UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

CONTROLABILIDAD Y OBSERVABILIDAD EN ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES CON COEFICIENTES MATRICIALES

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

PRESENTADO POR:

COLLANTE HUANTO ANDRÉS

LIMA-PERU
2005

Resumen

En el presente trabajo se estudia la teoría de la Solución Dinámica para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes matriciales, obteniendose resultados que van a ser usado en el desarrollo de la teoría de Controlabilidad y Observabilidad, además se presenta un programa que resuelve una ecuación diferencial utilizando la Solución Dinámica.

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado especialmente a mis padres Guillermina y Victor; asimismo con todo cariño a mi esposa Herminia, a mi hijo Alejandro y finalmente a mis hermanos y sobrinos.

Agradecimientos

Aprovecho la oportunidad para agradecer al profesor Mg. Fidel Jara por su apoyo y estímulo en la elaboración del presente trabajo, asimismo a los profesores Lic. Alejandro Hidalgo y Mg. Percy Flores(FIM) por su ayuda incondicional en el desarrollo del tema. De la misma manera a todos los profesores de la Facultad de Ciencias de la UNI que me apoyaron en todo momento, finalmente a todas aquellas personas que influenciaron en la elaboración del trabajo.

Indice general

Resumen

En l pres nte trabajo s estudia la teoría de la Solución Dinámica para ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes matriciales, obteniendose resultados que van a er usado en l desarrollo de la teoría de Controlabilidad y Observabilidad, ad más se presenta un programa que r suelv una ecuación diferencial utilizando la Solución Dinámica.

Introducción

En este trabajo de tesis estudiamos la Solución Dinámica asociada a una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes matriciales, luego tomando en cuenta la Solución Dinámica y resultados previamente obtenidos desarrollamos la Controlabilidad y Observabilidad para una ecuación diferencial con coeficientes matriciales, el contenido del trabajo está estructurado como sigue:

En el **Capítulo 1** presentamos algunos elementos necesarios que nos permitirá ver donde podemos aplicar el trabajo desarrollado, básicamente aqui se ven los conceptos de Sistemas, Sistemas de Control, Clasificación de Sistemas de Control, Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, Sistemas lineales, Vibración, teoría básica de Controlabilidad y Observabilidad y finalmente se da una Fórmula de inversión Compleja.

En el **Capítulo 2** se desarrolla la teoría de la Solución Dinámica, obteniendo importantes resultados que van a ser usados en los capítulos que siguen, uno de estos resultados es la obtención de una fórmula para la exponencial de una matriz.

En el **Capítulo 3** se desarrolla el tema de Controlabilidad para una ecuación diferencial con coeficientes matriciales, se da un teorema que me permite afirmar cuando un sistema es Controlable.

En el **Capítulo 4** estudiamos el tema de Observabilidad, en forma análoga al capítulo 3, presentamos un teorema que me permite afirmar cuando un sistema es Observable.

En el **Capítulo 5** presentamos la parte práctica del trabajo como son algunas aplicaciones que ilustran la teoría de Controlabilidad y Observabilidad, programas y resultados numéricos.

En el **Capítulo 6** se presentan las conclusiones del trabajo a modo de resumen.

Capítulo 1

Preliminares

A continuación presentamos una serie de conceptos que nos permitirá tener una visión donde podemos aplicar el trabajo desarrollado, finalmente también se dá una teoría básica de Controlabilidad y Observabilidad que luego se generalizará en los capítulos 3 y 4 respectivamente.

1.1. Sistemas y Sistemas de Control

Un **Sistema** es un conjunto de componentes que estan relacionadas de manera que constituyan un todo o una unidad, conviene hacer una división entre las componentes separándola en tres categorias, una que llamaremos conjuntos de entradas, otra conjuntos de salidas y un tercero que relaciona las entradas con la salidas, llamado planta.
Un ejemplo de un sistema, puede ser una fábrica de coches que transforma materias primas como lámina de acero, hule, pintura, etcétera (entradas), en automóviles (salidas) y la planta estaria formado por las relaciones mecánicas del sistema .

Figura 1.1: Representación esquemática de un sistema

Un **Sistema de Control** es un sistema que se puede comandar, dirigir o regular asi mismo o a otro sistema es decir es aquel en el que la salida del sistema se controla para tener un valor específico o cambiarlo, según lo determina la entrada al sistema.

1.2. Clasificación de Sistemas de Control

Los sistemas de control, debido a las relaciones que hay entre las entradas y salidas se clasifican en Sistemas de lazo abierto y de lazo cerrado.

1.2.1. Sistema de Control de Lazo Abierto

Con un sistema de control de lazo abierto la entrada se elige en base a la experiencia que se tiene con dichos sistemas para producir el valor de salida requerida, el control que se realiza es independiente de la salida.

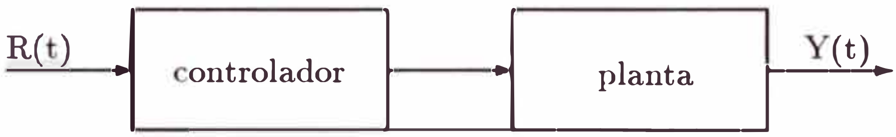

Figura 1.2: Sistema de Control de lazo abierto

Ejemplo, un tostador automático es un sistema de control de lazo abierto. Con el tostador la **entrada** es el pan y las instrucciones del grado de tostado requerido, la **salida** es el nivel de tostado del pan. El grado de tostado requerido se determina mediante el ajuste de la escala del regulador de tiempo (**controlador**) y no se altera por la condición del pan. Entonces, el tostador reaccionará de la misma manera ante una pieza de pan fresco (sin tostar) o si la pieza de pan que se introduce ya está tostada, sin embargo, la salida será diferente; una pieza de pan fresco bien tostado o una como carbón. El tostador no reacciona al cambio en la condición del pan.

1.2.2. Sistema de Control de Lazo cerrado

Un sistema de control de lazo cerrado es aquel en el cual la acción de control es en cierto modo dependiente de la salida.

Ejemplo, el mecanismo de piloto automático y el avión que controla forman un sistema de control de lazo cerrado. Su objetivo es mantener una dirección especifica

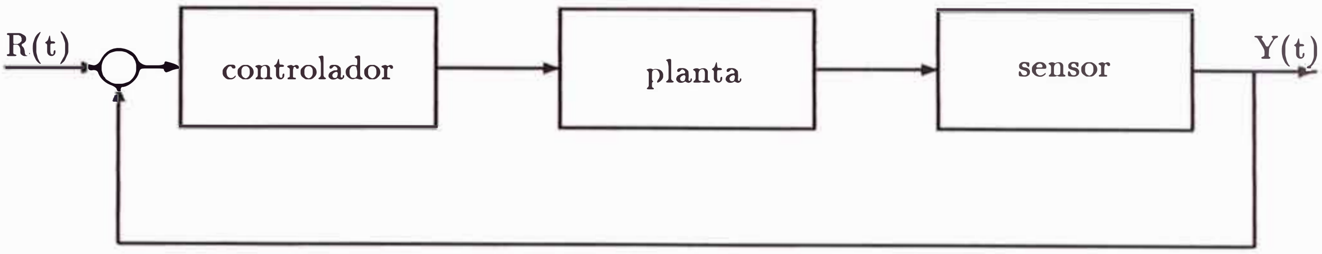

Figura 1.3: Sistema de Control de lazo cerrado

del avión (**entrada**), a pesar de los cambios atmosféricos. El sistema ejecuta su tarea midiendo continuamente la dirección instantánea del avión (**salida**) y ajustando automáticamente las superficies de control del avión (el timón, las aletas, etc.) de manera que coincida la dirección instantanea del avión con la dirección especificada. El piloto, quien fija con anterioridad el piloto automático (**controlador**) no forma parte del sistema de control.

1.3. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Definición 1.3.1 *Un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden es una expresión de la forma*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' & = & F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ x_2' & = & F_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{array}\right\} \tag{1.1}$$

en donde t es la variable independiente (variable temporal) y x_1,x_2,...,x_n son variables dependientes del tiempo (variables espaciales) y F_1,F_2,...,F_n son funciones de valor real definidas en $D \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, donde D es un conjunto abierto y conexo.

1.4. Sistemas Lineales

Un caso particularmente importante de ecuaciones diferenciales ordinarias viene dado cuando las funciones F_1,F_2,...,F_n son de la forma

$$F_i(t, x_1, \ldots, x_n) = a_{i1}(t)x_1 + a_{i2}(t)x_2 + \cdots + a_{in}(t)x_n + b_i(t) \quad 1 \leq i \leq n$$

en donde a_{ij} y b_i $(1 \leq i \leq n)$ son funciones definidas en un intervalo común J y con valores reales. En este caso el sistema (1.1) tiene la forma

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1' & = & a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ x_2' & = & a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + b_2(t) \\ & \vdots & \\ x_n' & = & a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t) \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

con notación matricial

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ b_3(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} \qquad A(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & \cdots & a_{3n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

(1.2) se escribe como

$$x' = A(t)x + b(t) \tag{1.3}$$

el sistema (1.3) es llamado Sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales (no Homogéneo). Si la matriz A es constante es decir $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, el sistema (1.3) es llamado Sistema de Ecuaciones Diferenciales con coeficientes constantes.

1.5. Vibración

Los sistemas de ingeniería que poseen masa y elasticidad están capacitados para tener movimiento relativo, si el movimiento de estos sistemas se repite después de un determinado intervalo de tiempo, el movimiento se conoce como vibración.

La vibración es, en general una forma de energía disipada y en muchos casos indeseable, pues, por ejemplo, en maquinarias, debido a las vibraciones se producen ruidos (incomodidad fisiológica), aumenta las tensiones en las piezas de una máquina, se trasmiten fuerzas y movimientos indeseables a los objetos muy cercanos llegando muchas veces arruinar las diferentes partes del mecanismo.

1.5.1. Grados de Libertad

Cuando se necesitan n coordenadas independientes para determinar las posiciones de las masas de un sistema, el sistema es de n grados de libertad. Por ejemplo el sistema que se muestra en la figura 5.9 tiene 3 grados de libertad.

1.5.2. Ecuación Vibratoria Básica

Muchas estructuras físicas no pueden ser modeladas con éxito utilizando un único grado de libertad. Esto es para describir el movimiento de una estructura, varias coordenadas pueden ser requeridos, tales sistemas son referidos como sistemas de múltiplos grados de libertad.

Las ecuaciones de movimiento para sistemas de múltiplos grados de libertad pueden ser deducidos por varias técnicas tales como: leyes de Newton, ecuaciones de Lagrange, o métodos de elementos finitos. Estos modelos analíticos pueden ser refinados por comparación con datos experimentales [INM 89] .

Los técnicas mencionadas, producen ecuaciones que pueden ser expresadas de la siguiente forma:

$$A_1\mathbf{q}'' + A_2\mathbf{q}' + A_3\mathbf{q} = f(t) \tag{1.4}$$

Cabe señalar que existen modelos matemáticos de las vibraciones mecánicas que son de la forma (1.4).

Aqui $\mathbf{q} = \mathbf{q}(t)$ es un vector que tiene n componentes, que varía con el tiempo y representa un desplazamiento de masas en el modelo.

Los vectores $\mathbf{q}''$ y $\mathbf{q}'$ representan las aceleraciones y velocidades respectivamente.

Los coeficientes A_1,A_2 y A_3 son matrices cuadradas de orden n cuyos elementos son constantes numéricas y representan diversos parámetros físicos del sistema.

El vector $f = f(t)$ representa las fuerzas externas aplicadas y también varía en el tiempo.

Las matrices A_i $i = 1, 2, 3$ poseen diferentes propiedades, dependiendo de la física del problema en consideración. Las propiedades matemáticas de estas matrices determinan la naturaleza de la solución $\mathbf{q}(t)$, asi como las propiedades de los escalares m, c y k determinan la naturaleza de la solución $x(t)$ para un sistema de un grado de libertad.

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{1.5}$$

Para diversas situaciones prácticas, la ecuación (1.4) adopta la siguiente forma:

$$M\mathbf{q}'' + (D + G)\mathbf{q}' + (K + H)\mathbf{q} = f(t) \tag{1.6}$$

Donde $\mathbf{q}$ y f ya fueron definidas antes
$M = M^T$ matriz de inercia o masa
$D = D^T$ masa viscosa
$G = -G^T$ matriz giroscópica
$K = K^T$ matriz de rigidez
$H = -H^T$ matriz circulatoria

1.5.3. Clasificación de Sistemas

Presentamos una clasificación de sistemas modeladas por la ecuación (1.6) comunmente encontrada en la literatura. Observemos que, para cada aplicación particular en engeniería puede tener una nomenclatura un poco diferente.

La denominación **Sistema Conservativo** se refiere a sistemas de la forma.

$$M\mathbf{q}'' + K\mathbf{q} = f(t) \tag{1.7}$$

donde M y K son ambas matrices simétricas y definidas positivas.

En tanto, un sistema

$$M\mathbf{q}'' + G\mathbf{q}' + K\mathbf{q} = f(t) \tag{1.8}$$

donde G es antisimétrica ($G^T = -G$) es también conservativo, en el sentido de conservación de energía, más es referido como un **Sistema Conservativo Giroscópico o un Sistema Giroscópico**. Tales sistemas surgen de forma natural cuando están presentes movimientos rotatorios, tales como un Giroscópio o un satélite artificial.

Sistemas de la forma:

$$Mq^{''} + Dq^{'} + Kq = f(t) \tag{1.9}$$

donde M, K y D son todos matrices definidas positivas, son referidos como **sistemas amortiguados no giroscópico**. Sistemas con coeficientes matriciales simétricos y definidos positivos son, a veces, referidos como **Sistemas Pasivos**.

Sistemas de la forma:

$$M\mathbf{q}^{''} + (K + H)\mathbf{q} = f(t) \tag{1.10}$$

son referidos como **Sistemas Circulatórios**.
Combinando los resultados presentados, obtenemos un sistema más general.

$$M\mathbf{q}^{''} + (D + G)\mathbf{q}^{'} + (K + H)\mathbf{q} = f(t) \tag{1.11}$$

Físicamente esta expresión representa las fuerzas más generales que son consideradas en la literatura con exepción de ciertas fuerzas externas. Matemáticamente la ecuación (1.11) puede ser eventualmente clasificada en términos de las propiedades de los coeficientes matriciales, el cual no es de interés en este trabajo.

1.6. Controlabilidad y Observabilidad

Sean las ecuaciones:

$$\mathbf{x}^{'}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{1.12}$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) + D\mathbf{u}(t) \tag{1.13}$$

donde

$\mathbf{x}$ vector de estado (dimensión n)

$\mathbf{y}$ vector de salida (dimensión m donde $m \leq n$)

$\mathbf{u}$ vector de entrada algunas veces llamado señal de control (dimensión r)

A matriz constante de orden $n \times n$

B matriz constante de orden $n \times r$

C matriz constante de orden $m \times n$

D matriz constante de orden $m \times r$

La matriz A se denomina matriz de estado, B es la matriz de entrada, C matriz de salida y D matriz de transmisión directa.

La ecuación (1.12) es la ecuación de estado del sistema lineal y la ecuación (1.13) es la ecuación de salida para el mismo sistema.

En la figura 1.4 se ilustra una representación gráfica de las ecuaciones (1.12) y (1.13).

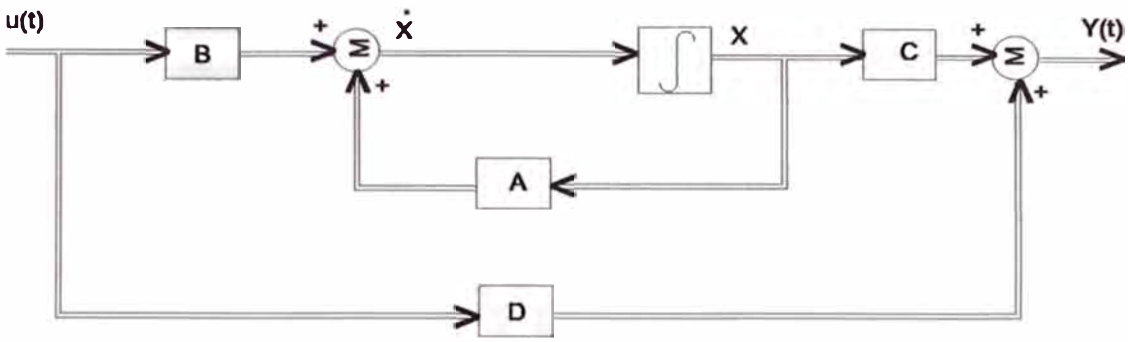

Figura 1.4: Diagrama de bloques de las ecuaciones (1.12) y (1.13)

El **estado** de un sistema se refiere a las condiciones **pasadas**, **presentes** y **futuras** del sistema.

El vector de estado **x** está formado por las variables $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, que se llaman variables de estado.

El vector de salida **y** esta formado por las variables $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$, que se llaman variables de salida.

No se deben confundir las variables de estado con las variables de salida de un sistema. Una salida de un sistema es una variable que puede ser **medida**, pero una variable de estado no satisface este requerimiento. Por ejemplo, en un motor eléctrico, las variables de estado como el flujo de corriente, la velocidad de rotor y el desplazamiento se pueden medir físicamente, y estas variables califican como variables de salida. Por otra parte el flujo magnético también se puede considerar como una variable de estado en un motor eléctrico, ya que representa el estado pasado, presente y futuro del motor, pero no puede ser medido directamente durante el funcionamiento, y por lo tanto, no califica como una variable de salida.

Definición 1.6.1 *Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (1.12) es* **completamente controlable** *o (por brevedad) controlable si a partir de cualquier* *estado inicial y final* $\mathbf{x}(t_o)$, $\mathbf{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n$ *existe un vector de control* $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *que lleva* $\mathbf{x}(t_o)$ *a* $\mathbf{x}(t_1)$, *es decir*

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Teorema 1.1 *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El sistema (1.12) es controlable en* $[t_0, t_1]$.

2. *Para cada* $\mathbf{x}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, *existe* $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *que lleva* $\mathbf{x}(t_0)$ *a* $\bar{0}$.

3. *Para cada* $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$, *existe* $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, *que lleva* $\mathbf{x}(0)$ *a* $\bar{0}$.

Prueba:
(1) $\Longrightarrow$ (2)
Sean $\mathbf{x}(t_0)$, $\mathbf{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n$

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

luego

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

donde

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - e^{-(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_1)$$

Como $\mathbf{x}(t_0)$ y $\mathbf{x}(t_1)$ son arbitrarios entonces $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ es arbitrario.
Por lo tanto para cada $\bar{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, que lleva $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ a $\bar{0}$.
(2) $\Longrightarrow$ (1)
Sea $\bar{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

se define

$$\bar{\mathbf{x}}(t_0) = \mathbf{x}(t_0) - e^{-(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_1)$$

donde $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_1) \in \mathbb{R}^n$ son arbitrarios

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}[\mathbf{x}(t_0) - e^{-(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_1)] + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{(t_1-t_0)A}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

Por lo tanto el sistema (1.12) es controlable en $[t_0, t_1]$.

$(2) \Longrightarrow (3)$

Sea $\bar{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-t)A}B\mathbf{u}(t)dt$$

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(t)\mid_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-t)A}B\mathbf{u}(t)dt$$

haciendo una traslación de coordenadas $s = t - t_0$

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(s+t_0)\mid_{s=0} + \int_{0}^{t_1-t_0} e^{(t_1-t_0-s)A}B\mathbf{u}(s+t_0)ds$$

luego

$$\bar{0} = e^{t_f A}\tilde{\mathbf{x}}(s)\mid_{s=0} + \int_{0}^{t_f} e^{(t_f-s)A}BU(s)ds$$

donde $t_f = t_1 - t_0$, $U(s) = \mathbf{u}(s+t_0)$, $\tilde{\mathbf{x}}(s) = \bar{\mathbf{x}}(s+t_0)$

$$\bar{0} = e^{t_f A}\tilde{\mathbf{x}}(0) + \int_{0}^{t_f} e^{(t_f-s)A}BU(s)ds$$

Por lo tanto para cada $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n$, existe $U(t)$, $t \in [0, t_f]$, que lleva $\tilde{\mathbf{x}}(0)$ a $\bar{0}$.

$(3) \Longrightarrow (2)$

Sea $\tilde{\mathbf{x}}(0) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} = e^{t_f A}\tilde{\mathbf{x}}(0) + \int_{0}^{t_f} e^{(t_f-s)A}BU(s)ds$$

$$\bar{0} = e^{t_f A}\tilde{\mathbf{x}}(s)\mid_{s=0} + \int_{0}^{t_f} e^{(t_f-s)A}BU(s)ds$$

haciendo una traslación de coordenadas $s = t - t_0$

$$\bar{0} = e^{t_f A}\tilde{\mathbf{x}}(t-t_0)\mid_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f+t_0} e^{(t_f+t_0-t)A}BU(t-t_0)dt$$

$$\bar{0} = e^{t_f A}\bar{\mathbf{x}}(t)\mid_{t=t_0} + \int_{t_0}^{t_f+t_0} e^{(t_f+t_0-t)A}B\mathbf{u}(t)dt$$

luego haciendo $t_1 = t_f + t_0$

$$\bar{0} = e^{(t_1-t_0)A}\bar{\mathbf{x}}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{(t_1-t)A}B\mathbf{u}(t)dt$$

Por lo tanto para cada $\bar{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathbb{R}^n$, existe $\mathbf{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, que lleva $\bar{\mathbf{x}}(t_0)$ a $\bar{0}$.

Teorema 1.2 *El sistema descrito mediante la ecuación (1.12) es* **completamente controlable** *si y solo si la matriz*

$$[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B] \tag{1.14}$$

de orden $n \times nr$ es de rango n. La matriz dada en (1.14) se denomina por lo común, **matriz de controlabilidad.**

Prueba: Ver apéndice A.1

Si un sistema es completamente controlable, entonces podemos controlar sus variables de estado, si controlamos sus variables de estado controlamos el comportamiento dinámico del sistema (esto se lleva acabo mediante diseño de un programa).

El sistema de la fig.1.5(a) es **no controlable** pues m1 no esta afectado para cualquier valor que tome $\mathbf{u}(t)$.

El sistema de la fig.1.5(b) es **controlable** pues para cualquier valor de $\mathbf{u}(t)$, diferente de cero, afecta ambas masas.

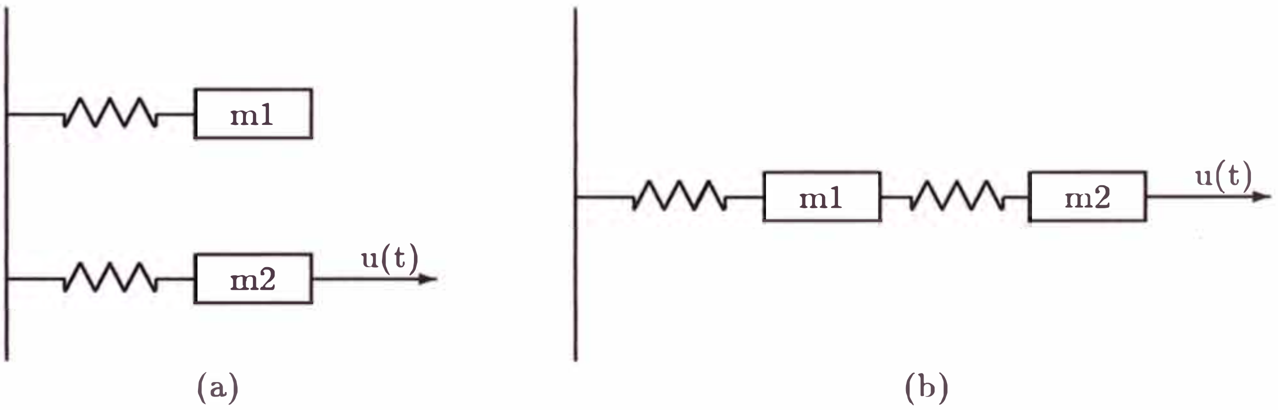

Figura 1.5: Sistema mecánico

Definición 1.6.2 *Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (1.12) y (1.13) es* **completamente observable** *o (por brevedad) observable si, para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_o) \in \mathbb{R}^n$, existe un tiempo t_1 tal que conociendo $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ donde $t \in [t_0, t_1]$ asi como también las matrices constantes A,B,C y D son suficientes para determinar $\mathbf{x}(t_o)$.*

Sea el sistema descrito por las ecuaciones (1.12) y (1.13), sabiendo que el sistema es observable entonces las matrices A,B,C y D se conocen al igual que $\mathbf{u}(t)$ y la salida $\mathbf{y}(t)$, por lo tanto la ecuación de salida (1.13) se puede escribir como

$$\overline{\mathbf{y}}(t) = C\mathbf{x}(t)$$

donde

$$\overline{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - D\mathbf{u}(t)$$

es una expresión conocida.
Así, a fin de investigar una condición necesaria y suficiente para la observabilidad completa, basta considerar el sistema descrito mediante las ecuaciones

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{1.15}$$

$$\mathbf{y}(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{1.16}$$

Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (1.15) y (1.16) es **completamente observable** o (por brevedad) observable si, para cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_o) \in \mathbb{R}^n$, existe un tiempo t_1 tal que conociendo $\mathbf{u}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ donde $t \in [t_0, t_1]$ asi como también las matrices constantes A,B y C son suficientes para determinar $\mathbf{x}(t_o)$.

Mediante una traslación de coordenada $s = t - t_0$, podemos dar una definición equivalente a la definición (1.62)

Definición 1.6.3 *Se dice que el sistema descrito mediante la ecuación (1.15) y (1.16) es* **completamente observable** *o (por brevedad) observable si, para cualquier estado inicial* $\mathbf{x}(0) \in \mathbb{R}^n$*, existe un tiempo* t_1 *tal que conociendo* $\mathbf{u}(t)$ *y* $\mathbf{y}(t)$ *donde* $t \in [0, t_1]$ *asi como también las matrices constantes* A,B *y* C *son suficientes para determinar* $\mathbf{x}(0)$.

Teorema 1.3 *El sistema descrito mediante la ecuación (1.15) y (1.16) es* **completamente observable** *si y solo si la matriz*

$$\begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} \tag{1.17}$$

de orden $mn \times n$ es de rango n. La matriz dada en (1.17) se denomina por lo común, **matriz de observabilidad.**

Prueba: Ver [OGA 98].

Ver ejemplo en el apéndice A.2.

Físicamente podría ser imposible medir todos los estados del sistema, ya sea por el costo de los sensores, por la ubicación (planta nuclear), etc, se puede dar una estimación de todas los estados de un sistema, para ello primeramente se tiene que ver si el sistema es completamente observable.
Si un sistema es completamente observable entonces se puede implementar un observador (programa) que de una estimación de las variables de estado del sistema.

Antiguamente en control clásico solo se tomaba en cuenta las entradas y salidas, si las salidas no eran las requeridas se paraba el proceso para buscar la falla, esto implicaba una gran pérdida económica; debido al conocimiento de la teoría de observabilidad y controlabilidad es posible aplicar realimentación de estado, e ir corrigiendo a tiempo los errores que se puedan tener.

1.7. Fórmula de Inversión Compleja

Si $f(s) = \mathcal{L}[F(t)]$, entonces $\mathcal{L}^{-1}[f(s)]$ está dada por

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{p-i\infty}^{p+i\infty} e^{st} f(s)ds \qquad t > 0 \tag{1.18}$$

y $F(t) = 0$ para $t < 0$.

Este resultado se llama la *inversión integral compleja o fórmula de inversión compleja*. También se conoce como la *fórmula integral de Bromwich*. Este resultado ofrece un método directo para obtener la transformada inversa de Laplace de una función dada $f(s)$.

La integración de (1.18) se realiza a lo largo de un segmento vertical $s = p + iy$, para todo $y \in \mathbb{R}$; donde p es un número real suficientemente grande para que todas singularidades (polos, puntos de ramificación o singularidades esenciales) queden a la derecha del segmento, aparte de esta condición p es arbitraria.

1.7.1. Contorno de Bromwich

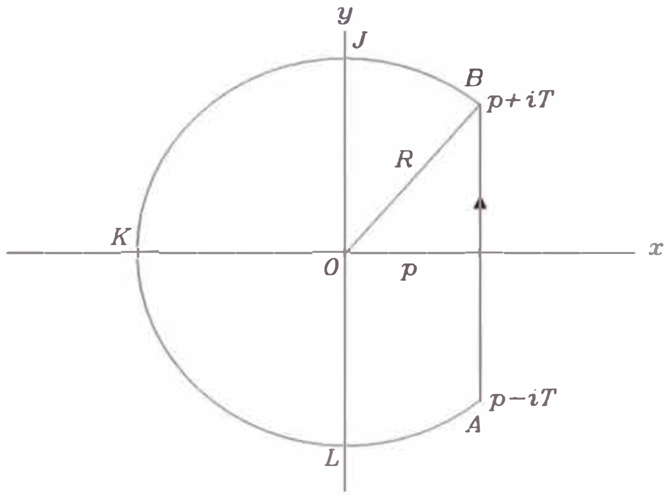

Figura 1.6: Contorno de Bromwich

Sea C el contorno de la figura (1.6). Este contorno, llamado *contorno de Bromwich*; se compone del segmento $\overline{AB}$ y el arco $\widehat{BJKLA}$ de una circunferencia de radio R con centro en el origen O, es decir

$$C = \overline{AB} \cup \Gamma$$

donde $\Gamma = \widehat{BJKLA}$

De la fig. se tiene que $T = \sqrt{R^2 - p^2}$ y de (1.18) se deduce

$$\begin{aligned} F(t) &= \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{p-iT}^{p+iT} e^{st} f(s) ds \qquad (1.19) \\ &= \lim_{R\to\infty} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma e^{st} f(s) ds \right\} \qquad (1.20) \end{aligned}$$

Teorema 1.4 *Si es posible hallar constantes $M > 0$ y $k > 0$ tales que*

$$| f(s) | < \frac{M}{R^k} \qquad (1.21)$$

en todo el conjunto Γ (donde $s = Re^{i\theta}$),entonces la integral alrededor de Γ de $e^{st} f(s)$ tiende a cero cuando $R \to \infty$, es decir

$$\lim_{R\to\infty} \int_\Gamma e^{st} f(s) ds = 0 \qquad (1.22)$$

La condicion (1.21) se satisface siempre si $f(s) = P(s)/Q(s)$ donde $P(s)$ y $Q(s)$ son polinomios en los cuales el grado de $P(s)$ es menor que $Q(s)$.

Prueba: Ver [MUR 70].

1.7.2. Utilizando el Teorema del Residuo para hallar Transformadas Inversas de Laplace

Supongamos que las únicas singularidades de $f(s)$ son polos, todos ellos a la izquierda del segmento vertical $s = p + iy$, para todo $y \in \mathbb{R}$; donde p es un número real. Si R es arbitrariamente grande tal que todos los polos de f(s) esten dentro del contorno de *Bromwich*, además suponiendo que se cumple (1.22) y utilizando el teorema del residuo, (1.19) toma la forma

$$F(t) = \sum \text{residuos de } e^{st} f(s) \quad \text{en los polos de f(s)} \tag{1.23}$$

es decir

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} f(s) ds \tag{1.24}$$

Proposición 1 *Si una función racional $R(z) = P(z)/Q(z)$, donde $P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios y el grado de $P(z)$ es inferior por lo menos en dos al de $Q(z)$, demuestre que para cualquier arco circular Γ_R de radio R y centro en el origen*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma_R} R(z) dz = 0 \tag{1.25}$$

Prueba: Ver [ART 73].

Capítulo 2

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias con Coeficientes Matriciales de Orden Superior

En este capítulo presentamos una solución al problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} u^{(m)}(t) &= A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1} u'(t) + A_m u(t) \\ & u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \ldots, u^{(m-1)}(0) = u_{m-1} \end{aligned}$$

en términos de la solución dinámica introducida en [CLA 90a] donde A_j, $j = 1, 2, \ldots, m$ son matrices reales cuadradas de orden n y la variable u denota un vector real n dimensional o una matriz real cuadrada de orden n.

2.1. Solución Dinámica

Sea la ecuación diferencial de orden m

$$u^{(m)}(t) = A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1} u'(t) + A_m u(t) \tag{2.1}$$

considerando que $t \in \mathbb{R}$, $A_j \quad j = 1, 2, \ldots, m$ son matrices cuadradas reales de orden n, y $u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}$ vector columna.

Asociado a la ecuación (2.1), consideremos la ecuación diferencial matricial

$$U^{(m)}(t) = A_1 U^{(m-1)}(t) + A_2 U^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1} U'(t) + A_m U(t) \tag{2.2}$$

donde $U(t)$ es una matriz $n \times n$.

Llevemos (2.1) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, hagamos el cambio de variable vectorial

$$\left.\begin{array}{rcl} Z_1 & = & u(t) \\ Z_2 & = & u'(t) \\ Z_3 & = & u''(t) \\ & \vdots & \\ Z_m & = & u^{(m-1)}(t) \end{array}\right\} \qquad (2.3)$$

donde Z_i son vectores columnas $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ derivando (2.3) obtenemos:

$$\left.\begin{array}{rcccl} Z_1' & = & u'(t) & = & Z_2 \\ Z_2' & = & u''(t) & = & Z_3 \\ Z_3' & = & u'''(t) & = & Z_4 \\ & \vdots & & \vdots & \\ Z_m' & = & u^{(m)}(t) & = & A_m u(t) + A_{m-1}u'(t) + \cdots + A_1 u^{(m-1)}(t) \end{array}\right\} \qquad (2.4)$$

El sistema anterior se puede escribir en la forma:

$$\left.\begin{array}{rcccccccccccc} Z_1' & = & \mathbb{O}Z_1 & + & \mathbb{I}Z_2 & + & \mathbb{O}Z_3 & + & \mathbb{O}Z_4 & + & \cdots & + & \mathbb{O}Z_m \\ Z_2' & = & \mathbb{O}Z_1 & + & \mathbb{O}Z_2 & + & \mathbb{I}Z_3 & + & \mathbb{O}Z_4 & + & \cdots & + & \mathbb{O}Z_m \\ Z_3' & = & \mathbb{O}Z_1 & + & \mathbb{O}Z_2 & + & \mathbb{O}Z_3 & + & \mathbb{I}Z_4 & + & \cdots & + & \mathbb{O}Z_m \\ \vdots & & \vdots & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ Z_{m-1}' & = & \mathbb{O}Z_1 & + & \mathbb{O}Z_2 & + & \mathbb{O}Z_3 & + & \mathbb{O}Z_4 & + & \cdots & + & \mathbb{I}Z_m \\ Z_m' & = & A_m Z_1 & + & A_{m-1}Z_2 & + & A_{m-2}Z_3 & + & A_{m-3}Z_4 & + & \cdots & + & A_1 Z_m \end{array}\right\} \qquad (2.5)$$

donde $\mathbb{O}$ denota a una matriz cero cuadrada de orden n e $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden n las ecuaciones dadas en (2.5) se pueden escribir en forma matricial

$$\begin{pmatrix} Z_1' \\ Z_2' \\ Z_3' \\ \vdots \\ Z_{m-1}' \\ Z_m' \end{pmatrix}_{mn\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdots & A_1 \end{pmatrix}_{mn\times mn} \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ \vdots \\ Z_{m-1} \\ Z_m \end{pmatrix}_{mn\times 1} \qquad (2.6)$$

La ecuación matricial (2.6) se puede escribir en forma abreviada como

$$Z'_{mn\times 1}(t) = \mathcal{A}_{mn\times mn} Z_{mn\times 1}(t) \qquad (2.7)$$

donde $\mathcal{A}$ es una matriz real de orden $mn \times mn$ cuyos elementos son constantes al cual la llamaremos **matriz compañera** y $Z(t)$ es una función real con valores en $\mathbb{R}^{mn\times 1}$

La solución general del sistema homogeneo (2.7) es de la forma

$$Z = e^{\mathcal{A}t}W \tag{2.8}$$

donde:

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ W_3 \\ \vdots \\ W_m \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

es un vector constante cualquiera en $\mathbb{R}^{mn\times 1}$ y $W_1, W_2, \ldots, W_m$ son vectores columna que tienen n componentes.

Supongamos que

$$e^{\mathcal{A}t} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_{2,0}(t) & C_{2,1}(t) & C_{2,2}(t) & \cdots & C_{2,m-1}(t) \\ C_{3,0}(t) & C_{3,1}(t) & C_{3,2}(t) & \cdots & C_{3,m-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1,0}(t) & C_{m-1,1}(t) & C_{m-1,2}(t) & \cdots & C_{m-1,m-1}(t) \\ C_{m,0}(t) & C_{m,1}(t) & C_{m,2}(t) & \cdots & C_{m,m-1}(t) \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

donde cada elemento de la matriz dada arriba, es una matriz cuadrada de orden n, se sabe que

$$\frac{d}{dt}e^{\mathcal{A}t} = \mathcal{A}e^{\mathcal{A}t} \tag{2.11}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} C'_0(t) & C'_1(t) & C'_2(t) & \cdots & C'_{m-1}(t) \\ C'_{2,0}(t) & C'_{2,1}(t) & C'_{2,2}(t) & \cdots & C'_{2,m-1}(t) \\ C'_{3,0}(t) & C'_{3,1}(t) & C'_{3,2}(t) & \cdots & C'_{3,m-1}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C'_{m-1,0}(t) & C'_{m-1,1}(t) & C'_{m-1,2}(t) & \cdots & C'_{m-1,m-1}(t) \\ C'_{m,0}(t) & C'_{m,1}(t) & C'_{m,2}(t) & \cdots & C'_{m,m-1}(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_{2,0}(t) & C_{2,1}(t) & \cdots & C_{2,m-1}(t) \\ C_{3,0}(t) & C_{3,1}(t) & \cdots & C_{3,m-1}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1,0}(t) & C_{m-1,1}(t) & \cdots & C_{m-1,m-1}(t) \\ C_{m,0}(t) & C_{m,1}(t) & \cdots & C_{m,m-1}(t) \end{pmatrix} \tag{2.12}$$

De la ecuación obtenida, desarrollando el producto de matrices en el lado derecho e identificando elemento a elemento con la matriz izquierda, obtenemos de las primeras $m-1$ filas las siguientes igualdades

$$\begin{array}{rclrclrclcrcl} C_0' &=& C_{2,0} & C_1' &=& C_{2,1} & C_2' &=& C_{2,2} & \cdots & C_{m-1}' &=& C_{2,m-1} \\ C_{2,0}' &=& C_{3,0} & C_{2,1}' &=& C_{3,1} & C_{2,2}' &=& C_{3,2} & \cdots & C_{2,m-1}' &=& C_{3,m-1} \\ C_{3,0}' &=& C_{4,0} & C_{3,1}' &=& C_{4,1} & C_{3,2}' &=& C_{4,2} & \cdots & C_{3,m-1}' &=& C_{4,m-1} \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \\ C_{m-1,0}' &=& C_{m,0} & C_{m-1,1}' &=& C_{m,1} & C_{m-1,2}' &=& C_{m,2} & \cdots & C_{m-1,m-1}' &=& C_{m,m-1} \end{array} \tag{2.13}$$

y del desarrollo de la última fila tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} C_{m,0}' &=& A_mC_0 + A_{m-1}C_{2,0} + A_{m-2}C_{3,0} + \cdots + A_1C_{m,0} \\ C_{m,1}' &=& A_mC_1 + A_{m-1}C_{2,1} + A_{m-2}C_{3,1} + \cdots + A_1C_{m,1} \\ C_{m,2}' &=& A_mC_2 + A_{m-1}C_{2,2} + A_{m-2}C_{3,2} + \cdots + A_1C_{m,2} \\ \vdots & & \\ C_{m,m-1}' &=& A_mC_{m-1} + A_{m-1}C_{2,m-1} + A_{m-2}C_{3,m-1} + \cdots + A_1C_{m,m-1} \end{array}\right\} \tag{2.14}$$

Utilizando (2.13) en (2.14) se obtiene:

$$\begin{array}{rcl} C_0^{(m)} &=& A_mC_0 + A_{m-1}C_0' + A_{m-2}C_0'' + \cdots + A_1C_0^{(m-1)} \\ C_1^{(m)} &=& A_mC_1 + A_{m-1}C_1' + A_{m-2}C_1'' + \cdots + A_1C_1^{(m-1)} \\ \vdots & & \\ C_{m-1}^{(m)} &=& A_mC_{m-1} + A_{m-1}C_{m-1}' + A_{m-2}C_{m-1}'' + \cdots + A_1C_{m-1}^{(m-1)} \end{array} \tag{2.15}$$

del sistema de ecuaciones obtenidas se observa que C_0, C_1, C_2, ..., C_{m-1} son soluciones de (2.2).

Utilizando (2.13) en (2.10) podemos escribir e^{At} como:

$$e^{\mathcal{A}t} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

además

$$e^{\mathcal{A}t} = \mathrm{I} \quad \text{para} \quad t = 0 \tag{2.17}$$

donde I es la matriz identidad de orden mn. En (2.16) hacer $t = 0$ y utilizando (2.17) tenemos:

$$\left.\begin{array}{ccccc} C_0(0) = \mathbb{I} & C_0'(0) = \mathbb{O} & C_0''(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_0^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ C_1(0) = \mathbb{O} & C_1'(0) = \mathbb{I} & C_1''(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_1^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ C_2(0) = \mathbb{O} & C_0'(0) = \mathbb{O} & C_2''(0) = \mathbb{I} & \cdots & C_2^{(m-1)}(0) = \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1}(0) = \mathbb{O} & C_{m-1}'(0) = \mathbb{O} & C_{m-1}''(0) = \mathbb{O} & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(0) = \mathbb{I} \end{array}\right\} \tag{2.18}$$

Las relaciones halladas se pueden expresar en forma compacta de la siguiente manera

$$C_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}\mathbb{I} \tag{2.19}$$

donde

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$$

$$k, j = 0, 1, \ldots, m-1$$

e $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden n.

Proposición 2 *Todos los vectores columnas de las matrices $C_0(t)$, $C_1(t)$,..., $C_{m-1}(t)$ son linealmente independientes.*

Prueba:

Sea

$$C_{j\,i}(t) \tag{2.20}$$

el vector columna, del lugar i esimo de la matriz $C_j(t)$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$

Sea la combinación lineal:

$$\alpha_{1,0}C_{0\,1}(t)+\alpha_{2,0}C_{0\,2}(t)+\cdots+\alpha_{n,0}C_{0\,n}(t)+\alpha_{1,1}C_{1\,1}(t)+\alpha_{2,1}C_{1\,2}(t)+\cdots+\alpha_{n,1}C_{1\,n}(t)+$$
$$\alpha_{1,2}C_{2\,1}(t)+\alpha_{2,2}C_{2\,2}(t)+\cdots+\alpha_{n,2}C_{2\,n}(t)+\alpha_{1,3}C_{3\,1}(t)+\alpha_{2,3}C_{3\,2}(t)+\cdots+\alpha_{n,3}C_{3\,n}(t)+$$
$$\cdots+\alpha_{1,m-1}C_{m-1\,1}(t)+\alpha_{2,m-1}C_{m-1\,2}(t)+\cdots+\alpha_{n,m-1}C_{m-1\,n}(t)=\bar{0}_{n\times 1}$$

donde $\alpha_{i,j}$ son escalares e $i=1,2,3,\ldots,n \quad j=0,1,2,\ldots,m-1$
La combinación lineal dada se puede escribir en forma compacta de la siguiente forma

$$C_0(t)\cdot\alpha_0+C_1(t)\cdot\alpha_1+\cdots+C_{m-1}(t)\cdot\alpha_{m-1}=\bar{0}_{n\times 1} \tag{2.21}$$

donde

$$\alpha_i=\begin{pmatrix}\alpha_{1,i}\\ \alpha_{2,i}\\ \alpha_{3,i}\\ \vdots\\ \alpha_{n,i}\end{pmatrix} \qquad i=0,1,\ldots,m-1$$

Haciendo $t=0$ en (2.21)

$$C_0(0)\cdot\alpha_0+C_1(0)\cdot\alpha_1+\cdots+C_{m-1}(0)\cdot\alpha_{m-1}=\bar{0}_{n\times 1}$$

luego utilizando (2.19) en la expresión hallada, tenemos

$$\mathbb{I}\cdot\alpha_0+\mathbb{O}\cdot\alpha_1+\cdots+\mathbb{O}\cdot\alpha_{m-1}=\bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \alpha_0 \;=\; \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix}\alpha_{1,0}\\ \alpha_{2,0}\\ \alpha_{3,0}\\ \vdots\\ \alpha_{n,0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

es decir $\alpha_{i,0}=0 \quad \forall\, i=1,2,3,\ldots,n$
Ahora derivemos una vez (2.21)

$$C_0'(t)\cdot\alpha_0+C_1'(t)\cdot\alpha_1+\cdots+C_{m-1}'(t)\cdot\alpha_{m-1}=\bar{0}_{n\times 1}$$

enseguida haciendo $t = 0$ y utilizando (2.19) en la expresión hallada, tenemos

$$\mathbb{O} \cdot \alpha_0 + \mathbb{I} \cdot \alpha_1 + \mathbb{O} \cdot \alpha_2 + \cdots + \mathbb{O} \cdot \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} \\ \alpha_{2,1} \\ \alpha_{3,1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\alpha_{i,1} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Ahora derivamos dos veces (2.21)

$$C_0''(t) \cdot \alpha_0 + C_1''(t) \cdot \alpha_1 + \cdots + C_{m-1}''(t) \cdot \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

enseguida haciendo $t = 0$ y utilizando (2.19) en la expresión hallada, tenemos

$$\mathbb{O} \cdot \alpha_0 + \mathbb{O} \cdot \alpha_1 + \mathbb{I} \cdot \alpha_2 + \cdots + \mathbb{O} \cdot \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \alpha_2 = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \alpha_{3,2} \\ \vdots \\ \alpha_{n,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\alpha_{i,2} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n$

Siguiendo el mismo proceso, llegamos a derivar $(m-1)$ veces (2.21)

$$C_0^{(m-1)}(t) \cdot \alpha_0 + C_1^{(m-1)}(t) \cdot \alpha_1 + \cdots + C_{m-1}^{(m-1)}(t) \cdot \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

enseguida haciendo $t = 0$ y utilizando (2.19) en la expresión hallada, tenemos

$$\mathbb{O} \cdot \alpha_0 + \mathbb{O} \cdot \alpha_1 + \mathbb{O} \cdot \alpha_2 + \cdots + \mathbb{I} \cdot \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \alpha_{m-1} = \bar{0}_{n\times 1}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_{1,m-1} \\ \alpha_{2,m-1} \\ \alpha_{3,m-1} \\ \vdots \\ \alpha_{n,m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

es decir $\alpha_{i,m-1} = 0 \quad \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n$
En consecuencia

$$\alpha_{i,j} = 0 \qquad\qquad \forall\, i = 1, 2, 3, \ldots, n \quad \forall\, j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

Por lo tanto los vectores columnas de las matrices $C_0(t)$, $C_1(t)$, ..., $C_{m-1}(t)$ son linealmente independientes.

Proposición 3 *Las matrices $C_0(t), C_1(t), \ldots, C_{m-1}(t)$ son linealmente independientes.*

Prueba:
Sea la combinacion lineal

$$\alpha_0 C_0(t) + \alpha_1 C_1(t) + \alpha_2 C_2(t) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}(t) = \mathbb{O} \tag{2.22}$$

donde $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{m-1}$ son escalares.
Evaluando en $t = 0$ a la expresión dada, tenemos:

$$\alpha_0 C_0(0) + \alpha_1 C_1(0) + \alpha_2 C_2(0) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}(0) = \mathbb{O}$$

utilizando (2.19)

$$\alpha_0 \mathbb{I} + \mathbb{O} + \cdots + \mathbb{O} = \mathbb{O} \qquad \Longrightarrow \alpha_0 = 0$$

Derivando una vez (2.22) tenemos

$$\alpha_0 C_0'(t) + \alpha_1 C_1'(t) + \alpha_2 C_2'(t) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}'(t) = \mathbb{O}$$

evaluando en $t = 0$ a la expresión dada, tenemos:

$$\alpha_0 C_0'(0) + \alpha_1 C_1'(0) + \alpha_2 C_2'(0) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}'(0) = \mathbb{O}$$

utilizando (2.19)

$$\mathbb{O} + \alpha_1 \mathbb{I} + \mathbb{O} + \cdots + \mathbb{O} = \mathbb{O} \qquad \Longrightarrow \alpha_1 = 0$$

Derivando dos veces (2.22) tenemos

$$\alpha_0 C_0''(t) + \alpha_1 C_1''(t) + \alpha_2 C_2''(t) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}''(t) = \mathbb{O}$$

evaluando en $t = 0$ a la expresión dada, tenemos:

$$\alpha_0 C_0''(0) + \alpha_1 C_1''(0) + \alpha_2 C_2''(0) + \cdots + \alpha_{m-1} C_{m-1}''(0) = \mathbb{O}$$

utilizando (2.19)

$$\mathbb{O} + \mathbb{O} + \alpha_2 \mathbb{I} + \cdots + \mathbb{O} = \mathbb{O} \qquad \Longrightarrow \alpha_2 = 0$$

Siguiendo sucesivamente el mismo procedimiento obtenemos:

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0$$

Proposición 4 *Todos los vectores columnas de las matrices $C_0(t), C_1(t), \ldots, C_{m-1}(t)$ son soluciones de la ecuación diferencial (2.1).*

Prueba:
De (2.15) tenemos que

$$C_j^{(m)} = A_m C_j + A_{m-1} C_j' + A_{m-2} C_j'' + \cdots + A_1 C_j^{(m-1)} \tag{2.23}$$

donde $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$
Considerando (2.20) en la ecuación (2.23), tenemos

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} C_{j\,1}^{(m)}(t) & C_{j\,2}^{(m)}(t) & \cdots & C_{j\,n}^{(m)}(t) \end{bmatrix} &= A_m \begin{bmatrix} C_{j\,1}(t) & C_{j\,2}(t) & \cdots & C_{j\,n}(t) \end{bmatrix} \\
&\quad + A_{m-1} \begin{bmatrix} C_{j\,1}'(t) & C_{j\,2}'(t) & \cdots & C_{j\,n}'(t) \end{bmatrix} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + A_1 \begin{bmatrix} C_{j\,1}^{(m-1)}(t) & C_{j\,2}^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{j\,n}^{(m-1)}(t) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

operando el lado derecho de la ecuación, tenemos

$$\begin{bmatrix} C_{j\,1}^{(m)}(t) & C_{j\,2}^{(m)}(t) & \cdots & C_{j\,n}^{(m)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L1 & L2 & \cdots & Ln \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned}
L1 &= A_m C_{j\,1}(t) + A_{m-1} C_{j\,1}'(t) + \cdots + A_1 C_{j\,1}^{(m-1)}(t) \\
L2 &= A_m C_{j\,2}(t) + A_{m-1} C_{j\,2}'(t) + \cdots + A_1 C_{j\,2}^{(m-1)}(t) \\
&\vdots \\
Ln &= A_m C_{j\,n}(t) + A_{m-1} C_{j\,n}'(t) + \cdots + A_1 C_{j\,n}^{(m-1)}(t)
\end{aligned}$$

e igualando columna a columna, conseguimos las siguientes ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{rclclclcl} C_{j\,1}^{(m)}(t) & = & A_m C_{j\,1}(t) & + & A_{m-1}C'_{j\,1}(t) & + & \cdots & + & A_1 C_{j\,1}^{(m-1)}(t) \\ C_{j\,2}^{(m)}(t) & = & A_m C_{j\,2}(t) & + & A_{m-1}C'_{j\,2}(t) & + & \cdots & + & A_1 C_{j\,2}^{(m-1)}(t) \\ & \vdots & & & & & & & \\ C_{j\,n}^{(m)}(t) & = & A_m C_{j\,n}(t) & + & A_{m-1}C'_{j\,n}(t) & + & \cdots & + & A_1 C_{j\,n}^{(m-1)}(t) \end{array}\right\} \tag{2.24}$$

De aqui concluimos que las columnas $C_{j\,i}(t)$, donde $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ $j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$ son soluciones de (2.1).

Proposición 5 *Los vectores columnas de $C_0(t), C_1(t), \ldots, C_{m-1}(t)$ generan el espacio solución de la ecuación diferencial (2.1).*

Prueba:

Sea el espacio solución

$$V = \{u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \; / \quad u^{(m)}(t) = A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1}u'(t) + A_m u(t)\}$$

y

$$L = \{l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times 1} \; / \; l(t) = C_0(t)\beta_0 + C_1(t)\beta_1 + C_2(t)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}(t)\beta_{m-1}\} \tag{2.25}$$

donde

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{1,i} \\ \beta_{2,i} \\ \vdots \\ \beta_{n,i} \end{pmatrix} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

y $\beta_{j,i}$ son constantes arbitrarias $j = 1, 2, \ldots n$. $\quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Debemos probar que $V = L$

Primero veamos que $L \subset V$

Sea $u \in L$, entonces

$$u(t) = C_0(t)\beta_0 + C_1(t)\beta_1 + C_2(t)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}(t)\beta_{m-1} \tag{2.26}$$

reemplazando (2.26) en la ecuación diferencial (2.1)

$$\begin{array}{rlclclcl} C_0^{(m)}(t)\beta_0 + & C_1^{(m)}(t)\beta_1 & + & C_2^{(m)}(t)\beta_2 & + & \cdots & + & C_{m-1}^{(m)}(t)\beta_{m-1} \\ = & A_1 C_0^{(m-1)}(t)\beta_0 & + & A_1 C_1^{(m-1)}(t)\beta_1 & + & \cdots & + & A_1 C_{m-1}^{(m-1)}(t)\beta_{m-1} \\ + & A_2 C_0^{(m-2)}(t)\beta_0 & + & A_2 C_1^{(m-2)}(t)\beta_1 & + & \cdots & + & A_2 C_{m-1}^{(m-2)}(t)\beta_{m-1} \\ \vdots & & & & & \vdots & & \\ + & A_{m-1}C'_0(t)\beta_0 & + & A_{m-1}C'_1(t)\beta_1 & + & \cdots & + & A_{m-1}C'_{m-1}(t)\beta_{m-1} \\ + & A_m C_0(t)\beta_0 & + & A_m C_1(t)\beta_1 & + & \cdots & + & A_{m-1}C_{m-1}(t)\beta_{m-1} \end{array}$$

y utilizando (2.15) en la part derecha de la igualdad

$$= \quad C_0^{(m)}(t)\beta_0 \quad + \quad C_1^{(m)}(t)\beta_1 \quad + \quad \cdots \quad + \quad C_{m-1}^{(m)}(t)\beta_{m-1}$$

hemos probado que (2.26) satisface la ecuación diferencial (2.1), en consecuencia $u \in V$.
Por lo tanto hemos probado que $L \subset V$.
Ahora veamos que $V \subset L$.
Sea $u \in V$, veamos que u se puede escribir como una combinación lineal

$$u(t) = C_0(t)\beta_0 + C_1(t)\beta_1 + C_2(t)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}(t)\beta_{m-1} \tag{2.27}$$

tenemos que hallar $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{m-1}$ en función de u.
En (2.27) haciendo $t = 0$ y utilizando (2.19)

$$u(0) = C_0(0)\beta_0 + C_1(0)\beta_1 + C_2(0)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}(0)\beta_{m-1}$$

$$u(0) = \mathbb{I}\beta_0 + \mathbb{O}\beta_1 + \mathbb{O}\beta_2 + \cdots + \mathbb{O}\beta_{m-1}$$

$$u(0) = \beta_0$$

Derivando una vez (2.27)

$$u'(t) = C_0'(t)\beta_0 + C_1'(t)\beta_1 + C_2'(t)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}'(t)\beta_{m-1}$$

en la expresión hallada hacer $t = 0$ y utilizando (2.19)

$$u'(0) = C_0'(0)\beta_0 + C_1'(0)\beta_1 + C_2'(0)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}'(0)\beta_{m-1}$$

$$u'(0) = \mathbb{O}\beta_0 + \mathbb{I}\beta_1 + \mathbb{O}\beta_2 + \cdots + \mathbb{O}\beta_{m-1}$$

$$u'(0) = \beta_1$$

Asi sucesivamente, se obtiene $\beta_2, \ldots, \beta_{m-2}$.
Derivando $m - 1$ veces (2.27)

$$u^{(m-1)}(t) = C_0^{(m-1)}(t)\beta_0 + C_1^{(m-1)}(t)\beta_1 + C_2^{(m-1)}(t)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}^{(m-1)}(t)\beta_{m-1}$$

en la expresión hallada hacer $t = 0$ y utilizando (2.19)

$$u^{(m-1)}(0) = C_0^{(m-1)}(0)\beta_0 + C_1^{(m-1)}(0)\beta_1 + C_2^{(m-1)}(0)\beta_2 + \cdots + C_{m-1}^{(m-1)}(0)\beta_{m-1}$$

$$u^{(m-1)}(0) = \mathbb{O}\beta_0 + \mathbb{O}\beta_1 + \mathbb{O}\beta_2 + \cdots + \mathbb{I}\beta_{m-1}$$

$$u^{(m-1)}(0) = \beta_{m-1}$$

Por lo tanto

$$u^{(i)}(0) = \beta_i \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

luego (2.27) se puede escribir como

$$u(t) = C_0(t)u(0) + C_1(t)u'(0) + \cdots + C_{m-1}(t)u^{(m-1)}(0)$$

lu go hemos probado que $u \in L$
Por lo tanto

$$V \subset L$$

Finalmente probamos que

$$V = L$$

Obs:
La dimensión del espacio solución V es mn, es decir

$$dim(L) = mn = dim(V)$$

esto se deduce de las proposiciones (2) y (5)

Corolario 1 *Sea el vector u igual a la combinación lineal de los vectores columnas de las matrices $C_0(t)$, $C_1(t)$, ...,$C_{m-1}(t)$ es decir.*

$$u = C_0(t)\beta_0 + C_1(t)\beta_1 + \cdots + C_{m-1}(t)\beta_{m-1}$$

donde

$$\beta_i = \begin{pmatrix} \beta_{1,i} \\ \beta_{2,i} \\ \vdots \\ \beta_{n,i} \end{pmatrix} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

y $\beta_{j,i}$ son escalares arbitrarias $j = 1, 2, \ldots, n.$ $\quad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1.$
entonces u es solución general es decir contiene todas las solucione de (2.1).

Prueba:
Utilizando la proposi ión (5) s oncluy qu u s solu ión g n ral d (2. 1).

Proposición 6 *Las matrices $C_0(t)$ $C_1(t), \ldots, C_{m-1}(t)$ generan el espacio solución de la ecuación diferencial matricial (2.2).*

Prueba:
Análoga a la proposición (5).

Obs
La matric s $C_0(t), C_1(t) \ldots, C_{m-1}(t)$ s llaman solucion s fundamentales de la cuación (2.2).

Notación
La olución $C_{m-1}(t)$ ra d notada por $D(t)$ y s ra llamada solución dinámica de (2.1).

Definición 2.1.1 *La solución matricial del problema de valor inicial*

$$\left.\begin{array}{l} D^{(m)}(t) = A_1 D^{(m-1)}(t) + A_2 D^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1} D'(t) + A_m D(t) \\ D(0) = \mathbb{O} \quad D'(0) = \mathbb{O} \quad D''(0) = \mathbb{O} \quad \cdots \quad D^{(m-1)}(0) = \mathbb{I} \end{array}\right\} \tag{2.28}$$

se llama solución dinámica asociada a la ecuación (2.1) donde A_j $j = 1, 2, \ldots, m$ son matrices dadas en (2.1), donde $\mathbb{I}$, $\mathbb{O}$ son la matriz identidad y la matriz cero de orden n.

2.2. Solución Dinámica como serie de potencia

De (2.16) tenemos

$$e^{\mathcal{A}t} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

y además sabemos $e^{\mathcal{A}t} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \frac{t^k}{k!}$

Por lo tanto

$$e^{\mathcal{A}t} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}^k \frac{t^k}{k!} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

La potencia k sima de la matriz compañera $\mathcal{A}$ se puede escribir como:

$$\mathcal{A}^k = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & \cdots & A_1 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} C_{k,0} & C_{k,1} & \cdots & C_{k,m-1} \\ C_{k_1,0} & C_{k_1,1} & \cdots & C_{k_1,m-1} \\ C_{k_2,0} & C_{k_2,1} & \cdots & C_{k_2,m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{k_{m-1},0} & C_{k_{m-1},1} & \cdots & C_{k_{m-1},m-1} \end{pmatrix} \tag{2.30}$$

Las matrices $C_j(t)$ donde $j = 1, 2, \ldots, m-1$ se pueden escribir como una serie de potencias para ello consideramos la primera fila de la matriz dada en (2.29) y tomando en cuenta la primera fila de la matriz de la derecha de (2.30), tenemos

$$\left.\begin{array}{rcl} C_0(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_{k,0}\frac{t^k}{k!} \\ C_1(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_{k,1}\frac{t^k}{k!} \\ C_2(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_{k,2}\frac{t^k}{k!} \\ & \vdots & \\ C_{m-1}(t) & = & \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} C_{k,m-1}\frac{t^k}{k!} \end{array}\right\} \tag{2.31}$$

las ecuaciones anteriores se pueden escribir en forma compacta como

$$C_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,j}\frac{t^k}{k!} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.32}$$

Cabe recordar que la matriz $C_{m-1}(t)$ satisface el problema de valor inicial dado en (2.28) esto se deduce de la última relación hallada en (2.15) y de (2.19) para $j = m-1$. Por lo tanto $C_{m-1}(t)$ se llama solución dinámica asociada a la ecuación (2.1), la solución $C_{m-1}(t)$ ha sido denotada por $D(t)$ es decir

$$D(t) = C_{m-1}(t) \tag{2.33}$$

de (2.32) para $j = m-1$, tenemos

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,m-1}\frac{t^k}{k!} \tag{2.34}$$

Derivando $D(t)$, n veces

$$D^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k,m-1}(k)(k-1)(k-2)\cdots(k-n+1)\frac{t^{k-n}}{k!}$$

$$D^{(n)}(t) = \sum_{k=n}^{\infty} C_{k,m-1} \frac{t^{k-n}}{(k-n)!} \tag{2.35}$$

evaluando esta última expresión en $t = 0$ obtenemos

$$D^{(n)}(0) = C_{n,m-1}$$

el cual puede escribirse como

$$D^{(k)}(0) = C_{k,m-1} \tag{2.36}$$

Utilizando (2.36) en (2.34) tenemos

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D^{(k)}(0) \frac{t^k}{k!} \tag{2.37}$$

denotando

$$D_k = D^{(k)}(0) \tag{2.38}$$

llamado, **coeficientes de la solución dinámica**.

Podemos escribir la solución dinámica como

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!} \tag{2.39}$$

de (2.36) y (2.38) tenemos que

$$D_k = C_{k,m-1} \tag{2.40}$$

Afirmación:

Dada la notación para las filas de la matriz de la derecha de (2.30) se cumple:

$$C_{i,i} = \mathbb{I} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.41}$$

$$C_{m,j} = A_{m-j} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.42}$$

$$C_{k,j} = \mathbb{O} \qquad k, j = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \quad k \neq j \tag{2.43}$$

Prueba:

Haciendo $k = 0$ en (2.30) y considerando $\mathcal{A}^0 = \mathrm{I}$, donde I es la matriz identidad de orden mn, tenemos

$$\mathcal{A}^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} & C_{0,2} & \cdots & C_{0,m-1} \\ C_{0_1,0} & C_{0_1,1} & C_{0_1,2} & \cdots & C_{0_1,m-1} \\ C_{0_2,0} & C_{0_2,1} & C_{0_2,2} & \cdots & C_{0_2,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{0_{m-2},0} & C_{0_{m-2},1} & C_{0_{m-2},2} & \cdots & C_{0_{m-2},m-2} \\ C_{0_{m-1},0} & C_{0_{m-1},1} & C_{0_{m-1},2} & \cdots & C_{0_{m-1},m-1} \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

Observando las primeras filas, podemos decir

$$C_{0,0} = \mathbb{I} \quad C_{0,1} = C_{0,2} = \cdots = C_{0,m-1} = \mathbb{O} \tag{2.45}$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden n y $\mathbb{O}$ es la matriz cero de orden n.
Analicemos un caso particular para luego generalizar.
Si $m = 4$ la matriz $\mathcal{A}$ seria

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

y utilizando (2.30) tenemos

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{1_1,0} & C_{1_1,1} & C_{1_1,2} & C_{1_1,3} \\ C_{1_2,0} & C_{1_2,1} & C_{1_2,2} & C_{1_2,3} \\ C_{1_3,0} & C_{1_3,1} & C_{1_3,2} & C_{1_3,3} \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

Luego, haciendo el producto matricial

$$\mathcal{A} \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^2, \quad \mathcal{A}^2 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^3, \quad \mathcal{A}^3 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^4, \quad \mathcal{A}^4 \cdot \mathcal{A} = \mathcal{A}^5$$

y utilizando (2.30) tenemos

$$\mathcal{A}^2 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \\ A_1 A_4 & A_4 + A_1 A_3 & A_3 + A_1 A_2 & A_2 + A_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{2_1,0} & C_{2_1,1} & C_{2_1,2} & C_{2_1,3} \\ C_{2_2,0} & C_{2_2,1} & C_{2_2,2} & C_{2_2,3} \\ C_{2_3,0} & C_{2_3,1} & C_{2_3,2} & C_{2_3,3} \end{pmatrix} \tag{2.48}$$

observamos que la segunda fila de la matriz $\mathcal{A}$ dada en (2.46) pasa a ser la primera fila de la matriz $\mathcal{A}^2$ dada en (2.48)

$$\mathcal{A}^3 = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \\ A_1 A_4 & A_4 + A_1 A_3 & A_3 + A_1 A_2 & A_2 + A_1^2 \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\ C_{3_1,0} & C_{3_1,1} & C_{3_1,2} & C_{3_1,3} \\ C_{3_2,0} & C_{3_2,1} & C_{3_2,2} & C_{3_2,3} \\ C_{3_3,0} & C_{3_3,1} & C_{3_3,2} & C_{3_3,3} \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

observamos que la tercera fila de la matriz $\mathcal{A}$ dada en (2.46) pasa a ser la primera fila de la matriz $\mathcal{A}^3$ dada en (2.49)

$$\mathcal{A}^4 = \begin{pmatrix} A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \\ A_1A_4 & A_4 + A_1A_3 & A_3 + A_1A_2 & A_2 + A_1^2 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} \\ C_{4_1,0} & C_{4_1,1} & C_{4_1,2} & C_{4_1,3} \\ C_{4_2,0} & C_{4_2,1} & C_{4_2,2} & C_{4_2,3} \\ C_{4_3,0} & C_{4_3,1} & C_{4_3,2} & C_{4_3,3} \end{pmatrix} \tag{2.50}$$

observamos que la cuarta fila de la matriz $\mathcal{A}$ dada en (2.46) pasa a ser la primera fila de la matriz $\mathcal{A}^4$ dada en (2.50)

$$\mathcal{A}^5 = \begin{pmatrix} A_1A_4 & A_4 + A_1A_3 & A_3 + A_1A_2 & A_2 + A_1^2 \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \\ - & - & - & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{5,0} & C_{5,1} & C_{5,2} & C_{5,3} \\ C_{5_1,0} & C_{5_1,1} & C_{5_1,2} & C_{5_1,3} \\ C_{5_2,0} & C_{5_2,1} & C_{5_2,2} & C_{5_2,3} \\ C_{5_3,0} & C_{5_3,1} & C_{5_3,2} & C_{5_3,3} \end{pmatrix} \tag{2.51}$$

Luego observando la primera fila de (2.47) (2.48)(2.49) y (2.50) podemos escribir (2.46) como

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ A_4 & A_3 & A_2 & A_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} \\ C_{4,0} & C_{4,1} & C_{4,2} & C_{4,3} \end{pmatrix} \tag{2.52}$$

de (2.52) podemos decir

$$C_{1,1} = C_{2,2} = C_{3,3} = \mathbb{I}$$

y $C_{0,0} = \mathbb{I}$ debido a (2.45), es decir

$$C_{i,i} = \mathbb{I} \qquad i = 0, 1, 2, 3 \tag{2.53}$$

donde $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden n, además la última fila de $\mathcal{A}$ se denota

$$C_{4,0} = A_4 \quad C_{4,1} = A_3 \quad C_{4,2} = A_2 \quad C_{4,3} = A_1$$

osea

$$C_{4,j} = A_{4-j} \qquad j = 0, 1, 2, 3 \tag{2.54}$$

El resto de elementos de $\mathcal{A}$ se denota

$$C_{k,j} = \mathbb{O} \qquad k = 1, 2, 3 \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad k \neq j$$

Para $k = 0$, tenemos $C_{0,j} = \mathbb{O} \quad j = 1, 2, 3$ debido a (2.45) por lo tanto

$$C_{k,j} = \mathbb{O} \quad j, k = 0, 1, 2, 3 \quad k \neq j \tag{2.55}$$

donde $\mathbb{O}$ es la matriz cero de orden n.

Generalizando:
Haciendo $k = 1$ en (2.30) y por el resultado obtenido en (2.52) tenemos

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdots & A_1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} C_{1,0} & C_{1,1} & C_{1,2} & C_{1,3} & \cdots & C_{1,m-1} \\ C_{2,0} & C_{2,1} & C_{2,2} & C_{2,3} & \cdots & C_{2,m-1} \\ C_{3,0} & C_{3,1} & C_{3,2} & C_{3,3} & \cdots & C_{3,m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m-1,0} & C_{m-1,1} & C_{m-1,2} & C_{m-1,3} & \cdots & C_{m-1,m-1} \\ C_{m,0} & C_{m,1} & C_{m,2} & C_{m,3} & \cdots & C_{m,m-1} \end{pmatrix}$$

Siguiendo el mismo procedimiento realizado para obtener (2.53) (2.54) y (2.55) tenemos

$$C_{i,i} = \mathbb{I} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

$$C_{m,j} = A_{m-j} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

$$C_{k,j} = \mathbb{O} \qquad j, k = 0, 1, 2, 3, \ldots, m-1 \quad j \neq k$$

Afirmación:

$$C_{k,j} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i} C_{k+i-m,j} \tag{2.56}$$

$$k = m, m+1, m+2, \ldots$$

$$j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

Prueba:
Sabemos de (2.32) que

$$C_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k,j}\frac{t^k}{k!} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

Derivando i veces, tenemos que:

$$C_j^{(i)}(t) = \sum_{k=i}^{\infty} C_{k,j}\frac{t^{(k-i)}}{(k-i)!}$$

esto es:

$$C_j^{(i)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+i,j}\frac{t^k}{k!} \tag{2.57}$$

Por otro lado de (2.2) se tiene

$$U^{(m)}(t) = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}U^{(i)}(t) \tag{2.58}$$

reemplazando (2.57) en (2.58) se tiene que

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+m,j}\frac{t^k}{k!} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+i,j}\frac{t^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+m,j}\frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}C_{k+i,j}\frac{t^k}{k!}$$

luego

$$C_{k+m,j} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}C_{k+i,j} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.59}$$

$$C_{k,j} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i}C_{k+i-m,j} \qquad k = m, m+1, m+2, \ldots \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

2.3. Los coeficientes D_k de la Solución Dinámica

Lema 2.1 *Si $j = 0, 1, \ldots, m-1$ tenemos*

$$C_{k,j} = \sum_{i=0}^{j} D_{k-j-1+i}A_{m-i} \quad k \geq m \tag{2.60}$$

donde los coeficientes D_k de la solución dinámica satisfacen

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} A_jD_{k+m-j} = \sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j}A_j \quad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.61}$$

$$D_0 = D_1 = D_2 = \cdots = D_{m-2} = \mathbb{O} \qquad D_{m-1} = \mathbb{I}$$

Prueba:

Hagamos la prueba de (2.60) por inducción matemática sobre k.

Sea $j \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$

Para $k = m$ veamos que se cumpla

$$C_{m,j} = \sum_{i=0}^{j} D_{m-j-1+i} A_{m-i} \tag{2.62}$$

Desarrollemos el lado derecho de la expresión (2.62)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{j} D_{m-j-1+i} A_{m-i} &= \sum_{i=0}^{j} C_{m-j-1+i,m-1} A_{m-i} \qquad \text{debido a (2.40)} \\
&= \sum_{i=0}^{j-1} C_{m-j-1+i,m-1} A_{m-i} + C_{m-1,m-1} A_{m-j} \\
&= A_{m-j} \\
&= C_{m,j}
\end{aligned}$$

pues $C_{m-1,m-1} = \mathbb{I}$ y $C_{m-j-1+i,m-1} = \mathbb{O}$ debido a (2.41) y (2.43) respectivamente y ademas $A_{m-j} = C_{m,j}$ por (2.42), con lo cual queda probado la validez de (2.62).

Asumiendo como **hipótesis de inducción** que para k entero fijo y todo entero r tal que $m \leq r \leq k$ se cumple que.

$$C_{r,j} = \sum_{i=0}^{j} D_{r-j-1+i} A_{m-i} \tag{2.63}$$

probaremos que si $r = k+1$, se cumple

$$C_{k+1,j} = \sum_{i=0}^{j} D_{k-j+i} A_{m-i}$$

veamos

Sabemos $C_{k+1,j} = \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i} C_{k+1+i-m,j}$ debido a (2.56)

$$\begin{aligned}
C_{k+1,j} &= \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i} \sum_{s=0}^{j} D_{k+1+i-m-j-1+s} A_{m-s} \qquad \text{utilizando (2.63)} \\
&= \sum_{s=0}^{j} \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i} D_{k+i-m-j+s} A_{m-s} \\
&= \sum_{s=0}^{j} \sum_{i=0}^{m-1} A_{m-i} C_{k+i-m-j+s,m-1} A_{m-s} \qquad \text{por (2.40)} \\
&= \sum_{s=0}^{j} C_{k-j+s,m-1} A_{m-s} \qquad \text{por (2.56)}
\end{aligned}$$

donde a la variable j se le asigna $m-1$ y a la variable k se le asigna $k-j+s$

$$C_{k+1,j} = \sum_{s=0}^{j} D_{k-j+s} A_{m-s} \qquad \text{por } (2.40)$$

luego queda probada la validez de (2.60), ahora hagamos la prueba de (2.61).
Sabemos por (2.39), que

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!}$$

reemplazando $D(t)$ en (2.1) tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=m}^{\infty} D_k \frac{t^{k-m}}{(k-m)!} &= A_1 \sum_{k=m-1}^{\infty} D_k \frac{t^{(k-m+1)}}{(k-m+1)!} + A_2 \sum_{k=m-2}^{\infty} D_k \frac{t^{(k-m+2)}}{(k-m+2)!} \\
&\quad + \cdots + A_m \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m} \frac{t^k}{(k)!} &= A_1 \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m-1} \frac{t^k}{k!} + A_2 \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m-2} \frac{t^k}{k!} \\
&\quad + \cdots + A_m \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!}
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (A_1 D_{k+m-1} + A_2 D_{k+m-2} + \cdots + A_m D_k) \frac{t^k}{k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j}) \frac{t^k}{k!}$$

luego

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.64}$$

Hacemos $j = m-1$ en (2.60) obtenemos que

$$\begin{aligned}
C_{k,m-1} &= \sum_{i=0}^{m-1} D_{k-m+i} A_{m-i} && k \geq m \\
C_{k+m,m-1} &= \sum_{i=0}^{m-1} D_{k+i} A_{m-i} && k = 0, 1, 2, \ldots \\
D_{k+m} &= \sum_{i=0}^{m-1} D_{k+i} A_{m-i} && \text{por } (2.40)
\end{aligned}$$

$$D_{k+m} = D_k A_m + D_{k+1} A_{m-1} + D_{k+2} A_{m-2} + \cdots + D_{k+m-2} A_{m-(m-2)} + D_{k+m-1} A_{m-(m-1)}$$

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j}A_j \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.65}$$

De (2.64) y (2.65) tenemos que:

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j} = \sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j}A_j \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

En (2.43) hacemos $j = m - 1$, obtenemos que

$$\begin{aligned} C_{k,m-1} &= \mathbb{O} & & k = 0, 1, 2, \ldots, m-2 \\ D_k &= \mathbb{O} & & k = 0, 1, 2, \ldots, m-2 \qquad \text{por (2.40)} \end{aligned}$$

osea

$$D_0 = D_1 = D_2 = \cdots = D_{m-2} = \mathbb{O}$$

De (2.41) obtenemos $C_{m-1,m-1} = \mathbb{I}$ para $i = m - 1$, luego $D_{m-1} = \mathbb{I}$ por (2.40)

2.4. La Solución Dinámica es solución a la derecha y a la izquierda de la ecuación diferencial

Proposición 7 *La solución dinámica es solución a la derecha y a la izquierda de la ecuación diferencial lineal de orden m, esto es*

$$D^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j D^{(m-j)}(t) = \sum_{j=1}^{m} D^{(m-j)}(t)A_j \tag{2.66}$$

Prueba:

La parte izquierda de (2.66) es válida por definición de solución dinámica esto es:

$$D^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j D^{(m-j)}(t)$$

en general (2.66) se puede obtener de la siguiente manera, sabemos por (2.39) que

$$D(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \frac{t^k}{k!}$$

derivando m veces la expresión dada tenemos

$$D^{(m)}(t) = \sum_{k=m}^{\infty} D_k \frac{t^{(k-m)}}{(k-m)!}$$

que se puede escribir como

$$D^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m} \frac{t^k}{(k)!} \tag{2.67}$$

De la misma forma podemos obtener

$$D^{(m-j)}(t) = \sum_{k=m-j}^{\infty} D_k \frac{t^{(k-(m-j))}}{(k-(m-j))!} = \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m-j} \frac{t^k}{(k)!} \qquad j = 0, 1, 2, \ldots, m \tag{2.68}$$

De (2.61) sabemos

$$D_{k+m} = \sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j} = \sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j} A_j$$

utilizando (2.61) en (2.67) tenemos:

$$D^{(m)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m} \frac{t^k}{(k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} A_j D_{k+m-j} \right) \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} D_{k+m-j} A_j \right) \frac{t^k}{k!}$$

luego

$$D^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m-j} \frac{t^k}{k!} \right) = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{k=0}^{\infty} D_{k+m-j} \frac{t^k}{k!} \right) A_j \tag{2.69}$$

usando la ecuación (2.68) en (2.69)

$$D^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j D^{(m-j)}(t) = \sum_{j=1}^{m} D^{(m-j)}(t) A_j$$

2.5. Las Soluciones C_j en términos de la solución Dinámica

Proposición 8 *De*

$$e^{\mathcal{A}t} \mathcal{A} = \mathcal{A} e^{\mathcal{A}t} \tag{2.70}$$

donde $\mathcal{A}$ es la matriz compañera dada en (2.6).
Tenemos que las componentes diagonales por bloques originan las relaciones

$$\begin{aligned} C_0'(t) &= D(t) A_m & (2.71) \\ C_{m-j}^{(m-j+1)}(t) &= C_{m-j-1}^{(m-j)}(t) + D^{(m-j)}(t) A_j \qquad j = 1, 2, ..., m-1 & (2.72) \end{aligned}$$

Prueba:

Sabemos de (2.16)

$$e^{\mathcal{A}t} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Denotemos los bloques cuadrados de la matriz $e^{\mathcal{A}t}$ por C_{ij}, que son matrices cuadradas de orden n, donde $i, j = 1, 2, \ldots, m$, es decir

$$e^{\mathcal{A}t} = [C_{ij}] \tag{2.73}$$

Luego podemos observar que

$$C_{ij} = C_{j-1}^{(i-1)}(t) \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.74}$$

Por otro lado de (2.6) la matriz compañera es

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdots & A_1 \end{pmatrix}$$

Si denotamos los bloques cuadrados de la matriz $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}_{ij}$, que son matrices cuadradas de orden n, donde $i, j = 1, 2, \ldots, m$, es decir

$$\mathcal{A} = [\mathcal{A}_{ij}]$$

podemos ver que

$$\mathcal{A}_{1\,2} = \mathcal{A}_{2\,3} = \mathcal{A}_{3\,4} = \cdots = \mathcal{A}_{m-1\,m} = \mathbb{I}$$

esto es:

$$\mathcal{A}_{i\,(i+1)} = \mathbb{I} \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, m-1 \tag{2.75}$$

También observemos que

$$\mathcal{A}_{m\,1} = A_m \quad \mathcal{A}_{m\,2} = A_{m-1} \quad \mathcal{A}_{m\,3} = A_{m-2}, \ldots, \mathcal{A}_{m\,m} = A_1$$

esto es

$$\mathcal{A}_{mj} = A_{m-j+1} \qquad j = 1, 2, \ldots, m \tag{2.76}$$

Asimismo

$$\mathcal{A}_{ij} = \mathbb{O} \qquad i \neq m \quad \vee \quad j \neq i+1 \tag{2.77}$$

De $e^{\mathcal{A}t}\mathcal{A} = \mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}$, denotando sus bloques por R_{ij} que son matrices de orden n, es decir

$$R = [R_{ij}] = e^{\mathcal{A}t}\mathcal{A} = \mathcal{A}e^{\mathcal{A}t}$$

Luego cada uno de sus bloques se puede expresar como:

$$R_{ij} = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}\mathcal{A}_{kj} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{ik}C_{kj} \qquad i, j = 1, 2, \ldots, m$$

en particular los elementos de la diagonal principal se pueden expresar como:

$$R_{ii} = \sum_{k=1}^{m} C_{ik}\mathcal{A}_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{ik}C_{ki}$$

enseguida utilizando (2.74), en la expresión obtenida para R_{ii}, tenemos

$$R_{ii} = \sum_{k=1}^{m} C_{k-1}^{(i-1)}(t)\mathcal{A}_{ki} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{ik}C_{i-1}^{(k-1)}(t) \tag{2.78}$$

Haciendo $i = 1$ en (2.78)

$$R_{11} = \sum_{k=1}^{m} C_{k-1}^{(0)}(t)\mathcal{A}_{k1} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{1k}C_{0}^{(k-1)}(t) \tag{2.79}$$

Utilizando (2.76) , (2.77) en la parte izquierda y enseguida (2.75), (2.77) en la parte derecha de (2.79), tenemos

$$R_{11} = C_{m-1}^{(0)}(t)\mathcal{A}_{m1} = \mathcal{A}_{12}C_{0}^{(1)}(t) \tag{2.80}$$

Sabemos $D(t) = C_{m-1}(t)$, $\mathcal{A}_{m1} = A_m$, $\mathcal{A}_{12} = \mathbb{I}$, entonces (2.80) se puede escribir como:

$$R_{11} = D(t)A_m = C_{0}^{(1)}(t) \tag{2.81}$$

Haciendo $2 \leq i \leq m-1$ en (2.78), luego utilizando las relaciones (2.75), (2.76) y (2.77) tenemos:

$$R_{ii} = C_{i-2}^{(i-1)}(t)\mathcal{A}_{(i-1)i} + C_{m-1}^{(i-1)}(t)\mathcal{A}_{mi} = \mathcal{A}_{i(i+1)}C_{i-1}^{(i)}(t) \tag{2.82}$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{(i-1)\,i} &= \mathcal{A}_{i\,(i+1)} = \mathbb{I} \\ \mathcal{A}_{m\,i} &= A_{m-i+1} \\ C_{m-1}^{(i-1)}(t) &= D^{(i-1)}(t) \end{aligned}$$

entonces (2.82) se puede escribir como

$$R_{ii} = C_{i-2}^{(i-1)}(t) + D^{(i-1)}(t)A_{m-i+1} = C_{i-1}^{(i)}(t) \qquad 2 \leq i \leq m-1 \tag{2.83}$$

Haciendo $i = m$ en (2.78) tenemos

$$R_{mm} = \sum_{k=1}^{m} C_{k-1}^{(m-1)}(t)\mathcal{A}_{km} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{mk}C_{m-1}^{(k-1)}(t)$$

Utilizando (2.75), (2.76) y (2.77) en la expresión obtenida para R_{mm}, obtenemos

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t)\mathcal{A}_{(m-1)m} + C_{m-1}^{(m-1)}(t)\mathcal{A}_{mm} = \sum_{k=1}^{m} \mathcal{A}_{mk}C_{m-1}^{(k-1)}(t) \tag{2.84}$$

Sabemos

$$\mathcal{A}_{(m-1)m} = \mathbb{I} \quad \mathcal{A}_{mm} = A_1 \quad \mathcal{A}_{mk} = A_{m-k+1} \quad D(t) = C_{m-1}(t)$$

y por la última relación dada en (2.15)

$$C_{m-1}^{(m)}(t) = \sum_{k=1}^{m} A_{m-k+1}C_{m-1}^{(k-1)}(t)$$

entonces (2.84) se puede escribir como

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t) + D^{(m-1)}(t)A_1 = C_{m-1}^{(m)}(t) \tag{2.85}$$

por (2.83) y (2.85) podemos concluir

$$C_{i-2}^{(i-1)}(t) + D^{(i-1)}(t)A_{m-i+1} = C_{i-1}^{(i)}(t) \qquad i = 2, 3, 4, \ldots, m \tag{2.86}$$

haciendo $i = m - j + 1$ en (2.86), resulta

$$C_{m-j-1}^{(m-j)}(t) + D^{(m-j)}(t)A_j = C_{m-j}^{(m-j+1)}(t) \tag{2.87}$$

$$m - j + 1 = 2, 3, \ldots, m$$

$$m - j = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$j = 1, 2, \ldots, m-1$$

Luego (2.81) y (2.87) prueban la proposición

Corolario 2

Podemos escribir las derivadas de las soluciones $C_j(t)$ *como*

$$C_k^{(k+1)}(t) = D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-k-1} D^{(m-i)}(t)A_i \qquad k = 0, 1, ..., m-2 \tag{2.88}$$

Prueba:

Sabemos que la solución dinámica satisface

$$D^{(m)}(t) = \sum_{i=1}^{m} D^{(m-i)}(t)A_i$$

desarrollando el último término

$$D^{(m)}(t) = D^{(0)}(t)A_m + \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i)}(t)A_i \tag{2.89}$$

usando (2.71) en (2.89) tenemos

$$D^{(m)}(t) = C_0^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i)}(t)A_i$$

entonces

$$C_0^{(1)}(t) = D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i)}(t)A_i \tag{2.90}$$

De (2.72), haciendo $j = m-1$ tenemos

$$C_1^{(2)}(t) = C_0^{(1)}(t) + D^{(1)}(t)A_{m-1}$$

Usando (2.90) en la parte derecha de la expresión hallada

$$\begin{aligned} C_1^{(2)}(t) &= D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i)}(t)A_i + D^{(1)}(t)A_{m-1} \\ C_1^{(2)}(t) &= D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-2} D^{(m-i)}(t)A_i \end{aligned} \tag{2.91}$$

De (2.72), haciendo $j = m-2$, tenemos

$$C_2^{(3)}(t) = C_1^{(2)}(t) + D^{(2)}(t)A_{m-2}$$

Usando (2.91) en la parte derecha de la expresión hallada

$$\begin{aligned} C_2^{(3)}(t) &= D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-2} D^{(m-i)}(t)A_i + D^{(2)}(t)A_{m-2} \\ C_2^{(3)}(t) &= D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-3} D^{(m-i)}(t)A_i \end{aligned} \tag{2.92}$$

asi inductivamente llegamos a probar

$$C_{m-3}^{(m-2)}(t) \quad = \quad D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{2} D^{(m-i)}(t)A_i \tag{2.93}$$

Probemos la expresión (2.88) para k=m-2

De (2.72), haciendo j=2 tenemos

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t) = C_{m-3}^{(m-2)}(t) + D^{(m-2)}(t)A_2$$

Usando (2.93) en la parte derecha de la expresión hallada

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t) \quad = \quad D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{2} D^{(m-i)}(t)A_i + D^{(m-2)}(t)A_2$$

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t) \quad = \quad D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{1} D^{(m-i)}(t)A_i \tag{2.94}$$

De (2.90), (2.91), (2.92), (2.93) y (2.94) prueban el corolario.

Corolario 3

Podemos escribir las soluciones $C_j(t)$ en términos de la solución dinámica y los coeficientes A_i

$$C_j(t) = D^{(m-j-1)}(t) - \sum_{i=1}^{m-j-1} D^{(m-j-i-1)}(t)A_i \qquad j = 0, 1, ..., m-2 \tag{2.95}$$

Prueba:

De (2.88), para $k = 0$ tenemos

$$C_0^{(1)}(t) = D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i)}(t)A_i$$

Integrando una vez de 0 a t, tenemos

$$C_0(t) - C_0(0) = D^{(m-1)}(t) - D^{(m-1)}(0) - \sum_{i=1}^{m-1}(D^{(m-i-1)}(t) - D^{(m-i-1)}(0))A_i$$

y luego utilizando (2.19), tenemos

$$C_0(t) - \mathbb{I} = D^{(m-1)}(t) - \mathbb{I} - \sum_{i=1}^{m-1}(D^{(m-i-1)}(t) - \mathbb{O})A_i$$

simplificando

$$C_0(t) = D^{(m-1)}(t) - \sum_{i=1}^{m-1} D^{(m-i-1)}(t)A_i \tag{2.96}$$

De (2.88), para $k = 1$ tenemos

$$C_1^{(2)}(t) = D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{m-2} D^{(m-i)}(t)A_i$$

Integrando dos veces de 0 a t y utilizando (2.19)
Primera integración

$$\begin{aligned}
C_1^{(1)}(t) - C_1^{(1)}(0) &= D^{(m-1)}(t) - D^{(m-1)}(0) - \sum_{i=1}^{m-2} \left(D^{(m-i-1)}(t) - D^{(m-i-1)}(0)\right) A_i \\
C_1^{(1)}(t) - \mathbb{I} &= D^{(m-1)}(t) - \mathbb{I} - \sum_{i=1}^{m-2} \left(D^{(m-i-1)}(t) - \mathbb{O}\right) A_i \\
C_1^{(1)}(t) &= D^{(m-1)}(t) - \sum_{i=1}^{m-2} D^{(m-i-1)}(t)A_i
\end{aligned}$$

Segunda integración

$$\begin{aligned}
C_1(t) - C_1(0) &= D^{(m-2)}(t) - D^{(m-2)}(0) - \sum_{i=1}^{m-2} \left(D^{(m-i-2)}(t) - D^{(m-i-2)}(0)\right) A_i \\
C_1(t) - \mathbb{O} &= D^{(m-2)}(t) - \mathbb{O} - \sum_{i=1}^{m-2} \left(D^{(m-i-2)}(t) - \mathbb{O}\right) A_i \\
C_1(t) &= D^{(m-2)}(t) - \sum_{i=1}^{m-2} D^{(m-i-2)}(t)A_i \qquad (2.97)
\end{aligned}$$

Asi sucesivamente de (2.88), para $k = m - 2$ tenemos

$$C_{m-2}^{(m-1)}(t) = D^{(m)}(t) - \sum_{i=1}^{1} D^{(m-i)}(t)A_i$$

Integrando $m - 1$ veces de 0 a t y utilizando (2.19)

$$C_{m-2}(t) = D'(t) - \sum_{i=1}^{1} D^{(-i+1)}(t)A_i \qquad (2.98)$$

En conclusión podemos decir que (2.95) se obtiene de integrar $k + 1$ veces de 0 a t la expresión (2.88) y utilizar (2.19).

2.6. Cálculo de la solución Dinámica $D(t)$

Teorema 2.1 *Si para la matriz cuadrada A de orden N con elementos escalares, su polinomio caracteristico es*

$$P(\lambda) = det(\lambda\mathbb{I} - A) = \sum_{j=0}^{N} b_j\lambda^{N-j} \qquad b_0 = 1 \qquad (2.99)$$

entonces tenemos

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{N} c_{N-j}(t)A^{N-j} = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right)A^{N-j} \tag{2.100}$$

donde $d(t)$ es la solución dinámica de la ecuación diferencial escalar

$$\sum_{j=0}^{N} b_j u^{(N-j)}(t) = 0 \tag{2.101}$$

y c_j es solución de la ecuación (2.101) con valores iniciales $c_j^{(k)}(0) \quad \delta_{jk}$ para $j\ k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Prueba:

Sabemos que

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

enseguida tomando la transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(e^{At})\right\} = \mathcal{L}\{Ae^{At}\}$$

y de acuerdo con las propiedades de la transformada de Laplace

$$\lambda\mathcal{L}\{e^{At}\} - e^{At}|_{t=0} = A\mathcal{L}\{e^{At}\}$$

$$\lambda\mathcal{L}\{e^{At}\} - \mathbb{I} = A\mathcal{L}\{e^{At}\}$$

factorizando $\mathcal{L}\{e^{At}\}$ se logra la igualdad

$$(\lambda\mathbb{I} - A)\mathcal{L}\{e^{At}\} = \mathbb{I}$$

y se concluye que

$$\mathcal{L}\{Ae^{At}\} = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1}$$

donde λ no es valor propio de A.

Para encontrar el inversa de la matriz $(\lambda\mathbb{I} - A)$ se puede utilizar la igualdad

$$(\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{adj(\lambda\mathbb{I} - A)}{det(\lambda\mathbb{I} - A)} \tag{2.102}$$

Sabemos que

$$\underbrace{\mathbb{I}\, det(\lambda\mathbb{I} - A)}_{*} = T(\lambda) \cdot \underbrace{(\lambda\mathbb{I} - A)}_{**} = (\lambda\mathbb{I} - A) \cdot T(\lambda) \tag{2.103}$$

donde $T(\lambda) = adj(\lambda\mathbb{I} - A)$

Obs: $|A|\mathbb{I} = A(adj(A)) = (Adj(A))A$

Como

$*$: por (2.99) cada elemento es a lo más un polinomio de grado N

$**$: cada elemento es a lo más un polinomio de grado 1

entonces podemos concluir que cada elemento de $T(\lambda)$ es a lo más un polinomio de grado $N-1$.

Sabemos que $T(\lambda)$ es una matriz de orden N, el cual puede expresarse como

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} P_{11}(\lambda) & P_{12}(\lambda) & \cdots & P_{1n}(\lambda) \\ P_{21}(\lambda) & P_{22}(\lambda) & \cdots & P_{2n}(\lambda) \\ \vdots & & & \vdots \\ P_{n1}(\lambda) & P_{n2}(\lambda) & \cdots & P_{nn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

donde sus elementos $P_{ij}(\lambda)$ son polinomios a lo más de grado $N-1$

Agrupando convenientemente podemos escribir $T(\lambda)$ en función de las potencias $\lambda^{N-1}, \lambda^{N-2}, \ldots, \lambda^2, \lambda, 1$, de la siguiente manera

$$T(\lambda) = B_{N-1}\lambda^{N-1} + B_{N-2}\lambda^{N-2} + \cdots + B_2\lambda^2 + B_1\lambda + B_0$$

esto es

$$T(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} B_j\lambda^j \tag{2.104}$$

donde B_j son matrices cuadradas de orden N, cuyos elementos son escalares.

Observemos que

$$T(0) = B_0 \tag{2.105}$$

Derivando (2.104) k veces $(0 < k \leq N-1)$ tenemos

$$T^{(k)}(\lambda) = \sum_{j=k}^{N-1} B_j(j)(j-1)(j-2)\cdots(j-(k-1))\lambda^{j-k}$$

enseguida evaluando la expresión obtenida en $\lambda = 0$

$$T^{(k)}(0) = B_k(k)(k-1)(k-2)\cdots(2)(1) \qquad (0 < k \leq N-1) \tag{2.106}$$

luego de (2.105) y (2.106)

$$B_k = \frac{T^{(k)}(0)}{k!} \qquad (0 \leq k \leq N-1) \tag{2.107}$$

reemplazando (2.107) en (2.104)

$$T(\lambda) = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{T^{(j)}(0)}{j!} \lambda^j \tag{2.108}$$

vamos a demostrar la fórmula

$$T(\lambda) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \lambda^{j-i-1} A^{N-j} \tag{2.109}$$

Sabemos por (2.103) que

$$(\lambda \mathbb{I} - A)T(\lambda) = P(\lambda)\mathbb{I}$$

enseguida, derivando respecto a λ sucesivamente

$$\mathbb{I}T(\lambda) + (\lambda I - A)T'(\lambda) = P'(\lambda)\mathbb{I}$$

$$\begin{array}{rrcll}
\Rightarrow & T(\lambda) & = & (A - \lambda\mathbb{I})T'(\lambda) + P'(\lambda)\mathbb{I} & (\alpha_1) \\
 & T'(\lambda) & = & -T'(\lambda) + (A - \lambda\mathbb{I})T''(\lambda) + P''(\lambda)\mathbb{I} & \\
\Rightarrow & 2T'(\lambda) & = & (A - \lambda\mathbb{I})T''(\lambda) + P''(\lambda)\mathbb{I} & (\alpha_2) \\
 & 2T''(\lambda) & = & -T''(\lambda) + (A - \lambda\mathbb{I})T'''(\lambda) + P'''(\lambda)\mathbb{I} & \\
\Rightarrow & 3T''(\lambda) & = & (A - \lambda\mathbb{I})T'''(\lambda) + P'''(\lambda)\mathbb{I} & (\alpha_3) \\
 & & \vdots & & \\
 & & \vdots & & \\
\Rightarrow & (N-2)T^{(N-3)}(\lambda) & = & (A - \lambda\mathbb{I})T^{(N-2)}(\lambda) + P^{(N-2)}(\lambda)\mathbb{I} & (\alpha_{N-2}) \\
 & (N-2)T^{(N-2)}(\lambda) & = & -T^{(N-2)}(\lambda) + (A - \lambda\mathbb{I})T^{(N-1)}(\lambda) + P^{(N-1)}(\lambda)\mathbb{I} & \\
\Rightarrow & (N-1)T^{(N-2)}(\lambda) & = & (A - \lambda\mathbb{I})T^{(N-1)}(\lambda) + P^{(N-1)}(\lambda)\mathbb{I} & (\alpha_{N-1}) \\
 & (N-1)T^{(N-1)}(\lambda) & = & -T^{(N-1)}(\lambda) + (A - \lambda\mathbb{I})T^{(N)}(\lambda) + P^{(N)}(\lambda)\mathbb{I} & \\
\Rightarrow & NT^{(N-1)}(\lambda) & = & P^{(N)}(\lambda)\mathbb{I} = b_0(N!)\mathbb{I} & (\alpha_N)
\end{array}$$

$$\text{pues} \qquad T^{(k)}(\lambda) = \mathbb{O} \qquad \forall k \geq N$$

Luego, utilizando las igualdades anteriores recursivamente en $\lambda = 0$ y considerando

$$P^{(k)}(0) = b_{N-k}k! \quad (0 \leq k \leq N)$$

obtenemos:

de (α_N)

$$\begin{aligned}
\frac{T^{(N-1)}(0)}{(N-1)!}\lambda^{N-1} &= \frac{b_0(N!)\mathbb{I}}{((N-1)!)(N)}\lambda^{N-1} \\
&= b_0\lambda^{N-1}\mathbb{I}
\end{aligned}$$

de (α_{N-1})

$$\begin{aligned}
\frac{T^{(N-2)}(0)}{(N-2)!}\lambda^{N-2} &= \frac{AT^{(N-1)}(0)+P^{(N-1)}(0)\mathbb{I}}{((N-2)!)(N-1)}\lambda^{N-2} \\
&= \frac{Ab_0(N-1)!\mathbb{I}+b_1(N-1)!\mathbb{I}}{(N-1)!}\lambda^{N-2} \\
&= (Ab_0\mathbb{I}+b_1\mathbb{I})\lambda^{N-2} \\
&= (b_0A+b_1\mathbb{I})\lambda^{N-2}
\end{aligned}$$

de (α_{N-2})

$$\begin{aligned}
\frac{T^{(N-3)}(0)}{(N-3)!}\lambda^{N-3} &= \frac{AT^{(N-2)}(0)+P^{(N-2)}(0)\mathbb{I}}{((N-3)!)(N-2)}\lambda^{N-3} \\
&= \frac{A(b_0A+b_1\mathbb{I})(N-2)!+b_2(N-2)!\mathbb{I}}{(N-2)!}\lambda^{N-3} \\
&= (b_0A^2+b_1A+b_2\mathbb{I})\lambda^{N-3}
\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

de (α_3)

$$\begin{aligned}
\frac{T''(0)}{2!}\lambda^2 &= \frac{AT'''(0)+P'''(0)\mathbb{I}}{(2!)3}\lambda^2 \\
&= \frac{AT'''(0)+b_{N-3}(3!)\mathbb{I}}{3!}\lambda^2 \\
&= (b_0A^{N-3}+b_1A^{N-4}\ldots+b_{N-3}\mathbb{I})\lambda^2
\end{aligned}$$

de (α_2)

$$\begin{aligned}
\frac{T'(0)\lambda}{1!} &= \frac{AT''(0)+P''(0)\mathbb{I}}{(1!)(2)} \\
&= \frac{A(b_0A^{N-3}+b_1A^{N-4}+\cdots+b_{N-3}\mathbb{I})(2!)+b_{N-2}(2!)\mathbb{I}}{2!}\lambda \\
&= (b_0A^{N-2}+b_1A^{N-3}+\cdots+b_{N-3}A+b_{N-2}\mathbb{I})\lambda
\end{aligned}$$

de (α_1)

$$\begin{aligned}
T(0) &= AT'(0)+P'(0)\mathbb{I} \\
&= A(b_0A^{N-2}+b_1A^{N-3}+\cdots+b_{N-3}A+b_{N-2}\mathbb{I})+b_{N-1}\mathbb{I} \\
&= b_0A^{N-1}+b_1A^{N-2}+\cdots+b_{N-3}A^2+b_{N-2}A+b_{N-1}\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Considerando las relaciones halladas para $\dfrac{T^j(0)}{j!}\lambda^j$, luego reemplazando en (2.108) y reordenando adecuadamente tenemos:

$$\begin{aligned}
T(\lambda) &= b_0A^{N-1} + (b_0\lambda + b_1)A^{N-2} + (b_0\lambda^2 + b_1\lambda + b_2)A^{N-3} + \cdots + \\
&\quad + \cdots + (b_0\lambda^{N-2} + b_1\lambda^{N-3} + \cdots + b_{N-2})A + (b_0\lambda^{N-1} + b_1\lambda^{N-2} + \cdots + b_{N-1})\mathbb{I} \\
&= \sum_{i=0}^{1-1} b_i\lambda^{1-i-1}A^{N-1} + \sum_{i=0}^{2-1} b_i\lambda^{2-i-1}A^{N-2} + \sum_{i=0}^{3-1} b_i\lambda^{3-i-1}A^{N-3} + \cdots + \\
&\quad + \cdots + \sum_{i=0}^{(N-1)-1} b_i\lambda^{(N-1)-i-1}A + \sum_{i=0}^{N-1} b_i\lambda^{N-i-1}\mathbb{I}
\end{aligned}$$

Luego

$$T(\lambda) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\lambda^{j-i-1}A^{N-j}$$

es decir

$$adj(\lambda\mathbb{I} - A) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\lambda^{j-i-1}A^{N-j}$$

hemos demostrado la fórmula (2.109).

Sabemos de (2.102) que

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = (\lambda\mathbb{I} - A)^{-1} = \frac{adj(\lambda\mathbb{I} - A)}{det(\lambda\mathbb{I} - A)} = \frac{T(\lambda)}{P(\lambda)}$$

Usando un resultado de la integral de Bromwich para la inversa de la transformada de Laplace, ver (1.24), se tiene

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{adj(\lambda\mathbb{I} - A)}{P(\lambda)}e^{\lambda t}d\lambda \tag{2.110}$$

$$\begin{aligned}
e^{At} &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\lambda^{j-i-1}A^{N-j}\frac{e^{\lambda t}}{P(\lambda)}d\lambda \\
&= \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} b_i\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \lambda^{j-i-1}\frac{e^{\lambda t}}{P(\lambda)}d\lambda\right)A^{N-j}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

C_R es una circunferencia de radio R, suficientemente grande que encierra las raices de $P(\lambda)$.

Sea la función

$$d(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_R} \frac{e^{\lambda t}}{P(\lambda)}d\lambda \tag{2.112}$$

que es de clase C^∞ y tiene derivadas

$$d^{(m)}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{\lambda^m e^{\lambda t}}{P(\lambda)} d\lambda$$

luego en $t = 0$

$$d^{(m)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{\lambda^m}{P(\lambda)} d\lambda \tag{2.113}$$

Por otro lado tenemos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P(\lambda)} &= \frac{\lambda^N}{\lambda^N P(\lambda)} = \frac{\lambda^N (b_0 \lambda^N)}{\lambda^N(\lambda^N P(\lambda))} = \frac{\lambda^N P(\lambda) - \lambda^N \sum_{i=1}^N b_i \lambda^{N-i}}{\lambda^N(\lambda^N P(\lambda))} \\
&= \frac{1}{\lambda^N} - \frac{\sum_{i=1}^N b_i \lambda^{N-i}}{\lambda^N P(\lambda)}
\end{aligned}$$

multiplicando esta última ecuación por λ^m

$$\frac{\lambda^m}{P(\lambda)} = \lambda^{m-N} - \frac{\sum_{i=1}^N b_i \lambda^{N-i+m}}{\lambda^N P(\lambda)} \tag{2.114}$$

utilizando (2.114) en (2.113)

$$d^{(m)}(0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \lambda^{m-N} d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{\sum_{i=1}^N b_i \lambda^{N-i+m}}{\lambda^N P(\lambda)} d\lambda \tag{2.115}$$

donde $C_R : \lambda = Re^{i\theta}$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ para R suficientemente grande.
Evaluando la primera integral de linea de la ecuación (2.115)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \lambda^{m-N} d\lambda &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (Re^{i\theta})^{m-N} Rie^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} R^{m-N} e^{i\theta(m-N)} Rie^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi i} R^{m-N+1} \int_0^{2\pi} e^{i\theta(m-N+1)} d\theta
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \lambda^{(m-N)} d\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} R^{m-N+1} \left. \dfrac{e^{i\theta(m-N+1)}}{i(m-N+1)} \right|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} = 0 & \text{Si} \quad m < \quad -1 \\[2ex] \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} d\theta = 1 & \text{Si} \quad m = \quad -1 \end{cases}$$

La segunda integral de linea en (2.115) tiende a cero cuando $R \to \infty$

$$\lim_{R \to \infty} \oint_{C_R} \frac{\sum_{i=1}^N b_i \lambda^{N-i+m}}{\lambda^N P(\lambda)} d\lambda = 0 \qquad \text{para} \quad m = 0, 1, 2, \ldots, N-1$$

el resultado s justifica por (1.25).

Utilizando los resultados obtenidos la ecuación (2.115) quedaría como

$$d^{(N-i)}(0)=0 \qquad i=2,\ldots,N \qquad d^{(N-1)}(0)=1 \tag{2.116}$$

de (2.112), la transformada de Laplace de la función $d(t)$ es:

$$\mathcal{L}\{d(t)\}=\frac{1}{P(\lambda)}$$

$$P(\lambda)\mathcal{L}\{d(t)\}=1$$

$$1=\left(\sum_{i=0}^{N} b_i\lambda^{N-i}\right)\mathcal{L}\{d(t)\}$$

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{b_0\lambda^N+b_1\lambda^{N-1}+b_2\lambda^{N-2}+\cdots+b_{N-1}\lambda+b_N}{P(\lambda)} \\
&= 1+b_0\left(\frac{\lambda^N}{P(\lambda)}-1\right)+b_1\left(\frac{\lambda^{N-1}}{P(\lambda)}\right)+b_2\left(\frac{\lambda^{N-2}}{P(\lambda)}\right)+\cdots+b_N\left(\frac{1}{P(\lambda)}\right) \\
&= 1+(\lambda^N\mathcal{L}\{d(t)\}-1)+b_1(\lambda^{N-1}\mathcal{L}\{d(t)\})+b_2(\lambda^{N-2}\mathcal{L}\{d(t)\})+\cdots+ \\
&\quad \cdots+b_{N-1}(\lambda\mathcal{L}\{d(t)\})+b_N(\mathcal{L}\{d(t)\})
\end{aligned}$$

utilizando (2.116)

$$\begin{aligned}
1 &= 1+b_0\left[\lambda^N\mathcal{L}\{d(t)\}-\lambda^{N-1}d(0)-\lambda^{N-2}d'(0)-\cdots-\lambda d^{(N-2)}(0)-d^{(N-1)}(0)\right]+ \\
&\quad b_1\left[\lambda^{N-1}\mathcal{L}\{d(t)\}-\lambda^{N-2}d(0)-\lambda^{N-3}d''(0)-\cdots-d^{(N-2)}(0)\right]+\cdots+ \\
&\quad b_{N-1}\left[\lambda\mathcal{L}\{d(t)\}-d(0)\right]+b_N\mathcal{L}\{d(t)\} \\
&= 1+\sum_{i=0}^{N} b_i\mathcal{L}\{d^{(N-i)}(t)\}
\end{aligned}$$

entonces

$$\mathcal{L}\left\{\sum_{i=0}^{N} b_i d^{(N-i)}(t)\right\}=0 \tag{2.117}$$

De (2.117) y (2.116) hemos establecido que la función $d(t)$ satisface el problema de valor inicial:

$$\begin{gathered}
\sum_{i=0}^{N} b_i d^{(N-i)}(t)=0 \\
d(0)=d'(0)=\cdots=d^{(N-2)}(0)=0 \qquad d^{(N-1)}(0)=1
\end{gathered} \tag{2.118}$$

Reemplazando (2.112) en (2.111)

$$e^{At}=\sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right)A^{N-j} \tag{2.119}$$

De (2.118) la función $d(t)$ es solución dinámica de la ecuación diferencial escalar

$$\sum_{j=0}^{N} b_j u^{(N-j)}(t) = 0 \tag{2.120}$$

Luego (2.120) pu de expresarse como:

$$b_0 u^{(N)}(t) = \sum_{j=1}^{N} (-b_j) u^{(N-j)}(t)$$

donde $b_0 = 1$ entonces

$$u^{(N)}(t) = \sum_{j=1}^{N} (-b_j) u^{(N-j)}(t) \tag{2.121}$$

Observemos que la ecuación obtenida es un caso particular de la ecuación (2.1), por lo tanto podemos usar los resultados obtenidos hasta ahora.

De (2.95) podemos escribir las soluciones $c_j(t)$ en términos de la solución dinámica como.

$$c_j(t) = d^{(\;\; -j-1)}(t) - \sum_{i=1}^{N-j-1} d^{(N-j-i-1)}(t)(-b_i) \qquad j = 0, 1, \ldots, \;\; -2 \tag{2.122}$$

haciendo $j = \;\; - s$ en (2.122)

$$\begin{aligned} c_{N-s}(t) &= d^{(N-N+s-1)}(t) + \sum_{i=1}^{N-N+s-1} d^{(N-N+s-i-1)}(t) b_i \\ &= d^{(s-1)}(t) + \sum_{i=1}^{s-1} d^{(s-i-1)}(t) b_i \end{aligned}$$

$$N - s = 0, 1, \ldots, N-2$$

$$s = 2, 3, \ldots, N$$

$$c_{N-s}(t) = \sum_{i=0}^{s-1} b_i d^{(s-i-1)}(t) \qquad s = 2, 3, \ldots, N \tag{2.123}$$

Si $s = 1$ en (2.123)

$$\begin{aligned} c_{N-1}(t) &= \sum_{i=0}^{0} b_i d^{(1-i-1)}(t) \\ &= b_0 d(t) \\ &= d(t) \quad \text{verdadero} \end{aligned}$$

Luego:

$$c_{N-s}(t) = \sum_{i=0}^{s-1} b_i d^{(s-i-1)}(t) \qquad s = 1, 2, 3, \ldots, N \tag{2.124}$$

además $c_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}$ para $j, k = 0, 1, \ldots, N-1$ debido a (2.19).

De (2.124) en (2.119) conseguimos

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{N} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \right) A^{N-j} = \sum_{j=1}^{N} c_{N-j} A^{N-j}$$

Corolario 4 *Sea la matriz A_j de orden $n \times n$, la solución dinámica de la ecuación de orden m*

$$u^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j u^{(m-j)}(t) \tag{2.125}$$

es

$$D(t) = \sum_{j=1}^{mn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) D_{mn-j} \tag{2.126}$$

donde D_{mn-j} son matrices obtenidas recursivamente de (2.61), los b_i son los coeficientes del polinomio caracteristico

$$P(\lambda) = det\left(\lambda^n \mathbb{I} - \sum_{j=1}^{m} A_j \lambda^{m-j} \right) = \sum_{k=0}^{mn} b_k \lambda^{mn-k} \tag{2.127}$$

y $d(t)$ es solución dinámica de la ecuación diferencial escalar

$$\sum_{j=0}^{mn} b_j u^{(mn-j)}(t) = 0 \tag{2.128}$$

donde $b_o = 1$

<u>**Prueba:**</u>

La ecuación (2.125) tiene una solución dinámica que satisface la ecuación matricial

$$D_{n\times n}^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j D_{n\times n}^{(m-j)}(t) \tag{2.129}$$

$$D(0) = D'(0) = \cdots = D^{(m-2)}(0) = \mathbb{O} \qquad D^{(m-1)}(0) = \mathbb{I}$$

(2.129) se puede llevar a la forma $\dot{P}(t) = AP(t)$ el cual tiene solución $P(t) = e^{At}P(0)$, siendo P matriz de orden $mn \times n$ que depende de la variabl t y e^{At} matriz de orden

$mn \times mn$.
Dond

$$P(t) = \begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

haciendo cambio de variable matricial

$$\begin{aligned}
P_1(t) = D(t) &\implies P_1'(t) = D'(t) \\
P_2(t) = D'(t) &\implies P_2'(t) = D''(t) \\
P_3(t) = D''(t) &\implies P_3'(t) = D'''(t) \\
&\vdots \\
P_{m-1}(t) = D^{(m-2)}(t) &\implies P_{m-1}'(t) = D^{(m-1)}(t) \\
P_m(t) = D^{(m-1)}(t) &\implies P_m'(t) = D^{(m)}(t) = \sum_{j=1}^{m} A_j D^{(m-j)}(t)
\end{aligned}$$

tenemos:

$$\begin{pmatrix} P_1'(t) \\ P_2'(t) \\ P_3'(t) \\ \vdots \\ P_{m-1}'(t) \\ P_m'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ A_m & A_{m-1} & A_{m-2} & A_{m-3} & \cdots & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \\ \vdots \\ P_{m-1}(t) \\ P_m(t) \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

efectivamente toma la forma $\dot{P}(t) = AP(t)$.
De $P(t) = e^{At}P(0)$ se tiene

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} D(0) \\ D'(0) \\ D''(0) \\ \vdots \\ D^{(m-1)}(0) \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-2)}(t) \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = e^{At} \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

$$\frac{d^r}{dt^r}\begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-2)}(t) \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = A^r e^{At}\begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} D^{(r)}(t) \\ D^{(r+1)}(t) \\ D^{(r+2)}(t) \\ \vdots \\ D^{(r+m-2)}(t) \\ D^{(r+m-1)}(t) \end{pmatrix} = A^r e^{At}\begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{2.132}$$

$t = 0$ en (2.132)

$$\begin{pmatrix} D^{(r)}(0) \\ D^{(r+1)}(0) \\ D^{(r+2)}(0) \\ \vdots \\ D^{(r+m-2)}(0) \\ D^{(r+m-1)}(0) \end{pmatrix} = A^r \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix}$$

Como $D^{(j)}(0) = D_j$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} D_r \\ D_{r+1} \\ D_{r+2} \\ \vdots \\ D_{r+m-2} \\ D_{r+m-1} \end{pmatrix} = A^r \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{2.133}$$

la matriz A de orden mn, su polinomio caracteristico es

$$P(\lambda) = det(\lambda\mathbb{I} - A) = \sum_{j=0}^{mn} b_i \lambda^{N-j} \qquad b_0 = 1$$

Utilizando (2.100) en (2.131) tenemos

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-2)}(t) \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{mn}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right) A^{mn-j} \begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{2.134}$$

(2.133) n (2.134)

$$\begin{pmatrix} D(t) \\ D'(t) \\ D''(t) \\ \vdots \\ D^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{mn} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \right) \begin{pmatrix} D_{mn-j} \\ D_{mn-j+1} \\ D_{mn-j+2} \\ \vdots \\ D_{mn-j+m-1} \end{pmatrix} \tag{2.135}$$

$$\Longrightarrow D(t) = \sum_{j=1}^{mn} \left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) \right) D_{mn-j}$$

donde $d(t)$ es solución dinámica de la ecuación diferencial escalar

$$\sum_{j=0}^{mn} b_j u^{(mn-j)}(t) = 0 \tag{2.136}$$

Probemos que $det(\lambda\mathbb{I} - A) = det\left(\lambda^m \mathbb{I} - \sum_{j=1}^{m} A_j \lambda^{m-j}\right)$

$$(\lambda\mathbb{I} - A) = \begin{pmatrix} \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & -A_{m-3} & \cdots & -A_2 & \lambda\mathbb{I} - A_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{C_1+\lambda C_2} \\ \xrightarrow{C_1+\lambda^2 C_3} \\ \xrightarrow{C_1+\lambda^3 C_4} \\ \vdots \\ \xrightarrow{C_1+\lambda^{m-2} C_{m-1}} \\ \xrightarrow{C_1+\lambda^{m-1} C_m} \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbb{O} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \lambda\mathbb{I} & -\mathbb{I} \\ \alpha & -A_{m-1} & -A_{m-2} & -A_{m-3} & \cdots & -A_2 & \lambda\mathbb{I} - A_1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \xrightarrow{f_2+\lambda f_1} \\ \xrightarrow{f_3+\lambda f_2} \\ \xrightarrow{f_4+\lambda f_3} \\ \vdots \\ \xrightarrow{f_{m-1}+\lambda f_{m-2}} \end{array}$$

$$\alpha = -A_m - \lambda A_{m-1} - \lambda^2 A_{m-2} - \lambda^3 A_{m-3} - \cdots - \lambda^{m-2} A_2 - \lambda^{m-1} A_1 + \lambda^m \mathbb{I}$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix}
\mathbb{O} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\
\alpha & -A_{m-1} & -A_{m-2} & -A_{m-3} & \cdots & -A_2 & \lambda\mathbb{I} - A_1
\end{pmatrix}_{m\times m}
&
\begin{array}{c}
\xrightarrow{f_{m-1}\times f_{m-2}} \\
\xrightarrow{f_{m-2}\times f_{m-3}} \\
\\
\vdots \\
\xrightarrow{f_3\times f_2} \\
\xrightarrow{f_2\times f_1}
\end{array}
\end{array}
$$

Entonces:

$$
det(\lambda\mathbb{I} - A) = (-1)^{n(m-2)} det
\begin{pmatrix}
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & -\mathbb{I} \\
\mathbb{O} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\
\alpha & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_2 & \lambda\mathbb{I} - A_1
\end{pmatrix}
\xrightarrow{f_1\times f_m}
$$

$$
\Longrightarrow \quad det(\lambda\mathbb{I} - A) = (-1)^{n(m-1)} det
\begin{pmatrix}
\alpha & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_2 & \lambda\mathbb{I} - A_1 \\
\mathbb{O} & -\mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & -\mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & -\mathbb{I} & \mathbb{O} \\
\mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & -\mathbb{I}
\end{pmatrix}
$$

$$
\Longrightarrow \quad det(\lambda\mathbb{I} - A) = (-1)^{n(m-1)}|\alpha| \underbrace{|-\mathbb{I}||-\mathbb{I}|\cdots|-\mathbb{I}|}_{m-1 \text{ veces}}
$$

$$
\Longrightarrow \quad det(\lambda\mathbb{I} - A) = (-1)^{n(m-1)}|\alpha|(-1)^{n(m-1)}|\mathbb{I}|
$$

$$
\Longrightarrow \quad det(\lambda\mathbb{I}-A) = |\lambda^m\mathbb{I} - A_1\lambda^{m-1} - A_2\lambda^{m-2} - \cdots - A_{m-3}\lambda^3 - A_{m-2}\lambda^2 - A_{m-1}\lambda - A_m|
$$

$$
\Longrightarrow \quad det(\lambda\mathbb{I} - A) = det\left(\lambda^m\mathbb{I} - \sum_{j=1}^{n} A_j\lambda^{m-j}\right)
$$

Corolario 5 *Demostrar que*

$$
D^{(r)}(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i^{(r)}(t) D^{(i)}(\tau) \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1 \tag{2.137}
$$

donde $D(t)$ es la solución dinámica asociada a la ecuación (2.1).

Prueba:

Sabemos

$$e^{\mathcal{A}(t+\tau)} = e^{\mathcal{A}t}e^{\mathcal{A}\tau} \tag{2.138}$$

para nuestro problema, $\mathcal{A}$ es la matriz compañera presentada en (2.7).

Utilizando (2.16) en (2.138) tenemos

$$\begin{pmatrix} C_0(t+\tau) & C_1(t+\tau) & C_2(t+\tau) & \cdots & C_{m-1}(t+\tau) \\ C_0'(t+\tau) & C_1'(t+\tau) & C_2'(t+\tau) & \cdots & C_{m-1}'(t+\tau) \\ C_0''(t+\tau) & C_1''(t+\tau) & C_2''(t+\tau) & \cdots & C_{m-1}''(t+\tau) \\ \vdots & & & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t+\tau) & C_1^{(m-1)}(t+\tau) & C_2^{(m-1)}(t+\tau) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t+\tau) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & \cdots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0(\tau) & C_1(\tau) & \cdots & C_{m-1}(\tau) \\ C_0'(\tau) & C_1'(\tau) & \cdots & C_{m-1}'(\tau) \\ C_0''(\tau) & C_1''(\tau) & \cdots & C_{m-1}''(\tau) \\ \vdots & & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(\tau) & C_1^{(m-1)}(\tau) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(\tau) \end{pmatrix}$$

efectuando el producto de las matrices luego considerando los elementos de la última columna de la matriz que esta a la izquierda, conseguimos

$$C_{m-1}(t+\tau) = C_0(t)C_{m-1}(\tau) + C_1(t)C_{m-1}'(\tau) + \cdots + C_{m-1}(t)C_{m-1}^{(m-1)}(\tau)$$

como $\quad C_{m-1}(t) = D(t) \quad$ solución dinámica entonces

$$D(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i(t)D^{(i)}(\tau)$$

$$C_{m-1}'(t+\tau) = C_0'(t)C_{m-1}(\tau) + C_1'(t)C_{m-1}'(\tau) + \cdots + C_{m-1}'(t)C_{m-1}^{(m-1)}(\tau)$$

$$D'(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i'(t)D^{(i)}(\tau)$$

$$C_{m-1}''(t+\tau) = C_0''(t)C_{m-1}(\tau) + C_1''(t)C_{m-1}'(\tau) + \cdots + C_{m-1}''(t)C_{m-1}^{(m-1)}(\tau)$$

$$D''(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i''(t)D^{(i)}(\tau)$$

$$C_{m-1}^{(m-1)}(t+\tau) = C_0^{(m-1)}(t)C_{m-1}(\tau) + C_1^{(m-1)}(t)C'_{m-1}(\tau) + \cdots + C_{m-1}^{(m-1)}(t)C_{m-1}^{(m-1)}(\tau)$$

$$D^{(m-1)}(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i^{(m-1)}(t)D^{(i)}(\tau)$$

En consecuencia:

$$D^{(r)}(t+\tau) = \sum_{i=0}^{m-1} C_i^{(r)}(t)D^{(i)}(\tau) \qquad r = 0, 1, 2, \ldots, m-1$$

2.6.1. Ejemplo

Hallemos la solución Dinámica de la ecuación

$$\ddot{q} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dot{q} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} q = \bar{0}$$

Haciendo el cambio de variable vectorial

$$\begin{aligned} u_1 = q &\Longrightarrow \dot{u}_1 = \dot{q} = u_2 \\ u_2 = \dot{q} &\Longrightarrow \dot{u}_2 = \ddot{q} = -A_1\dot{q} - A_2 q \end{aligned}$$

donde

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$$

Formando la ecuación diferencial $\dot{u} = Au$

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \mathbb{O}u_1 + \mathbb{I}u_2 \\ \dot{u}_2 &= -A_2 u_1 - A_1 u_2 \end{aligned}$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Siendo

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A_2 & -A_1 \end{pmatrix}$$

Hallando el polinomio caracteristico $P(\lambda)$ de la matriz A

$$det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1/4 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \lambda & 0 & -1 \\ 1/4 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$det(\lambda I - A) = \lambda \left[\lambda \begin{vmatrix} \lambda+2 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & \lambda+2 \\ 1/4 & 0 \end{vmatrix} \right] - 1(-1) \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1/4 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} det(\lambda I - A) &= \lambda[\lambda(\lambda+2)(\lambda-1) + \tfrac{1}{4}(\lambda+2)] + \lambda(\lambda-1) + 1/4 \\ det(\lambda I - A) &= \lambda[(\lambda+2)(\lambda^2 - \lambda + 1/4)] + \lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} \\ det(\lambda I - A) &= \lambda^4 + \lambda^3 - \tfrac{7}{4}\lambda^2 + \tfrac{1}{2}\lambda + \lambda^2 - \lambda + \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 - \tfrac{3}{4}\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda + \tfrac{1}{4}}$$

Sabemos

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= det(\lambda I - A) = \sum_{j=0}^{4} b_j \lambda^{4-j} \\ P(\lambda) &= b_0\lambda^4 + b_1\lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_3\lambda + b_4 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$b_0 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_2 = -\frac{3}{4} \quad b_3 = -\frac{1}{2} \quad b_4 = \frac{1}{4}$$

Considerando (2.128), hallemos la solución dinámica escalar $d(t)$

$$\sum_{j=0}^{4} b_j d^{(4-j)}(t) = 0$$

$$d(0) = d'(0) = d''(0) = 0 \qquad d'''(0) = 1$$

$$\begin{aligned} b_0 d^{(4)} + b_1 d^{(3)} + b_2 d^{(2)} + b_3 d^{(1)} + b_4 d &= 0 \\ d^{(4)} + d^{(3)} - \tfrac{3}{4} d^{(2)} - \tfrac{1}{2} d^{(1)} + \tfrac{1}{4} d &= 0 \end{aligned}$$

tiene la ecuación caracteristica $\qquad (r+1)^2(r-1/2)^2 = 0$

y solución general $\qquad d(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + c_3e^{t/2} + c_4te^{t/2}$

Hallando las constante c_i

$$\begin{aligned}
d(0) &= 0 \\
& \boxed{c_1 = -c_3} && (\beta 1) \\
d'(t) &= -c_1e^{-t} + c_2(e^{-t} - te^{-t}) + \tfrac{c_3}{2}e^{t/2} + c_4(e^{t/2} + \tfrac{t}{2}e^{t/2}) \\
d'(0) &= 0 \\
& \boxed{-c_1 + c_2 + \frac{c_3}{2} + c_4 = 0} && (\beta 2) \\
d''(t) &= c_1e^{-t} + c_2(-e^{-t} - [e^{-t} - te^{-t}]) + \tfrac{c_3}{4}e^{t/2} + c_4(\tfrac{e^{t/2}}{2} + [\tfrac{1}{2}e^{t/2} + \tfrac{t}{4}e^{t/2}]) \\
d''(t) &= c_1e^{-t} + c_2(-2e^{-t} + te^{-t}) + \tfrac{c_3}{4}e^{t/2} + c_4(e^{t/2} + \tfrac{t}{4}e^{t/2}) \\
d''(0) &= 0 \\
& \boxed{c_1 + c_2(-2) + \frac{c_3}{4} + c_4 = 0} && (\beta 3) \\
d'''(t) &= -c_1e^{-t} + c_2(2e^{-t} + [e^{-t} - te^{-t}]) + \tfrac{c_3}{8}e^{t/2} + c_4(\tfrac{e^{t/2}}{2} + [\tfrac{1}{4}e^{t/2} + \tfrac{t}{8}e^{t/2}]) \\
d'''(t) &= -c_1e^{-t} + c_2(3e^{-t} - te^{-t}) + \tfrac{c_3}{8}e^{t/2} + c_4(\tfrac{3e^{t/2}}{2} + \tfrac{t}{8}e^{t/2}) \\
d'''(0) &= 1 \\
& \boxed{-c_1 + c_2(3) + \frac{c_3}{8} + c_4(\frac{3}{4}) = 1} && (\beta 4)
\end{aligned}$$

$$(\beta 1) \text{ en } (\beta 2) \qquad c_3 + c_2 + \frac{c_3}{2} + c_4 = 0 \implies \boxed{c_2 + \frac{3c_3}{2} + c_4 = 0} \qquad (\beta 5)$$

$$(\beta 1) \text{ en } (\beta 3) \qquad -c_3 - 2c_2 + \frac{c_3}{4} + c_4 = 0 \implies \boxed{-2c_2 - \frac{3c_3}{4} + c_4 = 0} \qquad (\beta 6)$$

$$(\beta 1) \text{ en } (\beta 4) \qquad c_3 + 3c_2 + \frac{c_3}{8} + \frac{3c_4}{4} = 1 \implies 3c_2 + \frac{9c_3}{8} + \frac{3c_4}{4} = 1$$

$$\boxed{4c_2 + \frac{3c_3}{2} + c_4 = \frac{4}{3}} \qquad (\beta 7)$$

$$(\beta 5) - (\beta 6) \qquad 3c_2 + \frac{9c_3}{4} = 0 \implies \boxed{c_2 = -\frac{3c_3}{4}} \qquad (\beta 8)$$

$$(\beta 7) - (\beta 6) \qquad 6c_2 + \frac{9c_3}{4} = \frac{4}{3} \qquad (\beta 9)$$

$$(\beta 8) \text{ en } (\beta 9) \qquad 6(\frac{-3c_3}{4}) + \frac{9c_3}{4} = \frac{4}{3} \implies \boxed{c_3 = -\frac{16}{27}} \qquad (\beta 10)$$

$$(\beta 10) \text{ en } (\beta 8) \qquad \boxed{c_2 = \frac{4}{9}} \qquad (\beta 11)$$

$$(\beta 10) \text{ en } (\beta 1) \qquad \boxed{c_1 = \frac{16}{27}}$$

$$(\beta 10) \text{ y } (\beta 11) \text{ en } (\beta 5) \quad c_4 = -c_2 - \frac{3c_3}{2} \implies \boxed{c_4 = \frac{4}{9}}$$

Por lo tanto

$$\boxed{d(t) = \left(\frac{16}{27}\right) e^{-t} + \left(\frac{4}{9}\right) te^{-t} + \left(\frac{-16}{27}\right) e^{\frac{t}{2}} + \left(\frac{4}{9}\right) te^{\frac{t}{2}}}$$

Utilizando el Lema 2.1, hallamos las matrices D_0, D_1, D_2 y D_3

$$D_{k+2} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D_{k+1} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} D_k = \mathbb{O}$$

$$D_0 = \mathbb{O} \qquad D_1 = \mathbb{I}$$

Si $k = 0$

$$D_2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D_1 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} D_0 = \mathbb{O}$$

$$D_2 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbb{I} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \mathbb{O} = \mathbb{O}$$

$$\implies D_2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $k = 1$

$$D_3 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} D_2 + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} D_1 = \mathbb{O}$$

$$D_3 + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

$$\Longrightarrow \quad D_3 = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3/4 \end{pmatrix}$$

La solución dinámica es

$$D_{(t)} = \sum_{j=1}^{4} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{(t)}^{(j-i-1)} D_{4-j}$$

desarrollando

$$\begin{aligned} D_{(t)} &= \sum_{i=0}^{0} b_i d_{(t)}^{(-i)} D_3 + \sum_{i=0}^{1} b_i d_{(t)}^{(1-i)} D_2 \\ &\quad + \sum_{i=0}^{2} b_i d_{(t)}^{(2-i)} D_1 + \sum_{i=0}^{3} b_i d_{(t)}^{(3-i)} D_0 \\ D_{(t)} &= \left(b_0 d_{(t)}\right) D_3 + \left(b_0 d_{(t)}^{(1)} + b_1 d_{(t)}^{(0)}\right) D_2 \\ &\quad + \left(b_0 d_{(t)}^{(2)} + b_1 d_{(t)}^{(1)} + b_2 d_{(t)}^{(0)}\right) D_1 + \left(b_0 d_{(t)}^{(3)} + b_1 d_{(t)}^{(2)} + b_2 d_{(t)}^{(1)} + b_3 d_{(t)}^{(0)}\right) D_0 \end{aligned}$$

reemplazando los valores numéricos hallados, tenemos que la solución Dinámica es:

$$D_{(t)} = \begin{pmatrix} te^{-t} & -\frac{16}{27} e^{-t} - \frac{4}{9} te^{-t} + \frac{16}{27} e^{\frac{t}{2}} - \frac{4}{9} te^{\frac{t}{2}} \\ 0 & te^{\frac{t}{2}} \end{pmatrix}$$

Capítulo 3

Controlabilidad

En [CLA 99a] se da una matriz de controlabilidad, en este capítulo presentamos una generalización de esta matriz de controlabilidad para ecuaciones diferenciales matriciales de orden superior, y damos un teorema para determinar la controlabilidad completa del sistema.

3.1. Controlabilidad para una ecuación Diferencial con coeficientes matriciales

Sea el sistema

$$u^{(m)}(t) + A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1} u'(t) + A_m u(t) = G\overline{u}(t) \tag{3.1}$$

A_i : matriz cuadrada constante de orden n.

u : vector $n \times 1$ que depende de t.

G : matriz constante de orden $n \times r$.

$\overline{u}$: vector $r \times 1$, que depende de t.

La ecuación (3.1) se puede llevar a la forma de una ecuación de estado.

$$z' = Az + \hat{G}\overline{u}(t) \tag{3.2}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{m-1}' \\ z_m' \end{pmatrix}_{mn\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_1 \end{pmatrix}_{mn\times mn} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{m-1} \\ z_m \end{pmatrix}_{mn\times 1} + \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ G \end{pmatrix} \overline{u} \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= u \\ z_2 &= u' \\ z_3 &= u'' \\ &\vdots \\ z_{m-1} &= u^{(m-2)} \\ z_m &= u^{(m-1)} \end{aligned}$$

y $\bar{0}$ es una matriz cero de orden $n \times 1$.

Utilizando el Teorema 1.1 podemos afirmar que el sistema (3.3) es controlable si para cada $z(0) \in \mathbb{R}^{mn}$, existe $\overline{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$, que lleva $z(0)$ en θ[1] es decir

$$\theta = e^{At_1} z(0) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} \hat{G}\overline{u}(\tau) d\tau \tag{3.4}$$

donde

$$\theta = \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} \qquad z(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

teniendo como base esta idea se da una definición de controlabilidad para la ecuación (3.1).

Definición 3.1.1 *Diremos que el sistema descrito por (3.1) es completamente controlable si a partir de cualquier estado inicial* $z(0)$ *(* $\{u(0), u'(0), \cdots, u^{(m-1)}(0)\}$*), existe un vector de control* $\overline{u}(t)$ *donde* $t \in [0, t_1]$, *que lleva* $z(0)$ *(*$\{u(0), u'(0), \cdots, u^{(m-1)}(0)\}$*) al origen* θ *(*$\{\bar{0}, \bar{0}, \cdots, \bar{0}\}$*) donde* $\bar{0}$ *es un vector o matriz cero de orden* $n \times 1$.

[1] θ es la matriz cero de orden $mn \times 1$

3.2. La matriz de Controlabilidad

Sea la matriz

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} D_0G & D_1G & \cdots & D_{mn-2}G & D_{mn-1}G \\ D_1G & D_2G & \cdots & D_{mn-1}G & D_{mn}G \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{m-2}G & D_{m-1}G & \cdots & D_{m+mn-4}G & D_{m+mn-3}G \\ D_{m-1}G & D_mG & \cdots & D_{m+mn-3}G & D_{m+mn-2}G \end{pmatrix}_{mn\times mnr} \tag{3.5}$$

que esta formada por matrices por bloques D_iG que son de orden $n\times r$, donde la matriz D_i esta definida como $D_i = D^{(i)}(0)$.

Teorema 3.1 *El sistema (3.1) es completamente controlable* $\Longleftrightarrow$ *rango*$(\mathcal{C}) = mn$.

<u>Prueba:</u>

<u>$\Longrightarrow$:</u> De (2.16)

$$e^{At} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}_{mn\times mn}$$

utilizando esta expresión en (3.4)

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^{t_1} \begin{pmatrix} C_0(t_1-\tau) & C_1(t_1-\tau) & \cdots & C_{m-1}(t_1-\tau) \\ C_0'(t_1-\tau) & C_1'(t_1-\tau) & \cdots & C_{m-1}'(t_1-\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1-\tau) & C_1^{(m-1)}(t_1-\tau) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau)d\tau$$

luego

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^{t_1} \begin{pmatrix} C_{m-1}(t_1-\tau)G \\ C_{m-1}'(t_1-\tau)G \\ \vdots \\ C_{m-1}^{(m-1)}(t_1-\tau)G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau)d\tau$$

Sabemos por (2.137) que

$$D^{(r)}(t_1-\tau) = \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(r)}(t_1)D^{(j)}(-\tau)$$

utilizando este resultado en la parte integral de la expresión arriba indicada tenemos

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^{t_1} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{m-1} C_j(t_1)D^{(j)}(-\tau)G \\ \sum_{j=0}^{m-1} C_j'(t_1)D^{(j)}(-\tau)G \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(m-1)}(t_1)D^{(j)}(-\tau)G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau)d\tau$$

Luego

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix} +$$

$$\int_0^{t_1} \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & D(-\tau) \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & D'(-\tau) \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & D^{(m-1)}(-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ G \end{pmatrix} {}^{2}\overline{u}(\tau)d\tau$$

Factorizando

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t_1) & C_1(t_1) & \cdots & C_{m-1}(t_1) \\ C_0'(t_1) & C_1'(t_1) & \cdots & C_{m-1}'(t_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t_1) & C_1^{(m-1)}(t_1) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t_1) \end{pmatrix} \left\{ u_0 + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} D(-\tau)G \\ D'(-\tau)G \\ \vdots \\ D^{(m-1)}(-\tau)G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau)d\tau \right\} \tag{3.6}$$

donde

$$u_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}_{mn\times 1}$$

notemos que $z(0) = u_0$

Utilizando la matriz A dada en (3.2) en la ecuación (2.100)

$$e^{At} = \sum_{j=1}^{mn} \alpha_{mn-j}(t)A^{mn-j}$$

donde $\alpha_j(t)$ es una función real de variable real, solución de la ecuación diferencial escalar

$$\sum_{j=0}^{mn} b_j u^{(mn-j)}(t) = 0$$

con valores iniciales $\alpha_j^{(k)}(0) = \delta_{jk}$ para $k = 0, 1, \ldots, mn-1$.

La expresión e^{At} puede ser escrito como

$$e^{At} = \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t)A^j \tag{3.7}$$

[2] $\tilde{0}$ es la matriz cero de orden $n \times r$

Ahora

$$A^j = \left[\frac{d^j}{dt^j}e^{At}\right]_{t=0} = \begin{pmatrix} C_0^{(j)}(0) & C_1^{(j)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j)}(0) \\ C_0^{(j+1)}(0) & C_1^{(j+1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+1)}(0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(j+m-1)}(0) & C_1^{(j+m-1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+m-1)}(0) \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

reemplazando (3.8) en (3.7) tenemos:

$$\begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & \cdots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & \cdots & C_{m-1}'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & \cdots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) \begin{pmatrix} C_0^{(j)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j)}(0) \\ C_0^{(j+1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ C_0^{(j+m-1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

Igualando los elementos de la última columna

$$\begin{aligned} D(t) = \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D^{(j)}(0) &= \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D_j \\ D'(t) = \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D^{(j+1)}(0) &= \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D_{j+1} \\ &\vdots \\ D^{(m-1)}(t) = \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D^{(j+m-1)}(0) &= \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(t) D_{j+m-1} \end{aligned} \tag{3.9}$$

Utilizando (3.9) en (3.6) obtenemos

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = e^{At_1} \left\{ u_0 + \int_0^{t_1} \begin{pmatrix} \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(-\tau) D_j G \\ \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(-\tau) D_{j+1} G \\ \vdots \\ \sum_{j=0}^{mn-1} \alpha_j(-\tau) D_{j+m-1} G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau) d\tau \right\}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = e^{At_1} \left\{ u_0 + \sum_{j=0}^{mn-1} \begin{pmatrix} D_j G \int_0^{t_1} \alpha_j(-\tau) \overline{u}(\tau) d\tau \\ D_{j+1} G \int_0^{t_1} \alpha_j(-\tau) \overline{u}(\tau) d\tau \\ \vdots \\ D_{j+m-1} G \int_0^{t_1} \alpha_j(-\tau) \overline{u}(\tau) d\tau \end{pmatrix} \right\}$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \end{pmatrix} = e^{At_1} \left\{ u_0 + \sum_{j=0}^{mn-1} \begin{pmatrix} D_j G\beta_j(t_1) \\ D_{j+1} G\beta_j(t_1) \\ \vdots \\ D_{j+m-1} G\beta_j(t_1) \end{pmatrix} \right\}_{mn\times 1}$$

donde

$$\beta_j(t_1) = \int_0^{t_1} \alpha_j(-\tau)\overline{u}_{r\times 1}(\tau)d\tau \qquad j = 0, ..., mn-1$$

$\Longrightarrow$

$$\theta = u_0 + \sum_{j=0}^{mn-1} \begin{pmatrix} D_j G\beta_j(t_1) \\ D_{j+1} G\beta_j(t_1) \\ \vdots \\ D_{j+m-1} G\beta_j(t_1) \end{pmatrix}$$

en el cual θ es una matriz cero de orden $nm \times 1$

$\Longrightarrow$

$$\theta = u_0 + \begin{pmatrix} D_0 G & \cdots & D_{mn-1} G \\ \vdots & & \vdots \\ D_{m-1} G & \cdots & D_{mn+m-2} G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0(t_1) \\ \beta_1(t_1) \\ \beta_2(t_1) \\ \vdots \\ \beta_{mn-1}(t_1) \end{pmatrix} \tag{3.10}$$

esta expresión toma la forma $\qquad \theta = u_0 + \mathcal{C}\beta$

$$\Longrightarrow \mathcal{C}\beta = -u_0$$

notemos que $\mathcal{C}$ es la matriz de controlabilidad.

La ecuación (3.10) se la puede asociar a una transformación lineal $T(\beta) = \mathcal{C}\beta$, como u_0 es arbitrario $\Longrightarrow Im(T) = \mathbb{R}^{mn} \Longrightarrow dim(Im(T)) = mn$

Por otro lado:

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1,rmn} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2,rmn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{mn,1} & C_{mn,2} & \cdots & C_{mn,rmn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{mnr} \end{pmatrix} \Big/ b_i \text{ son escalares} \right\}$$

$$Im(T) = \left\{ \begin{pmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ \vdots \\ C_{mn,1} \end{pmatrix} b_1 + \begin{pmatrix} C_{12} \\ C_{22} \\ \vdots \\ C_{mn,2} \end{pmatrix} b_2 + \cdots\cdots + \begin{pmatrix} C_{1,rmn} \\ C_{2,rmn} \\ \vdots \\ C_{mn,rmn} \end{pmatrix} b_{mnr} \Big/ b_i \text{ son escalares} \right\}$$

Como $dim(Im(T)) = mn$ entonces existen mn vectores columnas en la matriz $\mathcal{C}$ que on linealmente independiente, por lo tanto $rango(\mathcal{C}) = mn$.

$\Longleftarrow$: Sea las variables de estado $\{V_1, V_2, \cdots, V_m\}$ en (3.1)

$$V_1 = u(t) \longrightarrow V_1' = u'(t) = V_2$$

$$V_2 = u'(t) \longrightarrow V_2' = u''(t) = V_3$$

$$\vdots$$

$$V_m = u^{(m-1)}(t) \longrightarrow V_m' = u^{(m)}(t) = -A_m V_1 - A_{m-1} V_2 - \cdots - A_1 V_m + G\overline{u}$$

En forma matricial (3.1) se escribe como

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_{m-1}' \\ V_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{m-1} \\ V_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ G\overline{u} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_{m-1}' \\ V_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{m-1} \\ V_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \\ G \end{pmatrix} \overline{u}$$

Tiene la forma $V'(t) = AV(t) + \hat{G}\overline{u}$ cuya solución es

$$V(t) = e^{A(t-t_0)}V(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau \tag{3.11}$$

Demostremos que $W(\tau, t)$ es no singular $\forall t > \tau$

$$W(\tau, t) = \int_{\tau}^{t} e^{A(t-s)}\hat{G}\hat{G}^T e^{A^T(t-s)}ds \tag{3.12}$$

veamos.

Supongamos que $\exists\, t_1 > t_0 \quad W(t_0, t_1)$ es singular

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\alpha}_{1\times mn} \neq \bar{0} \;/\; W(t_0,t_1)\bar{\alpha}^T = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\alpha} \neq \bar{0} \;/\; \bar{\alpha}W(t_0,t_1)\bar{\alpha}^T = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{\alpha}W(t_0,t_1)\bar{\alpha}^T = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G}\hat{G}^T e^{A^T(t_1-s)}\bar{\alpha}^T ds = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G})(\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G})^T ds = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G}\|^2 ds = 0 \quad ^3$$

$$\Longrightarrow \quad \|\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G}\| = 0 \quad \forall s \in [t_0, t_1] \quad \text{y algun } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G} = \breve{0}^4 \quad \forall s \in [t_0, t_1] \quad \text{y algun } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

$\Longrightarrow$ las filas de $e^{A(t_1-s)}\hat{G}$ son linealmenmte dependientes (pues $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$)

Luego $rango(e^{A(t_1-s)}\hat{G}) = p < mn$

Por otro lado derivando $mn-1$ veces la expresión $\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G} = \breve{0}$, tenemos:

$$\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}\hat{G} = -\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}A\hat{G} = \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}A^2\hat{G} = \cdots = (-1)^{mn-1}\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}A^{mn-1}\hat{G} = \breve{0}$$

el cual puede escribirse como:

$$\bar{\alpha}[e^{A(t_1-s)}\hat{G} \quad -e^{A(t_1-s)}A\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A^2\hat{G} \quad \cdots \quad (-1)^{mn-1}e^{A(t_1-s)}A^{mn-1}\hat{G}] = \bar{O}^5$$

y multiplicando por -1 las columnas con signo negativo

$$\bar{\alpha}[e^{A(t_1-s)}\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A^2\hat{G} \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{mn-1}\hat{G}] = \bar{O}$$

entonces podemos afirmar que las filas de la matriz

$$[e^{A(t_1-s)}\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A^2\hat{G} \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{mn-1}\hat{G}]$$

son linealmente dependientes (pues $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$) es decir

$$rango[e^{A(t_1-s)}\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A\hat{G} \quad e^{A(t_1-s)}A^2\hat{G} \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{mn-1}\hat{G}] = q$$

[3] $\|\;\|$ es la norma euclidiana

[4] $\breve{0}$ es la matriz cero de orden $1 \times r$

[5] $\bar{O}$ es la matriz cero de orden $1 \times mnr$

donde $q < mn$.
Por otro lado $s \in [t_0, t_1]$ donde $t_0 < t_1$, haciendo $s = t_1$, tenemos

$$rango[\hat{G} \quad A\hat{G} \quad A^2\hat{G} \quad \cdots \quad A^{mn-1}\hat{G}] = q \tag{3.13}$$

Utilizando (3.8) se tiene

$$A^j\hat{G} = \begin{pmatrix} C_0^{(j)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j)}(0) \\ C_0^{(j+1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+1)}(0) \\ \vdots & & \vdots \\ C_0^{(j+m-1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+m-1)}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \\ G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{m-1}^{(j)}(0)G \\ C_{m-1}^{(j+1)}(0)G \\ \vdots \\ C_{m-1}^{(j+m-1)}(0)G \end{pmatrix}$$

entonces

$$A^j\hat{G} = \begin{pmatrix} D^{(j)}(0)G \\ D^{(j+1)}(0)G \\ \vdots \\ D^{(j+m-1)}(0)G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_jG \\ D_{j+1}G \\ \vdots \\ D_{j+m-1}G \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

utilizando (3.14) en (3.13), tenemos

$$rango \begin{pmatrix} D_0G & D_1G & \cdots & D_{mn-2}G & D_{mn-1}G \\ D_1G & D_2G & \cdots & D_{mn-1}G & D_{mn}G \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ D_{m-2}G & D_{m-1}G & \cdots & D_{m+mn-4}G & D_{m+mn-3}G \\ D_{m-1}G & D_mG & \cdots & D_{m+mn-3}G & D_{m+mn-2}G \end{pmatrix} = q \tag{3.15}$$

donde $q < mn$.
Observar que (3.15) contradice la hipótesis general que afirma que $rango(C) = mn$
Por lo tanto $W(\tau, t)$ es no singular $\forall\, t > \tau$.
Luego podemos construir la entrada $\overline{u}(t)$ dada por

$$\overline{u}(t) = \hat{G}^T e^{A^T(t_1-t)} W^{-1}(t_0, t_1)[V(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}V(t_0)]$$

que satisface

$$V(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}V(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau$$

pues

$$
\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\hat{G}\hat{G}^T e^{A^T(t_1-\tau)}W^{-1}(t_0,t_1)[V(t_1)-e^{A(t_1-t_0)}V(t_0)]d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\hat{G}\hat{G}^T e^{A^T(t_1-\tau)}d\tau W^{-1}(t_0,t_1)[V(t_1)-e^{A(t_1-t_0)}V(t_0)] \\
&\quad \text{utilizando (3.12)} \\
&= W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)[V(t_1)-e^{A(t_1-t_0)}V(t_0)] \\
&= V(t_1)-e^{A(t_1-t_0)}V(t_0)
\end{aligned}
$$

entonces

$$V(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}V(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau$$

podemos decir que cualquier estado inicial $V(t_0)$ puede ser llevado a cualquier estado final $V(t_1)$ a través de un control $\overline{u}$.

Utilizando el teorema 1.1 afirmamos que para cada $V(0)$, existe $\overline{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ que lleva $V(0)$ a θ.

Capítulo 4

Observabilidad

El tema de observabilidad será abordado de manera semejante a la controlabilidad, en donde se usará la solución dinámica matricial.

4.1. Observabilidad para una ecuación diferencial con coeficientes matriciales

Sea el sistema

$$u^{(m)}(t) + A_1 u^{(m-1)}(t) + \cdots + A_{m-1}u'(t) + A_m u(t) = G\overline{u}(t) \tag{4.1}$$

$$Y(t) = \phi_1 u(t) + \phi_2 u'(t) + \cdots + \phi_m u^{(m-1)}(t) \tag{4.2}$$

A_i : matriz cuadrada constante de orden n.

u : vector $n \times 1$ que depende de t.

G : matriz constante de orden $n \times r$.

$\overline{u}$: vector $r \times 1$, que depende de t.

Y : vector $k \times 1$ que depende de t (vector de salida), donde $k \leq mn$.

ϕ_i : matriz constante de orden $k \times n$ $i = 1, 2, \ldots, m$.

Las ecuaciones (4.1) y (4.2) se puede llevar a la forma

$$z'(t) = Az(t) + \hat{G}\overline{u}(t) \tag{4.3}$$

$$Y(t) = Cz(t) \tag{4.4}$$

es decir

$$\begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ \vdots \\ z_{m-1}' \\ z_m' \end{pmatrix}_{mn\times 1} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \cdots & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \cdots & \mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \cdots & -A_1 \end{pmatrix}_{mn\times mn} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{m-1} \\ z_m \end{pmatrix}_{mn\times 1} + \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ \bar{0} \\ G \end{pmatrix} \overline{u} \tag{4.5}$$

donde

$$\begin{aligned} z_1 &= u \\ z_2 &= u' \\ z_3 &= u'' \\ &\vdots \\ z_{m-1} &= u^{(m-2)} \\ z_m &= u^{(m-1)} \end{aligned}$$

$$C = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m]_{k\times nm} \quad \text{y} \quad z(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

observemos que $\bar{0}$ es una matriz cero de orden $n \times 1$.

Utilizando la definición (1.6.3) se dice que el sistema descrito mediante las ecuaciones (4.3) y (4.4) es **completamente observable** o (por brevedad) observable si, para cualquier estado inicial $z(0) \in \mathbb{R}^{mn}$, existe un tiempo t_1 tal que conociendo $\overline{u}(t)$ y $Y(t)$ donde $t \in [0, t_1]$ asi como también las matrices constantes A, $\hat{G}$ y C son suficientes para determinar $z(0)$.

$$z(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

teniendo en cuenta todo lo expresado arriba a continuación damos una definición de observabilidad para el sistema descrito por las ecuaciones (4.1) y (4.2)

Definición 4.1.1 *El sistema descrito por las ecuaciones (4.1) y (4.2) es* **completamente observable** *o (por brevedad) observable si para cualquier estado inicial* $z(0) \in \mathbb{R}^{mn}$ $(\{u(0), u'(0), \ldots, u^{m-1}(0)\})$ $\exists$ $t_1 > 0/$ *conociendo* $u(t)$ *y* $Y(t)$ $t \in [0, t_1]$ *asi como también las matrices constantes* A_i *y* ϕ_i $i = 1, \ldots, m$ *son suficiente para determinar* $z(0)$ $(\{u(0), u'(0), \ldots, u^{(m-1)}(0)\})$.

4.2. La Matriz de Observabilidad

Sea la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} H_{1\,1} & H_{1\,2} & \cdots & H_{1\,m} \\ H_{2\,1} & H_{2\,2} & \cdots & H_{2\,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ H_{mn\,1} & H_{mn\,2} & \cdots & H_{mn\,m} \end{bmatrix}_{mnk \times mn} \tag{4.6}$$

donde:

$$\begin{aligned}
H_{1\,1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i (D_{m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-2} A_k) \\
H_{1\,2} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-3} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-3} A_k \right) \\
&\vdots \\
H_{1\,m-1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_i + \sum_{k=1}^{1} D_{i-k} A_k \right) \\
H_{1\,m} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{2\,1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-1} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-1} A_k \right) \\
H_{2\,2} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-2} A_k \right) \\
&\vdots \\
H_{2\,m-1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{i+1} + \sum_{k=1}^{1} D_{1+i-k} A_k \right) \\
H_{2\,m} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_i
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{3\,1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k} A_k \right) \\
H_{3\,2} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-1} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-1} A_k \right) \\
&\vdots \\
H_{3\,m-1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{2+i} + \sum_{k=1}^{1} D_{2+i-k} A_k \right) \\
H_{3\,m} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{1+i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_{mn\,1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+mn+i-3} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+mn+i-k-3} A_k \right) \\
H_{mn\,2} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+mn+i-4} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+mn+i-k-4} A_k \right) \\
&\vdots \\
H_{mn\,m-1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{mn-1+i} + \sum_{k=1}^{1} D_{mn+i-k-1} A_k \right) \\
H_{mn\,m} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{mn+i-2}
\end{aligned}
$$

es decir

$$
\begin{aligned}
H_{j\,1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-2+(j-1)} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-2+(j-1)} A_k \right) \\
&\quad j = 1, 2, \ldots, mn \\
H_{j\,2} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-3+(j-1)} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-3+(j-1)} A_k \right) \\
&\quad j = 1, 2, \ldots, mn \\
&\vdots \\
H_{j\,m-1} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{i+(j-1)} + \sum_{k=1}^{1} D_{i-k+(j-1)} A_k \right) \\
&\quad j = 1, 2, \ldots, mn \\
H_{j\,m} &= \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i-1+(j-1)} \\
&\quad j = 1, 2, \ldots, mn
\end{aligned}
$$

La matriz de observabilidad $\mathcal{O}$ se puede scribir en forma compacta como:

$$\mathcal{O} = \quad [H_{j\,p}] \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \ldots, mn \\ p = 1, 2, \ldots, m \end{array}$$

donde $\quad H_{j\,p} \quad$ es una matriz de orden $\quad k \times n$

$$H_{j\,p} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-2+(j-1)-(p-1)} + \sum_{k=1}^{m-1-(p-1)} D_{m+i-k-2+(j-1)-(p-1)} A_k \right) & p \neq m \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i+j-2} & p = m \end{cases} \tag{4.7}$$

Teorema 4.1 *El sistema (4.1) asociado con (4.2) es completamente observable si, y sólo si,* $rango(\mathcal{O}) = mn$

Prueba:

$\underline{\Longrightarrow}$: La ecuación (4.1) se puede llevar a la forma de la ecuación (4.3), es decir

$$z'(t) = Az(t) + \hat{G}\overline{u}(t)$$

Resolviendo, tenemos

$$e^{-At}z'(t) = e^{-At}Az(t) + e^{-At}\hat{G}\overline{u}(t) \quad \Longrightarrow \quad e^{-At}z'(t) - e^{-At}Az(t) = e^{-At}\hat{G}\overline{u}(t)$$

esto es

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-At}z(t)\right) = e^{-At}\hat{G}\overline{u}(t)$$

integrando de 0 a t

$$e^{-At}z(t) - z(0) \quad = \quad \int_0^t e^{-A\tau}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad z(t) \quad = \quad e^{At}z(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau \tag{4.8}$$

usando (2.10) en (4.8) tenemos

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \dots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \dots & C_{m-1}'(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \dots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1(0) \\ z_2(0) \\ \vdots \\ z_m(0) \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} C_0(t-\tau) & C_1(t-\tau) & \dots & C_{m-1}(t-\tau) \\ C_0'(t-\tau) & C_1'(t-\tau) & \dots & C_{m-1}'(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t-\tau) & C_1^{(m-1)}(t-\tau) & \dots & C_{m-1}^{(m-1)}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ G \end{pmatrix} \overline{u}(\tau)d\tau$$

y $\bar{0}$ es una matriz cero de orden $n \times 1$.

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ u''(t) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0(t) & C_1(t) & C_2(t) & \dots & C_{m-1}(t) \\ C_0'(t) & C_1'(t) & C_2'(t) & \dots & C_{m-1}'(t) \\ C_0''(t) & C_1''(t) & C_2''(t) & \dots & C_{m-1}''(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t) & C_1^{(m-1)}(t) & C_2^{(m-1)}(t) & \dots & C_{m-1}^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ u''(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} C_0(t-\tau) & C_1(t-\tau) & \dots & C_{m-1}(t-\tau) \\ C_0'(t-\tau) & C_1'(t-\tau) & \dots & C_{m-1}'(t-\tau) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_0^{(m-1)}(t-\tau) & C_1^{(m-1)}(t-\tau) & \dots & C_{m-1}^{(m-1)}(t-\tau) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \vdots \\ G\overline{u}(\tau) \end{pmatrix} d\tau \quad (4.9)$$

Desarrollando las "m" filas de (4.9)

$$\begin{aligned} u(t) &= C_0(t)u(0) + C_1(t)u'(0) + \dots + C_{m-1}(t)u^{(m-1)}(0) \\ &\quad + \int_0^t C_{m-1}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau \\ u'(t) &= C_0'(t)u(0) + C_1'(t)u'(0) + \dots + C_{m-1}'(t)u^{(m-1)}(0) \\ &\quad + \int_0^t C_{m-1}'(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau \qquad (4.10) \\ &\vdots \\ u^{(m-1)}(t) &= C_0^{(m-1)}(t)u(0) + C_1^{(m-1)}(t)u'(0) + \dots + C_{m-1}^{(m-1)}(t)u^{(m-1)}(0) \\ &\quad + \int_0^t C_{m-1}^{(m-1)}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Reemplazando (4.10) en (4.2), tenemos

$$\begin{aligned}
Y_{k\times 1}(t) &= \phi_1\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j(t)u^{(j)}(0) + \int_0^t C_{m-1}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau\right)\\
&\quad +\phi_2\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j'(t)u^{(j)}(0) + \int_0^t C_{m-1}'(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau\right)\\
&\quad \vdots\\
&\quad +\phi_m\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(m-1)}(t)u^{(j)}(0) + \int_0^t C_{m-1}^{(m-1)}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau\right)
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
Y(t) &= \phi_1\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j(t)u^{(j)}(0)\right) + \phi_2\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j'(t)u^{(j)}(0)\right) +\\
&\quad \cdots + \phi_m\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(m-1)}(t)u^{(j)}(0)\right) + \beta(t) \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\beta(t) = \phi_1\int_0^t C_{m-1}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau + \phi_2\int_0^t C_{m-1}'(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau+\\
\ldots + \phi_m\int_0^t C_{m-1}^{(m-1)}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau
\end{aligned}$$

se conoce la cantidad $\beta(t)$ y el valor observado $Y(t)$, luego la diferencia $Y(t)-\beta(t)$ es una cantidad conocida, que la denotaremos por $\overline{Y}$, es decir

$$\overline{Y} = Y(t) - \beta(t)$$

considerando la ecuacion (4.11) se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{Y}(t) &= \phi_1\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j(t)u^{(j)}(0)\right) + \phi_2\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j'(t)u^{(j)}(0)\right) + \cdots\\
&\quad \cdots + \phi_m\left(\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(m-1)}(t)u^{(j)}(0)\right) \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

esta última expresión se puede escribir como

$$\overline{Y}(t) = \sum_{i=1}^{m}\phi_i\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{(i-1)}(t)u^{(j)}(0)$$

$$\overline{Y}(t) = \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=1}^{m} \phi_i C_j^{(i-1)}(t) u^{(j)}(0)$$

desarrollando la primera sumatoria tenemos

$$\overline{Y}(t) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_0^{(i-1)}(t) u^{(0)}(0) + \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_1^{(i-1)}(t) u^{(1)}(0) + \ldots + \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_{m-1}^{(i-1)}(t) u^{(m-1)}(0)$$

expresando como el producto de dos matrices

$$\left.\begin{array}{rcl} \overline{Y}_{k\times 1}(t) & = & (Y_0(t), Y_1(t), \ldots, Y_{m-1}(t)) \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}_{mn\times 1} \\ \text{Donde:} & & \\ Y_0(t) & = & \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_0^{(i-1)}(t) \\ Y_1(t) & = & \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_1^{(i-1)}(t) \\ \vdots & & \\ Y_{m-1}(t) & = & \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_{m-1}^{(i-1)}(t) \end{array}\right\} \qquad (4.13)$$

Sabemos de (2.95)

$$\begin{array}{rl} C_j(t) = & D^{(m-j-1)}(t) - \sum_{k=1}^{m-j-1} D^{(m-j-k-1)}(t)(-A_k) \\ & j = 0, 1, 2, \ldots, m-2 \end{array}$$

Derivando $(i-1)$ veces

$$\begin{array}{rcl} C_j^{(i-1)}(t) & = & D^{(m-j+i-2)}(t) + \sum_{k=1}^{m-j-1} D^{(m-j-k+i-2)}(t) A_k \\ & & j = 0, 1, 2, \ldots, m-2 \end{array} \qquad (4.14)$$

Además $C_{m-1}(t) = D(t)$
derivando $(i-1)$ veces

$$C_{m-1}^{(i-1)}(t) = D^{(i-1)}(t) \qquad (4.15)$$

Utilizando (4.14) y (4.15) en (4.13)

$$\begin{aligned}\overline{Y}_{k\times 1}(t) = \quad & \left[\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(D^{(m+i-2)}(t)+\sum_{k=1}^{m-1}D^{(m-k+i-2)}(t)A_k\right),\right.\\ & \sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(D^{(m+i-3)}(t)+\sum_{k=1}^{m-2}D^{(m-k+i-3)}(t)A_k\right),\\ & \ldots,\\ & \sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(D^{(i)}(t)+\sum_{k=1}^{1}D^{(i-k)}(t)A_k\right),\\ & \left.\sum_{i=1}^{m}\phi_i D^{(i-1)}(t)\right] u_0\end{aligned} \tag{4.16}$$

donde

$$u_0 = \begin{pmatrix} u(0) \\ u'(0) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

Utilizando (2.100) en (2.132) tenemos

$$\begin{pmatrix} D^{(r)}(t) \\ D^{(r+1)}(t) \\ D^{(r+2)}(t) \\ \vdots \\ D^{(r+m-2)}(t) \\ D^{(r+m-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{mn}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right) A^{mn-j+r}\begin{pmatrix} \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{O} \\ \vdots \\ \mathbb{O} \\ \mathbb{I} \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

(2.133) en (4.17)

$$\begin{pmatrix} D^{(r)}(t) \\ D^{(r+1)}(t) \\ D^{(r+2)}(t) \\ \vdots \\ D^{(r+m-1)}(t) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{mn}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)\right)\begin{pmatrix} D_{mn-j+r} \\ D_{mn-j+r+1} \\ D_{mn-j+r+2} \\ \vdots \\ D_{mn-j+r+m-1} \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

sabemos

$$\sum_{k=m}^{n} a_k = \sum_{k=m}^{n} a_{n-(k-m)} \qquad n \geq m \tag{4.19}$$

De (4.18) obtenemos

$$D^{(r)}(t) = \sum_{j=1}^{mn}\left(\sum_{i=0}^{j-1} b_i\, d^{(j-i-1)}(t)\right) D_{mn-j+r} \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{4.20}$$

El cual se puede escribir como

$$D^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{mn-1}\left(\sum_{i=0}^{j} b_i\, d^{(j-i)}(t)\right) D_{mn-j-1+r} \qquad r = 0,1,2,\ldots \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned} k &\leftarrow n-(k-m)\\ j &\leftarrow n-(j-m) \end{aligned}$$

$$\boxed{j \quad \leftarrow \quad (mn-1)-(j-0) = mn-1-j}$$

$$D^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{mn-1}\left(\sum_{i=0}^{mn-1-j} b_i\, d^{(mn-1-j-i)}(t)\right) D_{mn-(mn-1-j)-1+r}$$

$$D^{(r)}(t) = \sum_{j=0}^{mn-1}\left(\sum_{i=0}^{mn-1-j} b_i\, d^{(mn-1-j-i)}(t)\right) D_{j+r}$$

$$r = 0,1,2,\ldots$$

Luego

$$\left.\begin{aligned} &D^{(r)}(t) = \sum_{s=0}^{mn-1} \alpha_s(t) D_{s+r} \qquad\qquad r = 0,1,2,\ldots\\ &\text{donde}\\ &\alpha_s(t) = \sum_{i=0}^{mn-1-s} b_i d^{(mn-1-s-i)}(t) \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

usando (4.22) en (4.16)

$$\begin{aligned} \overline{Y}_{k\times 1}(t) = \Bigg[&\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+m+i-k-2}\,A_k\right),\\ &\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+m+i-3} + \sum_{k=1}^{m-2}\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+m+i-k-3}\,A_k\right),\ldots,\\ &\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+i} + \sum_{k=1}^{1}\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+i-k}\,A_k\right),\\ &\sum_{i=1}^{m}\phi_i\left(\sum_{s=0}^{mn-1}\alpha_s(t)D_{s+i-1}\right)\Bigg] u_0 \end{aligned}$$

en seguida factorizando $\sum_{s=0}^{mn-1} \alpha_s(t)$, tenemos

$$\overline{Y}_{k\times 1}(t) = \sum_{s=0}^{mn-1} \alpha_s(t) \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{s+m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{s+m+i-k-2}\, A_k \right), \right.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{s+m+i-3} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{s+m+i-k-3}\, A_k \right), \ldots,$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{s+i} + \sum_{k=1}^{1} D_{s+i-k} A_k \right), \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{s+i-1} \right] u_0$$

desarrollando la primera sumatoria

$$\overline{Y}_{k\times 1}(t) = \alpha_0(t) \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-2}\, A_k \right), \right.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-3} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-3}\, A_k \right), \ldots,$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_i + \sum_{k=1}^{1} D_{i-k}\, A_k \right), \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i-1} \right] u_0 +$$
$$\alpha_1(t) \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-1} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-1}\, A_k \right), \right.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-2}\, A_k \right), \ldots,$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{i+1} + \sum_{k=1}^{1} D_{i+1-k}\, A_k \right), \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_i \right] u_0 +$$
$$\alpha_2(t) \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k}\, A_k \right), \right.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+i-1} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+i-k-1}\, A_k \right), \ldots,$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{2+i} + \sum_{k=1}^{1} D_{2+i-k}\, A_k \right), \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{1+i} \right] u_0 + \cdots +$$
$$\alpha_{mn-1}(t) \left[\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+mn+i-3} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+mn+i-k-3}\, A_k \right), \right.$$
$$\sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{m+mn+i-4} + \sum_{k=1}^{m-2} D_{m+mn+i-k-4}\, A_k \right), \ldots,$$
$$\left. \sum_{i=1}^{m} \phi_i \left(D_{mn-1+i} + \sum_{k=1}^{1} D_{mn+i-k-1}\, A_k \right), \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{mn+i-2} \right] u_0 \qquad (4.23)$$

utilizando (4.7) en (4.23), tenemos

$$
\begin{aligned}
\overline{Y}_{k\times 1}(t) &= \alpha_0(t)[H_{1\,1}, H_{1\,2}, \dots, H_{1\,m-1}, H_{1\,m}]u_0 \\
&+\alpha_1(t)[H_{2\,1}, H_{2\,2}, \dots, H_{2\,m-1}, H_{2\,m}]u_0 \\
&+\alpha_2(t)[H_{3\,1}, H_{3\,2}, \dots, H_{3\,m-1}, H_{3\,m}]u_0 \\
&+\cdots+ \\
&\alpha_{mn-1}(t)[H_{mn\,1}, H_{mn\,2}, \dots, H_{mn\,m-1}, H_{mn\,m}]u_0
\end{aligned}
\tag{4.24}
$$

Sea la matriz dada (4.6), supongamos que $rango(\mathcal{O}) < mn \rightarrow \exists\ v_0 \neq 0/$

$$
\begin{pmatrix}
H_{1\,1} & H_{1\,2} & \dots & H_{1\,m-1} & H_{1\,m} \\
H_{2\,1} & H_{2\,2} & \dots & H_{2\,m-1} & H_{2\,m} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
H_{mn\,1} & H_{mn\,2} & \dots & H_{mn\,m-1} & H_{mn\,m}
\end{pmatrix}_{kmn\times mn} v_{0\,mn\times 1} = \bar{0}_{kmn\times 1}
$$

$$
\Rightarrow \left.
\begin{array}{llllll}
[H_{1\,1} & H_{1\,2} & \dots & H_{1\,m-1} & H_{1\,m}]v_0 & = \dot{0} \\
[H_{2\,1} & H_{2\,2} & \dots & H_{2\,m-1} & H_{2\,m}]v_0 & = \dot{0} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
[H_{mn\,1} & H_{mn\,2} & \dots & H_{mn\,m-1} & H_{mn\,m}]v_0 & = \dot{0}
\end{array}
\right\}
\tag{4.25}
$$

observemos que $\dot{0}$ es la matriz cero de orden $k \times 1$.

Utilizando (4.25) en (4.24) pues u_0 es cualquier estado inicial, tenemos :

$$
\overline{Y}(t) = \alpha_0(t)\dot{0} + \alpha_1(t)\dot{0} + \cdots + \alpha_{mn-1}(t)\dot{0}
$$

$$
\Rightarrow \overline{Y}(t) = \dot{0}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \{\alpha_0(t)[H_{1\,1}, H_{1\,2}, \dots, H_{1\,m-1}, H_{mn\,m}] + \alpha_1(t)[H_{2\,1}, H_{2\,2}, \dots, H_{2\,m}] \\
+\cdots+ \alpha_{mn-1}(t)[H_{mn\,1}, H_{mn\,2}, \dots, H_{mn\,m-1}, H_{mn\,m}]\}\, v_0 = \dot{0}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow A(t)_{k\times nm} v_{0\,nm\times 1} = \dot{0}
$$

Por lo tanto

$$
\overline{Y} = A(t)v_0 = \dot{0}
$$

lo cual implica que, para cierta v_0 no puede determinarse a partir de $Y(t)$, esto contradice la hipótesis.

Por lo tanto el $rango(\mathcal{O}) = mn$

$\Longleftarrow$: Debemos construír un estado inicial $V(0)$
De (4.2) se tiene

$$Y(t) = CV(t) \tag{4.26}$$

donde

$$C = [\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m]_{k \times nm} \quad \text{y} \quad V(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ u'(t) \\ \vdots \\ u^{(m-1)}(t) \end{pmatrix}$$

Convirtiendo la ecuación (4.1) en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, hagamos el cambio de variable

$V_1(t) = u(t) \to V_1'(t) = V_2$
$V_2(t) = u'(t) \to V_2'(t) = V_3$
$\vdots$
$V_m(t) = u^{(m-1)}(t) \to V_m'(t) = -A_1 V_m - A_2 V_{m-1} - \cdots - A_{m-1} V_2 - A_m V_1 + G\overline{u}$

escribiendo en forma matricial sería

$$\begin{pmatrix} V_1' \\ V_2' \\ \vdots \\ V_{m-1}' \\ V_m' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{I} & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{I} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} & \mathbb{O} & \ldots & \mathbb{O} & \mathbb{I} \\ -A_m & -A_{m-1} & -A_{m-2} & \ldots & -A_2 & -A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{m-1} \\ V_m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{0} \\ \tilde{0} \\ \vdots \\ \tilde{0} \\ G \end{pmatrix} \overline{u}(t)$$

notemos que $\tilde{0}$ es la matriz cero de orden $n \times r$.

En forma compacta se escribiría como

$$\dot{V}(t) = AV(t) + \hat{G}\overline{u}(t)$$

cuya solución para $t \geq 0$ es

$$V(t) = e^{At}V(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau \qquad (4.27)$$

reemplazando (4.27) en (4.26) tenemos

$$Y = C\left[e^{At}V(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau\right]$$

luego

$$Y = \widetilde{Y} + C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau$$

donde

$$\widetilde{Y} = Ce^{At}V(0) \qquad (4.28)$$

Observemos que $\widetilde{Y}$ se puede expresar como

$$\widetilde{Y} = Y - C\int_0^t e^{A(t-\tau)}\hat{G}\overline{u}(\tau)d\tau$$

la expresión de la derecha es conocida.
Multiplicando la expresión (4.28) por $e^{A^Tt}C^T$ tenemos

$$e^{A^Tt}C^T\widetilde{Y} = e^{A^Tt}C^TCe^{At}V(0)$$

luego integrando de 0 a t

$$\int_0^t e^{A^T\tau}C^T\widetilde{Y}(\tau)d\tau = \int_0^t e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}V(0)d\tau$$

luego

$$Q(t) = \int_0^t e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}V(0)d\tau$$

donde

$$Q(t) = \int_0^t e^{A^T\tau}C^T\overline{Y}(\tau)d\tau$$

es una expresión conocida.
Finalmente podemos escribir

$$Q(t) = b(t,0)V(0) \qquad (4.29)$$

donde $$b(t,0) = \int_0^t e^{A^T\tau}C^TCe^{A\tau}d\tau$$

Demostraremos que $b(t,0)$ es no singular $\forall\, t > 0$

$$b(t,0) = \int_0^t \underbrace{e^{A^T s}_{mn\times mn} C^T_{mn\times k} C_{k\times mn} e^{As}_{mn\times mn}}_{nm\times mn} ds$$

Veamos:

Supongamos que $\exists\, t_1 > 0 \;/\; b(t_1,0)$ es singular

$$\Rightarrow \exists\, \bar{\alpha}_{1\times mn} \neq \bar{0} \;/\; b(t_1,0)\;\bar{\alpha}^T = \bar{0}$$

$$\Rightarrow \exists\, \bar{\alpha} \neq \bar{0} \;/\; \bar{\alpha}\; b(t_1,0)\;\bar{\alpha}^T = 0$$

$$\Rightarrow \bar{\alpha}\; b(t_1,0)\;\bar{\alpha}^T = \int_0^{t_1} \bar{\alpha} e^{A^T s} C^T C e^{As} \bar{\alpha}^T ds = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_1} \underbrace{(\bar{\alpha}_{1\times mn} e^{A^T s}_{mn\times mn} C^T_{mn\times k})}_{1\times k} (\bar{\alpha} e^{A^T s} C^T)^T ds = 0$$

$$\Longrightarrow \int_0^{t_1} ||\bar{\alpha} e^{A^T s} C^T||^2 ds = 0$$

$$\Longrightarrow ||\bar{\alpha} e^{A^T s} C^T|| = 0 \quad \forall s \in [0,t_1] \text{ y algún } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \bar{\alpha} e^{A^T s} C^T = \bar{0}_{1\times k} \qquad \forall\, s \;\in\; [0,t_1] \text{ y algún } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

$$\Longrightarrow C e^{As} \bar{\alpha}^T = \bar{0}_{k\times 1} \qquad \forall\, s \;\in\; [0,t_1] \text{ y algún } \bar{\alpha}^T \neq \bar{0}$$

$\Longrightarrow$ las columnas de Ce^{As} son linealmente dependientes (pues $\bar{\alpha}^T \neq \bar{0}$)

$$\Longrightarrow rango(C_{k\times nm} e^{As}_{mn\times mn}) = p < mn$$

Por otro lado derivando mn-1 veces la expresión $Ce^{As}\bar{\alpha}^T = \bar{0}$

$$Ce^{As}\bar{\alpha}^T = Ce^{As}A\bar{\alpha}^T = ce^{As}A^2\bar{\alpha}^T = \cdots = ce^{As}A^{mn-1}\bar{\alpha}^T$$

el cual puede escribir como

$$\begin{pmatrix} Ce^{As} \\ Ce^{As}A \\ Ce^{As}A^2 \\ \vdots \\ Ce^{As}A^{mn-1} \end{pmatrix}_{mmn\times mn} \qquad \bar{\alpha}^T_{mn\times 1} = \bar{0}$$

$\Longrightarrow$ podemos afirmar que las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} Ce^{As} \\ Ce^{As}A \\ Ce^{As}A^2 \\ \vdots \\ Ce^{As}A^{mn-1} \end{pmatrix}$$ son linealmente dependientes (pues $\bar{\alpha}^T \neq 0$)

$$\Longrightarrow rango \begin{pmatrix} Ce^{As} \\ Ce^{As}A \\ Ce^{As}A^2 \\ \vdots \\ Ce^{As}A^{mn-1} \end{pmatrix} = q < mn$$

por otro lado $s \in [0, t_1], 0 < t_1$, haciendo que s, tenemos

$$rango \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{mn-1} \end{pmatrix} = q \tag{4.30}$$

Utilizando (3.8) se tiene

$$CA^j = [\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m] \begin{pmatrix} C_0^{(j)}(0) & C_1^{(j)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j)}(0) \\ C_0^{(j+1)}(0) & C_1^{(j+1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+1)}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_0^{(j+m-1)}(0) & C_1^{(j+m-1)}(0) & \cdots & C_{m-1}^{(j+m-1)}(0) \end{pmatrix}$$

$$CA^j = (\sum_{i=1}^{m} \phi_i C_0^{(j+i-1)}(0), \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_1^{(j+i-1)}(0), \cdots, \sum_{i=1}^{m} \phi_i C_{m-1}^{(j+i-1)}(0)) \tag{4.31}$$

De (2.95) y $D_k = D^{(k)}(0)$ en (4.31) obtenemos:

$$\begin{aligned} CA^j \;=\; & \left(\sum_{i=1}^{m} \phi_i (D_{m+j+i-2} - \sum_{k=1}^{m-1} D_{m-k+j+i-2}(-A_k)), \sum_{i=1}^{m} \phi_i (D_{m+j+i-3}, \right. \\ & \left. - \sum_{k=1}^{m-2} D_{m-k+j+i-3}(-A_k)), \cdots, \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{j+i-1} \right) \end{aligned}$$

Reemplazando esta última expresión en (4.30)

$$
rango \begin{pmatrix}
\sum_{i=1}^{m} \phi_i(D_{m+i-2} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-2}A_k), & \cdots & , \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{i-1} \\
\sum_{i=1}^{m} \phi_i(D_{m+i-1} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+i-k-1}A_k), & \cdots & , \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_i \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\sum_{i=1}^{m} \phi_i(D_{m+mn+i-3} + \sum_{k=1}^{m-1} D_{m+mn+i-k-3}A_k), & \cdots & , \sum_{i=1}^{m} \phi_i D_{mn+i-2}
\end{pmatrix} = q < mn
$$

$$
rango \begin{pmatrix}
H_{1\,1} & H_{1\,2} & \cdots & H_{1\,m} \\
H_{2\,1} & H_{2\,2} & \cdots & H_{2\,m} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
H_{mn\,1} & H_{mn\,2} & \cdots & H_{mn\,m}
\end{pmatrix} = q < mn
$$

$$
\Longrightarrow rang(\mathcal{O}) = q < mn \qquad (4.32)
$$

Observar que (4.32) contradice la hipótesis general que afirma que $rang(\mathcal{O}) = mn$.
Por lo tanto $b(t, 0)$ es no singular $\forall\ t > 0$
Asi volviendo a la ecuación (4.29) obtenemos

$$
V(0) = b^{-1}(t, 0)Q(t)
$$

Por lo tanto hemos demostrado que $V(0)$ se determina a partir de la salida $Y(t)$.

Capítulo 5

Aplicaciones, Programas

En este capítulo se presenta algunos sistemas que son modelados por ecuaciones diferenciales y a quienes se le aplica la teoría presentada en este trabajo. Como algo complementario se presenta un programa que resuelve una ecuación diferencial utilizando la solución dinámica.

5.1. Aplicaciones

En esta sección, mencionamos algunas aplicaciones prácticas que ilustran el uso de la teoría controlabilidad y observabilidad. Además de las aplicaciones que mencionamos existen muchas otras que se pueden encontrar en [ROJ 01], [CAN 76] y [GRA 98]

5.1.1. Circuito eléctrico

Sea el circuito de la figura (5.1), donde $V(t)$ es la entrada (voltaje)

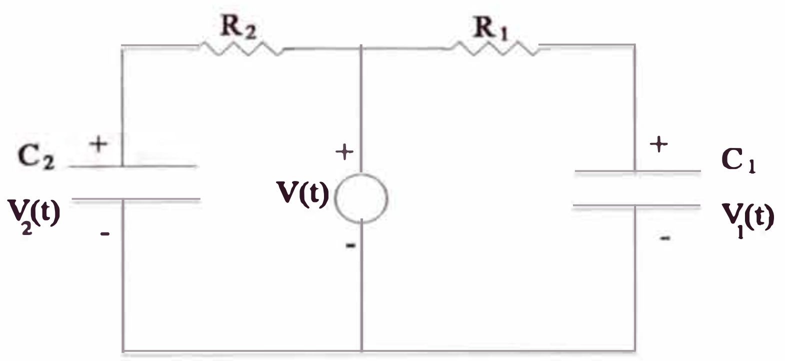

Figura 5.1: Circuito eléctrico

$V_1(t)$ $V_2(t)$ son las variabl s de stado (voltajes)

ot mos qu R y C son constantes mi ntras que i, V y q son variables que depende del ti mpo.

MODELO MATEMÁTICO

Aplicando las leyes d Kirchhoff de corriente y voltaje t n mos:

Malla ABEF

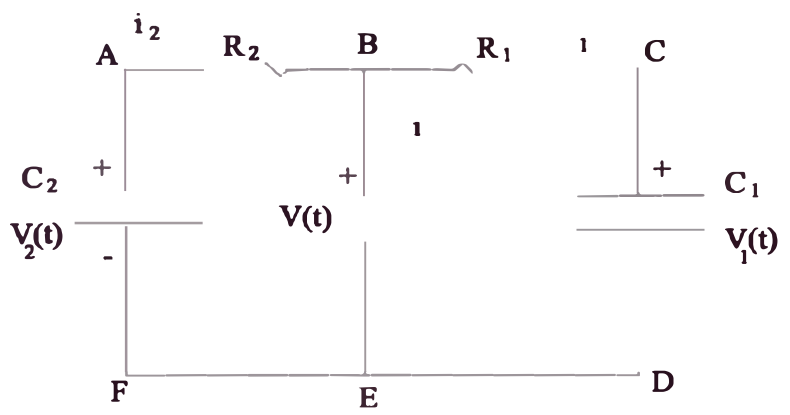

Figura 5.2:

$V(t) - i_2R_2 - V_2(t) = 0$

$$V(t) = i_2R_2 + V_2(t) \tag{5.1}$$

Malla BCDE

$-i_1R_1 - V_1(t) + V(t) = 0$

$$V(t) = i_1R_1 + V_1(t) \tag{5.2}$$

Malla ABCDEF

$-V_1(t) + V_2(t) + i_2R_2 - i_1R_1 = 0$

$$V_2(t) - V_1(t) = i_1R_1 - i_2R_2 \tag{5.3}$$

que también se pued obt n r de (5.1) y (5.2)

ODO B

$$i = i_2 + i_1 \tag{5.4}$$

sabemos

$$V_2(t) = \frac{1}{C_2}q_2(t) \implies \dot{V}_2(t) = \frac{1}{C_2}\frac{dq_2(t)}{dt}$$

$$\implies \dot{V}_2(t) = \frac{i_2(t)}{C_2}$$

$$\implies i_2(t) = C_2\dot{V}_2(t) \tag{5.5}$$

haciendo (5.5) en (5.1)

$$V(t) = C_2R_2\dot{V}_2(t) + V_2(t)$$

$$\implies \dot{V}_2(t) = -\frac{1}{C_2R_2}V_2(t) + \frac{1}{C_2R_2}V(t) \tag{5.6}$$

también sabemos

$$V_1(t) = \frac{1}{C_1}q_1(t) \implies \dot{V}_1(t) = \frac{1}{C_1}\frac{dq_1(t)}{dt}$$

$$\implies \dot{V}_1(t) = \frac{i_1(t)}{C_1}$$

$$\implies i_1(t) = C_1\dot{V}_1(t) \tag{5.7}$$

(5.7) en (5.2)

$$V(t) = C_1R_1\dot{V}_1(t) + V_1(t) \implies \dot{V}_1(t) = -\frac{1}{C_1R_1}V_1(t) + \frac{1}{C_1R_1}V(t) \tag{5.8}$$

De (5.8) y (5.6)

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} V(t) \tag{5.9}$$

Las ecuaciones que describen el sistema son

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} V(t) \tag{5.10}$$

que tiene la forma

$$\dot{u}(t) + A_1u(t) = G\bar{u}(t) \tag{5.11}$$

dond.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \quad u(t) = \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} \quad \bar{u}(t) = V(t) \quad G = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix}$$

EL SISTEMA ES CONTROLABLE

S desea conocer las condiciones que deben satisfacer las constantes de tiempo R_1C_1 y R_2C_2 para que el sistema sea controlable, esto es, para que exista una entrada $V(t)$ tal qu los voltajes V_1 y V_2 puedan alcanzar cualquier valor a partir de cualesquiera valores ini iales. El orden de la ecuación diferencial (5.11) es $m = 1$ y el orden de la matriz cuadrada es $n = 2$

tilizando (3.5), tenemos que la matriz de controlabilidad es

$$\mathcal{C} = (D_0G\, D_1G)$$

utilizando (2.61) tenemos:

$$D_0 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D_1 = \sum_{j=1}^{1} -A_jD_{1-j} \quad \Longrightarrow \quad D_1 = -A_1D_0 = -\begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix}$$

lu go

$$D_0G = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} \\ \frac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix} \qquad D_1G = -\begin{pmatrix} \frac{1}{(C_1R_1)^2} \\ \frac{1}{(C_2R_2)^2} \end{pmatrix}$$

Por lo tanto la matriz de controlabilidad se puede escribir como

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} \frac{1}{C_1R_1} & -\frac{1}{(C_1R_1)^2} \\ \frac{1}{C_2R_2} & -\frac{1}{(C_2R_2)^2} \end{pmatrix}$$

S gún el **Teorema 3.1** el sistema es controlable si esta matriz cuadrada tiene rango 2, el cual es si su determinante es diferente de cero.

$$det(\mathcal{C}) = \frac{1}{C_1R_1}\frac{1}{C_2R_2}\left(\frac{1}{C_1R_1} - \frac{1}{C_2R_2}\right)$$

El sistema es controlable si $R_2C_2 \neq R_1C_1$

Si $R_1C_1 = 1$ y $R_2C_2 = 1/2$ entonces el sistema es controlable y por lo tanto existe un control $V(t)$ que transfiera el sistema del estado

$$\begin{pmatrix} V_1(0) \\ V_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} V_1(1) \\ V_2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{5.12}$$

Para determinar un $V(t)$ que satisfaga las condiciones arriba señaladas se puede proceder asi:

Nuestra ecuación diferencial es

$$\begin{pmatrix} \dot{V}_1(t) \\ \dot{V}_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1(t) \\ V_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} V(t)$$

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) + A_1 u(t) &= G\bar{u}(t) \\ e^{A_1 t}\dot{u}(t) + e^{A_1 t} A_1 u(t) &= e^{A_1 t} G\bar{u}(t) \\ \frac{d}{dt}(e^{A_1 t} u(t)) &= e^{A_1 t} G\bar{u}(t) \\ e^{A_1} u(1) - \mathbb{I}u(0) &= \int_0^1 e^{A_1 \tau} G\bar{u}(\tau) d\tau \\ \Longrightarrow \quad u(1) &= e^{-A_1} u(0) + \int_0^1 e^{-A_1(1-\tau)} G\bar{u}(\tau) d\tau \end{aligned}$$

Reemplazando los valores numéricos dados en (5.12), se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{-A_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 e^{-A_1(1-\tau)} G\bar{u}(\tau) d\tau \tag{5.13}$$

Utilizando (2.100) calculemos $e^{-A_1 t}$

$$\begin{aligned} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} t} &= \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)} A^{2-j} \\ &= b_0 d^{(0)}(t) A^1 + (b_0 d^{(1)}(t) + b_1 d^{(0)}) A^0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

notemos que $A = -A_1$.

Ahora hallemos b_0 y b_1, utilizando el polinomio caracteristico $P(\lambda)$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = det(\lambda\mathbb{I} - (-A_1)) \quad &\Longrightarrow \quad P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 \\ 0 & \lambda + 2 \end{vmatrix} \\ P(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2) \quad &\Longrightarrow \quad P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \end{aligned}$$

ob..rv.mo. qu.

$$b_0 = 1 \qquad b_1 = 3 \qquad b_2 = 2 \tag{5.15}$$

Calculemos la función $d(t)$, que resulta de resolver el PVI

$$d^{(2)}(t) + 3d^{(1)}(t) + 2d(t) = 0$$

$$d(0) = 0 \qquad d(0) = 1$$

el cual es

$$d(t) = -e^{-2t} + e^{-t} \tag{5.16}$$

Reemplazando (5.15) y (5.16) en (5.14), obtenemos

$$e^{-A_1 t} = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \tag{5.17}$$

luego (5.17) en (5.13)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 \\ 0 & e^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{-(1-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-2(1-\tau)} \end{pmatrix} G\bar{u}(\tau)d\tau$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{pmatrix} -1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \int_0^1 \begin{pmatrix} e^{\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} V(\tau)d\tau$$

Para este caso particular puede seleccionarse una $V(t)$ que sea constante por tramos, esto es, si

$$V(t) = \begin{cases} k_1 & 0 \leq t < 0{,}5 \\ k_2 & 0{,}5 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

enseguida tenemos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \int_0^{0,5} \begin{pmatrix} e^{\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} k_1 d\tau + \int_{0,5}^1 \begin{pmatrix} e^{\tau} \\ 2e^{2\tau} \end{pmatrix} k_2 d\tau$$

integrando

$$\begin{pmatrix} -1 \\ e^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{0,5} - 1 & e - e^{0,5} \\ e - 1 & e^2 - e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow k_1 = -10{,}39 \qquad k_2 = 5{,}37$$

En la figura (5.3) se muestra un control $V(t)$ que hace la transferencia deseada.

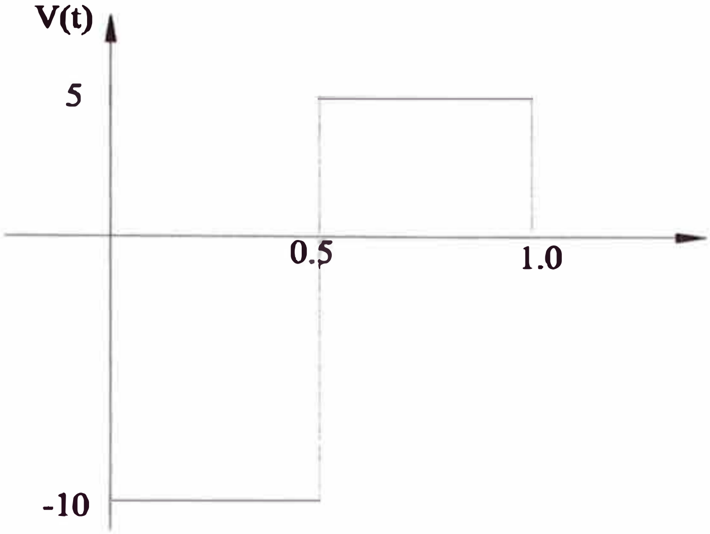

Figura 5.3: Control que transfiere al sistema del estado (1,0) en t=0 al estado (0,1) en t=1

5.1.2. Sistemas hidráulicos y neumáticos

En este tipo de sistemas se consideran únicamente dos variables: gasto, q, y presión, P. Los elementos que se describiran son: resistencia y capacitancia fluídicas.

RESISTENCIA FLUÍDICA

Al tener un ducto, orificio, etc, con presiones P_1 y P_2 en sus extremos, se establece un flujo o gasto q que es función de P_1 y P_2. Supóngase aquí que esta relación entre flujo y diferencia de presiones es lineal.

$$q = \frac{1}{R}(P_1 - P_2) \tag{5.18}$$

Este tipo de elemento será llamado resistencia y su valor es R, la representación que será utilizada corresponde a la figura 5.4

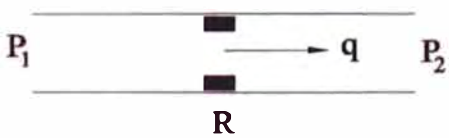

Figura 5.4: Representación gráfica de un resistencia fluídica

CAPACITANCIA FLUÍDICA

Otro efecto en sistemas hidráulicos o neumáticos es el que presenta un tanque de gas cuya presión crece al incrementarse el número de moles de gas almacenadas en él, o por un tinaco en cuyo fondo la presión aumenta al crecer el volumen de agua almacenada en él (figura 5.5)

La ley que relaciona las variables asociadas al elemento es

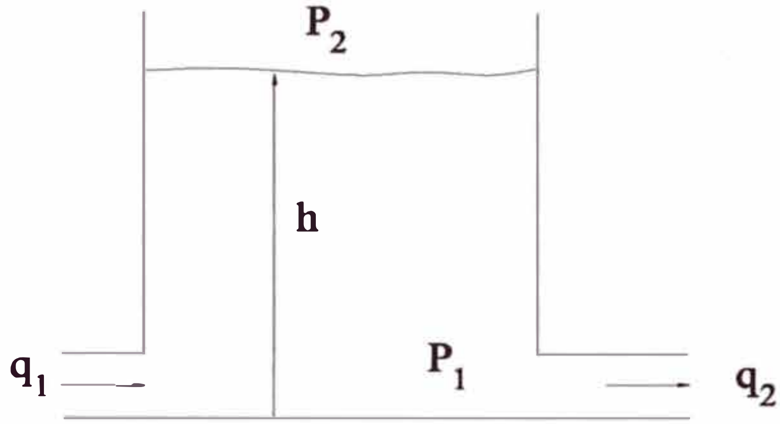

Figura 5.5: Representación de una capacitancia fluídica

$$q_1 - q_2 = C_f \frac{d}{dt}(P_1 - P_2) \tag{5.19}$$

donde C_f es la capacitancia fluídica.

Cabe hacer notar que el nivel del fluido en el elemento es proporcional a la diferencia de presión $P_1 - P_2$, esto es, $h = \frac{1}{\alpha}(P_1 - P_2)$ por lo que (5.19) se puede escribir como

$$\alpha C_f \frac{dh}{dt} = q_1 - q_2$$

donde h es el nivel de fluido en el tanque.

Observemos que R, C_f y α son constante mientras que q y p son variables que dependen del tiempo.

EJEMPLO

Considere el sistema hidráulico representado en la figura 5.6

Si se considera q_0 como la entrada y h la salida, a continuación se dan las siguientes ecuaciones:

Para la Capacitancia

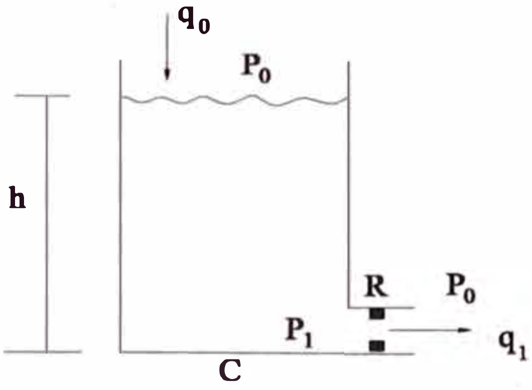

Figura 5.6: Un Sistema hidráulico

$$q_0 - q_1 = C\frac{d}{dt}(P_1 - P_0)$$

Para la resistencia

$$q_1 = \frac{1}{R}(P_1 - P_0)$$

Sustituyendo q_1 de la segunda ecuación en la primera se obtiene

$$\frac{d}{dt}(P_1 - P_0) = -\frac{1}{CR}(P_1 - P_0) + \frac{1}{C}q_0$$

y la salida h está relacionada con $P_1 - P_0$ mediante la ecuación

$$h = \frac{1}{\alpha}(P_1 - P_0)$$

asi que la diferencia de presiones es una variable que representa el estado del sistema.

Si se modifica el sistema agregando un segundo tanque (figura 5.7) y considerando q_0 como la entrada y q_2 como la salida
Las ecuaciones que describen el nuevo sistema, son:

$$\begin{aligned}
q_0 - q_1 &= C_1\frac{d}{dt}(P_1 - P_0) \\
q_1 &= \frac{1}{R_1}(P_1 - P_2) \\
q_1 - q_2 &= C_2\frac{d}{dt}(P_2 - P_0) \\
q_2 &= \frac{1}{R_2}(P_2 - P_0)
\end{aligned}$$

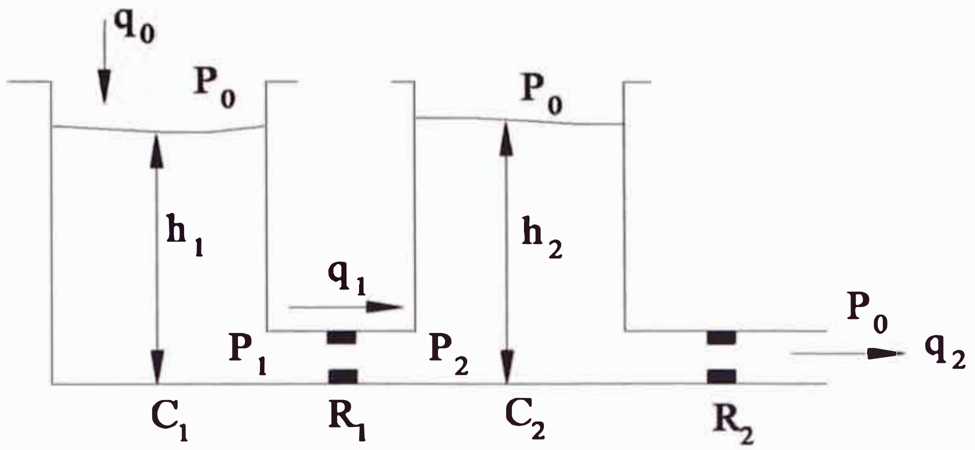

Figura 5.7: Un sistema hidráulico de dos tanques.

Pero como

$$\begin{aligned} h_1 &= \frac{1}{\alpha}(P_1 - P_0) \\ h_2 &= \frac{1}{\alpha}(P_2 - P_0) \end{aligned}$$

Las ecuaciones anteriores pueden escribirse como

$$\begin{aligned} q_0 - q_1 &= \alpha C_1 \frac{d}{dt} h_1 \\ q_1 &= \frac{\alpha}{R_1}(h_1 - h_2) \\ q_1 - q_2 &= \alpha C_2 \frac{d}{dt} h_2 \\ q_2 &= \alpha \frac{h_2}{R_2} \end{aligned}$$

Eliminando q_1 y q_2 de las cuatro últimas ecuaciones, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} h_1 &= -\frac{1}{C_1 R_1}(h_1 - h_2) + \frac{1}{\alpha C_1} q_0 \\ \frac{d}{dt} h_2 &= \frac{1}{C_2 R_1} h_1 - (\frac{1}{C_2 R_1} + \frac{1}{C_2 R_2}) h_2 \end{aligned}$$

y como la salida q_2 esta relacionada con h_2 mediante

$$q_2 = \frac{\alpha}{R_2} h2$$

entonces las variables h_1 y h_2 representan el estado del sistema. Las ecuaciones de dicho sistema puesta en forma matricial con

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dh}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{C_1R_1} & \dfrac{1}{C_1R_1} \\ \dfrac{1}{C_2R_1} & -\dfrac{1}{C_2R_1}-\dfrac{1}{C_2R_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\alpha C_1} \\ 0 \end{pmatrix} q_0(t) \\
y(t) &= q_2(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha}{R_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Sea el sistema de la figura 5.8, que consiste en dos tanques interconectados. En este

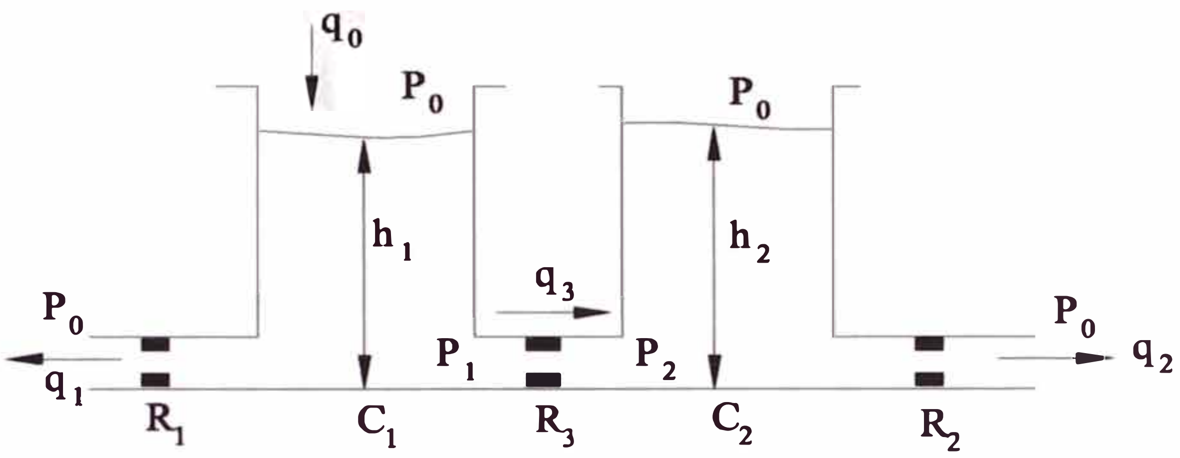

Figura 5.8: Sistema hidráulico para ilustrar el concepto de observabilidad

sistema se considerará como la entrada el gasto $q_0(t)$ y como la salida el gasto $q_3(t)$. A partir de las ecuaciones

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{R_1}(P_1 - P_0) \\
q_0 - q_1 - q_3 &= C_1\frac{d}{dt}(P_1 - P_0) \\
h_1 &= \frac{1}{\alpha}(P_1 - P_0) \\
q_3 &= \frac{1}{R_3}(P_1 - P_2) \\
q_3 - q_2 &= C_2\frac{d}{dt}(P_2 - P_0) \\
q_2 &= \frac{1}{R_2}(P_2 - P_0) \\
h_2 &= \frac{1}{\alpha}(P_2 - P_0)
\end{aligned}
$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\alpha C_1 \frac{d}{dt} h_1 &= q_0 - q_1 - q_3 \\
\alpha C_2 \frac{d}{dt} h_2 &= q_3 - q_2 \\
q_1 &= \alpha \frac{h_1}{R_1} \\
q_2 &= \alpha \frac{h_2}{R_2} \\
q_3 &= \frac{\alpha}{R_3}(h_1 - h_2)
\end{aligned}$$

simplificando

$$\begin{aligned}
\frac{dh_1}{dt} &= -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3})h_1 + \frac{1}{C_1 R_3} h_2 + \frac{q_0}{\alpha C_1} \\
\frac{dh_2}{dt} &= \frac{1}{C_2 R_3} h_1 - \frac{1}{C_2}(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3})h_2 \\
y(t) &= q_3(t) = \frac{\alpha}{R_3} h_1 - \frac{\alpha}{R_3} h_2
\end{aligned}$$

sistema puesto en forma matricial

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{C_1}(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}) & \frac{1}{C_1 R_3} \\ \frac{1}{C_2 R_3} & -\frac{1}{C_2}(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha C_1} \\ 0 \end{pmatrix} q_0(t) \\
y(t) &= q_3(t) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha}{R_3} & -\frac{\alpha}{R_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Para ciertos valores de las constantes, la representación obtenida no es observable. En particular si se supone que.

$$\begin{gathered}
C_1 = C_2 = C_3 = 1 \\
R_1 = R_2 = R_3 = 1 \\
\alpha = 1
\end{gathered}$$

entonces la representación del sistema es

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} q_0(t) \\
y(t) &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El ual ti n la forma

$$\begin{aligned} h' &= A_1 h + G q_0(t) \\ y(t) &= \phi_1 h \end{aligned}$$

donde

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \phi_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Veamos si el sistema es observable
$m = 1$ orden de la ecuación diferencial
$n = 2$ orden de la matriz A_1
$k = 1$ número de filas de la matriz ϕ_1
Utilizando (4.6) tenemos que la matriz de observabilidad es

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{21} \end{pmatrix}$$

por (4.7)

$$\begin{aligned} H_{11} &= \sum_{i=1}^{1} \phi_1 D_{i-1} = \phi_1 D_0 \\ H_{21} &= \sum_{i=1}^{1} \phi_1 D_i = \phi_1 D_1 \end{aligned}$$

por (2.61)

$$D_0 = \mathbb{I} \qquad D_1 = \sum_{j=1}^{1} A_j D_{1-j}$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

luego

$$\begin{aligned} H_{11} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{21} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -3 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ntonces la matriz de observabilidad es

$$
\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}
$$

rango($\mathcal{O}$)$= 1 \neq mn = (1)(2)$ entonces por el **Teorema 4.1** el sistema no es observable

5.1.3. Monorriel de dos carros

La figura 5.9 muestra un monorriel de dos carros. Sean M_1 la masa del carro de máquinas y B_1 sus fricciones debido al aire y al rodamiento. La fuerza lineal equivalente para mover el proceso se designa como $\hat{u}(t)$. Los dos carros poseen masas M_2 y M_3 respectivamente, y están sujeto a fricciones B_2 y B_3. Los carros se acoplan uno al otro con dispositivos no rígidos(resortes) que poseen constantes k_{23} y k_{12} y dispositivos amortiguadores de constantes B_{23} y B_{12}. Las coordenadas de posición se designan como x_1, x_2 y x_3.

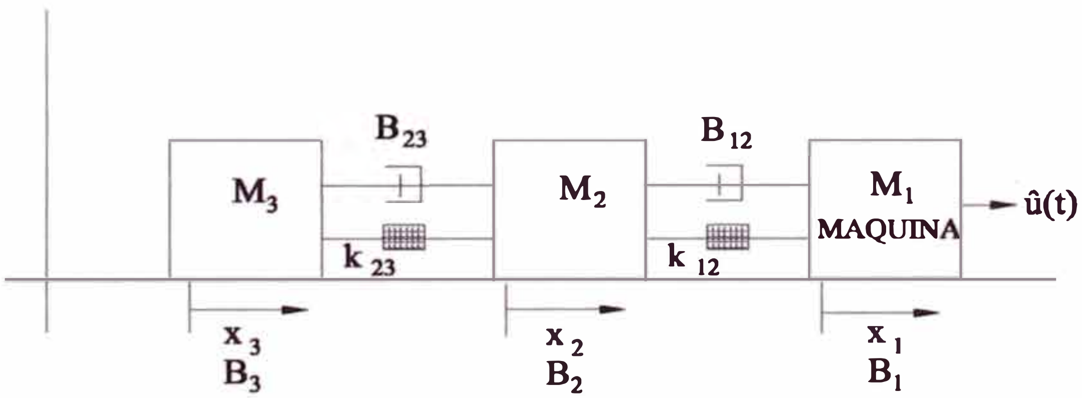

Figura 5.9: Proceso monorriel de dos carros más un carro de máquinas.

De la figura 5.10 l d splazami nto d la masa M_3 satisfac

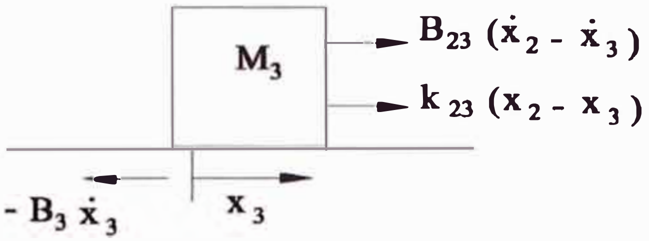

Figura 5.10: Diagrama de cuerpo libre de M_3

$$M_3\ddot{x}_3 = B_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) + k_{23}(x_2 - x_3) - B_3\dot{x}_3 \quad (5.20)$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_3 = \frac{k_{23}}{M_3}x_2 + \frac{B_{23}}{M_3}\dot{x}_2 - \frac{k_{23}}{M_3}x_3 - \frac{(B_{23}+B_3)}{M_3}\dot{x}_3$$

De la figura 5.11, el desplazamiento de la masa M_2 satisface

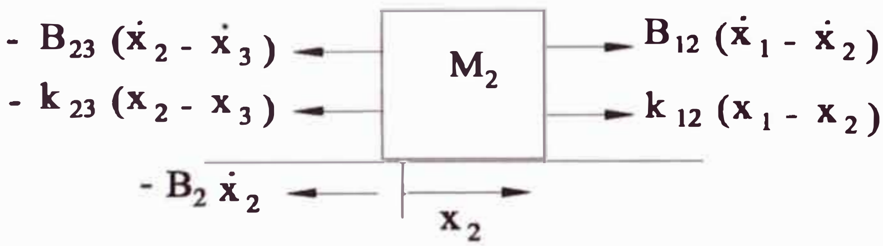

Figura 5.11: Diagrama de cuerpo libre de M_2

$$\begin{aligned} M_2\ddot{x}_2 &= B_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_{12}(x_1 - x_2) - B_{23}(\dot{x}_2 - \dot{x}_3) - k_{23}(x_2 - x_3) \\ &\quad -B_2\dot{x}_2 \end{aligned} \quad (5.21)$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_2 = \frac{k_{12}}{M_2}x_1 + \frac{B_{12}}{M_2}\dot{x}_1 - \frac{(k_{12}+k_{23})}{M_2}x_2 - \frac{(B_{23}+B_{12}+B_2)}{M_2}\dot{x}_2 + \frac{k_{23}}{M_2}x_3 + \frac{B_{23}}{M_2}\dot{x}_3$$

De la figura 5.12, el desplazamiento de la masa M_1 satisface

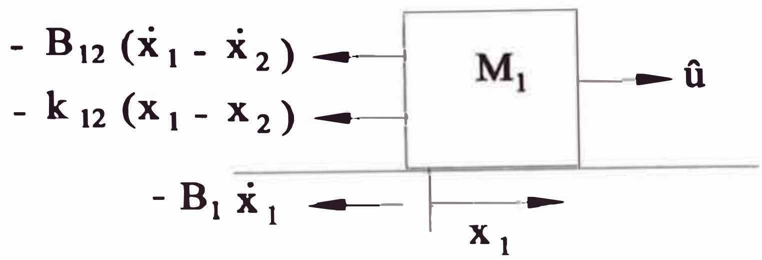

Figura 5.12: Diagrama de cuerpo libre de M_1

$$M_1\ddot{x}_1 = \hat{u} - B_{12}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_{12}(x_1 - x_2) - B_1\dot{x}_1 \tag{5.22}$$

se puede llevar a la forma

$$\ddot{x}_1 = -\frac{k_{12}}{M_1}x_1 - \frac{(B_{12}+B_1)}{M_1}\dot{x}_1 + \frac{k_{12}}{M_1}x_2 + \frac{B_{12}}{M_1}\dot{x}_2 + \frac{\hat{u}(t)}{M_1}$$

Ob ervemos que de (5.20), (5.21) y (5.22) podemos obtener el siguiente sistema matricial

$$M\ddot{x}(t) = C_1\dot{x}(t) + C_2x(t) + H\hat{u}(t) \tag{5.23}$$

donde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{pmatrix}$$

$$C_1 = \begin{pmatrix} -(B_{12}+B_1) & B_{12} & 0 \\ B_{12} & -(B_{23}+B_{12}+B_2) & B_{23} \\ 0 & B_{23} & -(B_{23}+B_3) \end{pmatrix}$$

$$C_2 = \begin{pmatrix} -k_{12} & k_{12} & 0 \\ k_{12} & -(k_{12}+k_{23}) & k_{23} \\ 0 & k_{23} & -k_{23} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la inversa de la matriz M(i.e M^{-1}) a la ecuación (5.23), se tiene:

$$\ddot{x} = A_1\dot{x} + A_2x + G\hat{u}(t) \tag{5.24}$$

dond

$$
\begin{aligned}
A_1 &= M^{-1}C_1 = \begin{pmatrix} -\dfrac{(B_{12}+B_1)}{M_1} & \dfrac{B_{12}}{M_1} & 0 \\ \dfrac{B_{12}}{M_2} & -\dfrac{(B_{23}+B_{12}+B_2)}{M_2} & \dfrac{B_{23}}{M_2} \\ 0 & \dfrac{B_{23}}{M_3} & -\dfrac{(B_{23}+B_3)}{M_3} \end{pmatrix} \\
A_2 &= M^{-1}C_2 = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_{12}}{M_1} & \dfrac{k_{12}}{M_1} & 0 \\ \dfrac{k_{12}}{M_2} & -\dfrac{(k_{12}+k_{23})}{M_2} & \dfrac{k_{23}}{M_2} \\ 0 & \dfrac{k_{23}}{M_3} & -\dfrac{k_{23}}{M_3} \end{pmatrix} \\
G &= M^{-1}H = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{M_1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Si ubicamos tacómetros en una rueda de cada carro, entonces la ecuación de salida toma la forma

$$y(t) = \phi_1 x(t) + \phi_2 \dot{x}(t)$$

donde

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \phi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Asumimos los siguientes valores para los parámetros

$$
\begin{gathered}
M_2 = M_3 = 2M_1 = 2600kg \\
k_{23} = k_{12} = 100,000\frac{N-s}{m} \\
B_2 = B_3 = 2B_1 = 10000\frac{N-s}{m} \\
\alpha = 1
\end{gathered}
$$

D la cuación 5.24 s ti n qu $m = 2$ s l ord n d la ua ión dif r n ial y $n = 3$ s l ord n d las matri s A_1 y A_2.

Utilizando (3.5), tenemos que la matriz de controlabilidad es.

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} D_0G & D_1G & D_2G & D_3G & D_4G & D_5G \\ D_1G & D_2G & D_3G & D_4G & D_5G & D_6G \end{pmatrix}$$

por (2.61) tenemos

$$D_0 = 0 \qquad D_1 = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$D_{k+2} = \sum_{j=1}^{2} A_j D_{k+2-j}$$

para
$k = 0$ se tiene $D_2 = A_1D_1 + A_2D_0$
$k = 1$ se tiene $D_3 = A_1D_2 + A_2D_1$
$k = 2$ se tiene $D_4 = A_1D_3 + A_2D_2$
$k = 3$ se tiene $D_5 = A_1D_4 + A_2D_3$
$k = 4$ se tiene $D_6 = A_1D_5 + A_2D_4$
con las matrices obtenidas construimos la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$

$\mathcal{C} =$

0	0.0008	-0.0033	-0.0453	0.4645	3.6007
0	0	0.0001	0.0283	-0.2651	-2.7093
0	0	0	0.0000	0.0110	0.9932
0.0008	-0.0033	-0.0453	0.4645	3.6007	3.6007
0	0.0001	0.0283	-0.2651	-2.7093	-2.7093
0	0	0.0000	0.0110	0.9932	0.9932

el $rango(\mathcal{C}) = 6 = mn = (2)(3)$ entonces por el **Teorema 3.1** el sistema es controlable

Utilizando (4.6) tenemos que la matriz de observabilidad es

$$\mathcal{O} = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \\ H_{31} & H_{32} \\ H_{41} & H_{42} \\ H_{51} & H_{52} \\ H_{61} & H_{62} \end{pmatrix}_{mnk \times mn}$$

$m = 2$ orden de la ecuacion diferencial
$n = 3$ orden de las matrices A_1,A_2
$k = 3$
Utilizando (4.9) calculemos las matrices H_{ij}

$$\begin{aligned}
H_{11} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(D_i - \sum_{k=1}^{1} D_{i-k}A_k) \\
&= \phi_1(D_1 - D_0A_1) + \phi_2(D_2 - D_1A_1) \\
H_{12} &= \phi_1 D_0 + \phi_2 D_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{21} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(D_{1+i} - \sum_{k=1}^{1} D_{1+i-k}A_k) \\
&= \phi_1(D_2 - D_1A_1) + \phi_2(D_3 - D_2A_1) \\
H_{22} &= \phi_1 D_1 + \phi_2 D_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{31} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(D_{2+i} - \sum_{k=1}^{1} D_{2+i-k}A_k) \\
&= \phi_1(D_3 - D_2A_1) + \phi_2(D_4 - D_3A_1) \\
H_{32} &= \phi_1 D_2 + \phi_2 D_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{41} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(D_{3+i} - \sum_{k=1}^{1} D_{3+i-k}A_k) \\
&= \phi_1(D_4 - D_3A_1) + \phi_2(D_5 - D_4A_1) \\
H_{42} &= \phi_1 D_3 + \phi_2 D_4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_{51} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i(D_{4+i} - \sum_{k=1}^{1} D_{4+i-k}A_k) \\
&= \phi_1(D_5 - D_4A_1) + \phi_2(D_6 - D_5A_1) \\
H_{52} &= \phi_1 D_4 + \phi_2 D_5
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H_{61} &= \sum_{i=1}^{2} \phi_i (D_{5+i} - \sum_{k=1}^{1} D_{5+i-k} A_k) \\
&= \phi_1 (D_6 - D_5 A_1) + \phi_2 (D_7 - D_6 A_1) \\
H_{62} &= \phi_1 D_5 + \phi_2 D_6
\end{aligned}
$$

Ahora formemos la matriz de observabilidad $\mathcal{O}$
$\mathcal{O} =$

```
  1.0e+006 *

         0         0         0    0.0000         0         0
         0         0         0         0    0.0000         0
         0         0         0         0         0    0.0000
   -0.0001    0.0001         0   -0.0000    0.0000         0
    0.0000   -0.0001    0.0000    0.0000   -0.0000    0.0000
         0    0.0000   -0.0000         0    0.0000   -0.0000
    0.0003   -0.0004    0.0000   -0.0001    0.0001    0.0000
   -0.0002    0.0003   -0.0002    0.0000   -0.0001    0.0000
    0.0000   -0.0002    0.0002    0.0000    0.0000   -0.0000
    0.0074   -0.0102    0.0028    0.0006   -0.0007    0.0000
   -0.0051    0.0088   -0.0037   -0.0003    0.0006   -0.0003
    0.0014   -0.0037    0.0023    0.0000   -0.0003    0.0003
   -0.0730    0.1006   -0.0276    0.0047   -0.0070    0.0026
    0.0503   -0.0868    0.0365   -0.0035    0.0060   -0.0022
   -0.0138    0.0365   -0.0227    0.0013   -0.0022    0.0012
   -0.6310    1.0013   -0.3703   -0.0941    0.1327   -0.0394
    0.5006   -0.8161    0.3155    0.0663   -0.1138    0.0466
   -0.1851    0.3155   -0.1304   -0.0197    0.0466   -0.0278
```

el $rango(\mathcal{O}) = 5 \neq mn = (2)(3)$ entonces por el **Teorema 4.1** sistema no es observable.

5.2. Algoritmo para generar la Solución de una ecuación diferencial utilizando la solución Dinámica

Sea la ecuación diferencial de orden m

$$\begin{aligned} u^{(m)}(t) + A_1 u^{(m-1)}(t) + A_2 u^{(m-2)}(t) + \cdots + A_{m-1}u'(t) + A_m u(t) &= G\bar{u} \\ u(0) = u_0, \quad u'(0) = u_1, \cdots, u^{(m-1)}(0) = \mu_{m-1} \end{aligned}$$

donde los coeficientes A_j son matrices cuadradas de orden n.
Cuya solución es:

$$u(t) = C_0(t)u(0) + C_1(t)u'(0) + \ldots + C_{m-1}(t)u^{(m-1)}(0) + \int_0^t C_{m-1}(t-\tau)G\overline{u}(\tau)d\tau$$

ver como se obtiene en (4.10).

Aqui presentamos un algoritmo para resolver una ecuación diferencial de orden 2 con valores iniciales, donde A_j son matrices de orden n:

$$\ddot{u} + A_1\dot{u} + A_2 u = f(t) \tag{5.25}$$

$$u(0) = U_0, \qquad \dot{u}(0) = \dot{U}_0$$

cuya solución esta dada por:

$$u(t) = D(t)\dot{u}(0) + (\dot{D}(t) + D(t)A_1)u(0) + \int_0^t D(t-s)f(s)ds$$

Siendo $D(t)$ la solución dinámica asociada a (5.25). recordemos que la solución dinamica y su derivada estan determinadas por (2.135):

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)D_{2n-j}$$

$$\dot{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n}\sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t)D_{2n-j+1}$$

Presentamos el siguiente algoritmo para generar la solución de (5.25):
Entradas:

Matrices A_1 y A_2.
Función $f(t)$

Condiciones iniciales $u(0)$ y $u'(0)$

Tiempo final t_{final}

Salida: Vectores aproximados U_t, de la solución $u(t)$ desde 0 hasta t_{final}

Paso 1: Obtener los coeficientes b_i $\quad i = 0, \cdots, 2n$ del polinomio caracteristico de la matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_2 & -A_1 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Resolver la ecuación diferencial escalar:

$$\sum_{i=0}^{2n} b_i d^{(2n-i)} = 0$$

$$d(0) = d'(0) = d^{(2n-2)}(0) = 0 \qquad d^{(2n-1)} = 1$$

mediante un método numérico.

Paso 3: Con $D_0 = 0$ $D_1 = I$, generar D_K, $K = 2, \cdots, 2n$ mediante:

$$D_k = -D_{k-1} - A_1 D_{k-2} \qquad k = 2, \cdots, 2n$$

Paso 4: Para cada instante de tiempo t hacer los pasos a-e:

Paso a: Calcular para $j = 1, \cdots, 2n$ calcular:

$$s_j = \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t).$$

Paso b: Calcular:

$$D(t) = \sum_{j=1}^{2n} s_j D_{2n-j}$$

Paso c: Calcular:

$$\dot{D}(t) = \sum_{j=1}^{2n} s_j D_{2n-j+1}$$

Paso d: Utilizando algun método de integración numerica, calcular

$$\int_0^t D(t-s)f(s)ds.$$

Paso e: Calcular:

$$u(t) = D(t)\dot{u}(0) + (\dot{D}(t) + D(t)A_1)u(0) + \int_0^t D(t-s)f(s)ds$$

paso 5: Fin del algoritmo.

5.3. Programa que resuelve una ecuación diferencial utilizando la Solución Dinámica

Este programa esta hecho en Matlab 5.3 resuelve una ecuación diferencial de la forma (5.25), donde las matrices A_j son de orden 2.

Se usa el método Runge Kutta de cuarto orden para resolver la ecuación dinámica escalar presentada en el algoritmo (Paso 2) y se utiliza el método de trapecio para resolver la parte integral de la solución.

```
(*********************************************************************)

(****                                                             ****)

(**** Programa que resuelve una ecuación diferencial matricial    ****)

(****              utilizando la solución dinámica                ****)

(****                                                             ****)

(*********************************************************************)


%Lee las matrices A1, A2
%Archivo lectura.m
function [a1,a2]=lectura(n)
for i=1:n
   for j=1:n
      a1(i,j)=input('ingrese los elementos de la matriz A1');
   end
end
for i=1:n
   for j=1:n
      a2(i,j)=input('ingrese los elementos de la matriz A2');
   end
end
```

```
(*********************************************************************)

%Se forma la matriz A
%Archivo formarA.m
function a=formarA(A1,A2,n)
a=[zeros(n,n), eye(n);-A2,-A1];
(*********************************************************************)

%Lee las condiciones iniciales
%Archivo lectura1.m
function [u0,u10]=lectura1(n)
for i=1:n
    u0(i,1)=input('ingrese los elementos de u0');
end
for i=1:n
    u10(i,1)=input('ingrese los elementos de u10');
end
(*********************************************************************)

%Lee la función f
%Archivo lectura2.m
f1=input('ingrese los elementos de f','s');
f2=input('ingrese los elementos de f','s');
(*********************************************************************)

%Variables globales A1,A2;
%Genera las matrices D
%Archivo formarD
D(:,:,1)=zeros(2);
D(:,:,2)=eye(2);
for k=3:2*n+1%se le agrega uno más para la derivada
   D(:,:,k)=-A1*D(:,:,k-1)-A2*D(:,:,k-2);
end
(************************ Programa principal ************************)
```

```
%Resuelve la ecuación u''+A1u'+A2u=f(t)
%con condiciones iniciales u(0)=Uo u'(0)=U'o
close all
clear
clear q;
clear SD1;
clear SD;
global b;
T=input('ingrese el tiempo final')
n=2;
%Lectura de las matrices A1 y A2
[A1,A2]=lectura(n);
A=formarA(A1,A2,n);
b=poly(A);
%Lectura de las condiciones iniciales
[q0,q10]=lectura1(n)
%Lectura de la función f
lectura2;
%Método de Runge Kutta de cuarto orden
zz(:,1)=[0;0;0;1]; t11(1)=0;h=0.1;n1=1;
M=[0 1 0 0;0 0 1 0;0 0 0 1;-b(5) -b(4) -b(3) -b(2)];
while t11(n1)<T
   k1=h*M*zz(:,n1);
   k2=h*M*(zz(:,n1)+k1/2);
   k3=h*M*(zz(:,n1)+k2/2);
   k4=h*M*(zz(:,n1)+k3);
   zz(:,n1+1)=zz(:,n1)+(k1+2*k2+2*k3+k4)/6;
   t11(n1+1)=n1*h;
   n1=n1+1;
end
z=zz';
t9=t11';
formarD
r=size(t9);
for t1=1:r(:,1)
```

```
for j=1:2*n
   s(j)=0;
   for i1=0:j-1
      s(j)=s(j)+b(i1+1)*z(t1,j-i1);
   end
end
SD(:,:,t1)=zeros(n);
for j1=1:2*n
   SD(:,:,t1)=SD(:,:,t1)+s(j1)*D(:,:,2*n-j1+1);
end
SD1(:,:,t1)=zeros(n);
for j2=1:2*n
   SD1(:,:,t1)=SD1(:,:,t1)+s(j2)*D(:,:,2*n-j2+2);
end
%cálculo de la integral por el método del trapecio
 rr=[0;0];ss=[0;0];
 for m=1:t1,
    if t1==1, I(:,1)=[0;0];
    end
    if t1>1,
       xx1=t9(m);
       w=subs(f1,'t',xx1);
       w1=subs(f2,'t',xx1);
       l(:,m)=[w;w1];
       rr=rr+SD(:,:,t1-m+1)*l(:,m);
       F(:,m)=SD(:,:,t1-m+1)*l(:,m);
       if m==1 | m==t1,  ss=ss+F(:,m);
       end
    end
 end
 if t1>1, I(:,t1)=h*(rr-(ss/2));
 end
q(:,:,t1)=SD(:,:,t1)*q10+(SD1(:,:,t1)+SD(:,:,t1)*A1)*q0+I(:,t1);
q1(t1)=q(1,1,t1);
q2(t1)=q(2,1,t1);
```

```
end
plot(t9,q1,'r*',t9,q2,'+y');
text(t9(5),q1(5),'u1');
text(t9(5),q2(5),'u2');
clear;
```

Capítulo 6

Conclusiones

En la ingeniería se aplica los conceptos de la Controlabilidad y Observabilidad para sistemas gobernados por las ecuaciones (1.12) y (1.13), donde el primero es un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

El objetivo de este trabajo es aplicar la teoría de Controlabilidad y Observabilidad a modelos descritos en el capítulo uno, es por ello que se da definiciones de Controlabilidad y Observabilidad para ecuaciones diferenciales lineales de orden m con coeficientes matriciales el cual es una generalización de aquella presentada en [CLA 99a], donde se da definiciones de Controlabilidad y Observabilidad para ecuaciones diferenciales lineales de orden dos con coeficientes matriciales de orden n.

Cabe señalar que para obtener la matriz de Controlabilidad y Observabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes matriciales de la forma (4.1) que tiene como ecuación de salida (4.2), en primer lugar dichas ecuaciones se llevan a la forma (1.12) y (1.13) para luego formar la matriz Controlabilidad y Observabilidad en la forma (1.14) y (1.17).

El análisis de la Controlabilidad y Observabilidad se realiza utilizando los coeficientes de la solución dinámica, aquella que esta relacionada con la solución de una ecuación diferencial matricial homogénea con coeficientes matriciales descritos en (2.28).

Luego en el capítulo cinco se ilustran ejemplos en donde se determina la Controlabilidad y Observabilidad bajo los conceptos dados anteriormente, finalmente presentamos un algoritmo para generar la solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes matriciales utilizando la solución dinámica.

Apéndice A

A.1. Demostración del teorema de Controlabilidad

Teorema A.1 *El sistema descrito mediante la ecuación (1.12) es* **completamente controlable** *si y solo si la matriz*

$$C = [B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B]$$

de orden $n \times nr$ es de rango n.

Prueba:

$\underline{\Longrightarrow}$: Como el sistema es controlable y por el Teorema 1.1 tenemos

$$\bar{0} = e^{t_1A}\mathbf{x}(0) + \int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

o bien

$$\mathbf{x}(0) = -\int_0^{t_1} e^{-\tau A}B\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{A.1}$$

Remitiéndonos a la ecuación (2.100)

$$e^{-At} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j(-t)A^j \tag{A.2}$$

Sustituir la ecuación (A.2) en (A.1) produce

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{j=0}^{n-1} A^jB\int_0^{t_1} c_j(-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{A.3}$$

definamos

$$\beta_j = \int_0^{t_1} c_j(-\tau)\mathbf{u}_{r\times 1}(\tau)d\tau \qquad j = 0, ..., n-1$$

Asi, la ecuación se convierte en

$$\mathbf{x}(0) = -\sum_{j=0}^{n-1} A^j B\beta_j$$

$$\mathbf{x}(0) = -\left[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right] \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta n-1 \end{bmatrix} \tag{A.4}$$

Si el sistema es de estado completamente controlable, entonces, dado cualquier estado inicial $\mathbf{x}(0)$, la ecuación (A.4) debe satisfacerse, esto quiere decir que el rango de la matriz

$$\left[B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \cdots \vdots A^{n-1}B\right]$$

debe ser n.

$\Longleftarrow$:

Demostremos que $W(\tau, t)$ es no singular $\forall t > \tau$

$$W(\tau, t) = \int_\tau^t e^{A(t-s)} BB^T e^{A^T(t-s)} ds \tag{A.5}$$

veamos:

Supongamos que $\exists\, t_1 > t_0 \quad W(t_0, t_1)$ es singular

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\alpha}_{1\times n} \neq \bar{0} \;/\; W(t_0, t_1)\bar{\alpha}^T = \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists\, \bar{\alpha} \neq \bar{0} \;/\; \bar{\alpha}W(t_0, t_1)\bar{\alpha}^T = 0$$

$$\Longrightarrow \bar{\alpha}W(t_0, t_1)\bar{\alpha}^T = \int_{t_0}^{t_1} \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)} BB^T e^{A^T(t_1-s)}\bar{\alpha}^T ds = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} (\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B)(\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B)^T ds = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{t_0}^{t_1} \|\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B\|^2 ds = 0$$ [1]

$$\Longrightarrow \quad \|\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B\| = 0 \quad \forall s \in [t_0, t_1] \quad \text{y algun } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

$$\Longrightarrow \quad \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B = \breve{0}^2 \quad \forall s \in [t_0, t_1] \quad \text{y algun } \bar{\alpha} \neq \bar{0}$$

[1] $\| \quad \|$ es la norma euclidiana

[2] $\breve{0}$ es la matriz cero de orden $1 \times r$

$\Longrightarrow$ las filas de $e^{A(t_1-s)}B$ son linealmenmte dependientes (pues $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$)
Luego $rango(e^{A(t_1-s)}B) = p < n$
Por otro lado derivando $n-1$ veces la expresión $\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B = \breve{0}$, tenemos:

$$\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}B = -\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}AB = \bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}A^2B = \cdots = (-1)^{n-1}\bar{\alpha}e^{A(t_1-s)}A^{n-1}B = \breve{0}$$

el cual puede escribirse como:

$$\bar{\alpha}[e^{A(t_1-s)}B \quad -e^{A(t_1-s)}AB \quad e^{A(t_1-s)}A^2B \quad \cdots \quad (-1)^{n-1}e^{A(t_1-s)}A^{n-1}B] = \bar{O}^3$$

y multiplicando por -1 las columnas con signo negativo

$$\bar{\alpha}[e^{A(t_1-s)}B \quad e^{A(t_1-s)}AB \quad e^{A(t_1-s)}A^2B \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{n-1}B] = \bar{O}$$

entonces podemos afirmar que las filas de la matriz

$$[e^{A(t_1-s)}B \quad e^{A(t_1-s)}AB \quad e^{A(t_1-s)}A^2B \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{n-1}B]$$

son linealmente dependientes (pues $\bar{\alpha} \neq \bar{0}$) es decir

$$rango[e^{A(t_1-s)}B \quad e^{A(t_1-s)}AB \quad e^{A(t_1-s)}A^2B \quad \cdots \quad e^{A(t_1-s)}A^{n-1}B] = q$$

donde $q < n$.
Por otro lado $s \in [t_0, t_1]$ donde $t_0 < t_1$, haciendo $s = t_1$, tenemos

$$rango[B \quad AB \quad A^2B \quad \cdots \quad A^{n-1}B] = q \tag{A.6}$$

De (A.6) tenemos que $rango(C) = q < n$, contradice la hipótesis general que afirma que $rango(C) = n$
Por lo tanto $W(\tau, t)$ es no singular $\forall\, t > \tau$.
Luego podemos construir la entrada $\mathbf{u}(t)$ dada por

$$\mathbf{u}(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)}W^{-1}(t_0, t_1)[\mathbf{x}(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0)]$$

que satisface

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

pues

$$\begin{aligned}
\int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau &= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}W^{-1}(t_0,t_1)[\mathbf{x}(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0)]d\tau \\
&= \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}BB^T e^{A^T(t_1-\tau)}d\tau W^{-1}(t_0,t_1)[\mathbf{x}(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0)] \\
&\quad \text{utilizando (A.5)} \\
&= W(t_0,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)[\mathbf{x}(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0)] \\
&= \mathbf{x}(t_1) - e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0)
\end{aligned}$$

[3] $\bar{O}$ es la matriz cero de orden $1 \times nr$

entonces

$$\mathbf{x}(t_1) = e^{A(t_1-t_0)}\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}B\mathbf{u}(\tau)d\tau$$

podemos decir que cualquier estado inicial $\mathbf{x}(t_0)$ puede ser llevado a cualquier estado final $\mathbf{x}(t_1)$ a través de un control $\mathbf{u}$.

Utilizando el teorema 1.1 afirmamos que para cada $\mathbf{x}(0)$, existe $\mathbf{u}(t)$, $t \in [0, t_1]$ que lleva $\mathbf{x}(0)$ a θ.

A.2. Ejemplo

Considere el sistema descrito mediante

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Dado que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} B \vdots AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

es 2, el sistema es de estado completamente controlable.

Asimismo observemos que el rango de la matriz

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

es 2, por lo tanto, es sistema es completamente observable.

Bibliografía

[CLA 90a] CLAYSSEN, J.C.R., TSUKAZAN T. Dynamical Solutions of Linear Matrix Differential Equations. Quarterly of Applied Mathematics, vol XLVIII, N°1, 1990

[INM 89] INMAN, D.J. Vibration with Control, Measurement and Stability. Prentice Hall, 1989.

[MUR 70] MURRAY R. SPIEGEL. Transformadas de Laplace. McGraw-Hill, 1970.

[ART 73] ARTHUR A. HAUSER, JR. Variable Compleja. Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1973.

[CLA 99a] CLAYSSEN, J.C.R., GERMAN CANAHUALPA, CLAUDIO JUNG. A direct approach to Second-order matriz Non-classical Vibrating equations. Applied Numerical Mathematics 30. 1999.

[ROJ 01] ROJAS M. ARTURO. Control Avanzado Diseño y Aplicaciones en tiempo real. Editorial Maguiña Uni 2001.

[CAN 76] CANALES R. ROBERTO., BARRERA R. RENATO. Analisis de Sistemas dinámicos y Control automático. Editorial Limusa, S.A. 1976.

[GRA 98] J. GRANTHAM WALTER, L. VINCENT THOMAS. Sistemas de Control moderno análisis y diseño. Editorial Limusa, S.A. 1998.

[OGA 98] KATSUHIKO OGATA. Ingeniería de Control Moderna. Prentice Hall, 1998.