UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

EL MÉTODO DE E. J. PUTZER EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

PRESENTADO POR:

OSCAR GUILLERMO VALVERDE SANDOVAL

TESIS

PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:

LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ASESOR: DR. CARLOS CHÁVEZ VEGA

LIMA – PERÚ

2005

RESUMEN

El objetivo principal de este trabajo es exponer didácticamente la resolución de un ***Sistema Lineal de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden***, asociado al ***Problema de Valores Iniciales*** de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\, x(t),\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \tag{1}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes (reales o complejos) de orden $n \times n$. El método que emplearemos en el presente trabajo para resolver el problema que se ha planteado, es el llamado ***método de E. J. Putzer***; cuyo desarrollo consiste en exponer dos algoritmos para representar e^{tA} como:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) \quad \text{y} \quad e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j$$

Esto es útil, tanto en la docencia como en trabajos aplicados, cuando la matriz A no es necesariamente diagonalizada, puesto que no hace falta encontrar la forma canónica de Jordan (F.C.J). Con dos ejemplos presento la ejecución de dos programas en computadora (usar Matlab a partir de la versión 6.0), denominados ***putzer.m*** y ***sistema.m***, que nos permiten resolver los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales dados en (1) y (2) respectivamente.

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\, x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0,\ t_0 \in I \subset \mathbb{R} \end{cases} \tag{2}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$, $x(t_0)$ y x_0 son matrices de orden $n \times 1$ y x, b son funciones vectoriales continuas en I.
Cualquier ecuación diferencial lineal de orden n de la forma:

$$y^{(n)} + a_1(t)\, y^{(n-1)} + a_2(t)\, y^{(n-2)} + \ \ldots\ + a_{n-1}(t)\, y' + a_n(t)\, y = R(t), \tag{3}$$

puede transformarse en un Sistema Lineal de n Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden.

Desde el punto de vista matemático el presente trabajo es un ejemplo de interrelación entre las ***Ecuaciones Diferenciales Lineales*** y el ***Álgebra Lineal***.

EL METODO DE E. J. PUTZER EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES CON COEFICIENTES CONSTANTES

Oscar Guillermo Valverde Sandoval

7 de diciembre de 2005

Indice general

1. Introducción 1

2. Preliminares 4

2.1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ 4

2.1.1. Producto interno en $\mathbb{R}^n$ 5

2.1.2. Normas en $\mathbb{R}^n$ 5

2.2. Generalidades de funciones vectoriales y matrices de funciones de variable real 9

2.2.1. Derivada de una matriz de funciones 9

2.2.2. Integral de una matriz de funciones 10

2.2.3. Continuidad y derivada de una matriz de funciones 11

2.3. Teoría de matrices de funciones reales 12

2.3.1. Serie de potencias de matrices 12

2.3.2. Exponencial de una matriz: e^{tA} 14

2.3.3. Cálculo práctico de la exponencial de algunas matrices . . . 21

3. El método de E. J. Putzer y su aplicación en la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales 26

3.1. Introducción 26

3.2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales 28

3.2.1. Método de E. J. Putzer (Primer algoritmo) 30

3.2.2. Método de E. J. Putzer (Segundo algoritmo) 33

3.2.3. Programa computacional putzer.m 38

3.2.4. Programa computacional sistema.m 41

4. Aplicaciones 50

4.1. Método de E. J. Putzer (Primer algoritmo) 50

4.1.1. **Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales** 50
4.1.2. **Sistemas químicos** 60
4.1.3. **Circuitos eléctricos** 63
4.2. **Método de E. J. Putzer(Segundo algoritmo)** 73
4.2.1. **Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales** 73
4.2.2. **Sistema masa - resorte** 83
4.2.3. **Circuitos eléctricos** 90

5. Conclusiones **94**
5.1. **Campos vectoriales y ecuaciones diferenciales** 97
5.1.1. **Problema de Cauchy** 100
5.2. **Forma canónica de Jordan** 103
5.2.1. **Fundamento teórico sobre las matrices de Jordan** 103
5.2.2. **Solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales aplicando la forma canónica de Jordan** 121

6. Apéndice **97**

7. Bibliografía **126**

Dedicatoria

Agradezco a Dios por permitir que dos personas maravillosas me traigan al mundo y hacer siempre gratificante mi vida. Con mucho cariño dedico esta tesis a mis queridos padres el Sr. Artemio y la Sra. María Sofia por su constante sacrificio, quienes con mucho amor iluminaron mis inquietudes de juventud y en los momentos más difíciles supieron darme valor y ánimos para salir adelante y ser un hombre de bien, pues me enseñaron a luchar para conseguir mis objetivos. A mi abnegada y adorable esposa, Marilín Rosario, por su invalorable apoyo y su inquebrantable paciencia que crearon el clima espiritual indispensable para mi realización. A mis dos tesoros, César Augusto y Brandon Ismael, por regalarme su tiempo de juego. A mis hermanos: María Liliana, Humberto y a la memoria de mi hermano Marco Antonio que está gozando de la presencia de Dios, y quien en vida me alentó siempre a triunfar.

Agradecimientos

Quiero empezar agradeciendo a mi asesor el Dr. Carlos Chávez Vega por tomarse la iniciativa de darme el tema de tesis. Un agradecimiento muy especial a la Msc. Irla Mantilla Nuñez y al Dr. Renato Benazic Tomé por su gran aporte profesional e incondicional en la realización de este trabajo. Para quienes pediré siempre al todopoderoso derrame sus bendiciones.

Agradezco infinitamente a los catedráticos por todo lo que me dieron y que supieron guiarme en el transcurso de mi carrera y mi estadía en la universidad al mostrarme el camino del bien y hacer de mi facultad un hogar de la ciencia y la cultura. A mi compadre el Lic. Julio César Salazar Rodríguez y el Lic. Alejandro Hidalgo Gordillo por su brillante comunicación y apoyo moral en los momentos más dificiles que me tocó vivir y a las ganas que le pusieron en apoyarme para la culminación de este trabajo.

A la Lic. Gladys Córdova Ruiz, por su apoyo en la revisión de la normativa de la presente tesis y al Sr. Ángel Ramirez Gutierrez por su colaboración y sugerencias en el trabajo computacional.

Finalmente, quiero agradecer a toda mi familia y mis verdaderos amigos por su apoyo incondicional de alguna u otra manera.

Capítulo 1

Introducción

Algunas ciencias como: la Física, la Química, la Biología, etc., expresan sus fenómenos naturales en modelos matemáticos y algunos de ellos dan origen a ***sistemas lineales de ecuaciones diferenciales***. El objetivo principal de este trabajo es exponer didácticamente la resolución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales asociado al Problema de Valores Iniciales de la forma:

1. ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo.***

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\, x(t),\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$, y x_0 es una matriz columna de $n \times 1$.

El método que emplearemos en el presente trabajo para resolver el problema que se ha planteado, es el llamado ***método de E. J. Putzer***; cuyo desarrollo consiste en exponer dos algoritmos para representar e^{tA} como:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) \quad \text{y} \quad e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j$$

Esto es particularmente útil, tanto en la docencia como en trabajos aplicados, cuando la matriz A no es necesariamente diagonalizada, puesto que no hace falta discutir o encontrar la forma canónica de Jordan (F.C.J). Mediante un ejemplo presento la ejecución de un programa en computadora (en formato compatible con Matlab a partir de la versión 6.0), que permite resolver el sistema (1.1). Es decir este programa (elaborado en base al método de E. J. Putzer) posibilita el cálculo de la matriz e^{tA}, para lo cual tenemos que introducir una matriz con elementos constantes A de orden $n \times n$ y una condición inicial x_0.

También se presenta el diagrama de flujo del algoritmo que ejecuta dicho programa. Todos los archivos correspondientes a este programa así como el archivo ejecutable denominado ***putzer.m*** deben ser ubicados en el siguiente subdirectorio:

$$C : \backslash matlabr11 \backslash work \backslash programa1$$

2. ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo.***

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)\ x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0,\ t_0 \in I \subset \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.2}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$, $x(t_0)$ y x_0 son matrices de orden $n \times 1$ y x, b son funciones vectoriales continuas en I.

La ejecución de un segundo programa (elaborado en base al método de Runge Kutta) permite resolver el sistema (1.2). Todos los archivos correspondientes a este programa así como el archivo ejecutable denominado ***sistema.m*** deben ser ubicados en el siguiente subdirectorio:

$$C : \backslash matlabr11 \backslash work \backslash programa2$$

En el capítulo 3 se explicará con mas detalle la ejecución de cada uno de estos programas. Cuando la función vectorial b no es continua se requiere otro tipo de análisis, basado en métodos numéricos. El trabajo completo de esta tesis y los dos programas computacionales se encuentran en un CD - ROOM, el mismo que ha sido entregado a Post Grado de la Facultad de Ciencias.

También se puede hacer una extensión del método de E. J. Putzer para un ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden no homogéneo.***

$$\begin{aligned} x'(t) &= A(t)\ x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= x_0,\ t_0 \in I \subset \mathbb{R} \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos variables de orden $n \times n$, $x(t_0)$ y x_0 son matrices de orden $n \times 1$ y x, b son funciones vectoriales continuas en I. El marco teórico correspondiente a los sistemas (1.1), (1.2) y (1.3) se expondrá con más detalle en el capítulo 3.

Conviene mencionar, que cualquier ecuación diferencial lineal de orden n de la forma:

$$y^{(n)} + a_1(t)\ y^{(n-1)} + a_2(t)\ y^{(n-2)} + \ \ldots\ + a_{n-1}(t)\ y' + a_n(t)\ y \ = \ R(t) \tag{1.4}$$

(donde los a_i, $i = 1, \ \ldots\ , n$ son funciones reales de variable real), puede transformarse en un ***sistema lineal de n ecuaciones diferenciales de primer orden***, mediante los siguientes cambios de variable:

$$y_1 = y, \quad y_2 = y_1', \quad y_3 = y_2', \quad \ldots\ , \ y_n = \ y_{n-1}' \tag{1.5}$$

Obteniendo:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_3 \\ & \vdots & \\ y_{n-1}' & = & y_n \\ y_n' & = & -a_n(t)\ y_1 \ - a_{n-1}(t)\ y_2 \ - \ \ldots \ - a_1(t)\ y_n \ + \ R(t) \end{array} \right. \tag{1.6}$$

de manera que la solución de (1.6), permita encontrar la solución de (1.4) (son sistemas equivalentes).

Ejemplo 1.0.1 La ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y'' + 2ty' - y \ = e^t \tag{1.7}$$

puede transformarse en un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden, introduciendo dos funciones incognitas: y_1 e y_2; siendo:

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y' = y_1'$$

Tenemos entonces $y_2' = y''$, de tal manera que (1.7) puede escribirse como un sistema lineal de dos ecuaciones de primer orden:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1' & = & y_2 \\ y_2' & = & y_1 - 2ty_2 + e^t \end{array} \right.$$

Desde el punto de vista matemático el presente trabajo es un ejemplo de interrelación entre las ***ecuaciones diferenciales lineales*** y el ***álgebra lineal***. Como por ejemplo la gran utilidad de la teoría de matrices; entre ellas, la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden con coeficientes constantes, hecho que pretendo poner de manifiesto con el mayor énfasis.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. El espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1.1 *Sea $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\mathbb{R}^n$ es definido como la colección de todas las n- uplas $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n)$ de números reales, es decir:*

$$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n) :\ x_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq n\}$$

Observaciones 2.1.2

a) Los elementos de $\mathbb{R}^n$ son llamados ***puntos*** o ***vectores n-dimensionales***.

b) Cuando $n = 1$, escriberemos $\mathbb{R}$ en vez de $\mathbb{R}^1$. El conjunto $\mathbb{R}$ es llamado ***recta real***.

c) El número real x_i es llamado ***i - ésima coordenada*** de x.

d) Los números reales también son llamados ***escalares***.

e) Cuando $n = 2$, el conjunto $\mathbb{R}^2$ es llamado ***plano real***.

f) Cuando $n = 3$, el conjunto $\mathbb{R}^3$ es llamado ***espacio real***.

Teorema 2.1.3 El conjunto $\mathbb{R}^n$, con las operaciones de suma de vectores y producto de un escalar por un vector, es un $\mathbb{R}$ - espacio vectorial de dimensión n.

Observaciones 2.1.4

a) El vector cero será denotado por $\overline{0}$.

b) El inverso aditivo del vector x será denotado por $-x$.

c) El conjunto:

$$\gamma = \{e_1 = (1,\ 0,\ \cdots,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ \cdots,\ 0),\ \cdots,\ e_n = (0,\ 0,\ \cdots,\ 1)\}$$

forma una base de $\mathbb{R}^n$, la cual será llamada ***base canónica***.

d) Si $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$, entonces $x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \ \cdots\ +\ x_n\, e_n$.

2.1.1. Producto interno en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1.5 *Sean $x = (x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ e $y = (y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n) \in \mathbb{R}^n$. El producto interno de x e y, denotado por $\langle x\ ;\ y\rangle$ es el número real:*

$$\langle x\ ;\ y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

Las propiedades del producto interno se resumen en el siguiente teorema:

Teorema 2.1.6 Se cumplen las siguientes propiedades:

a) $\langle x\ ;\ x\rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

b) $\langle x\ ;\ x\rangle = 0 \iff x = \bar{0}$.

c) $\langle x\ ;\ y\rangle = \langle y\ ;\ x\rangle$, para todo $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

d) $\langle x + y\ ;\ z\rangle = \langle x\ ;\ z\rangle + \langle y\ ;\ z\rangle$, para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}^n$.

e) $\langle \alpha\, x\ ;\ y\rangle = \alpha\, \langle x\ ;\ y\rangle$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y para todo $x,\ y \in \mathbb{R}^n$.

2.1.2. Normas en $\mathbb{R}^n$

I. ***Norma euclidiana***

Definición 2.1.7 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$. La norma de x, denotada por $|x|$, es definida como:*

$$|x| = \sqrt{\langle x\ ;\ x\rangle}$$

A esta norma se le denomina ***norma euclidiana***.

Observación 2.1.8 (Interpretación geométrica) La norma euclidiana del vector x se interpreta como la distancia del punto x al punto $\overline{0}$ (origen de coordenadas).

Teorema 2.1.9

a) $|x| \geq 0, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$; $|x| = 0$ si y sólo si $x = \overline{0}$.

b) $|x + y| \leq |x| + |y|, \ \forall\, x, \ y \in \mathbb{R}^n$ (desigualdad triangular).

c) $|\alpha\, x| = |\alpha|\ |x|, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Definición 2.1.10 *(Conjunto abierto) Se dice que el conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$, si para cada $x_0 \in U$ existe un $r > 0$, tal que $B(x_0\ ;\ r) \subset U$.*

Observaciones 2.1.11

a) La distancia entre dos puntos x e $y \in \mathbb{R}^n$ es: $d(x\ ;\ y) = |x - y|$

b) Disco unitario abierto: $D = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ |x| \ < \ 1\}$

Si $n = 2$, entonces: $D = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x| \ < \ 1\}$

II. ***La norma del máximo***

Definición 2.1.12 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, definimos $|x|_M = máx\{|x_i| \ / \ i = 1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n\}$*

a) La distancia entre dos puntos x e $y \in \mathbb{R}^n$ es: $d_M(x\ ;\ y) = |x - y|_M$

b) El disco unitario abierto es: $D_M = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ |x|_M \ < \ 1\}$

Si $n = 2$, entonces: $D_M = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x|_M \ < \ 1\}$

III. ***La norma de la suma***

Definición 2.1.13 *Sea $x \in \mathbb{R}^n$, definimos:* $|x|_S = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$

a) La distancia entre dos puntos x e $y \in \mathbb{R}^n$ es: $d_S(x\ ;\ y) = |x - y|_S$

b) El Disco unitario abierto es: $D_S = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ |x|_S \ < \ 1\}$

Si $n = 2$, entonces: $D_S = \{x \in \mathbb{R}^2 \ / \ |x|_S \ < \ 1\}$

Igualmente las normas definidas en II y III satisfacen propiedades análogas al teorema 2.1.9. Las tres normas anteriores satisfacen:

$$|x|_M \ \leq \ |x| \ \leq |x|_S$$

De modo general, una norma, en un espacio vectorial $V(\mathbb{R}^n)$, es una función real:

$$N : V \longrightarrow \mathbb{R}$$

que satisface:

a) $N(x) \geq 0$; $N(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \bar{0}$.

b) $N(x + y) \leq N(x) + N(y), \ \forall \ x, \ y \in \mathbb{R}^n$.

c) $N(k \ x) = |k| \ N(x), \ k \in \mathbb{R}; \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n$.

IV. ***La norma de una matriz***

Definición 2.1.14 *Si* $A = \left[\ a_{ij} \ \right]$ *es una matriz de orden* $m \times n$ *de elementos reales o complejos, la norma de* A*, designada por* $\|A\|$*, se define como el número no negativo dado por la fórmula:*

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Es decir, la norma de A es la suma de los valores absolutos de todos sus elementos. En algunos casos se usan otras definiciones de la norma, se ha elegido esta norma por la facilidad que presta para la demostración de algunas propiedades.

Ahora consideremos:

a) $| \cdot |$ una norma en $\mathbb{R}^n$ (puede ser la euclidiana).

b) El conjunto compacto $\text{ß} = \{y \in \mathbb{R}^n : |y| \ \leq \ 1\}$ de $\mathbb{R}^n$ (bola unitaria cerrada).

c) La transformación lineal:

$$\begin{aligned} T_A : \mathbb{R}^n \ &\rightarrow \ \mathbb{R}^n \\ y \ &\mapsto \ T_A(x) = A \ x, \ \text{donde } A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ es una matriz fija.} \end{aligned}$$

Observación 2.1.15 Observe que T_A es continua en todo su dominio, luego alcanza su máximo en ß.

Notación: Denotamos por $\|A\|$ a este máximo, es decir,

$$\|A\| = \text{máx}\{|A\ x| : \ x \in ß\}$$

Proposición 2.1.16 La función:

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & \|A\| = \text{máx}\{|A\ x| : \ |x| \ \leq \ 1\} \end{array}$$

satisface las siguientes propiedades:

a) $\|A\| \geq 0, \ \forall \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

b) $\|A\| = 0 \iff A = \Theta$ ($\Theta \in \mathbb{R}^{n\times n}$ denota la matriz nula de orden $n \times n$).

c) $\|r\ A\| = |r|\ \|A\|; \ \forall \ r \in \mathbb{R}, \ \forall \ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

d) $\|\ A + B\| \leq \|A\| + \|B\|; \ \forall \ A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Observaciones 2.1.17

a) $\|\cdot\|$ es una norma definida en el $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{R}^{n\times n}$. Esta norma es llamada la ***norma uniforme*** (asociada a $|\cdot|$)

b) $(\mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|\cdot\|)$, es un ***espacio normado***.

c) $(\mathbb{R}\ ;\ |\cdot|)$, es un ***espacio normado***.

d) $(\mathbb{R}^{1\times 1}\ ;\ \|\cdot\|) \cong (\mathbb{R}\ ; |\cdot|)$, es un ***isomorfismo***.

Ejemplo 2.1.18 Considere $\mathbb{R}^2$ con la norma euclidiana. Determine $\|A\|$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolución.

$$A\ x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$|A\ x| = |(x_1\ ;\ x_2)| = \sqrt{x_1^2\ +\ x_2^2} \leq 1 \quad \Longrightarrow \quad \text{máx}\{|A\ x| : |x| \leq 1\} = 1$$

Entonces $\|A\| = 1$.

2.2. Generalidades de funciones vectoriales y matrices de funciones de variable real

2.2.1. Derivada de una matriz de funciones

Consideremos un sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} x_1'(t) & = & a_{11}\,x_1(t) & + & \cdots & + & a_{1n}\,x_n(t) & + & b_1(t) \\ x_2'(t) & = & a_{21}\,x_1(t) & + & \cdots & + & a_{2n}\,x_n(t) & + & b_2(t) \\ & \vdots & & & & & & & \\ x_n'(t) & = & a_{n1}\,x_1(t) & + & \cdots & + & a_{nn}\,x_n(t) & + & b_n(t) \end{array}\right. \tag{2.1}$$

O equivalentemente:

$$x_i'(t) = \frac{dx_i(t)}{dt} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,x_j(t) + b_i(t), \quad i = 1, \ \dots \ , n \tag{2.2}$$

Donde los a_{ij} son escalares de $\mathbb{R}$ y b_i, $i = 1, \ \dots \ , n$ son funciones de t en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Podríamos simplificar considerablemente el estudio de sistemas de la forma dada en (2.1), mediante la notación matricial.

Sean:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

vectores n-dimensionales, a los cuales les llamaremos ***funciones vectoriales***; y una ***matriz de elementos constantes*** $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix}$ de orden $n \times n$.

Los x_i, b_i, $i = 1, \ \dots \ , n$ son funciones de t en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$.

Definición 2.2.1 *Sea la matriz de funciones $M(t) = \begin{bmatrix} m_{ij}(t) \end{bmatrix}$ de orden $m \times n$. Si $m_{ij}'(t)$(la derivada de m_{ij}) existe para todo t en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$; entonces la derivada de la matriz de funciones M se define como la matriz de orden $m \times n$, cuyos elementos son $m_{ij}'(t)$. Es decir:*

$$M'(t) = \begin{bmatrix} m_{ij}'(t) \end{bmatrix} \quad y \quad x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

siempre que $x_i'(t),\ i = 1,\ \ldots\ ,\ n$ *existan para* t *en* $I \subset \mathbb{R}$.

Luego podemos escribir el sistema (2.1) en su forma más sencilla:

$$x'(t) \;=\; A\,x(t) \;+\; b(t) \tag{2.5}$$

para t en $I \subset \mathbb{R}$, denominada ***ecuación vectorial*** del sistema (2.1), donde A es una matriz de orden $n \times n$. Un Problema de Valores Iniciales para el sistema (2.5) es de la forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) & = & A\,x(t) \;+\; b(t),\ t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) & = & x_0\ \in \mathbb{R}^{n\times 1},\quad t_0 \in I \subset \mathbb{R} \end{array}\right. \tag{2.6}$$

2.2.2. Integral de una matriz de funciones

Definición 2.2.2 *Sea:*

$$\begin{array}{rcl} A:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times n} \\ t & \longmapsto & A(t) = \left[\ a_{ij}(t)\ \right],\quad t \in I \subset \mathbb{R},\ i,j = 1,\ \cdots\ ,n \end{array}$$

una matriz de funciones de orden $n \times n$.

Sea $\mathcal{H}$ el conjunto de todas las matrices de funciones de orden $n \times n$. Es decir:

$$\mathcal{H} = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} / A(t) = \left[\ a_{ij}(t)\ \right],\ t \in I \subset \mathbb{R},\ i,j = 1,\ \cdots\ ,n\}$$

Definición 2.2.3 *Sea* $A \in \mathcal{H}$. *Si cada* a_{ij} *es integrable en* $[a\ ;\ b]$, *la integral de la matriz* A *en* $[a\ ;\ b]$ *es la matriz de orden* $n \times n$, *obtenida integrando cada elemento de* A. *Es decir:*

$$\int_a^b A(t)\ dt \;=\; \left[\ \int_a^b a_{ij}(t)\ dt\ \right],\ i,j = 1,\ \cdots\ ,n \tag{2.7}$$

Definición 2.2.4 *Sean:* $A, B \in \mathcal{H}$ *y* $c \in \mathbb{R}$. *Definimos las funciones* $A+B$ *y* cA, *mediante:*

$$\begin{array}{rclcl} (A+B)(t) & = & A(t)+B(t) & = & \left[\ a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\ \right],\ i,j = 1,\ \cdots\ ,n \\ (cA)(t) & = & cA(t) & = & \left[\ ca_{ij}(t)\ \right],\ t \in I \subset \mathbb{R},\ i,j = 1,\ \cdots\ ,n \end{array} \tag{2.8}$$

Definición 2.2.5 *(Linealidad para integrales de matrices de funciones)*

$$\int_a^b (A+B)(t)\ dt = \int_a^b (A(t)+B(t))\ dt = \int_a^b \Big[\ a_{ij}(t)+b_{ij}(t)\ \Big]\ dt,\ i,j=1,\ \cdots\ ,n$$

$$\int_a^b (A+B)(t)\ dt = \Big[\ \int_a^b a_{ij}(t)\ dt + \int_a^b b_{ij}(t)\ dt\ \Big],\ i,j=1,\ \cdots\ ,n$$

$$\int_a^b (A+B)(t)\ dt = \Big[\ \int_a^b a_{ij}(t)\ dt\ \Big] + \Big[\ \int_a^b b_{ij}(t)\ dt\ \Big],\ i,j=1,\ \cdots\ ,n$$

$$\int_a^b (A+B)(t)\ dt = \int_a^b A(t)\ dt + \int_a^b B(t)\ dt,\ t\in I\subset\mathbb{R},\ c\in\mathbb{R} \qquad (2.9)$$

También:

$$\int_a^b (cA)(t)\ dt = \int_a^b cA(t)\ dt = \Big[\ \int_a^b ca_{ij}(t)\ dt\ \Big] = \Big[\ c\int_a^b a_{ij}(t)\ dt\ \Big]$$

$$\int_a^b (cA)(t)\ dt = c\Big[\ \int_a^b a_{ij}(t)\ dt\ \Big] = c\int_a^b A(t)\ dt,\ i,j=1,\ \cdots\ ,n \qquad (2.10)$$

Así, las igualdades (2.9) y (2.10), podemos resumirlas en una sola:

$$\int_a^b (cA(t)+dB(t))\ dt = c\int_a^b A(t)\ dt + d\int_a^b B(t)\ dt, \text{ donde: } c,d\in\mathbb{R} \qquad (2.11)$$

2.2.3. Continuidad y derivada de una matriz de funciones

Definición 2.2.6 *(Continuidad de una matriz de funciones)*
Sea $A\in\mathcal{H}$, $t\in I\subset\mathbb{R}$. Si a_{ij} son funciones reales continuas en un punto $t_0\in I\subset\mathbb{R}$; entonces, la matriz de funciones A es continua en el punto t_0.

Diremos que la matriz de funciones A es continua en el intervalo $I\subset\mathbb{R}$, si lo es en cada punto de $I\subset\mathbb{R}$.

Definición 2.2.7 *(Derivada de la suma y producto de matrices de funciones)*
Sean $A,B\in\mathcal{H}$ derivables en cierto intervalo $I\subset\mathbb{R}$.
Entonces:

$$(A(t)+B(t))' = \Big[\ a'_{ij}(t)+b'_{ij}(t)\ \Big] = \Big[\ a'_{ij}(t)\ \Big] + \Big[\ b'_{ij}(t)\ \Big]$$

$$(A(t)+B(t))' = A'(t)+B'(t),\ t\in I\subset\mathbb{R} \qquad (2.12)$$

Además:

$$(cA(t))' = cA'(t),\ c\in\mathbb{R},\ t\in I\subset\mathbb{R} \qquad (2.13)$$

Por otra parte, si A y B son dos matrices de funciones derivables, tal que el producto AB está definido en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$; entonces se cumple que:

$$(A(t)B(t))' \;=\; A'(t)B(t) + A(t)B'(t), \;\; t \in I \subset \mathbb{R} \tag{2.14}$$

En efecto, sean $A(t) = \left[\; a_{ij}(t) \;\right]$ de orden $m \times n$ y $B(t) = \left[\; b_{jk}(t) \;\right]$ de orden $n \times p$, dos matrices de funciones definidas en un cierto intervalo $I \subset \mathbb{R}$.
Entonces, $A(t)B(t) = \left[\; c_{ik}(t) \;\right]$; donde:

$$c_{ik}(t) \;=\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\; b_{jk}, \;\; i = 1, \; \cdots \;, m; \;\; k = 1, \; \cdots \;, p \tag{2.15}$$

Luego: $(A(t)B(t))' = \left[\; c'_{ik}(t) \;\right]$ por la definición 2.2.1.

$$c'_{ik}(t) \;=\; \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\; b_{jk}(t) \right)' = \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t)\; b_{jk}(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\; b'_{jk}(t) \tag{2.16}$$

Así:

$$\left[\; c'_{(ik)}(t) \;\right] = \left[\; \sum_{j=1}^{n} a'_{ij}(t)\; b_{jk}(t) \;\right] + \left[\; \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)\; b'_{jk}(t) \;\right] \tag{2.17}$$

Por lo tanto:

$$(A(t)B(t))' \;=\; A(t)'B(t) + A(t)B(t)', \;\; t \in I \subset \mathbb{R} \tag{2.18}$$

2.3. Teoría de matrices de funciones reales

2.3.1. Serie de potencias de matrices

Definición 2.3.1 *Una* ***sucesión de matrices*** *es una función M definida en $\mathbb{N}$, tal que a cada $k \in \mathbb{N}$ le asocia una matriz $M(k) = M_k$,*

$$\begin{aligned} M : \mathbb{N} \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^{n\times n} \\ k \;&\longmapsto\; M(k) = M_k \end{aligned}$$

Ejemplo 2.3.2

$$\begin{aligned} M : \mathbb{N} \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^{n\times n} \\ k \;&\longmapsto\; M_k = \frac{1}{k!}\, A^k \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ está fijada.

Notación:

Emplearemos la siguiente notación: " $(M_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ significa "sucesión" de matrices cuadradas de orden $n \times n$".

A continuación definiremos el concepto de serie de matrices.

Definición 2.3.3 *Dada* $(M_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$*, a esta sucesión le asociaremos una nueva sucesión definida de la manera siguiente:*

$$\begin{aligned} S_1 &= M_1 \\ S_2 &= M_1 + M_2 \\ S_3 &= M_1 + M_2 + M_3 \\ &\vdots \\ S_k &= \sum_{j=1}^{k} M_j \end{aligned}$$

Esta sucesión $(S_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ es llamada ***sucesión de sumas parciales*** asociada a la sucesión original $(M_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$. Se acostumbra denotar $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ en vez de (S_k).

Como $(\mathbb{R}^{n\times n}\ ;\ \|\ \|)$ es un espacio normado, podemos definir el límite de sucesiones de matrices de la manera "standard"; y también, a cada sucesión de matrices le podemos asociar su serie respectiva y estudiar su convergencia.

$$\lim_{k\to\infty} M_k = B \iff \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ k_0 \in \mathbb{N} \ /\ k \geq k_0 \implies \|M_k - B\| < \varepsilon$$

Definición 2.3.4 (Convergencia de series de matrices)

Sea (M_k) *una sucesión de matrices de orden* $n\times n$*, cuyos elementos son números reales o complejos. Designemos el elemento* ij *de* M_k *por* $a_{ij}^{(k)}$.

Si todas las series:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)} \quad i,\ j = 1,\ \cdots\ ,\ n.$$

son convergentes, decimos entonces que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ *es convergente, y su suma está definida como la matriz de orden* $n \times n$*, cuyos elementos son los* b_{ij}*, es decir:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k = [b_{ij}] = \left[\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^{(k)}\right] \tag{2.19}$$

Teorema 2.3.5 ***(Criterio de convergencia para serie de potencias de matrices)***

Si (M_k) es una sucesión de matrices de orden $n \times n$, tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \|M_k\|$ converge; entonces la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ también converge.

Demostración. Denotemos el elemento ij de M_k por a_{ij}^k. Sabemos que: $|a_{ij}^k| \leq \|M_k\|$, luego la convergencia de $\sum_{k=1}^{\infty} \|M_k\|$ implica la convergencia absoluta de cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^k$. Así, cada una de las series $\sum_{k=1}^{\infty} a_{ij}^k$ es convergente; por lo que la serie de matrices $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ es convergente.

Teorema 2.3.6 $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$ es convergente, $\forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con elementos reales o complejos.

Demostración.

$$\left\|\frac{1}{j!} A^j\right\| = \frac{1}{j!} \|A^j\| \leq \frac{1}{j!} \|A\|^j, \qquad \forall\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$$

Como la serie de números reales $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \|A\|^j$ es convergente (y converge a $e^{\|A\|}$), el teorema 2.3.5 nos garantiza que: $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j$ es convergente.

2.3.2. Exponencial de una matriz: e^{tA}

La exponencial de una matriz real tA de orden $n \times n$ puede ser obtenida por varios modos distintos. Como por ejemplo:

a) Una serie infinita de potencias de A de la forma: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k A^k$

b) Por el método de los autovalores:
$e^{tA} = P\ e^D\ P^{-1}$; donde $D = diag(t\lambda_1,\ t\lambda_2,\ \cdots\ ,\ t\lambda_n)$ es la matriz, teniendo como elementos en su diagonal principal, los autovalores propios $t\lambda_1,\ t\lambda_2,\ \cdots\ ,\ t\lambda_n$ de la matriz tA.

c) Por el teorema de Cayley-Hamilton: $e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k A^k$; siendo los escalares α_k obtenidos, tal que para cada autovalor λ: $e^{t\lambda} = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k t^k \lambda^k$.

Por su utilidad en la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales y por su propio valor, estamos interesados en el estudio de una serie particular de matrices, la cual es obtenida de la siguiente manera:

Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y consideremos la sucesión $\left(\frac{1}{j!}\, A^j\right) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$, así como su sucesión de sumas parciales asociada

$$S_0 = I, \quad S_1 = I + A, \quad S_2 = I + A + \frac{1}{2!}\, A^2,$$
$$S_3 = I + A + \frac{1}{2!}\, A^2 + \frac{1}{3!}\, A^3, \quad \cdots \quad , \quad S_k = I + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}\, A^j, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, A^j = I + A + \frac{1}{2!}\, A^2 + \frac{1}{3!}\, A^3 + \quad \cdots \quad + \frac{1}{k!}\, A^k + \quad \cdots$$

El teorema 2.3.6 nos garantiza que:

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n} \implies \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\, A^j \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

En especial se quiere introducir el concepto de exponencial de una matriz, denotado por e^A, y probar que se cumplan las leyes de exponentes:

$$\begin{aligned} e^{tA}\, e^{sA} &= e^{(t+s)A} \\ e^{\Theta} &= I \end{aligned}$$

Sabemos que:

i) $\forall\, x \in \mathbb{R}: \ e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \frac{1}{3!}\, x^3 + \ \cdots$ (Esta suma siempre converge).

ii) El Problema de valor inicial (P.V.I.) o problema de Cauchy dado por:

$$\begin{cases} x' = a\, x, \ a \in \mathbb{R} \\ x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{2.20}$$

Tiene como solución la función diferenciable $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que:

a) $t_0 \in I$.

b) $\varphi'(t) = a\varphi(t);\ \forall\ t \in I$.

c) $\varphi(t) = e^{(t-t_0)a}\ x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}$.

Luego, dado el Problema de Valores Iniciales (P.V.I.) o problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = A\ x(t),\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n},\ x \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\ x(t_0) = x_0,\ x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \tag{2.21}$$

Surge la pregunta natural: ¿Tendrá por solución a: $x(t) = e^{(t-t_0)A}\ x_0$?. Responderemos a esta pregunta en páginas posteriores.

Definición 2.3.7 *Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. La exponencial de A, denotada por $exp(A)$ ó e^A es la matriz de $\mathbb{R}^{n\times n}$ definida por:*

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ A &\longmapsto exp(A) = e^A,\ \textit{donde} \end{aligned}$$

$$exp(A) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\ A^j$$

Observaciones 2.3.8

a) $e^{\Theta} = I + \Theta + \dfrac{1}{2!}\ \Theta^2 + \dfrac{1}{3!}\ \Theta^3\ +\ \cdots\ = I.$

b) $\|e^A\| \leq e^{\|A\|},\quad \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Ejemplo 2.3.9 Si $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Resolución.

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}\ A^2 + \frac{1}{3!}\ A^3 + \ \cdots$$

Es fácil ver que:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ \cdots\ ,\ A^k = \Theta,\ \forall\ k \geq 3$$

Y por lo tanto:

$$e^A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No siempre tendremos la suerte de encontrar una matriz como la anterior, de modo que el cálculo de e^A sea tan sencillo.

Lema 2.3.10 Sean (A_k), $(B_k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$; tales que $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = A$ y $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = B$, entonces:

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j}\right) = A\ B$$

Demostración. Consideremos dos casos:

1. $\lim\limits_{k\to\infty} A_k = \Theta$.
   Como $(B_k) \subseteq \mathbb{R}^{n\times n}$ es convergente, entonces (B_k) es acotada.
   Luego:

$$\exists\ N > 0\ /\ \|B_k\| \leq N,\ \forall\ k \geq 0;$$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j}\right\| &\leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\ B_{k-j}\| \leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\|\ \|B_{k-j}\| \\ &\leq N\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\|\right)\end{aligned}$$

   Entonces:

$$0 \leq \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\ B_{k-j}\| \leq N\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\|\right),\ \forall\ k \geq 0. \tag{2.22}$$

   Por hipótesis $\lim\limits_{k\to\infty}\|A_k\| = 0 \implies \lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\|A_j\|\right) = 0.$

   De (2.19) y por el teorema del sandwich:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j} = \Theta$$

2. CASO GENERAL.

Consideremos:

$$A'_k = A_k - A \quad \Longrightarrow \quad \lim_{k\to\infty} A'_k = \Theta$$

Por el caso (1):

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A'_j\ B_{k-j} = \Theta \tag{2. 23}$$

Por otro lado:

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A'_j\ B_{k-j}$$

es igual a:

$$-\quad \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (A_j - A)\ B_{k-j} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j} - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A\ B_{k-j}$$

$$\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j} - A\left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\right)$$

Por (2. 23):

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A'_j\ B_{k-j} &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j} - \lim_{k\to\infty} A\left(\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} B_{k-j}\right) \\
\Theta &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} A_j\ B_{k-j} - AB. \quad \square
\end{aligned}$$

Lema 2.3.11 Sean $\sum_{j,0} A_j$, $\sum_{k,0} B_k$ series convergentes en $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Si $\sum_{l,0} \left(\sum_{j=0}^{l} A_{l-j}\ B_j\right)$ es una serie convergente en $\mathbb{R}^{n\times n}$, entonces:

$$\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l} A_{l-j}\ B_j\right) = \left(\sum_{j=0}^{\infty} A_j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} B_k\right)$$

Demostración. Denotemos por: $\sum_{j=0}^{\infty} A_j = A$, $\sum_{k=0}^{\infty} B_k = B$, $\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{l} A_{l-j}\ B_j\right) = C$,

$$S_k = \sum_{j=0}^{k} A_j, \quad T_k = \sum_{j=0}^{k} B_k, \quad R_k = \sum_{l=0}^{k} \left(\sum_{j=0}^{l} A_{l-j}\ B_j\right)$$

Entonces: $\lim\limits_{k\to\infty} S_k = A$, $\lim\limits_{k\to\infty} T_k = B$ y $\lim\limits_{k\to\infty} R_k = C$. Sabemos que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} R_j = C \tag{2.24}$$

Observe que:

$$\begin{aligned}
R_0 &= A_0\, B_0 = A_0\, T_0 \\
R_1 &= A_0\, B_0 + A_1\, B_0 + A_0\, B_1 = A_0\, (B_0 + B_1) + A_1\, B_0 = A_0\, T_1 + A_1\, T_0 \\
R_2 &= R_1 + A_2\, B_0 + A_1\, B_1 + A_0\, B_2 = A_0\, T_1 + A_1\, T_0 + A_2\, B_0 + A_1\, B_1 + A_0\, B_2 \\
&= A_0\, (T_1 + B_2) + A_1\, (T_0 + B_1) + A_2\, B_0 = A_0\, T_2 + A_1\, T_1 + A_2\, T_0
\end{aligned}$$

En general (se prueba usando inducción):

$$R_k = \sum_{j=0}^{k} A_j\, T_{k-j}, \quad \forall\, k \geq 0.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{0} R_j &= R_0 = A_0\, B_0 = S_0\, T_0 \\
\sum_{j=0}^{1} R_j &= R_0 + R_1 = A_0\, T_0 + A_0\, T_1 + A_1\, T_0 = (A_0 + A_1)\, T_0 + A_0\, T_1 \\
&= S_1\, T_0 + S_0\, T_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{2} R_j &= R_0 + R_1 + R_2 = S_1\, T_0 + S_0\, T_1 + A_0\, T_2 + A_1\, T_1 + A_2\, T_0 \\
&= (S_1 + A_2)\, T_0 + (S_0 + A_1)\, T_1 + A_0\, T_2 = S_2\, T_0 + S_1\, T_1 + S_0\, T_2
\end{aligned}$$

En general:

$$\sum_{j=0}^{k} R_j = \sum_{j=0}^{k} S_j\, T_{k-j}, \quad \forall\, k \geq 0.$$

Luego, por (2.24) y el lema 2.3.10, tenemos:

$$C = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} R_j = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} S_j\, T_{k-j} = AB \quad \square$$

Teorema 2.3.12 Dado $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se cumplen:

i) $e^{P\ A\ P^{-1}} = P\ e^A\ P^{-1}, \quad \forall\ P \in \mathbb{R}^{n\times n}$, P no singular.

ii) $AB = BA \quad \Longrightarrow \quad e^{A+B} = e^A\ e^B$.

iii) $(e^A)^{-1} = e^{-A}, \quad \forall\ A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Demostración

i) $$P\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\ A^j\right)\ P^{-1} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\ P\ A^j\ P^{-1} = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\ (P\ A\ P^{-1})^j, \quad \forall\ k \geq 0$$

Entonces:

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\ A^j\right)\ P^{-1} = \lim_{k\to\infty}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!}\ (P\ A\ P^{-1})^j, \quad \forall\ k \geq 0$$

de donde:

$$P\ e^A\ P^{-1} = e^{P\ A\ P^{-1}}$$

ii) Si $AB = BA$, sabemos que:

$$(A+B)^j = \sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\ A^{j-l}\ B^l = \sum_{l=0}^{j}\frac{j!}{(j-l)!\ l!}\ A^{j-l}\ B^l = j!\ \sum_{l=0}^{j}\frac{A^{j-l}}{(j-l)!}\ \frac{B^l}{l!}$$

Por lo anterior y por el lema 2.3.11:

$$e^{A+B} = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(A+B)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{j}\frac{A^{j-l}}{(j-l)!}\ \frac{B^l}{l!} = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A^j}{j!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{B^j}{j!}\right) = e^A\ e^B$$

iii) Por (ii):

$$e^{-A}\ e^A = e^A\ e^{-A} = e^{A-A} = e^{\Theta} = I$$

de donde:

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}\ \square$$

2.3.3. Cálculo práctico de la exponencial de algunas matrices

Ahora calculamos la exponencial de algunas matrices especiales.

a) $exp\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}e^{\lambda} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda}\end{bmatrix}$

b) Si $D = diag[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces:

$$e^D = diag[e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \ldots\ ,\ e^{\lambda_n}]$$

c) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz nilpotente de orden r (es decir existe $r \in \mathbb{N}$, tal que $A^j \neq \Theta$, $1 \leq j < r$ y $A^j = \Theta$, $\forall\ j\ \geq\ r$. Este número r es llamado ***Orden de Nilpotencia*** de la matriz A). Entonces:

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}\ A^2 + \ \cdots\ + \frac{1}{(r-1)!}\ A^{r-1}$$

d) $exp\begin{bmatrix} a & -b\\ b & a\end{bmatrix} = e^a\begin{bmatrix} cos(b) & -sen(b)\\ sen(b) & cos(b)\end{bmatrix}.$

e) Sea $A = \begin{bmatrix} a & b\\ 0 & a\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \Longrightarrow e^A = \begin{bmatrix} e^a & be^a\\ 0 & e^a\end{bmatrix}$ $\square$

Demostración

En efecto:

1. $$\begin{aligned} e^{\lambda I} &= I + \lambda I + \frac{1}{2!}\,(\lambda I)^2 + \frac{1}{3!}\,(\lambda I)^3 + \ \cdots = I + \lambda I + \frac{\lambda^2}{2!}\,I^2 + \frac{\lambda^3}{3!}\,I^3 + \cdots \\ &= I + \lambda I + \frac{\lambda^2}{2!}\,I + \frac{\lambda^3}{3!}\,I + \ \cdots = (1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ \cdots\ )\ I \end{aligned}$$

   $e^{\lambda I} = e^{\lambda}\ I,\quad \forall\ \lambda \in \mathbb{R}.$ (Vale también para $\lambda \in \mathbb{C}$)

   En forma matricial,

   $$exp\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}e^{\lambda} & 0 & \cdots & 0\\ 0 & e^{\lambda} & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda}\end{bmatrix}$$

2. Sea:

$$D = diag[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Si $D = diag[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces $e^D = diag[e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots\ ,\ e^{\lambda_n}]$
En efecto, por inducción, es fácil probar que:

$$D^j = diag[\lambda_1^j,\ \lambda_2^j,\ \cdots\ ,\ \lambda_n^j], \qquad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

luego:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\ D^j &= \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\ diag[\lambda_1^j,\ \lambda_2^j,\ \cdots\ ,\ \lambda_n^j] = \sum_{j=0}^{k} diag\left[\frac{1}{j!}\ \lambda_1^j,\ \frac{1}{j!}\ \lambda_2^j,\ \cdots\ ,\ \frac{1}{j!}\ \lambda_n^j\right] \\ &= diag\left[\sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\ \lambda_1^j,\ \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\ \lambda_2^j,\ \cdots\ ,\ \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!}\ \lambda_n^j\right] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\ D^j = diag\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\ \lambda_1^j,\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\ \lambda_2^j,\ \cdots\ ,\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}\ \lambda_n^j\right] = diag[e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots\ ,\ e^{\lambda_n}]$$

3. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Consideremos $r = \sqrt{a^2 + b^2}$. Entonces existe un único $\theta \in [0\ ;\ 2\pi]$ tal que:

$$a + ib = r\ e^{i\theta} = r\ \Big(\ cos(\theta) + isen(\theta)\ \Big) = r\ cos(\theta) + irsen(\theta)$$

Luego:

$$A = r\ \begin{bmatrix} cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad A^j = r^j\ \begin{bmatrix} cos(j\theta) & -sen(j\theta) \\ sen(j\theta) & cos(j\theta) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$e^A = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{A^j}{j!} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^{k} \frac{r^j}{j!} \begin{bmatrix} cos(j\theta) & -sen(j\theta) \\ sen(j\theta) & cos(j\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{r^j}{j!} cos(j\theta) & \displaystyle -\sum_{j=0}^{k} \frac{r^j}{j!} sen(j\theta) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{r^j}{j!} sen(j\theta) & \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \frac{r^j}{j!} cos(j\theta) \end{bmatrix}$$

Luego:

$$e^A = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!} cos(j\theta) & \displaystyle -\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!} sen(j\theta) \\ \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!} sen(j\theta) & \displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!} cos(j\theta) \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

Por otro lado:

$$e^a e^{ib} = e^{a+ib} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a+ib)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(r\ e^{i\theta})^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j\ e^{ij\theta}}{j!},$$

esto implica:

$$e^a \Big(\ cos(b) + isen(b)\ \Big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!} \Big(\ cos(j\ \theta) + isen(j\ \theta)\ \Big),$$

de donde:

$$e^a\ cos(b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!}\ cos(j\ \theta), \quad e^a\ sen(b) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^j}{j!}\ sen(j\ \theta) \tag{2.26}$$

Reemplazando (2.26) en (2.25), obtenemos:

$$e^A = \begin{bmatrix} e^a\ cos(b) & -e^a\ sen(b) \\ e^a\ sen(b) & e^a\ cos(b) \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto:

$$exp \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = e^a \begin{bmatrix} cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}$$

4. Sea $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Hallar e^A

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = aI + B$$

Entonces: $e^A = e^{aI+B} = e^{aI}\ e^B = (e^a\ I)\ e^B$. Observe que $B^2 = \Theta$ (B es nilpotente de orden 2), luego $e^B = I + B$.

Por lo tanto:

$$e^A = e^a\ (I+B) = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b\ e^a \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^a & b\ e^a \\ 0 & e^a \end{bmatrix} \qquad \square$$

Vamos a agregar a esa lista algunas otros casos más.

Ejemplo 2.3.13 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0_{n_1\times n_2} & \cdots & 0_{n_1\times n_m} \\ 0_{n_2\times n_1} & A_2 & & 0_{n_2\times n_m} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0_{n_m\times n_1} & 0_{n_m\times n_2} & \cdots & A_m \end{bmatrix}$$

donde $A_i \in \mathbb{R}^{n_i\times n_i}$, $\forall\ 1 \leq i \leq m$; $(n_1 + n_2 + \ \cdots\ + n_m = n)$. Tales matrices son llamadas ***Diagonales por Bloques*** y las denotaremos por:

$$diag[A_1,\ A_2,\ \cdots\ ,\ A_m]$$

Como ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

es una matriz diagonal por bloques:

$$A = diag\left[[1]\ ,\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right].$$

No es difícil probar que:

$$A = diag[A_1,\ A_2,\ \cdots\ ,\ A_m] \quad \Longrightarrow \quad A^k = diag[A_1^k,\ A_2^k,\ \cdots\ ,\ A_m^k]$$

y luego:

$$e^A = diag[e^{A_1},\ e^{A_2},\ \cdots\ ,\ e^{A_m}]$$

Ejemplo 2.3.14 Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ de la forma: $A = \lambda I + N_n$, en donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y

$$N_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $N_n^n = \Theta$, es decir, N_n es una matriz nilpotente de orden n. Vamos a calcular e^A. En primer lugar, observemos que:

$$A = \lambda I + N_n \quad , \quad (\lambda I)\ N_n = \lambda(N_n\ I) = N_n\ (\lambda I)$$

Luego:

$$e^A \;=\; e^{\lambda I + N_n} = e^{\lambda I}\ e^{N_n} = e^{\lambda I}\ \left(I + N_n + \frac{1}{2!}\ N_n^2 + \ \cdots\ + \frac{1}{(n-1)!}\ N_n^{n-1}\right)$$

$$e^A \;=\; e^{\lambda}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{2!} & \cdots & \frac{1}{(n-2)!} & \frac{1}{(n-1)!} \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & \frac{1}{(n-3)!} & \frac{1}{(n-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Denotamos $N_n(k) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ a una matriz nilpotente de orden k.

Ejemplo 2.3.15 Denotemos: $I(a\ ;\ b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Sabemos que:

$$e^{I(a\ ;\ b)} = e^a \begin{bmatrix} cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix} = e^a\ R_2(b)$$

$$J_{2n}(a\ ;\ b) = diag[I(a\ ;\ b),\ I(a\ ;\ b),\ \cdots\ ,\ I(a\ ;\ b)] \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$$

Sea $A \in \mathbb{R}^{2n\times 2n}$ de la forma: $A = J_{2n}(a\ ;\ b) + N_{2n}(2)$.
No es difícil probar que:

$$J_{2n}(a\ ;\ b)\ N_{2n}(2) = N_{2n}(2)\ J_{2n}(a\ ;\ b).$$

Luego:

$$\begin{aligned} e^A &= e^{J_{2n}(a\ ;\ b)}\ e^{N_{2n}(2)} = diag[e^{I(a\ ;\ b)},\ \cdots\ ,\ e^{I(a\ ;\ b)}]\ e^{N_{2n}(2)} \\ &= diag[e^a\ R_2(b),\ \cdots\ ,\ e^a\ R_2(b)] \\ &= e^a\ diag[R_2(b),\ \cdots\ ,\ R_2(b)]\ e^{N_{2n}(2)} \end{aligned}$$

Capítulo 3

El método de E. J. Putzer y su aplicación en la solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

3.1. Introducción

Consideremos el siguiente ***sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneo***, asociado al Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) & = & A(t)\, x(t), \ t \in \mathbb{R} \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \tag{3.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$. La resolución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado en (3.1) se reduce al cálculo de e^{tA} y en el presente trabajo lo lograremos mediante un método llamado ***método de E. J. Putzer***, que es un método alternativo muy seguro; cuyo desarrollo consiste en exponer didácticamente dos algoritmos para representar e^{tA} como:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) \qquad \text{y} \qquad e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j \tag{3.2}$$

Si tratamos de calcular e^{tA} usando directamente la definición de serie, tendríamos que calcular todas las potencias A^k para $k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ y calcular luego la suma de cada serie $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k\ c_{ij}^k}{k!}$; donde c_{ij}^k es el elemento ij de A^k, $i, j = 1,\ \cdots, n$. En general este es muy laborioso con excepción de algunos pocos casos. Por ejemplo: si A es una matriz cuyas potencias pueden calcularse fácilmente (A nilpotente o diagonal).

Se conoce muchos métodos para calcular e^{tA}; la mayoría de ellos son más bien complicados y exigen transformaciones matriciales previas, cuya naturaleza depende de las multiplicidades de los autovalores de A.

Para resolver sistemas lineales de ecuaciones diferenciales tradicionalmente se usa la ***Forma Canónica de Jordan (F.C.J)*** (denominado método standard o general), en cuyo proceso involucra la diagonalización de la matriz A . Este hecho es equivalente a determinar primero las raíces de un polinomio de grado n, que son los autovalores de A, y luego los correspondientes autovectores. Naturalmente no toda matriz puede diagonalizarse.

Sea A una matriz de orden $n \times n$ de constantes complejas. En muchos libros de ecuaciones diferenciales, por ejemplo [2, 3, 4], el cálculo directo de $e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(tA)^n$ es evitado excepto en los casos más simples. e^{tA} es usualmente calculada transformando A en su forma canónica.

Aunque teoricamente la ***F.C.J.*** funciona perfectamente, pero en la práctica y en muchos casos resulta muy complicado hallar las raíces del polinomio característico, no es fácil convencerse de que uno podría llevar a cabo dicho cálculo para una matriz dada A. Así, si tenemos $P_A(\lambda) = \lambda^3 + \lambda + 3$, entonces los autovalores son las raíces de este polinomio. Como podemos observar el cálculo de éstos es muy complicado (note que no se puede factorizar facilmente). Esta dificultad aumenta mucho más si el grado del polinomio característico va aumentando. Por ejemplo: $P_A(\lambda) = \lambda^4 + \lambda + 1$, $P_A(\lambda) = \lambda^5 + \lambda + 1$.

Por la importancia de los valores propios en muchas aplicaciones, se ha desarrollado métodos numéricos eficientes para áproximar los valores propios de una matriz; así como programas de computadoras para ejecutarlos. Usualmente tales programas no intentan resolver directamente el polinomio característico; en vez de eso, transforman la matriz en una; cuyos valores propios son más fáciles de calcular, observando los efectos que tiene cada transformación en los valores propios.

En este trabajo se ha desarrollado un método que resuelve todas estas dificultades, pues se requiere conocer sólo los coeficientes del polinomio característico y usar el ***segundo algoritmo***; si es de fácil cálculo los valores propios, usaremos el ***primer algoritmo***. Este método se puede utilizar tanto si A puede diagonalizarse o no. Éste es particularmente útil, tanto en la docencia como en trabajos aplicados, cuando la matriz A no es necesariamente diagonalizada, puesto que no hace falta discutir o encontrar la ***F.C.J.***

3.2. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

De todos los campos vectoriales los más simples son los campos vectoriales lineales. En esta sección estudiaremos las E.D.O.'s lineales, asociadas a estos campos vectoriales lineales. La herramienta básica que utilizaremos es el álgebra lineal.

1. ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo***

   Dada la matriz de elementos constantes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $t \in \mathbb{R}$, entonces, $tA \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $e^{tA} \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\forall\ t \in \mathbb{R}$. Luego, podemos definir:

$$\begin{array}{rcl} \Phi_A : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n\times n} \\ t & \longmapsto & \Phi_A(t) = e^{tA} \end{array}$$

Observemos que Φ_A es un camino en el espacio de matrices cuadradas de orden $n \times n$.

Proposición 3.2.1 Dada la matriz de elementos constantes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Entonces,

$$\Phi'_A(t) = e^{tA}\ A = A\ e^{tA}, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \Phi'_A(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{\Phi_A(t+h) - \Phi_A(t)}{h} &&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA+hA} - e^{tA}}{h} &&= \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA}e^{hA} - e^{tA}}{h} \end{aligned}$$

Luego,

$$\Phi'_A(t) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{tA}(e^{hA} - I)}{h} \tag{3.3}$$

Además:

$$\frac{e^{hA} - I}{h} = A + \frac{1}{2!}\ hA^2 + \frac{1}{3!}\ h^2A^3 + \cdots$$

De (3.3):

$$\Phi'_A(t) = \lim_{h\to 0} e^{tA}\left(A + \frac{1}{2!}hA^2 + \frac{1}{3!}h^2A^3 + \cdots\right) = e^{tA}\ A.$$

Análogamente se prueba que $\varphi'_A(t) = A\ e^{tA}$. $\square$

Teorema 3.2.2 Sean la matriz de elementos constantes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Entonces la única solución del P.V.I.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& A\,x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(0) &=& x_0 \end{array}\right. \tag{3.4}$$

es dada por:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = e^{tA}\,x_0. \end{array}$$

Demostración.

$$\varphi'(t) = A\,(e^{tA}\,x_0) = A\,\varphi(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R};$$

$$\varphi(0) = e^{0A}\,x_0 = e^0\,x_0 = x_0$$

y por lo tanto φ es solución de (3.4).
Para probar la unicidad, consideremos $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ otra solución de (3.4). Defino

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & f(t) = e^{-tA}\,\psi(t). \end{array}$$

Entonces, $\quad f'(t) = e^{-tA}\,(-A)\,\psi(t) + e^{-tA}\,\psi'(t) = -e^{tA}\,A\,\psi(t) + e^{-tA}\,A\,\psi(t) = 0$
luego,

$$f'(t) = 0,\quad \forall\, t \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(t) = C \in \mathbb{R}^n,$$

entonces, $C = f(0) = e^{-0A}\,\psi(0) = I\,x_0 = x_0$, de donde:

$$f(t) = x_0 \quad \Longrightarrow \quad e^{-tA}\,\psi(t) = x_0 \quad \Longrightarrow \quad \psi(t) = e^{tA}\,x_0 = \varphi(t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.\ \square$$

Corolario 3.2.3 Sean la matriz de elementos constantes $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ y $t_0 \in \mathbb{R}$. Entonces, la única solución del P.V.I.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x'(t) &=& A\,x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array}\right. \tag{3.5}$$

es dada por:

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi(t) = e^{(t-t_0)A}\,x_0. \end{array}$$

Se toma frecuentemente $t_0 = 0$. No se pierde generalidad tomando $t_0 = 0$, ya que si $\varphi_1(t)$ es una solución con $\varphi_1(0) = x_0$, entonces la función $\varphi_2(t) = \varphi_1(t - t_0)$ es una solución con $\varphi_2(t_0) = \varphi_1(0) = x_0$. Es corriente replantear (3.5) en la forma de un P.V.I dado en (3.4).

En este trabajo presento dos métodos alternativos, que creo son útiles, para escribir explícitamente la solución de (3.4) sin hacer ninguna transformación preliminar.

Los siguientes dos teoremas sugieren un método alternativo que puede ser usado tanto para calcular como para una discusión sustentatoria.

3.2.1. Método de E. J. Putzer (Primer algoritmo)

El método de E. J. Putzer es un método práctico y seguro para calcular e^{tA}, que se puede utilizar tanto si A puede diagonalizarse como si no. Éste se basa en el teorema de Cayley-Hamilton para expresar e^{tA} como un polinomio matricial que dependa de A y de sus autovalores.

Este algoritmo se usa principalmente cuando los autovalores de la matriz A se calculan fácilmente.

Teorema 3.2.4 (Cayley-Hamilton) Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $n \times n$ y

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \end{aligned} \tag{3.6}$$

su polinomio característico; se tiene que $P_A(A) = \Theta$ (Θ matriz nula de orden $n \times n$). Es decir, A satisface la ecuación:

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = \Theta \tag{3.7}$$

Equivalentemente:

$$P_A(A) = (A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I)\,(A - \lambda_3 I) \cdots (A - \lambda_n I) = \Theta \tag{3.8}$$

El teorema 3.2.4 nos garantiza que:

a) A^n se puede expresar como combinación lineal de: $I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ \cdots,\ A^{n-1}$.

b) Cada potencia A^m, $m \geq n$ se puede expresar como combinación lineal de: $I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ \cdots,\ A^{n-1}$.

c) Así, cada $\dfrac{t^k A^k}{k!}$, $k \geq n$ es combinacion lineal de: $I,\ A,\ A^2,\ A^3,\ \cdots,\ A^{n-1}$.

Teorema 3.2.5 (E. J. Putzer)(***Primer algoritmo***) Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k, \; 1 \le k \le n$ los valores propios de una matriz A de orden $n \times n$ con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_k$ respectivamente; es decir:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) \; P_j(A) \tag{3.10}$$

donde:

$$P_0(A) = I; \; P_j(A) = \prod_{k=1}^{j}(A - \lambda_k I), \; (j = 1, \cdots, n),$$

y $r_1(t), \; r_2(t), \; \cdots, \; r_n(t)$ es la solución del sistema triangular

$$\begin{cases} r_1'(t) &= \lambda_1 \, r_1(t) & \\ r_j'(t) &= r_{j-1}(t) + \lambda_j \, r_j(t), & (j = 2, \ldots, n) \\ r_1(0) &= 1; \quad r_j(0) = 0, & (j = 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{3.11}$$

Demostración. Sea:

$$\Phi(t) \equiv \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t) \; P_j(A) \equiv r_1(t) \; P_0(A) + \sum_{j=1}^{n-1} r_{j+1}(t) \; P_j(A) \tag{3.12}$$

y definamos $r_0(t) \equiv 0; \; 0 \le t < \infty$.

Demostraremos que:

$$\Phi(t) = e^{tA}.$$

Esto es: Φ satisface la ecuación diferencial $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.
En efecto, de (3.12) derivando con respecto a t a las ecuaciones satisfechas por los $r_j(t)$ (ver 3.11), se tiene que:

$$\begin{aligned} \Phi'(t) &= \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}'(t) \; P_j(A) = \sum_{j=0}^{n-1} \left\{ \; r_j(t) + \lambda_{j+1} \; r_{j+1}(t) \; \right\} \; P_j(A) \quad = \\ \Phi'(t) &= \left\{ \; r_0(t) + \lambda_1 \; r_1(t) \; \right\} \; P_0(A) + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \; r_j(t) + \lambda_{j+1} \; r_{j+1}(t) \; \right\} \; P_j(A) \quad = \end{aligned}$$

como $r_0(t) \equiv 0;\; 0 \leq t < \infty$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \lambda_1 r_1(t)\; P_0(A) + \sum_{j=0}^{n-2} \Big\{ \; r_{j+1}(t) + \lambda_{j+2}\; r_{j+2}(t) \; \Big\} \; P_{j+1}(A) &= \\
\Phi'(t) &= \lambda_1 r_1(t)\; P_0(A) + \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_{j+1}(A) + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{j+2}\; r_{j+2}(t)\; P_{j+1}(A) &=
\end{aligned}$$

Agrupando convenientemente:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_{j+1}(A) + \lambda_1 r_1(t)\; P_0(A) + \sum_{j=0}^{n-2} \lambda_{j+2} r_{j+2}(t)\; P_{j+1}(A) &= \\
\Phi'(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_{j+1}(A) + \lambda_1 r_1(t)\; P_0(A) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j+1} r_{j+1}(t)\; P_j(A) &= \\
\Phi'(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_{j+1}(A) + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1} r_{j+1}(t)\; P_j(A)
\end{aligned}$$

Ahora calculamos: $\Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t)$

$$\Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t) \;=\; \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_{j+1}(A) + \sum_{j=0}^{n-1} \Big(\; \lambda_{j+1} - \lambda_n \; \Big) \; r_{j+1}(t)\; P_j(A)$$

En la segunda sumatoria el término de lugar $(n-1)$ se anula, pues para $j = n-1$ tenemos: $(\lambda_{j+1} - \lambda_n) = (\lambda_n - \lambda_n) = 0$. También: $P_{j+1}(A) = \Big(\; A - \lambda_{j+1} I \; \Big) \, P_j(A)$, entonces:

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) - \lambda_n \Phi(t) &= \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\; A - \lambda_{j+1} I \; \Big) \; r_{j+1}(t)\; P_j(A) + \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\; \lambda_{j+1} - \lambda_n \; \Big) r_{j+1}(t)\; P_j(A) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \Big[\; (A - \lambda_{j+1} I) + (\lambda_{j+1} - \lambda_n) I \; \Big] \, r_{j+1}(t)\; P_j(A) \\
&= \sum_{j=0}^{n-2} \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) r_{j+1}(t)\; P_j(A) = \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) \sum_{j=0}^{n-2} r_{j+1}(t)\; P_j(A) \\
&= \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) \left[\sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\; P_j(A) - r_n(t)\; P_{n-1}(A) \right] \\
&= \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\; P_j(A) - \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) \; r_n(t)\; P_{n-1}(A) \\
&= \Big(\; A - \lambda_n I \; \Big) \Phi(t) - r_n(t)\; P_n(A)
\end{aligned}$$

Pero por el teorema de Cayley-Hamilton, $P_n(A) \equiv 0$, y de esto $\Phi'(t) = A\ \Phi(t)$ Entonces, puesto que $\Phi(0) = I$ se tiene que $\Phi(t) = e^{tA}$.

Observación 3.2.6 La ecuación (3.10) no expresa e^{tA} directamente en potencias de A, sino como una combinación lineal de los polinomios $P_0(A),\ P_1(A),\ \ldots\ ,\ P_{n-1}(A)$. Estos polinomios se calculan fácilmente en cuanto se han determinado los autovalores de A. Asimismo, son de fácil cálculo los multiplicadores $r_1(t),\ r_2(t),\ \ldots\ ,\ r_n(t)$.

3.2.2. Método de E. J. Putzer (Segundo algoritmo)

Si e^{tA} es definida de la manera usual por serie de potencias, es también conocido (vea [1]) que la solución de (3.4) es:

$$x(t) = e^{tA}\ x_0$$

En [2], esto es hecho vía la F.C.J. de A. En [1], se muestra cómo la F.C.J. puede ser reemplazada por una transformación que reduce A en una forma triangular en la que los elementos fuera de la diagonal son arbitrariamente pequeños. Mientras este método permite una discusión teórica de la forma de e^{tA} y su comportamiento, cuando t tiende al infinito (Teorema 7 de [1]); ello no es un método práctico para calcular la función.

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz de orden $n \times n$ y

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \ \cdots\ + c_1\lambda + c_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\ \cdots\ (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \end{aligned} \tag{3.13}$$

su polinomio característico.

Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial

$$z^{(n)} + c_{n-1}z^{(n-1)} + \ldots + c_1 z' + c_0 z = z^{(n)} + \sum_{j=0}^{n-1} c_k z^{(k)} = 0 \tag{3.14}$$

con condiciones iniciales

$$z(0) = z'(0) = \ \ldots\ = z^{(n-2)}(0) = 0; \qquad z^{(n-1)}(0) = 1 \tag{3.15}$$

Ahora definamos:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_{n-1} & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces tenemos el siguiente teorema:

Teorema 3.2.7 (E. J. Putzer)(***Segundo Algoritmo***) Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$, $1 \leq k \leq n$ los distintos valores propios de una matriz A de orden $n \times n$ con multiplicidades $m_1, m_2, \cdots, m_k$ respectivamente; es decir:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \\ &= (\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{m_k} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j \tag{3.17}$$

donde $q_0(t), \ldots, q_{n-1}(t)$ son los elementos del vector columna:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ \vdots \\ q_{n-1}(t) \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Antes de probar este teorema, haremos una observación sobre lo que sucede cuando $P_A(\lambda)$ tiene múltiples raíces pero el polinomio minimal de A tiene factores diferentes; de tal forma que A puede, de hecho, ser diagonalizada. Parece a primera vista que nuestra fórmula contendrá potencias de t, pero sabemos que esto no puede ocurrir. Lo que ocurre, por supuesto, es que las potencias de t en (3.17) se cancelan una a una. Lo interesante de la fórmula (3.17) es que se cumple para todas las matrices A, y nunca tendremos que preguntarnos por la naturaleza del polinomio minimal de A, o su F.C.J.. Además no se necesita hacer ninguna transformación preliminar de ningún tipo.

Demostración. Probaremos que si

$$\Phi(t) = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j = q_0(t)\ I + \sum_{j=1}^{n-1} q_j(t)\ A^j \tag{3.19}$$

entonces $\dfrac{d\Phi}{dt} = A\ \Phi$, y $\Phi(0) = I$, y de esta manera $\Phi(t) = e^{tA}$.
Puesto que:

$$q_0(t) = c_1 z(t) + c_2 z^{'}(t) + \ \cdots\ + z^{n-1}(t), \quad q_j(0) = 0 \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n-1.$$

Claramente, $q_0(0) = 1$. En consecuencia, $\Phi(0) = I$.
Ahora consideremos $\dfrac{d\Phi}{dt} - A\ \Phi$. Derivando (3.19), y aplicando el Teorema de Cayley-Hamilton:

$$A^n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j A^j = 0$$

Obtenemos: $\dfrac{d\Phi}{dt} - A\ \Phi = \Big(\ q_0^{'} + c_0 q_{n-1}\ \Big) I + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \Big(\ q_j^{'} - q_{j-1} + c_j q_{n-1}\ \Big) A^j$
Será suficiente, por tanto, mostrar que:

$$\begin{aligned} q_0^{'}(t) &\equiv -c_0 q_{n-1}(t), \\ q_j^{'}(t) &\equiv q_{j-1}(t) - c_j q_{n-1}(t), \quad j = 1,\ \ldots\ , n-1 \end{aligned}$$

De la definición (3.18),

$$q_j(t) \equiv \sum_{k=1}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k-1)} + z^{(n-j-1)} \tag{3.20}$$

Por lo tanto:

$$\dot{q}_j(t) \equiv \sum_{k=1}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)}.$$

Pero $q_{n-1}(t) \equiv z(t)$; así tenemos:

$$q_j^{'}(t) + c_j q_{n-j}(t) \equiv \sum_{k=0}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)} \qquad \text{para } j = 0,\ 1,\ \ldots\ , n-1. \tag{3.21}$$

Si $j = 0$, esto nos lleva a:

$$q_0^{'}(t) + c_0 q_{n-1}(t) \equiv \sum_{k=0}^{n-1} c_k z^{(k)} + z^{(n)}$$

lo cual es cero debido a (3.14). Si $j \geq 1$, reemplazamos j por $j-1$ en (3.20) y cambiamos el índice de la suma de k a $k+1$ y tenemos:

$$q_{j-1}(t) \equiv \sum_{k=1}^{n-j} c_{k+j-1} z^{(k)} + z^{(n-j)} \equiv \sum_{k=0}^{n-j-1} c_{k+j} z^{(k)} + z^{(n-j)} \tag{3.22}$$

Comparando (3.22) y (3.21), tenemos:

$$q_j'(t) + c_j q_{n-1}(t) \equiv q_{j-1}(t), \quad j = 1,\ 2,\ \ldots\ ,\ n-1.$$

Puede ser notado que la fórmula 3.10 del Teorema 3.2.5 es más simple que la fórmula 3.17 del Teorema 3.2.7, puesto que los r_i son más fáciles de calcular que los q_i.

Ejemplo 3.2.8 *Si uno desea un ejemplo numérico para presentar en clase; una matriz A apropiada puede ser preparada escogiendo un conjunto arbitrario de valores propios, una forma canónica de Jordan J y una matriz no-singular P y calculando*

$$A = P\ J_A\ P^{-1}$$

Luego, comenzando con A, simplemente se calcula el conjunto $\{q_i(t)\}$ y/o $\{r_i(t)\}$. Considere el caso de una matriz de orden 3×3, con valores propios (λ, λ, μ). Hay dos subcasos: uno en el que la forma normal de A es diagonal, y la otra en la que no lo es. De estos dos subcasos se encarga, automáticamente, la fórmula dada para e^{tA}, y no intervienen en el cálculo de los $\{q_i\}$ y $\{r_i\}$. Como un ejemplo encontraremos explícitamente los conjuntos $\{q_i\}$ y $\{r_i\}$ para el caso de una matriz de orden 3×3, con valores propios $(\lambda, \lambda, \lambda)$. Notamos que además del caso trivial en el que la forma normal (y de aquí A en sí misma) es diagonal, hay dos formas normales no diagonales distintas que puede tener A. Como antes, estas no deben ser tratadas separadamente. Del Teorema 3.2.7,

$$P(x) \equiv (x-\lambda)^3 = x^3 - 3\ \lambda\ x^2 + 3\ \lambda^2\ x - \lambda^3.$$

Usando el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Así:

$$c_0 = -\lambda^3,\ c_1 = 3\ \lambda^2,\ c_2 = -3\ \lambda.$$

Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z''' - 3\lambda z'' + 3\lambda^2 z' - \lambda^3 z = 0$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = z'(0) = 0;\ z''(0) = 1.$$

Obviamente,

$$z(t) = \Big(\ a_1 + a_2 t + a_3 t^2\ \Big)\, e^{\lambda t}.$$

Aplicando las condiciones iniciales para encontrar a_i nos lleva a $z(t) = \frac{1}{2}\ t^2 e^{\lambda t}$. Así,

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$Z(t) = \frac{1}{2}\ e^{\lambda t} \begin{bmatrix} t^2 & & \\ \lambda t^2 & + & 2t \\ \lambda^2 t^2 & + & 4\lambda t + 2 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 3\lambda^2 & -3\ \lambda & 1 \\ -3\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \frac{1}{2}\ e^{\lambda t} \begin{bmatrix} \lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 2 \\ -2\lambda t^2 + 2t \\ t^2 \end{bmatrix}$$

De aquí:

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\ e^{\lambda t} \left\{\ (\lambda^2 t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2 A^2\ \right\} \tag{3.23}$$

para toda matriz A de orden 3×3, con 3 valores propios iguales a λ.

Usando el primer algoritmo de E. J. Putzer. La fórmula (3.10) correspondiente del Teorema 3.2.5 es obtenida resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} r_1'(t) &= \lambda r_1(t) \\ r_2'(t) &= r_1(t) + \lambda r_2(t) \\ r_3'(t) &= r_2(t) + \lambda r_3(t) \end{cases}$$

con los valores iniciales especificados. Esto inmediatamente resulta:

$$r_1(t) = e^{\lambda t}; \qquad r_2(t) = t\ e^{\lambda t}; \qquad r_3(t) = \frac{t^2}{2}\ e^{\lambda\ t}$$

Así:

$$e^{tA} = \frac{1}{2}\ e^{\lambda t} \left\{\ 2\ I + 2\ t\ (A - \lambda\ I) + t^2\ (A - \lambda\ I)^2\ \right\} \tag{3.24}$$

Por supuesto, si agrupamos potencias de A en (3.24) obtendremos (3.23).□

3.2.3. Programa computacional putzer.m

Aquí en esta sección se mostrará el funcionamiento del programa computacional ***putzer.m*** que mencione en la introducción. También se presenta el diagrama de flujo del algoritmo que ejecuta dicho programa.

Este programa permite resolver un sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo asociado al Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & A(t)\, x(t),\ t \in \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$. Este programa se ha elaborado tomando en cuenta el Método de E. J. Putzer.

Ejemplo 3.2.9 Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & , & x_1(0) & = & 1 \\ x_2'(t) & = & -3x_2(t) & , & x_2(0) & = & -1 \end{array} \right. \tag{3.26}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t);\ 0 \le t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ingrese a Matlab a partir de la versión 6.0, luego siga los pasos que se indica:

To get started, type one of these: helpwin, helpdesk, or demo.

For product information, type tour or visit www.mathworks.com.

» cd c:*matlabr*11*work**programa*1

» putzer

Este programa resuelve el sistema$(dx/dt) = A * x(t)$

sujeto a la condicion inicial $x(0) = x_0$
utilizando los metodos de E. J. Putzer
esto es, utilizando los autovalores de la matriz A
donde A es una matriz cuadrada de orden $''n''$
Ingreso de Datos: Ingrese la matriz cuadrada de entradas constantes $A = [2 \quad 0; 0 \quad -3]$

$$A = \begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{matrix}$$

La condicion inicial debe de ingresarse como $[x_1 \; x_2 \; x_3 \; ... \; x_n]$
Ingrese la condicion inicial del sistema $x_0 = [1 \; -1]$

$$x_0 = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

Los autovalores de la matriz $''A''$ son reales
utilizamos entonces el Primer Algoritmo de E. J. Putzer
Calculando los autovalores de $''A''$

$$\text{autovalores} = \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

Hallando las multiplicidades de cada autovalor
Autovalor Multiplicidad
avalor =

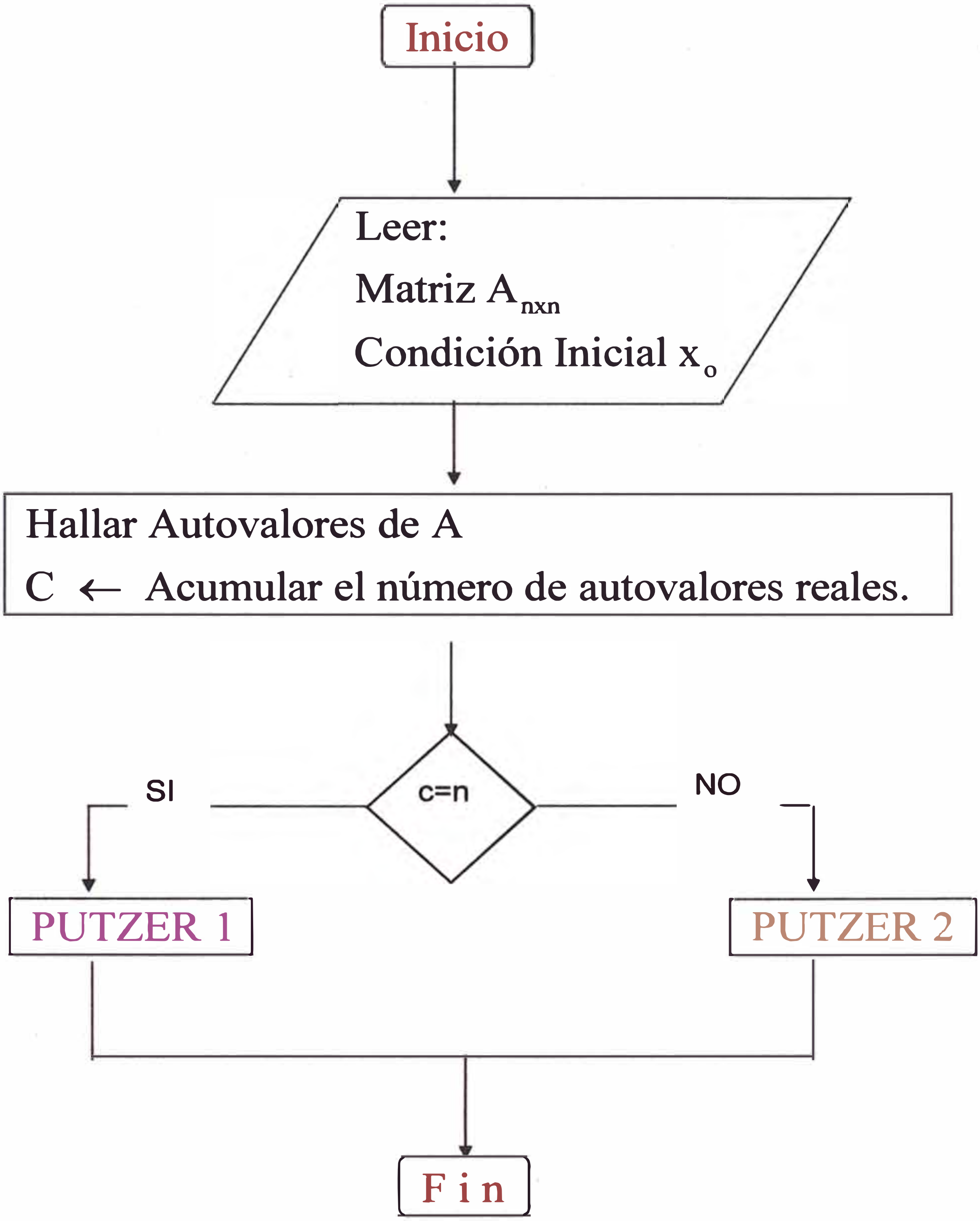
$$\begin{matrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{matrix}$$

Mostrando el polinomio caracteristico de la matriz $''A''$
px $= (x-2)*(x+3)$sol $= \; [exp(2*t), exp(-3*t)*(1/5*exp(t)^5 - 1/5)]$
La matriz exponencial de A $''exp(A)''$ esta dada por :
expA $= \; [exp(2*t), 0][0, exp(2*t) - 5*exp(-3*t)*(1/5*exp(t)^5 - 1/5)]$
La solucion del sistema esta dado por
soluciont $= \; [exp(2*t)]\,[-exp(2*t) + 5*exp(-3*t)*(1/5*exp(t)^5 - 1/5)]$
Desea evaluar la solucion en algun punto : $(s/n)s$
opc = s
En que valor desea evaluar : 0
$t_0 = 0$

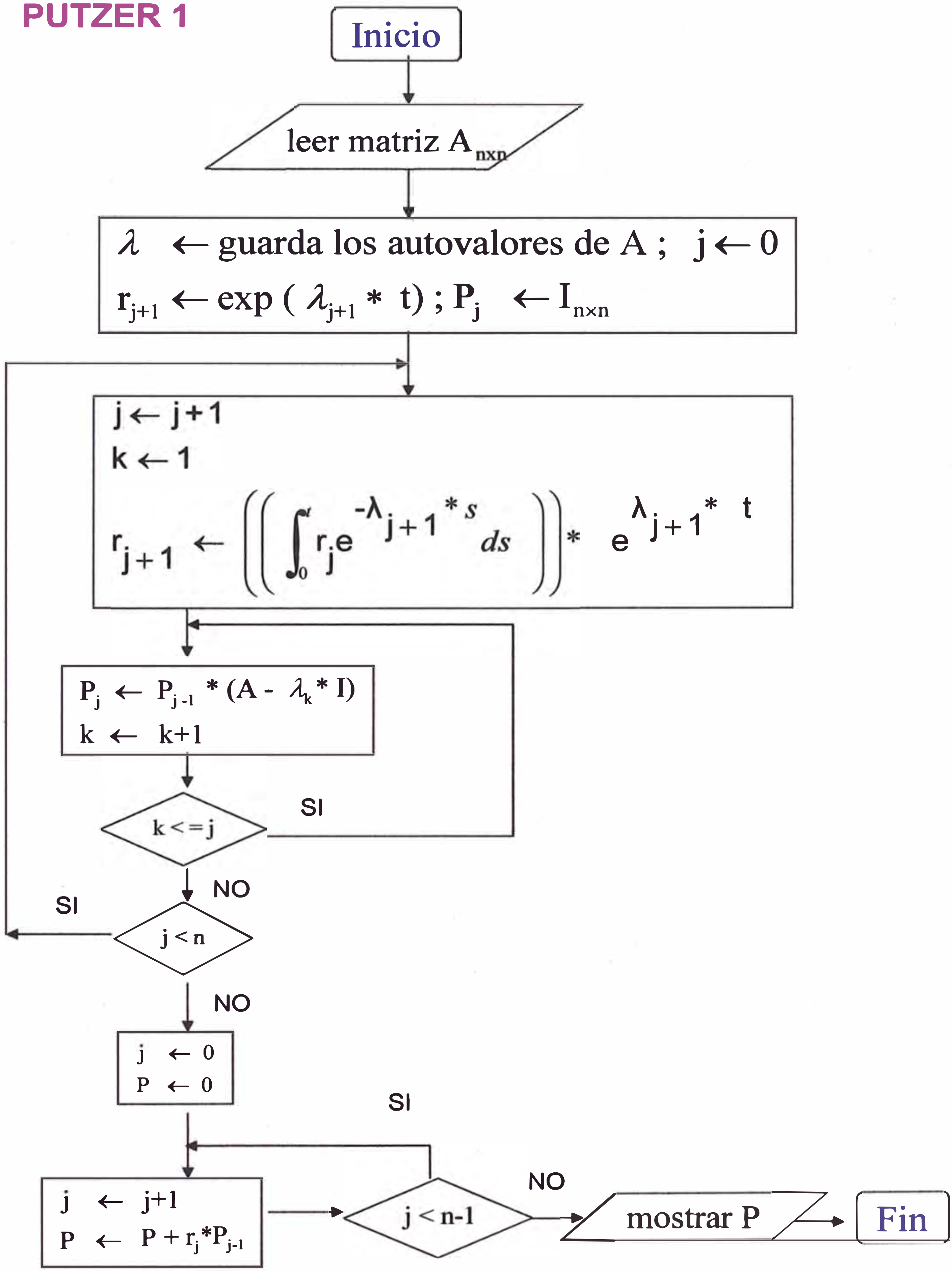
$$val = \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix}$$

Desea evaluarlo en otro punto : (s/n)

PROGRAMA GENERAL: PUTZER.M



PUTZER 1



Inicio
leer matriz A_{nxn}
$\lambda \leftarrow$ guarda los autovalores de A ; $j \leftarrow 0$
$r_{j+1} \leftarrow \exp(\lambda_{j+1} * t)$; $P_j \leftarrow I_{n\times n}$
$j \leftarrow j+1$
$k \leftarrow 1$
$r_{j+1} \leftarrow \left(\left(\int_0^t r_j e^{-\lambda_{j+1} * s} ds\right)\right) * e^{\lambda_{j+1} * t}$
$P_j \leftarrow P_{j-1} * (A - \lambda_k * I)$
$k \leftarrow k+1$
$k <= j$
SI
NO
SI
$j < n$
NO
$j \leftarrow 0$
$P \leftarrow 0$
SI
$j \leftarrow j+1$
$P \leftarrow P + r_j * P_{j-1}$
$j < n-1$
NO
mostrar P
Fin

PUTZER 2

Inicio

Leer: $A_{n\times n}$

$\lambda \leftarrow$ guardamos los autovalores de A (reales y complejos)
Hallamos el polinomio característico de A.
$P(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots c_1 x + c_o$

autov $\leftarrow$ autovalores de parte imaginaría no negativa con su multiplicidad. ($\lambda_j = \alpha_j + i*\beta_j$, $\beta_j \geq 0$)

$\beta_j = 0$

NO:

$$z^1{}_j(t) = e^{\alpha_j * t}\cos(\beta_j * t)$$
$$z^2{}_j(t) = e^{\alpha_j * t}sen(\beta_j * t)$$
$$z^1{}_j(t) = t * z^1{}_{j-1}$$
$$z^2{}_j(t) = t * z^2{}_{j-1}$$
$$j = 2 \ ,\dots, multiplicidad \ de \ \lambda_j$$

SI:

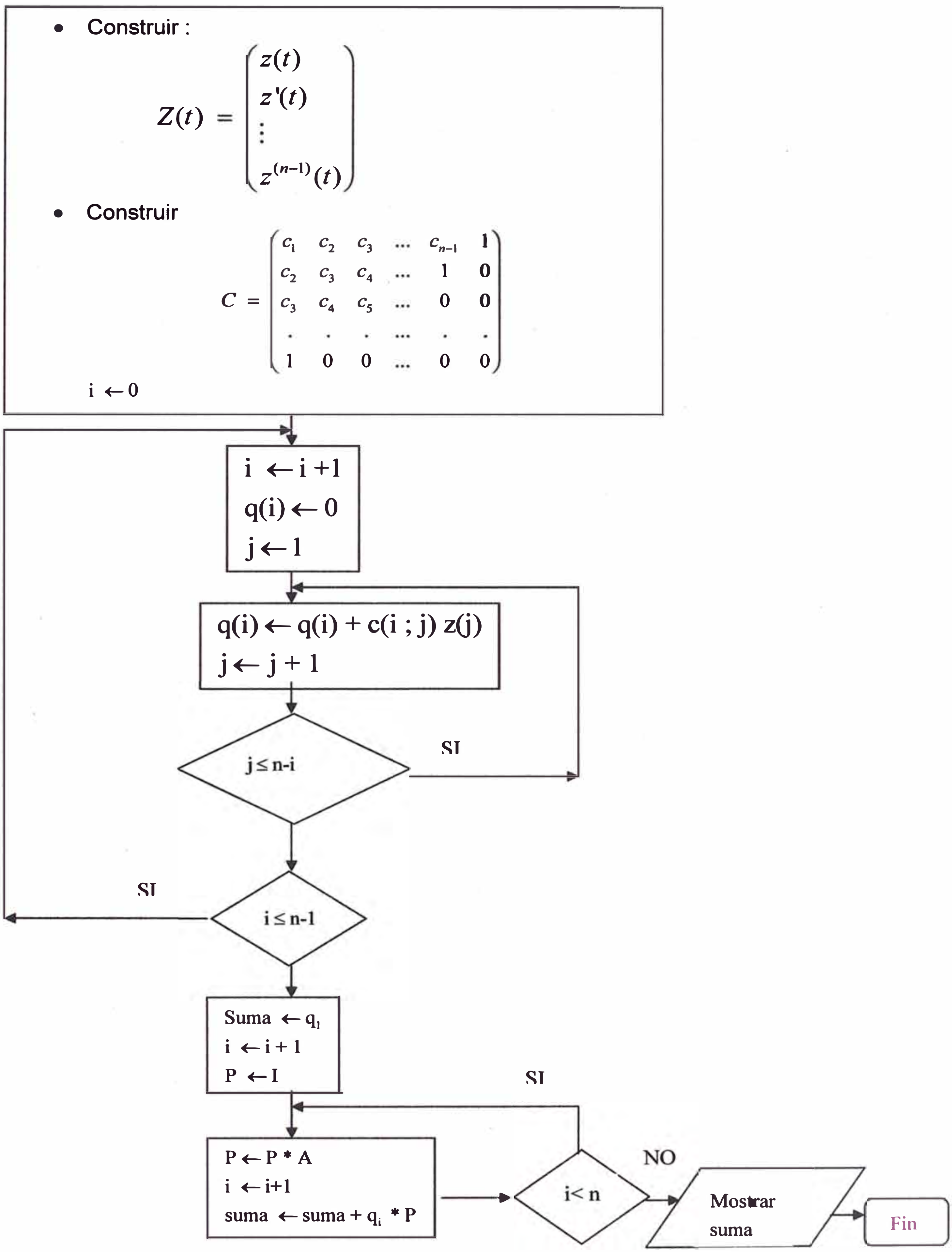
$$z_1(t) = e^{\lambda_j * t};$$
$$z_j(t) = t * z_{j-1},$$
$$j = 2,\dots, multiplicidad \ de \ (\lambda_j)$$

Aplicar las condiciones, iniciales y resolver para las "n" soluciones z_j

$$\begin{pmatrix} z_1(o) & z_2(o) & z_3(o) & \cdots & z_n(o) \\ z'_1(o) & z'_2(o) & z^1_3(o) & \cdots & z'_n(o) \\ \vdots & & & & \\ z_1^{(n-1)}(o) & z_2^{(n-1)}(o) & z_3^{(n-1)}(o) & \cdots & z_n^{(n-1)}(o) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Formar la solución general:

$$Z(t) = a_1 * z_1(t) + a_2 * z_2(t) + \cdots + a_n * z(t)$$


Construir :
$Z(t) = \begin{pmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ \vdots \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$
Construir
$C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_{n-1} & 1 \\ c_2 & c_3 & c_4 & \dots & 1 & 0 \\ c_3 & c_4 & c_5 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$
$i \leftarrow 0$
$i \leftarrow i+1$
$q(i) \leftarrow 0$
$j \leftarrow 1$
$q(i) \leftarrow q(i) + c(i;j)\, z(j)$
$j \leftarrow j+1$
$j \leq n-i$
SI
SI
$i \leq n-1$
Suma $\leftarrow q_1$
$i \leftarrow i+1$
$P \leftarrow I$
SI
$P \leftarrow P * A$
$i \leftarrow i+1$
suma $\leftarrow$ suma $+ q_i * P$
$i < n$
NO
Mostrar suma
Fin

2. ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo***

Consideremos el Problema de Valores Iniciales (P.V.I) no homogéneo:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^{'}(t) &=& A(t)\ x(t)+b(t) \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array}\right. \tag{3.27}$$

donde $t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$ y $x(t)$, $b(t)$, x_0, $x(t_0)$ son matrices de orden $n \times 1$.

Si $n = 1$ (el caso escalar), sabemos por un teorema que, si A y b son continuas en el intervalo $I \subset \mathbb{R}$, todas las soluciones de (3.27) están dadas por la fórmula:

$$x_{(t)} \quad = \quad e^{(t-t_0)a}\ x_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-xa}\ b(x)\ dx \tag{3.28}$$

Podemos comprobar que esta fórmula puede generalizarse para sistemas lineales de ecuaciones diferenciales, siguiendo el mismo proceso que en el caso escalar.

Teorema 3.2.10 Sean $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz de elementos constantes, y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ una función vectorial continua en un intervalo I. Entonces el Problema de Valores Iniciales (P.V.I.)

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^{'}(t) &=& A(t)\ x(t)+b(t) \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array}\right. \tag{3.29}$$

tiene una solución única en I dada por:

$$\begin{array}{rcl} x:\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & x(t) = e^{(t-t_0)A}\ x_0 + e^{tA} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx \end{array}$$

Demostración. Multiplicamos primero ambos miembros de (3.29) por la exponencial matricial e^{-tA}, luego arreglando convenientemente

$$e^{-tA}\ (x'(t) - A\ x(t)) = e^{-tA}\ b(t) \tag{3.30}$$

la derivada del producto $e^{-tA}\ x(t)$ es el primer miembro de (3.30). Por consiguiente, integramos ambos miembros entre t_0 y t, donde $t_0, t \in I \subset \mathbb{R}$. Obtenemos:

$$e^{-tA}\ x(t) - e^{-t_0A}\ x(t_0) = \int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx$$

Ahora multiplicamos por e^{tA}. Obtenemos:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}\ x_0 + e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx$$

Como en el caso homogéneo, la dificultad al aplicar esta fórmula en los casos prácticos radica en el cálculo de las exponenciales de matrices. Obsérvese que segun el corolario 3.2.3 el primer término, $e^{(t-t_0)A}\ x_0$, es la solución única del problema homogéneo:

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\ x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

El segundo término $e^{tA} \int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx$ es la solución única del problema no homogéneo:

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\ x(t) + b(t) \\ x(t_0) &= \overline{0} \end{cases}$$

3.2.4. Programa computacional sistema.m

Aquí en esta sección se mostrará el funcionamiento del programa computacional ***sistema.m*** que mencione en la introducción.

Este programa permite resolver un sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo asociado al Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\ x(t) + b(t),\ t \in J \subset \mathbb{R},\ b(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1} \\ x(t_0) &= x_0 \in \mathbb{R}^{n\times 1} \end{cases} \tag{3.31}$$

Donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$ y b es una función vectorial continua en un intervalo abierto $J = [a; b]$. Este programa se ha elaborado tomando en cuenta el Método de Runge Kutta.

Ejemplo 3.2.11 Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo:

$$\begin{cases} x_1'(t) = -x_1(t) + 2x_2(t) + t\ , & x_1(1) = 0 \\ x_2'(t) = 5x_1(t) + 3x_2(t) - t\ , & x_2(1) = 1 \end{cases} \tag{3.32}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x^{'}(t) & = & A(t)\,x(t) + b(t),\ t \in J \subset \mathbb{R},\ A \in \mathbb{R}^{2\times 2},\ b(t) \in \mathbb{R}^{2\times 1} \\ x(t_0) & = & x_0 \in \mathbb{R}^{2\times 1} \end{array}\right.$$

donde:

$$x^{'}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix},\ b = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(1) \\ x_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ingrese a Matlab a partir de la versión 6.0 luego siga los pasos que se indica:

To get started, type one of these: helpwin, helpdesk, or demo.

For product information, type tour or visit www.mathworks.com.

»$cd\ c : \backslash matlabr11\backslash work\backslash programa2$

»$t = sym('t')$

t =

t

»$M = [1\ 0; 0\ 1]$

$M =$

1 0

0 1

»$A = [-1\ 2; 5\ 3]$

$A =$

-1 2

5 3

»$B = [t\ \ -t]$

$B =$

$[t, -t]$

»$t0 = 1;$

»$c0 = [0\ 1]'$

$c0 =$

0

1

»$num = 5$

num =

5

» sistema$(M, A, B, t0, c0, num)$

$ti =$

0

La matriz C calculada es:

$c0 =$

$\begin{matrix} 0 \\ 1 \end{matrix}$ ans =

0,2000

La matriz C calculada es:

$ci =$

$-0{,}3329$

$0{,}6808$

ans =

0,4000

La matriz C calculada es:

$ci = \begin{matrix} -0{,}6358 \\ 0{,}7067 \end{matrix}$

ans =

0,6000

La matriz C calculada es:

$ci = \begin{matrix} -1{,}0217 \\ 0{,}9424 \end{matrix}$

ans =

0,8000

La matriz C calculada es:

$ci = \begin{matrix} -1{,}5997 \\ 1{,}4024 \end{matrix}$

ans =

1

La matriz C calculada es:

$ci =$

$-2{,}5303$

$2{,}1922$

»

3. ***Sistema lineal de ecuaciones diferenciales no homogéneo***

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)\ X(t) + b(t) \\ X(t_0) &= x_0 \in \end{cases} \tag{3.33}$$

El teorema 3.2.10 da una fórmula explicita para el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (3.29) donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$. Resolvemos ahora el caso más general, es decir donde la matriz $A(t)$, es una matriz de funciones y no es necesariamentre constante.

Si A y b son continuas en un intervalo abierto J, un teorema general de existencia y unicidad que se enunciará más adelante nos dice que para cada t_0 de J y cada vector x_0 existe una única solución para el Problema de Valores Iniciales (3.33).

En el caso escalar ($n = 1$) la ecuación diferencial (3.33) puede resolverse del modo siguiente. Sea $M(u) = \displaystyle\int_{t_0}^{u} A(t)\ dt$, multipliquemos entonces ambos miembros de (3.33) por $e^{-M(t)}$, luego arreglando convenientemente obtenemos:

$$e^{-M(t)} \{X'(t) - A(t)\ X(t)\} = e^{-M(t)}\ b(t) \tag{3.34}$$

El primer miembro es la derivada del producto $e^{-M(t)}\ X(t)$. Por consiguiente, podemos integrar ambos miembros entre t_0 y u, siendo t_0 y u puntos de $J \subset \mathbb{R}$. Obtenemos:

$$e^{-M(u)}\ X(u) - e^{-M(t_0)}\ X(t_0) = \int_{t_0}^{u} e^{-M(t)}\ b(t)\ dt$$

Ahora multiplicamos por $e^{M(u)}$. Obtenemos:

$$X(u) \quad = \quad e^{M(u)} e^{-M(t_0)}\ x_0 + e^{M(u)} \int_{t_0}^{u} e^{-M(t)}\ b(t)\ dt \tag{3.35}$$

La única parte de este razonamiento que no es aplicable a las matrices de funciones es la afirmación de que el primer miembro de (3.34) es la derivada del producto $e^{-M(t)}\ X(t)$. En este punto utilizamos el hecho de que la derivada de $e^{-M(t)}$ es $-A(t)e^{-M(t)}$. En el caso escalar esto es una consecuencia de la fórmula siguiente para la derivación de las funciones exponenciales:

$$\text{Si} \quad E(t) = e^{tA}, \quad \text{entonces} \quad E'(t) = Ae^{tA}$$

Desafortunadamente, esta fórmula de derivación no siempre es válida cuando A es una matriz de funciones. Por tanto es necesario una modificación del razonamiento para extender la ecuación (3.35) al caso de las matrices de funciones.

Supongamos que multiplicamos cada miembro de (3.33) por una matriz de funciones $F(t)$, de orden $n \times n$, no especificada. Obtenemos:

$$F(t)X'(t) = F(t)A(t)\ X(t) + F(t)b(t)$$

Sumemos ahora $F'(t)X(t)$ a ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$(F(t)X(t))' = (F'(t) + F(t)A(t))\ X(t) + F(t)b(t)$$

Si podemos elegir la matriz de funciones $F(t)$ de manera que la suma $(F'(t) + F(t)A(t))$ del segundo miembro sea la matriz nula, la ecuación se simplifica y queda:

$$(F(t)X(t))' = F(t)b(t)$$

Integrando desde t_0 hasta u se obtiene:

$$F(u)X(u) - F(t_0)X(t_0) = \int_{t_0}^{u} F(t)b(t)\ dt$$

Si, además, la matriz $F(u)$ es no singular, obtenemos la fórmula explícita:

$$X(u) = F^{-1}(u)F(t_0)x_0 + F^{-1}(u)\int_{t_0}^{u} F(t)b(t)\ dt \tag{3.36}$$

Ésta es una generalización de la fórmula escalar (3.35). El proceso funcionará bien si podemos encontrar una matriz de funciones no singular $F(t)$, de orden $n \times n$, que satisfaga la ecuación diferencial matricial:

$$F'(t) = -F(t)A(t)$$

Teorema 3.2.12 Supongamos que $A(t)$ es una matriz de funciones de orden $n \times n$ continua en un intervalo abierto J. Si $t_0 \in J$ y $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ dado, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rcl} X'(t) & = & A(t)\ X(t) \\ X(t_0) & = & x_0 \end{array}\right. \tag{3.37}$$

tiene en J una solución $X(t) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$.

Demostración. Usaremos el ***método de aproximaciones sucesivas***, que es un método iterativo. El método empieza tomando una supuesta solución de la ecuación (3.37). Tomamos como tal el vector x_0, si bien esto no es esencial. Sustituimos entonces esta supuesta solución en el segundo miembro de la ecuación y obtenemos una nueva ecuación diferencial

$$X'(t) = A(t)\, x_0$$

Integramos ambos miembros entre t_0 y u, siendo u un punto arbitrario de J. Esta ecuación tiene exactamente una solución X_1 en J que satisface la condición inicial $X_1(t_0) = x_0$, o sea

$$X_1(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} A(t)x_0\, dt$$

Reemplazamos ahora $X(t)$ por$X_1(t)$ en el segundo miembro de la ecuación diferencial (3.37), obtenemos:

$$X'(t) = A(t)\, X_1(t)$$

Esta ecuación tiene una solución única X_2 en J con la condición $X_2(t_0) = x_0$

$$X_2(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} A(t)X_1(t)\, dt \tag{3.38}$$

Sustituimos entonces X_2 en el segundo miembro de (3.37) y resolvemos la ecuación resultante para determinar X_3 con $X_3(t_0) = x_0$, y así sucesivamente. Este proceso determina una suceción de funciones $X_0,\ X_1,\ X_2,\ \cdots$, en la que $X_0 = x_0$ y donde X_{k+1} se determina a partir de X_k mediante la fórmula de recurrencia

$$X_{k+1}(u) = x_0 + \int_{t_0}^{u} A(t)X_k(t)\, dt \text{ para } \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots \tag{3.39}$$

La demostración de que la sucesión de funciones así definida converge hacia una función límite X que es una solución de la ecuación diferencial (3.37) en J y que tambien satisface la condición inicial $X(t_0) = x_0$ se puede ver en [7]. Las funciones $X_0,\ X_1,\ X_2,\ \cdots$ se llaman ***aproximaciones sucesivas*** de X.

Teorema 3.2.13 Dada una matriz de funciones $A(t)$, de orden $n \times n$, continua en un intervalo abierto J, y dado un punto cualquiera t_0 en J, existe una matriz de funciones F, de orden $n \times n$, que satisface la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} F'(u) & = & -F(u)\ A(u) \\ F(t_0) & = & I \end{array}\right. \tag{3.40}$$

Además, $F(u)$ es no singular para cada u en J.

Demostración. Sea $X_k(u)$ una solución vectorial de la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} X_k'(u) & = & -\{A(u)\}^t \mathcal{X}_k(u) \\ X_k(t_0) & = & I_k, \quad t_0 \in J \end{array}\right.$$

donde I_k es la columna k de la matriz identidad I, de orden $n \times n$. Sea $G(u)$ una matriz de orden $n \times n$ cuya columna k es $X_k(u)$. Entonces G satisface la ecuación diferencial matricial

$$\left\{\begin{array}{rcl} G'(u) & = & -\{A(u)\}^t\ G(u) \\ G(t_0) & = & I, \quad t_0 \in J \end{array}\right. \tag{3.41}$$

Tomemos ahora la transpuesta de cada miembro de (3.41), obtenemos

$$\{G'(u)\}^t \quad = \quad \{\{G(u)\}^t\}' \quad = \quad -\{G(u)\}^t\ A(u)$$

Por tanto la matriz $F(u) = \{G(u)\}^t$ satisface la ecuación diferencial (3.40). Demostremos ahora que $F(u)$ es no singular construyendo su inversa. Sea H la matriz de funciones de orden $n \times n$ cuya columna k es la solución de la ecuación diferencial

$$\left\{\begin{array}{rcl} X'(u) & = & A(u)\ X(u) \\ X(t_0) & = & I_k, \quad t_0 \in J \end{array}\right.$$

donde I_k es la columna k de la matriz identidad I, de orden $n \times n$. Entonces H satisface el Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} H'(u) &= A(u)\ H(u) \\ H(t_0) &= I, \quad t_0 \in J \end{cases}$$

El producto $F(u)H(u)$ tiene derivada

$$F(u)H'(u) + F'(u)H(u) \quad = \quad F(u)\ A(u)\ H(u) - F(u)A(u)H(u) \quad = \quad 0$$

para cada u de J. Por consiguiente el producto $F(u)G(u)$ es constante, $F(u)H(u) = F(t_0)H(t_0) = I$, así que $H(u)$ es la inversa de $F(u)$. $\square$

Teorema 3.2.14 Dadas una matriz de funciones $A(t)$, de orden $n \times n$, y una función vectorial $b \in \mathbb{R}^{n\times 1}$, ambas continuas en un intervalo abierto J, la solución del Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)\ X(t) + b(t) \\ X(t_0) &= x_0, \quad t_0 \in J \end{cases} \tag{3.42}$$

en J viene dado por la fórmula

$$X(t) \quad = \quad F(t)^{-1}\ x_0 + F(t)^{-1} \int_{t_0}^{t} F(u)b(u)\ du. \tag{3.43}$$

La matriz de funciones $F(t)$, de orden $n \times n$, es la transpuesta de la matriz cuya columna k es la solución del Problema de Valores Iniciales

$$\begin{cases} X'(t) &= -\{A(t)\}^t\ X(t) \\ X(t_0) &= I_k, \quad t_0 \in J \end{cases} \tag{3.44}$$

en donde I_k es la columna k de la matriz identidad I.

Aunque el teorema 3.2.14 proporciona una fórmula explícita para la resolución del sistema lineal general (3.42), tal fórmula no siempre resulta útil para calcular la solución debido a la dificultad que supone la determinación de la matriz de funciones F. Ello exige la solución de n sistemas lineales homogeneos (3.44). En [7] se expone un método con series de potencias que a veces se emplea en la resolución de sistemas lineales homogéneos. La demostración del teorema 3.2.14 se basa en el teorema de existencia 3.2.12 (ver [7]).

Teorema 3.2.15 ***TEOREMA DE UNICIDAD PARA SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEOS.*** Si $A(t)$ es una matriz de funciones continua en un intervalo abierto J, la ecuación diferencial

$$\begin{cases} X'(t) &= A(t)\,X(t) \\ X(t_0) &= x_0, \quad t_0 \in J \end{cases}$$

tiene a lo más una solución en J.

Demostración. Sean Z e Y dos soluciones en J. Sea J_1 cualquier subintervalo de J acotado y cerrado que contenga t_0. Demostraremos que $Z(t) = Y(t)$ para todo t en J_1. Esto implica que $Z = Y$ en todo el intervalo J.

Puesto que Z e Y son soluciones tenemos

$$Z'(t) - Y'(t) = A(t)\{Z(t) - Y(t)\}$$

Elijamos u en J_1 e integremos esta ecuación entre t_0 y u, obtenemos

$$Z(u) - Y(u) = \int_{t_0}^{u} A(t)\{Z(t) - Y(t)\}\,dt$$

Ésta implica la desigualdad

$$\| Z(u) - Y(u) \| \leq M \left| \int_{t_0}^{u} \| Z(t) - Y(t) \| \, dt \right| \tag{3.45}$$

donde M es una cota superior de $\| A(t) \|$ en J_1. Entonces la desigualdad (3.45) nos da

$$\| Z(u) - Y(u) \| \leq M M_1 \, |u - t_0| \tag{3.46}$$

Aplicando (3.46) en el segundo miembro de (3.45) obtenemos

$$\| Z(u) - Y(u) \| \leq M^2 M_1 \left| \int_{t_0}^{u} | t - t_0 | \, dt \right| = M^2 M_1 \frac{| u - t_0 |^2}{2}$$

Por inducción resulta

$$\| Z(u) - Y(u) \| \leq M^n M_1 \frac{| u - t_0 |^n}{n!} \tag{3.47}$$

Cuando $n \longrightarrow \infty$ el segundo miembro tiende a 0, así que $Z(u) = Y(u)$. □

Capítulo 4

Aplicaciones

En este capítulo expondremos algunos ejemplos, de aplicaciones, de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales. Todos estos ejemplos tienen una característica particular en sus soluciones, dependiendo de la rama de la especialidad a la que pertenecen. Utilizaremos el método de E. J. Putzer, porque nos parece el más simple y adecuado.

En los sistemas (4.1) y (4.71) usaremos también el método de la Forma Canónica de Jordan. El propósito es hacer una comparación numérica de las soluciones, al mismo tiempo podremos apreciar las dificultades y la laboriosidad que se presentan al usar la Forma Canónica de Jordan, y por consiguiente conviene usar el método de E. J. Putzer .

4.1. Método de E. J. Putzer (Primer algoritmo)

4.1.1. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

1. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1'(t) & = & 5x_1(t) & + & 3x_2(t) & , & x_1(0) & = & x_1^0 \\ x_2'(t) & = & -6x_1(t) & - & 4x_2(t) & , & x_2(0) & = & x_2^0 \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{array}\right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) \;= det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \tag{4.2}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1.$$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer. En primer lugar formamos el siguiente sistema triangular:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) \\ r_2'(t) & = & r_1(t) \quad + \quad \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 \quad , \qquad r_2(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

O equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_1'(t) & = & 2r_1(t) \\ r_2'(t) & = & r_1(t) \quad - \quad r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 \quad , \qquad r_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} r_1(t) & = & e^{2t} \\ r_2(t) & = & \dfrac{1}{3}\, e^{2t} \quad - \quad \dfrac{1}{3}\, e^{-t} \end{array} \right. \tag{4.4}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\; P_j(A) = r_1(t)\; P_0(A) + r_2(t)\; P_1(A) \tag{4.5}$$

donde:

$$P_0(A) = I, \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_1 I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ estan dados en (4.4). Así reemplazando en (4.5), obtenemos:

$$e^{tA} = r_1(t)\ I + r_2(t)\ (A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & - & e^{-t} & e^{2t} & - & e^{-t} \\ -2e^{2t} & + & 2e^{-t} & -e^{2t} & + & 2e^{-t} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente la solución del Problema de Valores Iniciales (4.1) es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{t\ A} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} & - & e^{-t} & e^{2t} & - & e^{-t} \\ -2e^{2t} & + & 2e^{-t} & -e^{2t} & + & 2e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \Big(\ 2x_1^0 + x_2^0\ \Big) e^{2t} - \Big(\ x_1^0 + x_2^0\ \Big) e^{-t} \\ x_2(t) &= -\Big(\ 2x_1^0 + x_2^0\ \Big) e^{2t} + 2\Big(\ x_1^0 + x_2^0\ \Big) e^{-t} \qquad \square \end{aligned}$$

Ahora resolveremos el mismo problema pero usaremos la Forma Canónica de Jordan de A.

***Ecuación característica de** A:*

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0,$$

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 5-\lambda & 3 \\ -6 & -4-\lambda \end{bmatrix} = (5-\lambda)\ (-4-\lambda) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)\ (\lambda + 1).$$

***Valores propios:**:*

a) $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$, $r_1 = 1$.

b) $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$, $r_2 = 1$

El corolario 5.2.8 nos garantiza que A es diagonalizable. Entonces J_A va a estar formada por dos suprabloques uno de valor propio 2 y de orden 1×1, y otro de valor propio -1 y de orden 1×1.

Para determinar completamente la matriz J_A necesitamos calcular los vectores propios de A

***Subespacio propio** S_1, $\lambda_1 = 2$:*

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 & = & -x_1 \\ x_1 & \text{libre} & \end{cases}$$

Luego el subespacio propio S_1, correspondiente a λ_1 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$.

Subespacio propio S_2, $\lambda_2 = -1$:

$$(A+I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -2\,x_1 \\ x_1 \text{ libre} \end{cases}$$

Luego el subespacio propio S_2, correspondiente a λ_1 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle$.

Luego:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = diag[2\ ,\ -1]$$

Entonces:

$$e^{J_A} = diag[e^2\ ,\ e^{-1}]$$

El cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto y = L(x) = P^{-1}\,x \end{aligned}$$

transforma el P.V.I. dado, en

$$\begin{cases} y' = J_A\,y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde:

$$y_0 = P^{-1}\,x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^0 + x_2^0 \\ -x_1^0 - x_2^0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{y_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_{y_0}(t) = e^{tJ_A}\,y_0 = e^{diag[2t\ ,\ -t]}\,y_0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\varphi_{y_0}(t) = diag[e^{2t}\ ,\ e^{-t}]\,y_0 = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1^0 + x_2^0 \\ -x_1^0 - x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\,e^{2t} \\ -(x_1^0 + x_2^0)\,e^{-t} \end{bmatrix}$$

Luego, la solución del P.V.I. original es:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \varphi_{x_0}(t) = P\ \varphi_{y_0}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\ e^{2t} \\ -(x_1^0 + x_2^0)\ e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

esto es: $\varphi_{x_0}(t) = \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\ e^{2t} - (x_1^0 + x_2^0)\ e^{-t} \\ -(2x_1^0 + x_2^0)\ e^{2t} + 2(x_1^0 + x_2^0)\ e^{-t} \end{bmatrix}$

Observación 4.1.1 Observe que las soluciones obtenidas son las mismas que se obtuvieron cuando se usó el método de E. J. Putzer.

2. Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & , & x_1(0) & = & 1 \\ x_2'(t) & = & -3x_2(t) & , & x_2(0) & = & -1 \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \tag{4.7}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3$$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer. En primer lugar, formamos el siguiente sistema triangular:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & + & \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} r_1'(t) &= 2r_1(t) \\ r_2'(t) &= r_1(t) - 3r_2(t) \\ r_1(0) &= 1 \quad , \quad r_2(0) = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\begin{cases} r_1(t) &= e^{2t} \\ r_2(t) &= \frac{1}{5}\, e^{2t} - \frac{1}{5}\, e^{-3t} \end{cases} \tag{4.10}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) = r_1(t)\ P_0(A) + r_2(t)\ P_1(A) \tag{4.11}$$

donde:

$$P_0(A) = I, \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - 2I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ estan dados en (4.10). Así, reemplazando en (4.11), obtenemos:

$$e^{tA} = r_1(t)\ I + r_2(t)\ (A - 2I) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.6) es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{2t} \\ x_2(t) &= -e^{-3t} \quad \square \end{aligned}$$

3. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1'(t) = \lambda_1 x_1(t) \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2'(t) = \lambda_2 x_2(t) \quad , \quad x_2(0) = x_2^0 \end{cases} \tag{4.13}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) = A\ x(t); \ 0 \leq t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix}, \ A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) \ = det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0 \tag{4.14}$$

Valores propios:

$$\lambda = \lambda_1, \quad \lambda = \lambda_2.$$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer. En primer lugar, formamos el siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & + & \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\begin{cases} r_1(t) & = & & e^{\lambda_1 t} & & \\ r_2(t) & = & \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} & e^{\lambda_1 t} & + & \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}\ e^{\lambda_2 t} \end{cases} \tag{4.16}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) = r_1(t)\ P_0(A) + r_2(t)\ P_1(A) \tag{4.17}$$

donde:

$$P_0(A) = I, \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_1 I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ estan dados en (4.16). Así, reemplazando en (4.17), obtenemos:

$$e^{tA} = r_1(t)\ I + r_2(t)\ (A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.13) es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{tA} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= x_2^0 e^{\lambda_2 t} \qquad \square \end{aligned}$$

4. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1'(t) &=& \lambda_1 x_1(t) \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2'(t) &=& \lambda_2 x_2(t) \quad , \quad x_2(0) = x_2^0 \\ \vdots & & \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ x_n'(t) &=& \lambda_n x_n(t) \quad , \quad x_n(0) = x_n^0 \end{array} \right. \tag{4.19}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix}, \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

La matriz asociada al sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.19) es una matriz diagonal.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} = diag[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n]$$

En este caso resulta más conveniente calcular e^{tA}, (ver el apéndice 5.3.3. item 2)); mediante:

Si $D = diag[\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, entonces: $e^D = diag[e^{\lambda_1},\ e^{\lambda_2},\ \cdots\ ,\ e^{\lambda_n}]$.

Luego:

$$e^{tA} = diag[e^{t\lambda_1},\ e^{t\lambda_2},\ \cdots\ ,\ e^{t\lambda_n}] \ = \ \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.19) es:

$$x(t) \ = \ \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \ = \ \begin{bmatrix} e^{t\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{t\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{t\lambda_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1^0 e^{\lambda_1 t} \\ x_2(t) &= x_2^0 e^{\lambda_2 t} \\ &\vdots \\ x_n(t) &= x_n^0 e^{\lambda_n t} \qquad \square \end{aligned}$$

5. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & + & 3x_2(t) & , & x_1(0) & = & x_1^0 \\ x_2'(t) & = & & - & 2x_2(t) & , & x_2(0) & = & x_2^0 \end{array} \right. \tag{4.20}$$

Resolución. Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t);\ 0 \leq t < \infty \\ x(0) = x_0 \end{array} \right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad y \quad x_0 = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) \ = det(\lambda I - A) = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0 \tag{4.21}$$

Valores propios: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -2.$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer. En primer lugar formamos el siguiente sistema triangular:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & + & \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.22}$$

O equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} r_1'(t) & = & 2r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & - & 2r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{array} \right.$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} r_1(t) & = & e^{2t} & & \\ r_2(t) & = & \frac{1}{4}\, e^{2t} & - & \frac{1}{4}\, e^{-2t} \end{array} \right. \tag{4.23}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) = r_1(t)\ P_0(A) + r_2(t)\ P_1(A) \tag{4.24}$$

donde:

$$P_0(A) = I, \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_1 I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ estan dados en (4.23). Así, reemplazando en (4.24), obtenemos:

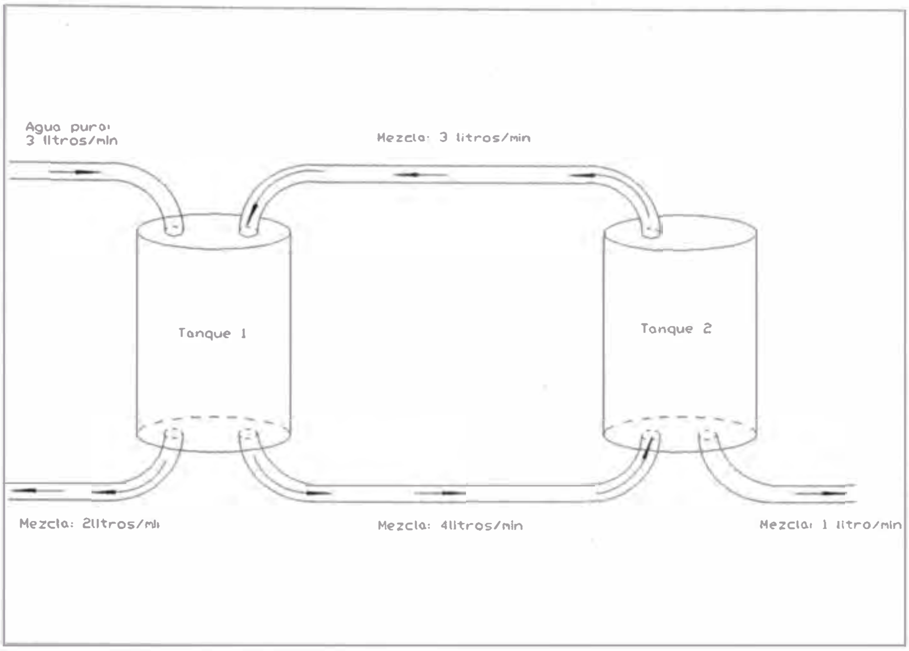
$$e^{tA} = r_1(t)\ I + r_2(t)\ (A - \lambda_1 I) = \begin{bmatrix} e^{2t} & \frac{3}{4}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Por consiguiente la solución del Problema de Valores Iniciales (4.20) es:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = e^{t\ A} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{2t} & \frac{3}{4}\left(e^{2t} - e^{-2t}\right) \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{array}{lcl} x_1(t) & = & \left(x_1^0 + \frac{3}{4}\, x_2^0\right)\, e^{2t} - \frac{3}{4}\, x_2^0\, e^{-2t} \\ x_2(t) & = & x_2^0\, e^{-2t} \qquad \square \end{array}$$



4.1.2. Sistemas químicos

Mezclas

1. Dos tanques están conectados por una serie de tuberías, como se muestra en la figura. El tanque 1 contiene inicialmente 20 litros de agua donde se ha disuelto 150 gramos de cloro. El tanque 2 contiene inicialmente 50 gramos de cloro disueltos en 10 litros de agua.

   Empezando en el tiempo cero, se bombea agua pura en el tanque 1 a razón de 3 litros/minuto, mientras que las soluciones de cloro y agua se intercambian entre los tanques, además de salir de ellos en las razones mostradas. El problema es determinar la cantidad de cloro en cada tanque en cualquier tiempo $t > 0$.

   Debido a las razones de entrada y descarga de las soluciones, la cantidad de solución en cada tanque permanecerá constante. Por lo tanto, la razón de cloro a solución de cloro y agua en cada tanque debe, a la larga, aproximarse a la de entrada, que es agua pura. Utilizaremos esta observación para verificar los resultados finales.

Resolución.

Sea $x_j(t)$ igual al número de gramos de cloro en el tanque j, en el tiempo t. De acuerdo con los datos de la figura, tenemos:

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &- \text{razón de entrada menos razón de salida}\\
&= \left(3\,\frac{l}{min}\right)\left(0\,\frac{g}{l}\right) + \left(3\,\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_2}{10}\,\frac{g}{l}\right) - \left(2\,\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_1(t)}{20}\,\frac{g}{l}\right)\\
&\quad - \left(4\,\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_1}{20}\,\frac{g}{l}\right)\\
&= -\frac{3}{10}\,x_1(t) + \frac{3}{10}\,x_2(t)
\end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned}
x_2'(t) &= \left(4\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_1(t)}{20}\,\frac{g}{l}\right) - \left(3\,\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_2}{10}\,\frac{g}{l}\right) - \left(1\,\frac{l}{min}\right)\left(\frac{x_2}{10}\,\frac{g}{l}\right)\\
&= \frac{1}{5}\,x_1(t) - \frac{2}{5}\,x_2(t)
\end{aligned}$$

El sistema lineal de ecuaciones diferenciales correspondiente es:

$$\left\{\begin{array}{rclclcrcl}
x_1'(t) &=& -\frac{3}{10}\,x_1(t) &+& \frac{3}{10}\,x_2(t) &,& x_1(0) &=& 150\\
x_2'(t) &=& \frac{1}{5}\,x_1(t) &-& \frac{2}{5}\,x_2(t) &,& x_2(0) &=& 50
\end{array}\right. \tag{4.26}$$

Estamos ante un Problema de Valores Iniciales de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l}
x'(t) = A\,x(t);\ 0 \le t < \infty\\
x(0) = x_0
\end{array}\right.$$

donde:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t)\\ x_2'(t)\end{bmatrix},\ A = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{3}{10}\\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\end{bmatrix}\ y\ x_0 = \begin{bmatrix}150\\ 50\end{bmatrix} \tag{4.27}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) \quad = det(\lambda I - A) = \lambda^2 + \frac{7}{10}\lambda + \frac{3}{50} = (\lambda + \frac{1}{10})(\lambda + \frac{3}{5}) = 0 \tag{4.28}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = -\frac{1}{10}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{5}$$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer. En primer lugar, formamos el siguiente sistema triangular:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & + & \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.29}$$

O equivalentemente:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} r_1'(t) & = & -\frac{1}{10} r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & - & \frac{3}{5} r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.30}$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rclcl} r_1(t) & = & & & e^{-\frac{1}{10}t} \\ r_2(t) & = & -2e^{-\frac{3}{5}t} & + & 2e^{-\frac{1}{10}t} \end{array} \right. \tag{4.31}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) = r_1(t)\ P_0(A) + r_2(t)\ P_1(A) \tag{4.32}$$

donde:

$$P_0(A) = I, \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_1 I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ es la solución del sistema triangular (4.31). Así, reemplazando en (4.32), obtenemos:

$$e^{tA} = r_1(t)\ I + r_2(t)\ (A + \frac{1}{10}I)$$

Por consiguiente, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.26) es:

$$x(t) = e^{tA}\begin{bmatrix} 150 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150e^{-\frac{1}{10}t} \\ 50e^{-\frac{1}{10}t} \end{bmatrix} + \left(-2e^{-\frac{3}{5}t} + 2e^{-\frac{1}{10}t} \right)\begin{bmatrix} -15 \\ 15 \end{bmatrix} \tag{4.33}$$

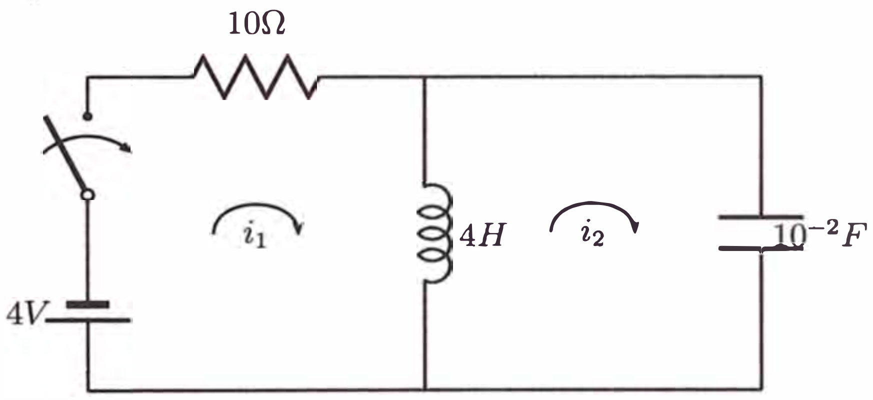
Realizando operaciones obtenemos:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 120e^{-\frac{1}{10}t} + 30e^{-\frac{3}{5}t} \\ x_2(t) &= 80e^{-\frac{1}{10}t} - 30e^{-\frac{3}{5}t} \end{aligned}$$

Observamos que conforme $t \to \infty$, $x_1(t) \to 0$ y $x_2(t) \to 0$. Esto significa que la cantidad de cloro en los tanques se aproxima a cero conforme avanza el tiempo. Este resultado era de esperar, como observamos al inicio del análisis. □

4.1.3. Circuitos eléctricos

1. Consideremos el circuito como indica la figura adjunta.



Supongamos que todas las cargas son cero hasta el momento $t = 0$, cuando se cierra el interruptor. Nuestro objetivo es conocer las corrientes en los ciclos en cualquier instante $t > 0$.

La ley de kirchhoff nos garantiza que:

$$10i_1(t) + 4\left(i_1'(t) - i_2'(t)\right) = 4 \tag{4.34}$$

$$4\left(i_1'(t) - i_2'(t)\right) = 100q_2(t) \tag{4.35}$$

$$10i_1(t) + 100q_2(t) = 4 \tag{4.36}$$

Podemos utilizar cualquier par de estas ecuaciones. Utilizaremos las ecuaciones (4.34) y (4.36) para evitar mezclar términos que contengan i y q. Obtenemos:

$$\begin{aligned} i_1'(t) &= -10i_2(t) \\ 2i_1'(t) - 2i_2'(t) &= -5i_1(t) + 2 \end{aligned} \tag{4.37}$$

La corriente $i_1 - i_2$ a través del inductor es cero antes de cerrar el interruptor y, por tanto, también es cero "inmediatamente" después. Así que $i_1(0+) = i_2(0+)$.
Por otra parte la carga del capacitor es continua y vale cero antes de $t = 0$. Tenemos de la ecuación (4.36) que:

$$\begin{aligned} 10i_1'(0+) + 100q_2(0+) &= 4 \\ 10i_1'(0+) + 100q_2(0-) &= 4 \\ 10i_1'(0+) &= 4 \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$i_1(0+) = \frac{2}{5} \quad \text{y} \quad i_2(0+) = \frac{2}{5}$$

El sistema lineal de ecuaciones diferenciales que hay que resolver es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

Multiplicamos la ecuación (4.38), por la izquierda, por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_1'(t) \\ i_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -10 \\ \frac{5}{2} & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.39}$$

Estamos ante un Problema de Valores Iniciales (P.V.I.) de la forma

$$\begin{cases} x'(t) = A\ x(t) + b(t) \\ \\ x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.40}$$

El teorema 3.2.10 nos garantiza que el problema (4.40) tiene solución única en $I = \langle 0; \infty \rangle$ dada por:

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto x(t) = e^{(t-t_0)A} x_0 + e^{t\ A} \int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx \end{aligned} \tag{4.41}$$

Ecuación característica:

$$P_A(\lambda) \ = det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 10\lambda + 25 = (\lambda + 5)^2 = 0 \tag{4.42}$$

Valores propios: $\lambda_1 = \lambda_2 = -5$.

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer.

En primer lugar, formamos el siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} r_1'(t) & = & \lambda_1 r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & + & \lambda_2 r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0. \end{cases} \tag{4.43}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} r_1'(t) & = & -5r_1(t) & & \\ r_2'(t) & = & r_1(t) & - & 5r_2(t) \\ r_1(0) & = & 1 & , & r_2(0) = 0. \end{cases} \tag{4.44}$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\begin{cases} r_1(t) & = & e^{-5t} \\ r_2(t) & = & te^{-5t} \end{cases} \tag{4.45}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) \tag{4.46}$$

donde:

$$P_0(A) = I; \quad P_1(A) = \prod_{k=1}^{1}(A - \lambda_k I) = (A - \lambda_1 I), \quad P_2(A) = \Theta$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ es la solución del sistema triangular dado en (4.44).

Así, reemplazando en (4.46), obtenemos:

$$e^{tA} \;=\; r_1(t)\; I + r_2(t)\; (A + 5I) = e^{-5t}\begin{bmatrix} 1+5t & -10t \\ \frac{5}{2}t & 1-5t \end{bmatrix}.$$

Por consiguiente,

$$e^{-tA} \;=\; e^{5t}\begin{bmatrix} 1-5t & 10t \\ -\frac{5}{2}t & 1+5t \end{bmatrix}$$

Así, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.40) según (4.41) es:

$$x(t) \;=\; e^{tA}\; x_0 + e^{tA}\int_{0+}^{t} e^{-xA}\; b(x)\; dx \tag{4.47}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{-5t}\begin{bmatrix} 1+5t & -10t \\ \frac{5}{2}t & 1-5t \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} + \int_{0+}^{t} e^{-xA}\; b(x)\; dx\right)$$

donde $\int_{0+}^{t} e^{-xA}\; b(x)\; dx$ está dado por:

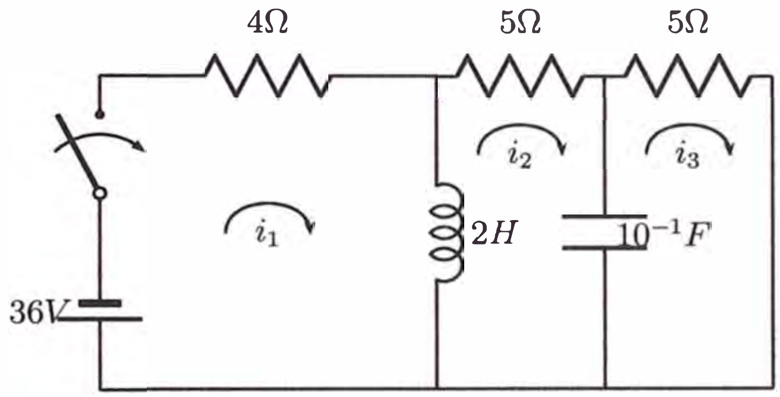
$$\int_{0+}^{t} e^{-xA}\; b(x)\; dx \;=\; \int_{0+}^{t} e^{5x}\begin{bmatrix} 1-5x & 10x \\ -\frac{5}{2}x & 1+5x \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} dx =$$

$$\int_{0+}^{t} e^{-xA}\; b(x)\; dx \;=\; \begin{bmatrix} -\int_{0+}^{t} 10xe^{5x}\; dx \\ -\int_{0+}^{t} (1+5x)\, e^{5x}\; dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2}{5} - 2t\right)e^{5t} - \frac{2}{5} \\ -te^{5t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.40) es:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \frac{2}{5} - 4te^{-5t} \\ i_2(t) &= \left(\frac{2}{5} - 2t\right) e^{-5t}. \quad \square \end{aligned} \tag{4.48}$$

2. Consideremos el circuito que indica la figura, el cual tiene tres ciclos conectados. Supongamos que las corrientes son cero antes de que se cierre el interruptor en el tiempo $t = 0$. También supongamos que el capacitor está en un estado de descarga. Nuestro objetivo es determinar la corriente en cada ciclo para $t > 0$.



Aplicamos las leyes de corriente y voltaje de Kirchhoff, obteniendo:

$$4i_1 + 2i_1' - 2i_2' = 36 \tag{4.49}$$

$$2i_1' - 2i_2' = 5i_2 + 10q_2 - 10q_3 \tag{4.50}$$

$$10q_2 - 10q_3 = 5i_3 \tag{4.51}$$

$$4i_1 + 5i_2 + 10q_2 - 10q_3 = 36 \tag{4.52}$$

$$4i_1 + 5i_2 + 5i_3 = 36 \tag{4.53}$$

$$2i_1' - 2i_2' = 5i_2 + 5i_3. \tag{4.54}$$

Podemos utilizar cualesquiera (tres) de estas ecuaciones para determinar i_1, i_2 e i_3. Las otras tres ecuaciones son redundantes. Nuestra primera tarea es elegir las tres que vamos a usar. Como la ecuación (4.50) contiene tantos términos con cargas como con corrientes, no la usaremos. Si usamos la ecuación (4.53) para eliminar una variable, reduciendo el problema a uno de orden 2×2; debemos hacer muchos cálculos algebraicos . Por tanto mantendremos el tamaño 3×3. La ecuación (4.51) es una que podríamos utilizar.

Si utlizamos las ecuaciones (4.49) y (4.54) simultáneamente, obtenemos un sistema de la forma $Bi' = Di + F$, pero con B singular. Entonces, no podríamos multiplicar por B^{-1}(pues no existe) y escribir el sistema en la forma usual $i' = Ai + b$. Usaremos entonces las ecuaciones (4.49), (4.52) y (4.51). Estas ecuaciones pueden escribirse como:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} i_1' & - & i_2' & = & -2i_1 & + & 18 & & \\ 4i_1' & + & 5i_2' & = & & - & 10i_2 & + & 10i_3 \\ & & i_3' & = & & & 2i_2 & - & 2i_3 \end{array} \tag{4.55}$$

Ahora determinamos las condiciones iniciales. La corriente del conductor $i_1 - i_2$ es continua, e $i_1(0-) = i_2(0-)$.

Por lo tanto:

$$(i_1 - i_2)(0+) = (i_1 - i_2)(0-) = 0$$

Entonces:

$$i_1(0+) = i_2(0+) = 0$$

Además; la carga del capacitor $q_2 - q_3$, es continua. Como $(q_2 - q_3)(0-) = 0$; entonces $q_2(0+) = q_3(0+) = 0$. Esta condición y la ecuación (4.51) requieren que:

$$i_3(0+) = 0$$

Ahora utilizamos la ecuación (4.53) para obtener:

$$4i_1(0+) + 5i_2(0+) + 5i_3(0+) = 36$$

Como:

$$i_3(0+) = 0 \quad e \quad i_1(0+) = i_2(0+), \quad 9i_1(0+) = 36$$

Entonces:

$$i_1(0+) = i_2(0+) = 4$$

Ahora resumimos la información que hemos acumulado. Escribimos el sistema (4.55) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1'(t) \\ i_2'(t) \\ i_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 10 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

Las condiciones iniciales son:

$$i(0+) \quad = \quad \begin{bmatrix} i_1(0+) \\ i_2(0+) \\ i_3(0+) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

Calculamos:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Multiplicamos el sistema (4.56), por la izquierda, por B^{-1}; para obtener:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} i_1'(t) \\ i_2'(t) \\ i_3'(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\frac{10}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{10}{9} \\ \frac{8}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{10}{9} \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= A \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.58}$$

Estamos ante un Problema de Valores Iniciales (P.V.I.) de la forma:

$$\begin{cases} x' = A\,x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases} \tag{4.59}$$

El teorema 3.2.10 nos garantiza que el problema (4.59) tiene solución única en $I = \langle 0; \infty \rangle$ dada por:

$$\begin{aligned} x : \mathbb{R} \ &\rightarrow \ \mathbb{R}^2 \\ t \ &\mapsto \ x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + e^{t\ A}\int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx \end{aligned} \tag{4.60}$$

En este ejemplo usaremos el primer algoritmo de E. J. Putzer para calcular e^{tA}.

Ecuación característica:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = -\lambda\left(\lambda^2 + \frac{38}{9}\lambda + \frac{40}{9}\right) = 0 \\ &= -\lambda\,(\lambda+2)\left(\lambda + \frac{20}{9}\right) = 0 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Valores propios:

$$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2 \quad \text{y} \quad \lambda_3 = -\frac{20}{9}$$

Ahora aplicamos el método de E. J. Putzer (primer algorítmo). En primer lugar, formamos el siguiente sistema triangular:

$$\begin{cases} r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t) \\ r_2'(t) = r_1(t) + \lambda_2 r_2(t) \\ r_3'(t) = \qquad\qquad r_2(t) + \lambda_3 r_3(t), \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = 0, \quad r_3(0) = 0 \end{cases} \tag{4.62}$$

O equivalentemente:

$$\begin{cases} r_1'(t) &= 0\, r_1(t) \\ r_2'(t) &= r_1(t) - 2\, r_2(t) \\ r_3'(t) &= \qquad\qquad r_2(t) - \dfrac{20}{9} r_3(t), \\ r_1(0) &= 1, \quad r_2(0) = 0, \quad r_3(0) = 0 \end{cases} \tag{4.63}$$

Vemos que este sistema es sencillo de resolver. Obtenemos:

$$\begin{cases} r_1(t) &= 1 \\ r_2(t) &= -\dfrac{1}{2}e^{-2t} + \dfrac{1}{2} \\ r_3(t) &= \dfrac{81}{40}e^{-\frac{20}{9}t} - \dfrac{9}{4}e^{-2t} + \dfrac{9}{40} \end{cases} \tag{4.64}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{2} r_{j+1}(t)\; P_j(A) \tag{4.65}$$

donde:

$$P_0(A) = I;\; P_j(A) = \prod_{k=1}^{j}(A - \lambda_k I), \qquad (j = 1,\ 2),$$

y $r_1(t)$, $r_2(t)$ y $r_3(t)$ es la solución del sistema triangular dado en (4.63). Así, reemplazando en (4.65), obtenemos:

$$e^{tA} = r_1(t)\; I + r_2(t)\; A + r_3(t)\; A\; (A + 2I)$$

Es decir:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -4e^{-\frac{20}{9}t} + 5e^{-2t} & 5e^{-\frac{20}{9}t} - 5e^{-2t} & -5e^{-\frac{20}{9}t} + 5e^{-2t} \\ -\dfrac{2}{5}e^{-\frac{20}{9}t} + \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{2}e^{-\frac{20}{9}t} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}e^{-\frac{20}{9}t} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{18}{5}e^{-\frac{20}{9}t} - 4e^{-2t} + \dfrac{2}{5} & -\dfrac{9}{2}e^{-\frac{20}{9}t} + 4e^{-2t} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2}e^{-\frac{20}{9}t} - 4e^{-2t} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4.66}$$

$$e^{-tA} = \begin{bmatrix} -4e^{\frac{20}{9}t} + 5e^{2t} & 5e^{\frac{20}{9}t} - 5e^{2t} & -5e^{\frac{20}{9}t} + 5e^{2t} \\ -\dfrac{2}{5}e^{\frac{20}{9}t} + \dfrac{2}{5} & \dfrac{1}{2}e^{\frac{20}{9}t} + \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}e^{\frac{20}{9}t} + \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{18}{5}e^{\frac{20}{9}t} - 4e^{2t} + \dfrac{2}{5} & -\dfrac{9}{2}e^{\frac{20}{9}t} + 4e^{2t} + \dfrac{1}{2} & \dfrac{9}{2}e^{\frac{20}{9}t} - 4e^{2t} + \dfrac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

Así, la solución del Problema de Valores Iniciales (4.59) según (4.60) es:

$$x(t) \;=\; e^{tA}\, x_0 + e^{tA} \int_{0+}^{t} e^{-xA}\, b(x)\, dx \tag{4.68}$$

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \int_{0+}^{t} e^{-xA}\, b(x)\, dx \right) \tag{4.69}$$

donde $\int_{0+}^{t} e^{-xA}\, b(x)\, dx$ está dada por:

$$\int_{0+}^{t} \begin{bmatrix} -4e^{\frac{20}{9}x} + 5e^{2x} & 5e^{\frac{20}{9}x} - 5e^{2x} & -5e^{\frac{20}{9}x} + 5e^{2x} \\ -\frac{2}{5}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{2}{5} & \frac{1}{2}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{1}{2} \\ \frac{18}{5}e^{\frac{20}{9}x} - 4e^{2x} + \frac{2}{5} & -\frac{9}{2}e^{\frac{20}{9}x} + 4e^{2x} + \frac{1}{2} & \frac{9}{2}e^{\frac{20}{9}x} - 4e^{2x} + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ -8 \\ 0 \end{bmatrix} dx =$$

$$= \int_{0+}^{t} \begin{bmatrix} -80e^{\frac{20}{9}x} + 90e^{2x} \\ -8e^{\frac{20}{9}x} \\ 72e^{\frac{20}{9}x} - 72e^{2x} \end{bmatrix} dx = \begin{bmatrix} -36e^{\frac{20}{9}x} + 45e^{2x} - 9 \\ -\frac{18}{5}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{18}{5} \\ \frac{162}{5}e^{\frac{20}{9}x} - 36e^{2x} + \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

Luego, reemplazando en (4.69):

$$x(t) = \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA} \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -36e^{\frac{20}{9}x} + 45e^{2x} - 9 \\ -\frac{18}{5}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{18}{5} \\ \frac{162}{5}e^{\frac{20}{9}x} - 36e^{2x} + \frac{18}{5} \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA} \begin{bmatrix} -36e^{\frac{20}{9}x} + 45e^{2x} - 5 \\ -\frac{18}{5}e^{\frac{20}{9}x} + \frac{38}{5} \\ \frac{162}{5}e^{\frac{20}{9}x} - 36e^{2x} + \frac{18}{5} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.59) es:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 9 + 40e^{-\frac{20}{9}t} - 45e^{-2t} \\ i_2(t) &= 4e^{-\frac{20}{9}t} \\ i_3(t) &= -36e^{-\frac{20}{9}t} + 36e^{-2t} \qquad \square \end{aligned} \tag{4.70}$$

4.2. Método de E. J. Putzer(Segundo algoritmo)

4.2.1. Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

1. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1'(t) & = & -x_1(t) & + & x_2(t) & - & 2x_3(t) & , & x_1(0) & = & 0 \\ x_2'(t) & = & & - & x_2(t) & + & 4x_3(t) & , & x_2(0) & = & 1 \\ x_3'(t) & = & & & & & x_3(t) & , & x_3(0) & = & -1 \end{array}\right. \tag{4.71}$$

Primero hallaremos la Forma Canónica de Jordan J_A para determinar e^{tA}.

Ecuación característica: $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda+1)^2\ (\lambda-1) = 0$

Valores propios::

a) $\lambda_1 = -1$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$

b) $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$

Para determinar completamente la matriz J_A necesitamos saber cuántos bloques forman el suprabloque de orden 2×2, osea la multiplicidad geométrica r_1 del valor propio -1.

Subespacio propio S_1, $\lambda_1 = -1$:

$$A+I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow (A+I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow x_3 = 0$$

$$Nu((A+I)^2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\ /\ x_3 = 0\} = \langle (1,0,0)\ ;\ (0,1,0) \rangle$$

Luego, J_A está formado por dos suprabloques: uno de orden 2×2 (constituido por un bloque de valor propio $\lambda_1 = -1$) y otro de orden 1×1 de valor propio $\lambda_2 = 1$.

Subespacio propio S_2***,*** $\lambda_2 = 1$:

$$(A-I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0, & x_2 = 2\,x_3 \\ x_3 & \text{libre} \end{cases}$$

$$Nu(A-I) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;/\; x_1 = 0,\; x_2 = 2\,x_3\} = \langle (0,2,1) \rangle$$

Vectores propios:
Para $\lambda_1 = -1$, tenemos:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_2 = 1$, tenemos:

$$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$J_A = P^{-1}AP = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \boxed{1} \end{array}\right] = diag[-1,-1,1] + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{tJ_A} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad e^{tA} = Pe^{tJ_A}P^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.71) está dada por:

$$x(t) \;=\; \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA}\,x_0 \;=\; \begin{bmatrix} 3te^{-t} \\ 3e^{-t}-2e^{t} \\ -e^{t} \end{bmatrix}$$

Ahora resolveremos el mismo problema usando el método de E. J. Putzer.

En efecto: El sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.71) se puede escribir como:

$$x^{'}(t) = \begin{bmatrix} x_1^{'}(t) \\ x_2^{'}(t) \\ x_3^{'}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = A\;x(t) \tag{4.72}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

Polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 \end{aligned} \tag{4.74}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z^{(3)} + c_2 z^{(2)} + c_1 z^{(1)} + c_0 z = z^{'''} + z^{''} - z^{'} - z = 0 \tag{4.75}$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = z^{'}(0) = 0; \quad z^{''}(0) = 1 \tag{4.76}$$

Obviamente:

$$z(t) = a_1 e^{t} + a_2 e^{-t} + a_3 t e^{-t}$$

Aplicando las condiciones obtenemos: $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = -\frac{1}{4}$, y $a_3 = -\frac{1}{2}$; entonces,

$$z(t) = \frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t}$$

Así, $Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Luego:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} +\frac{1}{4}e^t & - & \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t} \\ +\frac{1}{4}e^t & - & \frac{1}{4}(1-2t)e^{-t} \\ +\frac{1}{4}e^t & - & \frac{1}{4}(-3+2t)e^{-t} \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} +\frac{1}{4}e^t & + & \frac{1}{4}(3+2t)e^{-t} \\ +\frac{1}{2}e^t & - & \frac{1}{2}e^{-t} \\ +\frac{1}{4}e^t & - & \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{2} q_j(t)\ A^j = q_0(t)\ I + q_1(t)\ A^1 + q_2(t)\ A^2$$

de aquí:

$$e^{tA} = \left(\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}(3+2t)e^{-t}\right) I + \left(\frac{1}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t}\right) A + \left(\frac{1}{4}e^t - \frac{1}{4}(1+2t)e^{-t}\right) A^2$$

donde: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Operando convenientemente, obtenemos:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & -2te^{-t} \\ 0 & e^{-t} & 2e^{t} - 2e^{-t} \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.71) es:

$$x(t) \;=\; \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA}\, x_0 \;=\; \begin{bmatrix} 3te^{-t} \\ 3e^{-t} - 2e^{t} \\ -e^{t} \end{bmatrix} \qquad \square$$

2. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{ \begin{array}{rclclcl} x_1'(t) & = & 2x_1(t) & + & 3x_2(t) & + & 3x_3(t) \;,\; x_1(0) = 1 \\ x_2'(t) & = & & - & x_2(t) & - & 3x_3(t) \;,\; x_2(0) = -1 \\ x_3'(t) & = & & & & & 2x_3(t) \;,\; x_3(0) = 1 \end{array} \right. \tag{4.77}$$

Resolución. Este sistema se puede escribir como:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = A\, x(t) \tag{4.78}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{4.79}$$

***Polinomio característico de** A*:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ &= \lambda^3 - 3\lambda^2 + 0\lambda + 4 \end{aligned} \tag{4.80}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z^{(3)} + c_2 z^{(2)} + c_1 z^{(1)} + c_0 z = z''' - 3z'' + 0z' + 4z = 0 \tag{4.81}$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = z'(0) = 0; \quad z''(0) = 1 \tag{4.82}$$

Obviamente:

$$z(t) = a_1 e^{-t} + a_2 e^{2t} + a_3 t e^{2t}$$

Aplicando las condiciones obtenemos: $a_1 = \dfrac{1}{9}$, $a_2 = -\dfrac{1}{9}$, y $a_3 = \dfrac{1}{3}$; entonces,

$$z(t) = \frac{1}{9}e^{-t} - \frac{1}{9}e^{2t} + \frac{1}{3}te^{2t}$$

Así, $Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & 1 \\ c_2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Luego:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} +\frac{1}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(3t-1)e^{2t} \\ -\frac{1}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(1+6t)e^{2t} \\ +\frac{1}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(8+12t)e^{2t} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} +\frac{4}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(5-6t)e^{2t} \\ -\frac{4}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(4-3t)e^{2t} \\ +\frac{1}{9}e^{-t} & + & \frac{1}{9}(3t-1)e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{2} q_j(t)\ A^j = q_0(t)\ I + q_1(t)\ A^1 + q_2(t)\ A^2$$

de aquí:

$$
\begin{aligned}
e^{tA} = & \left(\frac{4}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}(5-6t)e^{2t}\right) I + \left(-\frac{4}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}(4-3t)e^{2t}\right) A \\
& + \left(\frac{1}{9}e^{-t} + \frac{1}{9}(3t-1)e^{2t}\right) A^2
\end{aligned}
$$

donde: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

Operando convenientemente, obtenemos:

$$
e^{tA} = \begin{bmatrix} e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} & -e^{-t} + e^{2t} \\ 0 & e^{-t} & e^{-t} - e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}
$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.78) está dada por:

$$
x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\, x_0 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}
$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.78) es:

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= e^{2t} \\
x_2(t) &= -e^{2t} \\
x_3(t) &= e^{2t} \quad \square
\end{aligned}
\tag{4.83}
$$

3. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$\left\{\begin{array}{rclrcl} x_1'(t) & = & x_2(t) & , \; x_1(0) & = & x_1^0 \\ x_2'(t) & = & x_3(t) & , \; x_2(0) & = & x_2^0 \\ x_3'(t) & = & x_4(t) & , \; x_3(0) & = & x_3^0 \\ x_3'(t) & = & -x_1(t) \; - \; 2x_3 & , \; x_4(0) & = & x_4^0 \end{array}\right. \tag{4.84}$$

Resolución. Este sistema lineal de ecuaciones diferenciales se puede escribir como:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = A\,x(t) \tag{4.85}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \\ x_4^0 \end{bmatrix} \tag{4.86}$$

El polinomio característico de A es:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ &= \lambda^4 + 0\lambda^3 + 2\lambda^2 + 0\lambda + 1 \end{aligned} \tag{4.87}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z^{(4)} + c_3 z^{(3)} + c_2 z^{(2)} + c_1 z^{(1)} + c_0 z = z^{(4)} + 0z''' + 2z'' + 0z' + z = 0 \tag{4.88}$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = z'(0) = z''(0) = 0; \quad z'''(0) = 1 \tag{4.89}$$

Obviamente:

$$z(t) = a_1 cos(t) + a_2 sen(t) + a_3 t cos(t) + a_4 t sen(t)$$

Aplicando las condiciones obtenemos: $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = -\frac{1}{2}$ y $a_4 = 0$; entonces,

$$z(t) = \frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcost$$

Así, $Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \\ z'''(t) \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ c_2 & c_3 & 1 & 0 \\ c_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Luego:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcost \\ \frac{1}{2}tsen(t) \\ \frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{2}tcos(t) \\ -\frac{1}{2}tsen(t) + cost \end{bmatrix}, \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tsen(t) + cos(t) \\ \frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) \\ \frac{1}{2}tsen(t) \\ \frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{3} q_j(t)\ A^j = q_0(t)\ I + q_1(t)\ A^1 + q_2(t)\ A^2 + q_3(t)\ A^3$$

donde: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$, $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

y $A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$. Operando convenientemente, obtenemos:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tsen(t) + cos(t) & \frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) & \frac{1}{2}tsen(t) & e_{14} \\ -\frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{2}tcos(t) & \frac{1}{2}tsen(t) + cos(t) & \frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{2}tcos(t) & e_{24} \\ -\frac{1}{2}tsen(t) & -\frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{2}tcos(t) & -\frac{1}{2}tsen(t) + cos(t) & e_{34} \\ -\frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) & -\frac{1}{2}tsen(t) & -\frac{3}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) & e_{44} \end{bmatrix}$$

donde:

$$e_{14} = \frac{1}{2}sen(t) - \frac{1}{2}tcos(t) \quad , \quad e_{24} = \frac{1}{2}tsen(t)$$

$$e_{34} = \frac{1}{2}sen(t) + \frac{1}{2}tcos(t) \quad , \quad e_{44} = -\frac{1}{2}tsen(t) + cos(t)$$

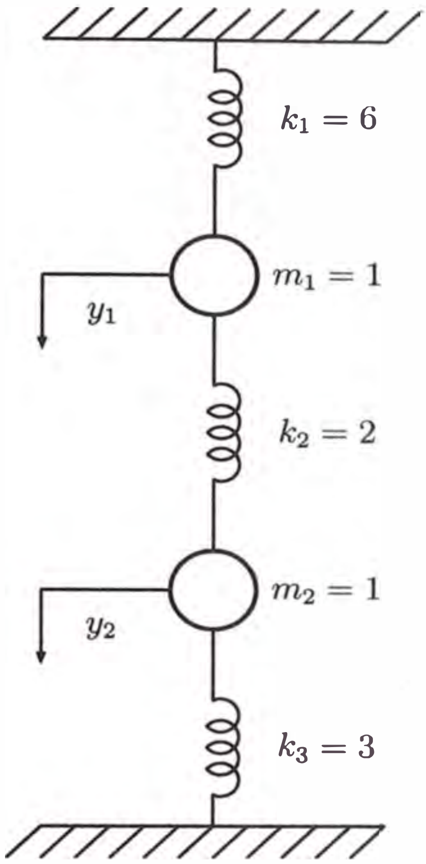
La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.85) está dada por:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\, x_0 =$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Big(t(x_1^0 + x_3^0) + 3x_2^0 + x_4^0 \Big) sen(t) + \frac{1}{2}\Big(2x_1^0 - t(x_2^0 + x_4^0) \Big) cos(t) \\ \frac{1}{2}\Big(t(x_2^0 + x_4^0) + x_3^0 - x_1^0 \Big) sen(t) + \frac{1}{2}\Big(2x_2^0 + t(x_1^0 + x_3^0) \Big) cos(t) \\ -\frac{1}{2}\Big(t(x_1^0 + x_3^0) + x_2^0 - x_4^0 \Big) sen(t) + \frac{1}{2}\Big(2x_3^0 + t(x_2^0 + x_4^0) \Big) cos(t) \\ -\frac{1}{2}\Big(t(x_2^0 + x_4^0) + x_1^0 + 3x_3^0 \Big) sen(t) + \frac{1}{2}\Big(2x_4^0 - t(x_1^0 + x_3^0) \Big) cos(t) \end{bmatrix}$$

4.2.2. Sistema masa - resorte

1. Consideremos el sistema masa-resorte como indica la figura.



Tomando en cuenta que no hay amortiguamiento y que no se aplica ninguna fuerza exterior al sistema. Supongamos que el peso superior se jala hacia abajo una unidad y que el peso inferior se levanta hacia arriba una unidad; entonces ambos pesos se sueltan desde el reposo simultaneamente en el tiempo $t = 0$. Queremos saber las posiciones de los pesos, relativas a sus posiciones de equilibrio en cualquier tiempo $t > 0$.

Las ecuaciones diferenciales que gobiernan a este sistema son:

$$\begin{aligned} m_1 y_1''(t) &= -k_1 y_1(t) + k_2 \Big(\ y_2(t) - y_1(t) \ \Big) &= -\Big(\ k_1 + k_2 \ \Big) y_1(t) + k_2 y_2(t) \\ m_2 y_2''(t) &= -k_2 \Big(\ y_2(t) - y_1(t) \ \Big) - k_3 y_2(t) &= k_2 y_1(t) - \Big(\ k_2 + k_3 \ \Big) y_2(t) \end{aligned}$$

Tomando valores particulares, como por ejemplo:

$$m_1 = m_2 = 1, \;\; k_1 = 6, \;\; k_2 = 2 \text{ y } k_3 = 3$$

Por consiguiente, el sistema lineal de ecuaciones diferenciales con valores iniciales que resolveremos es:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} y_1''(t) & = & -8y_1(t) & + & 2y_2(t) \\ \\ y_2''(t) & = & 2y_1(t) & - & 5y_2(t) \end{array} \right. \tag{4.90}$$

con condiciones iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y_1(0) & = & 1 \\ y_2(0) & = & -1 \\ y_1'(0) & = & y_2'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.91}$$

Convertimos el sistema lineal de dos ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema lineal de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden. Hacemos el siguiente cambio de variables.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1(t) & = & y_1(t) \\ x_2(t) & = & y_2(t) \\ x_3(t) & = & y_1'(t) \\ x_4(t) & = & y_2'(t) \end{array} \right. \tag{4.92}$$

El sistema lineal para y_1 e y_2 se transforma en el sistema lineal para x_1, x_2, x_3 y x_4:

$$\left\{ \begin{array}{lrrcrcrcr} x_1'(t) = & y_1'(t) = & x_3(t) & & & & & & \\ x_2'(t) = & y_2'(t) = & x_4(t) & & & & & & \\ x_3'(t) = & y_1''(t) = & -8y_1(t) & + & 2y_2(t) & = & -8x_1(t) & + & 2x_2(t) \\ x_4'(t) = & y_2''(t) = & 2y_1(t) & - & 5y_2(t) & = & 2x_1(t) & - & 5x_2(t) \end{array} \right. \tag{4.93}$$

con condiciones iniciales:

$$\left\{ \begin{array}{rcr} y_1(0) & = & 1 \\ y_2(0) & = & -1 \\ y_1'(0) & = & y_2'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.94}$$

Este sistema lineal de ecuaciones diferenciales se puede escribir como:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \\ x_4'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = A\, x(t) \tag{4.95}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.96}$$

El polinomio característico de A es:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^4 + c_3\lambda^3 + c_2\lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ &= \lambda^4 + 0\lambda^3 + 13\lambda^2 + 0\lambda + 36 \end{aligned} \tag{4.97}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z^{(4)} + c_3 z^{(3)} + c_2 z^{(2)} + c_1 z' + c_0 z = z^{(4)} + 0z''' + 13z'' + 0z' + 36z = 0 \tag{4.98}$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = z'(0) = z''(0) = 0; \quad z'''(0) = 1. \tag{4.99}$$

Obviamente: $z(t) = a_1 cos(2t) + a_2 sen(2t) + a_3 sen(3t) + a_4 sen(3t)$. Aplicando las condiciones iniciales obtenemos:

$$a_1 = 0, \; a_2 = \frac{1}{10}, \; a_3 = 0 \text{ y } a_4 = -\frac{1}{15};$$

entonces: $z(t) = \frac{1}{10} sen(2t) - \frac{1}{15} sen(3t)$. Así,

$$Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \\ z''(t) \\ z'''(t) \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ c_2 & c_3 & 1 & 0 \\ c_3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} sen(2t) & - & \frac{1}{15} sen(3t) \\ \frac{1}{5} cos(2t) & - & \frac{1}{5} cos(3t) \\ -\frac{2}{5} sen(2t) & + & \frac{3}{5} sen(3t) \\ -\frac{4}{5} cos(2t) & + & \frac{9}{5} cos(3t) \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 13 & 0 & 1 \\ 13 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} \frac{9}{5}cos(2t) & - & \frac{4}{5}cos(3t) \\ \frac{9}{10}sen(2t) & - & \frac{4}{15}sen(3t) \\ \frac{1}{5}cos(2t) & - & \frac{1}{5}cos(3t) \\ \frac{1}{10}sen(2t) & - & \frac{1}{15}sen(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$$

Entonces: $e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j$

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \left(\frac{9}{5}cos(2t) - \frac{4}{5}cos(3t)\right) I + \left(\frac{9}{10}sen(2t) - \frac{4}{15}sen(3t)\right) A + \\ &+ \left(\frac{1}{5}cos(2t) - \frac{1}{5}cos(3t)\right) A^2 + \left(\frac{1}{10}sen(2t) - \frac{1}{15}sen(3t)\right) A^3 \end{aligned} \tag{4.100}$$

donde:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \end{bmatrix} \text{ y } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 68 & -26 & 0 & 0 \\ -26 & 29 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz $e^{tA} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} \end{bmatrix}$ donde los b_{ij} están dados por:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{5}cos(2t) + \frac{4}{5}cos(3t) \\ b_{12} &= \frac{2}{5}cos(2t) - \frac{2}{5}cos(3t) \\ b_{13} &= \frac{1}{10}sen(2t) + \frac{4}{15}sen(3t) \\ b_{14} &= \frac{1}{5}sen(2t) - \frac{2}{15}sen(3t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{21} &= \frac{2}{5}cos(2t) - \frac{2}{5}cos(3t) \\ b_{22} &= \frac{4}{5}cos(2t) + \frac{1}{5}cos(3t) \\ b_{23} &= \frac{1}{5}sen(2t) - \frac{2}{15}sen(3t) \\ b_{24} &= \frac{2}{5}sen(2t) + \frac{1}{15}sen(3t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b_{31} &= -\frac{2}{5}\, sen(2t) - \frac{12}{5}\, sen(3t) & b_{41} &= -\frac{4}{5} sen(2t) + \frac{6}{5} sen(3t)\\
b_{32} &= -\frac{4}{5}\, sen(2t) + \frac{6}{5}\, sen(3t) & b_{42} &= -\frac{8}{5} sen(2t) - \frac{3}{5} sen(3t)\\
b_{33} &= \frac{1}{5}\, cos(2t) + \frac{4}{5}\, cos(3t) & b_{43} &= \frac{2}{5} cos(2t) - \frac{2}{5} cos(3t)\\
b_{34} &= \frac{2}{5}\, cos(2t) - \frac{2}{5}\, cos(3t) & b_{44} &= \frac{4}{5} cos(2t) + \frac{1}{5} cos(3t)
\end{aligned}
$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.95) está dada por:

$$
x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = e^{tA}\, x_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} cos(2t) + \frac{6}{5} cos(3t) \\ -\frac{2}{5} cos(2t) - \frac{3}{5} cos(3t) \\ \frac{2}{5} sen(2t) - \frac{18}{5} sen(3t) \\ \frac{4}{5} sen(2t) + \frac{4}{5} sen(3t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{bmatrix}
$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.90) es:

$$
\begin{aligned}
y_1(t) &= -\frac{1}{5}\, cos(2t) + \frac{6}{5}\, cos(3t)\\
y_2(t) &= -\frac{2}{5}\, cos(2t) - \frac{3}{5}\, cos(3t) \qquad \square
\end{aligned}
\tag{4.101}
$$

2. Un resorte de longitud natural L tiene su extremo superior fijo a un soporte rigido. Del resorte se suspende un peso W de masa m. El peso estira el resorte hasta la longitud $L+s$, donde el sistema alcanza el reposo en una nueva posiciòn de equilibrio. Por la ley de Hooke, la tensión en el resorte es ks, donde k es la llamada constante del resorte. La fuerza de gravedad que tira del peso hacia abajo es $W = mg$. El equilibrio requiere que:

$$
ks = mg \tag{4.102}
$$

Supongamos ahora que el peso es estirado hacia abajo un alongitud adicional a más allá de la posición de equilibrio, y se suelta. Vamos a estudiar su movimiento. Denotemos por x, dirección positiva hacia abajo el desplazamiento del peso desde la posición de equilibrio en cualquier instante t después de iniciado el movimiento.

Entonces, las fuerzas que actúan sobre el peso son: $+mg$, debida a la gravedad, $-k(s+k)$ debida a la tensión del resorte. Por la segunda ley de Newton, la resultante de estas fuerzas es igual a:

$$m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Por tanto,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \;=\; mg - ks - kx \tag{4.103}$$

Según la ecuación (4.102), la ecuación (4.103) se convierte en:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} \;+\; kx \;=\; 0 \tag{4.104}$$

Además de la ecuación diferencial (4.104), el movimiento satisface las condiciones iniciales: En $t = 0:\quad x = a \quad y \quad \dfrac{dx}{dt} = 0$

Resolución. Haciendo un cambio de variables $x_1 = x$, $x_2 = x'$, este problema se convierte en el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = A\ x(t) \tag{4.105}$$

con condiciones iniciales:

$$x(0) = x_0 = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.106}$$

Polinomio característico de A:

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_0 \\ &= \lambda^2 + 0\lambda + \frac{k}{m} \end{aligned} \tag{4.107}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z^{(2)} + c_1 z^{(1)} + c_0 z = z'' + 0z' + \frac{k}{m}z = 0 \tag{4.108}$$

con condiciones iniciales:

$$z(0) = 0; \quad z'(0) = 1 \tag{4.109}$$

Obviamente: $z(t) = a_1 cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) + a_2 sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t)$. Aplicando las condiciones iniciales obtenemos: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{\dfrac{m}{k}}$; entonces,

$$z(t) = \sqrt{\frac{m}{k}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t)$$

Así, $Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ Luego:

$$Z(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{m}{k}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \\ cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = \begin{bmatrix} cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \\ \sqrt{\frac{m}{k}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \end{bmatrix}$$

Entonces: $e^{tA} = \sum_{j=0}^{1} q_j(t)\ A^j = q_0(t)\ I + q_1(t)\ A^1$, de aquí:

$$e^{tA} \;=\; \left(cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t)\right) I + \left(\sqrt{\frac{m}{k}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t)\right) A$$

donde: $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix}$. Operando convenientemente, obtenemos:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) & \sqrt{\frac{m}{k}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \\ -\sqrt{\frac{k}{m}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) & cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.105) está dada por:

$$x(t) \;=\; \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} \;=\; e^{tA}\, x_0 \;=\; \begin{bmatrix} a \cdot cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \\ -a \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}\ sen(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \end{bmatrix}$$

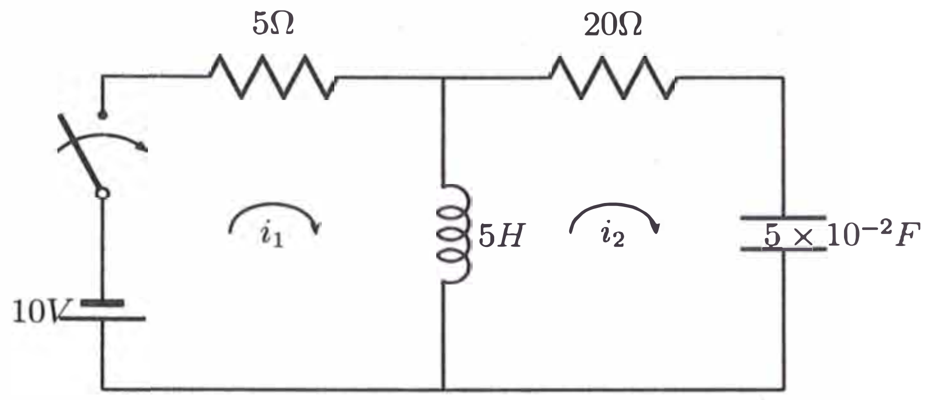
Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.104) es:

$$x \;=\; x_1(t) \;=\; a \cdot cos(\sqrt{\frac{k}{m}}\ t) \quad \square \tag{4.110}$$

La ecuación (4.110) define el movimiento del peso y representa un movimiento armónico simple de amplitud a y periodo $T = 2\sqrt{\frac{m}{k}}\ \pi$.

4.2.3. Circuitos eléctricos

1. Supongamos que todas las corrientes y las cargas del circuito de la figura



valen cero hasta el tiempo $t = 0$; y que en ese instante se cierra el interruptor. El objetivo de este problema es encontrar la corriente en cada ciclo para $t > 0$. Utilizaremos las leyes de voltaje y corriente de Kirchhoff (las mismas que se tomarán en cuenta una vez que se ha cerrado el interruptor). Observando el ciclo de la izquierda y en el de la derecha se obtiene:

$$\begin{array}{rcrcl} 5i_1 & + & 5(i_1' - i_2') & = & 10 \\ 5i_1' & - & 5i_2' & = & 20i_2 + \dfrac{q_2}{5 \times 10^{-2}} \end{array} \tag{4.111}$$

Si utilizamos el ciclo exterior (alrededor de todo el circuito) obtenemos una tercera ecuación:

$$5i_1 \;+\; 20i_2 \;+\; \frac{q_2}{5 \times 10^{-2}} \;=\; 10 \tag{4.112}$$

Realizando operaciones en las ecuaciones (4.111) y (4.112) obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} i_1' & - & i_2' & = & -i_1 & + & 2 \\ i_1' & + & 4i_2' & = & & - & 4i_2 \end{array} \right. \tag{4.113}$$

Determinamos ahora las condiciones iniciales. Sabemos que:

$$i_1(0-) = i_2(0-) = q_2(0-) = 0$$

Entonces $(i_1 - i_2)(0-) = 0$. Como la corriente $i_1 - i_2$ a través del inductor es continua, concluimos que también $(i_1 - i_2)(0+) = 0$. Por lo tanto,

$$i_1(0+) = i_2(0+)$$

Ahora, usamos esta información y el hecho de que la carga q_2 en el capacitor sea continua en la ecuación (4.112), y resolvemos para $i_1(0+)$ obteniendo:

$$\begin{array}{rcccccccc} 5i_1(0+) & + & 20i_2(0+) & + & 20q_2(0+) & = & 10 & & \\ 25i_1(0+) & + & & & 20q_2(0+) & = & 25\ i_1(0+) & = & 10 \end{array}$$

Entonces: $i_1(0+) = i_2(0+) = \frac{2}{5}$ amperios.

El problema con valor inicial para i_1 e i_2 es:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} i_1' & - & i_2' & = & -i_1 & & + & 2 \\ i_1' & + & 4i_2' & = & & & - & 4i_2 \\ & & i_1(0+) & = & i_2(0+) & & = & \dfrac{2}{5} \end{array}\right. \tag{4.114}$$

Escribimos el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.114) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{4.115}$$

Multiplicamos la ecuación (4.115), por la izquierda, por:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Obtenemos:

$$\begin{bmatrix} i_1' \\ i_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} \tag{4.116}$$

Estamos ante un Problema de Valores Iniciales (P.V.I.) de la forma:

$$\left\{\begin{array}{l} x'(t) = A\ x(t) + b(t) \\ \\ x(t_0) = x_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} \end{bmatrix} \end{array}\right. \tag{4.117}$$

El teorema 3.2.10 nos garantiza que el problema (4.117) tiene solución única en $I = \langle 0; \infty \rangle$ dada por:

$$\begin{array}{rcl} x : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \longmapsto & x(t) = e^{(t-t_0)A}\ x_0 + e^{tA} \displaystyle\int_{t_0}^{t} e^{-xA}\ b(x)\ dx \end{array} \tag{4.118}$$

Polinomio característico de A:

$$P_A(\lambda) \;=\; det(\lambda I - A) = \lambda^2 + c_1\lambda + c_0 = \lambda^2 + \frac{8}{5}\lambda + \frac{4}{5} \tag{4.119}$$

En este ejemplo usaremos el segundo algoritmo de E. J. Putzer. Construyamos la función escalar z que es la solución de la ecuación diferencial:

$$z'' + c_1 z' + c_0 z = z'' + \frac{8}{5}z' + \frac{4}{5}z = 0 \tag{4.120}$$

con condiciones iniciales: $z(0) = 0$; $z'(0) = 1$.
Obviamente: $z(t) = \left(a_1 cos\left(\frac{2}{5}t\right) + a_2 sen\left(\frac{2}{5}t\right)\right)e^{-\frac{4}{5}t}$. Aplicando las condiciones iniciales obtenemos: $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{5}{2}$.

Así, $z(t) = \left(\dfrac{5}{2}sen\left(\dfrac{2}{5}t\right)\right)e^{-\frac{4}{5}t}$; $Z(t) = \begin{bmatrix} z(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$, y $C = \begin{bmatrix} c_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Luego:

$$Z(t) = e^{-\frac{4}{5}t}\begin{bmatrix} \frac{5}{2}sen\left(\frac{2}{5}t\right) \\ cos\left(\frac{2}{5}t\right) - 2sen\left(\frac{2}{5}t\right) \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad C = \begin{bmatrix} \frac{8}{5} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

$$q(t) = C\ Z(t) = e^{-\frac{4}{5}t}\begin{bmatrix} 2sen\left(\frac{2}{5}t\right) + cos\left(\frac{2}{5}t\right) \\ \frac{5}{2}sen\left(\frac{2}{5}t\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0(t) \\ q_1(t) \end{bmatrix}$$

Ahora calculamos: $e^{tA} = \displaystyle\sum_{j=0}^{1} q_j(t)\ A^j$

$$e^{tA} \;=\; \left(2sen\left(\frac{2}{5}t\right) + cos\left(\frac{2}{5}t\right)\right)e^{-\frac{4}{5}t}\,I + \left(\frac{5}{2}sen\left(\frac{2}{5}t\right)\right)e^{-\frac{4}{5}t}\,A$$

Donde:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así,

$$e^{tA}=e^{-\frac{4}{5}t}\begin{bmatrix} c\,os(\frac{2}{5}t) & -2sen\,(\frac{2}{5}t)\\ \frac{1}{2}sen\,(\frac{2}{5}t) & c\,os(\frac{2}{5}t)\end{bmatrix},\quad e^{-tA}=e^{\frac{4}{5}t}\begin{bmatrix} c\,os(\frac{2}{5}t) & 2\,\mathrm{sen}\,(\frac{2}{5}t)\\ -\frac{1}{2}sen\,(\frac{2}{5}t) & c\,os(\frac{2}{5}t)\end{bmatrix}$$

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.117) está dada por:

$$x(t) \;=\; e^{(t-t_0)A}\,x_0+e^{tA}\int_{t_0}^{t} e^{-xA}\,b(x)\,dx,\ \text{donde } t_0=0+ \tag{4.121}$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} i_1\\ i_2\end{bmatrix}=e^{-\frac{4}{5}t}\begin{bmatrix} c\,os\left(\frac{2}{5}t\right) & -2sen\left(\frac{2}{5}t\right)\\ \frac{1}{2}sen\left(\frac{2}{5}t\right) & c\,os\left(\frac{2}{5}t\right)\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}\frac{2}{5}\\ \frac{2}{5}\end{bmatrix}+\int_{0+}^{t} e^{-xA}b(x)\,dx\right)$$

donde $\int_{0+}^{t} e^{-xA}\,b(x)\,dx$ está dada por:

$$\int_{0+}^{t} e^{-xA}\,b(x)\,dx \;=\; \int_{0+}^{t} e^{\frac{4}{5}x}\begin{bmatrix} c\,os\left(\frac{2}{5}x\right) & 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2}{5}x\right)\\ -\frac{1}{2}sen\left(\frac{2}{5}x\right) & c\,os\left(\frac{2}{5}x\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{8}{5}\\ -\frac{2}{5}\end{bmatrix}dx=$$

$$\int_{0+}^{t} e^{-xA}\,b(x)\,dx \;=\; \begin{bmatrix}\int_{0+}^{t}\left(-\frac{4}{5}sen\left(\frac{2}{5}x\right)+\frac{8}{5}cos\left(\frac{2}{5}x\right)\right)e^{\frac{4}{5}x}\,dx\\ \int_{0+}^{t}\left(-\frac{4}{5}sen\left(\frac{2}{5}x\right)-\frac{2}{5}cos\left(\frac{2}{5}x\right)\right)e^{\frac{4}{5}x}\,dx\end{bmatrix}=$$

$$\int_{0+}^{t} e^{-xA}\,b(x)\,dx \;=\; \begin{bmatrix}\left(2cos\left(\frac{2}{5}t\right)\right)e^{\frac{4}{5}t}-2\\ -\left(sen\left(\frac{2}{5}t\right)\right)e^{\frac{4}{5}t}\end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales (4.117) es:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= 2-\frac{4}{5}e^{-\frac{4}{5}t}\left(2\,c\,os\left(\frac{2}{5}t\right)+\ sen\left(\frac{2}{5}t\right)\right)\\ i_2(t) &= \frac{2}{5}e^{-\frac{4}{5}t}\left(c\,os\left(\frac{2}{5}t\right)-2sen\left(\frac{2}{5}t\right)\right) \quad \square\end{aligned} \tag{4.122}$$

Capítulo 5

Conclusiones

1. Los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales simultaneas surgen de manera natural en los problemas, tanto de interés práctico como teórico, que incluyen varias variables dependientes; cada una de las cuales es una función de una sola variable independiente. Por ejemplo: los modelos matemáticos de circuitos de series y de sistemas mecánicos que contienen varios resortes en serie, sistemas químicos, etc.

2. La teoría de existencia para ecuaciones diferenciales lineales de orden superior puede reducirse al caso de primer orden, introduciendo sistemas lineales de ecuaciones diferenciales de primer orden; de manera que la solución del sistema nos permita encontrar la solución de la ecuación diferencial de orden superior. La discusión de los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales puede simplificarse considerablemente mediante la notación matricial y vectorial.

3. En la solución de un sistema lineal de ecuaciones diferenciales homogéneo con coeficientes constantes, surge el problema de calcular efectivamente la exponencial e^{tA}. Si tratamos de calcular e^{tA} usando directamente la definición de serie, tendríamos que calcular todas las potencias de A^k para $k = 0, 1, 2, \cdots$ y calcular luego la suma de cada serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k c_{ij}^k}{k!}$; donde c_{ij}^k es el elemento ij de A^k. En general, este es muy laborioso, con excepción de algunos pocos casos particulares (A nilpotente o diagonal)

4. Naturalmente, no toda matriz puede diagonalizarse. Se conocen muchos métodos para calcular e^{tA} cuando A no puede diagonalizarse. La mayoría de ellos son mas bien complicados y exigen transformaciones matriciales previas, cuya naturaleza depende

de las multiplicidades de los autovalores de A. En este trabajo se ha desarrollado un método muy útil y seguro para calcular e^{tA} que se puede utilizar tanto si A puede diagonalizarse o no. El método que se ha empleado en este trabajo para la resolución de un ***sistema lineal de ecuaciones diferenciales de primer orden*** con ***coeficientes constantes***, de la forma:

$$\begin{cases} x'(t) &= A(t)\ x(t) \\ \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{5.1}$$

donde $A(t)$ es una matriz de elementos constantes de orden $n \times n$ y x_0 es un vector columna de $n \times 1$. Es el llamado ***método de E. J. Putzer***; cuyo desarrollo consiste en dos importantes algoritmos para determinar e^{tA}:

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} r_{j+1}(t)\ P_j(A) \quad \text{y} \quad e^{tA} = \sum_{j=0}^{n-1} q_j(t)\ A^j \tag{5.2}$$

Esto es particularmente útil, tanto en la docencia como en trabajos aplicados, cuando la matriz A no es necesariamente diagonalizada, puesto que no hace falta discutir o encontrar la forma canónica de Jordan (F.C.J)

5. La gran ventaja del método de E. J. Putzer es que es válido para todas las matrices A de orden $n \times n$ con elementos constantes y no exige transformaciones previas de ningun tipo. Tal método fue desarrollado por E. J. Putzer en un artículo del American Mathematical Monthly, Vol. 73 (1966) , pp. 2 – 7. Se basa en un famoso teorema atribuido a Arthur Cayley (1821–1895) y William Rowan Hamilton (1805–1865) que establece que toda matriz cuadrada satisface su ecuación característica. Este método presenta una desventaja cuando A es una matriz de funciones (depende de una variable).

6. Se ha desarrollado gran número de métodos, pero como bien han mostrado Cleve Moler (creador de Matlab) y Charles Van Loan, en un artículo clásico, “19 maneras de calcular la exponencial de una matriz”[1], no existe el “mejor”método en cuanto

[1]publicado en 1978 (ver [9], 1978), y referenciado más de 375 veces en el Scientific Citation Index, que ha sido reimpreso, con adiciones, recientemente (ver [9], (2003)

a eficiencia computacional y estabilidad numérica. Dependiendo del problema unos métodos son mejores que otros, e incluso, en algunos casos, algunos métodos pueden conducir a resultados completamente insatisfactorios. Matlab incluye la función expm, que selecciona entre varios métodos en función de las características de la matriz argumento, lo que garantiza que "siempre"se porta bien. Por supuesto, con un poco de habilidad, es posible describir ejemplos en los que no se porta bien; aunque se pueden calificar de "forzados". Aunque existen múltiples páginas en Internet sobre el cálculo de exponenciales matriciales, no existe ninguna que recopile los 19 algoritmos mostrados en la referencia [9], y que permita realizar comparaciones con una matriz dada por el usuario. Una implementación en Matlab de todos los métodos podría ser de gran ayuda a la hora de elegir el mejor método para aplicaciones "no estándares".

Apéndice

5.1. Campos vectoriales y ecuaciones diferenciales

Definición 5.1.1 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto. Un **Campo Vectorial de Clase** C^k en U $(k = 0,\ 1,\ \cdots\ ,\ \infty)$ es una función:*

$$\begin{aligned} X \ :\ & U \to \mathbb{R}^n \\ & x \mapsto X(x) = (X_1(x),\ \cdots\ ,\ X_n(x)) \end{aligned} \tag{5.3}$$

tal que:

1. *$X_j : U \to \mathbb{R}$ son funciones de clase C^k, para $1 \leq j \leq n$.*

2. *Si $x \in U$ entonces $X(x) \in \mathbb{R}^n$ es un vector cuyo punto de aplicación es x.*

Notación: $\mathcal{X}^k(U) = \{X : U \to \mathbb{R}^n \ /\ X$ es un campo vectorial de clase C^k en $U\}$.

Ejemplos 5.1.2

1. Dada la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Definimos:

$$\begin{aligned} X_A : \mathbb{R}^n \ & \rightarrow \ \mathbb{R}^n \\ x \ & \mapsto \ X_A(x) = A\,x = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Es decir: $X_A(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\ x_j,\ \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\ x_j,\ \cdots\ ,\ \sum_{j=1}^{n} a_{nj} x_j \right)$

Como una función lineal es de clase C^∞, entonces, claramente $X_A \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$
X_A es llamado ***Campo Vectorial Lineal***.

2. Dados $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $b = (b_i) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$. Definimos:

$$\begin{aligned} X_A \; : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto X_A(x) = A\,x + b \end{aligned}$$

$$X_A(x) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}\; x_j + b_1, \;\cdots\;, \;\sum_{j=1}^{n} a_{nj}\; x_j + b_n \right)$$

Claramente $X_A \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$, X_A es llamado ***Campo Vectorial Afín***.

3. Sea $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. Definimos:

$$\begin{aligned} X \;: \quad U \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x\;;\;y) &\longmapsto X(x\;;\;y) = \left(\frac{y}{x}\;;\;\frac{x+y}{x}\right), \quad X \in \mathcal{X}^\infty(U) \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} X \;: \quad \mathbb{R}^2 \quad &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x\,;\,y) &\longmapsto X(x\,;\,y) = (1\,;\,0) \end{aligned}$$

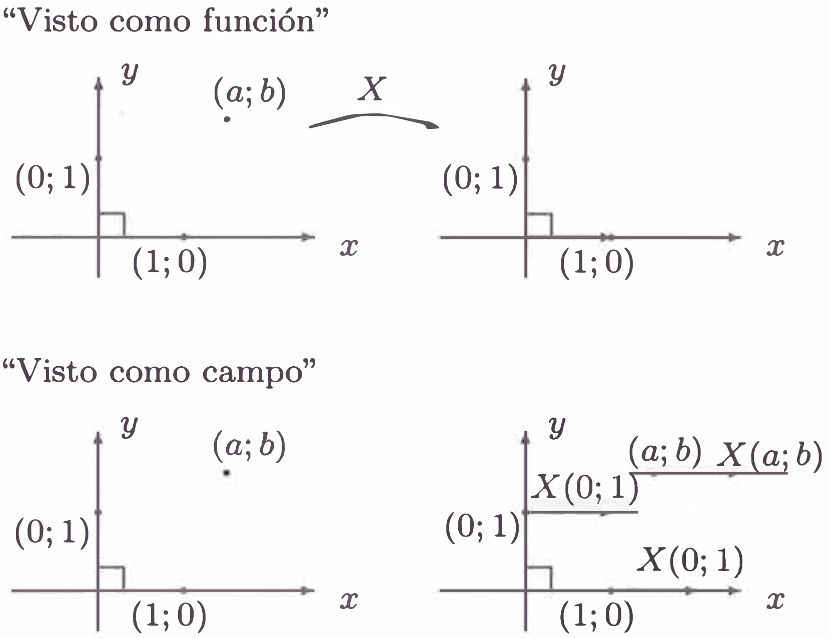


Figura 5.1: Formas de ver al campo vectorial X.

Definición 5.1.3 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto y $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $(k = 0,\ 1,\ \cdots\ ,\ \infty)$*

i) La ***Ecuación Diferencial Ordinaria*** *(E.D.O.) asociada al campo vectorial X es dada por:*

$$x' = X(x) \tag{5.4}$$

Muchas ciencias que utilizan las matemáticas para expresar sus modelos usan la siguiente forma:

Si $X = (X_1,\ X_2,\ \cdots\ ,\ X_n) \in \mathcal{X}^k(U)$, $x = (x_1,\ \cdots\ ,\ x_n)$ entonces (5.4) es equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1' & = & X_1(x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n) \\ x_2' & = & X_2(x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ x_n' & = & X_n(x_1,\ x_2,\ \cdots\ ,\ x_n) \end{array}\right.$$

ii) ***Una solución*** *de la E.D.O. (5.4) es una función diferenciable $\varphi : I \to U$ en el intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ tal que:*

$$\varphi'(t) = X(\varphi(t)), \qquad \forall\ t \in I. \tag{5.5}$$

o equivalentemente: $\varphi = (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\ ,\ \varphi_n)$ es solución de (5.4) si y sólo si $\varphi : I \to U$ es diferenciable en I, y:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \varphi_1'(t) & = & X_1(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots\ ,\ \varphi_n(t)) \\ \varphi_2'(t) & = & X_2(\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \cdots\ ,\ \varphi_n(t)) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_n'(t) & = & X_n(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\ ,\ \cdots\ ,\ \varphi_n(t)) \qquad \forall t \in I. \end{array}\right.$$

En este contexto φ también es llamada ***Trayectoria***, ***Órbita*** o ***Curva Integral*** de X. Geométricamente $\varphi : I \to U$ es una curva integral de X si y sólo si su vector velocidad $\varphi'(t)$ en el instante t, coincide con el valor del campo X en el punto $\varphi(t)$.

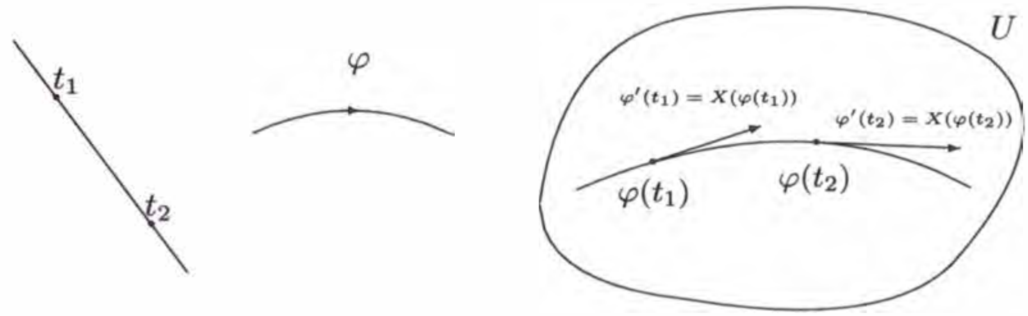


Figura 5.2: Trayectoria, u Órbita, o Curva Integral.

5.1.1. Problema de Cauchy

Definición 5.1.4 *Sea $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, $X \in \mathcal{X}^k(U)$, $(k = 0,\ 1, \cdots, \infty)$, $x_0 \in U$, $t_0 \in \mathbb{R}$.*

i) ***El Problema de Cauchy*** *o* ***Problema de Valor Inicial*** *(P.V.I.) asociado a X es dada por:*

$$\begin{cases} x' = X(x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{5.6}$$

ii) Una solución de (5.6) es una ***función diferenciable*** *$\varphi : I \to U$ donde $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que:*

a) $t_0 \in I$.

b) $\varphi'(t) = X(\varphi(t))$; $\forall\ t \in I$.

c) $\varphi(t_0) = x_0$.

Sean: la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, un campo vectorial lineal: $X_A = X \in \mathcal{X}^\infty(\mathbb{R}^n)$ definido por: $X(x) = A\,X$; $x_0 = (x_1^0, \cdots, x_n^0) \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$ el ***Problema de Cuchy*** asociado a X es dada por:

$$\begin{cases} x' &= A\,x \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases} \tag{5.7}$$

o equivalentemente:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & , \quad x_1(t_0) = x_1^0 \\ x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & , \quad x_2(t_0) = x_2^0 \\ \qquad \vdots & \qquad \vdots \\ x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & , \quad x_n(t_0) = x_n^0 \end{cases}$$

Ejemplos 5.1.5

1. Resolver el siguiente sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 & , \quad x_1(0) = 1 \\ x_2' = -3x_2 & , \quad x_2(0) = -1 \end{cases}$$

Resolución.

La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado es:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (e^{2t} \; ; \; -e^{-3t}) \end{aligned}$$

2. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 & , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 & , \quad x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Resolución. La solución del sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado es:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (x_1^0 e^{\lambda_1 t} \; ; \; x_2^0 e^{\lambda_2 t}) \end{aligned}$$

3. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 & , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' = \lambda_2 x_2 & , \quad x_2(0) = x_2^0 \\ \quad \vdots & \qquad \vdots \\ x_n' = \lambda_n x_n & , \quad x_n(0) = x_n^0 \end{cases}$$

Resolución. La solución del P.V.I. dado es:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi(t) = (x_1^0 e^{\lambda_1 t}, \; x_2^0 e^{\lambda_2 t}, \; \cdots \; , \; x_n^0 e^{\lambda_n t}). \end{aligned}$$

4. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1' &= 2x_1 + 3x_2 \ , & x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' &= \quad\ \ - 2x_2 \ , & x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Resolución. La solución de la ecuación $x_2' = -2x_2$, $x_2(0) = x_2^0$ es $x_2(t) = x_2^0 e^{-2t}$.

Ahora reemplazamos en: $x_1' = 2x_1 + 3x_2$, $x_1(0) = x_1^0$, obtenemos:

$$x_1' = 2x_1 + 3x_2^0 e^{-2t}, \quad x_1(0) = x_1^0$$

Cuya solución es: $\quad x_1(t) = \left(x_1^0 + \frac{3}{4}x_2^0 \right) e^{2t} - \frac{3}{4}x_2^0 e^{-2t}$

Por consiguiente la solución del P.V.I. dado es:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi(t) = \left((x_1^0 + \frac{3}{4}x_2^0)e^{2t} - \frac{3}{4}x_2^0 e^{-2t} \ ; \ x_2^0 e^{-2t} \right) \end{aligned}$$

5. Resolver el sistema lineal de ecuaciones diferenciales (o P.V.I.):

$$\begin{cases} x_1' &= 5x_1 + 3x_2 \ , & x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' &= -6x_1 - 4x_2 \ , & x_2(0) = x_2^0 \end{cases}$$

Observaciones 5.1.6

1. No es frecuente que las ecuaciones diferenciales vengan dadas en una forma "desacoplada". En el ejemplo 5 no podemos utilizar los métodos de los ejemplos anteriores porque las variables x_1 y x_2 están "mezcladas" o "acopladas"(existe una relación especificada entre las dos funciones incognitas x_1 y x_2). Un ***cambio de coordenadas lineal*** transforma el problema en una forma desacoplada o diagonal.

   Más adelante, en el ejemplo 5.2.36 se explicará con mucho detalle la solución de esta ecuación.

2. Los sistemas de los ejemplos 1, 2, 3 y 4 son ***sistemas no acoplados***, es decir sus variables no están mezcladas.

3. Las matrices asociadas a los P.V.I.'s de los ejemplos 1,2, y 3 son ***matrices diagonales***.

5.2. Forma canónica de Jordan

5.2.1. Fundamento teórico sobre las matrices de Jordan

Introducción.- La diagonalización de matrices proporciona un recurso muy eficiente para expresar a una matriz de una forma relativamente sencilla, mediante una transformación de semejanza; sin embargo, constantemente en la práctica surgen matrices no diagonalizables; en donde se hace indispensable utilizar otros medios para determinar una semejanza que permita reducirla. Es en este sentido, donde la teoría de matrices de Jordan proporciona el fundamento teórico necesario para encontrar una nueva matriz no diagonal, pero especialmente sencilla, semejante a la matriz original. En esta sección se estudiarán las principales definiciones y teoremas de esta teoría, además de algunos resultados propios, que servirán como soporte teórico para introducir el método generalizado que deseo exponer.

1. **Multiplicidad algebraica y geométrica.**

   Sean A una matriz de orden $n \times n$ con términos complejos y v un vector de $\mathcal{C}^n$:

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Definición 5.2.1 *λ es un valor propio de A si y sólo si $det(\lambda I - A) = 0$.*

Definición 5.2.2 *v es vector propio de A con valor propio λ si $v \neq \overline{0}$ y $A\ v = \lambda v$.*

a) ***Polinomio característico de*** A: El determinante de la matriz $\lambda I - A$ es un polinomio de grado n en λ, llamado polinomio característico de A.

   Es decir: $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A)$

   Ecuación característica de A: $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$

   Sus raíces son los valores propios de A.

b) En el campo complejo

$$det(\lambda I - A) = -(\lambda - \lambda_1)^{m_1}(\lambda - \lambda_2)^{m_2}\ \cdots\ (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$$

   donde $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots\ ,\ \lambda_k$ son las k raíces diferentes del polinomio característico, y $m_1,\ m_2,\ \cdots\ ,\ m_k$ son sus multiplicidades respectivas. Se tiene

$$m_1 + m_2 + \ \cdots\ + m_k = n$$

c) ***Subespacio propio S_i de valor propio λ_i*** : S_i es un subespacio de dimensión r_i con $1 < r_i \le m_i$, y está formado por el vector nulo y todos los vectores propios de valor propio λ_i. S_i se obtiene resolviendo el sistema lineal homogéneo

$$(A - \lambda_i I) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

que es siempre compatible e indeterminado con r_i grados de libertad.

d) Eligiendo r_i vectores linealmente independientes que verifiquen el sistema anterior, se tendrá una base del subespacio propio S_i.

Definición 5.2.3 *Al número m_i, multiplicidad de la raíz λ_i en el polinomio característico de A, se le llama* ***multiplicidad algebraica*** *de λ_i. Al número r_i, dimensión del subespacio propio S_i de valor propio λ_i, igual a la cantidad de grados de libertad del sistema compatible indeterminado $(A - \lambda_i I)\ v = \overline{0}$, se le llama* ***multiplicidad geométrica*** *de λ_i.*

Teorema 5.2.4 Para cada valor propio λ_i se cumple:

$$1 \le r_i \le m_i$$

2. **Matrices diagonalizables.**

Definición 5.2.5 *Una matriz cuadrada A de orden $n \times n$, se dice diagonalizable si existe una base de $\mathcal{C}^n$ (es decir n vectores linealmente independientes) formada exclusivamente con vectores propios de A.*

Es inmediato que una matriz A de orden $n \times n$ es diagonalizable, si y sólo si la unión de bases de sus subespacios propios es una base de $\mathcal{C}^n$; es decir, si y sólo si

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_k = n$$

Observaciones 5.2.6

a) El nombre diagonalizable proviene del hecho que estas matrices son similares a una forma canónica de Jordan (cuando ésta es una matriz diagonal), como se verá más adelante.

b) Si A es una matriz diagonal, entonces la base está formada por vectores propios de A; y resulta, por definición, que A es diagonalizable. En el ejemplo 5.2.10 veremos una matriz diagonalizable que no es diagonal.

Teorema 5.2.7 Sea A una matriz de orden $n \times n$. A es diagonalizable si y sólo si $r_i = m_i$, para todo valor propio λ_i $(1 \leq i \leq n)$ de A.

Demostración. A es diagonalizable si y sólo si $r_1+r_2+\cdots+r_k = n$. Como siempre $r_i \leq m_i$ y $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, lo anterior se cumple si y sólo si $r_i = m_i$.

Corolario 5.2.8 Si $m_i = 1$ para todo valor propio λ_i, $1 \leq i \leq n$ (es decir si hay exactamente n raíces diferentes del polinomio característico), entonces A es diagonalizable.

Demostración. Si $m_i = 1$, como $1 \leq r_i \leq m_i$, se tiene $r_i = 1$; y entonces, $r_i = m_i$ para todo $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto por el teorema 5.2.7 A es diagonalizable.

El recíproco del corolario 5.2.8 no siempre se cumple (vea el ejemplo 5.2.9)

Ejemplo 5.2.9 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ es diagonalizable porque es diagonal. Tiene un solo valor propio $\lambda_1 = 4$ con $m_1 = 2$ y $r_1 = 2$.

Ejemplo 5.2.10 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ecuación característica:

$$det \begin{vmatrix} \lambda - 4 & 2 \\ -1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \ \lambda_2 = 2$$

A es de orden 2×2 y tiene dos valores propios diferentes; entonces, por el corolario 5.2.8 es diagonalizable. En este caso $m_1 = 1$, $m_2 = 1$ (multiplicidades algebraicas). Entonces, $r_1 = 1$, $r_2 = 1$ (multiplicidades geométricas).

Hallemos una base de $\mathcal{C}^2$ formada por vectores propios de A.

Subespacio propio S_1 ***para*** $\lambda_1 = 3$:

$$(A - 3I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & 2\,x_2 \\ x_2 & & libre \end{cases}$$

Hay una variable libre, entonces $r_1 = 1$. Eligiendo por ejemplo $x_2 = 1$, se tiene una base de S_1, formada por el vector:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

***Subespacio propio* S_2 *para* $\lambda_2 = 2$:**

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcrcl} 2x_1 & - & 2x_2 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & x_2 \\ x_2 & & \textit{libre} \end{array} \right.$$

Hay una variable libre, entonces $r_2 = 1$. Eligiendo por ejemplo $x_2 = 1$, se tiene una base de S_2 formada por el vector:

$$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

v_1 y v_2 son linealmente independientes, y forman una base de C^2 integrada con vectores propios de A.

3. **Bloques y suprabloques de Jordan**.

Definición 5.2.11 *Un **bloque de Jordan** de orden $k \times k$ y valor propio λ es la matriz cuadrada de orden $k \times k$ que se denota por $J_k(\lambda)$ y está formada del modo siguiente:*

*a) El número λ en la **diagonal principal**.*

*b) El número 1 en la **supradiagonal principal**.*

c) El número 0 en los restantes términos.

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix}.$$

***Nota*:** Más adelante utilizaremos esta nomenclatura.

Ejemplos 5.2.12

a) El bloque de Jordan de orden 3×3 y valor propio 5 es $J_3(5) = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b) El bloque de Jordan de orden 2×2 y valor propio -4 es $J_2(-4) = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$.

c) El bloque de Jordan de orden 1 y valor propio 8 es $J_1(8) = \begin{bmatrix} 8 \end{bmatrix}$.

Observación 5.2.13 λ es el único valor propio del bloque de Jordan de orden $k \times k$, con multiplicidad algebraica k y multiplicidad geométrica 1.

Definición 5.2.14 *Un* ***suprabloque de Jordan*** *de orden $m \times m$ y valor propio λ es una matriz cuadrada de orden $m \times m$ formada por:*

a) Uno o más bloques de Jordan de diversos o iguales tamaños, todos con el mismo valor propio λ ubicados diagonalmente (es decir, tales que la diagonal principal de cada bloque es parte de la diagonal principal del ***suprabloque****).*

b) Ceros en los restantes términos del ***suprabloque****.*

Ejemplo 5.2.15 Un suprabloque de Jordan de orden 6×6, de valor propio 7, formada por tres bloques de Jordan de orden 2×2, 3×3 y 1×1 respectivamente es:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{7} \end{bmatrix}$$

Observación 5.2.16 λ es el único valor propio del suprabloque de Jordan de orden $m \times m$, con multiplicidad algebraica igual a m y multiplicidad geométrica igual a r, que es la cantidad de bloques de Jordan que forman el suprabloque.

Definición 5.2.17 *Una matriz cuadrada de orden $n \times n$ es una forma canónica de Jordan si está formada por*

a) Uno o más suprabloques de Jordan, ubicados diagonalmente.

b) Ceros en los restantes términos de la matriz.

Ejemplo 5.2.18 Una forma canónica de Jordan con un suprabloque de orden 2×2 formado por dos bloques de valor propio 7, un suprabloque de orden 3×3 formado por dos bloques de valor propio 0 y un suprabloque de orden 1 de valor propio 3 es:

$$\begin{bmatrix} \boxed{7} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{7} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Véase que en este ejemplo la matriz tiene valores propios $\lambda_1 = 7$ con multiplicidad algebraica 2 y geométrica 2, $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad algebraica 3 y geométrica 2, y $\lambda_3 = 3$ con multiplicidad algebraica 1 y geométrica 1.

Teorema 5.2.19 Una forma canónica de Jordan tiene como valores propios a los números de la diagonal, con multiplicidad algebraica igual a la cantidad de veces en que está repetido en la diagonal (o sea igual al tamaño del suprabloque respectivo), y multiplicidad geométrica igual a la cantidad de bloques que forman el respectivo suprabloque.

Observación 5.2.20 En particular la forma de Jordan es diagonal (es decir todos sus términos fuera de la diagonal principal son nulos) si y sólo si los bloques de Jordan todos son de orden 1, y esto ocurre si y sólo si la cantidad de bloques que forman cada suprabloque es igual al tamaño del suprabloque, o sea, la multiplicidad geométrica es igual a la algebraica para todo valor propio.

Usando el teorema 5.2.7 se concluye que una forma canónica de Jordan es diagonalizable si y sólo si es diagonal.

Teorema 5.2.21 [Forma Canónica de Jordan] Sea la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$; entonces, $\exists P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular, tal que:

$$P^{-1}AP = J_A = diag[J_1, J_2, \cdots, J_m],$$

donde cada J_i es de la forma:

$$J_i = \lambda_i \; I + N_{n_i} \quad \text{ó} \quad J_j = J_{2n_j}(a_j \; ; \; b_j),$$

donde λ_i es un autovalor real y $a_j + ib_j$ es un autovalor complejo de A.
La suma de los órdenes de los bloques de la forma $\lambda_i \; I + N_{n_i}$ es igual a la multiplicidad de λ_i como raíz del polinomio característico de A. La suma de los órdenes de los bloques de la forma $J_{2n_j}(a_j \; ; \; b_j)$ es igual al doble de la multiplicidad de $a_j + ib_j$ como raíz del polinomio característico de A.

Definición 5.2.22 *La matriz $J_A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ del teorema anterior es llamada **Forma Canónica de Jordan (Real)** de A, y es única, salvo el orden de los bloques y el signo de la parte imaginaria b_j de las raíces complejas del polinomio característico de A. La matriz P se llama matriz de cambio de base de Jordan.*

Teorema 5.2.23 Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$. Sean $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ sus valores propios diferentes, con multiplicidades algebraicas $m_1, \cdots, m_k$ y multiplicidades geométricas $r_1, \cdots, r_k$ respectivamente.
Entonces, la forma canónica de Jordan de A tiene k suprabloques, cada uno de valor propio λ_i, y orden $m_i \times m_i$ y formado por r_i bloques.

Ejemplo 5.2.24 Sea la matriz cuadrada A dada por:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Hallaremos la forma canónica de Jordan de A.

Ecuación característica:

$$det(\lambda I - A) = (\lambda - 4) \; (\lambda + 1)^3 = 0$$

Valores propios::

a) $\lambda_1 = 4$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$

b) $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 3$

Entonces J_A va a estar formada por dos suprabloques uno de valor propio 4 y de orden 1×1, y otro de valor propio -1 y de orden 3×3.
Para determinar completamente la matriz J_A necesitamos saber cuántos bloques forman el suprabloque de orden 3×3, osea la multiplicidad geométrica r_2 del valor propio -1.
Subespacio propio S_2:

$$(A+I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & 2x_4 \\ x_3 & = & 0 \\ x_2,\ x_4 & \text{libres} & \end{array} \right. \Longrightarrow r_2 = 2$$

Luego, el suprabloque de orden 3×3 de valor propio -1, está formado por dos bloques. Entonces, estos dos bloques son de orden 1×1 y 2×2 respectivamente. Así,

$$J_A = \begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a menos que se permuten sus bloques.

En este ejemplo se puede comprobar que $PJ_AP^{-1} = A$ donde:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

P es la matriz de cambio de base de Jordan para la matriz A.

Ejemplo 5.2.25 Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$$

Hallaremos la forma canónica de Jordan de A, luego calcularemos e^A.

Ecuación característica de A:

$$P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0,$$

$$P_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -3 \\ 6 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = (\lambda - 5)\ (\lambda + 4) + 18 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)\ (\lambda + 1).$$

Valores propios::

a) $\lambda_1 = 2$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$, $r_1 = 1$.

b) $\lambda_2 = -1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$, $r_2 = 1$

El corolario 5.2.8 nos garantiza que A es diagonalizable. Entonces J_A va a estar formada por dos suprabloques uno de valor propio 2 y de orden 1×1, y otro de valor propio -1 y de orden 1×1.
Para determinar completamente la matriz J_A necesitamos calcular los vectores propios de A
Subespacio propio S_1, $\lambda_1 = 2$:

$$(A - 2I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -x_1 \\ x_1 \text{ libre} \end{cases}$$

Luego el subespacio propio S_1, correspondiente a λ_1 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \rangle$.
Subespacio propio S_2, $\lambda_2 = -1$:

$$(A + I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = -2\,x_1 \\ x_1 \text{ libre} \end{cases}$$

Luego el subespacio propio S_2, correspondiente a λ_1 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \rangle$.

Luego:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = diag[2\ ,\ -1]$$

Luego:

$$e^{J_A} = diag[e^2\ ,\ e^{-1}]$$

Pero:

$$e^{J_A} = e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^AP \quad \Longrightarrow \quad e^A = Pe^{J_A}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2\,e^2 - e^{-1} & e^2 - e^{-1} \\ -2\,e^2 + 2\,e^{-1} & -e^2 + 2\,e^{-1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.2.26 Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Calcularemos e^A.

Ecuación característica de A: $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - i)\,(\lambda + i) = 0$.
Valores propios::

a) $\lambda_1 = i$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 1$, $r_1 = 1$.

b) $\lambda_2 = -i$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$, $r_2 = 1$

Subespacio propio S_1, $\lambda_1 = i$:

$$(A - iI)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} x_2 & = & -ix_1 \\ x_1 & \text{libre} & \end{array} \right.$$

Luego el subespacio propio S_1, correspondiente a λ_1 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \rangle$.
Subespacio propio S_2, $\lambda_2 = -i$:

$$(A + iI)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcr} x_2 & = & ix_1 \\ x_1 & \text{libre} & \end{array} \right.$$

Luego el subespacio propio S_2, correspondiente a λ_2 es $\langle \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \rangle$.

Para determinar la matriz e^A observamos que:

$$A = I(0\ ;\ 1) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Recordemos que:

$$exp\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = e^{a}\begin{bmatrix} cos(b) & -sen(b) \\ sen(b) & cos(b) \end{bmatrix}.$$

Entonces :

$$e^{A} = e^{0}\begin{bmatrix} cos(1) & -sen(1) \\ sen(1) & cos(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos(1) & -sen(1) \\ sen(1) & cos(1) \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.2.27 Dada la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

Hallaremos la forma canónica de Jordan J_A y e^A.

Ecuación característica: $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = (\lambda + 1)^2\ (\lambda - 1) = 0$

Valores propios::

a) $\lambda_1 = -1$, con multiplicidad algebraica $m_1 = 2$

b) $\lambda_2 = 1$ con multiplicidad algebraica $m_2 = 1$

Para determinar completamente la matriz J_A necesitamos saber cuántos bloques forman el suprabloque de orden 2×2, osea la multiplicidad geométrica r_1 del valor propio -1.

Subespacio propio S_1, $\lambda_1 = -1$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad (A+I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow x_3 = 0$$

$$Nu((A+I)^2) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_3 = 0\} = \langle (1,0,0)\ ;\ (0,1,0) \rangle$$

Luego, J_A está formado por dos suprabloques: uno de orden 2×2 (constituido por un bloque de valor propio $\lambda_1 = -1$) y otro de orden 1×1 de valor propio $\lambda_2 = 1$.

Subespacio propio S_2***,*** $\lambda_2 = 1$:

$$(A-I)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} x_1 = 0, & x_2 = 2\ x_3 \\ x_3 & \text{libre} \end{array} \right.$$

$$Nu(A-I) = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x_1 = 0,\ x_2 = 2\ x_3\} = \langle (0,2,1) \rangle$$

Vectores propios:

Para $\lambda_1 = -1$, tenemos: $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para $\lambda_2 = 1$, tenemos: $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Entonces la matriz P es:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Luego:

$$J_A = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{1} \end{bmatrix} = diag[-1,-1,1] + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$e^{J_A} = \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix} \Longrightarrow e^A = PJ_AP^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-1} & e^{-1} & -2e^{-1} \\ 0 & e^{-1} & -2e^{-1}+2e \\ 0 & 0 & e \end{bmatrix}$$

Proposición 5.2.28

a) Si la matriz dada A ya es una forma canónica de Jordan, es innecesario hacer cálculos para determinar J_A y P tales que $A = PJ_AP^{-1}$. En efecto, basta tomar $J_A = A$ y $P = I$ (I indica la matriz identidad).

b) La forma canónica de Jordan es diagonal si y sólo si las multiplicidades geométricas son iguales a las algebraicas para todo valor propio de la matriz A.

c) Si A es diagonalizable, entonces, su forma canónica de Jordan es la matriz que tiene en la diagonal principal los valores propios de A, repetidos tantas veces como sus multiplicidades algebraicas, y ceros en todos los demás términos.

d) Si la matriz A es de orden 2×2 y tiene un solo valor propio doble λ_1 con multiplidad geométrica igual a 1, entonces, su forma canónica de Jordan es

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

4. **Cambio de base de Jordan para matrices diagonalizables.**

Usaremos la siguiente notación:

$$P = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

es la matriz de orden $n \times n$ formada colocando en sus columnas los vectores v_i; es decir: la columna i-ésima de la matriz P es la columna formada con las componentes del vector v_i de C^n.

Por ejemplo, si $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$, entonces $[v_1 \ , \ v_2]$ indica la matriz $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$. Los vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ son linealmente independientes si y sólo si la matriz $[v_1, v_2, \cdots, v_n]$ tiene determinante no nulo.

Teorema 5.2.29 (Cálculo de J_A y P cuando A es diagonalizable)

Sea A una matriz cuadrada de orden $n \times n$, diagonalizable.

Sea $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base de C^n formada con vectores propios de A, de valores propios respectivos $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$(donde $m_i = r_i$ pues A es diagonalizable). Entonces la forma canónica de Jordan de A es, a menos de permutaciones de su diagonal principal, la matriz diagonal

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} = diag[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n].$$

y una matriz de cambio de base de Jordan (es decir, una matriz invertible P tal que $A = PJ_AP^{-1}$), es:

$$P = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$$

que se obtiene colocando en sus columnas los vectores propios de A (en el mismo orden en que se escribieron los valores propios respectivos para formar la matriz J_A).

Demostración. En la proposición 5.2.28, item c), ya se dedujo cómo es J_A. Siendo $\{v_1, \cdots, v_n\}$ linealmente independientes, el determinante de P es no nulo, y entonces, P es invertible. Falta probar que $PJ_AP^{-1} = A$; o, lo que es lo mismo, que $AP = PJ_A$. La primera columna de una matriz M, cuadrada de orden $n \times n$ es igual a:

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Probemos que las primeras columnas de $A\ P$ y de $P\ J_A$ son iguales:

$$A\ P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = A\ v_1 = \lambda_1\ v_1 = \lambda_1\ P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = P\ J_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, las primeras columnas de AP y PJ_A son iguales. Análogamente se prueba que las columnas j- ésimas son iguales.

Ejemplo 5.2.30 Sea la matriz A del ejemplo 5.2.10. Calculemos la forma canónica de Jordan y la matriz de cambio de base de Jordan $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ya vimos en el ejemplo 5.2.10 que una base de vectores propios de A es $\{v_1\ ,\ v_2\}$ con $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ con valor propio $\lambda_1 = 3$ $(m_1 = 1 = r_1)$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con valor propio $\lambda_2 = 2$ $(m_2 = 1 = r_2)$. Entonces: $J_A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifiquemos que $A = PJ_AP^{-1}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad PJ_A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad PJ_AP^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = A$$

5. **Cambio de base de Jordan para matrices de orden** 2×2.

Si A es una matriz de orden 2×2 su polinomio característico será de grado 2, luego tenemos tres casos posibles:

a) Dos raíces diferentes (en el campo complejo).

b) Una raíz doble λ_1 con multiplicidad geométrica 2.

c) Una raíz doble λ_1 con multiplicidad geométrica 1.

Caso a) La matriz A es diagonalizable (por el corolario 5.2.8), y se aplica el teorema 5.2.29 para calcular la forma canónica de Jordan J_A y una matriz de cambio de base de Jordan P.

El siguiente ejemplo muestra que aunque la matriz A sea de términos reales, la forma canónica de Jordan J_A y la matriz de cambio de base P pueden tener términos complejos.

Ejemplo 5.2.31

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i \quad \Longrightarrow J_A = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

Subespacio propio S_1***, con*** $\lambda_1 = i$***:***

$$(A - i\ I) = \begin{bmatrix} -3-i & -2 \\ 5 & 3-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = (\dfrac{-3-i}{2})x_1 \\ x_1 \text{ libre} \end{cases}$$

Eligiendo $x_1 = 2$, se tiene $x_2 = -3 - i$ y $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3-i \end{bmatrix}$

Subespacio propio S_2***, con*** $\lambda_2 = -i$***:***

$$(A + i\ I) = \begin{bmatrix} -3+i & -2 \\ 5 & 3+i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x_2 = (\dfrac{-3+i}{2})x_1 \\ x_1 \text{ libre} \end{cases}$$

Eligiendo $x_1 = 2$, se tiene $x_2 = -3 + i$ y $v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3+i \end{bmatrix}$

$\{v_1\ ,\ v_2\}$ es una base de vectores propios de A. Entonces podemos tomar

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -3-i & -3+i \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $PJ_AP^{-1} = A$. En efecto, $detP = 4i$; entonces:

$$P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+3i & 2i \\ 1-3i & -2i \end{bmatrix}, \quad PJ_A = \begin{bmatrix} 2i & -2i \\ 1-3i & 1+3i \end{bmatrix}$$

$$PJ_AP^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -12 & -8 \\ 20 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = A$$

Caso b) La multiplicidad algebraica del valor propio λ_1 es dos, y su multiplicidad geométrica también es dos. La matriz es diagonalizable (por el teorema 5.2.7) y se aplica el teorema 5.2.29. Sin embargo, puede demostrarse que este caso es trivial: la matriz A ya debe ser una forma canónica de Jordan, y por lo tanto, basta elegir $J_A = A$ y $P = I$, como fue señalado en la proposición 5.2.28 item a)

Proposición 5.2.32 *Si la matriz A tiene un único valor propio λ_1, y si éste tiene multiplicidad algebraica igual a su multiplicidad geométrica; entonces A ya es una forma canónica de Jordan, y puede tomarse como matriz de cambio de base de Jordan a la identidad.*

Demostración: Según lo visto en el teorema 5.2.7, A es diagonalizable, y por el teorema 5.2.29, la matriz J_A tiene λ_1 en su diagonal principal y ceros los demás términos. Entonces, $J_A = \lambda_1\ I$. Sea P una matriz de cambio de base de Jordan cualquiera (no necesariamente la identidad)
Se tiene:

$$A = P\ J_A\ P^{-1} = P\ (\lambda_1\ I)\ P^{-1} = \lambda_1\ P\ I\ P^{-1} = \lambda_1\ P\ P^{-1} = \lambda_1\ I \qquad J_A$$

Caso c) El caso que resta es cuando la multiplicidad geométrica r_1 del único valor propio λ_1 doble es 1. En este caso, como la multiplicidad algebraica m_1 es 2, por el teorema 5.2.7, la matriz A no es diagonalizable. Según lo visto en el teorema 5.2.23, la forma canónica de Jordan de A es:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}$$

Para encontrar una matriz de cambio de base de Jordan P puede aplicarse el siguiente teorema:

Teorema 5.2.33 Si A es una matriz de orden 2×2, con un único valor propio doble λ_1, si éste tiene multiplicidad geométrica 1, y si v_2 es un vector cualquiera que no está en el subespacio propio de A; entonces, el vector $v_1 = (A - \lambda_1\, I)\, v_2$ es un vector propio de A, $\{v_1\ ,\ v_2\}$ son linealmente independientes, y la matriz $P = [v_1\ ,\ v_2]$ es una matriz de cambio de base de Jordan para A.

Demostración:

$$J_A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \lambda_1\, I + N,$$

donde:

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } \quad N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \Theta$$

Sea Q una matriz de cambio de base de Jordan para A, el teorema 5.2.21 garantiza la existencia de Q, y se cumple:

$$\begin{aligned} A &= Q\, J_A\, Q^{-1} &&= Q\,(\lambda_1\, I + N)\ Q^{-1} \\ &= \lambda_1\, Q\, I\, Q^{-1} + Q\, N\, Q^{-1} &&= \lambda_1\, Q\, Q^{-1} + Q\, N\, Q^{-1} \end{aligned}$$

Entonces:

$$A - \lambda_1\, I = Q\, N\, Q^{-1} \Longrightarrow (A - \lambda_1\, I)^2 = Q\, N\, Q^{-1}\, Q\, N\, Q^{-1} = Q\, N^2\, Q^{-1} = \Theta$$

Por consiguiente: $(A - \lambda_1\, I)^2\, v = \overline{0}$, $\forall\, v$, v_2 no pertenece al subespacio propio S_1, entonces $(A - \lambda_1\, I)\, v_2 \neq \overline{0}$.
Ahora consideremos: $v_1 = (A - \lambda_1\, I)\, v_2$, luego $v_1 \neq \overline{0}$. Además:

$$(A - \lambda_1\, I)\, v_1 = (A - \lambda_1\, I)^2\, v_2 = \overline{0}$$

Entonces v_1 es un vector propio no nulo del subespacio propio S_1.
Sea la combinación lineal:

$$\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2 \;=\; \overline{0} \tag{5.8}$$

Entonces: $(A - \lambda_1\, I)(\alpha_1\, v_1 + \alpha_2\, v_2) = \overline{0}$, es decir:

$$\alpha_1\, (A - \lambda_1\, I)\, v_1 + \alpha_2\, (A - \lambda_1\, I)\, v_2 = \alpha_1\, \overline{0} + \alpha_2\, (A - \lambda_1\, I)\, v_2 = \overline{0}$$

$\Longrightarrow$ $\alpha_2 = 0$ y reemplazando en (5.8), obtenemos $\alpha_1\, v_1 = \overline{0} \Longrightarrow \alpha_1 = 0$. Así, v_1 y v_2 son vectores linealmente independientes, y la matriz $P = [v_1\ ,\ v_2]$ tiene determinante no nulo, o sea, existe P^{-1}. Para probar que $A = P\ J_A\ P^{-1}$, basta mostrar que $A\ P = P\ J_A$, y para esto es suficiente probar que sus respectivas columnas son iguales. Nótese que la primera columna de una matriz M de orden 2×2 cualquiera, es $M \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y que su segunda columna es $M \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Luego:

$$A\ P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = A\ v_1 = \lambda_1\ v_1 = \lambda_1\ P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\ \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\ J_A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se concluye que la primera columna de $A\ P$ y de $P\ J_A$ son iguales.

$$A\ P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = A\ v_2 = \lambda_1\ v_2 + v_1 = \lambda_1\ P \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P\ \lambda_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= P \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} + P \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{bmatrix} = P\ J_A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se concluye que la segunda columna de $A\ P$ y de $P\ J_A$ son iguales.

Luego $A\ P = P\ J_A$. □

Ejemplo 5.2.34 Sea la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}$.

Ecuación característica: $det(\lambda I - A) = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$

Valores propios: El único valor propio es: $\lambda_1 = -3$, y $m_1 = 2$

Subsepacio propio S_1, con $\lambda_1 = -3$:

$$(A + 3I) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 & = & -x_2 \\ x_2 & libre & \end{cases} \Longrightarrow \quad r_1 = 1 \quad \Longrightarrow J_A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Elijamos $v_2 \notin S_1$:

Tomando $x_2 = 0; x_1 \neq 0$, por ejemplo $x_1 = 1$, se tiene $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Entonces:

$$v_1 = (A + 3I)\ v_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Longrightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifiquemos que $A = P\ J_A\ P^{-1}$:

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ P\ J_A = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix},\ P\ J_A\ P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} = A$$

Nota: Sea ahora una matriz A, de orden 2×2, con todos sus términos reales. Si sus valores propios son ambos reales (iguales o distintos) se concluye que la matriz canónica de Jordan es real. De los procedimientos vistos, obsérvese que los vectores v_1 y v_2, que forman las columnas de la matriz de cambio de base de Jordan, se encuentran mediante ecuaciones lineales con coeficientes reales, cuando la matriz A y sus valores propios son reales. Luego, se concluye lo siguiente:
Si la matriz A tiene términos reales y todos sus valores propios son reales, entonces la forma canónica de Jordan es una matriz real, y puede elegirse una matriz de cambio de base de Jordan también real. Esto significa que no es necesario pasar al campo complejo cuando los valores propios son reales. Sin embargo, aunque la matriz dada sea real, si sus valores propios no lo son, entonces la forma canónica de Jordan y la matriz de cambio de base de Jordan no son reales, como lo muestra el ejemplo 5.2.31.

5.2.2. Solución de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales aplicando la forma canónica de Jordan

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, por el teorema 3.2.2 sabemos que existe una única solución del P.V.I.:

$$\begin{cases} x' = A\ x \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{5.9}$$

y es dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto \varphi_{x_0}(t) = e^{tA}\ x_0. \end{aligned}$$

Por el teorema 5.2.21 existe $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ no singular tal que $J_A = P^{-1}\ A\ P$, donde J_A es la forma canónica de Jordam (real) de A. Consideremos:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto y = L(x) = P^{-1}\ x, \end{aligned}$$

claramente L es un difeomorfismo (de clase C^∞). Observamos que

$$y = P^{-1}\ x \implies y' = P^{-1}\ x' = P^{-1}\ A\ x = P^{-1}\ A\ P\ y$$

Denotando $y_0 = P^{-1}x_0$, tenemos que el cambio de coordenadas: $y = L(x) = P^{-1}\ x$ transforma (5.9) en el P.V.I.

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = J_A\ y \\ y(0) = y_0 \end{array} \right. \tag{5.10}$$

cuya solución es dada por:

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{y_0} : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ t & \longmapsto & \varphi_{y_0}(t) = e^{tJ_A}\ y_0 \end{array}$$

Finalmente, usando la propiedad (i) del teorema 2.3.12 tenemos:

$$\varphi_{x_0}(t) \ = \ e^{tA}\ x_0 = e^{tP\ J_A\ P^{-1}}\ x_0 = e^{P\ (tJ_A)\ P^{-1}}\ x_0 = P\ e^{tJ_A}\ P^{-1}\ x_0 = P\ \varphi_{y_0}(t)$$

Aplicaremos la teoría de la forma canónica de Jordan para resolver los siguientes sistemas.

Observación 5.2.35 Si A es una forma canónica de Jordan, entonces el sistema lineal de ecuaciones diferenciales dado se puede resolver ecuación por ecuación, empezando por la última.

Ejemplo 5.2.36 Resolver el Problema de Cauchy (P.V.I.):

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1' & = & 5x_1 + 3x_2 \ , \ \ x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' & = & -6x_1 - 4x_2 \ , \ \ x_2(0) = x_2^0 \end{array} \right.$$

Resolución. Sean: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -6 & -4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Por el ejemplo, 5.2.25 de la sección anterior tenemos:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \ \text{ y } \ J_A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = diag[2, -1]$$

Luego, el cambio de coordenadas

$$\begin{array}{rcl} L : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x & \longmapsto & y = L(x) = P^{-1}\ x \end{array}$$

transforma el P.V.I. dado, en

$$\left\{ \begin{array}{l} y' = J_A\ y \\ y(0) = y_0 \end{array} \right.$$

donde:

$$y_0 = P^{-1}\, x_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1^0 + x_2^0 \\ -x_1^0 - x_2^0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{y_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_{y_0}(t) = e^{tJ_A}\, y_0 = e^{diag[2t\ ,\ -t]}\, y_0 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\varphi_{y_0}(t) = diag[e^{2t}\ ,\ e^{-t}]\, y_0 = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2x_1^0 & + & x_2^0 \\ -x_1^0 & - & x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\, e^{2t} \\ -(x_1^0 + x_2^0)\, e^{-t} \end{bmatrix}$$

Luego, la solución del P.V.I. original es:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto \varphi_{x_0}(t) = P\, \varphi_{y_0}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\, e^{2t} \\ -(x_1^0 + x_2^0)\, e^{-t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

esto es: $\varphi_{x_0}(t) = \begin{bmatrix} (2x_1^0 + x_2^0)\, e^{2t} - (x_1^0 + x_2^0)\, e^{-t} \\ -(2x_1^0 + x_2^0)\, e^{2t} + 2(x_1^0 + x_2^0)\, e^{-t} \end{bmatrix}$

Ejemplo 5.2.37 Resolver el P.V.I.:

$$\begin{cases} x_1' &= -x_2 \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' &= x_1 \quad , \quad x_2(0) = x_2^0 \end{cases} .$$

Sean: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = I(0\ ;\ 1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

Entonces:

$$\begin{aligned} \varphi_{x_0}(t) &= e^{tA}\, x_0 = e^{t\ I(0\ ;\ 1)}\, x_0 = e^{I(0\ ;\ t)}\, x_0 \\ \varphi_{x_0}(t) &= \begin{bmatrix} cos(t) & -sen(t) \\ sen(t) & cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0\, cos(t) & - & x_2^0\, sen(t) \\ x_1^0\, sen(t) & + & x_2^0\, cos(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.2.38 Resolver el P.V.I.:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + x_2 - 2x_3 \quad , \quad x_1(0) = x_1^0 \\ x_2' = - x_2 + 4x_3 \quad , \quad x_2(0) = x_2^0 \\ x_3' = x_3 \quad , \quad x_3(0) = x_3^0 \end{cases}$$

Resolución. Sean: $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, $x_0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$ y $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

Por el ejemplo 5.2.27 de la sección anterior, tenemos:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

y

$$J_A = diag[-1,-1,1] + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Luego, el cambio de coordenadas:

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ x &\longmapsto y = L(x) = P^{-1}\, x \end{aligned}$$

transforma el P.V.I. dado en:

$$\begin{cases} y' = J_A\, y \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

donde:

$$y_0 = P^{-1}\, x_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 - 2\, x_3^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

cuya solución es dada por:

$$\begin{aligned} \varphi_{y_0} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \varphi_{y_0}(t) = e^{tJ_A}\, y_0 \end{aligned}$$

$$\varphi_{y_0}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 - 2x_3^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & te^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 - 2x_3^0 \\ x_3^0 \end{bmatrix}$$

Luego, la solución del P.V.I. original es:

$$\varphi_{x_0}(t) = P\ \varphi_{y_0}(t) = \begin{bmatrix} x_1^0\ e^{-t} + (x_2^0 - 2\ x_3^0)\ t\ e^{-t} \\ (x_2^0 - 2\ x_3^0)\ e^{-t} + 2\ x_3^0\ e^t \\ x_3^0\ e^t \end{bmatrix}$$

Ejemplo 5.2.39 Resolver la ecuación:

$$x'(t) \quad = \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} x(t) \quad + \quad \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ 9t \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

Resolución. Sean: $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, y $\quad A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

La ecuación dada en (5.11) es equivalente al siguiente sistema:

$$\begin{cases} x_1'(t) & = & -3x_1(t) & + & x_2(t) & + & e^{-3t} \\ x_2'(t) & = & & & -3x_2(t) & + & 9t \end{cases}$$

La segunda ecuación tiene como solución:

$$x_2(t) = c_2 e^{-3t} + 3t - 1$$

Luego, la primera ecuación queda

$$x_1'(t) = -3x_1 + c_2 e^{-3t} + 3t - 1 + e^{-3t}$$

Entonces:

$$x_1(t) = c_1 e^{-3t} + (c_2 + 1)te^{-3t} + t - 2 = 3$$

Bibliografía

[1] R.E. Bellman, *Stability Theory of Differential Equation*, McGraw-Hill, New York, 1953.

[2] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, New York, 1955.

[3] K. S. Miller, *Linear Differential Equations in the Real Domain*, Norton, New York, 1963.

[4] H. Hochstadt, *Differential Equations, a Modern Approach*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964.

[5] E. J. Putzer, *Avoiding the Jordan canonical form in the discussion of linear systems with constant coefficients*, this MONTHLY, 73 (1966) 2–7.

[6] Peter V.O'Neil, *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería (VOLUMEN* 1, 3*a. edición).*

[7] Tom M. Apostol, *CALCULUS*, (VOLUMEN 2, segunda edición)

[8] Golub, G. H. and C. F. Van Loan, *Matrix Computation, p. 384*, Johns Hopkins University Press, 1983.

[9] Moler, C. B. and C. F. Van Loan, *"Nineteen Dubious Ways to Compute the Exponential of a Matrix,"*SIAM Review 20, 1978, pp. 801-836. Reprinted with additions in SIAM Review 45, 2003, pp. 3-49.

[10] Mathews, J. H, *"The Matrix Exponential Bibliography,"*web resource at http://math.fullerton.edu/mathews/n2003/MatrixExponentialBib.html

[11] The Mathworks, *"MATLAB Release Notes. Programming and Data Types Features. MATLAB Interface to Java,"*from Matlab Help Browser after version 6.0.