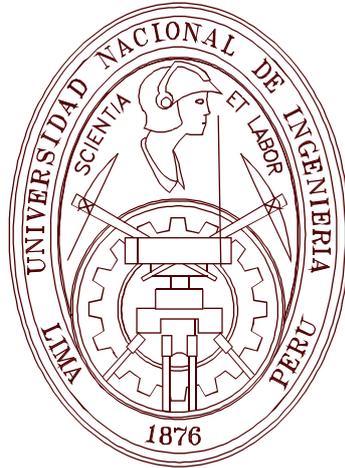


UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL
SECCIÓN DE POSTGRADO



**MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA CIRCULACIÓN DEL FLUJO DE
LA BAHÍA DE PUNO**

T É S I S

**Para optar el Grado de Maestro en Ciencias
con mención en
INGENIERÍA HIDRÁULICA**

Ing. Duberly Huisa Humpiri

Lima – Perú

2011

MODELAMIENTO MATEMÁTICO DE LA CIRCULACIÓN DEL FLUJO DE
LA BAHÍA DE PUNO

Ing. Duberly Huisa Humpiri

Presentado a la Sección de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil en
cumplimiento parcial de los requerimientos para la obtención del grado de

MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN INGENIERÍA HIDRÁULICA
DE LA
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

2011

Autor : Ing. Duberly Huisa Humpiri

Recomendado por : PhD Julio Kuroiwa Zevallos
Profesor de Posgrado FIC-UNI
Director Laboratorio Nacional de Hidráulica
Asesor de Tesis

Aceptado por : CE.Ing. Francisco Coronado del Aguila
Jefe de la Sección de Posgrado
Facultad de Ingeniería Civil - UNI.

Con mucho amor para mi esposa
Virginia y mis hijas Dayana y
Samantha, quienes iluminan mi
camino.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi esposa Virginia y mis hijas Dayana y Samantha, por la paciencia y horas que no he compartido con ellas, durante la elaboración y culminación del presente trabajo, y a mis padres Carlos y Agripina, por el apoyo que desde siempre me han brindado y a mis hermanos Carlos, Renato, Yenny y Guido.

Agradezco también, a los profesores de la sección de postgrado de la Facultad de Ingeniería Civil de la Universidad Nacional de Ingeniería, por las enseñanzas y consejos que me han servido de guía y ejemplo, en especial al PhD. Julio Kuroiwa Zevallos, por el apoyo incondicional en el asesoramiento, revisión y culminación de la presente investigación y al PhD. Hugo Scaletti Farina, por el aliento en el modelamiento numérico.

Finalmente, a mis amigos de la maestría y al personal administrativo por el apoyo brindado.

RESÚMEN

La presente investigación desarrolla el modelamiento matemático de la circulación del flujo de la bahía de Puno, producida principalmente por el efecto del viento que produce un esfuerzo de corte en la superficie de agua, así como, el efecto de la rugosidad y Coriolis producido por el movimiento de rotación de la tierra. El modelo está basado en las ecuaciones de aguas poco profundas. Para la resolución de estas ecuaciones se ha implementado un algoritmo utilizando el método de diferencias finitas, el cual se ha desarrollado en el programa MatLab.

Finalmente, se detallan las pruebas numéricas, las mediciones del campo de velocidades in situ en la bahía y además se describen los datos necesarios para el modelamiento matemático, como son: la batimetría de la bahía, rugosidad, condiciones iniciales y de frontera, con los cuales se logra realizar una primera aproximación del modelo hidrodinámico de la bahía de Puno.

ABSTRACT

The present research develops the mathematical modeling of the circulation of flow of Puno's bay, produced principally by the effect of the wind that produces a stress in the surface of water, as well as, the roughness and Coriolis's effect produced by the movement of rotation of the earth. The model is based on the shallow water equations. For the resolution of these equations an algorithm has been implemented using the finite difference method, which has developed in the MatLab program.

Finally, the numerical tests are detailed, the measurements of the speed field in situ in the bay and in addition there is described the information necessary for the mathematical modeling, since they are: the bathymetry of the bay, roughness, initial conditions and boundary conditions, with which it is achieved to realize the first approximation of the hydrodynamic model of Puno's bay.

TABLA DE CONTENIDO

RESÚMEN	I
ABSTRACT	I
TABLA DE CONTENIDO	II
1 INTRODUCCIÓN	1-1
1.1 UBICACIÓN	1-1
1.2 CLIMA	1-3
1.3 SITUACIÓN ACTUAL DE LA BAHÍA DE PUNO Y ALCANCES	1-4
1.4 ANTECEDENTES	1-5
1.5 OBJETIVOS	1-5
1.5.1 <i>Generales</i>	1-5
1.5.2 <i>Específicos</i>	1-5
1.6 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA	1-5
2 ESTADO DEL ARTE	2-8
2.1 INTRODUCCIÓN	2-8
2.2 LOS MODELOS MATEMÁTICOS EN LA DINÁMICA DE FLUIDOS COMPUTACIONAL (CFD)	2-8
2.3 MODELOS DE CIRCULACIÓN DE FLUJO EN LAGOS	2-10
2.3.1 <i>Calibración y validación de modelos matemáticos y numéricos</i>	2-10
2.3.2 <i>Soluciones numéricas de los modelos matemáticos</i>	2-11
2.4 ECUACIONES DE AGUAS POCO PROFUNDAS (EAPP)	2-11
3 MODELO HIDRODINÁMICO	3-17
3.1 GENERALIDADES	3-17
3.2 LA ECUACIÓN DE CONTINUIDAD	3-18
3.3 LAS ECUACIONES DE CANTIDAD DE MOVIMIENTO	3-21
3.3.1 <i>Fuerza de Coriolis</i>	3-28
3.3.2 <i>Esfuerzo en la superficie</i>	3-28
3.3.3 <i>Esfuerzo en el fondo</i>	3-29
4 ANÁLISIS NUMÉRICO	4-31
4.1 INTRODUCCIÓN	4-31
4.2 MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS	4-31
4.3 ESQUEMA EXPLÍCITO DE DIFERENCIAS FINITAS	4-33
4.4 SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES	4-34
4.5 CONDICIONES DE ESTABILIDAD	4-37
4.6 CONDICIONES INICIALES Y DE FRONTERA	4-38
4.7 CONDICIÓN INICIAL	4-38
4.8 CONDICIÓN DE FRONTERA	4-39
4.8.1 <i>Condición de nivel medio de agua</i>	4-39
4.8.2 <i>Condición de onda sinusoidal</i>	4-39
4.8.3 <i>Condición de frontera cerrada</i>	4-40
4.8.4 <i>Condición de frontera abierta radiación 1D</i>	4-40
4.8.5 <i>Condición de frontera asintótica</i>	4-41
4.9 INFLUENCIA DE LAS VARIABLES SOBRE LA VERIFICACIÓN	4-41
4.10 TEST DEL MODELO NUMÉRICO	4-41
4.10.1 <i>Test de flujo estacionario</i>	4-42
4.10.2 <i>Test de propagación de onda solitaria</i>	4-45
4.10.3 <i>Test de propagación de onda continua sinusoidal</i>	4-49
4.10.4 <i>Test 2d de modelo numérico</i>	4-52
4.10.5 <i>Test de flujo producido por el viento</i>	4-55
5 APLICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO	5-64

5.1	INTRODUCCIÓN	5-64
5.2	BATIMETRÍA	5-65
5.3	EL VIENTO.....	5-65
5.4	COEFICIENTE DE RESISTENCIA.....	5-66
5.5	DESCRIPCIÓN FÍSICA DEL FLUJO EN LA BAHÍA	5-67
5.5.1	<i>Método de medición de las corrientes</i>	5-68
5.5.2	<i>Descripción de los flujos superficiales</i>	5-69
5.5.3	<i>Descripción de los flujos al 60% de profundidad</i>	5-70
5.6	GEOMETRÍA Y GENERACIÓN DE LA MALLA.....	5-72
5.7	CONDICIÓN INICIAL Y DE FRONTERA	5-74
5.8	RESULTADOS	5-74
6	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	6-78
6.1	CONCLUSIONES.....	6-78
6.2	RECOMENDACIONES	6-79
	REFERENCIAS	6-80
	Anexo A	6-82
	Anexo B	6-98
	Apéndice A	6-123
	Apéndice B	6-124

Lista de Figuras

Figura 1-1 : Ubicación de la zona de estudio en América del Sur	1-1
Figura 1-2 : Ubicación de la Bahía de Puno en el Sistema TDPS.....	1-2
Figura 1-3: Ámbito de la investigación	1-3
Figura 2-1: Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de CFD....	2-9
Figura 2-2: Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de CFD..	2-12
Figura 3-1: Formas de idealizar las distribuciones de velocidades en 3D, 2D y 1D.....	3-17
Figura 3-2: Volumen de control mostrando la entrada y salida del flujo de masa.....	3-18
Figura 3-3: El problema de aguas poco profundas	3-19
Figura 3-4: Volumen de control mostrando las fuerzas en la dirección x o x_1	3-22
Figura 3-5: Relaciones empíricas para calcular el coeficiente de arrastre del viento.....	3-29
Figura 4-1: Malla x-t, para el método de diferencias finitas.	4-32
Figura 4-2: Esquema explícito de diferencias finitas en 2D, [26].	4-34
Figura 4-3: Frente de onda con incidencia oblicua en la frontera	4-40
Figura 4-4: Importancia relativa para la verificación (RMA2).	4-41
Figura 4-5: Resultados del test de flujo estacionario con $Cr=0.90$	4-44
Figura 4-6: Comportamiento del test de flujo estacionario con diferentes Cr	4-45
Figura 4-7: Dominio para el test de la onda solitaria y el punto (500, 2500).....	4-46
Figura 4-8: Test de onda solitaria variación de η en el punto (500,2500), $Cr = 0.5$	4-47
Figura 4-9: Test de onda solitaria, velocidad de U en (500,2500), con $Cr = 0.5$	4-47
Figura 4-10: Test de onda solitaria, variación de V en (500,2500), con $Cr = 0.5$	4-48
Figura 4-11: Test de onda solitaria, vista 3D de la variación de η cuando con la onda solitaria está en medio del dominio, con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 200$ s.	4-48
Figura 4-12: Test de onda solitaria, variación de η , en (500, 2500), con $Cr = 0.5$	4-49
Figura 4-13: Test de onda continua, variación de η en (500,2500), con $Cr = 0.5$	4-50
Figura 4-14: Test de onda continua, variación de U en (500,2500), con $Cr = 0.5$	4-50
Figura 4-15: Test de onda continua, variación de V en (500,2500), con $Cr = 0.5$	4-51
Figura 4-16: Test de onda continua, vista 3D de la variación de η , con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 200$ s, cuando $t=1200$ s.	4-51
Figura 4-17: Test de onda continua, variación de η en (500,2500), $Cr=0.50$, $T_p=100$...	4-52
Figura 4-18: Test de onda continua, vista 3D de la variación de η , con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 100$ s, cuando $t=1200$ s.	4-52
Figura 4-19: Test 2d, variación en 3D de η , con $Cr=0.50$	4-53
Figura 4-20: Test 2d, campo de velocidades en el $t=170$ s.	4-54
Figura 4-21: Variación del valor de η en el punto (1000,1000) en el Test 2D.....	4-54
Figura 4-22: Velocidad U y V en m/s, del test en 2D, en el punto (1000,1000).....	4-55
Figura 4-23: Velocidad U y V en m/s, del test en 2D, en el punto (500,2500).....	4-55
Figura 4-24: Dominio para el test de flujo producido por el viento.	4-56
Figura 4-25: Campo de velocidades con viento de W.....	4-57
Figura 4-26: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de W.....	4-57
Figura 4-27: Campo de velocidades con viento de E.	4-58
Figura 4-28: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de E.....	4-58
Figura 4-29: Campo de velocidades con viento de SW.....	4-59
Figura 4-30: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de SW.	4-59
Figura 4-31: Campo de velocidades con viento de NW.....	4-60
Figura 4-32: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de NW.....	4-60
Figura 4-33: Campo de velocidades con viento de W.....	4-61
Figura 4-34: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de W.....	4-61

Figura 4-35: Campo de velocidades con viento de SW.....	4-62
Figura 4-36: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de SW.	4-62
Figura 4-37: Campo de velocidades con viento de NW.....	4-63
Figura 4-38: Comportamiento de η , U y V en el punto (500, 2500), viento de NW.....	4-63
Figura 5-1: Vista panorámica de la Bahía de Puno	5-64
Figura 5-2: Batimetría de la Bahía de Puno	5-65
Figura 5-3: a) Distribución del coeficiente de Rugosidad de Manning, en la bahía de Puno. b) Rugosidad generada con el programa roughnessgrid.m, adecuado a la grilla del modelo numérico.	5-67
Figura 5-4: Zonas de la Bahía de Puno.....	5-68
Figura 5-5: Correntómetro a la deriva propuesto por el IMARPE.....	5-69
Figura 5-6: Campo de velocidades de los flujos superficiales en el centro de la Bahía de Puno, las flechas indican la dirección predominante y los números indican el punto al que corresponden, Cuadro B-4 del Apéndice B.	5-70
Figura 5-7: Campo de velocidades al 60% de la profundidad en el centro de la Bahía de Puno, las flechas indican la dirección predominante y los datos aparecen en el Cuadro B-4 del Apéndice B	5-71
Figura 5-8: a) Elementos triangulares de tres nudos utilizado para generar el grillado para el algoritmo numérico, b) Grilla generada con el programa meshtogrid.m, con $\Delta x = \Delta y = 100m$	5-73
Figura 5-9: Muestra los puntos de control que se monitorearan durante todo el cálculo.	5-75

Lista de Cuadros

Cuadro 1-1: Comparación entre tres técnicas de solución	1-6
Cuadro 2-1: Comparación de las Ecuaciones de Navier Stokes y de flujo potencial.....	2-9
Cuadro 5-1: Resumen de la primera campaña de medición del campo de velocidades...5-72	
Cuadro 5-2: Resumen de cálculos del programa ahd.f.m en la Bahía de Puno, velocidad de viento de 9 m/s.....	5-76
Cuadro 5-3: Resumen de la comparación de datos medidos y calculados en el centro de la Bahía de Puno.....	5-77

CAPÍTULO I

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Ubicación

La zona de investigación motivo del presente trabajo se ubica globalmente en el sistema formado por las cuencas hidrográficas del Lago Titicaca, Río Desaguadero, Lago Poopó y Salar de Coipasa, lo que se ha denominado "Sistema TDPS".

El sistema TDPS, es una cuenca sin salida a la vertiente del océano pacífico, ni al océano Atlántico, cuya extensión se encuentra ubicada entre Perú, Bolivia y Chile, Figura 1-1, y está delimitada geográficamente entre las coordenadas 14°03' y 20°00' de Latitud Sur y entre 66°21' y 71°07' de Longitud Oeste.

La superficie del Sistema TDPS es de 143,900 km², que comprende la parte altiplanicie de la Región de Puno (en el Perú) y los departamentos de La Paz y Oruro (en Bolivia). Esta cuenca endorreica en su parte alta confluye hacia el Lago Titicaca, Figura 1-2, en la misma figura podemos observar la ubicación de la bahía de Puno, esta bahía, no tiene ningún afluente perenne. Las características del Lago Titicaca son: Cuenca vertiente 56,270 km², Superficie media del Lago 8,400 km², Nivel medio del Lago 3,810 m.s.n.m.

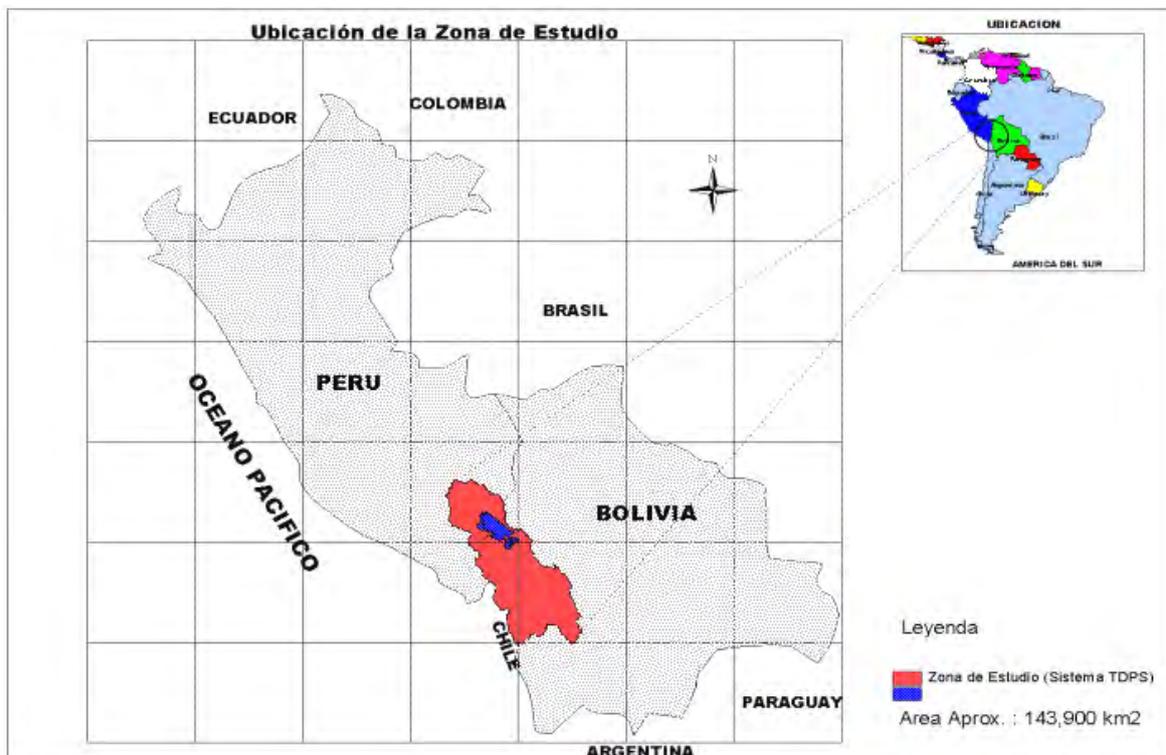


Figura 1-1 : Ubicación de la zona de estudio en América del Sur

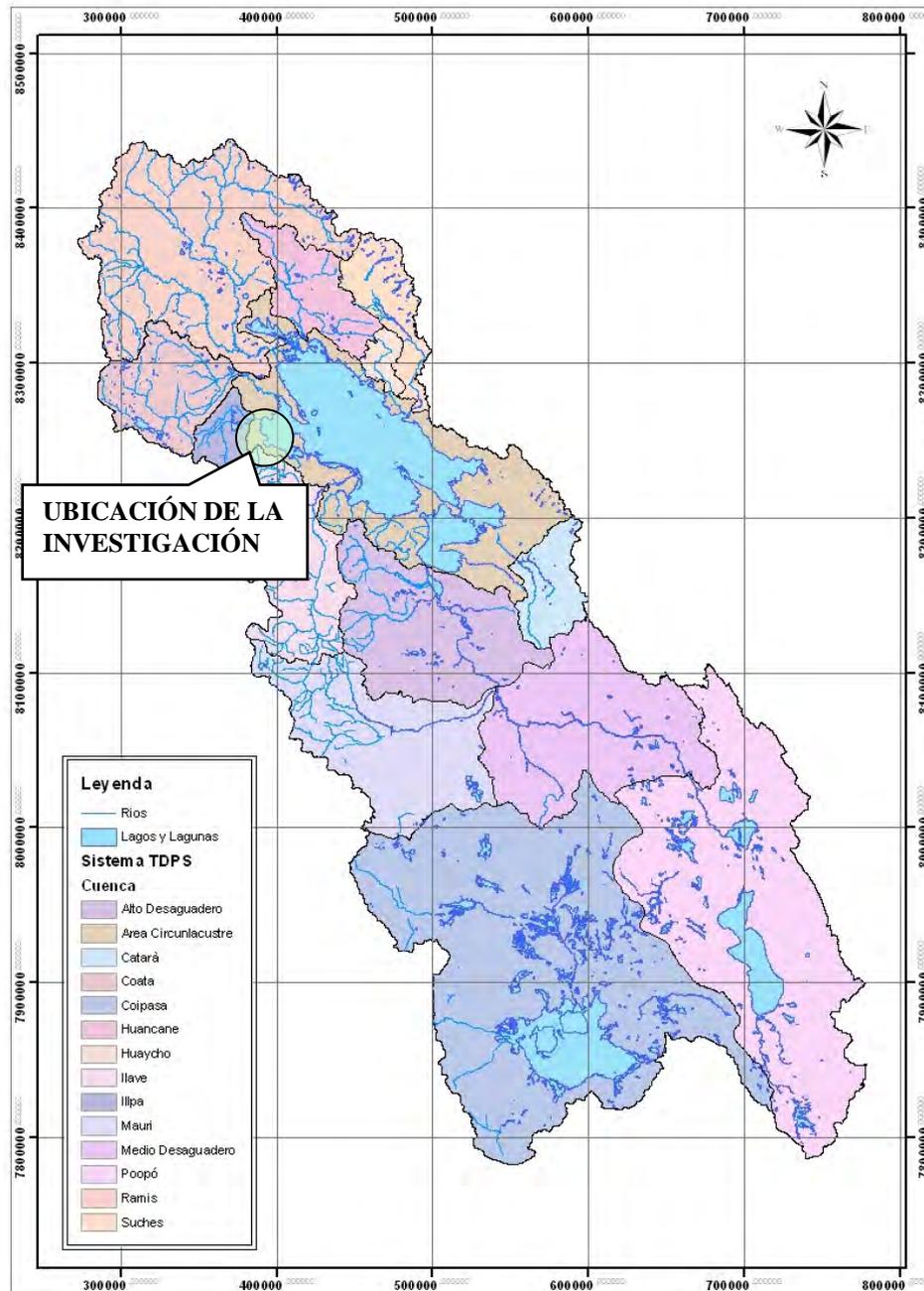


Figura 1-2 : Ubicación de la Bahía de Puno en el Sistema TDP S

La zona del estudio políticamente se encuentra ubicada en la ciudad, distrito, provincia y Región de Puno. La ciudad de Puno se desarrolla, específicamente a las orillas de la Bahía de Puno, que es parte del Lago Titicaca, sobre un terreno accidentado, con zonas bajas planas y rodeado de cerros y quebradas; cuyas cotas van de los 3 810 a 4 050 m.s.n.m.

El ámbito de la bahía está definido por las orillas de la bahía de Puno, desde

aproximadamente la isla Esteves, hasta la zona de Chimú, como se muestra en la Figura 1-3, el ámbito de la investigación tiene un área de 15.7 km² y un perímetro de 21.8 km.

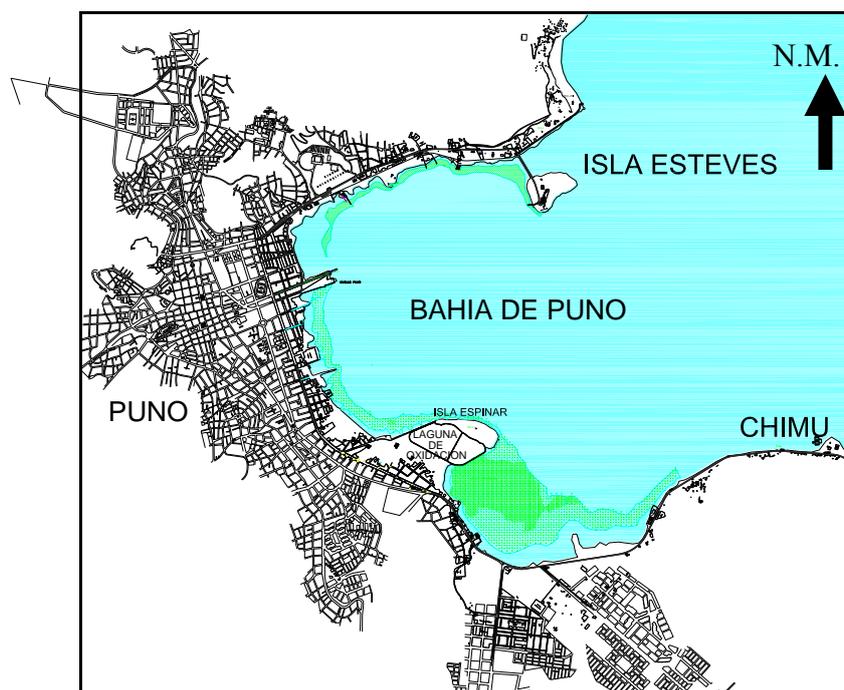


Figura 1-3: Ámbito de la investigación

1.2 Clima

La temperatura media anual en Puno es de 8.5 °C y las medias mensuales fluctúan entre 6 y 10 °C, en invierno se alcanzan mínimas de hasta -7 °C.

La ocurrencia de heladas casi diarias es un fenómeno normal en los meses de invierno, durante la noche y, sobre todo en la madrugada.

La precipitación media en Puno es de 717 mm/año. Alrededor del 75% de dicha precipitación se concentra en los meses de Diciembre a Marzo.

La dirección predominante de los vientos en Puno es la de Este y Sureste. Las velocidades del viento son en general bajas, inferiores a 9 m/s.

La radiación solar global media anual medida en la estación de Puno es de 462 calorías/cm²/día, con fluctuaciones medias mensuales entre 390 (mayo) y 599 (noviembre) calorías/cm²/día.

La radiación solar es relativamente alta y al mediodía de los meses de noviembre puede alcanzar valores próximos al máximo teórico.

La insolación media anual, varía con fluctuaciones medias mensuales entre 6,0 (enero) y 9,6 (julio) horas de sol. En los meses de verano la insolación es menor debido a la presencia de nubes por corresponder a la estación de lluvias.

1.3 Situación actual de la Bahía de Puno y alcances.

La ciudad de Puno, constituye una de las fuentes más críticas de contaminación al Lago Titicaca, debido al vertimiento de las aguas servidas sin tratamiento que representa aproximadamente el 40% del total de las aguas servidas (aproximadamente de 9000 a 12000 m³/día), en tanto el resto de 60% se vierten al Lago Titicaca parcialmente tratadas, por medio de lagunas de oxidación. El deficiente manejo y mantenimiento de las redes de alcantarillado sanitario y pluvial, incrementan la contaminación en la Bahía.

Al identificar este problema el Proyecto Especial Binacional Lago Titicaca (PELT), entre los años de 1991 y 1993, con la cooperación de la Comunidad Europea, preparó el Diagnóstico Ambiental del Lago Titicaca, que fue parte del Plan Director del Sistema TDPS.

Así mismo, durante 1996 con el apoyo de la OEA, en coordinación con la Autoridad Autónoma del Lago Titicaca (ALT) y el PELT se llevó a efecto un Estudio Integral de Factibilidad para Descontaminación y Desarrollo Socioeconómico y Eco turístico de la Bahía Interior de Puno, y en el año 1998 y 1999 se realizaron los Estudios Definitivos del Proyecto para Conducción, Tratamiento y Manejo Integral de las Aguas Servidas de la Ciudad de Puno, que disminuirá los niveles de contaminación.

Paralelamente en el año 1998, el Proyecto Especial “Programa Nacional de Agua Potable y Alcantarillado” - PRONAP, realizó el Estudio de Factibilidad para la Ampliación de los Sistemas de Agua Potable y Alcantarillado de la ciudad de Puno. Además, se presentaron los Estudios Definitivos de la Primera Etapa de Inversión del Plan de Expansión de Mínimo Costo de los Sistemas de Agua Potable y Alcantarillado Sanitario de Puno.

Los enfoques de los estudios y proyectos realizados a la fecha en la Bahía de Puno contemplan en primera instancia eliminar el ingreso de las aguas servidas a la Bahía, medida que contribuirá a la recuperación de ésta.

Sin embargo, uno de los aspectos importantes que está involucrado en la recuperación y desarrollo económico de la bahía, es evaluar la influencia del comportamiento de la circulación del flujo en la bahía (Modelo Hidrodinámico) y de la calidad de las aguas (Modelo de Transporte de contaminantes y sedimentos). En la presente tesis solo se investigará el comportamiento hidrodinámico de la bahía.

1.4 Antecedentes

En el año 1998, la Autoridad Binacional del Lago Titicaca (ALT), a través de la Organización de Estados Americanos (OEA), solicita al Centro Panamericano de Ingeniería Sanitaria y Ciencias del Ambiente (CEPIS) la elaboración de un modelo matemático de la calidad del agua de la Bahía de Puno. A raíz de ello se realiza una propuesta para la Elaboración de un Modelo Matemático de la Calidad de Agua de la Bahía de Puno – Perú, el cual no logra concretizarse quedando solo al nivel de propuesta.

A la fecha no existen investigaciones en modelos matemáticos referentes al comportamiento hidrodinámico de la Bahía de Puno.

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Generales

- Contribuir a la recuperación ambiental y uso sostenido de la Bahía de Puno y consecuentemente del Lago Titicaca.
- Contribuir al desarrollo de modelos matemáticos y soluciones numéricas para la circulación de flujo en bahías.

1.5.2 Específicos

- Identificar las variables más importantes, para evaluar el comportamiento hidrodinámico de la bahía de Puno.
- Aplicación de técnicas numéricas para la solución de las ecuaciones de aguas poco profundas.
- Realizar una primera aproximación para reproducir el comportamiento hidrodinámico de la bahía de Puno.

1.6 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

La selección o desarrollo de un modelo matemático para el caso de lagos o bahías puede dividirse en dos grupos:

- Modelos hidrodinámicos de flujo, los que permiten determinar los campos de velocidades.
- Modelos de transporte, los que permiten simular el transporte de contaminantes o sedimentos.

Los primeros son primordiales ya que sirven de base para la aplicación de un modelo de transporte. En la presente investigación solo se estudiará los modelos hidrodinámicos, y se

solucionará utilizando una técnica numérica.

Una vez implementado el algoritmo de solución, con las pruebas numéricas necesarias en casos donde se conoce el comportamiento hidrodinámico se validará y posteriormente se aplicará a la Bahía de Puno, finalmente los resultados obtenidos se comparan con las mediciones reales hechas en la bahía.

El comportamiento hidrodinámico de un flujo, pueden modelarse haciendo uso de las técnicas: Experimentales, Analíticas y Numéricas (Ver Cuadro 1-1).

Cuadro 1-1: Comparación entre tres técnicas de solución

Técnica	Ventaja	Desventajas
Experimental	<ul style="list-style-type: none"> Más realista - contiene la física correcta del flujo. 	<ul style="list-style-type: none"> Equipamiento es exigido. Problema de escala. Dificultad de medición. Costo operacional.
Analítica	<ul style="list-style-type: none"> Más general - utiliza un conjunto de ecuaciones que expresa en forma matemática un fenómeno físico. 	<ul style="list-style-type: none"> Restringida a geometría de procesos simples. Generalmente restringida a problemas lineales
Numérica (Dinámica de Fluidos Computacional - Teoría y Experimentos)	<ul style="list-style-type: none"> No esta restringido a problemas lineales. Geometría y procesos complicados. Evolución temporal del proceso. 	<ul style="list-style-type: none"> Errores de truncamiento Prescripción de condiciones de contorno apropiadas. Costo computacional.

Una ventaja de las técnicas experimentales es que contienen la física correcta del flujo. La naturaleza no hace ninguna suposición sobre el tipo de flujo y no está interesado en la potencia de la computadora que uno dispone. La desventaja sería que los experimentos son llevados a cabo por ejemplo en un túnel del viento o modelos hidráulicos a escala, y los efectos de la escala pueden volverse importantes. Por lo tanto, poner apropiadamente el correcto número de Mach, número de Reynolds o el número de Froude y posiblemente otros parámetros similares puede no ser aproximado adecuadamente.

Las técnicas analíticas tienen todo el fundamento teórico desarrollado en décadas de investigación. Estas técnicas se basan en un modelo matemático de un fenómeno físico, que es un conjunto de ecuaciones que expresa en forma matemática un fenómeno físico en cuestión. Tales ecuaciones pueden o no tener soluciones analíticas concebidas. Sin embargo, están restringidas generalmente a geometrías y procesos simples, y limitados a

problemas lineales. En tanto la complejidad de los modelos matemáticos y de los fenómenos naturales, tales como la circulación de flujo en aguas poco profundas (shallow water), hace que raramente sea posible obtener soluciones analíticas. Consecuentemente, la única salida es resolver las ecuaciones representativas del modelo matemático a través de un modelo numérico.

Las técnicas numéricas conocida como la Dinámica de Fluidos Computacional (en adelante lo denominaremos CFD, por las siglas en ingles Computational Fluid Dynamic), sobre las otras formas de modelamiento ofrecen las siguientes ventajas: La CFD nos permite resolver modelos matemáticos hasta la precisión deseada sin la limitación de las geometrías. Los cambios en los modelos que se están realizando o la forma de los objetos, bajo consideración, son relativamente fáciles de realizar. Además, es bastante sencillo incluir o eliminar términos en las ecuaciones que gobiernan el flujo y controlar la influencia de un término en particular.

Sin embargo, la calidad del resultado computacional siempre dependerá de nuestra habilidad para modelar el problema apropiadamente (interacción con la teoría). Además, la solución no solo dependerá de los parámetros físicos; si no también de los parámetros numéricos tales como: el incremento (paso) de tiempo, parámetros de relajación, la malla, y así sucesivamente. Por consiguiente, se tiene que realizar varios cálculos cambiando estos parámetros numéricos para que uno mismo determine, que la solución numérica está dominado por los parámetros físicos y no por los parámetros numéricos. Finalmente, para estar seguro que realmente se resuelve el problema, se debe observar el modelamiento numérico sobre un modelo físico que involucre las ecuaciones, por consiguiente los experimentos son necesarios (interacción con los experimentos).

CAPÍTULO II

2 ESTADO DEL ARTE

2.1 Introducción

En los recientes años, ha sido de mucho interés la solución numérica de las ecuaciones que representan el comportamiento del flujo de aguas poco profundas. La simulación del sistema de ecuaciones de agua poco profundas, puede servir para numerosos propósitos.

Primero, puede servir como instrumento para el modelamiento de fluctuaciones de mareas para aquellos interesados en capturar la energía de mareas para propósitos comerciales o seguridad sobre daños potenciales sobre objetos afectados por mareas o plataformas petroleras dentro del océano. Segundo, estas simulaciones pueden ser usadas para determinar el rango de duración de la circulación en cuerpos de agua susceptible ambientalmente. Tercero, estas simulaciones pueden ser usadas para calcular el rango de mareas y oleadas causado por eventos geológicos extremos y eventos atmosféricos.

Esta información puede ser usada para la planificación de áreas costeras. Finalmente, el modelo hidrodinámico de aguas poco profundas puede ser acoplado a un modelo de transporte, así haciendo posible estudiar opciones de remediación para: bahías y estuarios contaminados, predecir el impacto de proyectos comerciales de pesca, modelos interacción de agua fresca-salina, y estudiar la localización de descargas permisibles por municipalidades y por industrias, en responsabilidad por el control de la calidad de aguas.

2.2 Los modelos matemáticos en la Dinámica de Fluidos Computacional (CFD)

Antes de iniciar la descripción del modelo matemático, es necesario conocer las ventajas y limitaciones de estos, ya que en esta investigación se necesita un modelo matemático que describa el flujo a un cierto grado de detalle. La cantidad de detalle deseado tendrá consecuencias en la complejidad del modelo, código y la potencia de la computadora para obtener resultados dignos de confianza.

Hoy en día no sólo es la responsabilidad del analista de la dinámica de fluidos computacional, proporcionar convergencia y mallas adecuadas, es también el evaluar y seleccionar el modelo matemático escrupulosamente, para representar el modelamiento matemático requerido.

Por ejemplo, desde un punto de vista computacional, existe diferencia entre las ecuaciones completas de Navier Stokes y las de flujo potencial, las cuales en forma resumida se muestra en el Cuadro 2-1.

Aunque se observa claramente la complejidad y tamaño del problema físico, este puede ser considerablemente reducido para utilizar la aproximación de flujo potencial, sin embargo, un cuidadoso juicio es todavía necesario si este modelo simplificado capturará todas las características deseadas, para modelar adecuadamente el fenómeno físico.

Cuadro 2-1: Comparación de las Ecuaciones de Navier Stokes con las de flujo potencial [9]

	Ecuaciones Completas de Navier Stokes	Aproximación de flujo potencial
Numero de ecuaciones	>5	1
Lineal	No	Si
Dimensión de la malla	2D y 3D	2D
Capa Limite	Si considera	No considera
Turbulencia	Posiblemente	No considera

Así, en CFD uno sigue diferentes etapas que comienza con la identificación del problema físico y la selección del modelo matemático apropiado, ya sea uno existente, modificado o uno nuevo; estos modelos son generalmente enunciados en términos de ecuaciones diferenciales o integrales. Posteriormente se hace uso de una técnica numérica para la solución, luego se analiza e interpreta los resultados y de ser necesario realizar unos ajustes al modelo matemático. Esto lo podemos ver esquemáticamente en la Figura 2-1.

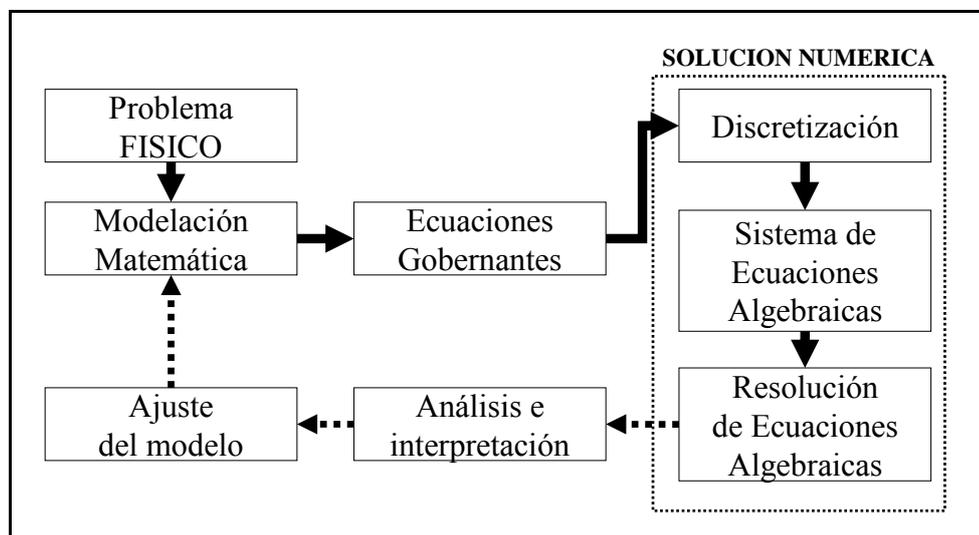


Figura 2-1: Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de CFD

(Fuente: Elaboración propia)

En los siguientes ítems se describirá alguno de los modelos matemáticos específicamente las ecuaciones de aguas poco profundas, que cumpliendo ciertas condiciones son aplicables para el modelamiento hidrodinámico de lagos y bahías.

2.3 Modelos de circulación de flujo en lagos

La decisión de seleccionar un modelo numérico, deberá estar basado en la capacidad para: verificar, calibrar y lo más importante es predecir. La verificación está referida principalmente a la simulación que es dependiente del modelo matemático. La capacidad de un modelo numérico, para verificar de esta manera, depende del tamaño de los elementos o el espaciamiento del grillado de la malla espacial y el tamaño del paso del tiempo en la simulación. Antes de proceder a la calibración, se deberá contar con una determinada malla que sea bastante fina para verificar la simulación. Una vez que esta malla fina es obtenida, la calibración no debería ser gruesa, es decir, debe contener errores de aproximación razonable. Solo cuando la malla verificada es usada, los parámetros físicos calibrados, no contendrá los efectos de los errores numéricos. Si es usada una malla más gruesa que el verificado o parámetros físicos no verdaderos, no debería ser usado en una predicción. Este punto es el más importante y a menudo pasado por alto.

2.3.1 Calibración y validación de modelos matemáticos y numéricos

La calibración se refiere a la capacidad del modelo matemático para representar las mediciones in situ, mientras que las validaciones se refieren a la capacidad del modelo para predecir el comportamiento de un fenómeno físico determinado.

Los modelos más simples y fáciles de calibrar, tienen parámetros que no son físicos, por lo tanto, no son capaces de predecir las variaciones espaciales y temporales que son críticas en bahías. Los modelos basados físicamente son los más difíciles de calibrar. Sin embargo, una vez calibrado, es el más capaz, probablemente de predecir. Uno de estos modelos hidrodinámicos son las ecuaciones de Navier-Stokes. Sin embargo, algunos tipos de modelos turbulentos deberán ser introducidos en la ecuación de Navier-Stokes. Los modelos matemáticos más utilizados ampliamente en circulación de cuerpos de agua son los basados sobre las ecuaciones de Reynolds-Navier-Stokes promediadas para flujo incompresible (Reynolds Average Incompressible Navier-Stokes, lo denominaremos RAINS). En numerosas investigaciones se tiene indicado, que una vez que las ecuaciones RAINS, son calibradas, luego se pueden usar en forma predictiva. Los modelos hidrodinámicos que actualmente recomiendan usar son aquellos que son completamente transitorios, tridimensionales (3D), sobre las ecuaciones RAINS (Gour-Tsyh, Provost, 2003). Sin embargo, también han mostrado su eficacia en algunos casos las ecuaciones de aguas poco profundas (Shallow Water Equations - SWE), que es una versión bidimensional (2D) de las ecuaciones de Navier-Stokes, siempre que el flujo sea en capas

delgadas, donde las velocidades horizontales son de una gran importancia y el problema puede aproximarse razonablemente en dos dimensiones.

2.3.2 Soluciones numéricas de los modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos hidrodinámicos deberán ser aproximados con alguna de las bondades de los métodos numéricos, para producir su solución, ya que en una aplicación real no es posible una solución analítica. Las técnicas numéricas más comunes son: el método de diferencias finitas (FDM) y el método de los elementos finitos (FEM). Los métodos de elementos espectrales (SEM) son también ampliamente usados en CFD, (Hussaini et al., 1983; Gottfried et al., 1984; Orssag, 1980; Zang et al., 1989). Una variedad de otros modelos existe, tales como el método de las características (MOC) (Schneider, 2000), el método integrado de diferencias finitas (IFDM) (Narasimahn y Witherspoon, 1976), el método de volúmenes finitos (FVM) (Jameson et al., 1981; Peric, 1985) y el método de elementos de frontera (BEM) (Brebbia et al., 1984). Solo el FEMs y FDMs pueden manejar problemas genéricos. En la presente investigación se utilizará el método de diferencias finitas.

2.4 Ecuaciones de aguas poco profundas (EAPP)

Dentro de las diferentes instituciones dedicadas al modelamiento de la circulación en lagos, podemos mencionar al NOAA (National Oceanic and Atmospheric Administration), que a través de su Laboratorio de Investigación Ambiental de Grandes Lagos, muestran que los modelos matemáticos de circulación de flujo en lagos, han sido muy exitosos en pronosticar y predecir fluctuaciones de nivel de agua a gran escala y transitorios. El modelamiento de lagos estratificados en la década de los ochenta era considerado una tecnología cercana debido a la complejidad de los modelos, la cual incluye las interacciones entre procesos térmicos e inerciales [18]. A la fecha, existen diferentes programas desarrollados para poder incluir este efecto, algunos modelos completamente estratificados en tres dimensiones han sido desarrollados, probados y aplicados.

También, es oportuno mencionar que en cuerpos de agua como lagos y mares se produce estratificación de las capas de agua. Existen dos tipos de gradientes que causan la estratificación: los físicos, producidos por la temperatura; y los químicos, producidos por la diferente composición química de las aguas superficiales y profundas. De ellos la temperatura es el factor de mayor importancia, su efecto sobre la densidad del agua es singular debido a que el agua alcanza su mayor densidad a los 4 °C. Por lo tanto, a

temperaturas mayores a 4 °C una disminución en la temperatura produce un aumento en la densidad (situación que se invierte por debajo de los 4 °C).

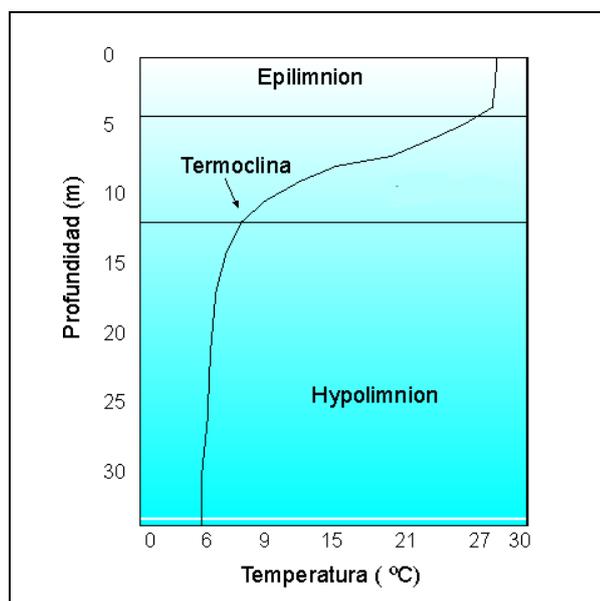


Figura 2-2: Etapas para la obtención de la solución numérica de un problema de CFD.

La Figura 2-2, muestra las variaciones de densidad en las aguas de un lago por efecto de la temperatura. Como allí puede verse la termoclina define claramente dos zonas. La superior (epilimnion), que alcanza sólo unas pocas decenas de metros, es la zona de mayor temperatura y menor densidad, donde las aguas se mezclan debido a la circulación superficial diaria inducida por olas y corrientes de superficie. A mayor profundidad la termoclina sufre una brusca inflexión y define en el fondo del lago una zona inferior (hypolimnion) con aguas más frías, densas y en ocasiones poco oxigenadas.

En vista de la basta diferencia en complejidad entre modelos de aguas mezcladas y estratificadas, nos concentraremos en esta investigación inicial solo en modelos mezclados y no estratificados.

Una descripción detallada del modelo que se utiliza en la presente investigación se describe en el Capítulo 3.

En la literatura se han encontrado una serie de ecuaciones planteadas y modificadas, así como métodos de resolución, pero que en esencia son las mismas ecuaciones, como se mostrará en este ítem. A continuación se describen algunos de estos modelos y métodos de resolución desde los más simples hasta algunos relativamente complejos:

Schwab et al. (1981), proponen la aproximación de las EAPP verticalmente-integrada, despreciando términos de aceleración no lineal y difusión horizontal de cantidad de

movimiento, difusión horizontal de impulso, comparadas a términos de Coriolis y de aceleración de primer orden. Esto impide la aplicación del modelo a zonas cercanas a la costa, donde se presenta gran esfuerzo cortante de la corriente horizontal. Aunque los modelos desarrollados con estas aproximaciones son aplicables principalmente a procesos en lagos bien mezclados, ellos pueden servir de base para desarrollar modelos totalmente estratificados y no lineales. Estas ecuaciones son:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{y} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t} - fN = -gD \frac{\partial H}{\partial x} + \rho^{-1}(\tau_x^S - \tau_x^B) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + fM = -gD \frac{\partial H}{\partial y} + \rho^{-1}(\tau_y^S - \tau_y^B) \quad (2.3)$$

Donde M, N son los componentes del vector de velocidad verticalmente-integrada en la dirección x, y, respectivamente; H es el desplazamiento de la superficie libre de su nivel medio; D es la profundidad; f es el parámetro de Coriolis; g es la constante gravitacional; ρ , es la densidad del agua (asumida uniforme); τ_x^S, τ_y^S son los componentes x, y, del vector del esfuerzo de viento; τ_x^B, τ_y^B son los componentes x, y, del vector del esfuerzo de fondo. También asumen que las fluctuaciones de superficie son pequeñas comparada con la profundidad de agua, así que D puede tomar como profundidad relativa al nivel medio de agua. Las condiciones de frontera para las Ecuaciones (2.1) - (2.3), considera que no hay velocidad transporte normal a la línea costera [18].

Ortiz y Zienkiewicz (1995) presentan un nuevo modelo numérico para las ecuaciones de onda en aguas rasas. El modelo de elementos finitos, esta basado en el método de corrección de velocidades, inicialmente propuesto por Clorin [14] para fluidos incompresibles. Dentro de una de las principales ventajas del modelo de corrección de velocidades (o splitting) es que permite elegir un incremento de tiempo en problemas de flujos transitorios solo dependiente de la velocidad de la corriente, es decir independientes de la velocidad de propagación de la onda. Para el estudio de propagación de ondas largas esta ventaja es fundamental. Las EAPP, en notación tensorial son:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial G_{ij}}{\partial x_j} + Q_i = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.5)$$

Siendo: $h=H+\eta$ altura total de agua (incógnita); H profundidad de agua a partir de un plano horizontal de referencia; η sobre elevación de la superficie libre a partir del plano de referencia; $U_i=hu_i$ incógnita; u_i componente i de la velocidad media integrada verticalmente (profundidad); $F_{ij}=hu_iu_j=U_iu_j$ componente i del vector flujo j ; \mathbf{G} flujo difusivo; p presión definida como: $p=g(h^2-H^2)/2$.

Introduciendo la velocidad de la onda definida como $c^2=dp/dh=gh$ y despreciando los términos de difusión, las ecuaciones (2.4) y (2.5) pueden escribirse como:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad (i=1,2) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial F_{ij}}{\partial x_i} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + Q_i = 0 \quad (i,j=1,2) \quad (2.7)$$

Que son ecuaciones donde se ha eliminado h , por lo tanto las incógnitas serán p y U_i , un procedimiento detallado de la demostración de las ecuaciones puede ser encontrado en [14].

Así mismo podemos describir algunos programas como: PHOENICS, que resuelve las variantes de profundidades - medias de la ecuación de Navier-Stokes basada en la premisa de que la diferencia de longitud verticales y horizontales son muy grandes, esto lo logra haciendo una analogía, de flujo de gas compresible para conseguir las componentes de la velocidad de profundidad-media, y el efecto de la pendiente de fondo es representado por un flujo fuente - fijo de movimiento en la dirección apropiada. Los esfuerzos del fondo son calculados relacionándolos a las velocidades vía el coeficiente de Chezy. Esta analogía ha tenido aplicaciones prácticas en: flujo en canales abiertos (curvas, expansiones, las reducciones, vertederos, saltos hidráulicos, rompimiento de presas, etc.) y a gran escala (ríos y la dispersión costera, flujo en estuarios, ondas de mareas, etc.).

Las ecuaciones que resuelve son:

Continuidad

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial Hu}{\partial x} + \frac{\partial Hv}{\partial y} = 0 \quad (2.8)$$

Cantidad de Movimiento en X

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Hu^2)}{\partial x} + \frac{\partial(Huv)}{\partial y} = -\frac{\partial(gH^2/2)}{\partial x} + \nu H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - gH \frac{\partial Z_b}{\partial x} - \frac{gu}{C^2} (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (2.9)$$

Cantidad de Movimiento en Y

$$\frac{\partial(Hv)}{\partial t} + \frac{\partial(Huv)}{\partial x} + \frac{\partial(Hv^2)}{\partial y} = -\frac{\partial(gH^2/2)}{\partial y} + \nu H \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - gH \frac{\partial Z_b}{\partial y} - \frac{gv}{C^2} (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (2.10)$$

Donde: h = la profundidad total (desde la superficie al fondo), en m; U,V es la velocidad de profundidad-promedió, en m/s; Z_b = la elevación de fondo sobre un nivel de referencia horizontal arbitrario, en m; g = la aceleración gravitatoria, en m/s²; ν es la viscosidad cinemática efectiva, en m²/s; C es el coeficiente de fricción de Chezy, en m^{1/2}/s. La solución se estas ecuaciones en este programa es por el método de volúmenes finitos.

El programa AQUASEA, para su modelo hidrodinámico en dos dimensiones usa las siguientes ecuaciones:

Ecuaciones de continuidad:

$$\frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) + \frac{\partial \eta}{\partial t} = Q \quad (2.11)$$

Ecuación de cantidad de movimiento:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fv - \frac{g}{HC^2} (u^2 + v^2)^{1/2} u + \frac{k}{H} W_x |W| - \frac{Q}{H} (u - u_o) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fu - \frac{g}{HC^2} (u^2 + v^2)^{1/2} v + \frac{k}{H} W_y |W| - \frac{Q}{H} (v - v_o) \quad (2.13)$$

Donde: H = h+ η , y h es profundidad media del agua (en m); η es el cambio en el nivel del agua (en m); H es la profundidad total de agua (en m); u es el componente de velocidad en la dirección x (en m/s); v es el componente de velocidad en la dirección y (en m/s); t es el tiempo (en s); Q es el caudal inducido (en m³/s); f parámetro de Coriolis; k, es parámetro de esfuerzo cortante del viento, k estará definido como $k = \rho_a C_D / \rho$; C es el coeficiente de Chezy en m^{1/2}/s; ρ_a densidad del aire en Kg/m³; C_D es el coeficiente de arrastre del viento; ρ es la densidad del fluido en kg/m³, W_x velocidad del viento en la dirección x en m/s; W_y es la velocidad del viento en la dirección y en m/s; $|W|$, es el modulo de la velocidad del viento en m/s; u_o es la velocidad del agua inducida en la dirección x en m/s; v_o , es la velocidad inducida en la dirección y, en m/s; g es la aceleración de la gravedad en m/s². En el proceso de simplificación para las ecuaciones de cantidad de movimiento, también, han asumido la variación de la presión hidrostática a través de toda la vertical. Las ecuaciones de cantidad de movimiento junto con las ecuaciones de continuidad se completan para especificar del problema de flujos en aguas

poco profunda. Este programa AQUASEA toma como base estas ecuaciones para la aproximación por el métodos de elementos finitos.

También, en la actualidad se viene utilizando diferentes software en dos dimensiones, tales como: ADCIRC-2DL(WES), MIKE 21 (DHI), HSCTM2D(EPA), TRIM (USGS), RMA-2 y RMA-4 (WES), BEST (Penn State), POM (Princeton University), MOM (NOOA), etc.

Se puede continuar detallando más modelos matemáticos utilizado por diferentes autores y software. Sin embargo, a la fecha se ha observado que todos utilizan el mismo principio para la formulación del modelo matemático y solo presentan variantes en la notación, forma de enfrentar la turbulencia viscosa y el tipo de solución numérica.

CAPÍTULO III

3 MODELO HIDRODINÁMICO

3.1 Generalidades

Los modelos hidrodinámicos, pueden describir la variación de flujos y niveles de agua en océanos, bahías y ríos, en respuesta a varias fuerzas que actúan sobre el fluido, incorporando las leyes de conservación de masa y conservación de movimiento. Estos modelos se pueden resolver en tres, dos o una dimensión.

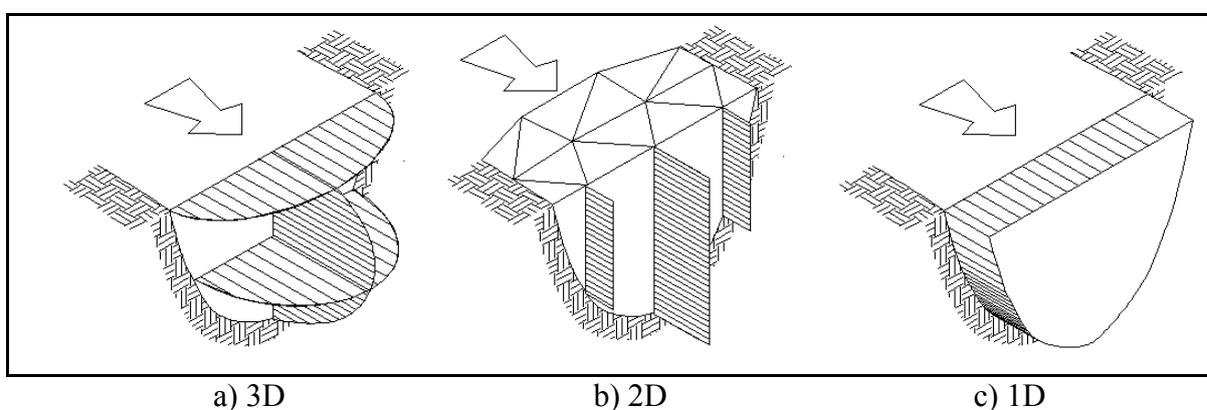


Figura 3-1: Formas de idealizar las distribuciones de velocidades en 3D, 2D y 1D

Sin embargo, como se describió en el Capítulo II, existen modelos hidrodinámicos, donde las velocidades horizontales son de una gran importancia respecto a las verticales y el problema puede aproximarse razonablemente en dos dimensiones. El sistema de ecuaciones que gobierna dicha condición de flujo es conocido comúnmente como las “Ecuaciones de Aguas Poco Profundas”, que en adelante las referiremos como EAPP (a estos flujos también se les considera como flujo en capas delgadas). Para obtener resultados razonables, es necesario que el flujo y la geometría del fondo, cumplan con las condiciones que se describen a continuación [27]:

- Una superficie libre.
- La topografía del fondo sea suave y que no cambie demasiado rápido. esto es, el ángulo de inclinación del fondo, debe ser: $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha)$. Para este caso el ángulo máximo de inclinación debería estar en el orden de 10° o 18 %
- Pequeña relación entre la longitud verticales (H) y horizontal (L), ($H \ll L$).
- La longitud horizontal entre 1 m y 1000 km.

- e) Distribución de presión hidrostática en la vertical.
- f) Fluido incompresible y homogéneo.
- g) Fluido Newtoniano (isotrópico lineal).
- h) Flujo no estratificado (bien-mezclado en profundidad).

En estos casos la variación vertical del flujo no es importante y las ecuaciones y variables promedios de la vertical describirán adecuadamente el comportamiento físico.

A continuación se hará una demostración de las EAPP, partiendo de las ecuaciones de Navier-Stokes presentada en su forma incompresible e isoterma [28], que gobiernan la descripción de las ecuaciones de continuidad y la ecuación de conservación de movimiento, los que mutuamente se complementarán para la resolución del sistema. En los siguientes ítems se desarrollará separadamente la ecuación de continuidad y la ecuación de cantidad de movimiento:

3.2 La ecuación de Continuidad

Si ρ es la densidad del fluido, entonces, la continuidad es el equilibrio de la masa ρu_i entrando y saliendo de un volumen unitario, como se muestra en la siguiente figura.

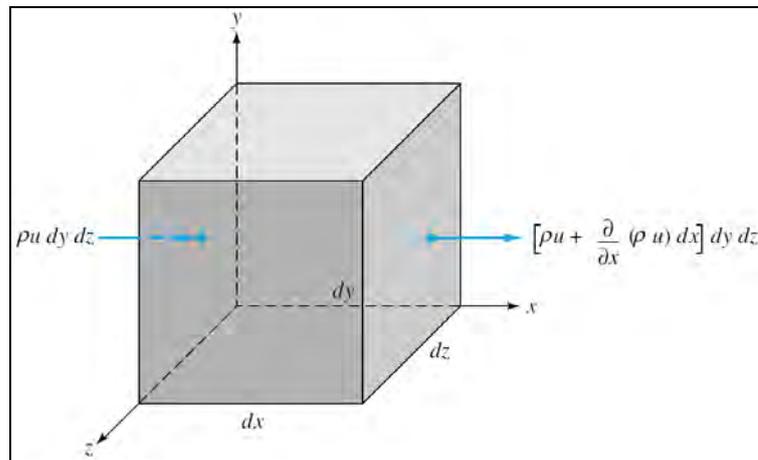


Figura 3-2: Volumen de control mostrando la entrada y salida del flujo de masa en la cara x.

El que requiere que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla^T(\rho \mathbf{u}) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (3-1)$$

Al considerar el fluido incompresible la ecuación (3-1), resulta:

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial x_i} \equiv \nabla^T(\mathbf{u}) = 0 \quad (3-2)$$

Ahora efectuaremos una aproximación adicional, en la ecuación fundamental (3-2) se integran con la coordenada de profundidad x_3 , de donde obtendremos las ecuaciones

típicas de continuidad que gobiernan sobre la profundidad. Por consiguiente integrando en la dirección x_3 , se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_3 + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_3 + \int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = 0 \quad (3-3)$$

Como las velocidades u_1 y u_2 son incógnitas y no son uniformes, como se muestra en la Figura 3-3, es conveniente en este momento introducir la noción de velocidad media definida como:

$$\int_{-h}^{\eta} u_i dx_3 = U_i \cdot (h + \eta) \equiv U_i H \quad i=1,2 \quad (3-4)$$

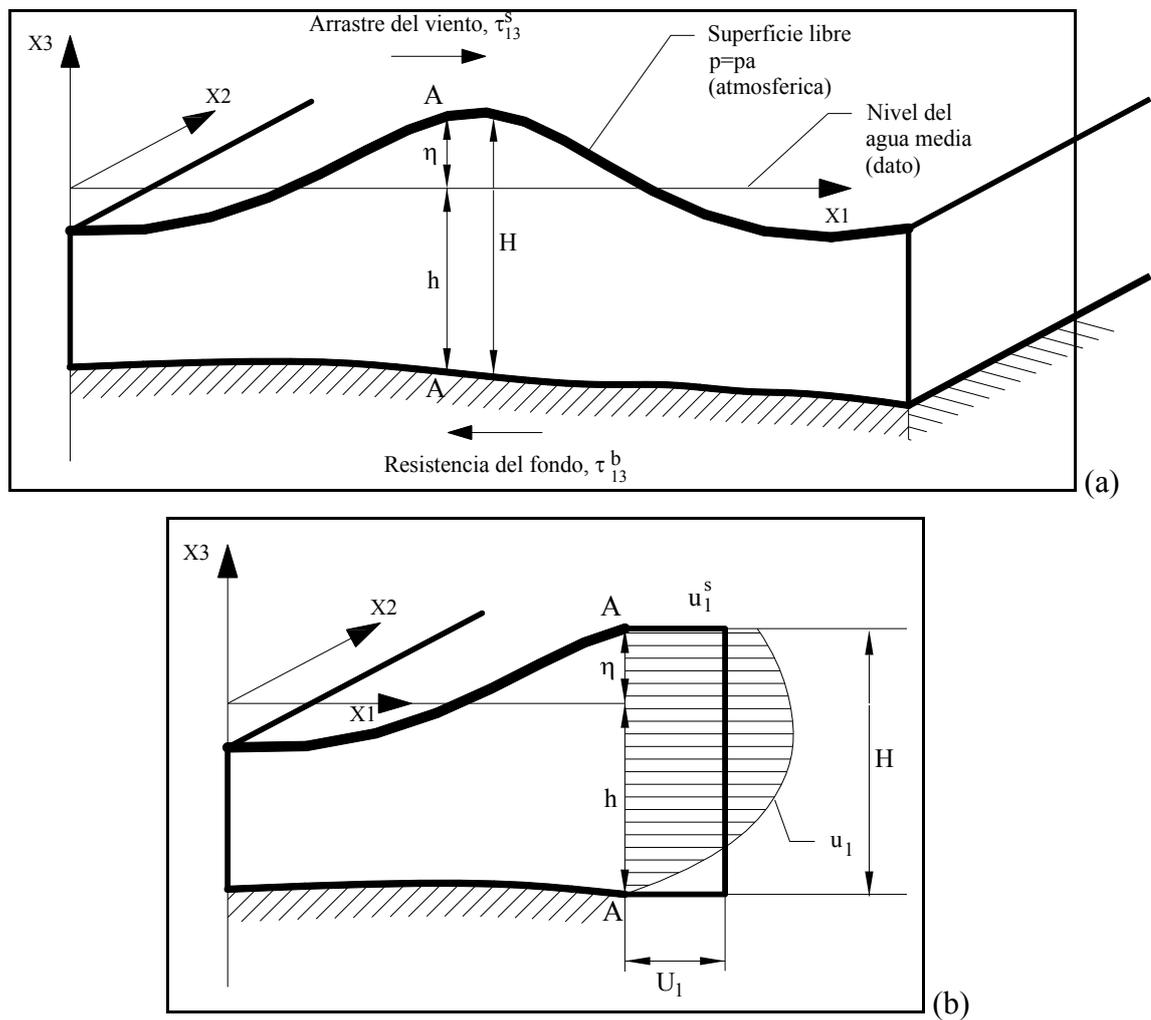


Figura 3-3: El problema de aguas poco profundas. a) Coordenadas; b) Distribución de la velocidad y velocidad media

Recordaremos ahora la regla Leibnitz de las integrales, por la cual, para cualquier función $F(r,s)$ puede escribirse:

$$\int_{-a}^b \frac{\partial F(r,s)}{\partial s} dr \equiv \frac{\partial}{\partial s} \int_{-a}^b F(r,s) dr - F(b,s) \frac{\partial b}{\partial s} + F(a,s) \frac{\partial a}{\partial s} \quad (3-5)$$

También, es necesario introducir en esta etapa algunas condiciones de contorno o de borde que caracterizan a las EAPP las que permitirán reducir aún más la ecuación de continuidad indicada en (3-1).

En la superficie libre, la velocidad vertical u_3 puede relacionarse de manera natural con la derivada temporal total de la elevación de la superficie, es decir:

$$u_3^s = \frac{D\eta}{dt} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_1^s \frac{\partial \eta}{\partial x_1} + u_2^s \frac{\partial \eta}{\partial x_2} \quad (3-6)$$

Donde, $s=x_3=\eta$, similarmente en el fondo, con $b=x_3=-h$, se tiene:

$$u_3^b = \frac{Dh}{dt} \equiv \frac{\partial h}{\partial t} + u_1^b \frac{\partial h}{\partial x_1} + u_2^b \frac{\partial h}{\partial x_2} \quad (3-7)$$

Ya que la profundidad total h , naturalmente, no varía con el tiempo. Más aún, si se supone que para un flujo viscoso no ocurren deslizamientos en el fondo, entonces:

$$u_1^b = u_2^b = 0 \quad (3-8)$$

y también por continuidad

$$u_3^b = 0 \quad (3-9)$$

Las ecuaciones (3-6) al (3-9) también se conocen como condiciones de contorno cinemática de superficie libre y fondo.

Partiendo de la ecuación (3-5) puede escribirse los dos primeros términos de la ecuación (3-3) e introduciendo la ecuación (3-4) y (3-8) se obtiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dx_3 = \frac{\partial(U_i H)}{\partial x_i} - u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (3-10)$$

Con $i = 1,2$. El tercer término de (3-3) por simple integración esta dado por:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = u_3^s \quad (3-11)$$

Utilizando la ecuación (3-6), se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial x_i} \quad (3-12)$$

Con $i = 1,2$. Reemplazando (3-10) y (3-12) en (3-3), se obtiene la ecuación de continuidad media sobre el espesor, el cual se muestra en notación tensorial.

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(U_i.H)}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U_i.H)}{\partial x_i} = 0 \quad (3-13)$$

Y también escribiéndolo en coordenadas cartesianas, se tiene:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial(U.H)}{\partial x} + \frac{\partial(V.H)}{\partial y} = 0 \quad (3-13.a)$$

ó

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(U.H)}{\partial x} + \frac{\partial(V.H)}{\partial y} = 0 \quad (3-13.b)$$

Donde:

$h = h(x,y)$: profundidad media del agua, en m.

$\eta = \eta(x,y,t)$: cambio en el nivel del agua, en m.

$H = h + \eta$: profundidad total de agua, en m.

$U = U(x,y,t)$: Componente de velocidad en la dirección x, en m/s.

$V = V(x,y,t)$: Componente de velocidad en la dirección y, en m/s.

x, y : Coordenadas cartesianas.

t : tiempo (en s).

Estas ecuaciones también son conocidas como las ecuaciones de continuidad integradas verticalmente. En la bibliografía esta ecuación es estándar para este tipo de análisis en coordenadas cartesianas.

3.3 Las ecuaciones de cantidad de movimiento

También conocidas como las ecuaciones de equilibrio dinámico, indica que, el momento cinético en la dirección j, esto es, $(\rho u_j)u_i$ saliendo y entrando de un volumen de control, tiene que estar en equilibrio, con las tensiones σ_{ij} (se muestran en la Figura 3-4), y las fuerzas de masa ρf_j .

Esto conduce a la famosa ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial t} + \frac{\partial[(\rho u_j)u_i]}{\partial x_i} - \frac{\partial(\sigma_{ij})}{\partial x_j} - \rho f_j = 0 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-14)$$

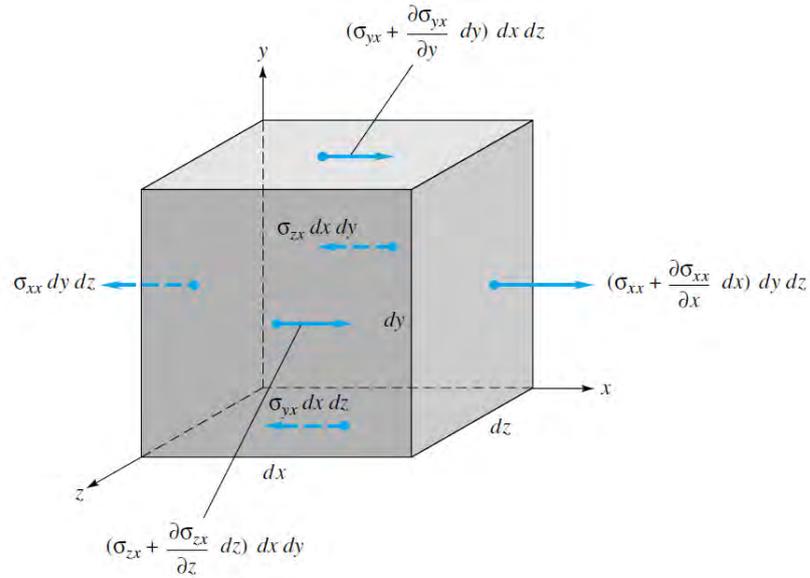


Figura 3-4: Volumen de control mostrando las fuerzas en la dirección x o x_1 .

Reemplazando las relaciones de las Velocidades de Deformación – Esfuerzos, que está dada por:

$$\sigma_{ij} = \tau_{ij} - \delta_{ij}p \quad (3-15)$$

$$\tau_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] \quad (3-16)$$

En el libro de Daily – Harleman, 1966 [05], se da una demostración completa de estas relaciones, para un fluido newtoniano.

Reemplazando las ecuaciones (3-15) y (3-16) en (3-14), y considerando un fluido incompresible, se tiene que:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)}{\partial x_i} - f_i = 0 \quad (3-17)$$

Con $i,j=1,2,3$. De la ecuación anterior puede escribirse tres ecuaciones en forma cartesiana:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial(u_1 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_1 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_1 u_3)}{\partial x_3} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\tau_{11})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\tau_{12})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\tau_{13})}{\partial x_3} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)}{\partial x_1} - f_1 = 0 \quad (3-17.a)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial(u_2 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_2 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_2 u_3)}{\partial x_3} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\tau_{21})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\tau_{22})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\tau_{23})}{\partial x_3} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)}{\partial x_2} - f_2 = 0 \quad (3-17.b)$$

$$\frac{\partial u_3}{\partial t} + \frac{\partial(u_3 u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(u_3 u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(u_3 u_3)}{\partial x_3} - \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\tau_{31})}{\partial x_1} + \frac{\partial(\tau_{32})}{\partial x_2} + \frac{\partial(\tau_{33})}{\partial x_3} \right] + \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)}{\partial x_3} - f_3 = 0 \quad (3-17.c)$$

Antes de efectuar la integración vertical de la ecuación (3-17), adoptaremos una simplificación más. Para el caso de aguas poco profundas el que esquemáticamente se muestra en la Figura 3-3, y en donde la dirección x_3 es vertical, la velocidad u_3 es pequeña y las correspondientes aceleraciones son despreciables, por lo tanto, las ecuaciones de cantidad de movimiento en la dirección vertical (3-17.c) puede reducirse, a:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3} + g = 0 \quad (3-18)$$

Donde, $f_3 = -g$, es la fuerza de la aceleración de la gravedad, después de la integración de (3-18) se obtiene:

$$p = \rho g(\eta - x_3) + p_a \quad (3-19)$$

Se observa en esta última ecuación que para $x_3 = \eta$, la presión es atmosférica (p_a), en ocasiones puede no ser constante sobre el dominio del agua y por lo tanto influenciar su movimiento, para nuestro caso la presión atmosférica se considera constante, por tratarse de unos cuantos kilómetros a modelar (recomendable que la longitud horizontal sea máximo 1000 km, [27]).

Esta simplificación que se ha aplicado a la ecuación (3-17.c) con el cual se ha obtenido (3-19), se le conoce como aproximación hidrostática (Wang y Connor, 1975).

Ahora realizaremos la integración sobre el espesor de agua, similar al realizado en la ecuación de continuidad, por lo tanto, reordenando e integrando (3-17), se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right] dx_3 = \int_{-h}^{\eta} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\tau_{ij})}{\partial x_j} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p)}{\partial x_i} + f_i \right] dx_3 \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-20)$$

Usando la regla de Leibnitz para la integración del primer termino del lado izquierdo de (3-20), se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial u_i}{\partial t} dx_3 = \frac{\partial(U_i H)}{\partial t} - u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial t} + \underbrace{u_i^b}_{=0} \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad i = 1, 2 \quad (3-21)$$

En esta última ecuación se ha despreciado la aceleración en la dirección x_3 . Para el segundo término del lado derecho de (3-20), integrando solo para $i, j = 1, 2$, se tiene que:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} dx_3 = \frac{\partial(U_i U_j H)}{\partial x_j} - \underbrace{u_i^s u_j^s}_{=0} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} + \underbrace{u_i^b u_j^b}_{=0} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad (3-22)$$

Completando la integración del segundo término, en forma explícita en la dirección x_3 , esta dado por simple integración:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(u_i u_3)}{\partial x_3} dx_3 = \underbrace{u_i^s u_3^s}_{=0} - \underbrace{u_i^b u_3^b}_{=0}$$

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(u_i u_3)}{\partial x_3} dx_3 = u_i^s \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_i^s u_j^s \frac{\partial \eta}{\partial x_j} \quad (3-23)$$

Como podrá observarse se ha aplicado las condiciones de borde cinemática y reemplazando las ecuaciones (3-6), (3-8), y (3-9) en (3-23).

Ahora, sumando las ecuaciones (3-21), (3-22) y (3-23), el lado izquierdo de la ecuación (3-20) resulta:

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right] dx_3 = \frac{\partial(U_i H)}{\partial t} + \frac{\partial(U_i U_j H)}{\partial x_j} \quad i, j=1,2 \quad (3-24)$$

También, desarrollando y utilizando la ecuación de continuidad (3-13), la ecuación (3-24), se puede escribir, de la siguiente forma:

$$\int_{-h}^{\eta} \left[\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} \right] dx_3 = H \left[\frac{\partial(U_i)}{\partial t} + U_j \frac{\partial(U_i)}{\partial x_j} \right] \quad i, j=1,2 \quad (3-25)$$

También nótese que el termino entre corchetes del lado derecho de (3-25) tiene la forma de la derivada temporal total, entonces se puede escribir como $H \frac{DU_i}{Dt}$.

Ahora, de modo similar para los términos del lado derecho de (3-20), se tiene para el primer término:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} dx_3 = \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 - \left(\tau_{ij} \frac{\partial(\eta)}{\partial x_j} \right)_{x_3=\eta} + \left(\tau_{ij} \frac{\partial(h)}{\partial x_j} \right)_{x_3=-h} \quad i, j=1,2 \quad (3-26)$$

y para la dirección x_3 , por simple integración:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{i3}}{\partial x_3} dx_3 = (\tau_{i3})_{x_3=\eta} - (\tau_{i3})_{x_3=-h} \quad (3-27)$$

Sumando (3-26) y (3-27), se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j} dx_3 = \frac{\partial}{\partial X_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 - \left(\tau_{ij} \frac{\partial(\eta)}{\partial X_j} \right)_{x_3=\eta} + (\tau_{i3})_{x_3=\eta} + \left(\tau_{ij} \frac{\partial(h)}{\partial X_j} \right)_{x_3=-h} - (\tau_{i3})_{x_3=-h} \quad (3-28)$$

Recordando que la ecuación (3.20) y por consiguiente (3.28), están concebidas dentro del medio continuo, es necesario relacionar los esfuerzos internos con los esfuerzos de las fronteras. Para ello será necesario emplear las ecuaciones de equilibrio en la frontera del dominio, que está dado por, $\tau_{ij} n_j = \tau_i$, lo que indica que las fuerzas internas τ_{ij} se equilibran con las fuerzas de frontera τ_i . En nuestro caso estas fronteras son: la superficie libre y el fondo, entonces se tiene que:

$$-(\tau_{ij})_{x_3=\eta} \frac{\partial(\eta)}{\partial X_j} + (\tau_{i3})_{x_3=\eta} = \tau^s_{3i} \Rightarrow \tau^s_{ij} n_j = \tau^s_{3i} \quad (3-29.a)$$

$$(\tau_{ij})_{x_3=-h} \frac{\partial(h)}{\partial X_j} - (\tau_{i3})_{x_3=-h} = -\tau^b_{3i} \Rightarrow \tau^b_{ij} n_j = -\tau^b_{3i} \quad (3-29.b)$$

Donde, se obtiene que para la superficie $n_j = (-\partial\eta/\partial x_1, -\partial\eta/\partial x_2, 1)$ y para el fondo $n_j = (\partial h/\partial x_1, \partial h/\partial x_2, -1)$. Vale indicar, que el signo negativo del término $-\tau^b_{3i}$, de (3.29.b) indica que esta fuerza actuará en sentido contrario a la fuerza de superficie τ^s_{3i} , luego, reemplazando (3-29) en (3-28) se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial X_j} dx_3 = \frac{\partial}{\partial X_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 + \tau^s_{3i} - \tau^b_{3i} \quad (3-30)$$

Para el segundo término del lado derecho de (3-20), utilizando (3-18), y simplificando se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(p)}{\partial X_i} dx_3 = H \frac{\partial(p_a)}{\partial X_i} + \rho g H \frac{\partial(\eta)}{\partial X_i} + \frac{1}{2} g H^2 \frac{\partial(\rho)}{\partial X_i} \quad (3-31)$$

Como ya se menciono anteriormente la presión atmosférica será constante en toda la superficie y la densidad del fluido también, por consiguiente la última ecuación se reduce a:

$$\int_{-h}^{\eta} \frac{\partial(p)}{\partial X_i} dx_3 = \rho g H \frac{\partial(\eta)}{\partial X_i} \quad (3-32)$$

Ahora integrando en el espesor el tercer término del lado derecho de (3-20), que corresponde a la fuerza de Coriolis, que viene a ser una fuerza de cuerpo, se tiene:

$$\int_{-h}^{\eta} f_i dx_3 = f_i H \quad (3-33)$$

Reemplazando las ecuaciones (3-25), (3-30), (3-32) y (3-33) en (3-20) y reordenando, se tiene que:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + f_i + \frac{1}{H\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 + \frac{1}{H\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) \quad (3-34)$$

Esta formidable ecuación, viene a ser la ecuación de cantidad de movimiento media sobre el espesor. Aunque estas ecuaciones se ven complejas, el fenómeno que se pretende describir es aún más complejo. Por lo general se emplean modelos empíricos de esfuerzos turbulentos. Se emplea una relación para correlacionar estos esfuerzos con gradientes de velocidad.

Evidentemente se requiere mucho trabajo experimental y analítico para desarrollar un modelo de ecuación diferencial turbulento. En la actualidad, la modelación de la turbulencia se encuentra en desarrollo y cada día aparecen nuevas propuestas que son verificadas con datos de campo o laboratorio. En la actualidad sin embargo, la mayoría de los cálculos ingenieriles de flujo turbulento se realizan con métodos del volumen de control con correlaciones de datos experimentales para el esfuerzo cortante y la pérdida de energía mecánica [8]. En la literatura proponen diversas formas semi-empíricas para modelar la turbulencia, entre algunos podemos mencionar:

- Dakhoul y Bedford, 1986, (Procedimiento de filtrado), [23].

$$\tau_{ij} = \rho \left[K_{ij} \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial U_j}{\partial t} \right] \quad (3-35)$$

Donde: λ_k y λ_t , se definen como las mínimas escalas espaciales y temporales de filtrado respectivamente; K_{ij} , es llamado coeficiente de viscosidad turbulenta, estos parámetros, tiene que ser calibrados en el modelo numérico. Integrando verticalmente, se tiene:

$$\frac{1}{H\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ H \left[(K_{Hij} + K_{Vij}) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{\lambda_k^2}{12} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\lambda_t^2}{12} \frac{\partial U_i}{\partial t} \frac{\partial U_j}{\partial t} \right] \right\} \quad (3-36)$$

El K_{Hij} es denominado coeficiente de viscosidad turbulenta horizontal y K_{Vij} coeficiente de dispersión vertical de cantidad de movimiento. Como la ecuación es integrada verticalmente apenas actúan en el plano horizontal los términos de filtrado.

- Zienkiewicz y Taylor, 1994, [28].

$$\tau_{ij} = \mu_H \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) \quad (3-37)$$

Estas tensiones dentro de la integral son aproximadas de la siguiente manera:

$$\frac{1}{H\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 \approx \frac{1}{\rho} \mu_H \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{\rho} \tau_{ij} \quad (3-38)$$

Donde: μ_H es el coeficiente de viscosidad de turbulencia media

- Sundararaghanvan y Ertekin, 1997, [25].

$$\frac{1}{H\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_{-h}^{\eta} \tau_{ij} dx_3 \approx E_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} \quad (3-39)$$

Donde: E_i es el coeficiente de dispersión en las direcciones $i=1,2$. El que tiene que ser calibrado.

Por lo tanto la ecuación de cantidad de movimiento resultaría por ejemplo:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + f_i + E_j \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{H\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) \quad (3-40)$$

En nuestro caso se hará una primera aproximación, en la que no se considerará la viscosidad turbulenta; tan solo, se incluirá la condición de flujo turbulento, en el coeficiente de resistencia de Chezy, ya que este coeficiente ha sido desarrollado bajo la consideración unidimensional de flujo e implícitamente lleva el efecto de turbulencia [26].

Entonces nuestra ecuación de cantidad de movimiento se simplificará:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x_i} + f_i + \frac{1}{H\rho} (\tau_{3i}^s - \tau_{3i}^b) \quad (3-41)$$

En coordenadas cartesianas las ecuaciones de cantidad de movimiento estarán dadas por:

En la dirección x:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + f_x + \frac{1}{H\rho} (\tau_x^s - \tau_x^b) \quad (3-42)$$

En la dirección y:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} + f_y + \frac{1}{H\rho} (\tau_y^s - \tau_y^b) \quad (3-43)$$

En las ecuaciones 3-42 y 3-43, solo nos falta definir: la fuerza de Coriolis (f_x y f_y), el esfuerzo sobre la superficie (τ_x^s y τ_y^s) y sobre el fondo (τ_x^b y τ_y^b).

3.3.1 Fuerza de Coriolis

La fuerza de Coriolis es una fuerza de cuerpo o masa, importante en problemas de gran tamaño, en la ecuación (3-42) y (3-43), está definida como:

$$\begin{aligned} f_x &= fV \\ f_y &= -fU \end{aligned} \quad (3-44)$$

Donde, f es el parámetro de Coriolis dado por, $f = 2\Omega \sin\varphi$; Ω , es la velocidad de rotación o velocidad angular de la tierra, que es de 2π rad en 24 horas igual a $7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, y φ es la latitud geográfica positivo para el hemisferio norte y negativo para el hemisferio sur [7]. Para mayor detalle ver Apéndice A.

3.3.2 Esfuerzo en la superficie

El esfuerzo en la superficie estará dado principalmente por el esfuerzo del viento, la ecuación experimental del esfuerzo de viento esta dado por:

$$\begin{aligned} \tau_{3i}^s &= C_D \rho_a W_{10} W_{10i} \\ \text{Luego :} & \\ \tau_x^s &= C_D \rho_a W_{10} W_{10x} \\ \tau_y^s &= C_D \rho_a W_{10} W_{10y} \end{aligned} \quad (3-45)$$

y,

$$W_{10} = \sqrt{W_{10x}^2 + W_{10y}^2} \quad (3-46)$$

Donde C_D , es el coeficiente de arrastre del viento; ρ_a es la densidad del aire (1.247 Kg/m^3 a 10°C); W_{10x} y W_{10y} son los componentes de la magnitud del viento medida a 10m sobre el nivel de la superficie libre, en m/s; W_{10} es la magnitud de la velocidad de viento, en m/s.

Para calcular el coeficiente de arrastre, la bibliografía propone diferentes ecuaciones empíricas establecidas en laboratorio y campo, las que se describen:

Wang – Connor (1975)

$$C_D = (1.1 + 0.0536W_{10})10^{-3} \quad (3-47)$$

Garratt (1977)

$$C_D = (0.75 + 0.067W_{10})10^{-3} \quad 4 < W_{10} < 21 \quad (3-48)$$

$$C_D = 1.0 \times 10^{-3} \quad 4 \leq W_{10} \quad (3-49)$$

Wu (1982)

$$C_D = (0.8 + 0.065W_{10})10^{-3} \quad (3-50)$$

Safaie (1984)

$$C_D = 5.2 \times 10^{-4} (W_{10})^{0.44} \quad 4 < W_{10} < 34 \text{ m/s} \quad (3-51)$$

Todas las ecuaciones en conjunto se muestran en la Figura 3-5, se muestra una comparación gráfica de todas estas relaciones, como podrá observarse, Garratt, Wu y Safeie, no muestran mucha variación con velocidades mayores a 4 m/s, En esta tesis se empleará la ecuación de Garratt.

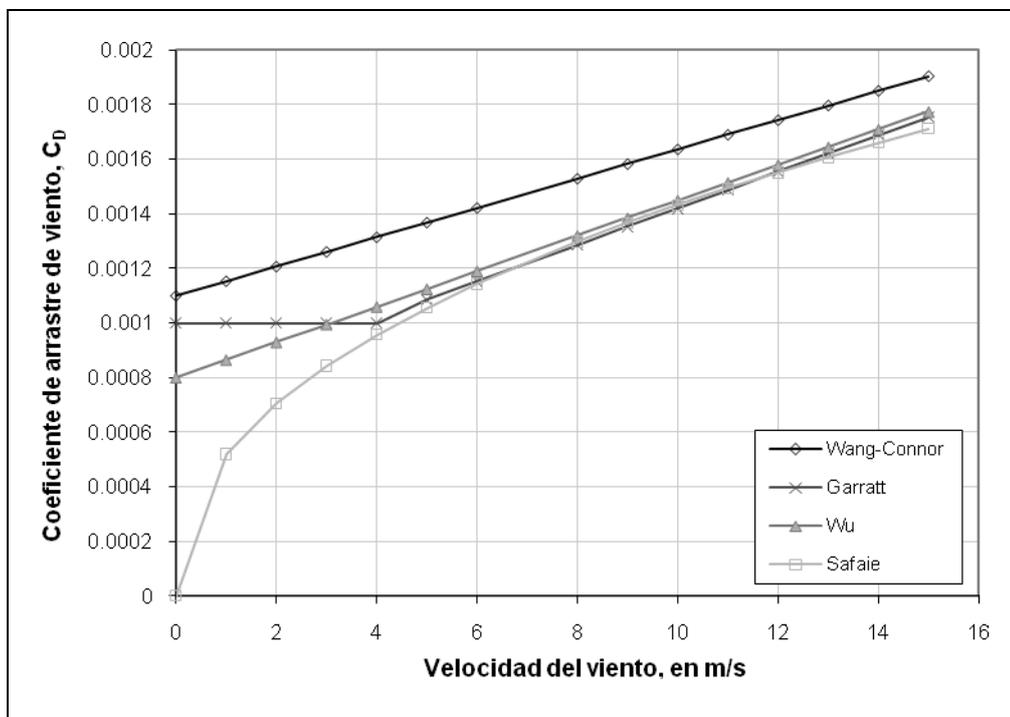


Figura 3-5: Comparación de las relaciones empíricas para calcular el coeficiente de arrastre del viento.

3.3.3 Esfuerzo en el fondo

Para el esfuerzo en el fondo se aplicará la usual ley cuadrática, Dronker (1964) y Daily-Harleman (1966).

$$\tau_{3i}^b = \frac{\rho g}{C^2} (U_i U_i)^{1/2} U_i$$

De donde :

$$\tau_x^b = \frac{\rho g}{C^2} (U^2 + V^2)^{1/2} U \quad (3-52)$$

$$\tau_y^b = \frac{\rho g}{C^2} (U^2 + V^2)^{1/2} V$$

$$C = \frac{H^{1/6}}{n} \quad (3-53)$$

Donde C y n son los coeficientes de resistencia de Chezy y Manning respectivamente.

CAPITULO IV

4 ANÁLISIS NUMÉRICO

4.1 Introducción

El modelo matemático explicado en el Capítulo III, hasta ahora, es un sistema de ecuaciones diferenciales parciales continuas que expresan en forma matemática el fenómeno físico en cuestión. Tales ecuaciones pueden o no tener soluciones analíticas conocidas, sin embargo, debido a la usual complejidad de los modelos matemáticos de fenómenos naturales, tales como la circulación de flujo de aguas poco profundas, raramente es posible obtener soluciones analíticas. Consecuentemente, la única alternativa es resolver las ecuaciones representativas del modelo matemático a través de un modelo numérico.

Para un modelo matemático dado, expresado a través de sus ecuaciones gobernantes hay una gran variedad de modelos numéricos posibles. Por ejemplo, hay numerosas maneras de dar una solución numérica de las EAPP, que se mencionaron en el Capítulo II.

4.2 Método de Diferencias Finitas

Para resolver numéricamente cualquier ecuación diferencial parcial en un campo continuo en espacio-tiempo, puede ser reemplazado por un dominio discreto. Nosotros aplicaremos el teorema de Taylor, para definir sus derivadas en el dominio discreto.

Supongamos que la función $f(x)$ y sus derivadas son finitas y continuas; luego si $f(x)$ está dado en el punto x , puede ser definido en el punto $x+\Delta x$ por la serie de Taylor, como se muestra a continuación.

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x^4) \quad (4-1)$$

y en el punto $x-\Delta x$, por la serie,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - \Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x^4) \quad (4-2)$$

De la ecuación (4.1), y despreciando los términos de orden superior, resulta la primera derivada de $f(x)$ en el punto x , llamada derivada hacia delante, esto es:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4-3)$$

Y de (4.2) la primera derivada hacia atrás de $f(x)$ en el punto x , es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} + O(\Delta x) \quad (4-4)$$

También, sustrayendo las dos series dadas, se obtiene que:

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{2\Delta x^3}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + O(\Delta x^5) \quad (4-5)$$

Y así obtenemos la llamada primera derivada central de $f(x)$ en el punto x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} + O(\Delta x^2) \quad (4-6)$$

Las tres expresiones 4-3, 4-4 y 4-6, no solo difieren en la forma si no también en la aproximación u orden de precisión. El alto orden de precisión es alcanzado por la derivada central por que tiene un error de $O(\Delta x^2)$. Sin embargo, el orden de precisión es relativo.

Como se mencionó la implementación del método de diferencias finitas requiere que el dominio continuo sea reemplazado por un dominio discreto; para este propósito una malla numérica tiene que ser introducida, como se muestra en la Figura 4-1.

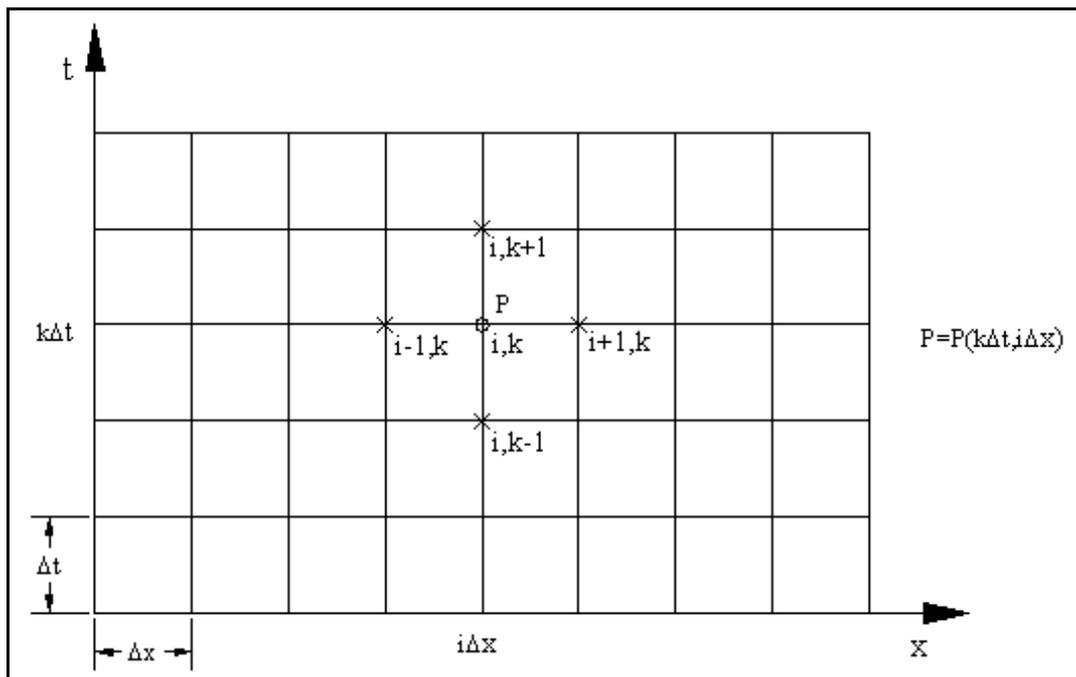


Figura 4-1: Malla x-t, para el método de diferencias finitas.

Los dos parámetros de la malla numérica son los pasos del espacio (Δx) y tiempo (Δt). Ambos serán constantes en todo el dominio de integración. Las coordenadas en el punto P en el plano $x-t$ son $(i\Delta x, k\Delta t)$ pero es usual escribir estas coordenadas como i,k . Ahora, la diferencia finita hacia adelante resulta:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k \approx \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad (4-7)$$

La diferencia finita hacia atrás es:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k \approx \frac{f_i^k - f_{i-1}^k}{\Delta x} \quad (4-8)$$

Y la diferencia finita central puede ser escrita como:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k \approx \frac{f_{i+1}^k - f_{i-1}^k}{2\Delta x} \quad (4-9)$$

Cuando el tamaño de la malla Δx y Δt , se aproximan a cero, la ecuación en diferencias tiende a aproximarse y converger a la solución de la ecuación diferencial.

4.3 Esquema Explícito de diferencias finitas

Un particular grupo de diferencias finitas para el tiempo y el espacio produce un esquema explícito o implícito. En el esquema explícito el valor desconocido depende de las variables y son determinadas directamente del mismo punto y sus puntos adyacentes en el mismo nivel de k . De otra forma, los esquemas implícitos calculan el valor desconocido del nivel k , también con los puntos adyacentes pero con sus valores del nivel $k+1$ desconocidos. Estos valores son desconocidos sólo hasta resolver el sistema de ecuaciones lineales simultáneas. Como se muestra en la Ecuación 4-10, el cual se detalla más en el ítem 4.4.

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_i^k \approx \frac{f_i^{k+1} - f_i^k}{\Delta t} \quad \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_i^k \approx \frac{f_{i+1}^k - f_i^k}{\Delta x} \quad (4-10)$$

En la Figura 4-2, se muestra como trabaja un esquema explícito de diferencias finitas en 2D, donde se asigna el índice i para la coordenada "x", el índice j para la coordenada "y" y k denota el tiempo discreto para "t" y una malla numérica regular con espacios (paso) constantes de Δx , Δy y Δt , respectivamente. El esquema utiliza valores ubicados en $(i-1, j)$, $(i, j-1)$, (i, j) , $(i, j+1)$ y $(i+1, j)$ del nivel k , para calcular el valor de la variable (i, j) en el nuevo nivel $k+1$.

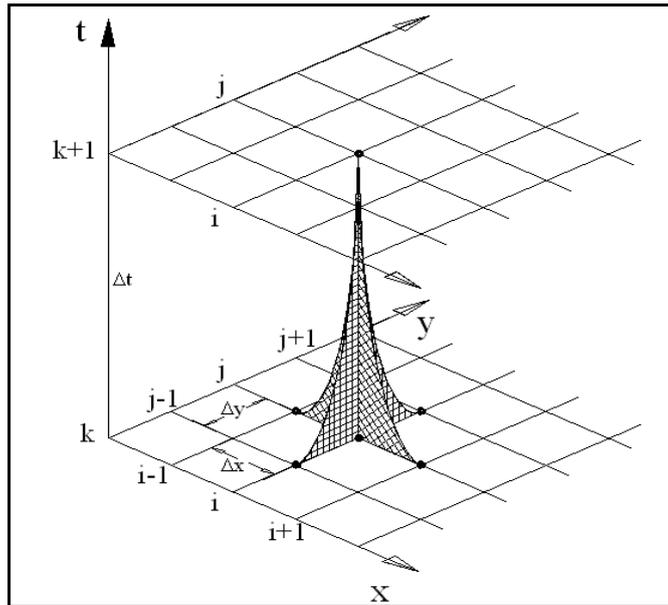


Figura 4-2: Esquema explícito de diferencias finitas en 2D, [26].

4.4 Solución numérica de las ecuaciones gobernantes

Aquí describiremos la implementación del algoritmo numérico para la solución de las ecuaciones hidrodinámicas descritas en el Capítulo III, y se presentan nuevamente las ecuaciones de cantidad de movimiento indicadas en 3-42 y 3-43 para la dirección X y Y:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial x} + fV + \frac{1}{H\rho} (\tau_x^s - \tau_x^b) \quad (4-11)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial \eta}{\partial y} - fU + \frac{1}{H\rho} (\tau_y^s - \tau_y^b) \quad (4-12)$$

Así mismo, la ecuación de continuidad indicada en 3-13.a, es:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial (U.H)}{\partial x} + \frac{\partial (V.H)}{\partial y} = 0 \quad (4-13)$$

Antes de escribir la forma numérica es necesario indicar que se usará una grilla regular (ó estructurada), donde las variables dependientes U, V y η serán calculadas en todos los puntos.

Para las ecuaciones de cantidad de movimiento se usa un esquema de diferencia finita hacia adelante en el tiempo y espacio, pero para la ecuación de continuidad se utilizan las velocidades ya calculadas en el tiempo k+1.

Aplicando este esquema a las ecuaciones gobernante término a término, para las ecuaciones de cantidad de movimiento se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \left(\frac{U_{i,j}^k - U_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + V_{i,j}^k \left(\frac{U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) = \\ -g \left(\frac{\eta_{i,j}^k - \eta_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + fV_{i,j}^k + \frac{\tau_x^s}{\rho H_{i,j}^k} - gn^2 \frac{U_{i,j}^k (U_{i,j}^{k2} + V_{i,j}^{k2})^{1/2}}{H_{i,j}^{k4/3}} \end{aligned} \quad (4-14)$$

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k}{\Delta t} + U_{i,j}^k \left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + V_{i,j}^k \left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) = \\ -g \left(\frac{\eta_{i,j}^k - \eta_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) - fU_{i,j}^k + \frac{\tau_y^s}{\rho H_{i,j}^k} - gn^2 \frac{V_{i,j}^k (U_{i,j}^{k2} + V_{i,j}^{k2})^{1/2}}{H_{i,j}^{k4/3}} \end{aligned} \quad (4-15)$$

y la ecuación de continuidad:

$$\frac{\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k}{\Delta t} + H_{i,j}^k \left(\frac{U_{i+1,j}^{k+1} - U_{i,j}^{k+1}}{\Delta x} \right) + H_{i,j}^k \left(\frac{V_{i,j+1}^{k+1} - V_{i,j}^{k+1}}{\Delta y} \right) = 0 \quad (4-16)$$

También, se ha incorporado el algoritmo de Fischer, esta aproximación utiliza un valor calculado el cual produce un esquema semi-implícito en el tiempo y estabiliza el cómputo (Kowalik y Murty, 1993), aplicando a nuestras ecuaciones y notación obtenemos el siguiente algoritmo numérico.

Para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección X:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{k+1} - U_{i,j}^k}{\Delta t} = -UPOS \left(\frac{U_{i,j}^k - U_{i+1,j}^k}{\Delta x} \right) - UNEG \left(\frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x} \right) \dots \\ \dots - VAUP \left(\frac{U_{i,j}^k - U_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) - VAUN \left(\frac{U_{i,j+1}^k - U_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \dots \\ \dots - g \left(\frac{\eta_{i,j}^k - \eta_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) + f \frac{V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i-1,j-1}^k + V_{i,j-1}^k}{4} \dots \\ \dots + \frac{Cd * \rho a * W10^2 * \sin(az)}{\rho * \left(\frac{H_{i,j}^k + H_{i-1,j}^k}{2} \right)} \dots \\ \dots - \frac{\rho * g * n_{i,j}^2 * \frac{U_{i,j}^k - U_{i,j}^{k-1}}{2} * \sqrt{U_{i,j}^{k2} + \left(\frac{V_{i,j}^{k-1} + V_{i-1,j}^{k-1} + V_{i-1,j-1}^{k-1} + V_{i,j-1}^{k-1}}{4} \right)^2}}{\left(\frac{H_{i,j}^{k-1} + H_{i-1,j}^{k-1}}{2} \right)^{1/3} * \rho \frac{H_{i,j}^{k-1} + H_{i-1,j}^{k-1}}{2}} \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$UPOS = \frac{U_{i,j}^k + |U_{i,j}^k|}{2} \quad (4-18)$$

$$UNEG = \frac{U_{i,j}^k - |U_{i,j}^k|}{2} \quad (4-19)$$

$$VAUP = \frac{vuk + |vuk|}{2} \quad (4-20)$$

$$VAUN = \frac{vuk - |vuk|}{2} \quad (4-21)$$

$$vuk = \frac{V_{i,j}^k + V_{i-1,j}^k + V_{i-1,j-1}^k + V_{i,j-1}^k}{4} \quad (4-22)$$

Para la ecuación de cantidad de movimiento en la dirección Y:

$$\begin{aligned} \frac{V_{i,j}^{k+1} - V_{i,j}^k}{\Delta t} &= -UAVP \left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i-1,j}^k}{\Delta x} \right) - UAVN \left(\frac{V_{i+1,j}^k - V_{i,j}^k}{\Delta x} \right) \dots \\ &\dots - VPOS \left(\frac{V_{i,j}^k - V_{i,j-1}^k}{\Delta y} \right) - VNEG \left(\frac{V_{i,j+1}^k - V_{i,j}^k}{\Delta y} \right) \dots \\ &\dots - g \left(\frac{\eta_{i,j+1}^k - \eta_{i,j}^k}{\Delta y} \right) - f \frac{U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i+1,j+1}^k + U_{i+1,j}^k}{4} \dots \\ &\dots + \frac{Cd * \rho a * W10^2 * \cos(az)}{\rho * \left(\frac{H_{i,j}^k + H_{i,j+1}^k}{2} \right)} \dots \\ &\dots - \frac{\rho * g * n_{i,j}^2 * \frac{V_{i,j}^k - V_{i,j}^{k-1}}{2} * \sqrt{\left(\frac{U_{i,j}^{k-1} + U_{i,j+1}^{k-1} + U_{i+1,j+1}^{k-1} + U_{i+1,j}^{k-1}}{4} \right)^2 + V_{i,j}^{k-2}}}{\left(\frac{H_{i,j}^{k-1} + H_{i,j+1}^{k-1}}{2} \right)^{1/3} * \rho \frac{H_{i,j}^{k-1} + H_{i,j+1}^{k-1}}{2}} \end{aligned} \quad (4-23)$$

$$VPOS = \frac{V_{i,j}^k + |V_{i,j}^k|}{2} \quad (4-24)$$

$$VNEG = \frac{V_{i,j}^k - |V_{i,j}^k|}{2} \quad (4-25)$$

$$UAVP = \frac{uvk + |uvk|}{2} \quad (4-26)$$

$$UAVN = \frac{uvk - |uvk|}{2} \quad (4-27)$$

$$uvk = \frac{U_{i,j}^k + U_{i,j+1}^k + U_{i+1,j+1}^k + U_{i+1,j}^k}{4} \quad (4-28)$$

La ecuación de continuidad es:

$$\frac{\eta_{i,j}^{k+1} - \eta_{i,j}^k}{\Delta t} = - \frac{U_{i+1,j}^{k+1} H_{u1} - U_{i,j}^{k+1} H_u}{\Delta x} - \frac{V_{i,j}^{k+1} H_{v1} - U_{i,j-1}^{k+1} H_v}{\Delta y} \quad (4-29)$$

$$H_u = \frac{H_{i,j}^k + H_{i-1,j}^k}{2} \quad (4-30)$$

$$H_{u1} = \frac{H_{i+1,j}^k + H_{i,j}^k}{2} \quad (4-31)$$

$$H_v = \frac{H_{i,j}^k + H_{i,j+1}^k}{2} \quad (4-32)$$

$$H_{v1} = \frac{H_{i,j-1}^k + H_{i,j}^k}{2} \quad (4-33)$$

La implementación del algoritmo numérico para la solución de nuestras ecuaciones consiste en despejar las variables $U_{i,j}^{k+1}$, $V_{i,j}^{k+1}$ y $\eta_{i,j}^{k+1}$, de las ecuaciones 4-14, 4-15, 4-16, respectivamente o $U_{i,j}^{k+1}$, $V_{i,j}^{k+1}$ y $\eta_{i,j}^{k+1}$, de las ecuaciones 4-17, 4-23, 4-29, respectivamente. Las primeras, muestran estabilidad en el tiempo en geometrías simples y fronteras rectas, en cambio el segundo grupo muestra su eficacia en geometrías y fronteras más complejas. La implementación de estos algoritmos y código fuente para el primer grupo se muestra en el Anexo A.2.2, y para el segundo grupo en el Anexo A.2.3.

4.5 Condiciones de Estabilidad

La condición de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) es una condición para la convergencia numérica de ciertas ecuaciones parciales diferenciales (por lo general). Esto surge cuando esquemas explícitos en el tiempo son usados para la solución numérica. Como una consecuencia, el paso del tiempo debe ser menor, que un cierto tiempo, en muchas simulaciones explícitas, de otra manera la simulación producirá resultados desordenadamente incorrectos.

Por ejemplo, si una onda cruza una grilla discreta, entonces el paso del tiempo debe ser menos que el tiempo para la onda que viaja a través de los puntos de la grilla adyacentes. Como un corolario, cuando reducen la separación de punto de la grilla, el límite superior para el paso de tiempo también se disminuye. En la esencia, el dominio numérico de dependencia debe incluir el dominio analítico de dependencia para asegurar que el esquema pueda tener la información requerida para formar la solución.

Para el caso unidimensional, la condición de CFL, está dada por:

$$\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x} < C \quad (4-34)$$

Donde, la u es la velocidad, Δt es el paso de tiempo, Δx es el intervalo de longitud o paso, y C constante que depende de la ecuación particular para ser solucionada y no de Δt y Δx . El número $\frac{u \cdot \Delta t}{\Delta x}$, es llamado Número de Courant.

En el caso bidimensional de la referencia [11] se tiene:

$$\frac{u_x \cdot \Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y \cdot \Delta t}{\Delta y} < C \quad (4-35)$$

La condición de CFL puede ser una condición muy restrictiva sobre el paso de tiempo Δt .

La condición de estabilidad según Courant-Frederick-Levy, indicada en la referencia [1], para el caso de aguas poco profundas, puede ser descrita como:

$$\Delta t \leq Cr \frac{\Delta x}{(gh_{\max})^{\frac{1}{2}}} \quad (4-36)$$

Donde: Δt , es el incremento de tiempo que mantendrá la estabilidad; Cr , es el número de Courant; Δx , es el incremento en la dirección x de la grilla; h_{\max} , es la profundidad de agua máxima en el dominio de análisis.

4.6 Condiciones iniciales y de frontera

Una vez que el algoritmo ha sido implementado, antes de empezar es necesario suministrar información, referente a la condición inicial y de frontera.

4.7 Condición inicial

Una condición inicial significa los valores de las variables en el tiempo cero, del estado del fluido antes de iniciar el cálculo.

La prescripción de las condiciones iniciales puede ser dificultosa si se hace uso de datos observados; además en este estudio se intentará simular los procesos como ocurren en el tiempo y su dependencia de las condiciones iniciales. Esperando, que la influencia del estado inicial decae en el tiempo, la historia del proceso estará definida solo por fuerzas externas. Es normal en la práctica empezar con un fluido en reposo; esto significa que las condiciones iniciales son simplemente:

$$U(x, y, 0) = V(x, y, 0) = \eta(x, y, 0) = 0 \quad (4-37)$$

4.8 Condición de Frontera

Las ecuaciones 4-14, 4-15, 4-16 ó 4-17, 4-23, 4-29, son definidas en el espacio del dominio, sobre el plano XY, y con sus condiciones de frontera prescritas en su frontera. Hay una regla general para las ecuaciones diferenciales hiperbólicas que establece, que el número de condiciones de frontera requerido en un punto particular de la frontera, es igual al número de características que entran al dominio en ese punto, para derivar una única solución. Un segundo factor determinante para el número de condiciones de frontera es el número de Froude. Si excede la unidad, tenemos un flujo supercrítico, y el número de condiciones de frontera puede aumentar y disminuir dependiendo de la dirección del flujo en la frontera [26]. Tal situación ocurre dependiendo sobre el signo del componente normal de velocidad en la frontera del dominio. Para una de las condiciones de frontera el nivel de agua o componente de velocidad normal puede ser especificado. Sin embargo, una segunda condición de frontera sobre el flujo es más difícil. Alternativamente, se puede especificar el componente de velocidad tangencial o la dirección de la velocidad como una segunda condición. Hay estudios donde la influencia de una incorrecta segunda condición de frontera no penetra demasiado dentro del dominio (Vreugdenhil, 1989).

Para el modelo expuesto en el ítem 4.4, este modelo tiene implementado las siguientes condiciones de fronteras, que serán explicadas en un dominio rectangular y pueden ser extendidas para un dominio irregular:

4.8.1 Condición de nivel medio de agua

Esta condición pone la variación del nivel del agua, η . Esta condición de cero en la frontera durante todo el tiempo de cálculo, significa que la frontera es igual al nivel medio del agua, por ejemplo si $\eta(x = 0, y, t) = 0$, y recordando que $H = h + \eta$, tendremos que $H = h$, en la frontera.

4.8.2 Condición de onda sinusoidal

Esta condición coloca la variación del nivel de agua, η , en la frontera igual a una onda sinusoidal. La onda puede ser única o continua, y esta descrito por:

$$\eta = \eta_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T_p} t\right), \quad t = t_s - t_r \quad (4-38)$$

Donde, t_s es el tiempo de cálculo y t_r es el tiempo de retardo que esperamos cuando la onda frontal tiene una incidencia oblicua en la frontera. De la Figura 4-3, se puede deducir

$$t_r = \frac{(L-y) \cos(\phi)}{\sqrt{gh}}. \text{ Para ondas únicas o solitarias, } \eta \text{ es colocado como cero cuando}$$

$t > T_p/2$.

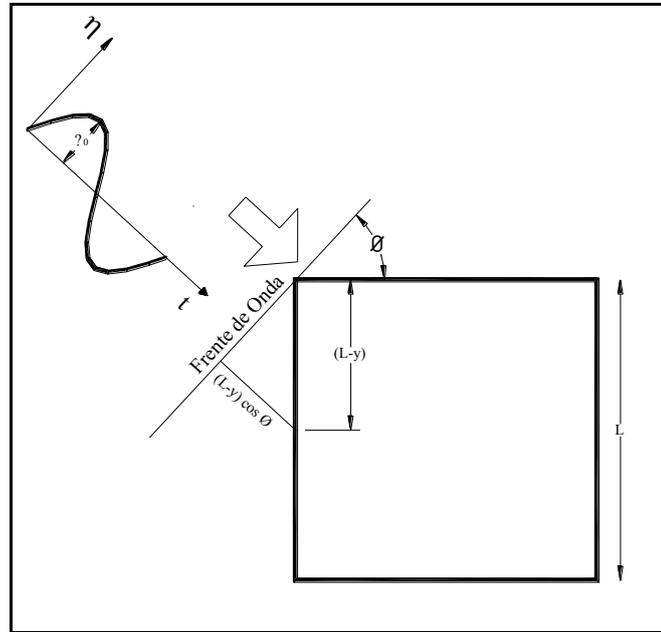


Figura 4-3: Frente de onda con incidencia oblicua en la frontera

4.8.3 Condición de frontera cerrada

Cuando nosotros necesitamos especificar una frontera cerrada, significa que no hay flujo a través de la frontera, y la componente normal de velocidad deberá ser colocado en cero, durante todo el tiempo de simulación.

$$U_1(x=0,y,t)=0, \quad \text{ó} \quad U_1(x,y=0,t)=0 \quad (4-39)$$

4.8.4 Condición de frontera abierta radiación 1D

Esta condición es usada para calcular la velocidad U o V normal a la frontera. El signo es tomado de tal modo que las velocidades son dirigidas hacia afuera del dominio de cálculo cuando el nivel de agua es positivo.

$$U_i^{k+1} = \pm \eta_i^k \left(\frac{g}{h_i^k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ó} \quad V_j^{k+1} = \pm \eta_j^k \left(\frac{g}{h_j^k} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4-40)$$

4.8.5 Condición de frontera asintótica

Esta condición especifica una condición de frontera abierta con el componente de velocidad normal manteniéndose constante cerca de la frontera.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (4-41)$$

Usando las diferencias finitas para atrás en el espacio, obtenemos la siguiente ecuación para esta condición:

$$U_i = U_{i-1}, \quad \text{ó} \quad V_j = V_{j-1} \quad (4-42)$$

4.9 Influencia de las variables sobre la verificación

La importancia relativa de la simulación de las diferentes variables que intervienen en los cálculos según el programa RMA2, puede observarse en la Figura 4-5, donde la estructura de la geometría es el más significativo, seguido de las condiciones de frontera o de borde.

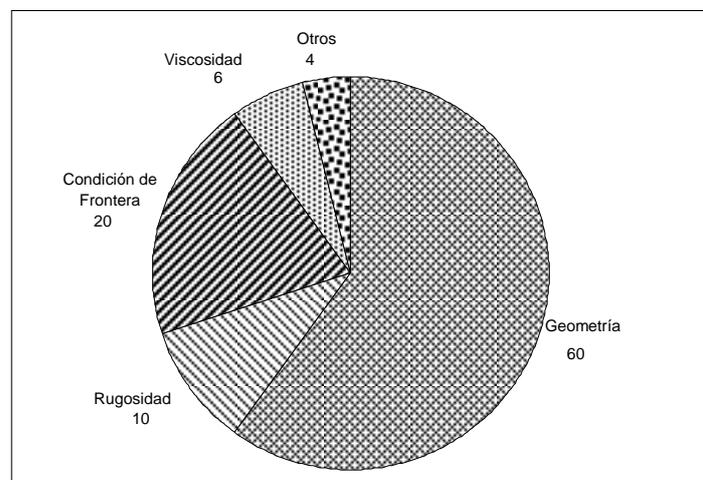


Figura 4-4: Importancia relativa para la verificación (Fuente Manual Programa RMA2).

4.10 Test del modelo numérico

Una solución numérica requiere una alta calidad de medición de datos para la construcción de las condiciones iniciales. También, son necesarios los datos para la verificación y validación de la solución numérica. Otra forma para establecer la fiabilidad del resultado numérico es por comparación con soluciones analíticas disponibles o test teóricos.

El modelo numérico, ha sido probado bajo varias condiciones iniciales y condiciones de frontera. Estos test son clasificados en test permanentes y no permanentes. Para los test no permanentes se tiene dos tipos: Test de propagación de onda y test de flujo inducido por el viento.

La computadora que se ha utilizado para las pruebas y la simulación de la bahía de Puno está compuesta principalmente por un Procesador Intel(R) Core(TM) i7 CPU, Q720@ 1.60GHz, con 4 procesadores principales, 4 procesadores lógicos, Memoria física total 4 GB y Sistema Operativo Microsoft® Windows 7 basado en x64. La versión inicial de la implementación de este algoritmo se ha implementado en Visual C++, por motivos de no contar con suficientes herramientas graficas, se ha migrado en su totalidad al programa MATLAB R2007b, donde se han concluido todas las rutinas necesarias para el algoritmo de solución. El diagrama de flujo y código fuente se muestra en el Anexo A.

4.10.1 Test de flujo estacionario

El test de flujo estacionario ha sido realizado para un canal rectangular de 5 km de longitud por 5 km de ancho y una profundidad de 100 m. La orientación del canal esta en forma horizontal. Los parámetros dados para el modelo son: tamaño del paso Δx y Δy de 100 m, la pendiente de fondo 0.00002 y el coeficiente de rugosidad de Manning de 0.05.

La principal entrada para el modelo es una grilla con datos apropiados de la batimetría. Para este test se utilizó los módulos `meshtogrid.m` y `roughnessgrid.m`, con los que se ha generado la grilla (geometría) con una profundidad de agua de 100m dentro del canal y cero en la tierra.

Para el test permanente, las condiciones iniciales están en reposo, esto significa que el nivel de agua y las velocidades son igual a cero, en el inicio de los cálculos. Las condiciones de frontera de aguas arriba y aguas abajo son la condición media del agua, esto está representado con $\eta=0$.

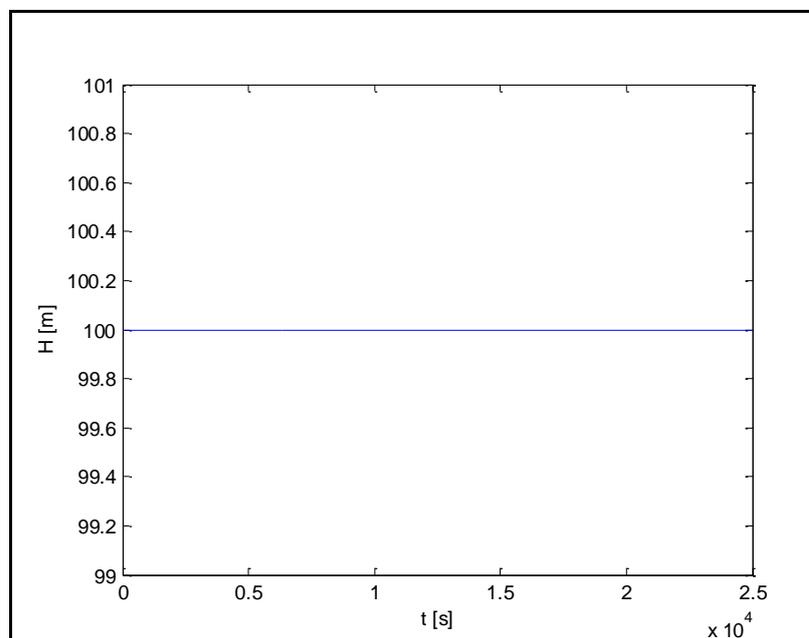
El resultado de este experimento numérico es mostrado en un punto de control ubicado sobre la línea central del canal, en la coordenada (500,2500). Las velocidades U y V están yendo de cero (reposo) al valor de 1.927 m/s sin ninguna oscilación, en un tiempo de cálculo de 50,000 s, y utilizando un número de Courant de 0.9. El nivel de agua en las fronteras aguas arriba y aguas abajo, se mantiene constante todo el tiempo de cálculo, los resultados se muestran en la Figura 4-6.

Las velocidades han sido comparadas con la velocidad normal de la ecuación de Manning, asumiendo que es un canal muy ancho donde el $R \approx h$, esto se muestra en la

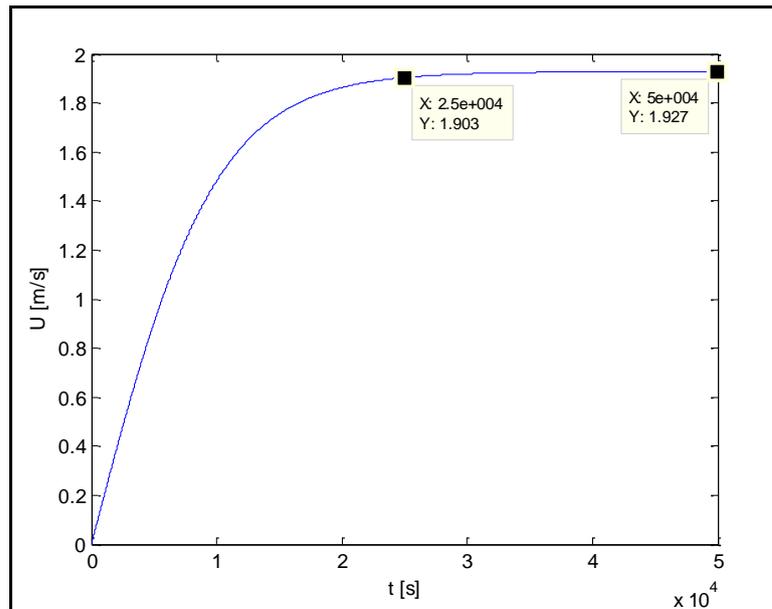
ecuación 4-43, de la aplicación de esta ecuación se obtiene una velocidad de 1.927 m/s, que es igual al obtenido con el algoritmo numérico.

$$(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n} h^{\frac{2}{3}} S^{\frac{1}{2}} \quad (4-43)$$

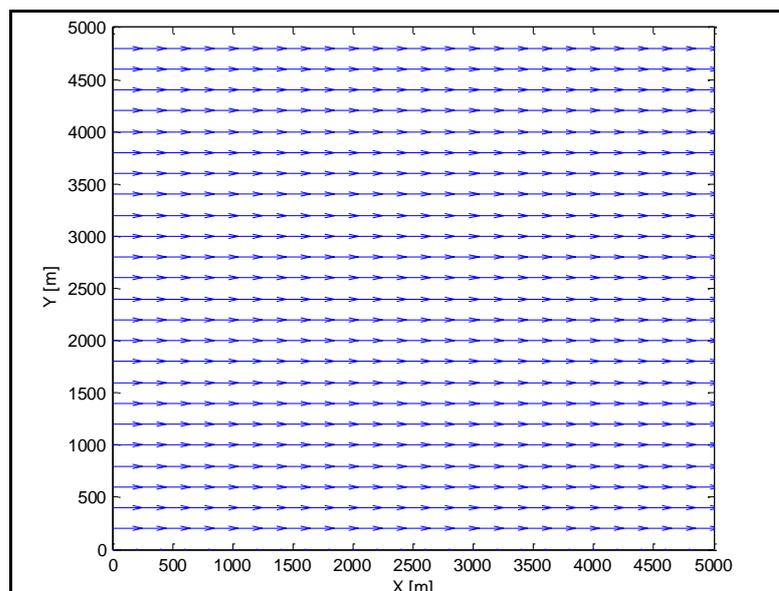
También, se puede observar en la Figura 4-6.b, la convergencia monotonica y en la Figura 4-6.c se muestra en campo de velocidades calculado para un flujo permanente después de 13.9 horas de simulación. Donde, podemos ver también que las velocidades son uniformes en el canal.



a) Nivel de agua calculado.



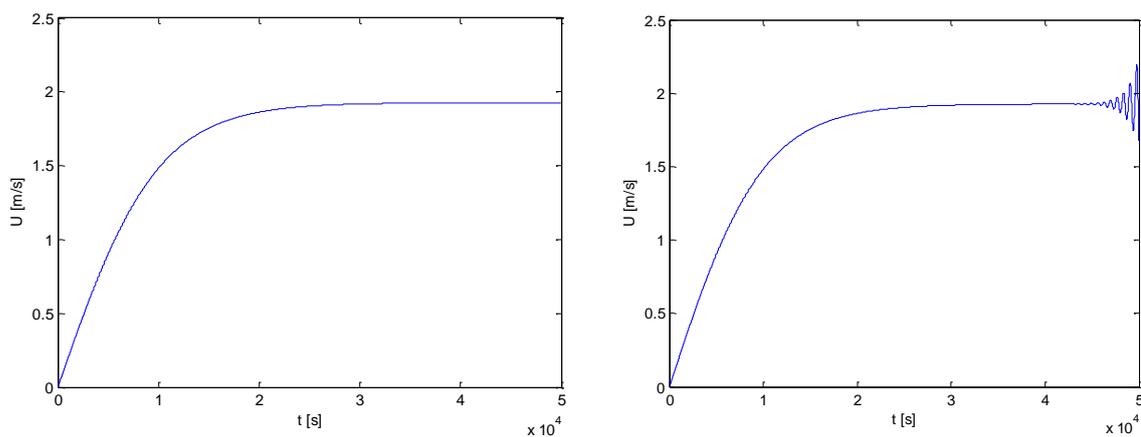
b) Componente de velocidad U, Número de Courant de 0.9.



c) Campo de velocidad calculado después de 13.9 h, $V_{max} = 1.927$ m/s

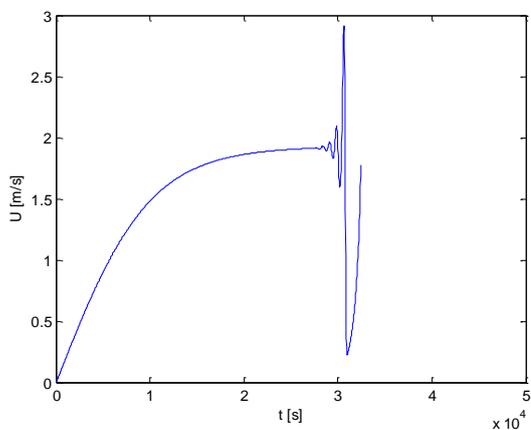
Figura 4-5: Resultados del test de flujo estacionario con Número de Courant de $Cr=0.90$

También, para ver la sensibilidad se han hecho variantes de las simulaciones para distintos valores del número de Courant, estos se muestran en la Figura 4-9, observando que se obtiene un comportamiento similar de la velocidad hasta los 24,000 s de simulación. Cuando el número de Courant (en este caso) es mayor a 1.5 se observa que el modelo se vuelve inestable y no se logra obtener la convergencia monotónica esperada, por lo tanto no converge el modelo. También, cuando el número de Courant es pequeño se requiere mayor memoria en la computadora, así mismo, el tiempo de cálculo es mayor.

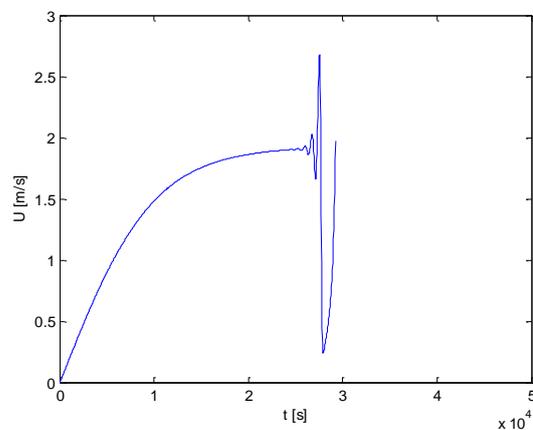


a) Número de Courant $Cr=1.5$

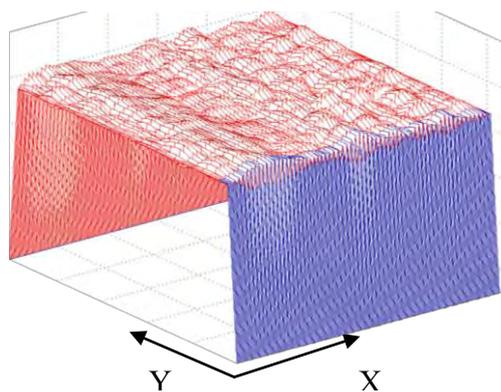
b) Número de Courant $Cr=2.0$



c) Número de Courant $Cr=4.0$



d) Número de Courant $Cr=5.0$



e) Vista espacial de la inestabilidad de la velocidad con $Cr = 2.0$

Figura 4-6: Comportamiento del test de flujo estacionario con diferentes números de Courant.

4.10.2 Test de propagación de onda solitaria.

Para el test de propagación de ondas usaremos el mismo canal definido para el test de

flujo permanente pero con pendiente cero y las condiciones de frontera serán diferentes. La frontera aguas arriba es una combinación del nivel del agua y la condición de radiación, con una onda sinusoidal simple con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 200$ s y rugosidad $n = 0.02$. La frontera aguas abajo será una condición abierta y las fronteras laterales serán asintóticas. Así mismo, la condición inicial es igual a $\eta = 0$, en todo el dominio. El resultado de este test, se muestra en la Figura 4-8 hasta 4-12.

En la Figura 4-9, se puede evidenciar como transita la onda solitaria al atravesar del punto de control (500,2500). También, observamos que el valor de η se mantiene igual al valor que ingresa al dominio impuesto en la condición frontera aguas arriba, con el espaciamiento del grillado y $Cr = 0.5$. Así mismo, en la Figura 4-12, se muestra el tránsito de la onda solitaria sinusoidal en 3D atravesando el dominio de análisis.

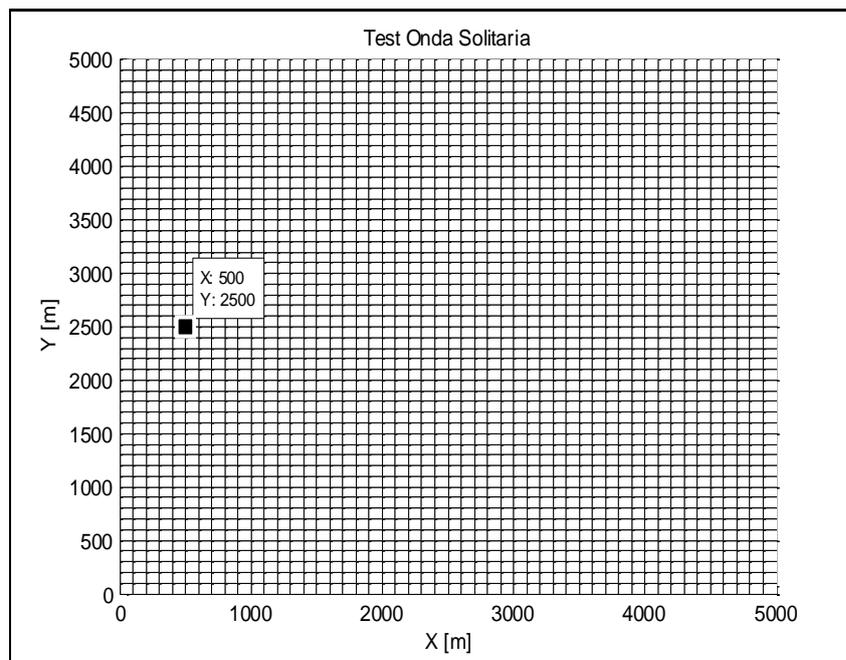


Figura 4-7: Dominio para el test de la onda solitaria y el punto (500, 2500).

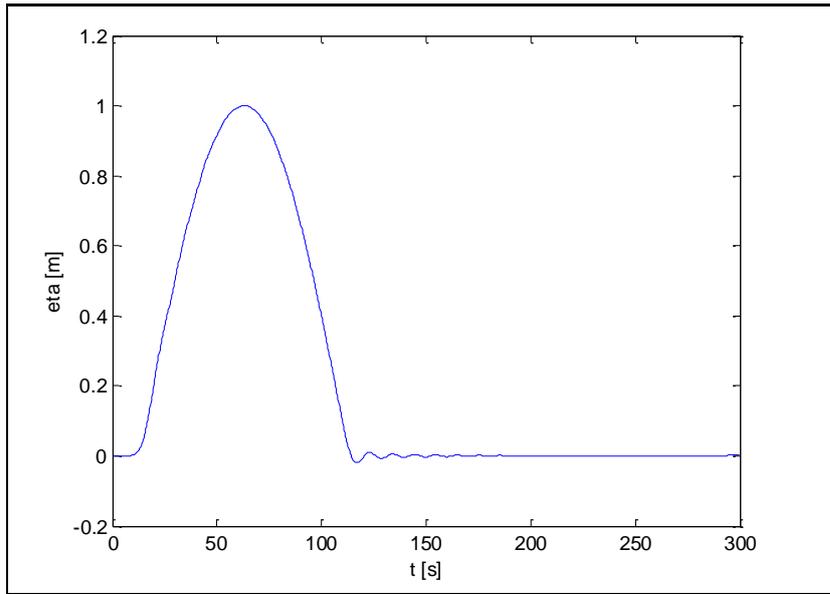


Figura 4-8: Test de onda solitaria variación de η en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

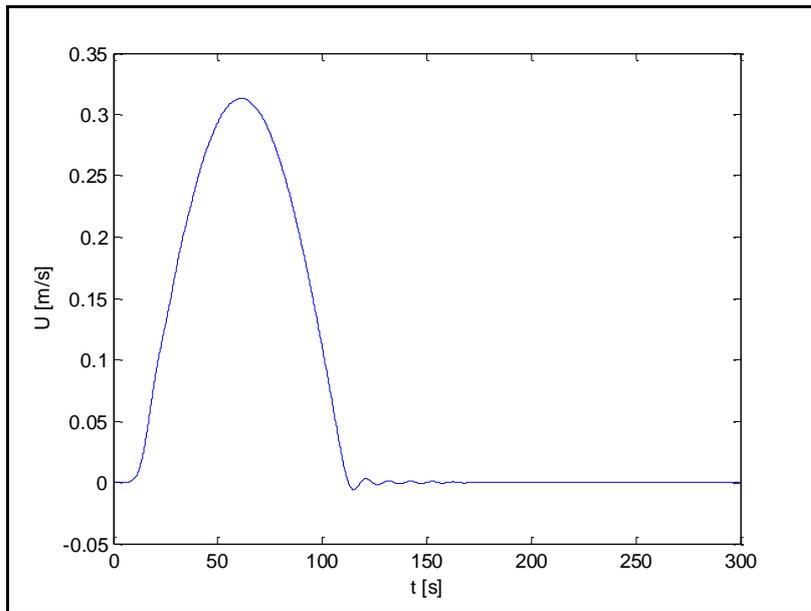


Figura 4-9: Test de onda solitaria variación de la velocidad U en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

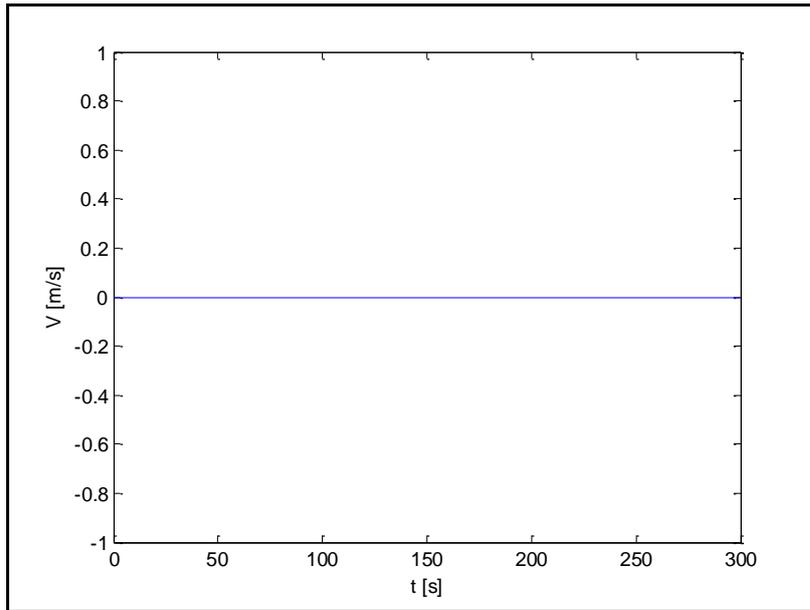


Figura 4-10: Test de onda solitaria, variación de V en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

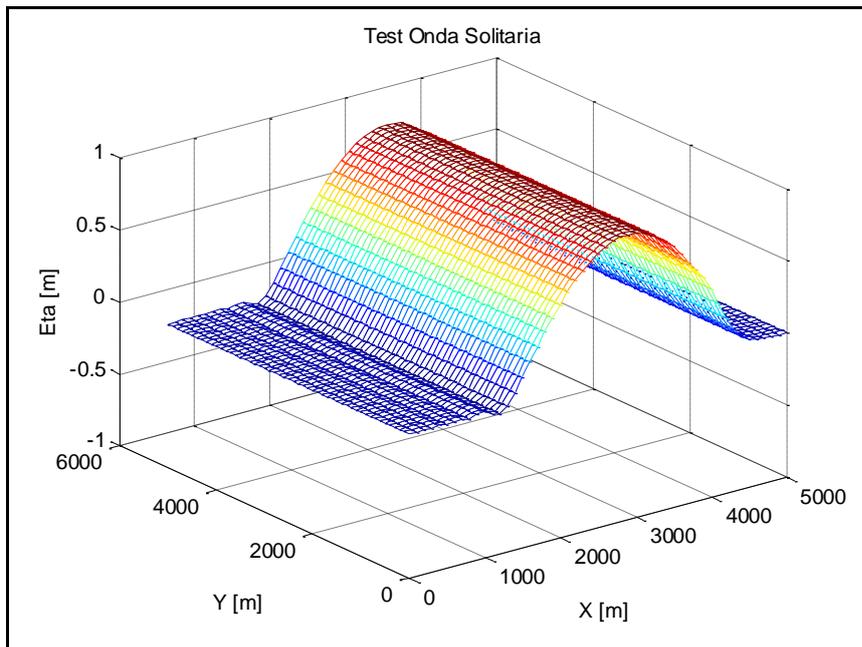


Figura 4-11: Test de onda solitaria, vista 3D de la variación de η cuando con la onda solitaria está en medio del dominio, con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 200$ s.

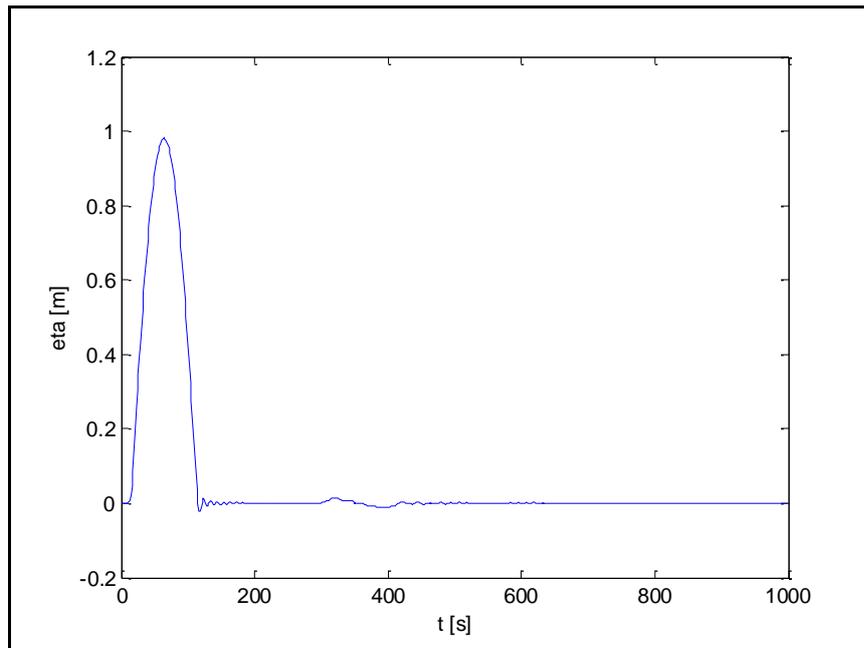


Figura 4-12: Test de onda solitaria, variación de η , en el punto (500, 2500), con $Cr = 0.5$.

En la Figura 4-13, se puede apreciar la variación de la variable η en el punto (500,2500), desde el tiempo 0 hasta 1000 s, donde el modelo se establece. Sin embargo, entre el tiempo de 290 a 430 s, se observa que hay una variación del nivel de agua, debido a que después de haber atravesado la onda solitaria la frontera de radiación aguas abajo produce una ligera onda reflexiva.

Para hacer una comparación con las ecuaciones teóricas, la velocidad total del frente de la onda solitaria es igual a $c_t = (U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{gh}$, donde se obtiene una velocidad de 31.63 m/s, y un tiempo de 158 s, tiempo en que la onda solitaria atraviesa el dominio desde aguas arriba hasta aguas abajo. El resultado del test numérico que se describió en los párrafos anteriores tienen un tiempo de llegada de 156 s, que muestra un error relativo del 1.2%. Este error puede reducirse si se disminuye el número de Courant y/o Δx (ó Δy).

4.10.3 Test de propagación de onda continua sinusoidal.

Para el test de propagación de onda continua usaremos el mismo canal definido para el test de onda solitaria, con la única diferencia que ahora induciremos en la frontera aguas arriba del dominio del modelo, una onda continua, representado por la condición de frontera de onda sinusoidal. Los resultados de este test se observan en la Figura 4-14.

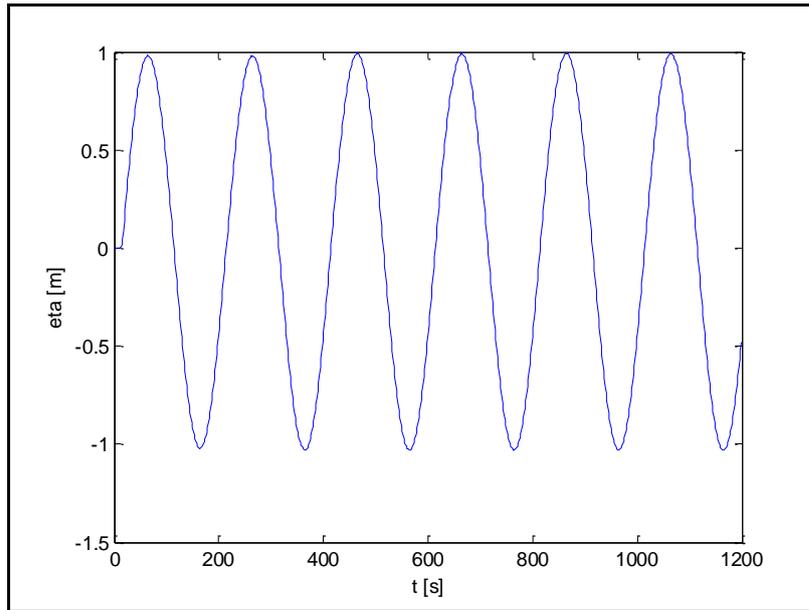


Figura 4-13: Test de onda continua, variación de η en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

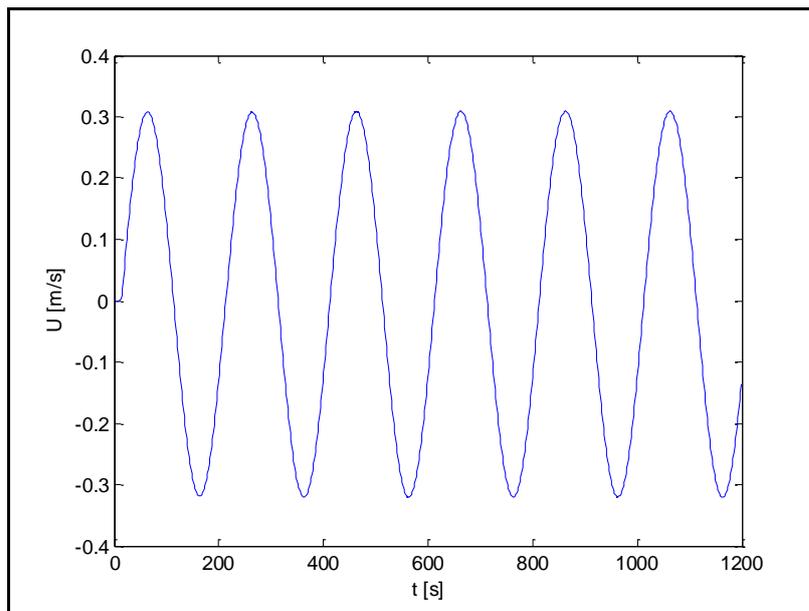


Figura 4-14: Test de onda continua, variación de U en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

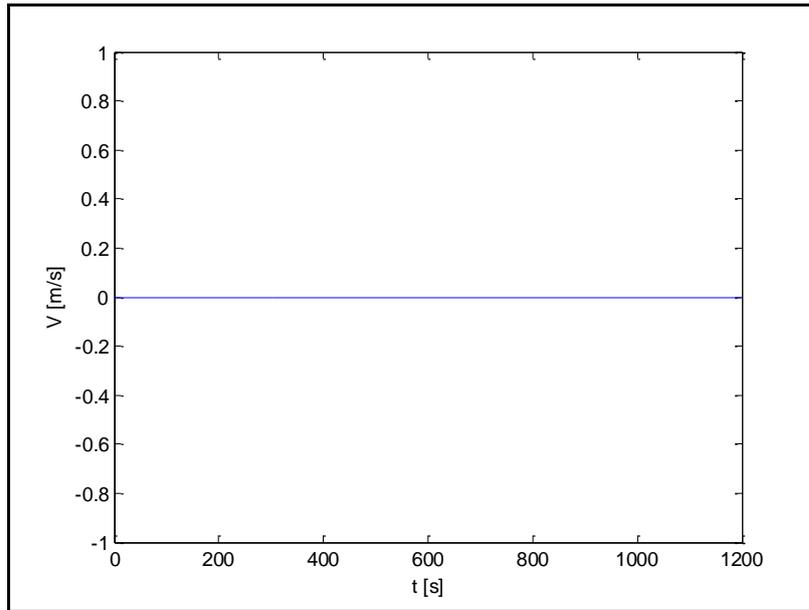


Figura 4-15: Test de onda continua, variación de V en el punto (500,2500), con $Cr = 0.5$

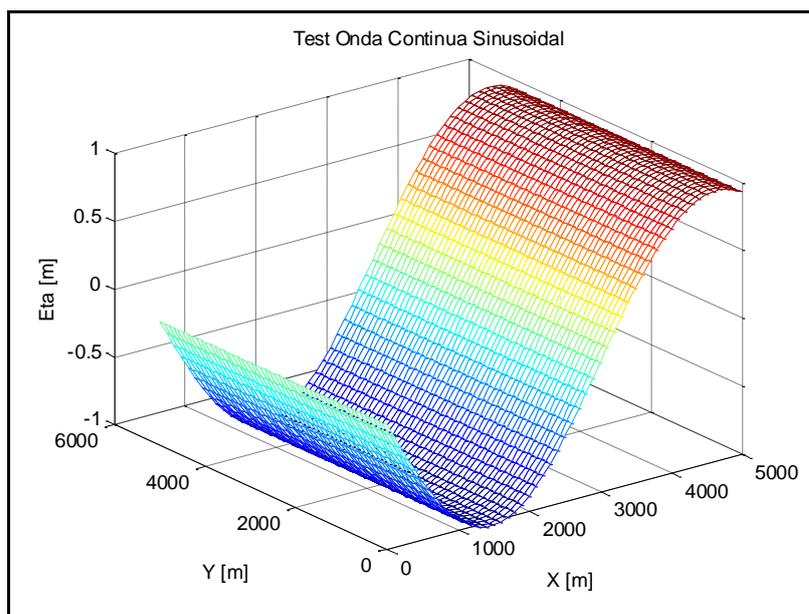


Figura 4-16: Test de onda continua, vista 3D de la variación de η , con $\eta_0 = 1.00$ m y $T_p = 200$ s, cuando $t=1200$ s.

También, en este test se ha evaluado el comportamiento cuando disminuye solo el periodo a $T_p=100$ s., los resultados se muestran en las Figuras 4-17 y 4-18.

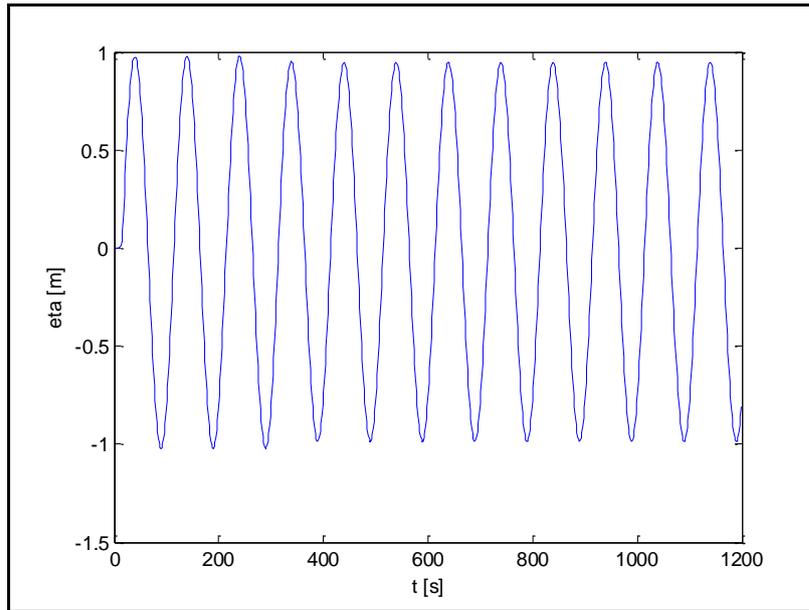


Figura 4-17: Test de onda continua, variación de η en el punto (500,2500), con $Cr=0.50$ y $Tp = 100$.

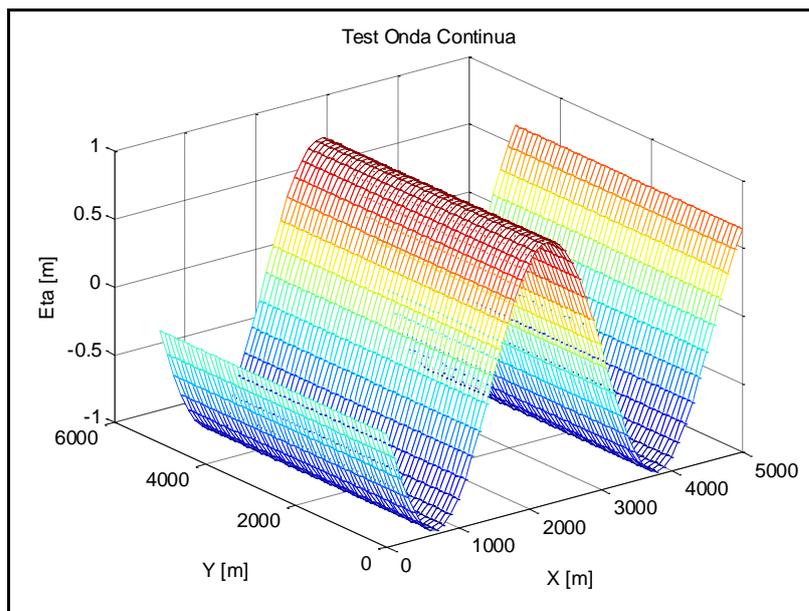


Figura 4-18: Test de onda continua, vista 3D de la variación de η , con $\eta_0 = 1.00$ m y $Tp = 100$ s, cuando $t=1200$ s.

4.10.4 Test 2d de modelo numérico.

Para este test también se ha considerado el cálculo de un hipotético tsunami generado por una campana de Gauss, que tiene una altura de 3 m y un ancho de 20m, que está representado por la siguiente ecuación $D=3*\exp(-5*(x^2 + y^2))$, como se muestra en la Figura 4-20.a. Desde la Figura 4-20.b hasta 4-20.h, se muestra el desplazamiento de la onda en diferentes tiempos, donde se observa como abandona el dominio.

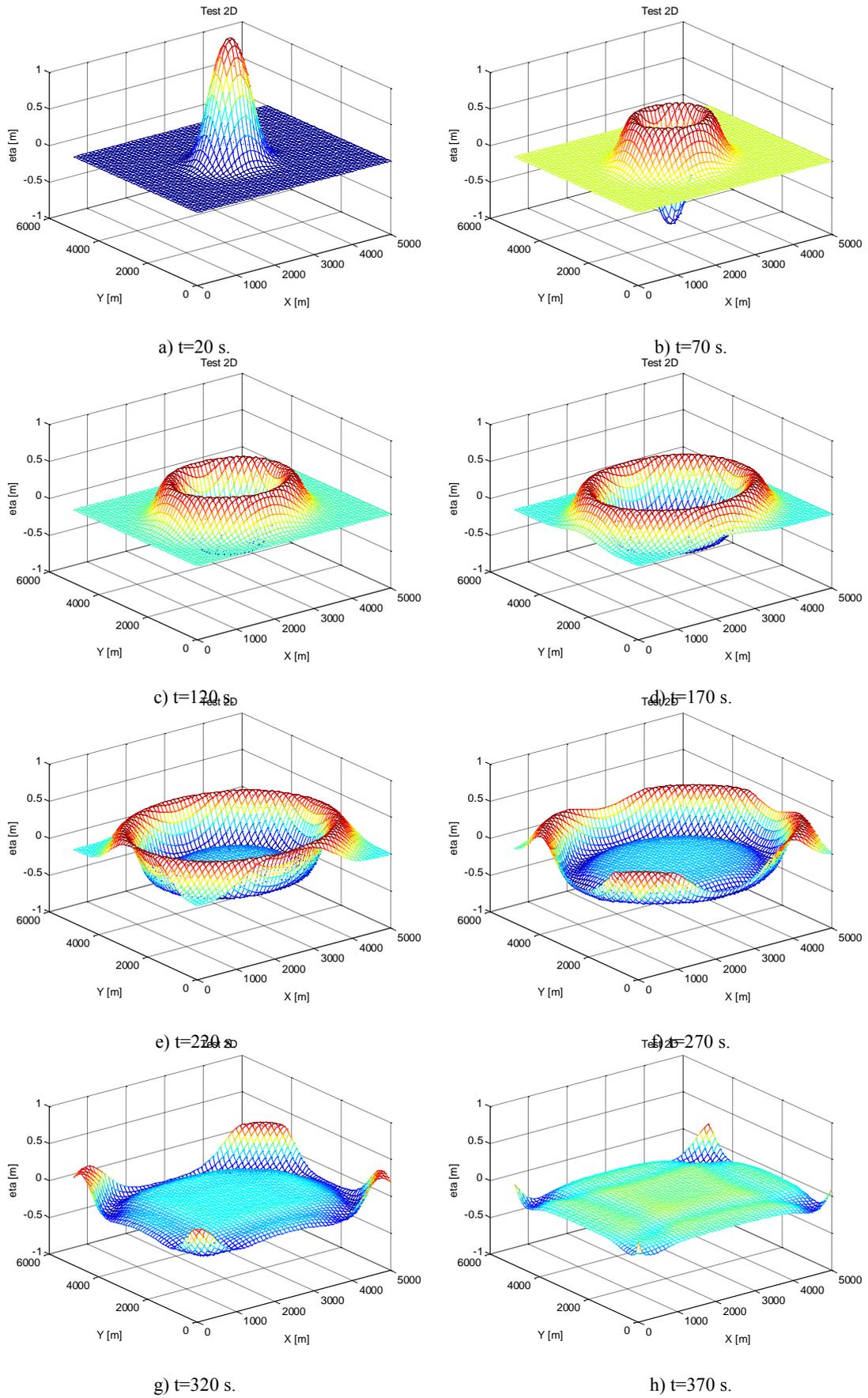


Figura 4-19: Test 2d, variación en 3D de η , con $Cr=0.50$.

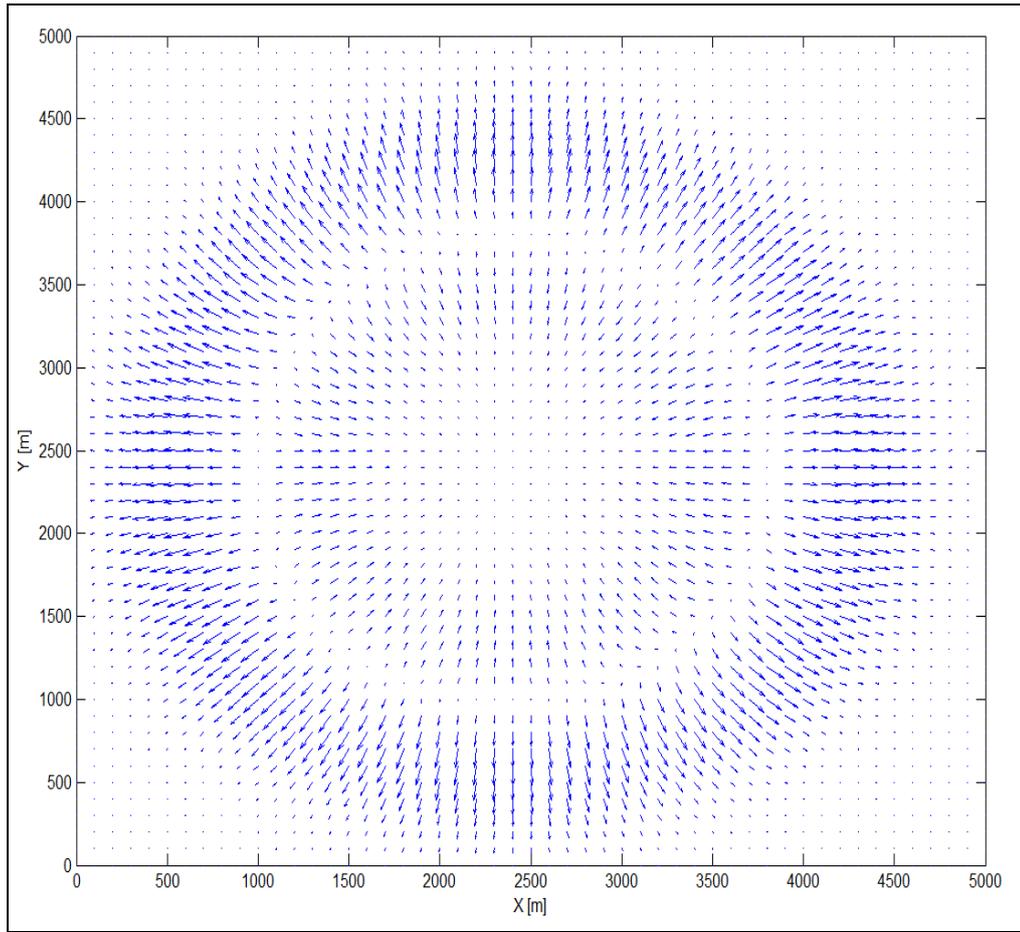


Figura 4-20: Test 2d, campo de velocidades en el t=170 s.

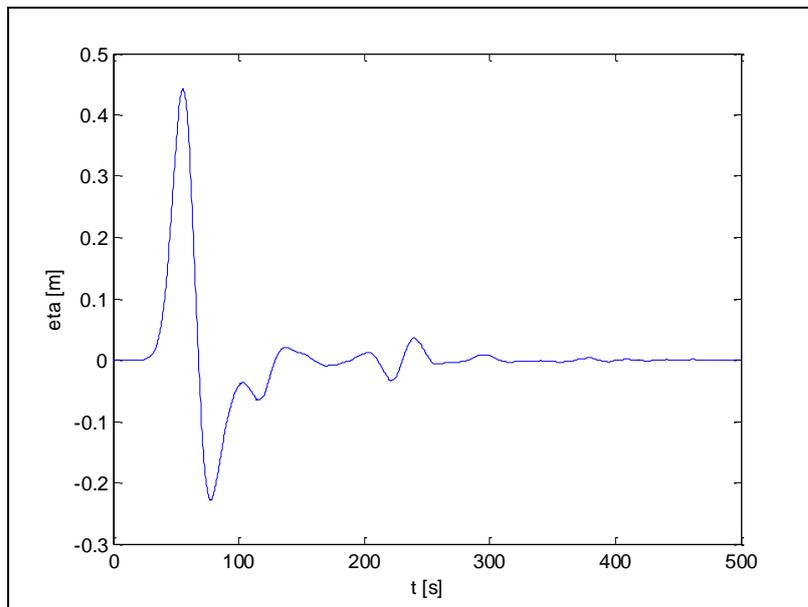


Figura 4-21: Variación del valor de η en el punto (1000,1000) en el Test 2D.

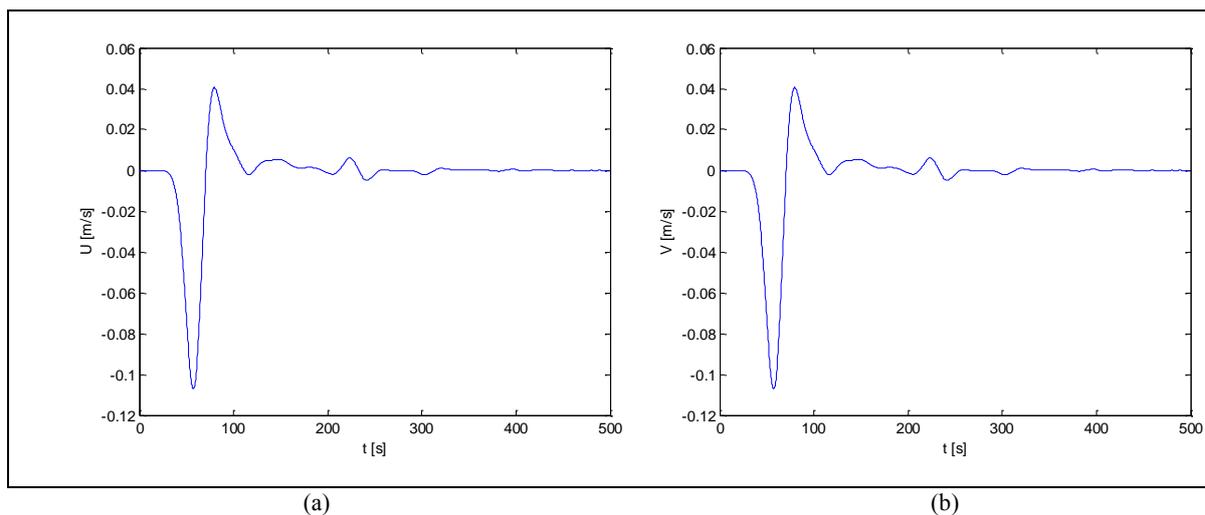


Figura 4-22: Velocidad U y V en m/s, del test en 2D, en el punto (1000,1000)

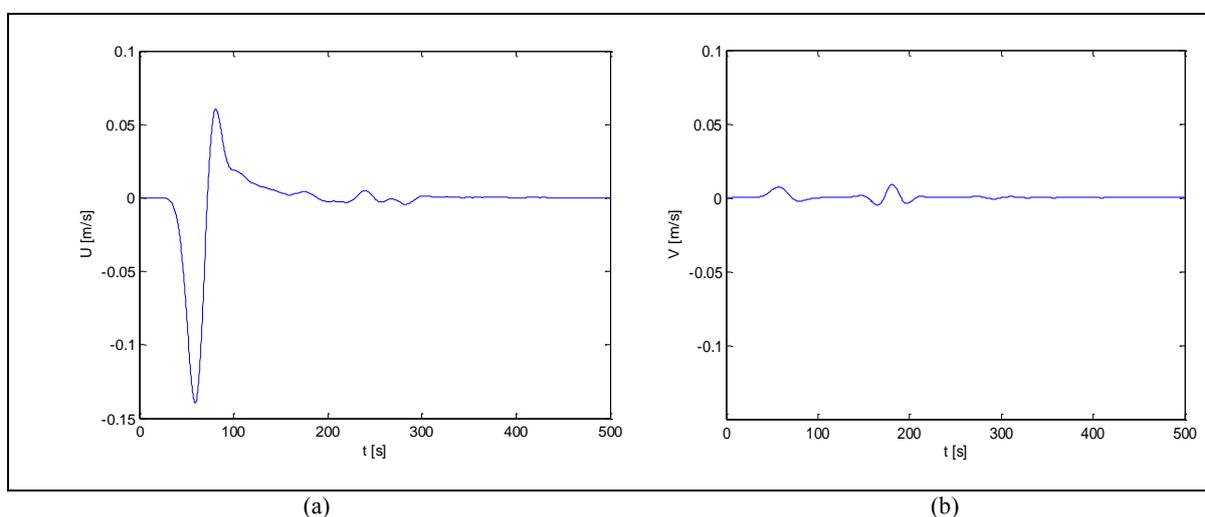


Figura 4-23: Velocidad U y V en m/s, del test en 2D, en el punto (500,2500)

También se aprecia una ligera reflexión que ingresa nuevamente al dominio de análisis, con valores de η menores a 10^{-4} m. En la Figura 4-21, se muestra el campo de velocidad para el instante cuando $t=170$ s, y en la Figuras 4-22 al 4-24, el comportamiento de las variables η , U y V, en diferente puntos de control dentro del dominio.

4.10.5 Test de flujo producido por el viento

Para este test tomaremos el mismo el dominio de 5 por 5 km y una profundidad de 100 m. Los parámetros dados para el modelo son: tamaño del paso Δx y Δy de 100m, y la pendiente de fondo cero y el coeficiente de rugosidad de Manning será de 0.05, el número de Courant es de $Cr= 0.05$, la densidad del agua $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, la densidad del aire $\rho_a= 1.25 \text{ kg/m}^3$ y una velocidad de viento de $W_{10} = 10 \text{ m/s}$, que se inducirá al dominio en

diferentes direcciones.

En la siguiente figura se muestra la grilla, su orientación y el punto de control $p=(500,2500)$, este punto se ubica dentro del dominio y se registrará la variación de las variables η , U y V .

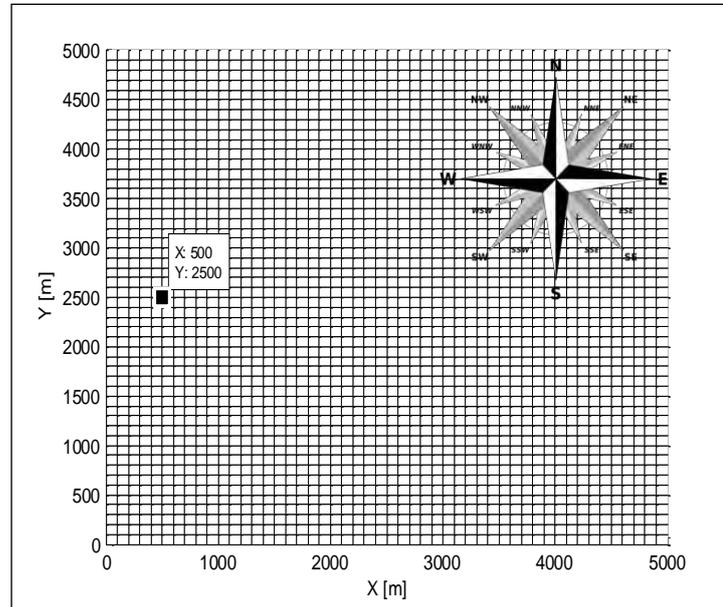


Figura 4-24: Dominio para el test de flujo producido por el viento y el punto (500, 2500).

En los siguientes ítems se realizarán simulaciones con diferentes configuraciones:

a) Fronteras abiertas.

Este test numérico considera las cuatro fronteras abiertas (radiación) y la variación de la dirección del viento en tres direcciones: W, E, SW y NW.

Las variaciones de las direcciones de la dirección del viento y sus diferentes corridas, se muestran en la Figuras 4-26 y 4-27 para el viento que viene desde el W, Figuras 4-28 y 4-29 para el viento que viene desde el E, Figuras 4-30 y 4-31 para el viento que viene del SW y Figuras 4-32 y 4-33 para el viento que viene del NW, en las cuales se observan el campo de velocidades obtenido y la variación en el tiempo de cómputo de las variables U , V y η , las mismas que tienden a un comportamiento monótono, cuando se mantienen constantes la velocidad del viento. Este es un indicador de que el modelo numérico se establecerá en el tiempo.

b) Frontera cerrada aguas abajo.

Para este test se considera las tres fronteras abiertas excepto la frontera aguas abajo, igual que el caso anterior se considera la variación de la dirección del viento de W, de N, de SW y de NW, que se muestran en las Figuras 4-34 a 4-39, respectivamente.

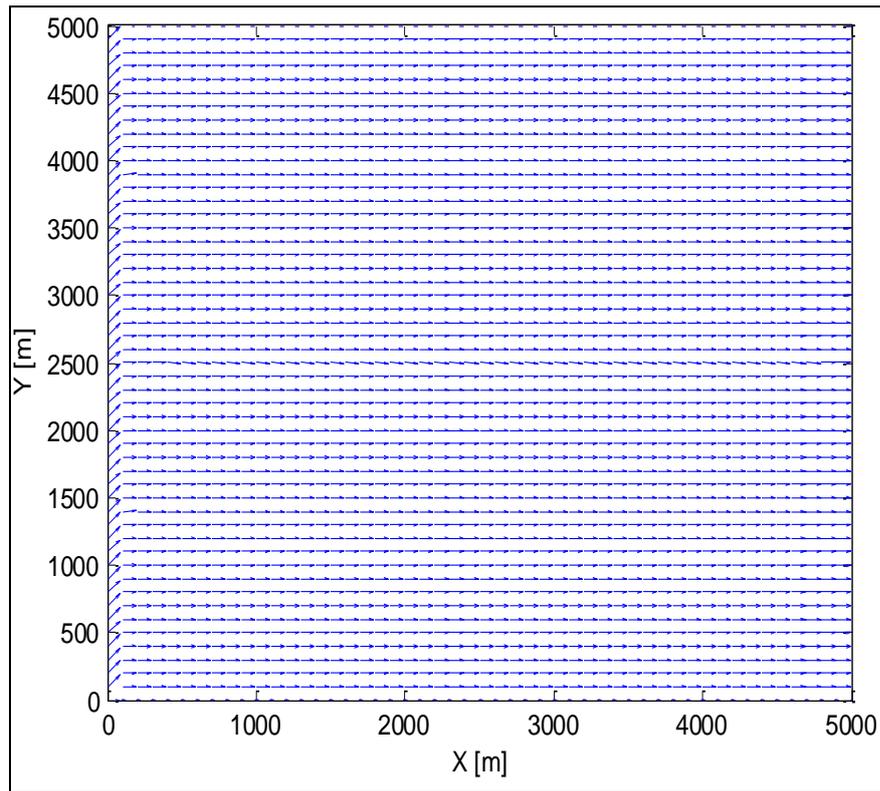


Figura 4-25: Campo de velocidades con viento de W.

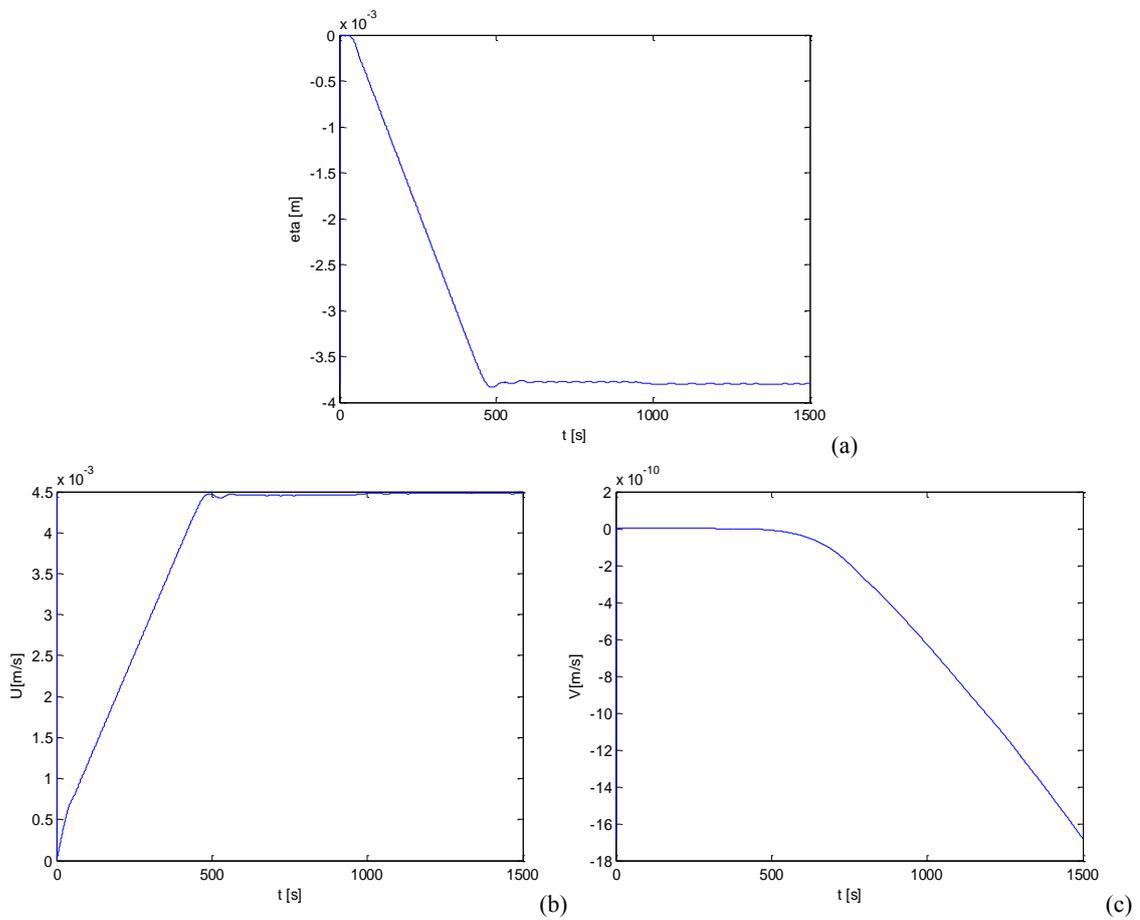


Figura 4-26: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de W.

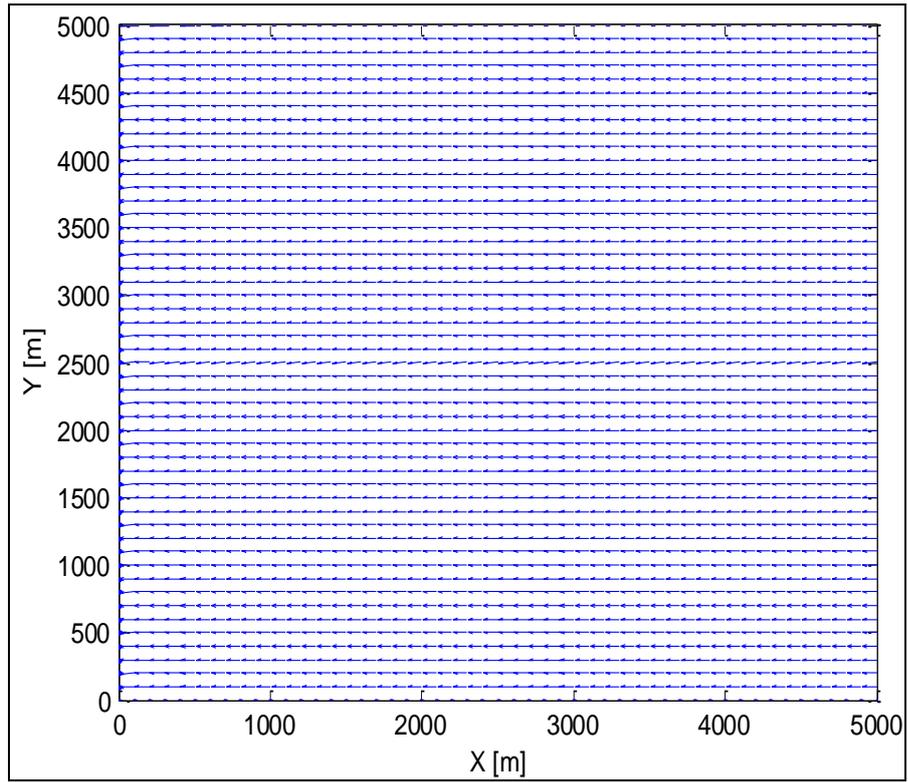


Figura 4-27: Campo de velocidades con viento de E.

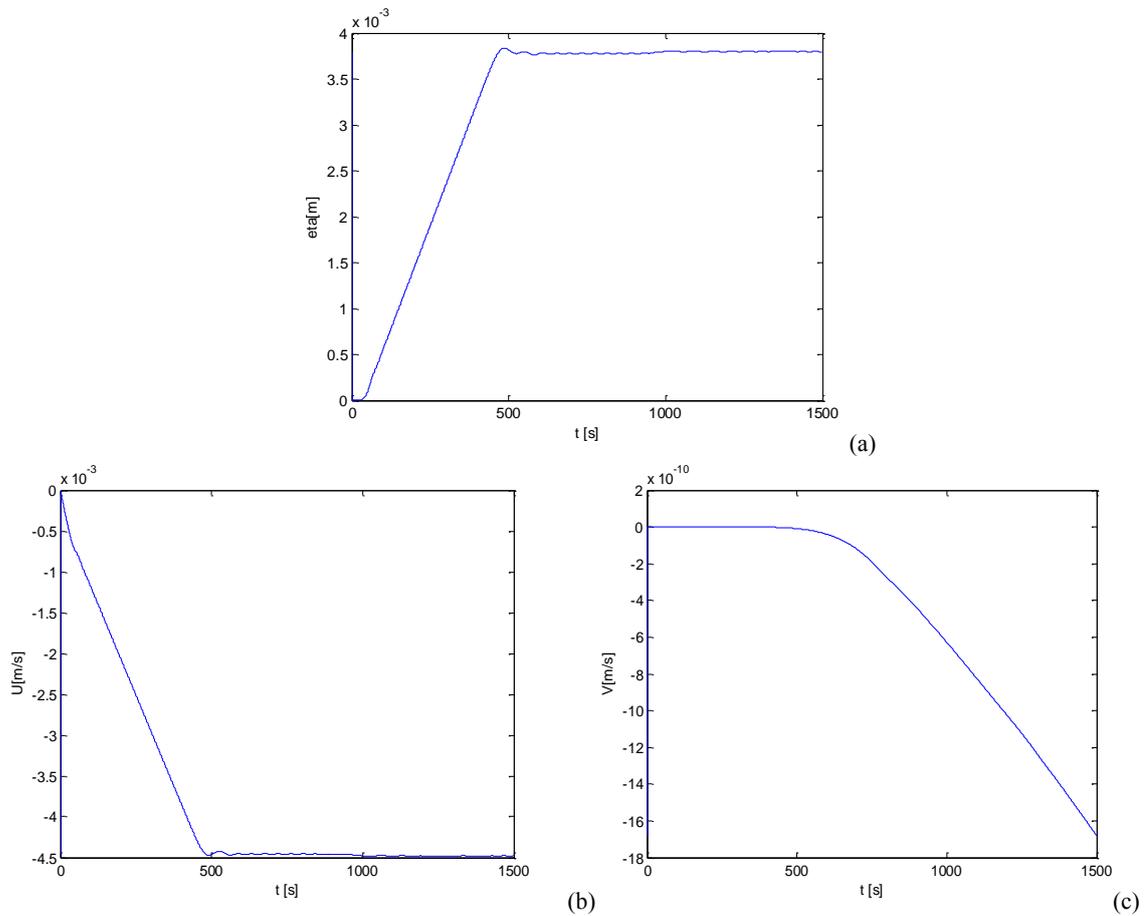


Figura 4-28: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto $(500, 2500)$, con viento de E.

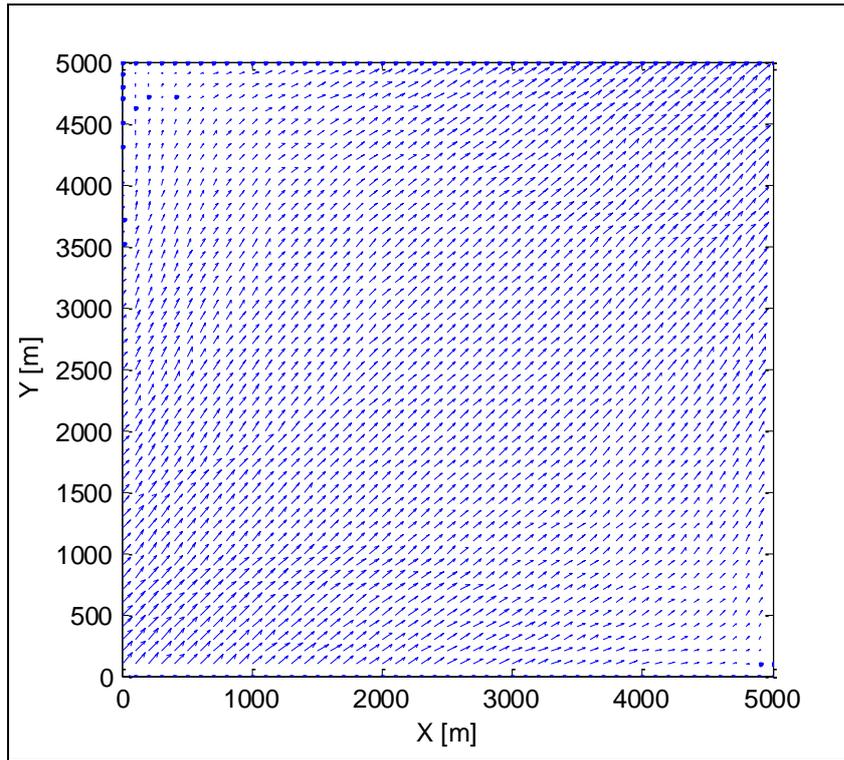


Figura 4-29: Campo de velocidades con viento de SW.

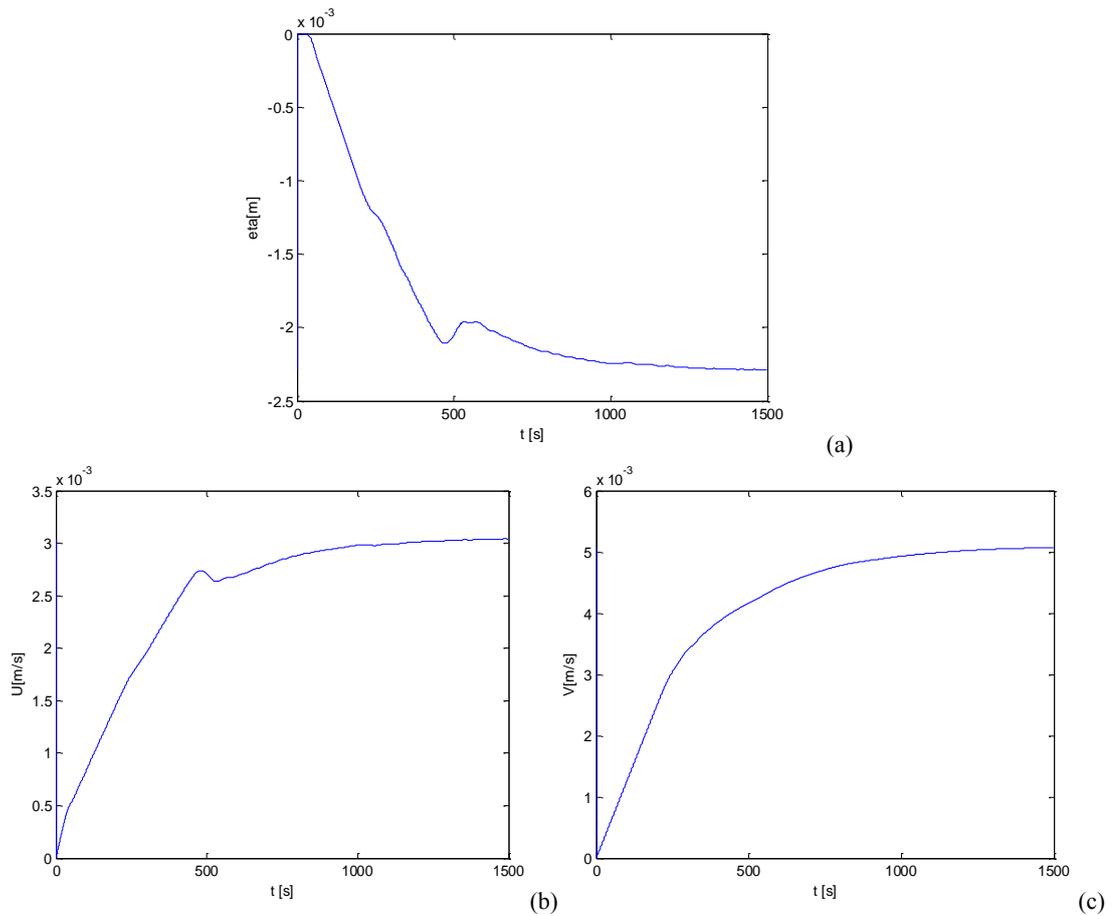


Figura 4-30: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de SW.

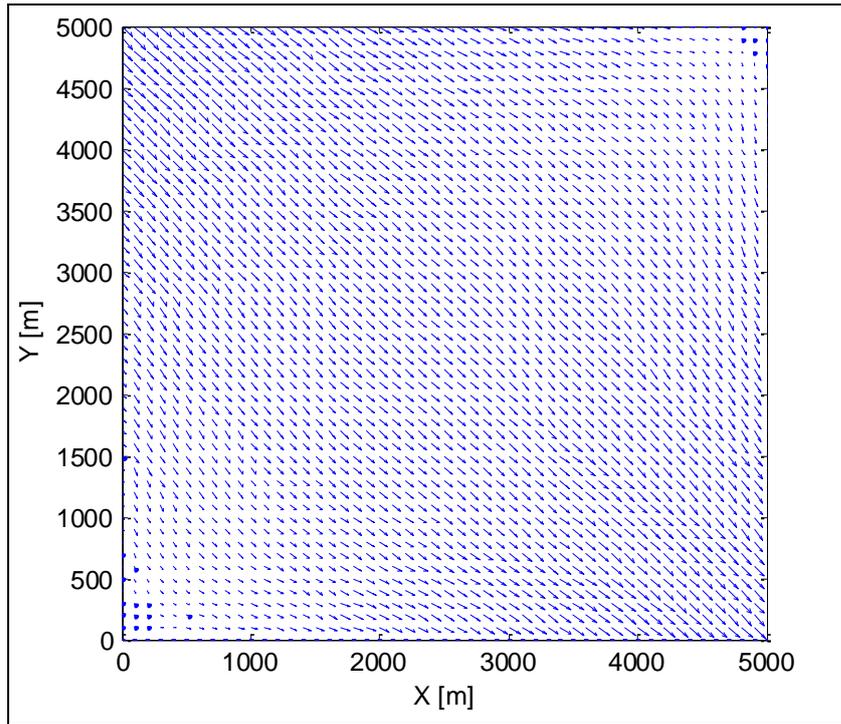


Figura 4-31: Campo de velocidades con viento de NW.

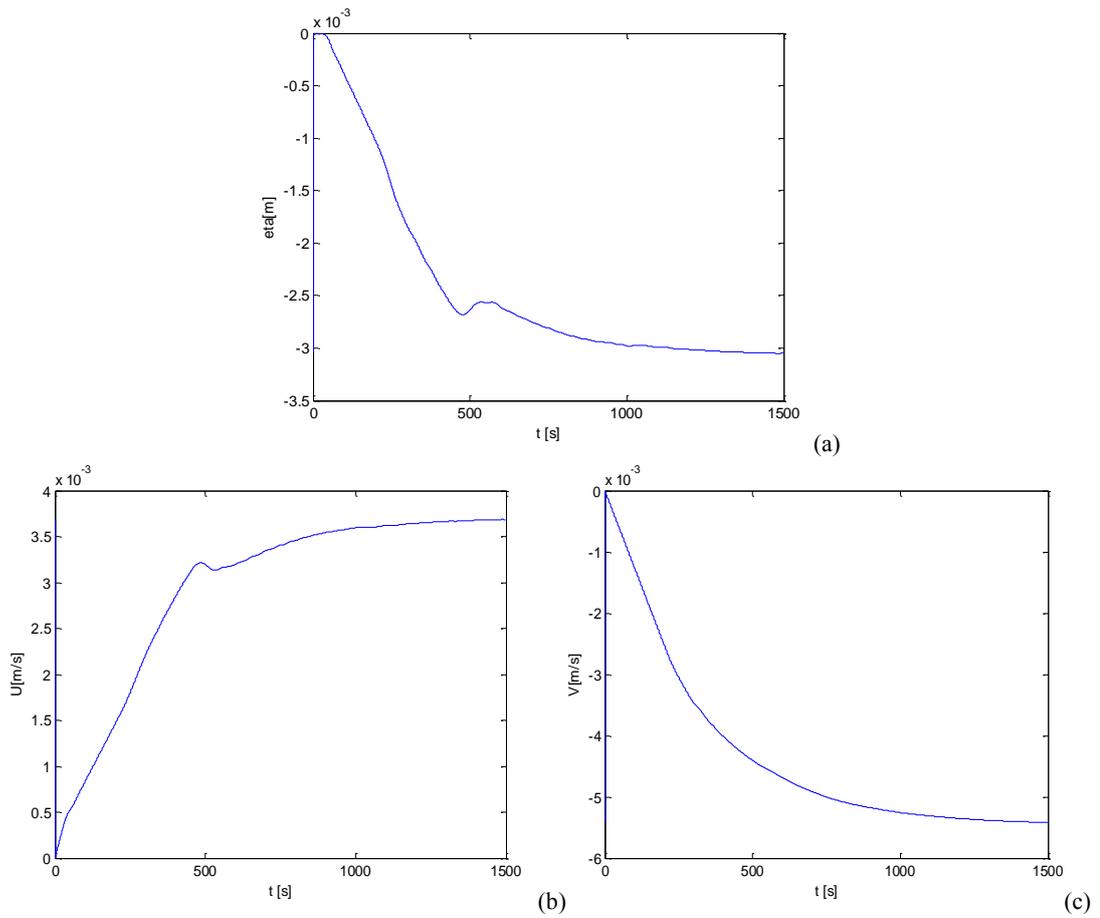


Figura 4-32: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de NW.

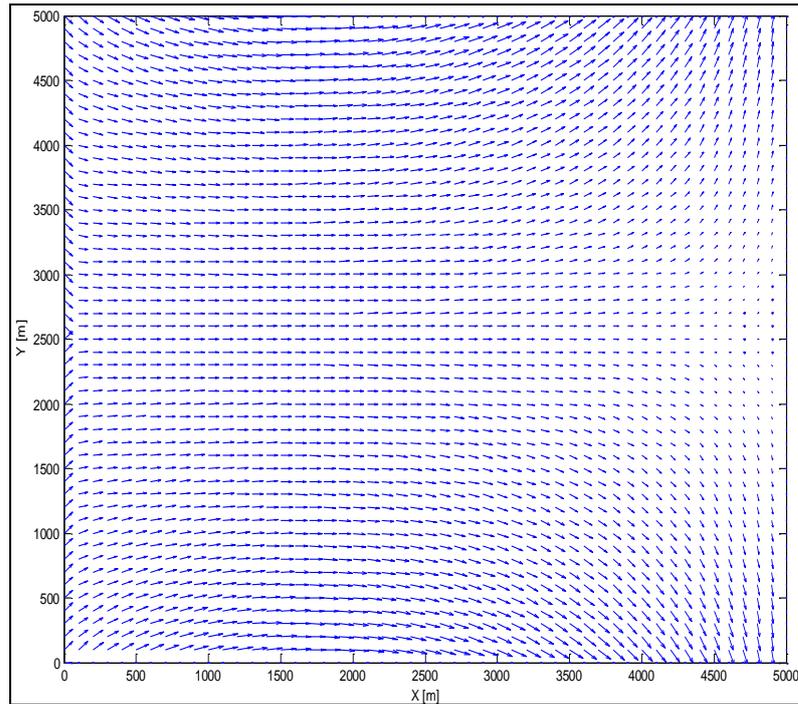


Figura 4-33: Campo de velocidades con viento de W.

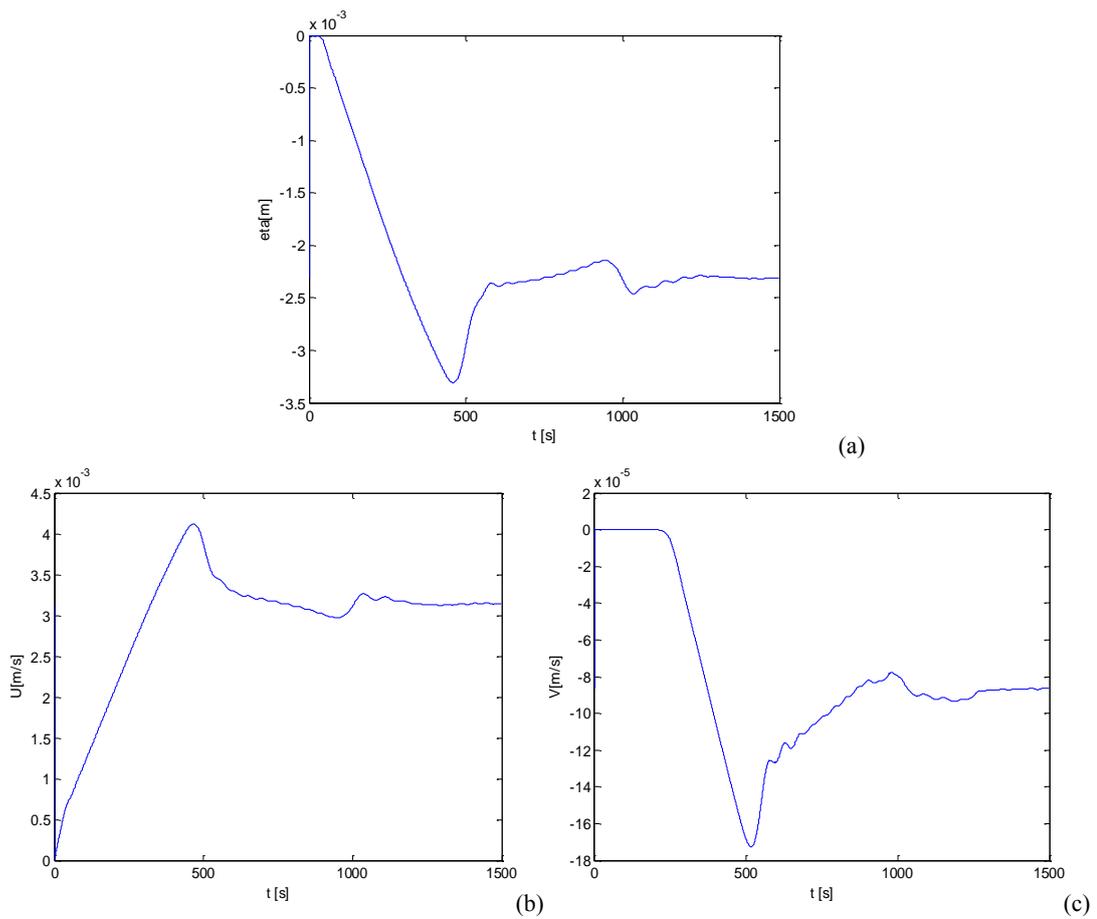


Figura 4-34: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de W.

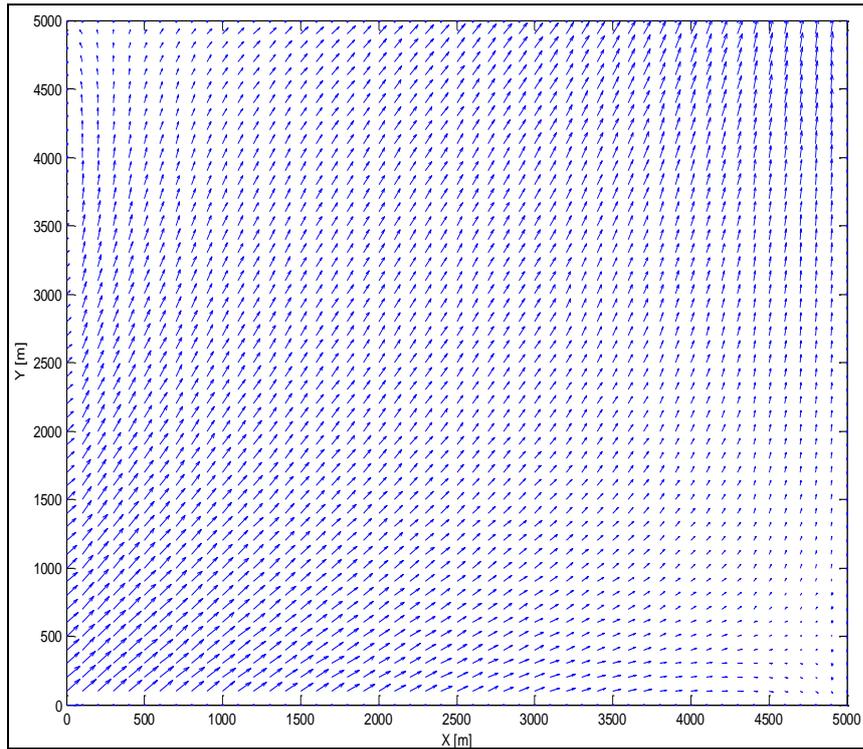


Figura 4-35: Campo de velocidades con viento de SW.

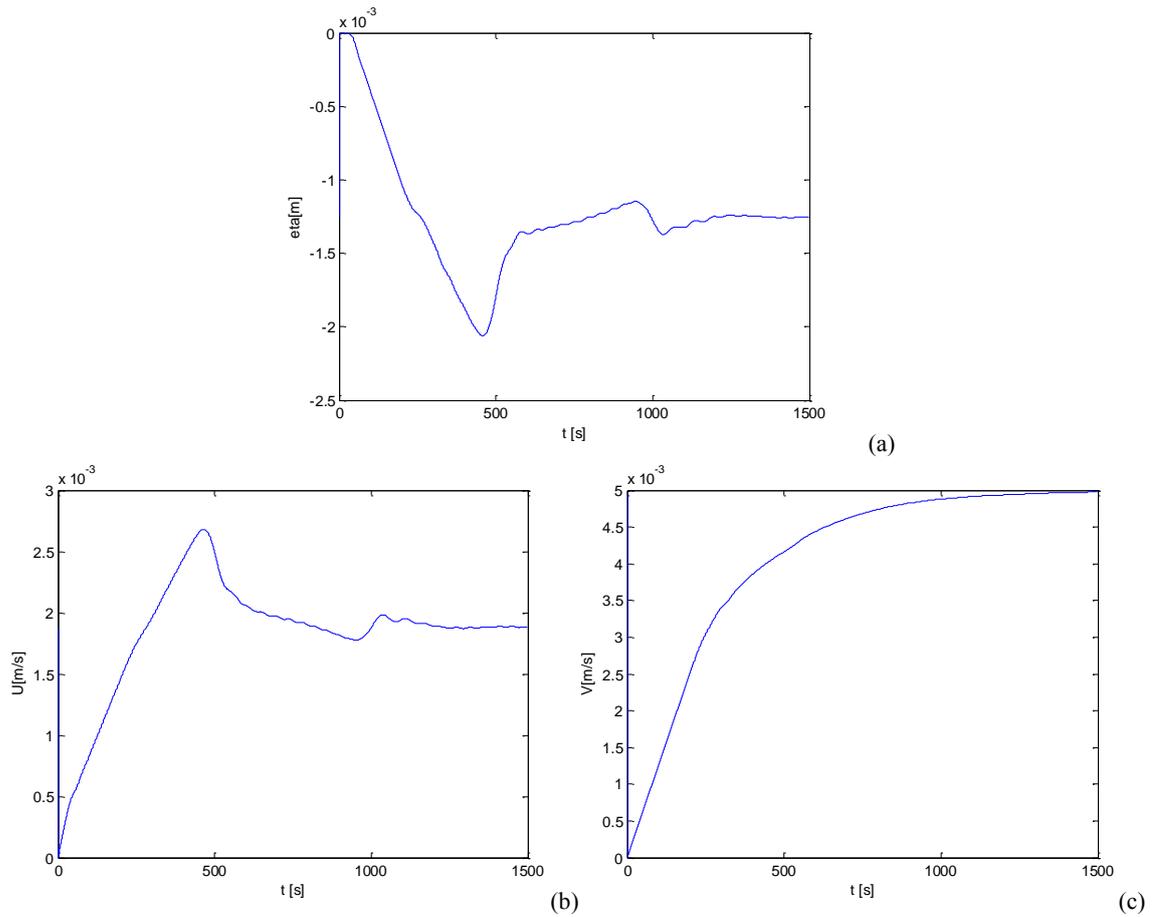


Figura 4-36: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de SW.

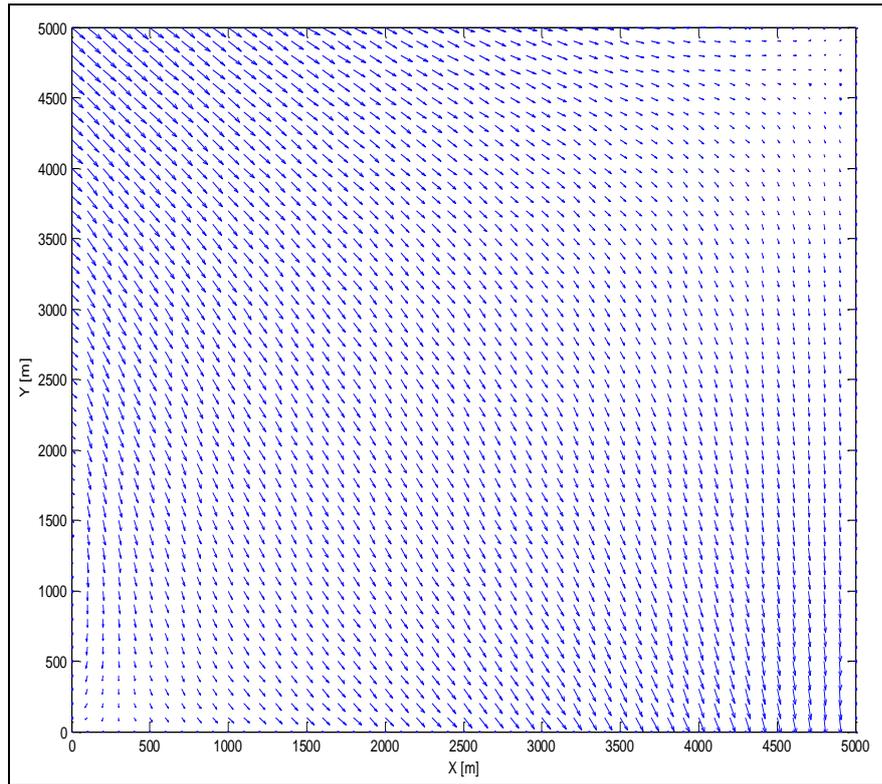


Figura 4-37: Campo de velocidades con viento de NW.

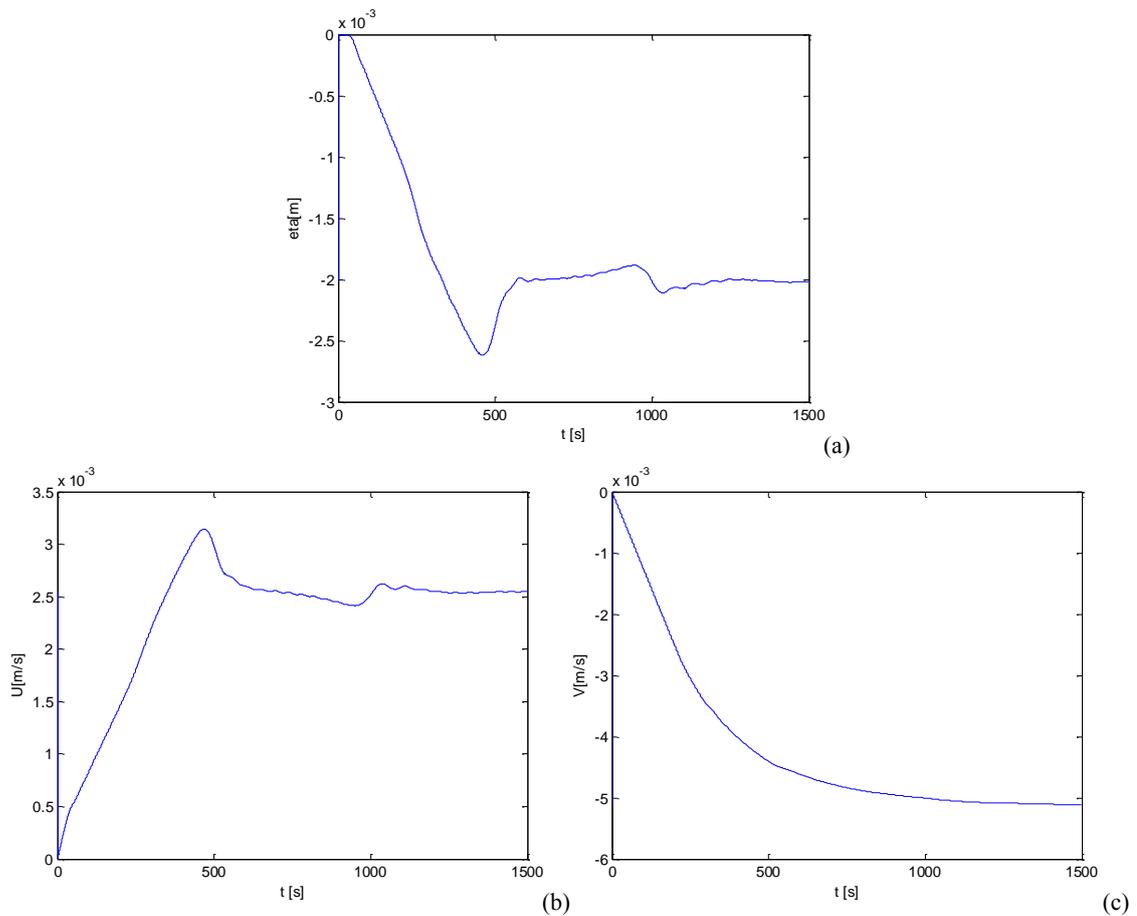


Figura 4-38: Comportamiento de las variables η , U y V en el punto (500, 2500), con viento de NW.

CAPITULO V

5 APLICACIÓN DEL MODELO NUMÉRICO

5.1 Introducción

En el presente capítulo se aplicará el algoritmo numérico a la bahía de Puno, descrito e implementado en el Capítulo IV. Así mismo, se describirá la generación de la geometría para el modelo, descripción física de la bahía, condiciones de frontera y las simulaciones en varios escenarios.

En la Figura 5-1, se observa una vista panorámica de la Bahía de Puno y parte de la ciudad de Puno, la cual ha sido tomada desde el cerro Azoguine de W a E. Para la aplicación del modelo matemático en la bahía, ha sido necesario realizar algunos trabajos de campo, como el obtener la batimetría y datos para la verificación del modelo como fue la medición de corrientes, estos se lograron gracias al apoyo de la ALTⁱ y PELTⁱⁱ [15]. Con esta información se ha logrado identificar con mayor detalle las fronteras del modelo, y de esta forma poder generar la malla para el modelo numérico. La calidad de la malla es uno de los factores importantes que influyen en la verificación del modelo, los detalles se describen a continuación.



Figura 5-1: Vista panorámica de la Bahía de Puno

ⁱ Autoridad Autónoma del Lago Titicaca.

ⁱⁱ Proyecto Especial Binacional Lago Titicaca.

5.2 Batimetría

En el ámbito de la bahía que es motivo de la presente investigación se ha realizado un levantamiento batimétrico con una densidad de puntos de 380 puntos por km^2 , las curvas de nivel obtenidas se muestra en la Figura 5-2. La superficie de agua cuando se realizó el trabajo estuvo en la cota 3810 m.s.n.m. y la cota mas baja esta en los 3804 m.s.n.m., lo que indica una profundidad máxima es de 6 m. Sin embargo, se menciona que el año 1986, según los registros del SENAMHI, el nivel del Lago Titicaca, alcanzo la cota 3812.5 m.s.n.m., que implicaría que el lago en un eventual caso podría alcanzar un nivel máximo instrumental de 8.5 m.

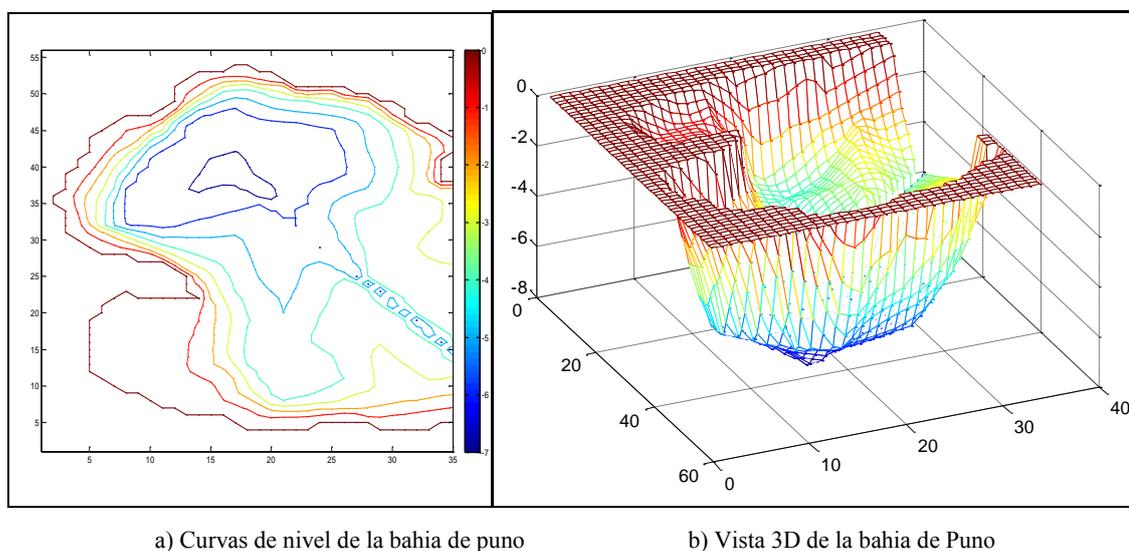


Figura 5-2: Batimetría de la Bahía de Puno

5.3 El viento

La dirección de los vientos dominantes influye en el desplazamiento de las aguas dentro de la Bahía. Así mismo, en el Estudio de la Contaminación en el Lago Titicaca, realizado en el año 1999ⁱⁱⁱ, se indica que: “Las aguas someras de la bahía de Puno, especialmente a lo largo de la orilla occidental, alcanzan temperaturas cercanas a los 20°C , bastante más altas que las temperaturas de las aguas del Lago Mayor, por lo que el viento fácilmente podría provocar la mezcla, vertical de las aguas en la bahía de Puno”.

También, otro efecto del viento es el movimiento del manto de la “*Lemna sp*”, que es un alga macroscópica que se desplaza en la superficie del lago, unas veces al Oeste, otras al Norte, de acuerdo a las condiciones del viento.

Por consiguiente, los vientos, tienen influencia en la circulación del flujo, junto con la

ⁱⁱⁱ “Contaminación en el Lago Titicaca, Perú: Capacitación, Investigación y Manejo”, T.G. Northcote, et al, Westwater Research Centre, Canada e Instituto de Aguas Alto Andinas, Perú, 1999.

radiación solar y la temperatura del agua. Sin embargo, en la presente investigación se utilizará como único factor la velocidad y dirección del viento, que se tomarán de la Estación meteorológica del Lago Titicaca, que se ubica a una latitud de 15°50' y longitud 70°01', a una altitud de 3811 m.s.n.m. Así mismo, en los meses de mayo, periodo donde se realizaron las mediciones del campo de velocidad in situ, se han registrado históricamente velocidades promedio de viento diario entre 2 a 16 m/s, con una dirección de mayor frecuencia en el siguiente orden de prelación: Este, Noreste, Sureste y Noroeste.

También, cabe mencionar que esta estación es la más cercana al área de interés o dominio de análisis para la presente investigación. Se asumirá para la presente investigación que la velocidad del viento actuará en forma uniforme en toda la superficie del agua del dominio en análisis. Sin embargo, en futuras investigaciones sería necesario generar series de tiempo y/o funciones de superficies de velocidad de viento, para mejorar el efecto de la influencia del viento en el comportamiento hidrodinámico de la bahía de Puno.

5.4 Coeficiente de Resistencia

La principal dificultad de la utilización del coeficiente de Chezy en las ecuaciones en su estimación. En general el coeficiente de Chezy depende del número de Reynolds, la rugosidad absoluta del fondo y la forma de la sección transversal. En el caso de la bahía la rugosidad absoluta toma importancia, ya que el C de Chezy estimado debe tomar en cuenta el efecto de la vegetación en el retardo del flujo y el incremento de C. En zona de estudio no se ha realizado estudios para la determinación del coeficiente C, sin embargo, en el estudio del Plan Director del Sistema TDPS (1994), específicamente en el modelamiento del río desaguadero, que tiene un ancho de 5 a 6 km, que tiene alta presencia de macrófitos acuáticos emergentes (totorá) donde calibraron un modelo de escorrentía de flujo no permanente en el que se obtuvo un coeficiente de Manning de 0.2, relativamente alto, el que se verificó posteriormente, en el Estudio de Dragado del río Desaguadero por la ALT (1997), la importancia de este modelamiento es que el río Desaguadero tiene un tramo aproximadamente de 30 km, en el cual presenta en todo su cauce totorales, que son muy similares a los que se encuentran en la Bahía de Puno.

Una descripción de la forma de vida de la flora acuática del Lago Titicaca, puede encontrar en Dejoux y Iltis, et al (1991), que indican que el límite de la proliferación de los macrófitos, es aproximadamente en la isobata 10 m, que permite dividir el lago en dos zonas muy desiguales: Una zona provista de vegetación acuática y una zona desprovista de

ella (alrededor del 80% de la superficie total). La zona de fondos desnudo se extiende desde la isobata 10 m hasta profundidades mayores (284m).

Si analizamos nuestra información batimétrica de la bahía, la profundidad máxima que se tiene es de 6 m que es menor a la isobata de 10 m. Por lo tanto, se asumirá para una primera aproximación un valor del coeficiente de Manning de $n=0.2$ para la zona de totorales y $n=0.03$ para la zona desnuda, como se muestra en la siguiente figura.

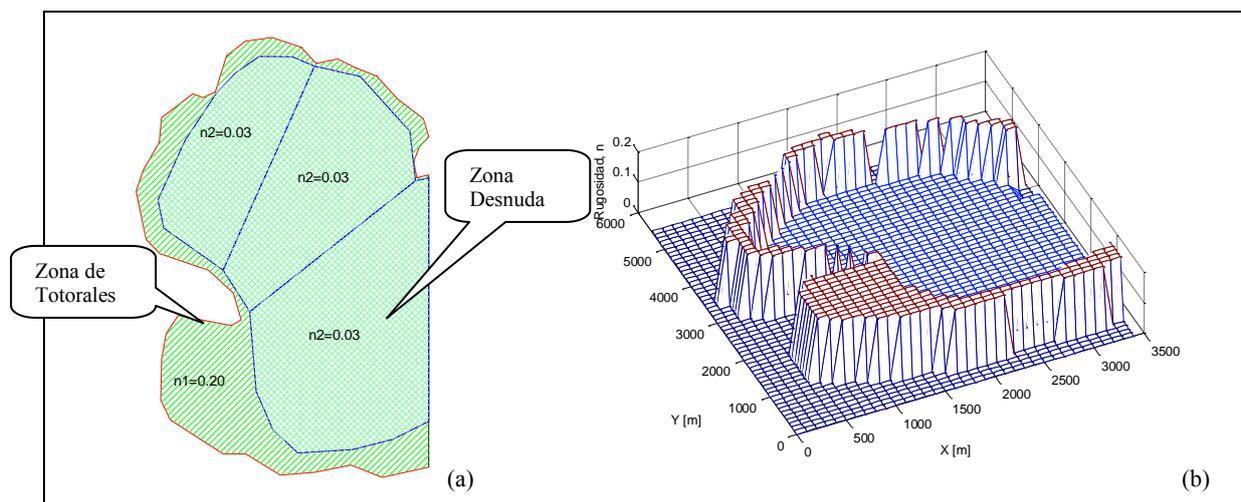


Figura 5-3: a) Distribución del coeficiente de Rugosidad de Manning, en la bahía de Puno. b) Rugosidad generada con el programa roughnessgrid.m, adecuado a la grilla del modelo numérico.

Para utilizar el coeficiente de la Rugosidad de Manning, en el modelamiento de la bahía de Puno, y colocar a cada nudo del grillado el valor del coeficiente de rugosidad que le corresponde, se ha implementado en MATLAB el programa roughnessgrid.m, (ver Anexo A). Este programa necesita como dato de entrada, el valor de rugosidad y las coordenadas x, y del polígono, que sea compatible con el dominio de análisis, el que se muestra en la Figura 5-3.a. Se debe respetar para el programa mencionado, que todos los ángulos internos del polígono puedan verse entre sí. El resultado del uso de este programa se muestra en la Figura 5-3.b.

5.5 Descripción física del flujo en la bahía

La descripción física del flujo en la bahía Puno, tiene como objetivo dar a conocer el comportamiento del campo de velocidades en el área estudiada (velocidad y dirección de cada punto medido). Este estudio se realizó, en mayo del año 2002, en tres zonas claramente definidas que se muestran en la Figura 5-4, como son: La bahía propiamente dicha de Puno, Río Willy y canales de navegación sur y norte.

Se ha medido la velocidad y orientación del flujo en dos puntos de su profundidad, en la

superficie y a una altura del 60% de profundidad con respecto al fondo del punto considerado.

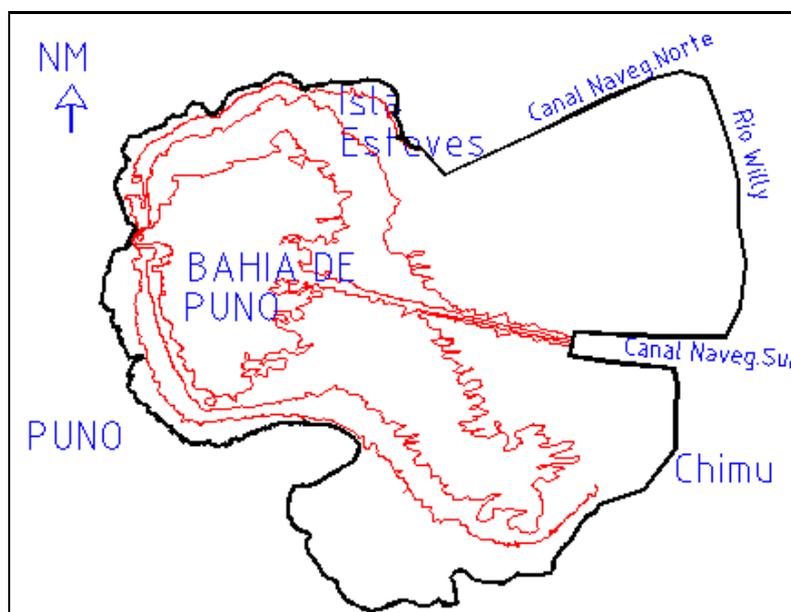


Figura 5-4: Zonas de la Bahía de Puno.

5.5.1 Método de medición de las corrientes

La medición se realizó utilizando los siguientes equipos: Correntómetro a la Deriva (Ver Figura 5-5), una estación Total LEICA (Modelo TCA 1103), N° de serie 615488 con sus respectivos reflectores, Ecosonda APELCO XCD 350, una embarcación (Tipo Zodiac), equipos de comunicación (04 Walkie Talkie, marca Motorola - Modelo Radius P110) y cronómetros.

La metodología seguida consistió en identificar un punto en el cual se determinara su velocidad y dirección, posteriormente se deja el correntómetro a la deriva en este punto seleccionado, que viene a ser el punto inicial. Con la estación total se registra la posición del punto inicial y después de un tiempo de aproximadamente 20 minutos se registro la posición del punto final. Con los datos registrados en la estación total se calcula la distancia entre el punto inicial y final, y además teniendo como dato el tiempo, se calcula la velocidad. Considerando que los dos puntos están referenciados a una poligonal de apoyo (con la estación total) se puede determinar su ubicación y la orientación de la trayectoria recorrida.

La medición comprendió en total 402 puntos muestrales en el área del estudio, entre las mediciones de flujos superficiales y flujos al 60% de la profundidad. La poligonal de apoyo fue de 04 vértices distribuida adecuadamente en el litoral de la bahía de Puno.

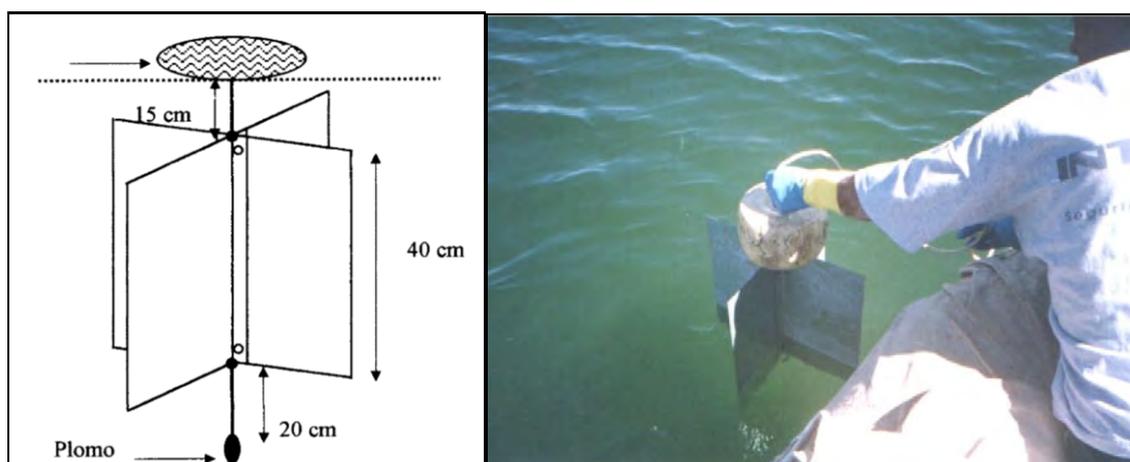


Figura 5-5: Correntómetro a la deriva propuesto por el IMARPE.

5.5.2 Descripción de los flujos superficiales

La circulación superficial en el Río Willy, Canal de Navegación Sur y Canal de Navegación Norte (Los Uros Tramo I), como se muestra en la Figura 5-4 y en mayor detalle en el Apéndice B. Como resultado de la medición de flujo se pudo apreciar en la Figura 5-6, que se presentaron flujos con dirección predominante hacia el Oeste. Los flujos siguieron en gran parte la configuración de la línea del litoral, aunque con tendencia a alejarse de ella por efecto de la forma de la bahía (línea de costa) y otros aspectos que se analizarán en el presente trabajo..

En la Bahía se presentaron flujos en varias direcciones, dando lugar a la formación de vórtices, este fenómeno se presentó entre la isla Esteves y San José, de igual forma se observa entre el muelle de Puno y la Isla del Diablo. Entre el malecón y San José las velocidades de los flujos son mínimas, esta ocurrencia podría deberse por el incremento del coeficiente de resistencia, por la presencia de totorales, y otros efectos que se estudiarán (influencia del viento).

En el área comprendida entre la isla Espinar y el Canal de Navegación del Sur presentó dos sentidos bastante diferenciados, lo que podría deberse a la interferencia producida por la proyección de la Isla espinar que afecta a la circulación proveniente de este canal.

El resumen de los datos medidos se muestra en el Cuadro 5-1. Así mismo, se adjunta en el Apéndice B, los registros de los datos medidos por el Proyecto Especial Binacional Lago Titicaca, realizado en el año 2002 [16].

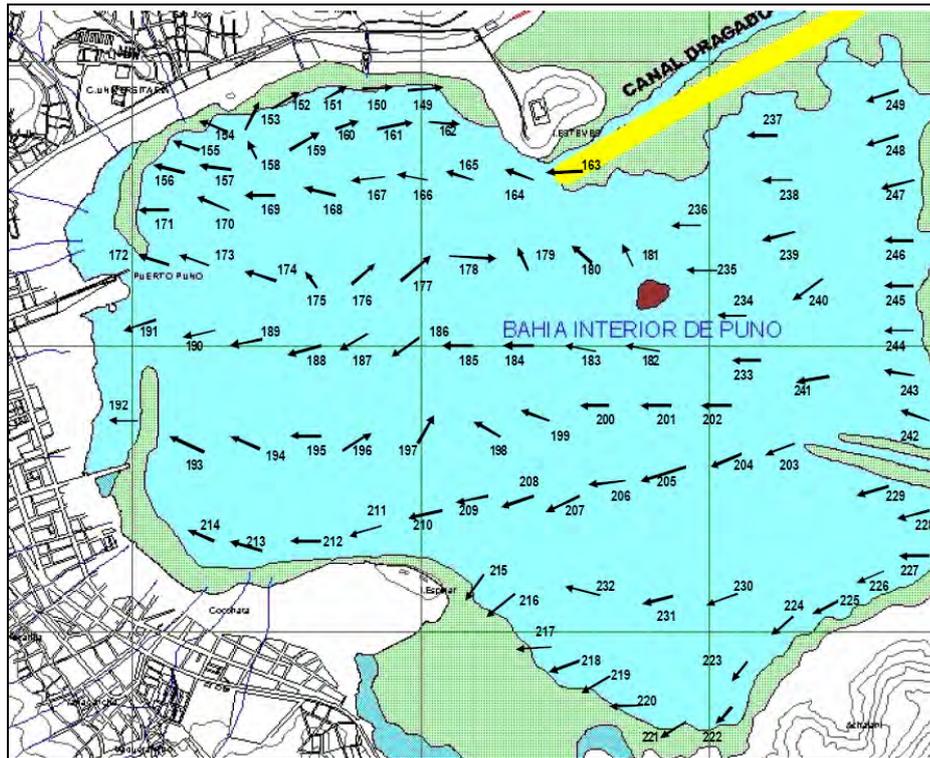


Figura 5-6: Campo de velocidades de los flujos superficiales en el centro de la Bahía de Puno, las flechas indican la dirección predominante y los números indican el punto al que corresponden, los datos aparecen en el Cuadro B-4 del Apéndice B.

5.5.3 Descripción de los flujos al 60% de profundidad

En el Río Willy se aprecia un flujo hacia el Norte, en el canal de navegación Sur con sentido Noroeste ambos tratando de seguir la configuración de los contornos y otro con sentido Suroeste que tiende a desaparecer en los totorales.

En el Canal de navegación norte (los Uros Tramo I), la circulación presentó flujos hacia el Noreste con ramales al Norte y Noroeste cuyas velocidades registradas son las más bajas en toda la bahía.

En el centro de la Bahía de Puno se presentaron flujos bastante diferenciados: entre la isla Espinar y el canal de navegación sur, la circulación tiende a seguir la configuración del litoral, sufriendo cierta desviación por efecto de la forma de la bahía; en el área comprendida entre el canal de navegación Norte y el canal de navegación Sur se presentaron flujos con dirección Norte; entre San José y la isla Esteves se presentaron flujos con dirección este con la presencia de vórtices con sentido horario.

En el área comprendida entre el malecón y San José la circulación presenta flujos con dirección Noroeste y también presenta velocidades bajas de la Bahía, la circulación tiende a desaparecer y perder velocidad en los totorales.

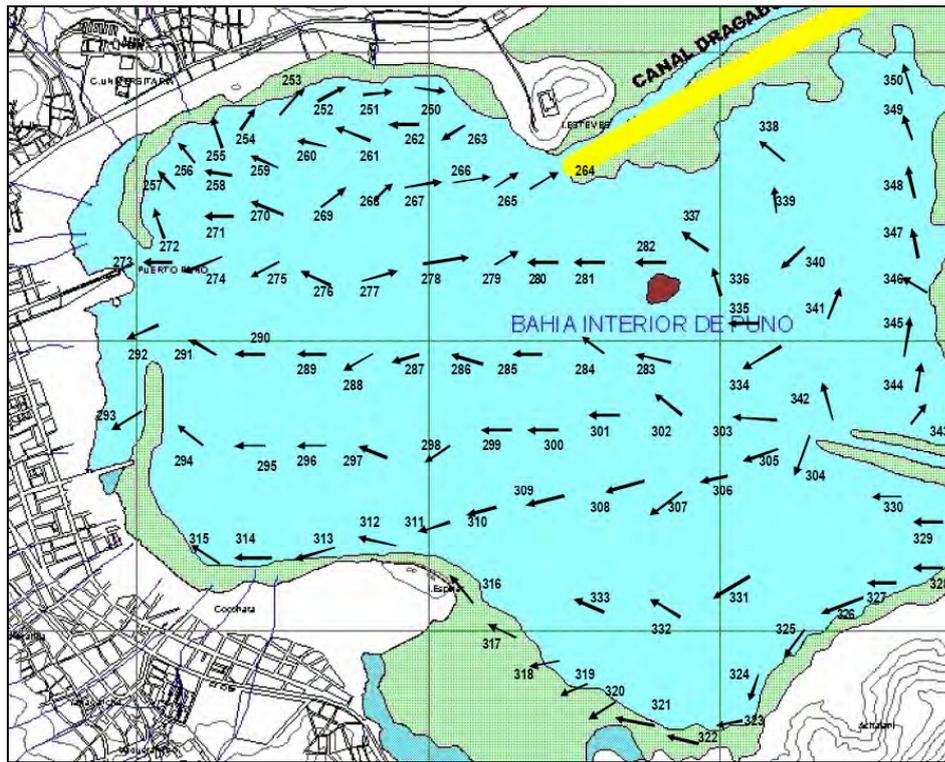


Figura 5-7: Campo de velocidades al 60% de la profundidad en el centro de la Bahía de Puno, las flechas indican la dirección predominante y los datos aparecen en el Cuadro B-4 del Apéndice B y los números indican el punto al que corresponden.

En el centro de la Bahía de Puno se presentaron flujos variados con cierta tendencia hacia el Oeste y Sur, dando lugar a la formación de pequeños vórtices en el sentido horario, los flujos más intensos se registraron en esta área. El resumen de los datos medidos se muestra en el Cuadro 5-1 y en la Figura 5-7, se muestra, gráficamente el campo de velocidad medido.

Como se podrá apreciar en las Figura 5-6 y 5-7, el campo de velocidades sigue la misma tendencia, y para identificar las causas de las variaciones que se presentan en la zona Este, tendrían que hacerse más mediciones e instalación de anemómetros que permitirían también monitorear la velocidad y dirección del viento. Sin embargo, con estas mediciones se puede indicar que la bahía de Puno, matemáticamente se puede modelar y aproximar con las ecuaciones de aguas poco profundas que se describen en el presente trabajo.

También, el dominio para la modelación numérica esta bien definido, así como, las condiciones de frontera cerrada y abierta, que se describen más adelante.

Cuadro 5-1: Resumen de la primera campaña de medición del campo de velocidades de la bahía.

Zona de Medición	Flujos	Nro. Pts	Orientación Predominante	Velocidad Mínima (cm/s)	Velocidad Máxima (cm/s)	Velocidad Promedio (cm/s)
Rio Willy	Superficiales	22	280°	0.59 (punto 07)	10.51 (punto 04)	3.99
	60% profundidad	22	350°	0.65 (punto 38)	8.94 (punto 26)	2.39
Canal de navegación sur	Superficiales	22	250 ° a 350°	1.77 (59)	20.09 (52)	10.93
	60% profundidad	22	310°	0.27 (81)	18.98 (73)	8.43
Canal de navegación norte, (Uros tramo I).	Superficiales	31	250°	0.52 (105)	4.32 (91)	2.42
	60% profundidad	31	355°	0.15 (138)	3.53 (141)	1.94
Centro de la bahía de Puno	Superficiales	100	---	0.54 (192)	19.31 (203)	6.34
	60% profundidad	100	---	0.12 (323)	13.21 (305)	1.93
Frente al malecón	Superficiales	26	305°	1.09	7.21	2.67
	60% profundidad	26	348°	0.71	5.03	1.94

5.6 Geometría y generación de la malla

La geometría para nuestro caso estará definida por la batimetría que será descrita por una grilla. La razón para crear una grilla es que una ecuación diferencial parcial genera un problema dimensional infinito y la solución deberá en general ser buscado en un espacio dimensional infinito. Para restringir el problema a un conjunto de puntos finitos o celdas en los que nosotros escogemos una representación dimensional finita, el problema se vuelve manejable para las simulaciones en la computadora. La técnica para convertir las ecuaciones diferenciales parciales a su forma discreta, equivalente dimensional finita, se llama discretización.

Como se ha discutido en el Capítulo IV, la geometría es una parte estratégica de la solución numérica. Por supuesto la malla depende de la geometría en consideración y de la dimensión del modelo que en nuestro caso la aproximación es bidimensional. Pero la malla también depende del modelo matemático escogido para resolver el problema de flujo. Por ejemplo, si nosotros queremos resolver el flujo alrededor de un objeto con las ecuaciones de Euler o las ecuaciones de Navier - Stokes se harían mallas diferentes. En el caso viscoso, Navier - Stokes, la malla debe ser bastante fina cerca del objeto para capturar la capa límite. Para una aproximación de flujo no viscoso ningún refinamiento es necesario, porque ninguna capa del límite existe en este caso. Y finalmente la malla debe depender de la solución requerida. Así en la directriz para encontrar la solución usando una malla,

nosotros debemos saber (cualitativamente) la solución que produce la malla. La malla debe ser más refinada en esas regiones donde ocurren los gradientes grandes, como capas límite, capas del corte y ondas de choque. La generación de mallas, sobre todo mallas tridimensionales se ha vuelto un arte en sí mismo.

Para nuestro caso para la generación de la malla en dos dimensiones adaptable al algoritmo numérico descrito, ha sido necesario la implementación de un programa específico denominado `meshtogrid.m` escrito en MATLAB (Ver Anexo A), el cual ha permitido generar las mallas y grillas necesarias para realizar las pruebas hasta lograr la convergencia del modelo y familiarizarse con los parámetros físicos y numéricos utilizados en la presente investigación. Este programa de generación de malla utiliza la interpolación lineal en elementos finitos triangulares. Este programa permite generar desde las mallas triangulares, las grillas ortogonales, con los Δx y Δy adecuados, para lograr la calidad de la grilla para lograr una aproximación de la simulación al comportamiento de la bahía. La malla triangular se muestra en la Figura 5-8.a y la grilla en la Figura 5-8.b.

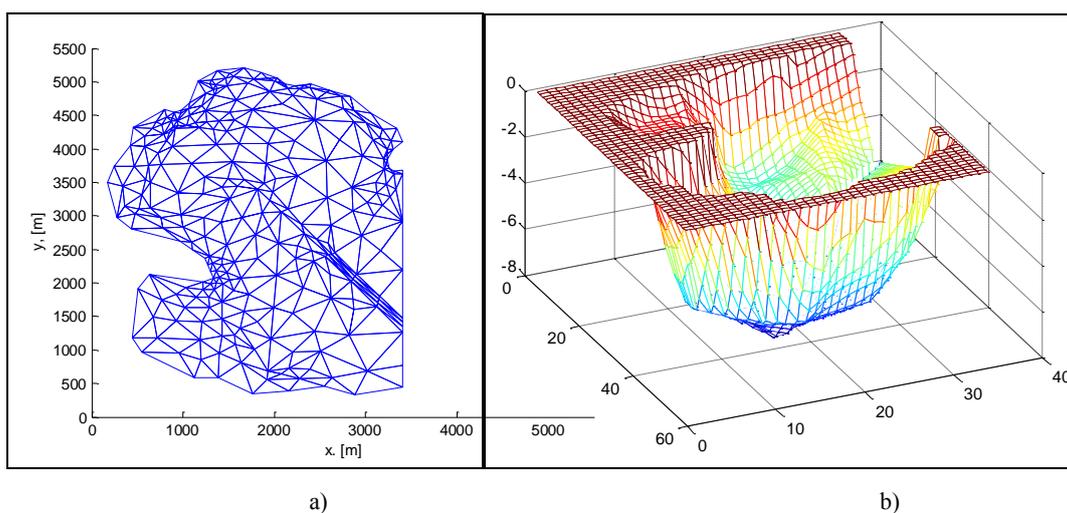


Figura 5-8: a) Elementos triangulares de tres nudos utilizado para generar el grillado para el algoritmo numérico, b) Grilla generada con el programa `meshtogrid.m`, con $\Delta x = \Delta y = 100\text{m}$.

En la Figura 5-8.a, se muestran la malla de elementos triangulares con un total de 357 número de nudos, 671 número de elementos y 3 nudos por elemento. Esta malla base fue generada con el programa GID, para lo cual han sido necesarias las curvas de nivel obtenidas en la batimetría que se muestran en la Figura 5-4. Debido a que el algoritmo numérico implementado utiliza una grilla que tiene puntos diferentes a los nudos de los elementos triangulares que conforma la malla de elementos, se generó el grillado con diferentes Δx y Δy el cual se muestran el Figura 5-8.b. Esta grilla se utilizará para las diferentes simulaciones en el modelamiento de la circulación de flujo en el centro de la

bahía. También, es recomendable identificar antes de generar la malla de triángulos, las fronteras cerradas y las fronteras abiertas.

5.7 Condición inicial y de frontera

Las condiciones iniciales en el inicio del tiempo de la simulación serán consideradas como $\eta(i,j,1) = 0$. De la información de campo podemos decir que los factores importantes para circulación del flujo en la bahía son el viento y el coeficiente de resistencia que varía espacialmente, que ya son considerados en la formulación de las ecuaciones de aguas poco profundas. Por lo tanto, para la aplicación del algoritmo numérico en la bahía se considerará condiciones de frontera cerrada en toda la orilla y condición de frontera abierta o radiación, entre el tramo de la Isla Esteves y Chimú. En bibliografía revisada de la bahía de Puno, no se ha encontrado mediciones de olas y/o niveles de agua adecuados para el modelo.

5.8 Resultados

Considerando la información de la grilla descrita en el ítem 5.4, y el dominio descrito en el ítem 5.6 y descripciones precedentes, se ha preparado los datos en el formato diseñado para hacer las corridas con el programa “ahdf.m” desarrollado como parte de la presente tesis con el algoritmo numérico descrito en el Capítulo IV, el código fuente se muestra en el Anexo A.

Se ha realizado el modelamiento de los campos de velocidad de la bahía de Puno, y para mostrar los resultados se ha seleccionado ocho puntos de control que se describen en la Figura 5-9. En estos puntos se realizará un registro y monitoreo del comportamiento durante todo el tiempo de simulación de las variables η , U y V.

La estación representativa descrita en el ítem 5-3, considerará en la bahía de Puno, una velocidad promedio de viento igual a 9 m/s y las direcciones predominantes de E, NE y SE. También, se considerará dos escenarios para el coeficiente de arrastre del viento, lo que se resume en la aplicación alternada de la ecuación de Garrat y Wang-Connor.

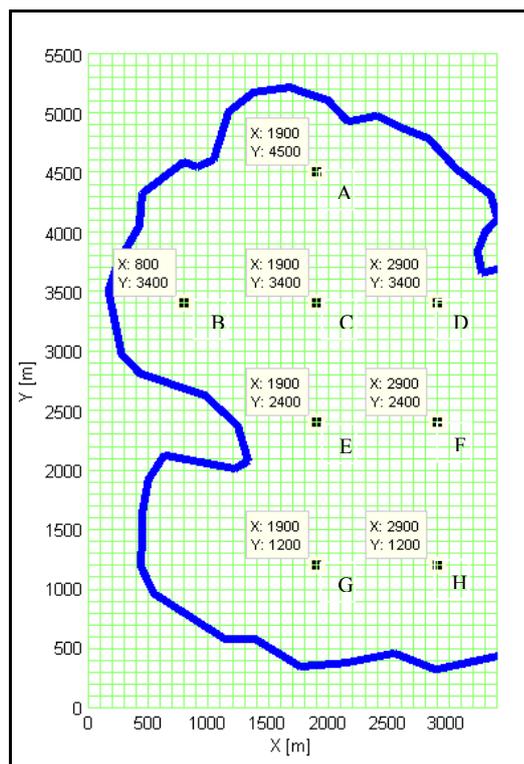


Figura 5-9: Muestra los puntos de control que se monitorearan durante todo el cálculo.

Los resultados obtenidos de la corrida del programa ahdf.m, se muestran en el Anexo B. El resultado de la aplicación de la ecuación de Garrat se muestra agrupados según la dirección del viento, para la dirección Este desde la Figuras B-2 hasta la Figura B-10, para la dirección Noreste desde la Figuras B-11 hasta la Figura B-19 y para la dirección Sureste desde la Figuras B-20 hasta la Figura B-28, el resumen de las velocidades se resume en el Cuadro 5-2.

El resultado de la aplicación de la ecuación de Wang-Connor, también, se muestra agrupados según la dirección del viento, para la dirección Este desde la Figuras B-29 hasta la Figura B-37, para la dirección Noreste desde la Figuras B-38 hasta la Figura B-46 y para la dirección Sureste desde la Figuras B-47 hasta la Figura B-55, el resumen de las velocidades se resume en el Cuadro 5-3.

Una vez concluida las simulaciones los resultados de los ocho puntos de control seleccionados se han comparado con los puntos más próximos medidos in situ de la zona denominado como Centro de la Bahía de Puno, que se muestran en el Cuadro 5-1 donde tenemos la medición superficial y al 60% de profundidad con un promedio de velocidad 0.041 m/s. El valor promedio es justificado y necesario para homogenizar la comparación debido a que las ecuaciones de aguas poco profundas son integradas en la vertical.

Cuadro 5-2: Resumen de cálculos del programa ahdf.m en la Bahía de Puno, velocidad de viento de 9 m/s.

Pto	X [m]	Y [m]	E			NE			SE		
			U [m/s]	V [m/s]	$\sqrt{U^2 + V^2}$ [m/s]	U [m/s]	V [m/s]	$\sqrt{U^2 + V^2}$ [m/s]	U [m/s]	V [m/s]	$\sqrt{U^2 + V^2}$ [m/s]
A	1900	4500	0.019	0.016	0.025	0.022	0.013	0.026	0.018	0.007	0.019
B	800	3400	0.001	0.042	0.042	-0.002	0.035	0.035	0.000	0.036	0.036
C	1900	3400	-0.006	-0.021	0.022	-0.021	0.012	0.024	0.014	-0.035	0.038
D	2900	3400	0.004	-0.044	0.044	-0.006	-0.086	0.086	-0.003	0.063	0.063
E	1900	2400	-0.016	0.034	0.038	-0.019	0.046	0.050	-0.004	0.004	0.006
F	2900	2400	-0.009	-0.036	0.037	-0.005	-0.078	0.078	0.031	0.019	0.036
G	1900	1200	-0.010	0.008	0.013	-0.021	0.031	0.037	-0.001	-0.023	0.023
H	2900	1200	-0.021	-0.027	0.034	-0.002	-0.052	0.052	-0.031	0.033	0.045
Promedio					0.032			0.049			0.033
Máxima					0.044			0.086			0.063
Mínima					0.013			0.024			0.006

También, de los puntos seleccionado A, B, C, D, E, F, G y H, ubicados dentro de la grilla, como se ha descrito en los párrafos precedentes, se ha realizado el monitoreo durante todo el tiempo de computo. Así mismo, se han identificado los puntos de medición más cercanos a estos, con los cuales se ha realizado las comparaciones.

De los resultados obtenidos con la ecuación de Garrat y Wang-Connor, para la determinación del coeficiente de arrastre, el que menor error relativo ha mostrado es la ecuación Garrat, con el cual se obtiene un valor de velocidad promedio de 0.038 m/s, que tiene un error relativo de 7%, respecto al medido in situ.

Adicionalmente, también, se han hecho comparaciones con los valores promediados de las mediciones superficiales y las realizadas al 60% de profundidad, ubicado lo más próximo a los ocho puntos de control, con el valor promedio de los valores calculados con el algoritmo en las direcciones E, NE y SE. En esta comparación se han obtenido errores relativos que varían desde 0% hasta 13% y excepcionalmente en el punto H un error relativo de 51.8%, los errores por cada punto de control se muestran en el Cuadro 5-3.

El error relativo de 51.8% que se presenta en el punto de control H, con respecto al punto medido, puede explicarse por un incremento puntual del viento durante la medición de las velocidades en la bahía que se observa en los puntos del 200 al 205 y del 300 al 309, que se ubican alrededor del punto H. Estas variaciones de la velocidad del viento en la superficie, no son reproducidas adecuadamente por que el algoritmo implementado, solo considera el viento produce un esfuerzo cortante uniforme y constante en toda la superficie de agua. Otro factor que influye en este error es que las mediciones de los flujos en el

centro de la bahía se han realizado en 11 días, donde se ha presentado variaciones de la velocidad del viento.

Sin embargo, por lo general ha mostrado un comportamiento adecuado, el cual puede mejorarse con mediciones de campo más exhaustivas del viento y el coeficiente de resistencia.

Cuadro 5-3: Resumen de la comparación de datos medidos y calculados en el centro de la Bahía de Puno.

Valores Medidos					Valores Calculados					% error
#Pto	Superficial	#Pto	Al 60% de Profundidad	PROM	Pto	E	NE	SE	PROM	
169	0.0309	270	0.0195	0.025	A	0.025	0.026	0.019	0.023	7.8%
194	0.0366	296	0.0351	0.036	B	0.042	0.035	0.036	0.038	5.1%
188	0.0359	288	0.0199	0.028	C	0.022	0.024	0.038	0.028	0.0%
164	0.0510	301	0.0631	0.057	D	0.044	0.086	0.063	0.064	13.0%
208	0.0369	310	0.0239	0.030	E	0.038	0.050	0.006	0.031	2.0%
235	0.0634	337	0.0521	0.058	F	0.037	0.078	0.036	0.051	12.5%
242	0.0386	318	0.0123	0.025	G	0.013	0.037	0.023	0.024	4.0%
205	0.0820	307	0.1000	0.091	H	0.034	0.052	0.045	0.044	51.8%

CAPITULO VI

6 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 Conclusiones

- a) Sobre la base matemática y numérica expuesta se ha desarrollado las herramientas necesarias para realizar las etapas de: pre proceso, motor numérico y post proceso, implementados en el programa MatLab, con el cual se han realizado y evaluado los test numéricos necesario para calibrar el modelo numérico.
- b) De los cálculos numéricos se ha determinado que el viento, la rugosidad y la forma particular de la configuración geográfica son factores importantes, para el modelamiento hidrodinámico de la circulación de flujo en la bahía Puno.
- c) En las comparaciones de los campos de velocidad de flujo de agua medidos in situ y calculados numéricamente se puede observar que hay cierta semejanza en la forma de las corrientes y relativamente en las magnitudes de las velocidades.
- d) De los cálculos numéricos también se ha observado que una misma magnitud del viento en diferentes direcciones, resulta valores distintos de la velocidad del flujo de agua en un mismo punto.
- e) El modelo numérico de esquema semi-explicito, ha dado buenos resultados, teniendo la restricción de consumir bastante memoria de la computadora conforme se va refinando el modelo.
- f) El modelo de la presente investigación da buenos resultados para el modelamiento de propagación de ondas con períodos largos, sin embargo, cuando se usan periodos cortos se debe tener en cuenta que los espaciamientos de la grilla sean los adecuados, y en caso que la grilla no tenga el espaciamiento adecuado el modelo no logrará converger volviéndose inestable.
- g) La aplicación del modelo en la bahía de Puno, muestra resultados interesantes, donde se puede ver que se ha logrado obtener matemáticamente patrones de circulación de flujo similares con los medidos in situ.

6.2 Recomendaciones

- a) Se tiene varias condiciones de frontera disponibles en el modelo numérico, cada una de estas condiciones, está disponible para una situación física en particular y se debe elegir cuidadosamente. Principalmente el comportamiento numérico de las condiciones de frontera abiertas y evitar los ligeros reflejos en las variables U , V y η , que se han presentado en los test numéricos.
- b) Realizar un inventario de los totorales en la bahía e investigaciones de la circulación de flujo a través de los totorales, para poder estimar mejor el coeficiente de resistencia.
- c) Incrementar y distribuir adecuadamente anemómetros en la bahía de Puno, para lograr una mejor aproximación del esfuerzo cortante producido por el viento en la superficie del agua, debido a que físicamente la distribución del viento no es uniforme en toda la superficie del agua.
- d) Implementar mediciones sistemáticas de medición de las corrientes de flujos en puntos fijos, donde también debe registrarse la dirección y velocidad del viento, de esta manera se generaría una serie histórica con el cual se lograría mejorar la calibración del modelo.
- e) Una vez establecido los parámetros hidrodinámicos de flujo, se debe investigar la inducción de contaminantes utilizando la ecuación de transporte, debido a que existe un incremento de la contaminación en la Bahía de Puno, motivo por el cual la siguiente etapa, sería predecir:
 - a. La influencia de la contaminación en la captación de agua potable de Puno, que se ubica en el sector Chimú y que abastece a una gran parte de la ciudad de Puno.
 - b. La influencia de la contaminación hacia el lago mayor del Lago Titicaca.
 - c. La influencia de la contaminación actual y futura de las plantas de tratamiento de las aguas servidas de la ciudad de Puno.

Con esta base plantear alternativas de solución a través de obras, estructuras, dispositivos y/o mecanismos para resolver el problema de la contaminación y preservar la bahía de Puno y el Lago Titicaca, para futuras generaciones.

REFERENCIAS

1. Abbott, M.B., *Computational hydraulics; elements of the theory of free surface flow*, IHE-Delft and Danish Hydraulic Institute-Horsholm, (1992).
2. Bathe, K.J., *Finite element procedures*, Prentice Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1995).
3. Connor, J.J.- Brebbia, C.A. *Finite – element techniques for fluid flow*, Newnes-Butterworth, London y Boston, (1976).
4. Coronado, F., Apuntes de clases: *Mecánica de fluidos avanzada y flujo en superficie libre*, Sección de Postgrado, Facultad de Ingeniería Civil, Universidad Nacional de Ingeniería, (2001).
5. Daily J.W. - Harlerman D.F., *Fluid Dynamics*, Addison Wesley, Massachusetts, U.S. 1966.
6. Dejoux C., Iltis A., *El Lago Titicaca síntesis del conocimiento limnológico actual*, ORSTOM, La Paz, Bolivia, (1991).
7. Elken, J., *Contaminant Dispersion*, Tallinn University of Educational, Sciences, Estonian Marine Institute, (2002).
8. Gerhart, P. - Gross, R. - Hochstein, J., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Addison-Wesley, Massachusetts, U.S., (1992).
9. Gerritsma, M.I. - Koren, B., *Introduction to computational fluid dynamics*, Delft, (2000).
10. Huang, W. - Spaulding M., *3D Model of Estuarine Circulation and Water Quality Induced by surface Discharges*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, (1994).
11. Kowalik, Z. - Murty, T.S., *Numerical Modeling of Ocean Dynamics*, World Scientific Publishing, (1993).
12. Martin, J. - Navarro, A. - Garcia, M. – et al., *La hidrodinámica computacional en el campo de la ingeniería portuaria*, Revista Nro. 104 - El Ingeniero Civil, CEDEX, (1999).
13. Martinez M.L., *Error Estimates of Finite Element Models of System of Shallow Water Equations*, PhD. Theses, Rice University, Texas, 1997.
14. Ortiz, P. - Zienkiewicz, O.C., *Modelación por Elementos Finitos en Hidráulica e Hidrodinámica Costera*, CEDEX, España, 1995.
15. Paredes, M. – Huaracallo, J. - et al., *Circulación de Aguas en la Bahía Interior de Puno*, Dirección de Estudios, Proyecto Especial Binacional Lago Titicaca, 2002.

16. PELT – INADE, *Descontaminación y desarrollo socioeconómico y ecoturístico de la bahía interior de Puno*, ATA - D&MA, Puno, Perú (1996).
17. Safaie, B., *Win Stress at Air-Water interface*, Journal of waterway, port, coastal and ocean engineering, Vol 110, ASCE, 1984.
18. Schwab, D.J. - Bennett, J.R. - Jessup, A.T., *A two-dimensional lake circulation modeling system*, Environmental Research Laboratory, NOAA, Michigan, (1981).
19. Schwanenberg, D. – Liem, R. – Kongeter, J., *Discontinuous Galerkin Method for the Shallow Water Equations*, IWW, University of Technology, Germany, (2000).
20. Segerlind, L.J., *Applied finite element method*, 2da Edition, Wiley, New York, (1984).
21. Verwey, A. - Cunge, J.A. - Holley, F.M., *Practical aspects of computational river hydraulics*, Pitman, London, (1980).
22. Wang, K.H. - Cleveland, T.G. - Fitzgerald, S. - REN, X., *Hydrodynamics flow modeling at confluence of two streams*, Journal of Engineering Hydraulics, ASCE, (1996).
23. Wrobel L.C. - Liger S. - Rosman P.C., *Modelos de Circulação em Corpos D'aguas Rasos*, Programa de Ingeniería Oceanica, COPPE, río de Janeiro Brasil, 1989.
24. Wu, J., - Tsanis, K., *Numerical study of wind-induced water currents*, Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, (1995).
25. Yang L., *A Circulation Study of Hawaiian Fishpond*, Msc. Theses, University of Hawaii, 2000.
26. Yzocupe, V., *2-D Hydrodynamics Modeling in Paracas Bay*, Msc Theses, International Institute for infrastructural, Hydraulic and Environmental Engineering, IHE, Delf, Netherland, 2001.
27. Weiyen Tan, *Shallow Water Hydrodynamics*, Water & Power Press and Elsevier Science Publisher, Hong Kong, (1992)
28. Zienkiewicz, O.C. - Taylor, R.L., *El método de los elementos finitos*, 4ta Edición, Vol.2, McGraw Hill, Barcelona, (1994).

ANEXO A

A. DIAGRAMAS DE FLUJO Y CODIGO DEL PROGRAMA

A.1. DIAGRAMAS DE FLUJO

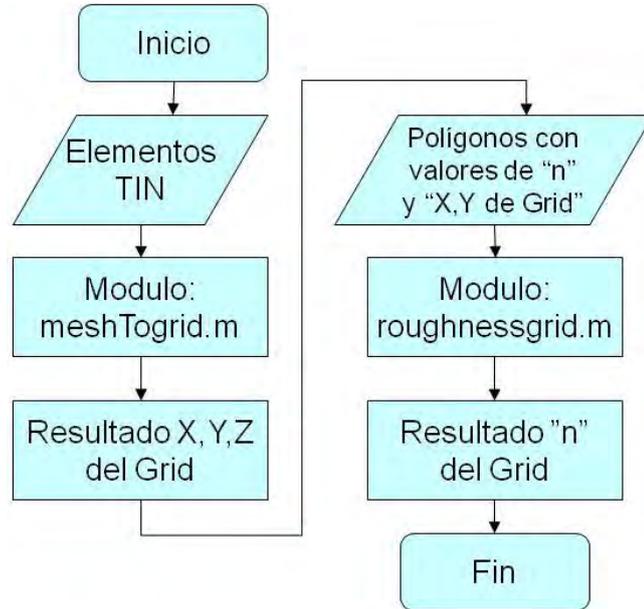


Diagrama A-1: Flujo de la etapa de Pre-proceso

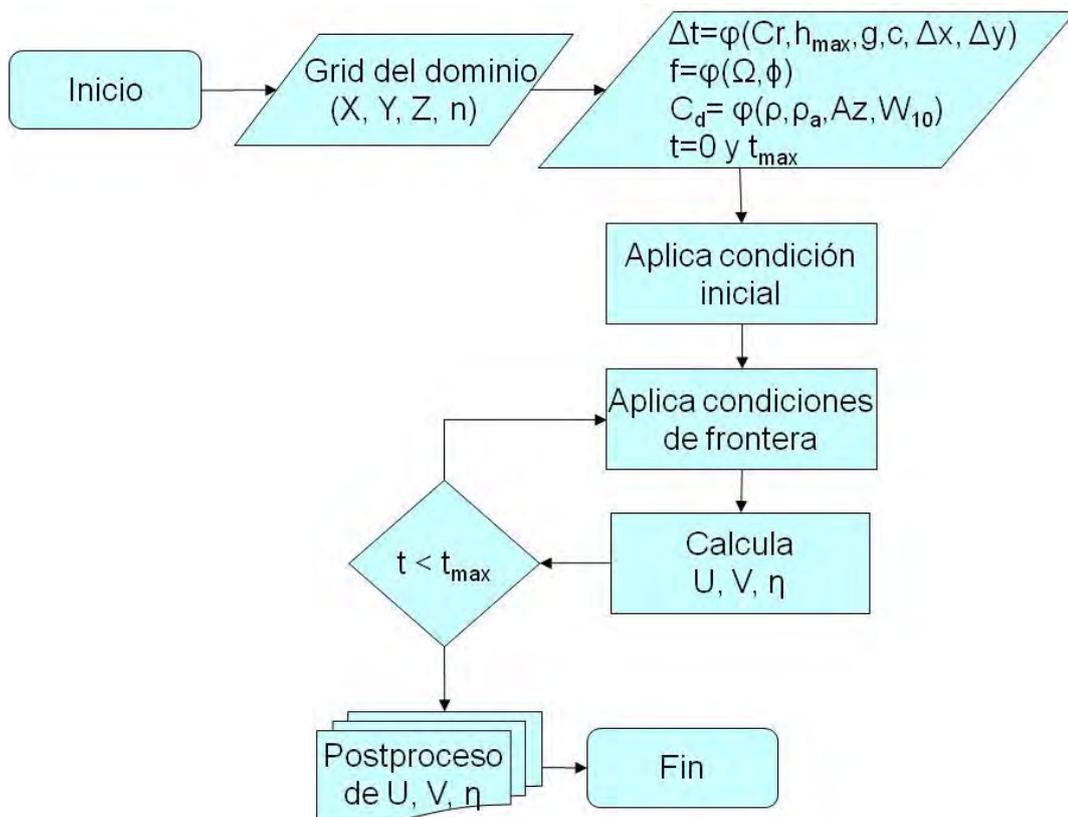


Diagrama A-2: Flujo de la etapa de Procesamiento

A.2. PROGRAMAS IMPLEMENTADOS PARA SIMULAR CON EL ALGORITMO NUMERICO DEL CAPITULO IV.

A.2.1. Programa: meshtogrid.m

```
% UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
% FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
% SECCION DE POST-GRADO
% INTERPOLACION DE PUNTOS SOBRE UNA SUPERFICIE DISCRETA
% CONFORMADA POR ELEMENTOS TRIANGULARES DE TRES NUDOS
% Por: Ing.Duberly Huisa Humpiri"

clear;
clf;
clc;

filedatamesh = 'datamesh.txt';
filedatagrid = 'datagrid.txt';

[x, y, z] = makexyzgrid(filedatamesh, filedatagrid);
save('x.mat', 'x');
save('y.mat', 'y');
save('z.mat', 'z');
mesh(x,y,z')

axis ([x(1) x(length(x)) y(1) y(length(y)) -150 50])
title ('Vista tridimensional del gridllado')
xlabel('x [m]')
ylabel('y [m]')
zlabel('z [m]')
%set(gca,'DataAspectRatio',[1 1 1])

function [x, y, z] = makexyzgrid(filemesh, filegrid)
% Esta función lee los datos y crea los "x" y "y" de los nudos del grid o
% grillado

% Crea el (xi, yj) del Grid
% =====
fp=fopen(filegrid,'r');
deltax = dfscanf(fp);
deltay = dfscanf(fp);
x1 = dfscanf(fp);
y1 = dfscanf(fp);
x2 = dfscanf(fp);
y2 = dfscanf(fp);
fclose(fp);

x=[x1:deltax:x2];
y=[y1:deltay:y2];

% Para interpolar z, se toma cada uno de los (x,y) del Grid y
% se interpola dentro de en el Malla de elementos triangulares
% z = cota de la superficie del terreno del modelo.
% =====
malla1 = readmeshT3(filemesh);
z=zeros(length(x), length(y));
for i=1:length(x)
```

```

        for j=1:length(y)
            z(i,j) = grid_interpolT3(malla1,x(i),y(j)); % Interpola cada
nudo del grid
        end
    end
end

```

function [m] = readmesh(fileinp)

```

% Esta funcion lee la malla de elementos triangulares.
%
% VARIABLES DE CONTROL
%   int numnd;           // numero de nudos
%   int numel;          // numero de elementos
%   int nnel;           // numero maximo de nodos de un elemento.
% VARIABLES PARA LAS COORDENADAS, CONECTIVIDAD DE ELEMENTO Y MATERIALES
%   double *x;          // coordenada nodal x
%   double *y;          // coordenada nodal y
%   double *z;          // Altitud z
%   int **cele;         // conectividad de elemento

fileinp='datamesh.txt';
fp=fopen(fileinp,'r');

% //Inicializar los datos de control
numnd = dfscanf(fp);
numel = dfscanf(fp);
nnel = dfscanf(fp);

% //Inicializa coordenadas, tipo de material y conectividad
x(1:numnd)=0;           %// coordenada x
y(1:numnd)=0;           %// coordenada y
z(1:numnd)=0;           %// coordenada z
cele(1:numel,1:nnel)=0; %// conectividad de elemento

% // Lee coordenadas
for i=1:numnd
    n = int16(dfscanf(fp));
    x(n) = dfscanf(fp);
    y(n) = dfscanf(fp);
    z(n) = dfscanf(fp);
end

% // Lee la conectividad de cada elemento
%   int j, ne ;
for i=1:numel
    ne = int16(dfscanf(fp));
    for j=1:nnel
        cele(ne,j) = int16(dfscanf(fp));
    end
end

fclose(fp);

m.numnd = numnd;
m.numel = numel;
m.nnel = nnel;
m.x = x;
m.y = y;
m.z = z;
m.cele = cele;

```

```

function [znodegrid] = grid_interpolT3(surface, xp, yp)
% Esta función interpola los nudos de grid dentro del mesh

    for i=1:surface.numel
        nudo = surface.cele(i,1);
        n1(1,1) = surface.x(nudo);
        n1(2,1) = surface.y(nudo);
        nudo = surface.cele(i,2);
        n2(1,1) = surface.x(nudo);
        n2(2,1) = surface.y(nudo);
        nudo = surface.cele(i,3);
        n3(1,1) = surface.x(nudo);
        n3(2,1) = surface.y(nudo);

        if (elem_check_innerT3(n1,n2,n3,xp,yp)==1)
            znodegrid = elem_interpolT3(surface,i,xp,yp);
            return
        end
    end

    for i=1:surface.numel
        nudo = surface.cele(i,3);
        n1(1,1) = surface.x(nudo);
        n1(2,1) = surface.y(nudo);
        nudo = surface.cele(i,2);
        n2(1,1) = surface.x(nudo);
        n2(2,1) = surface.y(nudo);
        nudo = surface.cele(i,1);
        n3(1,1) = surface.x(nudo);
        n3(2,1) = surface.y(nudo);

        if (elem_check_innerT3(n1,n2,n3,xp,yp)==1)
            znodegrid = elem_interpolT3(surface,i,xp,yp);
            return
        end
    end

    end

    'Error: (grid_interpolT3), El punto (xp,yp) no se encuentra en la
    superficie';
    znodegrid = 0;

function [chk] = elem_check_innerT3(n1,n2,n3,xp,yp)
% Chequea que los nudos a interpolar se encuentren dentro del mesh
% Las variables, n1,n2,n3 son los nudos de los elementos triangulares
donde ni = [xi ; yi ] y
% [xp yp] es la coordenada del punto ha verificar que se encuentre dentro
del
% del elemento triangular.
%
p = [xp; yp];

% Arista dirección 1-2
% Traslado de ejes
%   tn1 = n1-n1;
%   tn2 = n2-n1;
%   tp  = p-n1;

```

```

modulo = @(x) sqrt(x'*x);

sn = tn2(2,1)/modulo(tn2); % El angulo utilizado es el que forma con
su eje X
cs = tn2(1,1)/modulo(tn2);

T= [cs, sn ; -sn, cs ]; % matriz de transformación

tp12 = T*tp; %Vector rotado que toma como origen nudo 1 y
su abscisa prima esta sobre el vector 1-2.

% Arista dirección 2-3
% Traslado de ejes
% tn2 = n2-n2;
tn3 = n3-n2;
tp = p-n2;

modulo = @(x) sqrt(x'*x);

sn = tn3(2,1)/modulo(tn3); % El angulo utilizado es el que forma
con su eje X
cs = tn3(1,1)/modulo(tn3);

T= [cs, sn ; -sn, cs ]; % matriz de transformación

tp23 = T*tp;

% Arista dirección 3-1
% Traslado de ejes
% tn3 = n3-n3;
tn1 = n1-n3;
tp = p-n3;

modulo = @(x) sqrt(x'*x);

sn = tn1(2,1)/modulo(tn1); % El angulo utilizado es el que forma
con su eje X
cs = tn1(1,1)/modulo(tn1);

T= [cs, sn ; -sn, cs ]; % matriz de transformación

tp31 = T*tp;

eps=0.1;

if(tp12(2) >= 0.0-eps && tp23(2)>= 0.0-eps && tp31(2) >= 0.0-eps)
    chk = 1;
    return % cout<<"El punto esta entre estas coordenadas"<<endl;
else
    chk = 0;
    return % cout<<"El punto no esta entre estas
coordenadas"<<endl;
end

function znodegrid = elem_interpolT3(surface, elem, xp, yp)
% interpola en 2d un punto x,y que se ubica dentro de un elemento
% triangular de 3 nudos.

nudo = surface.cele(elem,1);
x1 = surface.x(nudo);
y1 = surface.y(nudo);

```

```

z1 = surface.z(nudo);

nudo = surface.cele(elem,2);
x2 = surface.x(nudo);
y2 = surface.y(nudo);
z2 = surface.z(nudo);

nudo = surface.cele(elem,3);
x3 = surface.x(nudo);
y3 = surface.y(nudo);
z3 = surface.z(nudo);

A = 0.5*((x2*y3-x3*y2)-(x1*y3-x3*y1)+(x1*y2-x2*y1));

a1 = x2*y3 - x3*y2;
a2 = x3*y1 - x1*y3;
a3 = x1*y2 - x2*y1;

b1 = y2-y3;
b2 = y3-y1;
b3 = y1-y2;

c1 = x3-x2;
c2 = x1-x3;
c3 = x2-x1;

N1 = 1/(2*A)*(a1 + b1 * xp + c1 * yp);
N2 = 1/(2*A)*(a2 + b2 * xp + c2 * yp);
N3 = 1/(2*A)*(a3 + b3 * xp + c3 * yp);

znodegrid = N1*z1 + N2*z2 + N3*z3;

```

function [data] = dfscanf(fp)

```

% Lee solo un dato del puntero fp, no abre ni cierra el archivo.
a=textscan(fp,'%f64',1,'commentStyle',';');
data = a{:};

```

A.2.2. Programa: ahmdf.m

```

% UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
% FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
% SECCION DE POSTGRADO
% INSTITUTO DE INVESTIGACION
%
% Programa : ahmdf.m
% Titulo : Análisis Hidrodinámico en 2D de bahias por el
% Metodo de Diferencias Finitas
% Autor : Ing. Duberly Huisa Humpiri
% Categoria : CFD, Hidrodinamica en 2D
% Plataforma: Windows 7
% Resumen :
% Este programa puede ser usado para la determinación del campo de
% velocidades, en aquellos cuerpos de agua como canales, ríos o bahías
% que cumplan con retriaciones de las ecuaciones de aguas poco profundas
% indicadas en el Capítulo 3 del trabajo de investigación.

clear;
clf;
clc;

```

```

% Define campo y carga la geometría del modelo
% se ha usado el programa meshTogrid.m y roughness.m
load x; % Coordenada x de los nudos de la grilla
load y; % Coordenada y de los nudos de la grilla
load z; % Cotas de los nudos (xi,yi) de la grilla (superficie del
terreno)
load n; % Rugosidad de la superficie del terreno

%dx=100;
%dy=100;
%x=0:dx:53000;
%y=0:dy:5000;
%z=zeros(length(x),length(y));
%n=zeros(length(x),length(y));

% //Parámetros para la ecuación Hidrodinamica.

dx=x(2)-x(1); % incremento de paso en la dirección x
dy=y(2)-y(1); % incremento de paso en la dirección y

% //Calculo del incremento de paso para el tiempo t
Cr= 0.1 ; % Numero de Courant
hmax = 100; %max(max(z)); % Profundad maxima para calcular el incremento
de tiempo para la estabilidad.
g= 9.81; % Aceleración de la gravedad
c = sqrt(g*hmax); % velocidad de la onda
dt= Cr*dx/c; % incremento de paso del tiempo

tmax = 500;
t = 0:dt:tmax;

% //Parametros para la Fuerza de Coriolis
omega = 7.29e-5 ; % velocidad angular de rotacion de la tierra, en s^-1
phi = -15.75;
phi = phi*pi/180; % Latitud sur de la zona en investigación, en grados
f = 2*omega*sin(phi) ; % Parametro de Coriolis

% //Parametros para el Esfuerzo de la Superficie del agua provocada por
el viento
rho = 1000.00; % Densidad del agua, en Kg/m3
rhoa = 1.25; % Densidad del aire, en Kg/m3
az = 45; % Azimut de insidencia del viento, en grados
az = az*pi/180.0;
W10 = 9; % Velocidad del viento, en m/s

% Calculo del coeficiente de arrastre del viento (Cd) en la superficie,
% Ecuacion de Garratt.
    if (W10<=4)
        Cd = 1e-3;
    else
        if ((4<W10) && (W10<21))
            Cd = (0.75+0.067*W10)*1e-3;
        else
            'Error: (Cd), El W10 esta fuera del rango de
aplicación.';
        end
    end
end

%// Inicialización de variables para el calculo
U = zeros(length(x),length(y),length(t));

```

```

V = zeros(length(x),length(y),length(t));
eta = zeros(length(x),length(y),length(t));

H = zeros(length(x),length(y),length(t));

%// Condiciones iniciales
U(:,:,1) = 0.0;
V(:,:,1) = 0.0;

% Datos para el test de onda solitaria.

n(:, :) = 0.02;
z(:, :) = -100;

eta0= 0.50;
tp = 100;

%Superficie inicial del agua
zd = zeros(length(x),length(y));
s=0;
for i = 1:length(x)
    zd(i,:) = -s*x(i);
end
h = -z;
%mesh(x,y,h')
eta(:,:,1)=zd;
H(:,:,1) = h(:,:,1)+eta(:,:,1);

% Inicio de las iteraciones
tmp=1;
ts=0;
nblock=5;

apc=zeros(1,length(t));
pc=zeros(1,length(t));
pcx = 5;
pcy= 29;

for block= 1:nblock

for k = 1:(length(t)-1)
    for i = 2:(length(x)-1)
        for j = 2:(length(y)-1)

            %// EQ CANTIDAD DE MOVIMIENTO dirección x
            %// Termino Convectivo
            tcx = -U(i,j,k) * (U(i+1,j,k) - U(i-1,j,k)) / (2*dx) -
V(i,j,k) * (U(i,j+1,k) - U(i,j-1,k)) / (2*dy);
            %// Gradiente de Presion
            gpx = -g * (eta(i,j,k) - eta(i-1,j,k)) / dx;
            %// Fuerza de Coriolis
            %fcx = +f*V(i,j,k);
            fcx = 0;
            %// Esfuerzo en la superficie producido por el viento
            %taosx = Cd * rhoa * Wl0^2 * sin(az);
            %// Esfuerzo de corte en la superficie
            %ecsx = +taosx/rho/H(i,j,k);
            ecsx = 0;
            %// Ley cuadratica, para el esfuerzo de corte producido en el

```

```

        %fondo
        taobx = rho * g * n(i,j)^2 *
U(i,j,k)*sqrt(U(i,j,k)^2+V(i,j,k)^2) / H(i,j,k)^(1/3);
        %// Esfuerzo de corte en el fondo
        ecbx = -taobx/rho/H(i,j,k);

        U(i,j,k+1) = U(i,j,k) + dt*(tcx+gpx+fcx+ecsx+ecbx);%

        %// EQ CANTIDAD DE MOVIMIENTO dirección y
        tcy = -U(i,j,k) * ( V(i+1,j,k) - V(i-1,j,k) ) / (2*dx) -
V(i,j,k) * ( V(i,j+1,k) - V(i,j-1,k) ) / (2*dy);
        gpy = -g * (eta(i,j,k) - eta(i,j-1,k)) / dy;
        %fcy = -f*U(i,j,k);
        fcy = 0;
        %taosy = Cd * rhoa * Wl0^2 * cos(az);
        %ecsy = +taosy/rho/H(i,j,k);
        ecsy = 0;
        taoby = rho * g * n(i,j)^2 * V(i,j,k)*sqrt(U(i,j,k)^2 +
V(i,j,k)^2) / H(i,j,k)^(1/3);
        ecby = -taoby/rho/H(i,j,k);

        V(i,j,k+1) = V(i,j,k) + dt*(tcy+gpy+fcy+ecsy+ecby);
    end
end

for i = 2:(length(x)-1)
    for j = 2:(length(y)-1)

        %// EQ DE CONTINUIDAD
        td1 = -H(i,j,k) * ( U(i+1,j,k+1) - U(i,j,k+1) ) / dx +
U(i,j,k)*(H(i+1,j,k)-H(i,j,k))/dx;
        td2 = -H(i,j,k) * ( V(i,j+1,k+1) - V(i,j,k+1) ) / dy +
        V(i,j,k)*(H(i,j+1,k)-H(i,j,k))/dy;
        eta(i,j,k+1) = eta(i,j,k) + dt*(td1+td2);
    end
end

% Define boundary condition

%eta(1,:,k+1) = eta0*sin(2*pi*ts/tp);
if (ts > tp)
    eta(1,:,k+1)=0;
else
    eta(1,:,k+1) = eta0*sin(2*pi*ts/tp);
end
eta(length(x),:,k+1) = eta(length(x)-1,:,k+1);
eta(:,1,k+1) = eta(:,2,k+1);
eta(:,length(y),k+1) = eta(:,length(y)-1,k+1);

if (ts > tp)
    U(1,:,k+1)=0;
    %U(1,:,k+1) = U(2,:,k+1);
else
    U(1,:,k+1) = eta(1,:,k+1)*sqrt(g/hmax); %upstream
end

U(length(x),:,k+1) = U(length(x)-1,:,k+1); % downstream
U(:,1,k+1) = 0;
U(:,length(y),k+1) = 0;

```

```

V(1,:,k+1) = V(2,:,k+1); %upstream
V(length(x),:,k+1) = V(length(x)-1,:,k+1); % downsream
V(:,1,k+1) = 0;
V(:,length(y),k+1) = 0;

H(:,:,k+1) = h(:,:,)+eta(:,:,k+1);
tmp=tmp+1;
ts=ts+dt

end

figure(1)
apc(:)=eta(pcx,pcy,:);
pc = [pc apc];
plot(pc)
%pause(0.0)

% Para aprox de primer orden
U(:,:,1)=U(:,:,length(t));
V(:,:,1)=V(:,:,length(t));
eta(:,:,1)=eta(:,:,length(t));
H(:,:,1)=H(:,:,length(t));

end

figure(2)
%Animation
for index=1:length(t)
    mesh(x,y,eta(:,:,index)')
    %axis ([0 100000 0 100000 4990 5010])
    title ('Test de onda solitaria - Channel 1')
    xlabel('X [m]')
    ylabel('Y [m]')
    zlabel('Z [m]')
    pause(0.025)
end

```

A.2.3. Programa: ahmdf.m (R2)

```

%; UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
%; FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
%; SECCION DE POSTGRADO
%; INSTITUTO DE INVESTIGACION
%;
%; Programa : ahmdf.m (con esquema semi-explicito)
%; Titulo : Análisis Hidrodinámico en 2D de bahías por el
%; Metodo de Diferencias Finitas
%; Autor : Ing. Duberly Huisa Humpiri
%; Categoria : CFD, Hidrodinamica en 2D
%; Plataforma : Windows 7
%; Resumen :
%; Este programa puede ser usado para la determinación del campo de
%; velocidades, en aquellos cuerpos de agua como canales, ríos o bahías
%; que cumplan con las retriicciones de ecuaciones de aguas poco profundas
%; indicadas en el Capitulo 3, del trabajo de investigación.

clear;
clf;
clc;

```

```

% //Define domain Load geometry of model
% use meshTogrid.m and roughness.m program
%load x; % Coordenada x de los nudos de la grilla
%load y; % Coordenada y de los nudos de la grilla
%load z; % Cotas de los nudos (xi.yi) de la grilla (superficie del
terreno)
%load n; % Rugosidad de la superficie del terreno

dx=100;
dy=100;
x=0:dx:3400; %53000;
y=0:dy:5500;
z=zeros(length(x),length(y));

n=zeros(length(x),length(y));

% //Parámetros para la ecuación Hidrodinamica.

dx=x(2)-x(1); % incremento de paso en la dirección x
dy=y(2)-y(1); % incremento de paso en la dirección y

% //Calculo del incremento de paso para el tiempo t
Cr= 0.50 ; % Numero de Courant
hmax = 10; %max(max(z)); % Profundad maxima para calcular el incremento
de tiempo para la estabilidad.
g= 9.81; % Aceleración de la gravedad
c = sqrt(g*hmax); % velocidad de la onda
dt= Cr*dx/c; % incremento de paso del tiempo

tmax = 43200; %86400; %500;
t = 0:dt:tmax;

% //Parametros para la Fuerza de Coriolis
omega = 7.29e-5 ; % velocidad angular de rotacion de la tierra, en s^-1
phi = -15.75;
phi = phi*pi/180; % Latitud sur de la zona en investigación, en grados
f = 2*omega*sin(phi) ; % Parametro de Coriolis

% //Parametros para el Esfuerzo de la Superficie del agua provocada por
el viento
rho = 1000.00; % Densidad del agua, en Kg/m3
rhoa = 1.25; % Densidad del aire, en Kg/m3
az = 270; % Azimut de incidencia del viento, en grados S=0 SW=45 W=90
NW=135 N=180 NE=225 E=270 SE=315
az = az*pi/180.0;
W10 = 9; % Velocidad del viento, en m/s

% Calculo del coeficiente de arrastre del viento (Cd) en la superficie,

% Ecuación de Wang-Connor
% Cd = (1.1+0.0536*W10)*1e-3;

% Ecuacion de Garratt.
if (W10<=4)
    Cd = 1e-3;
else
    if ((4<W10) && (W10<=21))
        Cd = (0.75+0.067*W10)*1e-3;
    else
        'Error: (Cd), El W10 esta fuera del rango de
aplicación.';

```

```

        end
    end

    %% Inicialización de variables para el calculo
    U = zeros(length(x),length(y),length(t));
    V = zeros(length(x),length(y),length(t));
    eta = zeros(length(x),length(y),length(t));

    H = zeros(length(x),length(y),length(t));

    %% Condiciones iniciales
    U(:,:,1) = 0.00;
    V(:,:,1) = 0.00;

    % Datos para la prueba de la onda Channel-1a

    load('bahia-n-modificado.mat');

    eta0= 0.10;
    tp = 100;

    %Superficie inicial del agua
    zd = zeros(length(x),length(y));
    s=0;
    for i = 1:length(x)
        zd(i,:) = -s*x(i);
    end

    %profundidad
    load('bahia-z-modificadoK.mat');
    h=-z;
    eta(:,:,1)=0; %zd;

    % drops
    %drop = droplet(0.5,20); % simulate a water drop
    %dsize = size(drop,1);
    %dropx=15; dropy=15;
    %eta(dropx:1:dropx+dsize-1,dropy:1:dropy+dsize-1,1)= drop;

    H(:,:,1) = h(:,:,1)+eta(:,:,1);

    % Inicio de las iteraciones
    tmp=1;
    ts=0;

    nblock=1;

    apc=zeros(1,length(t));
    apc1=zeros(1,length(t));
    apc2=zeros(1,length(t));

    pc=zeros(1,length(t));
    pc1=zeros(1,length(t));
    pc2=zeros(1,length(t));

    pcx = 20; %25;
    pcy= 35; %29;

    for block= 1:nblock

```

```

for k = 1:(length(t)-1)

%U
for i = 2:(length(x)-1)
  for j = 2:(length(y)-1)

    if (h(i,j) == 0)
      U(i,j,k+1) = 0;
    else
      UPOS=(U(i,j,k)+abs(U(i,j,k)))/2;
      UNEG=(U(i,j,k)-abs(U(i,j,k)))/2;
      vuk = 0.25*(V(i,j,k)+V(i-1,j,k)+V(i-1,j-1,k)+V(i,j-1,k));
      VAUP=(vuk+abs(vuk))/2;
      VAUN=(vuk-abs(vuk))/2;

tcx = -UPOS*(U(i,j,k)-U(i+1,j,k))/dx-UNEG*(U(i+1,j,k)-U(i,j,k))/dx-
VAUP*(U(i,j,k)-U(i,j-1,k))/dy-VAUN*(U(i,j+1,k)-U(i,j,k))/dy;
gpx = -g * (eta(i,j,k) - eta(i-1,j,k)) / dx; %// Gradiente de Presion
vuk = 0.25*(V(i,j,k)+V(i-1,j,k)+V(i-1,j-1,k)+V(i,j-1,k));
fcx =+f*vuk; % +f*V(i,j,k); %// Fuerza de Coriolis
Hu =0.5*(H(i,j,k)+H(i-1,j,k));
taosx = Cd * rhoa * Wl0^2 * sin(az);
ecsx = +taosx/rho/Hu;

    if(k==1)
      taobx = rho * g * n(i,j)^2 * U(i,j,k)*sqrt(U(i,j,k)^2
+V(i,j,k)^2) / H(i,j,k)^(1/3);
      ecbx = -taobx/rho/H(i,j,k);
    else
      vukm1 = 0.25*(V(i,j,k-1)+V(i-1,j,k-1)+V(i-1,j-1,k-1)+V(i,j-1,k-1));
      Hul=0.5*(H(i,j,k-1)+H(i-1,j,k-1));
      Uprom=U(i,j,k-1); %0.5*(U(i,j,k)+U(i,j,k-1));
      taobx = rho*g*n(i,j)^2*Uprom*sqrt(U(i,j,k-1)^2+vukm1^2)/Hul^(1/3);
      ecbx = -taobx/rho/Hul;
    end

    U(i,j,k+1) = U(i,j,k) + dt*(tcx+gpx+fcx+ecsx+ecbx);
  end
end

% V
if (h(i,j) == 0)
  V(i,j,k+1) = 0;
else
  VPOS=(V(i,j,k)+abs(V(i,j,k)))/2;
  VNEG=(V(i,j,k)-abs(V(i,j,k)))/2;
  uvkml = 0.25*(U(i,j,k)+U(i,j+1,k)+U(i+1,j+1,k)+U(i+1,j,k));
  UAVP=(uvkml+abs(uvkml))/2;
  UAVN=(uvkml-abs(uvkml))/2;

tcy = -UAVP*(V(i,j,k)-V(i-1,j,k))/dx-UAVN*(V(i+1,j,k)-V(i,j,k))/dx-
VPOS*(V(i,j,k)-V(i,j-1,k))/dy-VNEG*(V(i,j+1,k)-V(i,j,k))/dy;
gpy = -g * (eta(i,j+1,k) - eta(i,j,k)) / dy;
uvk = 0.25*(U(i,j,k)+U(i,j+1,k)+U(i+1,j+1,k)+U(i+1,j,k));
fcy = -f*uvk; %-f*U(i,j,k);
Hv =0.5*(H(i,j,k)+H(i,j+1,k)); % H promediado
taosy = Cd * rhoa * Wl0^2 * cos(az);
ecsy = +taosy/rho/Hv;

    if(k==1)
      taoby = rho * g * n(i,j)^2 * V(i,j,k)*sqrt(U(i,j,k)^2 +

```

```

V(i,j,k)^2) / H(i,j,k)^(1/3);
ecby = -taoby/rho/H(i,j,k);
else
uvkm1 = 0.25*(U(i,j,k-1)+U(i,j+1,k-1)+U(i+1,j+1,k-1)+U(i+1,j,k-1));
Hv1=0.5*(H(i,j,k-1)+H(i,j+1,k-1));
Vprom=V(i,j,k-1);%0.5*(V(i,j,k)+V(i,j,k-1));
taoby = rho*g*n(i,j)^2*Vprom*sqrt(uvkm1^2+V(i,j,k-1)^2)/Hv1^(1/3);
ecby = -taoby/rho/Hv1;
end

V(i,j,k+1) = V(i,j,k) + dt*(tcy+gpy+fcy+ecsy+ecby);
end
end
end

% eta
for i = 2:(length(x)-1)
    for j = 2:(length(y)-1)

        if (h(i,j) == 0)
            eta(i,j,k+1) = 0;
        else
            Hu =0.5*(H(i,j,k)+H(i-1,j,k));
            Hu1=0.5*(H(i+1,j,k)+H(i,j,k));

            Hv =0.5*(H(i,j,k)+H(i,j+1,k));
            Hv1=0.5*(H(i,j-1,k)+H(i,j,k));

            td1 = - ( U(i+1,j,k+1)*Hu1 - U(i,j,k+1)*Hu ) / dx ;
            td2 = - ( V(i,j,k+1)*Hv1 - V(i,j-1,k+1)*Hv ) / dy ;
            eta(i,j,k+1) = eta(i,j,k) + dt*(td1+td2);
        end
    end
end

% TOP BOUNDARY
eta(:,length(y),k+1) = 0 ;
U(:,length(y),k+1) = 0;
V(:,length(y),k+1) = 0;

% RIGTH BOUNDARY
eta(length(x)-1, :, k+1) = U(length(x)-1, :, k+1) .*sqrt(h(length(x)-1, :)./g);
eta(length(x), :, k+1) = eta(length(x)-1, :, k+1);
for j=2:length(y)-1
    if (h(length(x),j) == 0)
        U(length(x),j,k+1) = 0;
    else
        U(length(x), :, k+1)=eta(length(x)-1, :, k+1) .*sqrt(g./h(length(x), :));
    end
end

for j=2:length(y)-1
    if (h(length(x),j) == 0)
        V(length(x),j,k+1) = 0;
    else
        V(length(x), :, k+1)=eta(length(x)-1, :, k+1) .*sqrt(g./h(length(x), :));
    end
end

% BOTTON BOUNDARY

```

```

eta(:,1,k+1) = 0 ;
U(:,1,k+1) = 0;
V(:,1,k+1) = 0;

% LEFT BOUNDARY

% if (ts > tp*2)
%     eta(1,:,k+1)= -U(2,:,k+1) .* (h(1,:) ./g) .^0.5;
% else
%     eta(1,:,k+1) = eta0*sin(2*pi*ts/tp);
% end

%     eta(1,:,k+1) = 0 ;
%     U(1,:,k+1) = 0;
%     V(1,:,k+1) = 0;

H(:,:,k+1) = h(:,:,)+eta(:,:,k+1);

tmp=tmp+1;
ts=ts+dt
end % for k
k;

% figure(1)
% apc(:)=eta (pcx,pcy,:);
% apc1(:)=U (pcx,pcy,:);
% apc2(:)=V (pcx,pcy,:);
% if block == 1
%     pc = apc;
%     pc1 = apc1;
%     pc2 = apc2;
% else
%     pc = [pc apc];
%     pc1 = [pc1 apc1];
%     pc2 = [pc2 apc2];
% end

plot (pc)

%     U(:,:,1)=U(:,:,length(t));
%     V(:,:,1)=V(:,:,length(t));
%     eta(:,:,1)=eta(:,:,length(t));
%     H(:,:,1)=H(:,:,length(t));

end

figure(2)

%Animation
for index=1:length(t)

    mesh(x,y,eta(:,:,index)')
    %axis ([0 100000 0 100000 4990 5010])
    title ('Test - Bahia de Puno')
    xlabel('X [m]')
    ylabel('Y [m]')
    zlabel('eta [m]')
    zlim([-0.1 0.1])
    drawnow; %pause(0.01)

```

```

end
    mesh(x,y,eta(:,:,length(t)))

figure(3);
for index=1:length(t)
quiver(x,y,U(:,:,index),V(:,:,index));
xlim([0 max(x)])
ylim([0 max(y)])
drawnow;
pause(0.01);
end

quiver(x,y,U(:,:,length(t)),V(:,:,length(t)));
xlim([0 max(x)])
ylim([0 max(y)])
xlabel('X [m]');
ylabel('Y [m]');

figure(4)
a=1:length(t);
b=1:length(t);
a(:)=U(pcx,pcy,:);
b(:)=V(pcx,pcy,:);
plot(t,a,t,b,'--')
xlabel('t [s]');
ylabel('U o V [m/s]');
legend('U','V',1);

figure(5)
c=1:length(t);
c(:)=eta(pcx,pcy,:);
plot(t,c)
xlabel('t [s]');
ylabel('eta [m]');

```

ANEXO B

RESULTADOS DEL MODELAMIENTO MATEMATICO DE LA BAHIA DE PUNO

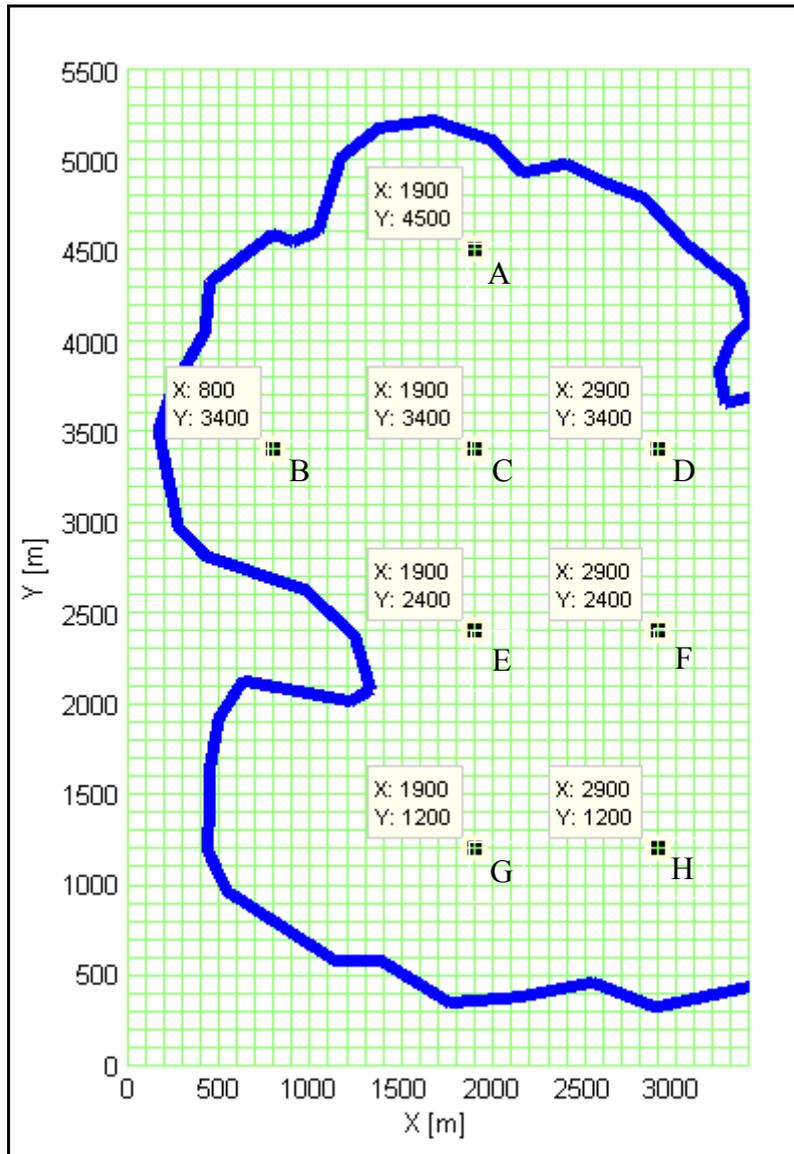


Figura B-1: Puntos de control que se monitorearan durante todo el tiempo de cálculo.

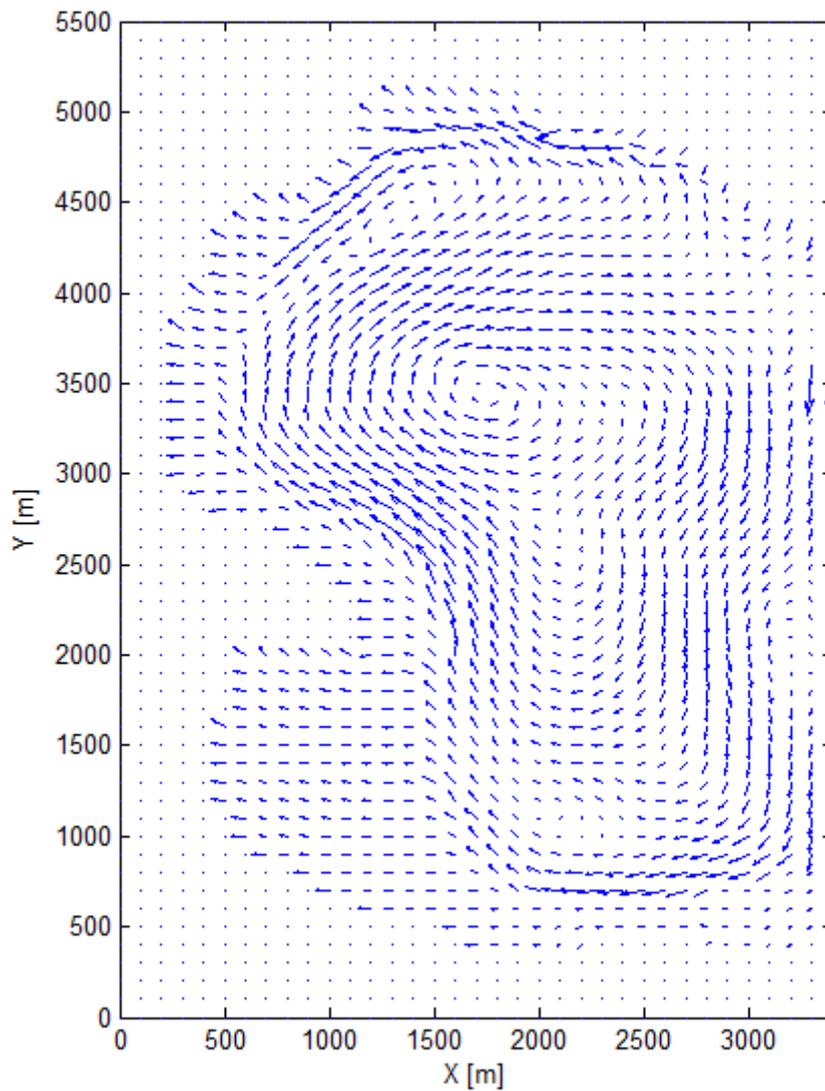


Figura B-2: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9m/s de dirección E.

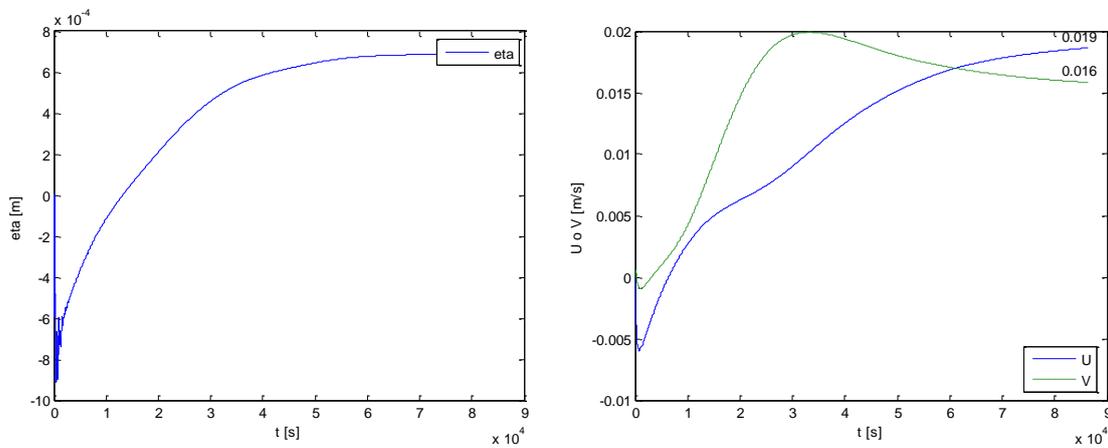


Figura B-3: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

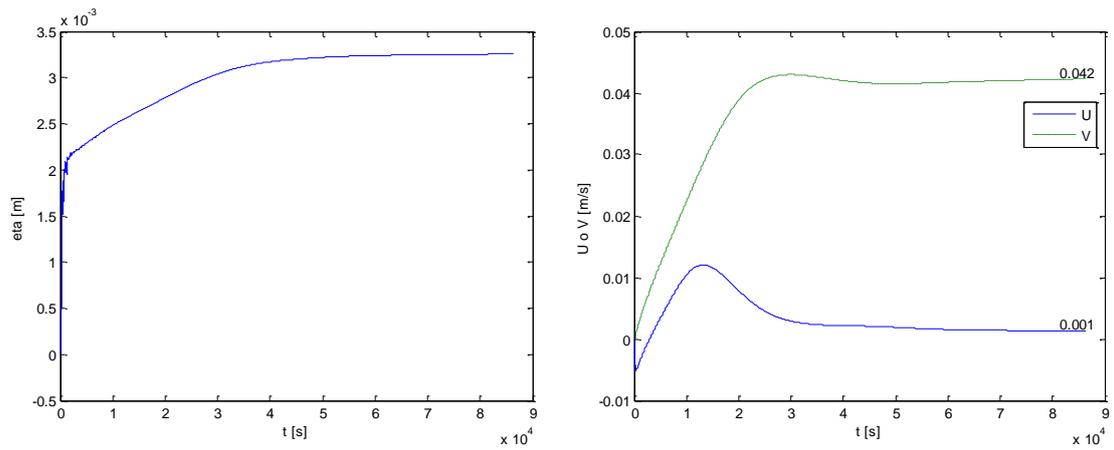


Figura B-4: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

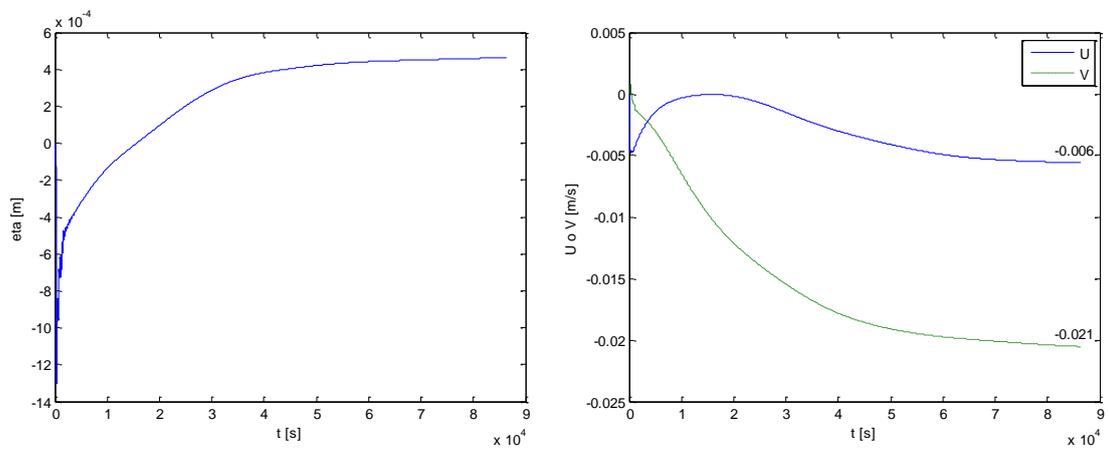


Figura B-5: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

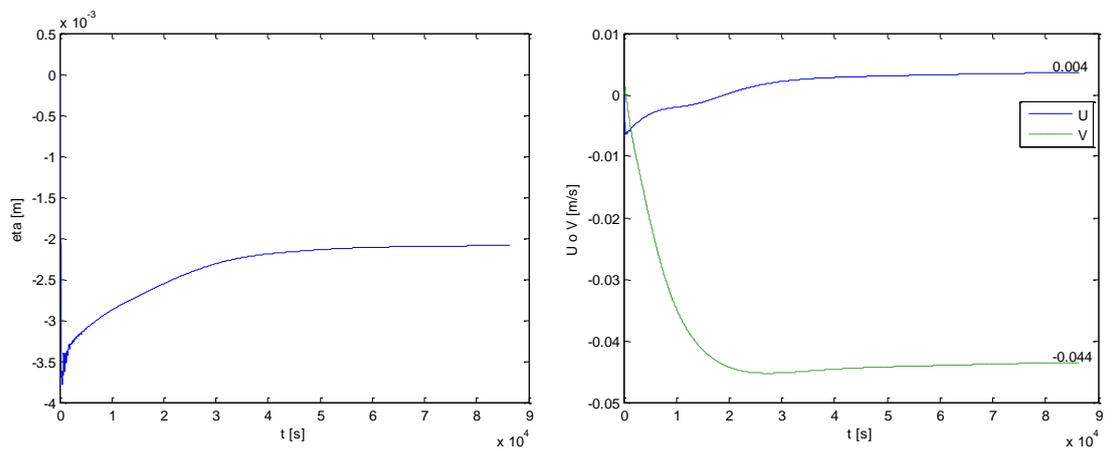


Figura B-6: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

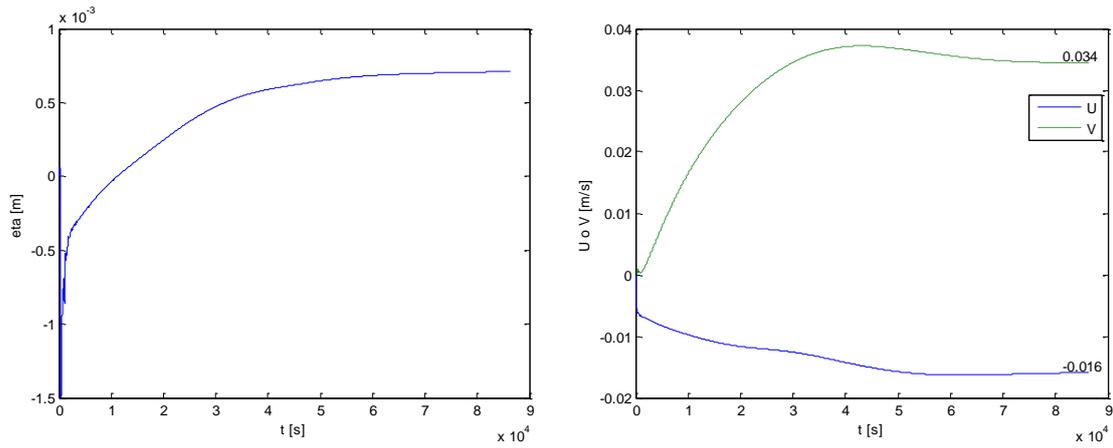


Figura B-7: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

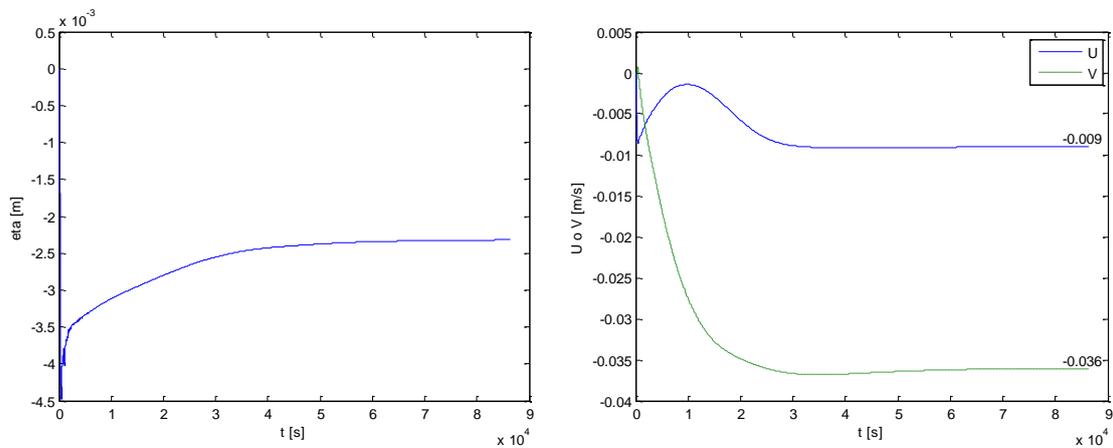


Figura B-8: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

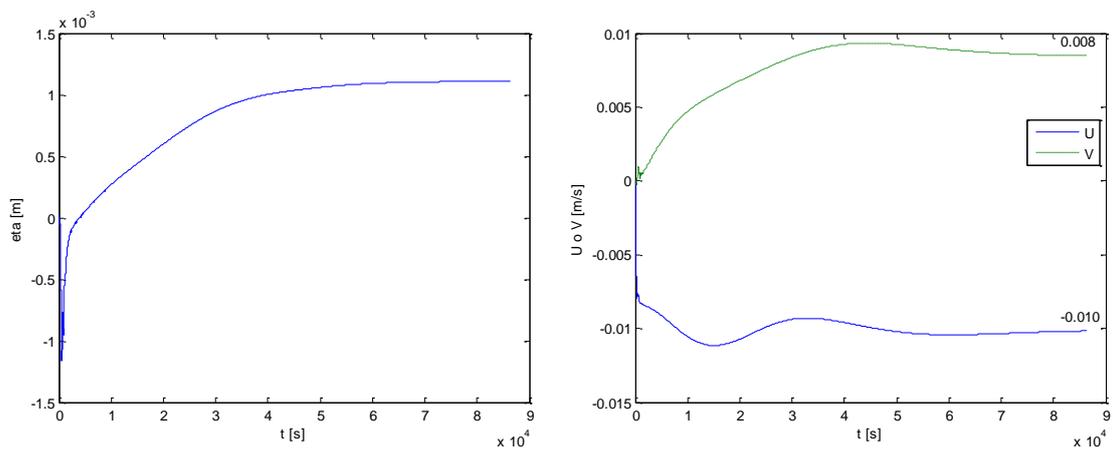


Figura B-9: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

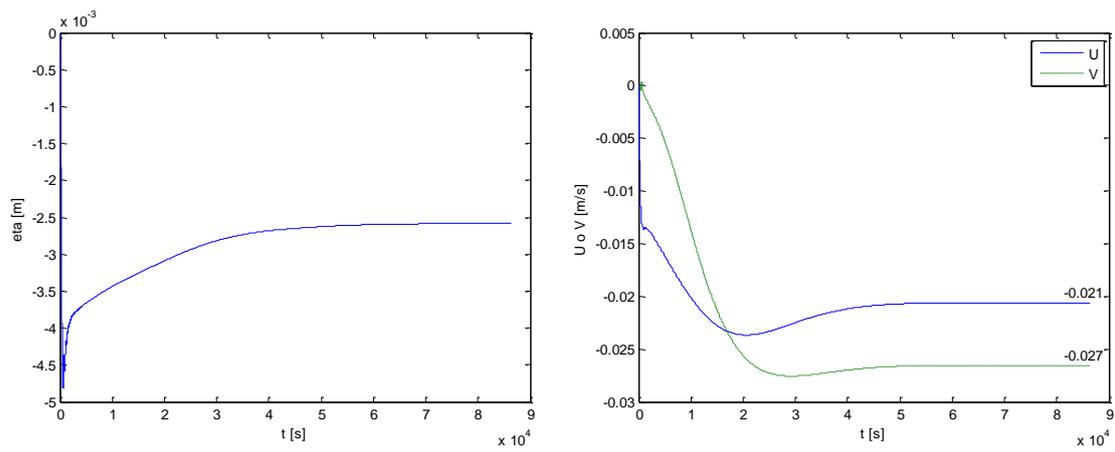


Figura B-10: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

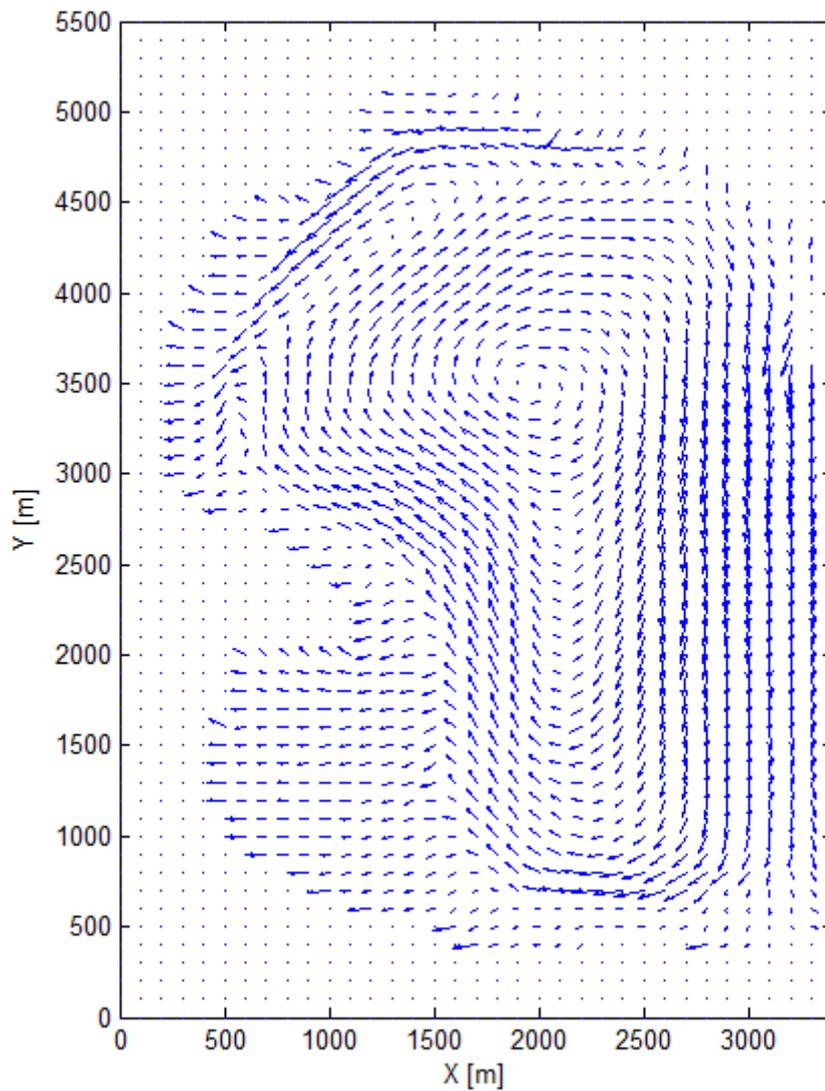


Figura B-11: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9m/s de dirección NE.

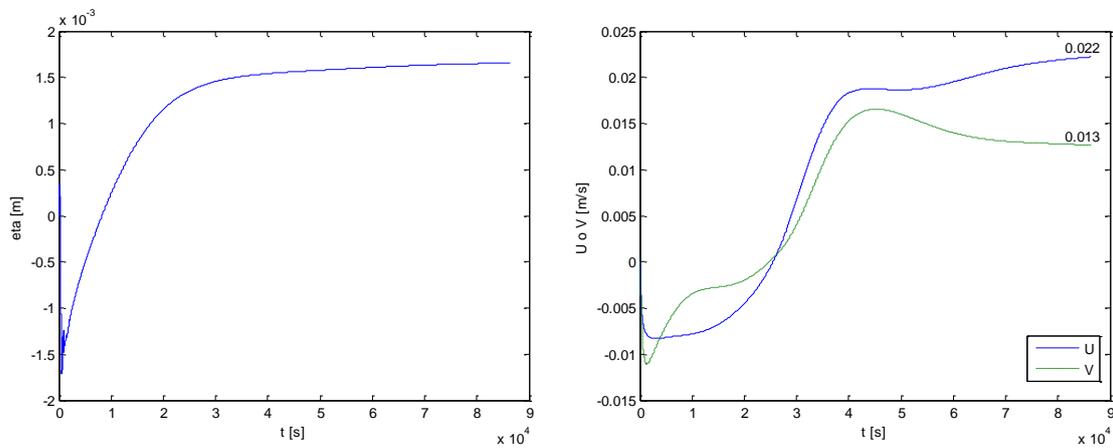


Figura B-12: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

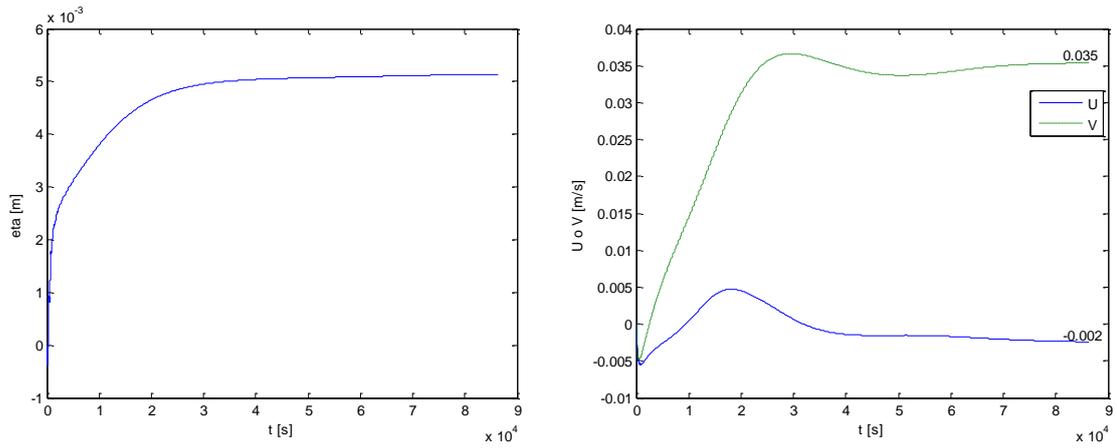


Figura B-13: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

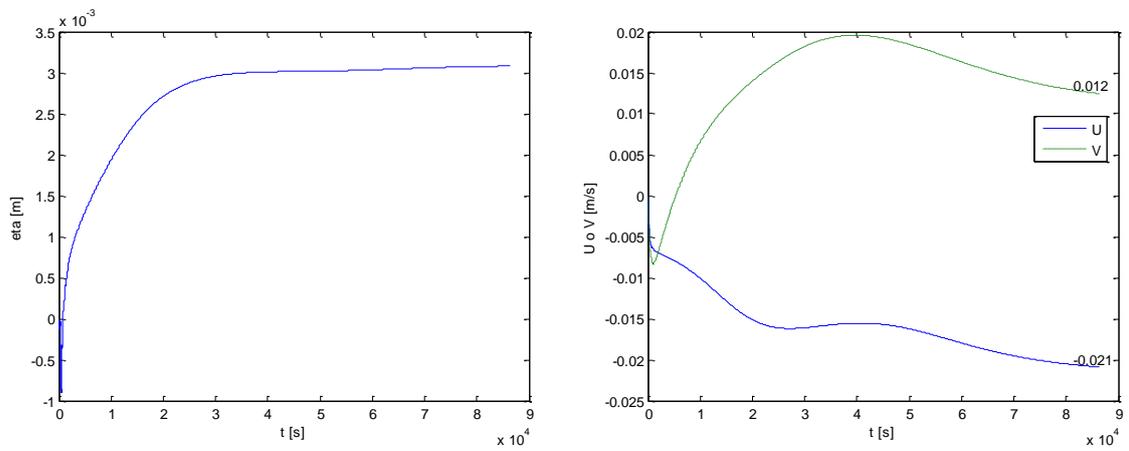


Figura B-14: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

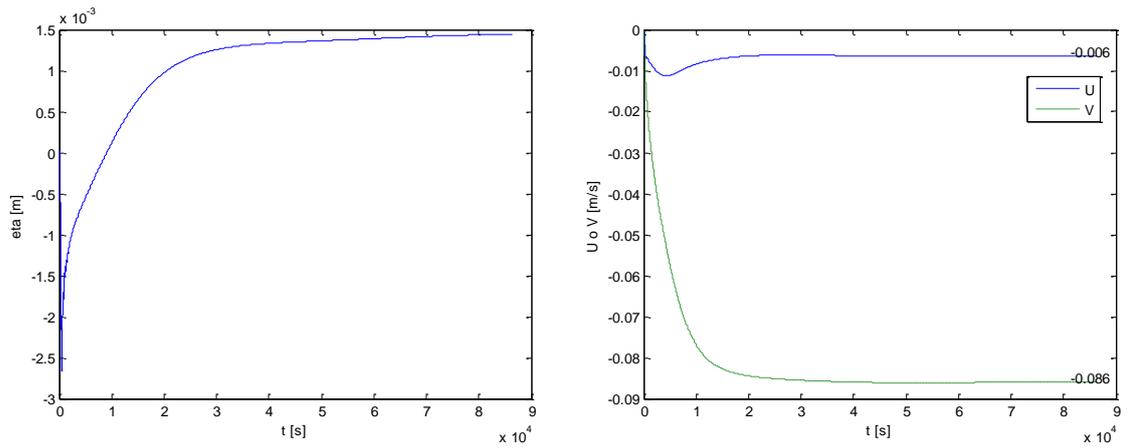


Figura B-15: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

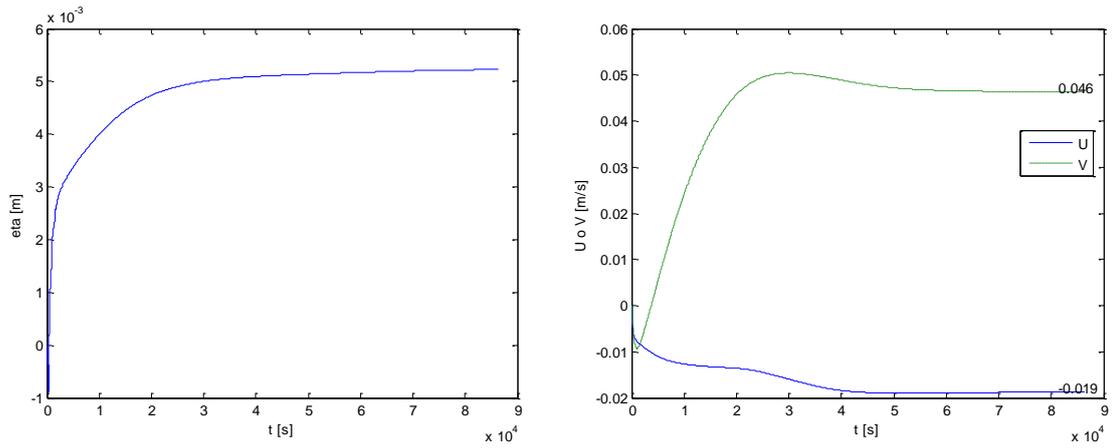


Figura B-16: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

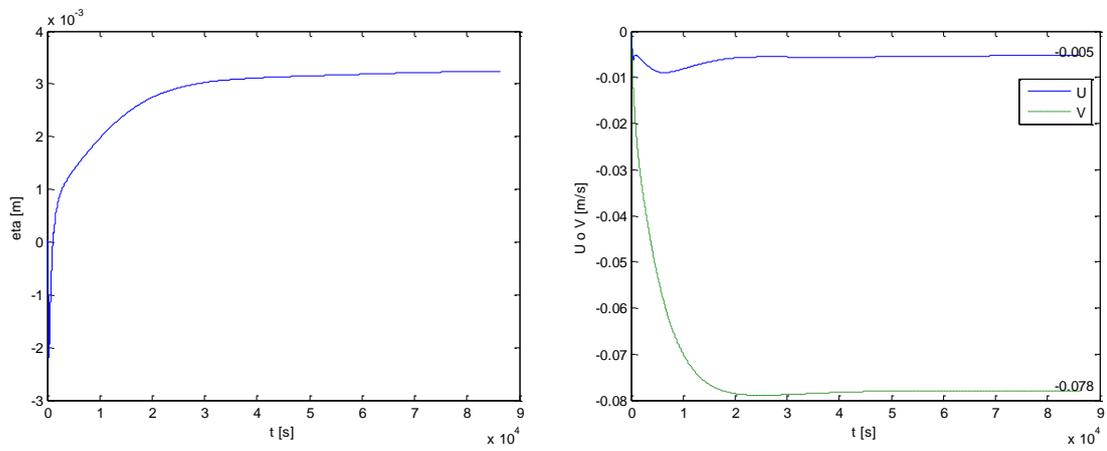


Figura B-17: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

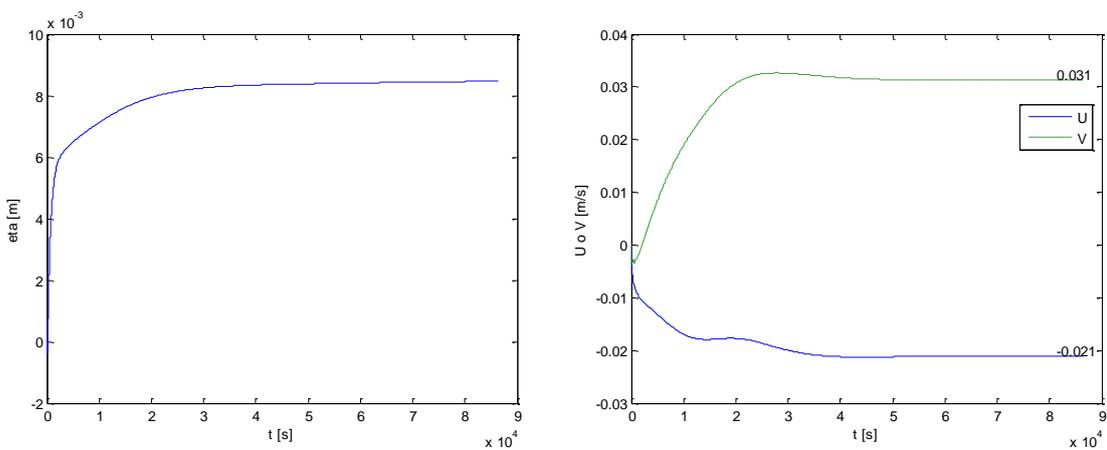


Figura B-18: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

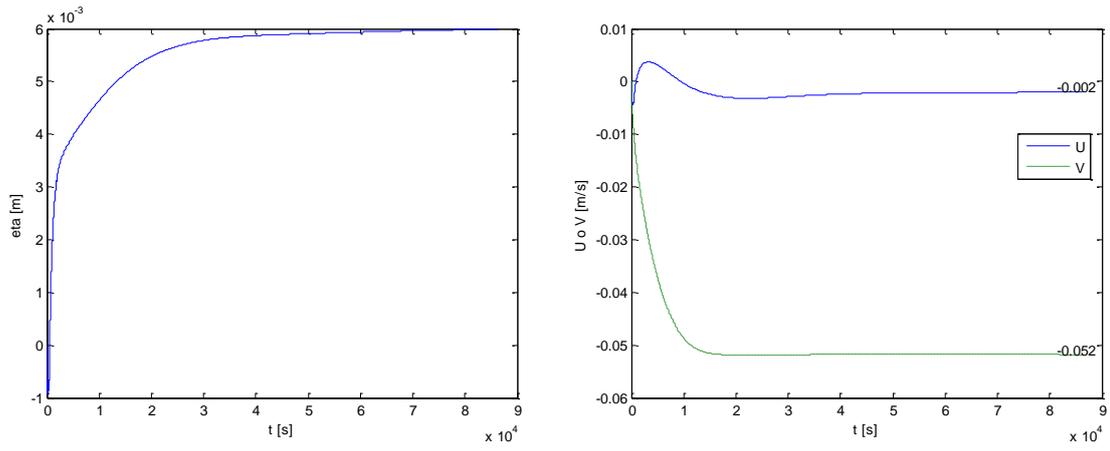


Figura B-19: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

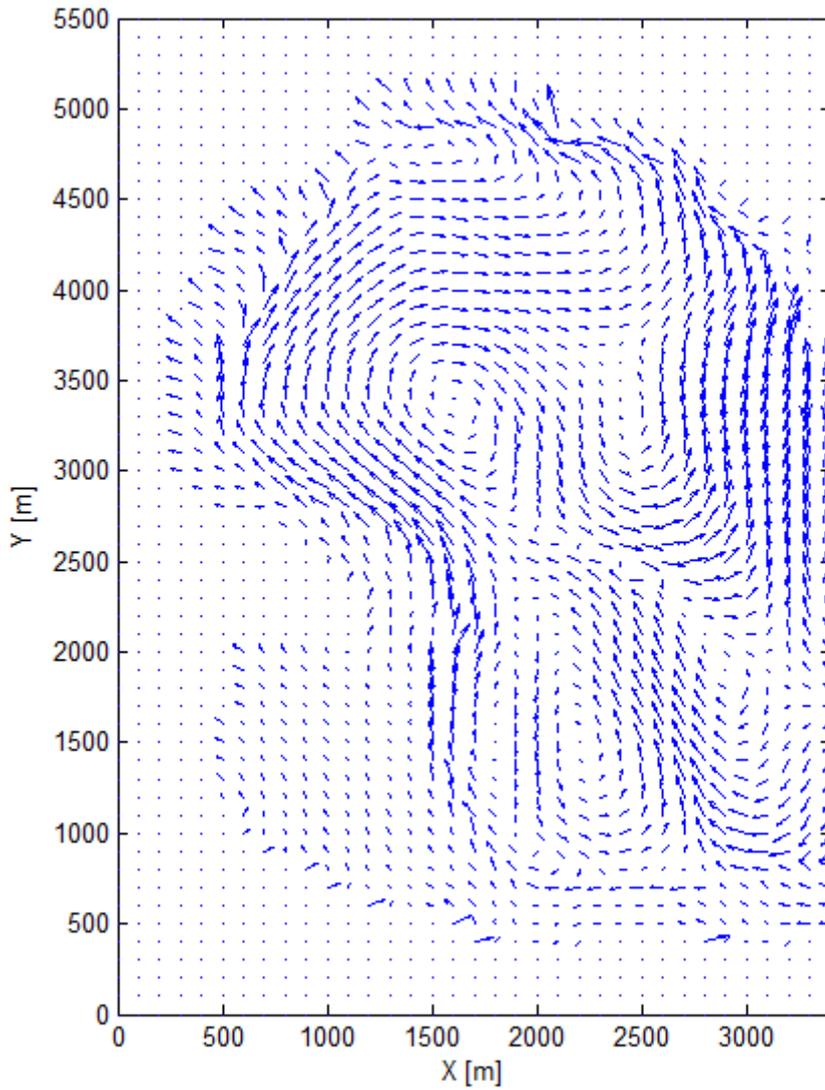


Figura B-20: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9m/s de dirección SE.

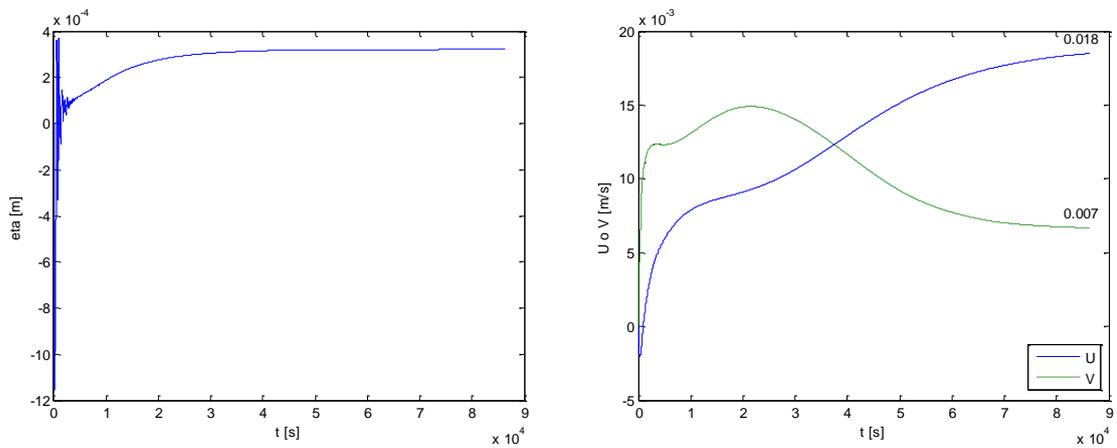


Figura B-21: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

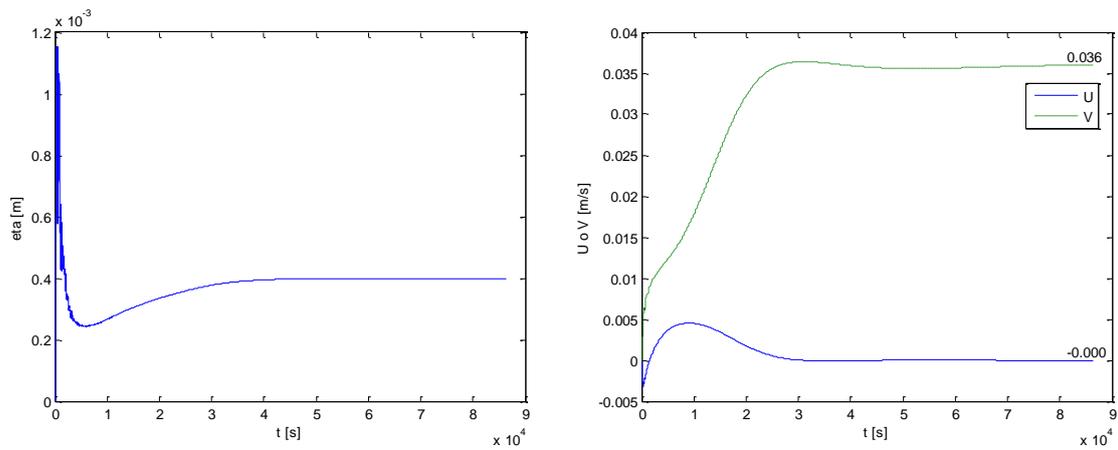


Figura B-22: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

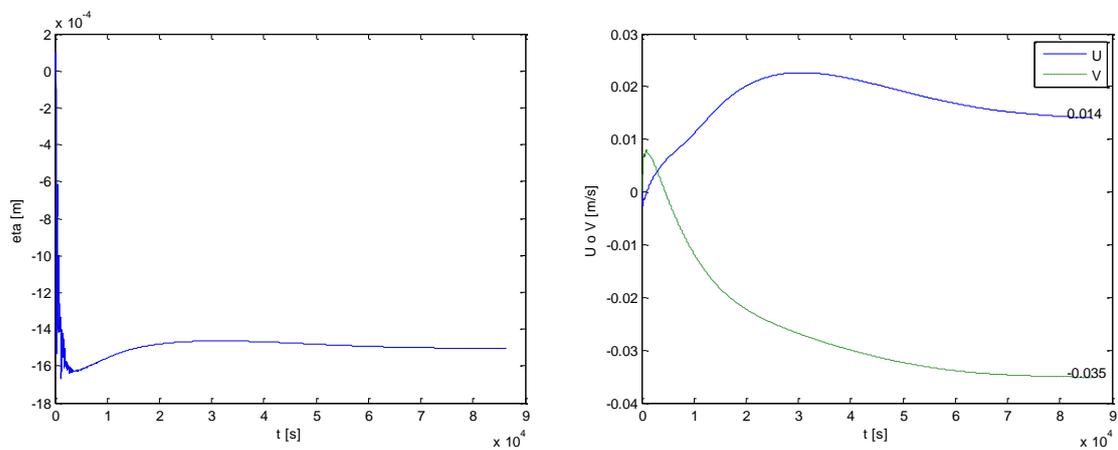


Figura B-23: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

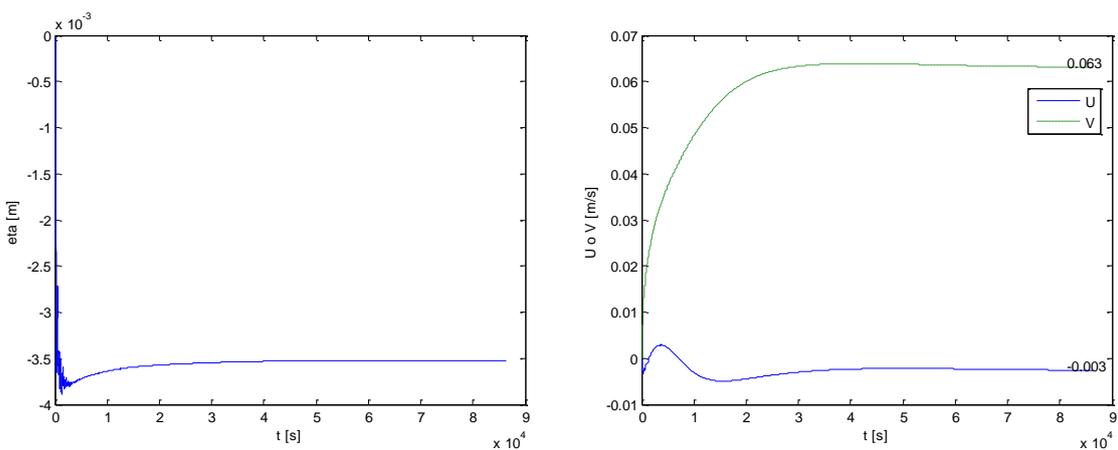


Figura B-24: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

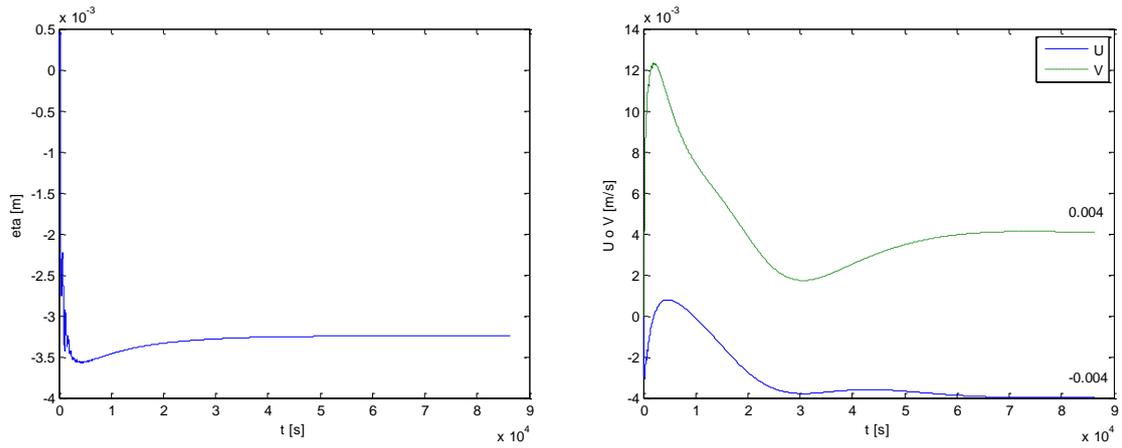


Figura B-25: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

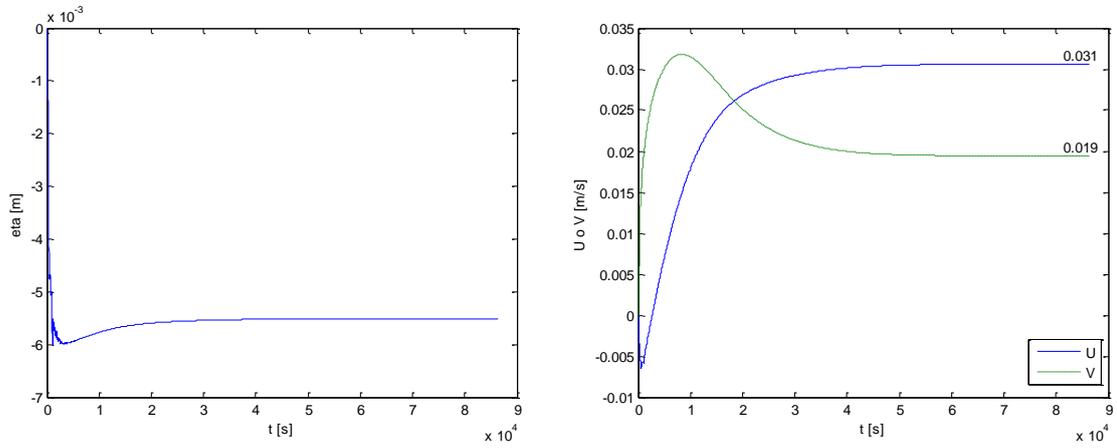


Figura B-26: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

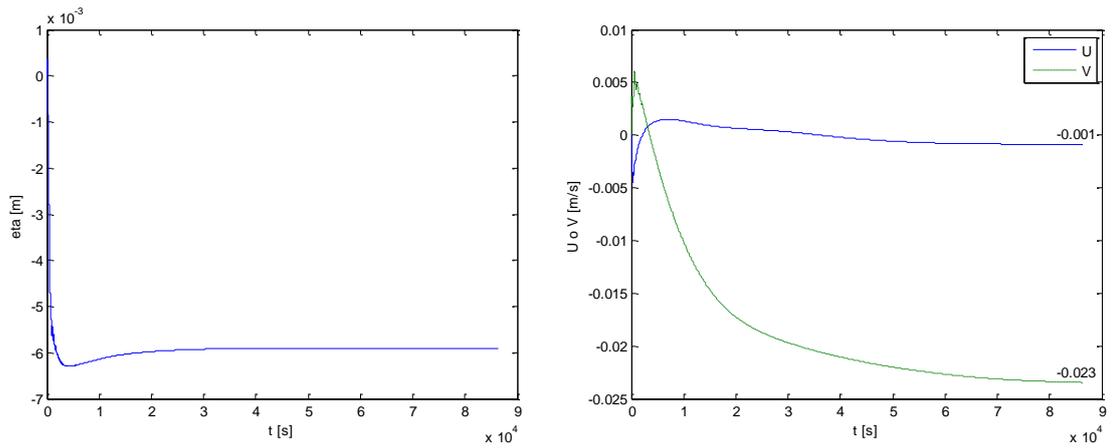


Figura B-27: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

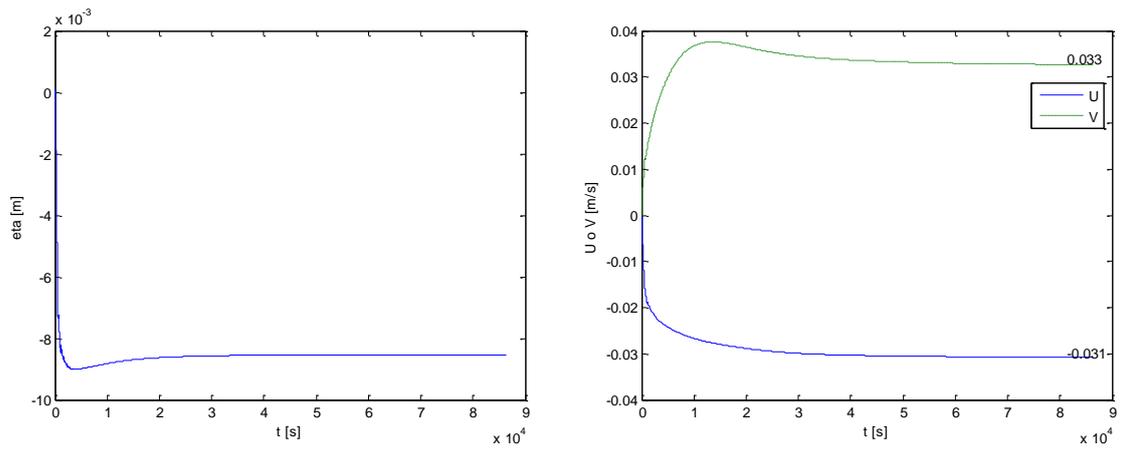


Figura B-28: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

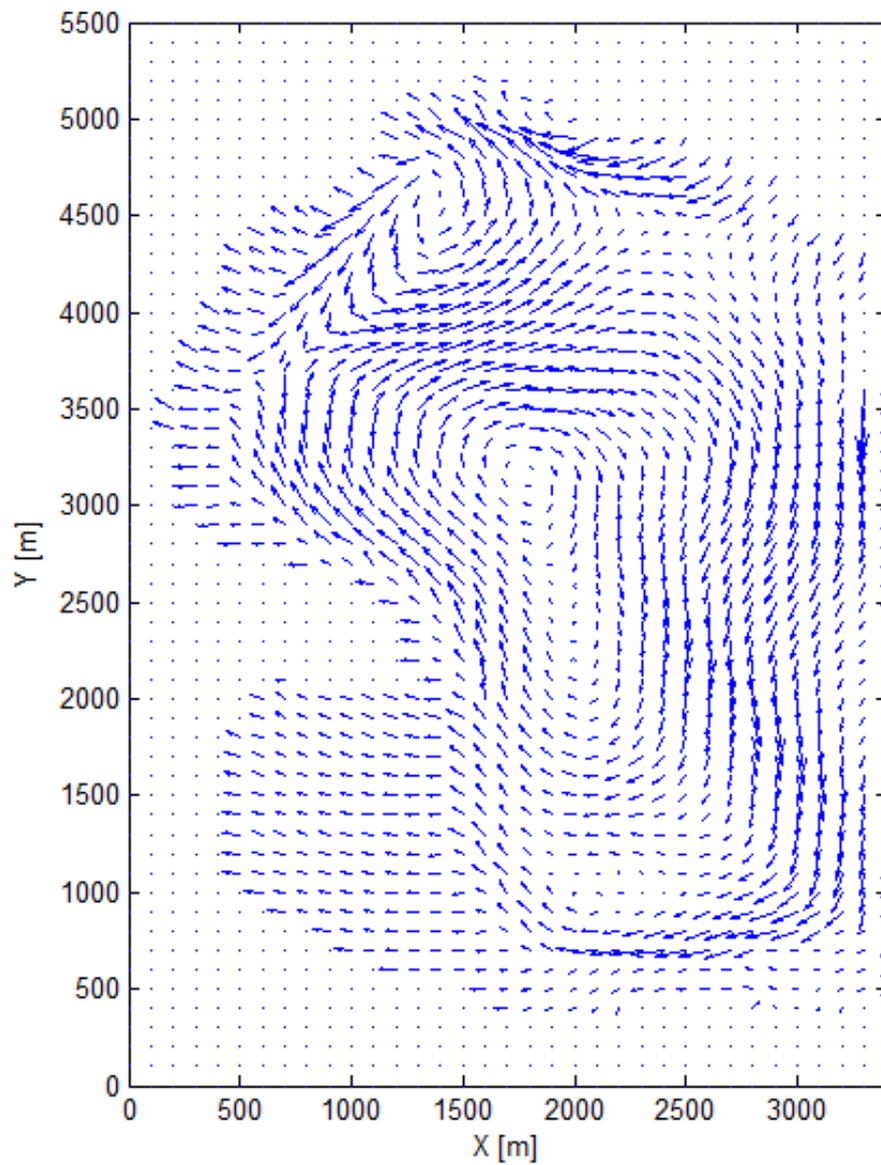


Figura B-29: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9 m/s de dirección E.

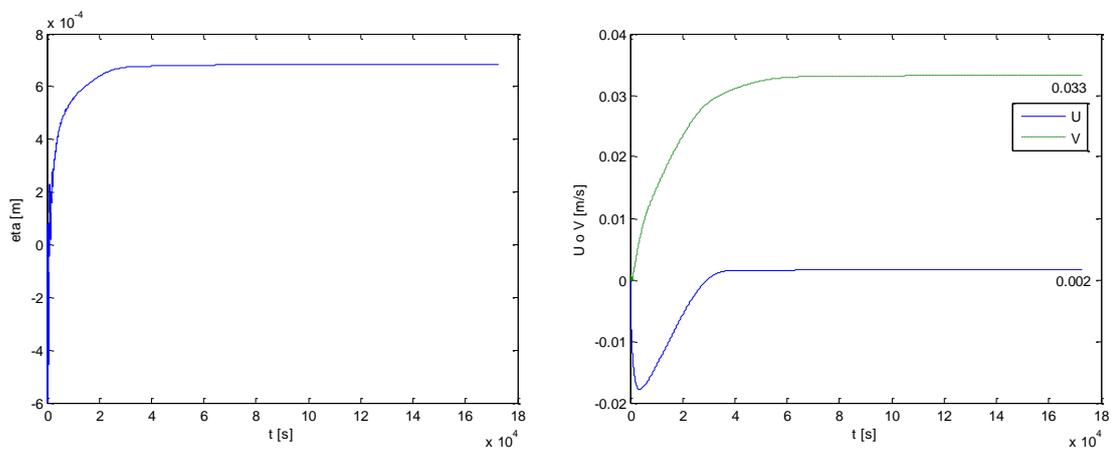


Figura B-30: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

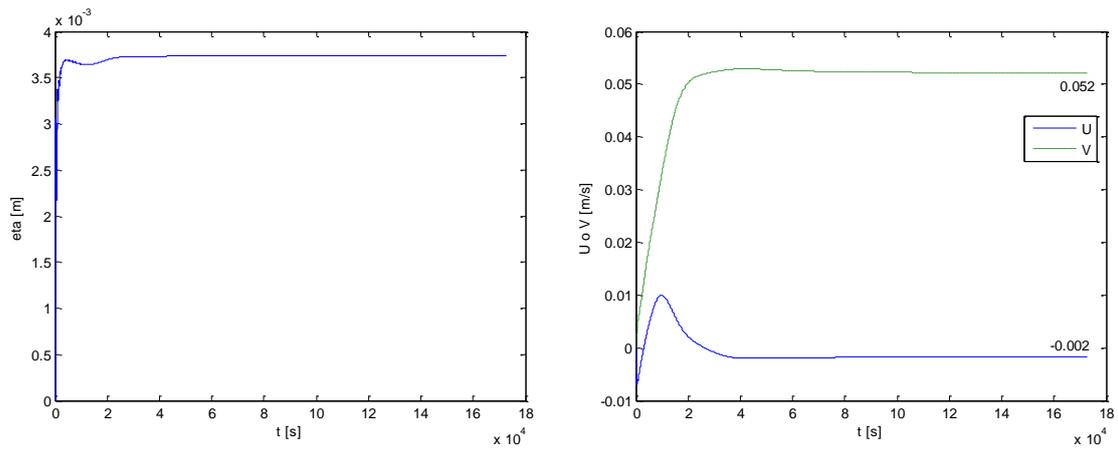


Figura B-31: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

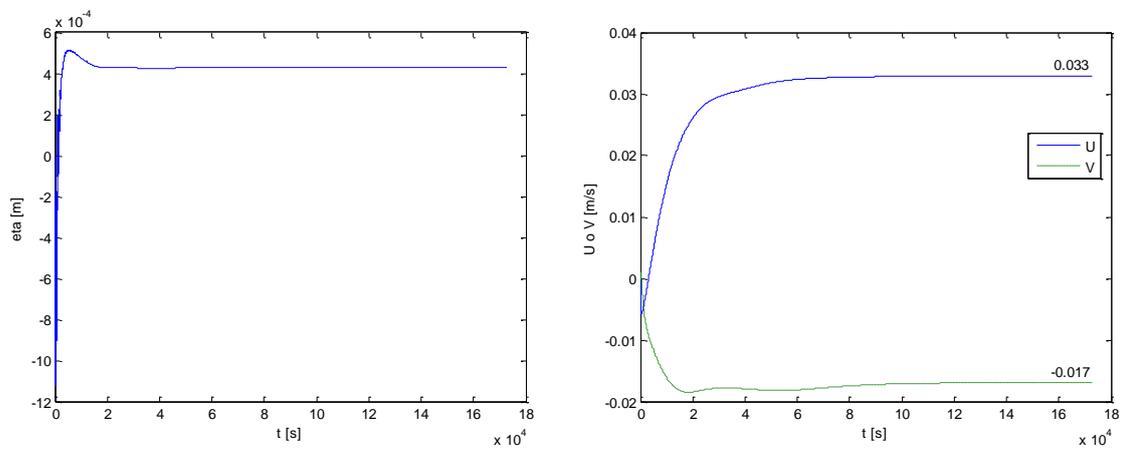


Figura B-32: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

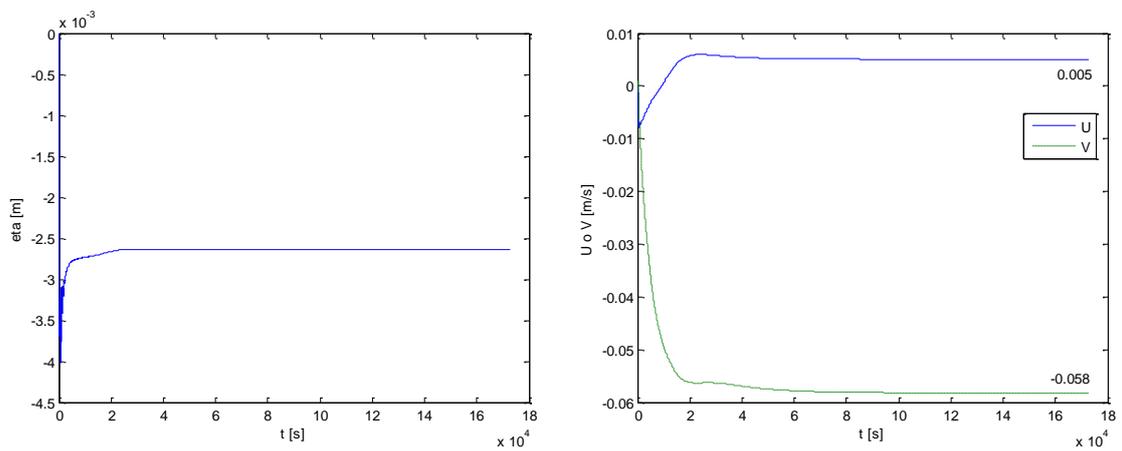


Figura B-33: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

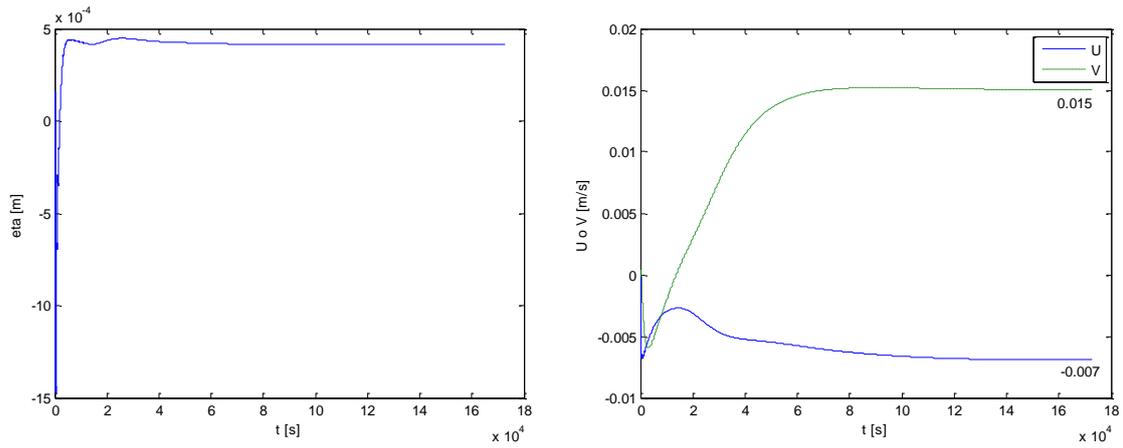


Figura B-34: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

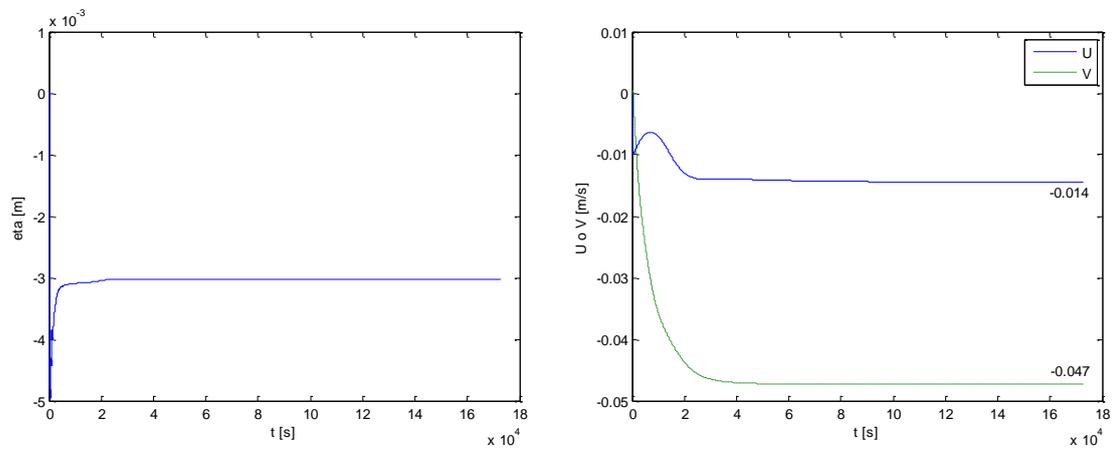


Figura B-35: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

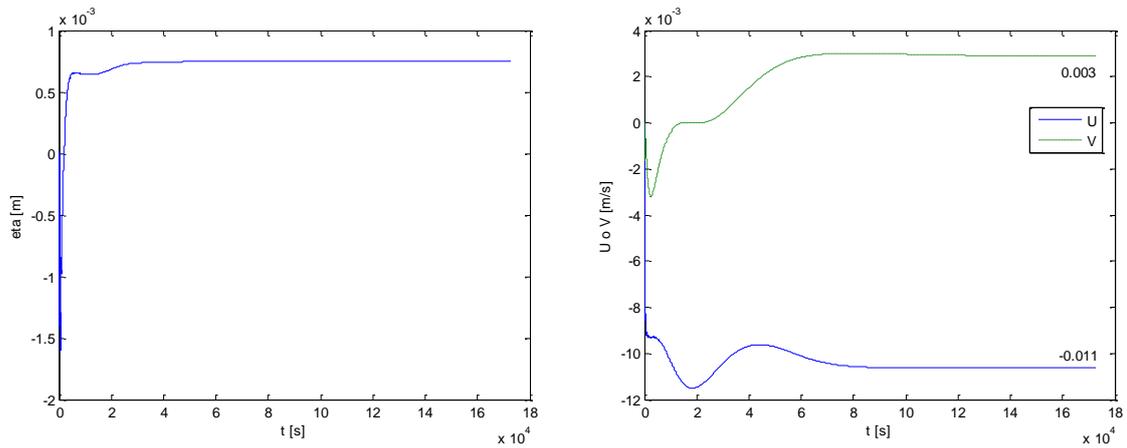


Figura B-36: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

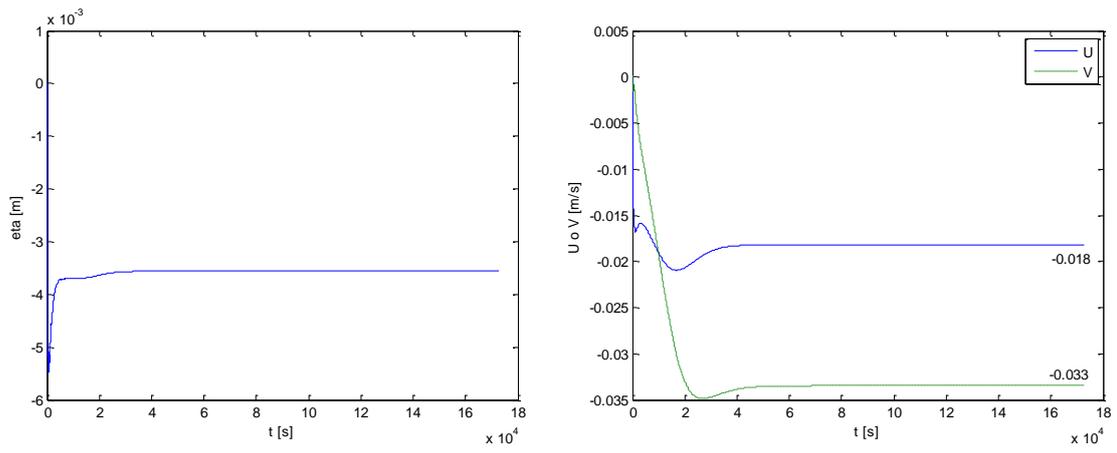


Figura B-37: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del E.

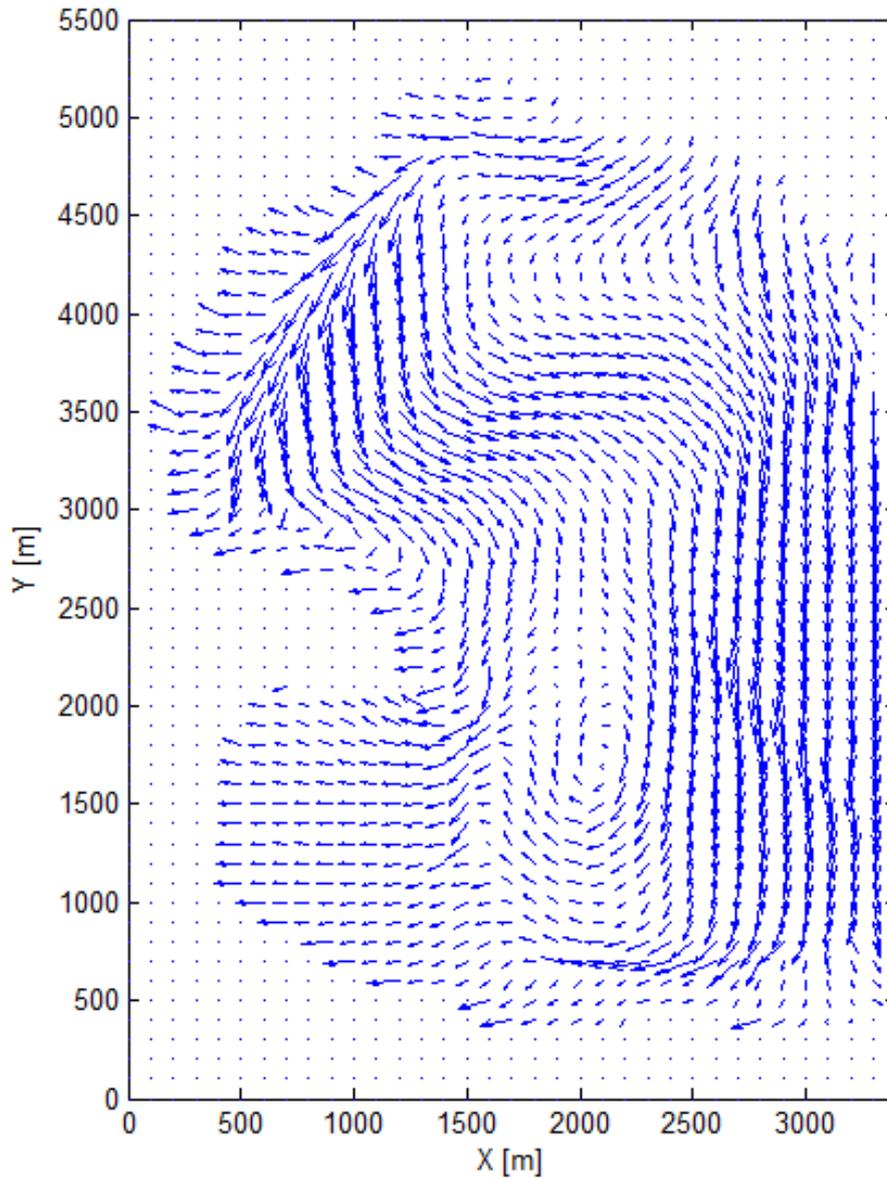


Figura B-38: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9m/s de dirección NE.

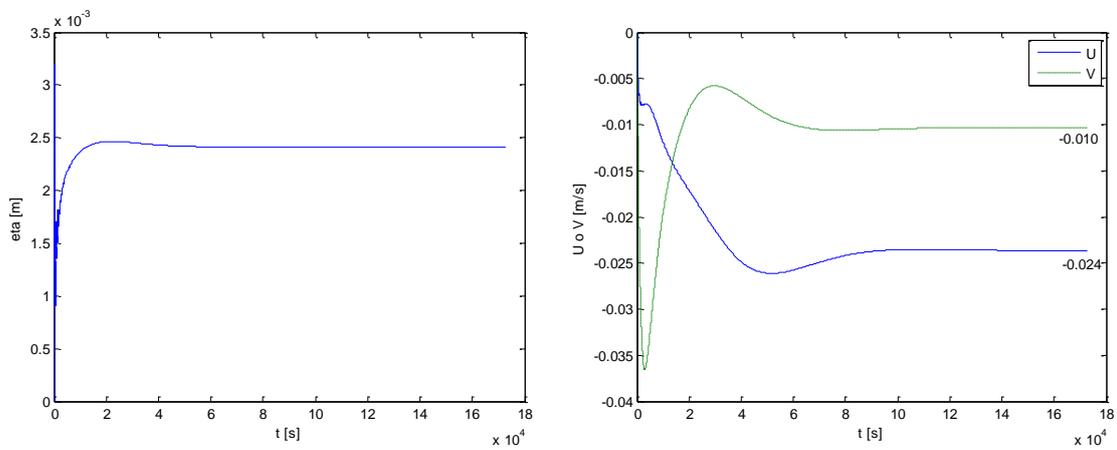


Figura B-39: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

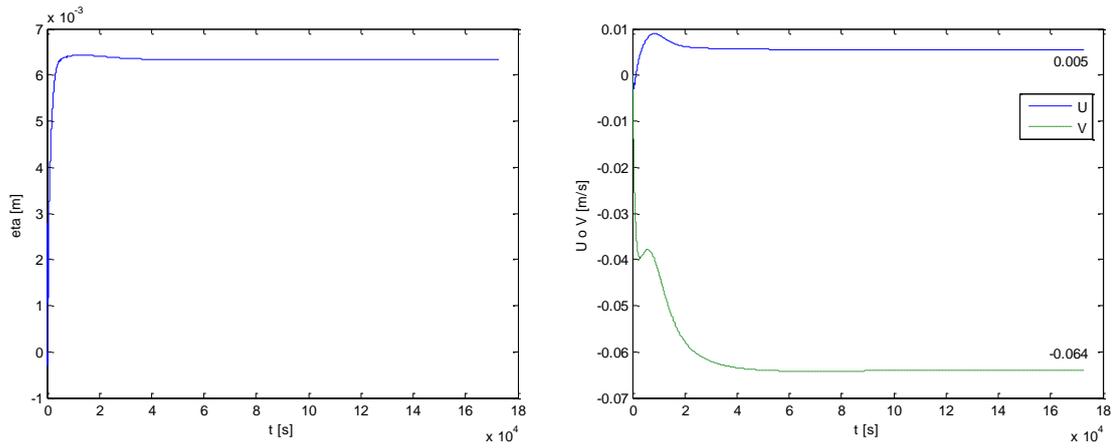


Figura B-40: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

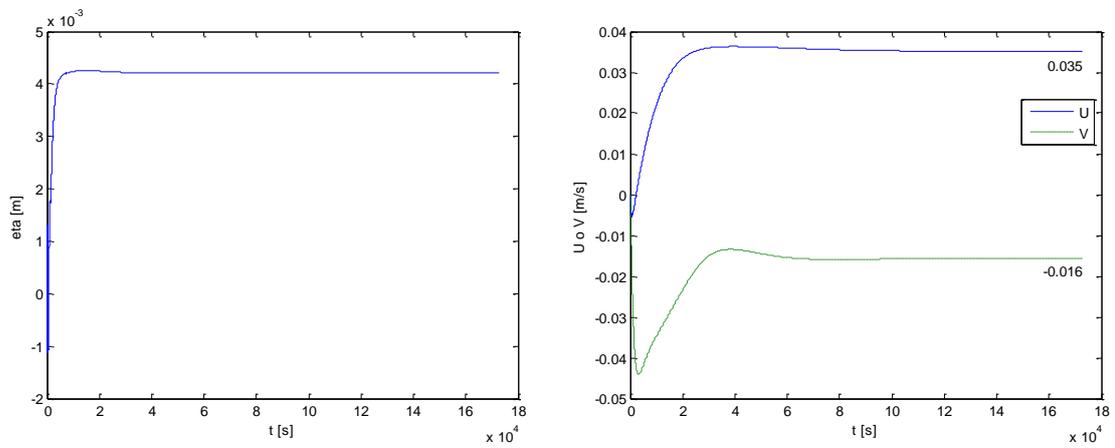


Figura B-41: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

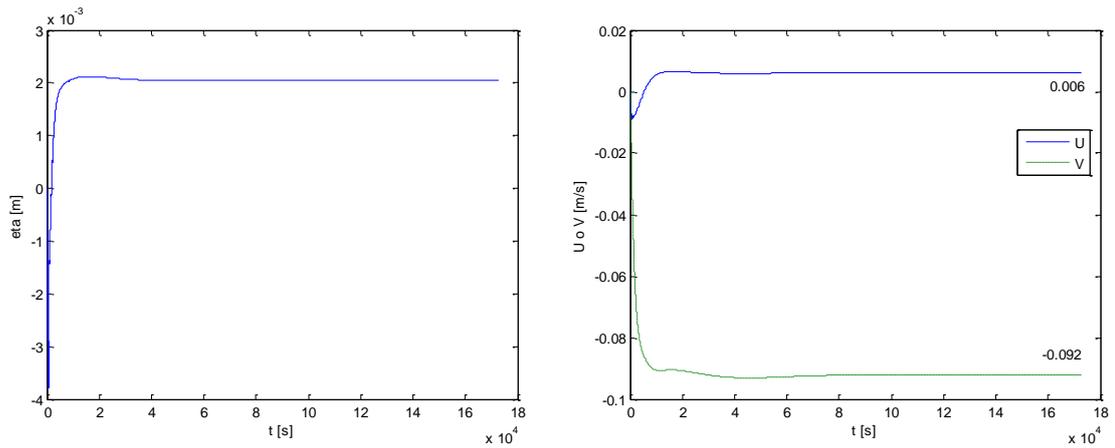


Figura B-42: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

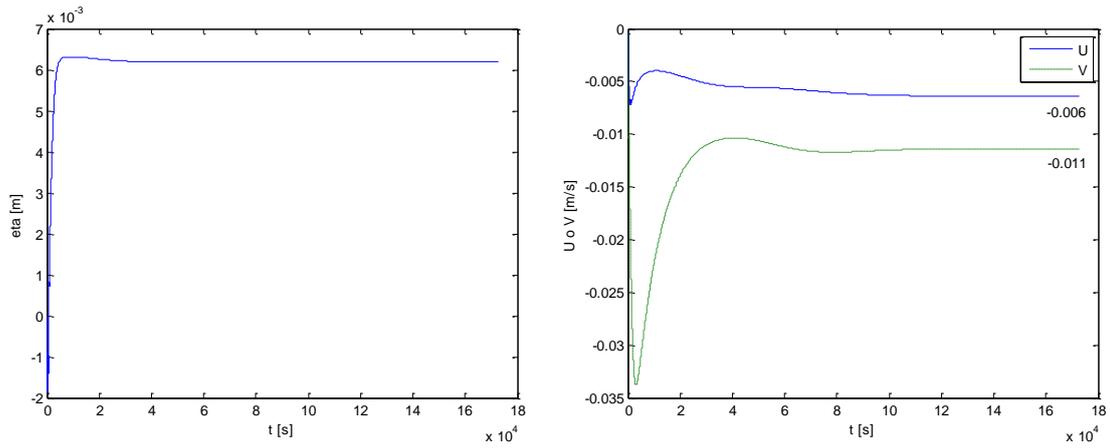


Figura B-43: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

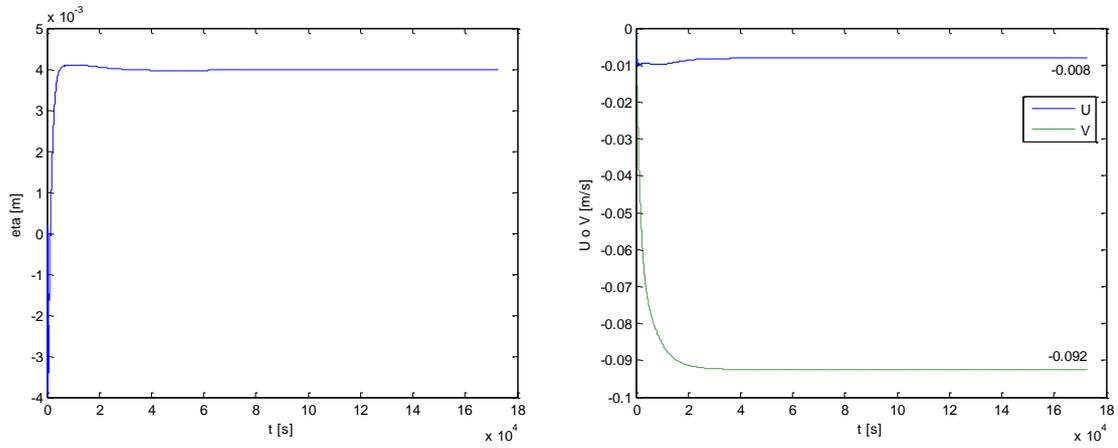


Figura B-44: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

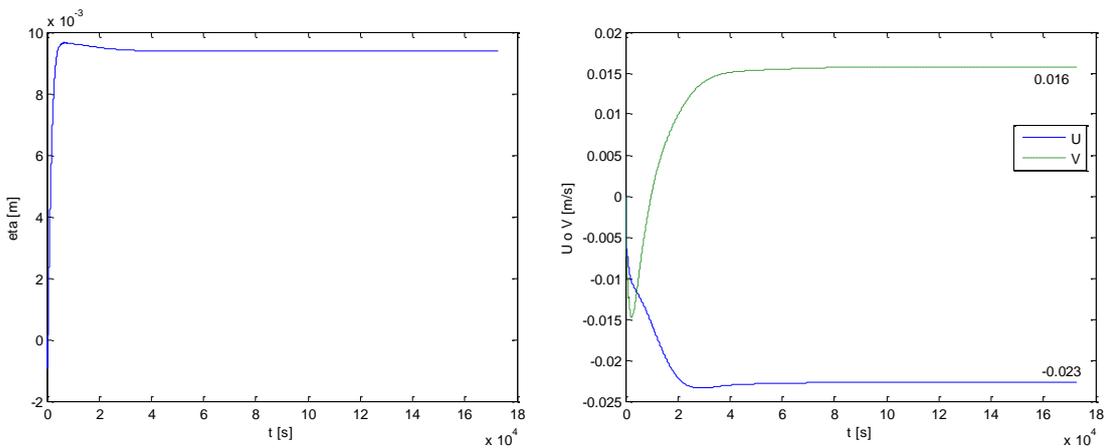


Figura B-45: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

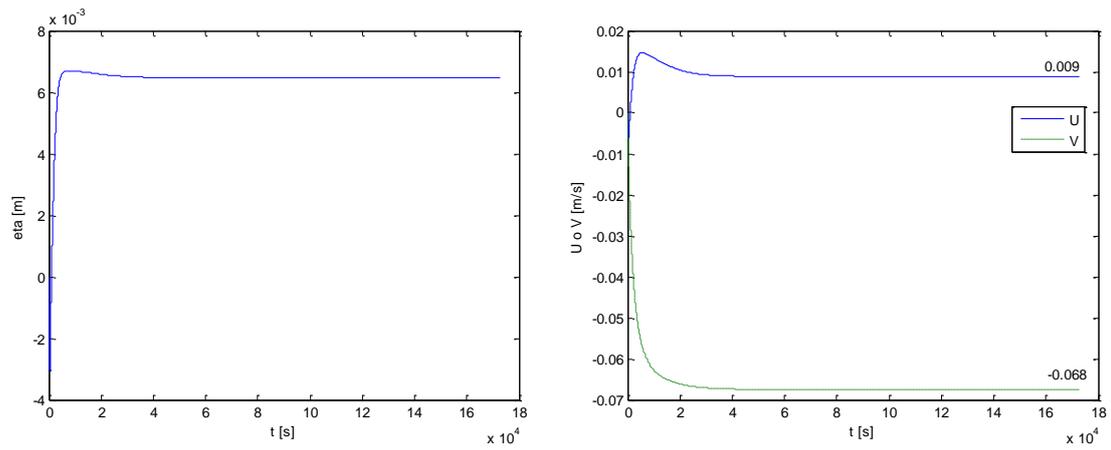


Figura B-46: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del NE.

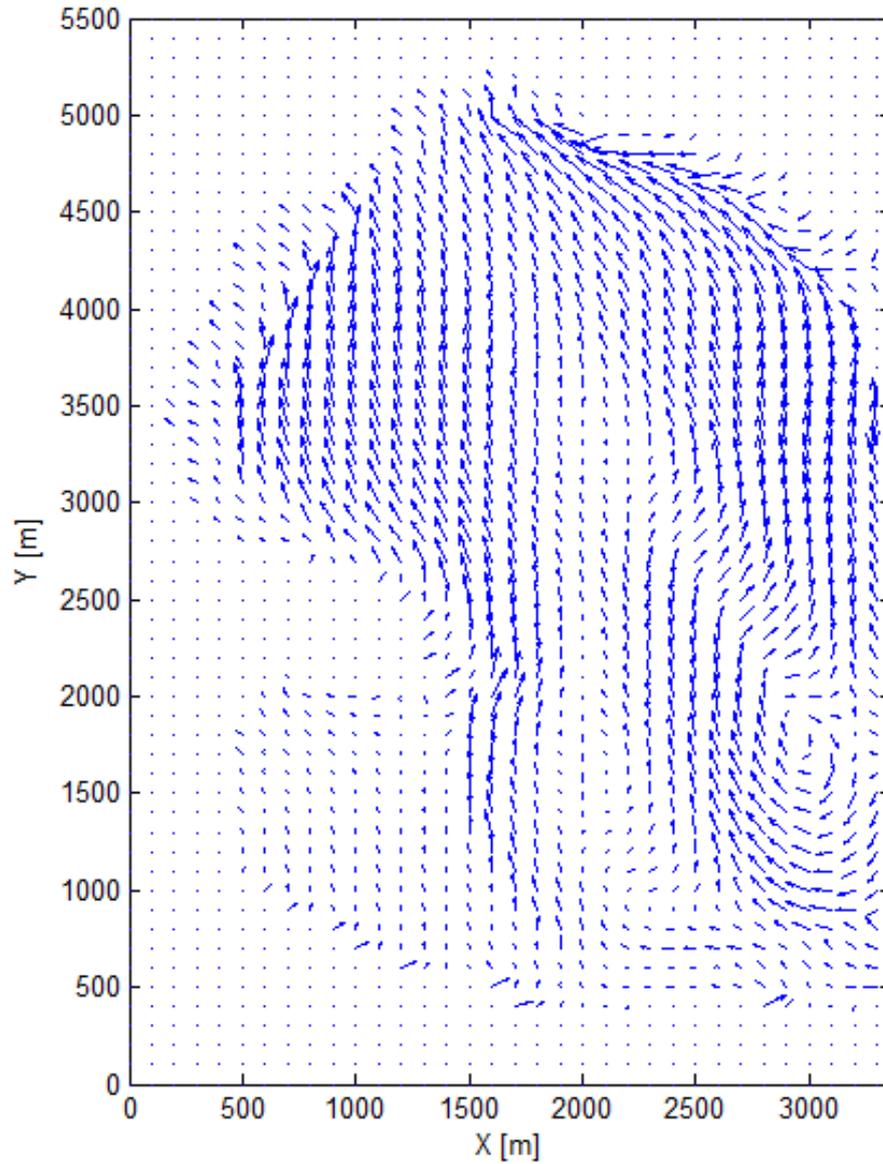


Figura B-47: Campo de Velocidades Bahía de Puno, velocidad de viento de 9m/s de dirección SE.

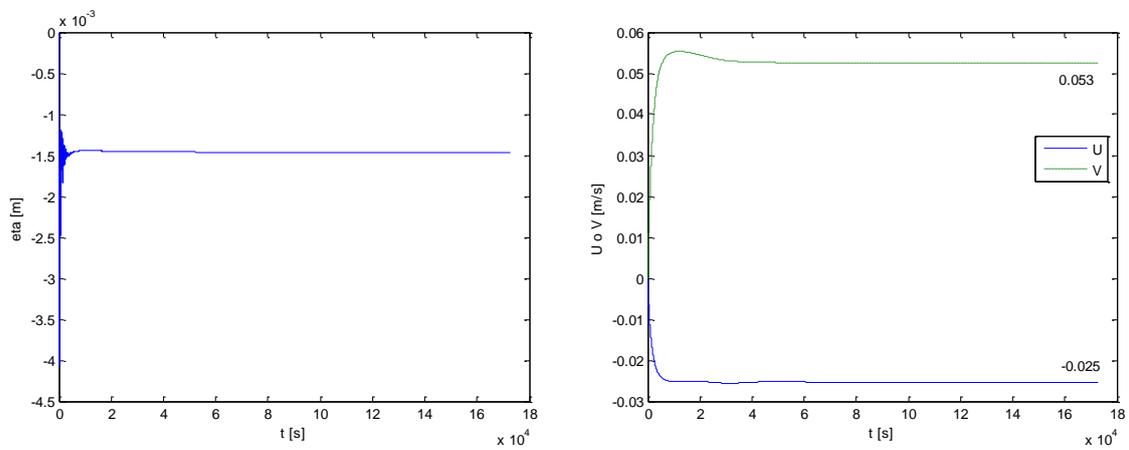


Figura B-48: Variables η , U y V en el punto A, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

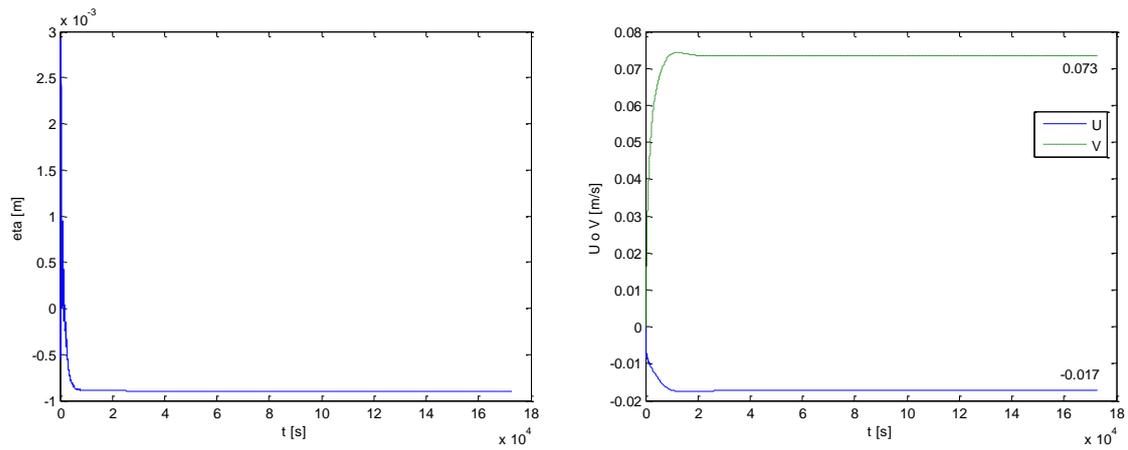


Figura B-49: Variables η , U y V en el punto B, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

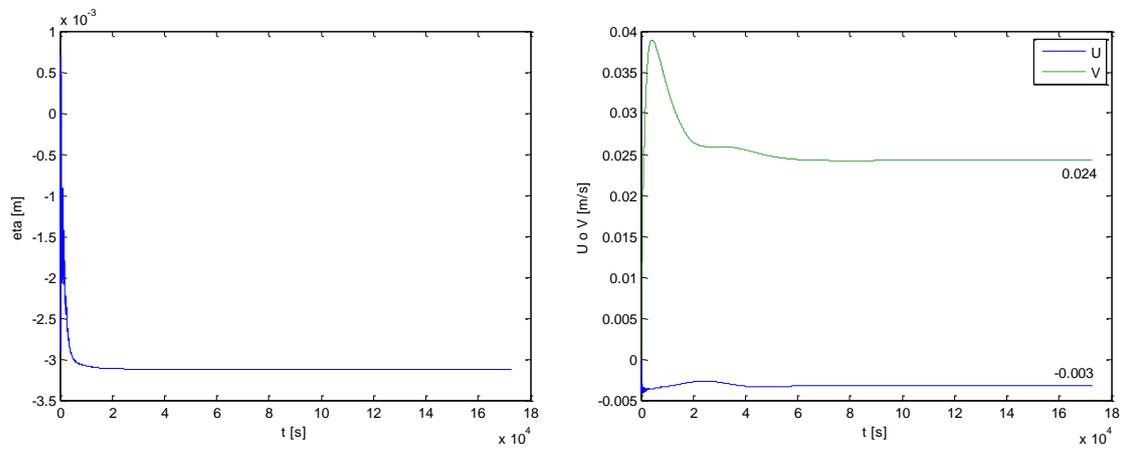


Figura B-50: Variables η , U y V en el punto C, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

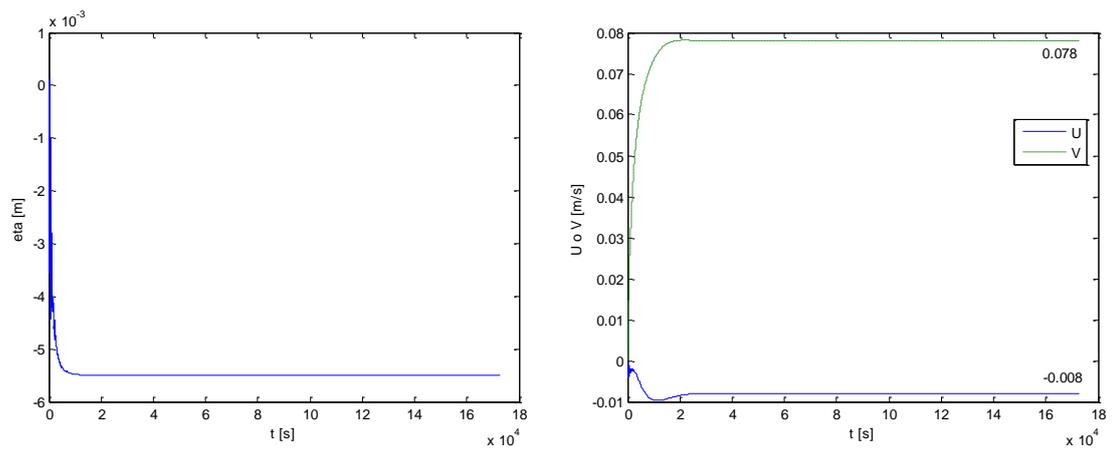


Figura B-51: Variables η , U y V en el punto D, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

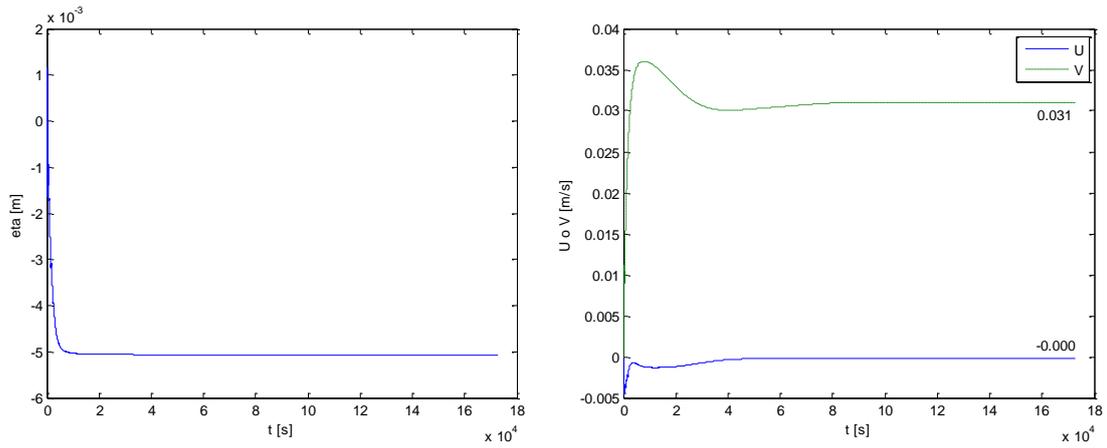


Figura B-52: Variables η , U y V en el punto E, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

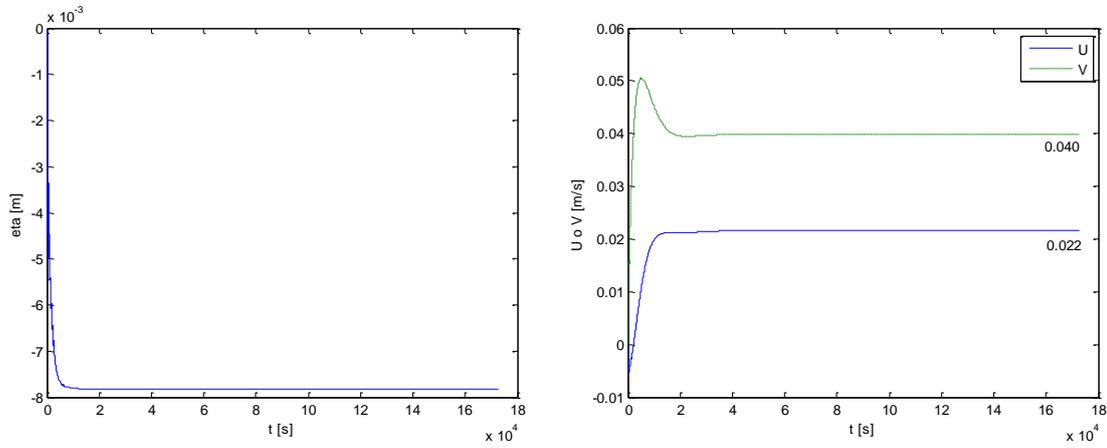


Figura B-53: Variables η , U y V en el punto F, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

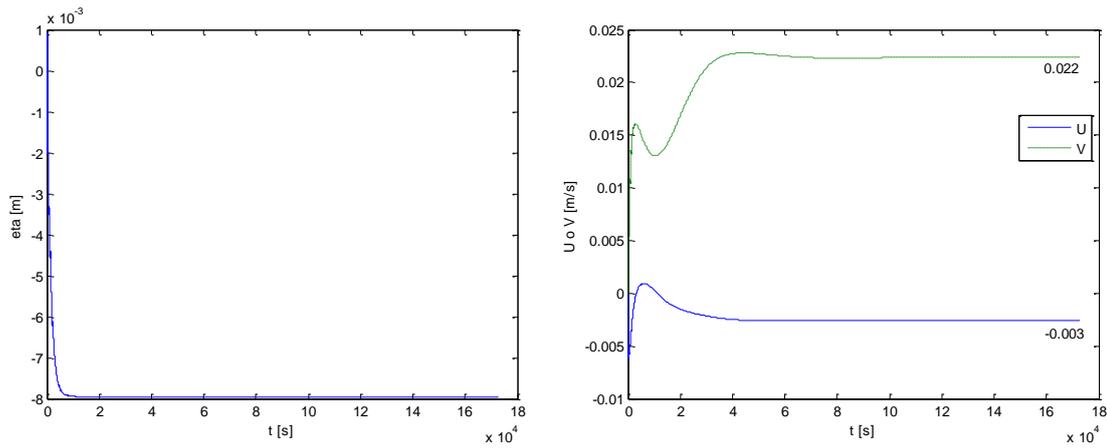


Figura B-54: Variables η , U y V en el punto G, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

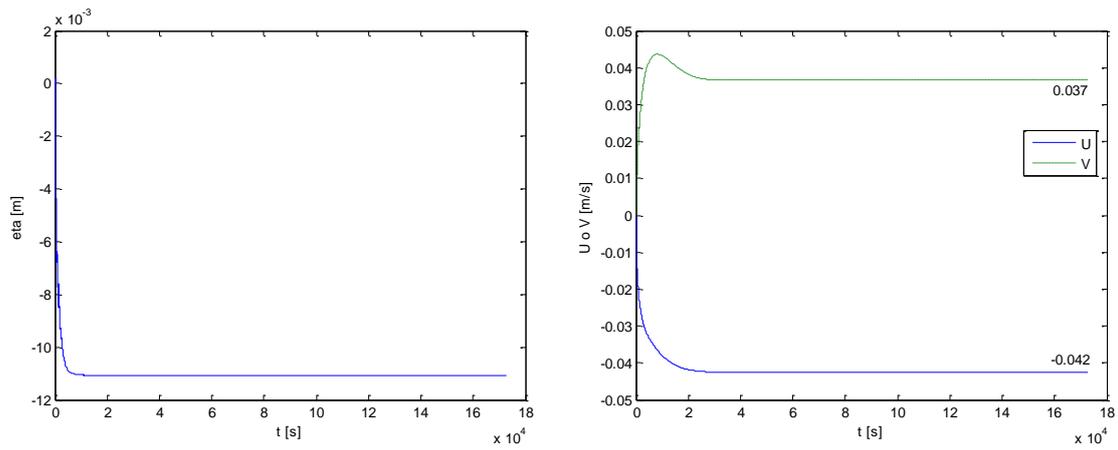


Figura B-55: Variables η , U y V en el punto H, con velocidad del viento de 9 m/s, del SE.

APENDICE A

FUERZAS PRINCIPALES DE MASA

En modelos de aguas poco profundas en mares y lagos las principales fuerzas de masa son:

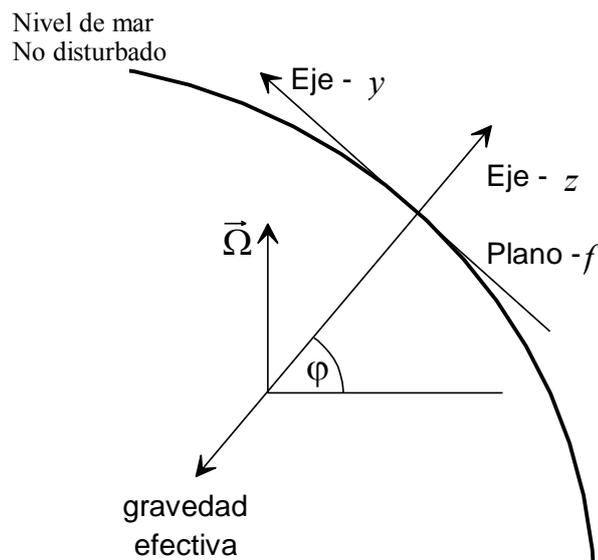
- Fuerza efectiva de la gravedad de la tierra actuando junto con la fuerza centrífuga perpendicular a la superficie libre sin disturbar.
- Fuerza de Coriolis, desviando el movimiento en el hemisferio norte a la derecha, debido a la rotación de la tierra.

En el sistema de coordenadas cartesianas es usado para la aproximación del plano-f, para estudios de escala mediana, se usa una común orientación esto es: Este (x), Norte(y) y para arriba (z). Las fuerzas de masa sobre el plano-f, se describen como:

$$\frac{\bar{f}_m}{\rho} = \bar{f}_i$$

$$\bar{f}_i = \left(\underbrace{fV, -fU}_{\text{Fuerza de Coriolis}}, \underbrace{-g}_{\text{Fuerza de gravedad}} \right)$$

Donde: f es el parámetro de Coriolis dado por, $f = 2\Omega \sin\phi$; donde: Ω , es la velocidad de rotación de la tierra, igual a $7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, y ϕ es la latitud geográfica positivo para el hemisferio norte y negativo para el hemisferio sur; U y V , son las velocidades en la dirección “x” y “y” respectivamente.



APENDICE B

REGISTRO DE LA MEDICION DEL CAMPO DE VELOCIDADES EN LA BAHIA DE PUNO

En este apéndice se muestran la ubicación de las zonas medidas y los registros de datos medidos por el Proyecto Especial Binacional Lago Titicaca, realizado en el año 2002 [16].

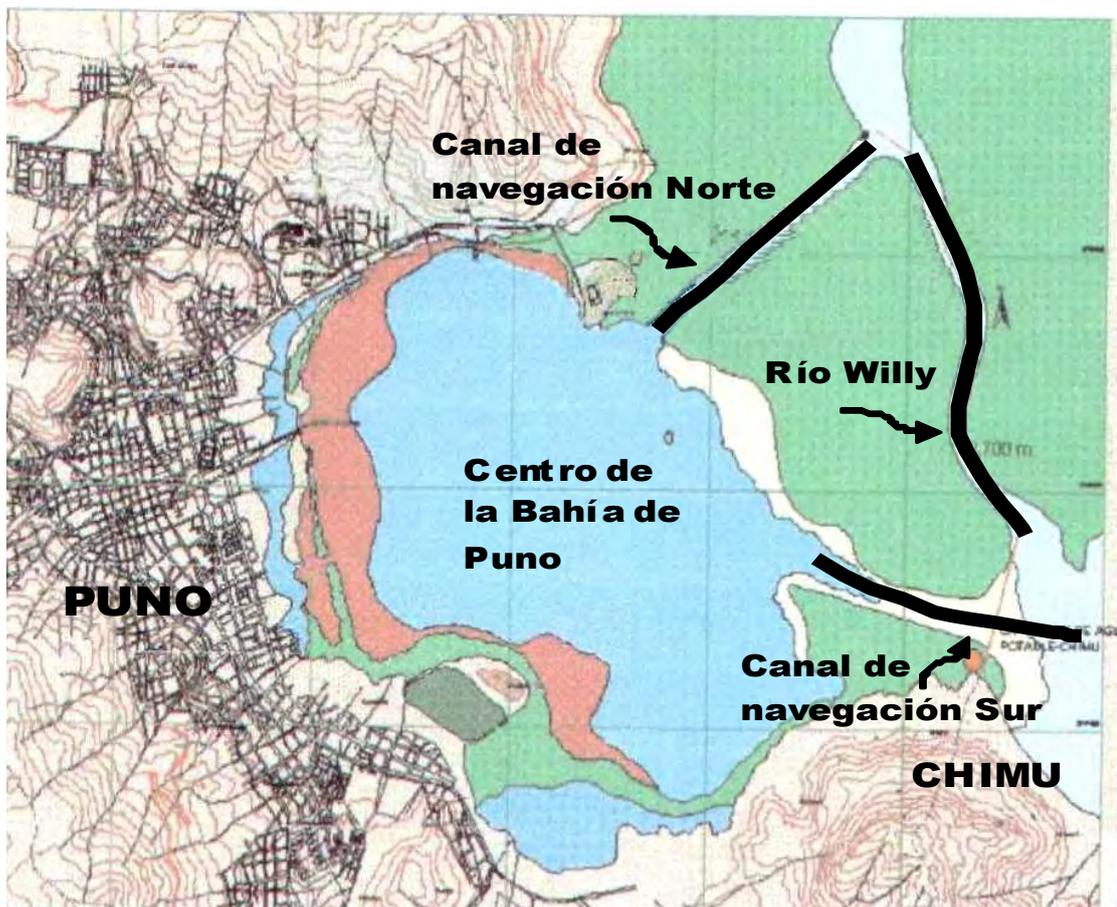


Figura B-1: Ubicación de las zonas de medición en la Bahía de Puno.

Cuadro B-1: Resumen de Medición, Río Willy.

Punto	Fecha	NiveldeMuestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimut
01	09/05/02	0.0	7.90	290
02	09/05/02	0.0	4.24	275
03	09/05/02	0.0	4.91	260
04	09/05/02	0.0	10.51	260
05	09/05/02	0.0	4.79	245
06	09/05/02	0.0	3.69	260
07	09/05/02	0.0	0.59	145
08	03/05/02	0.0	1.34	25
09	03/05/02	0.0	1.60	260
10	08/05/02	0.0	5.41	295
11	07/05/02	0.0	5.83	290
12	07/05/02	0.0	6.78	260
13	08/05/02	0.0	2.32	270
14	08/05/02	0.0	3.62	270
15	08/05/02	0.0	0.84	130
16	10/05/02	0.0	5.03	255
17	10/05/02	0.0	5.25	255
18	10/05/02	0.0	2.81	250
19	10/05/02	0.0	1.75	220
20	10/05/02	0.0	3.71	160
21	10/05/02	0.0	2.47	210
22	10/05/02	0.0	2.33	230
23	09/05/02	11.5	5.69	300
24	09/05/02	12.0	3.51	350
25	09/05/02	11.0	3.41	360
26	09/05/02	11.0	8.94	315
27	09/05/02	10.5	2.90	314
28	09/05/02	10.0	2.18	350
29	03/05/02	10.5	3.06	360
30	09/05/02	11.0	1.78	350
31	08/05/02	10.5	2.43	345
32	07/05/02	9.0	2.06	320
33	07/05/02	11.0	2.31	265
34	07/05/02	9.5	2.39	265
35	08/05/02	9.0	1.07	30
36	08/05/02	11.0	1.32	345
37	08/05/02	8.5	1.12	350
38	10/05/02	9.0	0.65	270
39	10/05/02	9.0	1.09	315
40	10/05/02	7.5	1.78	330
41	10/05/02	11.0	1.13	340
42	10/05/02	7.0	1.06	180
43	10/05/02	10.5	1.29	350
44	10/05/02	7.5	1.51	330

Cuadro B-2: Resumen de Medición, Canal de Navegación Sur.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimut
45	23/05/02	0.0	7.87	330
46	23/05/02	0.0	6.90	325
47	23/05/02	0.0	5.32	305
48	23/05/02	0.0	5.03	305
49	23/05/02	0.0	2.20	305
50	23/05/02	0.0	2.45	335
51	23/05/02	0.0	18.12	300
52	23/05/02	0.0	20.09	295
53	23/05/02	0.0	15.29	265
54	23/05/02	0.0	10.41	300
55	23/05/02	0.0	11.56	300
56	23/05/02	0.0	12.09	300
57	23/05/02	0.0	7.98	295
58	23/05/02	0.0	2.81	300
59	23/05/02	0.0	1.77	300
60	23/05/02	0.0	2.79	305
61	23/05/02	0.0	2.94	295
62	23/05/02	0.0	4.83	250
63	23/05/02	0.0	5.60	345
64	23/05/02	0.0	6.17	300
65	23/05/02	0.0	6.30	345
66	23/05/02	3.5	7.08	350
67	23/05/02	3.5	6.18	295
68	23/05/02	3.5	5.16	295
69	23/05/02	3.0	4.62	295
70	23/05/02	3.5	1.60	260
71	23/05/02	3.0	2.14	310
72	23/05/02	3.0	13.48	290
73	23/05/02	2.5	18.98	300
74	23/05/02	3.0	10.73	275
75	23/05/02	3.0	10.15	290
76	23/05/02	2.5	10.21	300
77	23/05/02	3.0	5.43	300
78	23/05/02	3.5	4.11	300
79	23/05/02	3.5	0.94	295
80	23/05/02	3.0	1.35	300
81	23/05/02	3.0	0.27	300
82	23/05/02	3.0	2.19	290
83	23/05/02	2.5	4.17	265
84	23/05/02	2.5	0.80	30
85	23/05/02	3.0	2.22	325
86	23/05/02	2.5	3.05	350

Cuadro B-3.a: Resumen de Medición, Canal los Uros Tramo I (Canal de navegación Norte).

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimet
87	31/05/02	0.0	3.76	240
88	31/05/02	0.0	3.25	240
89	31/05/02	0.0	2.93	240
90	13/05/02	0.0	2.88	245
91	31/05/02	0.0	4.32	240
92	31/05/02	0.0	3.91	265
93	31/05/02	0.0	3.62	255
94	31/05/02	0.0	2.98	270
95	13/05/02	0.0	2.73	230
96	31/05/02	0.0	3.03	240
97	31/05/02	0.0	3.54	245
98	31/05/02	0.0	2.90	235
99	31/05/02	0.0	3.32	255
100	13/05/02	0.0	3.17	265
101	31/05/02	0.0	4.00	245
102	31/05/02	0.0	2.93	245
103	31/05/02	0.0	2.04	240
104	31/05/02	0.0	1.39	230
105	13/05/02	0.0	0.52	270
106	31/05/02	0.0	1.54	290
107	31/05/02	0.0	2.26	260
108	31/05/02	0.0	1.33	290
109	31/05/02	0.0	2.16	270
110	31/05/02	0.0	3.12	250
111	31/05/02	0.0	2.85	250
112	31/05/02	0.0	2.37	290
113	31/05/02	0.0	1.11	290
114	31/05/02	0.0	0.53	290
115	31/05/02	0.0	0.77	290
116	31/05/02	0.0	2.19	270
117	31/05/02	0.0	2.30	245
118	31/05/02	1.5	1.66	320
119	31/05/02	1.5	1.93	260
120	31/05/02	1.5	2.51	240
121	13/05/02	1.5	2.78	300
122	31/05/02	1.5	2.62	300
123	31/05/02	1.5	2.75	335
124	31/05/02	1.5	2.97	290
125	31/05/02	1.5	2.88	270
126	13/05/02	1.5	2.53	315
127	31/05/02	1.5	2.47	310
128	31/05/02	1.5	2.46	5
129	31/05/02	1.5	2.65	5
130	31/05/02	1.5	3.00	10
131	13/05/02	1.5	2.83	70
132	31/05/02	1.5	2.56	50
133	31/05/02	1.5	2.11	20
134	31/05/02	1.5	2.31	355
135	31/05/02	1.5	2.06	355
136	13/05/02	1.5	0.50	350

Cuadro B-3.b: Resumen de Medición, Canal los Uros Tramo I (Canal de navegación Norte).

137	31/05/02	1.5	1.17	320
138	31/05/02	1.5	0.15	270
139	31/05/02	1.5	1.32	300
140	31/05/02	1.5	2.26	330
141	31/05/02	1.5	3.53	315
142	31/05/02	1.5	2.84	355
143	31/05/02	1.5	2.57	355
144	31/05/02	1.5	1.35	15
145	31/05/02	1.5	1.68	345
146	31/05/02	1.5	2.53	355
147	31/05/02	1.5	2.06	15
148	31/05/02	1.5	3.09	15

Cuadro B-4.a: Resumen de Medición, Centro de la Bahía de Puno.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimut
149	20/05/02	0.0	6.11	85
150	20/05/02	0.0	6.02	85
151	20/05/02	0.0	5.32	45
152	20/05/02	0.0	5.61	40
153	20/05/02	0.0	4.76	35
154	20/05/02	0.0	3.69	300
155	20/05/02	0.0	3.17	300
156	20/05/02	0.0	2.92	300
157	20/05/02	0.0	3.15	280
158	20/05/02	0.0	3.25	330
159	20/05/02	0.0	3.61	50
160	20/05/02	0.0	3.38	55
161	20/05/02	0.0	4.11	80
162	20/05/02	0.0	3.94	95
163	21/05/02	0.0	4.08	270
164	21/05/02	0.0	4.20	290
165	21/05/02	0.0	5.01	295
166	21/05/02	0.0	4.62	295
167	21/05/02	0.0	3.86	265
168	21/05/02	0.0	3.64	295
169	21/05/02	0.0	3.09	270
170	21/05/02	0.0	3.24	300
171	21/05/02	0.0	3.40	270
172	21/05/02	0.0	1.68	300
173	21/05/02	0.0	2.36	300
174	21/05/02	0.0	2.53	300
175	21/05/02	0.0	3.67	340
176	21/05/02	0.0	3.15	45
177	21/05/02	0.0	3.06	45
178	21/05/02	0.0	3.33	95
179	21/05/02	0.0	2.68	345
180	21/05/02	0.0	2.54	320
181	21/05/02	0.0	2.58	345
182	22/05/02	0.0	3.21	285
183	22/05/02	0.0	3.54	285
184	22/05/02	0.0	3.61	285
185	22/05/02	0.0	2.68	270
186	22/05/02	0.0	2.93	225
187	22/05/02	0.0	3.45	225
188	22/05/02	0.0	3.59	235

Cuadro B-4.b: Resumen de Medición, Centro de la Bahía de Puno.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimut
189	22/05/02	0.0	3.54	235
190	22/05/02	0.0	2.67	235
191	22/05/02	0.0	1.05	235
192	23/05/02	0.0	0.54	250
193	23/05/02	0.0	1.83	300
194	23/05/02	0.0	3.68	300
195	23/05/02	0.0	3.94	270
196	23/05/02	0.0	4.11	45
197	23/05/02	0.0	4.52	40
198	23/05/02	0.0	4.36	305
199	23/05/02	0.0	6.54	295
200	23/05/02	0.0	8.64	270
201	23/05/02	0.0	10.10	270
202	23/05/02	0.0	16.55	270
203	23/05/02	0.0	19.31	250
204	23/05/02	0.0	15.06	250
205	23/05/02	0.0	8.20	245
206	23/05/02	0.0	3.09	255
207	23/05/02	0.0	3.21	230
208	23/05/02	0.0	3.69	235
209	23/05/02	0.0	3.58	240
210	23/05/02	0.0	2.69	240
211	23/05/02	0.0	3.27	240
212	23/05/02	0.0	2.54	270
213	23/05/02	0.0	3.51	285
214	23/05/02	0.0	2.34	285
215	30/05/02	0.0	2.39	220
216	30/05/02	0.0	2.56	230
217	30/05/02	0.0	2.58	265
218	30/05/02	0.0	2.96	255
219	30/05/02	0.0	2.38	245
220	30/05/02	0.0	2.87	270
221	30/05/02	0.0	3.09	240
222	30/05/02	0.0	1.55	200
223	30/05/02	0.0	2.67	205
224	30/05/02	0.0	2.46	210
225	30/05/02	0.0	3.41	255
226	30/05/02	0.0	2.58	250
227	30/05/02	0.0	1.97	265
228	30/05/02	0.0	2.54	250

Cuadro B-4.c: Resumen de Medición, Centro de la Bahía de Puno.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimut
229	30/05/02	0.0	3.68	250
230	30/05/02	0.0	4.53	250
231	30/05/02	0.0	5.67	250
232	30/05/02	0.0	4.61	280
233	30/05/02	0.0	5.39	270
234	30/05/02	0.0	5.47	270
235	30/05/02	0.0	6.34	270
236	30/05/02	0.0	5.94	270
237	30/05/02	0.0	4.29	270
238	30/05/02	0.0	5.38	270
239	30/05/02	0.0	6.24	260
240	30/05/02	0.0	6.51	225
241	30/05/02	0.0	5.93	265
242	30/05/02	0.0	3.86	285
243	30/05/02	0.0	6.51	280
244	30/05/02	0.0	5.94	265
245	30/05/02	0.0	8.51	270
246	30/05/02	0.0	5.83	270
247	30/05/02	0.0	6.28	260
248	30/05/02	0.0	2.10	260
249	30/05/02	0.0	3.92	260
250	20/05/02	2.5	3.70	95
251	20/05/02	2.5	3.11	85
252	20/05/02	2.5	2.51	50
253	20/05/02	2.5	1.03	45
254	20/05/02	2.5	1.27	45
255	20/05/02	2.5	1.15	350
256	20/05/02	2.5	0.34	340
257	20/05/02	2.5	0.20	335
258	20/05/02	2.5	0.59	280
259	20/05/02	2.5	0.41	285
260	20/05/02	2.5	1.56	285
261	20/05/02	2.5	2.53	290
262	20/05/02	2.5	3.04	270
263	20/05/02	2.5	2.62	230
264	21/05/02	4.0	2.50	55
265	21/05/02	4.0	2.18	50
266	21/05/02	4.0	2.64	85
267	21/05/02	4.0	1.59	85
268	21/05/02	4.0	1.67	45

Cuadro B-4.d: Resumen de Medición, Centro de la Bahía de Puno.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimet
269	21/05/02	4.0	2.16	45
270	21/05/02	4.0	1.95	285
271	21/05/02	4.0	1.70	270
272	21/05/02	4.0	1.71	350
273	21/05/02	4.0	0.32	270
274	21/05/02	4.0	0.66	250
275	21/05/02	4.0	1.32	245
276	21/05/02	4.0	1.66	290
277	21/05/02	4.0	1.96	75
278	21/05/02	4.0	1.37	80
279	21/05/02	4.0	2.33	50
280	21/05/02	4.0	1.50	270
281	21/05/02	4.0	1.22	270
282	21/05/02	4.0	0.25	270
283	22/05/02	4.0	3.21	275
284	22/05/02	4.0	2.56	315
285	22/05/02	4.0	3.11	270
286	22/05/02	4.0	2.55	280
287	22/05/02	4.0	2.37	250
288	22/05/02	4.0	1.99	245
289	22/05/02	4.0	2.06	270
290	22/05/02	4.0	2.38	270
291	22/05/02	4.0	1.50	295
292	22/05/02	3.0	0.33	255
293	23/05/02	3.0	1.25	255
294	23/05/02	3.0	1.66	300
295	23/05/02	4.0	2.69	270
296	23/05/02	4.0	3.51	270
297	23/05/02	4.0	3.46	290
298	23/05/02	4.0	3.87	250
299	23/05/02	4.0	4.46	270
300	23/05/02	4.0	6.02	270
301	23/05/02	4.0	6.31	270
302	23/05/02	4.0	9.00	315
303	23/05/02	4.0	12.63	270
304	23/05/02	4.0	11.00	200
305	23/05/02	4.0	13.21	250
306	23/05/02	4.0	12.00	255
307	23/05/02	4.0	10.02	225
308	23/05/02	4.0	7.31	260

Cuadro B-4.e: Resumen de Medición, Centro de la Bahía de Puno.

Punto	Fecha	Nivel de Muestreo (m)	Velocidad (cm/s)	Azimet
309	23/05/02	4.0	7.42	260
310	23/05/02	4.0	2.39	260
311	23/05/02	4.0	2.61	260
312	23/05/02	4.0	1.55	280
313	23/05/02	4.0	1.32	260
314	23/05/02	4.0	1.96	270
315	23/05/02	4.0	0.99	310
316	30/05/02	4.0	1.54	310
317	30/05/02	4.0	1.58	290
318	30/05/02	4.0	1.23	265
319	30/05/02	4.0	2.31	260
320	30/05/02	4.0	1.68	250
321	30/05/02	4.0	0.31	275
322	30/05/02	4.0	0.18	275
323	30/05/02	4.0	0.12	270
324	30/05/02	4.0	1.54	190
325	30/05/02	3.5	1.25	195
326	30/05/02	3.5	2.06	220
327	30/05/02	3.5	3.64	270
328	30/05/02	3.5	4.29	270
329	30/05/02	3.5	3.26	270
330	30/05/02	3.5	4.59	270
331	30/05/02	4.0	6.95	230
332	30/05/02	4.0	6.99	295
333	30/05/02	4.0	5.81	290
334	30/05/02	4.0	6.54	230
335	30/05/02	4.0	5.39	270
336	30/05/02	4.0	4.12	350
337	30/05/02	4.0	5.21	310
338	30/05/02	2.0	3.64	310
339	30/05/02	4.0	3.05	355
340	30/05/02	4.0	4.11	225
341	30/05/02	4.0	2.36	30
342	30/05/02	4.0	3.94	350
343	30/05/02	2.0	3.61	45
344	30/05/02	4.0	3.59	15
345	30/05/02	4.0	4.28	15
346	30/05/02	4.0	3.67	310
347	30/05/02	4.0	3.45	350
348	30/05/02	4.0	3.69	350
349	30/05/02	4.0	3.05	350
350	30/05/02	2.0	2.36	350