

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**“DISEÑO Y SIMULACIÓN DEL SISTEMA DE CONTROL DE
SUSPENSIÓN DE UN BUS, EMPLEANDO ESTRATEGIAS DE
CONTROL AVANZADO”**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRÓNICO

**PRESENTADO POR:
DAMASO SABINO ROQUE ALMEYDA**

PROMOCIÓN
1979-II
LIMA-PERÚ
2002

A mis padres Mauro y Petronila Rosa.

**“Diseño y Simulación del Sistema de Control de
Suspensión de un Bus, empleando Estrategias de
Control Avanzado”**

SUMARIO

Durante los últimos años, el sistema de suspensión de los vehículos motorizados ha tenido una creciente aplicación. La simulación de este sistema tiene una importancia múltiple en la industria automotriz, debido a que inmediatamente se obtiene resultados de la simulación, los cuales proveen la información sobre el comportamiento del sistema de control. Esta información será válida para una implementación o explotación segura y rentable, evitándose un diseño de un modelo costoso y de exámenes complejos en el laboratorio. Podemos simular sistemas de suspensión de casi todas las situaciones y tipos de vehículos motorizados posibles.

El desarrollo del sistema de suspensión en este trabajo, se realiza para un “Sistema de Suspensión” por el modelo de: “Un cuarto del Vehículo”, usando estrategias de control avanzado y clásicos.

En el sistema de suspensión (en Lazo Abierto), el tiempo del establecimiento y desplazamiento del movimiento vertical del vehículo, producido por cualquier tipo de obstáculo mientras el bus esta en marcha, son parámetros a evaluar, a fin de aumentar la comodidad de los pasajeros y atenuar el impacto dinámico transmitido a los elementos del vehículo durante su recorrido.

Para lograr un valor adecuado para los indicados parámetros, es necesario diseñar un controlador (lazo cerrado). En el presente trabajo se han diseñado controladores para las estrategias de control: Optimo, Adaptivo y PID, con el fin de comparar sus resultados.

TABLA DE CONTENIDO

PROLOGO	1
CAPITULO I	
FORMULACION Y ANALISIS DEL PROBLEMA	
1.1. Formulación del problema	2
1.2. El sistema de suspensión	3
1.3. Tipos de Sistemas de Suspensión	4
1.4. Análisis del problema	6
1.4.1. Modelo del Sistema de suspensión	6
1.4.2. Consideraciones del modelo	8
1.4.3. Dinámica vertical de vehículo	9
1.4.4. Confort de los pasajeros y buen diseño del vehículo	9
1.5. Modelo final de diseño	11
1.6. Requerimiento de funcionamiento	12
CAPÍTULO II	
MODELADO DEL PROCESO DE SUSPENSION DE UN BUS	
2.1. Modelo continuo	13
2.1.1. Sistema de control de suspensión de un bus	14
2.1.2. Diagrama de cuerpo libre y Leyes de Newton	15
2.1.3. Método en el espacio de estados	18
2.1.4. Método de función de transferencia	21
2.1.5. Simulación del proceso en lazo abierto en tiempo continuo	24
2.2. Modelo discreto	33
2.2.1. Tipos de señales	33
2.2.2. Análisis en el espacio de estados de tiempo discreto	34
2.2.3. Conversión del sistema continuo en sistema discreto	

utilizando MATLAB	38
2.2.4. Simulación de proceso en lazo abierto en tiempo discreto	39

CAPITULO III

DISEÑO Y SIMULACION DE CONTROLADORES

3.1 Estrategia de control optimo cuadrático (LQR)	42
3.1.1 Breve introducción a controladores óptimos	42
3.1.2 Diseño de controlador LQR Proporcional Integral	45
3.1.3 Simulación del sistema de Control Optimo Proporcional Integral	48
3.2 Estrategia de control adaptivo	54
3.2.1 Breve introducción a controladores adaptivos	54
3.2.2 Diseño del controlador adaptivo autosintonizado	61
3.2.3 Simulación del sistema de control adaptivo autosintonizado	61
3.3 Diseño del controlador PID	63
3.3.1 Breve introducción a controladores PID	63
3.3.2 Diseño del controlador PID	65
3.3.3 Simulación del sistema de control PID	69

CONCLUSIONES	74
---------------------	----

ANEXO A

LISTADO DE PROGRAMAS	88
-----------------------------	----

BIBLIOGRAFIAS	105
----------------------	-----

PROLOGO

En el Capítulo I se hace una introducción al presente trabajo, formulándose el problema y un análisis del mismo, planteándose claramente el objetivo. En el Capítulo II se determina el modelo matemático de la planta, tanto en tiempo continuo como discreto y se hace la simulación del proceso en lazo abierto. En el Capítulo III se hace diseño y simulación de los controladores para las estrategias de control: Óptimo, Adaptivo y PID. A fin de comparar sus resultados. Finalmente se presentan las observaciones y conclusiones relevantes de este informe.

El objetivo de este informe es demostrar la validez de los métodos de control empleados para el control del Sistema de Suspensión de un bus, En tal sentido, se diseñan los sistemas de control óptimo, adaptivo y PID, cuyos resultados serán mostrados y comentados, permitiendo así observar el rendimiento de cada una de las estrategias de control moderno y clásico.

Quisiera expresar mi agradecimiento a los docentes del primer programa de actualización de conocimientos de la Universidad Nacional de Ingeniería por los interesantes temas expuestos y desarrollados, en especial a mi asesor el. M.Sc. Raúl Benites Saravia por su constante guía, aliento y apoyo brindado en el desarrollo de este informe de suficiencia.

CAPITULO I FORMULACION Y ANÁLISIS DEL PROBLEMA

1.1 Formulación del Problema

El sistema de suspensión es una de las partes más importantes de cualquier vehículo. Afecta principalmente, al confort de los pasajeros, al fácil manejo, a la maniobrabilidad, al control del vehículo y a la capacidad de carga. De éstos los más importantes son: el confort de los pasajeros y el control del vehículo. Este último influye de manera importante en la seguridad

La suspensión tiene cinco funciones básicas:

- 1.- Reducción de las fuerzas provocadas por la irregularidad del terreno.
- 2.- Control de la dirección del vehículo.
- 3.- Mantenimiento de la adherencia de los neumáticos a la carretera.
- 4.- Mantenimiento de una correcta alineación de las ruedas.
- 5.- Soporte de la carga del vehículo.

La oscilación del vehículo y su complejo comportamiento dinámico son causados principalmente, por el impacto de un obstáculo en el camino, aunque no debemos ignorar otras posibles causas, tales como: La influencia del entorno, la influencia del chofer, el trabajo desigual de la maquina, las deformidades de los neumáticos, etc. Es importante mencionar que los componentes activos solo cambian la fuerza vertical de reacción de la suspensión.

En resumen, el bus debe tener un sistema de suspensión que le permita a los ocupantes tener comodidad aún cuando el camino presente dificultad tales como

huecos, protuberancias y desniveles. Cuando el autobús experimente dichos disturbios, las oscilaciones no deberían ser grandes y deberían desaparecer rápidamente.



Figura 1.1 Bus a analizar

1.2 El Sistema de Suspensión

El sistema de suspensión pasiva del vehículo consiste tradicionalmente en un resorte y un amortiguador en paralelo, que permite soportar el peso del vehículo, darle estabilidad al vehículo y confort a los pasajeros. Los resortes almacenan la energía de las perturbaciones, mientras el amortiguador disipa la indicada energía. La constante de amortiguamiento del amortiguador incide en los criterios de estabilidad del vehículo y la comodidad de los pasajeros en el vehículo, tal como se muestra en la figura 1.2.

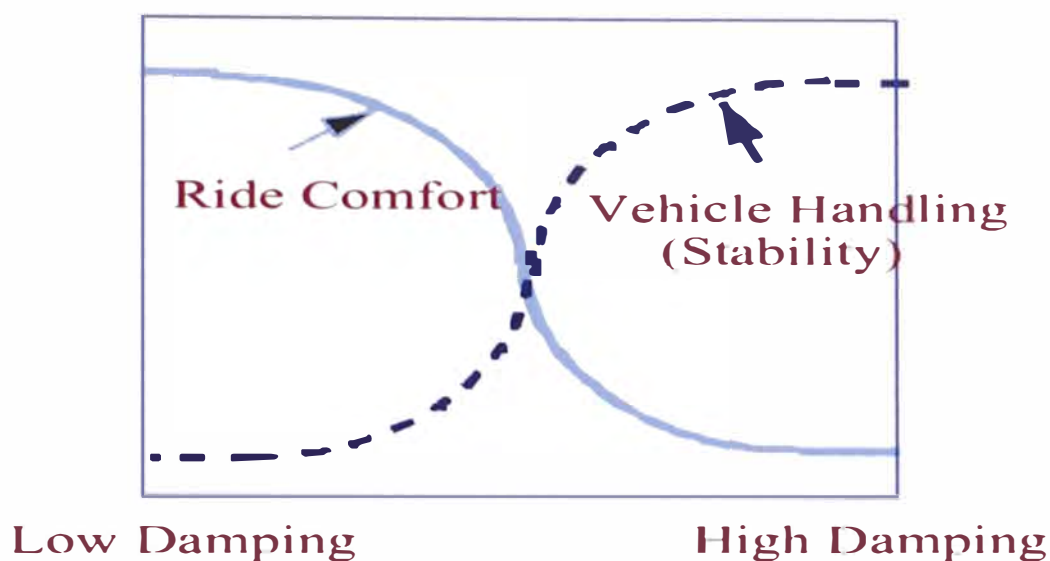


Figura 1.2. El Compromiso del Amortiguamiento.

Un amortiguamiento duro o rígido (un amortiguador con una constante de amortiguamiento grande) proporciona una buena estabilidad en el vehículo, manteniendo en contacto las llantas con el camino, pero transferirá mucho de los disturbios del camino al pasajero, causando un paseo incómodo. Un amortiguador suave o flexible (un amortiguador con una constante de amortiguamiento pequeño) perturbará a los pasajeros menos, pero se tendrá una baja la estabilidad del vehículo.

El diseño del sistema de suspensión del vehículo debe tomar un compromiso entre la comodidad de los pasajeros y la estabilidad del vehículo

1.3 Tipos de Sistemas de Suspensión

Las suspensiones tradicionales en los vehículos usan un amortiguador pasivo.

Los amortiguadores pasivos normalmente tienen un valor del amortiguamiento bilineal, tal como se muestra en Figura 1.3



Figura 1.3 Fuerza vs velocidad para un amortiguador pasivo

Para mejorar la performance se sugiere un sistema de suspensión activa, en donde el actuador aplica una fuerza para oponerse directamente a las vibraciones como se muestra en la figura 1.4

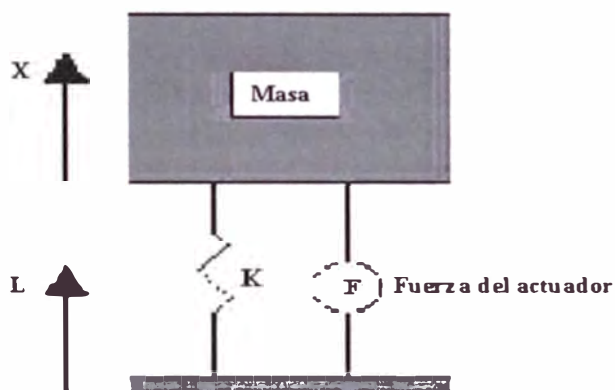


Figura 1.4 Sistema de Suspensión Activa

Tal sistema, sin embargo, requiere grandes cantidades de potencia, que lo hace impráctico para la mayoría de las aplicaciones. Adicionalmente la potencia que alimenta al sistema podría fallar y el vehículo se quedaría sin su amortiguador llevándolo a una condición inestable.

Debido a las dificultades encontradas usando una suspensión totalmente activa, es a menudo más práctico usar un sistema de suspensión semiactiva. El indicado sistema usa un elemento de amortiguamiento - que es diferente al amortiguador pasivo- que puede variar su amortiguamiento según se muestra en la figura 1.5

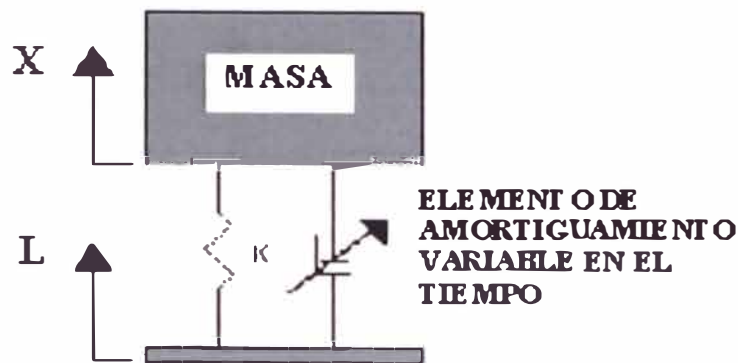


Figura 1.5 Sistema de Suspensión Semiactiva

El sistema de suspensión semiactiva puede proporcionar una performance parecida al sistema de suspensión activa, usando significativamente menos potencia. Además, el sistema de suspensión semiactiva puede proporcionar algunos niveles de amortiguamiento, aún cuando falle la potencia que alimenta al citado sistema de suspensión, haciéndolo más seguro que el sistema de suspensión activo

1.4 Análisis del Problema

1.4.1 Modelo del Sistema de Suspensión

El desarrollo del sistema de suspensión en este trabajo, se realiza para un "Sistema de Suspensión" utilizando el modelo de: "Un cuarto del Vehículo" (Figura 1.6.), en la que se ha considerado la suspensión de un cuarto de la masa del cuerpo

del Vehículo y de una rueda con la mitad de un eje, el modelo esta simplificado a un sistema dimensional Masa-Resorte - Amortiguador.

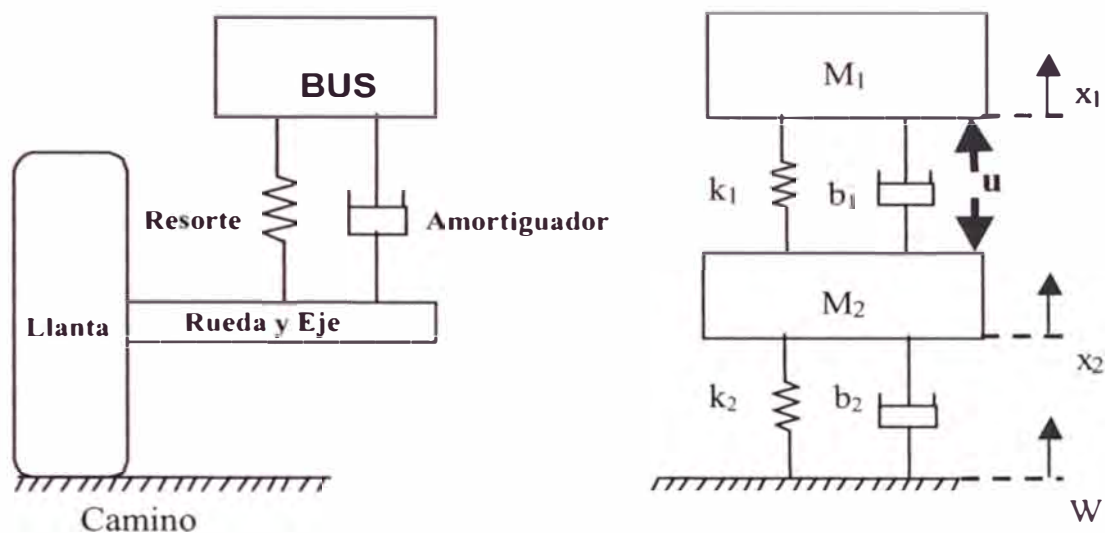


Figura 1.6: Modelo del Sistema de Suspensión $\frac{1}{4}$ del BUS

M_1 = Masa (con salto) del cuerpo del vehículo.

Puede modelarse como dos masas juntas conectadas por un resorte y un amortiguador.

k_1 = Constante del resorte del sistema de suspensión.

b_1 = Constante del amortiguador del Sistema de Suspensión.

M_2 = Masa efectiva (sin salto) de la rueda.

k_2 = Constante del resorte de la rueda y la llanta

b_2 = Constante del amortiguador de rueda.

x_1 = Desplazamiento vertical de la masa M_1 .

x_2 = Desplazamiento vertical de la masa M_2 .

W = Perturbación del Camino expresado en unidad de longitud.

u = Fuerza controlada permite un aumento de flexibilidad en el desarrollo de la Estrategia de control.

El actuador que permite generar la fuerza controlada u se conecta directamente entre el cuerpo del vehículo y el eje. Se tendrá un sistema de suspensión activo

En este modelo se considera que el desplazamiento vertical de la masa M_2 (sin salto), prácticamente sigue al obstáculo, es decir, se considera que X_2 será igual a W (W = altura ó profundidad del obstáculo).

1.4.2 Consideraciones del Modelo

En el desarrollo del sistema, se considera las siguientes condiciones:

- El bus está en movimiento rectilíneo a una velocidad constante.
- Las ruedas siempre están en contacto con el camino y en un solo punto.
- La perturbación del camino es el mismo en lado izquierdo y el derecho de las ruedas, y el bus es simétrico respecto al eje longitudinal.
- El coeficiente de distribución de masa aproximadamente es 1.

Aunque las características reales del sistema de la suspensión de k_1 , b_1 no son lineales (Figura 1.7 para b_1), se ha adoptado valores constantes para ellos, sin introducir algún error significativo, y de esta manera, se establece la linealización del modelo. Lo mismo ha sido establecido para k_2 y b_2 .

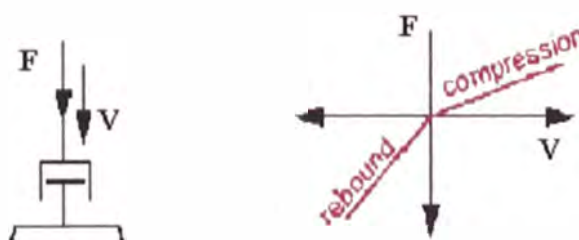


Figura 1.7 Característica no lineal del amortiguador

1.4.3 Dinámica Vertical del Vehículo

En la figura 1.8 se muestra las diferentes áreas que están relacionadas con el análisis de la dinámica vertical del vehículo ante ciertas situaciones, específicamente, ante el choque con un obstáculo. Con la dinámica vertical, se puede establecer:

- Ecuaciones de su comportamiento (modelo lineal).
- La comodidad del transporte y contacto con el camino.
- Los transitorios de las vibraciones verticales.

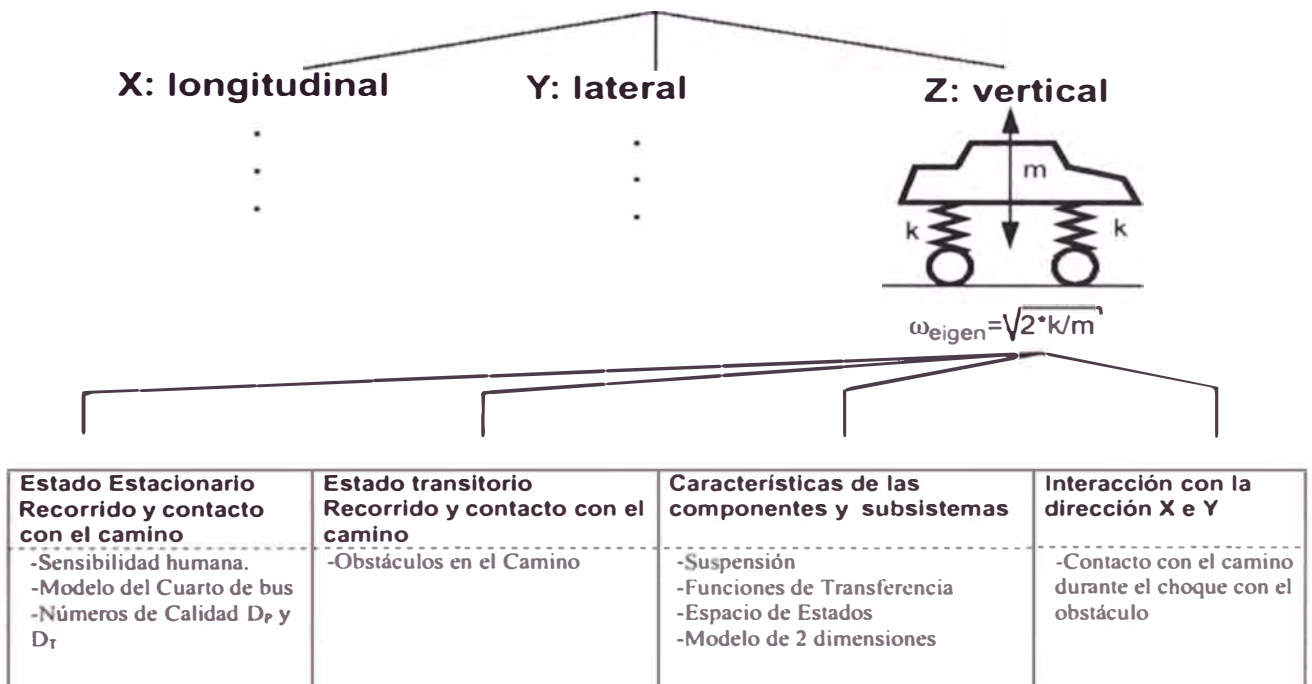


Figura 1.8 Elementos de interés para el análisis de la dinámica vertical

La desviación hacia el eje X e Y no se tomara en cuenta, porque hemos supuesto que el bus sigue el movimiento rectilíneo, después de pasar por la perturbación.

1.4.4 Confort de los pasajeros y buen diseño del vehículo

El propósito de calcular las respuestas para F_1 –fuerza que denota el desplazamiento vertical W de la parte baja de rueda debido a las irregularidades del

camino- y X_1 -desplazamiento vertical de la masa del cuerpo del vehiculo- es debido a que ellos, nos permiten establecer, la comodidad de los pasajeros y el buen diseño del vehículo tal como se muestra en la figura 1.9

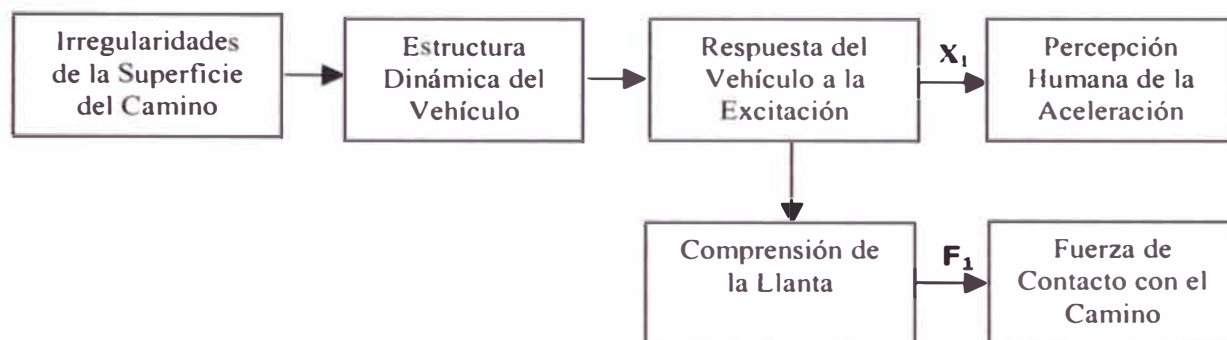


Figura 1.9 Significado de X_1 y F_1

El confort de los pasajeros esta asociada con la respuesta del vehiculo a las irregularidades del camino (obstaculos y baches) y movimientos de rebote del sistema de suspensión. Después de un obstaculo o bache el vehiculo sin el amortiguamiento de la suspensión experimentará una serie de oscilaciones de acuerdo a la frecuencia natural del sistema. El recorrido es percibido como confortable cuando la frecuencia natural está en el rango de 60 a 90 ciclos por minuto ó 1 Hz. a 1.5 Hz.

Uno de los parámetros que indica la calidad de una suspensión es el tiempo de respuesta. Cuanto menor sea éste, más rápidamente será capaz de reaccionar la suspensión ante una irregularidad del terreno, un frenazo o un giro brusco. El tiempo de respuesta nos indica el ancho de banda. Si éste abarca un rango de frecuencias de hasta 3 ó 5 Hz. el sistema de suspensión se denomina de baja frecuencia (Low Bandwidth Systems), mientras que si el rango abarca frecuencias más elevadas, hasta 10 ó 12 Hz., se denomina de alta frecuencia (High Bandwith Systems).

1.5 Modelo final de diseño

Considerando la teoría desarrollada hasta el momento, el sistema de suspensión a diseñar se muestra en la figura 1.10.

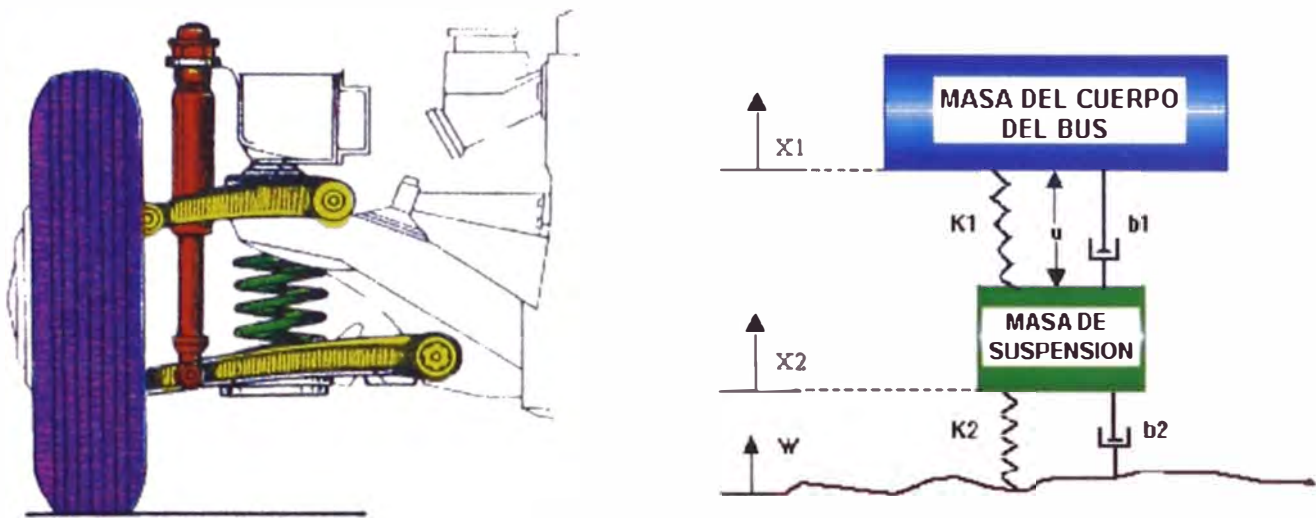


Figura 1.10 Sistema de suspensión, usando el modelo de “un cuarto del vehículo”

Donde:

x_1 = Desplazamiento de la masa del cuerpo del Bus al producirse la perturbación.

x_2 = Desplazamiento de la masa de suspensión.

w = Perturbación.

U = Fuerza de control entre las masas M_1 y M_2 (eje)

1.6 Requerimiento de funcionamiento

El diseño se implementará para lograr el objetivo de control siguiente:

La salida del proceso $Y_1 = (X_1 - X_2)$ -referencia nula- no debe presentar sobre impulsos mayores que el 10% -10 mm-, y luego de alrededor de 20 segundos (tiempo de establecimiento), las oscilaciones originadas por un disturbio escalón de 10 cm, prácticamente deben desaparecer.

Los siguientes parámetros del bus tienen los siguientes valores:

$$M_1 = 2250 \text{ Kg. (Masa -con salto- del cuerpo del vehículo)}$$

$$k_1 = 72000 \text{ N/m (Constante del resorte del sistema de suspensión.)}$$

$$b_1 = 315 \text{ Ns/m (Constante del amortiguador del Sistema de Suspensión.)}$$

$$M_2 = 290 \text{ Kg, (Masa efectiva -sin salto- de la rueda).}$$

$$k_2 = 450000 \text{ N/m (Constante del resorte de la rueda).}$$

$$b_2 = 13520 \text{ Ns/m (Constante del amortiguador de la rueda) .}$$

CAPITULO II MODELADO DEL PROCESO DE SUSPENSION DE UN BUS

2.1 Modelo continuo

El modelo continuo es aquel que permite modelar el comportamiento de la planta ó proceso a analizar, sobre un intervalo continuo de tiempo.

En esta sección se modela el proceso o planta mediante los métodos de: “Espacio de Estados” y “Función de Transferencia”. El uso de uno u otro método será de acuerdo a la dificultad del problema, sin embargo, se menciona que en la mayoría de los problemas el método de “Espacio de Estados” es mucho más simple que el método de “Función de Transferencia”, ya que, este método implica resolver la ecuación matricial de la forma:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}$$

la cual es posible resolverla y analizarla fácilmente, especialmente cuando se tiene múltiples variables de entradas y/o salidas.

2.1.1 Sistema de suspensión de un bus

El diseño de un sistema de la suspensión automático para un bus resulta ser un problema de control interesante. El sistema de la suspensión se diseña utilizando el modelo de: “Un cuarto del Vehículo” que se describió en la sección 1.3. (el cual considera, una de las cuatro ruedas), a fin de simplificar el problema y tener un sistema dimensional “masa-resorte-amortiguador”. Un diagrama de este sistema se muestra en la figura 2.1

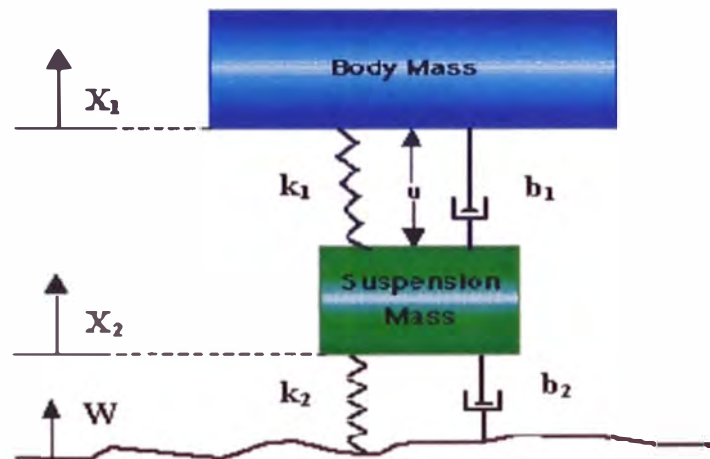


Figura 2.1 Modelo del Sistema de 1/4 del Bus

Donde:

- M_1 = Masa del cuerpo que soporta al sistema de suspensión.
- b_1 = Constante de amortiguamiento del sistema de suspensión
- k_1 = Constante del resorte del sistema de suspensión
- M_2 = Masa efectiva del sistema de suspensión (rueda).
- k_2 = Constante del resorte de la rueda.
- b_2 = Constante de amortiguamiento de la rueda.

- u = Fuerza de control.

Dado que, $X_1 - W$, es muy difícil de medir y la deformación de la llanta, $X_2 - W$, es despreciable entonces:

$$X_1 - X_2 \approx X_1 - W \quad (2.1)$$

2.1.2 Diagrama de cuerpo libre y leyes de Newton

Considerando el diagrama del cuerpo libre de nuestro modelo mostrado en la figura 2.2, se plantean las siguientes ecuaciones :

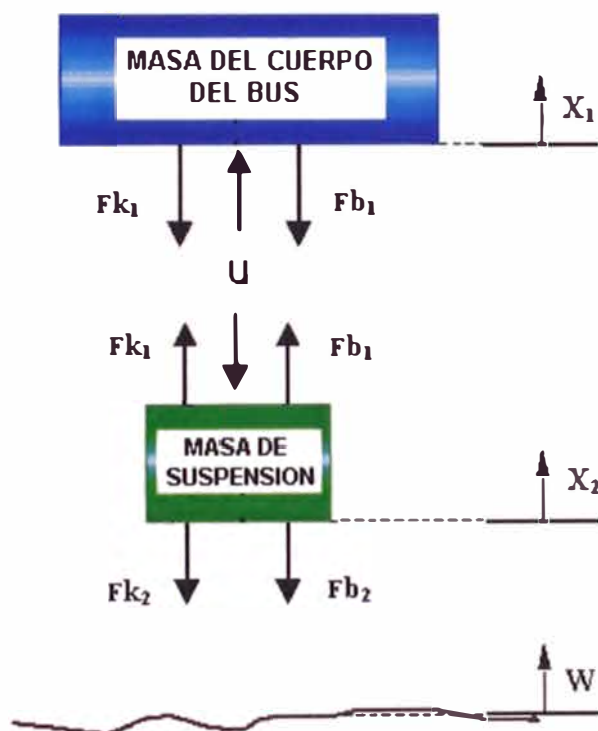


Figura 2.2 Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan en el Sistema de Suspensión

Se asume que $X_1 = 0$ y $X_2 = 0$ para el estado estacionario de equilibrio, de modo que se omite el efecto de la gravedad en las ecuaciones del diagrama de cuerpo libre que se analizan a continuación.

Cálculo de las fuerzas que actúan en la masa M_1 :

En la figura 2.3, se muestran las fuerzas actuantes sobre la masa M_1

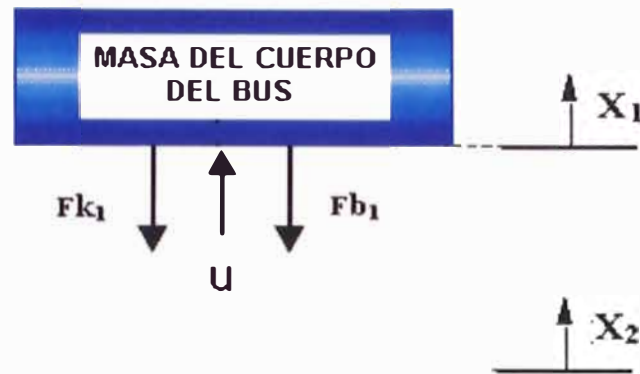


Figura 2.3 Fuerzas que actúan en la masa de salto M_1

Luego del diagrama de cuerpo libre de la figura 2.3, y aplicando la Segunda Ley de Newton a dicha figura se obtiene:

$$\sum F_y = M_1 A_{y1}$$

Entonces:

$$F_{k1} + F_{b1} + u = M_1 \ddot{X}_1 \quad (2.2)$$

Donde:

$$\begin{aligned} F_{k1} &= -K_1 (X_1 - X_2) \\ F_{b1} &= -b_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.3) en (2.2):

$$-K_1 (X_1 - X_2) - b_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) + u = M_1 \ddot{X}_1 \quad (2.4)$$

Donde:

$$\ddot{X}_1 = \frac{-b_1}{M_1} (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - \frac{-k_1}{M_1} (X_1 - X_2) + \frac{u}{M_1} \quad (2.5)$$

Cálculo de las fuerzas que actúan en la masa M_2 :

En la figura 2.4 se muestran las fuerzas actuantes en la masa M_2

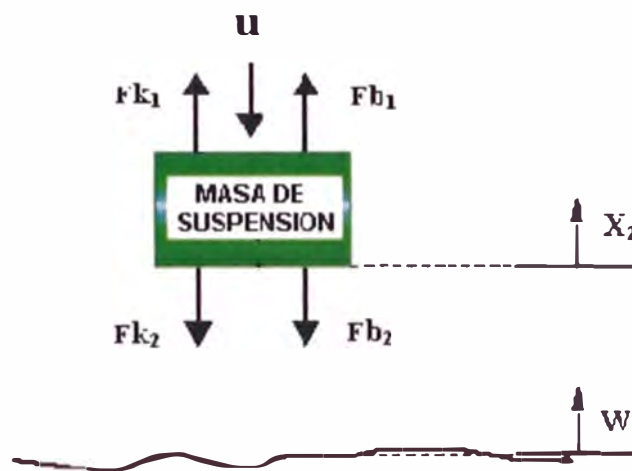


Figura 2.4 Fuerzas que actúan en la masa sin salto

Aplicando la Segunda Ley de Newton a dicha figura se obtiene:

$$\sum F_y = M_2 A_{y2}$$

$$Fk_2 + Fb_2 - Fk_1 - Fb_1 - u = M_2 \times \ddot{X}_2 \quad (2.6)$$

Donde:

$$Fk_2 = K_2(W - X_2) \quad (2.7)$$

$$Fb_2 = b_2(\dot{W} - \dot{X}_2)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.3) y (2.7) en (2.6)

$$M_2 \ddot{X}_2 = \left[K_2(W - X_2) + b_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + \left[K_1(X_1 - X_2) + b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - u \right] \right] \quad (2.8)$$

Finalmente:

$$\ddot{X}_2 = \frac{1}{M_2} \left[K_2(W - X_2) + b_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + \left[K_1(X_1 - X_2) + b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - u \right] \right] \quad (2.9)$$

2.1.3 Método en el espacio de estados

La representación del espacio de estados de un sistema es normalmente más fácil de derivar de las “ecuaciones diferenciales” que del método de la “transformada de laplace”. Las dificultades surgen cuando las derivadas de las variables de entrada aparecen en las ecuaciones diferenciales, implicando más operaciones algebraicas.

Rescribiendo las ecuaciones (2.5) y (2.9).

$$\ddot{X}_1 = \frac{-b_1}{M_1} (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - \frac{-k_1}{M_1}(X_1 - X_2) + \frac{u}{M_1} \quad (2.10)$$

$$\ddot{X}_2 = \frac{1}{M_2} \left[K_2(W - X_2) + b_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + \left[K_1(X_1 - X_2) + b_1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - u \right] \right] \quad (2.11)$$

Notar que la derivada \dot{W} , aparece en la ecuación junto a \ddot{X}_2

Para que la representación en el espacio de estado sea válida, la derivada de todos los estados debe estar en términos de las variables de entrada y de estados, pero por el momento no se ha determinado que variables de estado son buenas para utilizar. Ahora, de las ecuaciones (2.10) y (2.11), se considera a X_1 , como la primera variable de estados; y a \dot{X}_1 la segunda variable de estado.

Ahora, para facilitar los cálculos consideramos apropiadamente a $Y_1 = X_1 - X_2$ como la tercera variable de estado, y para determinar la cuarta variable de estado, primero desarrollaremos algebraicamente las ecuaciones (2.10) y (2.11) considerando para ello las variables de estado elegidas, con lo que tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\ddot{X}_1 = -b_1/M_1(\dot{Y}_1) - k_1/M_1(Y_1) + \frac{u}{M_1} \quad (2.12)$$

$$\ddot{X}_2 = b_1/M_2(\dot{Y}_1) + k_1/M_2(Y_1) + b_2/M_2(\dot{W} - \dot{X}_2) + k_2/M_2(W - X_2) - \frac{u}{M_2} \quad (2.13)$$

Restando (2.13) de (2.12) para conseguir una expresión para \ddot{Y}_1 tenemos:

$$\ddot{X}_1 - \ddot{X}_2 = \ddot{Y}_1 = -\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2}\right)\dot{Y}_1 - \left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)Y_1 - \frac{b_2}{m_2}(\dot{W} - \dot{X}_2) - \frac{k_2}{m_2}(W - X_2) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u \quad (2.14)$$

Dado que no se puede usar segunda derivada en la representación del espacio de estado, integramos esta ecuación para conseguir \dot{Y}_1

$$\dot{Y}_1 = -\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2}\right)Y_1 - \frac{b_2}{m_2}(W - X_2) + \int \left(-\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2}\right)Y_1 - \frac{k_2}{m_2}(W - X_2) + \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)u\right)dt \quad (2.15)$$

Ninguna derivada de la entrada aparece en esta ecuación, y \dot{Y}_1 es expresada solamente en términos de las variables de estados y en las entradas (donde $X_2 = X_1 - Y_1$), excepto para la integral. Escogiendo la expresión que está dentro de la integral igual a Y_2 , como la cuarta variable de estado, la ecuación de estados correspondiente es:

$$\dot{Y}_2 = -\left(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_1}{M_2}\right)Y_1 - \frac{k_2}{M_2}(W - X_2) + \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)u \quad (2.16)$$

Sustituyendo $X_2 = X_1 - Y_1$ en la ecuación (2.16) se tiene:

$$\dot{Y}_2 = -\left(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_1}{M_2}\right)Y_1 - \frac{k_2}{M_2}(W - X_1 + Y_1) + \left(\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}\right)u \quad (2.17)$$

Sustituyendo $X_2 = X_1 - Y_1$ en (2.15), se obtiene la ecuación de estado de \dot{Y}_1 :

$$\dot{Y}_1 = -\left(\frac{b_1}{M_1} + \frac{b_1}{M_2}\right)Y_1 - \frac{b_2}{M_2}(W - X_1 + Y_1) + Y_2 \quad (2.18)$$

Luego, sustituyendo la ecuación (2.18) en la ecuación (2.12) y desarrollando tenemos:

$$\ddot{X}_1 = (b_1 b_2 / M_1 M_2) X_1 + (b_1 / M_1 (b_1 / M_1 + b_1 / M_2 + b_2 / M_2) - k_1 / M_1) Y_1 - (b_1 / M_1) Y_2 + (b_1 b_2 / M_1 M_2) W \quad (2.19)$$

Por lo tanto las variables de estado son X_1 , \dot{X}_1 , Y_1 , y Y_2 y la forma matricial de las ecuaciones de estado anteriores es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ y_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-b_1 b_2}{M_1 M_2} & 0 & (\frac{b_1}{M_1} (\frac{b_1}{M_1} + \frac{b_1}{M_2} + \frac{b_2}{M_2}) - (\frac{k_1}{M_1})) & \frac{-b_1}{M_1} \\ \frac{b_2}{M_2} & 0 & -(\frac{b_1}{M_1} + \frac{b_1}{M_2} + \frac{b_2}{M_2}) & 1 \\ \frac{k_2}{M_2} & 0 & -(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_1}{M_2} + \frac{k_2}{M_2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & \frac{b_1 b_2}{M_1 M_2} \\ 0 & \frac{-b_2}{M_2} \\ (\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}) & \frac{-k_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

2.1.4 Método de función de transferencia

En la sección 2.1.2 se estableció que las ecuaciones dinámicas del sistema de suspensión considerado son:

$$\ddot{X}_1 = \frac{-b_1}{M_1} (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - \frac{-k_1}{M_1} (X_1 - X_2) + \frac{u}{M_1} \quad (2.22)$$

$$\ddot{X}_2 = \frac{1}{M_2} \left[K_2 (W - X_2) + b_2 (\dot{W} - \dot{X}_2) + \left[K_1 (X_1 - X_2) + b_1 (\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - u \right] \right] \quad (2.23)$$

Se asume, que todas las condiciones iniciales son ceros, para que estas ecuaciones representen la situación cuando la rueda del bus está encima de una obstáculo ó en un hueco.

Las ecuaciones dinámicas anteriores pueden ser expresadas en la forma de funciones de transferencia. Para lo cual se aplica la Transformada de Laplace. A dichas ecuaciones. Por tanto la derivación de las ecuaciones anteriores de funciones de función de transferencia $G(S)$; de salidas, X_1-X_2 ; y de entradas $W(s)$ y $U(s)$, son:

$$\begin{aligned} (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) X_1(s) - (b_1 s + k_1) X_2(s) &= U(s) \\ -(b_1 s + K_1) X_1(s) + (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) X_2(s) &= (b_2 s + K_2) W(s) - U(s) \end{aligned}$$

Las cuales agrupadas matricialmente resultan en:

$$\begin{bmatrix} (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) & -(b_1 s + K_1) \\ -(b_1 s + K_1) & (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(s) \\ (b_2 s + K_2) W(s) - U(s) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

$$A = \begin{bmatrix} (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) & -(b_1 s + K_1) \\ -(b_1 s + K_1) & (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) & -(b_1 s + K_1) \\ -(b_1 s + K_1) & (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) \end{bmatrix}$$

Hallando el determinante:

$$\Delta = (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) \cdot (M_2 s^2 + (b_1 + b_2) s + (K_1 + K_2)) - (b_1 s + K_1) \cdot (b_1 s + K_1)$$

Encontrando la matriz inversa de la matriz A y luego multiplicando dicha matriz al lado derecho e izquierdo de la ecuación (2.23), se tiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (M_2 s^2 + (b_1 + b_2)s + (K_1 + K_2)) & (b_1 s + K_1) \\ (b_1 s + K_1) & (M_1 s^2 + b_1 s + K_1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ (b_2 s + K_2)W(s) - U(s) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Multiplicando las matrices del lado derecho de la ecuación (2.25) y reagrupando términos en función a las variables de entrada se obtiene:

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} (M_2 s^2 + b_2 s + K_2) & (b_1 b_2 s^2 + (b_1 K_2 + b_2 K_1)s + K_1 K_2) \\ -M_1 s^2 & (M_1 b_2 s^3 + (M_1 K_2 + b_1 b_2)s^2 + (b_1 K_2 + b_2 K_1)s + K_1 K_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U(s) \\ W(s) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Cuando se desea calcular la función de transferencia sólo para la entrada $U(s)$, fijamos $W(s)=0$, y se obtiene la función de transferencia $G_1(s)$ que se detalla a continuación:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2 s + K_2}{\Delta} \quad (2.27)$$

En forma similar se obtiene la función de transferencia para la entrada $W(s)$, fijando $u(s)=0$, obteniéndose la función de transferencia $G_2(s)$ que se detalla a continuación:

$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1 b_2 s^3 - M_1 K_2 s^2}{\Delta} \quad (2.28)$$

2.1.5 Simulación del proceso en lazo abierto en tiempo continuo

En la tabla 2.1 y 2.2 se describen los parámetros del sistema de suspensión y las matrices y vectores de estados

SISTEMA DE SUSPENSION DE UN BUS PARAMETROS		
M_1	Kg	2250
M_2	Kg	290
k_1	Nm^{-1}	72000
k_2	Nm^{-1}	450000
b_1	Nsm^{-1}	315
b_2	Nsm^{-1}	13520

TABLA 2.1

Matrices de tiempo		Descripción
Continuo	Discreto	
A(t)	G(k)	Matriz de estado 4x4
B(k)	H(k)	Matriz de entrada 4x2
C (t)	C(k)	Matriz de salida 1x4
D(t)	D(k)	Matriz de transmisión directa 1x2
X(t)	X(k)	Vector de estado 4x1
Y(t)	Y(k)	Vector de salida 1x4
U(t),U(k) vector entrada 2x1 componentes:		
U(t)	U(k)	-fuerza de control-
W(t)	W(k)	-disturbio-

TABLA 2.2

Según las ecuaciones encontradas en la sección 2.1.3 (ecuaciones 2.20 y 2.21)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-b_1 b_2}{M_1 M_2} & 0 & (\frac{b_1}{M_1} (\frac{b_1}{M_1} + \frac{b_1}{M_2} + \frac{b_2}{M_2}) - (\frac{k_1}{M_1})) & \frac{-b_1}{M_1} \\ \frac{b_2}{M_2} & 0 & -(\frac{b_1}{M_1} + \frac{b_1}{M_2} + \frac{b_2}{M_2}) & 1 \\ \frac{k_2}{M_2} & 0 & -(\frac{k_1}{M_1} + \frac{k_1}{M_2} + \frac{k_2}{M_2}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M_1} & \frac{b_1 b_2}{M_1 M_2} \\ 0 & \frac{-b_2}{M_2} \\ (\frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}) & \frac{-k_2}{M_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dot{x}_1 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ W \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

De las ecuaciones matriciales (2.29) y (2.30) se identifican las matrices A, B, C y D, que se expresa como sistema en la ecuación (2.31).

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \end{aligned} \quad (2.31)$$

El programa A1 en código MATLAB nos permite obtener los valores de las matrices del proceso en tiempo continuo, así como la respuesta del proceso a un escalón unitario - El listado completo de dicho programa se encuentra en el Anexo A. A continuación se describe los valores de la matrices A, B, C y D calculadas mediante el Programa A1, Asimismo se detallan los resultados del indicado programa:

Resultados : Numéricos

» % RESPUESTAS AL ESCALON >> Simulación del proceso en tiempo continuo>>

Valores de las Matrices A,B, C y D

Matriz A

A =

1.0e+003 *

0	0.0010	0	0
-0.0065	0	-0.0253	-0.0001
0.0466	0	-0.0478	0.0010
1.5517	0	-1.8320	0

Matriz B

B =

1.0e+003 *

0	0
0.0000	0.0065
0	-0.0466
0.0000	-1.5517

Matriz C

C =

0	0	1	0
---	---	---	---

Matriz D

D =

0	0
---	---

Es Completamente controlable si $r_{AB}=4$

$r_{AB} =$

4

Es Completamente Observable si $r_{AC}=4$

$r_{AC} =$

4

Los Polos del Sistema de Suspensión en lazo abierto

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
------------	---------	---------------

-1.10e-001 + 5.25e+000i	2.09e-002	5.25e+000
-1.10e-001 - 5.25e+000i	2.09e-002	5.25e+000
-2.38e+001 + 3.51e+001i	5.61e-001	4.24e+001
-2.38e+001 - 3.51e+001i	5.61e-001	4.24e+001

frecuencia

f0 =

6.7533
6.7533
0.8358
0.8358

Los Eigenvalores del Sistema de Suspensión en lazo abierto
eigA =

-23.8136 +35.1197i
-23.8136 -35.1197i
-0.1099 + 5.2504i
-0.1099 - 5.2504i

Las Funciones de Transferencias del Sistema de Suspensión

Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto

num/den =

$$\frac{7.1054e-015 s^3 + 0.0038927 s^2 + 0.02072 s + 0.68966}{s^4 + 47.8469 s^3 + 1838.5269 s^2 + 1709.1034 s + 49655.1724}$$

Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto

num/den =

$$\frac{-46.6207 s^3 - 1551.7241 s^2 - 9.3223e-012 s + 1.3097e-010}{s^4 + 47.8469 s^3 + 1838.5269 s^2 + 1709.1034 s + 49655.1724}$$

Función de transferencia F.T. 1

Zero/pole/gain:

$$7.1054e-015 (s+5.479e011) (s^2 + 5.323s + 177.2)$$

$$(s^2 + 0.2197s + 27.58) (s^2 + 47.63s + 1800)$$

Función de transferencia F.T. 2

Zero/pole/gain:

$$\frac{-46.6207 (s+33.28) s s}{(s^2 + 0.2197s + 27.58) (s^2 + 47.63s + 1800)}$$

Los Ceros de la Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto

ans =

$$1.0e+011 *$$

$$-5.4785$$

$$-0.0000 + 0.0000i$$

$$-0.0000 - 0.0000i$$

Los Polos de la Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto

ans =

$$-23.8136 + 35.1197i$$

$$-23.8136 - 35.1197i$$

$$-0.1099 + 5.2504i$$

$$-0.1099 - 5.2504i$$

Los Ceros de la Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto

ans =

$$-33.2840$$

$$-0.0000$$

$$0.0000$$

Los Polos de la Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto

ans =

$$-23.8136 + 35.1197i$$

$$-23.8136 - 35.1197i$$

$$-0.1099 + 5.2504i$$

$$-0.1099 - 5.2504i$$

Resultados :Gráficos

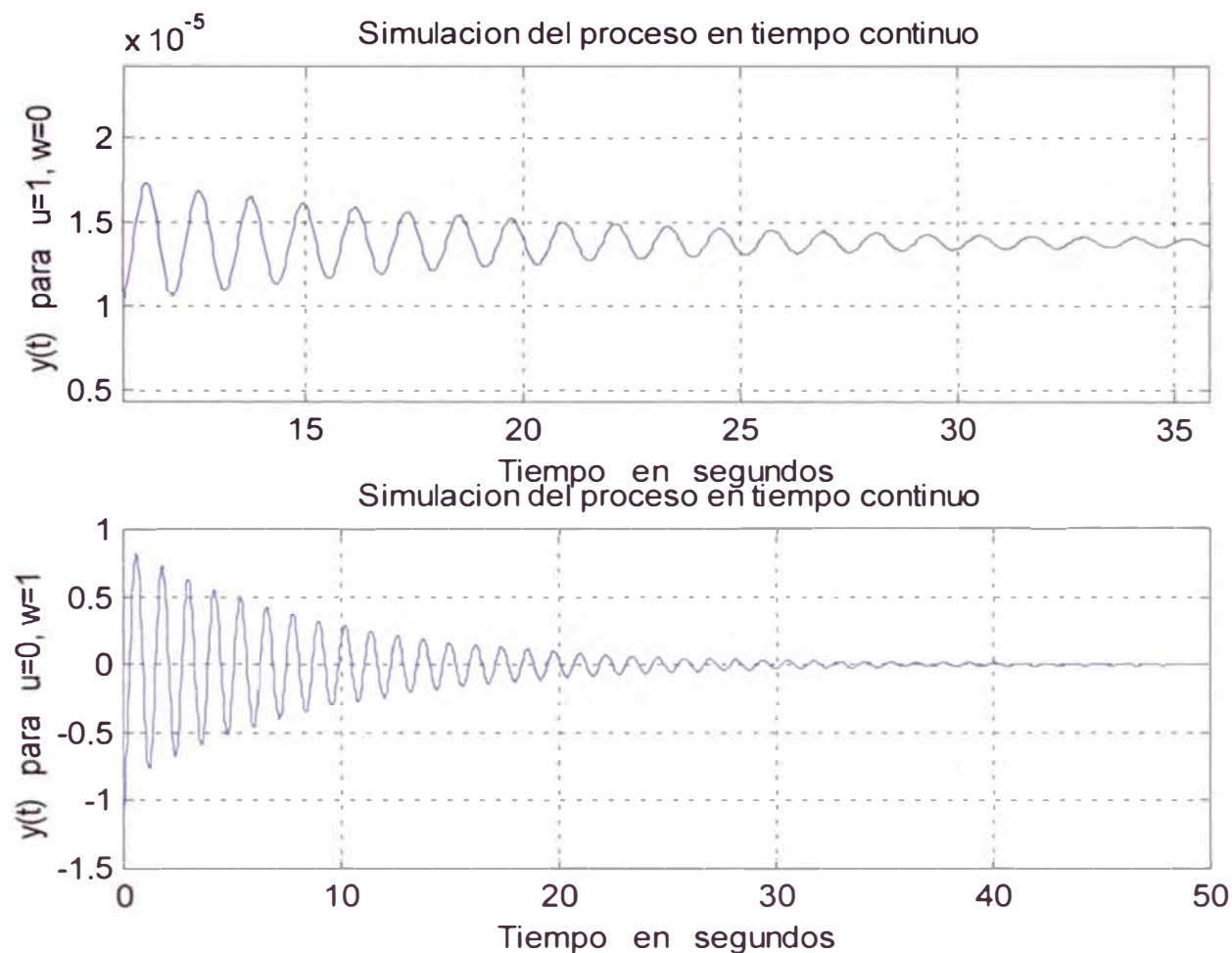


Figura 2.5 Salida $Y_1=x_1-x_2$ en lazo abierto

De la figura 2.5, para el caso $y(t)$, $u=1$, $W=0$, el sistema está sub amortiguado, los pasajeros que están en el bus sienten una pequeña vibración y el error en estado estacionario es de 0.013 mm, que tomo 47 segundos en llegar a tomar el valor estacionario que no es aceptable, por lo se tiene que mejorar el tiempo de respuesta agregando al sistema un controlador. De idéntica forma, para el caso $y(t)$, $u=0$, $W=1$, se observa que el bus oscilará por un tiempo largo, los pasajeros no estarán cómodos con tal oscilación. El gran rebase y el tiempo de establecimiento lento causará daño al Sistema de Suspensión.

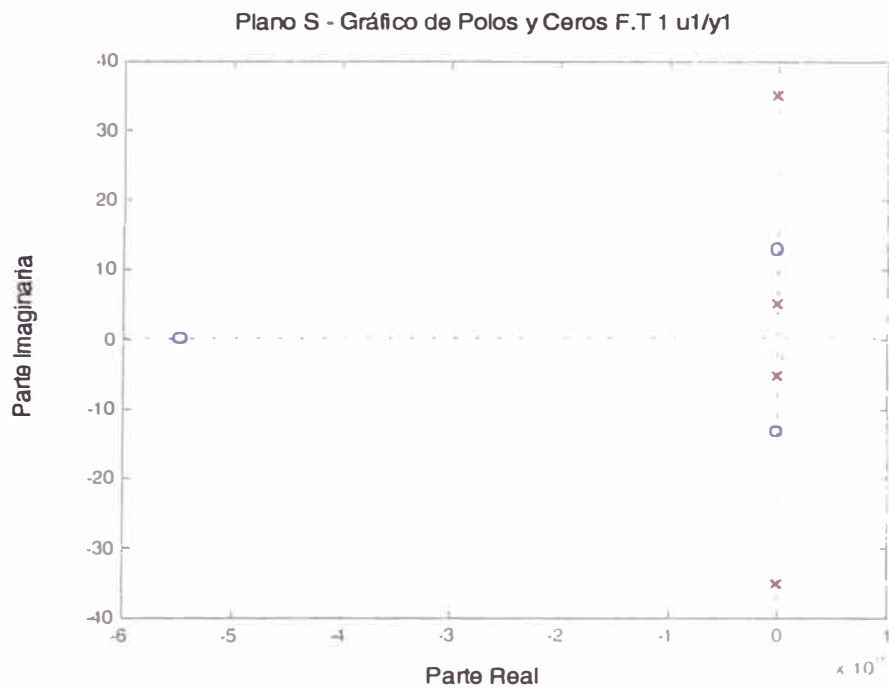


Figura 2.6 Polos y Ceros F.T 1 $u/(x_1-x_2)$ en lazo abierto

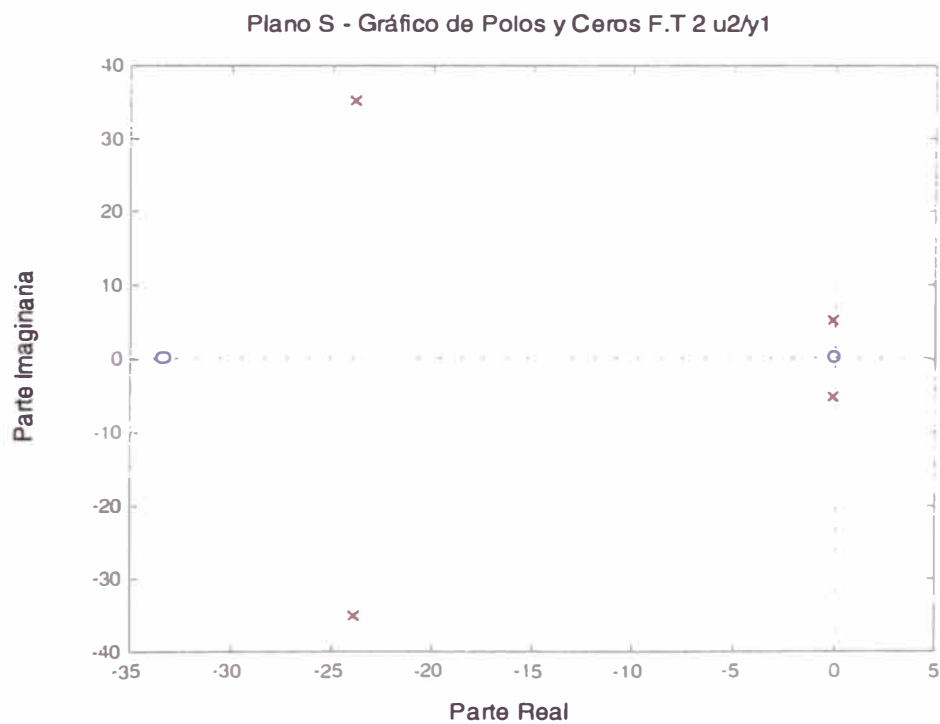
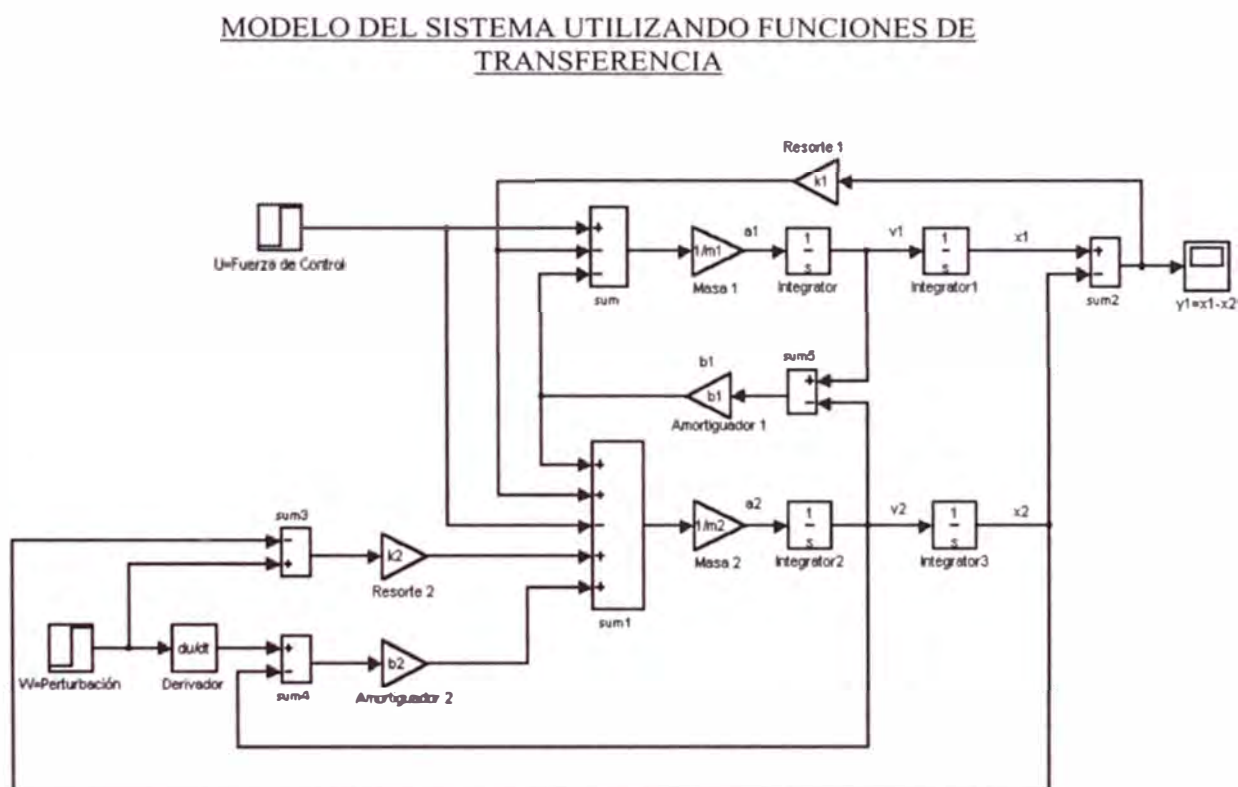


Figura 2.7 Polos y Ceros F.T 2 $w/(x_1-x_2)$ en lazo abierto

De los gráficos 2.6 y 2.7 se observa que los polos en ambas funciones de transferencia tiene cada uno dos polos complejos conjugados con la parte real negativa que implica un comportamiento del sistema estable. Además, dependiendo de la magnitud de la parte real -de los polos conjugados- el modo de respuesta puede describirse como rápido -cuando la magnitud o el valor absoluto es grande- o lento -cuando la magnitud es pequeña.

De otro lado, se concluye que el sistema es de tipo 0 al no haber polos en el origen. Adicionalmente en la Figura 2.8 se tiene el diagrama de bloques del sistema de Suspensión del Bus elaborado en Simulink para el sistema de lazo abierto



La respuesta y_1 esta en cm):

Figura 2.8 Sistema de Suspensión - Simulink

En la Figura 2.9 se muestra la respuesta del Sistema en lazo abierto utilizando el Simulink

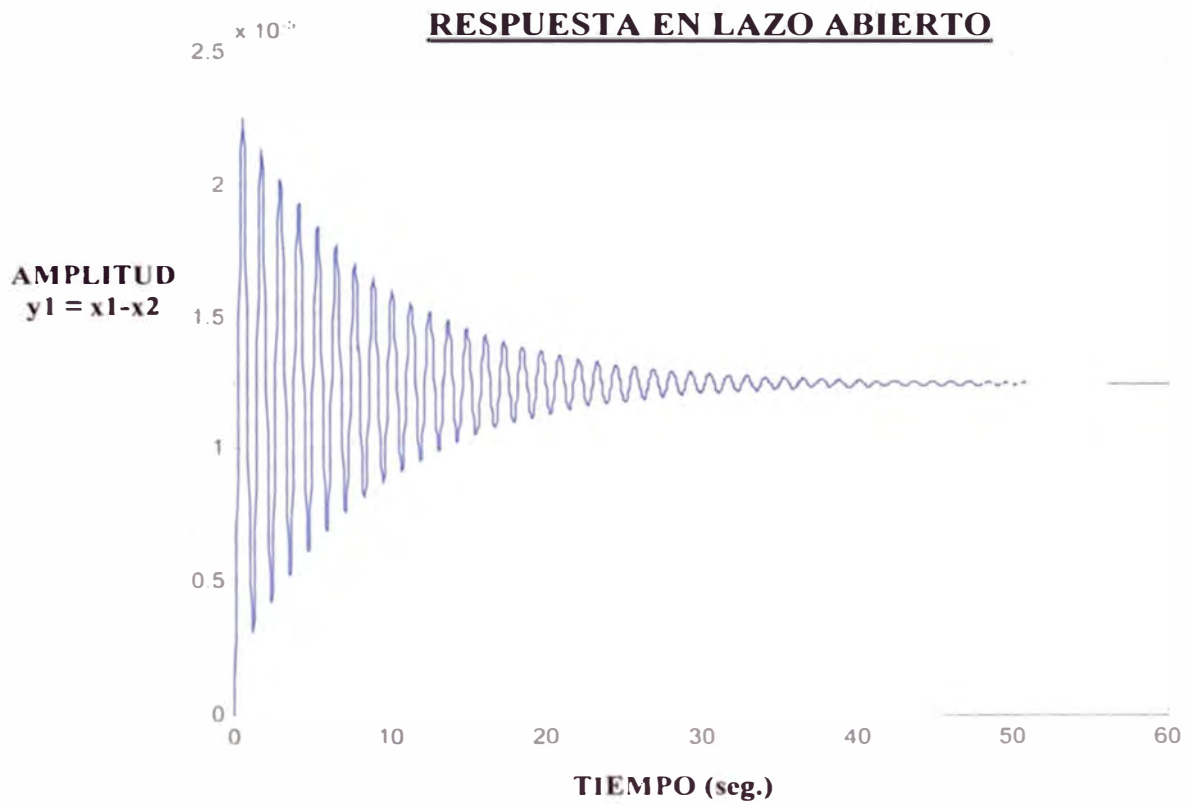


Figura 2.9 Respuesta del Sistema $W=1$, $u=0$

2.2 Modelo discreto

La tendencia actual de controlar sistemas en forma digital se debe fundamentalmente a la disponibilidad de computadoras digitales de bajo costo y a las ventajas de trabajar con señales digitales.

2.2.1 Tipos de señales

A fin de tener una idea cabal del tiempo continuo y discreto se hace a continuación una descripción de los diferentes tipos de señales que se tiene:

1. **Señal analógica en tiempo continuo:** Su amplitud y tiempo pueden adoptar un intervalo continuo de valores.
2. **Señal cuantificada en tiempo continuo:** Su amplitud solo puede adoptar valores discretos, mientras que el tiempo valores continuos.
3. **Señal en tiempo discreto:** Definida solo en valores discretos de tiempo.
 - 3.1 **Señal de datos muestreados:** La amplitud puede adoptar valores en un cierto intervalo continuo.
 - 3.2 **Señal digital:** La amplitud es cuantificada.

En el control de plantas o procesos con controladores digitales se requiere la conversión de estos tipos de señales. La operación que transforma señales de tiempo continuo en señales de tiempo discreto se denomina muestreo o discretización. La operación inversa se denomina retención de datos.

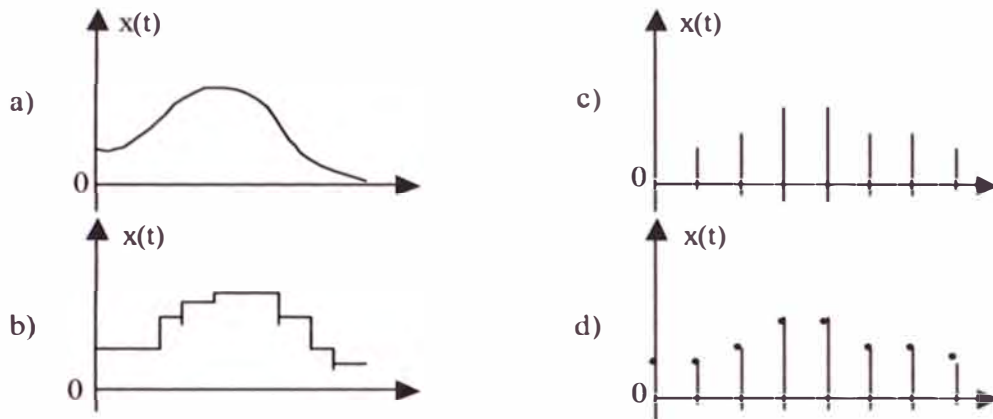


Figura 2.10 a) Señal analógica en tiempo continuo; b) señal cuantificada en tiempo continuo; c) señal de datos muestreados; d)

2.2.2 Análisis en el espacio de estado de tiempo discreto

2.2.2.1 Ecuaciones en el espacio de estado

Para sistemas lineales de tiempo discreto *variantes* en el tiempo se tienen la siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= G(k)x(k) + H(k)u(k) \\ y(k) &= C(k)x(k) + D(k)u(k) \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (2.33)$$

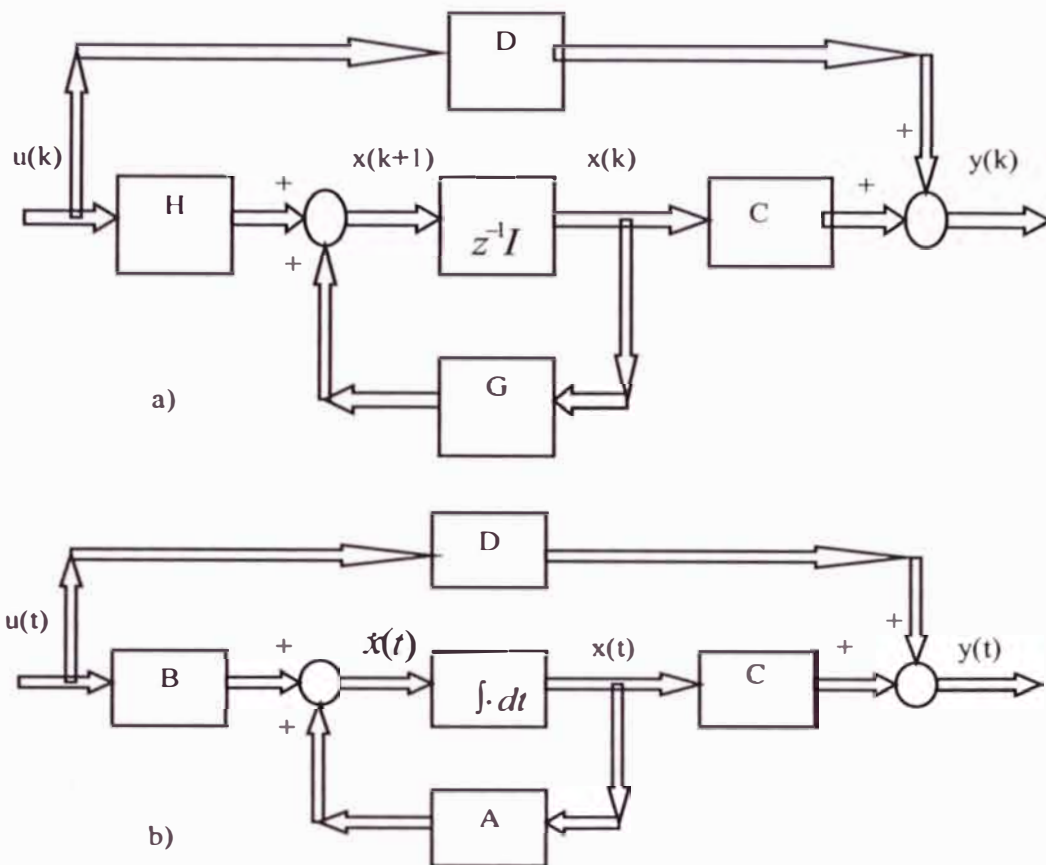


Figura 2.11 a) Sistema de control lineal en tiempo discreto invariante en el tiempo; b) sistema de control lineal en tiempo continuo invariante en el tiempo.

Para sistemas lineales de tiempo discreto *invariantes* en el tiempo donde:

$x(k)$ = vector de estado $n \times 1$, $H(k)$ = matriz de entrada $n \times r$
 $y(k)$ = vector de salida $m \times 1$, $C(k)$ = matriz desalida $m \times n$
 $u(k)$ = vector de entrada $r \times 1$, $D(k)$ = matriz de transmisión directa $m \times r$
 $G(k)$ = matriz de estado $n \times n$

2.2.2.2 Representaciones en el espacio de estado

Dado el sistema descrito por:

$$\begin{aligned}
 y(k) + a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + \dots + a_n y(k-n) \\
 = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \dots + b_n u(k-n)
 \end{aligned}
 \tag{2.34}$$

Y su respectiva función de transferencia:

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.35)$$

Existen muchas formas de representarlas en el espacio de estado, entre las cuales están:

1. Forma canónica controlable
2. Forma canónica observable
3. Forma canónica diagonal
4. Forma canónica de Jordán.

• **Forma canónica Controlable:** Considerando la ecuación de estado y de salida en tiempo discreto

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Du(k) \end{aligned} \quad (2.36)$$

pueden representarse en su forma canónica controlable, dada por

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k+1) \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_{n-1}(k) \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) \quad (2.37)$$

$$y(k) = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + b_0 u(k) \quad (2.38)$$

2.2.2.3 Matriz de función de transferencia pulso

Dado el sistema discreto descrito por la ecuación (2.36), la transformada z correspondiente es:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= GX(z) + HU(z) \\ Y(z) &= CX(z) + DU(z) \end{aligned}$$

Suponiendo condiciones iniciales cero $x(0)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} X(z) &= (zI - G)^{-1} HU(z) \\ Y(z) &= [C(zI - G)^{-1} H + D]U(z) = F(z)U(z) \end{aligned}$$

Donde:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1} H + D \quad (2.39)$$

$F(z)$ es la matriz de función de transferencia pulso.

2.2.2.4. Discretización de ecuaciones del espacio de estado de tiempo continuo

Dada la ecuación en tiempo continuo.

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.40)$$

$$y = Cx + Du \quad (2.41)$$

su correspondiente representación discreta es:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \quad (2.42)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT)$$

$$G(T) = e^{AT} \quad (2.43)$$

$$H(T) = \left(\int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \quad (2.44)$$

C y D son matrices constantes e independientes del tiempo de muestreo T, y:

La función de transferencia pulso es:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1}H + D \quad (2.45)$$

2.2.3 Conversión del sistema continuo en sistema discreto utilizando MATLAB

Existe una función de MATLAB llamada "c2dm":, convierte un sistema continuo dado (función de transferencia o espacio de estados) a un sistema discreto, usando el método de retención de orden cero.

$$[G,H,Cd,Dd]=C2dm(A,B,C,D,Ts,'Zoh')$$

- **Selección de Tiempo de muestreo Ts**

El primer paso en el diseño de un controlador de tiempo discreto es convertir la señal continua a su tiempo discreto equivalente. Primero, nosotros necesitamos escoger un tiempo de muestreo apropiado, Ts., Para nuestro caso, la selección del tiempo de muestreo es muy importante debido a que el deslizamiento de la llanta sobre la superficie del camino afecta la salida. Físicamente, lo que pasa es que en la superficie del camino, los alzamientos de la

rueda, comprime el resorte K_2 , y el amortiguador b_2 . Desde que la masa de la suspensión es relativamente baja, y el resorte es muy rígido, la masa de la suspensión sube rápidamente, incrementándose X_2 casi inmediatamente.

Desde que el controlador puede ver sólo el efecto de la perturbación después de un período de muestreo completo, tenemos que escoger un tiempo de muestreo T corto, lo suficiente para que la salida (X_1-X_2) no exceda el 5% requerido en un período de muestreo.. En el modelamiento del sistema continuo, la salida va a negativo rápidamente en respuesta a una perturbación, y entonces empieza a oscilar. Nosotros simularemos simplemente el principio de esta respuesta poniendo el vector de entrada de la función escalón en el rango de 0 a .005. La respuesta a 0.1m de entrada, es simulada, multiplicando la matriz de B por 0.1.

Usando Matlab puede convertir el modelo de espacio de estado en tiempo continuo A, B, C , y D , a un modelo discreto de espacio de estado, G, H, C y D , usando el comando `c2dm`. La orden `c2dm` puede tomar seis argumentos: las cuatro matrices del estado, el tiempo de muestreo T , y el tipo de circuito de retención. En este ejemplo usaremos la retención de orden cero ('zoh').

El Comando `c2dm` tiene la siguiente estructura:

$$[G, H, C_d, D_d] = C2dm(A, B, C, D, T_s, 'Zoh')$$

2.2.4 Simulación del proceso en lazo abierto en tiempo discreto

El programa A2 en código MATLAB nos permite obtener los valores de las matrices del proceso en tiempo discreto, así como la respuesta del proceso a un escalón unitario

El listado de dicho programa se encuentra en el Anexo A. Los resultados al ejecutar dicho programa se muestra en la figura 2.12, que es idéntica a la figura 2.5, por lo que los análisis realizados se aplican también a la figura 2.12.

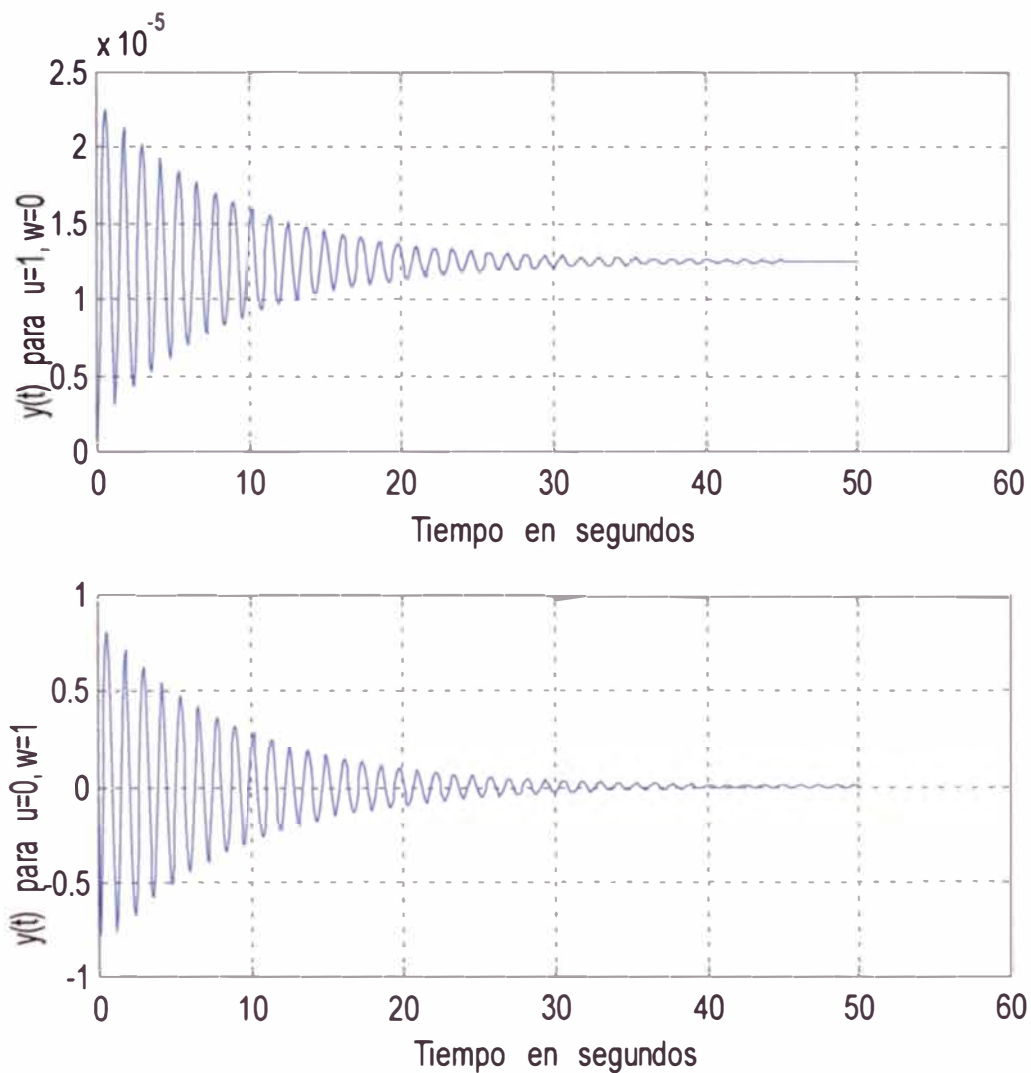


Figura 2.12 Salida $Y_1=x_1-x_2$ en lazo abierto

Se hace evidente que el Sistema de Suspensión necesita adicionar un controlador

A fin de mejorar su performance. El esquema del sistema de control se muestra en la en la figura 2.13. y será visto en el capítulo III

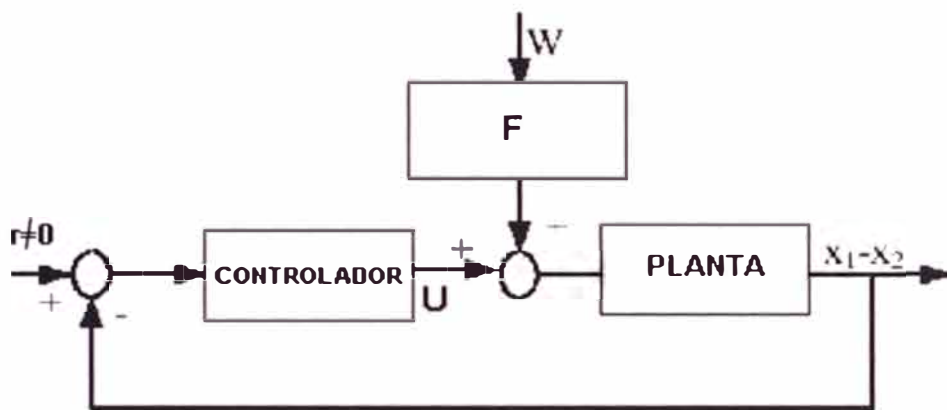


Figura 2.13 Sistema de Suspensión -PLANTA- con un controlador

CAPITULO III DISEÑO Y SIMULACION DE CONTROLADORES

3.1 Estrategia de control optimo cuadrático

En los años 1960 surge el control optimo o LQ ("Linear Quadratic") control, cuyos métodos sistemáticos de diseño permiten calcular las ganancias del controlador y observador de tal forma que se minimice una función de coste cuadrática. Cuando la teoría LQ se aplica al cálculo del controlador (ganancia K), este problema es conocido bajo el nombre LQR ("Linear Quadratic Regulator"). Cuando se aplica al cálculo del observador (ganancia K_e), el problema se llama LQG ("Linear Quadratic Gaussian")

3.1.1 Breve introducción a controladores óptimos

El objetivo del Control Optimo es el de determinar una ley de control óptima u que minimice la función J . En la mayoría de los casos, sin embargo, la búsqueda de esta función involucra procedimientos de error y corrección; esto significa que no siempre podremos estar seguros acerca de la forma exacta que debería poseer la función J .

Para sistemas de control discretos, la función J generalmente posee la forma siguiente:

$$J = \sum_{k=0}^N L(x(k), r(k), u(k)) \quad (3.1)$$

Donde:

k = tiempo discreto;

N = tiempo discreto final;

x(k) = vector de estado;

r(k) = vector de referencia;

u(k) = vector de control óptimo (denominada también fuerza o señal de control).

Para aplicaciones prácticas, el vector de control **u** debe estar siempre acotado.

- **Control óptimo cuadrático no estacionario**

El problema del control óptimo cuadrático discreto no estacionario consiste en encontrar una adecuada ley de control óptima que sea capaz de trasladar la dinámica del proceso desde un estado inicial **x(0)** hacia un estado final deseado **x(N)**.

La fuerza de control óptima **u(k)** se determina a partir de la minimización de una función cuadrática discreta **J**:

$$J = \frac{1}{2} x^T(N) S x(N) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} [x^T(k) Q x(k) + u^T(k) R u(k)] \quad (3.2)$$

Las matrices hermitianas **Q** (semidefinida positiva) pondera la señal de control **u(k)** y **R** (definida positiva) pondera el vector de estado **x(k)**.

Ley de control óptima:

$$u(k) = -K(k) x(k) \quad (3.3)$$

Una condición necesaria para aplicar el control por realimentación de estados es que el proceso sea “**completamente controlable**”; además, sea “**completamente observable**” (todos los estados deben estar disponibles o medibles). Si existieran estados que no pudieran medirse directamente, será necesario estimarlos por medio de un estimador u observador de estados.

Ecuación de estado discreta del proceso:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k); \quad x(0) = c \quad (3.4)$$

Controlabilidad:

$$M = \begin{bmatrix} H & GH & \dots & G^{n-1}H \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

$$\text{rango}(M) = n$$

Matriz de realimentación de estados (matriz ganancia del controlador):

$$K(k) = [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \quad (3.6)$$

- **Ecuación de Riccati:**

$$P(k) = Q + G^T P(k+1)G - G^T P(k+1)H [R + H^T P(k+1)H]^{-1} H^T P(k+1)G \quad (3.7)$$

La matriz $P(k)$ de la ecuación (3.7) puede determinarse recursivamente partiendo de la siguiente condición terminal para $k = N$:

$$P(N) = S \quad (3.8)$$

hasta llegar a la condición inicial $P(0)$ para $k = 0$.

Función de costo mínima:

$$J_{\min} = \frac{1}{2} x^T(0)P(0)x(0) \quad (3.9)$$

3.1.2 Diseño del Controlador Óptimo Proporcional Integral

Para procesos que no poseen propiedades integradoras, la inclusión de acción integral en el sistema de control permite obtener un error estacionario nulo.

La figura 3.1 ilustra un regulador óptimo para sistemas univariados.

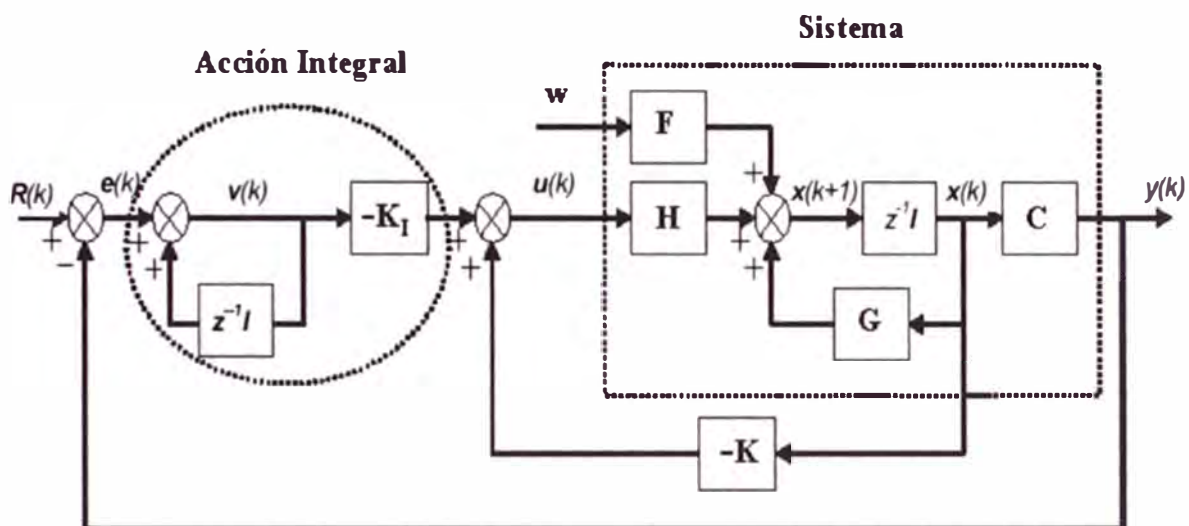


Figura 3.1 Diagrama LQR con acción integral

De la figura 3.1 podemos deducir que las ecuaciones de estado y de salida del proceso son:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) + Fw(k); \quad (3.10)$$

$$y(k) = Cx(k) \quad (3.11)$$

La señal de control $u(k)$ viene dada por:

$$u(k) = -Kx(k) + K_1v(k) \quad (3.12)$$

Matriz de ganancia del controlador:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad \dots \quad K_n] \quad (3.13)$$

La ecuación para el integrador resulta:

$$v(k) = v(k-1) + r(k) - y(k) \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v(k+1) &= v(k) + r(k+1) - y(k+1) \\ &= v(k) + r(k+1) - C[Gx(k) + Hu(k) + Fw(k)] \\ &= (1 - CHK_1)v(k) + (-CG + CHK)x(k) + r(k+1) - CFw(k) \end{aligned} \quad (3.15)$$

empleando las ecuaciones (3.10) y (3.12) obtenemos:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + H[-Kx(k) + K_1v(k) + Fw(k)] \\ &= (G - HK)x(k) + HK_1v(k) + Fw(k) \end{aligned} \quad (3.16)$$

y de las ecuaciones (3.16), (3.15) y (3.11) deducimos:

$$\begin{bmatrix} x(k+1) \\ v(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_1 \\ -CG + CHK & 1 - CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(k+1) + \begin{bmatrix} F \\ -CF \end{bmatrix} w(k) \quad (3.17)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(k) \\ v(k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

En el estado de equilibrio (para $k \rightarrow \infty$), los valores de $x(k)$, $u(k)$ y $v(k)$ toman valores estacionarios $x(\infty)$, $u(\infty)$ y $v(\infty)$. Asi la ecuación (3.17) se convierte en:

$$\begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK_1 \\ -CG + CHK & 1 - CHK_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(\infty) \\ v(\infty) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r(\infty) + \begin{bmatrix} F \\ -CF \end{bmatrix} w(\infty) \quad (3.19)$$

Si

$$x(k) - x(\infty) = x_e(k) \quad (3.20)$$

$$v(k) - v(\infty) = v_e(k) \quad (3.21)$$

$$w(k) - w(\infty) = w_e(k) \quad (3.22)$$

Y restando ahora la ecuación (3.19) de (3.17) y luego usando la relación (3.21) y

(3.22) obtendremos:

$$\begin{bmatrix} Xe(k+1) \\ Ve(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G - HK & HK \, I \\ -CG + CHK & I - CHK \, I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xe(k) \\ Ve(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ -CF \end{bmatrix} We(k) \quad (3.23)$$

Reagrupando términos se tiene

$$\begin{bmatrix} Xe(k+1) \\ Ve(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xe(k) \\ Ve(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k & kI \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Xe(k) \\ Ve(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F \\ -CF \end{bmatrix} We(k) \quad (3.24)$$

La ecuación (3.24) puede ser escrita como:

$$\xi(k+1) = \tilde{G} \xi(k) + \tilde{H} \psi(k) + \tilde{F}(k) W(k) \quad (3.25)$$

$$W(k) = \tilde{K} \xi(k) \quad (3.26)$$

Donde:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} Xe(k) \\ Ve(k) \end{bmatrix} \quad \tilde{G} = \begin{bmatrix} G & 0 \\ -CG & I \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} H \\ -CH \end{bmatrix} \quad \tilde{F} = \begin{bmatrix} F \\ -CF \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

$$\tilde{K} = \begin{bmatrix} -k & -kI \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Se observa que la inclusión de un integrador en el sistema de control aumenta en uno el orden del sistema; es decir, si n es el orden del sistema original, el nuevo orden del sistema con un integrador es $(n+1)$. En otras palabras, el vector de estado $x(k)$ del sistema original posee dimensión $(n+1)$

3.1.3 Simulación del sistema de control óptimo proporcional integral

Considerando de la sección 1.6, los requerimientos del diseño a fin de diseñar un “Controlador Retroalimentado” para que cuando las perturbaciones del camino (W) sean simuladas por una “entrada escalón”, la salida (X_1-X_2) tenga un tiempo del establecimiento menor que 20 segundos y un exceso no mayor al 10% de W . Por ejemplo, cuando el autobús recorre y existe una perturbación de 10 cm (función escalón de 10 cm), el cuerpo del autobús oscilará dentro de un rango de $+ / - 10$ mm y dejará de oscilar dentro de 20 segundos.

El modelo del sistema puede representarse en Matlab creando el program3.m que nos permite obtener los valores de las matrices del proceso en tiempo continuo y discreto, así como la respuesta del proceso a un escalón unitario - El listado completo de dicho programa se encuentra en el Anexo A

A continuación se detallan los resultados del indicado programa:

Resultados Numéricos:

>> Simulación del Sistema de Control Optimo Proporcional Integral >>

Parámetros del Proceso:

$m_1 = 2250$ $k_1 = 72000$ $b_1 = 315$

$m_2 = 290$ $k_2 = 450000$ $b_2 = 13520$

Cálculo de las matrices A,B,C,D y E

A =

1.0e+003 *

0	0.0010	0	0
-0.0065	0	-0.0253	-0.0001
0.0466	0	-0.0478	0.0010
1.5517	0	-1.8320	0

B =

```

    0
0.0004
    0
0.0039

```

C =

```

0  0  1  0

```

D =

```

0

```

E =

1.0e+003 *

```

    0
0.0065
-0.0466
-1.5517

```

Tiempo de muestreo T=0.08 seg
Cálculo de las matrices G,H,F,C y D

G =

```

0.9153  0.0780  -0.0080  -0.0009
-2.3459  0.9153  0.1384  -0.0190
0.9393  0.0692  -0.1803  0.0005
-5.7946  0.6155  -2.3113  -0.1216

```

H =

1.0e-003 *

```

0.0013
0.0310
0.0033
0.1317

```

F =

0.0847
 2.3459
 -0.9393
 5.7946

C =

0 0 1 0

D =

0

Cálculo de las matrices aumentadas G1, H1 y F1

G1 =

0.9153	0.0780	-0.0080	-0.0009	0
-2.3459	0.9153	0.1384	-0.0190	0
0.9393	0.0692	-0.1803	0.0005	0
-5.7946	0.6155	-2.3113	-0.1216	0
-0.9393	-0.0692	0.1803	-0.0005	1.0000

H1 =

1.0e-003 *

0.0013
 0.0310
 0.0033
 0.1317
 -0.0033

F1 =

0.0847
 2.3459
 -0.9393
 5.7946
 0.9393

Elección de las matrices de Ponderación Q y R

Q =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

R =

$$0.0100$$

R1 =

$$0.0100$$

Matrices Q1 y R1

Q1 =

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5000000 \end{bmatrix}$$

R1 =

$$0.0100$$

Cálculo de la Matriz ganancia K utilizando
la siguiente expresión $[K1,P1,Eig1]=dlqr(G1,H1,Q1,R1)$

K1 =

$$1.0e+004 *$$

$$\begin{bmatrix} 2.0217 & 1.1300 & -0.1613 & -0.0170 & -1.8056 \end{bmatrix}$$

P1 =

1.0e+007 *

8.3258	0.7982	-0.4567	-0.0078	-2.7134
0.7982	0.3736	-0.0509	-0.0056	-0.5688
-0.4567	-0.0509	0.0457	0.0004	0.2832
-0.0078	-0.0056	0.0004	0.0001	0.0067
-2.7134	-0.5688	0.2832	0.0067	2.5031

Eig1 =

0.8086 + 0.4045i
 0.8086 - 0.4045i
 0.7841
 -0.1407 + 0.0485i
 -0.1407 - 0.0485i

Una vez definido la matriz de ganancia, se procede en matlab a realizar el cálculo del controlador óptimo para una perturbación de 0.1 m de alto y luego la simulación del sistema controlado cuyo resultado gráfico se muestra en la Figura

3.2

Resultado gráfico:

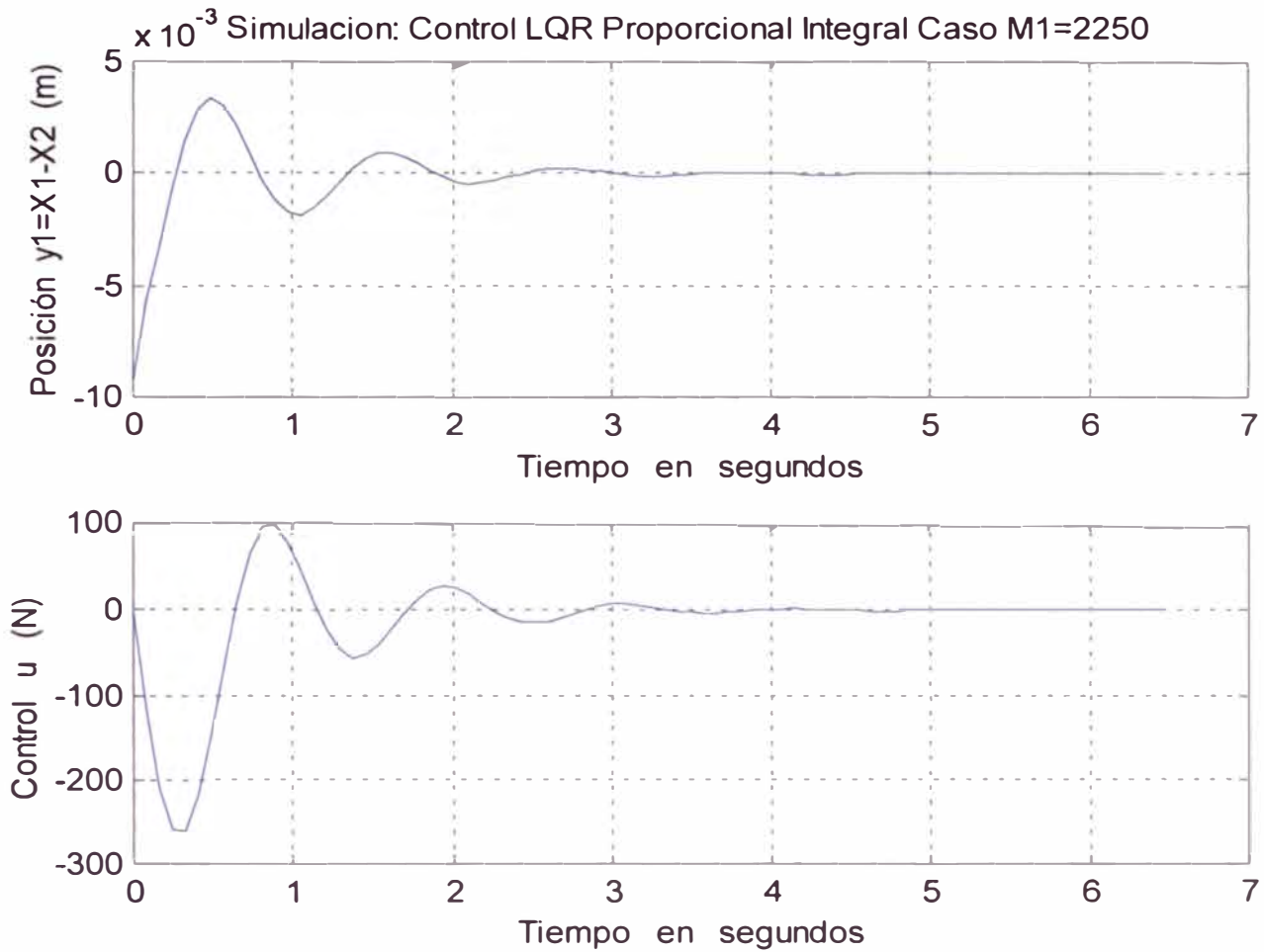


Figura 3.2 Salida $Y_1 = x_1 - x_2$ en lazo cerrado y Fuerza de control u

De la figura 3.2 se observa que el tiempo de establecimiento es de aproximadamente de 4 segundos y el sobreimpulso de $Y_1 = x_1 - x_2$ es 3.2 mm.

3.2 Estrategia de control adaptivo

3.2.1 Breve introducción a controladores adaptivos

Generalmente este tipo de control se implementa para análisis de sistemas de ecuaciones no lineales univariadas. Este método combina los procedimientos de linealización con las estimaciones de parámetros y estados del proceso.

Los sistemas implementados con controladores adaptivos, ajustan su comportamiento a las cambiantes propiedades del proceso no lineal controlado y de las señales que interactúan sobre dicho proceso (perturbaciones). Actualmente es de importancia 2 tipos de controladores adaptivos:

- Controladores adaptivos con modelo referencial.
- Controladores adaptivos con autosintonización.

Para el desarrollo del presente trabajo, se realizara el control del proceso utilizando el método de autosintonización, el cual, se muestra en la figura 3.3.

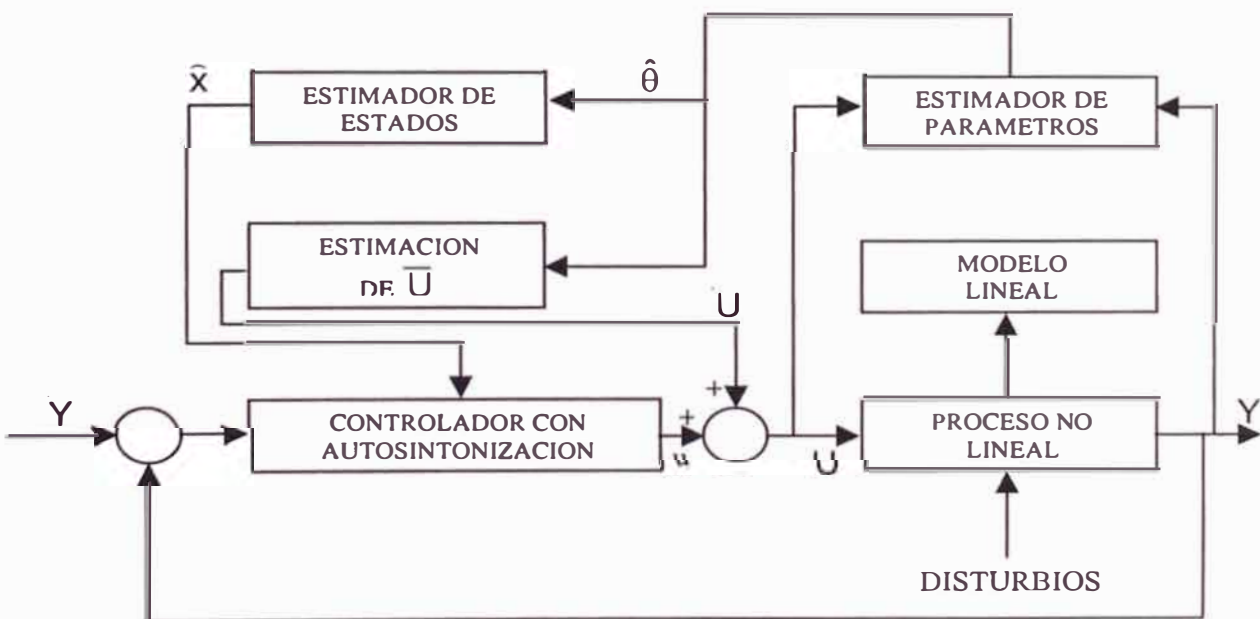


Figura 3.3 Configuración del Sistema de control con autosintonización

El sistema anterior muestra un método de estimación de parámetros (el de los mínimos cuadrados recursivo), una técnica de estimación de estados (filtro de Kalman), una representación lineal del modelo del proceso y una ley de control. El objetivo es minimizar el valor de: $\bar{Y} - Y$, es decir, minimizar la diferencia entre la salida del proceso y la señal de referencia, mediante el control del vector U .

Donde:

$\bar{U} =$ Vector de control de referencia.

$U =$ Vector que controla al proceso

$\hat{x} =$ Vector de estados del proceso.

$\bar{Y} =$ Salida de referencia.

$Y =$ Salida del proceso.

$\hat{\theta} =$ Vector estimado de parámetros.

- **Operación de la configuración**

Para cada tiempo de muestreo (para un período adecuado), el vector estimado de parámetros $\hat{\theta}$, se actualiza, empleando los datos proporcionados por la entrada U del proceso (Vector de control) y por la salida Y del mismo. Luego, con los valores de $\hat{\theta}$, se recupera el modelo lineal del proceso, lo cual permite estimar el vector de estado del modelo del proceso \hat{x} (empleando un filtro de Kalman) y el valor de equilibrio \bar{U} de la ley de control actual U . Tales resultados se usan luego de computar la ley de control residual u y para actualizar la ley de control actual a partir de la relación $U = \bar{U} + u$.

- **Modelamiento de procesos no lineales**

Considerando el siguiente proceso dinámico continuo no lineal:

$$\dot{X} = f(X, U(t), v(X, t), t) \quad (3.30)$$

Donde X (orden n) y $U(t)$ (orden 1) son el vector de estado y la ley de control, respectivamente. La función no lineal $f(\cdot)$ puede también contener disturbios $v(\cdot)$ en los estados. liberalizando la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= [A + \Delta A]X(t) + [B + \Delta B]U(t) + v(X, t) \\ Y(t) &= [C + \Delta C]X + \omega(X, t) \end{aligned} \quad (3.31)$$

Donde:

- A = Matriz de estados de dimensión $n \times n$.
- B = Es la matriz de control de dimensión $n \times 1$.
- C = Matriz de salida de dimensión $1 \times n$.
- $\Delta A, \Delta B$ y ΔC = Incertidumbres acotadas con dimensiones apropiadas.
- $v(X, t)$ = Vector no lineal de disturbios de orden n , actuando sobre los estados.
- $\omega(X, t)$ = Disturbio de orden 1, actuando en la salida,
- $Y(t)$ = Salida del proceso de orden 1.

El proceso nominal no perturbado (o proceso de certidumbre), se obtiene fijando en cero todas las incertidumbres y todos los disturbios en la ecuación (3.30). Muestreando dicho proceso nominal, podemos obtener la siguiente representación:

$$X(k + 1) = GX(k) + HU(k); \quad Y(k) = CX(k) \quad (3.32)$$

donde k es el tiempo discreto y las matrices G y H , poseen las mismas dimensiones que las matrices A y B , respectivamente. La correspondiente ecuación polinomial toma la forma:

$$A(z^{-1})y(z) = B(z^{-1})u(z) \quad (3.33)$$

Donde:

z es el operador de desplazamiento con.

$$A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_n z^{-n} \quad (3.34)$$

$$B(z^{-1}) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_n z^{-n} \quad (3.35)$$

Empleando ahora las relaciones residuales:

$$Y = Y - \bar{Y}; \quad x = X - \bar{X}; \quad U = U - \bar{U}$$

De las ecuaciones (3.32) y (3.33) obtenemos:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k); \quad y(k) = Cx(k) \quad (3.36)$$

$$A(Z^{-1})Y(k) = B(Z^{-1})U(k) + C1 \quad (3.37)$$

Donde la constante $C1$ se determina por:

$$C1 = (1 + a_1 + a_2 + \dots + a_n)\bar{Y} - (b_1 + b_2 + \dots + b_n)\bar{U} \quad (3.38)$$

- **Procedimientos de estimación**

Para estimar los parámetros del modelo del proceso se usa las señales actuales $U(k)$ e $Y(k)$, en lugar de sus desviaciones $u(k)$ e $y(k)$. Para ello la descripción en el espacio de estado dada por la ecuación (3.37) tiene que ser reordenada para tomar la forma siguiente:

$$Y(k) = \Psi^T(k)\tilde{\theta}(k) \quad (3.39)$$

Donde el vector de información (ó de medición) Ψ , contiene los valores presentes y pasados de la entrada U y de la salida Y como sigue:

$$\Psi^T(k) = [Y(k) \dots Y(k-n) \quad U(k-1) \dots U(k-n)] \quad (3.40)$$

y el vector $\hat{\theta}$ contiene los parámetros a ser estimados, a saber:

$$\hat{\theta} = [-\hat{a}_1(k) \dots -\hat{a}_n(k) \quad b_1(k) \dots b_n(k) \quad C1] \quad (3.41)$$

Notar que en la ecuación (3.39), el orden del vector de información y el orden del vector de parámetros es $2n+1$; es decir. Dichos vectores han incrementado su orden en 1. La ecuación (3.37) con $z=1$ (propiedad del valor final) representa la condición de estado estable, es decir:

$$A(1)\bar{Y} = B(1)U + C \quad (3.42)$$

El algoritmo básico de los mínimos cuadrados recursivo puede implementarse en la forma siguiente:

- a) Obtener el vector de parámetros inicial $\hat{\theta}(0)$ usando los valores de los parámetros del modelo del proceso de ecuaciones (3.34) y (3.35).
- b) Obtener el valor inicial del parámetro $C1(0)$ empleando la ecuación (3.38), considerando $\bar{U}=0$ e \bar{Y} igual a la señal de referencia.
- c) La matriz de covarianza inicial P puede tener la forma $P=\alpha I$, donde I es la Matriz Identidad y $\alpha \gg 1$.
- d) Tomar nuevas mediciones de $Y(k)$ y de $U(k)$ en el proceso, para obtener una nueva ecuación de la forma dada en (3.39).
- e) Computar el error de estimación (ver ecuaciones (3.40) y (3.41)).

$$f) \quad e(k) = Y(k) - \Psi^T(k)\hat{\theta}(k)$$

g) Sabiendo que $P(k) = [\Psi^T(k)\hat{\theta}(k)]^{-1}$, computar: $i(k) = P(k)\Psi(k)$.

h) Computar:

$$j(k) = \Psi^T(k)i(k); \quad \gamma(k) = i(k)/[\lambda + j(k)]$$

$$\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k) + \gamma(k)e(k) \quad P(k+1) = [I - \gamma(k)\Psi^T(k)P(k)]/\lambda$$

i) Actualizar: $P(k+1) = P(k)$ y $\hat{\theta}(k+1) = \hat{\theta}(k)$

- **Estimación de estados**

De la ecuación (3.36) podemos obtener el siguiente modelo nominal perturbado del proceso:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) + v(k) \\ y(k) &= Cx(k) + \omega(k) \end{aligned} \quad (3.43)$$

El procedimiento de estimación descrito en la subsección anterior nos proporciona el vector de parámetros estimado del proceso $\hat{\theta}(k)$. Usando los elementos de dicho vector de parámetros, podemos reconstruir las matrices estimadas $\hat{G}(k)$, $\hat{H}(k)$ y $\hat{C}(k)$. El vector de estado estimado $\hat{x}(k)$ puede ser obtenido empleando un filtro de Kalman, con ecuación de observación:

$$\hat{x}(k) = \bar{x}(k) + K_0(k)[y(k) - \hat{C}(k)\bar{x}(k)] \quad (3.44)$$

y ecuación de actualización de estados:

$$\bar{x}(k+1) = \hat{G}(k)\bar{x}(k) + \hat{H}(k)u(k). \quad (3.45)$$

En la ecuación (4.50), la matriz de ganancia $K_0(k)$ se calcula de:

$$K_0(k) = P_0(k) \hat{C}^T(k) [\hat{C}(k) P_0(k) \hat{C}^T(k) + R_0]^{-1} \quad (3.46)$$

Donde $P_0(k)$ es la matriz definida positiva, solución única de la siguiente ecuación matricial discreta, asociada de Riccati:

$$P_0 = (k+1)Q_0 + \hat{G}(k)P_0(k)\hat{G}(k) + \hat{G}^T(k)K_0(k)\hat{C}(k)P_0(k)\hat{G}(k) \quad (3.47)$$

Donde Q_0 y R_0 son matrices de covarianza definidas positivas a correspondientes a los disturbios v y ω , respectivamente.

• Ley de Control

Para el controlador proporcional óptimo cuadrático la matriz de ganancia K_x nos permite formular la siguiente ley de control $u = -K_x X(k)$

Dicha matriz es el resultado de la minimización de la función de costo:

$$I = \sum (x^T(k) Q x(k) + u^2(k) R) \quad (3.48)$$

sujeto a la ecuación de restricción:

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k) \quad (3.49)$$

Donde la matriz $Q = Q^T$ semidefinida positiva y la matriz R es definida positiva.

La ganancia

$$K_x = (R + H^T S H)^{-1} H^T S G \quad (3.50)$$

Donde S es la única matriz definida positiva solución de la siguiente ecuación matricial discreta asociada de Riccati:

$$0 = S - G^T S G + G^T H K_x \quad (3.51)$$

3.2.2 Diseño del controlador adaptivo autosintonizado

Considerando las ecuaciones encontradas en la sección 2.1.3 (ecuaciones 2.20 y 2.21), y las ecuaciones que permiten implementar el método de mínimos cuadrados recursivos mejorado, para estimar los parámetros del proceso, así como las ecuaciones para estimar los estados del proceso, de acuerdo al procedimiento seguido en la sección anterior, y finalmente la ley de control residual $u(k)$, usando el programa A4 en código MATLAB, que se presenta en el Anexo A, se obtienen los resultados que se muestran en la sección 3.2.3.

3.2.3 Simulación del sistema de control adaptivo autosintonizado

El resultado de la simulación se muestra en la figura 3.5, en la que se observa que la respuesta de (X_1-X_2) ante una función escalón W tenemos que el porcentaje de exceso es 5.57%, el cual es, 4.5% menor, cumple con el requerimiento de diseño (10%), y el tiempo del establecimiento – 30 seg. - no cumple con el requerimiento (menor que 20 segundos).

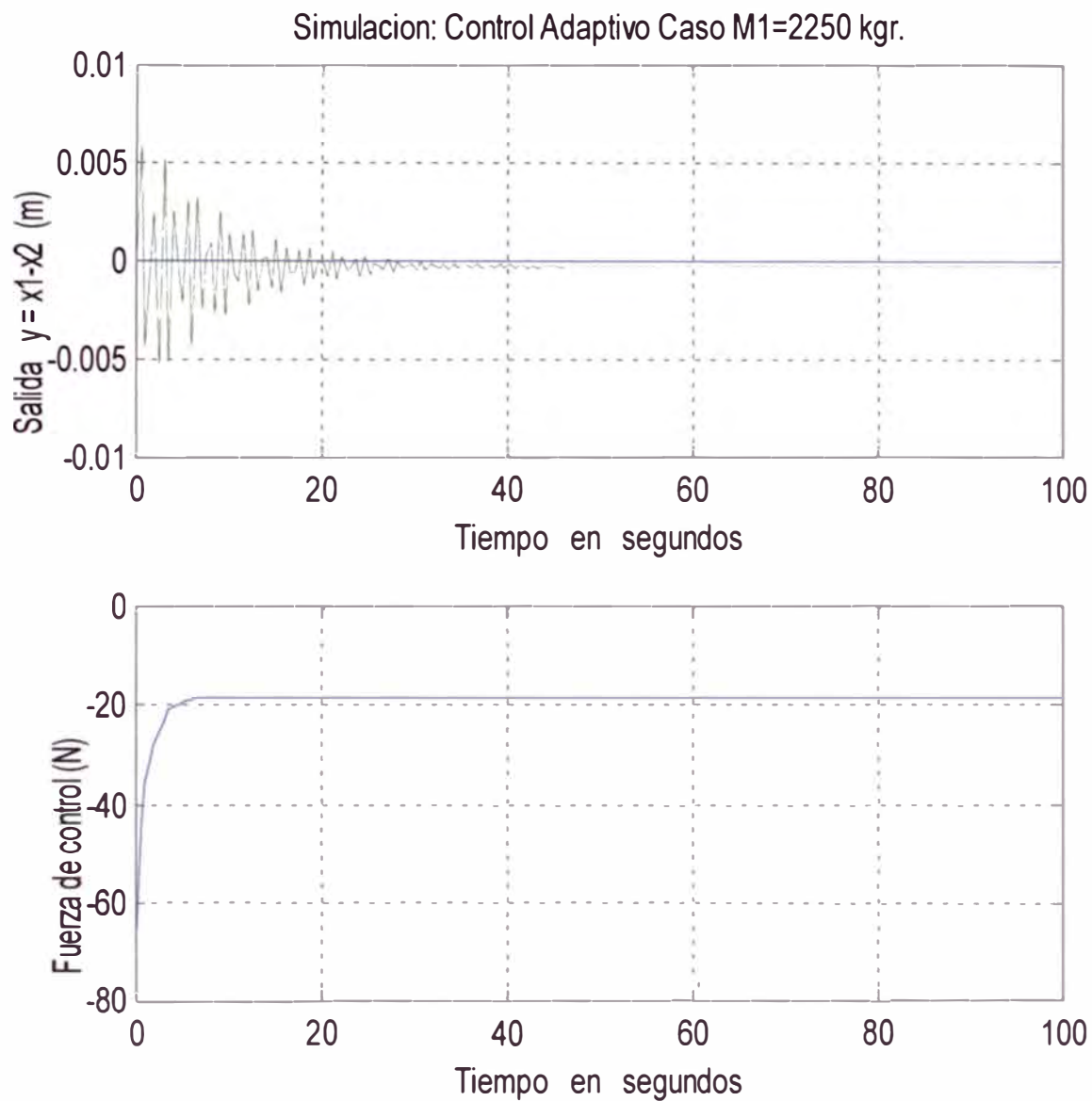


Figura 3.4 Salida Controlada $Y = x_1 - x_2$ y fuerza de control u

3.3 Diseño del controlador PID

3.3.1 Breve introducción a controladores PID

Este controlador incorpora las tres acciones (proporcional + integral + derivada) y suma en cada instante los valores correspondientes a cada una de ellas. En la figura 3.6 puede verse la representación de una variable y los valores proporcional, integral y derivativo y su suma.

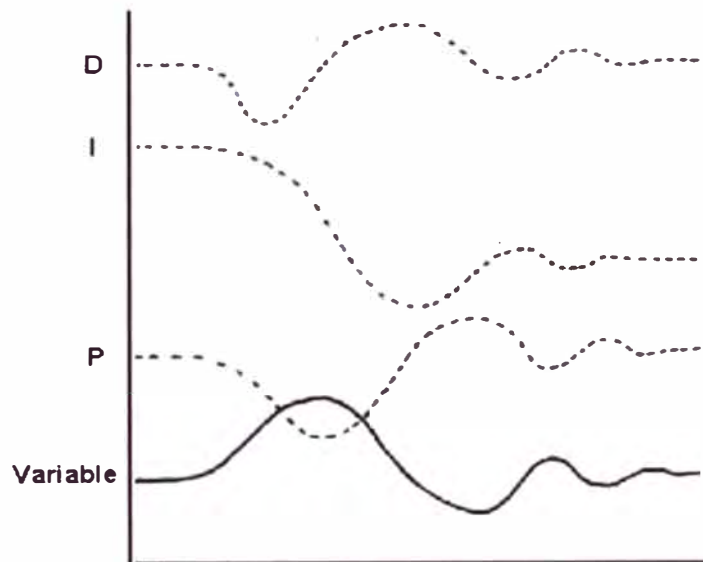


Figura 3.5 Acciones PID

La ecuación del controlador PID es

$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} \quad (3.52)$$

y la función de transferencia es

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (3.53)$$

En la figura 3.6 se puede observar el diagrama de bloques, la entrada rampa unitaria y la salida del controlador PID.

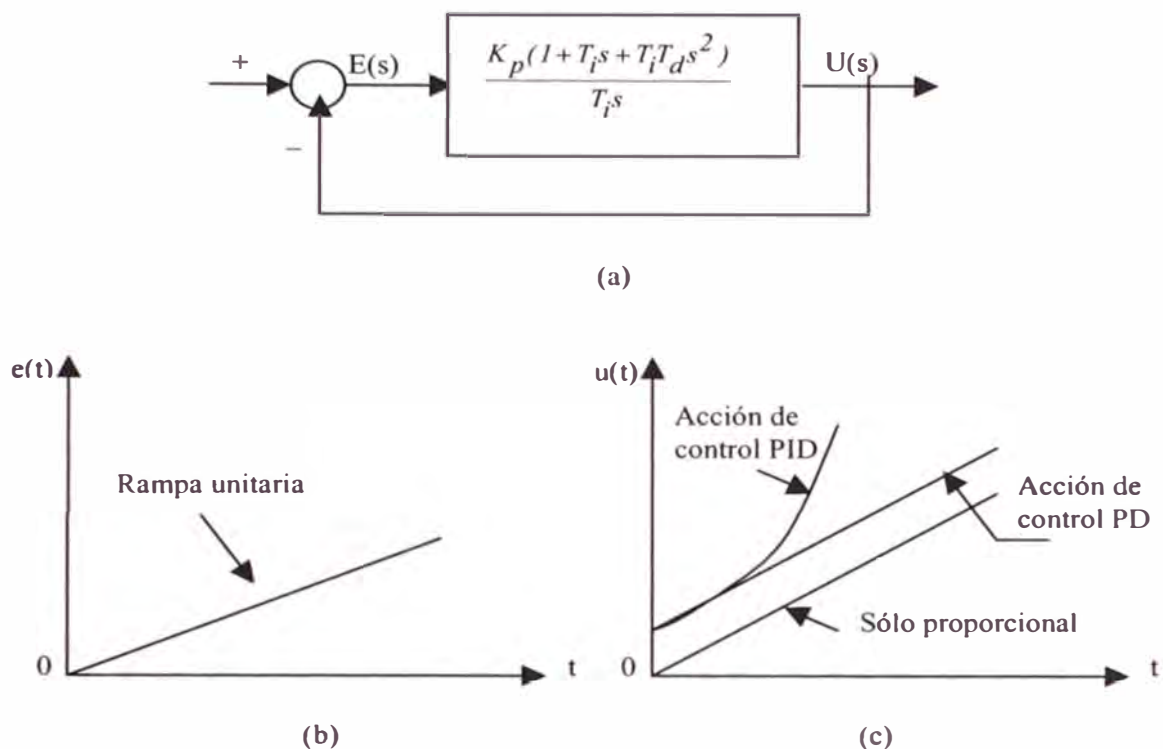


Figura 3.6 (a) Diagrama de bloques de un controlador PID; (b) Entrada rampa unitaria; (c) Salida del controlador PID.

A la hora de determinar los valores de K_p (K_i) y (K_d), Se recomienda utilizar la tabla 3.1 tan sólo como referencia. Hay que tener presente que el cambio de uno de ellos condiciona el valor de los otros.

Respuesta en lazo cerrado	Tiempo de levantamiento	Sobrepaso	Tiempo de establecimiento	Error en estado estable
K_p	Decrece	Aumento	Pequeño cambio	Decrece
K_i	Decrece	Aumento	Aumento	Elimina
K_d	Pequeño cambio	Decrece	Decrece	Pequeño cambio

Tabla 3.1 Características de los controladores P, I, y D

3.3.2 Diseño del controlador PID

- **Objetivo**

En la sección 1.6 se estableció los requerimientos de diseño que debe cumplir el controlador.

Para la resolución del problema se trabajara con el software MATLAB V 5.3.

- **Función de transferencia**

Rescribiendo las ecuaciones (2.27) y (2.28), que son las funciones de transferencia de la planta:

$$G_1(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{U(s)} = \frac{(M_1 + M_2)s^2 + b_2s + K_2}{\Delta} \quad (3.54)$$

$$\Delta = (M_1s^2 + b_1s + K_1) \cdot (M_2s^2 + (b_1 + b_2)s + (K_1 + K_2)) - (b_1s + K_1) \cdot (b_1s + K_1) \quad (3.55)$$

$$G_2(s) = \frac{X_1(s) - X_2(s)}{W(s)} = \frac{-M_1b_2s^3 - M_1K_2s^2}{\Delta} \quad (3.56)$$

Asumiendo el esquema del sistema de control PID se muestra en la figura 3.7.

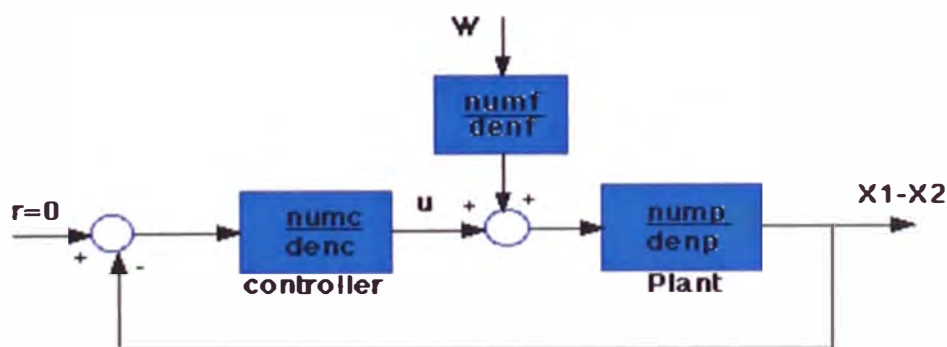


Figura 3.7 Esquema del sistema de control PID

- **Requerimientos de diseño**

Se desea diseñar un "Controlador Retroalimentado" para que cuando las perturbaciones del camino (W) sean simuladas por una "entrada escalón", la salida (X_1-X_2) tenga un tiempo del establecimiento menor que 20 segundos y un exceso no mayor al 10%. Por ejemplo, cuando el bus recorre y existe una perturbación de 10 cm (función escalón de 10 cm), el cuerpo del autobús oscilará dentro de un rango de $+ / - 10$ mm y dejará de oscilar dentro de 20 segundos.

- **Diseño del Controlador**

Se parte de la hipótesis de la necesidad de un controlador PID para resolver el problema.

En esta parte es importante indicar que los parámetros y algunos comandos que se indican a continuación serán usados en el programa A5 posteriormente:

% PARAMETROS DEL PROCESO Ó PLANTA

$m_1 = 2250; k_1 = 72000; b_1 = 315;$

$m_2 = 290; k_2 = 450000; b_2 = 13520;$

%FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA O PROCESO $G_1(s)$

$num_p = [(m_1 + m_2) \quad b_2 \quad k_2]$

$den_p = [(m_1 * m_2) \quad (m_1 * (b_1 + b_2)) + (m_2 * b_1) \quad (m_1 * (k_1 + k_2)) + (m_2 * k_1) + (b_1 * b_2)$
 $(b_1 * k_2) + (b_2 * k_1) \quad k_1 * k_2]$

%FUNCION DE TRANSFERNCIA

$num_l = [-(m_1 * b_2) \quad -(m_1 * k_2) \quad 0 \quad 0]$

$$\text{den1} = [(m1*m2) (m1*(b1+b2))+(m2*b1) (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(b1*b2) \\ (b1*k2)+(b2*k1) k1*k2]$$

- **Agregando un Controlador PID**

$$K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_p s + K_I}{s} \quad (3.57)$$

Donde:

KP = Ganancia proporcional.

KI = Ganancia total.

KD = Ganancia de la derivada.

Asumamos que se necesita las tres ganancias para nuestro controlador. Para iniciar, podríamos empezar suponiendo una ganancia para cada uno: $K_p=832100$, $K_I=624075$ y $K_D=208025$. La implementación en Matlab se da agregando los siguientes códigos en el programa A5.m:

$K_D = 208025;$

$K_p = 832100;$

$K_I = 624075;$

$\text{Numc} = [K_D, K_p, K_I];$

$\text{denc} = [1 \ 0];$

Luego, de la Figura 3.7, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left[\frac{\text{numf}}{\text{denf}} w - \frac{\text{numc}}{\text{denc}} (x_1 - x_2) \right] \frac{\text{nump}}{\text{denp}} = (x_1 - x_2) \quad (3.58)$$

Desarrollando la ecuación (3.58), se tiene:

$$\left[\frac{\text{numf}}{\text{denf}} W - \frac{\text{numc}}{\text{denc}} (X_1 - X_2) \right] = \frac{\text{denp}}{\text{nump}} (X_1 - X_2) \quad (3.59)$$

Reagrupando términos de la ecuación (3.59)

$$\frac{\text{numf}}{\text{denf}} W = \left(\frac{\text{denp}}{\text{nump}} + \frac{\text{numc}}{\text{denc}} \right) (X_1 - X_2)$$

Entonces:

$$\frac{(X_1 - X_2)}{W} = \frac{\text{nump} \cdot \text{numf} \cdot \text{denc}}{\text{denf}(\text{denp} \cdot \text{denc} + \text{nump} \cdot \text{numc})} \quad (3.60)$$

La función de transferencia - ecuación (3.60)- puede modelarse en MATLAB agregando el siguiente código al programa indicado.

```
numa=conv(conv(numf,nump),denc);
dena=conv(denf,polyadd(conv(denp,denc),conv(nump,numc)));
```

Note que la función "polyadd" no es una función estándar en Matlab; esta función se anexa en el Anexo A.

Displayando sus valores de nump y denf en MATLAB

```
nump =    2540    13500    450000
denf =    2540    13500    450000
```

Se observa que nump=denf, por lo tanto la función de transferencia dada en (3.60) se puede simplificar quedando solo lo siguiente:

```
numa=conv(numf,denc);
```

```
dena=polyadd(conv(denp,denc),conv(numc,numc));
```

3.3.3 Simulación del Sistema de Control PID

Ahora hemos creado la función de transferencia del lazo cerrado en Matlab que representará la señal, la perturbación, así como el controlador. Veamos la respuesta al escalón del lazo cerrado para este sistema, se parece igual a la respuesta antes del proceso control. Tenga presente que vamos a usar una función escalón de 0.1 m de alto como perturbación, para simular esto, necesitamos multiplicar **numa** por 0.1, por tanto, el programa A5 tiene que tener el código siguiente:

```
t=0:0.05:5;
```

```
step(0.1*numa,dena,t)
```

```
title ('Respuesta en lazo cerrado para una entrada escalón 0.1 m alto')
```

El resultado de la simulación se muestra en la figura 3.8, en la que se observa que la respuesta de (X_1-X_2) ante una función escalón W tenemos que el sobreimpulso es de 8 mm. el cual es, 2mm menor el requerido -10 mm-, y el tiempo del establecimiento – 2 seg.- también cumple con los requerimientos (menor que 20 segundos).

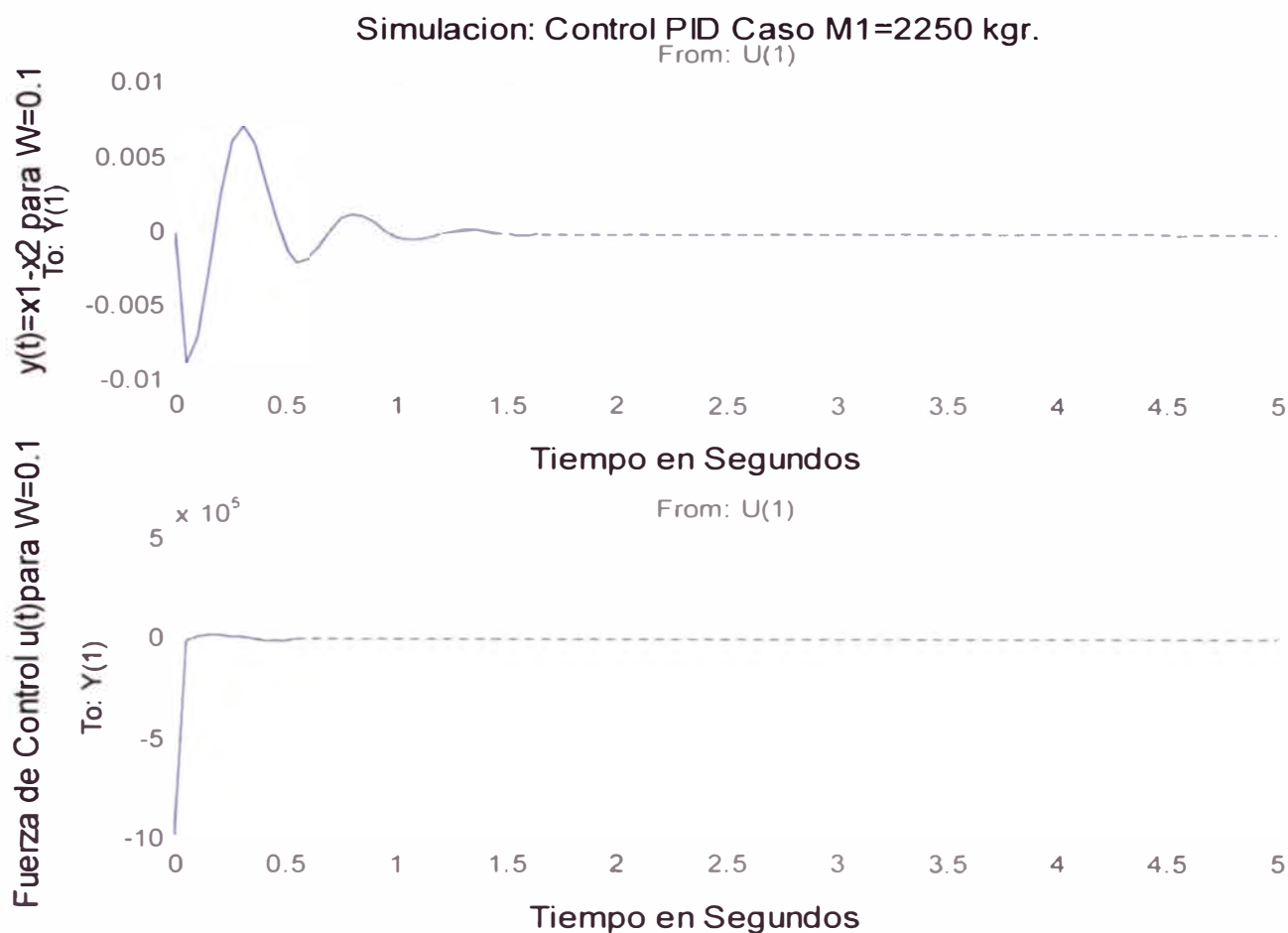


Figura 3.8 Estrategia de control PID Versión 1

Se puede mejorar estas respuestas iniciales, escogiendo un polo y dos ceros para el controlador PID, un polo tiene que ser 0 y el primer cero debe estar cercano al polo en el origen por lo que es 1, el otro cero está cerca del primer cero por lo que escogemos el valor de 3, este valor se puede ajustar posteriormente.

Los siguientes comando de matlab van a permitir ajustar la posición del segundo cero y va a permitir calcular la ganancia de K_p, K_D y K_I

$z1=1;$

```

z2=3;

p1=0;

numc=conv([1 z1] , [1 z2]);

denc=[1 p1] ;

num2=conv(num1,numc);

den2=conv(den1,denc);

rlocus(num2,den2)

title ('root locus con controlador PID ')

[K,p]=rlocfind(num2,den2)

```

En la Figura 3.9 se observa los polos y ceros del lazo cerrado y permite escoger la ganancia y los polos dominantes. En lo referente a la mejora de la respuesta se ha cambiado los valores de las variables K_P , K_D y K_I , para lo cual multiplicamos por 2 dichas variables y se realiza una nueva simulación cuyo resultado se muestra en la Figura 3.10 en donde se observa que la salida del proceso $y_1 = x_1 - x_2$ presenta un sobreimpulso de 3.8 mm y el tiempo de establecimiento es de 2.5 segundos, ambos valores son menores a lo especificado en los requerimientos del diseño - 10 mm y 20 seg-

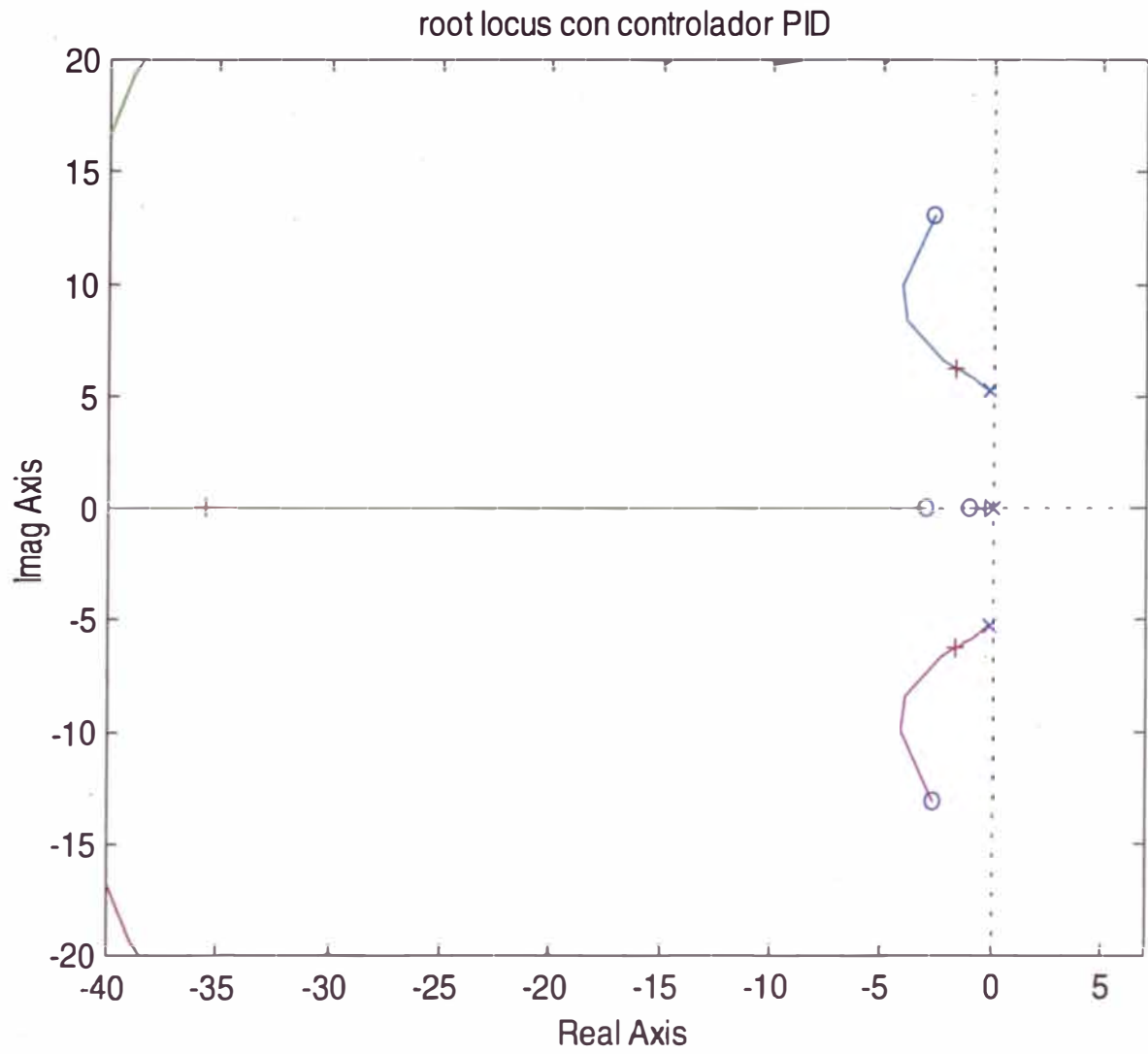


Figura 3.9 Root Locus controlador PID

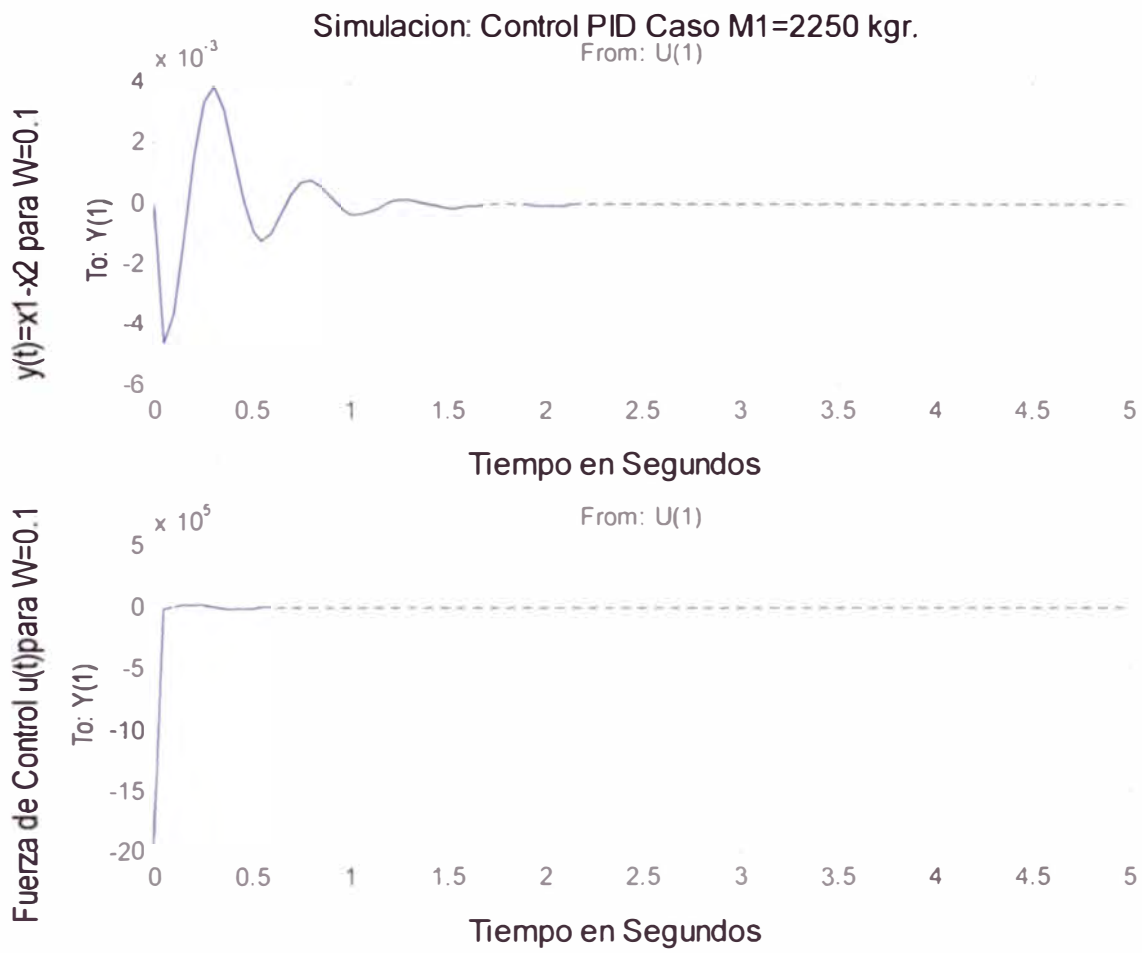


Figura 3.10 Estrategia de control PID Versión 2

CONCLUSIONES

- 1- Cuando se diseña un vehículo dos objetivos duales se presentan, primero el de minimizar las fuerzas verticales transmitidas al vehículo en la que van los pasajeros para el confort de los pasajeros, y maximizar el contacto llanta y camino para la seguridad y buena conducción del vehículo.
- 2- Con los sistemas de suspensión pasivos o tradicionales sólo se puede cumplir uno de los objetivos.
- 3- Con los sistemas de suspensión activos tienen el potencial de mejorar la calidad del recorrido y la performance de la conducción y seguridad del vehículo.
- 4- El inconveniente de los sistemas de suspensión activos es que necesitan una fuente de potencia externa a fin de suministrar la fuerza de control al amortiguador, si falla la indicada fuente de potencia deja de funcionar el sistema de suspensión. Los sistemas de suspensión semiactivos superan el indicado inconveniente, ya que al dejar de funcionar la fuente de potencia poseen adicionalmente un amortiguador.
- 5- Para mejorar la calidad del recorrido es importante aislar el cuerpo del vehículo de los disturbios del camino, y disminuir la resonancia pico que es cercana a 1 Hz el cual es una frecuencia sensible al cuerpo humano.
- 6- En la tabla .1 se muestra la tabla de comparación de los resultados obtenidos de las simulaciones de los indicados controladores.

Controlador de acuerdo a la estrategia de Control	El sobreimpulso de $Y_1=x_1-x_2 \leq 10\%W$ W es el disturbio=10 cm Milímetros	Tiempo de establecimiento menor a 20 segundos. segundos
Requerimiento	10	20
Optimo cuadrático Proporcional Integral	3.3	4.0
Adaptivo autosintonizado	5.8	30
PID	3.84	2.5

TABLA 1 COMPARACION DE RESULTADOS

Se observa que las estrategias de control Optimo cuadrático Proporcional Integral y PID cumplen con los requerimientos. La estrategia de control adaptivo autosintonizado no cumple la especificación del tiempo de establecimiento, a los 20 segundos presenta un error de aproximadamente de +/- 0.5 mm que no es percibido por los pasajeros. Además presenta una respuesta adecuada en el sobreimpulso por lo que se debe incluir como una opción válida.

- 7- Adicionalmente se ha realizado una prueba de sensibilidad en lo referente al incremento del número de pasajeros que viajan en el bus, se ha considerado el incremento de 2250 Kgr. a 3050 y 3450 kgrs en las figuras 4.1a, 4.1b, 4.1c 4.2a, 4.2b, 4.2c 4.3a, 4.3b y 4.3c se muestran las simulaciones y en la tabla 4.2 se muestran los resultados:

	Caso Base M1=2250 Kgr.	M1=3050 Kgr	M1=3450 Kgr
Optimo cuadrático Proporcional Integral			
- Sobreimpulso mm	3.3	2.88	2.75
-Tiempo de asentamiento seg.	4.0	4.4	4.9
- Fza control u -Newtons-	-260	-287.5	-293
Control Adaptivo Autosintonizado			
- Sobreimpulso -mm-	5.8	5.7	5
-Tiempo de asentamiento seg.	30	40	48
- Fza control u -Newtons-	-60	-60	--60
Control PID			
- Sobreimpulso -mm-	3.84	4.9	5.2
-Tiempo de asentamiento seg.	2.5	3.0	3.6
- Fza control u -Newtons-	-10	-17	-20

**TABLA 2 RESULTADOS DE LAS SIMULACIONES PARA DIFERENTES
NUMERO DE PASAJEROS**

De la tabla 2 se muestra que el controlador óptimo cuadrático Proporcional Integral es el que presenta las mejores prestaciones y cumple con los requerimientos del diseño. El controlador PID presenta las mejores respuesta en cuanto al tiempo de establecimiento, pero conforme se incrementa el número de pasajeros el sobreimpulso de Y_1 se incrementa, para el caso de $M1=3450$, el sobreimpulso llega a +/- 5.2 mm. Por último el controlador adaptivo autosintonizado presenta un buena respuesta en el sobreimpulso, pero conforme se incrementa el número de pasajeros se incrementa el tiempo de establecimiento. Cabe mencionar que el controlador adaptivo presta una buena

performance en los sistemas no lineales y el Sistema de Suspensión se ha modelado como un sistema lineal.

- 8- El sistema de suspensión del Bus es de cuarto orden y tiene dos grados de libertad.
- 9 Se ha presentado varios métodos diferentes para obtener la ganancia del controlador, pero dependiendo de la situación concreta optamos por uno de ellos.
- 10 Durante la aplicación de los métodos, técnicas y procedimientos del sistema de control automático lineal, se debe tener presente que los resultados obtenidos exclusivamente se refieren al modelo y no al sistema real. Por consiguiente el rendimiento del sistema obtenido del modelo, es sólo un rendimiento aproximado del sistema real en el rango de trabajo que está observándose.
- 11- La tabla 3 muestra en forma general las ventajas y desventajas de cada unas de las estrategias de control utilizadas en el presente informe.

ESTRATEGIAS DE CONTROL	VENTAJAS	DESVENTAJAS
1-Control Optimo cuadrático Proporcional Integral	<p>1- Se aplican a procesos lineales y no lineales.</p> <p>2- Se aplican a procesos de una entrada y una salida, así como a procesos de múltiples entradas y salida(s).</p> <p>3- Se aplica a procesos variables en el tiempo</p> <p>4- Incorpora conocimiento sobre el proceso al método de cálculo de la señal de control</p> <p>5- La inclusión de una acción integral en el sistema de control permite obtener un error estacionario nulo.</p>	<p>1-El controlador requiere la realimentación de todas las variables de estados</p> <p>2- Se ignoran los ruidos del sensor e incertidumbre de la planta en el diseño.</p> <p>3- El diseño del controlador involucra complejos cálculos y la elección de los pesos de las matrices Q y R se realizan por medio de la estrategia de prueba y error,</p> <p>4- El índice de desempeño es difícil de elegir para los casos prácticos.</p>
2- Control Adaptivo Autosintonizado	<p>1- Se aplica para procesos que tengan especificaciones exigentes (varianza mínima etc.).</p> <p>2- Se aplican en aquellos procesos no lineales, y en donde la dinámica de los sistemas no son constantes y cambian significativamente los parámetros del sistema de control y/o proceso.</p> <p>3- Incorpora conocimiento sobre el proceso al método de cálculo de la señal de control</p>	<p>1- La parte más difícil de esta estrategia de control es la identificación de las características de la planta, que se deben medir continuamente o al menos frecuentemente. Esto de debe realizar sin afectar el funcionamiento de la planta.</p> <p>2- El diseño del controlador involucra elaborados y complejos cálculos</p>
3-PID	<p>1-En la industria de procesos, los reguladores PID solucionan bien la mayoría de problemas de control mono variable (caudal. Presión etc).debido a que es simple y aplica para muchas plantas que se pueden aproximar con dos polos dominantes</p> <p>2-Regulador basado en la señal y en tres parámetros de sintonía K_p, T_i y T_D</p>	<p>1-Si la dinámica de la planta es mucho más complicada que la de segundo orden o se tienen especificaciones exigentes (retardos grandes o mínima varianza), los tres grados de libertad que tiene el PID ya no serán suficientes para obtener un control adecuado</p> <p>2- No incorpora conocimiento explícito del proceso</p>

TABLA 3 Estrategias de Control: Ventajas y Desventajas

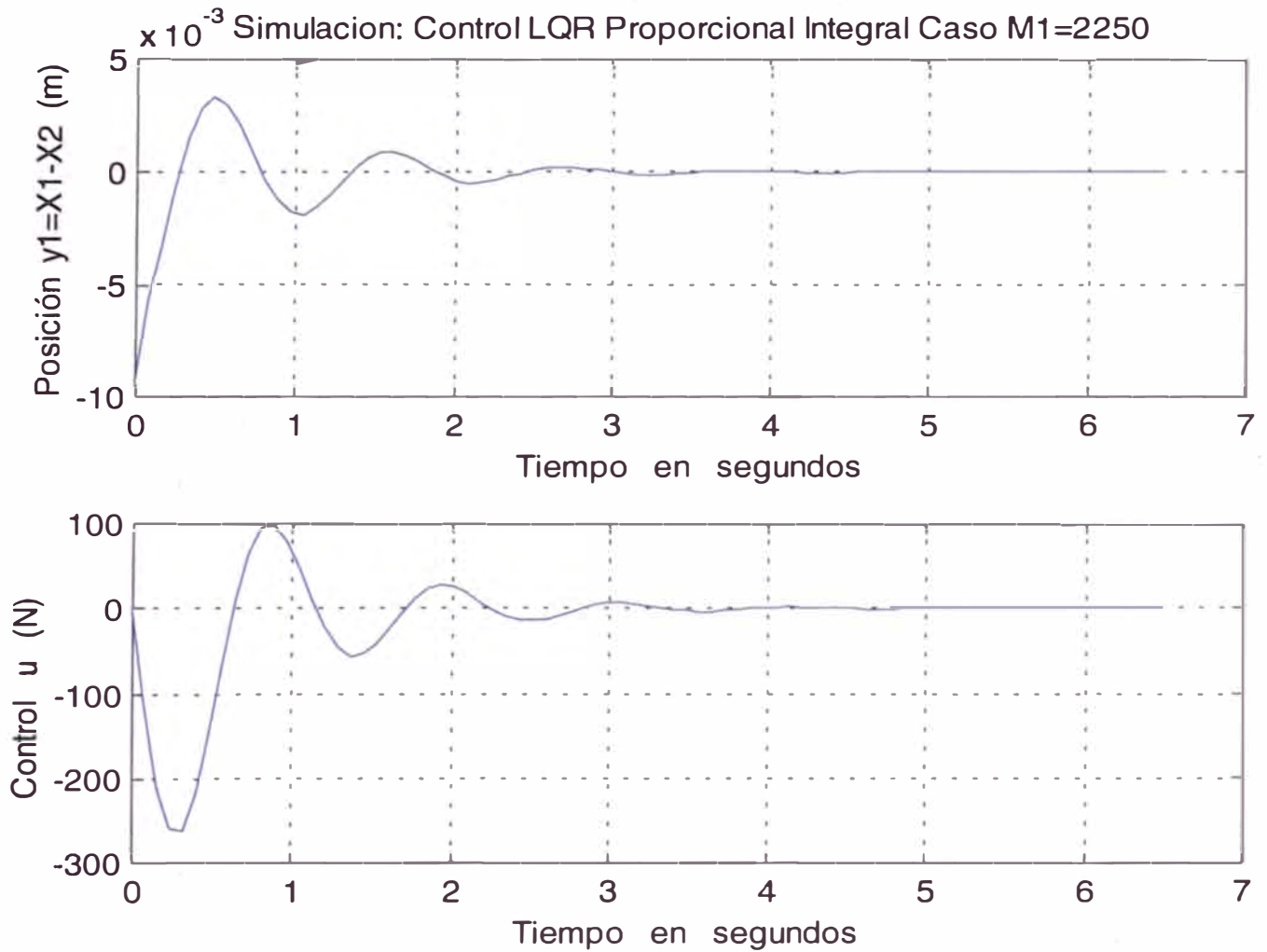


Figura 4.1a Estrategia de control LQR Proporcional Integral con M1= 2500 kgr.

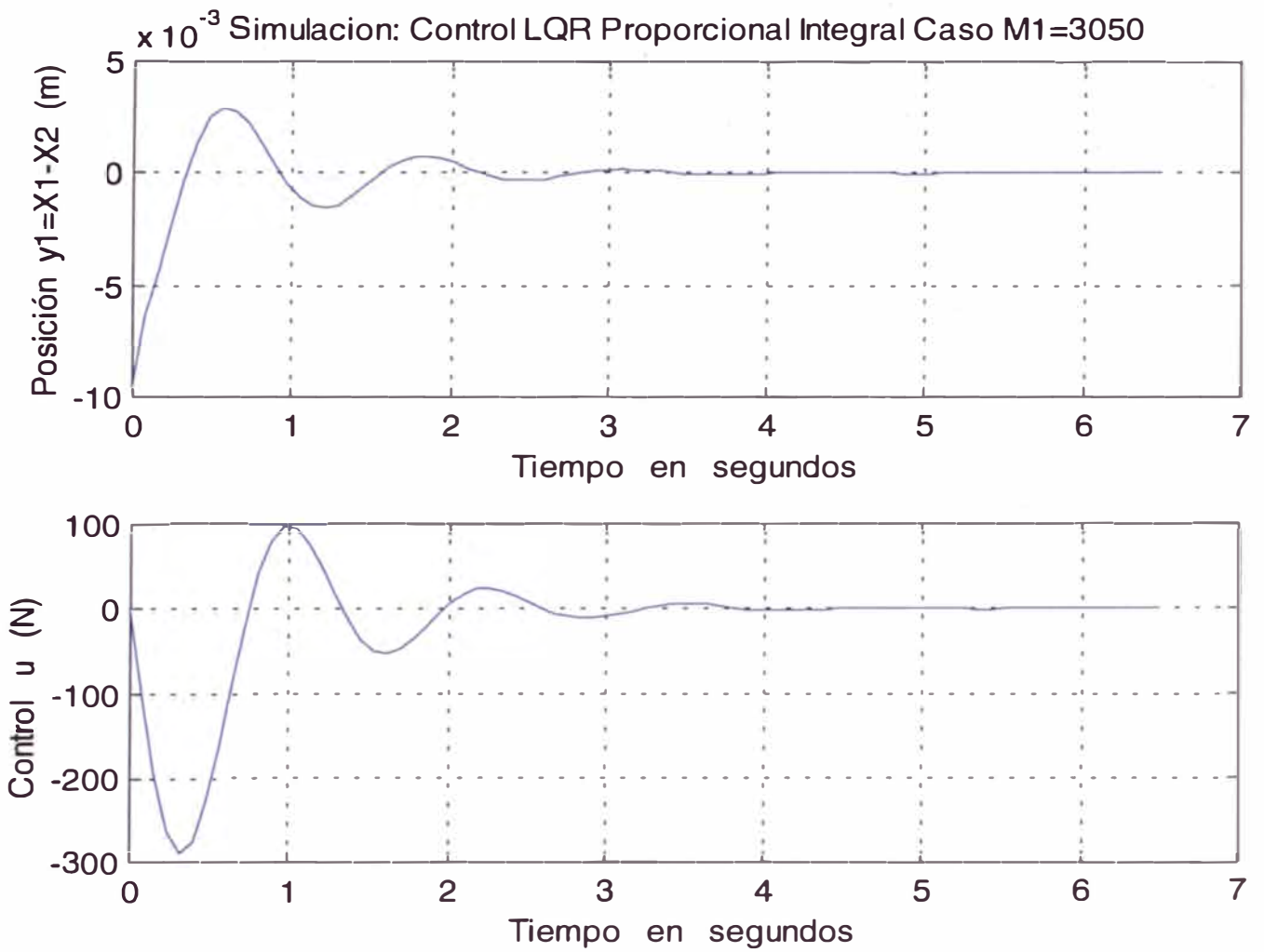


Figura 4.1b Estrategia de control LQR Proporcional Integral con M1= 3050 kgr

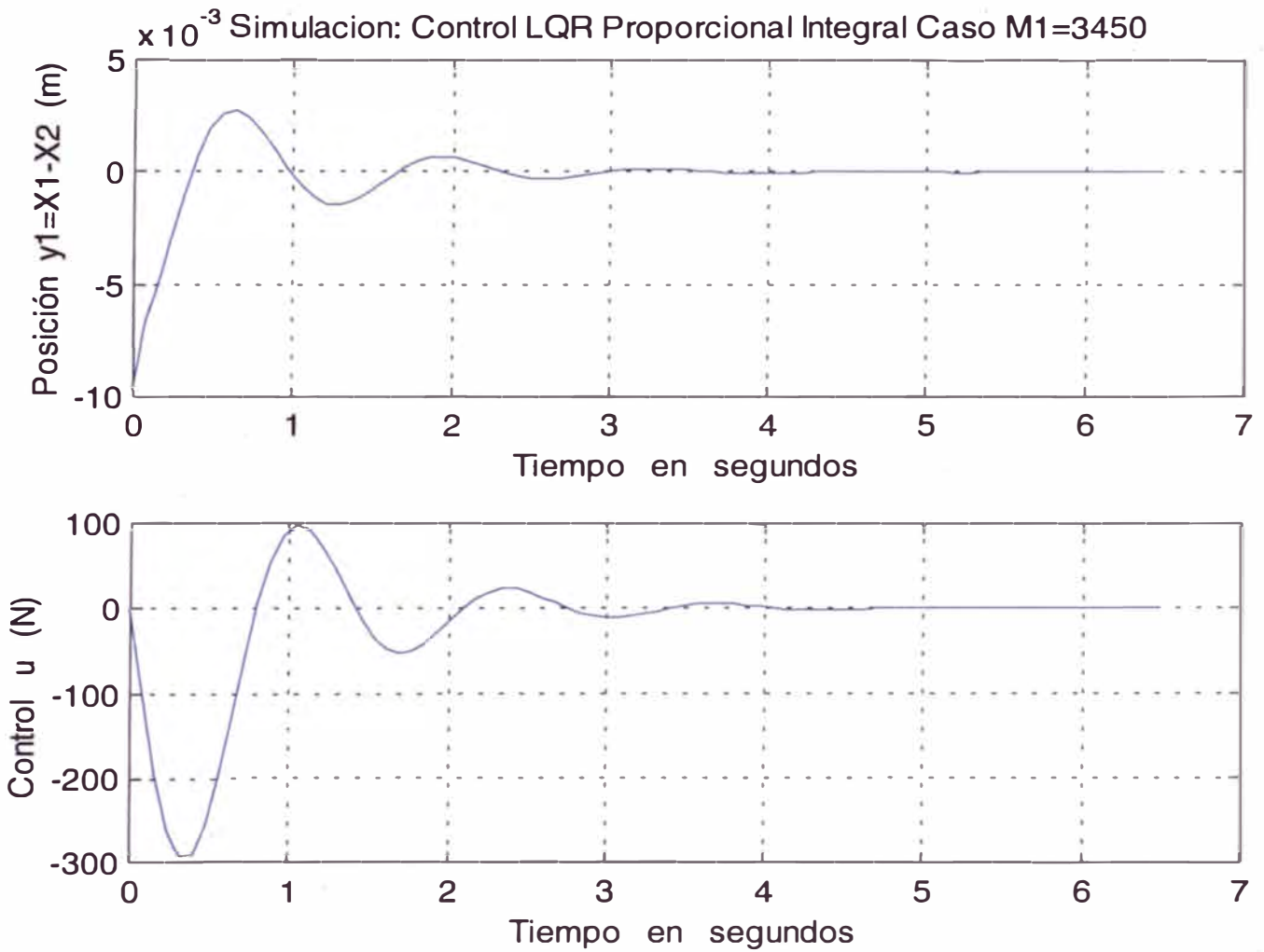


Figura 4.1c Estrategia de control LQR Proporcional Integral con M1= 3450 kgr

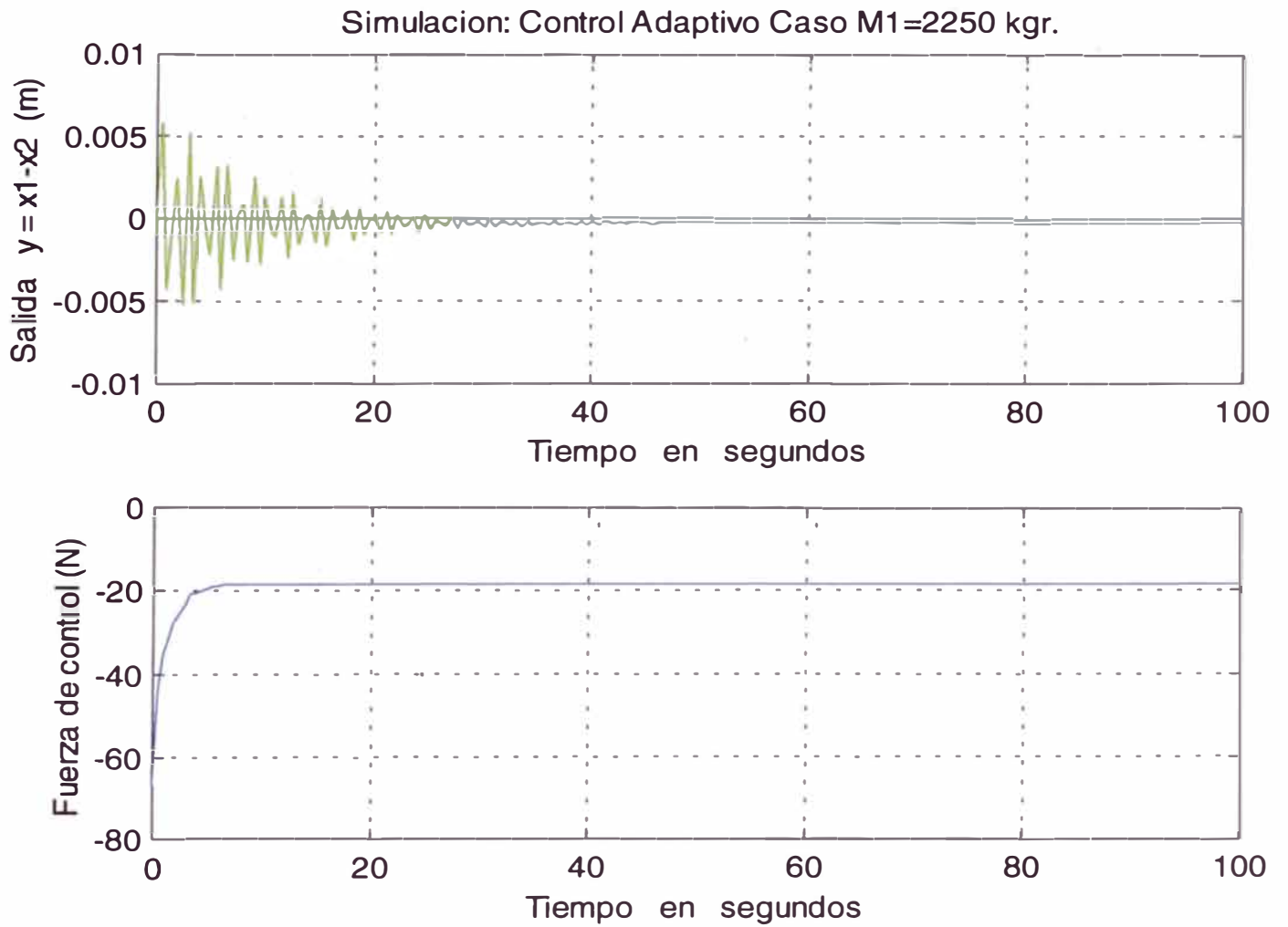


Figura 4.2a Estrategia de control adaptivo autosintonizado con $M_1= 2250$ kgr.

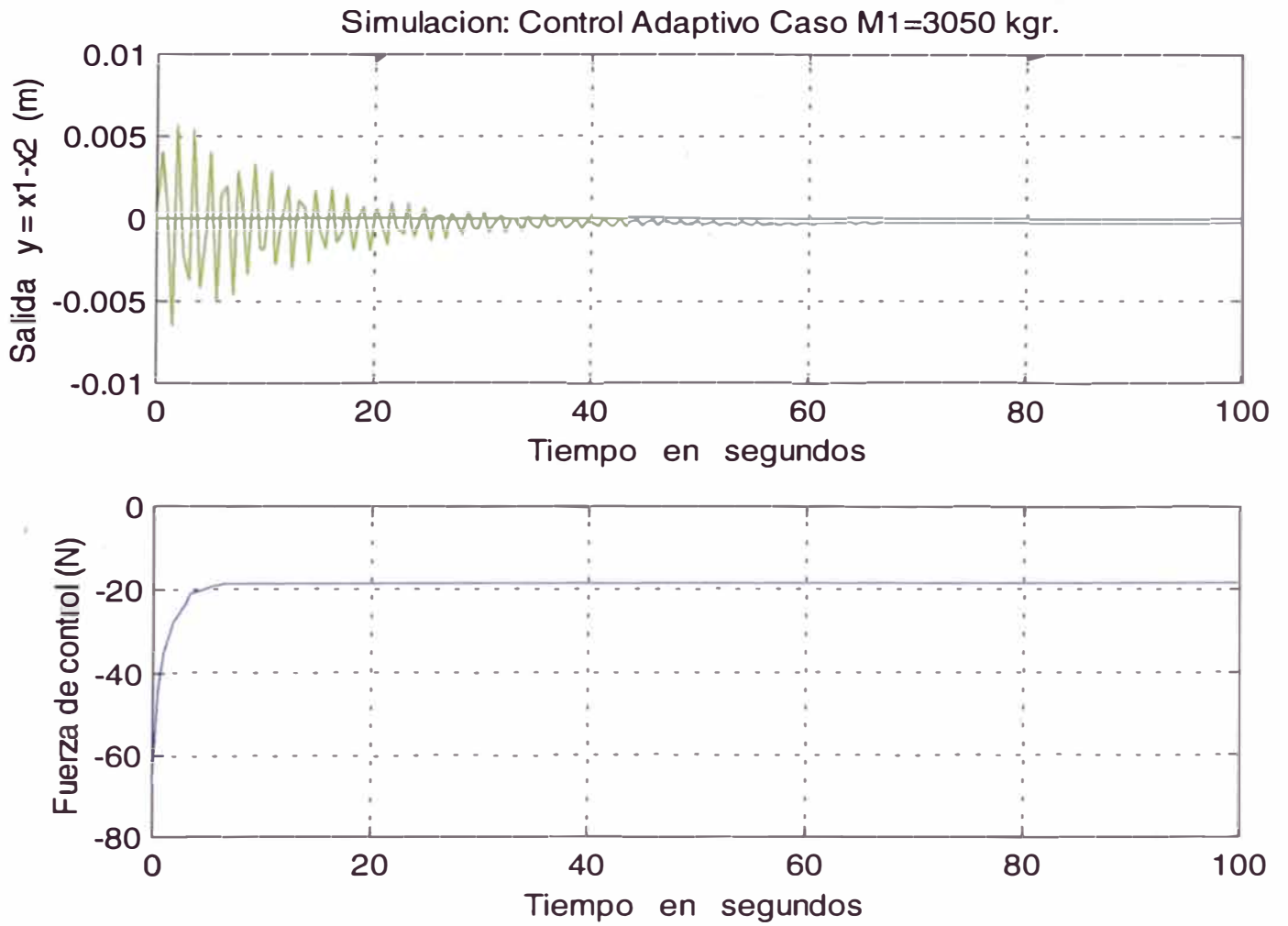


Figura 4.2b Estrategia de control adaptivo autosintonizado con $M_1= 3050$ kgr.

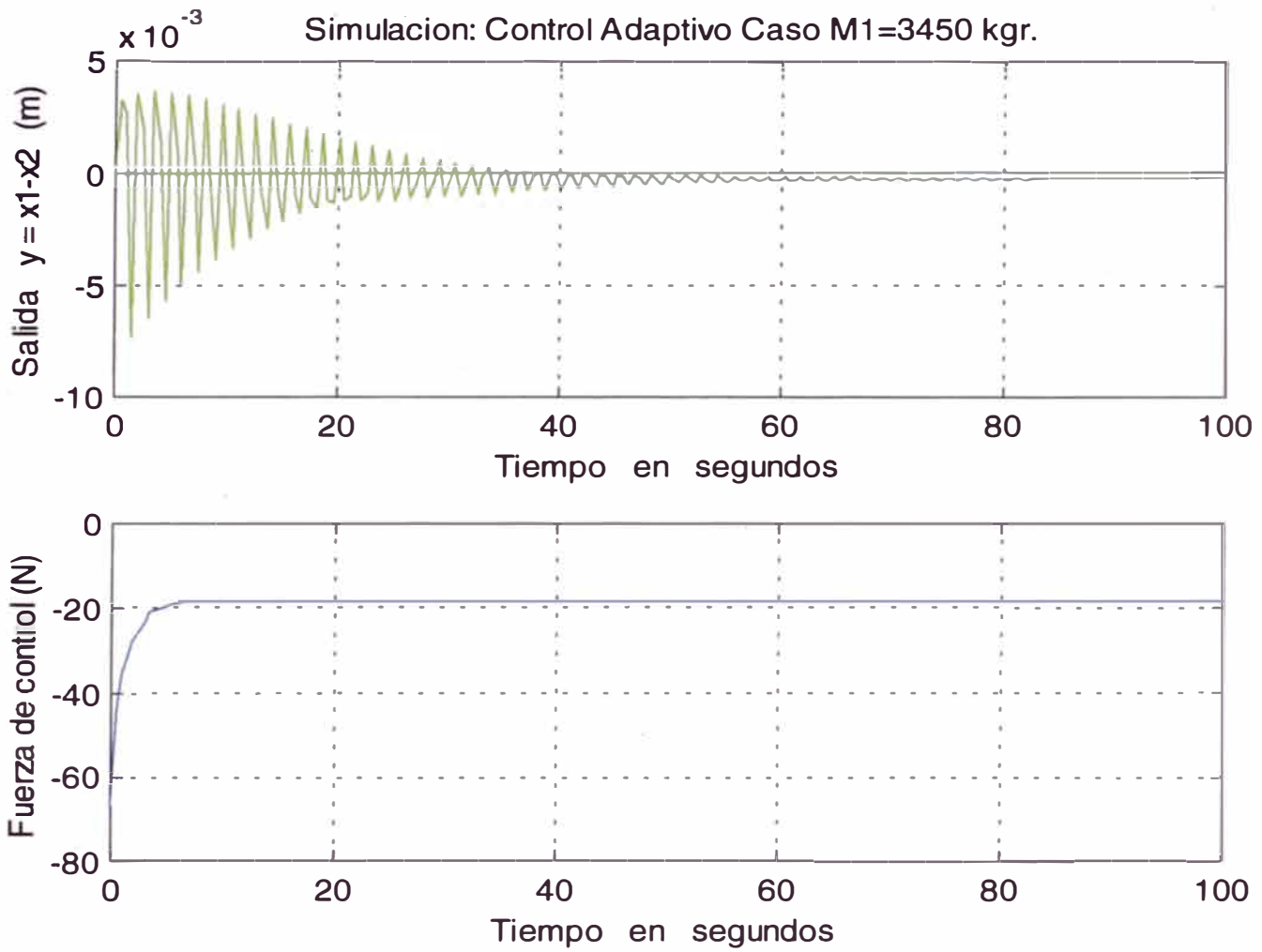


Figura 4.2c Estrategia de control adaptivo autosintonizado con M1= 3450 kgr.

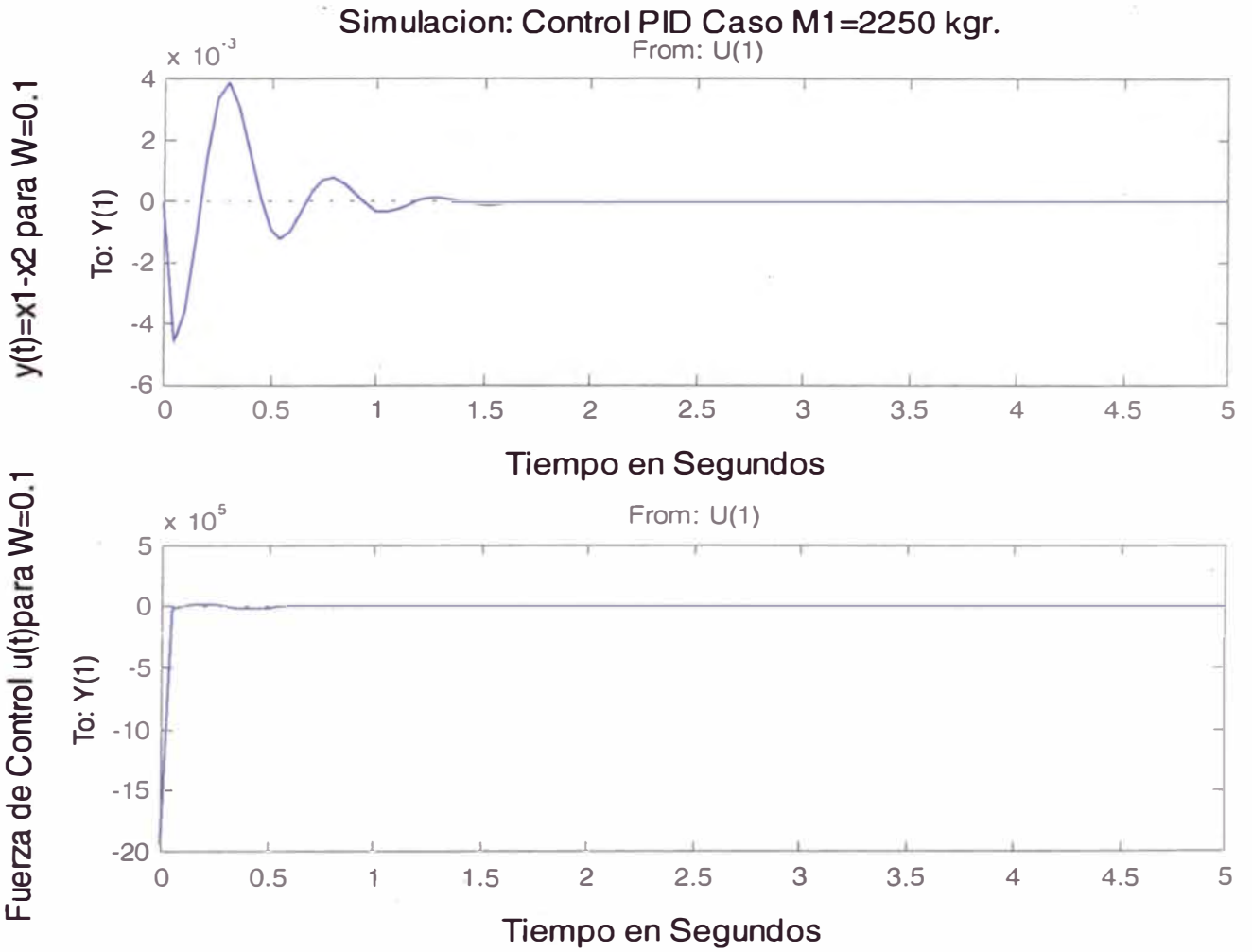


Figura 4.3a Estrategia de control PID con M1= 2250 kgr.

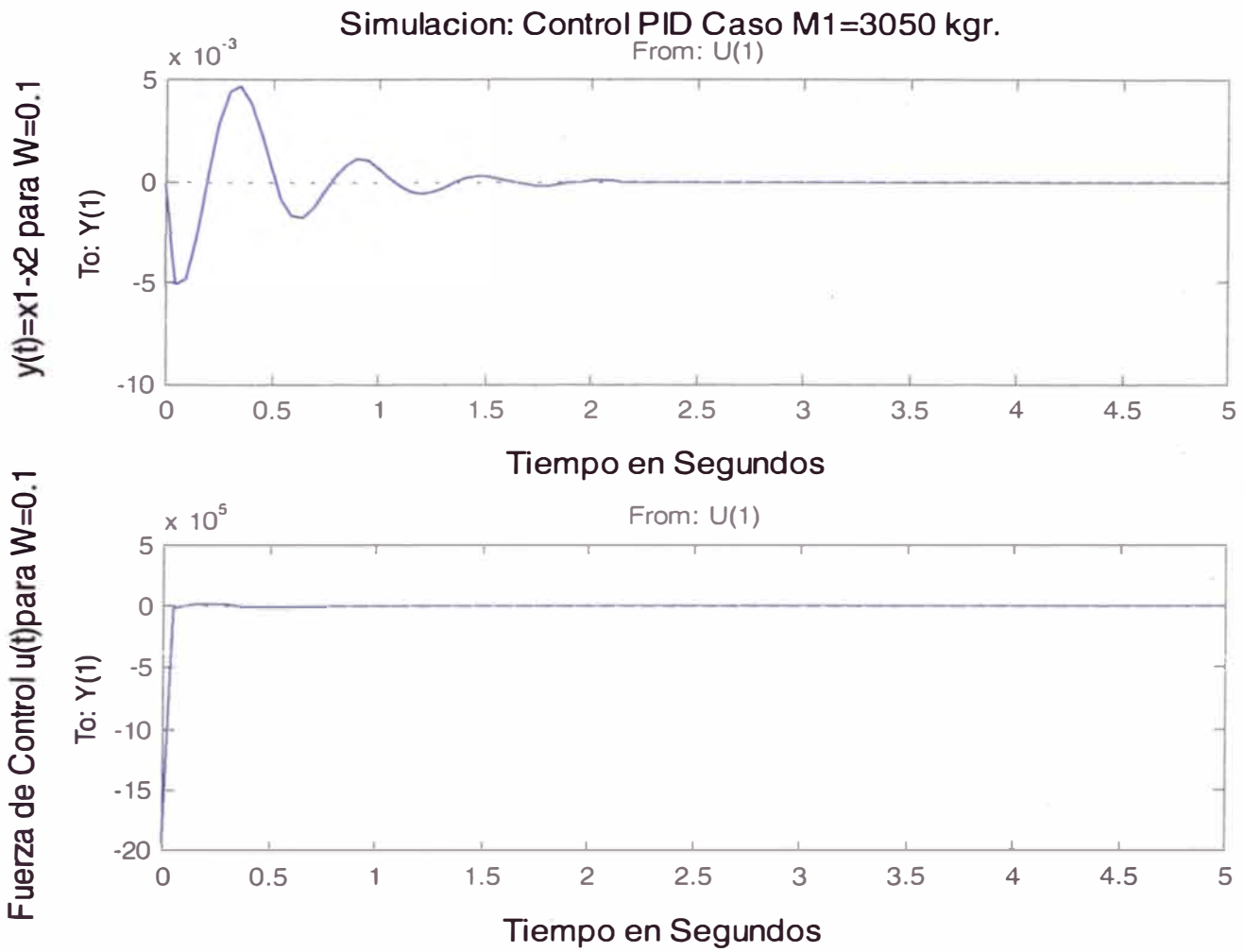


Figura 4.3b Estrategia de control PID con M1= 3050 kgr.

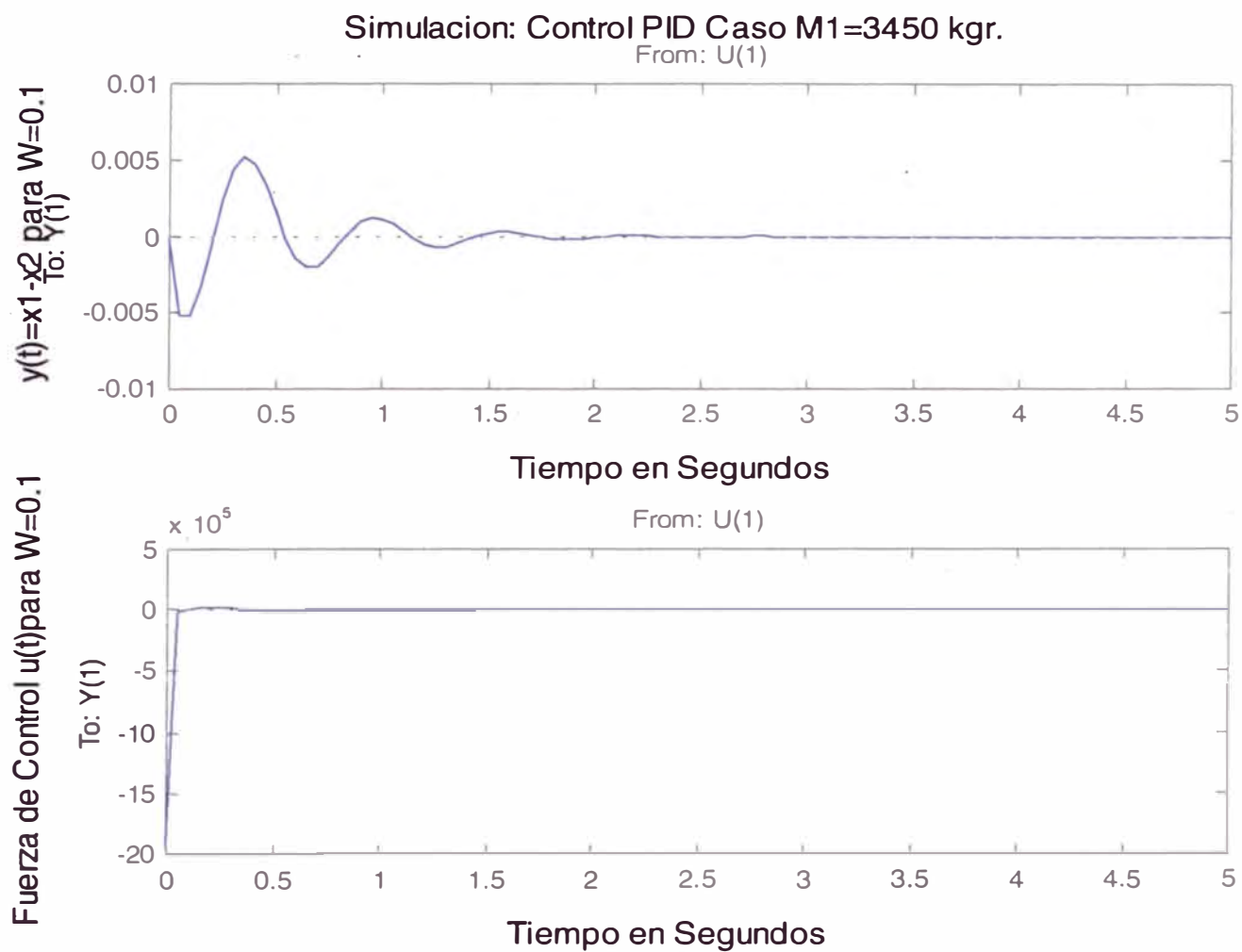


Figura 4.3c Estrategia de control PID con M1= 3450 kgr.

ANEXO A

LISTADO DE PROGRAMAS EN CODIGO MATLAB

PROGRAMA A1: "Simulación del proceso en tiempo continuo"

PROGRAMA A2: "Simulación del proceso en tiempo discreto"

PROGRAMA A3: "Simulación del sistema de control LQR Proporcional Integral "

PROGRAMA A4: "Simulación del sistema de control adaptivo autosintonizado"

PROGRAMA A5: "Simulación del sistema de control PID"

PROGRAMA A6 "RUTINA **polyadd** ADICIONAL AL PROGRAMA A5"

PROGRAMA A1: "Simulación del proceso en tiempo continuo"

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Simulación del proceso en tiempo continuo          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%PROGRAMA A1: "Simulación del proceso en tiempo continuo"
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%Análisis inicial
clear all
% PARAMETROS DEL PROCESO

m1 = 2250; k1 = 72000; b1 = 315;
m2 = 290; k2 = 450000; b2 = 13520;
a23 = (b1/m1)*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1;
a33 = -(b1/m1+b1/m2+b2/m2);
a43 = -(k1/m1+k1/m2+k2/m2);
% MODELO LINEAL
A = [0      1 0  0
     -b1*b2/(m1*m2) 0 a23 -b1/m1
       b2/m2      0 a33  1
       k2/m2      0 a43  0];
B = [0;1/m1 b1*b2/(m1*m2);0 -b2/m2;(1/m1+1/m2) -k2/m2];
C = [0 0 1 0]; D = [0 0];
a23 = (b1/m1)*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1;
a33 = -(b1/m1+b1/m2+b2/m2);
a43 = -(k1/m1+k1/m2+k2/m2);
% MODELO LINEAL
A = [0      1 0  0
     -b1*b2/(m1*m2) 0 a23 -b1/m1
       b2/m2      0 a33  1
       k2/m2      0 a43  0];

B=[0      0
   1/m1      (b1*b2)/(m1*m2)
   0      -(b2/m2)
   (1/m1)+(1/m2)  -(k2/m2)];
C=[0 0 1 0];
D=[0 0];

disp('>> Simulación del proceso en tiempo continuo>>')

disp('Valores de las Matrices A,B, C y D')
disp('Matriz A')
```



```
A
disp('Matriz B')
B
disp('Matriz C')
C
disp('Matriz D')
D
```

```
% CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL PROCESO
rAB = rank(ctrb(A,B)); % rAB = 4 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
rAC = rank(observ(A,C)); % rAC = 4 => COMPLETAMENTE OBSERVABLE
disp('Es Completamente controlable si rAB=4')
rAB
disp('Es Completamente Observable si rAC=4')
rAC
```

```
% RESPUESTAS AL ESCALON
```

```
% RESPUESTAS AL ESCALON
```

```
[Y,X,t] = step(A,B,C,D);
subplot(211)
plot(t,Y(:,1)); grid
title(' Simulacion del proceso en tiempo continuo')
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('y(t) para u=1, w=0')
figure(1)
subplot(212)
plot(t,Y(:,2)); grid
title(' Simulacion del proceso en tiempo continuo')
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('y(t) para u=0, w=1')
```

```
%LOs polos son dados por
disp('Los Polos del Sistema de Suspensión en lazo abierto')
damp(A)
disp('frecuencia ')
f0=abs(eig(A))/(2*pi)
disp('Los Eigenvalores del Sistema de Suspensión en lazo abierto')
eigA=eig(A)
eigA(1);
eigA(2);
eigA(3);
eigA(4);
```

```
disp('Las Funciones de Transferencias del Sistema de Suspensión')
%La función de transferencia se obtiene
[num1,den1]=ss2tf(A,B,C,D,1);
```

```

disp('Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto ')
printsys(num1,den1)
sys1=tf(num1,den1);
[num2,den2]=ss2tf(A,B,C,D,2);
disp('Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto')
printsys(num2,den2)
sys2=tf(num2,den2);
zpk(sys1)
figure(2)
pzmap(sys1)
title('Plano S - Gráfico de Polos y Ceros F.T 1 u1/y1 ')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')

pause;
figure(3)
zpk(sys2)
pzmap(sys2)
title('Plano S - Gráfico de Polos y Ceros F.T 2 u2/y1 ')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')

pause;

% Los ceros son dados por F.T 1
disp('Los Ceros de la Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto')
roots(num1)
disp('Los Polos de la Función de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto')
roots(den1)

% Los ceros son dados por F.T 2
disp('Los Ceros de la Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto')
roots(num2)
disp('Los Polos de la Función de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto')
roots(den2)

print -deps -f P3_1P3

```

PROGRAMA A2: "Simulación del proceso en tiempo discreto"

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Simulación del proceso en tiempo discreto          %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%PROGRAMA A2: "Simulación del proceso en tiempo discreto"
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
% PARAMETROS DEL PROCESO

m1 = 2250; k1 = 72000; b1 = 315;
m2 = 290; k2 = 450000; b2 = 13520;

a23 = (b1/m1)*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1;
a33 = -(b1/m1+b1/m2+b2/m2);
a43 = -(k1/m1+k1/m2+k2/m2);

% MODELO LINEAL
A = [0      1 0 0
     -b1*b2/(m1*m2) 0 a23 -b1/m1
       b2/m2      0 a33 1
       k2/m2      0 a43 0];

B=[0 0;1/m1 (b1*b2)/(m1*m2);0 -(b2/m2);(1/m1)+(1/m2) -(k2/m2)];
C=[0 0 1 0];
D=[0 0];
disp(' >> Simulación del proceso en tiempo discreto >>')
% CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD DEL PROCESO
rAB = rank(ctrb(A,B)); % rAB = 4 => COMPLETAMENTE CONTROLABLE
rAC = rank(observ(A,C)); % rAC = 4 => COMPLETAMENTE OBSERVABLE
disp('Es Completamente controlable si rAB=4')
rAB
disp('Es Completamente Observable si rAC=4')
rAC
%conversión al espacio discreto
disp(' conversión al espacio discreto ')
T=0.1 % Tiempo de muestreo
[G,H,C,D] = c2dm(A,B,C,D,T,'zoh');
disp('Valores de las Matrices G,H, C y D')
disp('Matriz G')
G
disp('Matriz H')
H
disp('Matriz C')

```

```

C
disp('Matriz D')
D

% RESPUESTAS AL ESCALON
figure(1)
[YY,XX] = dstep(G,H,C,D);
tt=linspace(0,60,501);
subplot(211)
plot(tt,YY(:,1)); grid
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('y(t) para u=1, w=0')
title('Simulación del proceso en tiempo discreto')
subplot(212)
plot(tt,YY(:,2)); grid
title('Simulación del proceso en tiempo discreto')
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('y(t) para u=0, w=1')

disp('Los Polos del Sistema de Suspensión en lazo abierto')
damp(G)
disp('frecuencia')
f0=abs(eig(G))/(2*pi)
% Determinando si el Sistema tiene integradores
% Es decir si tiene Eigenvalores en z=0
% computa los eigenvalores

disp('Los Eigenvalores del Sistema de Suspensión en lazo abierto')
eigG=eig(G)
eigG(1);
eigG(2);
eigG(3);
eigG(4);

%La función de transferencia se obtiene
[num1,den1]=ss2tf(G,H,C,D,1)
printsys(num1,den1,'z')
disp('Función de Transferencia de Pulso FT 1')
sys1=tf(num1,den1);

[num2,den2]=ss2tf(G,H,C,D,2)
disp('Función de Transferencia de Pulso FT 2')
printsys(num2,den2,'z')
figure(2)
pzmap(sys1)

```

```
title('Plano Z - Gráfico de Polos y Ceros F.T 1 u1/y1 ')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
```

```
pause;
figure(3)
pzmap(sys2)
title('Plano Z - Gráfico de Polos y Ceros F.T 2 u2/y1 ')
xlabel('Parte Real')
ylabel('Parte Imaginaria')
```

```
pause;
```

```
% Los ceros son dados por F.T 1
disp('Los Ceros de la Funcion de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto')
roots(num1)
disp('Los Polos de la Funcion de Transferencia 1 u1/y1 en lazo abierto')
roots(den1)
```

```
% Los ceros son dados por F.T 2
disp('Los Ceros de la Funcion de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto')
roots(num2)
disp('Los Polos de la Funcion de Transferencia 2 u2/y1 en lazo abierto')
roots(den2)
```

```
print -deps -f P3_1P3
```

PROGRAMA A3: Simulación del sistema de control LQR Proporcional

Integral

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SIMULACION DEL SISTEMA DE CONTROL OPTIMO CUADRATICO
% PROPORCIONAL INTEGRAL%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

```

```

clear all
% PARAMETROS DEL PROCESO
disp(' >> Simulación del Sistema de Control Optimo Proporcional Integral >>')
disp(' Parámetros del Proceso:')
disp(' m1= 2250 k1= 72000 b1= 315')
disp(' m2= 290 k2= 450000 b2= 13520')
% PARAMETROS DEL PROCESO
m1 = 2250; k1 = 72000; b1 = 315;
m2 = 290; k2 = 450000; b2 = 13520;
a23 = (b1/m1)*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1;
a33 = -(b1/m1+b1/m2+b2/m2);
a43 = -(k1/m1+k1/m2+k2/m2);
% MODELO LINEAL: dx/dt = A*x + B*u + E*d; y = C*x + D*u
A = [0 1 0 0
     -b1*b2/(m1*m2) 0 a23 -b1/m1
     b2/m2 0 a33 1
     k2/m2 0 a43 0];
B = [0;1/m1;0;(1/m1+1/m2)];
E = [0;b1*b2/(m1*m2);-b2/m2;-k2/m2];
C = [0 0 1 0]; D = [0];
%
disp('Cálculo de las matrices A,B,C,D y E ')

A
B
C
D
E
disp(' Tiempo de muestreo T=0.08 seg')

% CONVERSION AL ESPACIO DE ESTADO DISCRETO
T=0.08; % TIEMPO DE MUESTREO
[G,H,C,D] = c2dm(A,B,C,D,T,'zoh');
[G,F,C,D] = c2dm(A,E,C,D,T,'zoh');
disp('Cálculo de las matrices G,H,F,C y D ')
G

```

H
F
C
D

```
G1=[G [0 0 0 0]';-C*G 1];
H1=[H;-C*H];
F1=[F;-C*F];
```

```
disp('Cálculo de las matrices aumentadas G1,H1 y F1')
```

G1
H1
F1

```
% Control Optimo del sistema
```

```
Q = [1 0 0 0
      0 100 0 0
      0 0 1000 0
      0 0 0 1];
```

```
Q1=[Q [0 0 0 0]';[0 0 0 0] 5000000];
```

```
R = [0.01];
```

```
disp('Elección de las matrices de Ponderación Q y R')
```

Q
R

```
R1 = R
```

```
disp('Matrices Q1 y R1')
```

Q1
R1

```
% ECUACION DE RICCATI
```

```
P1 = diag(0,4); % MATRIZ DE CEROS DE ORDEN 5
```

```
for i = 1:40
```

```
    P1 = Q1 + G1'*P1*G1 - G1'*P1*H1*inv(R1+H1'*P1*H1)*H1'*P1*G1;
```

```
end
```

```
% CALCULO DE LA MATRIZ DE GANANCIA K
```

```
%P1
```

```
K1 = inv(R1+H1'*P1*H1)*H1'*P1*G1;
```

```
%K1
```

```
disp('Cálculo de la Matriz ganancia K utilizando')
```

```
disp(' la siguiente expresión [K1,P1,Eig1]=dlqr(G1,H1,Q1,R1)')
```

```
[K1,P1,Eig1]=dlqr(G1,H1,Q1,R1);
```

K1

P1

Eig1

```
% SIMULACION DEL SISTEMA CONTROLADO
```

```
N = 81; x=[0;0;0;0;0]; w=0.01;
```

```

for k=1:N

U=-K1*x;
x = G1*x + H1*U + F1*w;
y(k)=x(3); u(k)=U;
end
% GRAFICOS
figure(1)
t=linspace(0,N*T,N);
subplot(2,1,1)
plot(t,y(1:N)), grid
title('Simulacion: Control LQR Proporcional Integral Caso M1=2250');
ylabel('Posición y1=X1-X2 (m)')
xlabel('Tiempo en segundos')
subplot(2,1,2)
plot(t,u(1:N)), grid
xlabel('Tiempo en segundos')
ylabel('Control u (N)')
print -deps -f p3opt2

%K1
%Eig1
%K=K1(1:4)
%Ki=-K1(5)

% SIMULACION DEL SISTEMA CONTROLADO
% N = 81; x=[0;0;0;0]; zi=0; v=0; w=0.01; r=0;
% for k=1:N
%   v=v+r-zi;
%   V(k)=-K*x+Ki*v;
%   U(k)=v*Ki-K*x;
%   x = G*x + H*V(k) + F*w;
%   z(k)=x(3); zi=z(k);
% end
% GRAFICOS
% figure(2)
% t=linspace(0,N*T,N);
% subplot(2,1,1)
% plot(t,z), grid
% title('Simulacion: Control LQR Proporcional Integral Caso M1=2250');
% ylabel('Posición y (m)')
% xlabel('Tiempo en segundos')
% subplot(2,1,2)
% plot(t,U), grid
% xlabel('Tiempo en segundos')
% ylabel('Control u (N)')
% print -deps -f p3opt2

```



```

lamb=0.98; % factor de memoria
Y(1)= 0; Y(2)= 0; Y(3)= 0; Y(4)=0; Y(5)=0; % SALIDA
U(1)= 0; U(2)= 0; U(3)= 0; U(4)=0; U(5)=0; % CONTROL
w(1)= 0; w(2)= 0; w(3)= 0; w(4)=0; w(5)=0;
xmenos = zeros(nn,1); % vector de observacion inicial
z=0; % accion integral inicial
MM = 200;
% BUCLE DEL CONTROL ADAPTIVO *****
for t=1:MM;
    t1=t+1;
% SEÑAL DEL DISTURBIO
    w(t1+4)= 0.01;%*sign(sin(0.03*t1));
% SEÑAL DE REFERENCIA
    W(t1+4)= 0;
% MODELO LINEAL DEL PROCESO CON DISTURBIO
    Y(t1+4)=[Y(t1+3) Y(t1+2) Y(t1+1) Y(t1) ...
            U(t1+3) U(t1+2) U(t1+1) U(t1) ...
            w(t1+3) w(t1+2) w(t1+1) w(t1)]*...
            [-a1 -a2 -a3 -a4 b1 b2 b3 b4 j1 j2 j3 j4]';
    y(t1+4)= Y(t1+4) - W(t1+4); % salida residual
% ESTIMACION DE PARAMETROS (METODO MCRM)
    psi=[Y(t1+3) Y(t1+2) Y(t1+1) Y(t1) U(t1+3) ...
        U(t1+2) U(t1+1) U(t1) ...
        w(t1+3) w(t1+2) w(t1+1) w(t1) 1]';
    rho = max(1,norm(psi));
    psin = psi/rho;
    Nn = chol(Pi');
    S = inv(diag(Nn*ones(NN,1),0));
    Ps = S*Pi*S;
    psins = inv(S)*psin;
    rt = 1 + psins'*Ps*psins;
    lamb = 1 -(rt-sqrt(rt^2-4*norm(Ps*psins)^2/trace(Ps)))/2;
    e = Y(t1+4)/rho - psin'*thi;
    j = psins'*Ps*psins + lamb;
    th = thi + e*inv(S)*Ps*psins/j;
    Hns = Ps*psins/j;
    Ps = (Ps - Hns*psins'*Ps)/lamb;
    tt = abs(max(eig(Ps))/min(eig(Ps)) );
    cmax = 100; cmin = 15;
    if tt <= cmin,
        Pi = Ps; thi = th;
    elseif tt >= cmax,
        Nnew = chol(Ps'); % Nnew*Nnew' = Ps'
        Snew = inv(diag(Nnew*ones(NN,1),0));
        Psnew = Snew*Ps*Snew;
        Pi = Psnew; thi = th;
    end
end

```

```

% RECUPERACION DE LA ECUACION DE ESTADO
ae1=-th(1); ae2=-th(2); ae3=-th(3); ae4=-th(4);
be1=th(5); be2=th(6); be3=th(7); be4=th(8);
je1=th(9); je2=th(10); je3=th(11); je4=th(12);
Ce=th(13);
nume = [0 be1 be2 be3 be4];
dene = [1 ae1 ae2 ae3 ae4];
[GE,HE,CE,DE] = tf2ss(nume,dene);
numde = [1 je1 je2 je3 je4];
[GE,FE,CE,DE] = tf2ss(numde,dene);

% CALCULO DE LA GANANCIA F DEL ESTIMADOR DE KALMAN
F = dlqe(GE,FE,CE,Sigma,Xi);
xmas = xmenos + F*(y(tl+4) - CE*xmenos); % observacion
z = z -CE*xmas; % accion integral

% CALCULO DE LA GANANCIA Ka DEL CONTROLADOR
Ga = [GE zeros(nn,r);-CE eye(r,r)]; % ec (22) y ec. (23)
Ha = [HE;zeros(r,r)];
Ca = [CE zeros(r,r)];
Ka = dlqr(Ga,Ha,Qa,R);

% CALCULO DE LA LEY DE CONTROL RESIDUAL
u(tl+4) = - Ka*[xmas;z];% -Kw*w(tl+4);
% ACTUALIZACION DE ESTADOS
xmenos = GE*xmas + HE*u(tl+4);
AE = 1 + ae1 + ae2 + ae3 + ae4; BE = be1 + be2 + be3 + be4;
Uin = inv(BE)*(AE*W(tl+4) - Ce);
% CALCULO DE LA SEÑAL ACTUAL DE CONTROL U
U(tl+4) = u(tl+4) + Uin;
end % *****FIN DEL BUCLE

% GRAFICOS
ejex = linspace(0,MM*T,MM);
subplot(2,1,1)
plot(ejex,W(6:MM+5),ejex,Y(6:MM+5)); grid
title('Simulacion: Control Adaptivo Caso M1=2250 kgr.');
```

ylabel('Salida y = x1-x2 (m)')

xlabel('Tiempo en segundos')

subplot(2,1,2), grid

plot(ejex,U(6:MM+5)); grid

xlabel('Tiempo en segundos')

ylabel('Fuerza de control (N)')

print -deps -f p3adap1

PROGRAMA A5: Simulación del sistema de control PID

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% SIMULACION DEL SISTEMA DE CONTROL PID %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear all
% PARAMETROS DEL PROCESO Ó PLANTA
m1 = 2250; k1 = 72000; b1 = 315;
m2 = 290; k2 = 450000; b2 = 13520;

% FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PLANTA O PROCESO G1(s)
nump=[(m1+m2) b2 k2]
denp=[(m1*m2) (m1*(b1+b2))+(m2*b1) (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(b1*b2)
(b1*k2)+(b2*k1) k1*k2]

% FUNCION DE TRANSFERENCIA G2(s)
num1=[-(m1*b2) -(m1*k2) 0 0]
den1=[(m1*m2) (m1*(b1+b2))+(m2*b1) (m1*(k1+k2))+(m2*k1)+(b1*b2)
(b1*k2)+(b2*k1) k1*k2]

% FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA FUERZA DE CONTROL
numf=num1;
denf=denp;

nump

% GANANCIAS DEL PID
KD=208025
KP=832100
KI=624075

% FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PERTURBACION
numc=[KD,KP,KI]
denc=[0 1 0]

% DESARROLLO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA TOTAL
numa=conv(numf,denc)
dena=polyadd(conv(denp,denc),conv(numc,numc))
% CALCULANDO LA RESPUESTA DEL CONTROLADOR PID PARA
% UNA PERTURBACION DE 0.1 m DE ALTO Y GRAFICANDO
figure(1)
t=0:0.05:5;
subplot(2,1,1)
step(0.1*numa,dena,t)
title('Simulacion: Control PID Caso M1=2250 kgr.');
```

```

xlabel('Tiempo en Segundos');
ylabel('y(t)=x1-x2 para W=0.1')

% FUNCION DE TRANSFERENCIA PARA LA FUERZA DE CONTROL
numx=conv(numf,numc);
denx=polyadd(conv(denp,denc),conv(nump,numc))

% GRAFICO PARA LA FUERZA DE CONTROL
subplot(2,1,2)
step(0.1*numx,denx,t)
title('');
xlabel('Tiempo en Segundos');
ylabel('Fuerza de Control u(t)para W=0.1')
% Mejorando la respuestas del Sistema
z1=1; z2=3;p1=0;
numc=conv([1 z1] , [1 z2])
denc=[1 p1]
num2=conv(nump,numc);
den2=conv(denp,denc);
figure(2)
rlocus(num2,den2)
title ('root locus con controlador PID ')
[K,p]=rlocfind(num2,den2)

% Escogiendo una ganacia K=2 y multiplicando por Kp,Ki y Kd
% Recalculando de nuevo

KD=208025*2
KP=832100*2
KI=624075*2

% FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA PERTURBACION
numc=[KD,KP,KI]
denc=[0 1 0]

% DESARROLLO DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA TOTAL
numa=conv(numf,denc)
dena=polyadd(conv(denp,denc),conv(nump,numc))
% CALCULANDO LA RESPUESTA DEL CONTROLADOR PID PARA
% UNA PERTURBACION DE 0.1 m DE ALTO Y GRAFICANDO
figure(3)
t=0:0.05:5;
subplot(2,1,1)
step(0.1*numa,dena,t)
title('Simulacion: Control PID Caso M1=2250 kgr. ');
xlabel('Tiempo en Segundos');

```

```
ylabel('y(t)=x1-x2 para W=0.1')

% FUNCION DE TRANSFERENCIA PARA LA FUERZA DE CONTROL
numx=conv(numf,numc);
denx=polyadd(conv(denp,denc),conv(nump,numc))

% GRAFICO PARA LA FUERZA DE CONTROL
subplot(2,1,2)
step(0.1*numx,denx,t)
title("");
xlabel('Tiempo en Segundos');
ylabel('Fuerza de Control u(t)para W=0.1')

print -deps -f p3opt2
```

RUTINA ADICIONAL AL PROGRAMA A5: polyadd.m

```
function[poly]=polyadd(poly1,poly2)
%Copyright 1996 Justin Shriver
%polyadd(poly1,poly2) adds two polynomials possibly of uneven length
if length(poly1)<length(poly2)
    short=poly1;
    long=poly2;
else
    short=poly2;
    long=poly1;
end
mz=length(long)-length(short);
if mz>0
    poly=[zeros(1,mz),short]+long;
else
    poly=long+short;
end
```

BIBLIOGRAFIA

- [1] Rojas Moreno Arturo, Ph.D., Control Avanzado, Diseño y Aplicaciones en Tiempo Real, Edición independiente, Universidad nacional de Ingeniería, Perú, 2001.
- [2] Benites Saravia Raúl , MSc., Control Automático, Sección de Postgrado y Segunda Especialización, UNI, Perú, 2001.
- [3] B.J. Chalmers, “Theory of Ground Vehicles, Lecture Notes/Vertical”: 2001.
- [4] C.S. Antonio, “Simulación y Control de Procesos por Ordenador”, Marcombo: Barcelona, 1987.
- [5] D.M. Etter, “Solución de Problemas de Ingeniería con Matlab”, Prince Hall: Mexico 1998.
- [6] O. Katsuhiko, “Sistemas de Control en Tiempo Discreto”, University of Minnesota: New York 2000.
- [7] The Math Woks Inc., “Simulink, software de Simulación de Sistemas Dinámicos”: Mexico 1998