

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



”Método Multimalla Para La Solución De ecuaciones
Diferenciales Parciales Elípticas Anisótropas ”

Tesis

para optar al título profesional de :

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Presentado por:

XYOBY CHÁVEZ PACHECO

Prof. William Carlos Chagaray Castillo.

r

LIMA - PERU 2006

A Dios, Jéssica y mi familia

Agradecimientos

A Dios trino y único por su infinito amor, por darme la alegría de vivir y por haberme permitido de cubrir la vocación por la matemática. A mi novia y futura esposa Jéssica, a quien Dios quiso poner en mi camino. A mi familia por su apoyo en todas las circunstancias de mi vida. Al profesor William por su confianza. A mis amigos, en particular a Nelson por haberme apoyado en la última parte del desarrollo de la tesis.

Resumen

Los métodos multimallas solucionan muy eficientemente diferentes clases de problemas, trabajando recursivamente y aproximando el problema sobre múltiples mallas con un engrosamiento cada vez mayor. Estos métodos son independientes del refinamiento de la malla y además la eficiencia es óptima puesto que el trabajo computacional es proporcional al número de la variable.

En la tesis se da una visión general de los métodos multimallas, revisando los métodos iterativos clásicos, operadores intermallados (interpolación y restricción) y un valor inicial óptimo (FMG) como parte de sus componentes.

Usamos el análisis de suavización para problemas de tipo elíptico para demostrar que la convergencia lenta de los métodos clásicos se debe a la existencia de los componentes suaves del error, aun cuando las componentes oscilatorias son reducidas rápidamente. Esta propiedad es tratada con detalle para estudiar la convergencia de los métodos multimalla para ecuaciones anisotrópicas, .i.e., ecuaciones donde existe fuerte acoplamiento en una dirección de los ejes coordenados.

Índice General

Agradecimientos	III
Resumen	IV
Índice General	V
Lista de Cuadros	VIII
Lista de Figuras	XI
Introducción	1
0.1. Notación	3
1. Discretización en diferencias finitas	5
1.1. Problema de Valor de Frontera Continuo	5
1.2. Discretización	6
1.2.1. Discretización de la primera ecuación modelo $\Omega \subset \mathbb{R}$	7
1.2.2. Discretización de la segunda ecuación modelo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$	9
1.2.3. Esquema de 7 Puntos	12
1.2.4. Esquema de 9 Puntos	12
2. Métodos Iterativos Clásicos	14
2.1. Métodos iterativos Básicos	14
2.2. Convergencia de Métodos Iterativos Básicos	17
2.2.1. Ordenamiento	21
2.3. Métodos Iterativos Jacobi, Gauss Seidel y ADI	22
2.3.1. Jacobi Puntual	24
2.3.2. Jacobi por Bloques	24
2.3.3. Gauss-Seidel Puntual	25
2.3.4. Gauss Seidel por Bloques	28

2.3.5.	Método ADI Peaceman and Rachford	30
2.4.	Algunos resultados numéricos de métodos iterativos clásicos	31
2.4.1.	Métodos iterativos clásicos aplicados a una ecuación de tipo anisotrópica	34
3.	El Método Multimalla	40
3.1.	Efectos de suavización de método iterativos clásicos	40
3.2.	Introducción al método de dos mallas	47
3.2.1.	Convergencia de la iteración del métodos de dos mallas para la ecuación modelo unidimensional	55
3.2.2.	Medida del efecto de suavización	65
3.3.	Operadores de Restricción y Prolongación	67
3.3.1.	Malla Fina Ω_l y malla gruesa Ω_{l-1}	67
3.3.2.	Notación y Representación Plantilla (Stencil)	68
3.3.3.	Interpolación lineal por partes como prolongación	72
3.3.4.	Restricción	75
3.4.	Iteraciones Anidadas: Ciclos V y W	79
3.4.1.	Algoritmo multimalla	79
3.4.2.	Análisis de dos mallas	80
3.4.3.	Propiedades de aproximación y suavización	83
3.4.4.	Convergencia de la iteración Multimalla	85
3.4.5.	Trabajo computacional	90
3.5.	Condición Inicial Óptima (Full Multimalla)	93
3.5.1.	Algoritmo	93
3.5.2.	Análisis de la iteración anidada	96
3.5.3.	Trabajo Computacional y Eficiencia.	103
4.	Análisis de suavización	105
4.1.	Introducción	105
4.2.	Elementos de análisis de Fourier en el espacio de funciones malla	106
4.2.1.	Caso unidimensional	106
4.2.2.	Caso multidimensional	108
4.3.	Factor de Suavización de Fourier	110
4.3.1.	Definición de factor de suavización en modo local	110
4.3.2.	Análisis de suavización de Fourier	111
4.3.3.	Sobreposición (Aliasing)	112
4.3.4.	Modos de Fourier Suaves y Oscilantes	113
4.3.5.	Semimallado	114
4.3.6.	Definición de independencia de grosor de malla del factor de suavización l 15	

4.3.7.	Modificación del factor de suavización para condiciones de frontera de Dirichlet	116
4.3.8.	Expresión explícita para el factor de amplificación	118
4.4.	Análisis de suavización para los métodos de suavización para una ecuación de tipo anisotrópica.	121
4.4.1.	Suavización de Jacobi	121
4.4.2.	Suavización de Gauss Seidel	128
4.4.3.	Suavización de Gauss Seidel Red-Black	136
4.4.4.	Suavización de Gauss-Seidel Zebra	147
5.	Pruebas computacionales y conclusiones	164
5.1.	Resultados numéricos para la ecuación de Poisson	164
5.2.	Ejemplo numérico de la iteración anidada	167
5.3.	Análisis de suavización para una ecuación anisotrópica	168
5.4.	Conclusiones y trabajos posteriores	172
	Bibliografía	179

Índice de cuadros

1.1. Parámetro para la segunda ecuación modelo	6
2.1. Iteraciones de la ecuación modelo $\Delta u = f$ con $f = 2\pi^2 \text{sen } \pi x \text{ sen } \pi y$. i número de iteraciones, $\ \cdot \ $ euclidiana, CPU(s) tiempo de máquina; hasta conseguir un error del defecto del orden de 0.00001 (* No se consiguió la aproximación).	33
2.2. Comparación de los radios espectrales ρ de diferentes métodos iterativos clásicos para la ecuación modelo (2.4.1) donde el número de iteraciones son las necesarias para que el error sea del orden h^2 ((*) ADI optimal con m otro parámetro optimal)	33
2.3. Se realizan tantas iteraciones como sea necesario para alcanzar un error del orden de h^2 . La columna donde se indica el número de iteraciones teóricas son obtenidas del cuadro 2.2. ((*) indica que ha superado el número de iteraciones máxima que hemos definido).	34
2.4. Iteraciones de la ecuación modelo (2.4.2) con $\varepsilon = 1$	35
2.5. Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}$ con $\varepsilon = 0,001$	37
2.6. Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}$ con $\varepsilon = 0,01$	37
2.7. Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}$ con $\varepsilon = 0,1$	38
2.8. Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}$ con $\varepsilon = 1$	38
2.9. Métodos iterativos por Bloque para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}$ con $\varepsilon = 100$ y $\varepsilon = 1000$	39

3.1. Cotas uniformes par el radio y norma espectral de la matriz iteración dos mallas(3.2.8)	64
3.2. Radio espectral convergencia de dos mallas $\rho(M_I(\nu))$ como función de h . . .	64
3.3. Valores de $\rho(M_I)$ y $\ M_I\ $ para $\nu = 3$	64
3.4. Número de suavización ρ_L y ρ_B comparado con ρ obtenido del cuadro 3.1 . . .	66
3.5. Comparación entre iteraciones multimalla y full-multimalla.	94
3.6. Factor $C_4(\zeta, i)$ para $i = 1, 2, 3$	103
4.1. Factor de Suavización ρ y ρ_D con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica con $\beta = 0$ discretizada de acuerdo a (1.2.17); $N = 64$ con $(\omega = 0,7)$ y sin amortiguamiento	147
4.2. Factor de Suavización ρ con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica rotada con $\beta = 45^\circ$ discretizada de acuerdo a (1.2.17) y (1.2.19); $N = 64$	148
4.3. Factor de Suavización ρ con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica rotada variando β discretizada de acuerdo a (1.2.19); $N = 64$	149
4.4. Factor de Suavización con Gauss Seidel Zebra ρ, ρ_D para la ecuación de difusión rotada discretizada de acuerdo (1.2.17); $N = 64$	155
4.5. Factor de Suavización ρ, ρ_D con Gauss Seidel Zebra Alternante para la ecuación difusión anisotrópica rotada sin amortiguamiento discretizada de acuerdo a (1.2.17); $N = 64$	162
4.6. Factor de Suavización ρ, ρ_D con Gauss Seidel Zebra Alternante para la ecuación difusión anisotrópica rotada discretizada de acuerdo a (1.2.19); $N = 64$	163
5.1. Razón de convergencia para el método de dos mallas [7, Th 8.1.7]	166
5.2. Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 1$ usando Gauss Seidel Puntual Red-Black	166
5.3. Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ Gauss Seidel Puntual Red-Black	167
5.4. Razón de convergencia dependiente de ν para $h_I = \frac{1}{32}$ y $\gamma = 1$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black	167
5.5. Razón de convergencia dependiente de ν para $h_I = \frac{1}{32}$ y $\gamma = 2$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black	168

5.6. Razón de convergencia dependiente de γ para $h_l = \frac{1}{32}$ y $\nu = 2$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black	168
5.7. Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 1$ usando MUDPACK con interpolación lineal	169
5.8. Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ usando MUDPACK con interpolación lineal	169
5.9. Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ usando MUDPACK con interpolación cúbica	170
5.10. Iteración anidada con interpolación cúbica \tilde{p} para la (5.2.1) usando MUDPACK	171
5.11. Análisis de convergencia del MGM para la ecuación modelo (1.1.4) con $\beta = 0$ y $N = 64$, $\gamma = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. i : número de iteraciones realizadas, τ : error relativo 2.2.5, $\tilde{\tau}$: factor de reducción media 2.2.6	175
5.12. Analisis de convergencia del MGM para la ecuación modelo (1.1.4) con $\beta = 0$ y $N = 64$, $\gamma = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. i Número de iteraciones realizadas, $\tilde{\tau}$ factor de reducción media 2.2.6 teniendo a Gauss Seidel Red-Black Horizontal Zebra, Gauss Seidel Zebra X y Gauss Seidel Zebra Y	178

Índice de figuras

1.1. Dominio continuo y discreto	7
1.2. Diferentes mallas ($d = 1$) con diferentes grosores de malla h (cada una la mitad de la anterior)	8
1.3. Discretización usando la notación plantilla: (a) índices que corresponde a la ec.1.2.13 (b) índices que corresponde a la ec.1.2.16 y (c) índices que corresponde a la media de ambas ecuaciones	11
2.1. Mallados	23
3.1. Valores Propios de la matriz de iteración S_h	43
3.2. Método ω -Jacobi con $\omega = 1/3$ aplicado al problema unidimensional homogéneo $L_h u_h = 0$ (En (1.2.6) la solución es $u_h = 0$) con $N = 64$, los valores iniciales de la iteración son: (a) ψ^3 , (b) ψ^{16} , (c) una combinación de ψ^3 y ψ^{16} . Las figuras muestran la aproximación u_h^i después de una iteración (a la izquierda) y diez iteraciones (a la derecha).	44
3.3. Modos de Fourier	46
3.4. Método de Jacobi Amortiguado con $\omega = 2/3$ aplicado al problema unidimensional con $f = 0$ y $N = 64$ y con un valor inicial $u_i^0 = \frac{1}{3} \left[\text{sen} \left(\frac{i\pi}{N} \right) + \text{sen} \left(\frac{6i\pi}{N} \right) + \text{sen} \left(\frac{32i\pi}{N} \right) \right]$. La se muestra la norma máximo del error en 100 iteraciones.	46
3.5. Iteración Gauss Seidel aplicado al problema unidimensional	47
3.6. Malla Fina Ω_l , Malla gruesa Ω_{l-1} y su superposición (la inferior)	48
3.7. Operador de restricción: inyección trivial	50
3.8. Modos de fourier $\text{sen}(n\pi x)$. Componentes de frecuencia bajas ($n=1,2,3$) y altas ($n=4,5,6,7$) para $h_l = \frac{1}{8}$ y $h_{l-1} = \frac{1}{4}$. (a) muestra los componentes los que son visibles sobre Ω_{l-1} (longitud de onda $> 4h_l$); y en (b) se ven los componentes los que son NO visibles sobre Ω_{l-1} (longitud de onda $< 4h_l$)	53
3.9. Número de suavización ρ_L y ρ_B comparado con ρ	66

3.10. Mallas gruesas y finas	68
3.11. Malla Gruesa y malla fina para el caso unidimensional (• puntos de malla)	70
3.12. Malla gruesa Ω_{l-1} y fina Ω_l	73
3.13. Proceso de distribución del operador prolongación de 9 puntos	74
3.14. Estructura de un ciclo multimalla para diferentes número de malla y diferentes valores de γ	81
3.15. Operadores inter mallas	98
3.16. Función C_3 y C_4 para $i = 1, 2, 3$ con $\kappa = 2$ y $C_2 = 4$	103
4.1. Números de ondas suaves ($\Theta_{l,s}$) y oscilantes ($\Theta_{l,r}$, sombreado) en dos dimensiones con engrosamiento estándar	115
4.2. Números de ondas suaves (Θ_s) y rígidas (Θ_r , sombreado) en dos dimensiones, semi engrosamiento en la dirección y	116
4.3. Conjunto de números de onda rígidos(Θ_r^D sombreado) en dos dimensiones, con exclusión del modo $\theta_\alpha = 0$ (engrosamiento estándar)	117
4.4. Conjunto de números de onda rígidos(Θ_r^D sombreado) en dos dimensiones, con exclusión del modo $\theta_\alpha = 0$; engrosamiento estándar	123
4.5. Area de Θ_r^D	127
4.6. Factor de convergencia $\lambda(\theta)$ usando relajación de Gauss Seidel con ordenamiento lexicográfico y $\varepsilon = 0,1$	132
4.7. Factor de convergencia $\lambda(\theta)$ para la ecuación modelo (1.1.5) usando relajación Gauss Seidel lineal vertical con $\varepsilon = 0,1$ y (4.7(b)) $\varepsilon = 10$ (Ver [10, §4])	136
4.8. Regiones de $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ donde $\bullet \in \Theta$	137
5.1. Convergencia Gauss Seidel	170
5.2. Independencia de la convergencia MG con respecto al grosor de malla $h = 1/N$ ($N=3,64,128$)	172
5.3. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Jacobi $\varepsilon \leq 1$	173
5.4. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Jacobi $\varepsilon \geq 1$	174
5.5. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel puntual $\varepsilon \geq 1$	174
5.6. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel puntual $\varepsilon \leq 1$	176

5.7. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel RED BLACK puntual	176
5.8. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel Zebra X por bloques	177
5.9. Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel Zebra Y por bloques	177

Introducción

El propósito de esta tesis es presentar un método numérico para solucionar un tipo de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) de tipo elíptico donde se presenta anisotropías, es decir problemas que dependan fuertemente de la dirección de los ejes coordenados.

Se sabe que las EDPs de tipo elíptico son el corazón de muchos modelos matemáticos usados en la ingeniería y la física, lo que en muchos casos originan problemas de alto costo computacional. Por ello es necesario buscar métodos numéricos que tengan un alto grado de eficiencia, lo que deriva en un bajo costo computacional. El método denominado comúnmente, 'multigrid' o multimallas, cuenta con esta característica. Además de una rápida convergencia éste método no se deteriora cuando la discretización del dominio de la solución es refinado, lo que no sucede con los métodos iterativos clásicos.

Otra característica esencial de este método es que permite resolver problemas en diferentes niveles de dificultad, descomponiendo el problema en subproblemas que son más simple que el anterior.

El método multimalla ha sido desarrollado desde los años 1964, pero el principal trabajo práctico, tal como lo afirma Wesseling [17, p. 2], fue la publicación de Brandt [1] en 1977, base para el desarrollo de los métodos multimallas. Uno de los descubridores (1976) y promotores de este método fue Wolfgang Hackbusch, quien publicó en 1985 un libro [7] que nos permite introducirnos a las aplicaciones del método de multimallas. Otras referencias importantes fueron Stüben K - U Trottenberg [12] y Briggs [4].

El desarrollo de la tesis es presentado en cinco capítulos. En el capítulo I se presenta

la formulación de dos EDPs que se tomarán como problemas modelos, presentándose sus discretizaciones en diferencias finitas.

En el capítulo II vemos algunos métodos iterativos clásicos como Jacobi, Gauss Seidel, Red Black, Zebra, ADI, los mismos que presentan desventajas manifiestas por su deficiente factor de convergencia. Sin embargo, serán incorporadas como parte de los métodos multi-malla aprovechando las características de suavización del error.

La definición de los métodos multimallas así como su constitución son presentados en el capítulo III. Se toma en consideración una ecuación modelo unidimensional que nos permite hacer el análisis de convergencia del método y se hace una estimación del trabajo computacional, demostrándose su proporcionalidad al número de variables generados del problema discreto. Para conseguir un valor inicial óptimo para este método iterativo se presenta un iteración denominada "full multimalla".

La inclusión de la anisotropía en las EDPs pueden determinar una convergencia deficiente, por lo que un elemento esencial para este tratamiento es presentado en capítulo IV a través del estudio de los efectos de suavización usando el análisis de Fourier.

Finalmente para realizar las pruebas computacionales mostradas en el transcurso de la tesis se han desarrollado programas elaborados en lenguaje FORTRAN 90; usándose también el programa MUDPAK [5] desarrollado por National Center for Atmospheric Research NCAR para comprobar las soluciones numéricas. Los programas han sido ejecutados en una máquina INTEL Pentium IV CPU 2.80 GHz, y 512 MB de RAM.

0.1. Notación

Abajo hacemos una lista de los principales símbolos usados en esta tesis

$C, C_0, C_1, etc.$	constantes genericas;
d	dimensión de Ω ;
d_l	defecto en el nivel l ;
ε	parámetro de anisotropía en las ecuaciones modelo;
\mathcal{F}, \mathcal{U}	espacio vectorial de las funciones malla;
G_h	malla infinita de grosor de malla h ;
h	grosor de malla para una malla uniforme;
h_l	grosor de malla para una malla en el nivel l ;
I	aplicación identidad, matriz identidad;
l	número de nivel; ver §1.2.1;
$L, L_\Omega, L_{\partial\Omega}$	operadores asociados con los problemas de valor de frontera; ver §1.1
L_h, L_l	matriz del sistema algebraico lineal
$M_l, \tilde{M}_l, M_l(v_1, v_2), etc.$	matriz iteración (en particular de la iteración two-grid y multi-grid);
\mathbb{N}	conjunto de números naturales;
N	número de particiones de un intervalo;
N_l	número de particiones en el nivel l ;
n_l	número de variables en el nivel l ; ver §3.4.5;
0	matriz de ceros;
p	prolongación de nivel $l - 1$ a l ; §3.2;
r	restricción $r : \mathcal{F}_l \rightarrow \mathcal{F}_{l-1}$; ver §3.2;
r_{inj}	inyección trivial; ver §3.3;
\mathbb{R}	conjunto de números reales;
$\mathcal{S}_l, \mathcal{S}_l^{(v)}, \mathcal{S}_l^v$	métodos de suavización; ver §3.1;
S_l	matriz iteración de \mathcal{S}_l ; ver §3.1

u	solución del problema continuo;
u_h, u_l	solución discreta;
\tilde{u}	aproximación a u_l
u_l^i	i ésima iteración;
Z	conjunto enteros;
α	exponente usado en la suavización y propiedades de aproximación ;
γ	número de iteraciones en la malla más gruesa; ver §3.4.1;
$\partial\Omega$	frontera de Ω ;
ζ, ζ_v	número de contracción(i.e. cota de la norma de la matriz de iteración);
κ	orden de consistencia; §3.5.2;
ν	número de iteraciones de suavización ;
ν_1	número de iteraciones de pre-suavización;
ν_2	número de iteraciones de post-suavización;
$\rho(A)$	radio espectral de A ;
ρ, ρ_v	cotas de la razón de convergencia;
ρ_B	razón de suavización §3.2.2 ;
ρ_L	número de suavización §3.2.2 ;
$\sigma(A)$	espectro de A ;
ω, ω_l	factor de relajación ;
Ω	dominio del problema de valor de frontera;
Ω_h, Ω_l	mallas computacionales ;
$\Omega_l^i, \Omega_l^r, \Omega_l^b$	subconjuntos de Ω_l ;ver§2.3.3 ;
\mathcal{U}	espacio vectorial n -dimensional de las funciones malla;

Capítulo 1

Discretización en diferencias finitas

En este capítulo presentamos la discretización en diferencias finitas de las ecuaciones diferenciales parciales que se usarán como problemas modelos.

1.1. Problema de Valor de Frontera Continuo

El problema de valor de frontera (PVF) lineal son denotados por

$$\begin{cases} L_{\Omega}u = f_{\Omega}(x), & x \in \Omega \\ L_{\partial\Omega}u = f_{\partial\Omega}(x), & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

donde $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ es un dominio dado con frontera $\partial\Omega$. L_{Ω} es un operador diferencial elíptico en Ω y $L_{\partial\Omega}$ representa un operador lineal de frontera y d es la dimension del problema. f_{Ω} denota una función dada sobre Ω y $f_{\partial\Omega}$ una función sobre $\partial\Omega$. Las soluciones de (1.1.1) son siempre denotadas por $u = u(x)$.

En lugar de (1.1.1) escribiremos por simplicidad

$$Lu = f. \quad (1.1.2)$$

Los problemas modelos que consideraremos se referirán a casos unidimensionales y bidimensionales.

- **Primera ecuación modelo: caso unidimensional**

$$-u''(x) = f(x), \quad x \in \Omega = (0, 1) \quad (1.1.3)$$

$$u(0) = u(1) = 0.$$

con $f \in C^0(\bar{\Omega})$. (Las condiciones de frontera son de Dirichlet)

■ **Segunda ecuación modelo: caso bidimensional**

$$\begin{cases} L_{\Omega}u \equiv -(\varepsilon c^2 + s^2)u_{xx} + 2(\varepsilon - 1)csu_{xy} - (\varepsilon s^2 + c^2)u_{yy} = f(x, y), & (x, y) \in \Omega \\ L_{\partial\Omega}u \equiv u = g(x, y), & (x, y) \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1.4)$$

con $c = \cos\beta$, $s = \sen\beta$ donde $\beta \in [0, 2\pi]$.

Definimos los siguiente casos particulares a partir de ecuación (1.1.4):

Ecuación de Laplace	: $\varepsilon = 1$	$\beta = 2\pi$
Ecuación Anisotrópica	: $0 < \varepsilon \ll 1$ o $\varepsilon \gg 1$	$\beta = 2\pi$
Ecuación con termino mixto	:	$\beta \neq 2\pi$

Cuadro 1.1: Parámetros para la segunda ecuación modelo

Cuando $\beta = 2\pi$ se obtiene la denominada ecuación de Poisson anisotrópica

$$-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f. \quad (1.1.5)$$

Como puede verse se dice que una ecuación es anisotrópica cuando existe una fuerte dependencia de la dirección de los ejes coordenados.

1.2. Discretización

Las ecuaciones modelos mostradas arriba pueden ser reemplazadas por un esquema de diferencias finitas caracterizándose por su **grosor de malla** que será denotado por $h \in \mathbb{R}^d$ ($d = 1$ ó $d = 2$).

Definimos la malla infinita

$$G_h := \{x \in \mathbb{R}^d : x = \alpha \cdot h \quad \alpha \in \mathbb{Z}^d\} \quad (1.2.1)$$

y el subconjunto

$$\Omega_h = G_h \cap \Omega \quad (1.2.2)$$

como la *mallla computacional* (ver la figura (1.1)).

Ahora la EDP (1.1.2) puede ser aproximada por un problema discreto usando una malla discreta Ω_h , el mismo que será denotado por

$$L_h u_h = f_h \quad (1.2.3)$$

donde subíndice h se refiere a la malla computacional Ω_h de grosor de malla h sobre la que se ha hecho la discretización.

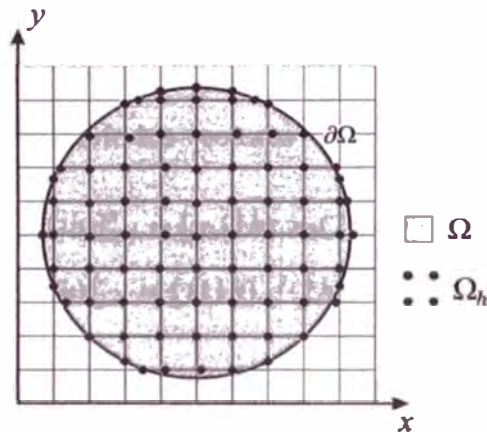


Figura 1.1: Dominio continuo y discreto

1.2.1. Discretización de la primera ecuación modelo $\Omega \subset \mathbb{R}$

La malla computacional correspondiente es obtenida de la discretización del intervalo $[0, 1]$ en N puntos

$$x_i = ih, i = 0, \dots, N; \quad x_0 = 0, x_N = 1$$

con $h = 1/N$. Luego la malla discretizada en N puntos es:

$$\Omega_h = \{ih : i = 1, \dots, N-1\}.$$

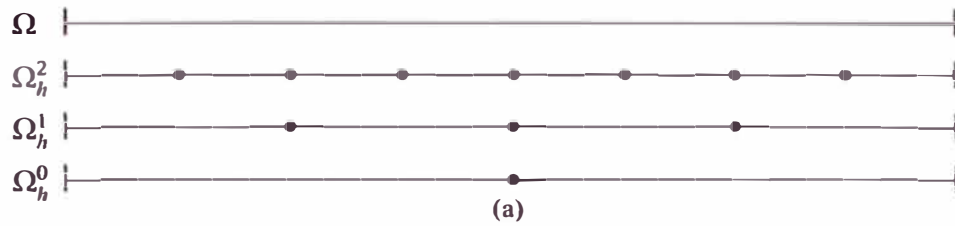


Figura 1.2: Diferentes mallas ($d = 1$) con diferentes grosores de malla h (cada una la mitad de la anterior)

Los $x_i = ih$, $i = 1, \dots, N - 1$ son los $n = N - 1$ puntos interiores de Ω_h . En cada punto de la malla $x_i \in \Omega_h$ la ecuación diferencial (1.1.3) ha sido reemplazada por la fórmula de diferencias. La más simple es :

$$h^{-2}[-u(x_{i-1}) + 2u(x_i) - u(x_{i+1})] = -u''(x_i) + O(h^2). \quad (1.2.4)$$

Haciendo $f_h(ih) = f(ih)$ y definiendo los vectores

$$\begin{aligned} u_h &= [u_h(ih)]_{i=1}^n = [u_h(1h), u_h(2h), \dots, u_h(nh)]^T, \\ f_h &= [f(ih)]_{i=1}^n = [f(1h), f(2h), \dots, f(nh)]^T. \end{aligned}$$

Obtenemos un sistema de n ecuaciones de diferencias para las n variables del vector u_h (para simplificar tenemos $u_i = u_h(ih)$, además $u_0 = u_{n+1} = 0$):

$$\frac{-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}}{h^2} = f_i, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.2.5)$$

equivalentemente

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 2 \end{bmatrix} u_h = f_h \quad (1.2.6)$$

Las condiciones de frontera $u_h(0) = u_h(1) = 0$ son incorporados en el sistema por eliminación de $u(0)$ y $u(1)$ de la ecuación (1.2.4) para $i = 1$ y $i = n$, respectivamente. Abreviaremos la ecuación (1.2.6) en la siguiente forma

$$h^{-2}[-1 \quad 2 \quad -1]u_h = f_h \quad (1.2.7)$$

Esta notación, que en la sección §3.3.2 será tratada con mayor detalles, es denominada plantilla.

1.2.2. Discretización de la segunda ecuación modelo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

Para la discretización en diferencias finitas asumiremos una malla uniforme de grosor h , es decir $h = h_x = h_y$, y definimos los operadores de diferencias hacia adelante y hacia atrás $-\Delta_\alpha$ y ∇_α como

$$\Delta_\alpha u_j = \frac{u_{j+e_\alpha} - u_j}{h}, \quad \nabla_\alpha u_j = \frac{u_j - u_{j-e_\alpha}}{h} \quad (1.2.8)$$

donde $e_x = (1, 0)$, $e_y = (0, 1)$ y $j = (i, j)$. Luego la aproximación en diferencias finitas de los términos diferenciales de la ecuación modelo se obtiene usando la serie de Taylor (Ver [9, §12.1]) en la variable x alrededor de x_i para generar la fórmula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4}(\xi_i, y_j), \quad (1.2.9)$$

donde $\xi_i \in (x_{i-1}, x_{i+1})$. También usamos la serie de Taylor en la variable y alrededor de y_j para generar la fórmula de las diferencias centrales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial y^4}(\chi_i, y_j), \quad (1.2.10)$$

donde $\chi_i \in (y_{i-1}, y_{i+1})$.

Sea la aproximación $u_h(x_i, y_j) \approx u(x_i, y_j)$ tenemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_h(x_i, y_{j+1}) - 2u_h(x_i, y_j) + u_h(x_i, y_{j-1}))}{h^2},$$

y tomando de manera simplificada $u_{i,j} = u_h(x_i, y_j)$ y usando los operadores de (1.2.8) tenemos

$$\Delta_x \nabla_x u_{i,j} = \Delta_x \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \right) = \left(\frac{\left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \right) - \left(\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h} \right)}{h} \right) = \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2},$$

luego podemos expresar

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u_{i,j} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2} = \Delta_x \nabla_x u_{i,j}.$$

Usando la notación plantilla tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) \approx h^{-2}[-1 \ 2 \ -1]u_h(x_i, y_j) \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx h^{-2} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j).$$

De manera análoga se tiene (Ver el esquema de la figura (1.3)):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \Delta_y \nabla_x u_{i,j} = \frac{1}{h^2} (-u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j}) = -h^{-2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \quad \text{ó} \quad (1.2.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \nabla_y \Delta_x u_{i,j} = \frac{1}{h^2} (-u_{i,j} + u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) = -h^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \quad \text{ó} \quad (1.2.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\approx \frac{1}{2} (\Delta_y \nabla_x + \nabla_y \Delta_x) u_{i,j} = \frac{1}{2h^2} (-2u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i+1,j-1} + u_{i,j-1}) \\ &= -\frac{h^{-2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

o de otra manera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \Delta_y \Delta_x u_{i,j} = \frac{1}{h^2} (u_{i,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1} - u_{i+1,j}) = -h^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \quad \text{ó} \quad (1.2.14)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) \approx \nabla_y \nabla_x u_{i,j} = \frac{1}{h^2} (u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} + u_{i-1,j-1}) = -h^{-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \quad \text{ó} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x_i, y_j) &\approx \frac{1}{2} (\Delta_y \Delta_x + \nabla_y \nabla_x) u_{i,j} = \frac{-1}{2h^2} (-2u_{i,j} + u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i+1,j} - u_{i+1,j+1} + u_{i,j-1}) \\ &= -\frac{h^{-2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

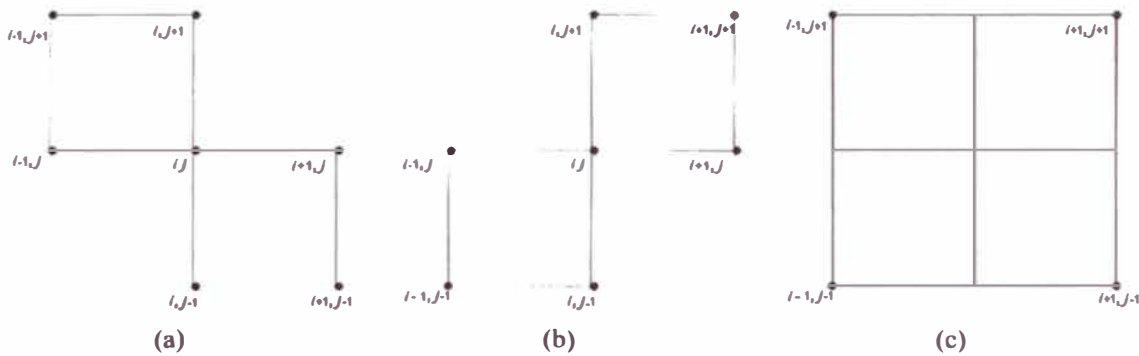


Figura 1.3: Discretización usando la notación plantilla: (a) índices que corresponde a la ec.1.2.13 (b) índices que corresponde a la ec.1.2.16 y (c) índices que correponde a la media de ambas ecuaciones

1.2.3. Esquema de 7 Puntos

Usando la ec.(1.2.13) y multiplicando por h^2 : tenemos la ecuación en diferencias en notación plantilla

$$\begin{aligned}
 [L_h] &= (\epsilon c^2 + s^2)[-1 \ 2 \ -1] + (\epsilon - 1)cs \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} + (\epsilon s^2 + c^2) \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (1.2.17) \\
 &= \begin{bmatrix} (\epsilon - 1)cs & -(\epsilon - 1)cs - (\epsilon s^2 + c^2) & 0 \\ -(\epsilon c^2 + s^2) - (\epsilon - 1)cs & 2(\epsilon + 1 + (\epsilon - 1)cs) & (\epsilon - 1)cs - (\epsilon s^2 + c^2) \\ 0 & -(\epsilon - 1)cs - (\epsilon s^2 + c^2) & (\epsilon - 1)cs \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Se puede reemplazar la representación plantilla de 7 puntos para la derivada mixta por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.2.18)$$

1.2.4. Esquema de 9 Puntos

Una representación plantilla simétrica para $[L_h]$ es obtenida si la derivada mixta es aproximada por la media de las representaciones plantillas empleadas en (1.2.17) y (1.2.18), denominada

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.2.19)$$

Similar a (1.2.17) tenemos:

$$[L_h] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}cs(-1 + \epsilon) & -c^2 - s^2\epsilon & -\frac{1}{2}cs(-1 + \epsilon) \\ -s^2 - c^2\epsilon & 2(c^2 + s^2)(1 + \epsilon) & -s^2 - c^2\epsilon \\ -\frac{1}{2}cs(-1 + \epsilon) & -c^2 - s^2\epsilon & \frac{1}{2}cs(-1 + \epsilon) \end{bmatrix} \quad (1.2.20)$$

Particularmente para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.5) con $(\beta = 0)$ se tiene :

$$[L_h] = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2 + 2\varepsilon & -\varepsilon \\ & -1 & \end{bmatrix}. \quad (1.2.21)$$

o como usualmente se denota:

$$(2 + 2\varepsilon)u_{i,j} - \varepsilon u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - \varepsilon u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}.$$

Si $\varepsilon = 1$ tenemos la discretización de la ecuación de Poisson

$$Lu \equiv -\Delta u = f \text{ en } \Omega \subset \mathbb{R}^2$$

y su forma usual en diferencias finitas para la ecuación usando la notación plantilla de 5 puntos

$$h^{-2} \begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix} u_h(x, y) = f_h(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega_h. \quad (1.2.22)$$

Un esquema general de 9-puntos es:

$$h^{-2} \begin{bmatrix} c_{-1,1} & c_{0,1} & c_{1,1} \\ c_{-1,0} & c_{0,0} & c_{1,0} \\ c_{-1,-1} & c_{0,-1} & c_{1,-1} \end{bmatrix} u_h(x, y) = f_h(x, y) \quad (1.2.23)$$

que es abreviación de

$$h^{-2} \sum_{-1 \leq i, j \leq 1} c_{i,j} u_h(x + ih, y + jh) = f_h(x, y). \quad (1.2.24)$$

Existen varios tipo de de discretización y de diferentes órdenes de aproximación. En [6, §2.2] se muestra una discretización de cuarto orden para la ecuación de Poisson denominada *Mehrstellenverfahren* de Collatz

$$\frac{1}{6h^2} \begin{bmatrix} -1 & -4 & -1 \\ -4 & 20 & -4 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} u_h(x, y) = f_h(x, y) := \frac{1}{12} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 8 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} f(x, y). \quad (1.2.25)$$

Capítulo 2

Métodos Iterativos Clásicos

Históricamente los primeros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales generados a partir de ecuaciones diferenciales parciales son los métodos denominados métodos de suavización o relajación. Estos métodos son relativamente fáciles de implementar y requieren poco almacenamiento, por ello es que son ampliamente usados en la solución numérica de ecuaciones elípticas. Los más conocidos son los métodos de Jacobi, Gauss-Seidel, ADI, SOR y son desarrollados extensamente en Varga [14], J. Stoer, R. Bulirsch [8, §8], J. Strikwerda [11] o G. Birkhoff and Lynch [3].

2.1. Métodos iterativos Básicos

Definición 2.1.1. Denotemos el espacio de las funciones malla por \mathcal{U}_h :

$$\mathcal{U}_h = \{u_h : \Omega_h \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (2.1.1)$$

\mathcal{U}_h es un espacio vectorial de las funciones mallas definida sobre la malla computacional $\Omega_h \subset \mathbb{R}^2$ de grosor de malla $h = 1/n$. Supongamos que la discretización de EDP a solucionar produce un sistema algebraico lineal

$$L_h u_h = f_h, \quad (u_h, f_h \in \mathcal{U}). \quad (2.1.2)$$

donde la matriz L es una matriz de $N \times N$ con $N = n \times n$.

La matriz L_h puede ser separada como

$$L_h = A_h - B_h \quad (2.1.3)$$

con A_h no singular. Entonces el método iterativo siguiente para la solución de (2.1.2) es llamado **método iterativo básico**:

$$A_h u_h^{m+1} = B_h u_h^m + f_h, \quad m \geq 0 \quad (2.1.4)$$

con $m \in \mathbb{Z}^+$ y u_h^0 representando una aproximación inicial a la solución. Equivalentemente:

$$u_h^{m+1} = S_h u_h^m + T_h f_h \quad (2.1.5)$$

donde

$$S_h = A_h^{-1} B_h, \quad T_h = A_h^{-1} f_h. \quad (2.1.6)$$

S_h es la *matriz de iteración*.

El método iterativo básico puede también ser amortiguado, y si el parámetro de amortiguamiento es $\omega \in [0, 1]$, entonces el método amortiguado es dado por

$$u_h^{m+1} = \omega (S_h u_h^m + T_h f_h) + (1 - \omega) u_h^m \quad (2.1.7)$$

o por

$$u_h^{m+1} = S_h^* u_h^m + \omega A_h^{-1} f_h \quad (2.1.8)$$

donde S_h^* esta dado por

$$S_h^* = \omega S_h + (1 - \omega) I \quad (2.1.9)$$

e I_h es la matriz identidad. Cuando $\omega = 1$ obtenemos el método iterativo básico.

Observación 2.1.1. *La iteración (2.1.8) corresponde a la separación*

$$A_h^* = \frac{A_h}{\omega}, \quad B_h^* = L_h - A_h^* \quad (2.1.10)$$

Demostración. $S_h^* = (A_h^*)^{-1} B_h^* = \omega A_h^{-1} \left(\frac{A_h}{\omega} - (A_h - B_h) \right) = I_h - \omega I_h + \omega A_h^{-1} B_h = \omega S_h + (1 - \omega) I_h$ □

Los valores propios de la matriz iteración básica amortiguada S_h^* pueden ser dados en términos de los valores propios de la matriz de iteración no amortiguada S . Ellos pueden relacionarse por:

$$\lambda(S_h^*) = \omega\lambda(S_h) + (1 - \omega) \quad (2.1.11)$$

donde ω es el parámetro de amortiguamiento y $\lambda(S_h)$ del lado derecho de la ecuación es un valor propio de S_h , matriz de iteración no amortiguada.

Proposición 2.1.2. *Dado el sistema algebraico de la (2.1.2), entonces el método iterativo básico (2.1.5) que lo soluciona puede ser expresado por:*

$$u_h^m = S_h^m u_h^0 + T_h^{(m)} f_h, \quad T_h^{(m)} = \sum_{k=0}^{m-1} S_h^k T_h \quad (2.1.12)$$

Demostración. Por inducción. Para $m = 1$ es obvio. Veamos para $m \rightarrow m + 1$.

$$\begin{aligned} u_h^{m+1} &= S_h u_h^m + T_h f_h \\ &= S_h (S_h^m u_h^0 + T_h^{(m)} f_h) + T_h f_h \\ &= S_h^{m+1} u_h^0 + (S_h T_h^{(m)} + T_h) f_h \\ &= S_h^{m+1} u_h^0 + \left(S_h \sum_{k=0}^{m-1} S_h^k T_h + T_h \right) f_h \\ &= S_h^{m+1} u_h^0 + \left(\sum_{k=0}^{m-1} S_h^{k+1} T_h + T_h \right) f_h \\ &= S_h^{m+1} u_h^0 + \left(\sum_{k=1}^m S_h^k T_h + T_h \right) f_h \\ &= S_h^{m+1} u_h^0 + \left(\sum_{k=0}^m S_h^k T_h \right) f_h \end{aligned}$$

□

La condición obvia sobre la iteración (2.1.12) es que la solución de (2.1.2) sea punto fijo de esta, es decir,

$$u_h = S_h u_h + T_h f_h$$

suponiendo ello para todo $f_h \in \mathcal{U}$ tenemos

$$I = S_h + T_h L$$

entonces

$$T_h = (I - S_h)L_h^{-1} \quad (2.1.13)$$

2.2. Convergencia de Métodos Iterativos Básicos

En la teoría de convergencia para (2.1.4) los siguientes conceptos juegan un papel importante.

Definición 2.2.1. Sea x un vector de \mathbb{R}^n . Entonces

$$\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

es la norma Euclidiana de x .

Definición 2.2.2. la norma espectral de la matriz S_h ($\|S_h\|$) es definida por:

$$\|S_h\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|S_h x\|}{\|x\|}.$$

Sea ahora $A_h u_h = B u_h + f_h$, así que el error después de m iteraciones es

$$e_h^m = u_h^m - u_h \quad (2.2.1)$$

donde u_h es la solución de la ecuación (2.1.2) y se satisface que

$$e_h^{m+1} = S_h e_h^m, \quad (2.2.2)$$

donde S_h es la matriz de iteración definida arriba (S_h^* puede reemplazar a S_h en la ecuación).

De la ecuación (2.2.2) se sigue por inducción que e_h^m puede ser escrito en términos del error inicial, e_h^0 , como

$$e_h^m = S_h^m e_h^0, \quad (2.2.3)$$

donde el super índice sobre S_h es un exponente y $m \geq 0$. En términos de norma vector , tenemos

$$\|e_h^m\| = \|S_h^m e_h^0\| \leq \|S_h^m\| \|e_h^0\| \leq \|S_h\|^m \|e_h^0\| \quad (2.2.4)$$

El término $\|S_h\|$ es también llamado *número de contracción* del método iterativo básico.

Definición 2.2.3. Si S_h es una matriz de $n \times n$ con valores propios λ_i , $1 \leq i \leq n$, entonces

$$\rho(S_h) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \quad (2.2.5)$$

es el *radio espectral* de la matriz S_h .

Definición 2.2.4. Se dice que un método iterativo es llamado *convergente* si

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|S_h^m\| = 0 \quad (2.2.6)$$

con $S_h = A_I^{-1} B_I$.

Teorema 2.2.1. El método iterativo es convergente si y sólo si

$$\rho(S_h) < 1. \quad (2.2.7)$$

Demostración. Ver [14, p. 12] □

De la ec.(2.2.4) se tiene que si un método iterativo es convergente entonces implica que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|e_h^m\| = 0 \quad (2.2.8)$$

para cualquier elección inicial e_h^0 si solamente si $\rho(S_h) < 1$.

Algunos resultados adicionales, planteados similarmente y demostrados en Varga [14], son:

Teorema 2.2.2. Si S_h es una matriz arbitraria de $n \times n$, entonces

$$\rho(S_h) \leq \|S_h\|. \quad (2.2.9)$$

Además

$$|\rho(S_h)|^n = \rho(S_h^n) \leq \|S_h^n\|. \quad (2.2.10)$$

Demostración. Si λ es un valor propio de S_h , y su x es un vector propio diferente de cero asociado a x , entonces $S_h x = \lambda x$. Así

$$|\lambda| \cdot \|x\| = \|\lambda x\| = \|S_h x\| \leq \|S_h\| \|x\|,$$

de esto se tiene que $|\lambda| \leq \|S_h\|$ para todo valor propio de S_h , lo que prueba (2.2.9). \square

Teorema 2.2.3. Si $\rho(S_h) < 1$ entonces

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\|S_h^m\|)^{\frac{1}{m}} = \rho(S_h) \quad (2.2.11)$$

para cualquier norma matriz inducida.

Lema 2.2.4.

$$\|S_h\| = \sqrt{\rho(S_h^* S_h)} \quad (2.2.12)$$

$$\|S_h\| = \rho(S_h) \text{ si } S_h \text{ es normal, (i.e. } S_h S_h^* = S_h^* S_h) \quad (2.2.13)$$

en particular, (2.2.13) es válido para matrices simétricas $S_h = S_h^*$.

Demostración. La matriz $S_h^* S_h$ es simétrica y definida no negativa, es decir,

$$(S_h^* S_h)^* = S_h^* S_h \text{ y } x S_h^* S_h x = \|S_h x\|^2 \geq 0$$

para cualquier vector x . Como la matriz $S_h^* S_h$ es simétrica, se tiene $\{v_i\}_{i=1}^n$ un conjunto ortonormal de autovectores de $S_h^* S_h$, es decir, $S_h^* S_h v_i = \alpha_i v_i$, donde $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n$, y $v_i^* v_j = 0$ para $i \neq j$, y $v_i^* v_i = 1$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Si

$$x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$$

es cualquier vector no nulo, entonces tenemos

$$\left(\frac{\|S_h x\|}{\|x\|} \right)^2 = \frac{x^* S_h^* S_h x}{x^* x} = \frac{\sum_{i=1}^n |c_i|^2 \alpha_i}{\sum_{i=1}^n |c_i|^2}$$

por lo que

$$0 \leq \alpha_i \leq \left(\frac{\|S_h x\|}{\|x\|} \right)^2 \leq \alpha_n.$$

Más aún, tomando $x = v_n$, se tiene la igualdad para el lado derecho. Así de la definición 2.2.2,

$$\|S_h\|^2 = \sup_{x \neq 0} \left(\frac{\|S_h x\|}{\|x\|} \right)^2 = \alpha_n = \rho(S_h^* S_h)$$

lo que completa la prueba. \square

Podemos definir el *factor de reducción* y la *razón de convergencia* para los métodos iterativos básicos.

Definición 2.2.5. El *factor de reducción* o *error relativo* τ es definido como

$$\tau = \frac{\|e_h^{m+1}\|}{\|e_h^m\|} \leq \|S_h\| \quad (2.2.14)$$

y representa el *factor de reducción del error* en la iteración $m + 1$.

Definición 2.2.6. El *factor de reducción media*, $\tilde{\tau}$, es dado por

$$\tilde{\tau} = \left(\frac{\|e_h^m\|}{\|e_h^0\|} \right)^{\frac{1}{m}} \leq \|S_h^m\|^{\frac{1}{m}} \quad (2.2.15)$$

luego de m iteraciones.

Definición 2.2.7. La *razón media de convergencia* es definido como

$$R(S_h^m) = -\frac{1}{m} \log (\|S_h^m\|) \quad (2.2.16)$$

donde $m > 0$ y $\|S_h^m\| < 1$.

Puesto que L_h es un operador lineal definimos el *defecto* o *residual* en la m ésima iteración

$$d_h^m = L_h u_h^m - f_h$$

para la ecuación (2.1.2). Consecuentemente se tiene

$$d_h^m = L_h e_h^m. \quad (2.2.17)$$

Así usando (2.2.2) resulta:

$$d_h^{m+1} = \hat{S}_h d_h^m = L_h S_h L_h^{-1} d_h^m \quad (2.2.18)$$

donde $\hat{S}_h = L_h S_h L_h^{-1} = B_h A_h^{-1}$ es la matriz iteración del defecto. El propósito de usar el defecto es tener una referencia de la aproximación a la solución, en vista que el error es desconocido.

2.2.1. Ordenamiento

Debido a que el desempeño de los métodos iterativos clásicos dependen también de como se realiza el ordenamiento de la variables, antes de mostrar los métodos iterativos clásicos se muestran los ordenamientos más usuales.

Ordenamiento lexicográfico, figura (2.1(a))

Un punto de malla $(x, y) \in \Omega_l$ precede a otro punto $(x', y') \in \Omega_h$, si y sólo si,

$$y < y' \quad \text{o} \quad (y = y' \text{ y } x < x'.)$$

Ordenamiento lexicográfico rotado, figura (2.1(b))

Intercambiando los roles de x e y obtenemos el ordenamiento lexicográfico rotado.

Ordenamiento Red-Black(RB), figura (2.1(c))

Asumimos que

$$\Omega_h \subset G = \{(jh, kh) : j, k \in \mathbb{Z}\}$$

y separamos G_l en puntos rojos(Red) $\Omega_h^r = \{(jh, kh) \in \Omega_h : j + k \text{ par}\}$ y los demás puntos negros (Black) $\Omega_h^b = \Omega_h \setminus \Omega_h^r$. Primero, los puntos rojos de Ω_h^r son numerados en orden lexicográfico; luego los puntos negros son similarmente ordenados .

Ordenamiento línea-zebra, figura (2.1(d))

Definimos

$$\begin{aligned} \Omega_h^r &= \{(jh, kh) : j \text{ par}\} && \text{líneas rojas ,} \\ \Omega_h^b &= \{(jh, kh) : j \text{ impar}\} && \text{líneas negras ,} \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

numerando primero los puntos de Ω_h^r y luego los Ω_h^b , así obtenemos el ordenamiento línea-zebra.

Ordenamiento de cuatro colores, figura (2.1(e))

Divida Ω_h en cuatro subconjuntos

$$\begin{aligned}
 \Omega_h^1 &= \{(jh, kh) : j, k \text{ par}\} && \text{amarillo,} \\
 \Omega_h^2 &= \{(jh, kh) : j, k \text{ impar}\} && \text{rojo,} \\
 \Omega_h^3 &= \{(jh, kh) : j \text{ par, } k \text{ impar}\} && \text{negro,} \\
 \Omega_h^4 &= \{(jh, kh) : j \text{ impar, } k \text{ par}\} && \text{verde.}
 \end{aligned}
 \tag{2.2.20}$$

En cada subconjunto Ω_h^i , los puntos son ordenados lexicográficamente. El ordenamiento RB es aceptable para fórmulas de cinco-puntos, mientras que el ordenamiento cuatro-colores puede ser usado para esquemas generales de nueve puntos, pues cuando se hace un barrido sobre uno de los puntos, los puntos vecinos no son parte de la iteración, sino de las iteraciones para los otros puntos.

2.3. Métodos Iterativos Jacobi, Gauss Seidel y ADI

En esta sección describimos varios métodos iterativos clásicos que resultan de la elección de las matrices de la ecuación (2.1.3).

Considerando un sistema lineal (2.1.2) donde L_h puede ser un operador de cinco o nueve puntos, la ecuación en un punto (x_i, y_j) de la malla puede ser entonces

$$S u_{i,j-1} + W u_{i-1,j} + C u_{i,j} + E u_{i+1,j} + N u_{i,j+1} = f_{i,j} \tag{2.3.1}$$

donde los subíndices (i, j) de los coeficientes han sido suprimidos. Equivalentemente en su notación plantilla tenemos:

$$L_h u_{i,j} = \begin{bmatrix} 0 & N & 0 \\ W & C & E \\ 0 & S & 0 \end{bmatrix} u_{i,j} = f_{i,j} \tag{2.3.2}$$

De forma similar puede obtener una fórmula de 9 puntos

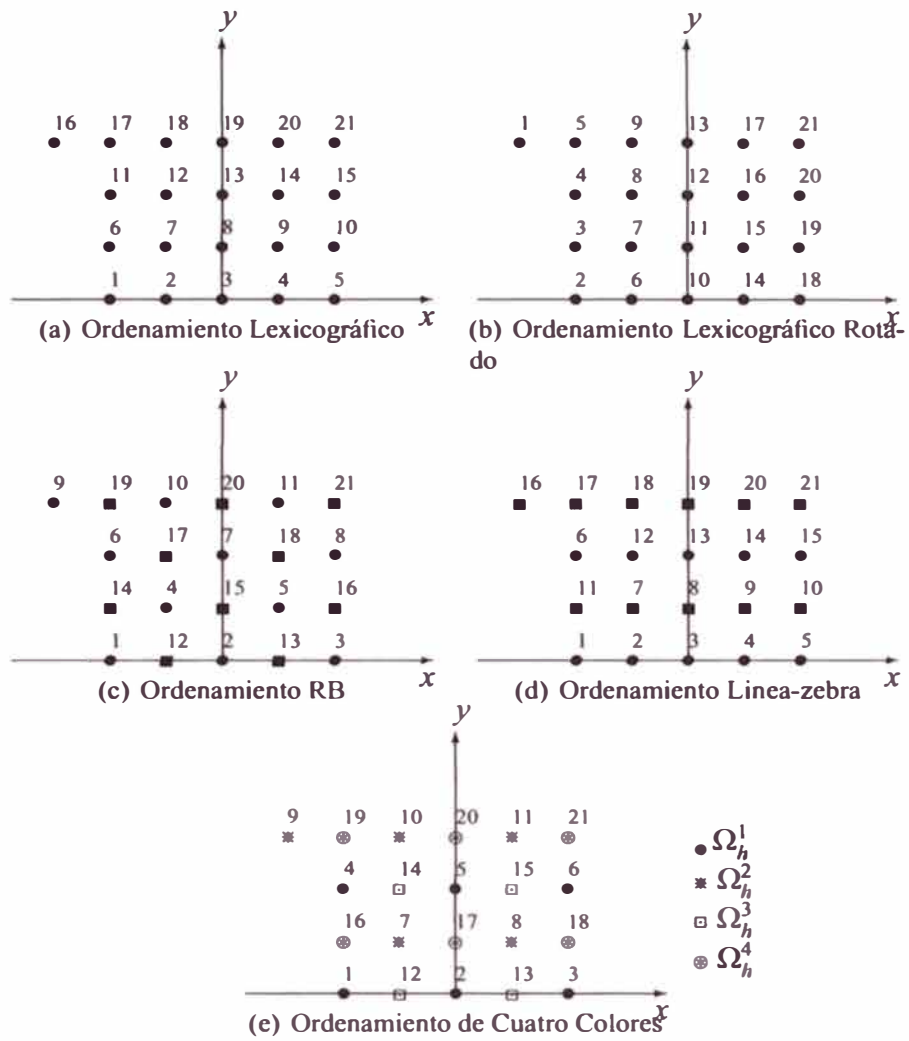


Figura 2.1: Mallados

$$\begin{aligned}
 &NW u_{i,j+1} + N u_{i,j+1} + NE u_{i,j+1} \\
 &W u_{i-1,j} + C u_{i,j} + E u_{i+1,j} \\
 &SW u_{i-1,j-1} + S u_{i,j-1} + SE u_{i+1,j-1} = f_{i,j}
 \end{aligned}
 \tag{2.3.3}$$

Equivalentemente

$$L_h u_{i,j} = \begin{bmatrix} NW & N & NE \\ W & C & E \\ SW & S & SE \end{bmatrix} u_{i,j} = f_{i,j}
 \tag{2.3.4}$$

2.3.1. Jacobi Puntual

En (2.1.3) se tiene

$$A_h = \text{diag}(L_h),$$

produciendo la siguiente iteración

$$A_h u_h^{m+1} = B_h u_h^m + f, \text{ donde } B_h = A_h - L_h.$$

Para la fórmula de 5 puntos tenemos

$$S u_{i,j-1}^m + W u_{i-1,j}^m + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^m + N u_{i,j+1}^m = f_{i,j}. \quad (2.3.5)$$

Equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} 0 & N & 0 \\ W & 0 & E \\ 0 & S & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \quad (2.3.6)$$

Para la fórmula de 9 puntos

$$\begin{aligned} & NW u_{i,j+1}^m + N u_{i,j+1}^m + NE u_{i,j+1}^m \\ & W u_{i-1,j}^m + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^m \\ & SW u_{i-1,j-1}^m + S u_{i,j-1}^m + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} NW & N & NE \\ W & 0 & E \\ SW & S & SE \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \quad (2.3.8)$$

2.3.2. Jacobi por Bloques

En (2.1.3) A_h es obtenido de la siguiente manera:

$$A_h = \text{tridiag}(L_h) = \begin{cases} 0 & , j \neq i \pm 1 \\ L_{h,i,j} & , \text{en otro caso} \end{cases},$$

por lo que se tendría que solucionar un sistema de ecuaciones tridiagonal para poder hacer una iteración. Luego con un ordenamiento lexicográfico nos da una *Jacobi lineal horizontal*; con un ordenamiento lexicográfico rotado uno obtiene una *Jacobi lineal vertical*. Una iteración lineal horizontal seguido de una iteración Jacobi lineal vertical nos da una Jacobi alternante. Para el caso Jacobi lineal horizontal tenemos la siguiente fórmula de iteración

$$S u_{i,j-1}^m + W u_{i-1,j}^{m+1} + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^{m+1} + N u_{i,j+1}^m = f_{i,j} \quad (2.3.9)$$

ó equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ W & C & E \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \quad (2.3.10)$$

y para la fórmula de 9 puntos

$$\begin{aligned} & NW u_{i,j+1}^m + N u_{i,j+1}^m + NE u_{i,j+1}^m \\ & W u_{i-1,j}^{m+1} + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^{m+1} \\ & SW u_{i-1,j-1}^m + S u_{i,j-1}^m + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

o equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ W & C & E \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} NW & N & NE \\ 0 & 0 & 0 \\ SW & S & SE \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \quad (2.3.12)$$

2.3.3. Gauss-Seidel Puntual

El proceso de suavización más frecuentemente usado es la iteración dada por Gauss-Seidel [18, p. 3]. Para la formulación matricial hemos introducido la descomposición de L_h en

$$\begin{aligned} L_h &= D - A_h - B_h, \\ D &: \text{Matriz diagonal.} \\ A_h(B_h) &: \text{Matriz estrictamente triangular inferior (superior).} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

La iteración es equivalente a

$$\begin{aligned}
 u_h^{m+1} &= \mathcal{J}(u_h^m, f) = (D - A_h)^{-1}(B_h u_h^m + f) \\
 &= S u_h^m + T_h f, \\
 \text{donde } S &= (D - A_h)^{-1} B_h = I - (D - A_h)^{-1} L_h, \\
 T_h &= (D - A_h)^{-1}.
 \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

La separación de (2.3.13) es única, pero la representación de una ecuación modelo no es única. La construcción de L_h depende del número de variables (i.e. puntos en la malla).

Observación 2.3.1. *La iteración de Gauss-Seidel depende del ordenamiento de las variables.*

Luego tenemos que la fórmula para el método de iteración Gauss Seidel para la notación de cinco puntos es:

$$S u_{i,j-1}^{m+1} + W u_{i-1,j}^{m+1} + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^m + N u_{i,j+1}^m = f_{i,j} \tag{2.3.15}$$

ó en su notación estencil

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ W & C & 0 \\ 0 & S & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} 0 & N & 0 \\ 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \tag{2.3.16}$$

Para la formula de 9 puntos

$$\begin{aligned}
 &NW u_{i,j+1}^m + N u_{i,j+1}^m + NE u_{i,j+1}^m \\
 &W u_{i-1,j}^{m+1} + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^m \\
 &SW u_{i-1,j-1}^{m+1} + S u_{i,j-1}^{m+1} + SE u_{i+1,j-1}^{m+1} = f_{i,j}
 \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

equivalentemente

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ W & C & 0 \\ SW & S & SE \end{bmatrix} u_{i,j}^{m+1} = - \begin{bmatrix} NW & N & NE \\ 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i,j}^m + f_{i,j} \tag{2.3.18}$$

El método de relajación de Gauss Seidel puntual multicolor

El primer tipo de estos métodos de relajación de G-S es el de dos colores (RB) que se usa para una discretización de 5 puntos. Tal como se muestra en la figura (2.1(c)) definimos los índices de los puntos de malla como

$$\begin{aligned} \text{rojo : } & i + j \text{ par} \\ \text{negro : } & i + j \text{ impar} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

En este método procedemos en dos pasos intermedios, uno para cada color de los puntos que es usado. La formulación de la ecuación discretizada para los puntos rojos (primer paso intermedio) es

$$S u_{i,j-1}^m + W u_{i-1,j}^m + C u_{i,j}^{m+\frac{1}{2}} + E u_{i+1,j}^m + N u_{i,j+1}^m = f_{i,j} \quad (2.3.20)$$

donde $i + j$ es par, y para los puntos de malla negros (segundo paso intermedio)

$$S u_{i,j-1}^{m+\frac{1}{2}} + W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{2}} + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^{m+\frac{1}{2}} + N u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} = f_{i,j} \quad (2.3.21)$$

donde $i + j$ es impar.

EL método de relajación Gauss Seidel puntual multicolor para una discretización de 9-puntos tiene cuatro colores, tal como se da en (2.2.20) (Ver figura (2.1(e))). Este método se procede en cuatro pasos, un paso por cada color de punto que esta siendo usado. Para la formulación del método, se tiene para los puntos rojos (Primer cuarto de paso):

$$\begin{aligned} & NW u_{i,j+1}^m + N u_{i,j+1}^m + NE u_{i,j+1}^m \\ & W u_{i-1,j}^m + C u_{i,j}^{m+\frac{1}{4}} + E u_{i+1,j}^m \\ & SW u_{i-1,j-1}^m + S u_{i,j-1}^m + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

donde i es impar y j es impar. La ecuación para los puntos de mallas negros (segundo cuarto de paso) es:

$$\begin{aligned} & NW u_{i,j+1}^m + N u_{i,j+1}^m + NE u_{i,j+1}^m \\ & W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{4}} + C u_{i,j}^{m+\frac{1}{2}} + E u_{i+1,j}^{m+\frac{1}{4}} \\ & SW u_{i-1,j-1}^m + S u_{i,j-1}^m + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

donde i es par y j es impar. La ecuación para los puntos de mallas verdes (tercer cuarto de paso) es:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} &+ N u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{4}} &+ NE u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} \\ W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{2}} &+ C u_{i,j}^{m+\frac{3}{4}} &+ E u_{i+1,j}^{m+\frac{1}{4}} \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} &+ S u_{i,j-1}^{m+\frac{1}{4}} &+ SE u_{i+1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

donde i es impar y j es par. La ecuación para los puntos de mallas amarillos (Cuarto cuarto de paso) es :

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{4}} &+ N u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} &+ NE u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{4}} \\ W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{4}} &+ C u_{i,j}^{m+1} &+ E u_{i+1,j}^{m+\frac{3}{4}} \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+\frac{1}{4}} &+ S u_{i,j-1}^{m+\frac{1}{2}} &+ SE u_{i+1,j-1}^{m+\frac{1}{4}} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

donde i es par y j es par

2.3.4. Gauss Seidel por Bloques

La eficiencia del método Gauss Seidel como se indicó en la observación 2.3.1 depende del ordenamiento y además esta dependencia es muy fuerte en muchas aplicaciones [17, p. 43].

Iteración Gauss Seidel Línea en la dirección X

Para esta relajación, tan igual como para la iteración de Jacobi por bloques, se requiere de la solución de un sistema tridiagonal para cada una de las variables por línea.

La relajación Gauss Seidel por línea en la dirección X sin un ordenamiento multicolor para una discretización de nueve puntos esta dado por:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^m &+ N u_{i,j+1}^m &+ NE u_{i,j+1}^m \\ W u_{i-1,j}^{m+1} &+ C u_{i,j}^{m+1} &+ E u_{i+1,j}^{m+1} \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+1} &+ S u_{i,j-1}^{m+1} &+ SE u_{i+1,j-1}^{m+1} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.26)$$

Cuando se usa un ordenamiento de dos colores RB Zebra o llamado antes Línea-Zebra (un

caso particular en la dirección X es mostrado en la figura (2.1(d))), los colores son definidos

$$\begin{aligned} \text{rojo : } & j \text{ impar} \\ \text{negro : } & j \text{ par} \end{aligned} \quad (2.3.27)$$

La relajación es realizada en dos pasos intermedios, el primero sobre los puntos rojos, y el segundo paso sobre los puntos negros. El primer paso de la relajación lineal para la discretización de nueve puntos es lo siguiente:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^m & + N u_{i,j+1}^m & + NE u_{i,j+1}^m \\ W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{2}} & + C u_{i,j}^{m+\frac{1}{2}} & + E u_{i+1,j}^{m+\frac{1}{2}} \\ SW u_{i-1,j-1}^m & + S u_{i,j-1}^m & + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

donde j es impar para el primer paso intermedio, y el segundo paso intermedio es:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} & + N u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} & + NE u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} \\ W u_{i-1,j}^{m+1} & + C u_{i,j}^{m+1} & + E u_{i+1,j}^{m+1} \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} & + S u_{i,j-1}^{m+\frac{1}{2}} & + SE u_{i+1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

donde j es par.

Iteración Gauss Seidel Línea en la dirección Y

Para esta relajación, tan igual como para la iteración Gauss Seidel Línea en la dirección X , se requiere de la solución de un sistema tridiagonal para cada una de las variables por línea.

Presentamos la relajación Gauss Seidel por línea en la dirección Y para una discretización de nueve puntos (Observar que para una discretización de 5 puntos es un caso especial de nueve puntos cuando $NW = NE = SW = SE = 0$). La relajación Gauss Seidel por líneas en la dirección Y sin un ordenamiento multicolor para una discretización de nueve puntos esta dada por:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^{m+1} & + N u_{i,j+1}^{m+1} & + NE u_{i,j+1}^m \\ W u_{i-1,j}^{m+1} & + C u_{i,j}^{m+1} & + E u_{i+1,j}^m \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+1} & + S u_{i,j-1}^{m+1} & + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

Cuando un ordenamiento multicolor es usado con un RB Zebra en la dirección Y los colores son definidos por :

$$\begin{aligned} \text{rojo : } & i \text{ impar} \\ \text{negro : } & i \text{ par} \end{aligned} \quad (2.3.31)$$

La relajación es realizada en dos pasos intermedios, el primero sobre los puntos rojos, y el segundo paso sobre los puntos negros. El primer paso de relajación lineal para la discretización de nueve puntos es:

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^m & + N u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} + NE u_{i,j+1}^m \\ W u_{i-1,j}^m & + C u_{i,j}^{m+\frac{1}{2}} + E u_{i+1,j}^m \\ SW u_{i-1,j-1}^m & + S u_{i,j-1}^{m+\frac{1}{2}} + SE u_{i+1,j-1}^m = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

donde i es impar, para el segundo paso intermedio tenemos,

$$\begin{aligned} NW u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} & + N u_{i,j+1}^{m+1} + NE u_{i,j+1}^{m+\frac{1}{2}} \\ W u_{i-1,j}^{m+\frac{1}{2}} & + C u_{i,j}^{m+1} + E u_{i+1,j}^{m+\frac{1}{2}} \\ SW u_{i-1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} & + S u_{i,j-1}^{m+1} + SE u_{i+1,j-1}^{m+\frac{1}{2}} = f_{i,j} \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

donde i es par.

Iteración Gauss Seidel Línea Alternante

El método de Gauss Seidel línea alternante es realizado haciendo una Gauss Seidel línea coloreado Zebra por líneas en la dirección X seguido por un Gauss Seidel lineal coloreado por líneas en la dirección Y . Ver las secciones previas.

2.3.5. Método ADI Peaceman and Rachford

En J. Stoer y R. Bulirsch[8, §8.6] se desarrolla el método implícito con dirección alternante llamado método ADI (Alternating Direction Implicit) el cual será descrito brevemente. En este método el sistema de ecuaciones

$$L_h u_h = f_h,$$

de acuerdo a la separación

$$L_h = H_h + V_h$$

es transformado equivalentemente en

$$(H_h + r I)u_h = (r I - V_h)u_h + f_h$$

o también

$$(V_h + r I)u_h = (r I - H_h)u_h + f_h,$$

donde r es un parámetro real. Combinando las dos ecuaciones anteriores se tiene la iteración del método ADI, teniendo a una de ellas como paso intermedio, es decir,

$$(H_h + r_{m+1} I)u_h^{m+1/2} = (r_{m+1} I - V_h)u_h^m + f_h \quad (2.3.34a)$$

$$(V_h + r_{m+1} I)u_h^{m+1} = (r_{m+1} I - H_h)u_h^{m+1/2} + f_h \quad (2.3.34b)$$

donde r_{m+1} es un parámetro real el cual puede ser escogido en cada paso de manera diferente. Ahora sustituyendo $u_h^{m+1/2}$ de (2.3.34a) en (2.3.34b) se obtiene:

$$u_h^{m+1} = S_{r_{m+1}}u_h^m + T_{r_{m+1}}f_h = \mathcal{S}(u_h^m, f_h) \quad (2.3.35)$$

donde

$$\begin{aligned} S_r &= (V_h + r I)^{-1} (r I - H_h) (H_h + r I)^{-1} (r I - V_h) \\ T_r &= (V_h + r I)^{-1} [I + (r I - H_h) (H_h + r I)^{-1}] \end{aligned} \quad (2.3.36)$$

En [8, §8.6] se muestran como son obtenidos estos parámetros óptimos r_m .

2.4. Algunos resultados numéricos de métodos iterativos clásicos

La ecuación modelo a usar será la ecuación de Poisson para hacer algunas comparaciones entre los métodos iterativos clásicos, mientras que las ecuaciones anisotrópicas de difusión rotada y la ecuación de Poisson anisotrópica serán usadas para comparar los métodos iterativos por bloques y el ADI. La comparación de los radios espectrales ρ , el número de

iteraciones y operaciones para a obtener un error del orden de h^2 para la ecuación modelo (2.4.1) son mostradas en el cuadro 2.2 (Ver [8, §8]).

Sea la siguiente ecuación de Poisson con condiciones de frontera de Dirichlet:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \text{ en } \Omega = (0, 1)^2 \\ u &= 0, \text{ en } \partial\Omega \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

con $f \in C^0(\Omega)$ y para soluciones clásicas se tiene $u \in C^2(\Omega) \cup C^0(\bar{\Omega})$. La discretización en diferencias finitas como (1.2.22) genera el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$h^{-2} \begin{bmatrix} & & -1 & & \\ & -1 & 4 & -1 & \\ & & & & \\ & & & & \\ -1 & & & & \end{bmatrix} u_h(x_i, y_j) = f_h(x_i, y_j) \quad \forall (x, y) \in \Omega_h.$$

o similarmente

$$4u_{i,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j-1} - u_{i+1,j} - u_{i,j+1} = h^2 f_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in \Omega_h$$

donde $\Omega_h = \{(x_i, y_j) \in \Omega : x_i = ih, y_j = jh, i, j = 1, \dots, N-1\}$, $h = 1/N$, y $N \geq 1$ un entero que indica el número de particiones del intervalo $(0, 1)$. Las pruebas computacionales se realizan haciendo en (2.4.1)

$$f(x, y) = 2\pi^2 \text{sen } \pi x \text{ sen } \pi y$$

y la solución exacta es

$$u(x, y) = \text{sen } \pi x \text{ sen } \pi y.$$

Como una medida del error, elegimos el tamaño de error del residual

$$r^j = \|L_h u_h^j - f_h\|.$$

La iteración terminará tan pronto como r^j sea reducido a un orden de magnitud de $10^{-4} = 0,0001$. En los métodos de Jacobi, Gauss Seidel, SOR(G-S amortiguado), y ADI serán inicializados en $u_h^0 = 0$. Los cálculos obtenidos del cuadro 2.1 son similares a los presentados

$n_x = n_y$	Jacobi			Gauss Seidel						ADI		
	i	$\ u_i^j - u_j\ $	CPU(s)	Puntual			SOR			i	$\ u_i^j - u_j\ $	CPU(s)
				i	$\ u_i^j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_i^j - u_j\ $	CPU(s)			
4	35	.530E-01	2.50E-04	18	1.06E-01	8.75E-04	9	1.06E-01	3.75E-04	6	1.06E-01	3.75E-04
8	154	5.18E-02	4.64E-02	78	5.18E-02	7.50E-02	21	5.18E-02	7.53E-02	8	5.18E-02	5.00E-04
16	628	2.57E-02	1.71E-01	315	2.57E-02	7.73E-02	44	2.57E-02	1.56E-02	9	2.57E-02	2.50E-04
32	2526	1.28E-02	2.77E+00	1264	1.28E-02	1.36E+00	88	1.28E-02	9.35E-02	10	1.28E-02	1.48E-02
64	10116	6.26E-03	4.80E+01	5059	6.26E-03	2.31E+01	177	6.40E-03	7.96E-01	12	6.33E-03	1.24E-01
128	30000*	4.40E-03	5.93E+02	20239	2.89E-03	3.81E+02	355	3.16E-03	6.69E+00	14	3.01E-03	5.77E-01
256										16	1.04E-03	2.77E+00

Cuadro 2.1: Iteraciones de la ecuación modelo $\Delta u = f$ con $f = 2\pi^2 \text{sen } \pi x \text{ sen } \pi y$. i número de iteraciones, $\|\cdot\|$ euclidiana, CPU(s) tiempo de máquina; hasta conseguir un error del defecto del orden de 0.00001 (* No se consiguió la aproximación).

Método	ρ	Número de iteraciones	Numero de iteraciones operaciones
Jacobi	$\cos \frac{\pi}{N}$	$N^2 \log_{10} N$	$5N^4 \log_{10} N$
G-S	$\cos^2 \frac{\pi}{N}$	$0,5N^2 \log_{10} N$	$2,5N^4 \log_{10} N$
G-S (ω)	$\frac{\cos^2 \frac{\pi}{N}}{(1 + \text{sen } \frac{\pi}{N})}$	$0,72N \log_{10} N$	$3,6N^3 \log_{10} N$
ADI(*)	$1 - 8 \left(\frac{\pi}{4N} \right)^{\frac{1}{m}}$	$3,6(\log_{10} N)^2$	$57,6N^2 (\log_{10} N)^2$

Cuadro 2.2: Comparación de los radios espectrales ρ de diferentes métodos iterativos clásicos para la ecuación modelo (2.4.1) donde el número de iteraciones son las necesarias para que el error sea del orden h^2 ((*) ADI optimal con m otro parámetro optimal)

en la tabla I de [8, §8.10]. Para verificar las estimaciones teóricas mostradas en el cuadro 2.2 hemos ejecutado el mismo programa pero ahora el criterio de parada considerado es cuando el error de aproximación llega a ser del orden de h^2 . Estos resultados son mostrados en el cuadro 2.3.

Una primera observación es que $\|u_h^i - u_h\|$ decae rápidamente con el número de iteraciones, esto como resultado de incrementar el número de particiones N (Ver el cuadro 2.2). Una segunda observación es que el método de Gauss Seidel converge dos veces más rápido que el método de Jacobi [8, Corolario (8.3.16)], y el método relajación con parámetro óptimo tiene una reducción considerable del número de iteraciones [8, teorema(8.3.17),

N	64		$h^2 = 2.44E-04$		
	$\ u_h^i - u_h\ $	$\ L_h u_h^i - f_h\ $	N iter. Teorica	N Iter Comp	tiempo(s)
Jacobi	2.44E-04	8.77E-03	7398	6403	21.7
Gauss Seidel	2.44E-04	8.78E-03	3699	3821	10.5
Gauss Seidel (ω)	2.41E-04	0.284	83	117	0.4
ADI	1.96E-04	7.82E-03	12	7	6.21E-02
N	128		$h^2 = 6.10E-05$		
	$\ u_h^i - u_h\ $	$\ L_h u_h^i - f_h\ $	N iter. Teorica	N Iter Comp	tiempo(s)
Jacobi	6.87E-05	2.35E-03	34525	30000*	429.0
Gauss Seidel	6.10E-05	2.19E-03	17262	15112	207.0
Gauss Seidel (ω)	5.78E-05	4.85E-03	194	265	3.6
ADI	4.12E-05	1.80E-03	16	10	3.75E-01

Cuadro 2.3: Se realizan tantas iteraciones como sea necesario para alcanzar un error del orden de h^2 . La columna donde se indica el número de iteraciones teóricas son obtenidas del cuadro 2.2. (*) indica que ha superado el número de iteraciones máxima que hemos definido).

(8.4.9)] y con el método ADI (usando $m = 4$) se requiere menos iteraciones aún [8, teorema(8.6.28)]. En el mismo cuadro hemos agregado el tiempo realizado por la CPU para conseguir la aproximación deseada. Este tiempo es también proporcional al número de iteraciones siendo más ventajoso los métodos ADI.

2.4.1. Métodos iterativos clásicos aplicados a una ecuación de tipo anisotrópica

En los cuadros siguientes se presentan los resultados de diferentes métodos de iteración vistos en esta sección aplicados a una ecuación de tipo anisotrópica. Sólo mostraremos cálculos computacionales puesto que en el capítulo correspondiente a análisis de suavización se tratará, en cierta manera, las propiedades de convergencia de estos métodos iterativos. La ecuación a considerar se basa en la segunda ecuación modelo (1.1.5)(Ecuación de Poisson anisotrópica):

$$-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)^3}, \quad \Omega = (0, 1)^2 \quad (2.4.2)$$

y $u(x,y) = \frac{y^3}{2(1+x)}$ en $\partial\Omega$. e verifica fácilmente que $u(x,y)$ es también solución de la ecuación diferencial.

Previamente se muestra en el cuadro 2.4 el método ADI no tiene una buena convergencia para este problema, a pesar de presentar una precisión muy buena, la solución aproximada se consigue luego de un número de iteraciones relativamente grande. Además se tiene un alto costo computacional evidenciado por el elevado tiempo de ejecución.

ADI ($\varepsilon = 1$)			
$n_x = n_y$	i	$\ u_i^j - u_j\ $	CPU(s)
4	28	3.53E-04	4.16E-08
8	150	2.11E-04	1.55E-02
16	790	1.10E-04	3.75E-01
32	4056	5.56E-05	7.95E+00
64	20682	2.79E-05	1.76E+02

Cuadro 2.4: Iteraciones de la ecuación modelo (2.4.2) con $\varepsilon = 1$.

Para la ecuación de Poisson anisotrópica, donde el parámetro ε determina el grado de anisotropía (Valores muy grandes o muy pequeños indicarán una fuerte anisotropía). Los métodos iterativos usados para hallar la solución aproximada son los siguientes: El método Gauss Seidel SOR, métodos iterativos por bloques (Jacobi lineal, Gauss Lineal). Hemos variado el parámetro ε haciendo que asuma los siguientes valores: 0,001 (cuadro 2.5), 0,01(cuadro 2.6), 0,1(cuadro 2.7), 1(cuadro 2.8) , 100 y 1000 (cuadro 2.9) estos tres últimos valores sólo son usados para los métodos iterativos de Gauss Seidel por Bloques.

Observe que los métodos por bloque en la dirección no influenciada por el parámetro anisotrópico ε como el método alternante $X - Y$ son las que mejor resultado dan con un número de iteraciones reducido. Una de las razones de ello es por lo siguiente: si la ecuación

de Poisson anisotrópica es descrita por su forma plantilla como en (1.2.21), i.e.,

$$[L_h]u_h = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2 + 2\varepsilon & -\varepsilon \\ & -1 & \end{bmatrix} u_h = h^2 f_h,$$

entonces cuando $\varepsilon \ll 1$ se tendrá la siguiente aproximación

$$[L_h]u_h \approx \begin{bmatrix} & -1 & \\ 0 & 2 & 0 \\ & -1 & \end{bmatrix} u_h = h^2 f_h.$$

Luego como los métodos por bloques se caracterizan por resolver un sistema tridiagonal en cada línea o columna, según sea el caso, entonces prácticamente se tendrá el problema resuelto, pues el sistema aproximado en su forma plantilla mostrado en la última ecuación es casi de forma tridiagonal. De manera análoga se verifica cuando $\varepsilon \gg 1$ tan sólo haciendo $\varepsilon' = 1/\varepsilon$.

En los cuadros se ve que el método iterativo *SOR* es bueno cuando no se presentan casos de anisotropía $\varepsilon \approx 1,0$ y observa que el método iterativo por bloque en la dirección *Y*, tanto Jacobi como Gauss Seidel, para $\varepsilon \ll 1,0$, se comporta de manera similar al método iterativo por bloque en la dirección *X* cuando $\varepsilon \gg 1,0$.

JACOBI ($\epsilon = 0.001$)											
N	Líneal X			Líneal Y			Alternante X-Y				
	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)		
4	29	5.38E-06	2.05E-05	1	6.18E-07	2.05E-05	1	4.69E-07	2.05E-05		
8	131	1.25E-05	1.50E-02	2	6.82E-07	8.78E-06	2	5.56E-07	5.84E-06		
16	541	2.70E-05	1.25E-01	3	6.90E-06	2.92E-06	3	6.54E-06	1.17E-05		
32	2185	6.74E-05	2.14E+00	5	6.45E-05	1.60E-02	5	6.32E-05	1.60E-02		
64	8761	2.51E-04	3.66E+01	11	4.32E-04	4.70E-02	11	4.28E-04	6.20E-02		
128				35	1.81E-03	6.25E-01	35	1.81E-03	7.18E-01		

GAUSS SEIDEL ($\epsilon = 0.001$)												
N	Líneal X			Líneal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)
4	14	1.24E-05	1.13E-04	1	5.44E-07	1.02E-04	1	6.52E-07	1.13E-04	8	1.50E-06	1.75E-05
8	62	3.38E-05	1.75E-05	1	1.42E-05	1.02E-04	1	1.25E-05	1.17E-05	19	5.47E-06	5.85E-06
16	247	8.37E-05	4.71E-02	2	1.47E-05	1.17E-05	2	1.39E-05	1.75E-05	40	9.19E-05	1.61E-02
32	979	1.89E-04	9.68E-01	3	1.53E-04	1.61E-02	3	1.50E-04	1.61E-02	94	2.90E-05	7.81E-02
64	3894	4.92E-04	1.48E+01	7	3.48E-04	3.11E-02	7	3.44E-04	3.11E-02	191	1.61E-04	7.35E-01
128				19	1.83E-03	3.44E-01	19	1.82E-03	3.90E-01	384	1.27E-03	6.14E+00

Cuadro 2.5: Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x,y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \epsilon}{(1+x)^3}$ con $\epsilon = 0,001$.

JACOBI ($\epsilon = 0,01$)									
N	Líneal X			Líneal Y			Alternante X-Y		
	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)
4	29	4.64E-06	1.75E-05	2	6.33E-06	1.13E-04	2	7.23E-06	1.13E-04
8	129	9.52E-06	1.19E-04	4	4.67E-06	1.76E-05	3	3.63E-05	1.13E-04
16	533	2.25E-05	1.25E-01	8	4.44E-05	1.13E-04	8	3.68E-05	1.13E-04
32	2151	4.44E-05	2.09E+00	23	1.21E-04	1.50E-02	22	1.62E-04	1.59E-02
64	8617	7.06E-05	3.64E+01	80	2.92E-04	3.44E-01	79	2.98E-04	3.59E-01
128				308	4.57E-04	5.42E+00	305	4.55E-04	5.69E+00

GAUSS SEIDEL ($\epsilon = 0,01$)												
N	Líneal X			Líneal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)
4	14	7.71E-06	1.25E-04	2	7.77E-06	1.13E-04	1	6.88E-06	0.00E+00	8	6.44E-06	1.13E-04
8	61	3.13E-05	1.17E-05	3	2.83E-06	4.16E-08	3	3.58E-06	1.78E-08	19	5.32E-06	1.02E-04
16	243	8.02E-05	6.29E-02	5	4.77E-05	2.27E-04	5	3.95E-05	2.27E-04	40	1.31E-05	1.59E-02
32	963	1.67E-04	8.59E-01	13	1.09E-04	1.49E-02	13	9.62E-05	1.49E-02	93	4.01E-06	7.91E-02
64	3827	3.17E-04	1.43E+01	42	2.56E-04	1.72E-01	41	2.93E-04	1.72E-01	193	2.77E-05	6.71E-01
128				156	4.30E-04	2.45E+00	154	4.47E-04	2.72E+00	391	2.37E-04	5.62E+00

Cuadro 2.6: Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x,y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \epsilon}{(1+x)^3}$ con $\epsilon = 0,01$

JACOBI ($\epsilon = 0,1$)												
N	Lincal X			Lincal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)
4	27	6.36E-05	5.94E-09	5	6.26E-05	1.02E-04	4	6.37E-05	1.13E-04	8	6.59E-05	2.27E-04
8	121	3.60E-05	1.02E-04	14	2.95E-05	2.37E-08	12	2.89E-05	1.25E-04	19	3.89E-05	2.38E-04
16	495	1.65E-05	1.10E-01	48	4.70E-05	1.61E-02	43	4.91E-05	1.62E-02	42	1.81E-05	1.49E-02
32	1989	4.39E-05	1.78E+00	182	1.30E-04	1.71E-01	163	1.45E-04	1.71E-01	87	1.15E-05	7.80E-02
64	7973	1.45E-04	3.09E+01	718	3.21E-04	2.75E+00	646	3.46E-04	2.94E+00	199	6.04E-05	6.87E-01
128				2861	1.02E-03	4.61E+01	2574	1.07E-03	4.90E+01	445	5.06E-04	6.42E+00

GAUSS SEIDEL ($\epsilon = 0,1$)												
N	Lincal X			Lincal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)
4	13	5.94E-05	1.02E-04	3	6.61E-05	1.37E-04	3	6.73E-05	1.17E-05	8	6.59E-05	2.27E-04
8	57	3.01E-05	1.61E-02	8	2.87E-05	1.25E-04	7	2.51E-05	1.02E-04	19	3.89E-05	2.38E-04
16	227	5.60E-05	4.69E-02	25	3.68E-05	1.02E-04	23	3.04E-05	1.02E-04	42	1.81E-05	1.49E-02
32	898	1.44E-04	7.97E-01	91	1.36E-04	7.80E-02	83	1.33E-04	7.79E-02	87	1.15E-05	7.80E-02
64	3566	3.49E-04	1.34E+01	356	3.42E-04	1.31E+00	324	3.41E-04	1.44E+00	199	6.04E-05	6.87E-01
128				1416	1.07E-03	2.22E+01	1288	1.07E-03	2.35E+01	445	5.06E-04	6.42E+00

Cuadro 2.7: Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x,y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \epsilon}{(1+x)^3}$ con $\epsilon = 0,1$

JACOBI ($\epsilon = 1,0$)												
N	Lincal X			Lincal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)
4	17	3.49E-04	1.17E-05	16	3.47E-04	1.37E-04	8	3.50E-04	1.17E-05	8	3.51E-04	2.27E-04
8	69	2.04E-04	1.59E-02	67	2.01E-04	2.27E-04	32	1.97E-04	2.27E-04	19	2.08E-04	1.02E-04
16	280	9.62E-05	6.21E-02	269	8.93E-05	6.19E-02	129	8.06E-05	3.09E-02	42	1.07E-04	2.38E-04
32	1119	3.27E-05	1.01E+00	1079	3.16E-05	1.19E+00	517	4.60E-05	5.63E-01	88	5.11E-05	7.91E-02
64	4479	5.05E-05	1.74E+01	4319	8.29E-05	1.66E+01	2096	1.39E-04	9.28E+00	206	2.72E-05	7.19E-01
128				17278	1.98E-04	2.79E+02	8275	3.13E-04	1.61E+02	473	1.39E-05	6.86E+00

GAUSS SEIDEL ($\epsilon = 1$)												
N	Lincal X			Lincal Y			Alternante X-Y			SOR		
	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)	i	$\ u'_j - u_j\ $	CPU(s)
4	9	3.50E-04	1.37E-04	8	3.48E-04	4.77E-04	5	3.51E-04	4.77E-04	8	3.51E-04	2.27E-04
8	35	2.01E-04	2.38E-04	33	1.99E-04	1.50E-02	18	2.01E-04	1.19E-08	19	2.08E-04	1.02E-04
16	135	8.48E-05	3.10E-02	130	8.13E-05	1.49E-02	67	8.19E-05	3.09E-02	42	1.07E-04	2.38E-04
32	528	4.71E-05	4.69E-01	517	4.37E-05	4.53E-01	262	4.64E-05	2.66E-01	88	5.11E-05	7.91E-02
64	2090	1.39E-04	7.80E+00	2067	1.39E-04	7.72E+00	1040	1.40E-04	4.50E+00	206	2.72E-05	7.19E-01
128	8318	3.12E-04	1.29E+02	8270	3.12E-04	1.29E+02	4148	3.12E-04	7.45E+01	473	1.39E-05	6.86E+00

Cuadro 2.8: Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\epsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x,y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \epsilon}{(1+x)^3}$ con $\epsilon = 1$

GAUSS SEIDEL ($\varepsilon = 100$)													
Lineal X				Lineal Y				Alternante X-Y				SOR	
N	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	
4	9	7.36E-04	1.02E-04	4	7.36E-04	1.25E-04	16	7.36E-04	1.02E-04	3	7.36E-04	2.27E-04	
8	21	4.67E-04	3.75E-04	11	4.67E-04	3.52E-04	67	4.65E-04	1.56E-02	10	4.67E-04	3.52E-04	
16	45	2.46E-04	3.52E-04	33	2.45E-04	1.62E-02	273	2.42E-04	6.16E-02	30	2.45E-04	1.65E-02	
32	105	1.25E-04	9.29E-02	118	1.18E-04	1.25E-01	1098	1.15E-04	1.13E+00	107	1.18E-04	1.25E-01	
64	227	6.26E-05	8.59E-01	453	5.06E-05	1.94E+00	4401	4.71E-05	1.84E+01	411	5.03E-05	1.92E+00	
128	463	3.13E-05	7.78E+00	1783	4.50E-05	3.17E+01				1619	4.49E-05	3.27E+01	

GAUSS SEIDEL ($\varepsilon = 1000$)													
Lineal X				Lineal Y				Alternante X-Y				SOR	
N	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	l	$\ u_j^i - u_j\ $	CPU(s)	
4	2	8.89E-04	2.50E-04	24	8.89E-04	1.62E-02	2	8.89E-04	1.25E-04	11	8.89E-04	5.94E-09	
8	3	6.27E-04	4.92E-04	108	6.27E-04	4.77E-04	3	6.27E-04	4.77E-04	27	6.27E-04	3.75E-04	
16	4	3.58E-04	2.50E-04	440	3.58E-04	9.45E-02	4	3.58E-04	1.02E-04	56	3.58E-04	1.50E-02	
32	7	1.89E-04	4.77E-04	1773	1.88E-04	1.56E+00	7	1.89E-04	1.50E-02	126	1.89E-04	9.30E-02	
64	14	9.60E-05	6.35E-02	7111	9.58E-05	2.68E+01	14	9.60E-05	7.79E-02	255	9.60E-05	8.75E-01	
128	36	4.80E-05	5.63E-01				36	4.80E-05	6.56E-01	512	4.82E-05	7.48E+00	

Cuadro 2.9: Métodos iterativos por Bloques para la ecuación modelo $-\varepsilon u_{xx} - u_{yy} = f$ con $f(x, y) = \frac{-3y}{1+x} - \frac{y^3 \varepsilon}{(1+x)}$ con $\varepsilon = 100$ y $\varepsilon = 1000$

Capítulo 3

El Método Multimalla

En el capítulo anterior vimos algunos de los métodos iterativos más clásicos para solucionar EDPs y cómo éstos pueden deteriorarse cuando se tiene un refinamiento del dominio computacional. Esta característica es superada con métodos multimallas los que describiremos en este capítulo. Sin embargo, como se verá, los métodos multimalla usan propiedades que tienen los métodos iterativos clásicos para eliminar las componentes de frecuencias altas del error.

3.1. Efectos de suavización de método iterativos clásicos

Consideremos primero la primera ecuación modelo unidimensional (1.1.3). Luego de su discretización obtenemos un sistema lineal;

$$L_h u_h \equiv h^{-2}[-1 \quad 2 \quad -1]u_h = f_h$$

donde $h = 1/N$ y L_h una matriz de orden $N \times N$. Podemos escoger, por su facilidad, el método de Jacobi para observar una de la características de los métodos iterativos clásicos sobre los efectos de suavización. Descomponiendo la matriz L_h como se hizo en la sección §2.3.1

$$L_h = A_h - B_h \quad \text{donde} \quad A_h = 2h^{-2}I$$

(I : matriz identidad) A_h es la matriz diagonal de la matriz L_h . Escribimos así el sistema $L_h u_h = f_h$ como

$$A_h u_h = B_h u_h + f_h, \quad B_h = A_h - L_h$$

generando las iteraciones

$$\begin{aligned} u_h^{i+1} &= A_h^{-1}(B_h u_h^i + f_h) \\ &= u_h^i - A_h^{-1}(L_h u_h^i - f_h) \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

mostrando que la corrección $u_h^{i+1} - u_h^i$ es obtenida del defecto $L_h u_h^i - f_h$. Volviendo a la iteración de Jacobi ahora amortiguada con parámetro de amortiguamiento Θ

$$u_h^{i+1} = u_h^i - \Theta A_h^{-1}(L_h u_h^i - f_h), \quad \text{con } \Theta \in (0, 1) \quad (3.1.2)$$

con $A_h^{-1} = \frac{1}{2}h^2 I$. Colocando $\omega = \Theta/2$, rescribiremos la ecuación 3.1.2 como

$$u_h^{i+1} = u_h^i - \omega A_h^{-1}(L_h u_h^i - f_h), \quad \text{con } \omega \in (0, 1/2) \quad (3.1.3)$$

La nueva aproximación será obtenida de la presente menos un peso apropiado del defecto.

Para el análisis de convergencia de la iteración(3.1.3) necesitamos la siguiente proposición:

Proposición 3.1.1. *Los vectores propios de L_h son*

$$\psi^k = \sqrt{2h}[\text{sen}(ik\pi h)]_{i=1}^n = \sqrt{2h}[\text{sen}(k\pi h), \text{sen}(2k\pi h), \dots, \text{sen}(nk\pi h)]^T, \quad (3.1.4)$$

para $k = 1, \dots, n$ y los correspondientes valores propios son:

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2(k\pi h/2) \quad (3.1.5a)$$

verificándose que

$$L_h \psi^k = \frac{4}{h^2} \text{sen}^2(k\pi h/2) \psi^k. \quad (3.1.5b)$$

Demostración. Usando $\cos(\alpha) = 1 - 2\text{sen}^2\frac{\alpha}{2}$ y $\text{sen}(\alpha) + \text{sen}(\beta) = 2\text{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$ sólo hay que verificar (3.1.5b)

$$\begin{aligned}
 [L_h\psi^k]_i &= h^{-2}[-1 \ 2 \ -1]\psi_i^k = -\psi_{i-1}^k + 2\psi_i^k - \psi_{i+1}^k \\
 &= h^{-2}\sqrt{2h}\{-\text{sen}((i-1)k\pi h) + 2\text{sen}(ik\pi h) - \text{sen}((i+1)k\pi h)\} \\
 &= h^{-2}\sqrt{2h}\{-2\cos(k\pi h)\text{sen}(ik\pi h) + 2\text{sen}(ik\pi h)\} \\
 &= 2h^{-2}\sqrt{2h}\{(1 - \cos(k\pi h))\text{sen}(ik\pi h)\} \\
 &= 4h^{-2}\sqrt{2h}\{\text{sen}^2(k\pi h/2)\text{sen}(ik\pi h)\} \\
 &= \frac{4}{h^2}\text{sen}^2(k\pi h/2)\psi_i^k
 \end{aligned}$$

□

Puesto que

$$S_h = I - \omega h^2 L_h$$

tiene los mismos vectores propios que L_h , pues

$$\begin{aligned}
 S_h\psi^k &= \psi^k - \omega h^2 L_h\psi^k \\
 &= \psi^k - \omega h^2 \lambda \psi^k = [1 - 4\omega \text{sen}^2(k\pi \frac{h}{2})]\psi^k.
 \end{aligned}$$

Luego

$$\lambda_k(\omega) = \lambda_k(S_h) = 1 - 4\omega \text{sen}^2(k\pi \frac{h}{2}), 1 \leq k \leq n \quad (3.1.6)$$

En la figura (3.1) puede verse los valores propios para $\omega = 1/2, 1/3, 1/4, 1/6$, y se observa que el valor máximo de $\rho(S_h)$ se alcanza en $k = 1$. La elección $\omega = \frac{1}{2}$ produce la iteración de Jacobi usual. La razón de convergencia dado por el radio espectral es

$$\rho(S_h) = \lambda_1\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 2\text{sen}^2\left(\pi \frac{h}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + O(h^4),$$

lo que demuestra que el método converge muy lentamente, más aún $\rho(S_h) \rightarrow 1$ si $h \rightarrow 0$.

Para $\omega \in (0, \frac{1}{2})$ aún es lenta la razón de convergencia. Con $\omega = 1/4$ tenemos:

$$\rho(S_h) = \lambda_1\left(\frac{1}{4}\right) = \cos^2\left(\pi \frac{h}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4}\pi^2 h^2 + O(h^4).$$

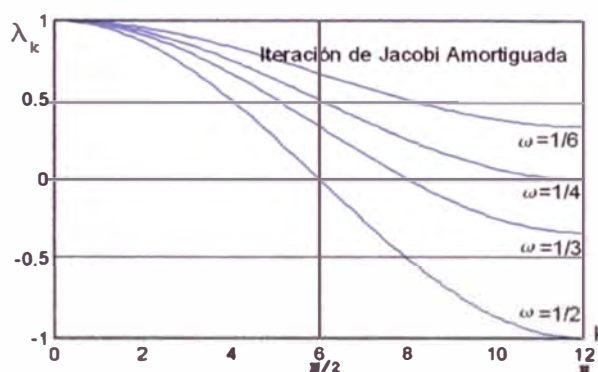


Figura 3.1: Valores Propios de la matriz de iteración S_h

Así la iteración (3.1.3) con $\omega = 1/4$ requiere dos veces más iteraciones que con $\omega = 1/2$.

Como

$$|\lambda_k(\omega)| < 1 \text{ para } 0 < \omega \leq 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

todas las frecuencias k serán amortiguadas si $0 < \omega \leq 1$. Sin embargo con una elección apropiada de ω es posible amortiguar las frecuencias altas, i.e. $(n+1)/2 \leq k \leq n$, de manera menos fuerte. En particular

$$\max_{(n+1)/2 \leq k \leq n} |\lambda_k(\omega)|$$

será mínimo para $\omega = 1/3$, y entonces $|\lambda_k(\omega)| \leq 1/3$ para $(n+1)/2 \leq k \leq n$ (Ver [8, p. 704]). Fijemos $\omega = 1/4$. La figura (3.1) muestra que los componentes ψ^k con frecuencias $k \geq (n+1)/2$ son reducidos al menos por un factor de $\frac{1}{2}$ por iteración. Esto significa que la razón de convergencia de la iteración Jacobi amortiguado restringido al sub espacio

$$\text{span} \{ \psi^k : (n_1 + 1)/2 \leq k \leq n \}$$

de **altas frecuencias** es $\frac{1}{2}$. La iteración es rápidamente convergente con respecto a las altas frecuencias. La convergencia es lenta debido sólo a las bajas frecuencias. Esto puede ser mostrado gráficamente en la figura (3.2).

Un análisis similar se consigue de la siguiente manera. Considerando ahora $\omega = 1/4$ y sea $e^0 = u_h^0 - u_h$ el error en el primera iteración usando el método de Jacobi amortiguado

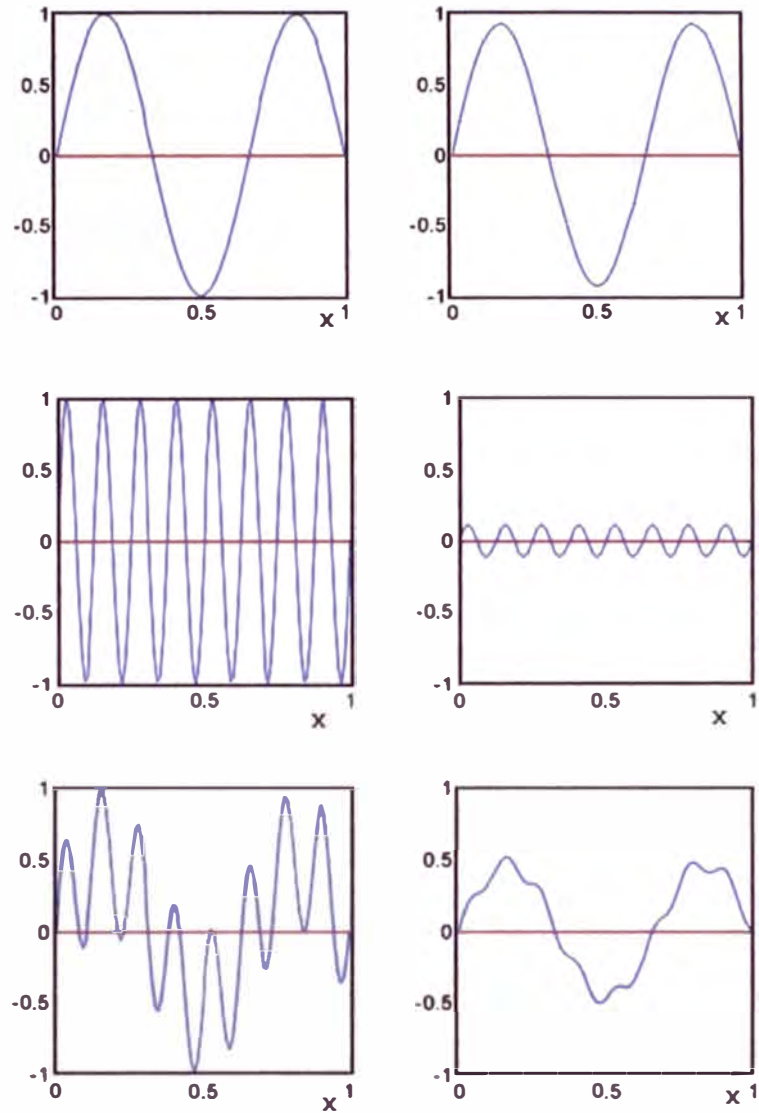


Figura 3.2: Método ω -Jacobi con $\omega = 1/3$ aplicado al problema unidimensional homogéneo $L_h u_h = 0$ (En (1.2.6) la solución es $u_h = 0$) con $N = 64$, los valores iniciales de la iteración son: (a) ψ^3 , (b) ψ^{16} , (c) una combinación de ψ^3 y ψ^{16} . Las figuras muestran la aproximación u_h^i después de una iteración (a la izquierda) y diez iteraciones (a la derecha).

puede ser representado como:

$$e_{(0)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi^k, \alpha_k \in \mathbb{R},$$

y luego de ν iteraciones el error es:

$$e_{(\nu)} = (S_h)^\nu e_{(0)}$$

entonces de (3.1.6)

$$e_{(\nu)} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (S_h)^\nu \psi^k = \sum_{k=1}^n \alpha_k \lambda_k^\nu \psi^k = \sum_{k=1}^n \beta_k \psi^k, \quad \text{con } \beta_k = \alpha_k [\lambda_k(1/4)]^\nu.$$

La consideración anterior muestra que si $1 \leq k \leq \frac{(n+1)}{2}$ (frecuencias bajas)

$$\lambda_k \approx 1 \Rightarrow \lambda_k^\nu \approx 1.$$

Si $k \geq \frac{(n+1)}{2}$ (frecuencias altas)

$$\lambda_k < 1 \Rightarrow \lambda_k^\nu \ll 1,$$

o sea $\beta_k \approx \alpha_k$ para frecuencias bajas, pero $|\beta_k| \ll |\alpha_k|$ para frecuencias altas.

Veamos numéricamente como se comporta la solución para la ecuación estacionaria ($f_h = 0$), tenemos

$$-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1} = 0, 1 \leq i \leq N-1, u_0 = u_N = 0 \quad (3.1.7)$$

y valores iniciales de la iteración consistentes de vectores (modos de Fourier)

$$u_i^0 = \text{sen}(ik\pi/N) \text{ con } 0 \leq i \leq N \text{ y } 1 \leq k \leq N-1$$

donde k se denomina número de onda. Usamos la iteración de Jacobi amortiguada con $\omega = 2/3$ en una malla con $N = 64$, iniciando la iteración con los números de onda $k = 1, 3, 6$ (Ver figura (3.3)) y aplicamos 100 veces la iteración. En cada paso evaluamos la norma máximo del error, que es $-u_h^j$. Aquí vemos la relación entre el número de iteraciones, el error y el número de onda.

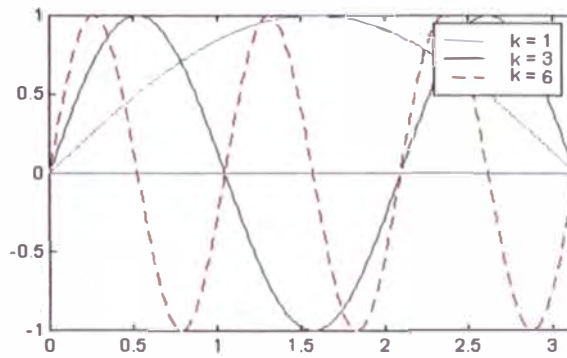


Figura 3.3: Modos de Fourier

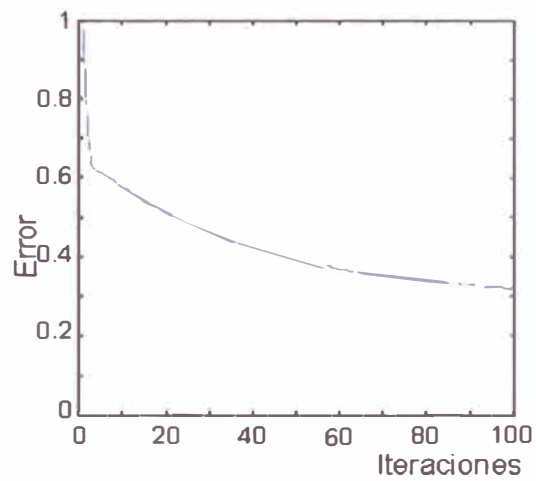


Figura 3.4: Método de Jacobi Amortiguado con $\omega = 2/3$ aplicado al problema unidimensional con $f = 0$ y $N = 64$ y con un valor inicial $u_i^0 = \frac{1}{3} \left[\text{sen}\left(\frac{i\pi}{N}\right) + \text{sen}\left(\frac{6i\pi}{N}\right) + \text{sen}\left(\frac{32i\pi}{N}\right) \right]$. La se muestra la norma máximo del error en 100 iteraciones.

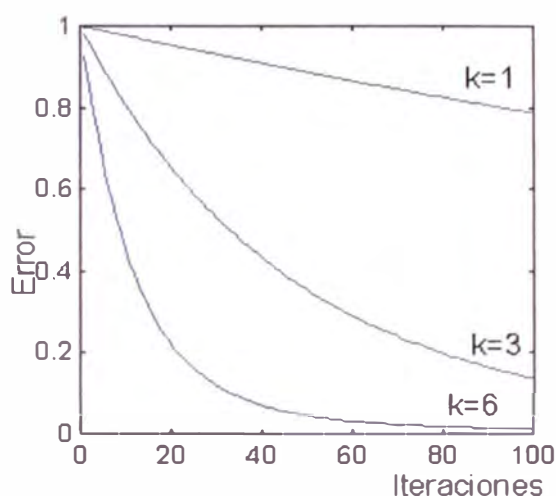


Figura 3.5: Iteración Gauss Seidel aplicado al problema unidimensional

En general los valores iniciales no consisten únicamente de modos simples. La figura (3.4) muestra una situación ligeramente más realista en la cual el valor inicial consiste de tres modos $k = 1, 6, 32$. El error decrece rápidamente con las primeras iteraciones y luego decrece lentamente. Vemos que el decrecimiento inicial corresponde a una rápida eliminación de los modos de altas frecuencias. El decrecimiento lento es debido a la presencia de modos de baja frecuencia.

Ahora denotaremos la iteración por

$$u_h^{i+1} = \mathcal{S}(u_h^i, f_h) = S_h u_h^i + T f_h \quad \text{con } S_h = I - \omega h^2 L_h, T = \omega h^2 I. \quad (3.1.8)$$

La ν -ésima aplicación de \mathcal{S} es simbolizado por \mathcal{S}^ν

$$u_h^{i+\nu} = \mathcal{S}^\nu(u_h^i, f_h). \quad (3.1.9)$$

3.2. Introducción al método de dos mallas

En la sección anterior se muestra una simple iteración ω -Jacobi con $\omega = 1/4$. Este método es eficiente para reducir los componentes de altas frecuencias, pero la convergencia con

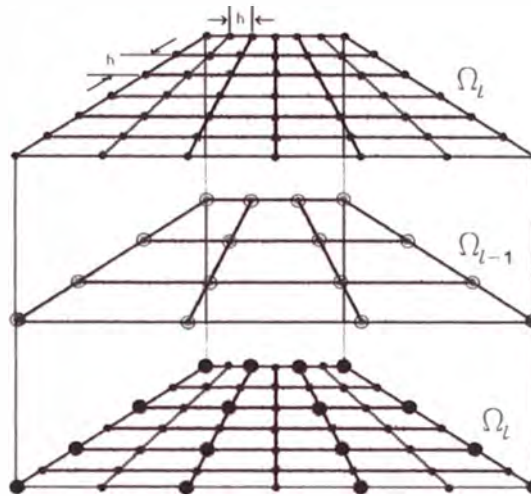


Figura 3.6: Malla Fina Ω_l , Malla gruesa Ω_{l-1} y su superposición (la inferior)

respecto a las bajas frecuencias es limitada. Lo que debería seguir es un segundo proceso con propiedades complementarias, la cual debería reducir las bajas frecuencias.

En adelante consideramos una malla computacional uniforme con grosor de malla

$$h_l = \frac{1}{2^{l+1}} \quad (3.2.1)$$

de manera que ahora se tendrá diferentes mallas computacionales que depende del $l \in \mathbb{N}$ elegido, es decir, podemos escribir:

$$\Omega_l \equiv \Omega_{h_l}. \quad (3.2.2)$$

Se tiene además que $h_l < h_{l-1}$ generando una malla Ω_{l-1} más gruesa que Ω_l como puede verse en la figura (3.6). La elección de h_l en (3.2.1) es un caso particular de como obtener una secuencia de mallas.

Para no recargar la notación y sin lugar a confusión el subíndice h_l en L_{h_l} se cambiará por l , o sea:

$$L_l \equiv L_{h_l}$$

y lo mismo para los demás operadores. Usando esta notación el sistema de ecuaciones

luego de hacer la discretización del problema continuo queda:

$$L_l u_l = f_l. \quad (3.2.3)$$

ea \tilde{u}_l alguna aproximación inicial dada para $u_l = L_l^{-1} f_l$. Luego de aplicar un número pequeño de iteraciones del método descrito por la ecuación (3.1.8) resulta un valor intermedio \bar{u}_l . De la sección previa sabemos que el error $e_l = \bar{u}_l - u_l$ es suave (más suave que $\tilde{u}_l - u_l$). El error e_l puede ser usado como corrección de la solución exacta puesto que

$$u = u_l - e_l.$$

Insertando \bar{u}_l en la ecuación $L_l u_l - f_l = 0$ obtenemos el **defecto**

$$d_l = L_l \bar{u}_l - f_l \quad (3.2.4)$$

de \bar{u}_l , el cual se anula si y sólo si \bar{u}_l es la solución exacta u_l . Tenemos

$$L_l e_l = L_l (\bar{u}_l - u_l) = L_l \bar{u}_l - L_l u_l = L_l \bar{u}_l - f_l = d_l,$$

luego la corrección exacta e_l es la solución de

$$L_l e_l = d_l. \quad (3.2.5)$$

La ecuación (3.2.5) es de la misma forma que la ecuación original (3.2.3) y su solución exacta es tan difícil como aquella. Trataremos de encontrar una aproximación de la solución de la ecuación (3.2.5). Para ello llevaremos este problema a una malla más gruesa en la cual e_l pueda ser mejor representado que u_l puesto que e_l es una función de malla suave. Obsérvese que sólo las funciones suaves pueden ser bien representadas por medio de mallas gruesas, tomando por ejemplo $h_{l-1} = 2h_l$ donde $l-1$ representa una malla más gruesa.

Para aproximar el problema $L_l e_l = d_l$ por una ecuación en la malla gruesa podemos hacer

$$L_{l-1} e_{l-1} = d_{l-1} \quad (3.2.6)$$

donde la matriz L_{l-1} es ya definido por (1.2.6). d_{l-1} depende linealmente sobre el lado derecho de la ecuación d_l . Haciendo una aplicación lineal llamada *restricción* $r : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_{l-1}$ definido por

$$d_{l-1} = rd_l. \tag{3.2.7}$$

La elección más simple de la restricción es la inyección trivial r_{iny} (Ver figura (3.7)) definido por:

$$(r_{iny}d_l)(x) = d_{l-1}(x), \quad \forall x \in \Omega_{l-1} \subset \Omega_l. \tag{3.2.8}$$

A pesar que esta restricción es la más fácil de realizar, tiene algunas desventajas (Ver:



Figura 3.7: Operador de restricción: inyección trivial

§3.3). Veamos la siguiente restricción para el caso unidimensional

$$(rd_l)(x) = \frac{1}{4}[d_l(x - h_l) + 2d_l(x) + d_l(x + h_l)], \quad x \in \Omega_{l-1} \subset \Omega_l \tag{3.2.9a}$$

La matriz correspondiente es

$$r = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & & & & & O \\ & & 1 & 2 & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 2 & 1 \\ & & O & & & & & & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2.9b}$$

Esta es una restricción especial denominada *weighted*.

Habiendo definido d_{l-1} por (3.2.7), obtenemos $e_{l-1} = L_{l-1}^{-1}d_{l-1}$ como la solución exacta de la ec.(3.2.6). Esperamos que e_{l-1} sea una aproximación a la corrección exacta e_l . Sin

fórmula compacta

$$\begin{aligned}
 \bar{u}_l &\mapsto \bar{u}_l - \tilde{e}_l \\
 &= \bar{u}_l - pe_{l-1} \quad (\text{de (3.2.10)}) \\
 &= \bar{u}_l - pL_{l-1}^{-1}d_{l-1} \quad (\text{de (3.2.6)}) \\
 &= \bar{u}_l - pL_{l-1}^{-1}rd_l \quad (\text{de (3.2.7)}) \\
 \bar{u}_l &\mapsto \bar{u}_l - pL_{l-1}^{-1}r(L_l\bar{u}_l - f_l) \quad (\text{de (3.2.4)}) \tag{3.2.13}
 \end{aligned}$$

para el CGC.

Observación 3.2.1. *La corrección en la malla gruesa (3.2.13) no es una iteración convergente*

Demostración. La restricción r tienen un núcleo(kernel) no trivial. Sea $0 \neq w_l \in \ker(r)$ y coloquemos $u_l^0 := L_l^{-1}(f_l + w_l)$. Como $d_l = L_l(u_l^0) - f_l = w_l$ y $d_{l-1} = rd_l = rw_l = 0$, resultando las iteraciones $u_l^j = u_l^0 \rightarrow u_l$. \square

Esto muestra que la ecuación de defecto en la malla gruesa (3.2.6) en general no siempre es una aproximación razonable para la ecuación de defecto original (3.2.5). En particular, aquellos componente de e_l , los que no pueden ser representados sobre la malla gruesa Ω_{l-1} (a los que se les dice "no visibles" sobre la malla $l-1$), pueden no ser reducidos. Puede apreciarse esta observación en la figura (3.8).

Como veremos en la sección §3.2.1 aún cuando ambos componentes pueden individualmente converger o converger lentamente, la combinación de la iteración de suavización y corrección en la malla gruesa es convergente. La combinación es llamada **iteración dos mallas** puesto que dos niveles l y $l-1$ están involucrados (Ver figura (3.6)). Resumiendo tenemos el algoritmo (1).

Como en (3.2.13) la corrección en la malla gruesa (3.2.14ba)-(3.2.14bd) pueden ser condensado a

$$u_l^{j+1} := \bar{u}_l - pL_{l-1}^{-1}r(L_l\bar{u}_l - f_l) \tag{3.2.3}$$

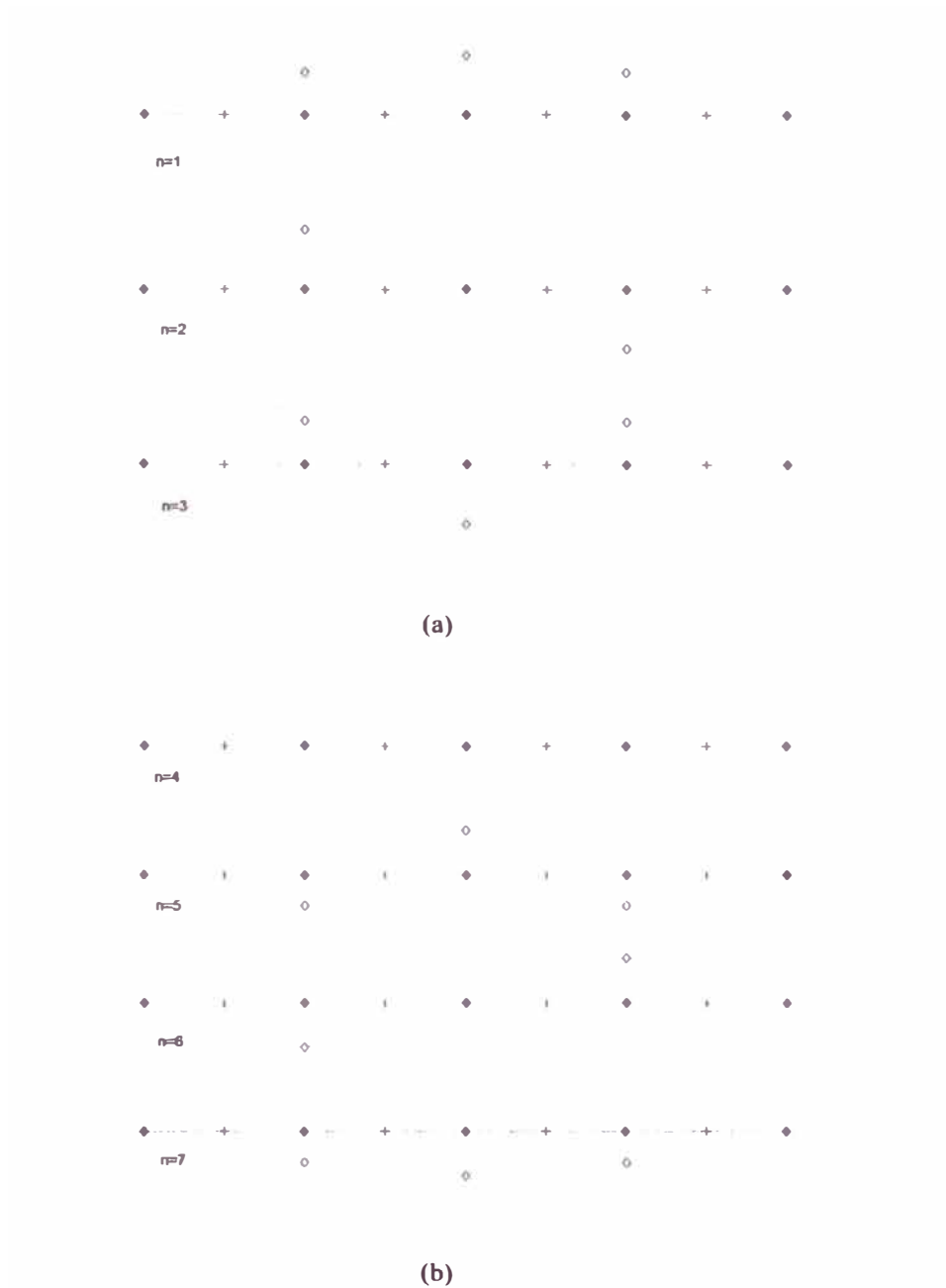


Figura 3.8: Modos de fourier $\text{sen}(n\pi x)$. Componentes de frecuencia bajas ($n=1,2,3$) y altas ($n=4,5,6,7$) para $h_l = \frac{1}{8}$ y $h_{l-1} = \frac{1}{4}$. (a) muestra los componentes los que son visibles sobre Ω_{l-1} (longitud de onda $> 4h_l$); y en (b) se ven los componentes los que son NO visibles sobre Ω_{l-1} (longitud de onda $< 4h_l$)

Algoritmo 1 Iteración dos mallas para solucionar $L_l u_l = f_l$

Sea u_l^j j -ésima iteración dada,
un paso de suavización :

$$\bar{u}_l := \mathcal{J}_l^\nu(u_l^j, f_l) \quad (3.2.14a)$$

(aplicación de ν iteraciones de Jacobi amortiguado para u_l^j),
corrección en la malla gruesa :

$$d_l := L_l \bar{u}_l - f_l \quad (\text{cálculo del defecto}) \quad (3.2.14ba)$$

$$d_{l-1} := r d_l \quad (\text{restricción del defecto}) \quad (3.2.14bb)$$

$$e_{l-1} := L_{l-1}^{-1} d_{l-1} \quad (\text{solución en la malla gruesa}) \quad (3.2.14bc)$$

$$u_l^{j+1} := \bar{u}_l - p e_{l-1} \quad (\text{corrección de } \bar{u}_l) \quad (3.2.14bd)$$

El número iteraciones de suavización ν puede ser escogido independientemente del grosor de malla h_l .

El pseudocódigo de la iteración (3.2.14b) es dado abajo

Algoritmo 2 Iteración $TGM^{(\nu)}$ para solucionar $L_l u_l = f_l$

subroutine $TGM(l, u, f)$, **integer** l ; **array:** u, f

if $l = 0$ **then** $u := L_0^{-1} * f$

else array: e, d

$$u := \mathcal{J}_l^\nu(u, f); \quad (3.2.4a)$$

$$d := r(L_l u - f); \quad (3.2.4b)$$

$$e := L_{l-1}^{-1} d; \quad (3.2.4c)$$

$$u := u - p e \quad (3.2.4d)$$

end TGM

El procedimiento realiza una iteración en el nivel l . El tercer parámetro f es el lado derecho de la ecuación a solucionar (f_l). Los valores de entrada del segundo parámetro u es la j -ésima iteración u_l^j dada, que es sobre escrito por el valor de salida $u = u_l^{j+1}$. Para que

este bien definido el algoritmo se agrega la segunda sentencia para el caso $l = 0$.

En el algoritmo (2), denotado por TGM^v que depende de v , ahora se puede realizar la suavización en dos partes, al inicio hacemos v_1 iteraciones de suavización y v_2 suavizaciones después para poder eliminar las componentes oscilatorias que pueden aparecer luego del proceso de CGC. Resultando el algoritmo (3).

Algoritmo 3 Iteración $TGM^{(v_1, v_2)}$ para solucionar $L_l u_l = f_l$

subroutine $TGM(l, u, f)$, **integer** l ; **array:** u, f
if $l = 0$ **then** $u := L_0^{-1} * f$
else array: e, d

$$u := \mathcal{F}_l^{(v_1)}(u, f); \quad \text{(pre-suavización)} \quad (3.2.5a)$$

$$u := u - p * L_{l-1}^{-1} * r(L_l u - f); \quad (3.2.5b)$$

$$u := \mathcal{F}_l^{(v_2)}(u, f); \quad \text{(post-suavización)} \quad (3.2.5c)$$

end TGM

3.2.1. Convergencia de la iteración del métodos de dos mallas para la ecuación modelo unidimensional

Para nuestro problema modelo de la proposición 3.1.1 tenemos que los vectores propios de L_l y S_l de la iteración

$$u_l^{i+1} = \mathcal{F}_l(u_l^i, f_l) = S_l u_l^i + T_l f_l, \quad S_l = I - \frac{1}{4} h_l^2 L_l \quad (3.2.6)$$

son las funciones malla ψ_k^l , $1 \leq k \leq n_l$, $n_l = N - 1$, $N = 2^l$. Estos vectores forman una base ortonormal de \mathbb{R}^{n_l} puesto que

$$\sum_{i=1}^{n_l} \text{sen}(k\pi i h) \text{sen}(j\pi i h) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } 1 \leq k \neq j \leq n_l, \\ \frac{n_l}{2} & , \text{ si } 1 \leq k = j \leq n_l, \end{cases} \quad (3.2.7)$$

Así la matriz

$$Q_l = [\psi_1^l, \psi_1^{n_l}, \psi_2^l, \psi_1^{n_l-1}, \psi_3^l, \psi_1^{n_l-2}, \dots, \psi_1^{n_l-1}, \psi_1^{n_l+1-n_l-1}, \psi_1^{n_l-1+1}],$$

donde se tiene un ordenamiento especial de los vectores ψ_j^k

$$1, n_l, \dots, k, n_l + 1 - k, \dots, n_{l-1}, n_l + 1 - n_{l-1}, n_{l-1} + 1,$$

es unitaria; es decir $Q_l^{-1} = Q_l^* = Q_l^T$.

Supongamos que la iteración dos mallas es de la siguiente forma:

$$u_j^{i+1} = M_l u_j^i + N_l f_j, \quad \text{donde } M_l = M_l(\nu), \quad \nu \text{ número de relajaciones}$$

donde

Lema 3.2.2. *La matriz de iteración*

$$M_l = M_l(\nu) = (I - \rho L_{l-1}^{-1} r L_l) S_l^\nu, \quad \text{con } S_l^\nu = I - \frac{1}{4} h_l^2 L_l \quad (3.2.8)$$

Demostración. Si aplicamos la iteración para $f_j = 0$ y u_l arbitrario, tenemos $\bar{u}_l = S_l^\nu u_l^0$ con ν en lugar de j en el paso de suavización y en (3.2.3) tenemos:

$$\begin{aligned} u_j^{\nu+1} &:= S_l^\nu u_l^0 - \rho L_{l-1}^{-1} r (L_l S_l^\nu u_l^0) \\ &= (I - \rho L_{l-1}^{-1} r L_l) S_l^\nu u_l^0 \\ &= M_l u_l^0 \end{aligned}$$

□

Luego tenemos:

Proposición 3.2.3. *La matriz de iteración del método dos mallas M_l es semejante a una matriz diagonal por bloques*

$$Q_l^{-1} M_l Q_l = \begin{bmatrix} M_l^{(1)} & & & & \\ & M_l^{(2)} & & & \\ & & \dots & & \\ & & & M_l^{(n_l-1)} & \\ & & & & M_l^{(n_l-1+1)} \end{bmatrix} \quad (3.2.9)$$

donde $M_l^{(k)}$, $1 \leq k \leq n_{l-1}$ son matrices de 2×2 y $M_l^{(n_{l-1}+1)}$ es 1×1 .

Esta proposición será demostrado más adelante.

Puesto que Q_l es unitaria, M_l y $Q_l^{-1} M_l Q_l$ tienen el mismo radio espectral y norma espectral. Por el siguiente lema veremos que tan sólo es suficiente estudiar las submatrices M_l^k .

Lema 3.2.4. Sea M_l dado por (3.2.9), donde Q_l es unitaria. Entonces

$$\rho(M_l) = \max\{\rho(M_l^{(k)}), 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \quad (3.2.10)$$

$$\|M_l\| = \max\{\|M_l^{(k)}\|, 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \quad (3.2.11)$$

Demostración. Tenemos que M_l puede ser transformado en una matriz diagonal en bloques luego λ es un valor propio de M_l si sólo si λ es valor propio de $Q_l^{-1} M_l Q_l = R_l$, o sea tienen el mismo radio espectral. Por otra parte por la forma en bloque de la matriz R_l ésta tiene el siguiente polinomio característico

$$P_R(\lambda) = \prod_{k=1}^{n_{l-1}+1} \text{Det}(M_l^{(k)} - \lambda I_l^{(k)}) = \prod_{k=1}^{n_{l-1}+1} P_k(\lambda) \quad \text{donde } I_l^{(k)} \text{ es matriz identidad}$$

Sea λ raíz de $P_k(\lambda) = 0$, o sea el valor propio de $M_l^{(k)}$. Sea ahora

$$\lambda_k^* = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(M_l^{(k)})\} = \rho(M_l^{(k)})$$

donde $\sigma(M_l^{(k)}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es valor propio de } M_l^{(k)}\}$ entonces

$$\rho(M_l) = \max_{1 \leq k \leq n_{l-1}+1} \{\lambda_k^*\}$$

□

Proposición 3.2.5. El subespacio generado por ψ_l^k y $\psi_l^{n_{l-1}+1-k}$ forma un subespacio invariante bajo la multiplicación de M_l donde $1 \leq k \leq n_{l-1}$

Demostración. Veamos que

$$W = \text{span}\{\psi_l^k, \psi_l^{n_{l-1}+1-k}\} \quad \text{osea si } \psi \in W \Rightarrow M_l \psi \in W.$$

Sea $\psi = \alpha \psi_l^k + \beta \psi_l^{n_{l-1}+1-k}$ entonces

$$\begin{aligned} M_l \psi &= M(\alpha \psi_l^k) + M(\beta \psi_l^{n_{l-1}+1-k}) \\ &= \alpha M \psi_l^k + \beta M \psi_l^{n_{l-1}+1-k} \\ &= \alpha \lambda^k \psi_l^k + \beta \lambda^{n_{l-1}+1-k} \psi_l^{n_{l-1}+1-k} \in W \end{aligned}$$

□

Introducimos el índice k' como una función de k por

$$k' = n_l + 1 - k, \quad \text{para } k = 1, \dots, n_{l-1}.$$

Puesto que $k < k'$, ψ_l^k y $\psi_l^{k'}$ representan componentes de baja y alta frecuencia, respectivamente del subespacio. ψ_{l-1}^k es una función malla del nivel $l-1$ definido por (3.1.4) con h_l y n_l reemplazada por h_{l-1} y n_{l-1} . Note que $\psi_{l-1}^k = \sqrt{2}\psi_l^k$ en los puntos comunes (Ω_{l-1}) , pues sabiendo que

$$h_l = \frac{1}{n_l + 1}, \quad h_{l-1} = 2h_l = \frac{2}{n_l + 1} = \frac{1}{n_{l-1} + 1} \quad (3.2.12)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \psi_{l-1,i}^k &= \sqrt{2h_{l-1}} \operatorname{sen}(ik\pi h_{l-1}) \\ &= \sqrt{4h_l} \operatorname{sen}(ik\pi 2h_l) \\ &= \sqrt{2} \sqrt{2h_l} \operatorname{sen}(2ik\pi h_l) \\ &= \sqrt{2}\psi_{l,2i}^k. \end{aligned}$$

Formalmente $\psi_{l-1}^{k'}$ puede ser definido, pero éste no difiere de $-\psi_{l-1}^k$, pues de (3.1.4)

$$\begin{aligned} \psi_{l-1}^{k'} &= \sqrt{2h_{l-1}} [\operatorname{sen}(ik'\pi h_{l-1})]_{i=1}^{n_{l-1}} \\ &= \sqrt{2h_{l-1}} [\operatorname{sen}(i(n_l + 1 - k)\pi h_{l-1})]_{i=1}^{n_{l-1}} \\ &= \sqrt{2h_{l-1}} [\operatorname{sen}(i\frac{2^{l+1}}{2^l}\pi - ik\pi h_{l-1})]_{i=1}^{n_{l-1}} \text{ pues } n_l = 2^{l+1} - 1, h_{l-1} = \frac{1}{2^l} \\ &= -\sqrt{2h_{l-1}} [\operatorname{sen}(ik\pi h_{l-1})]_{i=1}^{n_{l-1}} = -\psi_{l-1}^k \end{aligned}$$

Más aún si $k = k' = n_{l-1} + 1$ y de 3.2.12 se tiene

$$\psi_{l-1}^k = \sqrt{2h_{l-1}} [\operatorname{sen}(i(n_{l-1} + 1)\pi h_{l-1})]_{i=1}^{n_{l-1}} = \sqrt{2h_l} [\operatorname{sen}(2i\pi)]_{i=1}^{n_{l-1}} = 0.$$

De nuevo la matriz

$$Q_{l-1} = [\psi_{l-1}^1, \psi_{l-1}^2, \psi_{l-1}^3, \dots, \psi_{l-1}^{n_{l-1}-1}, \psi_{l-1}^{n_{l-1}}], \quad \text{es unitaria.}$$

Definimos las matrices transformadas

$$\begin{aligned} \hat{M}_l &= Q_l^{-1} M_l Q_l, & \hat{S}_l &= Q_l^{-1} S_l Q_l, & \hat{L}_l &= Q_l^{-1} L_l Q_l \\ \hat{L}_{l-1} &= Q_{l-1}^{-1} L_{l-1} Q_{l-1}, & \hat{p} &= Q_l^{-1} p Q_{l-1}, & \hat{r} &= Q_{l-1}^{-1} r Q_l. \end{aligned}$$

Lema 3.2.6. Las matrices \hat{S}_l , \hat{L}_l , \hat{p} , \hat{L}_{l-1} , \hat{r} tienen las siguientes estructuras diagonales

$$\hat{S}_l = \begin{bmatrix} S_l^{(1)} & & & & \\ & S_l^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & S_l^{(n_{l-1}+1)} & \\ & & & & \end{bmatrix} \quad \hat{L}_l = \begin{bmatrix} L_l^{(1)} & & & & \\ & L_l^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & L_l^{(n_{l-1}+1)} & \\ & & & & \end{bmatrix}$$

$$\hat{p} = \begin{bmatrix} p^{(1)} & & & & \\ & p^{(2)} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & p^{(n_{l-1})} & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \end{bmatrix} \quad \hat{r} = \begin{bmatrix} r^{(1)} & & & & 0 \\ & r^{(2)} & & & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & r^{(n_{l-1})} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L}_{l-1} = \text{diag} L_{l-1}^{(1)}, \dots, L_{l-1}^{(n_{l-1}+1)}$$

Sea $s_k^2 = \text{sen}^2(\frac{k\pi h_l}{2})$, $c_k^2 = \text{cos}^2(\frac{k\pi h_l}{2})$. Los bloques son definidos por

$$L_l^{(k)} = \begin{cases} 4h_l^{-2} \begin{bmatrix} s_k^2 & 0 \\ 0 & c_k^2 \end{bmatrix}, & 1 \leq k \leq n_{l-1} \\ 2h_l^{-2}, & k = n_{l-1} \end{cases} \quad (3.2.13)$$

$$S_l^{(k)} = I - \frac{1}{4} h_l^2 L_l^{(k)} = \begin{cases} \begin{bmatrix} c_k^2 & 0 \\ 0 & s_k^2 \end{bmatrix}, & 1 \leq k \leq n_{l-1} \\ \frac{1}{2} & k = n_{l-1} + 1 \end{cases} \quad (3.2.14)$$

$$r^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [c_k^2, -s_k^2], \quad p^{(k)} = \sqrt{2} \begin{bmatrix} c_k^2 \\ -s_k^2 \end{bmatrix} \quad (1 \leq k \leq n_{l-1}) \quad (3.2.15)$$

$$L_{l-1}^{(k)} = 4h_l^{-2} s_x^2 c_k^2, \quad (1 \leq k \leq n_{l-1} + 1). \quad (3.2.16)$$

Demostración. De la ec.(3.1.5) se tiene

$$\begin{aligned} L_l Q_l &= L_l [\psi_l^1, \psi_l^{n_l}, \dots, \psi_l^k, \psi_l^{n_l+1-k}, \dots, \psi_l^{n_{l-1}}, \psi_l^{n_l+1-n_{l-1}}, \psi_l^{n_{l-1}+1}] \\ &= [L_l \psi_l^1, L_l \psi_l^{n_l}, \dots, L_l \psi_l^k, L_l \psi_l^{n_l+1-k}, \dots, L_l \psi_l^{n_{l-1}}, L_l \psi_l^{n_l+1-n_{l-1}}, L_l \psi_l^{n_{l-1}+1}] \\ &= [\lambda_l^1 \psi_l^1, \lambda_l^{n_l} \psi_l^{n_l}, \dots, \lambda_l^k \psi_l^k, \lambda_l^{n_l+1-k} \psi_l^{n_l+1-k}, \dots, \lambda_l^{n_l+1-n_{l-1}} \psi_l^{n_l+1-n_{l-1}}, \lambda_l^{n_{l-1}+1} \psi_l^{n_{l-1}+1}] \end{aligned}$$

teniendo en cuenta que ψ_l^k son vectores ortonormales

$$Q_l^* L_l Q_l = \begin{bmatrix} \lambda_l^1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_l^{n_l} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_l^k & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_l^{n_l+1-k} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \lambda_l^{n_l-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_l^{n_l+1-n_l-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_l^{n_l-1+1} \end{bmatrix}$$

Además

$$s_{k'}^2 = \text{sen}^2\left(\frac{k'\pi h_l}{2}\right) = \text{sen}^2\left(\frac{(n_l+1)\pi h_l}{2} - \frac{k\pi h_l}{2}\right) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{k\pi h_l}{2}\right) = \text{eos}^2\left(\frac{k\pi h_l}{2}\right) = c_k^2$$

y $\lambda_l^{n_l-1+1} = \frac{1}{2}$ junto con (3.1.5) se sigue inmediato la ec.(3.2.13). La ec. (3.2.14) sigue como consecuencia de $S_l = I - \frac{1}{4}h_l^2 L_l$.

Para probar la primera parte de (3.2.15) tenemos

$$\begin{aligned} (r\psi_l^k)(x) &= \sqrt{2h_l} \frac{1}{4} [\text{sen}(k\pi(x-h_l)) + 2\text{sen}(k\pi x) + \text{sen}(k\pi(x+h_l))] \\ &= \sqrt{2h_l} \frac{1}{2} [\cos(k\pi h_l) + 1] \text{sen}(k\pi x) = \sqrt{2h_l} c_k^2 \text{sen}(k\pi x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} c_k^2 \psi_{l-1}^k(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in \Omega_{l-1}$, puesto que $\frac{1}{2}(\cos(\xi) + 1) = \cos^2(\xi/2)$. Además considerando $c_{k'}^2 = s_k^2$ y $\psi_{l-1}^{k'} = -\psi_{l-1}^k$ tenemos

$$r\psi_l^k = \frac{1}{\sqrt{2}} c_k^2 \psi_{l-1}^k, \quad r\psi_l^{k'} = -\frac{1}{\sqrt{2}} s_k^2 \psi_{l-1}^k \quad (k' = n_l + 1 - k). \quad (3.2.17)$$

De la ecuación (3.2.17) continuamos de manera análoga a la primera parte de la demostración con lo que tenemos la ec.(3.2.15). La relación $p = 2r^T$ (cf. (3.2.9b),(3.2.11b)) produce $\hat{p} = 2\hat{r}^T$. Por lo que la primera parte de (3.2.15) implica la segunda parte. La última fila de \hat{p} y la última columna de \hat{r} se anulan puesto que $r\psi_l^k = 0$ para $k = n_{l-1} + 1 = h_{l-1}^{-1}$. Para probar que $r\psi_l^k = 0$ usamos (3.2.17) y notamos que $\psi_{l-1}^k = 0$ puesto que

$$\psi_{l-1}^k(jh_{l-1}) = \sqrt{2h_{l-1}} \text{sen}(k\pi jh_{l-1}) = \sqrt{2h_{l-1}} \text{sen}(\pi j) = 0.$$

Los valores propios de L_{l-1} son $\frac{4}{h_{l-1}^2} \text{sen}^2(k\pi h_{l-1}/2)$ (cf.(3.1.5)). La ecuación (3.2.16) sigue de $\frac{4}{h_{l-1}^2} = \frac{1}{h_l^2}$ y

$$\text{sen}^2(k\pi h_{l-1}/2) = \text{sen}^2(k\pi h_l) = \left(2\text{sen}(k\pi \frac{h_l}{2})\text{cos}(k\pi \frac{h_l}{2})\right)^2 = 4c_k^2 s_k^2.$$

□

Ahora demostramos la proposición (3.2.3).

Demostración. Por el lemma 3.2.2 la matriz $\hat{M}_l = Q_l^{-1} M_l Q_l$ es igual a:

$$\begin{aligned} \hat{M}_l &= Q_l^{-1}(I - pL_{l-1}^{-1}rL_l)S_l^v Q_l \\ &= Q_l^{-1}S_l^v Q_l - Q_l^{-1}(pL_{l-1}^{-1}rL_l)S_l^v Q_l \\ &= (I - \hat{p}\hat{L}_{l-1}^{-1}\hat{r}\hat{L}_l)\hat{S}_l^v \text{ de } I = Q_l^{-1}Q_l \end{aligned}$$

del lema 3.2.6 concluimos que \hat{M}_l de (3.2.9) tiene la estructura de bloques en diagonal. Sus bloques son:

$$\hat{M}_l = Q_l^{-1} M_l Q_l = (I - \hat{p}\hat{L}_{l-1}^{-1}\hat{r}\hat{L}_l)\hat{S}_l^v = \begin{bmatrix} M_l^{(1)} & & & \\ & M_l^{(2)} & & \\ & & \dots & \\ & & & M_l^{(n_{l-1}+1)} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} M_l^{(k)} &= (I - p^{(k)}L_{l-1}^{-1(k)}r^{(k)}L_l^{(k)})(S_l^{(k)})^v, \quad 1 \leq k \leq n_{l-1}, \\ M_l^{(n_{l-1}+1)} &= (S_l^{(n_{l-1}+1)})^v. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} M_l^{(k)} &= \left(I_{2 \times 2} - \sqrt{2} \begin{bmatrix} c_k^2 & \\ -s_k^2 & \end{bmatrix} (4h_l^{-2}s_k^2c_k^2)^{-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} [c_k^2, -s_k^2], 4h_l^{-2} \begin{bmatrix} s_k^2 & 0 \\ 0 & c_k^2 \end{bmatrix} \right) \left(\begin{bmatrix} c_k^2 & 0 \\ 0 & s_k^2 \end{bmatrix} \right)^v \\ M_l^{(k)} &= \begin{bmatrix} s_k^2 & c_k^2 \\ s_k^2 & c_k^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_k^2 & 0 \\ 0 & s_k^2 \end{bmatrix}^v \quad (1 \leq k \leq n_{l-1}) \\ M_l^{(n_{l-1}+1)} &= 2^{-v} \end{aligned}$$

Esto último constituye la propuesta de la ec.(3.2.9). □

Observación 3.2.7. La matriz $\text{diag}[c_k^2, s_k^2]^v$ corresponde a la matriz iteración ω Jacobi y muestra que las altas frecuencias $\psi_i^{k'}$ son reducidos por s_k^{2v} , puesto que $0 < s_k^2 < \frac{1}{2}$ y las bajas frecuencias ψ_i^k son disminuidos por un factor de c_k^{2v} ($\frac{1}{2} < c_k^2 < 1$) que se aproximan a

1 para k pequeños. El primer factor $\begin{bmatrix} s_k^2 & c_k^2 \\ s_k^2 & c_k^2 \end{bmatrix}$ viene de la corrección de la malla gruesa.

Se esperaba que la corrección en la malla gruesa tenga la propiedad complementaria, es decir, que las bajas frecuencias ψ_l^k sean reducidas por $s_k^2 < \frac{1}{2}$ y las frecuencias altas ψ_l^k sea decrementadas por $c_k^2 > \frac{1}{2}$.

La convergencia es probada en el siguiente teorema.

Teorema 3.2.8. Sea la iteración dos mallas del nivel l definido por (3.2.14b) con $\nu \geq 1$. El radio espectral de la matriz iteración $M_l = M_l(\nu)$ es acotada uniformemente por

$$\rho(M_l(\nu)) \leq \max\{\xi(1-\xi)^\nu + (1-\xi)\xi^\nu : 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\} = \rho_\nu < 1 \quad (3.2.18)$$

para $\forall l \geq 0$ (la convergencia entonces esta asegurada). La norma de la matriz de iteración M_l es acotada uniformemente por

$$\|M_l(\nu)\| \leq \max\{\sqrt{2[\xi^2(1-\xi)^{2\nu} + (1-\xi)^2\xi^{2\nu}]} : 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\} = \xi_\nu < 1. \quad (3.2.19)$$

Demostración. La matriz $M_l^{(k)} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix}$ con $\alpha = s_k^2 c_k^{2\nu} = s_k^2(1-s_k^2)^\nu$, $\beta = c_k^2 s_k^{2\nu} = (1-s_k^2)s_k^{2\nu}$. Puesto que los valores propios de $M_l^{(k)}$ son obtenidos de

$$(\alpha - \lambda)(\beta - \lambda) - \alpha\beta = 0 \Rightarrow \lambda = \alpha + \beta,$$

luego

$$\rho(M_l^{(k)}) = \alpha + \beta = \rho_\nu(s_k^2) \quad (\alpha, \beta \geq 0) \quad (3.2.20)$$

donde

$$\rho_\nu(\xi) = \xi(1-\xi)^\nu + (1-\xi)\xi^\nu. \quad (3.2.21)$$

Del lema 3.2.4 implica que

$$\begin{aligned} \rho(M_l) &= \max\{\rho(M_l^{(k)}), 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \\ &= \max\{\rho_\nu(s_k^2) : 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \\ &\leq \max\{\rho_\nu(\xi) : 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\} = \rho_\nu < 1 \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Por otra parte del lema (2.2.4) tenemos: $\|M_l^{(k)}\| = \sqrt{\rho(M_l^{(k)} M_l^{(k)})}$

$$\begin{aligned} M_l^{(k)} M_l^{(k)} &= \begin{bmatrix} \alpha & \alpha \\ \beta & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \\ \rho(M_l^{(k)} M_l^{(k)}) &= 2(\alpha^2 + \beta^2) \Rightarrow \|M_l^{(k)}\| = \sqrt{2(\alpha^2 + \beta^2)} \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

entonces

$$\|M_l^{(k)}\| = \zeta_\nu(s_k^2) \quad (3.2.24)$$

donde

$$\zeta_\nu(\xi) = \sqrt{2[\xi^2(1-\xi)^{2\nu} + (1-\xi)^2\xi^{2\nu}]} \quad (3.2.25)$$

De la definición de $\|M_l(\nu)\|$ y del lema 3.2.4 implica que

$$\begin{aligned} \|M_l(\nu)\| &= \sqrt{\rho(M_l M_l^*)} = \max\{\|M_l^{(k)}\|, 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \\ &= \max\{\zeta_\nu(s_k^2) : 1 \leq k \leq n_{l-1} + 1\} \\ &\leq \max\{\zeta_\nu(\xi) : 0 \leq \xi \leq \frac{1}{2}\} = \zeta_\nu < 1 \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

pues $\sin^2(k\pi\frac{h_l}{2}) = s_k^2 \in (0, \frac{1}{2}) \quad \forall k$ en $1 \leq k \leq n_{l-1} + 1$. Como $\rho_\nu(\frac{1}{2}) = \xi_\nu(\frac{1}{2}) = 2^{-\nu}$ las ecuaciones (3.2.20)(3.2.24) se mantienen para todo $k = n_{l-1} + 1$ cuando $M_l^{n_{l-1}+1}$ es $2^{-\nu}$ matriz 1×1 . \square

El comportamiento asintótico de ρ_ν y ξ_ν , cuando $\nu \rightarrow \infty$, se puede determinar suponiendo que el término principal de $\rho_\nu(\xi)$ y $\zeta_\nu(\xi)$ son respectivamente $\xi(1-\xi)^\nu$ y $\sqrt{2\xi(1-\xi)^\nu}$. Su máximo se alcanza en $\xi_0 = 1/(\nu+1)$ entonces

$$\begin{aligned} \rho_\nu(\xi_0) \approx \xi_0(1-\xi_0)^\nu &= \frac{(1-\frac{1}{\nu+1})^\nu}{\nu+1} = \frac{\nu^\nu}{(\nu+1)^{\nu+1}} \\ &= \frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1}\nu} \approx \frac{1}{(1+\frac{1}{\nu})^{\nu+1}\nu} \approx \frac{1}{e\nu} \end{aligned}$$

y

$$\zeta_\nu(\xi_0) \approx \sqrt{\frac{2}{e\nu}}$$

entonces se tiene que:

$$\rho_\nu \approx \frac{c_1}{\nu}, \quad \xi_\nu \approx \frac{c_2}{\nu} \quad (3.2.27)$$

con $c_1 = 1/e \approx 0,3679$, $c_2 = \frac{\sqrt{2}}{e} \approx 0,5203$. (Algunos valores son mostrados en el cuadro 3.1.)

Las cotas ρ_ν y ζ_ν son uniformes con respecto a l , así también uniformes respecto al grosor de malla h_l (Ver el cuadro 3.2). El radio espectral de los métodos iterativos clásicos

ν	1	2	3	4	5	8	9	10
ρ_ν	0.5000	0.2500	0.1250	0.0833	0.0671	0.0433	0.0387	0.0350
ζ_ν	0.5000	0.2500	0.1501	0.1159	0.0947	0.0612	0.0548	0.0496

Cuadro 3.1: Cotas uniformes par el radio y norma espectral de la matriz iteración dos mallas(3.2.8)

h_l	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 8$	$\nu = 9$	$\nu = 10$
1/4	0.2500	0.1250	0.0938	0.0781	0.0664	0.0413	0.0352	0.0301
1/8	0.4268	0.2134	0.1223	0.0781	0.0664	0.0413	0.0352	0.0301
1/16	0.4810	0.2405	0.1248	0.0832	0.0664	0.0417	0.0382	0.0349
1/32	0.4952	0.2476	0.1250	0.0832	0.0668	0.0433	0.0384	0.0349
1/64	0.4988	0.2494	0.1250	0.0832	0.0671	0.0433	0.0387	0.0349
1/128	0.4997	0.2498	0.1250	0.0833	0.0671	0.0433	0.0387	0.0350
1/256	0.4999	0.2500	0.1250	0.0833	0.0671	0.0433	0.0387	0.0350
ρ_ν	0.4999	0.2500	0.1250	0.0833	0.0671	0.0433	0.0387	0.0350

Cuadro 3.2: Radio espectral convergencia de dos mallas $\rho(M_l(\nu))$ como función de h

dependen de h_l y tienden a 1 cuando $h_l \rightarrow 0$. Ejemplo de esto son las iteraciones Jacobi y Gauss-Seidel con $\rho(M_l) = 1 - O(h_l^2)$ y sobrerrelajaciones sucesivos con $\rho(M_l) = 1 - O(h_l)$. En contraste con este comportamiento, la iteración de dos mallas, así también la iteración multimallas definido posteriormente, tienen un radio espectral y número de contracción uniformemente acotada por algún número más pequeño que 1. Como una consecuencia, una aproximación ε se puede obtener por $j = O(\log 1/\varepsilon)$ iteraciones, donde j es independiente de h_l . Claro que los números $\rho(M_l)$ y $\|M_l\|$ dependen de l , pero ellos se aproximan a sus cotas ρ_ν y ζ_ν muy rápidamente(Ver el cuadro 3.2.1)

Esto está justificado en la siguiente observación

Observación 3.2.9. $\rho(M_l(\nu)) = \rho_\nu - O(h_l^2)$, $\|M_l(\nu)\| = \zeta_\nu - O(h_l^2)$

1	1	2	3	4	
h_l	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	cotas
$\rho(M_l(3))$	0.0938	0.1123	0.1248	0.1250	$\rho_3 = \frac{1}{8}$
$\ M_l(3)\ $	0.1288	0.2472	0.1484	0.1501	$\zeta_3=0.501$

Cuadro 3.3: Valores de $\rho(M_l)$ y $\|M_l\|$ para $\nu = 3$

Demostración. Sea $\tau_\nu(x) := \rho_\nu(\sin^2(x\frac{\pi}{2}))$. Luego (3.2.21) toma su máximo en ρ_ν en algún punto $x_0 \in (0, \frac{1}{2})$. Elijamos $x' = kh_l$ ($1 \leq k \leq n_{l-1}$) cercano a x_0 . La ecuación (3.2.22) implica que $\rho(M_l(\nu)) \geq \tau_\nu(x')$. Puesto que $\frac{d}{dx}\tau_\nu(x_0) = 0$, luego

$$\tau_\nu(x') = \tau_\nu(x_0) + O([x_0 - x']^2) = \rho_\nu + O(h_l^2).$$

□

Observación 3.2.10. *La razón ρ_ν y el número de contracción ζ_ν mejora con el incremento de ν . Sin embargo, valores grandes de ν no son aceptables con respecto a la eficiencia, puesto que se incrementa el trabajo computacional con ν . Además, ellos no decrecen exponencialmente ($\approx C\varepsilon^\nu$) sino como C/ν . Una consecuencia de que $\zeta_\nu \approx C/\nu$ es que es recomendable no escoger ν muy grandes. Duplicando ν decrece ζ_ν a $\zeta_{2\nu} \approx \zeta_\nu/2$. Además el trabajo computacional es duplicado (al menos en la versión multimalla). Así la elección de ν es mejor que 2ν si $\zeta_\nu^2 \leq \zeta_\nu/2$ i.e. si $\zeta_\nu \leq \frac{1}{2}$.*

3.2.2. Medida del efecto de suavización

Una de las condiciones para una buena convergencia del método multimalla es la efectiva suavización (\mathcal{J}_l) de la iteración. ¿Es posible medir esta suavización?. Para esto debe tenerse en consideración que éste efecto no se aplica a

$$\bar{u}_l = \mathcal{J}_l(u_l^i, f_l),$$

sino a su error, el cual deberá ser suave. El error es :

$$\bar{e}_l = \bar{u}_l - u_l = \mathcal{J}_l^\nu(u_l^i, f_l) - u_l = S_l^\nu e_l \quad \text{con } e_l = u_l^i - u_l.$$

Podemos definir una primera medida del error de suavización con la siguiente expresión

$$\rho_L(\nu) = \sup_{l \geq 1} \frac{\|L_l S_l^\nu\|}{\|L_l\|} \quad (3.2.28)$$

donde ρ_L es llamado **número de suavización**. Ninguna suavización (e.g $\nu = 0$) es indicado por $\rho_L = 1$. Otra definición de **razón de suavización** es introducido por Brand [1]. En la ecuación modelo unidimensional los vectores propios ψ_l^k son divididos en bajas frecuencias $1 \leq k \leq n_{l-1}$ y altas frecuencias $n_{l-1} + 1 \leq k \leq n_l$. Sea λ_k el k -ésimo valor propio de S_l ,

$$S_l \psi_l^k = \lambda_k \psi_l^k,$$

y defina

$$\rho_B(\nu) = \sup_{l \geq 1} \max (|\lambda_k|^\nu : n_{l-1} + 1 \leq k \leq n_l). \quad (3.2.29)$$

El cuadro 3.2.2 y la figura (3.9) sugiere una relación cercana entre ρ_L , ρ_B y el radio espectral ρ_ν . $\rho_B(\nu)$ no puede aproximarse a ρ_ν para valores grandes de ν , puesto que este decrece exponencialmente, en contraste a $\rho_\nu \approx \frac{1}{e^\nu}$. El principal propósito del número de

ν	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_L(\nu)$	1.0000	0.2500	0.1481	0.1055	0.0819	0.0670	0.0567
$\rho_B(\nu)$	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0625	0.0312	0.0156
ρ_ν	1.0000	0.5000	0.2500	0.1250	0.0833	0.0671	0.0567

Cuadro 3.4: Número de suavización ρ_L y ρ_B comparado con ρ obtenido del cuadro 3.1

suavización es describir la habilidad de eliminar las componentes altas oscilatorias del error en el paso de suavización. Lo que hemos querido mostrar en esta sección es lo complicado

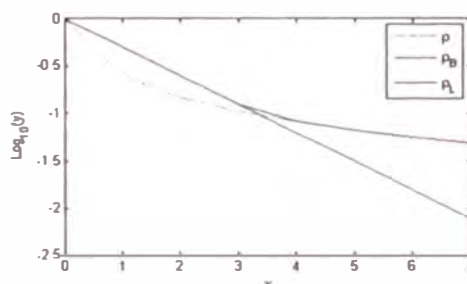


Figura 3.9: Número de suavización ρ_L y ρ_B comparado con ρ

que resulta el análisis de convergencia para la ecuación modelo unidimensional. Sin embargo también hemos visto que para analizar la convergencia de los métodos multimallas es muy conveniente realizar un análisis de suavización de los métodos de relajación. En el capítulo IV se profundizará más sobre este punto.

3.3. Operadores de Restricción y Prolongación

En esta sección discutiremos y formalizamos los operadores de transferencia entre la malla fina y la malla gruesa que ya fueron visto previamente en la sección 3.2.

3.3.1. Malla Fina Ω_l y malla gruesa Ω_{l-1}

El dominio Ω en la cual la ecuación diferencial parcial es solucionado se asumirá que esta dado en un cuadrado unitario $d = 2$. La elección más frecuente de Ω_l y Ω_{l-1} es descrito en la figura (3.10(a)). Ω_l y Ω_{l-1} son mallas cuadradas con grosor de malla h_l y $h_{l-1} = 2h_l$. También podemos asumir que los grosores de malla h^x y h^y en la dirección x e y son diferentes, por ejemplo: $h_l^x = h_{l-1}^x$ y $h_{l-1}^y = 2h_l^y$ (Ver figura (3.10(b))). A este tipo de mallado se le denomina semi-engrosamiento . Ahora, en lugar de duplicar el grosor de malla h_l , también se podría triplicar. Un factor grande h_{l-1}/h_l podría ayudar al trabajo computacional en la malla gruesa, de otra manera más suavizaciones sería necesarios en la malla fina. La figura (3.10(b)) muestra como $h_{l-1}/h_l = \sqrt{2}$ puede ser realizado, Ω_l es malla cuadrada rotada .

Podemos definir una malla computacional como:

$$\Omega_l := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = j \cdot h = (j_1 h_1^x, j_2 h_1^y) : j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha, \alpha = 1, 2\} \quad (3.3.1)$$

con $h_\alpha = 1/N_\alpha$ y para el caso particular de la figura (3.10(b)) se tiene

$$\Omega_{l-1} := \{x \in \mathbb{R}^2 : x = j \cdot h_{l-1} = (j_1 h_{l-1}^x, j_2 h_{l-1}^y) : j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha/2, \alpha = 1, 2\}. \quad (3.3.2)$$

con $h_{l-1}^y = 2h_l^y$. Se puede definir similarmente Ω_l y Ω_{l-1} para los demás casos.

Extendiendo la notación de (2.1.1), el espacio de las funciones malla sobre Ω_l esta dado por \mathcal{U}_l :

$$\mathcal{U}_l = \{u_l : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{U}_{l-1} = \{u_{l-1} : \Omega_{l-1} \rightarrow \mathbb{R}\}. \quad (3.3.3)$$

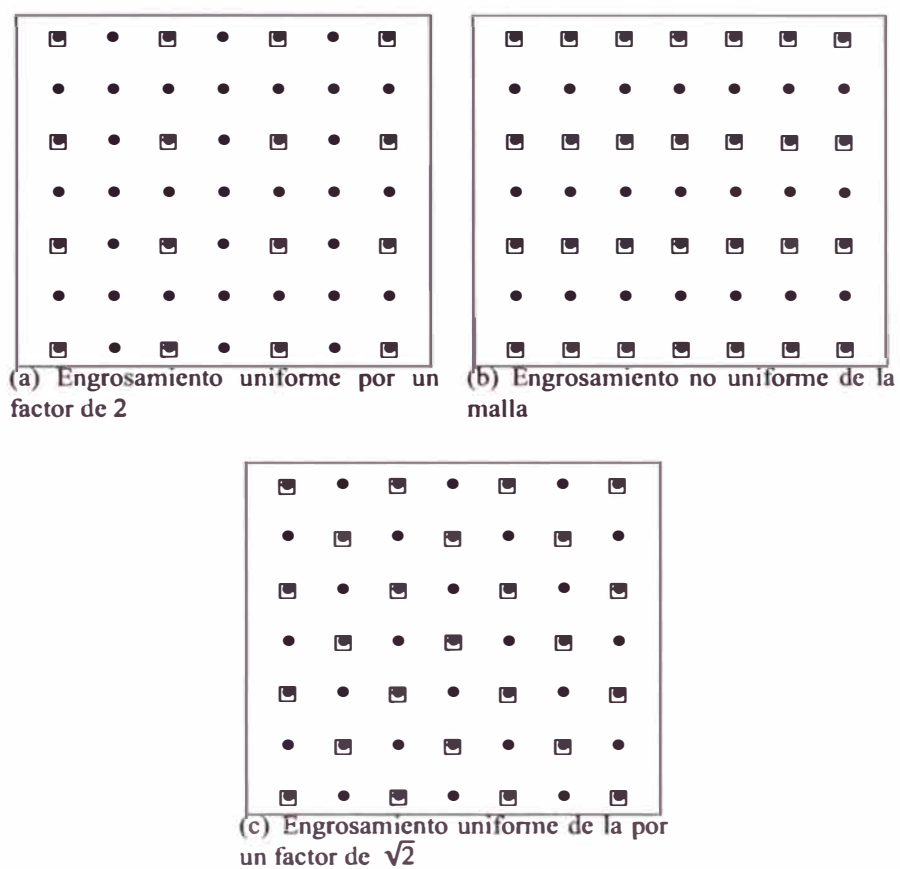


Figura 3.10: Mallas gruesas y finas

Definición 3.3.1. Los operadores de transferencia son denotados por p y r :

$$p : \mathcal{U}_{l-1} \rightarrow \mathcal{U}_l, \quad r : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_{l-1} \quad (3.3.4)$$

p es llamado *prolongación* y r *restricción*.

3.3.2. Notación y Representación Plantilla (Stencil)

Para poder obtener una descripción concisa del los operadores de transferencia usaremos la notación plantilla.

Notación plantilla para operadores de tipo $\mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$

Definición 3.3.2. Sea $L_1 : \mathcal{U}_1 \rightarrow \mathcal{U}_1$ un operador lineal. Entonces, usando la notación plantilla, $L_1 u_1$ se puede denotar por

$$(L_1 u_1)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} L_1(i, j) u_{1, i+j}, \quad \text{con } i \cdot h_1 \in \Omega_1 \quad (3.3.5)$$

con $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ y d es la dimensión del problema. La subscripción $i = (i_1, i_2, \dots, i_d)$ identifica un punto en la malla computacional ($i \in \Omega_1$ será equivalente a decir $i \cdot h_1 \in \Omega_1$).

Definición 3.3.3. El conjunto S_{L_1} definido por

$$S_{L_1} = \{j \in \mathbb{Z}^d : \exists i \in \Omega_1 \text{ con } L_1(i, j) \neq 0\} \quad (3.3.6)$$

es llamado la estructura de L_1 .

Definición 3.3.4. El conjunto de valores de $L_1(i, j)$ con $j \in S_{L_1}$ es llamado plantilla de L_1 en el punto de malla i .

Frecuentemente la palabra 'plantilla' se refiere específicamente a un arreglo de valores denotado por $[L_1]$, en el cual los valores de $L_1(i, j)$ son dados. Por ejemplo, en el caso bidimensional tenemos :

$$[L_1]_i = \begin{bmatrix} L_1(i, -e_1 + e_2) & L_1(i, e_2) & 0 \\ L_1(i, -e_1) & L_1(i, 0) & L_1(i, e_1) \\ 0 & L_1(i, -e_2) & L_1(i, e_1 - e_2) \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

donde $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$.

Ejemplo 3.3.1. Considere la ecuación (1.1.3), con condición de frontera de Dirichlet en $x = 0$ y condición de frontera de Neumann en $x = 1$. La discretización esta dada por la notación plantilla mostrada similarmente como en (1.2.7), es decir

$$[L_1]_i = h^{-2}[-w_i \quad 2 \quad -e_i] \quad (3.3.8)$$

donde

$$w_0 = 0 \quad w_i = 1, \quad i = 1, 2, \dots, N-1; \quad w_N = 2 \\ e_i = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1; \quad e_N = 0.$$

La ecuación (3.3.8) significa que

$$\begin{aligned} L_l(i, -1) &= -w_i/h^2 \\ L_l(i, 0) &= -2/h^2 \\ L_l(i, 1) &= -e_i/h^2. \end{aligned}$$

Si uno no deseara mostrar las modificaciones de las condiciones de frontera, escribimos simplemente

$$[L_l]_i = h^{-2}[-1 \ 2 \ -1]. \quad (3.3.9)$$

Notación plantilla para el operador restricción

Sea $r : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_{l-1}$ un operador restricción. Entonces, usándola notación plantilla, ru_l puede ser representado por

$$(ru_l)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(i, j) u_l 2i+j, \quad i \in \Omega_{l-1} \quad (3.3.10)$$

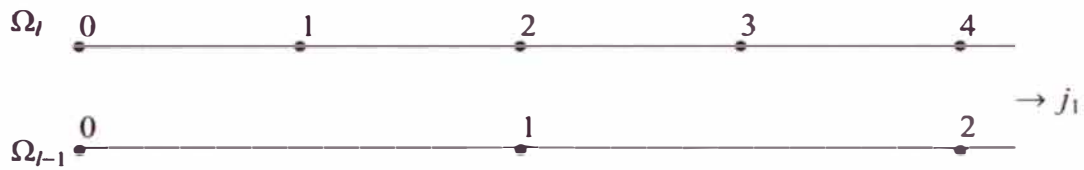


Figura 3.11: Malla Gruesa y malla fina para el caso unidimensional (• puntos de malla)

Ejemplo 3.3.2. Considere la malla tal como es mostrado en la figura (3.11) para $d = 1$. Sea r definido por

$$r u_l i = w_i u_l 2i-1 + \frac{1}{2} u_l 2i + e_i u_l 2i+1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N/2 \quad (3.3.11)$$

con $w_0 = 0$; $w_i = \frac{1}{4}$; $e_i = \frac{1}{4}$, $i \neq N/2$; $e_{N/2} = 0$. Entonces tenemos (según (3.3.10)):

$$r(i, -1) = w_i, \quad r(i, 0) = \frac{1}{2}, \quad r(i, 1) = e_i \quad (3.3.12)$$

o

$$[r]_i = [w_i \ \frac{1}{2} \ e_i] \quad (3.3.13)$$

también puede ser escrito como $[r] = \frac{1}{4}[1 \ 2 \ 1]$.

Relación entre la notación plantilla de un operador y su adjunto

Como una preparación para la introducción de una definición aceptable de la prolongación discutiremos primero la relación existente entre la notación plantilla de un operador y su adjunto. Definimos el producto interno sobre \mathcal{U}_l en la manera usual como

$$\langle u_l, v_l \rangle = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} u_{li} v_{li} \quad (3.3.14)$$

donde u_l y v_l son definidos cero fuera de Ω_l . Definimos el transpuesto L_l^* de $L_l : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_l$ en la manera usual por

$$\langle L_l u_l, v_l \rangle = \langle u_l, L_l^* v_l \rangle, \quad \forall u_l, v_l \in \mathcal{U}_l \quad (3.3.15)$$

Proposición 3.3.3. *Sea $L_l : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_l$ un operador lineal sobre el espacio de las funciones malla \mathcal{U}_l entonces su adjunto cumple*

$$L_l^*(k, i) = L_l(k + i, -i) \quad (3.3.16)$$

Demostración. Definiendo $L_l(i, j) = 0$ para $i \notin \Omega_l$ o $j \notin S_{L_l}$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle L_l u_l, v_l \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} L_l(i, j) u_{l, i+j} \right) v_{li} = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}^d} L_l(i, j) u_{l, i+j} v_{li} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_{lk} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} L_l(i, k-i) v_{li} \right) = \langle u_l, L_l^* v_l \rangle \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

haciendo $k = i + j$

con

$$(L_l^* v_l)_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} L_l(i, k-i) v_{li} \stackrel{k-i=-j}{=} \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} L_l(i+k, -i) v_{l, k+i} = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} L_l^*(k, i) v_{l, k+i} \quad (3.3.18)$$

De la última igualdad se puede obtener la siguiente relación plantilla de L_l y L_l^* (3.3.16). \square

Notación plantilla para el operador prolongación

Si $r : \mathcal{U}_l \rightarrow \mathcal{U}_{l-1}$, entonces $r^* : \mathcal{U}_{l-1} \rightarrow \mathcal{U}_l$ es una prolongación, pues cumple la definición 3.3.1. La notación plantilla de r^* es obtenida de manera similar como L_l^* . Definiendo

$r(i, j) = 0$ para $i \notin \Omega_{l-1}$ o $j \notin S_r$, tenemos:

$$\begin{aligned} \langle ru_l, v_{l-1} \rangle &= \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} r(i, j) u_{l-2i+j} \right) v_{l-1 i} = \sum_{i, k \in \mathbb{Z}^d} r(i, k-2i) u_{l k} v_{l-1 i} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} u_{l k} \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} r(i, k-2i) v_{l-1 i} \right) = \langle u, r^* v_l \rangle \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

con $r^* : \mathcal{U}_{l-1} \rightarrow \mathcal{U}_l$ definido por

$$(r^* v_{l-1})_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} r(i, k-2i) v_{l-1 i} \quad (3.3.20)$$

La ecuación (3.3.20) muestra como definir la representación plantilla de un operador prolongación $p : \mathcal{U}_{l-1} \rightarrow \mathcal{U}_l$:

$$(p v_{l-1})_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} p^*(j, i-2j) v_{l-1 j} \quad (3.3.21)$$

Supongamos que se ha definido una regla para determinar $p v_{l-1}$ para un v_{l-1} dado, entonces p^* puede ser obtenido como sigue. Elegir $v_{l-1} = \delta^k$ como sigue:

$$\delta_k^k = 1; \quad \delta_j^k = 0, \quad j \neq k, \quad (3.3.22)$$

entonces reemplazando en (3.3.21) tenemos

$$(p \delta^k)_i = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} p^*(j, i-2j) \delta_j^k = p^*(k, i-2k),$$

o

$$p^*(k, j) = (p \delta^k)_{2k+j}, \quad k \in \Omega_{l-1}, i \in \Omega_l. \quad (3.3.23)$$

En otras palabras, $[p^*]_k$ es precisamente la imagen de δ^k bajo p .

3.3.3. Interpolación lineal por partes como prolongación

Considere primero la situación de la figura (3.12) y asuma que $(0, 0), (0, 2h), (2h, 0), (2h, 2h) \in \Omega_l \cap \Omega_{l-1}$. Para una función malla en ω_{l-1}, e_{l-1} tenemos que definir $e_l = p e_{l-1}$. En los punto

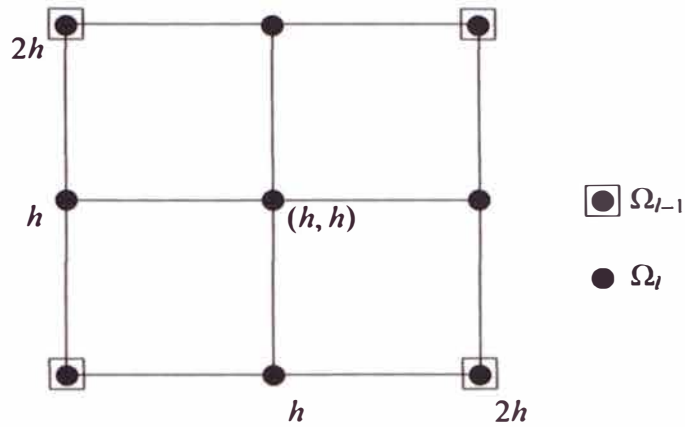


Figura 3.12: Malla gruesa Ω_{l-1} y fina Ω_l

de la malla gruesa los valores permanecen sin cambio.

$$\begin{aligned} e_l(0,0) &= e_{l-1}(0,0) & e_l(0,2h) &= e_{l-1}(0,2h); \\ e_l(2h,0) &= e_{l-1}(2h,0) & e_l(2h,2h) &= e_{l-1}(2h,2h); \end{aligned} \quad (3.3.24a)$$

donde $h = h_l$. Para los puntos $(0, h)$, $(h, 0)$, $(2h, h)$, $(h, 2h)$ yace directamente entre la interpolación lineal de los puntos en la malla gruesa resultado de

$$\begin{aligned} e_l(0, h) &= \frac{1}{2}[e_{l-1}(0, 0) + e_{l-1}(0, 2h)]; \\ e_l(h, 0) &= \frac{1}{2}[e_{l-1}(0, 0) + e_{l-1}(2, 0h)]; \\ e_l(2h, h) &= \frac{1}{2}[e_{l-1}(2h, 0) + e_{l-1}(2h, 2h)]; \\ e_l(0, h) &= \frac{1}{2}[e_{l-1}(0, 2h) + e_{l-1}(2h, 2h)]; \end{aligned} \quad (3.3.24b)$$

Resta definir e_l en el centro (h, h) . Una posibilidad es

$$e_l(h, h) = \frac{1}{4}[e_{l-1}(0, 0) + e_{l-1}(0, 2h) + e_{l-1}(2h, 0) + e_{l-1}(2h, 2h)], \quad (3.3.24ca)$$

otra es

$$e_l(h, h) = \frac{1}{2}[e_{l-1}(0, 0) + e_{l-1}(2h, 2h)]. \quad (3.3.24cb)$$

Análogamente e_l es definido en otra celda $[2jh, 2jh + 2h] \times [2kh, 2kh + 2h]$.

Prolongación de Nueve puntos. La interpolación p por (3.3.24a)- (3.3.24ca) es llamado prolongación de nueve puntos y simbolizado en su forma plantilla

$$[p]_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}. \quad (3.3.4)$$

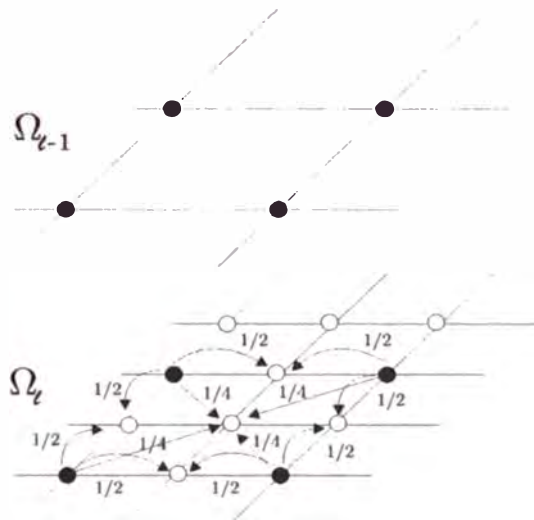


Figura 3.13: Proceso de distribución del operador prolongación de 9 puntos

Prolongación de siete puntos. La interpolación (3.3.24a), (3.3.24b), (3.3.24cb) es llamado prolongación de siete puntos y simbolizado en su forma plantilla.

$$[p]_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.5)$$

Otro operador usado por Stuben, Trottenberg [12, p. 110] es el operador *half weighting (HW)*, i.e.

$$[p]_i = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & 4 & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}. \quad (3.3.6)$$

A pesar que la estrella (3.3.5) es más esparcida que (3.3.4) y que la ec.(3.3.24cb) parece ser más simple que (3.3.24ca), la prolongación de nueve puntos es más fácil de calcular. Por ejemplo, considere la malla $\Omega_{l-1} = \{(jh_{l-1}, kh_{l-1}) \in \bar{\Omega} : 0 \leq j, k \leq 1/h_{l-1}\}$ en $\bar{\Omega} = [0, 1] \times [0, 1]$ y defina Ω_l análogamente con $h_l = h_{l-1}/2$. El siguiente programa interpola la función e asumiendo que esta definida en Ω_{l-1} .

Prolongación de nueve-puntos (3.3.7)

```

for  $x = 0, 1, (2h_l)$  do
  for  $y = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
     $e(x, y) := [e(x, y - h_l) + e(x, y + h_l)]/2;$ 
  end for
end for
for  $y = 0, 1, (h_l)$  do
  for  $x = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
     $e(x, y) := [e(x - h_l, y) + e(x + h_l, y)]/2;$ 
  end for
end for

```

En la prolongación estándar de nueve y siete puntos el número de operaciones es el mismo, sin embargo la primera prolongación requiere sólo dos bucles. La simplificación resulta de considerar la reescritura de la ecuación (3.3.24ca) como:

$$e_l(h, h) = \frac{1}{2}[e_l(0, 0) + e_l(2h, h)] = \frac{1}{2}[e_l(0, 2h) + e_l(h, 0)]. \quad (3.3.9)$$

3.3.4. Restricción

Sea p una de las prolongaciones (transferencia de malla gruesa a fina) de la sección previa. Su autoadjunto p^* es un operador de transferencia de fina a gruesa y puede servir como restricción:

$$r = \sigma p^* \quad (3.3.10)$$

con σ un factor de escalamiento aceptable.

```

for  $x = 0, 1, (2h_l)$  do
  for  $y = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
     $e(x, y) := [e(x, y - h_l) + e(x, y + h_l)]/2;$ 
  end for
end for
for  $y = 0, 1, (2h_l)$  do
  for  $x = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
     $e(x, y) := [e(x - h_l, y) + e(x + h_l, y)]/2;$ 
  end for
end for
for  $y = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
  for  $x = h_l, 1 - h_l, (2h_l)$  do
     $e(x, y) := [e(x - h_l, y - h_l) + e(x + h_l, y + h_l)]/2;$ 
  end for
end for

```

Definición 3.3.5. El escalamiento de r es el valor $\sum_j r(i, j)$.

Si ru_l es una aproximación en la malla gruesa de u , entonces uno debe tener

$$\sum_j r(i, j) = 1.$$

Ahora si utilizamos a r como un operador de transferencia del defecto d_l de la malla fina a la malla gruesa, entonces el valor de $\sum_j r(i, j)$ depende del escalamiento del problema de la malla fina y el problema de la malla gruesa. Uno debe tener en consideración que el problema en la malla gruesa $L_{l-1}u_{l-1} = d_{l-1}$ debe ser consistente con el problema diferencial continuo en la misma manera que en el problema de la malla fina. Esto quiere decir lo siguiente. Sea la ecuación diferencial

$$Lu = f \tag{3.3.11}$$

y la aproximación discreta sobre la malla fina

$$L_l u_l = f_l. \tag{3.3.12}$$

Supongamos que (3.3.12) es multiplicado por un factor de escala que es consistente con

$$h_l^\alpha L u = h_l^\alpha f \quad (3.3.13)$$

con h_l el grosor de malla de la malla fina Ω_l (donde α es el orden de la discretización del problema). Frecuentemente (3.3.12) es multiplicado por un factor de escala para poder deshacerse de la división de h_l . Sea la aproximación del problema continuo (3.3.11) sobre la malla gruesa Ω_{l-1} denotado por

$$L_{l-1} u_{l-1} = r f_l \quad (3.3.14)$$

y sea L_{l-1} una aproximación de $h_{l-1}^\alpha L$. Entonces $r f_l$ debe ser una aproximación de $h_{l-1}^\alpha f$. Puesto que f_l aproxima a f , tenemos una regla para poder hacer el escalamiento. Esquemáticamente esto quiere decir lo siguiente:

$$\begin{array}{rcccl} \Rightarrow h_l^\alpha L u = h_l^\alpha f & \Rightarrow & h_l^\alpha L_l u_l = h_l^\alpha f_l & & \\ Lu = f & & & \downarrow r & \\ \Rightarrow h_{l-1}^\alpha L u = h_{l-1}^\alpha f & \Rightarrow & h_{l-1}^\alpha L_{l-1} u_{l-1} = h_{l-1}^\alpha f_{l-1} & & \end{array}$$

luego $r f_l = \left(\frac{h_{l-1}}{h_l}\right)^\alpha f_{l-1}$. Esto nos lleva a establecer la siguiente regla:

Regla de escalamiento para r

$$\sum_j r(i, j) = \left(\frac{h_{l-1}}{h_l}\right)^\alpha. \quad (3.3.15)$$

Esta regla sólo se aplica si r es aplicado a lado derecho de la ecuación y/o al defecto d .

Una restricción que no puede ser obtenida por (3.3.10) con cualquier prolongación ya vista es la restricción "inyección trivial" r_{iny} :

$$(r_{iny} d_l)(x) = d_l(x) \quad \forall x \in \Omega_{l-1} \subset \Omega_l \quad (3.3.16)$$

aunque respecto al trabajo computacional, la restricción $r = r_{iny}$ es óptima. La evaluación de $r_{iny} d_l$ no necesita operaciones aritméticas; además el defecto $d_l = L u_l - f_l$ no necesita

ser evaluado en $\Omega_l \setminus \Omega_{l-1}$. La última consideración reduce el trabajo computacional en un 75 % en el caso bidimensional con $h_{l-1} = 2h_l$.

Veamos ahora algunos operadores de restricción. El adjunto de la prolongación de nueve puntos (3.3.4) es llamado restricción de nueve puntos. Su símbolo es :

$$[r]_i = \begin{bmatrix} \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix} = \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.3.17)$$

Con

$$r = \begin{bmatrix} \sigma_{-1,1} & \sigma_{0,1} & \sigma_{1,1} \\ \sigma_{-1,0} & \sigma_{0,0} & \sigma_{1,0} \\ \sigma_{-1,-1} & \sigma_{0,-1} & \sigma_{1,-1} \end{bmatrix} \quad (3.3.18)$$

denota la restricción "weighted"

$$(rd)_i(x, y) = \sum_{i,j \in \pm 1}^{\pm 1} \sigma_{ij} d_i(x + ih_l, y + jh_l). \quad (3.3.19)$$

Note que los símbolos de (3.3.4) y (3.3.17) difiere por un factor de 4 (factor de escalamiento), reflejando el hecho que la matriz transpuesta de p

$$p^T = 4p^*.$$

La restricción de siete puntos es el adjunto de la prolongación de siete puntos (3.3.5). Su representación plantilla es

$$[r]_i = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.3.20)$$

3.4. Iteraciones Anidadas: Ciclos V y W

3.4.1. Algoritmo multimalla

En el método de dos mallas no es necesario resolver exactamente la ecuación de defecto en la malla gruesa,

$$L_{l-1}e_{l-1} = d_{l-1}. \quad (3.4.1)$$

En su lugar, sin una pérdida esencial de la velocidad de convergencia, se puede reemplazar e_{l-1} por una aproximación aceptable. Una manera natural de obtener tal aproximación es aplicar también un método de dos mallas a (3.4.1). Claramente, si el factor de convergencia del método de dos mallas es suficientemente pequeño, es suficiente realizar unas pocas iteraciones, por decir γ iteración, para obtener una buena aproximación de la solución (3.4.1). Esta idea puede ser aplicada recursivamente usando mallas cada vez más gruesas (malla $l-1$). Sobre la malla más gruesa cualquier método puede ser usado para solucionar la ecuación, por decir, es suficiente usar métodos directos o procesos de suavización si tienen buenas propiedades de convergencia sobre la malla gruesa.

La versión multimalla de la iteración de dos mallas (3.2.14b) es mostrado en el algoritmo (4). Este realiza un paso de la iteración multimalla cuyo resultado es u_l^1 :

Un paso $u_l^j \mapsto u_l^{j+1}$ de la iteración multimalla es realizado por

$$\begin{aligned} u_l &:= u_l^j; \\ MGM(l, u_l, f_l); \\ u_l^{j+1} &:= u_l; . \end{aligned}$$

La única diferencia de la iteración dos mallas (3.2.4) es la sentencia (3.2.4c), $e := L_{l-1}^{-1}d_l$, es reemplazada por (3.4.2d)-(3.4.2e). La solución exacta es reemplazada por γ iteraciones multi-mallas aplicado al paso inicial con valor $e = 0$. El valor usual de γ es $\gamma = 1$ (V -ciclo) o $\gamma = 2$ (W -ciclo). Este esquema es ilustrado en la figura (3.14) donde:

- solución exacta en el nivel $l = 0$
- pasos de la iteración en cada nivel.

Algoritmo 4 Iteración multimalla TGM^{1,γ_2} para solucionar $L_l u_l = f_l$

subroutine $TGM(l, u_l, f)$; **integer** l ; **array** u_l, f

if $l == 0$ **then**

$$u_l := L_0^{-1} * f \quad (3.4.2a)$$

else

$$u_l := \mathcal{J}_l^{\gamma_1}(u_l, f_l) \quad (3.4.2b)$$

$$d_{l-1} := r * (L_l * u_l - f_l) \quad (3.4.2c)$$

$$e_{l-1} := 0 \quad (3.4.2d)$$

$$\mathbf{for} \quad j = 1, \gamma \quad \mathbf{do} \quad TGM(l-1, e_{l-1}, d_{l-1}) \quad (3.4.2e)$$

$$u_l := u_l - p * e_{l-1} \quad (3.4.2f)$$

$$u_l := \mathcal{J}_l^{\gamma_2}(u_l, f_l) \quad (3.4.2g)$$

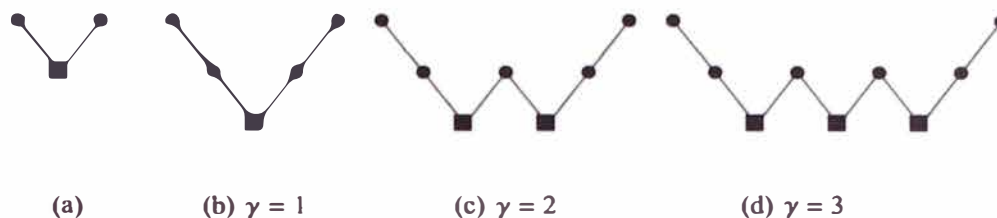
end if

Observación 3.4.1. Cuando $l = 1$ se puede usar $\gamma = 1$ en (3.4.2e) sin cambiar el algoritmo. Pues para cualquier otro $\gamma > 1$ significa que la solución exacta en el nivel cero es realizado γ veces, lo cual es un trabajo computacional innecesario.

3.4.2. Análisis de dos mallas

En esta sección haremos algunas observaciones sobre las propiedades de convergencia del algoritmo (3) dos mallas TGM^{1,γ_2} . Sea h_l la medida del grosor de malla de la malla computacional Ω_l . El propósito de analizar la iteración do malla es mostrar la independencia de h_l respecto a la razón de convergencia. Para el caso unidimensional se mostró en la sección 3.2.1 un análisis de convergencia. En esta sección haremos el análisis de Fourier y ciertas suposiciones de simplificación (coeficientes constante, una combinación especial de suavizadores y condicione de frontera o dominios infinito). Tal análisis puede tambien ser encontrado en Stüben Trotenger [12].

método dos mallas: método tres-mallas:



método cuatro-mallas:

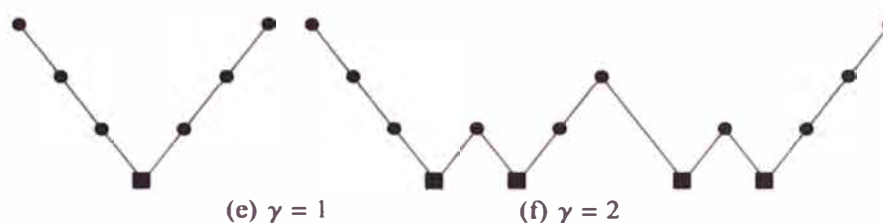


Figura 3.14: Estructura de un ciclo multimalla para diferentes número de malla y diferentes valores de γ

Matriz de iteración de suavización

Sea el método de suavización $\mathcal{S}_l^{\nu_1}(u_l, f_l)$ en el algoritmos dos mallas de la sección 3.2.1 definido para $\nu = 1$ por una aplicación de un método iterativo (2.1.4) :

$$\hat{u}_l := \mathcal{S}_l^1(u_l, f_l) = S_l u_l + A_l^{-1} f_l, \quad S_l = A_l^{-1} B_l, \quad A_l - B_l = L_l \quad (3.4.3)$$

Aplicando esta iteración ν veces tenemos:

$$\tilde{u}_l := \mathcal{S}_l^{\nu}(u_l, f_l) = S_l^{\nu} u_l^0 + T^{(\nu)} f_l, \quad T^{(\nu)} = (S_l^{\nu-1}, S_l^{\nu-1} + \dots + I) A_l^{-1}. \quad (3.4.4)$$

Luego tenemos:

Matriz de iteración de dos mallas

Lema 3.4.2. 1. La matriz iteración de dos mallas es igual a

$$M_l(\nu_1, \nu_2) = S_l^{(\nu_2)} (I - p L_{l-1}^{-1} r L_l) S_l^{(\nu_1)}. \quad (3.4.5)$$

2. Si la solución de $L_1 u_1 = f_1$ es un punto fijo de $\mathcal{J}_1^{(\nu)}$, i.e.

$$\mathcal{J}_1^{(\nu)}(u_1, f_1) = u_1 \text{ para } L_1 u_1 = f_1, \quad \nu \leq 0, \quad (3.4.6)$$

entonces es también un punto fijo de la iteración de dos mallas.

Demostración. Sea C'_1 la matriz de representación de la corrección de la malla gruesa (Ver (3.2.13)) dada por

$$u_1^{m+1} = \varphi_1(u_1^m, f_1) = u_1^m - pL_{1-1}^{-1}r(L_1 u_1^m - f_1) = C'_1 u_1^m + T_1^0 f_1 \quad (3.4.7)$$

donde $C'_1 = I - pL_{1-1}^{-1}rL_1$ y $T_1^0 = pL_{1-1}^{-1}r$. Luego sea el método iterativo de suavización dado por

$$u_1^{m+1} = \varphi_2(u_1^m, f_1) = S_1 u_1^m + T_1 f_1$$

aplicando ν veces tenemos de la proposición 2.1.2

$$u_1^{m+1} = \mathcal{J}_1^{(\nu)}(u_1^m, f_1) = S^{(\nu)} u_1^m + T^{(\nu)} f_1$$

donde $S_1^{(\nu)} = S_1^\nu$ y $T_1^{(\nu)} = \sum_{k=0}^{\nu-1} S_1^k T_1$. Luego si se aplica una corrección de malla gruesa después de haber aplicado ν_1 veces la iteración de suavización tendría:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 &= \varphi_1(\mathcal{J}_1^{(\nu_1)}(u_1^m, f_1), f_1) \\ &= C'_1 (\mathcal{J}_1^{(\nu_1)}(u_1^m, f_1)) + T_1^0 f_1 \\ &= C'_1 (S^{\nu_1} u_1^m + T^{(\nu_1)} f_1) + T_1^0 f_1 \\ &= C'_1 S^{\nu_1} u_1^m + T_1^{(\nu_1)} f_1 \quad \text{donde } T_1^{(\nu_1)} = C'_1 T_1^{\nu_1} + T_1^0. \end{aligned}$$

De manera análoga aplicamos un proceso de suavización luego de haber hecho la corrección anterior, i.e.,

$$\begin{aligned} u_1^{m+1} &= \mathcal{J}_1^{(\nu_2)}(\tilde{u}_1, f_1) \\ &= S^{\nu_2} C'_1 S^{\nu_1} u_1^m + T_1^{(\nu_1, \nu_2)} f_1 \quad \text{donde } T_1^{(\nu_1, \nu_2)} = S^{\nu_2} T_1^{\nu_1} + T_1^{(\nu_2)} \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

de ello prosigue la parte primera del lema. Para la segunda parte se tuvo que $u_1 = L_1^{-1} f_1$ es un punto fijo de la iteración de suavización, o sea $u_1 = \mathcal{J}_1^{(\nu_1)}(u_1, f_1)$. Luego en (3.4.7) tenemos

$$\varphi_1(\mathcal{J}_1^{(\nu_1)}(u_1, f_1), f_1) = \varphi_1(u_1, f_1) = u_1 - pL_{1-1}^{-1}r(L_1 u_1 - f_1) = u_1 + 0 = u_1$$

□

La siguiente observación nos permite considerar sólo el caso cuando $\nu_2 = 0$, es decir, ninguna post suavización; para probar que la razón de convergencia del método multimalla es independiente del grosor de malla.

Observación 3.4.3. Si $S_l^{(v)} = S_l^v$, el radio espectral $\rho(M_l(v_1, v_2)) < 1$ depende sólo de $v := v_1 + v_2$. En particular $\rho(M_l(v_1, v_2)) = \rho(M_l(v))$ es cierto, donde

$$M_l(v) = M_l(v, 0). \quad (3.4.9)$$

La convergencia del método dos mallas es gobernado por el **número contracción** $\|M_l\|_{\mathcal{U}_l}$ donde \mathcal{U}_l es un espacio vectorial de funciones malla u_l y $\|\cdot\|_{\mathcal{U}_l}$ su norma. Adicionalmente introducimos el espacio vectorial \mathcal{F}_l que consiste de las funciones malla f_l equipada con la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{F}_l}$. El caso estándar será $\mathcal{U}_l = \mathcal{F}_l$, $\|\cdot\|_{\mathcal{U}} = \|\cdot\|_{\mathcal{F}} = \|\cdot\|_0 :=$ norma euclidiana. La norma asociadas a las matrices $\|\cdot\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{U}}$. etc. son definidos en (§2.2).

Podemos escribir (3.4.5) como

$$M_l(v) = (L_l^{-1} - \rho L_{l-1}^{-1} r) (L_l S_l^v) \quad (3.4.10)$$

y concluimos que

$$\|M_l(v)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \|L_l^{-1} - \rho L_{l-1}^{-1} r\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{F}} \|L_l S_l^v\|_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{U}}. \quad (3.4.11)$$

El estudio de los dos factores de (3.4.11) produce la siguiente definición [7, §6.2 §6.3].

3.4.3. Propiedades de aproximación y suavización

El segundo factor $\|L_l S_l^{(v)}\|_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{U}}$ en (3.4.11) ya fue discutido en (§3.2.2). Este describe cuan efectivo $\mathcal{F}_l^{(v)}$ es para suavizar. El otro factor $\|L_l^{-1} - \rho L_{l-1}^{-1} r\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{F}}$ describe que tan buena es la solución en la malla gruesa para aproximar a la solución u_l . Así las dos partes esenciales de la iteración dos mallas denominadas el paso de suavización y la corrección de la malla gruesa pueden ser analizados separadamente.

Definición 3.4.1. Propiedad de suavización. Sean $\|\cdot\|_{\mathcal{U}}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ dados. Decimos que S_l tiene la propiedad de aproximación si existe una constante C_S y una función $\eta(v)$ independiente de h tal que

$$\|L_l S_l^v\|_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{U}} \leq C_S h^{-2m} \eta(v) \text{ con } \eta(v) \rightarrow 0, \text{ cuando } v \rightarrow \infty. \quad (3.4.12)$$

donde $2m$ es el orden de la ecuación diferencial parcial a solucionar.

Definición 3.4.2. (Propiedad de aproximación). La propiedad de aproximación se da cuando existe una constante C_A independiente de h tal que

$$\|L_l^{-1} - pL_{l-1}^{-1}r\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{F}} \leq C_A h^{2m} \quad (3.4.13)$$

donde $2m$ es el orden de la ecuación diferencial parcial a solucionar.

Si estas dos propiedades son ciertas, la razón de convergencia del método dos mallas es independiente de h , pues:

Teorema 3.4.4. (La razón de convergencia h -independiente del método dos mallas). Supongamos que las propiedades de suavización (3.4.12) y de aproximación (3.4.13) son ciertas. Entonces existe un número $\bar{\nu}$ independiente de h tal que

$$\|M_l(\nu)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq C_S C_A \eta(\nu) < 1, \quad \forall \nu \geq \bar{\nu} \quad (3.4.14)$$

Demostración. De (3.4.11) tenemos que

$$\|M_l(\nu)\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \|L_l^{-1} - pL_{l-1}^{-1}r\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{F}} \|L_l S_l^\nu\|_{\mathcal{F} \leftarrow \mathcal{U}} \leq C_S C_A \eta(\nu).$$

De acuerdo a (3.4.12) tenemos un $\bar{\nu}$ independiente de h por lo que (3.4.14) es válido. \square

Se sigue también del teorema

Teorema 3.4.5. La propiedad de suavización implica que el método de suavización es un método iterativo convergente.

Demostración.

$$\|S_l^\nu\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \|L_l^{-1}\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \|L_l S_l^\nu\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} \leq \|L_l^{-1}\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} C_S h^{-2m} \eta(\nu)$$

luego como $\eta(\nu) \rightarrow 0$, cuando $\nu \rightarrow \infty$, entonces

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S_l^\nu\|_{\mathcal{U} \leftarrow \mathcal{U}} = 0$$

\square

Factor de suavización

En la sección (§3.2.2) habíamos definido:

Definición 3.4.3. El número de suavización del método de suavización dado por

$$u_l = S_l^v u_l + T(v) f_l$$

es definido por

$$\rho_{L_l}(v) = \frac{\|L_l S_l^v\|}{\|L_l\|} \quad (3.4.15)$$

Proposición 3.4.6. Si se cumple la propiedad de suavización, entonces

$$\rho_{L_l}(v) \leq \frac{\eta(v)}{\eta(0)} \quad (3.4.16)$$

Demostración. Tenemos en (3.4.12) con $v = 0$:

$$\|L_l\| \leq C_S h^{-2m} \eta(0).$$

Tomando $\|L_l\| = C_S h^{-2m} \eta(0)$ tenemos:

$$\rho_{L_l}(v) = \frac{\|L_l S_l^v\|}{\|L_l\|} \leq \frac{C_S h^{-2m} \eta(v)}{\|L_l\|} = \frac{\|L_l\| \eta^{-1}(0)}{\|L_l\|} \eta(v) = \frac{\eta(v)}{\eta(0)}.$$

□

De esta forma tenemos que $\rho_{L_l} < 1$ para v suficientemente grande, independiente de h .

3.4.4. Convergencia de la iteración Multimalla

Observación 3.4.7. La solución discreta $L_l^{-1} f_l$ es un punto fijo de la iteración multimallas (3.4.2), suponiendo que se cumple (3.4.6).

Matriz de iteración multimalla

Teorema 3.4.8. La matriz de iteración $M_l'(v_1, v_2)$ del algoritmo multimalla (3.4.2) es definido por

$$M_l'(v_1, v_2) = M_l(v_1, v_2) \quad \text{para } l = 1 \quad (3.4.17a)$$

$$M_l'(v_1, v_2) = M_l(v_1, v_2) + S_l^{(v_2)} p [M_{l-1}'(v_1, v_2)]^T L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^{(v_1)} \quad (3.4.17b)$$

donde M_l es la matriz de iteración del método de dos mallas (Lema 3.2.2), es decir

$$M_l(v_1, v_2) = S_l^{(v_2)} (I - p L_{l-1}^{-1} r L_l) S_l^{(v_1)}. \quad (3.4.18)$$

Demostración. Para $l = 1$ los algoritmos de dos mallas y multimallas son idénticos luego ambas matrices de iteración son los mismo, entonces es válido (3.4.17a). Procedemos ahora a demostrar por inducción. Supongamos ahora que (3.4.17b) es cierto para $l - 1$ (en lugar de l). Sea ahora C'_l la matriz de corrección en malla gruesa (3.4.2c)-(3.4.2f) dada en el algoritmo multimalla. Luego tenemos:

$$M'_l = M'_l(v_1, v_2) = S_l^{(v_2)} C'_l S_l^{(v_1)}$$

Es decir se adiciona a la matriz de corrección las matrices de representación de los procesos de pre-suavización y post-suavización. Para determinar ahora C'_l consideraremos, sin perder la generalidad, $f_l = 0$ y sea $u_l \in \mathcal{U}_l$ una función malla arbitraria. Luego el paso de (3.4.2c) resulta ser

$$d_{l-1} = rL_l u_l.$$

En (3.4.2e) y iteraciones

$$v_{l-1}^1, v_{l-1}^2, \dots, v_{l-1}^\gamma$$

son realizadas iniciándose en $v_{l-1}^0 = 0$. Puesto que la iteración multimalla en el nivel $l - 1$ puede ser descrito por (similar a (2.1.5))

$$v_{l-1}^{m+1} = M'_{l-1} v_{l-1}^m + N'_{l-1} d_{l-1}, \quad M'_{l-1} = M'_l(v_1, v_2).$$

De la proposición (2.1.2) tenemos

$$\begin{aligned} v_{l-1}^\gamma &= (M'_{l-1})^\gamma v_{l-1}^0 + (N'_{l-1})^{(\gamma)} d_{l-1}, \\ &\text{con } (N'_{l-1})^{(\gamma)} = \sum_{k=0}^{\gamma-1} (M'_{l-1})^k N'_{l-1} \\ &= 0 + \sum_{k=0}^{\gamma-1} (M'_{l-1})^k N'_{l-1} d_{l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\gamma-1} (M'_{l-1})^k N'_{l-1} rL_l u_l \end{aligned}$$

De la observación 3.4.7 tenemos:

$$N'_{l-1} = (1 - M'_{l-1})L_{l-1}^{-1}.$$

Usando la siguiente igualdad

$$\sum_{k=0}^{\gamma-1} \zeta^k = \frac{1 - \zeta^\gamma}{1 - \zeta} \quad \text{ó} \quad \sum_{k=0}^{\gamma-1} \zeta^k (1 - \zeta) = 1 - \zeta^\gamma$$

obtenemos

$$\begin{aligned} v_{l-1}^\gamma &= \left[\sum_{k=0}^{\gamma-1} (M'_{l-1})^k (1 - M'_{l-1}) \right] L_{l-1}^{-1} r L_l u_l \\ &= [I - (M'_{l-1})^\gamma] L_{l-1}^{-1} r L_l u_l \end{aligned}$$

Así la matriz de corrección en la malla gruesa (3.4.2f) resulta en

$$\begin{aligned} C'_l u_l &= u_l - p v_{l-1}^\gamma \\ &= u_l - p [I - (M'_{l-1})^\gamma] L_{l-1}^{-1} r L_l u_l \\ &= [I - p [I - (M'_{l-1})^\gamma] L_{l-1}^{-1} r L_l] u_l \end{aligned}$$

entonces tenemos que

$$C'_l = I - p [I - (M'_{l-1})^\gamma] L_{l-1}^{-1} r L_l = I - p L_{l-1}^{-1} r L_l + p (M'_{l-1})^\gamma L_{l-1}^{-1} r L_l$$

y

$$M'_l = S_l^{(\nu_2)} C'_l S_l^{(\nu_1)} = S_l^{(\nu_2)} [I - p L_{l-1}^{-1} r L_l] S_l^{(\nu_1)} + S_l^{(\nu_2)} p (M'_{l-1})^\gamma L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^{(\nu_1)}$$

El primer término de la expresión es la matriz de iteración $M_l(\nu_1, \nu_2)$. Por lo tanto la ecuación (3.4.17b) es demostrado por inducción. \square

Razón de convergencia

Lema 3.4.9. *Si se cumple la propiedad de suavización y aproximación; y si además existe una constante c_p independiente de l tal que*

$$\|p u_{l-1}\| \geq c_p^{-1} \|u_{l-1}\| \quad \forall u_{l-1} \quad (3.4.19)$$

entonces

$$\|L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^{\nu_1}\| \leq c_p (1 + \|M_l(0, \nu_1)\|) \quad (3.4.20)$$

Demostración. Se probó en el teorema 3.4.5 que si S_l tiene la propiedad de suavización, entonces el método de suavización es convergente. Podemos escoger luego ν tal que

$$\|S_l^\nu\| < 1. \quad (3.4.21)$$

Además

$$\|L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^\nu\| \leq c_p \|p L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^\nu\|$$

y

$$\begin{aligned} p L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^\nu &= S_l^\nu - S_l^\nu + p L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^\nu \\ &= S_l^\nu - (L_l^{-1} L_l) S_l^\nu + p L_{l-1}^{-1} r L_l S_l^\nu \\ &= S_l^\nu - (L_l - p L_{l-1}^{-1} r) L_l S_l^\nu \\ &= S_l^\nu - M_l(0, \nu). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}\|L_{l-1}^{-1}rL_lS_l^\gamma\| &\leq c_p\|S_l^\gamma - M_l(0, \nu)\| \\ &\leq c_p(\|S_l^\gamma\| + \|M_l(0, \nu)\|) \\ &\leq c_p(1 + \|M_l(0, \nu)\|)\end{aligned}$$

□

Lema 3.4.10. *Sea las siguientes desigualdades recursivas*

$$\zeta_0 \leq \zeta \quad (3.4.22a)$$

$$\zeta_l \leq \zeta + c\zeta_{l-1}^\gamma, \quad l \geq 1 \quad (3.4.22b)$$

y supongamos que $\gamma C > 1$. Si

$$\gamma \geq 2, \quad \zeta \leq \bar{\zeta} = \frac{\gamma-1}{\gamma}(\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \quad (3.4.23)$$

entonces cualquier solución de (3.4.22) es acotada por

$$\zeta_k \leq z < 1 \quad (3.4.24)$$

donde z es relacionada a ζ por

$$\zeta = z - Cz^\gamma \quad (3.4.25)$$

y z satisface

$$z \leq \frac{\gamma}{\gamma-1}\zeta \quad (3.4.26)$$

Demostración. Tenemos que $\zeta_l \leq z_k$, con z_k definido por

$$z_1 = \zeta, \quad z_k = \zeta + Cz_{k-1}^\gamma \quad (3.4.27)$$

Si $\gamma \geq 2$ entonces $C > 0$, luego la sucesión $\{z_k\}$ es monótonamente creciente, de forma que estará acotado por un punto fijo. Este punto fijo se halla de la solución de (3.4.25), luego si tomamos la menor solución de esta se garantiza que $z_k < z$. Considere ahora

$$f(z) = z - Cz^\gamma.$$

El máximo de $f(z)$ se alcanza cuando $0 = f'(z) = 1 - Cz^{-1+\gamma} \gamma$, o sea cuando

$$z = z^* = (\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} < 1$$

por suposición de lema, además

$$\begin{aligned}
 f(z^*) &= (\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} - C \left((\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \right)^\gamma \\
 &= (\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \left(1 - C \left((\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \right)^{\gamma-1} \right) \\
 &= (\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \left(1 - C(\gamma C)^{-1} \right) = (\gamma C)^{-1/(\gamma-1)} \frac{\gamma-1}{\gamma} = \bar{\zeta}
 \end{aligned}$$

Para $\zeta \leq \bar{\zeta}$ y por la monotonía de z_k la (3.4.25) tiene una solución $z \leq z^* < 1$. Tenemos

$$z^\gamma < z \Rightarrow Cz^\gamma < Cz < \frac{z}{\gamma}$$

luego

$$\zeta = z - Cz^\gamma \geq z - \frac{1}{\gamma}z = \frac{\gamma-1}{\gamma}z.$$

lo que da (3.4.26). □

Teorema 3.4.11. (Razón de convergencia de métodos multimallas). *Supongamos que se cumple las propiedades de suavización y aproximación (3.4.12) y (3.4.13); y además $\gamma \geq 2$. Sea p_l tal que satisface (3.4.19) y*

$$\|pu_{k-1}\| \leq C_p \|u_{k-1}\|, \quad C_p \text{ independiente de } k. \quad (3.4.28)$$

Dado $\bar{\zeta} \in (0, 1)$ entonces existe un número $\bar{\nu}$ independiente de l tal que la matriz de iteración M_l definido por el teorema 3.4.8 satisface

$$\|M_l(\nu, 0)\| \leq \bar{\zeta} < 1 \quad (3.4.29)$$

si $\nu \geq \bar{\nu}$ con l el número de nivel de la malla fina.

Demostración. M_k^r es definido por la recursión (3.4.17). De acuerdo al Teorema 3.4.4 tenemos

$$\|M_k(\nu, 0)\| \leq C_S C_A \eta(\nu) \quad (3.4.30)$$

Escogemos $\zeta \in (0, \bar{\zeta})$ con $\bar{\zeta}$ satisfaciendo (3.4.23) y un número $\bar{\nu}$ tal que

$$C_S C_A \eta(\nu) < \zeta, \quad \nu \geq \bar{\nu}$$

Y que (3.4.21) es satisfecho para $\nu \geq \bar{\nu}$. De (3.4.17), (3.4.21), (3.4.28) y el Lema 3.4.9 se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned}
 \zeta_k &= \|M_k^r(0, \nu)\| \\
 &= \|M_k(0, \nu) + p [M_{k-1}^r(0, \nu)]^\gamma L_{k-1}^{-1} r L_k S_k^\gamma\| \\
 &\leq \|M_k(0, \nu)\| + \|p\| \| [M_{k-1}^r(0, \nu)]^\gamma \| \|L_{k-1}^{-1} r L_k S_k^\gamma\| \\
 &\leq \zeta + C_p \zeta_{k-1}^\gamma c_p (1 + \|M_l(0, \nu)\|) \\
 &\leq \zeta + C_p \zeta_{k-1}^\gamma c_p (1 + \zeta) \\
 &\leq \zeta + 2C_p \zeta_{k-1}^\gamma c_p = \zeta + C \zeta_{k-1}^\gamma
 \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

con $C = 2C_p c_p$. La recursión (3.4.31) que fue analizado en el Lema 3.4.10. Luego se tiene que

$$\zeta_k \leq \frac{\gamma}{\gamma - 1} \zeta < 1, \quad k = 1, 2, \dots, l. \quad (3.4.32)$$

Si es necesario, se incrementa ν de tal forma que se tenga $\zeta < [(\gamma - 1)/\gamma] \bar{\zeta}$. \square

Observación 3.4.12. ■ *Este teorema sólo trabaja para $\gamma \geq 2$, o sea que el ciclo V no es incluido.*

3.4.5. Trabajo computacional

La razón de convergencia será comparada con el trabajo computacional por iteración. Para estimar el trabajo computacional de la iteración multimalla (3.4.2) asumamos los siguientes costos computacionales de las partes básicas del algoritmo:

sentencias	número de operaciones aritméticas
$u_l := \mathcal{P}_l^{\nu_l}(u_l, f_l)$	$\leq C_S n_l$ para todo $l \geq 1$ (3.4.33a)
$d_{l-1} := r * (L_l * u_l - f_l)$	$\leq C_D n_l$ para todo $l \geq 1$ (3.4.33b)
$u_l := u_l - p * e_{l-1}$	$\leq C_C n_l$ para todo $l \geq 1$ (3.4.33c)
$u_0 := L_0^{-1}$	$\leq C_0$ (3.4.33d)

Recordemos que n_l es el número de variables y ecuaciones en el nivel l . Las cotas son proporcionales a n_l puesto que las matrices L_l son esparcidas (uniformemente). En (3.4.33d) asumiremos C_0 constante, puesto que corresponde al grosor de malla más grande h_0 (así también n_0) es fijo cuando l se incrementa. La constante

$$C_H := \sup_{l>1} \frac{n_{l-1}}{n_l} \quad (3.4.34)$$

toma el valor de:

Proposición 3.4.13.

$$C_H := 2^{-d} \quad (3.4.35a)$$

para una malla d dimensional $\Omega_l \subset \mathbb{R}^d$ con grosor de malla $h_{l-1} = 2h_l$. Una excepción es el caso de la figura (3.10(c)) ($h_{l-1} = \sqrt{2}h_l$, $d = 2$, donde)

$$C_H := \frac{1}{2} \quad (3.4.35b)$$

Demostración. Sea h_l el grosor de malla de la malla computacional d dimensional Ω_l donde hay N_l puntos de partición en el eje x_i , $i = 1, \dots, d$, con $h_l = \frac{1}{N_l+1}$ ($N_l = \frac{1}{h_l} - 1$). Entonces habrán N_l^d variables en el nivel l .

$$\frac{n_{l-1}}{n_l} = \frac{N_{l-1}^d}{N_l^d} = \left(\frac{\frac{1}{h_{l-1}} - 1}{\frac{1}{h_l} - 1} \right)^d = \left(\frac{(1 - h_{l-1})h_l}{(1 - h_l)h_{l-1}} \right)^d \quad (3.4.36)$$

de la relación (3.4.36) tenemos para $h_{l-1} = 2h_l$

$$\sup_{l>1} \frac{n_{l-1}}{n_l} = \sup_{l>1} \left(\frac{1 - 2h_l}{1 - h_l} \frac{1}{2} \right)^d = \left(\frac{1}{2} \right)^d$$

pues $h_l \rightarrow 0$ para l grande. Del mismo modo podemos usar (3.4.36) con $h_{l-1} = \sqrt{2}h_l$, $d = 2$ entonces tenemos

$$\sup_{l>1} \frac{n_{l-1}}{n_l} = \sup_{l>1} \left(\frac{1 - \sqrt{2}h_l}{1 - h_l} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

□

La siguiente proposición establece que el trabajo computacional de una iteración multimalla es también proporcional a n_l .

Proposición 3.4.14. *Suponga que*

$$\theta := \gamma C_H < 1 \quad (\gamma \text{ de (3.4.2e).}) \quad (3.4.37)$$

Entonces un paso de la iteración multimalla requiere $C_l n_l$ operaciones, donde

$$\begin{aligned} C_l &\leq \frac{\gamma C_S + C_D + C_C}{1 - \theta} + \theta^l \left[\frac{C_0}{\gamma C_H^l n_l} - \frac{\gamma C_S + C_D + C_C}{1 - \theta} \right] \\ &< \frac{\gamma C_S + C_D + C_C}{1 - \theta} + \theta^{l-1} C'_0 \text{ con } C'_0 = C_0 / n_l. \end{aligned} \quad (3.4.38)$$

Demostración. Una iteración en l niveles requiere γ^{l-k} iteraciones en el nivel k ($1 \leq k \leq l$) (Observe la figura (3.14)). Luego en el nivel

$$\begin{array}{ll}
k = l & \text{tenemos } (\nu C_S + C_D + C_C)n_l \text{ operaciones} \\
k = l - 1 & \text{tenemos } (\nu C_S + C_D + C_C)\gamma n_l \text{ operaciones} \\
\vdots & \vdots \\
k = 1 & \text{tenemos } (\nu C_S + C_D + C_C)\gamma^{l-1} n_l \text{ operaciones.}
\end{array}$$

De acuerdo con la observación (3.4.1) γ^{l-1} sistemas son solucionados en el nivel 0. Así el número de operaciones es acotado por

$$\begin{aligned}
C_1 n_l &\leq (\nu C_S + C_D + C_C)(n_l + \gamma n_{l-1} + \cdots + \gamma^{l-1} n_1) + \gamma^{l-1} C_0 \\
&= (\nu C_S + C_D + C_C)n_l \left(1 + \frac{\theta}{C_H} \frac{n_{l-1}}{n_l} + \cdots + \frac{\theta^{l-1}}{C_H^{l-1}} \frac{n_1}{n_{l-1}}\right) + \gamma^{l-1} C_0
\end{aligned}$$

de (3.4.37) $\theta^l = \gamma^l C_H^l \Rightarrow \theta^l = \gamma^{l-1} \gamma C_H^l$ y sabiendo que

$$\frac{n_{l-1}}{n_l} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2(2^{l+1} - 1)}\right)^d \leq \left(\frac{1}{2}\right)^d$$

tenemos de la proposición 3.4.14 la siguiente desigualdad

$$C_1 n_l \leq (\nu C_S + C_D + C_C)n_l(1 + \theta + \cdots + \theta^{l-1}) + \theta^l C_0 / (\gamma C_H^l). \quad (3.4.39)$$

y como

$$\frac{1 - \theta^l}{1 - \theta} = 1 + \theta + \cdots + \theta^{l-1}$$

tenemos la prueba de la primera parte de (3.4.38). La segunda parte sigue de $C_H^{l-1} n_l \geq n_l$ y $\frac{\nu C_S + C_D + C_C}{1 - \theta} > 0$. \square

En el caso estándar la condición $\theta < 1$ es satisfecho:

Corolario 3.4.15. Si $h_{l-1} = 2h_l$ la condición (3.4.37) se mantiene para todo $\gamma \leq 2^d - 1$.

Demostración. Si $h_{l-1} = 2h_l$ entonces de la proposición 3.4.14 $C_H = 2^{-d}$ entonces si $\gamma \leq 2^d - 1$.

$$\theta = \gamma C_H = \gamma 2^{-d} \leq (2^d - 1)2^{-d} = 1 - \frac{1}{2^d} < 1$$

\square

En el caso bidimensional ($d = 2$) ($\theta = \frac{1}{4}$) la desigualdad (3.4.38) es

$$C_l < \begin{cases} \frac{4}{3}[\nu C_S + C_D + C_C] + (\frac{1}{4})^{l-1} C_0' & \text{para } \gamma = 1, \\ 2[\nu C_S + C_D + C_C] + (\frac{1}{2})^{l-1} C_0' & \text{para } \gamma = 2. \end{cases} \quad (3.4.40)$$

Sin embargo, el W -ciclo (i.e. $\gamma = 2$) en el caso $d = 1$ o el V -ciclo ($\gamma = 1$) en el caso de (3.4.35b) implica $\theta = \gamma C_H = 1$. Entonces el trabajo no es más proporcional a n_l .

Proposición 3.4.16. Si $\theta = 1$ el número de operaciones es acotado por

$$[(\nu C_S + C_D + C_C)l + C'_0]n_l \quad (3.4.41)$$

donde $C'_0 = C_0/n_l$.

Demostración. Sigue de la desigualdad (3.4.39) □

La estimación (3.4.38) y (3.4.40) muestra que ciclo W ($\gamma = 2$) toma cerca del 50 % más trabajo que ciclo V ($\gamma = 1$). Note que el número $\nu C_S + C_D + C_C$ corresponde al trabajo de la iteración dos mallas cuando la solución de la ecuación en la malla gruesa no es contada. La prueba de la Proposición 3.4.14 muestra que el trabajo realizado en la malla gruesa $l-1, l-2, \dots$ es rápidamente decreciente, sin embargo se incrementa un número de γ^{l-k} ecuaciones auxiliares en el nivel k a solucionar.

3.5. Condición Inicial Óptima (Full Multimalla)

Dado algún proceso iterativo, la elección natural del inicio es una aproximación aceptable u_l^0 y luego realizar varios pasos de la iteración.

3.5.1. Algoritmo

Para la iteración multimalla el programa debería ser

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l &:= u_l^0 & (3.5.1) \\ \text{for } j &:= 1 : (1) : i \text{ do } MGM(l, \tilde{u}, f_j); \end{aligned}$$

El error de \tilde{u}_l satisface

$$\|\tilde{u}_l - u_l\|_{\mathcal{X}} \leq \zeta^i \|u_l^0 - u_l\|_{\mathcal{X}} \quad (3.5.2a)$$

donde ζ es el número de contracción de la iteración con respecto a $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$. En particular, la elección más simple es $u_l^0 = 0$ produciendo una estimación de error relativo:

$$\frac{\|\tilde{u}_l - u_l\|_{\mathcal{X}}}{\|u_l\|_{\mathcal{X}}} \leq \zeta^i \quad (\text{si } u_l^0 = 0). \quad (3.5.2b)$$

Para obtener un error (relativo) fijo ε , uno necesita $j \geq \log(\varepsilon)/\log(\zeta) = O([\log(\varepsilon)])$ iteraciones. Frecuentemente, ε no es dado por anticipado y uno tiene que elegir un aceptable valor. Usualmente, se toma ε más pequeño que el error de la discretización (i.e. $\|u_j - u\|$ con u solución del problema continuo). Desafortunadamente, el tamaño cuantitativo del error de discretización no es conocido a priori, sino sólo su comportamiento asintótico $O(h_j^\kappa)$ (κ : **orden de consistencia**). Por lo anterior tomamos $\varepsilon = O(h_j^\kappa)$, entonces tenemos que

$$i = O(\log(h_j))$$

iteraciones son requeridos para obtener una aproximación \tilde{u}_j con un error del tamaño del orden de discretización. El correspondiente número de operaciones es

$$O(n_j[\log(h_j)]) = O(h_j^{-d}[\log(h_j)]).$$

La iteración anidada descrita posteriormente (llamada **full multimalla**) tiene varias ventajas:

- (i) A pesar que a priori no se conoce el error de discretización ε_{disc} la iteración anidada produce una aproximación \tilde{u}_j con un error $O(\varepsilon_{disc})$.
- (ii) La iteración anidada es más barata que la simple aproximación (3.5.1). Una aproximación con un error $O(\varepsilon_{disc})$ es calculado por $O(n_j)$ operaciones.
- (iii) Además de \tilde{u} , las soluciones en las mallas gruesa $\tilde{u}_{j-1}, \tilde{u}_{j-2}, \dots$ son también aproximaciones y están dispuestas para uso.

Método	\tilde{u}_j	Operaciones para un error $O(\varepsilon_{disc})$
<i>MGM</i>	$O(\varepsilon_{disc})$ si $i = O(\log(h_j))$	$O(n_j[\log(h_j)])$
<i>FMG</i>	$O(\varepsilon_{disc})$	$O(n_j)$

Cuadro 3.5: Comparación entre iteraciones multimalla y full-multimalla.

La iteración anidada puede ser combinada con cualquier proceso iterativo y frecuentemente junto con sucesivas iteraciones de sobre relajación. La idea es obtener un buen punto de inicio u_j^0 por medio de iteraciones sobre la malla gruesa.

Algoritmo 5 Iteración anidada

$$\tilde{u}_0 := L_0^{-1} * f_0; \quad (3.5.3a)$$

for $k = 1 : (1) : l$ **do**

$$\mathbf{begin} \tilde{u}_k := \tilde{p}\tilde{u}_{k-1}; \quad (3.5.3b)$$

$$\mathbf{for} j = 1 : (1) : i \mathbf{do} \quad MGM(k, \tilde{u}_k, f_k) \quad (3.5.3c)$$

end

En cada nivel $k = 1, 2, \dots, l$; i iteraciones son realizadas. El valor inicial es obtenido de la aproximación en la malla gruesa \tilde{u}_{l-1} , \tilde{p} denota alguna interpolación. Desde el punto de vista de la programación la elección óptima es $\tilde{p} = p$ (p del algoritmo multimalla), puesto que ninguna subrutina adicional es necesaria. Sin embargo interpolaciones \tilde{p} de órdenes más altos que p deberán ser tomados en consideración. Una apropiada elección de i será discutido en la siguientes sección. El mismo valor i , puede ser escogido para todos los niveles, puesto que los números de contracción de la iteración multimalla son acotados independientemente del nivel $0 \leq k \leq l$.

Finalmente mencionamos tres modificaciones del algoritmo (5). La solución exacta de $L_0\tilde{u}_0 = f_0$ en (3.5.3a) no es necesaria. Podemos reemplazarlo por

$$u_0 \approx L_0^{-1} f_0 \quad (3.5.4a)$$

tal que $\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{\mathcal{H}}$ sea suficientemente pequeño. La segunda generalización concierne a la interpolación \tilde{p} en (3.5.3b). Algunas veces, simples interpolaciones de grandes órdenes pueden ser encontrados empleando las ecuaciones diferenciales. Damos un ejemplo para la ecuación de Poisson. De \tilde{u}_{l-1} en el punto de la malla gruesa (x, y) , $(x + 2h, y)$, $(x, y + 2h)$, $(x + 2h, y + 2h)$ se puede evaluar el valor en $(x + h, y + h)$ por medio de

$$\begin{aligned} \tilde{u}_l(x + h, y + h) &:= \frac{1}{4}[\tilde{u}_{l-1}(x, y) + \tilde{u}_{l-1}(x + 2h_l, y) + \tilde{u}_{l-1}(x, y + 2h_l) \\ &\quad + \tilde{u}_{l-1}(x + 2h_l, y + 2h_l)] + \frac{1}{2}h_l^2 f(x + h_l, y + h_l) \end{aligned}$$

de acuerdo a la fórmula de cinco puntos diagonal

$$\frac{1}{2h_l^2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tilde{u}_l = f_l.$$

Los valores de \tilde{u}_l en los puntos restantes de la malla pueden ser evaluados por la fórmula usual de cinco puntos. Esta interpolación, que puede ser escrita como

$$\tilde{u}_k := \tilde{p}(\tilde{u}_{k-1}, f_k) \quad (3.5.4b)$$

con \tilde{p} lineal en (\tilde{u}_{k-1}, f_k) es de orden 4. Tercero, podemos decir que el número i en (3.5.3c) puede ser diferente para diferentes niveles: $i = i_k$. Puesto que mucho del trabajo computacional es realizado en el nivel l , debe tener ventaja la elección de $i_l < i_{l-1} = i_{l-2} = \dots = i_1$ (cf.(§3.5.3))

3.5.2. Análisis de la iteración anidada

La iteración anidada (3.5.3) requiere la especificación del número de iteraciones i . El siguiente análisis sugiere como elegir i . Veremos que frecuentemente es suficiente que $i = 1$.

Preliminares

Sea la ecuación diferencial a solucionar denotado por

$$L u = f \quad (3.5.5)$$

y su discretización sobre la malla Ω_k denotado por

$$L_k u_k = f_k \quad (3.5.6)$$

Definición 3.5.1. *El error de discretización es la diferencia entre la solución discreta $u_k = L_k^{-1} f_k$ y la solución continua u*

$$\varepsilon_k = R_k u - u_k \quad (3.5.7)$$

donde R_k es alguna restricción sobre la malla Ω_k . La trivial sería

$$R_k u_i = u(x_i).$$

Definición 3.5.2. Sea ζ el orden del error de la discretización de L_k , $k = 0, 1, 2, \dots, l$, o sea,

$$\|R_k u - u_k\| = O(h_k^\zeta), \quad k = 0, 1, 2, \dots, l. \quad (3.5.8)$$

donde $\|\cdot\|$ es una norma la cual no necesariamente es la Euclidiana.

Definición 3.5.3. Dado algún operador de restricción \tilde{r} , El error de interpolación de \tilde{p} es definido por $\tilde{p}\tilde{r}u_k - u_k$. El orden de interpolación de \tilde{p} es un número τ tal que

$$\|\tilde{p}\tilde{r}u_k - u_k\| = O(h_k^\tau)$$

Definición 3.5.4. La diferencia entre u_k y $u_{k-1} = L_l^{-1} f_k$ es frecuentemente llamado el error de discretización relativo (error de u_{k-1} respecto de u_k), o sea, $\|\tilde{p}u_{k-1} - u_k\|$.

La siguiente proposición será demostrada posteriormente

Proposición 3.5.1. Dados ζ y τ los órdenes de discretización y de interpolación, respectivamente, y si $\|\tilde{p}\| = O(1)$ entonces el error de discretización relativo puede ser estimado por:

$$C(k) = \|\tilde{p}u_{k-1} - u_k\| \leq C_1 h_k^\kappa \quad (1 \leq k \leq l) \quad (3.5.9)$$

donde $\kappa = \min\{\zeta, \tau\}$.

Proposición 3.5.2. Sean z y C dos constantes, y sean C_k y δ_k dos sucesiones tales que

$$\begin{aligned} \delta_1 &\leq zC_1 \\ \delta_k &\leq z(C_k + C\delta_{k-1}) \end{aligned}$$

entonces si $k = 1, 2, \dots, l$, entonces δ_l esta acotada por

$$\delta_l \leq z \sum_{k=1}^l C_k (zC)^{l-k}$$

Demostración. Por inducción. Para $l = 1$ obvio. Para $l \mapsto l + 1$.

$$\begin{aligned} \delta_{l+1} &\leq z(C_{l+1} + C\delta_l) \\ &\leq z\left(C_{l+1} + C\left(z \sum_{k=1}^l C_k (zC)^{l-k}\right)\right) \\ &= z\left(C_{l+1} + \sum_{k=1}^l C_k (zC)^{l+1-k}\right) \\ &= z \sum_{k=1}^{l+1} C_k (zC)^{l+1-k} \end{aligned}$$

□

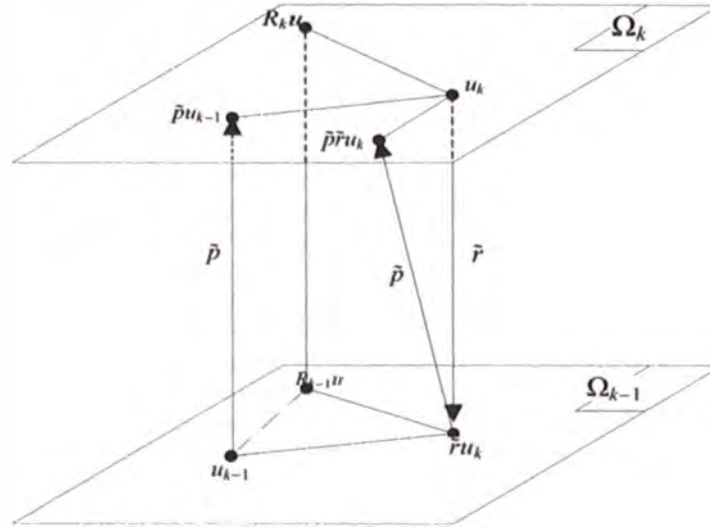


Figura 3.15: Operadores inter mallas

Sea ζ_k el número de contracción de la iteración multimalla empleado en el nivel k :

$$\|u_k^{j+1} - u_k\|_{\mathcal{U}} \leq \zeta_k \|u_k^j - u_k\|_{\mathcal{U}}. \quad (3.5.10)$$

Como señalamos antes, el número de contracción ζ_k son uniformemente acotados por algún $\zeta < 1$. Sea

$$\zeta := \max_{1 \leq k \leq l} \zeta_k \quad (3.5.11)$$

donde l es el nivel máximo de (3.5.3). Para indicar los niveles involucrados debemos escribir $\tilde{p}_{k \leftarrow k+1}$, pero nos limitaremos a escribirlo como \tilde{p} . Sea

$$C_{20} := \max_{1 \leq k \leq l} \|\tilde{p}\| = \max_{1 \leq k \leq l} \|\tilde{p}_{k \leftarrow k+1}\|. \quad (3.5.12a)$$

Junto con

$$C_{21} := \max_{1 \leq k \leq l} (h_{k-1}/h_k)^{\kappa} \quad (3.5.12b)$$

definimos la constante

$$C_2 := C_{20} C_{21}. \quad (3.5.12c)$$

Observación 3.5.3. Se tiene que $C_{20} = 1$ para las elecciones más frecuentes de \tilde{p} y $\|\cdot\|$. Más aún, $C_{21} = 2^{\kappa}$ es cierto para la usual secuencia $h_k = h_0/2^k$. Así, el valor de $C_2 = 2^{\kappa}$.

Estos valores son suficientes para describir los errores de los resultados de la iteración anidada (3.5.3) considerando la secuencia usual de grosores de malla $h_k = h_0/2^k$.

Teorema 3.5.4. *Asumiendo (3.5.9) y*

$$C_2 \zeta^i < 1 \quad (3.5.13)$$

con C_2 de (3.5.12a)- (3.5.12c), ζ de (3.5.11) e i de (3.5.3c); y además suponiendo que $h_k = h_0/2^k$, entonces la iteración anidada (3.5.3) con i -iteraciones multimalla por nivel que resulta en \tilde{u}_k ($0 \leq k \leq l$) satisface la estimación del error

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_3(\zeta, i) C_1 h_k^i \quad (0 \leq k \leq l). \quad (3.5.14)$$

donde $C_3(\zeta, i) = \zeta^i / (1 - C_2 \zeta^i)$.

Demostración. La iteración anidada (3.5.3) con con i iteraciones multimalla por nivel resulta en \tilde{u}_k y satisface de (3.5.10)

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq \zeta_k^i \|u_k^0 - u_k\| \quad (3.5.15)$$

(u_k es solución de (3.5.6)). Ahora, tenemos para $k = 1$

$$\|u_1^0 - u_1\| = \|\tilde{p}u_0 - u_1\| = C(1) \quad (3.5.16)$$

con $C(k)$ dado en la proposición (3.5.1). Luego se tiene que

$$\|\tilde{u}_1 - u_1\| \leq C(1)\zeta^i. \quad (3.5.17)$$

En general se tiene

$$\begin{aligned} \|u_k^0 - u_k\| &= \|\tilde{p}\tilde{u}_{k-1} - u_k\| = \|\tilde{p}u_{k-1} - u_k + \tilde{p}\tilde{u}_{k-1} - \tilde{p}u_{k-1}\| \\ &\leq C(k) + \|\tilde{p}\| \|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\| \\ &\leq C_{20} \|\tilde{u}_{k-1} - u_{k-1}\|. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Sea ahora $\delta_k = \|\tilde{u}_k - u_k\|$, entonces de (3.5.15) y (3.5.18) tenemos

$$\delta_1 \leq C(1)\zeta^i \quad (3.5.19a)$$

$$\delta_k \leq \zeta^i (C(k) + C_{20}\delta_{k-1}) \quad (3.5.19b)$$

Usando la proposición (3.5.2) y usando (3.5.9) tenemos

$$\delta_l \leq \zeta^i \sum_{k=1}^l C(k) (\zeta^i C_{20})^{l-k} \quad (3.5.20)$$

$$\leq \zeta^i \sum_{k=1}^l C_1 h_k^\kappa (\zeta^i C_{20})^{l-k} \quad (3.5.21)$$

$$= \zeta^i C_1 h_i^\kappa \sum_{k=1}^l h_i^{-\kappa} h_k^\kappa (\zeta^i C_{20})^{l-k}$$

$$= \zeta^i C_1 h_i^\kappa \sum_{k=1}^l 2^{(l-k)\kappa} (\zeta^i C_{20})^{l-k} = \zeta^i C_1 h_i^\kappa \sum_{k=1}^l (\zeta^i 2^\kappa C_{20})^{l-k}$$

si $C_{21} = 2^\kappa$ y $C_2 = C_{21} C_{20}$ y $r = C_2 \zeta^i$

$$= \zeta^i C_1 h_i^\kappa \sum_{k=1}^l r^{l-k} = \zeta^i C_1 h_i^\kappa \sum_{k=0}^{l-1} r^k.$$

De la suposición (3.5.13) $r < 1$, entonces tenemos

$$\|\tilde{u}_l - u_l\| \leq \zeta^i C_1 h_i^\kappa \frac{1 - r^{l-1}}{1 - r} \leq \frac{\zeta^i}{1 - r} C_1 h_i^\kappa \quad (3.5.22)$$

□

Observación 3.5.5. De la observación 3.5.3 y asumiendo el caso estándar $\kappa = 2$, obtenemos $C_2 = 4$ y $\zeta < \frac{1}{4}$. Entonces la estimación (3.5.14) del teorema 3.5.4 se mantiene para $i = 1$ (sólo una iteración multimalla por nivel).

Hasta ahora, el error $\tilde{u}_k - u_k$ fue comparado sólo con el error de discretización relativo. Para conseguir una comparación más real lo comparamos con el error de discretización usual.

Aproximación de error de interpolación $C(k)$

Si la solución de (3.5.5) es suficientemente suave, podemos asumir que la expansión del error es dado por

$$u_k = \tilde{R}_k u + h_k^\zeta R_k e + O(h_k^\zeta), \quad (3.5.23)$$

(ver Pereyra [13]) donde $(R_k u)(x) = u(x)$ ($x \in \Omega_k$) es la restricción trivial de la solución continua u para la malla Ω_k y ζ es orden de discretización de L_k . Asumiendo que la función

e suficientemente suave, la interpolación u_{k-1} por \tilde{p} produce

$$\tilde{p}u_{k-1} = \tilde{p}R_{k-1}(u + h_{k-1}^s e) + O(h_{k-1}^s)$$

Se puede escribir

$$\tilde{p}u_{k-1} - u_k = \tilde{p}R_{k-1}u - R_k u + h_{k-1}^s \tilde{p}R_{k-1}e - h_k^s R_k e + O(h_k^s) \quad (3.5.24)$$

Suponiendo que

$$\|\tilde{p}R_{k-1}u - R_k u\| \leq C_{22}h_k^\kappa \quad (3.5.25)$$

y

$$\tilde{p}R_{k-1}e = R_k e + O(1), \quad O(1) = 1, 2, \dots, 10 \quad (3.5.26)$$

tenemos de (3.5.24):

$$\begin{aligned} \|\tilde{p}u_{k-1} - u_k\| &\leq \|\tilde{p}R_{k-1}u - R_k u\| + \|h_{k-1}^s \tilde{p}R_{k-1}e - h_k^s R_k e\| + O(h_k^s) \\ &\leq C_{22}h_k^\kappa + \|h_{k-1}^s R_k e - h_k^s R_k e\| + O(h_k^s) \\ &\leq C_{22}h_k^\kappa + (2^s - 1)\|R_k e\|h_k^s + O(h_k^s) \end{aligned} \quad (3.5.27)$$

Error luego de la iteración anidada

Para estimar el error luego de la iteración anidada primero asumiremos que

$$\kappa > \varsigma \Rightarrow h_k^\kappa < h_k^\varsigma \quad (3.5.28)$$

es decir que el orden interpolación κ es mayor que el orden de discretización ς . Podemos suponer también que $\|R_k e\|$ es uniformemente acotada en k :

$$\|R_k e\| \leq C_\varepsilon = \max\{\|R_k e\| : k = 1, 2, \dots, l\} \quad (3.5.29)$$

Entonces (3.5.27) puede ser reescrito como

$$\|\tilde{p}u_{k-1} - u_k\| \leq (2^s - 1)C_\varepsilon h_k^\varsigma + O(h_k^s) \quad (3.5.30)$$

Despreciando el término de mayor orden, tenemos

$$\|\tilde{p}u_{k-1} - u_k\| = C(k) \leq (2^\kappa - 1)C_\varepsilon h_k^\kappa. \quad (3.5.31)$$

Sustituyendo en (3.5.9) tenemos

$$C_1 = (2^\kappa - 1)C_\varepsilon, \quad \text{para } \kappa = \varsigma, \quad (3.5.32)$$

lo que prueba la proposición 3.5.1. Así que (3.5.22) resulta

$$\|\tilde{u}_l - u_l\| \leq \frac{\zeta^i}{1 - r} C_1 h_l^\kappa \leq \frac{\zeta^i}{1 - r} (2^\kappa - 1) C_\varepsilon h_l^\kappa \quad (3.5.33)$$

Entonces hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema 3.5.6. *Asuma la validez de la expansión (3.5.23), sea el orden de interpolación de \tilde{p} exceda κ , y suponga $h_{k-1} = 2h_k$. Bajo la condición (3.5.13), $C_2 \zeta^i < 1$, el resultado \tilde{u}_k de la iteración anidada (3.5.3) satisface*

$$\|\tilde{u}_k - u_k\| \leq C_4(\zeta, i) h_k^\kappa \max_{1 \leq k \leq l} \|\tilde{R}_k e\| \quad (3.5.34)$$

con

$$C_4(\zeta, i) = (2^\kappa - 1)C_3(\zeta, i) = \frac{(2^\kappa - 1)\zeta^i}{1 - C_2 \zeta^i}.$$

La estimación (3.5.34) puede ser interpretado como

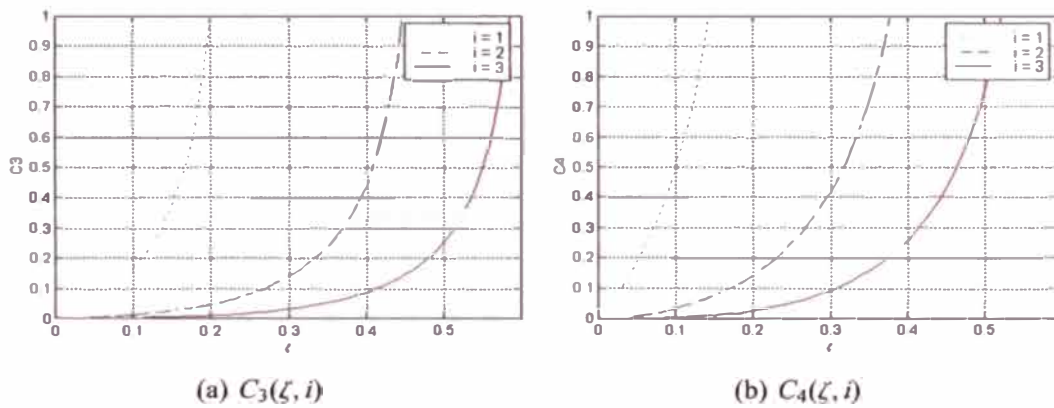
$$\text{error de iteración} \leq C_4(\zeta, i) * \text{error de discretización}$$

Para $\kappa = 2$ y $C_2 = 2^\kappa = 4$ (observación. 3.5.3) el factor

$$C_4(\zeta, i) = 3\zeta^i / (1 - 4\zeta^i)$$

es listado en el cuadro 3.6. $i = 1$ puede ser elegido si $\zeta < \frac{1}{4}$ (observación. 3.5.5) Valores típicos de número de contracción multimalla son $\zeta \approx \frac{1}{7} \approx 0,143$ produciendo $C_4(\zeta, 1) \approx 1$. Así, el error de iteración $\tilde{u}_k - u_k$ es proximo al error de discretización. Si $\zeta > 0,18$ Uno debería escoger $i = 2$.

ζ	$C_4(\zeta, 1)$	ζ	$C_4(\zeta, 2)$	ζ	$C_4(\zeta, 3)$
0.200	3.00	0.44	2.57	0.60	4.76
0.182	2.00	0.40	1.33	0.58	3.00
0.175	1.75	0.38	1.00	0.57	2.00
0.143	1.00	0.33	0.60	0.52	1.00
0.100	0.50	0.30	0.42	0.50	0.75
0.071	0.30	0.25	0.25	0.46	0.50
0.053	0.20	0.20	0.143	0.40	0.25

Cuadro 3.6: Factor $C_4(\zeta, i)$ para $i = 1, 2, 3$ Figura 3.16: Función C_3 y C_4 para $i = 1, 2, 3$ con $\kappa = 2$ y $C_2 = 4$

3.5.3. Trabajo Computacional y Eficiencia.

El trabajo computacional de una iteración multimalla en el nivel k es aproximadamente

$$W_k = \frac{(\nu C_s + C_D + C_C)n_k}{1 - \theta} \quad (\theta = \gamma C_H < 1)$$

como puede ser visto en (3.4.38), cuando el término $O(\theta^l)$ es omitido. La desigualdad $n_{k-1} \leq C_H n_k$ produciría $W_k \leq C_H^{l-k} W_l$ ($1 \leq k \leq l$). Así el trabajo computacional de la iteración anidada (3.5.3) es igual a

$$iW_1 + iW_2 + \cdots + iW_l \leq \sum_{k=1}^l C_H^{l-k} W_l \leq \frac{i}{1 - C_H} W_l.$$

Aquí no tenemos en cuenta la aproximación de la solución $L_0 u_0 = f_0$ y el trabajo requerido por \tilde{p} , puesto que el trabajo computacional de ambos es pequeño por iteración.

Observación 3.5.7. *La iteración anidada (3.5.3) con i iteraciones por nivel es sólo más cara que la iteración (3.5.1) por un factor $1/(1 - C_H)$. En el caso bidimensional $d = 2$ con $h_{k-1} = 2h_k$, este factor es igual a $\frac{1}{4}$; así el trabajo computacional total de la iteración anidada es menor que*

$$\frac{1}{3}iW_l = \frac{16}{3(4 - \gamma)}i(\nu C_s + C_D + C_C)n_l. \quad (3.5.35)$$

El factor $16/[3(4 - \gamma)] = 1,78$ para $\gamma = 1$ (V-ciclo) y $2,67$ para $\gamma = 2$ (W-ciclo).

Se concluye que una aproximación \tilde{u}_l con un error $O(h_k^r)$ puede ser obtenida por sólo $O(n_l)$ operaciones (en lugar de $O(n_l[\log(h_l)])$) para la iteración (3.5.1)

¿Cual es la elección de i optimal? La respuesta depende de la aproximación deseada y de ζ . Asuma que por ejemplo que el objetivo es tener $C_4(\zeta, i) = 1$, i.e. $\|\tilde{u}_l - u_l\|_{\mathcal{H}} \approx$ error de discretización. Esto puede ser difícil para ciertos valores de ζ . Considere, por ejemplo, $\zeta = 0,2$. Del cuadro 3.6 vemos que $i = 1$ produce $C_4(0,2, 1) = 3 \gg 1$, con $i = 2$ tenemos $C_4(0,2, 2) = 0,143$ indicando que \tilde{u}_l más aproximado que lo necesario. Un debería elegir diferentes i en diferentes niveles: $i_l = 1, i_{l-1} = i_{l-2} = \dots = i_1 = 2$.

Capítulo 4

Análisis de suavización

4.1. Introducción

El comportamiento convergente de los métodos multimalla depende en gran manera de las propiedades de suavización vista en la sección 3.4.2. Una herramienta útil para estudiar la eficiencia de los efectos de suavización es el Análisis de Fourier. Con él deseamos encontrar métodos que reduzcan los componentes de altas frecuencia del error.

Tal como se indicó en la sección 3.1 el suavizador es importante porque reduce los modos de altas frecuencias, mientras que la corrección en la malla gruesa complementa el proceso eliminando las componentes de baja frecuencia del error.

Si elegimos los componentes del operador corrección de malla gruesa, de tal manera que se elimine las componentes suaves de error, podemos aproximar el factor de convergencia del método multimalla por el respectivo factor de suavización.

Un análisis de dos mallas intenta aproximar el radio espectral de $(I - \rho L_{l-1}^{-1} \rho L_l) S_l$ para el algoritmo de dos mallas, mientras que el análisis de suavización evalúa el radio espectral de S_l , el factor de convergencia del suavizador multimalla, aplicando únicamente a la componente oscilatorias del error.

El análisis de suavización de Fourier no dará una manera fácil de predecir la eficiencia de los suavizadores.

4.2. Elementos de análisis de Fourier en el espacio de funciones malla

Una buena introducción para el análisis de suavización de Fourier puede ser hallado en Stüben and Trottenberg [12], en Wesseling [17] y en A. Bandy [2].

4.2.1. Caso unidimensional

Teorema 4.2.1. (*Transformación Discreta de Fourier*). Sea $I = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$. Cada $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrito como

$$u_j = \sum_{k=-m}^{m+p} c_k \psi_j(\theta_k), \quad \psi_j(\theta_k) = \exp(ij\theta_k), \quad \theta_k = \pi k/N, \quad j \in I \quad (4.2.1)$$

donde

$$\begin{cases} p = 0, & m = \frac{N-1}{2}, & \text{para } N \text{ impar y,} \\ p = 1, & m = \frac{N}{2} - 1, & \text{para } N \text{ par} \end{cases}$$

con

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-1} u_j \psi_j(-\theta_k) \quad (4.2.2)$$

Demostración. Ver Villar[16] □

Las funciones $\psi_j(\theta)$ son llamadas *modos de Fourier* o *componentes de Fourier*.

Lema 4.2.2. (*Ortogonalidad*).

$$\sum_{j=0}^{N-1} \psi_j(\theta_k) \psi_j(\theta_{-l}) = N \delta_{kl} \quad (4.2.3)$$

con δ_{kl} el delta de Kronecker:

Demostración. Ver J. Stoer, R. Bulirsch [8, p.76] □

Se puede usar el Teorema 4.2.1 para representar las funciones malla ($\mathcal{U}_I = \{u : \Omega_I \rightarrow \mathbb{R}\}$) por series de Fourier y donde Ω_I esta dado por

$$\Omega_I = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_I - 1, \quad h = \frac{1}{N_I} \right\} \quad (4.2.4)$$

Condiciones de Frontera de Dirichlet

Son apropiadas las series de seno de Fourier del Teorema 4.2.3 para condiciones de Dirichlet Homogéneas .

Teorema 4.2.3. (Transformada seno de Fourier discreta). Sea $I = \{1, 2, \dots, N-1\}$. Cada $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrito como

$$u_j = \sum_{k=1}^{N-1} c_k \operatorname{sen}(j\theta_k), \quad \theta_k = \pi k/N \quad (4.2.5)$$

con

$$c_k = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N-1} u_j \operatorname{sen}(j\theta_k). \quad (4.2.6)$$

Lema 4.2.4. Ortogonalidad

$$\sum_{k=1}^{N-1} \operatorname{sen}(j\theta_k) \operatorname{sen}(j\theta_\xi) = \frac{1}{2} N \delta_{k\xi}, \quad \theta_k = \pi k/N, \quad k, \xi = \{1, 2, \dots, N-1\} \quad (4.2.7)$$

con $\delta_{k\xi}$ es delta de Kronecker.

Definimos la malla Ω_l por

$$\Omega_l = \{x \in \mathbb{R} : x = jh_l, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N_l, \quad h_l = 1/N_l\} \quad (4.2.8)$$

y usamos(4.2.5) para extender el dominio de u para $j \in \{0, 1, 2, \dots, N_l\}$. Entonces

$$u : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}$$

u dado por (4.2.5), satisface las condiciones de frontera homogéneas de Dirichlet homogéneas $u_0 = u_{N_l} = 0$. El hecho que las condiciones de frontera sean asumidas homogéneas no implica pérdida de generalidad, pues todo que el análisis de suavización es realizado al error, y este es cero sobre una frontera de Dirichlet.

4.2.2. Caso multidimensional

Definimos

$$\psi_j(\theta) = \exp(ij\theta) \quad (4.2.9)$$

con $j \in I$, $\theta \in \Theta$ con

$$I = \{j : j = (j_1, j_2, \dots, j_d), j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha - 1, \alpha = 1, 2, \dots, d\} \quad (4.2.10)$$

$$\Theta = \{\theta : \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), \theta_\alpha = 2\pi k_\alpha / N_\alpha,$$

$$k_\alpha = -m_\alpha, -m_\alpha + 1, \dots, m_\alpha + p_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, d\} \quad (4.2.11)$$

donde

$$\begin{cases} p_\alpha = 0, & m_\alpha = \frac{N_\alpha - 1}{2}, & \text{para } N_\alpha \text{ impar y,} \\ p_\alpha = 1, & m_\alpha = \frac{N_\alpha}{2} - 1, & \text{para } N_\alpha \text{ par.} \end{cases}$$

y

$$j\theta = \sum_{\alpha=1}^d j_\alpha \theta_\alpha. \quad (4.2.12)$$

con d la dimensión del problema.

Observación 4.2.5. Se cumple para la ecuación (4.2.9) que

$$\exp(ij\theta) = \exp(ij(\theta - \pi)) \quad (4.2.13)$$

La generalización del Lema (4.2.2) para el caso d -dimensión esta dado por:

Lema 4.2.6. Sea $\theta, \zeta \in \Theta$, entonces

$$\sum_{j \in I} \psi_j(\theta) \psi_j(-\zeta) = \begin{cases} \prod_{\alpha=1}^d N_\alpha, & \zeta = \theta \\ 0, & \zeta \neq \theta. \end{cases} \quad (4.2.14)$$

Demostración. Se puede escribir

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in I} \psi_j(\theta) \psi_j(-\varsigma) &= \sum_{j \in I} \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^d j_\alpha \theta_\alpha\right) \exp\left(i \sum_{\alpha=1}^d j_\alpha (-\varsigma_\alpha)\right) \\
&= \sum_{j \in I} \prod_{\alpha=1}^d \psi_{j_\alpha}(\theta_\alpha) \psi_{j_\alpha}(-\varsigma_\alpha) \\
&= \sum_{j \in I \setminus j_d} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \psi_{j_\alpha}(\theta_\alpha) \psi_{j_\alpha}(-\varsigma_\alpha) \sum_{j_d} \psi_{j_d}(\theta_d) \psi_{j_d}(-\varsigma_d) \\
&= \sum_{j \in I \setminus j_d} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \psi_{j_\alpha}(\theta_\alpha) \psi_{j_\alpha}(-\varsigma_\alpha) N_d \delta_{\theta_d \varsigma_d} \quad \text{del lemma 4.2.2} \\
&= N_d \delta_{\theta_d \varsigma_d} \sum_{j \in I \setminus (j_{d-1}, j_d)} \prod_{\alpha=1}^{d-2} \psi_{j_\alpha}(\theta_\alpha) \psi_{j_\alpha}(-\varsigma_\alpha) N_{d-1} \delta_{\theta_{d-1} \varsigma_{d-1}} \\
&= N_d \delta_{\theta_d \varsigma_d} N_{d-1} \delta_{\theta_{d-1} \varsigma_{d-1}} \cdots N_1 \delta_{\theta_1 \varsigma_1} \\
&= \prod_{\alpha=1}^d N_\alpha \prod_{\alpha=1}^d \delta_{\theta_\alpha \varsigma_\alpha}
\end{aligned}$$

□

Teorema 4.2.7. (*Transformación Discreta de Fourier d-dimensional*). Cada $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrito como

$$u_j = \sum_{\theta \in \Theta} c_\theta \psi_j(\theta) \quad (4.2.15)$$

con

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j \in I} u_j \psi_j(-\theta_k), \quad N = \prod_{\alpha=1}^d N_\alpha \quad (4.2.16)$$

donde ψ_j es definido por (4.2.9).

Condiciones de Frontera de Dirichlet

Definimos

$$\varphi_j(\theta) = \prod_{\alpha=1}^d \text{sen } j_\alpha \theta_\alpha \quad (4.2.17)$$

con $j = (j_1, j_2, \dots, j_d), \theta \in \Theta^+$,

$$\Theta^+ = \{\theta : \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), \theta_\alpha = \pi k_\alpha / N_\alpha, k_\alpha = 1, 2, \dots, N_\alpha - 1\}. \quad (4.2.18)$$

La generalización del lema (4.2.4) para d dimensiones es dado por el siguiente lema

Lema 4.2.8. Ortogonalidad. Sea $\theta, \zeta \in \Theta^+$, entonces

$$\sum_{j \in I} \varphi_j(\theta) \varphi_j(\zeta) = \begin{cases} 2^{-d} N, & N = \prod_{\alpha=1}^d N_\alpha, & \zeta = \theta \\ 0, & & \zeta \neq \theta. \end{cases} \quad (4.2.19)$$

Teorema 4.2.9. Transformación Seno de Fourier discreto d -dimensional. Sea $I = \{j : j = (j_1, j_2, \dots, j_d), j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_\alpha - 1\}$. Cada $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ puede ser escrito como

$$u_j = \sum_{\theta \in \Theta^+} c_\theta \varphi_j(\theta) \quad (4.2.20)$$

con

$$c_k = \frac{2^d}{N} \sum_{j \in I} u_j \varphi_j(\theta_k), \quad N = \prod_{\alpha=1}^d N_\alpha \quad (4.2.21)$$

4.3. Factor de Suavización de Fourier

4.3.1. Definición de factor de suavización en modo local

Sea un problema a solucionar sobre la malla Ω_I denotado por

$$L_I u_I = f_I \quad (4.3.1)$$

y sea el método de suavización

$$\bar{u}_I := S_I u_I + A_I^{-1}, \quad S_I = A_I^{-1} B_I, \quad L_I = A_I - B_I. \quad (4.3.2)$$

De acuerdo a (2.2.2) la relación entre el error antes y después de ν iteraciones de suavización es

$$e^1 = S_I^\nu e^0 \quad (4.3.3)$$

Ahora asumiremos lo siguiente:

- **Suposición 1.** El operador S_I tiene un conjunto de autofunciones o *modos locales* denotado por $\psi(\theta)$, $\theta \in \Theta$, con Θ algún conjunto de índices discretos.

Luego

$$S_l^v \psi(\theta) = \lambda^v(\theta) \psi(\theta) \quad (4.3.4)$$

con $\lambda(\theta)$ un valor propio de $\psi(\theta)$. Podemos escribir

$$e^\alpha = \sum_{\theta \in \Theta} c_\theta^\alpha \psi(\theta), \quad \alpha = 0, 1$$

y obtenemos

$$c_\theta^1 = \lambda^v(\theta) c_\theta^0. \quad (4.3.5)$$

El valor propio $\lambda(\theta)$ es también llamado *factor de amplificación* del modo local $\psi(\theta)$.

Ahora supongamos que entre las autofunciones $\psi(\theta)$ podemos distinguir autofunciones *suaves* ($\theta \in \Theta_s$) y autofunciones *oscilantes* ($\theta \in \Theta_r$), donde

$$\Theta = \Theta_s \cup \Theta_r, \quad \Theta_s \cap \Theta_r = \emptyset. \quad (4.3.6)$$

Tenemos luego las siguientes definiciones

Definición 4.3.1. *factor de suavización de modo local.* El factor de suavización de modo local ρ del método de suavización (4.3.2) es definido por

$$\rho = \sup\{|\lambda(\theta)| : \theta \in \Theta_r\}. \quad (4.3.7)$$

De esta manera, luego de v iteraciones la amplitud de los componentes oscilatorios del error son multiplicados por un factor ρ^v o más pequeño.

4.3.2. Análisis de suavización de Fourier

Para obtener una herramienta útil de éste análisis para examinar la calidad del método de suavización debemos ser capaces de determinar fácilmente ρ y elegir Θ_s , de forma que un error $e = \psi(\theta)$, $\theta \in \Theta_s$, sea bien reducido por corrección de malla gruesa. Para ello la suposición siguiente tiene que ser satisfecha.

- **Suposición 2** Las autofunciones $\psi(\theta)$ de S_l son funciones periódicas.

Cuando tenemos este caso, ρ es también llamado *factor de suavización de Fourier*. En la siguiente sección daremos condiciones para que la suposición 2 sea válida y mostraremos como ρ es fácilmente determinado. Antes debemos elegir Θ_r .

4.3.3. Sobreposición (Aliasing)

Considere la malla Ω_l dada por (3.3.1) con $N_{l,\alpha}$ par, y la correspondiente malla gruesa Ω_{l-1} definido por el doble del grosor de malla.

$$\begin{aligned} \Omega_{l-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : x = jh_{l-1}, j = (j_1, j_2, \dots, j_d), h_{l-1} = (h_{l-1,1}, h_{l-1,2}, \dots, h_{l-1,d}), \\ j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_{l-1,\alpha}, h_{l-1,\alpha} = 1/N_{l-1,\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, d\} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

con $N_{l-1,\alpha} = N_{l,\alpha}/2$. Sea $d = 1$, y asumiremos que las autofunciones de S_l sobre la malla fina Ω_l son los modos de Fourier del Teorema 4.2.1: $\psi_{l,j}(\theta_l) = \exp(ij\theta_l)$, con

$$\theta_l \in \Theta_l = \{\theta_l : \theta_l = 2\pi k/N_{l,1}, k = -N_{l,1}/2 + 1, N_{l,1}/2 + 2, \dots, N_{l,1}/2\} \quad (4.3.9)$$

así que una función malla arbitraria v_l sobre Ω_l puede ser representada por la siguiente serie de Fourier:

$$v_{l,j} = \sum_{\theta_l \in \Theta_l} c_{\theta_l} \psi_{l,j}(\theta_l) \quad (4.3.10)$$

Una función malla arbitraria v_{l-1} sobre Ω_{l-1} puede ser representado por

$$v_{l-1,j} = \sum_{\theta_{l-1} \in \Theta_{l-1}} c_{\theta_{l-1}} \psi_{l-1,j}(\theta_{l-1}) \quad (4.3.11)$$

con $\psi_{l-1} : \Omega_{l-1} \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi_{l-1,j}(\theta_{l-1}) = \exp(ij\theta_{l-1})$ y

$$\Theta_{l-1} = \{\theta_{l-1} : \theta_{l-1} = 2\pi k/N_{l-1,1}, k = -N_{l-1,1}/2 + 1, -N_{l-1,1}/2 + 2, \dots, N_{l-1,1}/2\} \quad (4.3.12)$$

asumiendo por simplicidad que $N_{l-1,1}$ es par. El punto en la malla gruesa $\bar{x}_j = jh_{l-1}$ coincide con los puntos de la malla fina $x_{2j} = 2jh_l$. En esos puntos los modos de Fourier de malla gruesa $\psi_{l-1}(\theta_{l-1})$ toman los valores:

$$\psi_{l-1,j}(\theta_{l-1}) = \exp(ij\theta_{l-1}) = \exp(2ij\theta_l)$$

Para $-N_{l,1}/4 + 1 \leq k \leq N_{l,1}/4$ el modo de Fourier en la malla fina $\psi_l(\theta_{l,k})$ toma en los puntos de la malla gruesa x_j los valores de

$$\psi_{l,2i}(\theta_{l,k}) = \exp(2\pi jik/N_{l-1,1}) = \psi_{l-1,i}(2\pi k/N_{l-1,1}),$$

y vemos que coincide con los modos de la malla gruesa $\psi_l(\theta_{l,k})$ en los puntos de malla gruesa. El mismo caso se presenta para otros modos de Fourier. Definimos k' como sigue

$$\begin{aligned} 0 < k \leq N_{l-1,1}/2 & : k' = -N_{l,1}/2 + k \\ -N_{l-1,1}/2 \leq k \leq 0 & : k' = N_{l,1}/2 + k \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

Entonces el modo de malla fina de Fourier $\psi_l(\theta_{l,k'})$ también coincide con $\psi_{l-1}(\theta_{l,k})$ en los puntos de la malla gruesa. Sobre la malla gruesa $\psi_l(\theta_{l,k'})$, no puede ser distinguida de $\psi_l(\theta_{l,k})$. Llamamos a esta característica *superposición*: La función de oscilante $\psi_l(\theta_{l,k'})$ toma la apariencia de las funciones suaves $\psi_l(\theta_{l,k})$ en la malla fina.

4.3.4. Modos de Fourier Suaves y Oscilantes

Puesto que sobre la malla gruesa Ω_{l-1} la función de oscilante $\psi_l(\theta_{l,k'})$ no puede ser aproximada y no puede ser distinguida de $\psi_l(\theta_{l,k})$, no existe esperanza que la parte del error consistente de modos de Fourier $\psi_l(\theta_{l,k'})$, k' dado por (4.3.13), pueda ser aproximada o bien representada sobre la malla gruesa Ω_{l-1} . Esta parte del error la llamamos *rígida, oscilante o no suave*. Los Modos de Fourier oscilantes son definidos como $\psi_l(\theta_{l,k'})$, con k' dados por (4.3.13), o sea

$$k' \in \left\{ -\frac{N_{l,1}}{2} + 1, -\frac{N_{l,1}}{2} + 2, \dots, -\frac{N_{l,1}}{4} \right\} \cup \left\{ \frac{N_{l,1}}{4}, \frac{N_{l,1}}{4} + 1, \dots, \frac{N_{l,1}}{2} \right\} \quad (4.3.14)$$

Esto nos da un conjunto de número de ondas oscilantes

$$\Theta_{l,r} = \{ \theta_l : \theta_l = 2\pi k' / N_{l,1} : k' \text{ de acuerdo a (4.3.13)} \},$$

ó

$$\begin{aligned} \Theta_{l,r} = \{ \theta_l : \theta_l = 2\pi k / N_{l,1}, k = & -\frac{N_{l,1}}{2} + 1, -\frac{N_{l,1}}{2} + 2, \dots, \frac{N_{l,1}}{2} \\ & \text{y } \theta_l \in [\pi, -\frac{\pi}{2}] \cup [\frac{\pi}{2}, \pi] \} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

El conjunto de número de ondas suaves $\Theta_{l,s}$ es definido como $\Theta_{l,s} = \Theta_l \setminus \Theta_{l,r}$, Θ_l dado por (4.2.11) con $d = 1$, o

$$\Theta_{l,s} = \{\theta_l : \theta_l = 2\pi k/N_{l,1}, k = -\frac{N_{l,1}}{2} + 1, -\frac{N_{l,1}}{2} + 2, \dots, \frac{N_{l,1}}{2} \text{ y } \theta_l \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})\} \quad (4.3.16)$$

La parte suave y oscilante de v_l^s y v_l^r de una función malla $v_l : \Omega_l \rightarrow \mathbb{R}$ puede ahora ser definido por

$$v_l^s = \sum_{\theta_l \in \Theta_{l,s}} c_{\theta_l} \psi_l(\theta_l), \quad v_l^r = \sum_{\theta_l \in \Theta_{l,r}} c_{\theta_l} \psi_l(\theta_l) \quad \text{con} \quad c_{\theta_l} = N_{l,1}^{-1} \sum_{j=0}^{N_{l,1}} v_j \psi_{l,j}(-\theta_l) \quad (4.3.17)$$

La generalización en el caso multidimensional del (4.3.15) y (4.3.16) (condiciones periódicas) es

$$\Theta_l = \{\theta_l : \theta_l = (\theta_{l,1}, \theta_{l,2}, \dots, \theta_{l,d}), \theta_{l,\alpha} = 2\pi k_\alpha/N_{l,\alpha}, k_\alpha = -N_{l,\alpha}/2 + 1, \dots, N_{l,\alpha}/2, \} \quad (4.3.18)$$

$$\Theta_{l,s} = \Theta_l \cap \prod_{\alpha=1}^d \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Theta_{l,r} = \Theta_l \setminus \Theta_{l,s}$$

En la figura 4.1 da una ilustración gráfica de la región donde se encuentran el conjunto de número de onda suaves y oscilantes para el caso $d = 2$. Θ_r y Θ_s son conjuntos discretos en los dos cuadrados concéntricos. Cuanto más se incrementa el número de particiones de la malla ($N_{l,\alpha}$ se incrementa) se tendrá un conjuntos discretos más densamente distribuido.

4.3.5. Semimallado

Con un semimallado existen al menos una dirección en el cual h_l en Ω_{l-1} es también igual como en Ω_l . En esta dirección no ocurre superposición puesto que los modos de Fourier sobre Ω_l serán los mismos que sobre Ω_{l-1} .

Ejemplo 4.3.1. Sea $d = 2$ y asumamos que $h_{l-1}^x = h_l^x$ como es mostrado en la figura (3.10(b)) (semi engrosamiento en la dirección y). Entonces

$$\Theta_s = \Theta \cap \{[-\pi, \pi] \times (-\pi/2, \pi/2)\}, \quad \Theta_r = \Theta \setminus \Theta_s \quad (4.3.19)$$

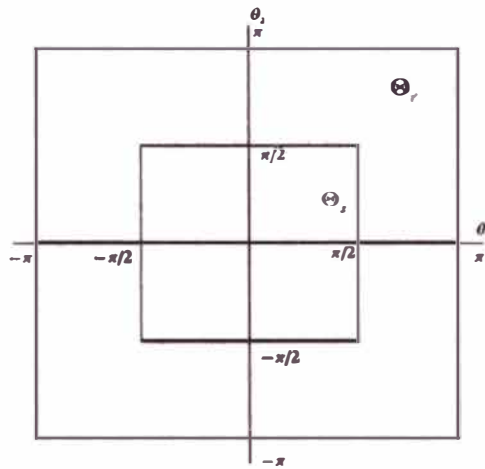


Figura 4.1: Números de ondas suaves ($\Theta_{l,s}$) y oscilantes ($\Theta_{l,r}$, sombreado) en dos dimensiones con engrosamiento estándar

4.3.6. Definición de independencia de grosor de malla del factor de suavización

Se tendrá un método de suavización sobre la malla Ω_l si existe ρ^* independiente de $N_{l,\alpha}$ tal que

$$\rho \leq \rho^* < 1, \quad \forall N_{l,\alpha}, \alpha = 1, 2, \dots, d \quad (4.3.20)$$

Sin embargo, ρ definido por (4.3.7) depende de $N_{l,\alpha}$, puesto que $\Theta_{l,r}$ depende de $N_{l,\alpha}$. Para obtener una independencia del grosor de malla lo que implica (4.3.20) tenemos que definir un conjunto $\bar{\Theta}_{l,r} \supset \Theta_{l,r}$ con $\bar{\Theta}_{l,r}$ independiente de $N_{l,\alpha}$, y definimos

$$\bar{\rho} = \sup \left[|\lambda(\theta)| : \theta \in \bar{\Theta}_{l,r} \right] \quad (4.3.21)$$

así se tiene

$$\rho \leq \bar{\rho} \quad (4.3.22)$$

y se tendrá un método de suavización si $\bar{\rho} < 1$.

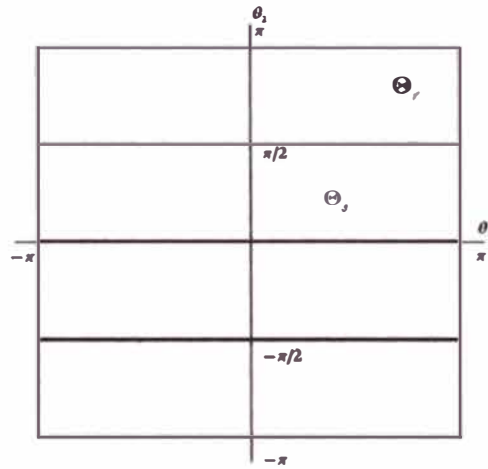


Figura 4.2: Números de ondas suaves (Θ_s) y rígidas (Θ_r , sombreado) en dos dimensiones, emi engrosamiento en la dirección y

Ejemplo 4.3.2. Si $\Theta_{l,r}$ es definido por (4.3.18), entonces definimos $\overline{\Theta}_{l,r}$ como sigue:

$$\overline{\Theta}_{l,r} = \prod_{\alpha=1}^d [-\pi, \pi] \setminus \prod_{\alpha=1}^d \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad (4.3.23)$$

4.3.7. Modificación del factor de suavización para condiciones de frontera de Dirichlet

Necesitamos considerar ahora el efecto de las condiciones de frontera, en particular, las condiciones de frontera de Dirichlet. Para problemas con condiciones de frontera de Dirichlet, conocemos que el **error en la frontera es siempre cero**, y así se puede ignorar los número de onda donde $\theta_\alpha \neq 0$, cambiando la definición de Θ_r en (4.3.7) de (4.3.18) a

$$\begin{aligned} \Theta^D &= \{\theta : \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d), \theta_\alpha = 2\pi k_\alpha / N_{l,\alpha}, k_\alpha \neq 0, k_\alpha = -\frac{N_{l,\alpha}}{2} + 1, \dots, \frac{N_{l,\alpha}}{2}\} \\ \Theta_s^D &= \Theta^D \cap \prod_{\alpha=1}^d \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \Theta_r^D = \Theta^D \setminus \Theta_s^D, \end{aligned} \quad (4.3.24)$$

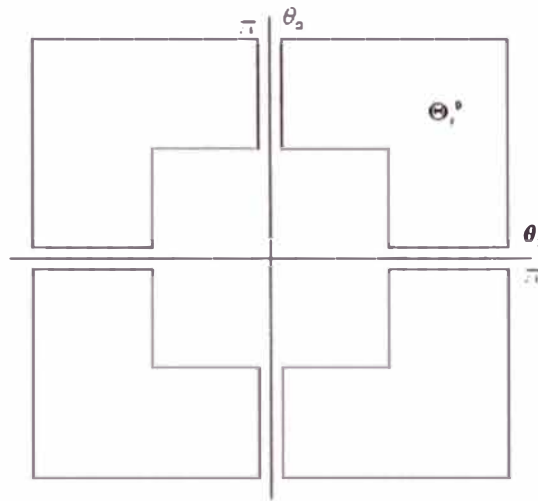


Figura 4.3: Conjunto de números de onda rígidos (Θ_r^D sombreado) en dos dimensiones, con exclusión del modo $\theta_\alpha = 0$ (engrosamiento estándar)

donde el súper índice D sirve para indicar el una frontera de Dirichlet. El factor de suavización es ahora definido como

$$\rho_D = \sup\{|\lambda(\theta)| : \theta \in \Theta_r^D\}. \quad (4.3.25)$$

Para $d = 2$ la figura (4.3) da un ilustración de Θ_r^D , el cual es el conjunto discreto con la región sombreada. Notamos que tenemos la siguiente desigualdad

$$\rho_D \leq \rho \leq \bar{\rho} \quad (4.3.26)$$

La definición de malla-independiente de arriba es mucho más difícil de evaluar numéricamente, y cuando las condiciones de frontera tiene una gran influencia sobre la solución, el resultado no es muy real. La definición de malla-dependiente dada arriba es mejor cuando uno elige $N_{l,\alpha}$ del mismo rango. Nosotros deseamos tener siempre $\rho < 1$ uniformemente en $N_{l,\alpha}$ al menos cuando las condiciones de frontera no tienen una fuerte influencia. Si este no es el caso, entonces la parte de la corrección de la malla gruesa del método multimallas debe ser muy buena para superar la influencia divergente del suavizador. Podemos ver también investigar numéricamente el comportamiento de ρ cuando $N_{l,\alpha} \rightarrow \infty$ y ver como es su

comportamiento asintótico.

4.3.8. Expresión explícita para el factor de amplificación

Ahora para determinar los factores de suavización ρ , $\bar{\rho}$ o ρ_D de acuerdo a la definición (4.3.7), (4.3.21) y (4.3.25) tenemos que solucionar el problema de valores propios

$$S_I \psi(\theta) = \lambda(\theta) \psi(\theta)$$

con S_I dado por (4.3.2). Así, tenemos que solucionar

$$B_I \psi(\theta) = \lambda(\theta) A_I \psi(\theta). \quad (4.3.27)$$

Usando la notación plantilla de la sección 3.3.2 (4.3.27) se puede representar por:

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_I(m, j) \psi_{m+j}(\theta) = \lambda(\theta) \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_I(m, j) \psi_{m+j}(\theta) \quad (4.3.28)$$

Asumiremos:

- **Suposición I** $A_I(m, j)$ y $B_I(m, j)$ no dependen de m .

Observación 4.3.3. Esta suposición es satisfecha si

1. los coeficientes en la ecuación diferencial parcial a solucionar son constantes,
2. el grosor de la malla Ω_I es uniforme ;y
3. las condiciones de frontera son periódicas.

Escribimos $A_I(j)$, $B_I(j)$ en lugar de $A_I(m, j)$ y $B_I(m, j)$. Como una consecuencia de la suposición I, la suposición 2 de la sección 4.3 se satisface:

Proposición 4.3.4. Las autofunciones de S_I son dadas por (4.2.9)

Demostración. Debemos de probar que $\psi_m(\theta) = \exp(im\theta)$ es una autofunción de S_I . Esto es equivalente a mostrar (4.3.28)

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_I(j) \psi_{m+j}(\theta) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_I(j) \exp(i(m+j)\theta) \\ &= \exp(im\theta) \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_I(j) \exp(ij\theta) \end{aligned} \quad (4.3.29)$$

luego si hacemos

$$\lambda(\theta) = \frac{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \exp(ij\theta)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta)} \quad (4.3.30)$$

tenemos de (4.3.29)

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \psi_{m+j}(\theta) &= \exp(im\theta) \lambda(\theta) \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta) \\ &= \lambda(\theta) \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(i(m+j)\theta) \\ &= \lambda(\theta) \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \psi_{m+j}(\theta) \end{aligned}$$

□

La periodicidad requiere de la suposición I que

$$\exp(im_\alpha \theta_\alpha) = \exp(i(m_\alpha + N_\alpha) \theta_\alpha)$$

o sea $\exp(in_\alpha \theta_\alpha) = 1$. Así $\theta \in \Theta$, como hemos definido en (4.2.11), asumiendo que N_α par. Esto satisface las autofunciones de los modos de Fourier del teorema 4.2.7. La siguiente suposición asegurará que las funciones seno del teorema 4.2.9 son autofunciones de (4.3.28).

■ **Suposición II**, $A_l(j)$ y $B_l(j)$ son pares en $j_\alpha, \alpha = 1, 2, \dots, d$, o sea

$$\begin{aligned} A_l(j_1, \dots, j_\alpha, \dots, j_d) &= A_l(j_1, \dots, -j_\alpha, \dots, j_d) \\ B_l(j_1, \dots, j_\alpha, \dots, j_d) &= B_l(j_1, \dots, -j_\alpha, \dots, j_d) \end{aligned} \quad (4.3.31)$$

$\forall \alpha \in [1, 2, \dots, d]$

Lema 4.3.5. Sea $B_l(j)$ tal que satisface la suposición II, entonces

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \varphi_{m+j}(\theta) = 2^d \varphi_m(\theta) \sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} B_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_\alpha \theta_\alpha \quad (4.3.32)$$

donde $\varphi_m(\theta) = \prod_{\alpha=1}^d \sin m_\alpha \theta_\alpha$, \sum' significa que el término para el cual β componentes de j que son ceros serán multiplicados por $2^{-\beta}$ (ej. si $j = (1, 0, 0) \Rightarrow \beta = 2$), y $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$.

Demostración. Por inducción sobre d . Primero veamos para $d = 1$. Tenemos $\varphi_m(\theta)$, luego

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}} B_l(j) \varphi_{m+j}(\theta) &= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} B_l(j) \operatorname{sen}(m+j)\theta + \sum_{j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0} B_l(j) \operatorname{sen}(m+j)\theta \\
&= \sum_{j \in \mathbb{N}_0} B_l(j) \operatorname{sen}(m+j)\theta + \sum_{j \in \mathbb{N}} B_l(-j) \operatorname{sen}(m-j)\theta \\
&= B_l(0) \operatorname{sen} m\theta + \sum_{j \in \mathbb{N}} 2B_l(j) (\operatorname{sen}(m+j)\theta + \operatorname{sen}(m-j)\theta) \\
&= B_l(0) \operatorname{sen} m\theta + 2 \sum_{j \in \mathbb{N}} B_l(j) 2 \cos j\theta \operatorname{sen} m\theta \\
&= 2 \operatorname{sen} m\theta \left(2^{-1} N(0) + \sum_{j \in \mathbb{N}} B_l(j) 2 \cos j\theta \right) \\
&= 2\varphi_m(\theta) \sum'_{j \in \mathbb{N}_0} B_l(j) \cos j\theta
\end{aligned}$$

Ahora asumiendo que (4.3.32) se cumple para $d \rightarrow 1, 2, \dots, d-1$, tenemos con $j' = (j_1, j_2, \dots, j_{d-1})$ lo siguiente: De la hipótesis inductiva para $d-1$ tenemos :

$$\sum_{j' \in \mathbb{Z}^{d-1}} B_l(j') \varphi_{m+j'}(\theta) = 2^{d-1} \varphi_m \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j') \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_\alpha \theta_\alpha \quad (4.3.33)$$

luego tenemos :

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \varphi_{m+j}(\theta) &= \sum_{j_d \in \mathbb{Z}} \operatorname{sen}(m_d + j_d)\theta_d \sum_{j' \in \mathbb{Z}^{d-1}} B_l(j') \prod_{\alpha=1}^{d-1} \operatorname{sen}(m_\alpha + j_\alpha)\theta_\alpha \\
&= \sum_{j_d \in \mathbb{Z}} \operatorname{sen}(m_d + j_d)\theta_d 2^{d-1} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \operatorname{sen} m_\alpha \theta_\alpha \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', j_d) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_\alpha \theta_\alpha \\
&= 2^{d-1} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \operatorname{sen} m_\alpha \theta_\alpha \left(\operatorname{sen} m_d \theta_d \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', 0) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_\alpha \theta_\alpha + \right. \\
&\quad \left. \sum_{j_d \in \mathbb{N}} (\operatorname{sen}(m_d + j_d)\theta_d + \operatorname{sen}(m_d - j_d)\theta_d) \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', j_d) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_\alpha \theta_\alpha \right) \\
&\text{como } \operatorname{sen}(m_d + j_d)\theta_d + \operatorname{sen}(m_d - j_d)\theta_d = 2 \cos j_d \theta_d \operatorname{sen} m_d \theta_d
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2^d \prod_{\alpha=1}^d \text{sen } m_{\alpha} \theta_{\alpha} \left(\sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', 0) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} + \sum_{j_d \in \mathbb{N}} \cos j_d \theta_d \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', j_d) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} \right) \\
&= 2^d \varphi_m(\theta) \left(\sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} B_l(j', 0) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} + \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} \sum_{j_d \in \mathbb{N}} B_l(j', j_d) \cos j_d \theta_d \right) \\
&= 2^d \varphi_m(\theta) \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^{d-1}} \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} \left(B_l(j', 0) + \sum_{j_d \in \mathbb{N}} B_l(j', j_d) \cos j_d \theta_d \right) \\
&= 2^d \varphi_m(\theta) \sum'_{j' \in \mathbb{N}_0^d} B_l(j) \prod_{\alpha=1}^{d-1} \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha} \cos j_d \theta_d = 2^d \varphi_m(\theta) \sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} B_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha}
\end{aligned}$$

□

Del lema anterior tenemos

Proposición 4.3.6.

$$\varphi_m(\theta) = \prod_{\alpha=1}^d \text{sen } m_{\alpha} \theta_{\alpha}$$

satisface (4.3.28) con

$$\lambda(\theta) = \frac{\sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} B_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha}}{\sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} A_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_{\alpha} \theta_{\alpha}} \quad (4.3.34)$$

Las condiciones de frontera de Dirichlet homogéneas implican que $\text{sen } N_{l,\alpha} = 0$, o $\theta_{\alpha} = \pi k_{\alpha} / N_{l,\alpha}$, $k_{\alpha} = 1, 2, \dots, N_{l,\alpha} - 1$, como fue para la serie de senos de Fourier.

4.4. Análisis de suavización para los métodos de suavización para una ecuación de tipo anisotrópica.

4.4.1. Suavización de Jacobi

Ecuación de difusión Anisotrópica - Jacobi puntual

Jacobi puntual con correspondiente amortiguación corresponde a la siguiente separación separación, en notación plantilla:

$$A_l(0) = \omega^{-1} L_l(0), \quad A_l(j) = 0, j \neq 0. \quad (4.4.1)$$

Asumiendo condiciones de frontera periódicas obtenemos, usando (1.2.17) y (4.3.30) en el caso espacial $c = 1$, $s = 0$

Proposición 4.4.1.

$$\lambda(\theta) = 1 + \omega(\varepsilon \cos \theta_1 - \varepsilon + \cos \theta_2 - 1)/(1 + \varepsilon) \quad (4.4.2)$$

Demostración. De la notación plantilla para el operador L_l en (1.2.17) tenemos

$$\begin{aligned} [L_l] &= \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2(\varepsilon + 1) & -\varepsilon \\ & -1 & \end{bmatrix} \\ [A_l] &= \begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & 2\omega^{-1}(\varepsilon + 1) & 0 \\ & 0 & \end{bmatrix} \quad \text{y como } B_l = A_l - L_l \\ [B_l] &= \begin{bmatrix} & 1 & \\ \varepsilon & 2(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) & \varepsilon \\ & 1 & \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tenemos usando (4.3.30) que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 B_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= \varepsilon \exp(i(-1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + \exp(i(0, -1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + \exp(i(0, 1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + \\ &\quad \varepsilon \exp(i(1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + (\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) \\ &= 2\varepsilon \cos \theta_1 + 2\cos \theta_2 + 2(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 A_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= 2\omega^{-1}(\varepsilon + 1) \end{aligned}$$

luego de (4.3.30)

$$\lambda(\theta) = \frac{\varepsilon \cos \theta_1 + \cos \theta_2 + (\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1)}{(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1)} = 1 + \omega(\varepsilon \cos \theta_1 - \varepsilon + \cos \theta_2 - 1)/(1 + \varepsilon)$$

□

Por la simetría de Θ_r puede ser confinado a la región sombreada de la figura (4.4)
Claramente,

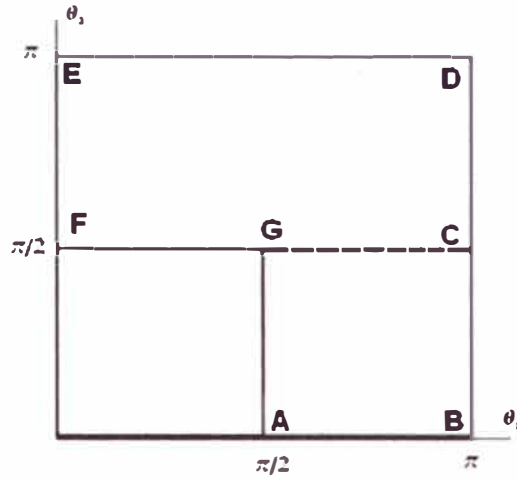


Figura 4.4: Conjunto de números de onda rígidos (Θ_r^D sombreado) en dos dimensiones, con exclusión del modo $\theta_\alpha = 0$; engrosamiento estándar

$$\bar{\rho} \geq |\lambda(\pi, \pi)| = |1 - 2\omega| \geq 1 \text{ para } \omega \notin (0, 1)$$

Para $\omega \in (0, 1)$ tenemos en $\theta \in \mathbf{CDEF}$, o sea $\theta_1 \in [0, \pi]$ y $\theta_2 \in [\pi/2, \pi]$ tenemos

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \varepsilon \cos \theta_1 &&\leq \varepsilon &&\text{además} \\ -1 &\leq \cos \theta_2 &&\leq 0 &&\text{sumando} \\ -(1 + \varepsilon) &\leq \varepsilon \cos \theta_1 + \cos \theta_2 &&\leq \varepsilon \\ -2(1 + \varepsilon) &\leq \varepsilon \cos \theta_1 + \cos \theta_2 - (1 + \varepsilon) &&\leq -1 \\ 1 - 2\omega &\leq 1 + \omega(\varepsilon \cos \theta_1 + \cos \theta_2 - (1 + \varepsilon))/(\varepsilon + 1) &&\leq 1 - \omega/(\varepsilon + 1) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} 1 - 2\omega &\leq \lambda(\theta) \leq 1 - \frac{\omega}{\varepsilon + 1} \\ \lambda(\pi, \pi) &\leq \lambda(\theta) \leq \lambda(0, \pi/2) \end{aligned}$$

Ahora si $\theta \in \mathbf{ABCG}$, o sea $\theta_1 \in [\pi/2, \pi]$ y $\theta_2 \in [0, \pi/2]$ tenemos análogamente al análisis de arriba

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1+2\varepsilon}{1+\varepsilon}\omega &\leq \lambda(\theta) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\omega, \text{ ó} \\ \lambda(\pi, \pi/2) &\leq \lambda(\theta) \leq \lambda(\pi/2, 0) \end{aligned}$$

Luego tenemos:

$$\bar{\rho} = \max \left\{ |1 - 2\omega|, \left| 1 - \frac{\omega}{1 + \varepsilon} \right|, \left| 1 - \frac{1 + 2\varepsilon}{1 + \varepsilon} \omega \right|, \left| 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \omega \right| \right\}. \quad (4.4.3)$$

Sea $0 < \varepsilon \leq 1$. Entonces

$$\bar{\rho} = \max \left\{ |1 - 2\omega|, \left| 1 - \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \omega \right| \right\}.$$

El mínimo valor de $\bar{\rho}$ y el correspondiente valor óptimo de ω son

$$\bar{\rho} = (2 + \varepsilon)/(2 + 3\varepsilon), \quad \omega = (2 + 2\varepsilon)/(2 + 3\varepsilon) \quad (4.4.4)$$

Observación 4.4.2. Para $\varepsilon = 1$ (Ecuación de Laplace) tenemos $\bar{\rho} = 3/5$, $\omega = 4/5$. Para $\varepsilon \ll 1$ no es un buen suavizador, puesto que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \bar{\rho} = 1$. En el caso que $\varepsilon > 1$ sigue del caso $\varepsilon \leq 1$ reemplazando ε por $1/\varepsilon$.

Note que $\bar{\rho}$ es alcanzado para $\theta \in \Omega_r$, así que aquí tenemos:

$$\rho = \bar{\rho} \quad (4.4.5)$$

Para $\omega = 1$ tenemos $\bar{\rho} = 1$, luego tenemos un ejemplo de un método convergente que no es suavizador.

Para condiciones de frontera de Dirichlet se aplica la serie de Fourier en senos para Jacobi puntual, de modo que las condiciones de frontera de Dirichlet pueden ser manejados exactamente. O sea con series de Fourier de seno $\lambda(\theta)$ aún puede expresar por (4.4.2), Así lo que queda por hacer es reemplazar Θ_r por Θ_r^D en el análisis anterior. Asumiendo $N_1 = N_2 = N$. Todo Θ_r^D yace dentro de la región sombreada de la figura (4.4). Razonando como antes obtenemos, para $0 < \varepsilon \leq 1$:

$$\lambda(\pi, \pi) \leq \lambda(\theta) \leq \lambda(2\pi/N, \pi/2), \quad \lambda(\pi, \pi/2) \leq \lambda(\theta) \leq \lambda(\pi/2, 2\pi/N) \quad (4.4.6)$$

Así

$$\rho_D = \max \left\{ |1 - 2\omega|, \left| 1 - \frac{\varepsilon\omega(1 + 2\pi^2/N^2)}{1 + \varepsilon} \right| \right\}$$

por lo que $\rho_D = \bar{\rho} + O(N^{-2})$, y de nuevo concluimos que:

Observación 4.4.3. Jacobi puntual no es un método robusto para ecuaciones de difusión anisotrópicas.

Jacobi Lineal

La iteración de Jacobi lineal vertical amortiguado aplicado a la ecuación de difusión discreta anisotrópica (1.2.17) con $c = 1$, $s = 0$ corresponde a la siguiente separación:

$$[A_l] = \omega^{-1} \begin{bmatrix} & -1 & \\ 0 & 2(\varepsilon + 1) & 0 \\ & -1 & \end{bmatrix}$$

El factor de amplificación es dado por :

Proposición 4.4.4.

$$\lambda(\theta) = \frac{\omega\varepsilon \cos \theta_1}{1 + \varepsilon - \cos \theta_2} + 1 - \omega \quad (4.4.7)$$

el cual es obtenido usando tanto la serie de Fourier exponencial como por la serie de Fourier en senos.

Demostración. Veamos primero por la serie exponencial. De la notación plantilla para el operador L_l en (1.2.17) tenemos

$$[L_l] = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2(\varepsilon + 1) & -\varepsilon \\ & -1 & \end{bmatrix} \quad \text{y como } B_l = A_l - L_l$$

$$[B_l] = \begin{bmatrix} & -(\omega^{-1} - 1) & \\ \varepsilon & 2(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) & \varepsilon \\ & -(\omega^{-1} - 1) & \end{bmatrix}$$

tenemos ahora que

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 B_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= \varepsilon \exp(i(-1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) - (\omega^{-1} - 1) \exp(i(0, -1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + 2(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) \\ &\quad + (\omega^{-1} - 1) \exp(i(0, 1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + \varepsilon \exp(i(1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ &= 2\varepsilon \cos \theta_1 - 2(\omega^{-1} - 1) \cos \theta_2 + 2(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 A_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= -\omega^{-1} \exp(i(0, -1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + 2\omega^{-1}(1 + \varepsilon) - \omega^{-1} \exp(i(0, 1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ &= -2\omega^{-1} \cos \theta_2 + 2\omega^{-1}(1 + \varepsilon) \end{aligned}$$

luego de (4.3.30)

$$\begin{aligned}\lambda(\theta) &= \frac{\varepsilon \cos \theta_1 - (\omega^{-1} - 1)\cos \theta_2 + (\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1)}{-\omega^{-1} \cos \theta_2 + \omega^{-1}(1 + \varepsilon)} \\ &= \frac{\omega \varepsilon \cos \theta_1}{1 + \varepsilon - \cos \theta_2} + 1 - \omega\end{aligned}$$

Ahora haciendo uso de la serie de senos de Fourier usando la ec.(4.3.34)

$$\begin{aligned}\sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} B_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_\alpha \theta_\alpha &= \sum'_{j_1=0}^1 \sum'_{j_2=0}^1 B_l(j_1, j_2) \prod_{\alpha=1}^2 \cos j_\alpha \theta_\alpha \\ &= \underbrace{2^{-2}(2(\varepsilon + 1)(\omega^{-1}))}_{j_2=0 \Rightarrow \beta=2} + \underbrace{2^{-1}(-(\omega^{-1} - 1)\cos \theta_2)}_{j_2=1 \Rightarrow \beta=1} + \underbrace{2^{-1}\varepsilon \cos \theta_1}_{j_2=0 \Rightarrow \beta=1} \\ &= 2^{-1} [(\varepsilon + 1)(\omega^{-1} - 1) - (\omega^{-1} - 1)\cos \theta_2 + \varepsilon \cos \theta_1] \\ &= 2^{-1} [(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1 - \cos \theta_2) + \varepsilon \cos \theta_1] \quad (4.4.8)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum'_{j \in \mathbb{N}_0^d} A_l(j) \prod_{\alpha=1}^d \cos j_\alpha \theta_\alpha &= \sum'_{j_1=0}^1 \sum'_{j_2=0}^1 A_l(j_1, j_2) \prod_{\alpha=1}^2 \cos j_\alpha \theta_\alpha \\ &= \omega^{-1} \underbrace{2^{-2}(2(\varepsilon + 1))}_{j_2=0 \Rightarrow \beta=2} + \underbrace{2^{-1}(-\cos \theta_2)}_{j_2=1 \Rightarrow \beta=1} \\ &= \omega^{-1} 2^{-1} [1 + \varepsilon - \cos \theta_2] \quad (4.4.9)\end{aligned}$$

de la ec. 4.4.8 y la ec. 4.4.9

tenemos en (4.3.34)

$$\begin{aligned}\lambda(\theta) &= \frac{2^{-1} [(\omega^{-1} - 1)(\varepsilon + 1 - \cos \theta_2) + \varepsilon \cos \theta_1]}{\omega^{-1} 2^{-1} [1 + \varepsilon - \cos \theta_2]} \\ &= \frac{\omega \varepsilon \cos \theta_1}{1 + \varepsilon - \cos \theta_2} + 1 - \omega\end{aligned}$$

□

De esto notamos que

$$|\lambda(\pi, 0)| = 1, \quad \text{si } \omega = 1$$

y al parecer tenemos un mal suavizador. Es sorprendente pues que cuando $\varepsilon \downarrow 0$ en (4.4.4) y $\omega = 1$ tenemos $\lambda = 0$, o sea el método alcanzar la solución exacta. Esta aparente contradicción es resuelta cuando se toma en cuenta las condiciones de frontera.

Notar que $\lambda(\theta)$ es real y consideremos el caso cuando $\theta_n \geq 0$ (Ver figura (4.5))

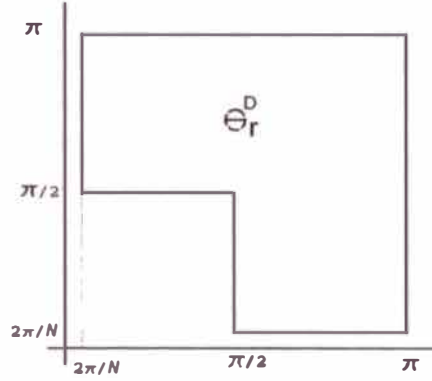


Figura 4.5: Area de Θ_r^D

$$\left[\frac{\partial \lambda}{\partial \theta_1}, \frac{\partial \lambda}{\partial \theta_2} \right] = \left[\frac{-\omega \varepsilon \operatorname{sen} \theta_1}{1 + \varepsilon - \cos \theta_2}, \frac{\omega \varepsilon \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2}{(1 + \varepsilon - \cos \theta_2)^2} \right]. \quad (4.4.10)$$

Ahora, cuando $\theta \in \Theta_r^D$ tenemos que $\lambda(\theta)$ alcanza su máximo en la frontera de Θ_r^D ($\partial \Theta_r^D$) o cuando (4.4.10) se anula, o sea cuando $\theta_1 = 0, \pi$ y $\theta_2 = \pi/2$. Suponiendo que $n_1 = n_2 = n$ definimos $\chi = 2\pi/n \in \partial \Theta_r^D$ luego

$$\rho_D = \max \{ |\lambda(\theta)| : \theta \in \Theta_r^D \} = \max \{ |\lambda(\chi, \pi/2)|, |\lambda(\pi, \chi)| \}.$$

Si $\omega = 1$ tendremos

$$\rho_D = |\lambda(\pi, \chi)| = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon - \cos \chi}.$$

donde $\chi = 2\pi/N$. Como $n \rightarrow \infty$ tenemos que

$$\rho_D \approx (1 + 2\pi^2 h^2 / \varepsilon)^{-1} \quad (4.4.11)$$

así tendremos

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \rho_D = 0.$$

Un mejor suavizador se obtiene variando ω . *Determinaremos ahora el valor óptimo de ω no para ρ_D sino para ρ .* De nuevo el valor máximo de $|\lambda(\theta)|$ se da sobre la frontera.

$$\rho = \max \{ |\lambda(0, \pi/2)|, |\lambda(\pi, 0)| \} = \max \left\{ 1 - \frac{\omega}{1 + \varepsilon}, |1 - 2\omega| \right\}. \quad (4.4.12)$$

Buscamos que $\rho < 1$ entonces $1 - \frac{\omega}{1+\varepsilon} < 1$ y $|1 - 2\omega| < 1$ de ello se tiene que $0 < \omega < 1$.
Encontramos que el valor óptimo de ω que minimizará la ecuación (4.4.12) es dado por

$$\omega = \frac{2 + 2\varepsilon}{3 + 2\varepsilon}. \quad (4.4.13)$$

En este caso tenemos $\rho = \bar{\rho}$. Vemos además que para $0 < \varepsilon \leq 1$ tenemos $2/3 \leq \omega \leq 4/5$.
Así que el valor óptimo de ω es dependiente de ε . De acuerdo a (4.4.13) y (4.4.12) tenemos que

$$\bar{\rho} = \frac{1 + 2\varepsilon}{3 + 2\varepsilon} \quad (4.4.14)$$

De acuerdo a (4.4.13) y eligiendo $\omega = 0,7$ obtenemos

$$\bar{\rho} = \max \left\{ 1 - \frac{0,7}{1 + \varepsilon}; 0,6 \right\} \quad (4.4.15)$$

lo cual muestra que

Observación 4.4.5. *Con Jacobi Lineal tenemos un suavizador aceptable para todo $0 < \varepsilon \leq 1$, con un ω , ε -independiente.*

La ecuación (1.1.5), para el cual el análisis fue hecho, corresponde a $\beta = 0$ en (1.1.4).
Para $\beta = \pi/2$ el método de Jacobi lineal vertical amortiguado no trabaja bien, luego un Jacobi lineal horizontal amortiguado debería ser usado. El caso general puede ser tratado por un Jacobi Alternante: Una lineal vertical y luego un Jacobi horizontal. Cada paso es amortiguada separadamente con un valor ω .

4.4.2. Suavización de Gauss Seidel

Ecuación de difusión Anisotrópica - Gauss Seidel puntual

Iteración de Gauss Seidel Puntual es aplicado a la (1.1.4) con $c = 1$, $s = 0$ corresponde a la separación

$$[A_l] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ -\varepsilon & 2(\varepsilon + 1) & 0 & \\ & & & \\ & & -1 & \end{bmatrix}, \quad [B_l] = [A_l] - [L_l] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 0 & 0 & \varepsilon & \\ & & & \\ & & 0 & \end{bmatrix} \quad (4.4.16)$$

Proposición 4.4.6. *El factor de amplificación es dado por:*

$$\lambda(\theta) = \frac{\varepsilon e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}}{-\varepsilon e^{-i\theta_1} + 2\varepsilon + 2 - e^{-i\theta_2}} \quad (4.4.17)$$

Demostración. Procedemos de manera similar a la proposición 4.4.1. En este caso tenemos que la suposición II de la sección §4.3.8 no es satisfecha por lo que la serie de Fourier de seno no es aplicable.

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 B_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= \varepsilon \exp(i(1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + \exp(i(0, 1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta) &= \sum_{j_1=-1}^1 \sum_{j_2=-1}^1 A_l(j_1, j_2) \exp(i \sum_{\alpha=1}^2 j_\alpha \theta_\alpha) \\ &= -\varepsilon \exp(i(-1, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) - \exp(i(0, -1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + 2(1 + \varepsilon) \exp(i(0, 0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \end{aligned}$$

luego de (4.3.30) obtenemos (4.4.17) □

Proposición 4.4.7. *Para $\varepsilon = 1$ (Ecuación de Laplace) tenemos*

$$\bar{\rho} = |\lambda(\pi/2, \cos^{-1}(4/5))| = \frac{1}{2} \quad (4.4.18)$$

Demostración. Sea $\lambda(\theta) = \frac{N}{D}$ con $N = \varepsilon e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ y $D = -\varepsilon e^{-i\theta_1} + 2\varepsilon + 2 - e^{-i\theta_2}$ luego tenemos que para cualquier ε

$$\begin{aligned} |\lambda(\theta)|^2 &= \frac{N\bar{N}}{D\bar{D}} \\ &= \frac{1 + \varepsilon^2 + 2\varepsilon \cos(\theta_1 - \theta_2)}{5 + 8\varepsilon + 5\varepsilon^2 - 4\varepsilon(1 + \varepsilon)\cos(\theta_1) + 2\varepsilon \cos(\theta_1 - \theta_2) - 4\cos(\theta_2) - 4\varepsilon \cos(\theta_2)} \end{aligned} \quad (4.4.19)$$

para $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned} &= \frac{2(1 + \cos(\theta_1 - \theta_2))}{2(9 - 4\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \theta_2) - 4\cos(\theta_2))} \\ &= \frac{1 + \cos\beta}{9 - 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\beta} \end{aligned}$$

con $\alpha = \theta_1 + \theta_2$ y $\beta = \theta_1 - \theta_2$. Por simetría analizaremos para $\alpha, \beta \geq 0$. Tenemos

$$\frac{\partial |\lambda(\theta)|^2}{\partial \alpha} = \frac{4\operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2})(1 + \cos\beta)}{(9 - 8\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\beta)^2} = 0, \text{ para } \operatorname{sen}(\frac{\alpha}{2})\cos(\frac{\beta}{2}) = 0 \quad (4.4.20)$$

Esto da $\alpha = 0$ ó $\alpha = 2\pi$ ó $\beta = \pi$. Para $\beta = \pi$ tenemos un mínimo: $|\lambda|^2 = 0$. Con $\alpha = 0$ tenemos

$$|\lambda(\theta)|^2 = \frac{\cos^2(\frac{\beta}{2})}{(2 - \cos(\frac{\beta}{2}))^2}$$

que alcanza un máximo para $\beta = 2\pi$, por ejemplo en la frontera $\bar{\Theta}_r$. Con $\alpha = 2\pi$ estamos también la frontera de $\bar{\Theta}_r$. De esta forma, el máximo $|\lambda(\theta)|$ es alcanzado en la frontera de $\bar{\Theta}_r$. Tenemos

$$\left| \lambda\left(\frac{\pi}{2}, \theta_2\right) \right|^2 = \frac{1 + \operatorname{sen}\theta_2}{9 + \operatorname{sen}\theta_2 - 4\operatorname{cos}\theta_2},$$

de ello

$$\frac{\partial |\lambda(\pi/2, \theta_2)|^2}{\partial \theta_2} = \frac{8\operatorname{cos}(\theta_2) - 4(1 + \operatorname{sen}(\theta_2))}{9 - 4\operatorname{cos}(\theta_2) + \operatorname{sen}(\theta_2)} = 0; \quad \text{si} \quad 8\operatorname{cos}(\theta_2) - 4(1 + \operatorname{sen}(\theta_2)) = 0$$

o sea $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$ ó $\theta_2 = \pm\operatorname{cos}^{-1}(4/5)$. El mayor de los máximos es obtenido para $\theta_2 = \pm\operatorname{cos}^{-1}(4/5)$. Para el extremo de $|\lambda(\pi, \theta_2)|$ tenemos análogamente

$$|\lambda(\pi, \theta_2)|^2 = \frac{1 - \operatorname{cos}\theta_2}{13 + 5\operatorname{cos}\theta_2},$$

de ello

$$\frac{\partial |\lambda(\pi, \theta_2)|^2}{\partial \theta_2} = \frac{8\operatorname{sen}(\theta_2)}{(13 - 5\operatorname{cos}(\theta_2))^2} = 0; \quad \text{si} \quad \operatorname{sen}(\theta_2) = 0$$

o sea $\theta_2 = 0$. Puesto que $\lambda(\theta_1, \theta_2) = \lambda(\theta_2, \theta_1)$ no es necesario estudiar $|\lambda(\theta_1, \pi/2)|$ y $|\lambda(\theta_1, \pi)|$. De ello tenemos (4.4.18). \square

Observación 4.4.8. *Notemos que*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda(\pi, 0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - \varepsilon}{1 + 3\varepsilon} = 1$$

por lo que un suavizador de Gauss Seidel puntual no es un suavizador robusto para la ecuación de difusión anisotrópica.

Veamos lo que ocurre con un semi mallado.

Proposición 4.4.9. *El factor de amplificación es*

$$\bar{\rho} \leq \sqrt{\frac{1 + \varepsilon}{5 + \varepsilon}} \quad (4.4.21)$$

para el suavizador definido por (4.4.23) con un semimallado en la dirección y.

Demostración. De (4.4.19) se puede escribir

$$\begin{aligned}
 |\lambda(\theta_1, \theta_2)|^{-2} &= \frac{5 + 8\epsilon + 5\epsilon^2 - 4\epsilon(1 + \epsilon)\cos(\theta_1) + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2) - 4\cos(\theta_2) - 4\epsilon\cos(\theta_2)}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
 &= \frac{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2) + 4(1 + \epsilon)(1 + \epsilon - \epsilon\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2)} \\
 &= 1 + 2(1 + \epsilon)\mu(\theta)
 \end{aligned} \tag{4.4.22}$$

con

$$\mu(\theta) = \frac{2(1 + \epsilon - \epsilon\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

En este caso, es decir de un semimallado, $\bar{\Theta}_{l,r}$ esta dado en la figura (4.2). Tenemos por un lado

$$1 + \epsilon^2 + 2\epsilon\cos(\theta_1 - \theta_2) \leq 1 + \epsilon^2 + 2\epsilon = (1 + \epsilon)^2$$

y por otro $\epsilon - \epsilon\cos(\theta_1) \geq 0$ y sobre $\bar{\Theta}_{l,r}$ tenemos lo siguiente: $\theta_2 \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi]$ así $-1 \leq \cos(\theta_2) \leq 0$. Luego

$$\mu(\theta) \geq \frac{2(1 + \epsilon - \epsilon\cos(\theta_1) - \cos(\theta_2))}{(1 + \epsilon)^2} \geq \frac{2}{(1 + \epsilon)^2}$$

De este modo de (4.4.22)

$$|\lambda(\theta)| \leq \left[1 + \frac{4}{1 + \epsilon} \right]^{-\frac{1}{2}} = \left[\frac{1 + \epsilon}{5 + \epsilon} \right]^{\frac{1}{2}}$$

□

De la proposición anterior podemos observar que:

Observación 4.4.10. Con un semimallado en la dirección x se obtiene de la proposición 4.4.9

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \bar{\rho} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \bar{\rho} = 1$$

Lo que establece que para $\epsilon \ll 1$ se tiene una buena suavización, pero para $\epsilon \gg 1$ uno debería escoger un semimallado en la dirección x . Se podría tener en casos prácticos que $\epsilon \ll 1$ en una parte del dominio y $\epsilon \gg 1$ en otra, luego un semimallado nos da un método robusto con este suavizador si la dirección del semimallados son variados en el dominio.

La figura (4.6) muestra $\lambda(\theta)$ para el caso $\epsilon = 0,1$, para el cual $\bar{\rho} = 0,83$

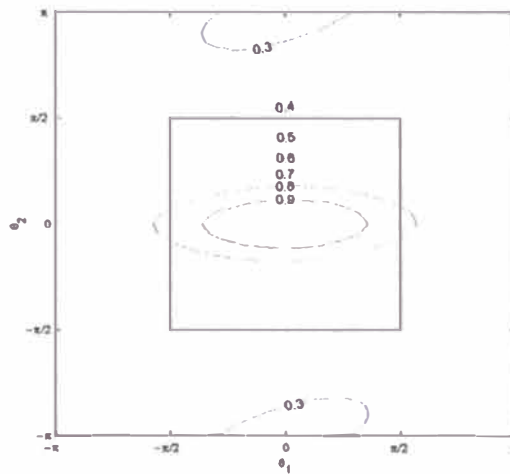


Figura 4.6: Factor de convergencia $\lambda(\theta)$ usando relajación de Gauss Seidel con ordenamiento lexicográfico y $\varepsilon = 0,1$

Ecuación de difusión Anisotrópica - Gauss Seidel Lineal

La iteración Gauss Seidel lineal vertical avanzado para la ecuación de difusión anisotrópica (1.1.5) corresponde a la separación con $c = 1$, $s = 0$ corresponde a la separación

$$[A_l] = \begin{bmatrix} & -1 & \\ -\varepsilon & 2(\varepsilon + 1) & 0 \\ & -1 & \end{bmatrix}, \quad [B_l] = [A_l] - [L_l] = \begin{bmatrix} & 0 & \\ 0 & 0 & \varepsilon \\ & 0 & \end{bmatrix} \quad (4.4.23)$$

Proposición 4.4.11. *El factor de amplificación es dado por:*

$$\lambda(\theta) = \frac{\varepsilon e^{i\theta_1}}{-\varepsilon e^{-i\theta_1} + 2\varepsilon + 2 - 2 \cos(\theta_2)} \quad (4.4.24)$$

Demostración. Como antes tenemos que la suposición II de la sección 4.3.8 no es satisfecha por lo que la serie de Fourier de seno no es aplicable. Luego

$$\begin{aligned} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} B_l(j) \exp(ij\theta) &= \varepsilon \exp(i(1,0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} A_l(j) \exp(ij\theta) &= -\varepsilon \exp(i(-1,0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) - \exp(i(0,-1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) + 2(1 + \varepsilon) \exp(i(0,0) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ &\quad - \exp(i(0,1) \cdot (\theta_1, \theta_2)) \\ &= -\varepsilon e^{-i\theta_1} + 2\varepsilon + 2 - e^{-i\theta_2} - e^{i\theta_2} \end{aligned}$$

luego obtenemos (4.4.24) □

Proposición 4.4.12. *El factor de amplificación de (4.4.24) es*

$$\bar{\rho} = \max \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 \right)^{-1} \right] \quad (4.4.25)$$

y

$$\rho_D = \begin{cases} \epsilon \left[\epsilon^2 + (2 + 2\epsilon - 2 \cos(\varphi))^2 \right]^{-1/2} & , \epsilon < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \epsilon \left[(2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\varphi))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\varphi)^2 \right]^{-1/2} & , \epsilon \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \quad (4.4.26)$$

con $\varphi = 2\pi/N = 2\pi h$ y $h = 1/N$.

Demostración. Similar a la demostración de la proposición 4.4.9 trabajamos con $|\lambda(\theta)|^{-2}$. Sea $\lambda(\theta) = \frac{N}{D}$ con $N = \epsilon e^{i\theta_1}$ y $D = -\epsilon e^{-i\theta_1} + 2\epsilon + 2 - e^{-i\theta_2} - e^{i\theta_2}$ luego tenemos que para cualquier ϵ

$$\begin{aligned} \overline{N\overline{N}} &= \epsilon^2 \\ \overline{D\overline{D}} &= 6 + 8\epsilon + 5\epsilon^2 - 4\epsilon \cos(\theta_1) - 4\epsilon^2 \cos(\theta_1) - 8 \cos(\theta_2) - 8\epsilon \cos(\theta_2) + \\ &\quad 4\epsilon \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + 2 \cos(2\theta_2) \\ &= 6 + 8\epsilon + 5\epsilon^2 - 8(1 + \epsilon) \cos(\theta_2) + 4\epsilon \cos(\theta_1) (-1 - \epsilon + \cos(\theta_2)) + 2 \cos(2\theta_2) \\ &= 4 + 8\epsilon + 4\epsilon^2 - 4\epsilon \cos(\theta_1) - 4\epsilon^2 \cos(\theta_1) + \epsilon^2 \cos(\theta_1)^2 - 8 \cos(\theta_2) - 8\epsilon \cos(\theta_2) + \\ &\quad 4\epsilon \cos(\theta_1) \cos(\theta_2) + 4 \cos(\theta_2)^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\theta_1)^2 \\ &= (2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\theta_1) - 2 \cos(\theta_2))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\theta_1)^2 \end{aligned}$$

de ello tenemos

$$|\lambda(\theta)|^{-2} = \frac{\overline{D\overline{D}}}{\overline{N\overline{N}}} = \frac{(2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\theta_1) - 2 \cos(\theta_2))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\theta_1)^2}{\epsilon^2}$$

El mín $|\lambda(\theta)|^{-2} : \theta \in \Theta_r^D$ es determinado como sigue. Necesitamos considerar sólo $\theta_\alpha \geq 0$.
Tenemos

$$\frac{\partial |\lambda(\theta)|^{-2}}{\partial \theta_2} = \frac{4 [2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\theta_1) - 2 \cos(\theta_2)] \operatorname{sen}(\theta_2)}{\epsilon^2} = 0$$

sólo para $\theta_2 = 0, \pi$. Así el mínimo es alcanzado en la frontera de Θ_r^D . Eligiendo por simplicidad $N_{l,1} = N_{l,2} = N$, y definiendo $\varphi = 2\pi/N$. tenemos entonces que

$$|\lambda(\theta_1, \varphi)|^{-2} \geq \frac{\epsilon^2 + (2 + 2\epsilon - 2 \cos(\varphi))^2}{\epsilon^2} = |\lambda(\pi/2, \varphi)|^{-2}, \quad (4.4.27)$$

$$|\lambda(\varphi, \theta_2)|^{-2} \geq \frac{(2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\varphi))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\varphi)^2}{\epsilon^2} = |\lambda(\varphi, \pi/2)|^{-2}, \quad (4.4.28)$$

$$|\lambda(\pi, \theta_2)|^{-2} = \frac{(2 + 3\epsilon - 2 \cos(\theta_2))^2}{\epsilon^2} \geq \frac{(2 + 3\epsilon - 2 \cos(\varphi))^2}{\epsilon^2} = |\lambda(\pi, \varphi)|^{-2} \quad (4.4.29)$$

$$|\lambda(\theta_1, \pi/2)|^{-2} = \frac{(2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\theta_1))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\theta_1)^2}{\epsilon^2} \geq |\lambda(\varphi, \pi/2)|^{-2}, \quad (4.4.30)$$

$$|\lambda(\pi/2, \theta_2)|^{-2} \geq |\lambda(\pi/2, \varphi)|^{-2}, \quad (4.4.31)$$

$$|\lambda(\theta_1, \pi)|^{-2} \geq \frac{(4 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\varphi))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\varphi)^2}{\epsilon^2} = |\lambda(\varphi, \pi)|^{-2} \quad (4.4.32)$$

Se puede observar numéricamente que para

$$\epsilon < \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{el mínimo es } |\lambda(\pi/2, \varphi)|^{-2}, \text{ entonces de (4.4.27)}$$

$$\rho_D = \epsilon \left[\epsilon^2 + (2 + 2\epsilon - 2 \cos(\varphi))^2 \right]^{-1/2} \quad (4.4.33)$$

$$\epsilon \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{el mínimo es } |\lambda(\varphi, \pi/2)|^{-2}, \text{ entonces de (4.4.28)}$$

$$\rho_D = \epsilon \left[(2 + 2\epsilon - \epsilon \cos(\varphi))^2 + \epsilon^2 \operatorname{sen}(\varphi)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.4.34)$$

Para $\epsilon < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ si $N \rightarrow \infty$, o sea $\varphi \rightarrow 0$, podemos aproximar: $\cos(\varphi) \approx 1 - \frac{\varphi^2}{2}$ y para la ec. (4.4.33) por

$$\rho_D \approx \left[5 + \frac{4\varphi^2}{\epsilon} + \frac{\varphi^4}{\epsilon^2} \right]^{-1/2} = \left[1 + \left(2 + \frac{\varphi^2}{\epsilon} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (4.4.35)$$

y vemos que el comportamiento de ρ_D cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $h = 1/N \rightarrow 0$ depende de $\frac{\varphi^2}{\epsilon} = \frac{4\pi^2 h^2}{\epsilon}$. De otro lado el comportamiento de $|\lambda(\theta)|$ sobre la frontera de $\overline{\Theta}_{l,r}$ se encuentran simplemente dejando $\varphi \rightarrow 0$, o sea, para las cotas inferiores de las ecuaciones (4.4.27)-(4.4.32) son tienen respectivamente

$$|\lambda(\theta)|^{-2} \geq \left\{ 5, \frac{(2 + \epsilon)^2}{\epsilon^2}, 9, \frac{(2 + \epsilon)^2}{\epsilon^2}, 5, \frac{(4 + \epsilon)^2}{\epsilon^2} \right\}$$

de esto tenemos que

$$|\lambda(\theta)| \leq \max \left\{ 5^{-1/2}, \frac{\epsilon}{2 + \epsilon} \right\}$$

luego sigue (4.4.25) □

De la ecuación (4.4.35) conseguimos para $h \rightarrow 0$ con ε fijo $\rho_D \approx \bar{\rho}$. Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ con h fijo obtenemos $\rho_D \approx 0$. Por ejemplo,

$$\text{con } h = \frac{1}{128} \text{ y } \varepsilon = 10^{-6} \text{ tenemos } \rho_D = 0,000414667$$

Observación 4.4.13. Cuando $\varepsilon \gg 1$ tenemos de (4.4.25) y de (4.4.26)

$$\bar{\rho} \approx 1, \quad \rho_D \approx 1$$

por lo que se predice una mala suavización.

Por supuesto que para $\varepsilon \gg 1$ un Gauss Seidel lineal horizontal debería ser usado. Un buen suavizador para un arbitrario ε es un Gauss Seidel lineal alternante. En tal caso tenemos que

$$\lambda(\theta) = \lambda_z(\theta)\lambda_v(\theta),$$

con las subcripciones z y v referido a un Gauss Seidel lineal horizontal y vertical, respectivamente. De este modo

$$\bar{\rho} \leq \bar{\rho}_z \bar{\rho}_v, \quad \rho_D \leq \rho_{Dz} \rho_{Dv}. \quad (4.4.36)$$

Tenemos $\lambda_z((\theta_1, \theta_2); \varepsilon) = \lambda_v((\theta_2, \theta_1); 1/\varepsilon)$. Puesto que $\bar{\Theta}_{l,r}$ es invariante cuando θ_1 y θ_2 son intercambiados tenemos $\bar{\rho}_z(\varepsilon) = \bar{\rho}_v(1/\varepsilon)$, así de la ec.(4.4.25) que

$$\bar{\rho}_z(\varepsilon) = \max \left[\frac{1}{\sqrt{5}}, (2\varepsilon + 1)^{-1} \right]. \quad (4.4.37)$$

Luego tenemos

Proposición 4.4.14. Para un Gauss-Seidel lineal alternante tenemos

$$\begin{aligned} 0 \leq \varepsilon \leq (\sqrt{5} - 1)/2 & : \bar{\rho} \leq 5^{-1/2}(2\varepsilon + 1)^{-1} \\ (\sqrt{5} - 1)/2 < \varepsilon < (\sqrt{5} + 1)/2 & : \bar{\rho} \leq \frac{1}{5} \\ (\sqrt{5} + 1)/2 \leq \varepsilon & : \bar{\rho} \leq 5^{-1/2} \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1 \right)^{-1} \end{aligned} \quad (4.4.38)$$

Observación 4.4.15. Luego tenemos que Gauss-Seidel lineal alternante es robusto para la ecuación de difusión anisotrópica (1.1.5).

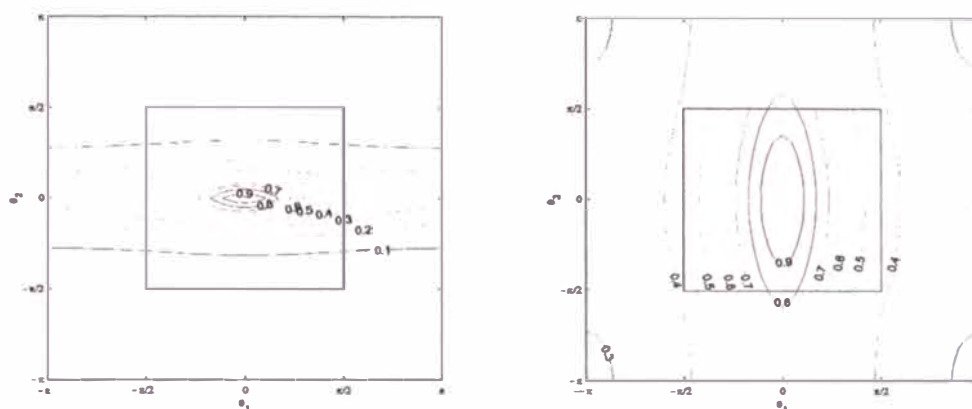


Figura 4.7: Factor de convergencia $\lambda(\theta)$ para la ecuación modelo (1.1.5) usando relajación Gauss Seidel lineal vertical con $\varepsilon = 0,1$ y (4.7(b)) $\varepsilon = 10$ (Ver [10, §4])

Podemos apreciar este comportamiento en las figuras (4.7) mostramos las curvas de nivel del factor de convergencia $\lambda(\theta)$ para $\varepsilon = 0,1$ y $\varepsilon = 10$. De ello debemos considerar usar una relajación Gauss Seidel por línea pero en la dirección X cuando se tiene $\varepsilon = 10$. Observe que cuando $\varepsilon = 10$ tenemos $\bar{\rho} = (1,2)^{-1} = 0,833$.

4.4.3. Suavización de Gauss Seidel Red-Black

El análisis de Fourier del método de suavización Gauss Seidel Zebra y Red-Black, necesitan de un tratamiento especial, porque los modos de Fourier $\psi(\theta)$ como es definido en la sección 4.2 no son invariantes bajo estos métodos iterativos, pero si para ciertos subespacios generados por sus combinaciones lineales.

Matriz de amplificación

Para el caso bidimensional asumiremos que $N_{l,1}$ y $N_{l,2}$ son pares, tenemos entonces

$$\psi_j(\theta) = e^{ij\theta} \quad (4.4.39)$$

con

$$j = (j_1, j_2), \quad j_\alpha = 0, 1, 2, \dots, N_{l,\alpha} - 1 \quad (4.4.40)$$

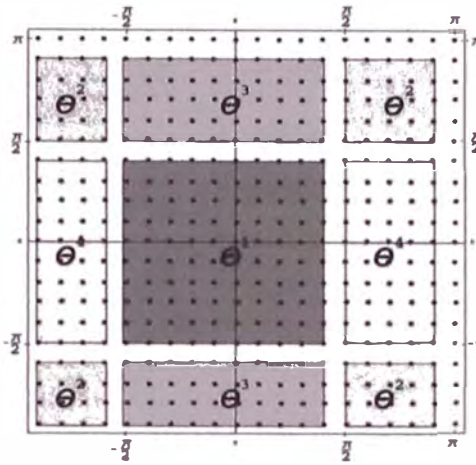


Figura 4.8: Regiones de $\theta^1, \theta^2, \theta^3, \theta^4$ donde $\bullet \in \Theta$

y

$$\theta \in \Theta = \{(\theta_1, \theta_2), \theta_\alpha = 2\pi k_\alpha / N_{l,\alpha}, k_\alpha = -m_\alpha, -m_\alpha + 1, \dots, m_\alpha\} \quad (4.4.41)$$

donde $m_\alpha = N_{l,\alpha}/2 - 1$.

Dividimos Θ en cuatro conjuntos excluyentes definidos por $\theta^1, \theta^2, \theta^3$ y θ^4 (Ver la figura (4.8)) como

$$\begin{aligned} \theta^1 \in \Theta_s &\equiv \Theta \cap [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]^2 & \theta^2 &= \theta^1 - \begin{pmatrix} \text{sign}(\theta_1^1)\pi \\ \text{sign}(\theta_2^1)\pi \end{pmatrix} \\ \theta^3 &= \theta^1 - \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sign}(\theta_2^1)\pi \end{pmatrix} & \theta^4 &= \theta^1 - \begin{pmatrix} \text{sign}(\theta_1^1)\pi \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.42)$$

donde

$$\text{sign}(\theta) = \begin{cases} -1 & \theta \leq 0 \\ 1 & \theta > 0 \end{cases}$$

Note que Θ_s casi coincide con el conjunto de número de ondas suaves Θ , definido por (4.3.18) y además los θ^s para $s = 1, 2, 3, 4$ generan los cuatro subespacios invariantes.

Observación 4.4.16. Tenemos que $\psi_j(\theta) = e^{ij\theta} = e^{ij_1\theta_1} e^{ij_2\theta_2}$. De otro lado se cumple para todo $\theta' \in \mathbb{R}^2$ podemos tener $\theta \in [-\pi, \pi]^2$ tal que $\theta = \theta' \text{ mod } 2\pi$ con

$$\psi_j(\theta) = e^{ij\theta} = e^{ij(\theta' + 2m\pi)} = e^{ij\theta'} e^{2ijm\pi} = e^{ij\theta'} = \psi_j(\theta')$$

Veremos que el $Span \{ \psi(\theta^1), \psi(\theta^2), \psi(\theta^3), \psi(\theta^4) \}$ es dejado invariante por los métodos considerados en esta sección.

Sea

$$\Psi(\theta) = \begin{pmatrix} \psi(\theta^1) \\ \psi(\theta^2) \\ \psi(\theta^3) \\ \psi(\theta^4) \end{pmatrix}.$$

La representación de Fourier de una función malla periódica arbitraria (4.2.15) puede ser escrito como

$$u_j = \sum_{\theta \in \Theta_j} c_\theta^T \Psi_j(\theta) \quad (4.4.43)$$

con c_θ un vector de dimensión 4. Si ahora tenemos un error antes de la suavización

$$\varepsilon^0 = c_\theta^T \Psi(\theta), \quad (4.4.44)$$

entonces luego de la suavización estará dado por

$$\varepsilon^1 = (\Lambda(\theta)c_\theta)^T \Psi(\theta), \quad (4.4.45)$$

con $\Lambda(\theta)$ una matriz de 4×4 , llamada **matriz de amplificación**. Si se usa una relajación SOR, entonces

$$\Lambda(\theta) \equiv \omega \Lambda(\theta) + (1 - \omega)I \quad (4.4.46)$$

donde ω es una parámetro de amortiguamiento de relajación e I es la matriz identidad. La matriz de amplificación $\Lambda(\theta)$ puede ser determinado según los siguientes pasos:

1. Escribir la ecuación para el error de un paso (color) de una iteración completa para el suavizador.
2. Combinar la ecuación del error para ese paso en una expresión.
3. Evaluar la expresión combinada para cada uno de los subespacios invariantes.

4. Escribir la ecuación que exprese el coeficiente de Fourier del n -ésimo paso c_θ^n en términos del coeficiente de Fourier inicial c_θ^0 , que es relacionado con el paso de la matriz de amplificación: $c_\theta^n = \Lambda(\theta)c_\theta^0$.
5. Hacer lo anterior para cada paso de una iteración de suavización completa.
6. Multiplicar todas las matrices de amplificación de cada paso para conseguir la matriz de amplificación del suavizador, donde se expresará los coeficientes de Fourier c_θ^1 en términos de c_θ^0 : $c_\theta^1 = \Lambda(\theta)c_\theta^0$.

El factor de suavización

El conjunto de números de onda Θ_s , ha sido ya definido por (4.3.18). Comparando con Θ_f definido en (4.4.42) se tiene que los modos de Fourier oscilatorios

$$\psi(\theta^2), \psi(\theta^3), \psi(\theta^4),$$

mientras que el modo de Fourier suave es representado por

$$\psi(\theta^1), \text{ excepto cuando } \theta_1^1 = -\pi/2 \text{ ó } \theta_2^1 = -\pi/2,$$

tal como se puede observar en la figura (4.8). Usamos el operador proyección sobre el espacio generado por los modos de Fourier oscilatorio para poder asumir la eliminación de los modos suaves. Luego éste puede ser representado por la siguiente matriz diagonal

$$Q(\theta) = \begin{pmatrix} \delta(\theta) & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4.4.47)$$

con

$$\delta(\theta) = \begin{cases} 1 & \theta_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ ó } \theta_2 = -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.4.48)$$

Luego damos una nueva definición de factor de suavización de Fourier

$$\rho = \max \{ \chi(Q(\theta)\Lambda(\theta)) : \theta \in \Theta_3 \} \quad (4.4.49)$$

con χ el radio espectral.

Para problemas con condiciones de frontera de Dirichlet, podemos hacer como antes, pero los número de onda del tipo $(0, \theta_2^s)$ y $(\theta_1^s, 0)$, $s = 1, 3, 4$ no son tomados en cuenta (notamos que $\theta_\alpha^2 = 0$ no puede suceder), o sea los elementos correspondientes de c_θ son reemplazados por cero. Esto puede ser implementado reemplazado $Q\Lambda$ por $PQ\Lambda$ con

$$P(\theta) = \begin{pmatrix} p_1(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_4(\theta) \end{pmatrix} \quad (4.4.50)$$

donde

$$p_1(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta_1 = 0 \text{ y/o } \theta_2 = 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad p_3(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta_1 = 0 \text{ (así } \theta_1^3 = 0) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$p_4(\theta) = \begin{cases} 0 & \theta_2 = 0 \text{ (así } \theta_2^4 = 0) \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La definición de factor de suavización en el caso de condiciones de frontera de Dirichlet puede ahora ser dado como :

$$\rho_D = \max \{ \chi(P(\theta)Q(\theta)\Lambda(\theta)) : \theta \in \Theta_3 \}. \quad (4.4.51)$$

Análogamente a (4.3.21) un factor de suavización independiente del grosor de malla $\bar{\rho}$ es definido como

$$\bar{\rho} = \sup \{ \chi(Q(\theta)\Lambda(\theta)) : \theta \in \bar{\Theta}_{l,s} \} \quad (4.4.52)$$

con $\bar{\Theta}_{l,s} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)^2$.

Antes de continuar , necesitamos del siguiente teorema.

Teorema 4.4.17. Para cualquier $\theta \in [-\pi, \pi]$ y $j \in \mathbb{Z}^+$,

$$e^{j(\theta-\pi)} = \begin{cases} e^{ij\theta} & , j \text{ par} \\ -e^{ij\theta} & , j \text{ impar} \end{cases} \quad (4.4.53)$$

Demostración.

$$e^{ij(\theta-\pi)} = \cos [j(\theta - \pi)] + i \operatorname{sen} [j(\theta - \pi)]. \quad (4.4.54)$$

Si k es par, entonces

$$\begin{aligned} e^{ij(\theta-\pi)} &= [\cos j(\theta) \dot{1} + \operatorname{sen}(j\theta) \dot{0}] + i [\operatorname{sen} j(\theta) \dot{1} - \cos(j\theta) \dot{0}] \\ &= \cos j(\theta) + i \operatorname{sen}(j\theta) \\ &= e^{ij\theta}. \end{aligned}$$

Si k es impar, entonces

$$\begin{aligned} e^{ij(\theta-\pi)} &= [\cos j(\theta) \dot{-1} + \operatorname{sen}(j\theta) \dot{0}] + i [\operatorname{sen} j(\theta) \dot{-1} - \cos(j\theta) \dot{0}] \\ &= -\cos j(\theta) - i \operatorname{sen}(j\theta) \\ &= -e^{ij\theta}. \end{aligned}$$

□

Gauss Seidel Red-Black

Sea L_l tal que tiene una notación plantilla de cinco puntos dada por

$$[L_l] = \begin{bmatrix} & N & & & \\ W & C & E & & \\ & S & & & \end{bmatrix}$$

Definamos los puntos (j_1, j_2) con $j_1 + j_2$ pares para los puntos rojos y los restantes para los negros. Estudiaremos Gauss-Seidel Red-Black con amortiguamiento. Sea ε^0 el error inicial, $\varepsilon^{1/3}$ el error luego de un paso en los puntos rojos, $\varepsilon^{2/3}$ el error luego del paso en los puntos negros, y ε^1 el error luego del amortiguamiento con el parámetro ω . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3} &= -(S\varepsilon_{j-e_2}^0 + W\varepsilon_{j-e_1}^0 + E\varepsilon_{j+e_1}^0 + N\varepsilon_{j+e_2}^0) / C, & j_1 + j_2 \text{ par} \\ \varepsilon_j^{1/3} &= \varepsilon_j^0, & j_1 + j_2 \text{ impar} \end{aligned} \quad (4.4.55)$$

La relación entre $\varepsilon^{2/3}$ y $\varepsilon^{1/3}$ es obtenido de (4.4.55) intercambiando los pares con los impares, es decir

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{2/3} &= -\left(S\varepsilon_{j-e_2}^{1/3} + W\varepsilon_{j-e_1}^{1/3} + E\varepsilon_{j+e_1}^{1/3} + N\varepsilon_{j+e_2}^{1/3}\right)/C, & j_1 + j_2 \text{ impar} \\ \varepsilon_j^{2/3} &= \varepsilon_j^{1/3}, & j_1 + j_2 \text{ par} \end{aligned} \quad (4.4.56)$$

El error final ε^1 es obtenido por

$$\varepsilon_j^1 = \omega\varepsilon_j^{2/3} + (1 - \omega)\varepsilon_j^0. \quad (4.4.57)$$

Sea la representación de Fourier de ε^α , $\alpha = 0, 1/3, 2/3, 1$ es dado por

$$\varepsilon^\alpha = \sum_{\theta \in \Theta_j} c_\theta^T \Psi_j(\theta).$$

Si $\varepsilon_j^0 = \psi_j(\theta^s)$, $s = 1, 2, 3$ o 4 , entonces de (4.4.39) tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3} &= -\left(S\psi_{j-e_2}(\theta^s) + W\psi_{j-e_1}(\theta^s) + E\psi_{j+e_1}(\theta^s) + N\psi_{j+e_2}(\theta^s)\right)/C, & j_1 + j_2 \text{ par} \\ &= -\left(S e^{-i\theta_2^s} \psi_j(\theta^s) + W e^{-i\theta_1^s} \psi_j(\theta^s) + E e^{i\theta_1^s} \psi_j(\theta^s) + N e^{i\theta_2^s} \psi_j(\theta^s)\right)/C \\ &= -\left(S e^{-i\theta_2^s} + W e^{-i\theta_1^s} + E e^{i\theta_1^s} + N e^{i\theta_2^s}\right) \psi_j(\theta^s)/C \end{aligned}$$

$$\varepsilon_j^{1/3} = \begin{cases} \mu(\theta^s) \psi_j(\theta^s), & j_1 + j_2 \text{ par} \\ \psi_j(\theta^s), & j_1 + j_2 \text{ impar} \end{cases} \quad (4.4.58)$$

con

$$\mu(\theta) = -\left(S e^{-i\theta_2} + W e^{-i\theta_1} + E e^{i\theta_1} + N e^{i\theta_2}\right)/C. \quad (4.4.59)$$

Deseamos combinar la expresión para los puntos rojos y negros de la ecuación (4.4.55). nosotros ya tenemos $\psi_j(\theta^1)$, pero necesitamos añadir uno o más de otros sub-espacio para crear una combinación lineal que nos produzca una expresión simple. Si tomamos $\theta - \pi$ para todos los ángulos cuyos índices son están involucrados en el diseño del modelos coloreado (Red- Black, Cuatro colores, zebra line, etc.), j_1, j_2 en este caso, conseguimos un sub-espacio adicional que necesitamos para una combinación lineal. La expresión simple de la combinación lineal es:

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta^s) = A e^{j\theta^s} + B e^{j(\theta^s - \pi)} = A e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + B e^{i(j_1(\theta_1^s - \pi) + j_2(\theta_2^s - \pi))}. \quad (4.4.60)$$

Usando el Teorema 4.4.17 podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A + B &= \mu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_1 + j_2 \text{ par} \\ A - B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_1 + j_2 \text{ impar} \end{aligned}$$

de ello da

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(\mu(\theta) - 1), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + \frac{1}{2}(\mu(\theta^s) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^s - \pi) + j_2(\theta_2^s - \pi))}. \quad (4.4.61)$$

Definamos

$$\mu_1 = \mu(\theta), \quad \mu_2 = (S e^{-i\theta_2} - W e^{-i\theta_1} - E e^{i\theta_1} + N e^{i\theta_2})/C$$

Ahora evaluamos el error del primer paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes (Para ello basta tomar el caso particular cuando $\theta^1 \in [-\frac{\pi}{2}, 0]^2$ de tal forma que $\text{sign}(\theta_1^1) = -1$ y $\text{sign}(\theta_2^1) = -1$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^1))e^{i[j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1]} + \frac{1}{2}(\mu(\theta^1) - 1)e^{i[j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2(\theta_2^1 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_1)\psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2}(\mu_1 - 1)\psi_j(\theta^2) \end{aligned} \quad (4.4.62)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^2))e^{i[j_1\theta_1^2 + j_2\theta_2^2]} + \frac{1}{2}(\mu(\theta^2) - 1)e^{i[j_1(\theta_1^2 - \pi) + j_2(\theta_2^2 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mu_1)\psi_j(\theta^2) - \frac{1}{2}(\mu_1 + 1)\psi_j(\theta^1), \end{aligned} \quad (4.4.63)$$

con $\theta^2 = (\theta_1^1 + \pi, \theta_2^1 + \pi)$ y puesto que

$$\mu(\theta^2) = -\frac{S e^{-i\theta_2^1} + W e^{-i\theta_1^1} + E e^{i\theta_1^1} + N e^{i\theta_2^1}}{C} = -\frac{-S e^{-i\theta_2^1} - W e^{-i\theta_1^1} - E e^{i\theta_1^1} - g e^{i\theta_2^1}}{C} = -\mu(\theta^1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^3))e^{i[j_1\theta_1^3 + j_2\theta_2^3]} + \frac{1}{2}(\mu(\theta^3) - 1)e^{i[j_1(\theta_1^3 - \pi) + j_2(\theta_2^3 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_2)\psi_j(\theta^3) + \frac{1}{2}(\mu_2 - 1)\psi_j(\theta^4), \end{aligned} \quad (4.4.64)$$

con $\theta^3 = (\theta_1^1, \theta_2^1 + \pi)$ y puesto que

$$\mu(\theta^3) = -\frac{S e^{-i\theta_2^3} + W e^{-i\theta_1^3} + E e^{i\theta_1^3} + N e^{i\theta_2^3}}{C} = -\frac{-S e^{-i\theta_2^1} + W e^{-i\theta_1^1} + E e^{i\theta_1^1} - g e^{i\theta_2^1}}{C} = \mu_2(\theta^1)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2} (1 + \mu(\theta^4)) e^{i[j_1\theta_1^4 + j_2\theta_2^4]} + \frac{1}{2} (\mu(\theta^4) - 1) e^{i[j_1(\theta_1^4 - \pi) + j_2(\theta_2^4 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \mu_2) \psi_j(\theta^4) - \frac{1}{2} (\mu_2 + 1) \psi_j(\theta^3), \end{aligned} \quad (4.4.65)$$

con $\theta^4 = (\theta_1^1 + \pi, \theta_2^1)$ y puesto que

$$\mu(\theta^4) = -\frac{S e^{-i\theta_2^4} + W e^{-i\theta_1^4} + E e^{i\theta_1^4} + N e^{i\theta_2^4}}{C} = -\frac{S e^{-i\theta_2^1} - W e^{-i\theta_1^1} - E e^{i\theta_1^1} + N e^{i\theta_2^1}}{C} = -\mu_2(\theta^1)$$

Ahora podemos expresar el coeficiente $c_\theta^{1/3}$, para el primer paso intermedio en términos del coeficientes de Fourier. Esto es realizado uniendo los coeficientes correspondientes a cada uno de los cuatro subespacios invariantes conseguidos c_θ^0

$$c_\theta^{1/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 - \mu_1 & -1 - \mu_1 & 0 & 0 \\ -1 + \mu_1 & 1 - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu_2 & -1 - \mu_2 \\ 0 & 0 & -1 + \mu_2 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix} c_\theta^0, \quad \theta \in \Theta_s. \quad (4.4.66)$$

Si los puntos son los negros el tratamiento es similar.

$$\varepsilon_j^{2/3} = \begin{cases} \mu(\theta^s) \psi_j(\theta^s), & j_1 + j_2 \text{ impar} \\ \psi_j(\theta^s), & j_1 + j_2 \text{ par} \end{cases} \quad (4.4.67)$$

con μ definido en (4.4.59) La ecuación puede ser escrita como una combinación lineal, como fue conseguido para el primer paso intermedio, o sea:

$$\varepsilon_j^{2/3}(\theta^s) = A e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + B e^{i(j_1(\theta_1^s - \pi) + j_2(\theta_2^s - \pi))}. \quad (4.4.68)$$

Usando el Teorema 4.4.1 podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A - B &= \mu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_1 + j_2 \text{ impar} \\ A + B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_1 + j_2 \text{ par} \end{aligned}$$

lo que da

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta)), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{2/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^s))e^{i(j_1(\theta_1^s - \pi) + j_2(\theta_2^s - \pi))}. \quad (4.4.69)$$

Puesto que $\mu(\theta^s)$ para $s = 1, 2, 3, 4$ son los mismo como para el primer paso intermedio, tenemos los mismo μ_1 y μ_2 . Ahora procedemos a evaluar el error del segundo paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{2/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^1))e^{i[j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1]} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^1))e^{i[j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2(\theta_2^1 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_1)\psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2}(1 - \mu_1)\psi_j(\theta^2) \end{aligned} \quad (4.4.70)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{2/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^2))e^{i[j_1\theta_1^2 + j_2\theta_2^2]} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^2))e^{i[j_1(\theta_1^2 - \pi) + j_2(\theta_2^2 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mu_1)\psi_j(\theta^2) + \frac{1}{2}(\mu_1 + 1)\psi_j(\theta^1), \end{aligned} \quad (4.4.71)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{2/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^3))e^{i[j_1\theta_1^3 + j_2\theta_2^3]} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^3))e^{i[j_1(\theta_1^3 - \pi) + j_2(\theta_2^3 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_2)\psi_j(\theta^3) + \frac{1}{2}(1 - \mu_2)\psi_j(\theta^4), \end{aligned} \quad (4.4.72)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{2/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^4))e^{i[j_1\theta_1^4 + j_2\theta_2^4]} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^4))e^{i[j_1(\theta_1^4 - \pi) + j_2(\theta_2^4 - \pi)]} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mu_2)\psi_j(\theta^4) - \frac{1}{2}(\mu_2 + 1)\psi_j(\theta^3), \end{aligned} \quad (4.4.73)$$

El coeficiente de fourier $c_\theta^{2/3}$ en términos de $c_\theta^{1/3}$ es

$$c_\theta^{2/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & 1 + \mu_1 & 0 & 0 \\ 1 - \mu_1 & 1 - \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \mu_2 & 1 + \mu_2 \\ 0 & 0 & 1 - \mu_2 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix} c_\theta^{1/3}, \quad \theta \in \Theta_s. \quad (4.4.74)$$

Finalmente, podemos expresar $c_\theta^{2/3}$ en términos de c_θ^0 por substitución de $c_\theta^{1/3}$ en la ecuación (4.4.74) para conseguir la matriz de amplificación de Gauss Seidel Rojo-Negro $\Lambda(\theta)$ la cual es dada por la siguiente relación:

$$\Lambda(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1(1 - \mu_1) & -\mu_1(1 + \mu_1) & 0 & 0 \\ \mu_1(1 - \mu_1) & \mu_1(-1 + \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2(1 + \mu_2) & -\mu_2(1 + \mu_2) \\ 0 & 0 & \mu_2(1 - \mu_2) & \mu_2(-1 + \mu_2) \end{bmatrix}. \quad (4.4.75)$$

Incorporando el paso de amortiguamiento tenemos:

$$c_\theta^1 = [\omega\Lambda(\theta) + (1 - \omega)I] c_\theta^0. \quad (4.4.76)$$

Luego

$$P(\theta)Q(\theta)\Lambda(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1\delta\mu_1(1 - \mu_1) & -p_1\delta\mu_1(1 + \mu_1) & 0 & 0 \\ \mu_1(1 - \mu_1) & \mu_1(-1 + \mu_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_3\mu_2(1 + \mu_2) & -p_3\mu_2(1 + \mu_2) \\ 0 & 0 & p_4\mu_2(1 - \mu_2) & p_4\mu_2(-1 + \mu_2) \end{bmatrix} \quad (4.4.77)$$

Los valores propios de $PQ\Lambda$ son

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= 0 \\ \lambda_2(\theta) &= \frac{1}{2} [p_1\mu_1\delta(1 + \mu_1) + \mu_1(\mu_1 - 1)], \\ \lambda_3(\theta) &= 0 \\ \lambda_4(\theta) &= \frac{1}{2}\mu_2 [p_3 - p_4 + \mu_2(p_3 + p_4)] \end{aligned} \quad (4.4.78)$$

y los dos tipos de factor de suavización de Fourier son

$$\rho, \rho_D = \max \{ |\omega\lambda_2(\theta) + 1 - \omega|, |\omega\lambda_4(\theta) + 1 - \omega| : \theta \in \Theta_s \} \quad (4.4.79)$$

donde $p_1 = p_3 = p_4 = 1$ en (4.4.78) da ρ , y escogiendo p_1, p_3, p_4 como fue definido antes de la ecuación (4.4.50) da ρ_D en (0, 0).

Observación 4.4.18. Con $\omega = 1$ tenemos $\bar{\rho} = \frac{1}{4}$ para la ecuación de Laplace [12]. Esto es mejor que Gauss Seidel Lexicográfico, para el cual $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$ (§4.4.2,(4.4.18)). Es más Gauss Seidel Red-Black se presta bien para la computación paralela y vectorizable ([17, p. 152]).

En el cuadro (4.1) se aprecia la proximidad entre ρ y ρ_D y la mínima diferencia entre los valores $\omega = 0,7$ y $\omega = 1,0$. Se muestra que Gauss Seidel Red Black no es robusto para problemas anisotrópicos.

ε	$\beta = 0^\circ$		
	$\omega = 1,0$		$\omega = 0,7$
	ρ	ρ_D	ρ
1000	0.99800	0.98981	0.99860
100	0.98033	0.97088	0.98621
10	0.82645	0.81851	0.87851
1	0.25	0.24760	0.475
0.1	0.82645	0.81852	0.87851
0.01	0.98030	0.97088	0.98621
0.001	0.99800	0.98981	0.99860
0.0001	0.9998	0.99249	0.99998

Cuadro 4.1: Factor de Suavización ρ y ρ_D con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica con $\beta = 0$ discretizada de acuerdo a (1.2.17); $N = 64$ con ($\omega = 0,7$) y sin amortiguamiento

En el cuadro (4.3) se ha variado el ángulo de rotación β y se ha discretizado según (1.2.19), viéndose que a medida que el término mixto es más significativo el suavizador tiene un mejor factor de suavización.

4.4.4. Suavización de Gauss-Seidel Zebra

Sea L_l tal que tiene una notación plantilla de nueve puntos dada por

$$[L_l] = \begin{bmatrix} NW & N & NE \\ W & C & E \\ SW & S & SE \end{bmatrix} \quad (4.4.80)$$

$\omega = 0,7$			
ε	(1.2.17)	β	(1.2.19)
	ρ		ρ
1000	0.610904	45	0.475
100	0.609047	45	0.475
10	0.591363	45	0.475
1	0.475	cualquiera	0.475
0.1	0.316568	45	0.475
0.01	0.300264	45	0.475
0.001	0.300003	45	0.475
0.0001	0.3	45	0.475

Cuadro 4.2: Factor de Suavización ρ con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica rotada con $\beta = 45^\circ$ discretizada de acuerdo a (1.2.17) y (1.2.19); $N = 64$

Relajación Gauss Seidel X-Linea

Considerando una suavización zebra horizontal con amortiguamiento. Definamos los puntos (j_1, j_2) con j_2 par para los puntos rojos y los puntos restantes negros. Sea ε^0 el error inicial, $\varepsilon^{1/3}$ el error luego de un paso en los puntos rojos, $\varepsilon^{2/3}$ el error luego del paso en los puntos negros, y ε^1 el error luego del amortiguamiento con el parámetro ω . Entonces el primer paso intermedio es

$$\begin{aligned}
 W\varepsilon_{j-e_1}^{1/3} + C\varepsilon_j^{1/3} + E\varepsilon_{j+e_1}^{1/3} &= -\left(SW\varepsilon_{j-e_1-e_2}^0 + S\varepsilon_{j-e_2}^0 + SE\varepsilon_{j+e_1-e_2}^0 + NW\varepsilon_{j-e_1+e_2}^0 + N\varepsilon_{j+e_2}^0 + NE\varepsilon_{j+e_1+e_2}^0\right) \\
 \varepsilon_j^{1/3} &= \varepsilon_j^0,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.81}$$

donde $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. El segundo paso intermedio será:

$$\begin{aligned}
 W\varepsilon_{j-e_1}^{1/3} + C\varepsilon_j^{1/3} + E\varepsilon_{j+e_1}^{1/3} &= -\left(SW\varepsilon_{j-e_1-e_2}^0 + S\varepsilon_{j-e_2}^0 + SE\varepsilon_{j+e_1-e_2}^0 + NW\varepsilon_{j-e_1+e_2}^0 + N\varepsilon_{j+e_2}^0 + NE\varepsilon_{j+e_1+e_2}^0\right) \\
 \varepsilon_j^{1/3} &= \varepsilon_j^0,
 \end{aligned}
 \tag{4.4.82}$$

ε	$\rho \quad \omega = 0,7 \quad \text{y} \quad (1.2.19)$			
	0°	15°	30°	45°
1	0.25	0.475	0.475	0.475
0.1	0.826446	0.8108	0.647469	0.475
0.01	0.980296	0.8982	0.688569	0.475
0.001	0.998003	0.90822	0.69322	0.475
0.0001	0.9998	0.90924	0.69369	0.475

Cuadro 4.3: Factor de Suavización ρ con Gauss Seidel Red Black para la ecuación difusión anisotrópica rotada variando β discretizada de acuerdo a (1.2.19); $N = 64$

Sea la representación de Fourier de ε^α , $\alpha = 0, 1/3, 2/3, 1$ es dado por

$$\varepsilon^\alpha = \sum_{\theta \in \Theta_j} c_\theta^T \Psi_j(\theta).$$

Si $\varepsilon_j^0 = \psi_j(\theta^s)$, $s = 1, 2, 3$ o 4 , entonces tenemos de (4.4.81) con j_2 par ($T1 = T2$)

$$\begin{aligned} T1 &= W\varepsilon_{j-e_1}^{1/3} + C\varepsilon_j^{1/3} + E\varepsilon_{j+e_1}^{1/3} \\ &= W\varepsilon_j^{1/3} e^{-i\theta_1} + C\varepsilon_j^{1/3} + E\varepsilon_j^{1/3} e^{-i\theta_1} \\ &= \varepsilon_j^{1/3} (W e^{-i\theta_1} + C + E e^{-i\theta_1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T2 &= -(SW\varepsilon_{j-e_1-e_2}^0 + S\varepsilon_{j-e_2}^0 + SE\varepsilon_{j+e_1-e_2}^0 + NW\varepsilon_{j-e_1+e_2}^0 + N\varepsilon_{j+e_2}^0 + NE\varepsilon_{j+e_1+e_2}^0) \\ &= -(SW\varepsilon_j^0 e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + S\varepsilon_j^0 e^{-i\theta_2} + SE\varepsilon_j^0 e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW\varepsilon_j^0 e^{i(-\theta_1+\theta_2)} + N\varepsilon_j^0 e^{i\theta_2} + NE\varepsilon_j^0 e^{i(\theta_1+\theta_2)}) \\ &= -\varepsilon_j^0 (SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + S e^{-i\theta_2} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(-\theta_1+\theta_2)} + N e^{i\theta_2} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2)}) \end{aligned}$$

de $T1 = T2$ tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3} = -\varepsilon_j^0 \left(\frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + S e^{-i\theta_2} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} + N e^{i\theta_2} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{W e^{-i\theta_1} + C + E e^{i\theta_1}} \right)$$

y finalmente conseguimos

$$\varepsilon_j^{1/3} = \begin{cases} \mu(\theta^s) \psi_j(\theta^s), & j_2 \text{ par} \\ \psi_j(\theta^s), & j_2 \text{ impar} \end{cases} \quad (4.4.83)$$

con

$$\mu(\theta) = -\frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + S e^{-i\theta_2} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} + N e^{i\theta_2} + p e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{W e^{-i\theta_1} + C + E e^{i\theta_1}}. \quad (4.4.84)$$

Para hallar la matriz de amplificación procedemos de manera similar a (4.4.61). Tratemos de combinar la expresión para los puntos que corresponden a las filas horizontales pares (j_2 par) y las de filas impares (j_2 impar). Un sub espacio invariante a considerar es el siguiente: $\text{span} \{ \psi_j(\theta), \psi_j^1(\theta) \}$ con

$$\psi_j^1(\theta) = (-1)^{j_2} \psi_j(\theta) = \psi_j(\theta) \cos j_2 \pi = \psi_j(\theta) e^{-i j_2 \pi} = e^{i(j_1 \theta_1 + j_2(\theta_2 - \pi))}, \quad (4.4.85)$$

invariante bajo la suavización zebra horizontal. Una expresión simple de la combinación lineal es:

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta) = A \psi_j(\theta) + B \psi_j^1(\theta) = A e^{i(j_1 \theta_1 + j_2 \theta_2)} + B e^{i(j_1 \theta_1 + j_2(\theta_2 - \pi))}. \quad (4.4.86)$$

Usando el Teorema 4.4.17, la primera parte de (4.4.83) y (4.4.86) podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A + B &= \mu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_2 \text{ par} \\ A - B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_2 \text{ impar} \end{aligned}$$

de ello tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(\mu(\theta) - 1), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^s)) e^{i(j_1 \theta_1^s + j_2 \theta_2^s)} + \frac{1}{2}(\mu(\theta^s) - 1) e^{i(j_1 \theta_1 + j_2(\theta_2 - \pi))}. \quad (4.4.87)$$

Definamos

$$\mu_1 = \mu(\theta),$$

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \mu(\theta_1 - \pi, \theta_2 - \pi) = \mu(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi) \\ &= \frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2-2\pi)} + S e^{-i(\theta_2-\pi)} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} + N e^{i(\theta_2-\pi)} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2-2\pi)}}{W e^{-i(\theta_1-\pi)} + C + E e^{i(\theta_1-\pi)}} \\ &= \frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} - S e^{-i\theta_2} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} - N e^{i\theta_2} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{-W e^{-i\theta_1} + C - E e^{i\theta_1}}. \end{aligned}$$

Ahora evaluamos el error del primer paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes (Para ello basta tomar el caso particular cuando $\theta^1 \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$ de tal forma que $\text{sign}(\theta_1^1) = 1$ y $\text{sign}(\theta_2^1) = 1$)

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2} (1 + \mu(\theta^1)) e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1)} + \frac{1}{2} (\mu(\theta^1) - 1) e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2(\theta_2^1 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \mu_1) \psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2} (\mu_1 - 1) \psi_j(\theta^3)\end{aligned}\quad (4.4.88)$$

donde

$$e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2(\theta_2^1 - \pi))} = e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1)} e^{-ij_2\pi} = e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1)} e^{-ij_2 \text{sign}(\theta_2^1)\pi} = e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2(\theta_2^1 - \text{sign}(\theta_2^1)\pi))} = \psi_j(\theta^3)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2} (1 + \mu(\theta^2)) e^{i(j_1\theta_1^2 + j_2\theta_2^2)} + \frac{1}{2} (\mu(\theta^2) - 1) e^{i(j_1\theta_1^2 + j_2(\theta_2^2 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2} (1 + \mu_2) \psi_j(\theta^2) + \frac{1}{2} (\mu_2 - 1) \psi_j(\theta^4)\end{aligned}\quad (4.4.89)$$

donde $\mu(\theta^2) = \mu_2$ y $e^{i(j_1\theta_2^2 + j_2(\theta_2^2 - \pi))} = e^{i(j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2(\theta_2^1 - \pi - \pi))} = e^{i(j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2\theta_2^1)} = \psi_j(\theta^4)$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2} (1 + \mu(\theta^3)) e^{i(j_1\theta_1^3 + j_2\theta_2^3)} + \frac{1}{2} (\mu(\theta^3) - 1) e^{i(j_1\theta_1^3 + j_2(\theta_2^3 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \mu_1) \psi_j(\theta^3) - \frac{1}{2} (1 + \mu_1) \psi_j(\theta^1)\end{aligned}\quad (4.4.90)$$

puesto que $\theta^3 = (\theta_1^1, \theta_2^1 - \pi)$ y

$$\begin{aligned}\mu(\theta^3) &= \frac{SW e^{-i(\theta_1^3 + \theta_2^3)} + S e^{-i\theta_2^3} + SE e^{i(\theta_1^3 - \theta_2^3)} + NW e^{i(\theta_2^3 - \theta_1^3)} + N e^{i\theta_2^3} + NE e^{i(\theta_1^3 + \theta_2^3)}}{W e^{-i\theta_1^3} + C + E e^{i\theta_1^3}} \quad (4.4.91) \\ &= \frac{SW e^{-i(\theta_1^1 + \theta_2^1 - \pi)} + S e^{-i(\theta_2^1 - \pi)} + SE e^{i(\theta_1^1 - \theta_2^1 + \pi)} + NW e^{i(\theta_2^1 - \pi - \theta_1^1)} + N e^{i(\theta_2^1 - \pi)} + NE e^{i(\theta_1^1 + \theta_2^1 - \pi)}}{W e^{-i\theta_1^1} + C + E e^{i\theta_1^1}} \\ &= \frac{SW e^{-i(\theta_1 + \theta_2)} + S e^{-i\theta_2} + SE e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + NW e^{i(\theta_2 - \theta_1)} + N e^{i\theta_2} + NE e^{i(\theta_1 + \theta_2)}}{W e^{-i\theta_1} + C + E e^{i\theta_1}} = -\mu_1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2} (1 + \mu(\theta^4)) e^{i(j_1\theta_1^4 + j_2\theta_2^4)} + \frac{1}{2} (\mu(\theta^4) - 1) e^{i(j_1\theta_1^4 + j_2(\theta_2^4 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2} (1 - \mu_2) \psi_j(\theta^4) - \frac{1}{2} (\mu_2 + 1) \psi_j(\theta^2)\end{aligned}\quad (4.4.92)$$

donde $\theta^4 = (\theta_1^1 - \pi, \theta_2^1)$, $\mu(\theta^4) = -\mu_2$ (la demostración es muy similar a la ec.(4.4.91)) y $e^{i(j_1\theta_1^4 + j_2(\theta_2^4 - \pi))} = e^{i(j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2(\theta_2^1 - \pi))} = \psi(\theta^2)$. Luego concluimos que

$$c_\theta^{1/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & 0 & -1 - \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_2 & 0 & -1 - \mu_2 \\ -1 + \mu_1 & 0 & 1 - \mu_1 & 0 \\ 0 & -1 + \mu_2 & 0 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix} c_\theta^0. \quad (4.4.93)$$

Ahora procedemos análogamente para el segundo paso intermedio de los puntos negros (filas impares) del proceso de relajación. El error después del segundo paso intermedio puede ser obtenido como para el primer paso intermedio (ecuación (4.4.83)), o sea:

$$\varepsilon_j^{2/3} = \begin{cases} \mu(\theta^s) \psi_j(\theta^s), & j_2 \text{ impar} \\ \psi_j(\theta^s), & j_2 \text{ par} \end{cases} \quad (4.4.94)$$

con $\mu(\theta)$ dada en la ecuación (4.4.84). La ecuación puede ser escrita como una combinación lineal, como fue escrita para el primer paso intermedio considerando ahora el espacio invariante $\text{span}\{\psi_j(\theta), \psi_j^1(\theta)\}$ con

Una expresión simple de la combinación lineal es:

$$\varepsilon_j^{2/3}(\theta) = A\psi_j(\theta) + B\psi_j^1(\theta) = Ae^{i(j_1\theta_1 + j_2\theta_2)} + Be^{i(j_1\theta_1 + j_2(\theta_2 - \pi))}. \quad (4.4.95)$$

Usando el Teorema 4.4.17, la primera parte de (4.4.94) y (4.4.95) podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A - B &= \mu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_2 \text{ impar} \\ A + B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_2 \text{ par} \end{aligned}$$

de ello tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta)), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{2/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1 + j_2(\theta_2 - \pi))}. \quad (4.4.96)$$

Ahora evaluamos el error del segundo paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes. Procediendo similarmente al caso anterior tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{2/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^1))e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^1))e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2(\theta_2^1 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_1)\psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2}(1 - \mu_1)\psi_j(\theta^3)\end{aligned}\quad (4.4.97)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{2/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^2))e^{i(j_1\theta_1^2 + j_2\theta_2^2)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^2))e^{i(j_1\theta_1^2 + j_2(\theta_2^2 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \mu_2)\psi_j(\theta^2) + \frac{1}{2}(1 - \mu_2)\psi_j(\theta^4)\end{aligned}\quad (4.4.98)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{2/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^3))e^{i(j_1\theta_1^3 + j_2\theta_2^3)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^3))e^{i(j_1\theta_1^3 + j_2(\theta_2^3 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mu_1)\psi_j(\theta^3) + \frac{1}{2}(1 + \mu_1)\psi_j(\theta^1)\end{aligned}\quad (4.4.99)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{2/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2}(1 + \mu(\theta^4))e^{i(j_1\theta_1^4 + j_2\theta_2^4)} + \frac{1}{2}(1 - \mu(\theta^4))e^{i(j_1\theta_1^4 + j_2(\theta_2^4 - \pi))} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \mu_2)\psi_j(\theta^4) + \frac{1}{2}(1 + \mu_2)\psi_j(\theta^2)\end{aligned}\quad (4.4.100)$$

Luego concluimos que

$$c_\theta^{2/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \mu_1 & 0 & 1 + \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 + \mu_2 & 0 & 1 + \mu_2 \\ 1 - \mu_1 & 0 & 1 - \mu_1 & 0 \\ 0 & 1 - \mu_2 & 0 & 1 - \mu_2 \end{bmatrix} c_\theta^{1/3}. \quad (4.4.101)$$

Combinando ambos pasos incorporando el paso de amortiguamiento tenemos.

$$c_\theta^1 = [\omega\Lambda(\theta) + (1 - \omega)I]c_\theta^0 \quad (4.4.102)$$

con

$$\Lambda(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu_1(1 + \mu_1) & 0 & \mu_1(-1 - \mu_1) & 0 \\ 0 & \mu_2(1 + \mu_2) & 0 & \mu_2(-1 - \mu_2) \\ -\mu_1(-1 + \mu_1) & 0 & -\mu_1(1 - \mu_1) & 0 \\ 0 & \mu_2(-1 + \mu_2) & 0 & -\mu_2(1 - \mu_2) \end{bmatrix} \quad (4.4.103)$$

Luego

$$P(\theta)Q(\theta)\Lambda(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1\delta\mu_1(1+\mu_1) & 0 & p_1\delta\mu_1(-1-\mu_1) & 0 \\ 0 & \mu_2(1+\mu_2) & 0 & \mu_2(-1-\mu_2) \\ -p_3\mu_1(-1+\mu_1) & 0 & -p_3\mu_1(1-\mu_1) & 0 \\ 0 & -p_4\mu_2(-1+\mu_2) & 0 & -p_4\mu_2(1-\mu_2) \end{bmatrix} \quad (4.4.104)$$

Los valores propios de $PQ\Lambda$ son

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= 0 \\ \lambda_2(\theta) &= \frac{1}{2} [p_1\delta\mu_1(1+\mu_1) + p_3\mu_1(-1+\mu_1)], \\ \lambda_3(\theta) &= 0 \\ \lambda_4(\theta) &= \frac{1}{2} [\mu_2(1+\mu_2) + p_4\mu_2(-1+\mu_2)] \end{aligned} \quad (4.4.105)$$

Los dos tipos de factores de suavización de Fourier son dados por (4.4.79), tomando λ_2, λ_4 de (4.4.105).

Proposición 4.4.19. Para $\varepsilon = 1$ (ecuación de Laplace), $\omega = 1$ (sin amortiguamiento) y $p_1 = p_3 = p_4 = 1$ (condiciones de frontera periódicos) tenemos

$$\bar{\rho} = \rho = \frac{1}{4}$$

Demostración. Para $\varepsilon = 1, \omega = 1$ y $p_1 = p_3 = p_4 = 1$ tenemos

$$\mu_1(\theta) = \frac{\cos \theta_2}{2 - \cos \theta_1}, \text{ y } \mu_2(\theta) = -\frac{\cos \theta_2}{2 + \cos \theta_1}.$$

Tomando $\theta \in \Theta_s$ tenemos que $\theta_1, \theta_2 \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ luego tenemos si λ_2 alcanza su máximo en la frontera de Θ_s tenemos de (4.4.48) $\delta(\theta) = 1$, entonces de (4.4.105)

$$\lambda_2(\theta) = \mu_1^2(\theta).$$

Ahora sino ocurre eso tenemos que $\delta = 0$, o sea tenemos: $\lambda_2 = \mu_1^2 - \mu_1$ y como $\theta_2 \in \Theta_s, \mu_1$ es positivo, luego $\mu_1^2 > \mu_1^2 - \mu_1$. Por lo tanto λ_2 alcanza su máximo en la frontera, entonces

$$\max \{|\lambda_2(\theta)| : \theta \in \Theta_s\} = \max \{\mu_1^2(\theta) : \theta \in \Theta_s\} = \left| \mu_1^2(-\frac{\pi}{2}, 0) \right| = \frac{1}{4}.$$

De otro lado con las condiciones dadas se tiene $\lambda_4(\theta) = \mu_2^2(\theta)$

$$\max \{|\lambda_4(\theta)| : \theta \in \Theta_s\} = \max \{\mu_2^2(\theta) : \theta \in \Theta_s\} = \left| \mu_2^2(-\frac{\pi}{2}, 0) \right| = \frac{1}{4}.$$

Así es factor de suavización es $\bar{\rho} = \rho = \frac{1}{4}$

□

Proposición 4.4.20. *La suavización de zebra horizontal no es robusto para una ecuación de difusión anisotrópica (Ver el cuadro (4.4)), y lo mismo es cierto para una zebra vertical*

Demostración. Para $\varepsilon \ll 1$ y el ángulo de rotación $\beta = 0$ en (1.1.4) tenemos un fuerte acoplamiento, es decir una fuerte anisotropía, en la dirección vertical, Así una suavización zebra horizontal no debería trabajar bien. Tenemos

$$\mu_2(\theta) = \frac{-\cos \theta_2}{1 + \varepsilon + \varepsilon \cos \theta_1},$$

así que

$$\left| \lambda_4\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \right| = \frac{1}{(1 + \varepsilon)^2},$$

así

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho \geq 1.$$

Adicionalmente, con $\varphi = 2\pi/N$, tenemos

$$\left| \lambda_4\left(\frac{\pi}{2}, \varphi\right) \right| = \frac{\cos^2 \varphi}{(1 + \varepsilon)^2},$$

de este modo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \rho \geq 1 - O(h^2).$$

El amortiguamiento no nos puede ayudar aquí. De ello concluimos en nuestra proposición. \square

ε	$\beta = 0$	$\beta = 90^\circ$	
	ρ_D	ρ	ρ_D
1	0.247608	0.25	0.24760
0.1	0.81851	0.125	0.125
0.01	0.97088	0.12476	0.12476
0.001	0.98842	0.12459	0.07112
0.0001	0.99020	0.12459	0.00997

Cuadro 4.4: Factor de Suavización con Gauss Seidel Zebra ρ , ρ_D para la ecuación de difusión rotada discretizada de acuerdo (1.2.17); $N = 64$

Relajación Gauss Seidel Y-Linea

Considerando una suavización zebra horizontal con amortiguamiento. Definamos los puntos (j_1, j_2) con j_1 par para los puntos rojos y los restantes negros. Sea ε^0 el error inicial, $\varepsilon^{1/3}$ el error luego de un paso en los puntos rojos, $\varepsilon^{2/3}$ el error luego del paso en los puntos negros, y ε^1 el error luego del amortiguamiento con el parámetro ω . Entonces el primer paso intermedio es

$$S\varepsilon_{j-e_2}^{1/3} + C\varepsilon_j^{1/3} + N\varepsilon_{j+e_2}^{1/3} = -\left(SW\varepsilon_{j-e_1-e_2}^0 + W\varepsilon_{j-e_1}^0 + SE\varepsilon_{j+e_1-e_2}^0 + NW\varepsilon_{j-e_1+e_2}^0 + E\varepsilon_{j+e_1}^0 + NE\varepsilon_{j+e_1+e_2}^0\right),$$

$$\varepsilon_j^{1/3} = \varepsilon_j^0,$$

j_1 par
 j_1 impar

(4.4.106)

donde $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. El segundo paso intermedio será:

$$S\varepsilon_{j-e_2}^{1/3} + C\varepsilon_j^{1/3} + N\varepsilon_{j+e_2}^{1/3} = -\left(SW\varepsilon_{j-e_1-e_2}^0 + W\varepsilon_{j-e_1}^0 + SE\varepsilon_{j+e_1-e_2}^0 + NW\varepsilon_{j-e_1+e_2}^0 + E\varepsilon_{j+e_1}^0 + NE\varepsilon_{j+e_1+e_2}^0\right),$$

$$\varepsilon_j^{1/3} = \varepsilon_j^0,$$

j_1 impar
 j_1 par

(4.4.107)

Para el primer paso intermedio tenemos la representación de Fourier de ε^α , $\alpha = 0, 1/3, 2/3, 1$ es dado por

$$\varepsilon^\alpha = \sum_{\theta \in \Theta_s} c_\theta^T \Psi_j(\theta).$$

Si $\varepsilon_j^0 = \psi_j(\theta^s)$, $s = 1, 2, 3$ o 4 , entonces tenemos de (4.4.81) con j_1 par tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3} = -\varepsilon_j^0 \left(\frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + W e^{-i\theta_1} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} + E e^{i\theta_1} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{S e^{-i\theta_1} + C + N e^{i\theta_2}} \right)$$

y finalmente conseguimos

$$\varepsilon_j^{1/3} = \begin{cases} v(\theta^s) \psi_j(\theta^s), & j_1 \text{ par} \\ \psi_j(\theta^s), & j_1 \text{ impar} \end{cases} \quad (4.4.108)$$

con

$$v(\theta) = -\frac{SW e^{-i(\theta_1+\theta_2)} + W e^{-i\theta_1} + SE e^{i(\theta_1-\theta_2)} + NW e^{i(\theta_2-\theta_1)} + E e^{i\theta_1} + NE e^{i(\theta_1+\theta_2)}}{S e^{-i\theta_1} + C + N e^{i\theta_2}}. \quad (4.4.109)$$

Para hallar la matriz de amplificación procedemos de manera similar a (4.4.61). Tratemos de combinar la expresión para los puntos que corresponden a las filas horizontales pares (j_1 par) y las de filas impares (j_1 impar). Un sub espacio invariante a considerar es el siguiente: $span\{\psi_j(\theta), \psi_j^2(\theta)\}$ con

$$\psi_j^2(\theta) = (-1)^{j_1} \psi_j(\theta) = \psi_j(\theta) \cos j_1 \pi = \psi_j(\theta) e^{-i j_1 \pi} = e^{i(j_1(\theta_1 - \pi) + j_2 \theta_2)}, \quad (4.4.110)$$

invariante bajo la suavización zebra vertical. Una expresión simple de la combinación lineal es:

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta) = A\psi_j(\theta) + B\psi_j^1(\theta) = Ae^{i(j_1\theta_1 + j_2\theta_2)} + Be^{i(j_1(\theta_1 - \pi) + j_2\theta_2)}. \quad (4.4.111)$$

Usando el Teorema 4.4.17, la primera parte de (4.4.108) y (4.4.111) podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A + B &= \nu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_1 \text{ par} \\ A - B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_1 \text{ impar} \end{aligned}$$

de ello tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(\nu(\theta) - 1), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1^s + j_2\theta_2^s)} + \frac{1}{2}(\nu(\theta^s) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^s - \pi) + j_2\theta_2^s)}. \quad (4.4.112)$$

Definamos

$$\nu_1 = \nu(\theta), \quad \nu_2 = \nu(\theta_1 - \pi, \theta_2 - \pi) = \nu(\theta_1 + \pi, \theta_2 + \pi)$$

Ahora evaluamos el error del primer paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes (Para ello basta tomar el caso particular cuando $\theta^1 \in [0, \frac{\pi}{2}]^2$ de tal forma que $sign(\theta_1^1) = 1$ y $sign(\theta_2^1) = 1$)

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^1))e^{i(j_1\theta_1^1 + j_2\theta_2^1)} + \frac{1}{2}(\nu(\theta^1) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^1 - \pi) + j_2\theta_2^1)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \nu_1)\psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2}(\nu_1 - 1)\psi_j(\theta^1) \end{aligned} \quad (4.4.113)$$

donde $e^{i(j_1(\theta_1-\pi)+j_2\theta_2)} = e^{i(j_1\theta_1^1+j_2\theta_2^1)}e^{-ij_1\pi} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\text{sign}(\theta_2^1)\pi)+j_2\theta_2^1)} = \psi_j(\theta^4)$

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^2))e^{i(j_1\theta_1^2+j_2\theta_2^2)} + \frac{1}{2}(\nu(\theta^2) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^2-\pi)+j_2\theta_2^2)} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \nu_2)\psi_j(\theta^2) - \frac{1}{2}(\nu_2 + 1)\psi_j(\theta^3)\end{aligned}\quad (4.4.114)$$

donde $\nu(\theta^2) = -\nu_2$ y $e^{i(j_1(\theta_1^2-\pi)+j_2\theta_2^2)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi-\pi)+j_2(\theta_2^1-\pi))} = e^{i(j_1\theta_1^1+j_2(\theta_2^1-\pi))} = \psi_j(\theta^3)$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^3))e^{i(j_1\theta_1^3+j_2\theta_2^3)} + \frac{1}{2}(\nu(\theta^3) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^3-\pi)+j_2\theta_2^3)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \nu_2)\psi_j(\theta^3) + \frac{1}{2}(\nu_2 - 1)\psi_j(\theta^2)\end{aligned}\quad (4.4.115)$$

donde $\nu(\theta^3) = \nu_2$ y $e^{i(j_1(\theta_1^3-\pi)+j_2\theta_2^3)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi)+j_2(\theta_2^1-\pi))} = \psi_j(\theta^2)$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^4))e^{i(j_1\theta_1^4+j_2\theta_2^4)} + \frac{1}{2}(\nu(\theta^4) - 1)e^{i(j_1(\theta_1^4-\pi)+j_2\theta_2^4)} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \nu_1)\psi_j(\theta^4) - \frac{1}{2}(\nu_1 + 1)\psi_j(\theta^1)\end{aligned}\quad (4.4.116)$$

donde $\nu(\theta^4) = -\nu_1$ y $e^{i(j_1(\theta_1^4-\pi)+j_2\theta_2^4)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi-\pi)+j_2\theta_2^1)} = \psi_j(\theta^1)$. Luego concluimos que

$$c_\theta^{1/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \nu_1 & 0 & 0 & -1 - \nu_1 \\ 0 & 1 - \nu_2 & -1 + \nu_2 & 0 \\ 0 & -1 - \nu_2 & 1 + \nu_2 & 0 \\ -1 + \nu_1 & 0 & 0 & 1 - \nu_1 \end{bmatrix} c_\theta^0. \quad (4.4.117)$$

Para el segundo paso intermedio tenemos la representación de Fourier de ε^α , $\alpha = 0, 1/3, 2/3, 1$ es dado por

$$\varepsilon^\alpha = \sum_{\theta \in \Theta_j} c_\theta^T \Psi_j(\theta).$$

Si $\varepsilon_j^0 = \psi_j(\theta^s)$, $s = 1, 2, 3$ o 4 , entonces tenemos de (4.4.81) con j_1 **impar** tenemos

$$\varepsilon_j^{2/3} = \begin{cases} \nu(\theta^s)\psi_j(\theta^s), & j_1 \text{ impar} \\ \psi_j(\theta^s), & j_1 \text{ par} \end{cases} \quad (4.4.118)$$

con $\nu(\theta)$ de (4.4.109).

Una expresión simple de la combinación lineal es:

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta) = A\psi_j(\theta) + B\psi_j^1(\theta) = Ae^{i(j_1\theta_1+j_2\theta_2)} + Be^{i(j_1(\theta_1-\pi)+j_2\theta_2)}. \quad (4.4.119)$$

Usando el Teorema 4.4.17, la primera parte de (4.4.118) y (4.4.119) podemos encontrar los valores de A y de B .

$$\begin{aligned} A - B &= \nu(\theta) \quad , \quad \text{para } j_1 \text{ impar} \\ A + B &= 1 \quad , \quad \text{para } j_1 \text{ par} \end{aligned}$$

de ello tenemos

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta)) \\ B &= \frac{1}{2}(1 - \nu(\theta)), \end{aligned}$$

y así tenemos

$$\varepsilon_j^{1/3}(\theta^s) = \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^s))e^{i(j_1\theta_1^s+j_2\theta_2^s)} + \frac{1}{2}(1 - \nu(\theta^s))e^{i(j_1(\theta_1^s-\pi)+j_2\theta_2^s)}. \quad (4.4.120)$$

Ahora evaluamos el error del primer paso intermedio para cada uno de los cuatro subespacios invariantes.

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^1) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^1))e^{i(j_1\theta_1^1+j_2\theta_2^1)} + \frac{1}{2}(1 - \nu(\theta^1))e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi)+j_2\theta_2^1)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \nu_1)\psi_j(\theta^1) + \frac{1}{2}(1 - \nu_1)\psi_j(\theta^4) \end{aligned} \quad (4.4.121)$$

donde $e^{i(j_1(\theta_1-\pi)+j_2\theta_2)} = e^{i(j_1\theta_1+j_2\theta_2)}e^{-ij_1\pi} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\text{sign}(\theta_2^1)\pi)+j_2\theta_2^1)} = \psi_j(\theta^4)$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^2) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^2))e^{i(j_1\theta_1^2+j_2\theta_2^2)} + \frac{1}{2}(1 - \nu(\theta^2))e^{i(j_1(\theta_1^2-\pi)+j_2\theta_2^2)} \\ &= \frac{1}{2}(1 - \nu_2)\psi_j(\theta^2) + \frac{1}{2}(\nu_2 + 1)\psi_j(\theta^3) \end{aligned} \quad (4.4.122)$$

donde $\nu(\theta^2) = -\nu_2$ y $e^{i(j_1(\theta_1^2-\pi)+j_2\theta_2^2)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi-\pi)+j_2(\theta_2^1-\pi))} = e^{i(j_1\theta_1^1+j_2(\theta_2^1-\pi))} = \psi_j(\theta^3)$.

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{1/3}(\theta^3) &= \frac{1}{2}(1 + \nu(\theta^3))e^{i(j_1\theta_1^3+j_2\theta_2^3)} + \frac{1}{2}(1 - \nu(\theta^3))e^{i(j_1(\theta_1^3-\pi)+j_2\theta_2^3)} \\ &= \frac{1}{2}(1 + \nu_2)\psi_j(\theta^3) + \frac{1}{2}(1 - \nu_2)\psi_j(\theta^2) \end{aligned} \quad (4.4.123)$$

donde $v(\theta^3) = v_2$ y $e^{i(j_1(\theta_1^3-\pi)+j_2\theta_2^3)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi)+j_2(\theta_2^1-\pi))} = \psi_j(\theta^2)$.

$$\begin{aligned}\varepsilon_j^{1/3}(\theta^4) &= \frac{1}{2}(1+v(\theta^4))e^{i(j_1\theta_1^4+j_2\theta_2^4)} + \frac{1}{2}(1-v(\theta^4))e^{i(j_1(\theta_1^4-\pi)+j_2\theta_2^4)} \\ &= \frac{1}{2}(1-v_1)\psi_j(\theta^4) + \frac{1}{2}(1+v_1)\psi_j(\theta^1)\end{aligned}\quad (4.4.124)$$

donde $v(\theta^4) = -v_1$ y $e^{i(j_1(\theta_1^4-\pi)+j_2\theta_2^4)} = e^{i(j_1(\theta_1^1-\pi-\pi)+j_2\theta_2^1)} = \psi_j(\theta^1)$.

Luego concluimos que

$$c_\theta^{2/3} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+v_1 & 0 & 0 & 1+v_1 \\ 0 & 1-v_2 & 1-v_2 & 0 \\ 0 & 1+v_2 & 1+v_2 & 0 \\ 1-v_1 & 0 & 0 & 1-v_1 \end{bmatrix} c_\theta^{1/3}. \quad (4.4.125)$$

Combinando ambos pasos incorporando el paso de amortiguamiento tenemos.

$$c_\theta^1 = [\omega\Lambda(\theta) + (1-\omega)I] c_\theta^0 \quad (4.4.126)$$

con

$$\Lambda_\zeta(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} v_1(1+v_1) & 0 & 0 & v_1(1+v_1) \\ 0 & v_2(1+v_2) & v_2(1+v_2) & 0 \\ 0 & v_2(-1+v_2) & v_2(-1+v_2) & 0 \\ v_1(-1+v_1) & 0 & 0 & v_1(-1+v_1) \end{bmatrix}. \quad (4.4.127)$$

Luego

$$P(\theta)Q(\theta)\Lambda(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} p_1\delta v_1(1+v_1) & 0 & 0 & p_1\delta v_1(1+v_1) \\ 0 & v_2(1+v_2) & v_2(1+v_2) & 0 \\ 0 & -p_3v_2(-1+v_2) & -p_3v_2(-1+v_2) & 0 \\ -p_4v_1(-1+v_1) & 0 & 0 & -p_4v_1(-1+v_1) \end{bmatrix}. \quad (4.4.128)$$

Los valores propios de $PQ\Lambda$ son

$$\begin{aligned}\lambda_1(\theta) &= 0 \\ \lambda_2(\theta) &= \frac{1}{2}[p_1\delta v_1 + p_4v_1(v_1-1)], \\ \lambda_3(\theta) &= 0 \\ \lambda_4(\theta) &= \frac{1}{2}[v_2(1+v_2) + p_3v_2(v_2-1)]\end{aligned}\quad (4.4.129)$$

Factor de suavización de una Gauss Seidel zebra alternante

Como vimos , una suavización zebra horizontal no trabaja cuando se tiene una fuerte anisotropía en una de la dirección vertical (para un coeficiente de difusión grande). Esto nos sugeriría el uso de una zebra alternante. combinando un zebra horizontal y luego una zebra horizontal. Siguiendo la sugerencia de Stuben Trottenberg (1982), arreglaremos una zebra alternante en la siguiente manera simétrica, en la zebra vertical primero hacemos primero los pasos en los puntos negros y luego los pasos en los puntos negros, puesto que esto nos da un factor de suavización ligeramente mejor, y produce un resultado idéntico para $\beta = 0^\circ$ y $\beta = 90^\circ$. La matriz de amplificación de zebra vertical se tiene (4.4.127)

$$\Lambda_v(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \nu_1(1 + \nu_1) & 0 & 0 & \nu_1(1 + \nu_1) \\ 0 & \nu_2(1 + \nu_2) & \nu_2(1 + \nu_2) & 0 \\ 0 & \nu_2(-1 + \nu_2) & \nu_2(-1 + \nu_2) & 0 \\ \nu_1(-1 + \nu_1) & 0 & 0 & \nu_1(-1 + \nu_1) \end{bmatrix}. \quad (4.4.130)$$

Consideraremos dos tipos de amortiguamiento: un amortiguamiento horizontal y uno vertical separadamente y un amortiguamiento luego de realizar dos pasos. Un doble amortiguamiento resulta en una matriz de amplificación dada por :

$$\Lambda = P Q [(1 - \omega_d)I + \omega_d \Lambda_v] [(1 - \omega_d)I + \omega_d \Lambda_h] \quad (4.4.131)$$

donde Λ_h es dado por (4.4.103). En el caso de un amortiguamiento simple, colocamos $\omega_d = 1$ en la ecuación (4.4.131) y reemplazamos $\Lambda = P Q \Lambda_v \Lambda_h$ por

$$\Lambda = (1 - \omega_s)I + \omega_s \Lambda. \quad (4.4.132)$$

Los valores propios de la matriz Λ , 4×4 son:

$$\begin{aligned} \lambda_1(\theta) &= 0 \\ \lambda_2(\theta) &= \frac{1}{4} [-(p_4 (1 - \mu_2) \mu_2 (-1 + \nu_1) \nu_1) - \delta p_1 \mu_1 (1 + \mu_1) \nu_1 (1 + \nu_1)], \\ \lambda_3(\theta) &= 0 \\ \lambda_4(\theta) &= \frac{1}{4} [p_3 (-1 + \mu_1) \mu_1 (-1 + \nu_2) \nu_2 + \mu_2 (1 + \mu_2) \nu_2 (1 + \nu_2)] \end{aligned} \quad (4.4.133)$$

Ecuación Difusión Anisotrópica

Los cuadros (4.5) y (4.6) dan los resultados del factor de suavización ρ , ρ_D para la ecuación de difusión anisotrópica rotada. En el cuadro (4.5) se tiene que para $\beta = 0^\circ$ y $\beta = 90^\circ$ se tienen factores de suavización casi idénticos. Para el caso con $\varepsilon = 1$ ó $\beta = 0^\circ$ o $\beta = 90^\circ$ las dos discretizaciones son idénticas. Son incluidos los peores casos para el ángulo de rotación β , dados por el conjunto $\{\beta = k\pi/12, k = 0, 1, 2, \dots, 23\}$. Para los resultados del cuadro (4.5) no se usa amortiguamiento ($\omega_d = 1$). Si se introduce amortiguamiento ($\omega_d \neq 1$ ó $\omega_s \neq 1$) no se produce ninguna mejora. Sin embargo, como se muestra en el cuadro (4.6), si la derivada mixta es discretizada de acuerdo a la ecuación (1.2.19) se obtienen buenos resultados. Para el cuadro (4.6), β ha sido mostrado con diferentes valores. La simetría significa que sólo necesitamos considerar $\beta \in [0^\circ, 45^\circ]$. Se incluyen resultados con un simple amortiguamiento $\omega_s = 0,7$. Claramente, el amortiguamiento no es necesario en este caso y aún más puede resultar desventajoso.

ε	$\beta = 0^\circ$		$\beta = 90^\circ$		ρ, ρ_D	β
	ρ	ρ_D	ρ	ρ_D		
1	0.03541	0.03517	0.03541	0.03517	0.03517	cualquiera
0.1	0.10165	0.10024	0.10103	0.09960	0.37209	45
0.01	0.12189	0.12074	0.12189	0.12073	0.88866	45
0.001	0.12432	0.07047	0.12432	0.07047	0.98809	45
0.0001	0.12456	0.00989	0.12456	0.00989	0.99880	45

Cuadro 4.5: Factor de Suavización ρ , ρ_D con Gauss Seidel Zebra Alternante para la ecuación de difusión anisotrópica rotada sin amortiguamiento discretizada de acuerdo a (1.2.17); $N = 64$

ε	$\omega = 1$		$\omega = 0,7$		
	ρ_D	β	ρ, ρ_D $\beta = 0^\circ, 90^\circ$	ρ, ρ_D	β
1	0.03517	Cualquiera	0.30864	0.30864	Cualquiera
0.1	0.27820	30	0.30249	0.49474	30
0.01	0.56245	14	0.30002	0.69371	14
0.001	0.66427	8	0.30000	0.76499	8
0.0001	0.69375	4	0.30000	0.77709	8
0.00001	0.70038	4	0.30000	0.77833	8

Cuadro 4.6: Factor de Suavización ρ, ρ_D con Gauss Seidel Zebra Alternante para la ecuación difusión anisotrópica rotada discretizada de acuerdo a (1.2.19); $N = 64$

Capítulo 5

Pruebas computacionales y conclusiones

5.1. Resultados numéricos para la ecuación de Poisson

El programa desarrollado sigue la estructura del algoritmo 4. El problema es discretizado por la fórmula de cinco puntos (1.2.21) (con $\varepsilon = 1$) de la ecuación de Poisson en el cuadrado $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. Todos los componentes del programa son elegidos tan simples como sea posible:

- (i) *secuencia de mallas*. El grosor de malla son $h_l = 2^{-l-1}$ para $l \geq 0$.
- (ii) *Pre-suavización*. Aplicamos ν pasos de iteración de Gauss-Seidel con ordenamiento Red-Black. Le corresponde a s un cuarto de paso de Gauss-Seidel. Cada paso involucra uno de los cuatro pasos de las submallas $\Omega^1, \dots, \Omega^4$ descritos en la figura 2.1(e). $s(\dots, i, j)$, $1 \leq i, j \leq 2$ se refiere a las submallas con puntos $(k_1 h_l, k_2 h_l)$ donde $k_1 \equiv i(\text{mod } 2)$ y $k_2 \equiv j(\text{mod } 2)$. La combinación de $s(\dots, 1, 1)$ y $s(\dots, 2, 2)$ produce medio paso de Gauss-Seidel para los puntos rojos de $\Omega_r^l = \Omega_l^1 \cup \Omega_l^2$, mientras que $s(\dots, 1, 2)$ junto con $s(\dots, 2, 1)$ produce medio paso de Gauss-Seidel para los puntos negros (Black) sobre Ω_l^b .
- (iii) *restricción*. r es elegido como la restricción de nueve puntos (3.3.17).
- (iv) *prolongación*. p es elegido la prolongación de nueve puntos (3.3.4).

(v) *post-suavización*. igual a la pre-suavización.

(vi) *solución en el nivel $l = 0$* . La malla gruesa sólo contiene un sólo punto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Así, la llamada de $s(\dots, 1, 1)$ produce la solución exacta de $L_0 u_0 = f_0$.

Aplicamos el programa a:

$$\Delta u(x, y) = 4 \text{ en } \Omega = (0, 1) \times (0, 1), \quad u(x, y) = x^2 + y^2 \text{ en } \partial\Omega \quad (5.1.1)$$

Se puede verificar que la solución de $u(x, y) = x^2 + y^2$ es también la solución del esquema de cinco puntos. recordemos que la elección del lado derecho de (5.1.1) no influye en la razón de convergencia. Una función $f(x, y)$ en $\Delta u(x, y) = f$ aleatoria o no suave debería producir la misma razón de convergencia.

En los cuadros 5.2 y 5.2 se muestra el desarrollo del error $\|u_i^j - u_i\|$, donde $u(x, y) = x^2 + y^2$ es la solución continua, u_i^j es el resultado del programa con $\nu = 2$ y $\gamma = 1, \gamma = 2$ aplicado al valor de inicio $u_i^0 = 0$. El número de nivel varia de $l = 1$ a $l = 5$ correspondiente a $h_l = \frac{1}{4}$ y $h_l = \frac{1}{64}$ respectivamente. Se usa norma Euclidiana $\|u_i\| = \langle u_i, u_i \rangle^{1/2}$. Las razones $\|u_i^{j+1} - u_i\| / \|u_i^j - u_i\|$ son mostradas en las columnas correspondientes convergiendo a las razones de convergencia

$$\rho_l = \rho(M_l(\nu, 0))$$

(M_l de (3.4.17)).

La evaluación de la razón de convergencia ρ_l para todos los niveles $l = 1, \dots, 5$, dan los números del cuadro(5.2)($\gamma = 1$) y el cuadro(5.3)($\gamma = 2$). La evaluación muestra que este número no tiene a 1 como en el método iterativo clásico. Para la iteración de dos mallas se tiene de [7, §8.1.1] el cuadro (5.1), de donde para la iteración de dos mallas se tiene que $\rho_l < 0,0741$ para $\nu = 2$. Estos valores son obtenidos para la ecuación de Poisson de manera semejante al análisis seguido en la sección 3.2.1.

Resta investigar la dependencia de ρ_l sobre el número de ν de iteraciones de suavización. La razón de convergencia $\rho_l(\nu)$ es mostrado en los cuadros 5.4 y 5.5 para $\gamma = 1$ y $\gamma = 2$. Como para el ejemplo de la sección §3.2.1 la razón se comporta como C_γ/ν .

$\nu_1 + \nu_2$	1	2	3	4	5
$\rho_{\nu_1+\nu_2}$	0.25	0.0741	0.0527	0.0410	0.0335

Cuadro 5.1: Razón de convergencia para el método de dos mallas [7, Th 8.1.7]

j	$h_1 = \frac{1}{4}$		$h_1 = \frac{1}{8}$		$\gamma = 1$ $h_1 = \frac{1}{16}$		$h_1 = \frac{1}{32}$		$h_1 = \frac{1}{64}$	
	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio
1	0.203	0.1039	0.747	0.1479	1.86	0.1643	4.08	0.1704	8.5	0.1727
2	1.26E-02	0.0621	8.48E-02	0.1135	0.265	0.1423	0.647	0.1586	1.42	0.1674
3	7.89E-04	0.0625	1.03E-02	0.1215	3.96E-02	0.1494	0.105	0.1624	0.241	0.1694
4	4.93E-05	0.0625	1.28E-03	0.1245	6.06E-03	0.1531	1.72E-02	0.1642	4.10E-02	0.1702
5	3.08E-06	0.0625	1.61E-04	0.1257	9.41E-04	0.1552	2.85E-03	0.1653	7.00E-03	0.1707
6	1.93E-07	0.0625	2.03E-05	0.1261	1.47E-04	0.1564	4.74E-04	0.1661	1.20E-03	0.1709
7	1.20E-08	0.0625	2.57E-06	0.1262	2.31E-05	0.1573	7.89E-05	0.1666	2.05E-04	0.1711
8	7.52E-10	0.0625	3.24E-07	0.1263	3.65E-06	0.1578	1.32E-05	0.167	3.51E-05	0.1712
9	4.70E-11	0.0625	4.09E-08	0.1263	5.77E-07	0.1581	2.20E-06	0.1673	6.00E-06	0.1713
10	2.94E-12	0.0625	5.17E-09	0.1263	9.14E-08	0.1583	3.69E-07	0.1675	1.03E-06	0.1713
11	1.84E-13	0.0625	6.53E-10	0.1263	1.45E-08	0.1585	6.19E-08	0.1676	1.76E-07	0.1714
12			8.25E-11	0.1263	2.30E-09	0.1586	1.04E-08	0.1678	3.02E-08	0.1714
ρ_1		0.0625		0.1263		0.1586		0.1678		0.1714

Cuadro 5.2: Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 1$ usando Gauss Seidel Puntual Red-Black

Note que incrementando γ la razón de convergencia del método multimalla converge a la razón de convergencia del método de dos mallas. Los siguientes números ilustran la convergencia dos mallas y multimalla. Del cuadro (5.6) tenemos que

$$\begin{aligned}
 \text{Razón de iteración multimalla con } \gamma = 1 & & 0,1678 \\
 \text{Razón de iteración multimalla con } \gamma = 2 & & 0,0702 \\
 \text{Razón de iteración multimalla con } \gamma = 3 & & 0,0688 \\
 \text{Razón de iteración multimalla con } \gamma = 4 & & 0,0700 \\
 \text{Razón de iteración multimalla con } \gamma = 5 & & 0,0717 \\
 \text{Razón de iteración dos malla (cuadro (5.1))} & & 0,0741
 \end{aligned} \tag{5.1.2}$$

Se observa adicionalmente que la razón de convergencia es mejor para $\gamma = 2$ (W-ciclo) que para $\gamma = 1$ (V-ciclo). Por otro lado, $\gamma = 2$ requiere más trabajo computacional que $\gamma = 1$, como es visto en la proposición 3.4.14. $\gamma = 3$ es improductivo, pues sólo existe un mejoramiento insignificante. Finalmente para poder hacer una evaluación del programa realizado comparamos los resultados del programa desarrollado con el MUDPACK. En los cuadros (5.7), (5.8), (5.9) que los resultados son similares a los mostrados en los cuadros (5.2) y (5.3). En el cuadro (5.8) se uso MUDPACK con interpolación lineal.

j	$h_l = \frac{1}{4}$		$h_l = \frac{1}{8}$		$h_l = \frac{1}{16}$		$h_l = \frac{1}{32}$		$h_l = \frac{1}{64}$	
	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio
1	0.203	0.1039	0.538	0.1064	0.907	0.08	1.34	0.0561	1.92	0.039
2	1.26E-02	0.0621	3.12E-02	0.058	4.48E-02	0.0494	6.18E-02	0.046	8.46E-02	0.0441
3	7.89E-04	0.0625	1.85E-03	0.0594	2.46E-03	0.0548	3.29E-03	0.0533	4.42E-03	0.0522
4	4.93E-05	0.0625	1.11E-04	0.0599	1.43E-04	0.0581	1.84E-04	0.056	2.42E-04	0.0548
5	3.08E-06	0.0625	6.71E-06	0.0605	8.75E-06	0.0613	1.08E-05	0.0583	1.38E-05	0.0571
6	1.93E-07	0.0625	4.09E-07	0.061	5.63E-07	0.0643	6.49E-07	0.0603	8.12E-07	0.0588
7	1.20E-08	0.0625	2.51E-08	0.0614	3.76E-08	0.0669	4.04E-08	0.0622	4.92E-08	0.0605
8	7.52E-10	0.0625	1.55E-09	0.0618	2.59E-09	0.0689	2.58E-09	0.064	3.06E-09	0.0622
9	4.70E-11	0.0625	9.62E-11	0.0621	1.82E-10	0.0704	1.69E-10	0.0656	1.95E-10	0.0637
10	2.94E-12	0.0625	6.00E-12	0.0624	1.30E-11	0.0714	1.13E-11	0.0669	1.27E-11	0.0652
11	1.84E-13	0.0625	3.76E-13	0.0627	9.39E-13	0.0721	7.70E-13	0.068	8.47E-13	0.0666
12			2.32E-14	0.0616	6.76E-14	0.072	5.41E-14	0.0702		
ρ_l		0.0625		0.0616		0.072		0.0702		0.0666

Cuadro 5.3: Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ Gauss Seidel Puntual Red-Black

j	$\nu = 1$		$\nu = 2$		$\nu = 3$		$\nu = 4$		$\nu = 5$	
	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio	$\ u_j^j - u_j\ $	ratio
1	7.92	0.3307	4.08	0.1704	2.7	0.1128	2.01	0.084	1.61	0.0671
2	2.45E+00	0.3098	0.647	0.1586	2.82E-01	0.1044	1.56E-01	0.0774	9.94E-02	0.0618
3	7.62E-01	0.3106	0.105	0.1624	3.07E-02	0.1089	1.28E-02	0.0819	6.58E-03	0.0661
4	2.37E-01	0.3109	1.72E-02	0.1642	3.41E-03	0.111	1.07E-03	0.0839	4.47E-04	0.068
5	7.36E-02	0.3109	2.85E-03	0.1653	3.82E-04	0.1122	9.09E-05	0.0849	3.08E-05	0.069
6	2.29E-02	0.3107	4.74E-04	0.1661	4.32E-05	0.113	7.78E-06	0.0856	2.14E-06	0.0695
7	7.11E-03	0.3105	7.89E-05	0.1666	4.91E-06	0.1135	6.70E-07	0.086	1.50E-07	0.0699
8	2.21E-03	0.3103	1.32E-05	0.167	5.59E-07	0.1139	5.78E-08	0.0863	1.05E-08	0.0701
9	6.84E-04	0.3101	2.20E-06	0.1673	6.39E-08	0.1142	5.00E-09	0.0865	7.38E-10	0.0703
10	2.12E-04	0.3100	3.69E-07	0.1675	7.31E-09	0.1144	4.34E-10	0.0867	5.19E-11	0.0704
11	6.57E-05	0.3098	6.19E-08	0.1676	8.38E-10	0.1146	3.76E-11	0.0868	3.67E-12	0.0706
12	2.03E-05	0.3097	1.04E-08	0.1678	9.61E-11	0.1147	3.26E-12	0.0865		
13	6.30E-06	0.3097	1.74E-09	0.1679	1.10E-11	0.1148	2.71E-13	0.0833		
14	1.95E-06	0.3097	2.93E-10	0.1679	1.26E-12	0.1144	2.35E-14	0.0868		
15	6.05E-07	0.3098	4.92E-11	0.168	1.36E-13	0.1081				
ρ_l		0.3098		0.168		0.1081		0.0868		0.0706

Cuadro 5.4: Razón de convergencia dependiente de ν para $h_l = \frac{1}{32}$ y $\gamma = 1$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black

5.2. Ejemplo numérico de la iteración anidada

Aplicamos la iteración anidada (3.5.3) para el problema de Dirichlet

$$\begin{aligned}
 -\Delta u &= -3y/(x+1) - y^3/(x+1)^3 \quad \text{en } \Omega = (0,1) \times (0,1) \\
 u &= \quad \text{en } \partial\Omega.
 \end{aligned}
 \tag{5.2.1}$$

La iteración multimalla *MGM* en (3.5.3c) con $\nu = \gamma = 2$. En el cuadro (5.10) presentamos el resultado de la iteración anidada, donde \tilde{p} es un interpolantes half weighting (3.3.6). Para ilustrar el desarrollo de las iteraciones son mostradas el error por iteración $\|\tilde{u}_k^j - u_k\|_{\mathcal{Q}}$, el error total $\|\tilde{u}_k^j - u\|_{\mathcal{Q}}$ y el error de discretización $\|u_k - u\|_{\mathcal{Q}}$ (u_k : solución discreta exacta; $\|\cdot\|_{\mathcal{Q}}$: norma sup; $u(x,y) = 0.5y^3/(x+1)$: solución exacta). \tilde{u}_k^j son los resultados

j	$\nu = 1$		$\nu = 2$		$\nu = 3$		$\nu = 4$		$\nu = 5$	
	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio
1	2.65	0.1107	1.34	0.0561	0.98	0.0409	0.791	0.033	0.67	0.028
2	4.89E-01	0.1844	6.18E-02	0.0460	2.82E-02	0.0288	1.78E-02	0.0224	1.24E-02	0.0186
3	1.01E-01	0.2071	3.29E-03	0.0533	9.59E-04	0.034	4.76E-04	0.0268	2.76E-04	0.0222
4	2.21E-02	0.2180	1.84E-04	0.0560	3.70E-05	0.0386	1.45E-05	0.0305	6.97E-06	0.0253
5	4.96E-03	0.2248	1.08E-05	0.0583	1.57E-06	0.0425	4.85E-07	0.0334	1.92E-07	0.0275
6	1.14E-04	0.2297	6.49E-07	0.0603	7.12E-08	0.0452	1.71E-08	0.0353	5.52E-09	0.0288
7	2.66E-04	0.2331	4.04E-08	0.0622	3.35E-09	0.0471	6.23E-10	0.0365	1.63E-10	0.0296
8	6.26E-05	0.2356	2.58E-09	0.0640	1.62E-10	0.0483	2.33E-11	0.0373	4.89E-12	0.03
9	1.49E-05	0.2374	1.69E-10	0.0656	7.98E-12	0.0492	8.81E-13	0.0379	1.48E-13	0.0303
10	3.55E-06	0.2388	1.13E-11	0.0669	3.97E-13	0.0498	3.79E-14	0.043		
11	8.51E-07	0.2398	7.70E-13	0.0680	2.11E-14	0.0532				
12	2.05E-07	0.2407	5.41E-14	0.0702						
13	4.94E-08	0.2413								
14	1.19E-08	0.2419								
15	2.90E-09	0.2424								
ρ_I		0.242		0.070		0.0532		0.0430		0.0303

Cuadro 5.5: Razón de convergencia dependiente de ν para $h_I = \frac{1}{32}$ y $\gamma = 2$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black

j	$\gamma = 1$		$\gamma = 2$		$\gamma = 3$		$\gamma = 4$		$\gamma = 5$	
	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio	$\ u_j' - u_j\ $	ratio
1	4.08	0.1704	1.34	0.0561	1.31	0.0547	1.31	0.0547	1.31	0.0547
2	6.47E-01	0.1586	6.18E-02	0.0460	5.70E-02	0.0435	5.68E-02	0.0434	5.67E-02	0.0434
3	1.05E-01	0.1624	3.29E-03	0.0533	2.99E-03	0.0524	2.97E-03	0.0524	2.97E-03	0.0524
4	1.72E-02	0.1642	1.84E-04	0.0560	1.66E-04	0.0557	1.65E-04	0.0557	1.65E-04	0.0557
5	2.85E-03	0.1653	1.08E-05	0.0583	9.75E-06	0.0586	9.70E-06	0.0587	9.70E-06	0.0587
6	4.74E-04	0.1661	6.49E-07	0.0603	5.93E-07	0.0608	5.91E-07	0.0609	5.91E-07	0.0609
7	7.89E-05	0.1666	4.04E-08	0.0622	3.73E-08	0.0629	3.72E-08	0.0629	3.72E-08	0.0629
8	1.32E-05	0.1670	2.58E-09	0.0640	2.41E-09	0.0646	2.40E-09	0.0646	2.40E-09	0.0646
9	2.20E-06	0.1673	1.69E-10	0.0656	1.59E-10	0.066	1.59E-10	0.0661	1.59E-10	0.0661
10	3.69E-07	0.1675	1.13E-11	0.0669	1.07E-11	0.0672	1.07E-11	0.0672	1.07E-11	0.0673
11	6.19E-08	0.1676	7.70E-13	0.0680	7.29E-13	0.0682	7.28E-13	0.0682	7.29E-13	0.0683
12	1.04E-08	0.1678	5.41E-14	0.0702	5.02E-14	0.0688	5.09E-14	0.0700	5.23E-14	0.0717
ρ_I		0.1678		0.0702		0.0688		0.0700		0.0717

Cuadro 5.6: Razón de convergencia dependiente de γ para $h_I = \frac{1}{32}$ y $\nu = 2$ con Gauss Seidel Puntual Red-Black

intermedios de (3.5.3c): $\tilde{u}_k^0 = \tilde{u}_k$ de (3.5.3b), mientras que \tilde{u}_k^j es el resultado final de \tilde{u}_k de (3.5.3c).

5.3. Análisis de suavización para una ecuación anisotrópica

Finalmente queremos mostrar el análisis de convergencia del método multimallas haciendo uso del análisis de suavización desarrollado en el capítulo IV. La primera ecuación modelo usada es (1.1.4) con $\beta = 0$ (ningún término mixto) y los parámetros del método multimallas son $N = 64$, $\gamma = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$ (esquema W, con 2 iteraciones de pre-suavización

j	$h_l = \frac{1}{4}$		$h_l = \frac{1}{8}$		$h_l = \frac{1}{16}$		$h_l = \frac{1}{32}$		$h_l = \frac{1}{64}$	
	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio
1	0.103513		0.230953		0.345044		0.423012		0.466517	
2	5.74E-03	0.0554	2.56E-02	0.111	4.55E-02	0.132	5.99E-02	0.142	7.50E-02	0.161
3	3.47E-04	0.0605	3.00E-03	0.117	6.15E-03	0.135	9.82E-03	0.164	1.26E-02	0.168
4	2.15E-05	0.0620	3.55E-04	0.118	8.83E-04	0.144	1.60E-03	0.163	2.24E-03	0.178
5	1.34E-06	0.0624	4.27E-05	0.120	1.35E-04	0.153	2.59E-04	0.162	3.92E-04	0.175
6	8.38E-08	0.0625	5.23E-06	0.122	2.08E-05	0.153	4.22E-05	0.163	6.80E-05	0.173
7	5.24E-09	0.0625	6.47E-07	0.124	3.19E-06	0.154	6.88E-06	0.163	1.17E-05	0.172
8	3.27E-10	0.0625	8.07E-08	0.125	4.91E-07	0.154	1.13E-06	0.164	2.02E-06	0.172
9	2.05E-11	0.0625	1.01E-08	0.125	7.59E-08	0.155	1.85E-07	0.164	3.46E-07	0.171
10	1.28E-12	0.0625	1.27E-09	0.126	1.18E-08	0.155	3.05E-08	0.165	5.92E-08	0.171
11	7.99E-14	0.0625	1.60E-10	0.126	1.83E-09	0.156	5.04E-09	0.165	1.01E-08	0.171
12	5.00E-15	0.0625	2.02E-11	0.126	2.86E-10	0.156	8.34E-10	0.166	1.73E-09	0.171
13	3.05E-16	0.0611	2.55E-12	0.126	4.49E-11	0.157	1.38E-10	0.166	2.95E-10	0.171
14			3.22E-13	0.126	7.04E-12	0.157	2.30E-11	0.166	5.04E-11	0.171
15			4.07E-14	0.127	1.11E-12	0.157	3.82E-12	0.166	8.60E-12	0.171
ρ_l		0.0625		0.127		0.157		0.166		0.171

Cuadro 5.7: Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 1$ usando MUD-PACK con interpolación lineal

j	$h_l = \frac{1}{4}$		$h_l = \frac{1}{8}$		$h_l = \frac{1}{16}$		$h_l = \frac{1}{32}$		$h_l = \frac{1}{64}$	
	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio	$\ u_j^f - u_j\ $	ratio
1	0.103515		0.222566		0.289924		0.32626		0.344885	
2	5.74E-03	0.0554	1.86E-02	0.084	2.59E-02	0.089	2.98E-02	0.091	3.28E-02	0.095
3	3.47E-04	0.0605	1.60E-03	0.086	2.30E-03	0.089	2.84E-03	0.095	3.16E-03	0.096
4	2.15E-05	0.0620	1.40E-04	0.087	2.04E-04	0.089	2.65E-04	0.093	2.94E-04	0.093
5	1.34E-06	0.0624	1.24E-05	0.089	1.84E-05	0.090	2.42E-05	0.091	2.69E-05	0.091
6	8.38E-08	0.0625	1.11E-06	0.090	1.64E-06	0.089	2.19E-06	0.091	2.43E-06	0.091
7	5.24E-09	0.0625	1.00E-07	0.090	1.46E-07	0.089	1.97E-07	0.090	2.20E-07	0.090
8	3.27E-10	0.0625	9.10E-09	0.091	1.29E-08	0.089	1.78E-08	0.090	1.98E-08	0.090
9	2.05E-11	0.0625	8.31E-10	0.091	1.14E-09	0.088	1.61E-09	0.090	1.79E-09	0.091
10	1.28E-12	0.0625	7.64E-11	0.092	1.01E-10	0.088	1.46E-10	0.091	1.63E-10	0.091
11	7.99E-14	0.0625	7.04E-12	0.092	8.91E-12	0.088	1.32E-11	0.091	1.48E-11	0.091
12	5.00E-15	0.0625	6.51E-13	0.093	7.87E-13	0.088	1.20E-12	0.091	1.35E-12	0.091
13	3.05E-16	0.0611	6.04E-14	0.093	6.97E-14	0.089	1.12E-13	0.093	1.23E-13	0.092
14			5.55E-15	0.092	6.22E-15	0.089				
15										
ρ_l		0.0625		0.092		0.089		0.093		0.092

Cuadro 5.8: Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ usando MUD-PACK con interpolación lineal

y ninguna post-suavización). El valor inicial es $u_h^0 = 0$.

El criterio para observar la convergencia del método multimalla en resumen es el siguiente: si el factor de convergencia computacional es próximo al factor de suavización significa que el corrector en la malla gruesa (CGC) están funcionando correctamente, pues para hacer el análisis de suavización se asume que el CGC anula las componente suaves y lo que muestra el factor de convergencia se refiere al análisis de los modos oscilatorio.

En la figura (5.1) se observa una característica de los métodos iterativos clásicos que empeoran cuando el grosor de malla es reducido. Esto es superada por los métodos multi-malla como se muestra en la figura (5.2) usando el mismo método de la figura (5.1) como

j	$h_j = \frac{1}{4}$		$h_j = \frac{1}{8}$		$h_j = \frac{1}{16}$		$h_j = \frac{1}{32}$		$h_j = \frac{1}{64}$	
	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio	$\ u_j^i - u_j\ $	ratio
1	0.103515		0.172065		0.144451		0.182226		0.208389	
2	5.74E-03	0.0554	5.66E-03	0.033	7.52E-03	0.052	1.11E-02	0.061	1.27E-02	0.061
3	3.47E-04	0.0605	1.27E-04	0.022	3.66E-04	0.049	5.59E-04	0.050	6.39E-04	0.050
4	2.15E-05	0.0620	4.71E-06	0.037	2.22E-05	0.061	3.67E-05	0.066	4.23E-05	0.066
5	1.34E-06	0.0624	1.81E-07	0.038	1.10E-06	0.050	1.95E-06	0.053	2.39E-06	0.056
6	8.38E-08	0.0625	7.19E-09	0.040	6.47E-08	0.059	1.28E-07	0.066	1.59E-07	0.067
7	5.24E-09	0.0625	3.06E-10	0.043	3.20E-09	0.049	7.24E-09	0.057	9.19E-09	0.058
8	3.27E-10	0.0625	1.32E-11	0.043	1.86E-10	0.058	4.72E-10	0.065	6.03E-10	0.066
9	2.05E-11	0.0625	5.71E-13	0.043	9.05E-12	0.049	2.71E-11	0.057	3.50E-11	0.058
10	1.28E-12	0.0625	2.54E-14	0.044	5.29E-13	0.058	1.74E-12	0.064	2.27E-12	0.065
11	7.99E-14	0.0625	9.99E-16	0.039	2.53E-14	0.048	1.00E-13	0.058	1.33E-13	0.059
12	5.00E-15	0.0625			1.55E-15	0.061	6.44E-15	0.064	8.88E-15	0.067
ρ_j		0.0625		0.039		0.061		0.064		0.067

Cuadro 5.9: Razón de convergencia para diferentes niveles: $\nu = 2$ y $\gamma = 2$ usando MUDPACK con interpolación cúbica

suavizador. En el cuadro (5.11) se tiene un resumen del factor de convergencia ($\tilde{\tau}$: factor

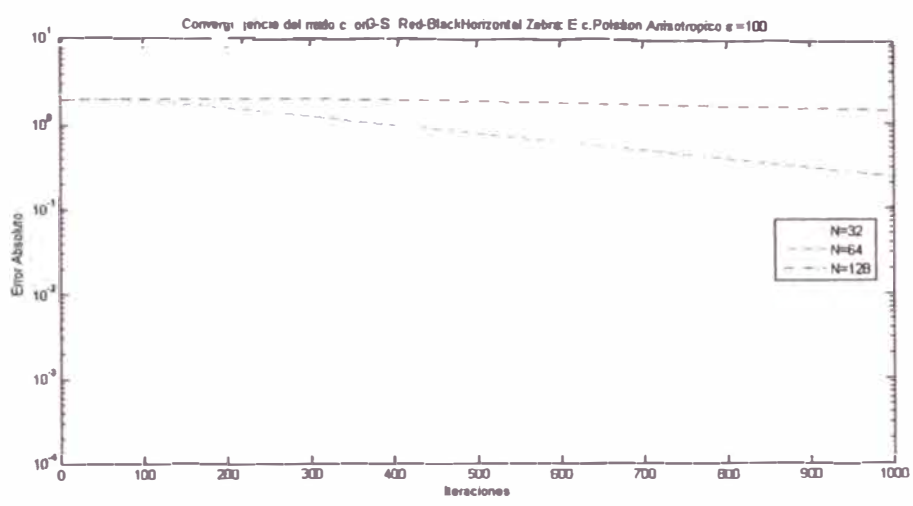


Figura 5.1: Convergencia Gauss Seidel

de convergencia o reducción media 2.2.6). Se consideran dos números de iteración(i) para cada parámetro de anisotropía ϵ . El primero se realiza para $i = 1000$ y el segundo se escoge luego de ver la figura (5.3), figura (5.4) figura (5.5), figura (5.6) y figura (5.7), pues luego de esas iteraciones se alcanza el error de discretización y no permite que haya más

h_k	$i = 1$		$i = 2$		Err. Disc	
	Err. Total $\ u_k^j - u_k\ $	ratio	Err. Total $\ u_k^j - u_k\ $	ratio	$\ u_k - u\ $	ratio
$\frac{1}{2}$	2.89E-04		2.89E-04		1.450E-04	
$\frac{1}{4}$	3.280E-03		3.280E-03		8.810E-05	0.608
$\frac{1}{8}$	4.558E-04	0.139	1.061E-04	0.032	2.640E-05	0.300
$\frac{1}{16}$	4.002E-05	0.088	1.936E-05	0.182	6.890E-06	0.261
$\frac{1}{32}$	5.885E-06	0.147	4.656E-06	0.240	1.740E-06	0.253
$\frac{1}{64}$	1.172E-06	0.199	1.083E-06	0.233	4.360E-07	0.251
$\frac{1}{128}$	2.698E-07	0.230	2.623E-07	0.242	1.090E-07	0.250
$\frac{1}{256}$	6.550E-08	0.243	6.498E-08	0.248	2.725E-08	0.250
$\frac{1}{512}$	1.624E-08	0.248	1.620E-08	0.249	6.813E-09	0.250
$\frac{1}{1024}$	4.049E-09	0.249	4.046E-09	0.250	1.703E-09	0.250

Cuadro 5.10: Iteración anidada con interpolación cúbica \tilde{p} para la (5.2.1) usando MUD-PACK

decrecimiento del error. Los factores de convergencia son medidos y como puede observarse cuando el parámetro de anisotropía (ε) es diferente de 1, el factor de convergencia del método multimalla tiende a 1. Lo cual coincide con los factores de convergencia estudiados en la sección §4.4.2, §4.4.3 para Jacobi y Gauss Seidel. Para Gauss Seidel Red Black, se constata que el factor de suavización es similar a los valores del cuadro 4.1. En el cuadro (5.12) se muestra el factor de convergencia para el método multimalla teniendo a Gauss Seidel Red-Black Horizontal Zebra, Gauss Seidel Zebra X y Gauss Seidel Zebra Y como suavizador. Del cuadro (4.4) el factor de suavización Gauss Seidel Zebra vertical X para una fuerte anisotropía se demostró que es un mal suavizador para $\beta = 0$, pero para $\beta = 90$, lo que es equivalente a tener un Gauss Seidel Zebra Y, es un excelente suavizador. El método multimalla con este suavizador se comporta análogamente, lo que también quiere decir que el corrector de malla gruesa (CGC) es bueno. La convergencia para estos métodos es ilustrado en las figuras (5.8) y (5.9) donde el decaimiento del error es el esperado.

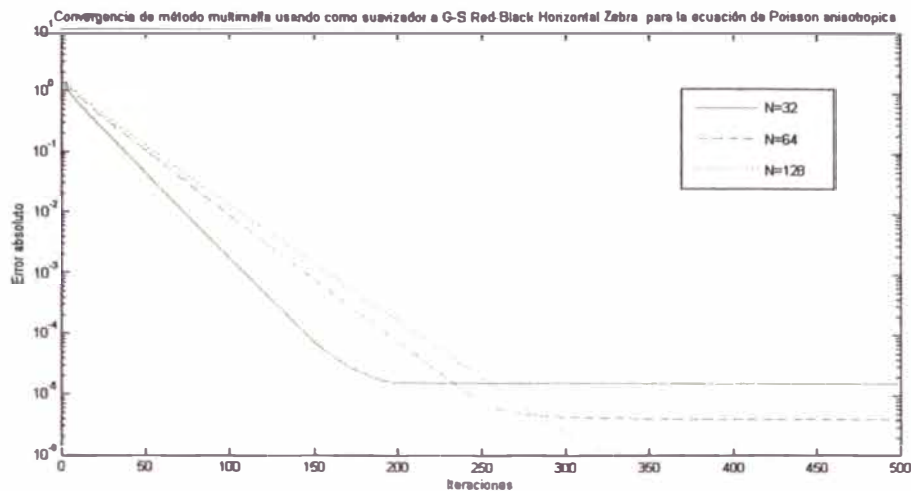


Figura 5.2: Independencia de la convergencia MG con respecto al grosor de malla $h = 1/N$ ($N=32,64,128$)

5.4. Conclusiones y trabajos posteriores

Los métodos de iteración clásicos son métodos que dependen del grosor de malla elegidos (h) y empeoran a medida que éste se reduce. Esto no sucede con los métodos multimallas, los que convergen independientemente del grosor de malla.

No debería de usarse como suavizadores los métodos iterativos de Jacobi o Gauss Seidel puntual cuando se incluye un parámetro de anisotropía en una ecuación de Poisson. Lo más recomendable es usar cualquiera sea la ecuación un método de relajación por bloques y alternante, por decir, Gauss Seidel Zebra Alternante. El único problema es que si la anisotropía se presenta claramente en una dirección el costo computacional es mayor si es que se usará únicamente un método de relajación por bloques en la dirección de la anisotropía.

El método multimalla se presenta como un método eficiente, pues el costo computacional es proporcional al número de variables. Este método es adecuado para resolver ecuaciones lineales que deriven de la discretización de EPDs de tipo elípticos y se pueden usar

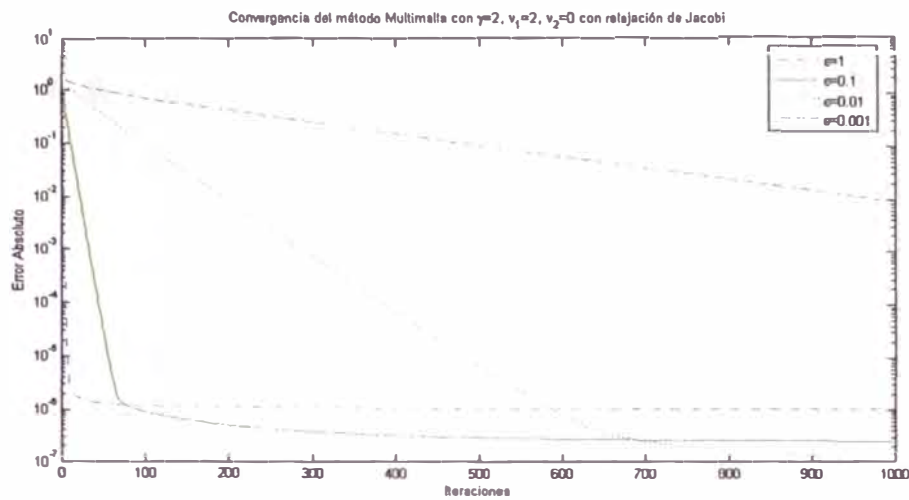


Figura 5.3: Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Jacobi $\epsilon \leq 1$

como pre-condicionador en los métodos basados en subespacios de Krilov (Por ejemplo con Gradiente Conjugado [15]).

En un trabajo posterior corresponde analizar el factor de suavización de mejores métodos de relajación, por ejemplo, el de factorización incompleta (ILU) incluyendo además el término mixto $\beta \neq 0$.

Y para superar el tiempo de ejecución al momento de hacer los cálculos computacionales, generados por el uso de mallas muy finas y debidas en gran medida a una memoria insuficiente, se debería implementar un programa que no use recursión a pesar que los métodos multimallas se prestan para una programación recursiva.

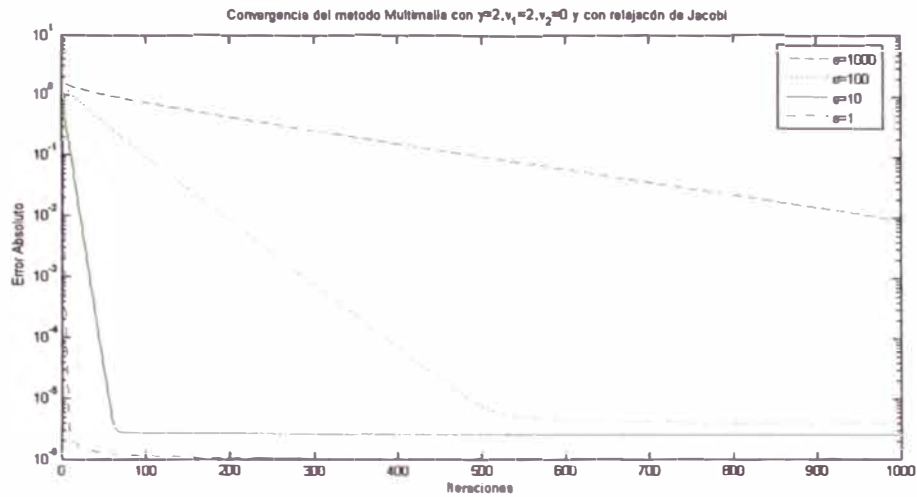


Figura 5.4: Convergencia MGM para la ecuaci3n de Poisson anisotr3pica (1.1.4) con Jacobi $\epsilon \geq 1$

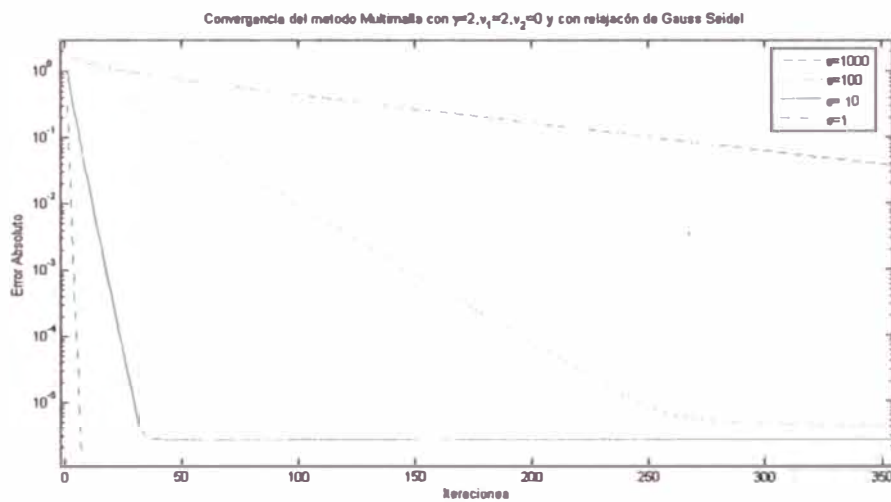


Figura 5.5: Convergencia MGM para la ecuaci3n de Poisson anisotr3pica (1.1.4) con Gauss Seidel puntual $\epsilon \geq 1$

Método	ε	i	$\ u_h^i - u_h\ $	$\ L_h u_h^i - f_h\ $	τ	$\tilde{\tau}$
Jacobi	1000	1000	9.20E-03	3.460E+02	0.995	0.995
		500	0.101	4.400E+03	0.995	0.994
	100	1000	4.16E-06	3.400E-02	1.000	0.987
		250	2.60E-03	2.650E+01	0.976	0.974
	10	1000	2.60E-06	1.350E-03	1.000	0.987
		45	8.75E-05	6.910E-01	0.815	0.800
	1	1000	1.04E-06	2.090E-04	1.000	0.986
		7	3.06E-05	2.660E-01	0.228	0.205
	0.1	1000	2.55E-07	1.630E-04	1.000	0.984
		35	6.70E-04	5.310E-01	0.813	0.796
	0.01	1000	1.04E-07	1.100E-03	0.998	0.983
		350	2.32E-04	3.020E-02	0.977	0.974
	0.001	1000	8.97E-03	3.290E-01	0.995	0.995
		500	9.84E-02	4.210E+00	0.995	0.994
Gauss Seidel	1000	1000	8.56E-05	1.580E+00	0.991	0.990
		500	9.23E-03	1.730E+02	0.991	0.989
	100	1000	4.14E-06	1.100E-10	1.000	0.987
		250	8.09E-06	6.730E-02	0.965	0.952
	10	1000	2.60E-06	1.170E-11	1.000	0.987
		35	2.85E-06	9.250E-03	0.918	0.681
	1	1000	1.03E-06	1.580E-12	1.000	0.986
		7	1.24E-06	1.170E-02	0.012	0.130
	0.1	1000	2.49E-07	1.000E-12	1.000	0.984
		35	1.11E-06	8.880E-04	0.686	0.663
	0.01	1000	4.13E-08	8.340E-13	1.000	0.982
		350	8.23E-08	6.360E-06	0.964	0.953
	0.001	1000	8.33E-05	1.540E-03	0.991	0.990
		500	8.98E-03	1.680E-01	0.980	0.989
GS- Red Black	1000	1000	8.56E-05	3.140E+00	0.991	0.990
		500	9.22E-03	3.430E+02	0.991	0.989
	100	1000	4.14E-06	1.240E-10	1.000	0.987
		250	7.73E-06	1.290E-01	0.965	0.951
	10	1000	2.60E-06	1.210E-11	1.000	0.987
		35	2.65E-06	1.030E-02	0.992	0.679
	1	1000	1.03E-06	1.580E-12	1.000	0.986
		7	1.03E-06	1.450E-04	1.000	0.126
	0.1	1000	2.49E-07	1.200E-12	1.000	0.984
		35	6.85E-07	1.010E-03	0.685	0.654
	0.01	1000	4.13E-08	1.160E-12	1.000	0.982
		250	6.99E-06	1.260E-03	0.954	0.951
	0.001	1000	8.35E-05	3.070E-03	0.991	0.990
		500	9.00E-03	3.350E-01	0.991	0.989

Cuadro 5.11: Análisis de convergencia del MGM para la ecuación modelo (1.1.4) con $\beta = 0$ y $N = 64$, $\gamma = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. i : número de iteraciones realizadas, τ : error relativo 2.2.5, $\tilde{\tau}$: factor de reducción media 2.2.6

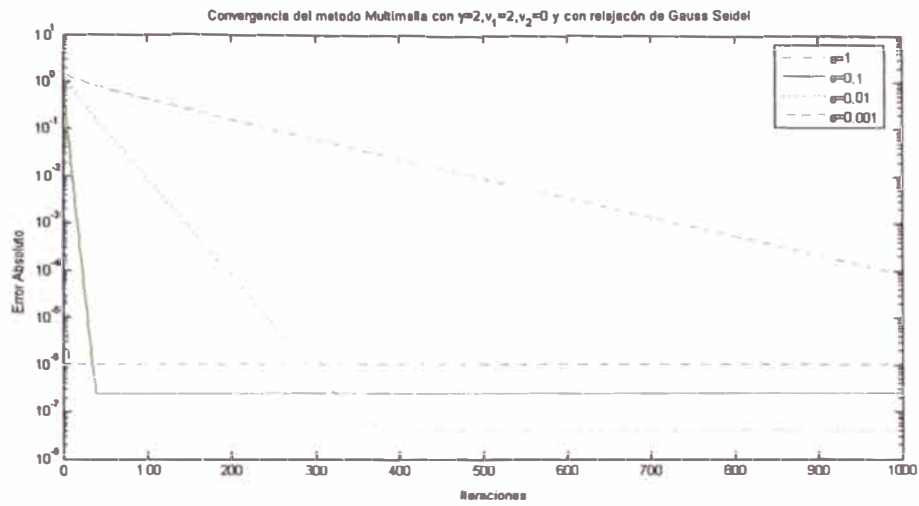


Figura 5.6: Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel puntual $\epsilon \leq 1$

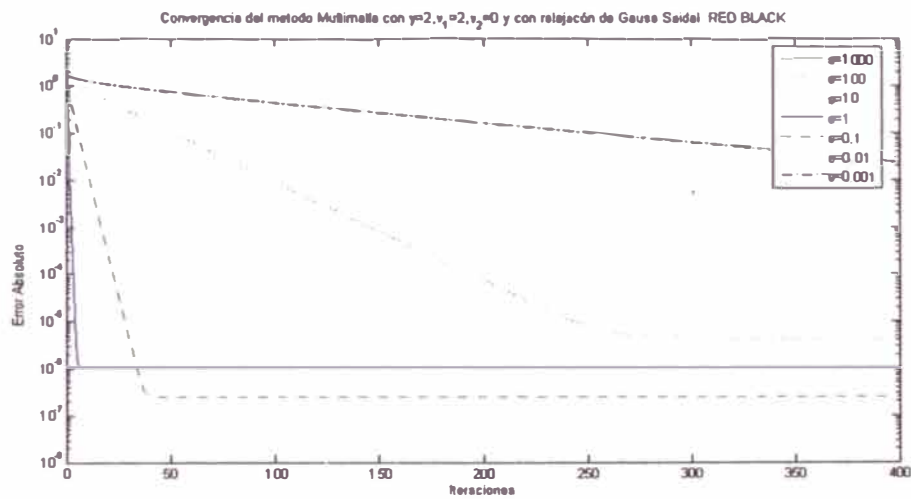


Figura 5.7: Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel RED BLACK puntual

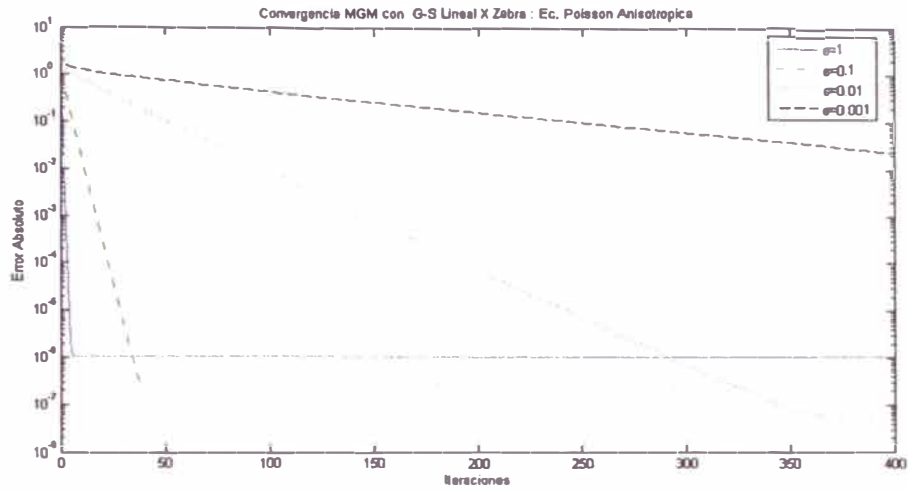


Figura 5.8: Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel Zebra X por bloques

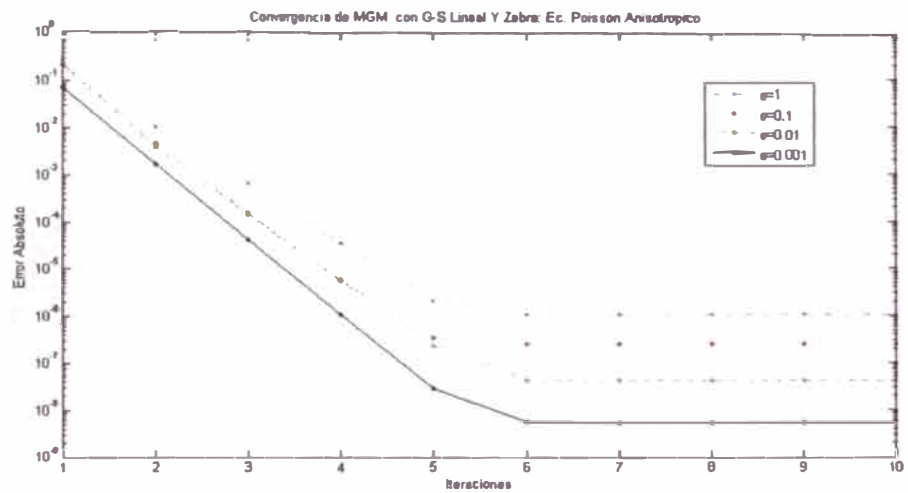


Figura 5.9: Convergencia MGM para la ecuación de Poisson anisotrópica (1.1.4) con Gauss Seidel Zebra Y por bloques

ε	i	$\ u_h^i - u_h\ $	$\ L_h u_h^i - f_h\ $	$\tilde{\tau}$
G-S Red-Black Horizontal Zebra				
1	7	1.03E-06	2.89E-03	0.126
0.1	35	6.92E-07	1.01E-03	0.654
0.01	250	6.99E-06	1.26E-03	0.951
0.001	500	9.00E-03	0.335	0.989
G-S Lineal X Zebra				
1	7	1.03E-06	8.43E-05	0.126
0.1	35	7.62E-07	1.13E-03	0.656
0.01	250	7.06E-06	1.27E-03	0.951
0.001	500	9.01E-03	0.336	0.989
G-S Lineal Y Zebra				
1	6	1.03E-06	1.43E-03	0.090
0.1	6	2.53E-07	3.12E-05	0.071
0.01	6	4.28E-08	2.75E-06	0.053
0.001	6	5.46E-09	3.54E-08	0.037
0.0001	3	5.87E-10	5.11E-10	0.001

Cuadro 5.12: Analisis de convergencia del MGM para la ecuación modelo (1.1.4) con $\beta = 0$ y $N = 64$, $\gamma = 2$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 0$. i Número de iteraciones realizadas, $\tilde{\tau}$ factor de reducción media 2.2.6 teniendo a Gauss Seidel Red-Black Horizontal Zebra, Gauss Seidel Zebra X y Gauss Seidel Zebra Y

Bibliografía

- [1] Brandt Achi., *Multi-level adaptive solutions to boundary- value problem.*, *Mathematic of Computation* **31** (1977), 333–390.
- [2] Victor Alan Bandy, *Black box multigrid convection diffusion equations on advanced computers*, The is for the degree of Doctor of Philosophy (1996).
- [3] G. Birkhoff and Lynch, *Numerical solution of elliptic problems*, SIAM, Philadelphia, 1984.
- [4] W. L. Briggs, *A multigrid tutorial*, SIAM, New York, Third Edition 2002.
- [5] Scientific Computing Division, *Multigrid software for elliptical partial differential equations mudpack.*, National Center for Atmospheric Research (NCAR) TECHNICAL NOTE (1991).
- [6] C. Grobmann and H. Roos, *Numerik partieller differentialgleichungen*, B.G. Teubner Stuttgart, Stuttgart Germany, 1992.
- [7] W. Hackbusch, *Multi-grid methods and applications*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1985.
- [8] R. Bulirsch J. Stoer, *Introduction to numerical analysis.*, Springer, Pennsylvania, Third Edition, 2002.
- [9] J. Douglas Faires Richard L. Burden, *Análisis numérico*, Thomson Learning, 2002.

- [10] Paul E. Ciesielski Scott R. Folton and Waynw H. Schumbert, *Multigrid methods for elliptic problemas: A review*, American Meteorological Society (1985), 943–959.
- [11] J. Strikwerda, *Finite difference schemes and partial differential equations*, Chapman and Hall, University of Wisconsin - Madison, 1989.
- [12] U Trottenberg Stüben K, *Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and aplicaciones.*, Lecture Notes in Mathematics **960** (1982), 1–176.
- [13] Pereyra V., *Highly accurate numerical solution of quasi-linear elliptic system in n dimensions.*, Math Comp 24 (1970), 771 – 783.
- [14] R. S. Varga, *Matrix iterative analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1962.
- [15] Nelson Vidaurre, *Estudo comparativo entre métodos multigrid e métodos de residuo conjugapara a soluc cao numérica de equa coes elípticas de segundo orden*, Tesis de Maestrado (2003), Instituto de Matematica e Estadística, IME.
- [16] Antonio Cañada Villar, *Serier de fourier y aplicaciones*, Piramide, Madrid - España, 2002.
- [17] P. Wesseling, *An introducción to multigrid metodos*, Jhon Wiley & Son, Chichester, 1992.
- [18] Jun Zhang, *Acceleration of five-point red-black gauss-seidel in multigrid for poisson equationmultigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and aplicaciones.*, Preprinter (1995), Department of Mathematics, The George Washington University.