

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE  
INGENIERIA  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA**



**CALCULO DE LOS LIMITES DE  
ESTABILIDAD PERMANENTE  
DE LA MAQUINA SINCRONA**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE  
INGENIERO ELECTRICISTA**

**PRESENTADO POR:**

**DIONICIO ZOCIMO ÑAUPARI HUATUCO**

**PROMOCION 1986-I**

**LIMA-PERU**

**1998**

***A mi madre,  
por su constante apoyo y  
a Gloria, Jonathan y  
Karen***

**CALCULO DE LOS LIMITES DE  
ESTABILIDAD PERMANENTE DE LA  
MAQUINA SINCRONA**

## **SUMARIO**

En este trabajo se desarrolla un conjunto de ecuaciones algebraicas y trigonométricas que permiten la construcción eficiente, sencilla y directa del diagrama de operación P-Q de la máquina síncrona de polos salientes y de rotor cilíndrico, que son válidas tanto para el generador como para el motor operando en régimen permanente. Esta metodología es una alternativa a las existentes basadas en construcciones geométricas no analíticas y que generalmente se aplican sólo a la máquina de rotor cilíndrico.

Se ha dado especial énfasis al estudio y análisis de los límites teórico y práctico de la estabilidad permanente de la máquina síncrona con el fin de verificar los límites permisibles de potencia activa y reactiva. A pesar de que la deducción de las ecuaciones matemáticas involucradas es laboriosa y compleja, sin embargo las expresiones resultantes son elegantes y sencillas de ser utilizadas.

## INDICE

PROLOGO	1
CAPITULO I	
ASPECTOS GENERALES	2
1.1 Generalidades	2
1.2 Formulación del problema	3
1.3 Objetivos	3
1.4 Estructura del trabajo	4
CAPITULO II	
MODELO DE LA MAQUINA SINCRONA EN REGIMEN PERMANENTE	5
2.1 Estructura básica de la máquina síncrona	5
2.2 Transformación de Park	13
2.3 Tensión terminal	17
2.4 Modelo en régimen permanente	19
2.5 Potencia desarrollada por el generador síncrono	25
CAPITULO III	
EL DIAGRAMA DE OPERACION DE LA MAQUINA SÍNCRONA EN REGIMEN PERMANENTE	31
3.1 Consideraciones previas	31
3.2 Diagrama vectorial	31
3.2.1 Diagrama vectorial de la máquina síncrona de polos saliente	31
3.2.2 Diagrama de potencia generalizado	39

<b>3.3 Estabilidad de la máquina síncrona</b>	<b>41</b>
<b>3.4 La carta de potencia del alternador</b>	<b>45</b>
<b>3.5 Construcción geométrica del diagrama de operación P - Q</b>	<b>47</b>
<b>3.5.1 Descripción y análisis del sistema</b>	<b>47</b>
<b>3.5.2 Límite de estabilidad en régimen permanente con corriente de excitación constante</b>	<b>52</b>
<b>CAPITULO IV</b>	
<b>ECUACIONES MATEMATICAS DEL DIAGRAMA DE OPERACIÓN EN REGIMEN PERMANENTE DE LA MAQUINA SINCRONA</b>	
<b>4.1 Introducción</b>	<b>56</b>
<b>4.2 Potencias activa y reactiva</b>	<b>57</b>
<b>4.3 Límite térmico de los bobinados de campo</b>	<b>58</b>
<b>4.4 Límite de estabilidad permante teórico</b>	<b>64</b>
<b>4.5 Límite de estabilidad permanente práctico</b>	<b>71</b>
<b>4.6 Limite térmico de los bobinados de armadura</b>	<b>73</b>
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>74</b>
<b>BIBLIOGRAFIA</b>	<b>78</b>

## **PROLOGO**

En este trabajo se desarrolla un conjunto de ecuaciones algebraicas y trigonométricas que permiten la construcción eficiente, sencilla y directa del diagrama de operación P-Q de la máquina síncrona de polos salientes y de rotor cilíndrico.

Para su desarrollo, la presente tesis se ha dividido en los siguientes capítulos:

Capítulo I: En este capítulo se presenta las generalidades, la formulación del problema y el objetivo de la tesis.

Capítulo II: En este capítulo se presenta el modelamiento de la máquina síncrona en régimen permanente.

Capítulo III: En este capítulo se muestra los diagramas vectoriales y el diagrama de potencia generalizado.

Capítulo IV: Se desarrollan las ecuaciones matemáticas del diagrama de operación en régimen permanente de la máquina síncrona.

Adicionalmente se plantean conclusiones y recomendaciones así como referencias bibliográficas.

## **CAPITULO I ASPECTOS GENERALES**

### **1.1 Generalidades**

Dado que la potencia eléctrica tiene que ser transportada hacia los centros de consumo, luego de ser generada normalmente a distancias grandes, es necesario generar y transportar la energía eléctrica con tensión y corriente alterna. El generador síncrono ó alternador se usa en la mayoría de los casos para generar potencia eléctrica de corriente alterna; es por consiguiente necesario enfocar el estudio del comportamiento de las máquinas síncronas como parte de un sistema eléctrico de potencia y dentro de ese contexto analizar su comportamiento frente a las variaciones que puedan ocurrir en la red eléctrica.

En un gran sistema de potencia existen muchas variaciones de carga, lo que provoca una alteración en la estabilidad de la máquina síncrona, si la carga aumenta, el alternador tendrá que aumentar su potencia de salida y consiguientemente cuando la carga disminuye éste tendrá que disminuir su potencia de salida para conservar su estado estable de funcionamiento, caso contrario superará la velocidad de sincronismo y saldrá de servicio.

Es de gran interés, el funcionamiento de la máquina en régimen permanente; es decir, a tensión y frecuencia constante, averiguar entre que valores de potencia máxima y mínima pueda operar sin que pierda estabilidad.

Los límites de potencia activa y reactiva que puede entregar (como generador) ó absorber (como motor), una máquina síncrona fueron estudiados desde hace

varias décadas por muchos investigadores que denominaron “carta de capacidad”, pues en ella se mostraba una región ó zona donde el alternador opera en forma estable. incluso Gove [2] dio pautas para la construcción geométrica de los límites de estabilidad de las máquinas síncronas. Los resultados de estas investigaciones han sido confirmadas por pruebas realizadas por Mason, T.H. Aylett, P.D. y Birch, F.H. en 1959 y Cooper, C.R., y Girling, L.R. en 1960; lo que han demostrado que la operación estable en ángulos de rotor bastante grandes, es posible; mejor aún con el control de un regulador automático de tensión. Actualmente estamos en condiciones de poder analizar los límites de estabilidad de la máquina síncrona con la asistencia de un computador.

## **1.2 Formulación del problema**

Todavía no se ha estudiado en forma analítica ni computacionalmente los límites de potencia activa y reactiva que puede suministrar o absorber la máquina síncrona sin que pierda sincronismo. En el presente trabajo se pretende encontrar una mejor forma de construir la carta P-Q de operación de la máquina, para lo cual es necesario deducir las ecuaciones matemáticas de los límites de estabilidad en régimen permanente y posteriormente poder utilizar estos resultados para aplicaciones a máquinas síncronas que actualmente están operando en nuestro sistema de generación eléctrica.

## **1.3 Objetivos**

Utilizando las ecuaciones de la potencia activa y reactiva para una máquina síncrona de polos salientes (caso mas general), se va a desarrollar un conjunto de ecuaciones que representan los límites de operación de la máquina en régimen permanente; estos límites conforman la carta P-Q ó carta de capacidad de la máquina.

Asimismo, se va a analizar estos límites de operación para diferentes valores de corriente de campo o excitación, corriente de armadura (carga) y factor de potencia de la carga; sin que pierda estabilidad en cualquiera de los casos.

Finalmente se formulará ejemplos de aplicación teórica y posibles aplicaciones prácticas.

#### **1.4 Estructura del trabajo**

En el capítulo I, se hace una introducción al tema mencionando los antecedentes y algunos trabajos previos que nos sirvieron de base para el desarrollo de la presente tesis.

En el capítulo II, se hace una recopilación de la teoría y funcionamiento de la máquina síncrona, se presenta brevemente el modelo básico del generador síncrono en régimen permanente. Se expone también un método de la construcción geométrica de la carta de potencia del alternador.

Luego en el capítulo III, se muestra el diagrama vectorial para diferentes condiciones de carga, para llegar a un diagrama de potencia generalizado, lo cual nos permite explicar la construcción de la carta P-Q con métodos analíticos.

En el capítulo IV, se expone la forma y el procedimiento que nos permitieron deducir las ecuaciones matemáticas que representan los límites de estabilidad. Se halla la ecuación del lugar geométrico de la potencia aparente para valores constantes de corriente de campo, que resulta ser la de un "Limacon de Pascal". También se encuentra la ecuación matemática del límite de estabilidad permanente teórico y práctico, la cual es una ecuación de cuarto grado.

Asimismo el límite térmico de los devanados de armadura que es la ecuación de una circunferencia.

## **CAPITULO II**

### **MODELO DE LA MAQUINA SINCRONA EN REGIMEN PERMANENTE**

#### **2.1 Estructura básica de la máquina síncrona**

Los generadores síncronos son la principal fuente de energía eléctrica en los sistemas eléctricos de potencia. Muchas cargas son impulsados por motores síncronos, los condensadores síncronos todavía se usan como un medio compensación de potencia reactiva y control de voltaje. Estos dispositivos operan con el mismo principio y son colectivamente llamados máquinas síncronas. El problema de la estabilidad de los sistemas de potencia es una de las razones para estudiar y analizar el comportamiento de varias máquinas síncronas interconectadas operando en sincronismo, por consiguiente un entendimiento de sus características y un modelamiento adecuado de su representación dinámica son de fundamental importancia para el estudio de la estabilidad de los sistemas de potencia.

El modelamiento y análisis de la máquina síncrona ha sido siempre un reto, estos problemas fueron tratados con intensidad en los años de 1920 a 1930, entre ellos por A. Blondel y R.H.Park [1,2]; recientemente también se han hecho varias investigaciones. Se desarrollará en forma detallada el modelo matemático de una máquina síncrona y se revisará brevemente sus características de representación en estado transitorio y en régimen permanente o estacionario.

En la Figura 2.1 se muestra un diagrama esquemático de la sección transversal de una máquina síncrona trifásica con un par de polos de campo; la máquina consiste de 2 elementos esenciales: el campo y la armadura. El devanado de

campo lleva corriente continua y produce un campo magnético el cual induce tensión alterna en el devanado de armadura.

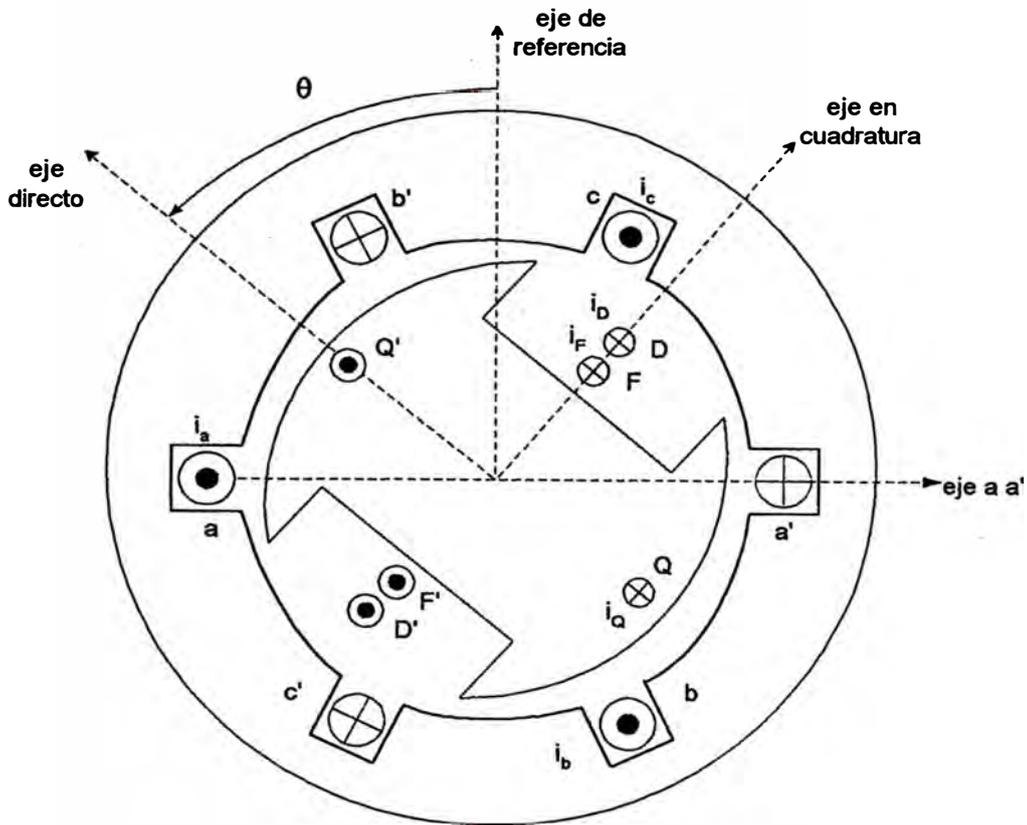


Figura 2.1 Diagrama esquemático de la máquina síncrona trifásica

El devanado de armadura usualmente opera con un voltaje mucho mayor que el campo y por lo tanto requiere más espacio para su aislamiento. Estos devanados también están sujetos a altas corrientes transitorias y deben tener una longitud mecánica adecuada, por lo que es conveniente tener la armadura en el estator. Los devanados trifásicos de la armadura están distribuidos espacialmente formando 120° entre sí, de modo que una rotación uniforme del campo magnético inducirán tensiones desfasadas 120° en el tiempo en estos devanados. Debido a que la armadura está sujeta a variaciones de flujo magnético, el núcleo del estator es fabricado con láminas delgadas para reducir las pérdidas por corrientes parásitas.

Cuando los devanados de armadura conducen corrientes trifásicas balanceadas, éstas producen un campo magnético en el entrehierro que gira a la velocidad síncrona. Por otro lado el campo producido por la corriente continua en el devanado rotórico gira con el rotor y para la producción de un torque estacionario los campos del estator y del rotor también deben girar a la velocidad síncrona. Por lo tanto, el rotor también debe girar a la velocidad síncrona.

El número de polos del campo está determinado por la velocidad angular mecánica del rotor y la frecuencia eléctrica de las corrientes en el estator. La velocidad síncrona está dado por:

$$n = \frac{120 f}{P}$$

Donde:

$n$  : es la velocidad en revoluciones por minuto (rpm)

$f$  : es la frecuencia en Hz.

$P$  : es el número de polos del campo

Dependiendo de la velocidad, existen dos estructuras básicas usadas para el rotor. Las turbinas hidráulicas operan a bajas velocidades y por consiguiente se requiere de una gran número de polos para producir una frecuencia pre-establecida; en estos casos es más adecuado un rotor con polos salientes y devanados concentrados, tales rotores frecuentemente tienen devanados amortiguadores cortocircuitados, colocados en las caras polares y cuya función principal es amortiguar las oscilaciones de velocidad.

Las turbinas a gas y a vapor, operan a altas velocidades, el rotor es de forma cilíndrica, tienen 2 ó 4 polos de campo formados por devanados distribuidos colocados en ranuras en el rotor sólido, ellos frecuentemente no tienen devanados amortiguadores especiales pero los motores de acero sólido ofrecen trayectorias o

caminos para las corrientes parásitas, esas trayectorias tienen efectos equivalentes a los de los devanados amortiguadores.

Bajo condiciones de régimen permanente la única corriente rótica que existe es la corriente continua en el devanado de campo, no obstante, bajo condiciones dinámicas se inducen corrientes parásitas sobre la superficie del rotor y las paredes de las ranuras.

En la Figura 2.1 se observa que la máquina síncrona consiste de 3 devanados montados sobre el estator (parte estacionaria), de un devanado de campo montado sobre la parte giratoria (el rotor) y dos devanados adicionales ficticios sobre el rotor, los cuales modelan la trayectoria cortocircuitada de los devanados de amortiguamiento o en el rotor sólido. Estos dos devanados se consideran alineados con los ejes directo y en cuadratura del rotor.

Las corrientes que llevan estos 6 devanados son:  $i_a, i_b, i_c, i_F, i_D$  e  $i_Q$  las letras minúsculas indican cantidades estáticas y las letras mayúsculas indican cantidades rotóricas.

La corriente  $i_F$  es la corriente de campo y está sujeta a control a través de un sistema de excitación.

Las corrientes  $i_D$  e  $i_Q$  son las corrientes en las bobinas ficticias del rotor.

Usando las relaciones entre voltajes, corrientes y flujos concatenados.

$$[v] = [R][i] + \frac{d}{dt}[\lambda] \quad (2.1)$$

Se tiene:

$$\begin{bmatrix} v_{aa'} \\ v_{bb'} \\ v_{cc'} \\ v_{FF'} \\ v_{DD'} \\ v_{QQ'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} + \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_{aa'} \\ \lambda_{bb'} \\ \lambda_{cc'} \\ \lambda_{FF'} \\ \lambda_{DD'} \\ \lambda_{QQ'} \end{bmatrix}$$

La matriz y cantidades vectoriales son definidas comparando con la ecuación (2.1).

En donde:

$$[R] = \text{diag.} \{ r, r, r, r_F, r_D, r_Q \}$$

$r$  : es la resistencia de cada devanado de fase

$r_F$  : es la resistencia del devanado de campo

$r_D$  y  $r_Q$  : son las resistencias de los devanados rotóricos ficticios

Los términos de flujo concatenado están identificados por subíndices, los cuales están de acuerdo en signo con su flujo correspondiente, el cual a su vez está de acuerdo, por la regla de la mano derecha, con sus corrientes asociadas, por ejemplo:

$\lambda_{aa'}$  : es positiva si el flujo concatena la bobina  $aa'$  en la dirección hacia arriba.

$\lambda_{FF'}$  : es positiva si el flujo concatena la bobina  $FF'$  en la dirección del eje directo.

Notar que no obstante haberse definido  $R$ ,  $i$  y  $\lambda$  aún no se ha definido un vector de tensiones  $[v]$ .

Previamente se introduce la convención para generador:

$$[v] = \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \\ -v_F \\ -v_D \\ -v_Q \end{bmatrix}$$

Usando está definición en la ecuación (2.1), se obtiene:

$$[v] = -[R][i] - \frac{d}{dt}[\lambda]$$

Esta es la ecuación eléctrica para el generador, se tendrá en cuenta que  $v_D$  y  $v_Q$  son iguales a cero, debido a que en el modelo adoptado las bobinas ficticias rotóricas están cortocircuitadas.

Luego, relacionando  $[\lambda]$  a  $[i]$  por medio de

$$[\lambda] = [L_{(\theta)}] [i]$$

Siendo:

$[L_{(\theta)}]$  una matriz de orden 6 x 6, que relaciona seis flujos concatenados con las 6 corrientes.

$$[L_{(\theta)}] = \begin{bmatrix} L_{aa} & L_{ab} & L_{ac} & L_{aF} & L_{aD} & L_{aQ} \\ L_{ba} & L_{bb} & L_{bc} & L_{bF} & L_{bD} & L_{bQ} \\ L_{ca} & L_{cb} & L_{cc} & L_{cF} & L_{cD} & L_{cQ} \\ L_{Fa} & L_{Fb} & L_{Fc} & L_{FF} & L_{FD} & L_{FQ} \\ L_{Da} & L_{Db} & L_{Dc} & L_{DF} & L_{DD} & L_{DQ} \\ L_{Qa} & L_{Qb} & L_{Qc} & L_{QF} & L_{QD} & L_{QQ} \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

Se especificará algunos de los elementos de esta matriz.

Inductancias propias del estator.

$$L_{aa} = \frac{\lambda_{aa'}}{i_a} = L_s + L_m \cos 2\theta \quad L_s > L_m \geq 0$$

$$L_{bb} = \frac{\lambda_{bb'}}{i_b} = L_s + L_m \cos 2\theta \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$L_{cc} = \frac{\lambda_{cc'}}{i_c} = L_s + L_m \cos 2\theta \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

Inductancias mutuas entre bobinas del estator

$$L_{ab} = \frac{\lambda_{aa'}}{i_b} = - \left[ Ms + Lm \cos 2 \left( \theta + \frac{\pi}{6} \right) \right] , \quad M_s > L_m \geq 0$$

$$L_{bc} = \frac{\lambda_{bb'}}{i_c} = - \left[ Ms + Lm \cos 2 \left( \theta - \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$L_{ca} = \frac{\lambda_{cc'}}{i_a} = - \left[ Ms + Lm \cos 2 \left( \theta + \frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

Otras inductancias que conforman la matriz

$$L_{aF} = \frac{\lambda_{aa'}}{i_F} = M_F \cos \theta , \quad M_F > 0$$

$$L_{FF} = \frac{\lambda_{FF'}}{i_F} = L_F , \quad L_F > 0$$

$$L_{FQ} = \frac{\lambda_{FF'}}{i_Q} = 0$$

Esta última expresión resulta cero debido a que los dos arrollamientos son perpendiculares.

Reemplazando todos estos términos en la expresión (2.4) escrita en forma matricial,

$$[L(\theta)] = \begin{bmatrix} L_{11}(\theta) \\ L_{21}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{12}(\theta) \\ L_{22}(\theta) \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

En que:

$$[L_{11}] = \begin{bmatrix} L_s + L_m \cos 2\theta & -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) & -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) \\ -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) & L_s + L_m \cos 2\left(\theta - \frac{2\pi}{6}\right) & -M_s - L_m \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \\ -M_s - L_m \cos 2\left(\theta + \frac{5\pi}{6}\right) & -M_s - L_m \cos 2\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) & L_s + L_m \cos 2\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Dada la simetría

$$[L_{12}] = [L_{21}]^T \begin{bmatrix} M_F \cos \theta & M_D \cos \theta & M_Q \cos \theta \\ M_F \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_D \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & M_Q \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ M_F \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_D \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) & M_Q \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$[L_{22}] = \begin{bmatrix} L_F & L_R & 0 \\ M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & L_Q \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Se aclara que todas las constantes son positivas y los valores se determinan experimentalmente.

Notar que  $[L_{11}]$  relaciona flujos concatenados en el estator con corrientes estatóricas;  $[L_{22}]$  relaciona flujos concatenados en el rotor con corrientes rotóricas; mientras que  $[L_{12}]$  dá los flujos concatenados en el bobinado estatórico en términos de las corrientes en las bobinas del rotor.

Notar también que  $[L_{(\theta)}]$  depende de  $\theta$  en una manera complicada; es decir, involucra funciones trigonométricas.

De la ecuación (2.2) y usando  $[\lambda] = [L_{(\theta)}][i]$

Se obtiene:

$$[v] = -[R][i] - i \frac{d}{dt}[L_{(\theta)}] - [L_{(\theta)}] \frac{d}{dt}[i] \quad (2.7)$$

Entonces, aún en el caso simple con rotación uniforme, en donde  $\theta = \omega_o t + \theta_o$ , la forma de la ecuación (2.4) indica que se consiguen ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes variables periódicamente en el tiempo, por lo que es difícil de entender la naturaleza general del comportamiento del sistema.

## 2.2 Transformación de Park

Para simplificar las ecuaciones y en algunos casos importantes obtener ecuaciones lineales invariantes en el tiempo, se usa la transformación de Park (también llamada transformación de Blondel ó transformación  $dq0$ ) de las cantidades estáticas abc.

Se transformarán tensiones, corrientes y flujos concatenados abc. En el caso de corrientes, luego de la aplicación de la transformación de Park, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} i_d \\ i_q \\ i_0 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ -\text{sen } \theta & -\text{sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & -\text{sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix}$$

ó usando notación matricial:

$$[i_{dq0}] = [P] [i_{abc}]$$

En forma análoga para tensiones y flujos concatenados:

$$[v_{dq0}] = [P] [v_{abc}]$$

$$[\lambda_{dq0}] = [P] [\lambda_{abc}]$$

Las nuevas variables  $dq0$  son también llamadas variables de Park; además hay que tener presente que la transformación  $[P]$  depende de  $\theta$ . Físicamente  $i_d$  e

$i_q$  tienen una interpretación como corrientes en un par de devanados giratorios ficticios "fijos en el rotor".

$i_d$  : fluye en un devanado ficticio cuyo eje está alineado con el eje directo ó eje "d"

$i_q$  : fluye en un devanado ficticio cuyo eje está alineado con el eje en cuadratura ó eje "q".

Estas corrientes producen las mismas componentes de flujo como lo hacen las corrientes reales abc.

Está transformación no es ortogonal pero permite una interpretación física, además no es invariante en potencia. También se usa la transformación ortogonal siguiente (expresión (2.8)), en donde  $P$  no es la matriz de transformación original. Con la finalidad de deducir en forma simple se usará ésta matriz y no la original.

$$\begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{Sen}\theta & \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

ó usando notación matricial:

$$\begin{bmatrix} i_{0dq} \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} i_{abc} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

En forma análoga para tensiones y flujos concatenados:

$$\begin{bmatrix} v_{0dq} \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} v_{abc} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_{0dq} \end{bmatrix} = [P] \begin{bmatrix} \lambda_{abc} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Debido a que  $[P]^{-1} = [P]^T$ , la transformación  $[P]$  es no singular, esto se puede verificar multiplicando ambos términos por  $[P]$ , para obtener la matriz identidad.

Como se quiere transformar las variables (abc) referidas al estator en variables (0dq) referidas al rotor, dejamos las cantidades r3toricas originales inalterados, con este objetivo se definir3 el vector  $[i_B]$  de orden 6 x 1 y la matriz  $[B]$  de orden 6 x 6, como sigue:

$$[i_B] = \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [P] & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} = [B] [i] \quad (2.12)$$

En que:

$[I]$  : es la matriz identidad de orden 3 x 3

$[O]$ : es la matriz cero de orden 3 x 3

En forma similar se define:

$$[v_B] = [B] [v] \quad (2.13)$$

$$[\lambda_B] = [B] [\lambda] \quad (2.14)$$

Se puede verificar que:

$$[B]^{-1} = [B]^T = \begin{bmatrix} [P]^T & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

Tambi3n se debe encontrar la relaci3n entre las variables referidas al rotor  $\lambda_B$  e  $i_B$ .

Ya que:

$$[\lambda] = [L_{(\theta)}] [i]$$

Entonces de (2.14) y (2.12)

$$[B]^{-1} = [\lambda_B] = [L_B(\theta)] [B]^{-1} [i_B]$$

Multiplicando por  $[B]$

$$[\lambda_B] = [B] [L(\theta)] [B]^{-1} [i_B]$$

$$[\lambda_B] = [L_B] [i_B] \quad (2.16)$$

En que:

$$[L_B] = [B] [L(\theta)] [B]^{-1} \quad (2.17)$$

$[L_B]$  : es la nueva matriz de inductancias

Aplicando esta relación (2.17) en la expresión (2.5)

$$[L_B] = \begin{bmatrix} [P] & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [L_{11}] & [L_{12}] \\ [L_{21}] & [L_{22}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [P]^T & [O] \\ [O] & [I] \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

Desarrollando:

$$[L_B] = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} L_O & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_d & 0 & KM_F & KM_D & 0 \\ 0 & 0 & L_q & 0 & 0 & KM_Q \\ \hline 0 & KM_F & 0 & L_F & M_R & 0 \\ 0 & KM_D & 0 & M_R & L_D & 0 \\ 0 & 0 & KM_Q & 0 & 0 & L_Q \end{array} \right] \quad (2.19)$$

En que:

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$L_O = L_s - 2M_s$$

$$L_d = L_s + M_s + \frac{1}{2} L_m$$

$$L_q = L_s + M_s + \frac{3}{2} L_m$$

### 2.3 Tensión terminal

Habiéndose obtenido las relaciones anteriores, se desarrollará las relaciones de tensión-corriente usando las variables de Park.

En la ecuación (2.2)

$$[v] = -[R][i] - \frac{d}{dt}[\lambda]$$

Utilizando las ecuaciones de (2.12) a (2.14)

$$[B]^{-1}[v_B] = -[R][B]^{-1}[i_B] - \frac{d}{dt}([B]^{-1}[\lambda_B])$$

Multiplicando por  $[B]$

$$[v_B] = -[B][R][B]^{-1}[i_B] - [B]\frac{d}{dt}([B]^{-1}[\lambda_B]) \quad (2.20)$$

Usando la identidad:

$$[B][R][B]^{-1} = [R]$$

Se puede reescribir la ecuación (2.20)

$$[v_B] = -[R][i_B] - [B]\frac{d}{dt}[B]^{-1}[\lambda] - \frac{d}{dt}[\lambda_B] \quad (2.21)$$

Esta es la ecuación eléctrica referida al rotor y expresada en forma matricial.

Siendo:

$$[B]\frac{d}{dt}[B]^{-1}[\lambda_B] = [B]\left(\frac{d}{dt}[B]^{-1}\right)\frac{d\theta}{dt}[\lambda_B] \quad (2.22)$$

Desarrollando

$$[B]\frac{d}{d\theta}[B]^{-1} = \begin{bmatrix} [P] & | & [O] \\ \hline [O] & | & [I] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d}{d\theta} [P]^{-1} & | & [O] \\ \hline [O] & | & [O] \end{bmatrix}$$

Operando en el segundo miembro

$$[B] \frac{d}{d\theta} [B]^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} [P] \frac{d}{d\theta} [P]^{-1} & & & [O] \\ \hline & & & [O] \end{array} \right]$$

Se llega a:

$$[B] \frac{d}{d\theta} [B]^{-1} = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & [O] \\ 0 & 0 & 1 & [O] \\ 0 & -1 & 0 & [O] \\ \hline & & & [O] \end{array} \right] \quad (2.23)$$

Esta última expresión es una matriz de orden 6 x 6 que solo tiene 2 elementos diferentes de cero.

Luego reemplazando (2.23) en (2.22)

$$[B] \frac{d}{d\theta} [B]^{-1} [\lambda_B] = \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & [O] \\ 0 & 0 & 1 & [O] \\ 0 & -1 & 0 & [O] \\ \hline & & & [O] \end{array} \right] \frac{d\theta}{dt} [\lambda_B] \quad (2.24)$$

Y está última ecuación (2.24) en la ecuación eléctrica (2.21)

$$[v_B] = -[R] [i_B] - \left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & [O] \\ 0 & 0 & 1 & [O] \\ 0 & -1 & 0 & [O] \\ \hline & & & [O] \end{array} \right] \frac{d\theta}{dt} [\lambda_B] - \frac{d}{dt} [\lambda_B] \quad (2.25)$$

Si la rotación es uniforme ( $\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \text{constante}$ ), entonces la relación (2.25), es

lineal e independiente del tiempo; es decir, a velocidad constante.

En la expresión (2.25),  $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$  pasa adelante y luego se multiplica:

$$[v_B] = -[R] [i_B] - \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_q \\ -\lambda_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} [\lambda_B]$$

En forma desarrollada:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \\ v_F \\ v_D \\ v_Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_F & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r_Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_o \\ i_d \\ i_q \\ i_F \\ i_D \\ i_Q \end{bmatrix} - \dot{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_q \\ -\lambda_d \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \lambda_o \\ \lambda_d \\ \lambda_q \\ \lambda_F \\ \lambda_D \\ \lambda_Q \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Operando:

$$\begin{aligned} v_o &= -r i_o - \frac{d}{dt} \lambda_o \\ v_d &= -r i_d - \dot{\theta} \lambda_q - \frac{d}{dt} \lambda_d \\ v_q &= -r i_q + \dot{\theta} \lambda_d - \frac{d}{dt} \lambda_q \\ v_F &= -r_F i_F - \frac{d}{dt} \lambda_F \\ v_D &= -r_D i_D - \frac{d}{dt} \lambda_D \\ v_Q &= -r_Q i_Q - \frac{d}{dt} \lambda_Q \end{aligned} \quad (2.27)$$

## 2.4 Modelo en régimen permanente

Considerando operación síncrona en régimen permanente y que las tensiones de cada fase en los terminales del generador están desfasadas  $120^\circ$  en el espacio con secuencia positiva a-b-c, entonces  $v_o = 0$  (sistema balanceado).  $v_d$  y  $v_q$  son constantes con  $v_F$  también constante; luego los términos del lado izquierdo de las ecuaciones (2.27) son constantes.

También en régimen permanente todas las corrientes y flujos concatenados son constantes. En particular  $i_o = 0$  y las corrientes en los devanados

amortiguadores rotóricos  $i_D = i_Q = 0$  (en este modelo no se considera los bobinados amortiguadores). Se Nota asimismo que  $\dot{\theta} = \omega_o$  (velocidad constante); por lo tanto las ecuaciones (2.27) se reducen a:

$$v_d = -r i_d - \omega_o \lambda_q$$

$$v_q = -r i_q + \omega_o \lambda_d \tag{2.28}$$

$$v_F = -r_F i_F$$

En que:

$$\lambda_d = L_d i_d + KM_F i_F$$

$$\lambda_q = L_q i_q$$

$$\lambda_F = KM_F i_d + L_F i_F \tag{2.29}$$

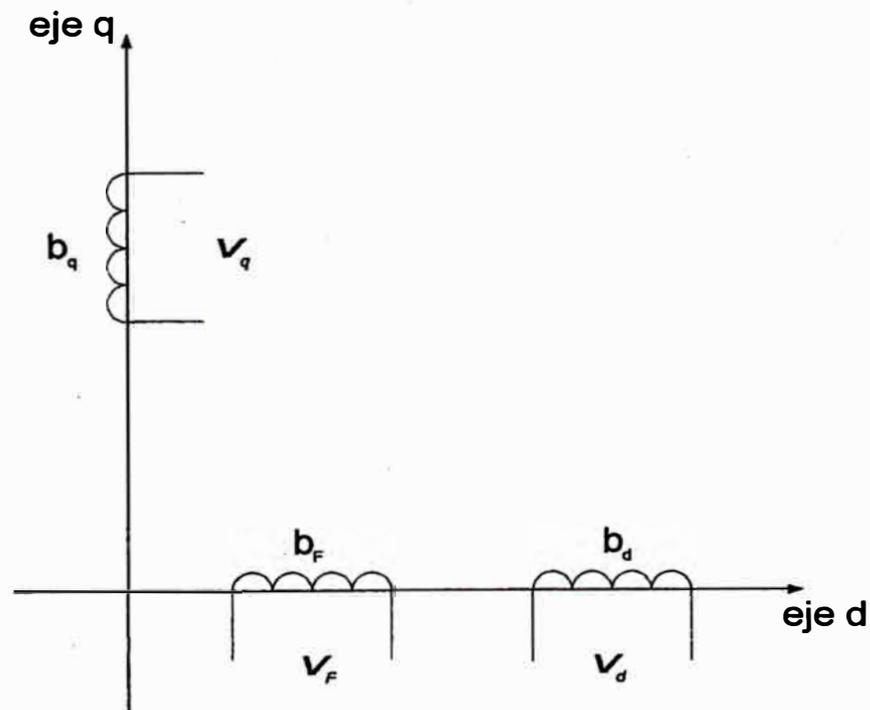


Figura 2.2 Modelo clásico de la máquina síncrona

Es decir, en este modelo se consideran solo 3 bobinados:

$b_q$ : es el bobinado del estator en el eje en cuadratura

$b_d$ : es el bobinado del estator en el eje directo

$b_f$ : es el bobinado de campo ubicado en el rotor

Luego, en operación síncrona se relacionará valores instantáneos de tensión y corriente con sus correspondientes valores eficaces. Considerando que la tensión en terminales del generador es un conjunto de 3 voltajes de secuencia positiva y con:

$$v_{a(t)} = \sqrt{2} |V| \cos(\omega_o t + \alpha)$$

Y que el generador está girando a la velocidad síncrona  $\left(\theta = \omega_o t + \frac{\pi}{2} + \delta\right)$ ;

donde los valores  $|V|$ ,  $\alpha$  y  $\delta$  son constantes.

Entonces, aplicando la transformación de Park:

$$\begin{bmatrix} v_o \\ v_d \\ v_q \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\theta & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \\ \text{Sen}\theta & \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$v_o = 0$$

$$v_d = \sqrt{3} |V| \cos(\alpha - \delta)$$

$$v_q = \sqrt{3} |V| \text{Sen}(\alpha - \delta) \tag{2.30}$$

donde,  $v_d$  y  $v_q$  también resultan constantes.

A continuación se hallará, partiendo de las ecuaciones (2.30), una relación entre el fasor  $v_a$ , el ángulo  $\delta$ ,  $v_d$  y  $v_q$ .

$$v_q + jv_d = \sqrt{3} |V| [\cos(\alpha - \delta) + j\sin(\alpha - \delta)]$$

En notación compleja

$$v_q + jv_d = \sqrt{3} |V| e^{j(\alpha - \delta)} \quad (2.31)$$

Introduciendo el concepto de fasor voltaje complejo

$$v_a = |V| e^{j\alpha} \quad (2.32)$$

Reemplazando (2.32) en (2.31)

$$v_q + jv_d = \sqrt{3} V_a e^{-j\delta}$$

Luego:

$$V_a = \left( \frac{v_q}{\sqrt{3}} + j \frac{v_d}{\sqrt{3}} \right) e^{-j\delta} \quad (2.33)$$

Haciendo:

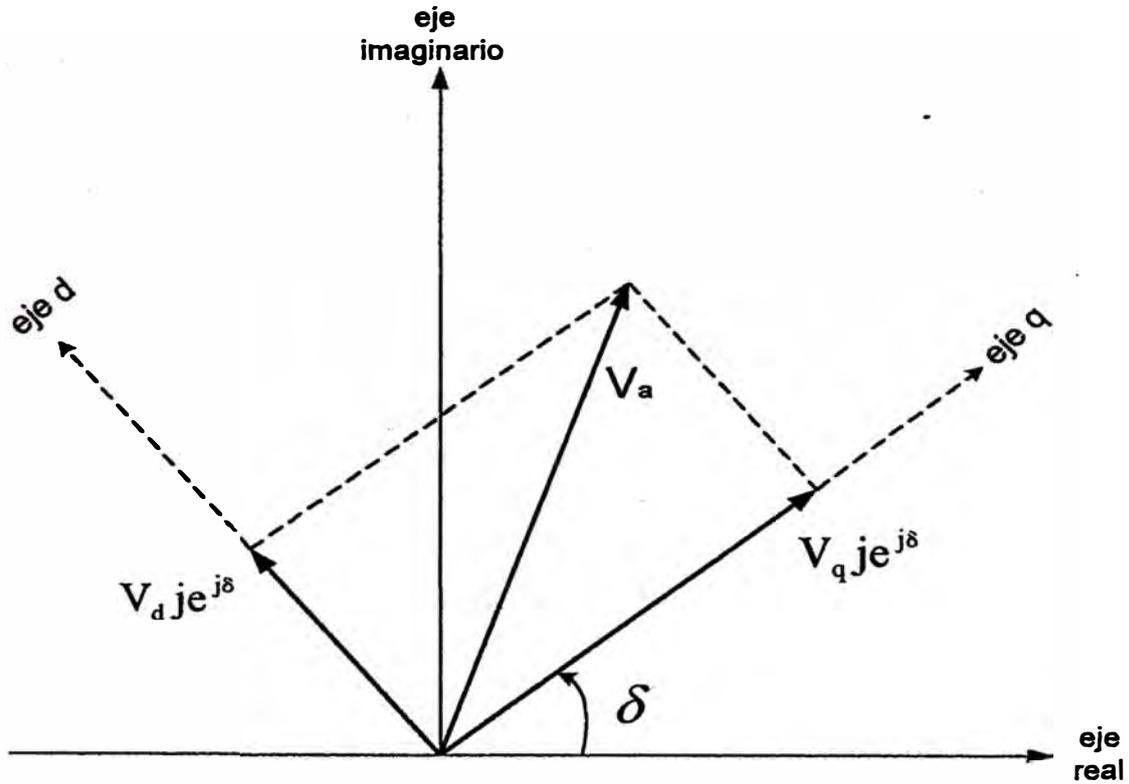
$$V_q = \frac{v_q}{\sqrt{3}}$$

$$V_d = \frac{v_d}{\sqrt{3}} \quad (2.34)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.34) en (2.33)

$$V_a = (V_q + jV_d) e^{-j\delta} \quad (2.35)$$

Notar que  $V_q$  y  $V_d$  son de valores reales y esta expresión es una relación simple entre  $V_a$ ,  $V_q$ ,  $V_d$  y  $\delta$ . De modo que si se dan como dato  $V_a$  y  $\delta$  entonces por cálculo algebraico o geométrico se encuentra  $V_d$  y  $V_q$ ; y por consiguiente con las fórmulas (2.34) se halla  $v_d$  y  $v_q$ . Si se quiere resolver geoméricamente la ecuación (2.35), se puede usar la siguiente Figura 2.3.



**Figura 2.3** Componentes rectangulares de  $V_a$ .

La Figura 2.3 es trazada para  $V_d$  y  $V_q$  positivas, es frecuente tomar  $e^{j\delta}$  y  $je^{j\delta}$  como vectores unitarios de un nuevo sistema de coordenadas a un ángulo  $\delta$  con respecto a los ejes real e imaginario. Se marcarán los nuevos ejes con  $d$  y  $q$ ; y así el problema de encontrar  $V_d$  y  $V_q$  es simplemente hallar las componentes rectangulares de  $V_a$  con respecto al nuevo sistema de coordenadas.

La ecuación (2.35) también se puede usar o aplicar para corrientes.

$$I_a = (I_q + jI_d) e^{-j\delta} \tag{2.36}$$

Por otro lado, de las dos primeras ecuaciones de (2.28) se obtiene

$$j \frac{v_d}{\sqrt{3}} = -j r \frac{i_d}{\sqrt{3}} - j \frac{\omega_o \lambda_q}{\sqrt{3}} \quad (2.37)$$

$$\frac{v_q}{\sqrt{3}} = -r \frac{i_q}{\sqrt{3}} - \omega_o \frac{\lambda_d}{\sqrt{3}} \quad (2.38)$$

Sumando las ecuaciones (2.37) y (2.38) miembro a miembro.

$$V_q + j V_d = -r (I_q + j I_d) - j \omega_o \frac{\lambda_q}{\sqrt{3}} + \omega_o \frac{\lambda_d}{\sqrt{3}} \quad (2.39)$$

De las ecuaciones (2.29) reemplazando en (2.39)

$$V_q + j V_d = -r (I_q + j I_d) - j \omega_o L_q \frac{i_q}{\sqrt{3}} + \omega_o L_d \frac{i_d}{\sqrt{3}} + \omega_o K M_F \frac{i_F}{\sqrt{3}} \quad (2.40)$$

Multiplicando la ecuación (2.40) por  $e^{j\delta}$

$$V_a = -r I_a - j \omega_o L_q I_q e^{j\delta} + \omega_o L_d I_d e^{j\delta} + \omega_o K M_F \frac{i_F}{\sqrt{3}} e^{j\delta} \quad (2.41)$$

Como:

$$K = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Definiendo:

$$\sqrt{2} E_a = \omega_o M_F i_F e^{j\delta}$$

Entonces:

$$V_a = -r I_a - j \omega_o L_q I_q e^{j\delta} + \omega_o L_d I_d e^{j\delta} + E_a \quad (2.42)$$

Esta se justifica porque  $V_a = E_a$  cuando  $I_a = 0$  (por lo tanto  $I_d = I_q = 0$ ); es

decir,  $E_a$  es el voltaje a circuito abierto.

Introduciendo el concepto de reactancia  $jX_d = j\omega_o L_d$  y  $jX_q = j\omega_o L_q$ , y

reemplazando en la ecuación (2.42)

$$V_a = -r I_a - jX_q I_q e^{j\delta} + jX_d I_d e^{j\delta} + E_a \quad (2.43)$$

Reescribiendo esta última ecuación

$$E_a = V_a + r I_a + j X_d j I_d e^{j\delta} + j X_q I_q e^{j\delta} \quad (2.44)$$

En que  $j I_d e^{j\delta} = I_{ad}$  e  $I_q e^{j\delta} = I_{aq}$ , lo cual verifica el hecho de que

$$I_a = (I_q + j I_d) e^{j\delta} = I_{aq} + I_{ad}, \text{ luego, reemplazando en la ecuación (2.44)}$$

$$E_a = V_a + r I_a + j X_d I_{ad} + j X_q I_{aq} \quad (2.45)$$

$I_{ad}$  e  $I_{aq}$  simplemente se representa por  $I_d$  e  $I_q$  respectivamente en el sistema de referencia  $d - q$ . Además haciendo las simplificaciones.

$E_a = E_o$ , es la tensión interna o a circuito abierto

$V_a = V$ , es la tensión en terminales de la máquina

$I_a = I$ , es la corriente de armadura

Y reemplazando en la expresión (2.45) se obtiene una ecuación más compacta:

$$E_o = V + r I + j X_d I_d + j X_q I_q \quad (2.46)$$

Construyendo su correspondiente diagrama fasorial y tomando como referencia la tensión en terminales  $V$  a ángulo cero. Además  $\phi$  es el ángulo entre la tensión ( $V$ ) y la corriente ( $I$ ) en la carga.

En muchos casos se considera  $r \approx 0$  y por lo tanto se desprecia, tal como se muestra en la Figura 2.5.

## 2.5 Potencia desarrollada por el generador síncrono

Como se está considerando que la máquina síncrona está operando conectado a un sistema eléctrico, se deducirán ahora las expresiones de la potencia activa y reactiva para un generador síncrono de polos salientes alimentando una carga.

Se sabe que la potencia activa es:

$$P = 3 V I \cos \phi \quad (2.47)$$

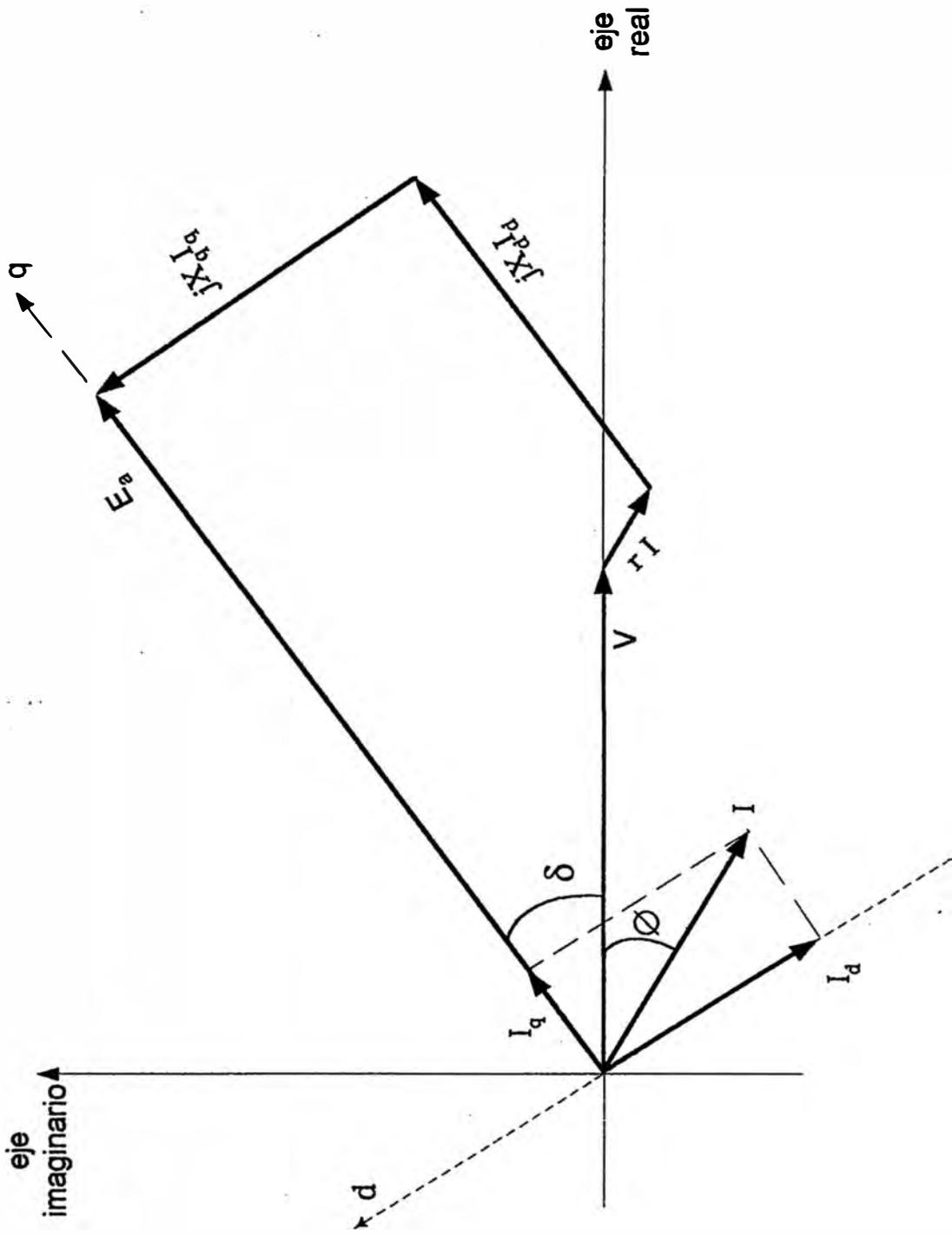
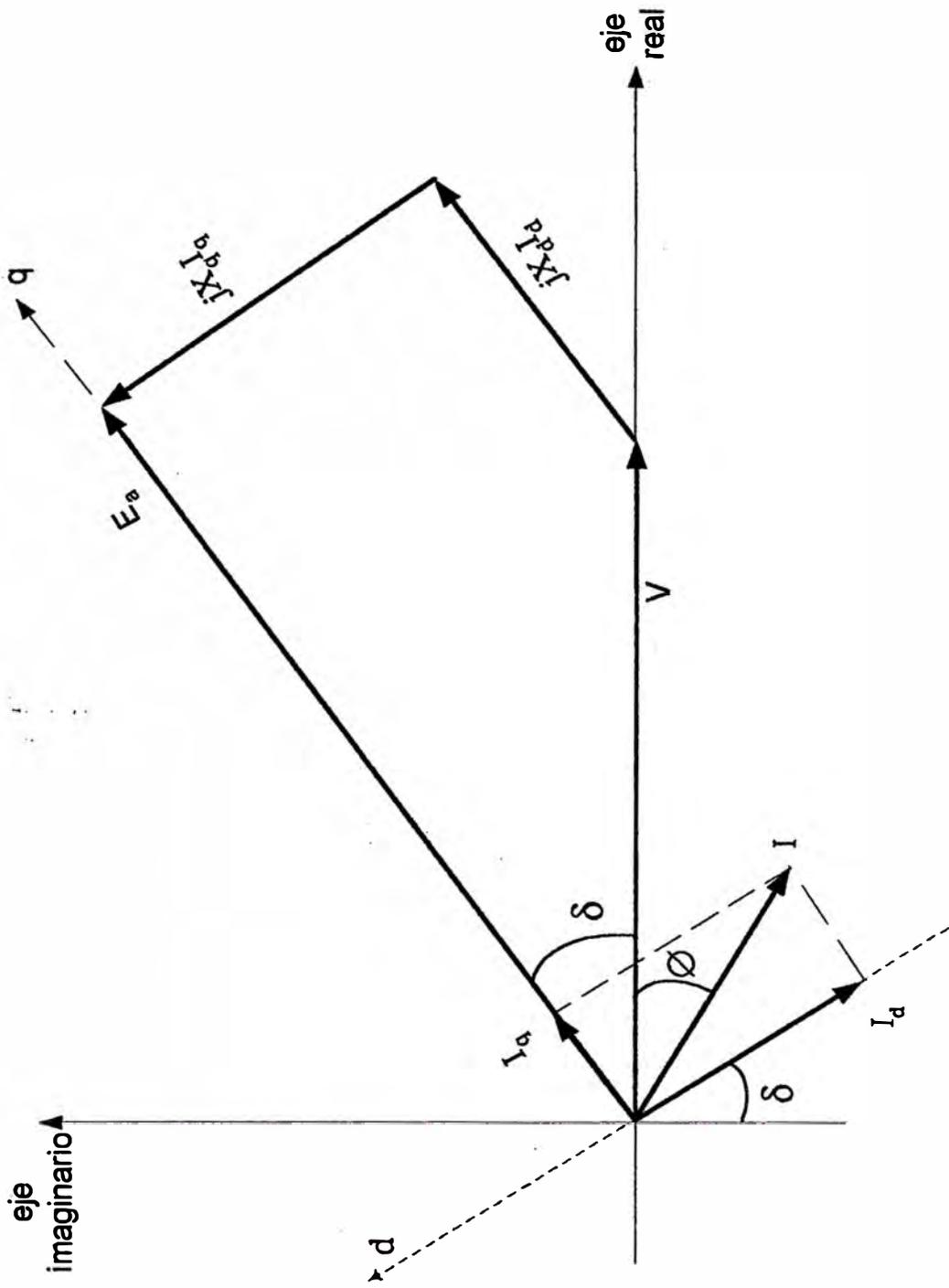


Figura 2.4 Diagrama fasorial del generador sincrónico de polos salientes.



**Figura 2.5** Diagrama fasorial del generador síncrono de polos salientes sin considerar la resistencia r.

De la Figura 2.5 se deduce que:

$$I \cos \phi = I \cos(\delta + \phi) \cos \delta + I \sin \phi \cos(90^\circ - \delta)$$

O sea:

$$I \cos \phi = I_q \cos \delta + I_d \sin \delta \quad (2.48)$$

Reemplazando (2.48) en (2.47):

$$P = 3 V (I_q \cos \delta + I_d \sin \delta)$$

$$P = 3 V I_q \cos \delta + 3 V I_d \sin \delta \quad (2.49)$$

Además de la Figura 2.5

$$V \sin \delta = X_q I_q$$

$$V \cos \delta = E_a - X_d I_d \quad (2.50)$$

De las ecuaciones (2.50) se despeja  $I_q$  e  $I_d$  y se reemplaza en la ecuación

(2.49)

$$P = 3 V \left( \frac{V \sin \delta}{X_q} \right) \cos \delta + 3 V \left( \frac{E_a - V \cos \delta}{X_d} \right) \sin \delta \quad (2.49)$$

Usando equivalencias trigonométricas

$$P = 3 V \left( \frac{V \sin \delta}{2 X_q} \right) + 3 V \left( \frac{E_a \sin \delta}{X_d} - \frac{V \sin 2\delta}{2 X_d} \right)$$

de donde:

$$P = 3 V \left( \frac{E_a \sin \delta}{X_d} - \frac{V \sin 2\delta}{2} \left( \frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d} \right) \right)$$

Finalmente

$$P = \frac{3 V E_a}{X_d} \sin \delta + \frac{3 V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right) \sin 2\delta \quad (2.51)$$

En valores por unidad

$$P = \frac{VE_a}{X_d} \text{sen } \delta + \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right) \text{sen } 2\delta \quad (2.52)$$

Asimismo la potencia reactiva es:

$$Q = 3VI \text{ sen } \phi \quad (2.53)$$

De la Figura 2.5

$$I \text{ sen } \phi = I_d \text{ cos } \delta - I_q \text{ sen } \delta \quad (2.54)$$

Reemplazando (2.54) en (2.53)

$$Q = 3V (I_d \text{ cos } \delta - I_q \text{ sen } \delta)$$

$$Q = 3V I_d \text{ cos } \delta - 3V I_q \text{ sen } \delta \quad (2.55)$$

De las ecuaciones (2.50) se despeja  $I_q$  e  $I_d$  y se reemplaza en la ecuación

(2.55)

$$Q = 3V \left( \frac{E_a - V \text{ cos } \delta}{X_d} \right) \text{ cos } \delta - 3V \left( \frac{V \text{ sen } \delta}{X_q} \right) \text{ sen } \delta$$

Factorizando términos comunes

$$Q = \frac{3VE_a \text{ cos } \delta}{X_d} - \frac{3V^2}{X_d X_q} (X_q \text{ cos }^2 \delta + X_d \text{ sen }^2 \delta)$$

Como:

$$\text{sen}^2 \delta = 1 - \text{cos}^2 \delta$$

entonces:

$$Q = \frac{3VE_a \text{ cos } \delta}{X_d} - \frac{3V^2}{X_d X_q} ((X_q - X_d) \text{ cos }^2 \delta + X_d)$$

También:

$$\text{cos}^2 \delta = \frac{1 + \text{cos } 2\delta}{2}$$

Luego:

$$Q = \frac{3 V E_a \cos \delta}{X_d} - \frac{3 V^2}{X_d X_q} \left( \frac{X_q - X_d}{2} + \frac{(X_q - X_d)}{2} \cos 2\delta + X_d \right)$$

Simplificando:

$$Q = \frac{3 V E_a \cos \delta}{X_d} - \frac{3 V^2}{2 X_d X_q} \left( (X_d + X_q) - (X_d - X_q) \cos 2\delta \right)$$

Finalmente

$$Q = \frac{3 V E_a}{X_d} \cos \delta + \frac{3 V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right) \cos 2\delta - \frac{3 V^2}{2} \left( \frac{X_d + X_q}{X_d X_q} \right) \quad (2.56)$$

En valores por unidad

$$Q = \frac{V E_a}{X_d} \cos \delta + \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right) \cos 2\delta - \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d + X_q}{X_d X_q} \right) \quad (2.57)$$

## CAPITULO III EL DIAGRAMA DE OPERACION DE LA MAQUINA SÍNCRONA EN REGIMEN PERMANENTE

### 3.1 Consideraciones previas

El análisis en el presente trabajo está restringido a régimen permanente con condiciones definidas por las siguientes suposiciones:

- a) Toda variación en la carga tiene un intervalo de tiempo corto, entonces cualquier perturbación es pequeña y despreciable.
- b) En todos los casos la máquina síncrona está operando en paralelo con un sistema eléctrico de capacidad muy grande; es decir, conectado a una barra infinita con un voltaje constante e inafectado por los cambios de carga en la máquina en operación.
- c) Se puede obviar la saturación magnética, esto se justifica en que uno de los problemas más importantes de la máquina síncrona, tal como la estabilidad, usualmente se relaciona a la baja excitación (sin saturación).

### 3.2 Diagrama vectorial

#### 3.2.1 Diagrama vectorial de la máquina síncrona de polos salientes

El diagrama vectorial convencional de un alternador de polos salientes alimentando a una carga con un factor de potencia en atraso es mostrado en la Figura 3.1.

El vector OA representa la tensión terminal  $V$  e  $I$  la corriente de armadura en atraso de la tensión terminal en un ángulo  $\phi$ .

La línea AB es trazada a un ángulo  $\phi$  de la perpendicular Ay, una longitud proporcional al producto  $IX_q$  es dibujada en ella y el eje en cuadratura es entonces dibujado perfectamente de F a O.

Las dos componentes ficticias  $I_d$  e  $I_q$  de la corriente de armadura, pueden ser obtenidas trazando el vector  $I_d$  perpendicular al eje en cuadratura OF y el vector  $I_q$  paralelo al mismo eje, correspondientemente los vectores perpendiculares  $I_d X_d$  e  $I_q X_q$  pueden ser entonces trazados.

La prolongación de OF a OG da la tensión interna  $E_a$ .

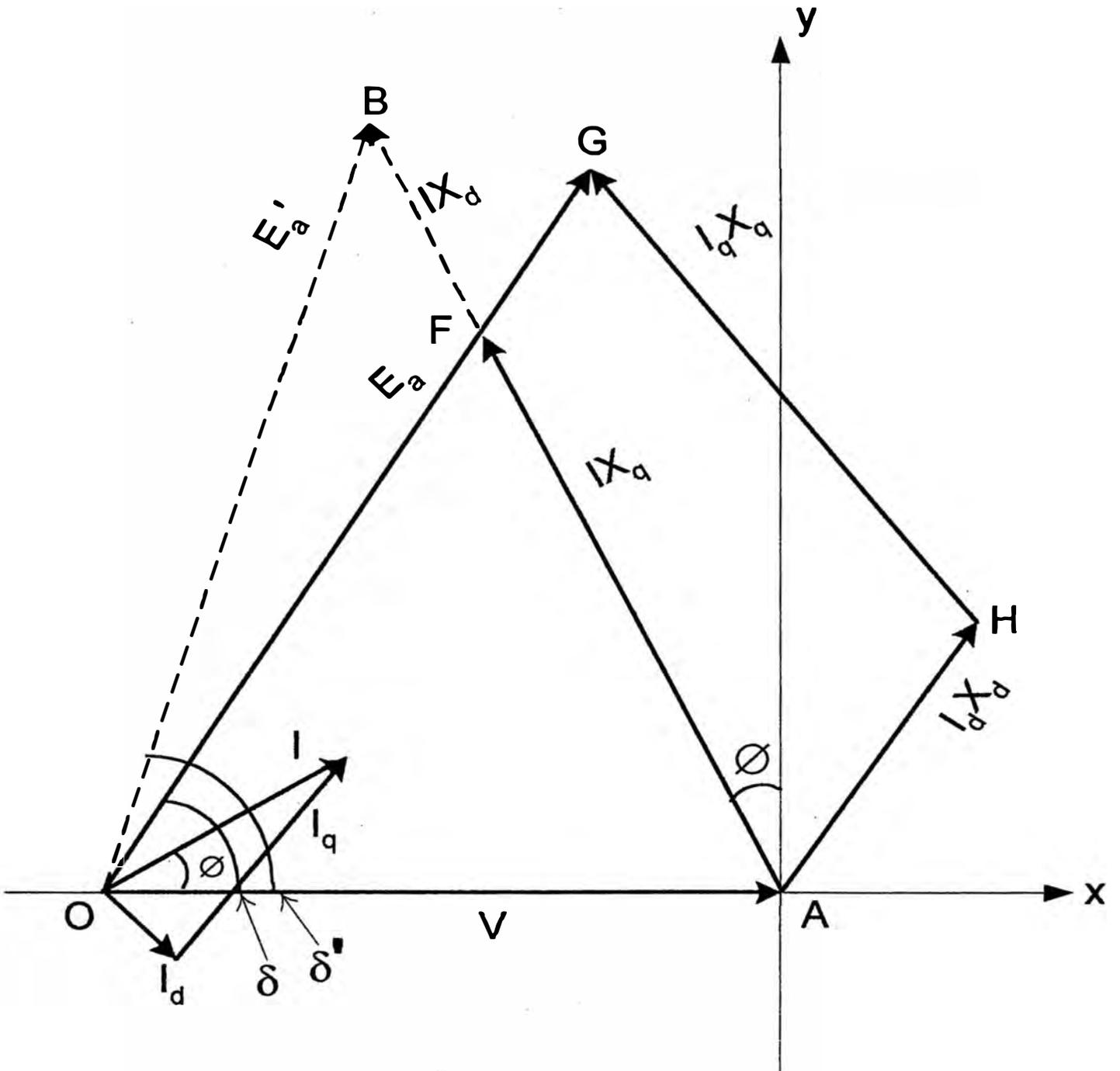
Si la línea AF es extendida hasta B, de modo que AB representa  $IX_d$ , OBA es el triángulo vectorial convencional de la máquina síncrona de rotor cilíndrico.

El diagrama vectorial correspondiente de un alternador operando a factor de potencia en adelanto es mostrado en la Figura 3.2, se puede ver que existe una apreciable diferencia en el voltaje interno y el ángulo  $\delta$  dado por los dos casos: de polos salientes y de rotor liso (líneas punteadas).

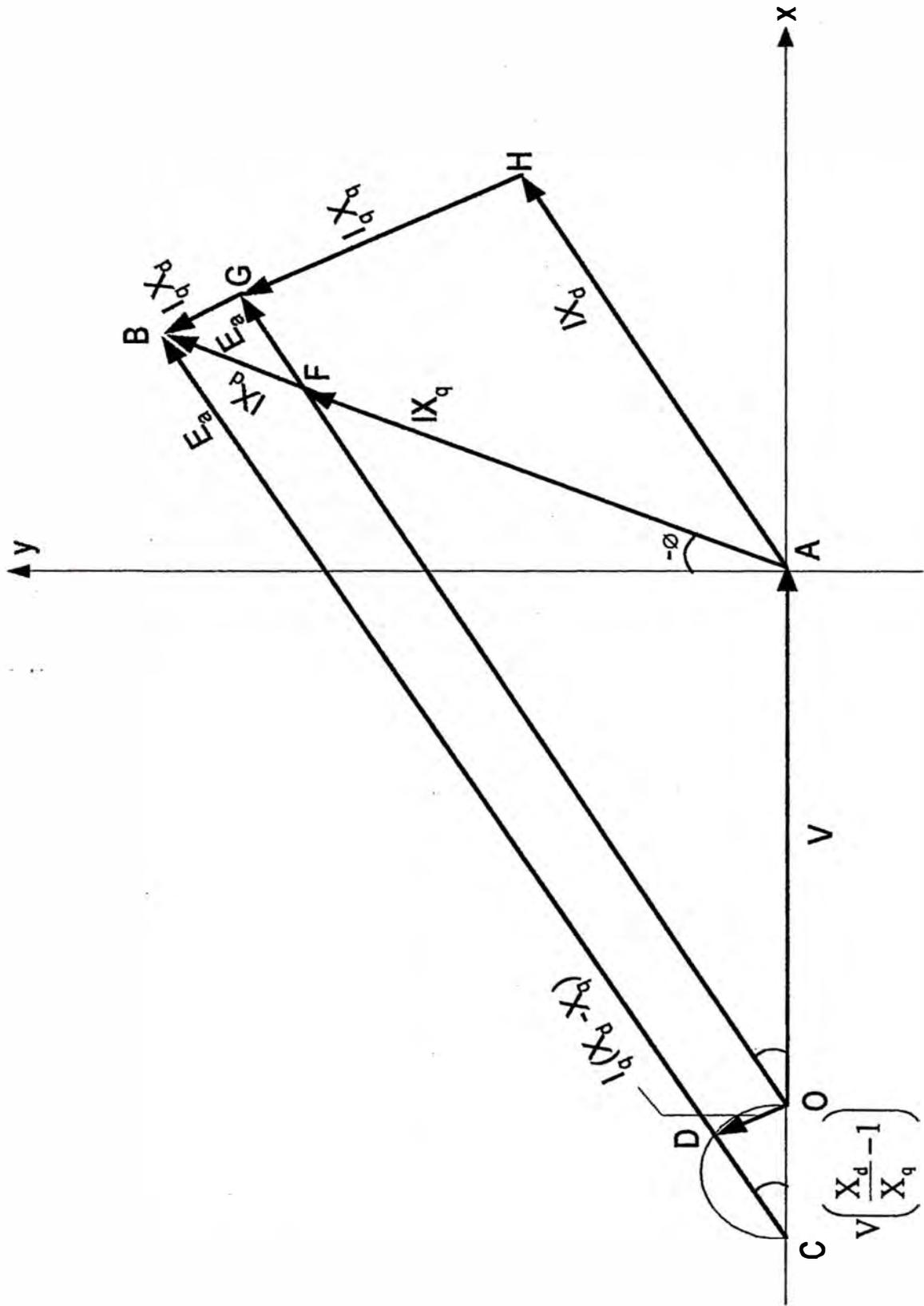
En ambas Figuras el polígono OAHG representa el diagrama vectorial de tensiones. El voltaje terminal es constante de modo que las variables operacionales son la corriente de armadura ( $I$ ); el factor de potencia (f.d.p.) y la corriente de campo ( $I_f$ ).

Para simplificar la representación es deseable que el polígono vectorial sea reemplazado por un triángulo vectorial correspondiente a aquel normalmente asociado a la teoría del rotor cilíndrico. Este último cambio es mostrado en la Figura 3.3, en la cual HG ha sido extendida hasta B, de modo que HB representa  $I_q X_d$  y





**Figura 3.2** Diagrama fasorial de la máquina síncrona caso subexcitado.



**Figura 3.3** Diagrama fasorial de tensiones de la máquina síncrona de polos salientes en régimen permanente

AB representa  $IX_d$ . Luego BC es trazado paralelo a OG y un semicírculo es trazado sobre el diámetro OC. Por simple geometría:

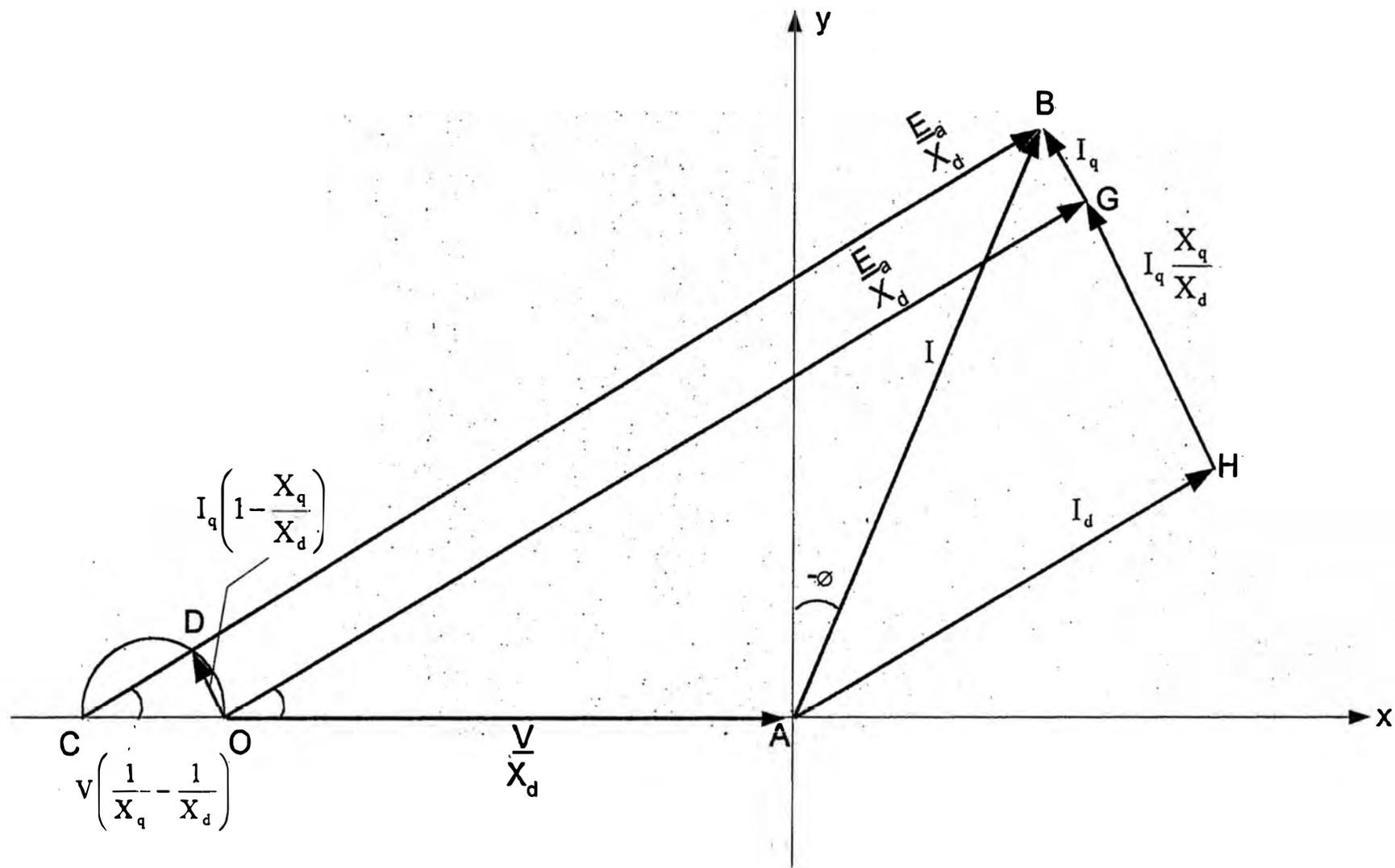
$$DB = OG = E_a \quad \text{y} \quad OC = V \left( \frac{X_d}{X_q} - 1 \right)$$

De modo que el  $\Delta CBA$  junto con el semicírculo CDO dan el polígono vectorial de un alternador en una manera más simple que la de aquella de la Figura 3.1.

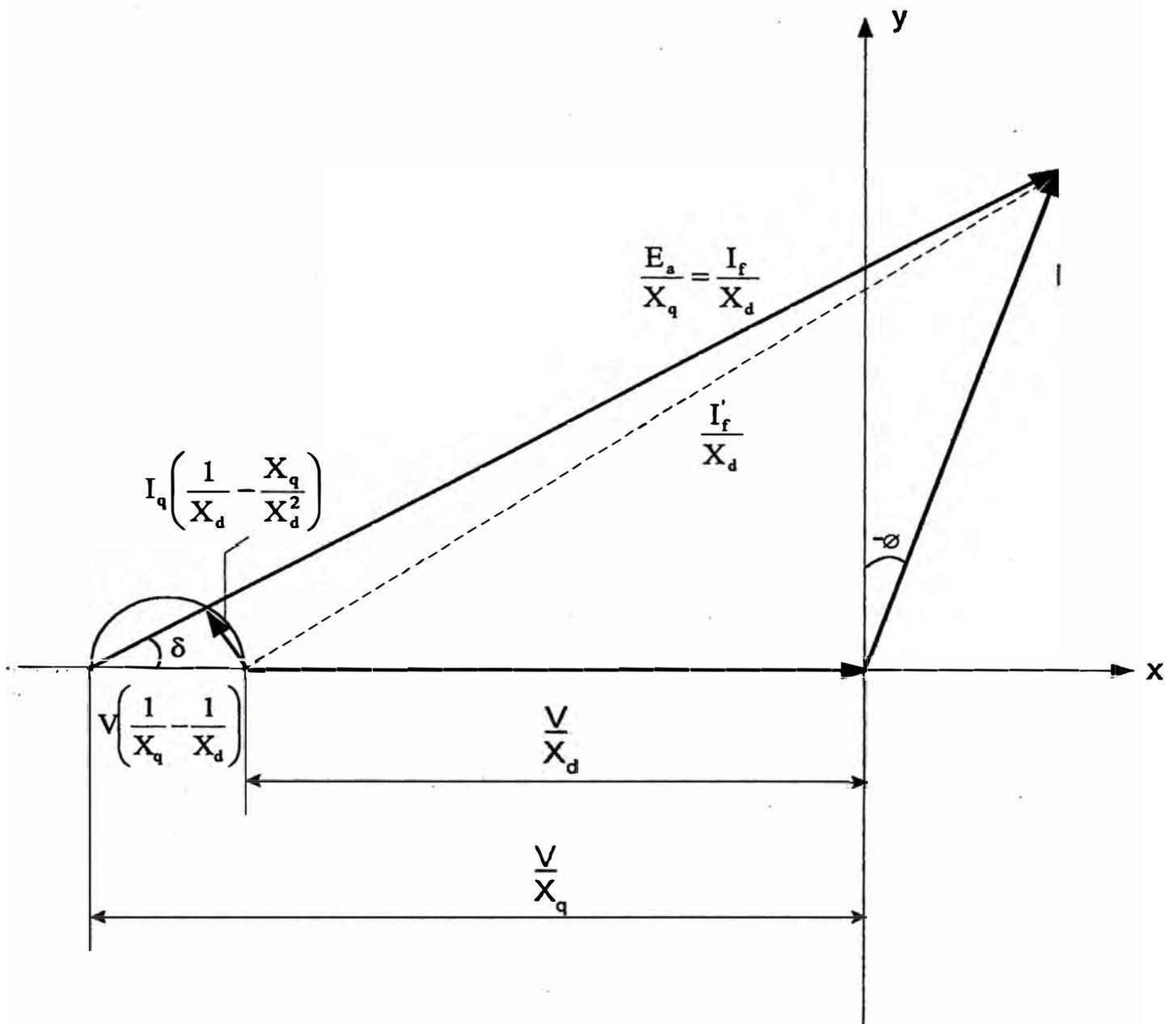
Para transformar este polígono vectorial de tensión en polígono de corriente solamente es necesario dividir los 4 parámetros (representados por los 4 lados del polígono ODBA) por  $X_d$ , obteniendo así el polígono vectorial de corrientes OABD de la Figura 3.4. En esa Figura OA representa el cociente  $V / X_d$  y viene a ser la corriente de cortocircuito de un alternador con excitación nula. AB es la corriente de armadura y DB es la tensión interna dividido por  $X_d$ ; por ejemplo la corriente de cortocircuito con excitación nominal.

... Con la suposición que no existe saturación  $E_a$  también representa la corriente de campo a plena carga  $I_f$ ; por lo tanto,  $E_a / X_d$  puede ser escrita como  $I_f / X_d$ . En la misma Figura 3.3 el vector OD puede ser considerado como representando la contribución del efecto de polos salientes a la tensión interna; en la Figura 3.4, ésta puede ser representada como la contribución similar para la corriente de campo con carga.

A partir de la Figura 3.4, manteniendo sólo lo esencial se obtiene el diagrama vectorial más simple, o sea la Figura 3.5 en la cual se muestra muy claramente las relaciones entre la corriente de cortocircuito, la corriente de armadura, la corriente de campo nominal y el factor de potencia.



**Figura 3.4** Diagrama fasorial de corrientes de la máquina síncrona de polos salientes en régimen permanente.



**Figura 3.5** Diagrama fasorial simplificado de la máquina síncrona en régimen permanente.

Si  $X_q = X_d$ , el diámetro del semicírculo será cero y el diagrama vectorial se reduce a un diagrama de la máquina de rotor cilíndrico como el mostrado por las líneas punteadas.

### 3.2.2 Diagrama de potencia generalizado

Con una tensión terminal (en bornes) fijo es posible determinar a partir de la Figura 3.5, la potencia activa y reactiva de un alternador para una corriente de armadura y factor de potencia dados.

Como ejemplo, la Figura 3.6, muestra la variación de la corriente de campo ( $I_f$ ) y ángulo de carga ( $\phi$ ) para varios factores de potencia, la corriente de armadura  $I$  es mantenida constante. La corriente de campo está dada como en la Figura 3.5, por las intersecciones en los 2 semicírculos sobre los rayos dibujados desde C hasta los extremos de los vectores de corriente ( $I$ ).

Los ángulos de factor de potencia son medidos a partir de la ordenada vertical, considerando ésta como cero. La proyección de los vectores de corriente  $I$  sobre el eje vertical representa la potencia activa, en forma similar las proyecciones sobre el eje horizontal representan la potencia reactiva.

Una rotación antihoraria de los vectores es asumida en todos estos diagramas como positiva y los valores negativos de  $\phi$  corresponden a un factor de potencia en atraso y valores positivos de  $\phi$  factor de potencia en adelanto. Por lo tanto esta Figura 3.6 es una forma elemental de la carta de potencia.

Un alternador conectado a un gran sistema de potencia puede estar sujeto a variaciones sustanciales de potencia de salida y bajo estas condiciones es necesario tener un diagrama que muestre para una condición inicial de régimen permanente, las variaciones de la corriente de armadura y el factor de potencia, causados por variaciones de la potencia de salida con corriente de campo



constante. Una forma elemental de tal diagrama es mostrado en la Figura 3.7 y en éste la ubicación del vector corriente de armadura (lugar geométrico) se determina con la longitud de  $I_f / X_d$ ; esta construcción es una extensión de aquella dada en la Figura 3.5.

La curva resultante dibujada a través de los extremos de la corriente de armadura, se llama limacón de Pascal.

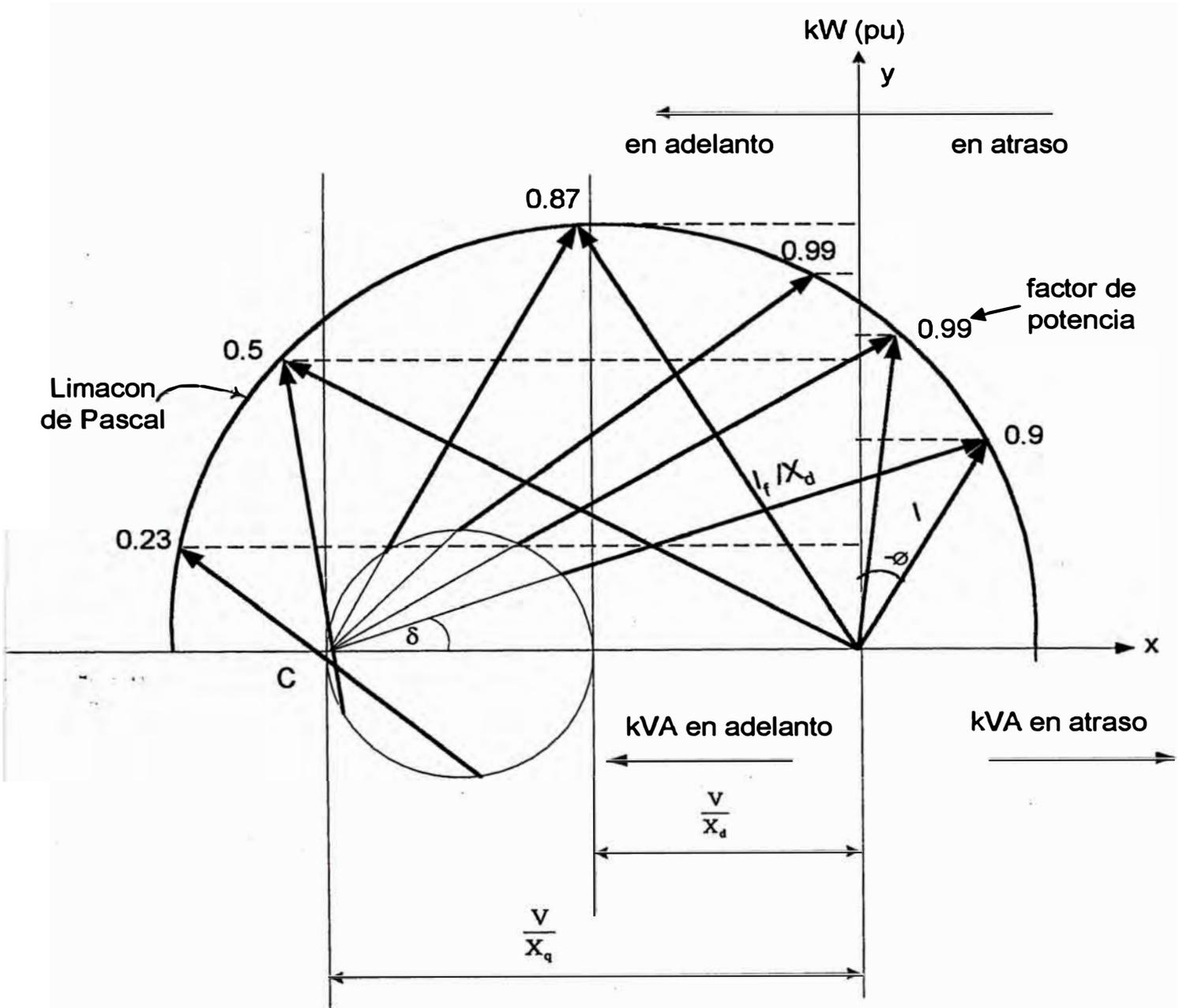
En los diagramas hasta aquí considerados el ángulo del factor de potencia  $\phi$  ha estado restringido al rango  $\pm 90^\circ$ ; es decir, ellos han cubierto la operación de las máquinas síncronas de polos salientes como generador operando desde factor de potencia cero en atraso a factor de potencia cero en adelanto.

Es obvio que al extender el diagrama de la Figura 3.7, para cubrir el rango completo de  $\phi$ ; es decir de  $0^\circ$  a  $360^\circ$  se obtendrá el comportamiento de la máquina como un motor síncrono operando desde factor de potencia cero en adelanto hasta factor de potencia cero en atraso.

### **3.3 Estabilidad de la máquina síncrona**

Ahora es necesario considerar la operación en régimen estable. En general cuando un alternador está operando a plena carga, cualquier incremento pequeño fortuito en el torque del motor primo o turbina es seguido por un correspondiente aumento en el ángulo  $\delta$ ; este último incremento lleva a un incremento de la potencia activa de salida del alternador el cual restablece al rotor a un ángulo  $\delta$  aproximadamente igual al ángulo original.

Sin embargo, si el alternador está operando inicialmente en su punto máximo de salida de potencia activa, este pequeño incremento fortuito en el torque del motor primo es seguido por una disminución en la potencia de salida del alternador. Entonces, el motor primo aumentará el ángulo  $\delta$  hasta que finalmente la velocidad



**Figura 3.7** Diagrama para corriente de campo nominal constante ( $I_f$ ) con factor de potencia y corriente de armadura ( $I$ ) variables.

del alternador superará la velocidad nominal síncrona; es decir, se acelerará y saldrá de servicio.

Por lo tanto, es importante que un diagrama de potencia muestre para las diversas condiciones de operación los puntos de máxima salida a diversos valores de la corriente de campo. Como puede verse en la Figura 3.8 estos puntos son las ordenadas máxima y mínima de los limaques, aclarando que cada limaque (lugar geométrico de la corriente de armadura) corresponde a diferentes valores de la corriente de excitación. Luego al unir estos puntos de ordenadas máxima y mínima resultan las curvas que indican los límites de operación estable; las porciones punteadas de los limaques indican la región inestable en el diagrama.

Los límites de estabilidad comienzan de la intersección, de la perpendicular trazada en la abscisa igual a  $-\frac{V}{X_q}$ , con el eje horizontal y disminuye asintóticamente hacia la perpendicular trazada en la abscisa igual a  $-\frac{V}{X_d}$ . Esta última perpendicular representa el límite de estabilidad teórico de la máquina de rotor liso en que el lugar geométrico de la corriente de armadura son círculos con centro en O. Puede notarse, entonces, que la máxima potencia de salida dada por la teoría de los dos ejes es ligeramente más grande que aquella dada para la máquina de rotor cilíndrico.

Sin embargo, si la máquina está operando a un bajo factor de potencia en adelanto, por ejemplo alimentando una línea de transmisión larga durante períodos cortos, la teoría de los dos ejes demuestra que bajo estas condiciones la máquina de polos salientes tiene mayor salida máxima de potencia que la máquina de rotor cilíndrico. Esta salida incrementada, no obstante, puede ser obtenida solamente al operar con corriente de campo inverso en el bobinado del rotor; el valor máximo así obtenido en la región estable del diagrama sería la abscisa correspondiente a

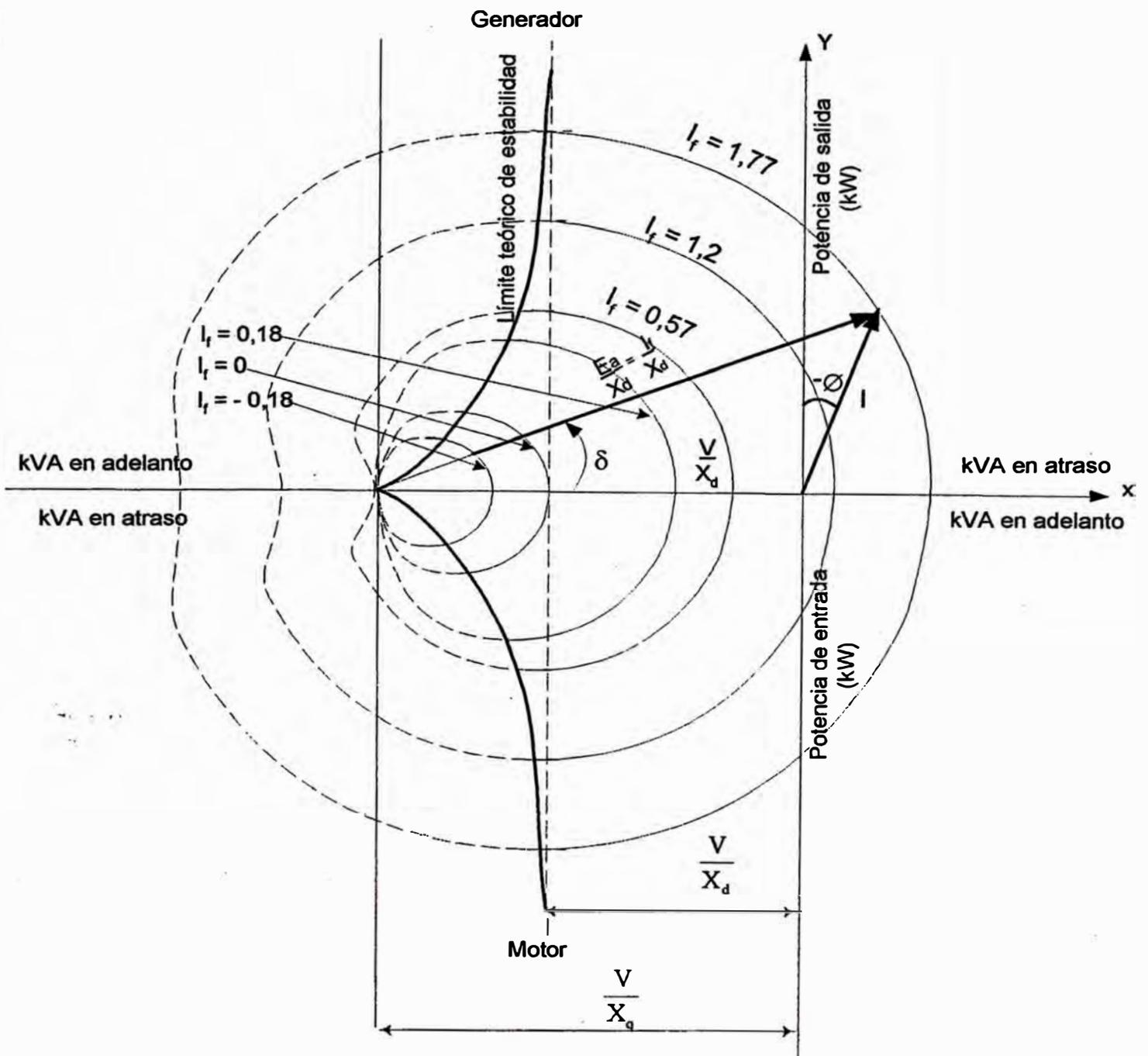


Figura 3.8 Lugar geométrico de la corriente de armadura para corrientes de campo constante.

$-V/X_q$  es decir, a factor de potencia cero en adelanto. La corriente de armadura y en consecuencia la salida en este punto están representadas por  $-V/X_q$  y la corriente de campo negativa requerida es  $V\left(\frac{1}{X_q} - \frac{1}{X_d}\right)$  que corresponde al diámetro del círculo entre las ordenadas  $-V/X_q$  y  $-V/X_d$ .

### 3.4 La carta de potencia del alternador

El diagrama elemental de potencia mostrado en la Figura 3.8 no es factible para aplicación práctica en sistemas de potencia, ya que entre otras cosas no indica las limitaciones sobre las corrientes de campo y armadura impuestas por las temperaturas permisibles de los bobinados.

Así mismo no sería aconsejable operar un alternador cerca al límite de estabilidad teórico, por lo que se reemplaza por un límite de estabilidad práctico, como se muestra en la Figura 3.9, la curva está arbitrariamente reducida por un valor de potencia constante correspondiente a 10% del valor nominal de la máquina en forma práctica [1].

Los alternadores normalmente no tienen provisión para suministrar corriente negativa al campo del rotor, además la excitatriz principal en la mayoría de los casos no está ajustada con una inclinación del campo para vencer efectos residuales; bajo estas condiciones el sistema no es capaz de reducir la tensión y por lo tanto la corriente del campo del alternador a un valor igual a cero y es usual limitar la tensión de campo al 5% de aquel requerido a carga nominal, este límite está mostrado en la Figura 3.9.

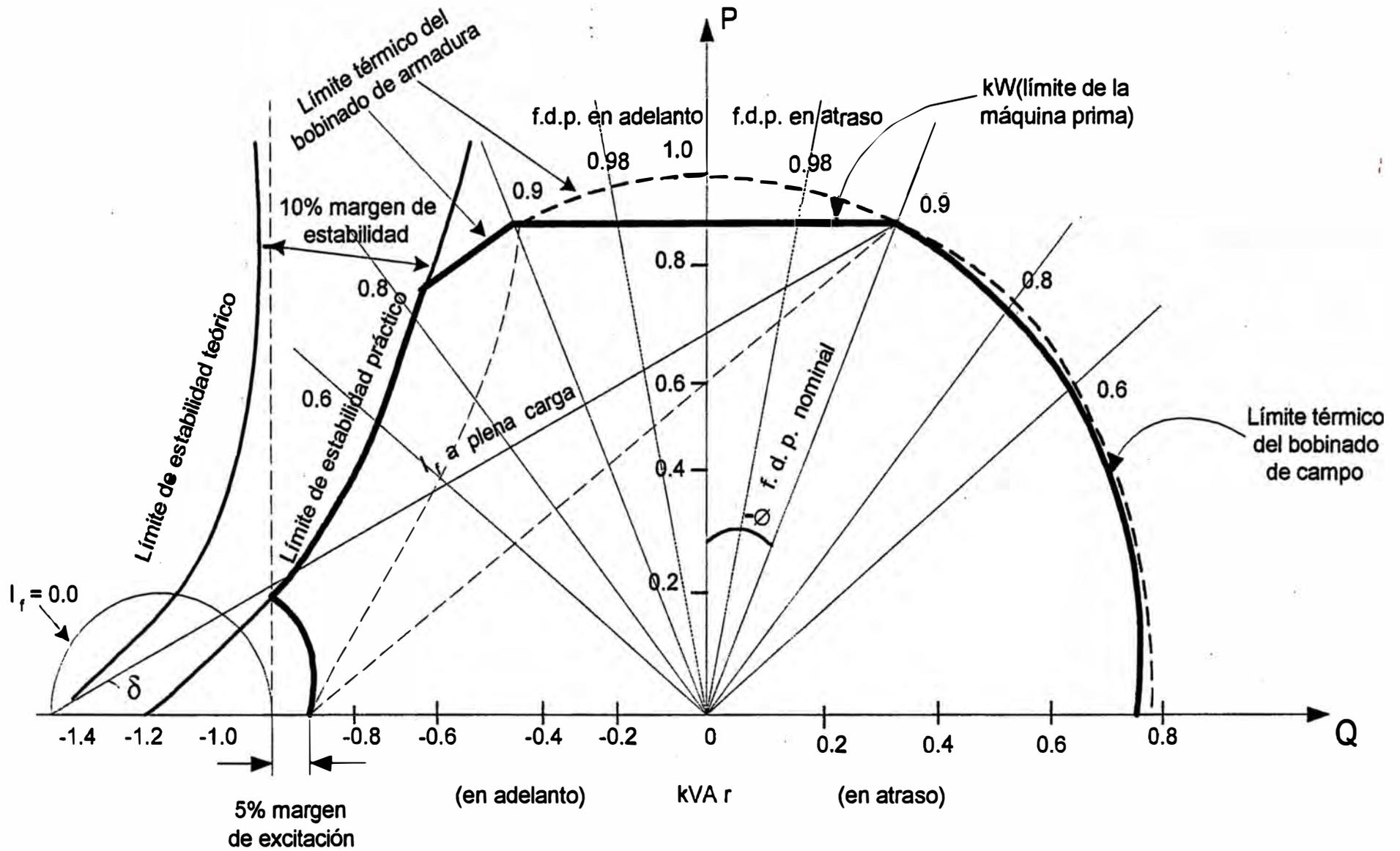


Fig. 3.9 Carta de potencia para un alternador de polos salientes conectado a un sistema de tensión constante

### 3.5 Construcción geométrica del diagrama de operación P - Q

Se sabe que la saliencia ( $X_d > X_q$ ) en una máquina síncrona facilita la operación estable bajo condiciones de excitación fija. A continuación se hallará una forma geométrica para trazar el límite de estabilidad.

Al realizar el estudio analítico del comportamiento de una máquina síncrona, comúnmente se hacen algunas simplificaciones para eliminar la influencia de términos no lineales y hacer posible que los parámetros no muy significativos de la máquina y el sistema sean ignorados.

Se hacen las siguientes simplificaciones:

- Se asume una máquina ideal, sin saturación y pérdidas despreciables.
- Las resistencias del estator y de las líneas son ignorados.
- La variación de la velocidad es despreciable.
- La potencia mecánica es constante.

#### 3.5.1 Descripción y análisis del sistema

La Figura 3.10 muestra el sistema a estudiar en esta parte del presente capítulo. Una máquina síncrona de polos salientes entrega potencia a, o recibe potencia de, un sistema atrás de una reactancia externa. Se incluye un regulador de tensión para intentar mantener la tensión terminal constante en un valor correspondiente a alguna referencia preajustada.

La Figura 3.11 muestra los diagramas vectoriales de la máquina en régimen permanente o comportamiento transitorio lento, dibujado para el caso de operación como generador con un factor de potencia de atraso.

Donde:

$V$  = Tensión terminal de la máquina

$I$  = Corriente de la máquina

$E_{ed}$  = Tensión tras la reactancia síncrona del eje en cuadratura

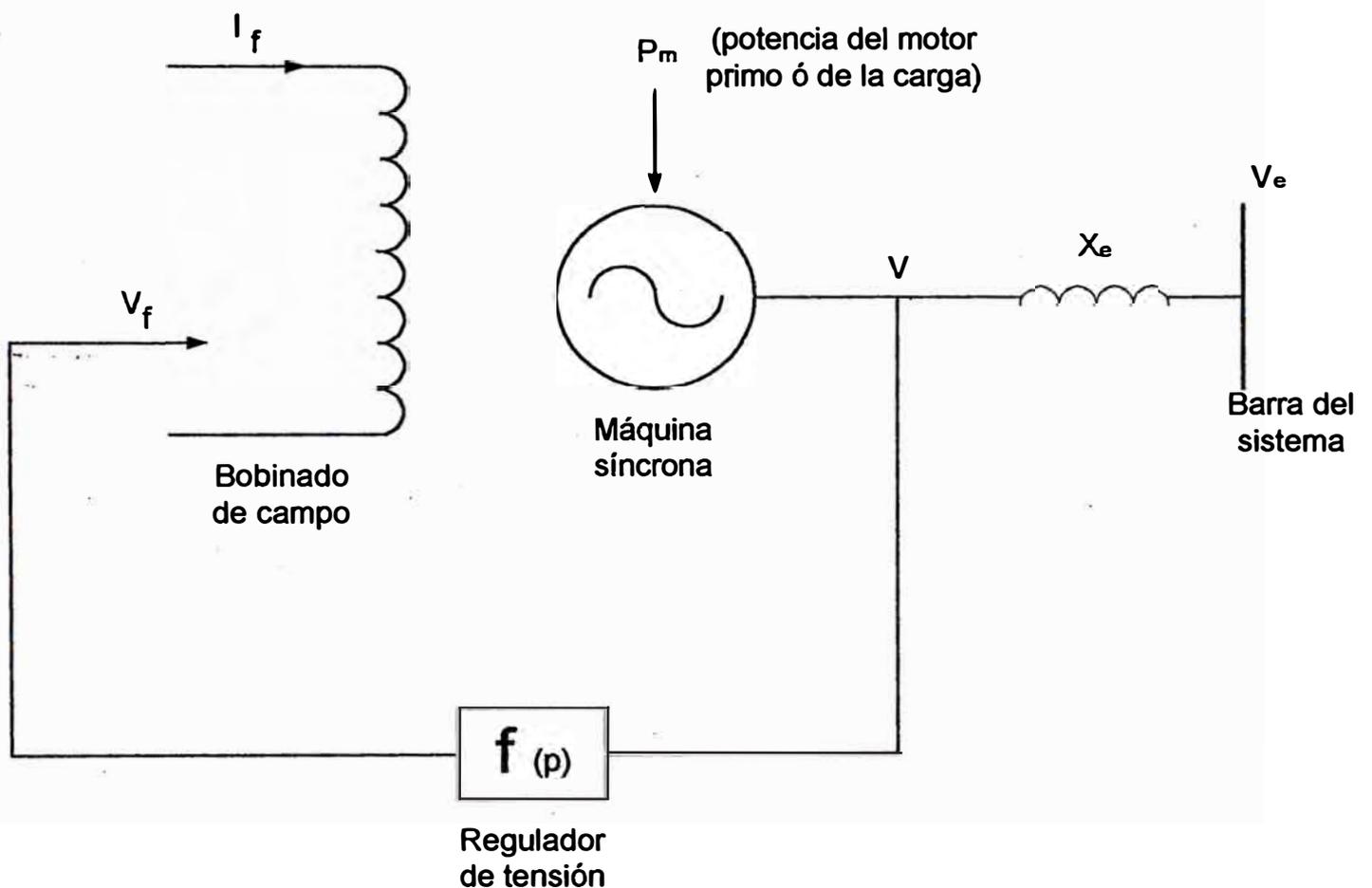
$E_a$  = Tensión de excitación (proporcionar a  $I_f$ )

$X_e$  = Reactancia externa entre la máquina y la barra del sistema.

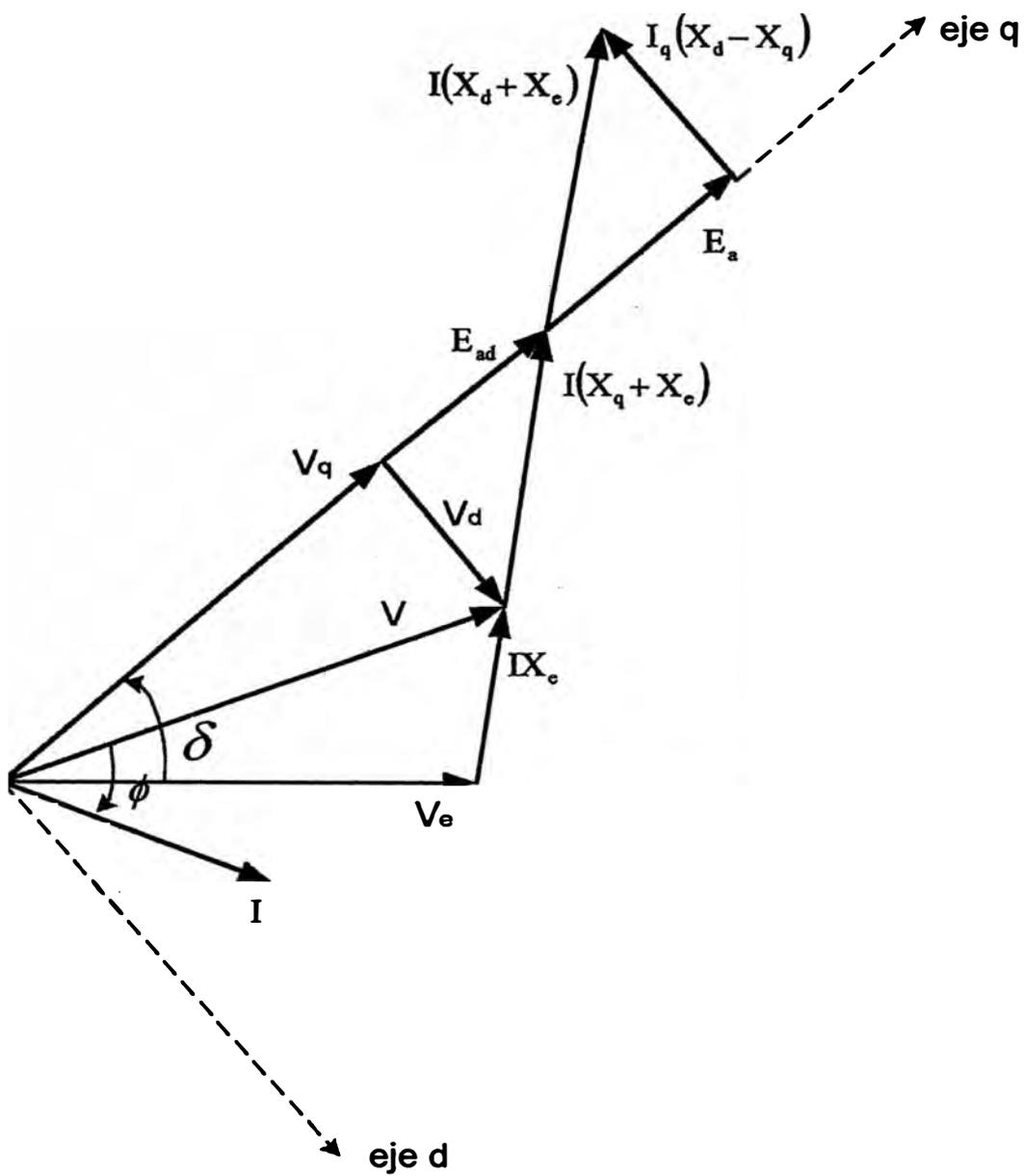
$X_d$  y  $X_q$  = Reactancias síncrona en eje directo y en cuadratura.

$\phi$  = Angulo de factor de potencia de la máquina

$\delta$  = Angulo entre el eje en cuadratura de la máquina y la tensión de barra del sistema.



**Figura 3.10** Sistema analizado



**Figura 3.11** Diagrama fasorial de la máquina síncrona de polos salientes.

La Figura 3.12 muestra la carta de capacidad elemental de la máquina síncrona de polos salientes, desarrollada a partir del diagrama vectorial. El eje vertical tiene su escala para valores de potencia activa (kW) y el eje horizontal en potencia reactiva (kVAr). Esta carta de capacidad se deriva del diagrama vectorial de tensiones al multiplicar cada vector por  $\frac{V_e}{(X_d + X_e)}$ , es decir las cantidades en el diagrama de la Figura 3.11 ahora serán medidas de la potencia activa y potencia reactiva, tal como se muestra en la Figura 3.12

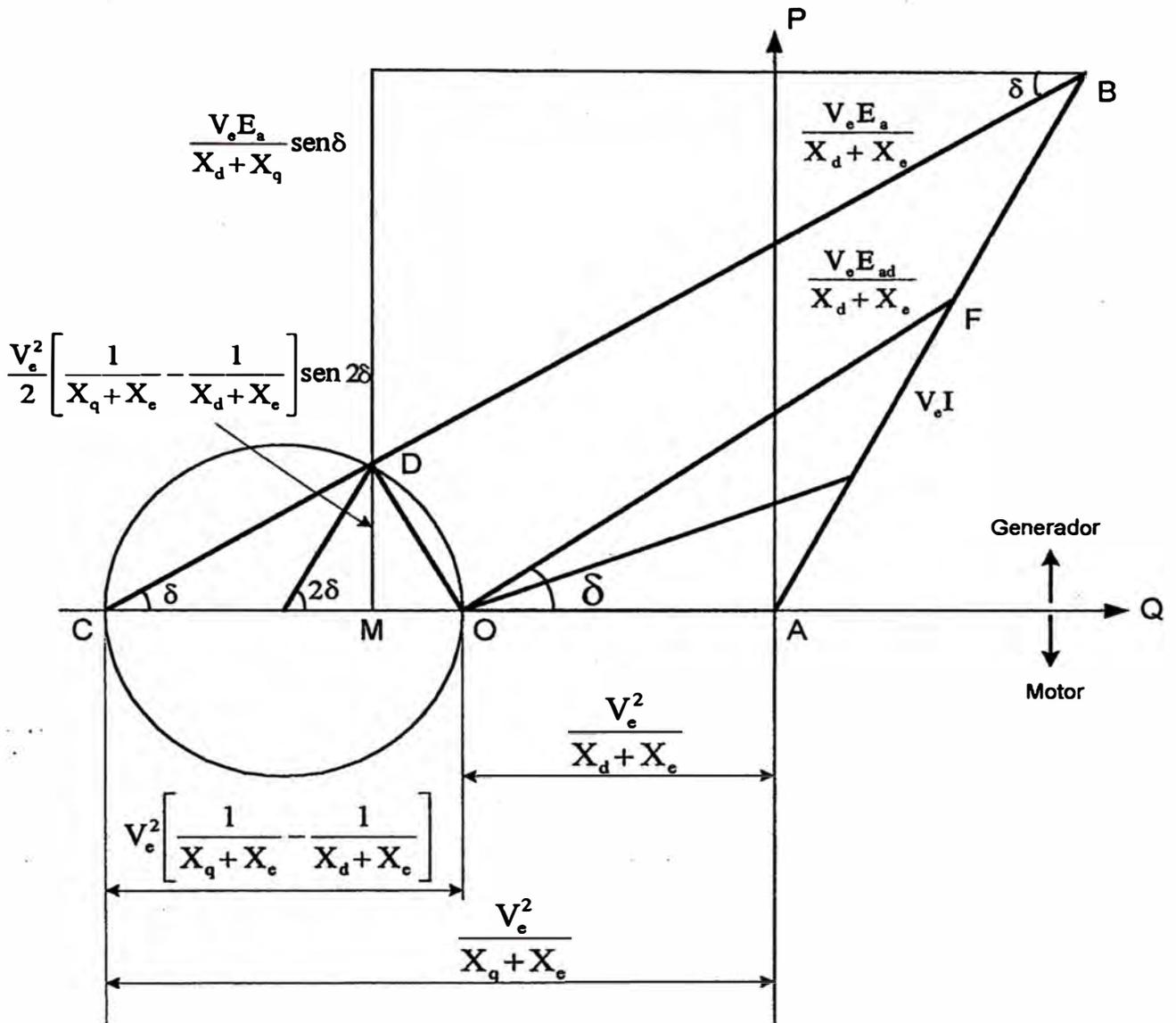
Por ejemplo, la tensión  $I(X_d + X_e)$ , cuando es multiplicada por  $\frac{V_e}{(X_d + X_e)}$

llega a ser  $V_e I$  y representa la potencia aparente total entregada al sistema. La proyección de esta cantidad en el eje vertical representa la potencia activa entregada, mientras la proyección en el eje horizontal representa la potencia reactiva entregada. En este caso es necesario aclarar que la potencia activa entregada es en los terminales de la máquina ó en la barra del sistema, pero la potencia reactiva en la carta es la potencia reactiva entrando ó dejando el sistema. Para hallar la potencia reactiva en los terminales de la máquina debe hacerse una evaluación de la potencia reactiva absorbida en la reactancia externa.

A medida que las condiciones de carga son alteradas; por ejemplo, un cambio en la potencia de entrada al motor primo o un cambio en la intensidad del campo de la máquina, el punto W conocido como el "punto de trabajo" tomará una nueva posición en el diagrama.

A partir de la carta de capacidad podemos escribir:

$$P = \frac{V_e E_a}{X_d + X_e} \text{Sen} \delta + \frac{V_e^2}{2} \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d - X_e} \right) \text{sen } 2\delta \quad (3.1)$$



**Figura 3.12** Diagrama de capacidad de la máquina síncrona de polos salientes

### 3.5.2 Límite de estabilidad en régimen permanente con corriente de excitación constante

En el límite de operación estable, al aumentar  $\delta$   $P$  ya no aumentará, es decir,  $dP/d\delta = 0$ . Derivando la ecuación 3.1 con respecto a  $\delta$  e igualando a cero, la corriente de campo (y en consecuencia  $E_a$ ) permanece constante, resulta:

$$\frac{dP}{d\delta} = \frac{V_e E_a}{X_d + X_e} \cos \delta + Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) \cos 2\delta = 0 \quad (3.2)$$

De los triángulos semejantes OAF y CAB en la Figura 3.12 podemos escribir:

$$\frac{\frac{V_e E_a}{X_d + X_e} + Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) \cos \delta}{\frac{Ve^2}{X_q + X_e}} = \frac{\frac{V_e E_{ad}}{X_d + X_e}}{\frac{Ve^2}{X_d + X_e}}$$

Es decir:

$$\frac{V_e E_a}{X_d + X_e} = \frac{V_e E_{ad}}{X_q + X_e} - Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) \cos \delta$$

En consecuencia :

$$\frac{V_e E_a}{X_d + X_e} \cos \delta = \frac{V_e E_{ad}}{X_q + X_e} \cos \delta - Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) \cos^2 \delta$$

Reemplazando en la ecuación 3.2 resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\delta} &= \frac{V_e E_{ad}}{X_q + X_e} \cos \delta + Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) (\cos 2\delta - \cos^2 \delta) = 0 \\ \frac{dP}{d\delta} &= \frac{V_e E_{ad}}{X_q + X_e} \cos \delta - Ve^2 \left( \frac{1}{X_q + X_e} - \frac{1}{X_d + X_e} \right) \sin^2 \delta = 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

También en los mismos triángulos semejantes, la longitud.

$$CB \text{ mide } \frac{V_e E_{ad}}{X_q + X_e}$$

Luego el primer término en la expresión para  $dP/d\delta$  es medido por la

proyección de CB sobre el eje de la potencia reactiva y el segundo término es medido por la longitud MO.

La Figura 3.13 muestra el diagrama de capacidad de un generador que, estando severamente subexcitado, está operando a un bajo factor de potencia en adelanto, cuyo punto de trabajo B está cerca del límite de estabilidad.

De la Figura 3.13 y la ecuación 3.3 :

$$\frac{dp}{d\delta} = CH - MO \quad (3.4)$$

Por simetría geométrica  $RT$  es la perpendicular y  $DT$  paralela a  $CD$ , entonces  $MO = CR$

Luego en la ecuación 3.4:

$$\frac{dp}{d\delta} = CH - CR$$

De la Figura 3.13

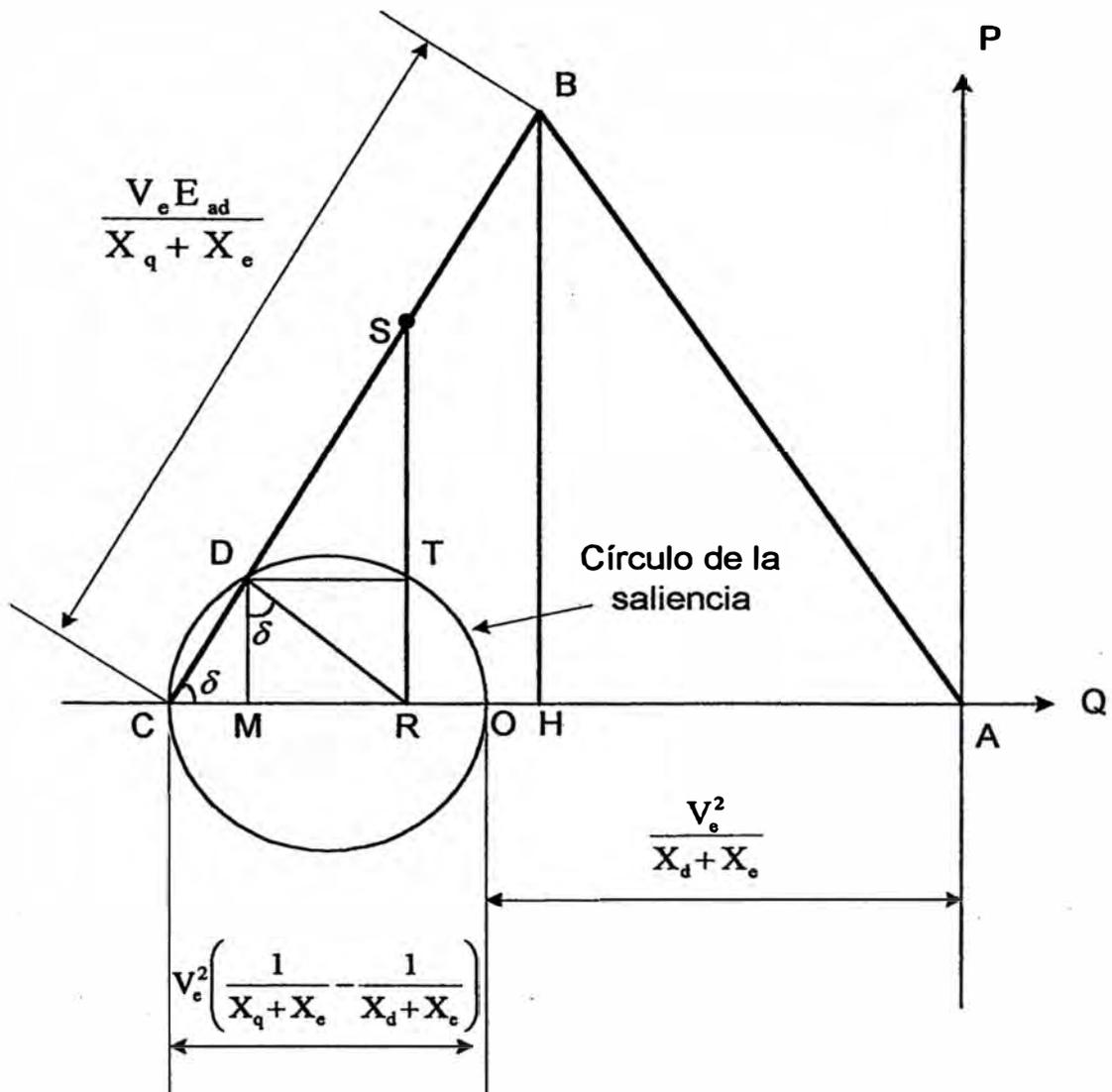
$$\frac{dp}{d\delta} = RH$$

Si la carga y la excitación en la máquina son alterados hasta que el punto de trabajo B coincida con S, la longitud RH sería cero; es decir, cuando B está en S,  $dp / d\delta = 0$  o sea S, en la Figura 3.13 es un punto en el límite de estabilidad.

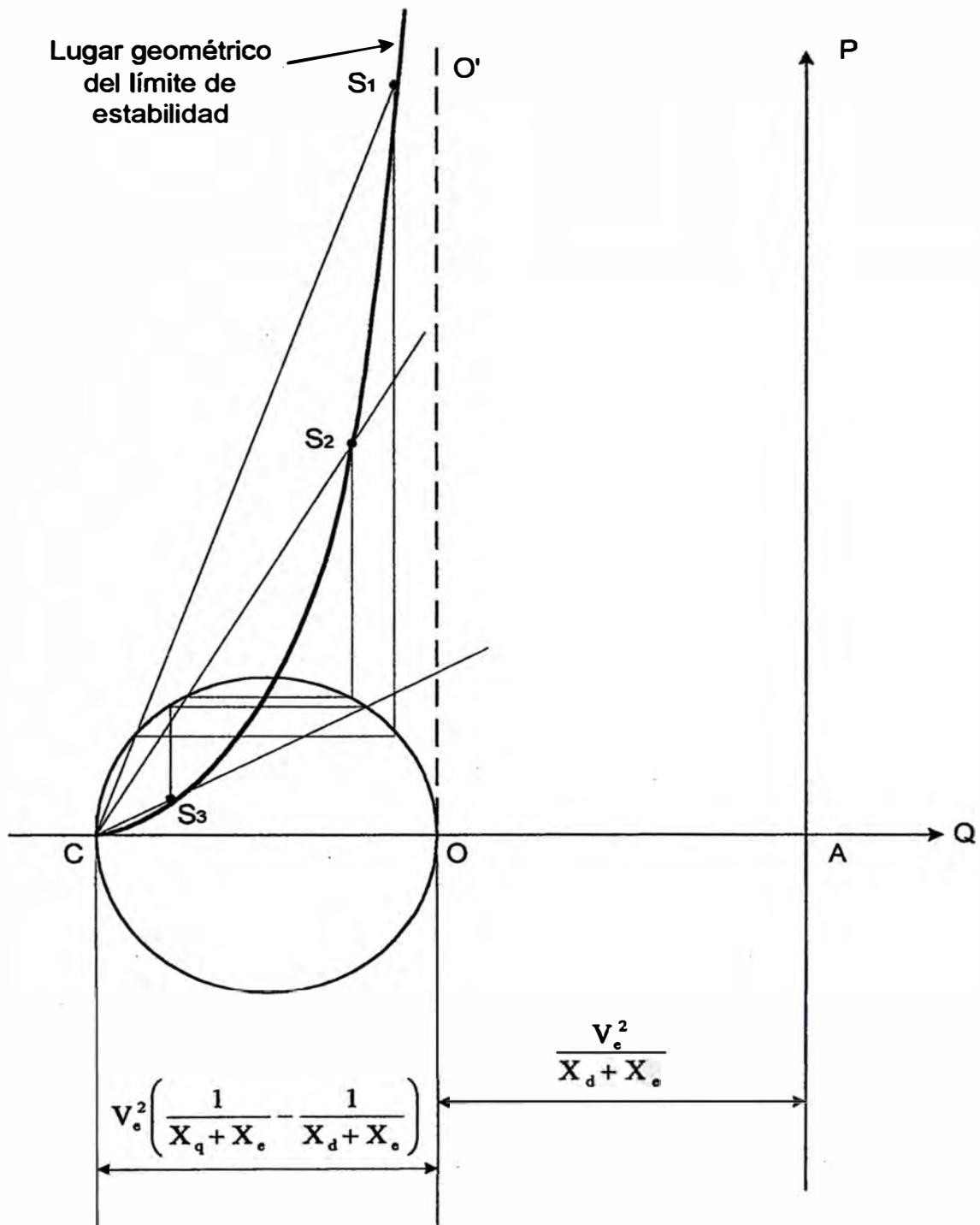
Se deduce que la curva del límite de estabilidad para una máquina de polos salientes, puede ser trazada al dibujar el lugar geométrico de S a medida que se varía el ángulo  $\delta$ , como se muestra en la Figura 3.14.

Para una máquina de rotor liso ( $X_d = X_q$ ) el diámetro del círculo de la saliencia es cero y la curva del límite de estabilidad llega a ser la línea recta  $OO'$  con  $\delta = 90^\circ$ .

El área encerrada entre la curva  $CS_3S_2S_1$  y la línea recta  $OO'$  es considerada como una medida del beneficio de estabilización resultante por la presencia de la saliencia en el rotor de la máquina síncrona.



**Figura 3.13** Diagrama de capacidad de la máquina síncrona de polos salientes, condición subexcitada



**Figura 3.14** Construcción del límite de estabilidad de una máquina síncrona de polos salientes.

## **CAPITULO IV**

### **ECUACIONES MATEMATICAS DEL DIAGRAMA DE OPERACIÓN EN REGIMEN PERMANENTE DE LA MAQUINA SINCRONA**

#### **4.1 Introducción**

En el presente capítulo se desarrolla las ecuaciones algebraicas necesarias para construir el diagrama P-Q o carta de operación de la máquina síncrona de polos salientes, en forma especial los límites de estabilidad permanente teórico y práctico.

Para que la máquina no sufra deterioros por efecto de calentamiento es necesario poner restricciones, limitando la corriente de campo y de armadura.

Se consideran las siguientes restricciones:

- Que la corriente de armadura no sobrepase su valor nominal, para no exceder el límite térmico de los bobinados de armadura.
- Que la corriente de campo no sobrepase cierto valor que fija el límite térmico de los bobinados de campo.
- Que se mantenga la estabilidad (sincronismo) de la máquina en el sistema.
- Que no se exceda la potencia de la máquina motriz cuando la máquina funcione como generador, o que no se exceda la potencia nominal cuando funcione como motor.

Estas restricciones llevadas a un gráfico constituyen el diagrama P-Q o carta de operación de la máquina síncrona.

## 4.2 Potencias activa y reactiva

Las expresiones que permiten determinar las potencias activa y reactiva por fase suministradas por una máquina síncrona de polos salientes conectada a una barra infinita de tensión  $V$  funcionando en el modo generador y suponiendo despreciable la resistencia de armadura, fueron expuestos en el Capítulo II, resultando:

$$P = \frac{VE_a}{X_d} \sin \delta + \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d - X_q} \right) \sin 2\delta \quad (4.1)$$

$$Q = \frac{VE_a}{X_d} \cos \delta + \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d - X_q} \right) \cos 2\delta - \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right) \quad (4.2)$$

En que:

- $V$ : Tensión en los terminales de la máquina
- $E_a$ : Tensión interna de generación (fem)
- $X_d$ : Reactancia síncrona en eje directo.
- $X_q$ : Reactancia síncrona en eje en cuadratura.
- $\delta$ : Angulo de potencia.

Haciendo:

$$m = \frac{VE_a}{X_d}$$

$$s = \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d - X_q}{X_d X_q} \right)$$

$$n = \frac{V^2}{2} \left( \frac{X_d + X_q}{X_d X_q} \right)$$

Reemplazando la ecuación 4.1 en 4.2

$$P = m \sin \delta + s \sin 2\delta \quad (4.3)$$

$$Q = m \cos\delta + s \cos 2\delta - n \quad (4.4)$$

En la Figura 4.1 se muestra la convención positiva que se utilizará para el sentido de flujos de potencia P-Q.

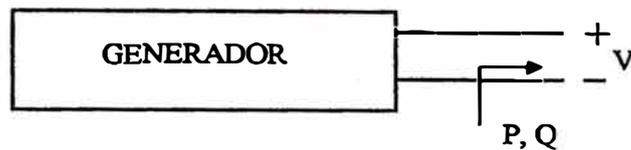


Figura 4.1 Convención positiva para el flujo de potencia en un generador

Si la máquina síncrona opera en el modo motor, se utilizará la misma convención para los sentidos de los flujos de potencia activa y reactiva. Para que esto sea consistente, en las expresiones 4.3 y 4.4 se debe intercambiar la variable  $\delta$  por  $-\delta$ . Es decir;  $P$  será negativo, y si el motor absorbe potencia reactiva desde la red  $Q$  también será negativo. En lo que sigue, para evitar confusiones, se utilizarán las expresiones 4.3 y 4.4 suponiendo que la máquina síncrona opera en el modo generador. Los resultados que se deriven serán también válidos para la máquina síncrona en el modo motor, teniendo presente la convención utilizada.

#### 4.3 Límite térmico de los bobinados de campo

La potencia aparente suministrada por la máquina se puede determinar mediante la expresión :

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (4.5)$$

Elevando al cuadrado la ecuación (4.3)

$$P^2 = m^2 \sin^2 \delta + 2ms \sin \delta \sin 2\delta + s^2 \sin^2 2\delta$$

Utilizando las equivalencias trigonométricas:

$$2 \sin \delta \sin 2\delta = \cos(\delta - 2\delta) - \cos(\delta + 2\delta)$$

$$\sin^2 2\delta = 1 - \cos^2 2\delta$$

Se tiene:

$$P^2 = m^2(1 - \cos^2 \delta) + ms [\cos(-\delta) - \cos 3\delta] + s^2(1 - \cos^2 2\delta)$$

$$P^2 = m^2 - m^2 \cos^2 \delta + ms \cos \delta - ms \cos 3\delta + s^2 - s^2 \cos^2 2\delta \quad (4.6)$$

Igualmente, elevando al cuadrado la ecuación (4.4)

$$Q^2 = (m \cos \delta + s \cos 2\delta)^2 - 2n (m \cos \delta + s \cos 2\delta) + n^2$$

$$Q^2 = m^2 \cos^2 \delta + 2ms \cos \delta \cos 2\delta + s^2 \cos^2 2\delta - 2mn \cos \delta - 2ns \cos 2\delta + n^2 \quad (4.7)$$

Reemplazando (4.6) y (4.7) en (4.5)

$$S^2 = m^2 + s^2 + n^2 + ms \cos \delta - ms \cos 3\delta + 2ms \cos \delta \cos 2\delta - 2mn \cos \delta - 2ns \cos 2\delta$$

Utilizando las equivalencias trigonométricas

$$\cos 3\delta = 4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta$$

$$\cos 2\delta = 2 \cos^2 \delta - 1$$

Entonces:

$$S^2 = m^2 + s^2 + n^2 + ms \cos \delta - ms (4 \cos^3 \delta - 3 \cos \delta) + 2ms \cos \delta (2 \cos^2 \delta - 1) - 2mn \cos \delta - 2ns(2 \cos \delta - 1)$$

$$S^2 = m^2 + s^2 + n^2 + ms \cos \delta - 4ms \cos^3 \delta + 3ms \cos \delta + 4ms \cos^3 \delta - 2ms \cos \delta - 4ns \cos^2 \delta + 2ns \cos \delta$$

Simplificando:

$$S^2 = m^2 + s^2 + n^2 + 2ms \cos \delta - 4ns \cos^2 \delta + 2ns - 2mn \cos \delta$$

$$S^2 = m^2 + s^2 + n^2 + 2ns + 2ms \cos \delta - 2mn \cos \delta - 4ns \cos^2 \delta$$

$$S^2 = m^2 + (n + s)^2 + 2m(s - n) \cos \delta - 4ns \cos^2 \delta \quad (4.8)$$

Por otro lado, de la expresión (4.4) se tiene:

$$Q = m \cos \delta + s (2 \cos^2 \delta - 1) - n$$

$$Q = m \cos \delta + 2s \cos^2 \delta - s - n$$

Entonces

$$\cos^2 \delta + \frac{m}{2s} \cos \delta - \frac{(Q + s + n)}{2s} = 0 \quad (4.9)$$

Despejando  $\cos^2 \delta$  y reemplazando en (4.8)

$$S^2 = m^2 + (n + s)^2 + 2ms \cos \delta - 2mn \cos \delta - 4ns \left( \frac{(Q + s + n) - m \cos \delta}{2s} \right)$$

Agrupando términos

$$S^2 = m^2 + (s + n)^2 + \cos \delta (2ms - 2mn + 2mn) - 2n (Q + s + n)$$

Simplificando:

$$S^2 = m^2 + (s + n)^2 + 2mn \cos \delta - 2n (Q + s + n) \quad (4.10)$$

Esta expresión se puede compactar, haciendo:

$$\hat{Q} = Q + s + n \quad (4.11)$$

Entonces:

$$S^2 = m^2 + (\hat{Q} - Q)^2 + 2ms \cos \delta - 2n\hat{Q}$$

Desarrollando el binomio al cuadrado.

$$P^2 + Q^2 = m^2 + \hat{Q}^2 - 2\hat{Q}Q + Q^2 + 2ms \cos \delta - 2n\hat{Q}$$

Eliminando:  $Q^2$  y sumando en cada miembro  $\hat{Q}^2$

$$P^2 + \hat{Q}^2 = m^2 + 2\hat{Q}^2 - 2\hat{Q}Q + 2ms \cos \delta - 2n\hat{Q}$$

$$P^2 + \hat{Q}^2 = m^2 + 2\hat{Q}(\hat{Q} - Q) + 2ms \cos \delta - 2n\hat{Q}$$

Usando la ecuación (4.11)

$$P^2 + \hat{Q}^2 = m^2 + 2\hat{Q}(s + n) + 2ms \cos \delta - 2n\hat{Q}$$

Simplificando

$$P^2 + \hat{Q}^2 = m^2 + 2s\hat{Q} + 2ms \cos \delta \quad (4.12)$$

Nuevamente utilizando la ecuación (4.3)

$$P = m \operatorname{sen} \delta + s(2 \operatorname{sen} \delta \cos \delta)$$

Luego

$$P = \operatorname{sen} \delta (m + 2s \cos \delta) \quad (4.13)$$

Utilizando la Ecuación (4.4)

$$Q = m \cos \delta + s \cos 2\delta - n$$

Sumando en cada miembro  $s + n$

$$s + n + Q = m \cos \delta + s \cos 2\delta + s$$

De (4.11)

$$\hat{Q} = m \cos \delta + s (2 \cos^2 \delta - 1) + s$$

Simplificando

$$\hat{Q} = m \cos \delta + 2s \cos^2 \delta$$

De donde:

$$\hat{Q} = \cos \delta (m + 2s \cos \delta) \quad (4.14)$$

Dividiendo miembro a miembro las ecuaciones (4.13) y (4.14)

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{P}{\hat{Q}} \quad (4.15)$$

Definiendo

$$R^2 = P^2 + \hat{Q}^2 \quad (4.16)$$

Entonces de (4.15) y (4.16)

$$P = R \operatorname{sen} \delta \quad (4.17)$$

$$\hat{Q} = R \cos \delta \quad (4.18)$$

Reemplazando (4.18) en (4.12)

$$P^2 + \hat{Q}^2 = m^2 + 2s(R \cos \delta) + 2ms \cos \delta$$

De (4.16)

$$R^2 = m^2 + R(2s \cos \delta) + 2ms \cos \delta$$

Como  $R$ , varía en función de  $P$  y  $\hat{Q}$  entonces resolviendo para  $R$ .

$$R^2 - R(2s \cos \delta) - (m^2 + 2ms \cos \delta) = 0$$

De donde:

$$R = \frac{2s \cos \delta \pm \sqrt{(2s \cos \delta)^2 + 4(m^2 + 2ms \cos \delta)}}{2}$$

Simplificando:

$$R = s \cos \delta \pm \sqrt{s^2 \cos^2 \delta + 2ms \cos \delta + m^2}$$

$$R = s \cos \delta \pm s \cos \delta + m$$

Analizando este resultado:

Con el signo negativo (-), queda  $R = m$  y en la ecuación (4.1) y (4.2) esto se verifica para  $\delta = 90^\circ$  o sea corresponde a un punto muy particular.

Con el signo (+) se tiene una solución general que depende del ángulo  $\delta$

$$R = m + 2s \cos \delta \tag{4.19}$$

Esta ecuación al ser gráficamente en forma polar en el plano P-Q representa el lugar geométrico de la potencia aparente para un cierto valor constante de la corriente de campo.

La curva trazada por la ecuación (4.19) es el Limacón de Pascal. En las Figuras 4.2, 4.3 y 4.4 se ilustran tres limacones para distintos valores de la corriente de campo en por unidad. Se puede apreciar que para distintos valores de la corriente de campo el limacón toma distintas formas. Para  $m < 2s$ , éste contiene un lazo interno; para  $m = 2s$ , adquiere la forma especial conocida como cardioide; para  $m > 2s$  se asemeja a un círculo a medida que crece la corriente de campo,

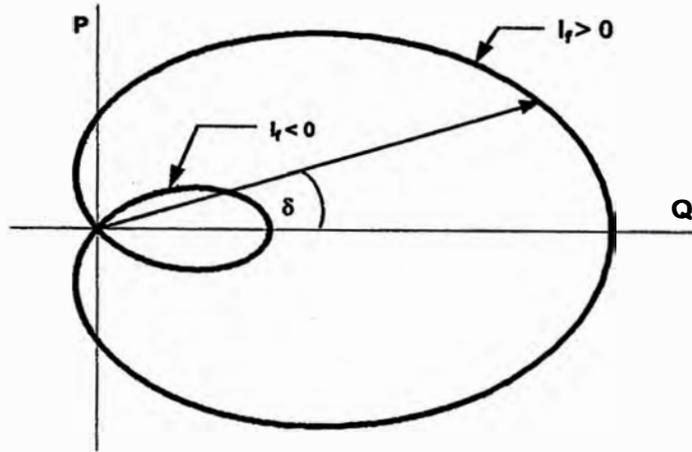


Figura 4.2 Limacón de Pascal cuando  $m < 2s$

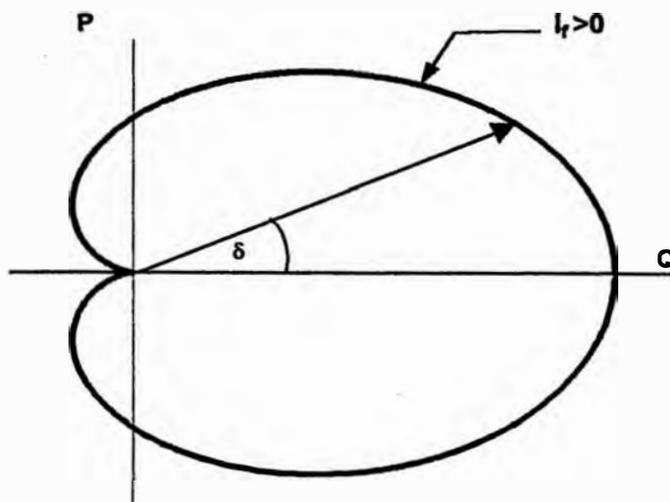


Figura 4.3 Limacón de Pascal cuando  $m = 2s$

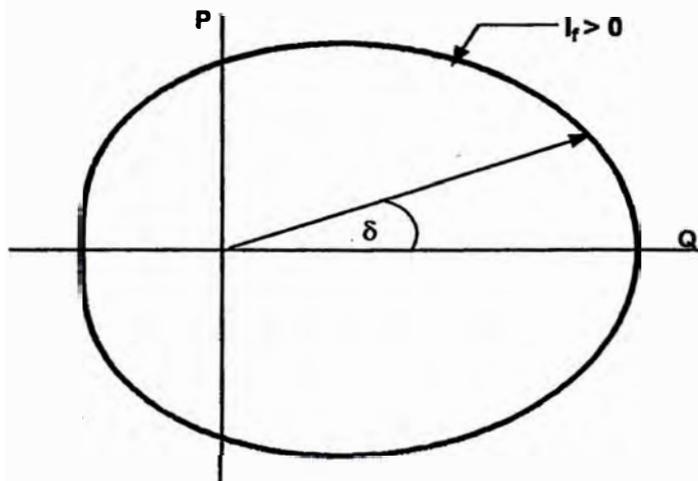


Figura 4.4 Limacón de Pascal cuando  $m > 2s$

para  $m > 0$ , el limacón es exactamente un círculo de radio igual a "S" con el punto centro ubicado en el par ordenado  $(P, \hat{Q}) = (0, s)$ .

#### 2.4 Límite de estabilidad permante teórico

Con la máquina conectada a una barra infinita excitada con una corriente de campo constante, se tiene que al aumentar gradualmente la potencia de la máquina motriz producto de un incremento gradual de la potencia activa solicitada, trae como consecuencia un incremento gradual del ángulo de torque  $\delta$ . Evidentemente, aunque no exista restricción de potencia disponible desde la máquina motriz, la máquina síncrona tiene un límite de potencia activa que puede suministrar dada por su curva característica  $P = f(\delta)$ . Si este límite es sobrepasado, la máquina pierde el sincronismo respecto al sistema, ya no puede funcionar en la zona estable de la característica  $P = f(\delta)$ .

En lo que sigue, se buscará una relación de la forma  $P = f(Q)$ , para establecer el límite de estabilidad permanente; es decir, la máxima potencia activa que puede suministrar la máquina para un determinado valor de  $Q$ , y así evitar que pierda el sincronismo frente al sistema.

Definiendo

$$q = n + Q \tag{4.20}$$

y despejando  $\cos \delta$  de la ecuación (4.9).

$$\cos \delta = \frac{-\frac{m}{2s} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2s}\right)^2 + 4\left(\frac{q+s}{2s}\right)}}{2}$$

$$\cos \delta = -\frac{m}{4s} \pm \sqrt{\frac{m^2}{16s^2} + \left(\frac{q+s}{2s}\right)} \quad (4.21)$$

Utilizando las ecuaciones (4.20) y (4.21), la expresión (4.10) se puede escribir como:

$$S^2 = m^2 + (s+n)^2 + 2ms \left[ -\frac{m}{4s} \pm \sqrt{\frac{m^2}{16s^2} + \frac{(q+s)}{2s}} \right] - 2n(q+s)$$

$$S^2 = m^2 + s^2 + 2ns + n^2 - \frac{m^2}{2} \pm 2ms \sqrt{\frac{m^2}{16s^2} + (2ms)^2 \times \frac{(q+s)}{2s}} - 2nq + 2ns$$

Simplificando:

$$S^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 + n^2 - 2nq \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + 2m^2sq}$$

Utilizando la ecuación (4.5)

$$P^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 + n^2 - 2nq + Q^2 \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + 2m^2sq}$$

Utilizando la ecuación (4.20):

$$P^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 + n^2 - 2nq - (q-n)^2 \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + 2m^2sq}$$

Luego:

$$P^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 - q^2 \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2q + 2m^2s^2} \quad (4.22)$$

Para encontrar una expresión que determine la potencia activa máxima en función de la potencia reactiva  $Q$  para un determinado valor de la tensión de campo, se deriva la ecuación (4.22) con respecto a "q" y se iguala a cero:

$$\frac{dP^2}{dq} = 0$$

Entonces:

$$-2q \pm \frac{1}{2} \left( \frac{m^4}{4} + 2m^2sq + 2m^2s^2 \right)^{-\frac{1}{2}} 2m^2s = 0$$

Simplificando

$$\frac{m^2s}{\left( \frac{m^4}{4} + 2m^2sq + 2m^2s^2 \right)^{\frac{1}{2}}} = 2q \quad (4.23)$$

Elevando al cuadrado

$$m^2s^2 = 4q^2 \left( \frac{m^4}{4} + 2m^2sq + 2m^2s^2 \right)$$

Luego:

$$q^3(8m^2s) + q^2(m^4 + 8m^2s^2) - m^4s^2 = 0 \quad (4.24)$$

Dado que esta última expresión es una ecuación cúbica en función de q; para facilitar el desarrollo posterior es conveniente designar por  $q_0$  a una solución de (4.24), lo cual hace que  $P^2$  sea máxima en la ecuación (4.22), entonces será posible reescribir la ecuación (4.23) en función de  $q_0$

$$\frac{m^2s}{\left( \frac{m^4}{4} + 2m^2sq_0 + 2m^2s^2 \right)^{1/2}} = 2q_0$$

Despejando " $2m^2sq_0$ "

$$\frac{m^4s^2}{4q_0^2} = \frac{m^4}{4} + 2m^2sq_0 + 2m^2s^2$$

$$2m^2sq_0 = \frac{m^4s^2}{4q_0^2} - \frac{m^4}{4} - 2m^2s^2 \quad (4.25)$$

Reemplazando (4.25) en (4.22)

$$P_{max}^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 - q_o^2 \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + \left(\frac{m^4s^2}{4q_o^2} - \frac{m^4}{4} - 2m^2s^2\right)}$$

Simplificando

$$P_{max}^2 = \frac{m^2}{2} + s^2 - q_o^2 \pm \frac{m^2s}{4q_o} \quad (4.26)$$

Esta expresión se puede compactar al poner  $m^2$  en función de  $q$ . Para ello es necesario manipular convenientemente las ecuaciones (4.3) y (4.4).

Al derivar la ecuación (4.3) con respecto al ángulo  $\delta$  e igualando a cero; se obtiene  $\cos\delta_o$  que hace que la potencia activa sea máxima, resultado:

$$\frac{dp}{d\delta} = 0$$

$$\frac{d}{d\delta} (m \operatorname{sen}\delta + s \operatorname{sen}2\delta) = 0$$

Operando

$$m \cos\delta_o + s \cos 2\delta_o = 0$$

$$m \cos\delta_o + 2s (2 \cos\delta_o - 1) = 0$$

Utilizando identidades trigonométricas

$$m \cos\delta_o + 4s \cos^2 \delta_o - 2s = 0$$

Dividiendo entre 2

$$\frac{m}{2} \cos\delta_o + 2s \cos^2 \delta_o - s = 0 \quad (4.27)$$

La ecuación (4.4) se pone en función de  $q_o$  y de  $\cos^2 \delta_o$

$$Q = m \cos\delta_o + s \cos^2 \delta_o - n$$

Usando identidades trigonométricas:

$$Q = m \cos\delta_o + s (2 \cos^2 \delta_o - 1) - n \quad (4.28)$$

De la ecuación (4.20) se despeja  $n$  y luego se reemplaza en (4.28).

$$Q = m \cos \delta_o + 2 s \cos^2 \delta_o - s - q_o + Q$$

Simplificando:

$$O = m \cos \delta_o + 2 s \cos^2 \delta_o - s - q_o \quad (4.29)$$

Luego se despeja  $2 s \cos^2 \delta_o$  de la ecuación (4.27) y se reemplaza en la ecuación (4.29), obteniéndose:

$$O = m \cos \delta_o + s - \frac{m}{2} \cos \delta_o - s - q_o$$

Simplificando

$$q_o = \frac{m}{2} \cos \delta_o \quad (4.30)$$

Además resolviendo la ecuación (4.27) para  $\cos \delta_o$  se obtiene:

$$\cos \delta_o = \frac{-\frac{m}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 4(2s)(s)}}{2(2s)}$$

$$\cos \delta_o = -\frac{m}{8s} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4 \times 16s^2} + \frac{8s^2}{16s^2}}$$

discriminando la solución negativa:

$$\cos \delta_o = -\frac{m}{8s} + \sqrt{\frac{m^2 + 32s^2}{64s^2}}$$

Reemplazando este valor de  $\cos \delta_o$  en la ecuación (4.30)

$$q_o = \frac{m}{2} \left( -\frac{m}{8s} + \sqrt{\frac{m^2 + 32s^2}{64s^2}} \right)$$

Operando

$$q_o = \frac{m}{2} \left( -\frac{m}{8s} + \frac{1}{8s} \sqrt{m^2 + 32s^2} \right)$$

$$q_o = -\frac{m^2}{16s} + \frac{m}{16s}\sqrt{m^2 + 32s^2}$$

Multiplicando por  $16s$

$$16sq_o = -m^2 + m\sqrt{m^2 + 32s^2}$$

$$m^2 + 16sq_o = m\sqrt{m^2 + 32s^2}$$

elevando al cuadrado

$$m^4 + 32sq_o m^2 + 256s^2 q_o^2 = m^2(m^2 + 32s^2)$$

Simplificando

$$sq_o m^2 + 8s^2 q_o^2 = m^2 s^2$$

De donde:

$$8s^2 q_o^2 = m^2(s^2 - sq_o)$$

$$m^2 = \frac{8s q_o^2}{s - q_o} \tag{4.30}$$

Reemplazando (4.30) en (4.26):

$$P_{\max}^2 = \frac{8s q_o^2}{(s - q_o) \times 2} + s^2 - q_o^2 + \frac{8s q_o^2}{(s - q_o)} \times \frac{s}{2q_o}$$

$$P_{\max}^2 = \frac{8s q^3 + (s^2 - q_o^2)2q_o(s - q_o) + 8s^2 q_o^2}{2q_o(s - q_o)}$$

Factorizando  $2q_o$

$$P_{\max}^2 = \frac{2 q_o [4sq_o^2 + (s^2 - q_o^2)(s - q_o) + 4s^2 q_o]}{2q_o(s - q_o)}$$

Simplificando

$$P_{\max}^2 = \frac{4sq_o(q_o + s) + (s + q_o)(s - q_o)(s - q_o)}{s - q_o}$$

Factorizando  $s + q_o$

$$P_{\max}^2 = \frac{(s+q_o)[4sq_o + (s-q_o)^2]}{s-q_o}$$

$$P_{\max}^2 = \frac{(s+q_o)[4sq_o + s^2 + q_o^2 - 2sq_o]}{s-q_o}$$

$$P_{\max}^2 = \frac{(s+q_o)[s^2 + 2sq_o + q_o^2]}{s-q_o}$$

Finalmente

$$P_{\max}^2 = \frac{(s+q_o)^3}{s-q_o} \tag{4.31}$$

Para que esta expresión tenga sentido físico,  $q_o$  debe satisfacer:  $-s \leq q_o < s$ .

Sin embargo, en la práctica es suficiente considerar valores para  $q_o$  comprendidos entre  $0 \leq q_o < s$ .

Ahora es posible expresar la ecuación (4.31) en cantidades originales. Como  $q_o = n + Q_o$ , entonces reemplazando en (4.31)

$$P_{\max}^2 = \frac{(s+n+Q_o)^3}{s-n-Q_o}$$

Luego

$$P_{\max}^2 = \frac{\left(\frac{V^2}{x_q} - Q_o\right)^3}{\frac{V^2}{x_d} - Q_o}$$

Finalmente

$$P_{\max}^2 = -\frac{\left(Q_o - \frac{V^2}{x_q}\right)^3}{Q_o - \frac{V^2}{x_d}}$$

donde:

$$-\frac{V^2}{x_q} \leq Q_o < -\frac{V^2}{x_d}$$

La expresión (4.32) representa el límite de estabilidad permanente teórico de la máquina síncrona de polos salientes, y puede ser fácilmente trazada en el plano P-Q en función de  $Q_o$ , que es el valor de Q, que hace que  $P$  sea máximo.

#### 4.5 Límite de estabilidad permanente práctico

En la práctica no se acepta el límite teórico y conviene dejar un margen de estabilidad disponible en todos los casos igual a un 10 a 20 por ciento de la potencia activa nominal. En consecuencia, el límite de estabilidad práctico se define como:

$$P_{\text{Límite práctico}} = P_{\text{Límite teórico}} - K P_{\text{nominal}} \quad (4.32)$$

La ecuación (4.22) permite determinar la potencia activa  $P$  para cualquier valor de la potencia reactiva  $q$ ; sin embargo en esta parte se utilizará la expresión (4.22) en el sentido inverso, lo que implica que se tendrá que resolver una ecuación algebraica de cuarto grado en  $q$ . Por lo tanto para despejar  $q$  de la ecuación (4.22), se deja solo el radical en el segundo miembro

$$P^2 - \frac{m^2}{2} - s^2 + q^2 = \pm \sqrt{\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + 2m^2sq}$$

Elevando al cuadrado

$$\left(P^2 - \frac{m^2}{2} - s^2\right)^2 + 2\left(P^2 - \frac{m^2}{2} - s^2\right)q^2 + q^4 = \frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 + 2m^2sq$$

Ordenando

$$q^4 + 2\left(P^2 - \frac{m^2}{2} - s^2\right)q^2 - 2m^2sq = \frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 - \left(P^2 + \frac{m^2}{2} - s^2\right)^2 \quad (4.33)$$

Operando sólo en el segundo miembro

$$\frac{m^4}{4} + 2m^2s^2 - \left[ (P^2 - s^2)^2 - (P^2 - s^2)m^2 + \frac{m^4}{4} \right]$$

Simplificando

$$m^2s^2 - (P^2 - s^2)^2 + P^2m^2$$

Factorizando  $m^2$

$$(P^2 - s^2)m^2 - (P^2 - s^2)^2$$

Reemplazando en la ecuación (4.33)

$$q^4 + 2\left(P^2 - \frac{m^2}{2} - s^2\right)q^2 - 2m^2sq = (P^2 + s^2)m^2 - (P^2 + s^2)^2 \quad (4.34)$$

Haciendo

$$A = 2(P^2 - s^2) - m^2$$

$$B = -2m^2sq$$

$$C = (P^2 - s^2)^2 - m^2(P^2 + s^2)$$

Se logra compactar la ecuación (4.34)

$$q^4 + Aq^2 + Bq + C = 0 \quad (4.35)$$

Esta última expresión (4.35) es una ecuación algebraica de cuarto grado, y por lo tanto tiene cuatro soluciones, usualmente estas soluciones corresponden a dos raíces que son complejas conjugadas, una raíz real negativa y una raíz real

positiva. Es evidente que en estos casos se debe considerar la solución real positiva. Ante la eventualidad de encontrar más de una solución real positiva para "q" se debe considerar aquella raíz que tenga sentido para el gráfico del límite de estabilidad permanente práctico.

#### 4.6 Límite térmico de los bobinados de armadura

El lugar geométrico del límite térmico de los bobinados de armadura queda definido por la ecuación (4.36), que representa una circunferencia de radio  $VI_{nominal}$ , con su punto centro en las ordenadas  $(P, Q) = (0,0)$

$$P^2 + Q^2 = (VI_{nominal})^2 \quad (4.36)$$

Para el generador, la capacidad máxima de la máquina motriz queda representada en el plano  $P - Q$  mediante una recta paralela al eje  $Q$  y que pasa por el punto  $P =$  potencia límite de la máquina prima, tal como se muestra en la figura 3.9.

## CONCLUSIONES

Usando la teoría de los dos ejes aplicada a una máquina síncrona de polos salientes, fue posible desarrollar las ecuaciones generales del diagrama de operación en régimen permanente de la máquina síncrona operando como generador, sin embargo constantemente en el desarrollo del presente trabajo se mencionó que se puede completar el diagrama de operación como motor en forma sencilla; es decir, los diagramas expuestos son simétricos con respecto al eje horizontal.

Fue utilizado el modelo clásico de la máquina síncrona de polos salientes en régimen permanente, transformando el sistema trifásico del estator de la máquina al sistema de coordenadas  $dq0$  para expresar las ecuaciones eléctricas en forma independiente de funciones trigonométricas. Luego en este nuevo sistema se expresaron las ecuaciones de las potencias activa y reactiva y partiendo de ellas se desarrollaron las ecuaciones del diagrama de operación P-Q de la máquina síncrona.

En el desarrollo del capítulo III, fue utilizado el resultado que se obtiene para una máquina síncrona de rotor cilíndrico como un caso particular, esto se muestra con líneas a trazos en los diferentes diagramas de dicho capítulo.

Asimismo, en el capítulo IV las ecuaciones deducidas son válidas para el caso particular de una máquina de rotor cilíndrico en que las reactancias síncronas en ejes directo y en cuadratura son iguales. Por ejemplo, se obtiene que el límite térmico de los bobinados de campo está dado por la ecuación de una circunferencia

de radio constante, con el centro ubicado en el origen de coordenadas; ésta también fue mostrado en un diagrama mediante líneas a trazos.

En relación al límite de estabilidad teórico para una máquina de rotor cilíndrico ésta corresponde a una recta paralela al eje P y que pasa por uno de los puntos de intersección del círculo de saliencia con el eje Q.

Las curvas que conforman el diagrama de operación como generador de la máquina síncrona de polos salientes dentro de la cual debe operar dicha máquina sin que se produzca deterioros ni salir de servicio son cinco:

1. El límite térmico del bobinado de campo, que resulta ser una parte del lugar geométrico conocido como limacón de Pascal, está curva esta mostrado en la parte derecha del diagrama P-Q.
2. El límite de potencia de la máquina prima, es una recta paralela al eje Q y esta mostrado en la parte superior del diagrama P-Q.
3. El límite térmico de los bobinados de armadura representado por el arco de una circunferencia con centro en el origen de coordenadas y que está mostrado en la parte superior-izquierda del diagrama P-Q.
4. El límite de estabilidad práctico, es una curva que obedece a una ecuación cúbica de la potencia activa en función de la potencia reactiva desplazada hacia la izquierda; está mostrada al lado izquierdo del diagrama P-Q.
5. El límite mínimo de la corriente de excitación, es un arco de circunferencia que corresponde a una corriente de campo mayor que cero; está mostrado al lado izquierdo del diagrama P-Q.

Es necesario enfatizar que el método analítico expuesto para los límites de estabilidad teórico y práctico de la máquina síncrona han sido desarrollados para facilitar la construcción de éstos límites en el diagrama de operación P-Q de la

máquina en forma más sencilla que con el método geométrico (expuesto en el capítulo III). También se observa que el análisis de estos límites es más práctico e inmediato utilizando las ecuaciones matemáticas desarrolladas en el presente trabajo, además sirven para explicar mejor la operación de la máquina dentro de los límites pre establecidos.

En los cursos de máquinas eléctricas y sistemas eléctricos de potencia de las carreras de ingeniería relacionadas se enseña la construcción geométrica del diagrama de operación P-Q, existiendo abundante información bibliográfica, pero ese método es complejo y laborioso. El método analítico expuesto es una opción más práctica y viene a ser el principal aporte de este trabajo para los estudiantes y los académicos que deseen estudiar el comportamiento de la máquina síncrona bajo diferentes condiciones de operación.

Un diagrama de operación construido a partir de las ecuaciones obtenidas, sería de gran ayuda para el ingeniero de sistemas de potencia o para el operador de una central de generación eléctrica, permitiéndole la determinación de la capacidad de la máquina bajo condiciones de operación con potencias activa y reactiva y factor de potencia variables.

Por lo anterior, queda claro que se ha sentado una bases para posteriores trabajos de investigación y de aplicación, algunos de los cuales son detallados a continuación:

1. Hacer un programa utilizando un lenguaje de programación con objetos de todas las ecuaciones deducidas para su consecuente análisis computacional del diagrama de potencia de la máquina síncrona y luego aplicar en forma práctica utilizando los parámetros de una máquina en operación real; graficar computacionalmente su correspondiente diagrama, inclusive con característica

interactiva para hacer ensayos, dándole valores de tensión en bornes (el cual es aproximadamente constante en un sistema eléctrico) y para diferentes valores de la corriente de armadura, factor de potencia y corriente de campo. Encontrar bajo esas condiciones el punto de operación dentro del diagrama P-Q.

2. Implementar un arreglo de instrumentos de medida: amperímetros (para medir la corriente de armadura y la de campo), vatímetro, vármetro y cosfímetro, todos ellos entregando información a una computadora para observar el punto de operación dentro de las limitaciones que impone la carta o diagrama de operación P-Q, de modo que el ingeniero de una sub-estación o de una central de generación pueda interpretar fácilmente el funcionamiento y los requerimientos de la máquina. Es decir, evitar relacionar las lecturas de instrumentos, lo cual es difícil en forma simultánea e inmediata y confinar la operación del alternador para cualquier condición de estado estacionario, dentro de las curvas que delimitan el diagrama, evitando calentamientos de los devanados o pérdida de sincronismo con las consiguiente inestabilidad.

## BIBLIOGRAFIA

1. Walker, J. H. "OPERATING CHARACTERISTICS OF SALIENT-POLE MACHINES", Proc. IEE, vol. 100, parte II, p.p. 13-25, August 1952
2. Gove, R.H., "GEOMETRIC CONSTRUCTION OF THE STABILITY LIMITS OF SYNCHRONOUS MACHINES", IEEE, Vol. 112, N. 5, p.p. 977-985, May 1965
3. Nagy, I., "ANALYSIS OF MINIMUM EXCITATION LIMITS OF SYNCHRONOUS MACHINES", IEEE Trans., Vol. Pas. 89, No. 6, July/August 1970.
4. Arillaga, J., Arnold C.P. and Harker B.J., "COMPUTER MODELLING OF ELECTRICAL POWER SYSTEMS", Ed. John Wiley & Sons, USA, 1986.
5. Bergen, A.R., "POWER SYSTEM ANALYSIS", Ed. Prentice Hall, USA, 1986
6. Kundur, P., "POWER SYSTEM STABILITY AND CONTROL", Ed. McGraw-Hill, USA, 1994
7. Kimbark, E. W., "POWER SYSTEM STABILITY", Vol. 3: SYNCHRONOUS MACHINES, Ed. John Wiley & Sons, New York, 1956
8. Meissel, J., "PRINCIPIOS DE CONVERSION DE ENERGIA ELECTROMECHANICA", Ed. McGraw-Hill, 1969
9. Fitzgerald, A. E., Kingsley y Kusko, A., "TEORIA Y ANALISIS DE LAS MAQUINAS ELECTRICAS", Ed. Hispano Europea, España, 1975.
10. Langsdorf, A. S., "TEORIA DE LAS MAQUINAS DE CORRIENTE ALTERNA", 1977
11. Smolenski, Ivanov A. V., "MAQUINAS ELECTRICAS", Tomo 2, E. MIR Moscú, 1984.
12. Konstenko M.P., "MAQUINAS ELECTRICAS", Vol. II Ed. MIR Moscú, 1976.

13. Kosow Irving L, "MAQUINAS ELECTRICAS Y TRANSFORMADORES", 2da. Ed. Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., México, 1993.
14. Chapman Stephen J., "MAQUINAS ELECTRICAS", Ed. McGraw-Hill, México, 1988
15. Nasar Syed, A., "MAQUINAS ELECTRICAS Y ELECTROMECHANICAS", Ed. McGraw-Hill, México, 1986.
16. Zoppetti, G., "CENTRALES HIDROELECTRICAS" Ed. Gustavo Gili, S.A., Barcelona, 1979.