UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE INGENIERÍA GEOLÓGICA, MINERA Y METALÚRGICA

EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES

TESIS

PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE:

INGENIERO METALURGISTA

PRESENTADO POR:

JUAN ANTONIO KOBASHICAWA CHINEN

PROMOCIÓN
1999 – II

LIMA – PERÚ
2003

EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES

A Kamisama, Kosey & Teru
Gracias por siempre, este trabajo va para ustedes.

Mi más sincero agradecimiento a quienes apoyaron mi formación profesional
En forma especial a Tía Kyoko y Tía Yoshimi.

TABLA DE CONTENIDOS

PRÓLOGO

Este trabajo se basó en análisis granulométricos y químicos del clasificador Stokes que comprenden una alimentación y siete productos. Estos análisis fueron tomados en la Practica Pre-Profesional que realicé a inicios de 1998 en la compañía minera Minsur S. A.

Por lo que se puede observar en este trabajo, gran parte del mismo es el desarrollo de ecuaciones, el comportamiento de ciertas funciones tanto de distribución como de curvas de partición. En sí, si bien es muy teórico, se quiso aplicar a un caso específico en la industria y un tanto más complicado (matemáticamente) como en el caso del Clasificador Stokes, para esto se presentan casi todos los pasos realizados en cada cálculo (en tablas).

J. A. Kobashicawa

NOMENCLATURA DE SÍMBOLOS

Para las correcciones de Análisis Granulométricos y Químicos por Multiplicadores de Lagrange. Capítulos 2 3, 4, y 5.

Símbolo	Significado	Dimensiones
A	Flujo de la Entrada Principal al Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Ei $i = 1,2,...,m$	Flujo de la Entrada "i" al Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Z	Flujo de la Salida Principal del Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Sj $j = 1,2,...,n$	Flujo de la Salida "j" del Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
m	Número de Entradas al Sistema (Exceptuando la Entrada Principal "A".)	Adimensional
n	Número de Salidas del Sistema (Exceptuando la Salida Principal "Z".)	Adimensional
k	Número de intervalos de tamaños	Adimensional
u $u = 1,2,...,k$	Intervalo de tamaño[1]	Adimensional
fA^u	Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
fEi^u $i = 1,2,...,m$	Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
fZ^u	Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional

[1] Por simplicidad en el desarrollo de las ecuaciones de balance de masa (Capítulo 2 y 4) se omitirá este termino "u". Por ejemplo se usará: fA en vez de fA^u . No se deberá confundir a este superíndice "u" como un exponente.

fSj^u $j = 1,2,...,n$	Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
Ac	Flujo de la Entrada Principal Corregida al Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Eic $i = 1,2,...,m$	Flujo de la Entrada "i" Corregida al Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Zc	Flujo de la Salida Principal Corregida del Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
Sjc $j = 1,2,...,n$	Flujo de la Salida "j" Corregida del Sistema	$\frac{Masa}{Tiempo}$
fAc^u	Fracción en peso del Análisis Granulométrico Corregido del Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$fEic^u$ $i = 1,2,...,m$	Fracción en peso del Análisis Granulométrico Corregido de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
fZc^u	Fracción en peso del Análisis Granulométrico Corregido de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$fSjc^u$ $j = 1,2,...,n$	Fracción en peso del Análisis Granulométrico Corregido de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
αi $i = 1,2,...,m$	Relación de Flujos de la Entrada "i" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\alpha i = \frac{Ei}{A}$	Adimensional
βj $j = 1,2,...,n$	Relación de Flujos de la Salida "j" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\beta j = \frac{Sj}{A}$	Adimensional
βZ	Relación de Flujos de la Salida Principal "Z" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\beta Z = \frac{Z}{A}$	Adimensional
ΔQ^u	Error por los Flujos (Caudales) (Factores αi, βj y βZ) para el intervalo de tamaño "u".	Adimensional
αic $i = 1,2,...,m$	Relación de Flujos Corregidos de la Entrada "i" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\alpha ic = \frac{Eic}{Ac}$	Adimensional
βjc $j = 1,2,...,n$	Relación de Flujos Corregidos de la Salida "j" con Respecto a la Entrada Principal "A".	Adimensional

	$\beta jc = \frac{Sjc}{Ac}$	
βZc	Relación de Flujos Corregidos de la Salida Principal "Z" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\beta Zc = \frac{Zc}{Ac}$	Adimensional
ΔM^u	Error por los Flujos (Caudales) Corregidos (Factores αic , βjc y βZc) para el intervalo de tamaño "u". Nota: ΔM^u es el valor mínimo de: ΔQ^u $\Delta M^u = \min\left(\Delta Q^u\right)$	Adimensional
ΔfA^u	Corrección de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico del Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta fA^u = fA^u - fAc^u$	Adimensional
ΔfEi^u $i = 1, 2, ..., m$	Corrección de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta fEi^u = fEi^u - fEic^u$	Adimensional
ΔfZ^u	Corrección de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta fZ^u = fZ^u - fZc^u$	Adimensional
ΔfSj^u $j = 1, 2, ..., n$	Corrección de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta fSj^u = fSj^u - fSjc^u$	Adimensional
$L(X, \lambda)$	Función Lagrangiana	Adimensional
X	Parámetro de la Función Lagrangiana compuesto de todas las correcciones " Δ ".	Adimensional
λ^u	Multiplicador de Lagrange para el intervalo de tamaño "u" para la corrección de Análisis Granulométricos.	Adimensional
S	Error de la Corrección (Sumatoria de las correcciones al cuadrado).	Adimensional
LA	Análisis Químico del Flujo de la Entrada Principal al Sistema (Ley)	Adimensional [2]
LEi	Análisis Químico del Flujo de la Entrada "i" al	Adimensional

[2] Los Análisis Químicos son Adimensionales debido a que estos están expresados por ejemplo como % ó como $\frac{gr}{t} = \frac{Masa}{Masa}$

$i = 1,2,...,m$	Sistema	
LZ	Análisis Químico del Flujo de la Salida Principal del Sistema	Adimensional
LSj $j = 1,2,...,n$	Análisis Químico del Flujo de la Salida "j" del Sistema	Adimensional
LfA^u	Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico del Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$LfEi^u$ $i = 1,2,...,m$	Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
LfZ^u	Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$LfSj^u$ $j = 1,2,...,n$	Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
LAc	Análisis Químico Corregido del Flujo de la Entrada Principal al Sistema	Adimensional
$LEic$ $i = 1,2,...,m$	Análisis Químico Corregido del Flujo de la Entrada "i" al Sistema	Adimensional
LZc	Análisis Químico Corregido del Flujo de la Salida Principal del Sistema	Adimensional
$LSjc$ $j = 1,2,...,n$	Análisis Químico Corregido del Flujo de la Salida "j" del Sistema	Adimensional
$LfAc^u$	Análisis Químico Corregido de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico del Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$LfEic^u$ $i = 1,2,...,m$	Análisis Químico Corregido de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$LfZc^u$	Análisis Químico Corregido de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
$LfSjc^u$ $j = 1,2,...,n$	Análisis Químico Corregido de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
ΔMq^u	Error por los Análisis Químicos de las Fracciones en peso del Análisis Granulométrico correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
ΔMqA	Error por los Análisis Químicos de la Entrada Principal "A". Ej: Ley de Cabeza - Ley de Cabeza Calculada	Adimensional
$\Delta MqEi$	Error por los Análisis Químicos de la Entrada "i".	Adimensional
ΔMqZ	Error por los Análisis Químicos de la Salida	Adimensional

	Principal "Z".	
$\Delta MqSj$	Error por los Análisis Químicos de la Salida Principal "j".	Adimensional
ΔLA	Corrección del Análisis Químico de la Entrada principal "A". $\Delta LA = LA - LAc$	Adimensional
ΔLEi $i = 1, 2, \ldots, m$	Corrección del Análisis Químico de la Entrada "i". $\Delta LEi = LEi - LEic$	Adimensional
ΔLZ	Corrección del Análisis Químico de la Salida principal "Z". $\Delta LZ = LZ - LZc$	Adimensional
ΔLSj $j = 1, 2, \ldots, n$	Corrección del Análisis Químico de la Salida "j". $\Delta LSj = LSj - LSjc$	Adimensional
ΔLfA^u	Corrección del Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico del Entrada principal "A" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta LfA^u = LfA^u - LfAc^u$	Adimensional
$\Delta LfEi^u$ $i = 1, 2, \ldots, m$	Corrección del Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Entrada "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta LfEi^u = LfEi^u - LfEic^u$	Adimensional
ΔLfZ^u	Corrección del Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida principal "Z" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta LfZ^u = LfZ^u - LfZc^u$	Adimensional
$\Delta LfSj^u$ $j = 1, 2, \ldots, n$	Corrección del Análisis Químico de la Fracción en peso del Análisis Granulométrico de la Salida "j" correspondiente al intervalo de tamaño "u". $\Delta LfSj^u = LfSj^u - LfSjc^u$	Adimensional
λq^u	Multiplicador de Lagrange para el intervalo de tamaño "u" para la corrección de Análisis Químico.	Adimensional
λA	Multiplicador de Lagrange para la corrección del Análisis Químico de la Entrada Principal "A".	Adimensional
λEi $i = 1, 2, \ldots, m$	Multiplicador de Lagrange para la corrección del Análisis Químico de la Entrada "i".	Adimensional
λZ	Multiplicador de Lagrange para la corrección del Análisis Químico de la Salida Principal "Z".	Adimensional
λSj $j = 1, 2, \ldots, n$	Multiplicador de Lagrange para la corrección del Análisis Químico de la Salida "j".	Adimensional

Para el Análisis Estadístico. Capítulo 6.

Símbolo	Significado	Dimensiones
Xp	Tamaño Promedio del Intervalo de Tamaños.	Longitud
X	Tamaño Mínimo del Intervalo de Tamaños.	Longitud
$fi(Xp)$	Fracción En Peso referido al tamaño Xp Fracción de una muestra con tamaño igual a Xp . Probabilidad de que una partícula de una muestra determinada tenga un tamaño igual a Xp .	Adimensional
$f(Xp)$	Función Densidad de Probabilidad.	$\frac{1}{Longitud}$ [3]
$F(X)$	Fracción Acumulada Pasante referido al tamaño X : Fracción de una muestra con tamaño menor a X . Probabilidad de que una partícula de una muestra determinada sea de tamaño menor a X .	Adimensional
μ	Tamaño Medio	Longitud
σ	Desviación Estándar	Longitud
σ^2	Varianza	$Longitud^2$
CV	Coeficiente de Variación	Adimensional
α	Factor de Forma de las Funciones de Distribución.	Adimensional
β	Factor de Forma de las Funciones de Distribución. (Empleado en Funciones de tres parámetros como la de Harris o la Distribución Beta).	Adimensional
Xo	Parámetro de Tamaño de las Funciones de Distribución.	Longitud
$\Gamma_{(a)}$	Función Gamma de a	
$B_{(m,n)}$	Función Beta de m y n	
$P_{(x,a)}$	Función Gamma Incompleta de a referido a x .	
$I_{(x,m,n)}$	Función Beta Incompleta de m y n referido a x .	

Para el Cálculo de la Eficiencia del Clasificador Stokes y Funciones de las Curvas de Partición. Capítulos 7 y 8.

Símbolo	Significado	Dimensiones
Ri $i = 1,2,...,5$	Flujo del Rebose u Overflow de la Cámara (Spigot) "i"	$\frac{Masa}{Tiempo}$

[3] La dimensión de la función de densidad de probabilidad es la inversa de la dimensión de Xp, que para nuestro caso en particular es referido a Longitud.

fRi'' $i = 1, 2, \ldots, 5$	Fracción en peso del Análisis Granulométrico del Rebose u Overflow de la Cámara (Spigot) "i" correspondiente al intervalo de tamaño "u".	Adimensional
γi $i = 1, 2, \ldots, 5$	Relación de Flujos del Rebose de la Cámara "i" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\gamma i = \dfrac{Ri}{A}$	Adimensional
γic $i = 1, 2, \ldots, 5$	Relación de Flujos Corregidos del Rebose de la Cámara "i" con Respecto a la Entrada Principal "A". $\gamma ic = \dfrac{Ric}{Ac}$	Adimensional
$ED(Xp)$	Probabilidad de una partícula proveniente del alimento de tamaño Xp de reportarse en la Descarga ó Underflow.	Adimensional
$ER(Xp)$	Probabilidad de una partícula proveniente del alimento de tamaño Xp de reportarse en el Rebose ú Overflow.	Adimensional
$d50$	Tamaño de partícula que a la cual: $ED(d50) = ER(d50) = 50\%$	Longitud
$EDc(Xp)$	Factor $ED(Xp)$ corregido a la cual el Cortocircuito es Cero. $EDc(Xp) \approx 0 \qquad Xp \to 0$	Adimensional
$ERc(Xp)$	Factor $ER(Xp)$ corregido a la cual el Cortocircuito es Cero. $ERc(Xp) \approx 1 \qquad Xp \to 0$	Adimensional
$d50c$	(d50 corregido) Tamaño de partícula que a la cual: $EDc(d50c) = ERc(d50c) = 50\%$	Longitud
Cortocircuito	Se presenta este fenómeno cuando partículas finas que deberían de reportarse al Rebose se reportan en la Descarga.	
$\bar{E}(0, Xn)$	Valor de $ED(Xp)$ donde Xp es el menor tamaño promedio empleado mayor que cero.	Adimensional
$FD(Xn)$	Fracción Acumulada Pasante en la Descarga (Underflow) correspondiente al Tamaño Xn	Adimensional
$FR(Xn)$	Fracción Acumulada Pasante en el Rebose (Overflow) correspondiente al Tamaño Xn	Adimensional
$FA(Xn)$	Fracción Acumulada Pasante en la Alimentación correspondiente al Tamaño Xn	Adimensional
D	Flujo de la Descarga (Underflow) de la Cámara.	$\dfrac{Masa}{Tiempo}$

R	Flujo del Rebose (Overflow) de la Cámara.	$\frac{Masa}{Tiempo}$
A	Flujo de la Entrada a la Cámara	$\frac{Masa}{Tiempo}$
a	Factor de Forma para las Funciones de las Curvas de Partición.	Adimensional
Xr	Tamaño Medio reducido: $Xr = \frac{Xp}{d50c}$	Adimensional
I	Imperfección.- Usado para denotar la eficiencia de la separación. $I = \frac{Xr_{75} - Xr_{25}}{2}$	Adimensional
Xr_{25}	Tamaño Medio Reducido cuando: $EDc(Xr_{25}) = 25\%$	Adimensional
Xr_{75}	Tamaño Medio Reducido cuando: $EDc(Xr_{75}) = 75\%$	Adimensional
Pendiente	La Pendiente de la Curva de Partición se considera a la Pendiente comprendida entre los valores de $(X_{25}, 25\%)$ y $(X_{75}, 75\%)$ $\text{Pendiente} = \frac{0.75 - 0.25}{Xr_{75} - Xr_{25}} = \frac{1}{4 * I}$	Adimensional

CAPÍTULO 1
INTRODUCCIÓN

1.1 OBJETIVOS

Para explicar el contenido de la presente tesis previamente se expondrán los objetivos principales.

- Elaborar un método para determinar la eficiencia del clasificador Stokes
- Elaborar un método general para la corrección de Análisis Granulométricos y Análisis Químicos (Mallas valoradas) en un nodo.
- Ajustar funciones de distribución (para Análisis Granulométrico y Estadísticas) a las muestras y determinar qué tipo de curvas los representan mejor.
- Elaborar el comportamiento de las funciones de distribución variando parámetros estadísticos.
- Implementar el cálculo automático mediante la programación en Matlab.

1.2 MÉTODO PARA DETERMINAR LA EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES.

Este método se basó en el método propuesto por Quiroz [1] para un hidrociclón. El hidroclasificador Stoke (una sedimentación obstaculizada por un flujo de agua en contracorriente a presión constante) difiere en funcionamiento de un hidrociclón (uso de fuerzas centrífugas principalmente), pero matemáticamente es muy similar, es decir, se presentan los tamaños de corte (d50, d50c), curvas de partición alimento, descargas y reboses en cada cámara. Por lo tanto, matemáticamente se puede tratar cada cámara del clasificador Stokes como un hidrociclón; para esto es necesario asumir cada cámara (o el clasificador en si) como una "caja negra", en la cual sólo se conocen las entradas y salidas en el sistema, es decir, sin saber (o ignorando adrede) lo que ocurre dentro de dicha ' caja negra".

El método para determinar la eficiencia del clasificador Stokes puede tomarse tan simple como lo siguiente:

- Corregir los análisis granulométricos.
- Hallar los tamaños de corte (d50, d50c).
- Determinar la eficiencia de cada cámara análogamente como se haría para un hidrociclón
- Multiplicar dichas eficiencias (esto debido a que las cámaras están en serie).

Por lo expuesto, el método sería análogo para determinar la eficiencia de varios hidrociclones conectados en serie.

1.3 CONTENIDO DE LA PRESENTE TESIS

En el Capítulo 1 se explica brevemente los principales objetivos de esta tesis, así como el método para hallar la eficiencia del clasificador Stokes y el contenido de cada capítulo.

En el Capítulo 2 se muestra el desarrollo de la corrección de Análisis Granulométricos en un nodo en forma general por el Método de Multiplicadores de Lagrange; se debe de recalcar que para fines prácticos no es necesario entender toda la demostración, si no simplemente revisar los conceptos básicos sobre la realización de un balance de masa y aplicar el "Resumen del Método" como si fuera una receta. Al final de este capítulo se presentan algunas propiedades encontradas en esta corrección en particular.

En el Capítulo 3 se aplica paso a paso dicho Resumen elaborado en el Capitulo 2, de la cual se presentan casi todas las tablas de cálculos para su mejor comprensión.

En el Capítulo 4 se muestra el desarrollo de la corrección de los Análisis Químicos de los Análisis Granulométricos (mallas valoradas). Como se podrá ver en dicho capítulo, es necesario haber corregido previamente los Análisis Granulométricos, y es recomendable que se revise conceptos sobre Álgebra Lineal (en especial a Grossman [2]) por el uso extenso que se hace de las ecuaciones matriciales, ya que sin uso de estas, la corrección y el desarrollo de este método se habría vuelto difícil de comprender. Se presenta así mismo un "Resumen del

Método" y ciertas propiedades de forma análoga al mostrado para la corrección de Análisis Granulométricos (Capítulo 2).

Se debe de hacer hincapié, en que el método puede tomar mucho tiempo y ser tedioso si se trabaja con una hoja de cálculo, pero con ayuda de un paquete como MATLAB esto puede resumirse a unas líneas de un programa, dando resultados incluso más precisos que una hoja de calculo.

En el Capítulo 5 se aplica paso a paso la corrección de Análisis Químico por el método descrito en el Capítulo 4, en la cual se presentan las tablas para su mejor comprensión. Al igual que en Capítulo 3 todos los cálculos de este capítulo se realizó en una hoja de cálculo (Microsoft Excel 2000).

Para el Capítulo 6 se requiere una lectura previa sobre probabilidad, funciones de distribución, funciones de densidad. En este capítulo se da el tratamiento estadístico, en cierta forma muy simple, que es el de hallar los parámetros de Tamaño Medio, Varianza, Desviación Estándar y Coeficiente de Variación. Se exponen también funciones de Distribución, algunas utilizadas comúnmente en el campo de procesamiento de minerales y otras son netamente distribuciones probabilísticas. Se muestra también los datos de ajuste de estas curvas y ciertos comportamientos de las funciones de distribución al variar los parámetros estadísticos mencionados.

En el Capítulo 7 se presenta el método para hallar la eficiencia del Clasificador Stokes, los cálculos también se presentan en tablas. En este capítulo también se incluye el cálculo del parámetro d50 y d50c por diferentes métodos, por ajuste de curvas (funciones de Plitt, Lynch, distribución Log-Normal y Logística en ln(x)) e interpolaciones.

En el Capítulo 8 se presentan ciertas características de las funciones de las curvas de partición empleadas en el Capítulo 7, como una relación encontrada del factor de forma de dichas funciones con la pendiente e imperfección de las curvas de partición.

En el Capítulo 9 se expone que todos los pasos referentes a los cálculos de la presente tesis se pueden realizar en un programa. Aquí se tuvo la preferencia por MATLAB ya que es un software basado en operaciones de matrices pero de un campo de aplicación amplio, empleándose también en campos de Ingeniería Electrónica, Civil, Industrial, etc. Aparte de la facilidad en la programación (correcciones de los análisis granulométricos y químicos, ajuste de curvas, interpolaciones, generación de gráficos, etc.) tiene una característica importante, que es el de poder compilar todos los resultados en una página de formato "html" lo cual en la industria metalúrgica permitiría acelerar el reporte de resultados.

Respecto a la programación, se recomienda que previamente se haya calculado todos los pasos en otro software (de preferencia una hoja de cálculo) con el fin de detectar errores en el desarrollo del programa.

CAPÍTULO 2
CORRECCIÓN DE ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS EN SISTEMAS DE "M+1" ENTRADAS Y "N+1" SALIDAS POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

2.1 INTRODUCCIÓN

En el procesamiento de minerales se efectúan muestreos con diversos fines (determinar parámetros de la operación, eficiencia de equipos, detección y análisis de errores en los procesos, etc.). Existen equipos (como el Hidroclasificador Stokes) que pueden tomarse como un nodo en el cual puede haber diferentes alimentaciones y diferentes salidas; en si, esos equipos representan sistemas

Un sistema puede definirse como:

Terminología científica:

"Conjunto de partes que forman un todo unificado."

Ingeniería:

"Combinación de componentes, elementos, subsistemas y procedimientos operativos, que trabajan juntos para lograr un determinado objetivo."[4]

---

[4] Christopher Morris. "Diccionario Enciclopédico de Ciencia y Tecnología" Tomo IV. Primera Edición, Prentice Hall Hispanoamericana, S. A. pag 2398.

En nuestro caso, el clasificador Stokes es un sistema que bajo una alimentación en forma de pulpa y un régimen de sedimentación con un flujo de agua en contracorriente a presión constante permite obtener productos con diferentes granulometrías.

Al obtener los Análisis Granulométricos en un nodo determinado, el problema con que uno se encuentra inicialmente es:

"Los Análisis Granulométricos del sistema tienen que ser matemáticamente consistentes."

¿Que significa esto?

Simplemente que todo lo que entra tiene que ser igual a lo que sale:

Exponiendo un caso simple:

En un proceso X se sabe que $A_R = B_R + C_R$

O que: $3 = 1 + 2$ (asumiendo esto como "real").

Pero debido a errores de muestreo, análisis, o cualquier operación en la cual se manipule las muestras, nos puede dar valores como:

$3.1 = 0.9 + 2.3$

Lo cual no es correcto o "Matemáticamente Inconsistente".

Es decir tenemos un error de:

$$A-(B+C)=\Delta M$$

$$3.1-(0.9+2.3)=0.1$$

Ahora el objetivo es hacer que ΔM sea cero, con lo cual sería 'Matemáticamente consistente". Se establecen valores corregidos como:

$$Ac-[Bc+Cc]=0$$

ó

$$(A-\Delta A)-[(B-\Delta B)+(C-\Delta C)]=0$$

Donde:

A,B,C : son los valores muestreados

Ac,Bc,Cc : son los valores corregidos

$\Delta A,\Delta B,\Delta C$: son las correcciones.

Se puede cumplir dicho objetivo de varias formas. Una de las formas más simples (pero con una mayor distorsión con respecto a los datos originales) es que las correcciones sean iguales: $\Delta A=\Delta B=\Delta C$

$$(A-\Delta A)-[(B-\Delta B)+(C-\Delta C)]=0$$

$$A-(B+C)=\Delta A-(\Delta B+\Delta C)=\Delta M$$

Con la cual se obtiene que:

$$\Delta A=\Delta B=\Delta C=\Delta M=0.1$$

Por lo tanto:

$$Ac=3.1-0.1=3.0$$
$$Bc=0.9-0.1=0.8$$
$$Cc=2.3-0.1=2.2$$

Obteniéndose:

$$Ac - [Bc + Cc] = 3.0 - [0.8 + 2.2] = 0$$

Nótese que esto se aleja de lo "real"

$$3.0 - [1.0 + 2.0] = 0$$

Con esto se debe de tener en cuenta que las correcciones no darán los datos exactos que realmente ocurren en el proceso X pero serán matemáticamente consistentes y aproximados a los valores reales.

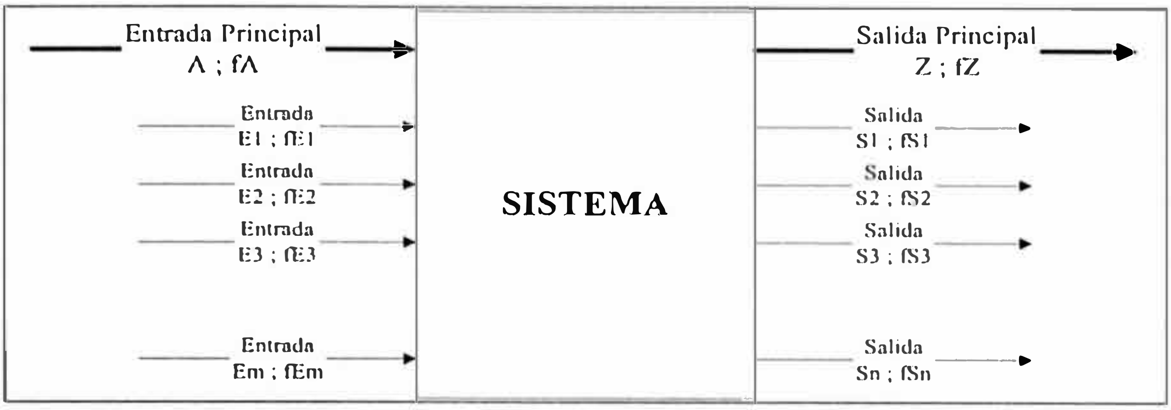
Más aún, de todos los métodos de corrección que podrían elaborarse, se debe de escoger el que menos se desvíe de los datos muestreados (es decir, las correcciones deben de ser de valores mínimos posibles). Es por esta razón que se escogió el método de multiplicadores de Lagrange (ver Lynch [5], Taha [6]). Este método es simplemente un optimizador la cual es usado para minimizar una función objetivo con ecuaciones restrictivas.

2.2 BALANCE DE MASA:

Se tiene el siguiente sistema: [5]

[5] Las fracciones por mallas se han denotado por superíndices que se expresan como números romanos en minúsculas (No son exponentes).

Gráfico 2. 1 Esquema del sistema a corregir.



Para este método se considera que existe una Entrada Principal, una Salida Principal, "m" entradas secundarias y "n" salidas secundarias. Todas estas entradas y salidas están aplicadas a un nodo (sistema) y se considera que en dicho nodo no existen procesos de reducción de tamaños.

Cada una de estas entradas y salidas mencionadas tienen una granulometría determinada que se puede representar por la siguiente tabla:

Tabla 2. 1 Análisis Granulométricos en forma simbólica a corregir.

		ENTRADA					SALIDA				
	Flujo (Ej: t/h) / **Intervalo Tamaños**	Ac (Principal)	E1c	E2c	...	Emc	Zc (Principal)	S1c	S2c	...	Snc
Ej: Fracciones en Peso	i	fAc^{i}	$fE1c^{i}$	$fE2c^{i}$	...	$fEmc^{i}$	fZc^{i}	$fS1c^{i}$	$fS2c^{i}$	...	$fSnc^{i}$
	ii	fAc^{ii}	$fE1c^{ii}$	$fE2c^{ii}$	...	$fEmc^{ii}$	fZc^{ii}	$fS1c^{ii}$	$fS2c^{ii}$	...	$fSnc^{ii}$
	iii	fAc^{iii}	$fE1c^{iii}$	$fE2c^{iii}$	...	$fEmc^{iii}$	fZc^{iii}	$fS1c^{iii}$	$fS2c^{iii}$	...	$fSnc^{iii}$
		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	k-1	fAc^{k-1}	$fE1c^{k-1}$	$fE2c^{k-1}$	...	$fEmc^{k-1}$	fZc^{k-1}	$fS1c^{k-1}$	$fS2c^{k-1}$	...	$fSnc^{k-1}$
	k	fAc^{k}	$fE1c^{k}$	$fE2c^{k}$	...	$fEmc^{k}$	fZc^{k}	$fS1c^{k}$	$fS2c^{k}$	...	$fSnc^{k}$

k: Intervalo de tamaños más fino (equivale también al número de intervalos de tamaño).

2.3 *ECUACIONES DE BALANCE DE MASA:*

Se presentan las ecuaciones ideales (error=0) y/o corregidas.

Caudales corregidos (Flujos):

Ecuación 2. 1

$$Ac + E1c + E2c + ... + Emc = S1c + S2c + ... + Snc + Zc$$

Mallas corregidas

Ecuación 2. 2

$$fAc * Ac + fE1c * E1c + fE2c * E2c + ... + fEmc * Emc = fS1c * S1c + fS2c * S2c + ... + fSnc * Snc + fZc * Zc$$

Se tiene:

$$\frac{E1c}{Ac} = \alpha 1c; \frac{E2c}{Ac} = \alpha 2c; \frac{Emc}{Ac} = \alpha mc$$

$$\frac{S1c}{Ac} = \beta 1c; \frac{S2c}{Ac} = \beta 2c; \frac{Snc}{Ac} = \beta nc; \frac{Zc}{Ac} = \beta Zc$$

Con lo cual se tiene en las ecuaciones de balance de masa:

Ecuación 2. 3

$$1 + \alpha 1c + \alpha 2c + ... + \alpha mc = \beta 1c + \beta 2c + ... + \beta nc + \beta Zc$$

Ecuación 2. 4

$$fAc + fE1c * \alpha 1c + fE2c * \alpha 2c + ... + fEmc * \alpha mc = fS1c * \beta 1c + fS2c * \beta 2c + ... + fSnc * \beta nc + fZc * \beta Zc$$

Para los datos reales se obtendrán los siguientes errores:

El error por los caudales (α y β) que se tiene en el análisis granulométrico por cada malla se toma como:

$$\Delta Q^{I}, \Delta Q^{II}, \Delta Q^{III}, \Delta Q^{IV}, ...$$

Siendo:

Ecuación 2. 5

$$\Delta Q = fA + fE1 * \alpha 1 + fE2 * \alpha 2 + ... + fEm * \alpha m - (fS1 * \beta 1 + fS2 * \beta 2 + ... + fSn * \beta n + fZ * \beta Z)$$

El objetivo de esta corrección es: "Hallar los caudales óptimos con los cuales ΔQ sea mínimo[6]."

Para simplificar los cálculos usamos la siguiente relación (análoga a la Ecuación 2.3)

$$\beta Z = 1 + \alpha 1 + \alpha 2 + ... + \alpha m - (\beta 1 + \beta 2 + ... + \beta n)$$

Reemplazándolo en la Ecuación 2.5, obtenemos:

$$\Delta Q = fA + fE1 * \alpha 1 + fE2 * \alpha 2 + ... + fEm * \alpha m$$
$$-(fS1 * \beta 1 + fS2 * \beta 2 + ... + fSn * \beta n + fZ * (1 + \alpha 1 + \alpha 2 + ... + \alpha m - (\beta 1 + \beta 2 + ... + \beta n)))$$

Simplificando, tenemos:

$$\Delta Q = (fA - fZ) + (fE1 - fZ) * \alpha 1 + (fE2 - fZ) * \alpha 2 + ... + (fEm - fZ) * \alpha m$$
$$-((fS1 - fZ) * \beta 1 + (fS2 - fZ) * \beta 2 + ... + (fSn - fZ) * \beta n)$$

Se tiene:

Ecuación 2. 6

$$\Delta Q = (fA - fZ) + \sum_{i=1}^{i=m} [(fEi - fZ) * \alpha i] - \sum_{j=1}^{j=n} [(fSj - fZ) * \beta j]$$

Para corregir los análisis granulométricos con una variación mínima, tenemos que tomar derivadas parciales de la sumatoria de los cuadrados de los errores (ΔQ) (la sumatoria es debido a cada malla) con respecto a las variables de caudales (α y β) e igualarlas a cero.

Es decir:

[6] Las relaciónes de caudales (α, β) son desconocidas.

$$\sum\left[\Delta Q^2\right] = \Delta Q^{i^2} + \Delta Q^{ii^2} + \Delta Q^{iii^2} + \Delta Q^{iv^2} + \ldots$$

$$\sum\left[\Delta Q^2\right] = \sum\left[\left[(fA - fZ) + \sum_{i=1}^{i=m}\left[(fEi - fZ) * \alpha i\right] - \sum_{j=1}^{j=n}\left[(fSj - fZ) * \beta j\right]\right]^2\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha i}\left(\sum\left[\Delta Q^2\right]\right) = 0$$
$$i = [1,2,3,\ldots,m]$$
$$\frac{\partial}{\partial \beta j}\left(\sum\left[\Delta Q^2\right]\right) = 0$$
$$j = [1,2,3,\ldots,n]$$

Con lo cual tendremos "m" ecuaciones con respecto a α y "n" ecuaciones con respecto a β, para hallar los caudales corregidos: $\alpha 1c, \alpha 2c, \ldots, \alpha mc, \beta 1c, \beta 2c, \ldots, \beta nc$

Por ejemplo, para $\alpha 1$

$$\sum\left[\Delta Q^2\right] = \sum\left[\left[(fA - fZ) + \left[(fE1 - fZ) * \alpha 1\right] + \sum_{i=2}^{i=m}\left[(fEi - fZ) * \alpha i\right] - \sum_{j=1}^{j=n}\left[(fSj - fZ) * \beta j\right]\right]^2\right]$$

Si:

$$A = \left[(fE1 - fZ)\right]$$
$$B = \left[(fA - fZ) + \sum_{i=2}^{i=m}\left[(fEi - fZ) * \alpha i\right] - \sum_{j=1}^{j=n}\left[(fSj - fZ) * \beta j\right]\right]$$

Tenemos:

$$\sum\left[\Delta Q^2\right] = \sum\left[\left[A * \alpha 1 + B\right]^2\right]$$
$$\sum\left[\Delta Q^2\right] = \left[A^i * \alpha 1 + B^i\right]^2 + \left[A^{ii} * \alpha 1 + B^{ii}\right]^2 + \left[A^{iii} * \alpha 1 + B^{iii}\right]^2 + \left[A^{iv} * \alpha 1 + B^{iv}\right]^2 + \ldots$$

Derivamos parcialmente respecto a $\alpha 1$ e igualamos a cero (al hacer esto, se obtendrán los valores de αc y βc que darán los errores ΔQ mínimos).

$$\frac{\partial}{\partial \alpha 1}\left(\sum\left[\Delta Q^2\right]\right) = 2 * \left[A^i * \alpha 1c + B^i\right] * A^i + 2 * \left[A^{ii} * \alpha 1c + B^{ii}\right] * A^{ii} + 2\left[A^{iii} * \alpha 1c + B^{iii}\right] * A^{iii} + \ldots = 0$$

$$\sum[2*[A*\alpha 1c+B]*A]=0$$
$$2*\sum[A^2*\alpha 1c+A*B]=0$$
$$\alpha 1c*\sum(A^2)+\sum(A*B)=0$$

Entonces:

$$\alpha 1c*\sum\left[(fE1-fZ)^2\right]+\sum\left[(fE1-fZ)*\left((fA-fZ)+\sum_{i=2}^{i=m}[(fEi-fZ)*\alpha ic]-\sum_{j=1}^{j=n}[(fSj-fZ)*\beta jc]\right)\right]=0$$

Desarrollándolo obtenemos:

$$\sum[(fE1-fZ)*(fA-fZ)]+$$
$$\alpha 1c*\sum\left[(fE1-fZ)^2\right]+$$
$$\alpha 2c*\sum[(fE1-fZ)*(fE2-fZ)]+\ldots$$
$$\ldots.+$$
$$\alpha mc*\sum[(fE1-fZ)*(fEm-fZ)]+$$
$$-\beta 1c*\sum[(fE1-fZ)*(fS1-fZ)]+$$
$$-\beta 2c*\sum[(fE1-fZ)*(fS2-fZ)]+\ldots$$
$$\ldots+$$
$$-\beta nc*\sum[(fE1-fZ)*(fSn-fZ)]=0$$

Análogamente para $\alpha 2c$

$$\sum[(fE2-fZ)*(fA-fZ)]+$$
$$\alpha 1c*\sum[(fE2-fZ)*(fE1-fZ)]+$$
$$\alpha 2c*\sum\left[(fE2-fZ)^2\right]+\ldots$$
$$\ldots.+$$
$$\alpha mc*\sum[(fE2-fZ)*(fEm-fZ)]+$$
$$-\beta 1c*\sum[(fE2-fZ)*(fS1-fZ)]+$$
$$-\beta 2c*\sum[(fE2-fZ)*(fS2-fZ)]+\ldots$$
$$\ldots+$$
$$-\beta nc*\sum[(fE2-fZ)*(fSn-fZ)]=0$$

Para βnc

$$
\begin{aligned}
&\sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fA - fZ\right)\right] + \\
&\alpha 1c * \sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fE1 - fZ\right)\right] + \\
&\alpha 2c * \sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fE2 - fZ\right)\right] + \ldots \\
&\ldots . + \\
&\alpha mc * \sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fEm - fZ\right)\right] + \\
&- \beta 1c * \sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fS1 - fZ\right)\right] + \\
&- \beta 2c * \sum\left[\left(fSn - fZ\right) * \left(fS2 - fZ\right)\right] + \ldots \\
&\ldots + \\
&- \beta nc * \sum\left[\left(fSn - fZ\right)^2\right] = 0
\end{aligned}
$$

De las relaciones anteriores se obtendrá la siguiente ecuación lineal:

Ecuación 2. 7

$A * X = B$ (Obsérvese que la matriz A es simétrica de orden (m+n,m+n)).

$$A = \begin{bmatrix}
\sum[(fE1 - fZ)^2] & \sum[(fE2 - fZ)\cdot(fE1 - fZ)] & \dots & \sum[(fEm - fZ)\cdot(fE1 - fZ)] & \sum[(fS1 - fZ)\cdot(fE1 - fZ)] & \sum[(fS2 - fZ)\cdot(fE1 - fZ)] & \dots & \sum[(fSn - fZ)\cdot(fE1 - fZ)] \\
\sum[(fE1 - fZ)\cdot(fE2 - fZ)] & \sum[(fE2 - fZ)^2] & \dots & \sum[(fEm - fZ)\cdot(fE2 - fZ)] & \sum[(fS1 - fZ)\cdot(fE2 - fZ)] & \sum[(fS2 - fZ)\cdot(fE2 - fZ)] & \dots & \sum[(fSn - fZ)\cdot(fE2 - fZ)] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum[(fE1 - fZ)\cdot(fEm - fZ)] & \sum[(fE2 - fZ)\cdot(fEm - fZ)] & \dots & \sum[(fEm - fZ)^2] & \sum[(fS1 - fZ)\cdot(fEm - fZ)] & \sum[(fS2 - fZ)\cdot(fEm - fZ)] & \dots & \sum[(fSn - fZ)\cdot(fEm - fZ)] \\
\sum[(fE1 - fZ)\cdot(fS1 - fZ)] & \sum[(fE2 - fZ)\cdot(fS1 - fZ)] & \dots & \sum[(fEm - fZ)\cdot(fS1 - fZ)] & \sum[(fS1 - fZ)^2] & \sum[(fS2 - fZ)\cdot(fS1 - fZ)] & \dots & \sum[(fSn - fZ)\cdot(fS1 - fZ)] \\
\sum[(fE1 - fZ)\cdot(fS2 - fZ)] & \sum[(fE2 - fZ)\cdot(fS2 - fZ)] & \dots & \sum[(fEm - fZ)\cdot(fS2 - fZ)] & \sum[(fS1 - fZ)\cdot(fS2 - fZ)] & \sum[(fS2 - fZ)^2] & \dots & \sum[(fSn - fZ)\cdot(fS2 - fZ)] \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\sum[(fE1 - fZ)\cdot(fSn - fZ)] & \sum[(fE2 - fZ)\cdot(fSn - fZ)] & \dots & \sum[(fEm - fZ)\cdot(fSn - fZ)] & \sum[(fS1 - fZ)\cdot(fSn - fZ)] & \sum[(fS2 - fZ)\cdot(fSn - fZ)] & \dots & \sum[(fSn - fZ)^2]
\end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} -\alpha 1c \\ -\alpha 2c \\ \dots \\ -\alpha mc \\ \beta 1c \\ \beta 2c \\ \dots \\ \beta nc \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sum[(fE1 - fZ)*(fA - fZ)] \\ \sum[(fE2 - fZ)*(fA - fZ)] \\ \dots \\ \sum[(fEm - fZ)*(fA - fZ)] \\ \sum[(fS1 - fZ)*(fA - fZ)] \\ \sum[(fS2 - fZ)*(fA - fZ)] \\ \dots \\ \sum[(fSn - fZ)*(fA - fZ)] \end{bmatrix}$$

(m+n,1) (m+n,1)

De este sistema de ecuaciones obtenemos los caudales corregidos:

$\alpha 1c, \alpha 2c, \ldots, \alpha mc, \beta 1c, \beta 2c, \ldots, \beta nc$

βZc se halla por la ecuación 3:

$$\beta Zc = 1 + \alpha 1c + \alpha 2c + \ldots + \alpha mc - (\beta 1c + \beta 2c + \ldots + \beta nc)$$

El siguiente paso es hallar los errores para cada malla

$\Delta M^{i}, \Delta M^{ii}, \Delta M^{iii}, \Delta M^{iv}, \ldots$ usando los caudales corregidos mediante la siguiente ecuación:

Ecuación 2. 8

$$\Delta M = fA + fE1 * \alpha 1c + fE2 * \alpha 2c + \ldots + fEm * \alpha mc \\ - (fS1 * \beta 1c + fS2 * \beta 2c + \ldots + fSn * \beta nc + fZ * \beta Zc)$$

Nótese que ΔM es igual a:

$$\Delta M = \min(\Delta Q)$$

Sean: $fAc, fE1c, fE2c, \ldots, fEmc, fS1c, fS2c, \ldots, fSnc, fZc$ los valores corregidos del análisis granulométrico; tendremos los errores.

$$\Delta fA = fA - fAc$$
$$\Delta fEi = fEi - fEic; i = \{1,2,\ldots,m\}$$
$$\Delta fSj = fSj - fSjc; j = \{1,2,\ldots,n\}$$
$$\Delta fZ = fZ - fZc$$

Si los reemplazamos en la Ecuación 2.8 obtenemos:

$$\Delta M = (fAc + \Delta fA) + (fE1c + \Delta fE1) * \alpha 1c + (fE2c + \Delta fE2) * \alpha 2c + \ldots + (fEmc + \Delta fEm) * \alpha mc \\ - ((fS1c + \Delta fS1) * \beta 1c + (fS2c + \Delta fS2) * \beta 2c + \ldots + (fSn + \Delta fSn) * \beta nc + (fZc + \Delta fZ) * \beta Zc)$$

Simplificando:

$$\Delta M = [fAc + fE1c * \alpha 1c + fE2c * \alpha 2c + ... + fEmc * \alpha mc$$
$$-(fS1c * \beta 1c + fS2c * \beta 2c + ... + fSn * \beta nc + fZc * \beta Zc)]$$
$$+[\Delta fA + \Delta fE1 * \alpha 1c + \Delta fE2 * \alpha 2c + ... + \Delta fEm * \alpha mc$$
$$-(\Delta fS1 * \beta 1c + \Delta fS2 * \beta 2c + ... + \Delta fSn * \beta nc + \Delta fZ * \beta Zc)]$$

Pero la ecuación 2.4 se puede expresar de la siguiente manera:

$$0 = fAc + fE1c * \alpha 1c + fE2c * \alpha 2c + ... + fEmc * \alpha mc$$
$$-(fS1c * \beta 1c + fS2c * \beta 2c + ... + fSn * \beta nc + fZc * \beta Zc)]$$

Por lo tanto el error que se comete por las mallas es:

Ecuación 2. 9

$$\Delta M = \Delta fA + \Delta fE1 * \alpha 1c + \Delta fE2 * \alpha 2c + ... + \Delta fEm * \alpha mc$$
$$-(\Delta fS1 * \beta 1c + \Delta fS2 * \beta 2c + ... + \Delta fSn * \beta nc + \Delta fZ * \beta Zc)$$

2.4 MÉTODO LAGRANGIANO

Se trata de optimizar funciones restringidas. Para nuestro caso es minimizar una función de error con restricciones de igualdad.

El procedimiento se desarrolla formalmente como sigue:

$$L(X,\lambda) = f(X) - \lambda * g(X)$$

$L(X,\lambda)$: Función Lagrangiana

λ: Multiplicadores de Lagrange

$f(X)$: Función a Optimizar

$g(X)$: Funciones Restrictivas

$$g(X) = 0$$

$$X = (x1, x2, ...)$$

$$g = (g1, g2, ...)'$$

Nota: $f(X)$ y $g(X)$ se suponen funciones dos veces diferenciables continuamente.
La idea de utilizar derivadas restringidas es encontrar una expresión de forma cerrada para las primeras derivadas parciales de $f(X)$ en todos los puntos que satisfacen las restricciones $g(X) = 0$ [7]

Las ecuaciones:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

Dan las condiciones necesarias para determinar los puntos estacionarios de $f(X)$ sujetos a $g(X) = 0$

Los puntos estacionarios se identifican como los puntos en los que estas derivadas parciales se hacen cero.

Volviendo a nuestro caso:

Determinamos una función la cual es la sumatoria de los cuadrados de los errores por mallas, la cual debe de ser mínima.

$$f(X) = S = \Delta fA^2 + \Delta fE1^2 + \Delta fE2^2 + \ldots + \Delta fEm^2 + \Delta fS1^2 + \Delta fS2^2 + \ldots + \Delta fSn^2 + \Delta fZ^2$$

Nota: Este error es para una malla

Se tiene solo una ecuación restrictiva (Ecuación 2.9)

$$g(X) = 0 = \Delta M - [\Delta fA + \Delta fE1 * \alpha 1c + \Delta fE2 * \alpha 2c + \ldots + \Delta fEm * \alpha mc$$
$$- (\Delta fS1 * \beta 1c + \Delta fS2 * \beta 2c + \ldots + \Delta fSn * \beta nc + \Delta fZ * \beta Zc)]$$

$$X = (\Delta fA, \Delta fE1, \Delta fE2, \ldots, \Delta fEm, \Delta fS1, \Delta fS2, \ldots, \Delta fSn, \Delta fZ)$$

La función Lagrangiana será:

[7] "Investigación de Operaciones" Hamdy A. Taha, 6ta Edición, pag 753

$$L(X,\lambda) = \Delta fA^2 + \Delta fE1^2 + \Delta fE2^2 + \ldots + \Delta fEm^2 + \Delta fS1^2 + \Delta fS2^2 + \ldots + \Delta fSn^2 + \Delta fZ^2$$
$$- \lambda * \{\Delta M - [\Delta fA + \Delta fE1 * \alpha 1c + \Delta fE2 * \alpha 2c + \ldots + \Delta fEm * \alpha mc$$
$$- (\Delta fS1 * \beta 1c + \Delta fS2 * \beta 2c + \ldots + \Delta fSn * \beta nc + \Delta fZ * \beta Zc)]\}$$

Para hallar los puntos estacionarios:

Ecuación 2. 10

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = \Delta M - [\Delta fA + \Delta fE1 * \alpha 1c + \Delta fE2 * \alpha 2c + \ldots + \Delta fEm * \alpha mc$$
$$- (\Delta fS1 * \beta 1c + \Delta fS2 * \beta 2c + \ldots + \Delta fSn * \beta nc + \Delta fZ * \beta Zc)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial X} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fA} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fA^2 + \lambda * \Delta fA + \theta_A\right)}{\partial \Delta fA} = 2 * \Delta fA + \lambda$$
$$\Delta fA = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fE1} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fE1^2 + \lambda * \Delta fE1 * \alpha 1c + \theta_{E1}\right)}{\partial \Delta fE1} = 2 * \Delta fE1 + \lambda * \alpha 1c$$
$$\Delta fE1 = -\frac{\lambda * \alpha 1c}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fE2} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fE2^2 + \lambda * \Delta fE2 * \alpha 2c + \theta_{E2}\right)}{\partial \Delta fE2} = 2 * \Delta fE2 + \lambda * \alpha 2c$$
$$\Delta fE2 = -\frac{\lambda * \alpha 2c}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fEm} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fEm^2 + \lambda * \Delta fEm * \alpha mc + \theta_{Em}\right)}{\partial \Delta fEm} = 2 * \Delta fEm + \lambda * \alpha mc$$
$$\Delta fEm = -\frac{\lambda * \alpha mc}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fS1} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fS1^2 - \lambda * \Delta fS1 * \beta 1c + \theta_{S1}\right)}{\partial \Delta fS1} = 2 * \Delta fS1 - \lambda * \beta 1c$$
$$\Delta fS1 = +\frac{\lambda * \beta 1c}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fS2} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fS2^2 - \lambda * \Delta fS2 * \beta 2c + \theta_{S2}\right)}{\partial \Delta fS2} = 2 * \Delta fS2 - \lambda * \beta 2c$$
$$\Delta fS2 = +\frac{\lambda * \beta 2c}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fSn} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fSn^2 - \lambda * \Delta fSn * \beta nc + \theta_{Sn}\right)}{\partial \Delta fSn} = 2 * \Delta fSn - \lambda * \beta nc$$

$$\Delta fSn = +\frac{\lambda * \beta nc}{2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta fZ} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta fZ^2 - \lambda * \Delta fZ * \beta Zc + \theta_Z\right)}{\partial \Delta fZ} = 2 * \Delta fZ - \lambda * \beta Zc$$

$$\Delta fZ = +\frac{\lambda * \beta Zc}{2}$$

Nota: θ: es un factor en la cual no está incluído la variable a derivar.

Sustituimos: $\Delta fA, \Delta fE1, \Delta fE2, ..., \Delta fEm, \Delta fS1, \Delta fS2, ..., \Delta fSn, \Delta fZ$ en la Ecuación 2.10

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = \Delta M - [-\frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda * \alpha 1c}{2} * \alpha 1c - \frac{\lambda * \alpha 2c}{2} * \alpha 2c - ... - \frac{\lambda * \alpha mc}{2} * \alpha mc$$
$$-(+\frac{\lambda * \beta 1c}{2} * \beta 1c + \frac{\lambda * \beta 2c}{2} * \beta 2c + ... + \frac{\lambda * \beta nc}{2} * \beta nc + \frac{\lambda * \beta Zc}{2} * \beta Zc)]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = \Delta M + \frac{\lambda}{2}[1 + \alpha 1c^2 + \alpha 2c^2 + ... + \alpha mc^2 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + ... + \beta nc^2 + \beta Zc^2]$$

Recuérdese que los caudales corregidos se hallaron por la Ecuación 2.7 (Ecuación Lineal).

ΔM se halló por la Ecuación 2.8

Por lo tanto, hallamos los Multiplicadores de Lagrange (λ) para cada malla mediante la siguiente ecuación:

Ecuación 2. 11

$$\lambda = -2 * \frac{\Delta M}{[1 + \alpha 1c^2 + \alpha 2c^2 + ... + \alpha mc^2 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + ... + \beta nc^2 + \beta Zc^2}$$

Se hallan las correcciones (para cada malla):

$$\Delta fA = -\frac{\lambda}{2} \qquad \Delta fS1 = +\frac{\lambda * \beta 1c}{2}$$

$$\Delta fE1 = -\frac{\lambda * \alpha 1c}{2} \qquad \Delta fS2 = +\frac{\lambda * \beta 2c}{2}$$

$$\Delta fE2 = -\frac{\lambda * \alpha 2c}{2} \qquad \Delta fSn = +\frac{\lambda * \beta nc}{2}$$

$$\Delta fEm = -\frac{\lambda * \alpha mc}{2} \qquad \Delta fZ = +\frac{\lambda * \beta Zc}{2}$$

Se procede a corregir los Análisis Granulométricos.

$$fAc = fA - \Delta fA$$
$$fEic = fEi - \Delta fEi; i = \{1,2,...,m\}$$
$$fSjc = fSj - \Delta fSj; j = \{1,2,...,n\}$$
$$fZc = fZ - \Delta fZ$$

Se halla el error de la corrección.

$$S = \sum \Delta fA^2 + \sum \Delta fE1^2 + \sum \Delta fE2^2 + ... + \sum \Delta fEm^2 + \sum \Delta fS1^2 + \sum \Delta fS2^2 + ... + \sum \Delta fSn^2 + \sum \Delta fZ^2$$

2.5 RESUMEN DEL MÉTODO

1. Resolver la ecuación lineal $A * X = B$ (Ecuación 2.7) para obtener los caudales corregidos:

   α1c, α2c,..., αmc, β1c, β2c,...,βnc

   βZc se halla por la siguiente ecuación:

$$\beta Zc = 1 + \alpha 1c + \alpha 2c + ... + \alpha mc - (\beta 1c + \beta 2c + ... + \beta nc)$$

   Recuérdese:

   α: Caudales de Entrada al sistema

   β: Caudales de Salida del Sistema

$$\frac{E1c}{Ac} = \alpha 1c; \frac{E2c}{Ac} = \alpha 2c;...; \frac{Emc}{Ac} = \alpha mc$$

$$\frac{S1c}{Ac} = \beta 1c; \frac{S2c}{Ac} = \beta 2c; \ldots; \frac{Snc}{Ac} = \beta nc; \frac{Zc}{Ac} = \beta Zc$$

Para el caso más simple encontrado en la industria, Alimentación, Descarga y Rebose (Ej: Hidrociclón), la ecuación 2.7 queda reducida a la siguiente expresión:

$$\sum \left[(fS1 - fZ)^2 \right] * \beta 1c = \sum \left[(fS1 - fZ) * (fA - fZ) \right]$$

Donde:

fA: Análisis Granulométricos del Alimento.

fS1: Análisis Granulométricos de la Descarga.

fZ: Análisis Granulométrico del Rebose.

β1c: S1/A; Relación del flujo de la Descarga (Producto Grueso) y el flujo del Alimento

βZc: Z/A; Relación del flujo del Rebose (Producto Fino) y el flujo del Alimento.

2. Hallar los errores para cada malla (Ecuación 2.8):

$$\Delta M = fA + fE1 * \alpha 1c + fE2 * \alpha 2c + \ldots + fEm * \alpha mc$$
$$- (fS1 * \beta 1c + fS2 * \beta 2c + \ldots + fSn * \beta nc + fZ * \beta Zc)$$

Para un Hidrociclón: $\Delta M = fA - (fS1 * \beta 1c + fZ * \beta Zc)$

3. Hallar los Multiplicadores de Lagrange para cada malla (Ecuación 2.11)

$$\lambda = -2 * \frac{\Delta M}{\left[1 + \alpha 1c^2 + \alpha 2c^2 + \ldots + \alpha mc^2 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + \ldots + \beta nc^2 + \beta Zc^2\right]}$$

Para un Hidrociclón: $\lambda = -2 * \frac{\Delta M}{\left[1 + \beta 1c^2 + \beta Zc^2\right]}$

4. Hallar las correcciones:

$$\Delta fA = -\frac{\lambda}{2} \qquad \Delta fS1 = +\frac{\lambda * \beta 1c}{2}$$

$$\Delta fE1 = -\frac{\lambda * \alpha 1c}{2} \qquad \Delta fS2 = +\frac{\lambda * \beta 2c}{2}$$

$$\Delta fE2 = -\frac{\lambda * \alpha 2c}{2} \qquad \Delta fSn = +\frac{\lambda * \beta nc}{2}$$

$$\Delta fEm = -\frac{\lambda * \alpha mc}{2} \qquad \Delta fZ = +\frac{\lambda * \beta Zc}{2}$$

5. Corregir los Análisis Granulométricos

$$fAc = fA - \Delta fA$$
$$fEic = fEi - \Delta fEi; i = \{1,2,\ldots,m\}$$
$$fSjc = fSj - \Delta fSj; j = \{1,2,\ldots,n\}$$
$$fZc = fZ - \Delta fZ$$

6. Hallar el Error de la corrección (Opcional).

$$S = \sum \Delta fA^2 + \sum \Delta fE1^2 + \sum \Delta fE2^2 + \ldots + \sum \Delta fEm^2 + \sum \Delta fS1^2 + \sum \Delta fS2^2 + \ldots + \sum \Delta fSn^2 + \sum \Delta fZ^2$$

2.6 PROPIEDADES PARA LA CORRÉCCION DE ANÁLISIS GRANULOMÉTRICO POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EN EL SISTEMA EMPLEADO

Se tiene:

Propiedad #01:

La suma de las Fracciones en Peso del análisis granulométrico es 1 (100%)

$$1 = f^{i} + f^{ii} + f^{iii} + f^{iv} + \ldots + f^{k-1} + f^{k}$$

$$\boxed{\sum f = 1}$$

f: Fracción de un análisis granulométrico (alimento y/o producto) k: Intervalo de tamaños más finos.

Propiedad #02:

La suma de los Errores ΔM es cero:

De la ecuación 2.8 (Para una malla):

$$\Delta M = fA + fE1 * \alpha 1c + fE2 * \alpha 2c + \ldots + fEm * \alpha mc$$
$$-(fS1 * \beta 1c + fS2 * \beta 2c + \ldots + fSn * \beta nc + fZ * \beta Zc)$$

Hacemos la sumatoria (Errores de todas las mallas):

$$\sum \Delta M = \sum fA + \alpha 1c * \sum fE1 + \alpha 2c * \sum fE2 + \ldots + \alpha mc * \sum fEm$$
$$-\left(\beta 1c * \sum fS1 + \beta 2c * \sum fS2 + \ldots + \beta nc * \sum fSn + \beta Zc * \sum fZ\right)$$

Se tiene de la propiedad #01: $\sum f = 1$

$$\sum \Delta M = 1 + \alpha 1c * 1 + \alpha 2c * 1 + \ldots + \alpha mc * 1$$
$$-\left(\beta 1c * 1 + \beta 2c * 1 + \ldots + \beta nc * 1 + \beta Z * 1\right)$$

Pero la Ecuación 2.3 es: $1 + \alpha 1c + \alpha 2c + \ldots + \alpha mc = \beta 1c + \beta 2c + \ldots + \beta nc + \beta Zc$

Se obtiene:

$$\boxed{\sum \Delta M = 0}$$

Propiedad #03:

La suma de los Multiplicadores de Lagrange es cero:

Se tiene la ecuación 2.11

$$\lambda = -2 * \frac{\Delta M}{\left[1 + \alpha 1c^2 + \alpha 2c^2 + \ldots + \alpha mc^2 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + \ldots + \beta nc^2 + \beta Zc^2\right]}$$

Donde el denominador es constante:

Por lo tanto:

$$\sum \lambda = -2 * \frac{\sum \Delta M}{\left[1 + \alpha 1c^2 + \alpha 2c^2 + ... + \alpha mc^2 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + ... + \beta nc^2 + \beta Zc^2\right]}$$

De la propiedad #02: $\sum \Delta M = 0$

Se obtiene:

$$\boxed{\sum \lambda = 0}$$

Propiedad #04:

La sumatoria de las correcciones es cero

Se tienen las correcciones:

$$\Delta fA = -\frac{\lambda}{2} \qquad \Delta fS1 = +\frac{\lambda * \beta 1c}{2}$$

$$\Delta fE1 = -\frac{\lambda * \alpha 1c}{2} \qquad \Delta fS2 = +\frac{\lambda * \beta 2c}{2}$$

$$\Delta fE2 = -\frac{\lambda * \alpha 2c}{2} \qquad \Delta fSn = +\frac{\lambda * \beta nc}{2}$$

$$... \qquad ...$$

$$\Delta fEm = -\frac{\lambda * \alpha mc}{2} \qquad \Delta fZ = +\frac{\lambda * \beta Zc}{2}$$

Para la sumatoria de las correcciones:

$$\sum \Delta fA = -\frac{\sum \lambda}{2} \qquad \sum \Delta fS1 = +\frac{\beta 1c * \sum \lambda}{2}$$

$$\sum \Delta fE1 = -\frac{\alpha 1c * \sum \lambda}{2} \qquad \sum \Delta fS2 = +\frac{\beta 2c * \sum \lambda}{2}$$

$$\sum \Delta fE2 = -\frac{\alpha 2c * \sum \lambda}{2} \qquad \sum \Delta fSn = +\frac{\beta nc * \sum \lambda}{2}$$

$$... \qquad ...$$

$$\sum \Delta fEm = -\frac{\alpha mc * \sum \lambda}{2} \qquad \sum \Delta fZ = +\frac{\beta Zc * \sum \lambda}{2}$$

De la Propiedad #03: $\sum \lambda = 0$

Se tiene:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum \Delta fA = 0\\ \sum \Delta fE1 = 0\\ \sum \Delta fE2 = 0\\ \ldots\\ \sum \Delta fEm = 0\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l}\sum \Delta fS1 = 0\\ \sum \Delta fS2 = 0\\ \sum \Delta fSn = 0\\ \ldots\\ \sum \Delta fZ = 0\end{array}}$$

Propiedad #05:

La suma de las Fracciones en Peso de los análisis granulométrico

Corregidos es 1 (100%)

De las correcciones

$$\begin{array}{l} fAc = fA - \Delta fA\\ fEic = fEi - \Delta fEi; i = \{1,2,\ldots,m\}\\ fSjc = fSj - \Delta fSj; j = \{1,2,\ldots,n\}\\ fZc = fZ - \Delta fZ\end{array}$$

Hacemos la sumatoria:

$$\begin{array}{l} \sum fAc = \sum fA - \sum \Delta fA\\ \sum fEic = \sum fEi - \sum \Delta fEi; i = \{1,2,\ldots,m\}\\ \sum fSjc = \sum fSj - \sum \Delta fSj; j = \{1,2,\ldots,n\}\\ \sum fZc = \sum fZ - \sum \Delta fZ\end{array}$$

De las propiedades 1 y 4:

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum fAc = 1 - 0 = 1\\ \sum fEic = 1 - 0 = 1\\ \sum fSjc = 1 - 0 = 1\\ \sum fZc = 1 - 0 = 1\end{array}}$$

CAPÍTULO 3
CORRECCIÓN DE ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS DEL CLASIFICADOR STOKES

3.1 INTRODUCCIÓN

El hidroclasificador Stokes es un clasificador de asentamiento obstaculizado que se emplea para clasificar el material en fracciones de diferentes tamaños antes de alimentar a las mesas concentradoras.

El hidroclasificador tiene una celda de preparación, 06 cámaras o celdas de asentamiento las cuales aumentan gradualmente de área y un rebose.

La clasificación se realiza introduciendo las partículas de mineral contenido en una pulpa, contra un flujo de agua ascendente que proviene de un tanque de agua de cabeza constante.

Con el propósito de mantener la eficiencia en la separación es importante que la corriente de agua ascendente tenga flujos y presión constantes. Cada cámara está provista de válvulas y flujómetros electrónicos para asegurar este requerimiento.

La corriente de agua ascendente se distribuye uniformemente sobre el total del área de la cámara de asentamiento mediante una placa perforada (Teeter Plate).

El trabajo de la máquina se monitorea y controla continuamente mediante un sistema de control de densidad electrónica y automática.

La alimentación idealmente con 50% de sólidos por peso, se alimenta por gravedad a la celda de preparación del hidroclasificador en la cual se adiciona agua de acuerdo al requerimiento del material. Las partículas pasan a la primera celda de asentamiento en la cual se ponen en contacto con la corriente ascendente de agua.

Las partículas más gruesas y pesadas se asientan en la celda y se dirigen al punto de descarga (Spigot); las partículas menos gruesas y más livianas permanecen en suspensión y originan una columna de clasificación creada por las partículas gruesas y pesadas que evitan que las partículas finas y livianas penetren en esta cama o columna.

El flujo necesario de agua ascendente es dependiente de dos factores:

1. Área de asentamiento de la celda
2. El tamaño de la partícula que se desea obtener (d50)

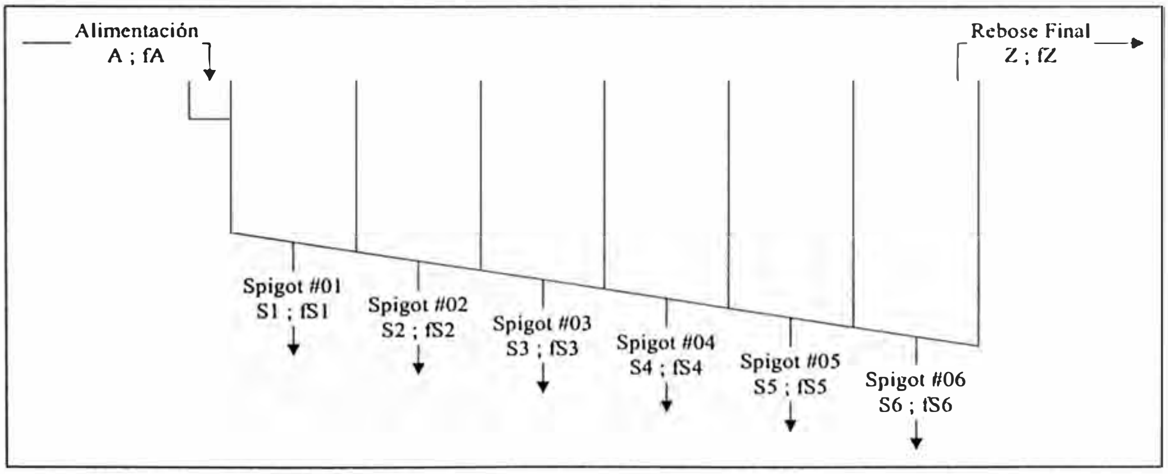
A medida que el material se transporta a lo largo de la máquina y con las partículas gruesas/pesadas que se van retirando progresivamente por los spigots, la distribución de los tamaños de alimentación a cada cámara subsiguiente es más fina.

En razón de que la velocidad de asentamiento obstaculizado de las partículas disminuye a medida que estas son más finas, es necesario aumentar progresivamente el área de asentamiento.

El sistema de control monitorea la cabeza hidrostática en cada cámara de asentamiento y compara la presión actual de cada celda con una presión referencial (Set Point); si la presión en la celda es mayor al punto referencial se descargan las partículas gruesas y pesadas hasta que la presión en la cámara iguale a la presión de referencia.

3.2 ESQUEMA DEL CLASIFICADOR STOKES

Gráfico 3. 1 Esquema de la Alimentación y Descargas del Clasificador Stokes



En el clasificador, el rebose de la primera cámara es el alimento de la segunda cámara y así sucesivamente hasta tener un rebose final que es el material más fino.

3.3 MÉTODO DE LA CORRECCIÓN

Tabla 3. 1 Representación simbólica de los Análisis Granulométricos a Corregir del Clasificador Stokes.

	ENTRADA	SALIDAS						
	Alimentación	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
Flujo (Ej: t/h)	A (Principal)	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Z (Principal)
Fracciones en tamaño (mallas)	fA^{i}	$fS1^{i}$	$fS2^{i}$	$fS3^{i}$	$fS4^{i}$	$fS5^{i}$	$fS6^{i}$	fZ^{i}
	fA^{ii}	$fS1^{ii}$	$fS2^{ii}$	$fS3^{ii}$	$fS4^{ii}$	$fS5^{ii}$	$fS6^{ii}$	fZ^{ii}
	fA^{iii}	$fS1^{iii}$	$fS2^{iii}$	$fS3^{iii}$	$fS4^{iii}$	$fS5^{iii}$	$fS6^{iii}$	fZ^{iii}
	...	...	...	...	...	...	...	...
	fA^{k-1}	$fS1^{k-1}$	$fS2^{k-1}$	$fS3^{k-1}$	$fS4^{k-1}$	$fS5^{k-1}$	$fS6^{k-1}$	fZ^{k-1}
	fA^{k}	$fS1^{k}$	$fS2^{k}$	$fS3^{k}$	$fS4^{k}$	$fS5^{k}$	$fS6^{k}$	fZ^{k}

Según el método presentado en el Capítulo 1 tenemos una entrada y siete salidas, por lo tanto: m=0 & n=6

Es decir, sólo existe la entrada principal, por lo tanto los términos α estarán ausentes en esta corrección.

Existe una salida principal que es el Rebose Final del clasificador y seis salidas (descargas por los Spigots). Por lo tanto se tienen los factores (Relaciones de los Caudales): $\beta 1, \beta 2, \beta 3, \beta 4, \beta 5, \beta 6, \beta Z$.

3.4 ANALISIS GRANULOMÉTRICO.

Tabla 3. 2 Analisis Granulométricos muestreados - Porcentajes en Peso.[8]

		Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
Intervalo de Tamaños	**Tamaño Promedio (μm)**	**fA**	**fS1**	**fS2**	**fS3**	**fS4**	**FS5**	**fS6**	**fZ**
1	1091	2.43	13.81	2.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	714	6.28	31.62	16.80	0.92	0.00	0.00	0.00	0.00
3	517	11.12	30.52	42.22	10.13	0.00	0.00	0.00	0.00
4	365	11.87	13.60	28.48	31.27	3.14	0.00	0.00	0.00
5	252	14.84	6.25	8.12	44.78	25.04	3.86	0.00	0.00
6	178	10.29	1.67	0.96	9.91	29.72	17.62	1.14	0.00
7	126	11.30	0.99	0.57	1.86	21.47	29.74	12.92	0.36
8	89	10.37	0.50	0.29	0.63	9.48	19.92	28.90	3.68
9	63	9.30	0.36	0.10	0.40	5.45	14.20	28.54	25.80
10	49	1.96	0.08	0.06	0.04	1.11	3.05	6.38	13.08
11	41	2.37	0.09	0.09	0.02	1.16	2.39	4.44	8.92
12	19	7.87	0.51	0.09	0.04	3.43	9.22	17.68	48.16

[8] Fecha de muestreo: 04 de Febrero de 1998 – Minsur S.A.

Se tiene la siguiente ecuación lineal (Obtenida de la ecuación 2.7):

$$A * X = B$$

$$A = \begin{bmatrix} \sum\left[(fS1-fZ)^2\right] & \sum[(fS2-fZ)*(fS1-fZ)] & \sum[(fS3-fZ)*(fS1-fZ)] & \sum[(fS4-fZ)*(fS1-fZ)] & \sum[(fS5-fZ)*(fS1-fZ)] & \sum[(fS6-fZ)*(fS1-fZ)] \\ \sum[(fS1-fZ)*(fS2-fZ)] & \sum\left[(fS2-fZ)^2\right] & \sum[(fS3-fZ)*(fS2-fZ)] & \sum[(fS4-fZ)*(fS2-fZ)] & \sum[(fS5-fZ)*(fS2-fZ)] & \sum[(fS6-fZ)*(fS2-fZ)] \\ \sum[(fS1-fZ)*(fS3-fZ)] & \sum[(fS2-fZ)*(fS3-fZ)] & \sum\left[(fS3-fZ)^2\right] & \sum[(fS4-fZ)*(fS3-fZ)] & \sum[(fS5-fZ)*(fS3-fZ)] & \sum[(fS6-fZ)*(fS3-fZ)] \\ \sum[(fS1-fZ)*(fS4-fZ)] & \sum[(fS2-fZ)*(fS4-fZ)] & \sum[(fS3-fZ)*(fS4-fZ)] & \sum\left[(fS4-fZ)^2\right] & \sum[(fS5-fZ)*(fS4-fZ)] & \sum[(fS6-fZ)*(fS4-fZ)] \\ \sum[(fS1-fZ)*(fS5-fZ)] & \sum[(fS2-fZ)*(fS5-fZ)] & \sum[(fS3-fZ)*(fS5-fZ)] & \sum[(fS4-fZ)*(fS5-fZ)] & \sum\left[(fS5-fZ)^2\right] & \sum[(fS6-fZ)*(fS5-fZ)] \\ \sum[(fS1-fZ)*(fS6-fZ)] & \sum[(fS2-fZ)*(fS6-fZ)] & \sum[(fS3-fZ)*(fS6-fZ)] & \sum[(fS4-fZ)*(fS6-fZ)] & \sum[(fS5-fZ)*(fS6-fZ)] & \sum\left[(fS6-fZ)^2\right] \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \beta 1c \\ \beta 2c \\ \beta 3c \\ \beta 4c \\ \beta 5c \\ \beta 6c \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \sum[(fS1-fZ)*(fA-fZ)] \\ \sum[(fS2-fZ)*(fA-fZ)] \\ \sum[(fS3-fZ)*(fA-fZ)] \\ \sum[(fS4-fZ)*(fA-fZ)] \\ \sum[(fS5-fZ)*(fA-fZ)] \\ \sum[(fS6-fZ)*(fA-fZ)] \end{bmatrix}$$

3.5 CORRECCIÓN DE LOS ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS

3.5.1 Resolver la ecuación lineal A*X=B para obtener los caudales corregidos:

$\beta1c$, $\beta2c$, $\beta3c$ $\beta4c$, $\beta5c$,$\beta6c$

Hallamos cada elemento de la matriz A y B:

Tabla 3. 3 Porcentajes en Peso de las muestras menos el Porcentaje en Peso de la Salida Principal (Rebose del Clasificador Stokes).

f-fZ							
I. T.[9]	fA-fZ	fS1-fZc	fS2-fZ	fS3-fZ	fS4-fZ	fS5-fZ	fS6-fZ
1	2.43	13.81	2.22	0	0	0	0
2	6.28	31.62	16.80	0.92	0	0	0
3	11.12	30.52	42.22	10.13	0	0	0
4	11.87	13.60	28.48	31.27	3.14	0	0
5	14.84	6.25	8.12	44.78	25.04	3.86	0
6	10.29	1.67	0.96	9.91	29.72	17.62	1.14
7	10.94	0.63	0.21	1.50	21.11	29.38	12.56
8	6.69	-3.18	-3.39	-3.05	5.80	16.24	25.22
9	-16.50	-25.44	-25.70	-25.40	-20.35	-11.60	2.74
10	-11.12	-13.00	-13.02	-13.04	-11.97	-10.03	-6.70
11	-6.55	-8.83	-8.83	-8.90	-7.76	-6.53	-4.48
12	-40.29	-47.65	-48.07	-48.12	-44.73	-38.94	-30.48

Para la Matriz B

Sea "b_i" cada elemento de la matriz Columna B

[9] I. T. : Siglas de "Intervalo de Tamaños"

Tabla 3. 4 Cálculo de los valores de la Matriz B

	(fA-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS1-fZ)* (fA-fZ)	(fS2-fZ)* (fA-fZ)	(fS3-fZ)* (fA-fZ)	(fS4-fZ)* (fA-fZ)	(fS5-fZ)* (fA-fZ)	(fS6-fZ)* (fA-fZ)
1	33.5583	5.3946	0	0	0	0
2	198.5736	105.504	5.7776	0	0	0
3	339.3824	469.4864	112.6456	0	0	0
4	161.432	338.0576	371.1749	37.2718	0	0
5	92.75	120.5008	664.5352	371.5936	57.2824	0
6	17.1843	9.8784	101.9739	305.8188	181.3098	11.7306
7	6.8922	2.2974	16.41	230.9434	321.4172	137.4064
8	-21.2742	-22.6791	-20.4045	38.802	108.6456	168.7218
9	419.76	424.05	419.1	335.775	191.4	-45.21
10	144.56	144.7824	145.0048	133.1064	111.5336	74.504
11	57.8365	57.8365	58.295	50.828	42.7715	29.344
12	1919.8185	1936.7403	1938.7548	1802.1717	1568.8926	1228.0392
Σ	**3370.4736**	**3591.8493**	**3813.2673**	**3306.3107**	**2583.2527**	**1604.536**
b_i	**b_1**	**b_2**	**b_3**	**b_4**	**b_5**	**b_6**

Para la Matriz cuadrada A

Sea "$a_{i,j}$" cada elemento de la matriz A donde "i" es el subíndice que representa el número de fila y "j" el subíndice que representa el número de columna.

Tabla 3. 5 Cálculo de la Primera fila de la matriz A

	(f1-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS1-fZ)^2	(fS1-fZ)* (fS2-fZ)	(fS1-fZ)* (fS3-fZ)	(fS1-fZ)* (fS4-fZ)	(fS1-fZ)* (fS5-fZ)	(fS1-fZ)* (fS6-fZ)
1	190.7161	30.6582	0	0	0	0
2	999.8244	531.216	29.0904	0	0	0
3	931.4704	1288.5544	309.1676	0	0	0
4	184.96	387.328	425.272	42.704	0	0
5	39.0625	50.75	279.875	156.5	24.125	0
6	2.7889	1.6032	16.5497	49.6324	29.4254	1.9038
7	0.3969	0.1323	0.945	13.2993	18.5094	7.9128
8	10.1124	10.7802	9.699	-18.444	-51.6432	-80.1996
9	647.1936	653.808	646.176	517.704	295.104	-69.7056
10	169	169.26	169.52	155.61	130.39	87.1
11	77.9689	77.9689	78.587	68.5208	57.6599	39.5584
12	2270.5225	2290.5355	2292.918	2131.3845	1855.491	1452.372
Σ	**5524.0166**	**5492.5947**	**4257.7997**	**3116.911**	**2359.0615**	**1438.9418**
$a_{1,j}$	**$a_{1,1}$**	**$a_{1,2}$**	**$a_{1,3}$**	**$a_{1,4}$**	**$a_{1,5}$**	**$a_{1,6}$**

Tabla 3. 6 Cálculo de la Segunda fila de la matriz A

	(f2-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS2-fZ)* (fS1-fZ)	(fS2-fZ)^2	(fS2-fZ)* (fS3-fZ)	(fS2-fZ)* (fS4-fZ)	(fS2-fZ)* (fS5-fZ)	(fS2-fZ)* (fS6-fZ)
1	30.6582	4.9284	0	0	0	0
2	531.216	282.24	15.456	0	0	0
3	1288.5544	1782.5284	427.6886	0	0	0
4	387.328	811.1104	890.5696	89.4272	0	0
5	50.75	65.9344	363.6136	203.3248	31.3432	0
6	1.6032	0.9216	9.5136	28.5312	16.9152	1.0944
7	0.1323	0.0441	0.315	4.4331	6.1698	2.6376
8	10.7802	11.4921	10.3395	-19.662	-55.0536	-85.4958
9	653.808	660.49	652.78	522.995	298.12	-70.418
10	169.26	169.5204	169.7808	155.8494	130.5906	87.234
11	77.9689	77.9689	78.587	68.5208	57.6599	39.5584
12	2290.5355	2310.7249	2313.1284	2150.1711	1871.8458	1465.1736
Σ	**5492.5947**	**6177.9036**	**4931.7721**	**3203.5906**	**2357.5909**	**1439.7842**
$a_{2,j}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	$a_{2,4}$	$a_{2,5}$	$a_{2,6}$

Tabla 3. 7 Cálculo de la Tercera fila de la matriz A

	(f3-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS3-fZ)* (fS1-fZ)	(fS3-fZ)* (fS2-fZ)	(fS3-fZ)^2	(fS3-fZ)* (fS4-fZ)	(fS3-fZ)* (fS5-fZ)	(fS3-fZ)* (fS6-fZ)
1	0	0	0	0	0	0
2	29.0904	15.456	0.8464	0	0	0
3	309.1676	427.6886	102.6169	0	0	0
4	425.272	890.5696	977.8129	98.1878	0	0
5	279.875	363.6136	2005.2484	1121.2912	172.8508	0
6	16.5497	9.5136	98.2081	294.5252	174.6142	11.2974
7	0.945	0.315	2.25	31.665	44.07	18.84
8	9.699	10.3395	9.3025	-17.69	-49.532	-76.921
9	646.176	652.78	645.16	516.89	294.64	-69.596
10	169.52	169.7808	170.0416	156.0888	130.7912	87.368
11	78.587	78.587	79.21	69.064	58.117	39.872
12	2292.918	2313.1284	2315.5344	2152.4076	1873.7928	1466.6976
Σ	**4257.7997**	**4931.7721**	**6406.2312**	**4422.4296**	**2699.344**	**1477.558**
$a_{3,j}$	$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	$a_{3,4}$	$a_{3,5}$	$a_{3,6}$

Tabla 3. 8 Cálculo de la Cuarta fila de la matriz A

	(f4-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS4-fZ)*(fS1-fZ)	(fS4-fZ)*(fS2-fZ)	(fS4-fZ)*(fS3-fZ)	(fS4-fZ)^2	(fS4-fZ)*(fS5-fZ)	(fS4-fZ)*(fS6-fZ)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	42.704	89.4272	98.1878	9.8596	0	0
5	156.5	203.3248	1121.2912	627.0016	96.6544	0
6	49.6324	28.5312	294.5252	883.2784	523.6664	33.8808
7	13.2993	4.4331	31.665	445.6321	620.2118	265.1416
8	-18.444	-19.662	-17.69	33.64	94.192	146.276
9	517.704	522.995	516.89	414.1225	236.06	-55.759
10	155.61	155.8494	156.0888	143.2809	120.0591	80.199
11	68.5208	68.5208	69.064	60.2176	50.6728	34.7648
12	2131.3845	2150.1711	2152.4076	2000.7729	1741.7862	1363.3704
Σ	**3116.911**	**3203.5906**	**4422.4296**	**4617.8056**	**3483.3027**	**1867.8736**
$a_{4,j}$	$a_{4,1}$	$a_{4,2}$	$a_{4,3}$	$a_{4,4}$	$a_{4,5}$	$a_{4,6}$

Tabla 3. 9 Cálculo de la Quinta fila de la matriz A

	(f5-fZ)*(f-fZ)					
I. T.	(fS5-fZ)*(fS1-fZ)	(fS5-fZ)*(fS2-fZ)	(fS5-fZ)*(fS3-fZ)	(fS5-fZ)*(fS4-fZ)	(fS5-fZ)^2	(fS5-fZ)*(fS6-fZ)
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	24.125	31.3432	172.8508	96.6544	14.8996	0
6	29.4254	16.9152	174.6142	523.6664	310.4644	20.0868
7	18.5094	6.1698	44.07	620.2118	863.1844	369.0128
8	-51.6432	-55.0536	-49.532	94.192	263.7376	409.5728
9	295.104	298.12	294.64	236.06	134.56	-31.784
10	130.39	130.5906	130.7912	120.0591	100.6009	67.201
11	57.6599	57.6599	58.117	50.6728	42.6409	29.2544
12	1855.491	1871.8458	1873.7928	1741.7862	1516.3236	1186.8912
Σ	**2359.0615**	**2357.5909**	**2699.344**	**3483.3027**	**3246.4114**	**2050.235**
$a_{5,j}$	$a_{5,1}$	$a_{5,2}$	$a_{5,3}$	$a_{5,4}$	$a_{5,5}$	$a_{5,6}$

Tabla 3. 10 Cálculo de la Sexta fila de la matriz A

I. T.	(fS6-fZ)*(fS1-fZ)	(fS6-fZ)*(fS2-fZ)	(fS6-fZ)*(fS3-fZ)	(fS6-fZ)*(fS4-fZ)	(fS6-fZ)*(fS5-fZ)	(fS6-fZ)^2
	(f6-fZ)*(f-fZ)					
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0
6	1.9038	1.0944	11.2974	33.8808	20.0868	1.2996
7	7.9128	2.6376	18.84	265.1416	369.0128	157.7536
8	-80.1996	-85.4958	-76.921	146.276	409.5728	636.0484
9	-69.7056	-70.418	-69.596	-55.759	-31.784	7.5076
10	87.1	87.234	87.368	80.199	67.201	44.89
11	39.5584	39.5584	39.872	34.7648	29.2544	20.0704
12	1452.372	1465.1736	1466.6976	1363.3704	1186.8912	929.0304
Σ	**1438.9418**	**1439.7842**	**1477.558**	**1867.8736**	**2050.235**	**1796.6**
$a_{6,j}$	$a_{6,1}$	$a_{6,2}$	$a_{6,3}$	$a_{6,4}$	$a_{6,5}$	$a_{6,6}$

La ecuación lineal será:

Tabla 3. 11 Matriz A

Matriz A (6,6)	fS1-fZ	fS2-fZ	fS3-fZ	fS4-fZ	fS5-fZ	fS6-fZ
fS1-fZ	5524.0166	5492.5947	4257.7997	3116.911	2359.0615	1438.9418
fS2-fZ	5492.5947	6177.9036	4931.7721	3203.5906	2357.5909	1439.7842
fS3-fZ	4257.7997	4931.7721	6406.2312	4422.4296	2699.344	1477.558
fS4-fZ	3116.911	3203.5906	4422.4296	4617.8056	3483.3027	1867.8736
fS5-fZ	2359.0615	2357.5909	2699.344	3483.3027	3246.4114	2050.235
fS6-fZ	1438.9418	1439.7842	1477.558	1867.8736	2050.235	1796.6

Tabla 3. 12 Inversa de A

Matriz Inversa de A: INV(A) (6,6)	fS1-fZ	fS2-fZ	fS3-fZ	fS4-fZ	fS5-fZ	fS6-fZ
fS1-fZ	0.00199447	-0.00206921	0.00091912	-0.00157141	0.00136911	-0.00062373
fS2-fZ	-0.00206921	0.00274994	-0.00176868	0.002742	-0.00264225	0.00107258
fS3-fZ	0.00091912	-0.00176868	0.00236257	-0.00397046	0.00394609	-0.00163698
fS4-fZ	-0.00157141	0.002742	-0.00397046	0.00843215	-0.00905203	0.00388983
fS5-fZ	0.00136911	-0.00264225	0.00394609	-0.00905203	0.01118757	-0.00558025
fS6-fZ	-0.00062373	0.00107258	-0.00163698	0.00388983	-0.00558025	0.0038668

Tabla 3. 13 Matriz B

B (6,1)	
	fA-fZ
fS1-fZ	3370.4736
fS2-fZ	3591.8493
fS3-fZ	3813.2673
fS4-fZ	3306.3107
fS5-fZ	2583.2527
fS6-fZ	1604.5360

La matriz X será:

Tabla 3. 14 Matriz X obtenida de AX=B

X (6,1)	
(Salidas)	
β1	0.13531075
β2	0.12001136
β3	0.19379033
β4	0.14903508
β5	0.18927903
β6	0.15822086

Nota: βZc se halla por la siguiente ecuación:
$$\beta Zc = 1 - (\beta 1c + \beta 2c + \beta 3c + \beta 4c + \beta 5c + \beta 6c)$$

βZ	0.05435258

3.5.2 Hallar los errores para cada malla:

$$\Delta M = fA - (fS1 * \beta 1c + fS2 * \beta 2c + fS3 * \beta 3c + fS4 * \beta 4c + fS5 * \beta 5c + fS6 * \beta 6c + fZ * \beta Zc)$$

Tabla 3. 15 Cálculo de los errores

		Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	
I. T.	Malla	**fA**	**fS1**	**fS2**	**fS3**	**fS4**	**fS5**	**fS6**	**fZ**	**ΔM**
1	-m14 +m20	2.43	13.81	2.22	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	**0.29493327**
2	-m20 +m30	6.28	31.62	16.80	0.92	0.00	0.00	0.00	0.00	**-0.19300404**
3	-m30 +m40	11.12	30.52	42.22	10.13	0.00	0.00	0.00	0.00	**-0.03966**
4	-m40 +m50	11.87	13.60	28.48	31.27	3.14	0.00	0.00	0.00	**0.0840564**
5	-m50 +m70	14.84	6.25	8.12	44.78	25.04	3.86	0.00	0.00	**-0.1205709**
6	-m70 +m100	10.29	1.67	0.96	9.91	29.72	17.62	1.14	0.00	**0.08356702**
7	-m100 +m140	11.30	0.99	0.57	1.86	21.47	29.74	12.92	0.36	**-0.15553616**
8	-m140 +m200	10.37	0.50	0.29	0.63	9.48	19.92	28.90	3.68	**0.1895622**
9	-m200 +m270	9.30	0.36	0.10	0.40	5.45	14.20	28.54	25.80	**-0.25615252**
10	-m270 +m325	1.96	0.08	0.06	0.04	1.11	3.05	6.38	13.08	**-0.528888**
11	-m325 +m400	2.37	0.09	0.09	0.02	1.16	2.39	4.44	8.92	**0.53056198**
12	-m400	7.87	0.51	0.09	0.04	3.43	9.22	17.68	48.16	**0.11113074**

3.5.3 Hallar los Multiplicadores de Lagrange para cada malla.

$$\lambda = -2 * \frac{\Delta M}{\left[1 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + \beta 3c^2 + \beta 4c^2 + \beta 5c^2 + \beta 6c^2 + \beta Zc^2\right]}$$

Donde:

$$1 + \beta 1c^2 + \beta 2c^2 + \beta 3c^2 + \beta 4c^2 + \beta 5c^2 + \beta 6c^2 + \beta Zc^2 = 1.156292469$$

Tabla 3. 16 Cálculo de los Multiplicadores de Lagrange

I. T.	**Malla**	**ΔM**	**λ MULTIPLICADORES DE LAGRANGE**
1	-m14 +m20	0.29493327	**-0.510136105**
2	-m20 +m30	-0.19300404	**0.333832557**
3	-m30 +m40	-0.03966	**0.068598553**
4	-m40 +m50	0.0840564	**-0.145389517**
5	-m50 +m70	-0.1205709	**0.208547414**
6	-m70 +m100	0.08356702	**-0.144543047**
7	-m100 +m140	-0.15553616	**0.269025641**
8	-m140 +m200	0.1895622	**-0.327879337**
9	-m200 +m270	-0.25615252	**0.443058357**
10	-m270 +m325	-0.528888	**0.914799689**
11	-m325 +m400	0.53056198	**-0.917695117**
12	-m400	0.11113074	**-0.192219088**

3.5.4 Hallar las correcciones:

$$\Delta fA = -\frac{\lambda}{2}$$

$$\Delta fS1 = +\frac{\lambda * \beta 1c}{2}$$

$$\Delta fS2 = +\frac{\lambda * \beta 2c}{2}$$

$$\Delta fS3 = +\frac{\lambda * \beta 3c}{2}$$

$$\Delta fS4 = +\frac{\lambda * \beta 4c}{2}$$

$$\Delta fS5 = +\frac{\lambda * \beta 5c}{2}$$

$$\Delta fS6 = +\frac{\lambda * \beta 6c}{2}$$

$$\Delta fZ = +\frac{\lambda * \beta Zc}{2}$$

Tabla 3. 17 Cálculo de las Correcciones

	CORRECCIONES							
I. T.	**ΔfA**	**ΔfS1**	**ΔfS2**	**ΔfS3**	**ΔfS4**	**ΔfS5**	**ΔfS6**	**ΔfZ**
1	0.255068	-0.034513	-0.030611	-0.049429	-0.038014	-0.048279	-0.040357	-0.013863
2	-0.166916	0.022585	0.020031	0.032346	0.024876	0.031593	0.026409	0.009072
3	-0.034299	0.004641	0.004116	0.006646	0.005111	0.006492	0.005426	0.001864
4	0.072694	-0.009836	-0.008724	-0.014087	-0.010834	-0.013759	-0.011501	-0.003951
5	-0.104273	0.014109	0.012514	0.020207	0.015540	0.019736	0.016498	0.005667
6	0.072271	-0.009779	-0.008673	-0.014005	-0.010770	-0.013679	-0.011434	-0.003928
7	-0.134512	0.018201	0.016143	0.026067	0.020047	0.025460	0.021282	0.007311
8	0.163939	-0.022182	-0.019674	-0.031769	-0.024432	-0.031030	-0.025938	-0.008910
9	-0.221529	0.029975	0.026586	0.042930	0.033015	0.041930	0.035050	0.012040
10	-0.457399	0.061891	0.054893	0.088639	0.068168	0.086576	0.072370	0.024860
11	0.458847	-0.062087	-0.055066	-0.088920	-0.068384	-0.086850	-0.072599	-0.024939
12	0.096109	-0.013004	-0.011534	-0.018625	-0.014323	-0.018191	-0.015206	-0.005223

3.5.5 Corregir los Análisis Granulométricos

$fAc = fA - \Delta fA$

$fS1c = fS1 - \Delta fS1$

$fS2c = fS2 - \Delta fS2$

$fS3c = fS3 - \Delta fS3$

$fS4c = fS4 - \Delta fS4$

$fS5c = fS5 - \Delta fS5$

$fS6c = fS6 - \Delta fS6$

$fZc = fZ - \Delta fZ$

3.5.6 Análisis Granulométricos Corregidos

Tabla 3. 18 Análisis Granulométricos Corregidos – Porcentajes en Peso

		Aliment o	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
I. T.	Malla	fAc	fS1c	fS2c	fS3c	fS4c	fS5c	fS6c	fZc
1	-m14 +m20	2.17	13.84	2.25	0.05	0.04	0.05	0.04	0.01
2	-m20 +m30	6.45	31.60	16.78	0.89	-0.02	-0.03	-0.03	-0.01
3	-m30 +m40	11.15	30.52	42.22	10.12	-0.01	-0.01	-0.01	0.00
4	-m40 +m50	11.80	13.61	28.49	31.28	3.15	0.01	0.01	0.00
5	-m50 +m70	14.94	6.24	8.11	44.76	25.02	3.84	-0.02	-0.01
6	-m70 +m100	10.22	1.68	0.97	9.92	29.73	17.63	1.15	0.00
7	-m100 +m140	11.43	0.97	0.55	1.83	21.45	29.71	12.90	0.35
8	-m140 +m200	10.21	0.52	0.31	0.66	9.50	19.95	28.93	3.69
9	-m200 +m270	9.52	0.33	0.07	0.36	5.42	14.16	28.50	25.79
10	-m270 +m325	2.42	0.02	0.01	-0.05	1.04	2.96	6.31	13.06
11	-m325 +m400	1.91	0.15	0.15	0.11	1.23	2.48	4.51	8.94
12	-m400	7.77	0.52	0.10	0.06	3.44	9.24	17.70	48.17

3.5.7 Hallar el Error de la corrección:

$$S = \sum \Delta fA^2 + \sum \Delta fS1^2 + \sum \Delta fS2^2 + \sum \Delta fS3^2 + \sum \Delta fS4^2 + \sum \Delta f5^2 + \sum \Delta fS6^2 + \sum \Delta fZ^2$$

Tabla 3. 19 Calculo del Error de la Correccion:

	ERROR	**0.738310**						
I. T.	fAc	fS1c	fS2c	fS3c	fS4c	fS5c	fS6c	fZc
1	0.06505971	0.00119118	0.00093704	0.0024433	0.00144507	0.00233087	0.00162869	0.0001922
2	0.02786104	0.00051011	0.00040128	0.00104631	0.00061883	0.00099817	0.00069747	8.2307E-05
3	0.00117644	2.1539E-05	1.6944E-05	4.4181E-05	2.613E-05	4.2148E-05	2.9451E-05	3.4754E-06
4	0.00528453	9.6754E-05	7.6112E-05	0.00019846	0.00011738	0.00018933	0.00013229	1.5612E-05
5	0.01087301	0.00019907	0.0001566	0.00040833	0.00024151	0.00038954	0.00027219	3.2121E-05
6	0.00522317	9.5631E-05	7.5228E-05	0.00019615	0.00011601	0.00018713	0.00013076	1.543E-05
7	0.0180937	0.00033128	0.0002606	0.0006795	0.00040189	0.00064823	0.00045295	5.3452E-05
8	0.02687621	0.00049208	0.00038709	0.00100933	0.00059696	0.00096288	0.00067281	7.9398E-05
9	0.04907518	0.00089852	0.00070682	0.001843	0.00109003	0.00175819	0.00122854	0.00014498
10	0.20921462	0.00383051	0.00301326	0.00785699	0.00464696	0.00749544	0.00523745	0.00061806
11	0.21054108	0.0038548	0.00303237	0.00790681	0.00467642	0.00754296	0.00527065	0.00062198
12	0.00923704	0.00016912	0.00013304	0.00034689	0.00020517	0.00033093	0.00023124	2.7288E-05

3.6 CORRECCIÓN DE LOS ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS DE PORCENTAJES ACUMULADOS

Este mismo proceso se realizó para los Porcentajes Acumulados de los Análisis Granulométricos.

Tanto los Porcentajes Acumulados Retenidos como los Pasantes, dan los mismos resultados (Análisis corregidos, Errores, Multiplicadores de Lagrange,...).

Esto es debido a que los elementos de las matrices A y B en la posición (i,j) de la ecuación 2.7 son iguales:

Sea:

Fi: es un elemento de los Porcentajes Acumulados Pasantes:

Gi: es el mismo elemento pero de los Porcentajes Acumulados Retenidos:

Gi=100%-Fi

$$\sum[(GSa-GZ)*(GSb-GZ)]$$

$$\sum[((100-FSa)-(100-FZ))*((100-FSb)-(100-FZ))]$$

$$\sum[(-1)*(FSa-FZ)*(-1)*(FSb-FZ)]$$

Entonces:

Ecuación 3. 1

$$\sum[(GSa-GZ)*(GSb-GZ)]=\sum[(FSa-FZ)*(FSb-FZ)]$$

Se presentan los resultados para los Análisis Granulométricos corregidos por Porcentaje Acumulado Pasante.

Tabla 3. 20 Analisis Granulométricos Corregidos por Porcentajes Acumulados Pasantes

		Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
I.T.	Malla	fAc	fS1c	fS2c	fS3c	fS4c	fS5c	fS6c	fZc
1	-m14 +m20	97.74	86.16	97.76	99.96	99.98	99.96	99.98	99.99
2	-m20 +m30	91.22	54.58	80.99	99.09	100.01	100.02	100.01	100.00
3	-m30 +m40	80.16	24.05	38.76	88.95	100.00	100.00	100.00	100.00
4	-m40 +m50	68.34	10.44	10.28	57.67	96.85	99.99	99.99	100.00
5	-m50 +m70	53.41	4.21	2.17	12.91	71.83	96.15	100.01	100.00
6	-m70 +m100	43.24	2.52	1.19	2.98	42.09	78.50	98.85	100.00
7	-m100 +m140	31.72	1.56	0.65	1.16	20.65	48.81	85.96	99.65
8	-m140 +m200	21.72	1.01	0.32	0.46	11.12	28.81	57.01	95.95
9	-m200 +m270	12.31	0.66	0.23	0.08	5.69	14.64	28.49	70.15
10	-m270 +m325	9.87	0.65	0.22	0.14	4.64	11.69	22.17	57.10
11	-m325 +m400	7.94	0.50	0.08	0.03	3.42	9.21	17.67	48.16
12	-m400	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

El error obtenido es de: 0.31482174

CAPÍTULO 4
CORRECCIÓN DE ANÁLISIS QUÍMICO EN EL SISTEMA POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

4.1 INTRODUCCIÓN

Un procedimiento empleado en el procesamiento de minerales es el denominado "Mallas Valoradas" que consiste en obtener las leyes (Análisis Químico) de las fracciones de los Análisis Granulométricos, esto con el fin de determinar la distribución de un elemento X según la granulometría de una muestra.

Al igual que los análisis granulométricos, se presentan ciertos "errores" que provocan una inconsistencia matemática respecto a los análisis químicos. Aquí el problema se complica. Recordemos que en la corrección de análisis granulométrico, la inconsistencia matemática es por intervalos de tamaños, manteniéndose que para una muestra la suma de las fracciones es igual a uno (100%) (Revisar propiedad #05 del Capítulo 2); es decir, con el formato de las tablas empleadas (una columna representa el análisis granulométrico de una muestra), la inconsistencia matemática es referido a un intervalo de tamaños o de una dimensión., en las tablas se presenta dicha inconsistencia en forma "horizontal".

En el caso de los Análisis Químicos, se presenta inconsistencia matemática respecto a las leyes analizadas por intervalos de tamaño (en forma horizontal) y también una inconsistencia matemática referido a cada muestra; es decir, en una muestra (ya sea entrada o salida del sistema) se debe de cumplir que la ley de la muestra calculada por las fracciones del análisis granulométrico sea igual a la ley de la muestra analizada en forma de compósito. Es decir se presenta también una inconsistencia "vertical" dando por resultado un problema "bidimensional" (corregir tanto horizontalmente como verticalmente). El método de corrección empleado, al igual que el Capítulo 2 es por medio de los Multiplicadores de Lagrange.

Aunque si bien es posible formular un algoritmo que corrija simultáneamente las fracciones granulométricas con sus respectivas leyes, esto se podría complicar demasiado. Por lo tanto, las correcciones efectuadas se realizan en serie, es decir, para corregir los Análisis Químicos se debe de corregir previamente los análisis granulométricos.

A diferencia del Capítulo 2 en la que las correcciones pueden realizarse en forma simple, casi directa, en este capítulo se tuvo que recurrir a conceptos de Álgebra Lineal, desarrollo y operación de las ecuaciones en forma matricial que de otro modo la comprensión de este método habría alcanzado un nivel de dificultad mayor.

Aún con ésta complicación de ecuaciones matriciales, se muestra el resumen como una receta, que siguiéndose paso a paso no debería de acarrear mayores dificultades.

Al final de este capítulo y análogamente al desarrollado en el Capitulo 2 se presentan dos propiedades de esta corrección.

4.2 BALANCE DE MASA:

De la Tabla 2.1 los Análisis granulométricos pueden representarse de la siguiente manera:

Tabla 4. 1 Esquema simbólico de los Análisis Granulométricos.

		ENTRADA					SALIDA				
	Flujo (Ej: t/h) / **Intervalo Tamaños**	Ac (Principal)	E1c	E2c	...	Emc	Zc (Principal)	S1c	S2c	...	Snc
Fracciones en Peso	i	fAc^{i}	$fE1c^{i}$	$fE2c^{i}$	...	$fEmc^{i}$	fZc^{i}	$fS1c^{i}$	$fS2c^{i}$	...	$fSnc^{i}$
	ii	fAc^{ii}	$fE1c^{ii}$	$fE2c^{ii}$	...	$fEmc^{ii}$	fZc^{ii}	$fS1c^{ii}$	$fS2c^{ii}$	...	$fSnc^{ii}$
	iii	fAc^{iii}	$fE1c^{iii}$	$fE2c^{iii}$	...	$fEmc^{iii}$	fZc^{iii}	$fS1c^{iii}$	$fS2c^{iii}$	...	$fSnc^{iii}$
	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
	k-1	fAc^{k-1}	$fE1c^{k-1}$	$fE2c^{k-1}$	...	$fEmc^{k-1}$	fZc^{k-1}	$fS1c^{k-1}$	$fS2c^{k-1}$	...	$fSnc^{k-1}$
	k	fAc^{k}	$fE1c^{k}$	$fE2c^{k}$	...	$fEmc^{k}$	fZc^{k}	$fS1c^{k}$	$fS2c^{k}$	...	$fSnc^{k}$

Análogamente las leyes de un elemento X para los Flujos y fracciones de los análisis Granulométricos se pueden representarse como sigue:

Tabla 4. 2 Esquema simbólico de los Análisis Químicos.

		ENTRADA					SALIDA				
Intervalo de Tamaños	**Ley Flujos**	LA	LE1	LE2	...	LEm	LZ	LS1	LS2	...	LSn
i	**Ley para cada fracción (mallas valoradas)**	LfA^{i}	$LfE1^{i}$	$LfE2^{i}$	...	$LfEm^{i}$	LfZ^{i}	$LfS1^{i}$	$LfS2^{i}$	...	$LfSn^{i}$
ii		LfA^{ii}	$LfE1^{ii}$	$LfE2^{ii}$	...	$LfEm^{ii}$	LfZ^{ii}	$LfS1^{ii}$	$LfS2^{ii}$	...	$LfSn^{ii}$
iii		LfA^{iii}	$LfE1^{iii}$	$LfE2^{iii}$	...	$LfEm^{iii}$	LfZ^{iii}	$LfS1^{iii}$	$LfS2^{iii}$	...	$LfSn^{iii}$
...		...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
k-1		LfA^{k-1}	$LfE1^{k-1}$	$LfE2^{k-1}$	...	$LfEm^{k-1}$	LfZ^{k-1}	$LfS1^{k-1}$	$LfS2^{k-1}$	...	$LfSn^{k-1}$
k		LfA^{k}	$LfE1^{k}$	$LfE2^{k}$	...	$LfEm^{k}$	LfZ^{k}	$LfS1^{k}$	$LfS2^{k}$	...	$LfSn^{k}$

4.3 ECUACIONES DE BALANCE POR UN ELEMENTO X:

Por fracciones de cada Entrada y/o Salida:

Ecuación 4. 1

$$Lc = Lfc^{i} * fc^{i} + Lfc^{ii} * fc^{ii} + Lfc^{iii} * fc^{iii} + ... + Lfc^{k-1} * fc^{k-1} + Lfc^{k} * fc^{k}$$
$$\sum (Lfc * fc) = Lc$$

Donde:

fc^{i} : Fracción de un Alimento y/o Producto corregida correspondiente a un intervalo de tamaños "i".

Lc : Ley corregida del elemento X en el Flujo.

Lfc^{i} : Ley corregida del elemento X en una fracción del Análisis Granulométrico correspondiente a un intervalo de tamaños "i".

k : Intevalo de Tamaños más fino.

Caudales (Flujos):

Ecuación 4. 2

$$\mathrm{LAc} * \mathrm{Ac} + LE1c * \mathrm{E1c} + LE2c * \mathrm{E2c} + ... + LEmc * \mathrm{Emc}$$
$$= LS1c * \mathrm{S1c} + LS2c * \mathrm{S2c} + ... + LSnc * \mathrm{Snc} + LZc * \mathrm{Zc}$$

Dividiendo a cada término por Ac obtenemos:

Ecuación 4. 3

$$\mathrm{LAc} + LE1c * \alpha 1\mathrm{c} + LE2c * \alpha 2\mathrm{c} + ... + LEmc * \alpha \mathrm{mc}$$
$$= LS1c * \beta 1\mathrm{c} + LS2c * \beta 2\mathrm{c} + ... + LSnc * \beta \mathrm{nc} + LZc * \beta \mathrm{Zc}$$

Mallas:

Ecuación 4. 4

$$\mathrm{LfAc} * \mathrm{fAc} * \mathrm{Ac} + LfE1c * \mathrm{fE1c} * \mathrm{E1c} + LfE2c * \mathrm{fE2c} * \mathrm{E2c} + ... + LfEmc * \mathrm{fEmc} * \mathrm{Emc}$$
$$= LfS1c * \mathrm{fS1c} * \mathrm{S1c} + LfS2c * \mathrm{fS2c} * \mathrm{S2c} + ... + LfSnc * \mathrm{fSnc} * \mathrm{Snc} + LfZc * \mathrm{fZc} * \mathrm{Zc}$$

Con lo cual se tiene en las ecuaciones de balance de masa por un elemento X:

Ecuación 4. 5

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{LfAc} * \mathrm{fAc} + LfE1c * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + LfE2c * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + LfEmc * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} \\
&= LfS1c * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + LfS2c * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + LfSnc * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + LfZc * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}
\end{aligned}
$$

Tendremos los siguientes errores debido a los análisis químicos:

Definimos:

$$
\begin{aligned}
&\Delta LA = LA - LAc & \Delta LfA = LfA - LfAc \\
&\Delta LEi = LEi - LEic; i = \{1,2,\ldots,m\} & \Delta LfEi = LfEi - LfEic; i = \{1,2,\ldots,m\} \\
&\Delta LSj = LSj - LSjc; j = \{1,2,\ldots,n\} & \Delta LfSj = LfSj - LfSjc; j = \{1,2,\ldots,n\} \\
&\Delta LZ = LZ - LZc & \Delta LfZ = LfZ - LfZc
\end{aligned}
$$

Si hacemos la sumatoria de la ecuación 4.5 para todos los intervalos de tamaño obtendremos:

Ecuación 4. 6

$$
\begin{aligned}
&\sum(\mathrm{LfAc} * \mathrm{fAc}) + \alpha 1\mathrm{c} * \sum(LfE1c * \mathrm{fE1c}) + \alpha 2\mathrm{c} * \sum(LfE2c * \mathrm{fE2c}) + \ldots + \alpha\mathrm{mc} * \sum(LfEmc * \mathrm{fEmc}) \\
&= \beta 1\mathrm{c} * \sum(LfS1c * \mathrm{fS1c}) + \beta 2\mathrm{c} * \sum(LfS2c * \mathrm{fS2c}) + \ldots + \beta\mathrm{nc} * \sum(LfSnc * \mathrm{fSnc}) + \beta\mathrm{Zc} * \sum(LfZc * \mathrm{fZc})
\end{aligned}
$$

Si reemplazamos la ecuación 4.1 en la ecuación 4.6

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{LAc} + \alpha 1\mathrm{c} * LE1c + \alpha 2\mathrm{c} * LE2c + \ldots + \alpha\mathrm{mc} * LEmc \\
&= \beta 1\mathrm{c} * LS1c + \beta 2\mathrm{c} * LS2c + \ldots + \beta\mathrm{nc} * LSnc + \beta\mathrm{Zc} * LZc
\end{aligned}
$$

La cual es Idéntica a la ecuación 4.3; por lo tanto, dicha ecuación 4.3 no deberá ser incluida en todo el proceso de corrección debido a las siguientes razones:

- Este error será corregido inherentemente al corregir las ecuaciones 4.1 y 4.5
- Si se incluye la ecuación 4.3, se obtendrá un sistema de ecuaciones LINEALMENTE DEPENDIENTE, provocando así, una matriz SINGULAR (Determinante CERO) por ende dicho sistema NO tendría solución o existirían infinitas soluciones.

Definimos los errores:

Por Malla:

Ecuación 4. 7

$$\Delta Mq = \mathrm{LfA} * \mathrm{fAc} + LfE1 * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + LfE2 * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + LfEm * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left(LfS1 * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + LfS2 * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + LfSn * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + LfZ * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right)$$

Tendremos:

$$\Delta Mq = \left(\Delta LfA + LfAc\right) * \mathrm{fAc} + \left(\Delta LfE1 + LfE1c\right) * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + \left(\Delta LfE2 + LfE2c\right) * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + \left(\Delta LfEm + LfEmc\right) * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left[\left(\Delta LfS1 + LfS1c\right) * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + \left(\Delta LfS2 + LfS2c\right) * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + \left(\Delta LfSn + LfSnc\right) * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + \left(\Delta LfZ + LfZc\right) * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right]$$

Simplificando tendremos:

$$\Delta Mq = \Delta\mathrm{LfA} * \mathrm{fAc} + \Delta LfE1 * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + \Delta LfE2 * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + \Delta LfEm * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left(\Delta LfS1 * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + \Delta LfS2 * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + \Delta LfSn * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + \Delta LfZ * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right) + \mathrm{LfAc} * \mathrm{fAc} + LfE1c * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + LfE2c * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + LfEmc * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left(LfS1c * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + LfS2c * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + LfSnc * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + LfZc * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right)$$

Pero se define por ser las leyes corregidas:

$$0 = \mathrm{LfAc} * \mathrm{fAc} + LfE1c * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + LfE2c * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + LfEmc * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left(LfS1c * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + LfS2c * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + LfSnc * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + LfZc * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right)$$

Obtendremos entonces:

Ecuación 4. 8

$$\Delta Mq = \Delta\mathrm{LfA} * \mathrm{fAc} + \Delta LfE1 * \mathrm{fE1c} * \alpha 1\mathrm{c} + \Delta LfE2 * \mathrm{fE2c} * \alpha 2\mathrm{c} + \ldots + \Delta LfEm * \mathrm{fEmc} * \alpha\mathrm{mc} - \left(\Delta LfS1 * \mathrm{fS1c} * \beta 1\mathrm{c} + \Delta LfS2 * \mathrm{fS2c} * \beta 2\mathrm{c} + \ldots + \Delta LfSn * \mathrm{fSnc} * \beta\mathrm{nc} + \Delta LfZ * \mathrm{fZc} * \beta\mathrm{Zc}\right)$$

Por Alimentos y Producto:

Ecuación 4. 9

$$\Delta MqES = L - \left(Lf^{i} * fc^{i} + Lf^{ii} * fc^{ii} + Lf^{iii} * fc^{iii} + \ldots + Lf^{k-1} * fc^{k-1} + Lf^{k} * fc^{k}\right)$$

$$\Delta MqES = L - \sum^{k}\left(Lf * fc\right)$$

Por todos los Alimentos y Productos se tienen: m+n+2 ecuaciones de error.

Por ejemplo para el Alimento:

$$\Delta MqA = LA - \sum_{1}^{k}(LfA * fAc)$$

Tendremos:

$$\Delta MqA = (\Delta LA + LAc) - \sum_{1}^{k}((\Delta LfA + LfAc) * fAc)$$

Simplificando tendremos:

$$\Delta MqA = \Delta LA - \sum_{1}^{k}(\Delta LfA * fAc) + LAc - \sum_{1}^{k}(LfAc * fAc)$$

Pero se define por ser las leyes corregidas:

$$0 = LAc - \sum_{1}^{k}(LfAc * fAc)$$

Obtendremos entonces:

Ecuación 4. 10

$$\Delta MqA = \Delta LA - \sum_{1}^{k}(\Delta LfA * fAc)$$

4.4 MÉTODO LAGRANGIANO

Por el Método Lagrangiano tendremos:

Función a Optimizar:

$$f(X) = S = \Delta LA^2 + \Delta LE1^2 + \Delta LE2^2 + \ldots + \Delta LEm^2 + \Delta LS1^2 + \Delta LS2^2 + \ldots + \Delta LSn^2 + \Delta LZ^2$$
$$+ \sum_{1}^{k} \Delta LfA^2 + \sum_{1}^{k} \Delta LfE1^2 + \sum_{1}^{k} \Delta LfE2^2 + \ldots + \sum_{1}^{k} \Delta LfEm^2$$
$$+ \sum_{1}^{k} \Delta LfS1^2 + \sum_{1}^{k} \Delta LfS2^2 + \ldots + \sum_{1}^{k} \Delta LfSn^2 + \sum_{1}^{k} \Delta LfZ^2$$

Donde las sumatorias representan la suma de los errores para cada malla debido a las leyes.

Se tiene las siguientes ecuaciones restrictivas (Ecuaciones 4.8, 4.9)

$$
\begin{aligned}
gq(X) = 0 = \Delta Mq - [&\Delta LfA * fAc + \Delta LfE1 * fE1c * \alpha 1c + \Delta LfE2 * fE2c * \alpha 2c + \ldots \\
&+ \Delta LfEm * fEmc * \alpha mc - (\Delta LfS1 * fS1c * \beta 1c + \Delta LfS2 * fS2c * \beta 2c + \ldots \\
&+ \Delta LfSn * fSnc * \beta nc + \Delta LfZ * fZc * \beta Zc)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&gA(X) = 0 = \Delta MqA - \left[\Delta LA - \sum(\Delta LfA * fAc)\right] \\
&gE1(X) = 0 = \Delta MqE1 - \left[\Delta LE1 - \sum(\Delta LfE1 * fE1c)\right] \\
&gE2(X) = 0 = \Delta MqE2 - \left[\Delta LE2 - \sum(\Delta LfE2 * fE2c)\right] \\
&\ldots \\
&gEm(X) = 0 = \Delta MqEm - \left[\Delta LEm - \sum(\Delta LfEm * fEmc)\right] \\
&gS1(X) = 0 = \Delta MqS1 - \left[\Delta LS1 - \sum(\Delta LfS1 * fS1c)\right] \\
&gS2(X) = 0 = \Delta MqS2 - \left[\Delta LS2 - \sum(\Delta LfS2 * fS2c)\right] \\
&\ldots \\
&gSn(X) = 0 = \Delta MqSn - \left[\Delta LSn - \sum(\Delta LfSn * fSnc)\right] \\
&gZ(X) = 0 = \Delta MqZ - \left[\Delta LZ - \sum(\Delta LfZ * fZc)\right]
\end{aligned}
$$

La función Lagrangiana será:

$$
\begin{aligned}
&L(X, \lambda) = f(X) - \lambda q * gq(X) \\
&- \lambda A * gA(X) - \lambda E1 * gE2(X) - \lambda E2 * gE2(X) - \ldots - \lambda Em * gEm(X) \\
&- \lambda S1 * gS1(X) - \lambda S2 * gS2(X) - \ldots - \lambda Sn * gSn(X) - \lambda Z * gZ(X)
\end{aligned}
$$

$$
X = \begin{pmatrix} \Delta LA, \Delta LE1, \Delta LE2, \ldots, \Delta LEm, \Delta LS1, \Delta LS2, \ldots \Delta LSn, \Delta LZ, \\ \Delta LfA, \Delta LfE1, \Delta LfE2, \ldots, \Delta LfEm, \Delta LfS1, \Delta LfS2, \ldots, \Delta LfSn, \Delta LfZ \end{pmatrix}
$$

Ecuación 4. 11

$$L(X,\lambda)=\Delta LA^2+\Delta LE1^2+\Delta LE2^2+...+\Delta LEm^2+\Delta LS1^2+\Delta LS2^2+...+\Delta LSn^2+\Delta LZ^2$$
$$+\sum_1^k \Delta LfA^2+\sum_1^k \Delta LfE1^2+\sum_1^k \Delta LfE2^2+...+\sum_1^k \Delta LfEm^2$$
$$+\sum_1^k \Delta LfS1^2+\sum_1^k \Delta LfS2^2+...+\sum_1^k \Delta LfSn^2+\sum_1^k \Delta LfZ^2$$
$$-\lambda q*\{\Delta Mq-[\Delta \mathrm{LfA}*\mathrm{fAc}+\Delta LfE1*\mathrm{fE1c}*\alpha 1\mathrm{c}+\Delta LfE2*\mathrm{fE2c}*\alpha 2\mathrm{c}+...+\Delta LfEm*\mathrm{fEmc}*\alpha \mathrm{mc}$$
$$-(\Delta LfS1*\mathrm{fS1c}*\beta 1\mathrm{c}+\Delta LfS2*\mathrm{fS2c}*\beta 2\mathrm{c}+...+\Delta LfSn*\mathrm{fSnc}*\beta \mathrm{nc}+\Delta LfZ*\mathrm{fZc}*\beta \mathrm{Zc})]\}$$
$$-\lambda A*\left[\Delta MqA-\left(\Delta LA-\sum_1^k(\Delta LfA*fAc)\right)\right]$$
$$-\lambda E1*\left[\Delta MqE1-\left(\Delta LE1-\sum_1^k(\Delta LfE1*fE1c)\right)\right]$$
$$-\lambda E2*\left[\Delta MqE2-\left(\Delta LE2-\sum_1^k(\Delta LfE2*fE2c)\right)\right]$$
$$-...$$
$$-\lambda Em*\left[\Delta MqEm-\left(\Delta LEm-\sum_1^k(\Delta LfEm*fEmc)\right)\right]$$
$$-\lambda S1*\left[\Delta MqS1-\left(\Delta LS1-\sum_1^k(\Delta LfS1*fS1c)\right)\right]$$
$$-\lambda S2*\left[\Delta MqS2-\left(\Delta LS2-\sum_1^k(\Delta LfS2*fS2c)\right)\right]$$
$$-...$$
$$-\lambda Sn*\left[\Delta MqSn-\left(\Delta LSn-\sum_1^k(\Delta LfSn*fSnc)\right)\right]$$
$$-\lambda Z*\left[\Delta MqZ-\left(\Delta LZ-\sum_1^k(\Delta LfZ*fZc)\right)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=0 \qquad \frac{\partial L}{\partial X}=0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda q}=0=\Delta Mq-[\Delta \mathrm{LfA}*\mathrm{fAc}+\Delta LfE1*\mathrm{fE1c}*\alpha 1\mathrm{c}+\Delta LfE2*\mathrm{fE2c}*\alpha 2\mathrm{c}+...$$
$$+\Delta LfEm*\mathrm{fEmc}*\alpha\mathrm{mc}-(\Delta LfS1*\mathrm{fS1c}*\beta 1\mathrm{c}+\Delta LfS2*\mathrm{fS2c}*\beta 2\mathrm{c}+...$$
$$+\Delta LfSn*\mathrm{fSnc}*\beta\mathrm{nc}+\Delta LfZ*\mathrm{fZc}*\beta\mathrm{Zc})]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda A}=0=\Delta MqA-\left[\Delta LA-\sum_1^k(\Delta LfA*fAc)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda E1}=0=\Delta MqE1-\left[\Delta LE1-\sum_1^k(\Delta LfE1*fE1c)\right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda E2} = 0 = \Delta MqE2 - \left[\Delta LE2 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfE2 * fE2c) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda Em} = 0 = \Delta MqEm - \left[\Delta LEm - \sum_{1}^{k} (\Delta LfEm * fEmc) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda S1} = 0 = \Delta MqS1 - \left[\Delta LS1 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfS1 * fS1c) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda S2} = 0 = \Delta MqS2 - \left[\Delta LS2 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfS2 * fS2c) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda Sn} = 0 = \Delta MqSn - \left[\Delta LSn - \sum_{1}^{k} (\Delta LfSn * fSnc) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda Z} = 0 = \Delta MqZ - \left[\Delta LZ - \sum_{1}^{k} (\Delta LfZ * fZc) \right]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LA} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LA^2 - \lambda A * (-\Delta LA) + \theta_{LA}\right)}{\partial \Delta LA} = 2 * \Delta LA + \lambda A \qquad \boxed{\Delta LA = -\frac{\lambda A}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LE1} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LE1^2 - \lambda E1 * (-\Delta LE1) + \theta_{LE1}\right)}{\partial \Delta LE1} = 2 * \Delta LE1 + \lambda E1 \qquad \boxed{\Delta LE1 = -\frac{\lambda E1}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LE2} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LE2^2 - \lambda E2 * (-\Delta LE2) + \theta_{LE2}\right)}{\partial \Delta LE2} = 2 * \Delta LE2 + \lambda E2 \qquad \boxed{\Delta LE2 = -\frac{\lambda E2}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LEm} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LEm^2 - \lambda Em * (-\Delta LEm) + \theta_{LEm}\right)}{\partial \Delta LEm} = 2 * \Delta LEm + \lambda Em \qquad \boxed{\Delta LEm = -\frac{\lambda Em}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LS1} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LS1^2 - \lambda S1 * (-\Delta LS1) + \theta_{LS1}\right)}{\partial \Delta LS1} = 2 * \Delta LS1 + \lambda S1 \qquad \boxed{\Delta LS1 = -\frac{\lambda S1}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LS2} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LS2^2 - \lambda S2 * (-\Delta LS2) + \theta_{LS2}\right)}{\partial \Delta LS2} = 2 * \Delta LS2 + \lambda S2 \qquad \boxed{\Delta LS2 = -\frac{\lambda S2}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LSn} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LSn^2 - \lambda Sn * (-\Delta LSn) + \theta_{LSn}\right)}{\partial \Delta LSn} = 2 * \Delta LSn + \lambda Sn \qquad \boxed{\Delta LSn = -\frac{\lambda Sn}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LZ} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LZ^2 - \lambda Z * (-\Delta LZ) + \theta_{LZ}\right)}{\partial \Delta LZ} = 2 * \Delta LZ + \lambda Z \qquad \boxed{\Delta LZ = -\frac{\lambda Z}{2}}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfA}=0=\frac{\partial\left(\Delta LfA^{2}-\lambda q*(-\Delta LfA*fAc)-\lambda A*(+\Delta LfA*fAc)+\theta_{LfA}\right)}{\partial \Delta LfA}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfA}=0=2*\Delta LfA+\lambda q*fAc-\lambda A*fAc$$

$$\boxed{\Delta LfA=\frac{fAc}{2}*(-\lambda q+\lambda A)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfE1}=0=\frac{\partial\left(\Delta LfE1^{2}-\lambda q*(-\Delta LfE1*fE1c*\alpha 1c)-\lambda E1*(+\Delta LfE1*fE1c)+\theta_{LfE1}\right)}{\partial \Delta LfE1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfE1}=0=2*\Delta LfE1+\lambda q*fE1c*\alpha 1c-\lambda E1*fE1c$$

$$\boxed{\Delta LfE1=\frac{fE1c}{2}*(-\lambda q*\alpha 1c+\lambda E1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfE2}=0=\frac{\partial\left(\Delta LfE2^{2}-\lambda q*(-\Delta LfE2*fE2c*\alpha 2c)-\lambda E2*(+\Delta LfE2*fE2c)+\theta_{LfE2}\right)}{\partial \Delta LfE2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfE2}=0=2*\Delta LfE2+\lambda q*fE2c*\alpha 2c-\lambda E2*fE2c$$

$$\boxed{\Delta LfE2=\frac{fE2c}{2}*(-\lambda q*\alpha 2c+\lambda E2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfEm}=0=\frac{\partial\left(\Delta LfEm^{2}-\lambda q*(-\Delta LfEm*fEmc*\alpha mc)-\lambda Em*(+\Delta LfEm*fEmc)+\theta_{LfEm}\right)}{\partial \Delta LfEm}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfEm}=0=2*\Delta LfEm+\lambda q*fEmc*\alpha mc-\lambda Em*fEmc$$

$$\boxed{\Delta LfEm=\frac{fEmc}{2}*(-\lambda q*\alpha mc+\lambda Em)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfS1}=0=\frac{\partial\left(\Delta LfS1^{2}-\lambda q*(+\Delta LfS1*fS1c*\beta 1c)-\lambda S1*(+\Delta LfS1*fS1c)+\theta_{LfS1}\right)}{\partial \Delta LfS1}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfS1}=0=2*\Delta LfS1-\lambda q*fS1c*\beta 1c-\lambda S1*fS1c$$

$$\boxed{\Delta LfS1=\frac{fS1c}{2}*(+\lambda q*\beta 1c+\lambda S1)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfS2} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LfS2^2 - \lambda q * (+\Delta LfS2 * fS2c * \beta 2c) - \lambda S2 * (+\Delta LfS2 * fS2c) + \theta_{LfS2}\right)}{\partial \Delta LfS2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfS2} = 0 = 2 * \Delta LfS2 - \lambda q * fS2c * \beta 2c - \lambda S2 * fS2c$$

$$\boxed{\Delta LfS2 = \frac{fS2c}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfSn} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LfSn^2 - \lambda q * (+\Delta LfSn * fSnc * \beta nc) - \lambda Sn * (+\Delta LfSn * fSnc) + \theta_{LfSn}\right)}{\partial \Delta LfSn}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfSn} = 0 = 2 * \Delta LfSn - \lambda q * fSnc * \beta nc - \lambda Sn * fSnc$$

$$\boxed{\Delta LfSn = \frac{fSnc}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfZ} = 0 = \frac{\partial\left(\Delta LfZ^2 - \lambda q * (+\Delta LfZ * fZc * \beta Zc) - \lambda Z * (+\Delta LfZ * fZc) + \theta_{LfZ}\right)}{\partial \Delta LfZ}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta LfZ} = 0 = 2 * \Delta LfZ - \lambda q * fZc * \beta Zc - \lambda Z * fZc$$

$$\boxed{\Delta LfZ = \frac{fZc}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z)}$$

Se obtienen las siguientes ecuaciones:

Eq # q

$$\Delta Mq = \Delta \text{LfA} * \text{fAc} + \Delta LfE1 * \text{fE1c} * \alpha 1\text{c} + \Delta LfE2 * \text{fE2c} * \alpha 2\text{c} + \ldots + \Delta LfEm * \text{fEmc} * \alpha\text{mc}$$
$$-(\Delta LfS1 * \text{fS1c} * \beta 1\text{c} + \Delta LfS2 * \text{fS2c} * \beta 2\text{c} + \ldots + \Delta LfSn * \text{fSnc} * \beta\text{nc} + \Delta LfZ * \text{fZc} * \beta\text{Zc})$$

Eq # A

$$\Delta MqA = \Delta LA - \sum_{1}^{k}(\Delta LfA * fAc)$$

Eq # E1

$$\Delta MqE1 = \Delta LE1 - \sum_{1}^{k}(\Delta LfE1 * fE1c)$$

Eq # E2

$$\Delta MqE2 = \Delta LE2 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfE2 * fE2c)$$

Eq # Em

$$\Delta MqEm = \Delta LEm - \sum_{1}^{k} (\Delta LfEm * fEmc)$$

Eq # S1

$$\Delta MqS1 = \Delta LS1 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfS1 * fS1c)$$

Eq # S2

$$\Delta MqS2 = \Delta LS2 - \sum_{1}^{k} (\Delta LfS2 * fS2c)$$

Eq # Sn

$$\Delta MqSn = \Delta LSn - \sum_{1}^{k} (\Delta LfSn * fSnc)$$

Eq # Z

$$\Delta MqZ = \Delta LZ - \sum_{1}^{k} (\Delta LfZ * fZc)$$

Grupo Ecuaciones # 4. 1

$$\Delta LA = -\frac{\lambda A}{2} \qquad \Delta LS1 = -\frac{\lambda S1}{2}$$

$$\Delta LE1 = -\frac{\lambda E1}{2} \qquad \Delta LS2 = -\frac{\lambda S2}{2}$$

$$\Delta LE2 = -\frac{\lambda E2}{2} \qquad \Delta LSn = -\frac{\lambda Sn}{2}$$

$$\Delta LEm = -\frac{\lambda Em}{2} \qquad \Delta LZ = -\frac{\lambda Z}{2}$$

Grupo Ecuaciones # 4. 2

$$\Delta LfA = \frac{fAc}{2} * (-\lambda q + \lambda A)$$

$$\Delta LfE1 = \frac{fE1c}{2} * (-\lambda q * \alpha 1c + \lambda E1)$$

$$\Delta LfE2 = \frac{fE2c}{2} * (-\lambda q * \alpha 2c + \lambda E2)$$

$$\Delta LfEm = \frac{fEmc}{2} * (-\lambda q * \alpha mc + \lambda Em)$$

$$\Delta LfS1 = \frac{fS1c}{2} * (+\lambda q * \beta 1c + \lambda S1)$$

$$\Delta LfS2 = \frac{fS2c}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2)$$

$$\Delta LfSn = \frac{fSnc}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn)$$

$$\Delta LfZ = \frac{fZc}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z)$$

Reemplazamos el Grupo Ecuaciones # 4.2 en Eq #q

$$\Delta Mq = \frac{fAc^2}{2} * (-\lambda q + \lambda A) + \frac{fE1c^2}{2} * (-\lambda q * \alpha 1c + \lambda E1) * \alpha 1c$$
$$+ \frac{fE2c^2}{2} * (-\lambda q * \alpha 2c + \lambda E2) * \alpha 2c + \ldots + \frac{fEmc^2}{2} * (-\lambda q * \alpha mc + \lambda Em) * \alpha mc$$
$$- (\frac{fS1c^2}{2} * (+\lambda q * \beta 1c + \lambda S1) * \beta 1c + \frac{fS2c^2}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2) * \beta 2c + \ldots$$
$$+ \frac{fSnc^2}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn) * \beta nc + \frac{fZc^2}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z) * \beta Zc)$$

Factorizando λq obtendremos:

Ecuación 4. 12

$$2 * \Delta Mq = -\lambda q * (fAc^2 + fE1c^2 * \alpha 1c^2 + fE2c^2 * \alpha 2c^2 + \ldots + fEmc^2 * \alpha mc^2$$
$$+ fS1c^2 * \beta 1c^2 + fS2c^2 * \beta 2c^2 + \ldots + fSnc^2 * \beta nc^2 + fZc^2 * \beta Zc^2)$$
$$+ \lambda A * fAc^2 + \lambda E1 * fE1c^2 * \alpha 1c + \lambda E2 * fE2c^2 * \alpha 2c + \ldots + \lambda Em * fEmc^2 * \alpha mc$$
$$- (\lambda S1 * fS1c^2 * \beta 1c + \lambda S2 * fS2c^2 * \beta 2c + \ldots + \lambda Sn * fSnc^2 * \beta nc + \lambda Z * fZc^2 * \beta Zc)$$

Definimos a:

Ecuación 4. 13

$$\Phi_0 = fAc^2 + fE1c^2 * \alpha 1c^2 + fE2c^2 * \alpha 2c^2 + \ldots + fEmc^2 * \alpha mc^2$$
$$+ fS1c^2 * \beta 1c^2 + fS2c^2 * \beta 2c^2 + \ldots + fSnc^2 * \beta nc^2 + fZc^2 * \beta Zc^2$$

Reemplazando la Ecuación 4.13 en la Ecuación 4.12 se obtiene:

Ecuación 4. 14

$$2*\Delta Mq = -\lambda q*\Phi_0 + \lambda A*fAc^2 + \lambda E1*fE1c^2*\alpha 1c + \lambda E2*fE2c^2*\alpha 2c + \ldots$$
$$+\lambda Em*fEmc^2*\alpha mc - (\lambda S1*fS1c^2*\beta 1c + \lambda S2*fS2c^2*\beta 2c + \ldots$$
$$+\lambda Sn*fSnc^2*\beta nc + \lambda Z*fZc^2*\beta Zc)$$

Reemplazamos el Grupo Ecuaciones # 4.1 y # 4.2 en Eq #A

$$\Delta MqA = -\frac{\lambda A}{2} - \sum_1^k\left(\frac{fAc^2}{2}*(-\lambda q + \lambda A)\right)$$

Simplificando tendremos:

Ecuación 4. 15

$$2*\Delta MqA = \sum_1^k\left(\lambda q*fAc^2\right) - \lambda A*\left(1+\sum_1^k\left(fAc^2\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda A = \frac{\sum_1^k\left(\lambda q*fAc^2\right) - 2*\Delta MqA}{1+\sum_1^k\left(fAc^2\right)}}$$

Análogamente para Eq#E1, Eq#E2, Eq#Em, Eq#S1, Eq#S2, Eq#Sn, Eq#Z

Ecuación 4. 16

$$2*\Delta MqE1 = \alpha 1c*\sum_1^k\left(\lambda q*fE1c^2\right) - \lambda E1*\left(1+\sum_1^k\left(fE1c^2\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda E1 = \frac{\alpha 1c*\sum_1^k\left(\lambda q*fE1c^2\right) - 2*\Delta MqE1}{1+\sum_1^k\left(fE1c^2\right)}}$$

Ecuación 4. 17

$$2*\Delta MqE2 = \alpha 2c*\sum_1^k\left(\lambda q*fE2c^2\right) - \lambda E2*\left(1+\sum_1^k\left(fE2c^2\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda E2 = \frac{\alpha 2c*\sum_1^k\left(\lambda q*fE2c^2\right) - 2*\Delta MqE2}{1+\sum_1^k\left(fE2c^2\right)}}$$

Ecuación 4. 18

$$2 * \Delta MqEm = \alpha mc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fEmc^{2}\right) - \lambda Em * \left(1 + \sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda Em = \frac{\alpha mc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fEmc^{2}\right) - 2 * \Delta MqEm}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right)}}$$

Ecuación 4. 19

$$2 * \Delta MqS1 = -\beta 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS1c^{2}\right) - \lambda S1 * \left(1 + \sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda S1 = \frac{-\beta 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS1c^{2}\right) - 2 * \Delta MqS1}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right)}}$$

Ecuación 4. 20

$$2 * \Delta MqS2 = -\beta 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS2c^{2}\right) - \lambda S2 * \left(1 + \sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda S2 = \frac{-\beta 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS2c^{2}\right) - 2 * \Delta MqS2}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right)}}$$

Ecuación 4. 21

$$2 * \Delta MqSn = -\beta nc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fSnc^{2}\right) - \lambda Sn * \left(1 + \sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda Sn = \frac{-\beta nc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fSnc^{2}\right) - 2 * \Delta MqSn}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right)}}$$

Ecuación 4. 22

$$2 * \Delta MqZ = -\beta Zc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fZc^{2}\right) - \lambda Z * \left(1 + \sum_{1}^{k}\left(fZc^{2}\right)\right)$$

$$\boxed{\lambda Z = \frac{-\beta Zc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fZc^2\right) - 2 * \Delta MqZ}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fZc^2\right)}}$$

Si reemplazamos los valores de $\lambda A, \lambda E1, \lambda E2, \lambda Em, \lambda S1, \lambda S2, \lambda Sn, \lambda Z$ en la ecuación 4.14

Ecuación 4. 23

$$2 * \Delta Mq = -\lambda q * \Phi_0 + \frac{\sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fAc^2\right) - 2 * \Delta MqA}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fAc^2\right)} * fAc^2 + \frac{\alpha 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fE1c^2\right) - 2 * \Delta MqE1}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fE1c^2\right)} * fE1c^2 * \alpha 1c$$

$$+ \frac{\alpha 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fE2c^2\right) - 2 * \Delta MqE2}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fE2c^2\right)} * fE2c^2 * \alpha 2c + \ldots + \frac{\alpha mc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fEmc^2\right) - 2 * \Delta MqEm}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fEmc^2\right)} * fEmc^2 * \alpha mc$$

$$- \left(\frac{-\beta 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS1c^2\right) - 2 * \Delta MqS1}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS1c^2\right)} * fS1c^2 * \beta 1c + \frac{-\beta 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS2c^2\right) - 2 * \Delta MqS2}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS2c^2\right)} * fS2c^2 * \beta 2c + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{-\beta nc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fSnc^2\right) - 2 * \Delta MqSn}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fSnc^2\right)} * fSnc^2 * \beta nc + \frac{-\beta Zc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fZc^2\right) - 2 * \Delta MqZ}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fZc^2\right)} * fZc^2 * \beta Zc \right)$$

Reordenando la ecuación 4.23

Ecuación 4. 24

$$2*\Delta Mq+\frac{2*\Delta MqA*fAc^2}{1+\sum_1^k(fAc^2)}+\frac{2*\Delta MqE1*fE1c^2*\alpha 1c}{1+\sum_1^k(fE1c^2)}+\frac{2*\Delta MqE2*fE2c^2*\alpha 2c}{1+\sum_1^k(fE2c^2)}+$$

$$+\frac{2*\Delta MqEm*fEmc^2*\alpha mc}{1+\sum_1^k(fEmc^2)}-\frac{2*\Delta MqS1*fS1c^2*\beta 1c}{1+\sum_1^k(fS1c^2)}-\frac{2*\Delta MqS2*fS2c^2*\beta 2c}{1+\sum_1^k(fS2c^2)}-\ldots$$

$$-\frac{2*\Delta MqSn*fSnc^2*\beta nc}{1+\sum_1^k(fSnc^2)}\frac{2*\Delta MqZ*fZc^2*\beta Zc}{1+\sum_1^k(fZc^2)}=$$

$$=-\lambda q*\Phi_0+\frac{fAc^2*\sum_1^k(\lambda q*fAc^2)}{1+\sum_1^k(fAc^2)}+\frac{\alpha 1c^2*fE1c^2*\sum_1^k(\lambda q*fE1c^2)}{1+\sum_1^k(fE1c^2)}+$$

$$+\frac{\alpha 2c^2*fE2c^2\sum_1^k(\lambda q*fE2c^2)}{1+\sum_1^k(fE2c^2)}+\ldots+\frac{\alpha mc^2*fEmc^2*\sum_1^k(\lambda q*fEmc^2)}{1+\sum_1^k(fEmc^2)}+$$

$$+\frac{\beta 1c^2*fS1c^2*\sum_1^k(\lambda q*fS1c^2)}{1+\sum_1^k(fS1c^2)}+\frac{\beta 2c^2*fS2c^2*\sum_1^k(\lambda q*fS2c^2)}{1+\sum_1^k(fS2c^2)}+\ldots$$

$$+\frac{\beta nc^2*fSnc^2*\sum_1^k(\lambda q*fSnc^2)}{1+\sum_1^k(fSnc^2)}+\frac{\beta Zc^2*fZc^2*\sum_1^k(\lambda q*fZc^2)}{1+\sum_1^k(fZc^2)}$$

La Ecuación 4.24 es referida sólo a un Intervalo de Tamaños.

Definimos para una malla "i" (Términos a la izquierda de la Igualdad):

Ecuación 4. 25

$$R^i=2*\left(\Delta Mq^i+\frac{\Delta MqA*fAc^{i2}}{1+\sum_1^k(fAc^2)}+\frac{\Delta MqE1*fE1c^{i2}*\alpha 1c}{1+\sum_1^k(fE1c^2)}+\frac{\Delta MqE2*fE2c^{i2}*\alpha 2c}{1+\sum_1^k(fE2c^2)}+\right.$$

$$+\frac{\Delta MqEm*fEmc^{i2}*\alpha mc}{1+\sum_1^k(fEmc^2)}-\frac{\Delta MqS1*fS1c^{i2}*\beta 1c}{1+\sum_1^k(fS1c^2)}-\frac{\Delta MqS2*fS2c^{i2}*\beta 2c}{1+\sum_1^k(fS2c^2)}-\ldots$$

$$\left.-\frac{\Delta MqSn*fSnc^{i2}*\beta nc}{1+\sum_1^k(fSnc^2)}-\frac{\Delta MqZ*fZc^{i2}*\beta Zc}{1+\sum_1^k(fZc^2)}\right)$$

Definimos para una malla "i" (Términos a la derecha de la Igualdad):

Ecuación 4. 26

$$P^i = -\lambda q * \Phi_0 + \frac{fAc^2 * \sum_1^k (\lambda q * fAc^2)}{1 + \sum_1^k (fAc^2)} + \frac{\alpha 1c^2 * fE1c^2 * \sum_1^k (\lambda q * fE1c^2)}{1 + \sum_1^k (fE1c^2)} +$$

$$+ \frac{\alpha 2c^2 * fE2c^2 \sum_1^k (\lambda q * fE2c^2)}{1 + \sum_1^k (fE2c^2)} + \ldots + \frac{\alpha mc^2 * fEmc^2 * \sum_1^k (\lambda q * fEmc^2)}{1 + \sum_1^k (fEmc^2)} +$$

$$+ \frac{\beta 1c^2 * fS1c^2 * \sum_1^k (\lambda q * fS1c^2)}{1 + \sum_1^k (fS1c^2)} + \frac{\beta 2c^2 * fS2c^2 * \sum_1^k (\lambda q * fS2c^2)}{1 + \sum_1^k (fS2c^2)} + \ldots$$

$$+ \frac{\beta nc^2 * fSnc^2 * \sum_1^k (\lambda q * fSnc^2)}{1 + \sum_1^k (fSnc^2)} + \frac{\beta Zc^2 * fZc^2 * \sum_1^k (\lambda q * fZc^2)}{1 + \sum_1^k (fZc^2)}$$

Sea:

$$HAc^i = \frac{fAc^{i2}}{1 + \sum_1^k (fAc^2)} \qquad HS1c^i = \frac{fS1c^{i2}}{1 + \sum_1^k (fS1c^2)}$$

$$HE1c^i = \frac{fE1c^{i2}}{1 + \sum_1^k (fE1c^2)} \qquad HS2c^i = \frac{fS2c^{i2}}{1 + \sum_1^k (fS2c^2)}$$

$$HE2c^i = \frac{fE2c^{i2}}{1 + \sum_1^k (fE2c^2)} \qquad HSnc^i = \frac{fSnc^{i2}}{1 + \sum_1^k (fSnc^2)}$$

$$HEmc^i = \frac{fEmc^{i2}}{1 + \sum_1^k (fEmc^2)} \qquad HZc^i = \frac{fZc^{i2}}{1 + \sum_1^k (fZc^2)}$$

Si reemplazamos los factores Hc^i en las ecuaciónes 4.25 y 4.26 obtendremos respectivamente:

Ecuación 4. 27

$$R^i = 2 * \left(\Delta Mq^i + \Delta MqA * HAc^i + \Delta MqE1 * \alpha 1c * HE1c^i + \Delta MqE2 * \alpha 2c * HE2c^i + \right.$$
$$+ \Delta MqEm * HEmc^i * \alpha mc - \Delta MqS1 * HS1c^i * \beta 1c - \Delta MqS2 * HS2c^i * \beta 2c - \ldots$$
$$\left. - \Delta MqSn * HSnc^i * \beta nc - \Delta MqZ * HZc^i * \beta Zc \right)$$

Ecuación 4. 28

$$P^i = -\lambda q * \Phi_0 + HAc^i * \sum_1^k \left(\lambda q * fAc^2\right) + HE1c^i * \alpha 1c^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fE1c^2\right) +$$
$$+ HE2c^i * \alpha 2c^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fE2c^2\right) + \ldots + HEmc^i * \alpha mc^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fEmc^2\right) +$$
$$+ HS1c^i * \beta 1c^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fS1c^2\right) + HS2c^i * \beta 2c^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fS2c^2\right) + \ldots$$
$$+ HSnc^i * \beta nc^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fSnc^2\right) + HS1c^i * \beta Zc^2 * \sum_1^k \left(\lambda q * fZc^2\right)$$

Definimos las siguientes Matrices:

$$\tilde{H}^i = \left[HAc^i \quad HE1c^i \quad HE2c^i \quad \ldots \quad HEmc^i \quad HS1c^i \quad HS2c^i \quad \ldots \quad HSnc^i \quad HZc^i\right]$$

$\tilde{H}^i$: Vector fila (1,m+n+2)

$$\Delta\tilde{M}qES = \begin{bmatrix} \Delta MqA \\ \Delta MqE1 \\ \Delta MqE2 \\ \ldots \\ \Delta MqEm \\ \Delta MqS1 \\ \Delta MqS2 \\ \Delta MqSn \\ \ldots \\ \Delta MqZ \end{bmatrix}$$

$\Delta\tilde{M}qES$: Matriz Columna (m+n+2,1) (Errores de las Entradas y Salidas de los caudales por Análisis Químico).

$$\tilde{Q}u = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha 1c \\ \alpha 2c \\ \dots \\ \alpha nc \\ -\beta 1c \\ -\beta 2c \\ \dots \\ -\beta nc \\ -\beta Zc \end{bmatrix}$$

$\tilde{Q}u$: Matriz Columna (m+n+2,1) (Relaciones de los caudales).

Definamos la funcion "Diag" tal que:

$$Diag(\tilde{A}) = diag\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ \dots \\ an \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & an \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\lambda} q = \begin{bmatrix} \lambda q^{I} \\ \lambda q^{II} \\ \dots \\ \lambda q^{k} \end{bmatrix}$$

$\tilde{\lambda} q$: Matriz Columna (k,1) (Multiplicadores de Lagrange por mallas para corrección de Análisis Químico).

$$\tilde{F}2 = \begin{bmatrix} fAc^{I^2} & fE1c^{I^2} & fE2c^{I^2} & \dots & fEmc^{I^2} & fS1c^{I^2} & fS2c^{I^2} & \dots & fSnc^{I^2} & fZc^{I^2} \\ fAc^{II^2} & fE1c^{II^2} & fE2c^{II^2} & \dots & fEmc^{II^2} & fS1c^{II^2} & fS2c^{II^2} & \dots & fSnc^{II^2} & fZc^{II^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ fAc^{k^2} & fE1c^{k^2} & fE2c^{k^2} & \dots & fEmc^{k^2} & fS1c^{k^2} & fS2c^{k^2} & \dots & fSnc^{k^2} & fZc^{k^2} \end{bmatrix}$$

$\tilde{F}2$: Matriz (k,m+n+2) (Fracciones en peso elevados al cuadrado).

Las ecuaciones 4.27 y 4.28 pueden redefinirse como:

Ecuación 4. 29

$$R^{i} = 2 * \left(\Delta Mq^{i} + \tilde{H}^{i} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)$$

Ecuación 4. 30

$$P^{i} = -\lambda q^{i} * \Phi_0{}^{i} + \tilde{H} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2^{i} * \tilde{\lambda}q$$

Definamos para todos los intervalos de tamaño:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} R^{i} \\ R^{ii} \\ \cdots \\ R^{k} \end{pmatrix} \qquad \tilde{P} = \begin{pmatrix} P^{i} \\ P^{ii} \\ \cdots \\ P^{k} \end{pmatrix}$$

$\tilde{R}$: Matriz Columna (k,1). $\tilde{P}$: Matriz Columna (k,1).

$$\tilde{H} = \begin{bmatrix} \tilde{H}^{i} \\ \tilde{H}^{ii} \\ \cdots \\ \tilde{H}^{k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} HAc^{i} & HE1c^{i} & HE2c^{i} & \ldots & HEmc^{i} & HS1c^{i} & HS2c^{i} & \ldots & HSnc^{i} & HZc^{i} \\ HAc^{ii} & HE1c^{ii} & HE2c^{ii} & \ldots & HEmc^{ii} & HS1c^{ii} & HS2c^{ii} & \ldots & HSnc^{ii} & HZc^{ii} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ HAc^{k} & HE1c^{k} & HE2c^{k} & \ldots & HEmc^{k} & HS1c^{k} & HS2c^{k} & \ldots & HSnc^{k} & HZc^{k} \end{bmatrix}$$

$\tilde{H}$: Matriz (k,m+n+2).

$$\Delta\tilde{M}q = \begin{bmatrix} \Delta Mq^{i} \\ \Delta Mq^{ii} \\ \cdots \\ \Delta Mq^{k} \end{bmatrix} \qquad \tilde{\Phi}_0 = \begin{bmatrix} \Phi_0{}^{i} \\ \Phi_0{}^{ii} \\ \cdots \\ \Phi_0{}^{k} \end{bmatrix}$$

$\Delta\tilde{M}q$: Matriz Columna (k,1). $\tilde{\Phi}_0$: Matriz Columna (k,1).

Entonces las Ecuaciones 4.29 y 4.30 redefinidas para todos los intervalos de tamaño serán:

Ecuación 4. 31

$$\tilde{R} = 2 * \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)$$

Ecuación 4. 32

$$\tilde{P} = -Diag(\Phi_0) * \tilde{X}q + \tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2' * \tilde{X}q$$

Ecuación 4. 33

$$\tilde{P} = \left[\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)\right] * \tilde{X}q$$

La Ecuación 4.31 y 4.33 quedan representadas matricialmente por:

Ecuación 4. 34

$$
\begin{pmatrix} R^{i} \\ R^{ii} \\ \cdots \\ R^{k} \end{pmatrix} = 2 * \left(\begin{bmatrix} \Delta Mq^{i} \\ \Delta Mq^{ii} \\ \cdots \\ \Delta Mq^{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} HAc^{i} & HE1c^{i} & HE2c^{i} & \ldots & HEmc^{i} & HS1c^{i} & HS2c^{i} & \ldots & HSnc^{i} & HZc^{i} \\ HAc^{ii} & HE1c^{ii} & HE2c^{ii} & \ldots & HEmc^{ii} & HS1c^{ii} & HS2c^{ii} & \ldots & HSnc^{ii} & HZc^{ii} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ HAc^{k} & HE1c^{k} & HE2c^{k} & \ldots & HEmc^{k} & HS1c^{k} & HS2c^{k} & \ldots & HSnc^{k} & HZc^{k} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha 1c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha mc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta 1c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta 2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta Zc \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \Delta MqA \\ \Delta MqE1 \\ \Delta MqE2 \\ \cdots \\ \Delta MqEm \\ \Delta MqS1 \\ \Delta MqS2 \\ \Delta MqSn \\ \cdots \\ \Delta MqZ \end{bmatrix} \right)
$$

Ecuación 4. 35

$$
\begin{pmatrix} P^{i} \\ P^{ii} \\ \cdots \\ P^{k} \end{pmatrix} = \left[\begin{bmatrix} HAc^{i} & HE1c^{i} & HE2c^{i} & \ldots & HEmc^{i} & HS1c^{i} & HS2c^{i} & \ldots & HSnc^{i} & HZc^{i} \\ HAc^{ii} & HE1c^{ii} & HE2c^{ii} & \ldots & HEmc^{ii} & HS1c^{ii} & HS2c^{ii} & \ldots & HSnc^{ii} & HZc^{ii} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ HAc^{k} & HE1c^{k} & HE2c^{k} & \ldots & HEmc^{k} & HS1c^{k} & HS2c^{k} & \ldots & HSnc^{k} & HZc^{k} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha 1c^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 2c^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha mc^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 1c^{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta 2c^{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta nc^{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta Zc^{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} fAc^{i^2} & fAc^{ii^2} & \cdots & fAc^{k^2} \\ fE1c^{i^2} & fE1c^{ii^2} & \ldots & fE1c^{k^2} \\ fE2c^{i^2} & fE2c^{ii^2} & \ldots & fE2c^{k^2} \\ \cdots & \cdots & \ldots & \cdots \\ fEmc^{i^2} & fEmc^{ii^2} & \cdots & fEmc^{k^2} \\ fS1c^{i^2} & fS1c^{ii^2} & \cdots & fS1c^{k^2} \\ fS2c^{i^2} & fS2c^{ii^2} & \cdots & fS2c^{k^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ fSnc^{i^2} & fSnc^{ii^2} & \ldots & fSnc^{k^2} \\ fZc^{i^2} & fZc^{ii^2} & \cdots & fZc^{k^2} \end{bmatrix} \right] * \begin{bmatrix} \lambda q^{i} \\ \lambda q^{ii} \\ \cdots \\ \lambda q^{k} \end{bmatrix}
$$

$$
- \begin{bmatrix} \Phi_0{}^{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi_0{}^{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi_0{}^{k} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda q^{i} \\ \lambda q^{ii} \\ \cdots \\ \lambda q^{k} \end{bmatrix}
$$

La Matriz $\tilde{H}$ puede ser representada por:

$$\tilde{H}=\begin{bmatrix} \frac{fAc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fAc^{2}\right)} & \frac{fE1c^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE1c^{2}\right)} & \frac{fE2c^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fEmc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right)} & \frac{fS1c^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right)} & \frac{fS2c^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fSnc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right)} & \frac{fZc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fZc^{2}\right)} \\ \frac{fAc^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fAc^{2}\right)} & \frac{fE1c^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE1c^{2}\right)} & \frac{fE2c^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fEmc^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right)} & \frac{fS1c^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right)} & \frac{fS2c^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fSnc^{ii2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right)} & \frac{fZc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fZc^{2}\right)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{fAc^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fAc^{2}\right)} & \frac{fE1c^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE1c^{2}\right)} & \frac{fE2c^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fE2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fEmc^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right)} & \frac{fS1c^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right)} & \frac{fS2c^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right)} & \cdots & \frac{fSnc^{k2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right)} & \frac{fZc^{i2}}{1+\sum_{1}^{k}\left(fZc^{2}\right)} \end{bmatrix}$$

$\tilde{H}$: Matriz (k,m+n+2).

$$\tilde{S}F2 = \begin{bmatrix} \sum_{1}^{k}(fAc^2) \\ \sum_{1}^{k}(fE1c^2) \\ \sum_{1}^{k}(fE2c^2) \\ \dots \\ \sum_{1}^{k}(fEmc^2) \\ \sum_{1}^{k}(fS1c^2) \\ \sum_{1}^{k}(fS2c^2) \\ \dots \\ \sum_{1}^{k}(fSnc^2) \\ \sum_{1}^{k}(fZc^2) \end{bmatrix}$$

$\tilde{S}F2$: Matriz Columna (m+n+2,1).

Sea la Matriz Identidad $I(n)$, donde "nxn" es el tamaño.

Se sabe que:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & an \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{a1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a1} \end{bmatrix} \qquad \text{Nota: } \forall ai \neq 0$$

Entonces se puede establecer la siguiente relación:

Ecuación 4. 36

$$\tilde{H} = \tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1}$$

La matriz $\tilde{\Phi}_0$ puede ser representada por: (los términos $\Phi_0{}^i$ son determinados por la ecuación 4.13)

Ecuación 4. 37

$$\tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu$$

$\tilde{\Phi}_0$: Matriz Columna (k,1).

Reemplazando la Ecuación 4.36 en la Ecuación 4.31 y las ecuaciones 4.36 y 4.37 en la ecuación 4.33 obtenemos:

Ecuación 4. 38

$$\tilde{R} = 2 * \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)$$

Ecuación 4. 39

$$\tilde{P} = \left[\tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu)\right] * \tilde{\lambda}q$$

Recordemos que $R^i = P^i$, por ende $R = P$

Los Multiplicadores de Lagrange λq lo podemos hallar por la siguiente relación:

Ecuación 4. 40

$$\tilde{\lambda}q = 2 * \left[\tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu)\right]^{-1}$$
$$* \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)$$

O por simplicidad se podría usar las ecuaciones 4.31, 4.33, 4.36, 4.37

Ecuación 4. 41

$$\tilde{\lambda}q = 2 * \left[\tilde{H} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\tilde{\Phi}_0)\right]^{-1} * (\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES)$$

$$\tilde{H} = \tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1}$$

$$\tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu$$

Obtendremos los Multiplicadores de Lagrange

$\lambda A, \lambda E1, \lambda E2, \lambda Em, \lambda S1, \lambda S2, \lambda Sn, \lambda Z$ por medio de las ecuaciones 4.15, 4.16, 4.17, 4.18, 4.19, 4.20, 4.21 4.22

$$\lambda A = \frac{\sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fAc^2\right) - 2 * \Delta MqA}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fAc^2\right)} \qquad \lambda E1 = \frac{\alpha 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fE1c^2\right) - 2 * \Delta MqE1}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fE1c^2\right)}$$

$$\lambda E2 = \frac{\alpha 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fE2c^2\right) - 2 * \Delta MqE2}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fE2c^2\right)} \qquad \lambda Em = \frac{\alpha mc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fEmc^2\right) - 2 * \Delta MqEm}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fEmc^2\right)}$$

$$\lambda S1 = \frac{-\beta 1c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS1c^2\right) - 2 * \Delta MqS1}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS1c^2\right)} \qquad \lambda S2 = \frac{-\beta 2c * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fS2c^2\right) - 2 * \Delta MqS2}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fS2c^2\right)}$$

$$\lambda Sn = \frac{-\beta nc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fSnc^2\right) - 2 * \Delta MqSn}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fSnc^2\right)} \qquad \lambda Z = \frac{-\beta Zc * \sum_{1}^{k}\left(\lambda q * fZc^2\right) - 2 * \Delta MqZ}{1 + \sum_{1}^{k}\left(fZc^2\right)}$$

Para hacer un cálculo directo, lo expresaremos en forma matricial definiendo:

$$\tilde{\lambda}ES = \begin{bmatrix} \lambda A \\ \lambda E1 \\ \lambda E2 \\ \ldots \\ \lambda Em \\ \lambda S1 \\ \lambda S2 \\ \lambda Sn \\ \ldots \\ \lambda Z \end{bmatrix}$$

$\tilde{\lambda}ES$: Matriz Columna (m+n+2,1) (Multiplicadores de Lagrange de los Entradas y Salidas de los caudales por Análisis Químico).

Estos Multiplicadores de Lagrange se obtendrán por la siguiente ecuación:

Ecuación 4. 42

$$\tilde{\lambda}ES = \left[Diag\left(\tilde{S}F2\right) + I\left(m+n+2\right)\right]^{-1} * \left[Diag\left(\tilde{Q}u\right) * \tilde{F}2' * \tilde{\lambda}q - 2 * \Delta\tilde{M}qES\right]$$

La ecuación 4.41 se representa de por la siguiente expresión:

Ecuación 4. 43

$$\tilde{\lambda} ES = \left[Diag\begin{bmatrix} \sum_{1}^{k}\left(fAc^{2}\right) \\ \sum_{1}^{k}\left(fE1c^{2}\right) \\ \sum_{1}^{k}\left(fE2c^{2}\right) \\ \cdots \\ \sum_{1}^{k}\left(fEmc^{2}\right) \\ \sum_{1}^{k}\left(fS1c^{2}\right) \\ \sum_{1}^{k}\left(fS2c^{2}\right) \\ \cdots \\ \sum_{1}^{k}\left(fSnc^{2}\right) \\ \sum_{1}^{k}\left(fZc^{2}\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} * \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha 1c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha 2c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha mc & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta 1c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta 2c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta nc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\beta Zc \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} fAc'^{2} & fAc''^{2} & \ldots & fAc^{k2} \\ fE1c'^{2} & fE1c''^{2} & \ldots & fE1c^{k2} \\ fE2c'^{2} & fE2c''^{2} & \ldots & fE2c^{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ fEmc'^{2} & fEmc''^{2} & \ldots & fEmc^{k2} \\ fS1c'^{2} & fS1c''^{2} & \ldots & fS1c^{k2} \\ fS2c'^{2} & fS2c''^{2} & \ldots & fS2c^{k2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ fSnc'^{2} & fSnc''^{2} & \ldots & fSnc^{k2} \\ fZc'^{2} & fZc''^{2} & \ldots & fZc^{k2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \lambda q' \\ \lambda q'' \\ \ldots \\ \lambda q^{k} \end{bmatrix} - 2 * \begin{bmatrix} \Delta MqA \\ \Delta MqE1 \\ \Delta MqE2 \\ \ldots \\ \Delta MqEm \\ \Delta MqS1 \\ \Delta MqS2 \\ \Delta MqSn \\ \cdots \\ \Delta MqZ \end{bmatrix} \right]$$

Hallados los Multiplicadores de Lagrange se procederá a calcular las correcciones según los Grupos de ecuaciones 4.1 y 4.2:

Grupo Ecuaciones # 4. 3

$$\Delta LA = -\frac{\lambda A}{2} \qquad \Delta LS1 = -\frac{\lambda S1}{2}$$

$$\Delta LE1 = -\frac{\lambda E1}{2} \qquad \Delta LS2 = -\frac{\lambda S2}{2}$$

$$\Delta LE2 = -\frac{\lambda E2}{2} \qquad \Delta LSn = -\frac{\lambda Sn}{2}$$

$$\Delta LEm = -\frac{\lambda Em}{2} \qquad \Delta LZ = -\frac{\lambda Z}{2}$$

Grupo Ecuaciones # 4. 4

$$\Delta LfA = \frac{fAc}{2} * (-\lambda q + \lambda A) \qquad \Delta LfS1 = \frac{fS1c}{2} * (+\lambda q * \beta 1c + \lambda S1)$$

$$\Delta LfE1 = \frac{fE1c}{2} * (-\lambda q * \alpha 1c + \lambda E1) \qquad \Delta LfS2 = \frac{fS2c}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2)$$

$$\Delta LfE2 = \frac{fE2c}{2} * (-\lambda q * \alpha 2c + \lambda E2) \qquad \Delta LfSn = \frac{fSnc}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn)$$

$$\Delta LfEm = \frac{fEmc}{2} * (-\lambda q * \alpha mc + \lambda Em) \qquad \Delta LfZ = \frac{fZc}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z)$$

Finalmente se corregirán las leyes.

$$LAc = LA - \Delta LA \qquad LfAc = LfA - \Delta LfA$$

$$LEic = LEi - \Delta LEi; i = \{1,2,\ldots,m\} \qquad LfEic = LfEi - \Delta LfEi; i = \{1,2,\ldots,m\}$$

$$LSjc = LSj - \Delta LSj; j = \{1,2,\ldots,n\} \qquad LfSjc = LfSj - \Delta LfSj; j = \{1,2,\ldots,n\}$$

$$LZc = LZ - \Delta LZ \qquad LfZc = LfZ - \Delta LfZ$$

4.5 RESUMEN DEL MÉTODO

1. Corregir los Análisis Granulométricos (Ver Capítulo 2).

2. Hallar los errores: (Ecuaciones 4.7 y 4.9).

$$\boxed{\begin{aligned}&\Delta Mq = \mathrm{LfA} * \mathrm{fAc} + LfE1 * \mathrm{fE1c} * \alpha 1c + LfE2 * \mathrm{fE2c} * \alpha 2c + \ldots + LfEm * \mathrm{fEmc} * \alpha mc \\ &- (LfS1 * \mathrm{fS1c} * \beta 1c + LfS2 * \mathrm{fS2c} * \beta 2c + \ldots + LfSn * \mathrm{fSnc} * \beta nc + LfZ * \mathrm{fZc} * \beta Zc)\end{aligned}}$$

$$\Delta MqES = L - \left(Lf^{i} * fc^{i} + Lf^{ii} * fc^{ii} + Lf^{iii} * fc^{iii} + \ldots + Lf^{k-1} * fc^{k-1} + Lf^{k} * fc^{k} \right)$$

$$\Delta MqES = L - \sum_{1}^{k} \left(Lf * fc \right)$$

3. Hallar las Matrices:

$$\Delta \tilde{M}qES = \begin{bmatrix} \Delta MqA \\ \Delta MqE1 \\ \Delta MqE2 \\ \ldots \\ \Delta MqEm \\ \Delta MqS1 \\ \Delta MqS2 \\ \Delta MqSn \\ \ldots \\ \Delta MqZ \end{bmatrix} \qquad \Delta \tilde{M}q = \begin{bmatrix} \Delta Mq^{i} \\ \Delta Mq^{ii} \\ \ldots \\ \Delta Mq^{k} \end{bmatrix} \qquad \tilde{Q}u = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha 1c \\ \alpha 2c \\ \ldots \\ \alpha mc \\ -\beta 1c \\ -\beta 2c \\ \ldots \\ -\beta nc \\ -\beta Zc \end{bmatrix}$$

$(m+n+2,1)$ $\qquad (k,1) \qquad$ $(m+n+2,1)$

$$\tilde{F}2 = \begin{bmatrix} fAc^{i^2} & fE1c^{i^2} & fE2c^{i^2} & \ldots & fEmc^{i^2} & fS1c^{i^2} & fS2c^{i^2} & \ldots & fSnc^{i^2} & fZc^{i^2} \\ fAc^{ii^2} & fE1c^{ii^2} & fE2c^{ii^2} & \ldots & fEmc^{ii^2} & fS1c^{ii^2} & fS2c^{ii^2} & \ldots & fSnc^{ii^2} & fZc^{ii^2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ fAc^{k^2} & fE1c^{k^2} & fE2c^{k^2} & \ldots & fEmc^{k^2} & fS1c^{k^2} & fS2c^{k^2} & \ldots & fSnc^{k^2} & fZc^{k^2} \end{bmatrix}$$

$(k, m+n+2)$

$$\tilde{S}F2 = \begin{bmatrix} \sum_1^k (fAc^2) \\ \sum_1^k (fE1c^2) \\ \sum_1^k (fE2c^2) \\ \ldots \\ \sum_1^k (fEmc^2) \\ \sum_1^k (fS1c^2) \\ \sum_1^k (fS2c^2) \\ \ldots \\ \sum_1^k (fSnc^2) \\ \sum_1^k (fZc^2) \end{bmatrix}$$
$(m+n+2,1)$

4. Calcular las Matrices $\tilde{H}$ y $\tilde{\Phi}_0$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{H} = \tilde{F}2 * \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} \\ (k, m+n+2) \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu \\ (k,1) \end{array}}$$

Recuérdese que se definió la función: $Diag(A)$

$$Diag(\tilde{A}) = diag\begin{pmatrix} a1 \\ a2 \\ \ldots \\ an \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & an \end{pmatrix}$$

Sea la Matriz Identidad $I(n')$, donde "(n', n')" es el tamaño.

$$I(n') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(n', n')

5. Hallar los Multiplicadores de Lagrange (para corrección de Análisis Químico) para cada Intervalo de Tamaño (Ecuación 4.41)

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\lambda}q = 2 * \left[\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)\right]^{-1} * \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)\\ &(k,1)\end{aligned}}$$

6. Hallar los Multiplicadores de Lagrange por flujos de Entrada y Salida del Sistema. (Ecuación 4.42)

$$\boxed{\begin{aligned}&\tilde{\lambda}ES = \left[Diag(\tilde{S}F2) + I(m+n+2)\right]^{-1} * \left[Diag(\tilde{Q}u) * \tilde{F}2' * \tilde{\lambda}q - 2 * \Delta\tilde{M}qES\right]\\ &(m+n+2,1)\end{aligned}}$$

7. Hallar las correcciones para cada Intervalo de Tamaño (Grupo de Ecuaciones 4.2).

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta LfA &= \frac{fAc}{2} * (-\lambda q + \lambda A)\\
\Delta LfE1 &= \frac{fE1c}{2} * (-\lambda q * \alpha 1c + \lambda E1)\\
\Delta LfE2 &= \frac{fE2c}{2} * (-\lambda q * \alpha 2c + \lambda E2)\\
\Delta LfEm &= \frac{fEmc}{2} * (-\lambda q * \alpha mc + \lambda Em)
\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
\Delta LfS1 &= \frac{fS1c}{2} * (+\lambda q * \beta 1c + \lambda S1)\\
\Delta LfS2 &= \frac{fS2c}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2)\\
\Delta LfSn &= \frac{fSnc}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn)\\
\Delta LfZ &= \frac{fZc}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z)
\end{aligned}}$$

8. Hallar las Correcciones para los flujos (Entradas y Salidas del Sistema) (Grupo de ecuaciones 4.1).

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta LA &= -\frac{\lambda A}{2}\\ \Delta LE1 &= -\frac{\lambda E1}{2}\\ \Delta LE2 &= -\frac{\lambda E2}{2}\\ \Delta LEm &= -\frac{\lambda Em}{2}\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}\Delta LS1 &= -\frac{\lambda S1}{2}\\ \Delta LS2 &= -\frac{\lambda S2}{2}\\ \Delta LSn &= -\frac{\lambda Sn}{2}\\ \Delta LZ &= -\frac{\lambda Z}{2}\end{aligned}}$$

9. Corregir las Leyes según:

$$\boxed{\begin{aligned}&LAc = LA - \Delta LA\\ &LEic = LEi - \Delta LEi; i = \{1,2,...,m\}\\ &LSjc = LSj - \Delta LSj; j = \{1,2,...,n\}\\ &LZc = LZ - \Delta LZ\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&LfAc = LfA - \Delta LfA\\ &LfEic = LfEi - \Delta LfEi; i = \{1,2,...,m\}\\ &LfSjc = LfSj - \Delta LfSj; j = \{1,2,...,n\}\\ &LfZc = LfZ - \Delta LfZ\end{aligned}}$$

10. Hallar el Error (Opcional).

$$f(X) = S = \Delta LA^2 + \Delta LE1^2 + \Delta LE2^2 + ... + \Delta LEm^2 + \Delta LS1^2 + \Delta LS2^2 + ... + \Delta LSn^2 + \Delta LZ^2$$
$$+\sum_1^k \Delta LfA^2 + \sum_1^k \Delta LfE1^2 + \sum_1^k \Delta LfE2^2 + ... + \sum_1^k \Delta LfEm^2$$
$$+\sum_1^k \Delta LfS1^2 + \sum_1^k \Delta LfS2^2 + ... + \sum_1^k \Delta LfSn^2 + \sum_1^k \Delta LfZ^2$$

4.6 PROPIEDADES PARA LA CORRÉCCION DE ANÁLISIS QUÍMICO POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE EN EL SISTEMA EMPLEADO

Propiedad #01:

La sumatoria de todas las correcciones es cero

Se tiene las correcciones por intervalos de tamaños:

$$\Delta LfA = \frac{fAc}{2} * (-\lambda q + \lambda A) \qquad \Delta LfS1 = \frac{fS1c}{2} * (+\lambda q * \beta 1c + \lambda S1)$$

$$\Delta LfE1 = \frac{fE1c}{2} * (-\lambda q * \alpha 1c + \lambda E1) \qquad \Delta LfS2 = \frac{fS2c}{2} * (+\lambda q * \beta 2c + \lambda S2)$$

$$\Delta LfE2 = \frac{fE2c}{2} * (-\lambda q * \alpha 2c + \lambda E2) \qquad \Delta LfSn = \frac{fSnc}{2} * (+\lambda q * \beta nc + \lambda Sn)$$

$$\Delta LfEm = \frac{fEmc}{2} * (-\lambda q * \alpha mc + \lambda Em) \qquad \Delta LfZ = \frac{fZc}{2} * (+\lambda q * \beta Zc + \lambda Z)$$

Para la sumatoria de estas correcciones:

(Recuerde que: $\sum fc = 1$)

$$\sum(\Delta LfA) = -\frac{1}{2} * \sum(fAc * \lambda q) + \frac{\lambda A}{2} * \sum fAc = -\frac{1}{2} * \sum(fAc * \lambda q) + \frac{\lambda A}{2}$$

$$\sum(\Delta LfE1) = -\frac{\alpha 1c}{2} * \sum(fE1c * \lambda q) + \frac{\lambda E1}{2} * \sum fE1c = -\frac{\alpha 1c}{2} * \sum(fE1c * \lambda q) + \frac{\lambda E1}{2}$$

$$\sum(\Delta LfE2) = -\frac{\alpha 2c}{2} * \sum(fE2c * \lambda q) + \frac{\lambda E2}{2} * \sum fE2c = -\frac{\alpha 2c}{2} * \sum(fE2c * \lambda q) + \frac{\lambda E2}{2}$$

$$\sum(\Delta LfEm) = -\frac{\alpha mc}{2} * \sum(fEmc * \lambda q) + \frac{\lambda Em}{2} * \sum fEmc = -\frac{\alpha mc}{2} * \sum(fEmc * \lambda q) + \frac{\lambda Em}{2}$$

$$\sum(\Delta LfS1) = \frac{\beta 1c}{2} * \sum(fS1c * \lambda q) + \frac{\lambda S1}{2} * \sum fS1c = \frac{\beta 1c}{2} * \sum(fS1c * \lambda q) + \frac{\lambda S1}{2}$$

$$\sum(\Delta LfS2) = \frac{\beta 2c}{2} * \sum(fS2c * \lambda q) + \frac{\lambda S2}{2} * \sum fS2c = \frac{\beta 2c}{2} * \sum(fS2c * \lambda q) + \frac{\lambda S2}{2}$$

$$\sum(\Delta LfSn) = \frac{\beta nc}{2} * \sum(fSnc * \lambda q) + \frac{\lambda Sn}{2} * \sum fSnc = \frac{\beta nc}{2} * \sum(fSnc * \lambda q) + \frac{\lambda Sn}{2}$$

$$\sum(\Delta LfZ) = \frac{\beta Zc}{2} * \sum(fZc * \lambda q) + \frac{\lambda Z}{2} * \sum fZc = \frac{\beta Zc}{2} * \sum(fZc * \lambda q) + \frac{\lambda Z}{2}$$

La sumatoria de todas las correcciones por intervalo de tamaño será:

$$\sum(\Delta LfA) + \sum(\Delta LfE1) + \sum(\Delta LfE2) + \sum(\Delta LfEm) + \sum(\Delta LfS1) + \sum(\Delta LfS2) + \sum(\Delta LfSn) + \sum(\Delta LfZ) =$$
$$= -\frac{1}{2} * \sum(fAc * \lambda q) - \frac{\alpha 1c}{2} * \sum(fE1c * \lambda q) - \frac{\alpha 2c}{2} * \sum(fE2c * \lambda q) - \frac{\alpha mc}{2} * \sum(fEmc * \lambda q)$$
$$+ \frac{\beta 1c}{2} * \sum(fS1c * \lambda q) + \frac{\beta 2c}{2} * \sum(fS2c * \lambda q) + \frac{\beta nc}{2} * \sum(fSnc * \lambda q) + \frac{\beta Zc}{2} * \sum(fZc * \lambda q)$$
$$+ \frac{\lambda A}{2} + \frac{\lambda E1}{2} + \frac{\lambda E2}{2} + \frac{\lambda Em}{2} + \frac{\lambda S1}{2} + \frac{\lambda S2}{2} + \frac{\lambda Sn}{2} + \frac{\lambda Z}{2}$$

Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\sum(\Delta LfA)+\sum(\Delta LfE1)+\sum(\Delta LfE2)+\sum(\Delta LfEm)+\sum(\Delta LfS1)+\sum(\Delta LfS2)+\sum(\Delta LfSn)+\sum(\Delta LfZ)=$$
$$=-\frac{1}{2}*\sum[\lambda q(fAc+\alpha 1c*fE1c+\alpha 2c*fE2c+\alpha mc*fEmc-(\beta 1c*fS1c+\beta 2c*fS2c+\beta nc*fSnc+\beta Zc*fZc))]$$
$$+\frac{\lambda A}{2}+\frac{\lambda E1}{2}+\frac{\lambda E2}{2}+\frac{\lambda Em}{2}+\frac{\lambda S1}{2}+\frac{\lambda S2}{2}+\frac{\lambda Sn}{2}+\frac{\lambda Z}{2}$$

Pero la ecuación 2.4 es:

Ecuación 2. 12

$$fAc+fE1c*\alpha 1c+fE2c*\alpha 2c+...+fEmc*\alpha mc=fS1c*\beta 1c+fS2c*\beta 2c+...+fSnc*\beta nc+fZc*\beta Zc$$

Por lo tanto, dicha sumatoria queda reducida a:

$$\sum(\Delta LfA)+\sum(\Delta LfE1)+\sum(\Delta LfE2)+...+\sum(\Delta LfEm)+\sum(\Delta LfS1)+\sum(\Delta LfS2)+...+\sum(\Delta LfSn)+\sum(\Delta LfZ)=$$
$$=\frac{1}{2}*(\lambda A+\lambda E1+\lambda E2+...+\lambda Em+\lambda S1+\lambda S2+...+\lambda Sn+\lambda Z)$$

Las correcciones por flujo son:

$$\Delta LA=-\frac{\lambda A}{2} \qquad \Delta LS1=-\frac{\lambda S1}{2}$$
$$\Delta LE1=-\frac{\lambda E1}{2} \qquad \Delta LS2=-\frac{\lambda S2}{2}$$
$$\Delta LE2=-\frac{\lambda E2}{2} \qquad \Delta LSn=-\frac{\lambda Sn}{2}$$
$$\Delta LEm=-\frac{\lambda Em}{2} \qquad \Delta LZ=-\frac{\lambda Z}{2}$$

La suma de las correcciones por flujo es:

$$\Delta LA+\Delta LE1+\Delta LE2+\Delta LEm+\Delta LS1+\Delta LS2+\Delta LSn+\Delta LZ$$
$$=-\frac{1}{2}*(\lambda A+\lambda E1+\lambda E2+...+\lambda Em+\lambda S1+\lambda S2+...+\lambda Sn+\lambda Z)$$

Observamos que la suma de las correcciones por flujo es el valor negativo de la sumatoria de todas las correcciones por intervalo de tamaño

Por lo tanto la suma de todas las correcciones será:

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum(\Delta LfA)+\sum(\Delta LfE1)+\sum(\Delta LfE2)+...+\sum(\Delta LfEm)+\\ \sum(\Delta LfS1)+\sum(\Delta LfS2)+...+\sum(\Delta LfSn)+\sum(\Delta LfZ)+\\ \Delta LA+\Delta LE1+\Delta LE2+\Delta LEm+\Delta LS1+\Delta LS2+\Delta LSn+\Delta LZ=0\end{array}}$$

Propiedad #02:

La suma de las Leyes corregidas es igual a la suma de las leyes sin corregir.

Se tiene que las leyes se corrigen según:

$$\begin{array}{ll} LAc = LA - \Delta LA & LfAc = LfA - \Delta LfA \\ LEic = LEi - \Delta LEi; i = \{1,2,...,m\} & LfEic = LfEi - \Delta LfEi; i = \{1,2,...,m\} \\ LSjc = LSj - \Delta LSj; j = \{1,2,...,n\} & LfSjc = LfSj - \Delta LfSj; j = \{1,2,...,n\} \\ LZc = LZ - \Delta LZ & LfZc = LfZ - \Delta LfZ \end{array}$$

Por lo tanto, haciendo la sumatoria:

$$\begin{array}{l} LAc + LE1c + LE2c + ... + LEmc + LS1c + LS2c + ... + LSnc + LZc + \\ \sum LfAc + \sum LfE1c + \sum LfE2c + ... + \sum LfEmc + \sum LfS1c + \sum LfS2c + ... + \sum LfSnc + \sum LfZc \\ = LA + LE1 + LE2 + ... + LEm + LS1 + LS2 + ... + LSn + LZ + \\ \sum LfA + \sum LfE1 + \sum LfE2 + ... + \sum LfEm + \sum LfS1 + \sum LfS2 + ... + \sum LfSn + \sum LfZ \\ -(\Delta LA + \Delta LE1 + \Delta LE2 + ... + \Delta LEm + \Delta LS1 + \Delta LS2 + ... + \Delta LSn + \Delta LZ \\ \sum \Delta LfA + \sum \Delta LfE1 + \sum \Delta LfE2 + ... + \sum \Delta LfEm + \sum \Delta LfS1 + \sum \Delta LfS2 + ... + \sum \Delta LfSn + \sum \Delta LfZ) \end{array}$$

Pero por la propiedad anterior se tiene que la suma de todas las correcciones es cero, por lo tanto:

$$\begin{array}{l} LAc + LE1c + LE2c + ... + LEmc + LS1c + LS2c + ... + LSnc + LZc + \\ \sum LfAc + \sum LfE1c + \sum LfE2c + ... + \sum LfEmc + \sum LfS1c + \sum LfS2c + ... + \sum LfSnc + \sum LfZc \\ = LA + LE1 + LE2 + ... + LEm + LS1 + LS2 + ... + LSn + LZ + \\ \sum LfA + \sum LfE1 + \sum LfE2 + ... + \sum LfEm + \sum LfS1 + \sum LfS2 + ... + \sum LfSn + \sum LfZ \end{array}$$

$$\boxed{\sum(\text{Leyes Corregidas}) = \sum(\text{Leyes Sin Corregir})}$$

CAPÍTULO 5
CORRECCIÓN DE ANÁLISIS QUÍMICO DEL CLASIFICADOR STOKES

5.1 INTRODUCCIÓN

La corrección se efectuó por medio de una hoja de cálculo (Microsoft Excel 2000) por medio de la cual se presentan en forma de tablas las matrices utilizadas. En dichas tablas también se presenta el tamaño de la matriz donde se refiere como $(fila, columna)$.

Se utilizarán los Análisis Granulométricos Corregidos previamente en el Capítulo 3.

Recuérdese que:

m=0 (Entradas auxiliares)

n=6 (Salidas auxiliares)

k=12 (Número de intervalo de tamaños.)

Llámese entradas o salidas auxiliares a aquellas diferentes de la entrada o salida principal.

5.2 BALANCE DE MASA:

En el sistema empleado se tiene:

De la Tabla 2.1

Tabla 5. 1 Esquema simbólico de los Análisis Granulométricos

		ENTRADA	SALIDA						
		Alimentación	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
	Flujo (Ej: t/h) / **Intervalo Tamaños**	Ac (Principal)	S1c	S2c	S3c	S4c	S5c	S6c	Zc (Principal)
Fracciones en Peso	i	fAc^{i}	$fS1c^{i}$	$fS2c^{i}$	$fS3c^{i}$	$fS4c^{i}$	$fS5c^{i}$	$fS6c^{i}$	fZc^{i}
	ii	fAc^{ii}	$fS1c^{ii}$	$fS2c^{ii}$	$fS3c^{ii}$	$fS4c^{ii}$	$fS5c^{ii}$	$fS6c^{ii}$	fZc^{ii}
	iii	fAc^{iii}	$fS1c^{iii}$	$fS2c^{iii}$	$fS3c^{iii}$	$fS4c^{iii}$	$fS5c^{iii}$	$fS6c^{iii}$	fZc^{iii}
		...	...	...	...	...	...	...	...
	k-1	fAc^{k-1}	$fS1c^{k-1}$	$fS2c^{k-1}$	$fS3c^{k-1}$	$fS4c^{k-1}$	$fS5c^{k-1}$	$fS6c^{k-1}$	fZc^{k-1}
	k	fAc^{k}	$fS1c^{k}$	$fS2c^{k}$	$fS3c^{k}$	$fS4c^{k}$	$fS5c^{k}$	$fS6c^{k}$	fZc^{k}

Leyes de Estaño para los Flujos y fracciones de los análisis Granulométricos.

Tabla 5. 2 Esquema simbólico de los Análisis Químicos

		ENTRADA	SALIDA						
		Alimentación	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
I. T.	**Ley Flujos**	LA	LS1	LS2	LS3	LS4	LS5	LS6	LZ
i	**Ley para cada fracción (Mallas Valoradas)**	LfA^{i}	$LfS1^{i}$	$LfS2^{i}$	$LfS3^{i}$	$LfS4^{i}$	$LfS5^{i}$	$LfS6^{i}$	LfZ^{i}
ii		LfA^{ii}	$LfS1^{ii}$	$LfS2^{ii}$	$LfS3^{ii}$	$LfS4^{ii}$	$LfS5^{ii}$	$LfS6^{ii}$	LfZ^{ii}
iii		LfA^{iii}	$LfS1^{iii}$	$LfS2^{iii}$	$LfS3^{iii}$	$LfS4^{iii}$	$LfS5^{iii}$	$LfS6^{iii}$	LfZ^{iii}
		...	...	...	...	...	...	...	...
k-1		LfA^{k-1}	$LfS1^{k-1}$	$LfS2^{k-1}$	$LfS3^{k-1}$	$LfS4^{k-1}$	$LfS5^{k-1}$	$LfS6^{k-1}$	LfZ^{k-1}
k		LfA^{k}	$LfS1^{k}$	$LfS2^{k}$	$LfS3^{k}$	$LfS4^{k}$	$LfS5^{k}$	$LfS6^{k}$	LfZ^{k}

Los Análisis Químicos Sin Corregir son:

Tabla 5. 3 Análisis Quimicos sin Corregir

	LEYES %Sn							
	LfA	*LfS1*	*LfS2*	*LfS3*	*LfS4*	*LfS5*	*LfS6*	*LfZ*
I.T.	*Alimento*	*Spigot #01*	*Spigot #02*	*Spigot #03*	*Spigot #04*	*Spigot #05*	*Spigot #06*	*Rebose*
1	2.07%	1.82%	0.79%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	2.00%	1.93%	0.77%	0.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	1.96%	2.45%	1.20%	0.53%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	1.83%	3.66%	1.91%	0.62%	0.50%	0.00%	0.00%	0.00%
5	1.83%	5.62%	6.20%	1.08%	0.83%	0.57%	0.00%	0.00%
6	1.63%	6.36%	14.53%	2.69%	0.76%	0.44%	6.92%	0.00%
7	2.04%	8.49%	33.97%	13.64%	1.53%	0.77%	0.63%	1.66%
8	3.00%	13.19%	28.30%	29.81%	5.40%	2.02%	0.73%	0.42%
9	3.98%	14.15%	12.26%	30.02%	13.68%	5.52%	2.60%	0.44%
10	6.55%	7.07%	9.08%	13.48%	13.08%	8.60%	6.06%	1.00%
11	8.22%	7.12%	8.40%	11.34%	15.72%	10.04%	8.26%	1.63%
12	10.15%	11.06%	10.20%	2.09%	10.24%	9.96%	10.20%	6.29%
	LA	*LS1*	*LS2*	*LS3*	*LS4*	*LS5*	*LS6*	*LZ*
	3.28%	3.97%	2.65%	2.16%	2.84%	3.37%	3.98%	3.54%

5.3 CORRECCIÓN DE LOS ANÁLISIS QUÍMICOS

5.3.1 Corregir los Análisis Granulométricos

(Ver Capítulo 3 - Tabla 3.18).

		Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
I. T.	Malla	**fAc**	**fS1c**	**fS2c**	**fS3c**	**fS4c**	**fS5c**	**fS6c**	**fZc**
1	-m14 +m20	2.17	13.84	2.25	0.05	0.04	0.05	0.04	0.01
2	-m20 +m30	6.45	31.60	16.78	0.89	-0.02	-0.03	-0.03	-0.01
3	-m30 +m40	11.15	30.52	42.22	10.12	-0.01	-0.01	-0.01	0.00
4	-m40 +m50	11.80	13.61	28.49	31.28	3.15	0.01	0.01	0.00
5	-m50 +m70	14.94	6.24	8.11	44.76	25.02	3.84	-0.02	-0.01
6	-m70 +m100	10.22	1.68	0.97	9.92	29.73	17.63	1.15	0.00
7	-m100 +m140	11.43	0.97	0.55	1.83	21.45	29.71	12.90	0.35
8	-m140 +m200	10.21	0.52	0.31	0.66	9.50	19.95	28.93	3.69
9	-m200 +m270	9.52	0.33	0.07	0.36	5.42	14.16	28.50	25.79
10	-m270 +m325	2.42	0.02	0.01	-0.05	1.04	2.96	6.31	13.06
11	-m325 +m400	1.91	0.15	0.15	0.11	1.23	2.48	4.51	8.94
12	-m400	7.77	0.52	0.10	0.06	3.44	9.24	17.70	48.17

5.3.2 Hallar los errores:

(Ecuaciones 4.7 y 4.9).

$$\Delta Mq = \mathrm{LfA*fAc} - \left(LfS1 * \mathrm{fS1c}*\beta 1\mathrm{c} + LfS2 * \mathrm{fS2c}*\beta 2\mathrm{c} + \ldots + LfS6 * \mathrm{fS6c}*\beta 6\mathrm{c} + LfZ * \mathrm{fZc}*\beta \mathrm{Zc} \right)$$

$$\Delta MqES = L - \left(Lf^{i} * fc^{i} + Lf^{ii} * fc^{ii} + Lf^{iii} * fc^{iii} + \ldots + Lf^{xi} * fc^{xi} + Lf^{xii} * fc^{xii} \right)$$

$$\Delta MqES = L - \sum \left(Lf * fc \right)$$

Tabla 5. 4 Cálculo de los Errores por Malla y por Entradas y Salidas

	LEYES %Sn								
	LfA	*LfS1*	*LfS2*	*LfS3*	*LfS4*	*LfS5*	*LfS6*	*LfZ*	
I.T.	***Alimento***	***Spigot #01***	***Spigot #02***	***Spigot #03***	***Spigot #04***	***Spigot #05***	***Spigot #06***	***Rebose***	ΔMq
1	2.07%	1.82%	0.79%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**0.0088%**
2	2.00%	1.93%	0.77%	0.47%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**0.0301%**
3	1.96%	2.45%	1.20%	0.53%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	**0.0463%**
4	1.83%	3.66%	1.91%	0.62%	0.50%	0.00%	0.00%	0.00%	**0.0433%**
5	1.83%	5.62%	6.20%	1.08%	0.83%	0.57%	0.00%	0.00%	**0.0370%**
6	1.63%	6.36%	14.53%	2.69%	0.76%	0.44%	6.92%	0.00%	**0.0225%**
7	2.04%	8.49%	33.97%	13.64%	1.53%	0.77%	0.63%	1.66%	**0.0457%**
8	3.00%	13.19%	28.30%	29.81%	5.40%	2.02%	0.73%	0.42%	**0.0611%**
9	3.98%	14.15%	12.26%	30.02%	13.68%	5.52%	2.60%	0.44%	**-0.0310%**
10	6.55%	7.07%	9.08%	13.48%	13.08%	8.60%	6.06%	1.00%	**0.0233%**
11	8.22%	7.12%	8.40%	11.34%	15.72%	10.04%	8.26%	1.63%	**0.0090%**
12	10.15%	11.06%	10.20%	2.09%	10.24%	9.96%	10.20%	6.29%	**0.1028%**
	LA	***LS1***	***LS2***	***LS3***	***LS4***	***LS5***	***LS6***	***LZ***	
	3.28%	3.97%	2.65%	2.16%	2.84%	3.37%	3.98%	3.54%	
	ΔMqA	***ΔMqS1***	***ΔMqS2***	***ΔMqS3***	***ΔMqS4***	***ΔMqS5***	***ΔMqS6***	***ΔMqZ***	
	0.2085%	**1.1371%**	**0.5011%**	**0.5962%**	**0.1262%**	**0.4332%**	**0.3068%**	**0.1002%**	

5.3.3 Hallar las Matrices:

$$\Delta\tilde{M}qES = \begin{bmatrix} \Delta MqA \\ \Delta MqS1 \\ \Delta MqS2 \\ \Delta MqS3 \\ \Delta MqS4 \\ \Delta MqS5 \\ \Delta MqS6 \\ \Delta MqZ \end{bmatrix}$$

$(8,1)$

Tabla 5. 5 Cálculo de la matriz $\Delta\tilde{M}qES$

Flujo	$\Delta\tilde{M}qES$ (8,1)
A	0.002085
S1	0.011371
S2	0.005011
S3	0.005962
S4	0.001262
S5	0.004332
S6	0.003068
Z	0.001002

$$\Delta\tilde{M}q = \begin{bmatrix} \Delta Mq^{i} \\ \Delta Mq^{ii} \\ \cdots \\ \Delta Mq^{xii} \end{bmatrix}$$

$(12,1)$

Tabla 5. 6 Cálculo de la Matriz $\Delta\tilde{M}q$

I. T.	$\Delta\tilde{M}q$ (12,1)
1	0.000088
2	0.000301
3	0.000463
4	0.000433
5	0.000370
6	0.000225
7	0.000457
8	0.000611
9	-0.000310
10	0.000233
11	0.000090
12	0.001028

$$\underset{(8,1)}{\tilde{Q}u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\beta 1c \\ -\beta 2c \\ -\beta 3c \\ -\beta 4c \\ -\beta 5c \\ -\beta 6c \\ -\beta Zc \end{bmatrix}$$

Tabla 5. 7 Cálculo de la Matriz $\tilde{Q}u$

Flujo	$\tilde{Q}u$ (8,1)
A	1.000000
S1	-0.135311
S2	-0.120011
S3	-0.193790
S4	-0.149035
S5	-0.189279
S6	-0.158221
Z	-0.054353

$$\tilde{F}2 = \begin{bmatrix} fAc^{i2} & fS1c^{i2} & fS2c^{i2} & fS3c^{i2} & fS4c^{i2} & fS5c^{i2} & fS6c^{i2} & fZc^{i2} \\ fAc^{ii2} & fS1c^{ii2} & fS2c^{ii2} & fS3c^{ii2} & fS4c^{ii2} & fS5c^{ii2} & fS6c^{ii2} & fZc^{ii2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ fAc^{xii2} & fS1c^{xii2} & fS2c^{xii2} & fS3c^{xii2} & fS4c^{xii2} & fS5c^{xii2} & fS6c^{xii2} & fZc^{xii2} \end{bmatrix}$$
$(12,8)$

Tabla 5. 8 Cálculo de la Matriz $\tilde{F}2$

	$\tilde{F}2$ (12,8)							
I. T.	A	S1	S2	S3	S4	S5	S6	Z
1	0.0005	0.0192	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.0042	0.0998	0.0282	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.0124	0.0931	0.1782	0.0102	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.0139	0.0185	0.0812	0.0979	0.0010	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.0223	0.0039	0.0066	0.2003	0.0626	0.0015	0.0000	0.0000
6	0.0104	0.0003	0.0001	0.0098	0.0884	0.0311	0.0001	0.0000
7	0.0131	0.0001	0.0000	0.0003	0.0460	0.0883	0.0166	0.0000
8	0.0104	0.0000	0.0000	0.0000	0.0090	0.0398	0.0837	0.0014
9	0.0091	0.0000	0.0000	0.0000	0.0029	0.0200	0.0813	0.0665
10	0.0006	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0009	0.0040	0.0170
11	0.0004	0.0000	0.0000	0.0000	0.0002	0.0006	0.0020	0.0080
12	0.0060	0.0000	0.0000	0.0000	0.0012	0.0085	0.0313	0.2320

$$\tilde{S}F2 = \begin{bmatrix} \sum_{1}^{12}(fAc^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS1c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS2c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS3c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS4c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS5c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fS6c^2) \\ \sum_{1}^{12}(fZc^2) \end{bmatrix}$$
$(8,1)$

Tabla 5. 9 Cálculo de la Matriz $\tilde{S}F2$

Flujo	$\tilde{S}F2$ (8,1)
A	0.103312
S1	0.234981
S2	0.294753
S3	0.318784
S4	0.211431
S5	0.190741
S6	0.219022
Z	0.324909

5.3.4 Calcular las Matrices $\tilde{H}$ y $\tilde{\Phi}_0$

$$\tilde{H} = \tilde{F}2 * \left[Diag\left(\tilde{S}F2\right) + I(8) \right]^{-1}$$
$$(12,8)$$

Tabla 5. 10 Cálculo de la Matriz Diagonal $Diag(\tilde{S}F2)$

$Diag(\tilde{S}F2)$ (8,8)							
0.103312	0	0	0	0	0	0	0
0	0.234981	0	0	0	0	0	0
0	0	0.294753	0	0	0	0	0
0	0	0	0.318784	0	0	0	0
0	0	0	0	0.211431	0	0	0
0	0	0	0	0	0.190741	0	0
0	0	0	0	0	0	0.219022	0
0	0	0	0	0	0	0	0.324909

Tabla 5. 11 Cálculo de la Matriz Identidad I

$I(8)$ (8,8)							
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0
0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	1

Tabla 5. 12 Cálculo de la Matriz $Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)$

$Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)$ (8,8)							
1.103312	0	0	0	0	0	0	0
0	1.234981	0	0	0	0	0	0
0	0	1.294753	0	0	0	0	0
0	0	0	1.318784	0	0	0	0
0	0	0	0	1.211431	0	0	0
0	0	0	0	0	1.190741	0	0
0	0	0	0	0	0	1.219022	0
0	0	0	0	0	0	0	1.324909

Tabla 5. 13 Cálculo de la Matriz $\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)\right]^{-1}$

$\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)\right]^{-1}$ (8,8)							
0.906362	0	0	0	0	0	0	0
0	0.809729	0	0	0	0	0	0
0	0	0.772348	0	0	0	0	0
0	0	0	0.758274	0	0	0	0
0	0	0	0	0.825470	0	0	0
0	0	0	0	0	0.839813	0	0
0	0	0	0	0	0	0.820330	0
0	0	0	0	0	0	0	0.754769

Tabla 5. 14 Cálculo de la Matriz $\tilde{H}=\tilde{F}2*\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)\right]^{-1}$

$\tilde{H}=\tilde{F}2*\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I\left(8\right)\right]^{-1}$ (12,8)							
0.000429	0.015520	0.000391	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.003767	0.080843	0.021747	0.000060	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.011277	0.075401	0.137646	0.007771	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.012614	0.014998	0.062684	0.074212	0.000820	0.000000	0.000000	0.000000
0.020242	0.003149	0.005077	0.151916	0.051693	0.001239	0.000000	0.000000
0.009463	0.000228	0.000072	0.007468	0.072965	0.026114	0.000109	0.000000
0.011851	0.000076	0.000024	0.000255	0.037980	0.074152	0.013648	0.000009
0.009441	0.000022	0.000007	0.000033	0.007457	0.033428	0.068638	0.001027
0.008217	0.000009	0.000000	0.000010	0.002422	0.016834	0.066654	0.050194
0.000530	0.000000	0.000000	0.000000	0.000090	0.000738	0.003264	0.012864
0.000331	0.000002	0.000002	0.000001	0.000125	0.000515	0.001670	0.006039
0.005477	0.000022	0.000001	0.000000	0.000979	0.007167	0.025686	0.175098

$$\tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu$$
$(12,1)$

Tabla 5. 15 Cálculo de la Matriz Diagonal $Diag(Qu)$

$Diag(Qu)$ (8,8)							
1.000000	0	0	0	0	0	0	0
0	-0.135311	0	0	0	0	0	0
0	0	-0.120011	0	0	0	0	0
0	0	0	-0.193790	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.149035	0	0	0
0	0	0	0	0	-0.189279	0	0
0	0	0	0	0	0	-0.158221	0
0	0	0	0	0	0	0	-0.054353

Tabla 5. 16 Cálculo de la Matriz $Diag(Qu) * Qu$

$Diag(Qu) * Qu$ (8,1)
1.000000
0.018309
0.014403
0.037555
0.022211
0.035827
0.025034
0.002954

Tabla 5. 17 Cálculo de la Matriz $\tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu$

$\tilde{\Phi}_0 = \tilde{F}2 * Diag(Qu) * Qu$ (12,1)
0.000831
0.006393
0.017098
0.019123
0.031467
0.013897
0.017691
0.014144
0.012081
0.000768
0.000465
0.007845

5.3.5 Hallar los Multiplicadores de Lagrange para cada Intervalo de Tamaño

(Ecuación 4.41)

$$\tilde{\lambda}q = 2 * \left[\tilde{H} * \left[Diag\left(\tilde{Q}u\right) \right]^2 * \tilde{F}2' - Diag\left(\tilde{\Phi}_0\right) \right]^{-1} * \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag\left(\tilde{Q}u\right) * \Delta\tilde{M}qES \right)$$

(12,1)

Tabla 5. 18 Cálculo de la Matriz $[Diag(\tilde{Q}u)]^2$

$[Diag(\tilde{Q}u)]^2$ (8,8)							
1.000000	0	0	0	0	0	0	0
0	0.018309	0	0	0	0	0	0
0	0	0.014403	0	0	0	0	0
0	0	0	0.037555	0	0	0	0
0	0	0	0	0.022211	0	0	0
0	0	0	0	0	0.035827	0	0
0	0	0	0	0	0	0.025034	0
0	0	0	0	0	0	0	0.002954

Tabla 5. 19 Cálculo de la Matriz $\tilde{F}2'$ (Matriz Transpuesta de $\tilde{F}2$)

$\tilde{F}2'$ (8,12)											
0.0005	0.0042	0.0124	0.0139	0.0223	0.0104	0.0131	0.0104	0.0091	0.0006	0.0004	0.0060
0.0192	0.0998	0.0931	0.0185	0.0039	0.0003	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0005	0.0282	0.1782	0.0812	0.0066	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0001	0.0102	0.0979	0.2003	0.0098	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0010	0.0626	0.0884	0.0460	0.0090	0.0029	0.0001	0.0002	0.0012
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0015	0.0311	0.0883	0.0398	0.0200	0.0009	0.0006	0.0085
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0166	0.0837	0.0813	0.0040	0.0020	0.0313
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0014	0.0665	0.0170	0.0080	0.2320

Tabla 5. 20 Cálculo de la Matriz $\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2$

$\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2$ (12,8)							
0.000429	0.000284	0.000006	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.003767	0.001480	0.000313	0.000002	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.011277	0.001381	0.001982	0.000292	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.012614	0.000275	0.000903	0.002787	0.000018	0.000000	0.000000	0.000000
0.020242	0.000058	0.000073	0.005705	0.001148	0.000044	0.000000	0.000000
0.009463	0.000004	0.000001	0.000280	0.001621	0.000936	0.000003	0.000000
0.011851	0.000001	0.000000	0.000010	0.000844	0.002657	0.000342	0.000000
0.009441	0.000000	0.000000	0.000001	0.000166	0.001198	0.001718	0.000003
0.008217	0.000000	0.000000	0.000000	0.000054	0.000603	0.001669	0.000148
0.000530	0.000000	0.000000	0.000000	0.000002	0.000026	0.000082	0.000038
0.000331	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000018	0.000042	0.000018
0.005477	0.000000	0.000000	0.000000	0.000022	0.000257	0.000643	0.000517

Tabla 5. 21 Cálculo de la Matriz $\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2'$

$\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2'$ (12,12)											
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0002	0.0006	0.0004	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0004	0.0005	0.0008	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	0.0017	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	0.0003	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	0.0004	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0002

Tabla 5. 22 Cálculo de la Matriz Diagonal $Diag(\Phi_0)$

$Diag(\Phi_0)$ (12,12)											
0.0008	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0.0064	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0.0171	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0.0191	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0.0315	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0.0139	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0.0177	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0.0141	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0.0121	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0008	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0005	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0.0078

Tabla 5. 23 Cálculo de la Matriz $\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)$

$\tilde{H} * [Diag(\tilde{Q}u)]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)$ (12,12)											
-0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	-0.0062	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0002	-0.0165	0.0004	0.0003	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0004	-0.0186	0.0008	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0001	0.0003	0.0008	-0.0298	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0004	-0.0136	0.0003	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0003	0.0003	-0.0173	0.0003	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0003	-0.0139	0.0002	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0002	0.0001	0.0002	0.0002	-0.0118	0.0000	0.0000	0.0001
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0008	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0005	0.0000
0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	-0.0077

Tabla 5. 24 Cálculo de la Matriz $\left[\tilde{H} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)\right]^{-1}$

$\left[\tilde{H} * \left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\Phi_0)\right]^{-1}$ (12,12)											
-1211.55	-6.04	-2.55	-0.89	-0.53	-0.49	-0.48	-0.48	-0.48	-0.49	-0.50	-0.50
-6.04	-160.92	-2.41	-1.01	-0.58	-0.55	-0.53	-0.53	-0.54	-0.55	-0.56	-0.55
-2.55	-2.41	-60.81	-1.29	-0.74	-0.61	-0.58	-0.58	-0.59	-0.60	-0.62	-0.61
-0.89	-1.01	-1.29	-53.90	-1.58	-0.72	-0.60	-0.59	-0.60	-0.61	-0.62	-0.61
-0.53	-0.58	-0.74	-1.58	-33.64	-0.97	-0.69	-0.61	-0.60	-0.60	-0.62	-0.61
-0.49	-0.55	-0.61	-0.72	-0.97	-73.49	-1.26	-0.87	-0.76	-0.72	-0.77	-0.72
-0.48	-0.53	-0.58	-0.60	-0.69	-1.26	-58.03	-1.18	-1.01	-0.90	-0.93	-0.88
-0.48	-0.53	-0.58	-0.59	-0.61	-0.87	-1.18	-72.28	-1.59	-1.37	-1.30	-1.23
-0.48	-0.54	-0.59	-0.60	-0.60	-0.76	-1.01	-1.59	-84.50	-1.70	-1.55	-1.63
-0.49	-0.55	-0.60	-0.61	-0.60	-0.72	-0.90	-1.37	-1.70	-1304.08	-2.05	-2.61
-0.50	-0.56	-0.62	-0.62	-0.62	-0.77	-0.93	-1.30	-1.55	-2.05	-2150.89	-2.23
-0.50	-0.55	-0.61	-0.61	-0.61	-0.72	-0.88	-1.23	-1.63	-2.61	-2.23	-130.48

Tabla 5. 25 Cálculo de la Matriz $\tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u)$

$\tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u)$ (12,8)							
0.000429	-0.002100	-0.000047	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.003767	-0.010939	-0.002610	-0.000012	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.011277	-0.010203	-0.016519	-0.001506	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.012614	-0.002029	-0.007523	-0.014382	-0.000122	0.000000	0.000000	0.000000
0.020242	-0.000426	-0.000609	-0.029440	-0.007704	-0.000234	0.000000	0.000000
0.009463	-0.000031	-0.000009	-0.001447	-0.010874	-0.004943	-0.000017	0.000000
0.011851	-0.000010	-0.000003	-0.000049	-0.005660	-0.014035	-0.002159	-0.000001
0.009441	-0.000003	-0.000001	-0.000006	-0.001111	-0.006327	-0.010860	-0.000056
0.008217	-0.000001	0.000000	-0.000002	-0.000361	-0.003186	-0.010546	-0.002728
0.000530	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000013	-0.000140	-0.000516	-0.000699
0.000331	0.000000	0.000000	0.000000	-0.000019	-0.000098	-0.000264	-0.000328
0.005477	-0.000003	0.000000	0.000000	-0.000146	-0.001357	-0.004064	-0.009517

Tabla 5. 26 Cálculo de la Matriz $\tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES$

$\tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES$ (12,1)
-0.000023
-0.000130
-0.000184
-0.000120
-0.000152
-0.000024
-0.000050
-0.000043
-0.000032
-0.000002
-0.000001
-0.000017

Tabla 5. 27 Cálculo de la Matriz $\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES$

$\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES$ (12,1)
0.000065
0.000171
0.000278
0.000312
0.000218
0.000201
0.000406
0.000568
-0.000342
0.000231
0.000089
0.001012

Tabla 5. 28 Cálculo de los Multiplicadores de Lagrange λq por Intervalo de Tamaño.

λq	$\tilde{\lambda} q = 2*\left[\tilde{H}*\left[Diag(\tilde{Q}u)\right]^2 * \tilde{F}2' - Diag(\tilde{\Phi}_0)\right]^{-1} * \left(\Delta\tilde{M}q + \tilde{H} * Diag(\tilde{Q}u) * \Delta\tilde{M}qES\right)$ (12,1)
λq1	-0.163186
λq2	-0.060526
λq3	-0.038741
λq4	-0.038179
λq5	-0.019159
λq6	-0.034361
λq7	-0.051895
λq8	-0.086931
λq9	0.049354
λq10	-0.610228
λq11	-0.392664
λq12	-0.268104

5.3.6 Hallar los Multiplicadores de Lagrange de flujos de Entrada y Salida del Sistema.

$$\tilde{\lambda} ES = \left[Diag\left(\tilde{S}F2\right) + I(8)\right]^{-1} * \left[Diag\left(\tilde{Q}u\right) * \tilde{F}2' * \tilde{\lambda} q - 2 * \Delta\tilde{M}qES\right]$$
$$(8,1)$$

Tabla 5. 29 Cálculo de la Matriz Diagonal $Diag\left(\tilde{S}F2\right) + I(8)$

$Diag\left(\tilde{S}F2\right) + I(8)$ (8,8)							
1.103312	0	0	0	0	0	0	0
0	1.234981	0	0	0	0	0	0
0	0	1.294753	0	0	0	0	0
0	0	0	1.318784	0	0	0	0
0	0	0	0	1.211431	0	0	0
0	0	0	0	0	1.190741	0	0
0	0	0	0	0	0	1.219022	0
0	0	0	0	0	0	0	1.324909

Tabla 5. 30 Cálculo de $\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I(8)\right]^{-1}$

$\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I(8)\right]^{-1}$ (8,8)							
0.906362	0	0	0	0	0	0	0
0	0.809729	0	0	0	0	0	0
0	0	0.772348	0	0	0	0	0
0	0	0	0.758274	0	0	0	0
0	0	0	0	0.825470	0	0	0
0	0	0	0	0	0.839813	0	0
0	0	0	0	0	0	0.820330	0
0	0	0	0	0	0	0	0.754769

Tabla 5. 31 Cálculo de la Matriz $Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'$

$Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'$ (8,12)											
0.0005	0.0042	0.0124	0.0139	0.0223	0.0104	0.0131	0.0104	0.0091	0.0006	0.0004	0.0060
-0.0026	-0.0135	-0.0126	-0.0025	-0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
-0.0001	-0.0034	-0.0214	-0.0097	-0.0008	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	-0.0020	-0.0190	-0.0388	-0.0019	-0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0093	-0.0132	-0.0069	-0.0013	-0.0004	0.0000	0.0000	-0.0002
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0003	-0.0059	-0.0167	-0.0075	-0.0038	-0.0002	-0.0001	-0.0016
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0026	-0.0132	-0.0129	-0.0006	-0.0003	-0.0050
0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0001	-0.0036	-0.0009	-0.0004	-0.0126

Tabla 5. 32 Cálculo de la Matriz $Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'*\tilde{\lambda}q$

$Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'*\tilde{\lambda}q$ (8,1)
-0.005386
0.001838
0.001431
0.001616
0.001155
0.002123
0.002493
0.003945

Tabla 5. 33 Cálculo de la Matriz $Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'*\tilde{\lambda}q-2*\Delta\tilde{M}qES$

$Diag(\tilde{Q}u)*\tilde{F}2'*\tilde{\lambda}q-2*\Delta\tilde{M}qES$ (8,1)
-0.009557
-0.020904
-0.008591
-0.010309
-0.001369
-0.006540
-0.003643
0.001940

Tabla 5. 34 Cálculo de los Multiplicadores de Lagrange para Entradas y Salidas $\tilde{\lambda}ES$

Flujo	$\tilde{\lambda}ES=\left[Diag\left(\tilde{S}F2\right)+I(8)\right]^{-1}*\left[Diag\left(\tilde{Q}u\right)*\tilde{F}2'*\tilde{\lambda}q-2*\Delta\tilde{M}qES\right]$ (8,1)
λA	-0.008662
λS1	-0.016927
λS2	-0.006635
λS3	-0.007817
λS4	-0.001130
λS5	-0.005493
λS6	-0.002988
λZ	0.001465

5.3.7 Hallar las correcciones para cada Intervalo de Tamaño.

$$\Delta LfA=\frac{fAc}{2}*(-\lambda q+\lambda A)$$
$$\Delta LfS1=\frac{fS1c}{2}*(+\lambda q*\beta 1c+\lambda S1)$$
$$\Delta LfS2=\frac{fS2c}{2}*(+\lambda q*\beta 2c+\lambda S2)$$
$$\Delta LfS3=\frac{fS3c}{2}*(+\lambda q*\beta 3c+\lambda S3)$$

$$\Delta LfS4=\frac{fS4c}{2}*(+\lambda q*\beta 4c+\lambda S4)$$
$$\Delta LfS5=\frac{fS5c}{2}*(+\lambda q*\beta 5c+\lambda S5)$$
$$\Delta LfS6=\frac{fS6c}{2}*(+\lambda q*\beta 6c+\lambda S6)$$
$$\Delta LfZ=\frac{fZc}{2}*(+\lambda q*\beta Zc+\lambda Z)$$

Tabla 5. 35 Correcciones de los Análisis Químicos para Intervalos de Tamaño.

I. T.	ΔLfA Alimento	ΔLfS1 Spigot #01	ΔLfS2 Spigot #02	ΔLfS3 Spigot #03	ΔLfS4 Spigot #04	ΔLfS5 Spigot #05	ΔLfS6 Spigot #06	ΔLfZ Rebose
1	0.17%	-0.27%	-0.03%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	0.17%	-0.40%	-0.12%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	0.17%	-0.34%	-0.24%	-0.08%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	0.17%	-0.15%	-0.16%	-0.24%	-0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
5	0.08%	-0.06%	-0.04%	-0.26%	-0.05%	-0.02%	0.00%	0.00%
6	0.13%	-0.02%	-0.01%	-0.07%	-0.09%	-0.11%	0.00%	0.00%
7	0.25%	-0.01%	0.00%	-0.02%	-0.10%	-0.23%	-0.07%	0.00%
8	0.40%	-0.01%	0.00%	-0.01%	-0.07%	-0.22%	-0.24%	-0.01%
9	-0.28%	0.00%	0.00%	0.00%	0.02%	0.03%	0.07%	0.05%
10	0.73%	0.00%	0.00%	0.00%	-0.05%	-0.18%	-0.31%	-0.21%
11	0.37%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.04%	-0.10%	-0.15%	-0.09%
12	1.01%	-0.01%	0.00%	0.00%	-0.07%	-0.26%	-0.40%	-0.32%

5.3.8 Hallar las Correcciones para los flujos (Entradas y Salidas del Sistema).

$$\Delta LA = -\frac{\lambda A}{2}$$
$$\Delta LS1 = -\frac{\lambda S1}{2}$$
$$\Delta LS2 = -\frac{\lambda S2}{2}$$
$$\Delta LS3 = -\frac{\lambda S3}{2}$$

$$\Delta LS4 = -\frac{\lambda S4}{2}$$
$$\Delta LS5 = -\frac{\lambda S5}{2}$$
$$\Delta LS6 = -\frac{\lambda S6}{2}$$
$$\Delta LZ = -\frac{\lambda Z}{2}$$

Tabla 5. 36 Correcciones de los Análisis Químicos para las Entradas y Salidas.

ΔLA Alimento	ΔLS1 Spigot #01	ΔLS2 Spigot #02	ΔLS3 Spigot #03	ΔLS4 Spigot #04	ΔLS5 Spigot #05	ΔLS6 Spigot #06	ΔLZ Rebose
0.43%	0.85%	0.33%	0.39%	0.06%	0.27%	0.15%	-0.07%

5.3.9 Corregir las Leyes

$$\begin{array}{|l|}\hline LAc = LA - \Delta LA \\ LSjc = LSj - \Delta LSj;\ j = \{1,2,\ldots,6\} \\ LZc = LZ - \Delta LZ \\ \hline\end{array}$$

$$\begin{array}{|l|}\hline LfAc = LfA - \Delta LfA \\ LfSjc = LfSj - \Delta LfSj;\ j = \{1,2,\ldots,6\} \\ LfZc = LfZ - \Delta LfZ \\ \hline\end{array}$$

Tabla 5. 37 Análisis Químico Corregidos.

	LEYES CORREGIDAS %Sn								
	LfAc	LfS1c	LfS2c	LfS3c	LfS4c	LfS5c	LfS6c	LZc	
I. T.	**Alimento**	**Spigot #01**	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**	**Rebose**	ΔMq
1	1.90%	2.09%	0.82%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.0000
2	1.83%	2.33%	0.89%	0.48%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.0000
3	1.79%	2.79%	1.44%	0.61%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.0000
4	1.66%	3.81%	2.07%	0.86%	0.51%	0.00%	0.00%	0.00%	0.0000
5	1.75%	5.68%	6.24%	1.34%	0.88%	0.59%	0.00%	0.00%	0.0000
6	1.50%	6.38%	14.54%	2.76%	0.85%	0.55%	6.92%	0.00%	0.0000
7	1.79%	8.50%	33.97%	13.66%	1.63%	1.00%	0.70%	1.66%	0.0000
8	2.60%	13.20%	28.30%	29.82%	5.47%	2.24%	0.97%	0.43%	0.0000
9	4.26%	14.15%	12.26%	30.02%	13.66%	5.49%	2.53%	0.39%	0.0000
10	5.82%	7.07%	9.08%	13.48%	13.13%	8.78%	6.37%	1.21%	0.0000
11	7.85%	7.13%	8.40%	11.34%	15.76%	10.14%	8.41%	1.72%	0.0000
12	9.14%	11.07%	10.20%	2.09%	10.31%	10.22%	10.60%	6.60%	0.0000
Ley Flujo Calculada	**2.85%**	**3.12%**	**2.32%**	**1.77%**	**2.78%**	**3.10%**	**3.83%**	**3.61%**	
Flujo	2.85%	3.12%	2.32%	1.77%	2.78%	3.10%	3.83%	3.61%	0.0000
ΔMqES	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	

5.3.10 Hallar el Error

$$f(X) = S = \Delta LA^2 + \Delta LS1^2 + \Delta LS2^2 + \ldots + \Delta LS6^2 + \Delta LZ^2$$

$$+\sum_1^{12} \Delta LfA^2 + \sum_1^{12} \Delta LfS1^2 + \sum_1^{12} \Delta LfS2^2 + \ldots + \sum_1^{12} \Delta LfS6^2 + \sum_1^{12} \Delta LfZ^2$$

Tabla 5. 38 Cálculo del error de la Corrección.

Error	**0.000475**						
ΔLfA	**ΔLfS1**	**ΔLfS2**	**ΔLfS3**	**ΔLfS4**	**ΔLfS5**	**ΔLfS6**	**ΔLfZ**
Alimento	**Spigot #01**	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**	**Rebose**
0.000003	0.000007	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000003	0.000016	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000003	0.000011	0.000006	0.000001	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000003	0.000002	0.000003	0.000006	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000001	0.000000	0.000000	0.000007	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000002	0.000000	0.000000	0.000001	0.000001	0.000001	0.000000	0.000000
0.000006	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000005	0.000001	0.000000
0.000016	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000005	0.000006	0.000000
0.000008	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000053	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000003	0.000010	0.000004
0.000013	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000002	0.000001
0.000102	0.000000	0.000000	0.000000	0.000001	0.000007	0.000016	0.000010
ΔLA	**ΔLS1**	**ΔLS2**	**ΔLS3**	**ΔLS4**	**ΔLS5**	**ΔLS6**	**ΔLZ**
0.000019	0.000072	0.000011	0.000015	0.000000	0.000008	0.000002	0.000001

CAPÍTULO 6
ANÁLISIS ESTADÍSTICO

6.1 INTRODUCCIÓN

Los datos usados para el análisis estadístico son los análisis granulométricos[10] de la alimentación, descargas y rebose del Clasificador Stokes:

- Fracciones en peso con respecto al tamaño promedio (Xp).
- Fracciones acumuladas pasantes con respecto al tamaño (X).

El tratamiento de los datos en este capítulo es el de hallar los parámetros estadísticos (Tamaño Medio, Varianza, Desviación Estándar y Coeficiente de Variación) por medio de las funciones estadísticas y por medio de funciones de Distribución. Los Análisis Granulométricos se ajustaron a las siguientes funciones y/o distribuciones:

- Función de Gates Gaudin Schuhmann.
- Función de Gaudin Meloy
- Función de Rosin Rammler
- Distribución Normal
- Distribución Normal Modificada
- Distribución Log-Normal

[10] Análisis Granulométricos Sin Corregir.

- Distribución Gamma
- Función de Broadbent Callcott
- Función de Harris
- Distribución Beta.

Todas estas funciones son regidas por dos parámetros (α y Xo) con excepción de la Función de Harris y la Distribución Beta las cuales contienen tres parámetros (α , β y Xo). En las funciones de dos parámetros (exceptuando las distribuciones Normal y Normal Modificada) se tienen un parámetro denominado "Factor de Forma (α)" que netamente da la inclinación de la curva independientemente de los tamaños de las partículas de la distribución, y un "Parámetro de tamaño (Xo)" relacionado directamente con el tamaño de las partículas. En el caso de las funciones de Harris y la Distribución Beta se tienen dos factores de forma (α y β) y un parámetro de tamaño (Xo) Todas estas distribuciones con excepción de la Distribución Normal tienen como variable aleatoria a $x \in \langle 0, \infty \rangle$ que físicamente significa el tamaño de partícula. Para nuestro caso no se tiene partículas que $x \in \langle -\infty, 0]$ es decir partículas de tamaño negativo.

La distribución Normal y la Normal Modificada tienen la característica de que sus dos parámetros (α y Xo) son relacionados directamente con el tamaño de las partículas. Cabe resaltar que la distribución Normal se distribuye en el dominio de $x \in \langle -\infty, \infty \rangle$ y como consecuencia existirá un valor diferente de cero para cuando $x = 0$. Es por esta razón se modificó esta Distribución Normal (de manera similar a como se corrige una curva de partición como veremos en el Capítulo 7) con tal de que $x \in \langle 0,\infty \rangle$ y que exista la coordenada $(0,0)$ (es decir, que No existen partículas de tamaño menor a cero.

6.2 FÓRMULAS ESTADÍSTICAS:

Con las fracciones en peso y sus respectivos tamaños promedios[11] (de cada intervalo) se hallaron los parámetros estadísticos mencionados mediante las siguientes fórmulas:

Tamaño medio de la muestra.

Ecuación 6. 1

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} Xpi * f(Xpi)$$

Varianza:

Ecuación 6. 2

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (Xpi - \mu)^2 * f(Xpi)$$

Desviación Estándar:

Ecuación 6. 3

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

[11] Para el cálculo de los Tamaños Promedios de los Intervalos de Tamaño se empleo el método descrito en el Apéndice T "Método para obtener los Tamaños Promedios de los intervalos de un Análisis Granulométrico".

Coeficiente de Variación:

Ecuación 6. 4

$$CV = \frac{\sigma}{\mu}$$

6.3 *FUNCIONES DE DISTRIBUCIÓN*

Los parámetros estadísticos utilizando las funciones de distribución serán calculados por las siguientes ecuaciones:

Tamaño medio de la muestra (Primer Momento con respecto al Origen).

Ecuación 6. 5

$$\mu = \int_{Rx} x * f(x)\,dx$$

Varianza (Segundo Momento Central):

Ecuación 6. 6

$$\sigma^2 = \int_{Rx} (x-\mu)^2 * f(x)\,dx$$

La Desviación Estándar y el Coeficiente de Variación se hallarán con las ecuaciones 6.3 y 6.4 respectivamente.

Nota: Rx : Es el dominio de la función de distribución

Las funciones usadas y sus parámetros se resumen en las siguientes tablas:

Cuadro Resumen de las Funciones de Distribución:

Tabla 6. 1 Función Gates Gaudin Schuhmann y Función Gaudin Meloy.

Nombre	FUNCIÓN GATES GAUDIN SCHUHMANN	FUNCIÓN GAUDIN MELOY
Parámetros ajustables	Xo : Tamaño Máximo. α : Factor de Forma.	Xo : Tamaño Máximo. α : Factor de Forma.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{\alpha}{Xo^{\alpha}} * x^{\alpha-1}$	$\frac{\alpha}{Xo} * \left(1-\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha-1}$
Función de Distribución: $F(x)$	$\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}$	$1-\left(1-\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}$
Dominio:	$x \in \langle 0; Xo]$	$x \in \langle 0; Xo]$
Mediana: $X50$	$0.5^{\frac{1}{\alpha}} * Xo$	$\left(1-0.5^{\frac{1}{\alpha}}\right) * Xo$
Punto de Inflexión: Xi	$\nexists$	$\nexists$
Media: μ	$\frac{\alpha}{\alpha+1} * Xo$	$\frac{Xo}{\alpha+1}$
Varianza: σ^2	$Xo^2 * \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2 * (\alpha+2)}\right)$	$Xo^2 * \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)^2 * (\alpha+2)}\right)$
Coeficiente de Variación: CV	$\frac{1}{\sqrt{\alpha * (\alpha+2)}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+2}}$

Tabla 6. 2 Distribución Normal y Distribución Normal Modificada.

Nombre	DISTRIBUCIÓN NORMAL	DISTRIBUCIÓN NORMAL MODIFICADA
Parámetros ajustables	Xo : Parámetro de tamaño. α : Parámetro de tamaño.	Xo : Parámetro de tamaño. α : Parámetro de tamaño.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2*\pi}*\alpha}*e^{-\frac{(x-Xo)^2}{2*\alpha^2}}$	$\frac{1}{1-K}*\frac{1}{\sqrt{2*\pi}*\alpha}*e^{-\frac{(x-Xo)^2}{2*\alpha^2}}$
Función de Distribución: $F(x)$	normcdf(x,Xo,α)	$\frac{\text{normcdf(x,Xo,}\alpha\text{)}-K}{1-K}$
Dominio:	$x\in\langle-\infty;\infty\rangle$	$x\in\langle 0;\infty\rangle$
Mediana: $X50$	$0.50=$ normcdf(X50,Xo,α)	$0.50=\frac{\text{normcdf(X50,Xo,}\alpha\text{)}-K}{1-K}$
Punto de Inflexión: Xi	Xo	Xo
Media: μ	Xo	$\frac{\alpha*e^{-Q^2}+\sqrt{\frac{\pi}{2}}*Xo*(1+erf(Q))}{(1-K)*\sqrt{2*\pi}}$
Varianza: σ^2	α^2	$\frac{\alpha*\sqrt{\frac{2}{\pi}}*Xo*e^{-Q^2}+(\alpha^2+Xo^2)*(1+erf(Q))}{2*(1-K)}-\mu^2$
Coeficiente de Variación: CV	$\frac{\alpha}{Xo}$	$\frac{\sigma}{\mu}$

Ecuación 6. 7

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2*\pi*\alpha}}*e^{\frac{(x-Xo)^2}{2*\alpha^2}}dx=\text{norrncdf}(x,Xo,\alpha)\qquad K=\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{\sqrt{2*\pi*\alpha}}*e^{\frac{(x-Xo)^2}{2*\alpha^2}}dx\qquad Q=\frac{Xo}{\sqrt{2}*\alpha}$$

$$erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}*\int_{0}^{x}e^{-t^2}dt$$

Tabla 6. 3 Distribución Log-Normal y Distribución Gamma

Nombre	DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL	DISTRIBUCIÓN GAMMA
Parámetros ajustables	Xo : Parámetro de tamaño. α : Factor de Forma.	Xo : Parámetro de tamaño. α : Factor de Forma.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2*\pi}*\alpha*x}*e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{Xo}\right)\right)^2}{2*\alpha^2}}$	$\frac{x^{\alpha-1}*e^{-\frac{x}{Xo}}}{Xo^{\alpha}*\Gamma_{(\alpha)}}$
Función de Distribución: $F(x)$	logncdf(x,ln(Xo),α)	$P_{\left(\frac{x}{Xo},\alpha\right)}$
Dominio:	$x \in \langle 0;\infty \rangle$	$x \in \langle 0;\infty \rangle$
Mediana: $X50$	Xo	$0.50 = P_{\left(\frac{X50}{Xo},\alpha\right)}$
Punto de Inflexión: Xi	$Xo*e^{-\alpha^2}$	$(\alpha-1)*Xo \quad ;\alpha>1$
Media: μ	$Xo*e^{\frac{\alpha^2}{2}}$	$Xo*\alpha$
Varianza: σ^2	$Xo^2*\left(e^{2*\alpha^2}-e^{\alpha^2}\right)$	$\alpha*Xo^2$
Coeficiente de Variación: CV	$\sqrt{e^{\alpha^2}-1}$	$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$

Ecuación 6. 8

$$F(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2*\pi}*\alpha*x}*e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{Xo}\right)\right)^2}{2*\alpha^2}}dx = \text{logncdf}(x,\ln(Xo),\alpha)$$

Tabla 6. 4 Función Rosin Rammler y Función Broadbent Callcott.

Nombre	FUNCIÓN ROSIN RAMMLER	FUNCIÓN BROADBENT CALLCOTT
Parámetros ajustables	Xo : Parámetro de tamaño. α : Factor de Forma.	Xo : Tamaño Máximo de la Distribución. α : Factor de Forma.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{\alpha}{Xo^{\alpha}} * x^{\alpha-1} * e^{-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}}$	$\frac{1}{1-e^{-1}} * \frac{\alpha}{Xo^{\alpha}} * x^{\alpha-1} * e^{-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}}$
Función de Distribución: $F(x)$	$1-e^{-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}}$	$\frac{1-e^{-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha}}}{1-e^{-1}}$
Dominio:	$x \in \langle 0; \infty \rangle$	$x \in \langle 0; Xo]$
Mediana: $X50$	$Xo*(\ln(2))^{\frac{1}{\alpha}}$	$Xo*\left(\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)\right)^{\frac{1}{\alpha}}$
Punto de Inflexión: Xi	$Xo*\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ;\alpha>1$	$Xo*\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad ;\alpha>1$
Media: μ	$Xo*\Gamma_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$	$\frac{Xo}{1-e^{-1}} * \Gamma_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} * P_{\left(1,\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}$
Varianza: σ^2	$Xo^2 * \left(\Gamma_{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)} - \Gamma^2_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}\right)$	$Xo^2 * \left\{\frac{\Gamma_{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)} * P_{\left(1,\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)}}{1-e^{-1}} - \frac{\Gamma^2_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} * P^2_{\left(1,\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}}{\left(1-e^{-1}\right)^2}\right\}$
Coeficiente de Variación: CV	$\frac{\sqrt{\Gamma_{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)} - \Gamma^2_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}}}{\Gamma_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)}}$	$\sqrt{\frac{\left(1-e^{-1}\right) * \Gamma_{\left(\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)} * P_{\left(1,\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)}}{\Gamma^2_{\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right)} * P^2_{\left(1,\frac{\alpha+2}{\alpha}\right)}} - 1}$

Tabla 6. 5 Función de Harris

Nombre	FUNCIÓN DE HARRIS
Parámetros ajustables	Xo: Tamaño Máximo. α, β: Factores de Forma.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{\alpha*\beta}{Xo}*\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\beta-1}*\left(1-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\beta}\right)^{\alpha-1}$
Función de Distribución: $F(x)$	$1-\left(1-\left(\frac{x}{Xo}\right)^{\beta}\right)^{\alpha}$
Dominio:	$x \in \langle 0; Xo]$
Mediana: $X50$	$\left(1-0.5^{\frac{1}{\alpha}}\right)^{\frac{1}{\beta}}*Xo$
Punto de Inflexión: Xi	$\left(\frac{\beta-1}{\alpha*\beta-1}\right)^{\frac{1}{\beta}}*Xo \quad \alpha*\beta>1\ \&\ \beta>1 \quad$ ó $\quad \alpha*\beta<1\ \&\ \beta<1$
Media: μ	$Xo*\alpha*\mathrm{B}_{\left(\frac{\beta+1}{\beta},\alpha\right)}=Xo*\frac{\Gamma_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)}*\Gamma_{(\alpha+1)}}{\Gamma_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}+\alpha\right)}}$
Varianza: σ^2	$Xo^2*\left[\alpha*\mathrm{B}_{\left(\frac{\beta+2}{\beta},\alpha\right)}-\alpha^2*\mathrm{B}^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta},\alpha\right)}\right]=Xo^2*\left[\frac{\Gamma_{\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)}*\Gamma_{(\alpha+1)}}{\Gamma_{\left(\frac{\beta+2}{\beta}+\alpha\right)}} \quad \frac{\Gamma^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)}*\Gamma^2_{(\alpha+1)}}{\Gamma^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}+\alpha\right)}}\right]$

Coeficiente de Variación: *CV*	$\sqrt{\dfrac{\mathrm{B}_{\left(\frac{\beta+2}{\beta},\alpha\right)}}{\alpha * \mathrm{B}^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta},\alpha\right)}}-1} = \sqrt{\dfrac{\Gamma^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}+\alpha\right)} * \Gamma_{\left(\frac{\beta+2}{\beta}\right)}}{\Gamma^2_{\left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)} * \Gamma_{(\alpha+1)} * \Gamma_{\left(\frac{\beta+2}{\beta}+\alpha\right)}}-1}$

Tabla 6. 6 Distribución Beta

Nombre	DISTRIBUCIÓN BETA
Parámetros ajustables	Xo: Tamaño Máximo. α, β: Factor de Forma.
Función de Densidad: $f(x)$	$\frac{1}{B_{(\alpha,\beta)}} * \frac{1}{Xo} * \left(\frac{x}{Xo}\right)^{\alpha-1} * \left(1-\frac{x}{Xo}\right)^{\beta-1}$
Función de Distribución: $F(x)$	$betainc\left(\frac{x}{Xo}, \alpha, \beta\right)$
Dominio:	$x \in \langle 0; Xo]$
Mediana: $X50$	$0.50 = betainc\left(\frac{X50}{Xo}, \alpha, \beta\right)$
Punto de Inflexión: Xi	$\frac{\alpha-1}{(\alpha+\beta-2)} * Xo \quad \alpha > 1 \,\&\, \alpha+\beta > 2$ ó $\alpha < 1 \,\&\, \alpha+\beta < 2$
Media: μ	$\frac{\alpha}{\alpha+\beta} * Xo$
Varianza: σ^2	$Xo^2 * \left[\frac{\alpha * \beta}{(\alpha+\beta+1)*(\alpha+\beta)^2}\right]$
Coeficiente de Variación: CV	$\sqrt{\frac{\beta}{\alpha*(\alpha+\beta+1)}}$

La función Error está definida por:

Ecuación 6. 9

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} * \int_0^x e^{-t^2} dt$$

La función Gamma está definida por:

Ecuación 6. 10

$$\Gamma_{(p)} = \int_0^\infty z^{p-1} * e^{-z} * dz$$

$\Gamma_{(n)} = (n-1)!$ Para "n" un número entero.

Ecuación 6. 11

$$\Gamma_{(\alpha+1)} = \alpha * \Gamma_{(\alpha)}$$

Se define a la función Gamma Incompleta como:

Ecuación 6. 12

$$P_{(x,a)} = \frac{1}{\Gamma_{(a)}} * \int_0^x z^{a-1} * e^{-z} * dz$$

La función Beta está definida por:

Ecuación 6. 13

$$B_{(m,n)} = \int_0^1 w^{m-1} * (1-w)^{n-1} * dw = \frac{\Gamma_{(m)} * \Gamma_{(n)}}{\Gamma_{(m+n)}}$$

Se define a la función Beta Incompleta como:

Ecuación 6. 14

$$I_{(x,z,w)} = \frac{1}{B_{(z,w)}} * \int_0^x t^{z-1} * (1-t)^{w-1} * dt$$

Nota: Por simplicidad se han utilizado los nombres de las funciones de MATLAB 6.5

normcdf(x,Xo,α) : Distribución Normal Acumulada

$erf(x)$: Función Error

logncdf(x,$\ln(Xo)$,α) : Distribución Log-Normal Acumulada

$gamma(a)$: Función Gamma

$gammainc(x,a)$: Función Gamma Incompleta.

$beta(x,z,w)$: Función Beta.

$betainc(x,z,w)$: Función Beta Incompleta

Obsérvese que, exceptuando las distribuciones Normal y Normal Modificada, en todas las funciones de distribución, el Coeficiente de Variación sólo depende de los factores de forma (α y/o β).

6.3.1 Variación de Parámetros de las funciones de Distribución según el Coeficiente de Variación:

A continuación se presentan, para un tamaño medio constante (1000μm), los parámetros y sus respectivas gráficas de dichas distribuciones variando solamente el Coeficiente de Variación.

El rango del Coeficiente de Variación usado es de $CV \in [10\%, 200\%]$

Nota:

Debido a la complejidad de las ecuaciones estos cálculos se hicieron en Matlab.

Para la Distribución Normal Modificada, $CV \in [10\%, 100\%]$ esto debido a una imprecisión en los resultados a partir de 100%. (Nótese lo complejo de las ecuaciones en la tabla resumen de las distribuciones).

Tabla 6. 7 Variación del Factor de forma "Alpha".

Factor de forma: Alpha								
CV	**Gates Gaudin Schuhmann**	**Gaudin Meloy**	**Rosin Rammler**	**Normal**	**Normal Modificada**	**LogNormal**	**Gamma**	**Broadbent Callcott**
10%	9.0499	0.0202	12.1530	100.0000	100.0000	0.0998	100.0000	10.2150
20%	4.0990	0.0833	5.7974	200.0000	200.0000	0.1980	25.0000	4.7129
30%	2.4801	0.1978	3.7138	300.0000	300.8000	0.2936	11.1110	2.9081
40%	1.6926	0.3810	2.6956	400.0000	411.1700	0.3853	6.2500	2.0256
50%	1.2361	0.6667	2.1013	500.0000	548.9700	0.4724	4.0000	1.5103
60%	0.9437	1.1250	1.7171	600.0000	738.4500	0.5545	2.7778	1.1772
70%	0.7438	1.9216	1.4513	700.0000	1022.5000	0.6315	2.0408	0.9469
80%	0.6008	3.5556	1.2582	800.0000	1504.1000	0.7034	1.5625	0.7801
90%	0.4949	8.5263	1.1128	900.0000	2571.5000	0.7703	1.2346	0.6548
100%	0.4142	Inf	1.0000	1000.0000	7331.3000	0.8326	1.0000	0.5579
110%	0.3515	-11.5240	0.9103	1100.0000	---	0.8905	0.8265	0.4814
120%	0.3017	-6.5455	0.8376	1200.0000	---	0.9445	0.6944	0.4198
130%	0.2616	-4.8986	0.7776	1300.0000	---	0.9948	0.5917	0.3694
140%	0.2289	-4.0833	0.7274	1400.0000	---	1.0417	0.5102	0.3276
150%	0.2019	-3.6000	0.6848	1500.0000	---	1.0857	0.4444	0.2925
160%	0.1793	-3.2821	0.6482	1600.0000	---	1.1268	0.3906	0.2628
170%	0.1602	-3.0582	0.6165	1700.0000	---	1.1655	0.3460	0.2373
180%	0.1440	-2.8929	0.5888	1800.0000	---	1.2019	0.3086	0.2154
190%	0.1301	-2.7663	0.5644	1900.0000	---	1.2362	0.2770	0.1964
200%	0.1180	-2.6667	0.5427	2000.0000	---	1.2686	0.2500	0.1797

Tabla 6. 8 Variación del Parámetro de Tamaño "Xo".

Parámetro de Tamaño: Xo								
CV	**Gates Gaudin Schuhmann**	**Gaudin Meloy**	**Rosin Rammler**	**Normal**	**Normal Modificada**	**LogNormal**	**Gamma**	**Broadbent Callcott**
10%	1110.5000	1020.2000	1043.0000	1000.0000	1000.0000	995.0400	10.0000	1125.0000
20%	1244.0000	1083.3000	1080.0000	1000.0000	1000.0000	980.5800	40.0000	1274.9000
30%	1403.2000	1197.8000	1107.9000	1000.0000	999.5200	957.8300	90.0000	1452.2000
40%	1590.8000	1381.0000	1124.6000	1000.0000	990.9400	928.4800	160.0000	1659.3000
50%	1809.0000	1666.7000	1129.1000	1000.0000	948.6400	894.4300	250.0000	1898.0000
60%	2059.7000	2125.0000	1121.5000	1000.0000	814.6900	857.4900	360.0000	2169.8000
70%	2344.5000	2921.6000	1103.0000	1000.0000	444.5200	819.2300	490.0000	2475.9000
80%	2664.5000	4555.6000	1075.3000	1000.0000	-622.4200	780.8700	640.0000	2817.2000
90%	3020.8000	9526.3000	1040.3000	1000.0000	-4802.7000	743.2900	810.0000	3194.4000
100%	3414.2000	Inf	1000.0000	1000.0000	-51748.0000	707.1100	1000.0000	3608.0000
110%	3845.3000	-10524.0000	956.2700	1000.0000	---	672.6700	1210.0000	4058.4000
120%	4314.5000	-5545.5000	910.6300	1000.0000	---	640.1800	1440.0000	4546.1000
130%	4822.2000	-3898.6000	864.3100	1000.0000	---	609.7100	1690.0000	5071.2000
140%	5368.7000	-3083.3000	818.2700	1000.0000	---	581.2400	1960.0000	5634.1000
150%	5954.2000	-2600.0000	773.2300	1000.0000	---	554.7000	2250.0000	6234.9000
160%	6578.9000	-2282.1000	729.6800	1000.0000	---	530.0000	2560.0000	6873.8000
170%	7242.9000	-2058.2000	687.9500	1000.0000	---	507.0200	2890.0000	7551.1000
180%	7946.4000	-1892.9000	648.2500	1000.0000	---	485.6400	3240.0000	8266.9000
190%	8689.5000	-1766.3000	610.6700	1000.0000	---	465.7500	3610.0000	9021.3000
200%	9472.1000	-1666.7000	575.2500	1000.0000	---	447.2100	4000.0000	9814.5000

Tabla 6. 9 Variación de la Mediana (X50).

Mediana: X50								
CV	**Gates Gaudin Schuhmann**	**Gaudin Meloy**	**Rosin Rammler**	**Normal**	**Normal Modificada**	**LogNormal**	**Gamma**	**Broadbent Callcott**
10%	1028.6000	1020.2000	1012.1000	1000.0000	1000.0000	995.0400	996.6700	1023.3000
20%	1050.4000	1083.1000	1013.8000	1000.0000	1000.0000	980.5800	986.7000	1038.2000
30%	1061.1000	1161.8000	1003.8000	1000.0000	999.6900	957.8300	970.1700	1041.1000
40%	1056.2000	1157.1000	981.6000	1000.0000	995.0500	928.4800	947.2000	1029.0000
50%	1032.5000	1077.4000	948.3500	1000.0000	977.5400	894.4300	918.0200	999.9200
60%	988.1000	977.4400	905.9500	1000.0000	940.2000	857.4900	882.9000	953.5200
70%	923.2500	884.7300	856.8400	1000.0000	882.8800	819.2300	842.2600	890.8900
80%	840.5300	806.8900	803.5500	1000.0000	814.2400	780.8700	796.6200	814.6300
90%	744.3800	743.8000	748.3600	1000.0000	747.3800	743.2900	746.6500	728.4400
100%	640.5300	NaN	693.1500	1000.0000	701.6300	707.1100	693.1500	636.6100
110%	535.0800	652.4200	639.3300	1000.0000	---	672.6700	637.0200	543.5600
120%	433.6900	619.4700	587.9000	1000.0000	---	640.1800	579.2600	453.3100
130%	340.9200	592.5800	539.4800	1000.0000	---	609.7100	520.9200	369.1800
140%	259.8800	570.4400	494.3800	1000.0000	---	581.2400	463.0600	293.5900
150%	192.0700	552.0500	452.7500	1000.0000	---	554.7000	406.6900	227.9700
160%	137.6400	536.6300	414.5400	1000.0000	---	530.0000	352.7400	172.8300
170%	95.6330	523.5900	379.6400	1000.0000	---	507.0200	302.0100	127.9300
180%	64.4300	512.4900	347.8600	1000.0000	---	485.6400	255.1500	92.4490
190%	42.0950	502.9600	318.9900	1000.0000	---	465.7500	212.6100	65.2280
200%	26.6740	494.7300	292.7900	1000.0000	---	447.2100	174.7000	44.9340

Tabla 6. 10 Variación del Punto de Inflexión (Xi)

Punto de Inflexión: Xi								
CV	**Gates Gaudin Schuhmann**	**Gaudin Meloy**	**Rosin Rammler**	**Normal**	**Normal Modificada**	**LogNormal**	**Gamma**	**Broadbent Callcott**
10%	---	---	1035.7000	1000.0000	1000.0000	985.1900	990.0000	1113.7000
20%	---	---	1045.3000	1000.0000	1000.0000	942.8700	960.0000	1212.0000
30%	---	---	1018.1000	1000.0000	999.5200	878.7400	910.0000	1256.3000
40%	---	---	946.8800	1000.0000	990.9400	800.4100	840.0000	1185.7000
50%	---	---	830.2300	1000.0000	948.6400	715.5400	750.0000	925.2700
60%	---	---	674.4500	1000.0000	814.6900	630.5100	640.0000	434.2300
70%	---	---	493.1900	1000.0000	444.5200	549.8200	510.0000	---
80%	---	---	305.4500	1000.0000	---	476.1400	360.0000	---
90%	---	---	133.0200	1000.0000	---	410.6600	190.0000	---
100%	---	---	0.0000	1000.0000	---	353.5500	---	---
110%	---	---	---	1000.0000	---	304.3800	---	---
120%	---	---	---	1000.0000	---	262.3700	---	---
130%	---	---	---	1000.0000	---	226.6600	---	---
140%	---	---	---	1000.0000	---	196.3600	---	---
150%	---	---	---	1000.0000	---	170.6800	---	---
160%	---	---	---	1000.0000	---	148.8800	---	---
170%	---	---	---	1000.0000	---	130.3400	---	---
180%	---	---	---	1000.0000	---	114.5400	---	---
190%	---	---	---	1000.0000	---	101.0300	---	---
200%	---	---	---	1000.0000	---	89.4430	---	---

De las tablas presentadas:

Parámetro Alpha

- Obsérvese que en la Función de Gaudin Meloy se presentan valores negativos a partir de 100%. Esto es explicado porque el CV puede ser mayor que uno si y solo si el factor Alpha es menor a -2.

Parámetro Xo

- Obsérvese que tanto para la Función de Gaudin Meloy como para la distribución Normal Modificada, el factor Xo puede ser negativo.
- En la Distribución Normal, Xo es igual a la media por lo tanto es constante.
- En todas las funciones en las cuales Xo representa el Tamaño Máximo de la distribución, el Xo aumenta al aumentar el Coeficiente de Variación.

Mediana X50

- Nótese que en todas las ecuaciones presentadas (exceptuando la Distribución Normal), la Mediana (X50) disminuye al aumentar el coeficiente de variación. Todas estas funciones tienen valores de X50 parecidas para $CV < 100\%$.

Punto de Inflexión.

- Las funciones de distribución (exceptuando la de Gates Gaudin Schuhmann y la de Gaudin Meloy) presentan un punto de Inflexión, básicamente cuando $CV < 100\%$. Las distribuciones Normal y Log-

Normal que siempre van a presentar un punto de Inflexión, incluso cuando $CV > 100\%$.

6.3.2 Gráficas de las Funciones de Distribución variando el Coeficiente de Variación a un Tamaño Medio igual a 1000μm constante.

Se grafican a continuación el Porcentaje Acumulado Pasante vs. Tamaño de Partículas:

Gráfico 6. 1 $CV = 10\%$

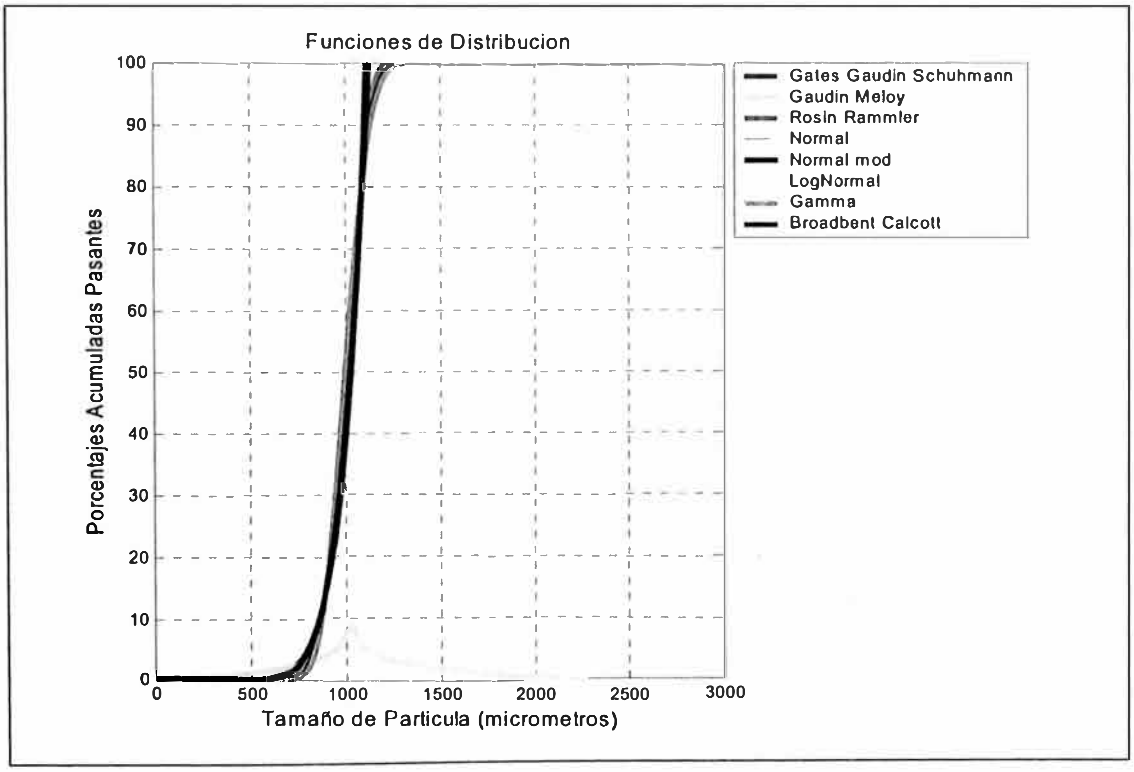


Gráfico 6. 2 $CV = 50\%$

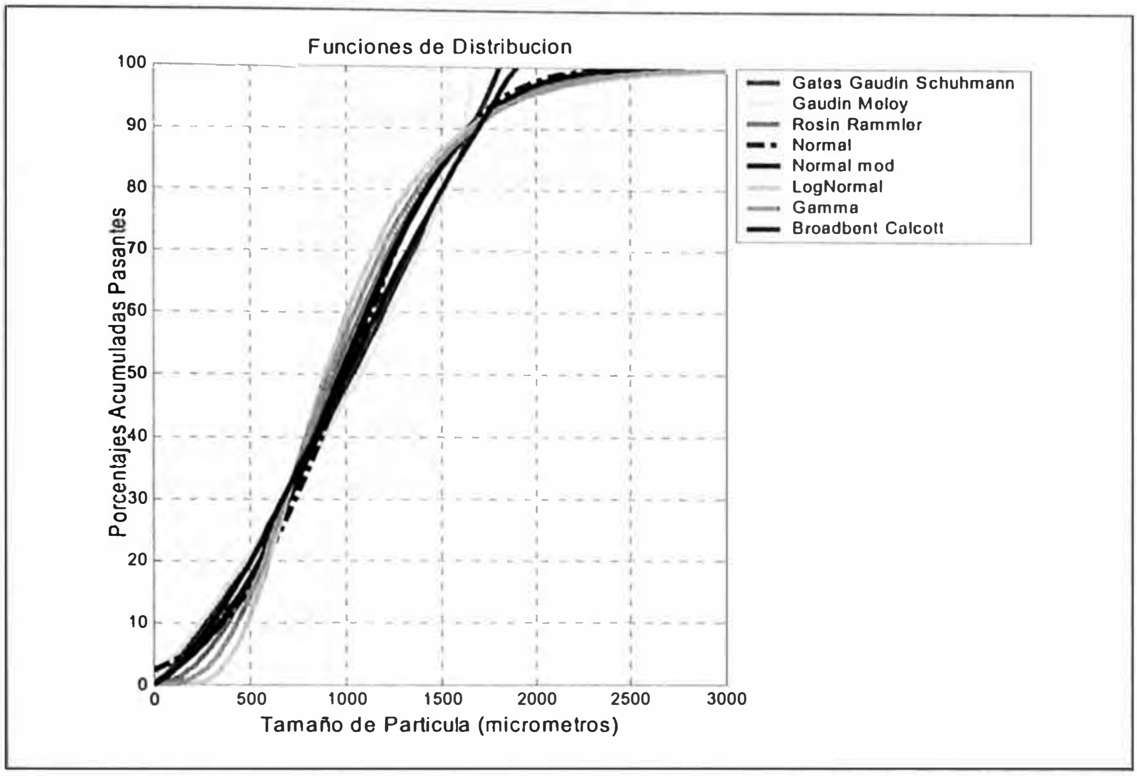


Gráfico 6. 3 $CV = 100\%$

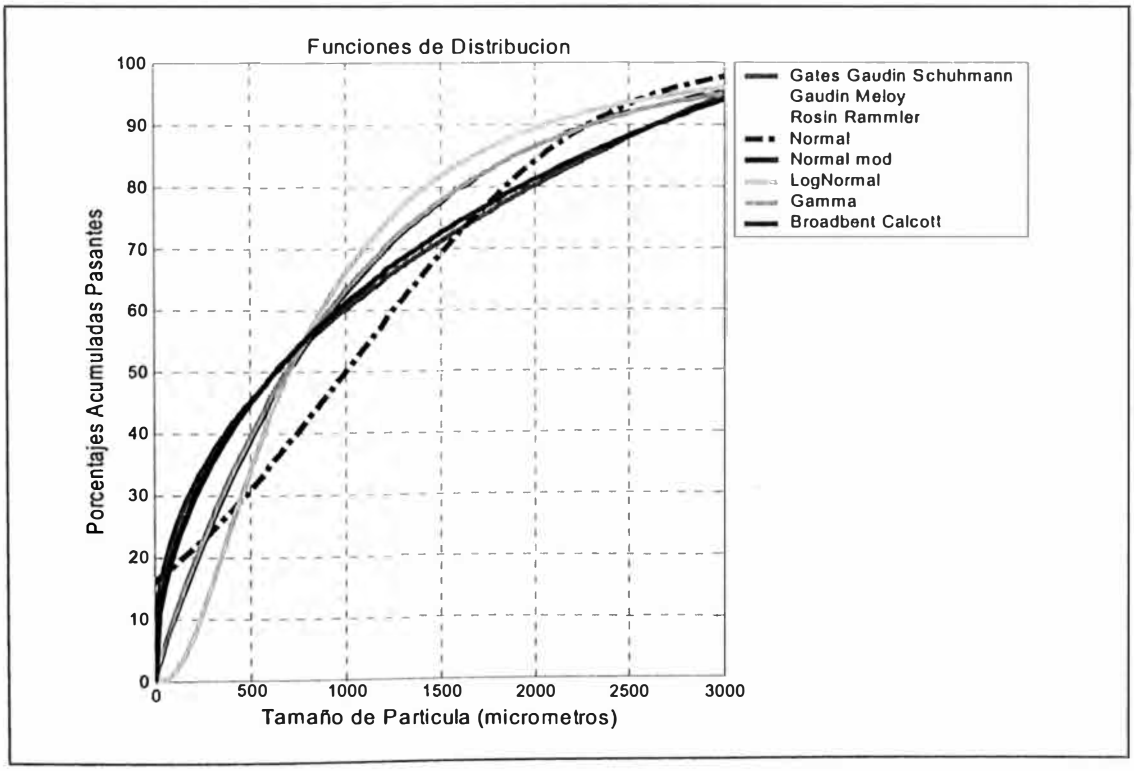


Gráfico 6. 4 $CV = 150\%$

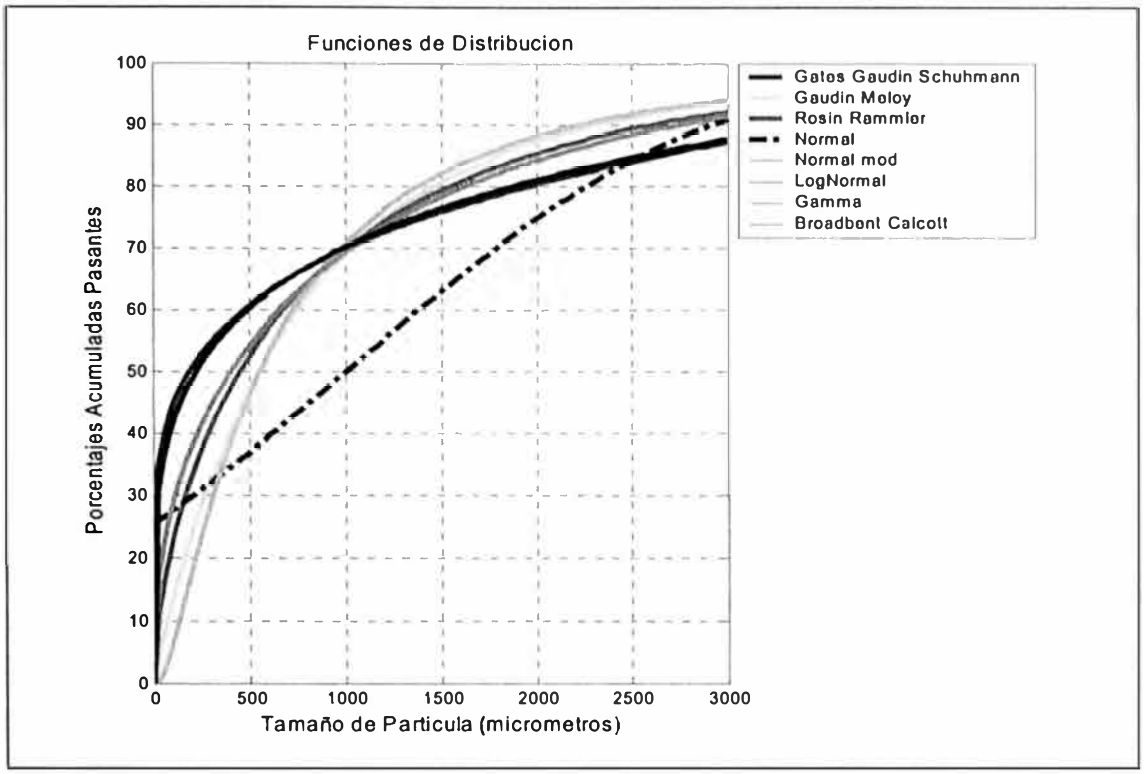
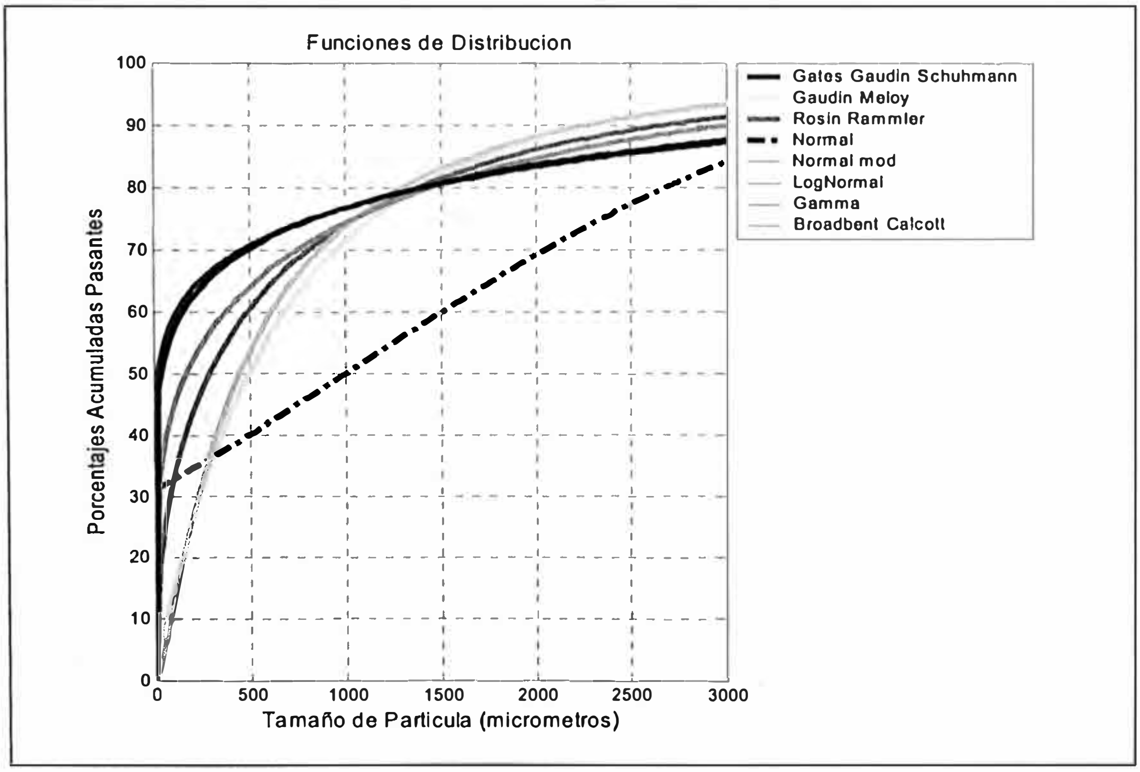


Gráfico 6. 5 $CV = 200\%$



Se observa la disminución de la pendiente al aumentar el Coeficiente de Variación. Esto puede tomarse como si se tuviera diferentes muestras con un mismo tamaño promedio, una muestra con un Coeficiente de Variación mayor significa que la muestra está distribuida en un rango de mayor amplitud (referido al tamaño de partículas).

6.4 ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS

6.4.1 Porcentaje en Peso

Tabla 6. 11 Análisis Granulométrico – Porcentaje en Peso

	Tamaño de partículas (µm)			Porcentaje en Peso - fi(Xp)							
Malla	**T. Max**	**T. Min**	**T. Prom (Xp)**	**Alimento**	**Spigot #01**	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**	**Rebose**
-m14 +m20	1400	850	1091	2.43%	13.81%	2.22%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
-m20 +m30	850	600	714	6.28%	31.62%	16.80%	0.92%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
-m30 +m40	600	445	517	11.12%	30.52%	42.22%	10.13%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
-m40 +m50	445	300	365	11.87%	13.60%	28.48%	31.27%	3.14%	0.00%	0.00%	0.00%
-m50 +m70	300	212	252	14.84%	6.25%	8.12%	44.78%	25.04%	3.86%	0.00%	0.00%
-m70 +m100	212	150	178	10.29%	1.67%	0.96%	9.91%	29.72%	17.62%	1.14%	0.00%
-m100 +m140	150	106	126	11.30%	0.99%	0.57%	1.86%	21.47%	29.74%	12.92%	0.36%
-m140 +m200	106	75	89	10.37%	0.50%	0.29%	0.63%	9.48%	19.92%	28.90%	3.68%
-m200 +m270	75	53	63	9.30%	0.36%	0.10%	0.40%	5.45%	14.20%	28.54%	25.80%
-m270 +m325	53	45	49	1.96%	0.08%	0.06%	0.04%	1.11%	3.05%	6.38%	13.08%
-m325 +m400	45	38	41	2.37%	0.09%	0.09%	0.02%	1.16%	2.39%	4.44%	8.92%
-m400	38	0	19	7.87%	0.51%	0.09%	0.04%	3.43%	9.22%	17.68%	48.16%
			Total	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

Porcentaje Acumulado Retenido

Tabla 6. 12 Análisis Granulométrico – Porcentaje Acumulado Retenido

		Porcentaje Acumulado Retenido – G(X)							
Malla	Abertura (μm) (X)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
+m20	850	2.43%	13.81%	2.22%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
+m30	600	8.71%	45.43%	19.02%	0.92%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
+m40	445	19.83%	75.95%	61.24%	11.05%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
+m50	300	31.70%	89.55%	89.72%	42.32%	3.14%	0.00%	0.00%	0.00%
+m70	212	46.54%	95.80%	97.84%	87.10%	28.18%	3.86%	0.00%	0.00%
+m100	150	56.83%	97.47%	98.80%	97.01%	57.90%	21.48%	1.14%	0.00%
+m140	106	68.13%	98.46%	99.37%	98.87%	79.37%	51.22%	14.06%	0.36%
+m200	75	78.50%	98.96%	99.66%	99.50%	88.85%	71.14%	42.96%	4.04%
+m270	53	87.80%	99.32%	99.76%	99.90%	94.30%	85.34%	71.50%	29.84%
+m325	45	89.76%	99.40%	99.82%	99.94%	95.41%	88.39%	77.88%	42.92%
+m400	38	92.13%	99.49%	99.91%	99.96%	96.57%	90.78%	82.32%	51.84%
		100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%

6.4.2 Porcentaje Acumulado Pasante

Tabla 6. 13 Análisis Granulométrico – Porcentaje Acumulado Pasante

		Porcentaje Acumulado Pasante – F(X)							
Malla	Abertura (μm) (X)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
+m20	850	97.57%	86.19%	97.78%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
+m30	600	91.29%	54.57%	80.98%	99.08%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
+m40	445	80.17%	24.05%	38.76%	88.95%	100.00%	100.00%	100.00%	100.00%
+m50	300	68.30%	10.45%	10.28%	57.68%	96.86%	100.00%	100.00%	100.00%
+m70	212	53.46%	4.20%	2.16%	12.90%	71.82%	96.14%	100.00%	100.00%
+m100	150	43.17%	2.53%	1.20%	2.99%	42.10%	78.52%	98.86%	100.00%
+m140	106	31.87%	1.54%	0.63%	1.13%	20.63%	48.78%	85.94%	99.64%
+m200	75	21.50%	1.04%	0.34%	0.50%	11.15%	28.86%	57.04%	95.96%
+m270	53	12.20%	0.68%	0.24%	0.10%	5.70%	14.66%	28.50%	70.16%
+m325	45	10.24%	0.60%	0.18%	0.06%	4.59%	11.61%	22.12%	57.08%
+m400	38	7.87%	0.51%	0.09%	0.04%	3.43%	9.22%	17.68%	48.16%
		0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%

6.4.3 Ajuste a las Funciones de Distribución

El R^2 esta definido como: $SSE = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2$ (Mínimo Cuadrado) $SSR = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_i - \bar{y}\right)^2$ $SST = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2$

y_i: Valores Dato. $\hat{y}_i$: Valor de la Función. $\bar{y}$: Media de los Valores Dato

Donde: $SST = SSR + SSE$

Ecuación 6. 15

$$R^2 = \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

Tabla 6. 14 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Alimento

ALIMENTO											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.6469	0.9945	0.9946	0.9684	0.9962	0.9969	0.9980	0.9466	0.9956	0.9959
Min Cuadrado	NaN	0.4827	0.0088	0.0060	0.0509	0.0061	0.0051	0.0033	0.0592	0.0060	0.0056
Alpha	NaN	0.7330	30.7272	1.1946	168.9229	516.7391	1.0294	1.2208	0.9614	4.9952	1.0774
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.0444	5.2915
Xo	NaN	725.09	8675.23	272.83	217.60	-596.92	177.18	212.14	638.84	1404.13	1472.71
Tamaño Medio	269.74	306.68	273.43	256.94	217.60	256.10	300.98	258.98	260.52	249.19	249.13
Varianza	68384.21	46951.36	70196.32	46643.55	28534.94	48564.68	170812.53	54938.81	32560.93	41168.99	41367.59
Desv. Std.	261.50	216.68	264.95	215.97	168.92	220.37	413.29	234.39	180.45	202.90	203.39
CV	96.95%	70.65%	96.90%	84.06%	77.63%	86.05%	137.32%	90.51%	69.26%	81.42%	81.64%

Tabla 6. 15 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #01

SPIGOT #01											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.8289	0.9246	0.9209	0.9991	0.9991	0.9958	0.9975	0.9166	0.9985	0.9984
Min Cuadrado	NaN	0.2445	0.1118	0.0630	0.0014	0.0014	0.0062	0.0037	0.0664	0.0021	0.0023
Alpha	NaN	1.6340	1.0575	1.8678	222.9593	226.7043	0.3978	6.4261	1.7770	7.2221	3.9261
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.7403	5.8370
Xo	NaN	1154.98	1315.14	826.62	587.95	586.17	569.73	94.33	1208.25	1408.73	1476.74
Tamaño Medio	602.74	716.48	639.10	733.95	587.95	589.38	616.64	606.20	687.90	589.31	593.85
Varianza	56406.29	86455.46	141364.61	166505.67	49710.87	49501.70	65199.90	57186.00	92600.37	47406.83	48713.28
Desv. Std.	237.50	294.03	375.99	408.05	222.96	222.49	255.34	239.14	304.30	217.73	220.71
CV	39.40%	41.04%	58.82%	55.60%	37.92%	37.75%	41.41%	39.45%	44.24%	36.95%	37.17%

Tabla 6. 16 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #02

SPIGOT #02											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	-0.0930	0.8910	0.9569	0.9997	0.9997	0.9981	0.9989	0.9233	0.9997	0.9993
Min Cuadrado	NaN	2.0235	0.2096	0.0552	0.0005	0.0006	0.0036	0.0021	0.0983	0.0006	0.0013
Alpha	NaN	2.1667	1.1845	2.6245	138.4255	138.4815	0.2982	11.4260	2.4398	40.5344	7.6475
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3.9676	14.4681
Xo	NaN	948.36	1134.38	620.42	481.84	481.78	473.27	42.88	875.56	1352.12	1403.52
Tamaño Medio	498.59	648.88	517.41	551.22	481.84	481.91	494.79	490.00	567.53	479.98	485.33
Varianza	33847.12	46637.30	101091.30	50997.84	19161.61	19114.44	22770.05	21013.45	38464.00	18017.93	19278.12
Desv. Std.	183.98	215.96	318.03	225.83	138.43	138.25	150.90	144.96	196.12	134.23	138.85
CV	36.90%	33.28%	61.34%	40.97%	28.73%	28.69%	30.50%	29.58%	34.56%	27.97%	28.61%

Tabla 6. 17 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #03

SPIGOT #03											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	-2.4908	0.8979	0.9773	0.9954	0.9954	0.9986	0.9978	0.8454	0.9938	-2.5654
Min Cuadrado	NaN	6.7112	0.2064	0.0325	0.0092	0.0092	0.0028	0.0045	0.2209	0.0120	6.8547
Alpha	NaN	2.8125	1.1028	3.5226	79.9135	80.0373	0.3059	11.0864	3.2387	52.2047	8.3730
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	4.2418	1157248.6
Xo	NaN	543.42	686.32	363.49	291.43	291.44	288.73	27.01	483.88	807.66	858.50
Tamaño Medio	310.23	400.89	324.70	327.17	291.43	291.49	302.56	299.46	344.53	288.31	0.01
Varianza	11494.26	11873.31	38198.06	10595.60	6386.17	6393.67	8979.04	8089.10	8952.21	5789.08	0.00
Desv. Std.	107.21	108.96	195.46	102.93	79.91	79.96	94.76	89.94	94.62	76.09	0.00
CV	34.56%	27.18%	60.01%	31.46%	27.42%	27.43%	31.32%	30.03%	27.46%	26.39%	34.56%

Tabla 6. 18 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #04

SPIGOT #04											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.6568	0.9389	0.9956	0.9996	0.9999	0.9911	0.9957	0.9912	0.9996	0.9989
Min Cuadrado	NaN	0.4401	0.0869	0.0038	0.0005	0.0002	0.0127	0.0061	0.0077	0.0005	0.0014
Alpha	NaN	1.5152	1.1937	2.1983	74.0767	77.2866	0.4857	4.3597	1.8939	5.0871	2.8213
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.2207	4.6448
Xo	NaN	323.57	388.19	188.53	166.85	164.68	157.65	39.77	292.36	419.15	448.10
Tamaño Medio	171.87	194.92	176.79	166.96	166.85	167.92	177.38	173.37	171.23	167.98	169.33
Varianza	6494.47	7133.84	11730.37	6427.01	5487.36	5429.43	8370.19	6894.00	5204.45	5246.97	5575.75
Desv. Std.	80.59	84.46	108.32	80.17	74.08	73.68	91.49	83.03	72.14	72.44	74.67
CV	46.89%	43.33%	61.23%	48.02%	44.40%	43.88%	51.58%	47.89%	42.13%	43.12%	44.10%

Tabla 6. 19 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #05

SPIGOT #05											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.7703	0.9540	0.9982	0.9991	0.9998	0.9910	0.9967	0.9811	0.9995	0.9991
Min Cuadrado	NaN	0.2356	0.0568	0.0013	0.0011	0.0003	0.0111	0.0041	0.0136	0.0006	0.0009
Alpha	NaN	1.2622	1.2911	2.0773	53.2697	56.9102	0.5630	3.5025	1.6888	4.6590	2.4253
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.9718	4.4383
Xo	NaN	225.83	262.75	123.57	107.52	104.54	99.61	32.25	201.33	289.71	310.94
Tamaño Medio	112.36	126.00	114.63	109.46	107.52	108.89	116.72	112.94	111.97	109.01	109.87
Varianza	3619.13	3855.99	5167.37	3057.71	2837.66	2765.67	5081.80	3641.69	2650.63	2656.64	2809.27
Desv. Std.	60.16	62.10	71.89	55.30	53.27	52.59	71.29	60.35	51.48	51.54	53.00
CV	53.54%	49.28%	62.70%	50.52%	49.55%	48.30%	61.07%	53.43%	45.98%	47.28%	48.24%

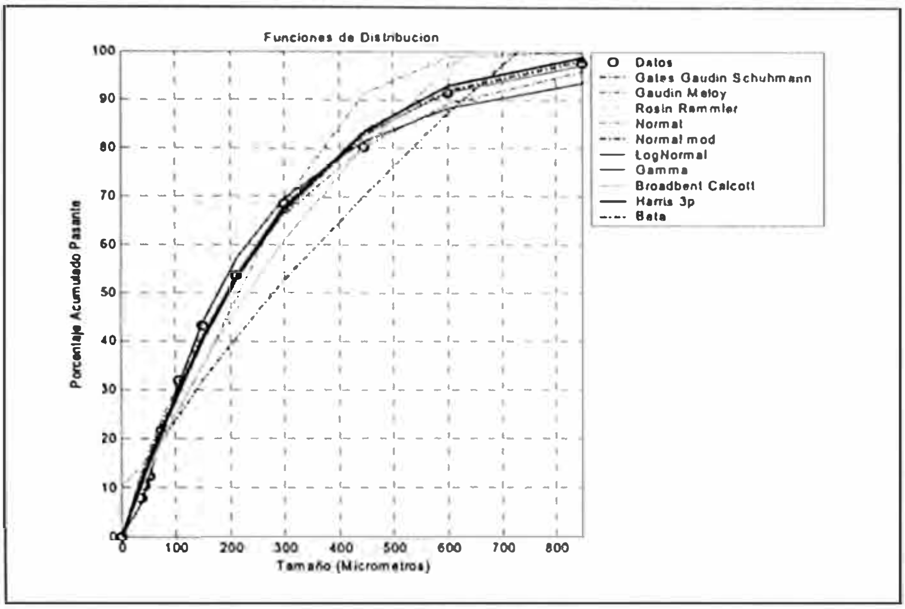
Tabla 6. 20 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Spigot #06

SPIGOT #06											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.7430	0.9433	0.9979	0.9992	0.9994	0.9937	0.9971	0.9564	0.9988	0.9980
Min Cuadrado	NaN	0.2055	0.0624	0.0013	0.0008	0.0006	0.0069	0.0032	0.0262	0.0010	0.0016
Alpha	NaN	1.0988	1.4083	2.3506	32.6247	33.6923	0.4825	4.5201	1.6560	6.7101	3.2887
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.2509	8.0180
Xo	NaN	159.73	179.50	80.17	70.05	69.01	66.40	16.15	135.60	195.28	246.91
Tamaño Medio	71.26	83.62	74.48	71.04	70.05	70.69	74.60	72.99	74.72	70.93	71.82
Varianza	1221.78	2053.66	2300.20	1031.91	1064.37	1016.13	1458.98	1178.60	1215.83	955.53	1021.77
Desv. Std.	34.95	45.32	47.97	32.12	32.62	31.88	38.20	34.33	34.87	30.91	31.97
CV	49.05%	54.19%	64.38%	45.22%	46.58%	45.09%	51.20%	47.04%	46.67%	43.58%	44.51%

Tabla 6. 21 Ajuste de curvas al Análisis Granulométrico del Rebose

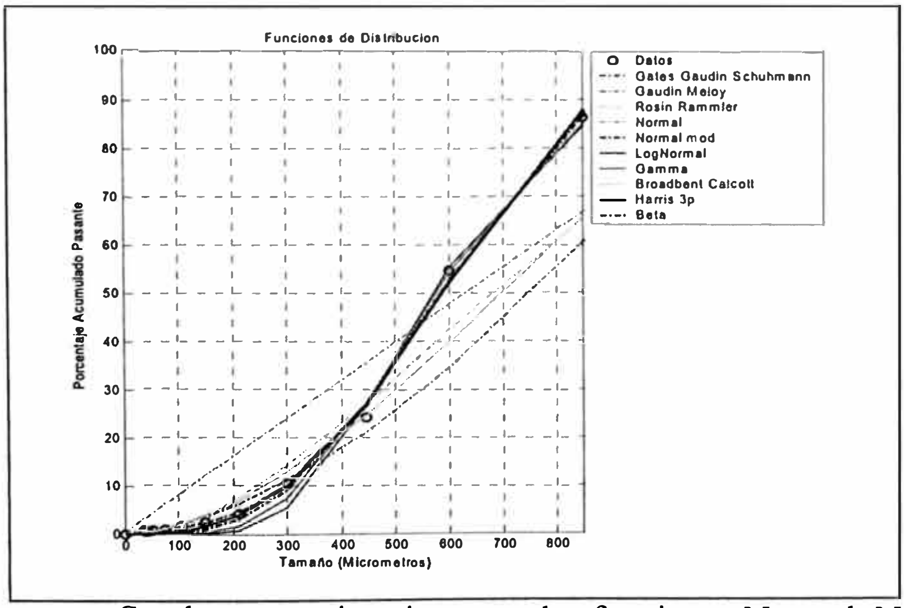
REBOSE											
Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
r^2	NaN	0.7711	0.9813	0.9906	0.9971	0.9983	0.9943	0.9961	0.9195	0.9951	0.9921
Min Cuadrado	NaN	0.0609	0.0148	0.0020	0.0023	0.0014	0.0046	0.0031	0.0170	0.0013	0.0021
Alpha	NaN	0.5451	2.0482	2.2050	21.3786	23.4376	0.4492	4.5003	1.0369	7.1280	3.1488
Beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.9985	9.8839
Xo	NaN	115.73	121.42	47.12	40.53	38.67	40.25	9.64	94.37	131.95	176.07
Tamaño Medio	39.30	40.83	39.83	41.73	40.53	41.19	44.53	43.37	40.34	41.62	42.54
Varianza	478.72	1201.60	804.55	399.31	457.05	445.44	443.31	418.00	702.02	407.07	404.79
Desv. Std.	21.88	34.66	28.37	19.98	21.38	21.11	21.05	20.45	26.50	20.18	20.12
CV	55.68%	84.90%	71.23%	47.88%	52.74%	51.24%	47.29%	47.14%	65.68%	48.48%	47.30%

Gráfico 6. 6 Ajuste de Curvas al Alimento



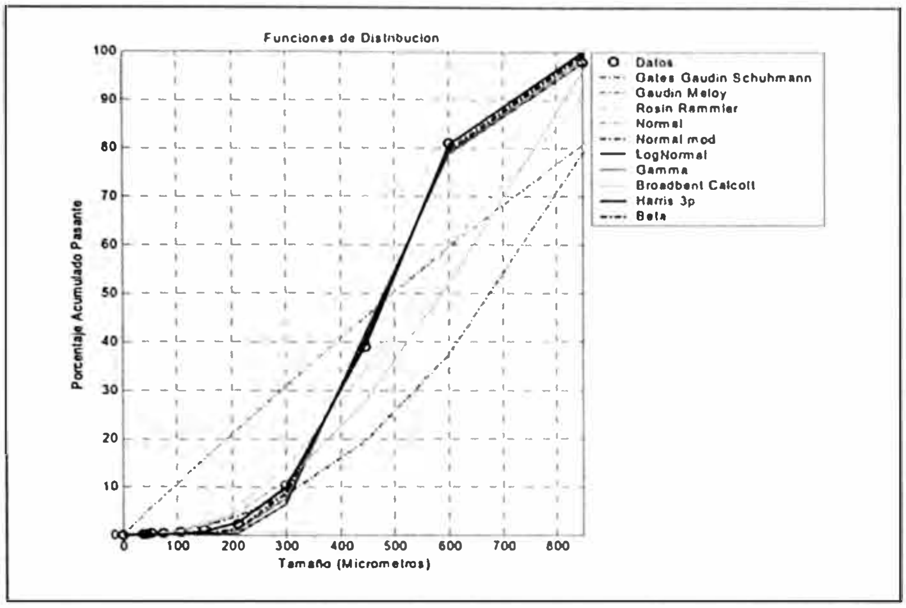
Se observa un mejor ajuste por las funciones Rosin Rammler, Normal Modificada, Gamma, Harris y Beta.

Gráfico 6. 7 Ajuste de Curvas al Spigot #01



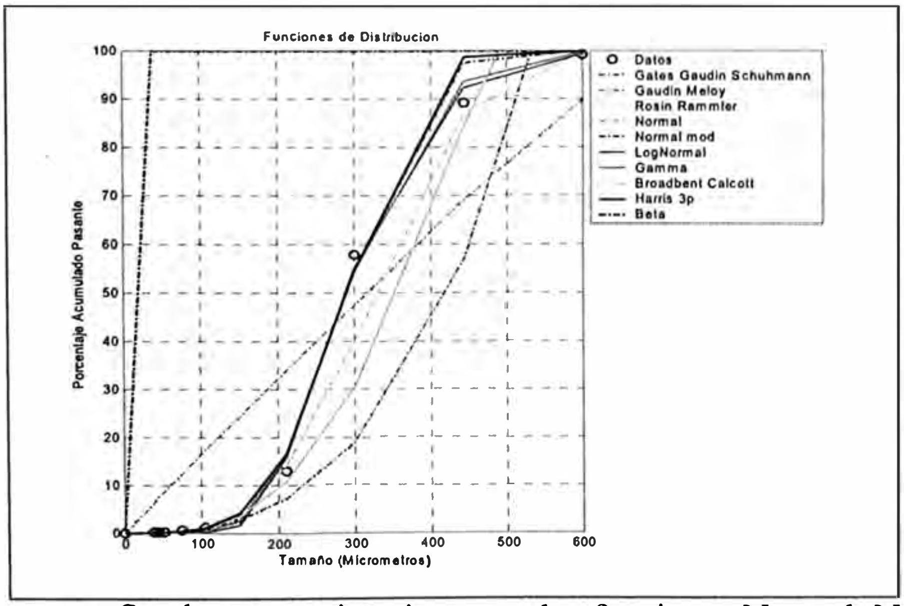
Se observa mejor ajuste por las funciones Normal, Normal Modificada, LogNormal, Gamma, Harris y Beta.

Gráfico 6. 8 Ajuste de Curvas al Spigot #02



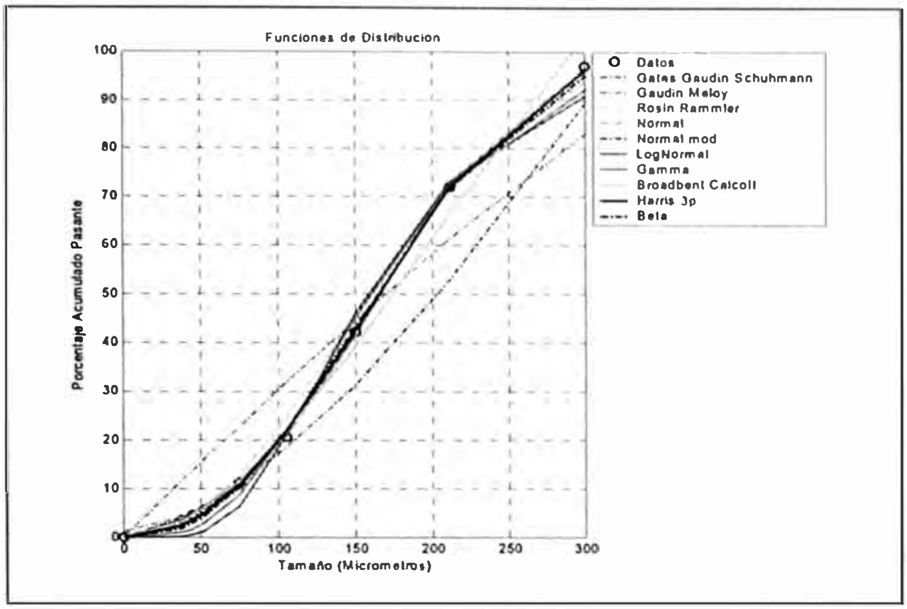
Se observa mejor ajuste por las funciones Normal, Normal Modificada, LogNormal, Gamma, Harris y Beta.

Gráfico 6. 9 Ajuste de Curvas al Spigot #03



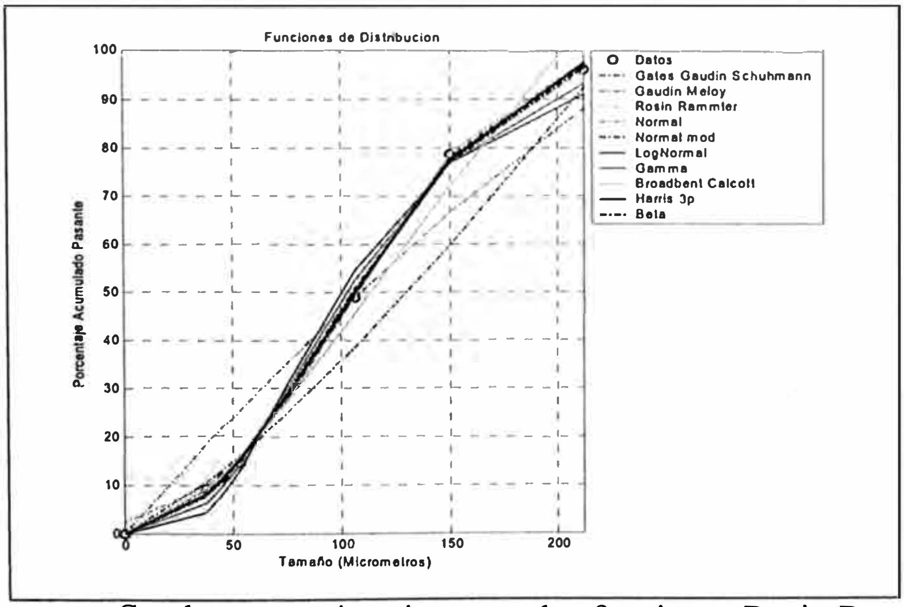
Se observa mejor ajuste por las funciones Normal, Normal Modificada, LogNormal, Gamma, Harris.

Gráfico 6. 10 Ajuste de Curvas al Spigot #04



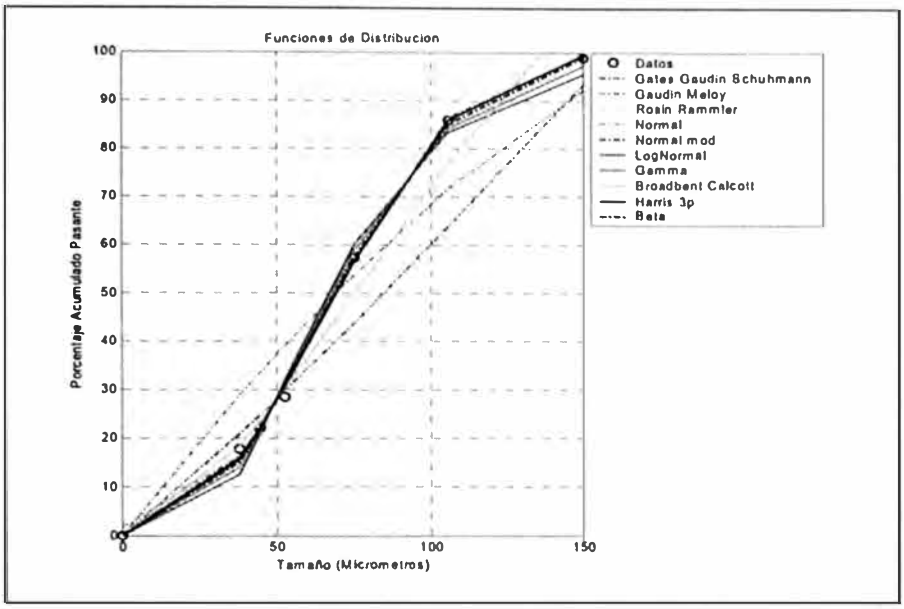
Se observa mejor ajuste por las funciones Normal, Normal Modificada, Harris, Beta.

Gráfico 6. 11 Ajuste de Curvas al Spigot #05



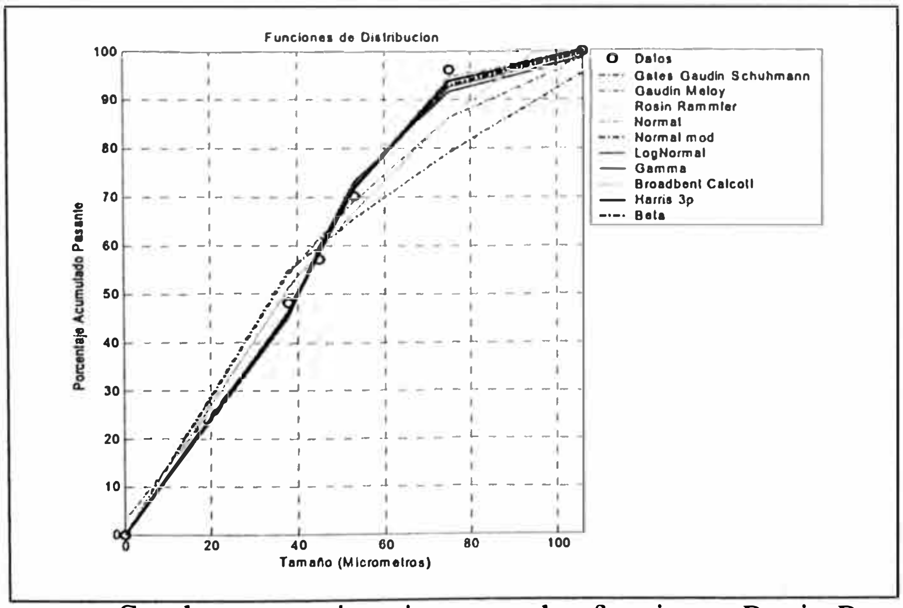
Se observa mejor ajuste por las funciones Rosin Rammler, Normal, Normal Modificada, Harris, Beta.

Gráfico 6. 12 Ajuste de Curvas al Spigot #06



Se observa mejor ajuste por las funciones Rosin Rammler, Normal, Normal Modificada, Harris, Beta.

Gráfico 6. 13 Ajuste de Curvas al Rebose



Se observa mejor ajuste por las funciones Rosin Rammler, Normal, Normal Modificada, LogNormal, Gamma, Harris, Beta.

6.4.3.1 Consideraciones para determinar que función de distribución puede representar una muestra.

- Se establece que una muestra puede ser representada por más de una función de Distribución.
- En una forma general debe de tener un R^2 mayor a 0.99 (Calculada por la ecuación 6.15).
- Si se desea interpolar un dato se debe de hacer una inspección de las gráficas, nótese que existen curvas que pueden tener un R^2 mayor a 0.99 y desviarse de los rangos finos (y/o gruesos). (Ej: La función LogNormal en el Spigot %05 se desvía ligeramente en los rangos finos y gruesos pero mantiene un R^2=0.9910).
- Se debe de verificar también que los parámetros estadísticos (básicamente el Tamaño Medio y el Coeficiente de Variación) obtenidos por las funciones de distribución sean los más cercanos a los hallados por las funciones estadísticas (Ecuaciones 6.1 al 6.4).

A continuación se presenta el orden (en forma descendente) que pueden representarse las muestras analizadas por las distintas funciones de distribución.

En Función del R^2.

Tabla 6. 22 Orden de preferencia de las Funciones y/o Distribución según el R^2. (Orden Descendente)

Muestra	Función y/o Distribución								
Alimento	Gamma	LogNormal	Normal mod	Beta	Harris	RR	GM	Normal	BC	GGS
Spigot #01	Normal mod	Normal	Harris	Beta	Gamma	LogNormal	GM	RR	BC	GGS
Spigot #02	Normal	Normal mod	Harris	Beta	Gamma	LogNormal	RR	BC	GM	GGS
Spigot #03	LogNormal	Gamma	Normal mod	Normal	Harris	RR	GM	BC	GGS	Beta
Spigot #04	Normal mod	Harris	Normal	Beta	Gamma	RR	BC	LogNormal	GM	GGS
Spigot #05	Normal mod	Harris	Beta	Normal	RR	Gamma	LogNormal	BC	GM	GGS
Spigot #06	Normal mod	Normal	Harris	Beta	RR	Gamma	LogNormal	BC	GM	GGS
Rebose	Normal mod	Normal	Gamma	Harris	LogNormal	Beta	RR	GM	BC	GGS

Por similitud en los parámetros Estadísticos.

Tabla 6. 23 Orden de preferencia de las Funciones y/o Distribución según la similitud de los Parámetros Estadísticos. (Orden Descendente)

Muestra	Función y/o Distribución									
Alimento	GM	Gamma	Normal mod	RR	BC	Beta	Harris	GGS	Normal	LogNormal
Spigot #01	Gamma	Beta	Normal	Normal mod	LogNormal	Harris	GGS	BC	GM	RR
Spigot #02	LogNormal	Gamma	Beta	Normal	Normal mod	BC	Harris	RR	GM	GGS
Spigot #03	Beta	LogNormal	Gamma	RR	Normal mod	Normal	Harris	BC	GM	GGS
Spigot #04	Gamma	BC	RR	Beta	Normal mod	Normal	Harris	LogNormal	GM	GGS
Spigot #05	Gamma	BC	RR	Beta	Normal mod	Normal	GM	Harris	LogNormal	GGS
Spigot #06	RR	Harris	Normal mod	Beta	Normal	Gamma	LogNormal	BC	GM	GGS
Rebose	Normal	GM	Normal mod	BC	Harris	RR	Beta	Gamma	LogNormal	GGS

Para establecer la similitud en los parámetros estadísticos se utilizo la siguiente fórmula:

Ecuación 6. 16

$$\Delta e = \left(\frac{\mu_{estadistico} - \mu_{funcion}}{\mu_{estadistico}} \right)^2 * \left(\frac{CV_{estadistico} - CV_{funcion}}{CV_{estadistico}} \right)^2$$

Es decir un menor valor Δe tendrá una mejor aproximación a los parámetros estadísticos.

Tabla 6. 24 Valores de Δe

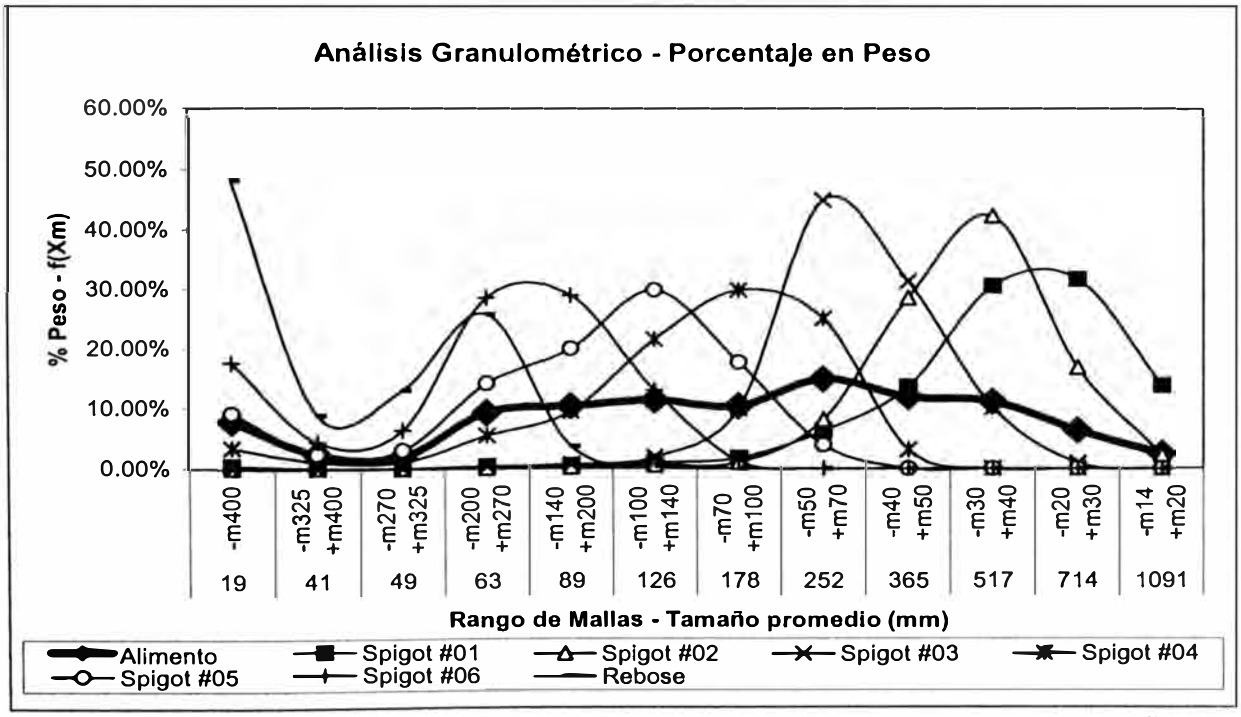
Δe	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris	Beta
Alimento	0.03715	0.00001	0.00631	0.03851	0.00568	0.04823	0.00265	0.00975	0.01220	0.01206
Spigot #01	0.00783	0.02973	0.08946	0.00092	0.00093	0.00117	0.00001	0.01733	0.00139	0.00084
Spigot #02	0.02956	0.02500	0.01164	0.00744	0.00744	0.00132	0.00342	0.00878	0.00904	0.00597
Spigot #03	0.06239	0.03435	0.00489	0.01252	0.01246	0.00232	0.00454	0.02270	0.01670	0.00000
Spigot #04	0.01018	0.00875	0.00069	0.00155	0.00147	0.00321	0.00019	0.00038	0.00182	0.00088
Spigot #05	0.00967	0.00345	0.00146	0.00322	0.00302	0.00546	0.00001	0.00048	0.00348	0.00219
Spigot #06	0.01818	0.01413	0.00024	0.00086	0.00064	0.00205	0.00100	0.00237	0.00051	0.00073
Rebose	0.02047	0.00378	0.00868	0.00166	0.00385	0.02007	0.01591	0.00478	0.00765	0.01243

Se observa de manera general, que las funciones que mejor ajustan (para estas muestras) son funciones estadísticas, recuérdese que la función Rosin Rammler también representa una distribución probabilística denominada Distribución Weibull.

Se debe tener en consideración que distribuciones como Gamma, Normal Modificada y LogNormal pueden dar un mejor ajuste (tanto por R^2 como por similitud de parámetros estadísticos) que las funciones de Harris y Distribución Beta, siendo estos dos últimos más difíciles de ajustar debido a que contienen tres parámetros.

Análisis Granulométrico – Porcentaje en Peso

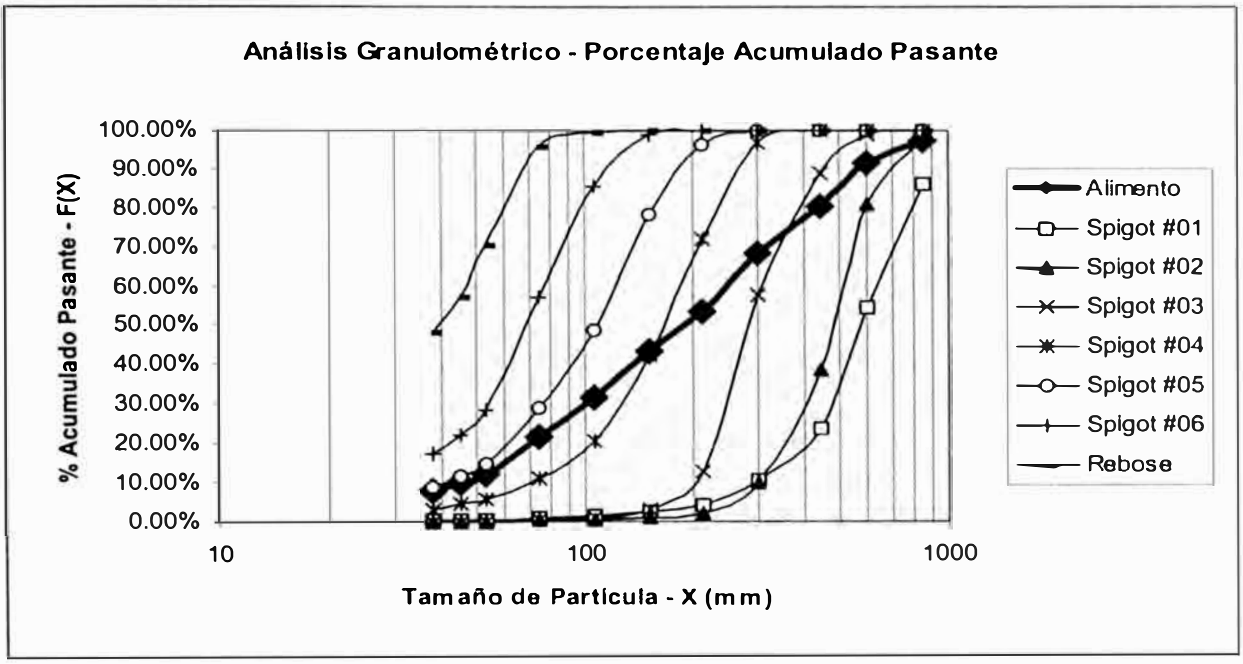
Gráfico 6. 14



- Obsérvese que la curva del Alimento, debido a su mayor Coeficiente de Variación, la campana es más ancha y de bajo pico con respecto a las descargas.

Análisis Granulométrico – Porcentaje Acumulado Pasante

Gráfico 6. 15



- Obsérvese también la curva del Alimento, la menor pendiente de este debido a su mayor Coeficiente de Variación (prácticamente interseca a las curvas de descarga).

CAPÍTULO 7
CÁLCULO DE LA EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES

7.1 INTRODUCCIÓN

Para hallar la eficiencia del Clasificador Stokes, tomaremos cada cámara como un clasificador en cada cual tenemos una alimentación, una descarga y un rebose. (Ej: un Hidrociclón).

El rebose de la primera cámara (Rebose #01) será el alimento a la segunda cámara y así sucesivamente hasta la sexta cámara.

La eficiencia del clasificador será el producto de las eficiencias de las cámaras tomadas individualmente. Aquí surge un problema, y es el que no se cuenta con los análisis granulométricos de los reboses de las cámaras (exceptuando el rebose final). Estos análisis granulométricos de los reboses ($fR1, fR2, fR3, fR4, fR5$) se hallarán por balance de masa, para esto es **Necesario** haber corregido los análisis granulométricos de todo el sistema (alimentación, descargas y rebose final).

Una vez calculados todos estos análisis granulométricos, se procede a hallar las curvas de partición.

Recordemos la definición axiomática de Probabilidad [7], [8]:

"La probabilidad $P(x)$ de un evento x es un número positivo asignado a este evento:

$P(x) \geq 0$

La probabilidad de un cierto evento (un evento que debe ocurrir) es la unidad.

$P(z) = 1$

Si A y B son mutuamente excluyentes, entonces:

$P(A + B) = P(A) + P(B)$"

La definición de evento esta dado como: "Un evento es la ocurrencia, ya sea de un resultado prescrito o de cualquier otro, entre varios posibles resultados de un experimento". Para nuestro caso: los eventos serán los tamaños promedios de partícula.

Tomemos por ejemplo las partículas de tamaño promedio Xpi (un evento) cuya probabilidad de reportarse a la descarga (producto grueso) estará determinadas por la relación en peso de la cantidad de un material de tamaño Xpi que se descarga de una cámara con respecto a la cantidad de material (de igual tamaño Xpi) que ingresa a dicha cámara (cantidad total de material de tamaño Xpi).

Es decir, una curva de Partición, es simplemente una gráfica de probabilidades de reportarse al producto grueso. Como es de suponer (y así ocurre en la práctica) una partícula grueso (por ejemplo 500 μm) tendrá una mayor probabilidad de reportarse al producto grueso que una partícula fina (por ejemplo 50 μm). Pero existen excepciones (como se mencionó en el Capítulo 1) como las curvas tipo "gancho" o "anzuelo" en la que una partícula fina tiene una mayor probabilidad de reportarse a la descarga que una partícula un poco más gruesa. Esto puede presentarse cuando partículas finas quedan adheridas a partículas gruesas, en pulpas de alta viscosidad, se puede presentar también en ciertos clasificadores neumáticos [3].

Posteriormente se utilizan algunos tipos de interpolación y de ajuste de curvas para determinar cuál es el método más preciso para hallar los tamaños de corte (d50, d50c) para cada cámara. El d50 es el tamaño de partículas que tienen igual probabilidad de reportarse a la Descarga o al Rebose, el cual en la curva de partición es representado por la coordenada $(d50, 50\%)$. Es decir el mejor método para determinar el tamaño de corte será el que más se aproxime a la coordenada mencionada.

Sobre este tamaño d50 se regirá la determinación de la eficiencia de la cámara la cual estará dada como el producto de las eficiencias de los finos y la eficiencia de los gruesos

Eficiencia de Finos: $$nF = \frac{\text{Peso de partículas Menores a d50 en el Rebose}}{\text{Peso de partículas Menores a d50 en el Alimento}}$$

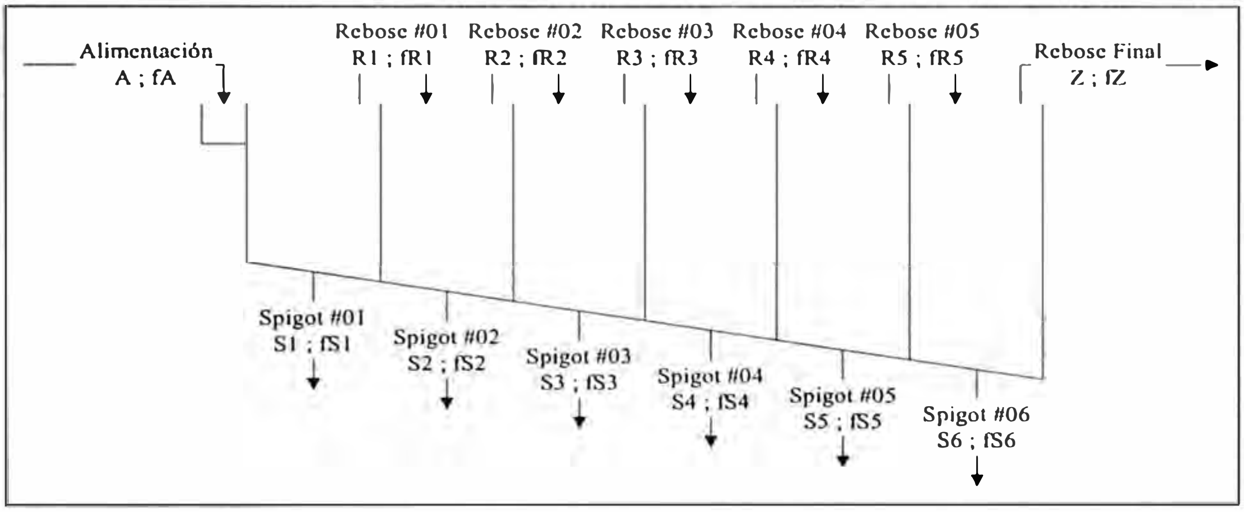
Eficiencia de Gruesos: $$nG = \frac{\text{Peso de partículas Mayores a d50 en la Descarga}}{\text{Peso de partículas Mayores a d50 en el Alimento}}$$

Eficiencia de la cámara: $$n = nF * nG$$

7.2 CÁLCULO DE LOS ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS DE LOS REBOSES.

En la siguiente gráfica se muestra el esquema, en la cual las granulometrías de los Reboses 1 al 5 son desconocidos y que se calcularán por balance de masa usando los análisis granulométricos corregidos (ver el Capítulo 3).

Gráfica 7. 1



Se establecen las siguientes relaciones de caudales:

$$\frac{S1c}{Ac} = \beta 1c; \frac{S2c}{Ac} = \beta 2c; \frac{S3c}{Ac} = \beta 3c; \frac{S4c}{Ac} = \beta 4c; \frac{S5c}{Ac} = \beta 5c; \frac{S6c}{Ac} = \beta 6; \frac{Zc}{Ac} = \beta Zc$$

$$\frac{R1c}{Ac} = \gamma 1c; \frac{R2c}{Ac} = \gamma 2c; \frac{R3c}{Ac} = \gamma 3c; \frac{R4c}{Ac} = \gamma 4c; \frac{R5c}{Ac} = \gamma 5c$$

Para la Primera Cámara:

$$Ac = S1c + R1c$$

$$1 = \frac{S1c}{Ac} + \frac{R1c}{Ac}$$

$$1 = \beta 1c + \gamma 1c$$

$$\gamma 1c = 1 - \beta 1c$$

$$fAc * Ac = fS1c * S1c + fR1c * R1c$$

$$fAc = fS1c * \beta 1c + fR1c * \gamma 1c$$

$$fR1c = \frac{fAc - fS1c * \beta 1c}{\gamma 1c}$$

Análogamente se obtienen las relaciones para las siguientes cámaras:

Ecuación 7. 1

$$\boxed{\begin{array}{l}\gamma 1c = 1 - \beta 1c \\ \gamma 2c = \gamma 1c - \beta 2c = 1 - \beta 1c - \beta 2c \\ \gamma 3c = \gamma 2c - \beta 3c = 1 - \beta 1c - \beta 2c - \beta 3c \\ \gamma 4c = \gamma 3c - \beta 4c = 1 - \beta 1c - \beta 2c - \beta 3c - \beta 4c \\ \gamma 5c = \gamma 4c - \beta 5c = 1 - \beta 1c - \beta 2c - \beta 3c - \beta 4c - \beta 5c = \beta 6c + \beta Zc\end{array}}$$

Ecuación 7. 2

$$\boxed{\begin{array}{l} fR1c = \dfrac{fAc - fS1c * \beta 1c}{\gamma 1c} \\ fR2c = \dfrac{fR1c * \gamma 1c - fS2c * \beta 2c}{\gamma 2c} \\ fR3c = \dfrac{fR2c * \gamma 2c - fS3c * \beta 3c}{\gamma 3c} \\ fR4c = \dfrac{fR3c * \gamma 3c - fS4c * \beta 4c}{\gamma 4c} \\ fR5c = \dfrac{fR4c * \gamma 4c - fS5c * \beta 5c}{\gamma 5c} = \dfrac{fS6c * \beta 6c + fZc * \beta Zc}{\gamma 5c} \end{array}}$$

$$\frac{S1c}{Ac} = \beta 1c$$

$$\frac{S2c}{R1c} = \frac{S2c/Ac}{R1c/Ac} = \frac{\beta 2c}{\gamma 1c}$$

$$\frac{S3c}{R2c} = \frac{S3c/Ac}{R2c/Ac} = \frac{\beta 3c}{\gamma 2c}$$

$$\frac{S4c}{R3c} = \frac{S4c/Ac}{R3c/Ac} = \frac{\beta 4c}{\gamma 3c}$$

$$\frac{S5c}{R4c} = \frac{S5c/Ac}{R4c/Ac} = \frac{\beta 5c}{\gamma 4c}$$

$$\frac{S6c}{R5c} = \frac{S6c/Ac}{R5c/Ac} = \frac{\beta 6c}{\gamma 5c}$$

A continuación se presentan los Análisis Granulométricos calculados de los reboses de las Cámaras.

7.2.1 Análisis Granulométricos Calculados (Rebose de Cámaras).

Tabla 7. 1 Análisis Granulométricos (Incluido Reboses 1 al 5).

				Alim #02		**Alim #03**		**Alim #04**		**Alim#05**		**Alim #06**			
		Alimento	Spigot #01	**Rebose #01**	Spigot #02	**Rebose #02**	Spigot #03	**Rebose #03**	Spigot #04	**Rebose #04**	Spigot #05	**Rebose #05**	Spigot #06	**Rebose #06**	Rebose
Malla	(µm)	fAc	fS1c	**fR1c**	fS2c	**fR2c**	fS3c	**fR3c**	fS4c	**fR4c**	fS5c	**fR5c**	fS6c	**fR6c=fZc**	FZc
-m14 +m20	1091	2.17%	13.84%	**0.35%**	2.25%	**0.04%**	0.05%	**0.04%**	0.04%	**0.04%**	0.05%	**0.03%**	0.04%	**0.01%**	0.01%
-m20 +m30	714	6.45%	31.60%	**2.51%**	16.78%	**0.21%**	0.89%	**-0.03%**	-0.02%	**-0.03%**	-0.03%	**-0.02%**	-0.03%	**-0.01%**	-0.01%
-m30 +m40	517	11.15%	30.52%	**8.12%**	42.22%	**2.63%**	10.12%	**-0.01%**	-0.01%	**-0.01%**	-0.01%	**0.00%**	-0.01%	**0.00%**	0.00%
-m40 +m50	365	11.80%	13.61%	**11.51%**	28.49%	**8.78%**	31.28%	**0.86%**	3.15%	**0.01%**	0.01%	**0.01%**	0.01%	**0.00%**	0.00%
-m50 +m70	252	14.94%	6.24%	**16.31%**	8.11%	**17.63%**	44.76%	**8.08%**	25.02%	**1.80%**	3.84%	**-0.01%**	-0.02%	**-0.01%**	-0.01%
-m70 +m100	178	10.22%	1.68%	**11.55%**	0.97%	**13.26%**	9.92%	**14.43%**	29.73%	**8.76%**	17.63%	**0.86%**	1.15%	**0.00%**	0.00%
-m100 +m140	126	11.43%	0.97%	**13.07%**	0.55%	**15.09%**	1.83%	**19.75%**	21.45%	**19.12%**	29.71%	**9.69%**	12.90%	**0.35%**	0.35%
-m140 +m200	89	10.21%	0.52%	**11.72%**	0.31%	**13.56%**	0.66%	**18.10%**	9.50%	**21.29%**	19.95%	**22.47%**	28.93%	**3.69%**	3.69%
-m200 +m270	63	9.52%	0.33%	**10.96%**	0.07%	**12.71%**	0.36%	**17.06%**	5.42%	**21.38%**	14.16%	**27.81%**	28.50%	**25.79%**	25.79%
-m270 +m325	49	2.42%	0.02%	**2.79%**	0.01%	**3.24%**	-0.05%	**4.40%**	1.04%	**5.65%**	2.96%	**8.03%**	6.31%	**13.06%**	13.06%
-m325 +m400	41	1.91%	0.15%	**2.19%**	0.15%	**2.52%**	0.11%	**3.36%**	1.23%	**4.15%**	2.48%	**5.65%**	4.51%	**8.94%**	8.94%
-m400		7.77%	0.52%	**8.91%**	0.10%	**10.33%**	0.06%	**13.94%**	3.44%	**17.83%**	9.24%	**25.49%**	17.70%	**48.17%**	48.17%

Tabla 7. 2 Relación de Caudales

β1c	0.13531075	γ1 c	0.86468925
β2 c	0.12001136	γ2 c	0.74467788
β3 c	0.19379033	γ3 c	0.55088756
β4 c	0.14903508	γ4 c	0.40185247
β5 c	0.18927903	γ5 c	0.21257344
β6 c	0.15822086		
βZ c	0.05435258		

7.3 DETERMINACIÓN DE LAS CURVAS DE PARTICIÓN

La curva de partición para la separación se dibuja trazando el coeficiente de partición, definido como el porcentaje de cada fracción de la alimentación que se presenta en el producto grueso, contra el tamaño medio geométrico sobre una escala logarítmica.

El tamaño de separación se obtiene con el 50% de probabilidad, es decir, el tamaño en el cual una partícula tiene igual oportunidad de reportarse al producto grueso o al fino (d50) [9].

$ED(Xp)$: Son las eficiencias puntuales de las descargas para cada rango de mallas

Ecuación 7. 3

$$ED(Xp)=\frac{\text{Peso de material de tamaño Xp en la Descarga}}{\text{Peso de material de tamaño Xp en el Alimento}}$$

Ecuación 7. 4

$$ED(Xp)\#01=\frac{fS1c*S1c}{fAc*Ac}=\frac{fS1c}{fAc}*\beta 1c$$

$$ED(Xp)\#02=\frac{fS2c*S2c}{fR1c*R1c}=\frac{fS2c}{fR1c}*\frac{\beta 2c}{\gamma 1c}$$

$$ED(Xp)\#03=\frac{fS3c*S3c}{fR2c*R2c}=\frac{fS3c}{fR2c}*\frac{\beta 3c}{\gamma 2c}$$

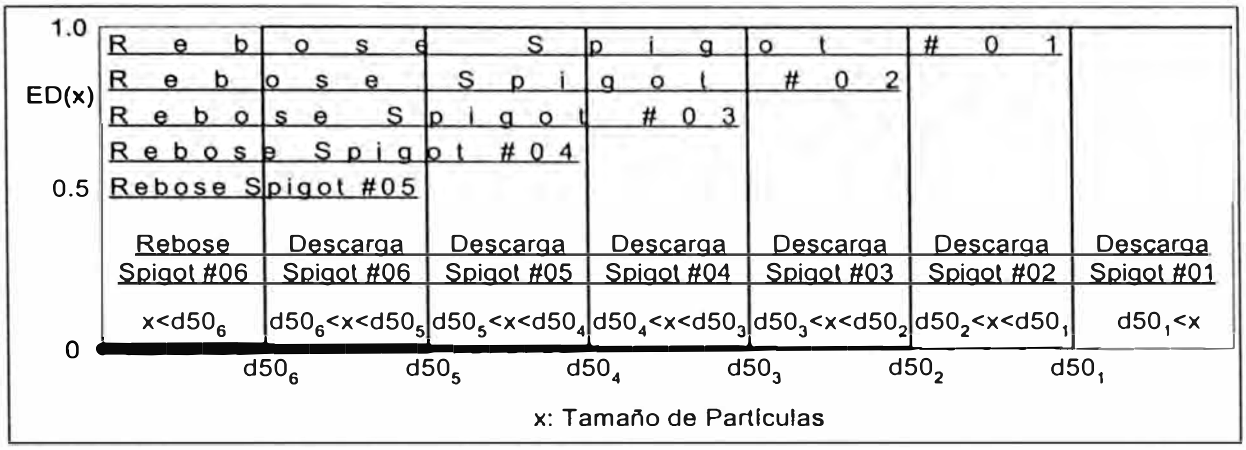
$$ED(Xp)\#04=\frac{fS4c*S4c}{fR3c*R3c}=\frac{fS4c}{fR3c}*\frac{\beta 4c}{\gamma 3c}$$

$$ED(Xp)\#05=\frac{fS5c*S5c}{fR4c*R4c}=\frac{fS5c}{fR4c}*\frac{\beta 5c}{\gamma 4c}$$

$$ED(Xp)\#06=\frac{fS6c*S6c}{fR5c*R5c}=\frac{fS6c}{fR5c}*\frac{\beta 6c}{\gamma 5c}$$

7.3.1 Curvas de Partición Ideales.

Gráfica 7. 2 Curvas de Partición Ideales para el Clasificador Stokes



Estas curvas de partición implican que sólo existen dos probabilidades: cero o uno. Lo que significa:

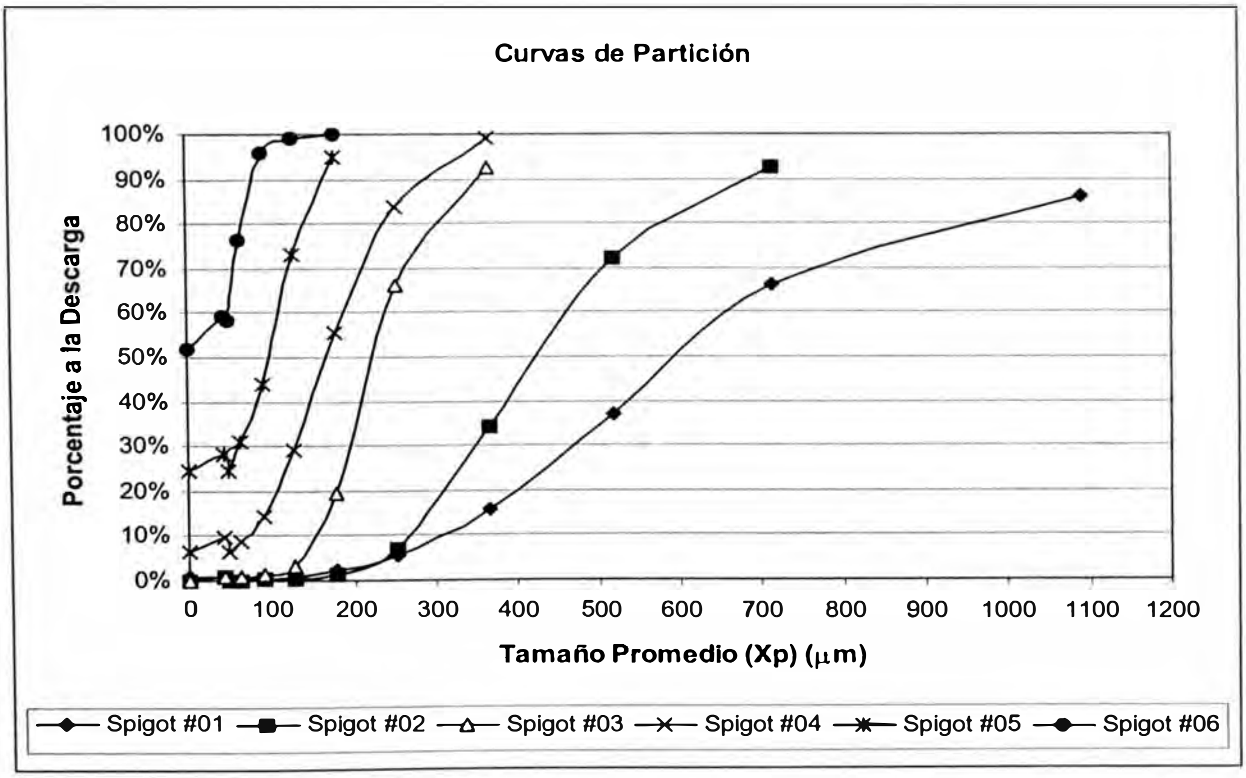
- En la descarga del Spigot #01, sólo existirán partículas mayores a $d50_1$.
- El rebose del Spigot #01 sólo existirán partículas menores a $d50_1$.
- En la descarga del Spigot #02, sólo existirán partículas menores que $d50_1$ y mayores a $d50_2$
- En el rebose del Spigot #02, sólo existirán partículas menores a $d50_2$
- Y así sucesivamente. Por lo tanto en el Rebose del Spigot #06 sólo existirán partículas menores a $d50_6$.

7.3.2 Curvas de Partición

Tabla 7. 3 Curvas de Partición

	ED(Xp)					
T. Prom (μm)	**Spigot #01**	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**
1090.8712	86.1320%	89.5493%	30.3888%	25.8195%	56.1416%	89.4448%
714.1428	66.3181%	92.7394%	109.1077%	25.8195%	56.1416%	89.4448%
516.7204	37.0176%	72.1169%	100.1506%	25.8195%	56.1416%	89.4448%
365.3765	15.6100%	34.3417%	92.7453%	99.0218%	56.1416%	89.4448%
252.1904	5.6462%	6.9004%	66.0751%	83.7439%	100.4031%	89.4448%
178.3255	2.2245%	1.1636%	19.4768%	55.7279%	94.8185%	99.8829%
126.0952	1.1500%	0.5881%	3.1629%	29.3792%	73.1921%	99.0694%
89.1628	0.6923%	0.3667%	1.2700%	14.2076%	44.1493%	95.8029%
63.0476	0.4690%	0.0930%	0.7308%	8.5896%	31.1914%	76.2904%
48.8365	0.1014%	0.0254%	-0.3904%	6.4061%	24.7263%	58.4452%
41.3521	1.0768%	0.9209%	1.1268%	9.8848%	28.0899%	59.4906%
0	**0.9103%**	**0.1582%**	**0.1477%**	**6.6843%**	**24.4004%**	**51.6783%**

Gráfica 7. 3



7.4 CÁLCULO DEL PARÁMETRO D50

Para el cálculo de este parámetro se interpolaron los datos, con excepción de la curva del Spigot #06 en donde el cálculo fue por extrapolación.

Se usaron dos formas de interpolación:

a) Interpolación Lineal.

b) Interpolación de Lagrange (ver Apéndice I)

Para la interpolación Lineal, se tomaron los dos puntos más cercanos a 50% (uno >50% y el otro <50%).

Para la interpolación por Lagrange los puntos que se tomaron para el cálculo están sombreados, una razón para no usar más datos es una desviación en el resultado.

Los d50 calculados son:

Tabla 7. 4 Calculo de los d50 por Interpolación Lineal e Interpolación de Lagrange.

Interpolación	*Spigot #01*	*Spigot #02*	*Spigot #03*	*Spigot #04*	*Spigot #05*	*Spigot #06*
Lineal	604.19	428.11	226.71	166.97	96.60	42.11
Lagrange	583.96	411.85	223.42	166.86	98.70	45.33

Por convención, una porción de cada fracción del tamaño de alimentación que interesa se supone que entra en el hundido por corto-circuito en proporción directa a la fracción de agua de alimentación que aparece en el hundido.[12]

[12] "Diseño de Plantas de Proceso de Minerales", Mular Bhappu, Segunda Edición, Editorial Rocas y Minerales 1985; Pag #339

7.5 CORRECCIÓN DE LAS CURVAS DE PARTICION

La Curva de Partición se corrige mediante la siguiente ecuación:

Ecuación 7. 5

$$EDc(Xp) = \frac{ED(Xp) - K}{1 - K}$$

$$K = \frac{D}{A} * \frac{FD(Xn)}{FA(Xn)}$$

Donde:

D: Descarga

A: Alimentación

F: Fracción Acumulada Pasante

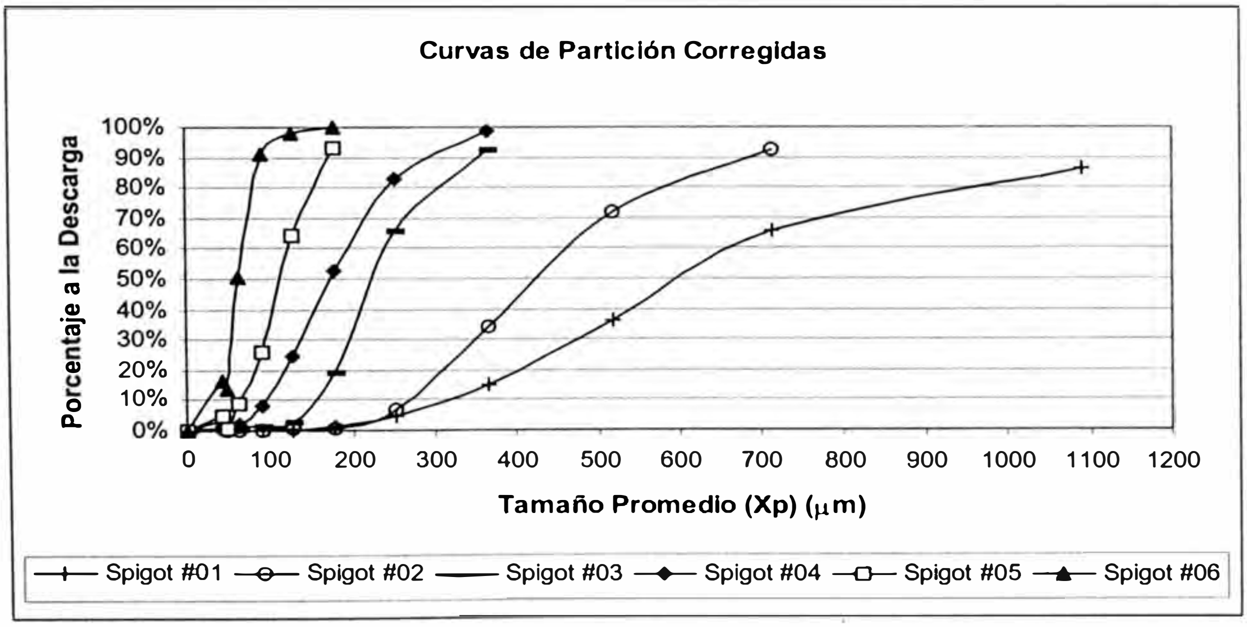
Xn: Abertura de la malla más fina que se usó para el análisis granulométrico.

Para nuestros datos en particular, vemos que para los cuatro primeros Spigots en el tamaño de 48.8 µm son los menores valores (términos ED), por lo cual se utilizaran estos como el factor K. El principal motivo para que sea el menor valor es que como se mencionó anteriormente, estas curvas de partición son probabilidades (valores entre cero y uno), por lo tanto si estrictamente se escoge los valores de tamaño más fino habría intervalos cuyos valores EDc serian negativos.

Tabla 7. 5 Curvas de Partición Corregidas.

	EDc(Xp)					
T. Prom	**Spigot #01**	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**
1090.8712	86.1179%	89.5466%	30.6595%	20.7421%	41.9859%	78.1563%
714.1428	66.2839%	92.7376%	109.0723%	20.7421%	41.9859%	78.1563%
516.7204	36.9537%	72.1098%	100.1500%	20.7421%	41.9859%	78.1563%
365.3765	15.5244%	34.3250%	92.7735%	98.9548%	41.9859%	78.1563%
252.1904	5.5505%	6.8768%	66.2071%	82.6312%	100.5332%	78.1563%
178.3255	2.1253%	1.1385%	19.7900%	52.6976%	93.1461%	99.7578%
126.0952	1.0497%	0.5628%	3.5395%	24.5455%	64.5396%	98.0743%
89.1628	0.5915%	0.3414%	1.6539%	8.3354%	26.1230%	91.3143%
63.0476	0.3680%	0.0676%	1.1169%	2.3329%	8.9829%	50.9340%
48.8365	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.0000%	0.4310%	14.0040%
41.3521	0.9764%	0.8957%	1.5114%	3.7168%	4.8803%	16.1674%
0	0.8098%	0.1328%	0.5360%	0.2972%	0.0000%	0.0000%

Gráfica 7. 4



7.6 ECUACIÓNES DE LA CURVA DE PARTICIÓN CORREGIDA.

Las curvas de partición corregidas se ajustaron a cuatro funciones:

7.6.1 Plitt

Ecuación 7. 6

$$EDc(Xp) = 1 - \exp\left[\ln(0.50) * \left(\frac{Xp}{d50c}\right)^{a}\right]$$

Esta curva es análoga a la Distribución Weibull Acumulada por lo tanto similar a la función Rosin Rammler utilizada en el Capítulo 6.

7.6.2 Lynch

Ecuación 7. 7

$$EDc(Xp) = \frac{\exp\left(a * \frac{Xp}{d50c}\right) - 1}{\exp\left(a * \frac{Xp}{d50c}\right) + \exp(a) - 2}$$

7.6.3 Distribución LogNormal

Ecuación 7. 8

$$EDc(Xp) = \int_{0}^{Xp} \frac{1}{\sqrt{2 * \pi} * \alpha * x} * e^{-\frac{\left(\ln\left(\frac{x}{d50c}\right)\right)^{2}}{2 * \alpha^{2}}} dx = \text{logncdf}\left(Xp, \ln\left(d50c\right), \alpha\right)$$

Esta curva es similar a la ecuación 6.8.

7.6.4 Logística en ln(x).

Ecuación 7. 9

$$EDc(Xp) = \frac{1}{1 + \left(\frac{Xp}{d50c}\right)^{-a}}$$

7.6.4.1 Método para ajustar los parámetros a la curvas de Partición.

Para hallar los parámetros en la Curva de Plitt, esta puede obtenerse como una recta, sólo basta hacer uso de logaritmos que no se describirán en este trabajo. Para las ecuaciones de Lynch, LogNormal, Logística en ln(X) e incluso en los ajustes de curvas del Capitulo 6 se utilizó el método de los mínimos cuadrados

Ecuación 7. 10

$$S=\sum_{i=1}^{k}\left(F\left(Datos\right)-\hat{F}\left(Función\right)\right)^{2}$$

Es decir (para el caso de las funciones de las curvas de partición), a y d50c son parámetros con la cual S toma un valor mínimo.

El punto mínimo puede hallarse con ayuda del Solver de Microsoft Excel 2000 o de algún software como Matlab, pero por el tipo de función, se debe de introducir previamente un vector inicial con valores aproximados. Para esto se procedió de la siguiente manera (usando Microsoft Excel 2000):

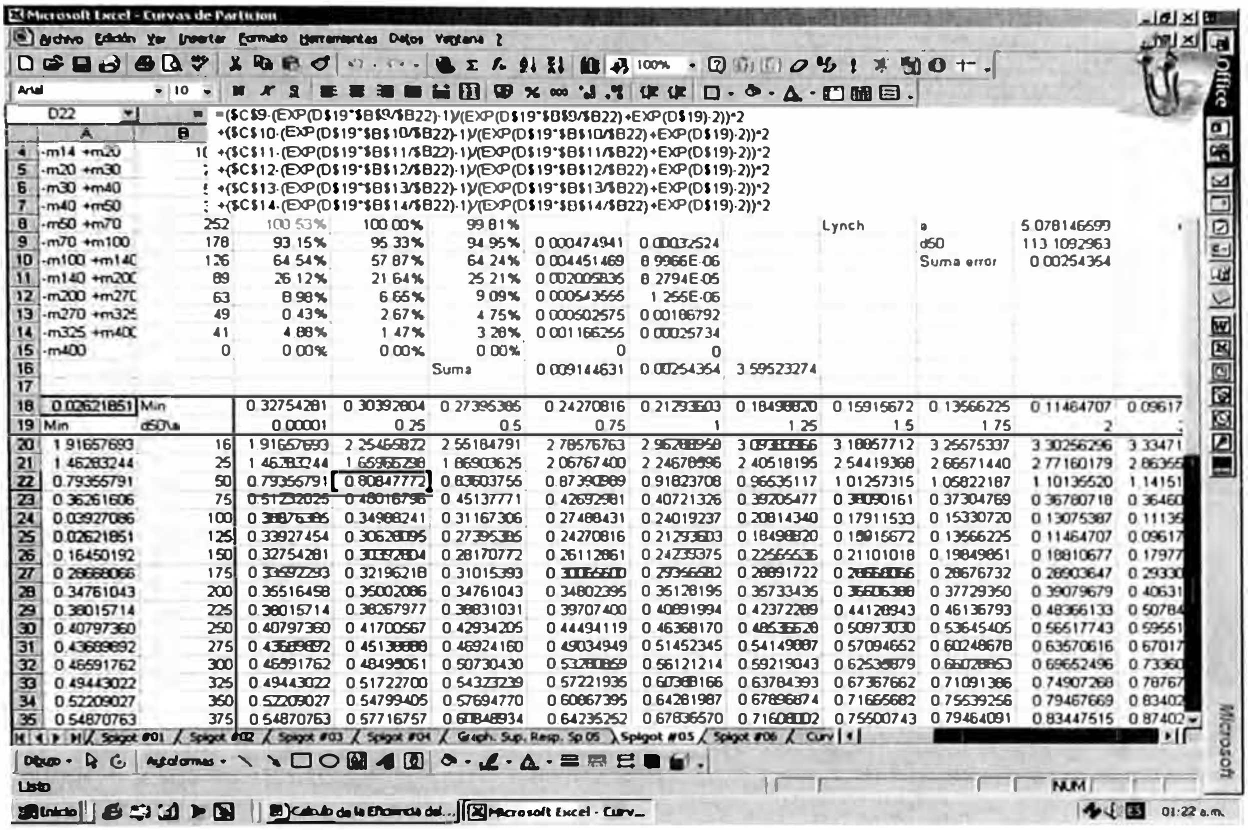
Se construye una tabla de S en función de los parámetros "a" y "d50" y se ubican los parámetros para el valor mínimo de S obtenido.

Tabla 7. 6 Especificaciones para el ajuste de las curvas de partición

Parámetro	***Rango***	***Incrementos***
"a"	1E-12 a 10	0.25
"d50"	1 hasta el tamaño máximo de partícula	25μm

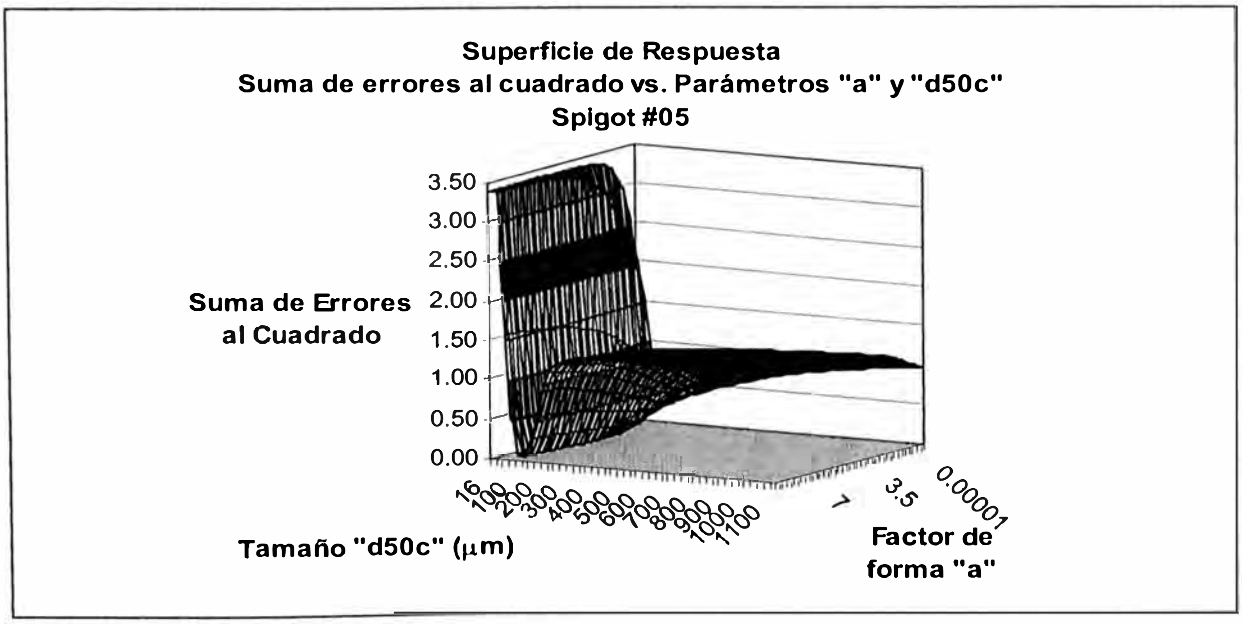
Como ejemplo se presenta la hoja para el Spigot #05 para el ajuste de la función de Lynch.

Gráfica 7. 5 Ejemplo de cálculo de los Parámetros "a" y "d50c" en Excel.



Como referencia se muestra el gráfico de la Superficie de Respuesta para la Curva de Partición del Spigot #05

Gráfica 7. 6 Superficie de Respuesta de los Minimos Cuadrados vs. Parámetros "a" y "d50c"



7.6.5 Parámetros de las Funciones Ajustadas

Se obtuvieron los siguientes ajustes:

Tabla 7. 7 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #01

Spigot #01				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.95016	0.98916	0.99782	0.99876
a	2.0096	3.622	0.50644	3.3402
d50c	729.9	619.95	599.6	599.29

Tabla 7. 8 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #02

Spigot #02				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.90942	0.99528	0.99983	0.9997
a	2.6874	5.0813	0.3526	4.7915
d50c	528.27	433.35	421.47	421.43

Tabla 7. 9 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #03

Spigot #03				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.93263	0.99667	0.99828	0.99909
a	2.6947	6.2612	0.29358	5.7583
d50c	262.79	229.2	225.67	225.73

Tabla 7. 10 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #04

Spigot #04				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.99571	0.99746	0.99756	0.99677
a	2.4973	4.024	0.43012	3.9223
d50c	180.26	176.72	169.99	170.18

Tabla 7. 11 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #05

Spigot #05				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.98695	0.99641	0.99534	0.99565
a	3.6663	5.078	0.35496	4.7536
d50c	118.7	113.11	110.02	110.17

Tabla 7. 12 Parámetros de ajuste de las Curvas de Partición para el Spigot #06

Spigot #06				
Parametro	**Plitt**	**Lynch**	**LogNormal**	**Logistica en ln**
r2	0.94426	0.99131	0.99022	0.98823
a	2.7058	6.0509	0.28793	5.9327
d50c	69.145	63.425	62.529	62.518

Se presenta el orden de las funciones según su r^2 (en forma descendente).

Tabla 7. 13 Orden de preferencia de las Curvas de Partición según el R^2. (Orden Descendente)

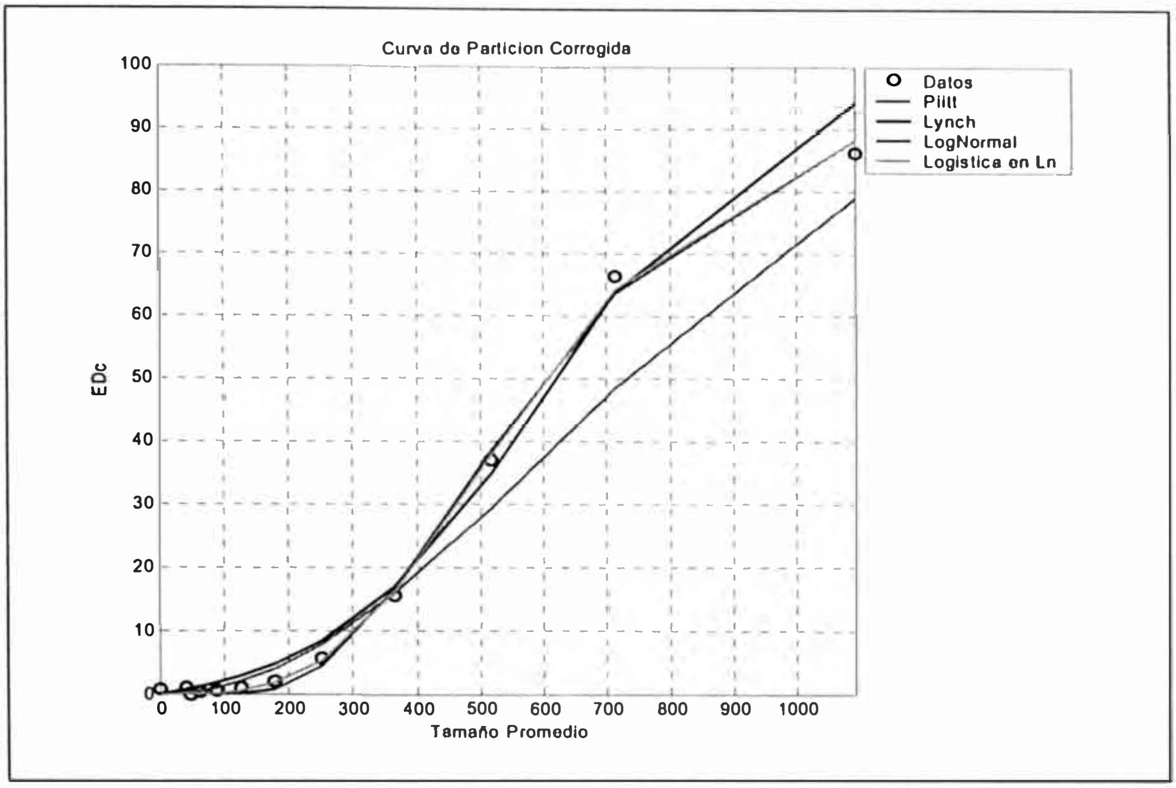
Muestra	**Función**			
Spigot #01	Logística en ln	LogNormal	Lynch	Plitt
Spigot #02	LogNormal	Logística en ln	Lynch	Plitt
Spigot #03	Logística en ln	LogNormal	Lynch	Plitt
Spigot #04	LogNormal	Lynch	Logística en ln	Plitt
Spigot #05	Lynch	Logística en ln	LogNormal	Plitt
Spigot #06	Lynch	LogNormal	Logística en ln	Plitt

- Se observa que para todas las curvas de partición usadas, la Función de Plitt es la que menos se ajusta a la curva de Partición.
- Se ve también que la curva de Lynch se ajusta mejor cuando las muestras son mas finas (Spigot #05 y #06).
- En casi todos los casos, las Curvas de Lynch, LogNormal y la Logística en ln presentan un r^2 mayor a 0.99

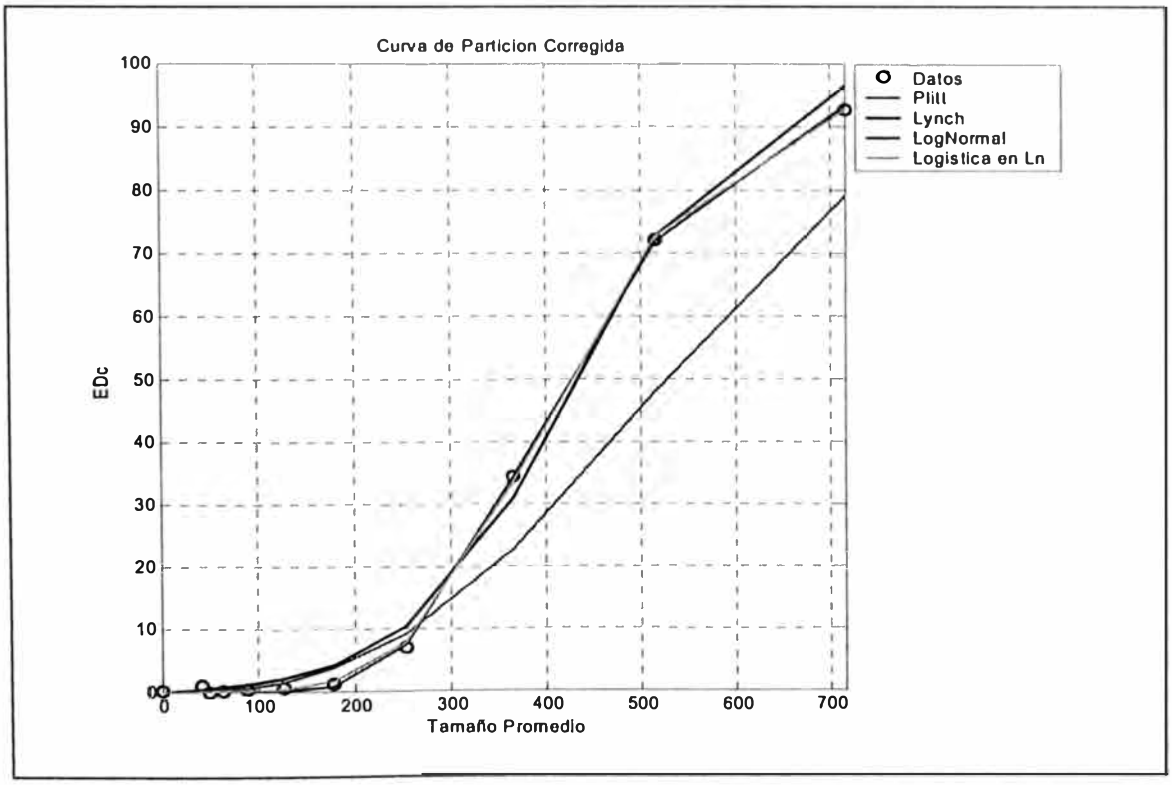
7.6.6 Gráficos de los Datos y Funciones Ajustadas

Se presenta los gráficos de las funciones con las curvas ajustadas.

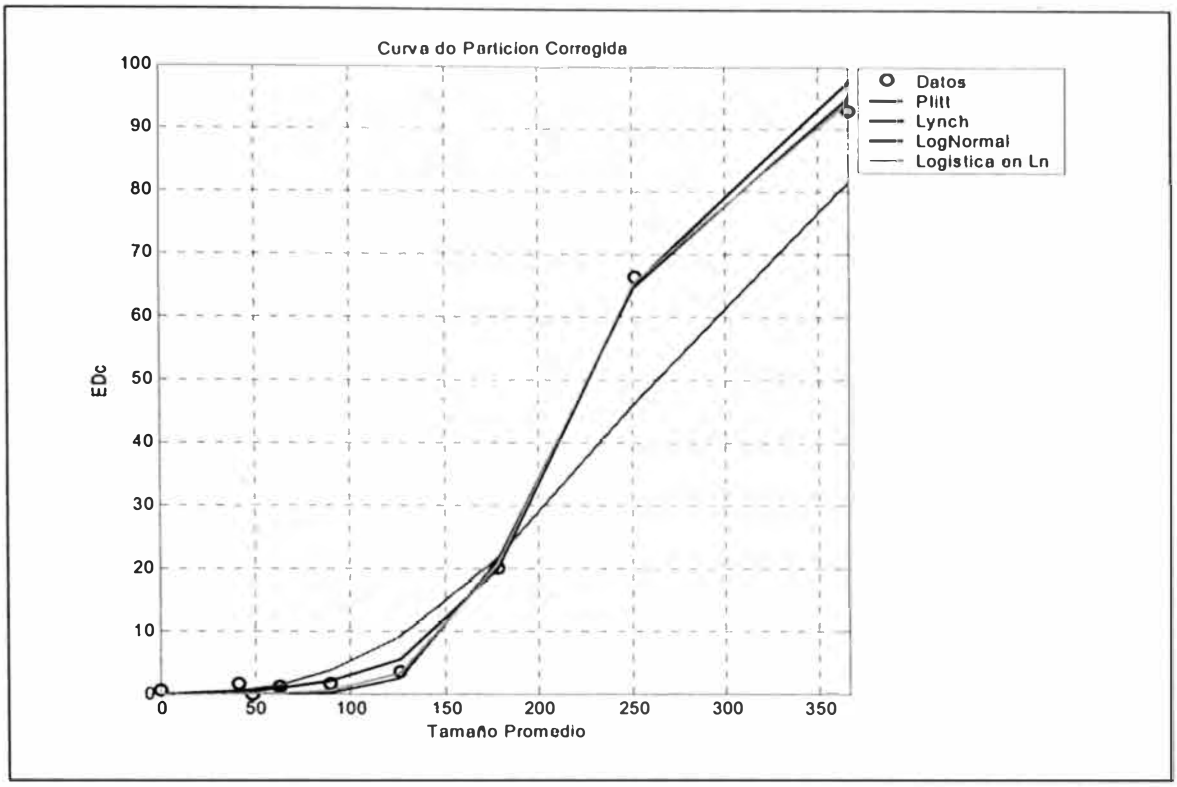
Gráfica 7. 7 Spigot #01



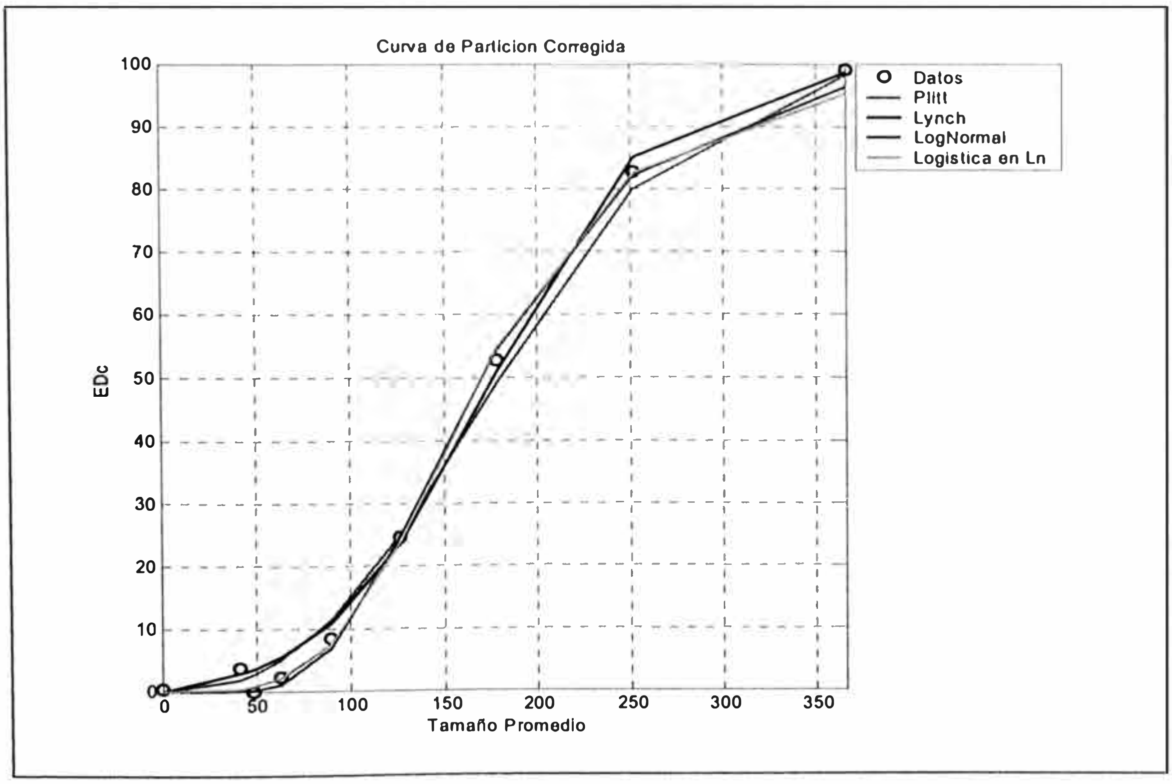
Gráfica 7. 8 Spigot #02



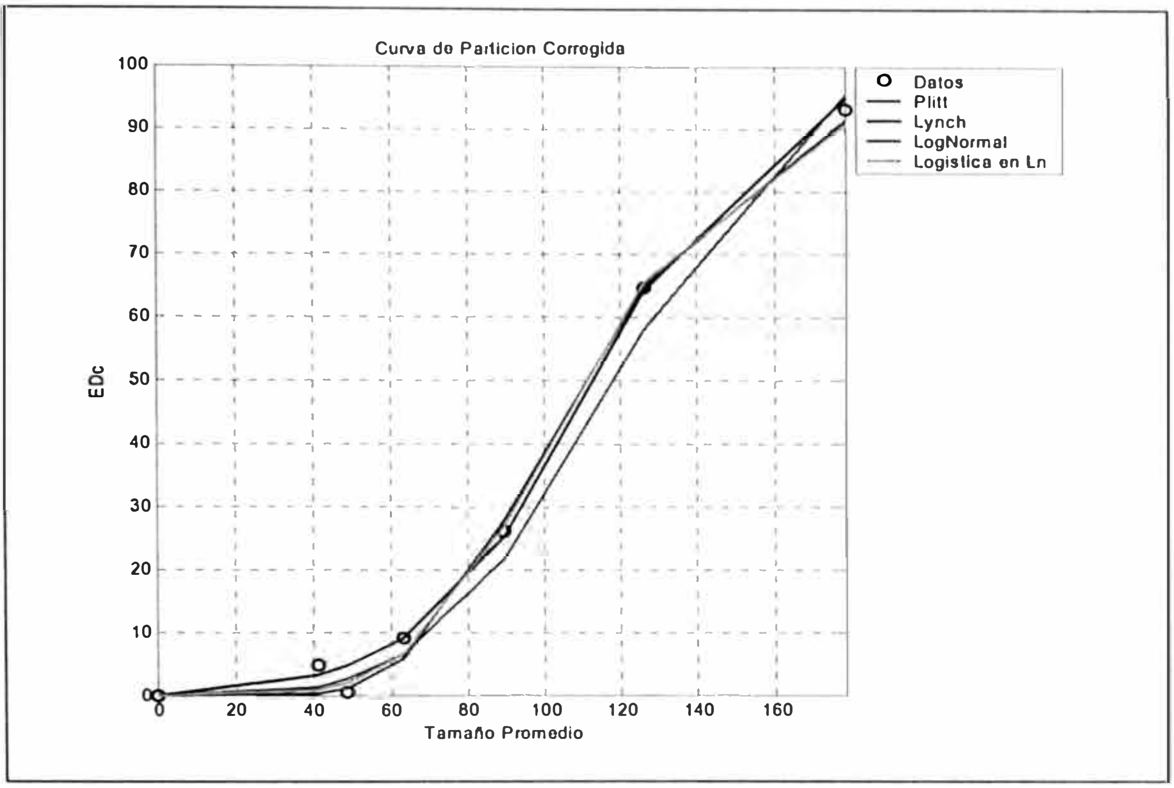
Gráfica 7. 9 Spigot #03



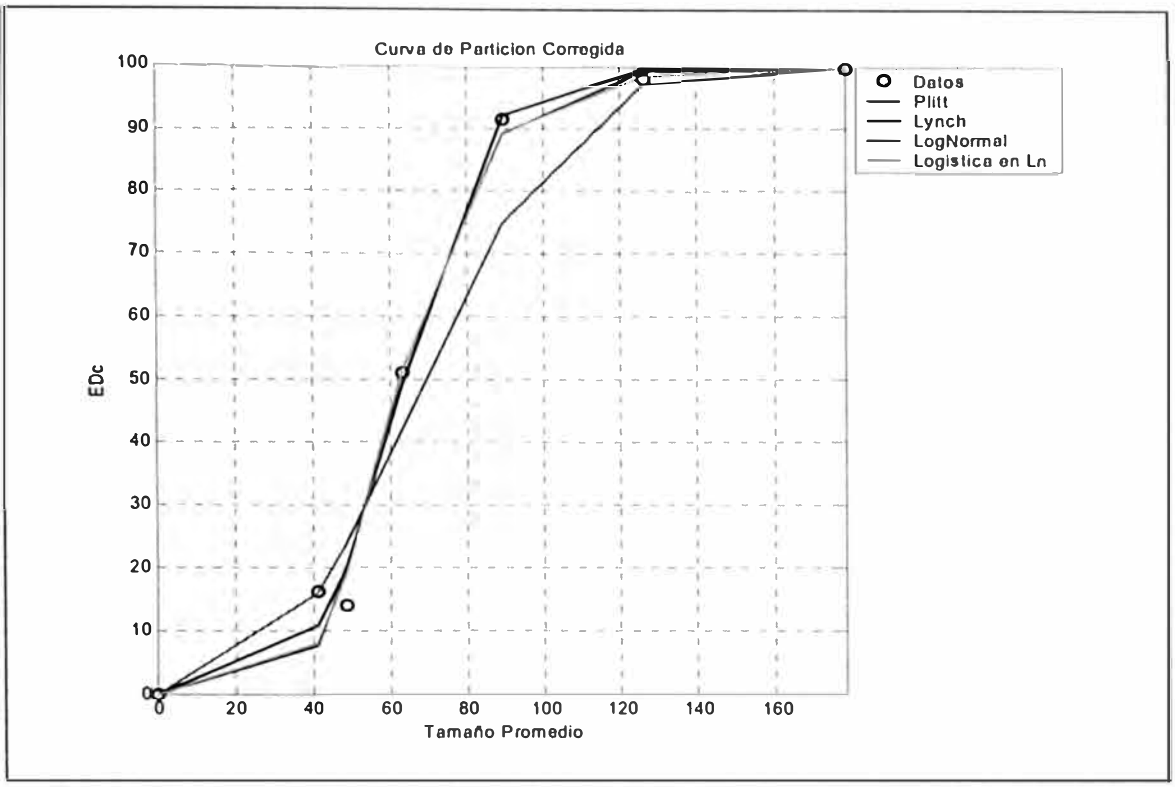
Gráfica 7. 10 Spigot #04



Gráfica 7. 11 Spigot #05



Gráfica 7. 12 Spigot #06



- Se observa claramente la desviación de la curva de Plitt sobre dichas muestras, especialmente en las curvas de partición de los Spigots #01, #02, #03 y #06.
- Se observa en general un mejor ajuste de las curvas de LogNormal y Logística en ln, siendo estas muy similares.

7.6.7 Cálculo del parámetro d50c (Corregido).

Este parámetro d50c es posible calcularlo de diversas formas, las que se presentan a continuación, son por los ajustes de curvas y los métodos de interpolación presentados (Lineal y Lagrange).

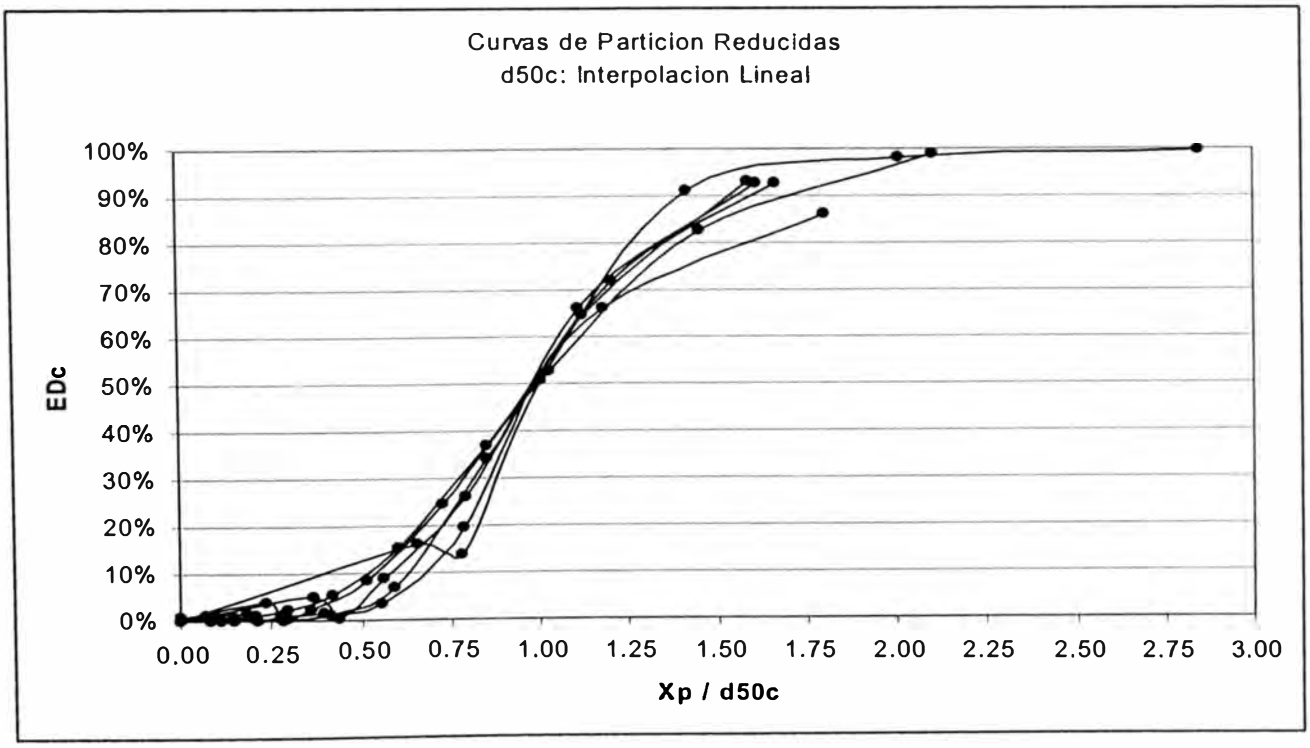
Tabla 7. 14 d50c calculado por Interpolaciones y Ajuste de Curvas.

d50c	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
Lineal	604.54	428.16	226.40	173.32	112.12	62.69
Lagrange	586.55	412.11	223.51	173.13	114.04	62.57
Plitt	729.90	528.27	262.79	180.26	118.70	69.15
Lynch	619.95	433.35	229.20	176.72	113.11	63.43
LogNormal	599.60	421.47	225.67	169.99	110.02	62.53
Logistica en ln	599.29	421.43	225.73	170.18	110.17	62.52

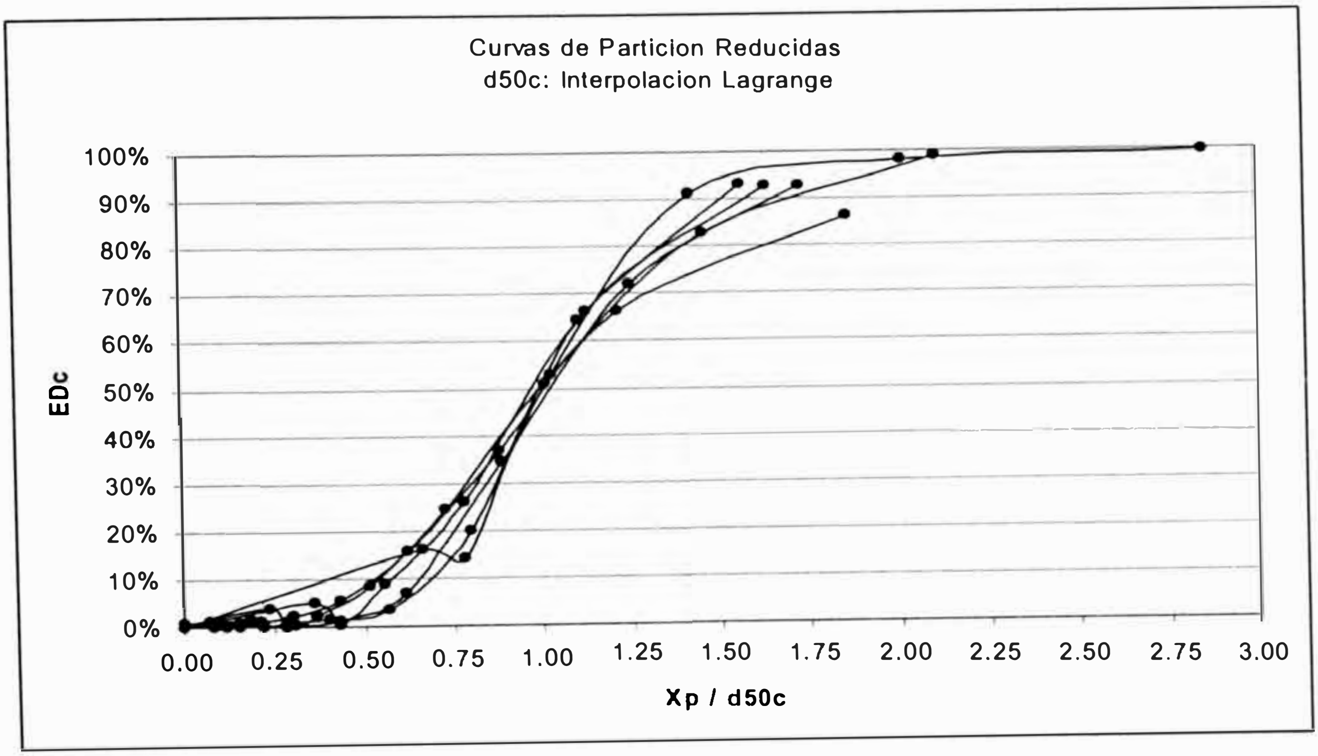
7.6.8 Curvas de Partición Reducidas

Si con estos parámetros de d50c dividimos a los tamaños promedios de la distribución obtendremos las gráficas de las Curvas de Partición Reducidas, las cuales se presentan a continuación:

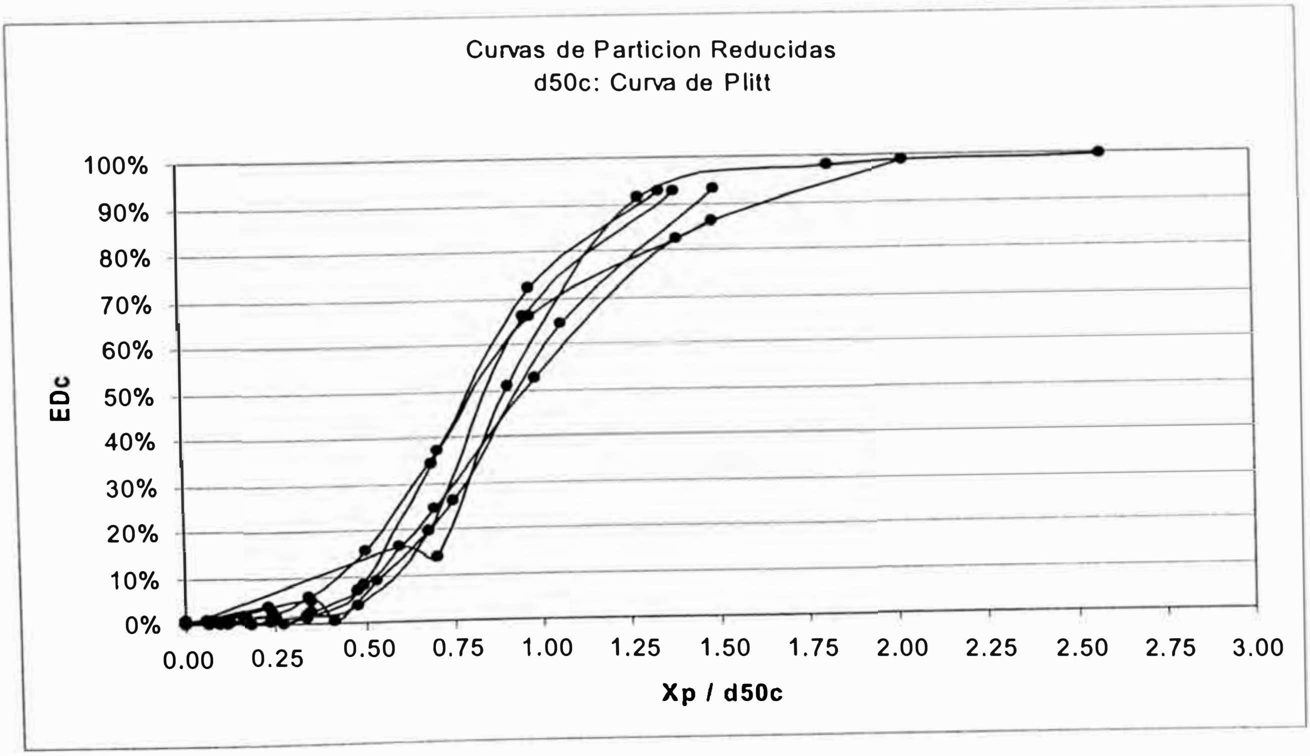
Gráfica 7. 13 d50c Hallado por Interpolación Lineal



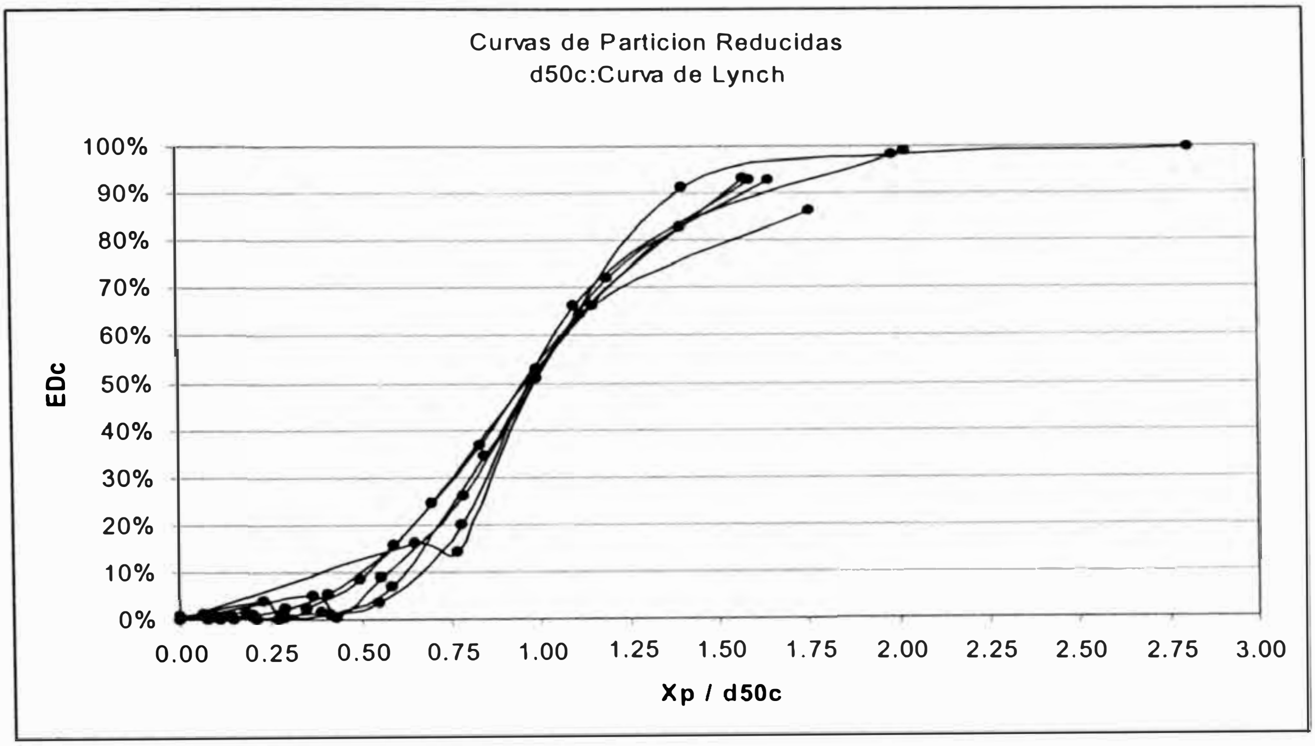
Gráfica 7. 14 d50c Hallado por Interpolación de Lagrange



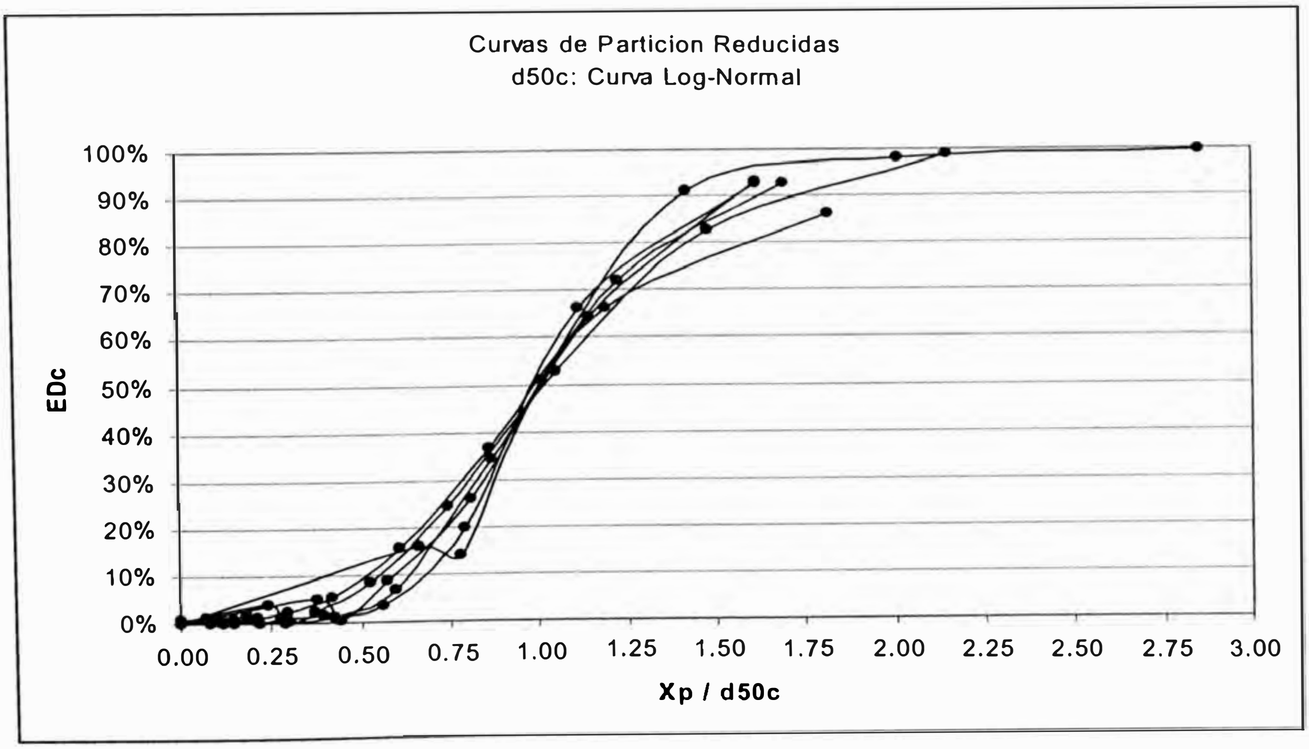
Gráfica 7. 15 d50c Hallado por Ajuste a la Curva de Plitt



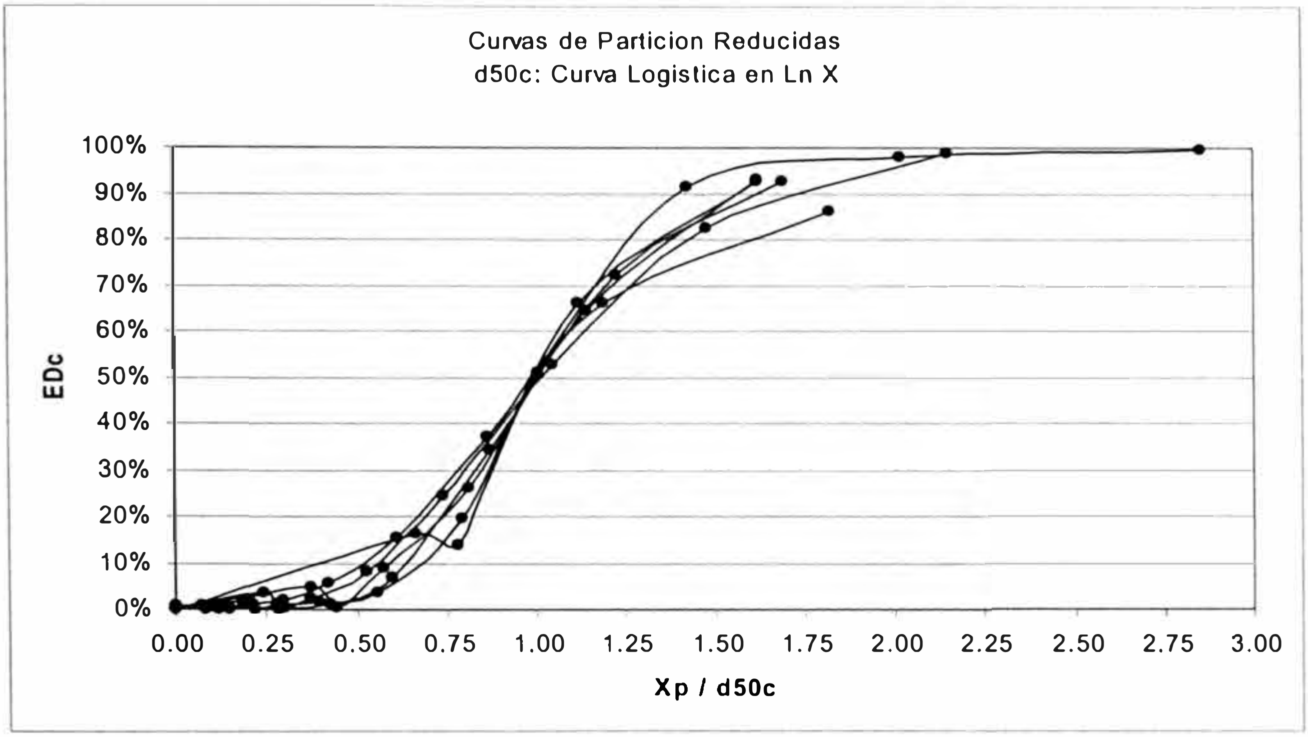
Gráfica 7. 16 d50c Hallado por Ajuste a la Curva de Lynch



Gráfica 7. 17 d50c Hallado por Ajuste a la Distribución Log-Nomal Acumulada



Gráfica 7. 18 d50c Hallado por Ajuste a la Curva Logística en Ln(x)



- Obsérvese de los gráficos 7.14 al 7.19, los tamaños d50c mejor obtenidos son por Interpolación Lineal y por ajuste a las curvas de Lynch, LogNormal y/o Logística en ln(X).

7.7 EFICIENCIA DE CLASIFICACIÓN.

El d50 es el parámetro más importante para describir el rendimiento del Hidrociclón, siendo equivalente a la abertura de una criba [3].

Para hallar la eficiencia total del clasificador, previamente se hallan las eficiencias para cada cámara (en forma individual).

7.7.1 Eficiencia de Finos:

Ecuación 7. 11

$$nF = \frac{\text{Peso de partículas Menores a d50 en el Rebose}}{\text{Peso de partículas Menores a d50 en el Alimento}}$$

Ecuación 7. 12

$$nF = \frac{FRc(d50) * Rc}{FAc(d50) * Ac}$$

7.7.2 Eficiencia de Gruesos:

Ecuación 7. 13

$$nG = \frac{\text{Peso de partículas Mayores a d50 en la Descarga}}{\text{Peso de partículas Mayores a d50 en el Alimento}}$$

Ecuación 7. 14

$$nG = \frac{GDc(d50) * Dc}{GAc(d50) * Ac} = \frac{(1 - FDc(d50)) * Dc}{(1 - FAc(d50)) * Ac}$$

Para nuestro caso:

FINOS

$$Spigot\#01: \frac{R1c}{Ac} = \gamma 1c$$

$$Spigot\#02: \frac{R2c}{R1c} = \frac{R2c/Ac}{R1c/Ac} = \frac{\gamma 2c}{\gamma 1c}$$

$$Spigot\#03: \frac{R3c}{R2c} = \frac{R3c/Ac}{R2c/Ac} = \frac{\gamma 3c}{\gamma 2c}$$

$$Spigot\#04: \frac{R4c}{R3c} = \frac{R4c/Ac}{R3c/Ac} = \frac{\gamma 4c}{\gamma 3c}$$

GRUESOS

$$Spigot\#01: \frac{S1c}{Ac} = \beta 1c$$

$$Spigot\#02: \frac{S2c}{R1c} = \frac{S2c/Ac}{R1c/Ac} = \frac{\beta 2c}{\gamma 1c}$$

$$Spigot\#03: \frac{S3c}{R2c} = \frac{S3c/Ac}{R2c/Ac} = \frac{\beta 3c}{\gamma 2c}$$

$$Spigot\#04: \frac{S4c}{R3c} = \frac{S4c/Ac}{R3c/Ac} = \frac{\beta 4c}{\gamma 3c}$$

$$Spigot\#05: \frac{R5c}{R4c} = \frac{R5c/Ac}{R4c/Ac} = \frac{\gamma 5c}{\gamma 4c} \qquad Spigot\#05: \frac{S5c}{R4c} = \frac{S5c/Ac}{R4c/Ac} = \frac{\beta 5c}{\gamma 4c}$$

$$Spigot\#06: \frac{Zc}{R5c} = \frac{Zc/Ac}{R5c/Ac} = \frac{\beta Zc}{\gamma 5c} \qquad Spigot\#06: \frac{S6c}{R5c} = \frac{S6c/Ac}{R5c/Ac} = \frac{\beta 6c}{\gamma 5c}$$

7.7.3 Eficiencia de una Cámara (Spigot)

La eficiencia de una cámara será:

Ecuación 7. 15

$$n = nF * nG$$

Se presentan a continuación, las tablas con los cálculos de la eficiencia para cada Spigot.

Nota: los d50 y d50c usados son los calculados por interpolación lineal.

Tabla 7. 15 Spigot #01

Spigot #01		Alimento	Descarga	Rebose			
	Abertura (µm)	fAc	fS1c	fR1			
	850	97.83%	86.16%	99.65%			
	600	91.38%	54.56%	97.14%			
	445	80.22%	24.04%	89.02%			
	300	68.43%	10.43%	77.50%			
	212	53.48%	4.20%	61.19%			
	150	43.26%	2.52%	49.64%			
	106	31.83%	1.55%	36.57%			
	75	21.62%	1.02%	24.85%			
	53	12.10%	0.69%	13.89%	**γ1c**	**β1c**	
	45	9.69%	0.68%	11.09%	0.8647	0.1353	
	38	7.77%	0.52%	8.91%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**604.19**	91.49%	55.09%	97.18%	**0.9185**	**0.7138**	**0.6556**
d50c	**604.54**	91.50%	55.13%	97.19%	**0.9185**	**0.7139**	**0.6556**

Tabla 7. 16 Spigot #02

Spigot #02		**Alimento**	**Descarga**	**Rebose**			
	Abertura (µm)	fR1	fS2c	fR2			
	850	99.65%	97.75%	99.96%			
	600	97.14%	80.97%	99.75%			
	445	89.02%	38.75%	97.12%			
	300	77.50%	10.26%	88.34%			
	212	61.19%	2.16%	70.71%			
	150	49.64%	1.19%	57.45%			
	106	36.57%	0.63%	42.36%			
	75	24.85%	0.33%	28.80%			
	53	13.89%	0.25%	16.09%	**γ2c/γ1c**	**β2c/γ1c**	
	45	11.09%	0.25%	12.84%	0.8612	0.1388	
	38	8.91%	0.10%	10.33%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**428.11**	87.67%	35.44%	96.09%	**0.9439**	**0.7270**	**0.6862**
d50c	**428.16**	87.68%	35.45%	96.10%	**0.9439**	**0.7271**	**0.6863**

Tabla 7. 17 Spigot #03

Spigot #03		**Alimento**	**Descarga**	**Rebose**			
	Abertura (µm)	fR2	fS3c	fR3			
	600	99.75%	99.06%	99.99%			
	445	97.12%	88.94%	99.99%			
	300	88.34%	57.66%	99.13%			
	212	70.71%	12.90%	91.05%			
	150	57.45%	2.97%	76.61%			
	106	42.36%	1.14%	56.86%			
	75	28.80%	0.48%	38.76%			
	53	16.09%	0.12%	21.70%	**γ3c/γ2c**	**β3c/γ2c**	
	45	12.84%	0.17%	17.30%	0.7398	0.2602	
	38	10.33%	0.06%	13.94%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**226.71**	73.66%	20.38%	92.40%	**0.9280**	**0.7865**	**0.7299**
d50c	**226.40**	73.59%	20.22%	92.37%	**0.9285**	**0.7862**	**0.7300**

Tabla 7. 18 Spigot #04

Spigot #04		Alimento	Descarga	Rebose			
	Abertura (μm)	fR3	fS4c	fR4			
	300	99.13%	96.84%	99.98%			
	212	91.05%	71.82%	98.18%			
	150	76.61%	42.09%	89.42%			
	106	56.86%	20.64%	70.30%			
	75	38.76%	11.13%	49.01%			
	53	21.70%	5.71%	27.63%	**γ4c/γ3c**	**β4c/γ3c**	
	45	17.30%	4.67%	21.99%	0.7295	0.2705	
	38	13.94%	3.44%	17.83%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**166.97**	80.56%	50.22%	91.82%	**0.8313**	**0.6929**	**0.5760**
d50c	**173.32**	82.04%	53.27%	92.71%	**0.8243**	**0.7040**	**0.5804**

Tabla 7. 19 Spigot #05

Spigot #05		Alimento	Descarga	Rebose			
	Abertura (μm)	fR4	fS5c	fR5			
	212	98.18%	96.14%	100.00%			
	150	89.42%	78.50%	99.14%			
	106	70.30%	48.79%	89.45%			
	75	49.01%	28.84%	66.98%			
	53	27.63%	14.68%	39.16%	**γ5c/γ4c**	**β5c/γ4c**	
	45	21.99%	11.72%	31.13%	0.5290	0.4710	
	38	17.83%	9.24%	25.49%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**96.60**	63.84%	42.74%	82.64%	**0.6847**	**0.7460**	**0.5107**
d50c	**112.12**	72.95%	52.92%	90.80%	**0.6583**	**0.8200**	**0.5398**

Tabla 7. 20 Spigot #06

Spigot #06		Alimento	Descarga	Rebose			
	Abertura (μm)	fR5	fS6c	fR6=fZc			
	150	99.14%	98.85%	99.99%			
	106	89.45%	85.95%	99.64%			
	75	66.98%	57.02%	95.95%			
	53	39.16%	28.52%	70.17%	**βZc/γ5c**	**β6c/γ5c**	
	45	31.13%	22.21%	57.11%	0.2557	0.7443	
	38	25.49%	17.70%	48.17%	Ef Finos	Ef Gruesos	Ef Camara
d50	**42.11**	28.80%	20.35%	53.42%	**0.4742**	**0.8327**	**0.3949**
d50c	**62.69**	51.41%	41.07%	81.52%	**0.4054**	**0.9028**	**0.3660**

Nota: Los datos de Porcentaje Acumulado Pasante de los Alimento, Descarga y Rebose para cada d50 se hallaron por Interpolación Lineal.

7.7.4 Eficiencia del Clasificador Stokes

La eficiencia del clasificador es el producto de las eficiencias de las seis cámaras

Ecuación 7. 16

$$nT = n1 * n2 * n3 * n4 * n5 * n6$$

7.7.4.1 Eficiencias Calculadas

Tabla 7. 21 Eficiencia del Clasificador

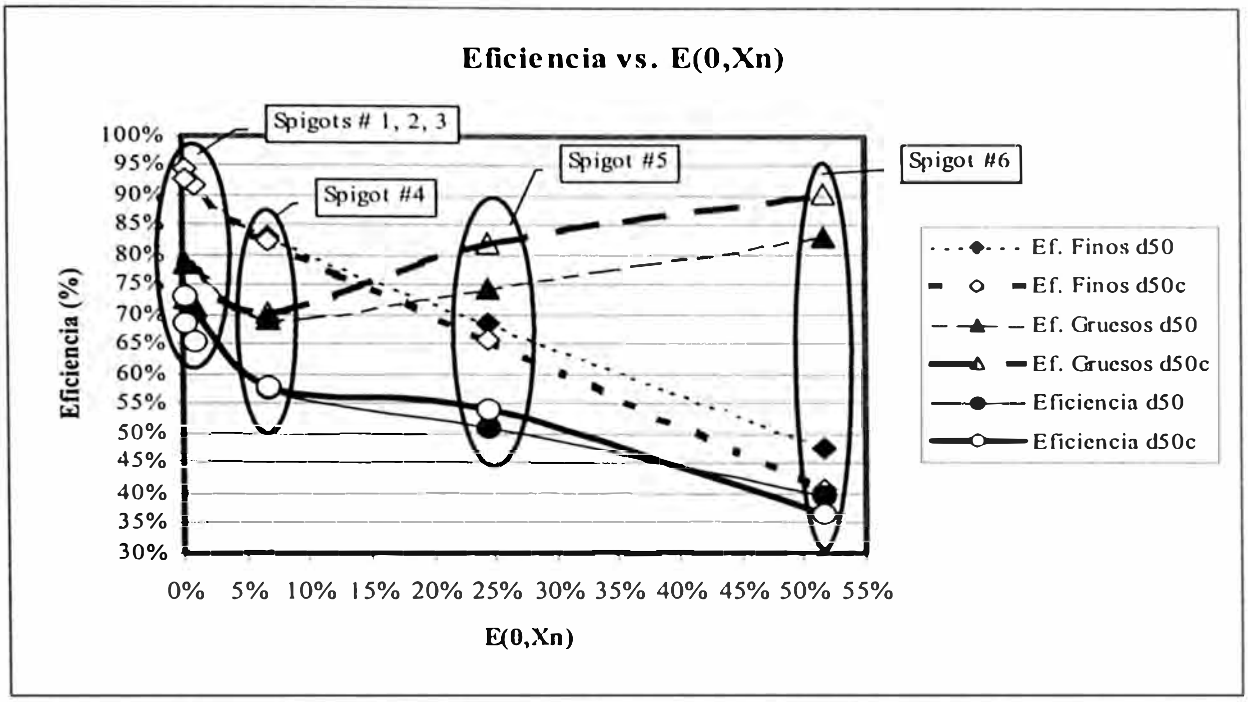
	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Clasificador
d50	65.56%	68.62%	72.99%	57.60%	51.07%	39.49%	**3.82%**
d50c	65.56%	68.63%	73.00%	58.04%	53.98%	36.60%	**3.77%**

7.8 VARIACIÓN DE EFICIENCIA RESPECTO A PARÁMETROS DE LAS CURVAS TROMP.

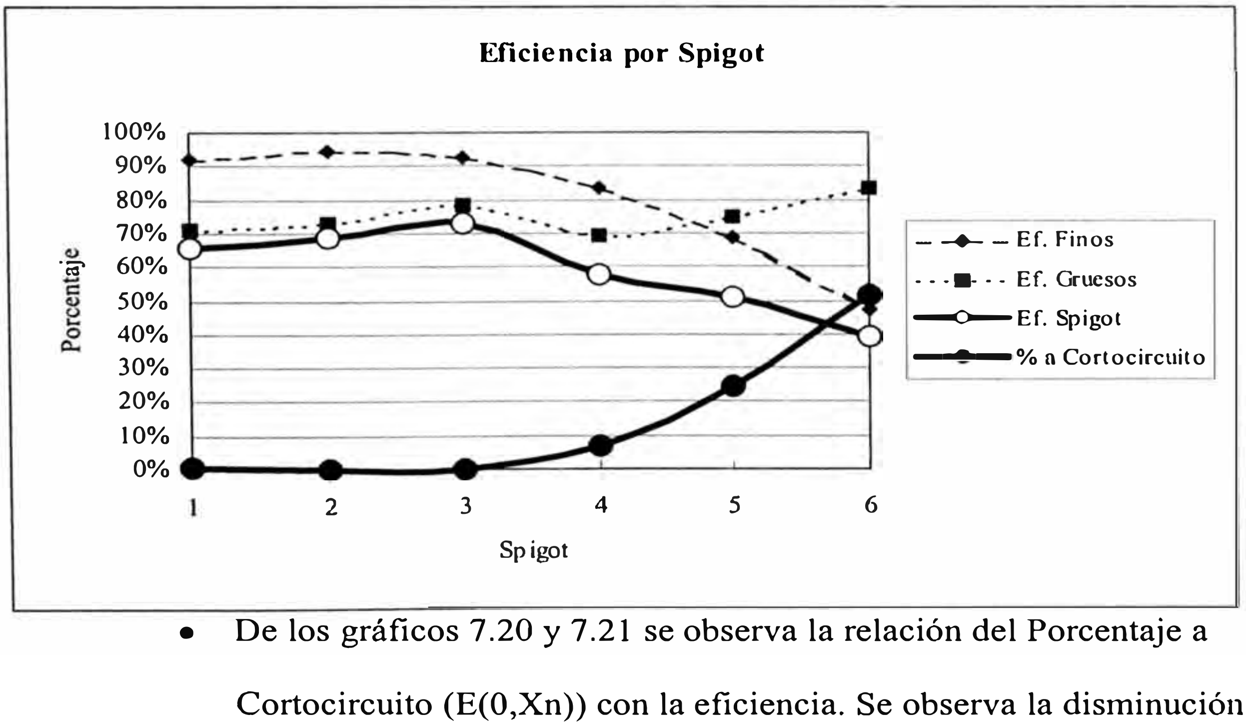
A continuación se presenta los siguientes gráficos:

- Gráfica de las Eficiencias de cada Cámara vs. el Porcentaje de Finos a la Descarga (E(0,Xn)), también
- Gráfica de las Eficiencias y Porcentaje de Finos a la Descarga vs. Spigot.

Gráfica 7. 19 Eficiencias vs Porcentaje de Finos a la Descarga (E(0,Xn))



Gráfica 7. 20 Eficiencia por Spigot



- De los gráficos 7.20 y 7.21 se observa la relación del Porcentaje a Cortocircuito (E(0,Xn)) con la eficiencia. Se observa la disminución de la eficiencia de Finos y el aumento en la eficiencia de Gruesos al aumentar el factor E(0,Xn) (porcentaje de Finos a la Descarga).

CAPÍTULO 8
FUNCIONES DE LAS CURVAS DE PARTICIÓN.

8.1 INTRODUCCIÓN

Como se describió en el Capítulo 7, las curvas de partición corregidas se ajustaron a cuatro funciones:

Plitt (Ecuación 7.6)

Ecuación 8. 1

$$EDc(Xr) = 1 - \exp\left[\ln(0.50) * (Xr)^{a}\right]$$

Lynch (Ecuación 7.7)

Ecuación 8. 2

$$EDc(Xr) = \frac{\exp(a * Xr) - 1}{\exp(a * Xr) + \exp(a) - 2}$$

Log-Normal (Ecuación 7.8)

Ecuación 8. 3

$$EDc(Xr) = \int_{0}^{Xr} \frac{1}{\sqrt{2 * \pi} * a * x} * e^{-\frac{(\ln(x))^2}{2 * a^2}} dx = \text{logncdf}(Xr, 0, a)$$

Logística en ln(x) (Ecuación 7.9)

Ecuación 8. 4

$$EDc(Xp) = \frac{1}{1 + (Xr)^{-a}}$$

Siendo Xr el tamaño medio reducido, es decir:

Ecuación 8. 5

$$Xr = \frac{Xp}{d50c}$$

En este Capítulo, el tratamiento es netamente matemático. El fin es establecer relaciones entre la pendiente y los factores "a" de las funciones ya mencionadas, esto para luego obtener un vector inicial con los valores aproximados para el ajuste de curvas.

8.2 PENDIENTE DE LA CURVA DE PARTICIÓN EN FUNCIÓN DEL PARÁMETRO DE FACTOR DE FORMA DE LAS ECUACIONES

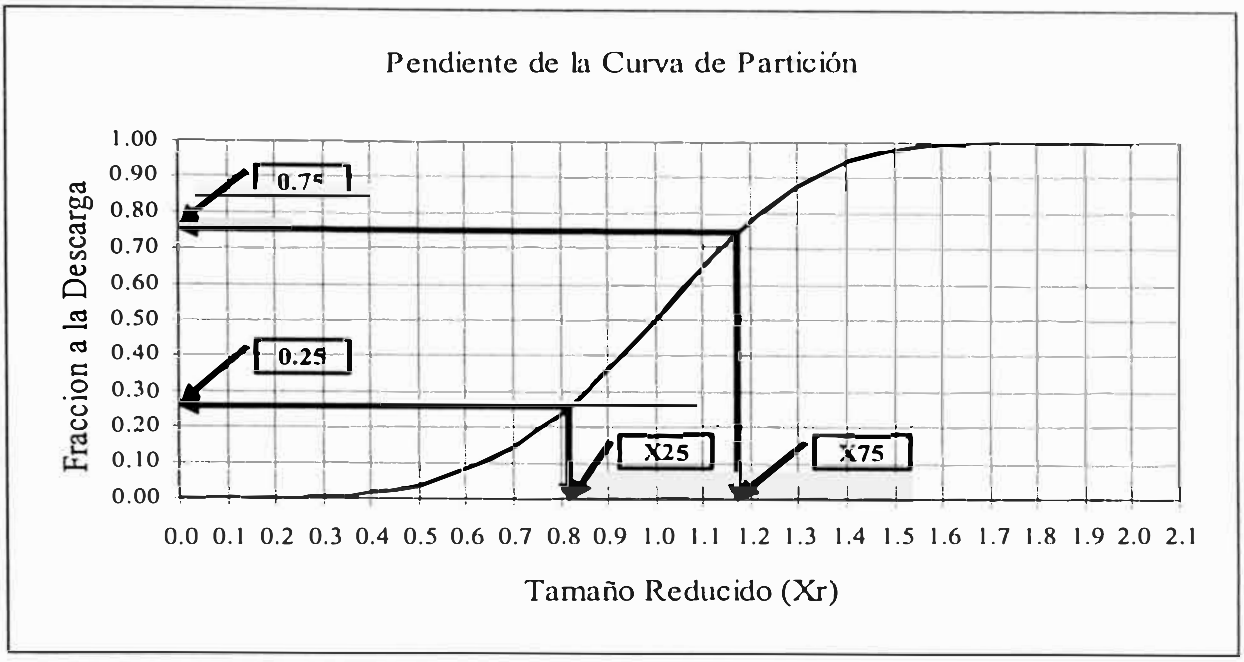
La pendiente de la curva se puede expresar tomando los puntos en los cuales el 75% y 25% de las partículas de la alimentación se reportan a la descarga y estos son los tamaños $d_{75}c$ y $d_{25}c$ respectivamente. Estos valores pueden ser calculados por medio de una interpolación lineal.

Es decir la pendiente de la curva puede establecerse como la pendiente comprendida entre los valores $(Xr_{25}, 0.25)$ y $(Xr_{75}, 0.75)$.

Nota:

- Xr_{75}: El Tamaño medio reducido para un 75%
- Xr_{25}: El Tamaño medio reducido para un 25%

Gráfico 8. 1 Esquema para hallar la Pendiente de la Curva de Partición.



La pendiente estará dada por:

Ecuación 8. 6

$$Pendiente = m = \frac{0.75 - 0.25}{Xr_{75} - Xr_{25}} = \frac{1}{2*(Xr_{75} - Xr_{25})}$$

Se establece un término llamado **Imperfección I** [9] y es dada por:

Ecuación 8. 7

$$\text{Imperfección} = I = \frac{d_{75}c - d_{25}c}{2 * d_{50}c}$$

Si tomamos los tamaños medios reducidos:

Ecuación 8. 8

$$\text{Imperfección} = I = \frac{Xr_{75} - Xr_{25}}{2}$$

Por las ecuaciones 8.6 y 8.8 se puede establecer lo siguiente:

Ecuación 8. 9

$$Pendiente = m = \frac{1}{4 * \text{Imperfección}}$$

Se graficaron la variación de la Imperfección y Tamaños reducidos para 25% y 75% vs. los parámetros de forma "a" y la Inversa de la imperfección vs. Los parámetros de forma.

> Nota: Para las gráficas y ajustes de curva siguientes, los factores de forma "a" se variaron desde 1.00E-12 a 100 en pasos de 0.10 (1001 datos para el ajuste), exceptuando para la distribución Log-Normal que se vario desde 0.01 hasta 5.00

8.2.1 Para la Ecuación de Plitt

Gráfico 8. 2

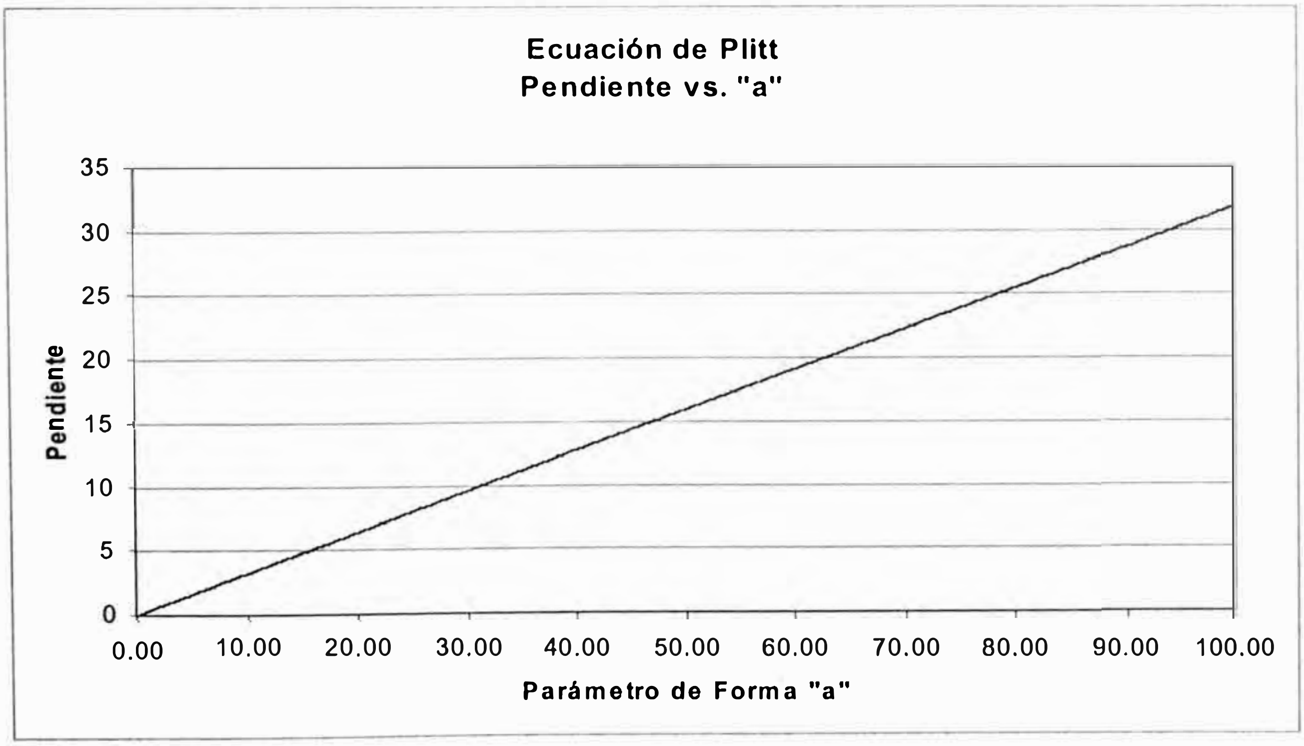
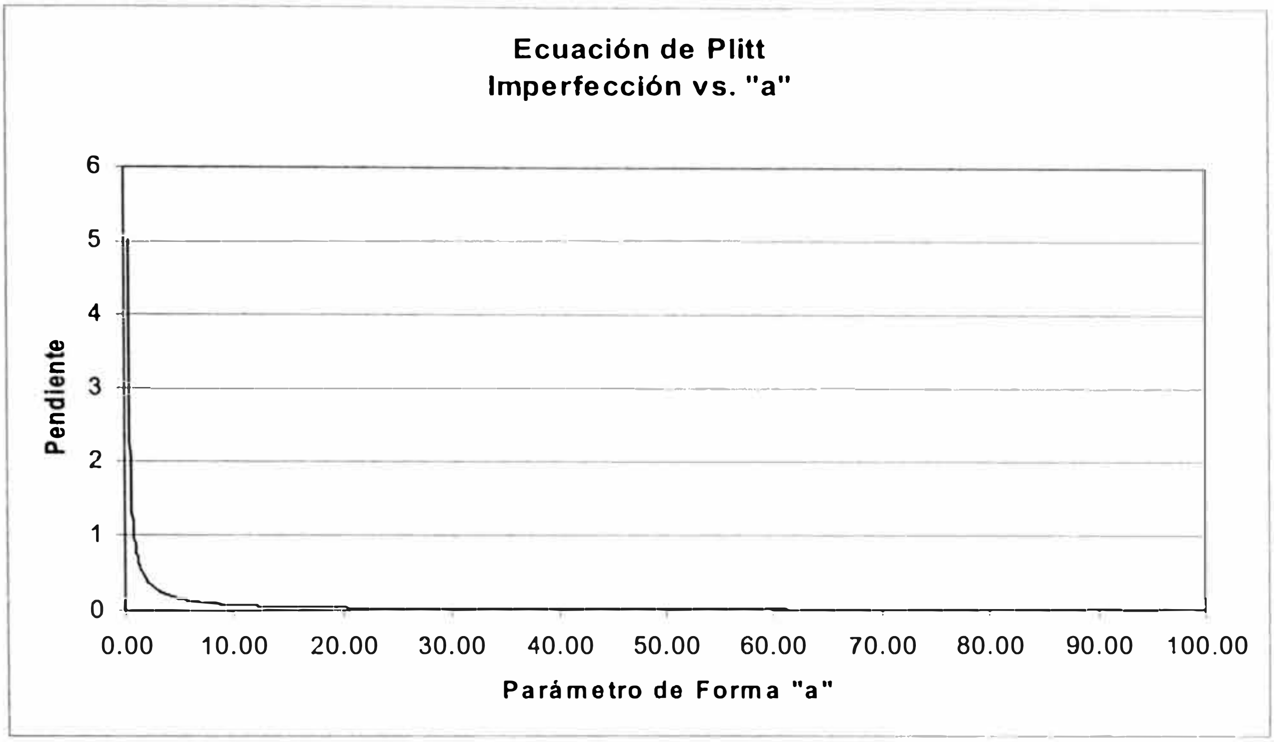


Gráfico 8. 3



8.2.2 Para la Ecuación de Lynch:

Gráfico 8. 4

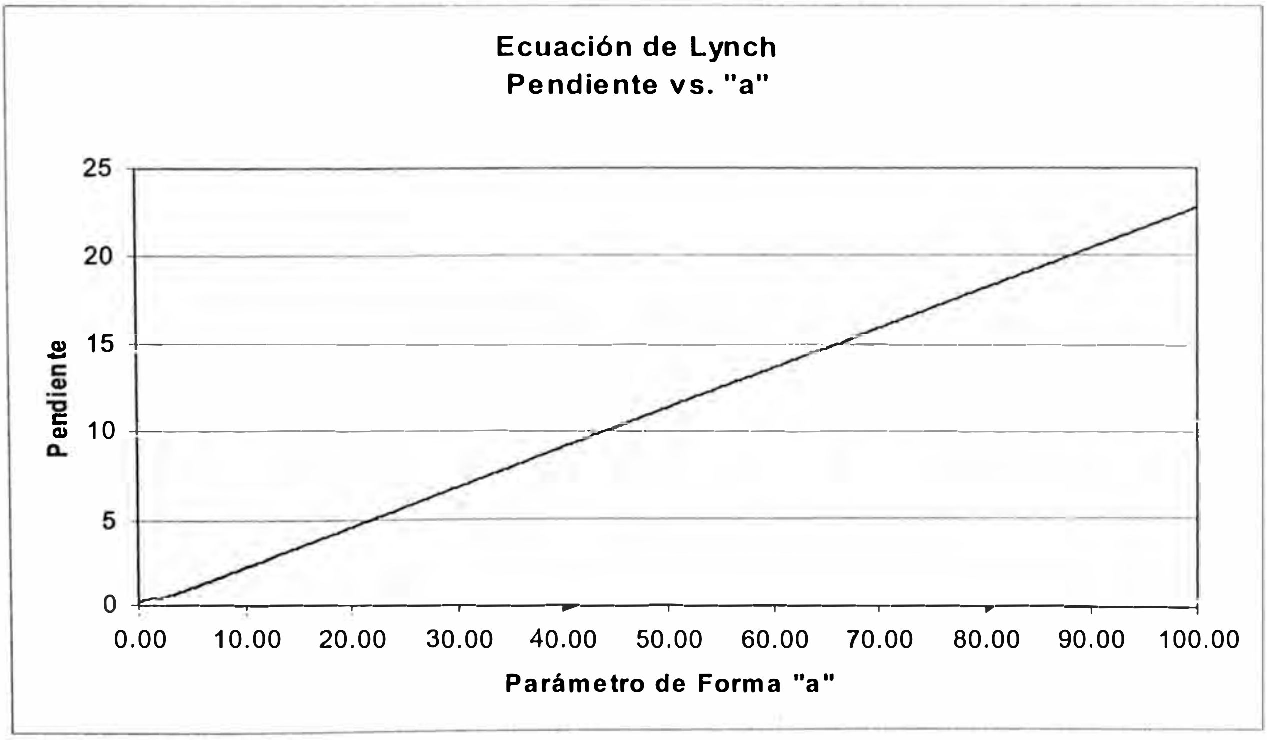
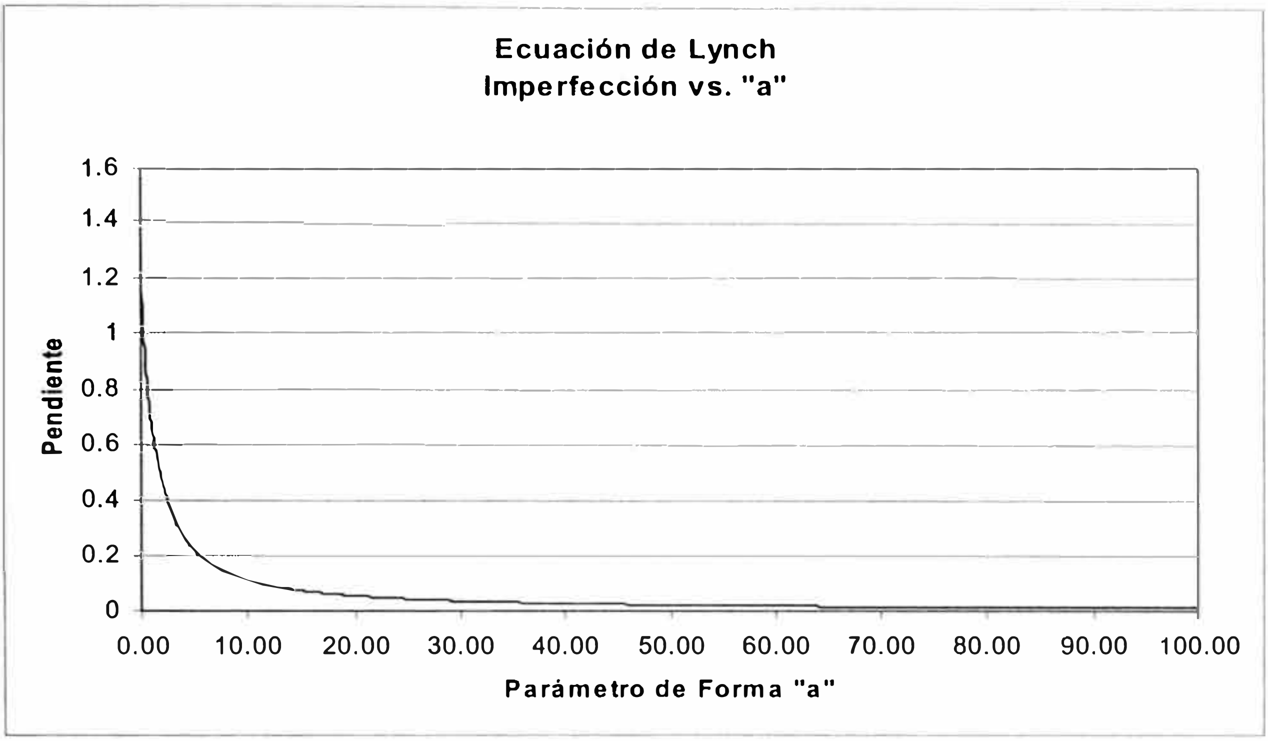


Gráfico 8. 5



8.2.3 Para la distribución Log-Normal

Gráfico 8. 6

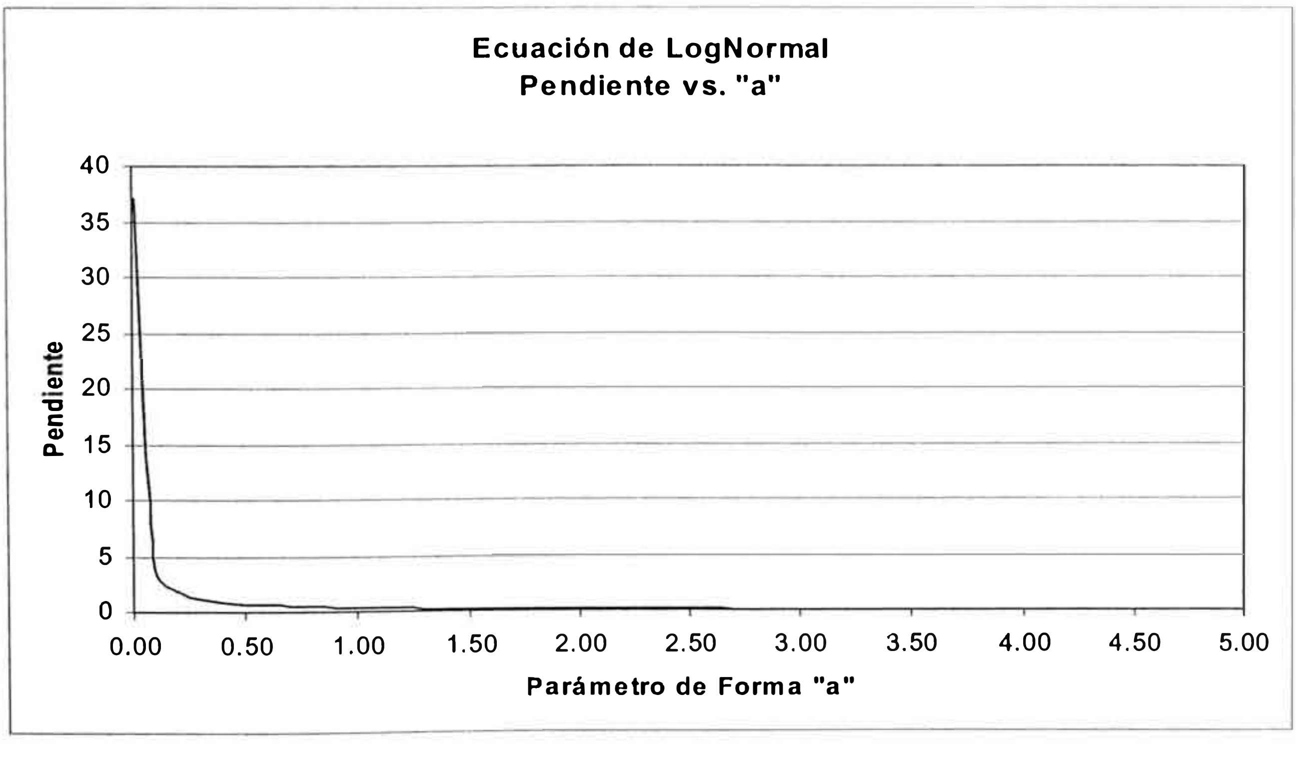
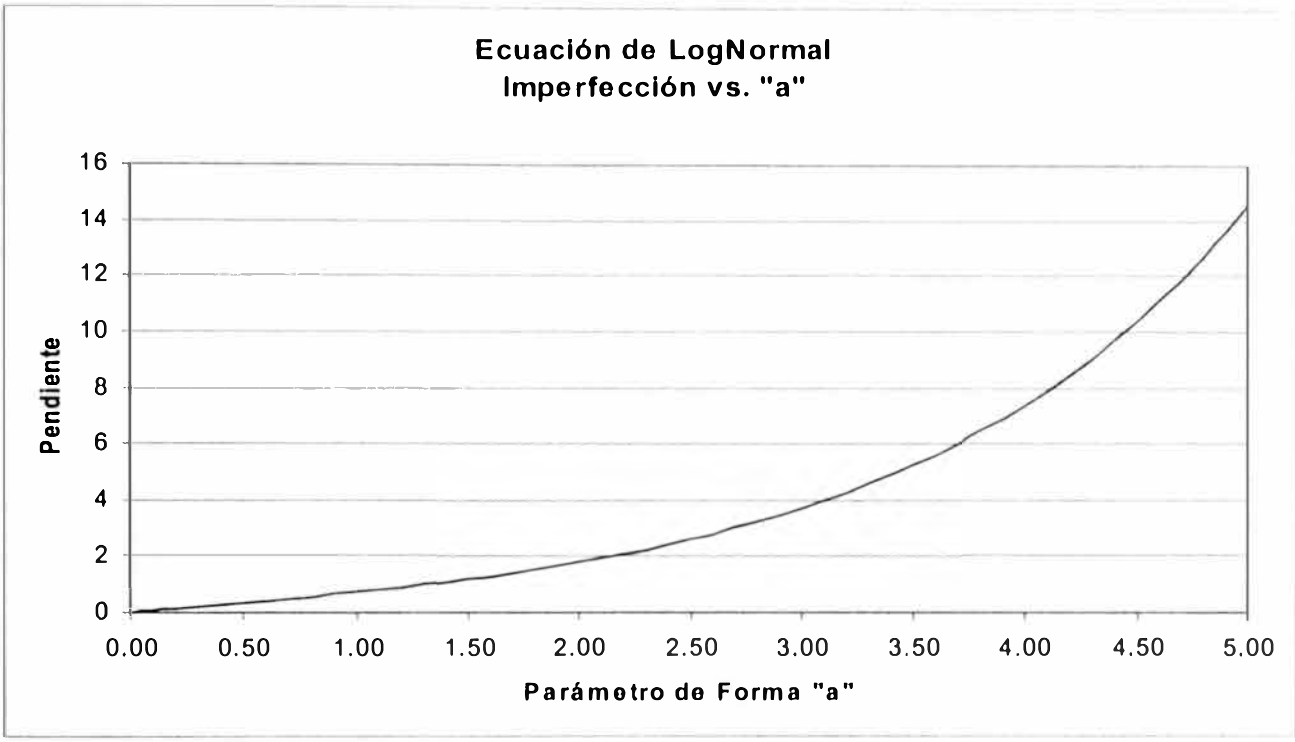


Gráfico 8. 7



8.2.4 Para la función Logística en ln (x)

Gráfico 8. 8

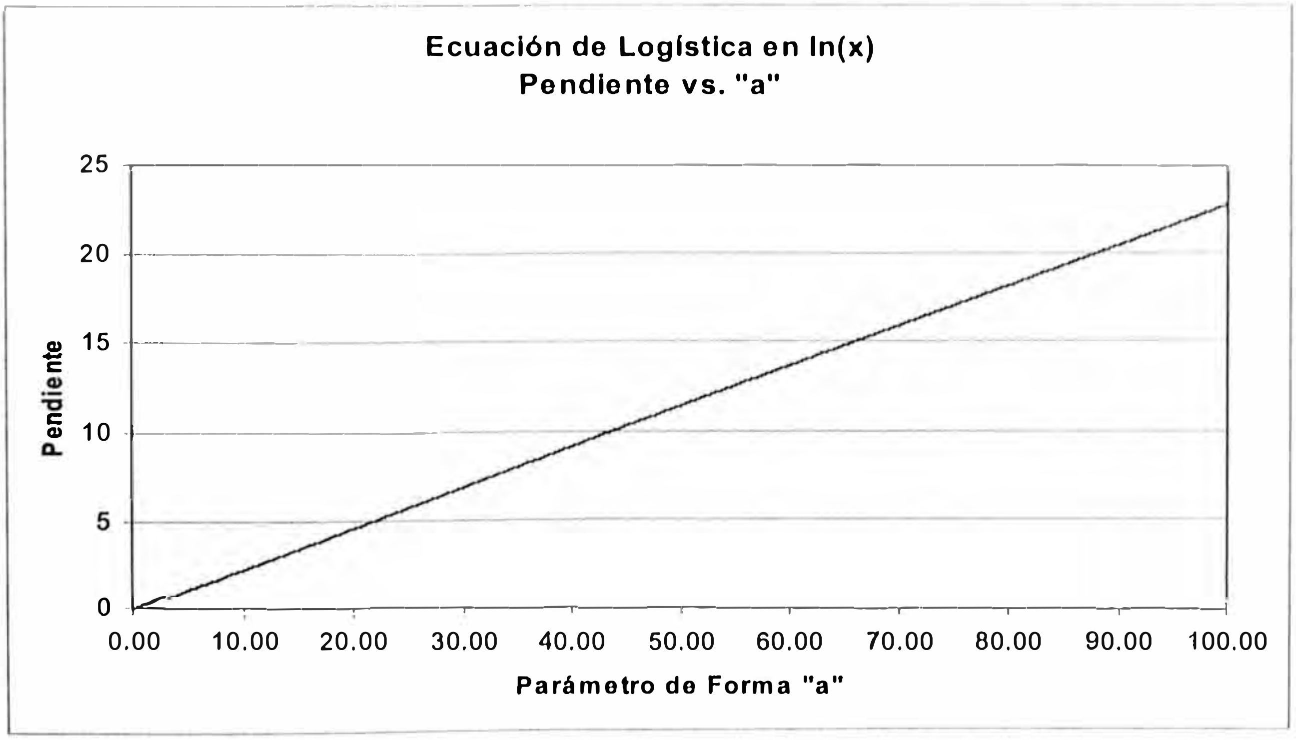
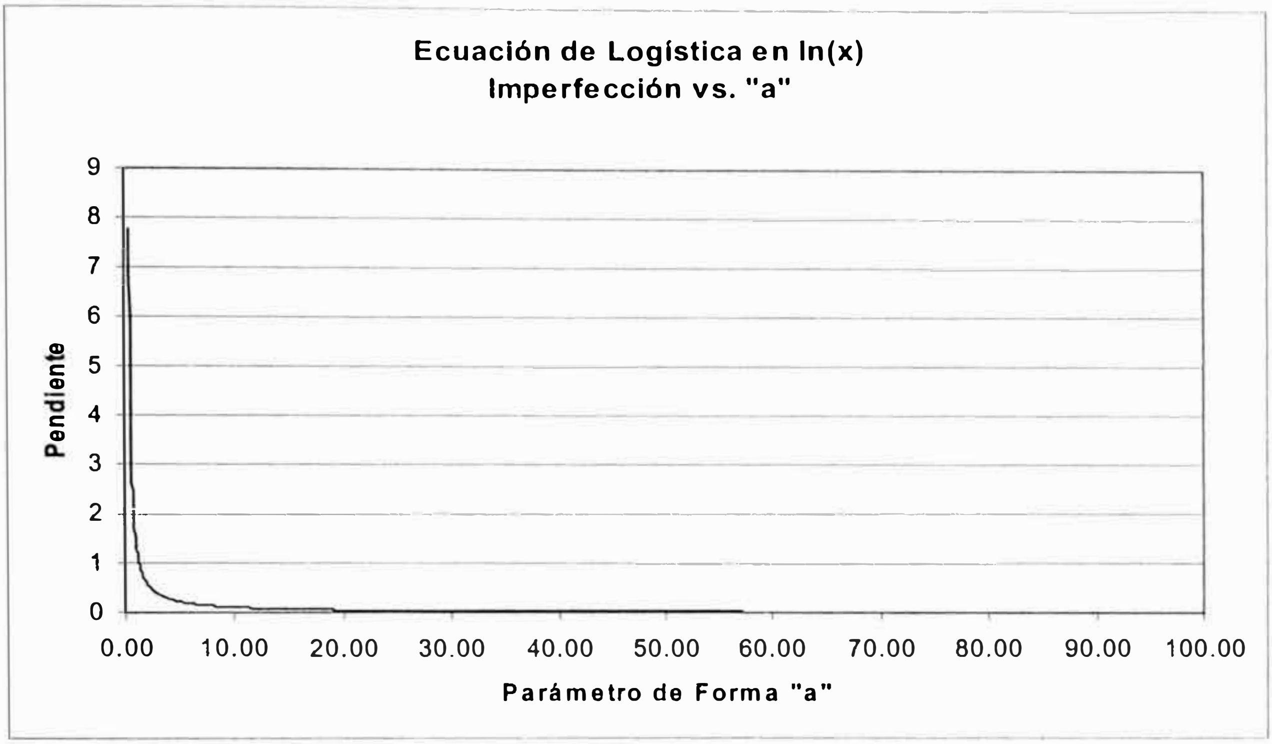


Gráfico 8. 9



Se observa que los factores de forma "a" de las ecuaciones de Plitt, Lynch y Logística en ln(x), son directamente proporcionales a la Pendiente, siendo los parámetros de ajuste:

Ecuación 8. 10

$$\text{Pendiente} = m = A*(F.Forma) + B$$

Tabla 8. 1 Parámetros de Ajuste de la Pendiente en función del Factor de Forma

Ecuación	*A*	*B*	*r^2*
Plitt	0.318041	0.023437	1
Lynch	0.227327	0.015653	0.999991
Logística en ln(x)	0.227656	-0.007343	0.999999

Estos datos son útiles especialmente para aproximar el factor de forma "a" de la ecuación de Lynch y Logística en ln(x).

Para la distribución Log-Normal, se establece una ecuación del siguiente tipo:

Ecuación 8. 11

$$Pendiente = m = \frac{0.3822}{(F.Forma)^{0.9934}} - 0.05115$$

con $r^2 = 1$

8.3 MÉTODO PARA EL AJUSTE A LA CURVA DE LYNCH

Para obtener los parámetros aproximados para la ecuación de Lynch se procederá de la siguiente manera:

a) Hallar los tamaños d25c, d50c y d75c por Interpolación lineal.

b) Se calculan los tamaños medios reducidos Xr_{75} y Xr_{25}

c) Hallar la Pendiente con la ecuación 8.6:

$$Pendiente = m = \frac{1}{2*(Xr_{75} - Xr_{25})}$$

d) Obtener el Factor de Forma "a" por la ecuación 8.10:

$$a = \frac{m - 0.015653}{0.227327}$$

Tabla 8. 2 Cálculo del Factor de Forma para la Ecuación de Lynch por el Método propuesto.

	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
d25c	432.2978	326.9237	186.6164	126.9384	87.4517	53.0679
d50c	**604.5354**	**428.1614**	**226.3996**	**173.3207**	**112.1173**	**62.6882**
d75c	879.6973	544.3817	289.6526	233.3594	145.1941	78.6118
Pendiente	0.6756	0.9845	1.0986	0.8143	0.9708	1.2271
a	**2.9031**	**4.2618**	**4.7640**	**3.5133**	**4.2018**	**5.3289**

Los parámetros hallados por este método son:

Tabla 8. 3 Comparación de Parámetros Hallados.

		Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
Solver	**a**	3.769146	5.108745	6.415283	4.151269	5.078146	6.051851
	d50c	622.874907	433.666431	229.758921	177.226663	113.109296	63.424582
Interp. Lineal	**a**	2.9031	4.2618	4.7640	3.5133	4.2018	5.3289
	d50c	604.5354	428.1614	226.3996	173.3207	112.1173	62.6882

Este método (por interpolación) no dará los parámetros tan precisos como si se hallaran por medio de Solver. Pero esta aproximación en los parámetros "a" y "d50c" simplificarán el proceso para obtener los datos por medio de Solver o Matlab (recuérdese que es necesario introducir un vector inicial cercano a los valores reales).

Análogamente se puede aplicar para hallar los parámetros de la función Log-Normal y Logística en ln(x).

CAPÍTULO 9
PROGRAMACIÓN EN MATLAB

9.1 INTRODUCCIÓN

MATLAB es la abreviación de MATrix LABoratory. Es un sistema basado en matrices para cálculos matemáticos y de ingeniería, es decir, todas las variables en MATLAB son matrices o arreglos rectangulares de números. Se podría pensar que MATLAB es un tipo de lenguaje diseñado exclusivamente para efectuar manipulaciones matriciales, de hecho, MATLAB es al mismo tiempo un entorno y un lenguaje de programación.

Se debe de mencionar que el valor "eps" es el Numero más pequeño tal que, cuando se le suma uno, crea un número en punto flotante en el computador mayor que uno. (Floating point relative accuracy) [10].

eps=2.220446049250313e-016

Nota: Para el desarrollo de los programas se utilizo MATLAB 6.5

9.2 TIPOS DE ARCHIVOS USADOS

Con el fin de programar todos los cálculos efectuados en la presente tesis se utilizaran básicamente tres tipos de archivos:

- Archivos-MAT: Donde se almenaran los datos y/o resultados.

- Archivos-M: Programas y/o funciones (Archivos script).
- Archivos-RPT: Ejecuta el reporte de resultados (salida en formato HTML).

9.2.1 Archivos-MAT:

Datosag.mat: Almacena los datos de Análisis Granulométricos:

fA, fS1, fS2, fS3, fS4, fS5, fS6, fZ.

Datosley.mat: Almacena los datos de Leyes de Estaño:

Leyes de Entradas y Salidas:

LA, LS1, LS2, LS3, LS4, LS5, LS6, LZ

Leyes de Fracciones:

LfA, LfS1, LfS2, LfS3, LfS4, LfS5, LfS6, LfZ

Tampart.mat: Almacena los datos de Tamaños de Partículas:

Tamaño máximo de la fracción en peso:

TamMax

Tamaño mínimo de la fracción en peso:

TamMin.

9.2.1.1 Archivos-MAT: Ingreso de Datos

Forma #01:

El ingreso de datos en Matlab se efectuó de la siguiente manera:

Análisis Granulométricos:

fA =[2.43;6.28;11.12;11.87;14.84;10.29;11.30;10.37;9.30;1.96;2.37;7.87] fS1 =[13.81;31.62;30.52;13.60;6.25;1.67;0.99;0.50;0.36;0.08;0.09;0.51]

fS2 =[2.22;16.80;42.22;28.48;8.12;0.96;0.57;0.29;0.10;0.06;0.09;0.09]

fS3 =[0;0.92;10.13;31.27;44.78;9.91;1.86;0.63;0.40;0.04;0.02;0.04]

fS4 =[0;0;0;3.14;25.04;29.72;21.47;9.48;5.45;1.11;1.16;3.43]

fS5 =[0;0;0;0;3.86;17.62;29.74;19.92;14.20;3.05;2.39;9.22]

fS6 =[0;0;0;0;0;1.14;12.92;28.90;28.54;6.38;4.44;17.68]

fZ =[0;0;0;0;0;0;0.36;3.68;25.80;13.08;8.92;48.16]

save datosag.mat fA fS1 fS2 fS3 fS4 fS5 fS6 fZ

Nota: Este comando guardara el archivo *datosag.mat* solo las variables: *fA fS1 fS2 fS3 fS4 fS5 fS6 fZ*

Leyes de Estaño:

LA =3.28

LS1 =3.97

LS2 =2.65

LS3 =2.16

LS4 =2.84

LS5 =3.37

LS6 =3.98

LZ =3.54

LfA =[2.07;2.00;1.96;1.83;1.83;1.63;2.04;3.00;3.98;6.55;8.22;10.15]

LfS1 =[1.82;1.93;2.45;3.66;5.62;6.36;8.49;13.19;14.15;7.07;7.12;11.06]

LfS2 =[0.79;0.77;1.20;1.91;6.20;14.53;33.97;28.30;12.26;9.08;8.40;10.20]

LfS3 =[0;0.47;0.53;0.62;1.08;2.69;13.64;29.81;30.02;13.48;11.34;2.09]

LfS4 =[0;0;0;0.50;0.83;0.76;1.53;5.40;13.68;13.08;15.72;10.24]

LfS5 =[0;0;0;0;0.57;0.44;0.77;2.02;5.52;8.60;10.04;9.96]

LfS6 =[0;0;0;0;0;6.92;0.63;0.73;2.60;6.06;8.26;10.20]

LfZ =[0;0;0;0;0;0;1.66;0.42;0.44;1.00;1.63;6.29]

save datosley.mat LA LS1 LS2 LS3 LS4 LS5 LS6 LfZ LfA LfS1 LfS2 LfS3 LfS4 LfS5 LfS6 LfZ

Tamaño de Partículas:

TamMax =[1400;850;600;445;300;212;150;106;75;53;45;38]

TamMin =[850;600;445;300;212;150;106;75;53;45;38;0]

save tampart.mat TamMax TamMin

Nótese que las variables que corresponden a fracciones en peso, leyes de mallas y tamaño de partículas deben de tener las mismas dimensiones. En este caso es de 12x1

El uso de punto y coma ";" sirve para separar dar forma de Matriz Columna.

Forma #02

Se puede ingresar los datos como columna evitando el uso de punto y coma presionando "Enter" para cada ingreso de datos

Ej:

fA =[2.43

6.28

11.12

11.87

14.84

10.29

11.30

10.37

9.30

1.96

2.37

7.87]

Forma #03

Se puede ingresar los datos como Matriz Fila (usar espacios " "en lugar de punto y coma ";") y usar al final " ' " para transponer la matriz.

Ej:

fA =[2.43 6.28 11.12 11.87 14.84 10.29 11.30 10.37 9.30 1.96 2.37 7.87]'

Si se quisiera modificar algún dato, se puede hacer mediante las tres formas de ingreso presentadas o editarlas directamente en la ventana "Workspace" y grabar los datos.

9.2.2 Archivos-M: Funciones y Programas

Analizar

Programa que ejecuta:

- Corrección por Multiplicadores de Lagrange de Análisis Granulométricos y Químicos.
- Análisis Estadístico (Funciones estadísticas, y por ajuste de las funciones de distribución).
- Cálculo de las Curvas de Partición y ajuste de curvas.
- Cálculo de las Eficiencias de los Spigots
- Calculo de la Eficiencia del Clasificador.
- Gráfico de las Distribuciones Granulométricas y de Estaño.
- Gráfico de las Funciones de Distribución.
- Gráfico de las Curvas de Partición (Sin corregir, Corregidas y Reducidas).
- Gráfico de las Eficiencias por Spigot.

Nota: Todos los programas y funciones usados se encuentran en los Anexos.

9.2.3 Archivos-RPT: Resultados en HTML

Ejecutar en Command Window las siguientes instrucciones:

```
analizar
report Stokes_rep
```

Se obtendrá el siguiente resultado en HTML:

EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES

23-Feb-2003
Juan Antonio Kobashicawa Chinen

Calculo de la Eficiencia del Clasificador Stokes

Table of Contents

List of Tables

Table 1-1. Analisis Granulometrico - Porcentajes en Peso

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
1090.87	2.43	13.81	2.22	0	0	0	0	0	0.00294933
714.143	6.28	31.62	16.8	0.92	0	0	0	0	-0.00193004
516.72	11.12	30.52	42.22	10.13	0	0	0	0	-0.0003966
365.377	11.87	13.6	28.48	31.27	3.14	0	0	0	0.000840564
252.19	14.84	6.25	8.12	44.78	25.04	3.86	0	0	-0.00120571
178.326	10.29	1.67	0.96	9.91	29.72	17.62	1.14	0	0.00083567
126.095	11.3	0.99	0.57	1.86	21.47	29.74	12.92	0.36	-0.00155536
89.1628	10.37	0.5	0.29	0.63	9.48	19.92	28.9	3.68	0.00189562
63.0476	9.3	0.36	0.1	0.4	5.45	14.2	28.54	25.8	-0.00256153
48.8365	1.96	0.08	0.06	0.04	1.11	3.05	6.38	13.08	-0.00528888
41.3521	2.37	0.09	0.09	0.02	1.16	2.39	4.44	8.92	0.00530562
19	7.87	0.51	0.09	0.04	3.43	9.22	17.68	48.16	0.00111131

Error definido por la siguiente formula:

ErrorMalla=fA-(fS1*b1c+fS2*b2c+fS3*b3c+fS4*b4c+fS5*b5c+fS6*b6c+fZ*bZc)

Table 1-2. Analisis Granulometricos Corregidos - Porcentaje en Peso

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
1090.87	2.17493	13.8445	2.25061	0.0494297	0.0380141	0.048279	0.0403571	0.0138636	-6.93889e-018
714.143	6.44692	31.5974	16.78	0.887653	-0.0248764	-0.0315938	-0.0264096	-0.00907233	-1.38778e-017
516.72	11.1543	30.5154	42.2159	10.1234	-0.0051118	-0.00649213	-0.00542686	-0.00186425	0
365.377	11.7973	13.6098	28.4887	31.2841	3.15083	0.0137596	0.0115018	0.00395115	0
252.19	14.9443	6.23589	8.10749	44.7598	25.0245	3.84026	-0.0164983	-0.00566755	0
178.326	10.2177	1.67978	0.968673	9.92401	29.7308	17.6337	1.15143	0.00392814	0
126.095	11.4345	0.971799	0.553857	1.83393	21.45	29.7145	12.8987	0.352689	-1.38778e-017
89.1628	10.2061	0.522183	0.309675	0.66177	9.50443	19.951	28.9259	3.68891	1.38778e-017
63.0476	9.52153	0.330025	0.073414	0.35707	5.41698	14.1581	28.5049	25.788	0
48.8365	2.4174	0.0181089	0.00510682	-0.0486397	1.04183	2.96342	6.30763	13.0551	0
41.3521	1.91115	0.152087	0.145067	0.10892	1.22838	2.47685	4.5126	8.94494	0
19	7.77389	0.523005	0.101534	0.0586251	3.44432	9.23819	17.6952	48.1652	1.38778e-017

Error definido por la siguiente formula:

ErrorMalla=fAc-(fS1c*b1c+fS2c*b2c+fS3c*b3c+fS4c*b4c+fS5c*b5c+fS6c*b6c+fZc*bZc)

Table 1-3. Analisis Granulometrico - Porcentaje Acumulado Pasante

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
850	97.57	86.19	97.78	100	100	100	100	100
600	91.29	54.57	80.98	99.08	100	100	100	100
445	80.17	24.05	38.76	88.95	100	100	100	100
300	68.3	10.45	10.28	57.68	96.86	100	100	100
212	53.46	4.2	2.16	12.9	71.82	96.14	100	100
150	43.17	2.53	1.2	2.99	42.1	78.52	98.86	100
106	31.87	1.54	0.63	1.13	20.63	48.78	85.94	99.64
75	21.5	1.04	0.34	0.5	11.15	28.86	57.04	95.96
53	12.2	0.68	0.24	0.1	5.7	14.66	28.5	70.16
45	10.24	0.6	0.18	0.06	4.59	11.61	22.12	57.08
38	7.87	0.51	0.09	0.04	3.43	9.22	17.68	48.16
0	0	-2.22045e-014	0	2.22045e-014	2.22045e-014	0	1.11022e-014	0

Table 1-4. Analisis Granulometrico Corregido - Porcentaje Acumulado Pasante

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
850	97.8251	86.1555	97.7494	99.9506	99.962	99.9517	99.9596	99.9861
600	91.3782	54.5581	80.9694	99.0629	99.9869	99.9833	99.9861	99.9952
445	80.2239	24.0427	38.7535	88.9396	99.992	99.9898	99.9915	99.9971
300	68.4265	10.4329	10.2648	57.6555	96.8411	99.976	99.98	99.9931
212	53.4823	4.19699	2.15733	12.8957	71.8167	96.1358	99.9965	99.9988
150	43.2645	2.51721	1.18865	2.97168	42.0859	78.5021	98.845	99.9949
106	31.83	1.54541	0.634797	1.13775	20.636	48.7876	85.9463	99.6422
75	21.624	1.02323	0.325122	0.475975	11.1315	28.8365	57.0204	95.9533
53	12.1024	0.693201	0.251708	0.118906	5.71454	14.6785	28.5154	70.1653
45	9.68504	0.675092	0.246601	0.167545	4.67271	11.715	22.2078	57.1102
38	7.77389	0.523005	0.101534	0.0586251	3.44432	9.23819	17.6952	48.1652
0	2.22045e-014	2.22045e-014	0	1.11022e-014	0	0	0	0

Table 2-1. Analisis Quimicos por Entradas y Salidas

Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
3.28	3.97	2.65	2.16	2.84	3.37	3.98	3.54	-4.44089e-016

Error definido por la siguiente formula:

DMq1=LA-(LS1*b1c+LS2*b2c+LS3*b3c+LS4*b4c+LS5*b5c+LS6*b6c+LZ*bZc)

Table 2-2. Analisis Quimico Corregido por Entradas y Salidas

Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
2.84689	3.12365	2.31824	1.76916	2.7836	3.09504	3.83047	3.61392	-4.44089e-016

Error definido por la siguiente formula:

DMq1=LAc-(LS1c*b1c+LS2c*b2c+LS3c*b3c+LS4c*b4c+LS5c*b5c+LS6c*b6c+LZc*bZc)

Table 2-3. Analisis Quimico por Mallas

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
1090.87	2.07	1.82	0.79	0	0	0	0	0	0.00879304
714.143	2	1.93	0.77	0.47	0	0	0	0	0.0301071
516.72	1.96	2.45	1.2	0.53	0	0	0	0	0.0462682
365.377	1.83	3.66	1.91	0.62	0.5	0	0	0	0.0432516
252.19	1.83	5.62	6.2	1.08	0.83	0.57	0	0	0.0369566
178.326	1.63	6.36	14.53	2.69	0.76	0.44	6.92	0	0.0225006
126.095	2.04	8.49	33.97	13.64	1.53	0.77	0.63	1.66	0.0456503
89.1628	3	13.19	28.3	29.81	5.4	2.02	0.73	0.42	0.0610908
63.0476	3.98	14.15	12.26	30.02	13.68	5.52	2.6	0.44	-0.031012
48.8365	6.55	7.07	9.08	13.48	13.08	8.6	6.06	1	0.023259
41.3521	8.22	7.12	8.4	11.34	15.72	10.04	8.26	1.63	0.0090273
19	10.15	11.06	10.2	2.09	10.24	9.96	10.2	6.29	0.102777
Error por E-S	**0.208607**	**1.13713**	**0.501087**	**0.596217**	**0.12605**	**0.43353**	**0.306877**	**0.0992384**	**0**

Error definido por la siguiente formula:

Error por Malla (Columna)

DMq2=LfA.*fAc-(LfS1.*fS1c*b1c+LfS2.*fS2c*b2c+LfS3.*fS3c*b3c+LfS4.*fS4c*b4c+LfS5.*fS5c*b5c+LfS6.*fS6c*b6c+LfZ.*fZc*bZc)

Error por Entrada y/o Salida (Fila)

DMq=L-sum(Lf.*fc);

Table 2-4. Analisis Quimico Corregido por Mallas

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose	Error
1090.87	1.90196	2.09002	0.819505	0.000974775	0.000483702	0.000878366	0.000581344	5.12344e-005	0
714.143	1.83282	2.32681	0.886613	0.478675	-0.000126231	-0.000267847	-0.000165946	-8.21675e-006	0
516.72	1.79224	2.78825	1.43819	0.607568	-1.76405e-005	-4.16542e-005	-2.47471e-005	-5.84724e-007	-2.77556e-017
365.377	1.65589	3.81034	2.06978	0.858004	0.510741	8.75511e-005	5.19382e-005	1.17892e-006	-5.55112e-017
252.19	1.75156	5.68086	6.23622	1.33804	0.879843	0.587523	-4.96762e-005	1.23841e-006	-5.55112e-017
178.326	1.49871	6.37812	14.5352	2.76183	0.852893	0.545828	6.92485	7.6439e-007	5.55112e-017
126.095	1.79286	8.50164	33.9736	13.6564	1.62504	0.997626	0.702236	1.66024	2.77556e-017
89.1628	2.60062	13.1975	28.3026	29.8182	5.46693	2.23899	0.972168	0.425988	-5.55112e-017
63.0476	4.2562	14.1517	12.26	30.0197	13.6631	5.4928	2.53133	0.38635	1.11022e-016
48.8365	5.82287	7.0709	9.0802	13.4769	13.128	8.77929	6.37394	1.20686	2.77556e-017
41.3521	7.85305	7.12533	8.4039	11.3446	15.7566	10.1389	8.40693	1.71884	0
19	9.14194	11.0739	10.202	2.09175	10.3107	10.2197	10.6016	6.60521	0
Error por E-S	**0**	**8.88178e-016**	**-8.88178e-016**	**0**	**0**	**4.44089e-016**	**0**	**4.44089e-016**	**0**

Error definido por la siguiente formula:

Error por Malla (Columna)

DMq2=LfAc.*fAc-(LfS1c.*fS1c*b1c+LfS2c.*fS2c*b2c+LfS3c.*fS3c*b3c+LfS4c.*fS4c*b4c+LfS5c.*fS5c*b5c+LfS6c.*fS6c*b6c+LfZc.*fZc*bZc)

Error por Entrada y/o Salida (Fila)

DMqc=Lc-sum(Lfc.*fc);

Chapter 3. Analisis Estadistico

Table 3-1. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Alimento

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	0.646948	0.994529	0.994631	0.968402	0.996219	0.996854	0.997965	0.946644	0.995577	0.996283
min cuad	NaN	0.482663	0.0088168	0.0059611	0.0509245	0.00609336	0.00506995	0.00327958	0.0592349	0.00604607	0.00508193
alpha	NaN	0.732977	30.7272	1.19455	168.923	516.739	1.02943	1.2208	0.961378	4.99518	1.0994
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.04436	6.53373
Xo	NaN	725.086	8675.23	272.828	217.604	-596.918	177.182	212.138	638.841	1404.13	1741.22
Tamaño Medio	269.736	306.681	273.432	256.94	217.604	256.097	300.979	258.977	260.523	249.191	250.789
Varianza	68384.2	46951.4	70196.3	46643.6	28534.9	48564.7	170813	54938.8	32560.9	41169	43296.5
Desv. Std.	261.504	216.683	264.946	215.971	168.923	220.374	413.295	234.39	180.446	202.901	208.078
CV	0.96948	0.70654	0.968963	0.840551	0.776284	0.86051	1.37317	0.905062	0.692631	0.81424	0.829694

Table 3-2. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #01

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	0.828858	0.924564	0.920942	0.999055	0.999063	0.995812	0.997503	0.916596	0.998546	0.998351
min cuad	NaN	0.244549	0.111758	0.0629735	0.00140069	0.0013883	0.00620398	0.00369939	0.0664354	0.00207745	0.002356
alpha	NaN	1.63395	1.05746	1.86779	222.959	226.704	0.397815	6.42612	1.77699	7.22211	4.16168
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.74028	7.21941
Xo	NaN	1154.98	1315.14	826.622	587.953	586.166	569.729	94.3344	1208.25	1408.73	1628.45
Tamaño Medio	602.744	716.483	639.099	733.946	587.953	589.378	616.642	606.205	687.898	589.305	595.471
Varianza	56406.3	86455.5	141365	166506	49710.9	49501.7	65199.9	57186	92600.4	47406.8	49681.5
Desv. Std.	237.5	294.033	375.989	408.051	222.959	222.49	255.343	239.136	304.303	217.731	222.894
CV	0.394032	0.410384	0.588249	0.555969	0.379213	0.377499	0.414086	0.39448	0.442367	0.369471	0.374315

Table 3-3. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #02

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	-0.09304	0.890978	0.956891	0.999716	0.999713	0.998144	0.998893	0.923317	0.999687	0.999222
min cuad	NaN	2.02351	0.209562	0.0552371	0.000546497	0.000552566	0.00356843	0.00212835	0.0982557	0.00057873	0.00143978
alpha	NaN	2.16673	1.18454	2.62452	138.425	138.481	0.298218	11.426	2.43984	40.5344	8.24313
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	3.96763	19.8924
Xo	NaN	948.36	1134.38	620.418	481.841	481.779	473.27	42.8846	875.555	1352.12	1659.79
Tamaño Medio	498.588	648.884	517.41	551.218	481.841	481.909	494.79	490	567.527	479.978	486.284
Varianza	33847.1	46637.3	101091	50997.8	19161.6	19114.4	22770	21013.5	38464	18017.9	19586.3
Desv. Std.	183.976	215.957	318.027	225.827	138.425	138.255	150.897	144.96	196.122	134.231	139.951
CV	0.368994	0.332813	0.61339	0.409687	0.287285	0.28689	0.304973	0.295837	0.345574	0.279661	0.287797

Table 3-4. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #03

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	-2.49081	0.897947	0.977289	0.995446	0.995449	0.998606	0.997785	0.845423	0.993779	-2.56543
min cuad	NaN	6.71123	0.206414	0.032461	0.00921003	0.00920504	0.00281936	0.00448019	0.220942	0.0119602	6.85468
alpha	NaN	2.81253	1.10284	3.52265	79.9135	80.0373	0.305893	11.0864	3.23875	52.2688	8.37295
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	4.24278	1.15725e+006
Xo	NaN	543.422	686.324	363.495	291.429	291.444	288.727	27.0119	483.88	807.711	1020
Tamaño Medio	310.228	400.886	324.697	327.165	291.429	291.486	302.556	299.464	344.528	288.31	0.00737987
Varianza	11494.3	11873.3	38198.1	10595.6	6386.17	6393.67	8979.04	8089.1	8952.21	5786.8	6.50453e-006
Desv. Std.	107.211	108.965	195.462	102.935	79.9135	79.9605	94.7578	89.9394	94.6161	76.071	0.0025504
CV	0.345588	0.27181	0.600107	0.314627	0.274213	0.27432	0.313191	0.300334	0.274625	0.263852	0.345588

Table 3-5. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #04

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	0.656777	0.938933	0.995592	0.999642	0.999855	0.991098	0.995749	0.991218	0.999646	0.998307
min cuad	NaN	0.440139	0.0869233	0.0038425	0.000509246	0.000206599	0.0126705	0.00605153	0.00765612	0.000454434	0.00217079
alpha	NaN	1.51517	1.19365	2.19834	74.0767	77.2866	0.485673	4.3597	1.89386	5.08709	3.052
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.22073	6.43363
Xo	NaN	323.573	388.189	188.527	166.849	164.684	157.648	39.7656	292.363	419.155	528.9
Tamaño Medio	171.872	194.924	176.788	166.964	166.849	167.923	177.382	173.366	171.228	167.982	170.173
Varianza	6494.47	7133.84	11730.4	6427.01	5487.36	5429.43	8370.19	6894	5204.45	5246.97	5821.85
Desv. Std.	80.5882	84.462	108.316	80.1686	74.0767	73.6847	91.4887	83.0301	72.1419	72.436	76.301
CV	0.468886	0.433307	0.612345	0.480155	0.443973	0.438801	0.515772	0.47893	0.421321	0.431212	0.448372

Table 3-6. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #05

Parametro	**Estadistica**	**GGS**	**GM**	**RR**	**Normal**	**Normal mod**	**LogNormal**	**Gamma**	**BC**	**Harris 3p**	**Beta**
r^2	NaN	0.770326	0.954035	0.998189	0.999143	0.999754	0.991017	0.996713	0.981112	0.999459	0.998942
min cuad	NaN	0.235594	0.0567505	0.00130798	0.00105749	0.000303671	0.0110903	0.0040581	0.0136438	0.000554525	0.00108477
alpha	NaN	1.26219	1.29105	2.07731	53.2697	56.9102	0.563033	3.5025	1.68875	4.65915	2.52391
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.97184	5.33372
Xo	NaN	225.834	262.754	123.571	107.516	104.542	99.6118	32.245	201.335	289.714	343.362
Tamaño Medio	112.356	126.004	114.625	109.456	107.516	108.887	116.721	112.938	111.97	109.009	110.29
Varianza	3619.13	3855.99	5167.37	3057.71	2837.66	2765.67	5081.8	3641.69	2650.63	2656.57	2902.07
Desv. Std.	60.1592	62.0966	71.8898	55.2966	53.2697	52.5897	71.2868	60.3464	51.4843	51.542	53.8709
CV	0.535435	0.492815	0.626991	0.505196	0.495459	0.482976	0.610747	0.534332	0.459803	0.472824	0.48845

Table 3-7. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Spigot #06

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	0.743009	0.943311	0.997851	0.999239	0.99941	0.993702	0.997056	0.956358	0.998789	0.997981
min cuad	NaN	0.20549	0.0623574	0.00128866	0.000837196	0.000649473	0.00692732	0.00323835	0.0261656	0.000968299	0.0016143
alpha	NaN	1.09883	1.4083	2.35058	32.6247	33.6923	0.482525	4.52009	1.65599	6.71009	3.28873
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	2.25088	8.01798
Xo	NaN	159.726	179.499	80.1654	70.0465	69.011	66.4013	16.1476	135.599	195.277	246.91
Tamaño Medio	71.2551	83.6233	74.4784	71.0403	70.0465	70.6948	74.5993	72.9888	74.7203	70.9291	71.8174
Varianza	1221.78	2053.66	2300.2	1031.91	1064.37	1016.13	1458.98	1178.6	1215.83	955.528	1021.77
Desv. Std.	34.954	45.3173	47.9659	32.1234	32.6247	31.8768	38.1965	34.3307	34.8687	30.9116	31.9652
CV	0.490547	0.541922	0.643787	0.452185	0.465757	0.450907	0.512023	0.470356	0.466657	0.43581	0.44509

Table 3-8. Parametros Estadisticos, Ajuste de Curvas - Rebose

Parametro	Estadistica	GGS	GM	RR	Normal	Normal mod	LogNormal	Gamma	BC	Harris 3p	Beta
r^2	NaN	0.771139	0.981309	0.990615	0.997068	0.998297	0.994259	0.996098	0.919499	0.995071	0.992059
min cuad	NaN	0.0609431	0.0148493	0.00197861	0.00232909	0.00135276	0.00456128	0.00310037	0.0169712	0.00131244	0.00211472
alpha	NaN	0.545084	2.04824	2.20504	21.3786	23.4376	0.449209	4.50029	1.03691	7.12749	3.14882
beta	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	NaN	1.99846	9.88398
Xo	NaN	115.731	121.417	47.12	40.5342	38.6698	40.2539	9.63756	94.3727	131.947	176.069
Tamaño Medio	39.2954	40.8284	39.8273	41.731	40.5342	41.1918	44.5273	43.3718	40.3424	41.6195	42.5395
Varianza	478.719	1201.6	804.554	399.309	457.045	445.436	443.307	417.999	702.023	407.075	404.784
Desv. Std.	21.8797	34.6641	28.3715	19.9827	21.3786	21.1054	21.0548	20.445	26.4957	20.1761	20.1192
CV	0.5568	0.849018	0.712335	0.478846	0.527422	0.512368	0.472853	0.471389	0.656772	0.484775	0.472955

Table 4-1. Curva Tromp - Spigot #01

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
1090.87	86.132	86.1179
714.143	66.3181	66.2839
516.72	37.0176	36.9537
365.377	15.61	15.5244
252.19	5.6462	5.55046
178.326	2.22449	2.12528
126.095	1.14998	1.04968
89.1628	0.692304	0.591541
63.0476	0.468999	0.36801
48.8365	0.101362	0
41.3521	1.07679	0.976413
19	0.910331	0.80979

Table 4-2. Curva Tromp - Spigot #02

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
714.143	92.7394	92.7376
516.72	72.1169	72.1098
365.377	34.3417	34.325
252.19	6.9004	6.87677
178.326	1.16363	1.13854
126.095	0.588065	0.56283
89.1628	0.36668	0.341388
63.0476	0.0929686	0.0676073
48.8365	0.0253784	0
41.3521	0.920868	0.895717
19	0.158186	0.132841

Table 4-3. Curva Tromp - Spigot #03

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
365.377	92.7453	92.7735
252.19	66.0751	66.2071
178.326	19.4768	19.79
126.095	3.16288	3.53947
89.1628	1.26997	1.65393
63.0476	0.730843	1.1169
48.8365	-0.390414	0
41.3521	1.12685	1.51136
19	0.147719	0.53604

Table 4-4. Curva Tromp - Spigot #04

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
365.377	99.0218	98.9548
252.19	83.7439	82.6312
178.326	55.7279	52.6976
126.095	29.3792	24.5455
89.1628	14.2076	8.33542
63.0476	8.58955	2.33287
48.8365	6.40613	0
41.3521	9.88482	3.71679
19	6.68429	0.297196

Table 4-5. Curva Tromp - Spigot #05

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
178.326	94.8185	93.1461
126.095	73.1921	64.5396
89.1628	44.1493	26.123
63.0476	31.1914	8.98285
48.8365	24.7263	0.431025
41.3521	28.0899	4.88028
19	24.4004	0

Table 4-6. Curva Tromp - Spigot #06

Tamaño ((10^-3)mm)	ED	EDc
178.326	99.8829	99.7578
126.095	99.0694	98.0743
89.1628	95.8029	91.3143
63.0476	76.2904	50.934
48.8365	58.4452	14.004
41.3521	59.4906	16.1674
19	51.6783	0

Table 5-1. d50 Calculado por Interpolacion Lineal - Splines Lineales

Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
604.194	428.111	226.709	166.971	96.6028	NaN

Table 5-2. d50 Corregido Calculado por Interpolacion Lineal - Splines Lineales

Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
604.535	428.161	226.4	173.321	112.117	62.4648

Table 5-3. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #01

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.833091	0.989205	0.997816	0.998742
alpha	1.60769	3.62059	0.50644	3.34015
d50c	890.986	619.959	599.599	599.294

Table 5-4. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #02

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.784734	0.99528	0.999829	0.999711
alpha	2.23837	5.08132	0.352602	4.79154
d50c	609.84	433.351	421.467	421.434

Table 5-5. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #03

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.831664	0.996679	0.998277	0.999119
alpha	2.14712	6.2594	0.293576	5.75826
d50c	296.311	229.199	225.674	225.725

Table 5-6. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #04

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.995563	0.997426	0.997563	0.997155
alpha	2.45577	4.02962	0.430117	3.92217
d50c	180.549	176.725	169.986	170.176

Table 5-7. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #05

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.986952	0.996411	0.995342	0.995651
alpha	3.66628	5.07798	0.354958	4.75361
d50c	118.697	113.11	110.022	110.174

Table 5-8. Ajuste a Curvas de Particion - Spigot #06

Parametro	Plitt	Lynch	LogNormal	Logistica en Ln
r^2	0.94426	0.991314	0.990223	0.988227
alpha	2.70581	6.05094	0.287941	5.93271
d50c	69.1453	63.4253	62.5292	62.5181

Table 6-1. Distribucion de Estaño en Entradas y Salidas

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
1090.87	1.45304	9.2633	0.795597	2.72349e-005	6.60565e-006	1.37015e-005	6.12492e-006	1.96544e-007
714.143	4.1505	23.5369	6.41751	0.24017	1.1281e-006	2.73415e-006	1.14414e-006	2.06272e-008
516.72	7.02212	27.2387	26.1899	3.47659	3.2395e-008	8.73737e-008	3.50607e-008	3.01632e-010
365.377	6.86188	16.6017	25.4354	15.1721	0.578123	3.89225e-007	1.55956e-007	1.28893e-009
252.19	9.19452	11.341	21.8097	33.8524	7.90976	0.728987	2.13961e-007	-1.94214e-009
178.326	5.37899	3.4299	6.07351	15.4924	9.10949	3.10981	2.0816	8.30853e-010
126.095	7.201	2.64494	8.11671	14.1564	12.5223	9.57791	2.36471	0.162025
89.1628	9.32318	2.20623	3.78071	11.1538	18.6665	14.4328	7.34135	0.434827
63.0476	14.235	1.49517	0.38825	6.05889	26.589	25.1265	18.8372	2.75689
48.8365	4.94441	0.0409924	0.0200026	-0.370523	4.91347	8.40596	10.4959	4.35972
41.3521	5.27185	0.346924	0.525885	0.698442	6.9533	8.11377	9.90402	4.25437
19	24.9635	1.85414	0.446825	0.069315	12.7581	30.5042	48.9752	88.0322

Table 6-2. Distribucion de Sn Total Ingresante

Tamaño ((10^-3)mm)	Alimento	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06	Rebose
1090.87	1.45304	1.37528	0.0777505	3.27985e-006	9.62586e-007	2.81946e-006	1.30391e-006	1.35609e-008
714.143	4.1505	3.49442	0.627158	0.0289231	1.64388e-007	5.62626e-007	2.4357e-007	1.42321e-009
516.72	7.02212	4.044	2.55944	0.418678	4.72065e-009	1.79795e-008	7.4639e-009	2.08116e-011
365.377	6.86188	2.46478	2.4857	1.82715	0.084245	8.00937e-008	3.32006e-008	8.8932e-011
252.19	9.19452	1.68374	2.13137	4.07678	1.15262	0.150009	4.55491e-008	-1.34001e-010
178.326	5.37899	0.509221	0.59354	1.86571	1.32745	0.639927	0.443142	5.7326e-011
126.095	7.201	0.392681	0.793214	1.70483	1.82477	1.97092	0.503411	0.0111792
89.1628	9.32318	0.327548	0.369474	1.34323	2.72011	2.96995	1.56287	0.0300016
63.0476	14.235	0.221981	0.0379421	0.72966	3.87459	5.17046	4.01016	0.190216
48.8365	4.94441	0.00608594	0.00195478	-0.0446214	0.715999	1.72976	2.23443	0.300806
41.3521	5.27185	0.0515061	0.0513926	0.084112	1.01325	1.66963	2.10842	0.293537
19	24.9635	0.275276	0.0436665	0.00834747	1.85914	6.27708	10.4261	6.07392
Total (%)	**100**	**14.8465**	**9.7726**	**12.0428**	**14.5722**	**20.5777**	**21.2885**	**6.89966**

Chapter 7. Eficiencia del Clasificador Stokes

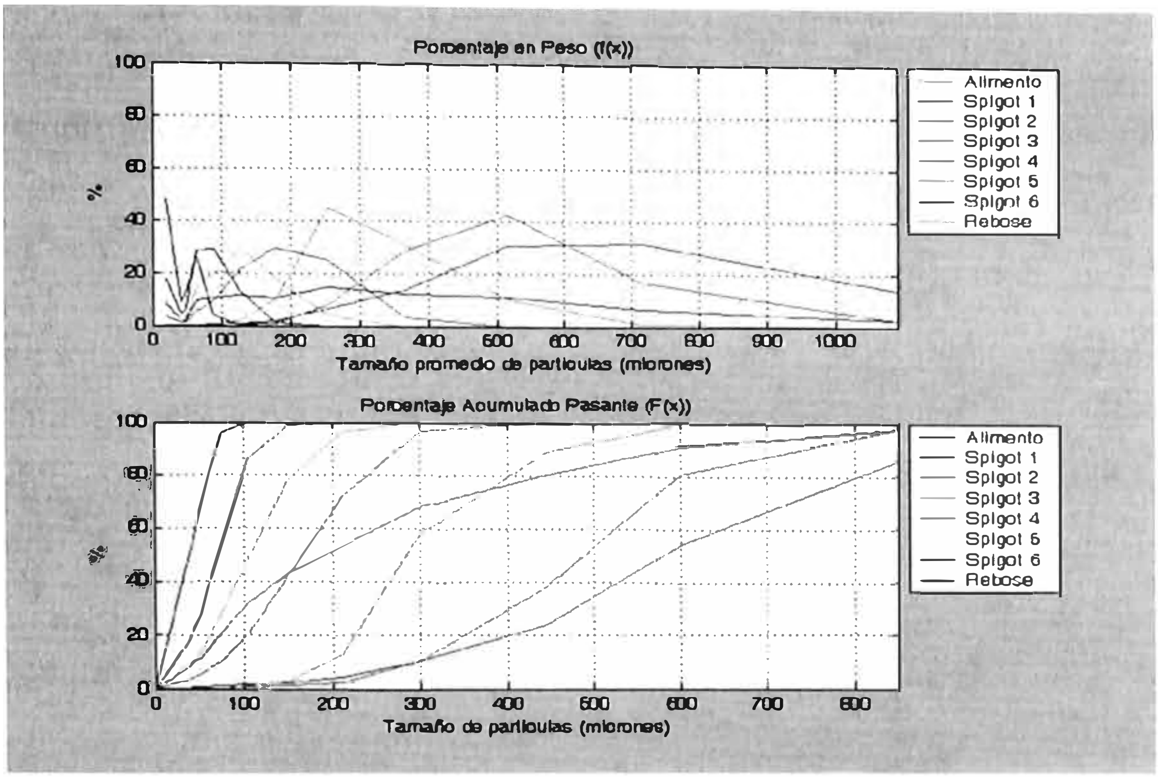
Table 7-1. Eficiencia por Spigot

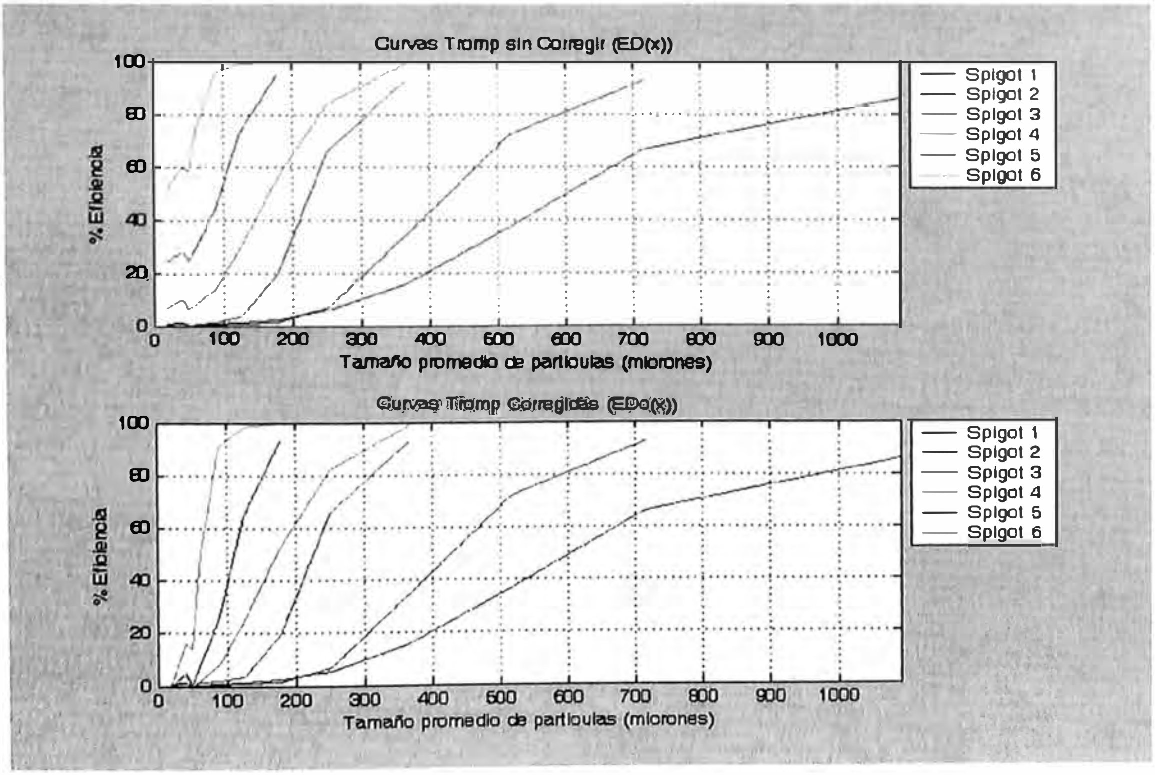
Parametro	Spigot #01	Spigot #02	Spigot #03	Spigot #04	Spigot #05	Spigot #06
Ef. Finos (%)	91.8467	94.3892	92.8501	82.4345	65.8343	40.6366
Ef. Gruesos (%)	71.385	72.7143	78.6231	70.4015	81.9966	90.1952
Ef. Spigot (%)	65.5648	68.6344	73.0016	58.0351	53.9819	36.6522

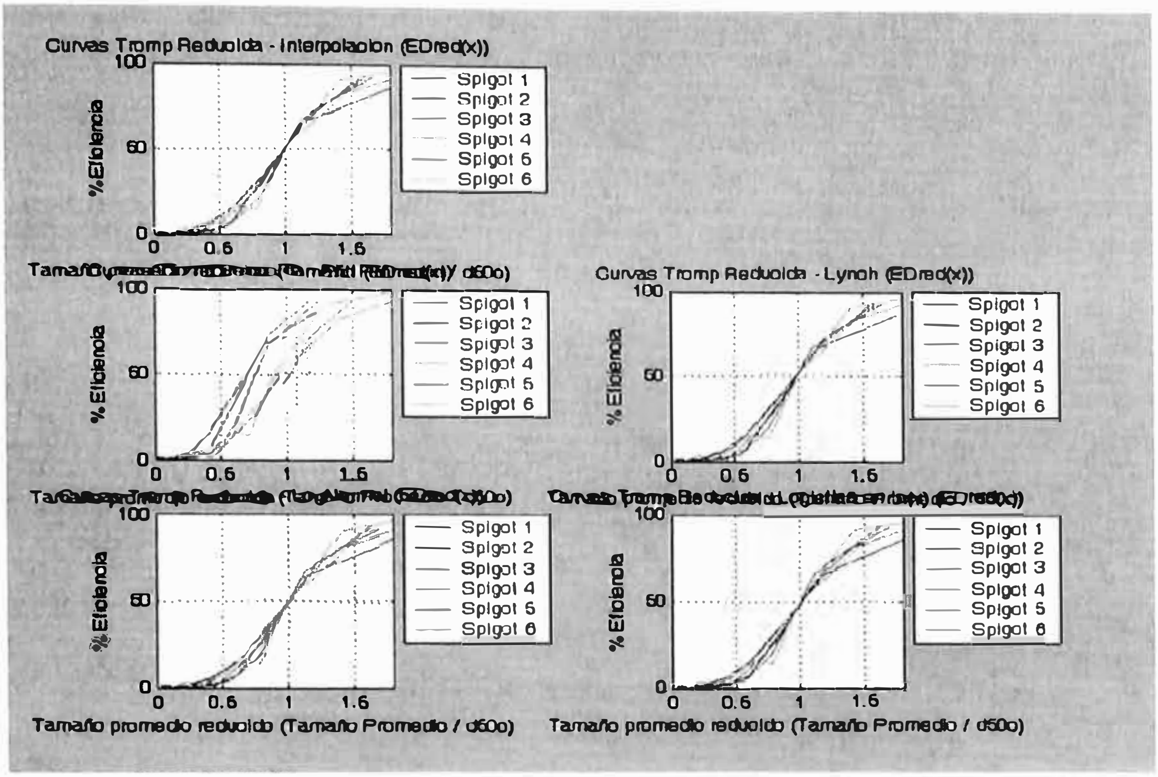
Table 7-2. Eficiencia del Clasificador Stokes

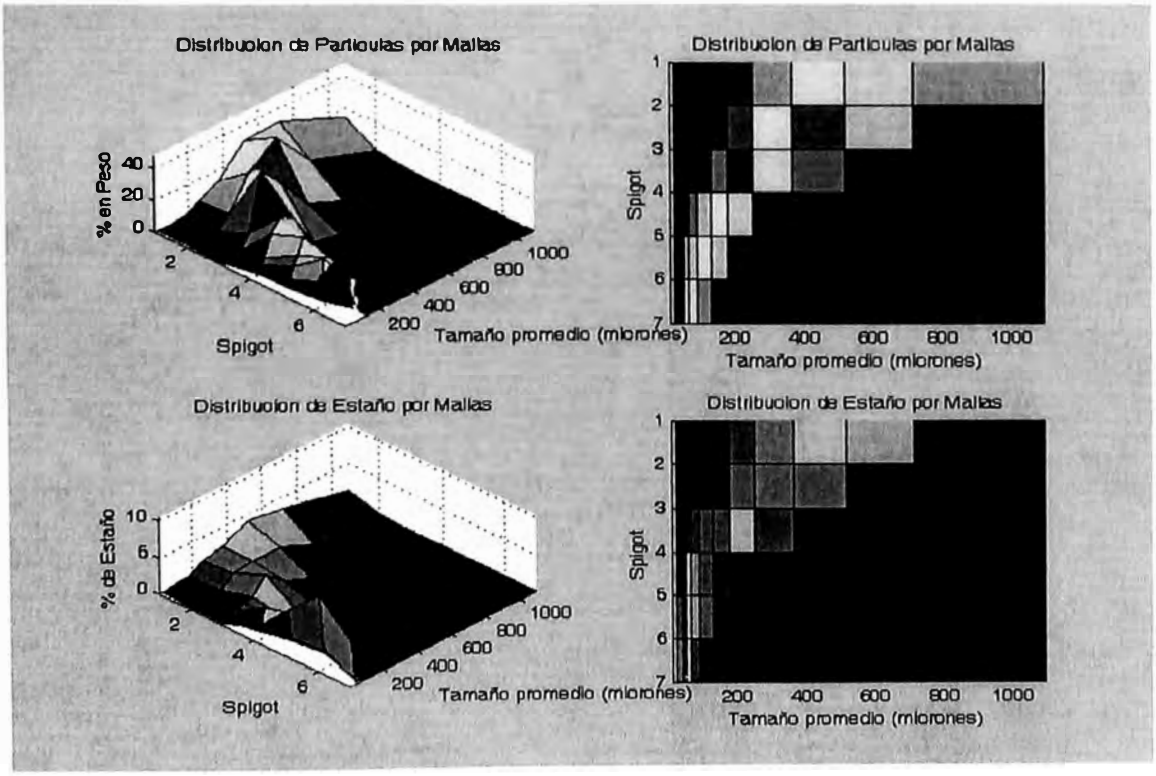
Eficiencia del Clasificador Stokes (%)
3.77211

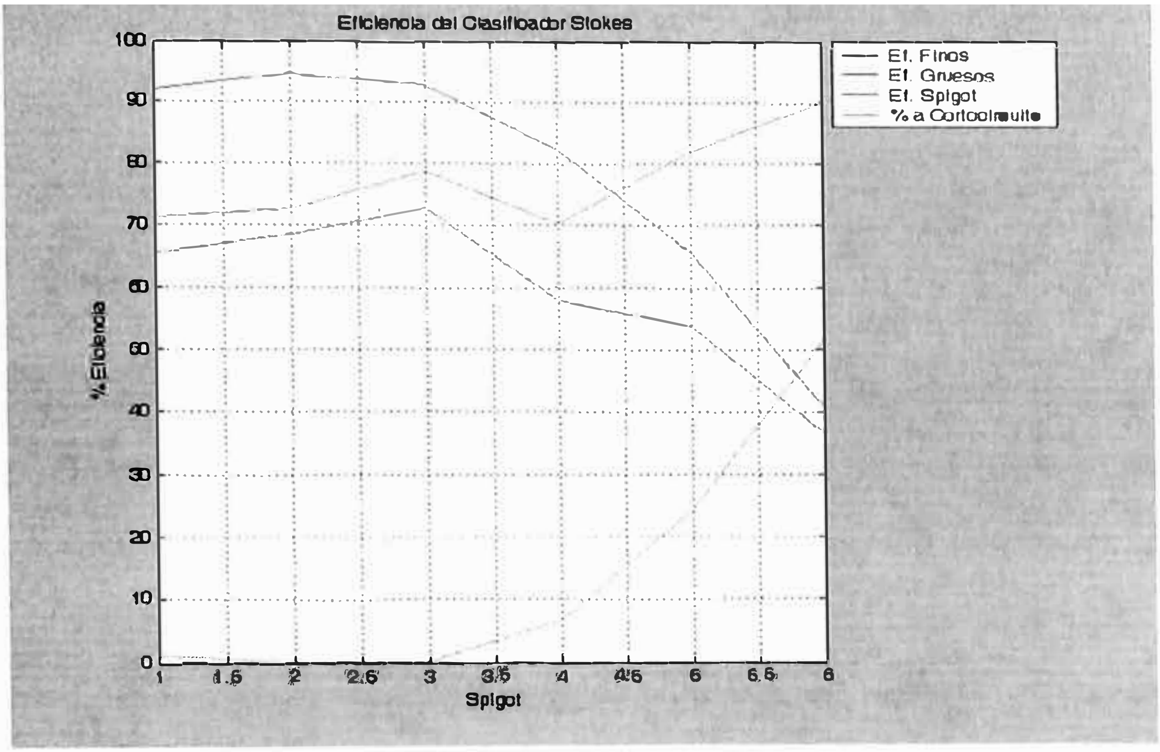
Chapter 8. Graficos






Curvas Tromp Reducida - Interpolacion (EDred(x))
% Eficiencia
Spigot 1
Spigot 2
Spigot 3
Spigot 4
Spigot 5
Spigot 6
Curvas Tromp Reducida - Lynch (EDred(x))
Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)
Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)


Distribucion de Particulas por Mallas
% en Peso
Spigot
Tamaño promedio (micrones)
Distribucion de Particulas por Mallas
Spigot
Tamaño promedio (micrones)
Distribucion de Estaño por Mallas
% de Estaño
Spigot
Tamaño promedio (micrones)
Distribucion de Estaño por Mallas
Spigot
Tamaño promedio (micrones)


Eficiencia del Clasificador Stokes
Ef. Finos
Ef. Gruesos
Ef. Spigot
% a Cortocircuito
% Eficiencia
Spigot
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
5.5
6

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

La presente tesis puede verse como un conjunto de herramientas matemáticas que como en el caso de los Capítulos 2 al 5 se presenta una corrección de Análisis Granulométricos y Análisis Químicos en una forma general para un nodo, aplicable indistintamente del número de entradas o salidas de dicho nodo salvo unas modificaciones en el tamaño de algunas matrices que se presentan en el capítulo respectivo. Así mismo se presenta en forma práctica mediante tablas las correcciones de dichos análisis para el Clasificador Stokes. Cabe resaltar que las correcciones de Análisis Granulométricos es necesario para este caso, ya que el método para obtener la eficiencia del clasificador en cuestión, requiere conocer los análisis granulométricos de los reboses de las cámaras, y dichos análisis pueden obtenerse mediante ecuaciones de balance de masa de los análisis granulométricos corregidos.

Los análisis granulométricos pueden representarse básicamente por dos parámetros estadísticos: Tamaño Medio (en términos de longitud) y Coeficiente de Variación (adimensional), se observa que los Coeficientes de distribución de los productos del clasificador (entre ~35% y ~55%) (Tablas 6.15 al 6.21) son menores al alimentado (~96%) (Tabla 6.14) lo que quiere decir que los productos del clasificador tienen una mayor uniformidad en la distribución de tamaños. Esto en forma breve puede notarse que en la curva de Fracciones Acumuladas Pasantes vs.

Tamaño de partícula la curva de la Alimentación tiene una menor pendiente que las curvas de los productos (prácticamente la curva del alimento interseca a las curvas de los productos). Respecto al Tamaño Medio, se observa que este disminuye a lo "largo" del clasificador, esto significa que el tamaño medio de la descarga de una cámara es mayor que la descarga de la siguiente cámara. En si, el producto más grueso (descarga del Spigot #01) tiene un Tamaño Medio de 600μm (Tabla 6.15) y el más fino (rebose del clasificador) tiene un Tamaño Medio de 40 μm. (Tabla 6.21)

Estos parámetros estadísticos mencionados (Tamaño Medio y Coeficiente de Variación) están relacionados en forma directa con los parámetros de ajuste de las curvas de distribución. Esto se manifiesta en que independientemente cual sea la amplitud del rango de los tamaños de partículas en la que se distribuye la muestra, el Coeficiente de Variación determinara la pendiente de la curvas Acumuladas Pasantes, siendo estas inversamente proporcional, es decir, a un mayor coeficiente de variación, la pendiente de dicha curva será menor. Como se puede observar en el Capítulo 6, este Coeficiente de Variación depende sólo del "factor de forma" (o factores de forma como en el caso de la función de Harris y Distribución Beta) (exceptuando la distribución Normal y Normal Modificada). El tamaño Medio está relacionado directamente con el parámetro de tamaño de las funciones de distribución presentadas.

Se observa también, que una muestra puede representarse por varias curvas de distribución. En general, las muestras presentadas siguen distribuciones probabilísticas (por ejemplo una distribución Gamma podría representar mejor una muestra que la función de Gates Gaudin Schuhmann) (Tabla 6.22 – Alimento). Se observa también que funciones de dos parámetros (distribuciones probabilísticas – Gamma, Log-Normal-) pueden representar mejor una muestra que funciones de tres parámetros (Harris, Distribución Beta) (Tabla 6.22 – 6.23), siendo estas últimas un poco más difíciles de ajustar, así se utilice un software como Matlab (extensamente usado en esta tesis) es necesario introducir un vector inicial con valores cercanos a los reales y este vector inicial resulta un poco complicado de calcular cuando la función presenta tres parámetros. Este vector inicial compuesto de los factores de forma y parámetro de tamaño, para todos los casos (exceptuando las funciones que se pueden linealizar como Gates Gaudin Schuhmann, Rosin Rammler y Broadbent Callcott) se calculan mediante los parámetros estadísticos mencionados. En forma general, el ajuste para las curvas que no se pueden linealizar, se emplea el criterio de Mínimos Cuadrados.

Con respecto a las eficiencias, se puede ver en el Capítulo 7 que las eficiencias disminuyen en las últimas cámaras, desde ~65% (Spigot #01) hasta ~40% (Spigot #06) (Tabla 7.21). En una curva de partición ideal se puede observar que son curvas donde no existe cortocircuito y que las pendientes "tienden al infinito" (en el parámetro de corte d50 se observa una recta vertical) (Gráfica 7.2). Por ende, si nuestro objetivo es mejorar la eficiencia del clasificador (en forma numérica) debemos de llevar a cero el cortocircuito y aumentar la pendiente de las curvas. De estos dos factores, antes de fijarse en la pendiente es disminuir el cortocircuito. El cortocircuito es el principal factor para tener eficiencias menores en las últimas cámaras (Gráficas 7.19 7.20).

Análogamente a las funciones de distribución, las curvas de partición se ajustaron a diversas funciones, de las cuales las funciones Log-Normal, la Logística en ln(x) y la ecuación de Lynch son las que mejor se ajustaron (Tabla 7.13). Debe de tomarse en cuenta que las curvas Log-Normal y la Logística en ln(x) dan resultados muy parecidos. Los factores de forma de estas curvas de partición también están relacionados con la pendiente, sin importar claro está el valor del d50, esto debido a que se utilizaron curvas de partición reducidas. Se observa también que los factores d50 disminuyen "a lo largo" del clasificador, esto es lógico sabiendo que en las últimas cámaras son muestras más finas. Los d50 hallados varían desde ~600μm (Spigot #01) hasta ~40μm (Spigot #06).

Se debe de tomar en cuenta que las curvas de partición al igual que las funciones de distribución granulométrica son curvas de probabilidad. Pero las curvas de partición no son curvas acumulativas a pesar de que se ajustan a curvas de distribución acumulada (como la curva de Plitt –distribución acumulada Weibull- y la Log-Normal –distribución acumulada Log-Normal-),

Finalmente se obtiene la eficiencia del Clasificador Stokes que resulta de la multiplicación de las eficiencias de las cámaras, esto debido a que están en serie, dando un valor de ~4%. Estos valores de eficiencia son netamente referenciales, ya que puede haber diversos métodos para hallar la eficiencia de un equipo.

De lo expuesto, cabe mencionar que se debe de desarrollar lo siguiente:

- Desarrollar un método general para corregir los Análisis Granulométricos y Químicos en sistemas que incluyan nodos y ramas.
- El método mencionado deberá ser tal que presente las fracciones granulométricas en el rango de 0 a 1 (Recuérdese que en el método presentado puede existir fracciones corregidas de valor negativo).
- Investigar y/o desarrollar funciones de densidad y de distribución para determinar que distribuciones representan los diferentes tipos de muestras presentes en el campo de procesamiento de minerales.
- Determinar para los diferentes tipos de muestras (ej: producto de molienda, overflow, undeflow de clasificadores, etc), los rangos de Coeficiente de Variación en que se encuentran.
- Investigar sobre funciones de densidad mixtas y su aplicación para representar por ejemplo una muestra alimento a un molino en circuito cerrado (Alimentación Fresca + Carga Circulante).
- Determinar relaciones (Ej: pendiente y factores de forma) para poder obtener el vector inicial para el ajuste de Funciones de Distribución análogamente al desarrollado para las curvas de partición en el capítulo 8. Especialmente para las funciones de Harris y la distribución Beta.
- Analizar el comportamiento de los parámetros de tamaño y factor de forma de las funciones de Harris y Beta al variar los parámetros estadísticos (análogamente al realizado a las funciones de sólo dos parámetros).

- Desarrollar software y/o complementos que mantengan una interfaz gráfica con el usuario (Uso del Graphic User Interface - GUI de Matlab).

CONCLUSIONES

CORRECCIÓN DE ANÁLISIS GRANULOMÉTRICOS POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

1. Para hallar la eficiencia de un clasificador como es el Stokes es necesario corregir previamente los análisis granulométricos.
2. El método de Multiplicadores de Lagrange puede ser útil para sistemas más complejos, e inclusive no limitarse sólo para corregir análisis granulométricos.
3. Se utilizaron para los cálculos los análisis granulométricos de las fracciones en peso, ya que estos son los requeridos para obtener las curvas Tromp.
4. Otra razón para usar los análisis de las fracciones en peso, fue que, si bien los análisis acumulados presentaban menor error al corregir (0.315 frente a 0.738 de las fracciones en peso), estos mismos al hallar los análisis de fracciones en peso, daban un error mayor (0.869).
5. Los Análisis Granulométricos Acumulados, tanto Retenidos como Pasante, dan los mismos valores al corregirse por los Multiplicadores de Lagrange.
6. Este método posee una limitación, y es el de que puede presentarse fracciones negativas (Fracciones en Peso corregidas).
7. Se observaron las siguientes propiedades:

- La suma de las Fracciones en Peso del Análisis Granulométrico es 1 (100%).
- La suma de los errores ΔM es Cero.
- La suma de los Multiplicadores de Lagrange es Cero.
- La suma de las correcciones es Cero.
- La suma de las Fracciones en peso de los Análisis Granulométricos corregidos es 1 (100%).

CORRECCIÓN DE ANÁLISIS QUÍMICO POR MULTIPLICADORES DE LAGRANGE.

8. En los Análisis Químicos se presentan tres tipos de errores:
   - Por Flujos
   - Por Entradas y Salidas del Sistema
   - Por Mallas
9. El error debido a las Entradas y Salidas del Sistema se corregirá inherentemente al corregir las mallas valoradas y los flujos.
10. Si se incluye la ecuación correspondiente a las entradas y Salidas del Sistema (Ecuación 4.3) en el modelo de la corrección, se tendrá un modelo más complicado que incluye una matriz cuadrada de determinante cero (matriz singular o matriz que no posee inversa) ya que dicha ecuación 4.3 es linealmente dependiente de las ecuaciones por Flujo (Ecuación 4.1) y de las ecuaciones por Mallas (Ecuación 4.5).

11. Debido a los tipos de errores mencionados, la corrección de los Análisis Químicos se volvió más complicada. En la corrección de Análisis Granulométricos presenta solo un tipo de error que es debido a las Mallas.
12. Esta complicación se hace notoria en las correcciones, debido a la dependencia de dos multiplicadores de Lagrange (uno referido a Mallas y el otro referido a Flujos de las Entradas y Salidas del Sistema).
13. Se observaron las siguientes propiedades:
    - La sumatoria de todas las correcciones es cero

$$\boxed{\begin{array}{l}\sum(\Delta LfA)+\sum(\Delta LfE1)+\sum(\Delta LfE2)+\ldots+\sum(\Delta LfEm)+\\ \sum(\Delta LfS1)+\sum(\Delta LfS2)+\ldots+\sum(\Delta LfSn)+\sum(\Delta LfZ)+\\ \Delta LA+\Delta LE1+\Delta LE2+\Delta LEm+\Delta LS1+\Delta LS2+\Delta LSn+\Delta LZ=0\end{array}}$$

    - La suma de todas las Leyes corregidas es idéntica a la suma de todas las leyes sin corregir.

$$\boxed{\sum(\text{Leyes Corregidas})=\sum(\text{Leyes Sin Corregir})}$$

ANÁLISIS ESTADÍSTICO

14. A medida que Aumenta el Coeficiente de variación (CV), el factor de Forma (Alpha):
    - Aumenta:
        i. Función Gaudin Meloy (A CV>100% toma valores negativos, pero el Alpha Aumenta).
        ii. Distribución Normal
        iii. Distribución Normal Modificada
        iv. Distribución Log-Normal.
    - Disminuye:

i. Función de Gates Gaudin Schuhmann.

ii. Función de Rosin Rammler

iii. Distribución Gamma

iv. Función de Broadbent Callcott

15. A medida que Aumenta el Coeficiente de Variación (CV), el parámetro de Tamaños Xo:

- Aumenta:

  i. Función Gates Gaudin Schuhmann.

  ii. Función Gaudin Meloy (A CV>100% toma valores negativos).

  iii. Distribución Gamma.

  iv. Función de Broadbent Callcott.

- Disminuye:

  i. Función de Rosin Rammler (se mantiene aproximadamente constante e igual al Tamaño medio hasta un CV=100%, pasado este valor, este parámetro Xo disminuye).

  ii. Distribución Normal Modificada (Toma valores negativos a partir de CV~80%).

  iii. Distribución Log-Normal.

- Constante:

  i. Distribución Normal (Igual al Tamaño Medio).

16. A medida que Aumenta el Coeficiente de Variación (CV), la mediana X50:

- Aumenta: (Ninguna de las funciones de dos parámetros presentadas)

- Disminuye: (Todas las funciones de dos parámetros presentadas exceptuando la Distribución Normal)

- Constante:
  - i. Distribución Normal (De valor igual a Xo).

17. A medida que Aumenta el Coeficiente de Variación (CV), el punto de Inflexión Xi:
    - No presenta:
      - i. Función Gates Gaudin Schuhmann
      - ii. Función Gaudin Meloy
    - Aumenta: (Ninguna de las funciones de dos parámetros presentadas)
    - Disminuye:
      - i. Función de Rosin Rammler presenta un punto de inflexión cuando CV<100%
      - ii. Distribución Normal Modificada presenta un punto de inflexión a valores menores de CV~80%.
      - iii. Distribución Log-Normal.
      - iv. Distribución Gamma presenta un punto de inflexión cuando CV<100%.
      - v. Función de Broadbent Callcott presenta un punto de inflexión a valores menores de CV~70%.
    - Constante:
      - i. Distribución Normal (De valor igual a Xo).
18. En la función de Gaudin Meloy y la de Harris, el parámetro de tamaño Xo representa un tamaño Máximo, por la forma de estas funciones, si el tamaño "x" es mayor a Xo se obtendrá un valor complejo.
19. En el Alimento se tiene el máximo coeficiente de variación: 96.95%

20. Las partículas ya clasificadas (Spigots y Rebose) muestran un Coeficiente de Variación entre: 34.56% y 55.68% siendo la media: 45.15%
21. En el gráfico de Porcentaje en Peso (Gráfico 6.14); compárese el ancho de la distribución de la alimentación con respecto a las descargas. Obsérvese también la diferencia de altura de las campanas de las salidas con respecto a la de la alimentación.
22. En el gráfico de Porcentaje acumulado Pasante (Gráfico 6.15), se puede observar la diferencia en las pendientes de las salidas con respecto a la de la alimentación
23. La determinación de qué función (o qué funciones) pueden representar una muestra esta dada por:
    - R^2 mayor a 0.99
    - Inspección de las gráficas.
    - Concordancia de los parámetros estadísticos (Tamaño Medio y Coeficiente de Variación principalmente.
24. En una forma general, las muestras presentadas son representadas por distribuciones probabilísticas (ver Tablas 6.22 y 6.23).

CÁLCULO DE LA EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES

25. Las curvas de partición de los tres primeros Spigots se asemejan a curvas corregidas (cortocircuito mínimo), la corrección en estos casos puede prescindirse.

26. En la corrección de las curvas de partición se debe de tener en cuenta que los valores EDc se encuentren entre 0 y 1, ya que estos valores representan probabilidades.
27. Las eficiencias halladas sobre la base del d50 y d50c no varían mucho entre si, obteniéndose: (Tabla 7.21)

	Spigot #01	**Spigot #02**	**Spigot #03**	**Spigot #04**	**Spigot #05**	**Spigot #06**	**Clasificador**
d50	65.56%	68.62%	72.99%	57.60%	51.07%	39.49%	**3.82%**
d50c	65.56%	68.63%	73.00%	58.04%	53.98%	36.60%	**3.77%**

28. La eficiencia, gráficamente, va a depender de dos factores principalmente: La pendiente de la curva y la cantidad de finos a la descarga (Cortocircuito).
29. La interpolación Lineal da un valor tan aproximado como la interpolación por Lagrange, se va a preferir este debido a su simplicidad.
30. Las funciones que representan mejor las curvas de partición son las de Lynch, Log-Normal y Logística en ln(x).
31. El mejor método práctico para hallar el factor d50c (y por ende el d50) es la Interpolación Lineal.
32. Los factores d50c por los métodos de Interpolación (Lineal y Lagrange) y los del Ajuste a la curvas de Lynch, Log-Normal y Logística en ln(x) dan valores muy aproximados, y por ende su similitud en las Curvas de Partición Reducida.
33. El factor d50c hallado por la ecuación de Plitt no es confiable debido a que las curvas de Partición Reducida no coinciden en la coordenada (1.00;50%).

34. El factor de forma "a" de las funciones de las curvas de Partición de Plitt, Lynch, Logística en ln(x) son directamente proporcional a la pendiente de la Curva de Partición.
35. El factor de forma "a" para la distribución Log-Normal es inversamente proporcional a la pendiente de la Curva de Partición.
36. A un mayor valor de E(0,Xn) (Finos a la descarga o Cortocircuito) disminuye la Eficiencia de Finos y aumenta la Eficiencia de Gruesos.
37. A un mayor valor de E(0,Xn) (Finos a la descarga o Cortocircuito) disminuye la Eficiencia de la Cámara.
38. La disminución en la eficiencia a pesar del incremento del parámetro "a" en los Spigots 4, 5 y 6, es debido a que se incrementa el valor E(0,Xn).

PROGRAMACIÓN EN MATLAB

39. Para programar en Matlab se recomienda la comprobación de los resultados con otro programa (se prefiere usar una hoja de cálculo).
40. La programación en Matlab puede simplificar cálculos tediosos y/o difíciles y obtener resultados confiables en segundos.
41. El representar los resultados inmediatamente en formato de página Web (HTML) hace atractiva la utilización de Matlab en el momento de presentar un reporte.
42. Se ve la posibilidad de utilizar Matlab con fines de optimizar y/o simular procesos Metalúrgicos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Iván Quiroz Núñez.
   "Ingeniería Metalúrgica – Operaciones Unitarias en Procesamiento de Minerales."

2. Stanley I. Grossman.
   "Álgebra Lineal"
   Grupo Editorial Iberoamérica S.A.
   Quinta Edición, 1996.

3. Errol G. Kelly, David J. Spottiswood.
   "Introducción al Procesamiento de Minerales"
   Editorial Limusa S. A.
   Primera Edición, 1990

4. Christopher Morris.
   "Diccionario Enciclopédico de Ciencia y Tecnología" Tomo IV
   Prentice Hall Hispanoamericana, S. A.
   Primera Edición, 1996.

5. A. J. Lynch.
   "Circuitos de Trituración y Molienda de Minerales"
   Editorial Rocas y Minerales
   Primera Edición, 1980

6. Hamdy A. Taha
   "Investigación de Operaciones"
   Sexta Edición.

7. Athanasios Papoulis
   "Probability, Random Variables and Stochastic Processes"
   McGraw-Hill
   Third Edition, 1991.

8. Louis Maisel
   "Probabilidad y Estadística"
   Fondo Educativo Interamericano, S.A. 1973

9. B. A. Wills
"Tecnología de Procesamiento de Minerales – Tratamiento de menas y recuperación de minerales."
Editorial Limusa S. A.
Primera Edición en Español, Segunda Reimpresión, 1994

10. The MathWorks, Inc.
"Matlab: Edición de Estudiante." Guía de usuario. Versión 4
Prentice Hall
Primera edición en español, 1996.

11. Cinética de los procesos de la Metalurgia Extractiva
Hong Yong Sohn
Milton E. Wadsworth
Editorial Trillas
Primera Edición, 1986

12. Diseño de Plantas de Proceso de Minerales
Andrew L. Mular
Roshan B. Bhappu
Editorial Rocas y Minerales
Segunda Edición, 1982

13. Estadística
Murray R. Spiegel
McGraw – Hill, 1969
Series de Compendios Schaum

14. "Computaciones Graficas y Mecánicas"
Joseph Lipka
Compañía Editorial Continental S.A.
Primera edición en español - Octava reimpresión 1967.

15. "The Mathematica Book"
Stephen Wolfram
Wolfram Media, Inc.
Tercera edición, 1996.

ANEXOS

APENDICE A:
ANALIZAR.M

PROGRAMA PARA CALCULAR LA EFICIENCIA DEL CLASIFICADOR STOKES EN MATLAB.

Se deberá de introducir los datos como se indica en el Capitulo 9.

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
clear
format bank
load datosag.mat % Carga analisis granulometricos (Porcentajes en Peso).
load datosley.mat % Carga leyes en Porcentaje de Estaño.
load tampart.mat % Carga tamaños minimos y tamaños maximos.

nombres_ES={'Alimento' 'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03' 'Spigot #04' 'Spigot
#05' 'Spigot #06' 'Rebose'};
nombres_ES_err={'Alimento' 'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03' 'Spigot #04'
'Spigot #05' 'Spigot #06' 'Rebose' 'Error'};
nombres_ES_tam={'Tamaño ((10^-3)mm)' 'Alimento' 'Spigot #01' 'Spigot #02'
'Spigot #03' 'Spigot #04' 'Spigot #05' 'Spigot #06' 'Rebose'};
nombres_ES_tam_err={'Tamaño ((10^-3)mm)' 'Alimento' 'Spigot #01' 'Spigot #02'
'Spigot #03' 'Spigot #04' 'Spigot #05' 'Spigot #06' 'Rebose' 'Error'};
nombres_ES_par={'Parametro' 'Alimento' 'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03'
'Spigot #04' 'Spigot #05' 'Spigot #06' 'Rebose'};
nombres_Spigot={'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03' 'Spigot #04' 'Spigot #05'
'Spigot #06'};
nombres_Spigot_tam={'Tamaño {\mu} m)' 'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03'
'Spigot #04' 'Spigot #05' 'Spigot #06'};
nombres_Spigot_par={'Parametro' 'Spigot #01' 'Spigot #02' 'Spigot #03' 'Spigot #04'
'Spigot #05' 'Spigot #06'};
nombres_ED_tam={'Tamaño ((10^-3)mm)' 'ED' 'EDc'};

% Hallar Tamaño Promedio
TamProm=sqrt(TamMax.*TamMin); %Tamaños promedio geometrico
TamProm(length(TamMax),1)=TamMax(length(TamMax))/2; % Promedio
aritmetico (Ultimo termino)

% Definiendo Cell Array de Tamaños
tmax_ca=num2cell(TamMax)
tmin_ca=num2cell(TamMin)
tp_ca=num2cell(TamProm)

% Fracciones en Peso
fA=fA/sum(fA);
```

```
fS1=fS1/sum(fS1);
fS2=fS2/sum(fS2);
fS3=fS3/sum(fS3);
fS4=fS4/sum(fS4);
fS5=fS5/sum(fS5);
fS6=fS6/sum(fS6);
fZ=fZ/sum(fZ);
ag_fp=[fA fS1 fS2 fS3 fS4 fS5 fS6 fZ]*100;

% Fracciones Acumuladas Retenidas
GA=cumsum(fA);
GS1=cumsum(fS1);
GS2=cumsum(fS2);
GS3=cumsum(fS3);
GS4=cumsum(fS4);
GS5=cumsum(fS5);
GS6=cumsum(fS6);
GZ=cumsum(fZ);
ag_G=[GA GS1 GS2 GS3 GS4 GS5 GS6 GZ]*100;

% Fracciones Acumuladas Pasantes
FA=1-cumsum(fA)
FS1=1-cumsum(fS1);
FS2=1-cumsum(fS2);
FS3=1-cumsum(fS3);
FS4=1-cumsum(fS4);
FS5=1-cumsum(fS5);
FS6=1-cumsum(fS6);
FZ=1-cumsum(fZ);
ag_F=[FA FS1 FS2 FS3 FS4 FS5 FS6 FZ]*100;

%------------------------------------------------------------------------------------------
%Correccion de Analisis Granulometricos por Multiplicadores de Lagrange
correccion_ag_ml

%------------------------------------------------------------------------------------------
%Correccion de Analisis Quimico por Multiplicadores de Lagrange
correccion_ley_ml

%------------------------------------------------------------------------------------------
% Analisis Estadistico

TamMin_A=[max(TamMax(FA<1));TamMin(FA<1)];
TamMin_S1=[max(TamMax(FS1<1));TamMin(FS1<1)];
TamMin_S2=[max(TamMax(FS2<1));TamMin(FS2<1)];
TamMin_S3=[max(TamMax(FS3<1));TamMin(FS3<1)];
TamMin_S4=[max(TamMax(FS4<1));TamMin(FS4<1)];
```

```
TamMin_S5=[max(TamMax(FS5<1));TamMin(FS5<1)];
TamMin_S6=[max(TamMax(FS6<1));TamMin(FS6<1)];
TamMin_Z=[max(TamMax(FZ<1));TamMin(FZ<1)];

FA_estad=[1;FA(FA<1)];
FS1_estad=[1;FS1(FS1<1)];
FS2_estad=[1;FS2(FS2<1)];
FS3_estad=[1;FS3(FS3<1)];
FS4_estad=[1;FS4(FS4<1)];
FS5_estad=[1;FS5(FS5<1)];
FS6_estad=[1;FS6(FS6<1)];
FZ_estad=[1;FZ(FZ<1)];

fd_A=ajustar(TamMin_A,FA_estad);
fd_S1=ajustar(TamMin_S1,FS1_estad);
fd_S2=ajustar(TamMin_S2,FS2_estad);
fd_S3=ajustar(TamMin_S3,FS3_estad);
fd_S4=ajustar(TamMin_S4,FS4_estad);
fd_S5=ajustar(TamMin_S5,FS5_estad);
fd_S6=ajustar(TamMin_S6,FS6_estad);
fd_Z=ajustar(TamMin_Z,FZ_estad);

%-------------------------------------------------------------------------------------------
% Hallar las curvas Tromp

g1c=1-b1c;
g2c=g1c-b2c;
g3c=g2c-b3c;
g4c=g3c-b4c;
g5c=g4c-b5c;

fR1c=(fAc-fS1c*b1c)/g1c;
fR2c=(fR1c*g1c-fS2c*b2c)/g2c;
fR3c=(fR2c*g2c-fS3c*b3c)/g3c;
fR4c=(fR3c*g3c-fS4c*b4c)/g4c;
fR5c=(fR4c*g4c-fS5c*b5c)/g5c;

ED1=(fS1c./fAc)*b1c*100;
ED2=(fS2c./fR1c)*(b2c/g1c)*100;
ED3=(fS3c./fR2c)*(b3c/g2c)*100;
ED4=(fS4c./fR3c)*(b4c/g3c)*100;
ED5=(fS5c./fR4c)*(b5c/g4c)*100;
ED6=(fS6c./fR5c)*(b6c/g5c)*100;

% Elimina valores mayores a 100
XED1=TamProm(find(ED1<100));   ED1=ED1(ED1<100);
XED2=TamProm(find(ED2<100));   ED2=ED2(ED2<100);
```

```
XED3=TamProm(find(ED3<100));   ED3=ED3(ED3<100);
XED4=TamProm(find(ED4<100));   ED4=ED4(ED4<100);
XED5=TamProm(find(ED5<100));   ED5=ED5(ED5<100);
XED6=TamProm(find(ED6<100));   ED6=ED6(ED6<100);

% Hallar los valores ED Maximos
[max1,p1]=max(ED1);
[max2,p2]=max(ED2);
[max3,p3]=max(ED3);
[max4,p4]=max(ED4);
[max5,p5]=max(ED5);
[max6,p6]=max(ED6);

% Eliminando valores erroneos
XED1=XED1(p1:length(XED1),1);  ED1=ED1(p1:length(ED1),1);
XED2=XED2(p2:length(XED2),1);  ED2=ED2(p2:length(ED2),1);
XED3=XED3(p3:length(XED3),1);  ED3=ED3(p3:length(ED3),1);
XED4=XED4(p4:length(XED4),1);  ED4=ED4(p4:length(ED4),1);
XED5=XED5(p5:length(XED5),1);  ED5=ED5(p5:length(ED5),1);
XED6=XED6(p6:length(XED6),1);  ED6=ED6(p6:length(ED6),1);

% Hallar ED corregidos
ED1c=(ED1-min(ED1))/(100-min(ED1))*100;
ED2c=(ED2-min(ED2))/(100-min(ED2))*100;
ED3c=(ED3-min(ED3))/(100-min(ED3))*100;
ED4c=(ED4-min(ED4))/(100-min(ED4))*100;
ED5c=(ED5-min(ED5))/(100-min(ED5))*100;
ED6c=(ED6-min(ED6))/(100-min(ED6))*100;

% Curvas Tromp
ct_S1=[XED1 ED1 ED1c];
ct_S2=[XED2 ED2 ED2c];
ct_S3=[XED3 ED3 ED3c];
ct_S4=[XED4 ED4 ED4c];
ct_S5=[XED5 ED5 ED5c];
ct_S6=[XED6 ED6 ED6c];

% Definiendo Cell Array de Curvas Tromp
ct_S1_ca=num2cell(ct_S1);
ct_S2_ca=num2cell(ct_S2);
ct_S3_ca=num2cell(ct_S3);
ct_S4_ca=num2cell(ct_S4);
ct_S5_ca=num2cell(ct_S5);
ct_S6_ca=num2cell(ct_S6);

ct_S1_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S1_ca)
ct_S2_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S2_ca)
```

```
ct_S3_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S3_ca)
ct_S4_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S4_ca)
ct_S5_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S5_ca)
ct_S6_ca=cat(1,nombres_ED_tam,ct_S6_ca)

% Parametros de ajuste a curvas de Particion
cp_S1=ajustar_CP(XED1,ED1c/100)
cp_S2=ajustar_CP(XED2,ED2c/100)
cp_S3=ajustar_CP(XED3,ED3c/100)
cp_S4=ajustar_CP(XED4,ED4c/100)
cp_S5=ajustar_CP(XED5,ED5c/100)
cp_S6=ajustar_CP(XED6,ED6c/100)

%---------------------------------------------------------------------------------------------
% Calculo de d50

d50sc1=interp1(ED1,XED1,50);
d50sc2=interp1(ED2,XED2,50);
d50sc3=interp1(ED3,XED3,50);
d50sc4=interp1(ED4,XED4,50);
d50sc5=interp1(ED5,XED5,50);
d50sc6=interp1(ED6,XED6,50);
% Interpolacion lineal - ED sin corregir
d50=[d50sc1 d50sc2 d50sc3 d50sc4 d50sc5 d50sc6];

% Definiendo Cell Array de d50 sin corregir - Interpolacion Lineal
d50_ca=num2cell(d50);
d50_ca=cat(1,nombres_Spigot,d50_ca)

%---------------------------------------------------------------------------------------------
% Calculo de d50c


d50c1=interp1(ED1c,XED1,50);
d50c2=interp1(ED2c,XED2,50);
d50c3=interp1(ED3c,XED3,50);
d50c4=interp1(ED4c,XED4,50);
d50c5=interp1(ED5c,XED5,50);
d50c6=interp1(ED6c,XED6,50);
% Interpolacion lineal - ED corregidas
d50corr=[d50c1 d50c2 d50c3 d50c4 d50c5 d50c6];

% Definiendo Cell Array de d50 corregido - Interpolacion Lineal
d50corr_ca=num2cell(d50corr);
d50corr_ca=cat(1,nombres_Spigot,d50corr_ca)

%---------------------------------------------------------------------------------------------
```

```
% Distribucion de Estaño por Productos

Dist_A=100*(fAc.*LfAc)/sum(fAc.*LfAc);
Dist_S1=100*(fS1c.*LfS1c)/sum(fS1c.*LfS1c);
Dist_S2=100*(fS2c.*LfS2c)/sum(fS2c.*LfS2c);
Dist_S3=100*(fS3c.*LfS3c)/sum(fS3c.*LfS3c);
Dist_S4=100*(fS4c.*LfS4c)/sum(fS4c.*LfS4c);
Dist_S5=100*(fS5c.*LfS5c)/sum(fS5c.*LfS5c);
Dist_S6=100*(fS6c.*LfS6c)/sum(fS6c.*LfS6c);
Dist_Z=100*(fZc.*LfZc)/sum(fZc.*LfZc);

% Distribucion del Sn respecto al Sn de Entradas y/o Salidas
distES=[Dist_A Dist_S1 Dist_S2 Dist_S3 Dist_S4 Dist_S5 Dist_S6 Dist_Z];
[sum(Dist_A) sum(Dist_S1) sum(Dist_S2) sum(Dist_S3) sum(Dist_S4)
sum(Dist_S5) sum(Dist_S6) sum(Dist_Z)];

% Definiendo Cell Array de Distribucion de Estaño por Productos
  distES_ca-num2cell(distES);
  distES_ca=cat(2,tp_ca,distES_ca);
distES_ca=cat(1,nombres_ES_tam,distES_ca)

%---------------------------------------------------------------------------------
% Distribucion del Estaño ingresante al sistema en productos

SnTotal=sum(fAc.*LfAc);
Dist_At=100*(fAc.*LfAc)/SnTotal;
Dist_S1t=100*(fS1c.*LfS1c*b1c)/SnTotal;
Dist S2t=100*(fS2c.*LfS2c*b2c)/SnTotal;
Dist_S3t=100*(fS3c.*LfS3c*b3c)/SnTotal;
Dist_S4t=100*(fS4c.*LfS4c*b4c)/SnTotal;
Dist S5t=100*(fS5c.*LfS5c*b5c)/SnTotal;
Dist S6t=100*(fS6c.*LfS6c*b6c)/SnTotal;
Dist_Zt=100*(fZc.*LfZc*bZc)/SnTotal;

% Distribucion del Sn respecto al Sn Total ingresante
distSn=[Dist_At Dist_S1t Dist_S2t Dist_S3t Dist_S4t Dist_S5t Dist_S6t Dist_Zt];

% Definiendo Cell Array de Distribucion del Sn respecto al Sn Total ingresante
  distSn ca=num2cell(distSn);
  distSn_ca=cat(2,tp_ca,distSn_ca);
  distSn_ca=cat(1,nombres_ES_tam,distSn_ca);

% Distribucion del Sn respecto a los Productos
  distSnProd=[sum(Dist_At) sum(Dist_S1t) sum(Dist_S2t) sum(Dist_S3t)
sum(Dist_S4t) sum(Dist_S5t) sum(Dist_S6t) sum(Dist_Zt)];
  distSnProd_ca=num2cell(distSnProd);
  distSnProd_ca=cat(2,{'Total (%)'},distSnProd_ca);
```

```
distSn_ca=cat(1,distSn_ca,distSnProd_ca)



%-----------------------------------------------------------------------------------------
% Calculo de la Eficiencia

% Porcentajes Acumulados Retenidos
FR1c=1-cumsum(fR1c);
FR2c=1-cumsum(fR2c);
FR3c=1-cumsum(fR3c);
FR4c=1-cumsum(fR4c);
FR5c=1-cumsum(fR5c);
% Spigot 01
FAl_1=interp1(TamMin,FAc,d50c1);% Alimento
FDes_1=interp1(TamMin,FS1c,d50c1);% Descarga
FReb_1=interp1(TamMin,FR1c,d50c1);% Rebose
Ef_Finos1=(FReb_1/FAl_1)*g1c;
Ef_Gruesos1=(1-FDes_1)/(1-FAl_1)*b1c;
Ef_Spigot1=Ef_Finos1*Ef_Gruesos1;
% Spigot 02
FAl_2=interp1(TamMin,FR1c,d50c2);% Alimento
FDes_2=interp1(TamMin,FS2c,d50c2);% Descarga
FReb_2=interp1(TamMin,FR2c,d50c2);% Rebose
Ef_Finos2=(FReb_2/FAl_2)*(g2c/g1c);
Ef_Gruesos2=(1-FDes_2)/(1-FAl_2)*(b2c/g1c);
Ef_Spigot2=Ef_Finos2*Ef_Gruesos2;
% Spigot 03
FAl_3=interp1(TamMin,FR2c,d50c3);% Alimento
FDes_3=interp1(TamMin,FS3c,d50c3);% Descarga
FReb_3=interp1(TamMin,FR3c,d50c3);% Rebose
Ef_Finos3=(FReb_3/FAl_3)*(g3c/g2c);
Ef_Gruesos3=(1-FDes_3)/(1-FAl_3)*(b3c/g2c);
Ef_Spigot3=Ef_Finos3*Ef_Gruesos3;
% Spigot 04
FAl_4=interp1(TamMin,FR3c,d50c4);% Alimento
FDes_4=interp1(TamMin,FS4c,d50c4);% Descarga
FReb_4=interp1(TamMin,FR4c,d50c4);% Rebose
Ef_Finos4=(FReb_4/FAl_4)*(g4c/g3c);
Ef_Gruesos4=(1-FDes_4)/(1-FAl_4)*(b4c/g3c);
Ef_Spigot4=Ef_Finos4*Ef_Gruesos4;
% Spigot 05
FAl_5=interp1(TamMin,FR4c,d50c5);% Alimento
FDes_5=interp1(TamMin,FS5c,d50c5);% Descarga
FReb_5=interp1(TamMin,FR5c,d50c5);% Rebose
```

```
Ef_Finos5=(FReb_5/FAl_5)*(g5c/g4c);
Ef_Gruesos5=(1-FDes_5)/(1-FAl_5)*(b5c/g4c);
Ef_Spigot5=Ef_Finos5*Ef_Gruesos5;
% Spigot 06
FAl_6=interp1(TamMin,FR5c,d50c6);% Alimento
FDes_6=interp1(TamMin,FS6c,d50c6);% Descarga
FReb_6=interp1(TamMin,FZc,d50c6);% Rebose
Ef_Finos6=(FReb_6/FAl_6)*(bZc/g5c);
Ef_Gruesos6=(1-FDes_6)/(1-FAl_6)*(b6c/g5c);
Ef_Spigot6=Ef_Finos6*Ef_Gruesos6;
Ef_Finos=[Ef_Finos1 Ef_Finos2 Ef_Finos3 Ef_Finos4 Ef_Finos5 Ef_Finos6]*100;
Ef_Gruesos=[Ef_Gruesos1 Ef_Gruesos2 Ef_Gruesos3 Ef_Gruesos4 Ef_Gruesos5
Ef_Gruesos6]*100;
Ef_Spigot=[Ef_Spigot1 Ef_Spigot2 Ef_Spigot3 Ef_Spigot4 Ef_Spigot5
Ef_Spigot6]*100;

leg_Ef={'Ef. Finos (%)';'Ef. Gruesos (%)';'Ef. Spigot (%)'};
Ef_Spigot=[Ef_Finos;Ef_Gruesos;Ef_Spigot];

% Definiendo Cell Array de Eficiencia por Spigot
   Ef_Spigot_ca=num2cell(Ef_Spigot);
   Ef_Spigot_ca=cat(2,leg_Ef,Ef_Spigot_ca);
Ef_Spigot_ca=cat(1,nombres_Spigot_par,Ef_Spigot_ca)

% Eficiencia del Clasificador Stokes
Ef_Stokes=Ef_Spigot1*Ef_Spigot2*Ef_Spigot3*Ef_Spigot4*Ef_Spigot5*Ef_Spigot
6*100;

% Definiendo Cell Array de Eficiencia del Clasificador Stokes
   Ef_Stokes_ca=num2cell(Ef_Stokes);
Ef_Stokes_ca=cat(1,{'Eficiencia del Clasificador Stokes (%)'},Ef_Stokes_ca)

%------------------------------------------------------------------------------------------
close all


%graph01

figure
% Porcentajes en Peso
subplot(2,1,1),plot(TamProm,ag_fp)
xlabel('Tamaño promedio de particulas (micrones)')
ylabel('%')
title('Porcentaje en Peso (f(x))')
axis([0 max(TamProm) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
```

```
legend('Alimento','Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot
6','Rebose',-1);
% Porcentajes Acumulados Pasante
subplot(2,1,2),plot(TamMin,ag_F)
xlabel('Tamaño de particulas (micrones)')
ylabel('%')
title('Porcentaje Acumulado Pasante (F(x))')
axis([0 max(TamMin) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Alimento','Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot
6','Rebose',-1);

%-----------------------------------------------------------------------------------------
%graph02

figure
% Curvas Tromp
subplot(2,1,1),plot(XED1,ED1,XED2,ED2,XED3,ED3,XED4,ED4,XED5,ED5,XED
6,ED6)
xlabel('Tamaño promedio de particulas (micrones)')
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp sin Corregir (ED(x))')
axis([0 max(TamProm) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);
% Curvas Tromp Corregidas
subplot(2,1,2),plot(XED1,ED1c,XED2,ED2c,XED3,ED3c,XED4,ED4c,XED5,ED5c
,XED6,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio de particulas (micrones)')
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp Corregidas (EDc(x))')
axis([0 max(TamProm) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

figure
% Curvas Tromp Reducidas Interpolacion
Xred1=XED1/d50c1;
Xred2=XED2/d50c2;
Xred3=XED3/d50c3;
Xred4=XED4/d50c4;
Xred5=XED5/d50c5;
Xred6=XED6/d50c6;
subplot(3,2,1),plot(Xred1,ED1c,Xred2,ED2c,Xred3,ED3c,Xred4,ED4c,Xred5,ED5c,
Xred6,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)')
ylabel('% Eficiencia')
```

```
title('Curvas Tromp Reducida - Interpolacion (EDred(x))')
axis([0 max(Xred1) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

% Curvas Tromp Reducidas Plitt
Xred1_Plt=XED1/cell2mat(cp_S1(4,2));
Xred2_Plt=XED2/cell2mat(cp_S2(4,2));
Xred3_Plt=XED3/cell2mat(cp_S3(4,2));
Xred4_Plt=XED4/cell2mat(cp_S4(4,2));
Xred5_Plt=XED5/cell2mat(cp_S5(4,2));
Xred6_Plt=XED6/cell2mat(cp_S6(4,2));
subplot(3,2,3),plot(Xred1_Plt,ED1c,Xred2_Plt,ED2c,Xred3_Plt,ED3c,Xred4_Plt,ED
4c,Xred5_Plt,ED5c,Xred6_Plt,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)')
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp Reducida - Plitt (EDred(x))')
axis([0 max(Xred1) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

% Curvas Tromp Reducidas Lynch
Xred1_Ly=XED1/cell2mat(cp_S1(4,3));
Xred2_Ly=XED2/cell2mat(cp_S2(4,3));
Xred3_Ly=XED3/cell2mat(cp_S3(4,3));
Xred4_Ly=XED4/cell2mat(cp_S4(4,3));
Xred5_Ly=XED5/cell2mat(cp_S5(4,3));
Xred6_Ly=XED6/cell2mat(cp_S6(4,3));
subplot(3,2,4),plot(Xred1_Ly,ED1c,Xred2_Ly,ED2c,Xred3_Ly,ED3c,Xred4_Ly,ED
4c,Xred5_Ly,ED5c,Xred6_Ly,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)')
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp Reducida - Lynch (EDred(x))')
axis([0 max(Xred1) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

% Curvas Tromp Reducidas LogNormal
Xred1_LN=XED1/cell2mat(cp_S1(4,4));
Xred2_LN=XED2/cell2mat(cp_S2(4,4));
Xred3_LN=XED3/cell2mat(cp_S3(4,4));
Xred4_LN=XED4/cell2mat(cp_S4(4,4));
Xred5_LN=XED5/cell2mat(cp_S5(4,4));
Xred6_LN=XED6/cell2mat(cp_S6(4,4));
subplot(3,2,5),plot(Xred1_LN,ED1c,Xred2_LN,ED2c,Xred3_LN,ED3c,Xred4_LN,
ED4c,Xred5_LN,ED5c,Xred6_LN,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)')
```

```
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp Reducida - LogNormal (EDred(x))')
axis([0 max(Xred1) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

% Curvas Tromp Reducidas Logistica en ln(x)
Xred1_Log=XED1/cell2mat(cp_S1(4,5));
Xred2_Log=XED2/cell2mat(cp_S2(4,5));
Xred3_Log=XED3/cell2mat(cp_S3(4,5));
Xred4_Log=XED4/cell2mat(cp_S4(4,5));
Xred5_Log=XED5/cell2mat(cp_S5(4,5));
Xred6_Log=XED6/cell2mat(cp_S6(4,5));
subplot(3,2,6),plot(Xred1_Log,ED1c,Xred2_Log,ED2c,Xred3_Log,ED3c,Xred4_Lo
g,ED4c,Xred5_Log,ED5c,Xred6_Log,ED6c)
xlabel('Tamaño promedio reducido (Tamaño Promedio / d50c)')
ylabel('% Eficiencia')
title('Curvas Tromp Reducida - Logistica en ln(x) (EDred(x))')
axis([0 max(Xred1) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Spigot 1','Spigot 2','Spigot 3','Spigot 4','Spigot 5','Spigot 6',-1);

%---------------------------------------------------------------------------------------
%graph03

prod=[1 2 3 4 5 6 7];
Zp=100*[fS1c fS2c fS3c fS4c fS5c fS6c fZc];
ZSn=[Dist_S1t Dist_S2t Dist_S3t Dist_S4t Dist_S5t Dist_S6t Dist_Zt];

figure
% Porcentaje en Peso
subplot(2,2,1),surf(prod,TamProm,Zp)
xlabel('Spigot')
ylabel('Tamaño promedio (micrones)')
zlabel('% en Peso')
title('Distribucion de Particulas por Mallas')
set(gca,'XScale','linear','YScale','linear','ZScale','linear');
axis([1 7 10 max(TamProm) 0 max(max(Zp))])
view(45,60)
% Porcentaje en Peso Vista de Planta
subplot(2,2,2),surf(prod,TamProm,Zp)
xlabel('Spigot')
ylabel('Tamaño promedio (micrones)')
zlabel('% en Peso')
title('Distribucion de Particulas por Mallas')
set(gca,'XScale','linear','YScale','linear','ZScale','linear');
axis([1 7 10 max(TamProm) 0 max(max(Zp))])
```

```
view(90,90)
% Distribucion de Estaño
subplot(2,2,3),surf(prod,TamProm,ZSn)
xlabel('Spigot')
ylabel('Tamaño promedio (micrones)')
zlabel('% de Estaño')
title('Distribucion de Estaño por Mallas')
set(gca,'XScale','linear','YScale','linear','ZScale','linear');
axis([1 7 10 max(TamProm) 0 max(max(ZSn))])
view(45,60)
% Distribucion de Estaño Vista de Planta
subplot(2,2,4),surf(prod,TamProm,ZSn)
xlabel('Spigot')
ylabel('Tamaño promedio (micrones)')
zlabel('% de Distribucion')
title('Distribucion de Estaño por Mallas')
set(gca,'XScale','linear','YScale','linear','ZScale','linear');
axis([1 7 10 max(TamProm) 0 max(max(ZSn))])
view(90,90)

%-----------------------------------------------------------------------------------------
%graph04

figure
Spigot=[1 2 3 4 5 6];
ccED1=ED1(length(ED1),1);
ccED2=ED2(length(ED2),1);
ccED3=ED3(length(ED3),1);
ccED4=ED4(length(ED4),1);
ccED5=ED5(length(ED5),1);
ccED6=ED6(length(ED6),1);
ccED=[ccED1 ccED2 ccED3 ccED4 ccED5 ccED6];
plot(Spigot,Ef_Finos,Spigot,Ef_Gruesos,Spigot,Ef_Spigot,Spigot,ccED)
xlabel('Spigot')
ylabel('% Eficiencia')
title('Eficiencia del Clasificador Stokes')
axis([min(Spigot) max(Spigot) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Ef. Finos','Ef. Gruesos','Ef. Spigot','% a Cortocircuito',-1);
```

APENDICE B:
CORRECION AG ML.M

PROGRAMA PARA CORREGIR LOS ANALISIS GRANULOMETRICOS DEL CLASIFICADOR STOKES EN MATLAB.

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
%Correccion de Analisis Granulometricos por Multiplicadores de Lagrange

% Se utilizaran los datos de Porcentaje en Peso (No Fracciones)
AZ=fA-fZ;
S1Z=fS1-fZ;
S2Z=fS2-fZ;
S3Z=fS3-fZ;
S4Z=fS4-fZ;
S5Z=fS5-fZ;
S6Z=fS6-fZ;

% Hallar los terminos de la Ecuacion Lineal
B=[sum(S1Z.*AZ)
  sum(S2Z.*AZ)
  sum(S3Z.*AZ)
  sum(S4Z.*AZ)
  sum(S5Z.*AZ)
  sum(S6Z.*AZ)];
A=[sum(S1Z.*S1Z) sum(S2Z.*S1Z) sum(S3Z.*S1Z) sum(S4Z.*S1Z)
sum(S5Z.*S1Z) sum(S6Z.*S1Z)
  sum(S1Z.*S2Z) sum(S2Z.*S2Z) sum(S3Z.*S2Z) sum(S4Z.*S2Z) sum(S5Z.*S2Z)
sum(S6Z.*S2Z)
  sum(S1Z.*S3Z) sum(S2Z.*S3Z) sum(S3Z.*S3Z) sum(S4Z.*S3Z) sum(S5Z.*S3Z)
sum(S6Z.*S3Z)
  sum(S1Z.*S4Z) sum(S2Z.*S4Z) sum(S3Z.*S4Z) sum(S4Z.*S4Z) sum(S5Z.*S4Z)
sum(S6Z.*S4Z)
  sum(S1Z.*S5Z) sum(S2Z.*S5Z) sum(S3Z.*S5Z) sum(S4Z.*S5Z) sum(S5Z.*S5Z)
sum(S6Z.*S5Z)
  sum(S1Z.*S6Z) sum(S2Z.*S6Z) sum(S3Z.*S6Z) sum(S4Z.*S6Z) sum(S5Z.*S6Z)
sum(S6Z.*S6Z)];

% Hallar los Caudales Unitarios
X=[A\B;1-sum(A\B)];
b1c=X(1,1);
b2c=X(2,1);
b3c=X(3,1);
b4c=X(4,1);
b5c=X(5,1);
```

```
b6c=X(6,1);
bZc=X(7,1);

% Hallar los Errores por las mallas
ErrorMalla=fA-(fS1*b1c+fS2*b2c+fS3*b3c+fS4*b4c+fS5*b5c+fS6*b6c+fZ*bZc);

% Hallar los Multiplicadores de Lagrange (Lambda)
Lambda=-2/(1+sum(X.^2))*ErrorMalla;

% Hallar las Correcciones
DfA=-1/2*Lambda;
DfS1=b1c/2*Lambda;
DfS2=b2c/2*Lambda;
DfS3=b3c/2*Lambda;
DfS4=b4c/2*Lambda;
DfS5=b5c/2*Lambda;
DfS6=b6c/2*Lambda;
DfZ=bZc/2*Lambda;

% Corregir los Analisis Granulometricos
fAc=fA-DfA;
fS1c=fS1-DfS1;
fS2c=fS2-DfS2;
fS3c=fS3-DfS3;
fS4c=fS4-DfS4;
fS5c=fS5-DfS5;
fS6c=fS6-DfS6;
fZc=fZ-DfZ;

% Hallar los Errores por las mallas
ErrorMallaCorr=fAc-
(fS1c*b1c+fS2c*b2c+fS3c*b3c+fS4c*b4c+fS5c*b5c+fS6c*b6c+fZc*bZc);

% Analisis Granulometricos Corregidos
agc_fp=[fAc fS1c fS2c fS3c fS4c fS5c fS6c fZc]*100;


% Fracciones Acumulados Retenidos
GAc=cumsum(fAc);
GS1c=cumsum(fS1c);
GS2c=cumsum(fS2c);
GS3c=cumsum(fS3c);
GS4c=cumsum(fS4c);
GS5c=cumsum(fS5c);
GS6c=cumsum(fS6c);
GZc=cumsum(fZc);
agc_G=[GAc GS1c GS2c GS3c GS4c GS5c GS6c GZc]*100;
```

```
% Fracciones Acumulados Pasantes
FAc=1-cumsum(fAc);
FS1c=1-cumsum(fS1c);
FS2c=1-cumsum(fS2c);
FS3c=1-cumsum(fS3c);
FS4c=1-cumsum(fS4c);
FS5c=1-cumsum(fS5c);
FS6c=1-cumsum(fS6c);
FZc=1-cumsum(fZc);
agc_F=[FAc FS1c FS2c FS3c FS4c FS5c FS6c FZc]*100;


% Hallar el Error de la Correccion
S=sum(DfA.^2)+sum(DfS1.^2)+sum(DfS2.^2)+sum(DfS3.^2)+sum(DfS4.^2)+sum(
DfS5.^2)+sum(DfS6.^2)+sum(DfZ.^2);

%------------------------------------------------------------------
% Definiendo Cell Array de Fracciones en Peso
   ag_fp_ca=num2cell([ag_fp ErrorMalla]);
   ag_fp_ca=cat(2,tp_ca,ag_fp_ca);
ag_fp_ca=cat(1,nombres_ES_tam_err,ag_fp_ca)


% Definiendo Cell Array de Fracciones en Peso Corregidas
   agc_fp_ca=num2cell([agc_fp ErrorMallaCorr]);
   agc_fp_ca=cat(2,tp_ca,agc_fp_ca);
agc_fp_ca=cat(1,nombres_ES_tam_err,agc_fp_ca)

% Definiendo Cell Array de Fracciones Acumuladas Retenidas
   ag_G_ca=num2cell(ag_G);
   ag_G_ca=cat(2,tmin_ca,ag_G_ca);
ag_G_ca=cat(1,nombres_ES_tam,ag_G_ca)


% Definiendo Cell Array de Fracciones Acumuladas Retenidas
   agc_G_ca=num2cell(agc_G);
   agc_G_ca=cat(2,tmin_ca,agc_G_ca);
agc_G_ca=cat(1,nombres_ES_tam,agc_G_ca)

% Definiendo Cell Array de Fracciones Acumuladas Pasantes
   ag_F_ca=num2cell(ag_F);
   ag_F_ca=cat(2,tmin_ca,ag_F_ca);
ag_F_ca=cat(1,nombres_ES_tam,ag_F_ca)
```

```
% Definiendo Cell Array de Fracciones Acumuladas Pasantes
   agc_F_ca=num2cell(agc_F);
   agc_F_ca=cat(2,tmin_ca,agc_F_ca);
agc_F_ca=cat(1,nombre _ES_tam,agc_F_ca)
```

APENDICE C:
CORRECION LEY ML.M

PROGRAMA PARA CORREGIR LOS ANALISIS QUIMICOS DEL CLASIFICADOR STOKES EN MATLAB.

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
%Correccion de Analisis Quimico por Multiplicadores de Lagrange

% Hallar los Errores
DMqA=LA-sum(LfA.*fAc); % Debe de ser FRACCIONES, no porcentajes.
DMqS1=LS1-sum(LfS1.*fS1c);
DMqS2=LS2-sum(LfS2.*fS2c);
DMqS3=LS3-sum(LfS3.*fS3c);
DMqS4=LS4-sum(LfS4.*fS4c);
DMqS5=LS5-sum(LfS5.*fS5c);
DMqS6=LS6-sum(LfS6.*fS6c);
DMqZ=LZ-sum(LfZ.*fZc);

DMq=LfA.*fAc-
(LfS1.*fS1c*b1c+LfS2.*fS2c*b2c+LfS3.*fS3c*b3c+LfS4.*fS4c*b4c+LfS5.*fS5c*
b5c+LfS6.*fS6c*b6c+LfZ.*fZc*bZc);

% Hallar las matrices:

DMqES=[DMqA
    DMqS1
    DMqS2
    DMqS3
    DMqS4
    DMqS5
    DMqS6
    DMqZ];

 Qu=[1
   -b1c
   -b2c
   -b3c
   -b4c
   -b5c
   -b6c
   -bZc];

 F2=[fAc.^2 fS1c.^2 fS2c.^2 fS3c.^2 fS4c.^2 fS5c.^2 fS6c.^2 fZc.^2];

 SF2=[sum(fAc.^2)
```

```
    sum(fS1c.^2)
    sum(fS2c.^2)
    sum(fS3c.^2)
    sum(fS4c.^2)
    sum(fS5c.^2)
    sum(fS6c.^2)
    sum(fZc.^2)];

H=F2*inv(diag(SF2)+eye(8));

phi_0=F2*diag(Qu)*Qu;

% Calculo de los multiplicadores de Lagrange

Lambda_q=2*inv(H*(diag(Qu))^2*F2'-diag(phi_0))*(DMq+H*diag(Qu)*DMqES);

Lambda_ES=inv(diag(SF2)+eye(8))*(diag(Qu)*F2'*Lambda_q-2*DMqES);

% Hallar las correcciones

DLfA=1/2*fAc.*(-Lambda_q+Lambda_ES(1,1));
DLfS1=1/2*fS1c.*(+Lambda_q*b1c+Lambda_ES(2,1));
DLfS2=1/2*fS2c.*(+Lambda_q*b2c+Lambda_ES(3,1));
DLfS3=1/2*fS3c.*(+Lambda_q*b3c+Lambda_ES(4,1));
DLfS4=1/2*fS4c.*(+Lambda_q*b4c+Lambda_ES(5,1));
DLfS5=1/2*fS5c.*(+Lambda_q*b5c+Lambda_ES(6,1));
DLfS6=1/2*fS6c.*(+Lambda_q*b6c+Lambda_ES(7,1));
DLfZ=1/2*fZc.*(+Lambda_q*bZc+Lambda_ES(8,1));

DLA=-1/2*Lambda_ES(1,1);
DLS1=-1/2*Lambda_ES(2,1);
DLS2=-1/2*Lambda_ES(3,1);
DLS3=-1/2*Lambda_ES(4,1);
DLS4=-1/2*Lambda_ES(5,1);
DLS5=-1/2*Lambda_ES(6,1);
DLS6=-1/2*Lambda_ES(7,1);
DLZ=-1/2*Lambda_ES(8,1);

% Correccion de Leyes de Flujos
LAc=LA-DLA;
LS1c=LS1-DLS1;
LS2c=LS2-DLS2;
LS3c=LS3-DLS3;
LS4c=LS4-DLS4;
LS5c=LS5-DLS5;
LS6c=LS6-DLS6;
LZc=LZ-DLZ;
```

```
% Correccion de Leyes de Mallas
LfAc=LfA-DLfA;
LfS1c=LfS1-DLfS1;
LfS2c=LfS2-DLfS2;
LfS3c=LfS3-DLfS3;
LfS4c=LfS4-DLfS4;
LfS5c=LfS5-DLfS5;
LfS6c=LfS6-DLfS6;
LfZc=LfZ-DLfZ;

% Errores Generales y flujos corregidos
DMq1c=LAc-
(LS1c*b1c+LS2c*b2c+LS3c*b3c+LS4c*b4c+LS5c*b5c+LS6c*b6c+LZc*bZc);
DMqAc=LAc-sum(LfAc.*fAc);
DMqS1c=LS1c-sum(LfS1c.*fS1c);
DMqS2c=LS2c-sum(LfS2c.*fS2c);
DMqS3c=LS3c-sum(LfS3c.*fS3c);
DMqS4c=LS4c-sum(LfS4c.*fS4c);
DMqS5c=LS5c-sum(LfS5c.*fS5c);
DMqS6c=LS6c-sum(LfS6c.*fS6c);
DMqZc=LZc-sum(LfZc.*fZc);

% Errores de mallas corregidos
DMq2c=LfAc.*fAc-
(LfS1c.*fS1c*b1c+LfS2c.*fS2c*b2c+LfS3c.*fS3c*b3c+LfS4c.*fS4c*b4c+LfS5c.*f
S5c*b5c+LfS6c.*fS6c*b6c+LfZc.*fZc*bZc);

% Analisis Quimicos (puede ser %, gr/t, etc...)

%Por Entradas y Salidas
aq_ES=[LA LS1 LS2 LS3 LS4 LS5 LS6 LZ];

% Leyes de Flujo Corregidas
aqc_ES=[LAc LS1c LS2c LS3c LS4c LS5c LS6c LZc];


%Por Mallas
aq_fp=[LfA LfS1 LfS2 LfS3 LfS4 LfS5 LfS6 LfZ];

% Leyes de Mallas Corregidas
aqc_fp=[LfAc LfS1c LfS2c LfS3c LfS4c LfS5c LfS6c LfZc];

%-----------------------------------------------------------------
% Definiendo Cell Array de Analisis Quimicos por Mallas
   aq_fp_ca=num2cell([aq_fp DMq]);
   aq_fp_ca=cat(2,tp_ca,aq_fp_ca);
```

```
      err_vert=num2cell([DMqA DMqS1 DMqS2 DMqS3 DMqS4 DMqS5 DMqS6
DMqZ [0]]);
      err_vert=cat(2,{'Error por E-S'},err_vert);
   aq_fp_ca=cat(1,nombres_ES_tam_err,aq_fp_ca);
aq_fp_ca=cat(1,aq_fp_ca,err_vert)

% Definiendo Cell Array de Analisis Quimicos Corregidos por Mallas
   aqc_fp_ca=num2cell([aqc_fp DMq2c]);
   aqc_fp_ca=cat(2,tp_ca,aqc_fp_ca);
      err_vert_corr=num2cell([DMqAc DMqS1c DMqS2c DMqS3c DMqS4c
DMqS5c DMqS6c DMqZc [0]]);
      err_vert_corr=cat(2,{'Error por E-S'},err_vert_corr);
   aqc_fp_ca=cat(1,nombres_ES_tam_err,aqc_fp_ca);
aqc_fp_ca=cat(1,aqc_fp_ca,err_vert_corr)

% Definiendo Cell Array de Analisis Quimicos por Entradas y Salidas
   aq_ES_ca=num2cell([aq_ES DMq1c]);
aq_ES_ca=cat(1,nombres_ES_err,aq_ES_ca)

% Definiendo Cell Array de Analisis Quimicos Corregidos por Entradas y Salidas
   aqc_ES_ca=num2cell([aqc_ES DMq1c]);
aqc_ES_ca=cat(1,nombres_ES_err,aqc_ES_ca)
```

APENDICE D:
AJUSTAR.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION PRESENTADAS EN EL CAPÍTULO 6.

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
%Ingresar Tamaños Minimos y FRACCIONES Acumuladas Pasantes
 % Fracciones Acumuladas pasantes: Introducir tambien las coordenadas (0,0)
 % y (Xmax,1) Donde el TODO el material es menor al tamaño Xmax.

function fajuste=Ajustar(tmin,F)
tinicial=cputime;

% Ordena en orden DESCENDENTE
mat=[tmin,F];
mat=-sortrows(-mat,1);

tmin=mat(:,1);
F=mat(:,2);

G=1-F;
f=diff(G);
f=f/sum(f);

%TamMin
TamMin=tmin(2:length(tmin));

%TamMax
TamMax=tmin(1:length(tmin)-1);

% Tamaño Promedio
TP=tamprom(tmin,F);

save datos_Tam_f.mat TP f TamMax TamMin

% Calculo de los Parametros estadisticos.
r2_Estad=NaN;
min_cuad_Estad=NaN;
alpha_Estad=NaN;
beta_Estad=NaN;
Xo_Estad=NaN;
TamMed_Estad=sum(TP.*f);
Varianza_Estad=sum(((TP-TamMed_Estad).^2).*f);
```

```
DesvStd_Estad=sqrt(Varianza_Estad);
CoefVar_Estad=DesvStd_Estad./TamMed_Estad;

estad=[r2_Estad
min_cuad_Estad
alpha_Estad
beta_Estad
Xo_Estad
TamMed_Estad
Varianza_Estad
DesvStd_Estad
CoefVar_Estad];

save p_estad.mat estad

leyenda={'r^2';'min cuad';'alpha';'beta';'Xo';'Tamaño Medio';'Varianza';'Desv.
Std.';'CV'};

nombre_fun={'Parametro','Estadistica','GGS','GM','RR','Normal','Normal
mod','LogNormal','Gamma','BC','Harris 3p','Beta'};

%---------------------------------------------------
fajuste=[estad ggs(tmin,F) gm(tmin,F) rr(tmin,F) normal(tmin,F)
normal_mod(tmin,F) lognormal(tmin,F) gamma_f(tmin,F) bc(tmin,F)
harris3p(tmin,F) beta_f(tmin,F)];

F_GGS=(tmin/fajuste(5,2)).^fajuste(3,2);
F_GM=1-(1-tmin/fajuste(5,3)).^fajuste(3,3);
F_RR=1-exp(-(tmin/fajuste(5,4)).^fajuste(3,4));
F_Normal=normcdf(tmin,fajuste(5,5),fajuste(3,5));

   K=normcdf(0,fajuste(5,6),fajuste(3,6));
F_Normal_mod=(normcdf(tmin,fajuste(5,6),fajuste(3,6))-K)/(1-K);

F_LogNormal=logncdf(tmin,log(fajuste(5,7)),fajuste(3,7));
F_Gamma=gammainc(tmin/fajuste(5,8),fajuste(3,8));
F_BC=(1-exp(-(tmin/fajuste(5,9)).^fajuste(3,9)))/(1-exp(-1));
F_Harris=1-(1-(tmin/fajuste(5,10)).^fajuste(4,10)).^fajuste(3,10);
F_Beta=betainc(tmin/fajuste(5,11),fajuste(3,11),fajuste(4,11));

nombre_F={'Tamaño','Datos','GGS','GM','RR','Normal','Normal
mod','LogNormal','Gamma','BC','Harris 3p','Beta'};
F_obt=[tmin F*100 F_GGS*100 F_GM*100 F_RR*100 F_Normal*100
F_Normal_mod*100 F_LogNormal*100 F_Gamma*100 F_BC*100 F_Harris*100
F_Beta*100];

f_resul=num2cell(F_obt);
```

```
f_resul=cat(1,nombre_F,f_resul)

fajuste=num2cell(fajuste);
fajuste=cat(2,leyenda,fajuste);
fajuste=cat(1,nombre_fun,fajuste);

figure(1)
plot(tmin,F*100,'ok',...
    tmin,F_GGS*100,'-.r',...
    tmin,F_GM*100,'-.m',...
    tmin,F_RR*100,'-.c',...
    tmin,F_Normal*100,'-.g',...
    tmin,F_Normal_mod*100,'-.b',...
    tmin,F_LogNormal*100,'r',...
    tmin,F_Gamma*100,'m',...
    tmin,F_BC*100,'c',...
    tmin,F_Harris*100,'k',...
    tmin,F_Beta*100,'-.k','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño (Micrometros)')
ylabel('Porcentaje Acumulado Pasante')
title('Funciones de Distribucion')
axis([0 max(TamMin) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Gates Gaudin Schuhmann','Gaudin Meloy','Rosin
Rammler','Normal','Normal mod','LogNormal','Gamma','Broadbent Calcott','Harris
3p','Beta',-1);

figure(2)
semilogx(tmin,F*100,'ok',...
        tmin,F_GGS*100,'-.r',...
        tmin,F_GM*100,'-.m',...
        tmin,F_RR*100,'-.c',...
        tmin,F_Normal*100,'-.g',...
        tmin,F_Normal_mod*100,'-.b',...
        tmin,F_LogNormal*100,'r',...
        tmin,F_Gamma*100,'m',...
        tmin,F_BC*100,'c',...
        tmin,F_Harris*100,'k',...
        tmin,F_Beta*100,'-.k','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño (Micrometros)')
ylabel('Porcentaje Acumulado Pasante')
title('Funciones de Distribucion')
axis([0 max(TamMin) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Gates Gaudin Schuhmann','Gaudin Meloy','Rosin
Rammler','Normal','Normal mod','LogNormal','Gamma','Broadbent Calcott','Harris
3p','Beta',-1);
```

```
figure(3)
semilogy(tmin,F*100,'ok',...
        tmin,F_GGS*100,'-.r',...
        tmin,F_GM*100,'-.m',...
        tmin,F_RR*100,'-.c',...
        tmin,F_Normal*100,'-.g',...
        tmin,F_Normal_mod*100,'-.b',...
        tmin,F_LogNormal*100,'r',...
        tmin,F_Gamma*100,'m',...
        tmin,F_BC*100,'c',...
        tmin,F_Harris*100,'k',...
        tmin,F_Beta*100,'-.k','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño (Micrometros)')
ylabel('Porcentaje Acumulado Pasante')
title('Funciones de Distribucion')
axis([0 max(TamMin) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Gates Gaudin Schuhmann','Gaudin Meloy','Rosin
Rammler','Normal','Normal mod','LogNormal','Gamma','Broadbent Calcott','Harris
3p','Beta',-1);

figure(4)
loglog(tmin,F*100,'ok',...
      tmin,F_GGS*100,'-.r',...
      tmin,F_GM*100,'-.m',...
      tmin,F_RR*100,'-.c',...
      tmin,F_Normal*100,'-.g',...
      tmin,F_Normal_mod*100,'-.b',...
      tmin,F_LogNormal*100,'r',...
      tmin,F_Gamma*100,'m',...
      tmin,F_BC*100,'c',...
      tmin,F_Harris*100,'k',...
      tmin,F_Beta*100,'-.k','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño (Micrometros)')
ylabel('Porcentaje Acumulado Pasante')
title('Funciones de Distribucion')
axis([0 max(TamMin) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Gates Gaudin Schuhmann','Gaudin Meloy','Rosin
Rammler','Normal','Normal mod','LogNormal','Gamma','Broadbent Calcott','Harris
3p','Beta',-1);

tfinal=cputime;
tiempo=tfinal-tinicial
```

APENDICE E:
GGS.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA FUNCIÓN DE GATES GAUDIN SCHUHMANN

```
%------------------------------------------------------------------------------------------------
% Ajusta a la funcion Gates Gaudin Schuhmann
% Subfuncion del programa "Ajustar.m"
function fggs=ggs(TamMin,F)

F=F(1:length(F)-1,1);
TamMin=TamMin(1:length(TamMin)-1,1);

Reg=polyfit(log10(TamMin),log10(F),1);
% r=corrcoef(log10(TamMin),log10(F));

%r2_GGS=r(1,2)^2;
alpha_GGS=Reg(1,1);
beta_GGS=NaN;
Xo_GGS=(1/(10^Reg(1,2)))^(1/alpha_GGS);
TamMed_GGS=(alpha_GGS/(alpha_GGS+1))*Xo_GGS;
Varianza_GGS=(alpha_GGS/((alpha_GGS+2)*(alpha_GGS+1)^2))*Xo_GGS^2;
DesvStd_GGS=sqrt(Varianza_GGS);
CV_GGS=DesvStd_GGS/TamMed_GGS;

% Calculo del R cuadrado
F_GGS=(TamMin/Xo_GGS).^alpha_GGS;
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_GGS-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_GGS).^2);

r2_GGS=1-SSE/SST;

fggs=[r2_GGS
SSE
alpha_GGS
beta_GGS
Xo_GGS
TamMed_GGS
Varianza_GGS
DesvStd_GGS
CV_GGS];
```

APENDICE F:
GM.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA FUNCIÓN DE GAUDIN MELOY

```
%----------------------------------------------------------------------------------------
% Ajusta a la funcion Gaudin Meloy
% Subfuncion del programa "Ajustar.m"

function fgm=gm(TamMin,F)

load p_estad.mat

TamMed_Estad=estad(6,1);
CoefVar_Estad=estad(9,1);

%Calculo de Valores iniciales.
alpha_GM=2*CoefVar_Estad^2/(1-CoefVar_Estad^2);
Xo_GM=TamMed_Estad*(alpha_GM+1);

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_GM Xo_GM];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minGM,par_inic,TamMin,F);

alpha_GM=par(1);
beta_GM=NaN;
Xo_GM=par(2);
TamMed_GM=Xo_GM/(alpha_GM+1);
Varianza_GM=Xo_GM^2*alpha_GM/((alpha_GM+2)*(alpha_GM+1)^2);
DesvStd_GM=sqrt(Varianza_GM);
CV_GM=DesvStd_GM/TamMed_GM;

% Calculo del R cuadrado
F_GM=1-(1-TamMin/Xo_GM).^alpha_GM;
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_GM-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_GM).^2);

r2_GM=1-SSE/SST;

% Resultados
```

```
fgm=[r2_GM
SSE
alpha_GM
beta_GM
Xo_GM
TamMed_GM
Varianza_GM
DesvStd_GM
CV_GM];
%-----------------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minGM

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------------
function fGM=minGM(x,TamMin)
fGM=1-(1-TamMin/x(2)).^x(1);
```

APENDICE G:
RR.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA FUNCIÓN DE ROSIN RAMMLER

```
%------------------------------------------------------------------------------------------------
% Ajusta a la funcion Rosin Rammler
% Subfuncion del programa "Ajustar.m"
function frr=rr(TamMin,F)

F=F(2:length(F)-1,1);
TamMin=TamMin(2:length(TamMin)-1,1);
Reg=polyfit(log10(TamMin),log10(log(1./(1-F))),1); % Verificar si es posible
cambiar (100*(100-F).^-1)
%r=corrcoef(log10(TamMin),log10(log(1./(1-F))));

%r2 RR=r(1,2)^2;
alpha_RR=Reg(1,1);
beta_RR=NaN;
Xo_RR=10^(Reg(1,2)/(-alpha_RR));
TamMed_RR=gamma((alpha_RR+1)/alpha_RR)*Xo_RR;
Varianza_RR=(gamma((alpha_RR+2)/alpha_RR)-
(gamma((alpha_RR+1)/alpha_RR))^2)*Xo_RR^2;
DesvStd_RR=sqrt(Varianza_RR);
CV_RR=DesvStd_RR/TamMed_RR;

% Calculo del R cuadrado
F RR=1-exp(-(TamMin/Xo_RR).^alpha_RR);
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_RR-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_RR).^2);
r2_RR=1-SSE/SST;

frr=[r2_RR
SSE
alpha_RR
beta RR
Xo RR
TamMed RR
Varianza RR
DesvStd RR
CV_RR];
```

APENDICE H:
NORMAL.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
function fNormal=Normal(TamMin,F)

load p_estad.mat
TamMed_Estad=estad(6,1);
CoefVar_Estad=estad(9,1);

%Calculo de Valores iniciales.
alpha_Normal=CoefVar_Estad*TamMed_Estad; % Igual a la Desviacion Standard
Xo_Normal=TamMed_Estad; % Igual al Tamaño Medio

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_Normal Xo_Normal];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minNormal,par_inic,TamMin,F);

alpha_Normal=par(1);
beta_Normal=NaN;
Xo_Normal=par(2);
TamMed_Normal=Xo_Normal;
Varianza_Normal=alpha_Normal^2;
DesvStd_Normal=sqrt(Varianza_Normal);
CV_Normal=DesvStd_Normal/TamMed_Normal;

% Calculo del R cuadrado
F_Normal=normcdf(TamMin,Xo_Normal,alpha_Normal);
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_Normal-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_Normal).^2);

r2 Normal=1-SSE/SST;

% Resultados

fNormal=[r2_Normal
SSE
alpha_Normal
beta Normal
```

```
Xo Normal
TamMed Normal
Varianza Normal
Desv td Normal
  V_Normal];
%--------------------------------------------------------------------------------
```

Función minNormal

```
%--------------------------------------------------------------------------------
functi n fNormal minNormal(p TamMin)
fNormal n rmedf(TamMin,p(2),p(1));
```

APENDICE I:
NORMAL MOD.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL MODIFICADA

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
function fNormal_mod=Normal_mod(TamMin,F)

load p  estad.mat

TamMed_Estad=estad(6,1);
CoefVar_Estad=estad(9,1);

%Calculo de Valores iniciales.
alpha_Normal_mod=CoefVar_Estad*TamMed_Estad; % Igual a la Desviacion
Standard
Xo_Normal_mod=TamMed_Estad; % Igual al Tamaño Medio

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_Normal_mod Xo_Normal_mod];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minNormal_mod,par_inic,TamMin,F);

alpha_Normal_mod=par(1);
beta_Normal_mod=NaN;
Xo_Normal_mod=par(2);

K=normcdf(0,Xo_Normal_mod,alpha_Normal_mod);
F_Normal_mod=(normcdf(TamMin,Xo_Normal_mod,alpha_Normal_mod)-K)/(1-
K);

   Q=1/sqrt(2)*Xo_Normal_mod/alpha_Normal_mod;
TamMed_Normal_mod=1/((1-K)*sqrt(2*pi))*(alpha_Normal_mod*exp(-
Q^2)+sqrt(pi/2)*Xo_Normal_mod*(1+erf(Q)));
Varianza_Normal_mod=1/(2*(1-
K))*(alpha_Normal_mod*sqrt(2/pi)*Xo_Normal_mod*exp(-
Q^2)+(alpha_Normal_mod^2+Xo_Normal_mod^2)*(1+erf(Q)))-
TamMed_Normal_mod^2;
DesvStd_Normal_mod=sqrt(Varianza_Normal_mod);
CV_Normal_mod=DesvStd_Normal_mod/TamMed_Normal_mod;

% Calculo del R cuadrado

F_medio=mean(F);
```

```
SSR=sum((F_Normal_mod-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_Normal_mod).^2);

r2_Normal_mod=1-SSE/SST;

% Resultados

fNormal_mod=[r2_Normal_mod
SSE
alpha_Normal_mod
beta_Normal_mod
Xo_Normal_mod
TamMed_Normal_mod
Varianza_Normal_mod
DesvStd_Normal_mod
CV_Normal_mod];
%------------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minNormal_mod

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function fNormal_mod=minNormal_mod(p,TamMin)
K=normcdf(0,p(2),p(1));
fNormal_mod=(normcdf(TamMin,p(2),p(1))-K)/(1-K);
```

APENDICE J:
LOGNORMAL.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function flognormal=lognormal(TamMin,F)

load p_estad.mat

TamMed_Estad=estad(6,1);
CoefVar_Estad=estad(9,1);

%Calculo de Valores iniciales.
alpha_LogNormal=sqrt(log(CoefVar_Estad^2+1));
Xo_LogNormal=TamMed_Estad/sqrt(exp(alpha_LogNormal^2));

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_LogNormal Xo_LogNormal];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minLogNormal,par_inic,TamMin,F);

alpha_LogNormal=par(1);
beta_LogNormal=NaN;
Xo_LogNormal=par(2);
TamMed_LogNormal=Xo_LogNormal*exp(alpha_LogNormal^2/2);
Varianza_LogNormal=Xo_LogNormal^2*(exp(2*alpha_LogNormal^2)-
exp(alpha_LogNormal^2));
DesvStd_LogNormal=sqrt(Varianza_LogNormal);
CV_LogNormal=DesvStd_LogNormal/TamMed_LogNormal;

% Calculo del R cuadrado
F_LogNormal=logncdf(TamMin,log(Xo_LogNormal),alpha_LogNormal);
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_LogNormal-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_LogNormal).^2);

r2_LogNormal=1-SSE/SST;

% Resultados

flognormal=[r2_LogNormal
SSE
```

```
alpha_LogNormal
beta_LogNormal
Xo_LogNormal
TamMed_LogNormal
Varianza_LogNormal
DesvStd_LogNormal
CV_LogNormal];
%-----------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minLogNormal

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
function fLogNormal=minLogNormal(p,TamMin)
fLogNormal=logncdf(TamMin,log(p(2)),p(1));
```

APENDICE K:
GAMMA F.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA DISTRIBUCIÓN GAMMA

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------------
function fgamma=gamma_f(TamMin,F) % Se usa gamma_f para NO confundir con
la funcion gamma de Matlab

load p_estad.mat

TamMed_Estad=estad(6,1);
CoefVar_Estad=estad(9,1);

%Calculo de Valores iniciales.
alpha_Gamma=1/CoefVar_Estad^2;
Xo_Gamma=TamMed_Estad/alpha_Gamma;

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_Gamma Xo_Gamma];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minGamma,par_inic,TamMin,F);

alpha_Gamma=par(1);
beta_Gamma=NaN;
Xo_Gamma=par(2);
TamMed_Gamma=Xo_Gamma*alpha_Gamma;
Varianza_Gamma=Xo_Gamma^2*alpha_Gamma;
DesvStd_Gamma=sqrt(Varianza_Gamma);
CV_Gamma=DesvStd_Gamma/TamMed_Gamma;

% Calculo del R cuadrado
F_Gamma=gammainc(TamMin/Xo_Gamma,alpha_Gamma);
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_Gamma-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_Gamma).^2);

r2_Gamma=1-SSE/SST;


% Resultados
```

```
fgamma=[r2_Gamma
SSE
alpha_Gamma
beta_Gamma
Xo_Gamma
TamMed_Gamma
Varianza_Gamma
DesvStd_Gamma
CV_Gamma];
%-----------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minGamma

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
function fGamma=minGamma(p,TamMin)
fGamma=gammainc(TamMin/p(2),p(1));
```

APENDICE L:
BC.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA FUNCIÓN DE BROADBENT CALLCOTT

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
% Ajusta a la funcion Broadbent Callcott
% Subfuncion del programa "Ajustar.m"
function fbc=bc(TamMin,F)

F=F(2:length(F)-1,1);
TamMin=TamMin(2:length(TamMin)-1,1);
Reg=polyfit(log10(TamMin),log10(log(1./(1-F*(1-exp(-1))))),1); % Verificar si es
posible cambiar (100*(100-F).^-1)
%r=corrcoef(log10(TamMin),log10(log(1./(1-F*(1-exp(-1))))));

%r2_BC=r(1,2)^2;
alpha_BC=Reg(1,1);
beta_BC=NaN;
Xo_BC=10^(Reg(1,2)/(-alpha_BC));
TamMed_BC=Xo_BC/(1-exp(-
1))*gamma(1+1/alpha_BC)*gammainc(1,1+1/alpha_BC);
Varianza_BC=Xo_BC^2*(1/(1-exp(-
1))*gamma(1+2/alpha_BC)*gammainc(1,1+2/alpha_BC)-(TamMed_BC/Xo_BC)^2);
DesvStd_BC=sqrt(Varianza_BC);
CV_BC=DesvStd_BC/TamMed_BC;

% Calculo del R cuadrado
F_BC=(1-exp(-(TamMin/Xo_BC).^alpha_BC))/(1-exp(-1));
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_BC-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_BC).^2);
r2_BC=1-SSE/SST;

fbc=[r2_BC
SSE
alpha_BC
beta_BC
Xo_BC
TamMed_BC
Varianza_BC
DesvStd_BC
CV_BC];
```

APENDICE M:
HARRIS3P.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA FUNCIÓN DE HARRIS

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
function h3p=harris3p(TamMin,F)

% Eliminar la coordenada (0,0)
F=F(1:length(F)-1,1);
TamMin=TamMin(1:length(TamMin)-1,1);

% Vector de valores iniciales.
alpha_Harris=1;
beta_Harris=1;
Xo_Harris=max(TamMin)*1.005; %Valor ligeramente mayor para la cual
(Xmax,100%)

par_inic=[alpha_Harris beta_Harris Xo_Harris];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
OPTIONS = OPTIMSET('MaxFunEvals',10000,'TolX',1.e-12,'MaxIter',10000);
par = lsqcurvefit(@minharris3p,par_inic,TamMin,F,[],[],OPTIONS);

alpha_Harris=real(par(1));
beta_Harris=real(par(2));
Xo_Harris=real(par(3));
TamMed_Harris=Xo_Harris*alpha_Harris*beta(1+1/beta_Harris,alpha_Harris);
Varianza_Harris=Xo_Harris^2*(alpha_Harris*beta(1+2/beta_Harris,alpha_Harris)-
(alpha_Harris*beta(1+1/beta_Harris,alpha_Harris))^2);
DesvStd_Harris=sqrt(Varianza_Harris);
CV_Harris=DesvStd_Harris/TamMed_Harris;

% Calculo del R cuadrado
F_Harris=1-(1-(TamMin/Xo_Harris).^beta_Harris).^alpha_Harris;
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_Harris-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_Harris).^2);

r2_Harris=1-SSE/SST;

% Resultados
```

```
h3p=[r2_Harris
SSE
alpha_Harris
beta_Harris
Xo_Harris
TamMed_Harris
Varianza_Harris
DesvStd_Harris
CV_Harris];
%-----------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minharris3p

```
%-----------------------------------------------------------------------------------------
function fh3p=minharris3p(p,TamMin)
fh3p=1-(1-(TamMin/p(3)).^p(2)).^p(1);
```

APENDICE N:
BETA F.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LOS ANALISIS GRANULOMÉTRICOS A LA DISTRIBUCIÓN BETA

```
%----------------------------------------------------------------------------------------------
function fbeta=beta_f(TamMin,F)

% Eliminar la coordenada (0,0)
F=F(1:length(F)-1,1);
TamMin=TamMin(1:length(TamMin)-1,1);

%--------------------------------------
% Vector de valores iniciales.
X50=interp1(F,TamMin,0.50); %Mediana

load p_estad.mat

Media=estad(6,1); %Tamaño Medio
CVar=estad(9,1); %Coeficiente de Variacion

%Calculo de Valores iniciales (usando los parametros estadisticos).

save beta_estad.mat X50 Media CVar

alpha_Beta_inic=fminbnd(@minalpha_Beta,1.e-12,1/CVar^2-1.e-12); % el rango de
alpha_Beta es entre 0 y 1/CV^2
beta_Beta_inic=CVar^2*(alpha_Beta_inic^2+1)/(1-alpha_Beta_inic*CVar^2);

Xo_Beta_inic=max(TamMin)*1.2; % Valor ligeramente mayor para la cual
(Xmax,100%) AUMENTAR EN CASO SE TENGA MENSAJE DE ERROR QUE
0<X<1
                    % Valor original 1.005

par_inic=[alpha_Beta_inic beta_Beta_inic Xo_Beta_inic];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
OPTIONS = OPTIMSET('MaxFunEvals',10000,'TolX',1.e-12,'MaxIter',10000);
par = lsqcurvefit(@minBeta,par_inic,TamMin,F,[],[],OPTIONS);

alpha_Beta=par(1);
beta_Beta=par(2);
Xo_Beta=par(3);
TamMed_Beta=Xo_Beta*alpha_Beta/(alpha_Beta+beta_Beta);
Varianza_Beta=Xo_Beta^2*(alpha_Beta*beta_Beta/((alpha_Beta+beta_Beta+1)*(al
pha_Beta+beta_Beta)^2));
```

```
DesvStd_Beta=sqrt(Varianza_Beta);
CV_Beta=DesvStd_Beta/TamMed_Beta;

% Calculo del R cuadrado
F_Beta=betainc(TamMin/Xo_Beta,alpha_Beta,beta_Beta);
F_medio=mean(F);

SSR=sum((F_Beta-F_medio).^2);
SST=sum((F-F_medio).^2);
SSE=sum((F-F_Beta).^2);

r2_Beta=1-SSE/SST;

% Resultados

fbeta=[r2_Beta
SSE
alpha_Beta
beta_Beta
Xo_Beta
TamMed_Beta
Varianza_Beta
DesvStd_Beta
CV_Beta];

%------------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minalpha_Beta

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function min_a=minalpha_Beta(a)

load beta_estad.mat

min_a=(0.50-betainc(X50*a*(1-
a*CVar^2)/(Media*(CVar^2+a)),a,CVar^2*(a^2+1)/(1-a*CVar^2)))^2;
%------------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minBeta

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function fBeta=minBeta(p,TamMin)
fBeta=betainc(TamMin/p(3),p(1),p(2));
```

APENDICE O:
AJUSTAR CP.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR LAS CURVAS DE PARTICIÓN

```
%----------------------------------------------------------------------------------------
function EDc_ajuste=Ajustar_CP(tp,EDc)
tinicial=cputime;

% Ordena en orden DESCENDENTE
mat=[tp,EDc];
mat=-sortrows(-mat,1);
tp=mat(:,1);
EDc=mat(:,2);

leyenda={'r^2';'alpha';'d50c'};
nombre_fun={'Parametro','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln'};

%--------------------------------------------------
EDc_ajuste=[Plitt(tp,EDc) Lynch(tp,EDc) LogNormal_CP(tp,EDc)
Logistica_ln(tp,EDc)];

EDc_Plitt=1-exp(log(0.5)*(tp/EDc_ajuste(3,1)).^EDc_ajuste(2,1));
EDc_Lynch=minLynch([EDc_ajuste(2,2) EDc_ajuste(3,2)],tp);
EDc_LogNormal=logncdf(tp,log(EDc_ajuste(3,3)),EDc_ajuste(2,3));
EDc_Logistica_ln=1./(1+(tp/EDc_ajuste(3,4)).^(-EDc_ajuste(2,4)));

nombre_EDc={'Tamaño','Datos','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln'};
EDc_obt=[tp EDc*100 EDc_Plitt*100 EDc_Lynch*100 EDc_LogNormal*100
EDc_Logistica_ln*100];

EDc_resul=num2cell(EDc_obt);
EDc_resul=cat(1,nombre_EDc,EDc_resul)

EDc_ajuste=num2cell(EDc_ajuste);
EDc_ajuste=cat(2,leyenda,EDc_ajuste);
EDc_ajuste=cat(1,nombre_fun,EDc_ajuste);

figure(1)
plot(tp,EDc*100,'ok',...
    tp,EDc_Plitt*100,'r',...
    tp,EDc_Lynch*100,'k',...
    tp,EDc_LogNormal*100,'b',...
    tp,EDc_Logistica_ln*100,'g','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño Promedio')
ylabel('EDc')
```

```
title('Curva de Particion Corregida')
axis([0 max(tp) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln',-1);

figure(2)
semilogx(tp,EDc*100,'ok',...
        tp,EDc_Plitt*100,'r',...
        tp,EDc_Lynch*100,'k',...
        tp,EDc_LogNormal*100,'b',...
        tp,EDc_Logistica_ln*100,'g','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño Promedio')
ylabel('EDc')
title('Curva de Particion Corregida')
axis([0 max(tp) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln',-1);

figure(3)
semilogy(tp,EDc*100,'ok',...
        tp,EDc_Plitt*100,'r',...
        tp,EDc_Lynch*100,'k',...
        tp,EDc_LogNormal*100,'b',...
        tp,EDc_Logistica_ln*100,'g','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño Promedio')
ylabel('EDc')
title('Curva de Particion Corregida')
axis([0 max(tp) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln',-1);

figure(4)
loglog(tp,EDc*100,'ok',...
      tp,EDc_Plitt*100,'r',...
      tp,EDc_Lynch*100,'k',...
      tp,EDc_LogNormal*100,'b',...
      tp,EDc_Logistica_ln*100,'g','LineWidth',2);
xlabel('Tamaño Promedio')
ylabel('EDc')
title('Curva de Particion Corregida')
axis([0 max(tp) 0 100])
set(gca,'XGrid','on','YGrid','on');
legend('Datos','Plitt','Lynch','LogNormal','Logistica en Ln',-1);

tfinal=cputime;
tiempo=tfinal-tinicial
```

APENDICE P:
PLITT.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR A LA FUNCIÓN DE PLITT

```
%-------------------------------------------------------------------------------------------
function fPlitt=Plitt(XED,EDc) % Se usa gamma_f para NO confundir con la
funcion gamma de Matlab

XED=XED(find(EDc>0)); % Elimina valores negativos correspondiente a ED
EDc=EDc(EDc>0);

EDc=EDc(find(XED>0)); % Elimina valores negativos correspondiente a XED
XED=XED(XED>0);

Reg=polyfit(log10(XED),log10(log((1-EDc).^-1)),1);
a_Plitt=Reg(1,1);
d50c_Plitt=(10^(-Reg(1,2))*(-log(0.50)))^(1/a_Plitt);

% Calculo del R cuadrado
EDc_Plitt=1-exp(log(0.5)*(XED/d50c_Plitt).^a_Plitt);
EDc_medio=mean(EDc);

SSR=sum((EDc_Plitt-EDc_medio).^2);
SST=sum((EDc-EDc_medio).^2);
SSE=sum((EDc-EDc_Plitt).^2);

r2_Plitt=1-SSE/SST;

fPlitt=[r2_Plitt
      a_Plitt
      d50c_Plitt];
```

APENDICE Q:
LYNCH.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR A LA FUNCIÓN DE LYNCH

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function fLynch=Lynch(XED,EDc) % Se usa gamma_f para NO confundir con la
funcion gamma de Matlab

XED=XED(find(EDc>0));% Elimina valores negativos (si hubiera)
EDc=EDc(EDc>0);

% Hallando valor aproximado de a y d50
d50c=interp1(EDc,XED,0.50);
d75c=interp1(EDc,XED,0.75);
d25c=interp1(EDc,XED,0.25);
imp_Ly=(d75c-d25c)/(2*d50c);
A=0.90932551046718;B=0.06140909112888; % Obtenido por regresion
(inv(imp_Ly) vs. a) a=10^-12:0.01:100 r2=0.99999080728768
a_aprox=(1/imp_Ly-B)/A;
par_inic=[a_aprox d50c];

% Obteniendo los valores optimos de a y d50c
opt = lsqcurvefit(@minLynch,par_inic,XED,EDc,[],[],OPTIMSET('TolX',1.e-12));
a_Ly=opt(1);
d50c_Ly=opt(2);

% Calculo del R cuadrado
EDc_Lynch=minLynch([a_Ly d50c_Ly],XED);
EDc_medio=mean(EDc);

SSR=sum((EDc_Lynch-EDc_medio).^2);
SST=sum((EDc-EDc_medio).^2);
SSE=sum((EDc-EDc_Lynch).^2);
r2_Lynch=1-SSE/SST;

fLynch=[r2_Lynch
        a_Ly
        d50c_Ly];
%------------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minLynch

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function fLynch=minLynch(p,XED)
fLynch=(exp(p(1)*XED/p(2))-1)./(exp(p(1)*XED/p(2))+exp(p(1))-2);
```

APENDICE R:
LOGNORMAL CP.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR A LA DISTRIBUCIÓN LOG-NORMAL.

```
%------------------------------------------------------------------------------------------
function fLogNormal=LogNormal(XED,EDc)

%Calculo de Valores iniciales.
d50c_LogNormal=interp1(EDc,XED,0.50);
alpha_LogNormal=0.5;

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[alpha_LogNormal d50c_LogNormal];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minLogNormal_CP,par_inic,XED,EDc);

alpha_LogNormal=par(1);
d50c_LogNormal=par(2);

% Calculo del R cuadrado
EDc_LogNormal=logncdf(XED,log(d50c_LogNormal),alpha_LogNormal);
EDc medio=mean(EDc);

SSR=sum((EDc_LogNormal-EDc_medio).^2);
SST=sum((EDc-EDc_medio).^2);
SSE=sum((EDc-EDc_LogNormal).^2);

r2_LogNormal=1-SSE/SST;

% Resultados

fLogNormal=[r2_LogNormal
        alpha_LogNormal
        d50c_LogNormal];
```

Función minLogNormal_CP

```
function fLogNormal=minLogNormal_CP(p,TP)
fLogNormal=logncdf(TP,log(p(2)),p(1));
```

APENDICE S:
LOGISTICA LN.M

PROGRAMA PARA AJUSTAR A LA FUNCIÓN LOGÍSTICA EN LN(X)

```
%----------------------------------------------------------------------------------------
function fLogistica_ln=Logistica_ln(XED,EDc) % Se usa gamma_f para NO
confundir con la funcion gamma de Matlab

XED=XED(find(EDc>0)); % Elimina valores negativos correspondiente a ED
EDc=EDc(EDc>0);

EDc=EDc(find(XED>0)); % Elimina valores negativos correspondiente a XED
XED=XED(XED>0);

d50c_Logistica_ln=interp1(EDc,XED,0.50);
a_Logistica_ln=3.5;

% Vector de valores iniciales.
par_inic=[a_Logistica_ln d50c_Logistica_ln];

% Halla los parametros por minimos cuadrados.
par = lsqcurvefit(@minLogistica_ln,par_inic,XED,EDc);

a_Logistica_ln=par(1);
d50c_Logistica_ln=par(2);

% Calculo del R cuadrado
EDc_Logistica_ln=1./(1+(XED/d50c_Logistica_ln).^(-a_Logistica_ln));
EDc_medio=mean(EDc);

SSR=sum((EDc_Logistica_ln-EDc_medio).^2);
SST=sum((EDc-EDc_medio).^2);
SSE=sum((EDc-EDc_Logistica_ln).^2);
r2_Logistica_ln=1-SSE/SST;

fLogistica_ln=[r2_Logistica_ln
        a_Logistica_ln
        d50c_Logistica_ln];
%----------------------------------------------------------------------------------------
```

Función minLogistica_ln

```
%----------------------------------------------------------------------------------------
function minlog=minLogistica_ln(p,XED)
minlog=1./(1+(XED/p(2)).^(-p(1)));
```

APENDICE T:

MÉTODO PARA OBTENER LOS TAMAÑOS PROMEDIOS DE LOS INTERVALOS DE UN ANÁLISIS GRANULOMÉTRICO.

RESUMEN

Obtener el tamaño promedio de un intervalo de tamaños de un Análisis Granulométrico va más allá de si corresponde a un promedio aritmético, geométrico o armónico, debido a esto se intuye que el tamaño promedio de un intervalo debe de estar influenciado por la característica de la muestra (llámese Tamaño Medio y/o Coeficiente de Variación). Se trabaja para esto con las Fracciones Acumuladas Pasantes y su respectivo tamaño, por lo tanto, la pendiente de dicha curva debe de influir en el tamaño medio de los intervalos de tamaño. El tratamiento que se da, es una modificación al Método de Simpson para integrar el área bajo una curva y el concepto matemático de "Valor Medio". Este método está limitado por la dificultad en el cálculo (aunque se puede programar) y en que no se toma en cuenta la morfología de las partículas

DESARROLLO DEL MÉTODO

La ecuación que denota el valor medio de una función $F(x)$ en un intervalo $[X_i : X_{i+1}]$ es:

Ecuación 1

$$Fi^*(x) = \frac{1}{X_{i+1} - X_i} * \int_{X_i}^{X_{i+1}} F(x)dx$$

Para nuestro caso en particular denotaremos como:

$Fi^*(x)$: Fracción o Porcentaje Acumulado Pasante Promedio en el intervalo $[X_i : X_{i+1}]$.

$F(x)$: Función de la Fracción o Porcentaje Acumulado Pasante.

$[X_i : X_{i+1}]$: Intervalo de tamaños donde:

X_i: Tamaño Mínimo del Intervalo.

X_{i+1}: Tamaño Máximo del Intervalo.

En un Análisis Granulométrico efectuado por mallas se obtienen los siguientes datos:

- Tamaños Mínimos y Máximos de los Intervalos de tamaño (estos son las aberturas de las mallas)
- Fracciones (o porcentajes) en Peso

- Fracciones Acumuladas Retenidas
- Fracciones Acumuladas Pasantes.

Para poder usar la Ecuación 1 debemos de obtener la función $F(x)$. Esta función lo obtendremos para cada intervalo por medio de una modificación de la Integración de Simpson.

Recuérdese que el método para hallar el valor medio consiste en igualar el área bajo la curva en un intervalo $[X_i : X_{i+1}]$ con el área igual a un rectángulo de base $(X_{i+1} - X_i)$ y de altura $Fi^{\bullet}(x)$.

La Integración de Simpson la modificaremos para nuestro objetivo, esto es, necesitamos hallar el área bajo la curva en cada intervalo de tamaño, esto lo efectuaremos de la siguiente manera:

En un análisis granulométrico por mallas obtenemos una tabla similar al siguiente:

Tabla 1

Tamaño Mínimo (Abertura de la Malla)	Fracción (ó Porcentaje) Acumulada Pasante F(x)
X_k	$F(X_k) = 1 = 100\%$
X_{k-1}	$F(X_{k-1})$
...	...
X_{i+1}	$F(X_{i+1})$
X_i	$F(X_i)$
X_{i-1}	$F(X_{i-1})$
...	...
X_3	$F(X_3)$
X_2	$F(X_2)$
X_1	$F(X_1)$
$X_0 = 0$	$F(X_0 = 0) = 0 = 0\%$

Donde:

- $X_{i+1} > X_i$
- X_k: Tamaño a la cual $F(X_k) = 1 = 100\%$ ó en síntesis, toda la muestra tiene un tamaño menor a X_k.

- X_0: Tamaño a la cual $F(X_0) = 0 = 0\%$ ó en síntesis, toda la muestra tiene un tamaño mayor X_0 (obviamente, todas las partículas tienen un tamaño mayor que 0).

Sin entrar a detalles, la integración por el método de Simpson consiste en ajustar tres puntos contiguos (dos intervalos de tamaños contiguos) a una curva cuadrática e integrar.

Por ejemplo:

Los puntos $(X_{i-1}, F(X_{i-1}))$, $(X_i, F(X_i))$, $(X_{i+1}, F(X_{i+1}))$ se ajustarán a la siguiente ecuación cuadrática.

$$F_i(x) = a_i * x^2 + b_i * x + c_i \qquad x \in [X_{i-1} : X_{i+1}]$$

Los coeficientes a_i, b_i, c_i se obtendrán por la siguiente ecuación:

Ecuación 2

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \\ c_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{i-1}^2 & X_{i-1} & 1 \\ X_i^2 & X_i & 1 \\ X_{i+1}^2 & X_{i+1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} F_i(X_{i-1}) \\ F_i(X_i) \\ F_i(X_{i+1}) \end{bmatrix}$$

Análogamente para $(X_i, F(X_i))$, $(X_{i+1}, F(X_{i+1}))$, $(X_{i+2}, F(X_{i+2}))$

$$F_{i+1}(x) = a_{i+1} * x^2 + b_{i+1} * x + c_{i+1} \qquad x \in [X_i : X_{i+2}]$$

Los coeficientes $a_{i+1}, b_{i+1}, c_{i+1}$ se obtendrán por la siguiente ecuación:

Ecuación 3

$$\begin{bmatrix} a_{i+1} \\ b_{i+1} \\ c_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_i^2 & X_i & 1 \\ X_{i+1}^2 & X_{i+1} & 1 \\ X_{i+2}^2 & X_{i+2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} * \begin{bmatrix} F_{i+1}(X_i) \\ F_{i+1}(X_{i+1}) \\ F_{i+1}(X_{i+2}) \end{bmatrix}$$

Con esto vemos que para el intervalo $x \in [X_i : X_{i+1}]$ tenemos dos curvas cuadráticas ajustadas. La curva que tomaremos será el promedio aritmético de estas dos.

Es decir:

Ecuación 4

$$F_{i,i+1}(x) = \frac{(a_i + a_{i+1})}{2} * x^2 + \frac{(b_i + b_{i+1})}{2} * x + \frac{(c_i + c_{i+1})}{2} \qquad x \in [X_i : X_{i+1}]$$

El siguiente paso será hallar el valor medio de $F_{i,i+1}(x)$

Si reemplazamos la ecuación 4 en la ecuación 1

$$F^{\bullet}_{i,i+1}(x) = \frac{1}{X_{i+1} - X_i} * \int_{X_i}^{X_{i+1}} \frac{(a_i + a_{i+1})}{2} * x^2 + \frac{(b_i + b_{i+1})}{2} * x + \frac{(c_i + c_{i+1})}{2} dx$$

Integrando y evaluando obtenemos:

Ecuación 5

$$F^{\bullet}_{i,i+1} = \frac{(a_i + a_{i+1})}{6} * \left(X_{i+1}^2 + X_{i+1} * X_i + X_i^2\right) + \frac{(b_i + b_{i+1})}{4} * \left(X_{i+1} + X_i\right) + \frac{(c_i + c_{i+1})}{2}$$

El criterio para hallar el tamaño medio de dicho intervalo es que este tamaño medio reemplazado en la ecuación 4 debe de dar el valor medio; es decir:

$F_{i,i+1}\left(\overline{x}_{i,i+1}\right) = F^{\bullet}_{i,i+1}$

$$\frac{(a_i + a_{i+1})}{2} * \overline{x}_{i,i+1}{}^2 + \frac{(b_i + b_{i+1})}{2} * \overline{x}_{i,i+1} + \frac{(c_i + c_{i+1})}{2} =$$
$$= \frac{(a_i + a_{i+1})}{6} * \left(X_{i+1}^2 + X_{i+1} * X_i + X_i^2\right) + \frac{(b_i + b_{i+1})}{4} * \left(X_{i+1} + X_i\right) + \frac{(c_i + c_{i+1})}{2}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática obtenemos:

Ecuación 6

$$\boxed{\overline{x}_{i,i+1} = \frac{-Q_{i,i+1} \pm \sqrt{4 * K_{i,i+1} + Q_{i,i+1}^2}}{2}}$$

Donde:

$$\boxed{Q_{i,i+1} = \frac{b_i + b_{i+1}}{a_i + a_{i+1}}} \qquad \boxed{K_{i,i+1} = \frac{X_{i+1}^2 + X_{i+1} * X_i + X_i^2}{3} + \frac{Q_{i,i+1}}{2} * \left(X_{i+1} + X_i\right)}$$

Vemos que $\overline{x}_{i,i+1}$ puede tomar dos valores, el valor real será el que cumpla:

$\overline{x}_{i,i+1} \in \left[X_i : X_{i+1}\right]$

Intervalos especiales:

- $x \in \left[X_0 : X_1\right]$ ($x \in \left[0 : X_1\right]$) (es decir "x" pertenece al intervalo de tamaños más fino o el material que ha pasado por la malla de mínima abertura utilizada).

Entonces para este intervalo solo podrá ajustarse a una curva que será la obtenida por los siguientes pares ordenados:

$(0,0)$, $(X_1, F(X_1))$, $(X_2, F(X_2))$

$F_1(x) = a_1 * x^2 + b_1 * x + c_1 \qquad x \in [X_i : X_{i+2}]$

Por lo tanto, el tamaño medio se hallará por la ecuación 6 pero los factores Q, K serán:

$$\boxed{Q_{0,1} = \frac{b_1}{a_1}} \qquad \boxed{K_{0,1} = \frac{X_1^2}{3} + \frac{Q_{0,1}}{2} * X_1}$$

- $x \in [X_{k-1} : X_k]$ (es decir "x" pertenece al intervalo de tamaños más grueso).

Entonces para este intervalo solo podrá ajustarse a una curva que será la obtenida por los siguientes pares ordenados:

$(X_{k-2}, F(X_{k-2}))$, $(X_{k-1}, F(X_{k-1}))$, $(X_k, 100\%)$

$F_{k-1}(x) = a_{k-1} * x^2 + b_{k-1} * x + c_{k-1} \qquad x \in [X_{k-2} : X_k]$

Por lo tanto, el tamaño medio se hallará por la ecuación 6 pero los factores Q, K serán:

$$\boxed{Q_{k-1,k} = \frac{b_{k-1}}{a_{k-1}}} \qquad \boxed{K_{k-1,k} = \frac{X_k^2 + X_k * X_{k-1} + X_{k-1}^2}{3} + \frac{Q_{k-1,k}}{2} * (X_k + X_{k-1})}$$

CONCLUSIONES

Este método no es práctico en el cálculo, pero podría aproximar con una mejor precisión el cálculo de parámetros estadísticos (Tamaño Medio, Varianza, etc.) de una muestra ya que estos tamaños promedios calculados están influidos por el tipo de distribución que presenta una muestra.

Si bien es cierto que no se toma en cuenta la morfología de las partículas, los metodos tradicionales (media Aritmética, Geométrica o Armónica) tampoco tienen en cuenta eso. Cabe recalcar que estos últimos sólo toman en cuenta el intervalo de tamaños para el cálculo de los tamaños promedios.

APENDICE U:
TAMPROM.M

PROGRAMA PARA OBTENER LOS TAMAÑOS PROMEDIOS DE LOS INTERVALOS

```
% Funcion para hallar el tamaño promedio de los intervalos de un Analisis
% Granulometrico.

% Ingresar Aberturas de las mallas y los Porcentajes
% Acumulados Pasantes.

% Nota Importante: Ingresar el tamaño a la cual F=100% (es decir la
% abertura de malla a la cual pasa toda la muestra.

% tmin: Abertura de la malla
% F: Fraccion o Porcentaje Acumulado Pasante

function tp=tamprom(tmin,F)

% Ordena en orden ascendente
mat=[tmin,F];
mat=sortrows(mat,1);

X=mat(:,1);
F_01=mat(:,2);

Y=[];
for i=0:length(F_01)-3
A=[ X(i+1)^2    X(i+1)   1
   X(i+1+1)^2  X(i+1+1) 1
   X(i+2+1)^2  X(i+2+1) 1];
B=[ F_01(i+1)
   F_01(i+1+1)
   F_01(i+2+1)];

Yi=A\B;
Y=[Y Yi];
end

% Duplicar la Primera y la Ultima columna
Ymod_i=[Y(:,1) Y];
Ymod_ip1=[Y Y(:,length(Y)) ];

% Hallar Qi (vector fila)
```

```
Ymod_sum=Ymod_i + Ymod_ip1;
Qi=(Ymod_sum(2,:)./Ymod_sum(1,:))';

% Hallar Ki (Xmod: Vectores columna)
Xmod_i=X(1:length(X)-1,1);
Xmod_ip1=X(2:length(X),1);

Xmod_prod=Xmod_i.*Xmod_ip1;
Xmod_sum=Xmod_i+Xmod_ip1;

Xmod_i_cuad=Xmod_i.^2;
Xmod_ip1_cuad=Xmod_ip1.^2;

Ki=(Xmod_ip1_cuad+Xmod_prod+Xmod_i_cuad)/3+Qi.*Xmod_sum/2;

%Calculo de los tamaños promedios
Xprom_1=(-Qi+sqrt(4*Ki+Qi.^2))/2;
Xprom_2=(-Qi-sqrt(4*Ki+Qi.^2))/2;

TamProm=[];
for i=1:length(Xprom_1)
   if Xprom_1(i)>Xmod_i(i) & Xprom_1(i)<Xmod_ip1(i)
      TamProm=[TamProm;Xprom_1(i)];
   else
      TamProm=[TamProm;Xprom_2(i)];
   end
end

tp=-sort(-TamProm);
```

APENDICE V:

INTERPOLACION DE LAGRANGE

Se tiene la siguiente tabla de valores de X e Y.

Tabla 2

(X)	X1	X2	X3	X4	....	X(n-1)	Xn
(Y)	Y1	Y2	Y3	Y4	....	Y(n-1)	Yn

La expresión para la interpolación es la siguiente:

Ecuación 7

$$Y = Y1 * \frac{(X - X2)(X - X3)\ldots(X - Xn)}{(X1 - X2)(X1 - X3)\ldots(X1 - Xn)} + Y2 * \frac{(X - X1)(X - X3)\ldots(X - Xn)}{(X2 - X1)(X2 - X3)\ldots(X2 - Xn)} + \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots + Yn * \frac{(X - X1)(X - X2)\ldots(X - X(n-1))}{(Xn - X1)(Xn - X2)\ldots(Xn - X(n-1))}$$

Nota: La deducción de esta formula se encuentra en el texto:
"Computaciones Graficas y Mecanicas"
Joseph Lipka