

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y**  
**ELECTRONICA**



**METODO DE ANALISIS ARMONICO EN LOS**  
**SISTEMAS CONVERTIDORES CONTROLADOS**  
**POR FASE UTILIZANDO TIRISTORES**

**TITULACION POR EXAMEN PROFESIONAL**  
**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:**

**INGENIERO ELECTRONICO**

**FELIX CESAR CARRILLO CARRASCAL**

**PROMOCION: 1975-II**

**LIMA - PERU**

**1996**

**A mi madre:**

**Maria**

## SUMARIO

La mayoría de los convertidores de potencia que usan tecnología de semiconductores, actúan como cargas no lineales las cuales producen armónicos en las líneas de entrada trifásica del sistema de potencia de alimentación. Estos armónicos causan distorsiones en las formas de las ondas y deben ser reducidos, especialmente en aplicaciones de grandes potencias.

En este trabajo se desarrolla un método que combina análisis armónico con técnica booleana, a fin de predecir el contenido armónico en los circuitos convertidores. Luego, este método es usado para analizar, en forma ideal, a los rectificadores trifásicos controlados de 3, 6 y 12 pulsos, así como también a un ciclo convertidor de trifásico a monofásico cuya frecuencia  $f_0$  de salida es mayor que la frecuencia  $f_i$  de entrada.

Los resultados obtenidos por este método pueden ser usados para el diseño de filtros, tanto a la entrada como a la salida de los convertidores, así como también en la determinación de los subarmónicos y batidos de frecuencias con varios cicloconvertidores.

**METODO DE ANALISIS ARMONICO EN LOS SISTEMAS  
CONVERTIDORES CONTROLADOS POR FASE  
UTILIZANDO TIRISTORES**

**TITULO: METODO DE ANALISIS ARMONICO EN SISTEMAS  
CONVERTIDORES CONTROLADOS POR FASE  
UTILIZANDO TIRISTORES**

**AUTOR: FELIX CESAR CARRILLO CARRASCAL**

**GRADO A OPTAR: INGENIERO ELECTRONICO**

**FACULTAD: INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**LIMA - PERU**

**1996**

## **EXTRACTO**

Para el diseño de filtros, es necesario conocer el contenido armónico de las corrientes y voltajes de entrada y salida del convertidor. En el siguiente trabajo se hace un análisis armónico detallado de los principales sistemas convertidores.

En el capítulo I se define al sistema convertidor de potencia y se hace una clasificación de los diferentes tipos de convertidores, así como también se enuncian las definiciones y teoremas básicos de la teoría de Series de Fourier. En el capítulo II se describe el funcionamiento de los rectificadores monofásicos tanto de media onda como de onda completa, actuando con diferentes circuitos

de carga, modos de operación: corriente continua y corriente discontinua. Este estudio es fundamental para el estudio posterior de los rectificadores trifásicos de 3, 6 y 12 pulsos. El análisis armónico de las ondas presentes en los rectificadores monofásicos es realizado teniendo en cuenta la teoría convencional de series de Fourier.

En el Capítulo III se describe el funcionamiento de los diferentes rectificadores trifásicos de 3,6 y 12 pulsos. Para facilitar el análisis armónico general de las ondas presentes en estos circuitos, se describe un método no convencional que combina análisis de Fourier con técnica booleana.

En el Capítulo IV se hace el análisis armónico a un convertidor de frecuencia de trifásico a fase simple, cuya frecuencia de salida  $f_0$  es mayor que la frecuencia de entrada  $f_i$ . Con una frecuencia de entrada de 60Hz como base, una frecuencia de salida múltiplo requerirá un solo ciclo de análisis de Fourier para evaluar el contenido armónico. En cambio, si la frecuencia de salida es mayor que la de entrada, pero no múltiplo, puede ser requerido más de un ciclo para establecer la periodicidad de la forma de onda de la salida. Dependiendo de cuantos ciclos son requeridos, el análisis convencional de Fourier, para integrar separadamente en cada intervalos de conducción de los Thiristores para encontrar las constantes de Fourier, puede hacerse tedioso y consumir mucho tiempo o hacerse virtualmente imposible. Sin embargo, el método aplicado a los rectificadores trifásicos en el Capítulo III permite superar las limitaciones del análisis convencional, ya que, en este caso, no es necesario un conocimiento exacto de la forma de onda de la salida.

## TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCION . . . . .	1
CAPITULO I	
SISTEMA CONVERTIDOR Y ANALISIS DE FOURIER . . . . .	3
1.1 Definición general de un sistema convertidor . . . . .	3
1.2 Series de funciones y series de Fourier . . . . .	6
CAPITULO II	
RECTIFICADOR DE MEDIA ONDA . . . . .	17
2.1 Circuito de carga resistiva . . . . .	24
2.2 Circuito de carga RC . . . . .	28
2.3 Circuito de carga R-L . . . . .	32
2.4 Circuito de carga con diodo de libre rodamiento (free-wheeling diode) . . . . .	36
2.5 Rectificador monofásico controlado de media onda . . . . .	41
2.6 Circuito de carga R-L con fuerza electromotriz . . . . .	45
2.7 Rectificador controlado monofásico de onda completa . . . . .	54
CAPITULO III	
RECTIFICADORES TRIFASICOS CONTROLADOS . . . . .	78
3.1 Rectificador trifásico controlado de media onda . . . . .	78

## VII

3.2 Rectificador trifásico controlado de onda completa	106
3.2.1 Rectificador de seis pulsos tipo punto medio.	106
3.2.2 Rectificador de seis pulsos tipo puente	111
3.2.3 Rectificador de doce pulsos tipo puente	124

## CAPITULO IV

CONVERTIDORES DE FRECUENCIA (CICLOCONVERTIDORES)	137
4.1 Introducción al método de análisis .	137
4.2 El sistema convertidor básico	142
4.3 Método general de análisis .	146
4.4 Análisis armónico de las corrientes de línea .	155
CONCLUSIONES	190
BIBLIOGRAFIA .	193

## INTRODUCCION

En la industria de los sistemas de potencia se ha experimentado en los últimos años un enorme crecimiento de la utilización de los convertidores de estado sólido. La mayoría de estos convertidores utilizan rectificadores controlados de silicio (SCR), también denominadas Thiristores. Tales convertidores, cuando operan desde un sistema de potencia alterno (fuente de alimentación) actúan como cargas no lineales. Estas cargas generan corrientes y voltajes armónicos, los que son realimentados al sistema de potencia alterno. Estas corrientes armónicas causan caídas de voltaje a través de la inductancia de las líneas, dando como resultado una distorsión en las formas de onda de voltaje de la fuente de alimentación. Esto puede causar serios problemas de interferencia con los sistemas de comunicación, ya que los armónicos causados por los convertidores inducen voltajes en las líneas telefónicas, creando ruidos en los circuitos telefónicos e interrumpiendo las conversaciones. Por otra parte, si el convertidor es creado para accionar o controlar un determinado sistema, tal como un motor en continua, las corrientes armónicas se introducirán también en el sistema controlado, afectando su funcionamiento. Es por eso necesario, con frecuencia, introducir filtros tanto

en el lado de entrada como en el lado de salida del convertidor, a fin de reducir los armónicos a amplitudes aceptables.

En el presente trabajo se han hecho las siguientes asunciones para el funcionamiento ideal de los circuitos convertidores.

1.- Los tiristores y diodos son considerados dispositivos ideales; es decir, con

las siguientes características:

a) Caída de voltaje cero durante la conducción.

b) Corriente de fuga nula en los intervalos de no conducción (modos de bloqueo directo o inverso).

c) Ambos tiempos de encendido y apagado son considerados insignificantes (instantáneos).

2.- Debido a las simplificaciones asumidas para los tiristores y diodos , las formas de onda de las corrientes y voltajes originados por los dispositivos rectificadores tienen teóricamente razón de cambio infinitos.

3.- Las fuentes de alimentación se asumen que son balanceados , así como también los transformadores e inductancias se consideran ideales ( corriente de magnetización, pérdidas en el núcleo magnético, resistencia de los devanados y reactancia de fuga son insignificantes).

4.- En el funcionamiento de los circuitos convertidores se asume que los circuitos de control son capaces de proveer un conjunto de pulsos de encendido de los tiristores sincronizados , a fin de controlar exactamente los retardos de fase necesarios.

# CAPITULO I

## SISTEMA CONVERTIDOR Y ANALISIS DE FOURIER

### 1.1 Definición general de un sistema convertidor

Un sistema convertidor de energía eléctrica es un sistema que es capaz de transformar una determinada forma de energía eléctrica denominada energía disponible y que tiene ciertas características, en otra forma de energía eléctrica que, en general, tendrá características diferentes.

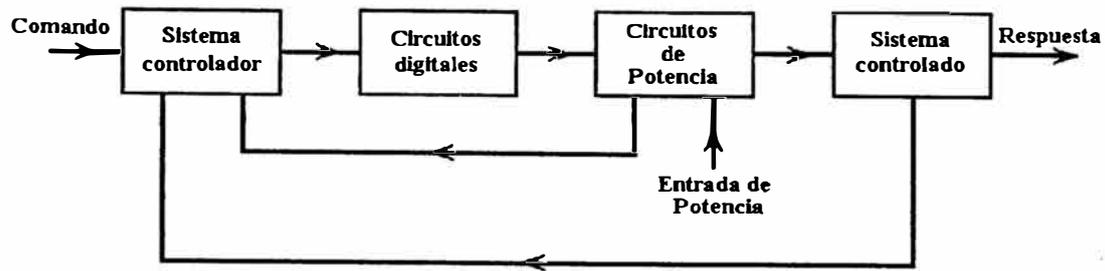
Las principales partes de un sistema convertidor se muestra en el diagrama de bloques de la figura 1.1. Estas partes combinan básicamente potencia, electrónica y control. Dichas partes se describen de la siguiente forma:

#### 1.- Circuitos de potencia

Es el bloque que contiene los tiristores y cuya salida puede ser un voltaje continuo pero variable ó puede ser un voltaje alterno variable tanto en amplitud como en frecuencia.

#### 2.- Circuitos digitales

Es el bloque en el cual en respuesta a las señales que provienen del bloque: **sistema controlador** , conmutan los tiristores del bloque: **circuitos de potencia** , a las entradas ON y OFF en instantes apropiados.



**Fig. 1.1 Diagrama de bloque de un sistema convertidor típico.**

### 3.- Sistema controlado

Puede ser simplemente una máquina rotativa, accionando una carga con apropiada salida de realimentación, o puede, algunas veces, ser considerablemente complicado.

### 4.- Sistema controlador

Es el bloque en el cual en respuesta a los comandos y señales de realimentación, emite las apropiadas señales de control al bloque de circuitos digitales.

#### Tipos de sistemas convertidores

Los sistemas convertidores pueden ser clasificados de acuerdo a la función de conversión que ellos realizan. Los principales tipos de convertidores son los siguientes:

#### a) Controlador de voltaje alterno

Estos convertidores se emplean para variar el valor eficaz del voltaje alterno aplicado a un circuito de carga. Así, convierten un voltaje alterno de amplitud fija en un voltaje alterno de amplitud variable. La frecuencia permanece fija.

**b) Rectificadores no controlados**

Convierten un voltaje alterno de amplitud fija en voltaje continuo constante.

**c) Rectificadores controlados**

Convierten un voltaje alterno de amplitud fija en un voltaje continuo , pero variable.

**4.- Convertidores de continua a continua (Choppers)**

Convierten un voltaje continuo fijo a voltaje continuo variable.

**5.- Inversores no controlados**

Convierten un voltaje continuo fijo en voltaje alterno de amplitud fija.

**6.- Inversores controlados**

Convierten un voltaje continuo fijo en voltaje alterno de amplitud variable.

**7.- Convertidor de frecuencia (Cicloconvertidor)**

Convierte un voltaje alterno de amplitud y frecuencia fijas en un voltaje alterno de amplitud y frecuencia variables.

Los convertidores no controlados utilizan diodos en los circuitos de potencia. En cambio, los convertidores controlados , utilizan tiristores en vez de diodos. A estos convertidores se les denomina también convertidores controlados por fase.

El principio básico de operación de los convertidores controlados por fase es controlar el punto en el tiempo al cual cada tiristor comienza su conducción en cada ciclo alterno. De esta manera, es posible escoger el intervalo en el tiempo en que la onda de voltaje alterno aparece en los

terminales de salida, y, de ese modo, controlar continuamente las características del voltaje de salida.

## 1.2 Series de funciones y series de Fourier

### 1.2.1 Definición:

La serie:  $u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$

se llama serie de funciones si cada uno de sus términos,  $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$  son funciones de cierta variable  $x$ .

Así, se escribirá:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

Dando valores a  $x$  se determinan diferentes series, las cuales pueden ser convergentes o divergentes. Al conjunto de valores de  $x$  para los cuales es convergente se denomina intervalo de convergencia. Así, para cada  $x$  dentro del intervalo de convergencia, el valor al cual converge será también una función. Denotemos por  $S(x)$  a esta función, entonces podemos escribir:

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

A  $S(x)$  se le llama también la suma de la serie de funciones.

### 1.2.2 Definición: La serie de funciones:

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

se llama mayorable en el intervalo  $[a, b]$  si existe una serie numérica convergente:

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

de números positivos, tal que para todo  $x \in [a, b]$  se verifica las siguientes relaciones:

$$|u_1(x)| \leq b_1, \quad |u_2(x)| \leq b_2, \quad \dots, \quad |u_n(x)| \leq b_n, \quad \dots$$

### 1.2.3 Teorema

La suma  $S(x)$  de una serie de funciones continuas, mayorables en cierto intervalo  $[a, b]$ , es una función continua en dicho intervalo.

### 1.2.4 Teorema

Sea una serie de funciones

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$$

mayorable en el intervalo  $[a, b]$  y sea  $S(x)$  la suma de esta serie. Entonces, para todo  $x_0$  y  $x$  en el intervalo  $[a, b]$  se verifica la siguiente identidad:

$$\int_{x_0}^x S(x) dx = \int_{x_0}^x u_1(x) dx + \int_{x_0}^x u_2(x) dx + \dots + \int_{x_0}^x u_n(x) dx + \dots$$

### 1.2.5 Definición

La serie de funciones:

$$a_0 + a_1 \cos x + b_1 \operatorname{sen} x + a_2 \cos 2x + b_2 \operatorname{sen} 2x + \dots$$

o en forma más compacta, la serie de la forma

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1.1)$$

es denominada serie trigonométrica. Los números constantes:

$$a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots, b_n, \dots,$$

son denominados coeficientes de la serie trigonométrica.

Como las funciones trigonométricas son funciones periódicas y de período  $2\pi$ , y si la serie ( 1.1 ) converge, entonces su suma será también una función periódica  $f(x)$  y de período  $2\pi$ . Es decir, se verificará,

$$f(x) = f(x + 2\pi)$$

### Determinación de los coeficientes de Fourier

Supongamos que una función periódica  $f(x)$  de período  $2\pi$  puede representarse como una serie trigonométrica que converge a la función en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Es decir,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sen nx) \quad (1.2)$$

Supongamos que la serie numérica positiva:

$$|a_0| + |a_1| + |b_1| + |a_2| + |b_2| + \dots + |a_n| + |b_n| + \dots \quad (1.3)$$

converge. Entonces la serie trigonométrica (1.1) converge absolutamente y por lo tanto es mayorable y podemos integrarla término a término en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ .

Integremos ambos miembros de la ecuación ( 1.2 ) entre los límites  $-\pi$  a  $\pi$  :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx + \int_{-\pi}^{\pi} b_n \sen x dx \right] \quad (1.4)$$

Integrando cada término del segundo miembro se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} dx = 2\pi a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} a_n \cos nx dx = \frac{a_n \sen nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} b_n \sen nx dx = -\frac{b_n \cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Así, ( 1.4 ) es equivalente a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi a_0 \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad ( 1.5 )$$

Para calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  necesitamos calcular previamente algunas integrales definidas.

Por entidad trigonométrica:

$$\cos nx \sin kx = \frac{1}{2} [\sin(n+k)x - \sin(n-k)x]$$

$$\sin nx \sin kx = \frac{1}{2} [-\cos(n+k)x + \cos(n-k)x]$$

Si  $n$  y  $k$  son números enteros tal que  $n \neq k$ ; entonces utilizando estas identidades trigonométricas encontramos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx dx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin kx dx = 0 \quad \text{I}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin kx dx = 0$$

En cambio, si  $n = k$ , entonces encontramos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos kx dx = 0 \quad \text{II}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx dx = \pi$$

Con ayuda de estas integrales definidas podemos calcular los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$ .

Para hallar  $a_n$  multiplicamos ambos miembros de la ecuación ( 1.2 ) por  $\cos kx$ :

$$f(x) \cos kx = a_0 \cos kx + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cos kx + b_n \operatorname{sen} nx \cos kx) \quad (1.6)$$

La serie del segundo miembro es también mayorable ya que sus términos no superan en valor absoluto a los términos correspondientes de la serie ( 1.3 ). Así, puede integrarse término a término.

Integrando ambos miembros de la ecuación ( 1.6 ) desde  $-\pi$  a  $\pi$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left[ a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \cos kx \, dx \right] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Tomando en cuenta las fórmulas (I) y (II) se observará que todas las integrales del segundo miembro tal que  $n \neq k$ , se anulan. Siendo no nula aquella tal que  $n = k$ . Por lo tanto, ( 1.7 ) se reduce a:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \, dx = a_k \pi$$

de donde despejando:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx \quad (1.8)$$

Análogamente, si multiplicamos ambos miembros de (1.2) por  $\operatorname{sen} kx$  e integramos nuevamente de  $-\pi$  a  $\pi$ , se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx = b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kx \, dx = b_k \pi$$

Despejando:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx \, dx \quad (1.9)$$

Haciendo  $k = n$ , se tiene:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{cos} nx \, dx \quad (1.10)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx \, dx \quad (1.11)$$

A los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ , y  $b_n$ , hallados por las fórmulas (1.5), (1.10) y (1.11), se les denomina coeficientes de Fourier de la función  $f(x)$  y a la serie:

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_n \operatorname{cos} nx + b_n \operatorname{sen} nx) \quad (1.12)$$

se le llama Serie de Fourier de la función  $f(x)$ .

Recordemos que hemos partido suponiendo que  $f(x)$  es una función periódica de período  $2\pi$  y que es la función a la cual converge una serie trigonométrica. Con estas condiciones hemos determinado cómo serían los coeficientes de dicha serie, pero no hemos determinado que condiciones debe cumplir tal función  $f(x)$ , para que haya una serie trigonométrica que la represente. Enunciaremos un teorema que fija las condiciones suficientes para que esto sea posible. Antes, es necesario dar la siguiente definición:

### 1.2.6 Definición

Se dice que la función  $f$  es continua por tramos en el intervalo  $[a, b]$  si:

- i)  $f$  es continua en todos, excepto en un número finito, de puntos de  $[a, b]$ ,
- ii) Sí  $x_0$  es un punto de discontinuidad por salto, entonces los límites laterales en dicho punto son finitos.

Esta definición significa que las únicas discontinuidades de  $f$  en el intervalo  $[a, b]$  son "discontinuidades por salto", del tipo mostrado en la figura 1.2, en donde:

$$f(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \quad , \quad f(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$$

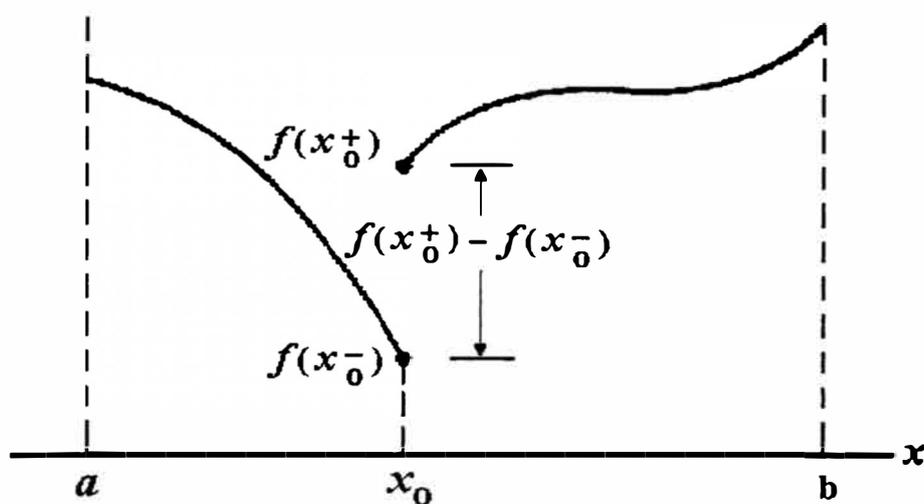


Fig. 1.2

### 1.2.7 Teorema

Sea  $f$  una función que tiene derivada continua por tramos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ . Entonces el desarrollo en serie de Fourier para  $f$  converge punto por punto en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , y :

Si  $x_0$  es un punto interior al intervalo  $[-\pi, \pi]$ , entonces la serie converge al valor:

i)  $f(x_0)$ , si  $f$  es continua en  $x_0$ .

ii)  $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ , si  $f$  tiene una discontinuidad por salto en  $x_0$ .

Si  $x_0 = -\pi$  ó  $x_0 = \pi$ , entonces la serie converge al valor:

$$\frac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$$

siendo  $f(x_0^+)$  y  $f(x_0^-)$  los límites de  $f$  por la derecha y por la izquierda en  $x_0$ ,  $f(-\pi^+)$  es el límite por la derecha en  $-\pi$  y  $f(\pi^-)$  el límite por la izquierda en  $\pi$ .

El teorema 1.2.7, indica la convergencia punto por punto en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , pero teniendo en cuenta que las funciones trigonométricas de la forma  $\text{sen}kx$  y  $\text{cos}kx$ , donde  $k$  es un entero, son periódicas y de período  $2\pi$ , no es difícil concluir que si la serie converge en un punto  $x_0$  al valor  $f(x_0)$ , entonces convergerá también a este mismo valor en todos los puntos de la forma  $x_0 + 2\pi n$ , siendo  $n$  un entero arbitrario, ya que se verifica:

$$f(x_0) = f(x_0 + 2\pi n)$$

Este razonamiento y el teorema 1.2.7 originan el siguiente teorema.

### 1.2.8 Teorema

El desarrollo en serie de Fourier de una función periódica  $f$ , de período  $2\pi$ , y que tiene derivada continua por tramos en el intervalo  $[-\pi, \pi]$ , converge punto por punto en toda la recta real. Más aún,

- i) Si  $x_0$  es un punto de continuidad, entonces la serie converge al valor  $f(x_0)$
- ii) Si  $x_0$  es un punto de discontinuidad por salto, entonces la serie converge al

valor  $\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$ .

Por otra parte, como para cualquier función periódica  $\varphi(x)$  y de período  $2\pi$ , se verifica:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x) dx = \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} \varphi(x) dx$$

cualquiera que sea  $\lambda$ , entonces es fácil deducir de esta propiedad que las constantes de Fourier, dadas por las ecuaciones (1.5), (1.10) y (1.11), pueden expresarse también, de la forma:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx \quad (1.12)$$

### Series de Fourier de funciones de período $2T$ .

Sea  $f$  una función periódica y de período  $2T$ , distinto en general de  $2\pi$ .

Hagamos el cambio de variable:

$$x = \frac{T}{\pi} t$$

Sea la función  $F(t) = f\left(\frac{T}{\pi} t\right)$ . Como:

$$F(t+2\pi) = f\left(\frac{T}{\pi}(t+2\pi)\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t + 2T\right) = f\left(\frac{T}{\pi}t\right) = F(t)$$

entonces la función  $F$  es periódica y de período  $2\pi$

Desarrollando en serie de Fourier, se tendrá que si

$$F(t) = f\left(\frac{T}{\pi}t\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt) \quad (1.13)$$

entonces las constantes de Fourier serán:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}t\right) dt, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}t\right) \cos n \omega t dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{T}{\pi}t\right) \text{sen } n\omega t \, dt \quad (1.14)$$

Volviendo a la variable original  $x$ :

$$x = \frac{T}{\pi}t, \quad t = \frac{\pi}{T}x, \quad dt = \frac{\pi}{T}dx$$

Si  $x = T$  entonces  $t = \pi$ . Si  $x = -T$ , entonces  $t = -\pi$ .

Así, reemplazando en las ecuaciones (1.14) resulta:

$$a_0 = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(x) \, dx, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \cos n \frac{\pi}{T} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(x) \text{sen } n \frac{\pi}{T} x \, dx \quad (1.15)$$

La ecuación (1.13) toma entonces las forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos n \frac{\pi}{T} x + b_n \text{sen } n \frac{\pi}{T} x \right)$$

donde los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ , y  $b_n$  se calculan según las ecuaciones (1.15).

El segundo miembro de (1.16) es la serie de Fourier de una función periódica de período  $2T$ .

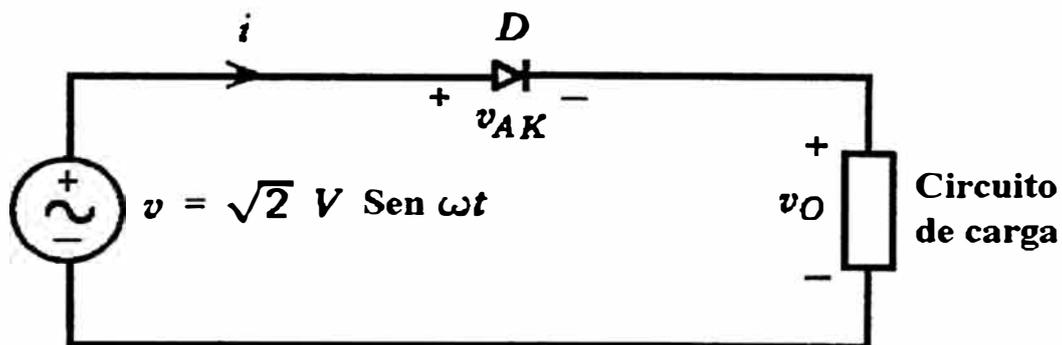
Todos los teoremas formulados para las funciones periódicas de período  $2\pi$ , en particular las que establecen condiciones suficientes para que una función periódica pueda desarrollarse en serie de Fourier, son también válidas para las funciones periódicas de cualquier otro período  $2T$ . También aquella que permite calcular los coeficientes de la serie integrando en un intervalo arbitrario de ancho igual al período; es decir, se obtiene expresiones análogas a las ecuaciones (1.12) reemplazando en estas,  $2\pi$  por  $2T$ .

La clase de funciones que pueden ser representadas por las series de Fourier es bastante amplia por lo que tiene gran aplicación en diferentes

ramas de las matemáticas y las ingenierías. En particular, en Electrónica de Potencia, las ondas de salida de los circuitos convertidores de potencia son, generalmente, ondas periódicas que satisfacen las condiciones suficientes para ser desarrolladas en series Fourier, como veremos en los siguientes capítulos.

## CAPITULO II RECTIFICADOR DE MEDIA ONDA

Un circuito rectificador de media onda se obtiene cuando se coloca un diodo entre una fuente de voltaje sinusoidal y un circuito de carga lineal, tal como muestra la figura 2.1.



**Fig. 2.1 Circuito rectificador de media onda.**

De acuerdo a la naturaleza de la carga y cuando el voltaje  $v - v_o > 0$ , entonces asumiendo que el diodo es ideal, se tendrá que el voltaje  $v_{AK} = 0$  y circulará una corriente lo que dará lugar a una ecuación diferencial. Esta corriente tendrá dos componentes: la natural o transitoria y la permanente o forzada. Como el voltaje aplicado a la carga no es sinusoidal pura entonces la componente forzada puede no ser fácilmente determinada por el método de análisis de estado estacionario a una excitación sinusoidal pura. Sin embargo, como el voltaje  $v_o$  sobre la carga es periódica, entonces por Análisis de Fourier puede este voltaje representarse como la suma de una serie infinita de funciones sinusoidales de

frecuencias que son múltiplos de la frecuencia de la fuente. La componente forzada a cada una de las funciones de esta serie puede determinarse por análisis de circuito de estado estacionario sinusoidal a la frecuencia correspondiente, y si la carga es lineal, entonces la respuesta forzada a cada término puede sumarse por superposición. La corriente suministrada por la fuente tampoco es sinusoidal, pero sí es periódica.

El voltaje  $v_o$  sobre la carga, por series de Fourier, será:

$$V_o = V_o + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n \omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos } n \omega t \quad (1)$$

Si  $\alpha$  es el ángulo a partir del cual el diodo empieza a conducir, y  $\beta$  es el ángulo al cual deja de conducir, entonces el ángulo  $\gamma$  de conducción será:

$$\gamma = \beta - \alpha \quad \text{rad}$$

Si el circuito de carga es pasivo, entonces  $\alpha = 0$  y por lo que  $\gamma = \beta$ .

El valor de  $\beta$  dependerá de la naturaleza de la carga.

El voltaje  $v_o$  de la ecuación (1), para el caso general, es:

$$V_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o d(\omega t)$$

donde  $\theta = \omega t$

Como la corriente fluye solo si  $\alpha < \theta < \beta$ , entonces en el resto del intervalo de 0 a  $2\pi$ ,  $i = 0$  y por lo tanto  $v_o = 0$ . Así,

$$V_o = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_o d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} v_o d(\omega t) \quad (2)$$

El valor  $V_o$  es el valor medio del voltaje rectificado y se le denomina: voltaje de salida continua (DC).

Análogamente las constantes  $a_n$  y  $b_n$  en (1), serán:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} v_0 \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t) \quad (3)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \operatorname{cos} n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} v_0 \operatorname{cos} n\omega t d(\omega t) \quad (4)$$

Como la corriente  $i$  es también periódica, entonces por analogía se tiene que:

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} (n\omega t - \phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \operatorname{cos} (n\omega t - \phi_n) \quad (5)$$

donde:

$$c_n = \frac{a_n}{Z_n}, \quad d_n = \frac{b_n}{Z_n}, \quad \phi_n = \arctan \frac{n\omega L}{R} \text{ rad} \quad (6)$$

y  $Z_n$  es la impedancia que presenta el circuito de carga a la corriente de frecuencia  $n\omega$ . Se asume que esta impedancia consiste de una carga resistiva e inductiva. La reactancia capacitiva se deprecia ya que el término  $\frac{1}{n\omega CR}$  se

hace pequeño frente al término  $\frac{n\omega L}{R}$ .

$$\text{Así, } Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2}$$

El valor eficaz de la  $n$ -ésima componente armónica del voltaje de salida será:

$$V_{nR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (7)$$

El valor eficaz del voltaje rectificado es:

$$V_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} v_0^2 d(\omega t)} \quad (8)$$

Pero como también,

$$v_o = V_o + a_1 \text{Sen} \omega t + a_2 \text{Sen} 2\omega t + \dots + b_1 \text{Cos} \omega t + b_2 \text{Cos} 2\omega t + \dots$$

entonces el valor eficaz también será igual a:

$$V_R = \sqrt{V_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{nR}^2} \quad (9)$$

El valor eficaz de los componentes armónicos o voltaje ripple es:

$$V_{RI} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_{nR}^2} \Rightarrow \frac{V_{RI}}{V_R} = \frac{\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} V_{nR}^2}}{\sqrt{V_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} V_{nR}^2}}$$

Reemplazando en (9) y despejando:

$$V_{RI} = \sqrt{V_R^2 - V_o^2} \quad (10)$$

El factor de voltaje ripple es:

$$K_v = \frac{V_{RI}}{V_o} \quad (11)$$

Reemplazando  $v_o = \sqrt{2} V \text{Sen} \omega t$  en (2), se tiene:

$$V_o = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \text{Sen} \omega t d(\omega t) = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen} \theta d\theta, \quad \theta = \omega t$$

$$V_o = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (-\text{Cos} \theta) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Evaluando,

$$V_o = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\text{Cos} \alpha - \text{Cos} \beta) \quad (12)$$

Análogamente, en (3):

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2} V \text{Sen} \omega t \text{Sen} n \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Sen} \theta \text{Sen} n \theta d\theta \end{aligned} \quad (13)$$

Sea:

$$I_1 = \int \text{Sen} \theta \text{Sen} n \theta d\theta$$

Como  $\text{sen} A \text{sen} B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)]$ , entonces :

$$\begin{aligned} \text{Sen} \theta \text{Sen} n \theta &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(\theta - n\theta) - \text{Cos}(\theta + n\theta)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(n\theta - \theta) - \text{Cos}(\theta + n\theta)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Cos}(n-1)\theta - \text{Cos}(n+1)\theta] \end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int \frac{1}{2} [\text{Cos}(n-1)\theta - \text{Cos}(n+1)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

Luego en (13):

$$a_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right]_0^{\pi} \quad (14)$$

Análogamente en (4):

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2} V \text{sen} \omega t \text{Cos} n \omega t d(\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \int_0^{\pi} \text{Sen} \theta \text{Cos} n \theta d\theta \end{aligned} \quad (15)$$

Sea:

$$I_2 = \int \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta \, d\theta$$

Como  $\text{Sen} A \text{Cos} B = \frac{1}{2}[\text{Sen}(A - B) + \text{Sen}(A + B)]$ , entonces

$$\begin{aligned} \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta &= \frac{1}{2}[\text{Sen}(\theta - n\theta) + \text{Sen}(\theta + n\theta)] \\ &= \frac{1}{2}[-\text{Sen}(n\theta - \theta) + \text{Sen}(\theta + n\theta)] \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Sen}(n-1)\theta + \text{Sen}(n+1)\theta] \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{1}{2}[-\text{Sen}(n-1)\theta + \text{Sen}(n+1)\theta] \, d\theta \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right], \quad n \neq 1 \end{aligned}$$

Luego en (15)

$$b_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\beta} \quad n \neq 1 \quad (16)$$

Para calcular  $a_1$ , y  $b_1$  hacemos  $n=1$  en (13) y (15) respectivamente. Así:

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen}^2\theta \, d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \left( \frac{1 - \text{Cos}2\theta}{2} \right) d\theta$$

Integrando.

$$a_1 = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left( \theta - \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Evaluando

$$a_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \beta - \alpha - \frac{\text{Sen}2\beta - \text{Sen}2\alpha}{2} \right] \quad (17)$$

También

$$b_1 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta \, d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \frac{\text{Sen}^2\theta}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta}$$

Evaluando,

$$b_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\text{Sen}^2\beta - \text{Sen}^2\alpha) \quad (18)$$

Se obtiene expresiones para la corriente en la carga, análogas a las obtenidas para el voltaje. Así, el valor eficaz de la n-esima componente armónica de la corriente  $i_0$  en la carga es:

$$I_{nR} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{c_n^2 + d_n^2} \quad (19)$$

y el valor eficaz de la corriente rectificadora es:

$$I_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} i_0^2 \, d(\omega t)} = \sqrt{I_0^2 + \sum I_{nR}^2} \dots \quad (20)$$

El valor eficaz de las componentes armónicas de la corriente ó corriente ripple es:

$$I_{RI} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} I_{nR}^2} = \sqrt{I_R^2 - I_0^2} \quad (21)$$

El factor de corriente ripple es:

$$K_1 = \frac{I_{RI}}{I_0} \quad (22)$$

### 2.1. Circuito de carga resistiva.

En el circuito de la figura 2.2 se tendrá que  $\alpha = 0$  y  $\beta = \pi$ , por lo que el ángulo de conducción es  $\pi$  (media onda).

La corriente que fluye por la carga será:

$$i(t) = \begin{cases} \frac{V}{R} = \frac{\sqrt{2} V \text{Sen} \omega t}{R} & , 0 < \omega t < \pi \\ 0 & , \pi < \omega t < 2\pi \end{cases}$$

De la ecuación (2), el voltaje constante  $V_0$  es:

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0 d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} v_0 d(\omega t) , \quad \omega t = \theta$$

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{2} V \text{Sen} \theta d\theta = \frac{V}{2\pi} \sqrt{2} (-\text{Cos} \theta) \Big|_0^{\pi} = \frac{\sqrt{2} V}{\pi}$$

De la ecuación (8), el valor eficaz del voltaje rectificado será:

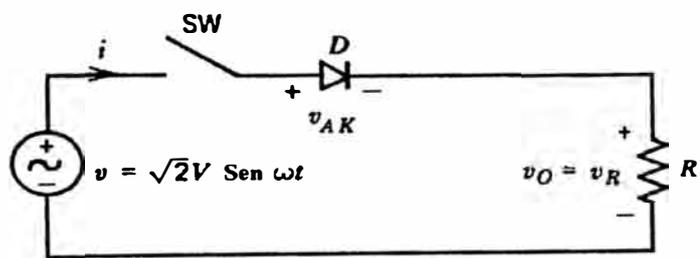
$$V_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\beta} v_0^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sqrt{2} V \text{Sen} \omega t)^2 d(\omega t)} , \quad \theta = \omega t$$

$$V_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2V^2 \text{Sen}^2 \theta d\theta} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 2V^2 \left(\frac{1 - \text{Cos} 2\theta}{2}\right) d\theta}$$

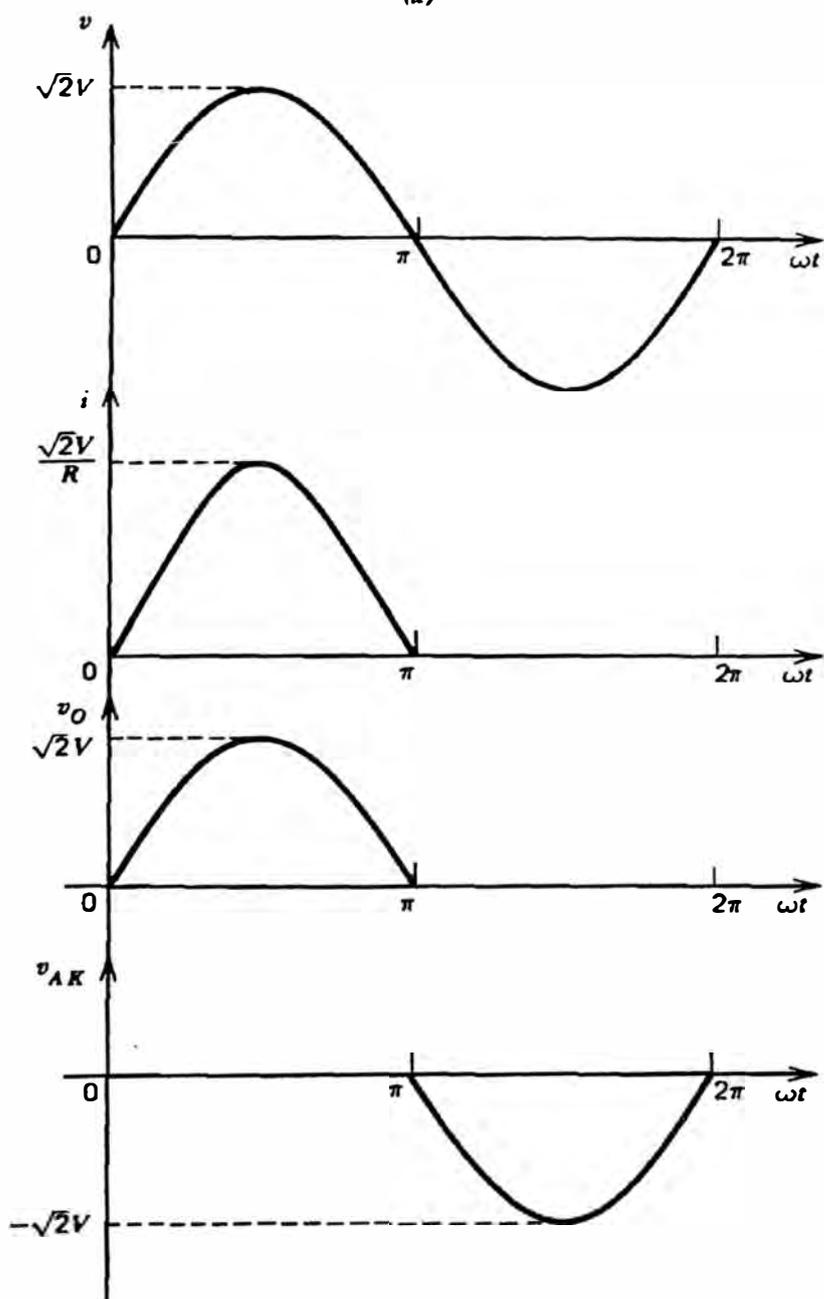
$$V_R = \sqrt{\frac{1}{2\pi} V^2 \left(\theta - \frac{\text{Sen} 2\theta}{2}\right) \Big|_0^{\pi}} = \sqrt{\frac{V^2}{2\pi} \cdot \pi} = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

De la ecuación (10), el voltaje ripple es:

$$V_{RI} = \sqrt{V_R^2 - V_0^2} = \sqrt{\frac{V^2}{2} - \frac{2V^2}{\pi^2}}$$



(a)



(b)

Fig. 2.2 Circuito rectificador de media onda con carga resistiva .

Como  $V_0 = \sqrt{2} \frac{V}{\pi}$ , entonces  $v = \frac{\pi}{\sqrt{2}} v_0$ . Reemplazando:

$$V_{RI} = \frac{\pi V_0}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2}} = V_0 \sqrt{\frac{\pi^2}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \right)}$$

$$V_{RI} = V_0 \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1} = 1.211 V_0$$

Así, el factor ripple es:

$$K_v = \frac{V_{RI}}{V_0} = \frac{1.211 V_0}{V_0} = 1.211 \quad (23)$$

Las corrientes continua y eficaz serán

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2} V}{\pi R}, \quad I_{ef} = \frac{V_{ef}}{R} = \frac{V}{\sqrt{2} R}$$

Como la forma de la onda del voltaje y corriente en la carga resistiva son idénticas, entonces el factor ripple de la corriente será:

$$K_i = K_v = 1.211 \quad (24)$$

Reemplazando  $\alpha = 0$  y  $\beta = \pi$  en las ecuaciones (12), (14), (16), (17) y (18), se obtiene:

$$V_0 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\cos 0 - \cos \pi) = \frac{\sqrt{2}V}{\pi}$$

$$a_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_0^\pi = 0, \quad n \neq 1$$

$$b_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_0^\pi$$

Evalutando:

$$b_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \left( \frac{\text{Cos}(n-1)\pi}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\pi}{n+1} \right) - \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

Si  $n$  es impar, entonces  $(n-1)$  y  $(n+1)$  son pares. Entonces:

$$b_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) - \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right] = 0$$

Si  $n$  es par, entonces  $(n-1)$  y  $(n+1)$  es impar. Entonces

$$b_n = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \left( \frac{-1}{n-1} + \frac{1}{n+1} \right) - \left( \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right) \right]$$

$$b_n = \frac{2V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1} \right] = \frac{-4V}{\sqrt{2}\pi} \left( \frac{1}{n^2-1} \right)$$

$$b_n = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left( \frac{-2}{n^2-1} \right)$$

Así, si  $n \neq 1$ :

$$a_n = 0, \quad b_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left( \frac{-2}{n^2-1} \right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

También,

$$a_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \pi - 0 - \frac{\text{Sen}2\pi - \text{Sen}0}{2} \right]$$

$$a_1 = \frac{V}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} \right)$$

$$b_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\text{Sen}^2 \pi - \text{Sen}^2 0) = 0$$

De los resultados obtenidos el desarrollo en series de Fourier del voltaje en la carga es:

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \text{Sen}\omega t - \frac{2}{3} \text{Cos}2\omega t - \frac{2}{15} \text{Cos}4\omega t - \frac{2}{35} \text{Cos}6\omega t - \dots \right]. \quad (25)$$

## 2.2 Circuito de carga RC

El circuito es como muestra la figura 2.3. Si el Swich está cerrado y el diodo está conduciendo, entonces:

$$v_R + v_C = v_0 = \sqrt{2} V \text{ Sen } \omega t$$

o lo que es lo mismo

$$Ri + \frac{1}{C} \int i dt + v_C(0) = \sqrt{2} V \text{ Sen } \omega t$$

donde asumimos que  $v_C(0)$  es la carga inicial que puede tener el condensador.

Derivando respecto del tiempo:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \sqrt{2} \omega V \text{ Cos } \omega t$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = \frac{\sqrt{2} \omega V}{R} \text{ Cos } \omega t$$

La componente natural (o solución de la ecuación homogénea) se halla resolviendo:

$$\frac{d i_N}{dt} + \frac{i_N}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{d i_N}{i_N} = -\frac{1}{RC} dt$$

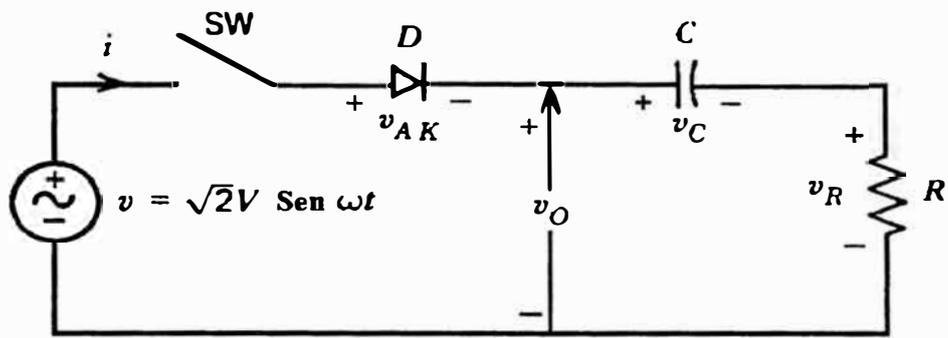
Integrando:

$$\text{Ln} (i_N) = -\frac{t}{RC} + C_1 \Rightarrow i_N = A e^{-\frac{t}{RC}}$$

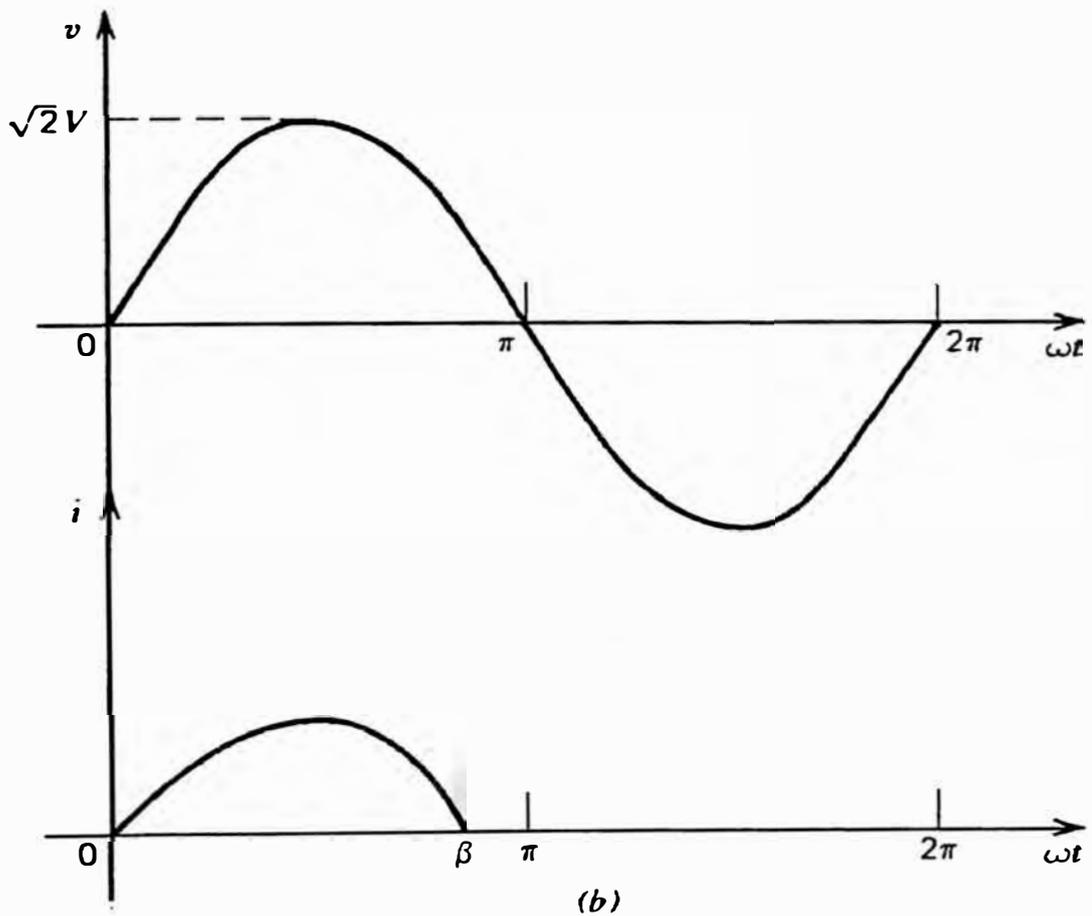
Donde  $C_1$  y  $A$  son constantes.

La componente forzada de la corriente será

$$i_F = \frac{\sqrt{2} V \text{ Sen}(\omega t + \phi)}{Z}$$



(a)



(b)

Fig. 2.3 Circuito rectificador de media onda con carga RC.

donde

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}, \quad \phi = \arctan \frac{1}{\omega CR} \text{ rad}$$

Así, la corriente  $i$  será:

$$i = i_N + i_F = A e^{-t/RC} + \frac{\sqrt{2}V \text{Sen}(\omega t + \phi)}{Z} \quad (26)$$

Si consideramos que el switch se cierra durante el medio ciclo de  $v$  y que el condensador está descargado, entonces en  $t=0$  se tiene que  $v_c=0$  e  $i=0$ .

Sustituyendo estas condiciones iniciales en la ecuación (26) se tiene:

$$0 = A e^0 + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(0 + \phi)$$

$$0 = A + \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}\phi \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}\phi$$

Reemplazando en (26),

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ \text{Sen}(\omega t + \phi) - \text{Sen}\phi e^{-\frac{t}{RC}} \right] \quad (27)$$

La figura 2.3 (b) muestra las variaciones de  $i$  con el tiempo para el primer periodo de la fuente de alimentación.

El voltaje  $v_c$  en el Condensador será:

$$v_c = \frac{1}{C} \int_0^t i dt = \frac{1}{C} \int_0^t \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ \text{Sen}(\omega t' + \phi) - \text{Sen}\phi e^{-\frac{t'}{RC}} \right] dt$$

$$v_c = \frac{1}{C} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ -\frac{\text{Cos}(\omega t' + \phi)}{\omega} \Big|_0^t + \frac{\text{Sen}\phi e^{-\frac{t'}{RC}}}{1/RC} \Big|_0^t \right]$$

$$v_c = \frac{1}{C} \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ -\frac{\text{Cos}(\omega t + \phi) + \text{Cos}\phi}{\omega} + RC \text{Sen}\phi \left( e^{-\frac{t}{RC}} - 1 \right) \right]$$

$$v_c = \sqrt{2}V \left[ \frac{\cos\phi - \cos(\omega t + \phi)}{\omega CZ} + \frac{R}{Z} \text{Sen}\phi (e^{\frac{-t}{RC}} - 1) \right]$$

Como

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \frac{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}}{\omega C}$$

Entonces reemplazando:

$$v_c = \sqrt{2}V \left[ \frac{\cos\phi - \cos(\omega t + \phi)}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}} + \frac{\omega CR \text{ Sen}\phi}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}} (e^{-\frac{t}{RC}} - 1) \right] \quad (\alpha)$$

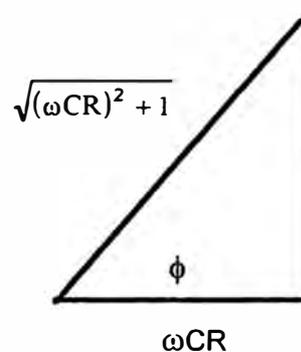
Como:  $\phi = \arctan \frac{1}{\omega CR} \Rightarrow \tan\phi = \frac{1}{\omega CR}$

La figura muestra esta relación,

de donde:

$$\text{Sen}\phi = \frac{1}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}}$$

$$\text{Cos}\phi = \frac{\omega CR}{\sqrt{(\omega CR)^2 + 1}}$$



Así, reemplazando en  $(\alpha)$

$$v_c = \sqrt{2}V \{ \text{Sen}\phi [\cos\phi - \cos(\omega t + \phi)] + \cos\phi \text{ Sen}\phi (e^{\frac{-t}{RC}} - 1) \}$$

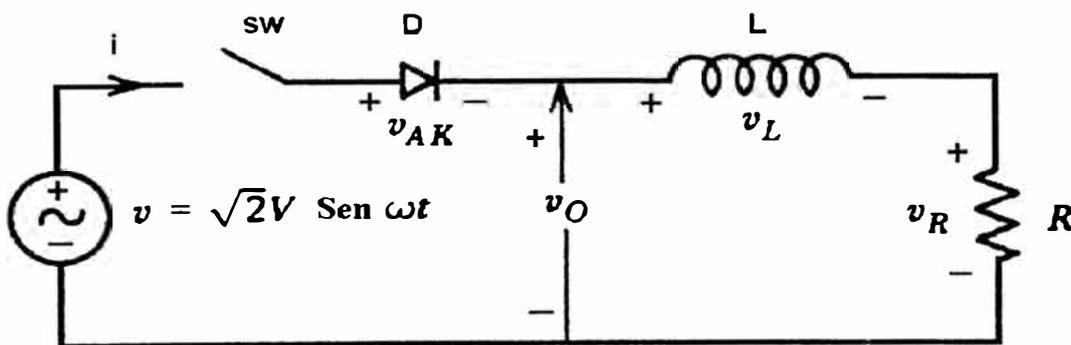
$$v_c = \sqrt{2}V \text{ Sen}\phi [\cos\phi - \cos(\omega t + \phi) + \cos\phi e^{\frac{-t}{RC}} - \cos\phi]$$

$$v_c = \sqrt{2}V \text{ Sen}\phi [\cos\phi e^{\frac{-t}{RC}} - \cos(\omega t + \phi)]$$

La corriente cesa cuando  $\omega t = \beta$ , siendo  $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$ .

El condensador queda cargado en un voltaje positivo  $v_C$ . Así, cuando empieza el segundo ciclo de la fuente de alimentación, el diodo vuelve a conducir cuando  $v = v_C$ . Al final de cada pulso de la corriente el condensador queda cargado en un voltaje mayor que en el pulso anterior y el diodo conduce solo si  $v > v_C$ . Llegará el momento en que  $v_C = \sqrt{2}V$  (voltaje pico de la fuente de alimentación), entonces el diodo deja de conducir definitivamente en los ciclos sucesivos.

### 2.3 Circuito de carga R-L



**Fig 2.4 Circuito rectificador de media onda con carga RL**

La figura 2.4 muestra este circuito. Si el switch SW está cerrado y el diodo esta conduciendo, entonces

$$v_L + v_R = v_0$$

donde:

$$v_0 = v = \sqrt{2}V \text{Sen} \omega t, \quad v_L = L \frac{di}{dt} \text{ y } v_R = Ri$$

Así, reemplazando:

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sqrt{2}V \text{Sen} \omega t$$

Si asumimos que el Switch se cierra durante la mitad del ciclo negativo, entonces la componente forzada de la corriente será:

$$i_F = \frac{\sqrt{2} V \text{Sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \text{ donde } \phi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

La componente natural  $i_N$  se obtiene resolviendo la ecuación diferencial:

$$L \frac{di_N}{dt} + R i_N = 0 \quad \text{ó} \quad \frac{di_N}{i_N} = -\frac{R}{L} dt$$

Integrando:

$$\ln i_N = -\frac{R}{L} t + A_1 \Rightarrow i_N = A e^{-\frac{R}{L} t}$$

Así, la corriente  $i$  será:

$$i = i_F + i_N = \frac{\sqrt{2} V \text{Sen}(\omega t - \phi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} + A e^{-\frac{R}{L} t} \quad (28)$$

De la condición inicial:  $i=0$  en  $t=0$ . Entonces:

$$0 = \frac{\sqrt{2} V \text{Sen}(-\phi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} + A \Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2} V \text{Sen}(-\phi)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

$$A = \frac{\sqrt{2} V \text{Sen } \phi}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}$$

Entonces reemplazando en (28) y haciendo  $Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$

$$i = \frac{\sqrt{2} V}{Z} \left[ \text{Sen}(\omega t - \phi) + \text{Sen } \phi e^{-\frac{R}{L} t} \right] \quad (29)$$

Vemos de (29) que la corriente  $i$  es la suma de una función sinusoidal con una función exponencial decreciente por lo que su gráfica es como muestra la figura

2.5.

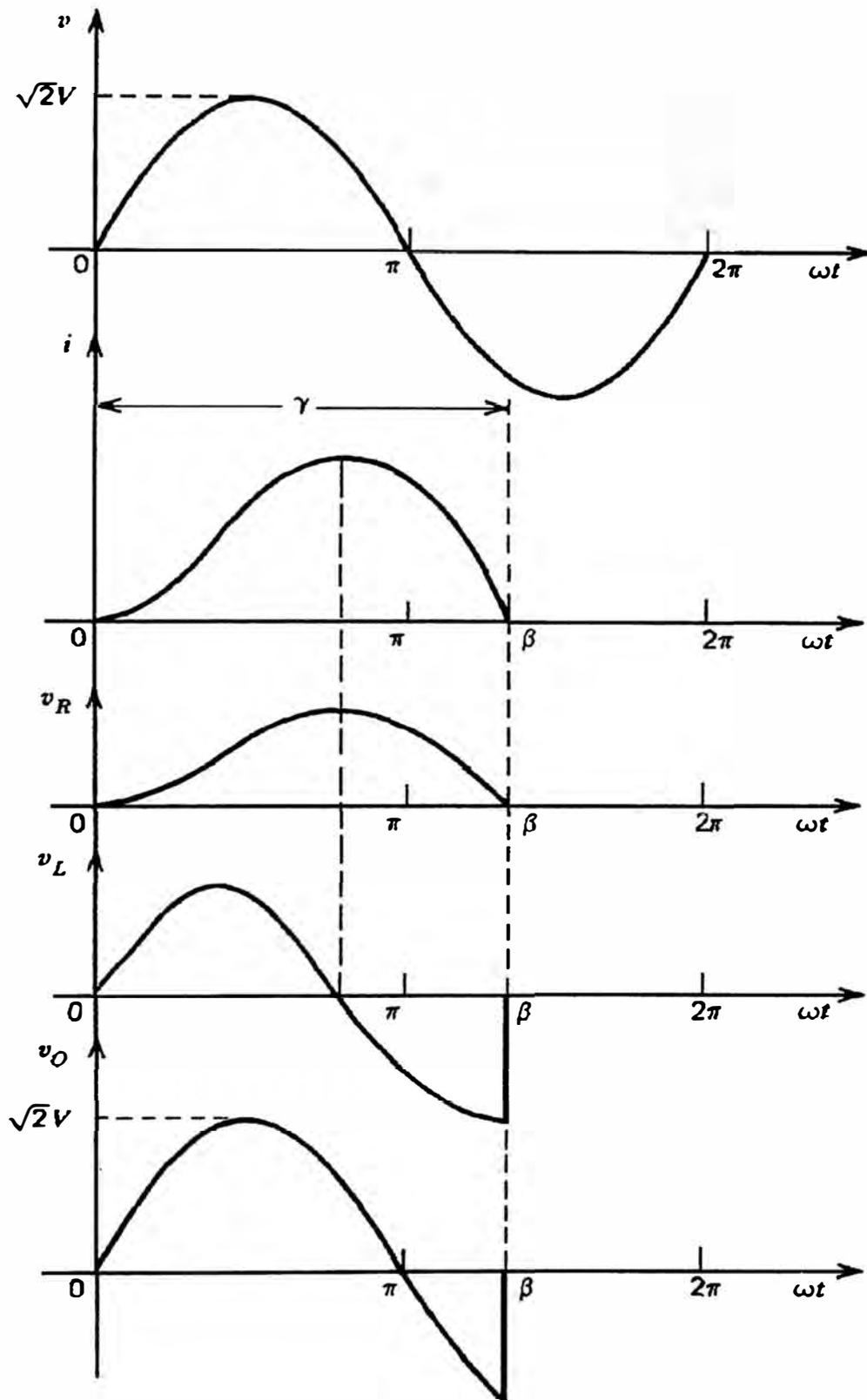


Fig 2.5 Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.4.

De la figura 2.5 , la corriente cesa en algún instante  $t_1$  tal que  $\omega t_1 = \beta$  ,  
siendo  $\beta > \pi$ . Así, podemos escribir:

$$i = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}V}{Z} [\text{Sen}(\omega t - \phi) + \text{Sen}\phi e^{-\frac{R}{L}t}] , & 0 < \omega t < \beta \\ 0 , & \beta < \omega t < 2\pi \end{cases}$$

En  $\omega t_1 = \beta$  finaliza la conducción en el primer ciclo, por lo que  $i=0$ .

Reemplazando en (29) obtenemos la ecuación trascendental:

$$\text{Sen}(\beta - \phi) + (\text{Sen}\phi) e^{-\frac{R\beta}{\omega L}} = 0 \quad (30)$$

Esta ecuación puede ser resuelta dando valores numéricos a  $\omega$ ,  $L$  y  $R$ , para obtener  $\beta$ . Nótese que  $\frac{\omega L}{R} = \text{tg}\phi$ , por lo que la ecuación (30) se reduce a una ecuación solo en las variables  $\phi$  y  $\beta$ .

El valor medio del voltaje en la carga será entonces:

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta v_0 d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \sqrt{2} V \text{Sen}\omega t d(\omega t)$$

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\beta \sqrt{2} V \text{Sen}\theta d\theta = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (-\text{Cos}\phi) \Big|_0^\beta$$

Evaluando,

$$V_0 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (1 - \text{Cos}\beta) \quad (31)$$

Esta expresión se pudo obtener directamente de la ecuación (12) haciendo  $\alpha = 0$ .

Ningún valor medio de la onda rectificada puede aparecer sobre la inductancia por lo que  $V_0$  estará aplicado totalmente sobre la resistencia por lo

que el valor medio de la corriente rectificadora será:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{V}{\sqrt{2}\pi R} (1 - \cos \beta) \quad (32)$$

El valor de  $\beta$  hallado de la ecuación (30), junto con  $\alpha = 0$ , pueden reemplazarse en las ecuaciones (14),(16),(17) y (18), para hallar los coeficientes del desarrollo en series de Fourier del voltaje  $v_0$  en la carga. Reemplazando estos coeficientes en las ecuaciones (5) y (6) se obtendría el desarrollo en series de Fourier de la corriente  $i$  suministrado por la fuente de alimentación  $v$ .

#### 2.4.- Circuito de carga con diodo de libre rodamiento (free-wheeling diode)

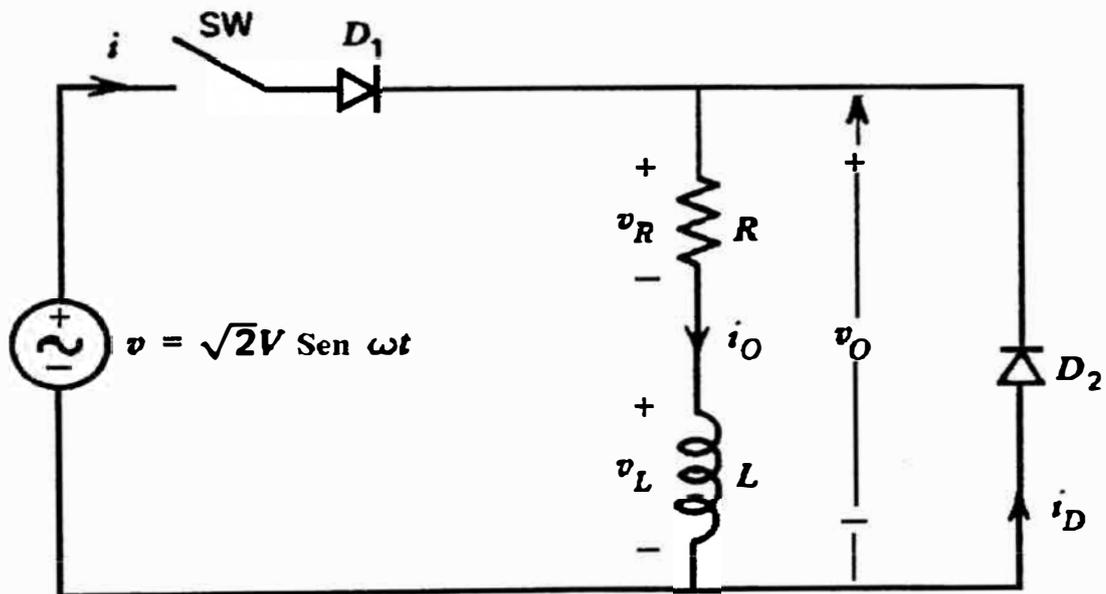


Fig 2.6 Rectificador de media onda con diodo free-wheeling.

Los rectificadores de media onda con circuito de carga R-L se caracterizan por determinar corrientes discontinuas y alto contenido ripple. Si la carga es un motor, la corriente discontinua puede causar deterioro en el funcionamiento del

motor. La característica de discontinuidad puede ser corregido y el contenido ripple reducido, si en paralelo con la carga R-L se coloca un diodo free-wheeling  $D_2$  tal como muestra la figura 2.6.

El efecto de este diodo es impedir que un voltaje negativo aparezca a través de la carga y que como resultado, la energía magnética almacenada sea incrementada. En  $\theta = \pi$  ( $t=t_1=\pi/\omega$ ) se abre  $D_1$  y en cambio el diodo  $D_2$  se cortocircuita. La corriente que viene a través del diodo  $D_1$  es transferido al diodo  $D_2$ . Las figuras 2.7(a) y 2.7(b) muestran el circuito equivalente para  $0 < \theta < \pi$  y  $\pi < \theta < 2\pi$  respectivamente.

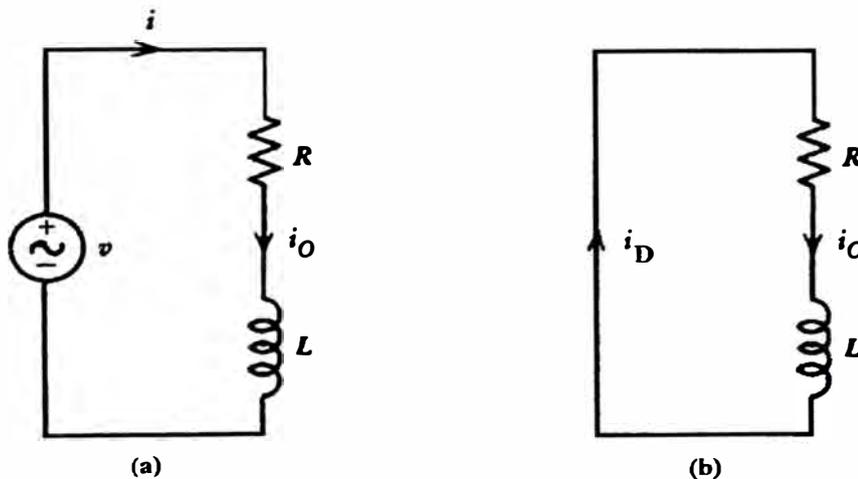


Fig 2.7

Sea  $I_\pi$  el valor de  $i$  obtenida de la ecuación (29) para el instante  $t_1 = \frac{\pi}{\omega}$ .

Redefinamos el origen del tiempo ( $t=0$ ) en dicho instante. Entonces la corriente a través del diodo free-wheeling se obtiene de la ecuación diferencial:

$$L \frac{di_D}{dt} + Ri_D = 0$$

con la condición inicial  $i_D(t=0) = I_\pi$ .

La solución de esta ecuación diferencial es:

$$i_D = i_0 = I_\pi e^{-\frac{R}{L}t}$$

Esta corriente decae exponencialmente hasta un valor  $I_{2\pi}$  al final del primer periodo de conducción. Luego de varios ciclos se obtendrá el estado estacionario en la que la corriente al inicio y al final de cada ciclo serán iguales. Entonces la forma de onda en el estado estacionario será como muestra la figura 2.8. Esta forma de onda se repetirá en los ciclos sucesivos. Como se observa de la figura 2.8, la forma de onda del voltaje  $v_0$  consiste solamente del medio ciclo positivo de la fuente de voltaje  $v$ , por lo que el desarrollo de series de Fourier para  $v_0$  es la misma que la del rectificador de media onda con carga resistiva. Así, de la ecuación (25).

$$v_0 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ 1 + \frac{\pi}{2} \text{Sen}\omega t - \frac{2}{3} \text{Cos}2\omega t - \frac{2}{15} \text{Cos}4\omega t - \frac{2}{35} \text{Cos}6\omega t - \dots \right] \quad (33)$$

Igualmente, el valor medio de  $v_0$  ( $V_0$ ), el valor eficaz del voltaje  $v_0$  ( $V_R$ ), el voltaje de ripple ( $V_{\text{ripp}}$ ) y el factor ripple son también los mismos. Es decir:

$$V_0 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \quad , \quad V_R = \frac{V}{\sqrt{2}}$$

$$V_{RI} = 1.211V_0 \quad , \quad K_I = 1.211$$

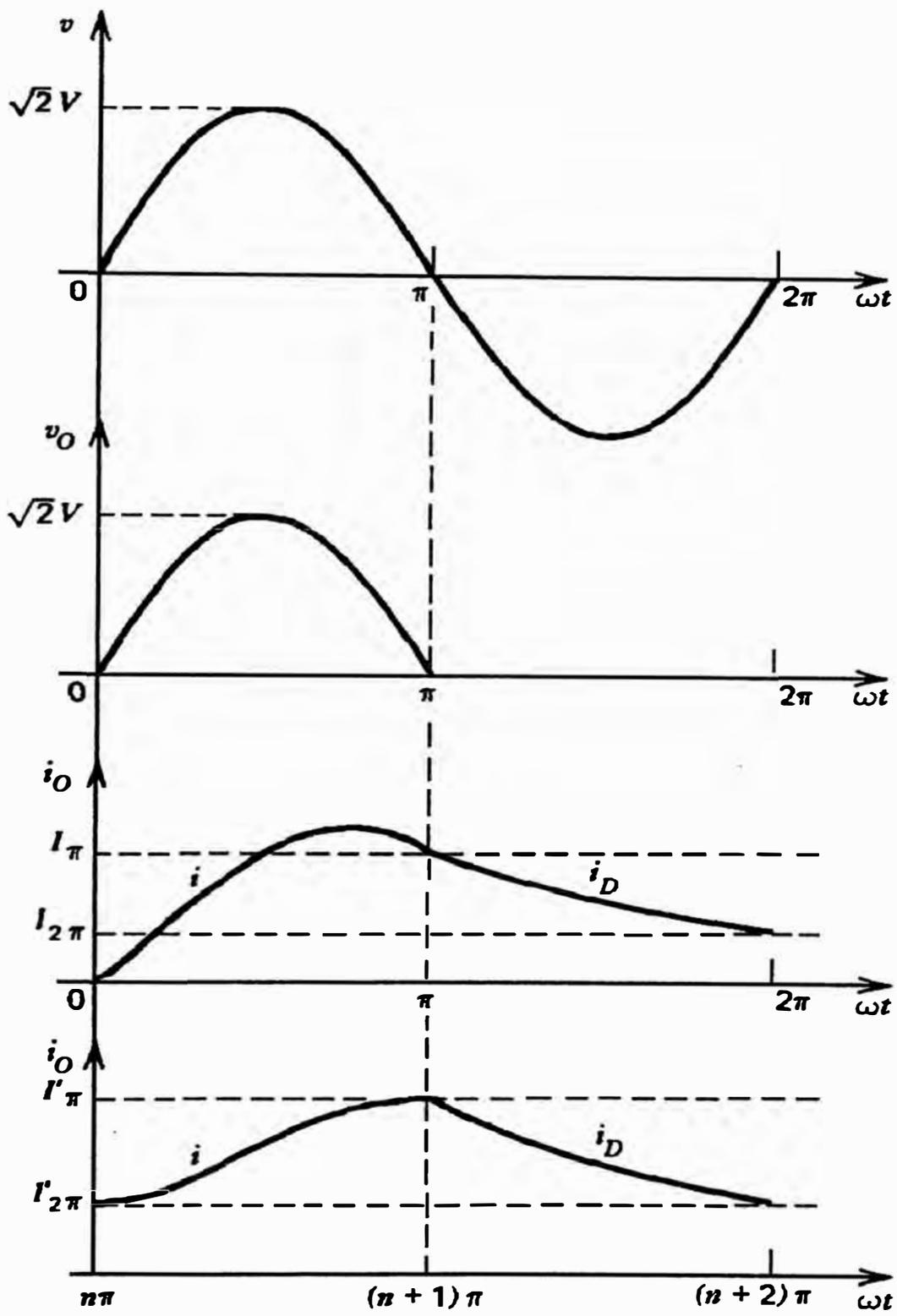


Fig. 2.8 Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.6

De la ecuación (33) y de los valores de los parámetros del circuito de carga, puede obtenerse el desarrollo en series de Fourier para la corriente  $i_0$ . Así,

$$i_0 = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{1}{R} + \frac{\pi}{2Z_1} \text{Sen}(\omega t - \phi_1) - \frac{2}{3Z_2} \text{Cos}(2\omega t - \phi_2) - \frac{2}{15Z_4} \text{Cos}(4\omega t - \phi_4) - \frac{2}{35Z_6} \text{Cos}(6\omega t - \phi_6) - \dots \right] \quad (34)$$

donde

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} \quad , \quad \phi_n = \arctan \frac{n\omega L}{R} \quad \text{rad} \quad (35)$$

y  $Z_1=Z$  (impedancia a la frecuencia fundamental).

El valor medio de la corriente rectificadora es:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi R} \quad (36)$$

La serie en la ecuación (34) puede escribirse:

$$i_0 = I_0 + \sqrt{2} I_{1R} \text{Sen}(\omega t - \phi_1) - \sqrt{2} I_{2R} \text{Cos}(2\omega t - \phi_2) - \sqrt{2} I_{4R} \text{Cos}(4\omega t - \phi_4) - \dots$$

donde  $I_{1R}$ ,  $I_{2R}$ ,  $I_{4R}$ , ... son los valores eficaces de las corrientes armónicas, siendo estos valores:

$$I_{1R} = \frac{1}{2} \frac{V}{Z_1} \quad , \quad I_{2R} = \frac{2}{3\pi} \frac{V}{Z_2} \quad I_{4R} = \frac{2}{15\pi} \frac{V}{Z_4} \quad , \quad \text{etc} \quad (37)$$

La corriente ripple será entonces:

$$I_{RI} = \sqrt{\sum I_{nR}^2} \quad (38)$$

El grado de exactitud estará determinado por el número de términos que se tome en la ecuación (34). Como de esta ecuación se observa que las amplitudes decrecen significativamente con el incremento de la frecuencia,

entonces serán necesarias solo unos cuantos términos del desarrollo para obtener una buena exactitud para el valor de  $I_{RI}$ .

El factor ripple de la corriente será entonces:

$$K_i = \frac{I_{RI}}{I_0} \quad (39)$$

El valor eficaz de la corriente  $I_R$  se obtiene despejándola de la ecuación

$$I_{RI} = \sqrt{\sum I_{nR}^2} = \sqrt{I_R^2 - I_0^2} \quad (40)$$

Así,

$$I_R = \sqrt{I_0^2 + I_{RI}^2} \quad (41)$$

El factor ripple de la corriente será

$$K_i = \frac{I_{RI}}{I_0} \quad (42)$$

## **2.5 Rectificador monofásico controlado de media onda.**

Se obtiene un rectificador controlado de media onda si en los circuitos que muestran las figuras 2.4 y 2.6 se reemplazan el switch y el diodo por un dispositivo que combina ambas propiedades. Este dispositivo es el rectificador controlado de Silicio (SCR) ó Thyristor.

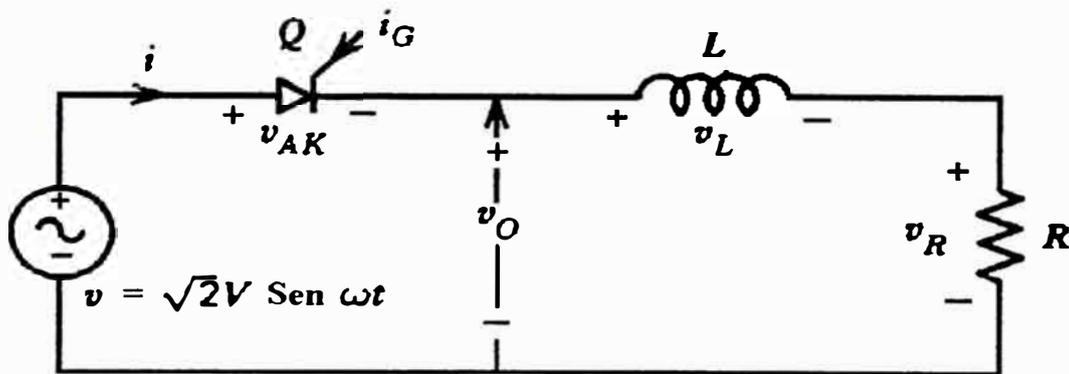
El análisis de Fourier y las relaciones obtenidas para el rectificador de media onda no controlado son también aplicables a este caso, con la diferencia que en las ecuaciones deducidas, el valor del ángulo  $\alpha$  no es siempre cero, sino que puede variar entre 0 y  $\pi$ , es decir el valor que toma  $\omega t$  en el instante  $t$ , durante el medio ciclo positivo de la fuente de voltaje  $v$ , en que se aplica una corriente  $i_G$  al gate del Thyristor.

### Circuito de carga R-L

Si en la figura 2.9 el Thyristor esta conduciendo, entonces se verifica

$$v_L + v_R = v_0 = v$$

Esta ecuación es equivalente a:



**Fig 2.9 Rectificador controlado de media onda con carga R-L.**

$$L \frac{di}{dt} + Ri = \sqrt{2}V \text{Sen} \omega t$$

La solución de esta ecuación, expresado en la ecuación (28) es de la forma:

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) + A e^{-\frac{R}{L}t} \quad (43)$$

En donde

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \phi = \arctan \frac{\omega L}{R}$$

Reemplazando las condiciones iniciales:  $i = 0$  cuando  $\omega t = \alpha$ , se tiene:

$$0 = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) + A e^{-\frac{R\alpha}{\omega L}}$$

$$\Rightarrow A = -\frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) e^{\frac{R\alpha}{\omega L}}$$

Así, reemplazando en (43),

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) e^{\frac{R\alpha}{\omega L}} \cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

Factorizando

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ \text{Sen}(\omega t - \phi) - \text{Sen}(\alpha - \phi) e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - t \right)} \right] \quad (44)$$

La corriente  $i$  vuelve a ser cero en  $\omega t = \beta$ , por lo que reemplazando en (44) obtenemos:

$$0 = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left[ \text{Sen}(\beta - \phi) - \text{Sen}(\alpha - \phi) e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \right)} \right]$$

de donde obtenemos

$$\text{Sen}(\beta - \phi) = \text{Sen}(\alpha - \phi) e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - \frac{\beta}{\omega} \right)} \quad (45)$$

El valor de  $\beta$  puede determinarse de esta ecuación trascendental para cada terna de valores de  $\omega$ ,  $L$  y  $R$ .

El ángulo de conducción será:  $\gamma = \beta - \alpha$  (46)

La figura 2.10 muestra las formas de onda de la corriente y voltaje en la carga, en el primer ciclo del voltaje de la fuente de alimentación.

El valor de  $\alpha$  y el valor de  $\beta$  hallado de la ecuación (45) puede reemplazarse en las ecuaciones (14), (16), (17) y (18), para hallar el contenido armónico del

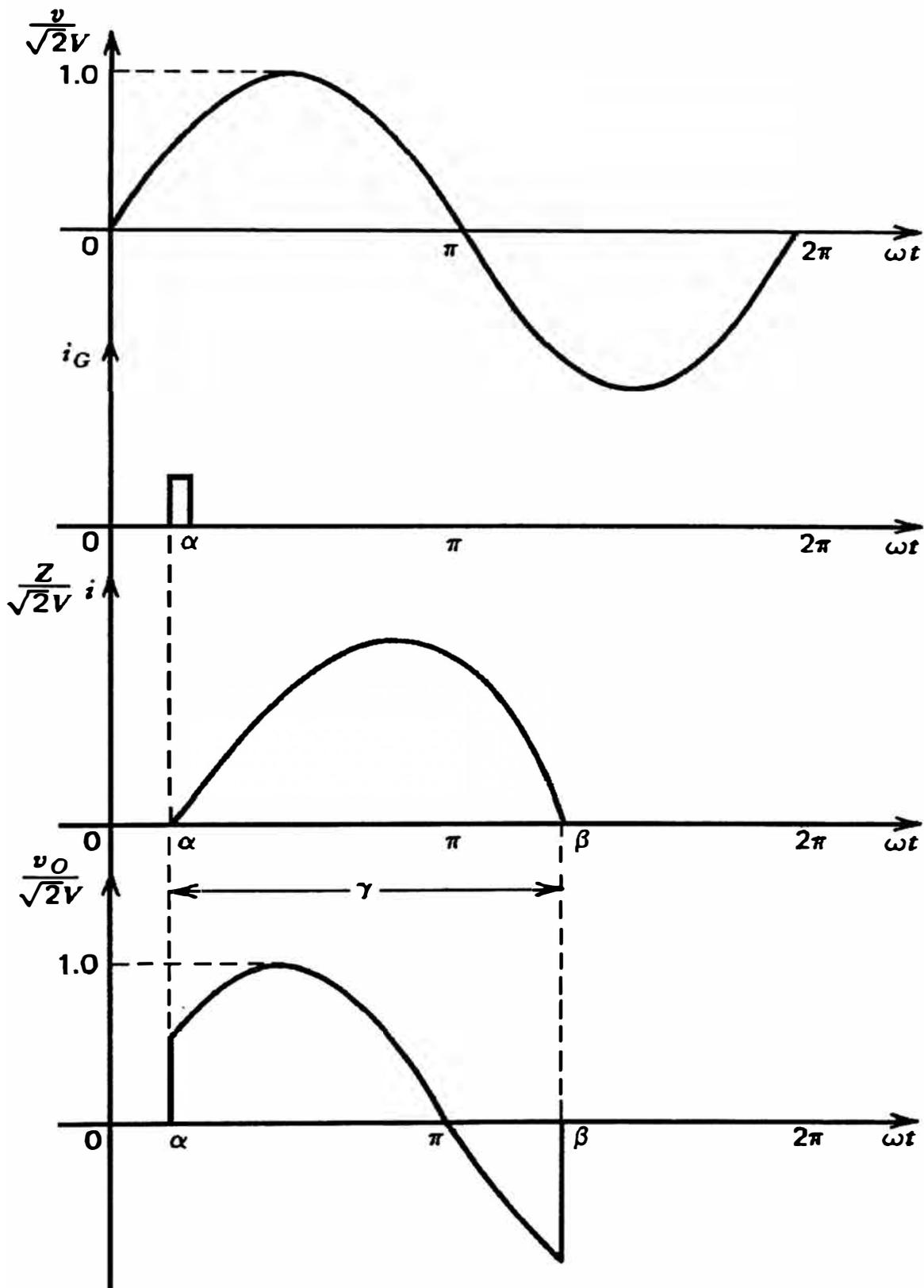
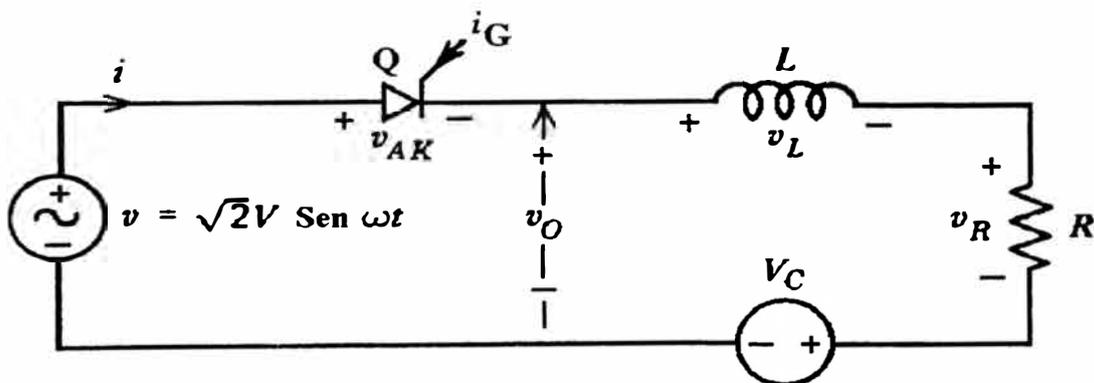


Fig.2.10 Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.9

voltaje en la carga, y luego reemplazar en (5) y (6) para hallar el contenido armónico de la corriente  $i$ , suministrado por la fuente de alimentación  $v$ .

### 2.6.- Circuito de carga R-L con fuerza electromotriz.

Este tipo de carga se presenta cuando el rectificador es empleado como cargador de batería, o para excitar el circuito de armadura de un motor DC. En un cargador de batería la inductancia puede ser virtualmente cero, aunque algunas veces puede adicionarse alguna inductancia a manera de reducir el contenido armónico o para regular la corriente. En cambio en un motor DC cuya potencia es de más de un HP, la resistencia del circuito de armadura es pequeña y frecuentemente insignificante. Ambos casos son casos límites.



**Figura 2.11 Rectificador de media onda con circuito de carga R-L con Fuerza Electromotriz.**

En el circuito de la figura 2.11, si el tiristor esta conduciendo, entonces la corriente  $i$  consiste de dos componentes: uno debido a la fuente alterna de alimentación y otra debida a la fuerza electromotriz.

Cada una de estas componentes tiene a su vez una componente forzada. La componente debida a la fuente  $v$  será:

$$i_{F1} = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) \quad (47)$$

La componente debido a la fuerza electromotriz constante:

$$i_{F2} = -\frac{V_c}{R} \quad (48)$$

También habrán dos componentes naturales pero ambas serán exponenciales y tendrán la misma constante de tiempo por lo que pueden combinarse en una sola.

$$i_N = A e^{-\frac{R}{L}t} \quad (49)$$

Así, la corriente  $i$  será igual a la suma de las tres componentes:

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) + A e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{V_c}{R}, \quad \alpha < \omega t < \alpha + \gamma \quad (50)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo en el cual empieza a conducir durante el primer ciclo de la fuente  $v$ , y  $\gamma$  es el ángulo de conducción.

Nótese que el tiristor puede conducir solo si  $v - V_c > 0$ .

Si  $\theta_1$  es el ángulo en que  $v = V_c$ , entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{2}V \text{Sen} \theta_1 &= V_c \quad \text{Sen} \theta_1 = \frac{V_c}{\sqrt{2}V} \\ \Rightarrow \theta_1 &= \arctan \frac{V_c}{\sqrt{2}V} \end{aligned} \quad (51)$$

El tiristor conducirá solo si  $\alpha \geq \theta_1$ .

En  $\omega t = \alpha$ ,  $i = 0$ . Así, en la ecuación (50)

$$0 = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) + A e^{-\frac{R}{L}(\frac{\alpha}{\omega})} - \frac{V_c}{R}$$

Despejando

$$A = \left[ \frac{V_c}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} \right)}$$

Reemplazando en (46)

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{V_c}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} \right)} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{V_c}{R}$$

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{V_c}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - t \right)} - \frac{V_c}{R}$$

Como  $R = Z \text{Cos} \phi$ , entonces podemos escribir:

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{V_c}{Z \text{Cos} \phi} - \frac{\sqrt{2}V}{Z} \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - t \right)} - \frac{V_c}{Z \text{Cos} \phi}$$

Como:

$$\frac{V_c}{Z \text{Cos} \phi} = \frac{\sqrt{2} V V_c}{\sqrt{2} V Z \text{Cos} \phi} = \frac{\sqrt{2} V}{Z} \left( \frac{V_c}{\sqrt{2} V \text{Cos} \phi} \right)$$

Entonces podemos escribir:

$$i = \frac{\sqrt{2}V}{Z} \left\{ \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{V_c}{\sqrt{2} V \text{Cos} \phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - t \right)} - \frac{V_c}{\sqrt{2} V \text{Cos} \phi} \right\} \quad (52)$$

Si hacemos

$$\text{Sen} \theta_1 = \frac{V_c}{\sqrt{2} V} = m \quad (53)$$

entonces la ecuación (52) es equivalente:

$$\frac{Z}{\sqrt{2} V} i = \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{m}{\text{Cos} \phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L} \left( \frac{\alpha}{\omega} - t \right)} - \frac{m}{\text{Cos} \phi} \quad (54)$$

Como la corriente normalizada esta definida por,

$$i_N = \frac{Z}{\sqrt{2} V} i,$$

Entonces:

$$i_N = \text{Sen}(\omega t - \phi) + \left[ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha t - \phi) e^{\frac{R}{L}(\frac{\alpha}{\omega} - t)} \right] \frac{m}{\text{Cos}\phi} \quad (55)$$

Como

$$\frac{R}{L}(\frac{\alpha}{\omega} - t) = \frac{R\alpha}{\omega L} - \frac{R}{L}t$$

y si hacemos:

$$B = \left[ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L}(\frac{\alpha}{\omega})} \quad (56)$$

entonces la ecuación (55) puede escribirse:

$$i_N = \frac{Z}{\sqrt{2} V} i = \text{Sen}(\omega t - \phi) - \frac{m}{\text{Cos}\phi} + B e^{-\frac{R}{L}(\omega t - \frac{\alpha}{\omega})}, \quad \alpha < \omega t < \alpha + \gamma \quad (57)$$

De esta expresión puede observarse que la corriente normalizada tiene 3 componentes: una sinusoidal, una constante y una exponencial. La figura 2.12 muestra la forma de onda de la resultante, así como la gráfica de los voltajes normalizados de la fuente de alimentación  $v$  y del voltaje  $v_0$  en la carga.

De la figura, en  $\omega t = \alpha + \gamma$ ,  $i = 0$  Así, reemplazando en (51) y (52):

$$0 = \text{Sen}(\alpha + \gamma - \phi) - \frac{m}{\text{Cos}\phi} + \left[ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{L}(\frac{\alpha}{\omega})} \cdot e^{-\frac{R}{L}(\frac{\alpha + \gamma}{\omega})}$$

$$\frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha + \gamma - \phi) = \left[ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{\frac{R}{\omega L}(-\gamma)}$$

Como  $\frac{R}{\omega L} = \frac{1}{\text{tg}\phi}$  entonces podemos escribir:

$$\frac{\frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha + \gamma - \phi)}{\frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi)} = e^{-\frac{\gamma}{\text{tan}\phi}} \quad (58)$$

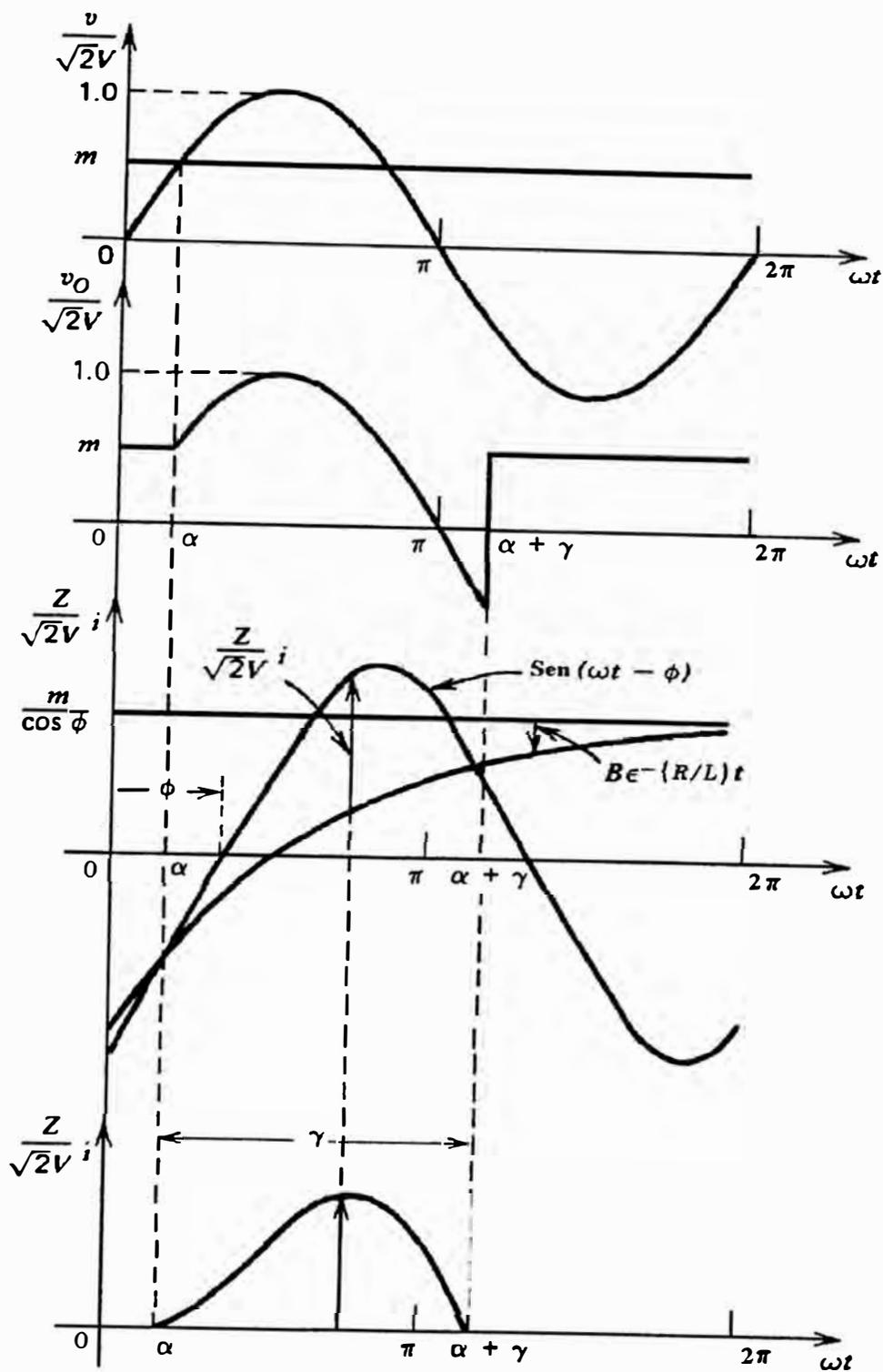


Fig 2.12 Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.11

Para cada circuito en particular,  $m$  y  $\phi$  son conocidos por lo que reemplazando estos valores en la ecuación (58) se obtendrá una ecuación trascendental en las variables  $\alpha$  y  $\gamma$ . Para cada valor de  $\alpha$  puede ser resuelto esta ecuación para obtener el valor correspondiente de  $\gamma$ .

Determinado el  $\gamma$  entonces pueden ser determinados los coeficientes de Fourier para el voltaje rectificado  $v_0$ . Así, como el voltaje en la carga en el primer periodo es:

$$v_0(t) = \begin{cases} m\sqrt{2} V & , & \text{Si } 0 \leq \omega t < \alpha \\ \sqrt{2} V \text{ Sen } \omega t & , & \text{Si } \alpha \leq \omega t \leq \alpha + \gamma \\ m\sqrt{2} V & , & \text{Si } \alpha + \gamma < \omega t < 2\pi \end{cases} \quad (59)$$

entonces:

El valor medio del voltaje rectificado es:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0 d(\omega t) , \quad \omega t = \theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^{\alpha} \sqrt{2} m V d\theta + \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} \sqrt{2} V \text{ Sen } \theta d\theta + \int_{\alpha+\gamma}^{2\pi} \sqrt{2} m V d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{2} m V \theta \Big|_0^{\alpha} - \text{Cos } \theta \Big|_{\alpha}^{\alpha+\gamma} + \sqrt{2} m V \theta \Big|_{\alpha+\gamma}^{2\pi} \right] \\ V_0 &= \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{2} m V \alpha - \text{Cos}(\alpha + \gamma) + \text{Cos } \alpha + \sqrt{2} m V (2\pi - \alpha - \gamma) \right] \end{aligned}$$

Reagrupando:

$$V_0 = \frac{1}{2\pi} \left[ \sqrt{2} m V (2\pi - \gamma) - \text{Cos}(\alpha + \gamma) + \text{Cos } \alpha \right] \quad (60)$$

El valor eficaz del voltaje de salida es:

$$\begin{aligned}
 V_R &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0^2 d(\omega t) \right]^{1/2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ \int_0^\alpha (\sqrt{2}mV)^2 d\theta + \int_\alpha^{\alpha+\gamma} (\sqrt{2}V \text{Sen}\alpha)^2 d\theta + \int_{\alpha+\gamma}^{2\pi} (\sqrt{2}mV)^2 d\theta \right] \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ 2m^2V^2\theta \Big|_0^\alpha + V^2 \left( \theta - \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right) \Big|_\alpha^{\alpha+\gamma} + 2m^2V^2\theta \Big|_{\alpha+\gamma}^{2\pi} \right] \right\}^{1/2} \\
 &= \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ 2m^2V^2(2\pi-\gamma) + V^2 \left( \gamma - \frac{\text{Sen}(2\alpha+2\gamma) - \text{Sen}2\alpha}{2} \right) \right] \right\}^{1/2}
 \end{aligned}$$

Por identidad trigonométrica,

$$\begin{aligned}
 \text{Sen}(2\alpha+2\gamma) - \text{Sen}2\alpha &= 2 \text{Sen} \frac{2\alpha+2\gamma-2\alpha}{2} \text{Cos} \frac{2\alpha+2\gamma+2\alpha}{2} \\
 &= 2 \text{Sen} \gamma \text{Cos}(2\alpha+\gamma)
 \end{aligned}$$

$$\text{Así.} \quad V_R = \left\{ \frac{1}{2\pi} \left[ 2m^2V^2(2\pi-\gamma) + V^2(\gamma - \text{Sen}\gamma \text{Cos}(2\alpha+\gamma)) \right] \right\}^{1/2} \quad (61)$$

El voltaje ripple y el factor ripple es :

$$V_{RI} = \left[ V_R^2 - V_0^2 \right]^{1/2}, \quad K_v = \frac{V_{RI}}{V_0} \quad (62)$$

El valor medio de la corriente rectificadora sera:

$$I_0 = \frac{V_0 - V_C}{R} \quad (63)$$

El valor eficaz de la corriente será:

$$I_R = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+\gamma} i^2 d(\omega t) \right]^{1/2} \quad (64)$$

donde el valor de  $i$  se obtiene despejándola de la ecuación (57):

Calculando el valor de  $I_R$  podemos calcular la corriente ripple  $I_{RI}$  de la expresión:

$$I_{RI} = \left[ \sum I_{nR} \right]^{1/2} = \left[ I_R^2 - I_0^2 \right]^{1/2} \quad (65)$$

El factor ripple será entonces:

$$K_i = \frac{I_{RI}}{I_0} \quad (66)$$

Los valores de las constantes  $a_n$  y  $b_n$  del desarrollo en series de Fourier del voltaje en la carga  $v_0$  se obtendrá de las expresiones:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \text{Sen } n\omega t d(\omega t) \quad , \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \text{Cos } n\omega t d(\omega t) \quad (67)$$

Así, de la ecuación (59), haciendo  $\beta = \alpha + \gamma$ , entonces:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\alpha} m\sqrt{2} V \text{Sen } n\theta d\theta + \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta + \int_{\beta}^{2\pi} m\sqrt{2} V \text{Sen } n\theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ m\sqrt{2} V \left( \frac{-\text{Cos } n\theta}{n} \right) \Big|_0^{\alpha} + \sqrt{2} V \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta + m\sqrt{2} V \left( \frac{-\text{Cos } n\theta}{n} \right) \Big|_{\beta}^{2\pi} \right] \\ &= \frac{m\sqrt{2} V}{n\pi} (\text{Cos } n\beta - \text{Cos } n\alpha) + \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta \end{aligned} \quad (68)$$

El valor de la integral en (68) se obtiene de las ecuaciones (13) y (14). Así,

$$a_n = \frac{m\sqrt{2} V}{n\pi} + \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Bigg|_{\alpha}^{\beta} \quad n \neq 1 \quad (69)$$

Análogamente y teniendo en cuenta la periodicidad:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \text{Sen} \theta \text{Cos} n\theta d\theta + \int_{\beta}^{2\pi+\alpha} m\sqrt{2} V \text{Cos} n\theta d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \text{Sen} \theta \text{Cos} n\theta d\theta + m\sqrt{2} V \frac{\text{Sen} n\theta}{n} \Bigg|_{\beta}^{2\pi+\alpha} \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \text{Sen} \theta \text{Cos} n\theta d\theta + \frac{m\sqrt{2} V}{n} (\text{Sen} n\alpha - \text{Sen} n\beta) \end{aligned} \quad (70)$$

Igualmente, el valor de la integral en (70) se obtiene de las ecuaciones (15) y (16). Así,

$$b_n = \frac{m\sqrt{2} V}{n} (\text{Sen} n\alpha - \text{Sen} n\beta) + \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Bigg|_{\alpha}^{\beta}, \quad n \neq 1 \quad (71)$$

El valor de  $a_1$  será:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \text{Sen} \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \text{Sen}^2 \theta d\theta + \int_{\beta}^{2\pi+\alpha} m\sqrt{2} V \text{Sen} \theta d\theta \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{2\pi} \left( \theta - \frac{\text{Sen} 2\theta}{2} \right) \Bigg|_{\alpha}^{\beta} + m\sqrt{2} V (\text{Cos} \beta - \text{Cos} \alpha) \end{aligned}$$

Evaluando

$$a_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left( \beta - \alpha - \frac{\text{Sen} 2\beta - \text{Sen} 2\alpha}{2} \right) + \frac{m\sqrt{2} V}{\pi} (\text{Cos} \beta - \text{Cos} \alpha)$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2}\pi} \left[ \beta - \alpha - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2} + 2m(\cos \beta - \cos \alpha) \right] \quad (72)$$

El valor de  $b_1$  será:

$$b_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \cos \theta \, d\theta = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{2} V \sin \theta \cos \theta \, d\theta + \int_{\beta}^{2\pi+\alpha} m \sqrt{2} V \cos \theta \, d\theta \right]$$

$$= \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \left[ \frac{\sin^2 \theta}{2} \Big|_{\alpha}^{\beta} + m \sin \theta \Big|_{\beta}^{2\pi+\alpha} \right]$$

Evaluando,

$$b_1 = \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha) + m \sqrt{2} V (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$= \frac{V}{\sqrt{2}\pi} (\sin \beta - \sin \alpha) [\sin \beta + \sin \alpha - 2m] \quad (73)$$

Finalmente, escribiremos:

$$v_0 = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\omega t \quad (74)$$

Entonces, la corriente en la línea o corriente en la carga será:

$$i = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\omega t - \phi_n) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (75)$$

donde:

$$c_n = \frac{a_n}{Z_n}, \quad d_n = \frac{b_n}{Z_n}, \quad \phi_n = \arctan \frac{\omega L}{R} \quad (76)$$

## 2.7 Rectificador controlado monofásico de onda completa.

Las figuras 2.13 y 2.14 muestran dos tipos de circuitos rectificadores

controlados de onda completa monofásicos. Al circuito de la figura 2.13 se le denomina rectificador de onda completa **tipo puente** y al circuito de la figura 2.14, rectificador de onda completa **tipo punto medio**.

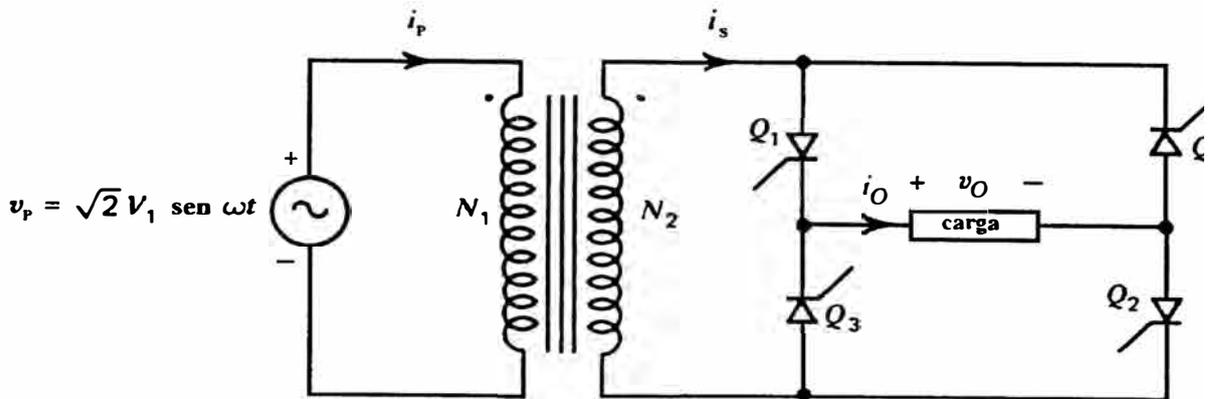


Fig. 2.13

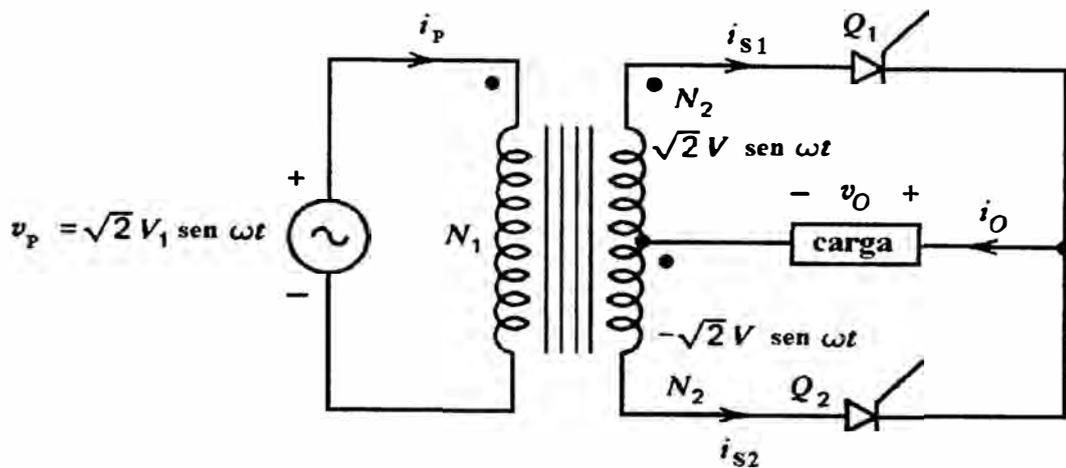


Fig. 2.14

Si en la figura 2.13 los tiristores  $Q_1$  y  $Q_2$  se disparan en el instante  $\omega t = \alpha$ , y los tiristores  $Q_3$  y  $Q_4$  se disparan en el instante en que  $\omega t = \pi + \alpha$ , entonces la forma de onda del voltaje  $v_o$  en la carga, cuando esta carga es resistiva, es como muestra la figura 2.15. La forma de onda de la corriente  $i_o$  en la carga será idéntica a la de  $v_o$ . La figura muestra también la forma de onda de la corriente en el secundario  $v_2$ .

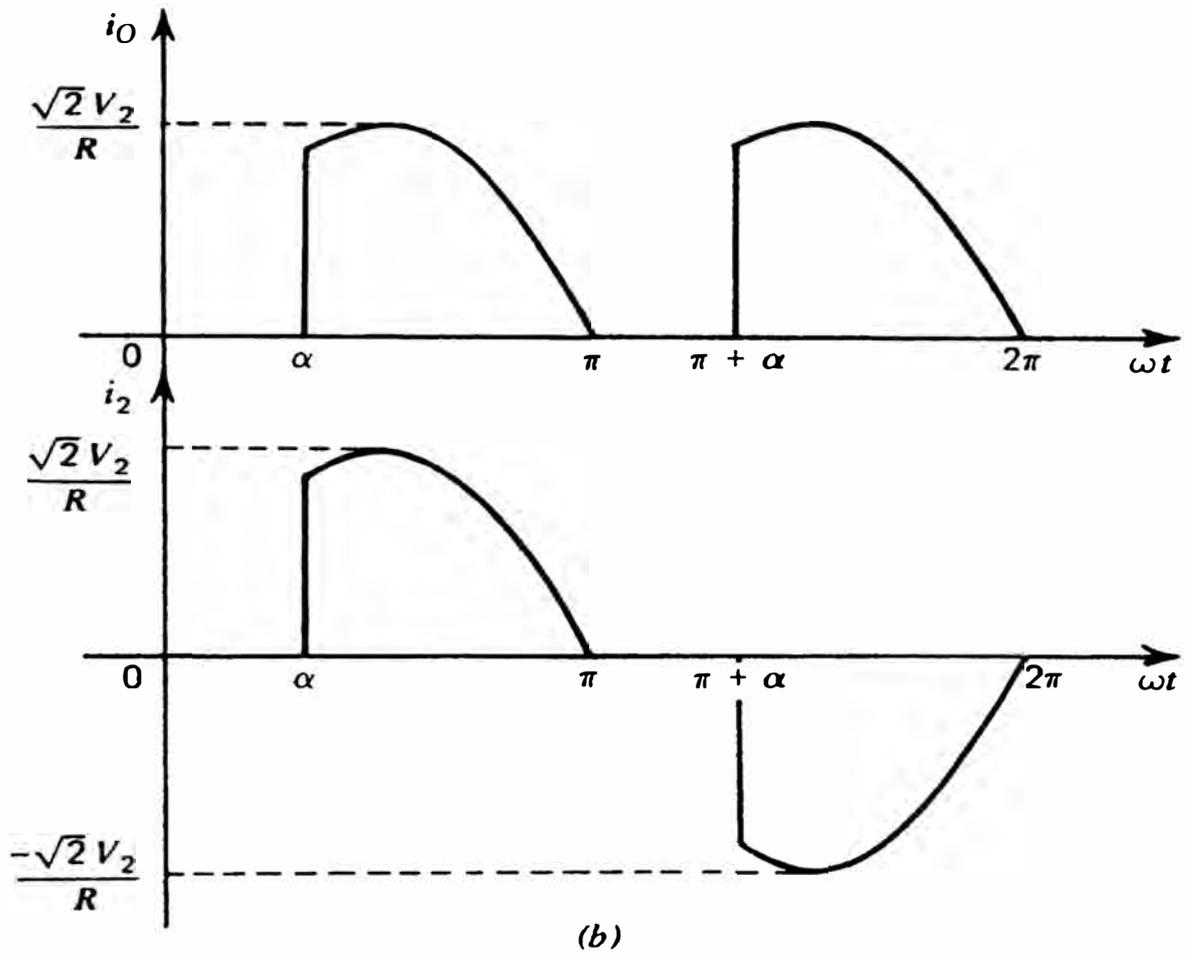


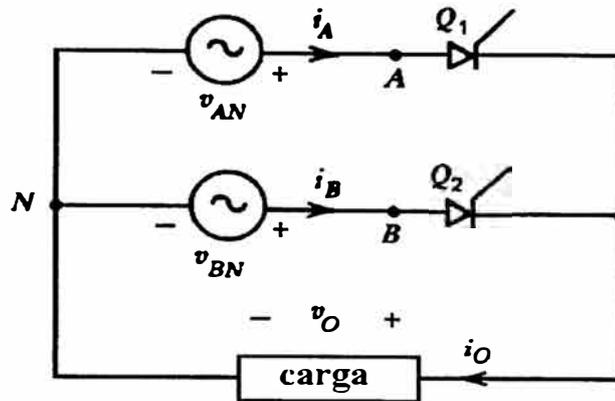
Fig 2.15

Si los transformadores y los tiristores de los circuitos mostrados en las figuras 2.13 y 2.14 se consideran ideales, entonces cada uno de estos circuitos puede ser representado por el circuito equivalente que muestra la figura 2.16. En este circuito,

$$v_{AN} = \sqrt{2} V \text{Sen } \omega t$$

$$v_{BN} = -\sqrt{2} V \text{Sen } \omega t = \sqrt{2} V \text{Sen}(\omega t + \pi)$$

Si este circuito equivalente representa el circuito de la figura 2.14 (circuito rectificador de onda completa con transformador Centre-Topped) entonces el



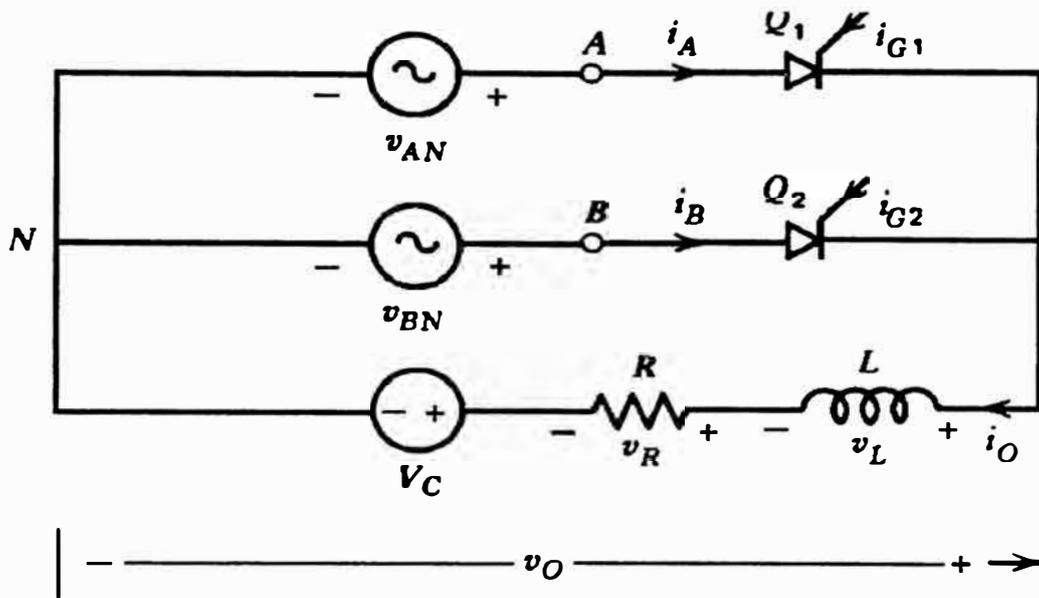
**Fig 2.16 Circuito equivalente del Rectificador controlado de onda completa.**

tiristor  $Q_1$  de la figura 2.16 es equivalente al tiristor  $Q_1$  de la figura 2.14, pero también es equivalente a los tiristores  $Q_1$  y  $Q_2$  en serie de la figura 2.13. Es claro entonces que el máximo voltaje inverso aplicado a cada tiristor de la figura 2.14 es el doble del aplicado a cada uno de los tiristores en la figura 2.13.

A fin de generalizar, consideraremos que el circuito de carga consiste de un circuito RL con fuerza electromotriz.

#### Circuito de carga R-L con fuerza electromotriz.

El circuito equivalente es el que muestra la figura 2.17. Este circuito, dependiendo de los valores que tomen los parámetros de los circuitos de carga: R, L y  $V_c$ , y del valor del ángulo de retardo  $\alpha$ , tiene dos modos distintos de operar. Generalmente, si  $\alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , el modo de operación es continua; en cambio para valores grandes de  $\alpha$ , el modo de operación es discontinua.



**Fig. 2.17 Rectificador monofásico controlado de onda completa con fuerza electromotriz.**

Cuando el circuito trabaja en forma discontinua, entonces las dos ramas que contienen los tiristores de la figura 2.17 actúan alternadamente con la rama del circuito de carga, funcionando como rectificadores controladores de media onda independientes. En la sección 2.6 se hizo el estudio del rectificador de media onda operando con corriente discontinua. Las relaciones determinadas en esa sección pueden ser empleados para describir el funcionamiento del circuito de la figura 2.17 en el modo discontinuo. Sin embargo como este circuito produce , en cada ciclo del voltaje de la fuente de alimentación , dos pulsos de corriente en la carga, entonces el valor medio de la corriente en la carga  $I_o$  será el doble que el del rectificador de media onda. Igualmente, el valor eficaz de la corriente de salida  $I_R$  será  $\sqrt{2}$  veces que el del rectificador de media onda.

Para determinados valores de  $\phi$ ,  $m$  y  $\alpha$  el ángulo de conducción  $\gamma$  es tal que  $\gamma > \pi$ . Bajo estas condiciones, el circuito rectificador de onda completa

de la figura 2.17 , operará de la siguiente manera: el tiristor  $Q_1$  estará aún conduciendo cuando el tiristor  $Q_2$  esta por dispararse en el instante en que  $\omega t = \pi + \alpha$  . En este instante,  $v_{AN} < 0$  y  $v_{BN} > 0$ , por lo tanto  $Q_1$  será conmutado (deja de conducir), y la corriente en la carga  $i_o$  es transferida a  $Q_2$ . En este modo de operación la corriente en la carga es continua, tal como muestra la figura 2.18.

El modo de operación en corriente continua es de gran importancia ya que generalmente en los circuitos en que la carga es un motor de continua con gran inductancia (o resistencia insignificante), el modo de operación es en corriente continua. Si el desarrollo en series de Fourier del voltaje  $v_o$  en la carga es:

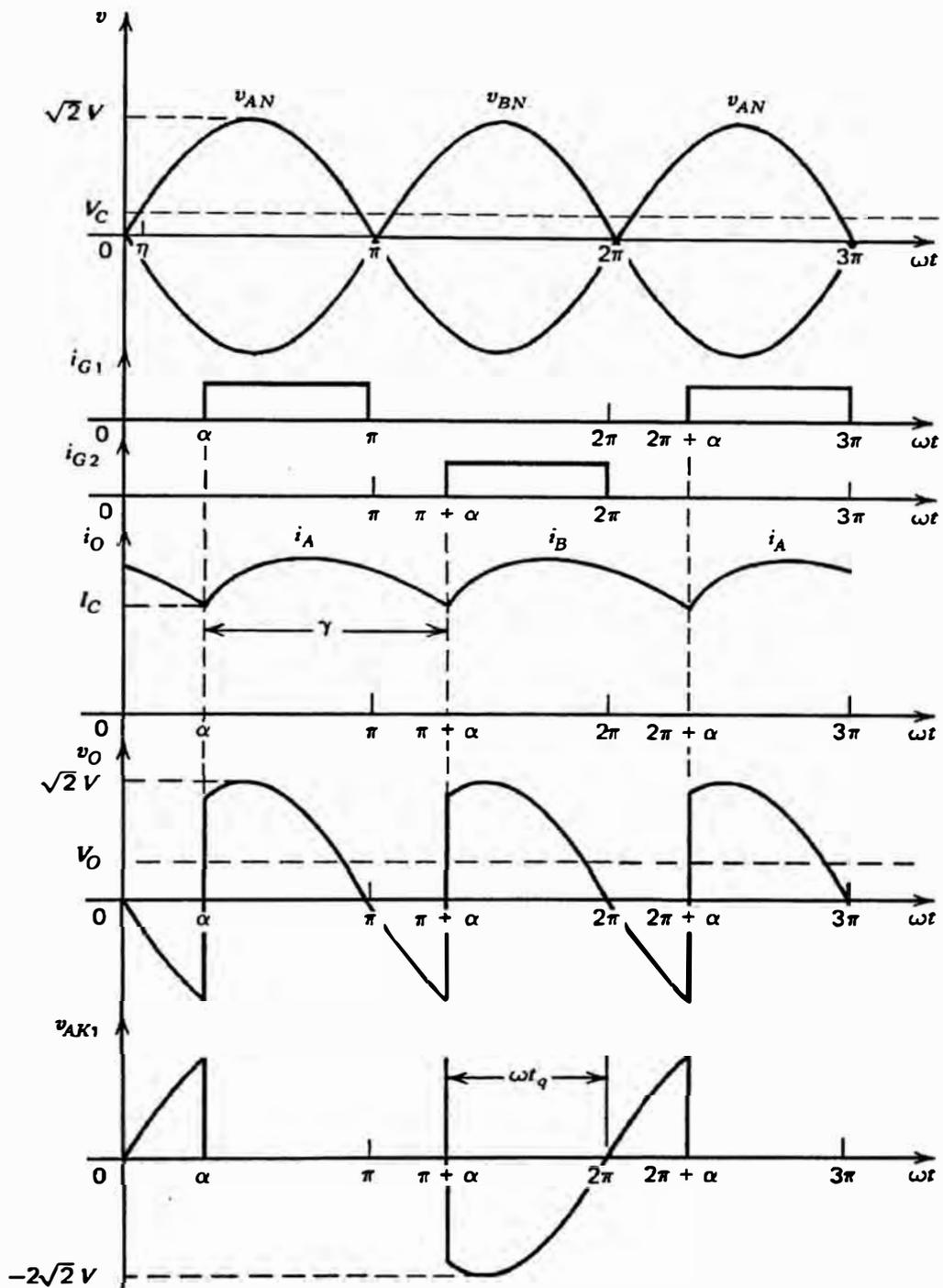
$$v_o = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n\omega t$$

y como de la figura 2.18:

$$v_o = \begin{cases} v_{AN} = \sqrt{2} V \text{Sen} \omega t & ; \quad \alpha \leq \omega t < \pi + \alpha \\ v_{BN} = \sqrt{2} V \text{Sen}(\omega t + \pi) & ; \quad \pi + \alpha \leq \omega t \leq 2\pi + \alpha \end{cases}$$

Entonces el voltaje medio  $V_0$  es:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} v_o d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} v_o d(\omega t), \quad \omega t = \theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen} \theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen}(\theta + \pi) d\theta \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{2\pi} \left[ -\text{Cos} \theta \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha} - \text{Cos}(\theta + \pi) \Big|_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \right] \end{aligned} \quad (77)$$



**Fig. 2.18.** Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.17- modo de operación en corriente continua.

Evaluando

$$V_0 = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \text{Cos}\alpha \quad (78)$$

También,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \text{Sen } n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} v_0 \text{Sen } n\omega t d(\omega t) \quad , \quad \omega t = \theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen}(\theta + \pi) \text{Sen } n\theta d\theta \right] \\ &= \frac{\sqrt{2} V}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \text{Sen}(\theta + \pi) \text{Sen } n\theta d\theta \right] \quad (79) \end{aligned}$$

Si en la segunda integral de (79) hacemos:

$$\theta = u + \pi \quad \text{entonces} \quad n\theta = nu + n\pi \quad , \quad d\theta = du$$

$$\text{Si: } \theta = \pi + \alpha \quad \text{entonces: } u = \alpha .$$

$$\text{Si } \theta = 2\pi + \alpha \quad \text{Entonces: } u = \pi + \alpha$$

Así,

$$\int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \text{Sen}(\theta + \pi) \text{Sen } n\theta d\theta = \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen}(u + 2\pi) \text{Sen}(nu + n\pi) du \quad (80)$$

$$\text{Si } n \text{ es impar, entonces} \quad \text{Sen}(nu + n\pi) = -\text{Sen } nu$$

$$\text{Si } n \text{ es par, entonces} \quad \text{Sen}(nu + n\pi) = \text{Sen } nu$$

y como

$$\text{Sen}(u + 2\pi) = \text{Sen } u \quad , \quad \text{entonces en (80):}$$

$$\int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \text{Sen}(\theta + \pi) \text{Sen} n\theta d\theta = \begin{cases} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen} u \text{Sen} n u du, & \text{si } n \text{ es impar} \\ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen} u \text{Sen} n u du, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Reemplazando en (79) se obtiene:

$a_n=0$  si  $n$  es impar. En cambio, si  $n$  es par:

$$a_n = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ 2 \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen}\theta \text{Sen} n\theta d\theta \right] = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen}\theta \text{Sen} n\theta d\theta$$

Como

$$\int \text{Sen}\theta \text{Sen} n\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right]$$

entonces:

$$a_n = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha} \quad (*)$$

Como  $n$  es par, entonces  $n-1$  y  $n+1$  es impar. Así,

$$\text{Sen}[(n-1)(\pi + \alpha)] = \text{Sen}[(n-1)\pi + (n-1)\alpha] = -\text{Sen}(n-1)\alpha$$

$$\text{Sen}[(n+1)(\pi + \alpha)] = \text{Sen}[(n+1)\pi + (n+1)\alpha] = -\text{Sen}(n+1)\alpha$$

Luego, evaluando (\*) se obtiene:

$$a_n = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Sen}(n-1)\alpha}{n-1} \right], \quad n \text{ par} \quad (81)$$

También,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \text{Cos} n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} v_0 \text{Cos} n\omega t d(\omega t), \quad \omega t = \theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta + \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen}(\theta+\pi) \text{Cos}n\theta d\theta \right] \quad (82)$$

Análogamente al cálculo de  $a_n$ , la segunda integral de (82) es el negativo de la primera para  $n$  impar. En cambio si  $n$  es par, es igual a la primera. Así,  $b_n=0$  si  $n$  es impar; en cambio si  $n$  es par:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[ 2 \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2} V \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta \right] = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta \quad (83)$$

Como:

$$\int \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right]$$

Entonces:

$$b_n = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha} \quad (**)$$

Como  $n$  es par, entonces  $(n-1)$  y  $(n+1)$  son impares. Así,

$$\text{Cos}[(n-1)(\pi+\alpha)] = \text{Cos}[(n-1)\pi + (n-1)\alpha] = -\text{Cos}(n-1)\alpha$$

$$\text{Cos}[(n+1)(\pi+\alpha)] = \text{Cos}[(n+1)\pi + (n+1)\alpha] = -\text{Cos}(n+1)\alpha$$

Luego, evaluando (\*\*):

$$b_n = \frac{2\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Cos}(n-1)\alpha}{n-1} \right], \quad n \text{ par} \quad (84)$$

Utilizando la transformación:

$$a \text{ sen}\beta + b \text{ cos}\beta = A \text{ sen}(\beta+\phi), \quad \text{donde ,}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \phi = \arctan \frac{b}{a}$$

entonces podemos escribir:

$$a_n \operatorname{sen} n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

De las ecuaciones (81) y (84) se obtiene:

$$a_n^2 = \left( \frac{2\sqrt{2} V}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{\operatorname{sen}^2(n+1)\alpha}{(n+1)^2} - \frac{2 \operatorname{sen}(n+1)\alpha \cdot \operatorname{sen}(n-1)\alpha}{(n+1)} + \frac{\operatorname{sen}^2(n-1)\alpha}{(n-1)^2} \right]$$

$$b_n^2 = \left( \frac{2\sqrt{2} V}{\pi} \right)^2 \left[ \frac{\cos^2(n+1)\alpha}{(n+1)^2} - \frac{2 \cos(n+1)\alpha \cdot \cos(n-1)\alpha}{(n-1)} + \frac{\cos^2(n-1)\alpha}{(n-1)^2} \right]$$

Sumando y utilizando las identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1, \quad \cos(A+B) = \cos A \cos B - \operatorname{Sen} A \operatorname{sen} B$$

se obtiene:

$$\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2\sqrt{2} V}{\pi} \left[ \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(n+1)(n-1)} \right]^{1/2} \quad (85)$$

También, dividiendo  $b_n$  entre  $a_n$  se obtiene:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{\cos(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\cos(n-1)\alpha}{n-1}}{\frac{\operatorname{sen}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\operatorname{sen}(n-1)\alpha}{n-1}} \quad (86)$$

Así, la ecuación:

$$v_0 = V_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots} [a_n \operatorname{sen} n\omega t + b_n \operatorname{sen} n\omega t]$$

es equivalente a

$$v_0 = V_0 + \sum_{n=2,4,6,\dots} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \operatorname{sen}(n\omega t + \phi_n)$$

Utilizando las ecuaciones (78), (85) y (86) se obtiene:

$$v_0 = \frac{2\sqrt{2} V}{\pi} \left\{ \cos\alpha + \sum_{n=2,4,6,\dots} \left[ \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(n+1)(n-1)} \right]^{1/2} \text{sen}(n\omega t + \phi_n) \right\} \quad (87a)$$

donde

$$\phi_n = \arctan \left( \frac{\frac{\cos(n+1)\alpha}{(n+1)} - \frac{\cos(n-1)\alpha}{(n-1)}}{\frac{\text{sen}(n+1)\alpha}{(n+1)} - \frac{\text{sen}(n-1)\alpha}{(n-1)}} \right), \quad n = 2,4,6,\dots \quad (87b)$$

Vemos pues que el desarrollo en series de Fourier del voltaje en la carga, sólo contiene componentes armónicos múltiplos pares de la frecuencia de la fuente de alimentación, y que la frecuencia fundamental es el doble de la frecuencia de dicha fuente.

El valor eficaz del voltaje en la carga es:

$$\begin{aligned} V_R &= \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi-\alpha} v_0^2 d(\omega t) \right]^{1/2} = \frac{1}{2\pi} \left[ 2 \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} (\sqrt{2} V \text{Sen}\theta)^2 d\theta \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{1}{2\pi} \cdot 4 V^2 \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \text{Sen}^2\theta d\theta \right]^{1/2} = \left[ \frac{2 V^2}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \frac{(1-\text{Cos}2\theta)}{2} d\theta \right]^{1/2} \\ &= \left[ \frac{V^2}{\pi} \left( \theta - \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\pi-\alpha} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Evaluando,

$$V_R = \left[ \frac{V^2}{\pi} (\pi) \right]^{1/2} = V \quad (88)$$

El voltaje ripple será:

$$V_{RI} = [V_R^2 - V_0^2]^{1/2} = \left[ V^2 - \frac{8V^2}{\pi^2} \text{Cos}^2 \alpha \right]^{1/2}$$

$$= V \left[ 1 - \frac{8 \text{Cos}^2 \alpha}{\pi^2} \right]^{1/2} \quad (89)$$

El factor de voltaje ripple es:

$$K_v = \frac{V_{RI}}{V_0} \quad (90)$$

La serie que describe la corriente  $i_0$  en la carga será:

$$i_0 = I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{Sen } n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{Cos } n\omega t$$

donde la corriente media en la carga será:

$$I_0 = \frac{V_0 - V_c}{R} \quad (91)$$

$$c_n = \frac{a_n}{Z_n}, \quad d_n = \frac{b_n}{Z_n}, \quad \phi_n = \arctan \frac{n\omega L}{R}, \quad Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} \quad (92)$$

El valor eficaz de cada una de las componentes armónicas de la corriente esta dada por:

$$I_{nR} = \frac{(c_n^2 + d_n^2)^{1/2}}{Z_n} \quad (93)$$

La corriente ripple es entonces,

$$I_{RI} = \left[ \sum I_{nR}^2 \right]^{1/2} \quad (94)$$

De esta expresión y dependiendo del grado de exactitud requerido ,se tomará el número de términos necesarios para calcular el valor eficaz de la corriente de salida de acuerdo a la ecuación:

$$I_R = \left[ I_0^2 + I_{RI}^2 \right]^{1/2} \quad (95)$$

El factor ripple es entonces:

$$K_i = \frac{I_{RI}}{I_0} \quad (96)$$

Para calcular las series de Fourier para las corrientes  $i_a$  e  $i_b$ , las que tienen periodo  $2\pi$ , como muestra la figura 2.18 , podemos considerar que el voltaje en la carga  $v_0$  se compone de dos voltajes  $v_{01}$  y  $v_{02}$  tal que,

$$v_0 = v_{01} + v_{02} \quad (97)$$

donde

$$v_{01} = \begin{cases} V_{AN} = \sqrt{2}V \text{Sen}\omega t , & \alpha \leq \omega t < \pi + \alpha \\ 0 & , \quad \pi + \alpha \leq \omega t < 2\pi + \alpha \end{cases} \quad (98)$$

$$v_{02} = \begin{cases} 0 & , \quad \alpha \leq \omega t < \pi + \alpha \\ V_{BN} = -\sqrt{2}V \text{Sen}\omega t , & \pi + \alpha \leq \omega t < 2\pi + \alpha \end{cases} \quad (99)$$

Si hacemos esto, entonces los coeficientes de Fourier  $a_n$  y  $b_n$  de  $v_0$  serán de la forma:

$$a_n = a_n^* + a_n^{**}, \quad b_n = b_n^* + b_n^{**}, \quad \text{donde}$$

$$\begin{aligned} a_n^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_{o1} \text{Sen } n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2}V \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando, se obtiene:  $a_n^* = 0$  si  $n$  es impar,  $n \neq 1$ . En cambio si  $n$  es par:

$$a_n^* = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Sen}(n-1)\alpha}{n-1} \right] \quad (100)$$

Para  $n = 1$ ,

$$a_1^* = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} v_{o1} \text{Sen } \omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2}V \text{Sen}^2 \theta d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left( \theta - \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right) \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

Evaluando,

$$a_1^* = \frac{\sqrt{2}V}{2} \quad (101)$$

También por la periodicidad

$$\begin{aligned} a_n^{**} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_{o2} \text{Sen } n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} -\sqrt{2}V \text{Sen } \theta \text{Sen } n\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Sen}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Sen}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando, también  $a_n^{**} = 0$  si  $n$  es impar, y  $n \neq 1$ . En cambio para  $n$  par:

$$a_n^{**} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Sen}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Sen}(n-1)\alpha}{n-1} \right] \quad (102)$$

Para  $n=1$  y por la periodicidad

$$\begin{aligned} a_1^{**} &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} v_{o2} \text{Sen}\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} -\sqrt{2} V \text{Sen}^2 \theta d\theta \\ &= -\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \left( \theta - \frac{\text{Sen}2\theta}{2} \right) \Big|_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando,

$$a_1^{**} = -\frac{\sqrt{2}V}{2} \quad (103)$$

Análogamente

$$\begin{aligned} b_n^* &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_{o1} \text{Cos}n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2}V \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando,  $b_n^* = 0$  para  $n$  impar,  $n \neq 1$ . En cambio, para  $n$  par:

$$b_n^* = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Cos}(n-1)\alpha}{n-1} \right] \quad (104)$$

Para  $n = 1$

$$b_1^* = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} v_{o1} \text{Cos}\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2}V \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \text{Sen}^2 \theta \Big|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

Evaluando,

$$b_1^* = 0 \quad (105)$$

También, por la periodicidad

$$\begin{aligned} b_n^{**} &= \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi} v_{o2} \text{Cos}n\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} -\sqrt{2}V \text{Sen}\theta \text{Cos}n\theta d\theta \\ &= -\frac{\sqrt{2}V}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \left[ \frac{\text{Cos}(n-1)\theta}{n-1} - \frac{\text{Cos}(n+1)\theta}{n+1} \right] \Bigg|_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando,  $b_n^{**} = 0$  para  $n$  impar,  $n \neq 1$ . En cambio, para  $n$  par:

$$b_n^{**} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \left[ \frac{\text{Cos}(n+1)\alpha}{n+1} - \frac{\text{Cos}(n-1)\alpha}{n-1} \right] \quad (106)$$

Para  $n=1$

$$\begin{aligned} b_1^{**} &= \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} v_{o2} \text{Cos}\omega t d(\omega t) = \frac{1}{\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} -\sqrt{2}V \text{Sen}\theta \text{Cos}\theta d\theta \\ &= -\frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \text{Sen}^2\theta \Bigg|_{\pi+\alpha}^{2\pi-\alpha} \end{aligned}$$

Evaluando,  $b_1^{**} = 0$  (107)

También, el voltaje medio en la carga podemos expresarla:

$$V_0 = V_{01} + V_{02} \quad (108)$$

donde:

$$V_{01} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{o1} d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} \sqrt{2}V \text{Sen}\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} (-\text{Cos}\theta) \Bigg|_{\alpha}^{\pi+\alpha}$$

Evaluando:

$$V_{01} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \text{Cos}\alpha \quad (109)$$

$$V_{02} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_{02} d(\omega t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} -\sqrt{2}V \text{Sen}\theta d\theta = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi} \text{Cos}\theta \Big|_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha}$$

Evaluando:

$$V_{02} = \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \text{Cos}\alpha \quad (110)$$

De todo lo hallado, en la ecuación (97):

$$\begin{aligned} v_{01} &= V_{01} + a_1 \text{Sen}\omega t + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_n^* \text{Sen}n\omega t + b_n^* \text{Cos}n\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \text{Cos}\alpha + \frac{\sqrt{2}V}{2} \text{Sen}\omega t + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_n^* \text{Sen}n\omega t + b_n^* \text{Cos}n\omega t) \end{aligned} \quad (111)$$

$$\begin{aligned} v_{02} &= V_{02} + a_1^* \text{Sen}\omega t + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_n^{**} \text{Sen}n\omega t + b_n^{**} \text{Cos}n\omega t) \\ &= \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \text{cos}\alpha - \frac{\sqrt{2}V}{\pi} \text{sen}\omega t + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} (a_n^{**} \text{sen}n\omega t + b_n^{**} \text{cos}n\omega t) \end{aligned} \quad (112)$$

Las corrientes  $i_A$  e  $i_B$  son entonces:

$$\left. \begin{aligned} i_A &= \frac{V_{01} - V_C}{R} + \frac{\sqrt{2}V}{2Z_1} \text{Sen}(\omega t - \phi_1) + \\ &\quad + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [c_n^* \text{Sen}(n\omega t - \phi_n) + d_n^* \text{Cos}(n\omega t - \phi_n)] \\ i_B &= \frac{V_{02} - V_C}{R} - \frac{\sqrt{2}V}{2Z_1} \text{Sen}(\omega t - \phi_1) + \\ &\quad + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} [c_n^{**} \text{Sen}(n\omega t - \phi_n) + d_n^{**} \text{Cos}(n\omega t - \phi_n)] \end{aligned} \right\} \quad (113)$$

donde:

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L)^2} \quad , \quad \phi_n = \arctan \frac{n\omega L}{R} \quad ,$$

$$c_n^* = \frac{a_n^*}{Z_n} \quad , \quad d_n^* = \frac{b_n^*}{Z_n} \quad , \quad c_n^{**} = \frac{a_n^{**}}{Z_n} \quad , \quad d_n^{**} = \frac{b_n^{**}}{Z_n}$$

Nótese que la frecuencia fundamental en las corrientes  $i_A$  e  $i_B$  es igual a la frecuencia de la fuente de alimentación.

Si el circuito de la figura 2.17 es el circuito equivalente del rectificador de onda completa tipo puente (figura 2.13), entonces la corriente instantánea del secundario del transformador será:

$$i_s = i_A - i_B \quad (114 a)$$

En cambio , si el circuito de la figura 2.17 es el circuito equivalente del rectificador de onda completa de la figura 2.14, entonces las corrientes del secundario serán:

$$i_{s1} = i_B \quad , \quad i_{s2} = i_B \quad (114 b)$$

Reemplazando (113) en (114 a) y (114 b) respectivamente, puede hallarse el desarrollo en series de las corrientes del secundario, y por lo tanto, también las corrientes del primario.

### Corrientes de línea con carga altamente inductiva.

Si el circuito de carga es altamente inductivo, tal como un motor de corriente continua, entonces podemos considerar que la corriente  $i_0$  en la carga (corriente de armadura) puede considerarse que es constante, libre de ripple.

Por lo tanto la corriente  $i_s$  del secundario será tal como muestra la figura 2.19.

Entonces la corriente  $i_s$  expresada en series de Fourier será:

$$i_s = I_{DC} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen} n\omega t + b_n \operatorname{cos} n\omega t)$$

donde

$$I_{DC} = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} i_s(t) d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} I_0 d(\omega t) - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} I_0 d(\omega t) \right\} = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} i_s(t) \operatorname{sen} n\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} I_0 \operatorname{sen} n\theta d\theta - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} I_0 \operatorname{sen} n\theta d\theta \right], \theta = \omega t$$

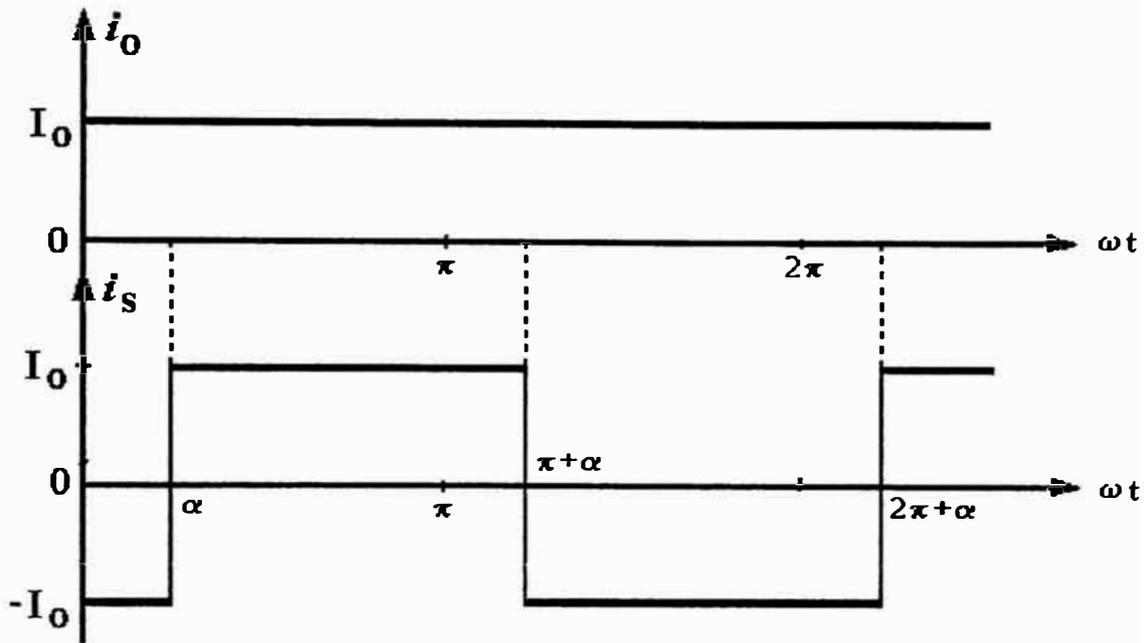
Integrando y evaluando se obtiene:

$$a_n = \begin{cases} \frac{4I_0}{n\pi} \operatorname{cos} n\alpha, & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0, & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

También,

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^{2\pi+\alpha} i_s(t) \operatorname{cos} n\omega t d(\omega t)$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\pi+\alpha} I_0 \operatorname{cos} n\theta d\theta - \int_{\pi+\alpha}^{2\pi+\alpha} I_0 \operatorname{cos} n\theta d\theta \right], \theta = \omega t$$



**Fig. 2.19. Formas de onda de la corriente en la carga y en el secundario del transformador cuando dicha carga es altamente inductiva.**

Integrando y evaluando:

$$b_n = \begin{cases} -\frac{4I_0}{n\pi} \operatorname{sen} n\alpha & , \text{ si } n \text{ es impar} \\ 0 & , \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, podemos escribir:

$$i_s(t) = -\frac{4I_0}{\pi} \left[ \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \cos n\alpha \operatorname{sen} n\omega t - \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\alpha \cos n\omega t \right] \quad (115a)$$

A su vez utilizando nuevamente la transformación:

$$a \operatorname{sen} \beta + b \cos \beta = A \operatorname{sen}(\beta + \phi) \quad , \quad A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad , \quad \phi = \arctan \frac{b}{a}$$

la ecuación (115a) puede escribirse:

$$i_s(t) = \frac{4I_0}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n} \text{sen}(n\omega t - n\alpha) \quad (115b)$$

### Operación en corriente discontinua.

Si el rectificador de onda completa trabaja en el modo de operación en corriente discontinua, entonces la forma de onda del circuito es como muestra la figura 2.20. Para hallar los coeficientes correspondientes de las series de Fourier del voltaje en la carga  $v_0$  y de las corrientes  $i_A$  e  $i_B$ , debe determinarse el valor de  $\beta$ , a partir del circuito rectificador de onda media analizado en la sección 2.6 y que muestra la figura 2.11. Como vimos en dicha sección la corriente normalizada en la carga es:

$$i_n = \frac{Z}{\sqrt{2}V} i_0 = \text{Sen}(\omega t - \phi) - \left\{ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \left[ \frac{m}{\text{Cos}\phi} - \text{Sen}(\alpha - \phi) \right] e^{-\frac{(\alpha - \omega t)}{\text{tg}\phi}} \right\}$$

donde:

$$\alpha < \omega t < \beta$$

Para un determinado valor de  $\phi$ , inherente al circuito de carga, pueden calcularse  $m$  y luego determinarse por un método de computación y para cada  $\alpha$ , si el circuito funciona en el modo de operación en corriente continua o en corriente discontinua. La figura 2.21 muestra el diagrama de flujo para determinar los modos de operación por computación.

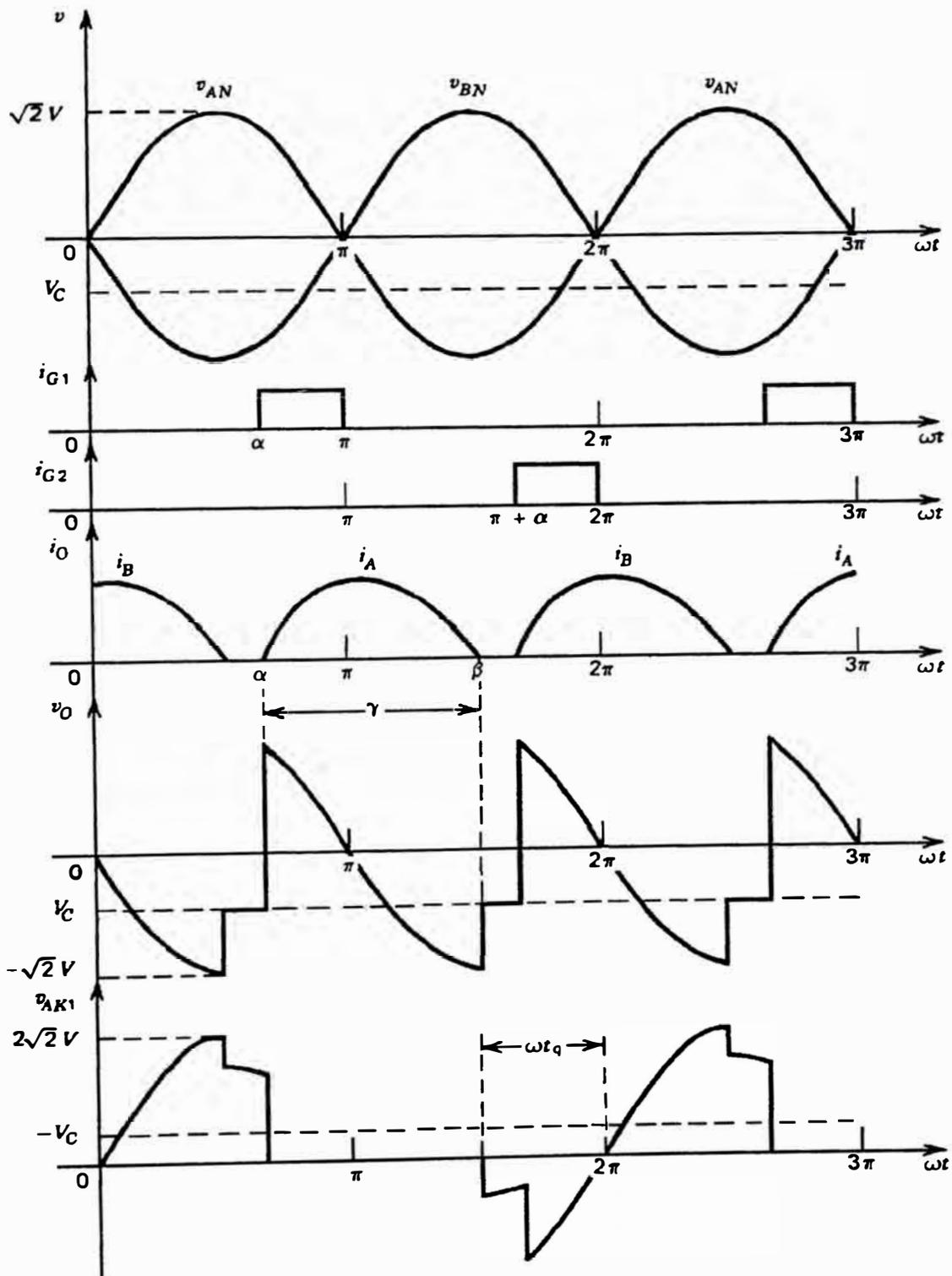
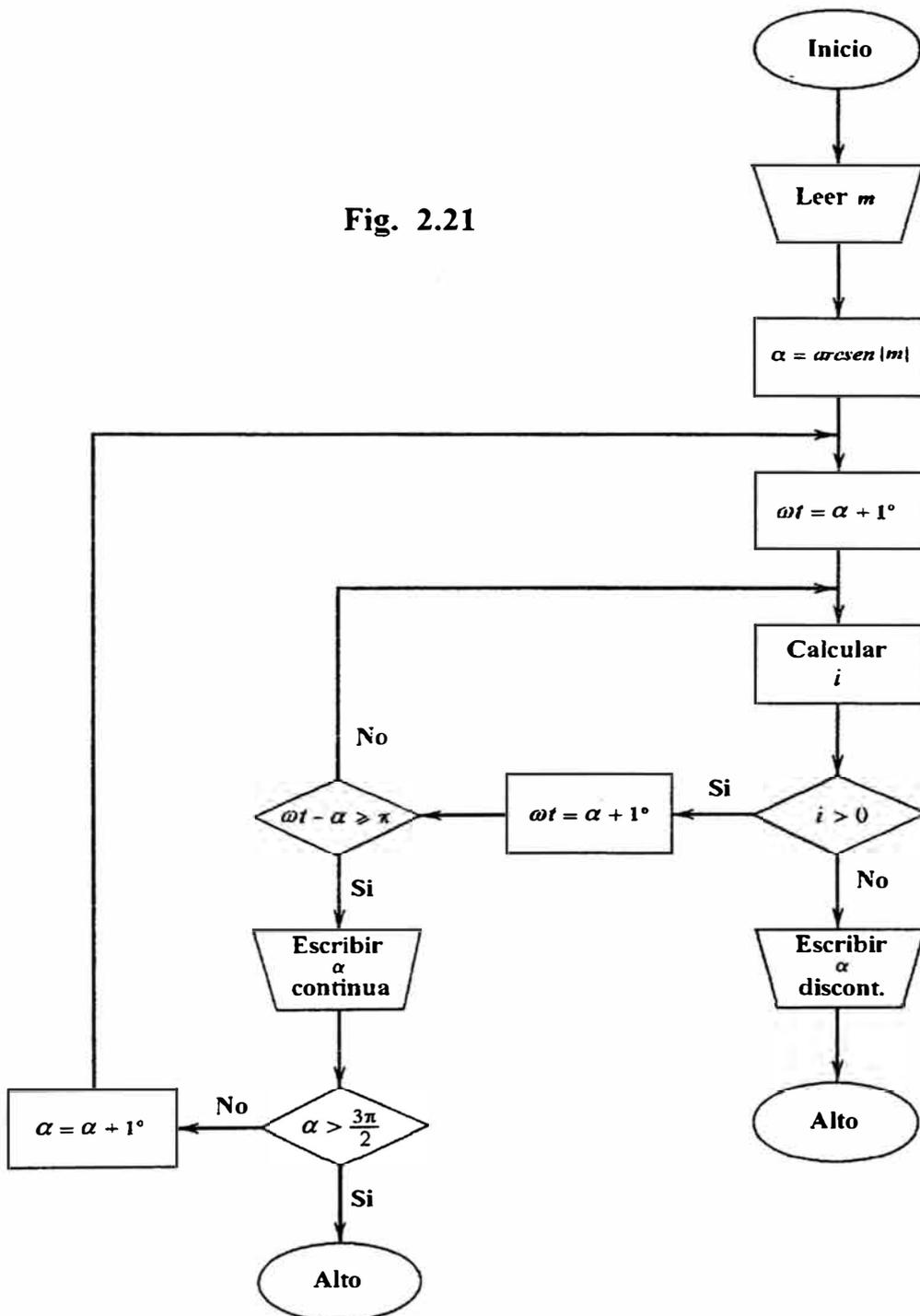


Fig 2.20 Formas de onda asociadas al circuito de la figura 2.17- modo de operación en corriente discontinua.

Fig. 2.21



## CAPITULO III RECTIFICADORES TRIFASICOS CONTROLADOS.

### 3.1.- Rectificador trifásico controlado de media onda

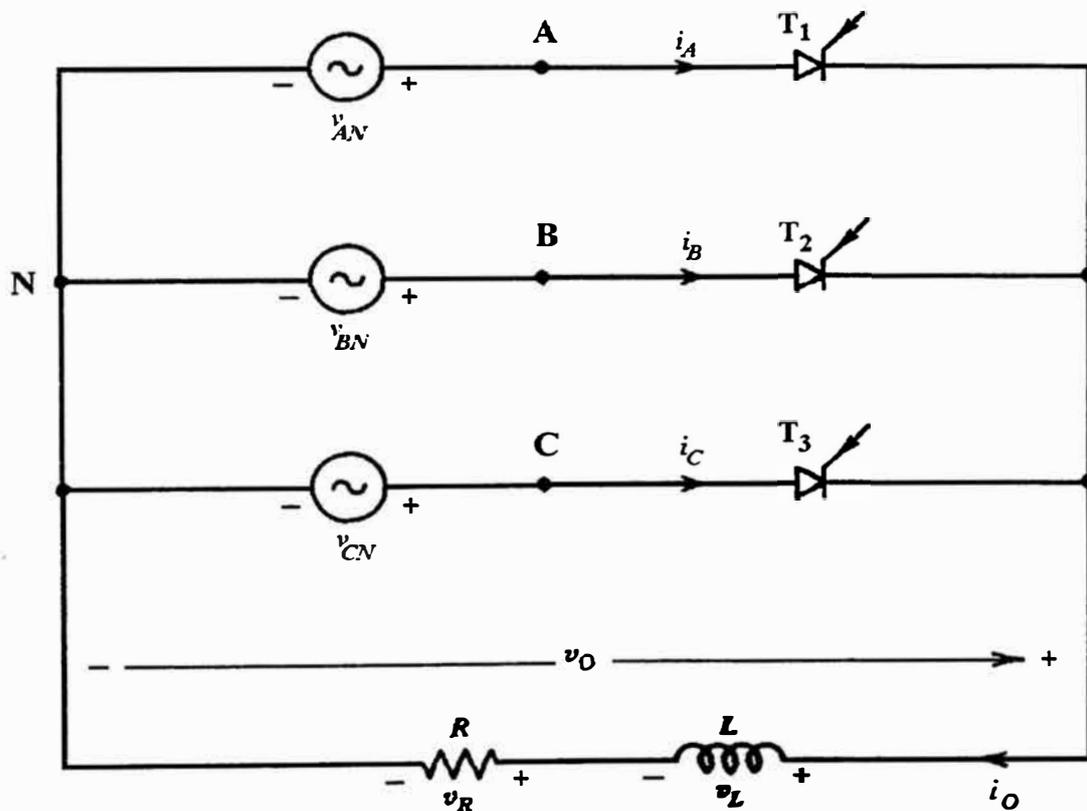


Fig 3.1 Circuito rectificador trifásico controlado de media onda.

La figura 3.1 muestra el circuito rectificador trifásico controlado de media onda, también denominado rectificador de tres pulsos tipo punto medio. Las fuentes de voltaje son:

$$v_{AN} = \sqrt{2} V_{Sen} \omega t$$

$$v_{BN} = \sqrt{2} V_{Sen} \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$v_{CN} = \sqrt{2} V_{Sen} \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

En el circuito de la figura 3.1, el ángulo de retardo  $\alpha$  en el cual el tiristor  $T_1$  se dispara se empieza a medir a partir de la condición de operación en que el rectificador libera la máxima corriente de salida. Esta corriente máxima se libera cuando la condición de operación de los tiristores sea la misma que si estos tiristores fueran reemplazados por diodos. Si así fuera, el diodo que reemplaza al tiristor  $T_1$  empezaría a conducir en  $\omega t = \frac{\pi}{6}$ . Así pues, consideramos que  $\alpha = 0$  en el instante en que  $\omega t = \frac{\pi}{6}$ .

La figura 3.2 muestra las formas de onda asociadas al rectificador trifásico controlado de media onda. Si consideramos que los parámetros del circuito son tales que el modo de operación es en corriente continua y que los tiristores se disparan en intervalos de  $120^\circ$ , entonces las formas de onda del voltaje  $v_o$  de salida y la corriente  $i_o$  en la carga serán como muestra las figuras 3.2 (b) y 3.2 (c) respectivamente. En cambio, si dichos parámetros son tales que el modo de operación es en corriente discontinua, entonces la forma de onda del voltaje y la corriente en la carga es como muestra la figura 3.2 (d), que corresponde a un circuito de carga resistiva pura. De la figura 3.2 se deduce que el voltaje aplicado a la carga durante un periodo es:

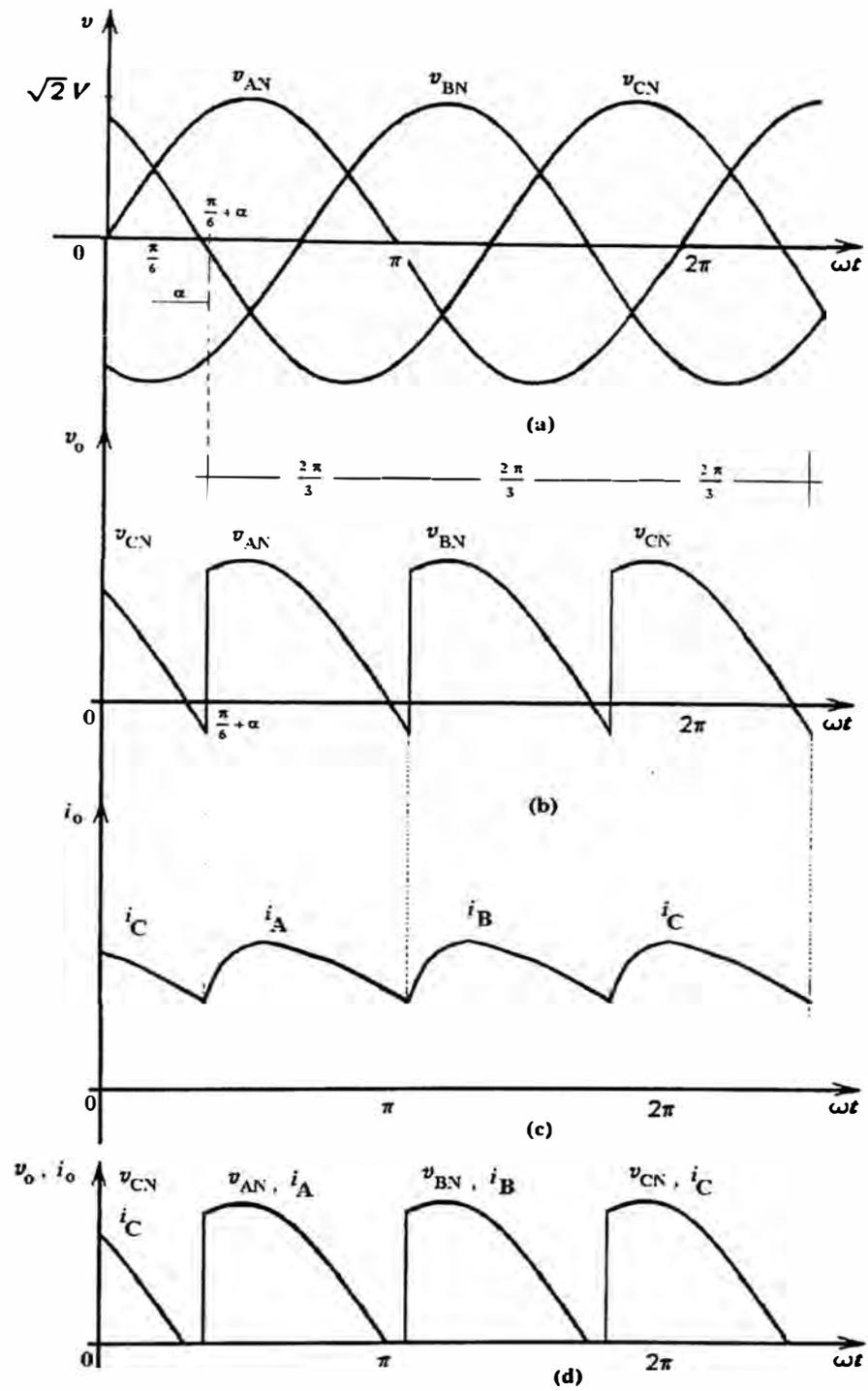


Fig. 3.2 Formas de onda en el rectificador trifásico de media onda.

$$v_0 = \begin{cases} v_{AN} = \sqrt{2}V\text{Sen}\omega t & ; \frac{\pi}{6} + \alpha \leq \omega t < \frac{5\pi}{6} + \alpha \\ v_{BN} = \sqrt{2}V\text{Sen}(\omega t - \frac{2\pi}{3}) & ; \frac{5\pi}{6} + \alpha \leq \omega t < \frac{3\pi}{2} + \alpha \\ v_{CN} = \sqrt{2}V\text{Sen}(\omega t + \frac{2\pi}{3}) & ; \frac{3\pi}{2} + \alpha \leq \omega t < \frac{13\pi}{6} + \alpha \end{cases}$$

Podemos considerar que,  $v_0 = v_{01} + v_{02} + v_{03}$ , donde

$$v_{01} = \begin{cases} v_{AN} , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{\pi}{6} - \alpha , \frac{5\pi}{6} + \alpha > \\ 0 , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{5\pi}{6} - \alpha , \frac{13\pi}{6} - \alpha > \end{cases}$$

$$v_{02} = \begin{cases} 0 , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{\pi}{6} - \alpha , \frac{5\pi}{6} + \alpha > \cup [\frac{3\pi}{2} + \alpha , \frac{13\pi}{6} + \alpha > \\ v_{BN} , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{5\pi}{6} - \alpha , \frac{3\pi}{2} + \alpha > \end{cases}$$

$$v_{03} = \begin{cases} 0 , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{\pi}{6} + \alpha , \frac{3\pi}{2} + \alpha > \\ v_{CN} , & \text{Si } \omega t = \theta \in [\frac{3\pi}{2} - \alpha , \frac{13\pi}{6} + \alpha > \end{cases}$$

Podemos utilizar las ecuaciones (2), (3) y (4) para hallar el contenido armónico de  $v_{01}$ ,  $v_{02}$  y  $v_{03}$  respectivamente y luego sumar los resultados obtenidos para hallar el contenido armónico de  $v_0$ , pero sin embargo, las expresiones que se van obteniendo son expresiones extensas y complicadas difíciles de simplificar, por lo que utilizaremos otra forma de cálculo del contenido armónico.

Sabemos que el tiristor en un circuito convertidor realiza una doble función: de conmutador (Switch) y de diodo (dispositivo que permite la conducción

unidireccional de la corriente). Podemos asumir que para todo tiristor en un circuito convertidor existen dos estados o niveles de conmutación. El estado 1 representa el periodo ON o intervalo de conducción. El estado 0 indica el periodo OFF o intervalo de no conducción. La figura 3.3 muestra un circuito monofásico rectificador de media onda, en la que el switch S reemplaza al tiristor. La figura 3.4 muestra el voltaje aplicado y un tren de pulsos que tiene

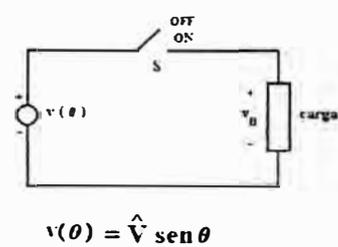


Fig. 3.3

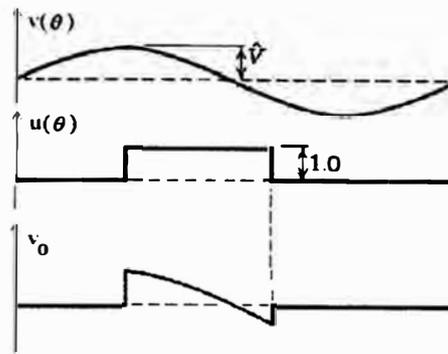


Fig. 3.4

el estado 1 o el estado 0, de acuerdo a los niveles de conmutación del Switch.

A este tren de pulsos se les denomina **“pulsos de conmutación”** o **“función de conmutación”** del tiristor representado por el Switch, y lo denotaremos por  $u(\theta)$ , donde  $\theta = \omega t$ .

La aplicación de los principios de muestreo determinan que el producto:

$$v(\theta) \cdot u(\theta)$$

dá una descripción analítica del proceso de muestreo de la fuente de voltaje  $v(t)$ . Así:

Cuando  $u(\theta) = 1$ , el producto  $v(\theta) \cdot u(\theta) = v(\theta) = v_o$ .

Cuando  $u(\theta) = 0$ , el producto  $v(\theta) \cdot u(\theta) = 0 = v_o$ .

Se observa que los niveles de conmutación 1 y 0 pueden ser usados para mostrar cuándo el voltaje de salida  $v_0$  existe a través de la carga de la figura 3.3.

La figura 3.5 muestra un diagrama de bloque lógico para la operación del circuito de la figura 3.3.

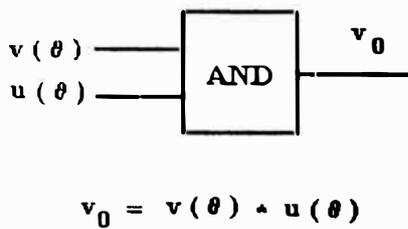


Fig 3.5

ENTRADA		SALIDA
$u(\theta)$	$v(\theta)$	$v_0$
0	1	0
1	1	1

TABLA I

Del diagrama lógico:

$$v_0 = v(\theta) \cdot u(\theta) \quad (116)$$

Esta es una ecuación booleana cuyos posibles valores de las funciones booleanas se muestran en la tabla I. De esta tabla vemos que la ecuación (116) coincide con la ecuación que da el voltaje de salida en la carga. Así, puede determinarse el contenido armónico de la salida  $v_0$  si el voltaje  $v(\theta)$  y la función de conmutación  $u(\theta)$  se reemplazan por sus series de Fourier en la ecuación (116). Pero como  $v(\theta) = \sqrt{2} \text{Sen}\omega t$ , es una función sinusoidal pura, entonces su serie de Fourier se reducirá a sí mismo. Así, bastará reemplazar solamente la serie de Fourier de la función de conmutación.

La figura 3.6 representa el circuito rectificador trifásico de media onda donde los Switch  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ , representan a los tiristores  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  de la figura 3.1. La figura 3.7 muestra el diagrama de bloque lógico de este circuito.

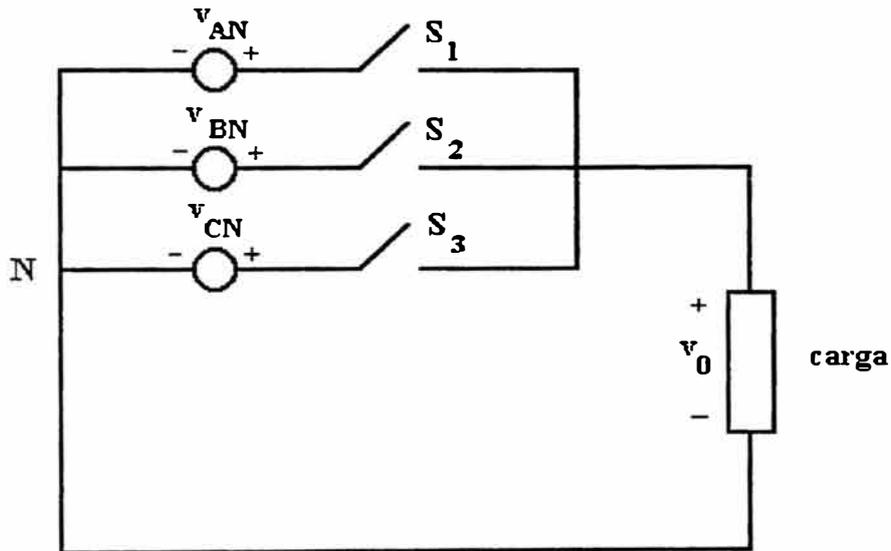


Fig 3.6

De la figura 3.7 se obtienen las siguientes ecuaciones booleanas:

De cada bloque AND:

$$\begin{cases} v_{01} = v_{AN} \cdot u_A(\theta) \\ v_{02} = v_{BN} \cdot u_B(\theta) \\ v_{03} = v_{CN} \cdot u_C(\theta) \end{cases}$$

Del bloque OR:

$$\begin{aligned} v_0 &= v_{01} + v_{02} + v_{03} \\ &= v_{AN} \cdot u_A(\theta) + v_{BN} \cdot u_B(\theta) + v_{CN} \cdot u_C(\theta) \end{aligned}$$

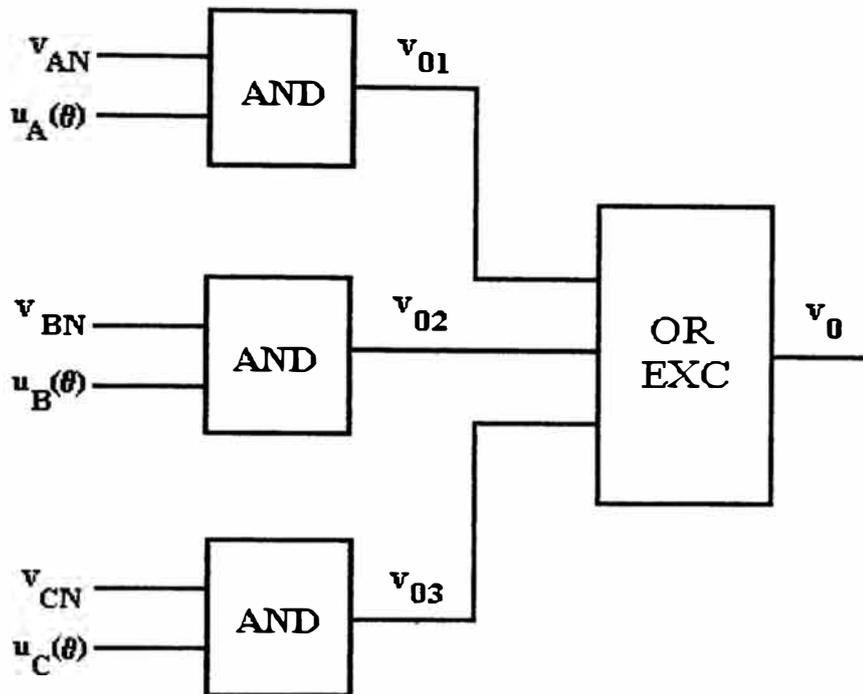


Fig 3.7

La tabla II muestra las posibles combinaciones de los niveles de conmutación.

POSIBILIDAD	ENTRADAS						SALIDA
	$u_A$	$u_B$	$u_C$	$v_{AN}$	$v_{BN}$	$v_{CN}$	
N							$v_0$
1	0	0	0	1	1	1	0
2	0	0	1	1	1	1	1
3	0	1	0	1	1	1	1
4	0	1	1	1	1	1	1
5	1	0	0	1	1	1	1
6	1	0	1	1	1	1	1
7	1	1	0	1	1	1	1
8	1	1	1	1	1	1	1

**TABLA II.- POSIBLES COMBINACIONES DE LOS NIVELES DE CONMUTACION**

Como en el circuito rectificador trifásico de media onda, en todo instante solo uno de los tres tiristores  $T_1$  ó  $T_2$  ó  $T_3$  puede estar conduciendo (sólo uno de

los tres Switch  $S_1$  ó  $S_2$  ó  $S_3$  está en el estado 1), entonces las combinaciones 4, 6, 7 y 8 que indica la tabla II, no sucede en ningún momento, por lo que la ecuación booleana (118) coincide con la ecuación que dá el voltaje de salida en la carga. Así, podemos hallar el contenido armónico de  $v_{01}$ ,  $v_{02}$ ,  $v_{03}$  y  $v_0$ , tan sólo reemplazando en las ecuaciones (117) y (118),  $u_A(\theta)$ ,  $u_B(\theta)$  y  $u_C(\theta)$  por sus series de Fourier correspondientes.

### Análisis de los pulsos de conmutación.

La forma de onda de un pulso de conmutación es como muestra la figura 3.8.

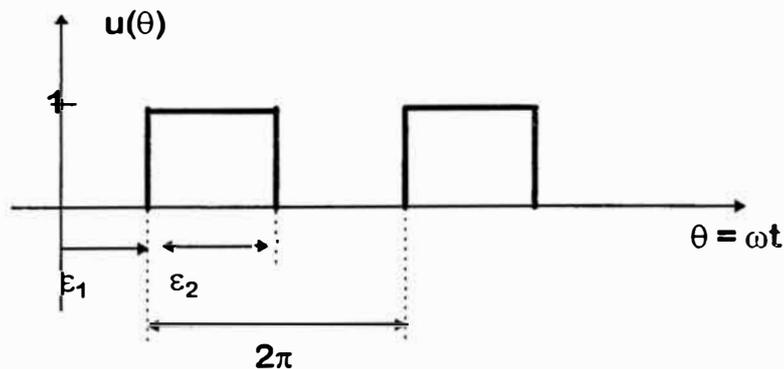


Fig. 3.8.

El pulso tiene ángulo de disparo  $\varepsilon_1$  y ancho  $\varepsilon_2$  (ángulo de conducción del tiristor), y tiene una amplitud de 1 unidad.

Si la serie de Fourier de la figura 3.8 es:

$$u(\theta) = U_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen}n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos}n\theta, \quad \theta = \omega t$$

$$\text{Entonces: } U_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} 1 \cdot d\theta = \frac{1}{2\pi} \theta \Big|_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} = \frac{\varepsilon_2}{2\pi}$$

También,

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_1 + \epsilon_2} 1 \cdot \text{Sen } n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \left( \frac{-\text{Cos } n\theta}{n} \right) \Big|_{\epsilon_1}^{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$= -\frac{1}{n\pi} [\text{Cos } n(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \text{Cos } n\epsilon_1]$$

Utilizando la identidad:

$$\text{Cos } A - \text{Cos } B = -2\text{Sen } \frac{A+B}{2} \text{Sen } \frac{A-B}{2}$$

Se obtiene:

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \text{Sen } n \left( \frac{\epsilon_2}{2} \right) \cdot \text{Sen } n \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2} \right) \quad (119)$$

Análogamente:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\epsilon_1}^{\epsilon_1 + \epsilon_2} 1 \cdot \text{Cos } n\theta d\theta = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\text{Sen } n\theta}{n} \right) \Big|_{\epsilon_1}^{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

$$= \frac{1}{n\pi} [\text{Sen } n(\epsilon_1 + \epsilon_2) - \text{Sen } n\epsilon_1]$$

Utilizando la identidad:  $\text{Sen } A - \text{Sen } B = 2\text{Sen } \frac{A-B}{2} \text{Cos } \frac{A+B}{2}$ , se obtiene:

$$b_n = \frac{2}{n\pi} \text{Sen } n \left( \frac{\epsilon_2}{2} \right) \cdot \text{Cos } n \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2} \right) \quad (120)$$

Así, reemplazando, la serie de Fourier del pulso de conmutación es:

$$u(\theta) = \frac{\epsilon_2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \text{Sen } n \left( \frac{\epsilon_2}{2} \right) \cdot \text{Sen } n \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2} \right) \text{Sen } n\theta +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \text{Sen } n \left( \frac{\epsilon_2}{2} \right) \text{Cos } n \left( \epsilon_1 + \frac{\epsilon_2}{2} \right) \text{Cos } n\theta \quad (121)$$

En el rectificador trifásico de media onda, el ángulo de retardo  $\alpha$  se mide desde el instante en que  $\theta = \omega t = \frac{\pi}{6}$ . Así, consideraremos que para  $\epsilon_1 = 0$ , entonces  $\alpha = 0$ . El valor de  $\epsilon_2$  (ancho del intervalo de conducción) depende de los parámetros del circuito de carga. Si la carga es resistiva pura, entonces la forma de onda de la corriente y del voltaje en la carga es discontinua, tal como muestra la figura 3.2(d). El ancho del intervalo de conducción será:

$$\epsilon_2 = \pi - \frac{\pi}{6}$$

Si el circuito de carga es R-L (puede tener además fuerza electromotriz  $V_c$ ) puede operar en modo continuo o en modo discontinuo. Si opera en modo discontinuo, el valor de  $\epsilon_2$  dependerá del valor de  $\theta = \beta$  en que finaliza la conducción, tal como se vió en la sección 2.6. Si opera en modo continuo, entonces para el rectificador trifásico, el valor de  $\epsilon_2$  será  $\frac{2\pi}{3}$ .

Haremos el análisis del pulso de conmutación para el caso del funcionamiento del rectificador trifásico en el modo de corriente continua. Así, en la figura 3.8 y en las ecuaciones (119) y (120),  $\epsilon_1 = \frac{\pi}{6}$  y  $\epsilon_2 = \frac{2\pi}{3}$ . Entonces el pulso de conducción  $u(\theta)$  es como muestra la figura 3.9.

Si el pulso de conmutación  $u(\theta)$  corresponde a  $\alpha = 0$ , entonces  $u(\theta - \alpha)$  será el pulso de conmutación cuando existe un ángulo de retardo  $\alpha$ . Análogamente si  $u(\theta - \alpha)$  es el pulso de conmutación del tiristor  $Q_1$  del rectificador trifásico de la figura 3.1 (línea A), entonces los pulsos de

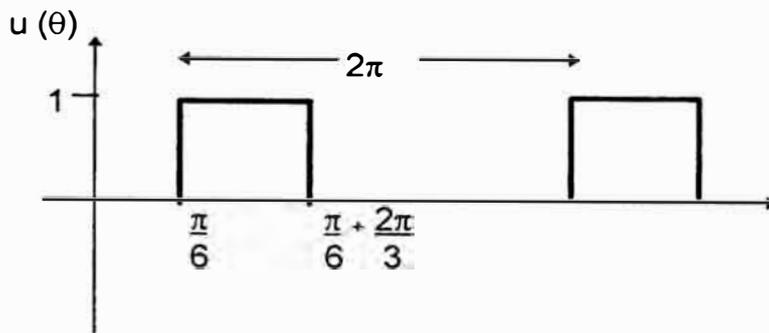


Fig. 3.9.

conmutación de los tiristores  $Q_2$  y  $Q_3$  (líneas B y C respectivamente) serán  $u(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3})$  y  $u(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3})$  respectivamente. Así, bastará hallar las series de Fourier del pulso de conmutación  $u(\theta)$ : luego por simple desplazamiento hallaremos los otros pulsos de conmutación. La figura 3.10 ilustra el método de análisis empleado para hallar la forma de onda de salida del rectificador trifásico de onda media.

Si  $u(\theta)$  es el pulso de conducción con  $\alpha = 0$ , entonces.

$$u(\theta) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n\theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos } n\theta$$

donde de (119) y (120):

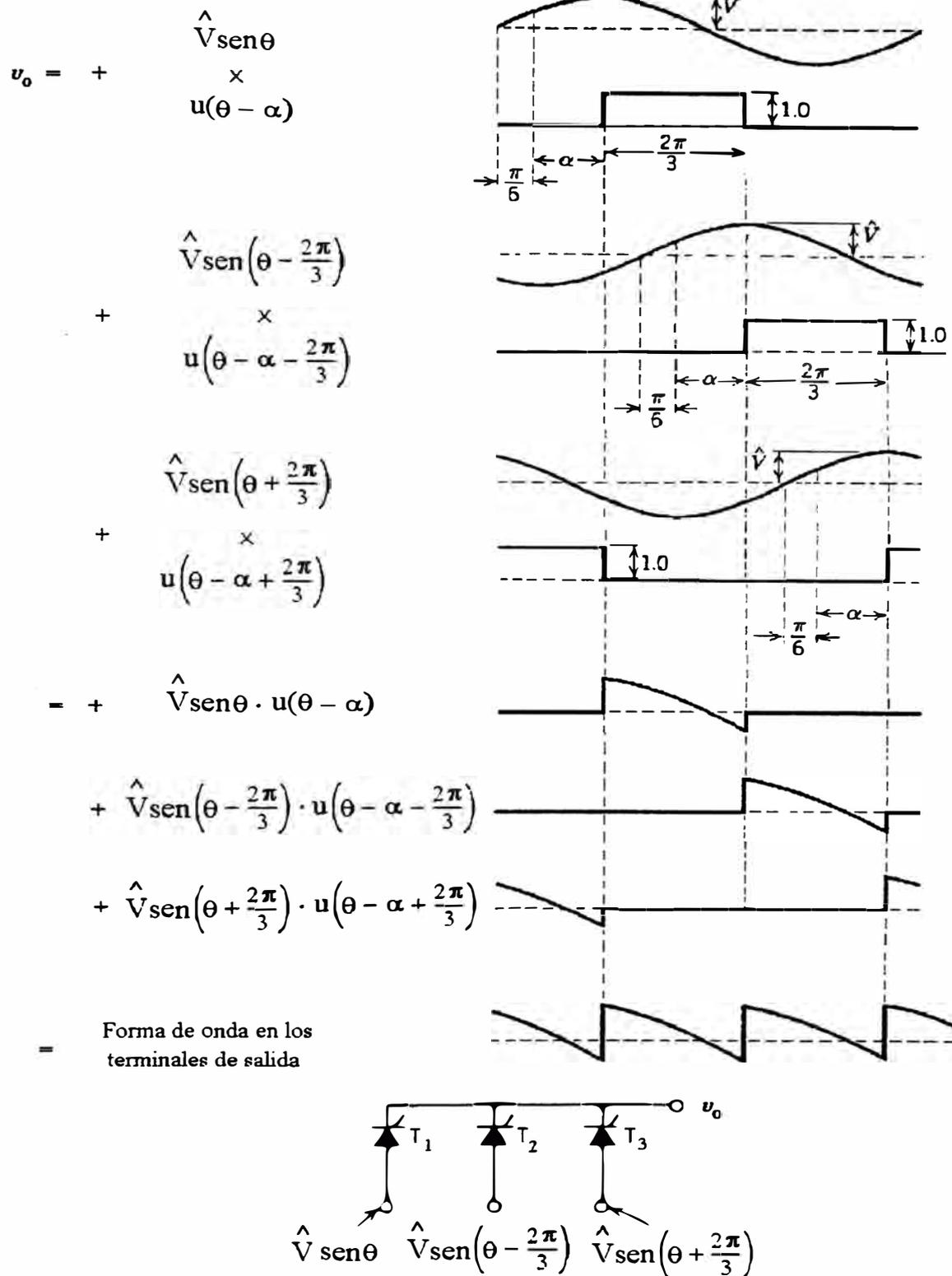
$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{n\pi} \text{Sen } n \frac{\pi}{3} \cdot \text{Sen } n \frac{\pi}{2}, & n \text{ impar}, & a_n = 0 & \text{Si } n \text{ es par} \\ b_n = \frac{2}{\pi n} \text{Sen } n \frac{\pi}{3} \cdot \text{Cos } n \frac{\pi}{2}, & n \text{ par}, & b_n = 0 & \text{Si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (122)$$

Nótese que  $a_n$  y  $b_n$  son ceros si  $n$  es múltiplo de 3.

En el rectificador trifásico:

**Para la línea A:**

$$v_{AN} = \sqrt{2} V \text{Sen } \theta$$



**Fig. 3.10 Método de análisis de la forma de onda de salida del rectificador trifásico de onda media.**

El pulso de conducción será:

$$u_A(\theta) = u(\theta - \alpha) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n(\theta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n(\theta - \alpha)$$

$$v_{01} = v_{AN} \cdot u_A = \sqrt{2} V \text{Sen} \theta \left[ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n(\theta - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n(\theta - \alpha) \right]$$

$$v_{01} = \sqrt{2} V \left\{ \frac{1}{3} \text{Sen} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n(\theta - \alpha) \cdot \text{Sen} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n(\theta - \alpha) \cdot \text{Sen} \theta \right\}$$

Como:

$$\text{Sen} n(\theta - \alpha) \cdot \text{Sen} \theta = \frac{1}{2} [\text{Cos}((n-1)\theta - n\alpha) - \text{Cos}((n+1)\theta - n\alpha)]$$

$$\begin{aligned} \text{Cos} n(\theta - \alpha) \cdot \text{Sen} \theta &= \frac{1}{2} [-\text{Sen}((n-1)\theta - n\alpha) + \text{Sen}((n+1)\theta - n\alpha)] \\ &= \frac{1}{2} [\text{Sen}((n+1)\theta - n\alpha) - \text{Sen}((n-1)\theta - n\alpha)] \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} v_{01} &= \sqrt{2} V \left\{ \frac{1}{3} \text{Sen} \theta + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} [\text{Cos}((n-1)\theta - n\alpha) - \text{Cos}((n+1)\theta - n\alpha)] \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{2} [\text{Sen}((n+1)\theta - n\alpha) - \text{Sen}((n-1)\theta - n\alpha)] \right\} \end{aligned} \quad (123)$$

**Para la línea B:**

$$v_{BN} = \sqrt{2} V \text{Sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right), \quad u_B(\theta) = u \left( \theta - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Así,

$$u_B(\theta) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n \left( \theta - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n \left( \theta - \alpha - \frac{2\pi}{3} \right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}
 v_{02} &= v_{BN} \cdot u_B \\
 &= \sqrt{2}V \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \right\} \\
 &= \sqrt{2}V \left\{ \frac{1}{3} \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right\}
 \end{aligned}$$

Como:

$$\text{Sen}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{es igual a:}$$

$$\frac{1}{2} \left[ \text{Cos}\left((n-1)\theta - (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Cos}\left((n+1)\theta - (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right]$$

y como tambien

$$\text{Cos}n\left(\theta - \alpha - \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \quad \text{es igual a:}$$

$$\frac{1}{2} \left[ -\text{Sen}\left((n-1)\theta - (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) + \text{Sen}\left((n+1)\theta - (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 v_{02} &= \sqrt{2}V \left\{ \frac{1}{3} \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} \left[ \text{Cos}\left((n-1)\theta - (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Cos}\left((n+1)\theta - (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{2} \left[ \text{Sen}\left((n+1)\theta - (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Sen}\left((n-1)\theta - (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right] \right\} \quad (124)
 \end{aligned}$$

Para la línea C:

$$v_{CN} = \sqrt{2}V \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \quad , \quad u_c(\theta) = u\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Así,

$$u_c(\theta) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Luego,

$$\begin{aligned} v_{03} &= v_{CN} \cdot u_c \\ &= \sqrt{2}V \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \left\{ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} \\ &= \sqrt{2}V \left\{ \frac{1}{3} \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right\} \end{aligned}$$

Como

$$\text{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

es igual a:

$$\frac{1}{2} \left[ \text{Cos}\left((n-1)\theta + (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Cos}\left((n+1)\theta + (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right]$$

y como también

$$\text{Cos}\left(\theta - \alpha + \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

es igual a:

$$\frac{1}{2} \left[ -\text{Sen}\left((n-1)\theta + (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) + \text{Sen}\left((n+1)\theta + (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right]$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 v_{03} = & \sqrt{2} \left\{ \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos \left( (n-1)\theta + (n-1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) - \cos \left( (n+1)\theta + (n+1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) \right] + \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \frac{1}{2} \left[ \operatorname{sen} \left( (n+1)\theta + (n+1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) - \operatorname{sen} \left( (n-1)\theta + (n-1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) \right] \left. \right\}
 \end{aligned}
 \tag{125}$$

El voltaje en la carga en todo el ciclo será:

$$v_0 = v_{01} + v_{02} + v_{03}$$

Sumando los términos fuera de las sumatorias en las ecuaciones (123), (124) y (125) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{2} V \left[ \frac{1}{3} \operatorname{Sen} \theta + \frac{1}{3} \operatorname{Sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \frac{1}{3} \operatorname{Sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right] \\
 & = \frac{1}{3} \sqrt{2} V \left[ \operatorname{Sen} \theta + \operatorname{Sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{Sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Como:  $\operatorname{Sen} \left( \theta - \frac{2\pi}{3} \right) + \operatorname{Sen} \left( \theta + \frac{2\pi}{3} \right) = -\operatorname{Sen} \theta,$

entonces esta suma se anula. Así,  $v_0 = v_{01} + v_{02} + v_{03}$  se puede expresar

$$\begin{aligned}
 v_0 = & \sqrt{2} V \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n \left[ \operatorname{Cos} \left( (n-1)\theta - n\alpha \right) - \operatorname{Cos} \left( (n+1)\theta - n\alpha \right) + \right. \right. \\
 & + \operatorname{Cos} \left( (n-1)\theta - (n-1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) - \operatorname{Cos} \left( (n+1)\theta - (n+1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) + \\
 & \left. \left. + \operatorname{Cos} \left( (n-1)\theta + (n-1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) - \operatorname{Cos} \left( (n+1)\theta + (n+1) \frac{2\pi}{3} - n\alpha \right) \right] + \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} b_n \left[ \text{Sen}((n+1)\theta - n\alpha) - \text{Sen}((n-1)\theta - n\alpha) + \right. \\
& \quad + \text{Sen}\left((n+1)\theta - (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Sen}\left((n-1)\theta - (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) + \\
& \quad \left. + \text{Sen}\left((n+1)\theta + (n+1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) - \text{Sen}\left((n-1)\theta + (n-1)\frac{2\pi}{3} - n\alpha\right) \right] \\
& \hspace{20em} (126)
\end{aligned}$$

Como  $a_n=0$  si  $n$  es par ó si  $n$  es múltiplo de 3, entonces desarrollando la sumatoria dentro de las llaves de (126), los términos que contienen cosenos para  $n=1,5,7,11,\dots$ , y llamando  $S_1$  a este desarrollo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_1 = & \frac{1}{2} a_1 \left[ \text{Cos}(-\alpha) - \text{Cos}(2\theta - \alpha) + \text{Cos}(-\alpha) - \text{Cos}(2\theta - 2\frac{2\pi}{3} - \alpha) + \text{Cos}(-\alpha) - \text{Cos}(2\theta + 2\frac{2\pi}{3} - \alpha) \right] + \\
& + \frac{1}{2} a_5 \left[ \text{Cos}(4\theta - 5\alpha) - \text{Cos}(6\theta - 5\alpha) + \text{Cos}(4\theta - 4\frac{2\pi}{3} - 5\alpha) \right. \\
& \quad \left. - \text{Cos}(6\theta - 6\frac{2\pi}{3} - 5\alpha) + \text{Cos}(4\theta + 4\frac{2\pi}{3} - 5\alpha) - \text{Cos}(6\theta + 6\frac{2\pi}{3} - 5\alpha) \right] \\
& + \frac{1}{2} a_7 \left[ \text{Cos}(6\theta - 7\alpha) - \text{Cos}(8\theta - 7\alpha) + \text{Cos}(6\theta - 6\frac{2\pi}{3} - 7\alpha) - \right. \\
& \quad \left. - \text{Cos}(8\theta - 8\frac{2\pi}{3} - 7\alpha) + \text{Cos}(6\theta + 6\frac{2\pi}{3} - 7\alpha) - \text{Cos}(8\theta + 8\frac{2\pi}{3} - 7\alpha) \right] + \\
& + \frac{1}{2} a_{11} \left[ \text{Cos}(10\theta - 11\alpha) - \text{Cos}(12\theta - 11\alpha) + \text{Cos}(10\theta - 10\frac{2\pi}{3} - 11\alpha) - \right. \\
& \quad \left. - \text{Cos}(12\theta - 12\frac{2\pi}{3} - 11\alpha) + \text{Cos}(10\theta + 10\frac{2\pi}{3} - 11\alpha) - \right. \\
& \quad \left. - \text{Cos}(12\theta + 12\frac{2\pi}{3} - 11\alpha) \right] + \\
& + \frac{1}{2} a_{13} \left[ \text{Cos}(12\theta - 13\alpha) - \text{Cos}(14\theta - 14\frac{2\pi}{3} - 13\alpha) + \right. \\
& \quad \left. + \text{Cos}(12\theta - 12\frac{2\pi}{3} - 13\alpha) - \text{Cos}(14\theta - 14\frac{2\pi}{3} - 13\alpha) + \right.
\end{aligned}$$

$$+ \text{Cos}(12\theta + 12 \cdot \frac{2\pi}{3} - 13\alpha) - \text{Cos}(14\theta + 14 \cdot \frac{2\pi}{3} - 13\alpha) \Big] + \dots$$

Como por manipuleo trigonométrico:

$$- \text{Cos}(2\theta - \alpha) - \text{Cos}(2\theta - 2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \alpha) - \text{Cos}(2\theta + 2 \cdot \frac{2\pi}{3} - \alpha) = 0$$

$$\text{Cos}(4\theta - 5\alpha) + \text{Cos}(4\theta - 4 \cdot \frac{2\pi}{3} - 5\alpha) + \text{Cos}(4\theta + 4 \cdot \frac{2\pi}{3} - 5\alpha) = 0$$

$$- \text{Cos}(8\theta - 7\alpha) - \text{Cos}(8\theta - 8 \cdot \frac{2\pi}{3} - 7\alpha) - \text{Cos}(8\theta + 8 \cdot \frac{2\pi}{3} - 7\alpha) = 0$$

⋮

En general, se verifica que los componentes armónicos pares que no son múltiplos de 3, se anulan.

También,

$$- \text{Cos}(6\theta - 6 \cdot \frac{2\pi}{3} - 5\alpha) = - \text{Cos}(6\theta - 5\alpha) = - \text{Cos}(6\theta + 6 \cdot \frac{2\pi}{3} - 5\alpha) ;$$

$$\text{Cos}(6\theta - 6 \cdot \frac{2\pi}{3} - 7\alpha) = \text{Cos}(6\theta - 7\alpha) = \text{Cos}(6\theta + 6 \cdot \frac{2\pi}{3} - 7\alpha) ;$$

$$- \text{Cos}(12\theta - 12 \cdot \frac{2\pi}{3} - 11\alpha) = - \text{Cos}(12\theta - 11\alpha) = - \text{Cos}(12\theta + 12 \cdot \frac{2\pi}{3} - 11\alpha) ;$$

$$\text{Cos}(12\theta - 12 \cdot \frac{2\pi}{3} - 13\alpha) = \text{Cos}(12\theta - 13\alpha) = \text{Cos}(12\theta + 12 \cdot \frac{2\pi}{3} - 13\alpha)$$

etc.

Vemos que existe cierta ley de formación para los armónicos múltiplos de 3.

Así, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
S_1 = & \frac{3}{2} a_1 \cos \alpha - \frac{3}{2} a_5 \cos(6\theta - 5\alpha) + \frac{3}{2} a_7 \cos(6\theta - 7\alpha) + \\
& - \frac{3}{2} a_{11} \cos(12\theta - 11\alpha) + \frac{3}{2} a_{13} \cos(12\theta - 13\alpha) + \dots
\end{aligned}
\tag{127}$$

Análogamente, como  $b_n=0$  si  $n$  es impar ó si  $n$  es múltiplo de 3, entonces desarrollando la sumatoria dentro de las llaves de (126) solo los términos que contienen senos para  $n=2,4,8,10,14$ , etc., y llamando  $S_2$  a este desarrollo, se obtiene:

$$\begin{aligned}
S_2 = & \frac{1}{2} b_2 \left[ \text{Sen}(3\theta - 2\alpha) - \text{Sen}(\theta - 2\alpha) + \text{Sen}\left(3\theta - 3 \cdot \frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) + \right. \\
& \left. - \text{Sen}\left(\theta - \frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) + \text{Sen}\left(3\theta + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) - \text{Sen}\left(\theta + \frac{2\pi}{3} - 2\alpha\right) \right] \\
& + \frac{1}{2} b_4 \left[ \text{Sen}(5\theta - 4\alpha) - \text{Sen}(3\theta - 4\alpha) + \right. \\
& + \text{Sen}\left(5\theta - 5 \cdot \frac{2\pi}{3} - 4\alpha\right) - \text{Sen}\left(3\theta - 3 \cdot \frac{2\pi}{3} - 4\alpha\right) + \\
& \left. + \text{Sen}\left(5\theta - 5 \cdot \frac{2\pi}{3} - 4\alpha\right) - \text{Sen}\left(3\theta + 3 \cdot \frac{2\pi}{3} - 4\alpha\right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} b_8 \left[ \text{Sen}(9\theta - 8\alpha) - \text{Sen}(7\theta - 8\alpha) + \text{Sen}\left(9\theta - 9 \cdot \frac{2\pi}{3} - 8\alpha\right) + \right. \\
& \left. - \text{Sen}\left(7\theta - 7 \cdot \frac{2\pi}{3} - 8\alpha\right) + \text{Sen}\left(9\theta + 9 \cdot \frac{2\pi}{3} - 8\alpha\right) - \text{Sen}\left(7\theta + 7 \cdot \frac{2\pi}{3} - 8\alpha\right) \right] + \\
& + \frac{1}{2} b_{10} \left[ \text{Sen}(11\theta - 10\alpha) - \text{Sen}(9\theta - 10\alpha) + \text{Sen}\left(11\theta - 11 \cdot \frac{2\pi}{3} - 10\alpha\right) + \right. \\
& \left. - \text{Sen}\left(9\theta - 9 \cdot \frac{2\pi}{3} - 10\alpha\right) + \text{Sen}\left(11\theta + 11 \cdot \frac{2\pi}{3} - 10\alpha\right) - \text{Sen}\left(9\theta + 9 \cdot \frac{2\pi}{3} - 10\alpha\right) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} b_{14} [\text{Sen}(150 - 14\alpha) - \text{Sen}(130 - 14\alpha) + \\
& + \text{Sen}(150 - 15 \cdot \frac{2\pi}{3} - 14\alpha) - \text{Sen}(130 - 13 \cdot \frac{2\pi}{3} - 14\alpha) + \\
& + \text{Sen}(150 + 15 \cdot \frac{2\pi}{3} - 14\alpha) - \text{Sen}(130 + 13 \cdot \frac{2\pi}{3} - 14\alpha)] + \\
& + \dots
\end{aligned}$$

También los armónicos que no son múltiplo de 3 se anulan, quedando sólo los que son múltiplos de 3. Así, la expresión para  $S_2$  se reduce a:

$$\begin{aligned}
S_2 = & \frac{3}{2} b_2 \text{Sen}(30 - 2\alpha) - \frac{3}{2} b_4 \text{Sen}(30 - 4\alpha) + \frac{3}{2} b_8 \text{Sen}(90 - 8\alpha) + \\
& - \frac{3}{2} b_{10} \text{Sen}(90 - 10\alpha) + \frac{3}{2} b_{14} \text{Sen}(150 - 14\alpha) - \frac{3}{2} b_{16} \text{Sen}(150 - 16\alpha) + \dots
\end{aligned} \tag{128}$$

De  $S_1$  vemos que hay un término continuo:

$$\frac{3}{2} a_1 \text{Cos}\alpha = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \text{Cos}\alpha.$$

También vemos que en  $S_1$  y  $S_2$  existen armónicos múltiplos de 3 solamente.

Esto era de esperarse ya que la onda de salida que muestra la figura 3.2 es de frecuencia 3 veces la frecuencia de la fuente de alimentación.

Como vimos anteriormente,  $a_n=0$  si  $n$  es múltiplo de 3 ó si  $n$  es par.

Análogamente,  $b_n=0$ , si  $n$  es múltiplo de 3 ó si  $n$  es impar. O sea,  $a_n=0=b_n$  si  $n$  es múltiplo de 3. Es decir,  $a_n$  y  $b_n$  se anulan para  $n = 3k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$

Todo número natural  $n > 1$  es de la forma:

$$3k - 1 \quad \text{ó} \quad 3k \quad \text{ó} \quad 3k + 1 \quad , \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Luego, si  $n$  no es múltiplo de 3, entonces  $n=3k-1$  ó  $n=3k+1$ .

Así,  $a_n = a_{3k-1}$  ó  $a_n = a_{3k+1}$ ,  $b_n = b_{3k-1}$  ó  $b_n = b_{3k+1}$

Vemos de la ecuación (127) que un armónico cualquiera en  $S_1$ , múltiplo de 3 de la frecuencia de la fuente, es de la forma:

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{2} a_{3k+1} \cos(3k\theta - (3k+1)\alpha) - \frac{3}{2} a_{3k-1} \cos(3k\theta - (3k-1)\alpha) \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ a_{3k+1} [\cos 3k\theta \cdot \cos(3k+1)\alpha + \operatorname{Sen} 3k\theta \cdot \operatorname{Sen}(3k+1)\alpha] + \right. \\
 & \quad \left. - a_{3k-1} [\cos(3k-1)\alpha \cdot \cos 3k\theta + \operatorname{Sen}(3k-1)\alpha \cdot \operatorname{Sen} 3k\theta] \right\} \\
 &= \frac{3}{2} \left\{ [a_{3k+1} \operatorname{Sen}(3k+1)\alpha - a_{3k-1} \operatorname{Sen}(3k-1)\alpha] \operatorname{Sen} 3k\theta + \right. \\
 & \quad \left. + [a_{3k+1} \cos(3k+1)\alpha - a_{3k-1} \cos(3k-1)\alpha] \cos 3k\theta \right\}
 \end{aligned} \tag{129}$$

De las ecuaciones (122) se obtienen:

$$\left. \begin{aligned}
 a_{3k-1} &= \frac{2}{(3k-1)\pi} \operatorname{Sen}(3k-1) \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Sen}(3k-1) \frac{\pi}{2} \\
 a_{3k+1} &= \frac{2}{(3k+1)\pi} \operatorname{Sen}(3k+1) \frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{Sen}(3k-1) \frac{\pi}{2} \\
 b_{3k-1} &= \frac{2}{(3k-1)\pi} \operatorname{Sen}(3k-1) \frac{\pi}{3} \cdot \cos(3k-1) \frac{\pi}{2} \\
 b_{3k+1} &= \frac{2}{(3k+1)\pi} \operatorname{Sen}(3k+1) \frac{\pi}{3} \cdot \cos(3k+1) \frac{\pi}{2}
 \end{aligned} \right\} \tag{130}$$

La tabla III muestra los valores de estas constantes, para  $k=1,2,3,\dots,13$ . De esta tabla deducimos que:

$k$	$\text{sen}(3k-1)\frac{\pi}{3}$	$\text{cos}(3k-1)\frac{\pi}{2}$	$a_{3k-1}$	$b_{3k-1}$	$\text{sen}(3k+1)\frac{\pi}{3}$	$\text{cos}(3k+1)\frac{\pi}{2}$	$a_{3k+1}$	$b_{3k+1}$
1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{2})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{4})$
2	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{5})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{7})$	0
3	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{8})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{10})$
4	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{11})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{13})$	0
5	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{14})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{16})$
6	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{17})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{19})$	0
7	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{20})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{22})$
8	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{23})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{25})$	0
9	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{26})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{28})$
10	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{29})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{31})$	0
11	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{32})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{34})$
12	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{35})$	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{37})$	0
13	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(-\frac{1}{38})$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	$\frac{\sqrt{3}}{\pi}(\frac{1}{40})$

TABLA III

$$a_{3k-1} = \begin{cases} 0 & \text{Si } k=1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{-1}{(3k-1)} \right) & \text{Si } k=2, 4, 6, 8, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{(3k-1)} \right) & \text{Si } k=4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

$$a_{3k+1} = \begin{cases} 0 & \text{Si } k=1, 3, 5, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{-1}{(3k+1)} \right) & \text{Si } k=2, 4, 6, 8, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{(3k+1)} \right) & \text{Si } k=4, 8, 12, \dots \end{cases}$$

$$b_{3k-1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{-1}{(3k-1)} \right) & \text{Si } k=1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{Si } k=2, 4, 6, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{(3k-1)} \right) & \text{Si } k=3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

$$b_{3k+1} = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{-1}{(3k+1)} \right) & \text{Si } k=1, 5, 9, \dots \\ 0 & \text{Si } k=2, 4, 6, \dots \\ \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left( \frac{1}{(3k+1)} \right) & \text{Si } k=3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Así, vemos que para un mismo valor de  $k$ ,  $a_{3k-1}$  y  $a_{3k+1}$  son nulos ó si no son nulos, coinciden en signo. Lo mismo podemos decir de  $b_{3k-1}$  y  $b_{3k+1}$ . Luego, si en la expresión (129) tomamos  $a_{3k-1}$  y  $a_{3k+1}$  ambos positivos (para  $k=4,8,12,\dots$ ), entonces esta expresión es igual a:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{3k+1} \text{Sen}(3k+1)\alpha - \frac{1}{3k-1} \text{Sen}(3k-1)\alpha \right] \text{Sen}3k\theta + \left[ \frac{1}{3k+1} \text{Cos}(3k+1)\alpha - \frac{1}{3k-1} \text{Cos}(3k-1)\alpha \right] \text{Cos}3k\theta \right\} \quad (131)$$

Utilizando la transformación:

$$a \text{ Sen}\beta + b \text{ Cos}\beta = A \text{ Sen}(\beta+\phi)$$

donde  $A = \sqrt{a^2+b^2}$ ,  $\phi = \arctan \frac{b}{a}$ , la expresión (131) es equivalente a:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \frac{1}{(3k+1)^2} \text{Sen}^2(3k+1)\alpha + \frac{1}{(3k-1)^2} \text{Sen}^2(3k-1)\alpha + \right. \\ & - \frac{2 \text{Sen}(3k+1)\alpha \cdot \text{Sen}(3k-1)\alpha}{(3k-1)(3k+1)} + \frac{1}{(3k+1)^2} \text{Cos}^2(3k+1)\alpha + \\ & \left. + \frac{1}{(3k-1)^2} \text{Cos}^2(3k-1)\alpha - \frac{2 \text{Cos}(3k+1)\alpha \cdot \text{Cos}(3k-1)\alpha}{(3k-1)(3k+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3k\theta + \phi_{3k}) \end{aligned}$$

Factorizando y simplificando esta expresión se transforma en :

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \frac{1}{(3k+1)^2} + \frac{1}{(3k-1)^2} - \frac{2 \text{Cos}2\alpha}{(3k-1)(3k+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3k\theta + \phi_{3k})$$

(132)

Donde el ángulo de desfasaje es:

$$\phi_{3\pi} = \arctan \left( \frac{\frac{\cos(3k+1)\alpha}{3k+1} - \frac{\cos(3k-1)\alpha}{3k-1}}{\frac{\sin(3k+1)\alpha}{3k+1} - \frac{\sin(3k-1)\alpha}{3k-1}} \right) \quad (133)$$

$$k=4,8,12,\dots$$

Si en la expresión (129)  $a_{3k-1}$  y  $a_{3k+1}$  son negativos (para  $k=2,6,8,\dots$ ), entonces esta expresión es igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \left[ \frac{-1}{3k+1} \sin(3k+1)\alpha + \frac{1}{3k-1} \sin(3k-1)\alpha \right] \sin 3k\theta + \right. \\ & \left. + \left[ \frac{-1}{3k+1} \cos(3k+1)\alpha - \frac{1}{3k-1} \cos(3k-1)\alpha \right] \cos 3k\theta \right\} \quad (134) \end{aligned}$$

Nuevamente transformando sólo a función seno, también se obtiene las mismas expresiones (132) y (133), pero ahora para  $k=2,6,10,\dots$ . Es decir, las ecuaciones (132) y (133) son válidos para todo  $k$  par.

Análogamente de la expresión (128), un armónico cualquiera en  $S_2$ , múltiplo de 3 de la frecuencia de la fuente, es de la forma:

$$\frac{3}{2} [b_{3k-1} \sin(3k\theta - (3k-1)\alpha) - b_{3k+1} \sin(3k\theta - (3k+1)\alpha)]$$

el cual desarrollando, se transforma en:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \{ [b_{3k-1} \cos(3k-1)\alpha - b_{3k-1} \cos(3k+1)\alpha] \sin 3k\theta + \\ & + \frac{3}{2} [-b_{3k-1} \sin(3k-1)\alpha + b_{3k-1} \sin(3k+1)\alpha] \cos 3k\theta \} \quad (135) \end{aligned}$$

Si ambos  $b_{3k-1}$  y  $b_{3k+1}$  son positivos (para  $k=3,7,11,\dots$ ), entonces la expresión (135) es equivalente a:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{3k-1} \cos(3k-1)\alpha - \frac{1}{3k+1} \cos(3k+1)\alpha \right] \text{Sen}3k\theta + \left[ -\frac{1}{3k-1} \text{Sen}(3k-1)\alpha + \frac{1}{3k+1} \text{Sen}(3k+1)\alpha \right] \text{Cos}3k\theta \right\} \quad (136)$$

Si ambos  $b_{3k-1}$  y  $b_{3k+1}$  son negativos (para  $k=1,5,9,\dots$ ), entonces (135) se transforma en otra expresión que se diferenciará de (136) tan sólo en que cambiará el signo de cada término dentro de los corchetes. Pero sea que  $b_{3k-1}$  y  $b_{3k+1}$  sean ambos positivos o ambos negativos, la expresión equivalente de (135), en términos sólo de  $\text{Sen}3k\theta$ , es también:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left[ \frac{1}{(3k+1)^2} + \frac{1}{(3k-1)^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{(3k-1)(3k+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3k\theta + \phi_{3k})$$

pero en este caso,

$$\phi_{3k} = \arctan \left( \frac{\frac{\text{Sen}(3k+1)\alpha}{3k+1} - \frac{\text{Sen}(3k-1)\alpha}{3k-1}}{-\frac{\text{Cos}(3k+1)\alpha}{3k+1} + \frac{\text{Cos}(3k-1)\alpha}{3k-1}} \right) \quad (137)$$

$$k=1,3,5,7,\dots$$

Así, de todo lo visto, podemos concluir que el voltaje  $v_0$  en la carga del rectificador trifásico de media onda controlado, trabajando en el modo de operación de corriente continua, es:

$$v_0 = \sqrt{2}V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) \left\{ \cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(3n-1)^2} + \frac{1}{(3n+1)^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{(3n-1)(3n+1)} \right] \text{Sen}(3n\theta + \phi_{3n}) \right\} \quad (138)$$

$$\text{donde: } \phi_{3n} = -\frac{n\pi}{2} + \arctan \left( \frac{\frac{\cos(3n+1)\alpha}{3n+1} - \frac{\cos(3n-1)\alpha}{3n-1}}{\frac{\text{Sen}(3n+1)\alpha}{3n+1} - \frac{\text{Sen}(3n-1)\alpha}{3n-1}} \right) \quad (139)$$

Así pues, vemos que el voltaje de salida contiene una componente continua:

$$V_0 = \sqrt{2}V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) \cos\alpha \quad (140)$$

y una serie infinita de componentes alternas (ripple) múltiplos de 3 de la frecuencia de la fuente, siendo la frecuencia fundamental el triple de la frecuencia de la fuente.

Si el circuito de carga es R-L con fuerza electromotriz  $V_c$ , entonces la corriente en la carga será:

$$I_0 = \frac{V_0 - V_c}{R}$$

El contenido armónico de la corriente  $i_0$  en la carga será entonces:

$$\left. \begin{aligned} i_0 &= I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{Z_{3n}} \text{sen}(3n\theta + \phi_{3n} - \phi'_{3n}) \\ \text{donde} \\ A_n &= \left[ \frac{1}{(3n-1)^2} + \frac{1}{(3n+1)^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{(3n-1)(3n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ Z_{3n} &= \sqrt{R^2 + (3n\omega L)^2}, \quad \phi'_{3n} = \arctan \frac{3n\omega L}{R} \end{aligned} \right\} \quad (141)$$

### 3.2 Rectificador trifásico controlado de onda completa

Existen dos tipos fundamentales de rectificadores trifásicos-controlados de onda completa. Un tipo denominado rectificador de 6 pulsos con punto medio, y otro denominado rectificador de 6 pulsos tipo puente.

#### 3.2.1 Rectificador de seis pulsos tipo punto medio.

La figura 3.11 muestra el rectificador de 6 pulsos tipo punto medio. En esta figura los 6 voltajes alternos del secundario están desfasados uno del otro en  $60^\circ$ . Este circuito tiene la desventaja de que cada tiristor conduce solo  $60^\circ$  durante cada ciclo, por lo que su factor de utilización del circuito es relativamente pobre, razón por la cual no es usado en la práctica.

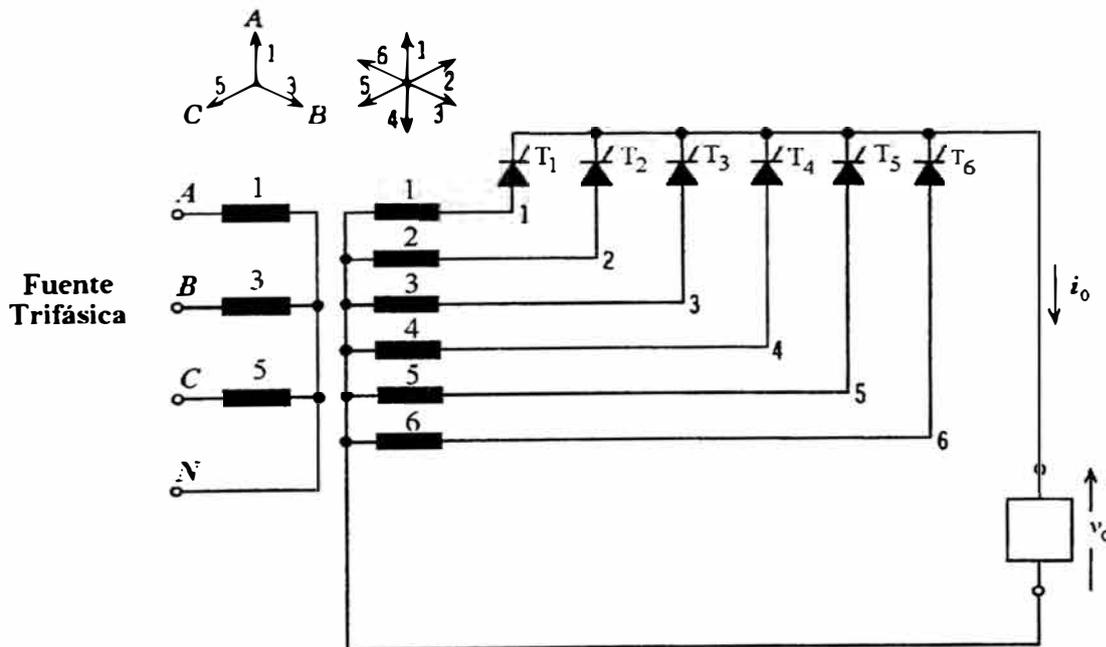


Fig 3.11 Circuito rectificador de 6 pulsos tipo punto medio.

Se obtiene una mejor utilización de los tiristores interponiendo un reactor de interfase en los terminales continuos de 2 circuitos rectificadores de tres pulsos,

tal como muestra la figura 3.12, los cuales están desfasados uno del otro en  $180^\circ$ .

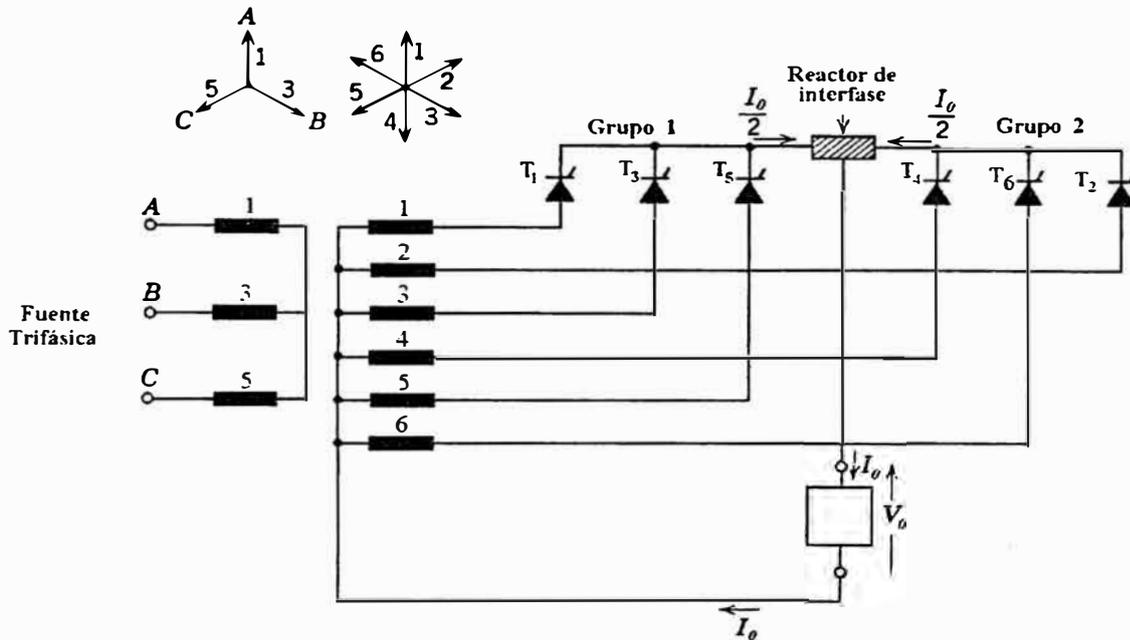


Fig. 3.12 Circuito rectificador de 6 pulsos tipo punto medio con reactor de interfase.

Cada grupo de 3 pulsos opera independientemente uno del otro, motivo por el cual cada tiristor conduce por un periodo de  $120^\circ$ . El voltaje continuo de salida de cada grupo es el mismo, por lo que idealmente, no habrá diferencia de voltaje continuo a través del reactor de interfase, y así, el voltaje continuo  $V_0$  en la carga es igual a los voltajes continuos de cada grupo. También idealmente la corriente continua en cada grupo serán iguales pero solo la mitad de lo que tendría si la carga estuviera conectada solo a uno de los grupos. Así, este circuito equivale a conectar en paralelo los voltajes continuos de cada grupo. En cambio, debido al desplazamiento de fase de  $180^\circ$  existentes entre los voltajes alternos ripple en los terminales de cada grupo, aparecerá entre los terminales

del reactor (puntos A y B en la Fig.3.12), un voltaje alterno ripple cuya frecuencia fundamental sera 3 veces la frecuencia de linea. Es funcion del reactor de interfase soportar este voltaje alterno a fin de mantener independiente la operacion en cada uno de los dos grupos de tres pulsos .

El voltaje instantaneo (continua mas alterna) , que aparecerá en el punto medio del reactor de interfase (punto C en la Fig.3.12) , sera la media aritmética de los voltajes instantaneos de los grupos individuales.

Asi, si  $v_{03_1}$  , es el voltaje en los terminales de salida del primer grupo y  $v_{03_2}$  el voltaje en los terminales de salida del segundo grupo, entonces el voltaje  $V_0$  en la carga sera:

$$v_0 = \frac{1}{2} (v_{03_1} + v_{03_2}) \quad (142)$$

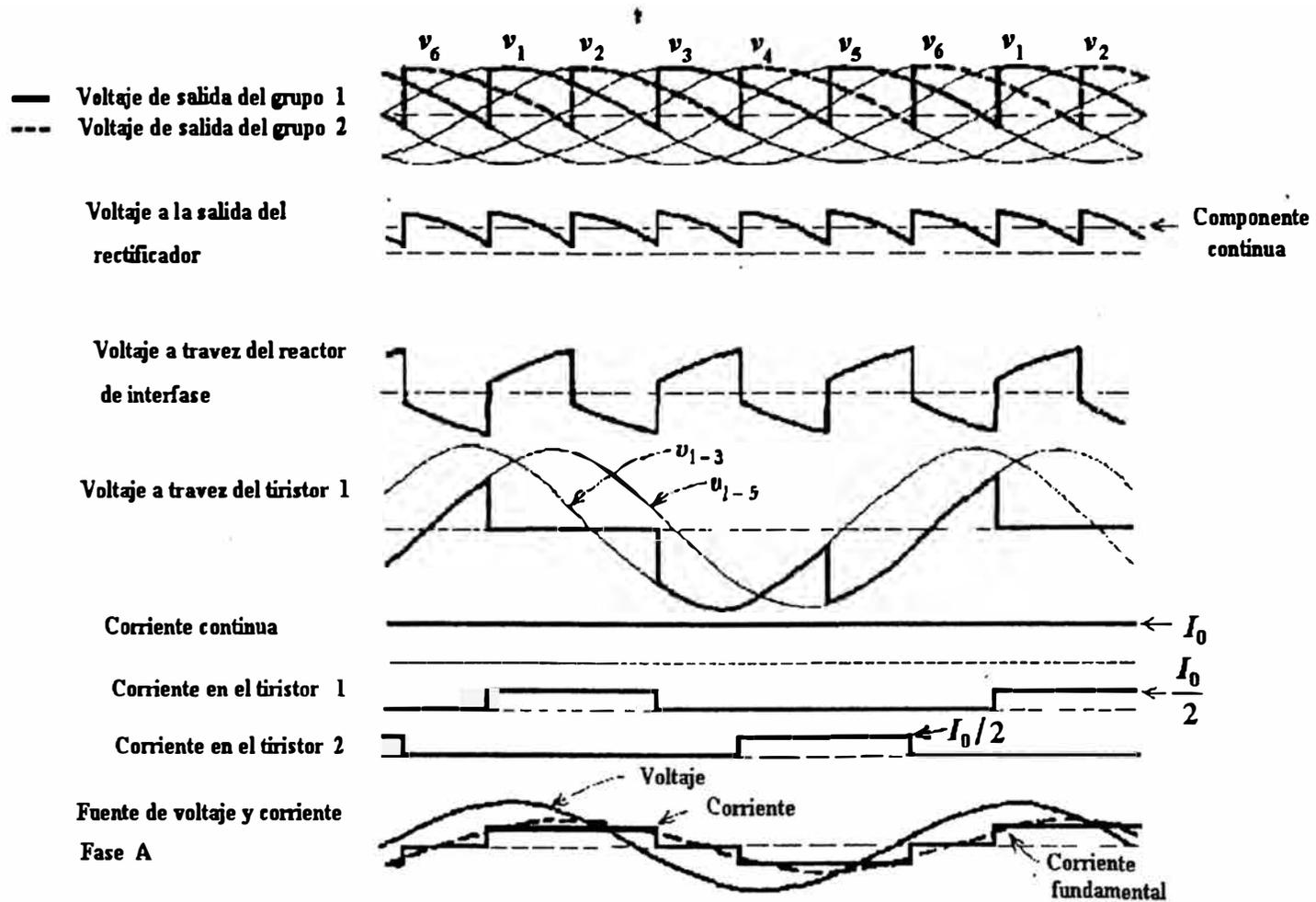
La figura 3.13 muestra la forma de onda asociada al circuito de la figura 3.12. Vemos que  $v_0$  es una onda de frecuencia 6 veces la de la frecuencia de linea. De la ecuacion (138), el contenido armónico del voltaje  $v_{03_1}$  es:

$$v_{03_1}(\theta) = \sqrt{2} V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) \left\{ \cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(3n-1)^2} + \frac{1}{(3n+1)^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(3n-1)(3n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3n\theta + \phi_{3n}) \right\} \quad (143)$$

Reemplazando  $\theta$  por  $\theta + \pi$  en (143) se obtiene el contenido armónico de  $v_{03_2}$ .

Como:  $\text{Sen}[3n(\theta + \pi) + \phi_{3n}] = \text{Sen}[(3n\theta + \phi_{3n}) + 3n\pi]$  , entonces:

$$\text{Sen}[3n(\theta + \pi) + \phi_{3n}] = \begin{cases} -\text{Sen}(3n\theta + \phi_{3n}) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Sen}(3n\theta + \phi_{3n}) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$



**Fig. 3.13** Formas de onda en el rectificador de onda completa tipo punto medio con reactor de interfase ,  $\alpha = 45^\circ$ .

Así, los desarrollos de  $v_{03_1}$  y  $v_{03_2}$  son:

$$\begin{aligned}
 v_{03_1} = \sqrt{2} V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) & \left[ \cos \alpha + \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{2 \cdot 4} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3\theta + \phi_3) + \right. \\
 & + \left( \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{5 \cdot 7} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(6\theta + \phi_6) + \\
 & + \left( \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{8 \cdot 10} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(9\theta + \phi_9) + \\
 & \left. + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{11 \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) + \dots \right] \quad (144)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_{03_2} = \sqrt{2} V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) & \left[ \cos \alpha - \left( \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{2 \cdot 4} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(3\theta + \phi_3) + \right. \\
 & + \left( \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{5 \cdot 7} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(6\theta + \phi_6) - \\
 & - \left( \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{8 \cdot 10} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(9\theta + \phi_9) + \\
 & \left. + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{11 \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) + \dots \right] \quad (145)
 \end{aligned}$$

Sumando se cancelan los terminos impares, resultando:

$$\begin{aligned}
 v_0 = \sqrt{2} V \left( \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\pi} \right) & \left[ \cos \alpha + \left( \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(5) \cdot 7} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(6\theta + \phi_6) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(11) \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) + \dots \right]
 \end{aligned}$$

Así:

$$v_0 = \sqrt{2} V_m \frac{3}{2} \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \cos \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(6n-1)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(6n-1)(6n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \sin(6n + \phi_{6n}) \right\} \quad (146)$$

donde:

$$\phi_{6n} = -\pi + \arctan \left( \frac{\frac{\cos(6n+1)\alpha}{(6n+1)} - \frac{\cos(6n-1)\alpha}{(6n-1)}}{\frac{\sin(6n+1)}{(6n+1)} - \frac{\sin(6n-1)}{(6n-1)}} \right)$$

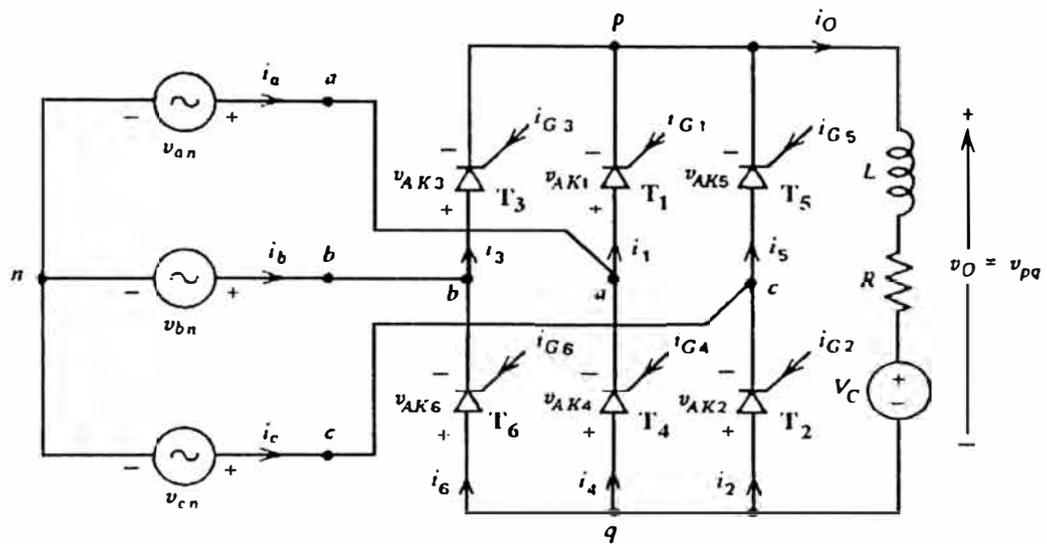
$n = 1, 2, 3, \dots$

### 3.2.2 Rectificador de seis pulsos tipo puente.

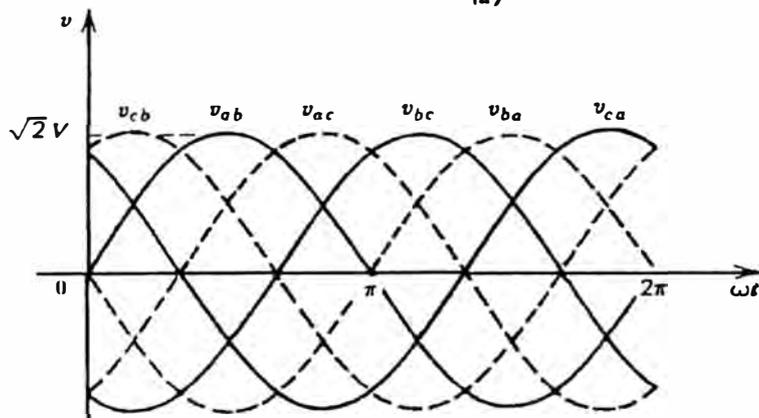
La figura 3.14 muestra el circuito rectificador trifásico de onda completa tipo puente. En este circuito se ha considerado el caso general de una carga R-L, la fuerza electromotriz.

El Para facilitar el análisis del funcionamiento del circuito consideramos el caso particular de carga resistiva. Es decir,  $L = 0$  y  $V_c = 0$ .

Consideremos que en la figura 3.14 todos los tiristores están en el estado ON en todo el ciclo. Esto es equivalente a reemplazar los tiristores por diodos, originando un rectificador trifásico de onda completa no controlado. El factor que determinará cuáles de los tiristores conducen en un instante cualquiera, es la combinación de las tres fuentes de voltajes  $v_{AN}$ ,  $v_{BN}$ ,  $v_{CN}$ , tal que en dicho instante, da el mayor valor al voltaje  $v_{pq} = v_0$ .



(a)



(b)

Fig 3.14 Circuito rectificador de 6 pulsos tipo puente.

La combinación de las tres fuentes de voltaje son los voltajes línea a línea  $v_{ab}$ ,  $v_{bc}$ ,  $v_{ca}$ , y el voltaje  $v_{pq}$  alcanzará un valor máximo cuando cualquiera de los tres voltajes línea a línea este en su máximo positivo o su máximo negativo.

La figura 3.14 (b) muestra los voltajes línea a línea. Cuando  $v_{ab}$ , esta en su máximo valor positivo (en  $\omega t = \frac{\pi}{2}$ ), los tiristores  $T_1$  y  $T_6$  están conduciendo, dando:

$$v_{pq} = v_0 = v_{ab} \quad , \quad \omega t = \frac{\pi}{2}$$

Cuando  $v_{ab}$  esta en su máximo valor negativo ( $v_{ba}$  e esta en su máximo valor positivo) los tiristores  $T_3$  y  $T_4$  están conduciendo, dando:

$$v_{pq} = v_0 = -v_{ab} = v_{ba} \quad , \quad \omega t = \frac{3\pi}{2}$$

El mismo argumento puede hacerse para cada uno de los otros voltajes de línea.

Si los voltajes  $v_{ba}$ ,  $v_{cb}$ ,  $v_{AC}$  se adicionan a los voltajes de línea, como se muestra con las líneas punteadas de la figura 3.14 (b), entonces en cualquier instante el voltaje aplicado a la carga y el par de tiristores que está conduciendo se determina viendo cual de las seis formas de onda tiene el mayor valor positivo. Este mayor valor positivo es el valor de  $v_0$ .

De la figura se deduce que en la carga circulará una corriente de seis pulsos por ciclo. Así, el circuito equivalente para un rectificador trifásico de onda completa es como muestra la figura 3.15 (a).

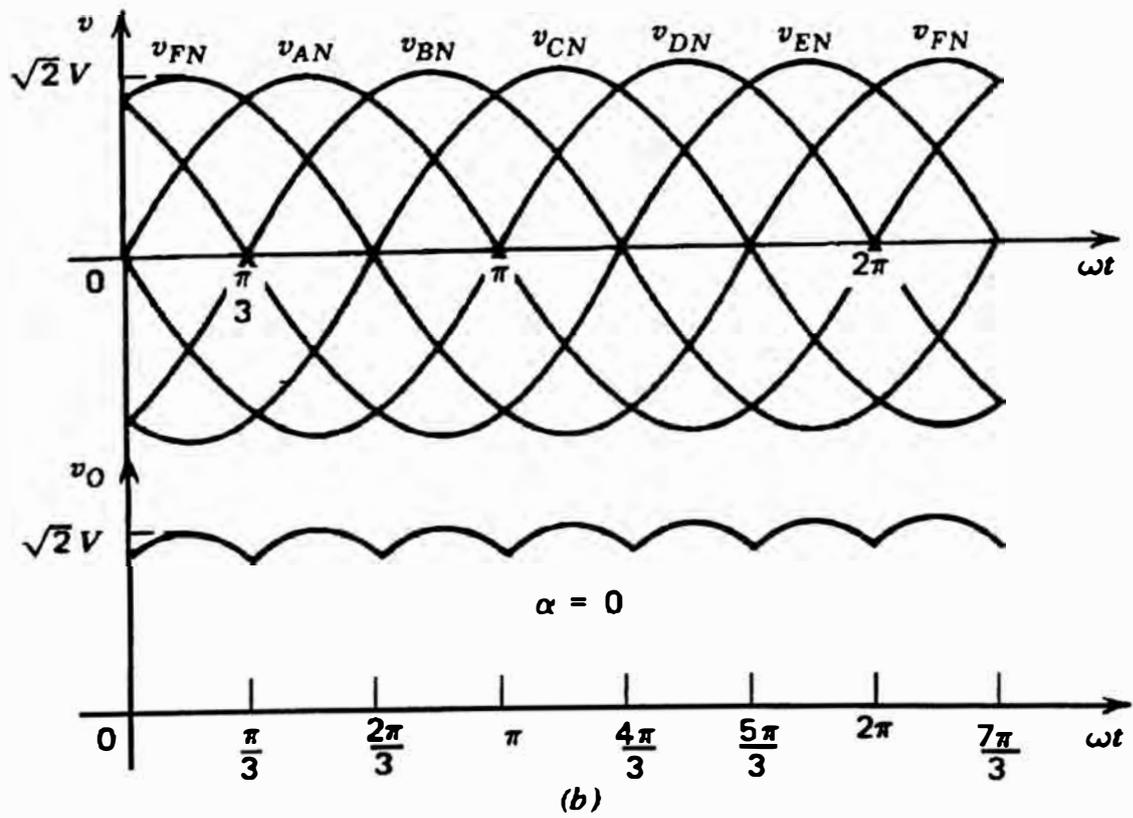
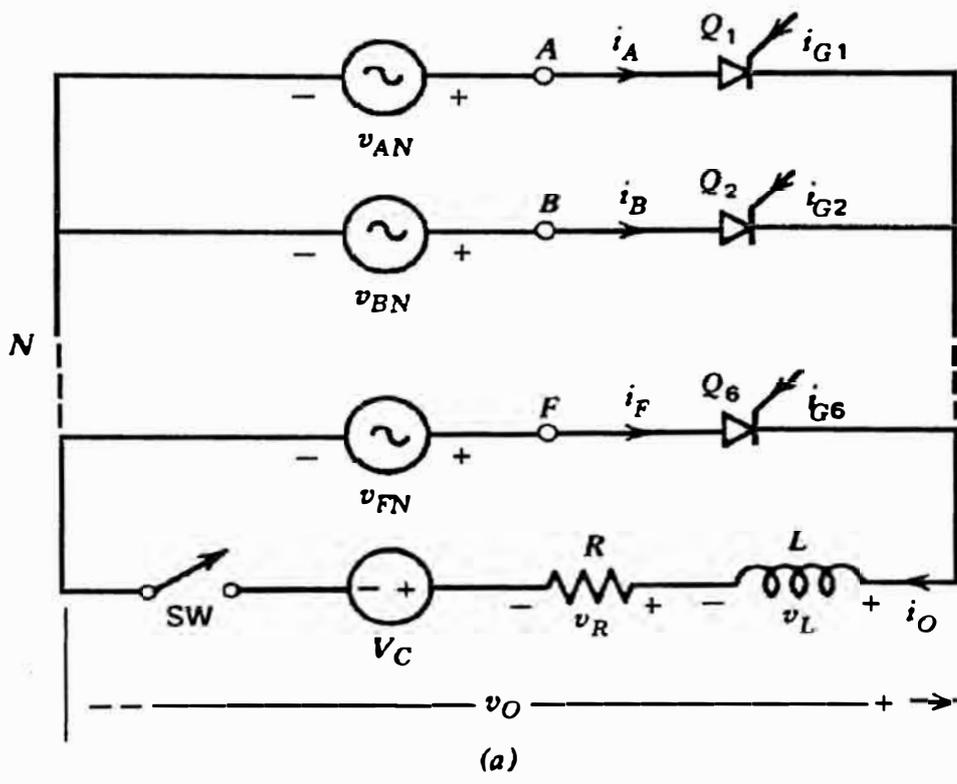


Fig. 3.15 Circuito equivalente para el rectificador de la Fig. 3.14

Como en el caso del circuito equivalente del rectificador monofásico de onda completa tipo puente (fig. 2.13), cada tiristor de la figura 3.15(a) representa dos tiristores en serie en el circuito real. Sin embargo, estos dos tiristores no son puestos en el estado ON o conmutados simultáneamente, como si sucede en el rectificador monofásico de onda completa tipo puente.

La tabla IV muestra la correspondencia existente entre los voltajes y tiristores de los dos circuitos real y equivalente.

INTERVALO	CIRCUITO REAL		CIRCUITO EQUIVALENTE	
	Voltaje aplicado en la carga	Tiristores conduciendo	Voltaje aplicado en la carga	Tiristores conduciendo
$\frac{\pi}{3} < \omega t < \frac{2\pi}{3}$	$V_{ab}$	$T_6, T_1$	$V_{AN}$	$T_1$
$\frac{2\pi}{3} < \omega t < \pi$	$V_{ac}$	$T_1, T_2$	$V_{BN}$	$T_2$
$\pi < \omega t < \frac{4\pi}{3}$	$V_{bc}$	$T_2, T_3$	$V_{CN}$	$T_3$
$\frac{4\pi}{3} < \omega t < \frac{5\pi}{3}$	$V_{ba}$	$T_3, T_4$	$V_{DN}$	$T_4$
$\frac{5\pi}{3} < \omega t < 2\pi$	$V_{ca}$	$T_4, T_5$	$V_{EN}$	$T_5$
$2\pi < \omega t < \frac{7\pi}{3}$	$V_{cb}$	$T_5, T_6$	$V_{FN}$	$T_6$

TABLA IV

La figura 3.15 (b) muestra las formas de onda de las fuentes de voltaje equivalentes y la figura 3.16 muestra el diagrama fasorial de las seis fuentes de voltaje equivalentes y las tres fuentes de voltaje trifasicos reales.

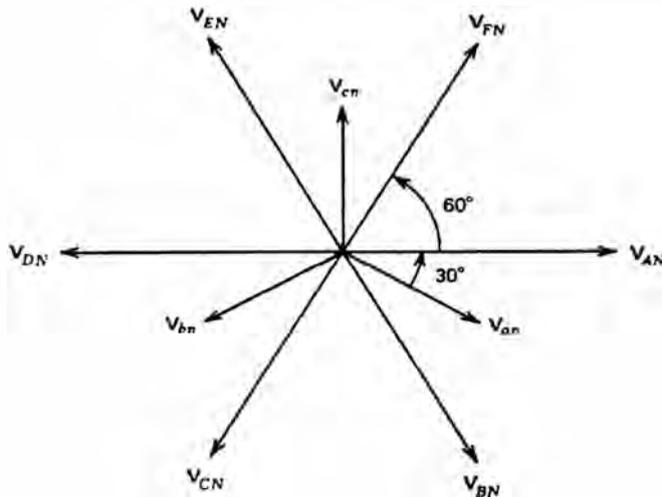


Fig 3.16 Diagrama fasorial de las fuentes de voltajes

Así, si:

$$v_{an} = \frac{\sqrt{2} V}{\sqrt{3}} \text{Sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} v_{AN} &= v_{ah} = \sqrt{2} V \text{Sen} \omega t & v_{DN} &= \sqrt{2} V \text{Sen}(\omega t - \pi) \\ v_{BN} &= \sqrt{2} V \text{Sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right) & v_{EN} &= \sqrt{2} V \text{Sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \\ v_{CN} &= \sqrt{2} V \text{Sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) & v_{FN} &= \sqrt{2} V \text{Sen}\left(\omega t - \frac{5\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

Si los 6 tiristores de la figura 3.14 (o lo 6 tiristores de la figura 3.15) se reemplazan por diodos, entonces el diodo que reemplazaría al tiristor

$T_1$  empezaría a conducir, en forma natural, en el instante en que  $\omega t = \pi$

Desde este instante se empieza a medir el ángulo de retardo  $\alpha$  en que se dispara el tiristor  $T_1$ . Es decir,  $\alpha = 0$  en  $\omega t = \frac{\pi}{3}$ .

De la tabla IV, vemos que cada tiristor conduce  $60^\circ$ . Este será el máximo intervalo de conducción de cada tiristor para cualquier ángulo de retardo  $\alpha$ , por lo que, al igual que el rectificador de 6 pulsos tipo punto medio (figura 3.11), su factor de utilización del rectificador es también relativamente pobre. Sin embargo, hemos visto que los terminales de dos grupos de rectificadores de tres pulsos pueden ser conectados en paralelo uno con otro, dando como resultado un rectificador de 6 pulsos (figura 3.12) en la que cada tiristor puede conducir hasta  $120^\circ$  grados. Por la misma razón, es posible conectar los terminales de salida de los dos grupos de tres pulsos en serie uno con otro, tal como muestra la figura 3.17 (a). El grupo de tres pulsos, denominado grupo "positivo" provee en sus terminales de salida, cuando  $\alpha = 0$ , un voltaje cuya componente continua es positivo con respecto al neutro. El segundo grupo de tres pulsos, denominado grupo "negativo" por la conexión inversa de los tiristores, provee en sus terminales de salida, cuando  $\alpha = 0$ , un voltaje cuya componente continua es negativo con respecto al neutro. Es evidente que si las corrientes continuas de ambos grupos "positivo" y "negativo" son iguales, entonces la corriente continua neta que fluye hacia la conexión con el neutro será cero, y por lo tanto, esta conexión puede ser desconectada. Así, si el neutro es omitido, entonces los dos grupos son forzados a compartir una carga en continua común, y

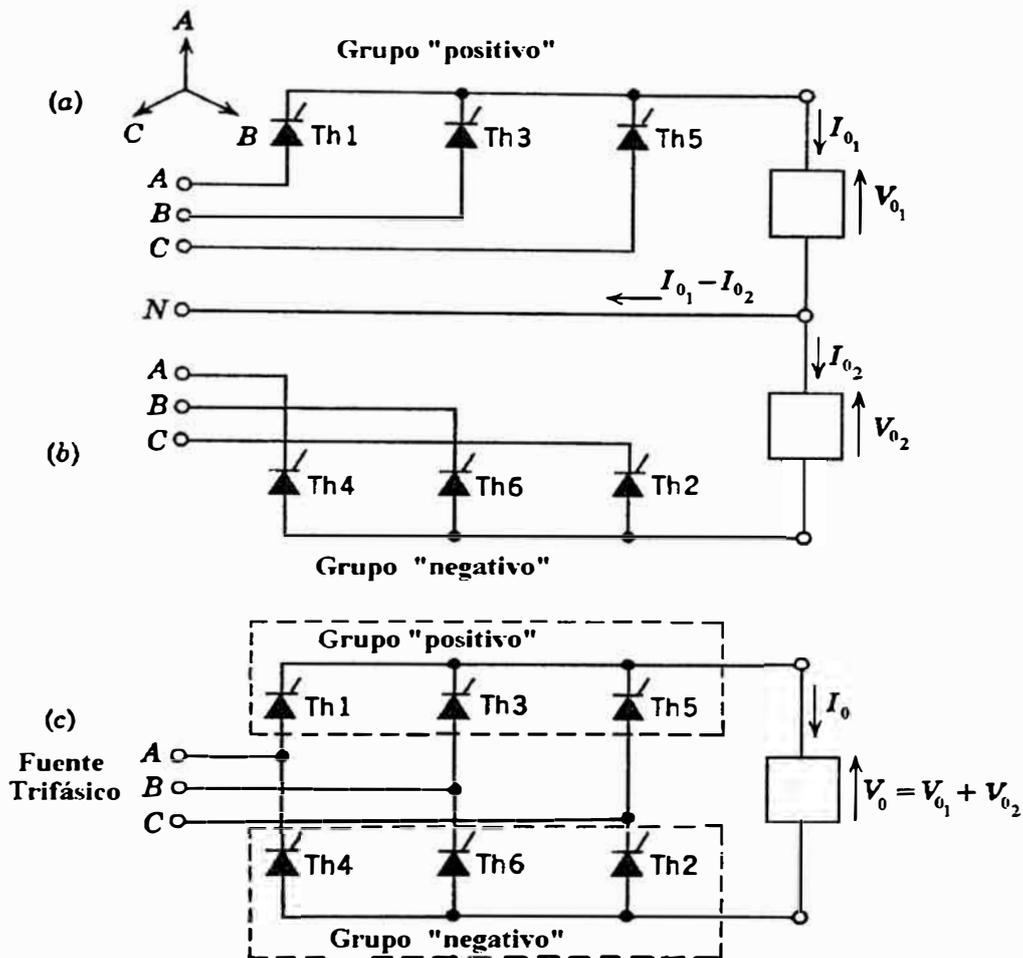
evidentemente, la corriente continua de cada uno de ellos será la misma. El resultado de la combinación (eliminando la conexión con el neutro) es el rectificador trifásico de onda completa tipo puente, tal como muestra la figura 3.17. Las formas de onda asociadas con este circuito, cuando funciona en el modo de corriente continua, es como muestra la figura 3.18. Cada tiristor conduce  $120^\circ$ , aumentando el factor de utilización de los tiristores. El ángulo  $\alpha$  de retardo se mide a partir de:  $\alpha = \frac{\pi}{6}$

Los tiristores son desfasados en intervalos de ancho  $\frac{\pi}{3}$ . En  $\omega t = \frac{\pi}{6} + \alpha$  se encuentra conduciendo el tiristor  $T_6$  y el tiristor  $T_1$  es disparado (puesto ON). Durante el intervalo  $\frac{\pi}{6} + \alpha \leq \omega t \leq \frac{\pi}{2} + \alpha$ , conducen los tiristores  $T_1$  y  $T_6$  y el voltaje que aparece en la carga es el voltaje de línea a línea

$V_{ab} = V_{an} - V_{bn}$ . En  $\omega t = \frac{\pi}{6} + \alpha$  es disparado el tiristor  $T_2$  polarizándose inmediatamente en sentido inverso el tiristor  $T_6$ , por lo que será puesto en OFF por conmutación natural. Durante el intervalo  $\frac{\pi}{2} + \alpha \leq \omega t \leq \frac{5\pi}{6} + \alpha$ , conducen los tiristores  $T_1$  y  $T_2$  y el voltaje que aparece en la carga

es el voltaje línea a línea  $V_{ac} = V_{an} - V_{cn}$ .

Como el circuito tipo puente se compone de dos grupos de tres pulsos: uno "positivo" y otro "negativo", desfasados uno del otro en  $180^\circ$  y con sus terminales conectados en serie, es evidente que el voltaje continuo que aparecerá en los terminales del circuito puente será el doble que el voltaje continuo que aparecerá en los terminales de cada uno de los grupos.



**Fig 3.17** Construcción del rectificador de 6 pulsos tipo puente a partir de 2 circuitos de 3 pulsos tipo punto medio.

También, el voltaje instantáneo (continua mas alterna) que aparecerá en los terminales del circuito puente, será la suma de los voltajes instantáneos que aparecen en cada uno de los terminales de salida de los grupos de tres pulsos individuales. Así, si  $V_{03_1}$  y  $V_{03_2}$  son los voltajes de salida de cada uno de los dos grupos individuales, entonces el voltaje  $V_0$  en el circuito de carga esta expresado por la ecuación:

$$V_0 = V_{03_1} + V_{03_2} \quad (149)$$

donde  $v_{03_1}$  y  $v_{03_2}$  son las mismas que se expresan en las ecuaciones (144) y (145). Así, cada componente del contenido armónico de la forma de onda de voltaje de salida  $v_0$  del rectificador trifásico de onda completa tipo puente, será igual al doble de las correspondientes componentes de la onda de salida del rectificador trifásico de onda completa tipo punto medio con reactor de interfase. Es decir :

$$v_0 = \sqrt{2}V \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \left\{ \cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(6n-1)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{(6n-1)(6n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \sin(6n\theta + \phi_{6n}) \right\} \quad (150)$$

donde  $\phi_{6n}$  es el mismo que indica la ecuación (147).

De la ecuación (150) vemos que el voltaje continuo de salida es :

$$V_0 = \sqrt{2}V \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \cos\alpha \quad (151)$$

Como los tiristores son disparados en intervalos de  $60^\circ$ , entonces de la forma de la onda del voltaje  $v_0$  de salida, que muestra la figura 3.18, se tiene que el valor eficaz del voltaje rectificado sera:

$$V_r = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v_0^2 d(\omega t)} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \cdot 6 \int_{\frac{\pi}{6} + \alpha}^{\frac{\pi}{6} + \alpha} v_{ab}^2 d(\omega t)}$$

Como los voltajes de línea a neutro son:

$$v_{AN} = \sqrt{2}V \sin \omega t \quad , \quad v_{BN} = \sqrt{2}V \sin \left( \omega t - \frac{2\pi}{3} \right) \quad , \quad v_{cN} = \sqrt{2}V \sin \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right)$$

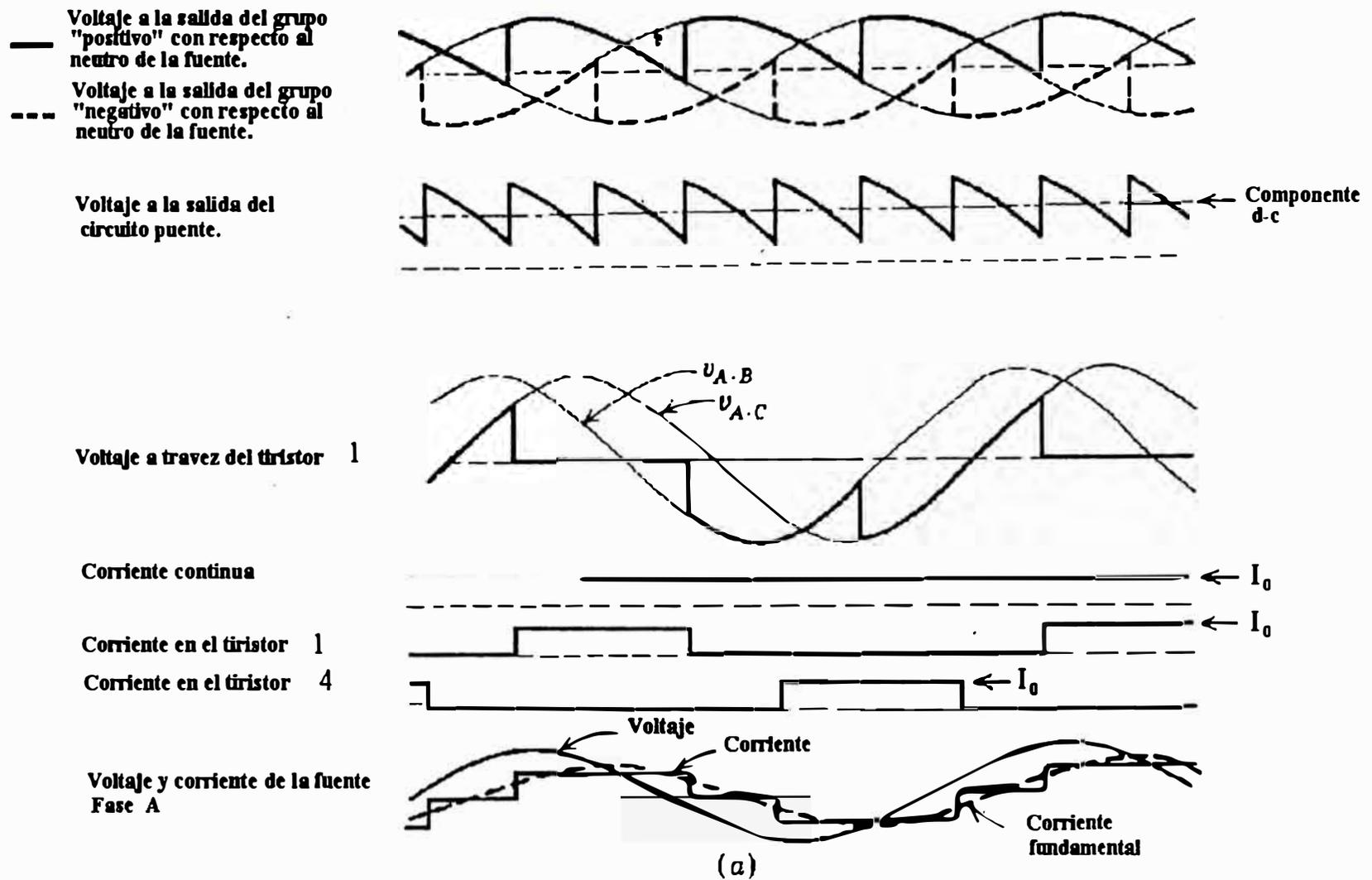


Fig. 3.18 Formas de onda asociadas al rectificador de onda completa tipo puente,  $\alpha = 45^\circ$ .

entonces :

$$v_{ab} = v_{an} - v_{bn} = \sqrt{3} \sqrt{2} V \text{Sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Así:

$$V_R = \sqrt{\frac{3}{\pi} \int_{\frac{\pi}{6}-\alpha}^{\frac{\pi}{6}+\alpha} 6V^2 \text{Sen}^2\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) d\theta}, \quad \theta = \omega t$$

Integrando y evaluando, el valor eficaz del voltaje rectificado es:

$$V_R = \sqrt{3} \sqrt{2} V \left( \frac{1}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4\pi} \text{Cos} 2\alpha \right)^{\frac{1}{2}} \quad (152)$$

Asumiendo que el circuito de carga es altamente inductivo entonces la corriente en la carga será, aproximadamente, libre de contenido de ripple por lo que la consideraremos constante, tal como muestra la figura 3.18. La corriente en los tiristores  $T_1$  y  $T_4$ , así como la corriente en la línea A será aproximadamente como muestra también dicha figura.

La corriente  $i_A$  en la línea A esta representada matemáticamente por:

$$i_A = I_0 \times [u_1(\theta) - u_4(\theta)]$$

donde  $u_1(\theta)$  y  $u_4(\theta)$  son las funciones de conmutación de los tiristores  $T_1$  y  $T_4$  respectivamente, siendo:

$$u_1(\theta) = u(\theta - \alpha) \quad \text{y} \quad u_4(\theta) = u(\theta - \alpha + \pi)$$

Así:

$$i_A = I_0 \times [u(\theta - \alpha) - u(\theta - \alpha + \pi)] \quad (153)$$

De las ecuaciones (122) se encuentra que:

$$u(\theta - \alpha) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) + b_n \text{Cos } n(\theta - \alpha)]$$

Cambiando  $(\theta - \alpha)$  por  $(\theta - \alpha + \pi)$  se obtiene:

$$u(\theta - \alpha + \pi) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha + \pi) + b_n \text{Cos } n(\theta - \alpha + \pi)]$$

Como:

$$\text{Sen } n(\theta - \alpha + \pi) = \begin{cases} -\text{Sen } n(\theta - \alpha) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Sen } n(\theta - \alpha) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\text{Cos } n(\theta - \alpha + \pi) = \begin{cases} -\text{Cos } n(\theta - \alpha) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Cos } n(\theta - \alpha) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

entonces:

$$u(\theta - \alpha + \pi) = \begin{cases} \frac{1}{3} - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) + b_n \text{Cos } n(\theta - \alpha)] & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) + b_n \text{Cos } n(\theta - \alpha)] & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Reemplazando en (153)

$$i_A = \begin{cases} 2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) + b_n \text{Cos } n(\theta - \alpha)] & ; \text{ si } n \text{ es impar} \\ 0 & ; \text{ si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Pero de (122),  $b_n = 0$  si "n" es impar y  $a_n = b_n = 0$ , si "n" es múltiplo de 3. Así:

$$i_A = 2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) \quad (155)$$

donde "n" es un entero impar no múltiplo de 3. Desarrollando:

$$i_A = I_0 \times \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \left[ \text{sen}(\theta - \alpha) - \frac{1}{5} \text{sen} 5(\theta - \alpha) - \frac{1}{7} \text{sen} 7(\theta - \alpha) + \right. \\ \left. + \frac{1}{11} \text{sen} 11(\theta - \alpha) + \frac{1}{13} \text{sen} 13(\theta - \alpha) + \dots \right] \quad (156)$$

Nótese de (156) que la corriente en la línea A no tiene componente continua.

La amplitud de la componente fundamental es  $\frac{2\sqrt{3}}{\pi}$  por el valor pico  $I_0$ .

Las componentes armónicas que no se cancelan son en general  $6k \pm 1$  por la frecuencia fundamental, y la amplitud de cualquiera de estos armónicos, en comparación con la amplitud de la fundamental, es igual al recíproco del número armónico.

Si la carga es un circuito R-L con fuerza electromotriz  $V_c$  entonces:

$$I_0 = \frac{V_0 - V_c}{R}$$

siendo:

$$V_0 = \sqrt{2} V \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \cos \alpha$$

### 3.2.3 Rectificador de doce pulsos tipo puente.

Así como es posible conectar dos grupos de rectificadores de 3 pulsos en serie, para formar un rectificador de 6 pulsos tipo puente, también es posible conectar dos grupos de rectificadores de 6 pulsos tipo puente en serie para obtener un circuito rectificador de doce pulsos tipo puente. El circuito obtenido se muestra en la figura 3.19. Los dos grupos de 6 pulsos son conectados a los dos secundarios de un transformador, cuyo primario está conectado en estrella, un secundario en estrella y otro en delta. A fin de que los voltajes a la salida de cada grupo de 6 pulsos sean iguales, es necesario que exista entre el número de espiras del secundario en delta y el número de espiras del secundario en estrella, una razón de  $\sqrt{3}$ . El voltaje línea a

línea del secundario en delta esta desfasado  $30^\circ$  con respecto al secundario en estrella.

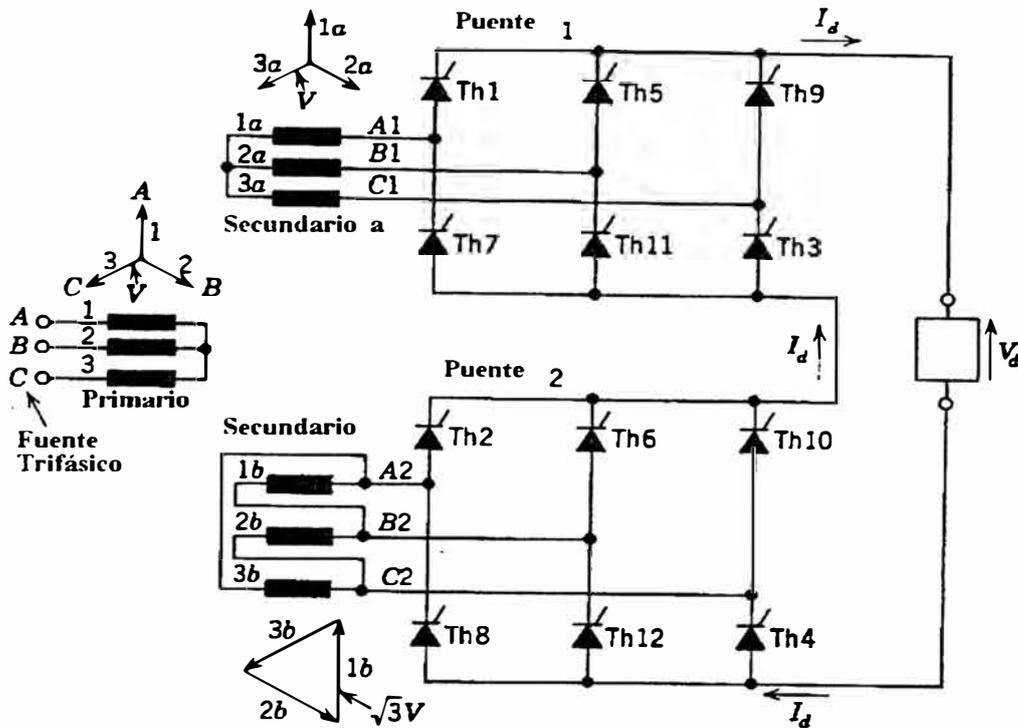


Fig 3.19 Circuito rectificador de 12 pulsos tipo puente.

La figura 3.20 muestra las formas de onda asociadas con el circuito rectificador puente de 12 pulsos. También, por simplicidad, asumimos que la corriente  $I_0$  en la carga es constante y libre de ripple. Esta corriente será la misma para ambos grupos rectificadores de 6 pulsos. El voltaje en la carga es la suma de los voltajes en los terminales de salida de cada grupo de 6 pulsos. Así, si  $V_{06_1}$  y  $V_{06_2}$  son los voltajes de salida de cada uno de los dos grupos individuales, entonces el voltaje de salida en la carga será:

$$V_0 = V_{06_1} + V_{06_2} \tag{157}$$

De la ecuación (150), el componente armónico de  $V_{06_1}$  es:

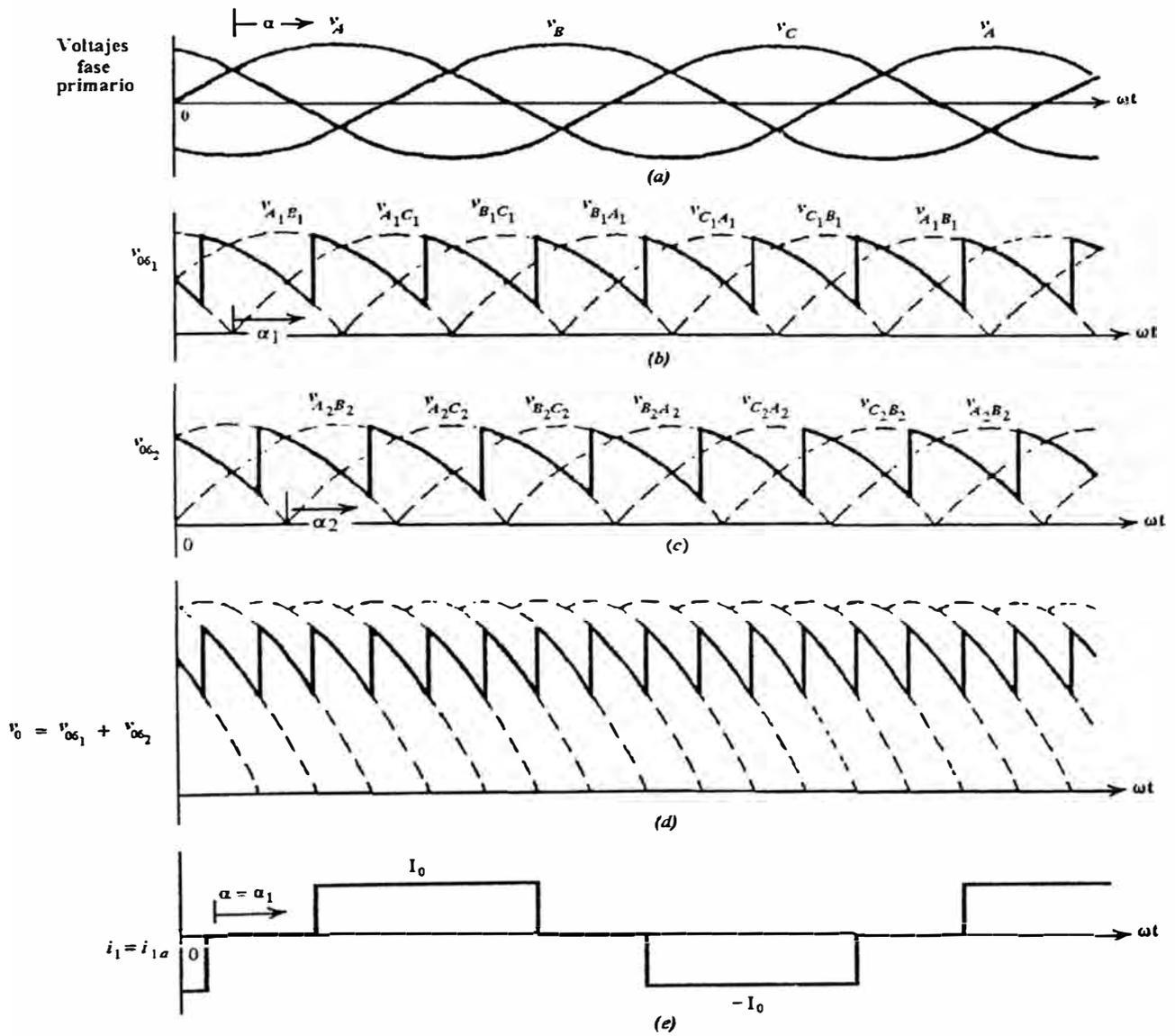


Fig 3.20 Formas de onda en el rectificador de doce pulsos tipo puente.  $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2 = 45^\circ$

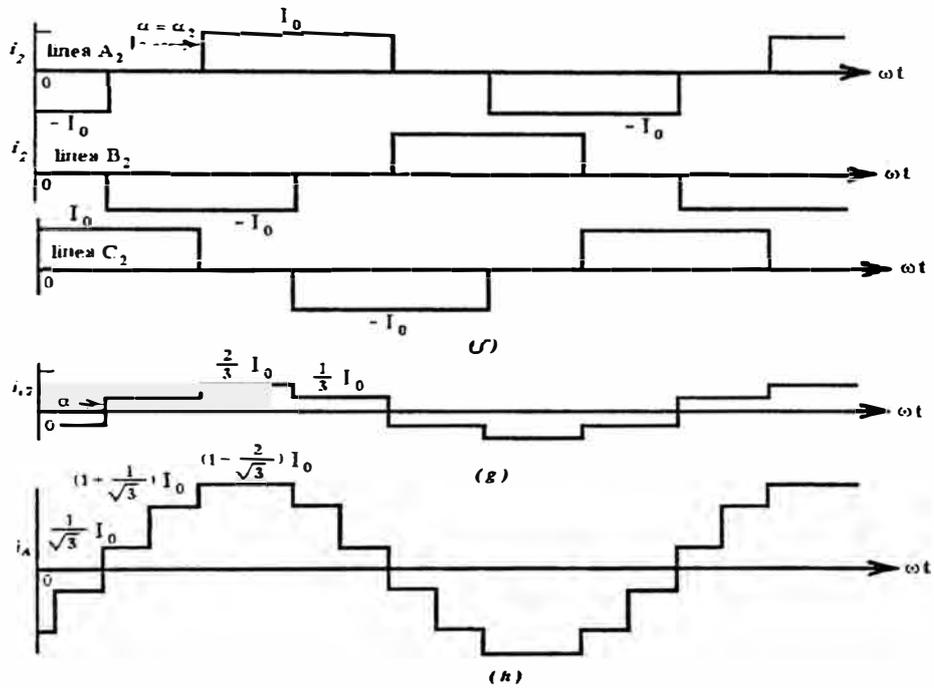


Fig. 3.20 (continuación)

$$v_{\alpha_1} = \sqrt{2} V \left\{ \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \left[ \cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(6n-1)^2} + \frac{1}{(6n+1)^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{(6n-1)(6n+1)} \right] \right] \text{Sen}(6n\theta + \phi_{6n}) \right\}$$

(158)

Reemplazando  $\theta$  por  $\theta = \frac{\pi}{6}$  en (158) se obtiene el contenido armónico de

$v_{06_2}$ , y como:

$$\text{Sen} \left[ 6n \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) + \phi_{6n} \right] = \text{Sen} \left[ (6n\theta + \phi_{6n}) - n\pi \right]$$

entonces:

$$\text{Sen} \left[ 6n \left( \theta - \frac{\pi}{6} \right) + \phi_{6n} \right] = \begin{cases} -\text{Sen} (6n\theta + \phi_{6n}) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Sen} (6n\theta + \phi_{6n}) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así, los desarrollos de  $v_{06_1}$  y  $v_{06_2}$  son:

$$v_{06_1} = \sqrt{2} V \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \left[ \begin{aligned} & \cos \alpha + \left( \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{5 \cdot 7} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(6\theta + \phi_6) \\ & + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{11 \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) \\ & + \left( \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{17 \cdot 19} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(18\theta + \phi_{18}) \\ & + \left( \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{23 \cdot 25} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(24\theta + \phi_{24}) \\ & + \dots \end{aligned} \right]$$

$$v_{06_2} = \sqrt{2} V \left( \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) \left[ \begin{aligned} & \cos \alpha - \left( \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{5 \cdot 7} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(6\theta + \phi_6) \\ & + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{11 \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) \\ & - \left( \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{17 \cdot 19} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(18\theta + \phi_{18}) \\ & + \left( \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{23 \cdot 25} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(24\theta + \phi_{24}) \\ & - \dots \end{aligned} \right]$$

(160)

Sumando se cancelan los términos impares, quedando solo los términos pares.

$$v_0 = \sqrt{2} V \left( \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \right) \left[ \cos\alpha + \left( \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{11 \cdot 13} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12\theta + \phi_{12}) \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{23^2} + \frac{1}{25^2} - \frac{2\cos 2\alpha}{23 \cdot 25} \right)^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(24\theta + \phi_{24}) + \dots \right]$$

Así podemos escribir:

$$v_0 = \sqrt{2} V \left( \frac{6\sqrt{3}}{\pi} \right) \left\{ \cos\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{(12n-1)^2} + \frac{1}{(12n+1)^2} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{2\cos 2\alpha}{(12n-1)(12n+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \text{Sen}(12n\theta + \phi_{12n}) \right\} \quad (161)$$

Vemos que la forma de onda a la salida del rectificador de 12 pulsos contiene solo armónicos de frecuencias 12,24,36, y en general  $12n$  por la frecuencia de la línea.

Por simplicidad, asumiremos que la corriente  $I_0$  en la carga es constante y libre de ripple. Debido a la conexión en serie, la corriente en cada grupo de 6 pulsos es también  $I_0$ . Así, las formas de onda de las corrientes de línea, tales como  $i_1$  e  $i_2$  en cada grupo, es una onda cuadrada de magnitud  $I_0$  y de un ancho de  $120^\circ$ . La corriente de línea  $i_1$ , del secundario en estrella es la misma que la de su corriente de devanado  $i_{1a}$  como muestra la figura 3.20 (e).

Las tres corrientes de línea para el secundario en delta estas desfasadas uno del otro en  $120^\circ$ , como se muestra en la figura 3.20 (f).

Considerando el transformador del secundario en delta como un divisor de corriente tal como muestra la figura 3.21 , entonces:

La figura 3.21(a) corresponde al intervalo:  $\frac{\pi}{6} + \alpha - \frac{\pi}{6} = \alpha < \omega t < \alpha + \frac{\pi}{3}$  .

Conducen las líneas  $C_2$  (corriente positiva) y  $B_2$  (corriente negativa). La línea  $A_2$  no conduce. La corriente en el devanado  $1b$  es ,  $i_{1b} = \frac{1}{3} I_0$  (corriente positiva).

La figura 3.21(b) corresponde al intervalo  $\frac{\pi}{3} + \alpha < \omega t < \frac{2\pi}{3} + \alpha$  . Conducen las líneas  $A_2$  (corriente positiva) y  $B_2$  (corriente negativa). La línea  $C_2$  no conduce. La corriente  $i_{1b} = \frac{2}{3} I_0$  (corriente positiva).

La Figura 3.21 (c) corresponde al intervalo  $\frac{2\pi}{3} + \alpha < \omega t < \pi + \alpha$  . En este caso conducen las líneas  $A_2$  (Corriente positiva) y  $C_2$  (Corriente negativa). La línea  $B_2$  no conduce. La corriente ,  $i_{1b} = \frac{1}{3} I_0$  .(corriente positiva). En los intervalos:  $\left\langle \pi + \alpha, \frac{4\pi}{3} + \alpha \right\rangle$  ,  $\left\langle \frac{4\pi}{3} + \alpha, \frac{5\pi}{3} + \alpha \right\rangle$  y  $\left\langle \frac{5\pi}{3} + \alpha, 2\pi + \alpha \right\rangle$  se invierten las corrientes en 3.21 (a), (b) y (c) respectivamente, con lo que se obtiene el ciclo negativo para la corriente  $i_{1b}$  .

Así podemos concluir lo siguiente:

$$|i_{1b}| = \begin{cases} \frac{2}{3} I_0 & , \text{ si ambas lineas } A_2 \text{ y } B_2 \text{ conducen} \\ \frac{1}{3} I_0 & , \text{ si solo una de las lineas } A_2 \text{ ó } B_2 \text{ conducen} \end{cases}$$

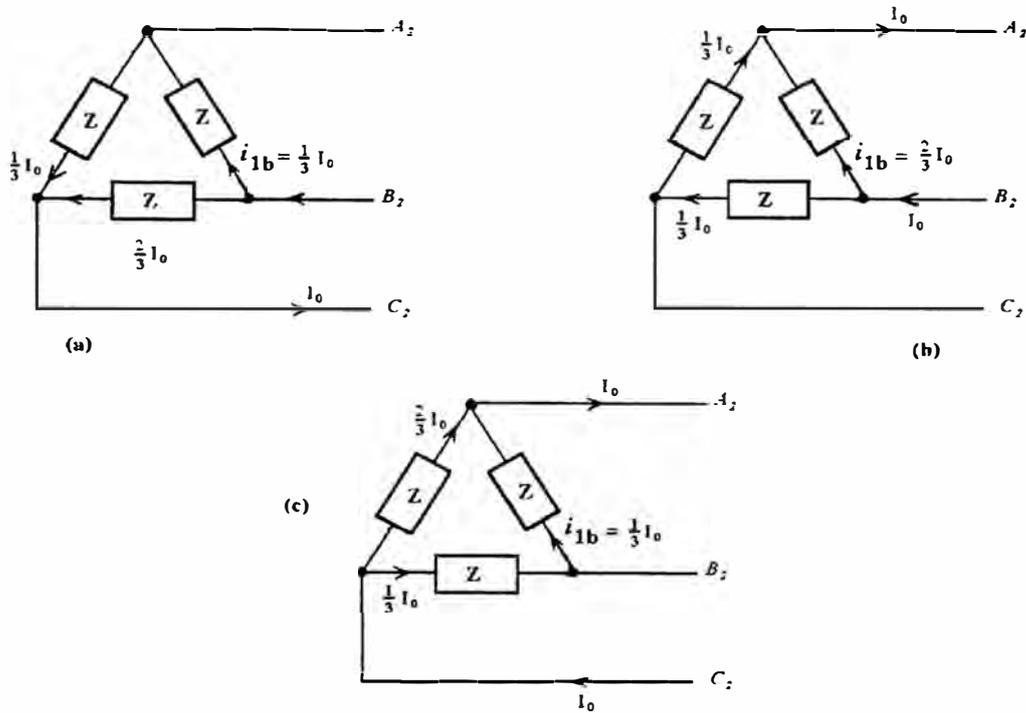


Fig. 3.21

La figura 3.20 (g) muestra ; la forma de onda de  $i_{2b}$ . Esta forma de onda puede obtenerse sumando las ondas que muestra la figura 3.22 .

La corriente en la línea A del primario será:

$$i_A = n(i_{1a} + \sqrt{3}i_{1b}) \tag{162}$$

donde  $n$  es la razón del número de vueltas del devanado del secundario en estrella al número de vueltas del devanado del primario ( $n = N_{sa} / N_p$ ) .

Para el caso particular  $n=1$  , la forma de onda de la corriente  $i_A$  es como muestra la figura 3.20 (h)

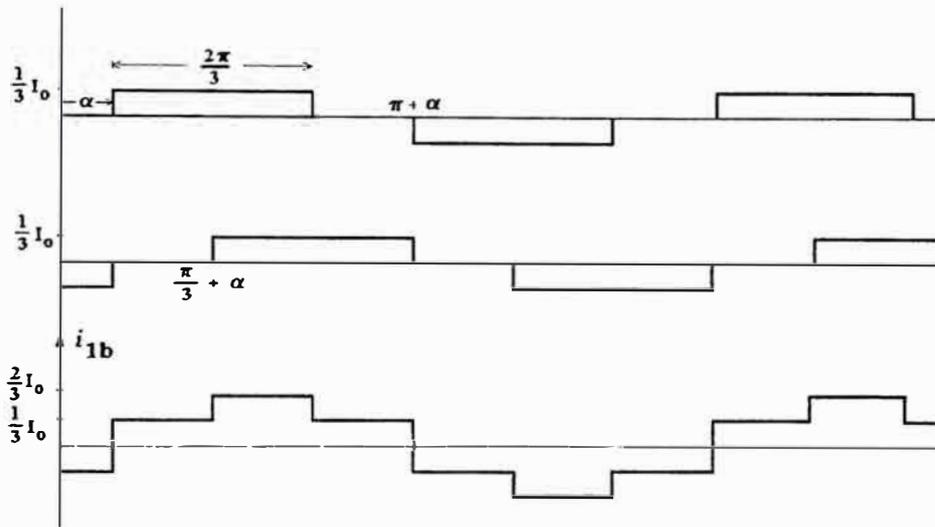


Fig. 3.22

De la figura 3.20(e), la corriente  $i_{1a}$ , está representada matemáticamente por:

$$i_{1a} = I_0 \times [u(\theta - \alpha) - u(\theta - \alpha + \pi)] \quad (163)$$

El segundo miembro de (163) es la misma que los segundo miembros de las ecuaciones (153) y (155).

Así:

$$i_{1a} = 2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n(\theta - \alpha) \quad (164)$$

De la figura 3.22, la corriente  $i_{1b}$  esta representada matemáticamente por:

$$i_{1b} = \frac{1}{3} I_0 \left\{ \left[ u\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) - u\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) \right] + \left[ u\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) - u\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) \right] \right\}$$

(165)

De la ecuación (122) se obtiene:

$$u\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) + b_n \operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$u\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) + b_n \operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) \right]$$

Como:

$$\begin{aligned} \operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) &= \operatorname{Sen} \left[ n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) + n\pi \right] \\ &= \begin{cases} -\operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) = \begin{cases} -\operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Así en (165),

$$\begin{aligned} u\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) - u\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) &= \begin{cases} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \operatorname{Sen} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) + b_n \operatorname{Cos} n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) \right]; & \text{si } n \text{ es impar} \\ 0; & \text{si } n \text{ es par} \end{cases} \end{aligned}$$

Pero, en (122),  $b_n = 0$  si  $n$  es par,  $a_n = b_n = 0$ , si  $n$  es múltiplo de

3. Así, finalmente:

$$u\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) - u\left(\theta - \alpha + \frac{7\pi}{6}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) \quad (166)$$

donde  $n$  solo toma valores impares y no múltiplos de 3.

También, de la ecuación (122), se obtiene:

$$u\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \text{Sen } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) + b_n \text{Cos } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$u\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ a_n \text{Sen } n\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) + b_n \text{Cos } n\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) \right]$$

Como también:

$$\text{Sen } n\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \begin{cases} -\text{Sen } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Sen } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$\text{Cos } n\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = \begin{cases} -\text{Cos } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es impar} \\ \text{Cos } n\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

entonces también se obtiene que:

$$u\left(\theta - \alpha - \frac{\pi}{6}\right) - u\left(\theta - \alpha + \frac{5\pi}{6}\right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Sen } n\left(\theta - \alpha + \frac{\pi}{6}\right) \quad (167)$$

En esta ecuación,  $n$  toma solo valores impares y no múltiplos de 3.

Reemplazando (166) y (167) en (165),

$$i_{1b} = \frac{2}{3} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left[ \text{Sen } n \left( \theta - \alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \text{Sen } n \left( \theta - \alpha - \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

Utilizando la relación:

$$\text{Sen } A + \text{Sen } B = 2 \text{Sen } \frac{A+B}{2} \text{Cos } \frac{A-B}{2}$$

se obtiene:

$$i_{1a} = \frac{4}{3} I_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{Cos } n \frac{\pi}{6} \text{Sen } n (\theta - \alpha)$$

Para valores de  $n$  impares y no múltiplos de 3 se tiene que:

$$\text{Cos } \frac{n\pi}{6} = \begin{cases} -\sqrt{3}/2, & \text{si } n = \begin{cases} 5, 17, 29, 41, \dots \\ 7, 19, 31, 43, \dots \end{cases} \\ \sqrt{3}/2, & \text{si } n = \begin{cases} 1, 13, 25, 37, \dots \\ 11, 23, 35, 47, \dots \end{cases} \end{cases}$$

Así:

$$\sqrt{3} i_b = \begin{cases} -2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n (\theta - \alpha)]; & \text{si } n = \begin{cases} 5, 17, 29, 41, \dots \\ 7, 19, 31, 43, \dots \end{cases} \\ 2 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \text{Sen } n (\theta - \alpha)]; & \text{si } n = \begin{cases} 1, 13, 25, 37, \dots \\ 11, 23, 35, 47, \dots \end{cases} \end{cases} \quad (168)$$

Si en la ecuación (162) tomamos  $n=1$ , y luego reemplazamos los valores dados en (164) y en (168), se obtiene:

$$\begin{aligned}
 i_A &= i_{1a} + i_{1b} \\
 &= \begin{cases} 0, & \text{si } n = \begin{cases} 5, 17, 29, 41, \dots \\ 7, 19, 31, 43, \dots \end{cases} \\ 4 I_0 \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ Sen } n (\theta - \alpha), & \text{si } n = \begin{cases} 1, 13, 25, 37, \dots \\ 11, 23, 35, 47, \dots \end{cases} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Así, vemos que los únicos armónicos que quedan serán los que son de la forma  $12k \pm 1$  por la frecuencia fundamental. Además, de (122):

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \text{ Sen } n \frac{\pi}{3} \cdot \text{ Sen } n \frac{\pi}{2} \quad (169)$$

Si  $n$  toma valores iguales a un múltiplo de 12 mas 1 ó múltiplo de 12 menos 1, entonces siempre se verificara:

$$\text{Sen } n \frac{\pi}{3} \cdot \text{ Sen } n \frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Así, en (169),  $a_n = \frac{\sqrt{3}}{n\pi}$ . Dando valores a  $n$ , el contenido armónico de la corriente de la línea A del primario es:

$$\begin{aligned}
 i_A &= I_0 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{\pi} \left[ \text{Sen } (\theta - \alpha) + \frac{1}{11} \text{Sen } 11 (\theta - \alpha) + \frac{1}{13} \text{Sen } 13 (\theta - \alpha) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{23} \text{Sen } 23 (\theta - \alpha) + \frac{1}{25} \text{Sen } 25 (\theta - \alpha) + \dots \right] \quad (170)
 \end{aligned}$$

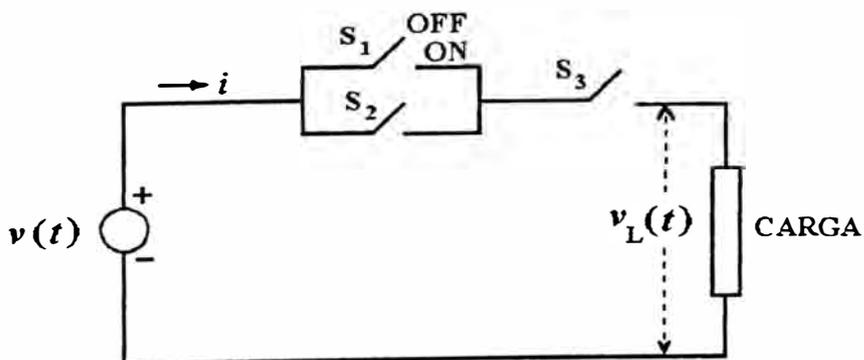
Nótese que la amplitud de un armónico cualquiera, en relación a la frecuencia fundamental, es igual al recíproco del número armónico.

## CAPÍTULO IV CONVERTIDORES DE FRECUENCIA (CICLOCONVERTIDORES)

En los convertidores de frecuencia, denominados también cicloconvertidores, la frecuencia de salida puede ser mayor o puede ser menor que la frecuencia de la fuente de alimentación. El método de Análisis de Fourier aplicado a los rectificadores trifásicos, descrito en el capítulo III, puede también ser aplicado a cualquier cicloconvertidor. En este capítulo, por simplicidad, mostraremos que el método puede ser aplicado a un cicloconvertidor de trifásico a fase simple, cuya frecuencia  $f_0$  de salida es mayor que la frecuencia  $f_i$  de la fuente de alimentación.

### 4.1 Introducción al método de análisis

Como una introducción al método de análisis consideraremos primero un circuito eléctrico multiswitch, tal como muestra la figura 4.1.



**Fig. 4.1. Circuito eléctrico multiswich.**

En la figura 4.1, la fuente de voltaje dependiente del tiempo  $v(t)$  está en serie con una conexión en paralelo de Switchs bilaterales ideales  $S_1$  y  $S_2$ . Un tercer Switch  $S_3$  está en serie con la conexión en paralelo y una carga está conectada entre el Switch  $S_3$  y la fuente.

De la configuración del circuito se deduce que aún si los Switchs  $S_1$ , ó  $S_2$  ó ambos pueden estar en el estado ON, la corriente  $i$  circulará **sí solo sí** el Switch  $S_3$  está también en el estado ON.

Los intervalos de conmutación de los Switchs  $S_1$ ,  $S_2$ , y  $S_3$  están determinados por la duración de los pulsos de conmutación  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  y  $u_3(t)$  respectivamente. Como se muestra en la figura 4.2, los pulsos de conmutación tienen cada uno el estado "1" o el estado "0" de niveles de conmutación. El estado "1" representa el período "ON" o intervalo de conducción de cualquiera de los Switchs. El estado "0" indica el período "OFF" o intervalo de no conducción. Los pulsos de conmutación tiene diferentes anchos de pulso  $t_{01}$ ,  $t_{02}$ , y  $t_{03}$  y frecuencias de conmutación  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ , y  $\omega_3$  respectivamente. Se asumen intervalos regulares  $T_1$ ,  $T_2$  y  $T_3$  entre cualquiera dos pulsos consecutivos de  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$  y  $u_3(t)$ , respectivamente.

Matemáticamente cada tren de pulsos puede ser considerado como igual a un término constante sumado a los armónicos de la frecuencia de conmutación. Así mismo, el voltaje  $v(t)$  contendrá también un término continuo sumado a los armónicos de la frecuencia  $\omega_i$  de la fuente de alimentación.

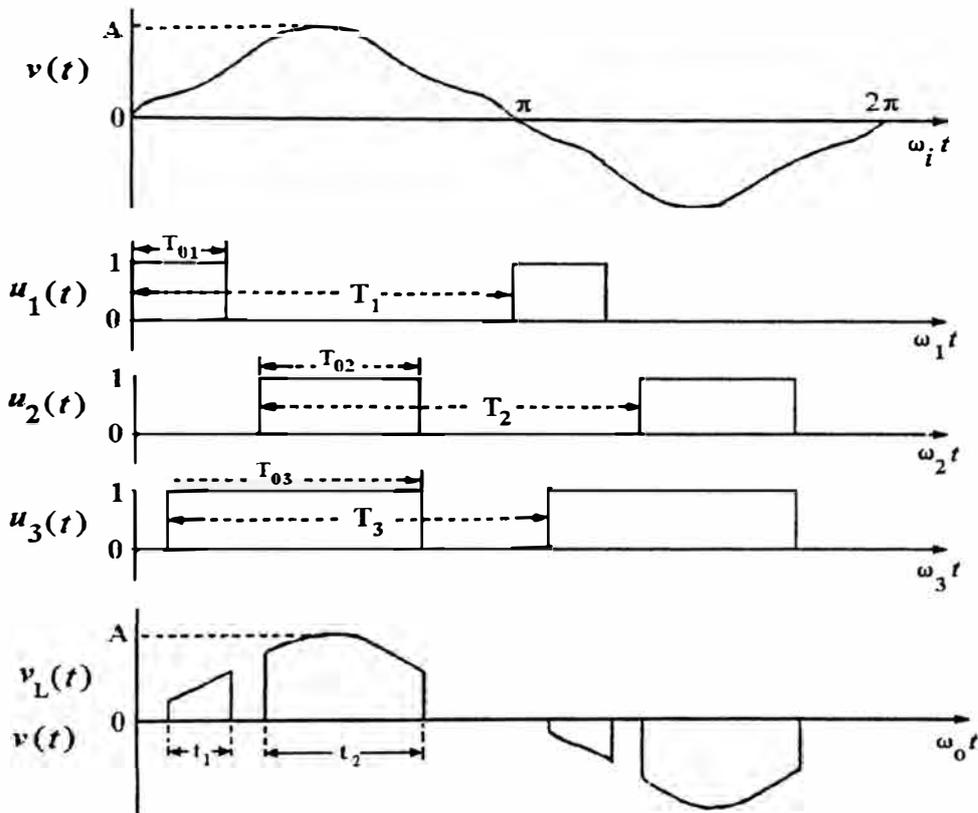


Fig. 4.2. Forma de ondas asociadas al circuito de la Fig. 1.

Las representaciones en series de Fourier para los pulsos de conmutación son de la forma:

$$u_p(t) = u_{op} + \sum_{n=1}^{\infty} C_{np} \operatorname{sen}(n\omega_p t + \alpha_{np}) \quad , \quad p = 1,2,3 \quad (162)$$

donde  $u_{op}$  es el término continuo del pulso de conmutación y

$$C_{np} = \sqrt{A_{np}^2 + B_{np}^2}$$

$A_{np}$  y  $B_{np}$  son los coeficientes de Fourier de los componentes coseno y seno, respectivamente; y

$$\alpha_{np} = \tan^{-1} \left( \frac{A_{np}}{B_{np}} \right) \quad (163)$$

Análogamente, la representación en serie de Fourier para la fuente  $v(t)$  es:

$$v(t) = v_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_1 t + \alpha_n) \quad (164)$$

donde  $v_0$  es el término continuo de la forma onda del voltaje de la fuente;  $C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ ,  $A_n$  y  $B_n$  son los coeficientes de Fourier de las componentes coseno y seno, respectivamente; y

$$\alpha_n = \tan^{-1}\left(\frac{A_n}{B_n}\right)$$

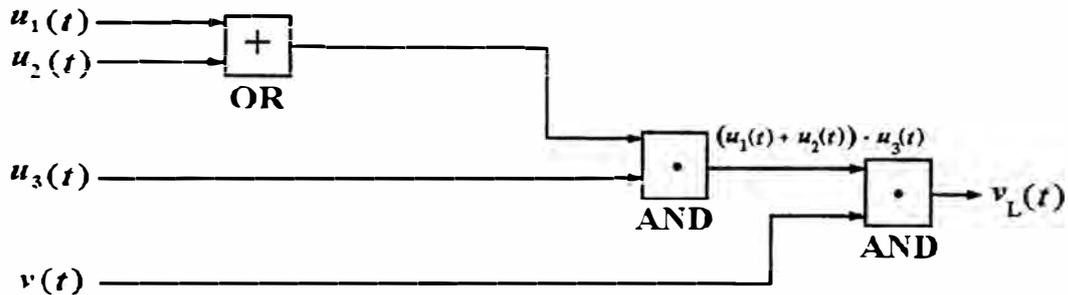
Aplicaciones de los principios de muestreo muestran que los productos  $u_p(t) \cdot v(t)$  dan una descripción analítica del proceso para muestrear el voltaje de la fuente  $v(t)$ . Así.

Cuando  $u_p(t) = 1$ , el producto  $u_p(t) \cdot v(t) = v(t)$

Cuando  $u_p(t) = 0$ , el producto  $u_p(t) \cdot v(t) = 0$

Entonces los niveles de conmutación "1" y "0" pueden ser usados para mostrar cuándo el voltaje de salida  $v_2(t)$  existe a través de la carga de la figura 4.1.

La figura 4.3, muestra un diagrama de bloque para la operación de la figura 4.1. El bloque **OR**, identificado por el símbolo  $+$ , puede tener cualquier número de entradas.. La salida estará en el nivel "1" si al menos una de las entradas está en el nivel "1". Si todas las entradas están en el nivel "0", entonces la salida estará en el nivel "0". El bloque **AND**, denotado por el símbolo  $\cdot$ , puede tener también cualquier número de entradas. La salida estará en el nivel "1" si todas las entradas están en el nivel "1". Si alguna de las entradas está en el nivel "0", entonces la salida



**Fig. 4.3. Bloque lógico para el funcionamiento del circuito de la Fig. 1.**

también estará en el nivel "0". De este modo , comparando las figuras 4.1 y 4.3 , se deduce que el voltaje de salida está especificado por la ecuación Booleana:

$$v_L(t) = ( u_1(t) + u_2(t) ) \cdot u_3(t) \cdot v(t) \quad (166)$$

donde  $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ ,  $u_3(t)$  y  $v(t)$  representan las condiciones de entrada para la salida. Básicamente, las condiciones entrada - salida están especificadas por los niveles de salida dadas para cada combinación posible de los niveles de entrada. En la tabla I se muestra estas diferentes combinaciones. Cada fila da una combinación de los niveles de entrada y también el nivel de salida que se obtiene para cada combinación de los niveles de entrada . La tabla también muestra que existirá un voltaje de carga (  $v(t)$  es 1 ), siempre que  $u_3(t)$  este en el nivel "1" y si alguno o ambos:  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , estén en el nivel "1". La salida estará en el nivel "0" (no hay voltaje en la carga) en todos los demás casos.

Si en el circuito de la figura 4.1 consideramos que en ningún instante los switches  $S_1$  y  $S_2$  están simultáneamente en el estado **ON**, lo cual

**TABLA I**  
**POSIBLES COMBINACIONES DE LOS NIVELES DE CONMUTACION**

COMBINACION	ENTRADA				SALIDA
	$u_1(t)$	$u_2(t)$	$u_3(t)$	$v(t)$	
					$v_L(t)$
1	0	0	0	1	0
2	0	0	1	1	0
3	0	1	0	1	0
4	0	1	1	1	1
5	1	0	0	1	0
6	1	0	1	1	1
7	1	1	0	1	0
8	1	1	1	1	1

significa que en la tabla I, las combinaciones 7 y 8 no sucede en ningún instante, entonces la ecuación Booleana (166) coincidirá exactamente con la ecuación en valores analógicos dada también por la ecuación de la forma:

$$v_L(t) = (u_1(t) + u_2(t)) \cdot u_3(t) \cdot v(t) \quad (167)$$

Así, conociendo las series de Fourier de todos los términos involucrados en la ecuación (167), se obtendrá la expresión analítica de los armónicos presentes en el voltaje en la carga..

El método descrito será usado ahora para analizar un convertidor de frecuencia de trifásico a monofásico con una carga resistiva.

#### 4.2 El sistema convertidor básico

El circuito del **convertidor básico** que muestra la figura 4.4 consta de un par de tiristores, conectados espalda con espalda, en cada línea del

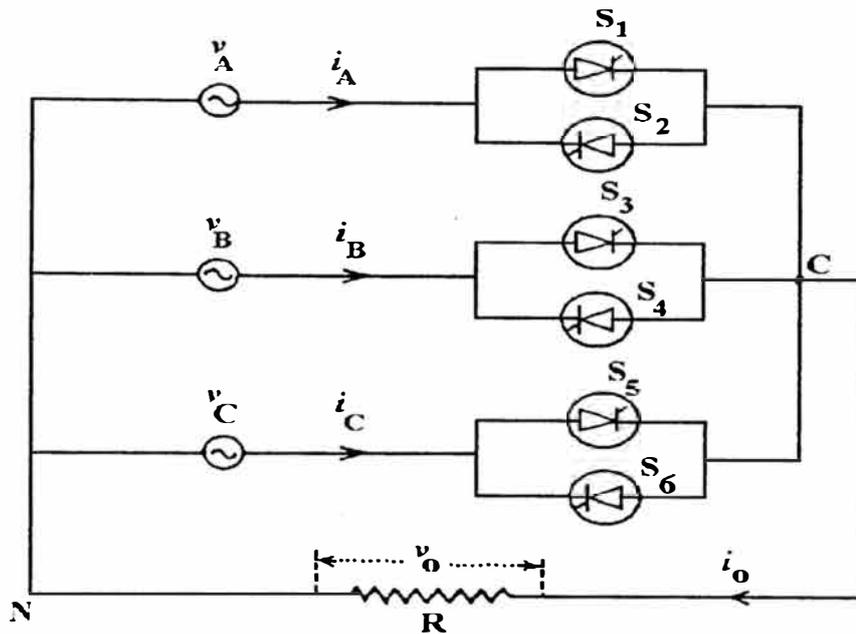


Fig. 4.4. Convertidor de frecuencia de trifásico a monofásico.

MAGNITUD

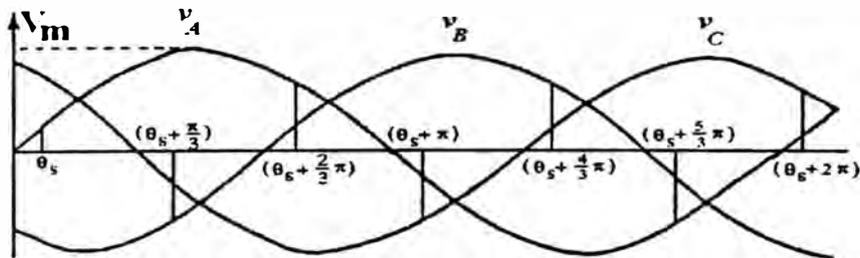


Fig. 4.5. Funcionamiento del convertidor de la Fig. 4.

suministro de potencia trifásico. La carga está conectada entre el punto C de los tiristores y el neutro del suministro.

Los tiristores  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_5$  permiten la conducción de corriente positiva desde las líneas al neutro; los tiristores  $S_2$ ,  $S_4$  y  $S_6$  permiten la conducción de corriente negativa desde el neutro hacia las líneas. De este modo, siempre que alguno de los tiristores  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_5$  están conduciendo, el voltaje

instantáneo  $V_{CN}$  entre los puntos C y N es positivo; este voltaje será negativo cuando cualquiera de los tiristores  $S_2$ ,  $S_4$ , y  $S_6$  está puesto en conducción. El diseño es tal que en todo instante solo uno de los 6 tiristores está en conducción. Asumiendo como intervalo de conducción

permisible de  $2\frac{\pi}{3}$  radianes para todos los tiristores, el tiristor de referencia

puede conducir desde un arbitrario ángulo de arranque  $\theta_s$  a  $\theta_s + 2\frac{\pi}{3}$ .

La tabla II muestra un resumen de los modos de conmutación de los tiristores. El modo de operación o el rango de conducción de un determinado tiristor determina el voltaje o corriente de salida.

**TABLA II**

**MODOS DE CONMUTACION DE LOS TIRISTORES**

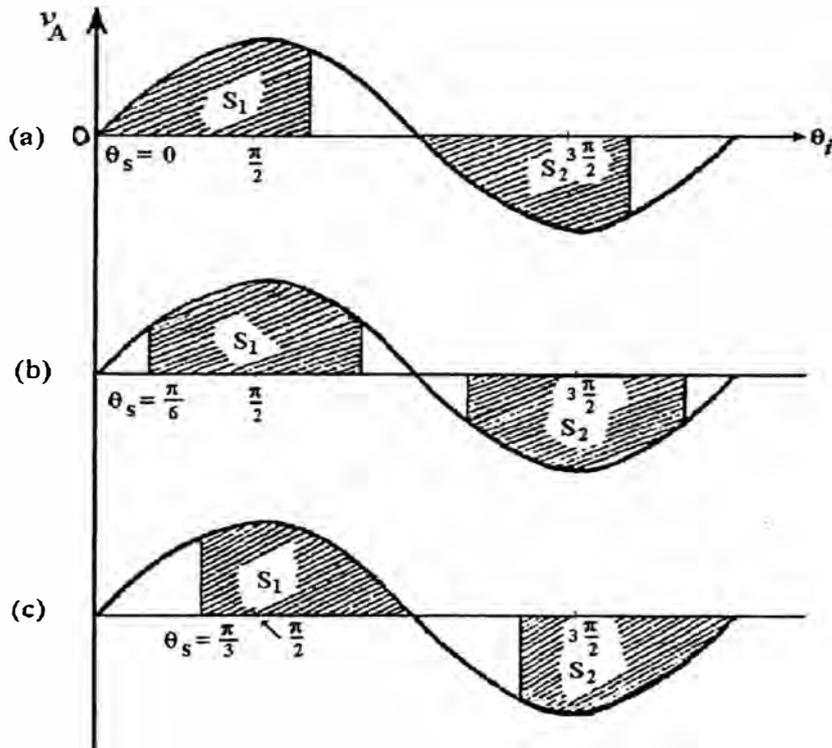
Tiristor	$S_1$	$S_3$	$S_5$	$S_2$	$S_4$	$S_6$
<b>Inicio de la conducción</b>	$\theta_s$	$\theta_s + \frac{2\pi}{3}$	$\theta_s + \frac{4\pi}{3}$	$\theta_s + \pi$	$\theta_s + \frac{5\pi}{3}$	$\theta_s + \frac{\pi}{3}$
<b>Final de la conducción</b>	$\theta_s + \frac{2\pi}{3}$	$\theta_s + \frac{4\pi}{3}$	$\theta_s + 2\pi$	$\theta_s + \frac{5\pi}{3}$	$\theta_s + \frac{\pi}{3}$	$\theta_s + \pi$
<b>Fase del voltaje</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>C</b>

La figura 4.6 muestra tres casos particulares de los diferentes modos de operación. Estos son:

$$\text{Modo 1: } \theta_s = 0, \quad 0 \leq \theta_{s1} \leq 2\frac{\pi}{3}$$

$$\text{Modo 2: } \theta_s = \frac{\pi}{6}, \quad \frac{\pi}{6} \leq \theta_{s1} \leq 5\frac{\pi}{6}$$

$$\text{Modo 3: } \theta_s = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{3} \leq \theta_{s1} \leq \pi$$



**Fig. 4.6. Diferentes modos de operación:**  
**(a) Modo 1. (b) Modo 2. (3) Modo 3.**

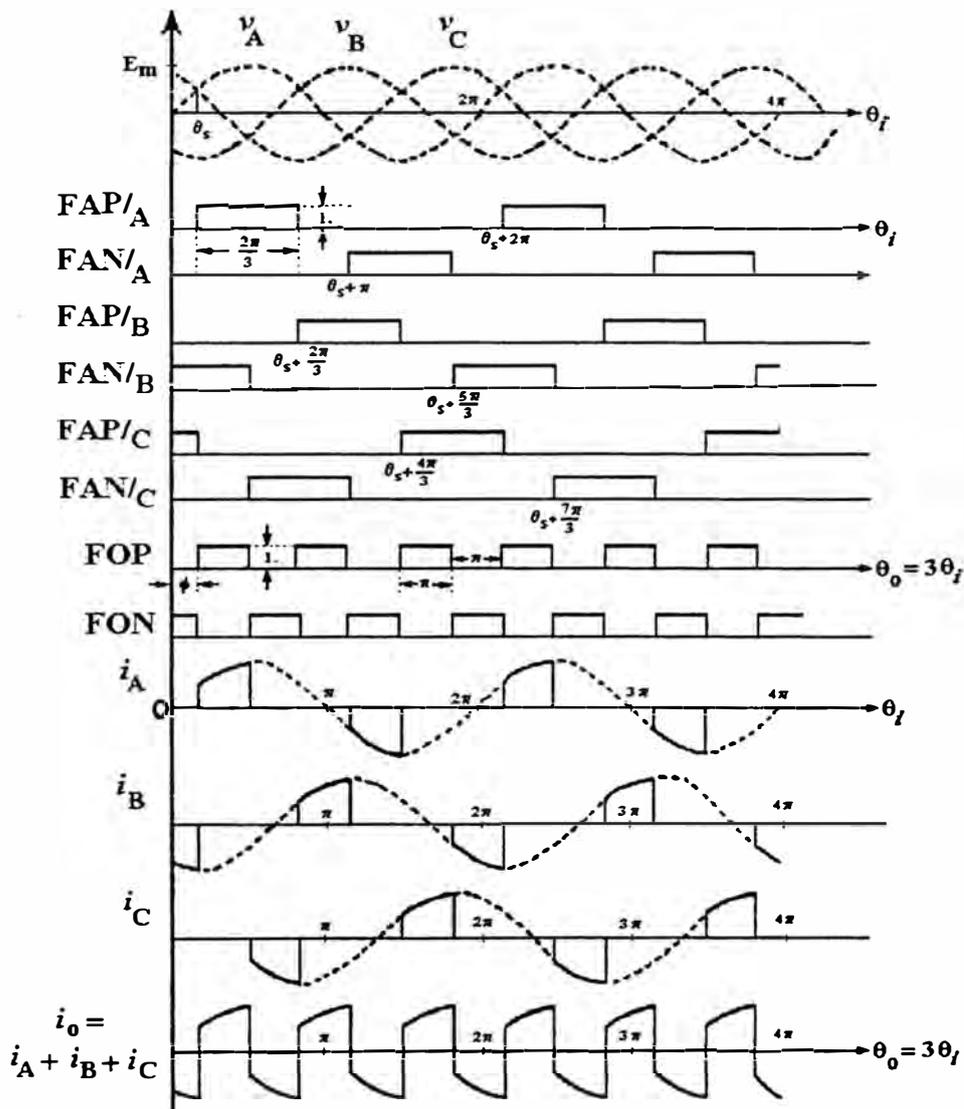
donde  $\theta_s$  es el ángulo en el instante del disparo del tiristor de referencia  $S_1$  y  $\theta_{s1}$  es el ángulo en radianes al cual el tiristor  $S_1$  puede conducir.

Aunque el ángulo de disparo  $\theta_s$  es escogido arbitrariamente, un examen de la figura 4.6 muestra que para  $\theta_s > \frac{\pi}{3}$  se necesitará una reducción en el intervalo de conducción a fin de obtener una operación idónea del sistema discontinuas. Así, para obtener un control del voltaje ó de la corriente de convertidor, obteniéndose además una corriente o voltaje de salida salida continua, el análisis será limitado a la condición:

$$0 \leq \theta_s \leq \frac{\pi}{3} \quad (168)$$

**4.3 Método general de análisis**

Una síntesis de las corrientes de entrada y salida son ilustrados en la figura 4.7, donde  $v_A$ ,  $v_B$  y  $v_C$  son los tres voltajes sinusoidales de las tres fases de entrada de frecuencia fundamental  $f_i$ .



**Fig. 4.7. Síntesis de las corrientes de entrada y salida.**

$FAP/A$ ,  $FAN/A$ ,  $FAP/B$ ,  $FAN/B$ ,  $FAP/C$  Y  $FAN/C$  son pulsos de conmutación de ancho constante  $\left(2\frac{\pi}{3} \text{ radianes}\right)$  y de una unidad de amplitud y cuya frecuencia es igual a la de la entrada  $f_i$ . Estos pulsos determinan el período de conducción permisible de los tiristores. Siempre que uno de los pulsos de conmutación  $FAP/A$ ,  $FAP/B$  o  $FAP/C$  existan (amplitud 1), entonces el voltaje de línea, con el cual estos pulsos están asociados, son conectados por medio de los correspondientes tiristores  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_5$  (tiristores de conducción positiva), a los terminales de salida del convertidor. Similamente, si uno de los pulsos  $FAN/A$ ,  $FAN/B$  o  $FAN/C$  existe, la conexión apropiada con los voltajes de línea se hace a través de los tiristores  $S_2$ ,  $S_4$  y  $S_6$  (tiristores conducción negativa).

Cuando cualquiera de los pulsos mencionados tiene amplitud cero, el voltaje de línea asociado con estos pulsos no es conectado a los terminales de salida.

FOP Y FON son pulsos de conmutación alternados, de ancho de pulso constante e igual a  $\pi$  radianes, amplitud unidad y frecuencia de salida  $f_0$ . El pulso FOP coincide con la conducción de los tiristores  $S_1$ ,  $S_3$  y  $S_5$  y el pulso FON con  $S_2$ ,  $S_4$  y  $S_6$ . De este modo cuando FOP tiene amplitud unidad, cualquiera de los tiristores  $S_1$  o  $S_3$  o  $S_5$  puede conducir, dependiendo de la presencia de los pulsos de conmutación  $FAP/A$  o  $FAP/B$  o  $FAP/C$  respectivamente. Similamente, cuando FON tiene amplitud unidad, cualquiera de  $S_2$  o  $S_4$  o  $S_6$  puede conducir si  $FAN/A$  o  $FAN/B$  o  $FAN/C$ , respectivamente están presentes. De este modo FOP y FON controlan el instante de conmutación de los tiristores y es por eso denominado como los pulsos de

activación. El ancho entre los comienzos de 2 pulsos consecutivos cualesquiera de los pulsos FOP o FON es mantenido constante e igual a  $2\pi$  radianes. El ángulo de activación  $\phi$  de FOP puede ser variado.

Usando la técnica lógica discutida en la sección 4.1, las ecuaciones Booleanas de las corrientes instantáneas de entrada y salida pueden ser obtenidas. Estas ecuaciones serán:

$$\begin{aligned} i_A &= \frac{v_A}{R} (FAP /_A \cdot FOP + FAN /_A \cdot FON) \\ i_B &= \frac{v_B}{R} (FAP /_B \cdot FOP + FAN /_B \cdot FON) \\ i_C &= \frac{v_C}{R} (FAP /_C \cdot FOP + FAN /_C \cdot FON) \end{aligned} \quad (169)$$

donde R es la resistencia de la carga en el circuito de la figura 4.4. Sumando las ecuaciones (169) se obtiene la corriente en la carga:

$$\begin{aligned} i_0 &= i_A + i_B + i_C \\ &= \frac{1}{R} \left[ (v_A \cdot FAP /_A + v_B \cdot FAP /_B + v_C \cdot FAP /_C) \cdot FOP \right. \\ &\quad \left. + (v_A \cdot FAN /_A + v_B \cdot FAN /_B + v_C \cdot FAN /_C) \cdot FON \right] \end{aligned} \quad (170)$$

en las ecuaciones booleanas, las funciones que aparecen solo toman los valores 0 y 1 y los productos y sumas se rigen de acuerdo a las leyes del Álgebra de Boole:

$$\mathbf{1 \cdot 0 = 0 \quad , \quad 1 \cdot 1 = 1 \quad , \quad 1+0 = 1 \quad \text{y} \quad 1+1 = 1}$$

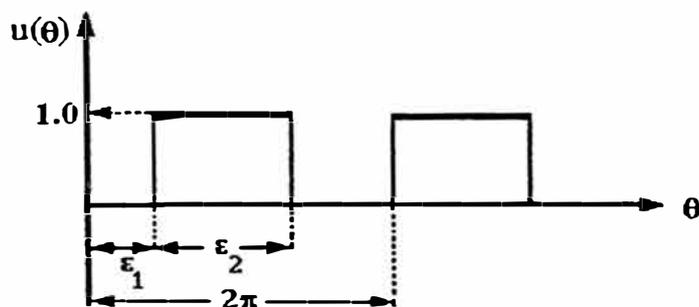
Nótese que de estas 4 operaciones, las 3 primeras operaciones coinciden exactamente con la multiplicación y suma entre los números reales 0 y 1. En cambio la cuarta operación  $1 + 1 = 1$ , no coincide con la suma entre números reales  $1 + 1 = 2$ . Sin embargo, teniendo en cuenta que en todo

instante solo uno de los pulsos de conducción  $FAP/A$ ,  $FAP/B$ ,  $FAP/C$ ,  $FAN/A$ ,  $FAN/B$  y  $FAN/C$  está en el estado 1, y también solo uno de los pulsos  $FOP$  y  $FON$  esta en el estado 1, entonces en las ecuaciones Booleanas (169) Y (170) en ningún instante se produce la operación  $1 + 1$ . Todo esto nos permite afirmar que estas ecuaciones coinciden exactamente con las ecuaciones analíticas reales de las corrientes de entrada y salida del convertidor. Así, podemos decir que dichas ecuaciones representan tanto a las ecuaciones Booleanas, como también a las ecuaciones analíticas reales.

Para obtener el contenido armónico de las corrientes, es necesario obtener las expresiones analíticas de los pulsos de control de conducción y de activación.

#### A.- Análisis de los pulsos de conducción

La deducción de las representaciones en series de Fourier de los pulsos de conducción son simplificados si consideramos la forma de onda rectangular general que muestra la figura 4.8. Los pulsos tienen ángulo de disparo  $\epsilon_1$  ancho  $\epsilon_2$  y amplitud de unidad.



**Fig. 4.8. Forma de onda rectangular general.**

La serie de Fourier del pulso de la figura 4.8 es la que expresa la ecuación (121), del capítulo III. Puede demostrarse que dicha serie puede expresarse también de la siguiente forma:

$$u(\theta) = \frac{\varepsilon_2}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\varepsilon_2}{2} \cdot \cos n \left( \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2} - \theta \right) \right\} \quad (171)$$

Los valores de  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  y  $\theta$ , para los pulsos de conducción de la figura 4.7 se muestran en la tabla III.

**TABLA III**  
**DATOS PARA LA REPRESENTACIÓN DE LOS PULSOS**  
**CONTROL-CONDUCCIÓN**

<b>PULSO DE CONDUCCIÓN</b>	$\varepsilon_1$	$\varepsilon_2$	$\theta$
<b>FAP/A</b>	$\theta_s$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$
<b>FAN/A</b>	$\theta_s + \pi$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$
<b>FAP/B</b>	$\theta_s + \frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$
<b>FAN/B</b>	$\theta_s + \frac{5\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$
<b>FAP/C</b>	$\theta_s + \frac{4\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$
<b>FAN/C</b>	$\theta_s + \frac{7\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\theta_i$

Sustituyendo apropiadamente las cantidades que consignan la tabla III en la ecuación (171), nos permiten hallar las representaciones de Fourier de los

pulsos de conmutación. Así:

$$FAP / A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + \frac{\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAN / A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + \frac{4\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAP / B = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + \pi - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAN / B = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + 2\pi - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAP / C = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + \frac{5\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAN / C = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + \frac{8\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right] \quad (172)$$

Expresiones análogas pueden determinarse también para los pulsos de activación.

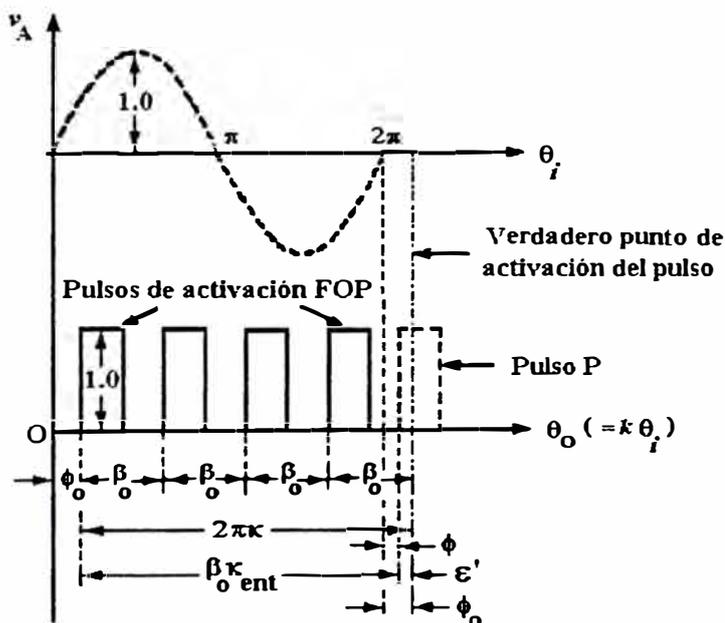
## B.- Análisis de los pulsos de Activación

Terminado el primer ciclo completo de operación del convertidor de frecuencia de la figura 4.4, en los subsiguientes ciclos el tiristor  $S_1$  será disparado en el mismo ángulo  $\phi$  si y solo si la frecuencia de salida  $f_0$  es un múltiplo de la frecuencia de entrada  $f_i$  ( $f_0 = k f_i$ ,  $k \in \mathbb{Z}^+$ ). Sin embargo, esta proposición no necesita ser necesariamente cierta si la frecuencia de salida no es un múltiplo de la frecuencia de entrada, como veremos a continuación.

La figura 4.9 muestra el primer ciclo completo del voltaje de la fase A de la fuente y también un tren de pulsos de disparo positivos FOP, de amplitud unidad.

Se asumen las siguientes notaciones:

$\phi_0$  Ángulo de encendido escogido arbitrariamente durante el primer ciclo completo del voltaje de la fase A de la fuente.



**Fig. 4.9. Ángulo de encendido  $\phi$  de los pulsos de activación.**

$\phi$  : Ángulo de encendido en los otros ciclos subsiguientes al primero.

$\beta_0$  : Ancho constante, en grados, existente entre cualquiera de dos pulsos de disparo consecutivos.

$\varepsilon'$  : Ancho existente entre el borde delantero del primer pulso FOP en el siguiente ciclo de la fuente (al modificarse el ángulo de arranque  $\phi_0$  al

nuevo valor  $\phi$ ) y el punto exacto de disparo que corresponde a este pulso ( si  $\phi_0$  no se varía).

K: Relación entre la frecuencia de salida y la frecuencia de entrada  $f_0 / f_i$ .

Para las definiciones dadas se ha tomado en cuenta lo siguiente: en la figura 4.9 las gráficas de  $v_A$  y de los trenes de pulsos FOP, los ejes horizontales donde se representa los desplazamientos angulares, no están en la misma escala, ya que  $\theta_0 = k \theta_i$ , pero se pueden considerar que ambas están en la misma escala si la variable fuera el tiempo. Así, si en el intervalo de tiempo en que el voltaje de la fase A realiza un ciclo completo, es decir realiza un desplazamiento angular de  $2\pi$  radianes, en ese mismo tiempo el desplazamiento angular del tren de pulsos será  $2k\pi$  radianes, donde  $k$  es un número mayor que 1. Consideraremos dos casos:

i) Si  $k$  no es un entero positivo:

Sea  $k_{ent}$  el número entero mas cercano a la razón  $\frac{f_0}{f_i}$ .

Entonces de la figura 4.9:

$$\varepsilon' = 2\pi k - \beta_0 k_{ent}$$

$$\phi = \phi_0 - \varepsilon'$$

$$= \phi_0 - 2\pi k + \beta_0 k_{ent} \quad (174)$$

En la figura 4.7 se asume pulsos FOP de ancho constante de  $2\pi$  radianes. Entonces (174) se reduce a:

$$\phi = \phi_0 + 2\pi (k - k_{ent}) \quad (175)$$

ii) Si  $k$  es un entero positivo, entonces  $k = k_{ent}$ . Reemplazando en (175), se obtiene:

$$\phi = \phi_0 \quad (176)$$

Este ángulo de encendido esta siempre referido con respecto a la frecuencia de salida y es constante para una razón de frecuencia  $K$ .

La tabla IV fija los parámetros para encontrar las representaciones de Fourier de los pulsos de activación.

**TABLA IV**  
**DATOS PARA LA REPRESENTACIÓN DE FOURIER**  
**DE LOS PULSOS DE ACTIVACION**

PULSO DE ACTIVACION	$\epsilon_1$	$\epsilon_2$	$\theta$
FOP	$\phi$	$\pi$	$\theta_0$
FON	$\phi + \pi$	$\pi$	$\theta_0$

Sustituyendo los valores de  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  y  $\theta$  en la ecuación (171), se obtiene:

$$FOP = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \text{Sen} \frac{n\pi}{2} \cdot \text{Cos} n \left( \phi + \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right\} \right] \quad (177)$$

$$FON = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \text{Sen} \frac{n\pi}{2} \cdot \text{Cos} n \left( \phi + \frac{3\pi}{2} - \theta_0 \right) \right\} \right]$$

Las ecuaciones (177) son aplicables a las tres líneas de entrada del sistema convertidor. Las corrientes de entrada y salida pueden ser obtenidos reemplazando las ecuaciones (172), (173) y (177) en las ecuaciones (169) y (170).

#### 4.4 Análisis armónico de las corrientes de línea

##### 1) Línea A

$$i_A = \frac{U_A}{R} (FAP /_A \cdot FOP + FAN /_A \cdot FON) \quad (1)$$

donde:

$$U_A = E_m \text{ sen} \theta_i$$

$$FAP /_A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \text{sen} n \frac{\pi}{3} \cdot \text{cos} n \left( \theta_s + \frac{\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right]$$

Desarrollando esta expresión obtenemos.

$$FAP /_A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \text{cos} \alpha_1 + \frac{1}{2} \text{cos} 2\alpha_1 - \frac{1}{4} \text{cos} 4\alpha_1 - \frac{1}{5} \text{cos} 5\alpha_1 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{7} \text{cos} 7\alpha_1 + \frac{1}{8} \text{cos} 8\alpha_1 - \frac{1}{10} \text{cos} 10\alpha_1 + \dots \right\} \right]$$

donde:  $\alpha_1 = \theta_s + \frac{\pi}{3} - \theta_i$

También:

$$FOP = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \text{sen} n \frac{\pi}{2} \cdot \text{cos} n \left( \phi + \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right\} \right]$$

$$FOP = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \text{cos} \beta_1 - \frac{1}{3} \text{cos} 3\beta_1 + \frac{1}{5} \text{cos} 5\beta_1 - \frac{1}{7} \text{cos} 7\beta_1 + \dots \right\} \right]$$

donde:

$$\beta_1 = \phi + \frac{\pi}{2} - \theta_0$$

Si hacemos:

$$S_1 = \left\{ \cos \beta_1 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_1 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_1 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_1 + \dots \right\}$$

Entonces:

$$FOP = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot S_1 \right]$$

También:

$$FAN / A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cdot \cos n \left( \theta_s + 4 \frac{\pi}{3} - \theta_i \right) \right\} \right]$$

Desarrollando esta expresión tenemos:

$$FON / A = \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} \cos 2\alpha_2 - \frac{1}{4} \cos 4\alpha_2 - \frac{1}{5} \cos 5\alpha_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{7} \cos 7\alpha_2 + \frac{1}{8} \cos \alpha_2 - \frac{1}{10} \cos 10\alpha_2 + \dots \right\} \right]$$

donde:  $\alpha_2 = \theta_s + 4 \frac{\pi}{3} - \theta_i$

También:

$$FON = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} n \frac{\pi}{2} \cdot \cos n \left( \phi + 3 \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) \right\} \right]$$

desarrollando:

$$FON = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \left\{ \cos \beta_2 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_2 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_2 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_2 + \dots \right\} \right]$$

donde:  $\beta_2 = \phi + 3\frac{\pi}{2} - \theta_0$

Si hacemos

$$S_2 = \left\{ \cos \beta_2 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_2 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_2 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_2 + \dots \right\}$$

entonces:

$$FON = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot S_2 \right]$$

Reemplazando los valores indicados en la expresión (1) podemos escribir la corriente  $i_A$  como:

$$\begin{aligned} i_A = & \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{3\pi} (S_1 + S_2) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} (\cos 5\alpha_1 + \cos 5\alpha_2) \\ & + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{2} (\cos 7\alpha_1 + \cos 7\alpha_2) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \\ & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) + \dots + \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} (\cos \alpha_1 \cdot S_1 + \cos \alpha_2 \cdot S_2) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 2\alpha_2 \cdot S_2) \\ & - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{4} (\cos 4\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 4\alpha_2 \cdot S_2) - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} (\cos 5\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 5\alpha_2 \cdot S_2) + \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} (\cos 7\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 7\alpha_2 \cdot S_2) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{8} (\cos 8\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 8\alpha_2 \cdot S_2) + \\ & \left. - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{10} (\cos 10\alpha_1 \cdot S_1 + \cos 10\alpha_2 \cdot S_2) + \dots \right] \cdot \frac{E_m}{R} \operatorname{sen} \theta, \end{aligned}$$

Como:

$$S_1 = \left\{ \cos \beta_1 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_1 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_1 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_1 + \dots \right\}$$

tenemos que:

$$\cos \beta_1 = \cos \left( \phi + \frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = -\operatorname{sen}(\phi - \theta_0)$$

$$-\frac{1}{3} \cos 3\beta_1 = -\frac{1}{3} \cos \left( 3\phi + 3\frac{\pi}{2} - 3\theta_0 \right) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen}(3\phi - 3\theta_0)$$

$$+\frac{1}{5} \cos 5\beta_1 = \frac{1}{5} \cos \left( 5\phi + 5\frac{\pi}{2} - 5\theta_0 \right) = -\frac{1}{5} \operatorname{sen}(5\phi - 5\theta_0)$$

$$-\frac{1}{7} \cos 7\beta_1 = -\frac{1}{7} \cos \left( 7\phi + 7\frac{\pi}{2} - 7\theta_0 \right) = -\frac{1}{7} \operatorname{sen}(7\phi - 7\theta_0)$$

⋮

Es decir se observa que  $S_1$ , se puede escribir como:

$$S_1 = - \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \operatorname{sen}(m\phi - m\theta_0)$$

También como:

$$S_2 = \left\{ \cos \beta_2 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_2 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_2 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_2 + \dots \right\}$$

entonces los términos de esta expresión pueden expresarse:

$$\cos \beta_2 = \cos \left( \phi + 3\frac{\pi}{2} - \theta_0 \right) = \operatorname{sen}(\phi - \theta_0)$$

$$-\frac{1}{3} \cos 3\beta_2 = -\frac{1}{3} \cos \left( 3\phi + 9\frac{\pi}{2} - 3\theta_0 \right) = \frac{1}{3} \operatorname{sen}(3\phi - 3\theta_0)$$

$$\frac{1}{5} \cos 5\beta_2 = \frac{1}{5} \cos \left( 5\phi + 15\frac{\pi}{2} - 5\theta_0 \right) = \frac{1}{5} \operatorname{sen}(5\phi - 5\theta_0)$$

$$-\frac{1}{7} \cos 7\beta_2 = -\frac{1}{7} \cos \left( 7\phi + 21\frac{\pi}{2} - 7\theta_0 \right) = \frac{1}{7} \operatorname{sen}(7\phi - 7\theta_0)$$

⋮

Es decir se observa que  $S_2$  se puede escribir como:

$$S_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \operatorname{sen}(m\phi - m\theta_0)$$

de donde observamos que  $S_1 = -S_2$ . Así:  $S_1 + S_2 = 0$

También por identidad trigonométrica los términos de la forma:

$(\cos m\alpha_1 + \cos m\alpha_2)$  pueden escribirse como:

$$\cos m\alpha_1 + \cos m\alpha_2 = 2 \cos m\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cdot \cos m\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)$$

en donde de los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  dadas, se obtiene:

$$\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Entonces:

$$\cos m\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ \cos m\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \text{si } m \text{ es par} \end{cases}$$

Es decir:

$$\cos m\alpha_1 + \cos m\alpha_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es impar} \\ \cos m\alpha_1 + \cos m\alpha_2 & \text{si } m \text{ es par.} \end{cases}$$

Por otra parte como  $S_1 = -S_2$

entonces podemos escribir:

$$\cos m\alpha_1 \cdot S_1 + \cos m\alpha_2 \cdot S_2 = S_2 \cdot [\cos m\alpha_2 - \cos m\alpha_1]$$

Por identidad trigonométrica se sabe que:

$$\cos m\alpha_2 - \cos m\alpha_1 = -2 \operatorname{sen} m\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} m\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right)$$

en donde:

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Entonces tendremos que;

$$\text{se } m\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) = \text{se } m\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ es par} \\ \text{se } n\frac{\pi}{2} & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases}$$

Luego, la expresión:

$$\cos m\alpha_2 - \cos m\alpha_1 = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ e spar} \\ \cos m\alpha_2 - \cos m\alpha_1 & , \text{ si } m \text{ e simp ar.} \end{cases}$$

Es decir los términos pares se anulan. Considerando estas expresiones entonces (1) se reduce a:

$$\begin{aligned} i_A = \frac{E_m}{R} & \left[ \frac{1}{3} \text{sen } \theta_i + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \text{sen } \theta_i + \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \cdot \text{se } n\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \cdot \text{se } n\theta_i \\ & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) \cdot \text{se } n\theta_i + \dots + \\ & + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \cdot \text{se } n\theta_i - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \cdot \text{se } n\theta_i \\ & \left. + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \cdot \text{se } n\theta_i + \dots \right] \dots \dots (1a) \end{aligned}$$

Analizando cada uno de los términos de esta expresión tendremos:

$$(\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \text{se } n\theta_i = 2 \cos 2\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cdot \cos 2\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cdot \text{se } n\theta_i$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \theta_i &= 2 \cos\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3} - 2\theta_i\right) \cdot \cos(-\pi) \cdot \operatorname{sen} \theta_i \\
 &= -2 \cos\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3} - 2\theta_i\right) \cdot \operatorname{sen} \theta_i \\
 &= -2 \left[ \cos\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \cos 2\theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i + \operatorname{sen}\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} 2\theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i \right]
 \end{aligned}$$

Por identidad trigonométrica se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \theta_i \cdot \cos 2\theta_i &= \frac{\operatorname{sen} 3\theta_i + \operatorname{sen}(-\theta_i)}{2} = \frac{\operatorname{sen} 3\theta_i - \operatorname{sen} \theta_i}{2} \\
 \operatorname{sen} 2\theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i &= \frac{\cos \theta_i - \cos 3\theta_i}{2}
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \theta_i &= \cos\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} \theta_i - \operatorname{sen}\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \cos \theta_i - \\
 &\quad - \cos\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \operatorname{sen} 3\theta_i + \operatorname{sen}\left(2\theta_s + 5\frac{\pi}{3}\right) \cos 3\theta_i \quad (2)
 \end{aligned}$$

De la misma forma:

$$\begin{aligned}
 (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \theta_i &= 2 \cos 4\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cdot \cos 4\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \theta_i \\
 &= 2 \cos\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3} - 4\theta_i\right) \cdot \cos\left(-4\frac{\pi}{2}\right) \cdot \operatorname{sen} \theta_i \\
 &= 2 \cos\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3} - 4\theta_i\right) \cdot \operatorname{sen} \theta_i \\
 &= \left[ \cos\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 4\theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sen}\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{sen} 4\theta_i \cdot \operatorname{sen} \theta_i \right]
 \end{aligned}$$

Reduciendo como en la forma anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \cdot \text{sen } \theta_i &= -\cos\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 3\theta_i + \text{sen}\left(4\theta_s + 10\frac{\pi}{3}\right) \cos 3\theta_i \\ &+ \cos\left(4\theta_s + \frac{10\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 5\theta_i - \text{sen}\left(4\theta_s + \frac{10\pi}{3}\right) \cdot \cos 5\theta_i \end{aligned} \quad (3)$$

De la misma forma encontramos que:

$$\begin{aligned} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \cdot \text{sen } \theta_i &= -\cos\left(8\theta_s + 20\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 7\theta_i + \text{sen}\left(8\theta_s + 20\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 7\theta_i \\ &+ \cos\left(8\theta_s + 20\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 9\theta_i - \text{sen}\left(8\theta_s + 20\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 9\theta_i \end{aligned} \quad (4)$$

También:

$$\begin{aligned} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) \cdot \text{sen } \theta_i &= \cos\left(10\theta_s + 25\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 9\theta_i - \text{sen}\left(10\theta_s + 25\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 9\theta_i \\ &- \cos\left(10\theta_s + 25\frac{\pi}{3}\right) \cdot \text{sen } 11\theta_i + \text{sen}\left(10\theta_s + 25\frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos 11\theta_i \end{aligned} \quad (5)$$

Por otra parte:

$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = -2 \text{sen}\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \cdot \text{sen}\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right),$$

donde: 
$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} = \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - \theta_i, \quad \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

Así, 
$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = -2 \text{sen}\left(\theta_s + 5\frac{\pi}{6} - \theta_i\right)$$

Entonces :

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \cdot \text{sen}\theta_i \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - \theta_i \right) \cdot \text{sen}\theta_i \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - 2\theta_i \right) - \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} \right) \right\} \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} \right) - \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - 2\theta_i \right) \right] \\
 &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} \right) \left[ \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] - \\
 & \quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - 2\theta_i \right) \left[ \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \quad (6)
 \end{aligned}$$

como:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \cos \left( \theta_s + 5\frac{\pi}{6} - 2\theta_i \right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] = \\
 &= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2} \text{sen} \left[ \left( m\phi + \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) - (m\theta_0 + 2\theta_i) + \right. \\
 & \quad \left. + \text{sen} \left( m\phi - \theta_s - \frac{5}{6}\pi \right) - (m\theta_0 - 2\theta_i) \right] \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm \theta_s \pm 5\frac{\pi}{6} \right) - (m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \right] \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{3} \text{sen} \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi \right) \cos(m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \frac{1}{m} \cos \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi \right) \cdot \text{sen}(m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right\} \right]
 \end{aligned}$$

Luego, la expresión (6) será igual a:

$$\begin{aligned} & \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \cdot \text{sen}\theta_i \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{m} \cos(m\phi) \text{sen} m\theta_0 + \frac{1}{m} \text{sen} m\phi \cos m\theta_0 \right] + \\ & \quad + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{m} \cos\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi\right) \cdot \text{sen}(m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{m} \text{sen}\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \end{aligned}$$

De la misma forma la expresión:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \text{sen}\theta_i = \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} S_2 \left[ -2 \text{sen} 5\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \text{sen} 5\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \right] \text{sen}\theta_i \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen}\left(5\theta_s + \frac{25}{6}\pi - 5\theta_i\right) \text{sen}\theta_i \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} S_2 \left[ \cos\left(5\theta_s + \frac{25}{6}\pi - 6\theta_i\right) - \cos\left(5\theta_s + \frac{25}{6}\pi - 4\theta_i\right) \right] \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \sum_{m=1,3,5} \left[ \frac{1}{5m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \cos\left(5\theta_s + \frac{25}{6}\pi - 6\theta_i\right) \right] - \\ & \quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \sum_{m=1,3,5} \left[ \frac{1}{5m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \cos\left(5\theta_s + \frac{25}{6}\pi - 4\theta_i\right) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

Desarrollando la expresión (7) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} & -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \cdot \text{sen}\theta_i = \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{5m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi \right) - (m\theta \pm 6\theta_i) \right] - \\ & \quad - \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{5m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \cdot \cos(m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right\} + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ -\frac{1}{5m} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \\
&\quad \left. + \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\} \quad (7a)
\end{aligned}$$

De la misma forma el término:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \cdot \text{sen } \theta_i \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen } 7 \frac{(\alpha_2 + \alpha_1)}{2} \text{sen } 5 \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{2} \right] \text{sen } \theta_i \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen} \left( 7\theta_s + \frac{35}{6}\pi - 7\theta_i \right) \text{sen } \theta_i \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ \cos \left( 7\theta_s + \frac{35}{6}\pi - 8\theta_i \right) - \cos \left( 7\theta_s + \frac{35}{6}\pi - 6\theta_i \right) \right]
\end{aligned}$$

Considerando solamente el término:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \cdot \cos \left( 7\theta_s + \frac{35}{6}\pi - 6\theta_i \right) = \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{7m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \cos \left( 7\theta_s + \frac{35}{6}\pi - 6\theta_i \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{7m} \cdot \frac{1}{2} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \cos \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi \right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{7m} \text{sen} \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi \right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\}
\end{aligned}$$

Entonces la expresión:

$$\begin{aligned}
 & \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \cdot \text{sen } \theta_i = \\
 & = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7} \cos\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{7m} \text{sen}\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\} + \\
 & \quad + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \cdot \cos\left(7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi - 8\theta_i\right) \tag{8}
 \end{aligned}$$

Reemplazando los desarrollos de las expresiones (2), (3), (4), (5), (6), (7) y (8), en la expresión (1a), encontraremos que la corriente en la línea A esta dada por:

$$\begin{aligned}
 i_A \cong \frac{Em}{R} & \left\{ \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos\left(2\theta_s + \frac{5}{3}\pi\right) \right] \text{sen } \theta_i + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \text{sen}\left(2\theta_s + \frac{5}{3}\pi\right) \right] \cos \theta_i \right. \\
 & + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \frac{1}{2} \cos\left(4\theta_s + \frac{10}{3}\pi\right) - \cos\left(2\theta_s + \frac{5}{3}\pi\right) \right] \right\} \text{sen } 3\theta_i + \\
 & + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\frac{1}{2} \text{sen}\left(4\theta_s + \frac{10}{3}\pi\right) + \text{sen}\left(2\theta_s + \frac{5}{3}\pi\right) \right] \right\} \cos 3\theta_i + \\
 & + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cos\left(4\theta_s + \frac{10}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 5\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \text{sen}\left(4\theta_s + \frac{10}{3}\pi\right) \right] \cos 5\theta_i + \\
 & + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{16\pi} \cos\left(8\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 7\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) \right] \cos 7\theta_i + \\
 & + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \frac{1}{4} \cos\left(8\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) - \frac{1}{5} \cos\left(10\theta_s + \frac{25}{3}\pi\right) \right] \right\} \text{sen } 9\theta_i + \\
 & + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\frac{1}{4} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(10\theta_s + \frac{25}{3}\pi\right) \right] \right\} \cos 9\theta_i + \dots +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( -\frac{1}{m} \cos m\phi \sin m\theta_0 + \frac{1}{m} \sin m\phi \cos m\theta_0 \right) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \cos\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi\right) \sin(m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \frac{1}{m} \sin\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{5}{6}\pi\right) \cdot \\
& \cos(m\theta_0 \pm 2\theta_i) \Big] + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \sin(m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{5m} \sin\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) - \frac{1}{7m} \cos\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi\right) \right\} \sin(m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \left[ -\frac{1}{5} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \sin\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{25}{6}\pi\right) + \frac{1}{7} \sin\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{35}{6}\pi\right) \right] \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\} + \dots \Big\} \quad (1b)
\end{aligned}$$

## 2) Línea B

$$i_B = \frac{v_B}{R} (FAP /_B \cdot FOP + FAN /_B \cdot FON) \quad (1)$$

donde  $v_B = E_m \sin\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right)$

$$FAP /_B = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{3} \cos n(\theta_s + \pi - \theta_i) \right\} \right]$$

desarrollando esta expresión tenemos:

$$\begin{aligned}
FAP /_B = & \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \cos\alpha_1 + \frac{1}{2} \cos 2\alpha_1 - \frac{1}{4} \cos 4\alpha_1 - \frac{1}{5} \cos 5\alpha_1 + \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{7} \cos 7\alpha_1 + \frac{1}{8} \cos 8\alpha_1 - \frac{1}{10} \cos \alpha_1 + \dots \right\} \right]
\end{aligned}$$

donde ahora:

$$\alpha_1 = \theta_s + \pi - \theta_i$$

También:

$$FOP = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot S_1 \right]$$

donde:

$$S_1 = \left\{ \cos \beta_1 - \frac{1}{3} \cos 3\beta_1 + \frac{1}{5} \cos 5\beta_1 - \frac{1}{7} \cos 7\beta_1 + \dots \right\}$$

También:

$$FAN /_B = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos n(\theta_s + 2\pi - \theta_1) \right\} \right]$$

$$FAN /_B = \left[ \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \left\{ \cos \alpha_2 + \frac{1}{2} \cos 2\alpha_2 - \frac{1}{4} \cos 4\alpha_2 - \frac{1}{5} \cos 5\alpha_2 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{7} \cos 7\alpha_2 + \frac{1}{8} \cos 8\alpha_2 - \frac{1}{10} \cos 10\alpha_2 + \dots \right\} \right]$$

donde:

$$\alpha_2 = \theta_s + 2\pi - \theta_1 \quad ; \quad \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \theta_s + 3\frac{\pi}{2} - \theta_1 \quad ; \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

Sabemos también que:

$$FON = \left[ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot S_2 \right]$$

en donde al igual que para la corriente de la línea A, también  $S_1 = S_2$ .

Comparando la series  $FAP/_B$  y  $FAN/_B$ , por su similitud con los pulsos  $FAP/_A$  y  $FAN/_A$ , observamos que la expresión para la corriente  $i_B$  se puede reducir a una expresión semejante a la de la corriente  $i_A$ , variando solamente los valores de  $\alpha_1, \alpha_2$  y el voltaje de alimentación que para este caso es:

$$v_B = E_m \operatorname{sen} \left( \theta_1 - \frac{2}{3} \pi \right)$$

Por lo dicho, la corriente  $i_B$  se expresa como:

$$\begin{aligned}
 i_B = & \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) - \right. \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \cdot \\
 & \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \dots \\
 & + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \cdot \\
 & \left. \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \dots \right] \quad (*)
 \end{aligned}$$

Desarrollando cada sumando en (\*) tendremos: Para el término,

$$\frac{1}{3} \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) = \frac{1}{3} \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_i \right] = -\frac{1}{6} \operatorname{sen} \theta_i - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \theta_i$$

$$\text{Así,} \quad \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) = -\frac{1}{6} \operatorname{sen} \theta_i - \frac{\sqrt{3}}{6} \cos \theta_i \quad (2)$$

Para el término siguiente:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) \\
 & = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} [2 \cos(2\theta_s + 3\pi - 2\theta_i) \cos(-\pi)] \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) \\
 & = -\frac{2\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos(2\theta_s + 3\pi) \cdot \cos 2\theta_i \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) + \right. \\
 & \quad \left. + \operatorname{sen}(2\theta_s + 3\pi) \cdot \operatorname{sen} 2\theta_i \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) \right] \\
 & = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \cos(2\theta_s + 3\pi) \left[ \operatorname{sen} \left( 3\theta_i - \frac{2}{3} \pi \right) - \operatorname{sen} \left( \theta_i + \frac{2}{3} \pi \right) \right] + \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \operatorname{sen}(2\theta_s + 3\pi) \left[ \cos\left(\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(3\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \Big\} \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \cos(2\theta_s + 3\pi) \left[ -\frac{1}{2}\operatorname{sen}3\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos3\theta_i + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta_i \right] + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{sen}(2\theta_s + 3\pi) \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\theta_i - \frac{1}{2}\cos\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}3\theta_i + \frac{1}{2}\cos3\theta_i + \frac{1}{2}\cos3\theta_i \right] \right\} \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ -\left[ \cos\left(2\theta_s + 3\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}\theta_i + \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos\theta_i \right. \\
& \quad \left. + \left[ \cos(2\theta_s + 3\pi) + \frac{2}{3}\pi \right] \operatorname{sen}3\theta_i - \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + 3\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos3\theta_i \right\}
\end{aligned}$$

Así, podemos decir que:

$$\begin{aligned}
& \frac{\sqrt{3}}{4\pi} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
& = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{7}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{7}{3}\pi\right) \right] \cos\theta_i - \\
& \quad - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{11}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}3\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{11}{3}\pi\right) \right] \cos3\theta_i
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión, desarrollando:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) = \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left[ 2 \cos 4 \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)}{2} \cos 4 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)}{2} \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left[ 2 \cos(4\theta_s + 6\pi - 4\theta_i) \cdot \cos 4\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
& = -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos(4\theta_s + 6\pi) \cos 4\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
& \quad \left. + \operatorname{sen}(4\theta_s + 6\pi) \operatorname{sen}4\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \cos(4\theta_s + 6\pi) \cdot \frac{1}{2} \left[ \sin\left(5\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(3\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \right. \\
&\quad \left. + \sin(4\theta_s + 6\pi) \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos\left(3\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(5\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \cos(4\theta_s + 6\pi) \left[ -\frac{1}{2} \sin 5\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5\theta_i + \frac{1}{2} \sin 3\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \sin(4\theta_s + 6\pi) \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 3\theta_i - \frac{1}{2} \cos 3\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 5\theta_i + \frac{1}{2} \cos 5\theta_i \right] \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos(4\theta_s + 6\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(4\theta_s + 6\pi) \right] \sin 3\theta_i + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(4\theta_s + 6\pi) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \sin(4\theta_s + 6\pi) \right] \cos 3\theta_i + \left[ -\frac{1}{2} \cos(4\theta_s + 6\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(4\theta_s + 6\pi) \right] \sin 5\theta_i \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(4\theta_s + 6\pi) + \frac{1}{2} \sin(4\theta_s + 6\pi) \right] \cos 5\theta_i \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \left[ -\cos\left(4\theta_s + 6\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \sin 3\theta_i + \left[ \sin\left(4\theta_s + 6\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos 3\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(4\theta_s + 6\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \sin 5\theta_i + \left[ -\sin\left(4\theta_s + 6\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos 5\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{16}{3}\pi\right) \right] \sin 3\theta_i - \left[ \sin\left(4\theta_s + \frac{16}{3}\pi\right) \right] \cos 3\theta_i - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) \right] \sin 5\theta_i + \left[ \sin\left(4\theta_s + \frac{20}{3}\pi\right) \right] \cos 5\theta_i \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión, desarrollando:

$$\begin{aligned}
&\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \sin\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) = \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left[ 2(8\theta_s + 12\pi - 8\theta_i) \cos 8\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right] \sin\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= + \frac{2\sqrt{3}}{16\pi} \left[ \cos(8\theta_s + 12\pi) \cos 8\theta_i \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \text{sen } 8\theta_i \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \cos(8\theta_s + 12\pi) \left[ \text{sen}\left(9\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) - \text{sen}\left(7\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \left[ \cos\left(7\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(9\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \cos(8\theta_s + 12\pi) \left[ -\frac{1}{2} \text{sen } 9\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9\theta_i + \frac{1}{2} \text{sen } 7\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 7\theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } 7\theta_i - \frac{1}{2} \cos 7\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } 9\theta_i + \frac{1}{2} \cos 9\theta_i \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos(8\theta_s + 12\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \right] \text{sen } 7\theta_i + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(8\theta_s + 12\pi) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \right] \cos 7\theta_i + \left[ -\frac{1}{2} \cos(8\theta_s + 12\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \right] \text{sen } 9\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(8\theta_s + 12\pi) + \frac{1}{2} \text{sen}(8\theta_s + 12\pi) \right] \cos 9\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ - \left[ \cos\left(8\theta_s + 12\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 7\theta_i + \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + 12\pi - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos 7\theta_i \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(8\theta_s + 12\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 9\theta_i - \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + 12\pi + \frac{2}{3}\pi\right) \right] \cos 9\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ - \left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{34}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 7\theta_i + \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{34}{3}\pi\right) \right] \cos 7\theta_i \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{38}{3}\pi\right) \right] \text{sen } 9\theta_i - \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{38}{3}\pi\right) \right] \cos 9\theta_i \right\} \tag{5}
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión, desarrollando:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} [\cos(10\alpha_1) + \cos(10\alpha_2)] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= -\frac{\sqrt{3}}{20\pi} [2 \cos(10\theta_s + 15\pi - 10\theta_i) \cos(-5\pi)] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
 &= \frac{\sqrt{3} \times 2}{20\pi} \left\{ \cos(10\theta_s + 15\pi) \cos 10\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \cdot \operatorname{sen} 10\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \cos(10\theta_s + 15\pi) \left[ \operatorname{sen}\left(11\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) - \operatorname{sen}\left(9\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) \right] + \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \left[ \cos\left(9\theta_i + \frac{2}{3}\pi\right) - \cos\left(11\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \cos(10\theta_s + 15\pi) \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 11\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 11\theta_i + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 9\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9\theta_i \right] \right. \\
 &\quad \left. + \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 9\theta_i - \frac{1}{2} \cos 9\theta_i - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 11\theta_i + \frac{1}{2} \cos 11\theta_i \right] \right\} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos(10\theta_s + 15\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \right] \operatorname{sen} 9\theta_i + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(10\theta_s + 15\pi) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \right] \cos 9\theta_i + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -\frac{1}{2} \cos(10\theta_s + 15\pi) - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \right] \operatorname{sen} 11\theta_i + \right. \\
 &\quad \left. + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(10\theta_s + 15\pi) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(10\theta_s + 15\pi) \right] \cos 11\theta_i \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ - \left[ \cos \left( 10\theta_s + 15\pi - \frac{2}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 9\theta_i + \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + 15\pi - \frac{2}{3}\pi \right) \right] \cos 9\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos \left( 10\theta_s + 15\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 11\theta_i - \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + 15\pi + \frac{2}{3}\pi \right) \right] \cos 11\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ - \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{43}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 9\theta_i + \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{43}{3}\pi \right) \right] \cos 9\theta_i \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{47}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 11\theta_i - \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{47}{3}\pi \right) \right] \cos 11\theta_i \right\}
\end{aligned}$$

(6)

De la misma forma, desarrollando:

$$\begin{aligned}
&\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \text{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi \right) = \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) \cdot \text{sen} \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right] \text{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi \right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} \left( \theta_s + \frac{3}{2}\pi - \theta_i \right) \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen} \left( \theta_s + \frac{3}{2}\pi - \theta_i \right) \text{sen} \left( \theta_i - \frac{2}{3}\pi \right) \right] \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ \cos \left( \theta_s + \frac{13}{6}\pi - 2\theta_i \right) - \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \cdot \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \cdot \cos \left( \theta_s + \frac{13}{6}\pi - 2\theta_i \right)
\end{aligned}$$

Reemplazando:  $S_2 = \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \\
&\quad \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \cos \left( \theta_s + \frac{13}{6}\pi + 2\theta_i \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) - \\
&\quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{m} \cos\left(\theta_s + \frac{13}{6}\pi - 2\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( -\frac{1}{m} \cos m\phi \text{sen } m\theta_0 + \frac{1}{m} \text{sen } m\phi \cdot \cos m\theta_0 \right) \right] - \\
&\quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{2m} \left\{ \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{13}{6}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \right\} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( -\frac{1}{m} \cos m\phi \text{sen } m\theta_0 + \frac{1}{m} \text{sen } m\phi \cos m\theta_0 \right) \right] + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{m} \cos \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{13}{6}\pi \right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m} \text{sen} \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{13}{6}\pi \right) \cos(m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \quad (7)
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión, desarrollando:

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) = \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen}\left(5\theta_s + \frac{15}{2}\pi - 5\theta_i\right) \text{sen}\left(\frac{5\pi}{2}\right) \right] \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen}\left(5\theta_s + \frac{15}{2}\pi - 5\theta_i\right) \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ \cos\left(5\theta_s + \frac{49}{6}\pi - 6\theta_i\right) - \cos\left(5\theta_s + \frac{41}{6}\pi - 4\theta_i\right) \right] \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \cos\left(5\theta_s + \frac{41}{6}\pi - 4\theta_i\right) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \cdot \cos\left(5\theta_s + \frac{49}{6}\pi - 6\theta_i\right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(5\theta_s + \frac{41}{6}\pi - 4\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(5\theta_s + \frac{49}{6}\pi - 6\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \\
& = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \text{sen}\left[\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{41}{6}\pi\right) - (m\theta_0 \pm 4\theta_i)\right] \right\} + \\
& \quad + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \text{sen}\left[\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{49}{6}\pi\right) - (m\theta_0 \pm 6\theta_i)\right] \right\} \\
& = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta \pm \frac{41}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 4\theta_i) \cdot \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{5} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{41}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right] + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \\
& \quad \cdot \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{49}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{49}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] \tag{8}
\end{aligned}$$

También la expresión:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) = \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen}\left(7\theta_s + \frac{21}{2}\pi - 7\theta_i\right) \text{sen}\left(7\frac{\pi}{2}\right) \right] \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen}\left(7\theta_s + \frac{21}{2}\pi - 7\theta_i\right) \text{sen}\left(\theta_i - \frac{2}{3}\pi\right) \right] \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \cdot \frac{1}{2} \left[ \cos\left(7\theta_s + \frac{67}{6}\pi - 8\theta_i\right) - \cos\left(7\theta_s + \frac{59}{6}\pi - 6\theta_i\right) \right] \\
& = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos\left(7\theta_s + \frac{59}{6}\pi - 6\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos \left( 7\theta_s + \frac{67}{6} \pi - 8\theta_i \right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \\
& = - \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{59}{6} \pi \right) - (m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] \right\} + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{67}{6} \pi \right) - (m\theta_0 \pm 8\theta_i) \right] \right\} \\
& = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{59}{6} \pi \right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{7m} \text{sen} \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{59}{6} \pi \right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] + \\
& \quad + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{67}{6} \pi \right) - (m\theta_0 \pm 8\theta_i) \right] \right\} \tag{9}
\end{aligned}$$

Si sumamos las expresiones de (2), (3), ... , (9) entonces la corriente en la línea B estará dada por:

$$\begin{aligned}
i_B & \cong \frac{E_m}{R} \left\{ \left[ -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos \left( 2\theta_s + \frac{7}{3} \pi \right) \right] \text{sen} \theta_i + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \text{sen} \left( 2\theta_s + \frac{7}{3} \pi \right) \right] \cos \theta_i + \right. \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\cos \left( 2\theta_s + \frac{11}{3} \pi \right) + \frac{1}{2} \cos \left( 4\theta_s + \frac{16}{3} \pi \right) \right] \right\} \text{sen} 3\theta_i + \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \text{sen} \left( 2\theta_s + \frac{11}{3} \pi \right) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( 4\theta_s + \frac{16}{3} \pi \right) \right] \right\} \cos 3\theta_i + \\
& + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cos \left( 4\theta_s + \frac{20}{3} \pi \right) \right] \text{sen} 5\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \text{sen} \left( 4\theta_s + \frac{20}{3} \pi \right) \right] \cos 5\theta_i + \\
& + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{16\pi} \cos \left( 8\theta_s + \frac{34}{3} \pi \right) \right] \text{sen} 7\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \cos \left( 8\theta_s + \frac{34}{3} \pi \right) \right] \cos 7\theta_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \frac{1}{4} \cos \left( 8\theta_s + \frac{38}{3} \pi \right) - \frac{1}{5} \cos \left( 10\theta_s + \frac{43}{3} \pi \right) \right] \right\} \text{sen } 9\theta_i + \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\frac{1}{4} \text{sen} \left( 8\theta_s + \frac{38}{3} \pi \right) + \frac{1}{5} \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{43}{3} \pi \right) \right] \right\} \text{cos } 9\theta_i + \\
& + \dots + \\
& + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6} \pi \right) \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( -\frac{1}{m} \cos m\phi \text{sen } m\theta_0 + \frac{1}{m} \text{sen } m\phi \cos m\theta_0 \right) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{m} \cos \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{13}{6} \pi \right) \text{sen} (m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{m} \text{sen} \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{13}{6} \pi \right) \cos (m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{41}{6} \pi \right) \text{sen} (m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \right. \\
& - \left. \frac{1}{5m} \text{sen} \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{41}{6} \pi \right) \cos (m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \left[ -\frac{1}{5m} \cos \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{49}{6} \pi \right) + \frac{1}{7m} \cos \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{59}{6} \pi \right) \right] \cdot \right. \\
& \quad \cdot \text{sen} (m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \left[ \frac{1}{5m} \text{sen} \left( m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{49}{6} \pi \right) - \frac{1}{7m} \cdot \right. \\
& \quad \cdot \left. \left. \text{sen} \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{59}{6} \pi \right) \right] \cos (m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\} \cdot \dots \cdot \left. \right\}
\end{aligned}$$

### 3) Para la línea C

$$i_c = \frac{e_c}{R} (FAP /_c \cdot FOP + FAN /_c \cdot FON)$$

Donde:

$$e_c = E_m \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right)$$

$$FAP /_c = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos n \left( \theta_s + \frac{5}{3} \pi - \theta_i \right) \right\} \right]$$

$$FAN /_c = \left[ \frac{1}{3} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{3} \cos n \left( \theta_s + \frac{8}{3} \pi - \theta_i \right) \right\} \right]$$

en donde si hacemos ahora:

$$\alpha_1 = \theta_s + \frac{5}{3} \pi - \theta_i, \quad \alpha_2 = \theta_s + \frac{8}{3} \pi - \theta_i$$

entonces la expresión de la corriente  $i_c$  será semejante a la de  $i_A$  e  $i_B$ ,

variando solamente los valores de  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y el voltaje de línea aplicado que en este caso es:

$$e_c = E_m \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right)$$

Como tenemos que:

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = \theta_s + \frac{13}{6} \pi - \theta_i, \quad \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = -\frac{\pi}{2}$$

entonces las mismas consideraciones que para  $i_B$  serán válidas, por lo que la corriente en la línea C están dada por:

$$\begin{aligned} i_c = & \frac{E_m}{R} \left[ \frac{1}{3} \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) - \right. \\ & - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos 4\alpha_1 + \cos 4\alpha_2) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \\ & + \cos 8\alpha_2) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) - \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \\ & + \dots + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2(\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \\ & \left. \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \dots \right] \end{aligned}$$

Desarrollando cada sumando como en los casos anteriores tendremos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) &= \frac{1}{3} \left[ \operatorname{sen}\theta_i\left(-\frac{1}{2}\right) - \cos\theta_i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right] \\ &= -\frac{1}{6} \operatorname{sen}\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos\theta_i \end{aligned} \quad (1)$$

Para el término siguiente hacemos:

$$\begin{aligned} &\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} (\cos 2\alpha_1 + \cos 2\alpha_2) \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ 2 \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi - 2\theta_i\right) \cos(-\pi) \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi - 2\theta_i\right) \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \cos 2\theta_i \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \operatorname{sen} 2\theta_i \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\ &= -\frac{2\sqrt{3}}{4\pi} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \left[ \operatorname{sen}\left(3\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) - \operatorname{sen}\left(\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \left[ \cos\left(\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(3\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 3\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\theta_i + \frac{1}{2} \operatorname{sen} \theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta_i \right] + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \theta_i - \frac{1}{2} \cos \theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 3\theta_i + \frac{1}{2} \cos 3\theta_i \right] \right\} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} \theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) - \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) \cos\theta_i + \left[-\frac{1}{2} \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right)\right] \\
& \cdot \operatorname{sen}3\theta_i + \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi\right)\right] \cos3\theta_i \Big\} \\
= & -\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}\theta_i + \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos\theta_i + \right. \\
& \left. + \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}3\theta_i - \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{13}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos3\theta_i \right\} \\
= & \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left\{ \left[ \cos(2\theta_s + 3\pi) \right] \operatorname{sen}\theta_i - \left[ \operatorname{sen}(2\theta_s + 3\pi) \right] \cos\theta_i - \right. \\
& \left. - \left[ \cos\left(2\theta_s + \frac{17}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen}3\theta_i + \left[ \operatorname{sen}\left(2\theta_s + \frac{17}{3}\pi\right) \right] \cos3\theta_i \right\} \quad (2)
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión desarrollando:

$$\begin{aligned}
& -\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} (\cos4\alpha_1 + \cos4\alpha_2) \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
= & -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left[ 2 \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi - 4\theta_i\right) \cos(-2\pi) \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
= & -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left[ 2 \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi - 4\theta_i\right) \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\
= & -\frac{2\sqrt{3}}{8\pi} \left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \cos4\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) + \right. \\
& \left. + \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \cdot \operatorname{sen}4\theta_i \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\
= & -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \left[ \operatorname{sen}\left(5\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) - \operatorname{sen}\left(3\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) \right] + \right. \\
& \left. + \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \left[ \cos\left(3\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(5\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 5\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 5\theta_i + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 3\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3\theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 3\theta_i - \frac{1}{2} \cos 3\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} 5\theta_i + \frac{1}{2} \cos 5\theta_i \right] \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} 3\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(4\theta_s + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{26}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \right] \cos 3\theta_i + \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{26}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} 5\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi\right) \right] \cos 5\theta_i \right\} \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ -\left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} 3\theta_i + \left[ \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos 3\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} 5\theta_i - \left[ \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{26}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos 5\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \left\{ \left[ \cos\left(4\theta_s + \frac{22}{3}\pi\right) \right] \operatorname{sen} 3\theta_i - \left[ \operatorname{sen}\left(4\theta_s + \frac{22}{3}\pi\right) \right] \cos 3\theta_i - \right. \\
&\quad \left. - \left[ \cos\left(4\theta_s + 10\pi\right) \right] \operatorname{sen} 5\theta_i + \left[ \operatorname{sen}\left(4\theta_s + 10\pi\right) \right] \cos 5\theta_i \right\} \quad (3)
\end{aligned}$$

Para la siguiente expresión desarrollando:

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} (\cos 8\alpha_1 + \cos 8\alpha_2) \cdot \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left[ 2 \cos 8\left(\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) \cos 8\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left[ 2 \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi - 8\theta_i\right) \cos(-4\pi) \right] \operatorname{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{16\pi} \left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \cos 8\theta_i \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) + \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \text{sen} 8\theta_i \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \left[ \text{sen}\left(9\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) - \text{sen}\left(7\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \left[ \cos\left(7\theta_i + \frac{4}{3}\pi\right) - \cos\left(9\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \left[ -\frac{1}{2} \text{sen} 9\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9\theta_i + \frac{1}{2} \text{sen} 7\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 7\theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} 7\theta_i - \frac{1}{2} \cos 7\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} 9\theta_i + \frac{1}{2} \cos 9\theta_i \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \right] \text{sen} 7\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{1}{2} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \right] \cos 7\theta_i + \left[ -\frac{1}{2} \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \right] \right. \\
&\quad \left. \cdot \text{sen} 9\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi\right) \right] \cos 9\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ -\left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \text{sen} 7\theta_i + \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos 7\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \text{sen} 9\theta_i - \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{52}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi\right) \right] \cos 9\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \left\{ -\left[ \cos(8\theta_s + 16\pi) \right] \text{sen} 7\theta_i + \left[ \text{sen}(8\theta_s + 16\pi) \right] \cos 7\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \cos\left(8\theta_s + \frac{56}{3}\pi\right) \right] \text{sen} 9\theta_i - \left[ \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{56}{3}\pi\right) \right] \cos 9\theta_i \right\} \quad (4)
\end{aligned}$$

Desarrollando la siguiente expresión:

$$-\frac{\sqrt{3}}{\pi} \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} (\cos 10\alpha_1 + \cos 10\alpha_2) \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left[ 2 \cos 10 \left( \theta_s + \frac{13}{6} \pi - \theta_i \right) \cos 10 \left( -\frac{\pi}{2} \right) \right] \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left[ 2 \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi - 10\theta_i \right) \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{20\pi} \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \cos 10\theta_i \cdot \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \text{sen} 10\theta_i \cdot \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) \right] \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \left[ \text{sen} \left( 11\theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) - \text{sen} \left( 9\theta_i + \frac{4}{3} \pi \right) \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \left[ \cos \left( 9\theta_i + \frac{4}{3} \pi \right) - \cos \left( 11\theta_i - \frac{4}{3} \pi \right) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \left[ -\frac{1}{2} \text{sen} 11\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 11\theta_i + \frac{1}{2} \text{sen} 9\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 9\theta_i \right] + \right. \\
&\quad \left. + \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} 9\theta_i - \frac{1}{2} \cos 9\theta_i + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} 11\theta_i + \frac{1}{2} \cos 11\theta_i \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \right] \text{sen} 9\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) - \frac{1}{2} \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \right] \cos 9\theta_i + \right. \\
&\quad \left. + \left[ -\frac{1}{2} \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \right] \text{sen} 11\theta_i - \right. \\
&\quad \left. + \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) + \frac{1}{2} \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi \right) \right] \cos 11\theta_i \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ - \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi - \frac{4}{3} \pi \right) \right] \text{sen} 9\theta_i + \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3} \pi - \frac{4}{3} \pi \right) \right] \cos 9\theta_i + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{65}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 11\theta_i - \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{65}{3}\pi + \frac{4}{3}\pi \right) \right] \cos 11\theta_i \\
& = \frac{\sqrt{3}}{20\pi} \left\{ - \left[ \cos \left( 10\theta_s + \frac{61}{3}\pi \right) \right] \text{sen } 9\theta_i + \left[ \text{sen} \left( 10\theta_s + \frac{61}{3}\pi \right) \right] \cos 9\theta_i + \right. \\
& \quad \left. + \left[ \cos(10\theta_s + 23\pi) \right] \text{sen } 11\theta_i - \left[ \text{sen}(10\theta_s + 23\pi) \right] \cos 11\theta_i \right\} \quad (5)
\end{aligned}$$

De la misma forma desarrollando la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1) \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) \text{sen} \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right] \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} \left( \theta_s + \frac{13}{6}\pi - \theta_i \right) \text{sen} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right] \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
& = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ 2 \text{sen} \left( \theta_s + \frac{13}{6}\pi - \theta_i \right) \cdot \text{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \right] \\
& = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot S_2 \left[ \cos \left( \theta_s + \frac{7}{2}\pi - 2\theta_i \right) - \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) \right] \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos \left( \theta_s + \frac{5}{6}\pi \right) \cdot S_2 - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos \left( \theta_s + \frac{7}{2}\pi - 2\theta_i \right) \cdot S_2
\end{aligned}$$

Reemplazando el valor de :

$$\begin{aligned}
S_2 & = \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos \left( \theta_i + \frac{5}{6}\pi \right) \sum_{m=1,3,5} \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) - \\
& \quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \cos \left( \theta_s + \frac{7}{2}\pi - 2\theta_i \right) \frac{1}{m} \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{m} \cos m\phi \operatorname{sen} m\theta_0 + \frac{1}{m} \operatorname{sen} m\phi \cos m\theta_0 \right] - \\
&\quad - \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{2m} \operatorname{sen} \left[ \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{7}{2}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{m} \cos m\phi \operatorname{sen} m\theta_0 + \frac{1}{m} \operatorname{sen} m\phi \cos m\theta_0 \right] + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{m} \cos \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{7}{2}\pi \right) \operatorname{sen} (m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{m} \operatorname{sen} \left( m\phi \pm \theta_s \pm \frac{7}{2}\pi \right) \cos (m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] \quad (6)
\end{aligned}$$

Desarrollando la siguiente expresión :

$$\begin{aligned}
&-\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2(\cos 5\alpha_2 - \cos 5\alpha_1) \cdot \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^3} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ -2 \operatorname{sen} 5 \left( \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \right) \operatorname{sen} 5 \left( \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ -2 \operatorname{sen} \left( 5\theta_s + \frac{65}{6}\pi - 5\theta_i \right) \operatorname{sen} \left( 5\frac{\pi}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ -\frac{1}{2} \operatorname{sen} \left( 5\theta_s + \frac{65}{6}\pi - 5\theta_i \right) \operatorname{sen} \left( \theta_i - \frac{4}{3}\pi \right) \right] \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^3} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \left[ \cos \left( 5\theta_s + \frac{57}{6}\pi - 4\theta_i \right) - \cos \left( 5\theta_s + \frac{73}{6}\pi - 6\theta_i \right) \right] \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \cos \left( 5\theta_s + \frac{57}{6}\pi - 4\theta_i \right) + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{5} \cdot S_2 \cos \left( 5\theta_s + \frac{73}{6}\pi - 6\theta_i \right) \\
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^3} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{5m} \cos \left( 5\theta_s + \frac{57}{6}\pi - 4\theta_i \right) \operatorname{sen} (m\phi - m\theta_0) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \frac{1}{5m} \cos\left(5\theta_s + \frac{73}{6}\pi - 6\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \\
& = -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \text{sen}\left[\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{57}{6}\pi\right) - (m\theta_0 \pm 4\theta_i)\right] \right\} + \\
& \quad + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{5m} \text{sen}\left[\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{73}{6}\pi\right) - (m\theta_0 \pm 6\theta_i)\right] \right\} \\
& = \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{57}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{57}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right] + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \\
& \quad \cdot \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{73}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{73}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] \tag{7}
\end{aligned}$$

También, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
& \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2(\cos 7\alpha_2 - \cos 7\alpha_1) \cdot \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen} 7\left(\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2}\right) \text{sen} 7\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \right] \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \left[ -2 \text{sen}\left(7\theta_s + \frac{91}{6}\pi - 7\theta_i\right) \text{sen}\left(\frac{7}{2}\pi\right) \right] \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{S_2} \left[ 2 \text{sen}\left(7\theta_s + \frac{91}{6}\pi - 7\theta_i\right) \text{sen}\left(\theta_i - \frac{4}{3}\pi\right) \right] \\
& = \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{7} \cdot S_2 \cdot \left[ \cos\left(7\theta_s + \frac{99}{6}\pi - 8\theta_i\right) - \cos\left(7\theta_s + \frac{83}{6}\pi - 6\theta_i\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos\left(7\theta_s + \frac{83}{6}\pi - 6\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] + \\
&\quad + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos\left(7\theta_s + \frac{99}{6}\pi - 8\theta_i\right) \text{sen}(m\phi - m\theta_0) \right] \\
&= -\frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{83}{6}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right] \right\} + \\
&\quad + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \frac{1}{7m} \text{sen} \left[ \left( m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{99}{6}\pi \right) - (m\theta_0 \pm 8\theta_i) \right] \right\} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cos\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{83}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) - \frac{1}{7m} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \text{sen}\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{83}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \left. \right] - \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{7m} \cdot \right. \\
&\quad \cdot \cos\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{99}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 8\theta_i) - \frac{1}{7m} \cdot \\
&\quad \cdot \text{sen}\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{99}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 8\theta_i) \left. \right] \quad (8)
\end{aligned}$$

Sumando las ecuaciones del (1) al (8) se obtiene:

$$\begin{aligned}
i_c \cong \frac{Em}{R} &\left\{ \left[ -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \cos(2\theta_s + 3\pi) \right] \text{sen } \theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \text{sen}(2\theta_s + 3\pi) \right] \cos \theta_i + \right. \\
&\quad + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\cos\left(2\theta_s + \frac{17}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} \cos\left(4\theta_s + \frac{22}{3}\pi\right) \right] \right\} \text{sen } 3\theta_i + \\
&\quad + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \text{sen}\left(2\theta_s + \frac{17}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} \text{sen}\left(4\theta_s + \frac{22}{3}\pi\right) \right] \right\} \cos 3\theta_i + \\
&\quad + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{8\pi} \cos(4\theta_s + 10\pi) \right] \text{sen } 5\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \text{sen}(4\theta_s + 10\pi) \right] \cos 5\theta_i +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ -\frac{\sqrt{3}}{16\pi} \cos(8\theta_s + 16\pi) \right] \text{sen } 7\theta_i + \left[ \frac{\sqrt{3}}{16\pi} \text{sen}(8\theta_s + 16\pi) \right] \cos 7\theta_i + \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ \frac{1}{4} \cos\left(8\theta_s + \frac{56}{3}\pi\right) - \frac{1}{5} \cos\left(10\theta_s + \frac{61}{3}\pi\right) \right] \right\} \text{sen } 9\theta_i + \\
& + \left\{ \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \left[ -\frac{1}{4} \text{sen}\left(8\theta_s + \frac{56}{3}\pi\right) + \frac{1}{5} \text{sen}\left(10\theta_s + \frac{61}{3}\pi\right) \right] \right\} \cos 9\theta_i + \\
& + \dots + \\
& + \frac{2\sqrt{3}}{\pi^2} \cos\left(\theta_s + \frac{5}{6}\pi\right) \left[ \sum_{m=1,3,5,\dots} \left( -\frac{1}{m} \cos m\phi \text{sen } m\theta_0 + \frac{1}{m} \text{sen } m\phi \cos m\theta_0 \right) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{m} \cos\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{7}{2}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 2\theta_i) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{m} \text{sen}\left(m\phi \pm \theta_s \pm \frac{7}{2}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 2\theta_i) \right] + \\
& + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ \frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{57}{6}\pi\right) \text{sen}(m\theta_0 \pm 4\theta_i) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{57}{6}\pi\right) \cos(m\theta_0 \pm 4\theta_i) \right] + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left\{ \left[ -\frac{1}{5m} \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{\sqrt{3}}{\pi^2} \sum_{m=1,3,5,\dots} \left[ -\frac{1}{5m} \cos\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{73}{6}\pi\right) + \frac{1}{7m} \cos\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{83}{6}\pi\right) \right] \cdot \right. \right. \\
& \left. \left. \cdot \text{sen}(m\theta_0 \pm 6\theta_i) + \left[ \frac{1}{5m} \text{sen}\left(m\phi \pm 5\theta_s \pm \frac{73}{6}\pi\right) - \frac{1}{7m} \cdot \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \cdot \text{sen}\left(m\phi \pm 7\theta_s \pm \frac{83}{6}\pi\right) \right] \cos(m\theta_0 \pm 6\theta_i) \right\} \dots \dots \dots \left. \right\}
\end{aligned}$$

(III)

## CONCLUSIONES

En los diferentes circuitos rectificadores que trabajan con circuito de carga altamente inductivo, puede considerarse que la corriente de salida es casi constante, las que son conmutados en forma secuencial de las corrientes de línea del sistema de potencia alterno de entrada (tres líneas si el rectificador es trifásico). Estas corrientes de línea, que normalmente serían ondas sinusoidales, resultan ser ondas cuadradas. Con estas consideraciones, el análisis de Fourier realizados a los circuitos rectificadores de onda completa (denominados también rectificadores de 2 cuadrantes), independiente de que el circuito sea de 2,6,12, etc, pulsos, determina que existe una relación **simple** entre el número de pulsos del circuito rectificador, la frecuencia del armónico presente en las corrientes de línea de entrada y las frecuencias presentes en los armónicos del voltaje de salida.

De las ecuaciones (87a), (150) y (170) se deduce que las frecuencias armónicas presentes en los voltajes de salida de los rectificadores de onda completa tienen ordenes que son múltiplos enteros del número de pulsos del circuito. También, de las ecuaciones (115b), (156) y (170) se deduce que por cada frecuencia armónica presente en el voltaje de salida, hay asociadas dos frecuencias armónicas presentes en las corrientes de las líneas de entrada del

rectificador; el primero de estas frecuencias es de un orden menos, y el segundo es de un orden mas, que la correspondiente frecuencia armónica asociada al voltaje de salida. Un ejemplo que ilustra esta regla es la siguiente:

Para un rectificador de 6 pulsos, las frecuencias armónicas presentes en el voltaje de salida son 6,12,18,..., y en general,  $6n \times$  frecuencia de entrada; las correspondientes frecuencias armónicas presentes en las corrientes líneas de las 3 fases son 5,7,11,13,..., y en general  $(6n+1) \times$  frecuencia de línea.

También de las ecuaciones mencionadas se puede establecer la siguiente regla para la determinación de las amplitudes de los armónicos en el voltaje y en las corrientes:

La amplitud pico, relativo al máximo voltaje continuo de salida, de un voltaje armónico de orden  $n$  y a un ángulo de encendido  $\alpha$  esta dado por:

$$\frac{V_n}{V_{máx}} = \left[ \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{(n-1)^2} - \frac{2 \cos 2\alpha}{(n+1)(n-1)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

La amplitud pico de cualquier componente armónico de la corriente, relativo a la fundamental, es igual al recíproco del número armónico e independiente del ángulo de encendido  $\alpha$  del rectificador.

Así,  $n = kq \pm 1$  ,  $I_n = \frac{I_1}{n}$

donde:

$n$ : orden del armónico:

$I_1$ : amplitud de la corriente

$k$ : un entero (1,2,3,...)

fundamental

$q$ : número de pulsos del  
rectificador

$I_n$ : amplitud de la corriente  
armónica

También, del análisis de Fourier realizado al cicloconvertidor de trifásico a fase simple, se observa que las corrientes de línea poseen las siguientes componentes:

1. Componente fundamental de frecuencia  $f_i$  (frecuencia del sistema de potencia trifásico) y armónicos impares de esta frecuencia, cuyas amplitudes dependen del ángulo de disparo  $\theta_s$ .

2. Componente fundamental de la frecuencia de salida  $f_0$  y armónicos, también impares de esta frecuencia, cuyas amplitudes dependen de los ángulos  $\theta_s$  y  $\phi$ , y del número armónico.

3. Componentes armónicos de la forma:  $(mf_i \pm nf_0)$ , donde  $m$  es impar (1,3,5,...) y  $n$  es par (2,4,6,...), cuyas amplitudes dependen también de los ángulos  $\theta_s$  y  $\phi$ , y del número armónico.



## **BIBLIOGRAFIA**

- 1.- " Análisis de Fourier "

"Análisis de formas de onda periodicas"

HWEI P. HSV

- 2.- Harmonic analisys of ac-to-ac frecuency converter.

S.B. DEWAN , PAUL P. BIRINGER

IEEE, 1969

- 3.- Input filter design wuith Static Power Convertes

S.B. DEWAN , PAUL P. BIRINGER

IEEE, 1970

- 4.- Power Semiconductor Circuits

S.B. DEWAN . WILEY - INTERSCIENCE PUBLICATION

- 5.- Thyristor Phase-Controlled Convertes and Cicloconverters

B.R. PELLY . WILEY - INTERSCIENCE PUBLICATION

- 6.- Power Electronics. Circuits, Devices, and Aplications

MUHAMMAD H. RASHID PRENTICE- HALL INTERNATIONAL