplicada al proceso a controlar, provoca que dicho proceso responda en forma óptima (o lo más cercano al óptimo). El control óptimo cuadrático discreto estacionario, se basa en la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\mathbf{x}^T(k)Q\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}^T(k)R\mathbf{u}(k)] \quad (3.2)$$

donde $\mathbf{x}(k)$ es el vector de estado de dimensión n y $\mathbf{u}(k)$ es el vector de control de dimensión r . La matriz simétrica semidefinida positiva Q (de dimensión $n \times n$) pondera la importancia del vector de estado $\mathbf{x}(k)$, y la matriz simétrica definida positiva R (de dimensión $r \times r$) pondera la importancia de la señal de control $\mathbf{u}(k)$. Una matriz es definida positiva cuando todos sus eigenvalores son positivos, mientras que una matriz es semidefinida positiva cuando sus eigenvalores pueden ser positivos o nulos.

La ley del control óptima a usar emplea la realimentación del vector de estado $\mathbf{x}(k)$ en su formulación y posee la forma siguiente:

$$\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k) \quad (3.3)$$

donde K (de dimensión $r \times n$) es la matriz de ganancia del controlador, denominada también matriz de realimentación de estados. Una condición necesaria para poder aplicar el control por realimentación de estados es que el proceso sea completamente controlable. Por consiguiente, será necesario verificar dicha condición en el proceso antes de iniciar el procedimiento de diseño.

La realimentación de estados requiere además, que todos los estados sean disponibles y medibles. Si en el sistema a controlar existieran estados que no pudieran ser medidos directamente, será necesario estimarlos. Esta estimación puede ser realizada empleando la técnica de observación de estados. El requerimiento en esta parte es que el proceso sea completamente observable.

Sabemos por la ecuación (2.22) que el proceso puede ser modelado, mediante la siguiente ecuación de estado discreta:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k)$$

donde G es la matriz de estado de dimensión $n \times n$ y H es la matriz de control de dimensión $n \times r$. El proceso debe ser de estado completamente controlable;

es decir, que en un tiempo finito, sus estados puedan ser transferidos desde un estado inicial arbitrario a cualquier otro estado deseado. La condición necesaria y suficiente para que el proceso sea completamente controlable es que la siguiente matriz de controlabilidad M

$$M = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

posea rango completo; es decir, el rango de M debe ser igual al orden n del sistema. Del mismo modo, un proceso es completamente observable, cuando sus estados se pueden reconstruir completamente usando las observaciones (mediciones del proceso), lo que matemáticamente implica que la siguiente matriz N de observabilidad:

$$N = \begin{bmatrix} C & CG & \dots & CG^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

posea rango completo. La solución al problema del control óptimo cuadrático estacionario está dada por la siguiente matriz de ganancia del controlador:

$$K = [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (3.6)$$

donde P es una matriz simétrica definida positiva de dimensión $n \times n$. Dicha matriz es solución de la siguiente ecuación matricial de Riccati:

$$P = Q + G^T P G - G^T P H [R + H^T P H]^{-1} H^T P G \quad (3.7)$$

Una forma de obtener la matriz P de la ecuación matricial anterior es mediante la siguiente fórmula recursiva:

$$P(k+1) = Q + G^T P(k) G - G^T P(k) H [R + H^T P(k) H]^{-1} H^T P(k) G \quad (3.8)$$

El diagrama de bloques del control óptimo de estado estacionario se representa en la figura 3.1, en donde se asume que todos los estados se encuentran disponibles. Para operación satisfactoria del sistema de lazo cerrado mostrada en dicha figura, todos los eigenvalores, de su ecuación característica:

$$\det[zI - G + HK] = 0 \quad (3.9)$$

deben posicionarse dentro del círculo unitario.

Observar que en el diagrama de bloques de la figura 3.1, no aparece explícitamente la señal de referencia. Es por ello que, en aplicaciones prácticas, se prefiere usar la configuración del regulador óptimo proporcional-integral (o sistema de control óptimo proporcional-integral) que describiremos en la siguiente sección de este trabajo.

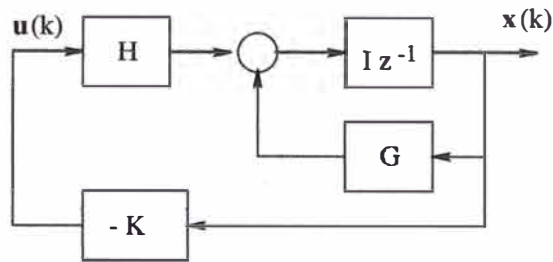


Figura 3.1: Sistema de control óptimo a lazo cerrado.

3.3. El Regulador Óptimo Proporcional Integral

La figura 3.2 ilustra la configuración del regulador óptimo proporcional-integral [4], [5] que incluye acción integral en el sistema de control mediante un integrador con señal de salida $v(k)$ y una ganancia integral K_I asociada. Siendo

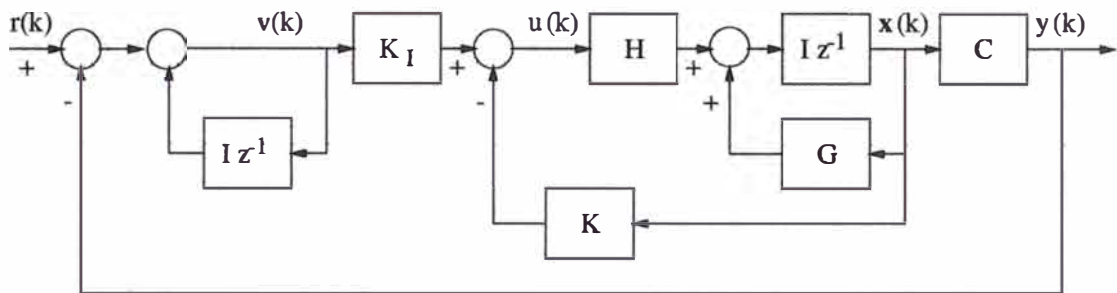


Figura 3.2: El regulador proporcional integral.

la señal de referencia $r(k)$ un escalón unitario, de la figura 3.2 podemos deducir que las ecuaciones de estado y de salida del proceso son:

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H\mathbf{u}(k) \quad \mathbf{y}(k) = C\mathbf{x}(k) \quad (3.10)$$

La señal de control $\mathbf{u}(k)$ tiene la forma:

$$\mathbf{u}(k) = -K\mathbf{x}(k) + K_I v(k) \quad (3.11)$$

donde la matriz de ganancia del controlador viene dada por:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \quad (3.12)$$

Podemos observar que la ecuación para el integrador resulta:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (3.13)$$

de donde se puede obtener:

$$\begin{aligned}
 v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\
 &= v(k) + r(k+1) - C[G\mathbf{x}(k) + Hu(k)] \\
 &= (1 - \mathbf{C}H\mathbf{K}_I)v(k) + (-CG + \mathbf{C}H\mathbf{K})\mathbf{x}(k) + r(k+1) \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Empleando las ecuaciones (3.10) y (3.11) deducimos que:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1) &= G\mathbf{x}(k) + H[-K\mathbf{x}(k) + K_I v(k)] \\
 &= (G - HK)\mathbf{x}(k) + H K_I v(k) \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

y de las ecuaciones (3.14) y (3.15) determinamos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + \mathbf{C}H\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}H\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) \quad (3.16)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

En el estado de equilibrio, es decir, cuando $k \rightarrow \infty$, las variables $\mathbf{x}(k)$, $u(k)$ y $v(k)$ toman valores estacionarios $\mathbf{x}(\infty)$, $u(\infty)$ y $v(\infty)$. Así la ecuación (3.16) toma la forma siguiente:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + \mathbf{C}H\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}H\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ r \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Definiendo:

$$\mathbf{x}(k) - \mathbf{x}(\infty) = \mathbf{x}_e(k) \quad (3.19)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (3.20)$$

y restando ahora la ecuación (3.18) de (3.16), y luego usando las relaciones (3.19) y (3.20) podemos obtener:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k+1) \\ v_e(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G - HK & HK_I \\ -CG + \mathbf{C}H\mathbf{K} & 1 - \mathbf{C}H\mathbf{K}_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -\mathbf{C}H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & K_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad (3.21)
 \end{aligned}$$

Notar que la ecuación (3.21) puede ser escrita como:

$$\xi(k+1) = \tilde{G}\xi(k) + \tilde{H}w(k) \quad w(k) = -\tilde{K}\xi(k) \quad (3.22)$$

donde:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} x_e(k) \\ v_e(k) \end{bmatrix} \quad \tilde{G}(k) = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$\tilde{H}(k) = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad \tilde{K}(k) = \begin{bmatrix} K & -K_I \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Observar que la inclusión de un integrador en el sistema de control, aumenta en uno el orden del sistema; es decir, si n es el orden del sistema original, el nuevo orden del sistema con un integrador es $(n + 1)$. En otras palabras, el vector de estado $x(k)$ del sistema original posee dimensión n , mientras que el vector de estado $\xi(k)$ del regulador proporcional integral posee dimensión $(n + 1)$.

Las relaciones anteriores requieren que se formule la siguiente función de costo:

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} [\xi(k)^T \tilde{Q} \xi(k) + w^2(k) \tilde{R}] \quad (3.25)$$

Debemos entonces, calcular una matriz \tilde{K} adecuada de forma tal que minimice la función de costo dada en la ecuación (3.25). La ecuación de Riccati y la ecuación de ganancia del controlador \tilde{K} se formulan como sigue:

$$\tilde{P} = \tilde{Q} + \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{G} - \tilde{G}^T \tilde{P} \tilde{H} [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.26)$$

$$\tilde{K} = [\tilde{R} + \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{H}]^{-1} \tilde{H}^T \tilde{P} \tilde{G} \quad (3.27)$$

El programa conopt.m escrito en código MATLAB [3] (ver listado al final del trabajo) resuelve el problema del control de bombeo. Este programa emplea las ecuaciones deducidas arriba para el caso específico de la dinámica correspondiente al sistema de succión. Dicho programa es autoexplicativo y el resultado del control se ilustra en la figura 3.3. Podemos observar que a pesar que el controlador proporcional-integral logra estabilizar la salida del sistema al valor de referencia de producción de 100 m³/día, se requiere una torque muy grande, lo que puede hacer impracticable en la vida real.

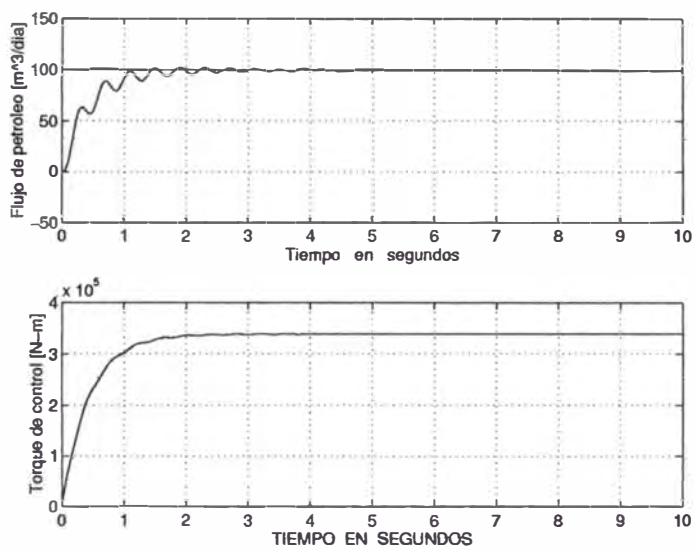


Figura 3.3: Control óptimo del bombeo de petróleo.

CAPÍTULO IV

CONTROL PREDICTIVO DEL BOMBEO

4.1. Principios del Control Predictivo

En este capítulo se desarrolla un procedimiento para diseñar un sistema de control de bombeo, empleando la técnica de control predictivo basado en modelos. El algoritmo de control predictivo empleado, es el denominado control matricial dinámico, cuya versión más simple es una ley de control escalar. En nuestra aplicación emplearemos ambos algoritmos.

El Control Predictivo Basado en Modelos [2], [1] es una técnica de control que usa el modelo del sistema para calcular y optimizar las predicciones de las acciones de control y de la salida controlada. Los diferentes tipos de control predictivo basados en modelos, difieren principalmente en el modelo usado para representar el proceso con sus perturbaciones y en las funciones de costo a ser minimizadas (con o sin restricciones).

Debemos indicar que el control predictivo ya cuenta con muchas contribuciones, tanto en lo académico como también en el mundo industrial. Muchas aplicaciones del control predictivo son usadas hoy en todos los campos de la actividad industrial. El buen rendimiento de tales aplicaciones es muy apreciada; por ello, actualmente existe un creciente interés en esta metodología, a pesar que el trabajo pionero se inició hace dos décadas y media.

El control predictivo pronostica la salida de la planta en un horizonte de tiempo de duración N_2 . Dicha predicción depende de las salidas y entradas pasadas, pero también del escenario del control futuro. La deducción de un modelo dinámico que capture lo más fielmente posible la dinámica del sistema, es de vital importancia para tener éxito en las aplicaciones.

La notación usada en el control predictivo es como sigue: t es el tiempo discreto ($t = 0, 1, 2, \dots$); $u(t)$ es la entrada al proceso y constituye la señal de control; $y(t)$ es la salida del proceso y constituye la variable controlada; $w(t)$

es la trayectoria deseada (o “set point”); $r(t)$ denota la trayectoria referencial; $u(t+k/t)$ son los valores futuros de la entrada en el tiempo $t+k$ postulados en el tiempo t ; $y(t+k/t)$, son los valores futuros de la salida basado en las mediciones disponibles en el tiempo t :

$$\{y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots\}$$

y en los valores futuros de la entrada postulados en el tiempo t :

$$\{u(t/t), u(t+1/t), \dots\}$$

La estrategia del control predictivo se puede caracterizar con relación a la figura 4.1, como sigue:

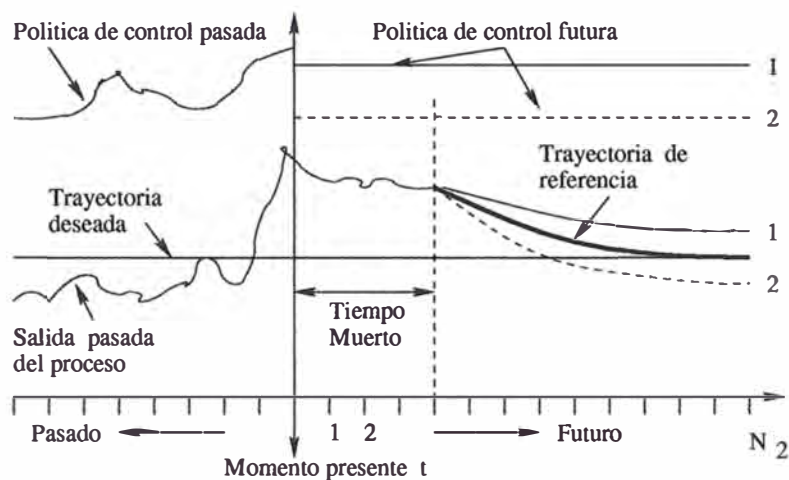


Figura 4.1: Estrategia del control predictivo.

- 1) En cada tiempo t , la salida del proceso $y(t+k)$ se pronostica sobre un horizonte $k = 1 \dots N_2$. Los valores pronosticados se denominan $y(t+k/t)$ y N_2 es el horizonte de predicción. La predicción se realiza usando el modelo del sistema. Dicho pronóstico depende de las entradas y salidas pasadas, pero también del escenario del control futuro $u(t+k/t)$, $k = 0, \dots, N_2 - 1$; es decir, de las acciones de control que a aplicar a partir del tiempo t .
- 2) Una trayectoria de referencia $r(t+k/t)$, $k = 1, \dots, N_2$, que se inicia en $r(t/t) = y(t)$ y se define sobre el horizonte de predicción. Esta trayectoria sirve para guiar la salida del proceso desde su valor actual $y(t)$ hasta la trayectoria deseada $w(t)$.

- 3) El vector de control $\mathbf{u}(t + k/t)$, $k = 0, \dots, N_2 - 1$, el cual se calcula para minimizar una función de costo específica que depende del error del control predictivo $r(t + k/t) - y(t + k/t)$, $k = 1, \dots, N_2$.
- 4) Al proceso actual sólo se le aplica el primer elemento del vector de control calculado $\mathbf{u}(t + k/t)$, $k = 0, \dots, N_2 - 1$, mientras que los demás elementos se dejan de lado. En el próximo instante de muestreo, todas las secuencias temporales se desplazan para dar cabida a las nuevas mediciones de la salida $y(t + 1)$ y a las del vector de control $\mathbf{u}(t + k + 1/t + 1)$, cuyo primer elemento es generalmente diferente al primer elemento del vector $\mathbf{u}(t + k/t)$, previamente calculado. Este principio se denomina estrategia del “horizonte retroactivo”.

Concluyendo, la estrategia del control predictivo comprende: el proceso de predicción a través del modelo del proceso, la especificación de una trayectoria de referencia, la estructuración de la futura ley de control, la definición de la función de costo (y sus restricciones) y el cálculo del escenario de control óptimo (ver figura 4.2.)

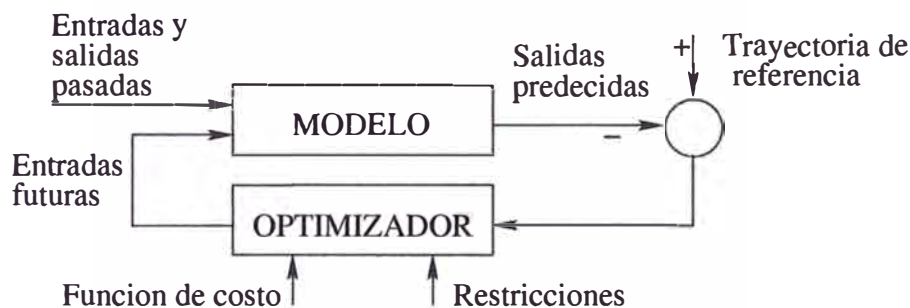


Figura 4.2: Estrategia del control predictivo basado en modelos

4.2. El Modelo CARIMA del Sistema de Succión

Un sistema de una entrada y una salida, probablemente no lineal, puede modelarse como:

$$y(t) = x(t) + n(t) \quad (4.1)$$

La señal de disturbio $n(t)$ puede incluir todos los efectos no deseados en la salida $y(t)$. Esta señal representa el efecto conjunto de todos los disturbios sobre el proceso, otras entradas no medibles, ruido de medición, errores de modelado, incertidumbres, etc. En nuestro caso, esta señal es parte del modelo y es de tipo determinístico.

El modelo CARIMA, del inglés “Controlled Autoregressive Integrated Moving Average”, es un modelo lineal básico y es el que emplearemos en este estudio. El modelo CARIMA del sistema puede ser representado por:

$$A(z^{-1})y(t) = \frac{B(z^{-1})}{P(z^{-1})}u(t) + \frac{D(z^{-1})}{Q(z^{-1})}e(t) \quad (4.2)$$

donde:

$$\begin{aligned} A(z^{-1}) &= 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{n_a}z^{-n_a} & B(z^{-1}) &= b_1z^{-1} + \dots + b_{n_b}z^{-n_b} \\ Q(z^{-1}) &= 1 + q_1z^{-1} + \dots + q_{n_q}z^{-n_q} & D(z^{-1}) &= 1 + d_1z^{-1} + \dots + d_{n_d}z^{-n_d} \\ P(z^{-1}) &= 1 + p_1z^{-1} + \dots + p_{n_p}z^{-n_p} \end{aligned}$$

Por ejemplo, para el sistema de succión de petróleo (sección 2.3) se determinó que sus ecuaciones de estado y de salida (ecuación 2.21) son:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u + \mathbf{F}n \quad y = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

y su correspondiente representación discreta (ecuación (2.22)) es:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{G}\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}u(k) + \mathbf{E}n; \quad y(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}$$

La representación CARIMA para este sistema toma la forma:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) + n(t) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(t) + \frac{D(z^{-1})}{A(z^{-1})}n(t) \\ &= \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2} + b_3z^{-3} + b_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}u(t) + \\ &\quad \frac{d_1z^{-1} + d_2z^{-2} + d_3z^{-3} + d_4z^{-4}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + a_4z^{-4}}n(t) \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde z es el operador de desplazamiento (transformada z). La relación anterior conduce a la ecuación de diferencias:

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) - a_3y(t-3) - a_4y(t-4) \\ &\quad + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + b_3u(t-3) + b_4u(t-4) \\ &\quad + d_1n(t-1) + d_2n(t-2) + d_3n(t-3) + d_4n(t-4) \end{aligned} \quad (4.4)$$

4.3. El Controlador Predictivo

El controlador predictivo tiene como finalidad determinar el vector de control $u(t + k/t)$, $k = 0, \dots, N_2 - 1$, que minimice la siguiente función de costo:

$$J = \sum_{k=N_1}^{N_2} [r(t + k/t) - y(t + k/t)]^2 + \lambda \sum_{k=0}^{N_u-1} [\Delta u(t + k/t)]^2 \quad (4.5)$$

donde por definición:

$$\Delta u(t + k/t) = u(t + k/t) - u(t + k - 1/t) \quad (4.6)$$

con $\Delta u(t + k/t) = 0$ para $k \geq N_u$. La trayectoria de referencia está representada por la relación:

$$r(t + k/t) = \alpha r(t + k - 1/t) + (1 - \alpha)w(t + k/t) \quad (4.7)$$

evaluada para $k = 1, \dots, N_2$, con $r(t/t) = y(t)$. Los parámetros de diseño son los siguientes: N_1 : horizonte de predicción mínimo; N_2 : horizonte de predicción máximo (por defecto: $N_2 = N_1 + 1, \dots, N_1 + 10$); N_u horizonte de control (por defecto: $N_u = 1$); N_1, \dots, N_2 horizonte de coincidencia (por defecto: el tiempo muerto N_1); λ parámetro de sintonización (por defecto: $\lambda = 0$); y α : parámetro de filtraje (por defecto: $\alpha = 0$).

Es importante observar que la trayectoria de referencia dada en (4.7) es un filtro de primer orden para $w(t)$, de la forma:

$$\frac{r(z)}{w(z)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z(1 - \alpha)}{z - \alpha} \quad (4.8)$$

La ley de control predictiva requiere en su formulación de las denominadas respuestas libre $y_{libre}(t + k/t)$ y forzada $y_{forz}(t + k/t)$. Dichas respuestas constituyen los componentes de respuesta futura $y(t + k/t)$:

$$y(t + k/t) = y_{libre}(t + k/t) + y_{forz}(t + k/t) \quad (4.9)$$

La respuesta libre $y_{libre}(t + k/t)$ puede ser calculada notando que es la respuesta del sistema asumiendo que las señales de control futuras igualan al control previo $u(t - 1)$; es decir:

$$u(t/t) = u(t - 1), \quad u(t + 1/t) = u(t - 1), \quad u(t + 2/t) = u(t - 1), \dots$$

y que sólo los incrementos antes del instante t , es decir, $\Delta u(t-1), \Delta u(t-2), \dots$, aparecen en dicha respuesta. Esto significa que:

$$\Delta u(t/t) = \Delta u(t+1/t) = \dots = \Delta u(t+N_u-1/t) = 0$$

Como ejemplo, la respuesta libre del sistema de succión de petróleo se obtiene partiendo de la ecuación (4.4) sin considerar perturbaciones:

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) \\ &\quad + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) \\ y(t+1) &= -a_1 y(t) - a_2 y(t-1) - a_3 y(t-2) - a_4 y(t-3) \\ &\quad + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + b_3 u(t-2) + b_4 u(t-3) \\ y(t+1) - y(t-1) &= -a_1 y(t) - (a_2 - a_1) y(t-1) - (a_3 - a_2) y(t-2) \\ &\quad - (a_4 - a_3) y(t-3) + a_4 y(t-4) \\ &\quad + b_1 u(t) + (b_2 - b_1) u(t-1) + (b_3 - b_2) u(t-2) \\ &\quad + (b_4 - b_3) u(t-3) - b_4 u(t-4) \\ y(t+1) &= (1 - a_1) y(t) - (a_2 - a_1) y(t-1) - (a_3 - a_2) y(t-2) \\ &\quad - (a_4 - a_3) y(t-3) + a_4 y(t-4) \\ &\quad + b_1 \Delta u(t) + b_2 \Delta u(t-1) + b_3 \Delta u(t-3) + b_4 \Delta u(t-4) \end{aligned}$$

En la última ecuación podemos eliminar el término donde aparece $\Delta u(t)$. Operando en forma similar, en la ecuación correspondiente a $y(t+2)$ eliminaremos los términos donde aparecen $\Delta u(t)$ y $\Delta u(t+1)$, y así sucesivamente, tal como se ilustra en los programas en código MATLAB [3] `conprea.m` y `conpreb.m` listados más adelante.

La componente forzada $y_{forz}(t+k/t)$ aparece debido al resultado de dos efectos. El primero, causado por la acción del control futuro; es decir, causado por las señales $\Delta u(t/t), \Delta u(t+1/t), \dots, \Delta u(t+N_u-1/t)$. El segundo efecto se debe a las respuestas del proceso a una secuencia de entradas escalón. Así, un escalón con amplitud $\Delta u(t/t)$ aplicado al proceso en el tiempo t , resulta en una contribución $g_k \Delta u(t/t)$ en la salida del proceso en el tiempo $t+k$ (figura 4.3(a)); un escalón con amplitud $\Delta u(t+1/t)$ aplicado al proceso en el tiempo $t+1$, resulta en una contribución $g_k \Delta u(t+1/t)$ para la salida del proceso en el tiempo $t+k-1$ (figura 4.3(b)); etc.

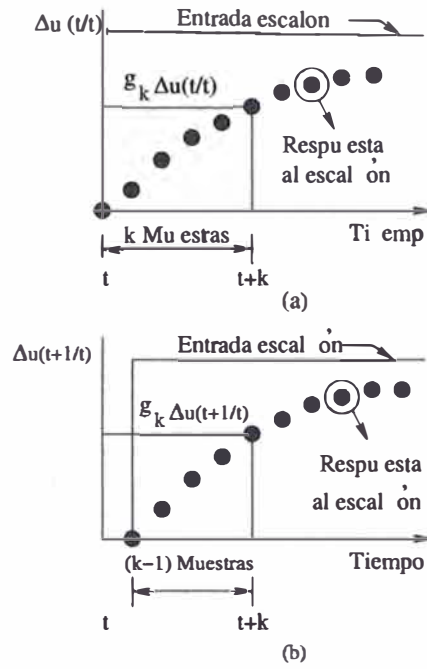


Figura 4.3: El efecto de las entradas tipo escalón en la salida forzada.

Por consiguiente, el efecto acumulativo de todos los escalones es:

$$y_{forz}(t+k/t) = g_k \Delta u(t/t) + g_{k-1} \Delta u(t+1/t) + \dots + g_{k-N_u+1} \Delta u(t+N_u-1/t) \quad (4.10)$$

donde los parámetros g_1, \dots, g_{N_2} son los coeficientes de la respuesta del sistema al escalón unitario.

Para el sistema de succión, su respuesta forzada se determina como sigue. Partiendo de la ecuación (4.4) sin considerar perturbaciones:

$$\begin{aligned} y(t) &= -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) \\ &\quad + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) \end{aligned}$$

Por definición, la entrada escalón $u(t) = 1$ para $t \geq 0$ y $u(t) = 0$ para $t < 0$. Por tanto, la ecuación que determina la respuesta al escalón correspondiente a $y(t)$ resulta:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) = 0 = g_0$$

Dado que $y(t-1) = y(t-2) = y(t-3) = y(t-4) = 0$. Para el caso $y(t+1)$, con $u(t) = 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} y(t+1) &= -a_1 y(t) - a_2 y(t-1) - a_3 y(t-2) - a_4 y(t-3) \\ &\quad + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + b_3 u(t-2) + b_4 u(t-3) = b_1 = g_1 \end{aligned}$$

y así sucesivamente, tal como se ilustran en los programas `conprea.m` y `conpreb.m`.

Expandiendo la ecuación (4.10) se obtiene la siguiente expresión para la componente forzada:

$$\mathbf{Y}_{forz} = \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (4.11)$$

donde:

$$\mathbf{Y}_{forz} = \left[y_{forz}(t + N_1/t) \quad y_{forz}(t + N_1 + 1/t) \quad \cdots \quad y_{forz}(t + N_2/t) \right]^T$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & \cdots & \cdots \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{N_2} & g_{N_2-1} & \cdots & g_{N_2-N_u+1} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \left[\Delta u(t/t) \quad \Delta u(t + 1/t) \quad \cdots \quad \Delta u(t + N_u - 1/t) \right]^T$$

y empleando la ecuación (4.9), podemos escribir:

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \mathbf{G}\mathbf{U} \quad (4.12)$$

donde:

$$\mathbf{Y} = [y(t + N_1/t) \dots y(t + N_2/t)]^T; \quad \mathbf{U} = [\Delta u(t/t) \dots \Delta u(t + N_u - 1/t)]^T$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = [y_{libre}(t + N_1/t) \dots y_{libre}(t + N_2/t)]^T$$

También:

$$\mathbf{R} = [r(t + N_1/t) \dots r(t + N_2/t)]^T$$

Empleando la notación anterior, la función de costo (ecuación (4.5)) resulta:

$$(\mathbf{R} - \mathbf{Y})^T(\mathbf{R} - \mathbf{Y}) + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} = [(\mathbf{R} - \bar{\mathbf{Y}}) - \mathbf{G}\mathbf{U}]^T [(\mathbf{R} - \bar{\mathbf{Y}}) - \mathbf{G}\mathbf{U}] + \lambda \mathbf{U}^T \mathbf{U} \quad (4.13)$$

la cual es cuadrática en \mathbf{U} , y cuya minimización por diferenciación resulta en:

$$\mathbf{U}^* = (\mathbf{G}^T \mathbf{G} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{G}^T (\mathbf{R} - \bar{\mathbf{Y}}) \quad (4.14)$$

Es importante indicar que solamente el primer elemento $\Delta u(t/t)$ de \mathbf{U}^* es necesario para computar la entrada de control actual $u(t) = u(t - 1) + \Delta u(t/t)$. El mismo procedimiento se repite para la nueva medición $y(t + 1)$ en el próximo instante de tiempo $t + 1$. Este procedimiento se denomina el principio del “horizonte retroactivo”.

Por otra parte, la matriz $[G^T G + \lambda I]$ a ser invertida tiene dimensión $N_u \times N_u$. Para el caso por defecto, es decir, para $N_u = 1$, se obtiene una ley de control escalar (con muy buenos resultados en muchos casos prácticos) de la forma:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t + k/t) - y_{libre}(t + k/t)]}{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k^2 + \lambda} \quad (4.15)$$

El problema de control presentado en la sección anterior, es que fue formulado bajo condiciones de control sin restricciones; es decir, considerando que todas las señales poseen rango ilimitado. Sin embargo, esto no es realista. En la práctica, todos los procesos están sujetos a restricciones. Por ejemplo, en el caso de un servosistema no lineal, si la señal de control $u(t)$ es demasiado grande, entonces el amplificador del voltaje de armadura se puede saturar, produciéndose su deterioro.

En presencia de restricciones no es posible la solución analítica del problema de minimización, debiendo recurrirse a dos posibles soluciones. La primera solución es tratar a todas las variables como si no tuvieran restricciones. Posteriormente, conforme a rangos previamente especificados (las restricciones), proceder mediante software, con el corte o la limitación de las magnitudes de las variables con restricciones. La otra solución requiere el empleo de técnicas numéricas, tales como la programación cuadrática. Nosotros no trataremos esta alternativa.

El programa en código MATLAB `conprea.m` resuelve el problema del control de bombeo usando control predictivo en su versión escalar (ecuación (4.15)). El resultado de la simulación se ilustra en la figura 4.4.

Asimismo, el programa en código MATLAB `conpreb.m` (ver listado en el capítulo VII) resuelve el problema del control de bombeo usando control predictivo en su versión matricial (ecuación (4.14)). El resultado de la simulación se ilustra en la figura 4.5.

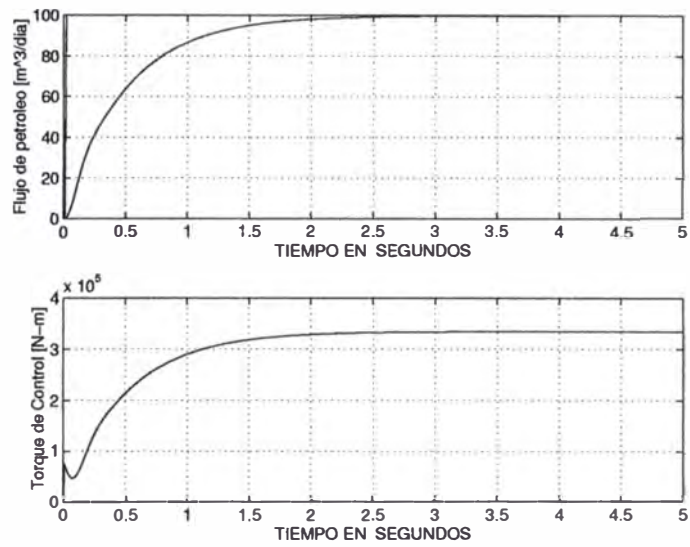


Figura 4.4: Control predictivo del sistema de bombeo empleando ley de control escalar.

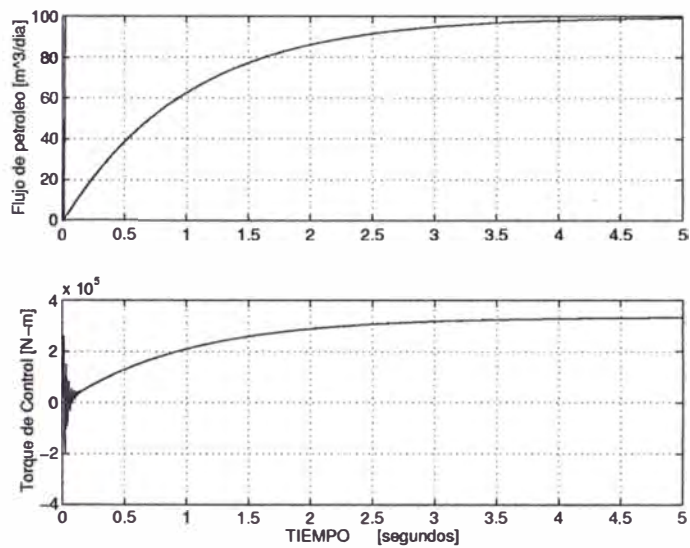


Figura 4.5: Control predictivo del sistema de bombeo empleando ley de control matricial.

CAPÍTULO V CONTROL ADAPTIVO DEL BOMBEO

5.1. Introducción

Los sistemas de control adaptivo, ajustan su comportamiento a las cambiantes propiedades del proceso controlado y de las señales que interactúan sobre dicho proceso. Por el contrario, los sistemas de control fijos se caracterizan por la presencia de una ley de control invariable con el tiempo. La investigación sobre controladores adaptivos se ha centrado en dos grupos principales: controladores adaptivos con un modelo referencial y controladores con autosintonización. En este capítulo se emplea la configuración de un sistema de control adaptivo con autosintonización mostrado en la figura 5.1 [5]. Tal sistema combina en su diseño un método de estimación de parámetros (el de los mínimos cuadrados recursivo mejorado), una técnica de estimación óptima de estados, una representación lineal del modelo del proceso y una ley de control (el controlador óptimo proporcional-integral). El objetivo del control es determinar una fuerza de control, capaz de minimizar la diferencia entre la salida del proceso y la señal de referencia.

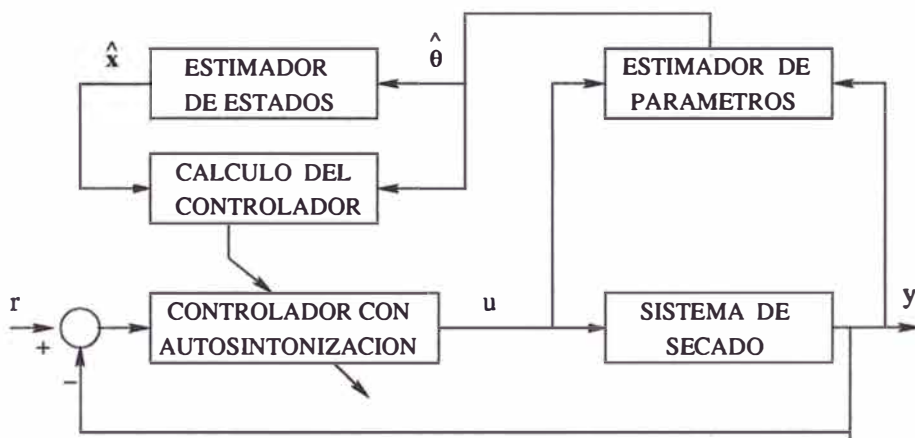


Figura 5.1: Configuración del sistema de control con autosintonización.

El sistema de control con autosintonización mostrado en la figura 5.1 opera

como sigue: luego de cada tiempo de muestreo, el vector estimado de parámetros $\hat{\theta}$ se actualiza empleando los datos proporcionados por la entrada U del proceso y por la salida Y del mismo. Luego, los elementos de $\hat{\theta}$ se usan para recuperar el modelo lineal del proceso, lo cual permite estimar el vector de estado del modelo del proceso $\hat{\mathbf{x}}$. Tales resultados se usan luego para computar la ley de control U .

El modelo dinámico del sistema de succión está dado por la ecuación (2.22):

$$\mathbf{x}(k+1) = G\mathbf{x}(k) + H u(k) + E w; \quad y(k) = C\mathbf{x} \quad (5.1)$$

y su ecuación de diferencias es (ver ecuación (4.4):

$$\begin{aligned} y(t) = & -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) - a_3 y(t-3) - a_4 y(t-4) \\ & + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + b_3 u(t-3) + b_4 u(t-4) \\ & + d_1 n(t-1) + d_2 n(t-2) + d_3 n(t-3) + d_4 n(t-4) \end{aligned} \quad (5.2)$$

La correspondiente ecuación polinomial (modelo CARIMA) toma la forma:

$$\mathcal{A}(z^{-1})y(z) = \mathcal{B}(z^{-1})u(z) + \mathcal{D}(z^{-1})n(z) \quad (5.3)$$

donde z es el operador de desplazamiento, con:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(z^{-1}) &= 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n} \\ \mathcal{B}(z^{-1}) &= b_1 z^{-1} + \dots + b_n z^{-n} \\ \mathcal{D}(z^{-1}) &= d_1 z^{-1} + \dots + d_n z^{-n} \end{aligned} \quad (5.4)$$

5.2. Estimación de los Parámetros del Sistema

Para estimar los parámetros del modelo del sistema se usan las señales $u(k)$ e $y(k)$. La descripción ilustrada en (5.2) tiene que ser reordenada como:

$$y(k) = \psi^T(k)\hat{\theta}(k) \quad (5.5)$$

donde el vector de información (o de medición) ψ contiene los valores presentes y pasados de la entrada u y de la salida y como sigue:

$$\psi^T(k) = [y(k-1) \dots y(k-n) \quad y(k-1) \dots u(k-n)] \quad (5.6)$$

y el vector $\hat{\theta}$ contiene los parámetros a ser estimados, a saber:

$$\hat{\theta}(k) = [-\hat{a}_1(k) \dots -\hat{a}_n(k) \quad \hat{b}_1(k) \dots \hat{b}_n(k)]^T \quad (5.7)$$

Los parámetros en juego pueden estimarse empleando el algoritmo básico de los mínimos cuadrados recursivo. Sin embargo, tal algoritmo puede presentar problemas potenciales de carácter numérico que podrían afectar el diseño final del controlador con autosintonización. Por tal motivo, en este capítulo se emplea el método de los mínimos cuadrados recursivo mejorado propuesto en [6], el cual puede implementarse en la forma siguiente:

- 1) Obtener el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}(0)$ usando los parámetros valorados del modelo del proceso dadas en la ecuación (5.3).
- 2) La matriz de covarianza inicial P puede tener la forma $P = \alpha I$, donde I es la matriz identidad y $\alpha \gg 1$.
- 3) Tomar nuevas mediciones de $Y(k)$ y de $U(k)$ en el proceso, para obtener una nueva ecuación de la forma dada en (5.5).
- 4) Computar: $\rho(k) = \max(1, \|\psi(k)\|)$; $\psi_n = \psi/\rho(k)$.
- 5) Determinar la matriz $N(k)$ aplicando factorización Cholesky en:

$$N(k)N(k)^T = P(k)$$

- 6) Determinar la matriz diagonal de escalamiento $S(k)$ con elementos s_{jj} . Tal matriz minimiza el número condicional del producto $S(k)N(k)$, siempre que $s_{jj} = 1/n_{jj}$, donde cada n_{jj} se obtiene tomando el valor absoluto de la suma de los elementos de la fila j de $N(k)$.
- 7) Computar:

$$P_S(k) = S(k)P(k)S(k)$$

$$\psi_{nS} = [S(k)]^{-1}\psi_n$$

$$r(k) = 1 + \psi_{nS}^T(k)P_S(k-1)\psi_{nS}(k)$$

$$\lambda(k) = 1 - \frac{1}{2} \left[r(k) - \sqrt{r^2(k) - \frac{4\|P_S(k-1)\psi_{nS}(k)\|^2}{\text{tr } P_S(k-1)}} \right]$$

$$e_n(k) = Y(k)/\rho(k) - \psi_n^T(k) \hat{\theta}(k-1)$$

$$j(k) = [\psi_{nS}^T(k+1)P_S(k)\psi_{nS}(k+1) + \lambda(k)]$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + S^{-1}(k)P_S(k)\psi_{nS}(k)e_n(k+1)/j(k)$$

$$H_{nS}(k+1) = P_S(k)\psi_{nS}(k+1) \times [\psi_{nS}^T(k+1)P_S(k)\psi_{nS}(k+1) + \lambda(k)]^{-1}$$

$$P_S(k+1) = [I - H_{nS}(k+1)\psi_{nS}^T(k+1)]P_S(k)/\lambda(k)$$

$$tt = \text{abs} \left[\frac{\max \text{ eig}(P_S)}{\min \text{ eig}(P_S)} \right]$$

- 8) Implementar el criterio para detener la estimación y encontrar la nueva matriz de escalamiento N_{new} como sigue: sabiendo que tt es el número condicionante de P_S , si $tt \leq \tau$ (cota inferior), parar la estimación; en otro caso, si $tt \geq \kappa$ (cota superior), determinar $N_{new}(k)$ (a partir de la relación $P_S = N_{new}N_{new}^T$), calcular los elementos n_{newjj} (valor absoluto de la suma de los elementos de las filas de $N_{new}(k)$), determinar la matriz diagonal S_{new} con elementos $s_{newjj} = 1/n_{newjj}$, y calcular la matriz $P_{newS} = S_{new}P_S S_{new}$. Finalmente, actualizar: $P = P_{newS}$.

Detalles computacionales de este algoritmo, se ilustran en el programa conopt.m presentado más adelante.

5.3. Estimación de Estados

El procedimiento de estimación descrito en la sección anterior nos proporciona el vector de parámetros estimado del proceso $\hat{\theta}(k)$. Usando los elementos de dicho vector de parámetros, podemos reconstruir las matrices estimadas $\hat{G}(k)$, $\hat{H}(k)$ y $\hat{C}(k)$. El vector de estado estimado $\hat{x}(k)$ puede ser obtenido mediante el siguiente observador óptimo, cuya ecuación de observación es [5]:

$$\hat{x}(k) = \hat{G}(k)\hat{x}(k) + \hat{H}(k)u(k) + K_o(k)[y(k) - \hat{C}(k)\hat{x}(k)] \quad (5.8)$$

En la ecuación (5.8), la matriz de ganancia $K_o(k)$ se calcula de:

$$K_o(k) = P_o(k)\hat{C}^T(k)[\hat{C}(k)P_o(k)\hat{C}^T(k) + R_o]^{-1} \quad (5.9)$$

donde $P_o(k)$ es una matriz simétrica definida positiva, solución única de la siguiente ecuación matricial discreta asociada de Riccati:

$$P_o(k+1) = Q_o + \hat{G}^T(k)P_o(k)\hat{G}(k) - \hat{G}^T(k)K_o(k)\hat{C}(k)P_o(k)\hat{G}(k) \quad (5.10)$$

donde Q_o y R_o son matrices de covarianza definidas positivas y asociada a disturbios estocásticos, que pueden afectar los estados y la salida del sistema.

5.4. Control Adaptivo del Sistema de Bombeo

La ley de control proporcional-integral, que forma parte de la configuración del sistema de control adaptivo con autosintonización, ya fue determinada en la sección 3.3. Esta ley de control tiene la forma dada en (3.21).

El programa conadap.m escrito en código MATLAB [3] (ver listado al final del trabajo) resuelve el problema del control adaptivo con autosintonización del sistema de bombeo. Esto significa que a pesar que los parámetros del sistema pueden cambiar (por ejemplo, cambio en las presiones P_s o P_f debido a un cambio de bomba, o intercambio de la viga metálica por otro de mayor momento de inercia, etc.), el sistema no requiere nueva sintonización de las matrices de ponderación Q_a , R_a , Q_o y R_o .

El resultado de la simulación se muestra en la figura 5.2. Este resultado, así como los resultados obtenidos en los capítulos III y IV serán discutidos en el capítulo correspondiente a las conclusiones.

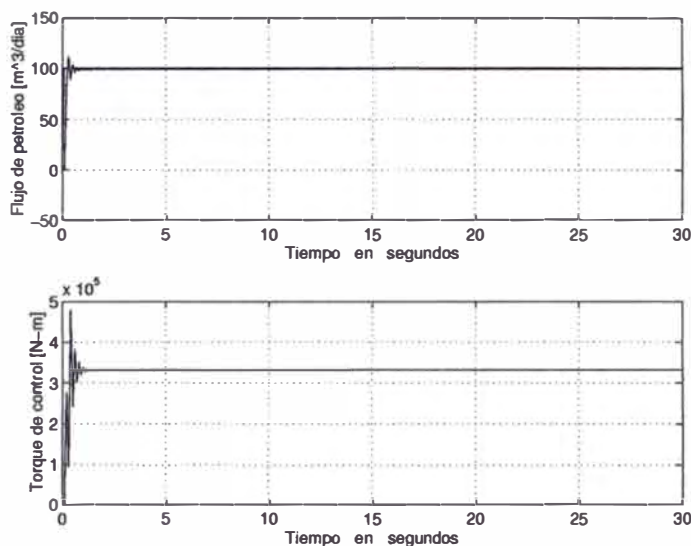


Figura 5.2: Control adaptivo del sistema de bombeo.

CONCLUSIONES

Discusión de los Resultados

La figura 5.3 ilustra los resultados obtenidos en este trabajo con relación al control del flujo de petróleo extraído (o producido). Podemos observar que en todos los casos se cumplen las especificaciones de diseño: la señal del flujo producido no posee sobreimpulso y se estabiliza en menos de 4 segundos.

Con respecto al período de muestreo, las técnicas de control óptimo y predictivo hacen uso del mismo tiempo: $T = 0.01$ s, mientras que la técnica de control óptimo emplea un tiempo de discretización de 0.1, exigido por el propio algoritmo. Ambos tiempos de muestreo, son adecuados para futuras implementaciones en tiempo real de los algoritmos de control estudiados.

Con respecto al torque de entrada, las técnicas de control óptimo y predictivo escalar son las menos exigentes, por consiguiente, las más económicas debido a que el sistema de bombeo para estas situaciones es más pequeño comparado con el sistema de bombeo requerido por las técnicas de control adaptivo y predictivo vectorial.

Sin embargo, tenemos que mencionar que la respuesta controlada obtenida con la técnica de control predictivo escalar, es mejor manipulable que la respuesta controlada, obtenida con la técnica de control adaptivo. En otras palabras, es mucho más fácil sintonizar la respuesta deseada empleando la técnica de control predictivo.

Por las razones expuestas y para este caso en particular, es que este estudio concluye recomendando el uso de la técnica de control predictivo con ley de control escalar, para resolver el problema del control de la producción de petróleo mediante extracción mecánica.

Implementación del Sistema de Control de Bombeo

Existen varias configuraciones para la implementación en tiempo real del control del sistema de bombeo o extracción estudiado hasta aquí. Todas las

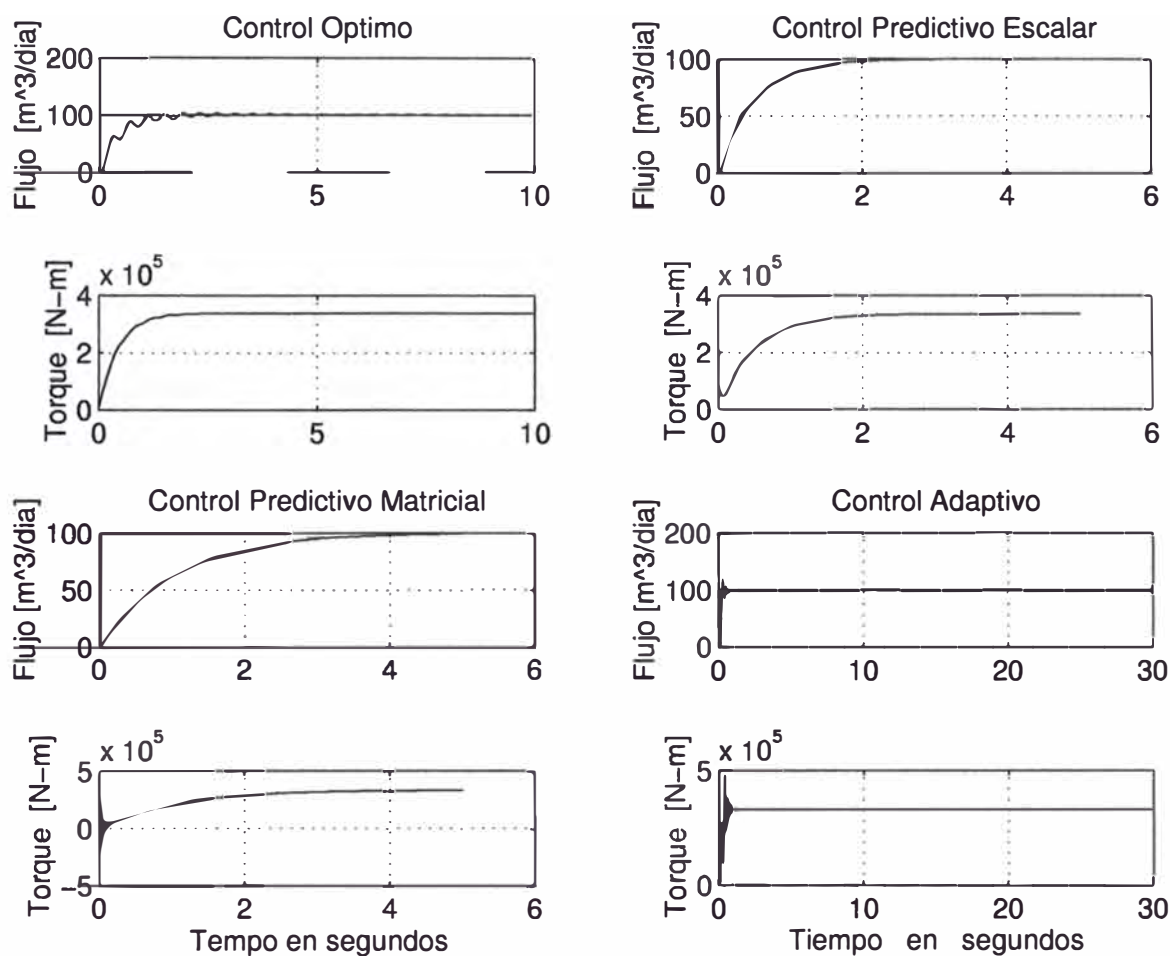


Figura 5.3: Sistemas de control de bombeo desarrollados.

configuraciones requieren del desarrollo de software de control ad-hoc para la aplicación, debido a que los algoritmos de control estudiados, aún no están comercializados en masa (este no es el caso de los controladores tipo PID, en contraposición).

Una solución económica y robusta sería usar una tarjeta de desarrollo DSP (“Digital Signal Processor”) que trabaje en conjunto con la parte de electrónica de potencia para la amplificación de la señal de control. Esta tarjeta, mediante software, también permite hacer el acondicionamiento de las señales medidas.

El costo de implementación del sistema de control, sin incluir la maquinaria pesada (por ejemplo, actuadores rotativos) sería:

- 1) Tarjeta DSP: US \$ 250.00
- 2) Dos sensores industriales de posición: US \$ 700.00

3) Etapa de electrónica de potencia: US \$ 800.00

5) Desarrollo y puesta en operación del software de control: US \$ 4000.00

Gran total: US \$ 5750.00

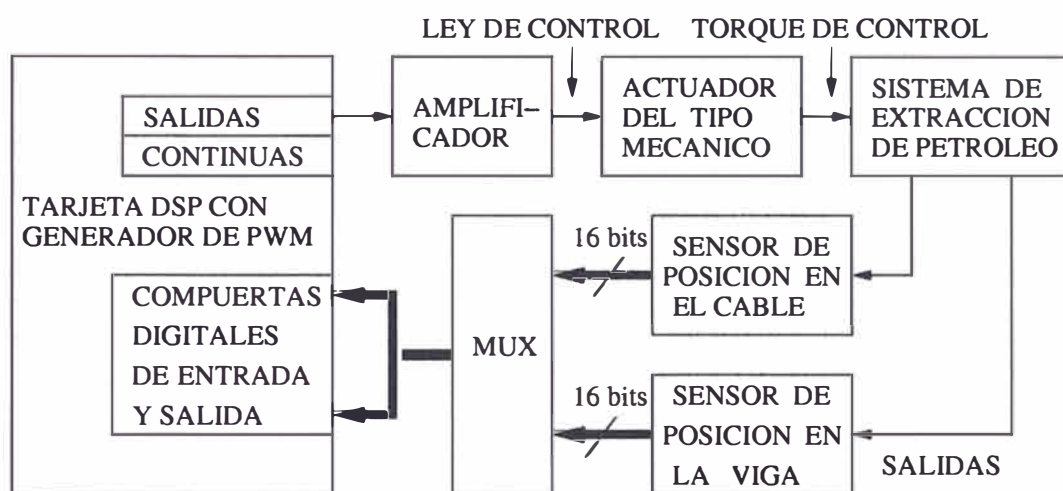


Figura 5.4: Implementación del sistema de bombeo.

Recomendaciones para Trabajos Futuros

En el capítulo II determinamos la naturaleza no lineal de las ecuaciones que describen la dinámica del sistema de bombeo. Un trabajo a corto plazo consistiría en estudiar la introducción de algoritmos de control no lineales para resolver el problema del control del flujo producido, tales como control adaptivo no lineal, control con modo deslizante, control predictivo no lineal, entre otros.

ANEXO

LISTADO DE PROGRAMAS

Programa del Capítulo II

```

% conobs.m RESPUESTA AL ESCALON DEL SISTEMA DE SUCCION DE PETROLEO
clear all

% PARAMETROS DEL PROCESO
beta = 100; rho = 900; d = 0.128; mu = 10.5e-3; m2 = 40; m1 = 300;
L2 = 1.5; L1 = 1; Lo = 1000; H = 6; Ac = 0.785; Ap = 128.7;
E = 20.6e6; J1 = 150.6 ; Pf = 176.6; Ps = 100; Rf = 150; g = 9.81;
V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))-
    beta/m2 - g; Amp = 1;

% MODELO LINEAL
A = [0 1 0 0
      (Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2) -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
      0 0 0 1
      L2*Ac*E/J1/Lo 0 -L2^2*Ac*E/J1/Lo 0];
B = [0;0;0;Amp/J1]; F = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];
C = [0 8.64*Ap 0 0]; D = [0];

% ESTABILIDAD DEL SISTEMA
eigA = eig(A); % EIGENVALORES:
% eigA(1) = -62114; eigA(2) = 16i; eigA(3) = -16i; eigA(4) = 0;

% CONVERSION AL ESPACIO DISCRETO
T = 0.01; % TIEMPO DE MUESTREO
[G,H,C,D] = c2dm(A,B,C,D,T,'zoh');
[G,EE,C,D] = c2dm(A,F,C,D,T,'zoh');

% RESPUESTAS AL ESCALON
x=[0;0;0;0]; M = 300;
for k = 1:M
    u(k) = 1;
    x = G*x + H*u(k) + EE;
    y(k) = C*x;
end
t = linspace(0,size(y,2)*T,size(y,2));
plot(t,y); grid

```

```

xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
ylabel('RESPUESTA y(t)')
print -deps -f conobs

```

Programa del Capítulo III

```

% conopt.m CONTROL OPTIMO PROPORCIONAL-INTEGRAL DEL SISTEMA DE BOMBEO
clear all

% PARAMETROS DEL PROCESO
beta = 100; rho = 900; d = 0.128; mu = 10.5e-3; m2 = 40; m1 = 300;
L2 = 1.5; L1 = 1; Lo = 1000; H = 6; Ac = 0.785; Ap = 128.7;
E = 20.6e6; J1 = 150.6 ; Pf = 176.6; Ps = 100; Rf = 150; g = 9.81;
V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))-
    beta/m2 - g; Amp = 1;

% MODELO LINEAL
A = [0 1 0 0
     Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2 -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
     0 0 0 1
     L2*Ac*E/J1/Lo 0 -L2^2*Ac*E/J1/Lo 0];
B = [0;0;0;Amp/J1]; F = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];
C = [0 8.64*Ap 0 0]; D = [0];

% CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL PROCESO
rAB = rank(ctrb(A,B)); % rAB = 4 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
rAC = rank(observ(A,C)); % rAC = 2 => NO ESCOMPLETAMENTE OBSERVABLE

% PROCESO DISCRETO
T=0.01; % TIEMPO DE MUESTREO
[num1, den1]=ss2tf(A,B,C,D);
[G,H]=c2d(A,B,T);
[G,EE]=c2d(A,F,T);

% ADICIONANDO ACCION INTEGRAL
G1 = [G zeros(4,1);-C*G 1];
H1 = [H;-C*H];

% MATRICES DE PONDERACION
Q = [1 0 0 0 0
     0 1 0 0 0
     0 0 1 0 0
     0 0 0 1 0
     0 0 0 0 100];
R = [0.01]; %

% EQUACION DE RICATTI
P = diag(0,4);
for i = 1:40

```



```

    P = Q + G1'*P*G1 - G1'*P*H1*inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
end

% CALCULO DE LA GANACIA K DEL CONTROLADOR
KK = inv(R+H1'*P*H1)*H1'*P*G1;
K = [KK(1) KK(2) KK(3) KK(4)];
KI = -KK(5);

% LAZO DE CONTROL
x=[0;0;0;0]; v=0; Y=0; % CONDICIONES INICIALES
N = 1000;
for k=1:N
    r(k)=100; Ref=r(k);
    v = v + Ref - Y;
    U = - K*x + KI*v;
    x = G*x + H*U + EE;
    Y = C*x;
    y(k) = Y; u(k) = U;
end

% GRAFICOS
t=linspace(0,N*T,N);
subplot(2,1,1)
plot(t,y(1:N),t,r), grid
ylabel('Flujo de petroleo [m^3/día]')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2)
plot(t,u(1:N)), grid
xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
ylabel('Torque de control [N-m]')
print -deps -f conopt

```

Programas del Capítulo IV

```

% conprea.m SOLUCION AL PROBLEMA DEL CONTROL DE BOMBEO
% USANDO CONTROL PREDICTIVO CON FUERZA DE CONTROL ESCALAR
clear all

% PARAMETROS DEL PROCESO
beta = 100; rho = 900; d = 0.128; mu = 10.5e-3; m2 = 40; m1 = 300;
L2 = 1.5; L1 = 1; Lo = 1000; H = 6; Ac = 0.785; Ap = 128.7;
E = 20.6e6; J1 = 150.6 ; Pf = 176.6; Ps = 100; Rf = 150; g = 9.81;
V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))-
    beta/m2 - g; Amp = 1;

% MODELO LINEAL
A = [0 1 0 0
     Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2 -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
     0 0 0 1

```

```

    L2*Ac*E/J1/Lo  0  -L2^2*Ac*E/J1/Lo  0];
B = [0;0;0;Amp/J1]; F = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];
C = [0 8.64*Ap 0 0]; D = [0];

% PROCESO EN TIEMPO DISCRETO
tm=0.01;                                % TIEMPO DE MUESTREO
[G,H]=c2d(A,B,tm);
[numd,dend]=ss2tf(G,H,C,D);
a1=dend(2); a2=dend(3); a3=dend(4); a4=dend(5);
b1=numd(2); b2=numd(3); b3=numd(4); b4=numd(5);
[G,EE]=c2d(A,F,tm);
[numdd,dendd]=ss2tf(G,EE,C,D);
d1=numdd(2); d2=numdd(3); d3=numdd(4); d4=numdd(5);

% HORIZONTES
N1 =1; N2 =10; Nu =1;

% RESPUESTA AL ESCALON
g(1) = b1; g(2) = -a1*b1 + b1 + b2;
g(3) = - a1*g(2) - a2*g(1) + b1 +b2+b3;
g(4) = - a1*g(3) - a2*g(2)-a3*g(1) + b1+b2+b3+b4;
for k=5:N2
    g(k) = -a1*g(k-1)-a2*g(k-2)-a3*g(k-3)-a4*g(k-4)+b1+b2+b3+b4;
end

% CONDICIONES INICIALES
for k=1:6
    yf(k)=0; y(k)=0; r(k)=0; u(k)=0; du(k)=0;
end
alf =0.98; lambda = 0.00;

% BUCLE DE CONTROL
MM=500;
for t =6:MM+5;
for k=1:N2
    W(t+k)=100;%-3*sign(sin(0.02*t)); % TRAYECTORIA DESEADA
end

% REFERENCIA
r(t+0) = alf*r(t-1) + (1-alf)*W(t+0);
r(t+1) = alf*r(t+0) + (1-alf)*W(t+1);
r(t+2) = alf*r(t+1) + (1-alf)*W(t+2);
r(t+3) = alf*r(t+2) + (1-alf)*W(t+3);
r(t+4) = alf*r(t+3) + (1-alf)*W(t+4);
r(t+5) = alf*r(t+4) + (1-alf)*W(t+5);
r(t+6) = alf*r(t+5) + (1-alf)*W(t+6);
r(t+7) = alf*r(t+6) + (1-alf)*W(t+7);
r(t+8) = alf*r(t+7) + (1-alf)*W(t+8);
r(t+9) = alf*r(t+8) + (1-alf)*W(t+9);
r(t+10) = alf*r(t+9) + (1-alf)*W(t+10);

```

```
R=[r(t+1) r(t+2) r(t+3) r(t+4) r(t+5) r(t+6) r(t+7) r(t+8)...
    r(t+9) r(t+10)]';
```

```
% RESPUESTA LIBRE
```

```
yf(t) =(1-a1)*yf(t-1)-(a2-a1)*yf(t-2)-(a3-a2)*yf(t-3)...
-(a4-a3)*yf(t-4)+a4*yf(t-5)+b1*du(t-1)+b2*du(t-2)+b3*du(t-3)...
+b4*du(t-4);
```

```
yf(t+1)=(1-a1)*yf(t)-(a2-a1)*yf(t-1)-(a3-a2)*yf(t-2)...
-(a4-a3)*yf(t-3)+a4*yf(t-4)+b2*du(t-1)+b3*du(t-2)...
+b4*du(t-3);%+b1*u(t);
```

```
yf(t+2)=(1-a1)*yf(t+1)-(a2-a1)*yf(t)-(a3-a2)*yf(t-1)...
-(a4-a3)*yf(t-2)+a4*yf(t-3)+b3*du(t-1)...
+b4*du(t-2);%+b1*du(t+1)+b2*du(t);
```

```
yf(t+3)=(1-a1)*yf(t+2)-(a2-a1)*yf(t+1)-(a3-a2)*yf(t)...
-(a4-a3)*yf(t-1)+a4*yf(t-2)...
+b4*du(t-1);%+b1*du(t+2)+b2*du(t+1)+b3*du(t);
```

```
yf(t+4)=(1-a1)*yf(t+3)-(a2-a1)*yf(t+2)-(a3-a2)*yf(t+1)...
-(a4-a3)*yf(t)+a4*yf(t-1);%+b1*du(t+3)+b2*du(t+2)+b3*du(t+1)...
```

```
yf(t+5)=(1-a1)*yf(t+4)-(a2-a1)*yf(t+3)-(a3-a2)*yf(t+2)...
-(a4-a3)*yf(t+1)+a4*yf(t);%+b1*du(t+4)+b2*du(t+3)+b3*du(t+2)...
```

```
yf(t+6)=(1-a1)*yf(t+5)-(a2-a1)*yf(t+4)-(a3-a2)*yf(t+3)...
-(a4-a3)*yf(t+2)+a4*yf(t+1);%+b1*du(t+5)+b2*du(t+4)+b3*du(t+3)...
```

```
yf(t+7)=(1-a1)*yf(t+6)-(a2-a1)*yf(t+5)-(a3-a2)*yf(t+4)...
-(a4-a3)*yf(t+3)+a4*yf(t+2);%+b1*du(t+6)+b2*du(t+5)+b3*du(t+4)...
```

```
yf(t+8)=(1-a1)*yf(t+7)-(a2-a1)*yf(t+6)-(a3-a2)*yf(t+5)...
-(a4-a3)*yf(t+4)+a4*yf(t+3);%+b1*du(t+7)+b2*du(t+6)+b3*du(t+5)...
```

```
yf(t+9)=(1-a1)*yf(t+8)-(a2-a1)*yf(t+7)-(a3-a2)*yf(t+6)...
-(a4-a3)*yf(t+5)+a4*yf(t+4);%+b1*du(t+8)+b2*du(t+7)+b3*du(t+6)...
```

```
yf(t+10)=(1-a1)*yf(t+9)-(a2-a1)*yf(t+8)-(a3-a2)*yf(t+7)...
-(a4-a3)*yf(t+6)+a4*yf(t+5);%+b1*du(t+9)+b2*du(t+8)+b3*du(t+7)...
```

```
YF=[yf(t+1) yf(t+2) yf(t+3) yf(t+4) yf(t+5) ...
    yf(t+6) yf(t+7) yf(t+8) yf(t+9) yf(t+10)]';
```

```
% LEY DE CONTROL
```

```
du(t)=(g(1)*(r(t+1)-yf(t+1))+g(6)*(r(t+6)-yf(t+6))+
g(2)*(r(t+2) - yf(t+2)) + g(7)*(r(t+7) - yf(t+7)) +
g(3)*(r(t+3) - yf(t+3)) + g(8)*(r(t+8) - yf(t+8)) +
g(4)*(r(t+4) - yf(t+4)) + g(9)*(r(t+9) - yf(t+9)) +
```

```

g(5)*(r(t+5) - yf(t+5)) +g(10)*(r(t+10)- yf(t+10)))/...
(g(1)^2 + g(2)^2 + g(3)^2 + g(4)^2 + g(5)^2 + g(6)^2 +
    g(7)^2 + g(8)^2 + g(9)^2 + g(10)^2 + lambda);
u(t) = u(t-1) + du(t);

% PROCESO
y(t+1)=-a1*y(t)-a2*y(t-1)-a3*y(t-2)-a4*y(t-3)...
    +b1*u(t)+b2*u(t-1)+b3*u(t-2)+b4*u(t-3)...%;
    +d1 +d2 +d3 +d4;
end % FIN DEL BUCLE

% GRAFICOS
ejex=linspace(0,MM*tm,MM-4);
subplot(2,1,1)
plot(ejex,W(5:MM),ejex,y(5:MM)); grid
ylabel('Flujo de petroleo [m^3/dia]')
xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
subplot(2,1,2)
plot(ejex,u(5:MM)); grid
xlabel('TIEMPO EN SEGUNDOS')
ylabel('Torque de Control [N-m]')
print -deps -f conprea

% conpreb.m SOLUCION AL PROBLEMA DEL CONTROL DE BOMBEO
% USANDO CONTROL PREDICTIVO CON FUERZA DE CONTROL MATRICIAL
clear all

% PARAMETROS DEL PROCESO
beta = 100; rho = 900; d = 0.128; mu = 10.5e-3; m2 = 40; m1 = 300;
L2 = 1.5; L1 = 1; Lo = 1000; H = 6; Ac = 0.785; Ap = 128.7;
E = 20.6e6; J1 = 150.6 ; Pf = 176.6; Ps = 100; Rf = 150; g = 9.81;
V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))-
    beta/m2 - g; Amp = 1;

% MODELO LINEAL
A = [0 1 0 0
    Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2 -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
    0 0 0 1
    L2*Ac*E/J1/Lo 0 -L2^2*Ac*E/J1/Lo 0];
B = [0;0;0;Amp/J1]; F = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];
C = [0 8.64*Ap 0 0]; D = [0];

% PROCESO EN TIEMPO DISCRETO
tm=0.01;
[G,H]=c2d(A,B,tm);
[numd,dend]=ss2tf(G,H,C,D);
a1=dend(2); a2=dend(3); a3=dend(4); a4=dend(5);
b1=numd(2); b2=numd(3); b3=numd(4); b4=numd(5);
[G,EE]=c2d(A,F,tm);

```

```
[numdd,dendd]=ss2tf(G,EE,C,D);
d1=numdd(2); d2=numdd(3); d3=numdd(4); d4=numdd(5);
```

```
% HORIZONTES
```

```
N1 =1; N2 =10; Nu =5;
```

```
% RESPUESTA AL ESCALON
```

```
g1 = b1; g2 = -a1*b1 + b1 + b2;
g3 = - a1*g2 - a2*g1 + b1 +b2+b3;
g4 = - a1*g3 - a2*g2-a3*g1 + b1 +b2+b3+b4;
g5=-a1*g4-a2*g3-a3*g2-a4*g1+b1+b2+b3+b4;
g6=-a1*g5-a2*g4-a3*g3-a4*g2+b1+b2+b3+b4;
g7=-a1*g6-a2*g5-a3*g4-a4*g3+b1+b2+b3+b4;
g8=-a1*g7-a2*g6-a3*g5-a4*g4+b1+b2+b3+b4;
g9=-a1*g8-a2*g7-a3*g6-a4*g5+b1+b2+b3+b4;
g10=-a1*g9-a2*g8-a3*g7-a4*g6+b1+b2+b3+b4;
```

```
% MATRIZ DE GANANCIA DE RESPUESTA AL ESCALON
```

```
GG=[g1 0 0 0 0
    g2 g1 0 0 0
    g3 g2 g1 0 0
    g4 g3 g2 g1 0
    g5 g4 g3 g2 g1
    g6 g5 g4 g3 g2
    g7 g6 g5 g4 g3
    g8 g7 g6 g5 g4
    g9 g8 g7 g6 g5
    g10 g9 g8 g7 g6];
```

```
% CONDICIONES INICIALES
```

```
yf(1)=0; yf(2)=0; yf(3)=0; yf(4)=0; yf(5)=0;
y(1)=0; y(2)=0; y(3) = 0; y(4)=0; y(5)=0; y(6)=0;
r(1) =0; r(2) =0; r(3)=0; r(4)=0; r(5)=0;
u(1) =0; u(2) =0; u(3)=0; u(4)=0; u(5)=0;
du(1) =0; du(2) =0; du(3)=0; du(4)=0; du(5)=0;
alf =0.99; lambda =0.0; I=eye(5,5);
MM=500;
```

```
% BUCLE DE CONTROL
```

```
for t =6:MM+5;
for k=1:N2
W(t+k)=100;%-3*sign(sin(0.02*t)); % TRAYECTORIA DESEADA
end
```

```
% REFERENCIA
```

```
r(t+0) = alf*r(t-1) + (1-alf)*W(t+0);
r(t+1) = alf*r(t+0) + (1-alf)*W(t+1);
r(t+2) = alf*r(t+1) + (1-alf)*W(t+2);
r(t+3) = alf*r(t+2) + (1-alf)*W(t+3);
```

```

r(t+4) = alf*r(t+3) + (1-alf)*W(t+4);
r(t+5) = alf*r(t+4) + (1-alf)*W(t+5);
r(t+6) = alf*r(t+5) + (1-alf)*W(t+6);
r(t+7) = alf*r(t+6) + (1-alf)*W(t+7);
r(t+8) = alf*r(t+7) + (1-alf)*W(t+8);
r(t+9) = alf*r(t+8) + (1-alf)*W(t+9);
r(t+10) = alf*r(t+9) + (1-alf)*W(t+10);
R=[r(t+1) r(t+2) r(t+3) r(t+4) r(t+5) r(t+6)...
   r(t+7) r(t+8) r(t+9) r(t+10)]';

```

% RESPUESTA LIBRE

```

yf(t) =(1-a1)*yf(t-1)-(a2-a1)*yf(t-2)-(a3-a2)*yf(t-3)...
-(a4-a3)*yf(t-4)+a4*yf(t-5)+b1*du(t-1)+b2*du(t-2)+b3*du(t-3)...
+b4*du(t-4);

```

```

yf(t+1)=(1-a1)*yf(t)-(a2-a1)*yf(t-1)-(a3-a2)*yf(t-2)...
-(a4-a3)*yf(t-3)+a4*yf(t-4)+b2*du(t-1)+b3*du(t-2)...
+b4*du(t-3);%+b1*u(t);

```

```

yf(t+2)=(1-a1)*yf(t+1)-(a2-a1)*yf(t)-(a3-a2)*yf(t-1)...
-(a4-a3)*yf(t-2)+a4*yf(t-3)+b3*du(t-1)...
+b4*du(t-2);%+b1*du(t+1)+b2*du(t);

```

```

yf(t+3)=(1-a1)*yf(t+2)-(a2-a1)*yf(t+1)-(a3-a2)*yf(t)...
-(a4-a3)*yf(t-1)+a4*yf(t-2)...
+b4*du(t-1);%+b1*du(t+2)+b2*du(t+1)+b3*du(t);

```

```

yf(t+4)=(1-a1)*yf(t+3)-(a2-a1)*yf(t+2)-(a3-a2)*yf(t+1)...
-(a4-a3)*yf(t)+a4*yf(t-1);%+b1*du(t+3)+b2*du(t+2)+b3*du(t+1)...

```

```

yf(t+5)=(1-a1)*yf(t+4)-(a2-a1)*yf(t+3)-(a3-a2)*yf(t+2)...
-(a4-a3)*yf(t+1)+a4*yf(t);%+b1*du(t+4)+b2*du(t+3)+b3*du(t+2)...

```

```

yf(t+6)=(1-a1)*yf(t+5)-(a2-a1)*yf(t+4)-(a3-a2)*yf(t+3)...
-(a4-a3)*yf(t+2)+a4*yf(t+1);%+b1*du(t+5)+b2*du(t+4)+b3*du(t+3)...

```

```

yf(t+7)=(1-a1)*yf(t+6)-(a2-a1)*yf(t+5)-(a3-a2)*yf(t+4)...
-(a4-a3)*yf(t+3)+a4*yf(t+2);%+b1*du(t+6)+b2*du(t+5)+b3*du(t+4)...

```

```

yf(t+8)=(1-a1)*yf(t+7)-(a2-a1)*yf(t+6)-(a3-a2)*yf(t+5)...
-(a4-a3)*yf(t+4)+a4*yf(t+3);%+b1*du(t+7)+b2*du(t+6)+b3*du(t+5)...

```

```

yf(t+9)=(1-a1)*yf(t+8)-(a2-a1)*yf(t+7)-(a3-a2)*yf(t+6)...
-(a4-a3)*yf(t+5)+a4*yf(t+4);%+b1*du(t+8)+b2*du(t+7)+b3*du(t+6)...

```

```

yf(t+10)=(1-a1)*yf(t+9)-(a2-a1)*yf(t+8)-(a3-a2)*yf(t+7)...
-(a4-a3)*yf(t+6)+a4*yf(t+5);%+b1*du(t+9)+b2*du(t+8)+b3*du(t+7)...

```

```

YF=[yf(t+1) yf(t+2) yf(t+3) yf(t+4) yf(t+5) ...

```

```

        yf(t+6) yf(t+7) yf(t+8) yf(t+9) yf(t+10)]';
% LEY DE CONTROL
U=inv(GG'*GG+lambda*I)*GG'*(R-YF);
du(t)=U(1);
u(t) = u(t-1) + du(t);

% PROCESO
y(t+1)=-a1*y(t)-a2*y(t-1)-a3*y(t-2)-a4*y(t-3)+...
        b1*u(t)+b2*u(t-1)+b3*u(t-2)+b4*u(t-3)+...
        d1 + d2 + d3 + d4;
end % FIN DEL BUCLE

% GRAFICOS
ejex=linspace(0,MM*tm,MM-4);
subplot(2,1,1)
plot(ejex,W(5:MM),ejex,y(5:MM)), grid
ylabel('Flujo de petroleo [m^3/dia]')
subplot(2,1,2)
plot(ejex,u(5:MM)), grid
xlabel('TIEMPO [segundos]')
ylabel('Torque de Control [N-m]')
print -deps -f conpreb

```

Programa del Capítulo V

```

% conadap.m CONTROL ADAPTIVO DEL SISTEMA DE BOMBEO
clear all

% PARAMETROS GENERALES
nn = 4; r=1; % nn: orden del proceso; r: NUMERO DE SALIDAS
NN = 8;      % ORDEN DEL VECTOR ESTIMADO DE PARAMETROS

% MATRICES DE PONDERACION DEL OBSERVADOR Ko
Qo = [1 0 0 0
      0 1 0 0
      0 0 1 0
      0 0 0 1]; Ro = [1];

% MATRICES DE PONDERACION DEL CONTROLADOR Ke
Qa = [1 0 0 0 0
      0 1 0 0 0
      0 0 1 0 0
      0 0 0 1 0
      0 0 0 0 1000000000]; Ra = [1];

% PARAMETROS DEL PROCESO
beta = 100; rho = 900; d = 0.128; mu = 10.5e-3; m2 = 40; m1 = 300;
L2 = 1.5; L1 = 1; Lo = 1000; H = 6; Ac = 0.785; Ap = 128.7;
E = 20.6e6; J1 = 150.6 ; Pf = 176.6; Ps = 100; Rf = 150; g = 9.81;
V = (Ap/m2)*(Pf - (rho*Ap*Pf*(Lo-H)+m2*Ps)/(rho*Ap*(Lo-H)+m2))- ...

```

```

beta/m2 - g; Amp = 1;

% MODELO DEL PROCESO
A = [0 1 0 0
      Ap*(Pf-Ps)/m2/(Lo-H)-Ac*E/Lo/m2 -Ap^2*Rf/m2 Ac*E*L2/Lo/m2 0
      0 0 0 1
      L2*Ac*E/J1/Lo 0 -L2^2*Ac*E/J1/Lo 0];
B = [0;0;0;Amp/J1]; FF = [0;V;0;-m1*g*L1/J1];
C = [0 8.64*Ap 0 0]; D = [0];
T = 0.1; % PERIODO DE MUESTREO

% MODELO DISCRETO
[G,H,C,D]=c2dm(A,B,C,D,T,'zoh');
[num,den]=ss2tf(G,H,C,D);
a1 = den(2); a2 = den(3); a3=den(4); a4=den(5);
b1 = num(2); b2 = num(3); b3=num(4); b4=num(5);
[G,EE]=c2d(A,FF,T);
[numdd,dendd]=ss2tf(G,EE,C,D);
d1=numdd(2); d2=numdd(3); d3=numdd(4); d4=numdd(5);

% CONDICIONES INICIALES
Ref = 100; % MAGNITUD DE LA SEÑAL DE REFERENCIA
thi = [-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4]'; % PARAMETROS
alfa = 1000; Pi = alfa*eye(NN); % MATRIZ P INICIAL
lamb=0.98; lamb0 = 0.99; % FACTOR DE MEMORIA
Y(1) = 0; Y(2) = 0; Y(3) = 0; Y(4) = 0;
U(1) = 0; U(2) = 0; U(3) = 0; U(4) = 0;
x = [0;0;0;0]; % VECTOR DE ESTADO INICIAL
z = 0; % ACCION INTEGRAL INICIAL

% BUCLE DE CONTROL *****
MM = 300;
for t = 1:MM
g(t+4) = Ref; % REFERENCIA

% MODELO DEL PROCESO
Y(t+4)=[Y(t+3) Y(t+2) Y(t+1) Y(t) ...
U(t+3) U(t+2) U(t+1) U(t) 1 1 1 1]*...
[-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4 d1 d2 d3 d4]';

% ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
psi = [Y(t+3) Y(t+2) Y(t+1) Y(t) U(t+3) U(t+2) U(t+1) U(t)]';
rho = max(1,norm(psi));
psin = psi/rho;
Nn = chol(Pi'); % Nn'*Nn = Pi => Nn*N' = Pi'
S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
Ps = S*Pi*S;
psins = inv(S)*psin;
rt = 1 + psins'*Ps*psins;

```



```

lamb = 1 - (rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
e = Y(t+4)/rho - psin'*thi;
j = psins'*Ps*psins + lamb;
th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
Hns = Ps*psins/j;
Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps)) );
cmax = 100; cmin = 15;
if tt <= cmin,
    Pi = Ps; thi = th;
elseif tt >= cmax,
    Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
    Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
    Psnew = Snew*Ps*Snew;
    Pi = Psnew; thi = th;
end

% RECUPERACION DE LA ECUACION CANONICA CONTROLABLE
ae1 = -th(1); ae2 = -th(2); ae3 = -th(3); ae4 = -th(4);
be1 = th(5); be2 = th(6); be3 = th(7); be4 = th(8);
nume = [0 be1 be2 be3 be4];
dene = [1 ae1 ae2 ae3 ae4];
[GE,HE,CE,DE] = tf2ss(nume,dene);

% CALCULO DE LA GANACIA Ko DEL OBSERVADOR
% EQUACION DE RICATTI
Po = diag(0,3);
for i = 1:20
    Po = Qo + GE*Po*GE' - GE'*Po*CE'*inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE';
end
Ko = inv(Ro+CE*Po*CE')*CE*Po*GE';

% ESTIMACION DE ESTADOS
x = GE*x + HE*U(t+3) + Ko'*(Y(t+4)-CE*x);

% CALCULO DE LA GANANCIA Ka DEL CONTROLADOR
Ga = [GE zeros(nn,r);-CE*GE eye(r,r)];
Ha = [HE;-CE*HE];

% EQUACION DE RICATTI
Pa = diag(0,4);
for i = 1:20
    Pa = Qa + Ga'*Pa*Ga - Ga'*Pa*Ha*inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga;
end
Ka = inv(Ra+Ha'*Pa*Ha)*Ha'*Pa*Ga;
K = [Ka(1) Ka(2) Ka(3) Ka(4)];
KI = -Ka(5);

% CALCULO DE LA LEY DE CONTROL

```

```
z = z + g(t+4) - Y(t+4);          % ACCION INTEGRAL
U(t+4) = - K*x + KI*z;

end % FIN DEL BUCLE *****

% GRAFICOS
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
subplot(2,1,1)
plot(ejex,g(4:MM+3),ejex,Y(4:MM+3)), grid
ylabel('Flujo de petroleo [m^3/dia]')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2), grid
plot(ejex,U(3:MM+2)), grid
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('Torque de control [N-m]')
print -deps -f conadap
```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Camacho, Eduardo F. y Bordons, Carlos. *Model Predictive Control*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1999.
- [2] De Keyser, R. “A Gentle Introduction to Model Based Predictive Control,” *IPADI2 Int. Conference on Control Eng. and Signal Processing, Piura, Perú* (1998).
- [3] MathWorks, Inc. *MATLAB Reference Guide*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1996.
- [4] Ogata, Katushito. *Designing Linear Control Systems with MATLAB*. Prentice Hall Englewood Cliffs New Jersey, 1994.
- [5] Rojas-Moreno, Arturo. *Control Avanzado-Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real*. Publicación Independiente, 2001.
- [6] Sripada, N. Rao y Fisher, D. Grant. “Improved Least Squares Identification,” *Int. J. Control*, vol. 46, no. 6, 1889–1913 (Dic 1987).
- [7] Umez-Eronini, Eronini. *Dinámica de Sistemas y Control*. International Thomson Editores, 2001.