

**Universidad Nacional de Ingeniería**

**Programa Académico Escuela de Graduados**



**Modelos Matemáticos de Recuperación  
de Petróleo**

**Tesis para optar el Grado de**

**MAGISTER EN CIENCIAS**

**Mención: Matemáticas Aplicadas**

**Presentada por :**

**Julio Bernardo Cockburn Krumdieck**

**LIMA - PERU**

**1980**

## Extracto

Este trabajo tiene dos partes.

En la primera, se presenta la construcción de dos modelos matemáticos, ecuaciones en derivadas parciales con sus respectivas condiciones iniciales y de contorno, mediante los cuales es posible simular los procesos de recuperación primaria (modelo monofásico: (1.25)) y de recuperación secundaria del petróleo (modelo bifásico: (1.29), (1.31), (1.33), (1.36) y (1.38)).

En la segunda parte, se estudia numéricamente el modelo bifásico en el caso unidimensional (núcleo). Hemos tratado el problema de obtener aproximaciones numéricas a la solución del modelo, así como hemos solucionado, numéricamente también, el problema de identificación asociado.

Con respecto al primer punto, para discretizar las ecuaciones del modelo unidimensional, (2.9), se ha usado una discretización basada en el método de Galerkin (modificado por Chavent) usando elementos juntos mixtos no conformes, obteniéndose así los esquemas explícitos (E.8) y (E.15). Los experimentos numéricos que se han hecho tienen por objetivo observar las variaciones que los cambios en los parámetros de discretización producen en la solución, así como establecer las diferencias entre la aproximación de Buckley y Leverett ( $\alpha \equiv 0$ ) y el caso general.

Con respecto al problema de Identificación asociados a las ecuaciones (2.14), (Id); cuando se le discretiza,  $(Id)_h$ , se obtiene un problema de minimización de una suma de cuadrados,  $J:(2.22)$ , sobre un espacio de dimensión fi-

nita. Para lograr que  $J$  sea diferenciable se penaliza  $(Id)_h$  obteniéndose  $(Id)_{h\epsilon}$ , de esta forma es posible resolver el problema usando un método de Fletcher y Reeves, ver anexo I. Se han hecho experimentos numéricos para establecer la identificabilidad numérica de los parámetros  $\alpha$  y  $b$ , ver anexos C y D, teniendo como funciones observadas la saturación de agua en un punto arbitrario del núcleo o el flujo de agua en el extremo del mismo.

Los pocos resultados teóricos relativos a los problemas estudiados pueden encontrarse en las referencias citadas en la bibliografía.

El programa que se ha construido sirve tanto para solucionar los esquemas (E.8), (E.15) como para la resolución del problema de identificación  $(Id)_{h\epsilon}$ . El programa está descrito en FORTRAN y ha sido implementado en la IBM 370-145 del Centro de Cómputo de Petróleos del Perú.

## Indice

|  | Página |
|--|--------|
| <u>Introducción</u>  |        |
| 1) <u>Elaboración del Modelo Matemático</u>                  | 1      |
| 1.1) <u>Naturaleza del Modelo</u>                            | 1      |
| 1.2) <u>Las Variables del Modelo</u>                         | 4      |
| .1) Notación   | 4      |
| .2) La Densidad y la Viscosidad                              | 4      |
| .3) Las Saturaciones   | 5      |
| .4) Las Velocidades  | 5      |
| .5) Las Presiones: La Presión Capilar                        | 6      |
| .6) Las Permeabilidades                                      | 9      |
| 1.3) <u>Descripción Matemática del Reservorio</u>            | 12     |
| 1.4) <u>Modelo Monofásico</u>                                | 13     |
| .1) Introducción   | 13     |
| .2) Notación   | 14     |
| .3) Las Ecuaciones Diferenciales                             | 14     |
| .4) Las Condiciones de Contorno                              | 15     |
| .4.1) La Condición de Dirichlet                              | 16     |
| .4.2) La Condición de Neumann                                | 16     |
| .5) La Condición Inicial                                     | 17     |
| .6) El Problema del Valor Inicial y de Contorno para $\pi$ . | 18     |
| 1.5) <u>Modelo Bifásico</u>                                  | 19     |
| .1) Introducción   | 19     |
| .2) Notación   | 19     |
| .3) Las Ecuaciones Diferenciales                             | 20     |
| .4) Las Ecuaciones de Contorno                               | 22     |
| .4.1) Introducción   | 22     |
| .4.2) Condiciones sobre las Presiones                        | 22     |
| .4.3) Condiciones sobre las Velocidades                      | 23     |
| .4.4) Condiciones sobre la Saturación                        | 24     |

|       |  |    |
|-------|--|----|
| .5)   | La Condición Inicial   |    |
| .6)   | El Problema de Valor Inicial y de Contorno para P y S.       | 26 |
| 2)    | <u>El Modelo Bifásico Unidimensional</u>                     | 27 |
| 2.1)  | <u>Planteo del Modelo</u>                                    | 27 |
| .1)   | Introducción   | 27 |
| .2)   | Notación   | 27 |
| .3)   | Las Ecuaciones Diferenciales                                 | 28 |
| .4)   | Las Condiciones de Contorno                                  | 29 |
| .5)   | El Problema de Valor Inicial y de Contorno                   | 30 |
| 2.2)  | <u>El Problema para <math>S_1</math></u>                     | 30 |
| .1)   | Introducción   | 30 |
| .2)   | Notación   | 31 |
| .3)   | Planteo del Problema   | 31 |
| .4)   | Discretización de (2.9)                                      | 32 |
| .4.1) | Introducción   | 32 |
| .4.2) | Notación   | 32 |
| .4.3) | Subespacios Aproximantes en Espacio                          | 33 |
| .4.4) | Formulación Débil de (2.9) <sub>1</sub> y (2.9) <sub>2</sub> | 33 |
| .4.5) | Discretización Total   | 35 |
| 2.3)  | <u>Resultados Numéricos</u>                                  | 38 |
| .1)   | Introducción   | 38 |
| .2)   | El Esquema (E.8): $l = 0$                                    | 39 |
| .2.1) | Existencia y Unicidad  | 39 |
| .2.2) | El Caso Hiperbólico  | 40 |
| .2.3) | El Caso General  | 44 |
| .3)   | El Esquema (E.15) $l = 1$                                    | 45 |
| .4)   | Los Datos  | 46 |
| .5)   | Los Resultados Numéricos                                     | 48 |
| .5.1) | Variación de $\mu_h$ con respecto a $(l, h, \Delta t)$       | 48 |
| .5.2) | El Caso Hiperbólico y el Caso General                        | 51 |
| .6)   | Conclusiones   | 51 |
| 2.4)  | <u>El Problema de Identificación (Ajuste de Historia)</u>    | 52 |

|       |   |    |
|-------|---|----|
| .1)   | Introducción  | 52 |
| .2)   | Planteo del Problema  | 54 |
| .3)   | Discretización e Identificabilidad                          | 57 |
| .4)   | Penalización de la Ecuación de Estado                       | 59 |
| .5)   | La Variación de J   | 63 |
| 2.5)  | <u>Resultados Numéricos</u>                                 | 67 |
| .1)   | Introducción  | 67 |
| .2)   | Los Esquemas Numéricos                                      | 69 |
| .2.1) | El Esquema (G.4)  | 69 |
| .2.2) | El Algoritmo de Fletcher y Reeves                           | 70 |
| .3)   | Los Datos   | 71 |
| .4)   | Los Resultados Numéricos                                    | 72 |
| .4.1) | Minimización de J   | 73 |
| .4.2) | Identificabilidad Numérica                                  | 74 |
| .4.3) | Sobre $\theta$ y el Número de Iteraciones                   | 75 |
| .5)   | Conclusiones  | 77 |
| 3)    | Anexos  |    |
|       | Anexo A: Cambio de las Ecuaciones (1.16)                    | 1A |
|       | Anexo B: Teorema de Existencia y Unicidad                   | 1B |
|       | Anexo C: Las Ecuaciones (1.28)                              | 1C |
|       | Anexo D: Las Nuevas Funciones                               | 1D |
|       | Anexo E: Las Ecuaciones (2.14) en los casos<br>$l = 0, 1$ . | 1E |
|       | 1) El Caso $l = 0$  | 1  |
|       | 1.1) Los Subespacios Aproximantes                           | 1  |
|       | 1.2) Las Ecuaciones   | 3  |
|       | 1.3) La Condición Inicial y las de<br>Contorno              | 5  |
|       | 1.4) Resolución de (E.8): Algoritmo                         | 5  |
|       | 2) El Caso $l = 1$  | 6  |
|       | 2.1) Los Subespacios Aproximantes                           | 6  |
|       | 2.2) Las Ecuaciones   | 9  |
|       | 2.3) La Condición Inicial y las de<br>Contorno              | 12 |

|  |    |
|--|----|
| 2.4) Resolución de (E.15): Algoritmo                 | 12 |
| Anexo F: Cálculo de la Ecuación Adjunta              | 1F |
| Anexo G: Las Ecuaciones (F.2) en los casos $l = 0,1$ | 1G |
| 1) El Caso $l = 0$                                   | 1  |
| 1.1) Los Subespacios Aproximantes                    | 1  |
| 1.2) Las Ecuaciones                                  | 1  |
| 1.3) La Condición Inicial y las de Contorno          | 2  |
| 1.4) Algoritmo                                       | 2  |
| 2) El Caso $l = 1$                                   | 3  |
| 2.1) Los Subespacios Aproximantes                    | 3  |
| 2.2) Las Ecuaciones                                  | 4  |
| 2.3) La Condición Inicial y las de Contorno          | 5  |
| 2.4) Algoritmo                                       | 5  |
| Anexo H: Cálculo del Gradiente de J                  | 1H |
| 1) El Espacio de Parámetros Admisibles               | 1  |
| 2) El Gradiente de J                                 | 1  |
| Anexo I: Un Algoritmo de Fletcher y Reeves           | 1I |
| Anexo J: Descripción del Programa                    | 1J |
| 1) Introducción                                      | 1  |
| 2) El Programa Principal                             | 2  |
| 3) Los Subprogramas                                  | 2  |
| 3.1) Las Subrutinas                                  | 2  |
| (1) FLEREE   | 2  |
| (2) EE   | 3  |
| (3) EA   | 5  |
| (4) INVER  | 6  |
| (5) LECT   | 7  |
| (6) BEAL   | 9  |
| (7) CONSAL y CONSBE                                  | 10 |
| 3.2) Las Funciones                                   | 10 |
| Anexo K: Parámetros Adimensionales                   | 1K |

4) Bibliografía

## Introducción

Durante la primera fase en la extracción del petróleo, éste fluye a la superficie por efecto de la diferencia de presiones. El proceso, llamado recuperación primaria, termina cuando la presión del reservorio se iguala con la atmosférica, ahora el petróleo puede ser extraído mediante bombeo artificial y "gas lift". Cuando el reservorio no produce por medios mecánicos se dice que está agotado por métodos de recuperación primaria.

Sin embargo, hay todavía petróleo en el interior del reservorio. Para extraerlo es necesario inyectar agua para forzar al petróleo a salir a la superficie. Este proceso, llamado recuperación secundaria, termina cuando el agua comienza a salir en mayor porcentaje que el petróleo y no es económico mantener su producción.

Para investigar y evaluar las características de un reservorio es importante tener buenos modelos de simulación para cada uno de estos dos procesos, es decir, deben ser capaces de predecir con una buena aproximación la evolución de las distintas variables que caracterizan el comportamiento de los fluidos en movimiento. Por otra parte, usando datos observados, tales como el flujo del petróleo en cada pozo, la presión en ellos, etc., debemos ser capaces de modificar ciertos parámetros del modelo con el fin de que las predicciones del mismo sean lo más parecidas a los datos reales. Este proceso se llama "Ajuste de Historia".

En el primer capítulo de este trabajo se construyen un modelo matemático del proceso de recuperación primaria (modelo monofásico) y un modelo del proceso de recupera-

ción secundaria (modelo bifásico).

En el segundo capítulo se estudia el modelo bifásico unidimensional. El proceso físico modelado es el desplazamiento del petróleo por agua dentro de núcleos obtenidos durante la perforación de los pozos. Una aplicación del modelo a estas experiencias permite, por medio del ajuste de historia, obtener buenas curvas de permeabilidades relativas, que son muy importantes porque prácticamente de ellas depende el comportamiento del agua y del petróleo dentro del reservorio. Por otra parte, este modelo es muy útil para la obtención de primeras estimaciones de magnitudes importantes (tiempo de ruptura, petróleo recuperado al tiempo de ruptura, etc.) en procesos de recuperación de petróleo por empuje de agua. El segundo capítulo está orientado a la construcción de un programa que solucione numéricamente el modelo y sea capaz de realizar el ajuste de historia automáticamente.

## 1. Elaboración del Modelo Matemático

### 1.1 Naturaleza del Modelo

.1) Aquí discutimos brevemente, algunas cuestiones previas al establecimiento de las ecuaciones diferenciales y de las condiciones iniciales y de contorno que rigen la evolución de las magnitudes involucradas en el problema.

Inicialmente podría pensarse en usar el modelo clásico que predice el movimiento de un fluido newtoniano, por ejemplo. Las leyes en que se basa el modelo son la ley de conservación de la masa, de la conservación del momentum angular y de la conservación de la energía; además, se asume la existencia de ciertas relaciones entre los esfuerzos y la velocidad de deformación, que son características del fluido estudiado.

Estas leyes se traducen en ecuaciones diferenciales y ecuaciones algebraicas. Las funciones involucradas en ellas son tales que su valor en un punto es en realidad el valor medio tomado sobre un elemento de volumen que encierra a dicho punto y cuyo tamaño es grande con relación al tamaño de las moléculas del fluido, pero pequeño con respecto al tamaño del espacio que contiene al fluido con movimiento. Llamaremos a estas funciones "funciones de punto".

Lo que nos falta para poder aplicar este modelo es especificar el espacio por el cual tendrá lugar el movimiento, y las condiciones iniciales y de contorno adecuadas. Hecho esto, podemos dedicarnos a resolver las ecuaciones;

sin embargo, debido a la complicada geometría del medio, hacerlo es una tarea impracticable.

Debemos intentar otra manera de plantear el problema:

- (1) Necesitamos volver a definir nuestras funciones ya que no pueden ser funciones de punto.
- (2) Esto hace que la derivación de las ecuaciones se deba hacer siguiendo un método distinto.

.2) Consideremos el primer punto. Ahora, el valor de una función en un punto se toma como el valor medio que la función toma en un elemento de volumen que encierra al punto considerado y cuyo tamaño ya no es grande con respecto al de las moléculas de los fluídos, sino al tamaño de la región ocupada por un poro típico del medio. Podríamos llamar a estas funciones "funciones locales".

Marle (1), pág. 25-26, afirma con respecto a la definición de porosidad: "... la porosidad media de un bloque de un medio poroso es la razón del volumen de los vacíos al volumen total del bloque. Si el bloque considerado tiene propiedades que varían sensiblemente de un sitio a otro, uno puede desear describir la porosidad de una manera más fina, introduciendo la porosidad local; ésta estará definida en todo punto del medio de la siguiente manera: se aísla imaginariamente un volumen que encierre el punto considerado y se toma la porosidad media de tal volumen. El volumen escogido debe ser lo suficientemente pequeño como para permitir definir una porosidad local del medio, pero debe ser suficientemente grande en relación a las dimensiones de los poros. Si por ejemplo uno escoge un elemento de volumen esférico conentrado en el punto considerado y hace variar el radio  $r$  de esta esfera,  $u$

no obtiene la porosidad media en función de  $r$  " (Tal como se muestra en la figura 1.1) " Si  $r > r_2$  el volumen considerado es muy grande para dar el valor local de la porosidad: el

resultado está influenciado por las propiedades del medio poroso en zonas muy lejanas que rodean al punto ... "

" Si  $r < r_1$ , el elemento de volumen es demasiado pequeño, no contiene un número suficiente

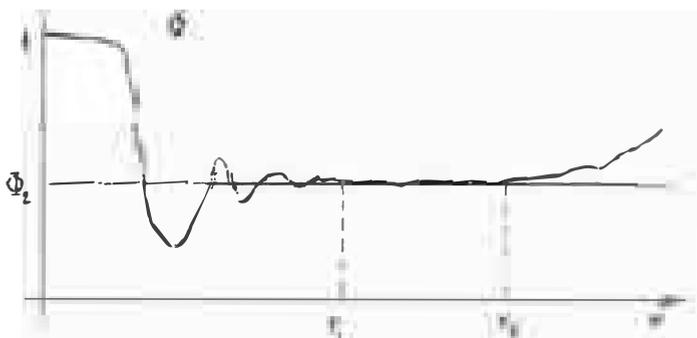


figura 1.1

de poros para que el efecto de promediar pueda funcionar, y el valor obtenido presenta variaciones irregulares. Cuando la porosidad media del elemento de volumen tiende a 1 si el punto considerado está en un poro..." (como en el caso considerado en la figura 1.1) " o hacia 0 si el punto está en la parte sólida.  $\Phi_1$ , en la figura, es el valor local de la porosidad".

.3) Con respecto al punto (2), Marle (1), pág. 28-29, dice:

"Para la teoría del movimiento de los fluidos en medios porosos, uno puede imaginar dos vías de aproximación ..." "... En la primera se introducen ciertas nociones que servirán para describir el estado de un medio poroso que contiene fluidos, a la escala macroscópica. Algunas de estas nociones tendrán una definición evidente (la saturación, por ejemplo) otras tendrán una justificación me

nos clara, más bien intuitiva (la presión por ejemplo). Así las leyes que describen los flujos serán formuladas por principio. Su justificación será experimental.

La otra forma de fundamentar la teoría de los flujos en los medios porosos se construirá a partir de las leyes de capilaridad. Luego por métodos estadísticos, se deducirán las leyes que rigen en promedio el flujo en un medio que contenga un gran número de poros".

"Lamentablemente, tal teoría no existe aún. Las tentativas de aplicar los métodos estadísticos a los medios porosos "... se han limitado a los fenómenos más simples: flujo de un fluido único, difusión, desplazamiento miscible. Nada serio ha sido hecho para el flujo de varios fluidos".

## 1.2 Las Variables del Modelo

### .1) Notación

En lo sucesivo denotaremos con el subíndice 1 a las funciones que se refieren al agua, y por 2 a aquéllas referidas al petróleo.

### .2) La Densidad y la Viscosidad

Vamos a asumir que los fluidos son viscosos y sus viscosidades  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  son constantes.

Denotamos por  $\rho$  la función densidad. Asumiremos que el efecto de los cambios eventuales de temperatura son lo suficientemente pequeños como para permitir con-

siderar que la densidad sólo depende de la presión. (En el caso en que asumamos la compresibilidad del fluido).

### .3) Las Saturaciones

La saturación de agua  $\bar{S}_1$  se define, usando el proceso descrito en 1.1.2), como la razón entre el volumen de agua al volumen total ocupado por el agua y el petróleo. Es evidente que  $0 \leq \bar{S}_1 \leq 1$ .

Por otra parte, por el efecto de la geometría del medio y ciertos fenómenos físicos, la saturación  $\bar{S}_1$  debe estar comprendida entre ciertos valores,  $\bar{S}_{1M}$  y  $\bar{S}_{1m}$ , para que el flujo pueda tener lugar.

$\bar{S}_{1m}$  es la saturación irreducible del agua en el medio poroso, surge porque las moléculas de agua se quedan pegadas a la superficie del medio.

$\bar{S}_{1M}$  es la máxima saturación que el agua puede alcanzar en el medio, depende de las sustancias y fluidos que están presentes. Cuando el otro fluido es el petróleo ( $1 - \bar{S}_{1m}$ ) se llama la saturación residual del petróleo.

De esta forma, sólo hay movimiento si  $\bar{S}_{1m} \leq \bar{S}_1 \leq \bar{S}_{1M}$ .

### .4) Las Velocidades

Las velocidades  $\underline{v}_1$  y  $\underline{v}_2$  se definen según el proceso descrito en 1.1.2). Es importante señalar que las velocidades importantes en el modelo son las velocidades de filtración:

$$(1.1) \quad \underline{u}_i = \bar{S}_i \cdot \underline{v}_i \quad i = 1, 2$$

.5) Las Presiones: La Presión Capilar

Cuando los fluídos están en equilibrio, la presión en ellas es la presión hidrostática. Es posible definir la presión, en este caso, en todo el medio por simple extensión continua. De esta forma las presiones  $p_1$  y  $p_2$  son funciones de punto definidas sobre todo el espacio. Este es el caso de la presión capilar  $p$ :

$$(1.2) \quad = p_1 - p_2$$

Sin embargo, cuando los fluídos no están en equilibrio, las presiones no son más funciones de punto sino funciones locales (ver 1.1.2)), de manera que  $\bar{p}_c$  definida por (1.1) en estas condiciones no es necesariamente igual a la  $\bar{p}$  del primer caso. Pese a esto, se ha demostrado experimentalmente que dichas presiones no difieren mucho, Marle (1), pág. 43 (ver ahí otras referencias), de forma que es razonable quedarse con la primera definición de  $\bar{p}_c$ .

Consideremos ahora la dependencia de  $p_c$  con respecto a las variables que intervienen en el problema. En el caso general  $p_c$  depende de:

- (1)  $S_1$
- (2)  $T$ , el coeficiente de tensión superficial
- (3)  $\alpha$ , el ángulo de contacto
- (4)  $(p_1 - p_2) g$ , el empuje

(5) Las características del medio poroso, que resumiremos en dos:  $l$ , la dimensión típica de los poros,  $M$ , las demás características.

Un sencillo cálculo nos permite asegurar la siguiente dependencia, Marle (1), pág. 35:

$$(1.3) \quad \bar{p}_c = \frac{2\sigma}{r} \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{\cos \theta} \frac{S_{1M}}{S_{1m}}$$

En la práctica se ha encontrado que la influencia del grupo adimensional  $(\rho_1 - \rho_2) g l^2 / T$  es despreciable por el tamaño de los poros, esto hace que sean las fuerzas capilares las que determinan prácticamente  $p_c$ . Hay que observar que al depender de  $\bar{S}_1$ ,  $\bar{p}_c$  depende de  $\bar{S}_{1m}$  y de  $\bar{S}_{1M}$ . Finalmente, debido a las sustancias que eventualmente pueden ser adsorbidas por la superficie de contacto de los fluidos,  $T$  puede variar grandemente.  $\alpha$  puede depender de las velocidades de los fluidos y del fenómeno de adsorción descrito. Sin embargo, estos aspectos no son generalmente tenidos en cuenta (por la gran complicación que generaría su introducción en el modelo), a menos que las sustancias empleadas en la recuperación secundaria alteren  $\alpha$  y  $T$  significativamente.

En nuestro modelo supondremos la siguiente dependencia de  $\bar{p}_c$

$$(1.4) \quad \bar{p}_c = \frac{2\sigma}{r} \left( \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1} \right) \frac{1}{\cos \theta} \frac{S_{1M}}{S_{1m}} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{T} \frac{1}{\bar{S}_1}$$

$$(1.5) \quad S = \frac{(S_1 - S_{1m})}{(S_{1M} - S_{1m})}$$

donde asumimos que  $T$ ,  $\alpha$ ,  $S_{1m}$ ,  $S_{1M}$  son funciones de  $x$ . La forma de  $\bar{p}_c$  dada por (1.4) es debida a Chavent (7).

Para nosotros no es tan importante obtener una fórmula cerrada para  $\bar{p}_c$ . Lo importante es obtener una for

ma general de dependencia de  $\bar{p}_c$  (como por ejemplo (1.4)) que permita una manipulación numérica sencilla de las ecuaciones del modelo. Eventualmente, usando datos reales y técnicas de identificación (que serán usadas en el capítulo 5) podemos encontrar la forma de las funciones que son parámetros del modelo y en las cuales influye  $\bar{p}_c$ .

Por último hay que resaltar que la dependencia de  $p_c$  con respecto a  $\bar{S}_1$  varía según las condiciones iniciales y según la dirección del flujo en el medio.

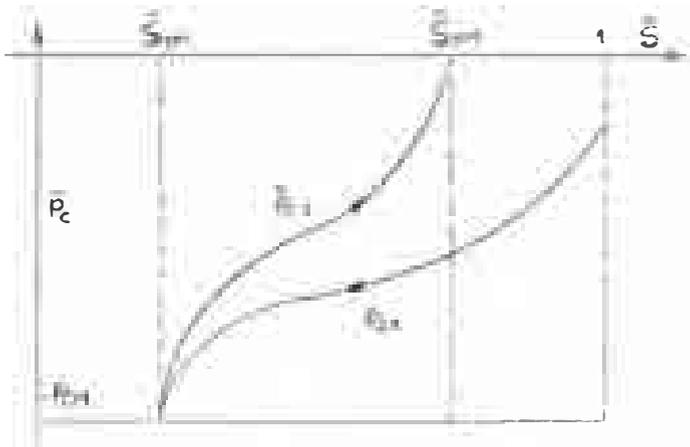


figura 1.2

En la figura 1.2, la curva  $p_{c1}$  se ha obtenido partiendo de un medio inicialmente saturado de agua e inyectando petróleo poco a poco. En cambio la curva  $p_{c2}$  se ha obtenido inyectando agua poco a poco al medio poroso luego de haber terminado el proceso anterior. Las flechas indican la dirección en que se han ido construyendo las curvas.

Obsérvese que:

$$(1.6) \quad \frac{d}{d\bar{S}_1} \bar{p}_c > 0 \quad \text{si } \bar{S}_{1,2} < \bar{S}_{1M}$$

$$(1.7) \quad p_c(\bar{S}_1) = 0 \Leftrightarrow \bar{S}_1 = \bar{S}_{1m} \quad (\text{si } p_c = \bar{p}_{c2})$$

### .6) Las Permeabilidades

En el caso en que tengamos un flujo unidimensional estacionario a través de un bloque de un medio poroso de longitud  $L$ , la ley de Darcy afirma que las velocidades de filtración  $v_1$  y  $v_2$  están dadas por:

$$(1.8) \quad v_i = \frac{K_i}{\mu_i} \frac{\Delta p_i}{L} \quad i = 1, 2$$

los coeficientes  $K_i$  se llaman las permeabilidades efectivas. También se usan las permeabilidades relativas:

$$(1.9) \quad K_{ri} = \frac{K_i}{K} \quad i = 1, 2.$$

donde  $K$  es la permeabilidad del medio.

Antes de generalizar estas definiciones el caso del movimiento no estacionario en un medio tridimensional anisotrópico, veamos cómo dependen las permeabilidades relativas de las variables involucradas en el problema.

En el caso general, Marle (1), pág. 38, tenemos que las permeabilidades relativas dependen de:

$$(1) \quad \rho_i, \quad i = 1, 2$$

$$(2) \quad \mu_i, \quad i = 1, 2$$

$$(3) \quad \alpha, \quad T$$

$$(4) \quad \bar{S}_1$$

(5)  $l, M$

(6) El flujo global  $\mu$  ( $= || \underline{\mu}_1 + \underline{\mu}_2 ||$ )

procediendo como en 1.2.5) obtenemos:

$$(1.10) K_{ri} = f_i \left( \frac{\rho_1}{\rho_2}, \frac{\mu_1}{\mu_2}, \frac{\rho_1 - \rho_2}{T} gl^2, \frac{\mu_1 \mu}{T}, \frac{\rho_1 l \mu}{\mu_1}, \alpha, \bar{S}_1 \right), \quad i = 1, 2$$

Nuevamente se encuentra que el grupo adimensional  $(\rho_1 - \rho_2) gl^2/T$  tiene poca influencia sobre  $K_{ri}$ ,  $i = 1, 2$ . Esto también ocurre con el número de Reynolds  $\rho_1 l \mu / \mu_1$  debido a las pequeñas velocidades que ocurren. Esto conduce a desprestigiar la influencia de  $\rho_1 / \rho_2$ . Finalmente se encuentra experimentalmente que la relación de viscosidades  $\mu_1 / \mu_2$  y la relación entre las fuerzas de viscosidad y las de capilaridad  $\mu \mu_1 / T$  tienen poca importancia. Así que sólo el ángulo de contacto  $\alpha$  y la saturación  $\bar{S}_1$  determinan prácticamente  $K_{ri}$ ,  $i = 1, 2$ .

En la figura 1.3 se muestran formas típicas de las permeabilidades.

Observemos que la permeabilidad relativa del agua a la saturación máxima  $\bar{S}_{1M}$  es bastante menor que la del petróleo a la saturación

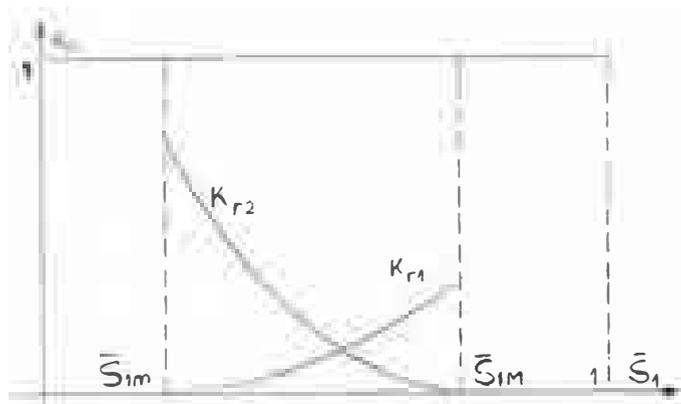


figura 1.3

ción máxima  $(1 - \bar{S}_{1m})$ . Esto significa que la presencia de agua con saturación irreducible no obstaculiza tanto el movimiento del petróleo como la presencia de éste con saturación residual lo hace con el movimiento del agua.

Al igual que la presión capilar la dependencia de las permeabilidades con respecto a  $\bar{S}_1$  varía con las condiciones iniciales y la forma en que se produce el flujo.

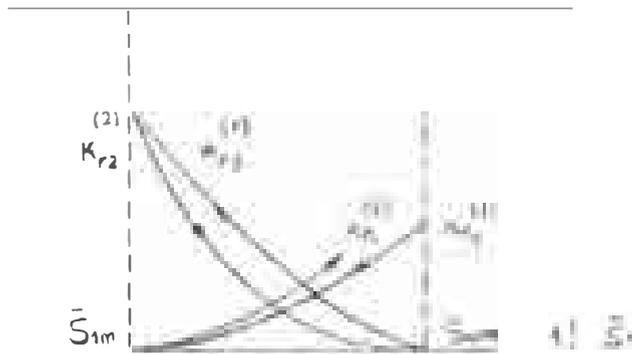


figura 1.4

La figura 1.4 muestra este hecho. Las curvas  $K_{r1}^{(1)}$  y  $K_{r2}^{(1)}$  han sido obtenidas cuando el medio estaba inicialmente lleno de agua. Las curvas  $K_{r1}^{(2)}$  y  $K_{r2}^{(2)}$  se obtuvieron cuando el medio estaba inicialmente lleno de petróleo. Se ve que la permeabilidad relativa del agua cambia poco con el sentido de cambio de  $\bar{S}_1$ . Esto no es cierto en el caso del petróleo que presenta una permeabilidad más baja que en la imbibición.

Las ecuaciones (1.8) se generalizan así:

$$(1.11) \quad \underline{u}_i = -K \frac{K_{ri}}{\mu_i} \{ \text{grad}(p_i) - \rho_i g \text{ grad}(Z) \} \quad i = 1, 2$$

la validez de esta ecuación (así como la de (1.8)) es experimental. En el caso de un medio anisotrópico  $K_{ri}$ ,  $i = 1, 2$ , es una matriz definida positiva.

### 1.3 Descripción Matemática del Reservorio

.1) Es importante poseer una descripción precisa del reservorio en el que se realiza el movimiento de los fluidos, fundamentalmente por dos razones.

- (1) Conocer la región del movimiento,  $\Omega$ , permite saber el dominio de validez de las ecuaciones diferenciales del modelo.
- (2) Para poder plantear las condiciones de contorno, indispensables para poder resolver las ecuaciones diferenciales, debemos conocer el borde de  $\Omega$  que denotaremos por  $\Gamma$ .

.2) Consideraremos que  $D$ ,  $C R^n$  ( $n = 1, 2, 3$ ), representa al reservorio. Denotemos por  $\partial D$  su frontera exterior. Supongamos que en el interior del reservorio tenemos  $K$  pozos, que serán representados por los dominios  $D_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). El borde de  $i$ -ésimo pozo será denotado por  $\partial D_i$ . Ver figura 1.5.

.3) Denotaremos por  $\Omega$  el medio poroso por el cual se realiza el movimiento:

$$(1.12) \quad \Omega = D \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k D_i \right)$$

Caracterice-  
mos ahora la fron-  
tera de  $\Omega$ ,  $\Gamma$ .  
Denotaremos por  $\Gamma_i$   
el borde del  $i$ -ési-  
mo pozo que está  
en contacto con el  
medio poroso:

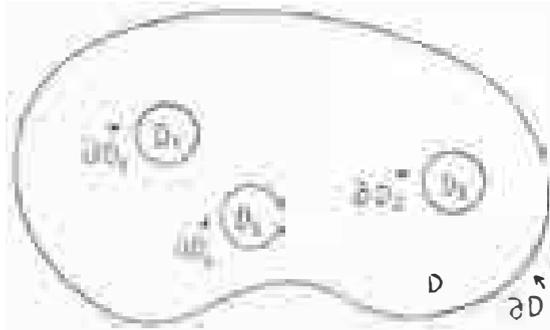


figura 1.5

$$(1.13) \quad \Gamma_i = \partial D_i \setminus (\partial D_i \cap \partial D) \quad i = 1, \dots, k.$$

finalmente,  $\Gamma_1$  denotará la parte de  $\Gamma$  que no está en  
contacto con ningún pozo:

$$(1.14) \quad \Gamma_1 = \Gamma \setminus \left( \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \right)$$

de manera que la  
frontera  $\Gamma$  puede  
escribirse de la  
forma siguiente:

$$(1.15) \quad \Gamma = \Gamma_1 \cup \left( \bigcup_{i=1}^k \Gamma_i \right)$$

Ver la figura 1.6.

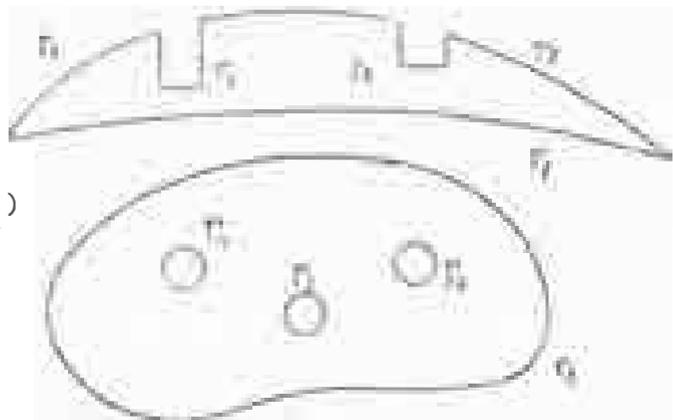


figura 1.6

#### 1.4 Modelo Monofásico

##### .1) Introducción

Asumimos que el único fluido en movimiento es el  
petróleo. En este caso el movimiento se realiza única-  
mente por efecto de la diferencia de presiones, por lo

tanto el objetivo del modelo es determinar la evolución de la presión del petróleo.

## .2) Notación

Denotamos por  $x$  un punto del medio poroso,  $\Omega$ . El tiempo será denotado por  $t$ . Asumimos que  $t = 0$  cuando empieza el movimiento del petróleo que nos interesa conocer, y que  $t = T$  cuando éste termina.  $Q$  denota el conjunto  $\Omega \times ]0, T[$ , siendo  $]0, T[$  el intervalo abierto de extremos  $0$  y  $T$ .

## .3) Las Ecuaciones Diferenciales

Las incógnitas del modelo son: la viscosidad  $\mu$ , la densidad  $\rho$ , la presión  $p$  y la velocidad de filtración  $\underline{u}$ . Como tenemos 6 incógnitas debemos plantear 6 ecuaciones. Estas son:

$$(1.16)1 \quad \mu = \text{constante.} \quad (\text{ver } 1.2.1)$$

$$(1.16)2 \quad \rho = \rho(p) \quad (\text{ver } 1.2.1)$$

ésta es la ecuación de estado.

$$(1.16)3 \quad \phi \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \underline{u}) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q$$

$$(1.16)4 \quad \underline{u} = -\frac{k}{\mu} (\text{grad } p - \rho g \text{ grad } z) \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q$$

ésta es la ley de Darcy generalizada.

Asumimos que la porosidad  $\phi$ , la permeabilidad  $K$  y la profundidad  $z$  son funciones conocidas de  $x$ . Por o-

tra parte, cuando el coeficiente de compresibilidad,

$c = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp}$ , es constante la ecuación de estado es

$\rho = \rho_0 \exp(c(p - p_0))$ , que en primera aproximación se escribe  $\rho = \rho_0 (1 + c(p - p_0))$ . La aproximación es buena para la mayoría de los líquidos. Bear (1), pág. 38.

Estas ecuaciones pueden ser expresadas en una mejor forma si hacemos algunas manipulaciones algebraicas e introducimos una nueva variable,  $\pi$ . Los cálculos, junto con ciertas aproximaciones hechas, en base a suponer que  $c$  es constante y que  $c \ll 1$ , están desarrollados en el Anexo A. Los resultados son:

$$(1.17)1 \quad \mu = \text{constante}$$

$$(1.17)2 \quad \rho = \rho_0 (1 + c(p - p_0))$$

$$(1.17)3 \quad \pi = p - \rho_0 g z$$

$$(1.17)4 \quad \underline{u} = \frac{K}{\mu} \text{grad } \pi \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q$$

$$(1.17)5 \quad c \phi \frac{\partial \pi}{\partial t} - \text{div} \left( \frac{K}{\mu} \text{grad } \pi \right) = 0; \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q.$$

#### .4) Las Condiciones de Contorno

Existen dos tipos de condiciones: aquélla en que se prescribe una presión  $p$ , que es una condición de Dirichlet para  $\pi$ , por (1.17)3, y aquélla en que se prescribe un flujo  $\underline{u} \cdot \underline{n}$ , que constituye una condición de Neumann para  $\pi$ , por (1.17)4. Llamaremos  $\Gamma_D$  ( $\Gamma_N$ ) la parte de  $\Gamma$  sobre la cual se prescribe una condición de Dirichlet (Neumann).

.4.1 La Condición de Dirichlet

Este tipo de condición puede imponerse en parte de la frontera lateral,  $\Gamma_{1D}$ , por ejemplo en el caso de empuje por agua:

$$(1.18) \quad p = p_1 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{1D} \times ]0, T[$$

También puede imponerse una condición similar en la frontera de los pozos. Midiendo la presión en el fondo de ellos, es razonable extenderla a todos los puntos de su frontera asumiendo una distribución hidrostática:

$$(1.19) \quad p = p_i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_i \times ]0, T[ \quad i = 1, 2, \dots, j < k$$

Resumimos (1.18) (1.19) así:

$$(1.20)1 \quad p = p_e \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \times ]0, T[$$

$$(1.20)2 \quad \Gamma_D = \Gamma_{1D} \cup \left( \bigcup_{i=1}^j \Gamma_i \right)$$

$$(1.20)3 \quad p_e = p_1 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{1D} \times ]0, T[$$

$$(1.20)4 \quad p_e = p_i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_i \times ]0, T[ \quad , i = 1, \dots, j.$$

.4.2 La Condición de Neumann

Sobre aquella parte de la frontera lateral en que no hay flujo:

$$(1.21) \quad \underline{u} \cdot \underline{n} = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_{1N} \times ]0, T[$$

siendo  $\underline{n}(x)$  la normal exterior a  $\Gamma_1$  en  $x$ . Aunque en general debemos escribir  $\underline{u} \cdot \underline{n} = Q_1$ , el caso (1.21) es el más frecuente.

Sobre las fronteras de algunos pozos ( $j+1, j+2, \dots, k$ ) la condición se escribe:

$$(1.22) \quad u \cdot \underline{n} = Q_i \quad \text{sobre } \Gamma_i \times ]0, T[ \quad ; \quad i = j+1, j+2, \dots, k.$$

el problema en este caso consiste en hallar la función  $Q_i$  a partir del flujo total medido:  $S_{\Gamma_i}^{Q_i}$

Resumimos las condiciones (1.21) y (1.22) así:

$$(1.23)1 \quad u \cdot n = Q_N \quad \text{sobre } \Gamma_N \times ]0, T[$$

$$(1.23)2 \quad \Gamma_N = \Gamma_{1N} \cup \left( \bigcup_{i=j} \Gamma_i \right)$$

$$(1.23)3 \quad Q_N = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_{1N} \times ]0, T[$$

$$(1.23)4 \quad Q_N = Q_i \quad \text{sobre } \Gamma_i, \quad i = j+1, \dots, k.$$

#### .5) La Condición Inicial

Esta condición es:

$$(1.24) \quad p(\underline{x}, 0) = p_0(\underline{x}) \quad \forall x \in \Omega$$

como inicialmente la presión es la presión hidrostática, basta conocer en cualquier punto  $p_0$  para poder determinar  $p_0$  en cualquier otro punto de  $\Omega$ .

.6) El Problema de Valor Inicial y de Contorno para  $\pi$

Asumiendo que  $c = c(x)$  la ecuación (1.17)5 queda desacoplada de las demás y así conocer  $\pi$  permite conocer todas las demás variables involucradas. Para poder determinar  $\pi$  hace falta plantear las condiciones de contorno y la inicial para  $\pi$ , esto se hace muy fácilmente teniendo en cuenta (1.17)3, (1.20), (1.23) y (1.24). De esta forma obtenemos el problema de valor inicial y de contorno para  $\pi$ :

$$(1.25)1 \quad c \phi \frac{\partial \pi}{\partial t} - \text{div} \left( \frac{k}{\mu} \text{grad } \pi \right) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q.$$

$$(1.25)2 \quad \pi = \pi_e \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \times ]0, T[$$

$$(1.25)3 \quad \frac{\partial \pi}{\partial n} = \frac{\mu}{k} Q_w \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \times ]0, T[$$

$$(1.25)4 \quad \pi(\underline{x}, 0) = \pi_0(\underline{x}) \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

en el anexo B se demuestra la existencia y la unicidad del problema (1.25) en el caso en que  $c = c(x)$ .

1.5 Modelo Bifásico

.1) Introducción

Terminada la explotación del petróleo por efecto de la diferencia de presión, éste puede seguir siendo extraído inyectando agua en lugares adecuados del reservorio de manera que el petróleo sea desplazado por el a

gua. El modelo debe ser capaz de predecir la evolución de las presiones en cada uno de los fluídos, que asumimos inmiscibles, así como la evolución del frente de agua, en particular debe predecir el tiempo en el que el agua empieza a salir junto con el petróleo por determinado pozo.

## .2 Notación

Haremos algunos cambios en la notación usada hasta ahora.

$\Gamma_e$  denotará la parte de la frontera por la cual el agua es inyectada, suponiendo que esto se hace en los pozos 1, 2, ..., l tendremos:

$$(1.26) \quad \Gamma_e = \bigcup_{i=1}^l \Gamma_i$$

por otra parte,  $\Gamma_s$  denotará la parte de la frontera por la cual se produce petróleo (y, eventualmente agua):

$$(1.27) \quad \Gamma_s = \bigcup_{i=l+1}^k \Gamma_i$$

## .3) Las Ecuaciones Diferenciales

En este proceso los cambios de presión no son suficientemente grandes como para producir cambios significativos en la densidad de los fluídos, de manera que es razonable considerarlos incompresibles.

Tenemos ahora 14 incógnitas:  $\mu_1, \mu_2, \rho_1, \rho_2, u_1, u_2, S_1, \bar{S}_2, P_1, P_2$ .

Las 14 ecuaciones que necesitamos son:

$$(1.28)1 \quad \mu_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(1.28)2 \quad \rho_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(1.28)3 \quad \bar{S}_1 + \bar{S}_2 = 1$$

$$(1.28)4 \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} (\rho_i \bar{S}_i) + \text{div} (\rho_i \underline{u}_i) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q; i=1,2$$

$$(1.28)5 \quad \underline{u}_i = -K \frac{K_{ri}}{\mu_i} \text{grad} (p_i - \rho_i g Z) \quad i = 1,2$$

$$(1.28)6 \quad P_{CM} P_C = P_1 - P_2$$

donde hemos asumido que  $\phi(\underline{x}), K(x), K_{ri}(\bar{S}_1), P_{CM}(x)$  y  $p_C(\bar{S}_1)$  son funciones conocidas. (ver 1.2.5))

A partir del sistema de ecuaciones (1.28) obtenemos un sistema equivalente que puede ser resuelto con mayor facilidad. Para ello introducimos nuevas variables entre las cuales las más importantes son S y P (la presión global) introducida por Chavent (7). En el anexo C se muestran las manipulaciones hechas. El resultado final es:

$$(1.29)1 \quad \mu_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(1.29)2 \quad \rho_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(1.29)3 \quad \phi \frac{\partial S}{\partial t} + \text{div}(r + \sum_{j=0} b_j \underline{q}_j) = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q.$$

$$(1.29)4 \quad r = -K P_{CM} \text{ grad } \alpha$$

$$(1.29)5 \quad \text{div } \underline{q}_0 = 0 \quad \forall (\underline{x}, t) \in Q$$

$$(1.29)6 \quad \underline{q}_0 = -K d \text{ grad } P + d \sum_{j=1}^2 \gamma_j \underline{q}_j$$

$$(1.29)7 \quad \bar{S}_1 = \bar{S}_{1m} + S (\bar{S}_{1M} - S_{1m})$$

$$(1.29)8 \quad \bar{S}_2 = 1 - S_1$$

$$(1.29)9 \quad p_i = P - (\gamma + (-1)^i p_c/2) P_{CM} \quad i = 1, 2.$$

$$(1.29)10 \quad \underline{u}_i = \underline{q}_0 - (-1)^i (r + \sum_{j=0}^2 b_j \underline{q}_j) \quad i = 1, 2$$

Las nuevas funciones  $\phi$ ,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $d$ ,  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$ , están definidas en el anexo C. En el anexo D se da una interpretación física de estas funciones así como formas típicas de algunas de ellas.

Las ecuaciones (1.29)3,4 forman una familia de ecuaciones de evolución no lineales de difusión (r)- convección ( $\sum_{j=0}^2 b_j \underline{q}_j$ ). El término de difusión es degenerado pues  $\underline{r} = \underline{0}$  cuando  $S = 0$  y  $S = 1$  (ver C.8) y la figura D.5). El término de convección es no lineal y no necesariamente monótono ( $b_0$  es monótona creciente, pero  $b_1$  y  $b_2$  no lo son, ver las figuras D.1, D.2, y D.6).

Las ecuaciones (1.29)5,6 forman una familia de ecuaciones elípticas en P.

(1.29)3,4 y (1.29)5,6 no están desacopladas:  $q_0$  aparece en (1.29)3 y S en (1.29)6, ya que  $d$ ,  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$  dependen de dicha variable.

#### .4) Las Condiciones de Contorno

##### .4.1 Introducción

Una vez solucionadas las ecuaciones (1.29)3 a (1.29)6 podemos determinar todas las demás variables del modelo. De esta forma sólo debemos preocuparnos de establecer condiciones de contorno para estas ecuaciones es decir, debemos caracterizar el comportamiento de  $P$ ,  $q_0$ ,  $r$  y  $S$  sobre la frontera

Tenemos dos tipos de condiciones. Unas prescriben valores de la presión o de la saturación, las otras prescriben flujos. Aunque aparentemente estas condiciones independientes, no lo son siempre, como en el caso del "efecto de extremidad", Marle (1), pág. 80-81, que analizaremos más adelante.

##### .4.2 Condiciones sobre las Presiones

Aquí consideraremos solo las condiciones de Dirichlet, las condiciones de Neumann, para las presiones son condiciones sobre las velocidades de agua y de petróleo y pueden traducirse en condiciones sobre  $r$  y  $q_0$ , como veremos en la siguiente sección.

Supongamos que vamos a establecer una condición de Dirichlet sobre los pozos de inyección  $1, 2, \dots, l' \leq l$  y sobre los pozos de producción  $l+1, l+2, \dots, k' < k$ . Procediendo en forma análoga al caso del modelo monofásico obtenemos:

$$(1.30)1 \quad P_i = P_{ei} \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \times [0, T] \quad i = 1, 2.$$

$$(1.30)2 \quad \Gamma_D = \Gamma_{LD} \cup \left( \bigcup_{i=1}^{l'} \Gamma_i \right) \cup \left( \bigcup_{i=l+1}^{k'} \Gamma_i \right)$$

Si, por otra parte, quisiéramos imponer una condición de este tipo a la presión global  $P$  basta ver (C.16) y (C.19) para darse cuenta de que es necesario disponer de una condición de Dirichlet para  $S$ , en este caso tendríamos:

$$(1.31) \quad P = P_e \quad \text{sobre} \quad \Gamma_D \times [0, T]$$

donde  $P_e$  se halla usando (C.16), (C.19), (1.30)1 y las condiciones sobre  $S$  que veremos más adelante.

#### .4.3) Condiciones sobre las Velocidades

Las condiciones sobre los flujos de agua y de petróleo se construyen de igual forma que en el caso monofásico:

$$(1.32)1 \quad \underline{u}_i \cdot n = Q_i \quad \text{sobre} \quad \Gamma_N \times ]0, T[ \quad i = 1, 2.$$

$$(1.32)2 \quad \Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$$

Teniendo en cuenta (C.13) y (C.23), cambiamos (1.32) a:

$$(1.33)1 \quad \underline{q}_0 \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) \text{ sobre } \Gamma_N \times ]0, T[$$

$$(1.33)2 \quad \underline{q}_0 \cdot \underline{n} = \frac{1}{2} (Q_1 - Q_2) - \left( \frac{1}{2} (Q_1 + Q_2) b_0 + \underline{u}_1 \cdot \underline{n} b_1 + \underline{u}_2 \cdot \underline{n} b_2 \right) \text{ sobre } \Gamma_D \times ]0, T[$$

De esta forma, hemos cambiado las condiciones sobre las velocidades de filtración  $\underline{u}_1$  y  $\underline{u}_2$  por condiciones sobre la velocidad media  $\underline{q}_0$  y una condición sobre  $S$  (ya que  $\underline{r}$ ,  $b_0$ ,  $b_1$  y  $b_2$  dependen de  $S$ ). Esto muestra que las condiciones sobre la saturación y las condiciones sobre las velocidades están íntimamente ligadas. Por ejemplo, si  $S = 1$ , (1.33)2 afirma que  $Q_2 = 0$ , si  $S = 0$  esta misma ecuación se reduce a  $Q_1 = 0$ .

Aún más, cuando los fluidos fluyen simultáneamente por una región de la frontera, las presiones de ambos son iguales, por lo que tenemos  $S = 1$ , ver (1.7) y la figura 1.2. De manera que debe cumplirse:

$$(1.34) \quad \text{Si } S < 1 \text{ entonces } \underline{u}_1 \cdot \underline{n} = 0 \text{ ó } \underline{u}_2 \cdot \underline{n} = 0$$

#### .4.4) Condiciones sobre la Saturación

Definamos:

$$(1.35)1 \quad \Gamma_- = \{x \in \Gamma : \underline{q}_0 \cdot \underline{n} < 0\}, \text{ es la frontera de inyección.}$$

$$(1.35)2 \quad \Gamma_+ = \{x \in \Gamma : \underline{q}_0 \cdot \underline{n} > 0\}, \text{ es la frontera de producción.}$$

Condiciones sobre  $\Gamma_-$

$$(1.36)1 \quad S = S_e \quad \text{sobre} \quad \Gamma_- \times ]0, T[$$

No para cualquier función  $S_e$ , (1.36) es compatible con (1.34). Si  $S_e$  no fuera idénticamente 1 deberíamos poner  $Q_1$  ó  $Q_2 = 0$  sobre  $\Gamma_-$ ; en cambio si  $S_e \equiv 1$  (1.34) ya no impone restricciones sobre  $Q_1$  y  $Q_2$ , pero (1.33)2 sí lo hace, en este caso debemos tener  $Q_2 = 0$ .

Condiciones sobre  $\Gamma_+$

Asumiendo que inicialmente por  $\Gamma_+$  solo fluye petróleo, la condición es  $Q_1 = 0$ . Esta condición no es válida indefinidamente ya que tarde o temprano el agua empezará a fluir por  $\Gamma_+$ . En este caso la condición debe ser  $S = 1$ . En ambas etapas las condiciones son compatibles con (1.33)2 y (1.34). La condición resultante es una condición unilateral:

$$(1.36)2 \quad \underline{u}_1 \cdot n > 0, S < 1, (1-S) (\underline{u}_1 \cdot n) = 0 \\ \text{sobre} \quad \Gamma_+ \times ]0, T[$$

gracias a esta condición obtenemos una definición precisa del tiempo de ruptura,  $T_R$ :

$$(1.37) \quad T_R = \inf \{ t \in ]0, T[ \mid \underline{u}_1 \cdot n > 0 \text{ sobre } \Gamma_+ \}$$

.5) La Condición Inicial

Sólo para S existe condición inicial ya que  $P(t)$

cumple una ecuación elíptica, ver las ecuaciones (1.29)5, (1.29)6:

$$(1.38) \quad S(\underline{x}, 0) = S_0(x) \quad \forall x \in \Omega$$

.6) El Problema de Valor Inicial y de Contorno para P y S

De esta manera el modelo obtenido consta de las ecuaciones (1.29), las condiciones de contorno (1.31), (1.33), (1.36) y la condición inicial (1.38). Solucionando las ecuaciones (1.29)3 a (1.29)6 obtenemos todas las variables del modelo. Lamentablemente estas ecuaciones están acopladas (en el caso general), esto hace más difícil hallar su solución.

Resultados relativos a la existencia y unicidad de la solución pueden encontrarse en Chavent [3].

## 2. El modelo Bifásico Unidimensional

### 2.1 Planteo de Modelo

#### .1) Introducción

Obtendremos este modelo particularizando lo hecho en 1.5). Además de las suposiciones hechas en esa sección asumiremos que:

(2.1)1 El medio es homogéneo.

(2.1)2 La influencia de la gravedad es despreciable, ya que los movimientos de los flúidos son horizontales.

este modelo simula las experiencias de laboratorio llevadas a cabo sobre muestras cilíndricas obtenidas durante la perforación de los pozos. Ver Chavent (3), (5). Las dimensiones de estos cilindros permiten asumir que el movimiento es unidimensional.

#### .2) Notación

Usamos la misma notación que en el capítulo 1, con las siguientes particularizaciones:

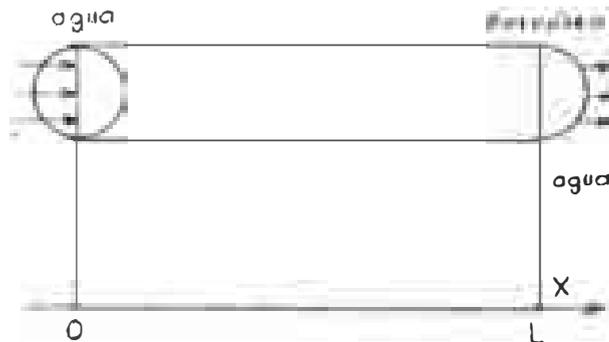


figura 2.1

$$(2.2)1 \quad \mu_i \in ]0, L[$$

$$(2.2)2 \quad \mu_i \in \{0\}$$

$$(2.2)3 \quad \mu_i \in \{L\}$$

### .3) Las Ecuaciones Diferenciales

Teniendo en cuenta (2.1), las ecuaciones (1.29) se convierten en:

$$(2.3)1 \quad \mu_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(2.3)2 \quad \rho_i = \text{constante} \quad i = 1,2$$

$$(2.3)3 \quad \phi \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (r + b_0 q_0) = 0$$

$$(2.3)4 \quad r = -K P_{CM} \frac{\partial}{\partial x} \alpha$$

$$(2.3)5 \quad \frac{\partial}{\partial x} q_0 = 0$$

$$(2.3)6 \quad q_0 = -K d \frac{\partial}{\partial x} P$$

$$(2.3)7 \quad \bar{S}_1 = \bar{S}_{1m} + S (\bar{S}_{1M} - \bar{S}_{1m})$$

$$(2.3)8 \quad \bar{S}_2 = 1 - \bar{S}_1$$

$$(2.3)9 \quad p_i = P (\gamma + (-1)^i p_c/2) P_{CM}; \quad i = 1,2$$

$$(2.3)10 \quad u_i = (1 - (-1)^i b_0) q_0 - (-1)^i r; \quad i = 1,2.$$

Obsérvese que en este caso las ecuaciones (2.3)3,4 y (2.3)5,6 están desacopladas de manera que basta conocer S para poder determinar todas las demás variables del modelo.

.4) Las Condiciones de Contorno

Denotemos que  $2q(t)$  la velocidad a que el agua es inyectada por  $\Gamma_e$ . Las condiciones para la saturación son:

$$(2.4)1 \quad S = 1 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_e \times ]0, T[$$

$$(2.4)2 \quad \phi_1 \geq 0, S \leq 1, (1-S) \phi_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \Gamma_s \times ]0, T[$$

donde  $\phi_1$  es la velocidad de salida de agua por  $\Gamma_s$ :

$$(2.4)3 \quad \phi_1(t) = (1 + b_o(S(L,t))) q_o(t) + r(S(L,t)) \quad \forall t \in ]0, T[$$

estas condiciones se obtienen directamente de (1.36). Las condiciones (1.33) se reducen a:

$$(2.5) \quad q_o = q \quad \text{sobre} \quad \Gamma_e \times ]0, T[$$

obsérvese que (2.4)1 y (1.33)2 implican  $Q_2 = 0$ .

Finalmente la condición para  $P$  puede escribirse así:

$$(2.6)1 \quad P = P_e \quad \text{sobre} \quad \Gamma_s \times ]0, T[$$

$$(2.6)2 \quad P_c(t) = P_{at} + P_{cs} \left( T + \frac{1}{T} P_c(S(L,t)) \right) \quad \forall t \in ]0, T[$$

obsérvese que mientras  $t \leq T_R$  debemos usar (C.22)2 con  $P_2 = P_{at}$ , en cambio, cuando  $T_R \leq t$  debemos usar (C.22)1 con  $p_1 = P_{at}$ , sin embargo, en este caso  $P_c(S(L,t)) = P_c(1) = 0$ , lo que hace coincidir ambas fórmulas en (2.6)2.

.5) El Problema de Valor Inicial y de Contorno

De esta forma nuestro modelo queda reducido a las ecuaciones (2.3), las condiciones de contorno (2,4), (2.5), (2.6) y la condición inicial (1.38).

Por otra parte (2.3)5 y (2.5), y (2.3)6 y (2.6)2 nos permiten escribir:

$$(2.7)1 \quad q_0(x,t) = q(t) \quad \forall (x,t) \in Q.$$

$$(2.7)2 \quad P(x,t) = P_e(t) + q(t) \int_x^L K(\tau) d(S(\tau,t)), \quad \forall (x,t) \in Q.$$

esto evidencia el hecho de que basta conocer  $S$  para hallar las demás variables del modelo.

2.2 El Problema para  $S$

.1) Introducción

En esta sección planteamos el problema de valor inicial y de contorno para  $S$  y nos ocupamos de su desintegración usando una formulación mixta de elementos finitos no conformes.

.2) Notación

Hacemos los siguientes cambios en la notación.

$$(2.8)1 \quad u = S_1$$

$$(2.8)2 \quad b(u) = b_0(S(u))$$

(2.8)3  $\bar{u}(t) = \bar{S}_{1M}$

.3) Planteo del Problema

Teniendo en cuenta (2.8), reescribiremos (2.3)3, (2.3)4, (2.4) y (1.38) así:

(2.9)1  $\phi \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} r + q(t) \frac{\partial b}{\partial x} (u) \right) = 0$  sobre  $]0, L[ \times ]0, T[$

(2.9)2  $r = -K \frac{\partial \alpha}{\partial x} (u)$  sobre  $]0, L[ \times ]0, T[$

(2.9)3  $u_e(t) = u(0, t) = \bar{S}_{1M} \quad \forall t \in ]0, T[$

(2.9)4  $u_s(t) = u(L, t) < S_{1M}, \phi_1(t) \geq 0, (1-u_s(t))\phi_1(t) = 0$   
 $\forall t \in ]0, T[$

(2.9)5  $u(x, 0) = u_0(x) \quad [\bar{S}_{1M}, S_{1M}] \quad \forall x \in ]0, L[$

para formular correctamente el problema para hace falta especificar el espacio funcional al cual pertenece, así como las condiciones sobre  $b$ ,  $\alpha$  y  $u_0$  que permitan asegurar la existencia y unicidad de  $u$ . Para esto se puede leer el artículo de Gagneaux y la bibliografía ahí mencionada.

En el anexo K puede verse una breve nota sobre los parámetros asimensionales que surgen en (2.9)1 y (2.9)2.

.4) Discretización de (2.9)

.4.1 Introducción

La discretización de (2.9) la llevaremos a cabo primero buscando subespacios de aproximación cuyos elementos sean funciones de  $x$  solamente, luego buscamos una formulación débil de las ecuaciones y finalmente obtenemos la discretización completa, aproximando el operador  $\frac{\partial}{\partial t}$ .

.4.2 Notación

Usaremos la siguiente notación

$$(2.10)1 \quad f^K = f(K \Delta t)$$

$$(2.10)2 \quad f_h^K = f(u_h^K)$$

$$(2.10)3 \quad f \cdot^{-K} = \lim_{x \rightarrow x_i} f_h^K$$

$$(2.10)4 \quad f \cdot^{+K} = \lim_{x \rightarrow x_i^+} f_h^K$$

$$(2.10)5 \quad f_e^K = f(u_e^K)$$

$$(2.10)6 \quad f_S^K = f(u_S)$$

$$(2.10)7 \quad f_{i+1/2}^K = f\left(\frac{1}{2}(u_i^{+K} + u_{i+1}^{-K})\right)$$

.4.3 Subespacios aproximantes en Espacio

Dividamos  $[0,L]$  en  $N$  intervalos de longitud  $h = L/N$  y definamos  $X_i = ih; i = 0,1,\dots,N$ .

Las ideas que nos guiarán para buscar los subespacios aproximantes son estas:

(1) Cuando la velocidad de inyección de agua,  $2q$ , es alta (ver anexo K) la ecuación (2.9)1 es practicamente una ecuación hiperbólica de primer orden, en este caso pueden aparecer frentes abruptos en la solución.

(2) Para lograr una buena aproximación a  $\phi_1$  es necesario tener una buena aproximación a  $r$  (ver (C.23)1).

(1) indica que  $u$  debe ser aproximada por funciones discontinuas en el espacio:

$$(2.11)1 \quad u \approx u_h, \quad u_h(\cdot, t) \in V_h \quad \forall t \in [0, t]$$

$$(2.11)2 \quad V_h = \{v \in L^2(0,L) : v|_{[X_i, X_{i+1}]} \in P^1; \quad i = 0,1,\dots,N-1\}$$

(2) y (C.9) indican que debemos usar una aproximación mixta:

$$(2.12)1 \quad u \approx u_h, \quad u_h(\cdot, t) \in Q_h \quad \forall t \in [0, t]$$

$$(2.12)2 \quad Q_h = \{v \in C^0([0,L]) : v|_{[X_i, X_{i+1}]} \in P^{1+1}; \quad i=0,1,\dots,N-1\}$$

.4.4)Formulación Débil de (2.9)1 y (2.9)2

Usaremos el método de Galerkin modificado por Cha-

vent y Cohen (1) siguiendo las ideas de Lesaint y Raviart (1).

En el método clásico de Galerkin (2.9)1 se multiplica por  $v \in V_h$  y se integra sobre  $[0, L]$ , análogamente (2.9)2 se multiplica por  $S \in Q_h$  y se integra sobre  $[0, L]$ . El problema que se presenta en (2.9)1 es que  $b_h$  no es derivable, así que debemos tomar  $\frac{\partial}{\partial x} b_h$  en el sentido de las distribuciones:

$$\int_0^L \frac{\partial b_h}{\partial x} v = \sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{X_i}^{X_{i+1}} \frac{\partial b_h}{\partial x} v + (b_i^+ - b_i^-) v_i \right\} + (b_N^+ - b_N^-) v_N$$

$$\forall v \in V_h \cap C^0([-\epsilon, L + \epsilon]), \epsilon > 0$$

de modo que (2.9)1 se escribe así:

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left\{ \int_{X_i}^{X_{i+1}} \left( \phi \frac{\partial u}{\partial t} h + \frac{\partial r}{\partial x} h + q(t) \frac{\partial b}{\partial x} h \right) v + q(t) (b_i^+ - b_i^-) v_i \right\} = 0$$

$$\forall v \in V_h \cap C^0([-\epsilon, L + \epsilon]), \epsilon > 0$$

esta ecuación y el hecho de que la información viaja en sentido de crecimiento de  $x$  (en el caso hiperbólico,  $\alpha \equiv 0$ , (2.9)1 afirma que en  $]0, L[ \times ]0, T[$  la información se propaga paralelamente al vector  $(q, b'(u), \phi)$  proyectamos este vector sobre el eje  $x$  y como  $q, b'(u) \geq 0$  ver la figura D.1, demostramos lo dicho) sugieren tomar la siguiente discretización:

$$\int_{X_i}^{X_{i+1}} \left( \phi \frac{\partial u}{\partial t} h + \frac{\partial r}{\partial x} h + q(t) \frac{\partial b}{\partial x} h \right) v + q(t) (b_i^+ - b_i^-) v_i = 0$$

$$\begin{aligned} \forall v &\in V_h \\ \forall t &\in ]0, T[ \\ i &= 0, 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Finalmente haciendo un par de integraciones por partes obtenemos:

$$(2.13)1 \quad \int_{X_i}^{X_{i+1}} \phi \frac{\partial u_h}{\partial t} v + \int_{X_i}^{X_{i+1}} \frac{\partial r_h}{\partial x} v + q(t)(b_{i+1}^- v_{i+1} - b_i^+ v_i - \int_{X_i}^{X_{i+1}} b_h \frac{\partial v}{\partial x}) =$$

$$i = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\forall t \in ]0, T[$$

$$\forall v \in P^1$$

$$(2.13)2 \quad \int_0^L \frac{Sr_h}{K_h} = \int_0^L \alpha_h \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha_e S(0) - \alpha_s S(L)$$

$$\forall t \in ]0, T[$$

$$\forall S \in Q_h$$

$$(2.13)3 \quad u = \bar{S}_{1M} \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(2.13)4 \quad u_s \leq S_{1M}, \phi_{1h} \geq 0, (\bar{S}_{1M} - u_s) \phi_{1h} = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$

$$(2.13)5 \quad u_h(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in ]0, L[$$

$$(2.13)6 \quad \phi_{1h}(t) = (1 + b_N^-(t))q(t) + r(L, t) \quad \forall t \in [0, T]$$

#### .4.5) Discretización total

Aproximamos  $\frac{\partial}{\partial t}$  de la siguiente forma:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} u_h\right)^K = \frac{1}{\Delta t} (u_h^{K+1} - u_h^K)$$

esto hace que obtengamos en (2.13)1 un esquema explícito. Si definimos  $t = T/\bar{N}$ , las ecuaciones semidiscretizadas (2.13) quedan totalmente discretizadas así:

$$(2.14)1 \quad \int_{X_i}^{X_{i+1}} \phi \frac{1}{\Delta t} (u_h^{K+1} - u_h^K) v + \int_{X_i}^{X_{i+1}} \frac{\partial r^K}{\partial x} v + q^K (b_{i+1}^{-K} v_{i+1} - b_i^{-K} v_i - \int_{X_i}^{X_{i+1}} b_h^K \frac{\partial v}{\partial x}) = 0$$

$= 0, 1, \dots, N-1$   
 $K = 0, 1, \dots, \bar{N}-1$   
 $\forall v \in P^1$

$$(2.14)2 \quad \int_0^L r_h^K S = \int_0^L \alpha_h^K \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha_e^K S(0) - \alpha_s^K S(L)$$

$K = 0, 1, \dots, \bar{N}$   
 $\forall S \in Q_h$

$$(2.14)3 \quad u_e^K = S_{1M} \quad K = 0, 1, \dots, \bar{N}.$$

$$(2.14)4 \quad u_s^K < \bar{S}_{1M}, \phi_{1h}^K > 0, (\bar{S}_{1M} - u_s^K) \phi_{1h}^K = 0$$

$K = 0, 1, \dots, \bar{N}$

$$(2.14)5 \quad u_n^0 = u_0$$

$$(2.14)6 \quad \phi_{1h}^K = (1 + b_{1N}^{-K}) q^K + r_{hN}^K$$

$K = 0, 1, \dots, \bar{N}$

Dos propiedades importantes de esta discretización son:

- (1) Es válida tanto para el caso parabólico, que

modela el proceso de imbibición (difusión) ( $q \equiv 0$ ), como para el caso hiperbólico (convección) que es la aproximación de Buckley-Leverett ( $\alpha \equiv 0$ ).

(2) Satisface exactamente el balance de masa. Como  $u_h(x, \cdot)$  es constante sobre  $[K \Delta t, (K+1) \Delta t[$ , debe cumplirse que la cantidad de agua (por ejemplo) acumulada en  $]0, L[$  durante ese intervalo debe ser  $\Delta t (\phi_{1h}^K(0) - \phi_{1h}(L))$ :

$$\int_0^L \phi u_h^{K+1} - \int_0^L \phi u_h^K = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi (u_h^{K+1} - u_h^K)$$

usando (2.14)1 con  $v = 1$ , obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_0^L \phi u_h^{K+1} - \int_0^L \phi u_h^K &= \sum_{i=0}^{N-1} (\tau_{i+1}^K - \tau_i^K + \phi_i^K (\delta_{i+1}^K - \delta_{i+1}^K)) \Delta t \\ &= (\tau_0^K - \tau_1^K + \phi_0^K (\delta_0^K - \delta_1^K)) \Delta t \\ &= ((1 + \delta_0^K) \tau_0^K + \tau_0^K) - ((1 + \delta_1^K) \tau_1^K + \tau_1^K) \Delta t \\ &= \Delta t (\phi_{1h}^K(0) - \phi_{1h}^K(L)) \end{aligned}$$

En el anexo E se muestran los cálculos de la discretización (2.14) para los casos  $l = 0$ ,  $l = 1$ , así como un algoritmo para su resolución numérica. Terminamos dando la versión discreta de (1.37), el tiempo de ruptura asociado al problema (2.14), está definido por:

$$(2.15) \quad T_{hR} = \min_{t \in [0, T]} \{t = K \Delta t \quad \phi_{1h}^K \neq 0\}$$

## 2.3 Resultados Numéricos

### .1) Introducción

En esta sección vamos a analizar los esquemas (E.8) y (E.15), y vamos a mostrar y concretar los resultados obtenidos al aplicar estos esquemas a un caso concreto.

Los esquemas considerados se han obtenido al aplicar un método de elementos finitos que es no conforme, y mixto. Se llama no conforme, ver por ejemplo Oden y Reddy (1), pág. 249-257, o Ciarlet (1) y la bibliografía ahí mencionada, porque la función aproximante,  $u_h$  es discontinua en la frontera de los elementos. Se llama mixto porque usa diferentes aproximaciones para  $u$ ,  $u_h$ , y para sus derivadas, en este caso para  $\alpha'(u) \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $r_h$ . Ver Oden y Reddy (1), pág. 368.

Como a  $u$ , la solución de (2.9) que es continua según Gagneux (1), nos aproximamos por funciones discontinuas, la aproximación se llama externa, ya que el espacio de las funciones continuas está incluido en el espacio de funciones que pueden ser discontinuas.

Las características mencionadas y el hecho que aparezcan funciones no lineales en los esquemas considerados hacen que el estudio de los mismos sea muy complicado. Hay resultados importantes para el caso lineal, sobre todo en lo relativo a estimados de errores, pero éstos se refieren a métodos de elementos finitos que usan aproximaciones internas; ver Oden y Reddy 1, pág. 390-418, ahí hay resultados para la ecuación de difusión y para la ecuación hiperbólica de primer orden. Por este motivo no podemos contar con estimados de errores que permitan conocer la precisión y convergencia de las

aproximaciones a la solución.

Con respecto a la estabilidad de (E.8) y (E.15) es razonable pensar que, como ocurriría en el caso lineal, siempre que  $\Delta t/h^2$  sea suficientemente pequeño los esquemas serán estables. Aunque es de esperar que la condición de estabilidad para (E.15) sea más fina que la correspondiente a (E.8), y al mismo tiempo, la solución de (E.15) sea más precisa que la de (E.8) con los mismos valores de los parámetros de discretización.

Las diferencias entre el caso hiperbólico ( $\alpha \equiv 0$ ) y el caso general, y por otra parte, las variaciones que las soluciones presentan por efecto de un cambio de los parámetros de discretización son dos de los puntos importantes que estudiaremos a continuación.

.2) El Esquema (E.8):  $l = 0$

.2.1) Existencia y Unicidad

Con relación a esta cuestión dos problemas pueden aparecer: que la matriz  $A$ , (E.8)<sub>24</sub>, no sea inversible, y que la solución no esté contenida en  $[\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}]$  para algún  $t = K\Delta t$ , como  $\alpha$  y  $b$  no están definidos sino sobre ese intervalo,  $u_h^{K+1}$  no podría hallarse.

El primer problema desaparece con una sencilla aplicación del Teorema de Gershgorin, Dahlquist (1), pág. 209. Como  $A$  es simétrica y real, es diagonalizable y sus valores propios,  $\lambda$ , son reales, la aplicación del mencionado teorema nos permite afirmar que  $1 \leq \lambda \leq 6$ ,

es decir: A es inversible. Además, A es una matriz bien condicionada ya que  $|\lambda|_{\text{máx}}/|\lambda|_{\text{mín}} \leq 6$ .

El segundo problema se soluciona si prolongamos b y  $\alpha$  a todo R. La forma de  $\alpha$  (ver (2.8)3, (C.5), (C.3), figuras 1.2 y 1.3) y la de b (ver (2.8)2, (C.8), (C.3) y figura (1.3) sugieren que podemos prolongar ambas funciones así:

$$(2.16)1 \quad \alpha(x) = \begin{cases} \alpha(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

$$(2.16)2 \quad b(x) = \begin{cases} b(x) & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{si } x < 0 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

### .2.2) El Caso Hiperbólico

En este caso las ecuaciones (E.8)2 desaparecen y las ecuaciones (E.8)1 y (E.8)6 se convierten en:

$$(2.17)1 \quad u_i^{K+1} = u_i^K + \frac{\Delta t}{h\phi} q^K (b_{i-1}^K - b_i^K) \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$$

$$K = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1.$$

$$(2.17)2 \quad \frac{du}{dt} = -\frac{u}{\tau} \quad K = 0, 1, \dots, \tilde{N}-1.$$

Vamos a estudiar algunas propiedades de  $u_h$ .

### Invarianza de la Monotonía

Asumamos que  $u_0$  es monótona no creciente, es decir:

$$(2.17)3 \quad \bar{u}_{1M}^K = u_e^K > u_{01} \geq u_{02} \geq \dots \geq u_{0N-1} \geq \bar{u}_{1m}^K$$

$$K = 0, 1, \dots, \tilde{N}.$$

demostraremos que esta propiedad queda invariante conforme  $K$  se incrementa, si es que  $b$  cumple la siguiente condición de Lipchitz:

$$\exists L \in \mathbb{R}$$

$$(2.18)1 \quad \forall X_1, X_2 \in \mathbb{R}: |b(X_1) - b(X_2)| \leq L|X_1 - X_2|$$

$$(2.18)2 \quad \frac{\Delta t}{h} \frac{q^K}{\phi} \hat{L} < 1; \quad K = 0, 1, \dots, \bar{N}.$$

Procedamos por inducción sobre  $K$ . Si  $K = 0$ , (2.17)3 afirma que la propiedad se cumple. Supongamos que se cumple para  $K = n$ , entonces si  $i < N-1$ :

$$u_1^{n+1} - u_1^{n+1} = u_1^n - u_1^{n+1} + \frac{\Delta t}{h} \frac{q^n}{\phi} (b_1^n - b_1^{n+1}) + \frac{\Delta t}{h} \frac{q^n}{\phi} (b_1^n - b_1^{n+1})$$

$$\leq L \frac{\Delta t}{h} \frac{q^n}{\phi} (u_1^n - u_1^{n+1}) + \frac{\Delta t}{h} \frac{q^n}{\phi} (b_1^n - b_1^{n+1}) \leq 0$$

para lograr la primera desigualdad hemos usado (2.18)1, y para la segunda (2.18)2 y la hipótesis de inducción.

### Prolongación de $b$

Asumamos que  $u_e < \bar{S}_{1M}$  y que  $u_1^K < S_{1M} \quad \forall K \in \mathbb{N}_0$ ; vamos a demostrar que si  $u_1^K > u_e$ , entonces  $u_1^{K+j} \rightarrow u_e^t$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Tomemos (2.17)1 con  $i = 1$ :

$$u_1^{K+1} - u_1^{K+1} = u_1^K - u_1^{K+1} + \frac{\Delta t}{h} \frac{q^K}{\phi} (b_1^K - b_1^{K+1})$$

ahora, restando  $u_e$  y usando (2.18)1 obtenemos:

$$u_1^{K+1} - u_e \geq \left(1 - \frac{\Delta t}{h} \frac{q^k}{\phi} \hat{L}\right) (u_1^K - u_e)$$

luego  $u_1^{K+1} \geq u_e$  por (2.18)2. Finalmente tomando límite en la primera ecuación, teniendo en cuenta que  $b$  es continua y monótona creciente sobre  $[\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}]$  y que  $u_e < \bar{S}_{1M}$ , obtenemos que  $u_1^{K+j} \rightarrow u_e^t$  cuando  $j \rightarrow \infty$ .

Si ahora tomamos  $u_e = \bar{S}_{1M}$  el resultado anterior no es cierto (ya que, por (2.16)'2,  $b'(x) = 0 \quad \forall x > \bar{S}_{1M}$ ). Para que se cumpla, basta prolongar de la siguiente manera:

$$(2.16)2 \quad b \in C^1(\mathbb{R}), \quad b'(x) = 0 \quad \forall x < \bar{S}_{1m} \\ b'(x) = \theta > 0 \quad \forall x > \bar{S}_{1M}.$$

### Crecimiento de $u_h$

Si (2.17)3 se cumple y tomamos la forma (2.16) de prolongar  $\alpha$  y  $b$  la forma de variar  $u_i^K$  conforme  $K$  se incrementa es la siguiente:

- (1)  $u_i^K < u_i^{K+1}$  si  $u_i^K < u_e; \quad i = 0, 1, \dots, N-1.$
- (2)  $u_e \leq u_i^{K+1} \leq u_i^K$  si  $u_i^K > u_e; \quad i = 1, 2, \dots, N.$

el punto (2) lo acabamos de demostrar, para demostrar (1) basta tomar (2.13)1 y tener en cuenta el resultado de monotonía.

### El Efecto de Extremidad

Cuando las ecuaciones (E.8)2 desaparecen (por tomar  $\alpha = 0$ ) desaparece con ellas la manera de hallar  $u_S^K$  para  $K = 0, 1, \dots, K' \leq T_{hR}/\Delta t$ , para los instantes restantes (E.8)4 afirma que  $u_S^K = \bar{S}_{1M}$ . Sobre  $u_h^K$ , y por tanto sobre  $\phi_{1h}^K$ ,  $u_S^K$  no tiene ninguna influencia. De esta forma no se produce ninguna acumulación de agua en el extremo  $X = L$  por efecto de la capilaridad ("efecto de extremidad"), el agua empieza a fluir por ahí no bien llega (ya que  $\phi_{1h}^K \neq 0$  cuando  $u_{N-1} > S_{1m}$ , ver (2.17)2. Esto era de esperarse puesto que solo  $r_h$  (ecuaciones (E.8)2) lleva la información de las propiedades de capilaridad del medio (ver (C.8) y (C.5)).

### El Tiempo de Ruptura

La definición de  $T_{hR}$ , (2.15), afirma que  $T_{hR} < T$ . Vamos a demostrar que cuando  $T$  es infinito  $T_{hR}$  es finito, asumiendo (2.13)3.

Supongamos lo contrario, entonces  $\phi_{1h}^K = 0 \quad \forall K \in |N_0$  como  $u_{N-1}^K \geq \bar{S}_{1m}$ , (2.17)2 afirma que  $u_{N-1}^K = \bar{S}_{1m} \quad \forall K \in |N_0$ , (2.17)1 afirma que  $u_{N-1}^K = \bar{S}_{1m} \quad \forall K \in |N_0$ . De esta forma demostramos que  $u_e^K = \bar{S}_{1m} \quad \forall K \in |N_0$  lo que contradice (2.17)3.

### El Frente de Agua

Tomemos  $u_{oi} = \bar{S}_{1m}$ ,  $i = 0, 1, \dots, N-1$ . Queremos mostrar que cuando  $q^K$  es grande aparece en  $u_h^K$  una discontinuidad bastante pronunciada que llamaremos el frente de

agua. La ecuación (2.17)1 da en este caso:

$$u_0^1 = \bar{S}_{1m} + 2 \frac{\Delta t}{h} \frac{q^0}{\phi}$$

$$u_i^1 = \bar{S}_{1m} \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

para  $q^0$  suficientemente grande podríamos tener  $u_0^1 > \bar{S}_{1M}$ . Es fácil ver que (por ejemplo, para  $q^0 = q^K$   $K = 0, 1, \dots, N$ ) esta discontinuidad se propaga a una velocidad máxima de  $h/\Delta t$ .

### .2.3) El Caso General

Aquí nos limitaremos a señalar algunas variaciones cualitativas debidas a la introducción de  $r_h^K$

Como el término introducido en (E.8)1 representa un proceso de difusión se espera que ahora el frente de agua esté más suavizado y la esté aún más conforme transcurre el tiempo. Aparece ahora un flujo de petróleo por  $x = 0$ , pero es de una magnitud despreciable. Con respecto al tiempo de ruptura aparecen dos tendencias o puestas: al aumentar la permeabilidad  $K$  el agua se desplaza a mayor velocidad y esto debe producir que  $T_{hR}$  disminuya, por otra parte ahora sí se produce el efecto de extremidad y el agua debe acumularse en  $X = L$  hasta que  $u_S^K = \bar{S}_{1m}$  esto hace que  $T_{hR}$  aumente. Finalmente la monotonía no se conserva, esto es particularmente cierto para los puntos  $(x,t)$  cercanos a  $(L, T_{hR})$  que es donde de más intensamente se nota la influencia de  $r_h$ .

.3) El Esquema (E.15):  $l = 1$

Como el esquema es explícito en  $u_h$  y en  $r_h$ , la existencia y unicidad de la solución de (E.15) quedan establecidas. Tomamos las prolongaciones de  $\alpha$  y  $b$  definidas por (2.16).

A continuación vamos a señalar algunas de las diferencias cualitativas más importantes entre las soluciones de (E.15) y las de (E.8).

En el caso hiperbólico se presenta el mismo fenómeno de ausencia del efecto de extremidad que en el caso  $l = 0$ , sin embargo, la monotonía de la función  $u_h$  no se conserva y  $u_h \geq \bar{S}_{1m}$  no se cumple como vamos a ver en un sencillo ejemplo.

Tomemos  $u_e = \bar{S}_{1m}$ ,  $u_0 = S_{1m}$ . Las ecuaciones (E.15) con  $\alpha \equiv 0$  dan el siguiente resultado:

$$u_0^{+1} = \bar{S}_{1m} + 8 \frac{\Delta t}{h} \frac{q}{\phi}$$

$$u_1^{-1} = \bar{S}_{1m} - 4 \frac{\Delta t}{h} \frac{q^0}{\phi}$$

$$u_i^{+1} = u_{i+1}^{-1} = \bar{S}_{1m} \quad i = 1, 2, \dots, N-1.$$

vemos que el frente de agua es mucho más empinado que en el caso  $l = 0$ . Obsérvese que  $\frac{1}{2}(u_0^{+1} + u_1^{-1}) = \bar{S}_{1m} + 2 \frac{\Delta t}{h} \frac{q^0}{\phi}$  igual que cuando  $l = 0$ . Para velocidades de inyección altas el frente se hace sumamente empinado. Para los mismos valores de los parámetros este ejemplo muestra que el tiempo de ruptura para este caso es necesariamente mayor que el del caso  $l = 0$ , puesto que  $u_i^{+2} = u_{i+1}^{-2} = \bar{S}_{1m}$   $i = 1, 2, \dots, N-1$  ya que  $u_1^{-1} \leq \bar{S}_{1m}$ , lo que no ocurre cuando  $l = 0$ .

Lo que podemos decir del caso general en relación al caso hiperbólico es lo mismo que hemos dicho en (2.3.2.3). Por otra parte es difícil conocer el efecto que el hecho de haber usado el método de Simpson para integrar (y obtener las ecuaciones locales (E.14)'2 en vez de integrar exactamente (ecuaciones locales (E.14)'2) puede tener sobre  $u_n$ .

.4) Los datos

Los datos para resolver el esquema (E.8) o el (E.15) han sido extraídos de los artículos de Lemonier [1] y de Chavent y Cohen [1], para poder comparar los resultados obtenidos.

Las funciones  $p_c$ ,  $K_{r1}$ ,  $K_{r2}$  se muestran en la tabla 1.

Los demás datos son:

|             |  | <u>Tabla 1</u> |                 |          |                      |
|-------------|--|----------------|-----------------|----------|----------------------|
|             |  | S              | $N_{r1}$        | $N_{r2}$ | $p_c$                |
|             | = 0.156  |                |                 |          |                      |
|             | = 1,317 milidarcy =<br>(1.3)10 <sup>-8</sup> cm <sup>2</sup> | .15            | 000             | 600      | 64.00                |
| $q$         | = 4.629 10 <sup>-4</sup> cm/seg                              | .20            | 001             | 500      | 28.03                |
| $\mu_1$     | = 1 centipoise   | .25            | 002             | 110      | 14.40                |
| $\mu_2$     | = 2 centipoise   | .30            | 005             | 320      | 10.69                |
| $S_{1M}$    | = 0.15   | .35            | 010             | 210      | 8.64                 |
| $S_{1H}$    | = 0.63   | .40            | 015             | 180      | 7.23                 |
| $L$         | = 12 cm  | .45            | 030             | 140      | 5.82                 |
| $T$         | = 1.100 seg.   | .50            | 050             | 090      | 4.54                 |
| $N$         | = 48   | .55            | 090             | 050      | 3.71                 |
| $\tilde{N}$ | = 1.100  | .60            | 140             | 015      | 2,69                 |
| $n$         | = 11   | .63            | 180             | 000      | 0.00                 |
| $\tau$      | = 18 cm <sup>2</sup>   |                | ( $p_c$ está en |          | (10 <sup>-3</sup> )) |

observemos que el caudal de agua inyectado por  $x = 0$  es, en este caso,  $2 q\tau = 1 \text{ cm /seg.}$  Por otra parte, es claro que hemos tomado  $h = 0.25 \text{ cm}$  y  $\Delta t = 1 \text{ seg.}$  Variaremos  $h$  y  $\Delta t$  manteniendo  $h/\Delta t$  constante. (Haremos  $h = 0.5 \text{ cm}$  y  $h = 1 \text{ cm}$ ).

Tabla 2

Además  $T_0$  denotará el tiempo en que todo el petróleo recuperable demoraría en ser extraído si suponemos una velocidad de salida constante e igual a  $2q$ , es decir:

|      |       |       |
|------|-------|-------|
| .150 | 0.000 | -1.00 |
| .198 | 0.026 | -0.99 |
| .246 | 0.060 | -0.98 |
| .294 | 0.083 | -0.95 |
| .342 | 0.100 | -0.86 |
| .390 | 0.130 | -0.75 |
| .438 | 0.160 | -0.48 |
| .486 | 0.200 | -0.08 |
| .534 | 0.240 | 0.42  |
| .582 | 0.260 | 0.80  |
| .630 | 0.290 | 1.00  |

$$T_0 = \frac{V}{2q} = \frac{V}{2q} \left( \frac{S_{1m}}{S_{1m}} \right)$$

en nuestro caso  $T_0 = 970.58 \text{ seg.}$

En este caso tenemos, (ver anexo K):

$$a_1 = 4.244$$

$$a_2 = 0.567$$

$$a_3 = 7.489$$

estos parámetros corresponden a un caso en que la influencia del proceso de difusión es bastante pequeña,

como puede verse en la figura 2.4.

Por otra parte, en la Tabla N° 3 se puede ver la variación de los parámetros dimensionales ( $a_{1h}$ ,  $a_{2h}$ ,  $a_{3h}$ ) (ver anexo K) con respecto a variaciones en los parámetros de discretización  $h$  y  $\Delta t$ .

Tabla N° 3: ( $a_{1h}$ ,  $a_{2h}$ ,  $a_{3h}$ )

|           |        |         |      |
|-----------|--------|---------|------|
| $h = 1$   | (2.22, | 0.0247, | 90)  |
| $h = 1/2$ | (4.44, | 0.0247, | 180) |
| $h = 1/4$ | (8.89, | 0.0247, | 359) |

#### .5) Los Resultados Numéricos

En esta sección estudiaremos las soluciones numéricas de los esquemas (E.8) y (E.15), usando los datos mostrados en la anterior sección. Se ha usado la IBM 370-145 del Centro de Cómputo de Petróleos del Perú.

Como ya hemos dicho, nos interesan sobre todo dos aspectos de las soluciones:

(1) La variación de la solución  $u_h$  con respecto a las variables de discretización  $\Delta t$ ,  $h$  y  $l$  (En el caso general  $a_3 \neq 0$ ).

(2) Las diferencias entre el caso hiperbólico (aproximación de Buckley-Leverett) y el caso general (que sí considera las fuerzas de capilaridad).

##### .5.1) Variación de $u_h$ con respecto a ( $l$ , $h$ , $\Delta t$ )

Las características de  $u_h$  cuyas variaciones con

respecto a  $(l, h, \Delta t)$  queremos observar son:

- (1) La forma de la solución, sobre todo la forma del frente de agua.
- (2) El tiempo de ruptura,  $T_{hR}$ , y la fracción recuperada hasta entonces,  $F_{TR}$ .
- (3) La forma de la curva WOR y la de  $u_s$ .
- (4) El tiempo que se emplea en la unidad central de procesamiento, TUCP.

El Frente de Agua

En la figura 2.2 se muestra  $u_h^K$ ,  $(\Delta t) K = 500$  seg., con las 6 variaciones de los parámetros de discretización  $(l, h, \Delta t)$ .

Tanto para el caso  $l = 0$  como para  $l = 1$ , es evidente que cuanto más pequeña se hace  $h$ , el frente de agua se vuelve más vertical. Es notable el parecido entre los frentes de  $(1, 1/4, 1)$  y  $(1, 1/2, 2)$ .

Es también evidente que las discontinuidades de  $u_h$  cuando  $l = 1$  son mucho menores que las obtenidas cuando  $l = 0$ .

|  |                               |            |                       |
|--|-------------------------------|------------|-----------------------|
| <u><math>T_{hR}</math> y <math>F_{TR}</math></u> | Tabla N° 4 $(T_{hR}, F_{TR})$ |            |                       |
| En la tabla                                      | $h = 1/4$                     | $h = 1/2$  | $h = 1$               |
| N° 4, se muestran                                |                               |            |                       |
| los resultados.                                  | $l = 0$                       | (906,0.93) | (890,0.92) (864,0.89) |
| Observamos como                                  | $l = 1$                       | (923,0.95) | (922,0.95) (920,0.95) |
| $(T_{hR}, F_{TR})$ prácticamente no cambian      |                               |            |                       |

con  $h$  en el caso  $l = 1$ , a diferencia de lo que ocurre con estos valores en el caso  $l = 0$ .

Como era de esperar se ha obtenido que  $T_{hR} < T_o$ . Obsérvese que cuando el agua empieza a salir prácticamente queda muy poco del volumen recuperable de petróleo recuperable en el núcleo ( $\approx 5\%$ ).

TUCP

Tabla N° 5: (TUCP, TI)

En la tabla N° 5 se muestran, para los distintos valores de los parámetros de discretización el tiempo TUCP en segundo y TI, que se obtiene dividiendo TUCP entre el número de incógnitas. ( $2N + 1$  si  $l = 0$ ;  $4N + 1$ , si  $l = 1$ ).

|         | $h = 1/4$    | $h = 1/2$   | $h = 1$     |
|---------|--------------|-------------|-------------|
| $l = 0$ | (94.5,0.97)  | (28.1,0.57) | ( 8.6,0.72) |
| $l = 1$ | (180.9,0.93) | (52.3,0.27) | (15.3,0.31) |

A pesar de que para  $h$  fijo TUCP es mayor cuando  $l = 1$  lo que era de esperarse, TI es menor, notablemente cuando  $h = 1/2, 1$ . (Podemos considerar a TI como medida de la eficiencia del esquema).

Por otra parte si comparamos el TUCP empleado por los distintos esquemas cuando poseen el mismo número de incógnitas:  $l = 0, h = \frac{1}{4}$  y  $l = 1, h = \frac{1}{2}$ , y  $l = 0, h = \frac{1}{2}$  y  $l = 1, h = 1$ ; obtenemos que el tiempo se reduce en un 45% en ambos casos (y al mismo tiempo se obtiene una mejor aproximación).

### .5.2) El Caso Hiperbólico y el Caso General

Queremos ver qué variaciones en la solución aparecen por efecto de tomar  $\alpha \equiv 0$  ( $a_3 = 0$ ) y hacer desaparecer la influencia de la capilaridad. En la figura 2.4 están resumidos los resultados.

Como esperábamos el frente de agua es mucho más vertical en el caso hiperbólico. La posición del frente en el caso hiperbólico es prácticamente la misma cuando  $l = 0$  que cuando  $l = 1$ . Sin embargo, el frente es mucho más marcado en el último caso, esto hace que el  $T_{hR}$  del primero, 881 seg., sea menos que el del segundo 961 seg. Esto hace también que las  $F_{TR}$  sean bien distintas: 0.91 en el primer caso, 0.99 en el segundo. Otro hecho importante es que el retardo esperado en  $T_{hR}$  por efecto de la disminución de la permeabilidad, prácticamente no se ha producido en el caso  $l = 0$ , y en cambio se ha hecho fuertemente en el otro. Por otra parte, la ausencia del efecto de extremidad acorta el  $T_{hR}$ , 906 en el caso  $a_3 \neq 0$ , cuando  $l = 0$ . Este hecho no se nota cuando  $l = 1$ . Finalmente; los tiempos TUCP no son muy distintos de los del caso general: 89.2 seg cuando  $l = 0$ , 160.8 cuando  $l = 1$  (ver table N° 4).

### .6) Conclusiones

(1) Conforme  $h$  se hace más pequeño el frente de agua se vuelve más vertical tanto cuando  $l = 0$  como cuando  $l = 1$ .

(2) La tendencia de  $u_h$  a cambiar cuando  $h$  cambia, es mucho más marcada cuando  $l = 0$  que cuando  $l = 1$ . Es

to también ocurre con  $T_{hR}$ ,  $F_{TR}$ ,  $u_s$  y  $WOR$ .

(3) Con el mismo número de incógnitas, el tiempo empleado para los cálculos por el esquema (E.15) es un 55% del usado por el esquema (E.8) y además produce resultados más precisos.

(4) En el caso hiperbólico, a pesar de que las soluciones  $u_h$  en los casos  $l = 0$ ,  $l = 1$  son bastante parecidas, los tiempos de ruptura y por tanto la forma de las funciones  $\phi_{1h}$  y  $WOR$  son bastante diferentes.

(5) En el primer caso el  $T_{hR}$  es menor que el obtenido en el caso general gracias a la ausencia del fenómeno de extremidad, en cambio en el segundo caso el  $T_{hR}$  es mayor que el obtenido en el caso general por efecto de la reducción de  $K$ . ( $\alpha \equiv 0$ ).

## 2.4 El Problema de Identificación (Ajuste de Historia)

### .1) Introducción

Lo que hasta ahora hemos hecho con relación al problema de estudiar el proceso brevemente descrito en 2.1.1) puede resumirse en dos pasos:

(1) Hemos encontrado una manera de obtener una buena aproximación a la evolución de las diversas variables del proceso mediante un modelo matemático representado por las ecuaciones (2.9).

(2) Hemos discretizado este modelo para poder calcular aproximaciones numéricas a las variables del modelo (2.9), obteniendo el modelo discreto (2.14).

El problema que surge de inmediato es el de la calidad de las aproximaciones. Para evaluarla sólo contamos con las mediciones que se hacen directamente del fenómeno y los resultados numéricos del modelo discretizado (2.14), de manera que podemos usar un criterio de evaluación basado en la siguiente función:

$$(2.19) \quad J(u_h) = || \hat{z} - \ell(u_h) ||^2$$

donde  $\hat{z}$  son los datos observados,  $\ell(u_h)$  son las predicciones del modelo (2.9) para esos datos, y  $|| \cdot ||$  es la norma que un espacio que contenga a  $\hat{z}$  y a  $\ell(u_h)$ . Ver la figura 2.5

Es claro que si las predicciones del modelo son muy buenas tendremos que  $J(u_h) \approx 0$ .

Como la determinación de los parámetros involucrados en el modelo

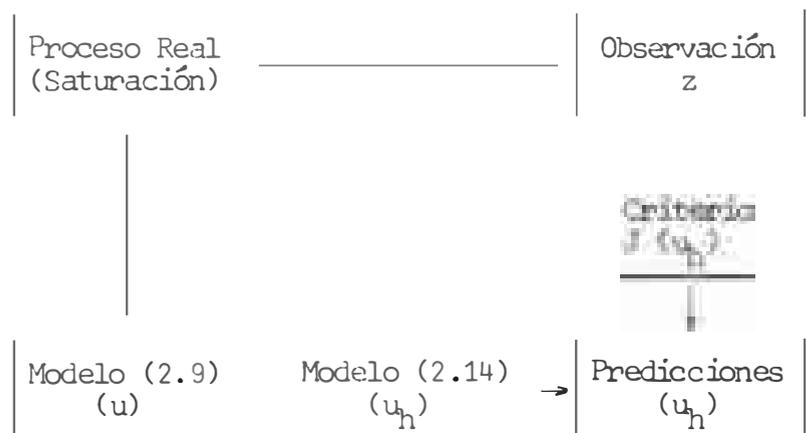


figura 2.5

(2.14) lleva siempre consigo cierto margen de error es posible modificarlos de tal manera que ahora  $J(u_h)$  sea

más cercano a 0 de lo que era antes. El problema de encontrar los parámetros que hacen mínimo  $J(u_h)$  se llama el problema de identificación para el modelo (2.14). Ver figura 2.6.

En lo que sigue vamos a plantear el problema de identificación para (2.14), luego vamos a buscar aproximaciones numéricas a su solución. Usaremos un algoritmo de direcciones conjugadas para generar una sucesión de parámetros que debe converger a los parámetros que minimizan  $J$ .

En nuestro caso consideraremos a  $\alpha$  y  $b$  los parámetros del modelo (2.14)

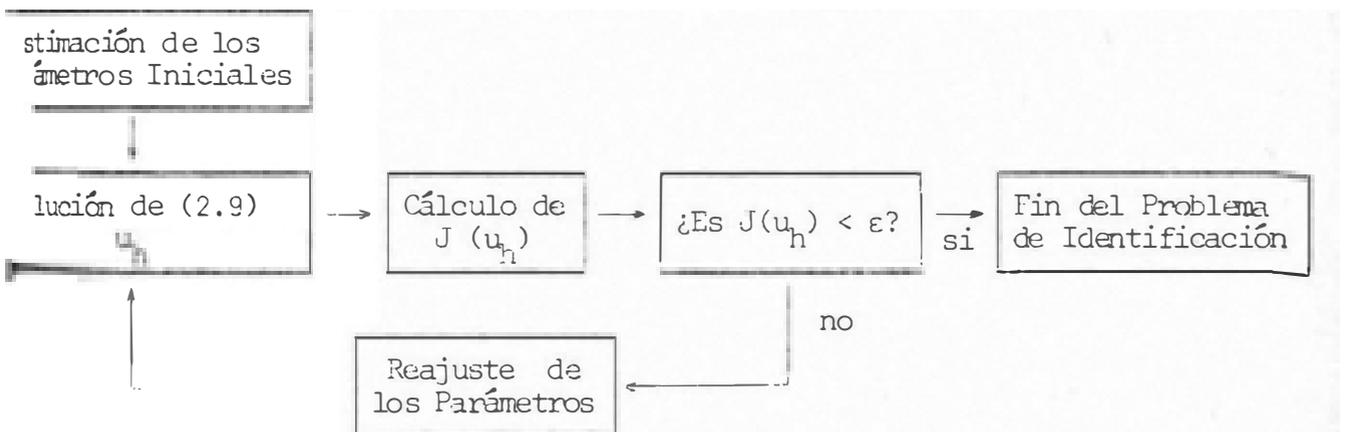


figura 2.6

## 2) Planteo del problema

Para plantear correctamente un problema de identificación, ver Chavent [6], es necesario definir:

- (1) La Ecuación de Estado.
- (2) El Espacio de Parámetros  $a$  y el de Parámetros

Admisibles  $a_{ad}$ .

(3) Los Operadores de Observación,  $\mathcal{C}$ .

La ecuación de estado en nuestro caso es el conjunto de ecuaciones (2.14). Denotaremos a su solución por

$$\underline{u}_h = (u_h, r_h).$$

Como acabamos de decir, los parámetros que queremos identificar son las funciones  $\alpha$  y  $b$ . Como  $\alpha$  y  $b$  son funciones continuas monótonas no decrecientes,  $\alpha$  es siempre positiva,  $b > -1$ , y teniendo en cuenta (2.16), tomamos:

$$(2.20)1 \quad a = \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \times C^0(\mathbb{R})$$

$$(2.20)2 \quad a_{ad} = a_\alpha \times a_b$$

$$(2.20)3 \quad a_\alpha = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \mid \begin{aligned} & f'(u) = 0 \quad \forall u \notin [\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}], \\ & , f'(u) > 0 \quad \forall u \in [\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}] \end{aligned}\}$$

$$(2.20)4 \quad a_b = \{f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \mid \begin{aligned} & f'(u) = 0 \quad \forall u < \bar{S}_{1m}, \\ & f'(u) = \text{tg } \theta > 0 \quad \forall u > \bar{S}_{1M}, \\ & , f(u_1) \geq f(u_2) \quad \forall u_1 \geq u_2 \in [\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}] \end{aligned}\}$$

El operador de observación que usaremos está definido por:

$$(2.21)1 \quad e = (e_1, e_2)$$

$$(2.21)2 \quad e_1(u) = u(\underline{x}), \quad x \in ]0, L[$$

$$(2.21)3 \quad e_2(u) = \phi^1(u)$$

es decir,  $C_1$  mide la saturación del agua en el punto del tubo y  $C_2$  el flujo de agua en  $x = L$ .

Por último, falta hacer explícita la forma de  $J$ :

$$(2.22)1 \quad J(u) = \lambda_1^2 \|e_1(\underline{u}) - \hat{z}_1\|_{H_1}^2 + \lambda_2^2 \|e_2(\underline{u}) - \hat{z}_2\|_{H_2}^2$$

$$(2.22)2 \quad H_1 = L^2(V_T, [\bar{s}_{1m}, \bar{s}_{1M}])$$

$$(2.22)3 \quad H_2 = L^2(V_T; ]0, \infty[)$$

$$(2.22)4 \quad V_T = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, \tilde{N}\Delta t\}$$

donde  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  han sido introducidos por conveniencia.

De esta manera, nuestro problema de identificación puede enunciarse así:

$$(10) \text{ Trouver } \underline{u} \in U_{ad} \text{ tel que } J(\underline{u}) = \min_{\underline{u} \in U_{ad}} J(\underline{u}).$$

$$\forall \underline{u} \in a_{ad}."$$

.3) Discretización e Identificabilidad

Para poder solucionar (Id) numéricamente debemos discretizarlo.

Definamos  $\bar{S}_i = \bar{S}_{1m} + ih, i = 0, 1, \dots, n$  donde  $h = (S_{1M} - S_{1m})/n$ ; tomamos los siguientes espacios aproximantes:

$$(2.23)1 \quad a_{\alpha h} = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f'(u) = 0 \quad \forall u \in ]\bar{S}_{1m}, S_{1M}[ \\ , f|_{] \bar{S}_i, \bar{S}_{i+1}[} \in P^1; i = 0, 1, \dots, n-1, \\ f_i \leq f_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n-1\}$$

$$(2.23)2 \quad a_{\beta h} = \{f \in C^0(\mathbb{R}) \mid f'(u) = 0 \quad \forall u < \bar{S}_{1m} \\ f'(u) = \text{tg } \theta > 0 \quad \forall u > \bar{S}_{1M}, \\ f|_{] \bar{S}_i, \bar{S}_{i+1}[} \in P^1; i = 0, 1, \dots, n, \\ f_i \leq f_{i+1}; i = 0, 1, \dots, n\}$$

es claro que la aproximación es interna, ya que  $(a_{\alpha h} \times a_{\beta h}) = a_{\text{ad}.h} \subset a_{\text{ad}}$ .

figura 2.7

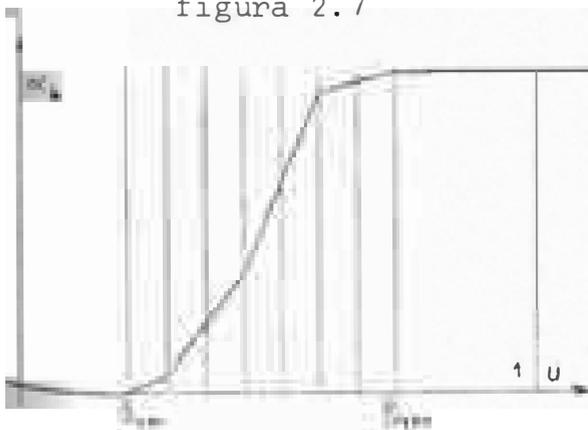
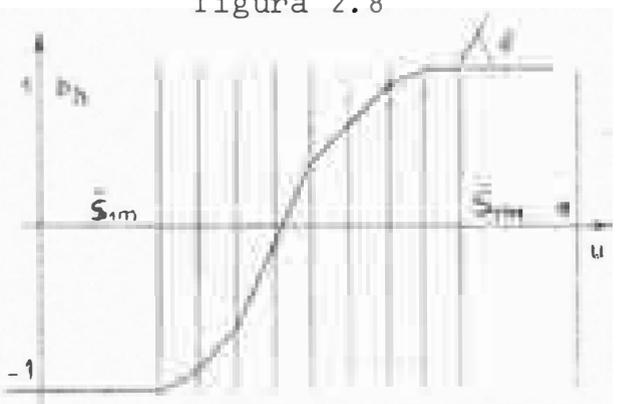


figura 2.8



De esta manera, el problema de identificación discretizado puede enunciarse así:

$$(Id)_h \text{ "Hallar } \underline{\alpha}_{ad,h} \text{ tal que } J(\underline{\alpha}_h, \underline{C}_h) \approx J(\underline{\alpha}^*, \underline{C}_h) \text{,}$$

$$\forall \underline{\alpha}_h \in a_{ad,h} \text{."}$$

El problema de conocer si  $\underline{\alpha}_h^*$  está cerca de  $\alpha^*$ , y si dicha diferencia es estable frente a perturbaciones de los datos, se llama el problema de Identificabilidad. Ningún resultado teórico existe en relación a la existencia de la solución del problema planteado, de manera que nos restringiremos a estudiar los resultados numéricos. Sin embargo, podemos hacer un pequeño análisis cualitativo.

Definamos:

$$Q_i = \{(x,t) \in Q : u_h(x,t) \in ]\bar{S}_i, \bar{S}_{i+1}[ \} \quad i=0,1,\dots,n-1$$

es de esperar que la identificabilidad de  $\underline{\alpha}^*$  ( $\bar{S}_i$ ),  $\alpha^*$  ( $\bar{S}_{i+1}$ ) sea mayor cuanto mayor sea la medida de  $C(u_h(Q_i))$ : si  $m(C(u_h(Q_i))) = 0$  (lo que puede ser causado por una discontinuidad de  $u_h$ ) entonces los valores de  $\underline{\alpha}$  sobre  $]\bar{S}_i, \bar{S}_{i+1}[$  no influyen en  $u_h$  y de esta forma es difícil pensar que puedan ser identificados. De esta manera, según los resultados numéricos 2.3), esperamos que las partes de  $\alpha$  más identificables sean aquellas definidas sobre los intervalos  $].15, .20]$  y  $].45, .63]$  aproximadamente.

En Chavent (6) puede encontrarse algunas definiciones de identificabilidad, así como una revisión de los resultados teóricos y numéricos que existen sobre los principales tipos de ecuaciones en derivadas parciales.

El problema  $(Id)_h$  es un problema de minimización sobre un subconjunto convexo de  $R^{2n}$ . Sería muy conveniente si pudiéramos obtener una expresión para el gradiente de  $J$ , o equivalente, para la variación de  $J$ ,  $\delta J$ . Para poder hacer esto debemos asegurarnos que  $\delta u_h$  está bien definida, este problema lo resolveremos en la sección 4). En la sección 5) usaremos un Lagrangiano para hallar  $\delta J$ .

#### .4) Penalización de la Ecuación de Estado

Para hallar el espacio de variaciones admisibles para  $\underline{u}_h$  basta tener en cuenta (2.11) (definición de  $V_h$ ), (2.12) (definición de  $Q_h$ ) y las condiciones (2.14)3, (2.14)4 y (2.14)5. Vemos inmediatamente que la condición unilateral (2.14)4 no permite una correcta definición de  $\delta \underline{u}_h$ .

Para cambiar la condición unilateral por una condición que permita definir  $\delta \underline{u}_h$  seguiremos los siguientes pasos:

- (1) Hallamos la formulación variacional de (2.14)
- (2) Penalizamos la desigualdad variacional, relajando la condición  $u_s \leq \bar{S}_{1M}$ .

(3) A partir de esta desigualdad variacional hallamos el problema de evolución asociado que es el que buscamos.

Estos mismos pasos pueden realizarse para el problema (2.9), esto simplifica los cálculos y no introduce alteración alguna en los resultados.

Paso (1)

La formulación variacional de (2.9) es:

"Hallar  $u$  tal que:

$$(2.24)1 \quad \int_0^L \Phi \frac{\partial u}{\partial t} (v-u) + \int_0^L (q-\theta_1) \frac{\partial}{\partial x} (v-u) + q(t)(v(L)-u(L,t)) \leq 0$$

$$\forall v \in V \cap K, u(\cdot, t) \in V \cap K; \forall t \in [0, T]$$

$$(2.24)2 \quad V = \{v \mid v \in H^1(]0, L[), v(0) = \bar{S}_{1M}\}$$

$$(2.24)3 \quad K = \{v \mid v(L) \leq \bar{S}_{1M}\}$$

$$(2.24)4 \quad u(\cdot, 0) = u(\cdot) \in [\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}], u_0 \in V."$$

Mostremos que si  $u$  soluciona (2.24) entonces soluciona (2.9).

Integrando por partes en (2.24)1 obtenemos:

$$\int_0^L \left( \Phi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( (q-\theta_1) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + q(t) \right) (v-u) \leq 0$$

$$\forall v \in V, \forall t \in ]0, T[$$

Si escogemos  $v(L) = u(L,t)$ , para  $t$  fijo,  $v-u \in H^1(]0,L[)$ , como  $C_0^\infty(]0,T[)$  es denso en dicho espacio obtenemos  $\phi \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \phi_1 = 0$  ctp. Q. Si  $u$  es la solución de esta ecuación, la desigualdad anterior se convierte en:

$$\phi_1(L,t) (v(L) - u(L,t)) \leq 0 \quad \forall v \in V \cap K, \forall t \in ]0,T[$$

cuando  $u(t, L) = \bar{S}_{1M}$ , (2.24)3 indica que  $\phi_1(L,t) \geq 0$ ; cuando  $u(t, L) < \bar{S}_{1M}$ , necesariamente  $\phi_1(L,t) = 0$ . De esta manera obtenemos la condición unilateral (2.9)4. La condición (2.9)3 está contenida en (2.24)1 y (2.24)2, (2.24)4 es la condición (2.9)5. Esto demuestra lo dicho.

### Paso (2)

Penalicemos ahora la desigualdad variacional. Observemos cómo gracias a que asumimos que  $v \in K(v(L) \leq \bar{S}_{1M})$ , hemos podido obtener la condición unilateral. Vamos a relajar esta condición al mismo tiempo que introducimos un operador de penalización,  $P_\epsilon$ , siguiendo a Chavent y Cohen (1), tomamos:

$$P_\epsilon(v) = \frac{1}{\epsilon} ((v(L) - \bar{S}_{1M})^+)^3$$

de manera que  $P_\epsilon(v) = 0$  si y solo si  $v(L) < \bar{S}_{1M}$ .

El problema variacional penalizado es:

"Hallar  $u_\epsilon$  tal que:

$$(2.25)1 \quad \int_0^L \left( \phi \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon (v-u_\epsilon) + (q-p'_\epsilon) \frac{\partial}{\partial x} (v-u_\epsilon) + \right. \\ \left. + (q-p'_\epsilon(u_\epsilon))(v(L)-u_\epsilon(L,t)) \right) \leq 0 \\ \forall v \in V((2.24)2), u(\cdot, t) \in V; \forall t \in ]0, T[$$

$$(2.25)2 \quad u_\epsilon(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in [\bar{S}_{1m}, \bar{S}_{1M}], u_0 \in V$$

Paso (3)

Sólo nos debemos ocupar de lo relativo a la condición que reemplazará a (2.9)4. Haciendo lo mismo que en el paso (1) obtenemos:

$$(\phi_1(L,t) - P'_\epsilon(u_\epsilon))(v(L) - u_\epsilon(L,t)) = 0 \quad \forall v \in V, \\ , \forall t \in ]0, T[$$

$$\forall t \in ]0, T[$$

De esta manera, el problema diferencial asociado a (2.25) es el siguiente:

"Hallar  $u$  tal que:

$$(2.26)1 \quad \phi \frac{\partial}{\partial t} u_\epsilon + \frac{\partial}{\partial x} r + q(t) \frac{\partial}{\partial x} b(u_\epsilon) = 0 \text{ sobre } Q$$

$$(2.26)2 \quad \phi_1(L,t) = \frac{\partial}{\partial x} b(u_\epsilon) \text{ sobre } \Sigma$$

$$u_{\epsilon 0}(t) = \bar{S}_{1M} \quad \forall t \in ]0, T[$$

$$(2.26)4 \quad \phi_1(L,t) = \frac{1}{\epsilon} ((u_{\epsilon S}(t) - \bar{S}_{1M})^+)^2 \quad \forall t \in ]0, T[$$

$$(2.26)5 \quad \underline{u}_\varepsilon^k(x, t) = \underline{u}_0^k(x) + [\bar{S}_{1M} - \bar{S}_{1M}^*] \alpha(x) \phi_{1h}^k$$

Si comparamos (2.9) y (2.26) vemos que la única diferencia está en las condiciones (2.9)4 y (2.26)4. Lo mismo ocurre con la ecuación de estado (2.14) y la ecuación de estado penalizada que está formada por (2.14)1, 2, 3, 5, 6 y la condición

$$(2.14)'4 \quad \phi_{1h}^k = \frac{1}{2\varepsilon} ((u_{\varepsilon s}^k - \bar{S}_{1M})^+)^2 \quad k = 0, 1, \dots, \bar{N}$$

denotaremos por  $\underline{u}_{\varepsilon h}$  a la solución de esta ecuación.

Es muy fácil modificar el algoritmo que usamos para resolver (2.14), ver 1.4) del anexo E, para obtener un algoritmo que solucione (2.26). Por otra parte, la única diferencia entre  $\underline{u}_h$  y  $\underline{u}_{\varepsilon h}$  está en  $u_s^k$  para  $k > \frac{T_{hR}}{t}$ .

La influencia de  $u_s^k$  en  $\underline{u}_h^k$  y la de  $u_{\varepsilon h}^k$  en  $\underline{u}_{\varepsilon h}^k$  es exactamente la misma, esto es claro si  $u_{\varepsilon s}^k \leq \bar{S}_{1M}$ ; si  $u_{\varepsilon s}^k > \bar{S}_{1M}$ , por (2.16)1  $\alpha(u_{\varepsilon s}^k) = \alpha(\bar{S}_{1M}) = \alpha(u_s^k)$  ver (2.14)2, en este caso (2.14)'4 se usa para hallar  $u_{\varepsilon s}^k$ . Es muy fácil ver que  $\underline{u}_{\varepsilon h} \rightarrow \underline{u}_h$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

#### .5) La Variación de J

El problema de Identificación sobre el que trabajamos ahora puede enunciarse así:

$$(Id)_{\epsilon h} \quad \text{"Hallar } \underline{u}_h \in a_{ad.h} \text{ tal que } J(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{\alpha}_h) \leq J(\underline{u}_h, \underline{\alpha}_h) \\ \forall \underline{\alpha}_h \in a_{ad.h} \text{"}$$

Observamos que si  $C(\underline{u}_{\epsilon h}) = C(\underline{u}_h)$ , es decir:  $C$  no involucra a  $u_\epsilon$ , entonces  $(Id)_{\epsilon h} = (Id)_h$ .

El espacio de variaciones admisibles para  $\underline{u}_{\epsilon h}$ , que denotaremos por  $\delta V_{\epsilon h}$  está caracterizado de la siguiente manera:

$$(2.27)1 \quad \delta \underline{u}_{\epsilon h} \in \delta V_{\epsilon h} \cap \delta Q_{\epsilon h}$$

$$(2.27)2 \quad \delta v_{\epsilon h}^K = \{v_{\epsilon h}^K \mid v, K = 0, 1, \dots, \tilde{N}, \text{ (por (2.11))},$$

$$, v_e = 0 \text{ (por (2.14)3),}$$

$$, v^0 = 0 \text{ (por (2.14)5),}$$

$$, q_N^{K, \bar{K}} (v(L^-) + \delta r_N = \frac{1}{\epsilon} (u_S^K - \bar{S}_{1M})^+ v_S, K=0, 1, \dots, \tilde{N} \\ \text{(por (2.14)'4)})$$

$$(2.27)3 \quad \delta Q_{\epsilon h} = Q_{\epsilon h} \quad \text{(por (2.12)).}$$

Ahora vamos a hallar  $\delta J$ . Para esto introducimos el siguiente Lagrangiano:

$$(2.28)1 \quad \alpha(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{p}_h, \underline{\alpha}_h) = J(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{\alpha}_h) + R_1(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{p}_h; \underline{\alpha}_h) + \\ + R_2(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{p}_h; \underline{\alpha}_h)$$

$$(2.28)2 \quad J(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{\alpha}_h) = \lambda_1^2 \int_0^T (C_1(\underline{u}_{\epsilon h}^K) - \hat{Z}_1)^2 + \\ + \lambda_2^2 \int_0^T (C_2(\underline{u}_{\epsilon h}^K) - \hat{Z}_2)^2$$

$$(2.28)3 \quad \int_{\Omega} \left( \sum_{K=0}^{\tilde{N}} r_h^K \frac{\partial}{\partial x} p_h^K + q^K \{ b_{i+1}^{-K} p_{i+1}^{-K} - b_i^{-K} p_i^{+K} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} b_h^K \frac{\partial}{\partial x} p_h^K \} \right) dx$$

$$(2.28)4 \quad R_2(\underline{u}_{\epsilon h}, \underline{p}_h, \underline{\alpha}_h) = \int_0^T \left\{ \int_0^L \left( \sum_{K=0}^{\tilde{N}} r_h^K \theta_h^K - \sum_{K=0}^{\tilde{N}} \theta_h^K \frac{\partial}{\partial x} \theta_h^K \right) dx \right. \\ \left. - \sum_{K=0}^{\tilde{N}} \theta_h^K \theta_h^K \right\}$$

donde hemos usado la siguiente notación para facilitar la escritura:

$$(2.29) \quad \int_0^T r^K = \sum_{K=0}^{\tilde{N}} r^K$$

de (2.11), (2,12) es claro que:

$$(2.30)1 \quad \underline{p}_h = (p_h^K, \theta_h^K)$$

$$(2.30)2 \quad p_h^K \in V_h, \quad K = 0, 1, \dots, \tilde{N}$$

$$(2.30)3 \quad \theta_h^K \in Q_h, \quad K = 0, 1, \dots, \tilde{N}.$$

Es claro que  $J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h)) = J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h), \alpha_h)$  de manera que:

$$(2.31) \quad \frac{d}{d\alpha} J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h), \alpha_h) = \frac{d}{d\alpha} J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h), \alpha_h)$$

ya que  $\frac{d}{d\alpha} J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h), \alpha_h) = \frac{d}{d\alpha} J(\underline{u}_{\epsilon h}(\alpha_h), \alpha_h)$ .

En el caso general tenemos:

$$\delta J = \frac{\partial L}{\partial u_{\epsilon h}} \delta u_{\epsilon h} + \frac{\partial L}{\partial p_h} \delta p_h + \frac{\partial L}{\partial \alpha_h} \delta \alpha_h$$

Cuando  $u_{\epsilon h} = u_{\epsilon h}(\alpha_h)$ ,  $\delta u_{\epsilon h}$  está dado por (2.27); por otra parte  $\delta p_h$ , en vista de (2.3) está dado por:

$$(2.32) \quad \delta p_h^K \in V_h \times Q_h \quad K = 0, 1, \dots, \tilde{N}$$

Si exigimos:

$$(2.33)1 \quad \frac{\partial L}{\partial u_{\epsilon h}} \delta u_{\epsilon h} = 0 \quad \forall \delta u_{\epsilon h}, u_{\epsilon h} = u_{\epsilon h}(\alpha_h)$$

(Ecuación Adjunta)

$$(2.33)2 \quad \delta p_h^K \in V_h \times Q_h$$

(Ecuación de Estado: (2.14))

entonces tendremos de (2.31):

$$\delta J(u_{\epsilon h}(\alpha_h)) = \frac{\partial L}{\partial \alpha_h} \delta \alpha_h + \sum_{K=0}^{\tilde{N}} (\delta p_h^K \in V_h \times Q_h) \delta \alpha_h$$

donde  $p_h$  es la solución de (2.33)1. Teniendo en cuenta (2.28):

$$(2.34) \quad \delta J = 2 \lambda^2 \int_0^T (\phi_{1h}^K \quad \hat{a}_2^K) q^K \delta b_N^- +$$

$$+ \int_0^T (q^K \sum_{i=0}^{N-1} \{ \delta b_{i+1}^{-K} p_{i+1}^{-K} - \delta b_i^{-K} p_i^{+K} - \int_x^{x_{i+1}} \delta b_h^K \frac{\partial p_h}{\partial x} \}) +$$

$$+ \int_0^T \int_0^L (- \frac{\partial \theta_h^K}{\partial x} \delta \alpha_h^K) - \delta \alpha_0^K \theta_0^K + \delta \alpha_S^K \theta_N^K$$

Inmediatamente obtenemos el gradiente de J,  $\nabla J$ :

$$(2.35)1 \quad \delta J = \nabla J [\delta \underline{a}_h]$$

$$(2.35)2 \quad \|\delta \underline{a}_h\|^2 = \|\delta a_{h1}\|^2 + \|\delta a_{h2}\|^2 + \dots + \|\delta a_{hn}\|^2$$

$$(2.35)3 \quad \|\delta a_{hi}\|^2 = (\delta a_{hi}(\bar{S}_0), \delta a_{hi}(\bar{S}_0) + \delta a_{hi}(\bar{S}_1), \dots, \delta a_{hi}(\bar{S}_n))$$

$$(2.35)4 \quad [\delta b_h]^T = (\delta b_h(\bar{S}_0), \delta b_h(\bar{S}_1), \dots, \delta b_h(\bar{S}_n))$$

$$(2.35)5 \quad \nabla J = \sum_{h=1}^n \delta b_h \delta a_{hi}$$

En el anexo F se ha hecho del cálculo de la Ecuación Adjunta, en el anexo G se particulariza dicha ecuación a los casos  $l = 0$ ,  $l = 1$  y en el anexo H se calcula  $\delta J$ .

Para resolver  $(Id)_{\epsilon h}$  se ha usado un algoritmo de direcciones conjugadas de Fletcher y Reeves, descrito en el anexo I.

## 2.5 Resultados Numéricos

### .1) Introducción

En esta sección solucionamos numéricamente  $(Id)_{\epsilon h}$ .

Primero vamos a hablar sobre los esquemas numéricos empleados (el esquema (G.4) y el algoritmo de Fletcher y Reeves descrito en el anexo I). Un problema de gran importancia con respecto al algoritmo citado, es el

de determinar el parámetro inicial  $\lambda^0$ , una buena elección hará posible una rápida convergencia. Las ecuaciones (2.36) dan un criterio que ha dado buenos resultados.

Hemos cambiado el valor de la longitud  $L$ , reduciéndola a su cuarta parte. Esto reduce considerablemente el TCPU usado. Además, cuando se soluciona  $(Id)_{\epsilon h}$  tomando  $C(\underline{u}_{\epsilon h}) = \phi_h^1$ , para  $t < T_{hR}$  no existe ninguna información.

Finalmente, lo que vamos a hacer es ver qué tan indistinguible numéricamente es nuestra función  $\underline{\alpha}_h$ . (Esto significa, establecer una relación entre la función con la que hemos producido los datos "observados",  $\underline{\alpha}_{hv}$ , y la función identificada (por nuestro algoritmo),  $\underline{\alpha}_{hid}$ . Es claro que esta relación no solo depende de la identificabilidad de  $\underline{\alpha}$ , sino también de los parámetros de discretización y del algoritmo de Fletcher y Reeves usado). Para hacer estos vamos a observar cómo se va minimizando la funcional  $J$  y al mismo tiempo, cómo va cambiando la función identificada en relación a la verdadera.

A pesar que el programa construido puede tratar de identificar  $\alpha_h$  y  $b_h$  a la vez hemos creído conveniente estudiar la identificación de estas funciones por separado. De esta manera, vamos a considerar cuatro pasos, ya que cada vez usaremos como observaciones a  $\phi_h^1$  y luego a  $u_{\epsilon h}(\underline{x})$ . ( $\phi_h^1 = \phi_{1h}(\cdot, x_N)$ ).

.2) Los Esquemas Numéricos

.2.1) El Esquema (G.4)

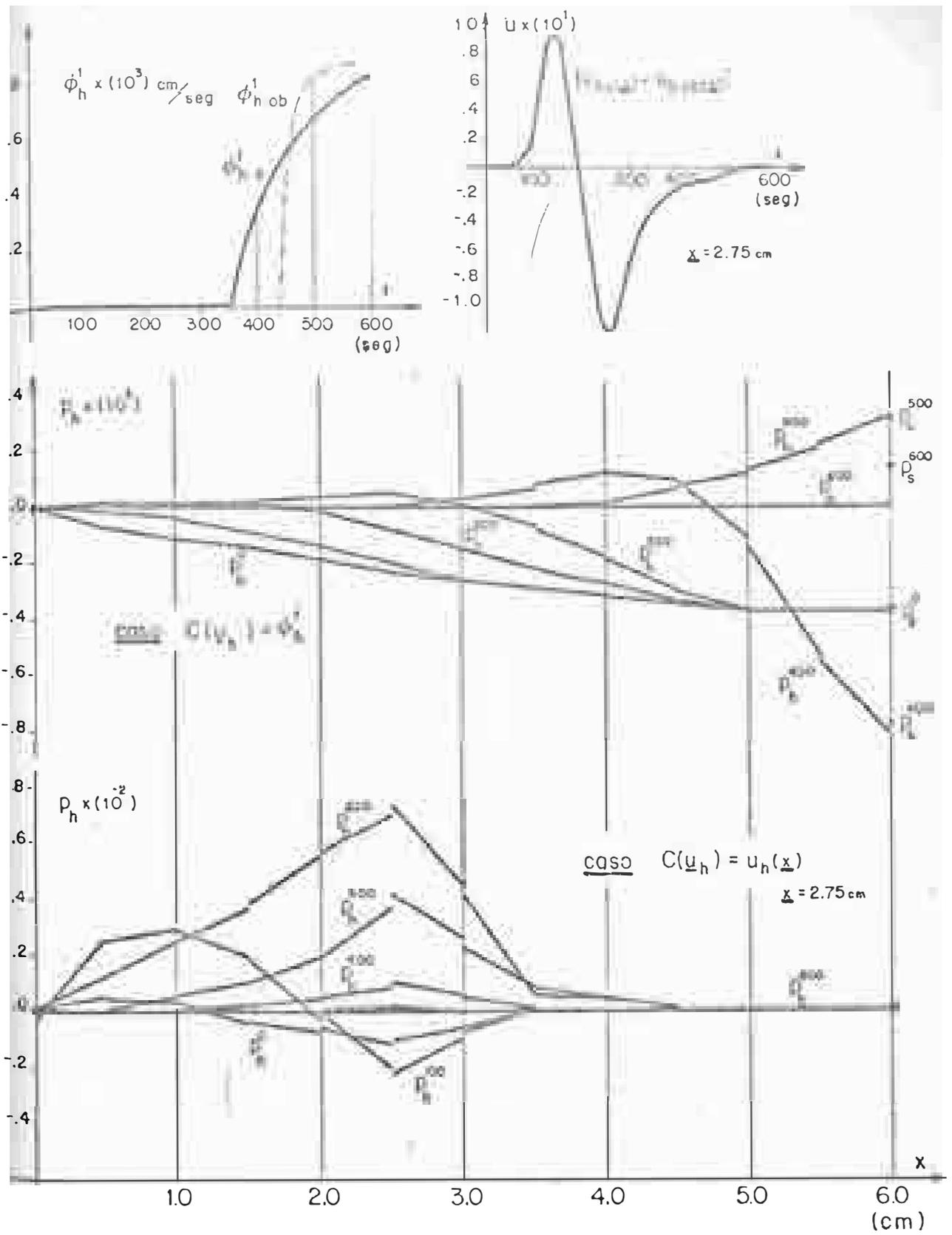
Las ecuaciones (G.4)1 y (G.4)2 ponen en evidencia que podemos escribir (G.4) como una ecuación (matricial) en diferencias, lineal, de primer orden y de coeficientes variables. Los coeficientes dependen de la función  $\underline{u}_{\varepsilon h}$  hallada en (E.15).

Lamentablemente (G.4) y (E.15), no pueden resolverse simultáneamente, lo que disminuiría apreciablemente el TCPU, ya que mientras que  $K$  va de 0 a  $\tilde{N}$  en (E.15), en (G.4) va de  $\tilde{N}$  a 0.

Es razonable esperar que los parámetros de discretización con los que (E.15) es estable, sirvan para garantizar la estabilidad de (G.4). Esto no lo han negado los experimentos realizados.

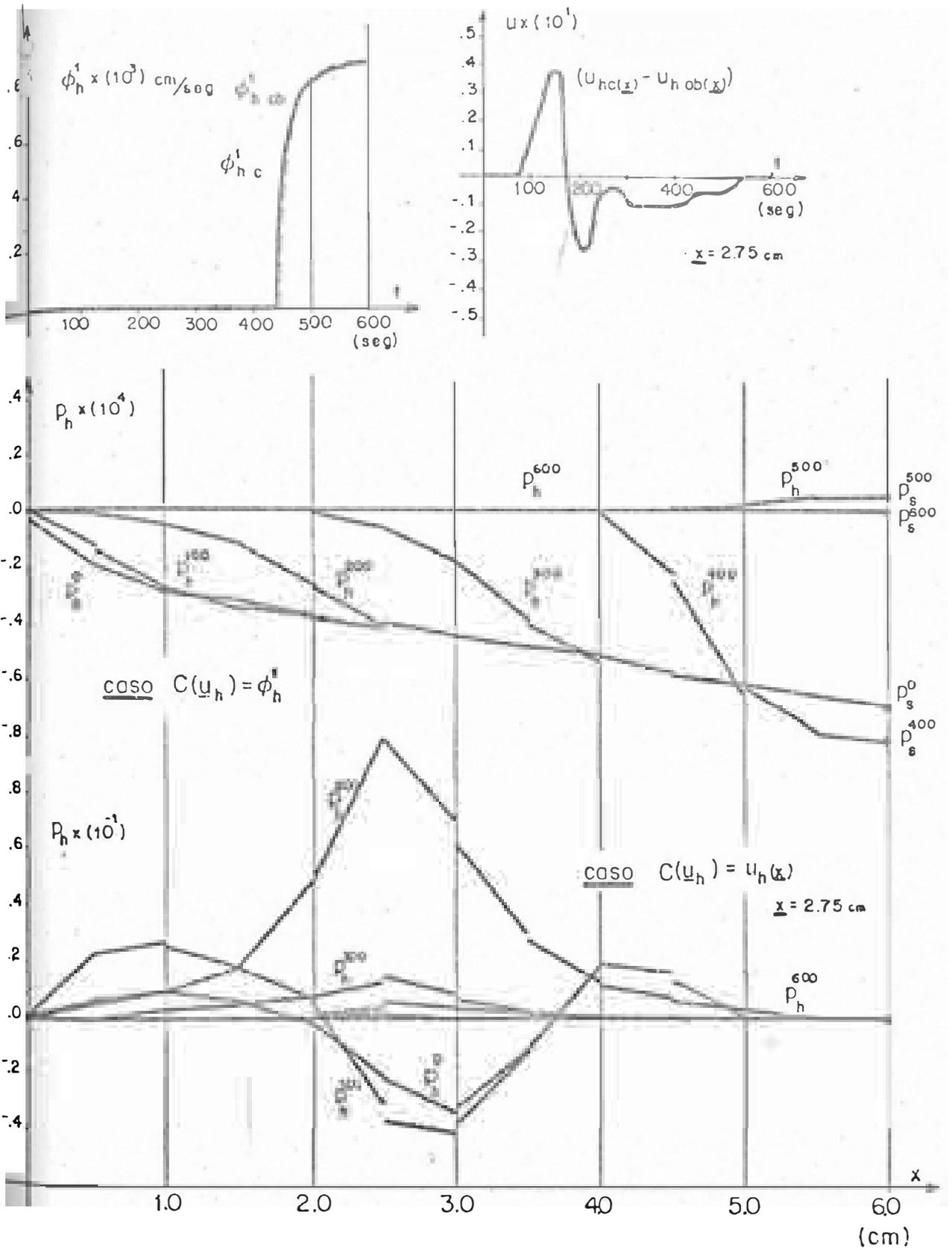
Por otra parte, el significado de  $p_h$  está íntimamente ligado a las observaciones  $C(\underline{u}_{\varepsilon h})$ , como puede verse en (G.4)1 y (G.4)4.

En el caso de tomar  $\lambda_1 = 0$ , o equivalentemente  $C(\underline{u}_{\varepsilon h}) = \phi_h^1$ , es fácil ver ((G.4)4) que  $p_h \equiv 0$  si y solo si  $p_s \equiv 0$ . En caso contrario las variaciones de  $p_s^K$  se "propagarán" hacia la izquierda en  $]0, L[$  conforme  $K$  disminuya. Esto puede verse en las figuras 2.9 y 2.10, obsérvese cómo (G.4)4 se cumple, comparando  $p_s^K$  y  $(\phi_{hc}^{1K} - \phi_{h\text{ob.}}^{1K})$  para  $K\Delta t > T_{hR}$ .



EVOLUCION DE  $p_h$  IDENTIFICACION DE  $b_f$ .

figura 2.9



EVOLUCION DE  $p_h$  IDENTIFICACION DE  $\alpha_f$ .

figura 2.10

En caso de tomar  $\lambda_2 = 0$ , o sea  $C(\underline{u}_{\epsilon h}) = u_{\epsilon h}(\underline{x})$ ,  $p_h = 0$  si y solo si  $p_i^t \equiv 0$  y  $p_{i+1}^- \equiv 0$ . De no ser así, las variaciones se propagarán tanto hacia la izquierda como hacia la derecha de  $\underline{x}$  (ver (G.3)3), como puede apreciarse en las figuras 2.9 y 2.10.

### .2.2) El Algoritmo de Fletcher y Reeves

Este es un algoritmo de direcciones conjugadas (ver Blum (1)). Es de esperar que si tenemos una buena aproximación de un mínimo local de  $J$ , este algoritmo converge rápidamente al punto buscado puesto que se minimiza la aproximación cuadrática (y estrictamente convexa) de  $J$  en, a lo sumo,  $n$  iteraciones, siendo  $n$  el número de variables de  $J$ .

Como hemos dicho, un punto importante es la elección de  $\lambda^0$ . Una vez hecho esto los sucesivos  $\lambda^k$  se hallan usando el algoritmo de dicotomía e interpolación parabólica descrito en el anexo I. (En el programa hemos exigido que los pasos (3) y (4) no se repitan más de 4 veces). El criterio usado para elegir  $\lambda^0$  está expresado en las siguientes ecuaciones:

$$(2.36)1 \quad \lambda^0 = (\text{var}(\underline{\alpha}_h) \parallel \nabla J \parallel_{\infty}^{-1}) \tilde{\theta}$$

$$(2.36)2 \quad \tilde{\theta} \in \mathbb{R}^t \quad (\text{ver tabla N}^\circ 9)$$

$$(2.36)3 \quad \text{var}(\underline{\alpha}_h) \text{ es la variación de la función identificada } \underline{\alpha}_h.$$

$$(2.36)4 \quad ||x||_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

La forma de  $\lambda^{\circ}$  ha sido sugerida por los pasos (1) y (2.2) del algoritmo usado, según estos pasos tenemos  $\lambda^{\circ} = ||\nabla \underline{\alpha}_h||_{\infty} ||\nabla J||_{\infty}^{-1}$ . Finalmente  $\tilde{\theta}$  es un estimado de la fracción  $||\Delta \alpha_h||_{\infty} / \text{var}(\alpha_h)$ . (Muy pocas pruebas han bastado para encontrar valores de  $\tilde{\theta}$  adecuados, como se verá más adelante). Cuando identificamos la función  $b_h$ , es claro que siempre tendremos  $\text{var}(b_h) = 2$ . Cuando identificamos  $\alpha_h$ , podemos tomar  $\text{var}(\alpha_h) = \text{var}(\alpha_{h \text{ in.}})$  donde  $\alpha_{h \text{ in.}}$  es la aproximación inicial.

### .3) Los Datos

Con respecto a los datos usados para resolver (E.15), ver (2.3.4), las únicas variaciones introducidas son las siguientes:

$$\begin{aligned} L &= 6 \text{ cm} \\ T &= 600 \text{ seg} \\ N_x &= 12 \\ N_T &= 300 \end{aligned}$$

Con estos datos tenemos:

$$a_1 = 37.00, a_2 = 1.24, a_3 = 29.96 \quad (\text{ver } 2.3.4)$$

$$a_{1h} = 17.76, a_{2h} = 0.0496, a_3 = 358. \quad (\text{ver tabla N}^{\circ} 3)$$

#### .4) Los Resultados Numéricos

En cada uno de los cuatro casos estudiados lo que se ha hecho es:

(1) Hallar un  $\theta$  que logre una alta eficacia del algoritmo.

(2) Establecer el número de iteraciones al cabo de las cuales podamos estar seguros de obtener resultados satisfactorios.

Para medir la eficacia del algoritmo en la iteración número  $i$ , hemos definido la siguiente función:

$$(2.37)1 \quad ef(i) = (J_{i-1} - J_i) / (J_{i-1} \cdot TCPU_i) \quad i >$$

(2.37)2  $J_{i-1}$  es el valor de  $J$  antes de efectuarse la iteración  $i$ .

(2.37)3  $TCPU_i$  es el tiempo de CPU que dura la iteración  $i$ .

Denotaremos por  $(\phi_h^-, b_h)$  al problema  $(Id)_{\epsilon, n}$  en el que usando como observación  $\phi_h^1$  queremos identificar  $b_h$ ; etc.. En lo que sigue, presentamos los resultados obtenidos con los mejores valores de  $\theta$  encontrado, dejamos para 4.3) la discusión de cómo se hallaron dichos valores (ver tabla N<sup>o</sup> 9).

.4.1) Minimización de J

En las tablas 6, 7 y 8 mostramos la evolución de J, TCPU y ef para las 5 primeras iteraciones:

Tabla N° 6  
Evolución de J

| h°iter | $(\phi_h^1, b_h)$ | $(\phi_h^1, \alpha_h)$ | $(u_h(x), b_h)$ | $(u_h(\underline{x}), \alpha_h)$ |
|--------|-------------------|------------------------|-----------------|----------------------------------|
|        | .78 $10^{-5}$     | .18 $10^{-5}$          | .63 $10^0$      | .61 $10^{-1}$                    |
| 1      | .45 $10^{-5}$     | .28 $10^{-6}$          | .40 $10^0$      | .21 $10^{-1}$                    |
| 2      | .29 $10^{-7}$     | .13 $10^{-6}$          | .21 $10^{-1}$   | .19 $10^{-1}$                    |
| 3      | .21 $10^{-7}$     | .11 $10^{-6}$          | .62 $10^{-2}$   | .15 $10^{-1}$                    |
|        | .39 $10^{-8}$     | .10 $10^{-6}$          | .55 $10^{-2}$   | .09 $10^{-1}$                    |
| 5      | .36 $10^{-8}$     | .10 $10^{-6}$          | .76 $10^{-3}$   | .09 $10^{-1}$                    |

Tabla N° 7  
Evolución de TCPU (Seg)

| h°iter | $(\phi_h^1, b_h)$ | $(\phi_h^1, \alpha_h)$ | $(u_h(\underline{x}), b_h)$ | $(u_h(\underline{x}), \alpha_h)$ |
|--------|-------------------|------------------------|-----------------------------|----------------------------------|
| 1      | 98                | 130                    | 117                         | 137                              |
| 2      | 98                | 108                    | 118                         | 72                               |
| 3      | 118               | 125                    | 90                          | 103                              |
| 4      | 146               | 94                     | 81                          | 89                               |
| 5      | 88                | 172                    | 119                         | 90                               |

Tabla N° 8  
Evolución de ef ( $10^{-3} \text{ seg}^{-1}$ )

| h°iter | $(\phi_h^1, b_h)$ | $(\phi_h^1, \alpha_h)$ | $(u_h(x), b_h)$ | $(u_h(\underline{x}), \alpha_h)$ |
|--------|-------------------|------------------------|-----------------|----------------------------------|
| 1      | 4.32              | 6.48                   | 3.12            | 4.72                             |
| 2      | 3.63              | 4.97                   | 8.05            | 1.33                             |
| 3      | 8.42              | 1.23                   | 7.84            | 2.05                             |
| 4      | 5.58              | 0.97                   | 1.39            | 4.49                             |
| 5      | 0.15              | 0.06                   | 7.25            | 0.37                             |

En la figura 2.7 puede apreciarse las aproximaciones iniciales:  $(b_h \text{ in.}, \alpha_h \text{ in.})$  usadas, así como las funciones halladas al cabo de la 5ta. iteración:  $(b_h \text{ id.}, \alpha_h \text{ id.})$  y las funciones verdaderas:  $(b_{hv}, \alpha_{hv})$ .

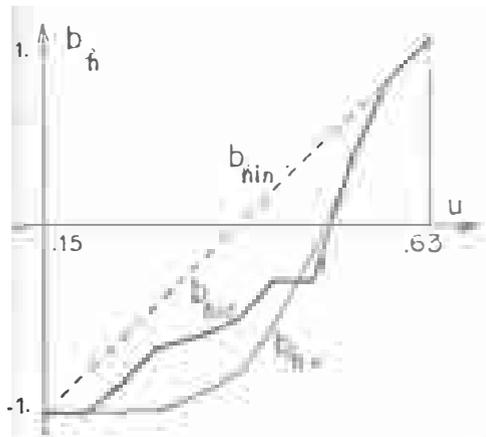
Tomando  $J_5/J^0$  ( $= J_{id}/J_{in}$  en la figura 2.7) se ve claramente que el algoritmo minimiza mejor cuando usamos  $C(\underline{u}_{\epsilon h}) = \phi_h^1$ .

Por otra parte, las eficiencias son mejores cuando identificamos  $b_h$ . Esto es reflejo del hecho que estamos usando una velocidad de inyección alta, lo que hace que el proceso de difusión sea despreciable en relación al de convección y así  $\alpha_h$  tenga poca influencia en la solución

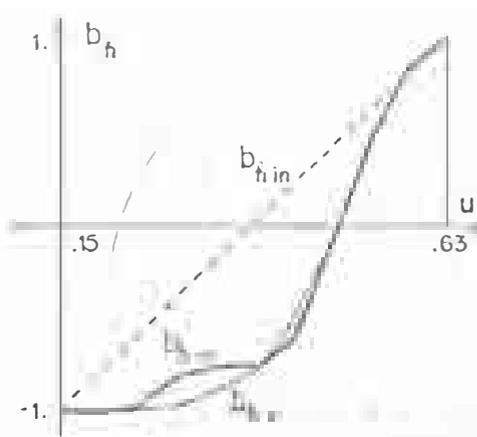
### 1.2) Identificabilidad Numérica

Qué grado de identificabilidad podemos lograr al resolver  $(Id)_{\epsilon h}$ , puede ser observado comparando los ejercicios del algoritmo con las variaciones de la función identificada en relación a la función verdadera.

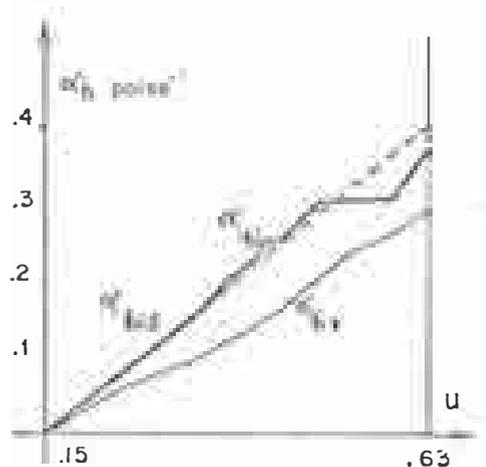
Si nuestra función es identificable numéricamente, es razonable esperar que dado un alto valor de  $\epsilon$ , la función identificada esté bastante más cerca de la función verdadera de lo que estaba antes de empezar la iteración. Sí, por otra parte, dado un alto valor de  $\epsilon$ , la función identificada no se diferencia mucho de su forma en la iteración anterior, entonces podemos concluir que es muy probable que hallamos llegado muy cerca del



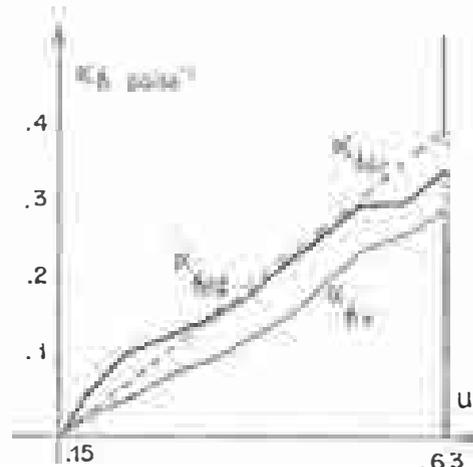
n. iter = 5  
 $J_{in} = .78 (10^{-5})$   
 $J_{id}/J_{in} = .50 (10^{-3})$



n. iter = 5  
 $J_{in} = .63 (10^0)$   
 $J_{id}/J_{in} = .87 (10^{-2})$



n. iter = 5  
 $J_{in} = .18 (10^{-5})$   
 $J_{id}/J_{in} = .55 (10^{-3})$



n. iter = 5  
 $J_{in} = .61 (10^1)$   
 $J_{id}/J_{in} = .14 (10^0)$

caso  $C(u_h) = \phi_h^1$

caso  $C(u_h) = u_h(x)$   
 $x = 2.75 \text{ cm}$

RESULTADOS DEL PROB. DE IDENTIFICACION

figura 2.11

límite de la sucesión generada por nuestro algoritmo. Finalmente, si luego de algunas iteraciones en las que  $\epsilon_f$  toma valores altos,  $\epsilon_f$  decae bruscamente (por ejemplo, a su décima parte) es muy probable que estemos cerca del límite buscado, o que se necesite un cambio muy importante en la dirección conjugada.

Teniendo en cuenta estos tres tipos de comportamiento que llamaremos tipo A, B, C respectivamente, es posible obtener una idea clara de la identificabilidad numérica en cada uno de los casos considerado.

Es notable que en las 3 primeras iteraciones en cada uno de los casos, se observe un comportamiento tipo A. En el caso  $(\phi_h^1, b_h)$  se observa un comportamiento tipo C, en este caso parece ser que hemos llegado muy cerca del límite buscado. (Comparar con el resultado obtenido por Chavent y Cohen (1), para un número mucho mayor de iteraciones). En el caso  $(\phi_h^1, \alpha_h)$  las iteraciones 4 y 5 son claramente del tipo C, esto indica una mala identificabilidad numérica para  $\alpha_h$ , como era de esperar. En el caso  $(u_{\epsilon h}(x), b_h)$  tenemos claramente una evolución tipo B, y en el caso  $(u_{\epsilon h}(x), \alpha_h)$  tenemos una evolución tipo C.

De esta forma, podemos concluir que  $b_h$  posee una excelente identificabilidad numérica sobre  $[.15, .20] \cup [.45, .63]$  cuando  $C(u_{\epsilon h}) = \phi_h^1$  y sobre  $[.15, .25] \cup [.40, .63]$  cuando  $C(u_{\epsilon h}) = u_{\epsilon h}(x)$ . (En términos de la saturación reducida estas regiones se escriben así:  $[.00, .10] \cup [.63, 1.00]$  y  $[.00, .21] \cup [.52, 1.00]$ ). En cambio  $\alpha_h$  es muy poco identificable.

.4.3) Sobre  $\theta$  y el Número de iteraciones

Hemos observado que a partir de la 5ta. iteración la eficiencia  $ef$ , decaía notablemente en todos los casos estudiados y para distintos valores de  $\theta$ . Es por eso que el número máximo de iteraciones lo hemos hecho igual a 5.

Ahora discutamos lo relativo a  $\theta$ .

Hemos podido observar el siguiente comportamiento:

(1) Cuando  $\theta$  es demasiado pequeño puede ocurrir:

(1.1) Que algún  $\lambda$  salga negativo, lo que hace crecer  $J$  y retarda su minimización.

(1.2) Que los  $\lambda^k$  sean muy pequeños y por tanto la variación de  $J$  sea muy lenta.

(2) Cuando  $\theta$  es demasiado grande puede ocurrir:

(2.1) Que algún  $\alpha_h \notin a_{ad.h}$

(2.2) Que la variación de  $J$  sea muy lenta.

Los valores de  $\theta$  usados para elaborar las tablas N° 6, 7 y 8 son las que se muestran en la tabla N° 9. Los dos primeros valores no requieren mayor comentario; en cambio, parece que los dos siguientes son demasiado grandes.

Tabla N° 9  
Valores de  $\theta$

| $(u_{\epsilon h}(\underline{x}), b_h)$ | $(u_{\epsilon h}(\underline{x}), \alpha_h)$ |
|--|---|
| 0.20                                   | 42.0  |
| 0.47                                   | 4.60  |

En la tabla N° 10, mostramos la evolución de  $ef$  para valores más pequeños de  $\theta$ , en los casos señalados. Ahí puede verse una eficiencia muy pobre (es decir, el caso (1.2)). Además las funciones identificadas están bastante lejos de las halladas con los valores de  $\theta$  de la tabla N° 9.

Tabla N° 10  
Evolución de  $ef$  ( $10^3 \text{Seg}^{-1}$ )

| N° iter | $\tilde{\theta} = 1.3$<br>$(u_{\epsilon h}(\underline{x}), b_h)$ | $\tilde{\theta} = 1.15$<br>$(u_{\epsilon h}(\underline{x}), \alpha_h)$ |
|---------|--|--|
| 1       | 2.64   | 5.82   |
| 2       | 2.52   | 0.49   |
| 3       | 2.31   | 0.64   |
| 4       | 0.02   | 0.03   |
| 5       | 0.22   |  |

Para terminar, queremos hacer notar que cuando tomamos  $\theta = 42.0$ , ocurre el caso (2.1). Lo que se ha hecho es tomar con función identificada no a  $b_h \text{ id.}$  sino a  $\text{Proy}(b_h \text{ id.})$ , donde:

$$(2.38)1 \quad \text{Proy}(b)(x) = b(x), \quad \forall b(x) \in [\bar{S}_{1M}, \bar{S}_{1M}]$$

$$(2.38)2 \quad \text{Proy}(b)(x) = \bar{S}_{1M}, \quad \forall b(x) > \bar{S}_{1M}$$

$$(2.38)3 \quad \text{Proy}(b)(x) = \bar{S}_{1M}, \quad \forall b(x) < \bar{S}_{1M}.$$

Como puede verse en la fig. 2.11, esto ha dado muy buenos resultados.

.5) Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados expuestos anteriormente, podemos concluir que:

(1) No es recomendable usar más de 5 iteraciones en el algoritmo.

Los valores de  $\theta$  de la tabla N° 9, garantizan una buena convergencia del algoritmo, y pueden ser usados para casos en que los parámetros adimensionales  $\varepsilon_1$  y  $a_2$  sean similares a los de 2.5.3).

(2) La identificabilidad numérica de  $b_h$  es excelente sobre  $[.15, .20] \cup [.45, .63]$  cuando  $C(\underline{u}_{\varepsilon h}) = \phi_h^1$  y sobre  $[.15, .25] \cup [.40, .63]$  cuando  $C(\underline{u}_{\varepsilon h}) = u_{\varepsilon h}(\underline{x})$ . Es razonable esperar que para valores similares de  $a_1$  y  $a_2$  las regiones de buena identificabilidad numérica para  $b_h$  sean (en términos de saturación residual)  $[.00, .21] \cup [.52, 1.00]$  y  $[.00, .10] \cup [.63, 1.00]$  respectivamente.

La identificabilidad numérica de  $\alpha_h$  es bastante inferior a la de  $b_h$  para los valores de  $a_1$  y  $a_2$  considerados, como se esperaba.

#### 4. Bibliografía

- (1) J. Bear, Dynamics of Fluids in Porous Media, 1972, American Elsevier.
- (1) M. Benahmed, Ajustement Automatique de la permeabilité et (ou) de la porosité dans un gisement monophasique régi par une équation parabolique quasi-linéaire, I.R.I.A., N° 244, 1977.
- (1) E. Blum, Programación Matemática, N. Escuela Latinoamericana de Matemáticas, 10-21 julio 1979, UNI.
- (1) G. Dahlquist and A. Björck, Numerical Methods, Prentice Hall, Series in Automatic Computation, 1974.
- (1) G. Chavent, Identification of Distributed Parameters, I.R.I.A., BP N° 5-78150, 1973.
- (2) G. Chavent, About the Identification and Modeling of Miscible or Immiscible Displacements in Porous Media, Inf.- LAB. 76033, Roma, 1976.
- (3) G. Chavent, A New Formulation of Diphasic Incompressible Flows in Porous Media, Applications of Methods of Functional Analysis to Problems in Mechanics, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 1976.
- (4) G. Chavent, Identification of Systems: Application to Oil Field Problems, International Center for Theoretical Physics, Autumn Course in Applications of Analysis to Mechanics, 22 Sept-26 Nov, 1976. (TRIESTE, ITALIA).

- (5) G. Chavent, Un Théoreme d'Existence dans une Inéquation Variationnelle Parabolique Dégénéré Modelisant le Déplacement d'un Fluide par un Autre Non-Miscible, I.R.I.A., N° 260, 1977.
- (7) G. Chavent, Mathematical Modelling of Mono and Diphasic Oil on gas Reservoirs, Lecture Notes of a Course given in July 1979 at Petr6leos del Per6.
- (1) G. Chavent and G. Cohen, Numerical Approximation and Identification in a 1-D Parabolic Equation, I.R.I.A., under a research-contract (N° 05/77) between I.R.I.A. and the Institut Francais du P6trole, 1978.
- (2) G. Chavent, M. Dypuy, P. Lemonnier, History Matching by use of Optimal theory, Society of Petroleum Engineers Journal, 1975.
- (1) P.G. Ciarlet, The Finite Element Method for Elliptic Problems, North Holland, 1976.
- (1) T.J. Chung, Finite Element Analysis in Fluid Dynamics, Mc Graw Hill, 1977.
- (1) A.J. Le Roux, Approximation de Quelques Problemes Hyperboliques Non Lin6aires, Tesis de Doctorado, Universidad de Rennes, Abril de 1979.
- (1) P. Lemonnier, G. Chavent, G. Cohen, J. Jaffre, R6cup6ration de P6trole: Simulation du D6placement eau-huile par un M6thode D'El6ments Finis Mixtes, Journ6es de Rencontre Industrie-Recherche sur la Maitrise des Systemes Complexes, 1978.

- (1) P. Lesaint and P.A. Raviart, On a Finite Element Method for Solving the Neutron transport Equations, Symposium on Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, Madison, April 13, 1974.
- (1) J.L. Lions, Equations Differentielles Operationnelles, Springer-Verlag, 1961.
- (2) J.L. Lions, Problemes aux Limites dans les Equations aux Derivées Partielles, Les Presses de L'Université de Montreal, 1965.
- (3) J.L. Lions, Quelques Méthodes de Résolution de Problemes aux Limites Non Linéaires, Dunod Gautier-Villars, 1969.
- (1) C. Marle, Cours de Production - Les Ecoulements Polyphasiques en Milieux Poreux (tome IV), Société des Editions Technip, 1972.
- (1) J.T. Oden and J.N. Reddy, An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements. John-Wiley and Sons, 1976.
- (1) P.J. Roache, Computational Fluis Dynamics, Hermosa Publishers, 1972.
- (6) G. Chavent, Identification of Distributed Parameter Systems: About the output least Square Method, its Implementation and Identifiability IFAC, Darmstad, 1979.