UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

" UN TEOREMA GENERAL Y FLEXIBLE DE MINIMAX "

TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL
DE LICENCIADO EN MATEMATICA

FIDEL JARA HUANCA

LIMA - PERU

1 9 9 2

C O N T E N I D O

INTRODUCCION.

La teoría de dualidad de la programación lineal es muy importante, por las siguientes razones:

1.- Es indudablemente la parte central de la teoría de la programación lineal.

2.- Es una base importante para la construcción de algoritmos (Ejemplos: El algoritmo simplex dual, el algoritmo primal dual).

3.- Las variables duales, tienen interpretaciones económicas precisas y, por ésta razón son indicadores para la planificación económica.

Este éxito de la teoría de dualidad de la programación lineal, ha sido el motivo por el cuál diferentes autores han extendido ésta teoría a problemas no lineales de optimizacion Mencionamos tres enfoques importantes.

1.- La teoría de dualidad de Rockafellar, que perturba un problema primal P de manera precisa, y usa ésta perturbación para construir un problema dual P^*, para estudiar las propiedades del par (P,P^*).

2.- La teoría de dualidad de Fenchel, se basa en las funciones conjugadas.

3.- La teoría de los problemas minimax ó de punto silla. En el presente trabajo se analiza diferentes aspectos del tercer enfoque, donde a una función $\varphi : X \times Y \longrightarrow R$ se asocia un programa primal

$$P : \underset{x \in X}{\text{Mín}} \left\{ \underset{y \in Y}{\text{Sup}} \ \varphi(x,y) \right\}$$

y un programa dual

$$P^* : \underset{y \in Y}{\text{Máx}} \left\{ \underset{x \in X}{\text{Inf}} \ \varphi(x,y) \right\}$$

Para analizar las propiedades del par (P,P^*) en especial las relaciones entre P y P^*.

Un problema clave en éste análisis es el siguiente:

Bajo que condición, existe al menos un punto $(\hat{x},\hat{y}) \in X \times Y$ de modo que $\hat{x}$ es solución de P, $\hat{y}$ es solución de P^*, y se cumple: $\underset{x\in X}{\text{Min}}\ \underset{y\in Y}{\text{Sup}}\ \varphi(x,y) = \underset{y\in Y}{\text{Max}}\ \underset{x\in X}{\text{Inf}}\ \varphi(x,y)$?

Este problema es equivalente al problema de determinar un punto silla $(\hat{x},\hat{y}) \in X \times Y$ de φ, esto es un punto $(\hat{x},\hat{y}) \in X \times Y$, tal que

$\varphi(\hat{x},y) \leq \varphi(\hat{x},\hat{y}) \leq \varphi(x,\hat{y}),\ \forall\ x \in X,\ y \in Y.$

En el primer capítulo, hemos definido la función $\varphi : X \times Y \rightarrow R$ convexa - cóncava y luego asociamos a φ las funciones

$M(x) = \text{Sup}\ \{\varphi(x,y)\ /\ y \in Y\}$

$m(y) = \text{Inf}\ \{\varphi(x,y)\ /\ x \in X\}$

Después hacemos $\tilde{X} = \{x \in X\ /\ M(x) < +\infty\}$ e $\tilde{Y} = \{y \in Y\ /\ m(y) > -\infty\}$ que juntos a φ se asocia un programa primal $P : \text{Min}\ \{M(x)\ /\ x \in \tilde{X}\}$ y un programa dual $P^* : \text{Max}\ \{m(y)\ /\ y \in \tilde{Y}\}$

Para analizar, en primer lugar las propiedades de M y m tomando en cuenta el concepto de punto silla de φ y luego establecemos el teorema de minimax de Kakutani, en el cuál se prueba la existencia de un punto silla y la igualdad entre el $\underset{y\in Y}{\text{Max}}\ \underset{x\in X}{\text{Min}}\ \varphi(x,y)$ y el $\underset{x\in X}{\text{Min}}\ \underset{y\in Y}{\text{Max}}\ \varphi(x,y)$ para X e Y compactos y convexos de R^n, con φ contínua.

Finalmente, hacemos una comparación entre la condición generalizada de Kuhn - Tucker y la condición de dominancia.

En el segundo capítulo, damos a conocer algunas aplicaciones de la teoría de dualidad de Stoer.

En primer lugar, hemos demostrado el teorema de Von Neumann de la teoría de juegos, en el cuál hemos establecido ....

... estrategias de juego entre dos jugadores.
En segundo lugar, hacemos una interpretación de los multiplicadores de Lagrange, que serán útil para los modelos económicos que a continuación mencionamos:

1. Teoría microeconómica de la empresa de producción.
2. Conducción descentralizada de una empresa.

En el tercer capítulo, se analiza, un teorema general y flexible de minimax, cuyo autor es Simons. Este incluye una serie de teoremas, que fueron inventados por diferentes autores, en el transcurso de los últimos veinte años, entre ellos el célebre teorema de minimax de Sion.
De este modo el teorema de Simons unifica y resume los esfuerzos de muchos investigadores.

C A P I T U L O I

TEORIA DE DUALIDAD DE STOER

1.1. INTRODUCCION

La teoría de dualidad de la programación lineal, es el caso modelo para las diferentes teorías de dualidad, en el campo de la optimización matemática. Por ésta razón la resumimos aquí brevemente.

Consideremos el siguiente par (PL, PL*) de programas lineales mutuamente duales:

$$PL : \left\{ \text{Min } C^t x \;/\; b - Ax \leqslant 0,\; x \in R^n \right\}$$

$$PL^* : \left\{ \text{Max } b^t y \;/\; -C + A^t y \leqslant 0,\; y \in R^m_+ \right\}$$

PL[respectivamente PL*] se llama programa primal [respectivamente dual].

Sea S [respectivamente S*] el dominio admisible de PL [respectivamente de PL*].

Consideremos también la función de Lagrange del programa primal PL:

$$L(x,y) = C^t x + y^t (b - Ax)$$

Definimos las funciones:

$$M:\ R^n_+ \to R \cup \{+\infty\} \quad y \quad m:\ R^m_+ \to R \cup \{-\infty\} \text{ por:}$$

$$M(x) = \text{Sup}\left\{ L(x,y) \;/\; y \in R^m_+ \right\}$$

$$m(y) = \text{Inf}\left\{ L(x,y) \;/\; x \in R^n_+ \right\}$$

Evidentemente se cumple:

$$m(y) \leqslant L(x,y) \leqslant M(x), \quad \forall (x,y) \in R^n_+ \times R^m_+$$

$$\text{Sup}\left\{ m(y) \;/\; y \in R^m_+ \right\} \leqslant \text{Inf}\left\{ M(x) \;/\; x \in R^n_+ \right\}$$

Si $\hat{R}^n_+ = \left\{ x \in R^n_+ \;/\; M(x) < +\infty \right\}$ y $\hat{R}^m_+ = \left\{ y \in R^m_+ \;/\; m(y) > -\infty \right\}$,

Entonces PL es equivalente al programa

$$I : \{ \text{Min} \{ M(x) \ / \ x \in \hat{R}^n_+ \} \ y$$

PL^* es equivalente al programa

$$I^* : \text{Max} \{ m(y) \ / \ y \in \hat{R}^m_+ \}$$

Demostración.

Para $(x,y) \in \hat{R}^n_+ \times \hat{R}^m_+$ se cumple

a) $M(x) < +\infty \Leftrightarrow b - Ax \leq 0$ ó $Ax \geq b$

Si $b - Ax \leq 0$. Entonces $M(x) = C^t x$. Por consiguiente PL es equivalente a I.

b) $m(y) > -\infty \Leftrightarrow -C + A^t y \leq 0$ ó $A^t y \leq C$

Si $A^t y - C \leq 0$. Entonces $m(y) = b^t y$. Por consiguiente PL^* es equivalente a I^*. ∎

Recordemos el siguiente teorema de existencia.

Teorema: PL tiene una solución si y solo si $\text{Inf}(PL) > -\infty$.

Indicamos ahora sin demostración los principales resultados de la teoría de dualidad de la programación lineal.

1. Si uno de los programas PL y PL^* (respectivamente I y I^*)tiene una solución, entonces el otro también tiene solución.

   Si $(\hat{x},\hat{y})$ es un par de soluciones de (PL, PL^*), entonces

   $\text{Inf}(PL) = C^t\hat{x} = M(\hat{x}) = L(\hat{x},\hat{y}) = b^t\hat{y} = m(\hat{y}) = \text{Sup}(PL^*)$
   ....(1.1)

2. Si $(\hat{x},\hat{y})$ es punto de silla de $L(x,y)$ sobre $R^n_+ \times R^m_+$, entonces $\hat{x}$ es óptimo para PL, $\hat{y}$ es óptimo para PL^* y se cumple (1.1).

3. Sea $(\hat{x},\hat{y}) \quad S \times S^*$. Entonces el par $(\hat{x},\hat{y})$ es óptimo para (PL, PL^*) si y solo si $\hat{y}^t(b - Ax) =$

   $$= \hat{x}^t(-C + A^t\hat{y}) = 0$$

4. a) Si $S \neq \phi$ y $S^* \neq \phi$, entonces PL y PL^* Tienen al menos una solución y $\text{Inf}(PL) = \text{Sup}(PL^*)$

b) Si $\mathrm{Inf(PL)} = -\infty$, entonces $S^* = \emptyset$

Si $\mathrm{Sup(PL^*)} = +\infty$, entonces $S = \emptyset$

Si $S \neq \emptyset$ y $S^* = \emptyset$, entonces $\mathrm{Inf(PL)} = -\infty$

Si $S^* \neq \emptyset$ y $S = \emptyset$, entonces $\mathrm{Sup(PL^*)} = +\infty$

c) El caso, donde $S = S^* = \emptyset$ se presenta en realidad (veremos esto en un ejemplo posterior).

Observación.

En el caso 4(a) se cumple

$$\min_{x \in R^n_+} \sup_{y \in R^m_+} L(x,y) = \max_{y \in R^m_+} \inf_{x \in R^n_+} L(x,y)$$

En el caso 4(b) se cumple

$$\inf_{x \in R^n_+} \sup_{y \in R^m_+} L(x,y) = \sup_{y \in R^m_+} \inf_{x \in R^n_+} L(x,y) = \pm\infty$$

Ocurre el caso, donde $S = S^* = \emptyset$

En éste caso se tiene:

$$+\infty = \inf_{x \in R^n_+} \sup_{y \in R^m_+} L(x,y) > \sup_{y \in R^m_+} \inf_{x \in R^n_+} L(\bar{x},y) = -\infty$$

Decimos en este caso, que existe un salto de dualidad -- (en inglés: "Duality Gap") de tamaño $+\infty$

Cada teoría de dualidad en el campo de la optimización - tiene los siguientes aspectos principales:

1. La teoría de dualidad permite conocer mejor la estructura de un problema (primal) de optimización.
2. En las aplicaciones, el programa dual se deja generalmente interpretar como un problema concreto de optimización, estrechamente ligado al problema expresado por el programa primal. En cierto modo, el problema dual - resalta nuevos aspectos del problema primal.

   Así a unproblema de flujos en una red corresponde un problema dual, que es un problema de potenciales en - la misma red.

A un problema de producción a coste mínimo está asocia do un problema de precios de equilibrio para los recursos de producción.

3. La teoría de dualidad ofrece generalmente apreciables ventajas computacionales.
En muchos casos el programa dual tiene una estructura que facilita su solución algorítmica, y es posible -- construir una solución del problema primal, partiendo de una solución del problema dual. Existen también algoritmos, que resuelven los programas primal y dual, - conjuntamente. Así el algoritmo simplex construye soluciones básicas óptimas tanto para el programa lineal - primal, como para el programa dual.

1.2. RESULTADOS GENERALES

Sean E y F espacios lineales topológicos, $\emptyset \neq X \subset E$, - $\emptyset \neq Y \subset F$ convexos y $\varphi : X \times Y \longrightarrow R$.

Definición. φ se llama convexa - cóncava, si:

i) $\varphi(\cdot, y)$ es convexa, $\forall y \in Y$ fijo

i.e. $\varphi(x_1 + (1 -\lambda)x_2, y) \leqslant \lambda\varphi(x_1, y) + (1 -\lambda)\varphi(x_2,y)$

$$\forall x_1, x_2 \in X, y \in Y, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

ii) $(x, \cdot)$ es cóncava, $\forall x \in X$ fijo

i.e. $\varphi(x, y_1 + (1 -\lambda)y_2) \geqslant \lambda\varphi(x,y_1) + (1 -\lambda)\varphi(x,y_2)$

$$\forall y_1, y_2 \in Y, x \in X, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Similarmente se define el concepto de una función estrictamente convexa - concava.

Asociamos a φ las siguientes funciones $M(x)$ y $m(y)$:

$$M(x) = \operatorname{Sup} \{ \varphi(x,y) / y \in Y \}$$

$$m(y) = \operatorname{Inf} \{ \varphi(x,y) / x \in X \}$$

Nota. Si φ es convexa - cóncava entonces M es convexa, m es cóncava

Nota. $M(x)$ puede tomar el valor $+\infty$ y $m(y)$ puede tomar el valor $-\infty$

Si $\tilde{X} = \{x \in X \ / \ M(x) < +\infty\}$, e $\tilde{Y} = \{y \in Y \ / \ m(y) > -\infty\}$, asociamos a φ el par de programas.

P : Min $\{M(x) \ / \ x \in \tilde{X}\}$, P^*: Max $\{m(y) \ / \ y \in \tilde{Y}\}$

P - programa primal, P^* - programa dual.

Definición. $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ es un punto silla de φ sobre $X \times Y$, si

$$\varphi(\bar{x},y) \leq \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \varphi(x,\bar{y}), \ \forall x \in X, \ y \in Y \ \ldots\ldots\ldots\ldots (1.2)$$

Lema.1. $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ es un punto silla de φ sobre $X \times Y$ si y solo si $M(\bar{x}) \leq m(\bar{y})$

Demostración.

$(\Rightarrow)$ De (1.2) se obtiene inmediatamente que $M(\bar{x}) \leq m(\bar{y})$

$(\Leftarrow)$ Por las definiciones de M y m se cumple evidentemente:

$$m(y) \leq \varphi(x,y) \leq M(x), \ \forall x \in X, \ y \in Y \ \ldots\ldots\ldots (1.3)$$

De esto y de $M(\bar{x}) \leq m(\bar{y})$, se obtiene:

$$m(\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = M(\bar{x})$$

De esto y de(1.3) se obtiene para $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$

$$\varphi(\bar{x},y) \leq M(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}), \ \forall y \in Y$$
$$m(\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \varphi(x,\bar{y}), \ \forall x \in X$$

Entonces $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ sobre $X \times Y$. $\blacksquare$

Nos interesa en primer lugar, analizar condiciones, que garantizan que los siguientes enunciados sean ciertos.

a) Si P(respectivamente P^*) tiene una solución, entonces P^* (respectivamente P) también tiene solución.

b) φ tiene un punto silla sobre $X \times Y$

c) Se cumple:

$$-\infty < \text{Inf}\{M(x) \ / \ x \in X\} = \text{Sup}\{m(y) \ / \ y \in Y\} < +\infty$$

PROPIEDADES DE m y M

1. $\sup_{y \in Y} m(y) \leq \inf_{x \in X} M(x) \quad \& \quad \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \varphi(x,y) \leq \inf_{x \in X} \sup_{y \in Y} \varphi(x,y)$

Esto es consecuencia de (1.3)

2. Si $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla sobre $X \times Y$, entonces $\bar{x}$ es óptimo para P, e $\bar{y}$ es óptimo para P^* y

$$M(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = m(\bar{y})$$

Demostración.

Se cumple $M(\bar{x}) \leqslant m(\bar{y})$. De esto y de(1.3) se obtiene

$$M(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = m(\bar{y})$$

De esto y de (1). Se deduce que:

$$\sup_{y\in Y} m(y) \geqslant m(\bar{y}) = M(\bar{x}) \geqslant \inf_{x\in X} M(x) \geqslant \sup_{y\in Y} m(y)$$

Entonces $\sup_{y\in Y} m(y) = m(\bar{y}) = M(\bar{x}) = \inf_{x\in X} M(x)$

Por consiguiente $\bar{x}[\bar{y}]$ es óptimo para $P[P^*]$. ∎

2.a. Si $M(\bar{x}) \leqslant \sup m(y) < \infty$, entonces $\bar{x}$ es óptimo para P. Esto es consecuencia de

$$\sup_{y\in Y} m(y) \geqslant M(\bar{x}) \geqslant \inf_{x\in X} M(x) \geqslant \sup_{y\in Y} m(y)$$

3. Sea $(\bar{x},\bar{y})$ un punto silla sobre $X \times Y$, $\hat{x} \in X$, entonces (a) y (b) son equivalentes

(a) $\hat{x}$ es óptimo para P

(b) $M(\hat{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$

Demostración.

Por (2), $\bar{x}$ es óptimo para P y $M(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$, entonces $\hat{x}$ es óptimo para P si y solo si $M(\hat{x}) = M(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$. ∎

4. (a),(b) y (c) son equivalentes.

(a). $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ sobre $X \times Y$.

(b). $M(\bar{x}) \leqslant m(\bar{y})$.

(c). $\bar{x}$ es óptimo para P, $\bar{y}$ es óptimo para P^* y $M(\bar{x}) \leqslant m(\bar{y})$.

Demostración.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) ya se demostró en el lema 1.

(c) $\Rightarrow$ (b) es evidente

(a) $\Rightarrow$ (c) es la propiedad 2 ∎

5. Sea S el conjunto de los puntos silla de φ sobre $X \times Y$

a) Si $S \neq \emptyset$, entonces S tiene la forma:

$$S = A \times B, \quad A \subset X, \quad B \subset Y$$

b) Para todo $(\bar{x},\bar{y}) \in S$ se cumple:

$$\varphi(\bar{x},\bar{y}) = \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\, M(x) = \underset{y\ Y}{\mathrm{Max}}\, m(y)$$

c) Si φ es contínua y X, Y son cerrados entonces A y B son cerrados.

Demostración. a)

Definimos:

$$A = \{ x \in X \ / \ \exists\, y \in Y, \text{ tal que } (x,y) \in S \} \quad y$$

$$B = \{ y \in Y \ / \ \exists\, x \in X, \text{ tal que } (x,y) \in S \}$$

$A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, puesto que $S \neq \emptyset$.

$S \subset A \times B$: Si $(x,y) \in S$ entonces $x \in A$, $y \in B$ ó $(x,y) \in A \times B$.

$A \times B \subset S$: Sean $(x^1,y^2) \in A \times B$ cualesquiera

como $x^1 \in A \ \exists\, y^1 \in B \ / \ (x^1, y^1) \in S$

como $y^2 \in B \ \exists\, x^2 \in A \ / \ (x^2,y^2) \in S$

De esto obtenemos

$$\varphi(x^1,y^2) \leq \varphi(x^1,y^1) \leq \varphi(x^2,y^1) \leq \varphi(x^2,y^2) \leq \varphi(x^1,y^2)$$

$$\varphi(x^1,y^2) = \varphi(x^2,y^1) = \varphi(x^1,y^1) = \varphi(x^2,y^2)$$

$$\varphi(x^1,y) \leq \varphi(x^1,y^1) = \varphi(x^1,y^2) = \varphi(x^2,y^2) \leq \varphi(x,y^2)$$

$$\forall\, (x,y) \in X \times Y$$

Por consiguiente $(x^1,y^2) \in S$. ∎

b) Es una consecuencia de 2. ∎

c) Sean ahora X, Y cerrados, φ contínua en X, Y evidentemente si $(\bar{x},\bar{y}) \in S$ entonces se cumple

$$A = \{x \in X \ / \ M(x) \leq \varphi(\bar{x},\bar{y})\}, B = \{y \in Y \ / \ m(y) \geq \varphi(\bar{x},\bar{y})\} \qquad \text{..(1.4)}$$

Las funciones $\varphi_y(x)$, $y \in Y$ son contínuas en X, entonces $M(x) = \operatorname{Sup}_{y \in Y} \varphi_y(x)$ es inferiormente contínua en X. Por consiguiente A es cerrado.

Las funciones $\varphi_x(y)$, $x \in X$ son contínuas en Y, entonces $m(y) = \operatorname{Inf}_{x \in X} \varphi_x(y)$ es superiormente contínua en Y. Por consiguiente B es cerrado. ∎

Caso Especial. Sean X, Y convexos y $\varphi : X \times Y \to R$ convexa - cóncava, entonces $M[m]$ es convexa [cóncava]. Es también fácil ver que $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ son convexos. (1.4) implica que A y B son convexos.

De acuerdo con el análisis precedente, es decisivo, disponer de condiciones que garantizan que $S \neq \emptyset$.

En lo que sigue E y F serán espacios normados de dimensión finita a pesar de que algunos resultados que obtendremos son ciertos para espacios normados generales.

1.3. TEOREMA DE MINIMAX DE KAKUTANI

Sean $\emptyset \neq X \subset R^n$, $\emptyset \neq Y \subset R^n$ convexos y compactos, $\varphi : X \times Y \to R$ convexa - cóncava y contínua, entonces φ tiene al menos un punto silla $(\bar{x},\bar{y})$ y se cumple

$$m(\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = M(\bar{x})$$

Para su demostración haremos uso del siguiente lema

Lema 2. Si el teorema de minimax de Kakutani es válido ..

.. para el caso, donde φ: X x Y → R es estrictamente convexa - cóncava, entonces es generalmente válido.

Demostración.

Sea φ: XxY → R convexa - cóncava. Entonces

$\varphi_\varepsilon(x,y) = \varphi(x,y) + \varepsilon(|x|^2 - |y|^2)$ es estrictamente convexa - cóncava, $\forall \varepsilon > 0$.

Sea $M_\varepsilon(x) = \underset{y\in Y}{\mathrm{Max}}\ \varphi_\varepsilon(x,y)$, $m_\varepsilon(y) = \underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\ \varphi_\varepsilon(x,y)$

como φ y φ_ε son continuas y X,Y son compactos,

M , M_ε : X→R son continuas y toman su minimo en X

m , m_ε : Y→ R tambien son continuas y toman su maximo en Y.

Sean $M = \underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\ M(x)$, $M_\varepsilon = \underset{x\in X}{\mathrm{Min}}\ M_\varepsilon(x)$

$m = \underset{y\in Y}{\mathrm{Max}}\ m(y)$, $m_\varepsilon = \underset{y\in Y}{\mathrm{Max}}\ m_\varepsilon(y)$

$\alpha = \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}|x|^2$ $\beta = \underset{y\in Y}{\mathrm{Max}}|y|^2$

Entonces se cumplen las estimaciones:

$$\varphi(x,y) - \varepsilon(\alpha+\beta) \leq \varphi_\varepsilon(x,y) \leq \varphi(x,y) + \varepsilon(\alpha+\beta), \forall (x,y) \in X\times Y$$

entonces

$$M(x) - \varepsilon(\alpha+\beta) \leq \underset{y\in Y}{\mathrm{Max}}\ \varphi_\varepsilon(x,y) = M_\varepsilon(x) \leq M(x) + \varepsilon(\alpha+\beta), \forall x\in X$$

entonces $|M - M_\varepsilon| \leq \varepsilon(\alpha+\beta)$ ....(1.5)

Similarmente se obtiene:

$|m - m_\varepsilon| \leq \varepsilon(\alpha+\beta)$ ....(1.6)

por hipotesis se cumple $\forall \varepsilon > 0$: $m_\varepsilon = M_\varepsilon$

De esto, (1.5) y (1.6) se obtiene

$$0 \leq |M-m| = |M-M_\varepsilon + m_\varepsilon - m| \leq |M-M_\varepsilon| + |m_\varepsilon - m| \leq 2\varepsilon(\alpha+\beta), \forall \varepsilon > 0$$

Entonces $M = m$

Si $M = M(\bar{x})$, $m = m(\bar{y})$, entonces de acuerdo con el lema 1 $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ sobre X x Y y

$\therefore \quad M(\bar{x}) = m(\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$. ∎

Falta demostrar que el teorema de minimax es válido en el caso donde φ es estrictamente convexa- cóncava.

Elegimos $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$, tal que:

$$M(\bar{x}) = \max_{y \in Y} \varphi(\bar{x},y) = \varphi(\bar{x},\bar{y})$$

$\varphi(\bar{x}, .)$ es estrictamente cóncava, entonces

$$\varphi(\bar{x},y) < \varphi(\bar{x},\bar{y}), \ \forall\, y \in Y, \ y \neq y$$

Por consiguiente se cumple

$$(\bar{x},y) \in \Omega = \{ (x,y) \ / \ \varphi(x,y) < \varphi(\bar{x},\bar{y}) \}, \ \forall\, y \in Y - \{\bar{y}\} \quad \text{.......... (1.7)}$$

Mostraremos que $(x,\bar{y}) \notin \Omega$, $\forall\, x \in X - \{\bar{x}\}$

Entonces se cumplirá

$\varphi(\bar{x},y) \leq \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \varphi(x,\bar{y})$, $\forall\, x \in X$, $y \in Y$ y $(\bar{x},\bar{y})$ será un punto silla de φ sobre $X \times Y$, con esto quedará demostrado el teorema de minimax.

Supongamos que existe $x^* \neq \bar{x}$ con $(x^*,\bar{y}) \in \Omega$, como φ es continua entonces existe una vecindad abierta U de $\bar{y}$ con $\{x^*\} \times U \subset \Omega$

Para todo $y \in U$ la función $\varphi(.,y)$ es estrictamente convexa en el segmento $[(x^*,y), (\bar{x},y)]$

Entonces $\forall\, y \in U$, $\lambda \in [0,1\rangle$ se cumple

$$\varphi(\lambda\bar{x} + (1-\lambda)x^*,y) \leq \lambda\varphi(\bar{x},y) + (1-\lambda)\varphi(x^*,y) < \varphi(\bar{x},\bar{y}) \quad \text{.......... (1.8)}$$

Entonces $\langle \bar{x},x^*] \times U \subset \Omega$.

$\{\bar{x}\} \times (Y - U)$ es compacto y por (1.7) contenido en Ω. Entonces existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\max_{y \in Y - U} \varphi(\bar{x},y) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) - \varepsilon$$

Como φ es uniformemente contínua en $X \times Y$ entonces existe δ, $0 < \delta \leq |x^* - \bar{x}|$, tal que ...

... $\forall y \in Y - U$, $\forall x$ con $|x - \bar{x}| \leq \delta$ se cumple

$\varphi(x,y) < \varphi(\bar{x},y) + \varepsilon/2 < \varphi(\bar{x},\bar{y}) - \varepsilon/2$ ....(1.9)

Si $\tilde{x} = \bar{x} + \dfrac{\delta(x^* - \bar{x})}{|x^* - \bar{x}|}$, entonces $\tilde{x} \in \langle \bar{x}, x^*]$

y de (1.8), (1.9) obtenemos $\tilde{x} \times Y \subset \Omega$

Como Y es compacto, obtenemos de esto

$$M(\tilde{x}) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Max}}\, \varphi(\tilde{x},y) < \varphi(\bar{x},\bar{y}) = M$$

Lo que contradice a la definición de M. Entonces $(x,\bar{y}) \notin \Omega$ $\forall x \in X$, $x \neq \bar{x}$. ∎

Nota. El teorema precedente no solo es cierto en espacios de dimensión finita, ya que también es válido en espacios normados generales.

Recordemos que (Sin restricciones para X, Y, φ) $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ si y solo si $M(\bar{x}) \leq m(\bar{y})$.......(1.10)

(1.10) es suficiente para que $\bar{x}$ sea una solución de P e $\bar{y}$ una solución de P^*.

Podemos escribir (1.10) como $M(\bar{x}) \leq \varphi(x,\bar{y})$, $\forall x \in X$...... ....(1.11)

Llamamos a (1.11) la condición generalizada de Kuhn - Tucker.

Si no existe $\bar{y} \in Y$ con $m(\bar{y}) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Sup}}\, m(y)$ entonces se cumple el siguiente criterio de optimidad:

Si $M(\bar{x}) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Sup}}\, m(y) < \infty$,.........................(1.12)

entonces $\bar{x}$ es una solución de P.

Se cumple: $m(y) \leq \varphi(x,y) \leq M(x)$, $\forall x \in X$, $y \in Y$

(1.12) implica $M(\bar{x}) = \underset{y \in Y}{\mathrm{Sup}}\, m(y) \leq M(x)$, $\forall x \in X$

Si $F : X \to R$, $f : X \to R^m$ son funciones dadas, considere mos ahora el programa

$$I : \text{Min}\left\{ F(x) \ / \ f(x) \leqslant 0, \ x \in X \right\}$$

Sea $Y = R^m_+$ y $\varphi(x,y) = F(x) + \bar{y}^t . f(x)$ la función de Lagrange de I.

Es fácil ver, que I es equivalente a P: $\text{Min}\left\{ M(x) \ / \ x \in \tilde{X} \right\}$

Demostración.

Sea $x \in X$. De las definiciones de $\varphi : X \times Y \to R$ y M se obtiene: $M(x) < +\infty \Leftrightarrow f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow M(x) = F(x)$. Por lo tanto P es equivalente a I.

Recordemos:

1. En $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ se cumplen las condiciones de Kuhn - Tucker para I, si:

   a) $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \varphi(x,\bar{y})$, $\forall x \in X$

   b) $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{x})$

   c) $f(\bar{x}) \leqslant 0$

2. Teorema. Si en $(\bar{x},\bar{y})$ se cumplen las condiciones de Kuhn - Tucker para I, entonces $\bar{x}$ es solución de I.

   Demostración.

   Sea x es un punto admisible cualquiera de I. Entonces de b), a) , $\bar{y} \geqslant 0$, se obtiene

   $F(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \varphi(x,\bar{y}) = F(x) + \bar{y}^t . f(x) \leqslant F(x)$

   Por consiguiente $\bar{x}$ es solución de I. //

3. Teorema. Sea $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$, entonces en $(\bar{x},\bar{y})$ se cumplen las condiciones de Kuhn - Tucker para I si y solo si - $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ.

   Demostración.

   $(\Rightarrow)$ Por (a) se cumple $\varphi(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \varphi(x,\bar{y})$, $\forall x \in X$.

   Como $f(\bar{x}) \leqslant 0$. Se cumple

   $$\varphi(\bar{x},y) = F(\bar{x}) + y^t f(\bar{x}) \leqslant F(\bar{x}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}), \ \forall y \in Y$$

Por consiguiente $\varphi(\bar{x},y) \leq \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq \varphi(x,\bar{y})$, $\forall\, x \in X$ $\forall\, y \in Y$.

($\Leftarrow$) Evidentemente se cumple (a).

Demostraremos primero que $f(\bar{x}) \leq 0$

Supongamos que $f_j(\bar{x}) > 0$ para algún j.

Elegimos: $\hat{y} \geq 0$ tal que $\hat{y}_i = \bar{y}_i$, $\forall\, i \neq j$, $\hat{y}_j = y_j + 1$,

Entonces $\varphi(\bar{x},\hat{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y})^t f(\bar{x}) = (e_j)^t f(\bar{x}) =$
$= f_j(\bar{x}) > 0.$

Esto contradice a $\varphi(\bar{x},\hat{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq 0$, por lo tanto - $f(\bar{x}) \leq 0$.

Falta demostrar que $\varphi(\bar{x},\bar{y}) = F(\bar{x})$ ó que $\bar{y}^t f(\bar{x}) = 0$

Como $\bar{y} \geq 0$, $f(\bar{x}) \leq 0$ se cumple:

$\bar{y}^t f(\bar{x}) = 0 \Leftrightarrow \bar{y}_j f_j(\bar{x}) = 0$, $1 \leq j \leq m$

Supongamos que para un j se tenga $\bar{y}_j > 0$, $f_j(\bar{x}) < 0$;

Elegimos: $\hat{y}$ tal que $\hat{y}_j = 0$, $\hat{y}_k = \bar{y}_k$, $\forall\, k \neq j$

Entonces $\varphi(\bar{x},\hat{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) = (\hat{y} - \bar{y})^t f(\bar{x}) =$

$$= (\hat{y}_j - \bar{y}_j) f_j(\bar{x}) = - \bar{y}_j f_j(\bar{x}) > 0$$

Esto contradice a $\varphi(\bar{x},\hat{y}) - \varphi(\bar{x},\bar{y}) \leq 0$. Por lo tanto $\bar{y}^t f(\bar{x}) = 0$. $\square$

Consecuencia. Si $(\bar{x},\bar{y}) \in X \times Y$ es un punto silla de φ, entonces $\bar{x}$ es óptimo para I[P] e $\bar{y}$ es óptimo para P^*, observamos que si I es un programa convexo. Entonces ------ $\varphi : X \times Y \to R$ es convexa - cóncava y (P, P^*) es un par de programas convexos.

Recordemos también el siguiente criterio de óptimidad

4. Teorema. Sea I un programa convexo y $\bar{x}$ una solución de de I . Si existe un $x^{\circ} \in \mathrm{IntRel}(C)$, tal que $\left.\begin{array}{l} \\ f_i(x^{\circ}) < 0, \text{ para todo } i \text{ con } f_i(\bar{x}) = 0 \end{array}\right\}$ ....(1.13)

entonces existe un $\bar{y} \in Y$, talque $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto si-- silla de φ sobre $X \times Y$.

Nota. (1.13) se llama condición de SLATER.

Si $f_i(\bar{x}) = 0$, decimos que la función restricción $f_i(x) \leq 0$ es activa en $\bar{x}$.

Observación.

1. Si φ es convexa - cóncava en $X \times Y$, pero $X \times Y$ no es -- compacto, entonces puede suceder que

   $+\infty > \text{Inf}\{M(x) \;/\; x \in X\} = \alpha > \text{Sup}\{m(y) \;/\; y \in Y\} = \beta > -\infty.$

   en este caso decimos que se presenta un " salto de dualidad " (en ingles:"Duality Gap") de tamaño $\alpha - \beta$.

   Presentamos un ejemplo para el caso donde P y P^* tienen al menos una solución, pero donde

   $$\text{Min}\{M(x) \;/\; x \in X\} > \text{Max}\{m(y) \;/\; y \in Y\}$$

   este ejemplo fue dado por Stoer [9]

   Elegimos $X = R^2_+$, $Y = R^1$ y

   $\varphi(x,y) = g(x_1,x_2) + yx_1$,

   donde $g(x_1,x_2) = \text{Max}(-\alpha, -\sqrt{x_1x_2})$, $\alpha > 0$.

   g es convexa y continua en R^2_+ . Por consiguiente, φ es convexa - cóncava en $R^2_+ x R^1$.

   Se cumple evidentemente:

   $$M(x_1,x_2) = \sup_{y \in R^1}(g(x_1,x_2) + yx_1) = \begin{cases} +\infty & ,\text{si } x_1 > 0 \\ g(0,x_2)=0 & ,\text{si } x_1 = 0 \end{cases}$$

   ....(1.14)

   Se cumple tambien: $0 \geq g(x_1,x_2) \geq -\alpha$, $\forall (x_1,x_2) \in R^2_+$

   Si $y \geq 0$, se tiene en consecuencia:

   $\varphi(x,y) \geq g(x_1,x_2) \geq -\alpha$. si $x_1 = \dfrac{\alpha^2}{x_2}$, $x_2 > 0$,

... entonces

$$\lim_{x_2\to\infty}\left[g(x_1,x_2)+yx_1\right] = \lim_{x_2\to\infty}\left(-\alpha + y\frac{\alpha^2}{x_2}\right) = -\alpha .$$

Por consiguiente se cumple

$$m(y) = \inf_{x_1\geq 0\ x_2\geq 0}\left[g(x_1,x_2)+yx_1\right] = \begin{cases} -\infty & , \text{ si } y < 0 \\ -\alpha & , \text{ si } y \geq 0 \end{cases}$$

....(1.15)

De (1.14) y (1.15) se deduce que $\{0\}\times R$ es el conjunto de soluciones de P, R_+ es el conjunto de soluciones de P^* y que $\text{Min}\{M(x) \ / \ x\in R^2_+\} = 0 > -\alpha = \text{Max}\{m(y) \ / \ y\in R\}$.

2. Si L(x,y) es la función de Lagrange de un programa matematico, se presentan tambien los casos

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} L(x,y) = \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y) = \pm\infty \text{ ....(1.16)}$$

$$\inf_{x\in X}\sup_{y\in Y} L(x,y) = +\infty,\ \sup_{y\in Y}\inf_{x\in X} L(x,y) = -\infty \text{ ....(1.17)}$$

Ejemplos

(a) Si $e^t = (1,1,1....)\in R^n$ consideramos el siguiente -- par (I,I^*) de programas duales.

$I : \text{Min}\{e^t x \ / \ 0^t x \geq 0\}$

$I^* : \text{Max}\{0\, y \ / \ y\, 0 = e \ , \ y\geq 0\}$

Se tiene que $\text{Inf}(I) = -\infty$ y $\text{Sup}(I^*) = -\infty$,

puesto que el dominio admisible de I^* es vacío.

La función de Lagrange de I es $L(x,y) = e^t x + y(0-0^t x) = e^t x$

se cumple

$$M(x) = \sup_{y\geq 0} L(x,y) = e^t x \ , \ \forall\, x\in R^n$$

$$\inf_{x\in R^n} M(x) = -\infty$$

$$m(y) = \inf_{x\in R^n} L(x,y) = \inf_{x\in R^n} e^t x = -\infty \ , \ \forall\, y\in R_+$$

Por consiguiente se presenta el caso (1.16).

(b) Consideremos ahora el par de programas lineales -- duales

I : $\mathrm{Min}\{e^t x \;/\; \Theta^t x \geqslant 1\}$

I^* : $\mathrm{Max}\{\, y \;/\; y\,\Theta = e,\; y \geqslant 0\}$

Se cumple $\mathrm{Inf}(I) = +\infty$, $\mathrm{Sup}(I^*) = -\infty$

puesto que los dominios admisibles de ambos programas son vacíos.

La función de Lagrange de I es:

$$L(x,y) = e^t x + y(1 - \Theta^t x) = e^t x + y$$

Se cumple:

$$M(x) = \mathrm{Sup}_{y \geqslant \Theta}\, L(x,y) = +\infty, \; \forall\, x \in R^n$$

$$\mathrm{Inf}_{x \in R^n}\, M(x) = +\infty,$$

$$m(y) = \mathrm{Inf}_{x \in R^n}\, L(x,y) = \mathrm{Inf}_{x \in R^n}(e^t x + y) = -\infty, \; \forall\, y \geqslant \Theta$$

$$\mathrm{Sup}_{y \geqslant \Theta}\, m(y) = -\infty$$

Por consiguiente se presenta aquí el caso (1.17). En éste caso tenemos un salto infinito de dualidad.

Volviendo al caso general. Surge de manera natural la pregunta bajo que hipótesis es la condición generalizada de Kuhn - Tucker un criterio necesario de optimidad?.

Basandonos en el teorema precedente. exigiremos de todas maneras que X e Y sean convexos, φ sea convexa - cóncava y contínua en X x Y.

Si X e Y son adicionalmente compactos, entonces la respuesta a la pregunta precedente es afirmativa.

Sea $\bar{x}$ óptima para P, m es contínua y como Y es compacto, P^* tiene al menos una solución y. Por el teorema de Minimax de Kakutani se cumple:

$$M(\bar{x}) = m(\bar{y}) = \mathrm{Sup}_{y \in Y}\, m(y) \leqslant \varphi(x,\bar{y}), \; \forall\, x \in C$$

Sin embargo, el teorema de Minimax de Kakutani tiene un un alcance limitado porque en la mayoría de los casos -- X e Y no son compactos.

En lo que sigue, asumiremos que X e Y son convexos y ce-- rrados y que φ es convexa - cóncava y contínua.

1.4. LA CONDICION DE DOMINANCIA.

Definición:

a) Decimos que en $\bar{x} \in X$ es cumplida la condición de dominancia, si existe un conjunto convexo y compacto $D \subset Y$ y un conjunto $C = X \cap \{x \,/\, |x - \bar{x}| \leq \mathcal{E}\}$, $\mathcal{E} > 0$, con la - propiedad siguiente:

$\forall x \in C$, existe un $y \in D$, tal que $\varphi(x,y) \geq M(\bar{x})$.

b) En $\bar{y} \in Y$ es cumplidad la condición de dominancia, si -- existe un conjunto convexo y compacto $C \subset X$ y $D = Y \cap \{y \,/\, |y - \bar{y}| \leq \mathcal{E}\}$, $\mathcal{E} > 0$, con la propiedad si---- guiente:

$\forall\, y \in D$ existe un $x \in C$, tal que $\varphi(x,y) \leq m(\bar{y})$

Nota. Steer llama a la condición de dominancia (En una for ma un poco distinta) "B - Property".

Comparación de la condición generalizada de Kuhn - Tucker con la condición de dominanacia.

Kuhn - Tucker: Existe $\bar{y} \in Y$, tal que $\varphi(x,\bar{y}) \geq M(\bar{x})$, $\forall x \in X$.

Condición de dominancia: Para $\bar{x} \in C$, existe un $y \in D$ con - $\varphi(x,y) \geq M(\bar{x})$.

Es evidente, que es más fácil comprobar la condición de dominancia que averiguar que la condición generalizada de Kuhn - Tucker es satisfecha.

Sin embargo en el caso φ convexo - cóncavo las dos condicio nes son equivalentes.

1. **Teorema** (Steer). Sean X, Y convexos y cerrados, $\varphi : X \times Y \to R$ convexa - cóncava y contínua, $\bar{x} \in X$, entonces (a) y (b) son equivalentes.

(a) En $\bar{x}$ es cumplida la condición de dominancia

(b) Existe $\bar{y} \in Y$, tal que en $(\bar{x},\bar{y})$ se cumple la condición generalizada de Kuhn - Tucker.

Demostración.

(a)$\Rightarrow$(b): Definimos en $C[D]$ y las funciones $M_0[m_0]$ por

$$M_0(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in D} \varphi(x,y) \qquad m_0(y) = \operatorname*{Inf}_{x \in C} \varphi(x,y)$$

$[M_0(x)$ y $m_0(y)$ son evidentemente contínuas$]$.

Usando la condición de dominancia, la compacidad de D y el teorema de minimax de Kakutani, obtenemos para un $x^0 \in C$ e un $\bar{y} \in D$:

$$M_0(x) \geq M(\bar{x}) \geq M_0(\bar{x}), \ \forall x \in C$$

$$m_0(\bar{y}) = \operatorname*{Max}_{y \in D} m_0(y) = \operatorname*{Min}_{x \in C} M_0(x) = M_0(x^0) \geq M(\bar{x}) \geq M_0(\bar{x})$$

Por consiguiente, $(\bar{x},\bar{y})$ es un punto silla de φ sobre $C \times D$ y se cumple:

$$M(\bar{x}) = M_0(\bar{x}) = m_0(\bar{y}) = \varphi(\bar{x},\bar{y}) = \operatorname*{Min}_{x \in C} \varphi(x,\bar{y})$$

En consecuencia, $\bar{x}$ es un mínimo local de $\varphi(\cdot\, , \bar{y})$, - puesto que $C = \{x \in X \,/\, |x - \bar{x}| \leq \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$ pero $\varphi(\cdot\, , \bar{y})$ es convexa en X. Por consiguiente $\bar{x}$ es - mínimo global de $\varphi(\cdot\, , \bar{y})$ sobre X.

$$M(\bar{x}) = \operatorname*{Min}_{x \in X} \varphi(x,\bar{y})$$

(b)$\Rightarrow$(a). Sea $C = \{x \in X \,/\, |x - \bar{x}| \leq \varepsilon\}$, $D = \{\bar{y}\}$, entonces C y D son convexos, compactos y se cumple evidentemente $M(\bar{x}) \leq (x,\bar{y})$, $\forall x \in C$. Por consiguiente en $\bar{x}$ se cumple la condición de dominancia. ∎

Observamos que la condición de dominancia en $\bar{x}$ implica que $\bar{x}$ es óptimo para P.

Sería deseable, disponer de una hipótesis más débil -- que la condición de dominancia, que junto con la optimidad de $\bar{x}$ para P, implique la condición de dominancia y con esto la condición generalizada de Kuhn - Tucker.

En consecuencia, buscamos una condición análoga a la - condición de regularidad de Slater.

Un paso en ésta dirección es el siguiente teorema

2. Teorema. Sean X, Y convexos y cerrados, φ: X x Y $\to$ R convexa - cóncava y sea $\bar{x}$ óptimo para P. Sea el conjunto $A = \{ y \;/\; \varphi(\bar{x},y) = M(\bar{x}) \}$ no vacío y acotado. Entonces en $\bar{x}$ es satisfecha la condición de dominancia.

Demostración.

Para un $\varepsilon > 0$ dado, consideramos el conjunto

$B = \{ y \;/\; \varphi(\bar{x},y) \geqslant M(\bar{x}) - \varepsilon \}$

Como $A(\bar{x}) = \{ y \;/\; \varphi(\bar{x},y) \geqslant M(\bar{x}),\ y \in Y \}$ es compacto, $\varphi(\bar{x}, .)$ es cóncava y contínua en Y. De acuerdo con el teorema de Fenchél, B es compacto.

Sea $\bar{C} = \{ x \in X \;/\; |x - \bar{x}| \leqslant \delta \}$ para un $\delta > 0$, entonces φ es uniformemente contínua en $\bar{C}$ x B, entonces existe δ_1, $0 < \delta_1 \leqslant \delta$ tal que

$|\varphi(x,y) - \varphi(\bar{x},y)| \leqslant \varepsilon/2,\ \forall x \in \bar{C} \cap \{ x \;/\; |x - \bar{x}| \leqslant \delta_1 \} = C$,

$\forall y \in B$...(1.18)

Sean $\tilde{y} \in Y - B$, $\bar{y} \in A(\bar{x}) \subset B$, como φ es contínua existe - $\lambda \in (0,1)$, tal que

$\varphi(\bar{x}, \lambda\bar{y} + (1 - \lambda)\tilde{y}) = M(\bar{x}) - \varepsilon = \varphi(\bar{x},\bar{y}) - \varepsilon$,

$\lambda\bar{y} + (1 - \lambda)\tilde{y} \in B$................................(1.19)

Por (1.18), (1.19) y la concavidad de $\varphi(\bar{x}, .)$ se cumple $\forall x \in C$:

$\varphi(x,\bar{y}) \geq \varphi(\bar{x},\bar{y}) - \varepsilon/2 = \varphi(\bar{x},\lambda\bar{y} + (1-\lambda)\tilde{y}) + \varepsilon/2$

$\geq \varphi(x,\lambda\bar{y} + (1-\lambda)\tilde{y}) \geq \lambda\varphi(x,\bar{y}) + (1-\lambda)\varphi(x,\tilde{y})$

entonces $\varphi(x,\bar{y}) \geq \varphi(x,\tilde{y})$, $\forall x \in C$, $\forall \bar{y} \in A(\bar{x})$, $\forall \tilde{y} \notin B$.

Como B es compacto, se obtiene de esto.

$$M(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in Y} \varphi(x,y) = \operatorname*{Max}_{y \in B} \varphi(x,y)$$

Como $\bar{x}$ es óptimo para P, se cumple:

$$M(\bar{x}) \leq M(x) = \operatorname*{Max}_{y \in B} \varphi(x,y), \forall x \in C$$

Por consiguiente, para todo $x \in C$, existe un $y \in B$, tal que $\varphi(x,y) \geq M(\bar{x})$.

En consecuencia, en $\bar{x}$ es satisfecha la condición de dominancia. ∎

C A P I T U L O I I

ALGUNAS APLICACIONES DE LA TEORIA DE DUALIDAD DE STOER.

2.1. *Teorema de Minimax de Von Neumann.*

El teorema de minimax de Von neumann a sido motivado por la teoría de juegos, y es un resultado clave de ésta teoría.

La teoría de juegos es un instrumento muy útil para modelar y analizar situaciones de conflicto, y en particular la competencia de mercados.

Esta teoría se inició con el estudio de los así llamados juegos matriciales.

Un juego matricial es caracterizado por una matriz $A \in M(m,n)$ y dos jugadores, un jugador de fila y un jugador de columna.

Las reglas del juego son las siguientes:

El jugador de fila elige una fila y el jugador de columna elige una columna de A.

En el momento cuando los dos jugadores hacen su elección, no tienen ninguna información acerca de la selección del jugador opuesto.

Supongamos que el jugador de fila elige la fila "r" y el jugador de columna elige la columna "s". Entonces a_{rs} será "la suma en juego", que el jugador de columna deberá entregar al jugador de fila. Por tanto, el jugador de fila estará interesado en un valor más alto posible de a_{rs}, mientras que el jugador de columna prefiere los valores más bajos posibles de a_{rs}.

De este modo surge el problema de establecer estrategias de juego.

Si el jugador de fila es cauteloso, entonces elegirá la fila con la mayor componente mínima, porque con ésta estrategia se asegurará una ganancia de

$$\underline{c} = \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\text{Max}}\ \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Min}}\ a_{ij}$$

Cualquiera que sea la elección del jugador de columna. Usando una estrategia cautelosa análoga, el jugador de columna, en todos los casos podrá evitar que su pérdida sea mayor que

$$\bar{c} = \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\text{Min}}\ \underset{1\leqslant i\leqslant m}{\text{Max}}\ a_{ij}$$

Observamos que $\underline{c} \leqslant \bar{c}$.

Demostración.

Sea $\bar{c} = a_{rs}$. Como $\underset{j}{\text{Min}}\ a_{ij} \leqslant a_{is}$, $\forall\, i$, se cumple:

$$\underline{c} = \underset{i}{\text{Max}}\ \underset{j}{\text{Min}}\ a_{ij} \leqslant \underset{i}{\text{Max}}\ a_{is} = a_{rs} = c \quad \blacksquare$$

La estrategia cautelosa de ambos jugadores se basa en realidad en su suposición, que el jugador opuesto tenga la tendencia de no aplicar la estrategia precedente.

Si $\underline{c} < \bar{c}$, entonces la estrategia cautelosa no es satisfactoria por que no induce al oponente aplicar la estrategia cautelosa. En este caso ambos jugadores tendrán la tendencia de abandonar la estrategia cautelosa, para aumentar su ganancia ó reducir su pérdida.

Si el mismo juego se repite sucesivamente, entonces ambos jugadores, aún en el caso, donde $\underline{c} = \bar{c}$, abandonarán ocacionalmente la estrategia cautelosa, para advertir al jugador opuesto, que no trate de sacar ventaja de la disposición cautelosa de su oponente.

Sea $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $A^t = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$

Las consideraciones precedentes, y otros similares, nos llevan al concepto de una estrategia mixta, donde el jugador de fila elige las filas α_i^t de A con probabilidades fijas $x_i \geqslant 0$ y el jugador de columna elige las columnas a_j con probabilidades fijas $y_j \geqslant 0$.

En consecuencia, para el jugador de fila, una estrategia mixta es una variable aleatoria X con valores en $\{1, 2, \ldots, m\}$ con la distribución

$$P(X = i) = x_i \geqslant 0, \ 1 \leqslant i \leqslant m, \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1$$

Una estrategia mixta para el jugador de columna es una variable aleatoria Y, con valores en 1, 2, ..., n con la distribución

$$P(Y = j) = y_j \geqslant 0, \ 1 \leqslant j \leqslant n, \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Definimos ahora una variable aleatoria, a_{XY} cuyos valores son las entradas a_{ij} de A, con la distribución

$$P(a_{XY} = a_{ij}) = x_i y_j, \quad 1 \leqslant i \leqslant m, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Interpretamos a a_{XY} como la ganancia del juego en el caso, donde el jugador de fila [columna] aplica la estrategia mixta X[Y].

En éste caso, la ganancia esperada será

$$E[a_{XY}] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, x_i y_j = x^t A y$$

Si $S = \{x \in R_+^m \ / \ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$, $T = \{y \in R_+^n \ / \ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$

y $\varphi(y,x) = x^t A y$,

Definimos $M : T \rightarrow R$, $m : S \rightarrow R$ por:

$M(y) = \text{Max}\{\varphi(y,x) \ / \ x \in S\}$, $m(x) = \min\{\varphi(y,x) \ / \ y \in T\}$,

y consideramos el par de programas duales (P, P^*)

$P : \text{Min}\{M(y) \ / \ y \in T\}$, $\qquad P^* : \text{Max}\{m(x) \ / \ x \in S\}$

M(y) representa la máxima pérdida esperada del jugador de columna, frente a todas las estrategias posibles del jugador de fila, cuando aplica la estrategia Y con distribución y.

Similarmente, m(x) es la mínima ganancia del jugador de fila, frente a todas las estrategias del jugador opuesto, cuando aplica la estrategia X con la distribuición x.

Definición. Una estrategia mixta $\bar{Y}$ [Respectivamente $\bar{X}$] del jugador de columnas [Respectivamente de filas] es óptima, si su distribuición $\bar{y}$ [Respectivamente $\bar{x}$] es una solución de P [Respectivamente de P^*].

Observación. En ésta definición de estrategias óptimas, se asume que ambos jugadores son extremadamente prudentes. El jugador de fila se limita a maximizar la ganancia mínima esperada, mientras que el jugador de columna sólo desea minimizar la pérdida máxima esperada.

Demostraremos ahora un resultado auxiliar.

Lema. Para todo $(y,x) \in T \times S$ se cumple

(a) $M(y) = \underset{1 \leqslant k \leqslant m}{\mathrm{Max}} \alpha_k^t y,$

(b) $m(x) = \underset{1 \leqslant j \leqslant n}{\mathrm{Min}} a_j^t x$

Demostración.

(a) Sea $x \in S$ cualquiera, $\underset{1 \leqslant k \leqslant m}{\mathrm{Max}} \alpha_k^t y = \alpha_I^t y$

Entonces $\bar{x} = e_I$ S, y se cumple

$$\varphi(y,x) = x^t A y = y^t A^t x = \sum_{k=1}^{m} y^t \alpha_k x_k \leqslant y^t \alpha_I \sum_{k=1}^{m} x_k = y^t \alpha_I =$$

$$= e_I^t A x = \underset{1 \leqslant k \leqslant m}{\mathrm{Max}} \alpha_k^t y$$

Esto implica que $M(y) = \underset{1\leqslant k\leqslant m}{\mathrm{Max}}\, \alpha_k^t y$.

(b) Sea $\mathrm{Min}\ a_j^t x = a_s^t x$, $y \in T$ cualquiera

Entonces $\bar{y} = e_s \in T$, y se cumple

$$\varphi(y,x) = x^t A y = \sum_{j=1}^{n} y_j x^t a_j \geqslant a_s^t x \sum_{j=1}^{n} y_j = a_s^t x = x^t A e_s =$$

$$= \varphi(e_s, x) = \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ a_j^t x$$

Esto implica que $m(x) = \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ a_j^t x$. $\not{O}$

La función φ : $T \times S \rightarrow R$ es evidentemente convexa - cóncava y contínua, además T y S son compactos. En consecüencia podemos aplicar el teorema de minimax de Kakutani. Por consiguiente existe al menos un punto silla $(\bar{y},\bar{x})$ de φ sobre $T \times S$, y se cumple:

$$M(\bar{y}) = \varphi(\bar{y},\bar{x}) = m(\bar{x})$$

El par de estrategias $(\bar{Y}, \bar{X})$, que corresponde a un punto silla $(\bar{y},\bar{x})$ de se llama un equilibrio del juego matricial, porque $\bar{X}$ [Respectivamente $\bar{Y}$] es una estrategia mixta óptima para el jugador de fila [Respectivamente de columna]. Además la ganancia máxima esperada del jugador de fila es igual a la pérdida mínima del jugador de columna.

Resumimos los resultados obtenidos en el siguiente teorema

Teorema. Para toda matriz real $A \in M(m,n)$, el juego matricial correspondiente tiene al menos un equilibrio $(\bar{Y}, \bar{X})$, y para la distribuición $(\bar{y},\bar{x})$ de $(\bar{Y}, \bar{X})$ se cumple

$$\underset{1\leqslant k\leqslant m}{\mathrm{Max}}\, \alpha_k^t \bar{y} = M(\bar{y}) = \bar{x}^t A \bar{y} = m(\bar{x}) = \underset{1\leqslant j\leqslant n}{\mathrm{Min}}\ a_j^t \bar{x}.$$

2.2. Interpretación de los Multiplicadores de Lagrange.

Consideremos el programa convexo

(P) : $\text{Min}\left\{F(x) \ / \ f(x) \leqslant 0, \ x \in C\right\}$,

Donde $f : C \rightarrow R^m$

Sea $R(\alpha) = \{x \in C \ / \ f(x) \leqslant \alpha\}$

Definimos: $Q(\alpha) = \text{Inf}\{F(x) \ / \ x \in R(\alpha)\}$, Si $R(\alpha) \neq \emptyset$

$Q(\alpha) = +\infty$, Si $R(\alpha) = \emptyset$

Sea $S = \{\alpha \in R^m / \ Q(\alpha) < +\infty\}$

Lema. $Q(\alpha)$ es convexa en S.

Demostración.

Sean $\alpha^1, \alpha^2 \in S$, $x^1 \in R(\alpha^1)$, $x^2 \in R(\alpha^2)$, $\lambda \in [0,1]$,

$x^3 = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2$ entonces $x^3 \in C$,

$f(x^3) \leqslant \lambda f(x^1) + (1-\lambda)f(x^2) \leqslant \lambda\alpha^1 + (1-\lambda)\alpha^2$

Puesto que C es convexo y la función f es convexa en C entonces $x^3 \in R(\lambda\alpha^1 + (1-\lambda)\alpha^2)$ ó $\lambda\alpha^1 + (1-\lambda)\alpha^2 \in S$.

Como F es convexa, se obtiene de esto:

$$Q(\lambda\alpha^1 + (1-\lambda)\alpha^2) \leqslant F(x^3) \leqslant \lambda F(x^1) + (1-\lambda)F(x^2),$$

$$\forall \ x^1 \in R(\alpha^1), \ x^2 \in R(\alpha^2)$$

Esto implica que $Q(\lambda\alpha^1 + (1-\lambda)\alpha^2) \leqslant \lambda Q(\alpha^1) + (1-\lambda)Q(\alpha^2)$. $\square$

Sea $L(x,u) = F(x) + u^t f(x)$ la función de Lagrange de (P)

1. **Teorema.** Si $(\hat{x},\hat{u})$ es un punto silla de L sobre $C \times R^m_+$ entonces $-\hat{u} \in \partial Q(0)$.

   Demostración.

   Sea $\alpha \in S$ cualquiera.

   Si $(\hat{x},\hat{u})$ es un punto silla de L, entonces $\hat{u} \geqslant 0$,

   $L(\hat{x},\hat{u}) = F(\hat{x}) \leqslant F(x) + \hat{u}^t f(x)$, $\forall \ x \in C$.

   Como $F(\hat{x}) = Q(0)$, se obtiene de esto, para todo $x \in R(\alpha) \subset C$. $Q(0) \leqslant F(x) + \hat{u}^t f(x) \leqslant F(x) + \hat{u}^t\alpha$ .Esto implica - que $Q(0) \leqslant Q(\alpha) + \hat{u}^t\alpha$ ó $Q(\alpha) \geqslant Q(0) - \hat{u}^t\alpha$, $\forall \alpha \in S$

   Por consiguiente $-\hat{u} \in \partial Q(0)$. $\square$

2. Teorema. Sea $\hat{x}$ óptimo para (P) y $-\hat{u}\in\partial Q(0)$. Entonces $(\hat{x},\hat{u})$ es un punto silla de $L(x,u)$.

Demostración.

Para todo $\alpha\in R^m$ se cumple $Q(\alpha) + \hat{u}^t\alpha \geq Q(0) = F(\hat{x})$... ....(2.1)

Elegimos $x\in C$ y ponemos $f(x)=\alpha$.

Como $x\in R(\alpha)$ se cumple $Q(\alpha) < +\infty$

Si fuera $Q(\alpha) = -\infty$, entonces (2.1) no fuera cierto - Por consiguiente $Q(\alpha)\in R$.

De (2.1) se deduce:

$F(x) + \hat{u}^t f(x) = F(x) + \hat{u}^t\alpha \geq Q(\alpha) + \hat{u}^t\alpha \geq F(\hat{x})$, $\forall\ x\in C$... ....(2.2)

Supongamos que $\hat{u}_j < 0$ para algún j

Elegimos α^o :

$$\alpha_j^o = \begin{cases} 1 & \text{, Si } \hat{u}_j < 0 \\ 0 & \text{, En otro caso} \end{cases}$$

como $\hat{x}$ es admisible para P . Se cumple $\hat{x}\in R(\alpha^o)$, y se obtiene de (2.1) $F(\hat{x}) > F(\hat{x}) + \hat{u}^t\alpha^o \geq Q(\alpha^o) + \hat{u}^t\alpha^o \geq$ $\geq F(\hat{x})$, lo que es absurdo. Entonces $\hat{u}\geq 0$.

Se cumple evidentemente $\hat{u}^t f(\hat{x}) \leq 0$, de (2.2) se obtiene $\hat{u}^t f(\hat{x}) \geq 0$. Entonces $\hat{u}^t f(\hat{x}) = 0$.

Entonces $L(\hat{x},\hat{u}) = F(\hat{x}) \leq F(x) + \hat{u}^t f(x)$, $\forall\ x\in C$. Por consiguiente $(\hat{x},\hat{u})$ es un punto silla de $L(x,u)$. ∎

Nota. $Q(\alpha)$ es convexa en S. entonces $\forall\alpha\in S$ con $Q(\alpha) > -\infty$ existen las derivadas unilaterales

$$\left(\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right)_+ , \left(\frac{\partial Q(\alpha)}{\partial\alpha_j}\right)_-$$

Corolario.

(a) Sea $(\hat{x},\hat{u})$ un punto silla de $L(x,u)$ sobre C x D. Entonces se cumple:

$$0 \geq \left(\frac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right)_+ \geq -\hat{u}_j \quad ; \quad \left(\frac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right)_- \leq -\hat{u}_j, \forall j$$

(b) Si $0 \in \mathrm{Int}(S)$ y $\hat{u}$ es determinado de manera única, entonces $Q(\alpha)$ es diferenciable en $\alpha = 0$ y

$$\frac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j} = -\hat{u}_j, \forall j$$

Demostración.

(a) $\alpha^1 \leq \alpha^2$ implica que $Q(\alpha^1) \geq Q(\alpha^2)$, por consiguiente

$$\left(\frac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right)_+ \leq 0$$

Se cumple:

$Q(\alpha) \geq Q(0) - \hat{u}^t\alpha$. Entonces $\dfrac{Q(\lambda e_j) - Q(0)}{\lambda} \geq -\hat{u}_j, \forall \lambda > 0, \forall j$

Para $\lambda \downarrow 0$ obtenemos de esto $\left(\dfrac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right)_+ \geq -\hat{u}_j$

También se cumple:

$$\frac{Q(-e_j) - Q(0)}{} \geq \hat{u}_j, \forall \lambda > 0, \forall j$$

$$\frac{Q(-e_j) - Q(0)}{-\lambda} \leq -\hat{u}_j, \forall \lambda > 0, \forall j$$

Para $\lambda \downarrow 0$ obtenemos de esto $\left(\dfrac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right)_- = -u_j$

(b) Si $\hat{x}$ es óptimo y existe una única $\hat{u}$, tal que $(\hat{x},\hat{u})$ - es un punto silla de $L(x,u)$, entonces por los teoremas -- precedentes $Q(\alpha)$ es diferenciable en $\alpha = 0$ y

$$\frac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j} = -u_j, \forall j. \blacksquare$$

2.3. Algunas Aplicaciones en la Economía.

2.3.1. Teoría Microeconómica de la Empresa de Producción.

Consideremos una empresa de producción en el cuál para todo $x \in R^m$, denominamos

x^+ al vector con componentes, $x_i^+ = \text{Max}\{x_i, 0\}$ y

x al vector con componentes, $x_i^- = -\text{Min}\{x_i, 0\}$

De manera que $x = x - x$

La empresa está caracterizada por su conjunto de producción $Y \subset R^m$.

$y \in Y$ significa:

Que la empresa está en posición de producir bienes y^+ mientras consume bienes y^-.

Hacemos las siguientes

Hipótesis.

a) Y: es un conjunto convexo y cerrado con $Y \supset R^m_-$.

Esto significa que es posible aniquilar toda cantidad de bienes.

b) π : es un vector de precios, donde $\pi \in R^m$

c) c : es un vector de recursos iniciales, donde $c \in R^m$

El Problema.

La empresa desea obtener la producción $y \in Y$, que permita maximizar su beneficio, sin exceder sus recursos iniciales.

Esto nos conduce al siguiente programa matemático (P)

$$(P) : \text{Min}\left\{ -\pi^t y \;/\; y \in Y,\ y \geqslant -c \right\}$$

Consideremos la función de Lagrange asociado al programa matemático (P)

$$L(y,u) = -\pi^t y - u^t(y + c)$$

Se cumple:

$\hat{y}$ es óptimo para P si y solo si existe $\hat{u} \in R^m_+$, tal que

$(\hat{y}, \hat{u})$ *es un punto silla de* $L(y,u)$.

Interpretación de $\hat{u}$:

Para $\alpha \in R^m$, sea $R(\alpha) = \{y \in Y \;/\; y \geq -c-\alpha\}$

$Q(\alpha) = \text{Inf}\,\{-\pi^t y \;/\; y \in R(\alpha)\}$

$-\hat{u}$ es un subgradiente de $Q(\alpha)$ en $\alpha = 0$.

Para la *interpretación económica*, asumimos que $Q(\alpha)$ es diferenciable en $\alpha = 0$.

Supongamos que c es sustituido por $c + \lambda e_j$, $\lambda > 0$, entonces $\left(\dfrac{\partial Q(0)}{\partial \alpha_j}\right| = -\hat{u}_j$

Entonces $Q(\lambda e_j) = Q(0) - \lambda\hat{u}_j + O(\lambda) \approx Q(0) - \lambda\hat{u}_j =$

$= -\pi^t\hat{y} - \lambda\hat{u}_j$. Por consiguiente $-Q(\lambda e_j) \approx \pi^t\hat{y} + \lambda\hat{u}_j$.

Consecuencia : Si el recurso *j* es aumentado en $\lambda > 0$, entonces para λ 0 suficientemente pequeño la ganancia crece en aproximación lineal en $\lambda\hat{u}_j$.

Supongamos que a la empresa se le ofrece en el mercado el recurso j al precio $\pi_j + p_j$.

Tiene la empresa interés en adquirir la cantidad $\lambda > 0$ de este recurso al precio $\pi_j + p_j$?

El beneficio realizable es *entonces* $-Q(\lambda e_j) - \lambda p_j$.

Por la desigualdad de soporte obtenemos:

$Q(\lambda e_j) \geq Q(0) - \lambda\hat{u}_j = -\pi^t\hat{y} - \lambda\hat{u}_j$

$-Q(\lambda e_j) \leq \pi^t\hat{y} + \lambda\hat{u}_j$.

Condición: $-Q(\lambda e_j) - \lambda p_j \geq Q(0) = \pi^t\hat{y}$

$-Q(\lambda e_j) - \lambda p_j \approx \pi^t\hat{y} + (\hat{u}_j - p_j)\lambda \geq \pi^t\hat{y}$.

Entonces la empresa comprará el artículo solamente, si $\hat{u}_j > p_j$.

Consecuencia : $\pi_j + \hat{u}_j$ representa la cota del precio debajo de la cuál la empresa está dispuesta a comprar el bien j.

Si $\hat{y}_j > - c_j$, entonces se quedan en el mercado algunas cantidades no usadas del bien j al precio π_j. Entonces $\pi_j \geq \pi_j + \hat{u}_j$. Por consiguiente $\hat{u}_j = 0$.

Si $\hat{u}_j > 0$, entonces el precio de mercado π_j es menor que el precio de intervención $\pi_j + \hat{u}_j$ y la compañía desea comprar el artículo j al precio de mercado π_j,

Si no hace esto, esto es, si $\hat{y}$ es óptimo, esto significa que el artículo j se agota. En consecuencia

$y_j = - c_j$.

Nota. Si $\hat{y}$ es óptimo y $(\hat{y},\hat{u})$ es punto silla de $L(y,u)$, entonces $\hat{u}^t(\hat{y} + c) = 0$.

-) Si $\hat{u}_j > 0$, entonces $\hat{y}_j = - c_j$.

-) Si $\hat{y}_j > - c_j$, entonces $\hat{u}_j = 0$.

2.3.2. Conducción Descentralizada de Una Empresa.

Consideremos una empresa, que es dividida en N centros de producción.

Hablaremos de las empresas n, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Sea $Y_n \subset R^m$ el conjunto de producción de la empresa n, $y(n)$ su plan de producción para un período dado, y $u_n(y(n))$ el beneficio, que la empresa obtiene de la producción $y(n) \in Y_n$.

Sea $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ el vector de los recursos iniciales del conjunto de las N empresas.

Hacemos las siguientes

<u>Hipótesis.</u>

Hipótesis.

a) Y_n es cerrado y convexo, y $Y_n \supset R^m_-$, $\forall$ n

b) $u_n : Y_n \longrightarrow R$ es cóncava y superiormente contínua,

$n = 1, 2, \ldots, N.$

c) $c > 0$.

El Problema.

La empresa desea establecer un plan de producción $\hat{y} = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \ldots, \hat{y}(N))$, que es tecnológicamente - realizable, $[\hat{y}(n) \in Y_n, \forall n]$, de modo que los recursos disponibles alcancen, y que su beneficio total sea máximo.

Este problema conduce al siguiente programa matemático (P).

$$(P) : \text{Min } -\sum_{n=1}^{N} u_n(y(n))$$

$$y(n) \in Y_n, \quad n = 1, 2, \ldots, N$$

$$\sum_{n=1}^{N} y_i(n) \geq -c_i, \; i = 1, 2, \ldots, m$$

(P) es un programa no lineal convexo.

Su función de Lagrange es:

$$L(y,v) = L(y(1), y(2), \ldots, y(N), v) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{N} u_n(y_n) - v^t\left(\sum_{n=1}^{N} y(n) + c\right)$$

Por las hipótesis a) y c), el programa (P) satisface - las condiciones de Slater. Por consiguiente se cumple: $\hat{y} = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \ldots, \hat{y}(N))$ es óptimo para (P) si y solo si existe un $\hat{v} \in R^m$, tal que $(\hat{y},\hat{v})$ es un punto silla de $L(y,v)$ sobre $Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_N \times R^m_+$.

Si $(\hat{y},\hat{v})$ es un punto silla de $L(y,v)$, entonces se cumple en particular

$$L(\hat{y},\hat{v}) = -\sum_{n=1}^{N} u_n(y(n)) \leqslant -\sum_{n=1}^{N} u_n(y(n)) - \hat{v}^t(\sum_{n=1}^{N} y(n) + c),$$

$\forall y(n) \in Y_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

Aquí podemos omitir el término aditivo $-\hat{v}^t c$, porque no influye en las soluciones de

(Q) : Min $L(y,\hat{v})$ / $y = (y(1), y(2), \ldots, y(N)) \in \prod_{n=1}^{N} Y_n$

Evidentemente, el programa (Q) se descompone en N programas parciales (Q_n), esto es:

$\hat{y} = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \ldots, \hat{y}(N))$ es solución de (Q) si y solo si para $n = 1, 2, \ldots, N$, $\hat{y}(n)$ es solución de (Q_n)

(Q_n) : $\mathrm{Min}\left\{ - u_n(y(n)) - \hat{v}^t y(n) \;/\; y(n) \in Y_n \right\}$

Si $m(v) = \mathrm{Inf}\left\{ L(y,v) \;/\; y = (y(1), y(2), \ldots, y(N)) \in \prod_{n=1}^{N} Y_n \right\}$,

Entonces el programa dual de (P) es

$$(P^*) \; : \; \mathrm{Max}\left\{ m(v) \;/\; v \in R_+^m \right\}$$

Para simplificar el análisis, asumimos que el programa (Q) y, con esto tambien, los programas (Q_n) tiene una única solución. Este caso se presenta si las funciones u_n son todas estrictamente cóncavas en Y_n.

Asumimos también, que el programa dual (P^*) tiene una única solución.

La empresa tiene dos posibles actitudes:

1. Puede resolver de manera directa el programa (P), obteniendo así un plan óptimo de producción:

$\hat{y} = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \ldots, \hat{y}(N))$.

2. Puede restringirse a calcular v, resolviendo el programa dual (P^*), y dejar a las subempresas n la responsabilidad, para determinar su propio plan de producción óptimo $\hat{y}(n)$ como solución de (Q_n).

En el segundo caso, la decisión es descentralizada, cada subempresa toma su propia decisión. Sin tener en —

cuenta, las otras subempresas ni los recursos iniciales de la empresa global.

La empresa logra ésta descentralización por un artificio contable:

Impone "precios sombra" $\hat{v}_i$ para los diferentes artículos i.

La producción [Respectivamente el consumo] de una unidad del artículo i crea un ingreso [Respectivamente gasto] sombra $\hat{v}_i$ adicional al beneficio [Respectivamente gasto] real.

El objetivo de la empresa n es: maximizar la suma del beneficio real y del "beneficio sombra"

$u_n(y(n)) + \hat{v}^t y(n)$, en su conjunto de producción Y_n.

Bajo nuestras asunciones

$(\hat{y},\hat{v}) = (\hat{y}(1), \hat{y}(2), \dots \hat{y}(N), \hat{v})$, donde $\hat{y}(n)$ es la única solución de (Q_n) y es el único punto silla de $L(y,v)$ sobre $(\prod_{n=1}^{N} Y_n) \times R_+^m$. Por consiguiente se cumple:

$$\sum_{n=1}^{N} \hat{y}(n) + c \geqslant 0$$

$$\hat{v}^t(\sum_{n=1}^{N} \hat{y}(n) + c) = 0 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.3)$$

Esto significa, que las decisiones descentralizadas tienen, de manera automática, en cuenta los recursos disponibles de la empresa global. Además, de acuerdo con (2.3) se cumple:

Si $\hat{v}_i > 0$ entonces $\sum_{n=1} \hat{y}_i(n) + c_i = 0$

Si $\sum_{n=1}^{N} \hat{y}_i(n) + c_i > 0$ entonces $\hat{v}_i = 0$

Es decir si el precio sombra es óptimo, entonces al final del período, el artículo i no es disponible.

Si al final del período el artículo i es disponible, entonces su precio $\hat{v}_i$ es cero.

La dificultad del enfoque descentralizado reside en la dificultad de resolver el programa dual (P^*). Sin embargo, ésta dificultad excede los alcances del presente trabajo, que no son algoritmos.

CAPITULO III

UN TEOREMA GENERAL Y FLEXIBLE DE MINIMAX

3.1. INTRODUCCION.

El teorema de minimax, que vamos a demostrar incluye y generaliza todo una gama de teoremas de minimax, que se basan en conceptos generales de conexidad de un lado, y en condiciones algebraicas de otro lado.
Este teorema incluye en particular el famoso teorema de Sion y un teorema de minimax de Fan.
El rol importante de argumentos de conexidad, en teoremas de minimax, se puede observar en los trabajos de Wu [18], Tuy [16,17] y Kindler - Trost [7].
Teoremas de minimax, que usan condiciones algebraicas, fueron demostrados por Fan [2], König [8], Neumann[10], Kindler[6] y Simons[11].
Teoremas de minimax, que usan condiciones de conexidad y condiciones algebraicas juntas, fueron considerados por Terkelsen[15], Kindler[7] y Simons[12].
El teorema que vamos a analizar cuyo autor es Simons, unifica todas esas ideas.

3.2. UN TEOREMA GENERAL Y FLEXIBLE DE MINIMAX

Sean X, Y conjuntos no vacíos,
$f : X \times Y \to R$, para $\gamma \in R$ definimos
$\gamma] : X \rightrightarrows Y$, $[\gamma : Y \rightrightarrows X$ por:

$$\gamma]x = \{ y \in Y \; / \; f(x,y) \leq \gamma \}$$

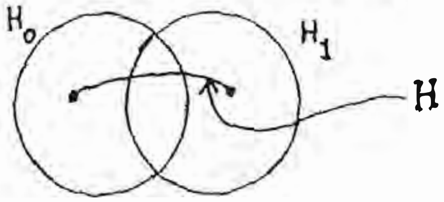
$$[\gamma y = \{ x \in X \; / \; f(x,y) > \gamma \}$$

Notación: $LE(W,\gamma) = \bigcap_{w \in W} \gamma]w$, $\quad LE(\emptyset,\gamma) = Y$

Decimos que los conjuntos H_0, H_1 son unidos por

El conjunto H, si

$H \subset H_0 \cup H_1$, $\quad H \cap H_0 \neq \emptyset$, $\quad H \cap H_1 \neq \emptyset$



Una familia K de conjuntos es pseudoconexa, si H_0, H_1, $H \in K$, H_0, H_1 son unidos por H, entonces $H_0 \cap H_1 \neq \emptyset$

Toda familia φ de conjuntos conexos y cerrados en un espacio topológico es pseudoconexa.

Demostración.

Sean H_0, H_1, $H \in \varphi$, $H \subset H_0 \cup H_1$, $\quad H \cap H_1 \neq \emptyset$, $\quad H \cap H_0 \neq \emptyset$

Supongamos que $H_0 \cap H_1 = \emptyset$,

Entonces $H = H \cap (H_1 \cup H_0) = (H \cap H_1) \cup (H \cap H_0) \neq \emptyset$

$H \cap H_i \quad i = 0,\ 1$ son cerrados

$H \cap H_0 \cap H_1 = \emptyset$, entonces H no es conexo($\rightarrow\leftarrow$).

Por consiguiente toda familia φ es pseudoconexa.

Teorema 1. Sea Y un espacio topológico $\emptyset \neq B \subset R$ con

$$Inf(\beta) = \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} f(x,y)$$

Supongamos que $\forall\ \beta \in B$ y $\forall$ los subconjuntos finitos W de X se cumple :

$\forall\ x \in X$, $\underline{\beta}|\, x$ es cerrado y compacto ....(3.1)

La familia$\left\{ \underline{\beta}|\, x \cap LE(W,\beta)\ /\ x \in X \right\}$es pseudoconexa......(3.2)

$\forall\ x_0$, $x_1 \in X$ existe $x \in X$, tal que

$\underline{\beta}|\, x_0$ y $\underline{\beta}|\, x_1$ son unidos por

$\underline{\beta}|\, x \cap LE(W, \beta)$.....................................(3.3)

Entonces $\operatorname{Min}_{y\in Y} \operatorname{Sup}_{x\in X} f(x,y) = \operatorname{Sup}_{x\in X} \operatorname{Inf}_{y\in Y} f(x,y)$

Nota. Deffinimos:

$$M(y) = \operatorname{Sup}_{x\in X} f(x,y) , \qquad m(x) = \operatorname{Inf}_{y\in Y} f(x,y)$$

La tesis significa: $\operatorname{Min}_{y\in Y} M(y) = \operatorname{Sup}_{x\in X} m(x)$

Demostración.

a) Se cumple:

$m(x) \leqslant f(x,y) \leqslant M(y), \forall (x,y) \in X \times Y$

Entonces $\operatorname{Sup}_{x\in X} m(x) \leqslant \operatorname{Inf}_{y\in Y} M(y)$..........................(3.4)

b) Mostraremos: $\operatorname{Sup}_{x\in X} m(x) \geqslant \operatorname{Min}_{y\in Y} M(y)$

Sea $\emptyset \neq V \subset X$ un conjunto finito arbitrario. Podemos escribir $V = \{x_0, x_1\} \cup W$

[W es finito, $W \neq \emptyset$ y $x_0 = x_1$ son posibles]

De (3.3) entonces existe $x \in X$, tal que

$\beta\rfloor x_0 \cup \beta\rfloor x_1 \supset \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)$........................(3.5)

$\beta\rfloor x_0 \cap \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta) \neq \emptyset$............................(3.6)

$\beta\rfloor x_1 \cap \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta) \neq \emptyset$............................(3.7)

De (3.5) se obtiene

$(\beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)) \subset (\beta\rfloor x_0 \cap LE(W,\beta)) \cup (\beta\rfloor x_1 \cap LE(W,\beta))$ .....

....(3.8)

De (3.6) se obtiene

$(\beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)) \cap (\beta\rfloor x_0 \cap LE(W,\beta)) \neq \emptyset$...............(3.9)

y de (3.7) se obtiene

$(\beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)) \cap (\beta\rfloor x_1 \cap LE(W,\beta)) \neq \emptyset$...............(3.10)

De (3.8), (3.9) y (3.10) entonces $\beta\rfloor x_0 \cap LE(W,\beta)$ y $\beta\rfloor x_1 \cap LE(W,\beta)$ son unidos por $\beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)$.

De (3.2) entonces

$(\beta\rfloor x_0 \cap LE(W,\beta)) \cap (\beta\rfloor x_1 \cap LE(W,\beta)) \neq \emptyset$ ó

$\beta\rfloor x_0 \cap \beta\rfloor x_1 \cap LE(W,\beta) \neq \emptyset$ ó

$LE(V,\beta) \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\forall V \subset X$ finito.

Por consiguiente $\forall \beta \in B$, $\{\beta\rfloor x \;/\; x \in X\}$ es una familia de conjuntos cerrados y compactos con la propiedad de la intersección finita. Entonces

$$A_\beta = \bigcap_{x \in X} \beta\rfloor x \neq \emptyset, \quad \forall \beta \in B$$

A_β es compacto y cerrado, $\forall \beta \in B$.

Sea $\{\beta_n\} \subset B$, $\beta_n \downarrow \operatorname{Inf}(B)$ con $\beta_{n+1} \leqslant \beta_n$, $x \in X$ en el que entonces $\beta_{n+1}\rfloor x \subset \beta_n\rfloor x$

Entonces $A_{\beta_{n+1}} \subset A_{\beta_n} \subset A_{\beta_1}$, $A_{\beta_n} \neq \emptyset$ $\forall n \in N$

Entonces $\{A_{\beta_n} \;/\; n \in N\}$ tiene la propiedad de la intersección finita. Entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_{\beta_n} = A \neq \emptyset$

$\hat{y} \in A$, entonces $f(x,\hat{y}) \leqslant \beta_n$, $\forall x \in X$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Entonces $f(x,\hat{y}) \leqslant \operatorname{Inf}(B) = \operatorname{Sup}_{x \in X} m(x)$, $\forall x \in X$

Entonces $M(\hat{y}) \leqslant \operatorname{Sup}_{x \in X} m(x)$ ....(3.11)

De (3.4) y (3.11) se obtiene:

$$\operatorname{Inf}_{y \in Y} M(y) \leqslant M(\hat{y}) \leqslant \operatorname{Sup}_{x \in X} m(x) \leqslant \operatorname{Inf}_{y \in Y} M(y)$$

Por consiguiente se obtiene $\operatorname{Min}_{y \in Y} M(y) = \operatorname{Sup}_{x \in X} m(x)$. ∎

En el siguiente lema W no es necesariamente finito.

Lema 1. Sea $W \subset X$, $\beta \in R$, sean cumplidas las siguientes hipótesis:

$\gamma | x \cap LE(W,\beta)$ es cerrado y compacto $\forall \gamma > \beta$, $x \in X$...(3.12)

y para $\delta > \gamma$ existe $N \geq 1$ y $\{\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N\} \subset R$, donde $\gamma_0 = \delta$, $\gamma_N = \gamma$, con las siguientes propiedades:

$\forall\, y_0, y_1 \in Y$ existe $y \in Y$, tal que

$\forall\, n \in \{1, 2, \ldots, N\}$ se cumple

$\sqrt{\gamma_n}\, y \subset \sqrt{\gamma_{n-1}}\, y_0 \cup \sqrt{\beta}\, y_1$............(3.13.1) (3.13)

$\sqrt{\gamma_n}\, y \subset \sqrt{\beta}\, y_0 \cup \sqrt{\gamma_{n-1}}\, y_1$..........(3.13.2)

$\sqrt{\beta}\, y \subset \sqrt{\beta}\, y_0 \cup \sqrt{\beta}\, y_1$............(3.13.3)

$\sqrt{\delta}\, yy \subset \sqrt{\delta}\, y_0 \cup \sqrt{\delta}\, y_1$............(3.13.4)

Entonces $\{ \beta | x \cap LE(W,\beta) \ / \ x \in X \}$ es pseudoconexo.

Demostración.

Supongamos que la tesis del lema no sea cierta, entonces existen $x, x_0, x_1 \in X$, tal que

$T = \beta | x \cap LE(W,\beta)$ une $T_1 = \beta | x_1 \cap LE(W,\beta)$ y

$T_0 = \beta | x_0 \cap LE(W,\beta)$ y $T_0 \cap T_1 = \emptyset$

Entonces se cumple:

$T \subset T_0 \cup T_1 \subset \beta | x_0 \cup \beta | x_1$..........................(3.14)

$S(\beta) = \beta | x_0 \cap \beta | x_1 \cap T \subset \beta | x_0 \cap \beta | x_1 \cap LE(W,\beta) = \emptyset$ ......
....(3.15)

$u_i \in \beta | x_i \cap T \neq \emptyset$, $i = 0, 1$.........................(3.16)

De (3.12) y (3.15) se deduce que existe un $\gamma > \beta$, tal — que $\gamma | x_0 \cap \gamma | x_1 \cap T = \emptyset$ ....(3.17)

Demostración de (3.17).

Supongamos que:

$S(\gamma) = \gamma\rfloor x_0 \cap \gamma\rfloor x_1 \cap T \neq \emptyset, \quad \forall\, \gamma > \beta$

Sea $\gamma_n \downarrow \beta$. Se cumple, entonces

$\emptyset \neq S(\gamma_{n+1}) \subset S(\gamma_n), \ \forall\, n \in N$. Entonces $\{S(\gamma_n) \,/\, n \in N\}$ tiene la propiedad de la intersección finita, como $S(\gamma_n)$ es cerrado y compacto, $\forall\, n \in N$, se obtiene de esto que $S(\beta) = \bigcap_{n \in N} S(\gamma_n) \neq \emptyset$ lo que contradice a (3.15).

De (3.16) y (3.17) se deduce que $u_0 \notin \gamma\rfloor x_1$.

$[\gamma > \beta \Rightarrow u_0 \in \gamma\rfloor x_0 \cap T$, $(3.16) \Rightarrow u_0 \notin \gamma\rfloor x_1 \,]$

Sea $\sigma = \underbrace{f(x_1,u_0)}_{>\gamma} \vee f(x_0,u_1) > \gamma$

Definimos:

$U_0 = \beta\rfloor x_0 \cap \sigma\rfloor x_1 \cap T \ni u_0$

$U_1 = \sigma\rfloor x_0 \cap \beta\rfloor x_1 \cap T \ni u_1$

Elegimos $N \geqslant 1$ y $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N$ de acuerdo con (3.13) se cumple entonces $U_0 \subset \sigma\rfloor x_1 = \gamma_0\rfloor x_1$

De (3.17) se obtiene: $U_0 \cap \gamma_N\rfloor x_1 = U_0 \cap \gamma\rfloor x_1 = \emptyset$

$[\,U_0 \cap \gamma\rfloor x_1 = \beta\rfloor x_0 \cap \gamma\rfloor x_1 \cap T \subset \gamma\rfloor x_0 \cap \gamma\rfloor x_1 \cap T = \emptyset\,]$

Consecuencia: $\forall\, t \in U_0$, existe un único $g_0(t) \in \{1, \ldots, N\}$ tal que

$g_0(t) \leqslant n \leqslant N$ entonces $t \notin \gamma_n\rfloor x_1$. y

$n = g_0(t)$ entonces $t \in \gamma_{n-1}\rfloor x_1$ ....(3.18)

De manera similar se cumple:

$\forall\, t \in U_1$, existe un único $g_1(t) \in \{1, \ldots, N\}$ tal que

$g_1(t) \leqslant n \leqslant N$ entonces $t \notin \gamma_n\rfloor x_0$ y

$n = g_1(t)$ entonces $t \in \underline{\gamma_{n-1}}\rfloor x_o$

Determinamos $y_i \in U_i$, tal que $g_i(y_i)$ sea máximo y elegimos $y \in Y$ de acuerdo con (3.13).

De (3.13.3) obtenemos: $y \in T$........................(3.19)

Demostración de (3.19).

Escribimos (3.13.3) como $\mathcal{E}(\sqrt{\beta}\, y_o \cup \sqrt{\beta}\, y_1) \subset \mathcal{E}(\sqrt{\beta}\, y)$

esto significa :

$f(x,y_o) \leqslant \beta \quad , \ f(x,y_1) \leqslant \beta \Longrightarrow f(x,y) \leqslant \beta$

como y_o, $y_1 \in T$, se cumple $\forall\, u \in W \cup \{x\}$

$f(u,y_o) \leqslant \beta \quad , \ f(u,y_1) \leqslant \beta$ Por consiguiente $f(u,y) \leqslant \beta$,

$\forall\, u \in W \cup \{x\}$ ó $y \in \underline{\beta}\rfloor x \cap LE(W,\beta) = T$.

Por lo tanto obtenemos que $y \in T$.

De acuerdo con (3.14): $T \subset \underline{\beta}\rfloor x_o \cup \underline{\beta}\rfloor x_1$

entonces podemos asumir que $y \in \underline{\beta}\rfloor x_o$................(3.20)

De (3.13.4), $y_i \in \underline{\delta}\rfloor x_i = \gamma_o\rfloor x_i$, $i = 0,1$...........(3.21)

Deducimos que $y \in \delta\rfloor x_1$...............................(3.22)

Demostración de (3.22)

Escribimos (3.13.4) como $\mathcal{E}(\sqrt{\delta}\cdot y_o \cup \sqrt{\delta}\, y_1) \subset \mathcal{E}(\sqrt{\delta}\, y)$

esto significa:

$f(x,y_o) \leqslant \delta \ , \ f(x,y_1) \leqslant \delta \Longrightarrow f(x,y) \leqslant \delta$ ....(3.23)

$$\left.\begin{array}{l}\text{por (3.23) se cumple } f(x_1,y_1) \leqslant \delta \\ \text{como } y_o \in U_o \text{ entonces } f(x_1,y_o) \leqslant \delta\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3.24)$$

De (3.24) se cumple que $f(x_1,y) \leqslant \delta$ .Por consiguiente $y \in \underline{\delta}\rfloor x_1$.

(3.19),(3.20) y(3.22) implica que $y \in \underline{\beta}\rfloor x_o \cap \underline{\delta}\rfloor x_1 \cap T = U_o$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Sea } n = g_1(y_o)\text{. Por (3.18) se cumple que } y_o \in \underline{\gamma_{n-1}}\rfloor x_1 \\ y_1 \in U_1 \text{ entonces } y_1 \in \underline{\beta}\rfloor x_1\end{array}\right\} (3.25)$$

Escribimos (3.13.1) como $\mathcal{C}(/\gamma_{n-1}\, y_o \cup /\beta\, y_1) \subset \mathcal{C}(/\gamma_n\, y)$ esto significa:

$f(x,y_o) \leq \gamma_{n-1}$, $f(x,y_1) \leq \beta$ entonces $f(x,y) \leq \gamma_n$

de (3.25) se cumple que

$f(x_1,y_o) \leq \gamma_{n-1}$, $f(x_1,y_1) \leq \beta$. Por consiguiente

$f(x_1,y) \leq \gamma$ ó $y \in \gamma_n \rfloor x_1$, pero de (3.18) obtenemos:

$g_o(y_o) = n < g_o(y)$, entonces $g_o(y_o)$ no es maximal, lo que es absurdo. ∎

Observaciones 1.

Las siguientes condiciones (1.1.) - (1.4.), varios autores las han introducido que implican la condición (3.13)

(1.1.) (König[8], Fan[2])

$\forall\, y_o, y_1 \in Y$ existe $y \in Y$, tal que

$x \in X$ entonces $f(x,y) \leq \frac{1}{2}\left[f(x,y_o) + f(x,y_1)\right]$

(1.2.) (Geraghty-Lin[3,4,5] y Lin-Quan[9])

$\exists\, s \in \langle 0,1 \rangle$, tal que, $\forall\, y_o, y_1 \in Y$ existe $y \in Y$ con

$x \in X$ entonces $f(x,y) \leq (1 - s)\left[f(x,y_o) \vee f(x,y_1)\right] +$
$+ s\left[f(x,y_o) \wedge f(x,y_1)\right]$.

(1.3.) (Simons[7])

$\exists$ una función no decreciente $\pi : R_+ \longrightarrow R_+$

con $\pi(\lambda) > 0$, $\forall \lambda > 0$ y tal que $\forall\, y_o, y_1 \in Y$, existe $y \in Y$ tal que,

$x \in X$ entonces $f(x,y) \leq \left[f(x,y_o) \vee f(x,y_1)\right] -$
$- \pi(\left|f(x,y_o) - f(x,y_1)\right|)$

(1.4.) (Simons[7])

$\forall\, \varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que, $\forall\, y_o, y_1 \in Y$, existe $y \in Y$ con $x \in X$ y $\left|f(x,y_o) - f(x,y_1)\right| \geq \varepsilon$

entonces $f(x,y) \leqslant f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \eta$ y

$x \in X$ entonces $f(x,y) \leqslant f(x,y_0) \vee f(x,y_1)$.

Veamos que (1.1.) implica (1.2.):

Asumamos que $f(x,y_1) = \mathrm{Max}\left\{f(x,y_0), f(x,y_1)\right\}$

entonces (1.2.) significa:

$f(x,y) \leqslant (1 - s)\ f(x,y_1) + sf(x,y_0)$.........(1.1.1)

(1.1.) implica (1.1.1) para $s = 1/2$:

$f(x,y) \leqslant (1 - 1/2)\ f(x,y_1) + (1/2)\ f(x,y_0)$ ó

$f(x,y) \leqslant \frac{1}{2}\left[f(x,y_0) + f(x,y_1)\right]$. $\square$

Veamos que (1.2.) implica (1.3.) :

Sea cumplida (1.2.)

para $s \in \langle 0,1 \rangle$ elegimos $\pi(\lambda) = s\lambda$

podemos asumir, que $f(x,y_0) \leqslant f(x,y_1)$ entonces

$|f(x,y_0) - f(x,y_1)| = f(x,y_1) - f(x,y_0)$

y (1.2.) toma la forma:

$x \in X \Rightarrow f(x,y) \leqslant (1 - s)\ f(x,y_1) + s\ f(x,y_0) =$

$= f(x,y_1) - s\left[f(x,y_1) - f(x,y_0)\right]$

$= f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \pi(|f(x,y_1) - f(x,y_0)|)$.

Por consiguiente para $\pi(\lambda) = s\lambda$ se cumple (1.3.). $\square$

Nota. Es posible, elegir funciones más pequeñas

(por ejemplo $\pi(\lambda) = e^{-1/\lambda^2}$).

Veamos que (1.3.) implica (1.4.):

Elegimos $\eta = \pi(\varepsilon) > 0$

Sea cumplida (1.3.), $x \in X$ y $|f(x,y_0) - f(x,y_1)| \geqslant \varepsilon$

entonces $\pi(|f(x,y_0) - f(x,y_1)|) \geqslant \pi(\varepsilon) = \eta$, entonces

$f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \pi(|f(x,y_0) - f(x,y_1)|)$

$\leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \eta$ ó

$f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \eta$.

Por otro lado se obtiene de (1.3.)

$x \in X \Rightarrow f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) -$

$- \pi(|f(x,y_0) - f(x,y_1)|) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1)$ ó

$f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1)$. $\square$

Afirmación.

Si $\beta < \gamma < \delta$, entonces (1.4.) implica (3.13)

Hacemos $\varepsilon = \gamma - \beta$ y elegimos η como en (1.4.) y -

$\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in [\gamma, \delta]$ con $\gamma_0 = \delta$, $\gamma_N = \gamma$,

$\gamma_{n-1} - \gamma_n \leq \eta$, $\forall n \in \{1,2,\ldots,N\}$

Sean $y_0, y_1 \in Y$, elegimos $y \in Y$ como en (1.4.)

Supongamos que $f(x,y_0) \leq \gamma_{n-1}$ y $f(x,y_1) \leq \beta$ ó

$x \in \mathscr{C}(\overline{\Gamma}\gamma_{n-1}\, y_0 \cup \Gamma\beta\, y_1)$....................(1.4.1)

Distinguimos dos casos:

Caso 1 : $f(x,y_0) \leq \gamma$

de (1.4.) obtenemos:

$f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) \leq \gamma \vee \beta = \gamma \leq \gamma_n$ ó

$x \in \mathscr{C}(\Gamma\gamma_n\, y)$..............................(1.4.2)

Caso 2 : $f(x,y_0) > \gamma$ entonces

$f(x,y_0) - f(x,y_1) > \gamma - \beta = \varepsilon$, de (1.4.) entonces

$f(x,y) \leq f(x,y_0) \vee f(x,y_1) - \eta \leq \gamma_{n-1} \vee \beta - \eta =$

$= \gamma_{n-1} - \eta \leq \gamma_n$ ....(1.4.3)

(1.4.1), (1.4.2) y (1.4.3) implica que

$\mathscr{C}(\lceil \gamma_{n-1}\, y_0 \cup \lceil \beta\, y_1) \subset \mathscr{C}(\lceil \gamma_n\, y)$ ó

$\lceil \gamma_n\, y \subset \lceil \gamma_{n-1}\, y_0 \cup \lceil \beta\, y_1$, con lo cúal hemos obtenido (3.13.1).

De manera similar se demuestra que (3.13.2) se cumple.

De (1.4.) entonces $f(\cdot,y) \leq f(\cdot,y_0) \vee f(\cdot,y_1)$

Sea $f(x,y_0) \leq \beta$, $f(x,y_1) \leq \beta$ ó

$x \in \mathscr{C}(\lceil \beta\, y_0 \cup \lceil \beta\, y_1)$, entonces $f(x,y) \leq \beta$ ó

$x \in \mathscr{C}(\lceil \beta\, y)$. Por consiguiente se obtiene

$\lceil \beta\, y \subset \lceil \beta\, y_0 \cup \lceil \beta\, y_1$ lo que es (3.13.3).

De manera similar se demuestra que (3.13.4) se cumple.

Condiciones Suficientes para (3.3)

$\forall\, x_0, x_1 \in X$ existe $x \in X$, tal que $\underline{\beta|}\, x_0$ y $\underline{\beta|}\, x_1$ son unidos por $\underline{\beta|}\, x \cap LE(W,\beta)$ (3.3)

En ésta sección se cumplirá siempre que $Z \subset Y$.

Lema 2. Sean X un espacio topológico, $\beta \in R$, $x_0, x_1 \in X$ y $C \subset X$ conexo, tales que

$x_0, x_1 \in C$ y $\forall\, x \in C$, $\underline{\beta|}\, x \subset \underline{\beta|}\, x_0 \cup \underline{\beta|}\, x_1$............(3.26)

Adicionalmente asumimos que

$\forall\, y \in Z$, el conjunto $\{x \in C \,/\, f(x,y) < \beta\}$ es abierto en C...(3.27)

y que $\forall\, x \in C$, existe un $y \in Z$ con $f(x,y) < \beta$ ....(3.28)

Entonces existe un $x \in X$, tal que

$\underline{\beta|}\, x_0$ y $\underline{\beta|}\, x_1$ son unidos por $\underline{\beta|}\, x \cap Z$...............(3.29)

Demostración.

Podemos asumir que:

$$\beta\rfloor x_0 \cap \beta\rfloor x_1 \cap Z = \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.30)$$

En otro caso, se deducirá de (3.26) que (3.29) es cumplido para $x \approx x_0$.

Para $i = 0, 1$, definimos

$$C_i = \{x \in C \,/\, \beta\rfloor x \cap Z \subset \beta\rfloor x_i\} \ni x_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.31)$$

De (3.26) y (3.30) se deduce que

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \{x \in C \,/\, \beta\rfloor x \cap \beta\rfloor x_1 \cap Z = \emptyset\} = D_0 \\ C_1 &= \{x \in C \,/\, \beta\rfloor x \cap \beta\rfloor x_0 \cap Z = \emptyset\} = D_1 \end{aligned}\right. \ldots\ldots\ldots\ldots (3.32)$$

Explicación. Mostraremos que $C_0 = D_0$

$C_0 \subset D_0$: De $x \in C_0$ y (3.30) obtenemos:

$x \in C$, $\beta\rfloor x \cap Z \subset \beta\rfloor x_0 \subset Y - (\beta\rfloor x_1 \cap Z)$ esto implica que

$x \in C$, $\beta\rfloor x \cap \beta\rfloor x_1 \cap Z = \emptyset$ ó $x \in D_0$.

$D_0 \subset C_0$: De (3.26) obtenemos:

$$\beta\rfloor x \cap Z \subset (\beta\rfloor x_0 \cap Z) \cup (\beta\rfloor x_1 \cap Z), \forall x \in C \ldots\ldots\ldots (3.33)$$

Si $x \in D_0$, entonces

$x \in C$, $\beta\rfloor x \cap Z \subset Y - \beta\rfloor x_1 \subset Y - (\beta\rfloor x_1 \cap Z)$

de esto y de (3,33) se obtiene que

$x \in C$, $\beta\rfloor x \cap Z \subset \beta\rfloor x_0 \cap Z \subset \beta\rfloor x_0$ ó que $x \in C_0$

de (3,28), (3.30) y (3.31) se deduce que

$$C_0 \cap C_1 = \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.34)$$

Explicación. Mostraremos que $C_0 \cap C_1 = \emptyset$

Supongamos que $x \in C_0 \cap C_1 \neq \emptyset$.

De (3.31) y (3.30) obtenemos:

$$x \in C, \ \beta\rfloor x \cap Z \subset \beta\rfloor x_0 \cap \beta\rfloor x_1 \cap Z = \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots (3.35)$$

Sin embargo, de acuerdo con (3.28) se cumple:

$\underline{\beta\rfloor}\, x \cap Z \neq \emptyset$, $\forall\, x \in C$, lo que contradice a (3.35). Por consiguiente se cumple (3.34).

Consideramos primero el caso, donde $C - (C_0 \cup C_1) \neq \emptyset$

Si $x \in C - (C_0 \cup C_1)$, entonces de acuerdo con (3.32) se — cumple:

$$\underline{\beta\rfloor}\, x \cap Z \cap \underline{\beta\rfloor}\, x_i \neq \emptyset, \; i = 0, 1 \quad \text{......................} (3.36)$$

De (3.26) obtenemos

$$\underline{\beta\rfloor}\, x \cap Z \subset \underline{\beta\rfloor}\, x \subset \underline{\beta\rfloor}\, x_0 \cup \underline{\beta\rfloor}\, x_1 \quad \text{.....................} (3.37)$$

(3.36) y (3.37) significan que

$\forall\, x \in C - (C_0 \cup C_1)$, $\underline{\beta\rfloor}\, x_0$ y $\underline{\beta\rfloor}\, x_1$ son unidos por $\underline{\beta\rfloor}\, x \cap Z$.

Falta considerar el caso donde

$$C = C_0 \cup C_1 \quad \text{...} (3.38)$$

Ahora vamos a demostrar que (3.38) no es posible

Sea $x \in C$ cualquiera.

Tesis.

$$x \in C_0 \Leftrightarrow \exists\, y \in \underline{\beta\rfloor}\, x_0 \cap Z \text{ con } f(x,y) < \beta \quad \text{.................} (3.39)$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Sea $x \in C_0$. Entonces, de acuerdo con (3.28) existe un $y \in Z$ con $f(x,y) < \beta$.

Por consiguiente $y \in \underline{\beta\rfloor}\, x \cap Z$. De esto y de (3.31), obtenemos que $y \in \underline{\beta\rfloor}\, x_0 \cap Z$.

($\Leftarrow$) Sea $y \in \underline{\beta\rfloor}\, x_0 \cap Z$, $f(x,y) < \beta$. Entonces $y \in \underline{\beta\rfloor}\, x \cap \underline{\beta\rfloor}\, x_0 \cap Z \neq \emptyset$. De esto y de (3.32) se deduce que $x \notin C_1$. De (3.38) se obtiene que $x \in C_0$.

De (3.27) y (3.39) se deduce que C_0 es abierto en C.

Explicación. Mostraremos que C_0 es abierto en C.

De (3.27) se tiene que:

$\forall\, y \in Z$, el conjunto $\{x \in C \,/\, f(x,y) < \beta\}$ es abierto en C.
Para $x \in C_o$, (3.39) implica que $\exists\, y \in Z \cap \beta| x_o$ con $f(x,y) < \beta$, entonces existe una vecindad U de x, tal que $f(z,y) < \beta$, $\forall\, z \in U \cap C$. entonces $U \cap C \subset C_o$. Por consiguiente C_o es abierto en C.

Del mismo modo se demuestra que C_1 es abierto en C.
Por consiguiente se cumple:
C_o, C_1 son no vacíos y abiertos en C, tal que

$C_o \cap C_1 = \emptyset$, $C = C_o \cup C_1$.

En consecuencia, C no es conexo, lo que es absurdo. Por consiguiente (3.38) no es posible. ∎

Lema 3. Sea X un espacio topológico, $\beta \in R$, x_o, $x_1 \in X$ y $C \subset X$ un conjunto conexo, tales que

x_o, $x_1 \in C$, $\beta| x \subset \beta| x \subset \beta| x_o \cup \beta| x_1$, $\forall\, x \in C$ (3.26) .

Sea Y un espacio topológico compacto y sea

$\{(x,y) \,/ x \in C,\ y \in Z,\ f(x,y) \leq \beta\}$ cerrado en C x Y....(3.40)

Sea finalmente

$\beta| x \cap Z \neq \emptyset$, $\forall\, x \in C$..................................(3.41)

entonces existe un $x \in C$, tal que

$\beta| x_o$ y $\beta| x_1$ son unidos por $\beta| x \cap Z$ (3.29)

Demostración.

A pesar que la condición (3.41) es más débil que (3.28) se puede repetir la demostración del lema 2 hasta el punto (3.38): $C = C_o \cup C_1$

En lugar de (3.39) se cumple, $\forall\, x \in C$:

$x \in C_o \Leftrightarrow \exists\, y \in \beta| x_o \cap Z$ con $f(x,y) \leq \beta$ ....(3.42)

Vamos a demostrar que C_o es cerrado en C.

Sea $x \in \mathcal{C}\ell(C_o)$, entonces existe una red (ó una sucesión generalizada) x_λ con $x_\lambda \in C_o$, $\forall \lambda$, tal que $x_\lambda \rightarrow x$.

Por (3.42) existe para todo λ un $y_\lambda \in \underline{\beta\rfloor} x_0 \cap Z$ con

$f(x_\lambda, y_\lambda) \leqslant \beta$.

Como Y es compacto, podemos asumir que $y_\lambda \longrightarrow y \in Y$ entonces

$(x_\lambda, y_\lambda) \longrightarrow (x,y)$, $\quad (x_0, y_\lambda) \rightarrow (x_0, y)$ y por (3.40) se cumple:

$y \in Z$, $f(x,y) \leqslant \beta$, $f(x_0, y) \leqslant \beta$.

De esto y de (3.42) se obtiene que $x \in C_0$. Por consiguiente C_0 es cerrado en C.

Del mismo modo se demuestra que C_1 es cerrado en C. De (3.31), (3.34) y (3.38) se deduce que C no es conexo, lo que es absurdo. Por consiguiente $C = C_0 \cup C_1$ no es posible, y para todo $x \in C - (C_0 \cup C_1)$, $\underline{\beta\rfloor} x_0$ y $\underline{\beta\rfloor} x_1$ son unidos por $\underline{\beta\rfloor} x \cap Z$. $\blacksquare$

Lema 4. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Supongamos que para todo $\gamma < \alpha$ exista un $N \in \mathbb{N}$ y números reales $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \leqslant \beta$, donde $\alpha_0 = \gamma$, $\alpha_N = \alpha$, que tienen las siguientes propiedades:

$\forall\, t_0, t_1 \in X$ existe un $x \in X$, tal que $\forall\, n \in \{1, \ldots, N\}$ se cumple

$$\left.\begin{array}{ll} \underline{\alpha_n\rfloor} x \subset \underline{\alpha_{n-1}\rfloor} t_0 \cup \underline{\beta\rfloor} t_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3.43.1) \\ \underline{\alpha_n\rfloor} x \subset \underline{\beta\rfloor} t_0 \cup \underline{\alpha_{n-1}\rfloor} t_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3.43.2) \\ \underline{\beta\rfloor} x \subset \underline{\beta\rfloor} t_0 \cup \underline{\beta\rfloor} t_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3.43.3) \\ \underline{\gamma\rfloor} x \subset \underline{\gamma\rfloor} t_0 \cup \underline{\gamma\rfloor} t_1 & \ldots\ldots\ldots\ldots (3.43.4) \end{array}\right\} (3.43)$$

Sean además cumplidas las siguientes condiciones:

$\underline{\alpha\rfloor} x \cap Z \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$. ....(3.44)

Existen x_0, $x_1 \in X$ con $\operatorname{Inf} f(x_0, Z) > -\infty$,

$\operatorname{Inf} f(x_1, Z) > -\infty$ ....(3.45)

Entonces existe un $x \in X$, tal que $\beta\rfloor x_0$ y $\beta\rfloor x_1$ son unidos por $\beta\rfloor x \cap Z$.

Demostración:

Por (3.45) podemos elegir $\tau \in R$, tal que

$\tau\rfloor x_0 \cap Z = \emptyset$, $\tau\rfloor x_1 \cap Z = \emptyset$.

De esto y de (3.44) se obtiene que $\tau < \alpha$.

Sean $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N$ números, que satisfacen las condiciones (3.43).

Sea $t \in X$, tal que $\tau\rfloor t \cap Z = \emptyset$ entonces, de acuerdo con (3.43) y (3.44) se cumple

$$\alpha_0\rfloor t \cap Z = \tau\rfloor t \cap Z = \emptyset \quad y \quad \alpha_N\rfloor t \cap Z = \alpha\rfloor t \cap Z \neq \emptyset.$$

Por consiguiente existe exactamente un número

$g(t) \in \{1, 2, \dots, N\}$ tal que

$$\left.\begin{array}{ll} g(t) \leq n \leq N \Longrightarrow \alpha_n\rfloor t \cap Z \neq \emptyset \ \text{ y} \\ n = g(t) \qquad \alpha_{n-1}\rfloor t \cap Z = \emptyset \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (3.46)$$

Para $i = 0, 1$ definimos:

$$U_i = \{t \in X \,/\, \tau\rfloor t \cap Z = \emptyset; \ \beta\rfloor t \cap Z \subset \beta\rfloor x_i\} \ni x_i$$

elegimos $t_i \in U_i$ de modo que $g(t_i)$ es máximo y elegimos

$x \in X$, tal que (3.43.1) — (3.43.4) se cumplen.

$t_i \in U_i$ y (3.43.4) implican que

$$\tau\rfloor x \cap Z = \emptyset \quad \dots\dots\dots\dots (3.47)$$

De $t_i \in U_i, i = 0, 1$ y (3.43.3) obtenemos

$$\beta\rfloor x \cap Z \subset (\beta\rfloor t_0 \cap Z) \cup (\beta\rfloor t_1 \cap Z) \subset \beta\rfloor x_0 \cup \beta\rfloor x_1 \dots\dots (3.48)$$

Demostramos ahora que

$$\beta\rfloor x \cap \beta\rfloor x_1 \cap Z \neq \emptyset \dots\dots\dots\dots (3.49)$$

Si $x \notin U_0$, se deduce de (3.47), que

$$\beta\rfloor x \cap Z \not\subset \beta\rfloor x_0 \dots\dots\dots\dots (3.50)$$

Como $\beta > \alpha$, se cumple por (3.44): $\underline{\beta|}x \cap Z \neq \emptyset$

De esto, (3.50) y (3.48) se deduce (3.49).

Sea $x \in U_0$, $n = g(t_0)$. Entonces, por la definición de t_0, $g(t) \leq n$.

De acuerdo con (3.46) se cumple:

$$\underline{\alpha_n|}x \cap Z \neq \emptyset, \qquad \underline{\alpha_{n-1}|}t_0 \cap Z = \emptyset.$$

De esto y de (3.43.1) se obtiene:

$$\emptyset \neq \underline{\alpha_n|}x \cap Z \subset (\underline{\alpha_{n-1}|}t_0 \cap Z) \cup (\underline{\beta|}t_1 \cap Z) = \underline{\beta|}t_1 \cap Z,$$

$$\underline{\alpha_n|}x \cap \underline{\beta|}t_1 \cap Z \neq \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.51)$$

Como $\alpha_n \leq \beta$, $t_1 \in U_1$, se cumple:

$$\underline{\alpha_n|}x \subset \underline{\beta|}x, \quad \underline{\beta|}t_1 \cap Z \subset \underline{\beta|}x_1 \cap Z$$

De esto y de (3.51) se obtiene:

$$\underline{\beta|}x \cap \underline{\beta|}x_1 \cap Z \neq \emptyset.$$

Por consiguiente se cumple (3.49).

Del mismo modo se demuestra que

$$\underline{\beta|}x \cap \underline{\beta|}x_0 \cap Z \neq \emptyset \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3.52)$$

De (3.48), (3.49) y (3.52) se deduce que $\underline{\beta|}x_0$ y $\underline{\beta|}x_1$ son unidos por $\underline{\beta|}x \cap Z$. ■

Observaciones 2.

Vamos ahora a demostrar que para las siguientes condiciones (2.1.)—(2.4.) que son análogas a las condiciones (1.1.)—(1.4.) se cumple:

(2.1.) $\Rightarrow$ (2.2.) $\Rightarrow$ (2.3.) $\Rightarrow$ (2.4.) $\Rightarrow$ (3.43) para $\tau < \alpha < \beta$.

(2.1.) $\forall$ t_0, $t_1 \in X$, existe un $x \in X$, tal que

$$y \in Y \Rightarrow f(x,y) \geq \frac{1}{2}\left[f(t_0,y) + f(t_1,y)\right]$$

(2.2.) Existe $s \in \langle 0, 1 \rangle$, tal que para todo t_0, $t_1 \in X$, - existe un $x \in X$ de modo que

$y \in Y \Rightarrow f(x,y) \geqslant (1 - s) \left[f(t_o,y) \vee f(t_1,y) \right] +$

$+ s \left[f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) \right]$

(2.3.) Existe una función no decreciente $\pi: R_+ \longrightarrow R_+$ con $\pi(\lambda) > 0$, $\forall \lambda > 0$, tal que para todo t_o, $t_1 \in X$ existe un $x \in X$ de modo que

$y \in Y \Rightarrow f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \pi(|f(t_o,y) - f(t_1,y)|)$.

(2.4.) Para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\eta > 0$ de modo que para todo t_o, $t_1 \in X$ existe un $x \in X$, tal que se cumple:

$y \in Y$, $|f(t_o,y) - f(t_1,y)| \geqslant \varepsilon$ entonces

$f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \eta$

$y \in Y$ entonces $f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y)$

Veamos que (2.1.) implica (2.2.):

Sea cumplida (2.1.). Podemos asumir que $f(t_o,y) \leqslant f(t_1,y)$, entonces

$f(x,y) \geqslant \frac{1}{2} f(t_o,y) + \frac{1}{2} f(t_1,y) = (1 - 1/2) \left[f(t_o,y) \vee f(t_1,y) \right] + \frac{1}{2} \left[f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) \right]$.

Por consiguiente (2.2.) se cumple para $s = 1/2$. ∎

Veamos que (2.2.) implica (2.3.):

Sea cumplida (2.2.). Elegimos $\pi(\lambda) = (1 - s)\lambda$.

Sea $y \in Y$ cualquiera. Podemos asumir que $f(t_o,y) = f(t_o,y) \wedge f(t_1,y)$. De (2.2.) obtenemos entonces:

$$f(x,y) \geqslant (1 - s)\, f(t_1,y) + s\, f(t_o,y) =$$

$$= f(t_o,y) + (1 - s)\left[f(t_1,y) - f(t_o,y) \right]$$

$$= f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \pi(|f(t_1,y) - f(t_o,y)|)$$

Por consiguiente, para lafunción

$\pi(\lambda) = (1 - s)\lambda$, donde $s \in \langle 0, 1\rangle$ se cumple (2.3.). ∎

Veamos que (2.3.) implica (2.4.):

Sea cumplida (2.3.). Evidentemente (2.3.) implica que $f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y)$, $\forall y \in Y$.

Si $\varepsilon > 0$ es dado, elegimos $\eta = \pi(\varepsilon) > 0$,

sea $y \in Y$ tal que $|f(t_o,y) - f(t_1,y)| \geqslant \varepsilon$

de (2.3.) obtenemos:

$$f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \pi(|f(t_1,y) - f(t_o,y)|)$$

$$\geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \pi(\varepsilon) = f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) + \eta \ .$$

Por consiguiente se cumple: (2.4.). ∎

Afirmación.

Si $\tau < \alpha < \beta$, entonces (2.4.) implica (3.43).

Hacemos $\varepsilon = \beta - \alpha$ y elegimos η como en (2.4.) y $\alpha_o, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in [\tau, \alpha]$ con $\alpha_o = \tau$, $\alpha_N = \alpha$ y

$\alpha_n - \alpha_{n-1} \leqslant \eta$, $\forall n \in \{1, 2, \ldots, N\}$.

Sean t_o, $t_1 \in X$. Mostraremos primero que (3.43.1) es cumplida.

Elegimos $x \in X$ como en (2.4.)

Supongamos que $f(t_o, y) > \alpha_{n-1}$ y $f(t_1,y) > \beta$ ó

$y \in \mathcal{b}(\underline{\alpha_{n-1}|}\, t_o \cup \underline{\beta|}\, t_1)$ ....(2.4.1)

Tenemos que demostrar que $y \in \mathcal{b}(\underline{\alpha_n|}\, x.)$

Distinguimos dos casos:

Caso 1: $f(t\ ,y) > \alpha$

de (2.4.) obtenemos:

$f(x,y) \geqslant f(t_o,y) \wedge f(t_1,y) > \alpha \wedge \beta = \alpha \geqslant \alpha_n$ ó

$y \in \mathcal{b}(\underline{\alpha_n|}\, x)$.............................(2.4.2)

Caso 2: $f(t_o,y) \leqslant \alpha$ entonces

$f(t_1,y) - f(t_o,y) > \beta - \alpha = \varepsilon$ ó

$\left|f(t_1,y) - f(t_0,y)\right| > \mathcal{E}$.

(2.4.) implica que $f(x,y) \geq f(t_0,y) \wedge f(t_1,y) + \eta >$

$> \alpha_{n-1} \wedge \beta + \eta = \alpha_{n-1} + \eta \geq \alpha_n$ ó

$y \in \mathcal{C}(\underline{\alpha_n|}\,x)$..............................(2.4.3)

(2.4.1), (2.4.2) y (2.4.3) implican que

$\mathcal{C}(\underline{\alpha_{n-1}|}\,t_0 \cup \underline{\beta|}\,t_1) \subset \mathcal{C}(\underline{\alpha_n|}\,x)$, con lo cuál hemos obtenido (3.43.1).

De manera similar se demuestra que (3.43.2) se cumple.

(2.4.) implica que $f(x,.) \geq f(t_0,.) \wedge f(t_1,.)$.

Sea $f(t_0,y) > \beta$, $f(t_1,y) > \beta$ ó $y \in \mathcal{C}(\underline{\beta|}\,t_0 \cup \underline{\beta|}\,t_1)$

Entonces $f(x,y) > \beta$ ó $y \in \mathcal{C}(\underline{\beta|}\,x)$. Por consiguiente $\underline{\beta|}\,x \subset \underline{\beta|}\,t_0 \cup \underline{\beta|}\,t_1$ lo que es (3.43.3).

De manera similar se demuestra que (3.43.4) se cumple. ∎

Aplicaciones del Teorema 1

Usando el teorema 1, y los lemas precedentes, vamos ahora a demostrar los teoremas 2 y 3, que son dos teoremas más específicos de minimax.

Estos teoremas tienen las siguientes hipótesis comunes.

1. Y es un espacio topológico, B es un subconjunto no vacío de R con $\mathrm{Inf}(B) = \mathrm{Sup}_{x \in X}\, \mathrm{Inf}_{y \in Y}\, f(x,y)$
2. $\underline{\beta|}\,x$ es no vacío, compacto y cerrado, $\forall\, x \in X, \beta \in B$...(3.53)
3. Se cumple (a) ó (b):

   (a) $LE(V,\beta)$ es conexo para todos los subconjuntos no - vacíos y finitos V de X..........................(3.54)

(b) Para todos los números reales $\delta > \gamma > \beta$ y todos los $x \in X$, $\gamma \rfloor x$ es cerrado y existen $N \in \mathbb{N}$, y $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_N \in R$, tales que (3.13) se cumple. ....(3.55)

[La elección entre las dos hipótesis (a) y (b) puede depender de β]

Observación 3.

En (3.53), $\beta \rfloor x$ es automáticamente no vacío para todo $x \in X$,

Si $\beta > \operatorname*{Sup}_{x \in X} \operatorname*{Inf}_{y \in Y} f(x,y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} m(x)$, $\forall \beta \in B$, ó

Si $\operatorname{Min} f(x,y)$ existe para todo $x \in X$:

En el primer caso se obtiene de

$\beta > \operatorname*{Sup}_{x \in X} m(x) > m(x)$, $\forall x \in X$, $\beta \in B$.

Tenemos que $\forall x \in X$, $\beta \in B$ existe un $y(x) \in Y$ con $f(x,y(x)) < \beta$

En el segundo caso, para todo $x \in X$, existe un $y(x) \in Y$, tal que $m(x) = f(x,y(x))$

Por consiguiente

$\beta \geq \operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x,y(x)) \geq f(x,y(x))$, $\forall x \in X$, $\beta \in B$.

En consecuencia, en ambos casos se cumple:

$\beta \rfloor x \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\beta \in B$.

Teorema 2. Sea Y compacto, para todo $\beta \in B$ y todo par de puntos $x_0, x_1 \in X$, existe un conjunto conexo $C \subset X$, tal que x_0, $x_1 \in C$, $\beta \rfloor x \subset \beta \rfloor x_0 \cup \beta \rfloor x_1$, $\forall x \in C$ (3.26)

Sea finalmente el conjunto

$\{(x,y) / x \in C, y \in Y, f(x,y) \leq \beta\}$ es cerrado en $C \times Y$.

Entonces

$$\operatorname*{Min}_{y \in Y} \operatorname*{Sup}_{x \in X} f(x,y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \operatorname*{Inf}_{y \in Y} f(x,y)$$

Demostración.

Vamos a demostrar que las hipótesis del teorema 1 son cumplidas.

La hipótesis (3.53) implica la condición (3.1)

Sea cumplida (3.54).

Sea $W \subset X$ finito, $x \in X$ cualquiera y $V = \{x\} \cup W$. Entonces $LE(V,\beta) = \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)$ es conexo, $\forall x \in X$. Esto implica, que la familia $\{\beta\rfloor x \cap LE(W,\beta) \ / \ x \in X\}$ es pseudoconexa. Por consiguiente, la hipótesis (3.2) es cumplida.

Si la hipótesis (3.55) es satisfecha, entonces se obtiene (3.2) del lema 1

Sea $Z = Y$, $W = \emptyset$. Entonces las hipótesis del lema 3 son cumplidas. Por consiguiente existe un $x \in X$, tal que $\beta\rfloor x_0$ y $\beta\rfloor x_1$ son unidos por $\beta\rfloor x = \beta\rfloor x \cap Y = \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta)$

Por consiguiente (3.3) se cumple para $W = \emptyset$.

Si $n \geqslant 1$, asumimos ahora que (3.3) es cierto para todo $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n - 1$.

Como en la demostración del teorema 1, se obtiene de esto que $LE(V,\beta) \neq \emptyset$, $\forall$ $V \subset X$ con $card(V) \leqslant n + 1$.

Si $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n$, y $Z = LE(W,\beta)$, entonces se cumple (3.41):

$\beta\rfloor x \cap Z = \beta\rfloor x \cap LE(W,\beta) \neq \emptyset$, $\forall x \in C$.

En consecuencia, podemos aplicar el lema 3 con $Z = LE(W,\beta)$. Por consiguiente (3.3) es satisfecha, para todo $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n$, con esto queda demostrado que (3.3) se cumple para todos los conjuntos finitos.

En consecuencia, podemos aplicar el teorema 1 y se cumple la tesis del teorema. $\blacksquare$

Teorema 3. Sea cumplida (3.56) ó (3.57).

$\beta > \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}}\ \underset{y\in Y}{\mathrm{Inf}}\ f(x,y)$, $\forall \beta \in B$. y $\forall x_0$, $x_1 \in X$, exista un conjunto conexo $C \subset X$ tal que, se cumpla (3.26) y que para todo $y \in Y$, el conjunto $\{x \,/ x \in C,\ f(x,y) < \beta\}$ es abierto en C. ...(3.56)

$\beta > \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}}\ \underset{y\in Y}{\mathrm{Inf}}\ f(x,y)$, $\forall \beta \in B$. Para todo $\tau < \alpha < \beta$, existen $N \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_N \leq \beta$ tales que se cumple: (3.43). Finalmente se cumple: $\underset{y\in Y}{\mathrm{Inf}}\ f(x,y) > -\infty$, $\forall x \in X$, ...(3.57)

Entonces se cumple:

$$\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}}\ f(x,y) = \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}}\ \underset{y\in Y}{\mathrm{Inf}}\ f(x,y)$$

Demostración.

Por la demostración del teorema 2, sabemos que (3.1) y (3.2) son cumplidas.

Sea $W = \emptyset$ y $Z = Y$. Asumimos primero, que (3.56) sea satisfecha.

Entonces para todo $x \in C$, $\beta \in B$ existe un $y \in Z$ con $f(x,y) < \beta$

Por consiguiente, las hipótesis del lema 2 son satisfechas. En consecuencia (3.3) es cierto para $W = \emptyset$ y para todo $\beta \in B$.

Sea ahora cumplida (3.57) y $\beta \in B$ cualquiera.

Como $\mathrm{Inf}(B) = \underset{x\in X}{\mathrm{Sup}}\ \underset{y\in Y}{\mathrm{Inf}}\ f(x,y) = \gamma$ y $\beta > \gamma$, existen $\tau, \alpha \in \mathbb{R}$ con $\gamma < \tau < \alpha < \beta$ y se cumple $\alpha] x \cap Z \neq \emptyset$, $\forall x \in X$.

En consecuencia, podemos aplicar el teorema 1 y se cumple la tesis del teorema.

Del lema 4 por consiguiente (3.3) es cierto para $W = \emptyset$ y para todo $\beta \in B$.

Si $n \geqslant 1$, hacemos ahora la siguiente hipótesis de inducción:

(3.3) es cierto para todo $\beta \in B$ y para todo $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n - 1$.

Para cualquier $\beta \in B$ elegimos $\alpha \in B$ con $\alpha < \beta$. Como en la demostración del teorema 1, obtenemos entonces que $LE(V,\alpha) \neq \emptyset$, $\forall$ $V \subset X$ con $card(V) \leqslant n + 1$.

Si $\beta \in B$, $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n$ y $Z = LE(W,\beta)$, entonces se cumple (3.28) y (3.44). Por consiguiente podemos aplicar el lema 4.

[para (3.56)] ó el lema 4 [para (3.57)]. En consecuencia, se cumple (3.3) para todo $W \subset X$ con $card(W) \leqslant n$. Con esto queda demostrado que (3.3) es cierto para todo $\beta \in B$ y todo conjunto finito $W \subset X$.

Por consiguiente, podemos aplicar el teorema 1, y se cumple la tesis del teorema. $\square$

Como consecuencia del teorema 3, demostraremos ahora el famoso teorema de Sion y el teorema de Fan.

Teorema de Minimax de Sion.

Hipótesis:

1.- Sea X e Y subconjuntos no vacíos, cerrados y compactos de espacios topológicos lineales

2.- $f : X \times Y \to R$ una función cóncava - convexa

3.- $f(.,y)$ es superiormente contínua en X, $\forall$ $y \in Y$ e $f(x,.)$ es inferiormente contínua en Y, $\forall$ $x \in X$.

Tesis.

$$\underset{x \in X}{\text{Max}}\ \underset{y \in Y}{\text{Min}}\ f(x,y) = \underset{y \in Y}{\text{Min}}\ \underset{x \in X}{\text{Max}}\ f(x,y)$$

Afirmación. Este teorema es consecuencia del teorema 3.

Demostración.

Vamos a demostrar que se cumplen (3.53), (3.54) y (3.56)

Sea $\alpha = \operatorname*{Sup}_{x\in X} \operatorname*{Inf}_{y\in Y} f(x,y)$

(a) Cómo $f(x,.)$ es inferiormente contínua e Y es cerrado y compacto. Por consiguiente

$\beta|x = \{ y \in Y \ / \ f(x,y) \leq \beta \}$ es cerrado y compacto.

(b) Veamos que $\beta|x \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\beta \geq \alpha$.

Sea $x \in X$ cualquiera, como $f(x,.)$ es inferiormente contí--nua e Y es compacto, entonces existe $\bar{y} \in Y$, tal que

$m(x) = \operatorname*{Min}_{y\in Y} f(x,y) = f(x,\bar{y})$

$m(x)$ es superiormente contínua en X, como ínfimo de la familia $\{ f(.,y) \ / \ y \in Y \}$ de funciones superiormente conti---nuas. Como X es compacto, entonces existe $\bar{x} \in X$ tal que

$\alpha = m(\bar{x}) = \operatorname*{Max}_{x\in X} m(x) = \operatorname*{Max}_{x\in X} \operatorname*{Min}_{y\in Y} f(x,y)$

Entonces $f(x,\bar{y}) = m(x) \leq m(\bar{x}) = \alpha \leq \beta$. Por consiguiente

$\beta|x \neq \emptyset$, $\forall x \in X$, $\forall \beta \geq \alpha$.

Lo que demuestra (3.53)

(c) $\beta|x$ es convexo, $\forall x \in X$, entonces $L(V,\beta) = \bigcap_{x\in X} \beta|x$ es

es convexo, $\forall V \subset X$.

Lo que demuestra (3.54)

(d) Para todo par $x_0, x_1 \in X$ elegimos $C = [x_0, x_1]$

Tesis: $\beta|x \subset \beta|x_0 \cup \beta|x_1$, $\forall x \in C$.

Demostraremos que $\mathcal{C}(\beta|x_0 \cup \beta|x_1) \subset \mathcal{C}(\beta|x)$

Sea $y \in \mathcal{C}(\beta|x_0 \cup \beta|x_1)$ ó

$f(x_0,y) > \beta$, $f(x_1,y) > \beta$, y $x \in [x_0,x_1]$

Como $f(.,y)$ es cuasi-cóncava, entonces

$f(x,y) \geq \text{Min}\{f(x_0,y),\ f(x_1,y)\} > \beta$. Entonces $y \in \mathcal{B}(\beta]x)$.

Por consiguiente se obtiene $\beta]x \subset \beta]x_0 \cup \beta]x_1$, $\forall\, x \in C$.

(e) $\forall\, y \in Y$, el conjunto $\{x \,/\, x \in [x_0,x_1]\ ,\ f(x,y) < \beta\}$ es abierto en $[x_0,x_1]$, puesto que $f(.,y)$ es superiormente contínua.

Lo que demuestra (3.56)

Ahora demostraremos la existencia de: $\underset{y\in Y}{\text{Min}}\ \underset{x\in X}{\text{Max}}\ f(x,y)$

Sea $y \in Y$ cualquiera. Como $f(.,y)$ es superiormente contínua y X es compacto, entonces existe $\bar{x} \in X$, tal que

$$M(y) = \underset{x\in X}{\text{Sup}}\ f(x,y) = \underset{x\in X}{\text{Max}}\ f(x,y) = f(\bar{x},y)$$

$M(y)$ es inferiormente contínua en Y, como supremo de la familia $\{f(x,.) \,/\, x \in X\}$ de funciones inferiormente contínuas.

Como Y es compacto, entonces existe $\bar{y} \in Y$ tal que

$$M(\bar{y}) = \underset{y\in Y}{\text{Inf}}\ M(y) = \underset{y\in Y}{\text{Min}}\ M(y) = \underset{y\in Y}{\text{Min}}\ \underset{x\in X}{\text{Max}}\ f(x,y)$$

Por lo tanto hemos demostrado la existencia de

$$\underset{y\in Y}{\text{Min}}\ \underset{x\in X}{\text{Max}}\ f(x,y)$$

De esto y de las demostraciones de las hipótesis del teorema 3 se concluye que

$$\underset{x\in X}{\text{Max}}\ \underset{y\in Y}{\text{Min}}\ f(x,y) = \underset{y\in Y}{\text{Min}}\ \underset{x\in X}{\text{Max}}\ f(x,y)\ .\ \blacksquare$$

Definición. La función $f : X \times Y \to R$ se llama similar a una función cóncava - convexa, si se cumple (a) y (b).

(a) $\forall\, x_1,\ x_2 \in X$, $\lambda \in [0,1]$ existe un $x \in X$, tal que

$$f(x,y) \geq \lambda\, f(x_1,y) + (1-\lambda)\, f(x_2,y),\ \forall\, y \in Y.$$

(b) $\forall\, y_1,\ y_2 \in Y,\ \lambda \in [0,1]$ existe un $y \in Y$ tal que

$f(x,y) \leq \lambda f(x,y_1) + (1-\lambda)\, f(x,y_2),\ \forall x \in X.$

Recordemos las propiedades (1.2.) y (2.2.)

$\exists\, s \in \langle 0,1\rangle$, tal que, $\forall y_0,\ y_1 \in Y$ existe un $y \in Y$ con

$x \in X \Rightarrow f(x,y) \leq (1-s)\left[f(x,y_0) \vee f(x,y_1)\right] +$

$+\ s\left[f(x,y_0) \wedge f(x,y_1)\right]$ (1.2.)

$\exists\, s \in \langle 0,1\rangle$, tal que, $\forall x_0,\ x_1 \in X$ existe un $x \in X$ tal que

$f(x,y) \geq (1-s)\left[f(x_0,y) \vee f(x_1,y)\right] +$

$+\ s\left[f(x_0,y) \wedge f(x_1,y)\right],\ \forall y \in Y.$ (2.2.).

Probaremos que si $f : X \times Y \longrightarrow R$ es similar a una función cóncava - convexa, entonces se cumplen (1.2.) y (2.2.) y por consiguiente también se cumplen (3.13) y (3.43) respectivamente.

Sean $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ fijo, $y_0,\ y_1 \in Y$, $x \in X$ cualesquiera.

Podemos asumir que $f(x,y_1) = \left[f(x,y_0) \vee f(x,y_1)\right]$.

(b) implica que existe $y \in Y$, tal que

$f(x,y) \leq (1-\lambda)\, f(x,y_1) + \lambda f(x,y_0) =$

$= (1-\lambda)\left[f(x,y_0) \vee f(x,y_1)\right] + \lambda\left[f(x,y_0) \wedge f(x,y_1)\right]$

Por consiguiente se cumple (1.2.).

Similarmente se puede demostrar que (2.2.) es cumplida.

Teorema de Minimax de Fan

Sean X, Y subconjuntos compactos de espacios topológicos lineales separados y $f : X \times Y \rightarrow R$ una función similar a una función cóncava - convexa, que es superiormente contínua en el primer argumento e inferiormente contínua en el segundo argumento, entonces

$$\min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x,y) = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x,y)$$

Afirmación. Este teorema es una consecuencia del teorema 3
Como en el caso del teorema de Sion se muestra que

$\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\ \underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ f(x,y)$ y $\underset{x\in X}{\mathrm{Max}}\ \underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\ f(x,y) = \alpha$ existen y que $\beta|x$

es no vacío, cerrado y compacto, $\forall\, x \in X$.

Evidentemente se cumple que $\underset{y\in Y}{\mathrm{Min}}\ f(x,y) = m(x) > -\infty$.

Ya hemos visto que para f se cumplen las condiciones (3.13) y (3.43). Por consiguiente, todas las hipótesis del teorema 3 son cumplidas.

B I B L I O G R A F I A

[1] Ekeland, Ivar; Temam, Roger. Convex Analysis and varational problems. American Elsevier Publishing company. Inc-New York - 1976

[2] Fan, K. Minimax theorems. Proc. Nat. Acad. Sci U.S.A. 1953

[3] Geraghty, M.A.; Lin, B. L. On a minimax theorem of Terkelsen, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 1983.

[4] Geraghty, M.A.; Lin, B. L. Minimax theorems without Linear structure, linear and multilinear algebra 1985.

[5] Geraghty, M.A.; Lin, B. L. Minimax theorems without convexity, Contemporary Mathematics 1986.

[6] Kindler, J. On a minimax theorems of Terkelsen's, Arch Math. In press.

[7] Kindler, J.; Trost, R. Minimax theorems for interval - space. Acta Math Hung, 1989.

[8] König, H. Uber das von Neumannsche, Minimax theorem, Arch Math. 1968.

[9] Lin, B. L.; Quan, X. C. A symetric minimax theorem without linear structure, Arch. Math 1989.

[10] Neumann, M. Bemerkungen zum von Neumannschen Minimax theorem, Arch Math. 1977

[11] Simons, S. An upward-downward Minimax theorem. Arch Math. In press

[12] Simons, S. On Terkelson's minimax theorem Bull Inst. Math. Acad. Sinica - 1990.

[13] Stoer, Josef Witzgall, C. Convexity and Optimization in - Finite Dimensions I. Springer-Verlag Berlin 1970.

[14] Stoer, Josef Duality In Nonlinear Programing and the Minimax Theorem. Math - Scand, 1963.

[15] Terkelsen, F. Some Minimax Theorems, Math. -- Scand, 1972.

[16] Tuy, H. On a General Minimax Theorem So viet Math. Doki. 1974.

[17] Tuy, H. On the General Minimax Theorem, Colloquium Math. 1975.

[18] Wu Wen-Tsün A Remark on the Fundamental Theo rem in the Theory of Games. Sci. Réc. New. Ser 1959.

....