

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA



**MÉTODO DE IMÁGENES Y SU APLICACIÓN EN EL ESTUDIO
DEL EFECTO CORONA EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN**

INFORME DE SUFICIENCIA

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO ELECTRICISTA

**PRESENTADO POR:
JESÚS JOSÉ BRINGAS ZÚÑIGA**

**PROMOCIÓN
1980-1
LIMA-PERÚ
2002**

El presente trabajo lo dedico a mi esposa
Cira y a mis hijos Reneé, Juan e Isaac que me
alentaron y contribuyeron a su realización.

**MÉTODO DE IMÁGENES Y SU APLICACIÓN
EN EL ESTUDIO DEL EFECTO CORONA
EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN**

SUMARIO

El método de imágenes se aplica a problemas electrostáticos de uno o más cargas puntuales en presencia de superficie limitadoras como conductores, ya sean conectados a tierra o mantenidos a potenciales fijos. En muchas situaciones reales, es posible deducir de la geometría de la situación que las condiciones de contorno requeridas pueden ser simuladas mediante un pequeño número de cargas de magnitudes apropiadas, externas a la región de interés y colocadas adecuadamente. Estas cargas se les llaman cargas imagen; y método de imágenes se le llama a la sustitución del problema real con condiciones de contorno por el de una región ampliada con cargas imagen pero sin condiciones de contorno, esto es tratado en los capítulos I, II y III.

Las fases de una línea de transmisión pueden ser representadas por cargas puntuales, y la tierra hace las veces de una superficie conductora infinita, en la que se inducirá carga eléctrica, la que origina un campo eléctrico que se superpone al creado

por la línea de transmisión. En el presente trabajo, ésta carga inducida es reemplazada por cargas imagen de cada fase de la línea de transmisión, y de esta forma se halla el potencial y su gradiente en los conductores de las fases de la línea de transmisión en estudio, esto es tratado en los capítulos IV, V, VI y VII.

ÍNDICE

	Pag.
PRÓLOGO	1
CAPÍTULO I	3
IMÁGENES EN EL CASO DE UNA SUPERFICIE PLANA CONDUCTORA	
1.1. Método de Imágenes	3
1.2. Cargas frente a un plano conductor infinito.	7
1.3. Conductor paralelo a tierra.	11
CAPÍTULO II	18
IMÁGENES EN UN CONDUCTOR CILÍNDRICO	
2.1. Superficies equipotenciales de una línea de carga constante e infinita paralela a un cilindro conductor infinito.	18
2.2. Carga lineal Q_L paralela a un cilindro conductor.	21

2.3. Dos conductores Cilíndricos paralelos de igual carga y de signos contrarios.	26
CAPÍTULO III	30
IMAGEN EN UNA ESFERA CONDUCTORA	
3.1. Carga puntual frente a una esfera conductora a potencial cero.	33
CAPÍTULO IV	37
EFFECTO CORONA EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN	
CAPÍTULO V	41
FÍSICO-QUÍMICA DE LAS DESCARGAS ELÉCTRICAS EN GASES	
5.1. Física de la Descarga.	41
5.2. Química Relacionada con las Descargas	43
CAPÍTULO VI	45
DESCARGA EN UN GAS	
6.1. Reproducción de Descargas	47
6.2. Ionización –Tipos	51
CAPÍTULO VII	54
EFFECTO CORONA	
7.1. Caso de Líneas de Transmisión.	57
7.2. Casos especiales	66

7.3. Tensión Crítica Disruptiva	75
CONCLUSIONES	86
BIBLIOGRAFÍA	88

PRÓLOGO

El presente trabajo Monográfico de Eficiencia comprende la aplicación del método de Imágenes para resolver problemas de electrostática y su aplicación en el estudio del efecto corona en líneas de transmisión.

Si son conocidos la distribución de cargas libres y de cargas inducidas, en un sistema determinado, se puede utilizar la Ley de Gauss; pero son pocos los problemas de este tipo. Existen otros problemas en que los potenciales de todos los cuerpos del Sistema son conocidos, en estos se determinará la Ecuación de Laplace que satisfaga las condiciones de contorno, la cual tiene los valores prescritos (constantes) en las superficies de los cuerpos conductores.

A menudo encontramos problemas de tipos diferentes, en los que la distribución de carga en algunos puntos y en algunos cuerpos conductores es conocida, mientras que en otros cuerpos del sistema, se conoce la cantidad total de carga inducida o el

nivel de su potencial. Para este tipo de problemas se emplea el MÉTODO DE IMÁGENES.

Obviamente, si se conociera la forma en que la carga inducida se distribuye sobre el conductor, el problema estaría resuelto. En este caso la dificultad se presenta precisamente en que tal distribución se conocerá solo cuando se haya resuelto el problema completo. El Método de las Imágenes intenta determinar una distribución de cargas “ficticias” que colocadas en determinado lugar, al “remover” el conductor, produzcan el campo buscado en la zona de interés.

Si la influencia de las cargas inducidas no pueden ser reducidas en el campo a la influencia de una simple carga, o a un cierto número de cargas o a alguna distribución simple de cargas de equivalente valor dentro del conductor, el método de imágenes pierde su principal característica -su simplicidad - por ello, podemos aplicar en la práctica, este método, si el conductor o contorno dieléctrico son de una simple forma geométrica como por ejemplo: un plano, cilindro o esfera.

Los resultados obtenidos por el método de imágenes son físicamente equivalentes a los que se obtendría resolviendo el problema electrostático mediante el teorema de Green y las llamadas funciones de Green, que permite obtener la solución de Campos Eléctricos Alternos, resolviendo la ecuación de Poisson, o la de Laplace, en un volumen (V) con condiciones de contorno sobre la superficie (S) que lo limita.

CAPÍTULO I

IMÁGENES EN EL CASO DE UNA SUPERFICIE PLANA CONDUCTORA

1.1 Método de Imágenes

Es un método que se usa para resolver la ecuación de Laplace en algunos casos de alta simetría.

Es un método potente que permite resolver algunos problemas complicados.

Consiste en modificar el planteamiento del problema, ampliando el recinto, de forma que:

- Resulte más sencillo.
- Se sigan cumpliendo las condiciones del problema original.

Normalmente será necesario añadir cargas fuera del recinto original

Ejemplo: carga frente a un plano conductor

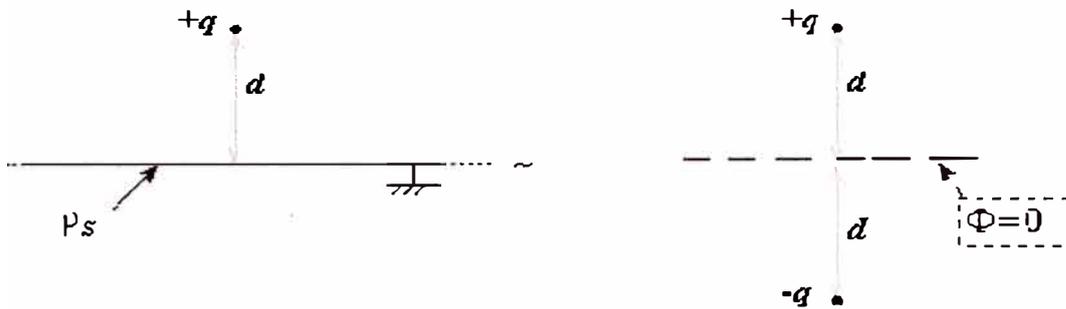


Fig. 1.1 Carga frente a un plano conductor

La carga imagen de la carga (q) en el plano conductor es una carga puntual ($-q$), situado respecto al plano, simétricamente a (q). (Fig.1.1).

El plano es retirado al introducir en su lugar la carga ($-q$). El campo frente al plano es el mismo como al inicio (El campo debajo del plano es ficticio, en realidad no existe).

Dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos

Aparentemente este problema no está relacionado con el problema de una carga puntual frente a un plano conductor infinito puesto a tierra. Las dos cargas distan ($2h$) entre sí.

El potencial electrostático $V(\vec{r})$ de éste sistema está dado por :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{(x^2 + y^2 + (z - h)^2)^{1/2}} - \frac{q}{(x^2 + y^2 + (z + h)^2)^{1/2}} \right]$$

(1.1)

y satisfice

- $V(r) = 0$ en $z = \infty$
- $V(\vec{r}) = 0$ en el plano mediatriz del segmento que une las dos cargas. Es decir: el plano ($z = 0$) es equipotencial.

Además, el campo eléctrico producido por las cargas es

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + (z-h)\vec{k}}{(x^2 + y^2 + (z-h)^2)^{3/2}} - \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + (z+h)\vec{k}}{(x^2 + y^2 + (z+h)^2)^{3/2}} \right] \quad (1.2)$$

luego, en $z = 0+$ tenemos

$$\vec{E}_{(x,y,z=0)} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-2h\vec{k}}{(x^2 + y^2 + h^2)^{3/2}} \right] \quad (1.3)$$

Campo que es perpendicular al plano $z = 0$. Notemos que, en la región $z \geq 0$, el potencial de las dos cargas satisface las mismas condiciones que debe satisfacer $V(\vec{r})$ para el problema del plano y la carga; por lo tanto, el teorema de Unicidad nos dice que, en la región de interés, ambos potenciales coinciden.

El problema de la carga puntual frente al plano puede ser resuelto ahora, introduciendo una distribución de cargas ficticias (una sola carga, en este caso), que llamaremos 'carga imagen'. La dificultad principal, que limita la aplicabilidad del método, está en encontrar tales cargas imagen.

Determinemos la carga inducida en el conductor plano, si este es ubicado en el plano mediatriz.

La intensidad de campo eléctrico total en cualquier punto (M) sobre el plano es igual al vector suma de las intensidades debidas a las dos cargas.

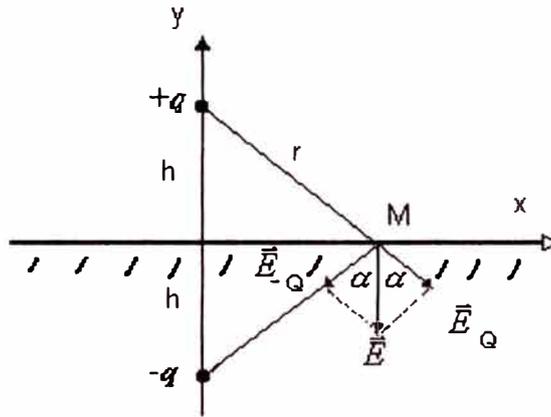


Fig. 1.2 Intensidad de campo de carga puntual y su imagen en un punto (M).

El vector \vec{E} es normal al plano y su intensidad es:

$$E(x,0) = 2 \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \alpha \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r^2} \left(\frac{h}{r} \right)$$

$$E(x,0) = \frac{Qh}{2\pi\epsilon_0 r^3} \quad (1.4)$$

La densidad de las cargas inducidas en la superficie es:

$$\sigma = -\epsilon_0 E(x,0) = -\epsilon_0 \left(\frac{Qh}{2\pi\epsilon_0 r^3} \right)$$

$$\sigma_{(x,y)} = -\frac{Qh}{2\pi(x^2 + h^2)^{3/2}}$$

La carga inducida total sobre la superficie:

$$q_{inducida} = \int_0^{\infty} \sigma \cdot 2\pi r dr = -q \left(h \int_0^{\infty} \frac{x}{(x^2 + h^2)^{3/2}} dx \right)$$

$$q_{inducida} = -q \quad (1.5)$$

1.2 Carga Frente a un Plano Conductor Infinito

Consideremos el problema de un plano conductor infinito, mantenido a potencial cero (a tierra); frente a una carga puntual de magnitud (q).

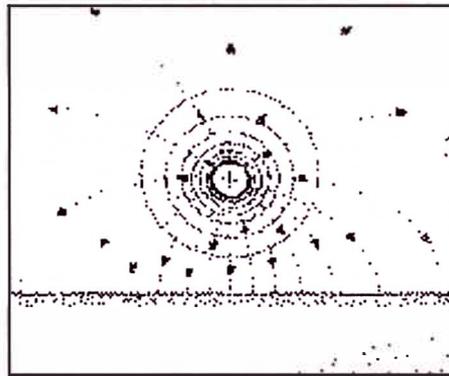


Fig. 1.3 Carga puntual frente a un plano conductor.

El problema es determinar el campo eléctrico, en la región $z > 0$ (fuera del plano conductor). La región $z < 0$ (dentro del plano conductor) no es interesante, puesto que el campo eléctrico se anula allí. Las condiciones de borde del problema son:

- El potencial se anula en el plano conductor, $V(x, y, z=0) = 0$.

- El campo eléctrico cerca del plano conductor, $E(x, y, z = 0+)$ es perpendicular al plano conductor.
- El potencial fuera del plano se anula en el infinito, $V = 0$ para $Z \rightarrow \infty$.

Observamos que el campo de una carga puntual, por si sólo, no satisface las condiciones del problema, es decir, el campo debe ser modificado por la presencia del plano conductor. En este problema, el campo eléctrico, puede imaginarse como la superposición de

- El campo eléctrico de la carga puntual.
- El campo eléctrico producido por las cargas inducidas sobre la superficie del plano conductor.

Las cargas inducidas sobre la superficie del plano conductor, las reemplazamos por la carga imagen ($-q$) según 1-1, obteniéndose los mismos valores en tensión y en gradiente que en 1-2 (dos cargas puntuales de igual magnitud y signos opuestos).

En una línea uniformemente cargada de electricidad, por simetría, los vectores intensidad de campo creado son radiales y su valor es sólo función de sus distancia al eje de la línea; debido a esto, al analizar su campo eléctrico y su gradiente en un punto, puede considerarse a la carga lineal como una carga puntual, en un plano que contiene al punto en estudio y que es perpendicular al eje de la línea.

Otros Casos:

- ❖ **Carga puntual frente a dos planos conductores infinitos.**

Se tendrá una serie de cargas imagen cada vez más alejadas respecto de cada plano.

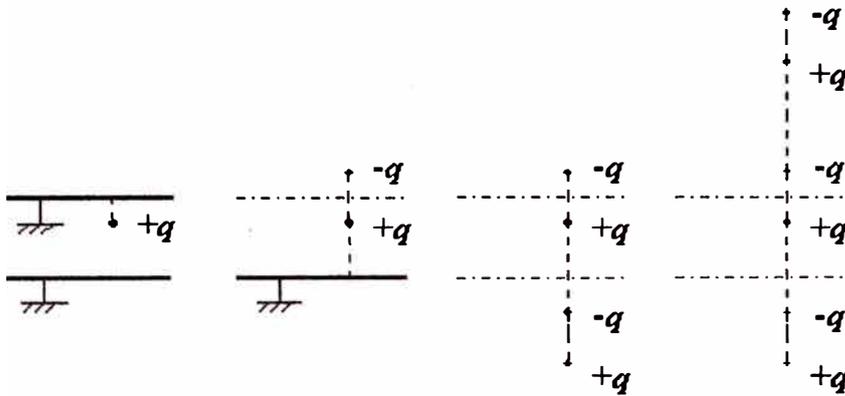


Fig. 1.4 Carga puntual frente a dos planos conductores y sus imágenes.

❖ Carga puntual frente a diedro conductor infinitos.

Carga frente a un diedro cóncavo de 90°

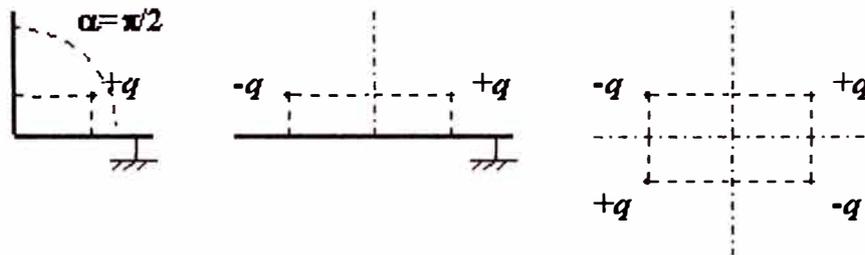


Fig. 1.5 Carga en diedro y sus imágenes.

- Funciona para cargas en la parte interior de diedros de ángulo $\alpha = \pi/n$

- Para otros diedros caen cargas en la región de estudio:

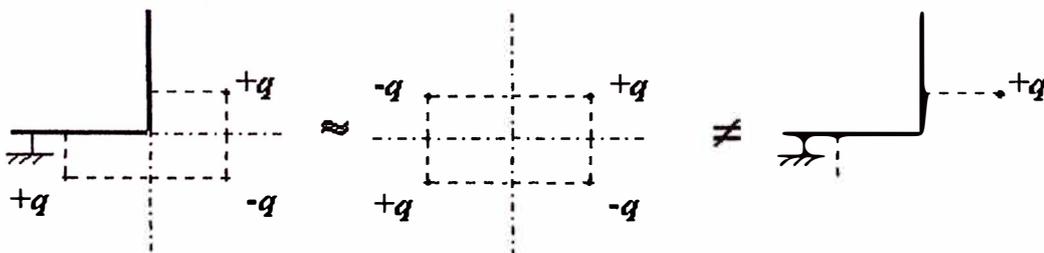


Fig. 1.6 Carga puntual y sus imágenes.

Líneas de campo superficies y equipotenciales de cargas puntuales

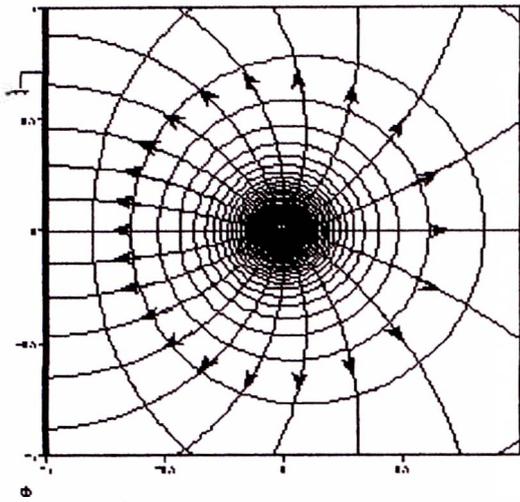


Fig. 1.7 Carga puntual frente a un plano Conductor. Líneas de Campo.

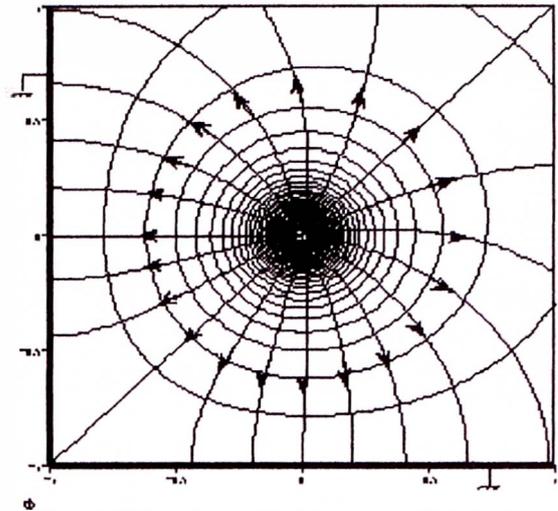


Fig. 1.8 Carga puntual frente a un diedro Conductor de 90°. Líneas de Campo.

Distribución de un Sistema de Cargas Frente a una Superficie Plana Conductora Puesta a Tierra

El campo de todas las cargas inducidas en el plano conductor puede ser reducida a solo el campo de una carga simple ($-q$) simétricamente a (q) respecto al plano conductor. Análogo razonamiento se aplica para cualquier distribución de cargas frente a un plano conductor.

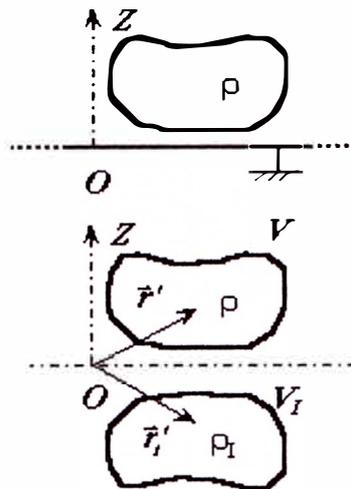


Fig. 1.9 Carga distribuida frente a un plano conductor y su carga imagen.

El potencial ($V(\vec{r})$) será:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' + \int_{V_I} \frac{\rho_I(\vec{r}'_I)}{|\vec{r} - \vec{r}'_I|} dv'_I \right] \quad (1.6)$$

$$\vec{r}'_I = \vec{r}' - 2(\vec{r}' \cdot \hat{z})\hat{z} \quad \rho_I(\vec{r}'_I) = -\rho(\vec{r}')$$

1.3 Conductor Paralelo a Tierra

En el caso de un conductor de radio (R), que corre paralelamente a la tierra y esta ubicado a una altura (h) ($h \gg R$), como este es el caso de un cable de guarda en una línea eléctrica; se puede considerar a la tierra como un conductor plano.

Podemos suponer que un campo eléctrico externo \vec{E}_o uniforme y dirigido a tierra, rodea al conductor, este campo puede deberse a nubes cargadas. Podemos determinar la intensidad del campo eléctrico total en la superficie del conductor y en puntos debajo de él.

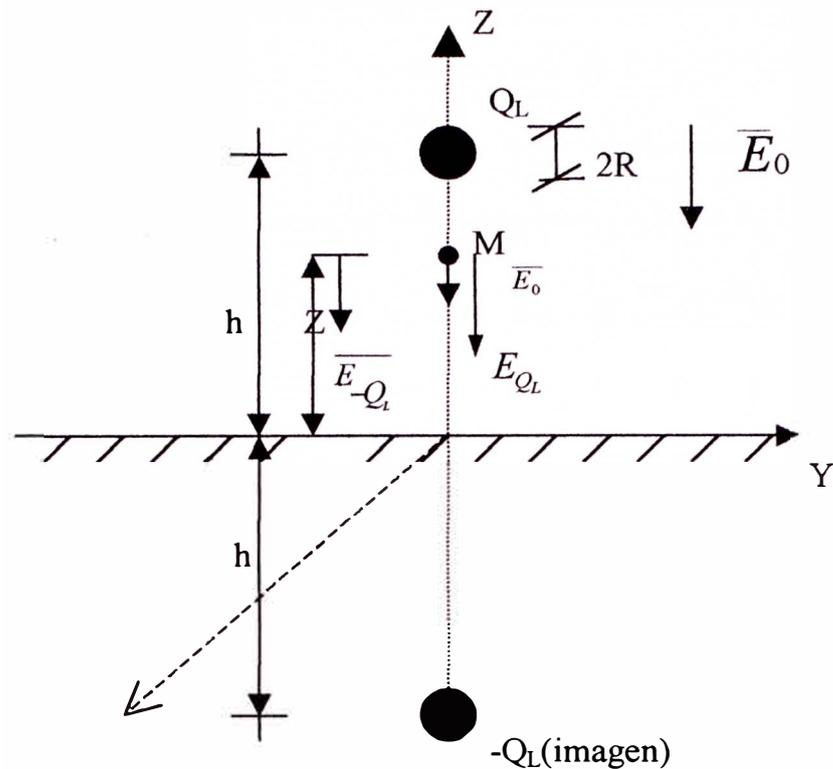


Fig. 1.10 Campo eléctrico en un punto (M), debido al campo externo E_0 , a la carga (Q_L) y a su imagen.

Estando el conductor conectado a tierra, se cargara por efecto del campo (\vec{E}_0): si esta carga por unidad de longitud es (Q_L), inducirá sobre la tierra una carga total (Q'_L) la que reemplazaremos por la carga imagen ($-Q_L$) mostrada en la Fig. 1.9

La intensidad de campo en cualquier punto encima de la tierra será la suma de (\vec{E}_0) del campo debido a (Q_L) (\vec{E}_{Q_L}) y a su imagen ($-Q_L$) (\vec{E}_{-Q_L}). El campo total en el punto (M) (\vec{E}_{TM}) será:

$$\vec{E}_{TM}(Z) = \vec{E}_0 + \vec{E}_{Q_L} + \vec{E}_{-Q_L}$$

Es decir:

$$\vec{E}_{TM}(Z) = - \left(E_o + \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0 (h-Z)} + \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0 (h+Z)} \right) \vec{k} \quad (1.7)$$

Estando el conductor puesto a tierra, su potencial ($V_{conductor}$) es CERO, lo que nos permitirá hallar la carga desconocida (Q_L); es decir:

$$\begin{aligned} V_{conductor} &= \int_{h-R}^0 E_T(-dZ) = \int_0^{h-R} E_T dZ \\ &= \int_0^{h-R} E_o dZ + \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} \int_0^{h-R} \frac{dZ}{(h-Z)} + \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} \int_0^{h-R} \frac{dZ}{h+Z} \end{aligned}$$

Es decir:

$$V_{coud} \cong E_o h + \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n\left(\frac{2h}{R}\right) = 0 \Rightarrow Q = -\frac{E_o h (2\pi \epsilon_0)}{L_n\left(\frac{2h}{R}\right)} \quad (1.8)$$

De (1.7) en (1.8):

$$E_{TM}(Z) = E_o + \frac{-\frac{2\pi \epsilon_0 E_o h}{L_n\left(\frac{2h}{R}\right)}}{2\pi \epsilon_0 (h-Z)} + \frac{-\frac{2\pi \epsilon_0 E_o h}{L_n\left(\frac{2h}{R}\right)}}{2\pi \epsilon_0 (h+Z)}$$

$$E_{TM}(Z) = E_o \left[1 - \frac{2h^2}{(h^2 - Z^2) L_n\left(\frac{2h}{R}\right)} \right] \quad (1.9)$$

Es decir: La intensidad de campo electrostático debajo del cable de guarda es más pequeño que \bar{E}_o .

La intensidad de campo electrostático en la superficie del conductor ($Z=h+R$) será:

$$E_T(h+R) = E_o \left[1 - \frac{2h^2}{(h^2 - (h+R)^2) L_n \left(\frac{2h}{R} \right)} \right]; \text{ pero } h \gg R$$

se tiene:

$$E_T(h+R) = E_o \left[1 + \frac{h}{RL_n \left(\frac{2h}{R} \right)} \right] \quad (1.10)$$

Se ve que la intensidad de campo Eléctrico en la superficie del conductor es mucho más grande que E_o . Como consecuencia aparecerá una CORONA (chispa) en la superficie del conductor, aún para valores pequeños de \bar{E}_o . Así se iniciará una trayectoria a través del aire para posibles descargas de relámpagos a través del cable de guarda a tierra, como si absorbiera los relámpagos.

Línea Bialámbrica Paralela a Superficie Conductora

Una de las más importantes aplicaciones del método de imágenes es considerar a la superficie de la tierra aproximadamente como un plano conductor, y como cargas, por ejemplo, líneas de un conductor, bi-alámbrico o líneas de 3 conductores o más, corriendo paralela a la superficie de la tierra y conociendo que las distancias entre los

conductores y las distancias de estas a tierra son mucho mas grande que el radio (R), de dichos conductores (que son los casos que se presentan en la realidad).

En el caso de una línea bi-alámbrica con conductores de radio (R), a una distancia (D) entre ellos, y que corre a una altura (h) ($h \gg R$) paralela a la superficie conductora (tierra).

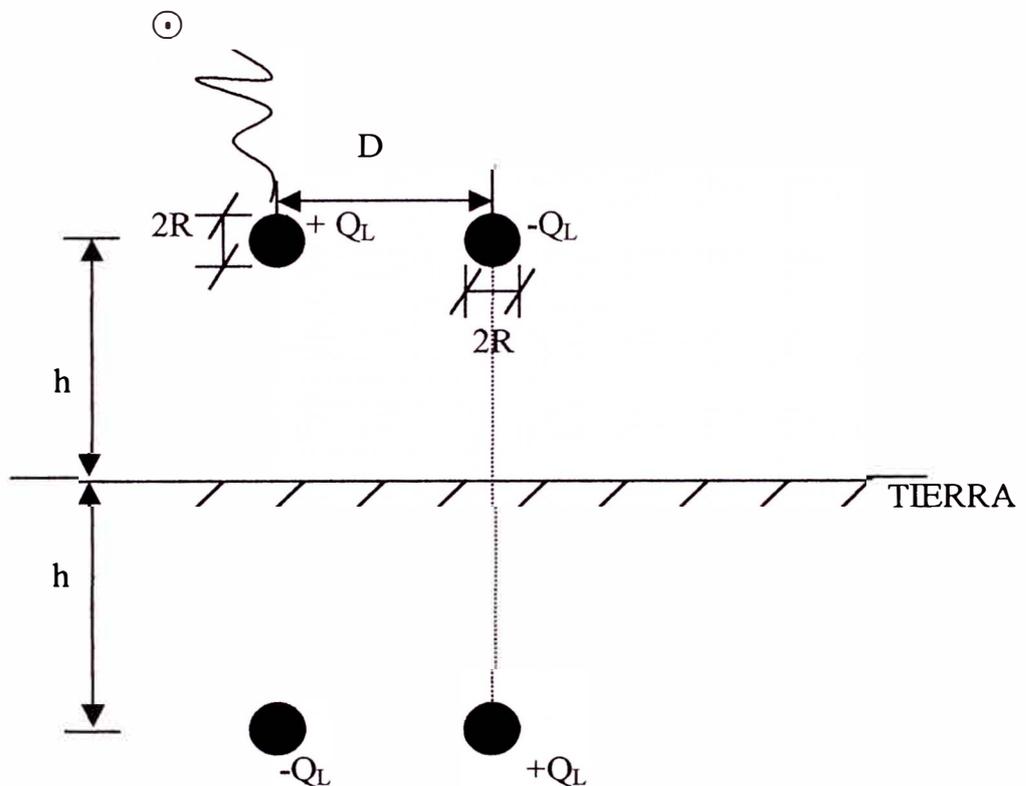


Fig. 1.11 Línea bi-alámbrica con carga y su imagen.

Al potencial en ambos alambres para cargas que se dan: (Q_L) y ($-Q_L$) por unidad de longitud de los conductores, debe adicionarse el potencial creado por las cargas inducidas en la superficie de la tierra, la influencia de las cargas inducidas pueden ser reducidas a cargas imagen tomando la superficie de la tierra como referencia del potencial.

Siendo el potencial en un punto (M) a una distancia (r) de una carga lineal (λ), con respecto a un punto de referencia a la distancia (r_R) de la carga (λ):

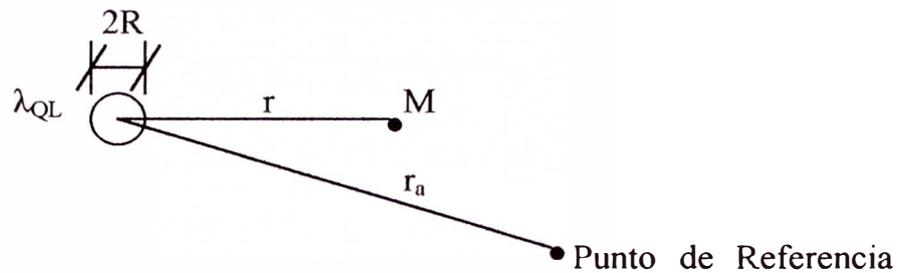


Fig. 1.12 a

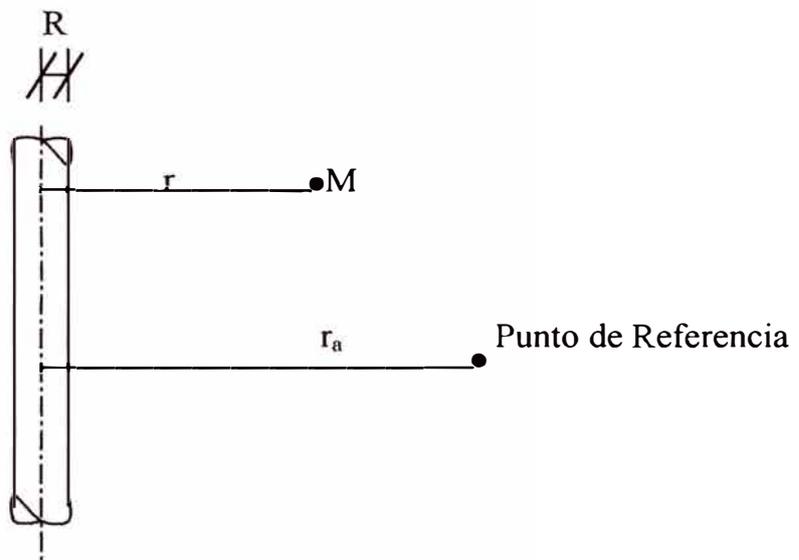


Fig. 1.12 b

Fig. 1.12 a) Conductor. Vista de punta. b) Conductor. Vista en verdadera magnitud.

$$V = \int^r \frac{\lambda dr}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} L_n \left(\frac{r_R}{r} \right)$$

El potencial del conductor positivo es:

$$V_T \cong \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} \left[L_n \frac{h}{R} - L_n \frac{h}{D} - L_n \frac{h}{2h} + L_n \frac{h}{\sqrt{D^2 + (2h)^2}} \right]$$

$$V_+ \cong \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{D}{R \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}} \quad (1.11)$$

Similarmente el potencial del conductor negativo es:

$$V_- \cong \frac{-Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{D}{R \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}} \quad (1.12)$$

La capacidad por unidad de longitud de la línea bi-alámbrica encima de la superficie de la tierra es:

$$C_L = \frac{Q_L}{(V_+) - (V_-)} = \frac{-Q_L}{(V_+) - (V_-)}$$

$$C_L = \frac{Q_L}{(V_+) - (V_-)} = \frac{Q_L}{2 \left(\frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} \right) L_n \left[\frac{D}{R \sqrt{1 + \left(\frac{D}{2h}\right)^2}} \right]} \quad (1.13)$$

CAPÍTULO II

IMÁGENES EN UN CONDUCTOR CILÍNDRICO

2.1 Superficies Equipotenciales de una Línea de Carga Constante e Infinita

Paralela a un Cilindro Conductor Infinito

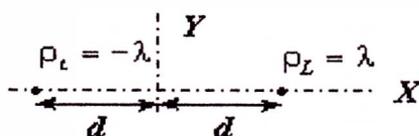
La carga (Q) distribuido con densidad lineal de carga eléctrica (λ), a lo largo de un alambre delgado y recto, aproximadamente muy uniforme y localizada en el eje del conductor, por lo que podemos llamarla línea de carga constante.

Las superficies equipotenciales de dos líneas de carga constantes, infinitas, paralelas y del mismo módulo y distinto signo son cilindros.

Como puede verse en la deducción siguiente:

Tomando como referencia el plano $x = 0$, el potencial vale:

$$V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln \sqrt{\frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}$$



La superficie de $V(\vec{r}) = V$:

$$\begin{aligned}
 V \frac{4\pi\epsilon}{\lambda} &= \ln \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} \Rightarrow e^{\frac{V 4\pi\epsilon}{\lambda}} = \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2} = k^2 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x^2 + d^2 + 2xd + y^2 = k^2(x^2 + d^2 - 2xd + y^2) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x^2(k^2 - 1) - 2(k^2 + 1)xd + y^2(k^2 - 1) = -d^2(k^2 - 1) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow x^2 - 2xd \frac{(k^2 + 1)}{(k^2 - 1)} + y^2 + d^2 \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 = d^2 \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 - d^2 = \frac{4k^2 d^2}{(k^2 - 1)^2} \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \left(x - d \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kd}{k^2 - 1} \right)^2 \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

que es la ecuación del Cilindro.

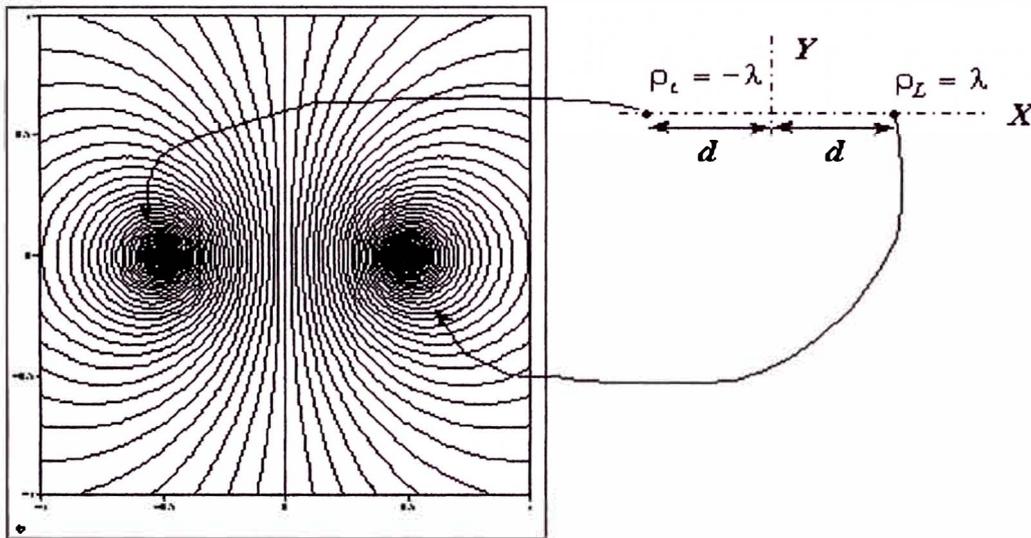


Fig. 2.1 Superficies equipotenciales de 2 líneas de cargas iguales y de diferentes signos.

Parámetros de la superficie de Potencial (V)

Considerando la ecuación 2.1

$$\left(x - d \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{2kd}{k^2 - 1} \right)^2 \quad k = e^{\frac{V 2\pi\epsilon}{\lambda}} \quad (2.2)$$

En el Cilindro:

$$\text{Con centro en : } x_c = d \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} \quad y_c = 0$$

$$\text{Radio : } a = \frac{2kd}{k^2 - 1}$$

Degenera en un plano si $V = 0 \Rightarrow k = 1$

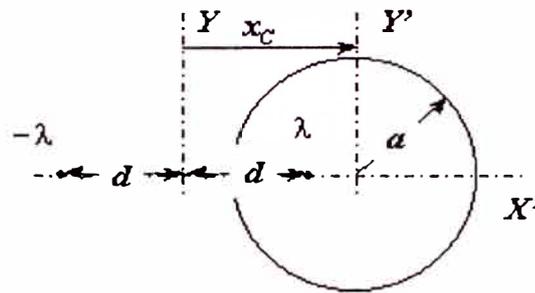


Fig. 2.2 Una superficie equipotencial debido a cargas de densidad λ y $-\lambda$.

Propiedad interesante:

- Trasladando el origen de coordenadas al eje del cilindro:

$$x' = x - x_c \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x'_{\lambda} = d - d \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = \frac{2d}{k^2 - 1} = \frac{ad}{k} \\ x'_{-\lambda} = -d - d \frac{k^2 + 1}{k^2 - 1} = \frac{2k^2}{k^2 - 1} = \frac{ak^2}{d} \end{array} \right\} \Rightarrow x'_{-\lambda} x'_{\lambda} = a^2 \quad (2.3)$$

El producto:

$$x'_{\lambda} \cdot x'_{-\lambda} = a^2 \quad (2.4)$$

- El radio de cada cilindro equipotencial es la media geométrica de las distancias a su centro de las líneas de carga.

2.2 Carga Lineal (Q_L) Paralela a un cilindro conductor

Consideramos una carga " Q_L " lineal, corriendo paralela a un conductor cilíndrico de radio (a).

Si el campo eléctrico originado por las cargas inducidas en la superficie del cilindro puede ser reducida al campo eléctrico originado por una carga imagen lineal (Q_L').

Por simetría la carga imagen lineal (Q_L') debe ubicarse en alguna parte en el plano determinado por la carga (Q_L) y el eje del cilindro.

La magnitud de la carga imagen (Q_L') y su posición (x) respecto al eje del cilindro deben ser determinados de manera que la superficie del cilindro sea equipotencial.

Aplicando la Ley de Gauss, consideramos una superficie gaussiana que coincide con la superficie conductora del cilindro, la carga total encerrada por la superficie será igual a la intensidad del campo eléctrico a través del cilindro multiplicado por (ϵ_0). Si el campo se asume ser idéntico al caso real y que mientras el cilindro es removido y la carga imagen lineal introducida en cambio, el flujo de intensidad de campo eléctrico es también el mismo, de ellos se deduce que (Q_L'), debe ser igual ($-Q_L$).

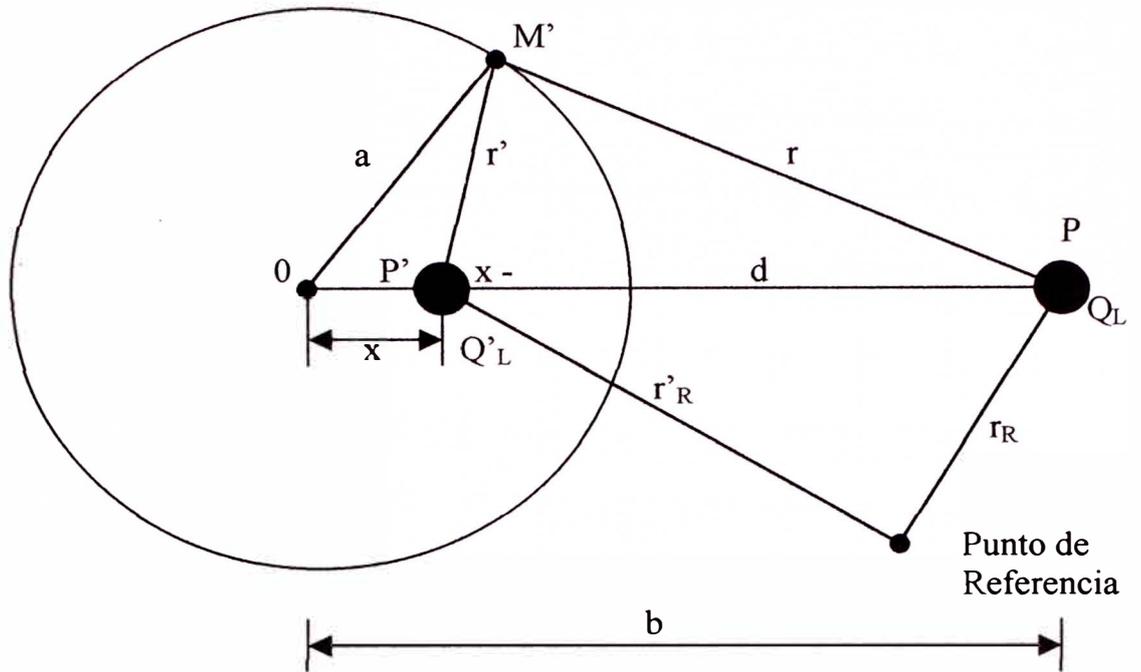


Fig. 2.3 Carga Lineal (Q_L) paralela a un cilindro conductor.

Halleemos el potencial en un punto tal como (M'), que está a una distancia (r) a la carga lineal (Q_L), con respecto a un punto de referencia situado a una distancia (r_R) de la carga lineal.

$$V = \int_{r_R}^r \frac{Q_L dr}{2\pi \epsilon_0 r} = \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \left(\frac{r_R}{r} \right)$$

El punto de referencia no puede ser tomado en el infinito, ya que ahí hay carga.

Si (r'_R) y (r') son las distancias correspondientes a la carga lineal $Q'_L = -Q_L$, entonces el potencial en el mismo punto (M') debido a la carga (Q'_L) es :

$$V' = \frac{Q'_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{r'_R}{r'} = -\frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{r'_R}{r'} \quad (2.5)$$

Así el potencial eléctrico total en (M') será debido a: (Q_L) y a (Q_L'); es decir:

$$\begin{aligned}
 V_{TOTAL} &= V + V' \\
 &= \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} \left(Ln \frac{r_R}{r} - Ln \frac{r'_R}{r'} \right) \\
 V_{TOTAL} &= \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \left(\frac{r_R}{r} \frac{r'}{r'_R} \right) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

De esta ecuación, puede verse que cualquier superficie equipotencial a 2 cargas iguales y de signos opuestos es: $\frac{r'}{r}$ una constante.

Otra forma de hallar, la distancia (x) de la carga imagen (Q_L') al eje del cilindro: así mismo la constante $\frac{r'}{r}$ para todos los puntos en la superficie del cilindro y la carga imagen lineal (Q_L') es:

De la figura:

$$\Delta OM'P \sim \Delta OP'M'$$

Si (x) es apropiadamente seleccionado, que puede ser siempre el caso para un punto fijo (M'), se tendrá:

$$\begin{aligned}
 \frac{r'}{r} &= \frac{a}{b} = \frac{x}{a} \\
 bx &= a^2 \quad ; \quad x \neq d \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Así, la ecuación $\left(\frac{r'}{r}\right)$ constante puede ser satisfecha por cualquier punto en la superficie del cilindro, si:

$$x = \frac{a^2}{b}$$

La carga imagen lineal (Q_L') de una carga lineal (Q_L) es por esto completamente determinado.

Gradiente de Potencial y Densidad Superficial de carga.

La distribución de carga imagen de una línea de carga constante, paralela a un cilindro conductor infinito de radio (a) y a una distancia (b), es otra línea del mismo valor y signo contrario situada a una distancia:

$$c = \frac{a^2}{b}$$

El potencial puede expresarse:

$$V(\vec{r}) = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{(x - a^2/b)^2 + y^2}{(x - b)^2 + y^2} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \ln \frac{\rho^2 + (a^2/b)^2 - 2\rho a^2/b \cos\varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos\varphi} \quad (2.8)$$

Su Gradiente:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon} \nabla \ln \frac{\rho^2 + (a^2/b)^2 - 2\rho a^2/b \cos\varphi}{\rho^2 + b^2 - 2\rho b \cos\varphi} \quad (2.9)$$

El campo en coordenadas cilíndricas:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) = -\frac{\partial V}{\partial \rho} \hat{p} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \hat{\varphi} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left(\frac{\rho - b \cos \varphi}{\rho^2 + b^2 + 2\rho b \cos \varphi} - \frac{\rho - a^2/b \cos \varphi}{\rho^2 + (a^2/b)^2 + 2\rho a^2/b \cos \varphi} \right) \hat{p} + \\
&+ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \left(\frac{b\rho \sin \varphi}{\rho^2 + b^2 + 2\rho b \cos \varphi} - \frac{\rho a^2/b \sin \varphi}{\rho^2 + (a^2/b)^2 + 2\rho a^2/b \cos \varphi} \right) \hat{\varphi} \quad (2.10)
\end{aligned}$$

La densidad superficial de carga (superficie exterior al cilindro):

$$\begin{aligned}
\rho_s(\varphi) &= \hat{p} \cdot \epsilon \vec{E}(\vec{r})|_{\rho=a} = \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{a - b \cos \varphi}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} - \frac{a - a^2/b \cos \varphi}{a^2 + (a^2/b)^2 - 2a^3/b \cos \varphi} \right) = \\
&= \frac{\lambda}{2\pi} \left(\frac{a - b \cos \varphi}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi} - \frac{b}{a} \frac{b - a \cos \varphi}{b^2 + a^2 - 2ab \cos \varphi} \right) = \frac{\lambda}{2\pi a} \frac{a^2 - b^2}{b^2 + a^2 - 2ab \cos \varphi}
\end{aligned} \quad (2.11)$$

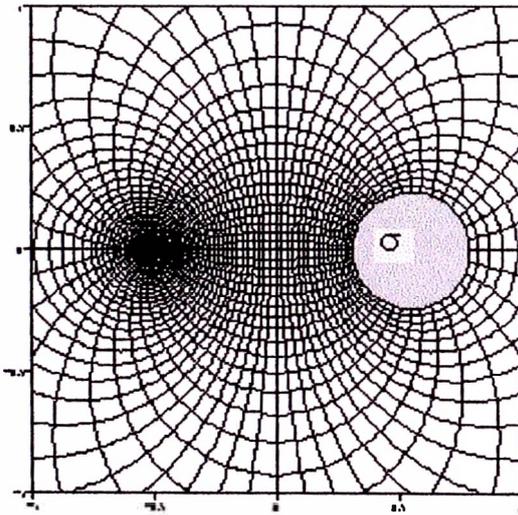


Fig. 2.4 Línea de carga exterior
Al cilindro conductor.

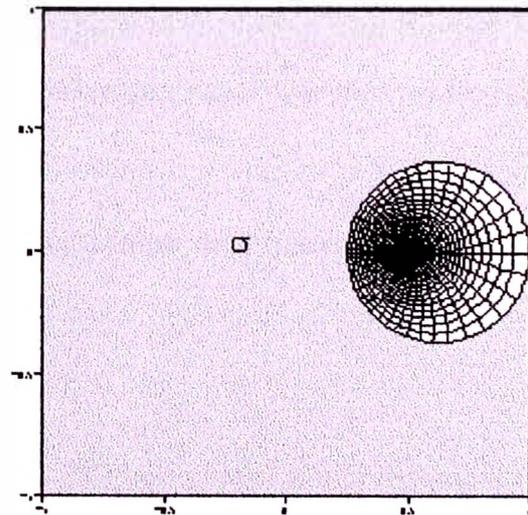


Fig. 2.5 Línea de carga interior
al cilindro conductor.

2.3 Dos conductores Cilíndricos Paralelos de igual carga y de signos contrarios

El campo eléctrico formado por 2 conductores cilíndricos de igual carga

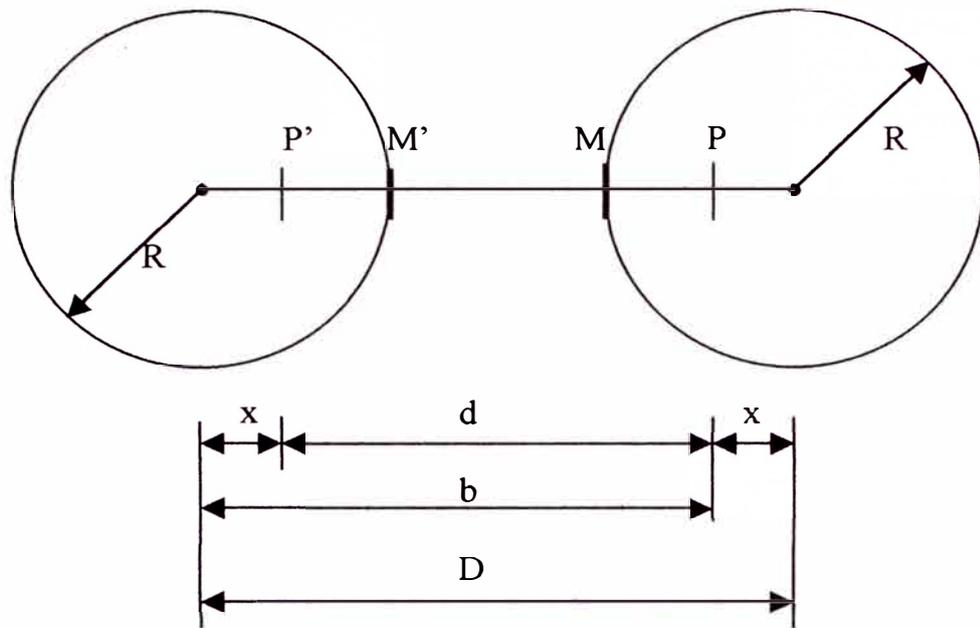


Fig. 2.6 Dos conductores cilíndricos paralelos de igual carga y signos contrarios y sus imágenes.

pero de signos contrarios pueden ser reducidas al campo de 2 líneas cargadas dentro de ellas.

Por simetría la superficie cilíndrica de radio (R) con centro a una distancia (x) a la derecha de la carga lineal $\rho_L(Q_L)$ es equipotencial, sus cargas serán inducidas de magnitud por unidad de longitud (Q_L') y (Q_L) ($Q_L' = -Q_L$) respectivamente.

Si suponemos que las cargas dentro del cilindro son permitidas o dejadas anular exteriormente nada será cambiado. Entonces tendríamos el caso práctico de una línea bialámbrica con radio alámbrico comparable a la distancia entre sus ejes. El campo eléctrico exterior de tales conductores, es el mismo campo que el de dos cargas lineales, situadas en (P) y (P'). Este hecho nos permite determinar fácilmente la capacitancia por unidad de longitud de los dos cilindros.

Determinamos la diferencia de potencial entre los cilindros que corresponden a las cargas por unidad de longitud (Q_L) y ($-Q_L$). Para esto, por simplicidad, tomamos los puntos (M) y (M'), por ser las superficies equipotenciales:

$$V_M - V_{M'} = \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{r_R(b-R)}{r'_R(R-x)} - \frac{Q_L}{2\pi \epsilon_0} L_n \frac{r_R(R-x)}{r'_R(b-R)}$$

$$V_M - V_{M'} = \frac{Q_L}{\pi \epsilon_0} L_n \frac{(b-R)}{(R-x)} \quad (2.12)$$

Siendo la capacitancia por unidad de longitud:

$$C_L = \frac{Q_L}{V_M - V_{M'}}$$

$$= \frac{Q_L}{\frac{Q_L}{\pi \epsilon_0} L_n \left(\frac{b-R}{R-x} \right)}$$

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left[\frac{(b-R)}{(R-x)} \right]} \quad (2.13)$$

De la fig. 2.6 :

$$b = D - x$$

siendo:

$$x = \frac{R^2}{b}$$

De las 2 ecuaciones:

$$b = D - \frac{R^2}{b}$$

Resolviendo esta ecuación para (b):

$$b^2 - Db + R^2 = 0$$

$$b = \frac{D \pm \sqrt{D^2 - 4R^2}}{2}$$

considerando la respuesta corresponde al signo positivo del Radical

$$b = \frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R^2} \quad (2.14)$$

Reemplazando el valor de “x” en la ecuación 2.13 y simplificando:

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left[\frac{(b-R)}{\left(R - \frac{R^2}{b}\right)} \right]}$$

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left(\frac{b}{R} \right)} \quad (2.15)$$

De las ecuaciones (2.14) y (2.15) :

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left(\frac{\frac{D}{2} + \sqrt{\left(\frac{D}{2}\right)^2 - R^2}}{R} \right)}$$

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left(\frac{D}{2R} + \sqrt{\left(\frac{D}{2R}\right)^2 - 1} \right)}$$

siendo $D \gg R$, queda:

$$C_L = \frac{\pi \epsilon_0}{L_n \left(\frac{D}{R} \right)} \quad (2.16)$$

CAPÍTULO III

IMAGEN EN UNA ESFERA CONDUCTORA

Consideramos una esfera conductora de radio “ R ” y a potencial CERO, y una carga puntual (Q) a la distancia (b) del centro de la esfera. ($b > R$)

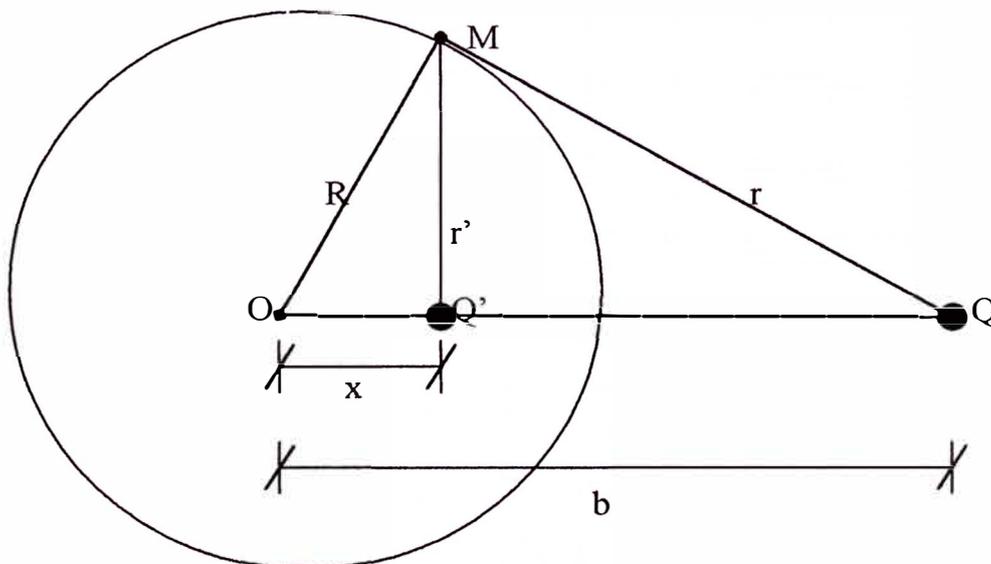


Fig. 3.1 Carga puntual frente a una esfera conductora y su carga imagen.

El sistema es simétrico respecto de la línea (OQ)

En la superficie exterior de la esfera, se han inducido obviamente algunas cargas. Si el campo eléctrico de estas cargas inducidas, pueden ser producidas por un carga puntual (Q') dentro de la esfera, esta será removida. La carga (Q') debe estar ubicada sobre la línea (OQ) a una distancia (x) del centro de la esfera. Los valores de (Q') y de (x) pueden ser deducidos.

Así, la esfera real es removida y la influencia de las cargas inducidas en su superficie se reemplaza por la de la imagen (Q') de la carga puntual (Q), la superficie de la esfera debe quedar a potencial CERO; para que las condiciones del contorno sean las mismas en los dos casos; es decir:

$$\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + \frac{Q'}{4\pi \epsilon_0 r'} = 0$$

y queda:

$$Q' = -Q \left(\frac{r'}{r} \right) \quad (3.1)$$

Si esta ecuación es válida para algún $\left(\frac{r'}{r}\right)$, esta relación debe ser una constante. Esto

es verdadero si los triángulos (OMQ) y ($OQ'M$) son semejantes, de esto se tiene:

$$\frac{r'}{r} = \frac{x}{R} = \frac{R}{b} \quad (3.2)$$

y de (3.1) y (3.2) se tendrán los valores para (Q') y para (x) y serán:

$$\begin{cases} Q' = -Q \left(\frac{R}{b} \right) \\ x = \frac{R^2}{b} \end{cases}$$

Si la esfera está a algún potencial (V), entonces las imágenes de (Q) en la esfera serán (Q') y (Q'') donde:

(Q') es definida como anteriormente (potencial de superficie de esfera cero) y es:

$$\begin{cases} Q' = -Q \left(\frac{R}{b} \right) \\ x = \frac{R^2}{b} \end{cases}$$

(Q'') ubicada en el centro de la esfera y su valor será:

$$Q'' = 4 \pi \epsilon_0 R V \quad (3.3)$$

La carga puntual (Q) y la imagen (Q') hacen que el potencial en la superficie de la esfera sea CERO, y la 2^{da} imagen (Q'') ajusta el potencial de la superficie, al valor deseado (V).

Si en lugar del potencial de la esfera, se conoce su carga total (Q_s).

El campo exterior a la esfera será el mismo, mientras la carga en su superficie es reemplazada por unas pocas cargas puntuales dentro de el. Aplicando la Ley de Gauss, la carga total de todas las imágenes deben ser exactamente iguales a (Q_s). El potencial producido por todas las cargas (carga (Q_s) y carga externa (Q)), debe ser

constante sobre la superficie de la esfera. Esto será logrado si la carga imagen (Q'), está situada a la distancia (x) del centro de la esfera y una carga imagen (Q'') en el centro de la esfera, cuyo valor será:

$$Q'' = Q_s - Q'$$

3.1 Carga Puntual Frente a una Esfera Conductora a Potencial Cero

En un problema de dos cargas de distinto signo, la superficie de potencial cero es una esfera.

Distribuciones de carga frente a una esfera conductora a potencial cero.

En fig.:

$$q = +1$$

$$q = -1.41$$

La superficie de potencial (ϕ) cero es una esfera.

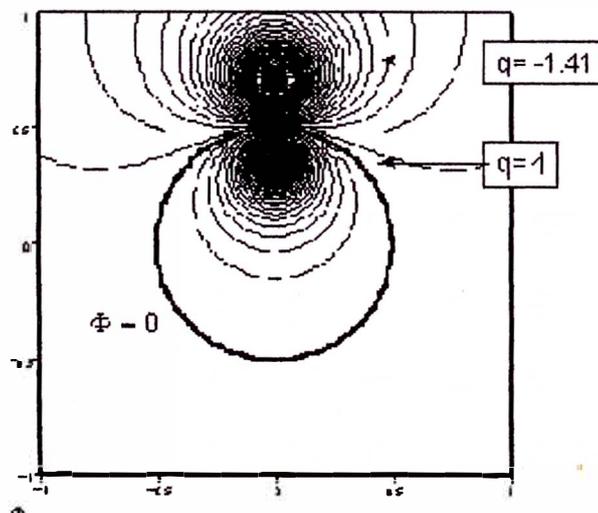
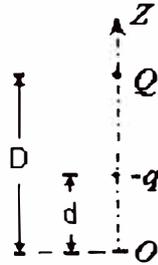


Fig. 3.2 Superficie de potencial cero para dos cargas de distinto signo (esfera).

Deducción:

- Sean (Q) y (-q) dos cargas: $Q > q > 0$
- Escogiendo el origen de coordenadas de forma que:



$$\vec{r}_Q = D\vec{k}$$

$$\vec{r}_{-q} = d\vec{k} = D\left(\frac{q}{Q}\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{D} = \left(\frac{Q}{q}\right)^2$$

- El potencial es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left(\frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-D)^2}} - \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - [D(q/Q)^2])^2}} \right)$$

- La superficie con $V=0$ tendrá por ecuación:

$$\frac{Q^2}{q^2}(x^2 + y^2 + (z - [D(q/Q)^2])^2) = x^2 + y^2 + (z - D)^2$$

$$\frac{Q^2}{q^2}x^2 + \frac{Q^2}{q^2}y^2 + \frac{Q^2}{q^2}z - 2zD + D\frac{q^2}{Q^2} = x^2 + y^2 + z^2 - 2zD + D^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1 - q^2/Q^2}{Q^2/q^2 - 1} D^2 = \frac{q^2(Q^2 - q^2)}{Q^2(Q^2 - q^2)} D^2 = \left(\frac{q}{Q}D\right)^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{q}{Q} D\right)^2 \quad (3.4)$$

que es una esfera centrada en el origen.

Calculo de \vec{E}

- Suponiendo que la carga (Q) esta fuera de la esfera:

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{\sqrt{r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta}} - \frac{a}{\sqrt{D^2 r^2 + a^4 - 2ra^2 D \cos \theta}} \right)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{u}_\theta =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{r - D \cos \theta}{[r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta]^{3/2}} - \frac{a(D^2 r - a^2 D \cos \theta)}{[D^2 r^2 + a^4 - 2ra^2 D \cos \theta]^{3/2}} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{[r^2 + D^2 - 2rD \cos \theta]^{3/2}} - \frac{a^3}{[D^2 r^2 + a^4 - 2ra^2 D \cos \theta]^{3/2}} \right) D \sin \theta \vec{u}_\theta \quad (3.5)$$

- Densidad de carga en la superficie de la esfera:

$$\rho_s |_{r=a} = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) |_{r=a} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{D^2 - a^2}{a} \frac{1}{[a^2 + D^2 - 2aD \cos \theta]^{3/2}} \quad (3.6)$$

Equipotenciales y líneas de campo de una carga puntual frente a una esfera a potencial cero.

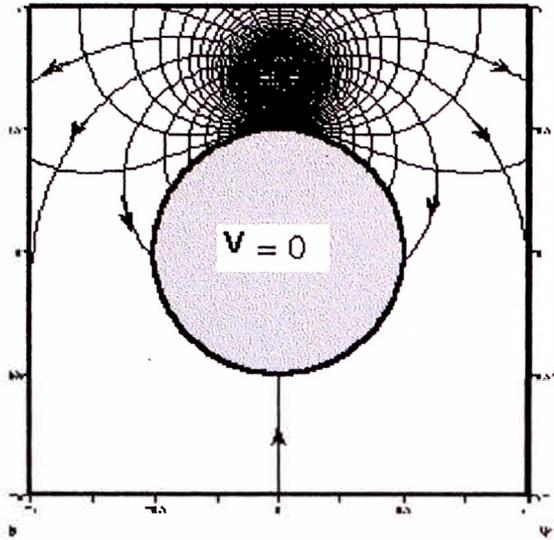


Fig. 3.3 Carga fuera de la esfera.

Líneas de Campo

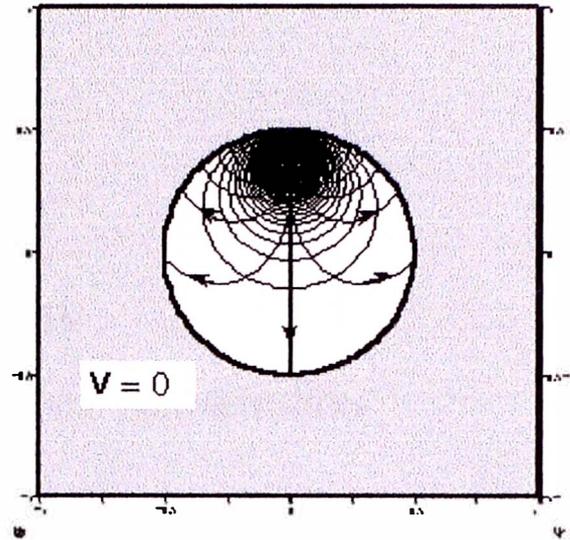


Fig. 3.4 Carga dentro de la esfera.

Líneas de Campo.

CAPÍTULO IV

EFFECTO CORONA EN LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

Descargas en Medios Gaseosos. Generación y Transporte de Cargas Eléctricas en Gases.

El estudio experimental de la conducción de la electricidad en los gases necesitó no sólo disponer de máquinas eléctricas que suministraran de forma continua una diferencia de potencial eléctrico, como ocurre básicamente en el caso de sólidos y líquidos, sino también de técnicas de evacuación que permitan controlar el contenido de los tubos que incorporan los electrodos para analizar el paso de la corriente a través del gas a una presión que también hay que controlar y medir.

Estas razones explican que el estudio de las propiedades eléctricas de la materia para el caso de gases se desarrollase a comienzos del siglo XIX con más dificultad. Pero a diferencia de los sólidos y de los líquidos se encontraron efectos visuales que

explican el interés generalizado, pese a los problemas prácticos para la reproducción de resultados.

Al aplicar entre los electrodos una diferencia de potencial pequeña, y en consecuencia un campo eléctrico débil, se detecta que la corriente que circula es muy baja e incluso llega un momento en que no varía al incrementar el voltaje, produciéndose un fenómeno de saturación. Pero si continuamos aumentando el voltaje se produce un incremento brusco de la corriente. Este tipo de comportamiento es evidentemente no óhmico.

En los gases la condición que implica el paso de una corriente elevada se conoce como el fenómeno de descarga o "ruptura" eléctrica del gas: paso de un comportamiento no conductor (baja corriente) a conductor. Si se incrementa la corriente que circula se llega a una situación en la que entre los electrodos aparecen distintos espacios o zonas emisoras de luz y oscuras. Se habla entonces de descargas luminiscentes ("glow"), siendo el color de las diversas zonas características del gas que ocupa el tubo.

La complejidad del fenómeno de descarga se debe a los muchos factores de los que depende, pues no sólo están implicados el gas, su composición y presión, sino también los electrodos, geometría y composición, además de las magnitudes eléctricas como son la diferencia de potencial y la corriente. El gas puede pasar a un estado conductor si se presentan mecanismos que incrementan el número de especies cargadas cuyo movimiento entre los electrodos implica un paso de corriente. El

mecanismo más significativo es el impacto de los electrones acelerados por el campo existente en el espacio interelectrónico con los átomos y moléculas que forman el gas.

Esta interacción puede producir la ionización y entonces tendremos, en el caso más general, que se produce un electrón y un ión positivo que al ser arrastrados por el campo transportan carga eléctrica entre los electrodos en una cuantía adicional a la que corresponde al gas sin este proceso interno consecuencia de la aplicación externa de una diferencia de potencial entre los electrodos. Este mecanismo puede producirse en forma de una avalancha lo que justifica que la transición entre los dos estados se produzca de una forma relativamente brusca.

También puede suceder que la interacción origine la excitación de los átomos y moléculas del gas y en consecuencia se explica la existencia de emisiones de luz que acompañan al proceso de desexcitación, esto es de retorno al estado inicial, menos energético, después del impacto de los electrones energéticos.

En la mayoría de los gases si tenemos que explicar la existencia de electrones libres por la ionización intrínseca correspondiente a la temperatura del sistema, las cantidades son tan pequeñas que hay que introducir algún mecanismo extrínseco, como pueden ser las radiaciones energéticas a las que se encuentra sometido el tubo de descarga. Así se trata de explicar la existencia de un comportamiento de saturación que correspondería a la captación de todos los electrones generados por el

agente externo. Esta situación experimental es el fundamento de algunos de los medidores de radiación nuclear.

Otro mecanismo que fue introducido desde los primeros intentos de explicación de los resultados experimentales es lo que se conoce como emisión de electrones en el bombardeo del cátodo por los iones positivos acelerados por el campo. De esta forma pueden ser procesos internos al gas lo que explicaría la existencia de una cantidad extra de electrones que en su trayecto desde el cátodo al ánodo daría lugar a los procesos de ionización y de excitación de las partículas neutras que constituyen la mayor parte de las especies presentes en el gas.

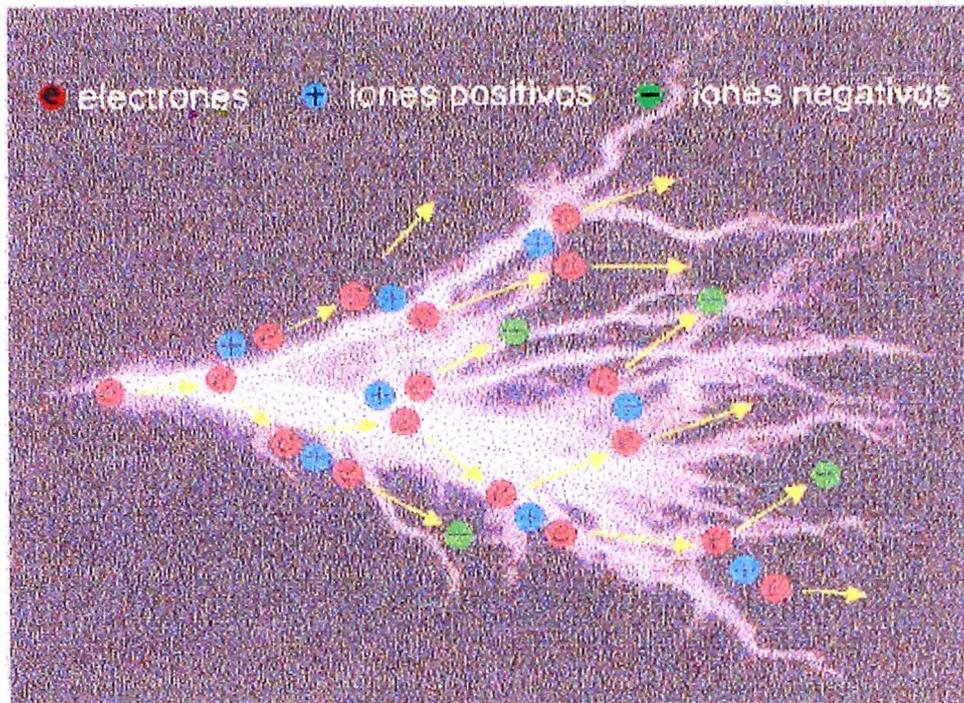
Las medidas experimentales que se realizaron de la distribución del potencial eléctrico entre los electrodos mostraron que se producía una mayor caída en la zona próxima al cátodo, el espacio oscuro de Crookes, que en la zona contigua al ánodo conocida como columna positiva. En esta última el potencial era prácticamente constante lo que implicaba la ausencia de carga neta, situación que se da, para iones monopositivos, cuando las concentraciones iónica y electrónica coinciden.

CAPÍTULO V

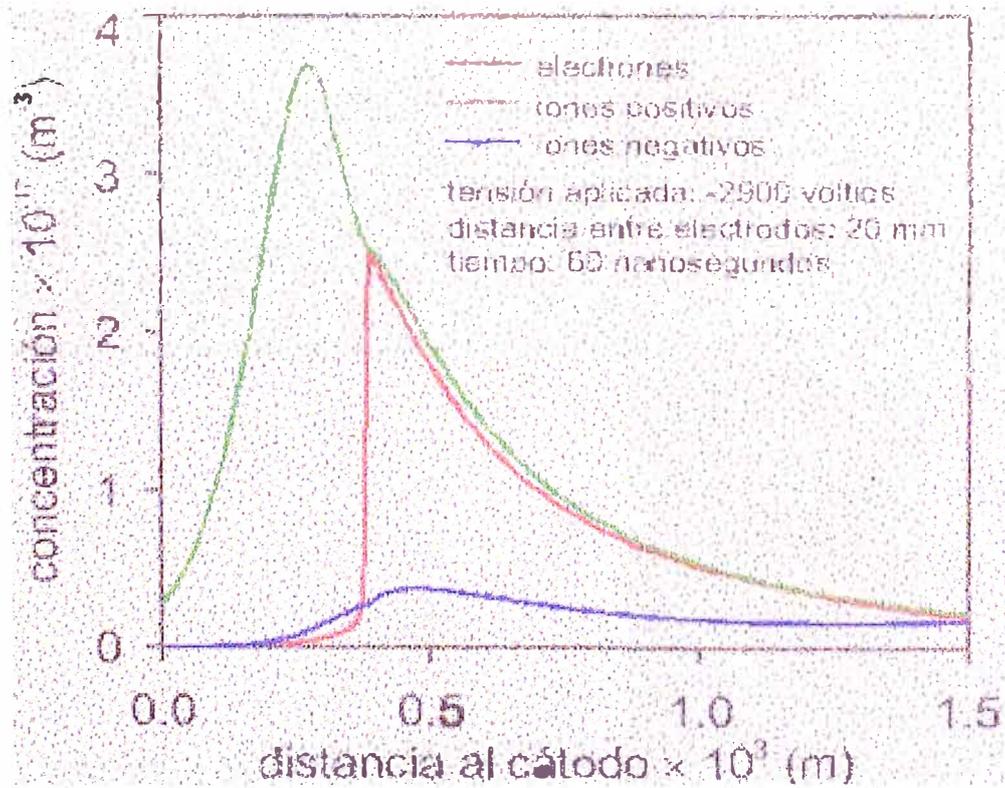
FÍSICO–QUÍMICA DE LAS DESCARGAS ELÉCTRICAS EN GASES

5.1 Física de la Descarga

Al aplicar un campo eléctrico intenso, los electrones libres presentes en el gas son acelerados e ionizan por emisión de campo las moléculas del gas, generando iones positivos y negativos. La distribución del campo eléctrico y las densidades de las especies se determinan mediante la simulación numérica de la descarga.



(a)



(b)

Fig. 5.1 (a) y (b). Simulación numérica de un pulso de Trichel entre una esfera y un plano.

5.2 Química relacionada con las Descargas

La descarga eléctrica actúa como catalizador de numerosas reacciones químicas. Ejemplo de ello es la generación de ozono mediante descarga barrera y corona y la destrucción de gases orgánicos tóxicos o gases que favorecen el efecto invernadero.

Descarga Corona en el oxígeno a Presión Atmosférica:

- Simulación Numérica: Se consideraron siete especies y treinta ocho reacciones químicas.
- Montaje Experimental. Radio del hilo: 0.005 cm, radio del cilindro: 3.77 cm, tensión aplicada: -4250 voltios, corriente medida: 3.98×10^{-5} A/m.

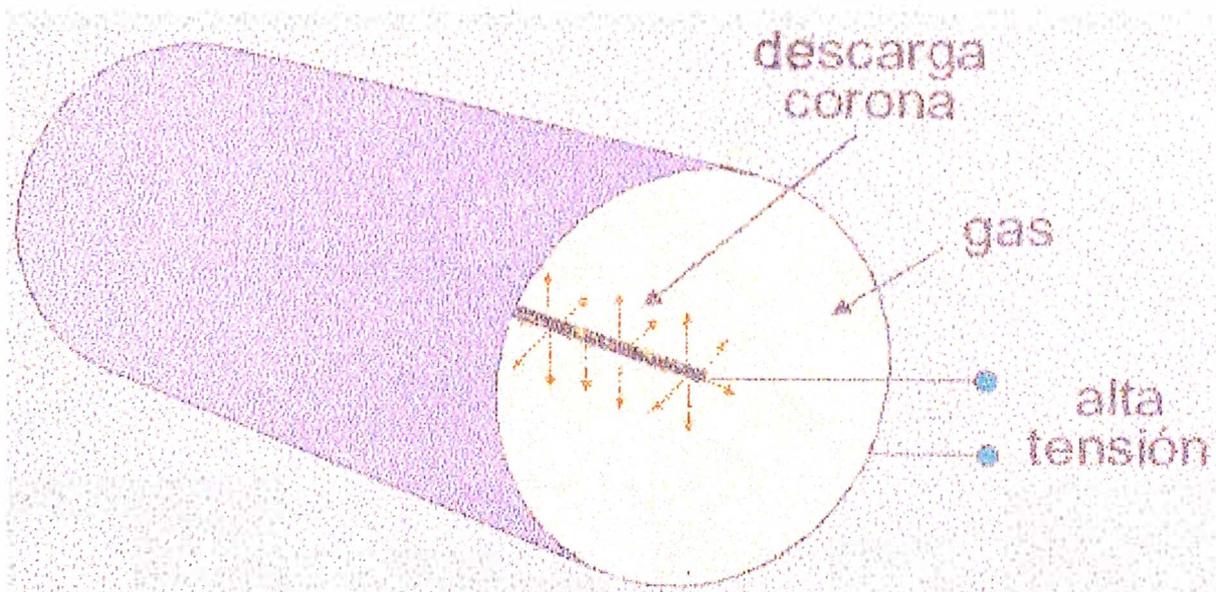


Fig. 5.2 Montaje experimental para una descarga en alta tensión.

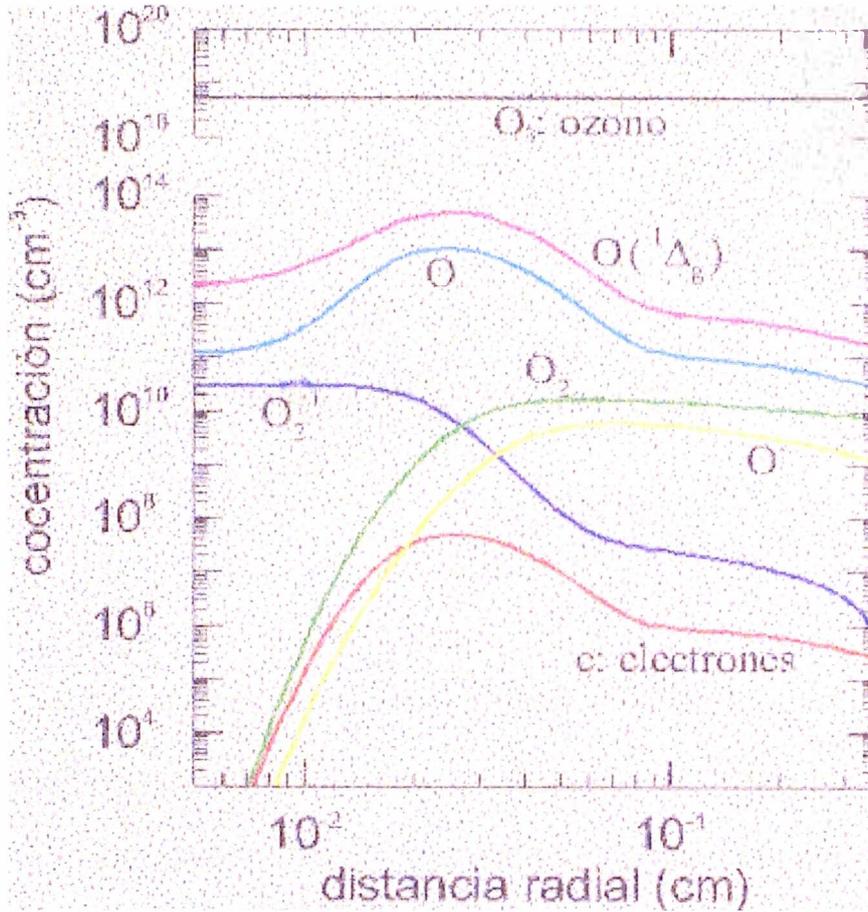
Concentración de las especies generadas durante la descarga

Fig. 5.3 Concentración vs. Distancia radial en descargas de alta tensión.

CAPÍTULO VI

DESCARGA EN UN GAS

Supongamos que aumentamos gradualmente la diferencia de potencial entre los electrodos, partiendo de cero. A causa de algunos pocos iones formados por los rayos cósmicos o por otros medios, el gas será muy ligeramente conductor incluso a potenciales bajos.

Al principio la corriente eléctrica es muy baja, si conectáramos un micro amperímetro (50 microamper de fondo de escala) en serie con el tubo no llegaríamos a detectar nada, para el estudio de estas corrientes se utiliza instrumentos más sensibles denominados electrómetros, a medida que aumentamos la tensión se llega a un punto que se alcanza la tensión crítica, en ese momento la corriente aumenta muy rápidamente mientras que la tensión disminuye (resistencia negativa). El gas del interior del tubo se hace luminoso, de donde deriva el término descarga luminiscente.

Se observa una notable diferencia en los aspectos del gas junto al cátodo y al ánodo, una vez que la descarga comienza, la forma depende de la presión del gas dentro del tubo y cambia a medida que la disminuimos.

La superficie del cátodo se recubre de una capa delgada de gas luminoso llamada vaina catódica. Inmediatamente después sigue una región relativamente no luminosa llamada espacio oscuro de Crookes. Después de este espacio hay una Segunda región luminosa, azul si la descarga es el aire, llamada luz negativa.

Siguiendo a esta hay otra región casi oscura llamada espacio oscuro de Faraday y después la columna positiva o plasma que ocupa el resto del tubo. La columna positiva esta a veces dividida en partes alternativamente luminosas y no luminosas llamadas estratificaciones.

La descarga se hace auto sostenida a causa, principalmente, de los procesos que tienen lugar en el espacio oscuro de Crookes y en la superficie del cátodo.

Los iones positivos formados en el espacio oscuro de Crookes por los electrones procedentes del cátodo, son acelerados hacia el cátodo y cuando golpean su superficie pueden quedar en libertad electrones secundarios. Si cada electrón emitido produce suficientes iones positivos para liberar otro electrón secundario produce un estado estacionario y la descarga es auto sostenida.

Los dieléctricos gaseosos, constituyen aislamientos autorregenerativos, y en los cuales ocurren procesos de descarga, y llegará a través de ellos un Arco Eléctrico. Además de los esfuerzos de tensión a los que está sometido, la falla que pueda ocurrir a través del aislamiento gaseoso, depende de las condiciones del medio:

De la configuración de la L.T.

De las componentes de la instalación

De las condiciones de operación del circuito de falla.

6.1 Reproducción de Descargas

Se efectúa en los laboratorios, utilizando tipos de descarga, con la finalidad de su reproducción a Escala, y poder conocer su desarrollo, la forma de controlarlos, controlando y diversificando las condiciones internas del circuito, y las posibles aplicaciones prácticas de estas descargas.

Son procesos de muy corta duración, del orden de los cientos de μseg , teniendo similar aplicación para tensiones continuas o alternas.

6.1.1 Características Tensión-Corriente:

Los parámetros principales presentes en los procesos de descarga en los tubos de prueba, en los ensayos de los laboratorios son:

- La naturaleza y presión del gas.
- El tipo de tensión aplicada.
- Geometría de los electrodos y del tubo de prueba
- Constantes dieléctricas del circuito exterior.

Las descargas pueden iniciarse de dos maneras:

- Disminuyendo la resistencia del circuito.
- Aumentando la tensión aplicada.

De estas pruebas se puede elaborar la curva: “*Característica Estática*” de la relación tensión-corriente y en la cual se pueden identificar cuatro tramos

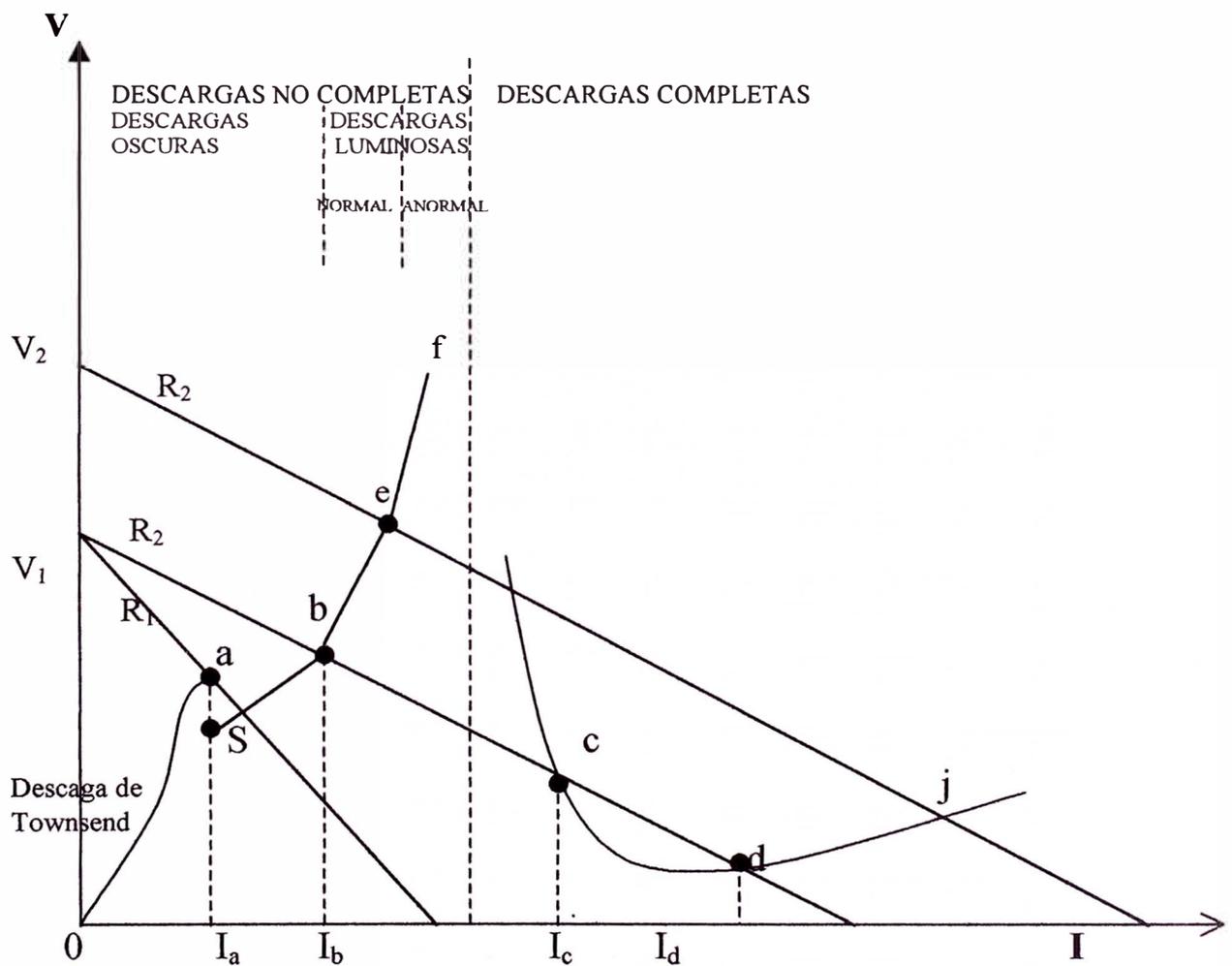


Fig. 6.1 Característica Estática⁽¹⁾

⁽¹⁾ Tomado de: “Alta Tensión y Técnica de Prueba “Msc. Justo Yanque M.”

1^{er} Tramo:

De 0 → a: Zona de Descargas de TOWNSEND, llegándose al punto (a) de estabilización, llegándose hasta la zona GEIGER.

2^{do} Tramo:

De a → b: Zona de descargas Luminiscentes Normales.

3^{er} Tramo:

De b → e: Zona de descargas Luminiscentes Anormales, muy sensible al cambio de valores de Tensión : Zona de Transición Inestable.

4^{to} Tramo :

De c → j: Zona de descargas de Baja Tensión y gran Potencia, los Arcos Eléctricos evolucionan hacia zona de estabilidad.

6.1.2 Descargas Progresivas

Las características de descarga con puerta positiva (+) y de descarga con puerta negativa(-), en un sistema de electrodos Punta-Plano, con fuente de alimentación de corriente continua son parecidas en cuanto a la secuencia del proceso, guardando sus singularidades propias cada una de las curvas representativas.

6.1.3 Características de PASHEN de las Descargas Gaseosas

Pashen estableció que la **Tensión Disruptiva** de un gas, bajo un Campo Uniforme (\bar{E}) es función del producto de la Presión del Gas (P) y de la Longitud de la Brecha (d), y demostró que existe un valor mínimo (p.d), a partir del cual:

La Tensión Disruptiva (V) crece al aumentar la presión del Gas (ó Densidad Relativa) o bien en forma opuesta al disminuir la Presión hacia el vacío (a menos de 5.7 torr.mm).

El comportamiento dieléctrico del Aire Atmosférico libre se sitúa en una parte muy reducida de la Zona de perforación larga (Parte creciente de la curva), donde la disminución de la Presión Barométrica o la distancia de electrodos conduce a tensiones disruptivas más bajas.

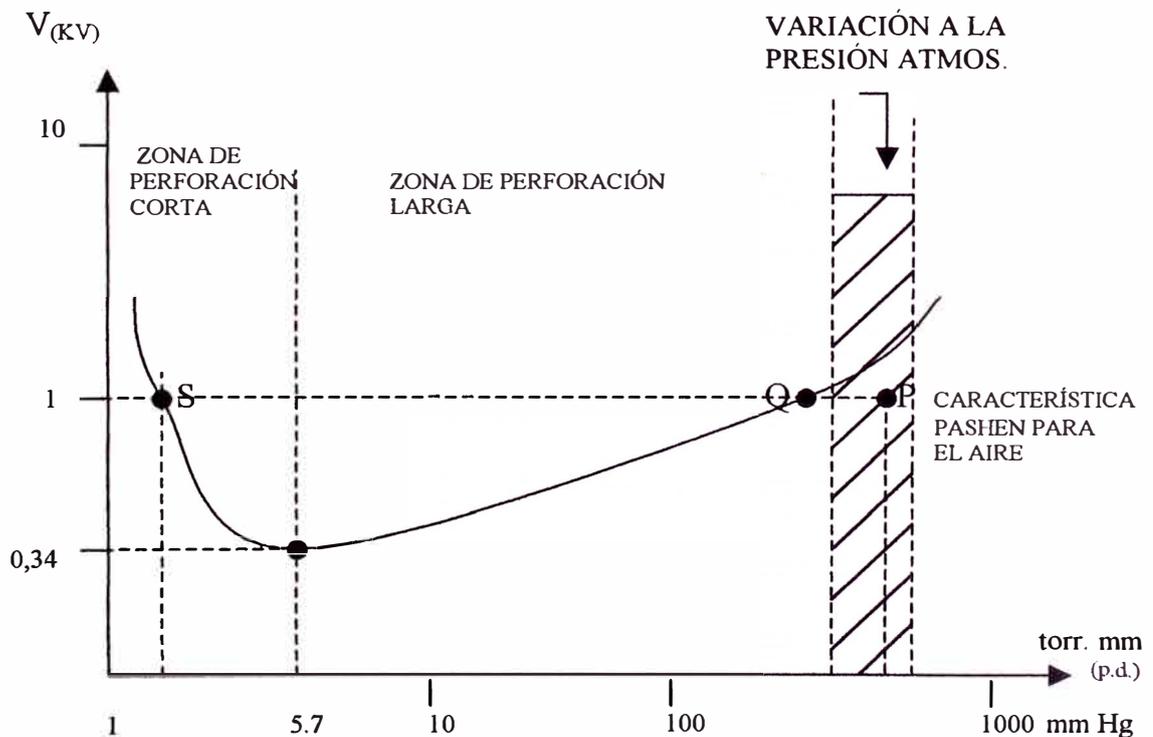


Fig. 6.2 Características de Paschen de las descargas gaseosas (2).

- **La Ley de Pashen** “no” se aplica con precisión bajo carga espacial por interferencias en las tensiones de Encebamiento por chispa.

6.2 Ionización – Tipos

La ionización es el cambio de estado eléctrico de un átomo neutro en iones con carga positiva (+) y/o negativa (-), la que se produce — por absorción de energía por parte del átomo. –Así tenemos los diferentes tipos de ionización:

Ionización Por choque

Ionización Por energía radiante (fotoionización, Rayos x, etc.)

Ionización Por Agitación Térmica.

La presencia de campo eléctrico, o de fuentes externas de energía facilita el movimiento de los iones cargados de electricidad. Los que se formaron por colisión, el exceso de energía se irradia en forma de luz, calor, ruido, etc.

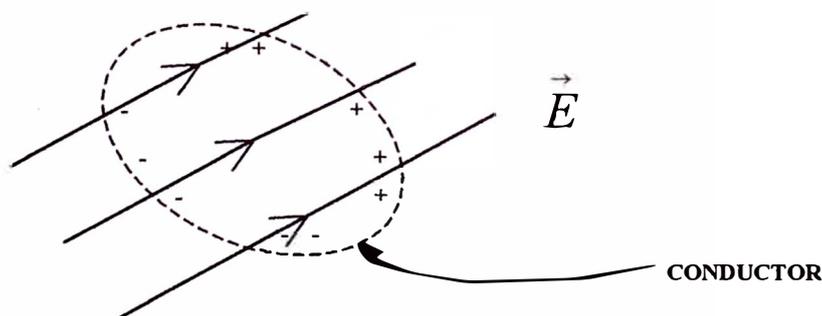


Fig. 6.3 Distribución de carga debido a un campo eléctrico.

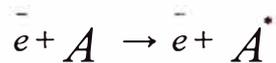
6.2.1 Mecanismos Elementales en el Proceso Corona

La ionización ocurre generalmente por choque, y está asociado al principio de conservación de Energía. La colisión puede ser Elástica e Inelástica. Estos tipos de colisión permiten explicar los fenómenos que participan en el Efecto Corona a partir de Electrones y fotones.

Excitación Atómica

Un átomo excitado puede formarse a partir de un átomo neutro de dos formas:

- Por choque con un electrón:



- Por absorción de un Fotón



Donde:

ν : Frecuencia del Fotón

h : Constante de Plank ($R=6.625 \cdot 10^{-34}$)

$h\nu$: Energía del fotón

Este fenómeno participa en la Corona Inicial.

Ionización por Choque

Se produce iones positivos (+) y electrones (-).

Los electrones libres acelerados por el Campo Eléctrico, colisionan y crean avalanchas, este fenómeno es fundamental en el proceso corona.

Fotoionización

Las partículas gaseosas involucradas absorben cada una un FOTÓN con energía mayor o igual que la energía de Ionización; complementa el proceso corona.

CAPÍTULO VII

EFFECTO CORONA

El parámetro que interviene es el gradiente de Potencial (E) en la superficie de los conductores en una Línea de Transmisión eléctrica.

El conductor puede asimilarse como un cilindro circular uniforme con una distribución homogénea de cargas de densidad (σ) y con carga (Q) por unidad de longitud.

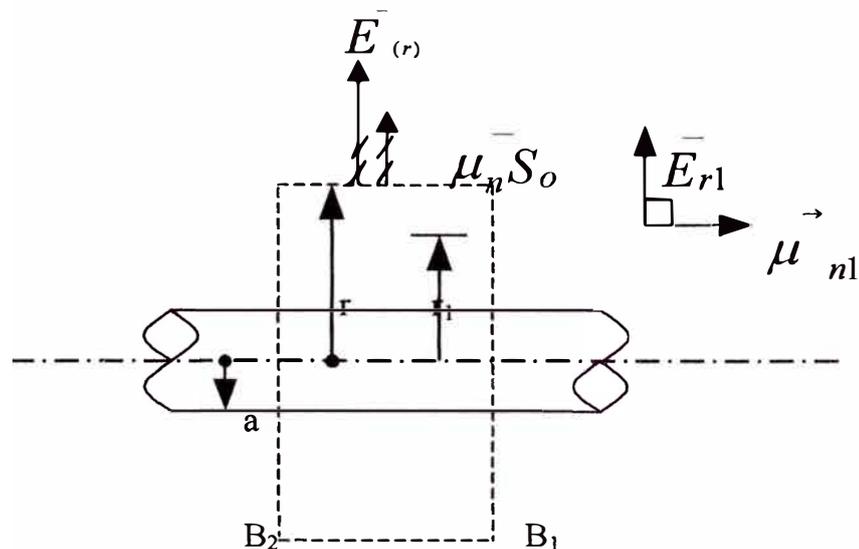


Fig. 7.1 Superficie Gaussiana en el caso de una línea cargada.

El Potencial y el Gradiente de Potencial lo calculamos teniendo en cuenta que por Simetría:

- Las líneas de campo eléctrico son radiales.
- El vector intensidad de campo eléctrico (\vec{E}) sólo es función de la distancia (r) del punto a considerarse al eje del cilindro.

Consideremos como superficie Gaussiana a un cilindro imaginario de radio (r), coaxial al conductor, y de altura (h).

- En las bases; B_1 y B_2 :

A la distancia (r_1) del eje del conductor, $\vec{E}(r_1)$ y $d\vec{s}$ son perpendiculares entre sí, entonces:

$$\oint_s \vec{E} * d\vec{s} = 0$$

- En las superficies laterales del cilindro:

Los vectores $\vec{E}(r)$ y $d\vec{s}$ son paralelos, y ambos perpendiculares a la superficie gaussiana. Usando la Ley de Gauss:

$$\oint_s \vec{E} * d\vec{s} = \int E(r) ds = \frac{Q_{TOTAL-ENCERRADA}}{\epsilon_0}$$

$$E(r) (2\pi rh) = \frac{(2\pi a)h\sigma}{\epsilon}$$

Si $h=1$:

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon r} \quad (7.1)$$

Donde:

Q : Carga por unidad de longitud del cilindro.

$$E(r) = 0 ; r < a$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \mathcal{E}_r ; (\mathcal{E}_r = 1 \text{ aire y } \mathcal{E}_0 = \frac{1}{36\pi * 10^9} \frac{\text{faradio}}{\text{m}} (\text{vacío}))$$

A condiciones normales el aislante de los conductores se perfora con valor de \bar{E} superior a 30 KV/cm (cresta) (ó 21.21 KV/cm (eficaz)), a este valor se le conoce como GRADIENTE DISRUPTIVO.

En el punto (M) a la distancia (r) ($r > a$) desde el eje del cilindro, con respecto a un punto de referencia a una distancia r_A del eje, el potencial es: (De (7.1)).

$$V_{(r)} = \int_r^{r_R} E(r) \mu_1 * d\vec{L} = \int_r^{r_R} E(r) dr = \int_r^{r_R} \frac{Q}{2\pi\mathcal{E}} dr$$

$$V_{(r)} = \frac{Q}{2\pi\mathcal{E}} \text{Ln}\left(\frac{r_R}{r}\right) \quad (7.2)$$

que es una función independiente del radio (a) del cilindro. En particular para ($r=a$):

$$V_{(a)} = \frac{Q}{2\pi\mathcal{E}} \text{Ln}\left(\frac{r_R}{a}\right)$$

Es decir: el potencial en la superficie de un conductor de radio (r) debido a la carga (Q) por unidad de longitud que conduce con referencia a un punto distante (r_R) del eje del conductor es:

$$V = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{r_R}{r}\right)$$

7.1 Caso de Línea de Transmisión

Para el caso de un conductor largo que conduce la carga (Q) y corre paralelo a un plano conductor, en ausencia de un campo exterior ($E_0=0$), hallaremos el potencial y su gradiente en:

- Un punto (M) situado en un plano perpendicular al dado, y que pasa por el eje del conductor (debajo de este); y el Potencial en la superficie del conductor en (a).
- En un punto (b) cualquiera del espacio y en la superficie del conductor que pasa por este punto.

Utilizando el MÉTODO DE IMÁGENES:

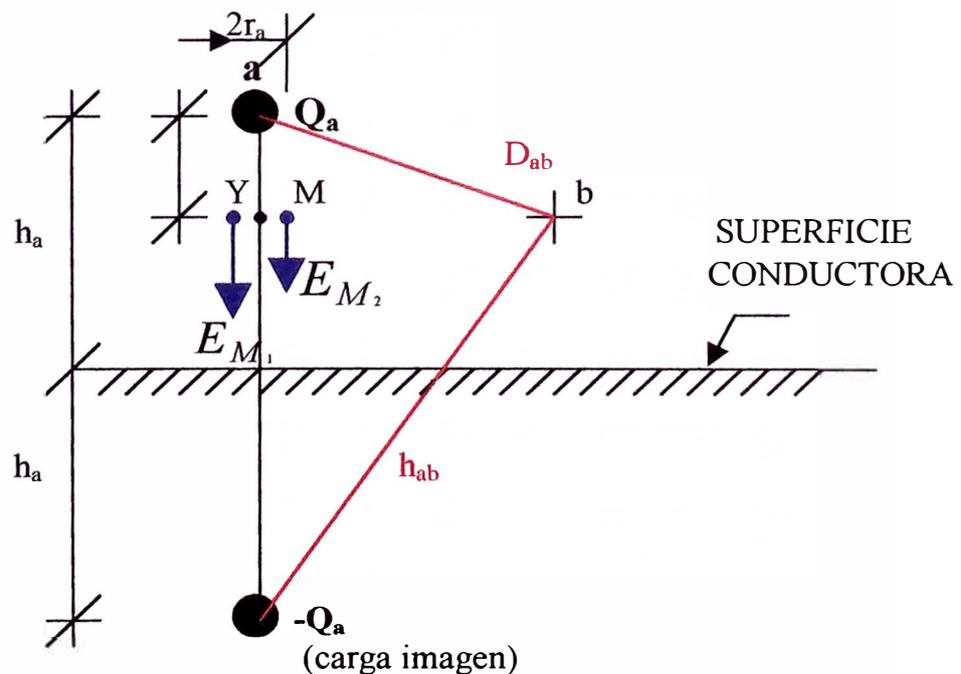


Fig. 7.2 Potencial y gradiente en un punto cualquiera debido a una línea cargada y a su imagen.

Para el punto (M):

La intensidad de campo es:

$$\begin{aligned}
 E_M &= E_{M_1} - E_{M_2} \\
 &= \frac{Q_a}{2\pi\epsilon y} - \frac{-Q_a}{2\pi\epsilon(1-y)} \\
 E_M &= \frac{Q_a}{2\pi\epsilon} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2h_a - y} \right) \quad (7.3)
 \end{aligned}$$

El Potencial en la superficie del conductor (De (7.3))

$$U = \int E_\mu dy$$

De la ecuación (7.3):

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{Q_a}{2\pi\epsilon} \int_a^{2h_a - r_a} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{2h_a - y} \right) dy \\
 U &= \frac{Q_a}{2\pi\epsilon} \left(2L_n \frac{2h_a - r_a}{r_a} \right) \quad (7.4)
 \end{aligned}$$

Considerando: $2h_a \gg r_a$

$$U_N = \frac{U}{2}$$

Se tiene:

$$U_a = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_a}{r_a} \right) Q_a \quad (7.5)$$

El factor:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_a}{r_a} = P_{aa} \quad (7.6)$$

Tiene la forma de un elemento de la diagonal principal de la matriz de coeficientes de potencial de Maxwell (P).

Multiplicando la ecuación (7.5) por $\frac{r_a}{r_a}$ y de la ecuación (7.1)

$$U_a = r_a \left(\frac{Q_a}{2\pi r_a \epsilon} \right) L_n \frac{2h_a}{r_a}$$

$$U_a = r_a E r_a L_n \frac{2h_a}{r_a}$$

Finalmente se tiene:

$$E_a = \frac{U_a}{r_a L_n \frac{2h_a}{r_a}}$$

Que es el valor del Campo electrostático en términos de su potencial y que es perpendicular a la superficie del conductor en (a).

La capacitancia por unidad de longitud de un conductor único por fase es:

$$\left(U = \frac{Q}{C} \right)$$

De (7.6)

$$U_a = \frac{Q_a}{C_a} = \frac{2Q_a}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_a}{r_a}$$

$$C_a = \frac{\pi\epsilon}{L_n \frac{2h_a}{r_a}} \text{ ; siendo: } \epsilon = \epsilon_0 \epsilon = (1) \left(\frac{1}{36\pi 10^9} \right) \frac{\text{Farad}}{\text{m}} \text{ (constante dieléctrica del$$

aire)

$$C_a = \frac{0.02777}{L_n \frac{2h_a}{r_a}} \mu F/Km$$

Para un punto (b) cualquiera del espacio:(De (7.2))

$$U_b = \left(\frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} \right) Q_a \quad (7.7)$$

El factor:

$$\frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} = P_{ab} \quad ; \quad a \neq b \quad (7.8)$$

Tiene la forma del elemento de la matriz de coeficientes de potencial de Maxwell que no están en la diagonal principal.

Donde: D_{ab} : Distancia entre el conductor (a) y el punto (b).

h_{ab} : Distancia entre el punto (b) y la imagen del conductor (a).

Línea de dos Conductores

Si en el punto (b) existiese un conductor de radio (r_b), con carga (Q_b) que corre paralelo al conductor (a), el potencial en la superficie de este conductor será, aplicando el principio de superposición, al potencial dado por la ecuación (7.7) debe adicionarse el potencial creado por la misma carga (Q_b) y por su imagen ($-Q_b$), es decir:

$$U_b = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} L_n \left(\frac{h_{ab}}{D_{ab}} \right) Q_a + \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \left(\frac{2h_b}{r_b} \right) Q_b \quad (7.9)$$

Similarmente, el potencial en la superficie del conductor en (a) con la presencia de este nuevo conductor cargado en (b), será (adicionando el potencial creado por la carga (Q_b) y su imagen ($-Q_b$) sobre el conductor en (a).

$$U_a = \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \left(\frac{2h_a}{r_a} \right) Q_a + \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} Q_b \quad (7.10)$$

Las ecuaciones (7.9) y (7.10) puede expresarse matricialmente:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_a}{r_a} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} \\ \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \left(\frac{h_{ab}}{D_{ab}} \right) & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_b}{r_b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \end{bmatrix}$$

Línea Trifásica

Si en punto (C) diferente de (a) y (b) se tiene un conductor paralelo a los anteriores y que lleva la carga (Q_c), los potenciales de la superficie de los conductores en función de sus respectivas cargas será:

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_a}{r_a} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ac}}{D_{ac}} \\ \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2h_b}{r_b} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{bc}}{D_{bc}} \\ \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{ca}}{D_{ca}} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{h_{cb}}{D_{cb}} & \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2Hc}{r_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (7.11)$$

Es decir:

$$V = PQ$$

Donde:

Matriz columna de tensión

$$V = \begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix}$$

Matriz columna de cargas

$$Q = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix}$$

Matriz cuadrada de coeficientes de potencial de Maxwell

$$P = [\rho_{ij}] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2hi}{r_i} = 18 \times 10^9 L_n \frac{2hi}{r_i}; i = j = a, b, c \\ \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{hij}{Dij} = 18 \times 10^9 L_n \frac{hij}{Dij}; i \neq j; i, j = a, b, c \end{cases}$$

Esta matriz es simétrica.

Generalizando: Para una línea de “n” conductores paralelos frente a un plano conductor, la ecuación matricial:

$$V = PQ$$

Cada una de las matrices son:

$$\text{Matriz de tensiones } V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} ; \quad \text{Matriz de cargas } Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}$$

Matriz de Maxwell:

$$P = [\rho_{ij}] = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{2hi}{r_i} = 18 \times 10^9 L_n \frac{2hi}{r_i}; i = j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{1}{2\pi\epsilon} L_n \frac{hij}{Dij} = 18 \times 10^9 L_n \frac{hij}{Dij}; i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Para hallar la carga en cada conductor, conociendo sus tensiones:

$$Q = P^{-1}V$$

Para una línea de transmisión trifásica:

Se conoce:

$$V_a = V \angle 0^\circ \text{ kv}$$

$$V_b = V \angle -120^\circ \text{ kv}$$

$$V_c = V \angle 120^\circ \text{ kv}$$

También: $r_a = r_b = r_c = r$

Se hallará: Q_a, Q_b, Q_c ; o sea:

$$\begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \times 10^9 L_n \frac{2h_a}{r} & \dots & 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{ab}}{D_{ab}} & 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{ac}}{D_{ac}} \\ 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{ba}}{D_{ba}} & \dots & 18 \times 10^9 L_n \frac{2h_b}{r} & \dots & 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{bc}}{D_{bc}} \\ 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{ca}}{D_{ca}} & \dots & 18 \times 10^9 L_n \frac{h_{ab}}{D_{ca}} & 18 \times 10^9 L_n \frac{2h_c}{r_c} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V \angle 0^\circ \\ V \angle -120^\circ \\ V \angle 120^\circ \end{bmatrix} \quad (7.12)$$

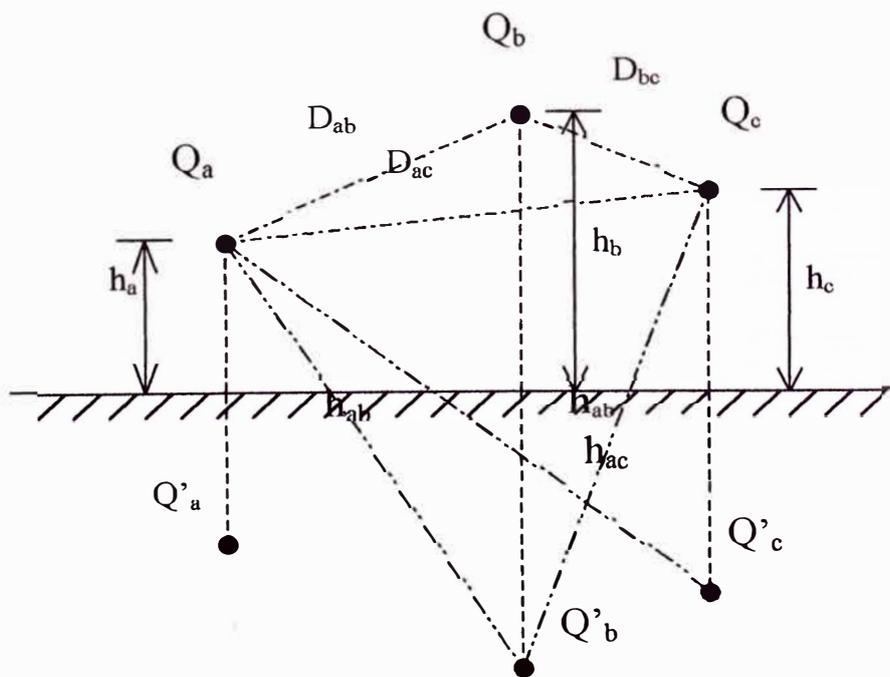


Fig. 7.3 Línea trifásica y sus imágenes. Distancias consideradas en la matriz de Maxwell.

El Gradiente de Potencial Superficial en cada conductor es:

$$E_i = \frac{Q_i}{2\pi \epsilon_0 r} = 18 \times 10^9 \frac{Q_i}{r}$$

Donde: $i = a, b, c.$

7.2 Casos Especiales

Conductores de Gran Sección

El perfil de las hebras ocasiona fluctuaciones de Gradiente Superficial (E) por lo que el cálculo de dicho parámetro, se considera la sección recta de idéntico diámetro exterior.

Conductores Fasciculados

En el caso de múltiples conductores por fase se debe considerar el Radio Medio Geométrico (RMG), que se define como el radio de un conductor ficticio que tiene idéntica capacitancia que las otras fases de la línea.

Esta configuración de las fases de una línea, permite controlar el Gradiente Superficial de Potencial (E), reduciendo la inductancia del conductor y aumentando su capacidad de transporte de Energía.

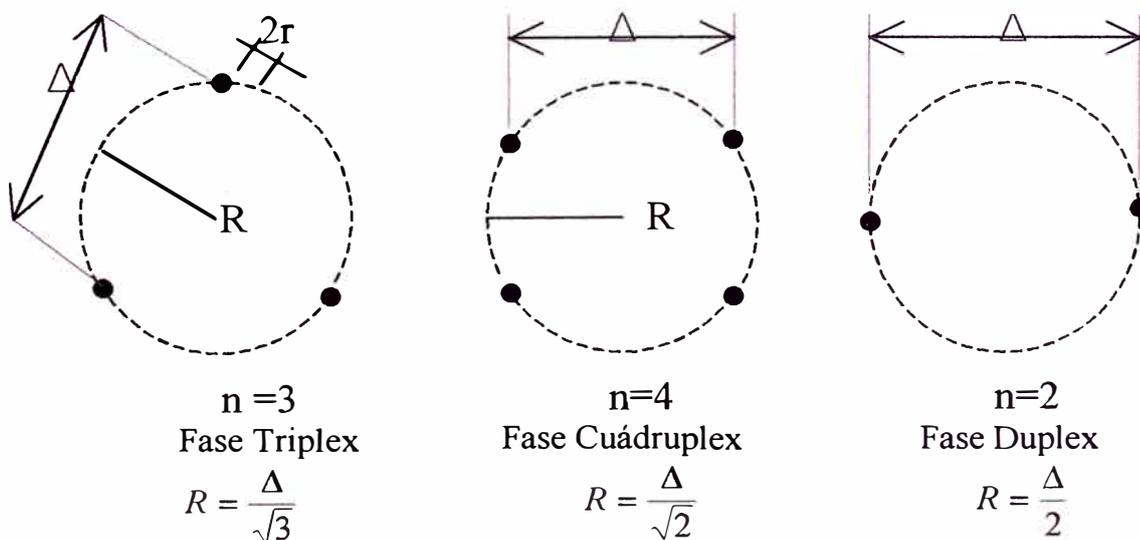


Fig. 7.4 Radio (R) de circunferencia que inscribe los conductores de una fase.

El valor del Radio Medio Geométrico esta dado por:

$$RMG = \sqrt[n]{nrR^{n-1}}$$

Donde: r : Radio de los subconductores que contiene cada fase.

R : Radio geométrico del haz que constituye cada fase de la línea.

El gradiente de tensión (E) en la superficie de subconductores inscritos en una circunferencia y que conforman las fases de una línea, puede calcularse en forma simplificada con:

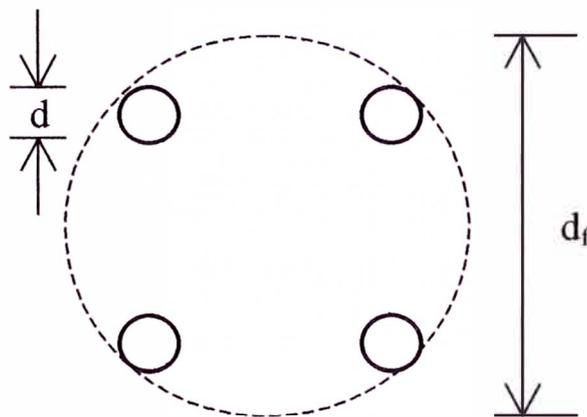


Fig. 7.5 Diámetro exterior y de los conductores de una fase de cuatro conductores.

$$E = \frac{U_N}{\left(\frac{K}{1+K}\right) \frac{d_f}{2} \ln \frac{2D}{d}}; KV/cm$$

Donde:

$$K = \frac{nd}{d_f - d} \quad y \quad d = \frac{K}{n(1+K)}$$

d : Diámetro de un Subconductor, [cm]

d_f : Diámetro exterior de Haz, [cm]

D : Distancia equivalente entre haces de Conductores, [cm]

n : Número de Subconductores

U_N : Tensión de Fase, [KV.eficaz]

Valores típicos de Gradiente de Potencial en Subconductores que conforman las fases de una línea de transmisión en un a disposición en FLAT.

Tensión Conductores Fase	345 KV		500KV		745KV	
	Conductores Externos	Conductores Centrales	Conductores Externos	Conductores Centrales	Conductores Externos	Conductores Centrales
1	20.577	21.811	21.397	22.37		
2	18.738	20.179	19.976	21.105		
3			20.538	21.822	19.099	20.176
4			21.417	22.876	19.286	20.455

APLICACIÓN:

I.- Línea Trifásica con conductores en FLAT de un conductor por Fase

Datos:

Altura del terreno: 20m

Distancia entre Fases: 10m

Radio del Conductor: 2.2 cm

Tensión Nominal: 220 KV.

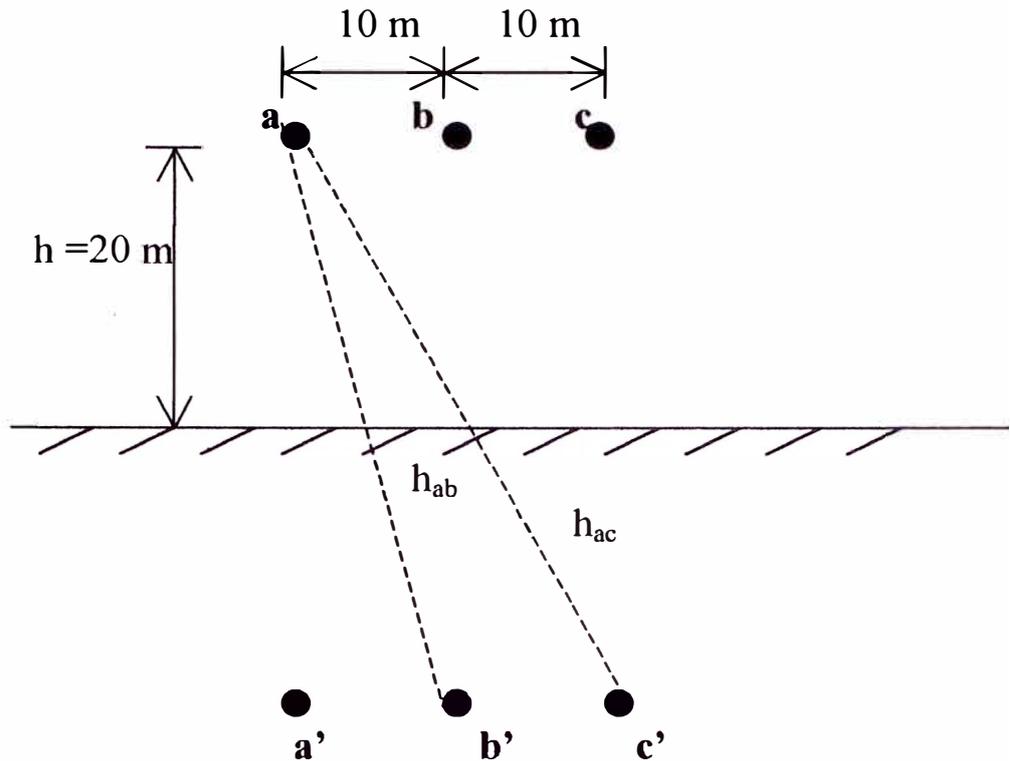


Fig. 7.6 Línea trifásica en FLAT y su imagen.

$$D_{ab} = D_{bc} = 10\text{m} , D_{ac} = 20\text{m}$$

$$h_{ab} = h_{bc} = \sqrt{10^2 + 40^2} = \sqrt{1700} \text{ (m)} = 10 \sqrt{17} \text{ (m)}$$

$$h_{ac} = \sqrt{20^2 + 40^2} = \sqrt{2000} \text{ (m)} = 20\sqrt{5} \text{ (m)}$$

La ecuación matricial: $V=PQ$; $Q= P^{-1}V$

SOLUCIÓN:

1.0 Matriz De coeficientes de MAXWELL (P) es:

$$P = (18 \times 10^9) \begin{bmatrix} \text{Ln}\left(\frac{40}{2.2}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{10\sqrt{17}}{10}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{20\sqrt{5}}{20}\right) \\ \text{Ln}\left(\frac{10\sqrt{17}}{10}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{40}{2.2}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{10\sqrt{17}}{10}\right) \\ \text{Ln}\left(\frac{20\sqrt{5}}{20}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{10\sqrt{17}}{10}\right) & \dots & \text{Ln}\left(\frac{40}{2.2}\right) \end{bmatrix}$$

$$P = (18 \times 10^9) \begin{bmatrix} 2.9004 & 1.4166 & 0.8047 \\ 1.4166 & 2.9004 & 1.4166 \\ 0.8047 & 1.4166 & 2.9004 \end{bmatrix}$$

2.0 Hallamos $P^{-1} = \frac{1}{|P|} \text{Adj}P$

2.1 $|P| = 8.2291e+031$

2.2 $\text{Adj}P = (\text{Cof } P)^t = (1.0e+21) * \begin{bmatrix} 2.0754 & -0.9619 & -0.1060 \\ -0.9619 & 2.5158 & -0.9619 \\ -0.1060 & -0.9619 & 2.0754 \end{bmatrix}$

2.3 $P^{-1} = (1.0e-10) * \begin{bmatrix} 0.2522 & -0.1169 & -0.0129 \\ -0.1169 & 0.3057 & -0.1169 \\ -0.0129 & -0.1169 & 0.2522 \end{bmatrix}$

3.0 La matriz V:

$$V = \begin{bmatrix} 220 & \boxed{0^\circ} \\ 220 & \boxed{-120^\circ} \\ 220 & \boxed{120^\circ} \end{bmatrix} \text{ (KV) ;}$$

$$V = \begin{bmatrix} \frac{U_N}{\sqrt{3}} \\ \frac{U_N}{\sqrt{3}} \\ \frac{U_N}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 127.0171 \\ 127.0171 \\ 127.0171 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_a \\ Q_b \\ Q_c \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 127.0171 \\ 127.0171 \\ 127.0171 \end{bmatrix}$$

$$Q = (1.0 e - 008) * \begin{bmatrix} 0.1555 \\ 0.0914 \\ 0.1555 \end{bmatrix}$$

4.0 La matriz E:

$$E = \frac{1}{2\pi r\epsilon} Q = \frac{1}{2\pi r\epsilon} (1.0 e - 008) * \begin{bmatrix} 0.1555 \\ 0.0914 \\ 0.1555 \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} 12.7238 \\ 7.4768 \\ 12.7238 \end{bmatrix} KV / cm$$

II.- Línea Trifásica con conductores en Triángulo Asimétrico

Datos:

Altura del terreno:

$$h_a = 23$$

$$h_b = 28m$$

$$h_c = 23m$$

$$D_{bc} = 5m$$

$$D_{ac} = 6.5m$$

$$r = 2.05cm \text{ (radio del conductor)}$$

Tensión: 138 KV

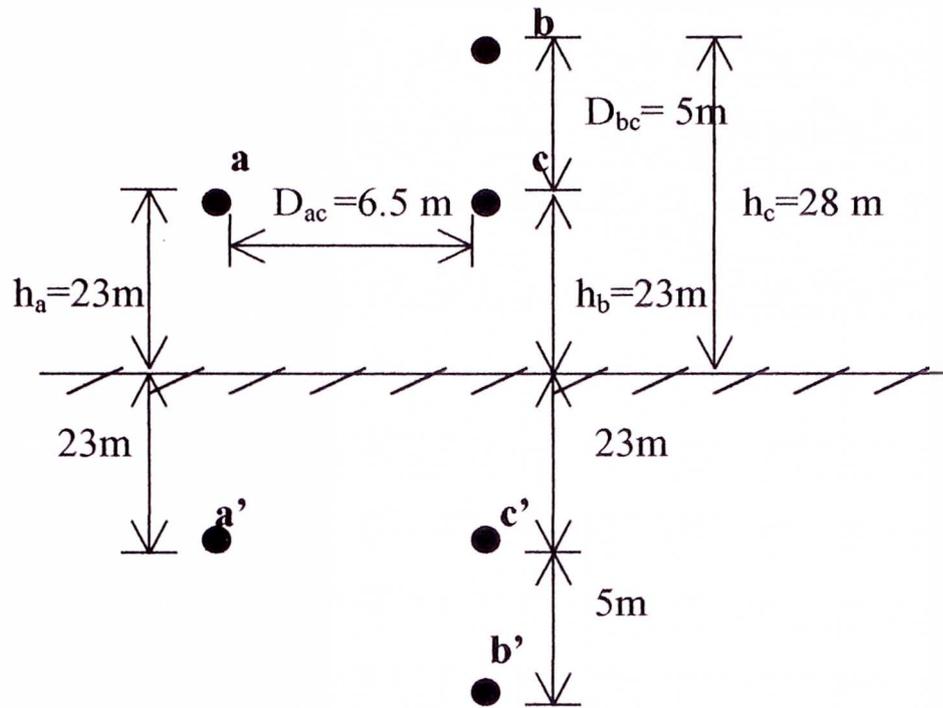


Fig. 7.7 Línea trifásica en triángulo asimétrico y su respectiva imagen.

$$h_{ab} = \sqrt{51^2 + 6.5^2} \text{ m}$$

$$h_{ac} = \sqrt{46^2 + 6.5^2} \text{ m}$$

$$h_{bc} = 51 \text{ m}$$

$$D_{ab} = \sqrt{6.5^2 + 5^2} = 8.2 \text{ m}$$

$$D_{ac} = 6.5 \text{ m}$$

$$D_{bc} = 5 \text{ m}$$

$$D = \sqrt[3]{8.2 * 6.5 * 5} = 6.435 \text{ m}$$

1.0 Matriz de Coeficientes de MAXWELL (P)

$$P = (18 \times 10^9) \begin{bmatrix} \operatorname{Ln}\left(\frac{46}{2.05}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{51^2 + 6.5^2}}{\sqrt{6.5^2 + 5^2}}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{46^2 + 6.5^2}}{6.5}\right) \\ \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{51^2 + 6.5^2}}{\sqrt{6.5^2 + 5^2}}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{56}{2.05}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{51}{5}\right) \\ \operatorname{Ln}\left(\frac{\sqrt{46^2 + 6.5^2}}{6.5}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{51}{5}\right) & \operatorname{Ln}\left(\frac{46}{2.05}\right) \end{bmatrix}$$

$$P = (18 \times 10^9) \begin{bmatrix} 3.1108 & 1.8357 & 1.9667 \\ 1.8357 & 3.3075 & 2.3224 \\ 1.9667 & 2.4159 & 3.1108 \end{bmatrix}$$

2.0 Hallamos P^{-1}

$$P^{-1} = (1.0 e - 010) \begin{bmatrix} 0.3100 & -0.0635 & -0.1486 \\ -0.0757 & 0.3849 & -0.2395 \\ -0.1372 & -0.2588 & 0.4585 \end{bmatrix}$$

3.0

$$Q = P^{-1} \begin{bmatrix} 138/\sqrt{3} \\ 138/\sqrt{3} \\ 138/\sqrt{3} \end{bmatrix} = P^{-1} \begin{bmatrix} 79.67 \\ 79.67 \\ 79.67 \end{bmatrix}$$

$$E = \frac{18 \times 10^9}{2.05} Q = \begin{bmatrix} 4.2547 \\ 3.0292 \\ 2.7184 \end{bmatrix} \text{KV/cm}$$

Tomando el mayor valor: 4.2547 KV/cm

Verificación: el gradiente de un conductor es:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{V}{r_1 \text{Ln}\left(\frac{D}{r_1}\right)} = \frac{V}{nr_1 \text{Ln}\left(\frac{D}{nr_1}\right)} \\
 &= \frac{79.67}{2.05 * 1 \text{Ln}\left(\frac{643.5}{2.05}\right)} \\
 &= 6.76 \text{ KV/cm}
 \end{aligned}$$

Luego: la línea tiene un desempeño satisfactorio en cuanto a pérdidas por efecto corona, puesto que:

$$E < 17 \text{ KV/cm.}$$

(17 KV/cm es el valor del gradiente de tensión de una línea de transmisión, debajo del cual, se considera satisfactorio el desempeño de la línea.)

La Tensión Crítica es:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= 48.5 \delta m_c r_1 \text{Log} \frac{D}{r_1} \\
 &= 48.5(0.785/0.85)(2.05) \text{Log} (6500/ 2.05) = 232.27 \text{ KV.}
 \end{aligned}$$

Y la tensión al neutro en la línea es:

$$V = \frac{138}{\sqrt{3}} = 79.67 \text{ KV}$$

$\therefore V_0 > V \Rightarrow$ Pérdidas son despreciables.

7.3 Tensión Crítica Disruptiva

La tensión para la cual comienzan las pérdidas a través del aire, se llama TENSIÓN CRÍTICA DISRUPTIVA, y para ella el fenómeno es aún no visible, esta tensión puede calcularse utilizando la fórmula del Ing. F.W.PEEK y es :

$$U_c = \frac{29.8}{\sqrt{2}} \sqrt{3} m_c \cdot \delta \cdot m_r \cdot r \cdot n \cdot \text{Ln} \frac{D}{r}; [KV]$$

expresando (Ln) en (Log) se tiene:

$$U_c = 84 m_c \cdot \delta \cdot m_r \cdot r \cdot n \text{Log} \frac{D}{r}; [KV]$$

U_c : Tensión compuesta crítica eficaz [KV], para la que comienza el efecto corona (Tensión Crítica Disruptiva).

29.8: Rigidez dieléctrica del aire a 25°C de temperatura y a la presión atmosférica de 6 cm. De columna de Hg (Dividimos entre $\sqrt{2}$ para obtener valores eficaces) [KV/cm].

m_c : Coeficiente de rugosidad del conductor. Sus valores son:

Coeficientes de Rugosidad (m_c)

m_c	Descripción
1.00	Hilos de superficie lisa
0.93 a 0.98	Hilos oxidados y rugosos
0.83 a 0.87	Para Cables

δ : Factor de corrección de la densidad del aire, función directa de la presión barométrica e inversa de la temperatura absoluta del medio ambiente, se calcula con la siguiente relación:

$$\delta = \frac{273^\circ + 25}{76} \frac{h}{273^\circ + \theta}$$

$$\delta = \frac{3.926h}{273 + \theta}$$

Siendo:

h = Presión barométrica en cm. De columna de Hg.

θ = T° media en grados centígrados correspondiente a la altitud del punto que se considere.

Frecuentemente se desconoce el valor de (h) que depende de la altitud y esta dada en metros (m.s.n.m.). Se determina con la fórmula de HALLEY:

$$h = 760 - 0.086Y ; Y = \text{altura (m.s.n.m)}$$

m_t : Coeficiente de corrección por lluvia; así:

$m_t = 1$ con tiempo seco.

$m_t = 0.8$ con tiempo lluvioso

r : Radio del conductor [cm].

n : Número de conductores del haz de cada fase.

$n = 1$ con fase simple de un solo conductor.

$n = 2$ con fase duplex.

$n = 3$ con fase triples.

$n = 4$ con fase cuadruplex.

D : Distancia entre ejes de fases [cm].

r' : Radio ficticio [cm], definido por la expresión:

$$r' = \sqrt[n]{nrR^{n-1}}$$

En la que:

R: Radio de la circunferencia que pasa por los centros de los conductores que forman en haz.

La expresión de F.W. PEEK fue mejorada por C.J.Miller (1956):

$$E_c = 18.11\delta m_c \left(1 + \frac{0.54187}{\sqrt{\delta r}} \right) KV/cm \text{ eficaz.}$$

La tensión crítica a la que se inicia el efecto corona, esta dada por:

$$V_c = E_c m_c \delta r L n \frac{D}{r}$$

Donde:

$$D = \sqrt[3]{d_1 d_2 d_3}; \quad d_1, d_2, d_3: \text{Distancia entre fases (cm).}$$

El gradiente de potencial máximo para el aire (Valor Crítico) es 30KV a 76cm de Hg y a 25° C, para corriente alterna senoidal es:

$$V_c = 48.5r \log \frac{D}{r'}$$

Los otros parámetros son los mismos a los descritos anteriormente.

Para hallara la tensión crítica de inicio de corona (V_c), se puede usar la curva de PEEK, la que puede reproducirse experimentalmente.

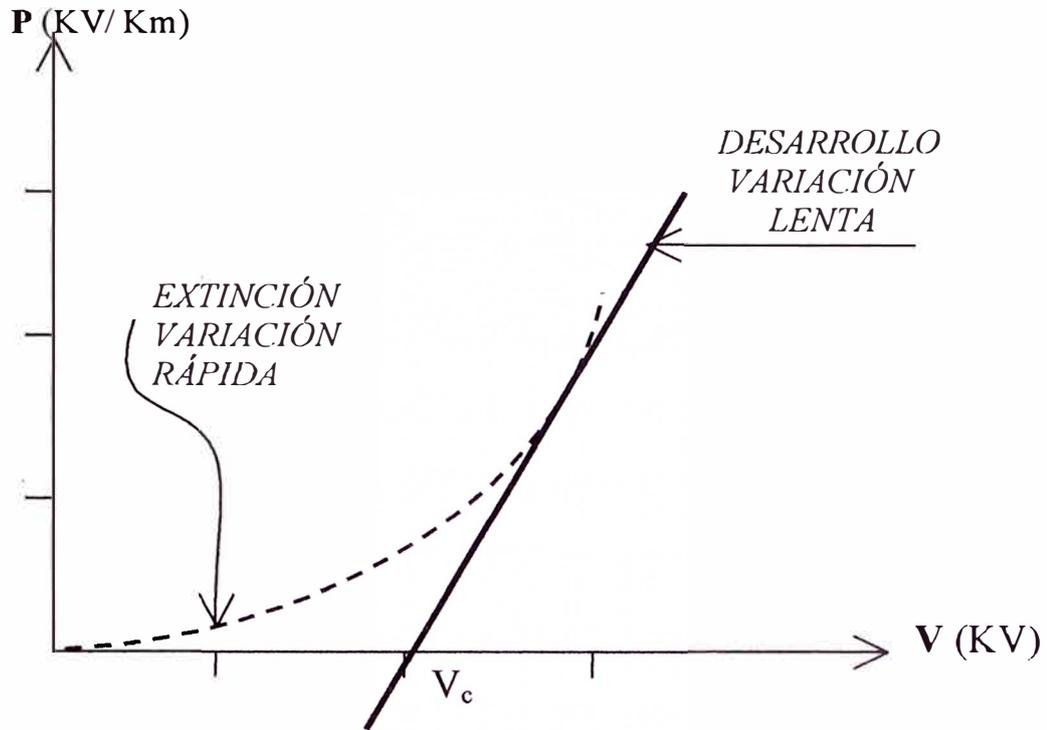


Fig. 7.8 Curva de PEEK. (V_c) tensión crítica.

Potencia de Pérdidas

Las pérdidas por fase de la línea debido al efecto corona, se calcula también con una fórmula debida a PEEK:

$$P = \frac{241}{\delta} (f + 25) \sqrt{\frac{r}{D}} (V - V_c)^2 \times 10^{-5} \text{ KW/Km/Fase}$$

Donde:

P = Pérdida por conductancia [KW/Km]

f = Frecuencia de periodos por (seg)

r = Radio del conductor (cm.)

D = Distancia entre ejes de fases (cm.)

V = Tensión simple del a línea (KV)

$$V_c = \frac{V_c}{\sqrt{3}} (KV); \quad V_c = \text{Tensión máxima de la línea (KV)}.$$

Si al línea de transmisión tienen una disposición asimétrica de los conductores, se debe sustituir las tensiones V y V_c por:

$$V = ErLn \frac{D}{r}, \quad V_c = E_s m \delta r Ln \frac{D}{r}$$

$$P = \frac{241}{\delta} (f + 25) \sqrt{\frac{r}{D}} \left(Ln \frac{D}{r} \right)^2 r^2 (E - E_s m \delta)^2 \times 10^{-5} \text{ KW/ Km/ fase}$$

Otros métodos de cálculo de pérdidas por efecto Corona

- **Pérdida Corona por W. S. PETERSON**

Con la fórmula de PETERSON se obtiene resultados más próximos a los reales especialmente inferiores a 3 Kw/ Km/ Trifásicas, comparables a la pérdida por fuga en los aisladores especialmente en buen tiempo.

$$P = \frac{0.00002094}{\left(\text{Log} \frac{2D}{d} \right)^2} \cdot f \cdot U^2 \cdot F \text{ Kw/ Km/ Fase}$$

$$P_T = 3P \text{ (Pérdida de potencias Trifásicas)}$$

Donde:

P : Pérdidas Corona – Buen tiempo [Kw/Km/Fase]

f : frecuencia de la Red, (HZ)

D : Distancia Equivalente entre Fases (cm)

d : diámetro del conductor (cm)

F : Factor funcional, se obtiene de característica de Peterson: $F = f \frac{E}{E_0}$

U : tensión de servicio, fase neutro eficaz (KV)

U_c : Tensión crítica de Inicio de corona eficaz (KV)

E : Gradiente Superficial medio eficaz (KV / cm)

E_c : Gradiente Crítico de Inicio de corona eficaz (KV / cm)

<i>TENSION NORMAL (Línea)(KV)</i>	<i>DÍAMETRO CONDUCTOR (cm)</i>	<i>PÉRDIDAS Kw/Km/3Fases</i>	<i>GRADIENTE MEDIO (KV/cm)</i>
220	3	0.8 a 2.0	20.22
500	3.4	1.0 a 5.0	23.13
700	3.7	3.0 a 20	23.13

Las pérdidas totales trifásicas para mal tiempo (tiempo lluvioso) se calcula con:

$$P_T = 3P + \left[\frac{U}{\sqrt{3}} J r^2 \ln(1 + KR) \sum_1^n E_i^5 \right] \text{ Kw / Km / Trifásico}$$

Donde:

J : constante de pérdidas de Corriente Línea:

$$138 \text{ KV: } 6.70 \times 10^{-10}$$

$$220 \text{ KV: } 5.50 \times 10^{-10}$$

$$400 \text{ KV: } 4.40 \times 10^{-10}$$

$$765 \text{ KV: } 3.35 \times 10^{-10}$$

r : Radio del Subconductor (cm).

n : Número de Subconductores por Fase.

E_i : Gradiente en el interior (KV/ cm)

K : Coeficiente de Humedecimiento ($K=10$, lluvia en mm / h)

R : Intensidad de la lluvia (mm / h)

Algunos valores de pérdidas trifásicas se da en la siguiente cuadro. *

<i>TENSIÓN NOMINAL (KV)</i>	<i>DISTANCIA COND - COND (m)</i>	<i>PÉRDIDAS KW / Km / 3 Fases</i>	<i>INTENSIDAD LLUVIA (mm / h)</i>
500	6.1	94	2.5
		135	12.5
700	14	120	2.5
		160	12.5

- **Pérdida Corona por CARROLL y ROCKWELL**

Este método se apoya en una familia de curvas, para diferentes condiciones metereológicas.

En este caso se determina la relación (V / V_c) o (E / E_c), que se ubica en las abscisas por la que se entra para determinar la expresión de la que resultará el valor de (P) en las ordenadas.

* Cuadro tomado de: "ALTA TENSIÓN Y TÉCNICAS DE PRUEBAS", MSG. Justo Yanque M.

$$\frac{P}{n^2 r^2} = f\left(\frac{U}{U_c}\right) = f\left(\frac{E}{E_c}\right)$$

Siendo las pérdidas de potencia Trifásica (P_T):

$$P_T = 3.6P$$

Donde:

P: Pérdida corona en mal tiempo (KW / Km / Fase)

n: Número de subconductores del Haz.

r: Radio del subconductor.

Problema de Aplicación

Sea una línea de 220 KV, de 150 Km de longitud, y una altitud máxima de 2400 m.s.n.m, que tiene un circuito simple con las 3 fases en un plano horizontal separadas entre sí 7.30 m. El conductor, de cable de aluminio-acero FALCÓN de 39.2 mm \varnothing . La frecuencia de Trabajo es 60 c/s, y consideremos una temperatura media de ($\theta=10^\circ\text{C}$). Analizar las pérdidas por efecto corona en esta línea.

SOLUCIÓN:

Tensión (U). Consideremos no la tensión nominal, sino 105% de esta, es decir $U=231\text{KV}$.

La tensión simple valdrá: $V = \frac{231}{\sqrt{3}} = 133.37\text{KV}$

Tensión Crítica Disruptiva (U_c)

Usamos la fórmula de PEEK:

$$U_c = 84m_c\delta m_t r n \log\left(\frac{D}{r}\right) \text{ en (KV)}$$

Donde:

$m_c = 0.85$ (Coeficiente de rugosidad para cables).

$$\delta = \frac{3.926h}{273 + \theta} \text{ (Factor de corrección de la densidad del aire)}$$

Aplicando la fórmula de HALLEY ($h=760-0.086Y$).

A la altura $Y=2400$ m.s.n.m, le corresponden una presión atmosférica de:

$$H = 760 - 0.086 (2400) \Rightarrow h = 55.4 \text{ cm.}$$

Así tendremos:

$$\delta = \frac{3.926(55.4)}{273 + 10} \Rightarrow \delta = 0.7686$$

Otros valores:

$m_t = 1$ con tiempo seco.

$m_t = 0.8$ con tiempo lluvioso.

$$r = \frac{3.92}{2} = 1.96 \text{ cm}$$

$n = 1$

$$r' = r = 1.96$$

Para tiempo seco ($m_t = 1$). La tensión crítica es:

$$U_c = 84(0.85)(0.7686)(1)(1.96)(1) \log\left(\frac{730}{1.96}\right)$$

$$U_c = 276.5 \text{ KV}$$

Para tiempo malo (lluvioso)

$$U_c = (276.5)(0.8)$$

$$U_c = 221.2 \text{ KV}$$

Para mal tiempo seco, no habrá pérdida por efecto corona puesto que:

$$U_c = 276.5 \text{ KV} > 231 \text{ KV} \text{ considerada.}$$

Para tiempo malo, lluvioso, habrá pérdida por efecto corona ya que:

$$U_c = 221.2 \text{ KV} < 231 \text{ KV} .$$

Pérdidas (en tiempo malo, lluvioso)

$$P = \frac{241}{\delta} (f + 25) \sqrt{\frac{r}{D}} (V - V_c)^2 \times 10^{-5} \text{ KW / Km / Fase}$$

$$P = \frac{241}{0.7686} (60 + 25) \sqrt{\frac{1.96}{730}} \left(\frac{231}{\sqrt{3}} - \frac{221.2}{\sqrt{3}} \right)^2 \times 10^{-5} \text{ Kw / Km / Fase}$$

$$P = 0.44211 \text{ KW / Km / Fase}$$

Y en las 3 fases:

$$P_{3\phi} = 0.44211(3) \Rightarrow P_{3\phi} = 1.3263 \text{ KW / Km}$$

En los 150 Km de longitud de la línea:

$$(1.3263 \text{ KW/Km})(150 \text{ Km})$$

$$\therefore P_{3\phi} = 198.945 \text{ KW}$$

La perditancia kilométrica será:

$$G_K = \frac{198.945}{\left[\frac{231}{\sqrt{3}}\right]^2} \times 10^{-5}$$

CONCLUSIONES

1. El Método de Imágenes se aplica a problemas de una o más carga puntuales en presencia de superficies limitadoras como conductores ya sea conectados a tierra o mantenidos a potenciales fijos.
2. Las cargas imagen deben ser exteriores al volumen de interés.
3. La principal característica del método de imágenes es su simplicidad debido a la simetría de los problemas a los que se le aplica.
4. El efecto corona con todas sus manifestaciones, es un factor muy importante para tener en cuenta en el diseño de las líneas de transmisión
5. Las formas más comunes de controlar el efecto corona es aumentar el radio del conductor, o el número de conductores en caso de haces, pero se debe tener en cuenta que no es rentable eliminar completamente el efecto.

6. El fenómeno audible en líneas de Transmisión de alto voltaje, debe ser tenido en cuenta para las líneas de transmisión, según el nivel de voltaje que esté manejando.

7. El efecto corona atenúa las sobretensiones en las líneas de transmisión de energía eléctrica y amortigua los procesos de propagación.

BIBLIOGRAFÍA

- 1.- MSc Justo YANQUE MONTUFAR. ALTA TENSIÓN Y TÉCNICA DE PRUEBAS. UNI-FIEE.1999

- 2.- UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID. Escuela Técnica Superior de Ing. de Telecomunicaciones. Grupo de Radiación. Transparencias del Curso Electrostática, Electricidad y Magnetismo.
<http://www.gr.ssr.upm.es/eym/www/eym3>

- 3.- UNIVERSIDAD DE SEVILLA. Licenciatura de Física. Apuntes en Línea de la Asignatura de Electricidad y Magnetismo.
<http://faraday.us.es/cutreras/apuntes>

- 4.- UNIVERSIDAD DE CHILE. Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Apuntes de Electricidad y Magnetismo.
<http://www.cec.uchile.cl/cutreras/apuntes>

- 5.- DISEÑO DE LÍNEAS ELÉCTRICAS. Problemas de Aplicación.
<http://www.ing.unlp.edu.ar/sispot/libros/le/le-10/le-pro.htm>

- 6.- CENTRO DE CIENCIAS DE LA ATMÓSFERA.
<http://www.unam.mx/cca/inicio2.html>

- 7.- J. D. JACKSON. ELECTRODINÁMICA CLÁSICA. Ed. Alambra. 1990.