

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**



**MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE NO HOMOGÉNEO**

**PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:**  
**LICENCIADO EN FÍSICA**

**PRESENTADA POR:**

**ALEJANDRA BEATRÍZ ALTAMIRANO MACETAS**

**LIMA – PERÚ**

**2005**

A mis Padres: Santiago y Vidalina

A mi Hijo: David Arturo

# MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE NO HOMOGÉNEO

## AGRADECIMIENTO

Este trabajo no hubiera sido posible, sin la ayuda de todos mis parientes cercanos, amigos y profesores, quienes siempre estuvieron dispuestos a brindarme su apoyo incondicional, psicológico, intelectual y económico. Las gracias son insuficientes, pero no están demás, decir gracias, muchas gracias a todos por confiar en mí y en el trabajo efectuado.

Gracias, al Profesor Valqui, por sus sugerencias tan acertadas y precisas. A mi asesor, el profesor E. Vidalón, que tuvo que soportar, la forma tan particular de mi persona. Al profesor Armando Bernui, aunque ya no se encuentre en la Facultad de Ciencias, siempre se le tiene presente. Gracias a los Profesores Orlando Pereyra, Susana Petrick, Hector Loro, Juan Vega, Abel Gutarra, Rosendo Ochoa, Jhonny Valverde, al Decano de la Facultad de Ciencias Dr Humberto Asmat y al Laboratorio de Computación de Ciencias. No debo olvidar al Señor Victor Quinde, Sr Farfán y a mi amigo Zozimo Pozo.

Y también gracias a la Facultad de Ingeniería Industrial y de Sistemas y SistemasUNI. En especial a los profesores, Joaquín Salcedo, Josue Angulo, Yarko Cerna, gracias a todos.



## RESUMEN

En este trabajo se analizó el movimiento de un cuerpo rígido de forma elipsoidal, con semiejes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (donde  $a = b$ ). Su centro de masa se ubica en la recta que contiene al semieje  $c$ . El movimiento fue sobre un plano horizontal sometido a la fuerza de gravedad. Se analizaron 3 tipos de movimiento para el elipsoide: Sin fricción, con fricción por deslizamiento y con fricción por rodadura pura. En todos los casos al aplicar las leyes de la mecánica se obtuvieron sistemas de *Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no lineales y acopladas*, las cuales son resueltas numéricamente por el método de Runge Kutta de orden 4.

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ciencias

THESIS

ALEJANDRA BEATRÍZ ALTAMIRANO MACETAS

Lima - Perú

**Abstract**

In this work we analyze the movement of a rigid body, of ellipsoidal form with semiaxis  $a$ ,  $b$  and  $c$  (where  $a = b$ ). Their center of mass, is located in the straight line that contains the semiaxis  $c$ . Its movement was on a horizontal plane subject to the force of graveness. Three types of movement were analyzed, for the ellipsoid: Without friction, with friction for slip and with friction for pure rolling. In all the cases after applying the mechanics laws, systems of *Differential Ordinary Equations not lineal and coupled were obtained*, which were solved numerically by the method of Runge Kutta of order 4.

## ÍNDICE

LISTA DE FIGURAS . . . . .	1
LISTA DE TABLAS . . . . .	6
LISTA DE SIMBOLOS . . . . .	7
INTRODUCCIÓN . . . . .	8

### CAPÍTULO I.

<b>FUNDAMENTOS DE LA MECÁNICA DEL CUERPO RÍGIDO</b>	<b>13</b>
1.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	14
1.2. OPERADOR DE ROTACIÓN . . . . .	15
1.2.1. Matriz de Euler . . . . .	18
1.3. VELOCIDAD ANGULAR . . . . .	24
1.4. VECTOR DE INERCIA . . . . .	32
1.4.1. MOMENTO DE INERCIA . . . . .	33
1.4.2. EJES PRINCIPALES DE INERCIA . . . . .	34
1.5. MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO . . . . .	35
1.6. LA ENERGÍA CINÉTICA . . . . .	38
1.7. DERIVADAS DEL MOMENTO ANGULAR . . . . .	43
1.8. ECUACIÓN DE EULER . . . . .	47
1.9. ECUACIÓN MODIFICADAS DE EULER . . . . .	52

### CAPÍTULO II.

<b>MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE SIN FRICCIÓN</b>	<b>72</b>
2.1. INTRODUCCIÓN . . . . .	73
2.2. CÁLCULO DEL TORQUE DE LA REACCIÓN NORMAL Y EL PESO . . . . .	74
2.3. APLICACIONES DE LAS ECUACIÓN MODIFICADA DE EULER . . . . .	81

**CAPÍTULO III.****MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE CON FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO**

92	
3.1.	INTRODUCCIÓN . . . . . 93
3.2.	VELOCIDAD DEL PUNTO DE CONTACTO . . . . . 93
3.3.	FUERZA DE FRICCIÓN . . . . . 96
3.4.	TORQUE TOTAL . . . . . 98
3.5.	ECUACIONES MODIFICADOS DE EULER . . . . . 101

**CAPÍTULO IV.****MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE CON FRICCIÓN POR RODADURA PURA**

122	
4.1.	INTRODUCCIÓN . . . . . 123
4.2.	ECUACIÓN DE LIGADURA . . . . . 123
4.3.	RELACIONES PARA LA ENERGÍA MECÁNICA . . . . . 125
4.4.	APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE LAGRANGE . . . . . 129

**CAPÍTULO V.****RESULTADOS, ANÁLISIS Y CONCLUSIONES** 139

5.1.	INTRODUCCIÓN . . . . . 140
5.2.	SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO SIN FRICCIÓN . . . . . 141
5.2.1.	ALGORITMO . . . . . 142
5.2.2.	RESULTADOS . . . . . 144
5.3.	SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO CON FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO . . . . . 165
5.3.1.	ALGORITMO . . . . . 169
5.3.2.	RESULTADOS . . . . . 171
5.4.	MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE CON FRICCIÓN POR RODADURA PURA 182
5.4.1.	ALGORITMO . . . . . 186
5.4.2.	RESULTADOS . . . . . 187
5.5.	CONCLUSIONES . . . . . 228

# APÉNDICE

## Capítulo I

A1. Relación entre $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ .....	63
A2. Relación entre $\mathcal{B}_\xi$ y $\mathcal{B}$ .....	65
A3. Relación entre $\mathcal{B}_\xi$ y $\mathcal{B}^*$ .....	67
A4. Componentes de la velocidad angular en diferentes bases ( $\mathcal{B}$ , $\mathcal{B}^*$ y $\mathcal{B}_\xi$ ) .....	69

## Capítulo II

B1. Cálculo del vector $\overrightarrow{C_0C}$ en la base $\mathcal{B}^*$ .....	84
B2. Cálculo de la distancia $\mathcal{D}_1$ .....	89
B3. Cálculo de las componentes $\overrightarrow{GC}$ en la base $\mathcal{B}_\xi$ .....	91

## Capítulo III

C. Componentes rectangulares de $\vec{v}_C$ .....	115
---	-----

BIBLIOGRAFÍA .....	229
--------------------	-----

## LISTA DE FIGURAS

0.1. El Tippe top. . . . .	9
0.2. Gráfica de $\theta$ vs. tiempo, para el movimiento del tipp top. . . . .	9
0.3. Elipsoide no homogéneo, bajo la acción de una fuerza por rodadura pura. . . . .	10
1.1. Los vectores geométricos. . . . .	14
1.2. Aplicación del operador de rotación . . . . .	15
1.3. Operador de Rotación, con respecto a un Sistema de ejes cartesianos. . . . .	16
1.4. Sistema de ejes y base de vectores $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}^*$ . . . . .	19
1.5. Construcción de los ángulos de Euler. (a) Rotación alrededor del eje $X_3$ , un ángulo $\phi$ , (b) Rotación alrededor del eje $X'_1$ , un ángulo $\theta$ y (c) Rotación alrededor del eje $X''_3$ , un ángulo $\psi$ . . . . .	21
1.6. Relación entre los vectores no colineales $\overrightarrow{QA}$ , $\overrightarrow{QB}$ y $\overrightarrow{QC}$ . . . . .	25
1.7. Relación entre los vectores $\vec{l}$ , $\overrightarrow{QA}$ y $\overrightarrow{QA}$ . . . . .	28
1.8. Vector de inercia $\vec{Y}(Q, \hat{u})$ . . . . .	32
1.9. Momento de Inercia $I(Q, \hat{u})$ . . . . .	34
1.10. Sistema de $N$ partículas discretas que se comportan como un cuerpo rígido. . . . .	35
1.11. Esquema del vector $\overrightarrow{OP}_k$ . . . . .	36
1.12. Vector unitario $\hat{u}$ , que coincide con el eje $\mathcal{M}(\hat{u}, Q)$ y $\vec{W}$ . . . . .	37
1.13. Sistema de $N$ partículas, en la Base ligada $\mathcal{B}^*$ . . . . .	38
1.14. Los ejes principales de inercia, son los ejes $X_1^*$ , $X_2^*$ , $X_3^*$ , que están unidos rígidamente al cuerpo rígido. . . . .	42
1.15. Las fuerzas internas entre la partícula de masa $m_i$ , con vector posición $\vec{r}_i$ y la partícula de masa $m_j$ , con vector posición $\vec{r}_j$ , actúan a lo largo de una recta que coincide con $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ . . . . .	45
1.16. Relación para el vector $\overrightarrow{OP}_k = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP}_k$ . . . . .	45
1.17. Relación entre las bases $\mathcal{B} = \{\hat{e}_k\}$ , $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_k^*\}$ y $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_k\}$ . . . . .	53
1.18. Relación entre las bases $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_k^*\}$ y $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_k\}$ . . . . .	54
1.19. Los ejes de simetría $X_{\xi_1}$ , $X_{\xi_2}$ , $X_{\xi_3}$ de un cuerpo rígido. . . . .	56
1.20. Relaciones entre la base canónica $\mathcal{B}$ y la base ligada $\mathcal{B}^*$ . . . . .	63

1.21. Relación de transformación entre las bases de trabajo $B_\xi$ y $B$ . . . . .	65
1.22. Relación entre los vectores de la base $B$ , $B^*$ y $B_\xi$ . . . . .	67
2.1. Gráfico de las bases de consideradas, para el estudio del elipsoide no homogéneo. . . . .	73
2.2. Relaciones entre las fuerzas que actúan sobre el elipsoide no homogéneo . . . . .	74
2.3. Relación entre ciertos parámetros del elipsoide no homogéneo. . . . .	76
2.4. Relaciones entre las bases de trabajo . . . . .	79
2.5. Gráfica del elipsoide en el sistema coordenado $X_1^{**}, X_2^{**}, X_3^{**}$ . . . . .	84
2.6. Relación entre $\vec{N}$ y $\hat{e}_3$ . . . . .	86
2.7. Relación entre las bases $B^*$ y $B^{**}$ . . . . .	88
2.8. Ilustración para el calculo de la distancia $\mathcal{D}_1$ del punto $C_0$ al plano $X_1X_2$ . . . . .	89
2.9. Ilustración para el cálculo de $\overrightarrow{GC_0}$ . . . . .	91
3.1. Gráfica del punto de contacto, que une al elipsoide y al plano. . . . .	93
3.2. Fuerzas que originan torque, en el elipsoide no homogéneo. . . . .	99
4.1. Elipsoide no homogéneo, sometido a la fuerza de gravedad y a la fricción por rodadura pura. . . . .	123
4.2. Elipsoide no homogéneo y algunos parámetros importantes. . . . .	127
4.3. Elipsoide no homogéneo, vector $\overrightarrow{C_0G}$ . . . . .	128
5.1. Elipsoide no homogéneo, sobre una superficie plana sin fricción. Bajo la acción del torque debido a la reacción normal ( $\vec{T}_G^R$ ). . . . .	142
5.2. Comportamiento de $\theta(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. Se aprecia que la función $\theta$ es periodica, donde su amplitud y período va disminuyendo a medida que va aumentando $\dot{\psi}(0)$ . . . . .	146
5.3. Comportamiento de $\phi(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia . . . . .	147
5.4. Comportamiento de $\psi(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	148
5.5. Comportamiento de $\dot{\phi}(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	149
5.6. Comportamiento de $\dot{\phi}(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	151
5.7. Comportamiento de $\dot{\psi}(t)$ conforme la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	152
5.8. Superposición de funciones $\dot{\theta}(t)$ , $\dot{\phi}(t)$ y $\dot{\psi}(t)$ cuando la condición inicial de $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg}$ . Se aprecia que tienen los mismos períodos. . . . .	154
5.9. Comportamiento de la Energía del elipsoide, mientras la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	155
5.10. Comportamiento de la $\theta(t)$ cuando $c$ varia, desde 0,0125 m a 0,0225 m. . . . .	157
5.11. Comportamiento de $\phi(t)$ conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	158



5.12. Comportamiento de $\psi(t)$ conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	159
5.13. Comportamiento de $\dot{\theta}(t)$ conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	160
5.14. Comportamiento de $\dot{\phi}(t)$ conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	161
5.15. Comportamiento de $\dot{\psi}(t)$ conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	162
5.16. Superposicion de las derivadas de los angulos de Euler, cuando $c=0,0125m$ . . . . .	163
5.17. Comportamiento de Energía conforme la condición inicial de $c$ varia. . . . .	164
5.18. Fuerzas que originan torque en el elipsoide no homogéneo . . . . .	165
5.19. Variaciones de $\theta$ , cuando $c$ varia. . . . .	172
5.20. Variaciones de $\theta$ , cuando $c$ varia. . . . .	173
5.21. Variaciones de $\theta$ , cuando $c$ varia. . . . .	174
5.22. Gráficos de $\phi$ , para 2 valores de $c$ . . . . .	174
5.23. Gráficos de $\psi$ , para 2 valores de $c$ . . . . .	175
5.24. Gráficos de la función $\dot{\theta}$ , cuando $c$ varia. . . . .	175
5.25. Gráficos de la función $\dot{\theta}$ , cuando $c$ varia. . . . .	176
5.26. Gráficos de la función $\dot{\phi}$ , cuando $c$ varia. . . . .	176
5.27. Gráficos de la función $\dot{\psi}$ , cuando $c$ varia. . . . .	177
5.28. Variaciones de $\theta$ , cuando $\mu$ varia. . . . .	179
5.29. Gráficas de $\theta$ , cuando $\mu$ varia. . . . .	180
5.30. Gráficas de $\phi$ , $\psi$ y $\dot{\theta}$ , cuando $\mu$ varia entre los valores 0,3 y 0,6. . . . .	181
5.31. Gráficas de $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ , cuando $\mu$ varia entre los valores 0,3 y 0,6. . . . .	182
5.32. Elipsoide no homogéneo, sobre una superficie plana con fricción por rodadura pura. . . . .	183
5.33. Comportamiento de la $\theta(t)$ cuando $\mathcal{D}_2$ varia, desde 0,0001 m a 0,003 m. . . . .	190
5.34. Comportamiento de la $\theta(t)$ cuando $\mathcal{D}_2$ varia, desde 0,004 m a 0,01 m. . . . .	191
5.35. Comportamiento de $\phi(t)$ ; en a) $\mathcal{D}_2 = 0,005m$ y b) $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ , y $\psi(t)$ ; en c) $\mathcal{D}_2 = 0,005m$ y d) $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ . . . . .	193
5.36. Comportamiento de $\dot{\theta}(t)$ ; en e) $\mathcal{D}_2 = 0,005m$ y f) $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ , y $\dot{\phi}(t)$ ; en g) $\mathcal{D}_2 = 0,005m$ y h) $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ . . . . .	194
5.37. Comportamiento de $\dot{\psi}(t)$ ; en i) $\mathcal{D}_2 = 0,005m$ y j) $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ . . . . .	196
5.38. Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando $\mathcal{D}_2$ varia de 0,0001 m a 0.005 m. . . . .	198
5.39. Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando $\mathcal{D}_2$ varia de 0,006 m a 0.01 m. . . . .	199
5.40. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ para un tiempo $t [0, \mathcal{T}]$ seg. . . . .	200
5.41. Trayectoria de la curva en 1 período en el plano y en tres dimensiones. . . . .	202
5.42. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ para un tiempo $t [0, 2\mathcal{T}]$ seg. . . . .	203



5.43. Trayectoria del centro geométrico en 2 períodos (0,05800 seg.), en plano y en tres dimensiones. . . . .	204
5.44. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ para un tiempo $t [0,3\mathcal{T}]$ seg. . . . .	206
5.45. Trayectoria del la curva en 3 períodos (0,0868 seg.)en el plano y en tres dimensiones. . . . .	206
5.46. Gráfica de las proyecciones de la trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ . . . . .	207
5.47. Trayectoria del centro geométrico en 3D . . . . .	208
5.48. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,007m$ para un tiempo $t [0,\mathcal{T}]$ seg. . . . .	209
5.49. Trayectoria del centro geométrico, cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0007m$ y para un tiempo $t, [0,\mathcal{T}]$ seg. en tres dimensiones . . . . .	209
5.50. Proyecciones de la trayectoria en 3D,cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0007m$ y para un $t [0,15\mathcal{T}]$ . . . . .	210
5.51. Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando $\mathcal{D}_2 = 0,007m$ y para un $t [0,15\mathcal{T}]$ . . . . .	210
5.52. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,004m$ , para un tiempo $t [0,\mathcal{T}]$ seg. . . . .	211
5.53. Trayectoria del centro geométrico,cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0004m$ y para un tiempo $t, [0,\mathcal{T}]$ seg. en tres dimensiones . . . . .	211
5.54. Proyecciones de la trayectoria en 3D,cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0004m$ y para un $t [0,10\mathcal{T}]$ . . . . .	212
5.55. Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando $\mathcal{D}_2 = 0,004m$ y para un $t [0,10\mathcal{T}]$ . . . . .	212
5.56. Trayectorias del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$ para un tiempo $t, [0,\mathcal{T}]$ seg. . . . .	213
5.57. Trayectoria del centro geométrico,cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$ y para un tiempo $t, [0,\mathcal{T}]$ seg. en tres dimensiones . . . . .	213
5.58. Proyecciones de la trayectoria en 3D,cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$ y para un $t [0,8\mathcal{T}]$ . . . . .	214
5.59. Trayectoria del centro geométrico pra tres dimensiones, cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$ y para un $t [0,8\mathcal{T}]$ . . . . .	214
5.60. Trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,009m$ y en los intervalos de tiempo: a) $[0, 0,08]$ seg, b) $[0, 1,00]$ seg, y c) $[0, 4,80]$ seg . . . . .	216
5.61. Trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,008m$ y en los tiempos: a) $[0, 0,08]$ seg, b) $[0, 1,00]$ seg, y c) $[0, 4,80]$ seg . . . . .	217
5.62. Trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0078m$ y en los tiempos: a) $[0, 0,08]$ seg, b) $[0, 1,00]$ seg, y c) $[0,4,80]$ seg . . . . .	218
5.63. Trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,0075m$ y en los tiempos: a) $[0, 0,08]$ seg, b) $[0, 1,00]$ seg, y c) $[0,4,80]$ seg . . . . .	219
5.64. Trayectoria del centro geométrico cuando $\mathcal{D}_2 = 0,007m$ y en los tiempos: a) $[0, 0,08]$ seg, b) $[0, 1,00]$ seg, y c) $[0,4,80]$ seg . . . . .	220

- 5.65. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,0065m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 221
- 5.66. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,005m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 222
- 5.67. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,004m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 223
- 5.68. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,003m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 224
- 5.69. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,002m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 225
- 5.70. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,001m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 226
- 5.71. Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$  y en los tiempos: a)[0, 0,08]seg, b) [0, 1,00]seg, y c)[0,4,80]seg . . . . . 227

## LISTA DE TABLAS

5.1. Variaciones de la condición inicial de $\dot{\psi}(0)$ expresadas en diferentes unidades de medición. . . . .	144
5.2. Condiciones iniciales, para el caso en que $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	145
5.3. Parámetros, que intervienen en el cálculo numérico, cuando $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	145
5.4. Valores extremales de $\theta$ , cuando $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	146
5.5. Ajuste lineal de $\phi(t)$ , cuando $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	147
5.6. Ajuste lineal de $\psi(t)$ , de acuerdo $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	149
5.7. Valores extremales de la nutación ( $\dot{\theta}$ ), conforme $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	150
5.8. Valores extremales de $\dot{\phi}$ en el tiempo, conforme $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	153
5.9. Valores extremales de $\dot{\psi}$ en el tiempo, conforme $\dot{\psi}(0)$ varia. . . . .	153
5.10. Variaciones de la Energía conforme $\dot{\psi}(0)$ . varia. . . . .	155
5.11. Condiciones iniciales, cuando el parámetro $c$ varia. . . . .	156
5.12. Parámetros que interviene en el cálculo numérico, tomando en cuenta que $c$ se incrementa . . . . .	156
5.13. Variaciones del parámetro $c$ y sus respectivos momentos de Inercia . . . . .	156
5.14. Valores extremales de $\theta$ , conforme $c$ varia. . . . .	157
5.15. Ajuste lineal de $\phi(t)$ , conforme el parámetro $c$ varia. . . . .	158
5.16. Ajuste lineal de $\psi(t)$ , conforme $c$ varia. . . . .	159
5.17. Valores extremales de $\dot{\theta}$ , conforme $c$ varia. . . . .	161
5.18. Variaciones de $\dot{\phi}$ , conforme el parámetro $c$ varia. . . . .	163
5.19. Variaciones de $\dot{\psi}$ , conforme el parámetro $c$ varia. . . . .	163
5.20. Variaciones de la Energía, conforme el parámetro $c$ varia. . . . .	165
5.21. Condiciones iniciales para este caso. . . . .	172
5.22. Parámetro. . . . .	172
5.23. Condiciones iniciales. . . . .	177
5.24. Parámetros. . . . .	178
5.25. Variaciones de $\mathcal{D}_2$ e l. . . . .	189
5.26. Condiciones iniciales. . . . .	189
5.27. Parámetros. . . . .	190

5.28. Variaciones de $\theta$ , conforme $\mathcal{D}_2$ e $l$ varian. . . . .	192
5.29. Ajuste lineal de $\phi(t)$ , cuando $\mathcal{D}_2$ varia. . . . .	193
5.30. Ajuste de lineal de $\psi$ con respecto a $\mathcal{D}_2$ . . . . .	194
5.31. Variaciones de $\dot{\theta}$ , conforme $\mathcal{D}_2$ e $l$ varian. . . . .	195
5.32. Valores notables de $\dot{\phi}$ conforme $\mathcal{D}_2$ e $l$ varian. . . . .	196
5.33. Variaciones de $\dot{\psi}$ conforme $\mathcal{D}_2$ e $l$ varian. . . . .	197
5.34. Variaciones de la Energía conforme $\mathcal{D}_2$ varian. . . . .	199

## LISTA DE LOS PRINCIPALES SIMBOLOS

- $\{\hat{e}_1, \hat{e}_1, \hat{e}_1\}$  Base  $B$ ; fija a tierra, con centro en  $O$ .  
 $\{\hat{e}_1^{**}, \hat{e}_1^{**}, \hat{e}_1^{**}\}$  Base  $B^{**}$ , con centro en  $C_0$ .  
 $\{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  Base  $B^*$ , ligada al cuerpo rotante (elipsoide).  
 $\{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2, \vec{\xi}_3\}$  Base modificada de Euler  $B_\xi$ , con centro en  $G$ .  
 $\theta$  Ángulo entre  $\hat{e}_3$  y  $\hat{e}_3^*$ .  
 $\phi$  Ángulo entre  $\hat{e}_1$  y  $\hat{\xi}_1$ .  
 $\psi$  Ángulo entre  $\hat{\xi}_1$  y  $\hat{e}_1^*$ .  
 $\dot{\theta}$  Velocidad de nutación.  
 $\dot{\phi}$  Velocidad de precesión.  
 $\vec{v}_C$  Velocidad del punto de contacto  $C$  del elipsoide.  
 $\vec{W}$  Velocidad angular.  
 $\vec{F}_d$  Fuerza de fricción por deslizamiento.  
 $\vec{F}_r$  Fuerza de fricción por rodadura pura.  
 $\vec{R}$  Fuerza debido a la reacción normal.  
 $\vec{P}$  Fuerza debido al peso.  
 $\vec{L}_G$  Momento angular con respecto a  $G$ .  
 $\vec{T}_G^{\vec{R}}$  Torque con respecto a un punto  $G$ , debido a la reacción normal.  
 $\vec{T}_G^{\vec{F}_d}$  Torque con respecto a un punto  $G$  debido a la fricción por deslizamiento.  
 $g$  Aceleración de la gravedad (Tierra).  
 $m$  Masa del elipsoide.  
 $\mathcal{R}$  modulo de la fuerza de reacción normal.  
 $I_3$  Momento principal de inercia referido al eje  $X_3^*$ .  
 $I$  Momento principal de inercia referido al eje  $X_1^* = X_2^*$ .  
 $D_1$  Distancia del centro geométrico del elipsoide al plano de contacto.  
 $D_2$  Distancia del centro geométrico ( $C_0$ ) al centro de masa ( $G$ ).  
 $\mu$  Coeficiente de fricción.  
 $G$  Centro de masa.



Por lo general esto ocurre en la mayoría de los sistemas mecánicos, los cuales no pueden resolverse exactamente. Es necesario usar métodos numéricos que permitan obtener soluciones aproximadas. El método numérico, usado para resolver las simulaciones, es el **Runge Kutta de 4<sup>to</sup> Orden**.

A continuación se hará un breve resumen de los capítulos que presenta la tesis:

### **Capítulo I.-** *Fundamentos de la mecánica del cuerpo rígido.*

Se realizará un repaso de los conceptos, más importantes en la mecánica del cuerpo rígido, se hablará: el operador de rotación, la velocidad angular, el torque, las ecuaciones de movimiento de Euler y las ecuaciones modificadas de Euler aplicadas a un cuerpo rígido.

### **Capítulo II.-** *Movimiento de un elipsoide no homogéneo sin fricción.*

Se analizará el movimiento del elipsoide no homogéneo sin fricción aplicando las ecuaciones modificadas de Euler, que serán resueltas numéricamente en el capítulo V. Para comprobar los cálculos se calcula la energía mecánica (como no hay fricción se conserva la energía). Usando este método se demostrará que el ángulo de Euler  $\theta$  oscila entre un mínimo ( $\theta_{min}$ ) y un máximo ( $\theta_{max}$ ).

### **Capítulo III.-** *Movimiento de un elipsoide no homogéneo con fricción por deslizamiento*

A diferencia del capítulo anterior, aquí se analiza el movimiento considerando, la fricción que sufre el elipsoide no homogéneo sobre el plano de contacto. Debido al rozamiento, las ecuaciones diferenciales de movimiento son un poco complicadas. Se empleará las ecuaciones modificadas de Euler y la 2da ley de Newton, obteniéndose al final 5 ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. La solución numérica de las ecuaciones diferenciales ordinarias, para ciertas condiciones iniciales, se muestran en el capítulo V.

### **Capítulo IV.-** *Movimiento de un elipsoide no homogéneo con fricción por rodadura pura.*

Se hallará las ecuaciones diferenciales de movimiento, cuando el elipsoide está sometido a una fuerza de fricción por rodadura pura. Por lo tanto se conserva la energía mecánica, esto permitirá comprobar los cálculos obtenidos, hallando el porcentaje de error.



## Capítulo V.- *Resultados, Análisis y Conclusiones..*

Se resuelve numéricamente las ecuaciones diferenciales de movimiento no lineales y acopladas para los siguientes casos:

- A) Movimiento sin fricción sobre el plano de contacto.
- B) Movimiento con fricción por deslizamiento sobre el plano de contacto.
- C) Movimiento por fricción por rodadura pura sobre el plano de contacto.

Empleando el método de Runge Kutta de 4to Orden, para resolverlo numéricamente. Además se analiza varias situaciones; entre ellas, cuando  $c$  (eje menor del elipsoide) varia y el resto de parámetros se mantiene constante. De igual manera se efectuarán los cálculos, cuando hay fricción por deslizamiento y por rodadura pura.



## CAPÍTULO I

# FUNDAMENTOS DE LA DINÁMICA DE UN CUERPO RÍGIDO

- 1.1.- Introducción.
- 1.2.- Operador de Rotación.
- 1.3.- Velocidad angular.
- 1.4.- Vector de inercia.
- 1.5.- Momento angular de un cuerpo rígido.
- 1.6.- La energía cinética.
- 1.7.- Derivadas del momento angular.
- 1.8.- Ecuación de Euler.
- 1.9.- Ecuaciones modificadas de Euler.

## 1.1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo se hará un repaso de los fundamentos más importantes de la dinámica del cuerpo rígido. Se iniciará este repaso con el operador de rotación  $\mathfrak{R}(\hat{u}, \theta)$ , la velocidad angular ( $\vec{W}$ ), el *vector de inercia* ( $\vec{Y}(Q, \hat{u})$ ), el *momento de inercia* ( $I(Q, \hat{u})$ ), los *ejes principales de inercia*, *momento angular* ( $\vec{L}_Q$ ) y la energía cinética ( $K$ ) de un cuerpo rígido. También se demostrará las ecuaciones de Euler, que servirá para deducir unas nuevas ecuaciones (donde intervienen los ángulos de Euler), llamadas *ecuaciones modificadas de Euler* [Coh77] y [Vid94].

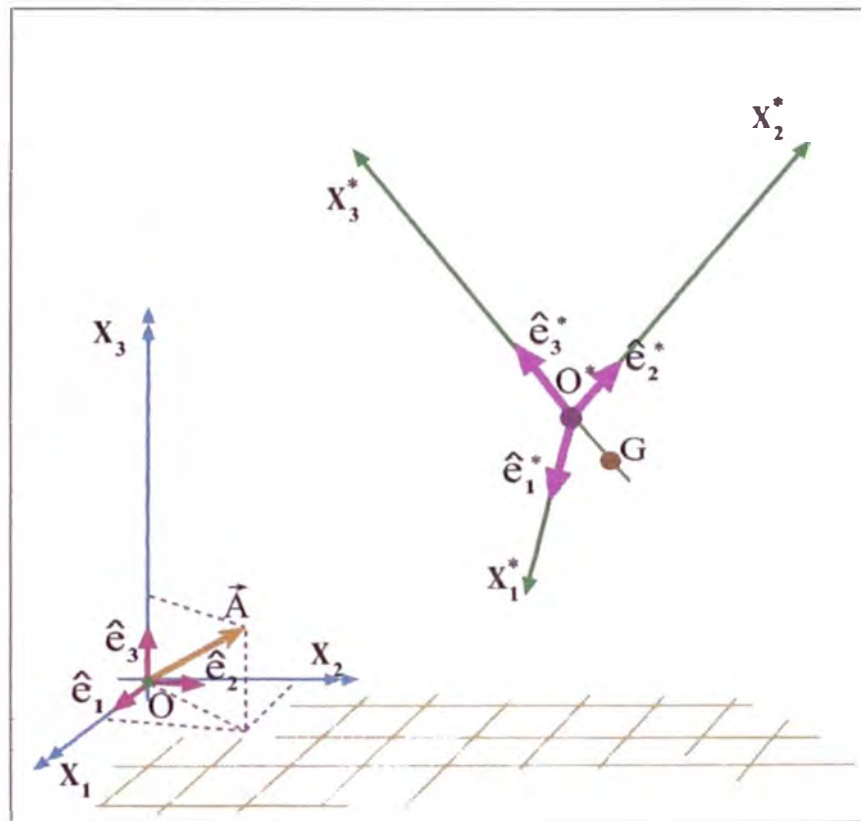


Figura 1.1: Los vectores geométricos.

Para evitar confusiones, se entenderá por vector ( $\vec{A}$ ) a un segmento orientado (segdo). Por otra parte se tiene una base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  ( Fig.(1.1)), la expresión de  $\vec{A}$  en dicha base es  $\vec{A} = \sum_{k=1}^3 A_k \hat{e}_k$ . A la matriz columna de componentes de  $\vec{A}$  en la base  $\mathcal{B}$  se representará por  $\bar{A}$ , es decir

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Se recordará que las componentes de  $\vec{A}$  dependen de la base, pero este segmento orientado (vector  $\vec{A}$ ) sigue siendo el mismo en cualquier base de vectores (es sólo una flecha).

## 1.2. OPERADOR DE ROTACIÓN

Se considerará un vector  $\vec{q}$ , que al aplicarle un operador de rotación origina otro vector, al cual se llamará  $\vec{p}$ . Este operador, hace que  $\vec{q}$  gire un ángulo  $\theta$ , alrededor de la recta  $\mathcal{M}$  (Fig. 1.2), la cual contiene a  $\hat{u}$  (vector unitario). El operador de rotación se denotará por  $\mathfrak{R}(\hat{u}, \theta)$ , es decir

$$\vec{p} = \mathfrak{R}(\hat{u}, \theta) \vec{q}. \quad (1.2)$$

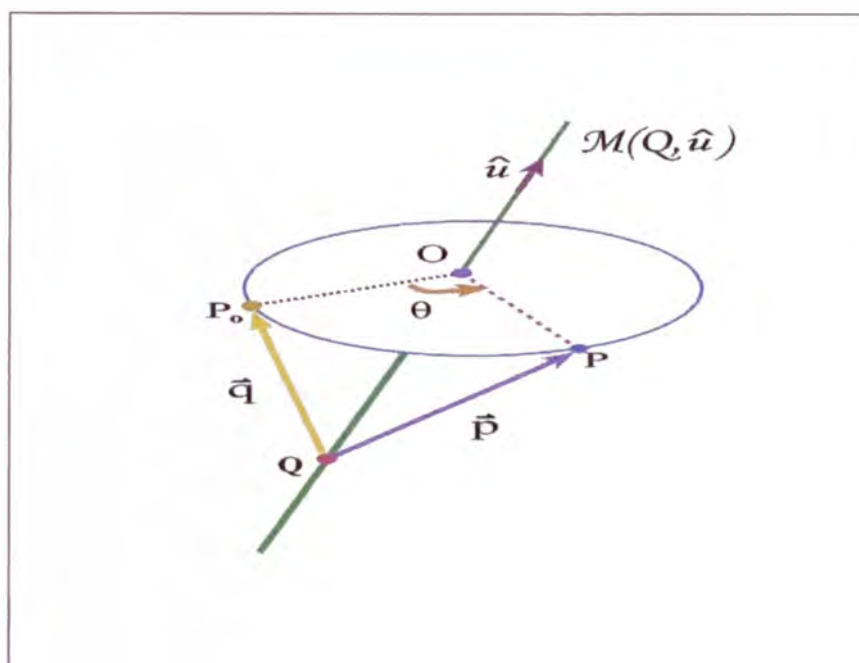


Figura 1.2: Aplicación del operador de rotación

La expresión (1.2) es una relación geométrica y aún no intervienen las componentes de los vectores. Para esto elegimos un sistema de ejes cartesianos (determinada por un punto de origen(O) y tres vectores  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ , que forman una base ortonormal).

Los vectores  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  tendrán sus componentes referidos a esa base y el operador de rotación  $\mathfrak{R}(\hat{u}, \theta)$  quedará representado por una matriz  $\mathbb{R}(\hat{u}, \theta)$  (Fig.(1.3))

Sea la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , luego

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^3 p_j \hat{e}_j \quad ; \quad \vec{q} = \sum_{j=1}^3 q_j \hat{e}_j. \quad (1.3)$$

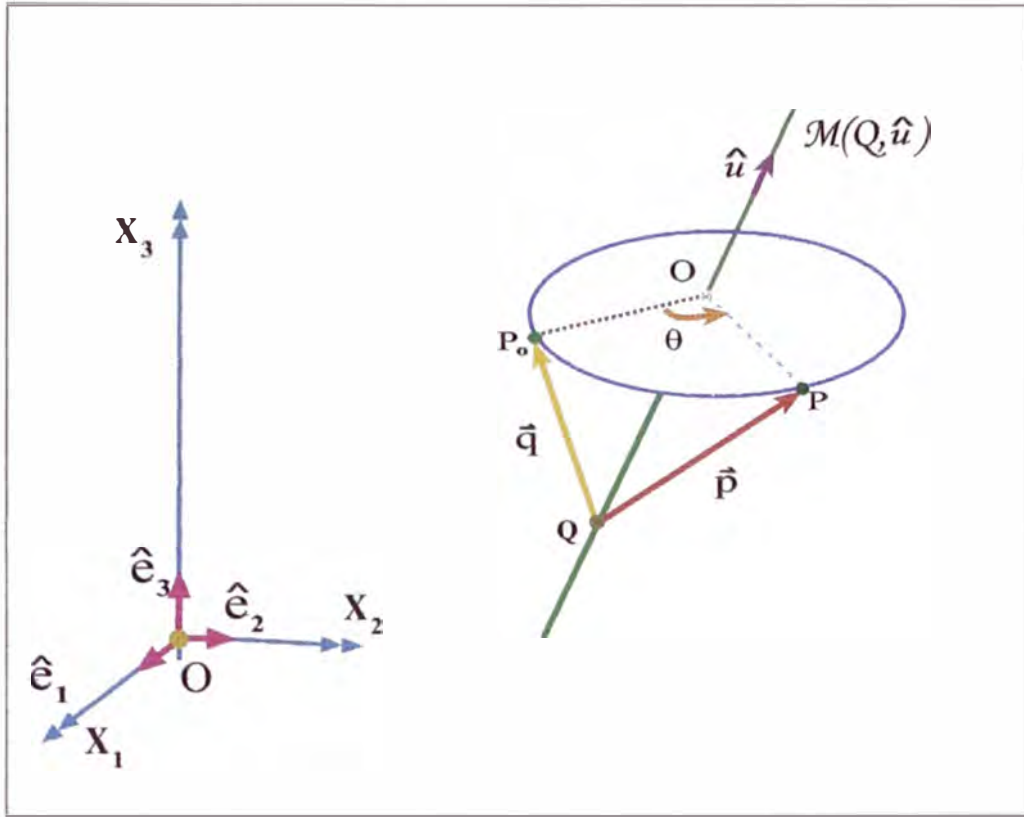


Figura 1.3: Operador de Rotación, con respecto a un Sistema de ejes cartesianos.

Se demuestra que la relación entre  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  es ([Val96-3])

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \mathbb{R}(\hat{u}, \theta) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

con

$$\mathbb{R}(\hat{u}, \theta) \equiv \mathbb{I} + \mathbb{U} \operatorname{sen} \theta + \mathbb{U}^2 (1 - \cos \theta), \quad (1.5)$$

donde  $\mathbb{R}(\hat{u}, \theta)$  es una matriz llamada *matriz de rotación*, referida a la base  $\mathcal{B}$ , en el cual  $\theta$  es el *ángulo de rotación*,  $\hat{u}$  es un vector unitario *paralelo al eje de rotación*. Las expresiones para  $\mathbb{I}$ ,  $\mathbb{U}$  y  $\bar{u}$  son

$$\mathbb{I} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{u} \equiv \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbb{U} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -u_3 & u_2 \\ u_3 & 0 & -u_1 \\ -u_2 & u_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Si denotamos por

$$\vec{p} \equiv \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}; \quad \vec{q} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

la expresión (1.4) es equivalente a

$$\vec{p} = \mathbb{R}(\hat{u}, \theta) \vec{q} \Leftrightarrow \vec{p} = \mathcal{R}(\hat{u}, \theta) \vec{q}. \quad (1.8)$$

A continuación se muestra un ejemplo donde se aplica la matriz de rotación  $\mathbb{R}(\hat{u}, \theta)$ . Hallaremos la expresión de  $\vec{A}'$  que resulta al rotar  $\vec{A} \equiv \hat{e}_1$  un ángulo  $\alpha = 30^\circ$  alrededor del vector  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{5}}(-\hat{e}_2 + 2\hat{e}_3)$ , donde se toma  $\hat{u} = \hat{a}$  y  $\theta = \alpha$ . Es decir

$$\vec{A}' = \mathbb{R}(\hat{a}, \alpha) \vec{A}. \quad (1.9)$$

Para poder calcular primero formamos la matriz  $\mathbb{U}$  dada en la expresión (1.6)

$$\mathbb{U} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.10)$$

luego se tendrá la expresión (usando la ec.(1.5))

$$\begin{aligned} \mathbb{R}(\hat{a}, \alpha) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{sen } 30^\circ \\ &+ \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} (1 - \cos 30^\circ), \end{aligned} \quad (1.11)$$

efectuando operaciones en la expresión anterior se tiene que

$$\mathbb{R}(\hat{a}, \alpha) = \begin{pmatrix} 0,86 & -2,230 & -1,115 \\ 2,23 & 0,888 & -0,056 \\ 1,115 & -0,056 & 0,972 \end{pmatrix}, \quad (1.12)$$

reemplazando esta matriz en la ec.(1.19) para  $\vec{A} = \hat{e}_1$ , se obtendrá

$$\vec{A}' = \mathbb{R}(\vec{a}, \alpha)\vec{A},$$

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 0,860 & -2,230 & -1,115 \\ 2,230 & 0,888 & -0,056 \\ 1,110 & -0,056 & 0,972 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{A}' = \begin{pmatrix} 0,860 \\ 2,230 \\ 1,115 \end{pmatrix}. \quad (1.13)$$

Finalmente

$$\vec{A}' = 0,8620 \hat{e}_1 + 2,230 \hat{e}_2 + 1,115 \hat{e}_3. \quad (1.14)$$

### 1.2.1. Matriz de Euler

Sea un sistema de ejes  $(X_1, X_2, X_3)$  y  $(X_1^*, X_2^*, X_3^*)$  con base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  respectivamente (Fig.(1.4)). Se puede considerar el sistema de ejes  $X_1^*, X_2^*$  y  $X_3^*$ , como el resultado de efectuar tres rotaciones al sistema de ejes  $X_1, X_2$  y  $X_3$ . Se considera este artificio para facilitar el cálculo de la matriz de transformación de coordenadas <sup>1</sup>.

Las rotaciones son las siguientes:

Sea un vector  $\vec{OP}$  que va a rotar alrededor de  $\hat{e}_3$  ( $\hat{e}_3$  pertenece a la base  $\mathcal{B}$ ) un ángulo  $\phi$ , originando al vector  $\vec{OP}'$ . Si  $\vec{OP} = \hat{e}_k$  este genera una base  $\mathcal{B}' = \{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$  (Fig.(1.5)), es decir

<sup>1</sup>Para simplificar la notación, se hará  $\hat{e}_k''' \equiv \hat{e}_k^*$  y los ejes  $X_k \equiv X_k^*$ .

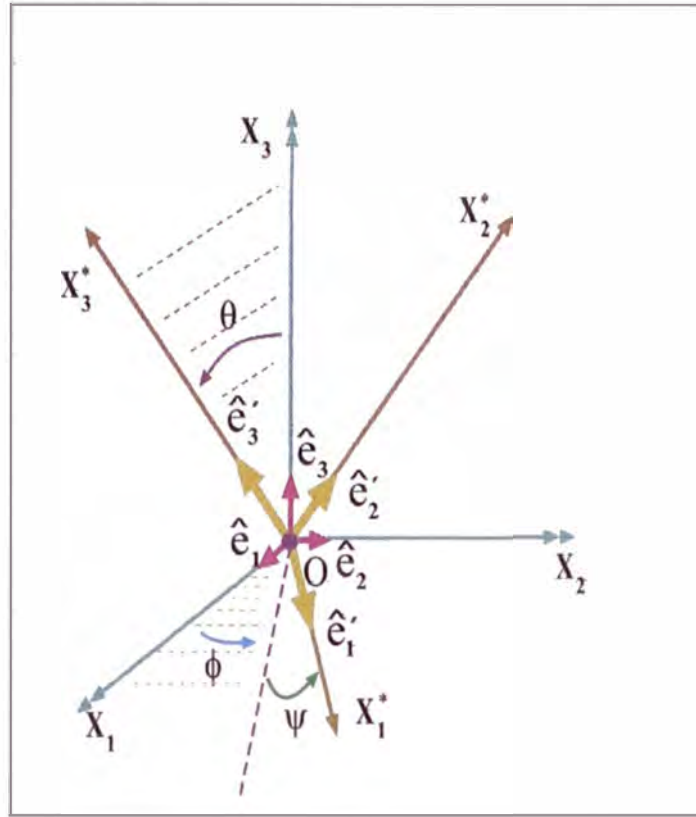


Figura 1.4: Sistema de ejes y base de vectores  $B$  y  $B^*$

$$\overrightarrow{OP}' = \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \overrightarrow{OP} \Rightarrow \boxed{\hat{e}'_k = \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \hat{e}_k}, \quad (1.15)$$

donde  $\hat{e}'_3 \equiv \hat{e}_3$ .

El vector  $\overrightarrow{OP}'$  va a rotar alrededor de  $\hat{e}'_1$  un ángulo  $\theta$ , originando el vector  $\overrightarrow{OP}''$ . Si  $\overrightarrow{OP}' = \hat{e}'_k$ , se forma una nueva base  $B'' = \{\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3\}$ ,

$$\overrightarrow{OP}'' = \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta) \overrightarrow{OP}' \Rightarrow \boxed{\hat{e}''_k = \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta) \hat{e}'_k}, \quad (1.16)$$

donde  $\hat{e}''_1 \equiv \hat{e}'_1$ .

Finalmente el vector  $\overrightarrow{OP}''$  rota alrededor de  $\hat{e}''_3$  un ángulo  $\psi$ , originando al vector  $\overrightarrow{OP}'''$ . Si  $\overrightarrow{OP}'' = \hat{e}''_3$  se genera una base  $B''' = \{\hat{e}'''_1, \hat{e}'''_2, \hat{e}'''_3\}$ ,

$$\overrightarrow{OP}''' = \mathfrak{R}(\hat{e}''_3, \psi) \overrightarrow{OP}'' \Rightarrow \boxed{\hat{e}'''_k = \mathfrak{R}(\hat{e}''_3, \psi) \hat{e}''_k}, \quad (1.17)$$

donde  $\hat{e}'''_3 \equiv \hat{e}''_3$ .<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Para simplificar la notación, se hará  $\hat{e}'''_k \equiv \hat{e}^*_k$  y los ejes  $X_k \equiv X^*_k$ .

Para obtener la matriz de transformación de coordenadas o cambio de base de  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'''$  reemplazamos las ecuaciones (1.15) y (1.16) en (1.17) consiguiendo

$$\overrightarrow{OP}''' = \mathfrak{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \overrightarrow{OP}. \quad (1.18)$$

Recordando la expresión (1.8) se tiene de la ec. (1.18) lo siguiente

$$\overline{OP}''' = \mathbb{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathbb{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) \overline{OP}. \quad (1.19)$$

La matriz

$$\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi) \equiv \mathbb{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathbb{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi), \quad (1.20)$$

será la matriz de transformación de coordenadas, los tres ángulos formados  $(\theta, \phi, \psi)$  son llamados *ángulos de Euler*. Como los coeficientes de la matriz de cambio de base  $\mathcal{B}'''$  a  $\mathcal{B}$  dependen de los ángulos de Euler, se les llama *Matriz de rotación de Euler*,  $\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi)$  ([Val96-3]). Lo interesante es que esta matriz de rotación no se realiza solo con respecto a un unico sistema de ejes, sino a rotaciones sucesivas alrededor de los ejes  $\hat{e}_3$ ,  $\hat{e}_1'$  y  $\hat{e}_3''$ .

Se demostrará que

$$\mathbb{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathbb{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) = \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathbb{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \psi). \quad (1.21)$$

Para la demostración de la ec.(1.21) se aplicará las propiedades [Val96-3].

$$\mathfrak{R}[\mathfrak{R}(\vec{v}, \alpha) \hat{v}, \beta] = \mathfrak{R}(\hat{v}, \alpha) \mathfrak{R}(\hat{u}, \beta) \mathfrak{R}(\hat{v}, -\alpha), \quad (1.22)$$

$$\mathfrak{R}(\hat{v}, \alpha) \mathfrak{R}(\hat{v}, -\alpha) = \mathbf{I}, \quad (1.23)$$

donde  $\mathbf{I}$  es el operador identidad. Emplearemos la propiedad (1.22) en la demostración de la ecuación

$$\mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathbb{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \psi) = \mathbb{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathbb{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi), \quad (1.24)$$

que equivale a demostrar la ec.(1.21).

Aplicando la propiedad (1.22) a la rotación  $\mathfrak{R}(\hat{e}_3'', \psi)$  y recordando ec.(1.16)



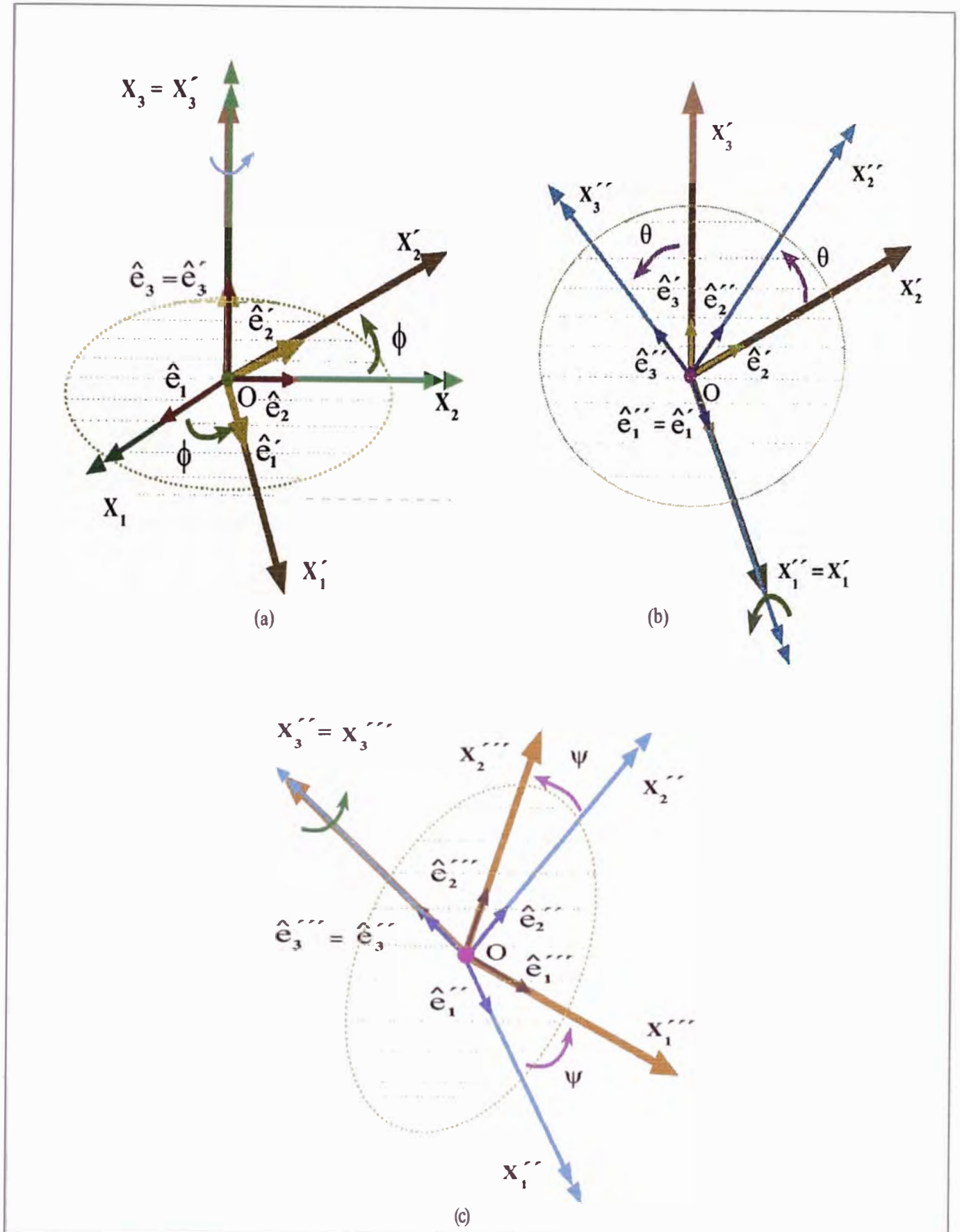


Figura 1.5: Construcción de los ángulos de Euler. (a) Rotación alrededor del eje  $X_3$ , un ángulo  $\phi$ , (b) Rotación alrededor del eje  $X'_1$ , un ángulo  $\theta$  y (c) Rotación alrededor del eje  $X''_3$ , un ángulo  $\psi$ .

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\hat{e}_3'', \psi) &= \mathfrak{R}[\mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \hat{e}_3', \psi], \\
&= \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3', \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1', -\theta),
\end{aligned} \tag{1.25}$$

ahora efectuamos la misma propiedad (1.22) para la rotación  $\mathfrak{R}(\hat{e}_3', \psi)$  y considerando la ec.(1.15)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\hat{e}_3', \psi) &= \mathfrak{R}[\mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \hat{e}_3, \psi], \\
&= \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi),
\end{aligned} \tag{1.26}$$

finalmente aplicamos la propiedad (1.22) a la rotación y considerando la ec.(1.15)  $\mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta)$

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) &= \mathfrak{R}[\mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \hat{e}_1, \theta], \\
&= \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

Reemplazamos la ec.(1.25) en el lado derecho de la ec.(1.24)

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) &= \left( \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3', \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1', -\theta) \right) \\
&\quad \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

De la ec.(1.28) y la ec.(1.26) y definiendo a  $R \equiv \mathfrak{R}(\hat{e}_3'', \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi)$ , para facilitar la escritura de las expresiones,

$$\begin{aligned}
R &= \left\{ \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \left[ \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \right] \mathfrak{R}(\hat{e}_1', -\theta) \right\} \\
&\quad \mathfrak{R}(\hat{e}_1', \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi),
\end{aligned} \tag{1.29}$$

y por último en la ec.(1.29) reemplazó la ec.(1.27) en el primer factor  $\mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta)$

$$R = \left\{ \left\langle \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \right\rangle \left[ \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \right] \right. \\ \left. \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, -\theta) \right\} \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi). \quad (1.30)$$

A la ec.(1.30) le aplicó la propiedad (1.23) y simplificamos

$$R = \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1, \theta) \underbrace{\mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi)}_I \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \\ \underbrace{\mathfrak{R}(\hat{e}'_1, -\theta) \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta)}_I \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi), \quad (1.31)$$

$$R = \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi) \underbrace{\mathfrak{R}(\hat{e}_3, -\phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi)}_I, \quad (1.32)$$

y se obtiene

$$R = \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathfrak{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \psi), \quad (1.33)$$

y recordando la definición de  $R \equiv \mathfrak{R}(\hat{e}''_3, \psi) \mathfrak{R}(\hat{e}'_1, \theta) \mathfrak{R}(\hat{e}_3, \phi)$ , se comprueba la ec.(1.24) que a su vez comprueba la ec.(1.21) y con la ec.(1.20) se tiene finalmente

$$\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi) = \mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) \mathbb{R}(\hat{e}_1, \theta) \mathbb{R}(\hat{e}_3, \psi). \quad (1.34)$$

Por otra parte usando la ec.(1.5) se tiene las expresiones matriciales de  $\mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi)$ ,  $\mathbb{R}(\hat{e}_1, \theta)$  y

$\mathbb{R}(\hat{e}_3, \psi)$ 

$$\mathbb{R}(\hat{e}_3, \phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\text{sen}\phi & 0 \\ \text{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.35)$$

$$\mathbb{R}(\hat{e}_1, \theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta \\ 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad (1.36)$$

$$\mathbb{R}(\hat{e}_3, \psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\text{sen}\psi & 0 \\ \text{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.37)$$

La expresión final para  $\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi)$  se da luego de multiplicar las matrices (1.35), (1.36) y (1.37) y reemplazando en la ec.(1.34) obtenemos finalmente la matriz

$$\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi) =$$

$$\begin{pmatrix} (\cos\phi\cos\psi - \text{sen}\phi\cos\theta\text{sen}\psi) & (\cos\phi\cos\theta\text{sen}\psi + \cos\psi\text{sen}\phi) & (\text{sen}\psi\text{sen}\theta) \\ (-\cos\phi\text{sen}\psi - \text{sen}\phi\cos\theta\cos\psi) & (\cos\phi\cos\theta\cos\psi - \text{sen}\psi\text{sen}\phi) & (\cos\psi\text{sen}\theta) \\ (\text{sen}\phi\text{sen}\theta) & (-\cos\phi\text{sen}\theta) & (\cos\theta) \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

### 1.3. VELOCIDAD ANGULAR

Para definir el concepto de velocidad angular para el movimiento general de un cuerpo rígido, consideramos los siguientes puntos Q, A, B, C, ([Val02]) pertenecientes al cuerpo rígido tal que los vectores  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  y  $\overrightarrow{QC}$  son mutuamente ortogonales y con los módulos iguales, luego

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB} = 0, \quad (1.39)$$

$$\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QC} = 0, \quad (1.40)$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QC} = 0. \quad (1.41)$$

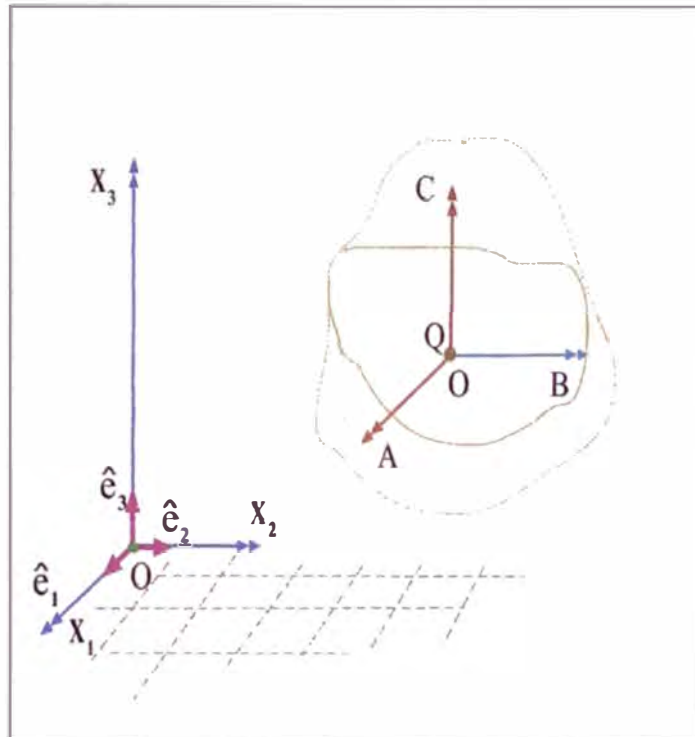


Figura 1.6: Relación entre los vectores no colineales  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  y  $\overrightarrow{QC}$

Si se derivan las ecuaciones (1.39), (1.40) y (1.41) tendremos

$$\overrightarrow{QA} \cdot \dot{\overrightarrow{QB}} + \overrightarrow{QB} \cdot \dot{\overrightarrow{QA}} = 0, \quad (1.42)$$

$$\overrightarrow{QB} \cdot \dot{\overrightarrow{QC}} + \overrightarrow{QC} \cdot \dot{\overrightarrow{QB}} = 0, \quad (1.43)$$

$$\overrightarrow{QA} \cdot \dot{\overrightarrow{QC}} + \overrightarrow{QC} \cdot \dot{\overrightarrow{QA}} = 0. \quad (1.44)$$

Por otro lado los módulos de  $\overrightarrow{QA}$ ,  $\overrightarrow{QB}$  y  $\overrightarrow{QC}$  son constante (pues no varía en el tiempo, porque A, B, C y Q pertenecen al cuerpo rígido) es decir

$$|\overrightarrow{QA}| = cte. , \quad (1.45)$$

$$|\overrightarrow{QB}| = cte. , \quad (1.46)$$

$$|\overrightarrow{QC}| = cte. . \quad (1.47)$$

pero por algebra de vectores se sabe  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ , por lo tanto

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QA} = cte. , \quad (1.48)$$

$$\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QB} = cte. , \quad (1.49)$$

$$\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QC} = cte. , \quad (1.50)$$

si derivamos las expresiones anteriores se tendrá

$$(\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QA})' = 0 , \quad (1.51)$$

$$(\overrightarrow{QB} \cdot \overrightarrow{QB})' = 0 , \quad (1.52)$$

$$(\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{QC})' = 0 , \quad (1.53)$$

luego de efectuar las operaciones respectivas se obtiene,

$$\overrightarrow{QA} \cdot \dot{\overrightarrow{QA}} = 0 , \quad (1.54)$$

$$\overrightarrow{QB} \cdot \dot{\overrightarrow{QB}} = 0 , \quad (1.55)$$

$$\overrightarrow{QC} \cdot \dot{\overrightarrow{QC}} = 0 , \quad (1.56)$$

De la ec.(1.54) se puede concluir que  $\overrightarrow{Q\dot{A}}$  es perpendicular a  $\overrightarrow{QA}$ , (recordemos que  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff \vec{a} \perp \vec{b}$ ), entonces existe un  $\vec{l}$  perpendicular a  $\overrightarrow{QA}$  tal que

$$\overrightarrow{Q\dot{A}} // (\vec{l} \times \overrightarrow{QA}). \quad (1.57)$$

de igual manera existe  $\vec{m}$  y  $\vec{n}$  tal que de las ecuaciones (1.55) y (1.56)

$$\overrightarrow{Q\dot{B}} // (\vec{m} \times \overrightarrow{QB}), \quad (1.58)$$

$$\overrightarrow{Q\dot{C}} // (\vec{n} \times \overrightarrow{QC}), \quad (1.59)$$

como  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$  y  $\vec{n}$  son cualquiera se elige un  $\vec{l}$ ,  $\vec{m}$  y  $\vec{n}$  tal que (Fig.(1.7))

$$\vec{l} \cdot \overrightarrow{QA} = 0, \quad (1.60)$$

$$\vec{m} \cdot \overrightarrow{QB} = 0, \quad (1.61)$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{QC} = 0, \quad (1.62)$$

además se exige

$$\overrightarrow{Q\dot{A}} = \vec{l} \times \overrightarrow{QA}, \quad (1.63)$$

$$\overrightarrow{Q\dot{B}} = \vec{m} \times \overrightarrow{QB}, \quad (1.64)$$

$$\overrightarrow{Q\dot{C}} = \vec{n} \times \overrightarrow{QC}. \quad (1.65)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (1.60), (1.61) y (1.62), se tiene  $\vec{l} \perp \overrightarrow{QA}$ ,  $\vec{m} \perp \overrightarrow{QB}$  y  $\vec{n} \perp \overrightarrow{QC}$ , entonces se puede expresar

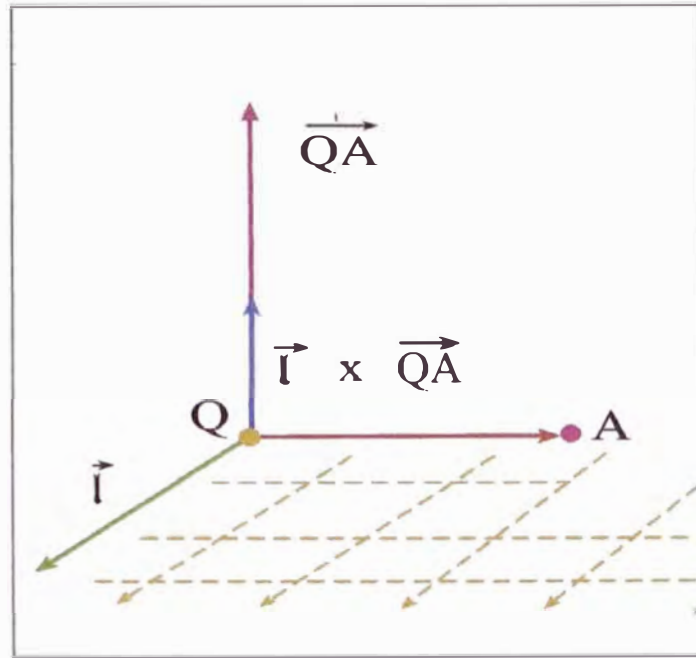


Figura 1.7: Relación entre los vectores  $\vec{r}$ ,  $\vec{QA}$  y  $\vec{r} \times \vec{QA}$

$$\vec{r} = \nu_1 \vec{QB} + \nu_2 \vec{QC}, \quad (1.66)$$

$$\vec{m} = \nu_3 \vec{QA} + \nu_4 \vec{QC}, \quad (1.67)$$

$$\vec{n} = \nu_5 \vec{QA} + \nu_6 \vec{QB}, \quad (1.68)$$

porque el conjunto  $\{\vec{QA}, \vec{QB}, \vec{QC}\}$  se puede considerar una base ortonormal.

De las ecuaciones (1.66), (1.67) y (1.68), se obtienen las ecuaciones

$$\vec{r} - \vec{m} = \nu_1 \vec{QB} - \nu_3 \vec{QA} + (\nu_2 - \nu_4) \vec{QC}, \quad (1.69)$$

$$\vec{m} - \vec{n} = (\nu_3 - \nu_5) \vec{QA} - \nu_6 \vec{QB} + \nu_4 \vec{QC}, \quad (1.70)$$

$$\vec{r} - \vec{n} = -\nu_5 \vec{QA} + (\nu_1 - \nu_6) \vec{QB} + \nu_2 \vec{QC}. \quad (1.71)$$

De otro lado de la ec.(1.42) con las ecuaciones (1.63) y (1.64) se obtiene



$$\overrightarrow{QA} \cdot (\vec{m} \times \overrightarrow{QB}) + \overrightarrow{QB} \cdot (\vec{l} \times \overrightarrow{QA}) = 0, \quad (1.72)$$

mediante la propiedad  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{c})$  la ec.(1.72) se transforma en

$$-\vec{m} \cdot (\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}) + \vec{l} \cdot (\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}) = 0, \quad (1.73)$$

$$(\vec{l} - \vec{m}) \cdot (\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QB}) = 0. \quad (1.74)$$

En forma semejante las ecuaciones (1.43) y (1.44) y con la ayuda de las ecuaciones (1.63), (1.64) y (1.65) se puede obtener las siguientes igualdades

$$(\vec{m} - \vec{n}) \cdot (\overrightarrow{QB} \times \overrightarrow{QC}) = 0, \quad (1.75)$$

$$(\vec{l} - \vec{n}) \cdot (\overrightarrow{QA} \times \overrightarrow{QC}) = 0, \quad (1.76)$$

Por otra parte recordando que  $\overrightarrow{QA}$  y  $\overrightarrow{QB}$  y  $\overrightarrow{QC}$  son ortogonales,  $\overrightarrow{QB} \times \overrightarrow{QC} // \overrightarrow{QA}$ .

Se tiene luego de la ec.(1.74)  $(\vec{l} - \vec{m}) \cdot \overrightarrow{QC} = 0$ , pues en la ec.(1.74)  $(\vec{l} - \vec{m})$  solo tiene componentes en  $\overrightarrow{QA}$  y  $\overrightarrow{QB}$ , luego de la ec.(1.69) se tendrá

$$\nu_2 - \nu_4 = 0 \implies \nu_2 = \nu_4, \quad (1.77)$$

igualmente de la ec.(1.75)  $(\vec{m} - \vec{n})$  solo tiene componentes en  $\overrightarrow{QB}$  y  $\overrightarrow{QC}$ , luego se tendrán respectivamente

$$\nu_3 - \nu_5 = 0 \implies \nu_3 = \nu_5, \quad (1.78)$$

y por último de la ec. (1.76)  $(\vec{l} - \vec{n})$  solo tiene componentes en  $\overrightarrow{QA}$  y  $\overrightarrow{QC}$  luego se tendrán

$$\nu_1 - \nu_6 = 0 \implies \nu_1 = \nu_6. \quad (1.79)$$

De las ecuaciones (1.66), (1.67), (1.68), (1.77), (1.78) y (1.79), obtenemos

$$\vec{l} = \nu_1 \overrightarrow{QB} + \nu_2 \overrightarrow{QC}, \quad (1.80)$$

$$\vec{m} = \nu_3 \overrightarrow{QA} + \nu_2 \overrightarrow{QC}, \quad (1.81)$$

$$\vec{n} = \nu_3 \overrightarrow{QA} + \nu_1 \overrightarrow{QB}, \quad (1.82)$$

recordando las ecuaciones (1.63), (1.64), (1.65), (1.80), (1.81) y (1.82) es fácil demostrar que estos vectores satisfacen respectivamente

$$\dot{\overrightarrow{QA}} = \vec{l}' \times \overrightarrow{QA}, \quad (1.83)$$

$$\dot{\overrightarrow{QB}} = \vec{m}' \times \overrightarrow{QB}, \quad (1.84)$$

$$\dot{\overrightarrow{QC}} = \vec{n}' \times \overrightarrow{QC}, \quad (1.85)$$

donde

$$\vec{l}' = \vec{m}' = \vec{n}' = \nu_1 \overrightarrow{QB} + \nu_2 \overrightarrow{QC} + \nu_3 \overrightarrow{QA}, \quad (1.86)$$

si definimos a este último vector como  $\vec{W}$  tenemos

$$\dot{\overrightarrow{QA}} = \vec{W} \times \overrightarrow{QA}, \quad (1.87)$$

$$\dot{\overrightarrow{QB}} = \vec{W} \times \overrightarrow{QB}, \quad (1.88)$$

$$\dot{\overrightarrow{QC}} = \vec{W} \times \overrightarrow{QC}, \quad (1.89)$$

donde  $\vec{W}$  por la ec.(1.86) es

$$\vec{W} = \nu_1 \vec{Q\dot{B}} + \nu_2 \vec{Q\dot{C}} + \nu_3 \vec{Q\dot{A}}. \quad (1.90)$$

Para un punto cualquiera P perteneciente a un cuerpo rígido se tendrá

$$\vec{Q\dot{P}} = \beta_1 \vec{Q\dot{A}} + \beta_2 \vec{Q\dot{B}} + \beta_3 \vec{Q\dot{C}}, \quad (1.91)$$

con respecto al tiempo

$$\dot{\vec{Q\dot{P}}} = \beta_1 \dot{\vec{Q\dot{A}}} + \beta_2 \dot{\vec{Q\dot{B}}} + \beta_3 \dot{\vec{Q\dot{C}}}, \quad (1.92)$$

de modo que mediante las ecuaciones (1.87),(1.88),(1.89) y (1.96)

$$\dot{\vec{Q\dot{P}}} = \beta_1 \vec{W} \times \vec{Q\dot{A}} + \beta_2 \vec{W} \times \vec{Q\dot{B}} + \beta_3 \vec{W} \times \vec{Q\dot{C}} \quad (1.93)$$

factorizando  $\vec{W}$  de la ec. (1.93)

$$\dot{\vec{Q\dot{P}}} = \vec{W} \times (\beta_1 \vec{Q\dot{A}} + \beta_2 \vec{Q\dot{B}} + \beta_3 \vec{Q\dot{C}}), \quad (1.94)$$

reemplazando la ec.(1.91) en (1.94) se tiene

$$\dot{\vec{Q\dot{P}}} = \vec{W} \times \vec{Q\dot{P}}. \quad (1.95)$$

El vector  $\vec{W}$ , recibe el nombre de *velocidad angular*. La recta que pasa por Q y es paralela a  $\vec{W}$  se le llama *eje de rotación* al cual denotaremos por  $\mathcal{M}(Q, \hat{u})$ .

Para describir la velocidad,  $\dot{\vec{O\dot{P}}}$  de un punto P del cuerpo rígido con respecto a una referencia cuyo origen es el punto O, podemos escribir,

$$\dot{\vec{O\dot{P}}} = (\dot{\vec{O\dot{Q}}} + \vec{Q\dot{P}}), \quad (1.96)$$

$$\dot{\vec{O\dot{P}}} = \dot{\vec{O\dot{Q}}} + \dot{\vec{Q\dot{P}}}, \quad (1.97)$$

si en la ec.(1.97) reemplazamos  $\dot{\vec{Q}\vec{P}}$  de la ec.(1.95)

$$\dot{\vec{O}\vec{P}} = \dot{\vec{O}\vec{Q}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{P}, \quad (1.98)$$

la ec.(1.98) muestra que cualquier punto P, de un cuerpo rígido en movimiento en general puede interpretarse como la composición de dos movimientos, un movimiento de traslación paralela (especificada por un punto Q del cuerpo rígido), y otro de rotación del cuerpo rígido alrededor de un eje orientado que pasa por dicho punto Q, donde en general,  $\vec{\omega}$  dependerá del tiempo.

## 1.4. VECTOR DE INERCIA

Sea el vector unitario  $\hat{u}$  que esta contenida en la recta  $\mathcal{M}$  un punto Q perteneciente a la recta  $\mathcal{M}(Q, \hat{u})$  y consideremos un sistema discreto de N partículas donde una partícula de masa  $m_k$  esta ubicada en el punto  $P_k$ , (Fig. 1.8).

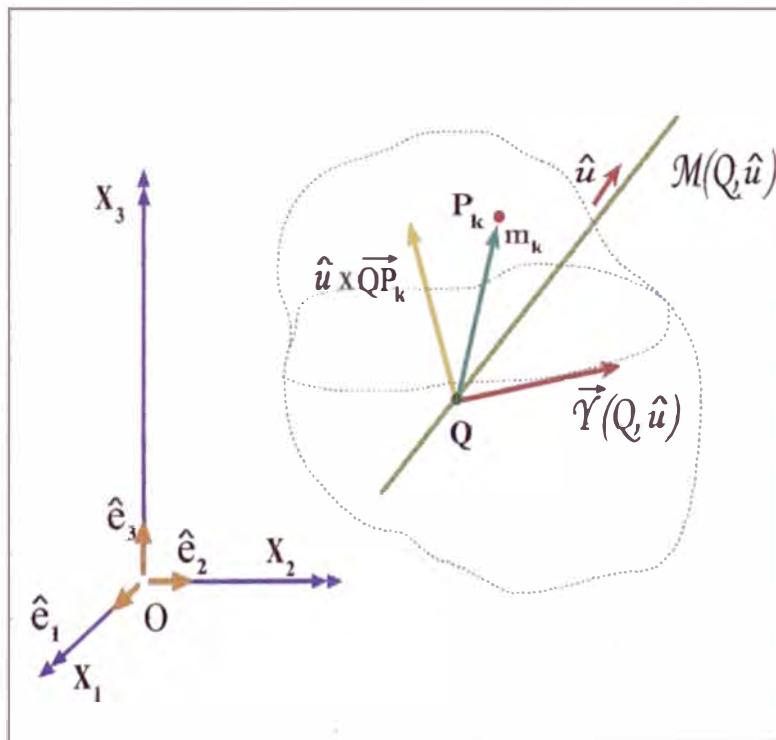


Figura 1.8: Vector de inercia  $\vec{Y}(Q, \hat{u})$

Definiremos el vector de inercia para el sistema de N partículas

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{u}) \equiv \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}). \quad (1.99)$$

En la Fig.(1.8) se muestra el vector de inercia, este vector de inercia depende del punto Q y del vector unitario ( $\hat{u}$ ).

### 1.4.1. MOMENTO DE INERCIA

Se define el momento de inercia del sistema de partículas  $P_k$  (Fig.(1.9)), con respecto al eje  $\mathcal{M}(Q, \hat{u})$ , como la proyección del vector de inercia sobre  $\hat{u}$

$$I(Q, \hat{u}) \equiv \hat{u} \cdot \vec{\nabla}(Q, \hat{u}), \quad (1.100)$$

si reemplazamos la expresión (1.99) en (1.100) se obtiene

$$I(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \hat{u} \cdot \left\{ \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}) \right\}, \quad (1.101)$$

usando la identidad vectorial  $\hat{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\hat{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$  se tiene la ecuación

$$I(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}) \cdot (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}), \quad (1.102)$$

la ec.(1.102) es equivalente a

$$I(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \left| \hat{u} \times \overrightarrow{QP_k} \right|^2, \quad (1.103)$$

mediante la relación  $\hat{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \text{sen} \varphi$  y como  $\hat{u}$  es unitario entonces

$$I(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \left( |\hat{u}| \left| \overrightarrow{QP_k} \right| \text{sen} \varphi \right)^2, \quad (1.104)$$

donde  $\varphi$  es el ángulo formado por  $\hat{u}$  y  $\overrightarrow{QP_k}$  (Fig.(1.9)).

Se tiene  $\left| \overrightarrow{QP_k} \right| \text{sen} \varphi = [d(P_k, \mathcal{M})]$  donde  $d(P_k, \mathcal{M})$  es la distancia del punto  $P_k$  a la recta  $\mathcal{M}$ , por lo tanto:

$$I(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k [d(P_k, \mathcal{M})]^2. \quad (1.105)$$

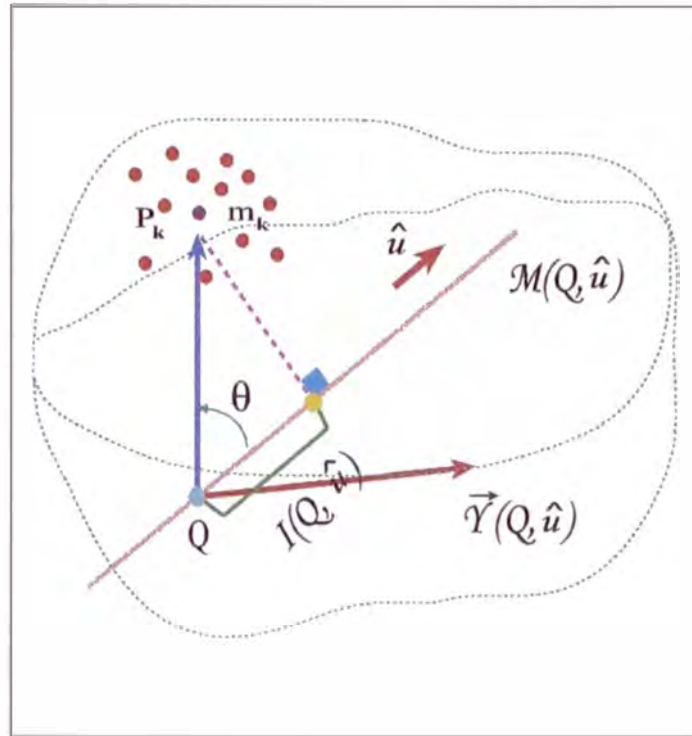


Figura 1.9: Momento de Inercia  $I(Q, \hat{u})$ .

En el caso continuo se tiene

$$I(Q, \hat{u}) = \int d(P, m)^2 dm_k, \quad (1.106)$$

### 1.4.2. EJES PRINCIPALES DE INERCIA

La recta  $\mathcal{M}(Q, \hat{u})$  es un eje principal de inercia si

$$\vec{\Upsilon}(Q, \hat{u}) = \gamma \hat{u}, \quad (1.107)$$

con  $\gamma \neq 0$ . Se puede demostrar facilmente que  $\gamma = I(Q, \hat{u})$ , multiplicando escalarmente por  $\hat{u}$  a la ec.(1.107)

$$\hat{u} \cdot \vec{\Upsilon}(Q, \hat{u}) = \gamma \hat{u} \cdot \hat{u}, \quad (1.108)$$

$$I(Q, \hat{u}) = \gamma \quad 1. \quad (1.109)$$

Para el caso de los cuerpos rígidos con ejes de simetría y densidad de masa constante los ejes principales de inercia coinciden con los ejes de simetría. Es decir si  $\hat{u}$  coincide con el eje principal de inercia.

$$\vec{V}(Q, \hat{u}) = \omega(Q, \hat{u}) \hat{u}. \quad (1.110)$$

## 1.5. MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGI- DO

En la Fig.(1.10) se considera un sistema de  $N$  partículas discretas que se comportan como un cuerpo rígido, que tiene un movimiento general. Consideremos un punto  $Q$  cualquiera del cuerpo rígido que usaremos para definir la velocidad angular del cuerpo rígido. Es decir existe un vector  $\vec{\omega} / \dot{\vec{Q}\vec{P}} = \vec{\omega} \times \vec{Q}\vec{P}$ . Donde el sistema de ejes  $X_1, X_2$  y  $X_3$  es un Sistema de Referencia Inercial (S.R.I.)

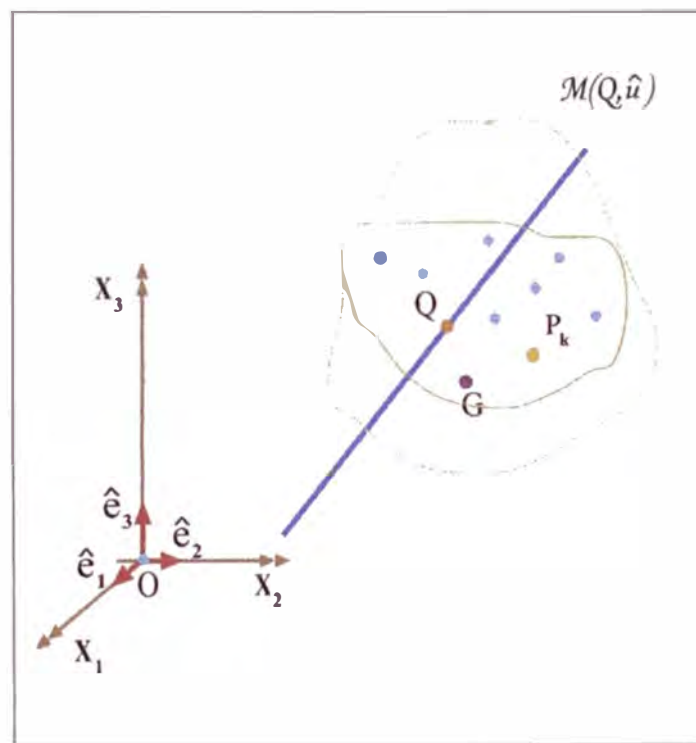


Figura 1.10: Sistema de  $N$  partículas discretas que se comportan como un cuerpo rígido.

Se define como el momento angular de un cuerpo rígido,  $\vec{L}_Q$

$$\vec{L}_Q \equiv \sum_{k=1}^N m_k (\vec{Q}\vec{P}_k \times \dot{\vec{O}\vec{P}}_k), \quad (1.111)$$

donde  $\dot{\vec{O}\vec{P}}_k$  es la velocidad de la partícula  $P_k$ , de masa  $m_k$  con vector posición  $\vec{O}\vec{P}_k$ , según la Fig.(1.11)

Sea

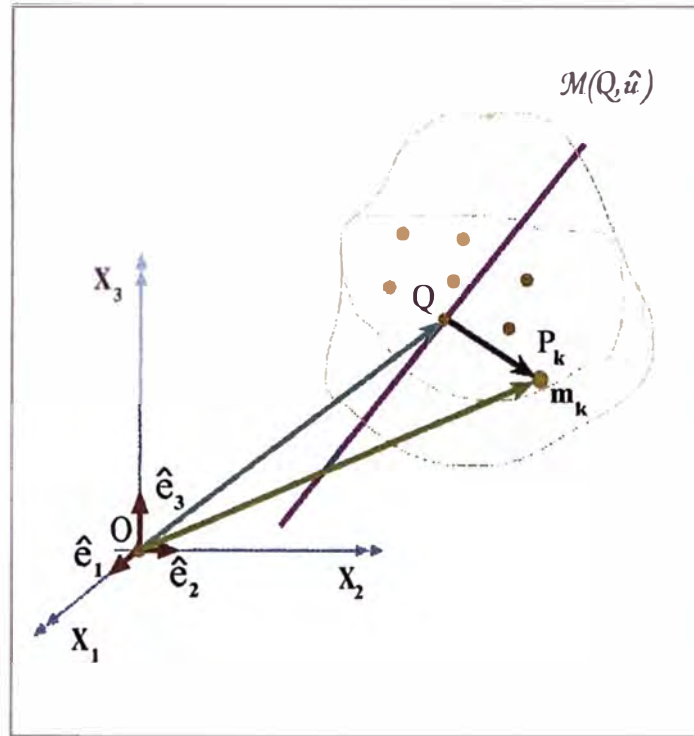


Figura 1.11: Esquema del vector  $\vec{OP}_k$

$$\vec{OP}_k = \vec{OQ} + \vec{QP}_k, \quad (1.112)$$

$$\dot{\vec{OP}}_k = \dot{\vec{OQ}} + \dot{\vec{QP}}_k, \quad (1.113)$$

reemplazando la ec.(1.113) en la ec.(1.111) y desdoblado la sumatoria se obtiene

$$\vec{L}_Q = \sum_{k=1}^N (\vec{QP}_k \times \dot{\vec{OQ}}) m_k + \sum_{k=1}^N (\vec{QP}_k \times \dot{\vec{QP}}_k) m_k, \quad (1.114)$$

por lo tanto

$$\vec{L}_Q = \left( \sum_{k=1}^N \vec{QP}_k m_k \right) \times \dot{\vec{OQ}} + \sum_{k=1}^N (\vec{QP}_k \times \dot{\vec{QP}}_k) m_k, \quad (1.115)$$

además se define el vector posición del centro de masa con respecto a Q

$$\vec{QG} \equiv \frac{\left[ \sum_{k=1}^N \vec{QP}_k m_k \right]}{M}, \quad (1.116)$$



donde  $M$  es la masa total, usando esta última definición en la ec.(1.115) obtenemos

$$\vec{L}_Q = M\vec{Q}\dot{\vec{G}} \times \vec{O}\dot{\vec{Q}} + \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \right), \quad (1.117)$$

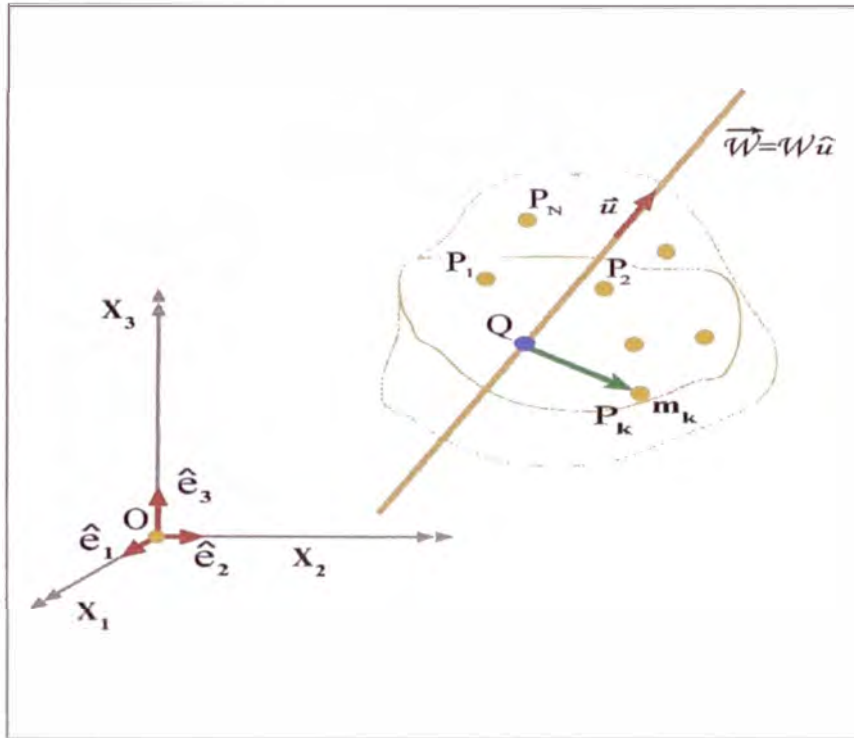


Figura 1.12: Vector unitario  $\hat{u}$ , que coincide con el eje  $\mathcal{M}(\hat{u}, Q)$  y  $\vec{W}$

En adelante se tomará en cuenta el concepto de velocidad angular que se vio en la sección 1.3. Si  $\hat{u}$  es el vector unitario que coincide con el eje  $\mathcal{M}(\hat{u}, Q)$  y  $W$  es el módulo de  $\vec{W}$  (Fig.(1.12)) luego

$$\vec{W} = W\hat{u}. \quad (1.118)$$

De la sección 1.3, como  $P_k$  pertenece a un cuerpo rígido, se tiene

$$\vec{Q}\dot{\vec{P}}_k = \vec{W} \times \vec{Q}\vec{P}_k. \quad (1.119)$$

Reemplazando la ec.(1.118) en (1.119)

$$\vec{Q}\dot{\vec{P}}_k = W\hat{u} \times \vec{Q}\vec{P}_k, \quad (1.120)$$

finalmente sustituyendo la ec.(1.120) en la ec.(1.117)

$$\vec{L}_Q = M \vec{Q}\vec{G} \times \vec{O}\dot{Q} + W \sum_{k=1}^N m_k \left\{ \vec{Q}\vec{P}_k \times (\hat{u} \times \vec{Q}\vec{P}_k) \right\}, \quad (1.121)$$

en la ec.(1.121) el segundo término es el vector de inercia  $\vec{Y}(Q, \hat{u})$ , luego

$$\vec{L}_Q = M (\vec{Q}\vec{G} \times \vec{O}\dot{Q}) + W \vec{Y}(Q, \hat{u}). \quad (1.122)$$

## 1.6. LA ENERGÍA CINÉTICA

La energía cinética del sistema de N partículas mostrada en la Fig.(1.13) definida por

$$K \equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} m_k \left| \vec{O}\dot{P}_k \right|^2. \quad (1.123)$$

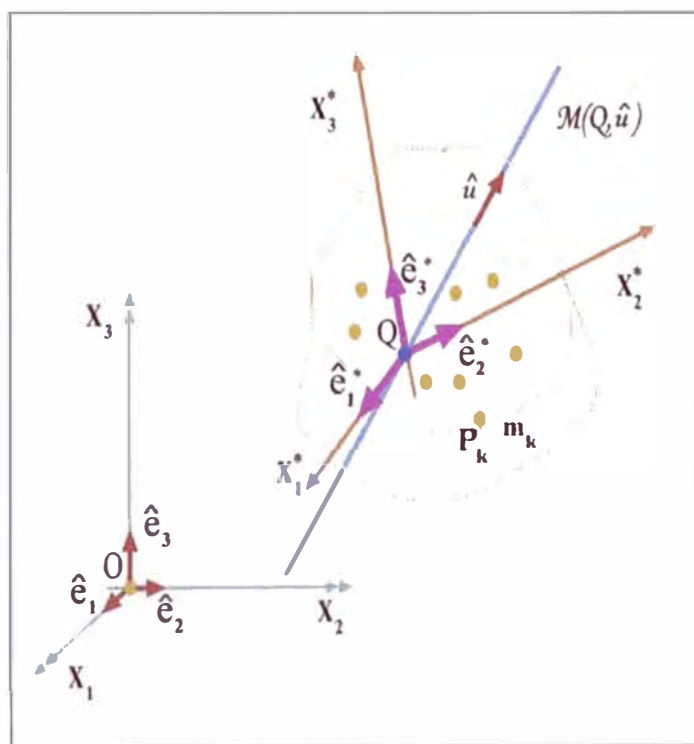


Figura 1.13: Sistema de N partículas, en la Base ligada  $B^*$

Para una partícula  $P_k$  su velocidad k-ésima esta dada por la ec.(1.113), es decir

$$\vec{O}\dot{P}_k = \vec{O}\dot{Q} + \vec{Q}\dot{P}_k, \quad (1.124)$$

reemplazando la ec.(1.124) en (1.123) obtenemos

$$K = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left| \dot{\vec{OQ}} + \dot{\vec{QP}}_k \right|^2 m_k, \quad (1.125)$$

usando la propiedad  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$  en la ec.(1.125) tenemos

$$K = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2} \left( \dot{\vec{OQ}} + \dot{\vec{QP}}_k \right) \cdot \left( \dot{\vec{OQ}} + \dot{\vec{QP}}_k \right) m_k, \quad (1.126)$$

desarrollando y desdoblado la sumatoria

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \dot{\vec{OQ}} \right|^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N 2 m_k \left( \dot{\vec{OQ}} \cdot \dot{\vec{QP}}_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \dot{\vec{QP}}_k \right|^2, \\ K &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \dot{\vec{OQ}} \right|^2 + \sum_{k=1}^N m_k \left( \dot{\vec{OQ}} \cdot \dot{\vec{QP}}_k \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \dot{\vec{QP}}_k \right|^2, \end{aligned} \quad (1.127)$$

pero  $\sum_{k=1}^N m_k = M$ , (masa total del cuerpo rígido) y  $\left| \dot{\vec{OQ}} \right|^2 = \left| \vec{V}_Q \right|^2$  luego

$$K = \frac{1}{2} M \left| \vec{V}_Q \right|^2 + \left( \dot{\vec{OQ}} \cdot \dot{\vec{QG}} \right) M + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \dot{\vec{QP}}_k \right|^2, \quad (1.128)$$

como Q,  $P_k$  pertenecen al cuerpo rígido  $\dot{\vec{QP}}_k \equiv \vec{W} \times \vec{QP}_k$

$$K = \frac{1}{2} M \left| \vec{V}_Q \right|^2 + \left( \dot{\vec{OQ}} \cdot \dot{\vec{QG}} \right) M + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \vec{W} \times \vec{QP}_k \right|^2. \quad (1.129)$$

Para simplificar las ecuaciones se considera una base ortonormal de vectores  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  ligada al cuerpo rígido con origen en Q (Fig.(1.13)), y un nuevo sistema de ejes  $X_k^*$ , tal que en cada instante los ejes  $X_k^*$ , (con origen en Q) coinciden con  $\hat{e}_k^*$ . El tercer término será transformado de tal manera que aparezca las componentes ( $W_k^*$ ) de  $\vec{W}$  con respecto a la base  $\mathcal{B}^*$ .

Al tercer término de la ec.(1.129) lo denotamos por  $\mathcal{K}$

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left| \vec{W} \times \overrightarrow{QP_k} \right|^2. \quad (1.130)$$

Reemplazando la ec.(1.130) en la ec.(1.129) se tiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} M \left| \vec{V}_Q \right|^2 + \left( \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{QG} \right) M + \mathcal{K}, \quad (1.131)$$

mediante la propiedad elemental  $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$ , de la ec.(1.130)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{W} \times \overrightarrow{QP_k} \right) \cdot \left( \vec{W} \times \overrightarrow{QP_k} \right). \quad (1.132)$$

Sea

$$\vec{S} \equiv \vec{W} \times \overrightarrow{QP_k}, \quad (1.133)$$

con la ayuda de la expresión (1.133) y la ec.(1.132) se obtiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \vec{W} \times \left( \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \cdot \vec{S} \right), \quad (1.134)$$

usando nuevamente la ec.(1.133) en la ec.(1.134)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \vec{W} \times \left\{ \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \cdot \left( \vec{W} \times \overrightarrow{QP_k} \right) \right\}, \quad (1.135)$$

pero  $\vec{W} = W\hat{u}$ , luego de la ec.(1.135)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} W \hat{u} \times \left\{ \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \cdot \left( W \hat{u} \times \overrightarrow{QP_k} \right) \right\}, \quad (1.136)$$

como  $\vec{W}$  no depende del subíndice  $k$  la expresión (1.136) con la ayuda de la propiedad  $(\hat{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \hat{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  se obtiene

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} W^2 \hat{u} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times \left( \hat{u} \times \overrightarrow{QP_k} \right) \right\}, \quad (1.137)$$

por definición de vector de inercia tenemos

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} W^2 \hat{u} \cdot \vec{\nabla}(Q, \hat{u}). \quad (1.138)$$

A continuación transformaremos al vector de inercia ( $\vec{\nabla}(Q, \hat{u})$ ) de la ec.(1.138), mediante  $\hat{u} = \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^*$ . Se tiene por la ec.(1.99)

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}),$$

pero

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^*, \quad (1.139)$$

reemplazando la ec.(1.139) en la ec.(1.99)

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times \left( \left[ \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^* \right] \times \overrightarrow{QP_k} \right), \quad (1.140)$$

intercambiando las sumatorias

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{e}_j^* \times \overrightarrow{QP_k}), \quad (1.141)$$

Aplicando la definición de vector de inercia en el segundo miembro de la ec.(1.141) se tiene que

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* \vec{\nabla}(Q, \hat{e}_j^*), \quad (1.142)$$

En el caso en que los ejes  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$  que están ligados al cuerpo rígido (Fig.(1.14)), son los ejes principales de inercia del cuerpo rígido de la ec.(1.110)

$$\vec{\nabla}(Q, \hat{e}_j^*) = I_j \hat{e}_j^*, \quad (1.143)$$

recordemos que  $u_j^*$  es la componente de  $\hat{u}$  en la base  $B^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  e  $I_j$  es el momento de inercia con respecto a los ejes  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$  respectivamente, como están unidos rígidamente al cuerpo estos momentos de inercia no dependen del tiempo.

Reemplazando la ec.(1.143) en (1.142) se obtiene

$$\vec{V}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* I_j \hat{e}_j^*. \quad (1.144)$$

Sustituyendo la ec.(1.144) en la ec.(1.138)

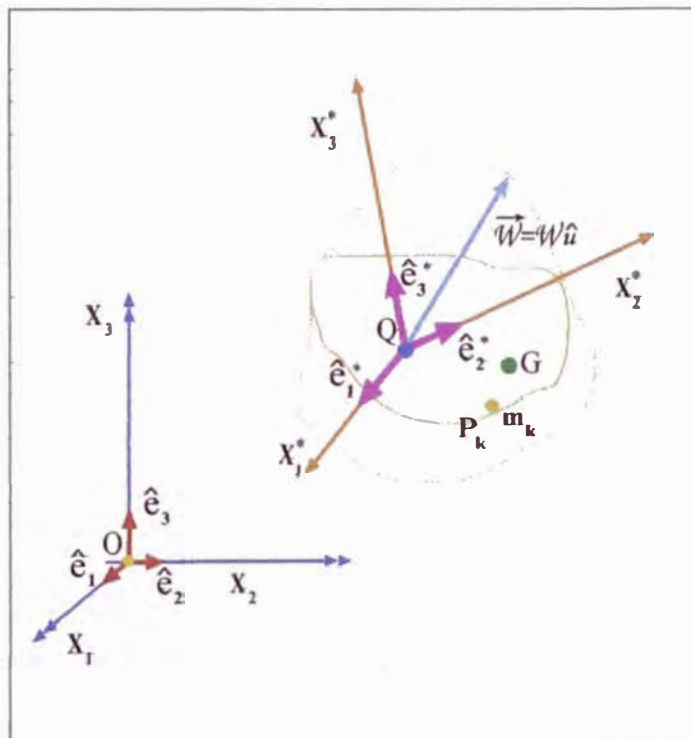


Figura 1.14: Los ejes principales de inercia, son los ejes  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$ , que están unidos rígidamente al cuerpo rígido.

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} W^2 \hat{u} \cdot \sum_{j=1}^3 u_j^* I_j \hat{e}_j^*, \quad (1.145)$$

que se puede expresar de la forma siguiente

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} W \hat{u} \cdot \sum_{j=1}^3 (W u_j^*) I_j \hat{e}_j^*, \quad (1.146)$$

pero  $\vec{W} = W \hat{u}$  y se demuestra fácilmente que  $W_j^* = W u_j^*$  (p.51 para la demostración)

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \vec{W} \cdot \sum_{j=1}^3 (W_j^*) l_j \hat{e}_j^*, \quad (1.147)$$

como  $\vec{W} = \sum_{\sigma=1}^3 W_{\sigma}^* \hat{e}_{\sigma}^*$ , la ec.(1.147) se transforma en

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \left( \sum_{\sigma=1}^3 W_{\sigma}^* \hat{e}_{\sigma}^* \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^3 W_j^* l_j \hat{e}_j^* \right), \quad (1.148)$$

efectuando el producto escalar tenemos

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 l_k W_k^{*2}, \quad (1.149)$$

reemplazando la ec.(1.149) en la ec.(1.129) se tiene finalmente

$$K = \frac{1}{2} M |\vec{V}_Q|^2 + M \vec{V}_Q \cdot \vec{Q}\dot{G} + \frac{1}{2} (W_1^{*2} l_1 + W_2^{*2} l_2 + W_3^{*2} l_3). \quad (1.150)$$

## 1.7. DERIVADAS DEL MOMENTO ANGULAR

Se encontrará la derivada del momento angular por dos formas, para luego igualar estas relaciones obteniendo una ecuación que sería la ecuación de Euler. Emplearemos la definición del momento angular dada en la ec.(1.111)

$$\frac{d}{dt} (\vec{L}_Q) = \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{k=1}^N m_k (\vec{Q}\vec{P}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k) \right\}, \quad (1.151)$$

efectuando operaciones se tiene

$$\dot{\vec{L}}_Q = \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k + \vec{Q}\vec{P}_k \times \vec{O}\ddot{\vec{P}}_k \right) \quad (1.152)$$

recordemos que estamos derivando según un observador O, ubicado en el Sistema de Referencia Inercial. Por la 2<sup>da</sup> ley de Newton  $m_k \vec{O}\ddot{\vec{P}}_k$  es igual a la fuerza total ( $\vec{f}_k$ ) que actúa sobre la partícula de masa  $m_k$ , por lo tanto la ec.(1.152) se convierte en

$$\dot{\vec{L}}_Q = \sum_{k=1}^N \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{f}_k \right) + \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k \right), \quad (1.153)$$

pero

$$\vec{f}_k = \vec{f}_k^{int} + \vec{f}_k^{ext}, \quad (1.154)$$

donde  $\vec{f}_k^{int}$  es la fuerza total interna y  $\vec{f}_k^{ext}$  es la fuerza total externa que actúan sobre la partícula k-ésima respectivamente. La ec.(1.154) la reemplazamos en la ec.(1.153) y se obtiene

$$\dot{\vec{L}}_Q = \sum_{k=1}^N \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{f}_k^{int} \right) + \sum_{k=1}^N \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{f}_k^{ext} \right) + \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k \right), \quad (1.155)$$

pero se sabe que el torque total interno con respecto al punto Q es

$$\vec{T}_Q^{int} = \sum_{k=1}^N \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{f}_k^{int} \right), \quad (1.156)$$

y el torque total externo con respecto al punto Q es definido como

$$\vec{T}_Q^{ext} \equiv \sum_{k=1}^N \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{f}_k^{ext} \right), \quad (1.157)$$

reemplazando las igualdades (1.156) y (1.157) en la ec.(1.155) se obtiene

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{T}_Q^{int} + \vec{T}_Q^{ext} + \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k \right). \quad (1.158)$$

Podemos usar una de las propiedades del cuerpo rígido :

$$\vec{T}_Q^{int} = 0, \quad (1.159)$$

para deducir la relación (1.159) se supone que las fuerzas internas entre la partícula de masa  $m_i$ , con vector posición  $\vec{r}_i$  y la partícula de masa  $m_j$ , con vector posición  $\vec{r}_j$ , actúan a lo largo de una recta que coincide con  $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (Fig.(1.15)).

Reemplazando en la ec.(1.158)

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{T}_Q^{ext} + \sum_{k=1}^N m_k \left( \vec{Q}\dot{\vec{P}}_k \times \vec{O}\dot{\vec{P}}_k \right),$$



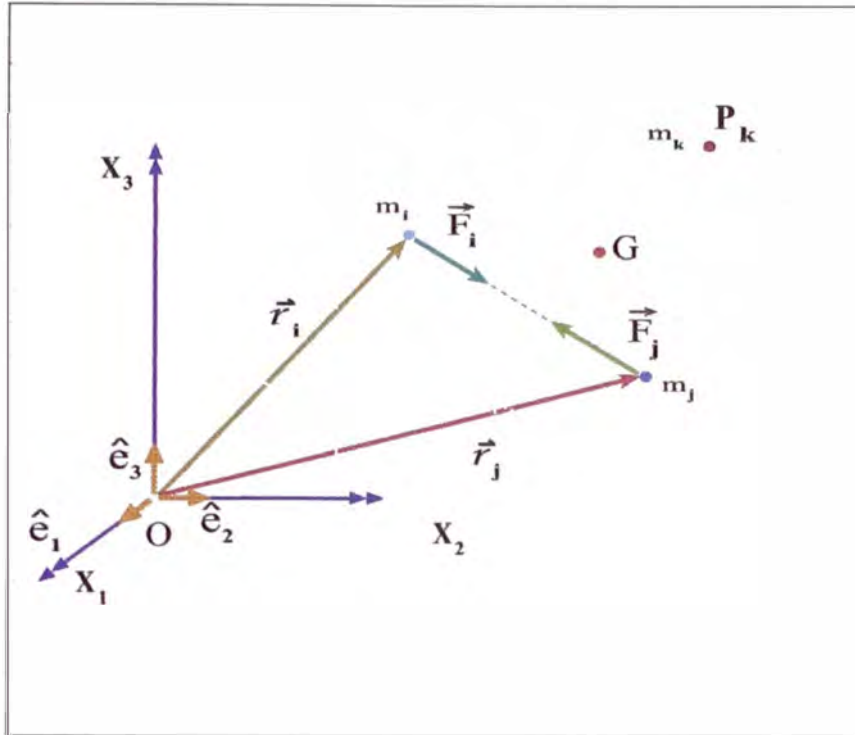


Figura 1.15: Las fuerzas internas entre la partícula de masa  $m_i$ , con vector posición  $\vec{r}_i$  y la partícula de masa  $m_j$ , con vector posición  $\vec{r}_j$ , actúan a lo largo de una recta que coincide con  $\vec{r}_j - \vec{r}_i$ .

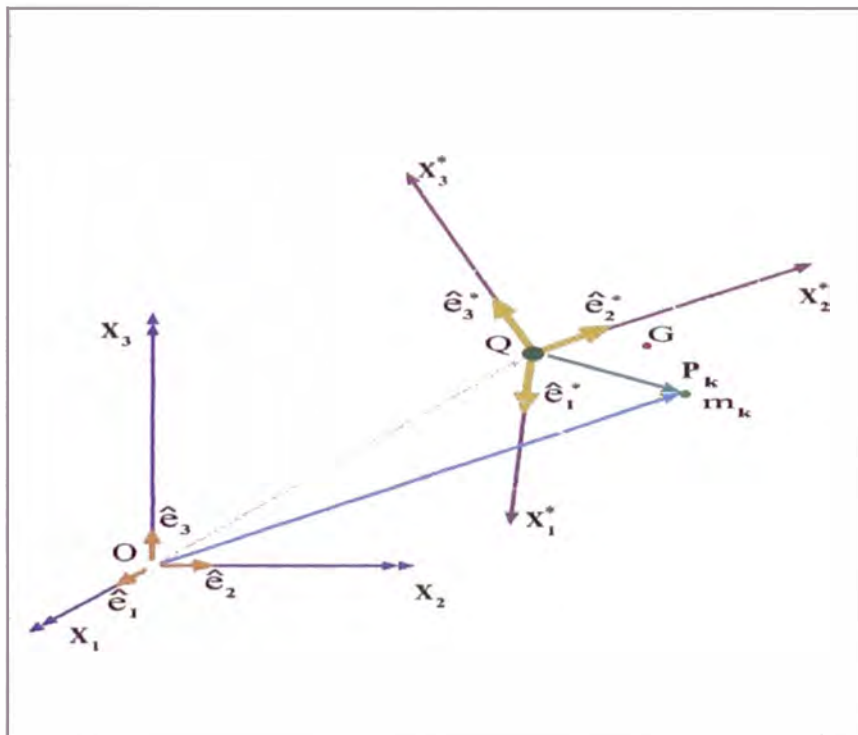


Figura 1.16: Relación para el vector  $\vec{OP}_k = \vec{OQ} + \vec{QP}_k$ .

de la Fig.(1.16) se tiene

$$\vec{OP}_k = \vec{OQ} + \vec{QP}_k, \quad (1.160)$$

luego

$$\vec{QP}_k = \vec{OP}_k - \vec{OQ}, \quad (1.161)$$

derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\vec{QP}}_k = \dot{\vec{OP}}_k - \dot{\vec{OQ}}, \quad (1.162)$$

Efectuando  $\dot{\vec{QP}}_k \times \dot{\vec{OP}}_k$  considerando la ec.(1.162)

$$\dot{\vec{QP}}_k \times \dot{\vec{OP}}_k = (\dot{\vec{OP}}_k - \dot{\vec{OQ}}) \times \dot{\vec{OP}}_k. \quad (1.163)$$

que se puede escribir

$$\dot{\vec{QP}}_k \times \dot{\vec{OP}}_k = \dot{\vec{OP}}_k \times \dot{\vec{OQ}}, \quad (1.164)$$

reemplazando en la ec.(1.160) se tiene  $\dot{\vec{L}}_Q = \vec{T}_Q^{ext} + \sum_{k=1}^N m_k (\dot{\vec{OP}}_k \times \dot{\vec{OQ}})$  y como  $\dot{\vec{OQ}}$  no depende del subíndice k-ésimo

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{T}_Q^{ext} + \left( \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{OP}}_k \right) \times \dot{\vec{OQ}}, \quad (1.165)$$

por otra parte el vector centro de masa esta dada por

$$\vec{OG} \equiv \frac{\left( \sum_{k=1}^N m_k \vec{OP}_k \right)}{M}, \quad (1.166)$$

derivando con respecto al tiempo

$$\dot{\vec{OG}} = \frac{\left( \sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{OP}}_k \right)}{M}, \quad (1.167)$$

luego

$$\sum_{k=1}^N m_k \dot{\vec{O}}\vec{P}_k = M \dot{\vec{O}}\vec{G}. \quad (1.168)$$

De las ecuaciones (1.169) y (1.166)

$$\dot{\vec{L}}_Q = \vec{T}_Q^{ext} + M (\dot{\vec{O}}\vec{G} \times \dot{\vec{O}}\vec{Q}). \quad (1.169)$$

La segunda forma de la derivada del momento angular se encuentra derivando la ec.(1.122), obteniéndose

$$\dot{\vec{L}}_Q = M (\dot{\vec{Q}}\vec{G} \times \dot{\vec{O}}\vec{Q}) + M (\ddot{\vec{Q}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q}) + \dot{W}\vec{Y} + W\dot{\vec{Y}}. \quad (1.170)$$

Además de la fig. 1.16 (pág. 29) se tiene

$$\vec{Q}\vec{G} = \vec{O}\vec{G} - \vec{O}\vec{Q}, \quad (1.171)$$

derivando

$$\dot{\vec{Q}}\vec{G} = \dot{\vec{O}}\vec{G} - \dot{\vec{O}}\vec{Q}, \quad (1.172)$$

ahora multiplicamos vectorialmente a la ec.(1.172) por  $\vec{O}\vec{Q}$

$$\dot{\vec{Q}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q} = (\dot{\vec{O}}\vec{G} - \dot{\vec{O}}\vec{Q}) \times \vec{O}\vec{Q}, \quad (1.173)$$

$$\dot{\vec{Q}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q} = \dot{\vec{O}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q}. \quad (1.174)$$

Reemplazando la ec.(1.174) en (1.170)

$$\dot{\vec{L}}_Q = M (\dot{\vec{O}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q}) + M (\ddot{\vec{Q}}\vec{G} \times \vec{O}\vec{Q}) + \dot{W}\vec{Y} + W\dot{\vec{Y}}. \quad (1.175)$$

## 1.8. ECUACIÓN DE EULER.

Igualando la ec.(1.169) y la ec.(1.175) y simplificando se tiene

$$\vec{T}_Q^{ext} = M (\vec{Q}\vec{G} \times \ddot{\vec{O}}\vec{Q}) + \dot{W}\vec{Y} + W\dot{\vec{Y}}. \quad (1.176)$$

Recordando la definición de vector de inercia

$$\vec{Y}(Q, \hat{u}) \equiv \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{u} \times \overrightarrow{QP_k}), \quad (1.177)$$

con

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^*, \quad (1.178)$$

es decir  $u_j^*$  son las componentes del vector  $\hat{u}$  en la base  $B^* \equiv \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  ligado al cuerpo rígido ( Fig.(1.14)). Luego de la ec.(1.178) en la ec.(1.177)

$$\vec{Y}(Q, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times \left\{ \left( \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^* \right) \times \overrightarrow{QP_k} \right\}, \quad (1.179)$$

intercambiando el orden de los símbolos

$$\vec{Y}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* \left\{ \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{e}_j^* \times \overrightarrow{QP_k}) \right\}. \quad (1.180)$$

Por definición de vector de inercia

$$\vec{Y}(Q, \hat{e}_j^*) \equiv \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP_k} \times (\hat{e}_j^* \times \overrightarrow{QP_k}), \quad (1.181)$$

entonces

$$\vec{Y}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* \vec{Y}(Q, \hat{e}_j^*). \quad (1.182)$$

En el caso en que los ejes  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$ , que están ligados al cuerpo rígido ( Fig.(1.14), p. 43), son los ejes principales de inercia del cuerpo rígido. Por lo tanto se cumple que

$$\vec{Y}(Q, \hat{e}_j^*) = I_j \hat{e}_j^*, \quad (1.183)$$

donde  $I_j$  es el momento de inercia con respecto a los ejes  $X_1^*, X_2^*$  y  $X_3^*$  (que coinciden con  $\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*$ ) y como están en un cuerpo rígido, el  $I_j$  no dependen del tiempo. Al reemplazar la ec.(1.183) en (1.182)

$$\vec{V}(Q, \hat{u}) = \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^*, \quad (1.184)$$

reemplazando la ec.(1.184) en (1.176)

$$\vec{T}_Q^{ext} = M(\vec{OQ} \times \vec{O}\ddot{Q}) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + W \left( \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* \right) \cdot \quad (1.185)$$

Sea

$$\vec{P} \equiv \frac{d}{dt} \left( \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* \right), \quad (1.186)$$

reemplazando la ec.(1.186) en la ec.(1.185)

$$\vec{T}_Q^{ext} = M(\vec{OQ} \times \vec{O}\ddot{Q}) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + W\vec{P}, \quad (1.187)$$

como solo intervienen los torques externos representaremos los torques de la manera  $\vec{T}_Q$

$$\vec{T}_Q^{ext} = M(\vec{OQ} \times \vec{O}\ddot{Q}) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + W\vec{P}, \quad (1.188)$$

desarrollando  $\vec{P}$

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \dot{\hat{e}}_j^*, \quad (1.189)$$

como  $\dot{\hat{e}}_j^*$ , esta ligado al cuerpo, entonces usamos la ec.(1.95)

$$\dot{\hat{e}}_j^* = \vec{W} \times \hat{e}_j^*, \quad (1.190)$$

reemplazando esta ec.(1.190) en ec.(1.189)

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j (\vec{W} \times \hat{e}_j^*), \quad (1.191)$$

de donde

$$\vec{P} = \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \left( \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* \right), \quad (1.192)$$

reemplazando la ec.(1.192) en (1.188)

$$\vec{T}_Q = M \left( \overrightarrow{QG} \times \overrightarrow{OQ} \right) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + W \left\{ \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \left( \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* \right) \right\}, \quad (1.193)$$

por lo tanto

$$\vec{T}_Q^{ext} = M \left( \overrightarrow{QG} \times \overrightarrow{OQ} \right) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j W \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \left( \sum_{j=1}^3 W u_j^* l_j \hat{e}_j^* \right). \quad (1.194)$$

Antes de proseguir demostraremos la relación mencionada en la p. 43,  $W_j^* = W^* u_j$ . Se recuerda que

$$\vec{W} = W \hat{u}, \quad (1.195)$$

expresando  $\hat{u}$  en la base  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^*, \quad (1.196)$$

reemplazando la ec.(1.196) en la ec.(1.195) se obtiene

$$\vec{W} = W \sum_{j=1}^3 u_j^* \hat{e}_j^*, \quad (1.197)$$

o

$$\vec{W} = \sum_{j=1}^3 (W u_j^*) \hat{e}_j^*, \quad (1.198)$$

por otra parte

$$\vec{W} = \sum_{j=1}^3 W_j^* \hat{e}_j^*, \quad (1.199)$$

de la ec.(1.198) y (1.199)

$$W u_j^* = \dot{W}_j^*, \quad (1.200)$$

reemplazando la ec.(1.200) en la ec.(1.194) se consigue

$$\vec{T}_Q^{ext} = M (\vec{OQ} \times \ddot{\vec{OQ}}) + \dot{W} \sum_{j=1}^3 u_j^* l_j \hat{e}_j^* + \sum_{j=1}^3 \dot{u}_j^* l_j W \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \left( \sum_{j=1}^3 W_j^* l_j \hat{e}_j^* \right), \quad (1.201)$$

agrupando las dos primeras sumatorias y factorizando  $l_j \hat{e}_j^*$

$$\vec{T}_Q^{ext} = M (\vec{OQ} \times \ddot{\vec{OQ}}) + \sum_{j=1}^3 (\dot{W} u_j^* + W \dot{u}_j^*) l_j \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \sum_{j=1}^3 W_j^* l_j \hat{e}_j^*, \quad (1.202)$$

derivando la expresión (1.200)

$$\dot{W}_j^* = \dot{W} u_j^* + W \dot{u}_j^*, \quad (1.203)$$

finalmente reemplazando en la ec.(1.202)

$$\vec{T}_Q = M (\vec{OQ} \times \ddot{\vec{OQ}}) + \sum_{j=1}^3 \dot{W}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \sum_{j=1}^3 W_j^* l_j \hat{e}_j^*, \quad (1.204)$$

que son las *ecuaciones diferenciales de Euler*, expresada en forma vectorial para el caso más general.

Recordemos que  $W_j^*$  son las componentes de  $\vec{W}$  en la base  $B^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  ligados al cuerpo rígido. En mecánica teórica los casos que más se presentan son:

- A) El punto Q es fijo (Ejemplo: trompo simétrico).
- B) Q no es un punto fijo, pero  $Q = G$ . (Ejemplo el tippe top).

En ambos casos se cumple  $\vec{OQ} \times \vec{OQ} = \vec{0}$  luego la ec.(1.204) se reduce a lo siguiente

$$\vec{T}_Q^{ext} = M \sum_{j=1}^3 \dot{W}_j^* l_j \hat{e}_j^* + \vec{W} \times \sum_{j=1}^3 W_j^* l_j \hat{e}_j^*. \quad (1.205)$$

Ahora expresamos  $\vec{T}_Q^{ext}$  en la base  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$

$$\vec{T}_Q^{ext} = T_{Q_1}^* \hat{e}_1^* + T_{Q_2}^* \hat{e}_2^* + T_{Q_3}^* \hat{e}_3^*. \quad (1.206)$$

De la ec.(1.205) y (1.206), efectuando operaciones e igualando las componentes:

$$T_{Q_1}^* = l_1 \dot{W}_1^* + W_2^* W_3^* (l_3 - l_2), \quad (1.207)$$

$$T_{Q_2}^* = l_2 \dot{W}_2^* + W_3^* W_1^* (l_1 - l_3), \quad (1.208)$$

$$T_{Q_3}^* = l_3 \dot{W}_3^* + W_1^* W_2^* (l_2 - l_1), \quad (1.209)$$

se tiene tres ecuaciones diferenciales acopladas ordinarias llamadas *ecuaciones de Euler* mencionada en los textos de mecánica teórica.

## 1.9. ECUACIÓN MODIFICADAS DE EULER

Se va analizar un cuerpo con un eje de simetría (ejemplo, un elipsoide homogéneo de revolución con semiejes  $a = b \geq c$ ) donde el eje  $X_3^*$  coincide con el eje de simetría tal que  $l_1 = l_2 = l$  (Fig.(1.19), pág. 47).

Considerando una nueva base de vectores  $\mathcal{B}_\xi \equiv \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , la cual se define de la siguiente manera ( Fig(1.17)y Fig(1.18)) y

$$\hat{\xi}_1 \equiv \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*|}, \quad (1.210)$$



$$\hat{\xi}_2 \equiv \hat{e}_3^* \times \hat{\xi}_1 \quad (1.211)$$

$$\hat{\xi}_3 \equiv \hat{e}_3^* \quad (1.212)$$

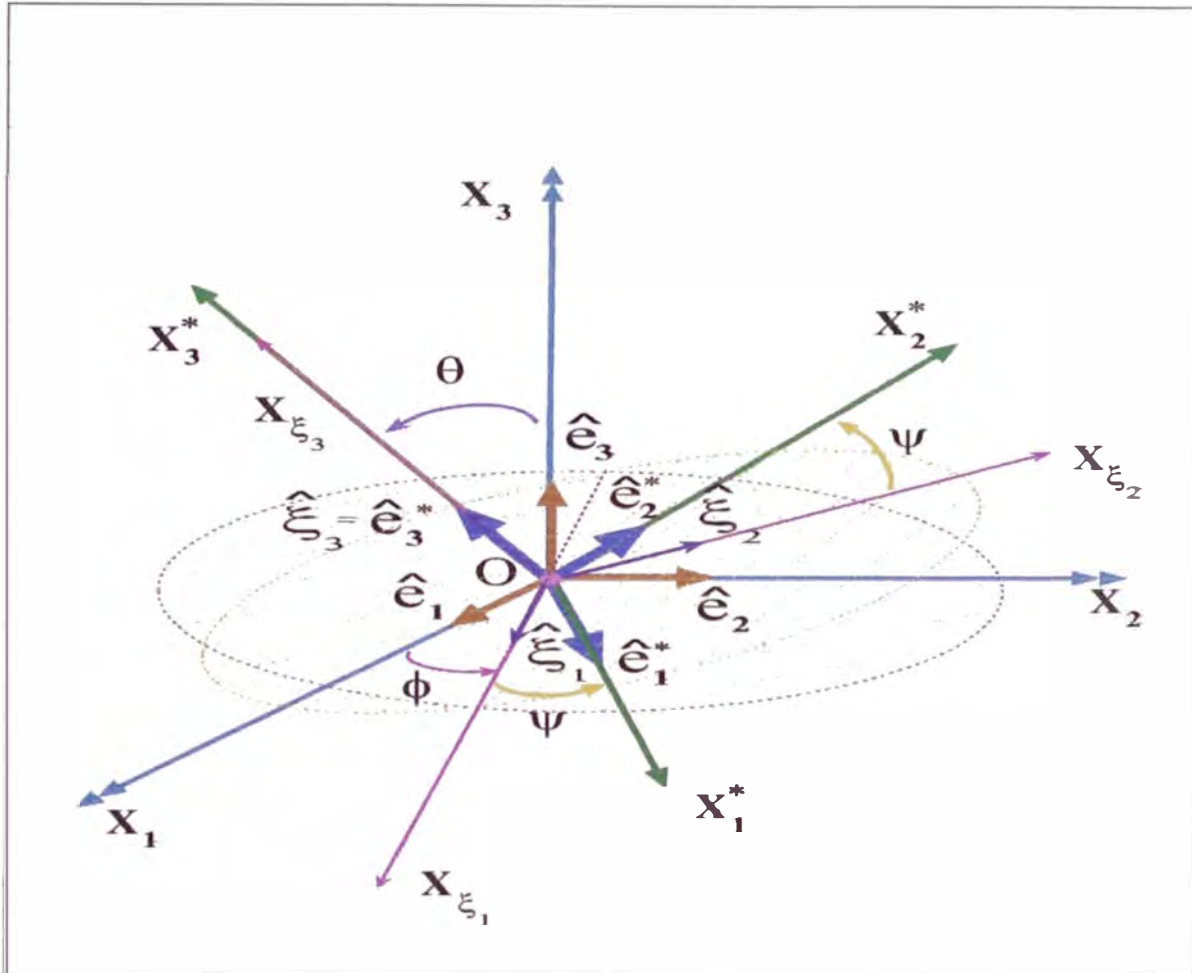


Figura 1.17: Relación entre las bases  $B = \{\hat{e}_k\}$ ,  $B^* = \{\hat{e}_k^*\}$  y  $B_\xi = \{\hat{\xi}_k\}$ .

Se considera un sistema de ejes  $X_{\xi_1}$ ,  $X_{\xi_2}$ ,  $X_{\xi_3}$  que coinciden con  $\hat{\xi}_1$ ,  $\hat{\xi}_2$ ,  $\hat{\xi}_3$ , respectivamente. De la ec.(1.211) notamos que  $\hat{\xi}_1$  coincide con la recta de intersección del plano  $X_1, X_2$  con el plano  $X_1^*, X_2^*$ <sup>3</sup>. Realizamos este cambio de base para simplificar los pasos para obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento para un cuerpo rígido.

Si  $Q = G$  se tendrá

$$M(\overrightarrow{QG} \times \overrightarrow{OQ}) = \vec{0}, \quad (1.213)$$

reemplazando la ec.(1.213) en la ec.(1.176) se tendrá

<sup>3</sup>Ver p 66 para su justificación.

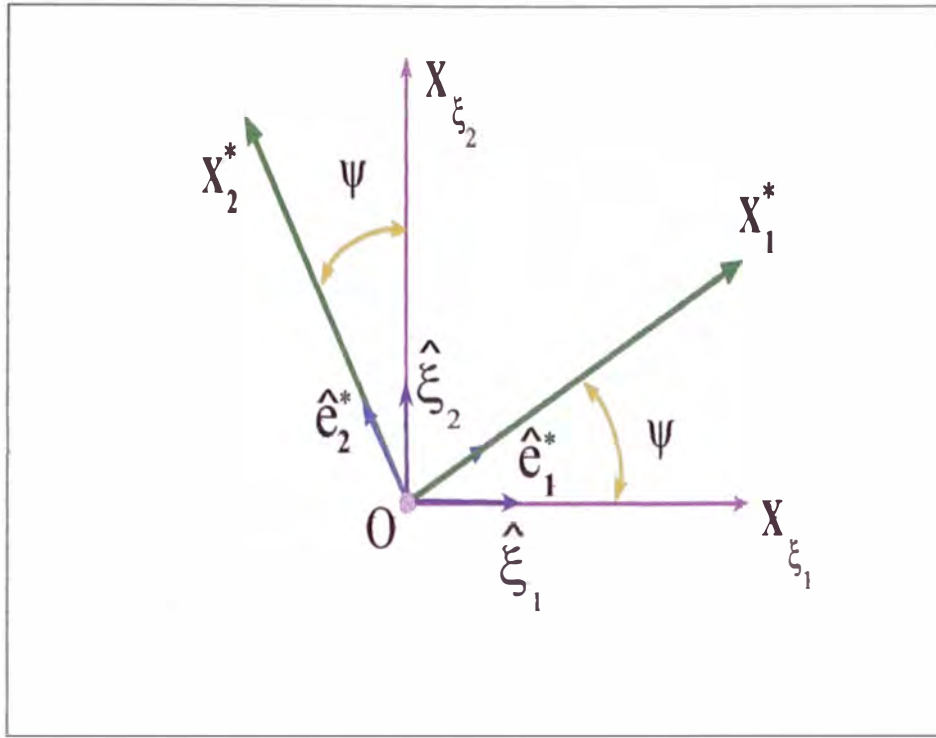


Figura 1.18: Relación entre las bases  $B^* = \{\hat{e}_k^*\}$  y  $B_\xi = \{\hat{\xi}_k\}$ .

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W}\vec{Y}(G, \hat{u}) + W\ddot{Y}(G, \hat{u}), \quad (1.214)$$

como se sabe el vector de inercia para un sistema de partículas es

$$\vec{Y}(Q, \hat{u}) \equiv \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{QP}_k \times (\hat{u} \times \overrightarrow{QP}_k), \quad (1.215)$$

si en la ec.(1.215) consideramos el caso  $Q = G$ , se tendría

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \overrightarrow{GP}_k \times (\hat{u} \times \overrightarrow{GP}_k). \quad (1.216)$$

Ahora expresaremos el vector  $\hat{u}$  de la ec.(1.216) como una combinación lineal de la base  $B_\xi$

$$\hat{u} = u_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + u_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + u_{\xi_3} \hat{\xi}_3, \quad (1.217)$$

para simplificar la notación con el simbolo de sumatoria a los vectores unitarios  $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3$  los renombramos como

$$\hat{\xi}_1 \equiv \hat{\varepsilon}_1, \quad (1.218)$$

$$\hat{\xi}_2 \equiv \hat{\varepsilon}_2, \quad (1.219)$$

$$\hat{\xi}_3 \equiv \hat{\varepsilon}_3, \quad (1.220)$$

$$u_{\hat{\xi}_1} \equiv \eta_1, \quad (1.221)$$

$$u_{\hat{\xi}_2} \equiv \eta_2, \quad (1.222)$$

$$u_{\hat{\xi}_3} \equiv \eta_3. \quad (1.223)$$

Finalmente para la ec.(1.217) se tendrá

$$\hat{u} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \hat{\varepsilon}_i, \quad (1.224)$$

reemplazando la ec.(1.224) en la ec.(1.216) tenemos

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{k=1}^N m_k \vec{GP}_k \times \left\{ \left( \sum_{i=1}^3 \eta_i \hat{\varepsilon}_i \right) \times \vec{GP}_k \right\}, \quad (1.225)$$

intercambiando el orden de la sumatoria en la ec.(1.225) se tiene

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{i=1}^3 \eta_i \sum_{k=1}^N m_k \vec{GP}_k \times \left\{ \hat{\varepsilon}_i \times \vec{GP}_k \right\}. \quad (1.226)$$

Aplicando la definición de vector de inercia en la ec.(1.225) tenemos

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{i=1}^3 \eta_i \vec{Y}(G, \hat{\varepsilon}_i). \quad (1.227)$$

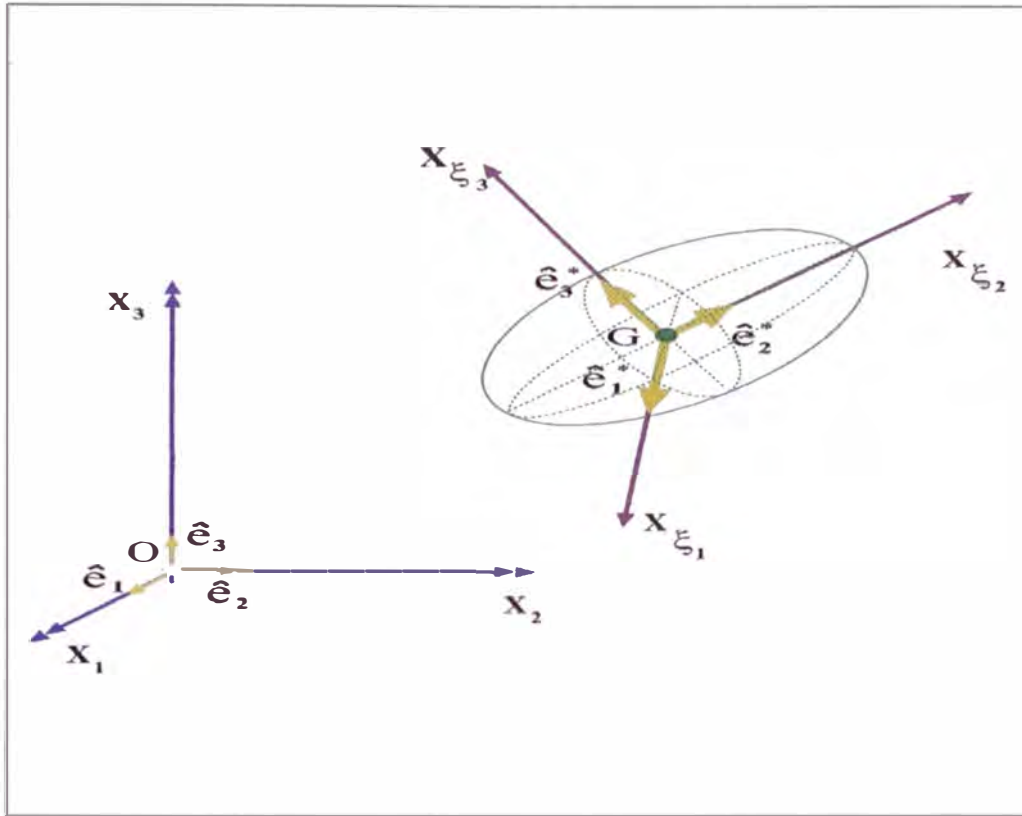


Figura 1.19: Los ejes de simetría  $X_{\xi_1}$ ,  $X_{\xi_2}$ ,  $X_{\xi_3}$  de un cuerpo rígido.

A pesar de que los ejes  $X_{\xi_1}$ ,  $X_{\xi_2}$ , ( Fig.(1.19)), no están unidas rígidamente al cuerpo rígido, estas son perpendiculares al eje  $X_{\xi_3}$  en cualquier instante. Por otra parte sabemos por la teoría de Mecánica del cuerpo rígido, que todo cuerpo rígido que tiene un eje de simetría, cualquier recta perpendicular al eje de simetría es eje principal de inercia. Luego  $X_{\xi_1}$  y  $X_{\xi_2}$  son ejes principales de inercia. Luego podemos usar la ec.(1.110)

$$\vec{Y}(G, \vec{\varepsilon}_i) = I(G, \vec{\varepsilon}_i) \vec{\varepsilon}_i, \quad (1.228)$$

reemplazando la ec.(1.228) en la ec. (1.227) se tiene

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{i=1}^3 \eta_i I(G, \hat{\varepsilon}_i) \hat{\varepsilon}_i, \quad (1.229)$$

como estamos considerando un cuerpo con eje de simetría, hacemos lo siguiente:

$$I(G, \hat{\varepsilon}_1) = I(G, \hat{\varepsilon}_2) \equiv I_1 = I_2 \equiv I, \quad (1.230)$$

$$I(G, \vec{e}_3) \equiv I_3. \quad (1.231)$$

Finalmente reemplazamos las ecuaciones (1.230) y (1.231) en la ec.(1.229)

$$\vec{Y}(G, \hat{u}) = \sum_{k=1}^3 \eta_k I_k \hat{e}_k, \quad (1.232)$$

sustituyendo la ec.(1.232) en la ec.(1.214)

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W} \vec{Y}(G, \hat{u}) + W \frac{d}{dt} \left( \sum_{k=1}^3 \eta_k I_k \hat{e}_k \right), \quad (1.233)$$

como los momentos de inercia  $I_k$  son constantes en la ec.(1.233) y efectuando operaciones con el operador derivada

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W} \vec{Y}(G, \hat{u}) + W \sum_{k=1}^3 \dot{\eta}_k I_k \hat{e}_k + W \sum_{k=1}^3 \eta_k I_k \dot{\hat{e}}_k. \quad (1.234)$$

Se sabe por [Vid94] ( apéndice del capítulo 2, pág. 35 de esa referencia)

$$\dot{\hat{e}}_k = \vec{\alpha} \times \hat{e}_k, \quad (1.235)$$

con

$$\vec{\alpha} \equiv \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \hat{e}_3, \quad (1.236)$$

usando la ec.(1.235) en la ec.(1.234) se obtiene

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W} \vec{Y}(G, \hat{u}) + W \sum_{k=1}^3 \dot{\eta}_k I_k \hat{e}_k + W \sum_{k=1}^3 \eta_k I_k (\vec{\alpha} \times \hat{e}_k), \quad (1.237)$$

reemplazando la ec.(1.232) en la ec.(1.237)

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W} \sum_{k=1}^3 \eta_k l_k \hat{e}_k + W \sum_{k=1}^3 \dot{\eta}_k l_k \hat{e}_k + W \sum_{k=1}^3 \eta_k l_k (\vec{\alpha} \times \hat{e}_k), \quad (1.238)$$

factorizando términos en la ec.(1.238)

$$\vec{T}_G^{ext} = \sum_{k=1}^3 (\dot{W} \eta_k + W \dot{\eta}_k) l_k \hat{e}_k + \vec{\alpha} \times \left( \sum_{k=1}^3 W \eta_k l_k \hat{e}_k \right). \quad (1.239)$$

Por otra parte  $\vec{W} = W \hat{u}$  y  $\hat{u} = \sum_{i=1}^3 \eta_i \hat{e}_i$  entonces

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^3 W \eta_i \vec{e}_i, \quad (1.240)$$

se representará por  $W_{\tau_i}$  las componentes de  $\vec{W}$  en la base  $B_{\xi}^4$ , luego

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^3 W_{\tau_i} \vec{e}_i, \quad (1.241)$$

De las ecuaciones (1.240) y (1.241)

$$W_{\tau_k} = \eta_k W, \quad (1.242)$$

sustituyendo la ec.(1.242) en la ec.(1.239)

$$\vec{T}_G^{ext} = \sum_{k=1}^3 (\dot{W} \eta_k + W \dot{\eta}_k) l_k \hat{e}_k + \vec{\alpha} \times \left( \sum_{k=1}^3 W_{\tau_k} l_k \vec{e}_k \right), \quad (1.243)$$

derivando la ec.(1.242) se tiene

$$\dot{W}_{\tau_k} = \eta_k \dot{W} + \dot{\eta}_k W. \quad (1.244)$$

<sup>4</sup>Denotamos así para no confundir con  $\vec{W}_k = \text{Comp}_{\hat{e}_k} \vec{W}$ .

Sustituyendo la ec.(1.244) en la ec.(1.243)

$$\vec{T}_G^{ext} = \sum_{k=1}^3 \dot{W}_{\tau_k} l_k \hat{e}_k + \vec{\alpha} \times \left( \sum_{k=1}^3 W_{\tau_k} l_k \hat{e}_k \right), \quad (1.245)$$

si al segundo miembro de la ec.(1.245) lo nombramos como  $\vec{U}$

$$\vec{U} \equiv \vec{\alpha} \times \left( \sum_{k=1}^3 W_{\tau_k} l_k \hat{e}_k \right), \quad (1.246)$$

al reemplazar la ec.(1.246) en la ec.(1.245) se obtiene

$$\vec{T}_G^{ext} = \sum_{k=1}^3 \dot{W}_{\tau_k} l_k \hat{e}_k + \vec{U}, \quad (1.247)$$

desarrollando la sumatoria en la ec.(1.247)

$$\vec{T}_G^{ext} = \dot{W}_{\tau_1} l_1 \vec{e}_1 + \dot{W}_{\tau_2} l_2 \hat{e}_2 + \dot{W}_{\tau_3} l_3 \hat{e}_3 + \vec{U}. \quad (1.248)$$

De la ec.(1.248) y la ec.(1.236) se tiene

$$\vec{U} = \left( \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \hat{e}_3 \right) \times \left( W_{\tau_1} l_1 \hat{e}_1 + W_{\tau_2} l_2 \hat{e}_2 + W_{\tau_3} l_3 \hat{e}_3 \right). \quad (1.249)$$

En el apéndice A2 (pág.58) se tiene el vector  $\hat{e}_3$  expresado en la base  $\mathcal{B}_\xi$  al usar esta relación y la ec.(1.302) se consigue

$$\vec{U} = \left( \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \left( \text{sen} \theta \hat{\xi}_2 + \text{cos} \theta \hat{\xi}_3 \right) \right) \times \left( W_{\tau_1} l_1 \hat{e}_1 + W_{\tau_2} l_2 \hat{e}_2 + W_{\tau_3} l_3 \hat{e}_3 \right), \quad (1.250)$$

y de las ecuaciones (1.217), (1.218) y (1.219)

$$\vec{U} = \left( \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \text{sen} \theta \hat{\xi}_2 + \dot{\phi} \text{cos} \theta \hat{\xi}_3 \right) \times \left( W_{\tau_1} l_1 \hat{\xi}_1 + W_{\tau_2} l_2 \hat{\xi}_2 + W_{\tau_3} l_3 \hat{\xi}_3 \right), \quad (1.251)$$

efectuando operaciones en la ec.(1.251)

$$\begin{aligned} \vec{u} = & \left( \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta W_{\tau_3} l_3 - \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_2} l_2 \right) \hat{\xi}_1 + \left( \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_1} l_1 - \dot{\theta} W_{\tau_3} l_3 \right) \hat{\xi}_2 \\ & + \left( \dot{\theta} W_{\tau_2} l_2 - \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta W_{\tau_1} l_1 \right) \hat{\xi}_3. \end{aligned} \quad (1.252)$$

Reemplazando la ec.(1.252) en la ec.(1.248)

$$\begin{aligned} \vec{T}_G^{ext} = & \dot{W}_{\tau_1} l_1 \hat{\xi}_1 + \dot{W}_{\tau_2} l_2 \hat{\xi}_2 + \dot{W}_{\tau_3} l_3 \hat{\xi}_3 + \left( \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta W_{\tau_3} l_3 - \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_2} l_2 \right) \hat{\xi}_1 + \\ & \left( \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_1} l_1 - \dot{\theta} W_{\tau_3} l_3 \right) \hat{\xi}_2 + \left( \dot{\theta} W_{\tau_1} l_2 - \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta W_{\tau_1} l_1 \right) \hat{\xi}_3. \end{aligned} \quad (1.253)$$

Expresando  $\vec{T}_G^{ext}$  en la base  $B_\xi = \{ \hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3 \}$

$$\vec{T}_G^{ext} = T_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + T_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + T_{\xi_3} \hat{\xi}_3. \quad (1.254)$$

De la ec.(1.253) y la ec.(1.254) obtenemos

$$T_{\xi_1} = \dot{W}_{\tau_1} l_1 + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta W_{\tau_3} l_3 - \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_2} l_2, \quad (1.255)$$

$$T_{\xi_2} = \dot{W}_{\tau_2} l_2 + \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_1} l_1 - \dot{\theta} W_{\tau_3} l_3, \quad (1.256)$$

$$T_{\xi_3} = \dot{W}_{\tau_3} l_3 + \dot{\phi} \cos \theta W_{\tau_1} l_1 - \dot{\theta} W_{\tau_3} l_3, \quad (1.257)$$

analizando un cuerpo rígido tal que  $l_1 = l_2 = l$  de las ecuaciones (1.255), (1.256) y (1.257) resulta

$$T_{\xi_1} = l \left( \dot{W}_{\tau_1} - W_{\tau_2} \dot{\phi} \cos \theta \right) + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta l_3 W_{\tau_3}, \quad (1.258)$$



$$T_{\xi_2} = I \left( \dot{W}_{\tau_2} - W_{\tau_1} \dot{\phi} \cos \theta \right) - \dot{\theta} I_3 W_{\tau_3}, \quad (1.259)$$

$$T_{\xi_3} = I \left( \dot{\theta} \dot{W}_{\tau_2} - W_{\tau_1} \dot{\phi} \sin \theta \right) - I_3 \dot{W}_{\tau_3}. \quad (1.260)$$

Considerando [Val93] se tiene la expresión para  $\vec{W}$

$$\vec{W} = \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \hat{e}_3 + \dot{\psi} \hat{\xi}_3, \quad (1.261)$$

si se reemplaza el valor de  $\hat{e}_3$  ( apéndice A2 ec.(1.302)) se tiene

$$\vec{W} = \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \sin \theta \hat{\xi}_2 + \left( \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \right) \hat{\xi}_3. \quad (1.262)$$

Expresando  $\vec{W}$  en la base  $B_\xi$

$$\vec{W} = W_{\tau_1} \hat{\xi}_1 + W_{\tau_2} \hat{\xi}_2 + W_{\tau_3} \hat{\xi}_3, \quad (1.263)$$

entonces de la ec.(1.262) y ec.(1.263), se tiene haciendo un cambio  $\xi = \tau$

$$W_{\xi_1} = \dot{\theta}, \quad (1.264)$$

$$W_{\xi_2} = \dot{\phi} \sin \theta, \quad (1.265)$$

$$W_{\xi_3} = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi}, \quad (1.266)$$

y al derivar las ecuaciones (1.264), (1.265) y 1.266) se obtiene respectivamente

$$\dot{W}_{\xi_1} = \ddot{\theta}, \quad (1.267)$$

$$\dot{W}_{\xi_2} = \ddot{\phi} \sin \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta, \quad (1.268)$$

$$\dot{W}_{\xi_3} = \ddot{\phi} \cos \theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \sin \theta + \ddot{\psi}, \quad (1.269)$$

reemplazando las ecuaciones (1.267), (1.268) y (1.26) en las ecuaciones (1.258), (1.259), (1.260) y simplificando, obtendremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$T_{\xi_1} = I\ddot{\theta} + I_3\dot{\phi}\dot{\psi}\operatorname{sen}\theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2\operatorname{cos}\theta\operatorname{sen}\theta, \quad (1.270)$$

$$T_{\xi_2} = I\ddot{\phi}\operatorname{sen}\theta + (2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{cos}\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}I_3 \quad (1.271)$$

$$T_{\xi_3} = (\ddot{\phi}\operatorname{cos}\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \ddot{\psi})I_3, \quad (1.272)$$

a las cuales se les llama *ecuaciones diferenciales ordinarias modificadas de Euler*.

Finalmente debemos mencionar que la demostración para obtener las ecuaciones de movimiento de un cuerpo rígido y las definiciones consideradas se hicieron para un caso discreto, pero estos conceptos se generalizan para el caso continua.

## APENDICE

### A1.- RELACION ENTRE $\mathcal{B}$ Y $\mathcal{B}^*$

Se tienen las siguientes bases de vectores (Fig.(1.20))

$$\mathcal{B} \equiv \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}, \quad (1.273)$$

$$\mathcal{B}^* \equiv \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}, \quad (1.274)$$

donde  $\mathcal{B}$  es la base canónica y  $\mathcal{B}^*$  es la base ligada al cuerpo que rota (con origen en el punto G: centro de masa), la relación entre estas dos bases se deduce a partir de la matriz de Euler,  $\mathbb{E}(\psi, \theta, \phi)$  (p.17) y mediante la teoría de Transformación de coordenadas.

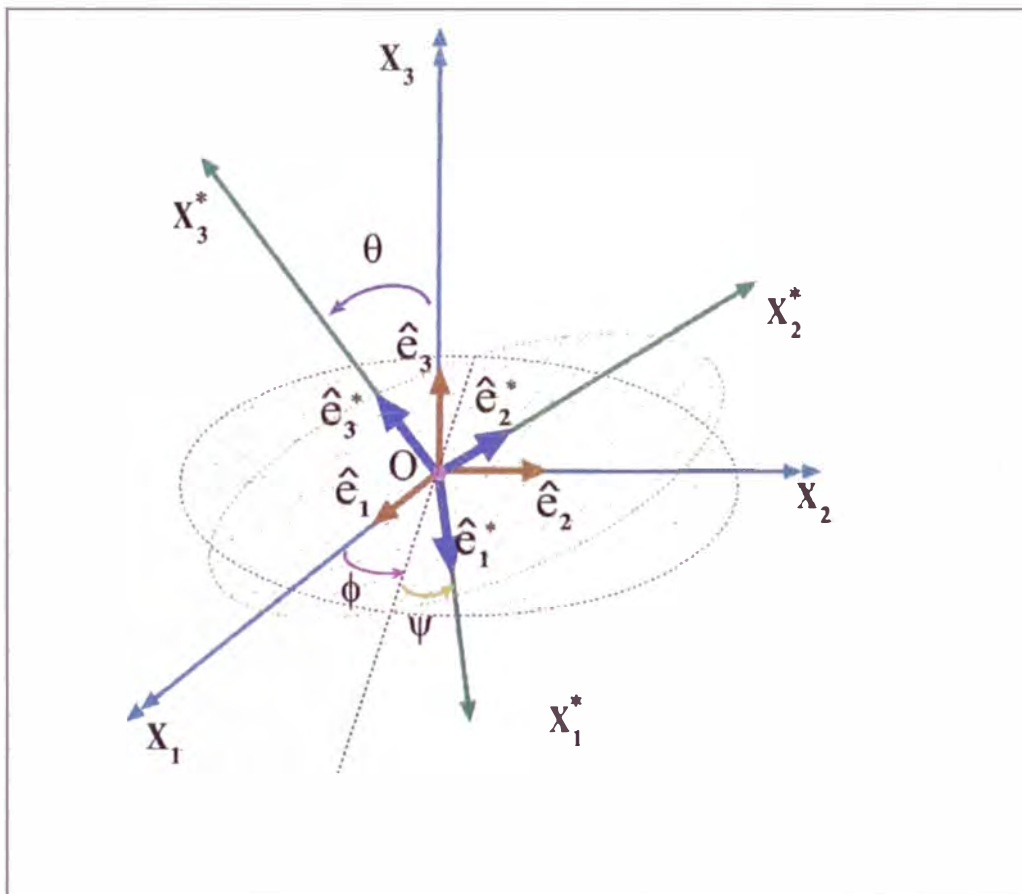


Figura 1.20: Relaciones entre la base canónica  $\mathcal{B}$  y y la base ligada  $\mathcal{B}^*$

La relación de los vectores de la base  $\mathcal{B}^*$  en función de la base  $\mathcal{B}$  es

$$\begin{aligned}\hat{e}_1^* &= (\cos \phi \cos \psi - \operatorname{sen} \phi \cos \theta \operatorname{sen} \psi) \hat{e}_1 + (\cos \phi \cos \theta \operatorname{sen} \psi + \cos \psi \operatorname{sen} \phi) \hat{e}_2 \\ &\quad + \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_3\end{aligned}\tag{1.275}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_2^* &= (-\cos \phi \operatorname{sen} \psi - \operatorname{sen} \phi \cos \theta \cos \psi) \hat{e}_1 + (\cos \phi \cos \theta \cos \psi - \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi) \hat{e}_2 \\ &\quad + \cos \psi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_3\end{aligned}\tag{1.276}$$

$$\hat{e}_3^* = \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_1 - \cos \phi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3,\tag{1.277}$$

y la relación de los vectores de la base  $\mathcal{B}$  en función de los vectores de la base  $\mathcal{B}^*$  es

$$\begin{aligned}\hat{e}_1 &= (\cos \psi \cos \phi - \operatorname{sen} \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi) \hat{e}_1^* + (-\operatorname{sen} \psi \cos \phi - \cos \psi \cos \theta \operatorname{sen} \phi) \hat{e}_2^* \\ &\quad + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{e}_3^*\end{aligned}\tag{1.278}$$

$$\begin{aligned}\hat{e}_2 &= (\cos \psi \operatorname{sen} \phi + \operatorname{sen} \psi \cos \theta \cos \phi) \hat{e}_1^* + (-\operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \phi + \cos \psi \cos \theta \cos \phi) \hat{e}_2^* \\ &\quad - \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{e}_3^*\end{aligned}\tag{1.279}$$

$$\hat{e}_3 = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_1^* + \cos \psi \operatorname{sen} \theta \hat{e}_2^* + \cos \theta \hat{e}_3^*\tag{1.280}$$

## A2.- RELACIONES ENTRE LAS BASES $\mathcal{B}_\xi$ Y $\mathcal{B}$

En el apéndice A1 se mostró las relaciones que existe entre la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  y  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$ , a partir de estas bases se formará la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , relacionados con los ángulos de Euler. En la Fig.(1.21), se puede apreciar nuevamente la base

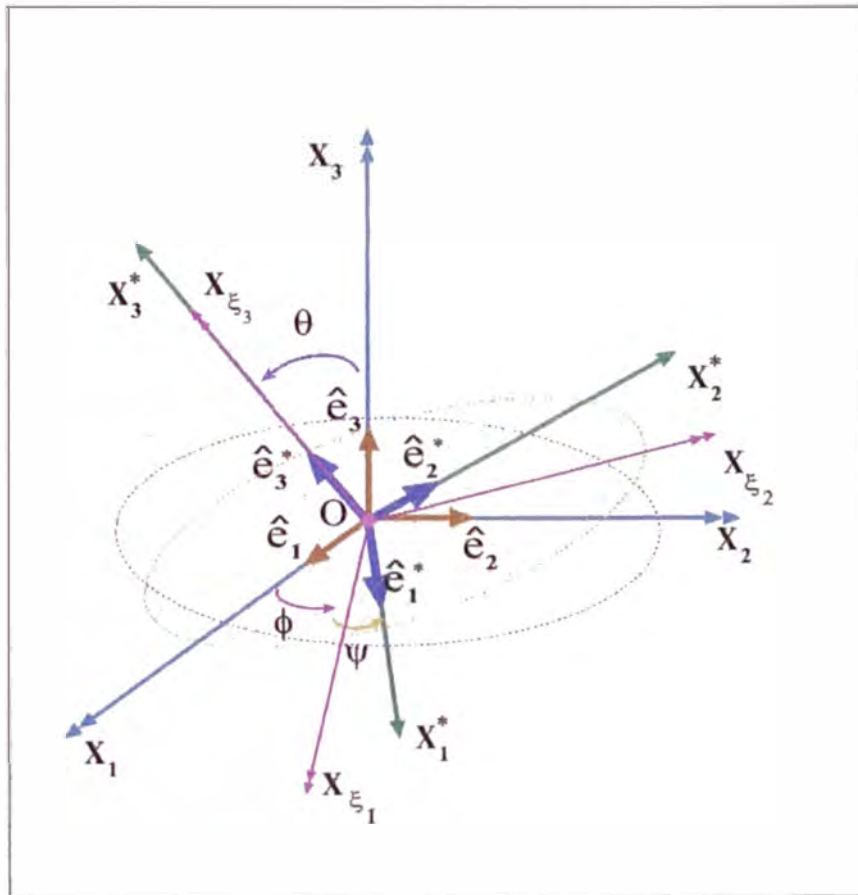


Figura 1.21: Relación de transformación entre las bases de trabajo  $\mathcal{B}_\xi$  y  $\mathcal{B}$

Definiendo

$$\hat{\xi}_1 \equiv \frac{\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*}{|\hat{e}_3 \times \hat{e}_3^*|}, \quad (1.281)$$

$$\hat{\xi}_2 \equiv \hat{e}_3^* \times \hat{\xi}_1, \quad (1.282)$$

$$\hat{\xi}_3 \equiv \hat{e}_3^*. \quad (1.283)$$

Efectuando operaciones en la ec.(1.281) y (1.282), se obtiene los vectores de la base  $\mathcal{B}_\xi$  en función de los vectores de la base  $\mathcal{B}$

$$\hat{\xi}_1 = \cos \phi \hat{e}_1 + \operatorname{sen} \phi \hat{e}_2, \quad (1.284)$$

$$\hat{\xi}_2 = -\cos \theta \operatorname{sen} \phi \hat{e}_1 + \cos \theta \cos \phi \hat{e}_2 + \operatorname{sen} \theta \hat{e}_3, \quad (1.285)$$

$$\hat{\xi}_3 = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{e}_1 - \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{e}_2 + \cos \theta \hat{e}_3. \quad (1.286)$$

De la ec.(1.284) se observa que  $\hat{\xi}_1$  coincide con la recta de intersección del plano  $X_1X_2$  y  $X_1^*X_2^*$ . Las expresiones de vectores de la base  $\mathcal{B}$  en función de los vectores de la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$\hat{e}_1 = (\cos \phi \hat{\xi}_1 - \operatorname{sen} \phi \cos \theta) \hat{\xi}_2 + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \hat{\xi}_3, \quad (1.287)$$

$$\hat{e}_2 = (\operatorname{sen} \phi \hat{\xi}_1 + \cos \theta \cos \phi) \hat{\xi}_2 - \operatorname{sen} \theta \cos \phi \hat{\xi}_3, \quad (1.288)$$

$$\hat{e}_3 = \operatorname{sen} \theta \hat{\xi}_2 + \cos \theta \hat{\xi}_3, \quad (1.289)$$

A3.- RELACIONES ENTRE LAS BASES  $\mathcal{B}_\xi$  Y  $\mathcal{B}^*$ 

Se necesita hallar una relación entre los vectores de la base  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$  y la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , Fig(1.22)

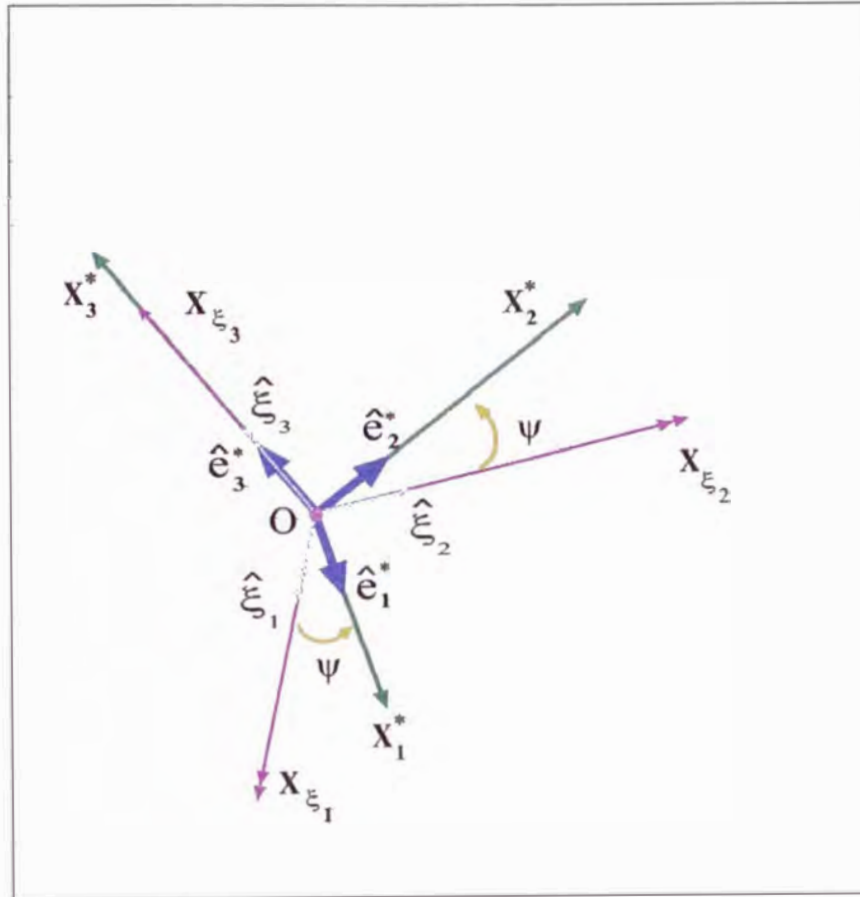


Figura 1.22: Relación entre los vectores de la base  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{B}^*$  y  $\mathcal{B}_\xi$

Estas relaciones están dadas por los vectores de la base  $\mathcal{B}^*$  en función de los vectores de la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$\hat{e}_1^* = \cos \psi \hat{\xi}_1 + \operatorname{sen} \psi \hat{\xi}_2, \quad (1.290)$$

$$\hat{e}_2^* = -\operatorname{sen} \psi \hat{\xi}_1 + \cos \psi \hat{\xi}_2 \quad (1.291)$$

$$\hat{e}_3^* = \hat{\xi}_3 \quad (1.292)$$

Del mismo modo se tiene las relaciones, para los vectores de la base  $\mathcal{B}_\xi$ , en función de los vectores de la base  $\mathcal{B}^*$

$$\hat{\xi}_1 = \cos \psi \hat{e}_1^* - \text{sen} \psi \hat{e}_2^*, \quad (1.293)$$

$$\hat{\xi}_2 = \text{sen} \psi \hat{e}_1^* + \cos \psi \hat{e}_2^* \quad (1.294)$$

$$\hat{\xi}_3 = \hat{e}_3^*. \quad (1.295)$$



#### A4.- COMPONENTES DE LA VELOCIDAD ANGULAR EN DIFERENTES BASES ( $\mathcal{B}$ , $\mathcal{B}^*$ Y $\mathcal{B}_\xi$ ).

##### COMPONENTES DE LA VELOCIDAD ANGULAR EN LA BASE $\mathcal{B}$ .

El vector velocidad angular esta dado por la siguiente expresión en la base  $\mathcal{B}$ .

$$\vec{W} = W_1 \hat{e}_1 + W_2 \hat{e}_2 + W_3 \hat{e}_3. \quad (1.296)$$

Las componentes de la velocidad angular expresada en la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , son

$$W_1 = \dot{\psi} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} \cos\psi, \quad (1.297)$$

$$W_2 = -\dot{\psi} \cos\phi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi, \quad (1.298)$$

$$W_3 = \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta. \quad (1.299)$$

##### COMPONENTES DE LA VELOCIDAD ANGULAR Y SUS DERIVADAS EN LA BASE $\mathcal{B}^*$

El vector de la velocidad angular expresada en la base  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$

$$\vec{W} = W_1^* \hat{e}_1^* + W_2^* \hat{e}_2^* + W_3^* \hat{e}_3^*, \quad (1.300)$$

cuyas componentes estan dadas por

$$W_1^* = \dot{\phi} \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \dot{\theta} \cos\psi, \quad (1.301)$$

$$W_2^* = \dot{\phi} \cos\psi \operatorname{sen}\theta - \dot{\theta} \operatorname{sen}\psi, \quad (1.302)$$

$$W_3^* = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi}. \quad (1.303)$$

Las derivadas de la velocidad angular son

$$\begin{aligned}\dot{W}_1^* &= \ddot{\phi} \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \ddot{\theta} \cos\psi + \dot{\phi} \dot{\psi} \cos\psi \operatorname{sen}\theta \\ &\quad + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta \operatorname{sen}\psi - \dot{\theta} \dot{\psi} \operatorname{sen}\psi ,\end{aligned}\tag{1.304}$$

$$\begin{aligned}\dot{W}_2^* &= \ddot{\phi} \cos\psi \operatorname{sen}\theta - \ddot{\theta} \operatorname{sen}\psi - \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\psi \operatorname{sen}\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta \cos\psi \\ &\quad - \dot{\theta} \dot{\psi} \cos\psi ,\end{aligned}\tag{1.305}$$

$$\dot{W}_3^* = \ddot{\phi} \cos\theta - \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + \ddot{\psi} .\tag{1.306}$$

### COMPONENTES DE LA VELOCIDAD ANGULAR Y SUS DERIVADAS EN LA BASE MODIFICADA DE EULER $\mathcal{B}_\xi$

El vector de la velocidad angular expresada en la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$

$$\vec{W} = W_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + W_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + W_{\xi_3} \hat{\xi}_3 ,\tag{1.307}$$

las componentes son

$$W_{\xi_1} = \dot{\theta} ,\tag{1.308}$$

$$W_{\xi_2} = \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta ,\tag{1.309}$$

$$W_{\xi_3} = \dot{\phi} \cos\theta + \dot{\psi} .\tag{1.310}$$

Las derivadas de la velocidad angular son

$$\dot{W}_{\xi_1} = \ddot{\theta} ,\tag{1.311}$$

$$\dot{W}_{\xi_2} = \ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta + \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta, \quad (1.312)$$

$$\dot{W}_{\xi_3} = \ddot{\phi} \cos \theta + \ddot{\phi} \cos \theta + \ddot{\psi} \quad (1.313)$$

## CAPÍTULO II

# MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE NO HOMOGÉNEO SIN FRICCIÓN

- 2.1.- Introducción.
- 2.2.- Cálculo del torque de la reacción normal y el peso.
- 2.3.- Aplicaciones de la Ecuación Modificada de Euler.

## 2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analizará el movimiento del elipsoide no homogéneo, de semiejes  $a$ ,  $b$  y  $c$  (con  $a = b \geq c$ ). Se recordará que el centro de masa de este cuerpo, está ubicado en el semieje  $c$  (Fig.(2.1)). Se considera la reacción normal y el peso, debido a que no se toma en cuenta la fuerza de fricción, aparecen magnitudes físicas que se conservan, (como la energía y algunos momentos generalizados).

Calculando los torques (producidos por la reacción por la reacción normal y el peso) y con la ayuda de las ecuaciones (1.207), (1.208) y (1.209) se obtiene las ecuaciones diferenciales de movimiento.

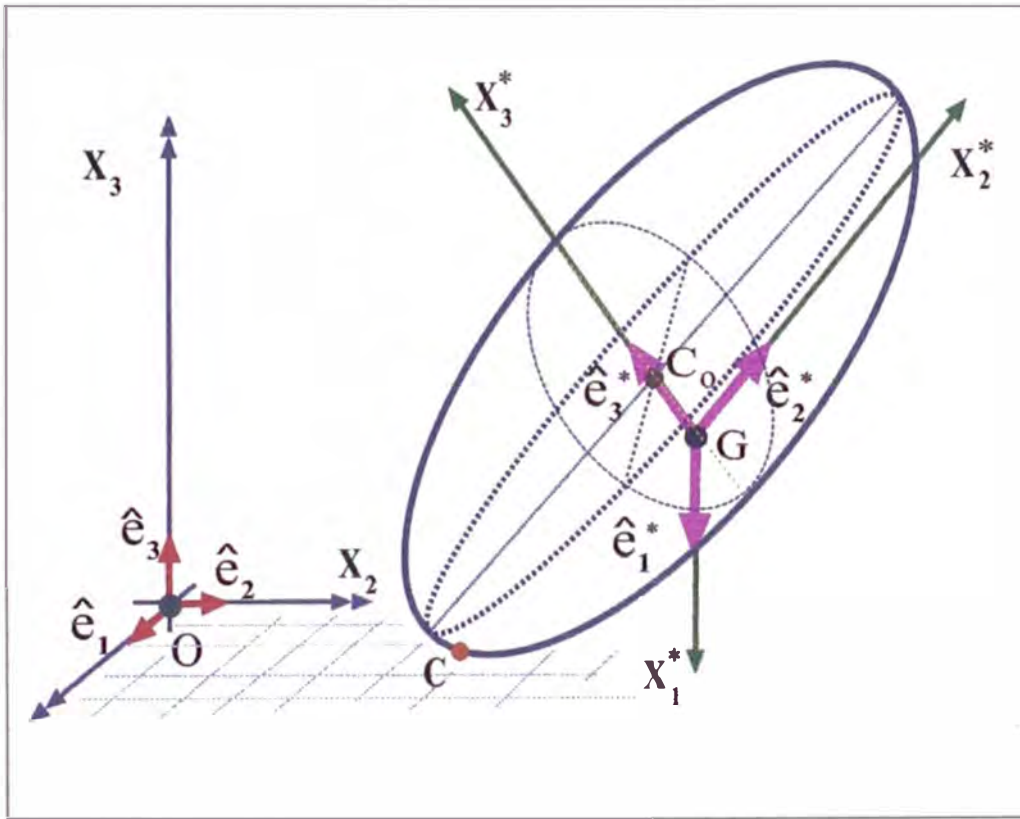


Figura 2.1: Gráfico de las bases de consideradas, para el estudio del elipsoide no homogéneo.

El elipsoide (Fig.(2.1)) se encuentra en el espacio ( $R^3$ ) y se tomará en cuenta , tres bases de vectores:

- \* La primera es la base canónica  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ , donde se fija un sistema coordenado con ejes  $X_1, X_2, X_3$ , con centro en  $O$ , desde allí se observa lo que ocurre con el elipsoide. Por lo general a este Sistema de Referencia Inercial se le llama *sistema laboratorio*.
- \* Por otra parte se tiene la base de vectores  $\mathcal{B}^* = \{\hat{e}_1^*, \hat{e}_2^*, \hat{e}_3^*\}$ , con centro en  $G$  (centro de masa), dicha base esta fija al elipsoide que esta en movimiento con un sistema de

ejes  $X_1^*, X_2^*, X_3^*$ .

\* Finalmente se tiene la base  $B_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , llamada *base modificada de Euler* (ya mencionada en el apéndice A2 y A3). Se tomarán en cuenta los ángulos de Euler  $(\theta, \phi, \psi)$  y sus respectivas derivadas temporales  $(\dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi})$ . Para considerar la velocidad angular  $\vec{W}$  del cuerpo se considera  $Q=G$  (es decir el eje de rotación pasa por G).

## 2.2. CÁLCULO DEL TORQUE DE LA REACCIÓN NORMAL Y EL PESO

En la Fig.(2.2) se muestra el diagrama de cuerpo libre del elipsoide (sin considerar la fricción). La fuerza resultante ( $\vec{F}$ ) viene dada por la expresión

$$\vec{F} = \vec{R} + \vec{P}, \quad (2.1)$$

donde  $\vec{R}$  es la Reacción normal (que actúa en el punto de contacto que será denotado por C,  $\vec{P}$  es el peso del elipsoide.

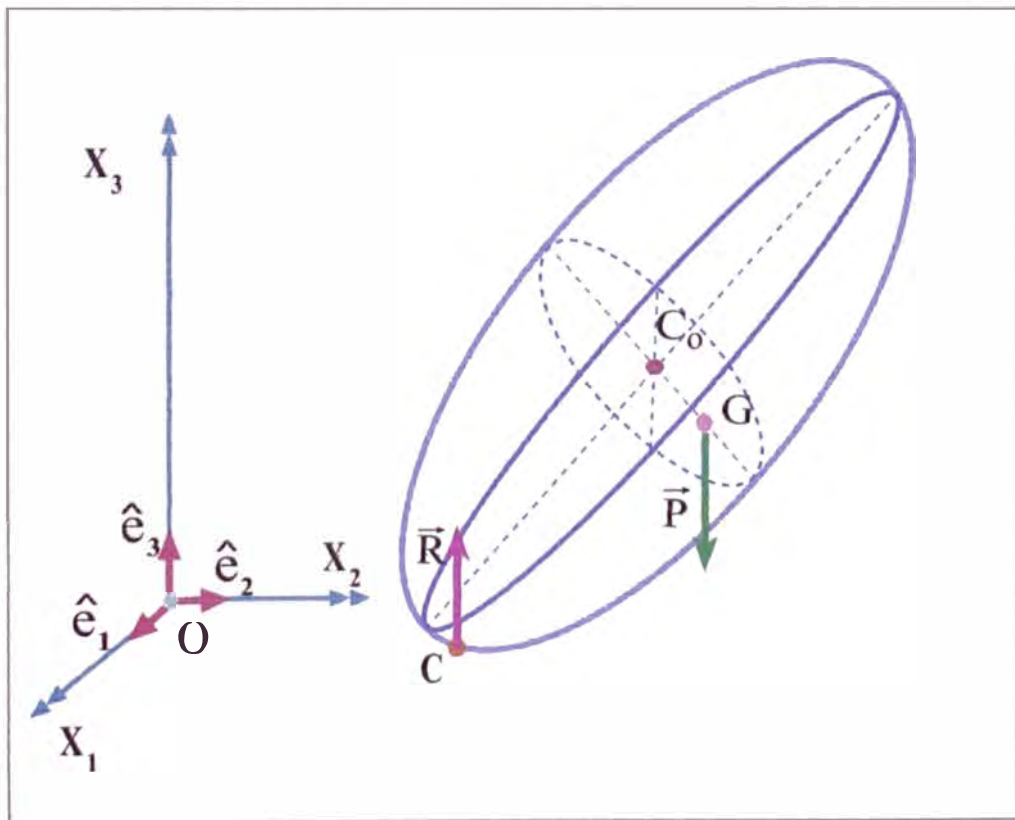


Figura 2.2: Relaciones entre las fuerzas que actúan sobre el elipsoide no homogéneo

Siendo  $\vec{R}$  y  $\vec{P}$  paralelos al vector  $\hat{e}_3$ , (Fig.(2.2)), estas fuerzas se pueden escribir de la siguiente manera:

$$\vec{R} = \mathcal{R} \hat{e}_3, \quad (2.2)$$

$$\vec{P} = -m g \hat{e}_3, \quad (2.3)$$

donde  $m$ , es la masa del elipsoide,  $g$  es la aceleración de la gravedad,  $\mathcal{R}$  es el módulo de la reacción normal ( $\vec{R}$ ).

Considerando la Segunda ley de Newton

$$\vec{F} = m \vec{a}_G, \quad (2.4)$$

donde  $\vec{a}_G$  es la aceleración del centro de masa del elipsoide. De las ecuaciones (2.1), (2.2), (2.3) y (2.4) se obtiene

$$\ddot{x}_{G_1} = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{x}_{G_2} = 0, \quad (2.6)$$

$$m \ddot{x}_{G_3} = \mathcal{R} - m g. \quad (2.7)$$

La solución para las ecuaciones (2.5) y (2.6) es

$$x_{G_1} = c_1 t + c_2, \quad (2.8)$$

$$x_{G_2} = c_3 t + c_4, \quad (2.9)$$

siendo  $c_k$ , constantes que dependen de las condiciones iniciales.

## REACCIÓN NORMAL $\vec{R}$

De la ec.(2.7) se obtiene

$$\mathcal{R} = m (\ddot{x}_{G_3} + g), \quad (2.10)$$

pero esta expresión tiene varias incógnitas que despejar. Es por eso que hacemos uso de la geometría del problema para encontrar una relación entre ciertos parámetros y funciones

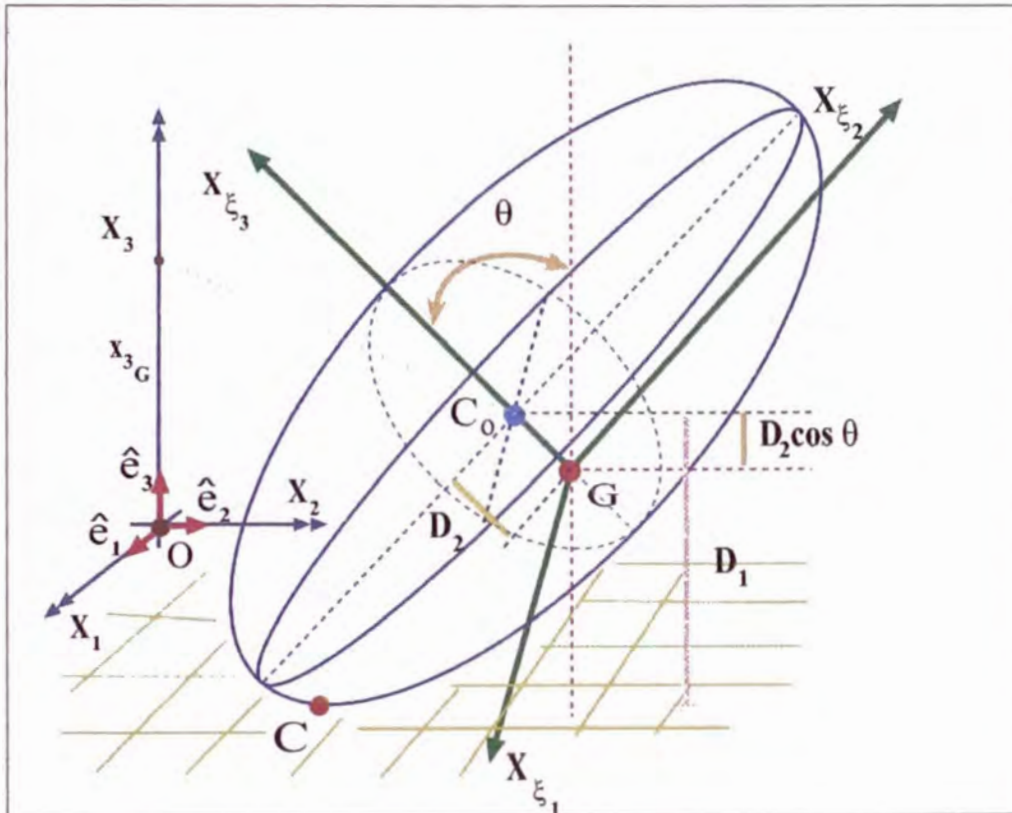


Figura 2.3: Relación entre ciertos parámetros del elipsoide no homogéneo.

En la Fig.(2.3) se muestran los siguientes parámetros que intervienen en el elipsoide no homogéneo

- \*  $C_0$  : Centro del elipsoide .
- \*  $G$  : Centro de gravedad .
- \*  $D_1$  : Distancia entre el punto  $C_0$  y la superficie de apoyo del elipsoide (plano  $X_1X_2$ ) .
- \*  $\theta$  : Angulo que forma  $\hat{e}_3$  y  $\hat{e}_3^*$  .



\*  $\mathcal{D}_2$  : Distancia entre el punto  $C_0$  y G que es constante (porque son puntos que pertenecen al cuerpo rígido).

\*  $x_{G_1}, x_{G_2}, x_{G_3}$  : Coordenadas del centro de masa del elipsoide no homogéneo, Fig.(2.3).

Se tiene de la Fig.(2.3), que  $\mathcal{D}_1$ , esta relacionada con  $\mathcal{D}_2$ ,  $\theta$ ,  $x_{G_3}$  mediante la expresión

$$\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2 \cos \theta + x_{G_3}, \quad (2.11)$$

de otro lado se encuentra que  $\mathcal{D}_1$ <sup>1</sup> satisface

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}, \quad (2.12)$$

donde a y c son los semiejes del elipsoide, con  $a \geq c$ . Reemplazando la ec.(2.12) en ec.(2.11) y despejando  $x_{G_3}$  se obtiene

$$x_{G_3} = \sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta} - \mathcal{D}_2 \cos \theta. \quad (2.13)$$

Derivando la ec. (2.13) se obtiene

$$\dot{x}_{G_3} = \frac{\dot{\theta} \text{sen} \theta \text{cos} \theta (a^2 - c^2)}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} + \mathcal{D}_2 \dot{\theta} \text{sen} \theta, \quad (2.14)$$

y derivando por segunda vez resulta

$$\begin{aligned} \ddot{x}_{G_3} = & \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \left\{ (2 \text{cos}^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right)^2 \right\} + \\ & \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \text{cos} \theta + \ddot{\theta} \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

esta expresión se reemplaza en la ec. (2.10) y queda finalmente una expresión para el módulo de la reacción normal  $\mathcal{R}$  en función del ángulo  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ .

<sup>1</sup>El cálculo para  $\mathcal{D}_1$ , se halla en el Apéndice B2, p.89.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & m \left[ g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right], \end{aligned} \quad (2.16)$$

Para simplificar esta expresión se define F y H

$$\begin{aligned} F \equiv & g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \\ & + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta, \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$H \equiv \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\}. \quad (2.18)$$

Luego el módulo de  $\vec{R}$  queda determinado en forma compacta mediante la ec. (2.19)

$$\mathcal{R} = m(F + \ddot{\theta}H). \quad (2.19)$$

Recordando la relación que existe entre los vectores de la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_k\}$  y de la base  $\mathcal{B}_\xi$ <sup>2</sup>

$$\hat{e}_1 = \cos \phi \hat{\xi}_1 - \cos \theta \text{sen} \phi \hat{\xi}_2 + \text{sen} \theta \text{sen} \phi \hat{\xi}_3,$$

$$\hat{e}_2 = \text{sen} \phi \hat{\xi}_1 + \cos \theta \cos \phi \hat{\xi}_2 - \text{sen} \theta \cos \phi \hat{\xi}_3,$$

$$\hat{e}_3 = \text{sen} \theta \hat{\xi}_2 + \cos \theta \hat{\xi}_3,$$

y mediante la ec(2.2) se halla la nueva expresión para  $\vec{R}$  en la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , dando

<sup>2</sup>En el apéndice A2 del capítulo I se halla la relación entre  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{B}_\xi$ , p. 65.

como resultado

$$\vec{R} = \mathcal{R} \left( \text{sen } \theta \hat{\xi}_2 + \text{cos } \theta \hat{\xi}_3 \right). \quad (2.20)$$

### EL TORQUE $\vec{T}_G^{\vec{R}}$

Se calculará el torque  $\vec{T}_G^{\vec{R}}$ , debido a la reacción normal  $\vec{R}$  con respecto al punto G (Fig.(2.4)), usando el vector  $\vec{GC}^3$  expresado en la base  $B_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , mediante

$$\vec{GC} = \left( \frac{-a^2 \text{sen } \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_2 + \left( D_2 - \frac{c^2 \text{cos } \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_3.$$

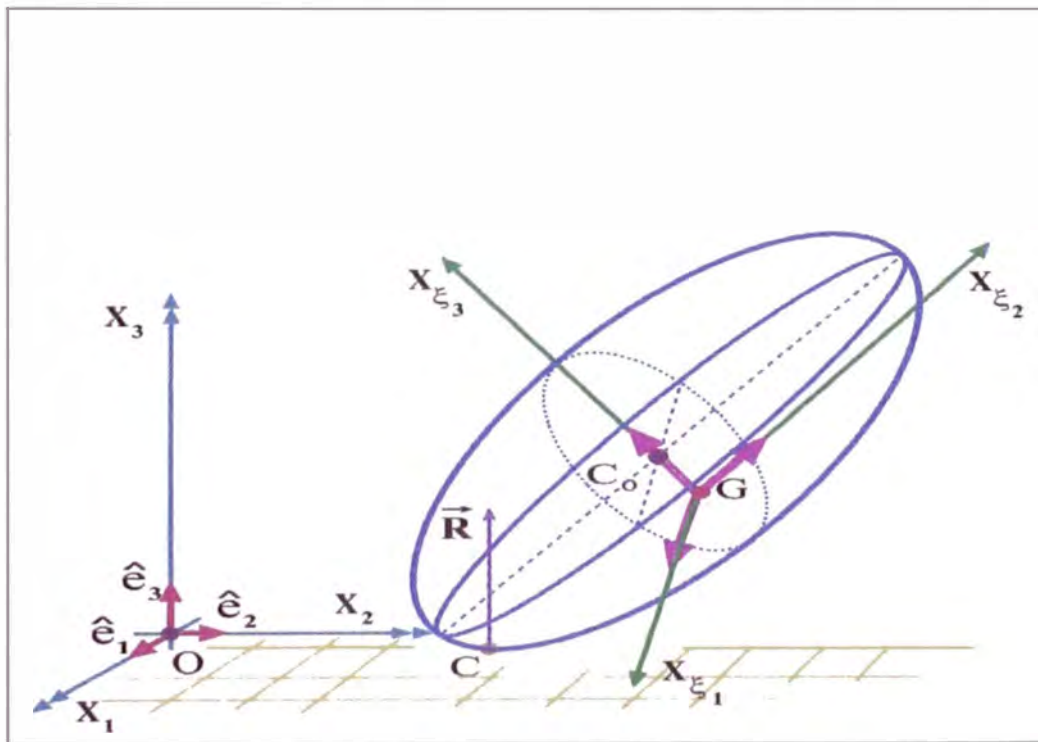


Figura 2.4: Relaciones entre las bases de trabajo

El torque viene dado por

$$\vec{T}_G^{\vec{R}} \equiv \vec{GC} \times \vec{R} \quad (2.21)$$

<sup>3</sup> $\vec{GC}$  en la base  $B_\xi$  se calculó, en el Apéndice B3, p. 91.

que al efectuar operaciones se obtiene

$$\vec{T}_G^{\vec{R}} = \mathcal{R} \left\{ \frac{-\text{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \text{sen}\theta \right\} \hat{\xi}_1. \quad (2.22)$$

Introduciendo la expresión para  $\mathcal{R}$  (ec.(2.19) en (2.22))

$$\vec{T}_G^{\vec{R}} = m \left\{ F + \ddot{\theta} H \right\} \left\{ \frac{-\text{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \text{sen}\theta \right\} \hat{\xi}_1, \quad (2.23)$$

como conviene tener una expresión compacta se define C a la expresión entre corchetes, es decir

$$C \equiv \frac{-\text{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \text{sen}\theta. \quad (2.24)$$

Luego  $\vec{T}_G^{\vec{R}}$  en forma compacta es

$$\vec{T}_G^{\vec{R}} = mC (F + \ddot{\theta} H) \hat{\xi}_1, \quad (2.25)$$

Al reemplazar las definiciones de F, H y C se tiene

$$\begin{aligned} \vec{T}_G^{\vec{R}} = m & \left[ \left\{ g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \left\{ (2 \cos^2\theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta \right\} + \ddot{\theta} \left\{ \text{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right\} \right] \\ & \left\{ \frac{-\text{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \text{sen}\theta \right\} \hat{\xi}_1. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Si designamos por  $T_{\xi_1}^{\vec{R}}$ ,  $T_{\xi_2}^{\vec{R}}$  y  $T_{\xi_3}^{\vec{R}}$  las componentes del torque  $\vec{T}_G^{\vec{R}}$  en la base  $\mathcal{B}_{\xi}$  resulta

$$\vec{T}_G^R = T_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + T_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + T_{\xi_3} \hat{\xi}_3. \quad (2.27)$$

Usando las ecuaciones (2.25) y (2.27) se tiene

$$T_{\xi_1}^R = m C (F + \ddot{\theta} H), \quad (2.28)$$

$$T_{\xi_2}^R = 0, \quad (2.29)$$

$$T_{\xi_3}^R = 0. \quad (2.30)$$

Como estamos tomando torque con respecto al punto G, el torque del peso es cero.

### 2.3. APLICACIONES DE LAS ECUACION MODIFICADA DE EULER

En esta sección aplicaremos las ecuaciones modificadas de Euler en la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$  dadas en el capítulo I y con  $T_{\xi_1}^{\vec{P}=0}$  se tiene

$$I \ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta = T_{\xi_1}^R, \quad (2.31)$$

$$I \ddot{\phi} \operatorname{sen} \theta + (2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta} \dot{\psi} I_3 = T_{\xi_2}^R, \quad (2.32)$$

$$I_3 \ddot{\psi} - I_3 \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta + I_3 \ddot{\phi} \cos \theta = T_{\xi_3}^R, \quad (2.33)$$

para plantear las ecuaciones de movimiento del elipsoide no homogéneo. Donde  $I_1 = I_2 \equiv I$  son los momentos principales de inercia referidas a la recta  $X_{\xi_1}$  y  $X_{\xi_3}$  respectivamente.

De la ec.(2.31) y tomando en cuenta la ec. (2.28)

$$I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = m C (F + \ddot{\theta} H), \quad (2.34)$$

$$\ddot{\theta} (I - m C H) + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta = m F C. \quad (2.35)$$

Despejando  $\ddot{\theta}$

$$\ddot{\theta} = \frac{m F C - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta - (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{I - m C H}. \quad (2.36)$$

Recordando

$$F \equiv g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\operatorname{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\}$$

$$+ D_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta,$$

$$H \equiv \operatorname{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + D_2 \right\},$$

$$C \equiv \frac{-\operatorname{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} - \left( D_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \operatorname{sen}\theta.$$

De la ec. (2.29) y la ec.(2.32)

$$I \ddot{\phi} \operatorname{sen}\theta + (2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} I_3 = 0, \quad (2.37)$$

si  $\theta \neq 0, \pi$

$$\ddot{\phi} = \frac{-(2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}I_3}{I\sin\theta}. \quad (2.38)$$

De la ec.(2.30 ) y (2.33) se obtiene igualmente para  $\ddot{\psi}$

$$\ddot{\psi} - \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta + \ddot{\phi}\cos\theta = 0, \quad (2.39)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta - \ddot{\phi}\cos\theta, \quad (2.40)$$

pero si se reemplaza la ec. (2.38) en ec. (2.40)se tendrá

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta - \left( \frac{-(2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}I_3}{I\sin\theta} \right) \cos\theta. \quad (2.41)$$

Agrupando las EDO (2.38),(2.39) y (2.41)

$$\ddot{\theta} = \frac{mFC - I_3\dot{\phi}\dot{\psi}\sin\theta - (I_3 - I)\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta}{I - mCH},$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-(2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}I_3}{I\sin\theta},$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta}\dot{\phi}\sin\theta - \left( \frac{-(2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}\dot{\psi}I_3}{I\sin\theta} \right) \cos\theta,$$

Estas ecuaciones serán resueltas numéricamente en el capítulo V.

## APÉNDICE

### B1.- CÁLCULO DEL VECTOR $\vec{C_0C}$ EN LA BASE $B^*$

El objetivo de este apéndice es hallar el vector normal  $\vec{N}$ , a la superficie que envuelve al elipsoide y las componentes del vector  $\vec{C_0C}$  en la base  $B^{**} = \{\hat{e}_1^{**}, \hat{e}_2^{**}, \hat{e}_3^{**}\}$ . Para realizar los siguientes cálculos se toma en cuenta un sistema de ejes  $X_1^{**}, X_2^{**}, X_3^{**}$  con centro en  $C_0$ , ligado al cuerpo rígido donde se tiene  $B^{**} = \{\hat{e}_1^{**}, \hat{e}_2^{**}, \hat{e}_3^{**}\}$  (Observando que  $C_0 \neq G$ , Fig.(2.5)). La ecuación de la superficie elipsoidal H según el sistema de ejes en  $X_1^{**}, X_2^{**}, X_3^{**}$  es

$$\frac{x_1^{**2}}{a^2} + \frac{x_2^{**2}}{b^2} + \frac{x_3^{**2}}{c^2} = 1, \quad (2.42)$$

considerando el caso general en la ec(2.42)  $a \geq b \geq c$ .

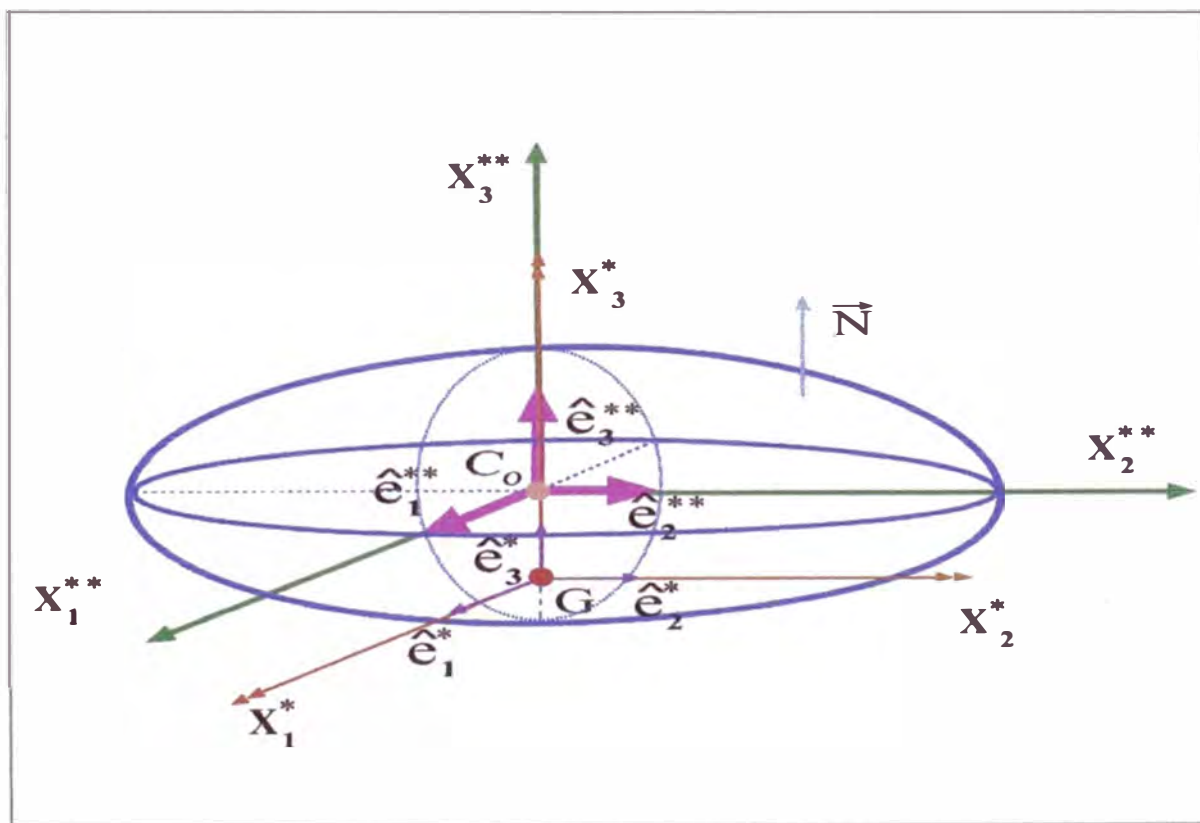


Figura 2.5: Gráfica del elipsoide en el sistema coordenado  $X_1^{**}, X_2^{**}, X_3^{**}$

Sea

$$f(\vec{r}^{**}) \equiv \frac{x_1^{**2}}{a^2} + \frac{x_2^{**2}}{b^2} + \frac{x_3^{**2}}{c^2} - 1. \quad (2.43)$$

Un vector normal  $\vec{N}$  a la superficie viene dado por el gradiente de la función mostrada en la ec.(2.43)



$$\vec{N} = \vec{\nabla} f(\vec{r}^{**}), \quad (2.44)$$

entonces

$$\vec{N} = \frac{2x_1^{**}}{a^2} \hat{e}_1^* + \frac{2x_2^{**}}{b^2} \hat{e}_2^* + \frac{2x_3^{**}}{c^2} \hat{e}_3^*. \quad (2.45)$$

donde  $x_1^{**}$ ,  $x_2^{**}$  y  $x_3^{**}$  son coordenadas de un punto cualquiera de la superficie del elipsoide (según  $X_1^{**}$ ,  $X_2^{**}$ ,  $X_3^{**}$ ).

Por otra parte es evidente que las componentes del vector  $\hat{e}_3$  en la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  es

$$\bar{e}_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.46)$$

En el apéndice A1 del capítulo I se tiene la expresión para el vector  $\hat{e}_3$  en la base  $\mathcal{B}^*$  y como  $\hat{e}_3^* = \hat{e}_3^{**}$ , Fig.(2.5)

$$\hat{e}_3 = (\text{sen}\theta \text{sen}\psi) \hat{e}_1^{**} + (\text{sen}\theta \cos\psi) \hat{e}_2^{**} + \cos\theta \hat{e}_3^{**}. \quad (2.47)$$

Para el punto de contacto C el vector  $\vec{N}$  es paralelo y está en sentido opuesto al vector  $\hat{e}_3$ , (Fig.(2.6)). Luego

$$\vec{N} = L \hat{e}_3, \quad \text{con } L < 0. \quad (2.48)$$

De las ecuaciones (2.47) y (2.48) se obtiene

$$\vec{N} = L \{(\text{sen}\theta \text{sen}\psi) \hat{e}_1^{**} + (\text{sen}\theta \cos\psi) \hat{e}_2^{**} + \cos\theta \hat{e}_3^{**}\}. \quad (2.49)$$

Ahora evaluamos la función  $\vec{N}$  (ec.(2.45)) en el punto C con coordenadas  $(C_1^{**}, C_2^{**}, C_3^{**})$  (considerando el sistema de ejes  $X_k^{**}$ )

$$\vec{N}(C_1^{**}, C_2^{**}, C_3^{**}) = \frac{2C_1^{**}}{a^2} \hat{e}_1^{**} + \frac{2C_2^{**}}{b^2} \hat{e}_2^{**} + \frac{2C_3^{**}}{c^2} \hat{e}_3^{**}, \quad (2.50)$$

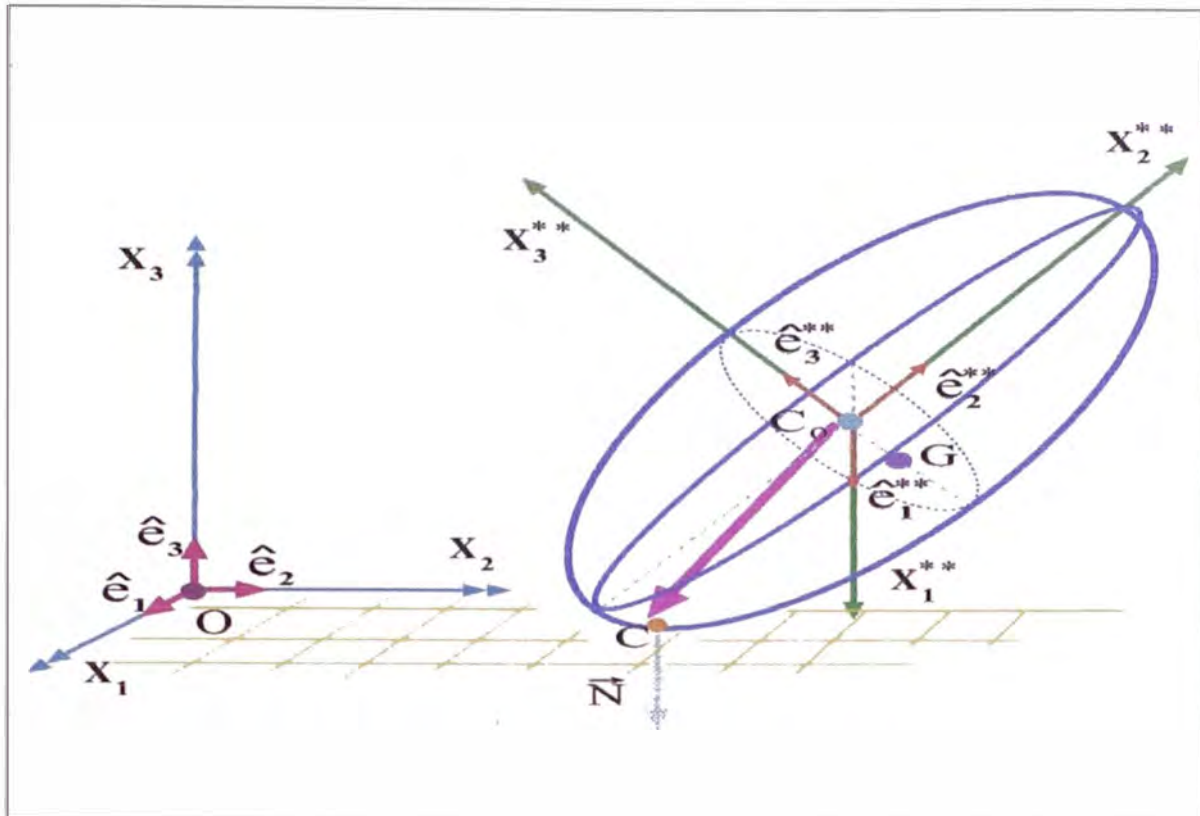


Figura 2.6: Relación entre  $\vec{N}$  y  $\hat{e}_3$

que es otra expresión para el vector normal en el punto  $C$ . De la ec.(2.50) y la última igualdad se obtiene

$$\frac{2C_1^{**}}{a^2} = L \sin \theta \sin \psi, \quad (2.51)$$

$$\frac{2C_2^{**}}{b^2} = L \sin \theta \cos \psi, \quad (2.52)$$

$$\frac{2C_3^{**}}{c^2} = L \cos \theta, \quad (2.53)$$

de las ecuaciones (2.51), (2.52) y (2.53) se despejan  $C_1^{**}$ ,  $C_2^{**}$  y  $C_3^{**}$

$$C_1^{**} = \frac{a^2 L \sin \theta \sin \psi}{2}, \quad (2.54)$$

$$C_2^{**} = \frac{b^2 L \sin \theta \cos \psi}{2}, \quad (2.55)$$

$$C_3^{**} = \frac{c^2 L \cos \theta}{2}. \quad (2.56)$$

Ahora hallaremos L, para ello utilizaremos la ec.(2.42) (recordando que C pertenece al elipsoide) en la cual reemplazaremos las ecuaciones (2.54), (2.55) y (2.56)

$$\frac{L^2}{4} \{a^2 \text{sen}^2 \theta \text{sen}^2 \psi + b^2 \text{sen}^2 \theta \cos^2 \psi + c^2 \cos^2 \theta\} = 1, \quad (2.57)$$

de la ec.(2.57) despejamos L

$$L = \pm \frac{2}{\sqrt{\text{sen}^2 \theta (a^2 \text{sen}^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) + c^2 \cos^2 \theta}}, \quad (2.58)$$

pero de la ec.(2.48) se atribuye al valor de L como negativo. Luego

$$L = - \frac{2}{\sqrt{\text{sen}^2 \theta (a^2 \text{sen}^2 \psi + b^2 \cos^2 \psi) + c^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.59)$$

Para el caso del elipsoide de revolución (a=b), la ec.(2.59) se reduce

$$L = - \frac{2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.60)$$

En la Fig.(2.6) observamos que

$$\vec{C_0 C} = C_1^{**} \hat{e}_1^{**} + C_2^{**} \hat{e}_2^{**} + C_3^{**} \hat{e}_3^{**}. \quad (2.61)$$

Reemplazando el valor de L de la ec.(2.60) (caso en que a=b), en las ecuaciones (2.54), (2.55) y (2.56), se consigue

$$C_1^{**} = \frac{-a^2 \text{sen} \theta \text{sen} \psi}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}, \quad (2.62)$$

$$C_2^{**} = \frac{-a^2 \text{sen} \theta \cos \psi}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}, \quad (2.63)$$

$$C_3^{**} = \frac{-c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}. \quad (2.64)$$

Finalmente las componentes del vector  $\overrightarrow{C_0C}$  en la base  $B^{**}$  será usando la ec.(2.61)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_0C} = & \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_1^{**} + \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \psi}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_2^{**} + \\ & \left( \frac{-c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_3^{**}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Pero es obvio que  $\hat{e}_k^{**} = \hat{e}_k^*$ , Fig.(2.7)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_0C} = & \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \psi}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_1^* + \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta \cos \psi}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_2^* \\ & + \left( \frac{-c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{e}_3^*. \end{aligned} \quad (2.66)$$

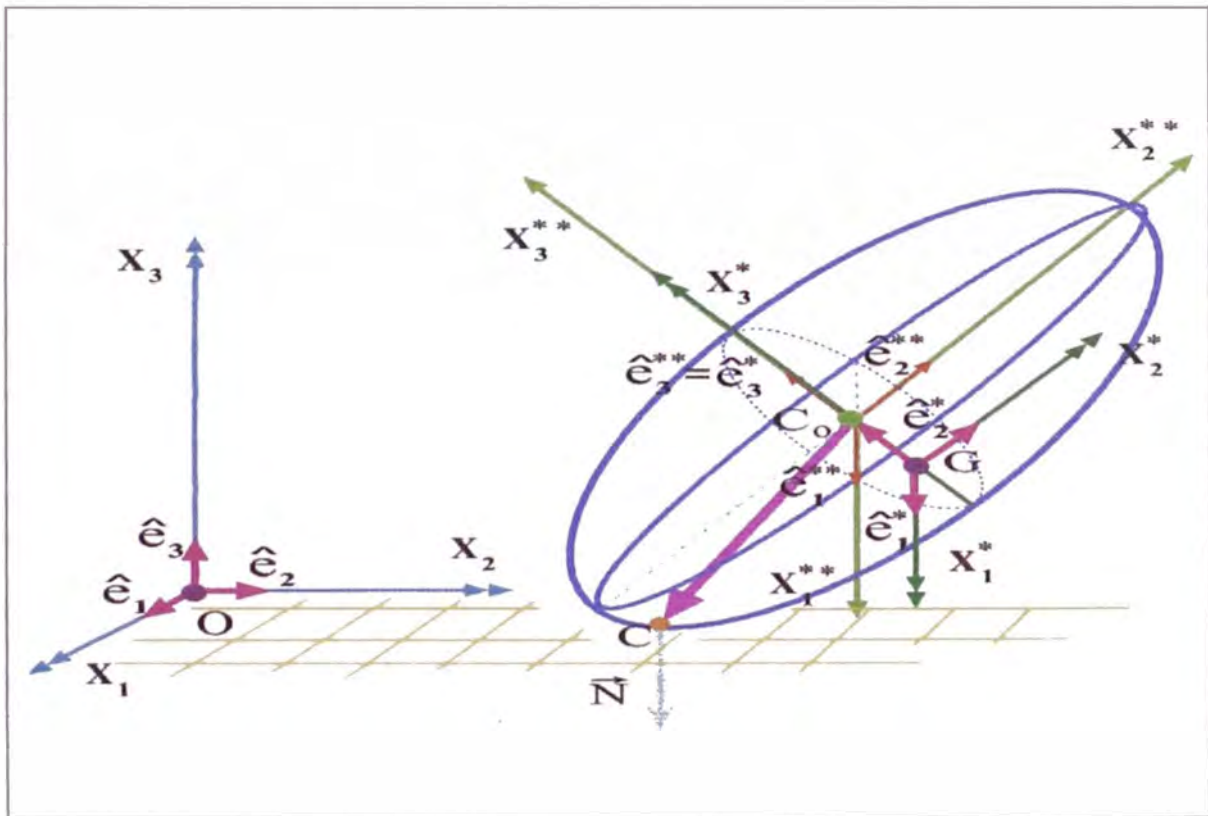


Figura 2.7: Relación entre las bases  $B^*$  y  $B^{**}$ .

B2.- CÁLCULO DE LA DISTANCIA  $\mathcal{D}_1$ 

Se calcula la distancia  $\mathcal{D}_1$  del punto  $C_0$  al plano  $X_1X_2$ , usando las coordenadas del punto  $C(C_1^{**}, C_2^{**}, C_3^{**})$  según el sistema  $X_1^{**}, X_2^{**}$  y  $X_3^{**}$ . En la Fig.(2.8) se muestra la distancia  $\mathcal{D}_1$  y  $\mathcal{D}_2$

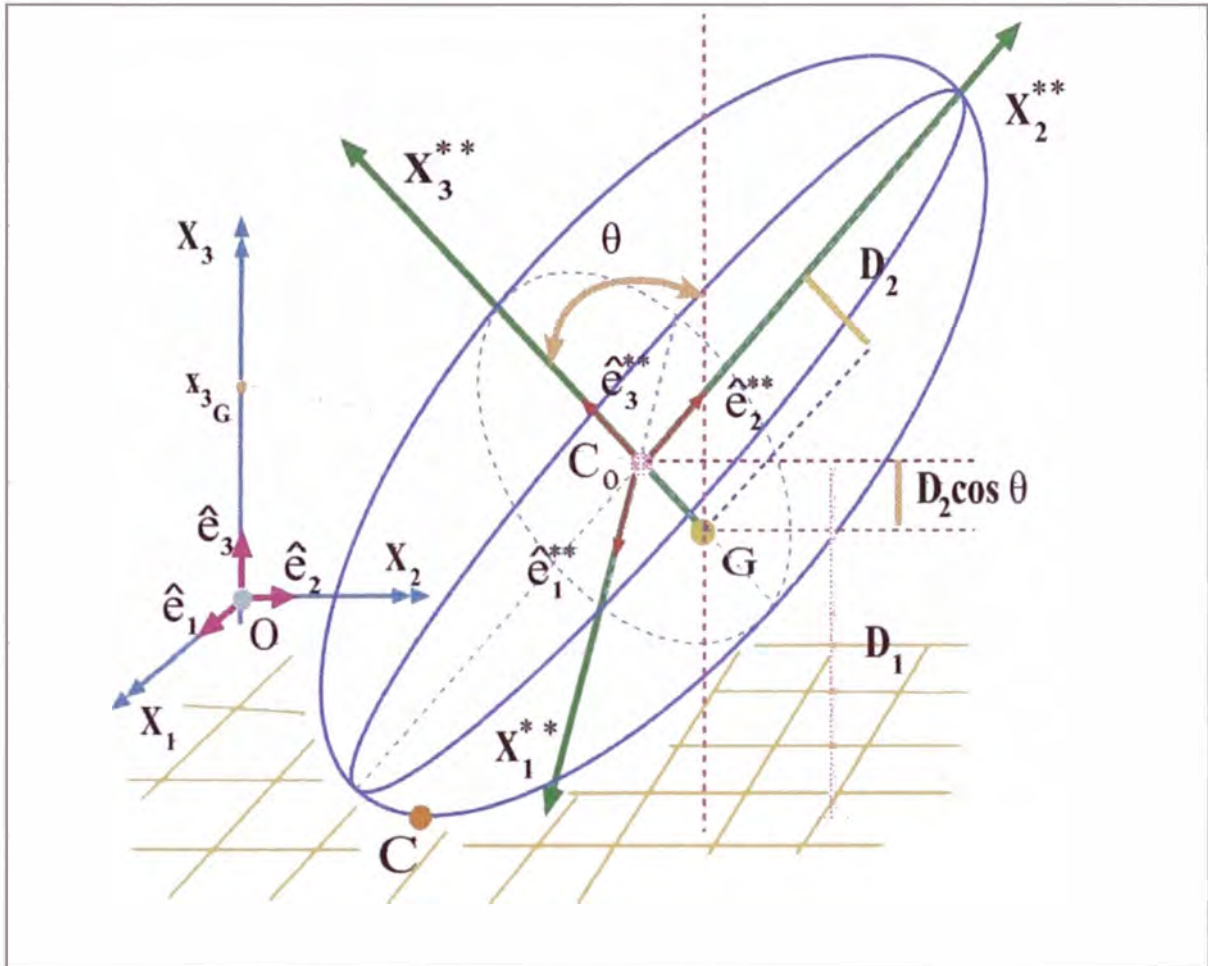


Figura 2.8: Ilustración para el cálculo de la distancia  $\mathcal{D}_1$  del punto  $C_0$  al plano  $X_1X_2$

Es fácil demostrar que la distancia  $\mathcal{D}_1$  se calcula por la expresión

$$\mathcal{D}_1 = \left| (\overrightarrow{C_0C}) \cdot (\hat{e}_3) \right|, \quad (2.67)$$

al reemplazar las ecuaciones (2.47) y (2.66) en la ec.(2.67)

$$\mathcal{D}_1 = |C_1^{**} \text{sen} \theta \text{sen} \psi + C_2^{**} \text{sen} \theta \cos \psi + C_3^{**} \cos \theta|, \quad (2.68)$$

reemplazando los valores de  $(C_1^{**}, C_2^{**}$  y  $C_3^{**})$  (ecuaciones (2.62), (2.63) y (2.64)) en la ec.(2.68) se obtiene

$$\mathcal{D}_1 = \left| \frac{-a^2 \operatorname{sen}^2 \psi \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} + \frac{-a^2 \cos^2 \psi \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} + \frac{-c^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right|, \quad (2.69)$$

simplificando

$$\mathcal{D}_1 = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}. \quad (2.70)$$

### B3.- CÁLCULO DE LAS COMPONENTES $\vec{GC}$ EN LA BASE $B_\xi$

En la Fig.(2.9) se observa los vector  $\vec{GC}$ ,  $\vec{GC}_0$  y  $\vec{C}_0\vec{C}$ , satisfacen

$$\vec{GC} = \vec{GC}_0 + \vec{C}_0\vec{C}, \quad (2.71)$$

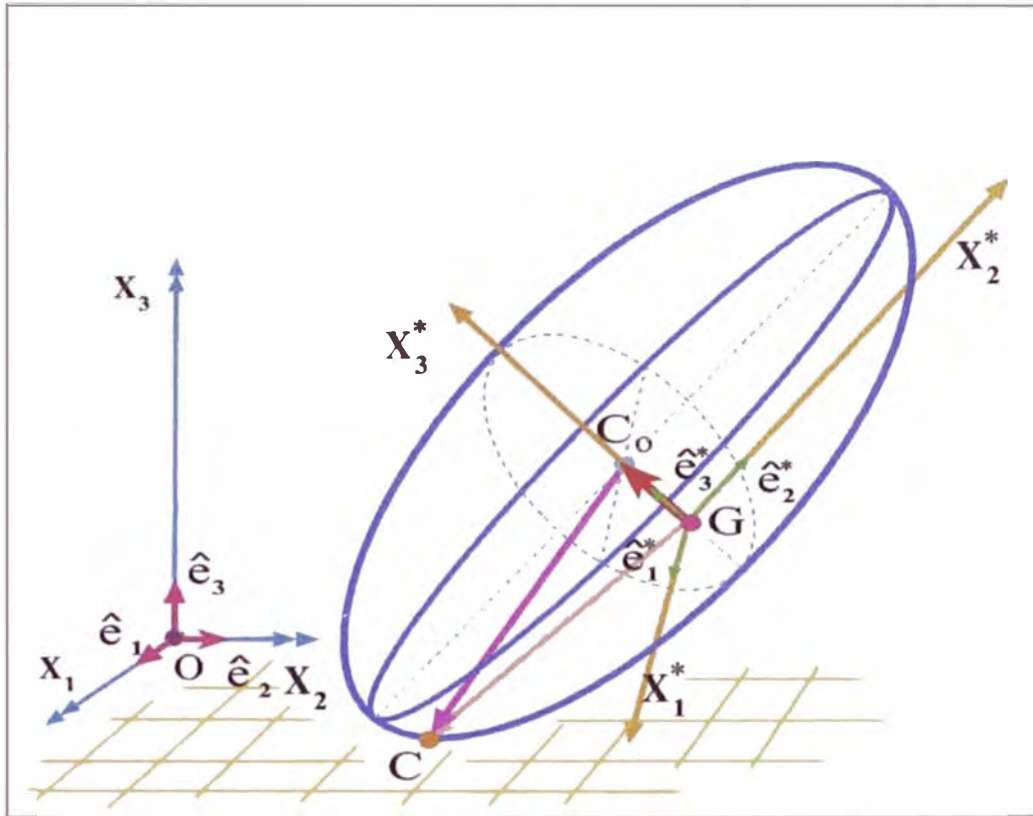


Figura 2.9: Ilustración para el cálculo de  $\vec{GC}_0$ .

pero además de la Fig.(2.9)  $\vec{GC}_0 = D_2\hat{e}_3^*$  y  $\vec{C}_0\vec{C} = C_1^{**}\hat{e}_1^* + C_2^{**}\hat{e}_2^* + C_3^{**}\hat{e}_3^*$ , entonces

$$\vec{GC} = C_1^{**}\hat{e}_1^* + C_2^{**}\hat{e}_2^* + (D_2C_3^{**})\hat{e}_3^*, \quad (2.72)$$

reemplazando las ecuaciones (1.290), (1.291), (1.292), (2.62),(2.63) y (2.64) en (2.72) se tiene la expresión para  $\vec{GC}$  en la base  $B_\xi$

$$\vec{GC} = \left( \frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_2 + \left( D_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_3. \quad (2.73)$$

## CAPÍTULO III

# MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE NO HOMOGÉNEO CON FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

- 3.1.- Introducción.
- 3.2.- Velocidad en el punto de contacto.
- 3.3.- Fuerza de Fricción.
- 3.4.- Torque total.
- 3.5.- Ecuación de Modificada de Euler.



### 3.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará al elipsoide no homogéneo tomando en cuenta la fricción por deslizamiento, con el piso donde se mueve. Se hallarán las ecuaciones diferenciales de movimiento empleando las ecuaciones modificadas de Euler y la 2<sup>da</sup> ley de Newton llegando a obtener cinco ecuaciones diferenciales ordinarias que son no lineales y acopladas. Para usar el concepto de velocidad angular consideramos  $Q=G$  y las componentes de  $\vec{W}$ ,  $\vec{T}_G^{ext}$  con respecto a la base  $B_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ .

### 3.2. VELOCIDAD DEL PUNTO DE CONTACTO

Se tiene un elipsoide no homogéneo, que se va a mover en una superficie plana, con un coeficiente de fricción  $\mu$ . En esta sección se hallará, una expresión para la velocidad  $\vec{v}_C$  del punto de contacto  $C$  (Fig. (3.1)) en función de los ángulos de Euler.

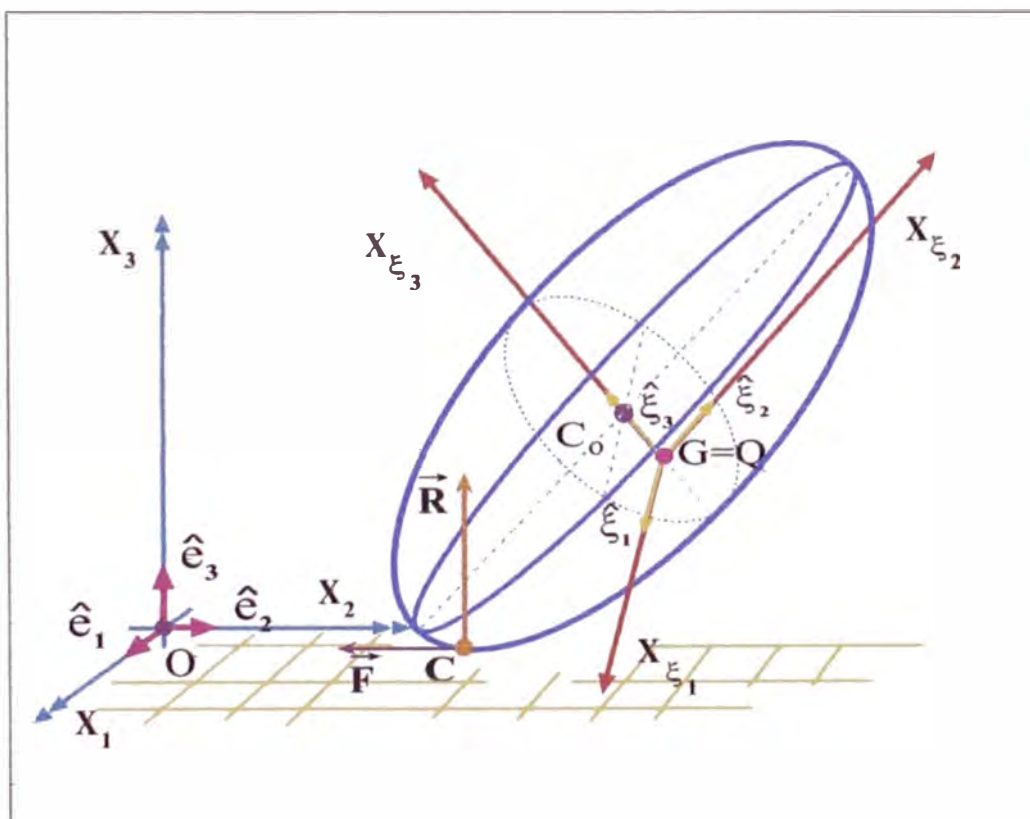


Figura 3.1: Gráfica del punto de contacto, que une al elipsoide y al plano.

La ecuación de la velocidad del punto de contacto es ( p.32 del capítulo 1)

$$\vec{v}_C = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{GC}, \quad (3.1)$$

donde  $\vec{v}_G$  es la velocidad del punto G. Es evidente que *la velocidad del punto G* en la base  $\mathcal{B} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  es:

$$\vec{v}_G = \dot{x}_{G_1} \hat{e}_1 + \dot{x}_{G_2} \hat{e}_2 + \dot{x}_{G_3} \hat{e}_3, \quad (3.2)$$

ahora se expresará, la velocidad  $\vec{v}_G$  en la base  $\mathcal{B}_\xi = \{\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2, \hat{\xi}_3\}$ , mediante las relaciones halladas en el apéndice A2 del capítulo I (p. 65).

$$\begin{aligned} \vec{v}_G = \dot{x}_{G_1} \left( \cos\phi \hat{\xi}_1 - \cos\theta \operatorname{sen}\phi \hat{\xi}_2 + \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \hat{\xi}_3 \right) + \dot{x}_{G_2} \left( \operatorname{sen}\phi \hat{\xi}_1 \right. \\ \left. + \cos\phi \hat{\xi}_2 - \operatorname{sen}\theta \cos\phi \hat{\xi}_3 \right) + \dot{x}_{G_3} \left( \operatorname{sen}\theta \hat{\xi}_2 + \cos\theta \hat{\xi}_3 \right). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Finalmente se tiene la expresión para  $\vec{v}_G$  en la base  $\mathcal{B}_\xi$ , agrupando terminos convenientemente se tiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_G = (\dot{x}_{G_1} \cos\phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen}\phi) \hat{\xi}_1 + \{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen}\theta \} \hat{\xi}_2 \\ + (\operatorname{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \cos\theta) \hat{\xi}_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para calcular el producto vectorial de  $\vec{\omega} \times \vec{GC}$ , primero recordemos la expresión de la velocidad angular en la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{\xi}_1 + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \hat{\xi}_2 + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \hat{\xi}_3. \quad (3.5)$$

Luego del apéndice B3 (p. 91), se demostró

$$\vec{GC} = \left( -\frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \hat{\xi}_2 + \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \hat{\xi}_3.$$

dando como resultado

$$\vec{\omega} \times \vec{GC} = \left\{ \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 + \frac{-c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& - \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \left. \right\} \hat{\xi}_1 \\
& \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 + \frac{-c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_2 - \dot{\theta} \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \hat{\xi}_3. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Reemplazando las ecuaciones (3.3) y (3.6) en la ec.(3.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
\vec{v}_C &= \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen} \phi \right\} \hat{\xi}_1 + \left\{ \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta \right\} \hat{\xi}_2 \\
&+ \left\{ \operatorname{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta \right\} \hat{\xi}_3 \\
&+ \left\{ \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right. \\
&+ \left. \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\} \hat{\xi}_1 \\
&- \dot{\theta} \left\{ \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right\} \hat{\xi}_2 - \dot{\theta} \left\{ \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right\} \hat{\xi}_3, \quad (3.7)
\end{aligned}$$

agrupando términos en la ec.(3.7) se tendrá expresando la  $\vec{v}_C$  en la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$\vec{v}_C = v_{C_{\xi_1}} \hat{\xi}_1 + v_{C_{\xi_2}} \hat{\xi}_2 + v_{C_{\xi_3}} \hat{\xi}_3, \quad (3.8)$$

luego

$$v_{\xi_1} \equiv \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen} \phi + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)$$

$$+ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right), \quad (3.9)$$

$$v_{\xi_2} \equiv \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right), \quad (3.10)$$

$$v_{\xi_3} \equiv \operatorname{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right). \quad (3.11)$$

### 3.3. FUERZA DE FRICCIÓN

Se considera la fuerza de fricción, entre el plano  $X_1X_2$  (piso) y el cuerpo elipsoidal no homogéneo. Suponemos que no hay rodadura pura y solo se considera la fuerza de fricción por deslizamiento ( $\vec{F}_d$ ), luego

$$\vec{F}_d \equiv -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} \vec{v}_C, \quad (3.12)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de fricción,  $\mathcal{R}$  es el módulo de la fuerza de reacción normal  $\vec{R}$ ,  $\vec{v}_C$  es la velocidad del punto de contacto  $C$  y  $|\vec{v}_C|$  es su módulo. Del capítulo II se tiene (p.78), ec.(2.16)

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = & m \left[ g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \operatorname{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right], \end{aligned}$$

si bien esta relación, se demostró para el caso sin rozamiento, pero es fácil demostrar que en este caso es válido, la razón se encuentra en que el módulo de  $\mathcal{R}$ , se obtuvo de la geometría del elipsoide, cuando este se mueve sobre una superficie plana (capítulo II, p. 76, 77 y 78)

$$F \equiv g + \frac{(a^2 - c^2)\dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \left\{ (2 \text{cos}^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right)^2 \right\} \\ + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \text{cos} \theta ,$$

$$H \equiv \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} .$$

y  $\mathcal{R}$  se expresa como

$$\mathcal{R} = m(F + \ddot{\theta}H). \quad (3.13)$$

Para determinar el módulo de  $\vec{v}_C$  ( $|\vec{v}_C|$ ) usaremos las ecuaciones (3.9), (3.10), (3.11) y la igualdad

$$|\vec{v}_C| = \sqrt{v_{C\xi_1}^2 + v_{C\xi_2}^2 + v_{C\xi_3}^2}, \quad (3.14)$$

obteniéndose

$$|\vec{v}_C| = \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \text{cos} \phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen} \phi \right. \right. \\ + \dot{\phi} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta \right) \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \left. \right\}^2 \\ + \left\{ \text{cos} \theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \text{cos} \phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen} \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\}^2 \\ \left. + \left\{ \text{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \text{cos} \phi) + \dot{x}_{G_3} \text{cos} \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.15)$$

De las ecuaciones (3.12), (3.15) y de la expresión para  $\mathcal{R}$  obtenemos finalmente las componentes de la fuerza de fricción ( $F_{\xi_1}$ ,  $F_{\xi_2}$  y  $F_{\xi_3}$ ) en la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$F_{\xi_1} = -\frac{\mu (m(F + \ddot{\theta} H))}{|\vec{v}_C|} (v_{C\xi_1}), \quad (3.16)$$

$$F_{\xi_2} = -\frac{\mu (m(F + \ddot{\theta} H))}{|\vec{v}_C|} (v_{C\xi_2}), \quad (3.17)$$

$$F_{\xi_3} = -\frac{\mu (m(F + \ddot{\theta} H))}{|\vec{v}_C|} (v_{C\xi_3}), \quad (3.18)$$

donde

$$\vec{F}_d = F_{\xi_1} \hat{\xi}_1 + F_{\xi_2} \hat{\xi}_2 + F_{\xi_3} \hat{\xi}_3. \quad (3.19)$$

### 3.4. TORQUE TOTAL

Las únicas fuerzas que actúan sobre el elipsoide y que originan torques con respecto al centro de masa G, son la fuerza de fricción  $\vec{F}_d$  y la fuerza de la reacción normal  $\vec{R}$ , luego

$$\vec{T}_G = \vec{T}_G^{\vec{F}_d} + \vec{T}_G^{\vec{R}}, \quad (3.20)$$

donde  $\vec{T}_G^{\vec{F}_d}$  es el torque debido a la fuerza de fricción y  $\vec{T}_G^{\vec{R}}$  es el torque debido a la fuerza de reacción normal.

El torque  $\vec{T}_G^{\vec{F}_d}$  es

$$\vec{T}_G^{\vec{F}_d} = \vec{GC} \times \vec{F}_d, \quad (3.21)$$

reemplazando la ec.(3.12) en la ec.(3.21) se tiene

$$\vec{T}_G^{\vec{F}_d} = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} (\vec{GC} \times \vec{v}_C), \quad (3.22)$$

haciendo uso del apéndice B3 (ec.(2.73)) recordamos

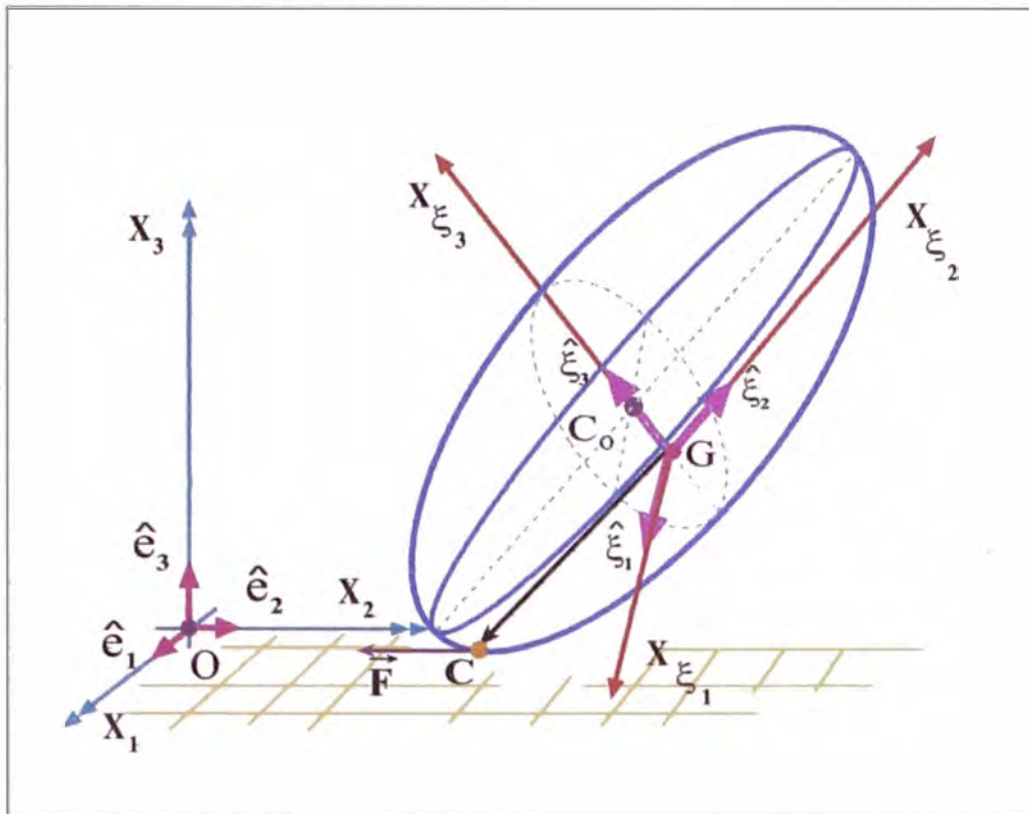


Figura 3.2: Fuerzas que originan torque, en el elipsoide no homogéneo.

$$\overrightarrow{GC} = \left( -\frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \hat{\xi}_2 + \operatorname{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \hat{\xi}_3,$$

y si hacemos

$$\vec{T}_G^{\vec{F}_d} = T_{\xi_1}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_1 + T_{\xi_2}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_2 + T_{\xi_3}^{\vec{F}_d} \hat{\xi}_3, \quad (3.23)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} T_{\xi_1}^{\vec{F}_d} = & -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \\ & \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\mathbb{T}_{\xi_2}^{\vec{F}_d} = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{c\xi_1} \right\}, \quad (3.25)$$

$$\mathbb{T}_{\xi_3}^{\vec{F}_d} = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{c\xi_1} \right\}. \quad (3.26)$$

Ahora el torque debido a la reacción normal ya se encuentra calculado en la ec.(2.25) ( $\vec{\mathbb{T}}_G^{\vec{R}}$ )

$$\begin{aligned} \vec{\mathbb{T}}_G^{\vec{R}} = & m \left[ g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \\ & \left\{ \frac{-\sin \theta a^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \sin \theta \right\} \hat{\xi}_1, \end{aligned}$$

las componentes de  $\vec{\mathbb{T}}_G^{\vec{R}}$  en la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{\xi_1}^{\vec{R}} = & m \left[ g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \\ & \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta + \ddot{\theta} \sin \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \\ & \left\{ \frac{-\sin \theta a^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \sin \theta \right\}, \quad (3.27) \end{aligned}$$

$$\mathbb{T}_{\xi_2}^{\vec{R}} = 0, \quad (3.28)$$

$$\mathbb{T}_{\xi_3}^{\vec{R}} = 0. \quad (3.29)$$



la ec.(3.27) se puede expresar en forma compacta con la ec.(2.16) y definiendo  $C$

$$C \equiv \left\{ \frac{-\text{sen}\theta a^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \text{sen}\theta \right\}, \quad (3.30)$$

entonces la componente de  $T_{\xi_1}^{\vec{R}}$  se expresa

$$T_{\xi_1}^{\vec{R}} = \mathcal{R} C \dot{\xi}_1. \quad (3.31)$$

### 3.5. ECUACIONES MODIFICADOS DE EULER

Aplicando las ecuaciones modificadas de Euler y recordando que sólo consideramos el torque  $\vec{R}$  y  $\vec{F}$  se consigue

$$I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen}\theta + (I_3 - I)\dot{\phi}^2 \text{sen}\theta \cos\theta = T_{\xi_1}, \quad (3.32)$$

donde

$$T_{\xi_1} = T_{\xi_1}^{\vec{R}} + T_{\xi_1}^{\vec{F}_d}, \quad (3.33)$$

$$I\ddot{\phi} \text{sen}\theta + (2I - I_3)\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta - \dot{\theta} \dot{\psi} I_3 = T_{\xi_2} \quad (3.34)$$

en la cual

$$T_{\xi_2} = T_{\xi_2}^{\vec{F}_d} \quad (3.35)$$

$$I_3 \ddot{\phi} \cos\theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen}\theta + I_3 \ddot{\psi} = T_{\xi_3}, \quad (3.36)$$

donde

$$\mathbf{T}_{\xi_3} = \mathbf{T}_{\xi_3}^{\mathbf{F}_d}. \quad (3.37)$$

De las ecuaciones (3.24), (3.31) y (3.33) se consigue

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi} a^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta &= \mathcal{R} C - \frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \\ &\quad \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \end{aligned} \quad (3.38)$$

factorizando  $\mathcal{R}$  en el segundo miembro de la ec.(3.38)

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta &= \mathcal{R} \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \right), \end{aligned} \quad (3.39)$$

usando la definición de  $\mathcal{R}$  mediante la ec.(3.13) se consigue

$$\begin{aligned} I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta &= m \left( \mathbf{F} + \ddot{\theta} \mathbf{H} \right) \left( C \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Efectuando operaciones en la ec.(3.40)

$$\begin{aligned}
I\ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta + (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta &= mF \left( C \right. \\
&- \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \\
&- \left. \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \Bigg) \\
&+ m\ddot{\theta} B \left( C \right. \\
&- \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \\
&- \left. \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \Bigg), \tag{3.41}
\end{aligned}$$

factorizando términos con  $\ddot{\theta}$  en la ec.(3.41)

$$\begin{aligned}
&\ddot{\theta} \left\{ I - mH \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \right) \right\} = \\
&\left\{ mF \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_3} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\xi_2} \right\} \right) \right.
\end{aligned}$$

$$-l_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen} \theta - (l_3 - l) \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta \left. \vphantom{\dot{\phi} \dot{\psi}} \right\} , \quad (3.42)$$

despejando  $\ddot{\theta}$  de la ec.(3.42) se obtiene

$$\ddot{\theta} = \frac{D}{E}, \quad (3.43)$$

donde

$$D \equiv \left\{ mF \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_3}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \right\} \right) \right. \\ \left. - l_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \text{sen} \theta - (l_3 - l) \dot{\phi}^2 \text{sen} \theta \cos \theta \right\}, \quad (3.44)$$

$$E \equiv \left\{ 1 - mH \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_3}} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \right\} \right) \right\}. \quad (3.45)$$

Reemplazando las definiciones de F, H, C y la ec.(3.15) en D y E se obtienen

$$D = m \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) \left[ \left\{ \frac{-\text{sen} \theta a^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \text{sen} \theta \right\} \right. \\ \left. - \left\{ \mu / \left( \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen} \phi \right. \right. \right. \right. \right. \right. \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \Big\}^2 \\
& + \left\{ \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\}^2 \\
& + \left\{ \operatorname{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\}^2 \Big\}^{\frac{1}{2}} \Big\} \\
& \left\{ \left( \frac{-a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \left\{ \operatorname{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\} \right. \\
& \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \left\{ \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta \right. \right. \\
& \left. \left. - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\} \right\} \Big\} - l_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta - (l_3 - l) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta, \quad (3.46)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E = & \left\{ 1 - m \left[ \operatorname{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \left[ \left\{ \frac{-\operatorname{sen} \theta a^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \operatorname{sen} \theta \right\} - \left\{ \mu / \left( \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen} \phi \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \sin\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \sin\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \\
& + \left\{ \sin\theta (\dot{x}_{G_1} \sin\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \cos\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \left. \right]^{\frac{1}{2}} \Bigg\} \\
& \left\{ \left( \frac{-a^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \left\{ \sin\theta (\dot{x}_{G_1} \sin\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{x}_{G_3} \cos\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \sin\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\} \right. \\
& \left. - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \sin\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \sin\theta \right. \right. \\
& \left. \left. - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\} \right\} - l_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin\theta - (l_3 - 1) \dot{\phi}^2 \sin\theta \cos\theta, \quad (3.47)
\end{aligned}$$

Se va despejar  $\ddot{\phi}$  reemplazando la ec.(3.25) en la ec.(3.34)

$$l\ddot{\phi}\sin\theta + (2l - l_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}\dot{\psi}l_3 = -\frac{\mu\mathcal{R}}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\}. \quad (3.48)$$

Sustituyendo la definición de  $\mathcal{R}$  en la ec.(3.48)

$$\ddot{\phi}l\sin\theta + (2l - l_3)\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta - l_3\dot{\theta}\dot{\psi} = -\frac{\mu m(F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\}, \quad (3.49)$$

factorizando  $\ddot{\phi}$  de la ec.(3.49)

$$l\ddot{\phi}\sin\theta = - \left\{ \frac{\mu m(A + \ddot{\theta}B)}{|\vec{v}_c|} \right\} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \sin^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\} - (2l - l_3) \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta + l_3\dot{\theta}\dot{\psi}, \quad (3.50)$$

considerando que  $\theta \neq 0, \pi$ , despejando  $\ddot{\phi}$  de la ec.(3.50)

$$\ddot{\phi} = \frac{M}{N}, \quad (3.51)$$

donde

$$M \equiv - \left\{ \frac{\mu m (A + \ddot{\theta} B)}{|\vec{v}_c|} \right\} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\} - (2I_1 - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + I_3 \dot{\theta} \dot{\psi}, \quad (3.52)$$

$$N \equiv I \text{sen} \theta, \quad (3.53)$$

Sustituyendo en la ec.(3.51) las definiciones de F, H, C y la ec.(3.15) en M

$$\begin{aligned} M = & - \left\{ m \mu \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right. \right. \\ & \left. \left. \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ & \left. \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) + \ddot{\theta} \left[ \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right. \\ & \left. / \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen} \phi \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \dot{\phi} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \\
& + \left\{ \operatorname{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \cos\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}} \\
& \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right. \\
& \left. \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos\phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen}\phi + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\} \right\} - (2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta + I_3 \dot{\theta} \dot{\psi}. \quad (3.54)
\end{aligned}$$

En la ec.(3.54) vamos a reemplazar la ec.(3.26)

$$I_3 \ddot{\phi} \cos\theta - I_3 \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta + I_3 \ddot{\psi} = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\}, \quad (3.55)$$

$$\ddot{\psi} = -\frac{\mu \mathcal{R}}{I_3 |\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\} - \ddot{\phi} \cos\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta, \quad (3.56)$$

usando la definición de  $\mathcal{R}$  en la ec.(3.56), se consigue

$$\ddot{\psi} = -\left\{ \frac{\mu m (F + \ddot{\theta} H)}{I_3 |\vec{v}_C|} \right\} \left\{ \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) v_{C\epsilon_1} \right\} - \ddot{\phi} \cos\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \operatorname{sen}\theta. \quad (3.57)$$



Reemplazando las definiciones de F, H, C y la ec.(3.15) en la ec.(3.57) obtenemos

$$\begin{aligned}
\ddot{\psi} = & - \left\{ m \mu \left( \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right. \right. \\
& \left. \left. \left\{ (2 \text{cos}^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen} \theta \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \right. \\
& \left. \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \text{cos} \theta \right) + \ddot{\theta} \left[ \text{sen} \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right) \\
& / \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \text{cos} \phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen} \phi \right. \right. \\
& \left. \left. + \dot{\phi} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right. \\
& \left. + \left\{ \text{cos} \theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \text{cos} \phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen} \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right. \\
& \left. + \left\{ \text{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \text{cos} \phi) + \dot{x}_{G_3} \text{cos} \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \left\{ \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \left\{ \dot{x}_{G_1} \text{cos} \phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen} \phi + \dot{\phi} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos} \theta) \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \text{cos}^2 \theta}} \right) \right\} \right\} - \ddot{\phi} \text{cos} \theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen} \theta. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Luego se hallaron 3 ecuaciones diferenciales de segundo orden, donde aparecen  $\theta$ ,  $\phi$ ,  $\psi$   $x_{G_1}$ ,

$x_{G_2}$ ,  $x_{G_3}$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ . Se recordará que  $(x_{G_1}, x_{G_2}, x_{G_3})$  nos representan las coordenadas del centro de masa (punto G), del cuerpo rígido. Para obtener las ecuaciones diferenciales ordinarias de traslación ( donde intervienen  $\ddot{x}_{G_1}$  y  $\ddot{x}_{G_2}$ ) consideremos la 2<sup>da</sup> ley de Newton

$$m\ddot{\vec{x}}_G = \vec{F} + \vec{P} + \vec{R}. \quad (3.59)$$

De la ec.(3.59) tenemos

$$m\ddot{x}_{G_1} = F_1 + P_1 + R_1, \quad (3.60)$$

$$m\ddot{x}_{G_2} = F_2 + P_2 + R_2, \quad (3.61)$$

$$m\ddot{x}_{G_3} = F_3 + P_3 + R_3, \quad (3.62)$$

No se tomará en cuenta la ec.(3.62), porque de allí se obtuvo R en función de los ángulos de Euler, además  $\vec{P}, \vec{R}$  son perpendiculares al plano  $X_1X_2$  entonces  $P_1 = P_2 = R_1 = R_2 = 0$ , luego las ecuaciones (3.60) y (3.61) se reducen a

$$m\ddot{x}_{G_1} = F_1, \quad (3.63)$$

$$m\ddot{x}_{G_2} = F_2, \quad (3.64)$$

De la ec.(3.12) se obtiene

$$F_1 = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} v_{C_1}, \quad (3.65)$$

$$F_2 = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|v_C|} v_{C_2}, \quad (3.66)$$

$$F_3 = -\frac{\mu \mathcal{R}}{|\vec{v}_C|} v_{C_3}. \quad (3.67)$$

Reemplazando el módulo de  $\mathcal{R}$  en las ecuaciones (3.65) y (3.66) se tiene

$$F_1 = -\frac{\mu m(F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|} v_{C_1}, \quad (3.68)$$

$$F_2 = -\frac{\mu m(F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|} v_{C_2}. \quad (3.69)$$

Sustituyendo la ec.(3.68) en la ec. (3.63)

$$m\ddot{x}_{G_1} = -\left\{ \frac{\mu m(F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|} \right\} v_{C_1}, \quad (3.70)$$

despejamos  $\ddot{x}_1$  de la ec.(3.70)

$$\ddot{x}_{G_1} = -\left\{ \frac{\mu(F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|} \right\} v_{C_1}, \quad (3.71)$$

donde  $v_{C_{\xi_1}}$  (ver apéndice C1)

$$\begin{aligned} v_{C_1} = & \dot{x}_{G_3} + \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta \cos\phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \\ & + \cos\phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\phi \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \\ & + \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi \cos\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) - \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \left( \frac{a^2 \operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right). \end{aligned} \quad (3.72)$$

En la ec.(3.71) se introduce las definiciones de F, H, C, la ec.(3.15) y la ec.(3.72) obteniendo

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{G_1} = & - \left\{ m\mu \left( \left( g + \frac{(a^2 - c^2)\dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \left\{ (2 \text{cos}^2\theta - 1) \right. \right. \right. \right. \\
& - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen}\theta \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right)^2 \left. \left. \left. \right\} + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \text{cos}\theta \right) \right. \\
& \left. + \ddot{\theta} \left[ \text{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2)\text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right) \\
& / \left( \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \text{cos}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\theta) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \text{cos}\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \text{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{cos}\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \\
& \left( + \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi} \text{sen}\theta \text{cos}\phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right. \\
& \left. + \text{cos}\phi (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\phi) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$+\dot{\theta}\text{sen}\phi\text{cos}\theta\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\text{cos}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right) - \dot{\theta}\text{sen}\phi\text{sen}\theta\left(\frac{a^2\text{sen}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right). \quad (3.73)$$

En la ec.(3.64) remplazamos la ec.(3.69)

$$m\ddot{x}_{G_2} = -\left\{\frac{\mu m (F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|}\right\} v_{C_2}, \quad (3.74)$$

despejando  $\ddot{x}_{G_2}$  en la ec.(3.74)

$$\ddot{x}_{G_2} = -\left\{\frac{\mu (F + \ddot{\theta}H)}{|\vec{v}_C|}\right\} v_{C_2}, \quad (3.75)$$

donde  $v_{C_2}$  esta dado por

$$\begin{aligned} v_{C_2} = & \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi}\text{sen}\theta\text{sen}\phi\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\text{cos}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right) \\ & + \text{sen}\phi\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\text{cos}\phi\right)\left(\frac{a^2\text{sen}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right) \\ & - \dot{\theta}\text{cos}\phi\text{cos}\theta\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\text{cos}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right) - \dot{\theta}\text{cos}\phi\text{sen}\theta\left(\frac{a^2\text{sen}\theta}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right). \end{aligned} \quad (3.76)$$

La demostración de esta igualdad, se encuentra en el apéndice C (p 114). Reemplazando las definiciones de F, H, C, ec.(3.15) y la ec.(3.76) en la ec.(3.75)

$$\ddot{x}_2 = -\left\{m\mu\left(\left(g + \frac{(a^2 - c^2)\dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2\text{sen}^2\theta + c^2\text{cos}^2\theta}}\right)\left\{(2\text{cos}^2\theta - 1) - \right.\right.\right.$$

$$\begin{aligned}
& (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right)^2 \Big\} + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta \Big) \\
& + \ddot{\theta} \left[ \text{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \Big/ \left( \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi \right. \right. \right. \\
& + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \Big\}^2 \\
& + \left. \left. \left. \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right. \right. \\
& + \left. \left. \left. \left\{ \text{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \cos\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right) \Big) \\
& \left( \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right. \\
& + \left. \text{sen}\phi (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\phi) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right. \\
& \left. - \dot{\theta} \cos\phi \cos\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) - \dot{\theta} \cos\phi \text{sen}\theta \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right). \tag{3.77}
\end{aligned}$$

## APENDICE

### C.- COMPONENTES RECTANGULARES DE $\vec{v}_C$

Tenemos de la sección 3.2 las componentes de la velocidad del punto de contacto  $C$  ( $\vec{v}_C$ ) en la base  $\mathcal{B}_\xi$

$$v_{\xi_1} = \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen} \phi + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\ + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right),$$

$$v_{\xi_2} = \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right),$$

$$v_{\xi_3} = \operatorname{sen} \theta (\dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right).$$

Recordemos del apéndice A2 del capítulo I (ecuaciones (1.287), (1.288) y (1.289)) la siguiente relación

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\operatorname{sen} \phi \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ \operatorname{sen} \phi & \cos \theta \cos \phi & -\operatorname{sen} \theta \cos \phi \\ 0 & \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\xi}_1 \\ \hat{\xi}_2 \\ \hat{\xi}_3 \end{pmatrix}. \quad (3.78)$$

de lo anterior tenemos

$$\vec{e}_1 = (\cos \phi) \hat{\xi}_1 - (\operatorname{sen} \phi \cos \theta) \hat{\xi}_2 + (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi) \hat{\xi}_3, \quad (3.79)$$

$$\vec{e}_2 = (\operatorname{sen} \phi) \hat{\xi}_1 + (\cos \theta \cos \phi) \hat{\xi}_2 - (\operatorname{sen} \theta \cos \phi) \hat{\xi}_3, \quad (3.80)$$

$$\vec{e}_3 = (\text{sen}\theta)\hat{\xi}_2 + (\text{cos}\theta)\vec{\xi}_3. \quad (3.81)$$

Se tiene luego la siguiente expresión

$$\begin{pmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ v_{C_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{cos}\phi & -\text{sen}\phi\text{cos}\theta & \text{sen}\theta\text{sen}\phi \\ \text{sen}\phi & \text{cos}\theta\text{cos}\phi & -\text{sen}\theta\text{cos}\phi \\ 0 & \text{sen}\theta & \text{cos}\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{\xi_1} \\ v_{\xi_2} \\ v_{\xi_3} \end{pmatrix}, \quad (3.82)$$

donde expresando por componentes se tiene

$$v_{C_1} = (\text{cos}\phi)v_{\xi_1} - (\text{sen}\phi\text{cos}\theta)v_{\xi_2} + (\text{sen}\theta\text{sen}\phi)v_{\xi_3}, \quad (3.83)$$

$$v_{C_2} = (\text{sen}\phi)v_{\xi_1} + (\text{cos}\theta\text{cos}\phi)v_{\xi_2} - (\text{sen}\theta\text{cos}\phi)v_{\xi_3}, \quad (3.84)$$

$$v_{C_3} = (\text{sen}\theta)v_{\xi_2} + (\text{cos}\theta)v_{\xi_3}. \quad (3.85)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.9), (3.10) y (3.11) en las ecuaciones (3.83), (3.84) y (3.85) respectivamente se consigue

$$\begin{aligned} v_{C_1} = & (\text{cos}\phi) \left( \dot{x}_{G_1} \text{cos}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( D_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right. \\ & \left. + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\theta) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right) \\ & - (\text{sen}\phi \text{cos}\theta) (\text{cos}\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta) \end{aligned}$$



$$-\dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)$$

(3.87)

$$+(\sin \theta \sin \phi) \left( \sin \theta (\dot{x}_{G_1} \sin \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right), \quad (3.88)$$

$$v_{c_2} = (\sin \phi) \left( \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \sin \phi + \dot{\phi} \sin \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right)$$

$$+ (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \left( \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)$$

$$+ (\cos \theta \cos \phi) (\cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \sin \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \sin \theta$$

$$-\dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right))$$

$$- (\sin \theta \cos \phi) \left( \sin \theta (\dot{x}_{G_1} \sin \phi - \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \cos \theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right), \quad (3.89)$$

$$v_{c_3} = (\sin \theta) \left( \cos \theta (-\dot{x}_{G_1} \sin \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi) + \dot{x}_{G_3} \sin \theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right)$$

$$+(\cos\theta)\left(\operatorname{sen}\theta(\dot{x}_{G_1}\operatorname{sen}\phi - \dot{x}_{G_2}\cos\phi) + \dot{x}_{G_3}\cos\theta - \dot{\theta}\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right)\right). \quad (3.90)$$

Efectuando operaciones en la ec.(3.86)

$$\begin{aligned} v_{C_1} = & \dot{x}_{G_1}(\cos\phi)\cos\phi + \dot{x}_{G_2}(\cos\phi)\operatorname{sen}\phi + \dot{\phi}(\cos\phi)\operatorname{sen}\theta\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right) \\ & +(\cos\phi)\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right) \\ & -\cos\theta(\operatorname{sen}\phi\cos\theta)(-\dot{x}_{G_1}\operatorname{sen}\phi + \dot{x}_{G_2}\cos\phi) - \dot{x}_{G_3}\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\phi\cos\theta) \\ & -\dot{\theta}(\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right) \\ & +\operatorname{sen}\theta(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)(\dot{x}_{G_1}\operatorname{sen}\phi - \dot{x}_{G_2}\cos\phi) + \dot{x}_{G_3}\cos\theta(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi) \\ & -\dot{\theta}(\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\phi)\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right), \end{aligned} \quad (3.91)$$

o

$$\begin{aligned} v_{C_1} = & \dot{x}_{G_1}\cos^2\phi + \dot{x}_{G_2}\cos\phi\operatorname{sen}\phi + \dot{\phi}\cos\phi\operatorname{sen}\theta\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right) \\ & +\cos\phi\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta + c^2\cos^2\theta}}\right) + \dot{x}_{G_1}\cos^2\theta\operatorname{sen}^2\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\dot{x}_{G_2} \cos^2 \theta \operatorname{sen} \phi \cos \phi - \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \cos \theta + \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \cos \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\
& + \dot{x}_{G_1} \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi - \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen}^2 \theta \operatorname{sen}^2 \phi \cos \phi + \dot{x}_{G_3} \cos \theta \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\
& - \dot{\theta} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right). \tag{3.92}
\end{aligned}$$

Finalmente simplificando en la ec.(3.90), se encuentra

$$\begin{aligned}
v_{C_1} &= \dot{x}_G + \dot{\phi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\
& + \cos \phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \phi \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\
& + \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \cos \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) - \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right). \tag{3.93}
\end{aligned}$$

En la ec.(3.87) efectuamos operaciones

$$\begin{aligned}
v_{C_2} &= \dot{x}_{G_1} \operatorname{sen} \phi \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \operatorname{sen}^2 \phi + \dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\
& + \operatorname{sen} \phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \phi \right) \left( \frac{a^2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) - \dot{x}_{G_1} \cos^2 \theta \cos \phi \operatorname{sen} \theta \\
& + \dot{x}_{G_2} \cos^2 \phi \cos^2 \theta + \dot{x}_{G_3} \operatorname{sen} \theta \cos \theta \cos \phi - \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)
\end{aligned}$$

$$-\dot{x}_{G_1} \text{sen}^2 \theta \cos \phi \text{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos^2 \phi \text{sen}^2 \theta - \dot{x}_{G_3} \cos \theta + \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right), \quad (3.94)$$

simplificando la ec.(3.92)

$$\begin{aligned} v_{C_2} = & \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi} \text{sen} \phi \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\ & + \text{sen} \phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta \right) \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \\ & - \dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \dot{\theta} \cos \phi \text{sen} \theta \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right). \end{aligned} \quad (3.95)$$

Finalmente de la ec.(3.88), se tiene

$$\begin{aligned} v_{C_3} = & -\dot{x}_{G_1} \text{sen} \theta \cos \theta \text{sen} \phi + \dot{x}_{G_2} \cos \phi \text{sen} \theta \cos \theta + \dot{x}_{G_3} \text{sen}^2 \theta \\ & - \dot{\theta} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \dot{x}_{G_1} \cos \theta \text{sen} \theta \text{sen} \phi \\ & - \dot{x}_{G_2} \cos \theta \text{sen} \theta \cos \phi + \dot{x}_{G_3} \cos^2 \theta - \dot{\theta} \cos \theta \left( \frac{a^2 \text{sen} \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right), \end{aligned} \quad (3.96)$$

efectuando operaciones y simplificando

$$v_{C_3} = \dot{x}_{G_3} - \dot{\theta} \text{sen} \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)$$

$$-\dot{\theta}\cos\theta\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}}\right). \quad (3.97)$$

Reemplazando  $\dot{x}_{G_3}$  del capítulo II (ec.(2.14))

$$\dot{x}_{G_3} = \frac{\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(a^2-c^2)}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}} + \mathcal{D}_2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta,$$

sustituyendo en la ec.(3.94) la ec.(2.16)

$$\begin{aligned} v_{c_3} &= \left(\frac{\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(a^2-c^2)}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}} + \mathcal{D}_2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\right) - \dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\left(\mathcal{D}_2 - \frac{c^2\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}}\right) \\ &\quad - \dot{\theta}\cos\theta\left(\frac{a^2\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}}\right), \end{aligned} \quad (3.98)$$

efectuando operaciones en la ec.(3.96)

$$\begin{aligned} v_{c_3} &= \frac{\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta(a^2-c^2)}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}} + \mathcal{D}_2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta - \mathcal{D}_2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta + \frac{c^2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}} \\ &\quad - \frac{a^2\dot{\theta}\operatorname{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta+c^2\cos^2\theta}}, \end{aligned} \quad (3.99)$$

simplificando la ec.(3.97) se obtiene

$$v_{c_3} = 0. \quad (3.100)$$

Lo que era evidente ya que el punto  $C$  siempre pertenece al plano  $X_1X_2$ .

## CAPÍTULO IV

# MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE NO HOMOGENEO CON FRICCIÓN POR RODADURA PURA

- 4.1.- Introducción.
- 4.2.- Velocidad del centro geométrico del elipsoide.
- 4.3.- Energía Mecánica.
- 4.4.- Ecuación de Lagrange.

## 4.1. INTRODUCCIÓN

Este capítulo se iniciará, hallando la ecuación de ligadura que relaciona la velocidad del centro geométrico y los ángulos de Euler, usando la condición de rodadura pura. Luego se determinará el Lagrangiano del Centro Geométrico (CG), con la ecuación de ligadura, se obtiene las ecuaciones diferenciales de movimiento.

## 4.2. ECUACIÓN DE LIGADURA

Para determinar la ecuación de ligadura (que será no holonómica) se considera que el eje de rotación del pasa por el centro geométrico, del elipsoide. Además los vectores  $\hat{e}_k^{**}$  están fijos al cuerpo rígido (se mueven junto con el cuerpo). Sea  $\vec{v}_{C_0}$  la velocidad del centro geométrico y  $\vec{v}_C$  la velocidad del punto de contacto entre el elipsoide no homogéneo y la superficie de apoyo (piso), para el caso de rodadura pura  $\vec{v}_C = \vec{0}$ .

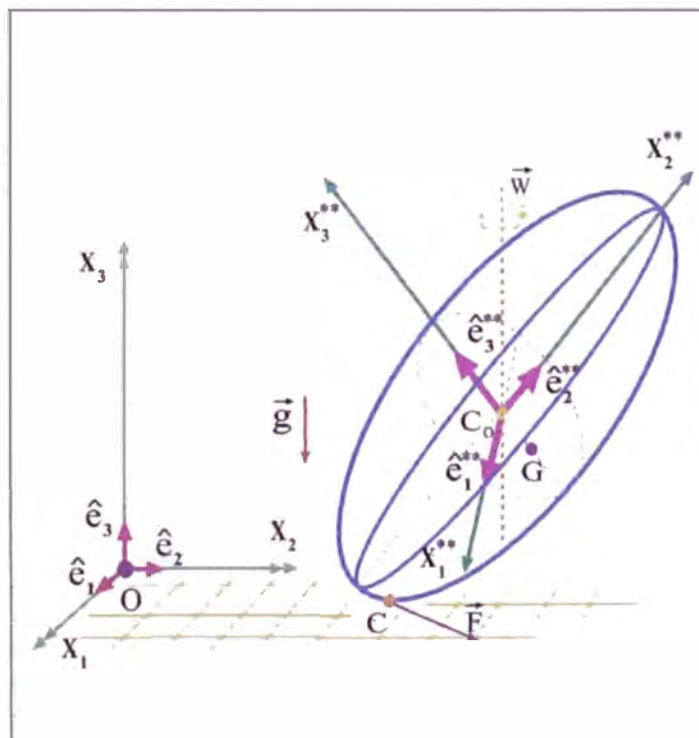


Figura 4.1: Elipsoide no homogéneo, sometido a la fuerza de gravedad y a la fricción por rodadura pura.

Usando la ec. (1.98) del capítulo I, la velocidad del punto de contacto  $\vec{v}_C$  esta dada por la expresión

$$\vec{v}_C = \vec{v}_{C_0} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{C_0C}, \quad (4.1)$$

donde  $\vec{\omega}$  es la velocidad angular, que expresada en la base canónica B es:

$$\vec{\omega} = (\dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi) \hat{e}_1 + (\dot{\theta} \operatorname{sen}\phi - \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\phi) \hat{e}_2 + (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta) \hat{e}_3. \quad (4.2)$$

Además

$$\begin{aligned} \overrightarrow{C_0C} = & \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}\phi}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right] \hat{e}_1 - \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \cos\phi}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right] \hat{e}_2 \\ & - \left[ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \right] \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (4.3)$$

que fue demostrada en el capítulo II, en el apéndice B3. Usando la condición de rodadura pura  $\vec{v}_C = 0$ , la ec.(4.1) toma el aspecto

$$\vec{v}_{C_0} = -\vec{\omega} \times \overrightarrow{C_0T}, \quad (4.4)$$

si reemplazamos las ecuaciones (4.2) y (4.3) en la ec.(4.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{v}_{C_0} = & \left\{ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi - \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\phi \right] \right. \\ & - \left. \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos\phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right] \right\} \hat{e}_1 \\ & - \left\{ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \right] + \right. \end{aligned}$$



$$\left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \left[ \frac{\text{sen}(2\theta) \text{sen}\phi (a^2 - c^2)}{2\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right] \hat{e}_2 + \left\{ \dot{\theta} \left[ \frac{\text{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{2\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right] \right\} \hat{e}_3. \quad (4.5)$$

Recordando la definición de la velocidad del centro geométrico del elipsoide de ec.(4.5) se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1c_0} &= \sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \text{sen}\phi - \dot{\psi} \text{sen}\theta \cos\phi \right] \\ &\quad - \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \frac{\text{sen}(2\theta) \cos\phi (a^2 - c^2)}{2\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2c_0} &= - \left\{ \sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \frac{\text{sen}(2\theta) \text{sen}\phi (a^2 - c^2)}{2\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right\} \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\dot{x}_{3c_0} = \dot{\theta} \left[ \frac{\text{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{2\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right], \quad (4.8)$$

que son las ecuaciones de ligadura que se considera en este capítulo.

### 4.3. RELACIONES PARA LA ENERGÍA MECÁNICA

La energía mecánica esta dada por la siguiente expresión

$$E \equiv K + U, \quad (4.9)$$

donde recordando del capítulo I (p.43), la energía cinética para un cuerpo rígido, se expresa de la siguiente forma

$$K = \frac{1}{2}m |\vec{v}_Q|^2 + m \vec{v}_Q \cdot \vec{Q}\dot{\vec{G}} + \sum_{k=1}^3 w_k^{**2} I_k, \quad (4.10)$$

donde se tomará  $Q = C_0$ , (centro geométrico del elipsoide), luego la ec. (4.10) se transforma en

$$K \equiv \frac{m}{2} v_{C_0}^2 + m \vec{v}_{C_0} \cdot \vec{C_0}\dot{\vec{G}} + \frac{1}{2} (w_1^{**2} I_1 + w_2^{**2} I_2 + w_3^{**2} I_3). \quad (4.11)$$

En la ec.(4.11) se tiene varios términos que hemos de hallar en función de los ángulos de Euler. El primer término es el módulo de la velocidad elevada al cuadrado ( $v_{C_0}^2$ ), para esto se hará uso de la ec(4.5), luego

$$v_{C_0}^2 = (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) (\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \sin^2 \theta) + \frac{(a^2 - c^2)^2 \sin^2 (2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left\{ \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \right\} + (\dot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\psi}^2 \cos \theta) (a^2 - c^2) \sin (2\theta) \sin \theta. \quad (4.12)$$

En la Fig.(4.2) se muestra el segundo término de la ec.(4.10) ( $\vec{v}_{C_0} \cdot \vec{C_0}\dot{\vec{G}}$ ) y algunos parámetros tomados en cuenta para hallar  $\vec{C_0}\dot{\vec{G}}$

De la Fig(4.2)  $\vec{C_0}\dot{\vec{G}} = -D_2 \hat{e}_3^{**}$ , pero  $\hat{e}_k^* = \hat{e}_k^{**}$

$$\vec{C_0}\dot{\vec{G}} = -D_2 \hat{e}_3^* \quad (4.13)$$

Se recordará que el término  $D_2$ , es la distancia del centro de gravedad al centro geométrico del elipsoide y el vector  $\hat{e}_3^*$  es un vector unitario, en la base  $B^*$ , como se puede apreciar en la Fig. (4.2). La relación entre la base de vectores  $B^*$  y  $B$  están dadas en capítulo I en el apéndice A1, del cual extraemos la relación

$$\hat{e}_3^* = (\sin \phi \sin \theta) \hat{e}_1 + (-\cos \phi \sin \theta) \hat{e}_2 + (\cos \theta) \hat{e}_3. \quad (4.14)$$

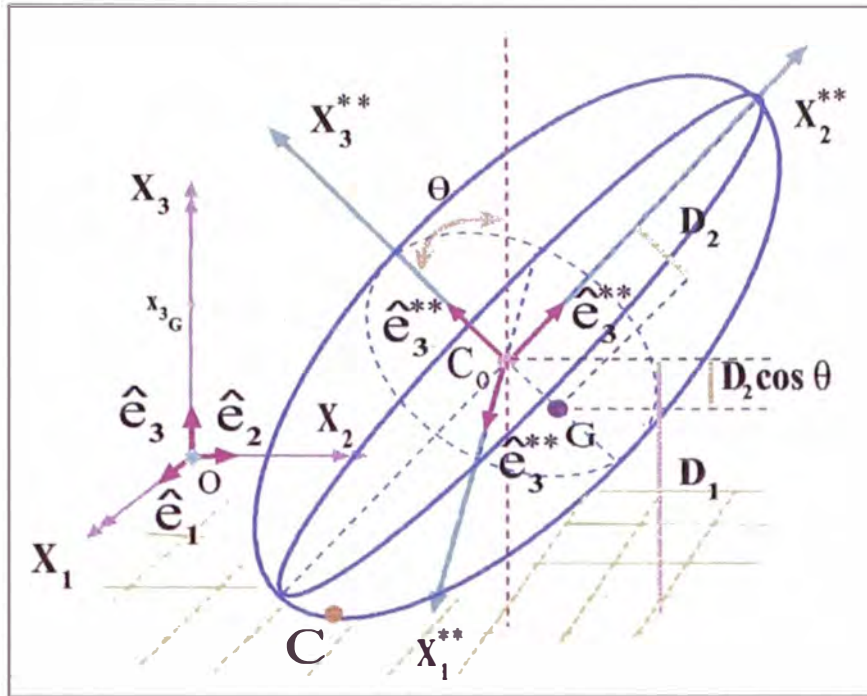


Figura 4.2: Elipsoide no homogéneo y algunos parámetros importantes.

Ahora de la ec.(4.13) en (4.14) se obtiene  $\overline{C_0\dot{G}}$  en la base B. En la Fig.(4.3) se aprecia el vector  $\overline{C_0\dot{G}}$ .

$$\overline{C_0\dot{G}} = -D_2 \left\{ (\sin\phi \sin\theta) \hat{e}_1 + (-\cos\phi \sin\theta) \hat{e}_2 + (\cos\theta) \hat{e}_3 \right\}. \quad (4.15)$$

Pero nos interesa  $\dot{\overline{C_0\dot{G}}}$  para esto derivamos la ec.(4.15)

$$\begin{aligned} \dot{\overline{C_0\dot{G}}} &= -D_2 \left( \dot{\phi} \cos\phi \sin\theta + \dot{\theta} \sin\phi \cos\theta \right) \hat{e}_1 + D_2 \left( \dot{\theta} \cos\theta \cos\phi - \dot{\phi} \sin\phi \sin\theta \right) \hat{e}_2 \\ &+ D_2 \left( \dot{\theta} \sin\theta \right) \hat{e}_3, \end{aligned} \quad (4.16)$$

De las ec.(4.5) y (4.16) se obtiene finalmente

$$\vec{v}_{C_0} \cdot \dot{\overline{C_0\dot{G}}} = D_2 \left\{ \left[ \frac{(a^2 - c^2) \sin(2\theta) \sin\theta}{2\sqrt{c^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta}} \right] \left[ \dot{\phi}^2 + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos\theta \right] \right\}$$

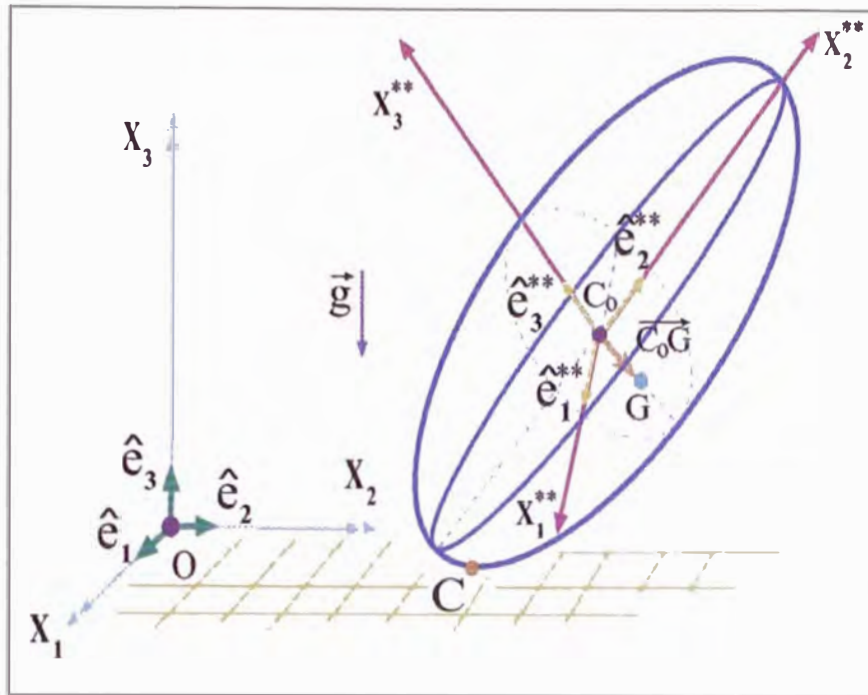


Figura 4.3: Elipsoide no homogéneo, vector  $\overline{C_0G}$ .

$$\begin{aligned}
 & -\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left[ \dot{\theta}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta \right] \\
 & + \dot{\theta}^2 \left\{ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \theta}{2 \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

El último término de la ec.(4.11), es semejante al visto en el capítulo I, de esta tesis (p.(52)), esta dado por

$$w_1^{*2} l_1 + w_2^{*2} l_2 + w_3^{*2} l_3 = I(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + I_3(\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\phi}\dot{\psi} \cos \theta). \tag{4.18}$$

Si en la ec.(4.11) reemplazamos los términos hallados en las ec.(4.12), (4.17) y (4.18) tendremos la expresión para la energía cinética en función de los ángulos de Euler

$$K = \frac{m}{2} \left\{ [c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta] [\dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left[ \frac{(a^2 - c^2)^2 \operatorname{sen}^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \left\{ \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \right\} \\
& + (\dot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\psi}^2 \cos \theta) (a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \theta \} \\
& + m D_2 \left\{ \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \theta}{2\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \left[ \dot{\phi}^2 + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \right] \right. \\
& \left. - \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left[ \dot{\theta}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \dot{\theta}^2 \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \theta}{2\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ I \left( \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right) + I_3 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) \right\} \tag{4.19}
\end{aligned}$$

El último que nos faltaría para completar la expresión de la energía mecánica es la energía potencial, originada por el peso del elipsoide ( $U = m g x_{G_3}$ )

$$U = m g (\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - D_2 \cos \theta). \tag{4.20}$$

#### 4.4. APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE LAGRANGE

En la sección anterior obtuvimos la energía cinética y la energía potencial, en función de los ángulos de Euler ahora la emplearemos para hallar la función de Lagrange

$$L(\theta, \phi, \psi, \dot{\theta}, \dot{\phi}, \dot{\psi}) = K - U, \tag{4.21}$$

donde  $K$  es la energía cinética y  $U$  es la energía potencial. Reemplazando en la ec.(4.21) las ecuaciones (4.19) y (4.20) obtendremos el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{m}{2} \left\{ [c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta] \left[ \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta \right] \right. \\
& + \left[ \frac{(a^2 - c^2)^2 \operatorname{sen}^2 (2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \left\{ \dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 + \dot{\psi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \right\} \\
& + (\dot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\psi}^2 \cos \theta) (a^2 - c^2) \operatorname{sen} (2\theta) \operatorname{sen} \theta \left. \right\} \\
& + m D_2 \left\{ \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen} (2\theta) \operatorname{sen} \theta}{2\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \left[ \dot{\phi}^2 + \dot{\psi} \dot{\phi} \cos \theta \right] \right. \\
& - \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \left[ \dot{\theta}^2 - \dot{\psi} \dot{\phi} \operatorname{sen}^2 \theta \right] + \dot{\theta}^2 \left[ \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen} (2\theta) \operatorname{sen} \theta}{2\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \left. \right\} \\
& + \frac{1}{2} \left\{ I (\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}^2 \theta) + I_3 (\dot{\psi}^2 + \dot{\phi}^2 \cos^2 \theta + 2\dot{\phi} \dot{\psi} \cos \theta) \right\} \\
& - m g (\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - D_2 \cos \theta), \tag{4.22}
\end{aligned}$$

que se puede transformar en

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \dot{\theta}^2 \left\{ \frac{I}{2} + m \frac{1}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} (a^4 + c^4 + (c^4 - a^4) \cos 2\theta) \right. \\
& \left. - m D_2 c^2 \frac{\cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right\} + \dot{\psi}^2 \left\{ \frac{I_3}{2} + \frac{m a^4 \operatorname{sen}^2 \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\phi}^2 \left\{ \frac{1}{2} (I \operatorname{sen}^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) + \frac{m (\operatorname{sen} 2\theta)^2 (a^2 - c^2)^2}{8 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} + m \frac{(a^2 - c^2) D_2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2 \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right\} \\
& + \dot{\phi} \dot{\psi} \left\{ I_3 \cos \theta + \frac{m a^2 \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \frac{D_2 m a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right\} \\
& + -m g \left[ \sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - D_2 \cos \theta \right], \tag{4.23}
\end{aligned}$$

las ecuaciones (4.22) y (4.23) expresan la función lagrangiana, la diferencia entre ambos son los términos cuadráticos de la velocidad (ec.(4.23)), esto servirá más adelante cuando se realicen los cálculos numéricos, si se emplea la ec.(4.22) se comete más errores, que en la ec.(4.23). Teniendo el lagrangiano ahora podremos aplicar la ecuación de Euler Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0. \tag{4.24}$$

La ec.(4.24) permitirá hallar las ecuaciones diferenciales de movimiento para cada coordenada  $(\theta, \phi, \psi, x, y, z)$ . Iniciando este cálculo se tiene

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0. \tag{4.25}$$

Para realizar los cálculos se tiene que  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right)$  es de la forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) = A \ddot{\theta} + B, \tag{4.26}$$

donde

$$A \equiv I + m \left\{ \left[ \frac{[a^4 + c^4 + (-a^4 + c^4) \cos(2\theta)]}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] - \left[ \frac{2 c^2 D_2 \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \right\}, \tag{4.27}$$

$$B \equiv 2 \dot{\theta}^2 m \left\{ \frac{c^2 D_2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] + \left[ \frac{(a^2 - c^2) a^2 c^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\}, \tag{4.28}$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = \chi, \quad (4.29)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi = & m \dot{\theta}^2 \left\{ \left[ \frac{\text{sen}(2\theta) c^2 a^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)^2} \right] + \frac{\text{sen} \theta c^2 D_2}{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\ & \dot{\phi}^2 \left\{ \frac{1}{2} \text{sen}(2\theta) (I - I_3) + \frac{(a^2 - c^2)^2 m \text{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{(a^2 - c^2) \text{sen}^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right] \right. \\ & \left. + (a^2 - c^2) \frac{D_2 m \text{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{(a^2 - c^2) \text{sen}^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\ & + \dot{\psi}^2 \left\{ \frac{a^4 c^2 m \text{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right\} \\ & + \dot{\phi} \dot{\psi} \left\{ -I_3 \text{sen} \theta + \frac{a^2 D_2 m \text{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \text{sen}^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right] \right. \\ & \left. + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \text{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\text{sen}(2\theta)^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\ & - g m \text{sen} \theta \left[ D_2 + \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \text{sen}^2 \theta}} \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

La segunda ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (4.31)$$



en este caso, se tiene que  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ , por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad (4.32)$$

de la cual obtenemos la segunda ecuación diferencial de movimiento

$$J \ddot{\phi} + S \ddot{\psi} + U = 0, \quad (4.33)$$

donde

$$J \equiv I_3 \cos^2 \theta + I \sin^2 \theta + m \sin(2\theta) (a^2 - c^2) \left[ \frac{D_2 \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} + \frac{\sin(2\theta) (a^2 - c^2)}{4 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right], \quad (4.34)$$

$$S \equiv I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \sin^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta \sin(2\theta)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)}, \quad (4.35)$$

$$U \equiv \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ \sin(2\theta) (I - I_3) + \frac{2 D_2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{4 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\}$$

$$\frac{m (a^2 - c^2)^2 \sin(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \left\{ \right.$$

$$\left. + \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \sin \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\sin^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{a^2 D_2 m \sin(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{\sin^2 \theta (a^2 - c^2)}{2 (c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] - I_3 \sin \theta \right\}. \quad (4.36)$$

La última ecuación diferencial de Euler Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0, \quad (4.37)$$

en este caso también se tiene que se anula el término  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi}$ , es decir  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = 0$ . Luego  $\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}} \right) = 0$ , obteniendo la tercera ecuación diferencial de movimiento.

$$N \ddot{\phi} + G \ddot{\psi} + V = 0, \quad (4.38)$$

donde

$$N \equiv I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}, \quad (4.39)$$

$$G \equiv I_3 + \frac{a^4 m \operatorname{sen}^2 \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)}, \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} V \equiv & \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^4 m \operatorname{sen}(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen} \theta^2 (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\ & + \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ -I_3 \operatorname{sen} \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\ & + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)(a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Se agrupará las tres ecuaciones diferenciales de movimiento, donde las funciones A, B, X, J,

S, U, N, G y V ya fueron definidas anteriormente

$$A\ddot{\theta} + B - X = 0,$$

$$J\ddot{\phi} + S\ddot{\psi} + U = 0,$$

$$N\ddot{\phi} + G\ddot{\psi} + V = 0. \quad (4.42)$$

Las ecuaciones diferenciales de movimiento pueden expresarse completamente reemplazando las definiciones en la ec.(4.42),

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left\{ I + m \left\{ \left[ \frac{[a^4 + c^4 + (-a^4 + c^4) \cos(2\theta)]}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] - \left[ \frac{2c^2 D_2 \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta}} \right] \right\} \right\} \\ & + \left\{ 2\dot{\theta}^2 m \left\{ \frac{c^2 D_2 \sen \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta}} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] + \left[ \frac{(a^2 - c^2) a^2 c^2 \sen(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] \right\} \right\} \\ & + \left\{ m \dot{\theta}^2 \left\{ \left[ \frac{\sen(2\theta) c^2 a^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)^2} \right] + \frac{\sen \theta c^2 D_2}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta}} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] \right\} \right\} \\ & + \dot{\phi}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sen(2\theta) (I - I_3) + \frac{(a^2 - c^2)^2 m \sen(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{(a^2 - c^2) \sen^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] \right\} \\ & + (a^2 - c^2) \frac{D_2 m \sen \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{(a^2 - c^2) \sen^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right] \\ & + \dot{\psi}^2 \left\{ \frac{a^4 c^2 m \sen(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sen^2 \theta)} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\phi} \dot{\psi} \left\{ -I_3 \operatorname{sen} \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right. \\
& \left. + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\
& \left. - g m \operatorname{sen} \theta \left[ D_2 + \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \right\} = 0, \tag{4.43}
\end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} \{ I_3 \cos^2 \theta + I \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$+ m \operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2) \left[ \frac{D_2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \}$$

$$+ \ddot{\psi} \left\{ I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\}$$

$$+ \left\{ \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ \operatorname{sen}(2\theta) (I - I_3) + \frac{2 D_2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{m (a^2 - c^2)^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \right\}$$

$$+ \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left. + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] - I_3 \operatorname{sen} \theta \right\} = \\
& \tag{4.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi} \left\{ I_3 \cos\theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}^2\theta}{\sqrt{c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \right\} \\
& \quad + \ddot{\psi} \left\{ I_3 + \frac{a^4 m \operatorname{sen}^2\theta}{(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \right\} \\
& \quad + \left\{ \dot{\psi} \dot{\theta} \left[ \frac{a^4 m \operatorname{sen}(2\theta)}{(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen}\theta^2 (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \right] \right] \right\} \\
& + \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ -I_3 \operatorname{sen}\theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2\theta}{2(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \right] \right. \\
& \left. + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen}\theta}{(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2\theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)(a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)} \right] \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Ademas se halló las EDO

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{C_{01}} &= \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \operatorname{sen}\phi - \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \cos\phi \right] \\
& \quad - \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos\phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}},
\end{aligned} \tag{4.46}$$

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{C_{02}} &= - \left\{ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta} \left[ \dot{\theta} \cos\phi + \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \right] \right. \\
& \quad \left. + \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos\theta \right] \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen}\phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right\}
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\dot{x}_{C_{03}} = \dot{\theta} \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right]. \tag{4.48}$$

Las ecuaciones (4.43), (4.44) y (4.45) son originarias de las ecuaciones de Euler Lagrange y las ecuaciones (4.46), (4.47) y (4.48) fueron obtenidas de la ecuación de ligadura. Luego se tiene 6 EDO, no lineales y acopladas, que serán resueltas en el capítulo siguiente.

## CAPÍTULO V

# ANÁLISIS, RESULTADOS Y CONCLUSIONES

5.1.- Introducción

5.2.- Solución del movimiento de un elipsoide sin fricción.

5.3.- Solución del movimiento de un elipsoide con fricción por deslizamiento.

5.4.- Solución del movimiento de un elipsoide con fricción por rodadura pura.

5.5.- Conclusiones

## 5.1. INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores (2, 3 y 4) se determinó las ecuaciones diferenciales de movimiento del elipsoide no homogéneo que se mueve sobre una superficie plana para tres situaciones:

- a) Sin fricción.
- b) Con fricción por deslizamiento.
- c) Con fricción por rodadura pura.

En este capítulo se mostrarán, los resultados obtenidos al resolver por métodos numéricos las *ecuaciones diferenciales ordinarias* (EDO), no lineales y acopladas (para ciertas condiciones iniciales).

Para realizar el cálculo numérico se empleó el método de Runge Kutta de 4<sup>to</sup> Orden. En todos los casos, que se efectuó este método, se empleó un paso de  $h=0,0001$ .

Al efectuar los cálculos se empleó una Pentium IV de 2,676GHz y 512 MB. de RAM.

Se emplearon cuatro software:

- a) Microsoft Developer Studio, Fortran Power Station 4,0, para resolver las EDO y generar una base de datos, de las funciones que intervienen.
- b) Origin 6,0 para graficar la base de datos y efectuar el *ajustes de curva lineal*, a ciertas funciones.
- c) Free Hand 9,0, para elaborar las ilustraciones de los capítulos.
- d) WinEdt V5.4 y MiKTeX, se empleo para elaborar los textos de toda la tesis.

Luego de elaborar el programa, ejecutarlo y generar una base de datos (para cada caso en especial), se graficaron las funciones que intervienen en el cálculo numérico. Se elaboró *cuadros*, que muestran las características más sobresalientes, de las funciones comprometidas.

Una característica observada, es la *periodicidad* de algunas funciones (ejemplo:  $\theta$ , para el caso sin fricción). Para las funciones periódicas ( $F$ ), se han construido unos *Cuadros*, donde se presentan los valores mínimos ( $F_{mín}$ ), valores máximos ( $F_{máx}$ ), su incremento ( $\Delta F \equiv F_{máx} - F_{mín}$ ) y su período, de la función  $F$ .



Se empleo la *Teoría de ajuste lineal de mínimos cuadrados*, para ciertas funciones que no son "periódicas", pero sus gráficas son oscilantes, crecientes (ó decrecientes) y se aproximan a una recta.

Con este ajuste se pudo hallar una función  $f_f = \beth + \daleth t$  y se tiene la  $\daleth \equiv \frac{df}{dt}$ , donde  $\daleth \equiv$  Pendiente de  $f_f$ . Con la ayuda de la pendiente, se calculó el ángulo de inclinación ( $\arctag \daleth$ ) de la recta  $f_f$ . Para el caso de las funciones  $\phi$  y  $\psi$ , se tiene las rectas  $f_\phi \equiv A + Bt$  y  $f_\psi \equiv C + Dt$ , se definieron los ángulos  $\zeta \equiv \arctag(B)$  y  $\eta \equiv \arctag(D)$ , respectivamente.

Al aplicar métodos numéricos se cometen errores, un método para determinar si los cálculos son consistentes, es hallar la energía del sistema, para cada instante. Por eso hay cuadros, que muestran esta información importante. En estos cuadros se muestra, la Energía mínima ( $E_{mín}$ ), máxima ( $E_{máx}$ ), su incremento ( $\Delta E \equiv E_{máx} - E_{mín}$ ), el Promedio de la Energía ( $\bar{E} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N}$ ) y el % Error de la Energía ( $\%E \equiv \frac{\Delta E}{\bar{E}} \times 100 \%$ ). Si el error es menor que el 6% para cierto intervalo de tiempo, se puede considerar, consistente los cálculos. Este método es útil cuando teóricamente la Energía mecánica es constante.

## 5.2. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIEN- TO SIN FRICCIÓN

En el capítulo II se estudió el *movimiento de un elipsoide sin fricción* sobre la superficie plana, donde se mueve.

Las ecuaciones que se van a resolver numéricamente son

$$\ddot{\theta} = \frac{mFC - I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \operatorname{sen}\theta - (I_3 - I) \dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta}{I - C H m}, \quad (5.1)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{-(2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} I_3}{I \operatorname{sen}\theta}, \quad (5.2)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{\theta} \dot{\phi} \operatorname{sen}\theta - \left( \frac{-(2I - I_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos\theta + \dot{\theta} \dot{\psi} I_3}{I \operatorname{sen}\theta} \right) \cos\theta, \quad (5.3)$$

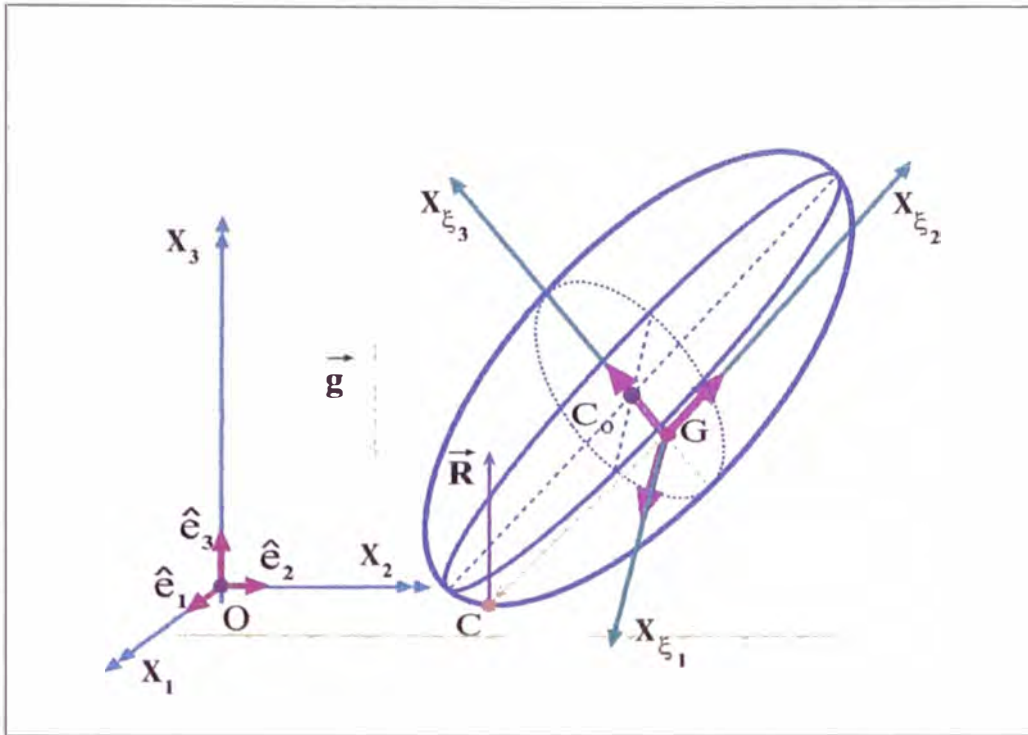


Figura 5.1: Elipsoide no homogéneo, sobre una superficie plana sin fricción. Bajo la acción del torque debido a la reacción normal ( $\vec{T}_G^{\vec{R}}$ ).

donde  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{F}$  y  $\mathbb{H}$  se encuentran definidos en el capítulo II, p. 82.

### 5.2.1. ALGORITMO

Las EDO (5.1), (5.2) y (5.3), son no lineales, de segundo orden y acopladas. Para resolverlas numéricamente, se efectuará un cambio de variable, para facilitar los cálculos.

Cambiamos el nombre a nuestras variables

$$X(1) = \theta, \quad (5.4)$$

$$X(2) = \phi, \quad (5.5)$$

$$X(3) = \psi, \quad (5.6)$$

$$X(4) = \dot{\theta}, \quad (5.7)$$

$$X(5) = \dot{\phi}, \quad (5.8)$$

$$X(6) = \dot{\psi}, \quad (5.9)$$

luego se derivó las ecuaciones (5.4), (5.5), (5.6), (5.7), (5.8) y (5.9) con respecto al tiempo, obteniendo

$$\dot{X}(1) = \dot{\theta}, \quad (5.10)$$

$$\dot{X}(2) = \dot{\phi}, \quad (5.11)$$

$$\dot{X}(3) = \dot{\psi}, \quad (5.12)$$

$$\dot{X}(4) = \ddot{\theta}, \quad (5.13)$$

$$\dot{X}(5) = \ddot{\phi}, \quad (5.14)$$

$$\dot{X}(6) = \ddot{\psi}. \quad (5.15)$$

Con este cambio de variable dado por las ecuaciones (5.10), (5.11), (5.12), (5.13), (5.14) y (5.15), se obtuvo las 6 EDO de 1<sup>er</sup> Grado:

$$\dot{X}(1) = X(4), \quad (5.16)$$

$$\dot{X}(2) = X(5), \quad (5.17)$$

$$\dot{X}(3) = X(6), \quad (5.18)$$

$$\dot{X}(4) = \frac{m\mathbb{F}\mathbb{C} - I_3 X(5) X(6) \operatorname{sen}X(1) - (I_3 - 1) X(5)^2 \operatorname{sen}X(1) \cos X(1)}{1 - \mathbb{C} \mathbb{H} m}, \quad (5.19)$$

$$\dot{X}(5) = \frac{-(2I - I_3) X(5) X(4) \cos X(1) + X(4) X(5) I_3}{I \operatorname{sen}X(1)}, \quad (5.20)$$

$$\dot{X}(6) = X(4) X(5) \operatorname{sen} X(1)$$

$$\left( \frac{-(21 - I_3) X(5) X(4) \cos X(1) + X(4) X(6) I_3}{I \operatorname{sen} X(1)} \right) \cos X(1), \quad (5.21)$$

son estas las ecuaciones, las que van a ser resueltas, por el método de Runge Kutta de 4<sup>to</sup> Orden.

## 5.2.2. RESULTADOS

Al efectuar el cálculo numérico, se generó una base de datos, los cuales serán ploteados en el Origin 6 y de allí se obtendrá las gráficas, para cada caso de interés. El Origin tiene muchas ventajas, para el ploteo de gráficas, análisis de curvas especiales y sus respectivos ajustes. También da facilidades para generar archivos eps(Encapsulado Post Scrip), necesarios para emplearlos en el latex.

Para el movimiento del elipsoide sin fricción, se consideraron dos casos:

A) VARIACIÓN DE CONDICIÓN INICIAL  $\dot{\psi}(0)$ .

B) VARIACIÓN DEL PARÁMETRO  $c$ .

### CASO A: VARIACIÓN DE $\dot{\psi}(0)$ .

Cuadro 5.1: Variaciones de la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  expresadas en diferentes unidades de medición.

Rad/seg	Grados/seg	Rev/seg
50	2,864 <sup>o</sup> 47' 20"	7,957
100	5,729 <sup>o</sup> 34' 40"	15,9154
150	8,594 <sup>o</sup> 22' 0,9"	23,8732
200	11,459 <sup>o</sup> 9' 21"	31,8309
250	14,323 <sup>o</sup> 56'	39,7887
300	17,188 <sup>o</sup> 44' 1"	47,7464

En el Cuadro(5.1) se muestran los valores para la condición inicial  $\dot{\psi}(0)$ , que se consideraron en el cálculo numérico.

Las condiciones iniciales, parámetros que se consideran en este caso, se muestran en los Cuadros (5.2) y (5.3).

Cuadro 5.2: Condiciones iniciales, para el caso en que  $\dot{\psi}(0)$  varia.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales
$\theta$	Theta	0,1rad= 5°3'46,48"
$\phi$	Phi	0
$\psi$	Psi	0
$\dot{\theta}$	Derivada temporal de $\theta$	10rad/seg= 1,591 rev/seg
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de $\phi$	15rad/seg=2,387 rev/seg

Cuadro 5.3: Parámetros, que intervienen en el cálculo numérico, cuando  $\dot{\psi}(0)$  varia.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales	Unidad
a	Eje mayor del elipsoide	0,025	m.
c	Eje menor del elipsoide	0,0125	m.
I	Momento de inercia del elipsoide	0,00000234625	Kg.m <sup>2</sup>
I <sub>3</sub>	Momento de inercia del elipsoide	0,00000375	Kg.m <sup>2</sup>
D <sub>2</sub>	Distancia de C <sub>0</sub> a G	0,005	m.
g	Aceleración de la gravedad de la tierra	9,8	( $\frac{m}{s^2}$ )
m	Masa	0,015	Kg.

En la p. 146 se muestra la Fig.(5.2), que contiene un conjunto de gráficos de la función de  $\theta(t)$ . En cada gráfico se indica la condición inicial  $\dot{\psi}(0)$ , considerada para resolver el sistema de EDO. El intervalo tomado en cuenta es de  $1^\circ \leq \theta \leq 11^\circ$ , para un tiempo t, comprendido en  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ seg}$ .

Se observa una característica común en todos los gráficos, las funciones son periódicas. Y por lo tanto el ángulo  $\theta(t)$  tiene un valor mínimo ( $\theta_{\text{mín}}$ ) y un valor máximo ( $\theta_{\text{máx}}$ ). También se observa que el período y la amplitud disminuyen a medida que la condición  $\dot{\psi}(0)$  aumenta.

En la Cuadro(5.4), se muestra los valores de  $\theta_{\text{mín}}$ ,  $\theta_{\text{máx}}$ ,  $\Delta\theta \equiv \theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{mín}}$  y el período de la función de  $\theta(t)$ , correspondiente a los gráficos  $\theta(t)$  de la p. 146. El valor de  $\Delta\theta$ , va disminuye conforme  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa, además el período de oscilación disminuye también.

En la Fig.(5.3), se muestra las funciones  $\phi(t)$  de acuerdo a que la condición inicial  $\dot{\psi}(0)$  varia, para un intervalo de  $-400^\circ \leq \phi \leq 100^\circ$  y un intervalo de tiempo t,  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ seg}$ . Se aprecia en el conjunto de gráficos, curvas oscilantes, que *descienden*.

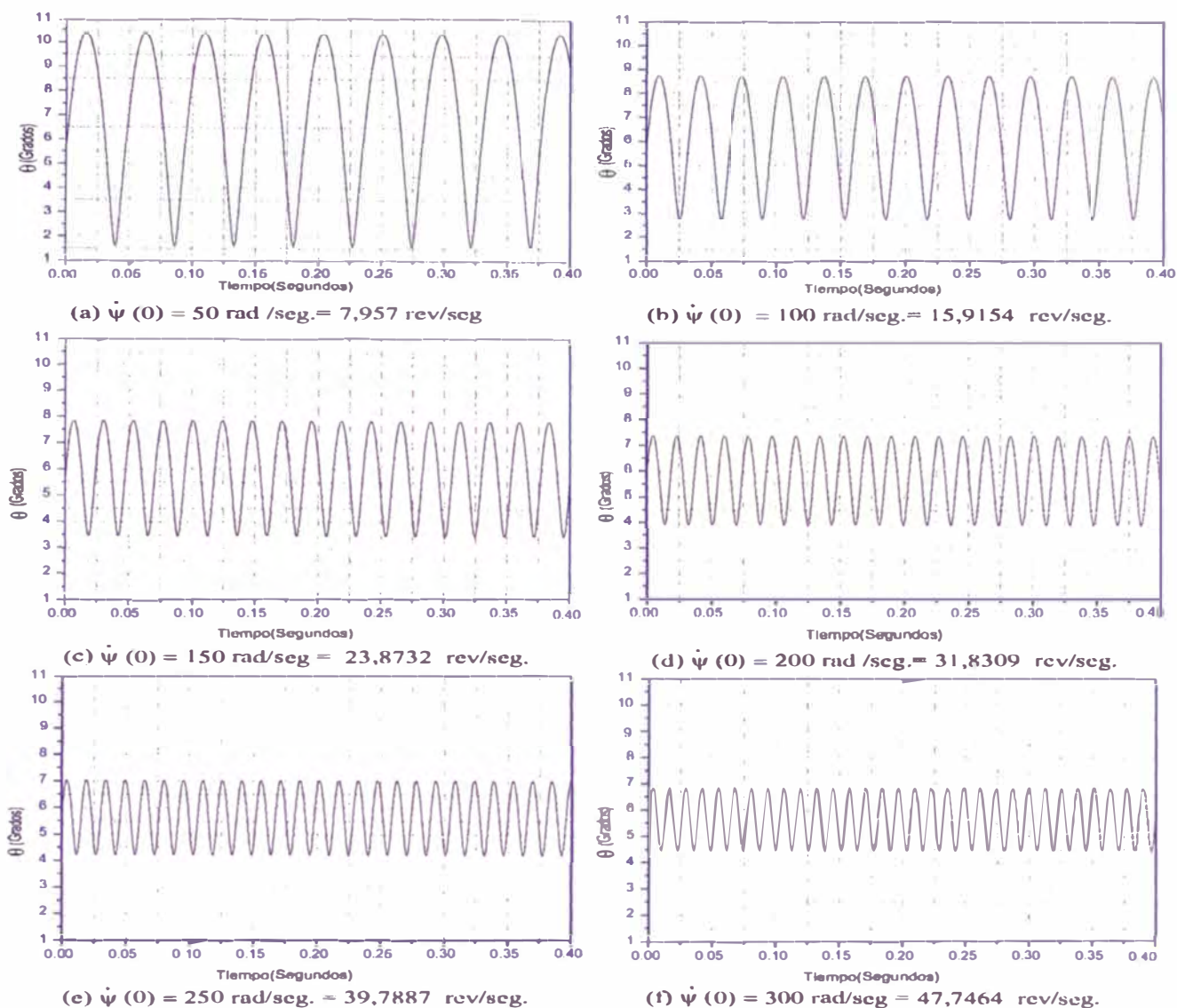


Figura 5.2: Comportamiento de  $\theta(t)$  conforme la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varía. Se aprecia que la función  $\theta$  es periódica, donde su amplitud y período va disminuyendo a medida que va aumentando  $\dot{\psi}(0)$

Cuadro 5.4: Valores extremales de  $\theta$ , cuando  $\dot{\psi}(0)$  varía.

$\dot{\psi}(0)$ Rsd/seg.	$\theta_{\min}$ Grados	$\theta_{\max}$ Grados	$\Delta\theta$ , Grados	período Segundos
50	1 <sup>o</sup> 36' 12,35"	10 <sup>o</sup> 23' 49,24"	8 <sup>o</sup> 47' 37,52"	0,047916
100	2 <sup>o</sup> 45' 21,28"	8 <sup>o</sup> 42' 38,09"	5 <sup>o</sup> 57' 17,1"	0,033333
150	3 <sup>o</sup> 27' 25,56"	7 <sup>o</sup> 50' 43,73"	4 <sup>o</sup> 23' 17,82"	0,022916
200	3 <sup>o</sup> 54' 20,45"	7 <sup>o</sup> 21' 7,56"	3 <sup>o</sup> 26' 46,83"	0,018749
250	4 <sup>o</sup> 12' 41,94"	7 <sup>o</sup> 2' 23,57"	2 <sup>o</sup> 49' 41,23"	0,014583
300	4 <sup>o</sup> 25' 54,77"	6 <sup>o</sup> 49' 34,82"	2 <sup>o</sup> 23' 39,81"	0,012499



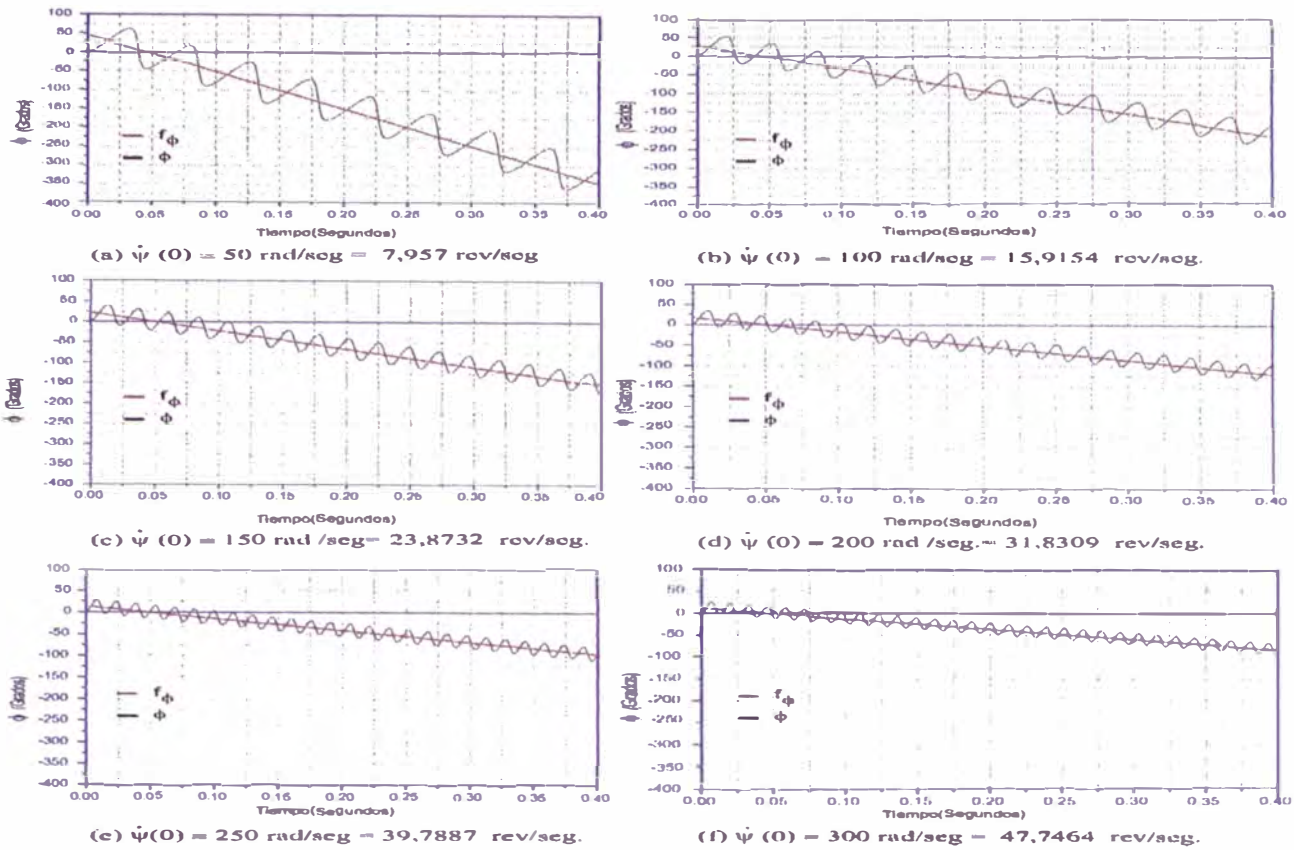


Figura 5.3: Comportamiento de  $\phi(t)$  conforme la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varía .

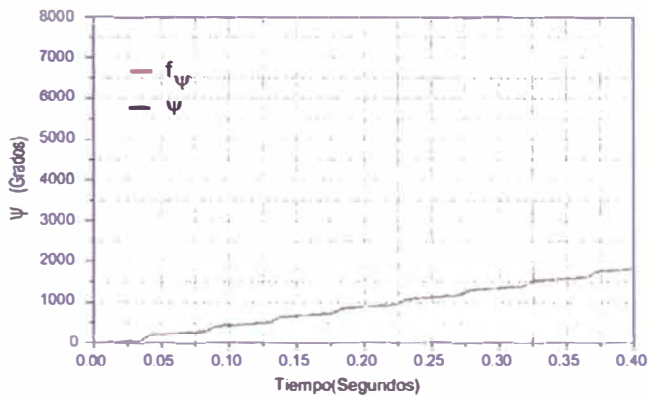
Para tener una medida de como *desciende*, se define una recta mediante el *Ajuste de curva lineal*,  $f_\phi = A + Bt$  (de color rojo en la Fig(5.3)).

Las ecuaciones de estas rectas se indican en el Cuadro(5.5). Se observa además que la función  $\phi(t)$  tiene valores máximos y mínimos relativos, el tiempo que transcurre entre un máximo y el siguiente es igual, a este intervalo de tiempo lo definiremos como *seudo período* de la función  $\phi(t)$ . Este seudo período disminuye, así como las oscilaciones cuando la condición inicial  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa.

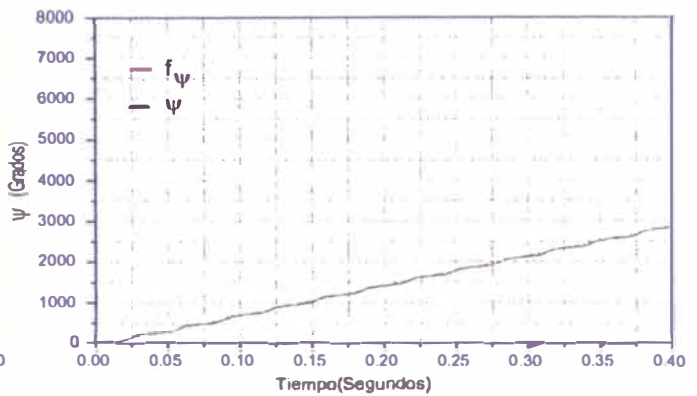
Cuadro 5.5: Ajuste lineal de  $\phi(t)$ , cuando  $\dot{\psi}(0)$  varía.

$\dot{\psi}(0)$ Rad/seg.	Ajuste lineal $f_\phi = A + Bt$	Pendiente (B) Grados/segundo	Ángulo de inclinación $\zeta$ Grados
50	45,69803 - 956,14717 t	-956,14714	-89°56'24,28"
100	31,46744 - 599,93536 t	-599,93536	-89°54'16,19"
150	23,24624 - 431,47165 t	-431,47165	-89°52'01,95"
200	18,21299 - 335,59365 t	-335,59365	-89°49'45,38"
250	15,20970 - 276,33261 t	-276,33261	-89°47'33,57"
300	12,73816 - 232,58175 t	-232,58175	-89°45'13,16"

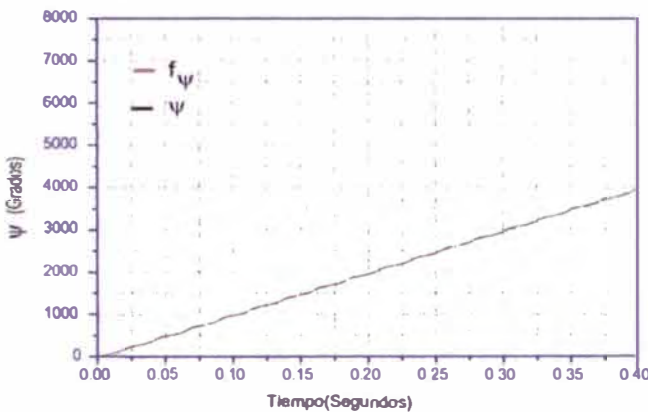
En la Fig.(5.4), se expone un conjunto de funciones  $\psi(t)$  correspondiente, a las diferentes condición iniciales  $\dot{\psi}(0)$ .  $\psi$ , se encuentra en un intervalo  $0^{\circ} \leq \psi \leq 8000^{\circ}$  y un intervalo de tiempo  $t$ , de  $0 \text{ seg} \leq t \leq 0,4 \text{ seg}$ . La función  $\psi(t)$  siempre es positiva y creciente.



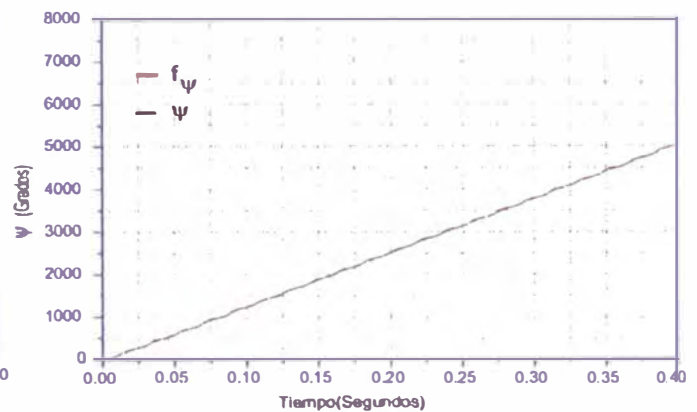
(a)  $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg} = 7,957 \text{ rev/seg}$



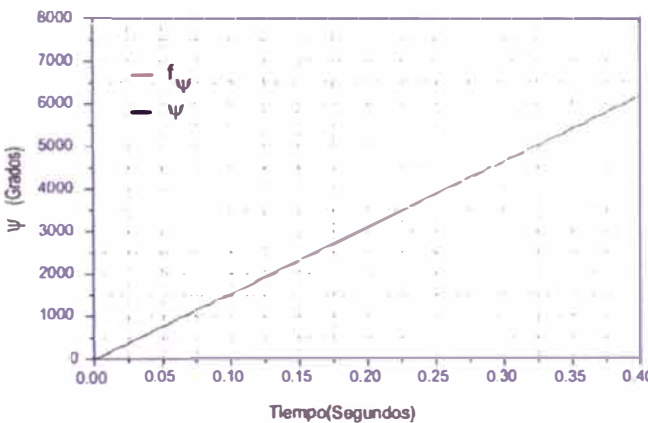
(b)  $\dot{\psi}(0) = 100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg.}$



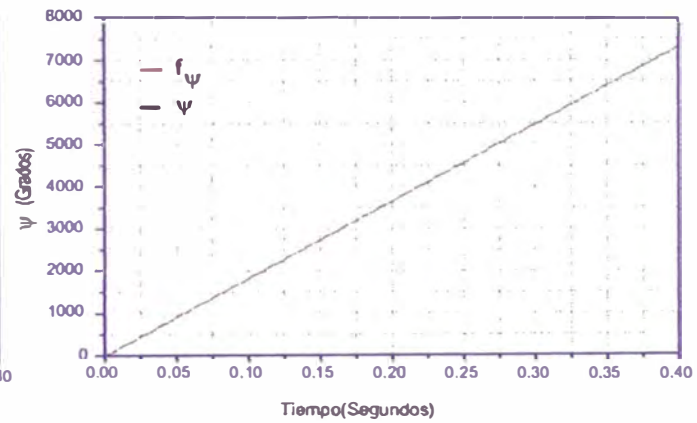
(c)  $\dot{\psi}(0) = 150 \text{ rad/seg} = 23,8732 \text{ rev/seg.}$



(d)  $\dot{\psi}(0) = 200 \text{ rad/seg} = 31,8309 \text{ rev/seg.}$



(e)  $\dot{\psi}(0) = 250 \text{ rad/seg} = 39,7887 \text{ rev/seg.}$



(f)  $\dot{\psi}(0) = 300 \text{ rad} = 47,7464 \text{ rev/seg.}$

Figura 5.4: Comportamiento de  $\psi(t)$  conforme la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varia.

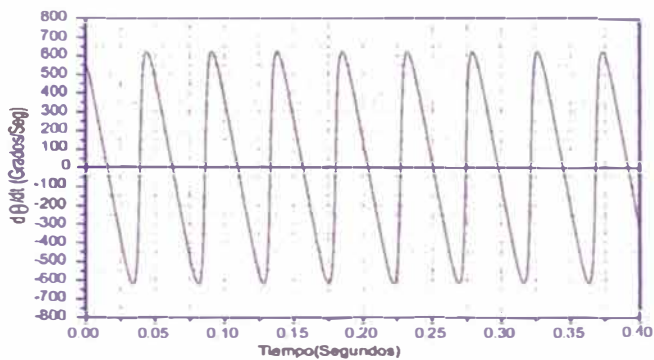
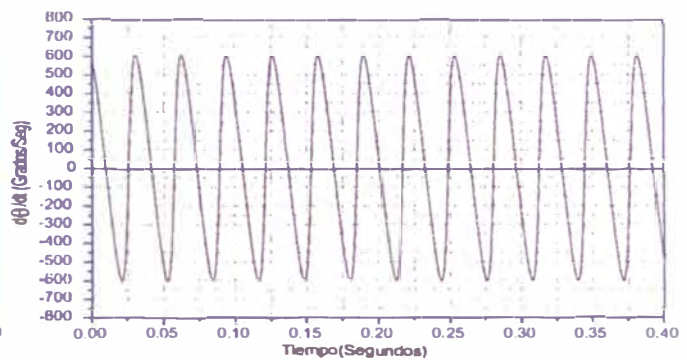
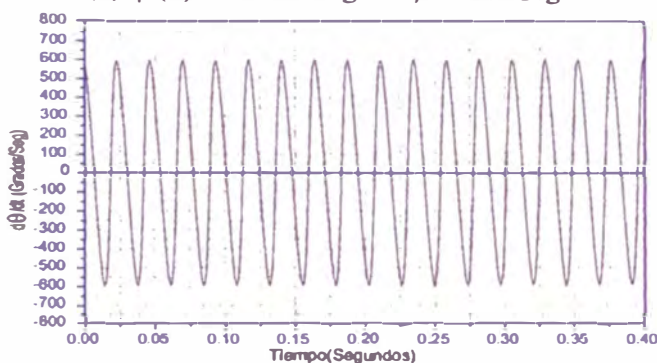
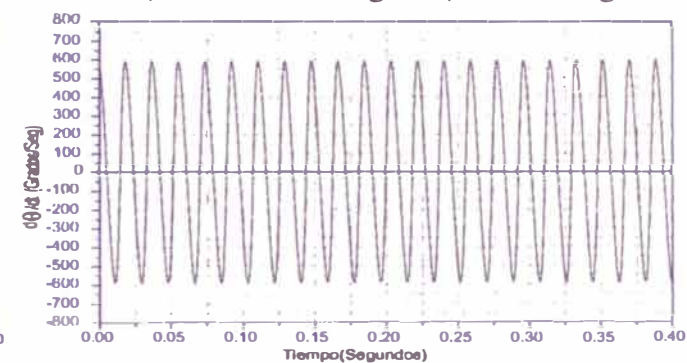
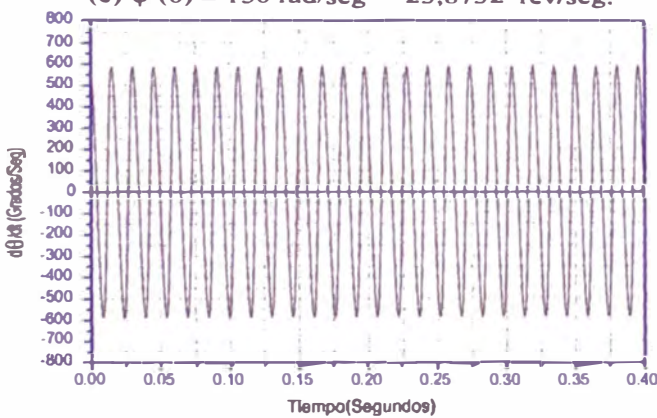
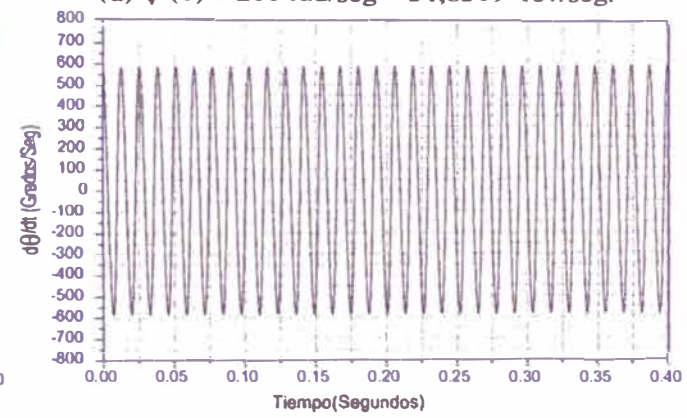
También se halló la recta  $f_{\psi} = C + Dt$ , para la función  $\psi(t)$  y definimos  $\text{arc}(\tan(D)) \equiv \eta$ , que nos mide la inclinación de estas rectas.

Los cálculos de los valores de  $\eta$  y de ajustes de línea se observan en el Cuadro(5.6).



Cuadro 5.6: Ajuste lineal de  $\psi(t)$ , de acuerdo  $\psi(0)$  varia.

$\dot{\psi}(0)$ Rad/seg.	Ajuste lineal $f_{\psi} = C + Dt$	Pendiente (D) Grados/segundo	$\angle$ de inclinación $\eta$ Grados
50	$-45,55523+4691,64142 t$	4691,64142	$89^{\circ}59'16,04''$
100	$-31,35896+7197,05867 t$	7197,05867	$89^{\circ}59'31,34''$
150	$-23,17279+9\ 890,68131 t$	9890,68131	$89^{\circ}59'39,15''$
200	$-18,1728+12\ 657,80147 t$	12657,80147	$89^{\circ}59'43,70''$
250	$15,18977+15\ 462,18315 t$	15462,18315	$89^{\circ}59'46,66''$
300	$-12,73666+18\ 282,37498 t$	18282,37498	$89^{\circ}59'48,72''$

(a)  $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg} = 7,957 \text{ rev/seg}$ (b)  $\dot{\psi}(0) = 100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg.}$ (c)  $\dot{\psi}(0) = 150 \text{ rad/seg} = 23,8732 \text{ rev/seg.}$ (d)  $\dot{\psi}(0) = 200 \text{ rad/seg} = 31,8309 \text{ rev/seg.}$ (e)  $\dot{\psi}(0) = 250 \text{ rad/seg} = 39,7887 \text{ rev/seg.}$ (f)  $\dot{\psi}(0) = 300 \text{ rad/seg} = 47,7464 \text{ rev/seg.}$ Figura 5.5: Comportamiento de  $\dot{\phi}(t)$  conforme la condición inicial de  $\psi(0)$  varia.

En la Fig.(5.5) se muestra la función  $\dot{\theta}(t)$  (velocidad angular de nutación), también es una función periódica, donde se observan valores máximos y mínimos. A medida que transcurre el tiempo, el período va disminuyendo, pero su amplitud casi no varia. La función  $\dot{\theta}(t)$ , se encuentra en el intervalo  $-800 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\theta} \leq 800 \text{ Grados/seg}$  y un intervalo de tiempo  $t$ ,  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ Grados/seg}$ .

Con la base de datos para esta función y los gráficos, se elaboró el Cuadro(5.7), indicamos las variaciones de  $\Delta\dot{\theta}(t) \equiv \dot{\theta}(t)_{m\acute{a}x} - \dot{\theta}(t)_{m\acute{i}n}$  conforme varia  $\dot{\psi}(0)$ .

Cuadro 5.7: Valores extremales de la nutación ( $\dot{\theta}$ ), conforme  $\dot{\psi}(0)$  varia.

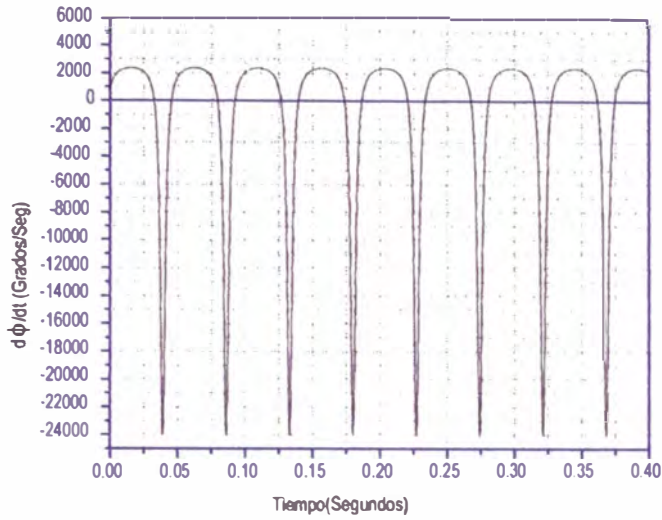
$\dot{\psi}(0)$ Rad/seg.	$\dot{\theta}_{m\acute{i}n}$ Grados/seg	$\dot{\theta}_{m\acute{a}x}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\theta}$ Grados/seg	período Segundos
50	-621,6169	621,6169	1243,2338	0,047916
100	-601,6987	601,7047	1203,4094	0,033333
150	-593,6629	593,6629	1187,3258	0,022916
200	-589,5891	589,5891	1179,1782	0,018749
250	-587,1934	587,1934	1174,3868	0,014583
300	-585,6334	585,6334	1171,2660	0,012499

La variación  $\Delta\dot{\theta}(t)$  se hace muy lenta y el período de la función  $\dot{\theta}(t)$ , disminuye conforme  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa.

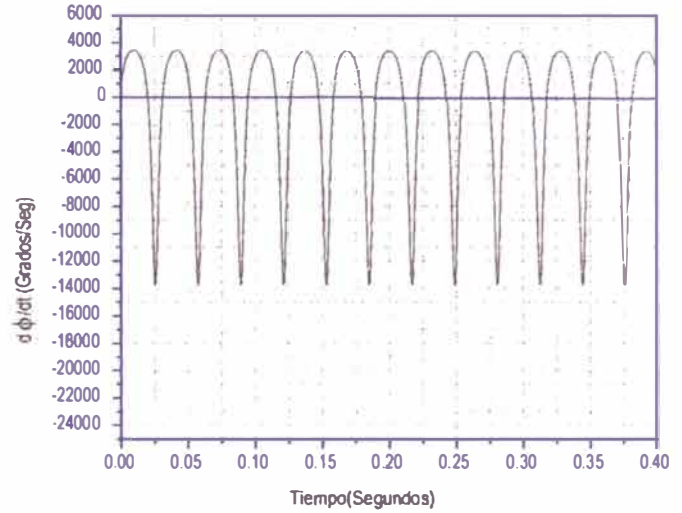
En la Fig.(5.6)(p. 151) y Fig.(5.7)(p.152), se indican los gráficos de las funciones de  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  respectivamente, donde  $\dot{\psi}(0)$  va cambiando de valor inicial. Las funciones son periódicas, aunque muestran ciertos mínimos un tanto agudos en su forma para  $\dot{\phi}(t)$  y máximos un tanto agudos para  $\dot{\psi}(t)$ .

La función  $\dot{\phi}(t)$  se encuentra en el intervalo  $-24000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\phi} \leq 6000 \text{ Grados/seg}$ . y  $\dot{\psi}(t)$  se encuentra en el intervalo  $0 \leq \dot{\psi} \leq 30000 \text{ Grados/seg}$ , ambos tienen un intervalo de tiempo de  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ seg}$ . al variar  $\dot{\psi}(0)$ . Se puede notar que las funciones tienen un período que va disminuyendo a medida que  $\dot{\psi}(0)$  se va incrementando y además sus  $\Delta\dot{\phi}$  y  $\Delta\dot{\psi}$ , también disminuyen conforme  $\dot{\psi}(0)$  se va incrementando hasta cierto valor de  $\dot{\psi}(0)$ , pero luego casi no cambia.

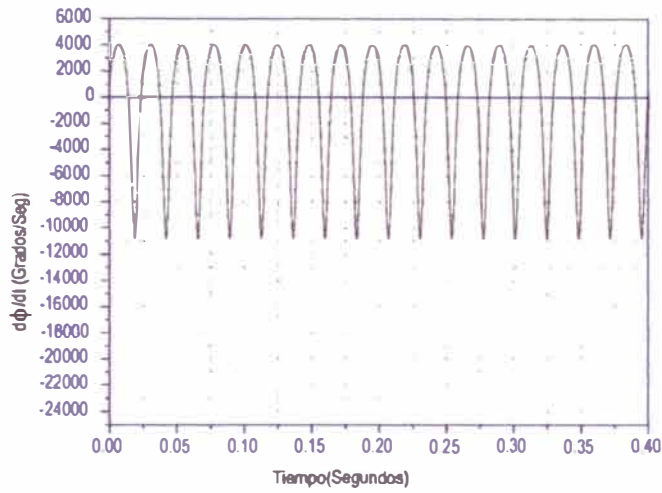
En los Cuadros (5.8) y (5.9), muestran que los períodos de  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ , disminuyen a medida que  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa. Los incrementos  $\Delta\dot{\phi}(t)$  y  $\Delta\dot{\psi}(t)$ , disminuyen también.



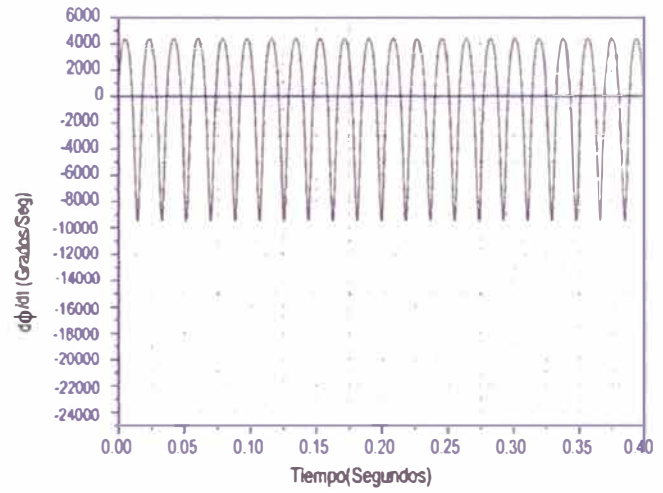
(a)  $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg} = 7,957 \text{ rev/seg}$



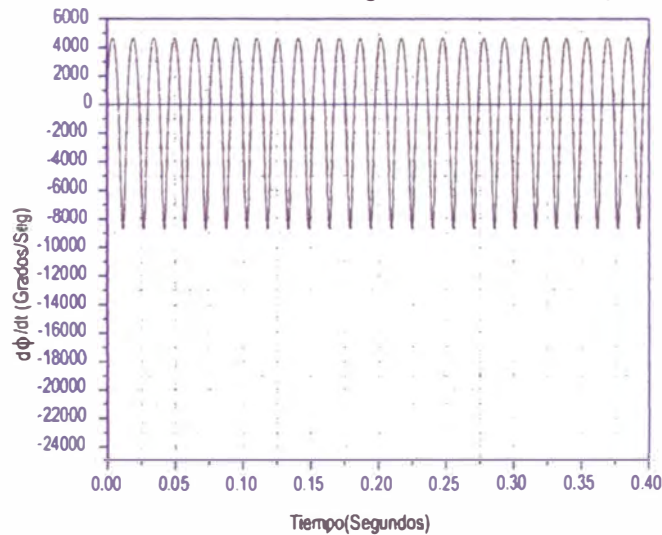
(b)  $\dot{\psi}(0) = 100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg.}$



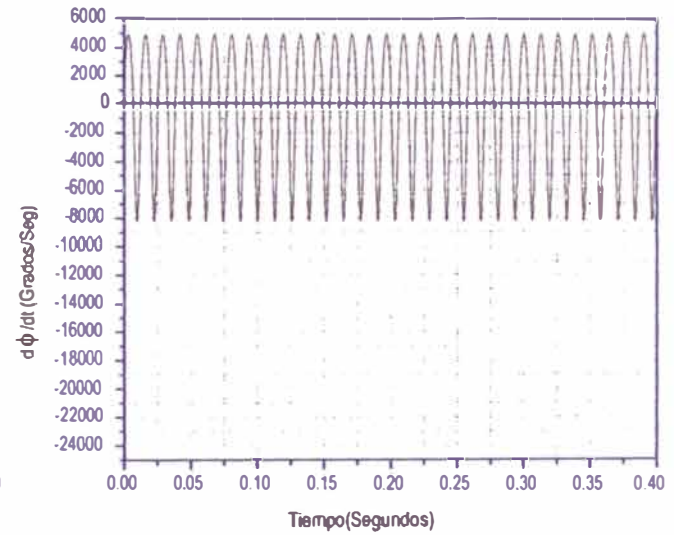
(c)  $\dot{\psi}(0) = 150 \text{ rad/seg} = 23,8732 \text{ rev/seg.}$



(d)  $\dot{\psi}(0) = 200 \text{ rad/seg} = 31,8309 \text{ rev/seg.}$



(e)  $\dot{\psi}(0) = 250 \text{ rad/seg} = 39,7887 \text{ rev/seg.}$



(f)  $\dot{\psi}(0) = 300 \text{ rad/seg} = 47,7464 \text{ rev/seg.}$

Figura 5.6: Comportamiento de  $\dot{\phi}(t)$  conforme la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varia.



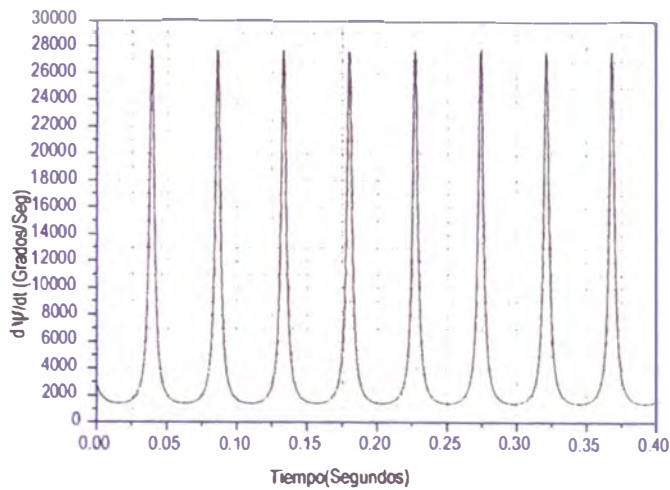
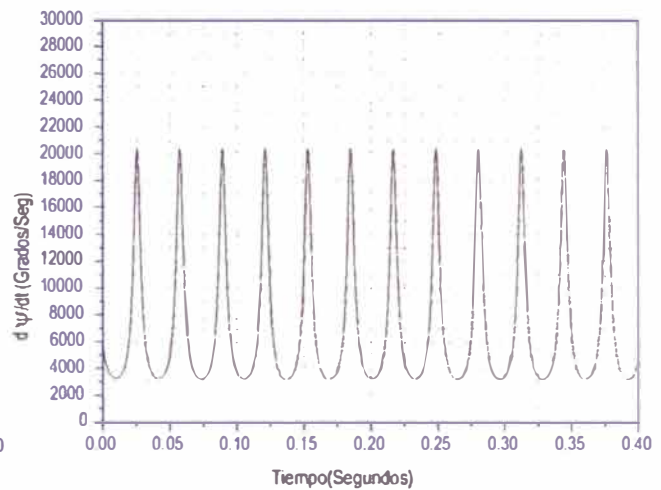
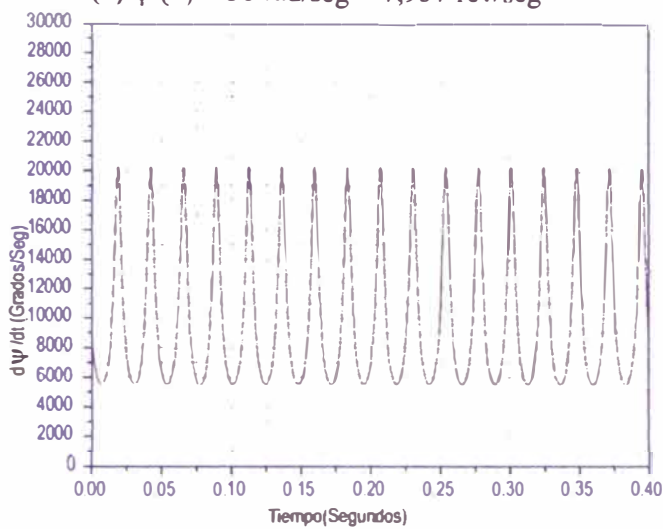
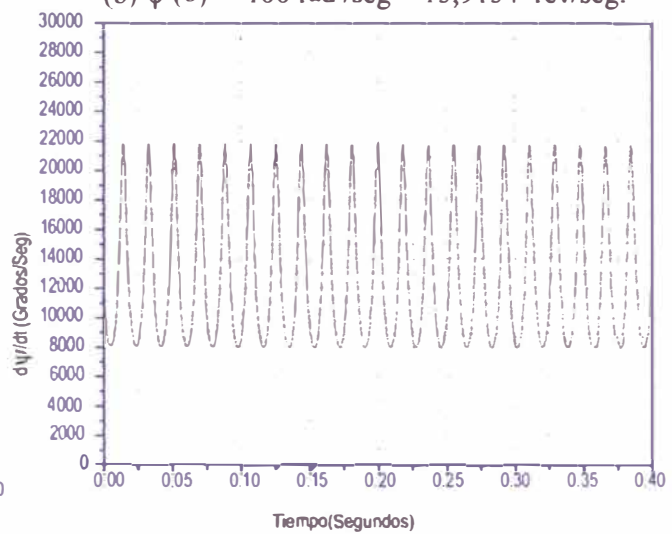
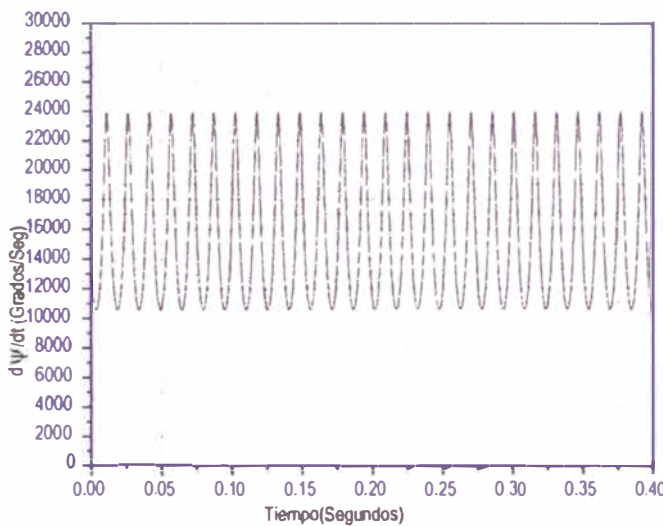
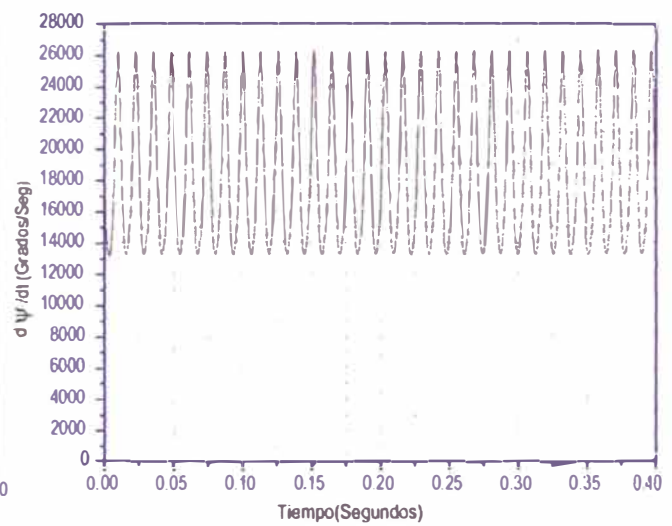
(a)  $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg} = 7,957 \text{ rev/seg}$ (b)  $\dot{\psi}(0) = 100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg}$ (c)  $\dot{\psi}(0) = 150 \text{ rad/seg} = 23,8732 \text{ rev/seg}$ (d)  $\dot{\psi}(0) = 200 \text{ rad/seg} = 31,8309 \text{ rev/seg}$ (e)  $\dot{\psi}(0) = 250 \text{ rad/seg} = 39,7887 \text{ rev/seg}$ (f)  $\dot{\psi}(0) = 300 \text{ rad/seg} = 47,7464 \text{ rev/seg}$ 

Figura 5.7: Comportamiento de  $\dot{\psi}(t)$  conforme la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varia.

Cuadro 5.8: Valores extremales de  $\dot{\phi}$  en el tiempo, conforme  $\dot{\psi}(0)$  varia.

$\dot{\psi}(0)$ Rad/seg.	$\dot{\phi}_{min}$ Grados/seg	$\dot{\phi}_{máx}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\phi}$ Grados/seg	período Segundos
50	-24024,0300	2348,3890	26372,4190	0,047916
100	-13773,2000	3373,6890	17146,8890	0,033333
150	-10836,7300	3997,2850	14834,0150	0,022916
200	-9495,1780	4400,0220	13895,2000	0,018749
250	-8737,2870	4677,5120	13414,7990	0,014583
300	-8253,1710	4879,0560	13132,2270	0,012499

Cuadro 5.9: Valores extremales de  $\dot{\psi}$  en el tiempo, conforme  $\dot{\psi}(0)$  varia.

$\dot{\psi}(0)$ Rad/seg.	$\dot{\psi}_{min}$ Grados/seg	$\dot{\psi}_{máx}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\psi}$ Grados/seg	período Segundos
50	1410,1400	27734,600	26324,4600	0,047916
100	3249,9940	20342,0400	17092,0460	0,033333
150	5489,7350	20266,5800	14776,8450	0,022916
200	7950,5890	21787,5600	13836,9710	0,018749
250	10536,9900	23892,9200	13355,9300	0,014583
300	13199,6000	26272,5700	13072,9700	0,012499

De todos los gráficos anteriores y cuadros, la más sobresaliente observación, es que los períodos de  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  son iguales para un determinado valor de  $\dot{\psi}(0)$ . Esta propiedad que aparece con las condiciones iniciales y parámetros considerados.

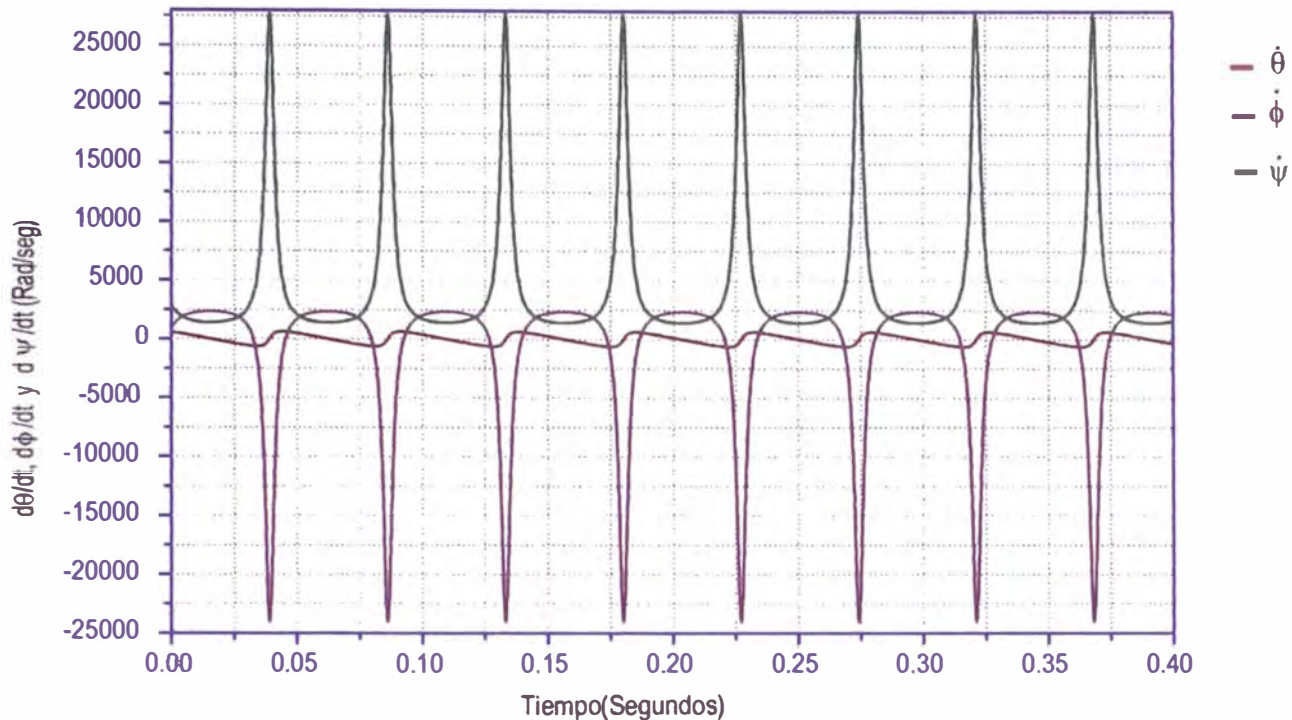


Figura 5.8: Superposición de funciones  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$  cuando la condición inicial de  $\dot{\psi}(0) = 50 \text{ rad/seg}$ . Se aprecia que tienen los mismos períodos.

En la Fig.(5.8), se gráfica en forma simultánea las funciones  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ . Se aprecian, curvas simétricas, esta simetría es el resultado de los períodos de las funciones,  $\theta(t)$ ,  $\dot{\theta}(t)$ ,  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ , son iguales (la función  $\theta$  no aparece en esta figura, porque solo se notaría una línea recta).

En la Fig.(5.9) se indica la Energía Mecánica, cuando  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa. Se muestra que son líneas constantes, van aumentando a medida que  $\dot{\psi}(0)$  se incrementa. En el Cuadro (5.10), se señalan los valores de la  $E_{\min}$ ,  $E_{\max}$ , el incremento de la Energía ( $\Delta E \equiv E_{\max} - E_{\min}$ ), el Promedio de la Energía  $\bar{E} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N E_i}{N}$  y el % Error de la Energía ( $\%E \equiv \frac{\Delta E}{\bar{E}} \times 100 \%$ ). De todos estos valores el más importante es el % Error de la Energía total, que va disminuyendo al incrementarse la condición  $\dot{\psi}(0)$ . Esto garantiza que los resultados son satisfactorios, porque es menor del 1,6 %.

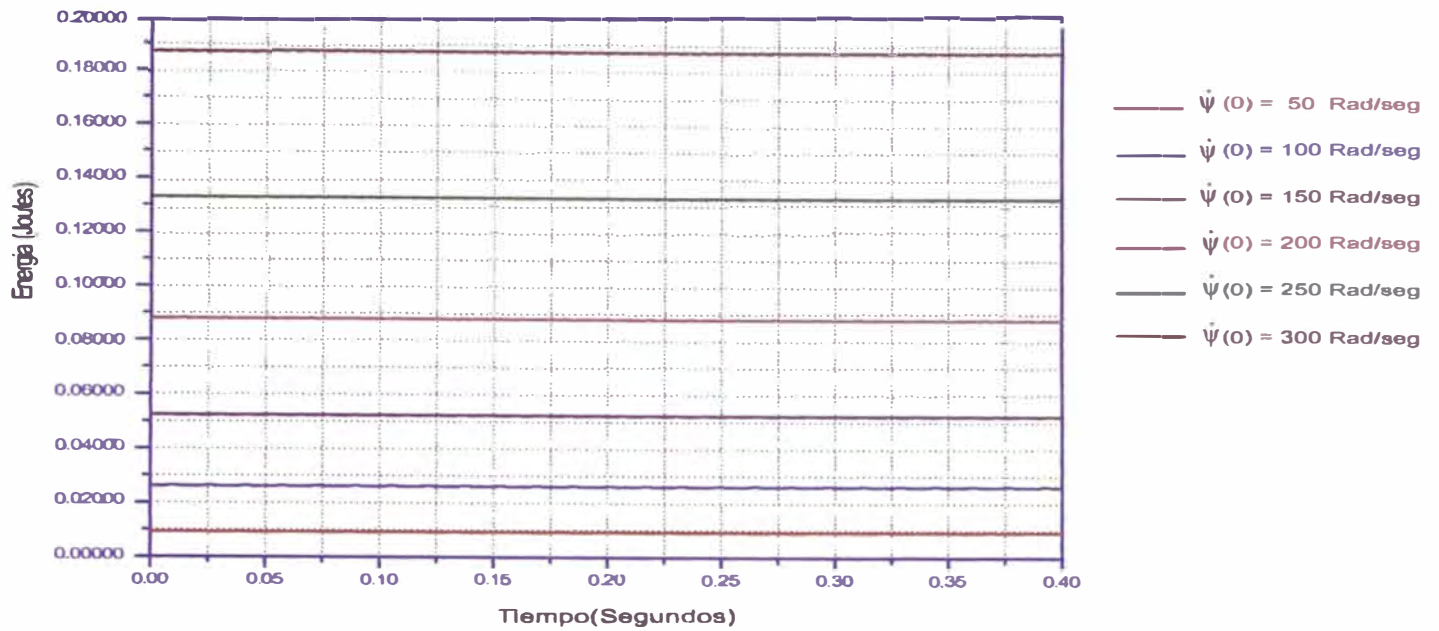


Figura 5.9: Comportamiento de la Energía del elipsoide, mientras la condición inicial de  $\dot{\psi}(0)$  varía.

Cuadro 5.10: Variaciones de la Energía conforme  $\dot{\psi}(0)$  varía.

$\psi(0)$ Rev/seg.	$E_{min}$ Joules	$E_{máx}$ Joules	$\Delta E$ Joules	$\bar{E}$ Joules	% Error Joules
7,957	0,00916	0,00930	$1,4 \times 10^{-4}$	$0,0091900 \pm 0,0000004$	1,516 %
15,9154	0,02602	0,02616	$1,4 \times 10^{-4}$	$0,0260700 \pm 0,0000005$	0,536 %
23,8732	0,05225	0,05239	$1,4 \times 10^{-4}$	$0,0523100 \pm 0,0000006$	0,267 %
31,8309	0,08787	0,08800	$1,3 \times 10^{-4}$	$0,0879200 \pm 0,0000006$	0,147 %
39,7887	0,13285	0,13298	$1,3 \times 10^{-4}$	$0,1329100 \pm 0,0000006$	0,097 %
47,7464	0,18721	0,18734	$1,3 \times 10^{-4}$	$0,1872700 \pm 0,0000006$	0,069 %

## CASO B: VARIACIÓN DEL PARÁMETRO $c$ .

Para este caso el parámetro  $c$  varía, los gráficos y cuadros, presentan características peculiares del movimiento del elipsoide sin fricción.

En el Cuadro(5.11) se exponen las condiciones iniciales para este caso y en el Cuadro(5.12) los parámetros relacionados en la solución numérica.

Cuadro 5.11: Condiciones iniciales, cuando el parámetro  $c$  varía.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales
$\theta$	Theta	0,1rad= 5 <sup>0</sup> 3'46,48''
$\phi$	Phi	0
$\psi$	Psi	0
$\dot{\theta}$	Derivada temporal de $\theta$	10rad/seg= 1,591 rev/seg
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de $\phi$	15rad/seg=2,387 rev/seg'
$\dot{\psi}$	Derivada temporal de $\psi$	100rad/seg=115,9154 rev/seg

Cuadro 5.12: Parámetros que interviene en el cálculo numérico, tomando en cuenta que  $c$  se incrementa

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales	Unidad
$a$	Eje mayor del elipsoide	0,025	m.
$I_3$	Momento de inercia del elipsoide	0,00000375	Kg.m <sup>2</sup>
$D_2$	Distancia de $C_0$ a $G$	0,005	m.
$g$	Aceleración de la gravedad de la tierra	9,8	( $\frac{m}{s^2}$ )
$m$	Masa	0,015	Kg.

Además de tener las condiciones iniciales y los parámetro para las funciones, en el Cuadro(5.13), se indica los valores del semieje menor  $c$ , del elipsoide y el momento de inercia  $I$ .

Cuadro 5.13: Variaciones del parámetro  $c$  y sus respectivos momentos de Inercia

$c$ m	Momento de Inercia $I$ Kg .m <sup>2</sup>
0,0125	2,346x10 <sup>-6</sup>
0,0150	2,552x10 <sup>-6</sup>
0,0175	2,796x10 <sup>-6</sup>
0,0200	3,077x10 <sup>-6</sup>
0,0225	3,396x10 <sup>-6</sup>



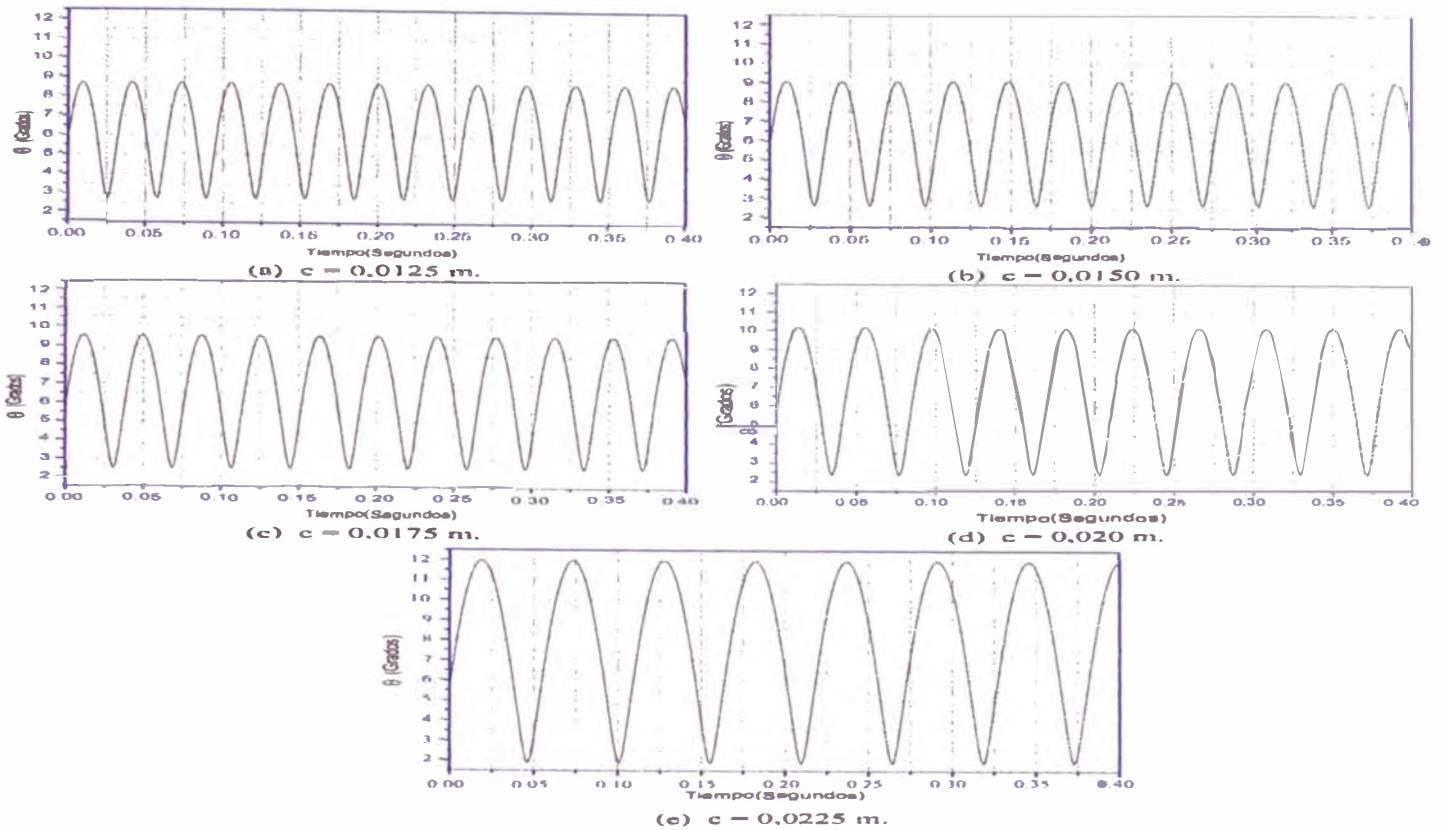


Figura 5.10: Comportamiento de la  $\theta(t)$  cuando  $c$  varia, desde 0,0125 m a 0,0225 m.

En la Fig.(5.10) se exponen las función  $\theta(t)$  y se gráfica para un intervalo  $1,5^{\circ} \leq \theta \leq 12,5^{\circ}$ , considerando un tiempo  $t$ , comprendido en  $0 \leq t \leq 0,4$  seg. Cuando el parámetro  $c$  varia entre  $0,0125 \text{ m} \leq c \leq 0,0225 \text{ m}$ . Observamos en la Fig.(5.10) que las funciones  $\theta(t)$  son periódica, presentan valores máximos y mínimos consecutivos. Además la amplitud y el período de la función va aumentando, al incrementarse  $c$ .

En la Cuadro(5.14) se dan las características más resaltantes de la función  $\theta(t)$ . Se nota que el incremento  $\Delta\theta = \theta_{\text{máx}} - \theta_{\text{mín}}$  y sus respectivos períodos se van incrementando, al incrementarse  $c$ .

Cuadro 5.14: Valores extremales de  $\theta$ , conforme  $c$  varia.

$c$ m	$\theta_{\text{mín}}$ Grados	$\theta_{\text{máx}}$ Grados	$\Delta\theta$ Grados	Período Segundos
0,0125	$2^{\circ}45'21,35''$	$8^{\circ}42'38,45''$	$5^{\circ}57'17,10''$	0,03333
0,0150	$2^{\circ}39'26,57''$	$9^{\circ}4'38,53''$	$6^{\circ}25'11,96''$	0,03541
0,0175	$2^{\circ}31'15,64''$	$9^{\circ}33'31,16''$	$7^{\circ}2'15,54''$	0,0375
0,020	$2^{\circ}21'29,84''$	$10^{\circ}9'41,04''$	$7^{\circ}48'11,20''$	0,04375
0,0225	$1^{\circ}52'10,42''$	$11^{\circ}57'21,24''$	$10^{\circ}5'10,68''$	0,05625

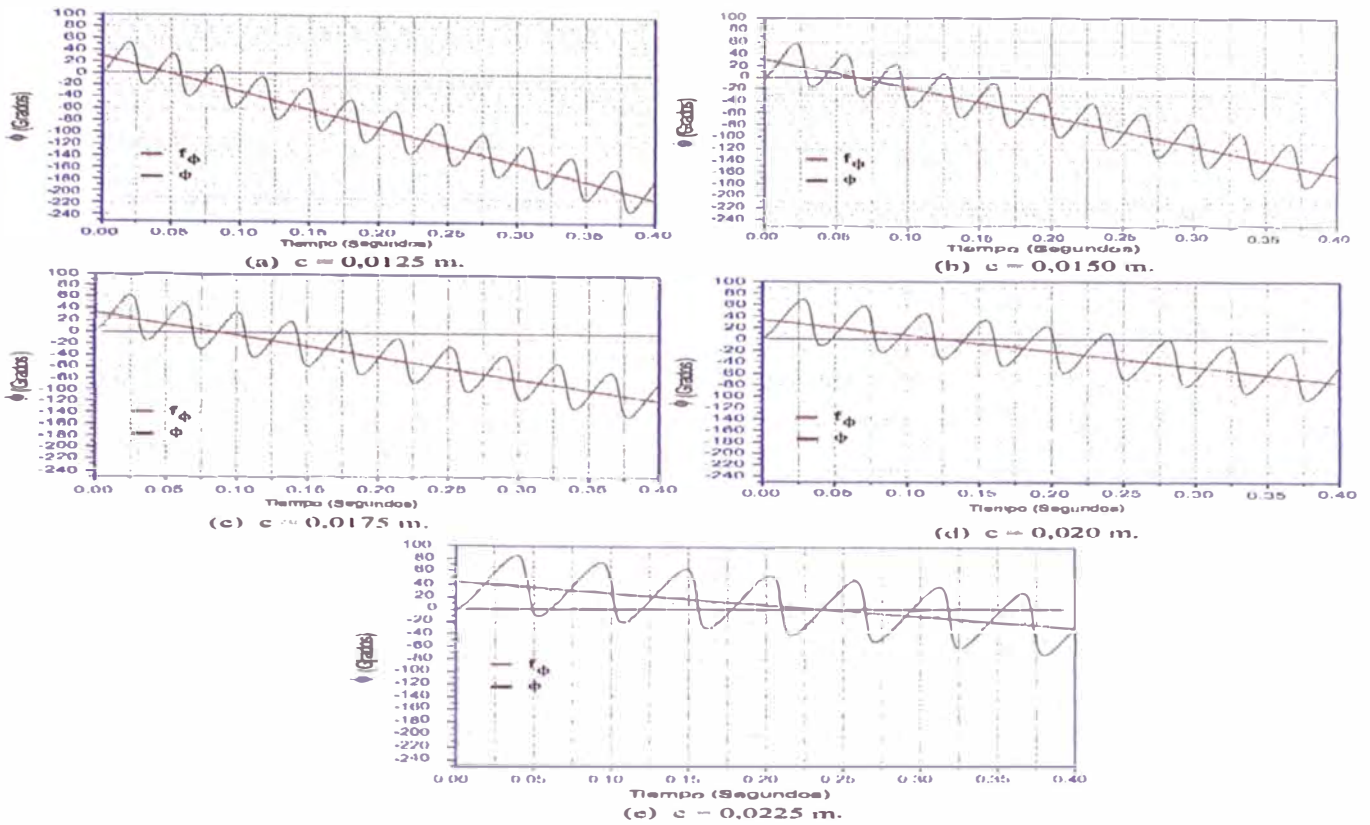


Figura 5.11: Comportamiento de  $\phi(t)$  conforme la condición inicial de  $c$  varia.

En la Fig.(5.11), se presenta los gráficos de la función  $\phi(t)$ , para un intervalo de  $-230^{\circ} \leq \phi \leq 100^{\circ}$  y un intervalo de tiempo,  $0 \leq t \leq 0,4$  seg.

Lo que se aprecia en la Fig.(5.11) son curvas oscilantes que descienden. Para medir cuanto desciende, se efectua, el ajuste de línea a la curva  $\phi(t)$ . Se obtiene la función lineal  $f_{\phi}$ . Con respecto a la recta  $f_{\phi}$ , hay oscilaciones periódica y ciertas amplitudes, que van creciendo. Esto lo podemos ver en el siguiente Cuadro(5.15).

Cuadro 5.15: Ajuste lineal de  $\phi(t)$ , conforme el parámetro  $c$  varia.

$c$ m	Ajuste lineal $f_{\phi} = A + B t$	Pendiente (B) Grados/segundo	$\angle$ de inclinación $\zeta$ Grados
0.0125	31,46744-599,93536 t	-599,93536	-89°54'16,19"
0.0150	32,50387-481,29850 t	-481,29850	-89°52'51,44"
0.0175	34,79657-375,58090 t	-375,58090	-89°50'50,81"
0.0200	37,69452-277,97817 t	-277,97817	-89°47'37,99"
0.0225	45,86155-186,83366 t	-186,83366	-89°41'36,01"

En el Cuadro(5.15) indicamos la función  $f_{\phi} = A + Bt$ . Se observa que la pendiente es negativa

y que a medida que el parámetro  $c$  se incrementa, el valor absoluto disminuye.

En la Fig.(5.12) se presenta las gráficas de la función  $\psi(t)$ , cuando  $c$  se incrementa. La función  $\psi$  se encuentra en un intervalo,  $0^0 \leq \psi \leq 3000^0$  y un intervalo de tiempo  $t$ , que varia entre los valores  $0 \leq t \leq 0,4$  seg. Aquí se aprecia una curva que tiene una forma oscilante ascendente y se puede definir (como para el caso de  $\phi$ ) un pseudo período.

Cuadro 5.16: Ajuste lineal de  $\psi(t)$ , conforme  $c$  varia.

$\dot{\psi}(0)$ Rev/seg.	Ajuste lineal $\psi = C + Dt$	Pendiente (D) Grados/segundo	$\angle$ de inclinación $\eta$ Grados
0,0125	$-31,35896+7197,05867 t$	7197,05867	$89^059'31,34''$
0,0150	$-32,38575+7079,79920 t$	7079,79920	$89^059'30,87''$
0,0175	$-34,66440+6975,95150 t$	6975,95150	$89^059'30,43''$
0,0200	$-37,54048+6880,63371 t$	6880,63371	$89^059'30,02''$
0,0225	$-45,65026+6795,38785 t$	6795,38785	$89^059'29,65''$

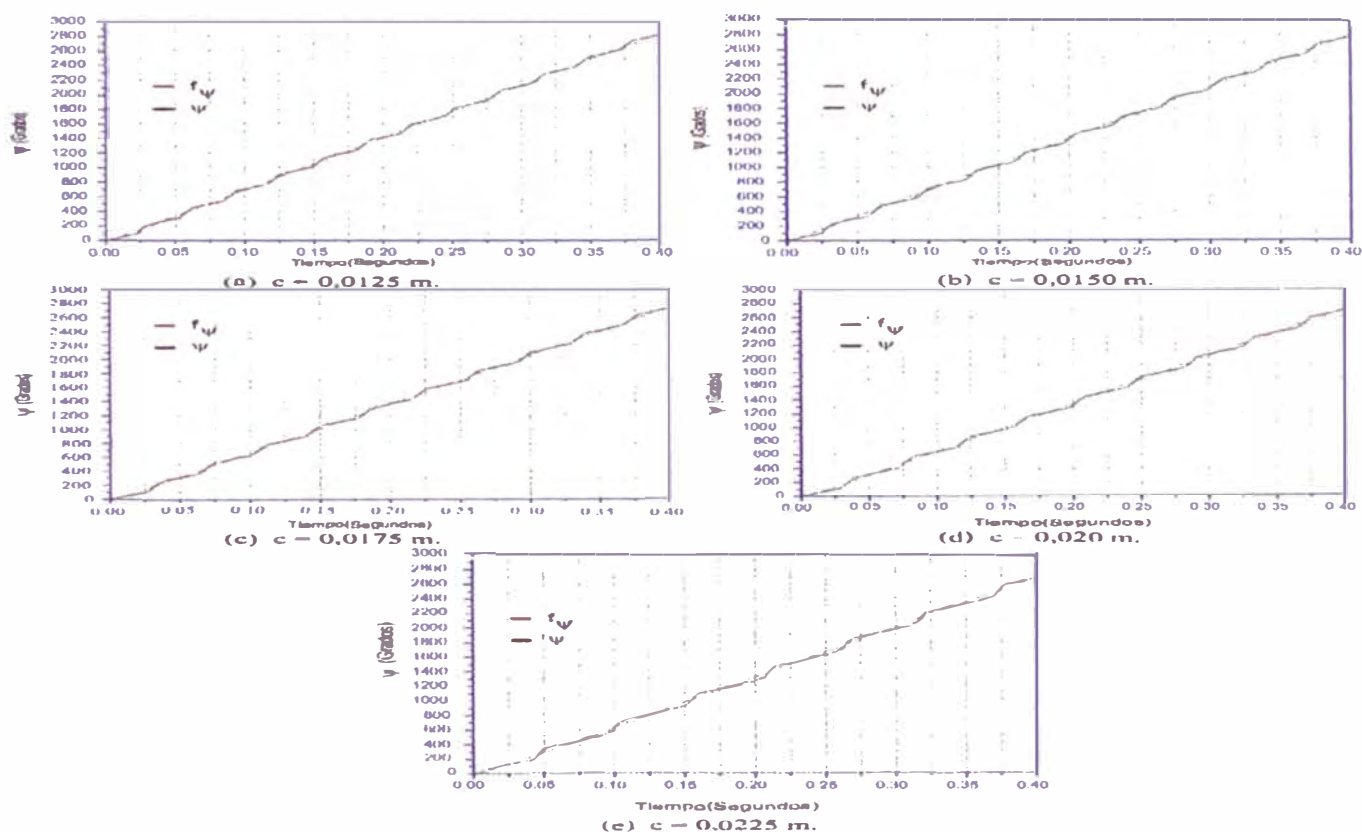


Figura 5.12: Comportamiento de  $\psi(t)$  conforme la condición inicial de  $c$  varia.

A la función  $\psi$  se aplica, un ajuste lineal ( $\psi$  vs  $t$ ), consiguiendo  $f_{\psi} = C + Dt$ . Esta recta pasa por el *medio* de la curva  $\psi$ . Esto permite observar que a medida que el parámetro  $c$  se

incrementa tanto el *seudo período* y la *amplitud*, de las curvas con respecto a la recta  $f_\psi$ , se incrementan. Además la derivada de la función  $\frac{df_\psi}{dt} = \tan\eta = D$ , siempre es positiva.

En el Cuadro(5.16) se indica los resultados del ajuste de curva, obteniendo la función  $f_\psi$ . Se observa, que la pendiente de la función  $f_\psi$  es positiva y que a medida que el parámetro  $c$  se incrementa, disminuye muy, pero muy lentamente.

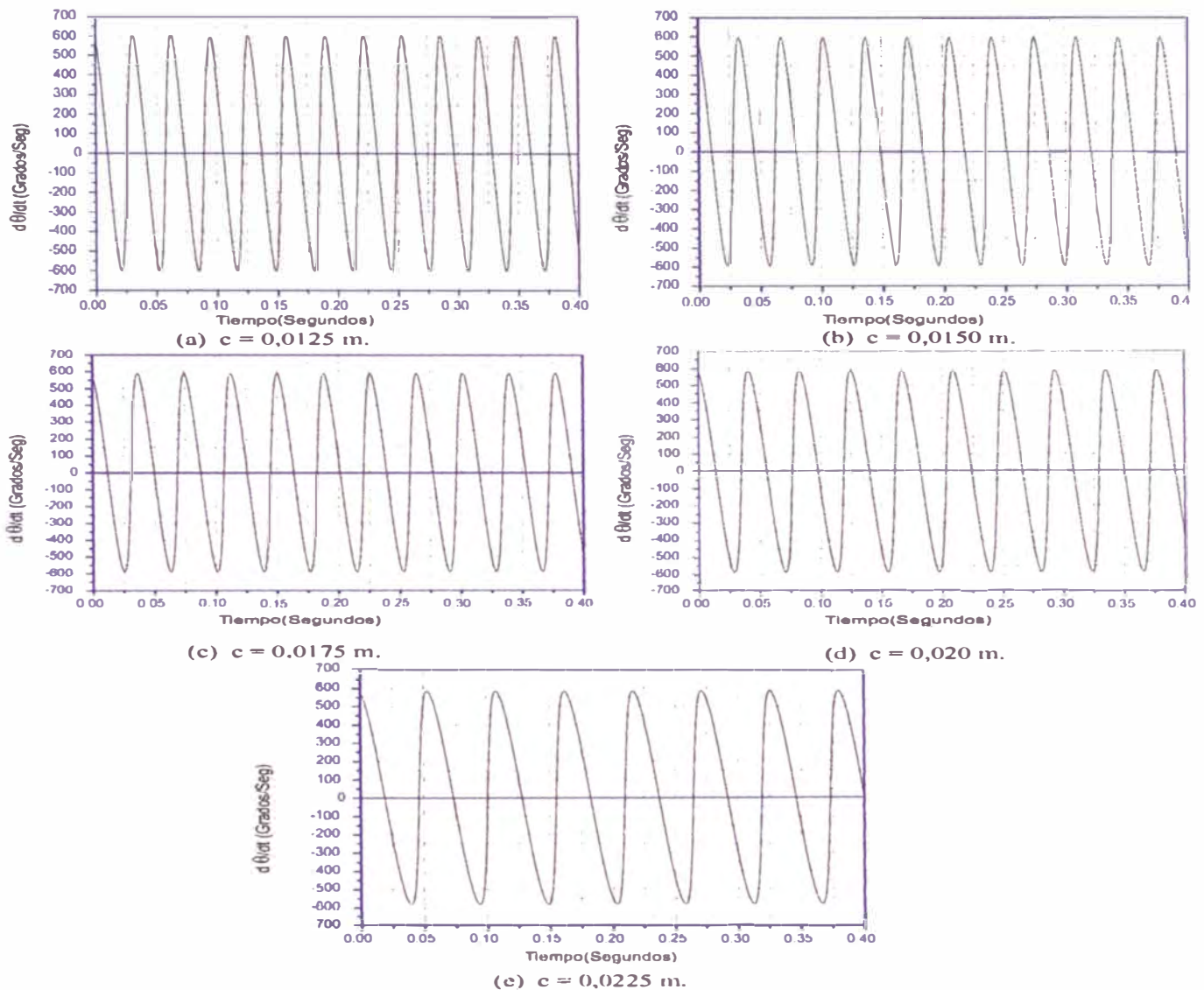


Figura 5.13: Comportamiento de  $\dot{\theta}(t)$  conforme la condición inicial de  $c$  varia.

En la Fig.(5.13) se muestra la función  $\dot{\theta}(t)$ , se aprecia, que son funciones periódicas, donde se nota valores máximos y mínimos. A medida que transcurre el tiempo, el período se va incrementando, pero su amplitud, casi no varia. La función  $\dot{\theta}(t)$ , se encuentra en el intervalo  $-700 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\theta} \leq 700 \text{ Grados/seg}$  y un intervalo de tiempo  $t$ ,  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ seg.}$ , para todos los casos .



En el Cuadro(5.17) se expone los incrementos de  $\Delta\dot{\theta}(t) \equiv \dot{\theta}(t)_{m\acute{a}x} - \dot{\theta}(t)_{m\acute{i}n}$ , conforme varia  $c$ . La variaci3n  $\Delta\theta(t)$ , se hace muy lenta y el per3odo se incrementa.

Cuadro 5.17: Valores extremales de  $\dot{\theta}$ , conforme  $c$  varia.

$c$ m	$\dot{\theta}_{m\acute{i}n}$ Grados/seg	$\dot{\theta}_{m\acute{a}x}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\theta}$ Grados/seg	Per3odo Segundos
0,0125	-601,6987	601,6987	1203,3974	0,03333
0.0150	-594,1187	594,1187	1188,2374	0,03541
0,0175	-589,0438	589,0438	1178,0876	0,03750
0.0200	-585,4800	585,4800	1170,9600	0,04375
0,0225	-582,8693	582,8693	1165,7386	0,05625

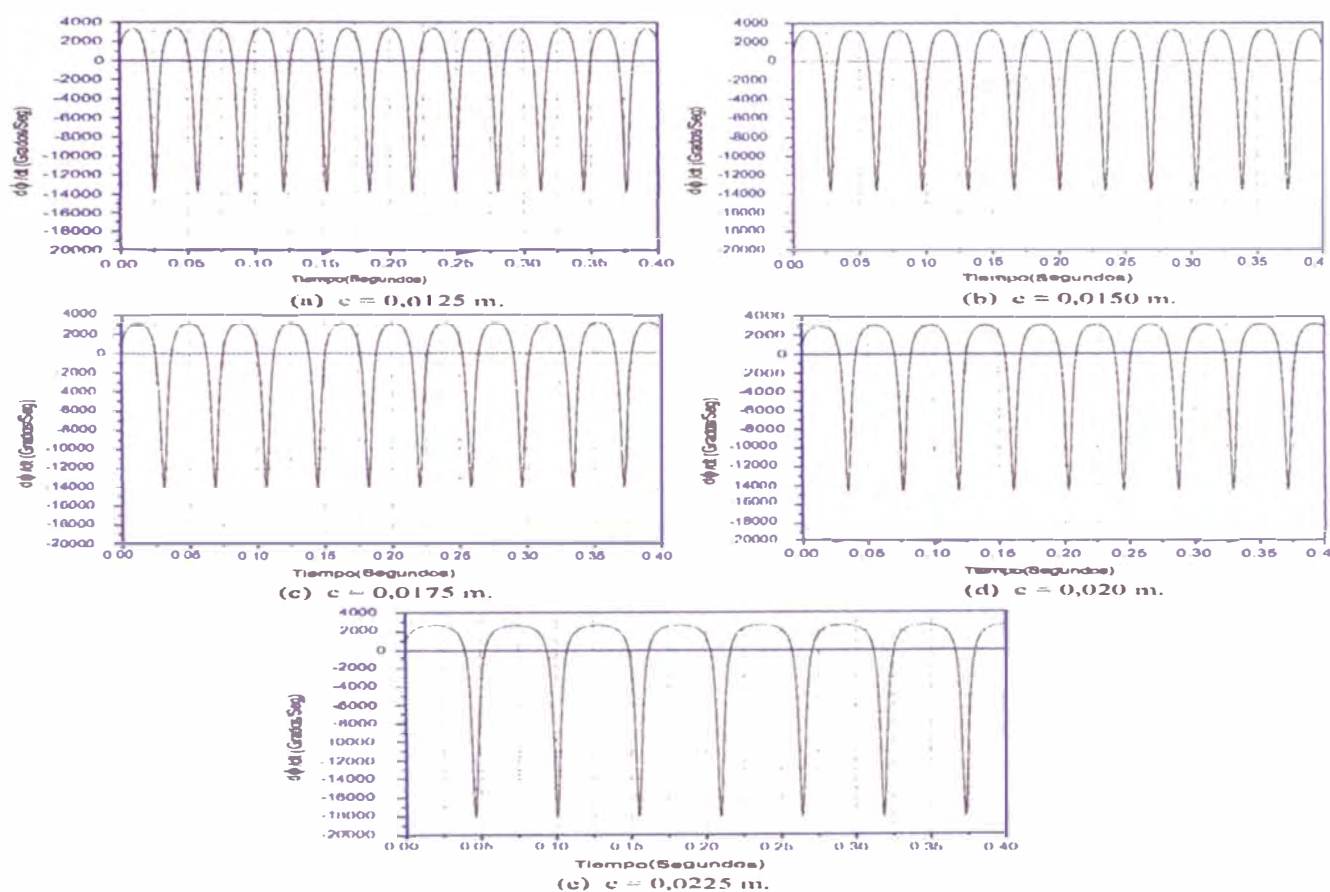


Figura 5.14: Comportamiento de  $\dot{\phi}(t)$  conforme la condici3n inicial de  $c$  varia.

Se tiene las Figuras (5.14) y (5.15) donde se muestran las funciones de  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ , cuando  $c$  varia. Las funciones son peri3dicas, aunque muestran ciertos m3nimos agudos para  $\dot{\phi}(t)$  y m3ximos agudos, para  $\dot{\psi}(t)$ . La funci3n  $\dot{\phi}(t)$ , se encuentra en el intervalo  $-20000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\phi} \leq 4000 \text{ Grados/seg}$ . y  $\dot{\psi}(t)$  se encuentra en el intervalo  $2000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\psi} \leq 26000 \text{ Grados/seg}$ , ambos tienen un intervalo de tiempo  $t$ , de  $0 \leq t \leq 0,4 \text{ seg}$ . Se puede notar que las funciones

tienen un período que va incrementando, a medida que el parámetro  $c$  aumenta. Se nota de los cuadros, que el período ( $T$ ) de las funciones  $\theta$ ,  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  son iguales.

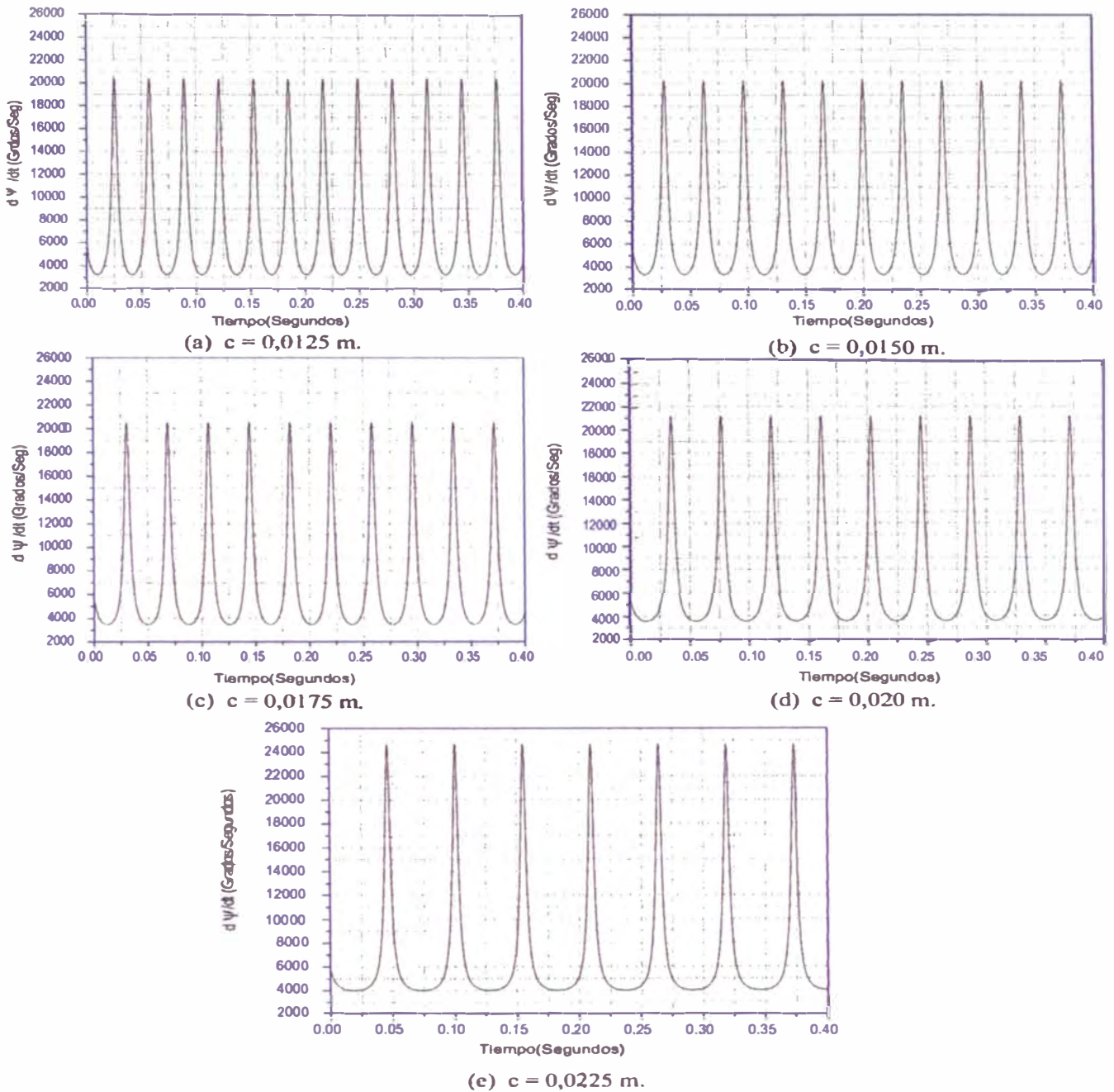


Figura 5.15: Comportamiento de  $\dot{\psi}(t)$  conforme la condición inicial de  $c$  varia.

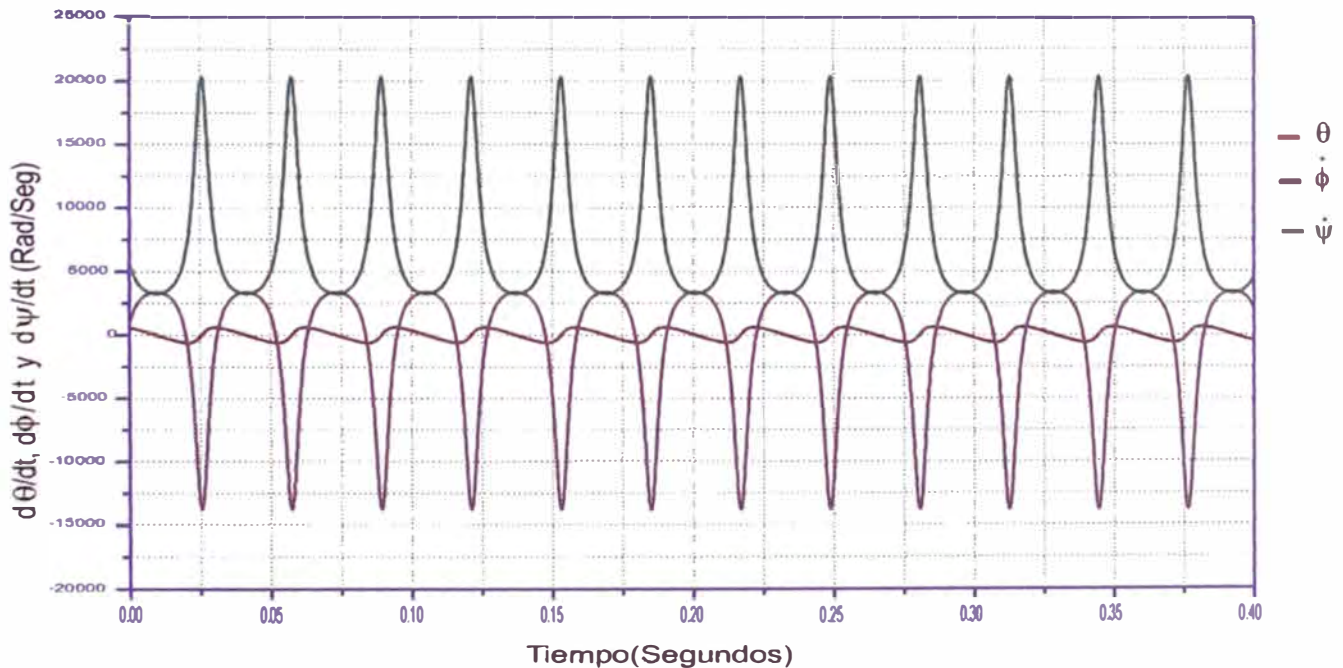
A partir de las Figuras (5.14), (5.15) y la base de datos se construyeron las Cuadros (5.18) y (5.19). Los períodos de  $\dot{\phi}(t)$  y  $\dot{\psi}(t)$ , se incrementan a medida que el parámetro  $c$  se incrementa. Las variaciones  $\Delta\dot{\phi}(t) \equiv \dot{\phi}(t)_{m\acute{a}x} - \dot{\phi}(t)_{m\acute{i}n}$  y  $\Delta\dot{\psi}(t) \equiv \dot{\psi}(t)_{m\acute{a}x} - \dot{\psi}(t)_{m\acute{i}n}$ .

Cuadro 5.18: Variaciones de  $\dot{\phi}$ , conforme el parámetro  $c$  varia.

$c$ m	$\dot{\phi}_{min}$ Grados/seg	$\dot{\phi}_{máx}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\phi}$ Grados/seg	Período Segundos
0,0125	-13773,2000	3373,6890	17146,8890	0,03333
0,0150	-13660,6800	3269,9450	16930,6250	0,03541
0,0175	-13960,9900	3156,9310	17117,9210	0,03750
0,020	-14597,9000	3030,9330	17628,8330	0,04375
0,0225	-18084,1800	2624,1320	20708,3120	0,05625

Cuadro 5.19: Variaciones de  $\dot{\psi}$ , conforme el parámetro  $c$  varia.

$c$ m	$\dot{\psi}_{min}$ Grados/seg	$\dot{\psi}_{máx}$ Grados/seg	$\Delta\dot{\psi}$ Grados/seg	Período Segundos
0,0125	3249,9940	20342,0400	17092,0460	0,03333
0,0150	3355,7900	20230,7800	16874,9900	0,03541
0,0175	3471,6890	20532,2900	17060,6010	0,03750
0,020	3601,4050	21170,3300	17568,9250	0,04375
0,0225	4017,5690	24659,3300	20641,7610	0,05625

Figura 5.16: Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando  $c=0,0125m$ .



En la Fig.(5.16) mostramos las derivadas de los ángulos de Euler superpuestos, para  $c=0,0125m$ . Aparecen curvas simétricas esto ocurre porque el período es común.

En las Fig.(5.17) se muestra las gráficas de la Energía vs el tiempo, cuando el parámetro  $c$  se incrementa. Se puede observar que hay pequeñas oscilaciones. Pero estas son muy insignificantes pues siempre en el *cálculo numérico* adolece de un margen de error. No obstante en el Cuadro (5.20) el porcentaje de error disminuye conforme  $c$  se incrementa. Esto nos garantiza que los resultados son satisfactorios, porque el porcentaje de error es pequeño (menor que el 1%).

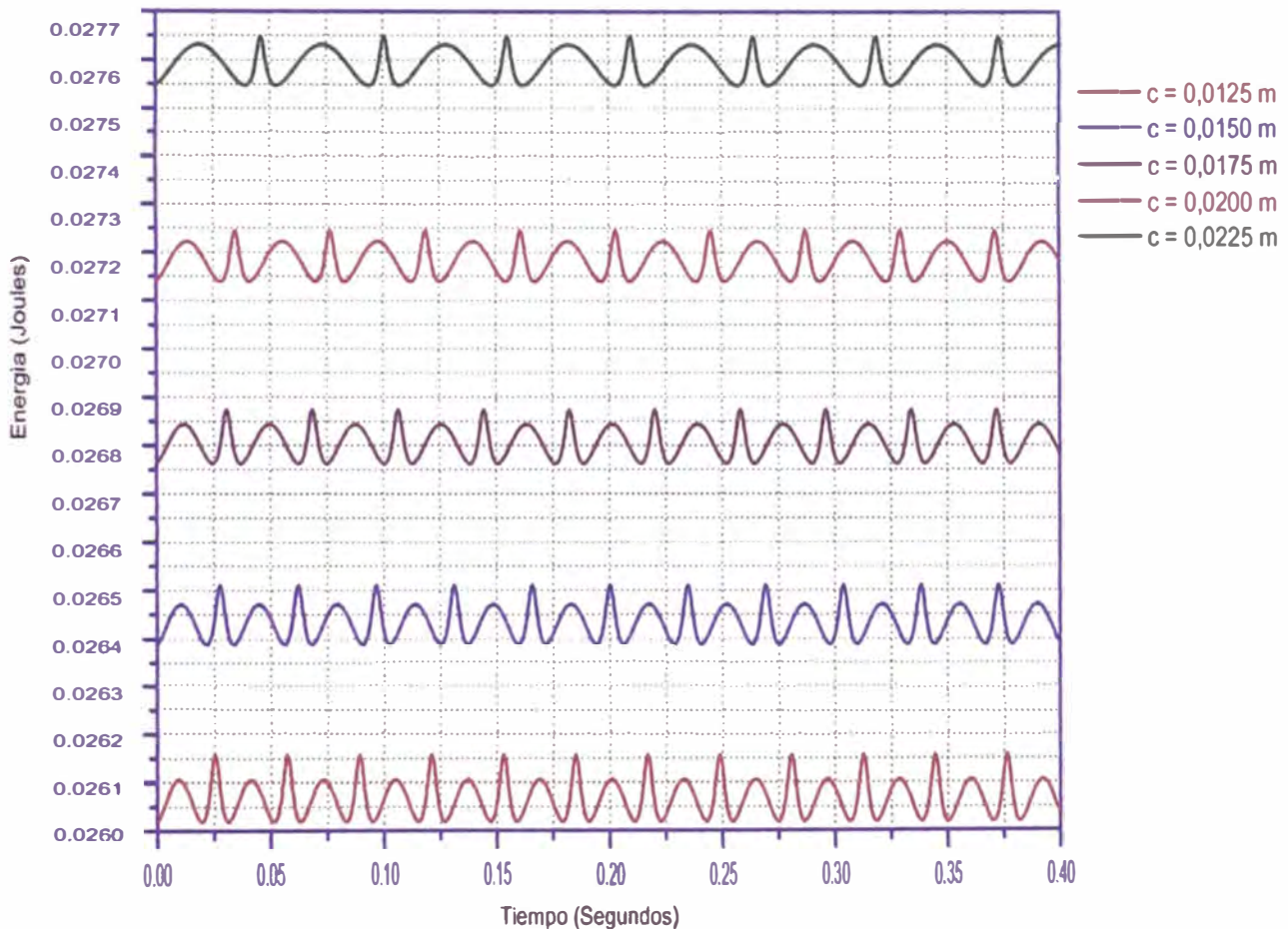


Figura 5.17: Comportamiento de Energía conforme la condición inicial de  $c$  varia.



Cuadro 5.20: Variaciones de la Energía, conforme el parámetro  $c$  varia.

$c$ m	$E_{min}$ Joules	$E_{máx}$ Joules	$\Delta E$ Joules	$\bar{E}$ Joules	% Error Joules
0,0125	0,02602	0,02616	0,00014	$0,0260700 \pm 0,0000005$	0,536 %
0,0150	0,02639	0,02651	0,00012	$0,0264300 \pm 0,0000005$	0,453 %
0,0175	0,02676	0,02687	0,00011	$0,0268100 \pm 0,0000005$	0,410 %
0,0200	0,02714	0,02724	0,00010	$0,0271800 \pm 0,0000005$	0,367 %
0,0225	0,02755	0,02765	0,00010	$0,0275900 \pm 0,0000005$	0,362 %

### 5.3. SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO CON FRICCIÓN POR DESLIZAMIENTO

En el capítulo 3 se determinó las EDO de movimiento de un elipsoide cuando actúa la fricción por deslizamiento sobre la superficie plana donde se mueve.

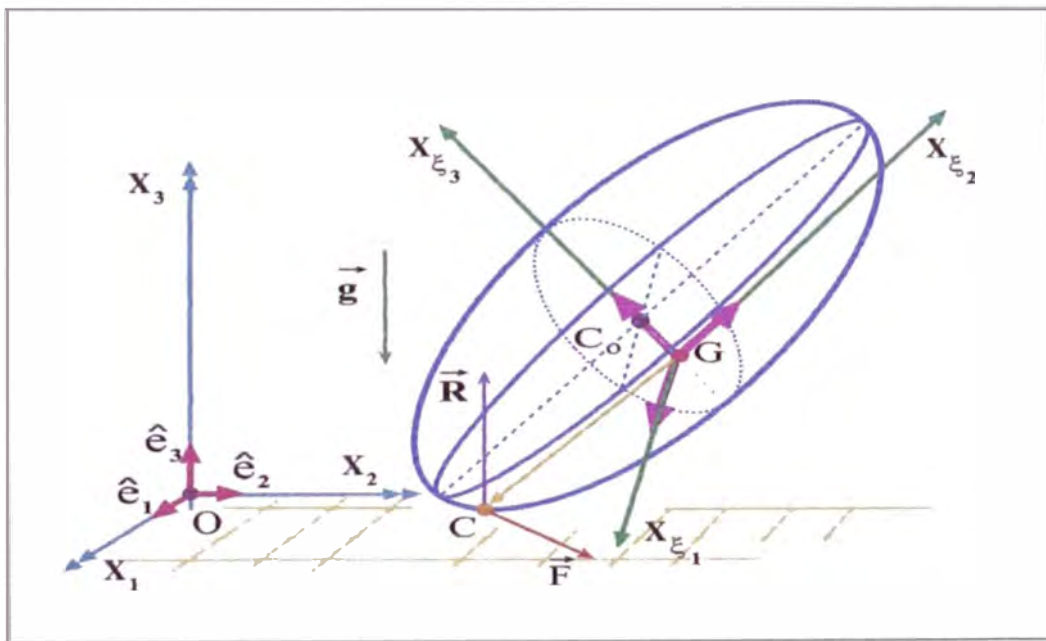


Figura 5.18: Fuerzas que originan torque en el elipsoide no homogéneo

Recordemos que las EDO no lineales y acopladas son

$$\ddot{\theta} \left\{ 1 - mH \left( C - \frac{\mu}{|\vec{v}_C|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C\xi_3} \right. \right. \right.$$

$$- \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \Bigg) \Bigg\} =$$

$$\left\{ m \mathbb{F} \left( \mathbb{C} - \frac{\mu}{|\vec{v}_c|} \left\{ \left( \frac{-a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_3}} - \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_2}} \right\} \right) \right. \\ \left. - l_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta - (l_3 - 1) \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \right\} , \quad (5.22)$$

$$l \ddot{\phi} \sin \theta = - \left\{ \frac{\mu m (\mathbb{F} + \ddot{\theta} \mathbb{H})}{|\vec{v}_c|} \right\} \left\{ \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) v_{C_{\xi_1}} \right\} \\ - (2l - l_3) \dot{\phi} \dot{\theta} \cos \theta + l_3 \dot{\theta} \dot{\psi} , \quad (5.23)$$

$$\ddot{\psi} = - \left\{ m \mu \left( \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right. \right. \\ \left. \left. \left\{ (2 \cos^2 \theta - 1) - (a^2 - c^2) \left( \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right)^2 \right\} \right. \right. \\ \left. \left. + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos \theta \right) + \ddot{\theta} \left[ \sin \theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right) \\ \left. / \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos \phi + \dot{x}_{G_2} \sin \phi \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \dot{\phi} \sin \theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \left( \frac{a^2 \sin \theta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right) \right\}^2 \right] \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \\
& + \left\{ \text{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \cos\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}} \\
& \left\{ \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \left\{ \dot{x}_{G_1} \cos\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\} \right\} - \ddot{\phi} \cos\theta + \dot{\phi} \dot{\theta} \text{sen}\theta. \tag{5.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{G_1} & = - \left\{ m\mu \left( \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \left\{ (2 \cos^2\theta - 1) \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen}\theta \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right)^2 \right\} + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \cos\theta \right) \right. \\
& \left. + \ddot{\theta} \left[ \text{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right) \\
& / \left( \left[ \left[ \dot{x}_{G_1} \cos\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) + (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos\theta) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \cos\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \cos\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \cos\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \cos^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \text{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{cos}\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \left. \right]^{\frac{1}{2}} \Bigg) \\
& \left( + \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi} \text{sen}\theta \text{cos}\phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right. \\
& + \text{cos}\phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\phi \right) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \\
& \left. + \dot{\theta} \text{sen}\phi \text{cos}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) - \dot{\theta} \text{sen}\phi \text{sen}\theta \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right). \tag{5.25}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_{G_2} = & - \left\{ m \mu \left( \left( g + \frac{(a^2 - c^2) \dot{\theta}^2}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \left\{ (2 \text{cos}^2\theta - 1) - \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. (a^2 - c^2) \left( \frac{\text{sen}\theta \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right)^2 \right\} + \mathcal{D}_2 \dot{\theta}^2 \text{cos}\theta \right) \right. \\
& \left. + \ddot{\theta} \left[ \text{sen}\theta \left\{ \left( \frac{(a^2 - c^2) \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) + \mathcal{D}_2 \right\} \right] \right) / \left( \left[ \left\{ \dot{x}_{G_1} \text{cos}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{sen}\phi \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \dot{\phi} \text{sen}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) + \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\phi \right) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \right. \right. \\
& \left. \left. + \left\{ \text{cos}\theta (-\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi + \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{sen}\theta - \dot{\theta} \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \text{sen}\theta (\dot{x}_{G_1} \text{sen}\phi - \dot{x}_{G_2} \text{cos}\phi) + \dot{x}_{G_3} \text{cos}\theta - \dot{\theta} \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right\}^2 \Bigg]^{\frac{1}{2}} \Bigg\} \\
& \left( \dot{x}_{G_2} + \dot{\phi} \text{sen}\theta \text{sen}\phi \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right. \\
& + \text{sen}\phi \left( \dot{\psi} + \dot{\phi} \text{cos}\phi \right) \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \\
& \left. - \dot{\theta} \text{cos}\phi \text{cos}\theta \left( \mathcal{D}_2 - \frac{c^2 \text{cos}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) - \dot{\theta} \text{cos}\phi \text{sen}\theta \left( \frac{a^2 \text{sen}\theta}{\sqrt{a^2 \text{sen}^2\theta + c^2 \text{cos}^2\theta}} \right) \right). \tag{5.26}
\end{aligned}$$

donde  $\dot{x}_{G_k}$  son las velocidades del centro geométrico. Además  $x_{G_3}$ , ya se conoce, (p 77, capítulo II).

### 5.3.1. ALGORITMO

Se empleo el método numérico de Runge Kutta para resolver las soluciones a las EDO no lineales y acopladas. Para resolverlas previamente, fue necesario realizar un cambio de variable para obtener 10 EDO de 1 Grado.

Para ello definimos las funciones  $X(k)$

$$X(1) = \theta, \tag{5.27}$$

$$X(2) = \phi, \tag{5.28}$$

$$X(3) = \psi, \tag{5.29}$$

$$X(4) = x, \tag{5.30}$$

$$X(5) = y, \tag{5.31}$$

$$X(6) = \dot{\theta}, \quad (5.32)$$

$$X(7) = \dot{\phi}, \quad (5.33)$$

$$X(8) = \dot{\psi}, \quad (5.34)$$

$$X(9) = \dot{x}, \quad (5.35)$$

$$X(10) = \dot{y}. \quad (5.36)$$

Ahora derivamos las funciones  $X(k)$

$$\dot{X}(1) = \dot{\theta}, \quad (5.37)$$

$$\dot{X}(2) = \dot{\phi}, \quad (5.38)$$

$$\dot{X}(3) = \dot{\psi}, \quad (5.39)$$

$$\dot{X}(4) = \dot{x}, \quad (5.40)$$

$$\dot{X}(5) = \dot{y}, \quad (5.41)$$

$$\dot{X}(6) = \ddot{\theta}, \quad (5.42)$$

$$\dot{X}(7) = \ddot{\phi}, \quad (5.43)$$

$$\dot{X}(8) = \ddot{\psi}, \quad (5.44)$$

$$\dot{X}(9) = \ddot{x}, \quad (5.45)$$

$$\dot{X}(10) = \ddot{y}. \quad (5.46)$$

Con este cambio de variables de las ecuaciones del (5.37) al (5.46), se obtiene las 10 EDO de 1<sup>er</sup> grado, de la forma

$$\dot{X}(k) = F(X(l)), \quad k, l = 1, 2, \dots, 10. \quad (5.47)$$

son estas las EDO que serán resueltas numéricamente empleando el método de Runge Kutta.

### 5.3.2. RESULTADOS

Con las EDO ya obtenidas se aplicó un programa en Fortran 90, para ciertos casos, los cuales serán analizados, obteniendo una base de datos con el cual se graficará y realizará cuadros, para ver como es el movimiento del elipsoide no homogéneo, cuando esta sometido a la fricción por deslizamiento.

Para el movimiento del elipsoide con fricción por deslizamiento, se consideraron dos casos

- A) VARIACIÓN DEL PARÁMETRO  $c$ .
- B) VARIACIÓN COEFICIENTE DE FRICCIÓN  $\mu$ .

#### CASO A: VARIACIÓN DEL PARÁMETRO $c$ .

Para este caso el parámetro  $c$  varia, se tomará en cuenta 5 valores. Esto nos ayudará a ver como seria el movimiento del elipsoide no homogéneo con fricción por deslizamiento, para diferentes dimensiones del cuerpo rígido.

Las condiciones iniciales y parámetros utilizados para resolver las EDO, se muestran en los Cuadros (5.21) y (5.22).

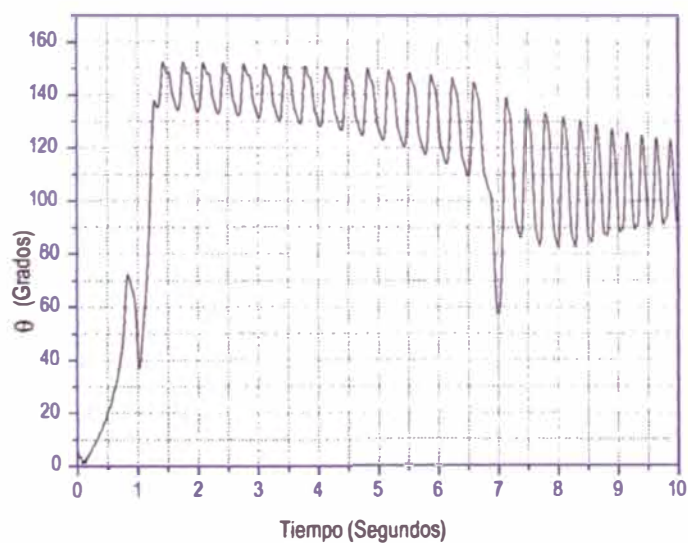
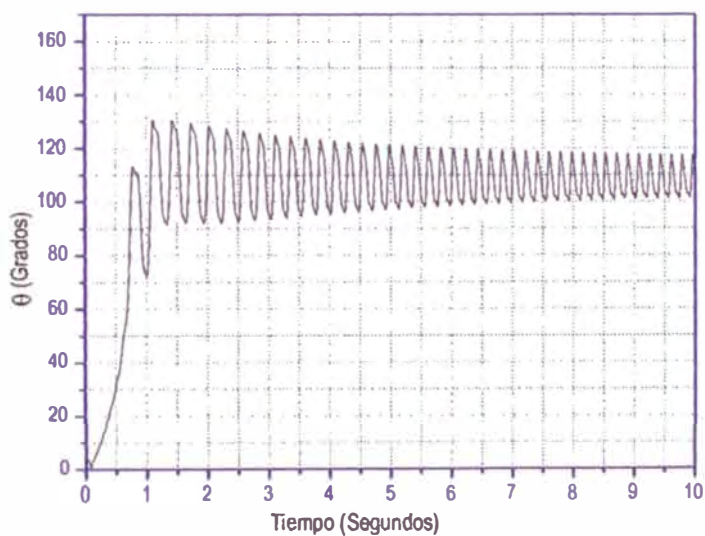
Para aplicar el programa se considero un tiempo mayor (10 seg), a diferencia del caso sin fricción (0,4 seg), pues los cambios son muy sobresalientes para este caso, y se puede observar mejor, a mayor tiempo posible.

Cuadro 5.21: Condiciones iniciales para este caso.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales
$\theta$	Theta	$0,1\text{rad} = 5^{\circ}3'46,48''$
$\phi$	Phi	0
$\psi$	Psi	0
x	Coordenada X	0
y	Coordenada Y	0
$\dot{\theta}$	Derivada temporal de $\theta$	0
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de $\phi$	0
$\dot{\psi}$	Derivada temporal de $\psi$	100 rad/seg=15,9154 rev/seg
$\dot{x}$	Derivada temporal de X	0
$\dot{y}$	Derivada temporal de Y	0

Cuadro 5.22: Parámetro.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales	Unidad
a	Eje mayor del elipsoide	0,025	m.
$I = I_3$	Momento de inercia del elipsoide	0,00000375	Kg.m <sup>2</sup>
$D_2$	Distancia de $C_0$ a G	0,005	m.
g	Aceleración de la gravedad de la tierra	9,8	( $\frac{m}{s^2}$ )
m	Masa	0,015	Kg.
$\mu$	Coefficiente de fricción	0,3	

(a)  $c = 0,0125$  m.(b)  $c = 0,0150$  m.Figura 5.19: Variaciones de  $\theta$ , cuando  $c$  varía.



° En la Fig.(5.19), se muestra las funciones de  $\theta(t)$ , cuando  $c$  varia, en Fig(5.19a)  $c = 0,0125$  m. y en Fig(5.19 b)  $c = 0,0150$  m. El máximo valor que alcanza  $\theta(t)$  en a) es de  $150^{\circ}$ , aproximadamente de allí en adelante, tiene oscilaciones que se incrementan para luego tener una pequeña caída. Luego, tiene un movimiento amortiguado. En la Fig (5.19b) su máximo valor esta en  $130^{\circ}$ , su curva es semejante a un movimiento amortiguado.

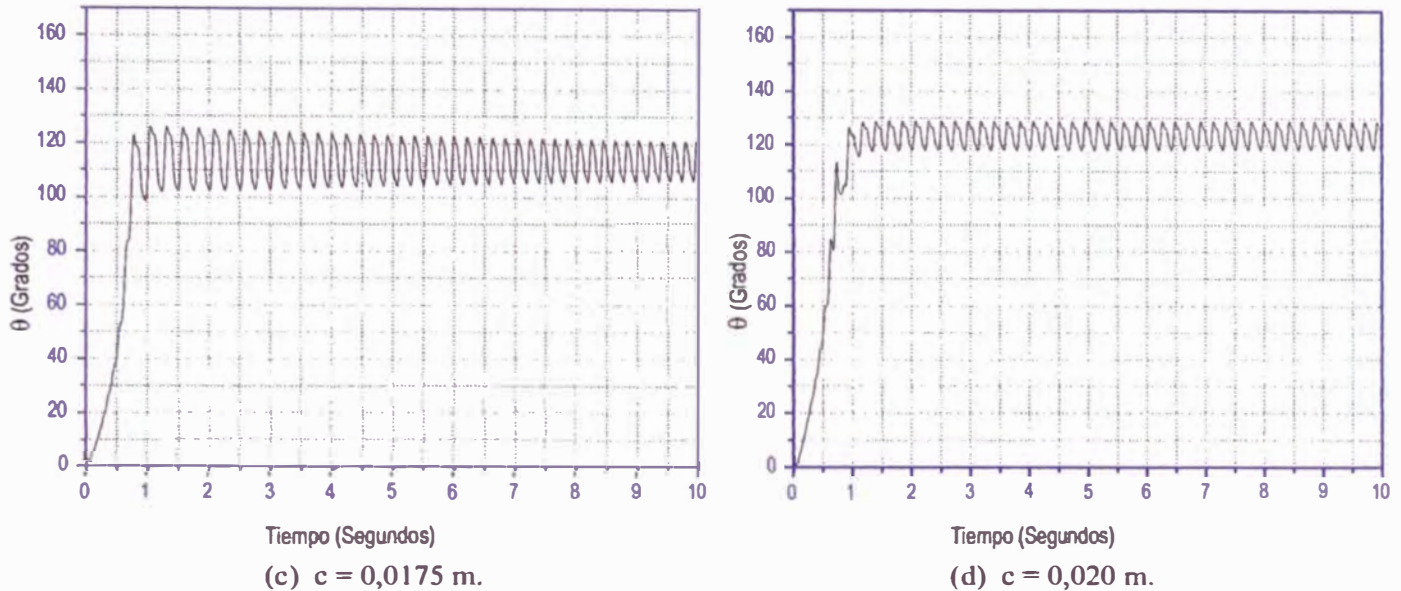


Figura 5.20: Variaciones de  $\theta$ , cuando  $c$  varia.

En la Fig(5.20 c y d) se muestra los gráficas de  $\theta(t)$  para  $c=0,0175$  m y  $c=0,0200$  m, ambos casos alcanzan un máximo en  $\theta \approx 130^{\circ}$ , para un tiempo  $t=0,75$  seg. El intervalo de tiempo, tomado en cuenta, es de  $0 \leq t \leq 10$  seg. Cabe señalar que ambos casos se van amortiguando las oscilaciones.

En la Fig.(5.21) la función  $\theta(t)$  mantiene un valor máximo, en  $150^{\circ}$ , aproximadamente y a partir de los 3,5 seg sus oscilaciones son casi periódicas. También, se aprecia en la figura un aumento de la gráfica de la parte inicial entre  $0 \leq t \leq 2$ seg, debido a la escala del gráfico parecería un manchón, pero son pequeñas oscilaciones, como se observa, en la ampliación mostrada en la figura.

A partir de las Fig.(5.22) en adelante se muestran dos casos por función, pues las demás son semejantes y se evita, un número excesivo de páginas. En la Fig(5.22), se observa los gráficos de  $\phi(t)$ , al transcurrir el tiempo, cuando  $c$  varia desde Fig(5.22a)  $c=0,0125$ m y la Fig(5.22b)  $c=0,0225$ m, solamente se muestran estos casos a manera de ejemplo. Se observa que la Fig(5.22b) parece una ampliación de la Fig(5.22a). En la Fig (5.22a) que la función es

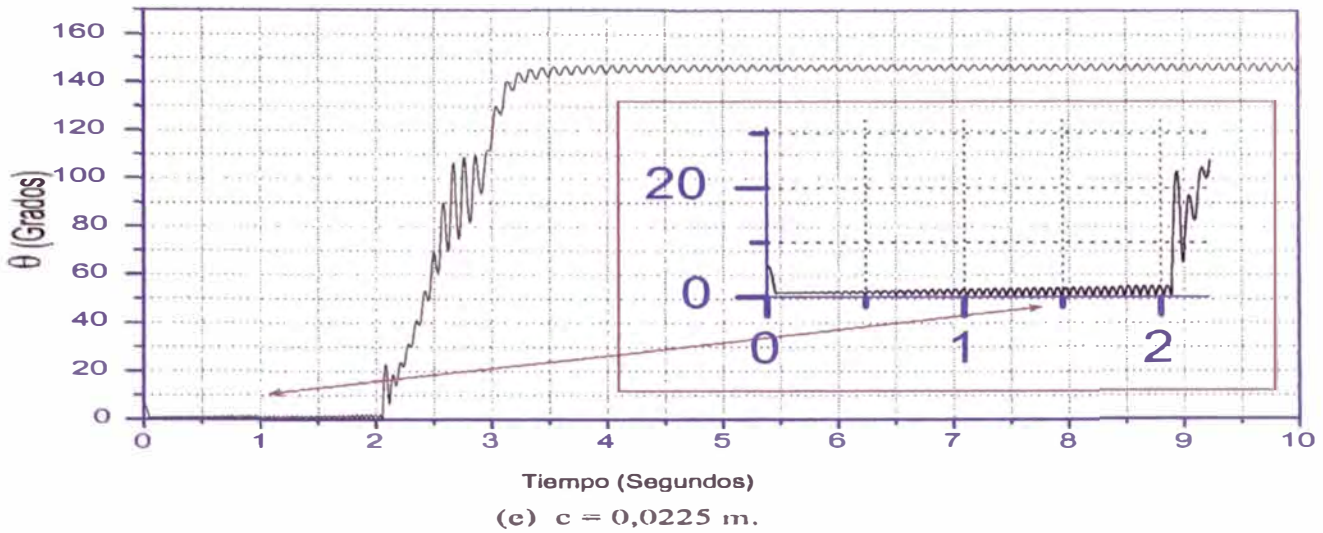


Figura 5.21: Variaciones de  $\theta$ , cuando  $c$  varia.

creciente de 0 a 1 seg y luego de alli crece rápidamente. Mientras en (5.22b) la curva crece rápidamente de 0 a 2 seg. El rango de la función  $\phi(t)$ , esta entre  $0^0 \leq \phi \leq 5000^0$ .

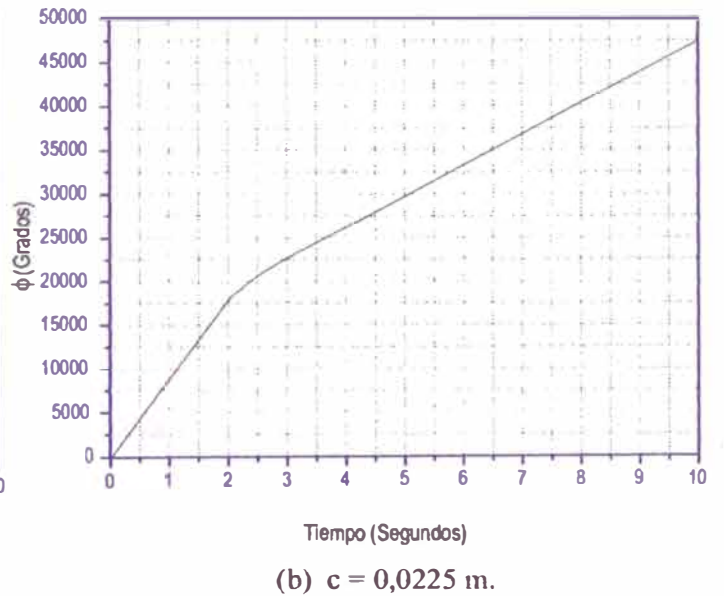
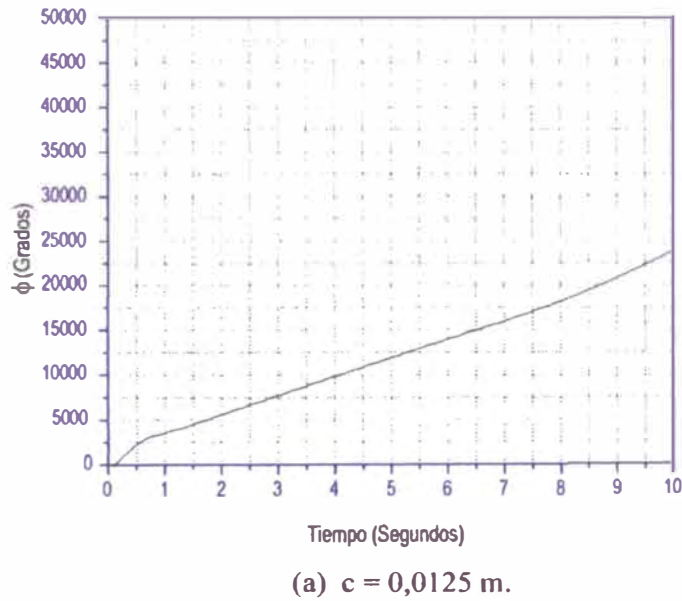
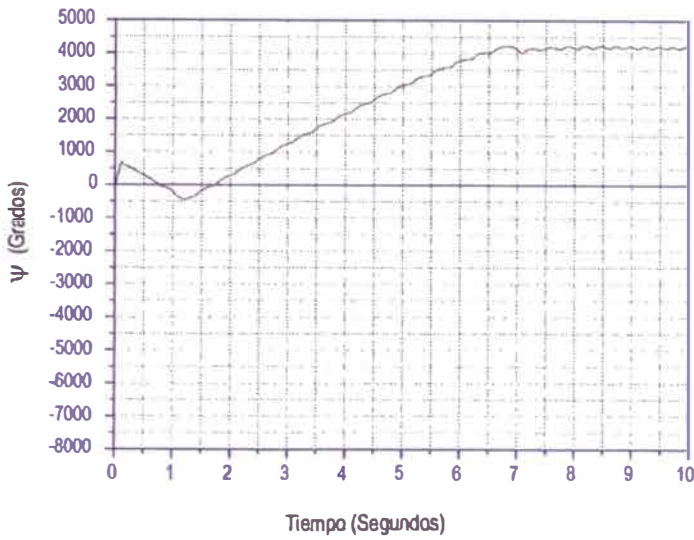
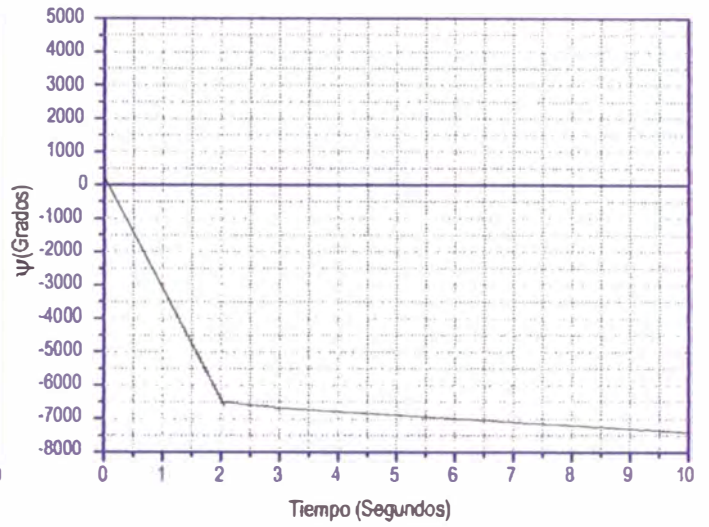
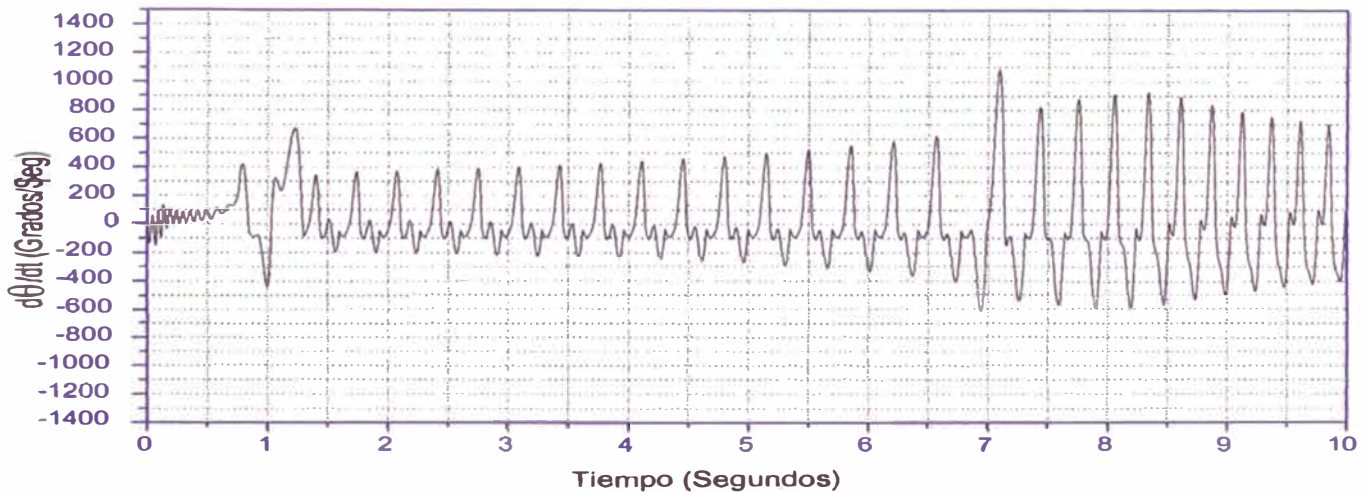


Figura 5.22: Gráficos de  $\phi$ , para 2 valores de  $c$ .

En la Fig(5.23) se expone los gráficos de la función  $\psi$ , cuando varia  $-8000^0 \leq \psi \leq 5000^0$ . Ambas curvas no tienen semejanza alguna. Mientras en a) la función es siempre positiva, despues de un cierto instante, en b) es siempre negativa, casi a partir de  $t > 0$ .

En las figuras (5.24) y (5.25), se gráfica  $\dot{\theta}(t)$  para un intervalo de  $-1400 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\theta} \leq 1400 \text{ Grados/seg}$  y un tiempo  $t \in [0, 10]$  seg. La función  $\dot{\theta}(t)$  muestra oscilaciones en ambos casos, y en la Fig(5.25) entre 0 y 3 seg da fuertes *cambios*, pero todas son oscilaciones con períodos muy

(a)  $c = 0,0125$  m.(b)  $c = 0,0225$  m.Figura 5.23: Gráficos de  $\psi$ , para 2 valores de  $c$ .(a)  $c = 0,0125$  m.Figura 5.24: Gráficos de la función  $\dot{\theta}$ , cuando  $c$  varía.



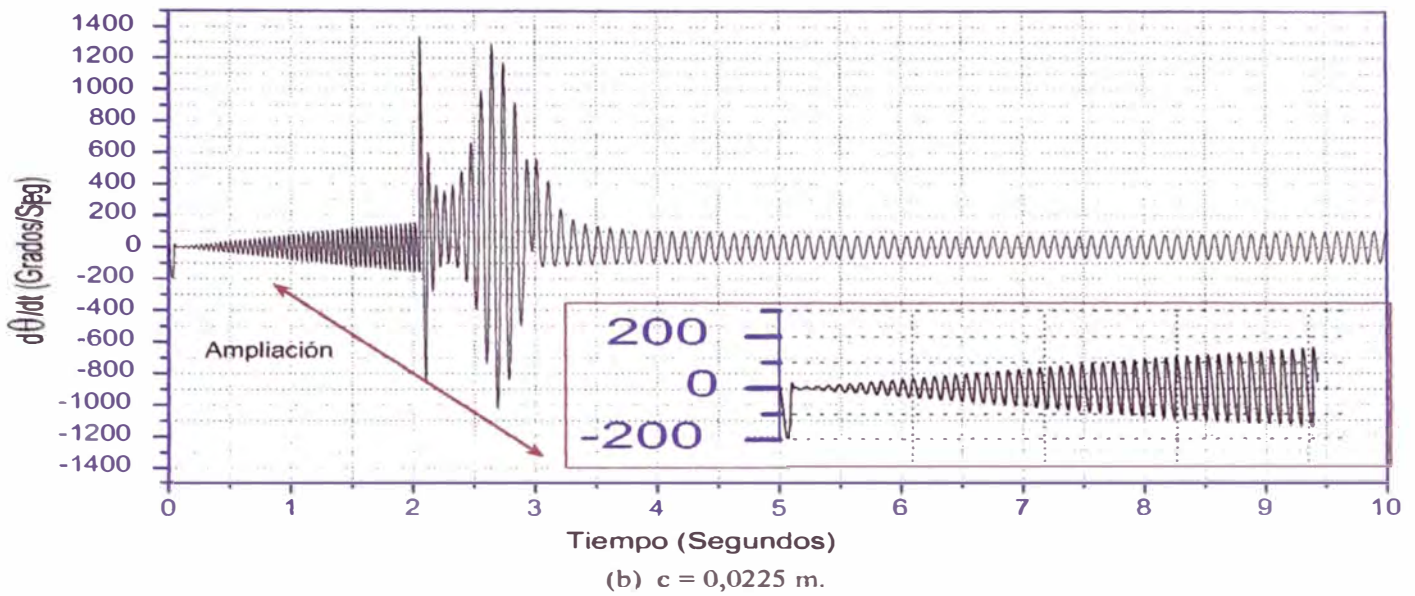


Figura 5.25: Gráficos de la función  $\dot{\theta}$ , cuando  $c$  varía.

pequeños. Luego de 3 seg las oscilaciones tienen casi la misma amplitud. En la Fig.(5.25) se muestra una ampliación entre 0 y 2 segundos, para mostrar que son oscilaciones con pequeños períodos, que van incrementando su amplitud.

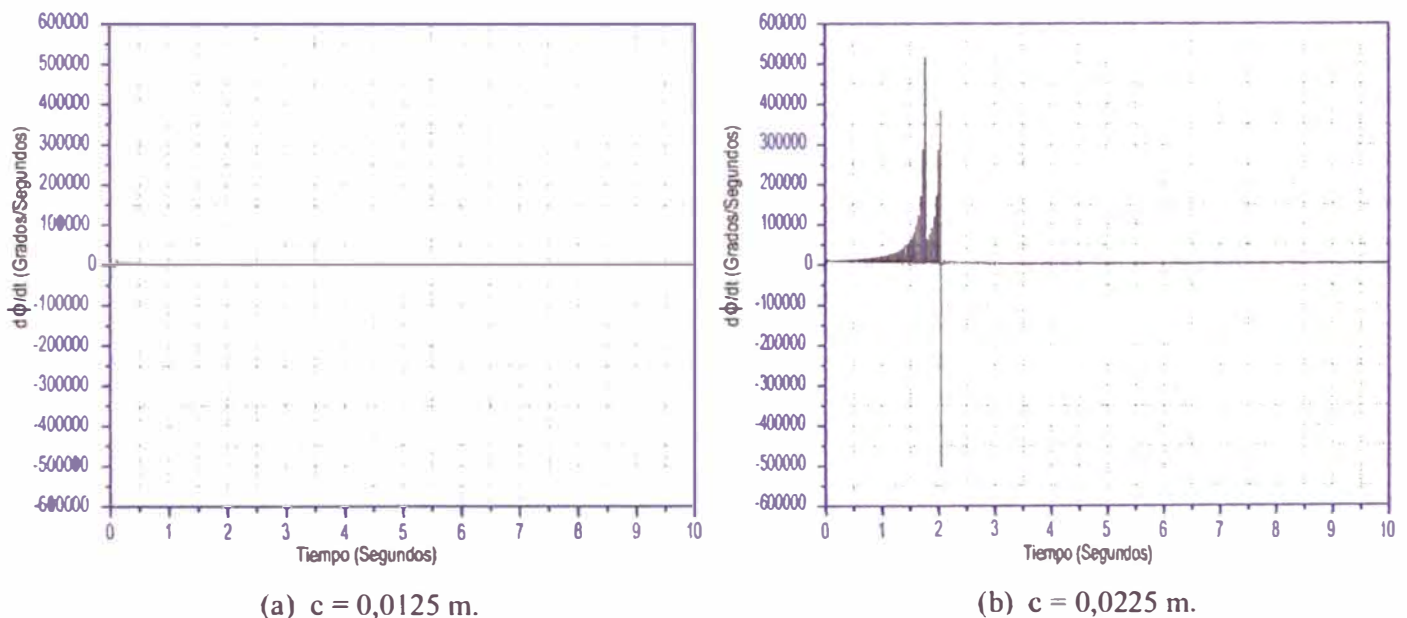


Figura 5.26: Gráficos de la función  $\dot{\phi}$ , cuando  $c$  varía.

En la Fig.(5.26 a y b) indicamos las gráficas de la función de  $\dot{\phi}(t)$ , para un intervalo  $-600000$  Grados/seg  $\leq \dot{\phi} \leq 600000$  Grados/seg. en a) la curva parece constante y en b) tiene cambios en las oscilaciones pero siempre con  $\dot{\phi} > 0$ , en el intervalo de 0 a 2 seg y de allí, es casi constante.

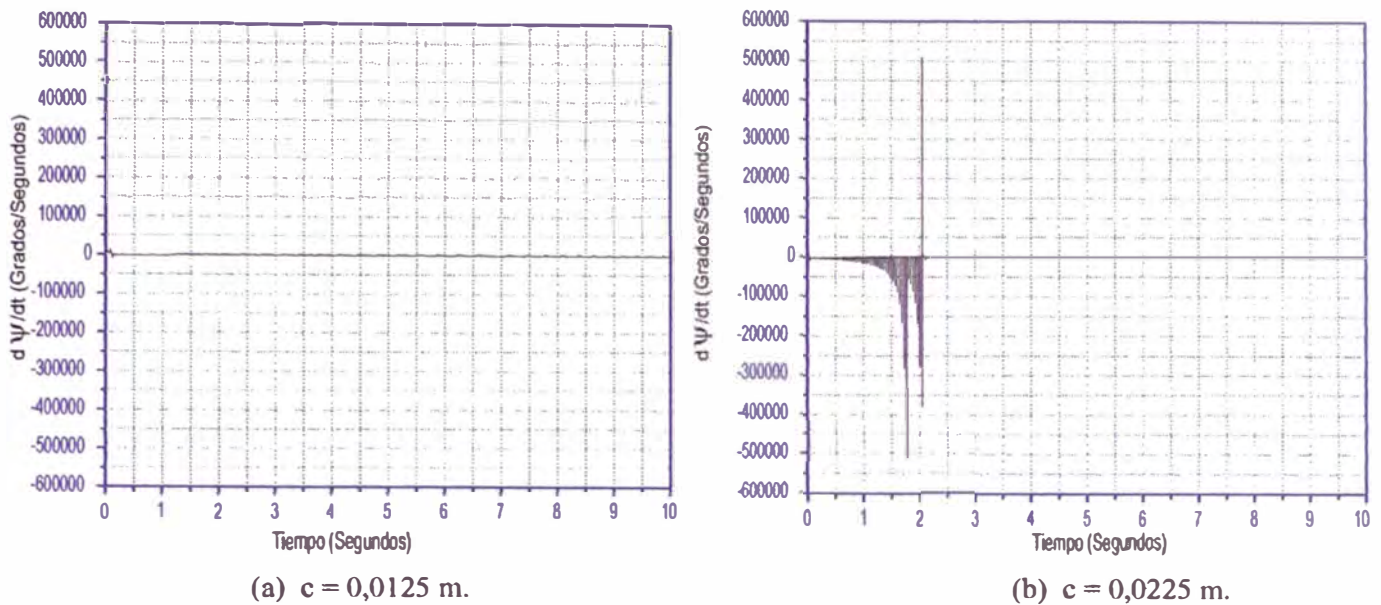


Figura 5.27: Gráficos de la función  $\dot{\psi}$ , cuando  $c$  varia.

En la Fig.(5.27 a y b) se indican las gráficas de la función de  $\dot{\psi}(t)$ , para un intervalo  $-600000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\psi} \leq 600000 \text{ Grados/seg.}$  en a) la curva parece constante, pero tiene ciertas oscilaciones y en b)  $\dot{\psi}(t)$  sufre fuertes oscilaciones entre 0 y 2 seg, pero siempre la función es con  $\dot{\psi} < 0$ . Luego de los 2 seg, la curva se mueven en forma casi constante.

### CASO B: VARIACIÓN DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN $\mu$ .

Para realizar el cálculo numérico, se considera, el coeficiente de fricción  $\mu$  varia, entre los valores  $0,1 \leq \mu \leq 0,6$ . Para aplicar nuestro programa necesitamos de las condiciones iniciales y parámetros, dados en los Cuadros(5.23) y (5.24).

Cuadro 5.23: Condiciones iniciales.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales
$\theta$	Theta	$0,1 \text{ rad} = 5^{\circ}3'46,48''$
$\phi$	Phi	0
$\psi$	Psi	0
$x$	Coordenada X	0
$y$	Coordenada Y	0
$\dot{\theta}$	Derivada temporal de $\theta$	0
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de $\phi$	0
$\dot{\psi}$	Derivada temporal de $\psi$	$100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg}$
$\dot{x}$	Derivada temporal de X	0
$\dot{y}$	Derivada temporal de Y	0

Cuadro 5.24: Parámetros.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales	Unidad
a	Eje mayor del elipsoide	0,025	m.
c	Eje menor del elipsoide	0,0125	m.
$I = I_3$	Momento de inercia del elipsoide	0,00000375	Kg.m <sup>2</sup>
$D_2$	Distancia de $C_0$ a G	0,005	m.
g	Aceleración de la gravedad de la tierra	9,8	$(\frac{m}{s^2})$
m	Masa	0,015	Kg.

Luego de obtener la base de datos, se obtuvieron varios gráficos, para los ángulos de Euler y sus derivadas, pero en especial para  $\theta$ . Se muestra todos los cambios que sufre cuando  $\mu$  varia. Pero para los demás, solo se graficó dos valores, a manera de ejemplo.

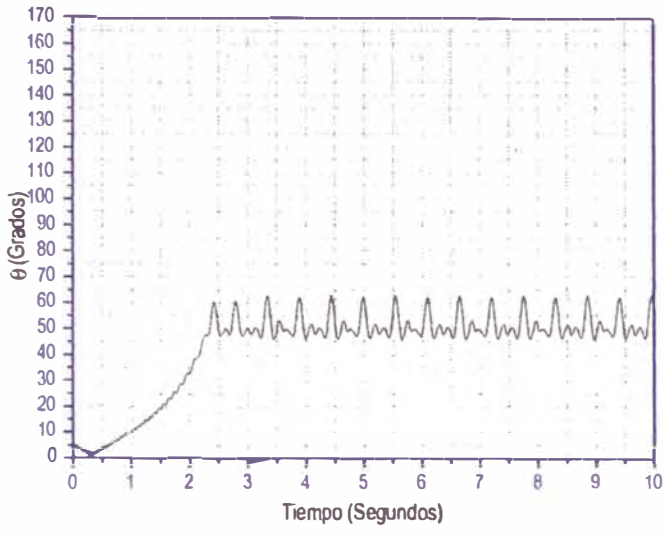
Las figuras (5.28) y (5.29), muestra las funciones de  $\theta(t)$  para un intervalo  $0^\circ \leq \theta(t) \leq 170^\circ$  y un tiempo  $t \in [0, 10]$ seg. Se toma un tiempo mayor para observar, mejor los cambios de la función. Los valores de la función  $\theta(t)$ , tiene un máximo valor de  $160^\circ$ , cuando se incrementa  $\mu$  de 0,3 a 0,6. La forma de la curva es una subida suave y luego aparecen oscilaciones periódicas. A medida que  $\mu$  toma valores mayor, se incrementan sus amplitudes para luego ir amortiguandose. Y las oscilaciones periodicas se distorsionan.

En la Fig.(5.30 a y b), se muestra el comportamiento de la función  $\phi(t)$ , cuando el parámetro  $\mu = 0,3$  y 0,6. El intervalo de  $\phi(t)$  es  $0^\circ \leq \phi \leq 35000^\circ$  y un tiempo  $t \in [0, 10]$ seg. La curva crece más, cuando  $\mu$  se incrementa y  $\phi$  es positivo.

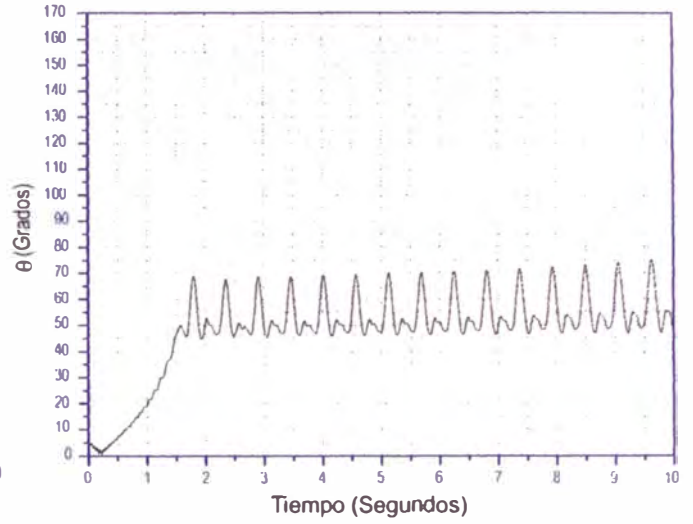
En la Fig.(5.30 c y d) se gráfica la función  $\psi$ .  $\psi$  varia entre  $-10000^\circ \leq \psi \leq 3000^\circ$ , en un tiempo  $t \in [0, 10]$ seg. La función cambia completamente su forma, para los valores de  $\mu_k$ . Pues de tener forma descendente, pasa a una curva casi constante, cuando se incrementa  $\mu$ . En c) tiene una *pequeña subida* entre 0 y 0,5 seg y en adelante decrece. En d) la curva también tiene una subida y caída en el intervalo de 0 a 0,5 seg. Luego se incrementa hasta los 2 seg y posteriormente va oscilando, pero amortiguandose lentamente.

En la Fig.(5.30 e y f) mostramos la función  $\dot{\theta}(t)$ . La función  $\dot{\theta}$  varia entre  $-1500 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\theta} \leq 1500 \text{ Grados/seg}$ . y un tiempo  $t \in [0, 10]$ seg. La forma de la función es periódica, se incrementa su amplitud al incrementarse  $\mu$  de 0,3 a 0,6. En e) Se observa las oscilaciones, que aumentan su amplitud por lo menos 3 veces comparado, con el gráfico e).

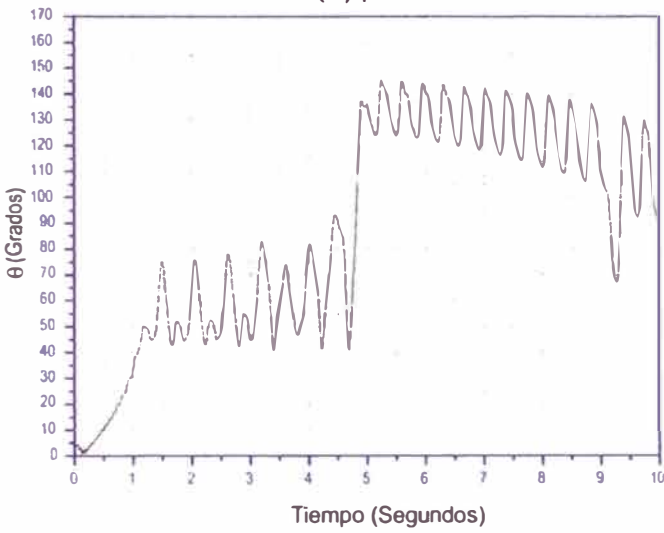
En la Fig.(5.31 g y h), la función  $\dot{\phi}(t)$ , se encuentra en un intervalo de  $-20000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\phi} \leq 40000 \text{ Grados/seg}$ . y un tiempo  $t \in [0, 10]$  seg.  $\dot{\phi}(t)$  sufre cambios brusco de oscilación, los primeros 0.5 seg en g) y h). Luego su gráfico es casi una función periódica, cuando  $\mu = 0,3$ .



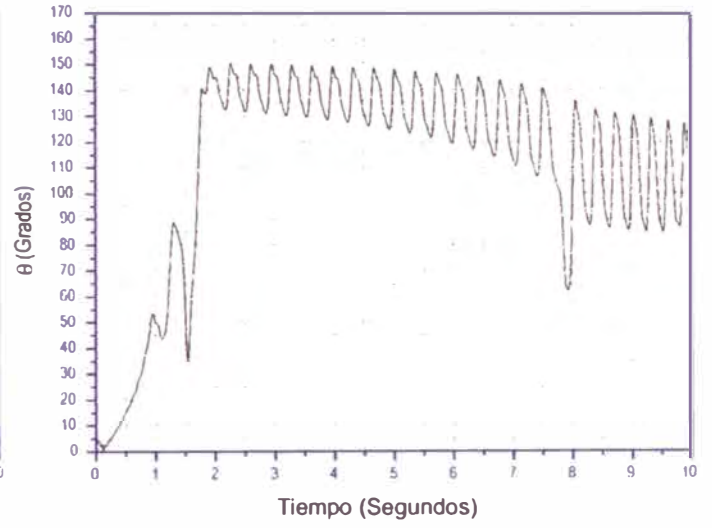
(a)  $\mu=0.1$



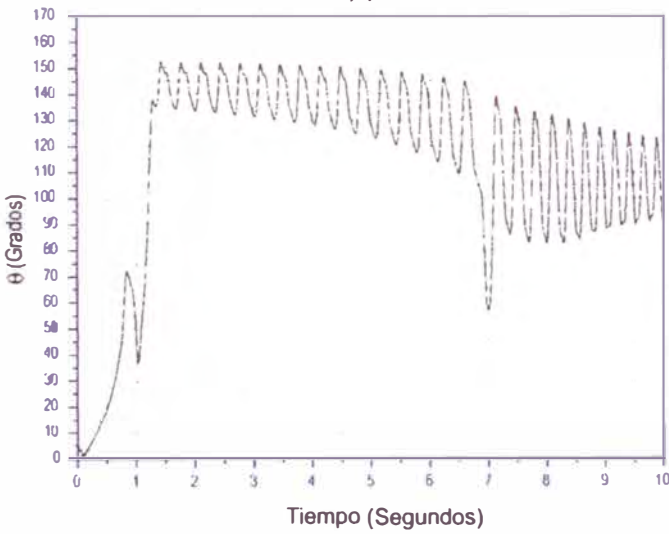
(b)  $\mu=0.15$



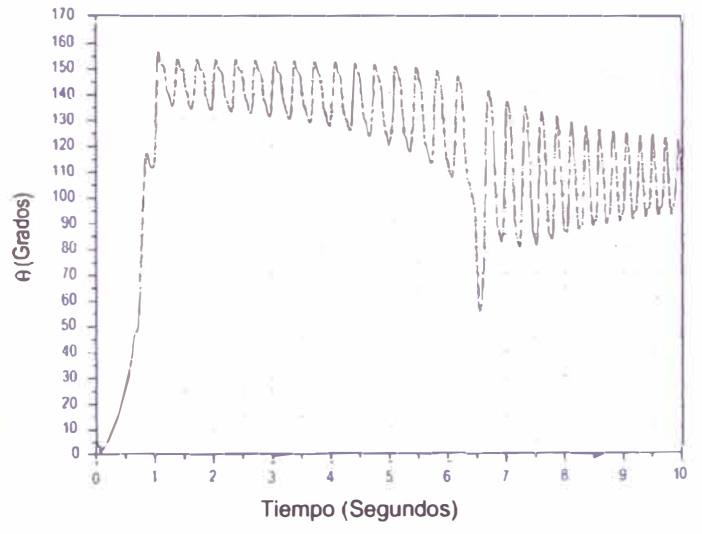
(c)  $\mu=0.2$



(d)  $\mu=0.25$



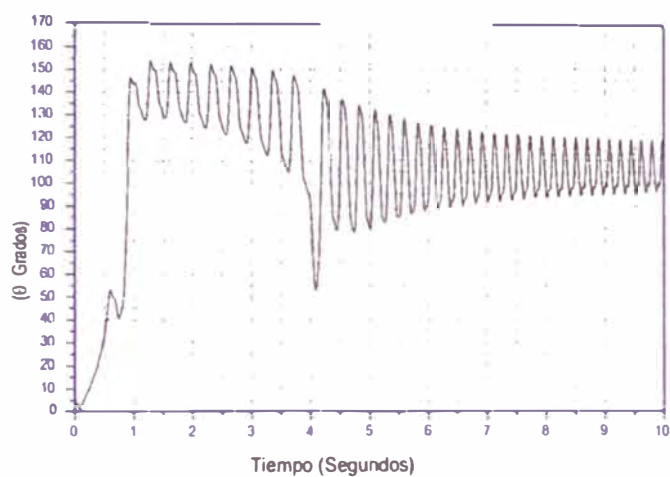
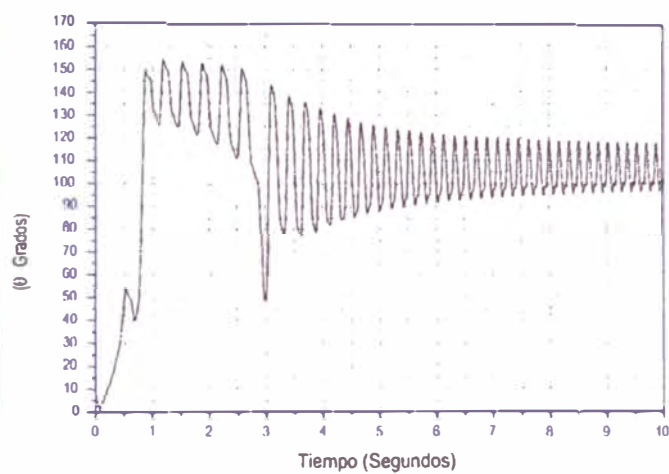
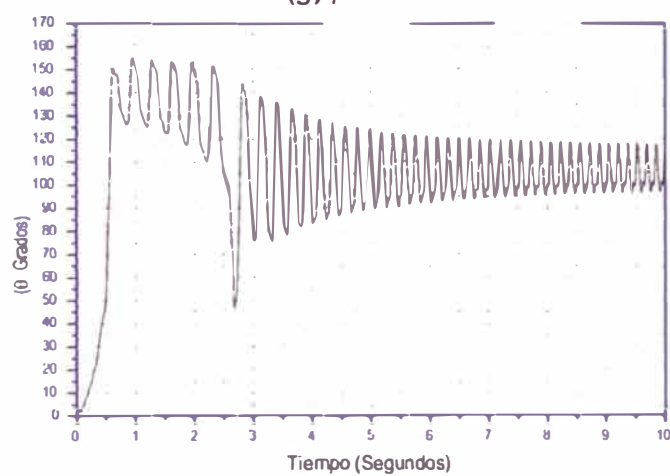
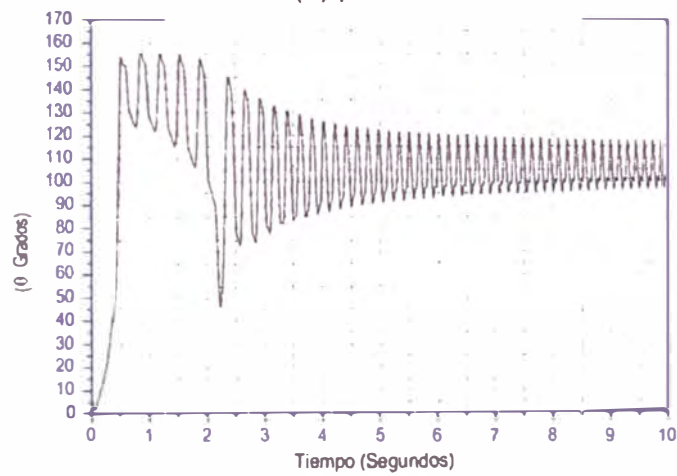
(e)  $\mu=0.3$



(f)  $\mu=0.35$

Figura 5.28: Variaciones de  $\theta$ , cuando  $\mu$  varia.



(g)  $\mu=0.4$ (h)  $\mu=0.45$ (i)  $\mu=0.5$ (j)  $\mu=0.6$ Figura 5.29: Gráficas de  $\theta$ , cuando  $\mu$  varia.



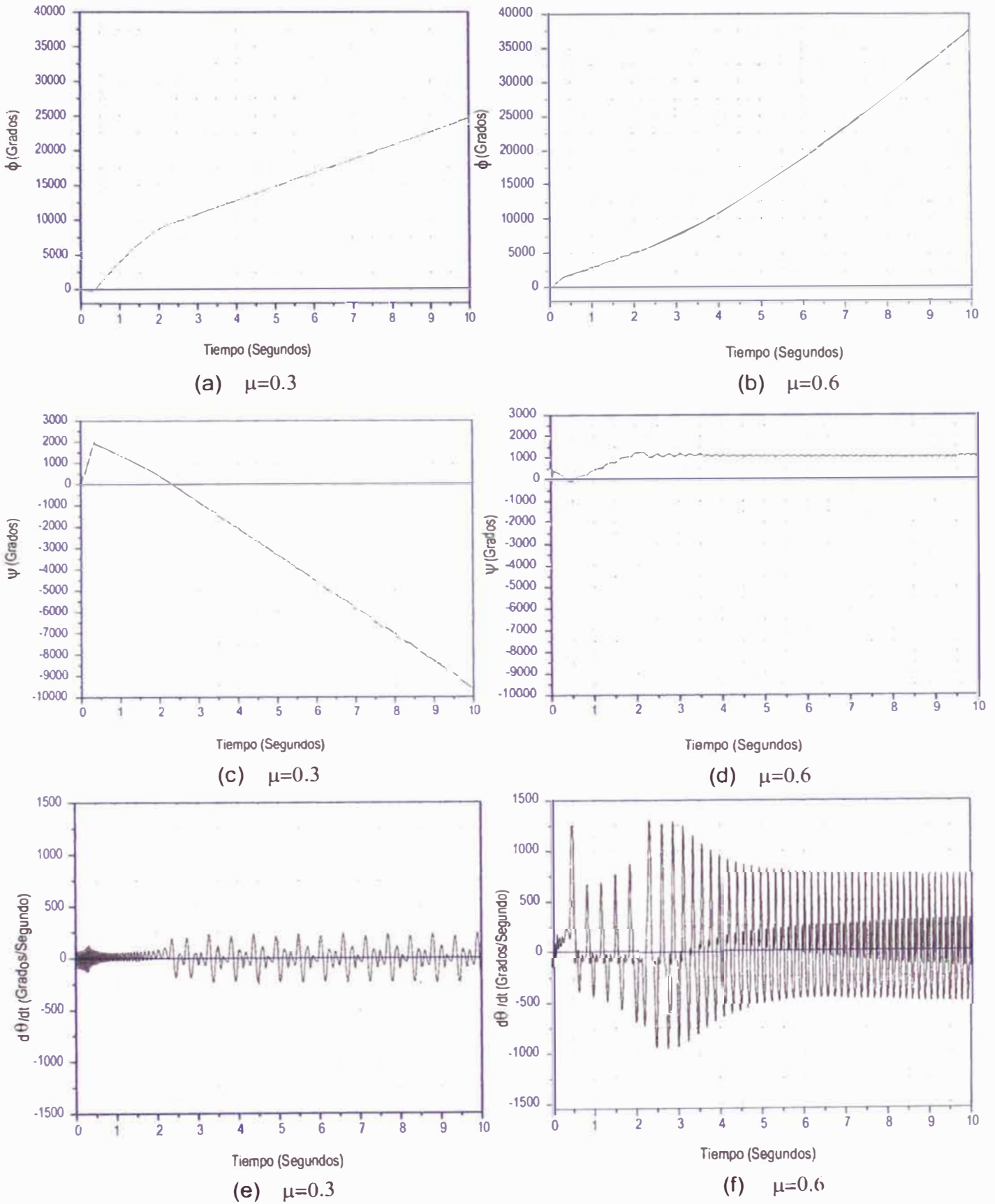


Figura 5.30: Gráficas de  $\phi$ ,  $\psi$  y  $\dot{\theta}$ , cuando  $\mu$  varía entre los valores 0.3 y 0.6.

Cuando  $\mu = 0,6$  la función  $\dot{\phi}$ , oscila amortiguándose, para  $t \geq 2$  seg.

En la Fig.(5.31 i y j) se observa la función  $\dot{\psi}(t)$ , en un intervalo de  $-35000 \text{ Grados/seg} \leq \dot{\psi} \leq 20000 \text{ Grados/seg}$ . Al incrementar  $\mu$ ,  $\dot{\psi}$  se comporta como una función del tipo oscilación amortiguada, pero en forma lenta después de una fuerte oscilación.

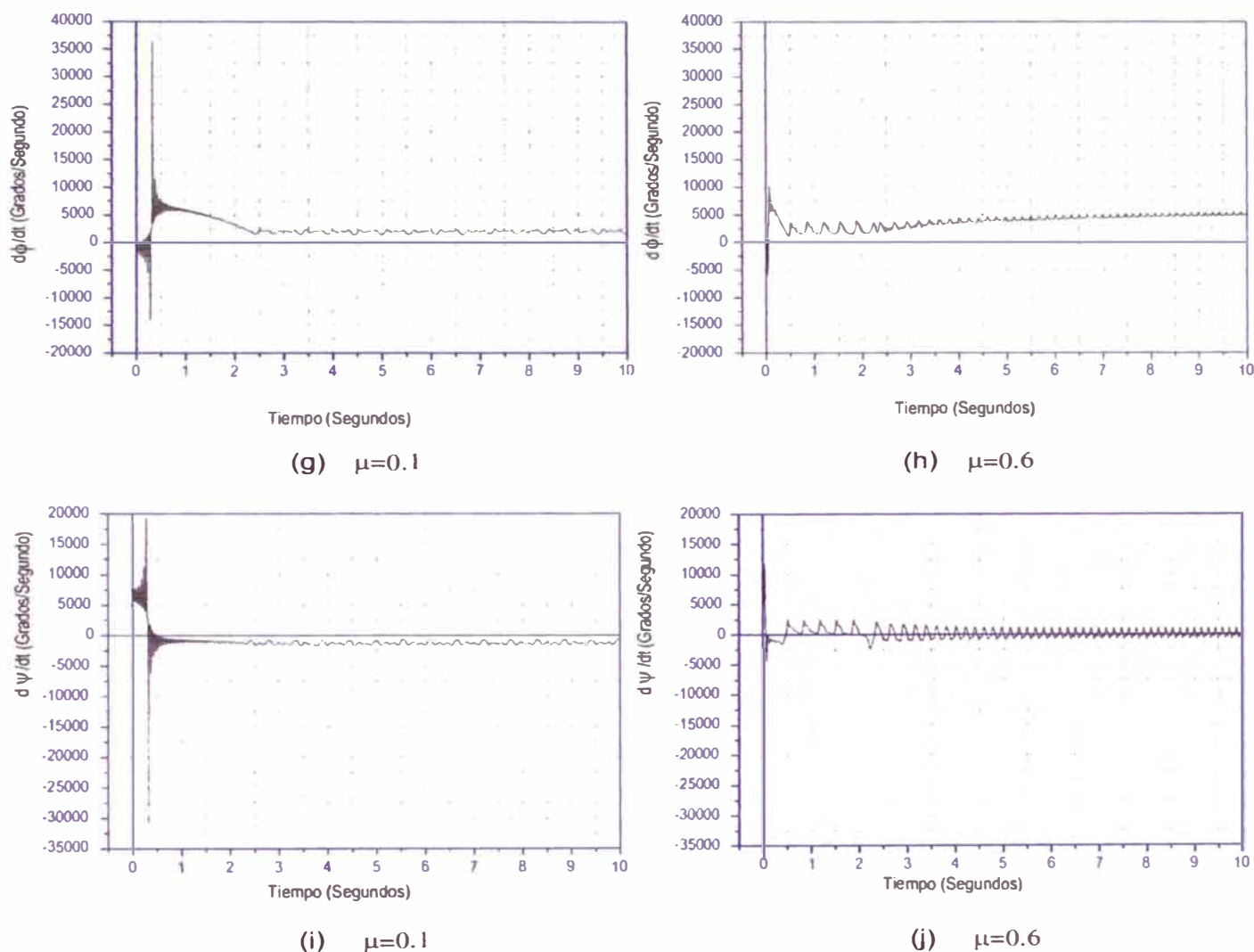


Figura 5.31: Gráficas de  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ , cuando  $\mu$  varía entre los valores 0.3 y 0.6.

## 5.4. MOVIMIENTO DE UN ELIPSOIDE CON FRICCIÓN POR RODADURA PURA

En el capítulo 4 se determinó las EDO del elipsoide con fricción por rodadura pura, mediante las Ecuaciones de Lagrange.

Se considera en este capítulo el elipsoide no homogéneo, formado por un elipsoide homogéneo y una partícula de masa  $m_0$ , colocada dentro del elipsoide, justo en el eje de simetría, que dista  $D_2$  del centro geométrico  $C_0$ . (Fig(5.))

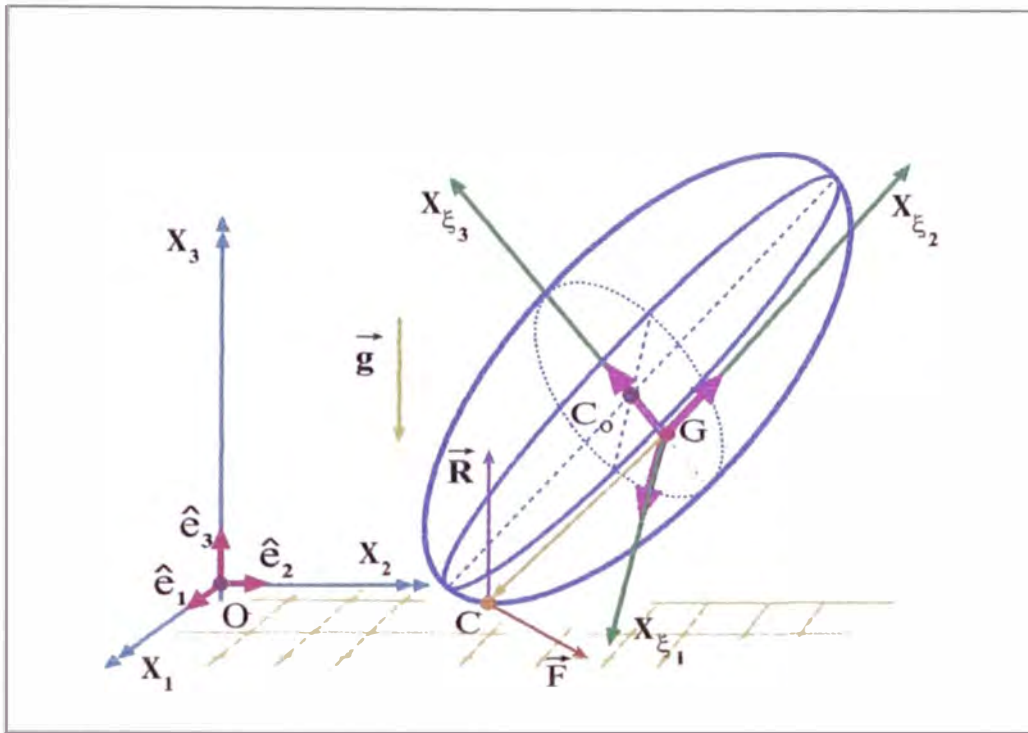


Figura 5.32: Elipsoide no homogéneo, sobre una superficie plana con fricción por rodadura pura.

Como se recuerda las EDO que se obtuvieron en el capítulo IV, fueron:

$$\begin{aligned} & \ddot{\theta} \left\{ I + m \left\{ \left[ \frac{[a^4 + c^4 + (-a^4 + c^4) \cos(2\theta)]}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] - \left[ \frac{2c^2 D_2 \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \right] \right\} \right\} \\ & + \left\{ 2\dot{\theta}^2 m \left\{ \frac{c^2 D_2 \sin \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] + \left[ \frac{(a^2 - c^2) a^2 c^2 \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} \right\} \\ & + \left\{ m \dot{\theta}^2 \left\{ \left[ \frac{\sin(2\theta) c^2 a^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)^2} \right] + \frac{\sin \theta c^2 D_2}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}} \left[ 1 + \frac{\cos^2 \theta (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} \right\} \\ & + \dot{\phi}^2 \left\{ \frac{1}{2} \sin(2\theta) (I - I_3) + \frac{(a^2 - c^2)^2 m \sin(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{(a^2 - c^2) \sin^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta)} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(a^2 - c^2) \frac{D_2 m \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2(2\theta)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \Big\} \\
& + \dot{\psi}^2 \left\{ \frac{a^4 c^2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\} \\
& + \dot{\phi} \dot{\psi} \left\{ -I_3 \operatorname{sen} \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \\
& + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}(2\theta)^2 (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \Big\} \\
& - g m \operatorname{sen} \theta \left[ D_2 + \frac{(a^2 - c^2) \cos \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \right] \Big\} = 0 \tag{5.48}
\end{aligned}$$

$$\ddot{\phi} \left\{ I_3 \cos^2 \theta + I \operatorname{sen}^2 \theta \right.$$

$$+ m \operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2) \left[ \frac{D_2 \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{\operatorname{sen}(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \Big\}$$

$$+ \ddot{\psi} \left\{ I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\}$$

$$+ \left\{ \dot{\phi} \dot{\theta} \left[ \operatorname{sen}(2\theta) (I - I_3) + \frac{2 D_2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{4(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right. \right.$$

$$\left. \left. \frac{m (a^2 - c^2)^2 \operatorname{sen}(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta) (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)(a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right. \\
& \quad \left. + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \theta (a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] - I_3 \operatorname{sen} \theta \right\} = 0
\end{aligned} \tag{5.49}$$

$$\begin{aligned}
& \ddot{\phi} \left\{ I_3 \cos \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen}(2\theta)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\} \\
& \quad + \ddot{\psi} \left\{ I_3 + \frac{a^4 m \operatorname{sen}^2 \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right\} \\
& \quad + \left\{ \dot{\psi} \dot{\theta} \left\{ \frac{a^4 m \operatorname{sen}(2\theta)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ 1 - \frac{\operatorname{sen} \theta^2 (a^2 - c^2)}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} \right. \\
& \quad \left. + \dot{\phi} \dot{\theta} \left\{ -I_3 \operatorname{sen} \theta + \frac{a^2 D_2 m \operatorname{sen}(2\theta)}{\sqrt{c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} \left[ 1 - \frac{(a^2 - c^2) \operatorname{sen}^2 \theta}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{a^2 (a^2 - c^2) m \operatorname{sen} \theta}{(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \left[ \cos(2\theta) + \cos^2 \theta - \frac{\operatorname{sen}^2(2\theta)(a^2 - c^2)}{2(c^2 \cos^2 \theta + a^2 \operatorname{sen}^2 \theta)} \right] \right\} = 0,
\end{aligned} \tag{5.50}$$

$$\dot{x}_{1c_0} = \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \left[ \dot{\theta} \operatorname{sen} \phi - \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \cos \phi \right] - \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right] \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \cos \phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}}, \tag{5.51}$$

$$\dot{x}_{2c_0} = - \left\{ \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta} \left[ \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \right] + \left[ \dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \theta \right] \frac{\operatorname{sen}(2\theta) \operatorname{sen} \phi (a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right\} \tag{5.52}$$

$$\dot{x}_{3c_0} = \dot{\theta} \left[ \frac{\operatorname{sen}(2\theta)(a^2 - c^2)}{2 \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta + c^2 \cos^2 \theta}} \right]. \tag{5.53}$$

Estas ecuaciones como se puede apreciar son no lineales y de segundo orden, excepto las tres ultimas. Pero podemos pasarla a una de 1er orden las de 2do, como en los casos anteriores.

### 5.4.1. ALGORITMO

Las EDO que se obtienen son no lineales y acopladas. Para poder resolverla numéricamente se efectuará un cambio de variable, para facilitar los cálculos. Para ello definimos

$$X(1) = \theta, \quad (5.54)$$

$$X(2) = \phi, \quad (5.55)$$

$$X(3) = \psi, \quad (5.56)$$

$$X(4) = \dot{\theta}, \quad (5.57)$$

$$X(5) = \dot{\phi}, \quad (5.58)$$

$$X(6) = \dot{\psi}, \quad (5.59)$$

$$X(7) = x_{1c_0}, \quad (5.60)$$

$$X(8) = x_{2c_0}, \quad (5.61)$$

$$X(9) = x_{3c_0}. \quad (5.62)$$

Con los anteriores cambio de nombre a las variables, ahora derivamos las funciones

$$\dot{\theta} = \dot{X}(1), \quad (5.63)$$

$$\dot{\phi} = \dot{X}(2), \quad (5.64)$$

$$\dot{\psi} = \dot{X}(3), \quad (5.65)$$

$$\ddot{\theta} = \dot{X}(4), \quad (5.66)$$

$$\ddot{\phi} = \dot{X}(5), \quad (5.67)$$

$$\ddot{\psi} = \dot{X}(6), \quad (5.68)$$

$$\dot{x}_{1c_0} = \dot{X}(7), \quad (5.69)$$

$$\dot{x}_{2c_0} = \dot{X}(8), \quad (5.70)$$

$$\dot{x}_{3c_0} = \dot{X}(9), \quad (5.71)$$

Finalmente se obtienen de las ecuaciones del (5.11) al (5.16), las EDO de la forma

$$\dot{X}(k) = X(l), \quad k, l = 0, 1, \dots, 9. \quad (5.72)$$

Estas son las 9 EDO de primer orden que se van a resolver, en Fortran 90.

### 5.4.2. RESULTADOS

Luego de obtener las 9 EDO de 1 Orden, debemos de aplicar un programa para resolver ciertos casos, los cuales generarán una base de datos. Estos datos serán gráficos y analizados y después se elaboraran algunos Cuadros que señalarán ciertas características importantes o sobresalientes, en el movimiento del elipsoide no homogéneo cuando se mueve con fricción por rodadura pura.

Para esta sección analizaremos el caso

VARIACIÓN DEL PARÁMETRO  $\mathcal{D}_2$  .



### CASO : VARIACIÓN DEL PARÁMETRO $\mathcal{D}_2$

Para este caso se considera que el parámetro  $\mathcal{D}_2$  varia, pero al variar ese parámetro se ve afectado el momento de inercia  $I$ , debido a que  $\mathcal{D}_2$  e  $I$  están relacionados.

Para hallar esta relación previamente recordaremos los momentos principales de inercia de un elipsoide homogéneo de semiejes ejes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y masa ( $M_e$ ), son:

$$I_1 = \frac{1}{5}M_e(b^2 + c^2), \quad (5.73)$$

$$I_2 = \frac{1}{5}M_e(a^2 + c^2), \quad (5.74)$$

$$I_3 = \frac{1}{5}M_e(a^2 + b^2), \quad (5.75)$$

con respecto a los ejes  $X_k^{**}$ , donde  $k = 1, 2, 3$ , respectivamente. En nuestro caso  $a=b$ , luego

$$I_1 = \frac{1}{5}M_e(a^2 + c^2), \quad (5.76)$$

$$I_2 = \frac{1}{5}M_e(a^2 + c^2), \quad (5.77)$$

$$I_3 = \frac{2}{5}M_e a^2. \quad (5.78)$$

De las ecuaciones (5.76) y (5.77)  $I_1 = I_2 \equiv I$ .

Si se considera también el momento de inercia de la masa  $m$ , se tiene que

$$I = \frac{1}{5}M_e(a^2 + c^2) + m_0\mathcal{D}_2^2, \quad (5.79)$$

y el otro momento de inercia no varia, es decir

$$I_3 = \frac{2}{5} M_e a^2. \quad (5.80)$$

En el Cuadro(5.25) mostramos los valores del parámetro  $D_2$ , que va a ser tomado en cuenta, al resolver numéricamente las EDO.

Cuadro 5.25: Variaciones de  $D_2$  e  $I$ .

$D_2$ m	$I$ Kg m <sup>2</sup>
0,0001	$3,075001 \times 10^{-6}$
0,0010	$3,0751 \times 10^{-6}$
0,0020	$3,0754 \times 10^{-6}$
0,0030	$3,0759 \times 10^{-6}$
0,0040	$3,0766 \times 10^{-6}$
0,0050	$3,0775 \times 10^{-6}$
0,0060	$3,0786 \times 10^{-6}$
0,0065	$3,0792 \times 10^{-6}$
0,0070	$3,0799 \times 10^{-6}$
0,0075	$3,0806 \times 10^{-6}$
0,0078	$3,0810 \times 10^{-6}$
0,0080	$3,0814 \times 10^{-6}$
0,0090	$3,0831 \times 10^{-6}$
0,010	$3,085 \times 10^{-6}$

En los Cuadros(5.26) y (5.27) mostramos las condiciones iniciales y parámetros para resolver numéricamente la 9 EDO.

Cuadro 5.26: Condiciones iniciales.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales
$\theta$	Theta	$0,1 \text{ rad} = 5^{\circ} 3' 46,48''$
$\phi$	Phi	0
$\psi$	Psi	0
$\dot{\theta}$	Derivada temporal de $\theta$	0
$\dot{\phi}$	Derivada temporal de $\phi$	0
$\dot{\psi}$	Derivada temporal de $\psi$	$100 \text{ rad/seg} = 15,9154 \text{ rev/seg}$
$\dot{x}$	Derivada temporal de X	0
$\dot{y}$	Derivada temporal de Y	0

Cuadro 5.27: Parámetros.

Símbolo	Nombre	Condiciones iniciales	Unidad
a	Eje mayor del elipsoide	0,025	m.
c	Eje menor del elipsoide	0,020	m.
$I_3$	Momento de inercia del elipsoide	0,00000375	$\text{Kg.m}^2$
g	Aceleración de la gravedad de la tierra	9,8	$\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$
m	Masa	0,015	Kg.

Con todas estas condiciones iniciales y parámetros aplicamos nuestro programa para resolver numéricamente las EDO. Se obtuvo una base de datos, que luego fueron graficados.

En la Fig.(5.33) y (5.34) mostramos la función  $\theta(t)$ , en un intervalo de  $0 \leq \theta \leq 0,45$  Rad y un tiempo  $t \in [0, 0,5]$  seg. Cuando el parámetro  $\mathcal{D}_2$  toma los valores que se indica en cada gráfico.

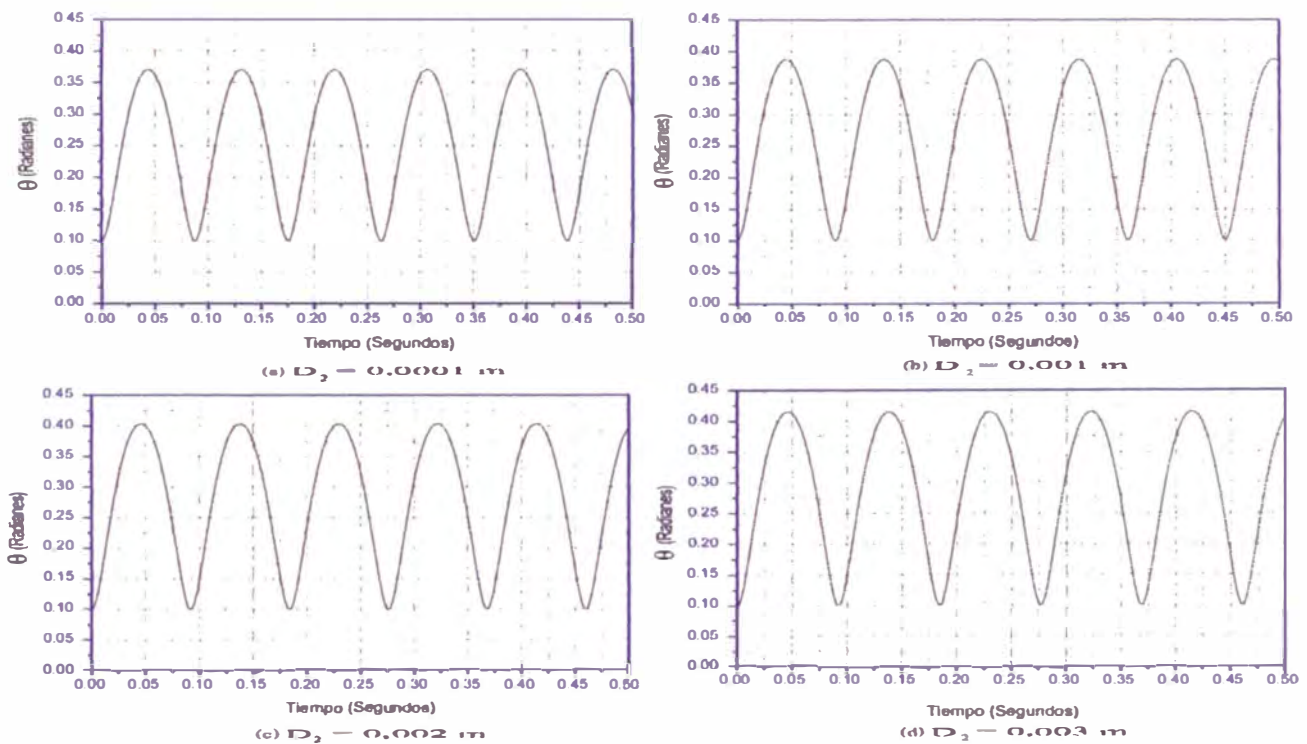


Figura 5.33: Comportamiento de la  $\theta(t)$  cuando  $\mathcal{D}_2$  varia, desde 0,0001 m a 0,003 m.

Se puede observar como en los casos anteriores que la función  $\theta(t)$  es periódica y muestra valores máximos y mínimos. A medida que el parámetro  $\mathcal{D}_2$  se incrementa, la amplitud de la función  $\theta$  se incrementa, hasta un cierto valor de  $\mathcal{D}_2 = 0,004 \text{ m}$ , luego de allí disminuye la amplitud de la función. El período de la  $\theta(t)$  tiene un comportamiento semejante, se

incrementa lentamente hasta  $D_2 = 0,002$  m y luego empieza a disminuir.

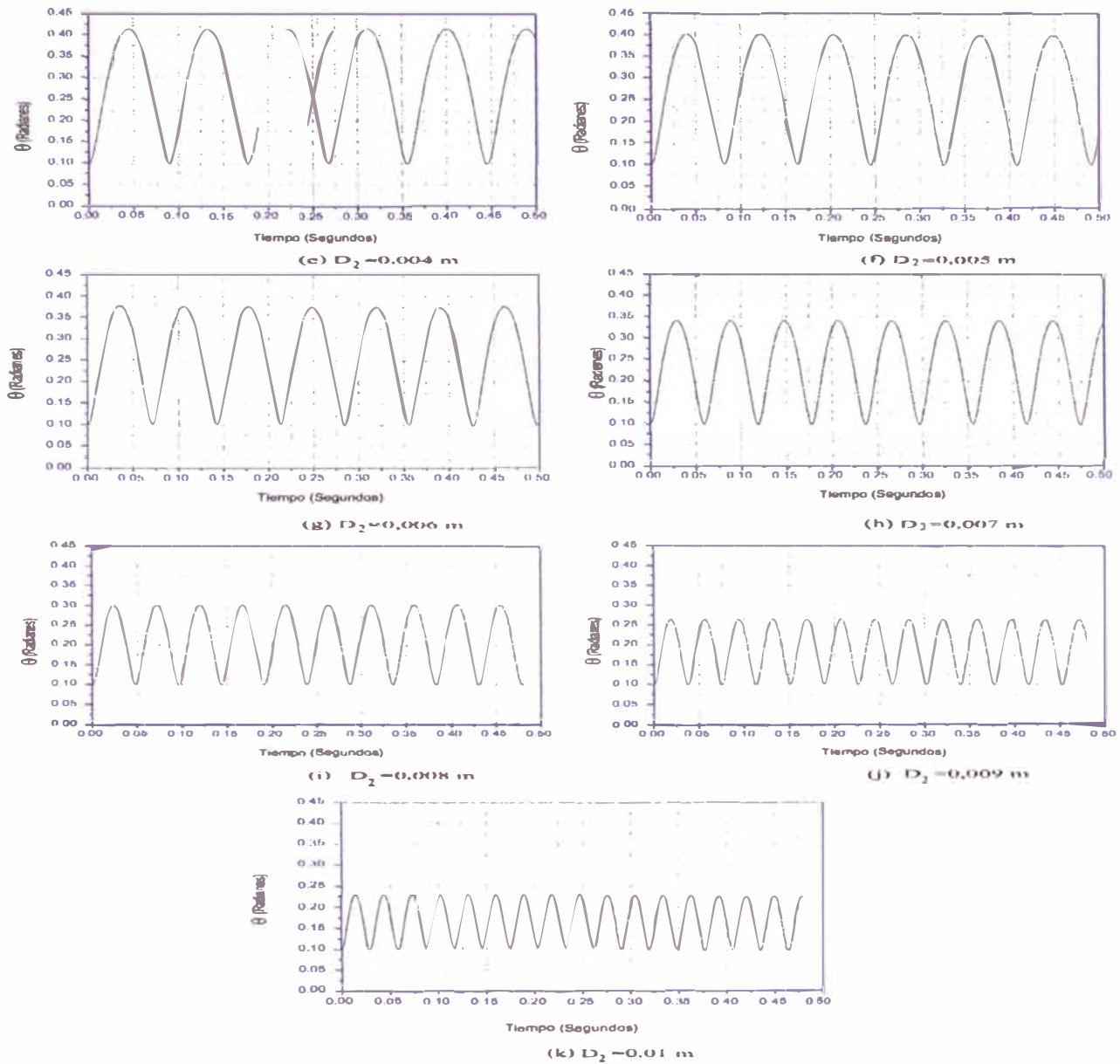


Figura 5.34: Comportamiento de la  $\theta(t)$  cuando  $D_2$  varia, desde 0,004 m a 0,01 m.

Con los archivos de datos se construyó el Cuadro(5.28), donde mostramos las características mas sobresalientes de la función  $\theta(t)$ . En este Cuadro se observan los valores máximos y mínimos de la función  $\theta$ , conforme el parámetro  $D_2$  y el valor del incremento  $\Delta\theta \equiv \theta_{m\acute{a}x} - \theta_{m\acute{i}n}$  y sus respectivos períodos.

Para los siguientes gráficos solo tomaremos en cuentas 2 casos por cada función, pues los gráficos son semejantes.

Cuadro 5.28: Variaciones de  $\theta$ , conforme  $\mathcal{D}_2$  e  $l$  varian.

$\mathcal{D}_2$ m.	$\theta_{min}$ Grados	$\theta_{m\acute{a}x}$ Grados	$\Delta\theta$ Grados	Período Segundos
0,0001	5°43'46,49"	21°11'14,64"	15°27'28,08"	0,087
0,0010	5°43'46,49"	22°10'16,32"	16°26'29,76"	0,090
0,0020	5°43'46,49"	23°08'5,64"	17°24'19,08"	0,092
0,0030	5°43'46,49"	23°45'42,12"	18°1'55,56"	0,092
0,0040	5°43'46,49"	23°47'8,88"	18°3'22,32"	0,089
0,0050	5°43'46,49"	23°0'21,6"	17°16'35,04"	0,082
0,0060	5°43'46,49"	21°27'50,76"	15°44'4,56"	0,071
0,0070	5°43'46,49"	19°27'21,24"	13°43'34,68"	0,059
0,0080	5°43'46,49"	17°16'26,76"	11°32'40,2"	0,047
0,0090	5°43'46,49"	15°7'56,64"	9°24'10,12"	0,037
0,010	5°43'46,49"	13°8'2,04"	7°6'15,59"	0,029

En la Fig.(5.35 a y c) tenemos las funciones de  $\phi$  para dos casos, donde  $\mathcal{D}_2 = 0,005\text{m}$  y  $\mathcal{D}_2 = 0,01\text{ m}$ . Las funciones fueron graficados para un intervalo de  $0 \leq \phi \leq 60\text{ Rad}$ . y un intervalo de tiempo  $0 \leq t \leq 0,5\text{ seg}$ .

Observamos que la función  $\phi(t)$  es una curva ascendente. Para poder tener una medida de como es que están ascendiendo (en forma semejante al caso sin fricción), se efectuó un *ajuste lineal* a los datos de  $\phi(t)$  vs.  $t$  y se considera el concepto de ángulo de inclinación (seudo pendiente).

En el Cuadro(5.29) se muestran los *ajustes de curva* a la función  $\phi(t)$ . Con este ajuste se puede observar que su pendiente es positiva y se va incrementando a medida que  $\mathcal{D}_2$  aumenta pero el ángulo de inclinación se acerca lentamente a los  $90^\circ$ .

En la Fig.(5.35 c y d) tenemos la función  $\psi$  para los casos, donde  $\mathcal{D}_2 = 0,005\text{m}$  y  $\mathcal{D}_2 = 0,01\text{ m}$ . Se gráfico para un intervalo de  $-8\text{Rad} \leq \psi \leq 1\text{ Rad}$ . y un intervalo de tiempo  $0\text{ seg} \leq t \leq 0,5\text{ seg}$ .

Observamos que la función  $\psi(t)$  presenta curvas oscilantes pero *baja*. Al efectuar el ajuste de curva obtuvimos (para todos los valores de  $\mathcal{D}_2$ ) que su pendiente, va disminuyendo hasta volverse negativa en  $\mathcal{D}_2 = 0,004\text{m}$  y de allí en adelante va incrementando su pendiente negativa a medida que  $\mathcal{D}_2$  aumenta.

En la Fig.(5.36 e y f) mostramos la función  $\dot{\theta}(t)$ , en un intervalo de  $-15\text{Rad/seg} \leq \dot{\theta} \leq 15\text{ Rad/seg}$ . y un tiempo  $t \in [0, 0,5]\text{ seg}$ , cuando el parámetro  $\mathcal{D}_2 = 0,005\text{ m}$  y  $\mathcal{D}_2 = 0,01\text{ m}$ .

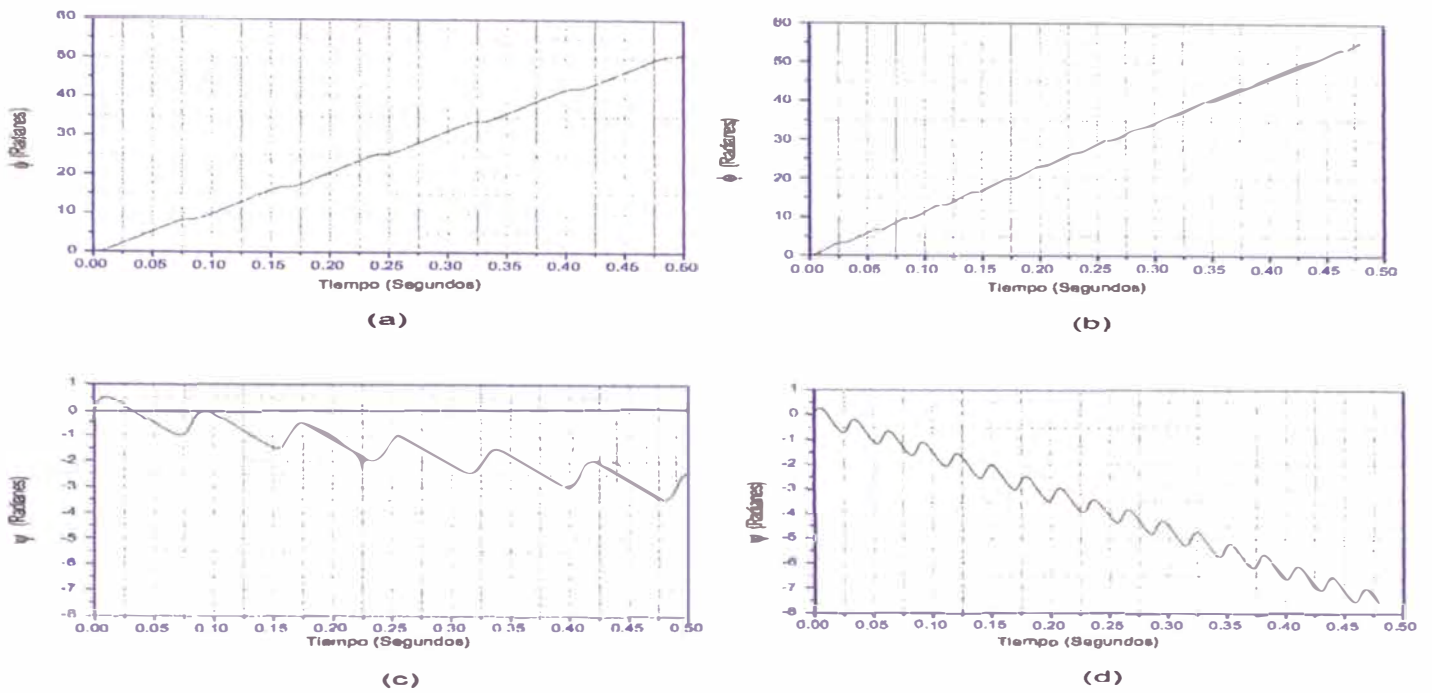


Figura 5.35: Comportamiento de  $\phi(t)$ ; en a)  $D_2 = 0,005\text{m}$  y b)  $D_2 = 0,01\text{m}$ , y  $\psi(t)$ ; en c)  $D_2 = 0,005\text{m}$  y d)  $D_2 = 0,01\text{m}$ .

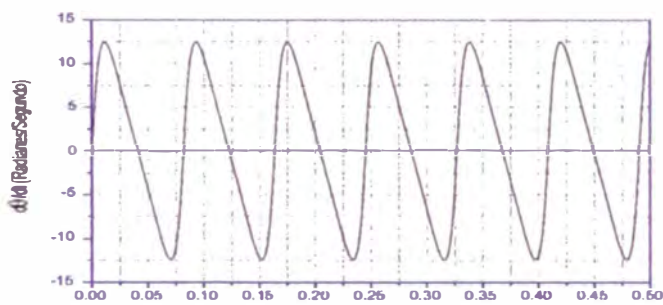
Cuadro 5.29: Ajuste lineal de  $\phi(t)$ , cuando  $D_2$  varía.

$D_2$ m.	Ajuste lineal $f_\phi = A + B t$	Pendiente Rad/seg.	$\angle$ de inclinación $\zeta$ Grados
0,0001	$-0,01691 + 86,98902 t$	86,98902	$89^\circ 20' 28,95''$
0,0010	$-0,04980 + 90,03935 t$	90,03935	$89^\circ 21' 49,26''$
0,0020	$-0,0602 + 93,47034 t$	93,47034	$89^\circ 23' 13,34''$
0,0030	$-0,06035 + 96,91116 t$	96,91116	$89^\circ 24' 31,68''$
0,0040	$-0,05750 + 100,28191 t$	100,28191	$89^\circ 25' 43,22''$
0,0050	$-0,06204 + 103,48031 t$	103,48031	$89^\circ 26' 46,79''$
0,0060	$-0,04311 + 106,39506 t$	106,39506	$89^\circ 27' 41,39''$
0,0070	$-0,0518 + 109,02259 t$	109,02259	$89^\circ 28' 28,11''$
0,0080	$-0,03652 + 111,44466 t$	111,44466	$89^\circ 29' 09,22''$
0,0090	$-0,01010 + 113,40741 t$	113,40741	$89^\circ 29' 41,25''$
0,0100	$5,130 \times 10^{-4} + 115,28037 t$	115,28037	$89^\circ 30' 10,8''$

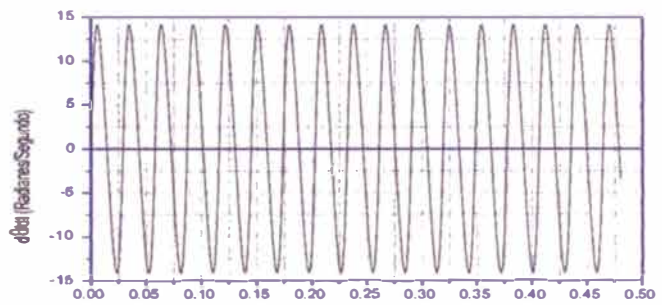


Cuadro 5.30: Ajuste de lineal de  $\psi$  con respecto a  $D_2$ .

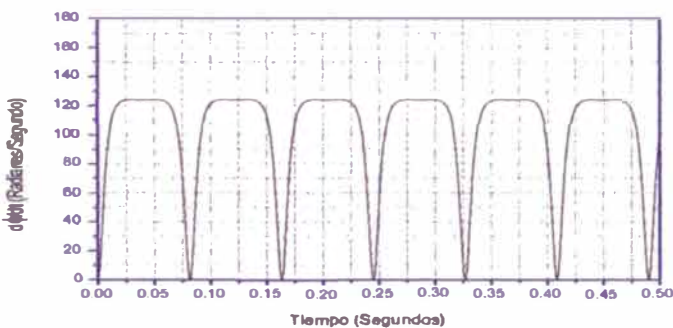
$D_2$ m.	Ajuste lineal $f_\psi = C + Dt$	Pendiente Rad./seg.	$\angle$ de inclinación $\zeta$ Grados.
0,0001	0,02212+12,1452 t	12,1452	85°17'34,99"
0,0010	0,00209+8,73916 t	8,73916	83°28'19,85"
0,0020	0,00645+4,83961 t	4,83961	78°19'31,35"
0,0030	0,00975+0,96250 t	0,96250	43°54'19,11"
0,0040	0,01206-2,71197 t	-2,71197	-69°45'33,38"
0,0050	0,00902-5,97075 t	-5,97075	-80°29'31,80"
0,0060	0,00782-8,68797 t	-8,68797	-83°26'02,59"
0,0070	0,01132-10,89259 t	-10,89259	-84°45'16,68"
0,0080	0,04525-12,88458 t	-12,88458	-85°33'43,37"
0,0090	0,01857-14,30558 t	-14,30558	-86°00'04,96"
0,0100	0,0074-15,66683 t	-15,66683	-86°20'52,13"



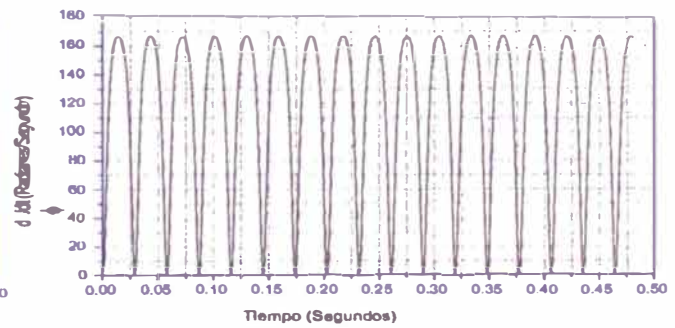
(e)



(f)



(g)



(h)

Figura 5.36: Comportamiento de  $\dot{\theta}(t)$ ; en e)  $D_2 = 0,005\text{m}$  y f)  $D_2 = 0,01\text{m}$ , y  $\dot{\phi}(t)$ ; en g)  $D_2 = 0,005\text{m}$  y h)  $D_2 = 0,01\text{m}$ .



Se puede observar que la curva  $\dot{\theta}(t)$  es periódica y muestra valores máximos y mínimos. Donde a medida que el parámetro  $\mathcal{D}_2$  se incrementa, la amplitud se incrementa lentamente. Mientras el período de la función disminuye.

Con la ayuda de la base de datos, elaboramos el Cuadro(5.31), donde se consideran los resultados para los valores de  $\mathcal{D}_2$ , dados en el Cuadro(5.25). Donde mostramos que el incremento  $\Delta\dot{\theta}$  va aumentando lentamente y el período de  $\dot{\theta}$  se va incrementando hasta  $\mathcal{D}_2 = 0,0020m$ , y a partir de allí disminuye conforme  $\mathcal{D}_2$  se va incrementando. Luego se puede decir aproximadamente que  $\mathcal{D}_2 = 0,002m$  es un valor crítico.

Cuadro 5.31: Variaciones de  $\dot{\theta}$ , conforme  $\mathcal{D}_2$  e l varian.

$\mathcal{D}_2$ m.	$\dot{\theta}_{min}$ Rad/seg	$\dot{\theta}_{máx}$ Rad/seg	$\Delta\dot{\theta}$ Rad/seg	Período Segundos
0,0001	-9,94862	9,94862	19,89724	0,087
0,0010	-10,3961	10,3961	20,7922	0,090
0,0020	-10,9071	10,9071	21,8142	0,092
0,0030	-11,4224	11,4224	22,8448	0,092
0,0040	-11,9292	11,9292	23,8584	0,089
0,0050	-12,4133	12,4133	24,8266	0,082
0,0060	-12,8618	12,8618	25,7236	0,071
0,0070	-13,2643	13,2643	26,5286	0,059
0,0080	-13,6144	13,6144	27,2288	0,047
0,0090	-13,9081	13,9081	27,8162	0,037
0,010	-14,1419	14,1419	28,2838	0,029

En la Fig.(5.36 g y h), mostramos la variaciones de la función  $\dot{\phi}(t)$ , para un intervalo de  $0 \leq \dot{\phi} \leq 180$  Rad/seg. y un tiempo  $t \in [0, 0,5]$  seg, cuando el parámetro  $\mathcal{D}_2$  presenta dos casos  $\mathcal{D}_2 = 0,005m$  y  $\mathcal{D}_2 = 0,01 m$ .

Notamos que la función  $\dot{\phi}(t)$  es periódica y muestra valores máximos y mínimos. Donde sus valores mínimos son muy agudos y sus máximos son suaves (casi constantes durante 0,025 seg), a medida que el parámetro  $\mathcal{D}_2$  se incrementa, la amplitud de la función  $\dot{\phi}(t)$  se incrementa.

En el Cuadro(5.32) mostramos el incremento  $\Delta\dot{\phi}$ , aumenta lentamente, mientras el período de la función  $\dot{\phi}$ , va incrementando hasta  $\mathcal{D}_2 = 0,0020m$ , y a partir de allí disminuye conforme  $\mathcal{D}_2$  se va incrementando. Por otro lado, el período de la función se va incrementando hasta  $\mathcal{D}_2 = 0,0020m$ , y a partir de allí disminuye el período de la función  $\dot{\phi}(t)$ , conforme  $\mathcal{D}_2$  se va incrementando.

Cuadro 5.32: Valores notables de  $\dot{\phi}$  conforme  $\mathcal{D}_2$  e l varian.

$\mathcal{D}_2$ m.	$\dot{\phi}_{min}$ Rad/seg	$\dot{\phi}_{máx}$ Rad/seg	$\Delta\dot{\phi}$ Rad/seg	Período Segundos
0,0001	$1,93012 \times 10^{-4}$	108,399	108,3988	0,087
0,0010	$2,09673 \times 10^{-4}$	110,395	110,39479	0,090
0,0020	$2,31641 \times 10^{-4}$	112,787	112,78676	0,092
0,0030	0,0000	115,68	115,68	0,092
0,0040	-0,00134	119,326	119,32734	0,089
0,0050	$3,3294 \times 10^{-4}$	123,928	123,92766	0,082
0,0060	$5,1256 \times 10^{-4}$	129,798	129,79748	0,071
0,0070	$4,5875 \times 10^{-4}$	137,138	137,13754	0,059
0,0080	$5,58525 \times 10^{-4}$	145,688	145,68744	0,047
0,0090	$-6,22 \times 10^{-4}$	155,377	155,37762	0,037
0,010	$4,06 \times 10^{-5}$	166,269	166,26895	0,029

En la Fig.(5.37 i y j) mostramos la variaciones de la función  $\dot{\psi}(t)$ , en un intervalo de  $-80 \text{ Rad/seg} \leq \dot{\psi} \leq 120 \text{ Rad/seg}$ . y un tiempo  $t \in [0, 0, 5]$  seg, cuando el parámetro  $\mathcal{D}_2$  presenta dos casos  $\mathcal{D}_2 = 0,005\text{m}$  y  $\mathcal{D}_2 = 0,01 \text{ m}$ .

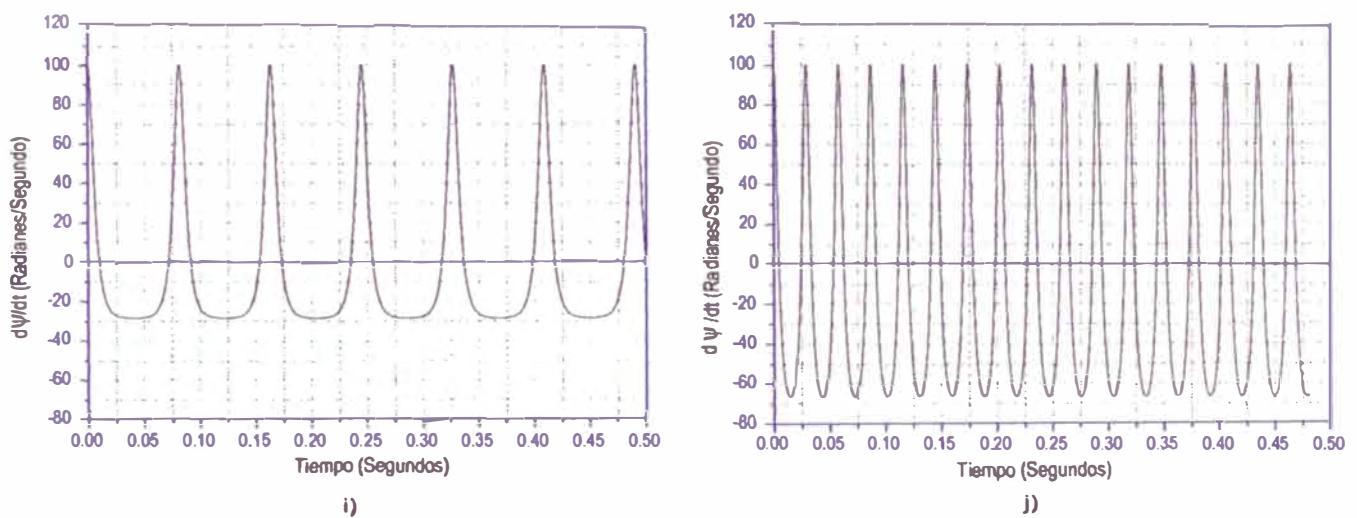


Figura 5.37: Comportamiento de  $\dot{\psi}(t)$ ; en i)  $\mathcal{D}_2 = 0,005\text{m}$  y j)  $\mathcal{D}_2 = 0,01\text{m}$ .

Se puede observar que la función  $\dot{\psi}(t)$  es periódica y muestra valores máximos y mínimos. A medida que el parámetro  $\mathcal{D}_2$  se incrementa, la función  $\dot{\psi}(t)$  incrementa lentamente su amplitud.

Con la ayuda de la base de datos se elaboró el Cuadro(5.33), allí se observa que  $\Delta\dot{\psi}$  evoluciona lentamente y el período de la función  $\dot{\psi}$  también se incrementa hasta  $\mathcal{D}_2 = 0,0020 \text{ m}$ , y

apartir de allí disminuye conforme  $\mathcal{D}_2$  se va incrementando.

Cabe señalar de los cuadros elaborados que los períodos de las funciones de  $\theta$  y de las derivadas de los ángulos de Euler son los mismos para cada caso en que se varia el parámetro  $\mathcal{D}_2$ .

En la Fig(5.38) se muestra las superposiciones de la funciones  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ , cuando  $\mathcal{D}_2$  varia de 0,0001m a 0,006m, y en la Fig(2.39) cuando varia de 0,007 m a 0,01m esto lo hacemos para poder observar gráficamente, que los períodos son los mismos en todas las funciones, para un determinado valor del parámetro  $\mathcal{D}_2$ .

Cuadro 5.33: Variaciones de  $\dot{\psi}$  conforme  $\mathcal{D}_2$  e l varian.

$\mathcal{D}_2$ m.	$\dot{\psi}_{min}$ Rad/seg	$\dot{\psi}_{máx}$ Rad/seg	$\Delta\dot{\psi}$ Rad/seg	Período Segundos
0,0001	-9,94053	99,9998	109,94033	0,087
0,0010	-12,6777	99,9998	112,6775	0,090
0,0020	-15,9084	99,9998	115,9082	0,092
0,0030	-19,463	100,0000	119,463	0,092
0,0040	-23,5388	100,0200	123,5588	0,089
0,0050	-28,358	99,9997	128,3577	0,082
0,0060	-34,0713	99,9994	134,0707	0,071
0,0070	-40,7267	99,9996	140,7263	0,059
0,0080	-48,3517	99,9994	148,3511	0,047
0,0090	-57,0301	100,01	157,0404	0,037
0,010	-66,9322	100	166,9322	0,029

Finalmente se construyó, el cuadro (5.34), nuestro interés se centra en el porcentaje de error cometido al calcular la Energía. En este Cuadro(4.34) el % Error de la Energía inicia incrementandose a partir del valor  $\mathcal{D}_2=0,001$  m hasta un valor de  $\mathcal{D}_2 = 0,005$  m, a partir de allí, el error va disminuyendo. Este efecto también se aprecia en los incrementos de la energía ( $\Delta E$ ). A pesar de esto el máximo error es de aproximadamente %6, considerando que se trará de un cálculo numérico, podemos considerar que los cálculos aún son satisfactorios.



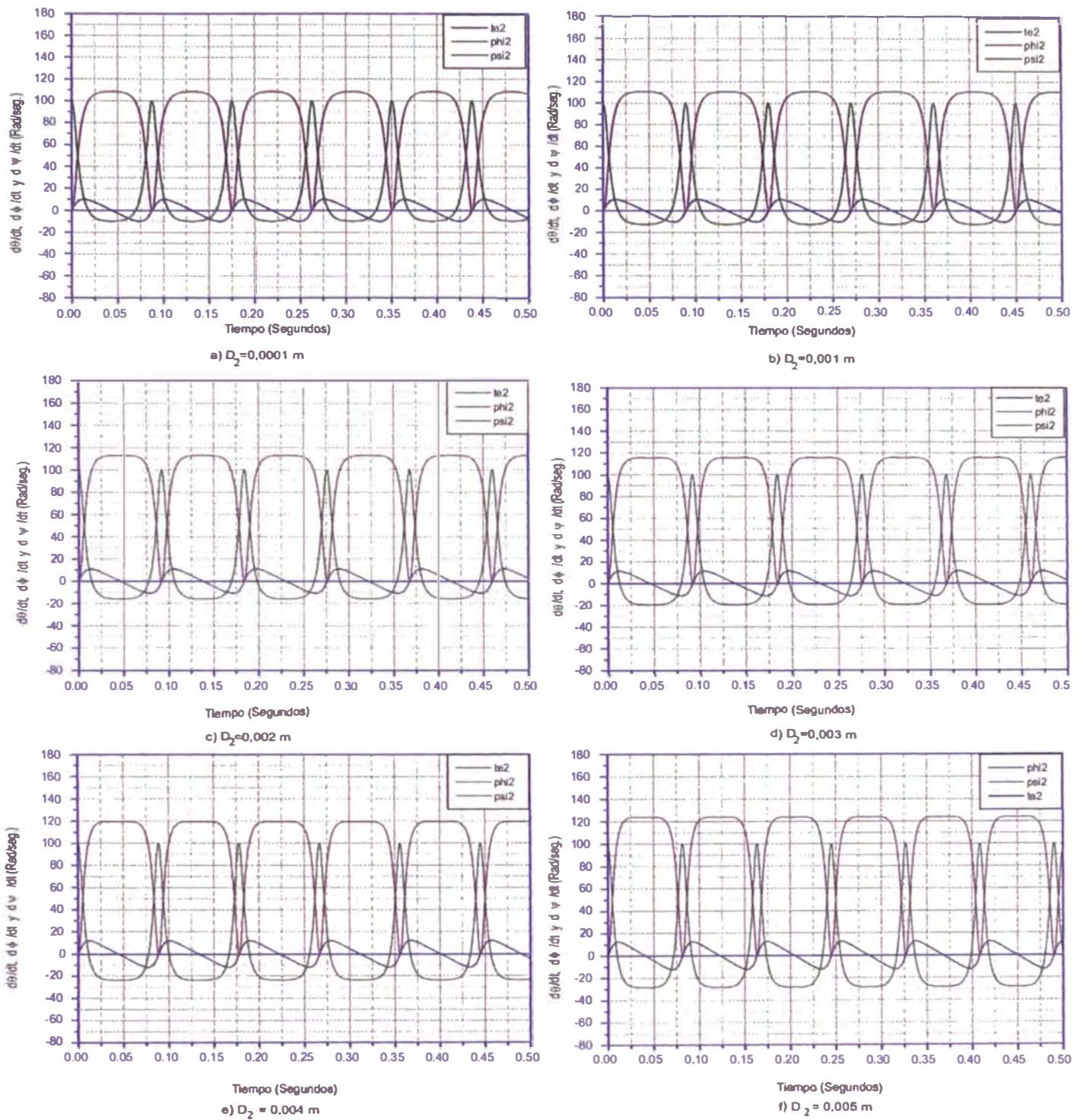


Figura 5.38: Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando  $\mathcal{D}_2$  varía de 0,0001 m a 0.005 m.

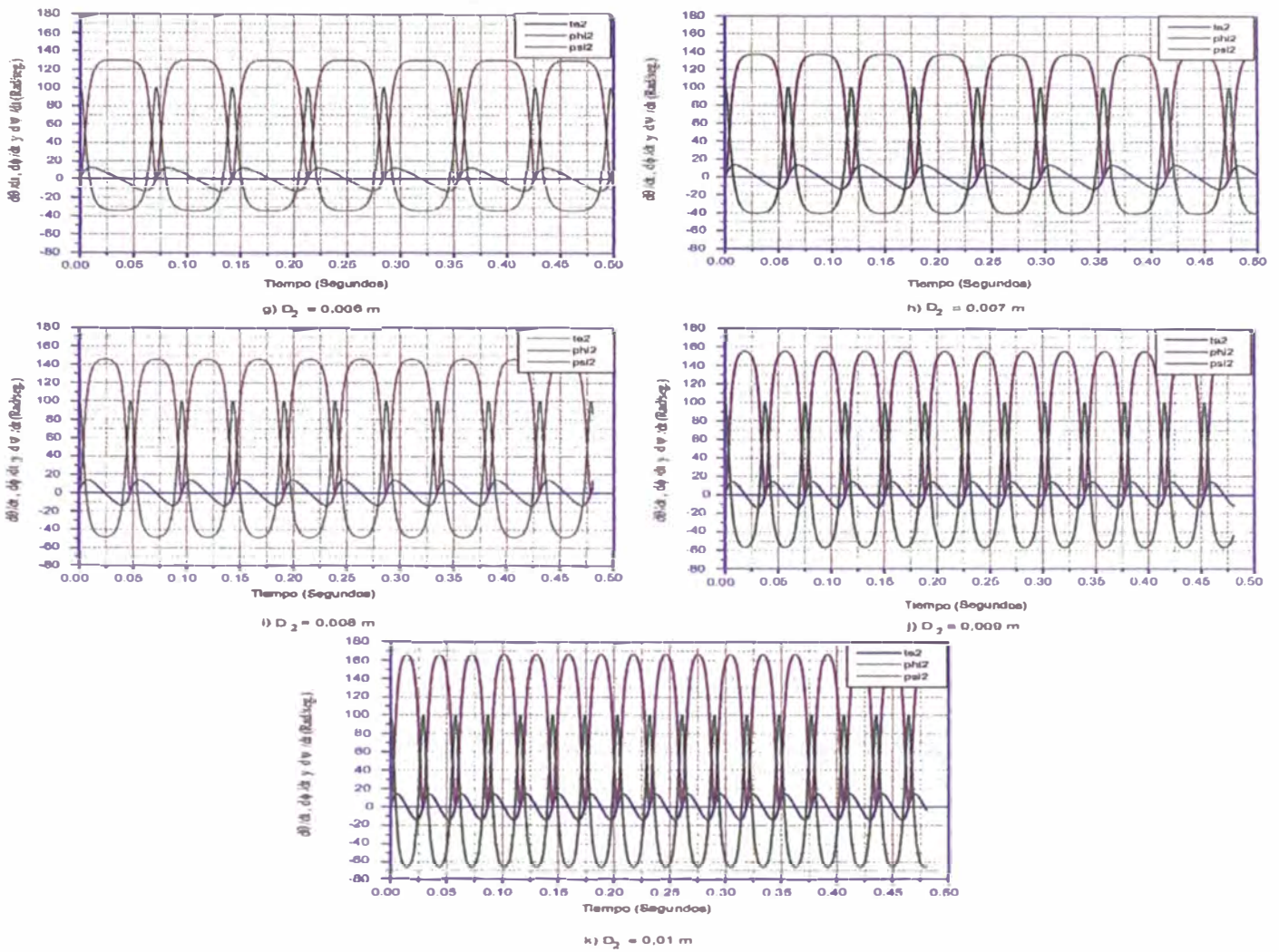


Figura 5.39: Superposición de las derivadas de los ángulos de Euler, cuando  $D_2$  varía de 0,006 m a 0.01 m.

Cuadro 5.34: Variaciones de la Energía conforme  $D_2$  varían.

$D_2$ m	$E_{min}$ Joules	$E_{máx}$ Joules	$\Delta E$ Joules	$\bar{E}$ Joules	% Error Joules
0,0001	0,0216	0,02241	0,00081	0,0219900±0,0000032	3,68 %
0,0010	0,02136	0,02228	0,00092	0,0217800±0,0000036	4,216 %
0,0020	0,02108	0,02213	0,00068	0,0215400±0,0000041	3,147 %
0,0030	0,02082	0,02198	0,00116	0,0214000±0,0000020	5,445 %
0,0040	0,02059	0,02184	0,00125	0,0212100±0,0000021	5,892 %
0,0050	0,02042	0,02169	0,00127	0,0211000±0,0000048	6,031 %
0,0060	0,02033	0,02155	0,00122	0,0209500±0,0000020	5,826 %
0,0070	0,02029	0,02140	0,00111	0,0209400±0,0000044	5,325 %
0,0080	0,02030	0,02125	0,00095	0,0207900±0,0000040	4,572 %
0,0090	0,02033	0,02111	0,00078	0,0208000±0,0000032	3,769 %
0,010	0,02035	0,02096	0,00061	0,0207200±0,0000010	2,953 %



## OBSERVACIONES DE LA TRAYECTORIA DE LA PROYECCIÓN DEL CENTRO GEOMÉTRICO SOBRE EL PLANO XY

Se iniciará mostrando las trayectorias para el caso  $\mathcal{D}_2 = 0,01m$ , en tres intervalos de tiempo:

- I) Para  $t \in [0, \mathcal{T}]$  seg.
- II) Para  $t \in [0, 2\mathcal{T}]$  seg.
- III) Para  $t \in [0, 3\mathcal{T}]$  seg.

donde  $\mathcal{T}$  es período de las funciones  $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ . Para este caso  $\mathcal{T} = 0,029$  seg. Se hizo esto para conocer como es la trayectoria para estos "intervalos notables".

Antes de mostrar los gráficos de las funciones halladas, con el objetivo de simplificar las expresiones en vez de decir, movimiento en el intervalo  $[0, k\mathcal{T}]$ , se dirá movimiento (o función) en  $k\mathcal{T}$  período, ( $k \in \mathbb{Z}^+$ ).

- I) Para  $t \in [0, \mathcal{T}]$  seg.

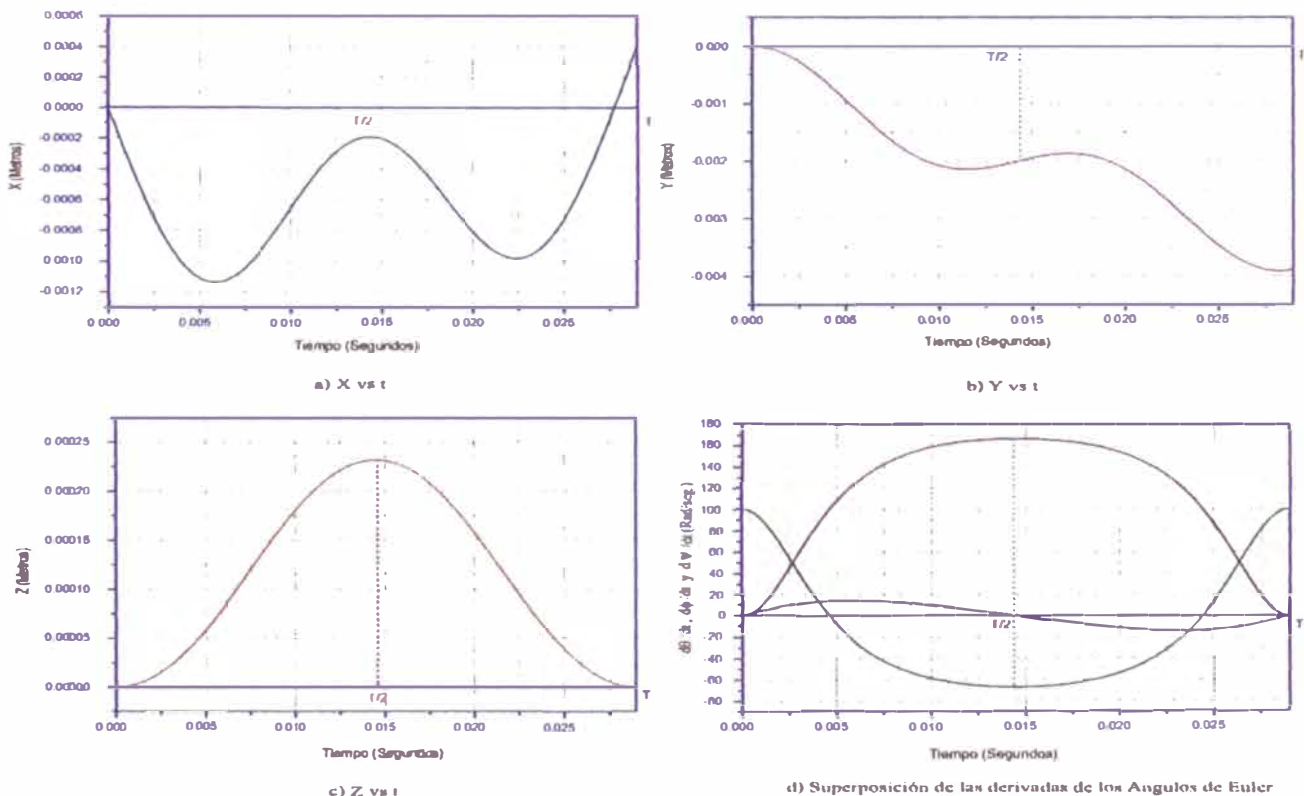


Figura 5.40: Trayectorias del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,01m$  para un tiempo  $t [0, \mathcal{T}]$ seg.

En la Fig(5.40) notamos de los gráficos

a) La función  $X(t)$  es negativa, en casi todo el intervalo de tiempo. Tiene 2 mínimos relativos:  $X = -0,00114$  m cuando  $t=0,00570$  seg, y  $X=-0,00100$  m cuando  $t=0,02250$  seg. Hay un máximo relativo en  $t = \frac{1}{2}\mathcal{T} \cong 0,0145$  seg, cuando  $X=-0,0002$  m.

b)  $Y(t)$  es una función decreciente y negativa.

c)  $Z(t)$  es una función positiva, con un máximo relativo en  $t=\frac{1}{2}\mathcal{T} \cong 0,0145$  seg.

d) La función  $\dot{\theta}$  tiene tres ceros, para el intervalo de tiempo  $[0, \mathcal{T}]$ , además observamos

\*) Para el intervalo  $[0, \frac{1}{2}\mathcal{T}]$  :

- El primer cero cuando  $t=0$  seg, "punto de inicio", a partir de aquí  $\dot{\theta}$  es positivo.

-  $\dot{\phi}$  también tiene un cero en  $t=0$ , y luego la función empieza a crecer.

-  $\dot{\psi}$  para  $t=0$  tiene un máximo y luego la función empieza a disminuir su valor.

\*) Para el intervalo  $[\frac{1}{2}\mathcal{T}, \mathcal{T}]$  :

- Segundo cero de  $\dot{\theta}$  en  $t = \frac{1}{2}\mathcal{T} \cong 0,0145$  seg. Luego los valores de  $\dot{\theta}$  son negativos.

-  $\dot{\phi}$  tiene un máximo relativo en  $t=\frac{1}{2}\mathcal{T}$  y luego empieza a decrecer.

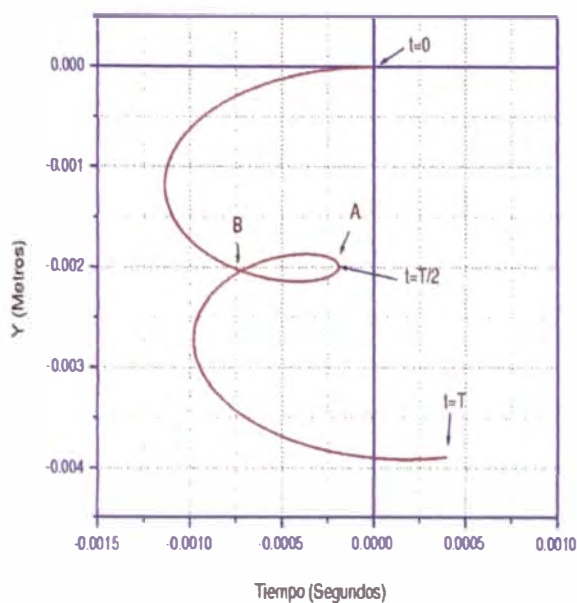
-  $\dot{\psi}$  tiene un mínimo en  $t=\frac{1}{2}\mathcal{T}$  y después va incrementando su valor.

- Tercer cero, para  $t = \mathcal{T}$ , se puede decir que todos los valores de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ , se ubica como en el punto de partida.

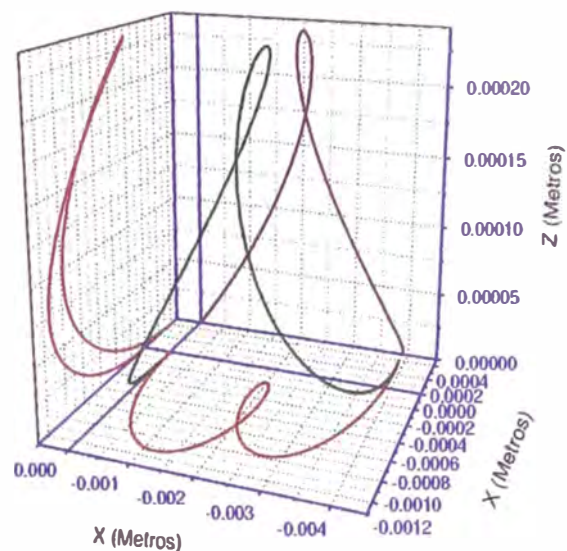
En la Fig(5.41) mostramos

a) Se nota la formación de la mitad de un rizo cuando la trayectoria de la proyección llega al





(a) X vs Y



(b) Trayectoria en 3D

Figura 5.41: Trayectoria de la curva en 1 período en el plano y en tres dimensiones.

punto A ( $X_A = -0,00021$  m,  $Y_A = -0,0020$  m). El tiempo transcurrido hasta el punto A es de  $[0, \frac{T}{2}]$  y para este intervalo de tiempo la trayectoria de la curva, es de tal modo que  $X < 0$  y  $Y < 0$ . La curva se cruza en B ( $X_B = -0,00072$  m y  $Y_B = -0,00200$  m.) La trayectoria tiene sentido antihorario. Podemos decir que se forma un rizo para un periodo transcurrido.

b) Trayectoria de la curva en 3D, forma un rizo. Además podemos ver las proyecciones de la trayectoria en los planos XZ, XY y YZ.

II) Para  $t \in [0, 2T]$  seg.

En la Fig(5.42) notamos los gráficos

a) La función  $X(t)$  es casi positiva, en todo el intervalo de tiempo  $\langle T, 2T \rangle$ . Tiene 2 máximos en  $t = 0,03398$  seg ( $X_{max} = 0,00129$  m) y  $t = 0,05065$  seg ( $X_{max} = 0,00082$  m). Un mínimo relativo en  $t = \frac{3}{2}T \cong 0,0435$  seg ( $X_{min} = 0,00017$  m).

b)  $Y(t)$  es una función creciente y negativa para  $\langle T, 2T \rangle$ .

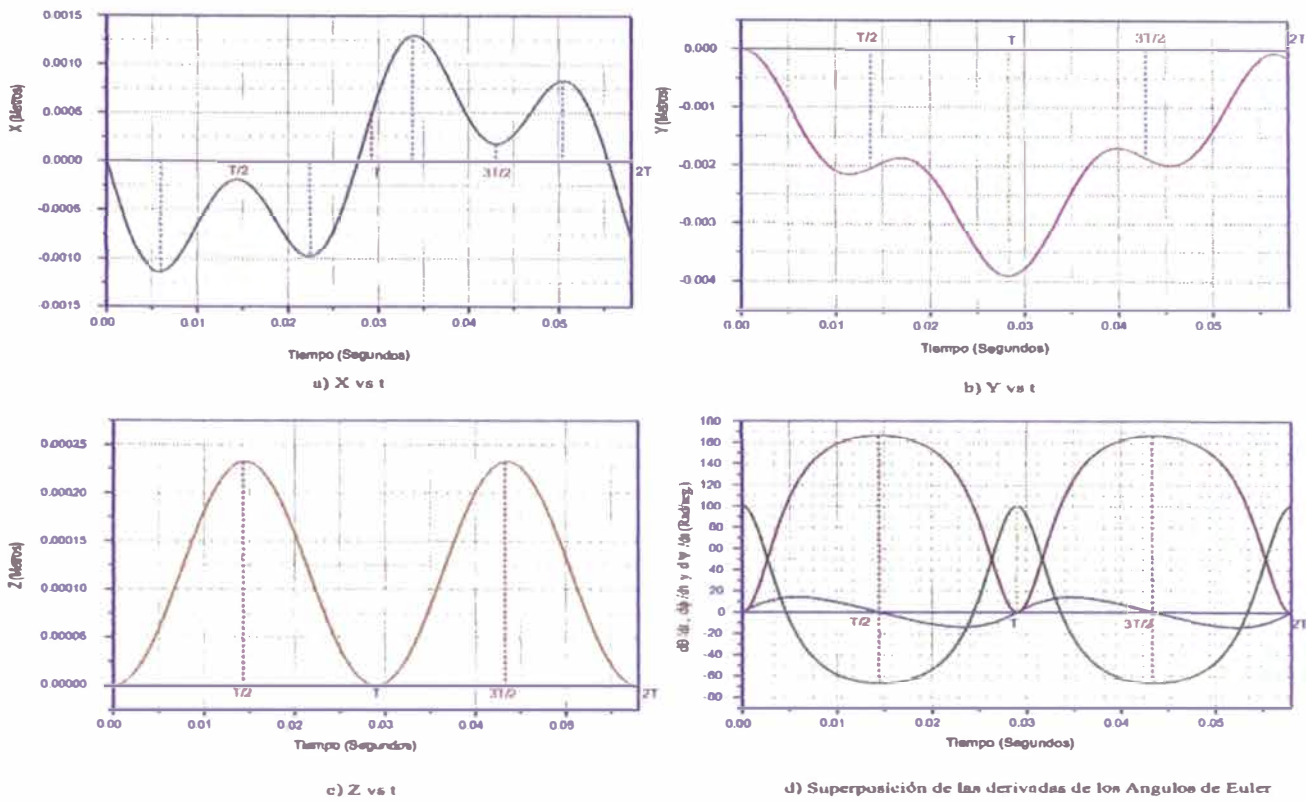


Figura 5.42: Trayectorias del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,01m$  para un tiempo  $t \in [0, 2T]$  seg.

c)  $Z(t)$  es una función positiva, para  $t \in [0, T, 2T]$ , con un máximo relativo en  $\frac{3}{2}T \cong 0,0435$  seg y tiene dos ceros en  $t=0,0290$  seg y  $t=0,0580$  seg.

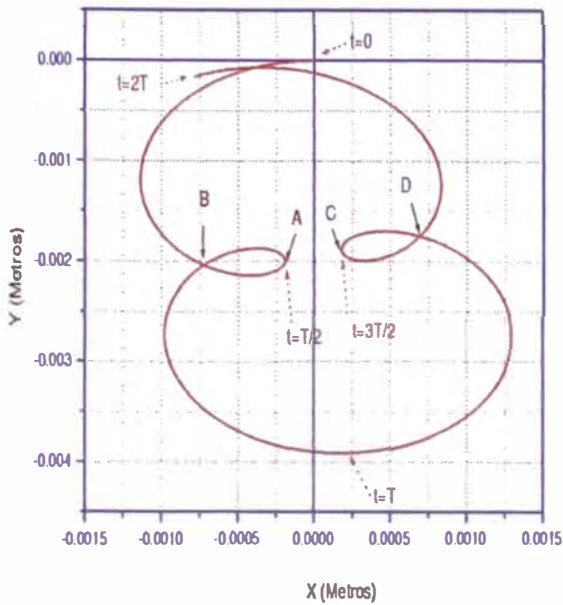
d) La función  $\dot{\theta}$  tiene tres ceros, para intervalo de tiempo  $[T, 2T]$ .

\*) Para el intervalo  $[T, \frac{3}{2}T >$ :

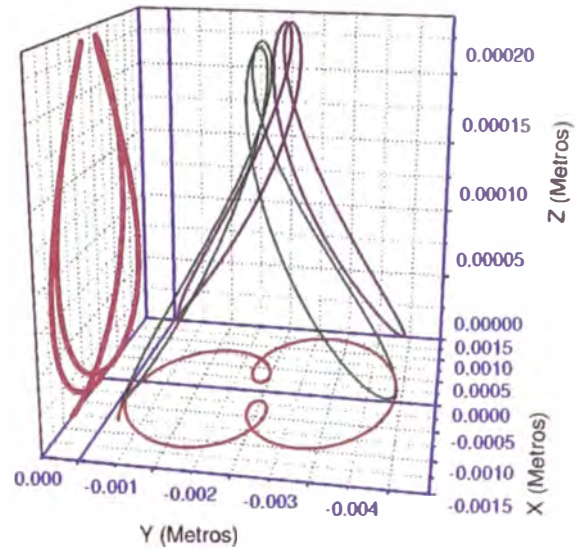
- El primer cero, cuando  $t=T \cong 0,0290$  seg. Luego  $\dot{\theta}$  es positivo.
- $\dot{\phi}$  tiene un cero también y empieza a crecer.
- $\dot{\psi}$  en  $t=T$  tiene un máximo relativo y empieza a disminuir su valor.

\*) Para el intervalo  $[\frac{3}{2}T, 2T >$ :

- Segundo cero de  $\dot{\theta}$  en  $t=\frac{3}{2}T \cong 0,0435$  seg, y después es negativo.
- $\dot{\phi}$  tiene un máximo valor en  $\frac{3}{2}T$ , y empieza a decrecer.
- $\dot{\psi}$  tiene un mínimo valor en  $\frac{3}{2}T$  y luego empieza a incrementar su valor.
- Tercer cero:  $t=2T \cong 0,0580$  seg, todos los valores de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  se ubica como en el "punto de partida".



(c) Y vs X



(d) Gráfica en 3D.

Figura 5.43: Trayectoria del centro geométrico en 2 periodos (0,05800 seg.), en plano y en tres dimensiones.

En la Fig(5.43) presentamos

a) Para el intervalo de tiempo  $[T, \frac{3}{2}T]$ , se forma la mitad de un segundo rizo la trayectoria llega al punto C ( $X_C = 0,00019$  m,  $Y_C = -0,00192$  m), la al puntoe la proyección del Centro Geométrico(CG) es de tal modo que  $X > 0$  y  $Y < 0$ . La curva se cruza en D ( $X_D = -0,000692$  m,  $Y_D = -0,00174$  m). Cuando  $t = 2T$  se forma el segundo rizo. Podemos decir que se forma 2 rizos para dos periodos transcurridos.

b) Trayectoria de la curva en 3D, se forman dos rizos. Se puede apreciar las proyecciones en los tres planos (XY, XZ y YZ).

III) Para  $t \in [0, 3T]$  seg.

En la Fig(5.44) notamos

a) La función  $X(t)$  es casi negativa en  $[2T, 3T]$ . Tiene 2 mínimos para este intervalo: si  $t = 0,0622$  seg ( $X_{min} = -0,0014$  m) y  $t = 0,0786$  seg ( $X_{min} = -0,00067$  m) Hay un máximo

relativo en  $t = \frac{5}{2}\mathcal{T} \cong 0,0720$  seg. ( $X_{max} = -0,00015$  m).

b)  $Y(t)$  es una función decreciente y es negativa para el intervalo  $\langle 2\mathcal{T}, 3\mathcal{T} \rangle$ .

c)  $Z(t)$  es una función positiva para  $\langle 2\mathcal{T}, 3\mathcal{T} \rangle$ , con un máximo relativo en  $t = \frac{5}{2}\mathcal{T} \cong 0,0725$  seg y tiene dos mínimo. en  $t = 0,0580$  seg y  $t = 0,0870$  seg.

d) La función  $\dot{\theta}$  tiene para  $[2\mathcal{T}, 3\mathcal{T}]$ , tiene tres ceros

\*) Para el intervalo  $\langle 2\mathcal{T}, \frac{5}{2}\mathcal{T} \rangle$ :

- El primer cero cuando  $t = 2\mathcal{T} \cong 0,0580$  seg. Luego  $\dot{\theta}$  es positiva, en este intervalo.
- $\dot{\phi}$  tiene un cero y empieza a crecer.
- Pero  $\dot{\psi}$  tiene un máximo en  $2\mathcal{T}$  y luego empieza a disminuir su valor.

\*) Para el intervalo  $\langle \frac{5}{2}\mathcal{T}, 3\mathcal{T} \rangle$ :

- Segundo cero de  $\dot{\theta}$  en  $t = \frac{5}{2}\mathcal{T} \cong 0,0725$  seg. Después  $\dot{\theta}$  es negativo, para este intervalo.
- $\dot{\phi}$  tiene un máximo valor en  $\frac{5}{2}\mathcal{T}$ , y empieza a decrecer.
- Mientras  $\dot{\psi}$  tiene un mínimo valor en  $t = \frac{5}{2}\mathcal{T}$  y luego empieza a incrementar su valor.
- Tercer cero en  $t = 3\mathcal{T}$ , todo se ubica como en el punto de partida ( $t = 3\mathcal{T} \cong 0,0870$  seg).

De la Fig(5.45) se observamos de los gráficos

a) Se nota la formación de un tercer rizo en el intervalo  $[2\mathcal{T}, 3\mathcal{T}]$ , la mitad del tercer rizo se termina de formar en E ( $X_E = -0,00019$  m,  $Y_E = -0,00203$  m). La trayectoria de la proyección del CG del elipsoide es de tal modo que  $X < 0$  e  $Y < 0$ . Si  $2\mathcal{T} < t < \frac{3}{2}\mathcal{T}$ . Podemos decir que hay tres rizos para tres períodos.

b) La Trayectoria del CG del elipsoide en 3D, forman tres rizos. También se observa las proyecciones de la curva en los planos XY, XZ y YZ.

En la Fig(5.46) se muestra la trayectoria del CG del elipsoide para un intervalo de tiempo de  $[0, 15\mathcal{T} \cong 0,4350$  seg].

a) Se nota que el movimiento de la proyección del CG del elipsoide en el plano XY, esta



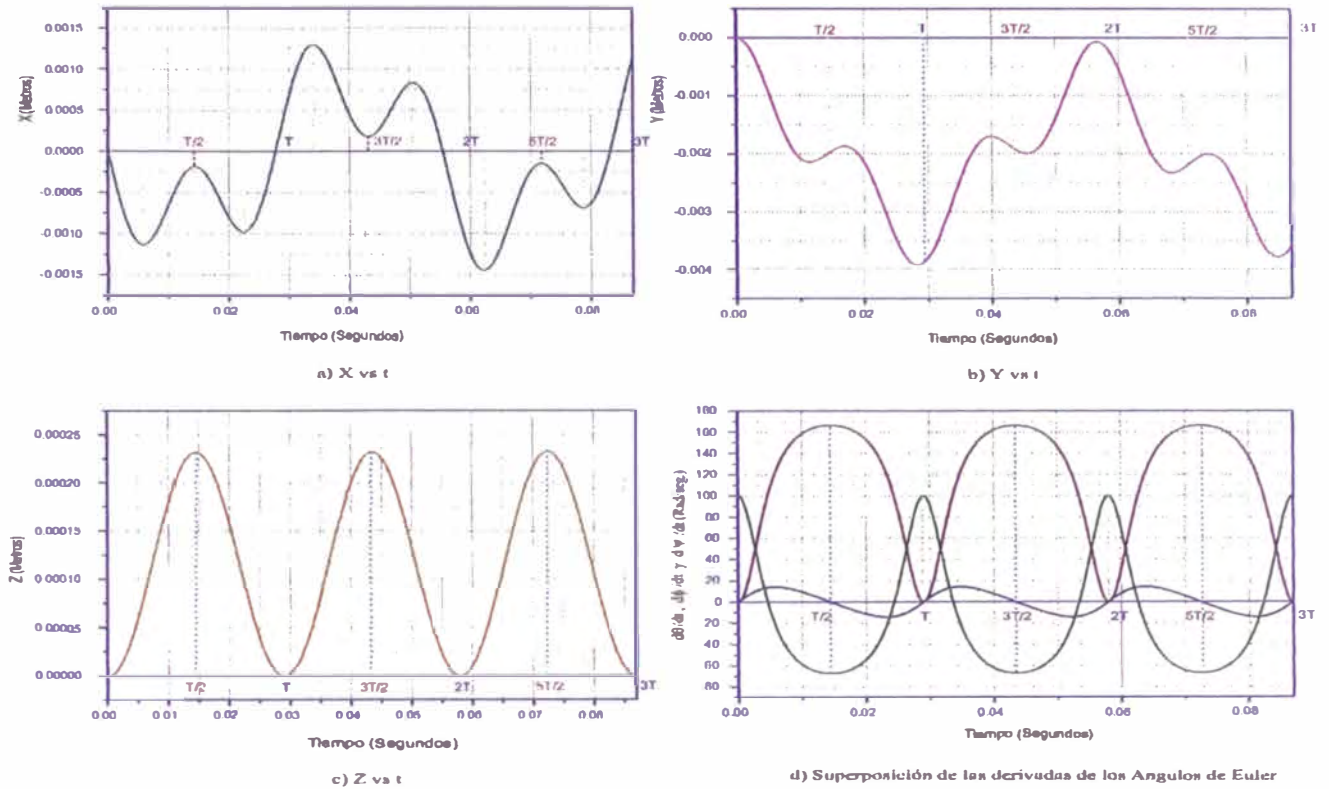


Figura 5.44: Trayectorias del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,01m$  para un tiempo  $t \in [0,3T]$ seg.

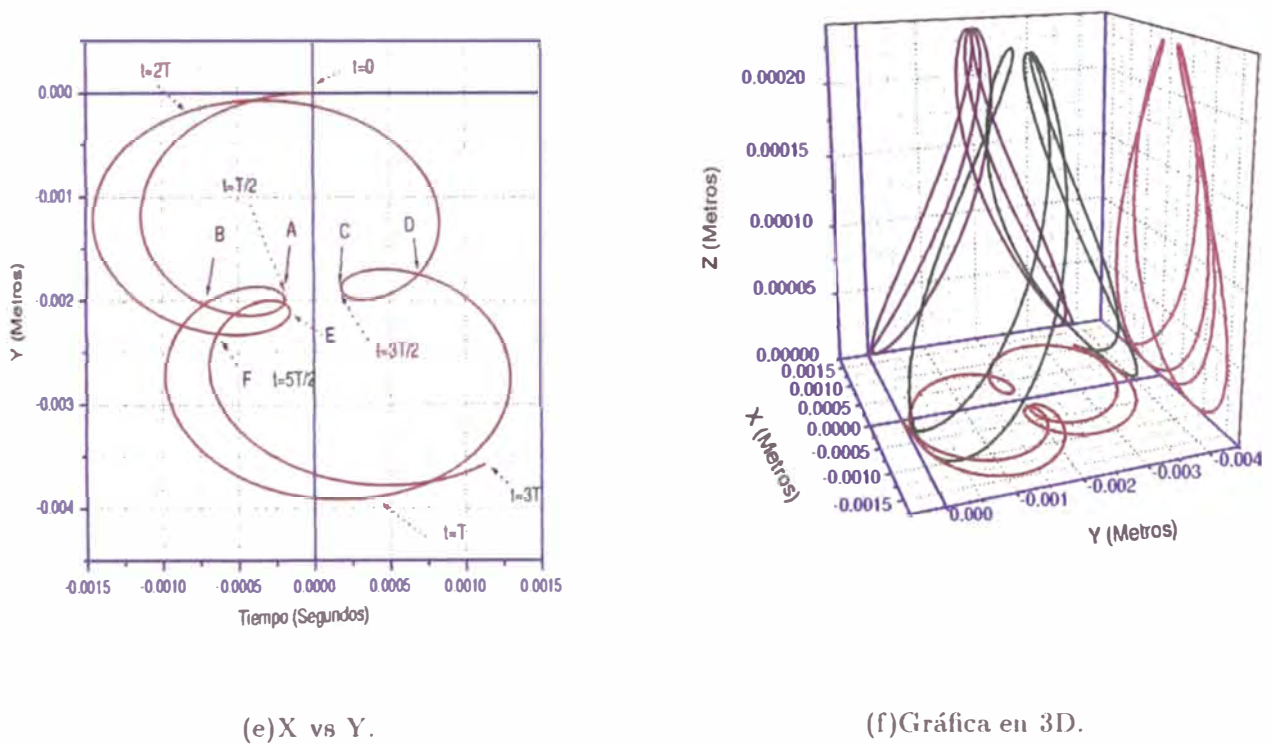


Figura 5.45: Trayectoria del la curva en 3 periodos (0,0868 seg.)en el plano y en tres dimensiones.

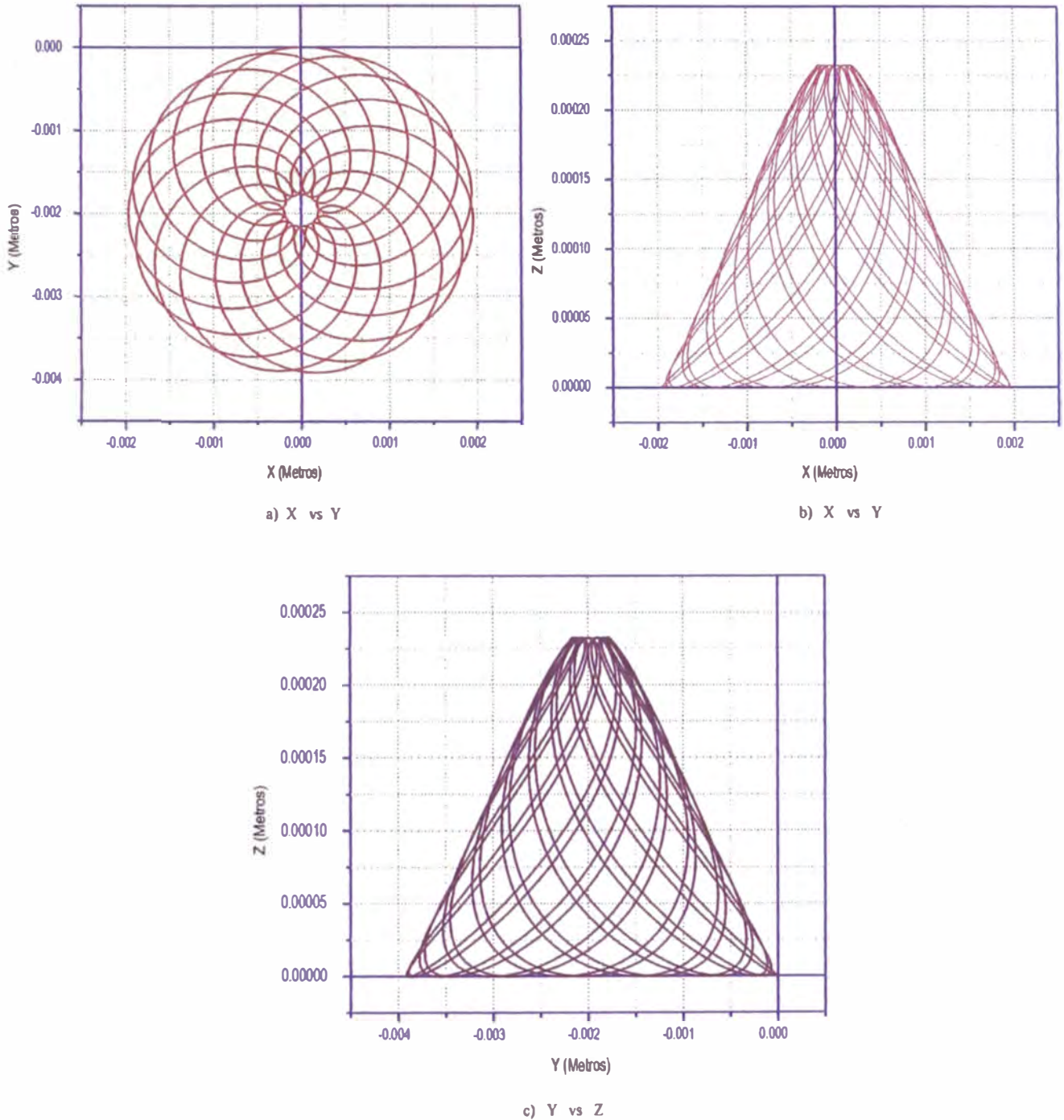


Figura 5.46: Gráfica de las proyecciones de la trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,01m$

dentro de una región limitada por dos elipses. Es decir aparecen regiones prohibidas para el movimiento de la trayectoria del CG. La trayectoria es simétrica al eje Y.

b) Trayectoria de la proyección del CG (PCG) en el plano XZ, tiene un valor máximo de  $Z=0,00023$  m y es simétrica con respecto el eje  $Z=0$ .

c) Trayectoria de la PCG en el plano YZ, tiene un máximo en  $Z=0,00023$  m y es simétrica a la recta  $Y=-0,002$  m.

En la Fig(5.47) presentamos la trayectoria de la PCG en 3D, para un intervalo de  $[0, 15 \mathcal{T}]$ .

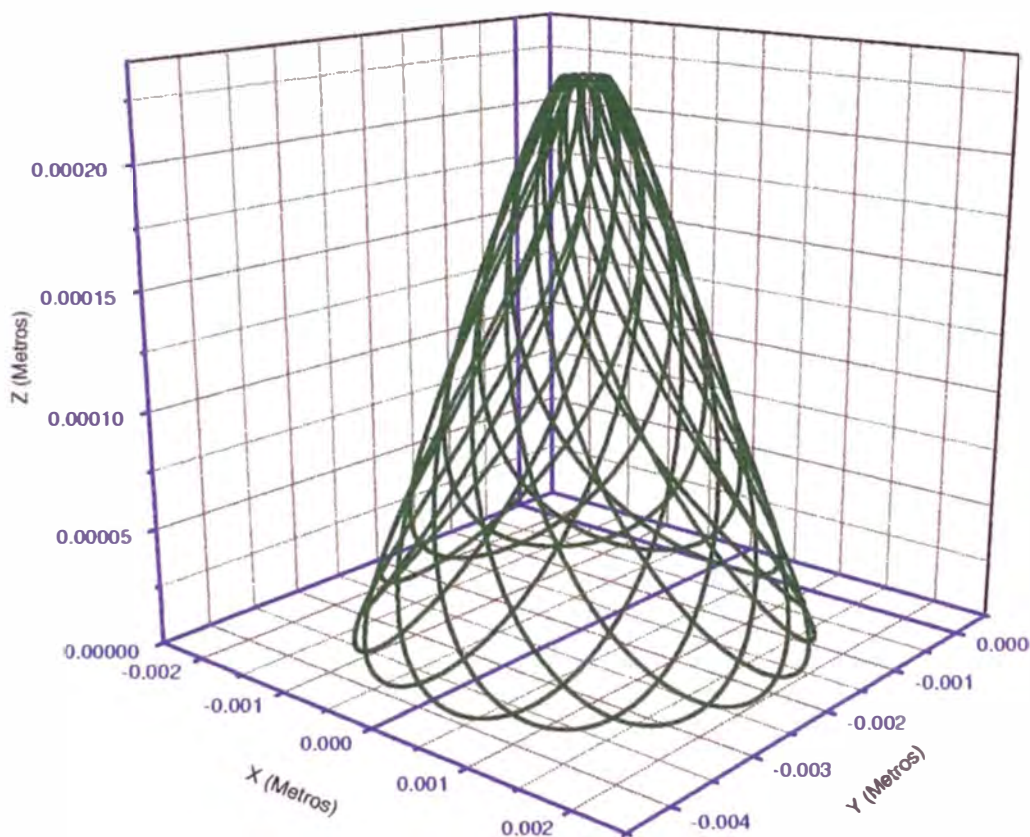


Figura 5.47: Trayectoria del centro geométrico en 3D

Luego de todo lo tratado para este caso  $\mathcal{D}_2 = 0,01m$  podemos llegar a las siguiente observación:

\* Cuando se considera la trayectoria para  $n \mathcal{T}$  períodos transcurridos (es decir intervalos  $[0, n\mathcal{T}]$ ), habrá  $n$  rizos.

En los siguientes gráficos se da algunos ejemplos, para ciertos valores de  $\mathcal{D}_2$ :



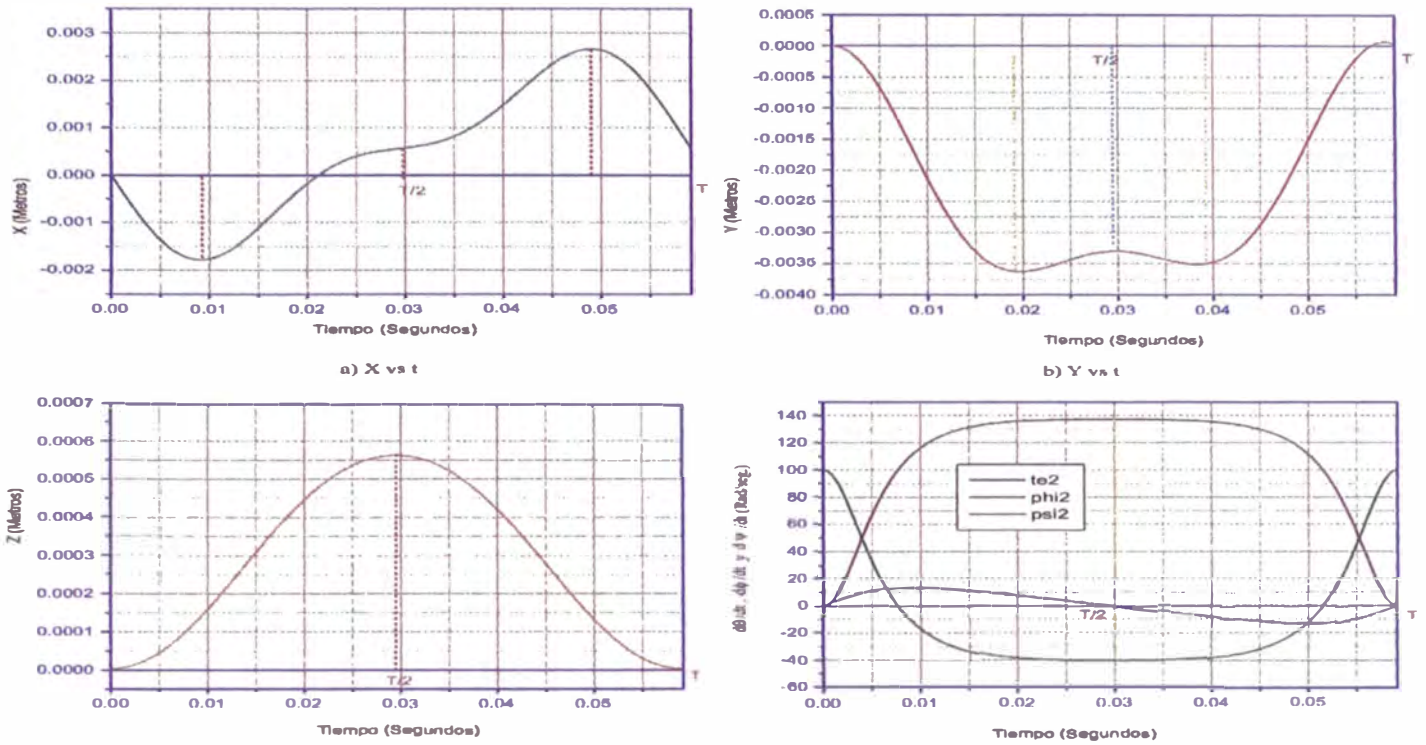


Figura 5.48: Trayectorias del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,007m$  para un tiempo  $t \in [0, T]$ seg.

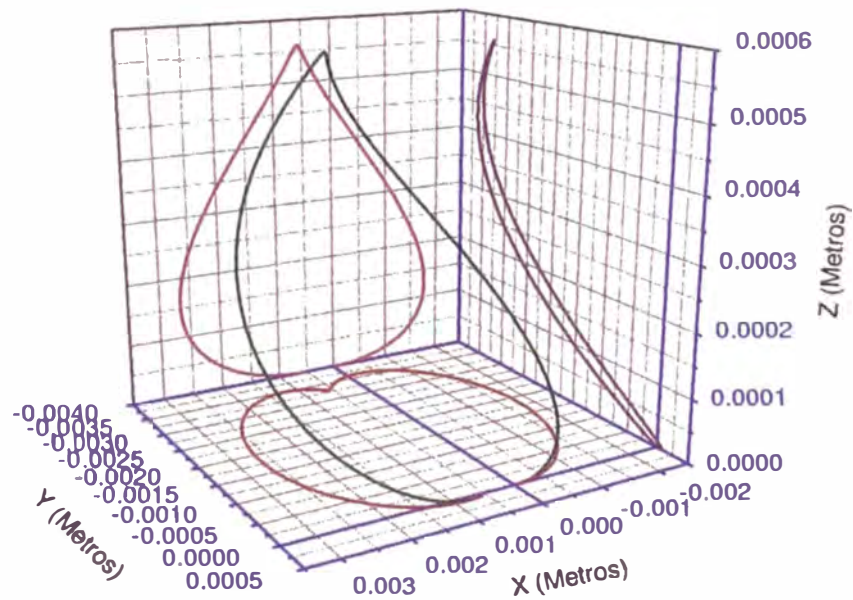


Figura 5.49: Trayectoria del centro geométrico, cuando  $D_2 = 0,0007m$  y para un tiempo  $t \in [0, T]$ seg. en tres dimensiones

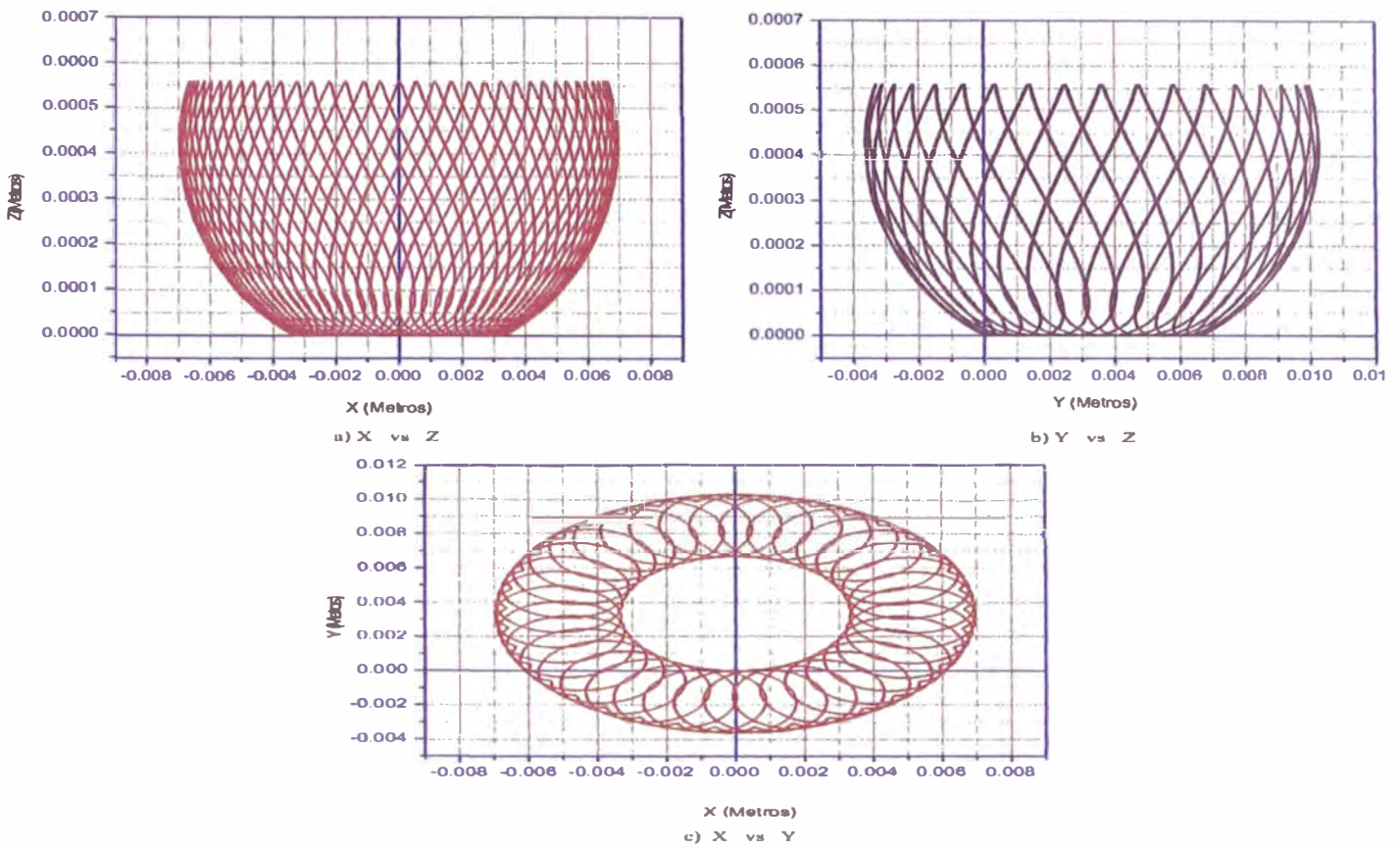


Figura 5.50: Proyecciones de la trayectoria en 3D, cuando  $D_2 = 0,0007m$  y para un  $t [0,15T]$ .

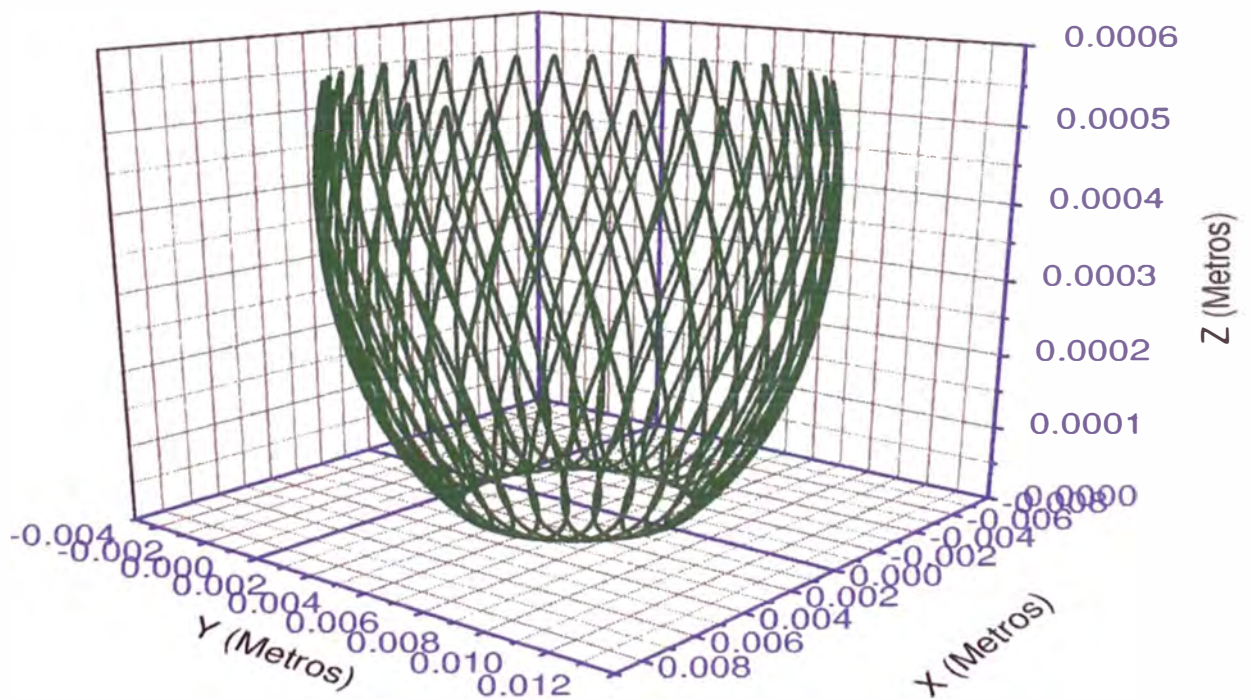


Figura 5.51: Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando  $D_2 = 0,007m$  y para un  $t [0,15T]$ .



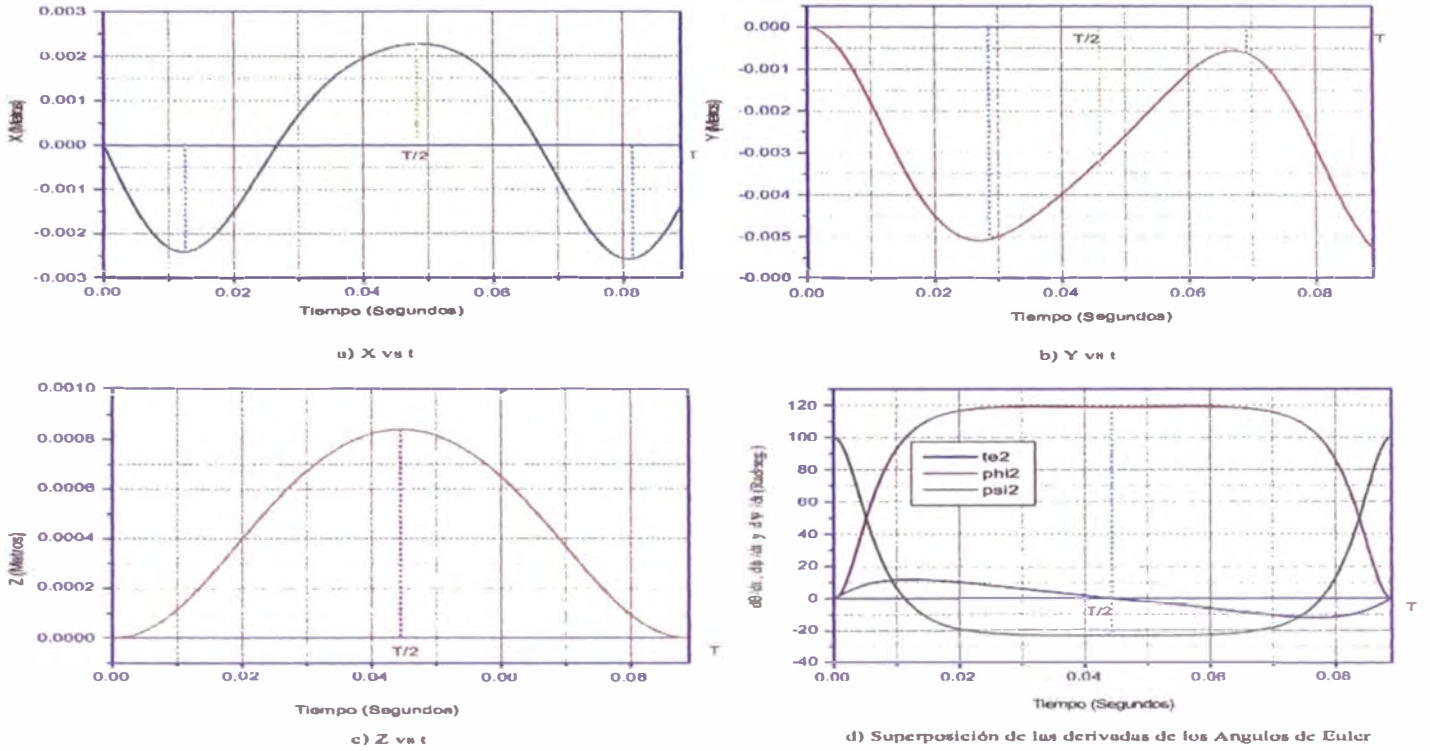


Figura 5.52: Trayectorias del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,004m$ , para un tiempo  $t \in [0, T]$ seg.

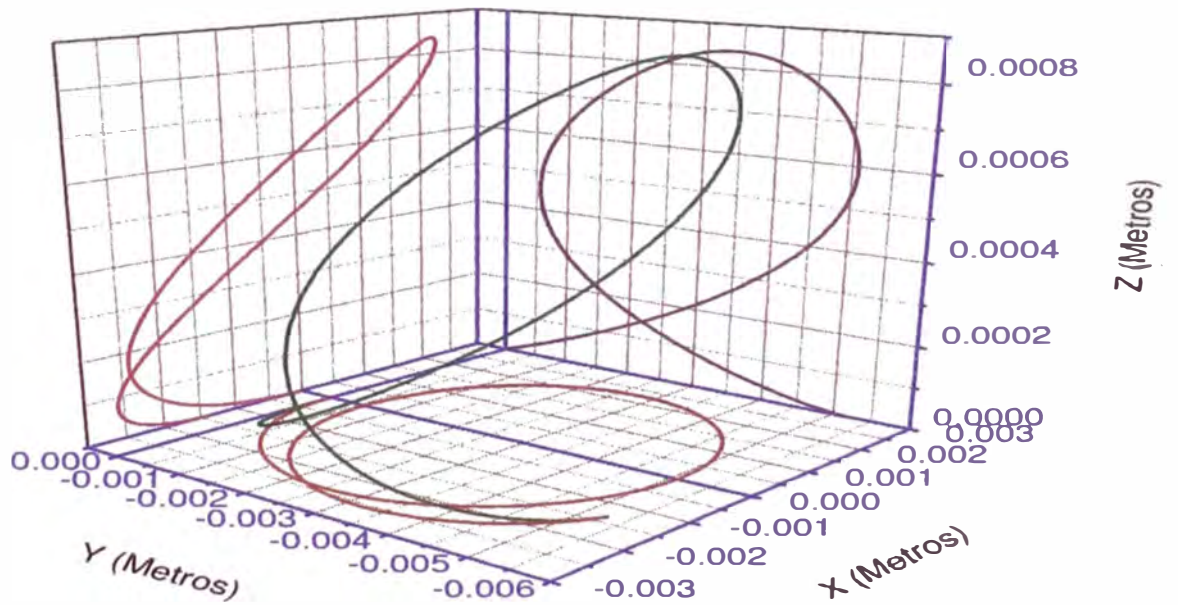


Figura 5.53: Trayectoria del centro geométrico, cuando  $D_2 = 0,0004m$  y para un tiempo  $t \in [0, T]$ seg. en tres dimensiones

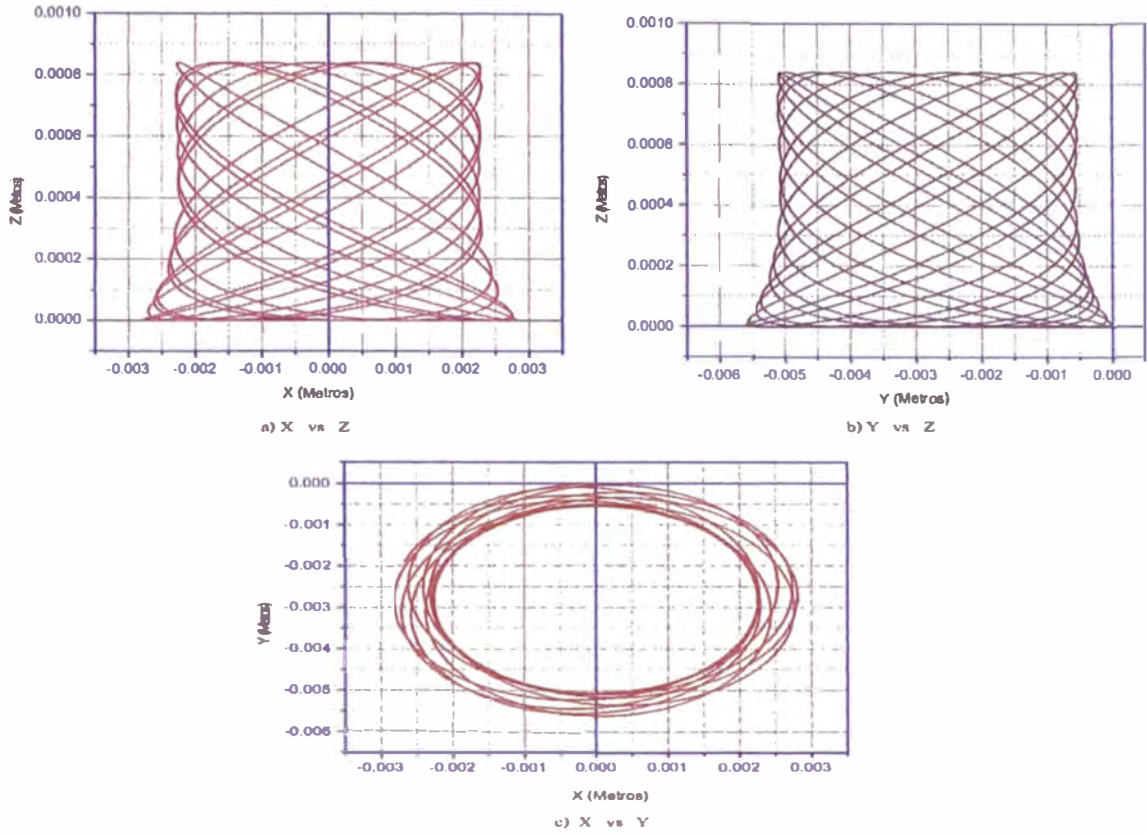


Figura 5.54: Proyecciones de la trayectoria en 3D,cuando  $D_2 = 0,0004m$  y para un  $t [0,10T]$ .

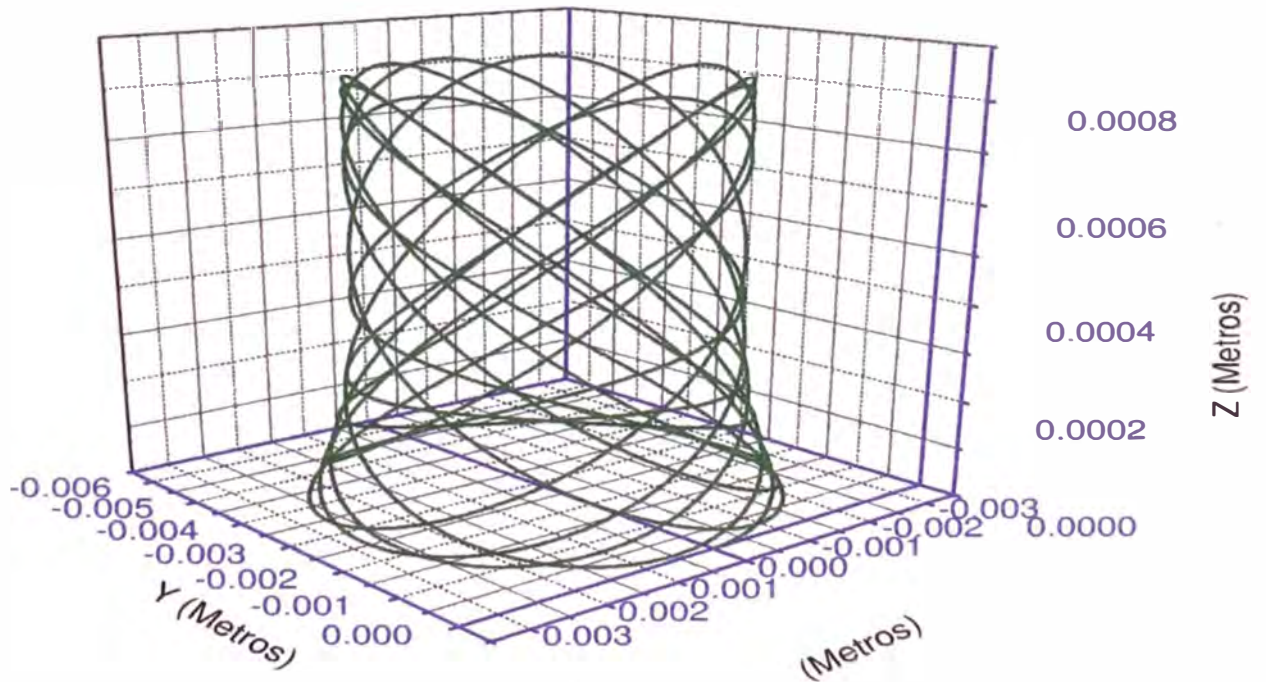


Figura 5.55: Trayectoria del centro geométrico en tres dimensiones, cuando  $D_2 = 0,004m$  y para un  $t [0,10T]$



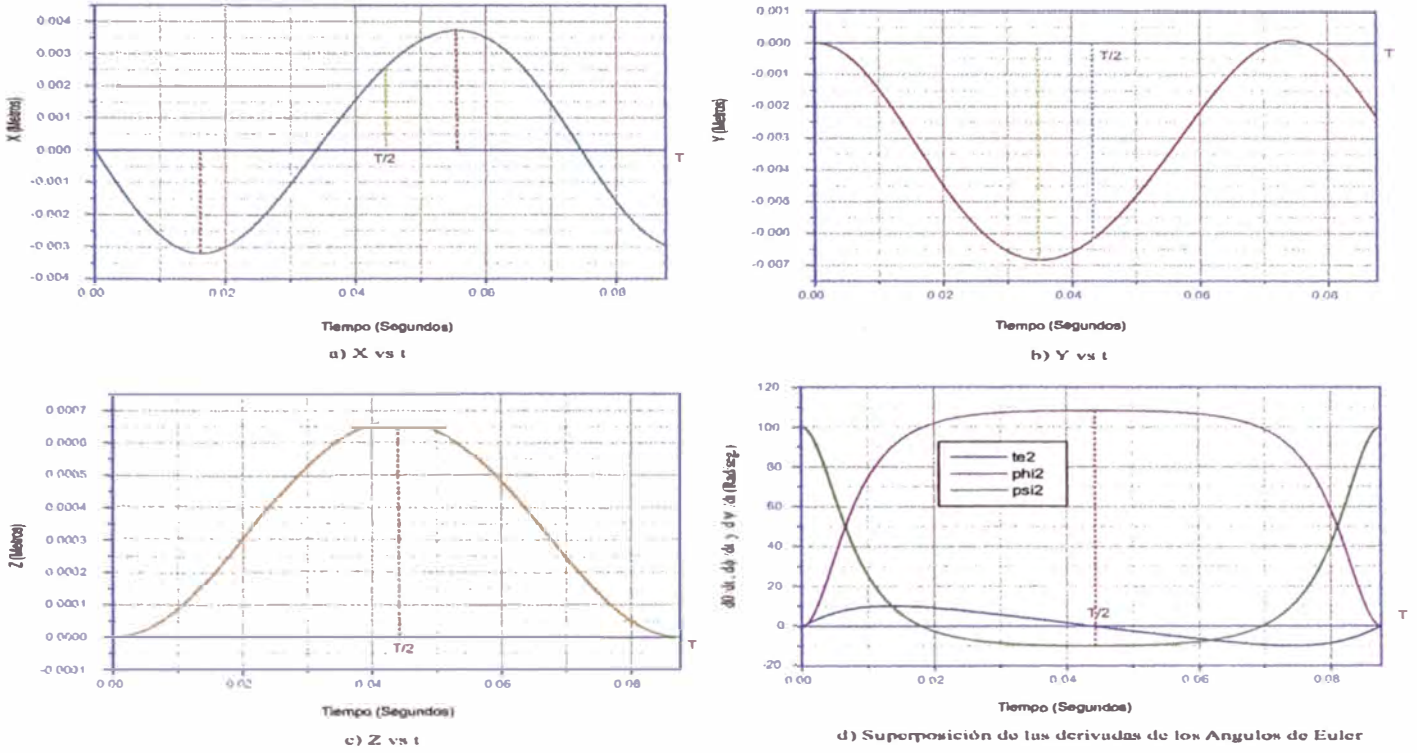


Figura 5.56: Trayectorias del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,0001m$  para un tiempo  $t, [0, T]$ seg.

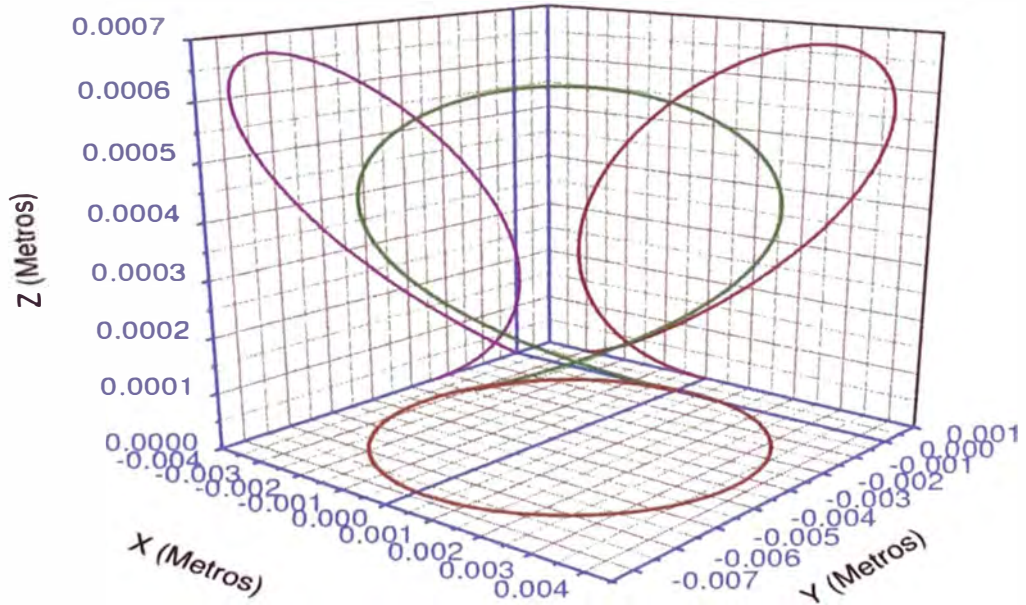


Figura 5.57: Trayectoria del centro geométrico, cuando  $D_2 = 0,0001m$  y para un tiempo  $t, [0, T]$ seg. en tres dimensiones

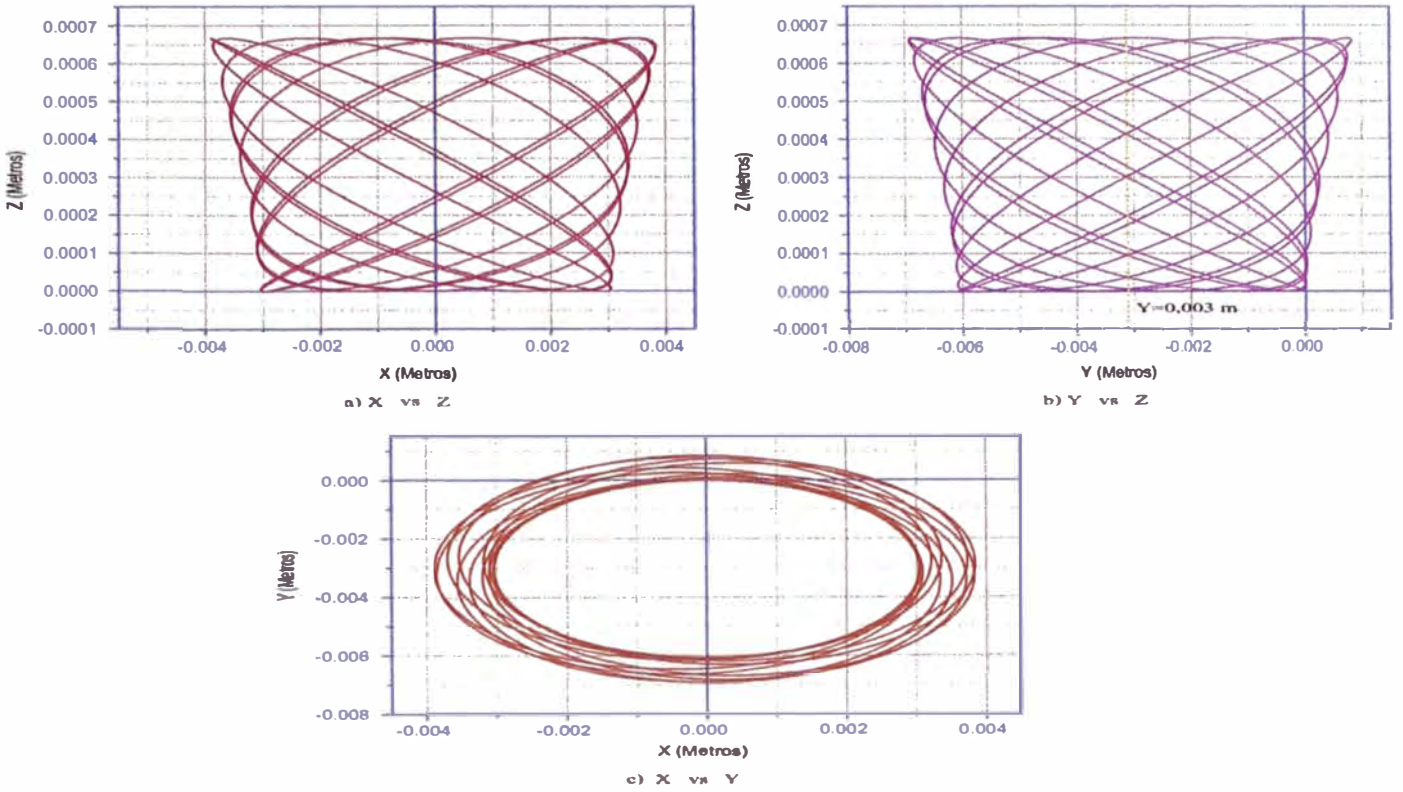


Figura 5.58: Proyecciones de la trayectoria en 3D, cuando  $D_2 = 0,0001m$  y para un  $t [0,8T]$ .

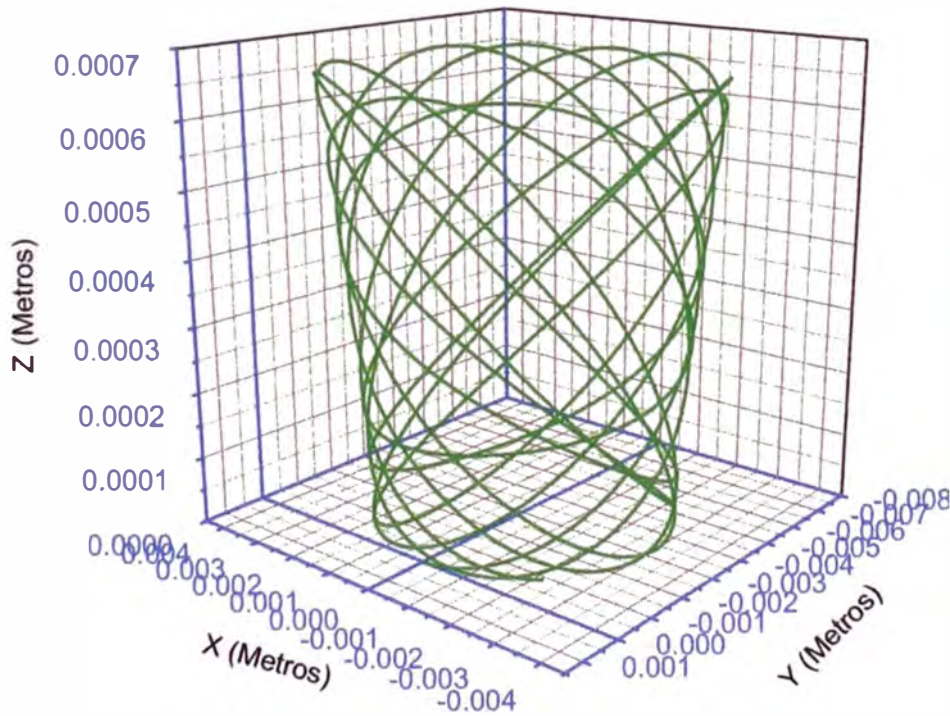


Figura 5.59: Trayectoria del centro geométrico pra tres dimensiones, cuando  $D_2 = 0,0001m$  y para un  $t [0,8T]$

En los siguientes gráficos se muestra las trayectorias cuando  $\mathcal{D}_2$  varia en forma decreciente, para tres intervalos de tiempo:

- i) Para  $t \in [0, 0,08]$  seg.
- ii) Para  $t \in [0, 1]$  seg.
- iii) Para  $t \in [0, 4,8]$  seg.

En las Figuras(5.60) al (5.65) se tiene :

- 1) Disminuyendo el rizo hasta desaparecer cuando  $\mathcal{D}_2=0,007$  m
- 2) La zona prohibida interna disminuye y luego se incremento .
- 3) El período de los ángulos de Euler y sus derivadas va incrementandose a medida que  $\mathcal{D}_2$  se incrementa.
- 4) Una característica común, la trayectoria esta dentro de una región acotada por dos elipses.

En las Figuras (5.66) al (5.71) se tiene :

- 1)El período de e los ángulos de Euler y sus derivadas va disminuyendo.
- 2)La zona prohibida interna aumento mas su tamaño En los últimos tres gráficos observamos que la región donde hay movimiento aumenta.
- 3)La trayectoria de la curva se convirtio en un anillo muy angosto, para  $\mathcal{D} = 0,002$ m.
- 4)Ya no aparece rizos, en cambio aparecen en la trayectoria una *protuberancia* que va disminuyendo.



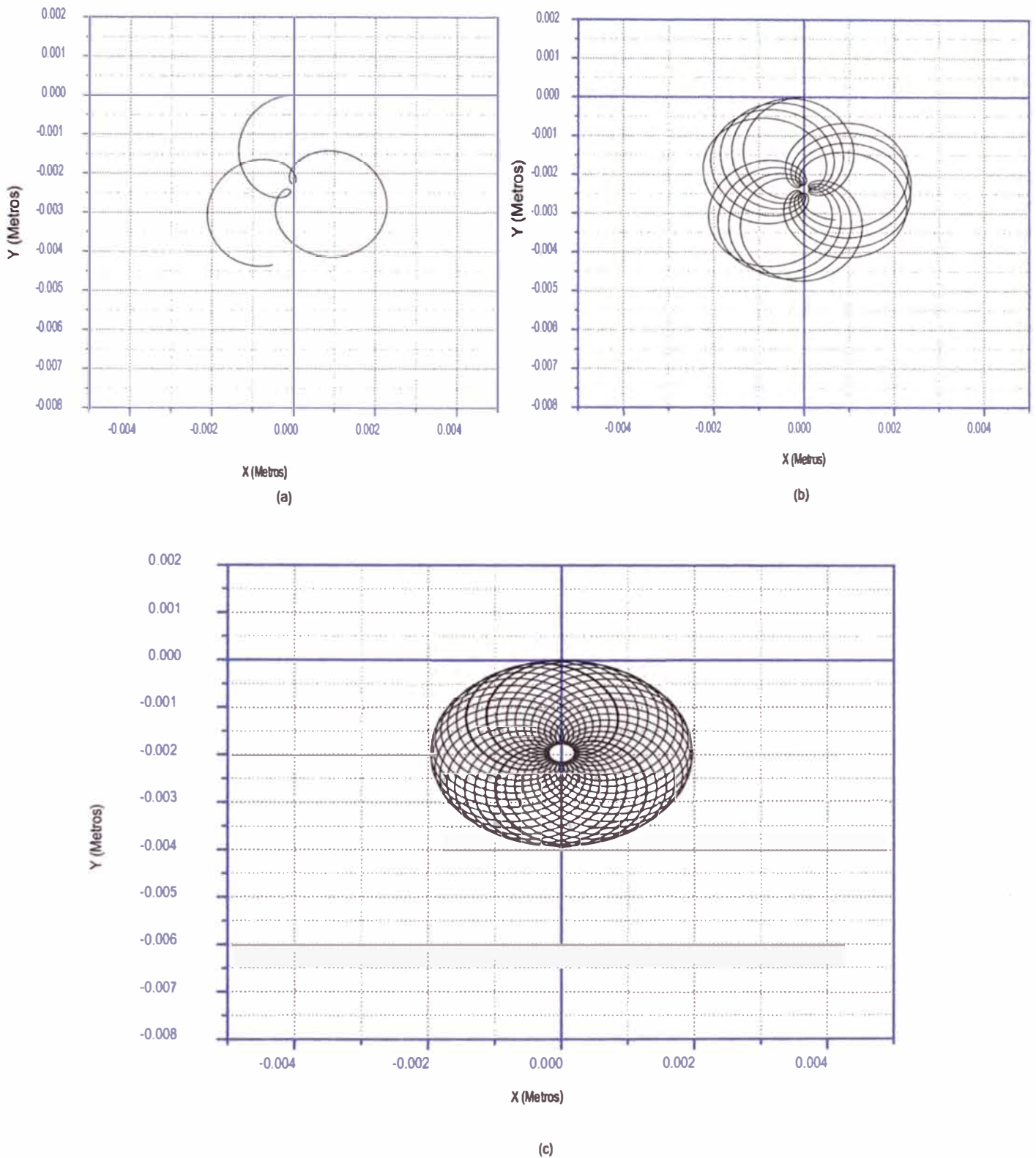


Figura 5.60: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,009m$  y en los intervalos de tiempo: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0, 4,80]$ seg

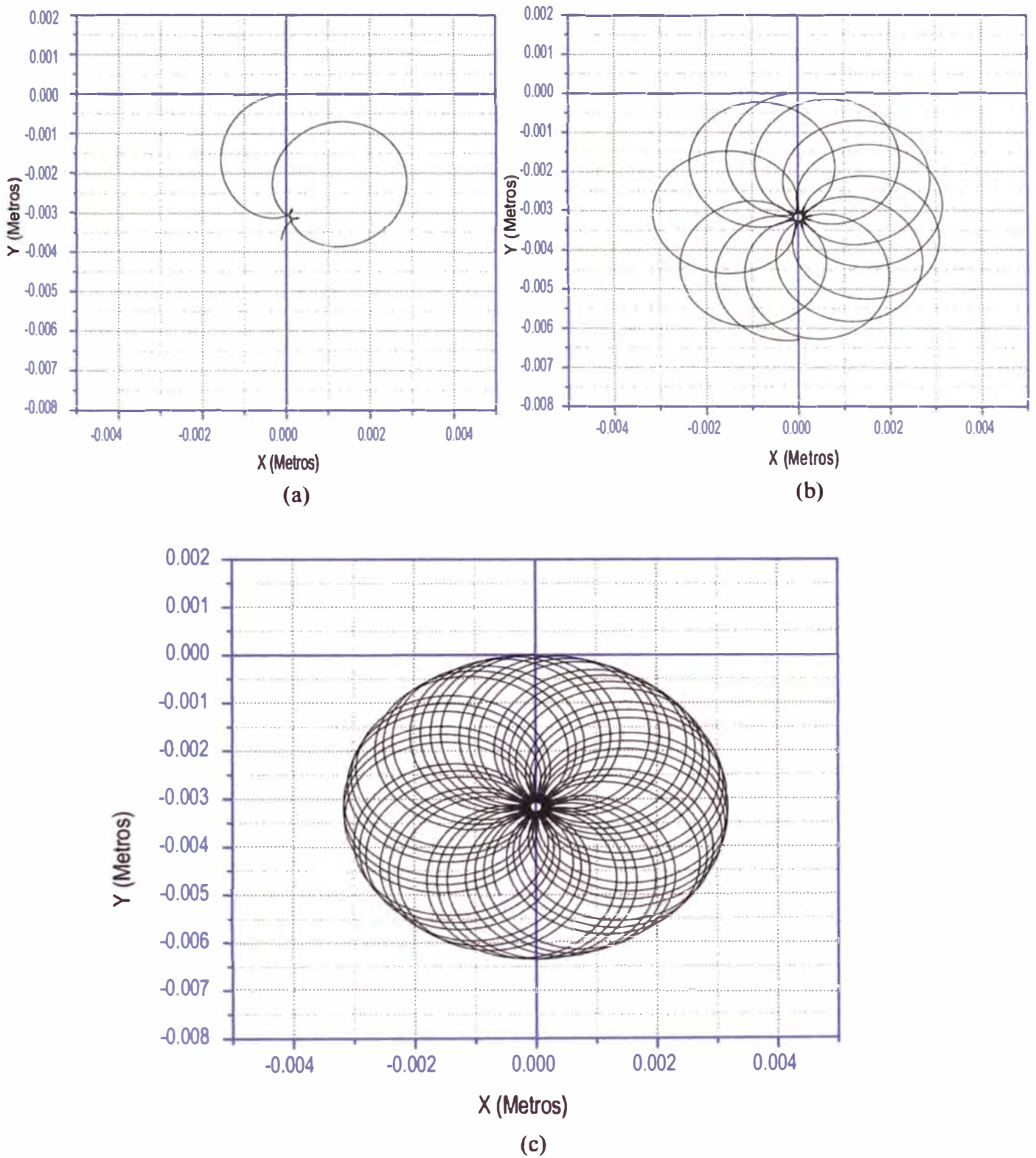


Figura 5.61: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,008m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0, 4,80]$ seg

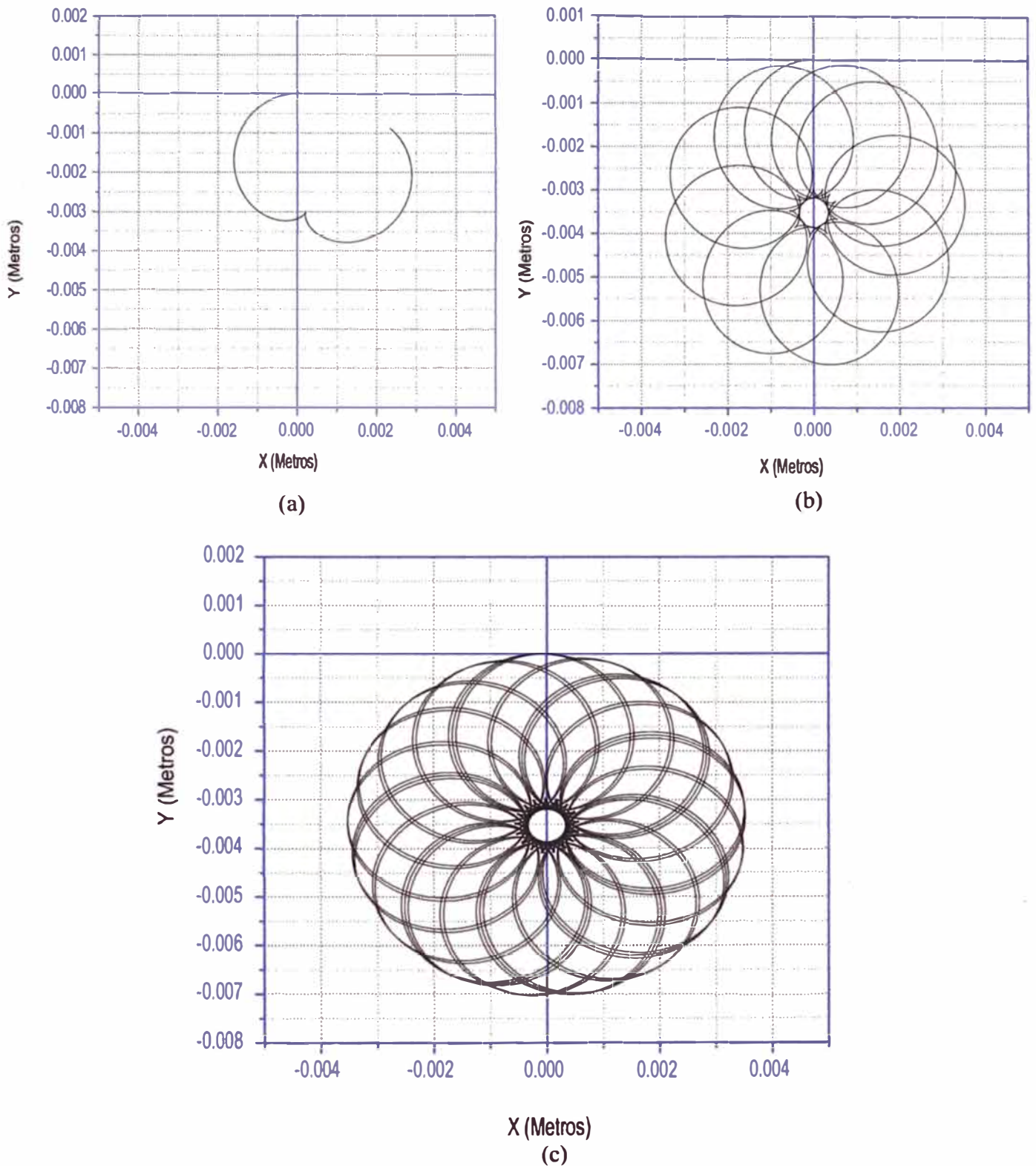


Figura 5.62: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,0078m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



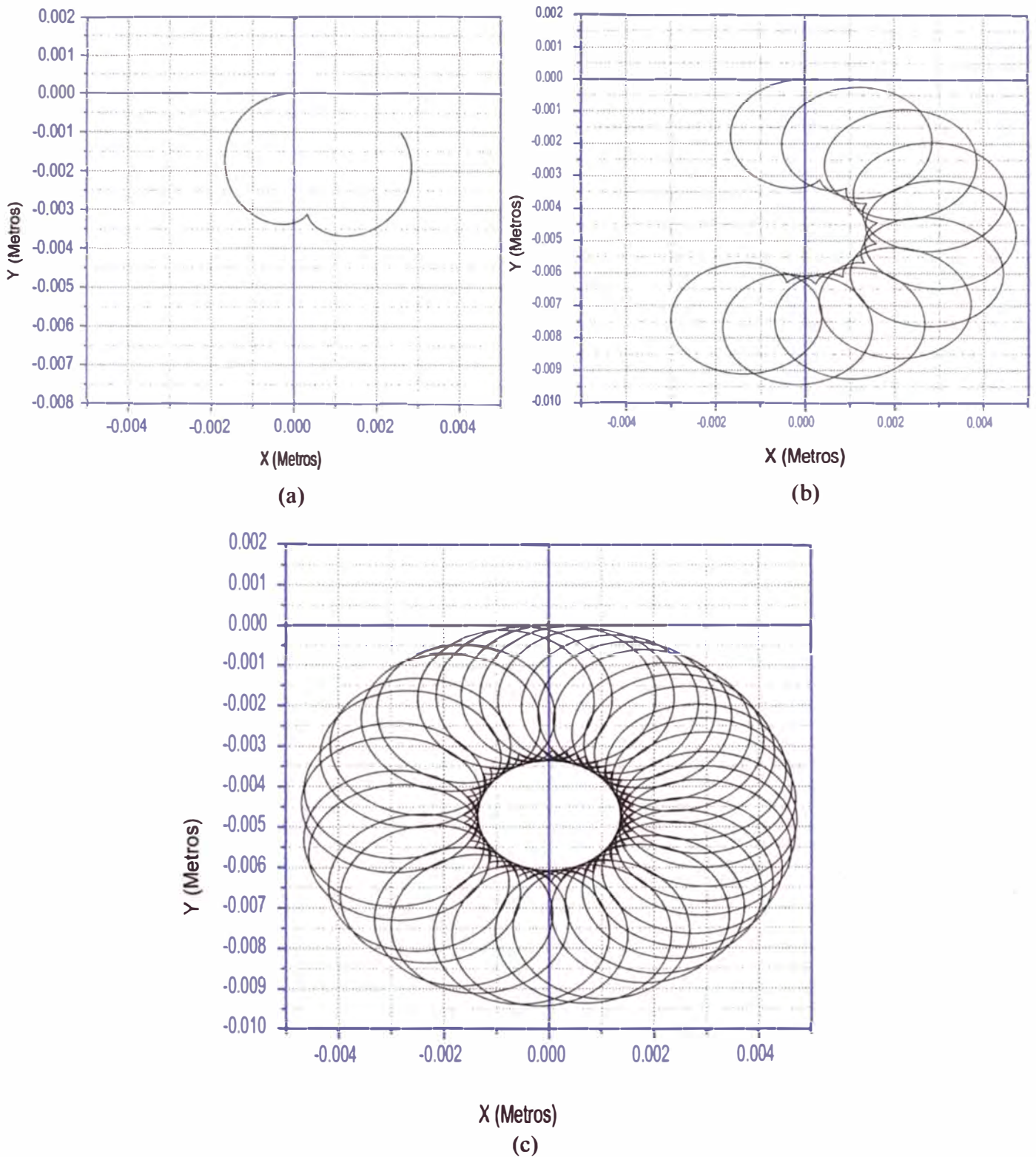
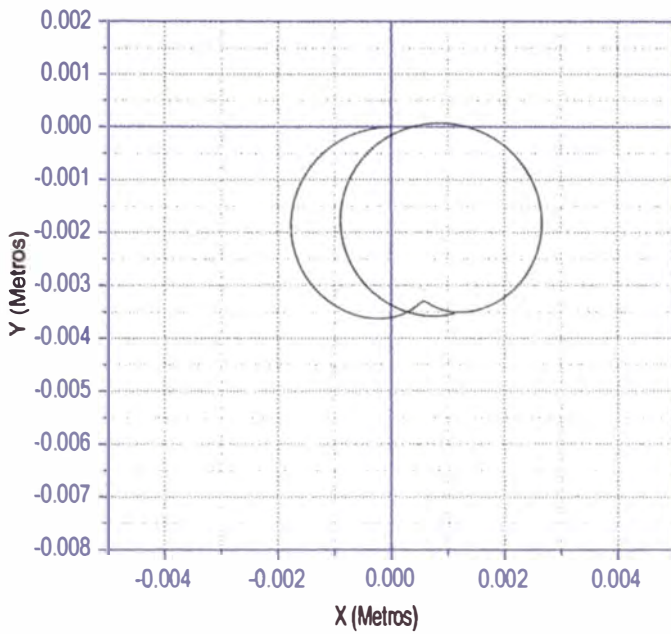
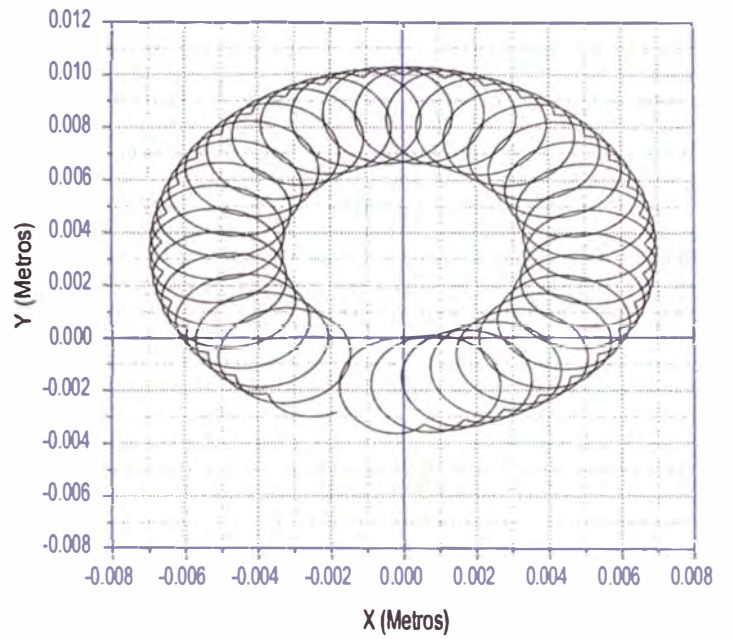


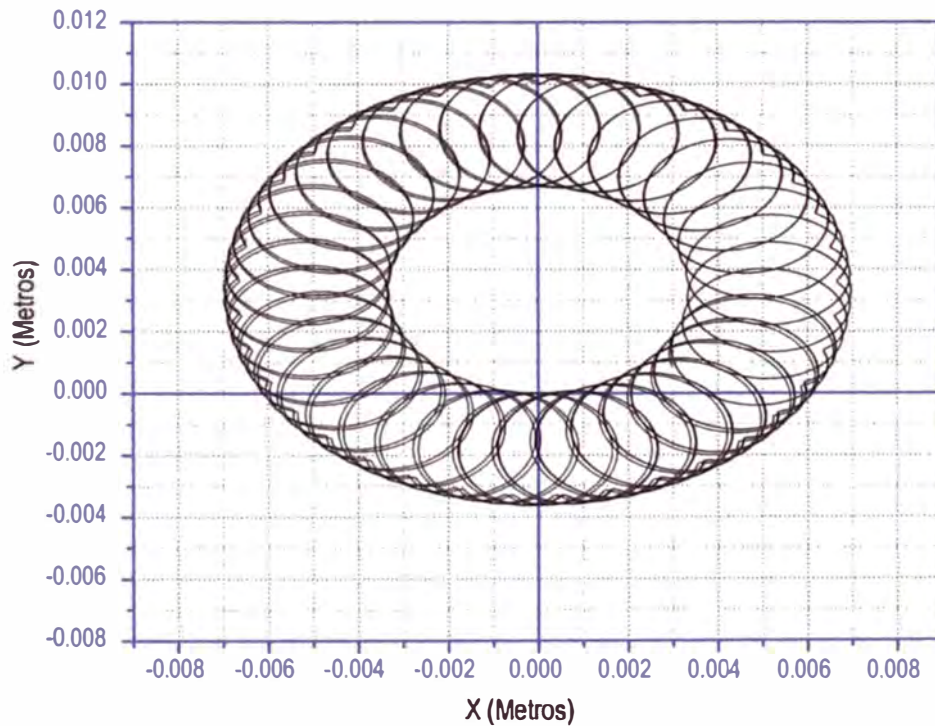
Figura 5.63: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,0075m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



(a)

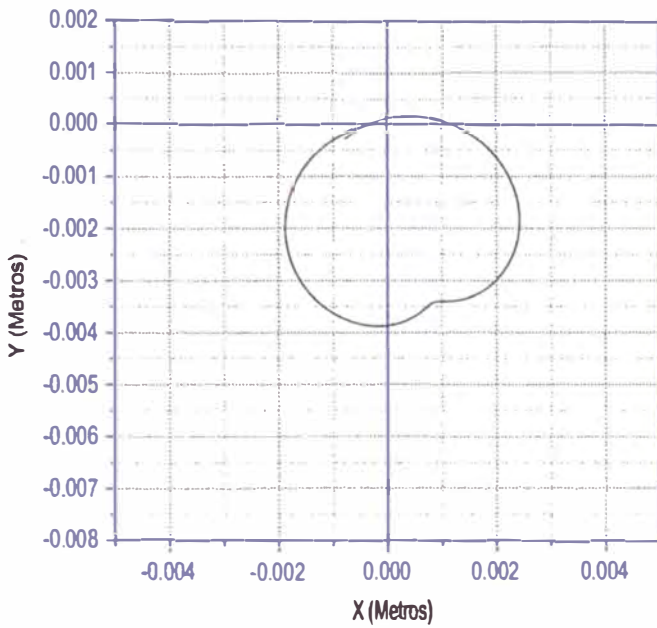


(b)

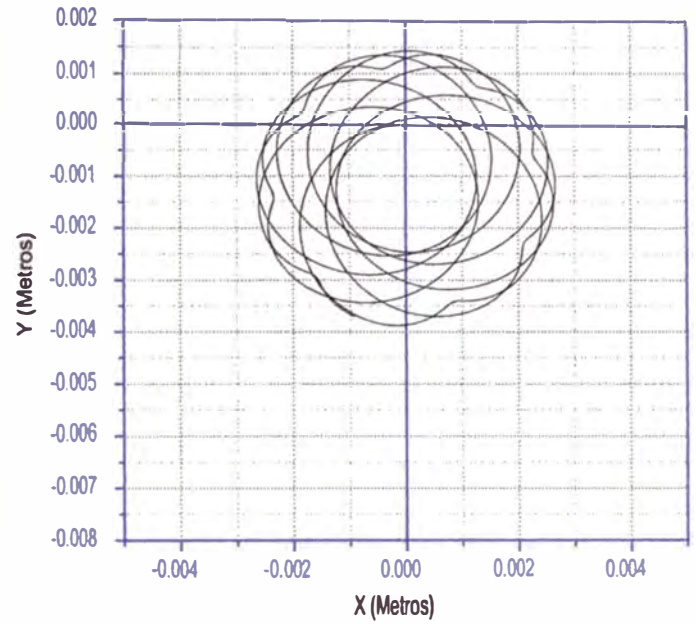


(c)

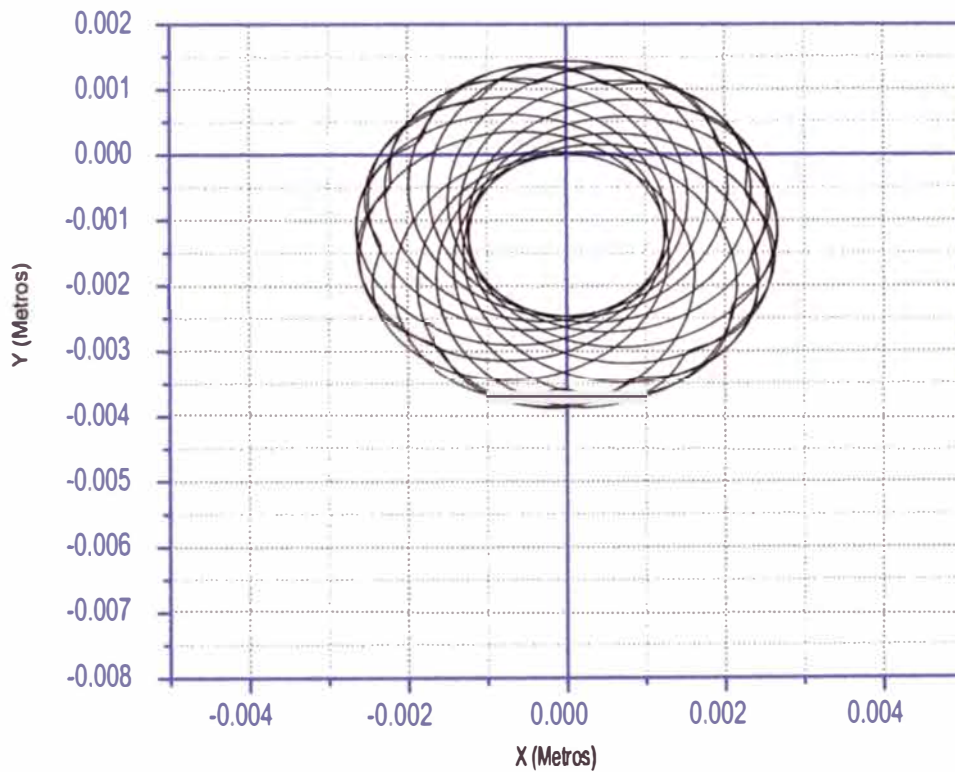
Figura 5.64: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,007m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



(a)



(b)



(c)

Figura 5.65: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,0065m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



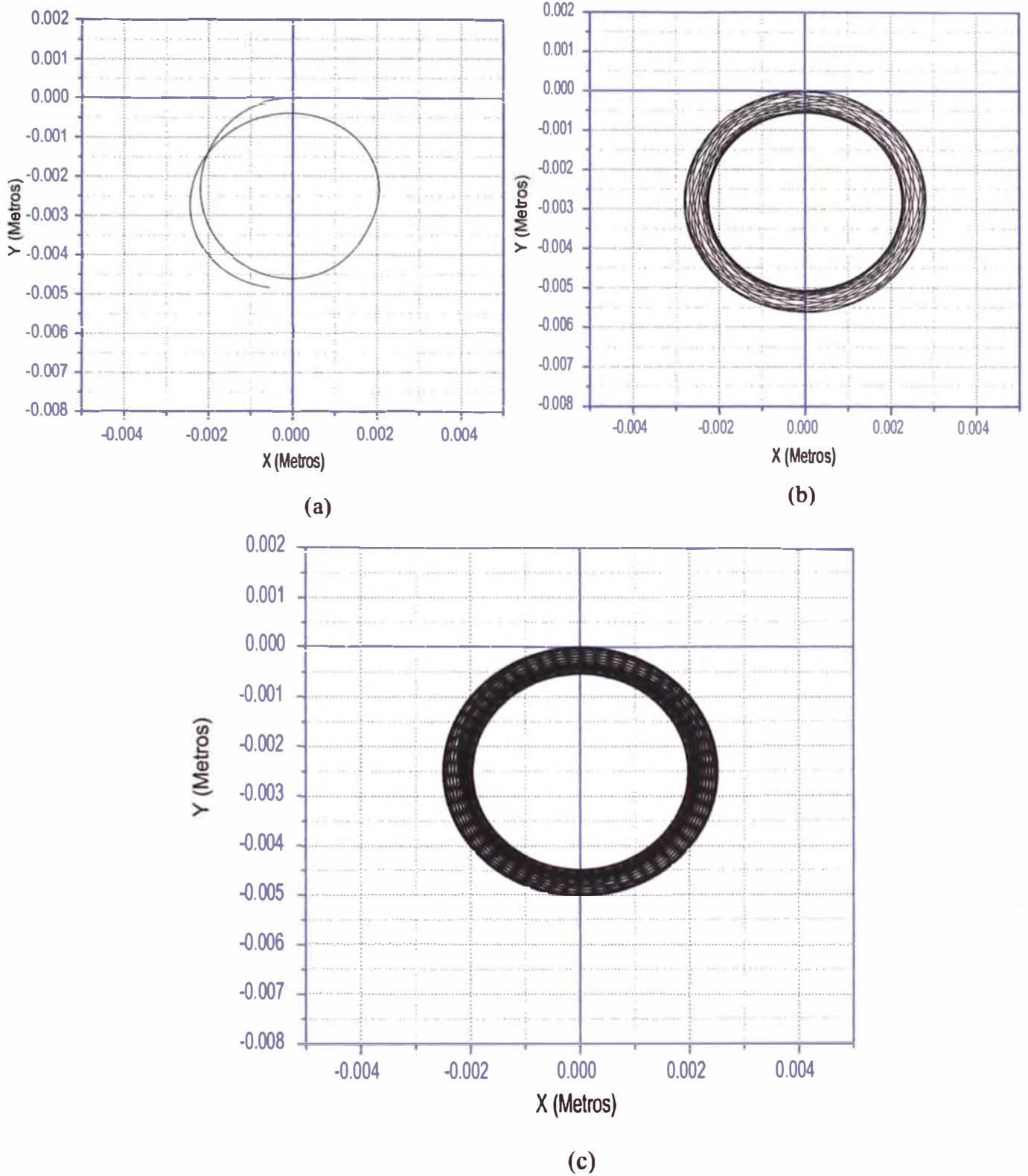
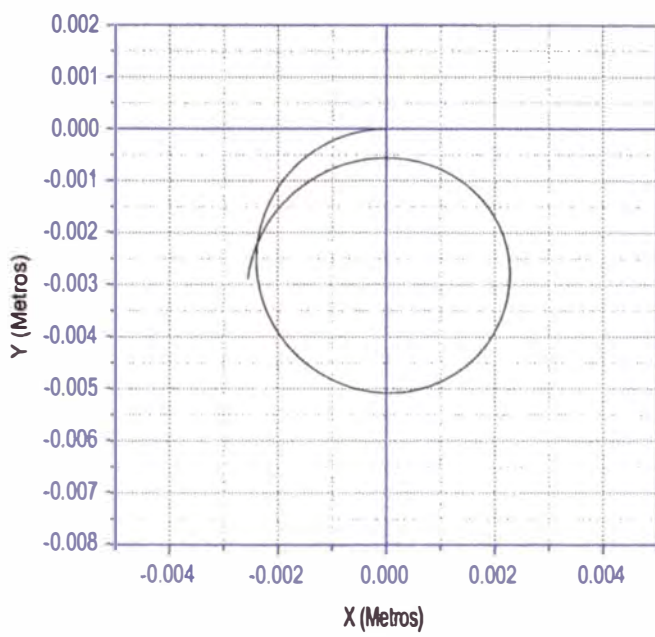
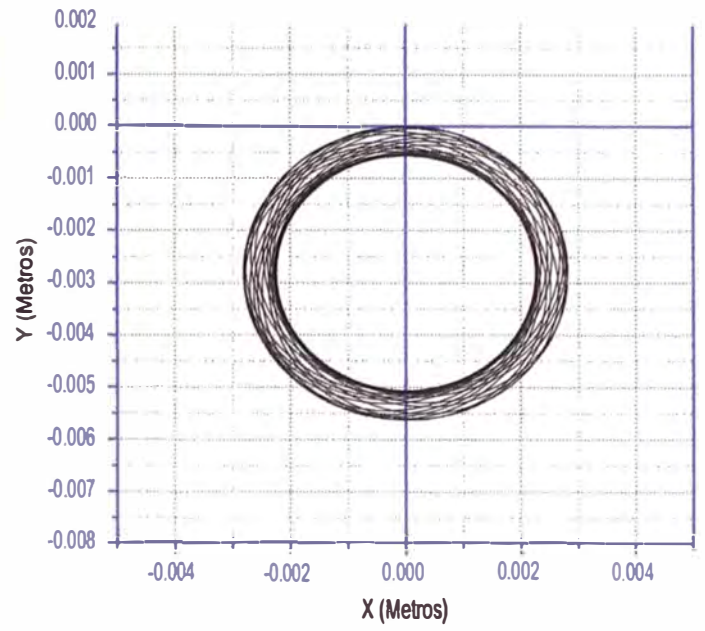


Figura 5.66: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,005m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg

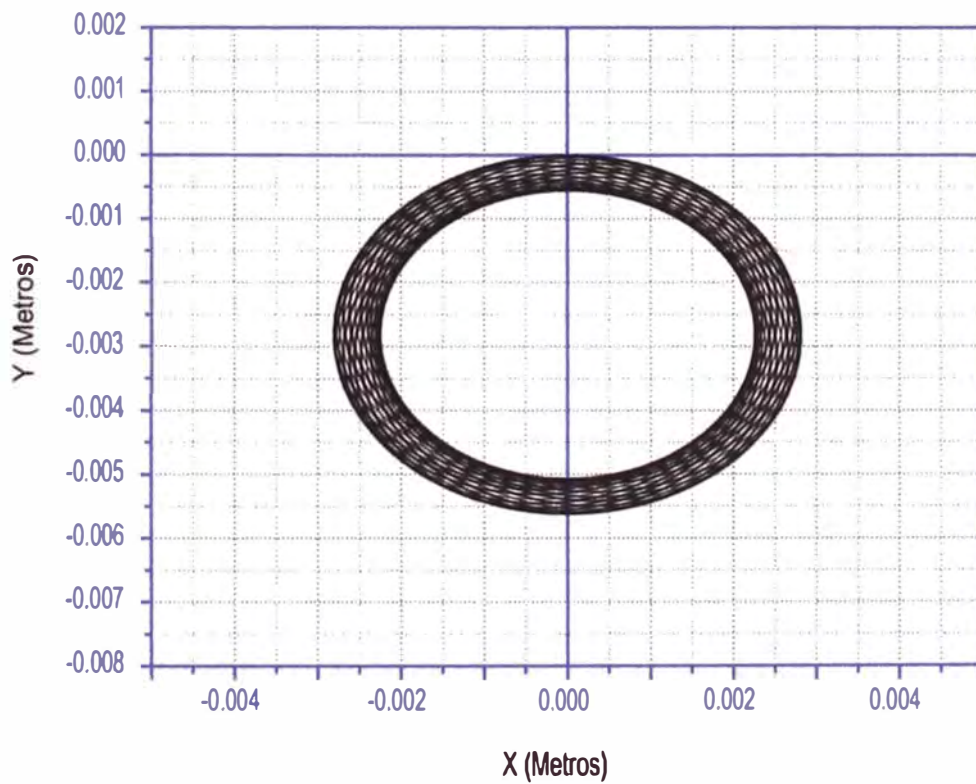




(a)



(b)



(c)

Figura 5.67: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,004m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg

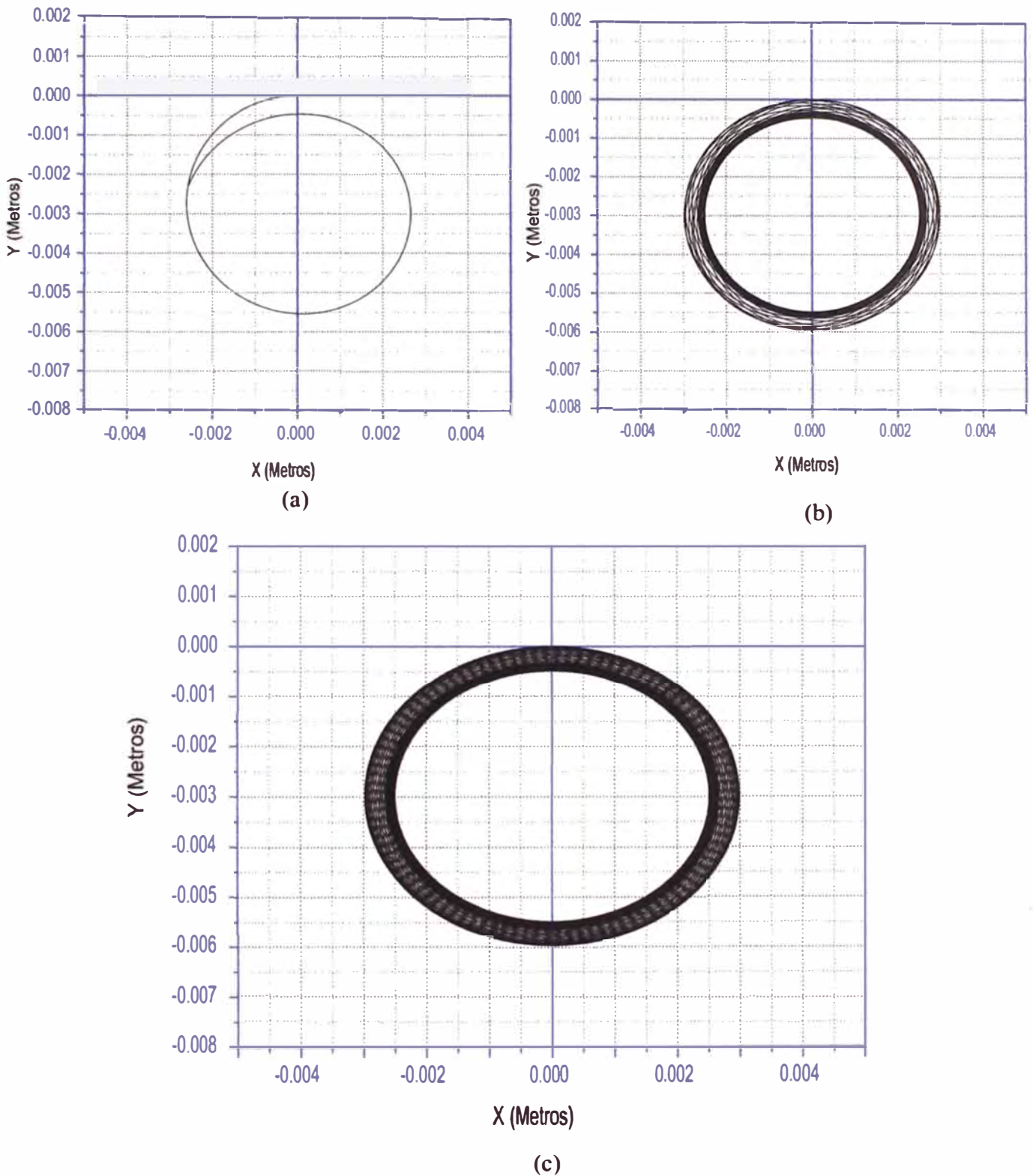
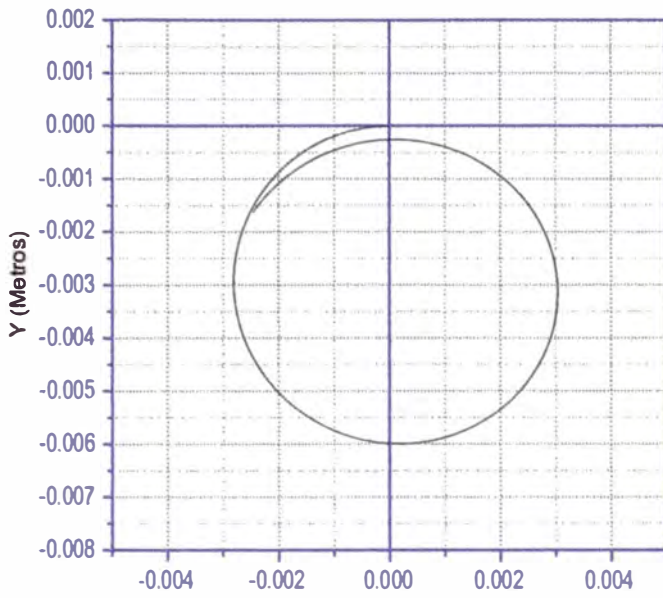
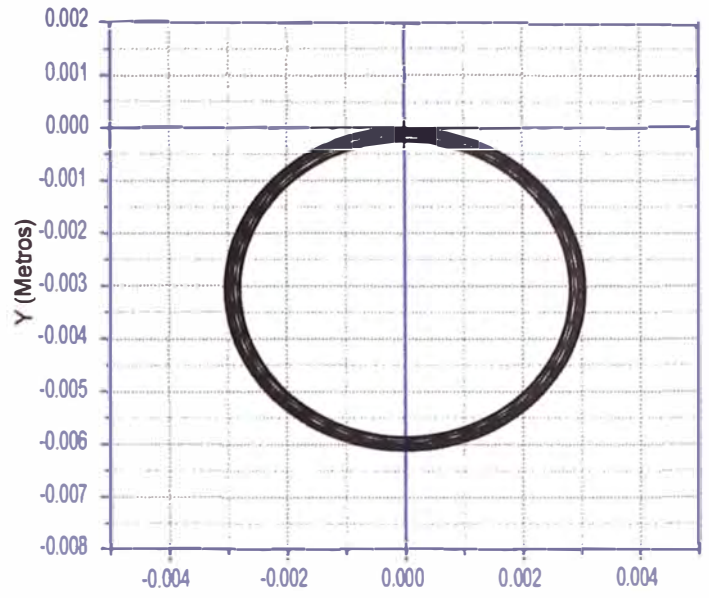


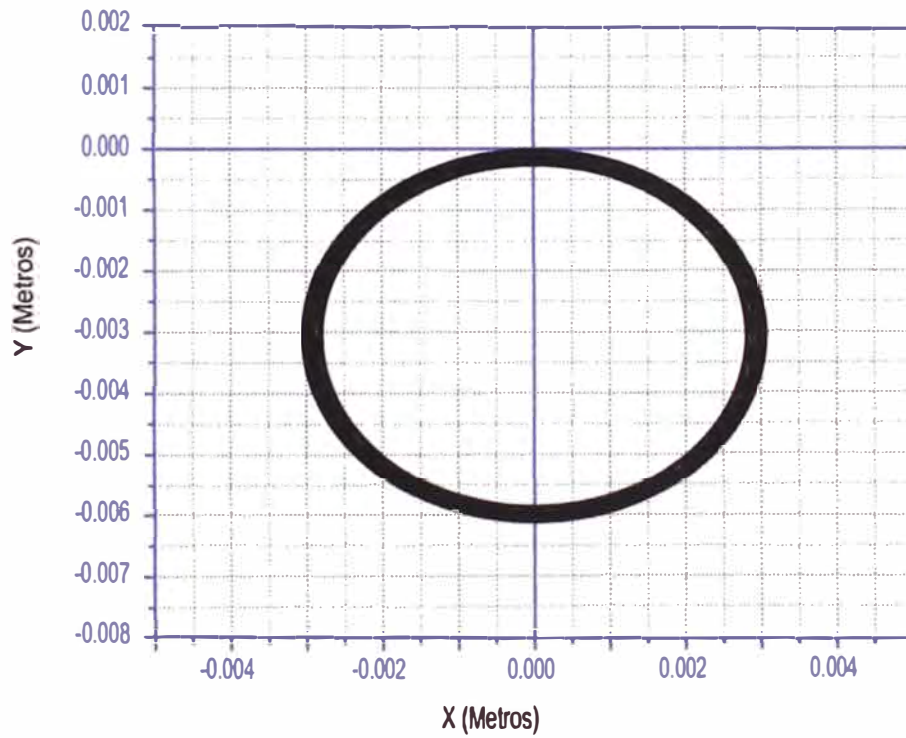
Figura 5.68: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,003m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



(a)



(b)



(c)

Figura 5.69: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,002m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg



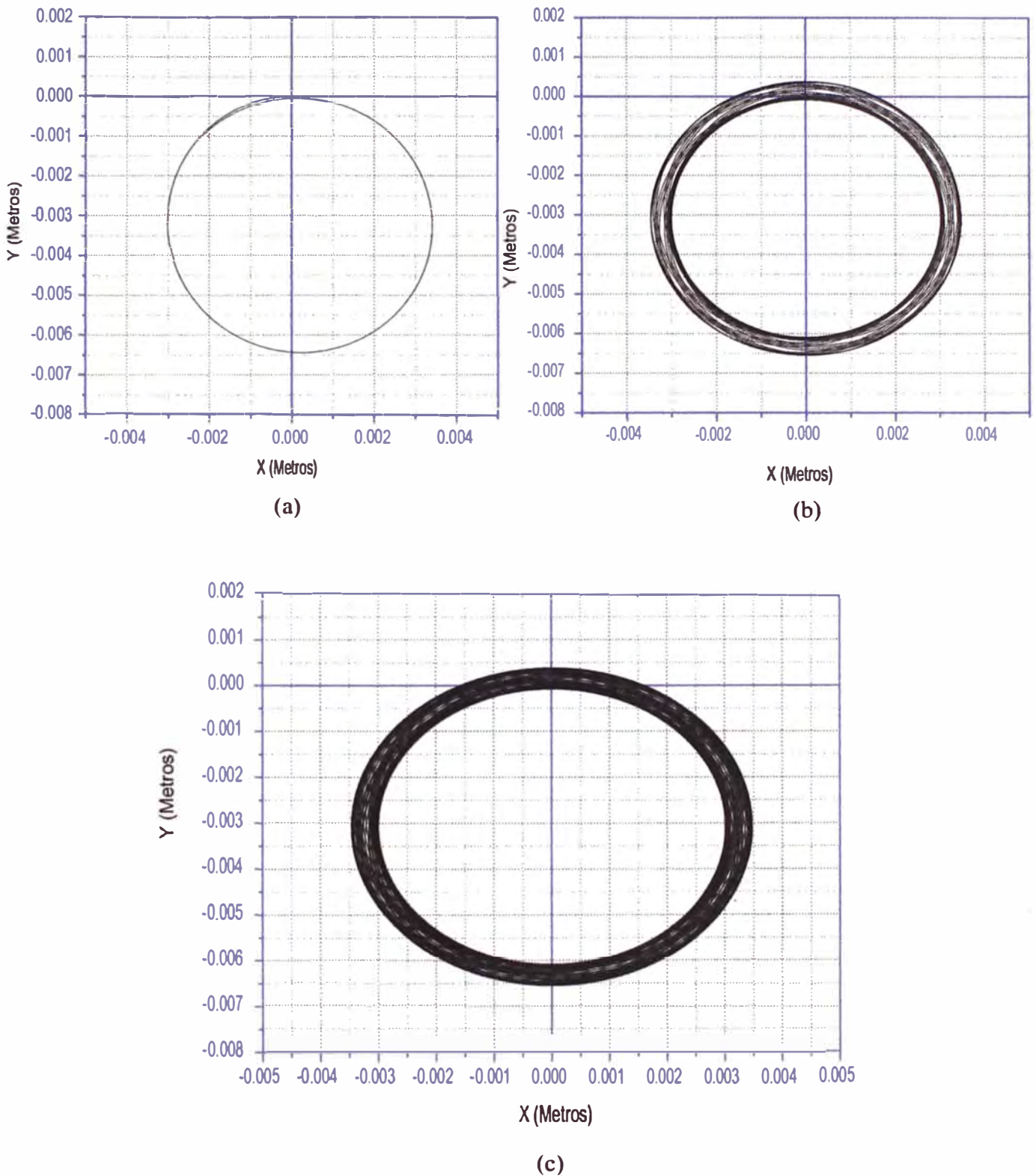


Figura 5.70: Trayectoria del centro geométrico cuando  $D_2 = 0,001m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg

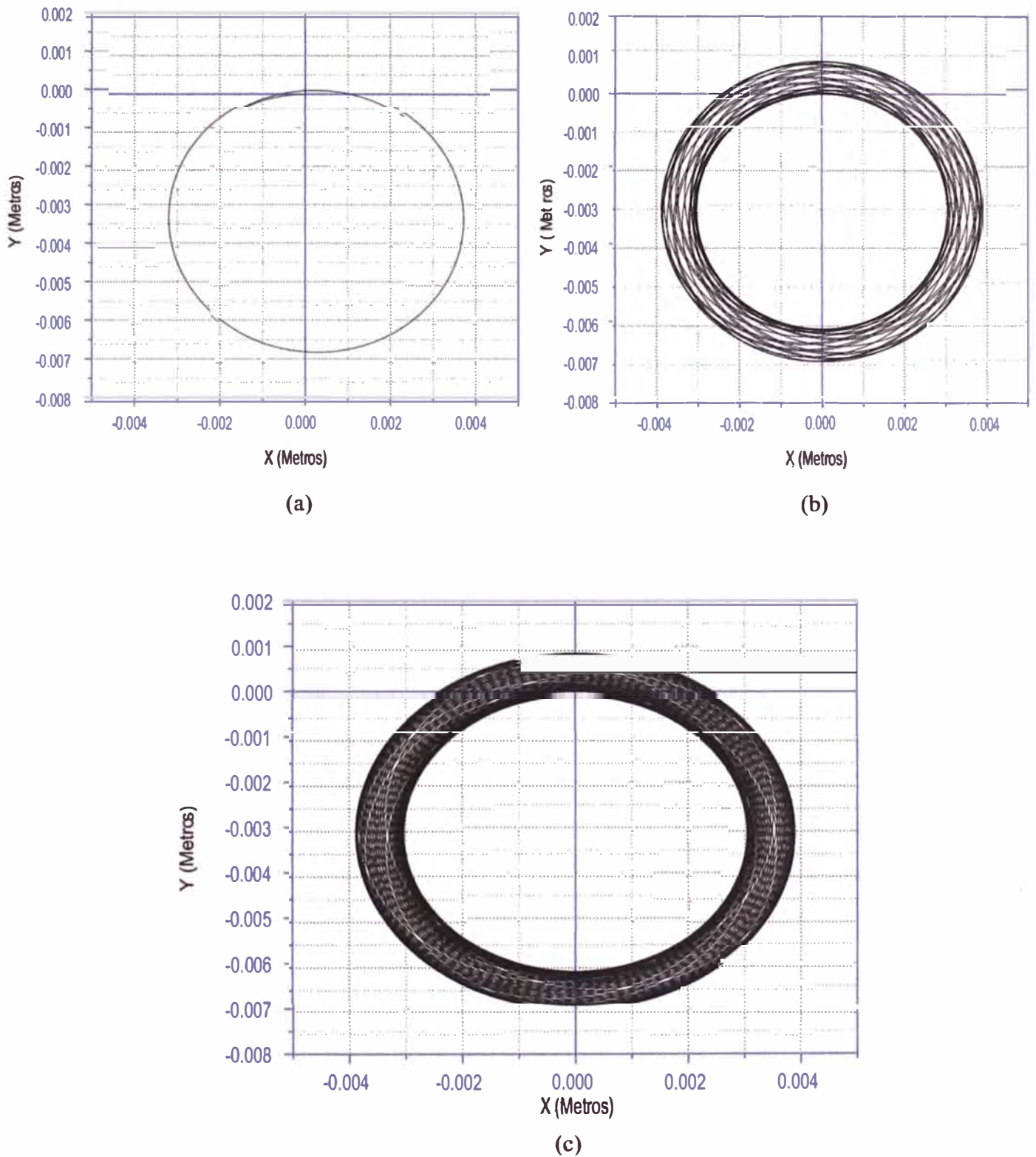


Figura 5.71: Trayectoria del centro geométrico cuando  $\mathcal{D}_2 = 0,0001m$  y en los tiempos: a)  $[0, 0,08]$ seg, b)  $[0, 1,00]$ seg, y c)  $[0,4,80]$ seg

## 5.5. CONCLUSIONES

\* Para  $\theta$  cuando hay movimiento por deslizamiento, el comportamiento de este es semejante al caso del Tipp Top, pero sin llegar al valor de  $180^\circ$  (el máximo valor es  $160^\circ$ ). Para algunos casos se halló ( $p$ ) que el valor promedio de  $\theta = 100^\circ$ , es decir el cuerpo rígido se comporta como el movimiento de un huevo duro [revista]. Es decir para que un huevo duro se pare debe haber fricción por deslizamiento

\* Se forma la mitad de un rizo cuando:

-  $\dot{\theta}$  tiene ceros en  $t = \frac{1}{2}\mathcal{T}, \frac{3}{2}\mathcal{T}, \frac{5}{2}\mathcal{T}, \dots, \frac{2n-1}{2}\mathcal{T}$ , donde  $n = 1, 2, \dots, \infty$  y  $\mathcal{T}$  es el período de  $\theta, \dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$ .

-  $\dot{\phi}$  tiene máximos relativos en  $t = \frac{2n-1}{2}\mathcal{T}$ .

-  $\dot{\psi}$  tiene mínimos relativo en  $t = \frac{2n-1}{2}\mathcal{T}$ .

\* Cuando  $\dot{\theta}, \dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  pertenecen a un intervalo  $[n-1, n\mathcal{T}]$  se forma un rizo.

\* Cuando se gráfico  $X(t)$ , se puede notar :

- Es casi negativa para los intervalos  $[(n-1)\mathcal{T}, n\mathcal{T}]$ , si  $n$  es  $1, 3, \dots, 2m-1$ , con  $m = 1, \dots, \infty$ .

- Es casi positiva para los intervalos  $[(2n-1)\mathcal{T}, 2n\mathcal{T}]$ , si  $n$  es  $2, 4, \dots, 2m$ , con  $m = 1, \dots, \infty$ .

\* El gráfico de  $Y(t)$ , es negativo para cualquier tiempo  $t$ , y se puede observar :

- Es decreciente para el intervalo  $[(n-1)\mathcal{T}, n\mathcal{T}]$ , si  $n$  es  $1, 3, \dots, 2m-1$ , con  $m = 1, \dots, \infty$ .

- Es creciente para los intervalos  $[(2n-1)\mathcal{T}, 2n\mathcal{T}]$ , si  $n$  es  $2, 4, \dots, 2m$ , con  $m = 1, \dots, \infty$ .

\* El gráfico de  $Z(t)$ , es siempre positivo para cualquier tiempo  $t$ , y se puede observar :

- Tiene 2 ceros en el intervalo  $\langle n\mathcal{T}, (n+1)\mathcal{T} \rangle$ , si  $n = 1, \dots, \infty$ .

- Tiene un máximo en  $t = \frac{(2n-1)}{2}\mathcal{T}$ , cuando  $n = 1, \dots, \infty$ .

- Sus máximos siempre coinciden con la formación de la mitad de un rizo.

\* Las funciones  $\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}$  y  $\dot{\psi}$  para el movimiento sin fricción y con rodadura pura, son periódicas y estas funciones tienen el mismo periodo, cuyo valor cambia si algún parámetro (ejemplo  $c$ ) o condición inicial ( $\dot{\psi}(0)$ ) se modifica.

\* El movimiento del CG está limitado por 2 superficies cilíndricas en general elípticas. Es decir el movimiento del CG está dentro de una región  $R$  limitada. Luego el Centro de Gravedad se mueve en una región limitada, con lo cual podemos decir que existe un pozo potencial.



# Bibliografía

- [Coh77] R.J. Cohen, " *The tippe top revisited*", Amer. J. Phys, 45(1) (1977), pp. 12-17. .
- [MoS02] H.K. Moffatt y Yutaka Shimomura, " *Spinning egg - a paradox resolved*", Nature, vol. 416, 28 marzo 2002.
- [Val71] Holger G. Valqui, " *Geometría vectorial, introducción a la Física General I*", UNI, mayo 1971.
- [Val96] Holger G. Valqui, " *El vector de inercia*", REVCUNI, UNI-FC, vol 2, #1, julio 1996, UNI-FC.
- [Val96] Holger G. Valqui, " *Errores en las rotaciones, usando los ángulos de Euler*", REVCUNI, UNI-FC, vol 2, #3, diciembre 1996, UNI-FC.
- [Vid94] Edgard Vidalón V., Tesis de licenciatura: " *Movimiento de una esfera no homogénea*", 1994, UNI-FC.