

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA**



**Fórmulas de Cuadratura  
basadas en Interpolación  
Racional**

por

**Armando Gregorio Velásquez Romero**

Tesis para optar  
Título Profesional de:  
Licenciado en Matemática

**Mg. William Carlos Eche garay Castillo**  
Asesor

Lima, Febrero del 2006

Este trabajo está dedicado con mucho cariño a mis padres: Máximo y María, quienes me enseñaron el valor de la honradez y el amor al trabajo. Quiero también dedicar este esfuerzo a cada uno de los miembros de mi familia y a todos mis amigos.

# Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Profesor Asesor Magister William Carlos Echegaray Castillo, gran Maestro y mejor persona. Gracias William por la gran paciencia que siempre muestras y por haberme guiado de manera adecuada hasta la finalización de este trabajo: Sin ti este trabajo no sería posible.

Además, aprovecho la ocasión para hacer llegar mi reconocimiento a todos los que fueron mis profesores de antegrado en la Facultad de Ciencias, quienes me brindaron sus sabios conocimientos y me enseñaron a querer a la Matemática. Homenaje Póstumo a los inolvidables Maestros Eugen Blum y Mauro Chumpitaz: Que Dios los tenga en su gloria.

También quisiera agradecer a todas aquellas personas que en algún momento me apoyaron en la elaboración de este trabajo. Quiero destacar de manera muy especial el reconocimiento a mis amigos el Licenciado Fredy Loayza Cordero y al Doctor Elmer LLanos Villarreal por la valiosa colaboración, disposición y paciencia que siempre me mostraron. A todos ellos les estoy muy agradecido.

# Indice

<b>0</b>	<b>Introducción</b>	<b>vii</b>
<b>1</b>	<b>Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1	La Integral de Riemann . . . . .	1
1.2	La Integral de Riemann-Stieltjes . . . . .	8
1.3	La Integral de Lebesgue . . . . .	15
1.4	Interpolación de Lagrange . . . . .	22
1.5	Fórmulas de Integración de Newton-Cotes . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Funciones Ortogonales</b>	<b>34</b>
2.1	Funciones Ortogonales . . . . .	34
2.2	Polinomios Ortogonales . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Fórmulas de Cuadratura Gaussiana (clásicas)</b>	<b>46</b>
3.1	Cuadratura de Gauss-Legendre . . . . .	49
3.2	Cuadratura de Gauss-Chebyshev . . . . .	52
3.3	Cuadratura Gaussiana y problema de valores propios . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Fórmulas de cuadratura basadas en Interpolación Racional</b>	<b>65</b>
4.1	Funciones ortogonales extendidas . . . . .	66
4.2	Cuadratura Gaussiana . . . . .	67
4.3	Conexión con los polinomios ortogonales . . . . .	68
4.4	Propiedades de los nodos . . . . .	71

4.5	Resultados de convergencia . . . . .	77
4.6	Algoritmos . . . . .	80
4.7	Ventajas del Nuevo Método . . . . .	81
4.8	Ejemplo numérico: El valor de $\pi$ . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Aplicación en algunos problemas de Ingeniería</b>	<b>86</b>
5.1	El péndulo simple . . . . .	87
5.2	Longitud de arco de una hipérbola . . . . .	90
5.3	Capacidad calórica de un sólido . . . . .	91
<b>6</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>92</b>
<b>A</b>	<b>Programas</b>	<b>93</b>
<b>B</b>	<b>Teoremas relacionados</b>	<b>97</b>
<b>7</b>	<b>Bibliografía</b>	<b>99</b>

# Resumen

En este trabajo establecemos fórmulas de cuadratura basadas en interpolación racional para evaluar integrales Riemannianas sobre el intervalo  $[-1, 1]$ , siendo el integrando el producto  $f(x)w(x)$  donde  $w(x)$  es una función de peso integrable y positiva casi en todas partes sobre  $[-1, 1]$  y  $f(x)$  será aproximada por interpolación usando las funciones básicas  $1/(1 + t_k x)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ;  $t_k$  son parámetros pertenecientes al intervalo  $(-1, 1)$ . Para aplicarla a una función  $f(t)$  definida en un intervalo cualquiera  $[a, b]$  usamos una transformación, la cual lleva el intervalo  $a \leq t \leq b$  al intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ .

Investigaremos dos tipos de cuadraturas:

- a) Cuadratura Gaussiana, que son fórmulas de cuadratura de máxima precisión,
- b) Cuadratura Ortogonal, que son fórmulas de cuadratura cuyos nodos son los ceros de las funciones ortogonales obtenidas por ortogonalización del sistema de funciones básicas.

Veremos que ambas aproximaciones involucran polinomios ortogonales con una función de peso que depende del número de nodos.

# Introducción

Si una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua y es conocida su antiderivada  $F$ , la integral definida de esta función entre  $a$  y  $b$  puede calcularse utilizando la fórmula de Newton-Leibnitz

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \quad (1)$$

siendo  $F$  una antiderivada de  $f$ . Sin embargo, en muchos casos  $F$  no puede hallarse por medios elementales o resulta complicado: como resultado el cálculo de (1) puede resultar difícil y a veces imposible.

El cálculo numérico de una integral simple se denomina cuadratura mecánica. La técnica ordinaria en la cuadratura mecánica consiste en reemplazar la función dada  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  bajo consideración por una interpolación o por una función aproximada  $\varphi$  de tipo sencillo (por ejemplo un polinomio) y establecer en forma aproximada la integral definida.

La interpolación de Lagrange es muy popular entre nosotros para aproximar un conjunto de  $n + 1$  puntos en el plano por medio de un polinomio de grado menor o igual a  $n$ . Abordaremos este tema con más detalle en los preliminares.

La clase de los polinomios algebraicos tiene algunas ventajas distintivas en cuanto a su uso para aproximaciones: Existen suficientes polinomios como para aproximar cualquier función continua dada en un intervalo cerrado dentro de una tolerancia arbitraria, los polinomios son fáciles de evaluar en cualquier valor y sus derivadas e integrales existen y son fáciles de determinar.

Sin embargo la desventaja del uso de polinomios en las aproximaciones es su tendencia a oscilar. Esta tendencia causa con frecuencia que las cotas de error de

las aproximaciones polinómicas excedan significativamente el error de aproximación promedio, puesto que las cotas de error están determinadas por el error máximo de aproximación. Para encontrar técnicas que disminuyan las cotas de error de aproximación, se consideran los métodos que esparcen más uniformemente el error de aproximación en el intervalo en que se esté trabajando. Estas técnicas requieren la introducción de una nueva clase de funciones aproximantes, la clase de funciones racionales.

Como todo polinomio es también una función racional (simplemente tomamos como denominador igual a uno), la aproximación usando funciones racionales dará resultados con cotas de error no mayores que la aproximación con polinomios. Las funciones racionales tienen la ventaja adicional de permitir la aproximación en forma eficiente de funciones que tienen discontinuidades infinitas, siempre que estén fuera del intervalo de aproximación. La aproximación polinómica es inaceptable en esta situación. Son clásicos los trabajos efectuados por Padé en aproximaciones por funciones racionales, vea por ejemplo [8].

La parte central del presente trabajo es evaluar la integral

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \quad (2)$$

donde  $w$  es una función de peso integrable y positiva casi en todas partes sobre  $[-1, 1]$ . Esta integral proviene del primer miembro de (1) al efectuar el cambio de variable lineal  $t = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a)x$  la cual nos lleva  $[a, b]$  en  $[-1, 1]$  sólo para simplificar y hacer la formulación tan general como sea posible.

En el Capítulo 1 (preliminares) empezamos recordando algunos conceptos básicos acerca de las integrales de Riemann, Riemann-Stieltjes y de Lebesgue para funciones acotadas y medibles. También, aquí deducimos las fórmulas de interpolación de Lagrange y terminamos con las Fórmulas de integración de Newton y Cotes, las cuales son las primeras fórmulas de cuadratura que daremos.

En el Capítulo 2 estudiamos las funciones ortogonales y con mucho detalle los polinomios ortogonales y sus propiedades que son extremadamente importantes para



los capítulos posteriores. En el Capítulo 3 revisamos las deducciones de las Fórmulas de Cuadratura de Gauss. Veremos aquí las cuadraturas de Gauss-Legendre y las cuadraturas de Gauss-Chebyshev.

El Capítulo 4 está dedicado íntegramente al establecimiento de las Fórmulas de Cuadratura basadas en Interpolación Racional. Esto es, calculamos la integral definida dada en (2) efectuando la siguiente técnica: La función  $f$  será aproximada usando las funciones básicas:

$$\frac{1}{1+t_k x}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad t_k \in (-1, 1). \quad (3)$$

Para el cálculo de dicha integral investigamos dos tipos de cuadraturas:

Cuadratura Gaussiana y Cuadratura Ortogonal.

Se sabe que ambas aproximaciones son las mismas cuando usamos interpolación por polinomios, pero resultan fórmulas de cuadratura diferentes cuando usamos las funciones básicas dadas en (3). También veremos las propiedades de los nodos y un ejemplo numérico.

En el Capítulo 5 tenemos algunas aplicaciones en problemas de ingeniería.

En la página 92 damos las conclusiones del presente trabajo y finalmente en la página 93 tenemos un apéndice en donde presentamos los programas respectivos así como algunos teoremas relacionados.

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 La Integral de Riemann

El Cálculo trata principalmente dos problemas geométricos: encontrar la tangente a una curva y, hallar el área limitada por una curva. El primero se resuelve por medio de un paso al límite, conocido con el nombre de diferenciación; el segundo, por medio de otro paso al límite -la integración- del que trataremos en este trabajo. La rama de la Matemática que estudia el problema de hallar el área limitada por una curva se denomina Cálculo Integral. El origen del Cálculo Integral se remonta a más de 2500 años, época en que los griegos intentaban resolver el problema del área ideando el procedimiento que llamaron exhaustión. Las ideas esenciales de este método se pueden describir brevemente como sigue: Dada una región cuya área quiere determinarse, se inscribe en ella una región poligonal que se aproxime a la dada y cuya área sea de fácil cálculo. Luego se elige otra región poligonal que dé una mejor aproximación y se continúa el proceso tomando polígonos con mayor número de lados cada vez, tendiendo a llenar la región dada. Arquímedes (Siracusa, 287-212 A.C.), el más ilustre sabio de la Antigüedad, usó satisfactoriamente este método para hallar fórmulas exactas del círculo y de algunas otras figuras especiales. Particularmente resolvió el Problema de la Cuadratura de la Parábola: Dada la parábola  $y = x^2$ ,  $x \in [0, 1]$  decir cuántas veces está contenido el área debajo de la

parábola en el cuadrado unitario.

Desde Arquímedes, el desarrollo del método de exhaustión tuvo que esperar casi 18 siglos, hasta que el uso de símbolos y técnicas algebraicas se hizo preciso en el estudio de las matemáticas. Un cambio lento pero revolucionario en el desarrollo de las notaciones matemáticas empezó en el siglo XVI D.C. El engorroso sistema de numeración romano fue desplazado gradualmente por los caracteres arábigos que utilizamos hoy en día. Los signos  $+$  y  $-$  fueron introducidos por primera vez, y se empezaron a reconocer las ventajas de la notación decimal. Durante este periodo, los brillantes resultados de los matemáticos italianos Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576) y Ferrari (1522-1565) que dieron soluciones algebraicas a las ecuaciones cúbicas y cuárticas, estimuló el desarrollo de la Matemática y animó a la aceptación del lenguaje algebraico nuevo y superior. Con la introducción muy extendida de los bien elegidos símbolos algebraicos, revivió el interés por el antiguo método de exhaustión y en el siglo XVI en los que se descubrieron muchos resultados parciales, los que como los italianos Cavalieri (1598-1647), Torricelli (1608-1647) y Mengoli (1626-1686) así como los franceses Vieta (1540-1603), Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) y Pascal (1623-1662) fueron pioneros.

Gradualmente el método de exhaustión fue transformándose en lo que hoy se conoce como Cálculo Integral, nueva y potente disciplina que tiene numerosísimas aplicaciones no sólo en problemas relativos a áreas y volúmenes, sino también en problemas de otras ciencias. Este método, que mantiene alguno de los caracteres originales del método de exhaustión, recibió su más grande impulso en el siglo XVII, debido a los esfuerzos de Isaac Newton (inglés, 1642-1727), una de las mentes más portentosas que ha producido la humanidad y Gottfried Leibnitz (alemán, 1646-1716). Ambos matemáticos descubrieron independientemente el Cálculo integral, alrededor de 1665. El desarrollo de esta importante rama de la matemática se mantuvo durante el siglo XIX, hasta que Agustin-Louis Cauchy (francés, 1789-1857) y Bernhard Riemann (alemán, 1826-1866) le dieron una base matemática firme. Posteriores afinamientos y extensiones de la teoría han llegado hasta la Matemática contemporánea. Sin más preámbulo damos las ideas de la integral de Riemann.

**Definición 1.1** Sea  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  un intervalo cerrado.

El conjunto  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subset [a, b]$  se denomina una partición de  $[a, b]$  si  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_n = b$ .

Esta partición determina una división de  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos  $[x_{k-1}, x_k]$ .

La longitud de cada subintervalo es denotado con  $\Delta x_k$ , donde  $k = 1, 2, \dots, n$ .

**Definición 1.2** Se denomina una partición regular de  $[a, b]$  si la longitud de cada subintervalo generado tiene la misma medida, esto es,  $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  y entonces  $x_k = x_{k-1} + k\Delta x_k = x_{k-1} + k(\frac{b-a}{n})$ .

**Definición 1.3** Se llama norma de la partición  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  de  $[a, b]$  y se le denota  $\|P\|$  a la mayor de las longitudes  $\Delta x_k$ , es decir,

$$\|P\| = \max_{k=1, \dots, n} \{\Delta x_k = x_k - x_{k-1}\}$$

**Definición 1.4** Una partición  $P'$  de  $[a, b]$  es más fina que  $P$  (o un refinamiento de  $P$ ) si  $P \subset P'$ , esto es, cada punto de división  $x_k$  de  $P$  es también un punto de  $P'$ .

**Definición 1.5** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada. Luego, dada la partición  $P = \{x_k : k = 0, 1, 2, \dots, n\}$  de  $[a, b]$  se definen los números:

$$M_k(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, k = 1, 2, \dots, n$$
$$m_k(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}, k = 1, 2, \dots, n$$

**Definición 1.6** Se denominan suma superior y suma inferior de Riemann de  $f$  correspondientes a la partición  $P$  de  $[a, b]$  a las sumas:

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f)\Delta x_k \quad \text{y} \quad L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f)\Delta x_k.$$

Geoméricamente  $U(f, P)$  representa la suma de las áreas de los rectángulos por Exceso sobre cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de altura  $M_k(f)$  mientras que la suma  $L(f, P)$  representa la suma de las áreas de los rectángulos por Defecto sobre cada subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de altura  $m_k(f)$ .

**Observación 1.1** Para calcular aproximadamente el área de la superficie debajo de la gráfica de  $f$  en  $[a, b]$  usualmente se utiliza el valor  $\frac{1}{2} [U(f, P) + L(f, P)]$ . Esta es una de nuestras primeras fórmulas de cuadratura.

**Observación 1.2** Si  $m \leq f(x) \leq M$ ,  $x \in [a, b]$ , entonces

$$m(b - a) < L(f, P) \leq U(f, P) \leq M(b - a)$$

**Definición 1.7** Sea  $\wp$  el conjunto de todas las particiones posibles  $P$  de un intervalo  $[a, b]$  :

$$\underline{I}(f, P) = \sup \{L(f, P) : P \in \wp\} \quad e \quad \bar{I}(f, P) = \inf \{U(f, P) : P \in \wp\}$$

son llamados la integral inferior e integral superior de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]$ , respectivamente.

**Definición 1.8** Una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es integrable en  $[a, b]$  si  $f$  está acotada sobre  $[a, b]$  y si  $\underline{I}(f, P) = \bar{I}(f, P)$  y en tal caso, a este valor común se le llama la integral definida (de Riemann) de  $f$  sobre  $[a, b]$  y es denotada por  $\int_a^b f(x) dx$

**Definición 1.9** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  una función integrable sobre  $[a, b]$ . Entonces el área bajo la gráfica de  $f$  desde  $a$  hasta  $b$  se define como  $A_a^b f = \int_a^b f(x) dx$ .

La demostración de los siguientes dos teoremas pueden verse en [7].

**Teorema 1.1** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua entonces  $f$  es integrable sobre  $[a, b]$ .

**Teorema 1.2** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces para cada  $\epsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  :  $\left| \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k - \int_a^b f(x) dx \right| < \epsilon$  para toda partición  $P / \|P\| < \delta$  y para toda elección de  $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ . El punto  $x_k^*$  se llama el punto muestra de  $[x_{k-1}, x_k]$ .

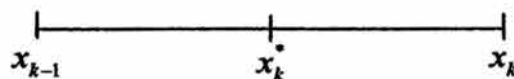


Figura 1

**Corolario 1.1** Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces para toda partición  $P$  de  $[a, b]$  se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k, \quad x_k^* \in [x_{k-1}, x_k] \quad (1.1)$$

**Observación 1.3** Como  $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ , hacemos  $x_k^* = x_k$  y considerando una partición  $P$  regular cuya longitud de cada subintervalo es  $\Delta x_k = \Delta x$ . Tenemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x \quad (1.2)$$

en donde:  $x_k = a + k\Delta x$  y  $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ .

**Ejemplo 1.1** Cálculo del área bajo un senoide en  $x \in [0, \pi]$  :

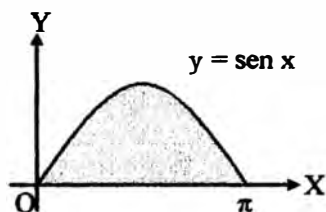


Figura 2

Sea  $A$  el área en cuestión. Aquí  $f(x) = \text{sen } x$ ,  $a = 0$ ,  $b = \pi$ .

En (1.2)  $x_k = \frac{k\pi}{n}$  y  $\Delta x = \frac{\pi}{n}$  tenemos:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^n \text{sen}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Utilizamos la fórmula de Euler:  $e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x$ ,  $i = \sqrt{-1}$

Por De Moivre:  $(\cos x + i \text{sen } x)^k = \cos(kx) + i \text{sen}(kx)$ .

Consideremos la serie geométrica:  $\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$ ,  $a \neq 1$ .

Combinando estas tres expresiones y previas simplificaciones obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{sen}(kx) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\operatorname{sen}x - \operatorname{sen}(n+1)x + \operatorname{sen}(nx)}{1 - \cos x} \right]$$

Hacemos  $x = \frac{\pi}{n}$  y la reemplazamos en la ecuación para el área:

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right) - \operatorname{sen}(n+1)\frac{\pi}{n} + \operatorname{sen}(\pi)}{2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right]$$

$$\text{Así, } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[ \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{1 - \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{n} \left[ \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}} \right].$$

$$\text{Sea ahora } x = \frac{\pi}{n}: A = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1 + \cos x}{\frac{\operatorname{sen}x}{x}} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x)}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}x}{x}} = 2.$$

Es decir, el área de la superficie bajo un senoide en  $[0, \pi]$  es el mismo que el de un cuadrado cuyo lado mide  $\sqrt{2}$  unidades.

**Teorema 1.3** (*Teorema Fundamental de Cálculo*): Sea  $f : J \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $F$  es diferenciable sobre  $J$  tal que  $F'(x) = f(x) \forall x \in J$ , entonces para cada  $a, b \in J$  con  $a < b$  se tiene:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

**Prueba.** Supongamos que  $a, b \in J$  con  $a < b$ . Sea  $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  una partición de  $[a, b]$ . Como  $F$  es diferenciable sobre  $[a, b]$  y  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [a, b]$ , obtenemos por el teorema del valor medio para derivadas que para cada intervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  existe un  $x_k^* \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$  tal que

$$F'(x_k^*) = \frac{F(x_k) - F(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}.$$

Puesto que  $F'(x) = f(x)$  para cada  $x \in [a, b]$ , se tiene:

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = f(x_k^*)(x_k - x_{k-1})$$

de donde,

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})]$$

pero,

$$\sum_{k=1}^n [F(x_k) - F(x_{k-1})] = [F(x_1) - F(a)] + [F(x_2) - F(x_1)] + \dots + [F(b) - F(x_{n-1})]$$

Combinando las dos últimas ecuaciones tenemos:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*) (x_k - x_{k-1}) = F(b) - F(a).$$

Como esto es cierto para todas las subdivisiones  $P$  de  $[a, b]$  se sigue por (1.1) que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

con lo que la prueba es completa. ■

Este Teorema es el más importante del Cálculo Integral y es conocido también como la fórmula de Newton-Leibnitz. Algunas veces este resultado es llamado el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo o simplemente Teorema Fundamental de Cálculo. El Primer Teorema Fundamental del Cálculo establece que bajo ciertas condiciones la derivación y la integración son operaciones inversas.

**Ejemplo 1.2** *Cálculo del área debajo de un senoide en  $x \in [0, \pi]$ .*

Aquí usamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$A = \int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0) = 2$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo 1.1.

**Teorema 1.4** (*Teorema del Valor Medio*): Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es continua, entonces existe un valor  $c \in \langle a, b \rangle$ , tal que  $\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$ .

**Prueba.** Sea  $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ ,  $G(a) = 0$ ,  $x \in [a, b]$ , Como  $G$  resulta ser una función diferenciable por el Primer Teorema Fundamental del Cálculo, entonces por el teorema de valor medio para derivadas sobre  $[a, b]$  existe un  $c \in \langle a, b \rangle$  tal que

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b - a).$$

Entonces,

$$G(b) = G'(c)(b - a).$$

Así,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a)$$

lo que prueba el teorema. ■



## 1.2 La Integral de Riemann-Stieltjes

Hemos visto en la sección anterior la definición precisa de la Integral de Riemann.

Ahora veamos el proceso de integración con más detalle: En realidad vamos a considerar un concepto más general que el de Riemann: la Integral de Riemann-Stieltjes, (Thomas Stieltjes, holandés 1856-1894) que involucra dos funciones  $f$  y  $\alpha$ . El símbolo que utilizamos para designar tales integrales es  $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$ . La integral de Riemann se obtiene como caso particular cuando  $\alpha(x) = x$ . Cuando  $\alpha$  tiene derivada continua, la definición es tal que la integral de Stieltjes  $\int_a^b f(x)d\alpha(x)$  se convierte en la integral de Riemann  $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$ . Sin embargo la integral de Stieltjes tiene sentido en el caso que  $\alpha$  no es diferenciable e incluso no es continua. De hecho, es al tratar con funciones discontinuas  $\alpha$  se hace patente la importancia de la integral de Stieltjes. Eligiendo adecuadamente una función discontinua  $\alpha$ , una suma finita o infinita puede expresarse como una integral de Stieltjes, entonces la suma y la integral de Riemann ordinaria son casos especiales de este proceso más general. Por ejemplo en los problemas físicos que consideran la distribución de masas que son en parte discretas y en parte continuas pueden ser abordados utilizando la integral de Stieltjes. Así mismo, en la teoría matemática de la probabilidad esta integral es un instrumento muy útil que hace posible la consideración simultánea de variables aleatorias continuas y discretas.

**Definición 1.10** *Suma de Riemann-Stieltjes:*

Es una suma de la forma:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta\alpha_k$$

Donde:

$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  es una partición de  $[a, b]$  (compacto)

$f, \alpha$  : son funciones reales, definidas y acotadas sobre  $[a, b]$

$x_k$  : punto muestra de  $[x_{k-1}, x_k]$ , esto es,  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$

$\Delta\alpha_k$  designa la diferencia:  $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$

**Ejemplo 1.3** *Cálculo de la Suma de Riemann-Stieltjes si  $f(x) = 1, \alpha(x) = x^2$  y  $P = \{0, 0.1, 0.2, \dots, 1\}$  una partición regular de  $[0, 1]$ .*

Aquí  $n = 10$ . Tenemos que:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^{10} f(\bar{x}_k) \Delta \alpha_k = f(\bar{x}_1) \Delta \alpha_1 + f(\bar{x}_2) \Delta \alpha_2 + \dots + f(\bar{x}_{10}) \Delta \alpha_{10} \quad (1.3)$$

Haciendo  $\bar{x}_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \in [x_{k-1}, x_k]$ . Entonces los puntos muestra son:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 0.05, \bar{x}_2 = 0.15, \bar{x}_3 = 0.25, \bar{x}_4 = 0.35, \bar{x}_5 = 0.45, \bar{x}_6 = 0.55, \bar{x}_7 = 0.65, \\ \bar{x}_8 &= 0.75, \bar{x}_9 = 0.85, \bar{x}_{10} = 0.95. \end{aligned}$$

Por otro lado como  $f(x) = 1$  tenemos que  $f(\bar{x}_k) = 1$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, 10$ .

$$\Delta \alpha_1 = \alpha(x_1) - \alpha(x_0) = (0.1)^2 - 0^2 = 0.01$$

$\Delta \alpha_2 = \alpha(x_2) - \alpha(x_1) = (0.2)^2 - (0.1)^2 = 0.03$ , de manera análoga encontramos:

$$\Delta \alpha_3 = 0.05, \Delta \alpha_4 = 0.07, \Delta \alpha_5 = 0.09, \Delta \alpha_6 = 0.11, \Delta \alpha_7 = 0.03, \Delta \alpha_8 = 0.15,$$

$$\Delta \alpha_9 = 0.17, \Delta \alpha_{10} = 0.19$$

Reemplazando estos valores en (1.3), tenemos

$$S(P, f, \alpha) = 0.01 + 0.03 + \dots + 0.19 = [0.01 + 0.19] \frac{10}{2} = 1.$$

**Definición 1.11** *Se dice que  $f$  es una función Riemann-integrable respecto de  $\alpha$  en  $[a, b]$  y se denota " $f \in R(\alpha)$  en  $[a, b]$ " si existe un número  $A$  que satisface:*

Para cada  $\epsilon > 0, \exists P_\epsilon$  partición de  $[a, b]$ , tal que para cada partición  $P$  más fina que  $P_\epsilon$  y para cada elección de  $\bar{x}_k$  se tiene:

$$|S(P, f, \alpha) - A| < \epsilon$$

Si tal número  $A$  existe, éste es único y se denota con:

$$A = \int_a^b f(x) d\alpha(x)$$

donde  $f$  se denomina integrando y  $\alpha$  se llama el integrador.

Si  $\alpha(x) = x$  entonces tenemos la integral de Riemann que ya fue estudiada en la sección anterior. En la integral de Riemann  $S(P, f, \alpha)$  se escribe como  $S(P, f)$  ó  $S(f, P)$ .

**Teorema 1.5** (*Linealidad*)

Si  $f, g \in R(\alpha)$  en  $[a, b]$ , entonces  $c_1f + c_2g \in R(\alpha)$  en  $[a, b]$  (para todo par de constantes  $c_1$  y  $c_2$ ) y se tiene:

$$\int_a^b (c_1f + c_2g)d\alpha(x) = c_1 \int_a^b f d\alpha(x) + c_2 \int_a^b g d\alpha(x)$$

**Prueba.** Sea  $h = c_1f + c_2g$ . Dada una partición  $P$  de  $[a, b]$  podemos escribir:

$$\begin{aligned} S(P, h, \alpha) &= \sum_{k=1}^n h(\bar{x}_k) \Delta\alpha_k = c_1 \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta\alpha_k + c_2 \sum_{k=1}^n g(\bar{x}_k) \Delta\alpha_k \\ &= c_1 S(P, f, \alpha) + c_2 S(P, g, \alpha). \end{aligned}$$

Dado  $\epsilon > 0$ , elijamos  $P'_\epsilon$  tal que  $P'_\epsilon \subset P$  implique  $\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha(x) \right| < \epsilon$ , y elijamos  $P''_\epsilon$  tal que  $P''_\epsilon \subset P$  implique  $\left| S(P, g, \alpha) - \int_a^b g d\alpha(x) \right| < \epsilon$ . Si tomamos  $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$  entonces, para  $P$  más fina que  $P_\epsilon$  se tiene:

$$\left| S(P, h, \alpha) - c_1 \int_a^b f d\alpha(x) - c_2 \int_a^b g d\alpha(x) \right| \leq |c_1| \epsilon + |c_2| \epsilon$$

y ello prueba el teorema. ■

**Teorema 1.6** (*Relación entre la integral de Riemann y de Riemann-Stieltjes*):

Supongamos que  $f \in R(\alpha)$  en  $[a, b]$  y supongamos que  $\alpha$  posee una derivada  $\alpha'$  continua en  $[a, b]$ . Entonces la integral de Riemann  $\int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$  existe y se verifica

$$\int_a^b f(x)d\alpha(x) = \int_a^b f(x)\alpha'(x)dx$$

**Prueba.** Sea  $g(x) = f(x)\alpha'(x)$  y consideremos una suma de Riemann:

$$S(P, g) = \sum_{k=1}^n g(\bar{x}_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)\alpha'(\bar{x}_k) \Delta x_k$$

La misma partición  $P$  y la misma elección de los  $\bar{x}_k$  puede utilizarse para formar la suma de Riemann-Stieltjes:

$$S(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) \Delta \alpha_k$$

Aplicando el teorema del valor medio podemos escribir

$$\Delta \alpha_k = \alpha'(v_k) \Delta x_k, \text{ en donde } v_k \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$$

y por lo tanto,

$$S(P, f, \alpha) - S(P, g) = \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) [\alpha'(v_k) - \alpha'(\bar{x}_k)] \Delta x_k.$$

Dado que  $f$  está acotada, tenemos  $|f(x)| \leq M$  para todo  $x$  de  $[a, b]$ , para algún  $M > 0$ . La continuidad de  $\alpha'$  en  $[a, b]$  implica la continuidad uniforme en  $[a, b]$  (por ser  $[a, b]$  compacto). Por lo tanto, dado  $\epsilon > 0$ , existe un  $\delta > 0$  (que sólo depende de  $\epsilon$ ) tal que

$$0 \leq |x - y| < \delta \quad \text{implica} \quad |\alpha'(x) - \alpha'(y)| < \frac{\epsilon}{2M[b - a]}.$$

Si tomamos una partición  $P'_\epsilon$  de norma  $\|P'_\epsilon\| < \delta$ , entonces para cada partición más fina  $P$  tendremos que

$$|\alpha'(v_k) - \alpha'(\bar{x}_k)| < \frac{\epsilon}{2M(b - a)},$$

para tal partición  $P$  tenemos,

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| = \left| \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) [\alpha'(v_k) - \alpha'(\bar{x}_k)] \Delta x_k \right|$$

por la desigualdad triangular podemos escribir

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) [\alpha'(v_k) - \alpha'(\bar{x}_k)] \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\bar{x}_k)| |\alpha'(v_k) - \alpha'(\bar{x}_k)| |\Delta x_k|$$

lo que es menor que

$$\sum_{k=1}^n M \frac{\epsilon}{2M(b - a)} |\Delta x_k| = \frac{\epsilon}{2M(b - a)} \sum_{k=1}^n \Delta x_k = \frac{\epsilon}{2}$$

así,

$$|S(P, f, \alpha) - S(P, g)| < \frac{\epsilon}{2}$$

Por otro lado, puesto que  $f \in R(\alpha)$  en  $[a, b]$ , existe una partición  $P'_\epsilon$  tal que si  $P$  es más fina que  $P'_\epsilon$  se tiene

$$\left| S(P, f, \alpha) - \int_a^b f d\alpha \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

Combinando estas dos últimas desigualdades, vemos que cuando  $P$  es más fina que  $P_\epsilon = P'_\epsilon \cup P''_\epsilon$  tenemos que  $|S(P, g) - \int_a^b f d\alpha| < \epsilon$ , y esto completa lo que queríamos demostrar. ■

**Ejemplo 1.4** Evaluar la integral  $\int_0^1 f(x) d\alpha(x)$ , siendo  $f(x) = 1, \alpha(x) = x^2$ .

La integral es  $\int_0^1 1 d(x^2) = \int_0^1 2x dx = 2 \int_0^1 x dx = 1$ .

La integral dada fue aproximada utilizando la Suma de Riemann-Stieltjes en el ejemplo 1.2 y obtuvimos el mismo resultado.

**Definición 1.12** Sea  $P$  una partición de  $[a, b]$ . Para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  se definen

$$M_k(f) = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

$$m_k(f) = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

Los números

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta\alpha_k \quad \text{y} \quad L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta\alpha_k$$

se llaman respectivamente, suma superior e inferior de Stieltjes de  $f$  con respecto a  $\alpha$  para la partición  $P$ .

**Observación 1.4** Se verifica siempre  $m_k(f) \leq M_k(f)$ . Si  $\alpha$  es creciente en  $[a, b]$ , entonces  $\Delta\alpha_k \geq 0$  y se puede escribir también que  $m_k(f) \Delta\alpha_k \leq M_k(f) \Delta\alpha_k$ , de lo que se sigue que las sumas inferiores no exceden nunca a las sumas superiores. Además si  $\bar{x}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ , entonces

$$m_k(f) \leq f(\bar{x}_k) \leq M_k(f)$$

Por lo tanto, si  $\alpha$  es creciente, tenemos las desigualdades

$$L(P, f, \alpha) \leq S(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$$

**Teorema 1.7** *Supongamos que  $\alpha$  es creciente en  $[a, b]$ . Entonces*

(i) Si  $P'$  es más fina que  $P$ , entonces

$$U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \quad \text{y} \quad L(P', f, \alpha) \geq L(P, f, \alpha)$$

(ii) Para cada par de particiones  $P_1$  y  $P_2$  se tiene

$$L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

**Prueba.** Es suficiente probar (i) cuando  $P'$  posee sólo un punto más que  $P$ , por ejemplo si tiene el punto  $c$ . Si  $c$  está en el intervalo  $i$ -ésimo de  $P$ , podemos escribir

$$U(P', f, \alpha) = \sum_{k=1, k \neq i}^n M_k(f) \Delta x_k + M' [\alpha(c) - \alpha(x_{i-1})] + M'' [\alpha(x_i) - \alpha(c)]$$

en donde  $M'$  y  $M''$  designan, respectivamente el sup de  $f$  en  $[x_{i-1}, c]$  y  $[c, x_i]$ . Pero, dado que

$$M' \leq M_i(f) \quad \text{y} \quad M'' \leq M_i(f),$$

se tiene  $U(P', f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$ . En forma parecida demostramos la desigualdad existente entre las sumas inferiores.

Para probar (ii), sea  $P = P_1 \cup P_2$ . Tenemos entonces

$$L(P_1, f, \alpha) \leq L(P, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha)$$

lo que prueba el teorema. ■

**Observación 1.5** *De este teorema se tiene (para  $\alpha$  creciente)*

$$m [\alpha(b) - \alpha(a)] \leq L(P_1, f, \alpha) \leq U(P_2, f, \alpha) \leq M [\alpha(b) - \alpha(a)]$$

donde  $M$ , y  $m$  designan el sup y el inf de  $f$  en  $[a, b]$ .

**Definición 1.13** Si  $\alpha$  es creciente en  $[a, b]$  entonces la integral superior de Stieltjes se define

$$\bar{I}(f, \alpha) = \inf \{U(P, f, \alpha) : P \in \wp[a, b]\}.$$

La integral inferior de Stieltjes se define en forma análoga:

$$\underline{I}(f, \alpha) = \sup \{L(P, f, \alpha) : P \in \wp[a, b]\}$$

donde  $\wp[a, b]$  denota el conjunto de todas las particiones posibles de  $[a, b]$ .

**Notación 1.8** En muchos textos la integral superior de Stieltjes se denota por  $\int_a^b f d\alpha$  y en forma similar para la integral inferior de Stieltjes.

**Teorema 1.9** Supongamos que  $\alpha$  es creciente en  $[a, b]$ . Entonces  $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$

**Prueba.** Dado  $\epsilon > 0$ , existe una partición  $P_1$  tal que

$$U(P_1, f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$$

Por el teorema 1.7, se tiene que  $\bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$  es una cota superior de todas las sumas inferiores  $L(P, f, \alpha)$ . Por lo tanto,  $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha) + \epsilon$ , y como  $\epsilon$  es arbitrario, ello implica que  $\underline{I}(f, \alpha) \leq \bar{I}(f, \alpha)$  ■

Hay un ejemplo muy simple en el que  $\underline{I}(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha)$ . Tomando la función  $\alpha(x) = x$ , y sea  $f$  definida en  $[0, 1]$  como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Entonces para cada partición  $P$  de  $[0, 1]$ , se tiene  $m_k(f) = 0$  y  $M_k(f) = 1$ , ya que cada subintervalo contiene tanto racionales como irracionales. Por consiguiente,  $U(P, f) = 1$  y  $L(P, f) = 0$  para toda  $P$ . Así,  $\bar{I}(P, f) = 1$  e  $\underline{I}(P, f) = 0$  y como  $\alpha(x) = x$  tenemos que  $\underline{I}(f, \alpha) = 0$  e  $\bar{I}(f, \alpha) = 1$ . Entonces,

$$\underline{I}(f, \alpha) < \bar{I}(f, \alpha).$$

### 1.3 La Integral de Lebesgue

La integral de Riemann es útil a todas las necesidades del cálculo elemental pero es aplicable sólo a aquellas funciones que o bien son continuas o bien son continuas por tramos. Aclarando que no hay nada equivocado en la definición de la integral de Riemann, sin embargo encontramos ciertas limitaciones. El problema surge cuando la integral de Riemann interactúa con otras operaciones, especialmente con límites. Por ejemplo el límite de una sucesión de funciones puede no ser integrable. También encontramos que existen funciones que no son Riemann-integrables y un ejemplo clásico de ello es la conocida función de Dirichlet:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

En efecto: Para cualquier subintervalo  $[x_{k-1}, x_k]$  de  $[a, b]$  tenemos  $M_k(f) = 1$  y  $m_k(f) = 0$  pues los números racionales y los irracionales son densos en cualquier subintervalo. Entonces si  $U(P, f)$  y  $L(P, f)$  son las sumas superior e inferior que corresponden a cualquier partición  $P$ , tenemos:

$$U(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \cdot \Delta x_k = b - a$$
$$L(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \cdot \Delta x_k = 0.$$

De modo que las integrales superior e inferior de Riemann de  $f$  en  $[a, b]$  son:

$$\bar{I}(f, P) = \inf \{U(f, P) : P \in \wp\} = b - a \quad \text{e} \quad \underline{I}(f, P) = \sup \{L(f, P) : P \in \wp\} = 0$$

lo cual muestra que  $f(x)$  no es integrable según Riemann.

Necesitamos entonces renovar la manera en que pensamos acerca de la integral en un Análisis Superior. Lebesgue (francés, 1875-1941) en 1902 publica su famosa obra *Integral, longueur, aire* en el cual da un nuevo concepto de la integral. Lebesgue da el concepto de medida para un conjunto de puntos y lo aplica al desarrollo de esta nueva integral. La idea principal de la integral de Lebesgue consiste en que, a diferencia de la integral de Riemann, los puntos  $x$  se agrupan no de acuerdo a su



proximidad en el eje  $x$  sino de acuerdo a la proximidad de los valores de la función en estos puntos.

Una forma simple de ilustrar la diferencia entre la integral de Lebesgue y la de Riemann es la siguiente analogía: Supongamos que tenemos una bolsa llena de monedas y queremos saber cuánto dinero tenemos en la bolsa. Podemos contar las monedas de dos formas distintas:

(a) Sacamos las monedas una a una y vamos sumando sus valores;

(b) Agrupamos las monedas de la bolsa de acuerdo a sus valores, formando un grupo de monedas de 5 centavos, otro de 10 centavos, etc. Contamos cuántas monedas tenemos en cada grupo, multiplicamos por sus valores y los sumamos.

La segunda forma de contar (que corresponde a la integral de Lebesgue) es mucho más eficiente que la primera (correspondiente a la integral de Riemann) pero, por supuesto, ambas formas de contar darán el mismo total. Nótese que para describir (b) tuvimos que usar un lenguaje un poco más elaborado que el usado para describir (a). Como se verá, la definición de la integral de Lebesgue también implica de hecho un poco más de conceptualización que la definición de la integral de Riemann. El método que se utiliza para introducir la integral de Lebesgue generalmente se asienta en el concepto de medida. Una medida no es más que a ciertos subconjuntos  $A$  se les asocia un número no negativo  $m(A)$ , llamado su medida o volumen, que da una idea de su "tamaño". Si consideramos una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  que toma un número finito de valores, la definición de la integral de Riemann corresponde esencialmente a dividir el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos, multiplicar el valor que la función toma en cada subintervalo por su longitud y sumar:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) (x_k - x_{k-1}).$$

Por otro lado, para la integral de Lebesgue, se determina primero cual es la preimagen  $E_k \subset [a, b]$  de cada valor  $y_k$  que la función asume, multiplicamos la medida de la preimagen por el valor de la función y sumamos:

$$\int_a^b f dm = \sum_{k=1}^n y_k m(E_k).$$

Entonces, queda claro que ambos métodos nos proporciona el mismo valor para la integral.

Desde el primer trabajo de Lebesgue, tanto la Teoría de la Medida como la teoría de la integración han sufrido muchas generalizaciones y modificaciones. Young, Daniell, Stone y otros han probado que la integral de Lebesgue puede introducirse de tal manera que no dependa de la Teoría de la Medida sino que esté orientada directamente a las funciones y sus integrales [2]. El único concepto de la Teoría de la Medida que se necesita saber es el concepto de conjunto de medida cero. De esa forma una vez que se define la integral de Lebesgue se pueden introducir los elementos de la Teoría de la Medida en forma natural. Sin embargo en esta parte, apenas daremos una rápida mirada a la integral de Lebesgue utilizando algunos conceptos de la Teoría de la Medida.

**Definición 1.14** *Un conjunto  $S$  de números reales posee medida cero si, para cada  $\epsilon > 0$ , existe un recubrimiento numerable de  $S$  por medio de intervalos abiertos, tales que la suma de sus longitudes sea menor que  $\epsilon$ .*

Si designamos a los intervalos por medio de  $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ , la definición requiere que

$$S \subseteq \bigcup_k I_k \quad \text{y} \quad \sum_k L(I_k) < \epsilon$$

Si la colección de intervalos es finita, el índice  $k$  recorre un conjunto finito. Si la colección es infinita numerable, entonces  $k$  irá de 1 a  $\infty$ .

**Ejemplo 1.5** *Un conjunto de puntos enumerable tiene medida cero.*

*En efecto, denotando el conjunto de puntos por  $x_1, x_2, x_3, \dots$  y suponiendo que los puntos encerrados, respectivamente, por intervalos de longitudes menores que  $\epsilon/2, \epsilon/4, \epsilon/8, \dots$ , con  $\epsilon$  positivo, la suma de las longitudes estos intervalos es menor que  $\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{8} + \dots = \epsilon$  lo que prueba que el conjunto tiene medida nula.*

**Definición 1.15** *Se dice que una propiedad se verifica casi en todo un conjunto  $S$  (y se escribe c.e.t.  $S$ ) si se verifica en todo  $S$  salvo en un conjunto de medida cero.*

**Definición 1.16** (*Función medible*): Sea  $U \subset \mathbb{R}$ .  $f : U \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  se llama medible si  $U$  es medible y el conjunto  $\{x \in U : f(x) > c\}$  es medible para cada  $c \in \mathbb{R}$ .

**Definición 1.17** (*Medida interior y medida exterior de un conjunto  $A \subset \mathbb{R}$* ): Sea  $A \subset \mathbb{R}$ :

$$m^*(A) = \inf \{l(G) : A \subset G, G \text{ abierto}\}$$

$$m_*(A) = \sup \{l(F) : F \subset A, F \text{ compacto}\}$$

**Definición 1.18** (*Conjunto medible*): Un conjunto acotado  $A \subset \mathbb{R}$  se llama medible si  $m_*(A) = m^*(A)$ . El valor común de estas dos medidas se llama la medida de Lebesgue de  $A$  y se denota con  $m(A)$ . Es decir,  $m_*(A) = m^*(A) = m(A)$ .

Ahora definamos la integral de Lebesgue para funciones acotadas y medibles:

**Definición 1.19** (*La integral de Lebesgue*):

Sea  $f$  acotada y medible sobre  $[a, b]$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  números, tales que

$$\alpha < f(x) < \beta$$

Sea  $P$  una partición de  $[\alpha, \beta]$ :  $P = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_n\}$

Sea

$$E_k = \{x \in [a, b] : y_{k-1} \leq f(x) < y_k\} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Como  $f$  es medible, estos conjuntos son medibles y además disjuntos.

Sean:

$$S = \sum_{k=1}^n y_k m(E_k)$$

$$s = \sum_{k=1}^n y_{k-1} m(E_k)$$

e:

$$\bar{I} = \inf \{S \mid P \in \wp[\alpha, \beta]\}$$

$$\underline{I} = \sup \{s \mid P \in \wp[\alpha, \beta]\}$$

Si  $\bar{I} = \underline{I}$  entonces se dice que  $f$  es Lebesgue-integrable sobre  $[a, b]$  y al valor común se le denota con

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad \text{ó} \quad \int_{[a,b]} f \, dx$$

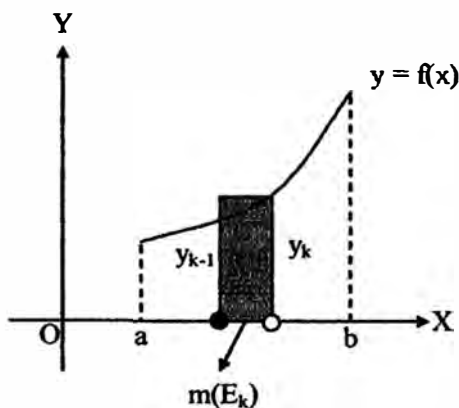


Figura 4

**Observación 1.6** Para calcular la integral de Lebesgue en forma aproximada se puede utilizar la fórmula:

$$\int_{[a,b]} f \, dx \simeq \frac{1}{2} [S + s]$$

**Ejemplo 1.6** Cálculo en forma aproximada de  $\int_{[0,1]} x \, dx$ .

Veamos: aquí  $[a, b] = [0, 1]$  y  $f(x) = x$ . Tomando la partición regular  $P$  de  $[0, 1]$  (sobre el eje  $Y$ ):

$$P = \{0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$$

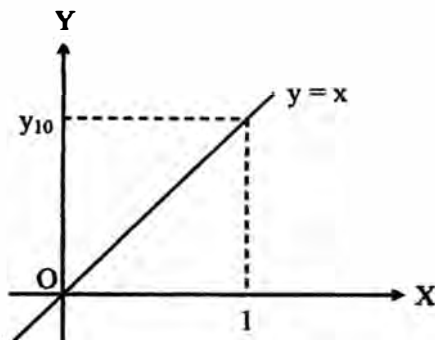


Figura 5

Entonces  $n = 10$ . La suma superior de Lebesgue es:

$$S = \sum_{k=1}^{10} y_k m(E_k)$$

Calculamos los  $E_k$ .

Por ejemplo,

$$E_1 = \{x \in [0, 1] : y_0 \leq x < y_1\} = \{x \in [0, 1] : 0 \leq x < 0.1\}$$

De modo que  $m(E_1) = 0.1$ . También:

$$m(E_2) = m\{x \in [0, 1] : y_1 \leq x < y_2\} = m\{x \in [0, 1] : 0.1 \leq x < 0.2\} = 0.1.$$

De ese modo  $S$  es:

$$S = 0.1(0.1) + 0.2(0.1) + 0.3(0.1) + 0.4(0.1) + 0.5(0.1) + 0.6(0.1) + 0.7(0.1) + 0.8(0.1) + 0.9(0.1) + 1(0.1) = 0.1 [0.1 + 0.2 + \dots + 1] = 0.1(5.5) = 0.55.$$

Del mismo modo, la suma inferior de Lebesgue es:

$$s = \sum_{k=1}^{10} y_{k-1} m(E_k)$$

$$s = \sum_{k=1}^{10} y_{k-1} m(E_k) = y_0 m(E_1) + y_1 m(E_2) + \dots + y_9 m(E_{10})$$

Puesto que todos los  $E_k$  tienen la misma medida ( $= 0.1$ )

$$s = (y_0 + y_1 + \dots + y_9) m(E_k) = (0 + 0.1 + 0.2 + \dots + 0.9)(0.1) = 0.45.$$

Por lo tanto, 
$$\int_{[0,1]} x dx \simeq \frac{1}{2} [0.55 + 0.45] = \frac{1}{2}$$

El valor exacto de la integral es, efectivamente  $\frac{1}{2}$  como se verá luego.

Los dos teoremas siguientes relacionan las integrales de Riemann y de Lebesgue. Su demostración puede verse en [12]

**Teorema 1.10** *Si  $f$  es integrable según Riemann en  $[a, b]$ , entonces  $f$  será medible.*

**Teorema 1.11** *Si  $f$  es integrable según Riemann en  $[a, b]$ , entonces:*

- (a) Es integrable según Lebesgue en  $[a, b]$ .
- (b) Las integrales de Riemann y de Lebesgue de  $f(x)$  en  $[a, b]$  son iguales.

**Ejemplo 1.7** *Cálculo de  $\int_{[0,1]} x dx$ . Como  $f(x) = x$  es integrable según Riemann en*

*$[0, 1]$  entonces por el teorema anterior tenemos que  $\int_{[0,1]} x dx = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$*

**Definición 1.20** *(Espacio de funciones  $L^p_\alpha(a, b)$ ):*

*Sea  $\alpha$  una función no decreciente en  $[a, b]$  y  $p \geq 1$ , diremos que*

$$f \in L^p_\alpha(a, b)$$

*si se cumple:*

- a)  $f$  es medible respecto a  $\alpha$  y,
- b) La integral de Stieltjes-Lebesgue,

$$\int_a^b |f(x)|^p d\alpha(x) < \infty$$

Si  $\alpha(x) = x$ , la notación usada es  $L^p(a, b)$ .

**Ejemplo 1.8** *Veamos si la función  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in L^2(0, 8)$ . Aquí  $p = 2$  y  $\alpha(x) = x$ .*

*Por lo tanto (a)  $\frac{1}{\sqrt{x}}$  es medible respecto de  $\alpha(x) = x$ . (b) La integral de Lebesgue-Stieltjes  $\int_0^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 d\alpha(x)$  se transforma en una integral de Lebesgue  $\int_0^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$  por ser  $\alpha(x) = x$ . Esta última integral es Riemann-integrable:*

$$\text{En efecto, } \int_0^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_\epsilon^8 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}\right]_{x=\epsilon}^8 = \frac{3}{2}(4) = 6.$$

Por lo tanto  $\frac{1}{\sqrt{x}} \in L^2(0, 8)$ .

## 1.4 Interpolación de Lagrange

Los procedimientos de cálculo que utilizan las computadoras para evaluar una función ya incorporada, como  $\text{sen}x$ ,  $\text{cos}x$  ó  $e^x$ , involucran aproximación mediante polinomios. Los métodos hoy por hoy más efectivos utilizan funciones racionales. Sin embargo empezamos esta sección con la teoría de aproximación polinomial.

Interpolar significa estimar el valor desconocido de una función en un punto, tomando una media ponderada de sus valores conocidos en puntos cercanos al dado. El célebre matemático francés Joseph Louis Lagrange (1736-1813) descubrió que se puede encontrar un polinomio que pase por  $n + 1$  puntos pre-establecidos del plano:

**Problema 1.12** *Dados  $(x_i, y_i)$ ,  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  datos con  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ . Encontrar un polinomio de grado menor o igual a  $n$  tal que*

$$P_n(x_i) = y_i \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

**Teorema 1.13** *Para  $n+1$  puntos de  $\mathbb{R}^2$ :  $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$  con abscisas distintas para  $i \neq j$ , existe un polinomio único  $P_n(x)$  de grado menor o igual a  $n$  con la propiedad:  $P_n(x_0) = y_0, P_n(x_1) = y_1, \dots, P_n(x_n) = y_n$*

**Prueba.** Como  $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  tenemos ,

$$P_n(x_0) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0$$

$$P_n(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1$$

...

$$P_n(x_n) = a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n$$

Nuestras incógnitas son  $a_0, a_1, \dots, a_n$ . Escribiendo en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}$$

donde  $x_i \neq x_j$ . El determinante de Vandermonde:

$$\det \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j) \neq 0,$$

$i = 1, \dots, n; j = 0, 1, \dots, n$ . Luego el sistema lineal de ecuaciones dado arriba es no singular y por lo tanto tiene solución única. ■

Vamos a construir un polinomio:

$$P_n(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x) \quad (1.4)$$

En este caso  $L_0, L_1, \dots, L_n$  son polinomios que dependen de los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , pero no de las ordenadas  $y_0, y_1, \dots, y_n$ . En vista de que las ordenadas podrían ser todas iguales a cero, excepto por el 1 que ocupa la  $i$ -ésima posición, tenemos

$$\delta_{ij} = P_n(x_j) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x_j) = \sum_{k=0}^n \delta_{ki} L_k(x_j) = L_i(x_j),$$

donde  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker:  $\delta_{ki} = 1$  si  $k = i$  y  $\delta_{ki} = 0$  si  $k \neq i$ . Podemos conseguir fácilmente un conjunto de polinomios que tenga esta propiedad.

Consideremos  $L_0$ . Este será un polinomio de grado  $n$  que tome el valor 0 en  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , y el valor 1 en  $x_0$ . Claramente  $L_0$  debe adoptar la forma:

$$L_0(x) = c(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n) = c \prod_{j=1}^n (x - x_j)$$

El valor  $c$  se obtiene haciendo  $x = x_0$ , de manera que

$$1 = c \prod_{j=1}^n (x_0 - x_j)$$

y entonces

$$c = \prod_{j=1}^n (x_0 - x_j)^{-1}$$



Por consiguiente,

$$L_0(x) = \prod_{j=1}^n \frac{x-x_j}{x_0-x_j}$$

Del mismo modo hallamos el resto de las  $L_i$ , y entonces la fórmula general se expresa como:

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \quad (0 \leq i \leq n)$$

ó, lo que es lo mismo:

$$L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (1.5)$$

Para el conjunto de los nodos  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , estos polinomios son conocidos como *funciones cardinales de Lagrange*. Utilizando los polinomios cardinales dados en la ecuación (1.4) obtenemos los polinomios de interpolación (1.5).

Finalmente, si la reemplazamos en la ecuación (1.4) tendremos el polinomio de interpolación de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \left( \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} \right) \quad j = 0, 1, \dots, n \quad (1.6)$$

**Ejemplo 1.9** *Cálculo del polinomio de interpolación de Lagrange que pasa por los puntos  $(1, -3), (3, 1), (5, 2)$  y  $(6, 4)$  :*

Aquí es  $n = 3$  :

$$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$P_3(x) = -3L_0(x) + 1L_1(x) + 2L_2(x) + 4L_3(x)$$

Utilizando la ecuación (1.5) encontramos los  $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$  y  $L_3(x)$ , lo cual es:

$$L_0(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 0}}^3 \frac{x-x_k}{x_0-x_k} = -\frac{1}{40}(x-3)(x-5)(x-6)$$

$$L_1(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^3 \frac{x-x_k}{x_1-x_k} = \frac{1}{12}(x-1)(x-5)(x-6)$$

$$L_2(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 2}}^3 \frac{x-x_k}{x_2-x_k} = -\frac{1}{8}(x-1)(x-3)(x-6)$$

$$L_3(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 3}}^3 \frac{x-x_k}{x_3-x_k} = \frac{1}{15}(x-1)(x-3)(x-5)$$

Así, reemplazando en (1.6) obtenemos:

$$P_3(x) = \frac{3}{40}(x-3)(x-5)(x-6) + \frac{1}{12}(x-1)(x-5)(x-6) - \frac{1}{4}(x-1)(x-3)(x-6) + \frac{4}{15}(x-1)(x-3)(x-5),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{40} [7x^3 - 78x^2 + 301x - 350],$$

que es el polinomio solicitado.

**Observación 1.7** *El método de las diferencias divididas de Newton es, en estos casos muy útil para encontrar el polinomio de interpolación que pasa por los  $n + 1$  puntos pues en comparación con el método de Lagrange computacionalmente es más económico. Sin embargo, estamos estudiando la interpolación de Lagrange para luego aplicarlo en las Fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes que veremos en la siguiente sección.*

## 1.5 Fórmulas de Integración de Newton-Cotes

El Cálculo Integral resuelve el problema de calcular el área bajo la gráfica de una función positiva definida sobre un intervalo cerrado. El cálculo elemental de funciones de una variable real nos dá un método elegante para calcular la integral de una función. El teorema fundamental del cálculo nos dice que el problema de calcular la integral de una función continua se reduce al de buscar otra función cuya derivada sea la función dada, es decir, una primitiva de ella. Sin embargo hemos dicho también que el problema de hallar una primitiva de una función dada puede resultar muy difícil, sino imposible. De hecho sabemos que existen funciones elementales -es decir,

combinaciones algebraicas de funciones trigonométricas y logarítmicas y sus inversas cuyas primitivas no son expresables en esta forma (por ejemplo  $e^{-x^2}$ ). Por esta razón es que estudiamos métodos numéricos que aproximen el valor de la integral buscada. Ya la definición de la integral de Riemann proporciona un método de aproximación numérica: las sumas de Riemann. Sin embargo su convergencia es muy lenta y no resultan útiles para obtener resultados prácticos. Las cuadraturas que vamos a estudiar aquí consisten en substituir la función dada por una aproximación suya y tomar como valor de la integral el valor de su aproximada. Veremos los resultados que se obtienen aproximando la función por medio de un polinomio interpolador. Deducimos la Regla del Trapecio, la Regla de Simpson, la Regla de los 3/8, la Regla de Milne y el cálculo del error que se comete en la aproximación de Simpson.

Las fórmulas de integración de Newton-Cotes son obtenidas si el integrando es reemplazado por una adecuada interpolación polinomial  $P(x)$ , entonces:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b P(x)dx$$

Considerando una particion regular del intervalo  $[a, b]$  dada por

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_j, \dots, x_n\}$$

Sea  $\Delta x = \frac{b-a}{n} = h \Rightarrow x_j = a + jh, j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Por la fórmula de integración de Lagrange:

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n f(x_j)L_j(x), \text{ donde } L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k}. \text{ Luego:}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} dx$$

Sea el cambio de variable:  $x = a + ht, dx = hdt$ . Para los límites de integración  $x = a \Rightarrow t = 0$  y  $x = b \Rightarrow t = \frac{b-a}{h} = n$ . Entonces la integral se transforma en:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \int_0^n \sum_{j=0}^n f(x_j) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} hdt = h \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{x-x_k}{x_j-x_k} dt$$

Será  $L_j(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{a+ht-(a+kh)}{a+jh-(a+kh)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-k}{j-k} = \varphi_j(t)$ . Por lo tanto:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_0^n \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-k}{j-k} dt = h \sum_{j=0}^n f(x_j) \int_0^n \varphi_j(t) dt$$

Hagamos  $\alpha_j = \int_0^n \varphi_j(t) dt$  (coeficientes o pesos), para tener finalmente:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \sum_{j=0}^n f(x_j)\alpha_j$$

Ahora, si damos valores a  $n$  en esta última ecuación obtenemos las Reglas de integración conocidas como Regla del Trapecio, Regla de Simpson, Regla de los 3/8, Regla de Milne, etc. Veamos cada uno de ellos:

a) *Regla del Trapecio*

La Regla del Trapecio la obtenemos cuando  $n = 1$ :

$$\int_a^b P_1(x)dx \approx h \sum_{j=0}^1 f(x_j)\alpha_j = h [f(x_0)\alpha_0 + f(x_1)\alpha_1]$$

Hemos visto que  $\alpha_j = \int_0^n \varphi_j(t) dt$  y  $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{t-k}{j-k}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ .

Para  $j = 0, 1$  tenemos:

$$j = 0 : \alpha_0 = \int_0^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^1 \frac{t-k}{0-k} dt = \int_0^1 \frac{t-1}{-1} dt = \frac{1}{2}$$

$$j = 1 : \alpha_1 = \int_0^1 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^1 \frac{t-k}{1-k} dt = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

Luego:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left[ \frac{1}{2}f(x_0) + \frac{1}{2}f(x_1) \right] = \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_1)]$$

b) *Regla de Simpson*

La Regla de Simpson es conocida como la Regla Parabólica y se obtiene cuando

$n = 2$

$$\int_a^b P_2(x)dx \approx h \sum_{j=0}^2 f(x_j)\alpha_j = h [f(x_0)\alpha_0 + f(x_1)\alpha_1 + f(x_2)\alpha_2]$$

Aquí es  $\alpha_j = \int_0^2 \varphi_j(t) dt$  y  $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{t-k}{j-k}$ ,  $j = 0, 1, 2$ :

$$j = 0 : \alpha_0 = \int_0^2 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{t-k}{0-k} dt = \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{(-1)(-2)} dt = \int_0^2 \frac{1}{2}(t^2 - 3t + 2) dt = \frac{1}{3}$$

$$j = 1 : \alpha_1 = \int_0^2 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{t-k}{1-k} dt = \int_0^2 \frac{(t-0)(t-2)}{(1)(-1)} dt = \int_0^2 -(t^2 - 2t) dt = \frac{4}{3}$$

$$j = 2 : \alpha_2 = \int_0^2 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^2 \frac{t-k}{2-k} dt = \int_0^2 \frac{(t-0)(t-1)}{(2-0)(2-1)} dt = \int_0^2 \frac{1}{2}(t^2 - 2t) dt = \frac{1}{3}$$

Luego:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left[ \frac{1}{3}f(x_0) + \frac{4}{3}f(x_1) + \frac{1}{3}f(x_2) \right] = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

c) *Regla de los Tres Octavos:*

Esta regla es obtenida cuando  $n = 3$ :

$$\int_a^b P_3(x) dx \approx h \sum_{j=0}^3 f(x_j) \alpha_j = h [f(x_0) \alpha_0 + f(x_1) \alpha_1 + f(x_2) \alpha_2 + f(x_3) \alpha_3]$$

Aquí es  $\alpha_j = \int_0^3 \varphi_j(t) dt$  y  $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{t-k}{j-k}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$ :

$$\alpha_0 = \int_0^3 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{t-k}{0-k} dt = \int_0^3 \frac{(t-1)(t-2)(t-3)}{(-1)(-2)(-3)} dt =$$

$$\int_0^3 -\frac{1}{6}(t^3 - 6t^2 + 11t - 6) dt = \frac{3}{8}$$

$$\alpha_1 = \int_0^3 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{t-k}{1-k} dt = \int_0^3 \frac{t(t-2)(t-3)}{(1)(-1)(-2)} dt = \int_0^2 \frac{1}{2}(t^3 - 5t^2 + 6t) dt = \frac{9}{8}$$

$$\alpha_2 = \int_0^3 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{t-k}{2-k} dt = \int_0^3 \frac{t(t-1)(t-3)}{(2)(1)(-1)} dt = \int_0^2 -\frac{1}{2}(t^3 - 4t^2 + 3t) dt = \frac{9}{8}$$

$$\alpha_3 = \int_0^3 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^3 \frac{t-k}{3-k} dt = \int_0^3 \frac{t(t-1)(t-2)}{(3)(2)(1)} dt = \int_0^2 -\frac{1}{2}(t^3 - 4t^2 + 3t) dt = \frac{3}{8}$$

de lo cual obtenemos la Regla de los Tres Octavos:

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \left[ \frac{3}{8}f(x_0) + \frac{9}{8}f(x_1) + \frac{9}{8}f(x_2) + \frac{3}{8}f(x_3) \right]$$

o, lo que es lo mismo:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

d) Regla de Milne

Esta regla se obtiene cuando en la Fórmula de Newton-Cotes hacemos  $n = 4$ :

$$\int_a^b P_4(x)dx \approx h \sum_{j=0}^4 f(x_j)\alpha_j = h [f(x_0)\alpha_0 + f(x_1)\alpha_1 + f(x_2)\alpha_2 + f(x_3)\alpha_3 + f(x_4)\alpha_4]$$

Aquí es  $\alpha_j = \int_0^4 \varphi_j(t) dt$  y  $\varphi_j(t) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{j-k}$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ :

$$\text{Para } j = 0 \text{ tenemos: } \alpha_0 = \int_0^4 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{0-k} dt = \int_0^4 \frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{(-1)(-2)(-3)(-4)} dt$$

$$\alpha_0 = \int_0^4 \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24)dt = \frac{(16)(7)}{(24)(15)}$$

$$\text{Para } j = 1 \text{ tenemos: } \alpha_1 = \int_0^4 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{1-k} dt = \int_0^4 \frac{(t)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1)(-1)(-2)(-3)} dt$$

$$\alpha_1 = \int_0^4 \frac{-1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t)dt = \frac{128(4)}{(24)(15)}$$

$$\text{Para } j = 2 \text{ tenemos: } \alpha_2 = \int_0^4 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{2-k} dt = \int_0^4 \frac{(t)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2)(1)(-1)(-2)} dt$$

$$\alpha_2 = \int_0^4 \frac{-1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t)dt = \frac{2(12)}{45}$$

Para  $j = 3$  tenemos:  $\alpha_3 = \int_0^4 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{3-k} dt = \int_0^4 \frac{(t)(t-1)(t-3)(t-4)}{(3)(2)(1)(-1)} dt$

$$\alpha_3 = \int_0^4 \frac{-1}{4} (t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) dt = \frac{2(32)}{45}$$

Para  $j = 4$  tenemos:  $\alpha_4 = \int_0^4 \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^4 \frac{t-k}{4-k} dt = \int_0^4 \frac{(t)(t-1)(t-3)(t-4)}{(3)(2)(1)(-1)} dt$

$$\alpha_4 = \int_0^4 \frac{1}{24} (t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) dt = \frac{2(7)}{45}.$$

Reemplazando en

$$\int_a^b f(x) dx \approx h [f(x_0)\alpha_0 + f(x_1)\alpha_1 + f(x_2)\alpha_2 + f(x_3)\alpha_3 + f(x_4)\alpha_4],$$

obtenemos la Regla de Milne:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2}{45} [7f(x_0) + 32f(x_1) + 12f(x_2) + 32f(x_3) + 7f(x_4)]$$

**Ejemplo 1.10** *Cálculo del área bajo la parábola  $y = x^2, x \in [0, 1]$  (Problema de la cuadratura de la parábola), usando la Regla de Simpson.*

Aquí es  $h = \frac{1-0}{2} = \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = x^2$ ; tenemos tres nodos:  $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$ ;

$f(x_0) = 0, f(x_1) = \frac{1}{4}, f(x_2) = 1$ . Por lo tanto

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{1/2}{3} [0 + 4(1/4) + 1] = \frac{1}{3}.$$

Por integración  $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ . Es decir, la Regla de Simpson proporciona un valor exacto en este caso.

**Ejemplo 1.11** *Cálculo del error al aplicar la Regla de Simpson:*

La Regla de Simpson es

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

La integral es, apenas aproximada. El error cometido es obviamente

$$R = \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)]$$

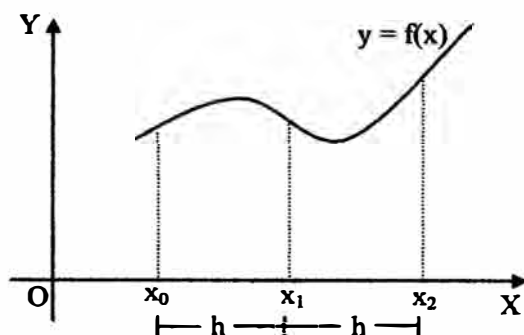


Figura 6

Considerando que  $y = f(x) \in C^4 [a, b]$ , deducimos una expresión más simple para  $R$ . Fijando el punto central  $x_1$  y considerando  $R = R(h)$  como una función del espaciado  $h$  ( $h \geq 0$ ), obtenemos

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} ydx - \frac{h}{3} [y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)]$$

de donde, diferenciando tres veces sucesivamente la función  $R(h)$  con respecto a  $h$ , obtenemos

$$\begin{aligned} R'(h) &= [y(x_1 + h) + y(x_1 - h)] - \frac{1}{3} [y(x_1 - h) + 4y(x_1) + y(x_1 + h)] \\ &\quad - \frac{h}{3} [-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] \\ &= \frac{2}{3} [y(x_1 - h) + y(x_1 + h)] - \frac{4}{3} y(x_1) - \frac{h}{3} [-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)], \\ R''(h) &= \frac{2}{3} [-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{1}{3} [-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] \\ &\quad - \frac{h}{3} [y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] \\ &= \frac{1}{3} [-y'(x_1 - h) + y'(x_1 + h)] - \frac{h}{3} [y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)], \\ R'''(h) &= \frac{1}{3} [y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] - \frac{1}{3} [y''(x_1 - h) + y''(x_1 + h)] \\ &\quad - \frac{h}{3} [-y'''(x_1 - h) + y'''(x_1 + h)]. \\ &= -\frac{h}{3} [y'''(x_1 + h) - y'''(x_1 - h)]. \end{aligned}$$

Aplicando el Teorema del valor medio para derivadas:



$$R'''(h) = -\frac{2h^2}{3}y^{IV}(\xi), \text{ donde } \xi \in \langle x_1 - h, x_1 + h \rangle$$

$$\text{Entonces tenemos: } R'''(t) = -\frac{2t^2}{3}y^{IV}(\xi).$$

Ahora, integrando sucesivamente en  $t \in [0, h]$  y considerando que

$$R(0) = 0, \quad R'(0) = 0, \quad R''(0) = 0$$

tenemos

$$\int_0^h R'''(t)dt = -\frac{2}{3}y^{IV}(\xi) \int_0^h t^2 dt; R''(h) - R''(0) = -\frac{2}{3}y^{IV}(\xi) \frac{h^3}{3}$$

$$\Rightarrow R''(h) = -\frac{2}{9}h^3 y^{IV}(\xi), \quad \xi \in \langle x_1 - h, x_1 + h \rangle$$

$$\int_0^h R''(t)dt = -\frac{2}{9}y^{IV}(\xi) \int_0^h t^3 dt; R'(h) - R'(0) = -\frac{2}{9}y^{IV}(\xi) \frac{h^4}{4}$$

$$\Rightarrow R'(h) = -\frac{1}{18}h^4 y^{IV}(\xi), \quad \xi \in \langle x_1 - h, x_1 + h \rangle$$

$$\int_0^h R'(t)dt = -\frac{1}{18}y^{IV}(\xi) \int_0^h t^4 dt; R(h) - R(0) = -\frac{1}{18}y^{IV}(\xi) \frac{h^5}{5}$$

$$\Rightarrow R(h) = -\frac{1}{90}h^5 y^{IV}(\xi) \text{ donde } \xi \in \langle x_1 - h, x_1 + h \rangle.$$

En consecuencia, la Regla de Simpson es exacta para polinomios de grado tres.

La Regla de Simpson es suficientemente exacta para la mayoría de los trabajos que se realizan en ingeniería y, en la computación automática, es preferida a las otras fórmulas de mayor precisión, las cuales se obtienen mediante el uso de polinomios de aproximación de grado superior, algunas de las cuales, hemos deducido aquí.

Cuando dividimos  $[a, b]$  en  $n$  partes iguales y aplicamos la regla de Simpson a cada intervalo obtenemos la llamada Regla de Simpson Compuesta.

El error que se comete en este caso es

$$E[S_n(f)] = \sum_{k=1}^n \frac{h^5}{90} f^{iv}(\xi_k) = \frac{h^4}{180} \sum_{k=1}^n 2h \frac{h^4}{90} f^{iv}(\xi_k) = \frac{h^4}{180} \sum_{k=1}^n f^{iv}(\xi_k) \left[ \frac{b-a}{n} \right]$$

el cual es una suma de Riemann que se escribe

$$E[S_n(f)] \approx \frac{h^4}{180} \int_a^b f^{iv}(\xi) d\xi = \frac{h^4}{180} [f'''(b) - f'''(a)]$$

Si se corrige la Regla de Simpson por medio de este error asintótico se obtiene la Regla de Simpson corregida

$$CS_n(f) = S_n(f) - \frac{(b-a)^4}{2880n^4} [f'''(b) - f'''(a)]$$

En el Apéndice A1 presentamos un programa (Programa 1) en Matlab en que se utiliza la Regla de Simpson compuesta para evaluar la integral

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

El área de la k-ésima tira es

$$A_k = \frac{h}{3} \left[ f(x_{k-1}) + 4f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) + f(x_k) \right]$$

El programa se graba con el nombre simpson.m y para ejecutarlo simplemente escribimos en la ventana de comandos simpson.

Ejecutamos el programa para evaluar la integral

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+3)(x+2)}}$$

Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente tabla:

$n$	$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+3)(x+2)}}$
2	0.8716860704
3	0.8712874086
4	0.8712087244
5	0.8711856054
6	0.8711769712
7	0.8711731827
8	0.8711713162
9	0.8711703127
10	0.8711697351
100	0.8711686199

El valor exacto de la integral es  $2 \ln\left(\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+1}\right)$ . Su valor con una aproximación de 10 cifras decimales es 0.8711686198.

# Capítulo 2

## Funciones Ortogonales

### 2.1 Funciones Ortogonales

**Definición 2.1** Se llama función de peso a la función  $w : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$  no negativa en  $\langle a, b \rangle$ , integrable y con un número finito de ceros en  $\langle a, b \rangle$ .

**Definición 2.2** Un sistema de funciones  $\{\phi_i\}_{i=1}^n$  tales que cada  $\phi_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  se dice que es ortogonal respecto a la función de peso  $w$  en  $[a, b]$  si se cumple:

$$\begin{aligned}\langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx \\ &= \begin{cases} \gamma_n, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases}\end{aligned}$$

$n, m = 0, 1, 2, \dots, l$  y la constante  $\gamma_n > 0$ .

**Ejemplo 2.1** El conjunto de funciones  $\{1, x\}$  es ortogonal en  $[-1, 1]$ , respecto a la función de peso  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . En efecto,

- a)  $\int_{-1}^1 \frac{1 \cdot 1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$
- b)  $\int_{-1}^1 \frac{x \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}$
- c)  $\int_{-1}^1 \frac{1 \cdot x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = 0.$

Por lo tanto el sistema dado es ortogonal en  $[-1, 1]$  respecto a la función de peso  $w(x) = 1$ .

**Definición 2.3** Un conjunto de funciones  $\{\phi_0(x), \phi_1(x), \dots, \phi_l(x)\}$  es ortonormal con respecto a la función de peso  $w(x)$  en  $[a, b]$  si se cumple:

$$\begin{aligned} \langle \phi_n, \phi_m \rangle &= \int_a^b \phi_n(x) \phi_m(x) w(x) dx \\ &= \delta_{nm} = \begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

$n, m = 0, 1, 2, \dots, l$ .

**Ejemplo 2.2** Las funciones  $\left\{ \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}} \right\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , son ortonormales en  $[-\pi, \pi]$  respecto a la función de peso  $w(x) = 1$ .

En efecto:  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$ . Analizando:

a) Si  $m \neq n$ :  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(m-n)x - \cos(m+n)x] dx = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(m-n)x}{m-n} + \frac{\sin(m+n)x}{m+n} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

b) Si  $m = n$ :  $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 2mx) dx = \frac{1}{2\pi} \left[ x - \frac{\sin 2mx}{2m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 1$$

Por lo tanto  $\int_{-\pi}^{\pi} \phi_m(x) \phi_n(x) dx = \delta_{nm}$  y el sistema dado es ortonormal.

## 2.2 Polinomios Ortogonales

Los polinomios ortogonales corresponden a una pequeña parte de una gran familia de funciones especiales. Su historia se remonta al siglo XVIII y está estrechamente relacionada con la resolución de problemas de inmediata aplicación práctica. Uno de estos problemas estaba relacionado con la Teoría de la Gravitación Universal de Newton. A. M. Legendre (francés, 1752-1833) descubrió sus famosos polinomios cuando hacía investigaciones sobre la atracción gravitacional de la elipsoide [11]. Pafnuti Chebyshev (ruso, 1821-1894) fue un gran matemático que es conocido por sus importantes contribuciones a la Teoría de los Números. Los polinomios de Chebyshev son usados en el Análisis Numérico, en la Mecánica Celeste y en la Teoría de Grupos Cuánticos. Los polinomios ortogonales están también estrechamente relacionados con las ecuaciones diferenciales y la teoría de aproximación.

**Definición 2.4** Un polinomio de grado  $n$  al cual denotaremos  $P_n$  se dice que es ortogonal en  $[a, b]$  con respecto a la función de peso  $w$  si

$$\int_a^b w(x)P_n(x)Q_{n-1}(x)dx = 0$$

para cualquier polinomio  $Q_{n-1}$  de grado  $\leq n - 1$ .

Seguidamente veremos las propiedades de las raíces de los polinomios ortogonales, las cuales serán de mucha importancia en la elección de los nodos para efectuar cuadraturas más precisas.

Si  $P_n$  es ortogonal sobre  $[a, b]$  con respecto a  $w$  a todos los polinomios de grado  $\leq n - 1$ , entonces  $cP_n$  también tiene la misma propiedad, donde  $c$  es alguna constante no nula.

Sin pérdida de generalidad asumiremos que

$$P_n(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 \quad (2.1)$$

es decir,  $P_n$  es un polinomio mónico.

**Teorema 2.1** El polinomio  $P_n$  el cual satisface

$$\int_a^b w(x)P_n(x)Q_{n-1}(x)dx = 0$$

para todos los polinomios  $Q_{n-1}$  de grado  $\leq n - 1$ , existe y es único, excepto para una constante multiplicativa.

**Prueba.** Mostraremos que podemos encontrar  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$  tal que

$$\int_a^b w(x) [a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n] x^k dx = 0 \quad (2.2)$$

donde  $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$ . Por linealidad de la integral se sigue que  $P_n(x)$  definida por (2.1) es ortogonal a todos los polinomios de grado  $\leq n - 1$ . La ecuación (2.2) es equivalente al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) [a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n] dx &= 0 \\ \int_a^b w(x) [a_0x + a_1x^2 + \dots + a_{n-1}x^n + x^{n+1}] dx &= 0 \end{aligned}$$

$$\dots \tag{2.3}$$

...

$$\int_a^b w(x) [a_0 x^{n-1} + a_1 x^n + \dots + a_{n-1} x^{2n-2} + x^{2n-1}] dx = 0$$

Definamos:

$$c_k \equiv \int_a^b w(x) x^k dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.4}$$

vemos que el sistema (2.3) puede escribirse como

$$a_0 c_0 + a_1 c_1 + \dots + a_{n-1} c_{n-1} = -c_n$$

$$a_0 c_1 + a_1 c_2 + \dots + a_{n-1} c_n = -c_{n+1}$$

...

$$\tag{2.5}$$

...

$$a_0 c_{n-1} + a_1 c_n + \dots + a_{n-1} c_{2n-2} = -c_{2n-1}$$

Este es un sistema de  $n$  ecuaciones lineales con  $n$  incógnitas  $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ . Vamos a demostrar que este sistema lineal es no singular lo cual mostraría que tiene solución única. Asumamos que el sistema (2.5) es singular, esto es,

$$\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n-1} & c_n & \dots & c_{2n-2} \end{vmatrix} = 0 \tag{2.6}$$

esto es también equivalente a decir que podemos encontrar constantes  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  no todos ceros, tal que una combinación lineal de las filas del determinante en (2.6) es cero, esto es,

$$b_0 c_0 + b_1 c_1 + \dots + b_{n-1} c_{n-1} = 0$$

$$b_0 c_1 + b_1 c_2 + \dots + b_{n-1} c_n = 0$$

...

$$\tag{2.7}$$

...

$$b_0 c_{n-1} + b_1 c_n + \dots + b_{n-1} c_{2n-2} = 0.$$

De la definición de  $c_k$  vemos que el sistema de ecuaciones (2.7) puede ser escrito como

$$\begin{aligned} \int_a^b w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] dx &= 0 \\ \int_a^b w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] x dx &= 0 \\ &\dots \\ &\dots \\ \int_a^b w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}] x^{n-1} dx &= 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ahora, en (2.8) multiplicamos la primera ecuación por  $b_0$ , la segunda por  $b_1, \dots$  y así sucesivamente hasta la última por  $b_{n-1}$  y luego sumando las ecuaciones resultantes, obtenemos:

$$\int_a^b w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}]^2 dx = 0 \tag{2.9}$$

ya que las constantes  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$  no son todos ceros, tendremos que

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}$$

no es idénticamente nulo en  $[a, b]$ . De las suposiciones hechas acerca de  $w$  se sigue que

$$w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}]^2 > 0, \quad x \in [a, b]$$

y que sólo es cero en este intervalo en un número finito de puntos. Por lo tanto

$$\int_a^b w(x) [b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1}]^2 dx > 0$$

lo cual contradice (2.9). De este modo, las constantes  $b_0, b_1, \dots, b_{n-1}$ , no todas ceros que satisfacen (2.7) no pueden existir. Se sigue que el sistema de ecuaciones (2.5) tiene solución única. ■

**Teorema 2.2** Sea  $P_n$  el polinomio ortogonal para el intervalo  $[a, b]$  con función de peso  $w$ . Entonces todos los ceros de  $P_n$  son reales, distintos y están ubicados en el intervalo abierto  $(a, b)$ .

**Prueba.** Asumamos que  $P_n(x)$  tiene  $l \leq n$  ceros distintos. Entonces podemos escribir  $P_n(x)$  en forma factorizada como

$$P_n(x) = (x - x_1)^{m_1}(x - x_2)^{m_2} \cdots (x - x_l)^{m_l}.$$

Aquí  $m_i$  es la multiplicidad de  $x_i$  y  $m_1 + m_2 + \cdots + m_l = n$ . Además podemos asumir que los ceros están clasificados en forma tal que  $x_1, x_2, \dots, x_k, k \leq l$  son los ceros reales las cuales están en  $\langle a, b \rangle$  en el cual  $P_n(x)$  cambia de signo. En otras palabras  $x_1, x_2, \dots, x_k$  tiene multiplicidad impar y son solamente los ceros de  $P_n(x)$  que están en  $\langle a, b \rangle$  de multiplicidad impar.

Si  $k = n$  entonces todos los ceros de  $P_n(x)$  son reales, distintos y están en  $[a, b]$ . En otra forma, si es falso que todos los ceros de  $P_n(x)$  son reales, distintos y están en  $\langle a, b \rangle$  entonces  $k < n$ . Mostraremos que la suposición de que  $k < n$  nos conduce a una contradicción.

Asuma que  $k < n$ . Consideremos el polinomio

$$Q_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_k)$$

(si  $k = 0$  definimos  $Q_0(x) \equiv 1$ ). Entonces  $Q_k(x)$  cambia de signo en  $\langle a, b \rangle$  en los mismos puntos que  $P_n(x)$ . Por lo tanto el producto  $P_n(x)Q_k(x)$  no cambia de signo en  $\langle a, b \rangle$ . Entonces

$$\int_a^b w(x)P_n(x)Q_k(x)dx \neq 0. \quad (2.10)$$

Pero, siendo  $k < n$  y ya que  $P_n(x)$  es ortogonal a todos los polinomios de grado  $\leq n - 1$ , tenemos que

$$\int_a^b w(x)P_n(x)Q_k(x)dx = 0$$

Esto contradice (2.10). Por lo tanto  $k < n$  es imposible. ■

**Teorema 2.3** (*Relación de recurrencia de tres términos*): Para tres polinomios ortogonales consecutivos se cumple la siguiente relación de recurrencia

$$P_n(x) = (A_n x + B_n)P_{n-1}(x) - C_n P_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.11)$$



donde  $A_n, B_n$  y  $C_n$  son constantes,  $A_n > 0$  y  $C_n > 0$ . Si el mayor coeficiente de  $P_n(x)$  es denotado por  $k_n$ , entonces

$$A_n = \frac{k_n}{k_{n-1}}, \quad C_n = \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{k_n k_{n-2}}{k_{n-1}^2} \quad (2.12)$$

**Prueba.** Para la demostración primero determinamos  $A_n$ . Se puede ver que  $P_n(x) - A_n x P_{n-1}(x) \in \pi_{n-1}$  (conjunto de polinomios de grado a lo sumo  $n-1$ ), esto puede ser representado como una combinación lineal:

$$\lambda_0 P_0(x) + \lambda_1 P_1(x) + \cdots + \lambda_{n-1} P_{n-1}(x)$$

y debido a la ortogonalidad de inmediato se ve que  $\lambda_v = 0$  si  $v < n-2$ . De ese modo se cumple la ecuación (2.11). La primera parte de (2.12) es una consecuencia de (2.11); la segunda parte lo es de

$$\int_a^b P_n(x) P_{n-2}(x) dx = 0 = A_n \int_a^b x P_{n-1}(x) P_{n-2}(x) dx - C_n,$$

ya que la integral del lado derecho es igual a

$$\int_a^b P_{n-1}(x) (k_{n-2} x^{n-1} + \cdots) dx = \frac{k_{n-2}}{k_{n-1}} \int_a^b \{P_{n-1}(x)\}^2 dx$$

y esto prueba el teorema. ■

La demostración del siguiente teorema puede verse en [14] (pág. 46).

**Teorema 2.4** Los ceros de los polinomios  $P_n(x)$  y  $P_{n-1}(x)$  se entrelazan: Esto es, si  $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$  son los ceros de  $P_n(x)$ ,  $x_0 = a$ ,  $x_{n+1} = b$  entonces cada intervalo  $[x_v, x_{v+1}]$ ,  $v = 0, 1, 2, \dots, n$  contiene exactamente un cero de  $P_{n+1}(x)$ .

Para ciertos intervalos y funciones de peso los polinomios ortogonales  $P_n(x)$  tienen nombres especiales. Por ejemplo para  $[a, b] = [-1, 1]$  y  $w(x) = 1$  tenemos los polinomios de Legendre. Para el mismo intervalo y  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  se tienen los polinomios de Chebyshev de primera clase. Generalizando, los polinomios de Jacobi (alemán, 1804-1851) dependen de dos parámetros:  $\alpha$  y  $\beta$ , los cuales son

mayores que  $-1$ . Su intervalo de definición es  $[a, b] = [-1, 1]$  y la función de peso correspondiente es  $w(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$ . Para otros intervalos tenemos por ejemplo si  $[a, b] = [-\infty, \infty]$  y  $w(x) = e^{-x^2}$  resultan los polinomios de Hermite (francés, 1822-1901) y si  $[a, b] = [0, \infty]$  y  $w(x) = e^{-x}$ , se tienen los polinomios de Laguerre (francés, 1834-1886).

Ahora veamos con un poco más de detalle algunas propiedades interesantes que tienen estos polinomios especiales, lo que más adelante usaremos en las fórmulas de cuadraturas.

### LOS POLINOMIOS DE LEGENDRE:

La ecuación diferencial que la define es:

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n + 1)y = 0.$$

Aquí  $x = 0$  es un punto ordinario y por lo tanto la solución es analítica en  $x = 0$ , o sea la solución puede ser representada por medio de series de potencias alrededor de  $x = 0$ . Resolviendo dicha ecuación diferencial por el método de series de potencias se obtienen los primeros polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \\ P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

Aplicando el teorema del binomio a  $(x^2 - 1)^n$ , derivando  $n$  veces término a término y comparando con los polinomios obtenidos arriba tenemos la Fórmula de Rodrigues (francés, 1794-1851),

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad (n = 0, 1, \dots).$$

Al usar la fórmula de Rodrigues e integrar por partes  $n$  veces se obtiene (norma)

$$\int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n + 1}, \quad (n = 0, 1, \dots).$$

La fórmula recursiva es,

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

donde  $P_0(x) = 1$ , y  $P_1(x) = x$ .

Para encontrar los polinomios de Legendre es mejor usar la fórmula recursiva antes que la fórmula de Rodrigues.

### LOS POLINOMIOS DE CHEBYSHEV:

La ecuación diferencial que la define es:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + n^2 y = 0.$$

Aquí también  $x = 0$  es un punto ordinario y por lo tanto la solución es analítica en  $x = 0$ , o sea, la solución puede ser representada por medio de series de potencias alrededor de  $x = 0$ . Resolviendo por series se obtienen los primeros polinomios de Chebyshev de primera clase:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x, \quad T_2(x) = 2x^2 - 1, \quad T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \quad T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x, \dots$$

**Definición 2.5** Para  $x \in [-1, 1]$ , los polinomios de Chebyshev se expresan como

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.13)$$

**Teorema 2.5 (Fórmula recursiva)** Con las condiciones  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$ ,

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

constituye un polinomio de grado  $n$ .

**Prueba.** Haciendo  $\theta = \arccos x$ , podemos escribir:  $T_n(x) = \cos(n\theta)$  y utilizando la fórmula que da el coseno de la suma de dos arcos

$$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

obtenemos

$$T_{n+1}(x) = \cos[(n+1)\theta] = \cos \theta \cos(n\theta) - \sin \theta \sin(n\theta)$$

$$T_{n-1}(x) = \cos[(n-1)\theta] = \cos \theta \cos(n\theta) + \sin \theta \sin(n\theta)$$

y de allí

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2 \cos(\theta) \cos(n\theta) = 2xT_n(x)$$

obteniéndose la fórmula de recurrencia

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

que junto a las condiciones  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$  permiten concluir que  $T_n(x)$  es de hecho una función polinomial en  $[-1, 1]$  y esto prueba el teorema. ■

**Observación 2.1** *Para generar más rápidamente los polinomios de Chebyshev se recomienda usar esta fórmula recursiva antes que la fórmula dada en el teorema 2.3 o antes que resolver la ecuación diferencial de Chebyshev.*

**Teorema 2.6** *Se cumple la relación de ortogonalidad (norma):*

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} 0, & \forall m \neq n \\ \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \neq 0 \end{cases}$$

**Prueba.** Utilizando la definición 2.5, tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_{-1}^1 \frac{\cos(m \arccos x) \cos(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Para evaluar esta integral hacemos la sustitución  $\theta = \arccos x$  y con ello

$$d\theta = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Así,

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_{\pi}^0 \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(m\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

Supongamos que  $m \neq n$ . Dado que

$$\cos(m\theta) \cos(n\theta) = \frac{1}{2} [\cos(m+n)\theta - \cos(m-n)\theta]$$

tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(m+n)\theta] d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \cos[(m-n)\theta] d\theta$$

y al integrar produce

$$\left[ \frac{\text{sen}(m+n)\theta}{2(m+n)} + \frac{\text{sen}(m-n)\theta}{2(m-n)} \right]_0^\pi = 0.$$

Es mucho más fácil probar que

$$\int_{-1}^1 \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \pi, & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2}, & m = n \geq 1 \end{cases}$$

y con esto queda probado el teorema. ■

El siguiente teorema se refiere a la ubicación de los ceros de  $T_n(x)$  y para ello haremos uso de la definición 2.5

**Teorema 2.7** *Los polinomios de Chebyshev  $T_n(x)$  de grado  $n \geq 1$  tienen  $n$  ceros simples en  $[-1, 1]$  ubicados en los puntos*

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

**Prueba.** Si utilizamos

$$\bar{x}_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

entonces utilizando la definición 2.5,

$$T_n(\bar{x}_k) = \cos(n \arccos(\bar{x}_k)) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\right)\right) = 0$$

y cada  $\bar{x}_k$  es un cero distinto de  $T_n(x)$ . Por ser  $T_n(x)$  un polinomio de grado  $n$ , todos los ceros de  $T_n(x)$  deben ser de esta forma. ■

Una de las características de esta familia de polinomios es que el coeficiente de  $x^n$  es  $2^{n-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , es decir,

$$T_n(x) = 2^{n-1}x^n + \dots \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Los polinomios de Chebyshev son usados para colocar de manera óptima los nodos interpolantes para reducir al mínimo el error de la interpolación de Lagrange.

## LOS POLINOMIOS DE JACOBI:

La ecuación diferencial que la define es

$$(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \frac{dy}{dx} + [n(n + \alpha + \beta + 1)] y = 0$$

donde los parámetros  $\alpha > -1$ ,  $\beta > -1$  y  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Como antes, aquí también  $x = 0$  es un punto ordinario de la ecuación diferencial de Jacobi. Por lo tanto una forma de resolver dicha ecuación sería empleando el método de las series de potencias.

La fórmula explícita de estos polinomios es

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n + \alpha}{n - k} \binom{n + \beta}{k} (x - 1)^k (x + 1)^{n - k}$$

donde los coeficientes binomiales están definidos por

$$\binom{k}{0} = 1, \quad \binom{k}{s} = \frac{k(k - 1)(k - 2) \cdots (k - s + 1)}{s!} \quad (s \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

La norma es

$$\int_{-1}^1 (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]^2 dx = \frac{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1) n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)}$$

donde la función  $\Gamma(n)$  es definida mediante

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx = (n - 1)! \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

La fórmula de Rodrigues correspondiente es

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n! (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1 - x)^{n + \alpha} (1 + x)^{n + \beta}].$$

Cuando  $\alpha = \beta$  obtenemos los polinomios ultrasféricos, particularmente:

Si  $\alpha = \beta = 0$  se tienen los polinomios de Legendre. Si  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ , los polinomios de Jacobi son los mismos que los polinomios de Chebyshev de primera clase. Si  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , tendremos los polinomios de Chebyshev de segunda clase.

Para un estudio más detallado de estos polinomios se puede ver [14].

# Capítulo 3

## Fórmulas de Cuadratura Gaussiana (clásicas)

Las fórmulas de Newton-Cotes que usamos en la sección 1.5 se dedujeron integrando los polinomios interpolantes. Puesto que el término de error en un polinomio de interpolación de grado  $n$  contiene la  $(n+1)$ -ésima derivada de la función a aproximar, una fórmula de este tipo será exacta cuando aproxime cualquier polinomio de un grado menor o igual que  $n$ .

Todas las fórmulas de Newton-Cotes requieren que se conozcan los valores de la función cuya integral se va a aproximar en puntos uniformemente espaciados, que puede ser la situación esperada si se utilizan datos tabulados de la función. Esta práctica es adecuada cuando las fórmulas se combinan para formar las reglas compuestas (es decir el intervalo  $[a, b]$  se fragmenta en subintervalos) y se aplican a las fórmulas de Newton-Cotes de bajo orden especialmente la Regla de Simpson. Sin embargo, si la función está dada explícitamente, los puntos para evaluar la función pueden escogerse de otra manera que nos lleve a una mayor precisión de la aproximación.

En este capítulo desarrollaremos la cuadratura gaussiana, llamada así en honor al gran matemático, físico y astrónomo alemán Karl F. Gauss (1777-1855) llamado con toda justicia el "Príncipe de las Matemáticas" y de quien Jacobi en 1840 dijo: "Las

matemáticas se encontrarían en una posición muy distinta, si la astronomía práctica no hubiera desviado a este genio colosal de su gloriosa carrera". Efectivamente, Gauss poseía una vastísima inteligencia y es uno de los casos más extraordinarios de precocidad en la historia de las ciencias. Cuando aún no cumplía los 19 años de edad, halló la solución de un problema irresoluto desde la época de los griegos: La construcción del polígono regular de diecisiete lados utilizando sólo la regla y el compás, este descubrimiento le hubiera bastado para ocupar un lugar privilegiado en la Historia de las Matemáticas. Después, en 1799, a los 22 años de edad en su tesis doctoral demostró, primero que nadie, en forma correcta, el Teorema Fundamental del Algebra. Meses después determina la posición exacta del recién descubierto asteroide Ceres y con los datos de las primeras observaciones Gauss construyó un sistema matemático basada en la elipse y en los mínimos cuadrados para calcular las órbitas de los planetas y cometas. La hazaña de localizar la posición exacta de Ceres coincide con el comienzo de sus investigaciones astronómicas, que absorberán una buena parte de sus energías durante casi 20 años. También contribuyó grandemente al progreso de la telegrafía electromagnética. Gauss es el precursor de las geometrías no euclidianas que luego desarrollaron Lobatchevski (ruso, 1793-1856) y Riemann. Según Simmons [11] Gauss es el matemático supremo quien "sobrepasó los niveles de realización posibles para los hombres ordinarios de ingenio en tantas formas, que a veces, se tiene la extraña impresión de que pertenecía a una especie superior".

La cuadratura gaussiana se preocupa en escoger los puntos de evaluación de una manera óptima y no en una forma igualmente espaciada como vimos en las fórmulas de Newton-Cotes. Gauss presenta un procedimiento para escoger los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  en el intervalo  $[a, b]$  y los coeficientes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  que se espera minimizen el error obtenido al realizar la aproximación

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$$

para una función arbitraria  $f(x)$ . Para medir esta precisión, se supone generalmente que la mejor elección de estos valores será la que maximize el grado de precisión de la fórmula.



Como los valores  $A_1, A_2, \dots, A_n$  son arbitrarios y los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  están restringidos sólo en el sentido de que la función, cuya integral se está aproximando, debe de estar definida en estos puntos, hay  $2n$  parámetros involucrados.

Si los coeficientes de un polinomio se consideran también como parámetros, la clase de polinomios de grado máximo  $2n - 1$  también contiene  $2n$  parámetros. Así pues, éste es el tipo de polinomios más amplio en que es posible esperar que la fórmula sea exacta. Se puede lograr la exactitud cuando los valores y las constantes se seleccionen de manera adecuada.

**Ejemplo 3.1** Cuando  $n = 2$  y el intervalo de integración es  $[-1, 1]$ , determinaremos  $A_1, A_2, x_1$  y  $x_2$  de tal manera que

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

sea exacto siempre que  $f(x)$  sea un polinomio de grado  $2(2) - 1 = 3$  o menor, es decir, cuando

$$f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$$

donde los  $b_i$  son constantes. Dado que

$$\int (b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3) dx = b_0 \int 1 dx + b_1 \int x dx + b_2 \int x^2 dx + b_3 \int x^3 dx,$$

esto equivale a demostrar que la fórmula produce resultados exactos cuando  $f(x)$  es  $1, x, x^2$  y  $x^3$ . Por lo tanto, necesitamos  $A_1, A_2, x_1$  y  $x_2$ , de modo que

$$A_1(1) + A_2(1) = \int_{-1}^1 1 dx = 2, \quad A_1x_1 + A_2x_2 = \int_{-1}^1 x dx = 0,$$

$$A_1x_1^2 + A_2x_2^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad A_1x_1^3 + A_2x_2^3 = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

Resolviendo este sistema no lineal de ecuaciones encontramos que tiene solución única el cual es

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1, \quad x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Luego, la fórmula de aproximación es

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) + f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Esta fórmula tiene un grado de precisión tres.

En general, y por el mismo procedimiento, utilizando  $n$  nodos podemos integrar exactamente todos los polinomios de grado  $\leq 2n-1$ . Obtendríamos un sistema de  $2n$  ecuaciones no lineal cuya solución de manera ordinaria implica grandes dificultades matemáticas. Sin embargo, como veremos en la siguiente sección, los polinomios de Legendre son los que ayudará a simplificar el problema.

Generalizando, tenemos el siguiente resultado, cuya demostración puede verse en [13]

**Teorema 3.1** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  los ceros de cualquier polinomio ortogonal  $P_n(x)$  definidos en  $[a, b]$  y cuya función de peso es  $w(x)$ . Entonces, en la fórmula

$$\int_a^b w(x)f(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j) + E[f]$$

$E[f] = 0$  para todos los polinomios  $f$  de grado menor que  $2n$ . Los coeficientes  $A_j$  son positivos y satisfacen

$$\int_a^b w(x)dx = \sum_{j=1}^n A_j$$

### 3.1 Cuadratura de Gauss-Legendre

En el capítulo 2 hemos visto varios grupos de polinomios ortogonales, que son funciones que tienen la propiedad de que una integral definida del producto de dos de ellos cualesquiera es cero. El conjunto relacionado con el problema de encontrar los coeficientes  $A_1, A_2, \dots, A_n$  y los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  que son los  $2n$  parámetros que necesitábamos en la sección anterior son los polinomios de Legendre que tienen la propiedad:

- a) Para cada  $n$ ,  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ .
- b)  $\int_{-1}^1 P_n(x)Q(x)dx = 0$  siempre que  $Q(x)$  sea un polinomio de grado  $< n$ .

También hallamos los primeros polinomios de Legendre:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x), \dots$$

Los ceros de estos polinomios son diferentes, se encuentran en el intervalo  $(-1, 1)$ , tienen simetría respecto al origen y, lo más importante de todo es la opción correcta para determinar los parámetros que resuelven nuestro problema.

Los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  necesarios para producir una fórmula de la aproximación a la integral, que proporcione resultados exactos para cualquier polinomio de un grado menor que  $2n$  son los ceros del polinomio de Legendre de grado  $n$ . Esto se establece por medio de la siguiente proposición

**Teorema 3.2** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  los ceros del polinomio de Legendre  $P_n(x)$ . Si  $f(x)$  es un polinomio cualquiera de grado menor que  $2n$ , entonces

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$$

donde los coeficientes  $A_j$  están definidos por

$$A_j = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

**Prueba.** Sea  $f(x) = P(x)$  un polinomio de grado menor que  $n$ . Reescribimos  $P(x)$  como un polinomio de Lagrange de grado  $n - 1$ , con nodos en los ceros del polinomio de Legendre  $P_n(x)$ . Esta representación de  $P(x)$  es exacta, ya que el término de error contiene la derivada de orden  $n$  de  $P(x)$  y esa derivada es cero. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P(x) dx &= \int_{-1}^1 \left[ \sum_{j=1}^n \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} P(x_j) \right] dx \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq j}}^n \frac{x - x_k}{x_j - x_k} dx \right) P(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^n A_j P(x_j) \end{aligned}$$

lo que prueba el resultado para los polinomios de grado menor que  $n$ .

Ahora, si el polinomio  $P(x)$  de un grado menor que  $2n$  se divide entre el polinomio de Legendre  $P_n(x)$ , entonces dos polinomios  $Q(x)$  y  $R(x)$  de un grado menor que  $n$  se producen por medio de

$$P(x) = Q(x)P_n(x) + R(x).$$

Ahora recurrimos a la potencia única de los polinomios de Legendre. Primero, el grado del polinomio  $Q(x)$  es menor que  $n$ ; por tanto de acuerdo a la propiedad de ortogonalidad de los polinomios de Legendre (propiedad b)

$$\int_{-1}^1 Q(x)P_n(x)dx = 0.$$

Después, como  $x_j$  es un cero de  $P_n(x)$  para cada  $j = 1, 2, \dots, n$ , tenemos

$$P(x_j) = Q(x_j)P_n(x_j) + R(x_j) = R(x_j).$$

Finalmente, como  $R(x)$  es un polinomio de grado menor que  $n$ , el argumento inicial implica que

$$\int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j R(x_j).$$

Al combinar estos hechos, verificamos que la fórmula es exacta para el polinomio  $P(x)$ :

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \int_{-1}^1 [Q(x)P_n(x) + R(x)] dx = \int_{-1}^1 R(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j R(x_j)$$

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{j=1}^n A_j P(x_j)$$

que era lo que queríamos probar. ■

**Ejemplo 3.2** Para  $n = 3$ , es  $P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$ . Las raíces de este polinomio son:

$$x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Por lo tanto:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = A_1 f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + A_2 f(0) + A_3 f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

para todo polinomio  $f$  de grado  $< 2(3) = 6$ . Encontramos los coeficientes  $A_1, A_2$  y  $A_3$ :

$$\text{Para } j = 1 : A_1 = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq 1}}^3 \frac{x - x_k}{x_1 - x_k} dx = \int_{-1}^1 \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} dx = \frac{5}{9}$$

$$\text{Para } j = 2 : A_2 = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq 2}}^3 \frac{x - x_k}{x_2 - x_k} dx = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \cdot \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} dx = \frac{8}{9}$$

$$\text{Para } j = 3 : A_3 = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{k=1, \\ k \neq 3}}^3 \frac{x - x_k}{x_3 - x_k} dx = \int_{-1}^1 \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} dx = \frac{5}{9}$$

Luego,

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$$

fórmula que es válida para cualquier polinomio de grado  $< 6$ .

### 3.2 Cuadratura de Gauss-Chebyshev

Hemos visto que los polinomios de Chebyshev están definidos en el intervalo  $[-1, 1]$  y tienen por función de peso  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ . También se estableció que se generan rápidamente por la fórmula recursiva

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

siendo  $T_0(x) = 1$  y  $T_1(x) = x$ .

Habíamos generado los primeros polinomios de Chebyshev:

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x \text{ y así sucesivamente.}$$

Ahora, estamos interesados en determinar

$$\int_a^b w(x)f(x) dx$$

donde  $[a, b] = [-1, 1]$  y  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Los nodos  $x_1, x_2, \dots, x_n$  necesarios para producir una fórmula de la aproximación a la integral, que proporcione resultados exactos para cualquier polinomio de un grado menor que  $2n$  son los ceros del polinomio de Chebyshev de grado  $n$ . Esto se establece por medio de la siguiente proposición:

**Teorema 3.3** Sean  $x_1, x_2, \dots, x_n$  las  $n$  raíces del polinomio de Chebyshev  $T_n(x)$ , entonces la fórmula

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$$

es exacta para todos los polinomios  $f$  de grado menor que  $2n$ . Los coeficientes  $A_j$  están definidos por

$$A_j = \frac{\pi}{n}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

**Prueba.** La proposición dada es una aplicación inmediata del resultado dado en el teorema 3.1. ■

**Ejemplo 3.3** Para  $n = 4$ , tenemos

$$\int_{-1}^1 \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + A_3 f(x_3) + A_4 f(x_4) = I$$

es válida para todo polinomio  $f$  de grado  $< 2(4) = 8$ . Los coeficientes  $A_1, A_2, A_3$  y  $A_4$  son:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = \frac{\pi}{4}.$$

Los  $x_j$  son las raíces del polinomio  $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$ . Resolviendo la ecuación  $T_4(x) = 0$ , encontramos

$$x_1 = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}, \quad x_3 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \quad \text{y} \quad x_4 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Por lo tanto,

$$I = \frac{\pi}{4} \left[ f\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) + f\left(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) + f\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) \right]$$

es válida para cualquier polinomio  $f$  de grado menor que 8.

### 3.3 Cuadratura Gaussiana y problema de valores propios

Investigaciones efectuadas por Walter Gautschi [5], basándose en la obra de grandes matemáticos como Gauss, Jacobi y Christoffel ha demostrado fórmulas de cuadratura gaussianas utilizando el cálculo de valores y vectores propios. Presentamos entonces este método alternativo.

Tenemos

**Teorema 3.4** *La matriz  $n \times n$*

$$A = \begin{bmatrix} p_0(t_1) & \dots & p_0(t_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(t_1) & \dots & p_{n-1}(t_n) \end{bmatrix}$$

*es no singular para argumentos mutuamente distintos  $t_i, i = 1, \dots, n$ .*

**Prueba.** Asumamos que  $A$  es singular. Entonces existe un vector fila

$$c^T = (c_0, \dots, c_{n-1}) \neq 0 \quad \text{con} \quad c^T A = 0.$$

El polinomio

$$q(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x),$$

con  $\text{grad}(q) < n$ , tiene  $n$  ceros distintos  $t_1, \dots, t_n$ , y por lo tanto  $q(x) \equiv 0$ . Sea  $l$  el índice más grande con  $c_l \neq 0$ . Entonces

$$p_l(x) = -\frac{1}{c_l} \sum_{i=0}^{l-1} c_i p_i(x).$$

Esto es una contradicción, ya que el polinomio de la derecha tiene un grado menor que el de  $p_l \in \prod_l$  y esto prueba el teorema. ■

El teorema (3.4) nos muestra que el problema de interpolación para hallar una función de la forma

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n-1} c_i p_i(x)$$

con  $p(t_i) = f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  es siempre solucionable en forma única. La condición del teorema es conocida como la condición de Haar. Cualquier sucesión de funciones  $p_0, p_1, \dots$  las cuales satisfacen la condición de Haar se dice que forman un sistema de Chebyshev. El teorema (3.4) establece que las sucesiones de polinomios ortogonales son sistemas de Chebyshev.

Ahora mostramos el resultado principal en el

**Teorema 3.5** *Se cumplen:*

1. Sean  $x_1, \dots, x_n$  los ceros del polinomio ortogonal  $p_n(x)$  y sean  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  la solución del sistema no singular de ecuaciones

$$\sum_{i=1}^n p_k(x_i) \lambda_i = \begin{cases} \langle p_0, p_0 \rangle & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.1)$$

Entonces  $\lambda_i > 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) \quad (3.2)$$

se cumplen para todos los polinomios  $p \in \Pi_{2n-1}$ . Los números positivos  $\lambda_i$  son los pesos de cuadratura.

2. Recíprocamente, si los números  $\lambda_i, x_i, i = 1, \dots, n$ , son tales que (3.2) se cumple para todos los polinomios  $p \in \Pi_{2n-1}$ , entonces las  $x_i$  son los ceros de  $p_n$  y los pesos  $\lambda_i$  satisfacen (3.1).
3. No es posible encontrar números  $x_i, \lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$  tales que (3.2) se cumpla para polinomios  $p \in \Pi_{2n}$ .

**Prueba.** Por el teorema (2.2), los ceros  $x_i, i = 1, 2, \dots, n$  de  $p_n$  son reales, distintos y están en el interior de  $\langle a, b \rangle$ . La matriz

$$A = \begin{bmatrix} p_0(x_1) & \dots & p_0(x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ p_{n-1}(x_1) & \dots & p_{n-1}(x_n) \end{bmatrix}, \quad (3.3)$$



es no singular por el teorema (3.4), ya que el sistema de ecuaciones (3.1) tiene solución única. Considere un polinomio arbitrario  $p \in \Pi_{2n-1}$ . Esto puede ser escrito en la forma

$$p(x) \equiv p_n(x)q(x) + r(x), \quad (3.4)$$

donde  $q, r$  son polinomios en  $\Pi_{n-1}$ , los cuales pueden ser expresados como combinaciones lineales de polinomios ortogonales

$$q(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k p_k(x), \quad r(x) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k p_k(x).$$

Puesto que  $p_0(x) \equiv 1$  y como  $\langle p, p_n \rangle = 0$  para todo los polinomios  $p \in \Pi_{n-1}$  se sigue de (3.4) que

$$\int_a^b w(x) p(x) dx = \langle p_n, q \rangle + \langle r, p_0 \rangle = \beta_0 \langle p_0, p_0 \rangle.$$

Por otro lado, por (3.4) (ya que  $p_n(x_i) = 0$ ) y por (3.1)

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p(x_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i r(x_i) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i p_k(x_i) \right) = \beta_0 \langle p_0, p_0 \rangle.$$

Esto prueba (3.2). Observamos que

Si  $\lambda_i, x_i, i = 1, \dots, n$  son tales que (3.2) se cumple para todos los polinomios  $p \in \Pi_{2n-1}$ , entonces  $\lambda_i > 0$  para  $i = 1, \dots, n$  (\*)

Esto se verifica aplicando (3.2) a los polinomios

$$\bar{p}_j(x) \equiv \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x - x_h)^2 \in \Pi_{2n-2} \quad j = 1, \dots, n,$$

y notando que

$$0 < \int_a^b w(x) \bar{p}_j(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{p}_j(x_i) = \lambda_j \prod_{\substack{h=1 \\ h \neq j}}^n (x_j - x_h)^2$$

por el hecho de que para todos los polinomios  $s(x)$  los cuales son no negativos en  $[a, b]$ ,  $\int_a^b w(x) s(x) dx = 0$  implica  $s(x) \equiv 0$ . Esto completa la prueba de (1).

Asumiendo que  $\lambda_i, x_i, i = 1, \dots, n$  son tales que (3.2) se cumple para todos los polinomios  $p \in \Pi_{2n}$ , entonces

$$\bar{p}(x) \equiv \prod_{j=1}^n (x - x_j)^2 \in \Pi_{2n}$$

contradice este hecho, ya que por  $\int_a^b w(x) s(x) dx = 0$  implica  $s(x) \equiv 0$  se tiene

$$0 < \int_a^b w(x) \bar{p}(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{p}(x_i) = 0.$$

Esto prueba (3).

Para probar (2), supongamos que  $\lambda_i, x_i, i = 1, \dots, n$  son tales que (3.2) se cumple para todos los polinomios  $p \in \Pi_{2n-1}$ ; vemos que las abscisas  $x_i$  deberían ser mutuamente distintos, ya que en otro caso podríamos formular la misma regla de integración usando solamente  $n - 1$  de las abscisas  $x_i$  contradiciendo el enunciado (3).

Aplicando (3.2) a los polinomios ortogonales  $p = p_k$ , para  $k = 0, \dots, n - 1$ , encontramos

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i p_k(x_i) = \int_a^b w(x) p_k(x) dx = \langle p_k, p_0 \rangle = \begin{cases} \langle p_0, p_0 \rangle & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k = 1, \dots, n - 1. \end{cases}$$

En otras palabras, los pesos  $\lambda_i$  deberían satisfacer (3.1).

Definiendo  $p(x) \equiv p_k(x)p_n(x), k = 0, 1, \dots, n - 1$  se cumple que

$$0 = \langle p_k, p_n \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_n(x_i) p_k(x_i), \quad k = 0, 1, \dots, n - 1.$$

En otras palabras el vector  $c = (\lambda_1 p_n(x_1), \dots, \lambda_n p_n(x_n))^T$  resuelve el sistema homogéneo de ecuaciones  $Ac = 0$  con  $A$  la matriz no singular del teorema anterior. Además  $c = 0$  y  $\lambda_i p_n(x_i) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Ya que  $\lambda_i > 0$  por (\*) tenemos  $p_n(x_i) = 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Esto completa la prueba de (2). ■

El siguiente teorema, que tiene como fundamento el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, describe como construir polinomios ortogonales en  $[a, b]$  respecto

a la función de peso  $w$ . Para demostrarlo se aplica inducción matemática al grado del polinomio.

**Teorema 3.6** *Existen polinomios mónicos  $P_k$  de grado  $k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , tal que*

$$\langle P_i, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j. \quad (3.5)$$

*Estos polinomios son definidos únicamente por las recursiones*

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x - a_0 \quad (3.6)$$

$$P_{k+1}(x) = (x - a_k)P_k(x) - b_k P_{k-1}(x) \quad k = 1, 2, \dots, \quad (3.7)$$

donde

$$a_k = \frac{\langle P_k, xP_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.8)$$

$$b_k = \begin{cases} \int_a^b w(x) dx, & k = 0 \\ \frac{\langle P_k, P_k \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, & k = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.9)$$

**Prueba.** Claramente  $P_0(x) = 1$ . Supóngase como hipótesis inductiva, que todos los polinomios ortogonales con las propiedades anteriormente mencionadas han sido construidas para  $j \leq k$  y han sido mostrado que son únicos. Procedemos a mostrar que existe un único polinomio mónico  $P_{k+1}$  de grado  $k + 1$  con

$$\langle P_{k+1}, P_j \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq k, \quad (3.10)$$

y que este polinomio satisface (3.6) y (3.7). Cualquier polinomio mónico  $P_{k+1}$  de grado  $k + 1$  puede ser escrito únicamente en la forma

$$P_{k+1}(x) = (x - a_k)P_k(x) + c_{k-1}P_{k-1}(x) + c_{k-2}P_{k-2}(x) + \dots + c_0P_0(x), \quad (3.11)$$

porque su coeficiente principal y aquellos de los polinomios  $P_j$ ,  $j \leq k$ , tienen valor 1. Desde que  $\langle P_i, P_j \rangle = 0$  para cualquier  $i, j \leq k$ , con  $i \neq j$ , (3.10) se cumple si, y sólo si

$$\langle P_{k+1}, P_k \rangle = \langle xP_k, P_k \rangle - a_k \langle P_k, P_k \rangle = 0 \quad (3.12)$$

$$\langle P_{k+1}, P_{j-1} \rangle = \langle xP_{j-1}, P_k \rangle + c_{j-1} \langle P_{j-1}, P_{j-1} \rangle = 0 \quad \text{para } j \leq k \quad (3.13)$$

Pero  $\langle P_k, P_k \rangle \neq 0$  y  $\langle P_{j-1}, P_{j-1} \rangle \neq 0$  para  $j \leq k$  ya que  $P_0, P_1, \dots, P_k$  son mónicos. De (3.12) tenemos

$$a_k = \frac{\langle xP_k, P_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle}$$

Por la hipótesis inductiva,

$$P_j(x) = (x - a_{j-1})P_{j-1}(x) - b_{j-1}P_{j-2}(x), \quad j \leq k.$$

De esto, tenemos  $\langle xP_{j-1}, P_k \rangle = \langle P_j, P_k \rangle$  para  $j \leq k$ . Luego de (3.13) se tiene

$$c_{j-1} = -\frac{\langle P_j, P_k \rangle}{\langle P_{j-1}, P_{j-1} \rangle} = \begin{cases} -b_k, & j = k \\ 0, & j < k \end{cases} \quad (3.14)$$

Reemplazando esta última ecuación en (3.11):

$$P_{k+1}(x) = (x - a_k)P_k(x) - b_kP_{k-1}(x).$$

Así, la prueba está completa. ■

**Ejemplo 3.4** Cálculo de los primeros polinomios ortogonales mónicos de Chebyshev de primera clase.

En este caso  $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  y  $[a, b] = [-1, 1]$ .  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x - a_0$ , donde

$$a_0 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{1 \cdot x dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{\pi} = 0 \Rightarrow P_1(x) = x.$$

Tenemos  $P_2(x) = (x - a_1)P_1(x) - b_1P_0(x)$ . Encontramos:

$$a_1 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{\frac{\pi}{2}} = 0, \quad b_1 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{1}{2} \Rightarrow P_2(x) = x^2 - \frac{1}{2}$$

También  $P_3(x) = (x - a_2)P_2(x) - b_2P_1(x)$ . Encontramos:

$$a_2 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{x(x^2 - \frac{1}{2})^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_{-1}^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{2})^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{0}{\frac{\pi}{8}} = 0, \quad b_2 = \frac{\int_{-1}^1 \frac{(x^2 - \frac{1}{2})^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}}{\int_{-1}^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{\pi}{8}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \Rightarrow P_3(x) = x^3 - \frac{3}{4}x$$

En el apéndice A de [13] encontramos unas tablas en donde figuran los polinomios ortogonales clásicos.

**Teorema 3.7** Sea

$$J_n = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & 0 & \dots & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} & \ddots & \vdots \\ 0 & \sqrt{b_2} & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-2} & \sqrt{b_{n-1}} \\ 0 & \dots & 0 & \sqrt{b_{n-1}} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

la matriz de Jacobi (de orden  $n$ , tridiagonal y simétrica) construida a partir de los coeficientes  $a_k$  y  $b_k$  de la relación de recurrencia para los polinomios mónicos ortogonales respecto al producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx$$

Entonces, los nodos  $x_i$  de la correspondiente fórmula de cuadratura gaussiana con  $n$  puntos

$$\int_a^b f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

son los valores propios de  $J_n$  y los pesos  $w_i$  vienen dados por

$$\lambda_i = b_0 v_{i1}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde  $v_{i1}$  es la primera componente del vector  $v_i$ , el vector propio de norma euclídea igual a 1 asociado al valor propio  $x_i$ , y

$$b_0 = \int_a^b w(x) dx$$

**Prueba.** De la relación de recurrencia, tenemos

$$xP_k(x) = b_k P_{k-1}(x) + a_k P_k(x) + P_{k+1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

En forma matricial

$$x \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} P_0(x) \\ P_1(x) \\ \vdots \\ P_{n-2}(x) \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ P_n(x) \end{pmatrix}$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_1 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

es una matriz tridiagonal.

Ahora bien, si  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) son las  $n$  raíces de  $P_n(x)$  se tiene

$$x_i P_i = T P_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde  $P_i = (P_0(x_i), \dots, P_{n-1}(x_i))^T$ .

Es decir,  $x_1, \dots, x_n$  son los valores propios de  $T$  y  $P_1, \dots, P_n$  son los vectores propios correspondientes.

Sea  $D = \text{diag}(d_0, d_1, \dots, d_{n-1})$  donde  $d_k = \frac{1}{\sqrt{\gamma_k}}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ), donde

$$\gamma_k = \int_a^b (P_k(x))^2 w(x) dx.$$

De la definición de los coeficientes  $b_k$  de la relación de recurrencia, se tiene

$$b_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_{k-1}}$$

es decir

$$\frac{\sqrt{\gamma_k}}{\sqrt{\gamma_{k-1}}} = \sqrt{b_k}.$$

De este modo se tiene, para  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\frac{d_{k-1}}{d_k} = \sqrt{b_k}, \quad \frac{d_k}{d_{k-1}} = \frac{1}{\sqrt{b_k}}$$

y por lo tanto,

$$D T D^{-1} = J_n.$$

Luego,  $J_n$  es una matriz semejante a  $T$  y por lo tanto tiene los mismos valores propios de  $T$ : los ceros del polinomio ortogonal  $P_n(x)$ .

Por otro lado  $DP_i$  es un vector propio de  $J_n = DTD^{-1}$  asociado al valor propio  $x_i$ . En consecuencia, para  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$Q_i = DP_i = \left( \frac{P_0(x_i)}{\sqrt{\gamma_0}}, \dots, \frac{P_{n-1}(x_i)}{\sqrt{\gamma_{n-1}}} \right)^T$$

es un vector propio de  $J_n$  correspondiente al valor propio  $x_i$ . Una propiedad que se obtiene de la forma confluyente de Christoffel- Darboux, es el siguiente

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(P_k(x_i))^2}{\gamma_k} = \frac{1}{\lambda_i}$$

Luego  $\|Q_i\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Es decir, si  $v_i$  es el vector propio de  $J_n$  correspondiente a  $x_i$  con  $\|v_i\|_2 = 1$ , se tendrá  $v_i = \sqrt{\lambda_i}Q_i$ .

Si  $v_{i1}$  es la primera componente de  $v_i$ , entonces  $v_{i1} = \frac{\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\gamma_0}}$ , es decir  $\lambda_i = \gamma_0 v_{i1}^2$ , pero

$$\gamma_0 = \int_a^b w(x) dx = b_0,$$

por lo tanto,  $\lambda_i = b_0 v_{i1}^2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . ■

### Ejemplo 3.5 Cálculo de la fórmula gaussiana para $w(x) = 1$ y $n = 3$ :

Usando la fórmula recursiva

$$P_{k+1}(x) = (x - a_k)P_k(x) - b_k P_{k-1}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

obtenemos los polinomios ortogonales mónicos de Legendre:

$$P_0(x) = 1; \quad P_1(x) = x - a_0, \quad P_2(x) = x^2 - \frac{1}{3}, \quad P_3(x) = x^3 - \frac{3}{5}x,$$

como

$$a_k = \frac{\langle P_k, xP_k \rangle}{\langle P_k, P_k \rangle} \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

y

$$b_k = \begin{cases} \int_{-1}^{+1} w(x) dx, & k = 0 \\ \frac{\langle P_k, P_k \rangle}{\langle P_{k-1}, P_{k-1} \rangle}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

obtenemos

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = 0; \quad b_0 = 2, \quad b_1 = \frac{1}{3} \quad \text{y} \quad b_2 = \frac{4}{15}.$$

La matriz de Jacobi es

$$J_3 = \begin{pmatrix} a_0 & \sqrt{b_1} & 0 \\ \sqrt{b_1} & a_1 & \sqrt{b_2} \\ 0 & \sqrt{b_2} & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{4}{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{4}{15}} & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores propios de esta matriz nos proporciona los nodos de cuadratura de

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

Escribimos  $\det(J_3 - \mu I) = 0$  y encontramos los nodos

$$\mu_1 = x_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad \mu_2 = x_2 = 0, \quad \mu_3 = x_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Los pesos (números de Christoffel) vienen dados por

$$\lambda_i = b_0 v_{i1}^2, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde  $v_{i1}$  es la primera componente del vector  $v_i$ , el vector propio de norma euclídea igual a 1 asociado al valor propio  $x_i$ . De  $J_n \bar{y} = \mu \bar{y}$  obtenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 & \sqrt{\frac{4}{15}} \\ 0 & \sqrt{\frac{4}{15}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o lo que es lo mismo

$$\begin{cases} 3y_1 + \sqrt{5}y_2 = 0 & (1) \\ \sqrt{5}y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 0 & (2) \\ 2y_2 + 3y_3 = 0 & (3) \end{cases}$$

tal que  $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} = 1$  ó  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$ . La solución paramétrica es

$$\left\{ y_1 = t, \quad y_2 = -\frac{3}{\sqrt{5}}t, \quad y_3 = \frac{2}{\sqrt{5}}t \right\}$$



tal que  $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 1$  lo que implica  $t = \sqrt{\frac{5}{18}}$ . Luego  $\lambda_1 = b_0 v_{11}^2 = 2 \left(\frac{5}{18}\right) = \frac{5}{9}$ . Del mismo modo  $\lambda_2 = \frac{8}{9}$  y  $\lambda_3 = \frac{5}{9}$ . Así tendremos

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{5}{9} f\left(-\sqrt{\frac{3}{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\sqrt{\frac{3}{5}}\right),$$

que es el mismo resultado obtenido en el ejemplo (3.2)

Tenemos un programa implementado en Matlab para  $w(x) = 1$  que aplica el procedimiento dado (Programa 2, ver Apéndice A1).

**Ejemplo 3.6**  $\text{erf}(x)$  es la distribución normal de la función de error definida por

$$\text{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

Cálculo de  $\text{erf}(2)$ . De la definición  $\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-t^2} dt$ .

El cambio  $t = 1 + x$ , conduce a

$$\text{erf}(2) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 e^{-(1+x)^2} dx$$

Cálculo de  $\int_{-1}^1 e^{-(1+x)^2} dx$  usando el programa:

$n$	$\int_{-1}^1 e^{-(1+x)^2} dx$
2	0.91948611664092
3	0.87886457087749
4	0.88222909593260
5	0.88207801766299
6	0.88208135535173
7	0.88208139755345
8	0.88208139041990
9	0.88208139077416
10	0.88208139076211
20	0.88208139076840

# Capítulo 4

## Fórmulas de cuadratura basadas en Interpolación Racional

Supongamos que necesitamos calcular la integral

$$\int_{-1}^1 w(x)f(x) dx$$

donde  $w(x)$  es una función de peso positiva e integrable sobre  $[-1, 1]$ ; entonces utilizaremos una fórmula de cuadratura interpolatorio para aproximar  $f$  usando interpolación. En este capítulo asumiremos que  $w(x) > 0$  casi en todas partes sobre  $[-1, 1]$  y usamos interpolación por medio de las funciones básicas

$$\frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_nx}, \dots, \quad (4.1)$$

donde  $t_1, t_2, t_3, \dots$  son parámetros pertenecientes al intervalo abierto  $(-1, 1)$ . Vamos a considerar dos aproximaciones para la elección de los nodos de interpolación (nodos de cuadratura). La primera consiste en escoger los  $n$  nodos como los ceros de la función ortogonal  $r_{n+1}$  obtenida por ortogonalización del sistema (4.1) usando el producto interno

$$(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)w(x) dx.$$

Nos referiremos a esto como cuadratura ortogonal. La segunda aproximación que investigamos es para escoger los nodos de tal manera que la fórmula de cuadratura

sea correcta para tantas funciones básicas como sean posibles. Esto proporciona una cuadratura con precisión máxima, y lo referimos como Cuadratura Gaussiana. Se sabe que ambas aproximaciones son las mismas cuando usamos interpolación por polinomios, pero estas elecciones resultan en fórmulas de cuadratura distintas cuando usamos interpolación con las funciones básicas (4.1).

## 4.1 Funciones ortogonales extendidas

Hemos demostrado (Teorema 2.2) que los ceros del polinomio ortogonal de grado  $n$  con respecto a la función de peso  $w(x)$  en  $[-1, 1]$  son todos reales, simples y están en el interior de  $[-1, 1]$  y, además ellos separan los ceros del polinomio ortogonal de grado  $n+1$ . Estas propiedades pueden ser generalizadas a otros sistemas ortogonales de funciones  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots\}$  donde la ortogonalidad es con respecto a la función de peso  $w(x)$  en  $[-1, 1]$ , teniendo en cuenta que ellos satisfacen la condición de Haar. La sucesión de funciones  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  linealmente independiente en  $[-1, 1]$  satisface la condición de Haar en  $[-1, 1]$  si, y solamente si para cualquier elección de  $n$  puntos  $x_i \in [-1, 1]$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) con  $x_i \neq x_j$  siempre que  $i \neq j$  se tiene que  $\det_{1 \leq i, j \leq n}(\phi_i(x_j)) \neq 0$ . Esta condición es equivalente a decir que cada combinación lineal no trivial  $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$  tiene a lo más  $n - 1$  ceros en  $[-1, 1]$ . Un sistema  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, n\}$  linealmente independiente en  $[-1, 1]$  es un sistema de Haar extendido en  $[-1, 1]$  si, y solamente si cada combinación lineal no trivial  $\phi = \sum_{i=1}^n a_i \phi_i$  tiene a lo más  $n - 1$  ceros en  $[-1, 1]$ , contando multiplicidades. Se demuestra que  $\phi_{n+1}$  tiene precisamente  $n$  ceros en  $(-1, 1)$ , la multiplicidad de cada cero es impar y los ceros de  $\phi_n$  y  $\phi_{n+1}$  están estrictamente entrelazados.

Supóngase que  $t_i \in (-1, 1)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) y que  $t_i \neq t_j$  siempre que  $i \neq j$ . Entonces el sistema  $\left\{ \frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_{n+1}x} \right\}$  es un sistema de Haar extendido en  $[-1, 1]$  ya que

$$\phi(x) = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \phi_i(x) = \frac{P_n(x)}{\prod_{i=1}^{n+1} (1 + t_i x)}$$

donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado a lo más  $n$ , y de aquí  $\phi$  tiene a lo más  $n$  ceros en  $[-1, 1]$ , contando multiplicidades. Si aplicamos el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a  $\left\{ \frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots \right\}$  entonces obtenemos una sucesión de funciones ortogonales en  $[-1, 1]$  con respecto a la función de peso  $w(x)$ . Denotemos estas funciones ortogonales por

$$r_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}; x) = \frac{1}{1+t_{n+1}x} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{1+t_i x}$$

y, como antes se ha mencionado, esta función racional tiene precisamente  $n$  ceros en el intervalo  $\langle -1, 1 \rangle$ .

## 4.2 Cuadratura Gaussiana

Supóngase que el sistema de funciones  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots\}$  es un sistema de Markov extendida en  $[-1, 1]$ , es decir  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, k\}$  es un sistema de Haar extendido en  $[-1, 1]$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Si consideramos una fórmula de cuadratura con  $n$  nodos la cual es de precisión máxima, entonces deseamos integrar las funciones  $\phi_i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) correctamente para  $m$  tan grande como sea posible. Si  $\phi_i(x) = x^{i-1}$ , entonces  $m$  resulta que es  $2n$ , y los nodos son los ceros del polinomio ortogonal de grado  $n$  para la función de peso  $w(x)$  (cuadratura de Gauss-Jacobi). Si  $\{\phi_i : i = 1, 2, \dots, 2n\}$  es un sistema de Haar en  $[-1, 1]$ , entonces existe un único conjunto de  $n$  nodos  $x_i \in \langle -1, 1 \rangle$  y  $n$  pesos  $\beta_i$  estrictamente positivos tal que para  $k = 1, 2, \dots, 2n$

$$\int_{-1}^1 \phi_k(x) w(x) dx = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi_k(x_i), \quad (4.2)$$

y esto da precisión máxima.

El sistema de funciones racionales (4.1) es un sistema de Markov extendida en  $[-1, 1]$ , de aquí las propiedades mencionadas antes son válidas. En particular se sigue que los nodos para las cuadraturas gaussianas están todos en  $\langle -1, 1 \rangle$  y los correspondientes pesos de cuadratura son todos estrictamente positivos.

### 4.3 Conexión con los polinomios ortogonales

En esta parte, haremos la simple observación de que los nodos y los pesos para ambas, cuadratura ortogonal y cuadratura gaussiana, basadas en las funciones racionales (4.1) están estrechamente relacionadas con los ceros y números de Christoffel para polinomios ortogonales en  $[-1, 1]$  con una función de peso que depende del número de nodos. Esta observación no es nueva, pero esta interacción hace posible poder usar los resultados de la teoría de polinomios ortogonales para obtener propiedades útiles de los nodos y pesos para cuadraturas basadas en interpolación racional.

**Teorema 4.1** *Sea  $\{\phi_k\}$  el conjunto de funciones básicas (4.1)*

(1) *Supóngase que todos los  $t_i$  son distintos, entonces los  $n$  nodos para cuadratura ortogonal son los ceros  $x_{j,n}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) del polinomio ortogonal  $P_n(x)$  con respecto a la función de peso*

$$w_n(x) = \frac{w(x)}{\pi_n(x)\pi_{n+1}(x)}, \quad -1 < x < 1, \quad (4.3)$$

donde

$$\pi_n(x) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i x). \quad (4.4)$$

Si  $t_1 = 0$  entonces (4.2) se cumple para  $k = 1, 2, \dots, n+1$  con  $x_j = x_{j,n}$  y

$$\beta_j(t_1, \dots, t_{n+1}) = \pi_{n+1}(x_{j,n})\pi_n(x_{j,n})\lambda_{j,n},$$

donde  $\lambda_{j,n}$  son los números de Christoffel correspondientes al polinomio ortogonal  $P_n(x)$  para la función de peso (4.3)

(2) *Supóngase que todos los  $t_i$  son distintos, entonces los nodos para cuadratura gaussiana son los ceros  $x_{j,n}$  ( $1 \leq j \leq n$ ) del polinomio ortogonal  $P_n(x)$  con respecto a la función de peso*

$$w_n(x) = \frac{w(x)}{\pi_{2n}(x)}, \quad -1 < x < 1, \quad (4.5)$$

y (4.2) se cumple para  $k = 1, 2, \dots, 2n$  con  $x_j = x_{j,n}$ , y

$$\beta_j(t_1, \dots, t_{2n}) = \pi_{2n}(x_{j,n})\lambda_{j,n},$$

donde  $\lambda_{j,n}$  son los números de Christoffel correspondientes al polinomio ortogonal  $P_n(x)$  para la función de peso (4.5).

**Prueba.** (1) Las funciones ortogonales obtenidas ortogonalizando el sistema de funciones básicas (4.1) en  $[-1, 1]$  con función de peso  $w(x)$  son de la forma

$$r_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}; x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{a_k}{1 + t_k x} = \frac{P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \quad (a_{n+1} = 1),$$

donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$ . La ortogonalidad implica (por Gram-Schmidt y ortogonalidad) que

$$\left( r_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}; x), \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{1 + t_j(x)} \right) = \int_{-1}^1 \frac{P_n(x)}{\pi_{n+1}(x)} \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{1 + t_j(x)} w(x) dx = 0$$

para cada elección de los parámetros  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Esto es lo mismo que decir

$$\int_{-1}^1 P_n(x) q_{n-1}(x) \frac{w(x)}{\pi_n(x) \pi_{n+1}(x)} dx = 0$$

para cualquier polinomio  $q_{n-1}(x)$  de grado a lo más  $n - 1$ . Luego  $P_n \perp \Pi_{n-1}$ , ( $\Pi_{n-1}$  es el subespacio de polinomios de grado  $\leq n - 1$ ). Esto muestra que  $P_n(x)$  es el polinomio ortogonal de grado  $n$  para la función de peso (4.3). La cuadratura de Gauss-Jacobi para la función de peso (4.3) da

$$\int_{-1}^1 \frac{q_{2n-1}(x) w(x)}{\pi_n(x) \pi_{n+1}(x)} dx = \sum_{j=1}^n \lambda_{j,n} q_{2n-1}(x_{j,n}), \quad (4.6)$$

donde  $x_{j,n}$  son los ceros de  $P_n(x)$  y  $q_{2n-1}(x)$  es el polinomio de grado a lo más  $2n - 1$ . Si  $t_1 = 0$  entonces  $\pi_n(x)$  es un polinomio de grado  $n - 1$ . En este caso elegimos

$$q_{2n-1}(x) = \frac{\pi_n(x) \pi_{n+1}(x)}{(1 + t_k x)}$$

para obtener

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{1 + t_k x} dx = \sum_{j=1}^n \frac{\lambda_{j,n} \pi_n(x_{j,n}) \pi_{n+1}(x_{j,n})}{1 + t_k x_{j,n}}, \quad k = 1, 2, \dots, n + 1,$$

del cual se sigue la afirmación dada.

(2) Sean  $x_i \equiv x_i(t_1, \dots, t_{2n})$  y  $\beta_i \equiv \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

A fin de obtener los nodos  $x_i$  y los pesos  $\beta_i$ , necesitamos resolver el sistema de ecuaciones

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{1+t_j x} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{1+t_j x_i}, \quad j = 1, 2, \dots, 2n.$$

Esto es equivalente a hallar  $x_i$  y  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) tal que

$$\int_{-1}^1 \frac{q_{2n-1}(x)}{\pi_{2n}(x)} w(x) dx = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{q_{2n-1}(x_i)}{\pi_{2n}(x_i)} \quad (4.7)$$

para cada polinomio  $q_{2n-1}$  de grado a lo más  $2n - 1$ . De la teoría de polinomios ortogonales (cuadratura de Gauss-Jacobi) sabemos que los nodos  $x_i$  son los ceros del polinomio ortogonal de grado  $n$  para la función de peso (4.5) y entonces

$$\int_{-1}^1 \frac{q_{2n-1}(x)}{\pi_{2n}(x)} w(x) dx = \sum_{i=1}^n \lambda_{i,n} q_{2n-1}(x_i).$$

Escogiendo

$$q_{2n-1}(x) = \frac{\pi_{2n}(x)}{(1+t_k x)}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n$$

obtenemos la afirmación propuesta. ■

En el caso que la función de peso  $w(x)$  es cualquiera de las

$$w(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \sqrt{1-x^2}, \\ \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}, \end{cases}$$

los polinomios ortogonales para las funciones de peso modificadas  $w_n(x)$  dadas por (4.3) ó (4.5) pueden ser halladas explícitamente y son conocidos como los polinomios de Bernstein-Szegő [14].

Los nodos para ambos, cuadratura ortogonal y cuadratura gaussiana, son iguales a los ceros del polinomio ortogonal  $P_n(x)$  respecto a la función de peso dependiente de  $n$ . De este modo, la distribución de los nodos para cuadratura ortogonal y cuadratura gaussiana son dados por la distribución de los ceros de polinomios ortogonales con una función de peso dependiente del grado  $n$ .

## 4.4 Propiedades de los nodos

Las funciones ortogonales  $r_n(t_1, \dots, t_n; x)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  son un sistema de Haar extendido en  $[-1, 1]$ , y por lo tanto las propiedades de los ceros dadas por Pinkus-Ziegler en [9] son válidas. Para este sistema de Haar propiedades útiles adicionales pueden ser probadas.

**Teorema 4.2** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

- (1) *Los ceros de  $r_n(t_1, \dots, t_n; x)$  y de  $r_{n+1}(t_1, \dots, t_n, t_{n+1}; x)$  en  $[-1, 1]$  están estrictamente entrelazados.*
- (2) *Los ceros de  $r_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t_n; x)$  y  $r_n(t_1, \dots, t_{n-1}, t_{n+1}; x)$  en  $[-1, 1]$  están estrictamente entrelazados.*
- (3) *Los ceros de  $r_n(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, t_i; x)$  ( $1 \leq i \leq n$ ) y  $r_n(t_1, \dots, t_n; x)$  están estrictamente entrelazados.*

**Prueba.** La propiedad (1) y (2) están probadas en [9]. Para la propiedad (3) notamos que

$$r_n(t_1, \dots, t_n; x) = r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n; x) - k_1 r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x)$$

y

$$r_n(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, t_i; x) = r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x) - k_2 r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_n; x),$$

donde

$$k_1 = \frac{\left( r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n; x), \frac{1}{1+t_i x} \right)}{\|r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x)\|_2^2}$$

y

$$k_2 = \frac{\left( r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x), \frac{1}{1+t_n x} \right)}{\|r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n; x)\|_2^2}$$

Sean  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ) los ceros de  $r_n(t_1, \dots, t_n; x)$ , entonces

$$r_n(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n, t_i; x_j)$$



$$= r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x_j)(1 - k_1 k_2). \quad (4.8)$$

Si calculamos la  $L_2$ -norma de  $r_n(t_1, \dots, t_n; x)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|r_n(t_1, \dots, t_n; x)\|_2^2 &= \left( r_n(t_1, \dots, t_n; x), \frac{1}{1 + t_n x} \right) \\ &= \left( r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n; x), \frac{1}{1 + t_n x} \right) \\ &\quad - k_1 \left( r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_{n-1}, t_i; x), \frac{1}{1 + t_n x} \right) \\ &= \|r_{n-1}(t_1, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n; x)\|_2^2 (1 - k_1 k_2) \end{aligned}$$

de manera que  $1 - k_1 k_2 > 0$ . Luego la propiedad (3) sigue inmediatamente de (4.8) y de la propiedad (1). ■

Tenemos resultados similares para los nodos correspondientes a la cuadratura gaussiana. Ahora el orden de los parámetros  $t_1, \dots, t_{2n}$  es irrelevante.

**Teorema 4.3** Sean  $x_i(t_1, \dots, t_{2n})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) los nodos de cuadratura para precisión máxima

(1) Los  $n$  nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n})$  y los  $n + 1$  nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n+1}, t_{2n+2})$  están estrictamente entrelazados.

(2) Los  $n$  nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n})$  y los  $n$  nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n+1})$  están estrictamente entrelazados.

**Prueba.** (1) Sean  $x_0(t_1, \dots, t_{2n}) = -1$  y  $x_{n+1}(t_1, \dots, t_{2n}) = 1$ .

Asumamos que los nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n})$  y  $x_i(t_1, \dots, t_{2n+2})$  no están estrictamente entrelazados, entonces se presentan los siguientes casos:

(a)  $x_i(t_1, \dots, t_{2n}) = x_j(t_1, \dots, t_{2n+2})$  para algún valor  $i$  y  $j$  con  $1 < i < n$  y  $1 \leq j \leq n + 1$  ó,

(b)  $x_j(t_1, \dots, t_{2n+2}), x_{j+1}(t_1, \dots, t_{2n+2}) \in (x_i(t_1, \dots, t_{2n}), x_{i+1}(t_1, \dots, t_{2n}))$  para algún  $i$  y  $j$  con  $0 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ .

Mostraremos que ambos casos (a) y (b) son imposibles.

(a) Supóngase que existen  $l$  nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n+2}), i \in \{i_1, i_2, \dots, i_l\}$ , tal que

$$x_i(t_1, \dots, t_{2n+2}) \in \{x_j(t_1, \dots, t_{2n}) : 1 \leq j \leq n\},$$

entonces obviamente  $l \leq n$ , y de este modo allí existe un  $k$  tal que

$$x_k(t_1, \dots, t_{2n+2}) \notin \{x_j(t_1, \dots, t_{2n}) : 1 \leq j \leq n\}.$$

Sea  $\phi$  la combinación lineal de las  $2n$  primeras funciones básicas dadas en (4.1) tal que  $\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n})) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n+2})) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, 2n+1$  pero  $i \neq k$ . Luego ya tenemos  $2n - l$  ecuaciones para determinar  $\phi$ . Además adicionamos las ecuaciones  $\phi(z_i)$  para  $i = 1, \dots, l - 1$ , donde los  $z_i$  difieren de los  $2n - l$  puntos que hemos usado. Para tal  $\phi$  tenemos

$$\int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n})) = 0.$$

Pero también tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx &= \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(t_1, \dots, t_{2n+2})\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n+2})) \\ &= \beta_k(t_1, \dots, t_{2n+2})\phi(x_k(t_1, \dots, t_{2n+2})) \neq 0, \end{aligned}$$

ya que  $\phi$  puede tener a lo más  $2n - 1$  ceros y  $\beta_k > 0$ . Esto es una contradicción.

(b) sea  $\phi$  la combinación lineal de las primeras  $2n$  funciones básicas dadas en (4.1) tal que  $\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n})) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ , y  $\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n+2})) = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n+1$  pero con  $i \neq j$  e  $i \neq j+1$ . Esto da  $2n - 1$  condiciones para determinar  $\phi$ , y para tal  $\phi$  tenemos

$$\int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n})) = 0.$$

De otro lado también tenemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx &= \sum_{i=1}^{n+1} \beta_i(t_1, \dots, t_{2n+2})\phi(x_i(t_1, \dots, t_{2n+2})) \\ &= \beta_j(t_1, \dots, t_{2n+2})\phi(x_j(t_1, \dots, t_{2n+2})) \\ &\quad + \beta_{j+1}(t_1, \dots, t_{2n+2})\phi(x_{j+1}(t_1, \dots, t_{2n+2})). \end{aligned}$$

Por suposición tenemos que  $\text{sign } \phi(x_j(t_1, \dots, t_{2n+2})) = \text{sign } \phi(x_{j+1}(t_1, \dots, t_{2n+2}))$ , y desde que los pesos  $\beta_j$  y  $\beta_{j+1}$  son positivos, tenemos una contradicción.

(2) Supóngase que  $x_i \equiv x_i(t_1, \dots, t_{2n})$  y  $y_i \equiv x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n+1})$  no están estrictamente entrelazados, entonces se cumple uno de los siguientes casos

- (a)  $x_i = y_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ , ó
- (b)  $x_i = y_j$  para algún  $i$  y  $j$  con  $1 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n$ , ó
- (c)  $y_j, y_{j+1} \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle$  para algún  $i$  y  $j$  con  $0 \leq i \leq n$  y  $1 \leq j \leq n - 1$ .

Veamos cada uno de estos casos

(a) El sistema de funciones básicas (4.1) es un sistema de Haar en  $[-1, 1]$  y de aquí podemos hallar una función  $f_k$  en el espacio lineal generado por las primeras  $2n - 1$  funciones básicas en (4.1) tal que

$$f_k(x_i) = \delta_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f_k(\xi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n - 1,$$

donde  $\xi_i \in (-1, 1) \setminus \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  son  $n - 1$  puntos arbitrarios. Entonces por un lado

$$\int_{-1}^1 f_k(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})f_k(x_i) = \beta_k(t_1, \dots, t_{2n}),$$

y por otro lado (ya que  $x_i = y_i$  para  $1 \leq i \leq n$ )

$$\int_{-1}^1 f_k(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n+1})f_k(x_i) = \beta_k(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n+1}).$$

De aquí  $\beta_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t_{2n+1}) = \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Por lo tanto la fórmula de cuadratura dará el resultado exacto para cada función  $\frac{1}{1+t_i x}$  para  $i = 1, 2, \dots, 2n + 1$ . Sea  $\phi$  la combinación lineal de estas  $2n + 1$  funciones básicas tal que  $\phi(x_i) = 0$  y  $\phi'(x_i) = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); entonces  $\phi$  no cambia de signo en  $[-1, 1]$  ya que  $\phi(x) = \pm P_n^2(x)/\pi_{2n+1}(x)$  donde  $P_n(x)$  es un polinomio de grado  $n$  y  $\pi_{2n+1}$  es dado en (4.4). Esto implica que

$$\int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx \neq 0.$$

Esto contradice

$$\int_{-1}^1 \phi(x)w(x)dx = \sum_{i=1}^n \beta_i \phi(x_i) = 0.$$

Para los casos (b) y (c) podemos obtener una contradicción en una forma similar a los casos (a) y (b) de (1) y así el teorema queda demostrado. ■

El siguiente resultado debido a A.A. Markov (ver por ejemplo [14], teorema 6.12.1, pág. 114) permite dar más información acerca del comportamiento de los nodos  $x_i(t_1, \dots, t_n, t)$  para la cuadratura ortogonal y  $x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  para la cuadratura gaussiana, como funciones de  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ :

**Teorema 4.4 (Markov)** Sea  $w(x, t)$  una función de peso sobre  $[a, b]$  dependiente de un parámetro  $t$  tal que  $w(x, t)$  es positiva y continua para  $a < x < b$  y  $c < t < d$ . Supóngase que  $w_t(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} w(x, t)$  existe y es continua para  $a < x < b$  y  $c < t < d$ , y que los momentos

$$\int_a^b x^k w_t(x, t) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots, 2n - 1,$$

convergen uniformemente en cada subintervalo cerrado  $c' \leq t \leq d'$  de  $\langle c, d \rangle$ . Si los ceros del polinomio ortogonal  $P_n(x, t)$  con función de peso  $w(x, t)$  se denotan por  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) y si  $w_t(x, t)/w(x, t)$  es una función estrictamente creciente (decreciente) de  $x \in \langle a, b \rangle$ , luego  $x_i(t)$  será una función continuamente diferenciable y estrictamente creciente (decreciente) de  $t \in \langle c, d \rangle$  para cualquier  $i$  fijo.

**Teorema 4.5** Se cumplen las siguientes propiedades:

(1) Si  $x_i(t_1, \dots, t_n, t)$  es el  $i$ -ésimo nodo para cuadratura ortogonal con  $n$  nodos, entonces  $x_i(t_1, \dots, t_n, t)$  es una función continuamente diferenciable y estrictamente decreciente de  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

(2) Cualquier nodo  $x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  para cuadratura gaussiana con  $n$  nodos es una función estrictamente decreciente de  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ .

**Prueba.** Veamos:

(1) Por el teorema 4.1 (1) sabemos que  $x_i(t_1, \dots, t_n, t)$  es el  $i$ -ésimo cero del polinomio ortogonal  $P_n(x, t)$  de grado  $n$  para la función de peso

$$w(x, t) = \frac{w(x)}{\pi_n^2(x)(1+tx)}.$$

Un cálculo sencillo da

$$\frac{w_t(x, t)}{w(x, t)} = -\frac{x}{1+tx}$$

y esto es una función decreciente de  $x \in (-1, 1)$ . El resultado se sigue por el teorema de Markov. (2) En forma parecida, por el teorema 4.1 (2), para los nodos  $x_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  de cuadratura gaussiana podemos usar el teorema de Markov para la función de peso

$$w(x, t) = \frac{w(x)}{\pi_{2n-1}(x)(1+tx)},$$

para así obtener el resultado deseado. ■

Podemos también dar algunos resultados de monotonicidad para el primer y último coeficiente de cuadratura.

Sean  $\beta_i(t_1, \dots, t_n, t)$  los coeficientes de cuadratura correspondientes a los nodos  $x_i(t_1, \dots, t_n, t)$  para cuadratura ortogonal con  $n$  nodos, y sea  $t_1 = 0$ ; entonces el primer coeficiente de cuadratura  $\beta_1(t_1, \dots, t_n, t)$  es continuamente diferenciable estrictamente decreciente de  $t \in (-1, 1)$ , y el último coeficiente de cuadratura  $\beta_n(t_1, \dots, t_n, t)$  es una función continuamente diferenciable estrictamente creciente de  $t \in (-1, 1)$ . En una forma similar, si  $\beta_i(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  son los coeficientes de cuadratura para cuadratura gaussiana con  $n$  nodos (con  $t_1 = 0$ ); entonces  $\beta_1(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  es continuamente diferenciable estrictamente decreciente de  $t \in (-1, 1)$  y  $\beta_n(t_1, \dots, t_{2n-1}, t)$  es una función continuamente diferenciable estrictamente creciente de  $t \in (-1, 1)$ . Las pruebas de estos resultados son algo técnicos y ya que solamente los pesos de cuadratura extremos son considerados decidimos no incluirlos aquí.

## 4.5 Resultados de convergencia

Si la integral

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx$$

es aproximada por la cuadratura ortogonal suma con  $n$  nodos,

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{n+1})f(x_i(t_1, \dots, t_{n+1})),$$

denotamos el error por

$$E_n^o f = \int_{-1}^1 f(x)w(x)dx - \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{n+1})f(x_i(t_1, \dots, t_{n+1})).$$

El error de la fórmula de cuadratura gaussiana es denotada por

$$E_n^g f = \int_{-1}^1 f(x)w(x)dx - \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})f(x_i(t_1, \dots, t_{2n})).$$

Es claro que estas fórmulas de cuadratura son solamente apropiadas para una clase suficientemente grande de funciones  $f$  en las cuales se tiene  $E_n^o f \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  y  $E_n^g f \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Se sabe que la sucesión de funciones básicas (4.1) es denso en  $C[-1, 1]$  con respecto a la norma uniforme si, y sólo si

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |c_k|) = \infty, \quad (4.9)$$

donde

$$c_k = \frac{1}{t_k} - \sqrt{\frac{1}{t_k^2} - 1}$$

Para su demostración vea [1] (pág. 254, parágrafo 7).

**Teorema 4.6** Sean  $t_1, t_2, \dots$  parámetros distintos en  $(-1, 1)$  y sea  $\phi_{n+1}(x)$  la mejor aproximación de  $f \in C[-1, 1]$  utilizando combinaciones lineales de las funciones racionales

$$\frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_{n+1}x}.$$

(1) Si  $t_1 = 0$ , entonces para cuadratura ortogonal, existe una constante positiva  $M$  no dependiente de  $n$  tal que

$$|E_n^o f| \leq M \|f - \phi_{n+1}\|_{\infty}.$$

Como una consecuencia,  $E_n^o f \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada función acotada Riemann-integrable sobre  $[-1, 1]$  siempre que (4.9) se cumpla.

(2) Para cuadratura gaussiana tenemos similarmente

$$|E_n^g f| \leq M \|f - \phi_{2n}\|_\infty.$$

Como una consecuencia,  $E_n^g f \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$  para cada función acotada Riemann-integrable sobre  $[-1, 1]$  siempre que (4.9) se cumpla.

**Prueba.** El resultado para cuadratura ortogonal puede ser probado como un caso especial de interpolación polinomial vea [4] (pp. 126-128). Para cuadratura gaussiana solamente necesitamos mostrar que la suma

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n})$$

es acotada.

Si  $t_1 = 0$ , tenemos

$$\sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n}) = \int_{-1}^1 w(x) dx.$$

Si  $t_1 \neq 0$ , entonces

$$\int_{-1}^1 \frac{w(x)}{1 + t_1 x} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{1 + t_1 x_i}.$$

La función

$$\frac{1}{1 + t_1 x}$$

tiene el valor mínimo  $1/(1 + |t_1|)$  sobre  $[-1, 1]$ , de aquí

$$\frac{1}{1 + |t_1|} \sum_{i=1}^n \beta_i(t_1, \dots, t_{2n}) < \int_{-1}^1 \frac{w(x)}{1 + t_1 x} dx,$$

lo cual muestra la acotación deseada. ■

Sea  $f \in C[-1, 1]$  y denote por  $L_n f$  el interpolante racional de  $f$  en los puntos  $x_i(t_1, \dots, t_{n+1}) (i = 1, 2, \dots, n)$  usando las funciones básicas  $\frac{1}{1+t_1x}, \frac{1}{1+t_2x}, \dots, \frac{1}{1+t_nx}$ .

El teorema previo implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 (L_n f)(x) w(x) dx = \int_{-1}^1 f(x) w(x) dx,$$

cuando se cumple (4.9). La razón de convergencia depende de que tan bien  $f$  pueda ser aproximada en la norma uniforme por las funciones básicas (4.1), y esto depende de la elección de los parámetros  $t_i$ . Ahora mostramos que la interpolación racional converge en  $L_2(w)$  y así también en  $L_1(w)$ , de ese modo extendiendo el famoso resultado de Erdős-Turán para interpolación polinomial [3].

**Teorema 4.7** *Supóngase que  $t_1 = 0$  y  $t_2, t_3, \dots$  son parámetros distintos en  $(-1, 1)$  tal que (4.9) se cumple. Si*

$$L_n f(x) = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1 + t_i x}$$

*interpola  $f$  en los ceros  $x_i(t_1, \dots, t_{n+1})$  de  $r_{n+1}(t_1, \dots, t_{n+1}; x)$ , entonces se tiene que  $\|L_n f - f\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ .*

**Prueba.** Sea  $\phi_n(x)$  la mejor aproximación uniforme de  $f$  usando las funciones básicas  $\left\{ \frac{1}{1+t_1 x}, \frac{1}{1+t_2 x}, \dots, \frac{1}{1+t_n x} \right\}$ ; entonces

$$\|L_n f - f\|_2 \leq \|f - \phi_n\|_2 + \|L_n f - \phi_n\|_2.$$

Claramente,  $\|f - \phi_n\|_2 \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . Ahora  $[(L_n f)(x) - \phi_n(x)]^2$  es una combinación lineal de las funciones  $x^j / [\pi_n^2(x)]$  ( $j = 0, 1, \dots, 2n - 2$ ), y por (4.6) la fórmula de cuadratura es por lo tanto exacta para  $[(L_n f)(x) - \phi_n(x)]^2$ . Esto da

$$\begin{aligned} \|L_n f - \phi_n\|_2^2 &= \sum_{i=1}^n \beta_i [(L_n f)(x_i) - \phi_n(x_i)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \beta_i [f(x_i) - \phi_n(x_i)]^2 \\ &\leq \|f - \phi_n\|_\infty^2 \int_{-1}^1 w(x) dx. \end{aligned}$$

El resultado ahora sigue porque  $\|f - \phi_n\|_\infty \rightarrow 0$  cuando  $n \rightarrow \infty$ . ■



## 4.6 Algoritmos

**Algoritmo para hallar los ceros y pesos de la Cuadratura Gaussiana:**

*Datos de entrada:* El número de nodos  $n$ .

Paso 1: Para  $i = 1, 2, \dots, 2n$  hacer  $t_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{i}}$ .

Paso 2: Hallar  $P_n(x)$  usando el teorema 3.6 y la función de peso

$$w_n(x) = \frac{w(x)}{\pi_{2n}(x)}, \text{ donde } w(x) = 1, \pi_{2n}(x) = \prod_{i=1}^{2n} (1 + t_i x).$$

Paso 3: Hallar los ceros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $P_n(x)$ .

Paso 4: Resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 w_n(x) dx \\ \int_{-1}^1 x w_n(x) dx \\ \int_{-1}^1 x^2 w_n(x) dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 x^{n-1} w_n(x) dx \end{pmatrix}$$

Paso 5: Para  $i = 1, 2, \dots, n$  hacer

$$\beta_i = \pi_{2n}(x_i) \lambda_i$$

*Datos de salida:* Los ceros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $P_n(x)$  y los pesos  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  de la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x) w(x) dx \approx \sum_{i=1}^n \beta_i f(x_i).$$

**Algoritmo para hallar los ceros y pesos de la Cuadratura Ortogonal:**

*Datos de entrada:* El número de nodos  $n$ .

Paso 1: Para  $i = 1, 2, \dots, n+1$  hacer  $t_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{i}}$ .

Paso 2: Hallar  $P_n(x)$  usando el teorema 3.6 y la función de peso

$$w_n(x) = \frac{w(x)}{\pi_n(x)\pi_{n+1}(x)}, \text{ donde } w(x) = 1, \pi_n(x) \text{ es}$$

$$\pi_n(x) = \prod_{i=1}^n (1 + t_i x), \pi_{n+1}(x) = \prod_{i=1}^{n+1} (1 + t_i x)$$

Paso 3: Hallar los ceros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $P_n(x)$ .

Paso 4: Resolver el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 w_n(x) dx \\ \int_{-1}^1 x w_n(x) dx \\ \int_{-1}^1 x^2 w_n(x) dx \\ \vdots \\ \int_{-1}^1 x^{n-1} w_n(x) dx \end{pmatrix}$$

Paso 5: Para  $i = 1, 2, \dots, n$  hacer

$$\beta_i = \pi_{n+1}(x_i)\pi_n(x_i)\lambda_i$$

*Datos de salida:* Los ceros  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de  $P_n(x)$  y los pesos  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  de la fórmula

$$\int_{-1}^1 f(x)w(x)dx \approx \sum_{i=1}^n \beta_i f(x_i).$$

Los programas respectivos (Programa 3 y Programa 4) implementados en Matlab se encuentran en el Apéndice A1.

## 4.7 Ventajas del Nuevo Método

Del Teorema 4.6 se sigue que las reglas de cuadratura racional serán eficientes siempre que la función a ser integrada pueda ser aproximada usando las funciones básicas (4.1). Gautschi [6] ha mostrado que las funciones las cuales tienen un número infinito de polos pero fuera del intervalo de integración, pueden ser integradas más eficientemente por las cuadraturas gaussianas y ortogonal dadas en este capítulo escogiendo los parámetros  $t_i$  en una forma adecuada.

Para funciones continuas  $f$  en  $[-1, 1]$  con más masa concentrada cerca de los extremos del intervalo  $[-1, 1]$  (en este caso  $\int_{-1}^1 f(x)dx$  representa la masa) uno debe escoger los parámetros  $t_i$  de tal manera que más nodos de cuadratura se encuentren situadas cerca de  $\pm 1$ . Si tomamos los parámetros

$$t_i = 1 - \frac{1}{\sqrt{i}}, \quad i \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

entonces existirán más nodos de cuadratura cerca de  $-1$  que cerca de  $+1$ . Para el cálculo de los nodos y pesos para cuadratura gaussiana racional (RCG) y cuadratura gaussiana ortogonal (RCO) el programa usa los ceros y números de Christoffel para el polinomio ortogonal de grado  $n$  con el peso correspondiente (4.3) para cuadratura ortogonal y (4.5) para cuadratura gaussiana. Estos polinomios ortogonales han sido calculados usando la relación de recurrencia de tres términos.

Considere la integral

$$I = \int_{-1}^{+1} w e^{-w(x+1)} dx, \quad w > 0$$

esta función tiene más masa cerca de  $-1$  que cerca de  $+1$ , especialmente para grandes valores de  $w$ . Una integración directa produce

$$I = 1 - e^{-2w}$$

En la siguiente tabla damos los errores relativos absolutos para la suma de la cuadratura gaussiana y la suma de la cuadratura ortogonal correspondientes a las funciones racionales con parámetros dados por (4.10) junto con la suma de la cuadratura de Gauss-Legendre (G-L Clásico) con  $n$  nodos. Las reglas de cuadratura racional se comportan en una forma similar y dan mejores resultados que la regla de cuadratura de Gauss-Legendre clásico.

$\omega$	$n$	$RCG(n)$	$RCO(n)$	$GL(Clásico)(n)$
10	2	0.513	0.599	0.854
	4	0.020	0.082	0.123
	6	$0.599 \times 10^{-5}$	$0.181 \times 10^{-5}$	$0.376 \times 10^{-2}$
	10	$0.493 \times 10^{-9}$	$0.133 \times 10^{-9}$	$0.165 \times 10^{-6}$
25	2	0.978	0.988	0.999
	6	$0.118 \times 10^{-4}$	$0.255 \times 10^{-4}$	0.206
	10	$0.397 \times 10^{-8}$	$0.467 \times 10^{-8}$	$0.201 \times 10^{-2}$
	14	$0.206 \times 10^{-12}$	$0.122 \times 10^{-12}$	$0.229 \times 10^{-5}$

## 4.8 Ejemplo numérico: El valor de $\pi$

La fórmula de cuadratura basada en interpolación racional que hemos establecido la vamos a aplicar para evaluar la integral definida

$$\int_{-1}^1 \frac{8}{4 + (x + 1)^2} dx \quad (4.11)$$

El resultado de evaluar esta integral es  $\pi$ , el número más importante de las matemáticas. Este número fue analizada por el hombre hace unos 6,000 años. En Mesopotamia, región situada entre los rios Tigris y Eufrates, floreció la civilización Caldea-Asiria cuya antigüedad se remonta a unos 57 siglos aproximadamente. En la bella ciudad de Babilonia, capital de Caldea, se ubicaban los "Jardines Colgantes" una de las Siete Maravillas del Mundo Antiguo. Los babilonios fueron hace cerca de 6000 años los inventores de la rueda. Tal vez de ahí provino su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia y esto los condujo a investigar por el valor de  $\pi$ . El año 1936 se desenterró en Susa, trescientos kilómetros al este de Babilonia, unas tablillas que en una lista y en notación sexagesimal se encuentra un valor para  $\pi$  cuyo resultado es  $25/8=3.125$ . Este valor fue calculado utilizando polígonos regulares de 5, 6 y 7 lados. Es sorprendente que una de las primeras civilizaciones humanas haya alcanzado un alto grado de desarrollo matemático. Se dice también que los babilonios adelantaron a los egipcios en álgebra y conocían la relación entre los lados de un triángulo rectángulo 1500 años antes que naciera Pitágoras. Luego, el número  $\pi$  fue profundamente estudiado por Arquímedes, el más genial de los geómetras griegos. Utilizando polígonos regulares de 96 lados, Arquímedes logró la siguiente estimación para  $\pi$  :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{10}{70}$$

En 1579, Vieta dá la primera definición analítica de  $\pi$  logrando un gran avance

en su aproximación al expresarlo mediante la fórmula

$$\pi = 2 \left( \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} \dots}} \right),$$

lo cual permitió para la época un cálculo de  $\pi$  con una aproximación de 10 dígitos; mientras que en 1609, el alemán Ludolf von Ceulen calculó  $\pi$  con una aproximación de 35 cifras.

El descubrimiento del Cálculo en 1665 permitió nuevos progresos en el cálculo de  $\pi$ . Se pudo expresar  $\pi$  como series y productos, entre los que se cuentan:

El producto de Wallis

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdots,$$

la serie de Leibnitz

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

y la fórmula de Euler

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

En 1761, Lambert (alemán, 1728-1777) demuestra que  $\pi$  es irracional.

En 1882, Lindemann (alemán, 1852-1936) demuestra que  $\pi$  es trascendente y en consecuencia el problema de la cuadratura del círculo es imposible.

Con fórmulas similares a las dadas anteriormente y el uso de las computadoras fue posible calcular un número anteriormente inimaginable de cifras de  $\pi$ . El record lo ostenta el japonés Yasumasa Kanada de la Universidad de Tokio que en el año 2002 obtuvo 1.24 billones de decimales de  $\pi$ . Sus primeros 100,265 cifras decimales se obtuvieron en 1961 en una IBM 7090. William Shanks (inglés, 1821-1882) pasará a la historia como el más perseverante calculador de cifras de  $\pi$ . Pasó 20 años calculando sus primeros 707 decimales. Pero en 1945 la computadora ENIAC descubrió que había cometido un error en el dígito 528 y ...en todos los siguientes. En 1949 la

ENIAC invirtió 70 horas de procesamiento para calcular las primeras 2,000 cifras de  $\pi$ . Según el astrónomo Simón Newcomb (canadiense, 1835-1909) una aproximación de  $\pi$  con 10 decimales permite calcular el radio de la tierra con una aproximación de una pulgada. Aplicando nuestro programa a la integral dada en (4.10) obtenemos:

$n$	C. Gaussiana	C. Ortogonal
2	3.1322958199	3.1312136682
3	3.1402780915	3.1413770441
4	3.1415876546	3.1416511897
5	3.1416122872	3.1415962341
6	3.1415960882	3.1415923074
7	3.1415928698	3.1415925781
8	3.1415926042	3.1415926499
9	3.1415926293	3.1415926544
10	3.1415912622	3.1415926528

El valor de  $\pi$  con una aproximación de 10 cifras es 3.1415926529.

# Capítulo 5

## Aplicación en algunos problemas de Ingeniería

La integración numérica o también llamada cuadratura mecánica es una herramienta esencial que se usa en la ciencia y en la ingeniería para obtener valores aproximados de integrales definidas que no pueden calcularse analíticamente. Como ejemplo de estos entre otros, tenemos:

(a) La integral elíptica incompleta de primera especie, la cual se define por

$$F(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad 0 < k < 1$$

siendo  $\phi$  la amplitud de  $F(k, \phi)$ , escrito  $\phi = \operatorname{am} F(k, \phi)$  y  $k$  el módulo, escrito  $k = \operatorname{mod} F(k, \phi)$ . La integral se llama también forma de Legendre para la integral elíptica de primera especie.

(b) La integral binómica, la que se define mediante la expresión

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx$$

donde  $m, n$  y  $p$  son números racionales y las constantes  $a, b$  son números reales no nulos. Integrales indefinidas de este tipo sólo pueden ser expresadas en forma de combinación finita de funciones elementales solamente si se cumple uno de los siguientes tres casos:

- (i)  $p \in \mathbb{Z}$ ,
- (ii)  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$
- (iii)  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$ .

(c) Existen integrales indefinidas que, en aspecto son tan sencillas como por ejemplo

$$\int \sqrt{x} \operatorname{sen}x \, dx,$$

pero sin embargo no se pueden calcular; es decir, no hay ninguna función elemental cuya derivada sea  $\sqrt{x} \operatorname{sen}x$ .

Entonces, vemos que existen muchas integrales las cuales no se pueden calcular analíticamente. Veamos tres integrales a las que se llegan al plantear problemas concretos: El péndulo simple, la longitud de arco de una curva plana, específicamente de una hipérbola y finalmente la capacidad calórica de un sólido.

## 5.1 El péndulo simple

Determinemos el periodo  $T$  de un péndulo simple de longitud  $L$ .

Un péndulo simple consiste en una masa  $m$  suspendida de un hilo rígido  $OP$  de masa despreciable y de longitud  $L$ . La ecuación diferencial del movimiento de la masa es (Segunda Ley de Newton)

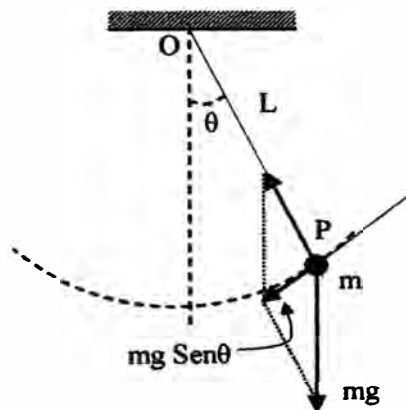


Figura 7



$$\sum F_{\text{tan}} = ma_{\text{tan}}$$

$$mL \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

y de aquí

$$\frac{L}{g} \ddot{\theta} + \sin \theta = 0, \quad \theta = \theta(t).$$

Aplicando el método de reducción de orden:

$$\dot{\theta} = p \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{dp}{dt} = \frac{dp}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = p \frac{dp}{d\theta}$$

así que

$$p \frac{dp}{d\theta} + \frac{g}{L} \sin \theta = 0$$

implica

$$p dp + \frac{g}{L} \sin \theta d\theta = 0,$$

integrando,

$$\frac{p^2}{2} - \frac{g}{L} \cos \theta = c_1.$$

Si el péndulo forma un ángulo  $\theta = \theta_0 > 0$  en el instante  $t = 0$  y se suelta, esto es,

$$p = \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad \text{si } \theta = \theta_0$$

$$0 - \frac{g}{L} \cos \theta_0 = c_1.$$

Así,

$$\frac{p^2}{2} = \frac{g}{L} \cos \theta - \frac{g}{L} \cos \theta_0$$

y de allí

$$p^2 = 2 \frac{g}{L} [\cos \theta - \cos \theta_0]$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2g}{L}} \sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}.$$

Si el péndulo va de  $\theta = \theta_0$  a  $\theta = 0$ , (lo que corresponde a un cuarto de periodo, o  $\frac{T}{4}$ ),  $\frac{d\theta}{dt}$  es negativa, por lo que entonces se elige el signo menos. Luego

$$\frac{T}{4} = -\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_{\theta_0}^0 \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta - \cos \theta_0}}.$$

Así que,

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\theta_0}}$$

lo que es lo mismo

$$\begin{aligned} T &= 4\sqrt{\frac{L}{2g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2(\theta/2) - (1 - 2\sin^2(\theta_0/2))}} \\ &= 2\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\theta_0/2) - \sin^2(\theta/2)}} \end{aligned}$$

Haciendo  $\sin(\frac{\theta_0}{2}) = \sin(\frac{\theta_0}{2}) \sin u$ , esta integral se convierte en

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad k = \sin\left(\frac{\theta_0}{2}\right) \quad (5.1)$$

es una integral elíptica. Este tipo de integrales, como hemos dicho antes no se pueden calcular analíticamente.

La integral en (5.1) es equivalente a otra en donde los límites de integración son  $-1$  y  $1$  y para ello efectuamos el cambio de variable lineal  $u = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)x$ , donde  $a = 0$  y  $b = \pi/2$ . Tenemos  $u = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x$  y  $du = \frac{\pi}{4}dx$  y entonces tendremos el periodo del péndulo

$$T = \pi\sqrt{\frac{L}{g}} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x)}}, \quad k = \sin\frac{\theta_0}{2}$$

donde  $g$  representa la constante de la gravedad y  $\theta_0$  es el ángulo que hace el péndulo con la vertical al momento de ser soltado. Si tomamos  $\theta_0 = 18^\circ$  entonces la constante  $k = \sin 9^\circ = \frac{\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}}{4}$ , de modo que  $k^2 = \frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8} \approx 0.0244717419$ . Haciendo  $L = 9.81m$  y  $g = 9.81m/seg^2$ , entonces el periodo es,

$$T = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - 0.0244717419 \sin^2(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}x)}}$$

resultando

$$T = \pi \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - 0.0244717419 \sin^2(0.7853981634 + 0.7853981634x)}}$$

Los resultados para la integral son:

Usando Cuadratura Gaussiana con  $n = 8$  :  $I = 2.0158077282$

Usando Cuadratura Ortogonal con  $n = 8$  :  $I = 2.0158077309$

## 5.2 Longitud de arco de una hipérbola

Sea la curva  $y = f(x)$ .  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continua y con derivada continua. Entonces es fácil mostrar, (vea por ejemplo [10]) que la longitud del arco de la curva entre dos puntos con abscisas  $x = a$  y  $x = b$ , es dado por la fórmula

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Vamos a calcular la longitud de arco de la curva  $y = 1/x$  (hipérbola equilátera) en el intervalo  $[2, 4]$ : Aquí  $f(x) = \frac{1}{x}$  de modo que  $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ . Luego la longitud de un arco de la curva entre los puntos  $x = 2$  y  $x = 4$  es

$$\begin{aligned} L &= \int_2^4 \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx \\ &= \int_2^4 x^{-2}(1 + x^4)^{1/2} dx. \end{aligned}$$

La última expresión es una integral de diferencial binómica con  $m = -2$ ,  $n = 4$  y  $p = 1/2$ . Veamos si se cumple alguno de los tres casos para que pueda ser integrada analíticamente:

- (i)  $p = 1/2 \notin \mathbb{Z}$ ,
- (ii)  $\frac{m+1}{n} = -1/4 \notin \mathbb{Z}$
- (iii)  $\frac{m+1}{n} + p = -1/4 + 1/2 = 1/4 \notin \mathbb{Z}$ .

Vemos que ninguno de los tres casos produce un entero y por lo tanto la integral definida debe ser tratada por métodos numéricos. Vamos entonces a emplear la fórmula de cuadratura basada en interpolación racional. La integral es la misma que

$$L = \int_2^4 t^{-2}(1 + t^4)^{1/2} dt$$

Haciendo  $t = \frac{1}{2}(b+a) + \frac{1}{2}(b-a)x$ , donde  $a = 2$  y  $b = 4$ , o sea  $t = 3 + x$  se llega a

$$L = \int_{-1}^1 (3+x)^{-2} [1 + (3+x)^4]^{1/2} dx$$

Los resultados para esta integral son:

Usando Cuadratura Gaussiana con  $n = 8$  :  $L = 2.0180934438$

Usando Cuadratura Ortogonal con  $n = 8$  :  $L = 2.0180934438$

## 5.3 Capacidad calórica de un sólido

Cuando se estudia termodinámica estadística el modelo de Debye proporciona una expresión para calcular la capacidad calórica de un sólido. La capacidad calórica de un cuerpo es el calor necesario (medido en calorías) para subir en 1º la temperatura de ese cuerpo. Debye considera la función

$$\Phi(u) = \int_0^u \frac{t^3}{e^t - 1} dt.$$

Puesto que no hay ninguna expresión analítica para  $\Phi(u)$ , debemos usar algún método de integración numérica para calcular sus valores.

Por ejemplo calculemos  $\Phi(5)$  :

$$\Phi(5) = \int_0^5 \frac{t^3}{e^t - 1} dt$$

Usamos la transformación  $t = \frac{1}{2}(b + a) + \frac{1}{2}(b - a)x$  para llevar el intervalo de integración  $[0, 5]$  al intervalo  $[-1, 1]$  :  $a = 0, b = 5, t = \frac{5}{2} + \frac{5}{2}x$  y  $dt = \frac{5}{2}dx$ , resultando

$$\Phi(5) = \left(\frac{5}{2}\right)^4 \int_{-1}^1 \frac{(1+x)^3}{e^{\frac{5}{2}(x+1)} - 1} dx$$

Aplicando nuestras fórmulas de cuadratura:

Para Cuadratura Gaussiana ( $n = 8$ ) :  $\Phi(5) = 4.8998970624$

Para Cuadratura Ortogonal ( $n = 8$ ) :  $\Phi(5) = 4.8998913350$ .

# Conclusiones

Las Fórmulas de cuadratura que hemos tratado proporciona un método numérico alternativo a los otros ya estudiados. Del Teorema 4.6 se sigue que las reglas de cuadratura racional serán eficientes siempre que la función a ser integrada pueda ser bien aproximada usando las funciones básicas 4.1. Gautschi [6] ha mostrado que las funciones las cuales tienen un número infinito de polos pueden ser integradas más eficientemente por reglas de cuadratura gaussianas escogiendo los parámetros  $t_i$  en una forma óptima.

Las cuadraturas gaussianas clásicas, los polinomios ortogonales y la interpolación polinomial son básicas en la demostración de ciertos resultados para cuadratura gaussiana y ortogonal. El método de cuadratura de Gauss es un excelente método numérico para evaluar integrales definidas, usando sumatorias simples, son fáciles de implementar y es una aplicación bastante interesante de los polinomios ortogonales.

En mi trabajo estoy presentando un enfoque alternativo para las cuadraturas gaussianas clásicas: Se usa la fórmula de recurrencia de tres términos para encontrar los polinomios ortogonales y para el cálculo de los nodos de integración y pesos encontramos valores y vectores propios de una matriz llamada matriz de Jacobi. Las cuadraturas gaussianas también están relacionadas con las ecuaciones diferenciales ordinarias, ya que los nodos de cuadratura son los ceros de los polinomios ortogonales clásicos que son soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales de segundo orden.

# Apéndice A

## Programas

### Programa 1: SIMPSON

```
clear all; clc
disp('Este programa, (SIMPSON) calcula integrales definidas en [a,b]')
a=input('ingrese limite inferior a=');
b=input('ingrese limite superior b= ');
n=input('ingrese el número de particiones: n=');
f: input('ingrese la función f(x)=');
f: inline(f);
d=(b-a)/(2*n);
x1=a+2*d;
A=0;
for k=1:n
A=A+(d/3)*(feval(f,a)+4*feval(f,(a+x1)/2)+feval(f,x1));
a=x1;
x1=a+2*d;
end
disp('el valor de la integral es')
disp(A);
```

### Programa 2: GAUSS-LEGENDRE

Primero: el programa halla los coeficientes de recurrencia  $a_k$  y  $b_k$  :

```
function ab=rec_legendre(n)
ab=zeros(n,2);
ab(:,2)=[2,(((2:n)-1).^2)/((2*(2:n)-1).*(2*(2:n)-3))];
```

Segundo: el programa calcula los ceros y pesos para la cuadratura de G-L:

```
function xw=cerospesosleg1(n)
```

%Halla los ceros y pesos de G-L. La primera columna de xw almacena los ceros del polinomio de Legendre, mientras que la segunda columna los pesos correspondientes.

```
ab=rec_legendre(n);
J=zeros(n);
for i=1:n,J(i,i)=ab(i,1);end
for i=2:n
J(i,i-1)=sqrt(ab(i,2));
J(i-1,i)=J(i,i-1);
end
[V,D]=eig(J);
[D,I]=sort(diag(D));
V=V(:,I);
xw=[D,ab(1,2)*V(1,:)].^2;
```

Tercero: el programa que integra:

```
function y=gaussleg(nomb_f,a,b,n)
xw=cerospesosleg1(n);
z=0.5*((b-a)*xw(:,1)+a+b);
f= inline(nomb_f);
y=0.5*(b-a)*sum(xw(:,2).*f(z));
```

## Programa: CUADRATURA GAUSSIANA

**El programa que encuentra los ceros y pesos es:**

```
function [ceros,betas]=rcgvel(n)
%cuadratura gaussiana racional con  $w(x)=1, w_n=1/\pi 2^n$ 
digits(30);
```

```

t=vpa(sym(1-1./sqrt((1:2*n)')));
p=sym(zeros(n+1,1));a=sym(zeros(n,1));b=sym(zeros(n,1));
syms x
pi2n=prod(1+t*x);
p(1)=1;
a(1)=int(x*p(1)^2/pi2n,-1,1)/int(p(1)^2/pi2n,-1,1);
p(2)=x-a(1);
for k=2:n
a(k)=int(x*p(k)^2/pi2n,-1,1)/int(p(k)^2/pi2n,-1,1);
b(k)=int(p(k)^2/pi2n,-1,1)/int(p(k-1)^2/pi2n,-1,1);
p(k+1)=(x-a(k))*p(k)-b(k)*p(k-1);
end
ceros=sort(solve(p(n+1)));
matrizcoef=(ones(n,1)*ceros').^((0:n-1)'*ones(1,n));
matrizind=int(x.^(0:n-1)/(pi2n),-1,1)';
lamdas=matrizcoef\matrizind;
betas=subs(pi2n,ceros).*lamdas;

```

### **El programa que integra:**

```

function y=rcg(fun,n)
[ceros,betas]=rcgvel(n);
y=sum(betas.*subs(fun,ceros));

```

### **Programa: CUADRATURA ORTOGONAL**

#### **El programa que encuentra los ceros y pesos:**

```

function [ceros,betas]=rcovel(n)
%cuadratura ortogonal con w(x)=1,wn=1/(pin*pin1)
digits(30);
t=vpa(sym(1-1./sqrt((1:n+1)')));
p=sym(zeros(n+1,1));a=sym(zeros(n,1));b=sym(zeros(n,1));
syms x
pin=prod(1+t(1:n)*x);pin1=prod(1+t(1:n+1)*x);

```



```

p(1)=1;
a(1)=int(x*p(1)^2/(pin*pin1),-1,1)/int(p(1)^2/(pin*pin1),-1,1);
p(2)=x-a(1);
for k=2:n
a(k)=int(x*p(k)^2/(pin*pin1),-1,1)/int(p(k)^2/(pin*pin1),-1,1);
b(k)=int(p(k)^2/(pin*pin1),-1,1)/int(p(k-1)^2/(pin*pin1),-1,1);
p(k+1)=(x-a(k))*p(k)-b(k)*p(k-1);
end
ceros=sort(solve(p(n+1)));
matrizcoef=(ones(n,1)*ceros').^((0:n-1)'+ones(1,n));
matrizind=int(x.^(0:n-1)/(pin*pin1),-1,1)';
lamdas=matrizcoef\matrizind;
betas=subs(pin*pin1,ceros).*lamdas;
El programa que integra:
function y=rco(fun,n)
[ceros,betas]=rcovel(n);
y=sum(betas.*subs(fun,ceros));

```

# Apéndice B

## Teoremas relacionados

**Teorema B.1** (de Aproximación de Weierstrass):

Sea  $f \in C[a, b]$ , entonces existe un polinomio  $P$  y un número  $\epsilon > 0$  que satisface

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon, \quad x \in [a, b]$$

**Prueba.** Vea [3] (pp. 66-67). ■

**Teorema B.2** (de Convergencia de Stieltjes):

Sea  $f \in C[a, b]$ , entonces las aproximaciones proporcionadas por

$$\int_a^b f(x)w(x) dx \approx \sum_{j=1}^n A_j f(x_j)$$

convergen a la integral conforme  $n \rightarrow \infty$ .

**Prueba.** Vea [3] (pp. 111-112). ■

**Teorema B.3** (Erdős-Turán):

Sean  $P_0, P_1, \dots$ , el sistema de polinomios el cual es ortogonal sobre  $[a, b]$  con función de peso  $w$ . Para cada  $f \in C[a, b]$  sea  $L_n f$  el polinomio de grado  $\leq n$  el cual interpola a  $f$  en los ceros de  $P_{n+1}$ . Entonces  $\|L_n f - f\|_w \rightarrow 0$ . Esto es,

$$\int_a^b |(L_n f - f)|^2 w(x) dx \rightarrow 0.$$

**Prueba.** Vea [3] (pp. 137-138). ■

**Teorema B.4** (*Bernstein*):

Sea  $f(x)$  continua sobre el intervalo  $[0, 1]$ . Definamos el polinomio de grado  $n$   $B_n(f; x)$  mediante

$$B_n(f; x) = \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right),$$

entonces los polinomios  $B_n(f; x)$  convergen uniformemente a  $f(x)$  sobre  $[0, 1]$ .

**Prueba.** Vea [13] (pag. 62). ■

# Bibliografía

- [1] Achieser, N.I., Theory of Approximation, Frederick Ungar Publishing Co., New York 1956.
- [2] Apostol, T. Análisis Matemático, segunda edición. Editorial Reverté, Barcelona 1991.
- [3] Cheney, E. W., Introduction to Approximation Theory, Mc Graw-Hill, New York 1966, pp. 137-138.
- [4] Davis, P.J. & Rabinowitz, P. Methods of numerical integration, 2nd edition, Academic Press, New York 1984.
- [5] Gautschi, Walter. Orthogonal Polynomials: Computation and approximation. Oxford University Press, Oxford 2004.
- [6] Gautschi, W. Gauss-type Quadrature Rules for Rational Functions. WEB: [http://arxiv.org/PS\\_cache/math/pdf/9307/9307223.pdf](http://arxiv.org/PS_cache/math/pdf/9307/9307223.pdf)
- [7] Haaser-La Salle-Sullivan, Análisis Matemático Volumen 1, sexta reimpression. Editorial Trillas, México Abril 2002, pp. 545-547.
- [8] Mathews-Kurtis, Métodos Numéricos con MATLAB, tercera edición. Editorial Prentice Hill, Madrid 2000, pp 263-267.
- [9] Pinkus-Ziegler, Interlacing properties of the zeros of the error functions in best  $L^p$ -approximations, J. Approx. Theory 27 (1979), pp. 1-18.

- [10] Purcell, E. & Varberg, D., *CALCULO con Geometría Analítica*, cuarta edición. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A. México 1987, pp 281-286.
- [11] Simmons, G. *Ecuaciones Diferenciales con Notas Históricas*, primera edición. Ed. McGRAW-HILL, México 1977, pp. 258-272; 232-241.
- [12] Spiegel, M. *Variables Reales*, primera edición. Editorial McGRAW-HILL, Cali 1976, pp. 69-70.
- [13] Stroud, A.H. *Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations*, primera edición. Ed. Springer-Verlag, New York 1974.
- [14] Szegő, G. *Orthogonal Polynomials*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, Volume XXIII. A.M.S. New York City 1959.