

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE INGENIERÍA ELÉCTRICA Y ELECTRÓNICA**



**"FENÓMENO DE FERRORESONANCIA EN SISTEMAS  
ELÉCTRICOS DE POTENCIA"**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
MENCIÓN: SISTEMAS DE POTENCIA**

**PRESENTADA POR:**

**JUAN RONAL HURTADO DÍAZ**

**LIMA-PERÚ**

**2007**

**Este trabajo lo dedico a:  
mi esposa, hijos y padres**

## INDICE GENERAL

<b>RESUMEN</b>	<b>X</b>
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>XII</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS</b>	<b>XIII</b>
<b>CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 ANTECEDENTES	1
1.2 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA	3
1.3 JUSTIFICACIÓN	4
1.4 OBJETIVOS DE LA TESIS	5
1.5 ORGANIZACIÓN DE LA TESIS	5
<b>CAPÍTULO 2 FERRORESONANCIA Y LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES</b>	<b>7</b>
2.1 INTRODUCCIÓN	7
2.2 SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES	7
2.2.1 Relación entre ferresonancia y la dinámica no lineal	7
2.2.2 Sistemas Lineales	8
2.2.3 Sistemas Dinámicos No Lineales	9
2.2.4 Comportamiento de los Sistemas Dinámicos No Lineales	11
2.2.5 Herramientas para el estudio de los Sistemas Dinámicos No Lineales	16
2.2.6 Teoría de Bifurcación	21
2.3 FERRORESONANCIA	27
2.3.1 Definición	27
2.3.2 Entorno eléctrico mínimo para la ocurrencia de ferresonancia	28
2.3.3 Condiciones necesarias para la ocurrencia de ferresonancia	29
2.3.4 Tipos de Ferresonancia	29
2.3.5 Síntomas de Ferresonancia	35
2.3.6 Medios de Protección contra la ferresonancia	36
2.3.7 Métodos para estudiar la Ferresonancia	38

2.3.8	Determinación de la operación estacionaria de un circuito ferrosresonante	38
2.3.9	Procedimiento para realizar un estudio de ferrosresonancia	41
2.3.10	Modelamiento de componentes eléctricos para simulación de ferrosresonancia	42
2.3.11	Modelos de fuentes de capacitancias	42
2.3.12	Modelos de generadores	43
2.3.13	Ferrosresonancia y resonancia eléctrica	43

## **CAPÍTULO 3 ELABORACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA EL ESTUDIO DE LA FERROSRESONANCIA** **49**

3.1	INTRODUCCIÓN	49
3.2	HERRAMIENTAS BASADAS EN LAS FORMAS DE ONDA	49
3.2.1	Consideraciones a tomar en cuenta en su construcción	49
3.2.2	Formas de onda	51
3.2.3	Plano de fase	52
3.2.4	Corte de Poincaré	52
3.2.5	Mapa de Poincaré	54
3.2.6	Espectro de Fourier	54
3.3	DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN	55
3.3.1	Identificación de las configuraciones de riesgo	55
3.3.2	Obtención del circuito equivalente simplificado	56
3.3.3	Derivación de las ecuaciones diferenciales	58
3.3.4	Construcción de los diagramas de Bifurcación	59
3.4	MÉTODO PARA LA APLICACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS HDNL.	59
3.5	APLICACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS BASADAS EN LAS FORMAS DE ONDA	61
3.5.1	Caso de Ferrosresonancia Fundamental (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)	63
3.5.2	Caso de Ferrosresonancia Subarmónica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)	65
3.5.3	Caso de Ferrosresonancia Quasiperiódica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)	68
3.5.4	Caso de Ferrosresonancia Caótica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)	71

3.5.5 Caso de Ferresonancia Subarmónica (frecuencia de muestreo no es múltiplo de la frecuencia del sistema)	74
3.6 APLICACIÓN DE LOS DIAGRAMAS DE BIFURCACIÓN	77
3.6.1 Diagrama de Bifurcación variando la magnitud de la fuente ( $V_m$ )	78
3.6.2 Diagrama de Bifurcación variando la magnitud de la capacitancia ( $C$ )	80
3.6.3 Diagrama de Bifurcación variando la carga ( $R$ )	81
3.6.4 Análisis de los diagramas de Bifurcación presentados	83
<b>CAPÍTULO 4 APLICACIÓN A CASOS REALES</b>	<b>86</b>
4.1 INTRODUCCIÓN	86
4.2 CASO 1: DISTURBIO OCURRIDO EN LA S.E. AGUAYTÍA 220 kV	86
4.2.1 Descripción del evento	86
4.2.2 Evaluación de la oscilografía (caso 1)	88
4.2.3 Identificación de las configuraciones de riesgo	92
4.2.4 Circuito equivalente simplificado	93
4.2.5 Determinación de los parámetros del circuito equivalente	94
4.2.6 Ecuaciones Diferenciales del sistema	95
4.2.7 Diagramas de Bifurcación	96
4.3 CASO 2: TRANSFORMADOR DE MEDIDA DE TENSIÓN	99
4.3.1 Descripción del evento	99
4.3.2 Evaluación de la oscilografía (caso 2)	102
4.3.3 Identificación de las configuraciones de riesgo	107
4.3.4 Circuito Equivalente simplificado	108
4.3.5 Determinación de los parámetros del circuito equivalente	110
4.3.6 Ecuaciones diferenciales del sistema	112
4.3.7 Diagramas de Bifurcación	113
<b>CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES</b>	<b>124</b>
5.1 INTRODUCCIÓN	124
5.2 CONCLUSIONES	124
5.3 SUGERENCIAS PARA FUTUROS TRABAJOS	127
<b>REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>128</b>

<b>ANEX0 2.1</b>	<b>132</b>
<b>ANEX0 2.2</b>	<b>134</b>
<b>ANEX0 3.1</b>	<b>140</b>
<b>ANEX0 3.2</b>	<b>143</b>
<b>ANEX0 3.3</b>	<b>149</b>
<b>ANEX0 4.1</b>	<b>156</b>
<b>ANEX0 4.2</b>	<b>158</b>
<b>ANEX0 4.3</b>	<b>161</b>
<b>ANEX0 4.4</b>	<b>163</b>

## ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Figura 2.1 Sistemas lineales y no lineales como un caso especial de subclases (De [18]).....	8
Figura 2.2 Representación genérica de un sistema.....	9
Figura 2.3 Comportamiento hacia un punto fijo (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Meryland, USA, 1993).....	12
Figura 2.4 Comportamiento hacia ciclos límite (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Meryland, USA, 1993).....	13
Figura 2.5 Comportamiento Quasiperiódico (De [19]).....	14
Figura 2.6 Movimiento Quasiperiódico tridimensional (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Meryland, USA, 1993).....	15
Figura 2.7 Sensibilidad a las condiciones iniciales (De Alexander Panfilov, 2001, Non-Linear Dynamic Systems, Utrecht University, December 2001).....	16
Figura 2.8 Atractor extraño.....	17
Figura 2.9 Plano de Poincaré (De [19]).....	18
Figura 2.10 Plano de Poincaré (De [19]).....	19
Figura 2.11 Espectro de formas de Onda Periódicas (De [8]).....	20
Figura 2.12 Espectro de formas de Onda No Periódicas (De [8]).....	20
Figura 2.13 Escenarios de la pérdida de estabilidad de un ciclo límite.....	25
Figura 2.14 Principio de la continuación por pseudo longitud de arco (De [9]).....	26
Figura 2.15 Ejemplo de ocurrencia de Ferroresonancia Serie (De [8]).....	31
Figura 2.16 Esquema equivalente monofásico.....	31
Figura 2.17 Esquema simplificado.....	32
Figura 2.18 Ejemplo de ocurrencia de ferroresonancia paralela.....	32
Figura 2.19 Ejemplo de Ferroresonancia Fundamental (De [8]).....	33
Figura 2.20 Ejemplo de Ferroresonancia Subarmónica (De [8]).....	33
Figura 2.21 Ejemplo de Ferroresonancia Quasiperiódica (De [8]).....	34
Figura 2.22 Ejemplo de Ferroresonancia Caótica (De [8]).....	34
Figura 2.23 Circuito No Lineal (De [30]).....	39
Figura 2.24 Resonancia serie.....	44
Figura 2.25 Resonancia paralela.....	45
Figura 2.26 Resonancia paralela por efecto de armónicos.....	46
Figura 3.1 Interpolación a partir de mediciones.....	53
Figura 3.2 Ramal equivalente del núcleo de un transformador $I\phi$ .....	56
Figura 3.3 Método a seguir.....	60
Figura 3.4 Circuito eléctrico no lineal.....	61
Figura 3.5 Evolución temporal de la tensión y flujo en la bobina.....	63
Figura 3.6 Plano de fase (ferroresonancia fundamental).....	64
Figura 3.7 Corte de Poincaré (ferroresonancia fundamental).....	64
Figura 3.8 Espectro de frecuencia de la tensión (ferroresonancia fundamental).....	65

Figura 3.9 Evolución del flujo y tensión en la bobina (subarmónica).....	66
Figura 3.10 Plano de fase (subarmónica) .....	66
Figura 3.11 Corte de Poincaré (subarmónica).....	67
Figura 3.12 Espectro de frecuencia de la tensión (subarmónica) .....	67
Figura 3.13 Evolución en el tiempo de la tensión en la bobina (quasiperiódica) .....	68
Figura 3.14 Plano de fase (quasiperiódica) .....	69
Figura 3.15 Vista tridimensional de la trayectoria (quasiperiódica).....	69
Figura 3.16 Corte de Poincaré (quasiperiódica) .....	70
Figura 3.17 Mapas de Poincaré de las variables de estado (quasiperiódica).....	70
Figura 3.18 Espectro de frecuencia del flujo (quasiperiódica).....	71
Figura 3.19 Evolución de la tensión y flujo en la bobina (caótica) .....	72
Figura 3.20 Plano de fase (caótica) .....	72
Figura 3.21 Corte de Poincaré (caótica).....	73
Figura 3.22 Mapa de Poincaré (caótica).....	73
Figura 3.23 Espectro de frecuencia del flujo (caótica).....	74
Figura 3.24 Evolución de la tensión y flujo en la bobina .....	75
Figura 3.25 Plano de fase tensión versus flujo .....	75
Figura 3.26 Corte de Poincaré.....	76
Figura 3.27 Espectro de frecuencia del flujo.....	76
Figura 3.28 Tensión en el transformador ( $V_L$ ) versus el nivel de la fuente ( $V_m$ ) .....	78
Figura 3.29 Tensión en el transformador ( $V_L$ ) versus el nivel de la fuente ( $V_m$ ) .....	78
Figura 3.30 Tensión del transformador ( $V_L$ ) versus la capacitancia ( $C$ ) .....	80
Figura 3.31 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la capacitancia ( $C$ ) .....	81
Figura 3.32 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la Carga ( $R$ ) .....	81
Figura 3.33 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la carga ( $R$ ) .....	82
Figura 3.34 Forma aproximada de $V_L$ variando $V_m$ y $R$ .....	83
Figura 4.1 Anillo de Tingo María .....	87
Figura 4.2 Oscilografía Reconexión 6:24 a.m. SE Tingo Maria 138kV .....	88
Figura 4.3 Evolución temporal de la tensión y flujo .....	89
Figura 4.4 Diagramas de Fase .....	89
Figura 4.5 Corte de Poincaré.....	90
Figura 4.6 Mapa de Poincaré.....	90
Figura 4.7 Espectro de Fourier .....	91
Figura 4.8 Diagrama unifilar .....	93
Figura 4.9 Circuito equivalente .....	93
Figura 4.10 Curva de magnetización.....	95
Figura 4.11 Variando la tensión (método de Fuerza Bruta) .....	96
Figura 4.12 Variando la capacitancia (método de Fuerza Bruta) .....	97
Figura 4.13 Variando la carga (método de Fuerza Bruta) .....	97
Figura 4.14 a) Circuito equivalente justo antes de la desconexión de L-252 b) Equivalente Norton.....	99



Figura 4.15 Diagrama unifilar caso 2.....	99
Figura 4.16 a) Oscilograma de tensiones; b) Oscilograma de corrientes .....	101
Figura 4.17 Configuración del transformador TV-1 .....	102
Figura 4.18 Evolución temporal de la tensión y flujo .....	102
Figura 4.19 a) Plano de fase (Fase I) .....	103
Figura 4.20 Cortes de Poincaré .....	104
Figura 4.21 Mapas de Poincaré .....	105
Figura 4.22 Espectros de Fourier .....	105
Figura 4.23 Circuito equivalente simplificado .....	108
Figura 4.24 Circuito equivalente simplificado .....	109
Figura 4.25 Circuito equivalente del transformador TV-1 .....	110
Figura 4.26 Curva de magnetización del transformador TV-1 .....	111
Figura 4.27a Tensión de la fase V1 variando $V_{LL}$ [5-25kV] (Método de la Fuerza Bruta) .....	114
Figura 4.28 L2-norm variando $V_{LL}$ [0-14kV] (Método de Continuación) .....	117
Figura 4.29 Tensión de la fase V1 variando $C_0$ [0-7 $\mu$ F] (Método de Fuerza Bruta).....	117
Figura 4.30 Tensión de la fase V1 variando $R_d$ [0-280 Ohms] (Método de Fuerza Bruta) .....	118
Figura 4.31 Diagrama de bifurcación del punto B variando $C_0$ .....	119
Figura 4.32 Diagrama de bifurcación del punto B variando $R_d$ .....	119
Figura 4.33 Región de estabilidad $V_{LL}$ versus $C_0$ para $R_d=22$ Ohmios.....	121
Figura 4.34 Región de estabilidad $V_{LL}$ versus $R_d$ para $C_0=0.04$ $\mu$ F.....	121
Figura 4.35 L2-norm variando $V_{LL}$ [10-20kV] y $C_0=0.04$ $\mu$ F.....	122

## RESUMEN

La ferresonancia es un fenómeno eléctrico de tipo oscilatorio y no lineal que se produce en los sistemas eléctricos. Su aparición involucra al menos: un equipo inductivo de núcleo ferromagnético, un condensador, bajas pérdidas de energía y una fuente de alimentación alterna. Durante su ocurrencia, las formas de onda de tensión y corriente se presentan con bastante distorsión y en algunas ocasiones de valor más elevado que los normales.

La meta principal de este trabajo es presentar un método para el diagnóstico y análisis del fenómeno de ferresonancia en un sistema eléctrico y su aplicación a casos reales. Dicho método emplea herramientas matemáticas utilizadas para el estudio de sistemas dinámicos no lineales.

Se presentan también el procedimiento de construcción de las herramientas y las consideraciones a ser tomadas en cuenta para el análisis de casos reales y teóricos. La comprobación de su eficacia fue realizada en un circuito eléctrico teórico.

Para la aplicación práctica, se estudiaron dos casos ocurridos en el Sistema Eléctrico Interconectado Nacional del Perú. En el primero, se determinó que no existía ferresonancia y en el segundo, que esta era producto del bajo nivel de carga que tenía el transformador.

Los resultados obtenidos, demostraron que mediante el método expuesto, es posible diagnosticar si un fenómeno eléctrico oscilatorio es del tipo ferresonante. Así como obtener los márgenes de operación normal de los parámetros del circuito eléctrico involucrado.

## **ABSTRACT**

Ferroresonance is an oscillating and non-linear electrical phenomenon that arises on electrical systems. It involves at least an iron-core equipment, a capacitor, an alternating source and low energy losses. While taking place, voltage and current waves present themselves with great distortion and sometimes with values above normal.

The main purpose of this thesis is to present a method that will serve to diagnose and analyze the ferroresonance phenomena in electrical systems and its applications on real scenarios. This method employs mathematical tools used on dynamic non-linear systems.

This thesis also presents the required steps to build these tools and the considerations to be taken on the analysis of real and theoretical cases. Its efficiency was verified within a theoretical electric circuit.

For its practical application two cases were studied, both of which occurred on the Electric Interconnected Peruvian National System. On the first case results showed that ferroresonance did not take place, while in the second case, the phenomenon was consequence of the low load from the transformer.

The results showed that using the method here explained is possible to diagnose if an electrical oscillating phenomenon is of the ferroresonant type, as well as determining the margins of the normal operation on the involved electrical circuit parameters.

## **AGRADECIMIENTOS**

La culminación de esta tesis representa la hermosa sensación de triunfo sobre los tropiezos dados a lo largo de la investigación realizada. El móvil ha sido el deseo de adquirir conocimiento.

Gracias, Dios Mío por permitirme culminar esta meta y poner en mi camino a las personas adecuadas para lograrlo, con tu venia debo dar inmensa gratitud: al ingeniero Francisco Torres por el planteamiento del tema; a mi asesor, el ingeniero Juan Velásquez por establecer los lineamientos de esta tesis y aliento para culminarla; al ingeniero Justo Yanque por sus comentarios y ayuda bibliográfica; al ingeniero José Koc por sus acertadas recomendaciones; a ti amigo Vladimiro Canales por la ayuda que me diste en esa oportunidad para obtener los artículos que necesitaba, no solo en una ocasión sino varias veces; si alguna vez lees estas líneas sabrás a que me refiero ¡Muchísimas gracias! Similarmente agradezco a todas las personas que de alguna u otra manera me alentaron a seguir, a veces simplemente con preguntar planteaban el reto en mi interior.

## LISTA DE SÍMBOLOS Y ABREVIATURAS

$t \rightarrow \infty$  : el tiempo “t” tiende al infinito

$\pi$ : 3.141592...

$i, j: \sqrt{-1}$  unidad imaginaria

(pu): Valor en por unidad

dt: paso de tiempo para integración de una ecuación diferencial

$| |$  : Valor absoluto

$\langle \rangle$ : Valor promedio

AC: Sistema de tensión alterna con frecuencia 50 ó 60 Hz

FFT: Fast Fourier Transform (Transformada rápida de Fourier)

VT: Transformador de medida de voltaje del tipo inductivo

AT: Alta tensión

MT: Media tensión

RMS: Root Mean Square (valor eficaz)

kV: kilovoltios

A: Amperes

mA: miliamperes

W: Vatios

MW: Megavatios

$\mu$ F: microfaradio

nF: nanofaradio

pF: picofaradio

Hr: Henrios

Wb: Weber

VA: Voltamperio

kVA: kilovoltamperio

MVA: Megavoltamperio

Hz: Hertz

COES: Comité de Operación Económica del Sistema

CT: Central Térmica

HDNL: Herramientas gráficas de la dinámica no lineal.

SEIN: Sistema Eléctrico Interconectado Nacional del Perú.

Número irracional: Es un número real cuya parte decimal es infinita.

# CAPITULO 1

## INTRODUCCIÓN

### 1.1 Antecedentes

Todos los sistemas de potencia en corriente alterna utilizan transformadores para cambiar la tensión de un nivel a otro, bien sea por motivos de transporte o distribución de energía eléctrica. La mayor parte del tiempo, los transformadores trabajan en la zona lineal de su curva de magnetización, pero en ciertas condiciones su operación es desplazada a la zona no lineal o de saturación, propiciando el fenómeno de ferresonancia.

La ferresonancia no es un fenómeno nuevo y su aparición data desde los inicios de la operación de transformadores. Ya desde 1907 se conoce la existencia de artículos que tratan sobre resonancia no lineal en transformadores [1]

Los siguientes casos de ferresonancia son de reciente ocurrencia:

- **Caso 1: Ferresonancia de transformadores de medida de tensión (VT) en sistemas sin aterramiento [1]**

Tuvo lugar en la red de 50 kV de la compañía Hafslund, ciudad de Moss, Noruega. Dicha red tenía transformadores de distribución con grupos de conexión del tipo estrella con neutro aterrado – delta. Durante el despeje de un cortocircuito por parte de los relés de protección simultáneamente se ocasionó la desconexión de todo el sistema de aterramiento, dejando al sistema operando con el neutro flotante. En estas circunstancias la única conexión con tierra era la capacitancia de secuencia cero, producto del acoplamiento capacitivo de fases a masa. La cual, a su vez produjo un comportamiento ferresonante con las inductancias de magnetización de los transformadores de medida VT conectados. Al cabo de tres minutos de operar de esta manera, la ferresonancia destruyó 72 transformadores VT. Se comprobó posteriormente mediante simulaciones que la resistencia antiferresonante de los

transformadores malogrados, era insuficiente para evitar la aparición de ferresonancia.

- **Caso 2: Ferresonancia en un transformador de la SE Dorsey 230 kV-Hidroeléctrica de Manitoba-Canadá [3]**

El 5 de agosto de 1995, una de las dos grandes barras en 230 kV (500 m de largo) salió de servicio con toda su carga conectada. El motivo fue una falla crítica en un interruptor de 4.16 kV que protegía a un transformador alimentador de 230/4.16 kV, mientras se intentaba poner en servicio un motor asíncrono de 1500 kW. Once interruptores aperturaron para aislar la barra a la cual dicho transformador estaba conectado. Luego de la desenergización apareció una condición ferresonante entre el transformador y las capacitancias de normalización de potencial (1500 pF en total) conectadas en los contactos principales de los once interruptores aperturados.

El nivel de ruido del transformador fue notablemente más alto del normal luego de la salida de la barra, incluso más que el de otro transformador cercano con carga.

- **Caso 3: Ferresonancia de un Autotransformador [2]**

Este caso tuvo lugar en el sistema de Ontario Hydro, Canadá.

Uno de los autotransformadores de la S.E. Catarauqui 230/115 kV que era alimentado por una línea de transmisión experimentó ferresonancia debido a la posterior desenergización de la línea y barra en 115 kV. El interruptor del circuito desenergizado también sufrió una alta tensión de recuperación transitoria entre sus contactos.

Se dedujo que el acoplamiento capacitivo existente entre la línea fuera de servicio y las líneas contiguas y la inductancia de magnetización del autotransformador, provocaron la ferresonancia.

Estos tres ejemplos nos muestran las consecuencias y lo impredecible que puede ser la ferresonancia en los sistemas eléctricos; además, según se puede observar, la ferresonancia ya ha sido diagnosticada.

De otro lado, en el Sistema Eléctrico Peruano, no se tienen reportes de algún caso real diagnosticado de ferresonancia y menos aún de algún método de análisis. Los dos casos posibles de ferresonancia empleados para este trabajo son descritos de manera detallada en el capítulo 4. El primero, lo reportó el COES en el 2003 al considerar una ocurrencia de ferresonancia en los transformadores de Aguaytía, y del segundo, se tuvo conocimiento durante la realización de este trabajo, cuando una empresa concesionaria de la parte sur del SEIN tenía problemas con un transformador VT. Fue justamente el primer caso de posible ferresonancia en los transformadores de Aguaytía, el punto de partida de esta tesis. En esa oportunidad se desconocía de algún método a seguir para poder efectuar un diagnóstico adecuado de ferresonancia. Dicho desconocimiento puede ser plasmado en la siguiente interrogante ¿Qué herramientas matemáticas se emplean para diagnosticar la ferresonancia de un transformador?

## **1.2 Definición del problema**

La ferresonancia hasta fines de la década de 1980, fue analizada como un fenómeno eléctrico no lineal. Luego en 1992, B. A. Mork comprobó que también podía ser estudiada como un fenómeno dinámico no lineal [3]. De esa forma, fue factible usar en su diagnóstico y análisis, las herramientas gráficas que se emplean en la evaluación de los sistemas dinámicos no lineales. Estas herramientas que en adelante llamaremos herramientas HDNL son: las formas de onda, plano de fase, corte y mapa de Poincaré, el espectro de Fourier y los diagramas de bifurcación.

En la bibliografía revisada se hace uso de estas herramientas para evaluar casos de ferresonancia teóricos o reales. Así por ejemplo:



- En [3] se describe un experimento realizado con un transformador trifásico de 75 kVA con núcleo de 5 columnas tipo YY aterrado y condensadores variables desde 0 a 50  $\mu\text{F}$  conectados entre cada fase y tierra. Con dichos condensadores se simularon cables reales de diferente valor de capacitancia. La prueba fue realizada alimentando solamente dos fases del transformador. Las señales registradas luego fueron procesadas para realizar el análisis de las formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré y espectro de Fourier. Con este experimento se demostró en laboratorio que el comportamiento de un transformador corresponde a un sistema dinámico no lineal.
- En [4] se emplea las formas de onda, corte de Poincaré y espectro de Fourier para realizar el análisis de los distintos comportamientos (periódico, quasiperiódico y caótico) de un circuito derivado de un transformador de potencia de 25 MVA.
- En [5] y [6] se realiza el análisis de los circuitos planteados empleando formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré y diagramas de bifurcación.

La elaboración y aplicación de estas herramientas HDNL, en los dos posibles casos de ferresonancia ocurridos en el sistema eléctrico peruano, son las bases para la realización de la presente tesis. De este modo será factible realizar un diagnóstico correcto y determinar los rangos de parámetros donde tiene lugar la ferresonancia,

### **1.3 Justificación**

Este trabajo presenta un método para diagnosticar y analizar el fenómeno de ferresonancia que al ser aplicada en un área del SEIN existente o previamente a la conexión de un equipamiento o instalación nueva, permita determinar todos los estados posibles de operación en los cuales pueda ocurrir el fenómeno. Con ello, se evitará la ocurrencia de salidas intempestivas de líneas, deterioro de transformadores, generadores, etc y la posterior pérdida de suministro a los usuarios de la red eléctrica.

## **1.4 Objetivos de la tesis**

Se buscan dos objetivos:

1. Presentar un método que permita realizar el diagnóstico de la presencia de ferresonancia en un transformador
2. Determinar los márgenes permitidos de los parámetros de red que eviten la operación ferresonante de un transformador.

## **1.5 Organización de la tesis**

Inicialmente en este primer capítulo, se exponen en forma resumida los efectos y algunos modos de presentación de la ferresonancia en sistemas eléctricos internacionales. También, se mencionan los dos casos ocurridos en el SEIN; uno de los cuales dio origen al presente trabajo. A continuación, se indican en base a una revisión bibliográfica, las herramientas de la dinámica no lineal que se emplean en el estudio de la ferresonancia y que justamente definen el entorno del problema. Luego se presenta la justificación del trabajo y los objetivos propuestos. Por último, se describe la organización de la tesis.

En el capítulo II se presenta la base teórica de esta tesis; esta dividido en dos grandes secciones. La primera corresponde a la dinámica no lineal: orientada inicialmente a la presentación de los fundamentos de las herramientas gráficas basadas en las formas de onda que se emplean en el análisis de los sistemas dinámicos no lineales, y luego a la teoría de bifurcación. La segunda parte comprende varios aspectos relacionados con ferresonancia: su definición, tipos, métodos matemáticos para obtener su estado permanente, métodos para estudiarla, etc.

En el capítulo III se presentan las consideraciones y el método a seguir para la elaboración de los gráficos de formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré, mapa de Poincaré y espectro de Fourier, para casos teóricos y reales. Para la elaboración de los diagramas de bifurcación, se sigue parte de un procedimiento planteado en [8]. Luego, se

presenta el método para realizar el análisis de casos reales, en base a un diagrama de flujo. Finalmente, la efectividad de las herramientas HDNL se comprueba en un circuito teórico.

El capítulo IV corresponde a la aplicación de las herramientas HDNL a dos casos de ferresonancia acontecidos en el SEIN. En cada uno se hace inicialmente una breve descripción del evento y se efectúa la evaluación de la oscilografía registrada elaborando: las formas de onda, plano de fase, espectro de Fourier, corte y mapa de Poincaré. Luego, con los resultados gráficos se hace el análisis de la oscilografía. A continuación, se construyen los diagramas de bifurcación y se realiza el análisis correspondiente. Finalmente, en caso se confirme la ocurrencia de ferresonancia se obtienen las áreas de riesgo de los parámetros de operación del circuito analizado.

En el capítulo V se presentan las conclusiones de la tesis y sugerencias para trabajos futuros.

Es oportuno mencionar que en este trabajo de tesis no se pretende reproducir los casos reales de ferresonancia presentados. Ello implicaría abarcar toda la base teórica que existe para el modelamiento de componentes eléctricos del circuito involucrado y realizar las pruebas pertinentes a los equipos. Para facilitar la evaluación, el único elemento no lineal a modelar es la inductancia que simula la magnetización del núcleo del transformador. En el caso de falta de información se emplearán los datos de un transformador similar. Este inconveniente ocurre debido a que no se cuenta con el protocolo de pruebas de recepción y es imposible realizar una parada para realizarlas.

## CAPITULO 2

### FERRORESONANCIA Y LOS SISTEMAS DINÁMICOS NO LINEALES

#### 2.1 Introducción

Este capítulo corresponde a la base teórica del trabajo y está dividido en dos secciones. En la primera y debido a que la ferresonancia es un fenómeno dinámico no lineal, se exponen los tipos de comportamientos y las herramientas de estudio de los sistemas dinámicos no lineales. Seguidamente, se explica la teoría de la bifurcación orientada al entendimiento y construcción de los diagramas de bifurcación en el programa computacional a ser empleado.

En la segunda sección se trata específicamente sobre la ferresonancia: definición, equipos involucrados, condiciones para su ocurrencia, tipos, síntomas, medios de protección y un resumen de los métodos encontrados en la literatura involucrada que se utilizan para estudiarla. Luego, se presentan el procedimiento a seguir para realizar el estudio de un caso real de ferresonancia y las consideraciones para el modelamiento de los componentes eléctricos. Por último, se da una breve comparación entre resonancia eléctrica y ferresonancia.

#### 2.2 Sistemas dinámicos no lineales

##### 2.2.1 Relación entre ferresonancia y la dinámica no lineal

La ferresonancia, hasta antes de la década de 1990, era estudiada únicamente como un fenómeno eléctrico de comportamiento no lineal. El primero en relacionar la dinámica no lineal y caos al estudio de la ferresonancia fue B.A. Mork en el año 1992, quien en [3] establece que los circuitos eléctricos pueden ser estudiados como sistemas dinámicos no lineales, amortiguados y excitados por fuentes sinusoidales. A pesar que en 1991, G. Kieny en [7] ya había empleado la teoría de la bifurcación para estudiar un circuito ferresonante, no la asoció explícitamente a sistemas caóticos. A partir de allí, todos los artículos sobre

ferroresonancia involucran o señalan a la dinámica no lineal como medio para estudiarla [2-17].

### 2.2.2 Sistemas Lineales

El punto de partida para estudiar la dinámica no lineal es conocer qué es un sistema lineal.

Si dividiéramos todos los sistemas en dos clases, lineales y no lineales (Figura 2.1), nos daríamos cuenta que los primeros son un pequeño subgrupo en comparación con los sistemas no lineales [18]. La utilidad de los sistemas lineales estriba en dos puntos:

- El conocimiento del comportamiento de sistemas lineales es imprescindible para entender los sistemas reales.
- El comportamiento de un sistema no lineal puede ser aproximado con razonable exactitud empleando modelos lineales

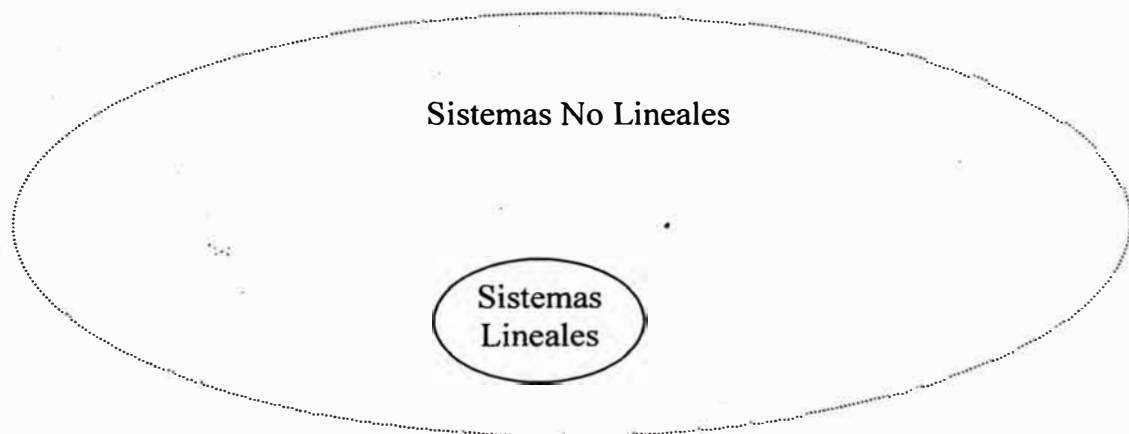


Figura 2.1 Sistemas lineales y no lineales como un caso especial de subclases (De [18])

Un amplio tratamiento teórico sobre sistemas lineales puede encontrarse en el libro de DeCarlo [18], quien da una definición matemática apropiada de sistema lineal.

“Sea un sistema cuyo modelo matemático o función de transferencia es simbolizado por  $\mathbf{N}^1$  (Figura 2.2). Y además sea  $\mathbf{y} = \mathbf{N}[\mathbf{u}, \mathbf{x}(t_0)]$  la respuesta del sistema a una señal de entrada  $\mathbf{u}(\cdot)$  definida sobre  $[t_0, \infty]$  con estado inicial  $\mathbf{x}(t_0)$ . Luego este sistema será lineal si y

<sup>1</sup> La letra en negrita indica expresión matricial o vectorial

solamente si para dos entradas admisibles  $u_1$  y  $u_2$  y un escalar  $k$ , se cumple que:

$k(N[u_1, x(t_0)] - N[u_2, x(t_0)]) = N[k(u_1 - u_2), 0(t_0)]$ , para toda condición inicial  $x(t_0)$  y donde  $0(t_0)$  es el vector nulo”.

Esta condición nos dice que un sistema lineal es aquel cuyo resultado final luego de afectar por un valor escalar a la diferencia de dos salidas procesadas independientemente en cada variable de entrada y con el mismo valor inicial, es igual que la salida resultante obtenida con una sola variable de entrada y valor inicial nulo. Siendo la variable de entrada en este último caso, el resultado del producto del valor escalar y la diferencia de las variables de entrada

En la definición anterior también está involucrado el teorema de la superposición que es una de las características típicas que cumplen los sistemas lineales (ver Figura 2.2)

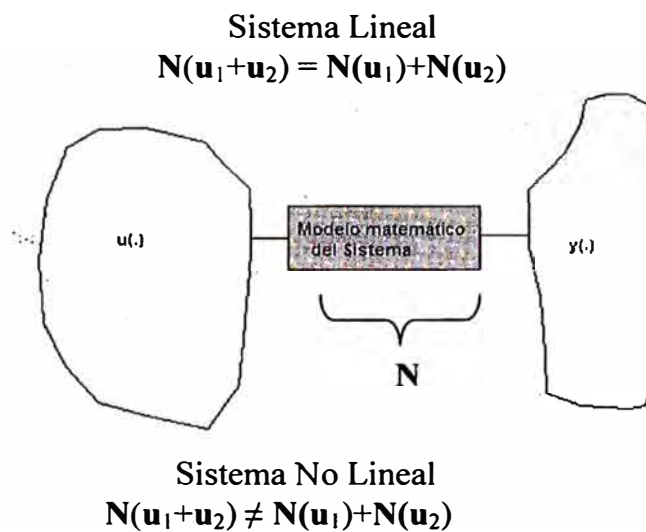


Figura 2.2 Representación genérica de un sistema

### 2.2.3 Sistemas Dinámicos No Lineales

Un sistema dinámico no lineal puede definirse como aquel cuyo comportamiento puede expresarse en base a ecuaciones diferenciales no lineales; es decir, las variables dinámicas que describen las propiedades del sistema (por ejemplo, posición, aceleración, velocidad, presión, etc.) se presentan en las ecuaciones diferenciales en forma no lineal [19].

No existe ningún sistema dinámico en la naturaleza cuya relación causa-efecto sea verdaderamente lineal. Es esta no linealidad la que hace que muchos sistemas dinámicos reales sean impredecibles para un periodo regular de tiempo; como ejemplos saltantes se pueden mencionar la predicción del clima, las reacciones químicas, los flujos turbulentos en fluidos, la arritmia cardíaca, etc. La aplicación de nuestros conocimientos sobre linealidad en estos sistemas está limitada a un pequeño margen de tiempo o vecindad de los puntos de operación.

Un sistema dinámico tridimensional escrito en la forma estándar o también denominada forma canónica (conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden) se presenta en (2.1)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

Donde  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$  son las variables de estado y  $f_1$ ,  $f_2$  y  $f_3$  son funciones independientes del tiempo pero contienen términos no lineales de  $x_1$ ,  $x_2$  y  $x_3$ .

Al sistema (2.1) en dinámica no lineal también se le conoce como “flujo”.

Las siguientes definiciones serán importantes para la comprensión teórica subsiguiente y donde  $(x)$  puede representar una variable de estado.

**Definición 1:** La ecuación  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  se denomina ecuación diferencial autónoma.

**Definición 2:** El problema  $\frac{dx}{dt} = f(x), x(0) = x_0$  es conocido como el problema de valor inicial; a su solución se le denomina órbita o trayectoria del sistema.

**Definición 3:** Un punto  $x^*$  es llamado punto de equilibrio de  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ , si  $f(x^*)=0$

## 2.2.4 Comportamiento de los Sistemas Dinámicos No Lineales

En general para determinar el comportamiento de un sistema dinámico no lineal, se necesitan mínimamente:

- Las ecuaciones que describen su evolución en el tiempo
- Los valores de los parámetros del sistema
- Las condiciones iniciales

### 2.2.4.1 Teorema de la No Intersección

**Dos trayectorias distintas de un sistema dinámico no se pueden intersectar en el espacio estado (en un periodo finito de tiempo) y más aún, una trayectoria no puede cruzarse sobre si misma.**

Por trayectorias distintas se quiere decir que estas no empiezan sobre los puntos de la otra. Respecto a la aclaración entre paréntesis “periodo finito de tiempo” se emplea para excluir los casos para los cuales distintas trayectorias se aproximan al mismo punto cuando  $(t \rightarrow \infty)$

Es necesario mencionar que existen dos aparentes contradicciones a este teorema. La primera para intersecciones asintóticas, en la cual conforme  $(t \rightarrow \infty)$  dos trayectorias se aproximan al mismo punto. La segunda ocurre cuando se proyecta la trayectoria de un sistema tridimensional sobre un plano de las variables de estado. En la proyección se observará un aparente cruce, por lo cual deberá recordarse que la evolución del sistema tiene lugar en el espacio tridimensional y allí realmente no existe ninguna intersección de trayectorias.

### 2.2.4.2 Sistemas con disipación, atractores y bases de atracción

Sistemas con disipación son aquellos que no pueden almacenar toda la energía entregada por una fuente energética, es decir, disipan de algún modo la energía suministrada. Los sistemas eléctricos reales de potencia son un claro ejemplo de sistema con disipación.

La evolución de la trayectoria de un sistema con disipación en el espacio estado,



conforme transcurre el tiempo y para un estado final, convergerá a un punto, curva, área, volumen, etc. A la entidad geométrica (punto, curva, área, etc.) que converja la evolución de un sistema se denomina “atractor”. Dicho nombre proviene del hecho que las trayectorias son atraídas a esta entidad en el espacio estado.

Al grupo de condiciones iniciales cuya evaluación final es un determinado atractor se denomina base de atracción del atractor.

### 2.2.4.3 Comportamiento hacia puntos fijos

Los puntos fijos del sistema (2.1) son un tipo de atractor de un sistema dinámico y se pueden definir como aquellos puntos del espacio estado para los cuales las funciones  $f_1(x_1, x_2, x_3)$ ,  $f_2(x_1, x_2, x_3)$  y  $f_3(x_1, x_2, x_3)$  son cero. Es decir, tomando en cuenta la definición 3 son los puntos de equilibrio del sistema.

En la Figura 2.3 se muestra la proyección de la trayectoria sobre el plano  $(x_1-x_2)$ , seguida por un sistema hacia el punto fijo  $(0, 0, 0)$ . Cualquier trayectoria de este sistema tendrá como destino final el origen de coordenadas.

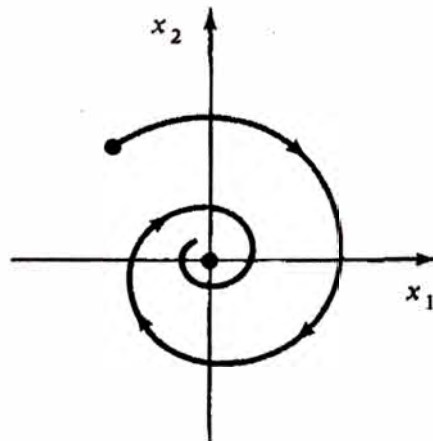


Figura 2.3 Comportamiento hacia un punto fijo (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Meryland, USA, 1993)

### 2.2.4.4 Comportamiento hacia ciclos límites

Los ciclos límites son atractores para los cuales la evolución del sistema permanece en una trayectoria cerrada indefinidamente. Dicha trayectoria es un lazo aislado.

Este tipo de atractor se presenta en sistemas cuya dimensión es igual o mayor a dos.

En la Figura 2.4 se observa como un sistema con este tipo de comportamiento evoluciona hacia un ciclo límite (curva troceada). Si la condición inicial del sistema fuera el punto “ $\alpha$ ” (exterior al ciclo límite) con el transcurrir del tiempo el sistema convergerá dando espirales hasta que se posicione en el ciclo límite para un  $(t \rightarrow \infty)$ . El movimiento del sistema dentro del ciclo límite es periódico, cuyo periodo es justamente el tiempo empleado en recorrer toda la longitud del lazo. Algo similar, ocurre en el caso que la condición inicial sea el punto interior “ $\beta$ ”, la orbita se acercará de manera asintótica al ciclo límite girando en espiral hacia afuera.

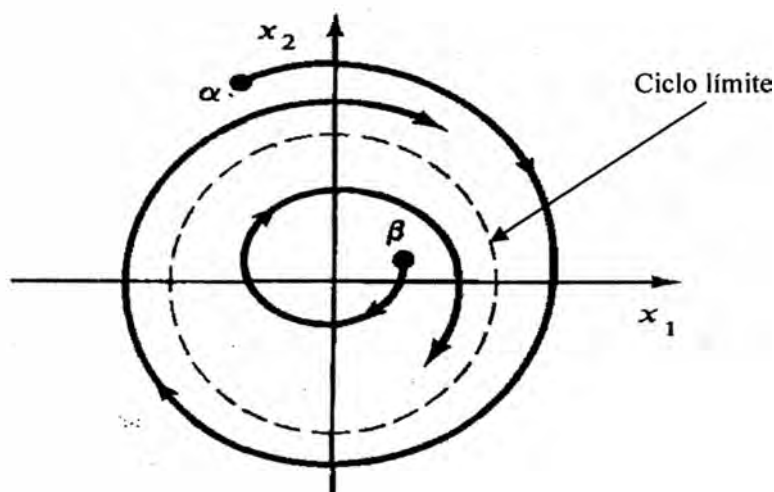


Figura 2.4 Comportamiento hacia ciclos límite (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Maryland, USA, 1993)

En este trabajo el interés se centra principalmente en este tipo de atractor, debido a que en un sistema eléctrico en corriente alterna el comportamiento normal es justamente un ciclo límite. Al ocurrir la variación de un parámetro (tensión de la fuente, capacitancia, inductancia, carga, etc.) ocasiona que el sistema se altere e intente acomodarse, y luego de un periodo transitorio se estabilice en lo que podría ser un nuevo ciclo límite o quizás bifurcar a otro tipo de atractor.

### 2.2.4.5 Comportamiento Quasiperiódico

Es llamado Quasiperiódico por la apariencia que presenta de ser periódico, tiene asociado dos frecuencias diferentes, es decir, este tipo de comportamiento puede ser analizado como dos movimientos periódicos independientes. Las trayectorias están restringidas a la superficie de un toroide del espacio estado (ver figuras 2.5 y 2.6), de donde podemos darnos cuenta que este comportamiento no es posible en espacios de una o dos dimensiones.

Una descripción de esta clase de movimiento es dada por [19]:

$$\begin{aligned}x_1 &= (R + r \cos \omega_r t) \cos \omega_R t \\x_2 &= r \sin \omega_r t \\x_3 &= (R + r \cos \omega_r t) \sin \omega_R t\end{aligned}\tag{2.2}$$

Donde las dos frecuencias angulares son  $\omega_R$  y  $\omega_r$  y cuya relación es un número irracional.

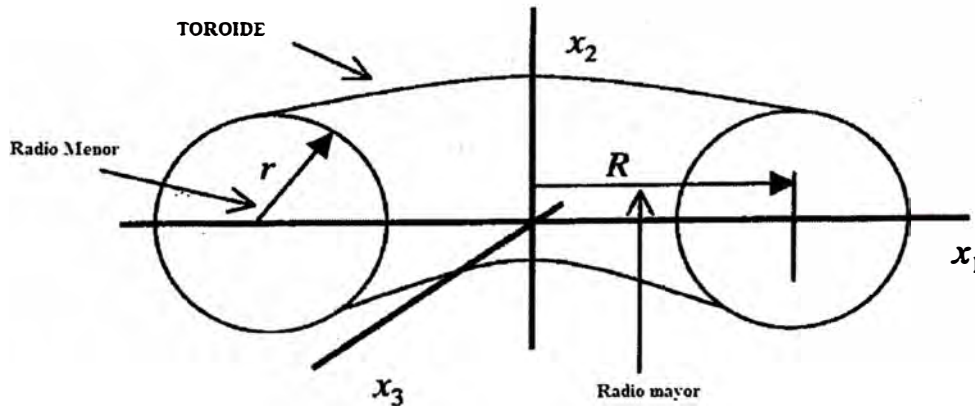


Figura 2.5 Comportamiento Quasiperiódico (De [19])

Geoméricamente el sistema (2.2) describe el movimiento sobre la superficie del toroide mencionado, cuyo radio mayor es  $R$  y el menor  $r$ . La Figura 2.5 describe este movimiento. La frecuencia más lenta  $\omega_R$  corresponde a la velocidad de rotación alrededor de la circunferencia grande, mientras que la más rápida  $\omega_r$  corresponde a la velocidad alrededor de la sección transversal del toroide.

Si el movimiento de un sistema se inicia en las condiciones iniciales  $\gamma$  (Figura 2.6) la trayectoria del sistema caerá sobre la superficie toroidal, donde permanecerá girando.

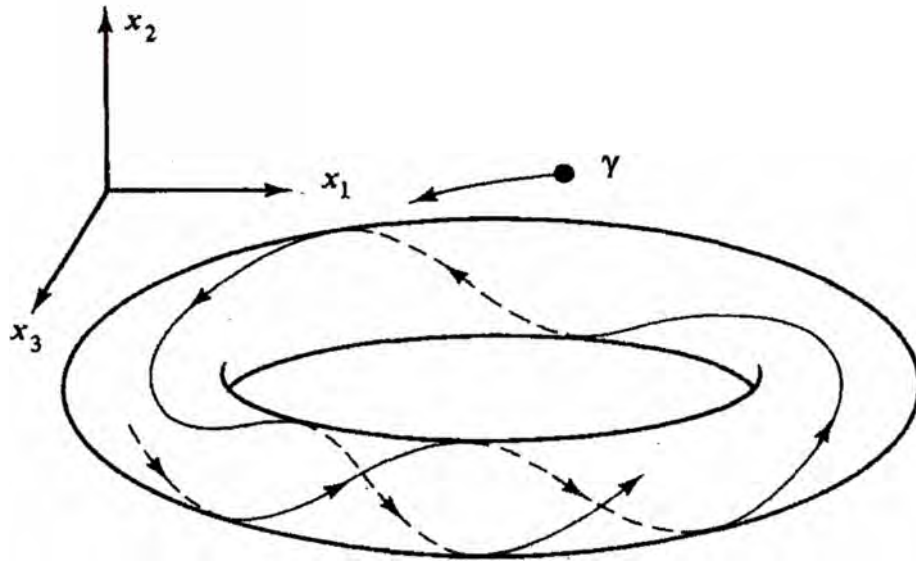


Figura 2.6 Movimiento Quasiperiódico tridimensional (De Edward Ott, 1993, Chaos in Dynamical Systems, Cambridge University Press, University of Maryland, USA, 1993)

#### 2.2.4.6 Comportamiento Caótico

Este tipo de comportamiento tiene lugar sólo en sistemas continuos de tres o más dimensiones.

En la dinámica no lineal “Caos” es una palabra empleada para describir el comportamiento de un sistema que es aperiódico (nunca se repite exactamente) y es aparentemente aleatorio o ruidoso. Donde, el término “aparentemente” significa que existe una aparente aleatoriedad caótica pero que está en un orden determinado, en algún sentido, por las ecuaciones que describen el sistema.

Es imposible predecir el estado final de un sistema caótico, pues no depende de su evolución histórica.

Otra característica de los procesos caóticos es que son muy sensibles a las condiciones iniciales. En la Figura 2.7 se tiene la gráfica del comportamiento temporal de una variable de estado de un sistema caótico para dos condiciones iniciales bastante cercanas y que al cabo de un tiempo empiezan a diverger notablemente.

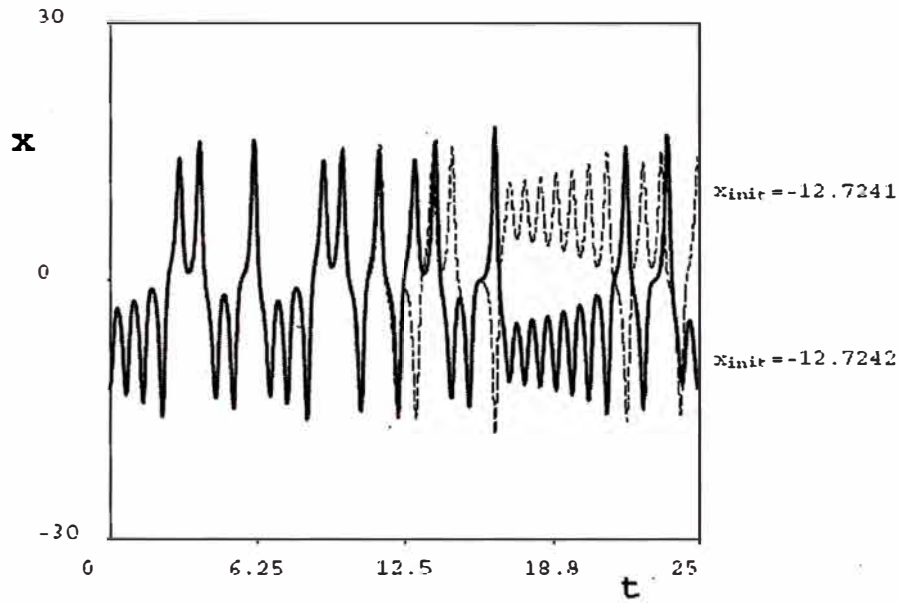


Figura 2.7 Sensibilidad a las condiciones iniciales (De Alexander Panfilov, 2001, Non-Linear Dynamic Systems, Utrecht University, December 2001)

El hecho de tener un sistema caótico no significa que las trayectorias seguidas puedan pasar por cualquier punto del espacio estado, sino que están confinadas a una región delimitada y dentro de la cual tienen comportamiento impredecible. A dichas regiones que son los atractores del sistema caótico, se les denominan atractores extraños. En la Figura 2.8 se muestra la proyección de un atractor extraño sobre el plano  $x_1x_2$  de un sistema caótico tridimensional. La trayectoria pareciera que se cruza sobre si misma pero ello no sucede pues la evolución del sistema ocurre en el espacio tridimensional, cumpliendo el Teorema de la No Intersección.

### 2.2.5 Herramientas para el estudio de los Sistemas Dinámicos No Lineales

De acuerdo a la bibliografía revisada, las herramientas más usuales para el estudio de los sistemas dinámicos son las formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré, mapa de Poincaré, espectro de Fourier y diagramas de bifurcación.

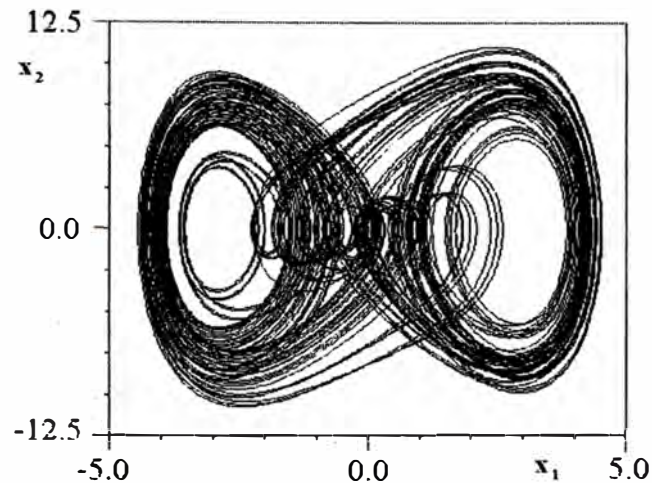


Figura 2.8 Atractor extraño

### 2.2.5.1 Formas de Onda

Esta herramienta es simplemente el gráfico de la evolución temporal de las variables de estado. Con ella se inicia un estudio de un sistema real pues muchas veces únicamente se cuenta con el registro temporal de ciertas variables.

### 2.2.5.2 Gráfico del Plano de Fase

Es el gráfico de la trayectoria seguida por un sistema en el espacio de fase y donde cada eje coordenado representa una variable de estado. Para sistemas tridimensionales este gráfico también es tridimensional pero si se toma en cuenta nuevamente el Teorema de la No Intersección, es suficiente considerar la proyección sobre un plano de dos variables de estado. Las figuras 2.3, 2.4 y 2.8 son ejemplos de planos de fase.

Usualmente se grafica una variable de estado versus otra que es su derivada. De allí que, si bien en el plano de fase, la información del tiempo es perdida, existe otra más relevante como la comparación de magnitudes entre variables de estado y su razón de cambio.

El diagrama de fase para una onda periódica presenta una trayectoria cerrada única; contrariamente en las ondas no periódicas dicha trayectoria nunca se cierra y es un medio indicativo que estamos frente a un sistema caótico.

### 2.2.5.3 Corte de Poincaré

Esta herramienta es una de las más importantes para el estudio de los sistemas dinámicos y está basada en la construcción de un plano llamado Corte de Poincaré, el cual intersecta la trayectoria del sistema en el espacio estado.

Para un espacio estado tridimensional, el Corte de Poincaré es generado por escoger una superficie bidimensional (Figura 2.9) y registrar sobre este plano los puntos en los cuales la trayectoria lo intercepta.

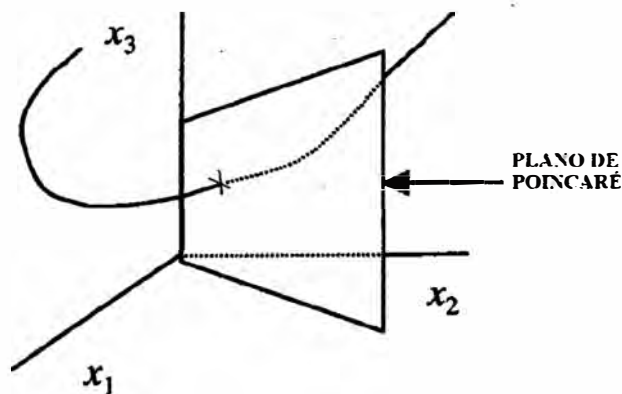


Figura 2.9 Plano de Poincaré (De [19])

Si el sistema tiene un periodo natural asociado, debido por ejemplo, a la aplicación de una fuente periódica externa (generador eléctrico en el caso de sistemas eléctricos), el corte de Poincaré corresponde a una fase definida de esa fuente. En el ejemplo de la Figura 2.10 si el periodo de la onda de la fuente externa es  $T$ , se puede escoger para el Corte de Poincaré los valores que tenga el sistema en el tiempo  $nT$ , siendo  $n$  un entero, y que justamente corresponden al plano  $x_3=0$ . De este modo para los instantes  $T, 2T, 3T, 4T\dots$  se tendrá la secuencia de puntos  $P_0, P_1, P_2, P_3\dots$ , esta secuencia de puntos forma el Corte de Poincaré y según observamos es un conjunto discreto.

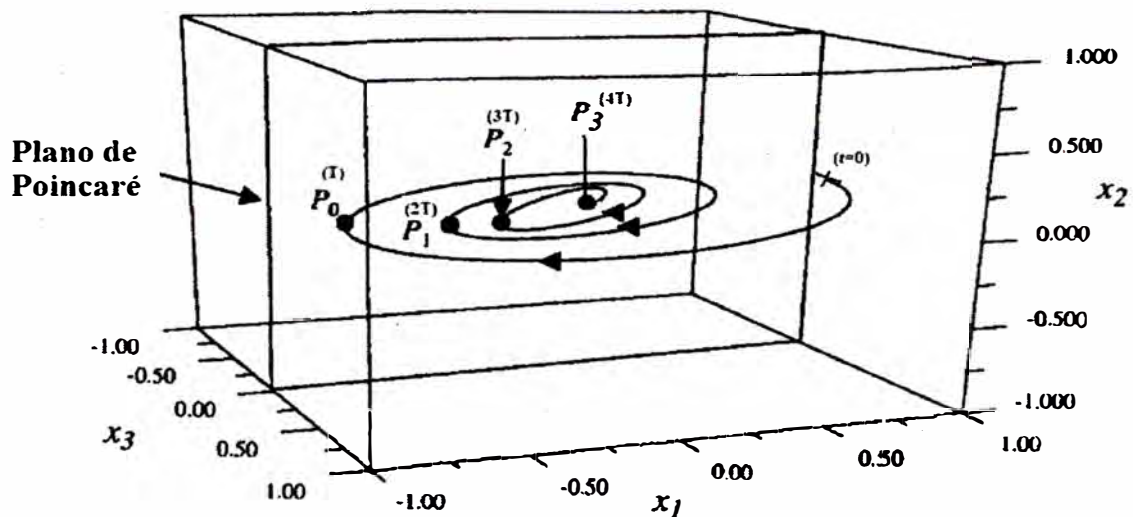


Figura 2.10 Plano de Poincaré (De [19])

#### 2.2.5.4 Mapa de Poincaré

Por definición, un mapa es un conjunto de expresiones algebraicas para determinar el estado siguiente de un sistema dinámico en tiempo discreto. El mapa de Poincaré tiene la siguiente ley de formación:

$$x_{(n+1)} = f(x_{(n)})$$

Los mapas se grafican en forma bidimensional con ejes mostrando el valor próximo  $x_{(n+1)}$  versus el valor actual  $x_{(n)}$ .

Un mapa representa mucho mejor el comportamiento de un sistema dinámico que un grupo de ecuaciones diferenciales pues cuando se tiene que estudiar un sistema dinámico caótico es suficiente con estudiar el mapa unidimensional o quizás bidimensional asociado; sucede lo contrario cuando se trata de ecuaciones diferenciales, pues es necesario como mínimo tres dimensiones (tres variables de estado). Otra ventaja adicional es que en la evaluación de un mapa solo es necesario realizar iteraciones que no tienen restricciones de continuidad, mientras que en las ecuaciones diferenciales hay usualmente dificultades de resolución y límites de convergencia.



### 2.2.5.5 Espectro de Fourier

Esta herramienta permite analizar cualquier forma de onda, sea periódica o no (Figuras 2.11 y 2.12). La principal contribución es la obtención de las magnitudes de los componentes armónicos e inter-armónicos que componen la onda. El cálculo de cada componente se realiza con el empleo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT de sus siglas en inglés), la cual es una versión optimizada para el cálculo de la Transformada Discreta de Fourier.

Forma de Onda  $\longrightarrow$  FFT  $\longrightarrow$  Espectro de Frecuencia

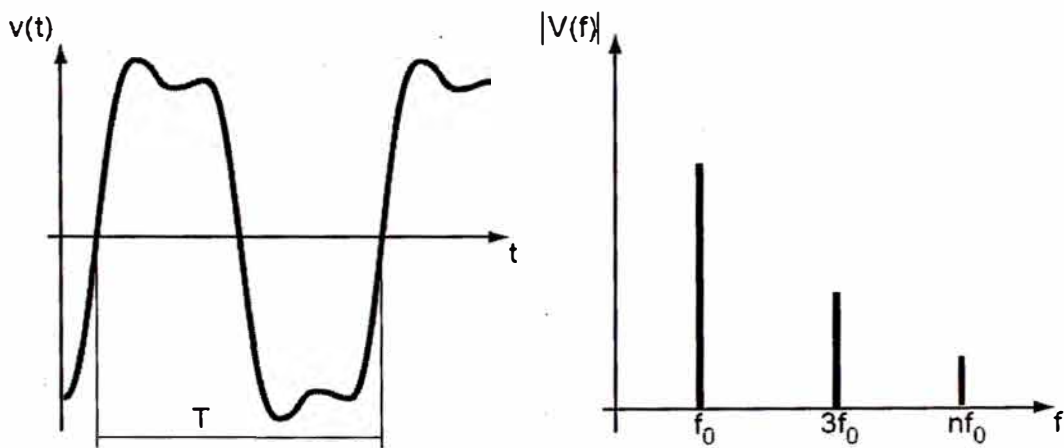


Figura 2.11 Espectro de formas de Onda Periódicas (De [8])

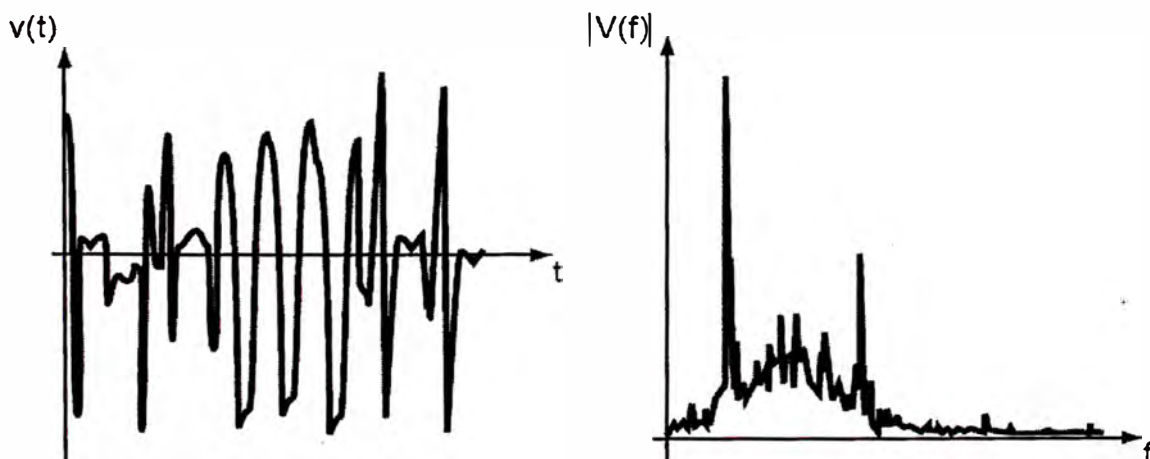


Figura 2.12 Espectro de formas de Onda No Periódicas (De [8])

La transformada discreta de Fourier de una señal  $x[n]$  se define como:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] * e^{-j\omega n}$$

## 2.2.6 Teoría de Bifurcación

Una pregunta importante a realizar sobre un sistema dinámico no lineal tiene que ver con el comportamiento de su atractor cuando se varía un parámetro. La respuesta pertenece al ámbito de estudio de una rama de las matemáticas denominada bifurcación.

Para un sistema tridimensional como el presentado en (2.1) y un parámetro  $\lambda$  se tiene ahora la siguiente forma general:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, x_3, \lambda) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, x_3, \lambda) \\ \frac{dx_3}{dt} &= f_3(x_1, x_2, x_3, \lambda) \end{aligned} \tag{2.3}$$

Durante la variación de un parámetro, un sistema puede presentar diversos atractores, de allí que sea importante saber si dichos atractores son estables o no; en particular estamos interesados en la estabilidad de los ciclos límites, pues, según se mencionó anteriormente, son el atractor normal de un sistema eléctrico. Para ello debemos primeramente conocer acerca de la estabilidad en los puntos fijos.

### 2.2.6.1 Eigenvalores y estabilidad de un punto fijo

De acuerdo a 2.2.4.3, el sistema 2.1 tendrá un punto fijo en  $\mathbf{x}_0$  si  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)=0$ .

**Definición 4:** El Jacobiano  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  del sistema 2.1 en el punto  $\mathbf{x}_0$  esta definido por:

$$D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Donde:  $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ f_3(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$  y  $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Los eigenvalores del Jacobiano  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  son importantes para determinar las propiedades de estabilidad del punto fijo  $\mathbf{x}_0$ . Así, se pueden definir de acuerdo a su grado de multiplicidad los tres números siguientes:

$n_0 = \#$  de eigenvalores de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  con parte real cero.

$n_+ = \#$  de eigenvalores de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  con parte real positiva.

$n_- = \#$  de eigenvalores de  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  con parte real negativa.

**Definición 5:** Un punto fijo es llamado Hiperbólico si  $n_0=0$  y además:

- Tipo Atractor si  $n_- = n$  y  $n_+ = 0$
- Tipo Repeledor si  $n_+ = n$  y  $n_- = 0$
- Tipo Ambivalente (Saddle) si  $n_- > 0$  y  $n_+ > 0$

Y no hay seguridad de la estabilidad si  $n_0 \neq 0$

**Teorema de Harman y Grobmann:** Si el sistema dinámico no lineal (2.1) tiene un punto fijo hiperbólico en  $\mathbf{x}_0$ , luego existe una vecindad  $U$  de  $\mathbf{x}_0$ , tal que el sistema (2.1) es equivalente al sistema linealizado (2.5) sobre una vecindad alrededor del origen.

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) * \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Este teorema dice, y de allí su importancia, que la dinámica de cualquier sistema dinámico no lineal alrededor de un punto fijo  $\mathbf{x}_0$  es similar a la dinámica de un sistema lineal localizado en  $\mathbf{x}_0$ . Su aplicación es general pues incluye también a los sistemas dinámicos discretos o mapas.

Al sistema lineal (2.5) se le puede aplicar la Teoría de Floquet (ver anexo 2.1) para

determinar su estabilidad y con ello también determinar la estabilidad del sistema dinámico no lineal (2.1).

### 2.2.6.2 Estabilidad de los ciclos límites

Una idea de estabilidad de un ciclo límite lo obtenemos al observar la evolución del sistema y sus intersecciones en el corte de Poincaré. Si con el transcurrir del tiempo los puntos de intersección permanecen, se puede decir que este ciclo límite es estable. Por el contrario, si se alejan cada vez más de los anteriores se puede decir que es inestable. Otra posibilidad podría ser que por un lado los puntos de Poincaré se acercan y por el otro se alejan, en ese caso estaríamos ante un ciclo límite tipo ambivalente (“saddle”). De estas observaciones vemos que los puntos del corte de Poincaré, describen cualitativamente el comportamiento de los ciclos límites. Si lo vemos ahora desde el punto de vista de un mapa y además conociéramos la relación de un punto actual con el anterior, puede escribirse para cada coordenada del corte de Poincaré:

$$\begin{aligned}x_1^{(n+1)} &= F_1(x_1^{(n)}, x_2^{(n)}) \\x_2^{(n+1)} &= F_2(x_1^{(n)}, x_2^{(n)})\end{aligned}\tag{2.6}$$

Los puntos fijos de un mapa como (2.6) por definición son aquellos que satisfacen:

$$\begin{aligned}x_1^* &= F_1(x_1^*, x_2^*) \\x_2^* &= F_2(x_1^*, x_2^*)\end{aligned}$$

Es decir, en un punto fijo, el mapa permanece indefinidamente en un mismo valor. Para el sistema dinámico tridimensional, significará que tiene un único ciclo límite y por tanto existe un solo punto de intersección con el plano de Poincaré.

Se puede determinar la estabilidad de estos puntos fijos del mapa, encontrando los valores característicos asociados a la matriz Jacobiana de derivadas, también llamada Matriz de Floquet.

$$MJ = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Esta matriz es evaluada solamente en los puntos del corte de Poincaré.

Debe observarse que empleando el corte Poincaré o el mapa de Poincaré es posible analizar un sistema tridimensional continuo en el tiempo por medio de un sistema bidimensional y discreto.

Al ser **MJ** una matriz bidimensional se tendrán dos valores característicos; si estos los representamos por  $M_1$  y  $M_2$ , la estabilidad de los ciclos límites para los cortes de Poincaré de espacios tridimensionales, es determinada por intermedio de sus valores absolutos de acuerdo a la tabla 2.1.

Tabla 2.1 Multiplicadores Característicos de los cortes de Poincaré de espacios Tridimensionales (De [19])

Tipo de Punto Fijo en el Mapa de Poincaré	Multiplicador de Floquet	Tipo de Ciclo Límite en el sistema tridimensional
Atractor	$ M_1 ,  M_2  < 1$	Atrayente
Repeledor	$ M_1 ,  M_2  > 1$	Repelente
Ambivalente	$ M_1  < 1,  M_2  > 1$	Ambivalente

### 2.2.6.3 Diagrama de Bifurcación

Es un gráfico que muestra la ubicación del equilibrio de un sistema dinámico no lineal para diferentes valores de un parámetro. En este diagrama conforme se varía el parámetro puede ocurrir que aparezcan los denominados puntos de bifurcación. Estos, son definidos como aquellos parámetros cuyo valor ocasiona un cambio cualitativo del comportamiento del sistema dinámico.

### 2.2.6.4 Tipos de Bifurcación en ciclos límites

De acuerdo a lo mencionado en 2.2.6.2 “Estabilidad de los ciclos límite” respecto a los

multiplicadores de Floquet, se pueden presentar los siguientes tipos de bifurcaciones [9]:

- **Tipo Doble**, que se origina cuando la parte real de uno de los multiplicadores de Floquet cruza el círculo unitario en +1. Esto sucede cuando se tiene un punto límite o codo.
- **Tipo Periodo doble**, que ocurre cuando la parte real de uno de los multiplicadores de Floquet cruza el círculo unitario en -1. Esto implica que la solución original se hace inestable, y dos nuevas soluciones periódicas aparecen pero ahora de periodo doble.
- **Tipo Hopf Generalizada**, que se caracteriza por el cruce del círculo unitario con dos multiplicadores de Floquet conjugados. Este tipo de bifurcación también es llamada “bifurcación hacia un toroide”. En dicho punto, la solución periódica se hace inestable y emerge una nueva del tipo quasiperiódica.

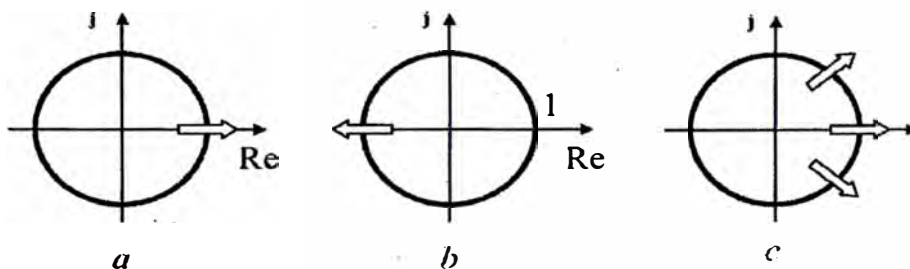


Figura 2.13 Escenarios de la pérdida de estabilidad de un ciclo límite

a) Tipo Doble b) Tipo Periodo doble c) Bifurcación de Hopf (De [9])

### 2.2.6.5 Elaboración de los diagramas de Bifurcación

Si ahora nos referimos al sistema (2.3) con parámetro ( $\lambda$ ), los diagramas de bifurcación pueden ser construidos por medio de los siguientes métodos:

- **El método de la fuerza bruta**, que consiste en integrar el sistema (2.3) y de forma paralela variar lentamente también el parámetro ( $\lambda$ ). Deben descartarse los valores involucrados en la parte transitoria y de los restantes se seleccionan aquellos que pertenecen al corte de Poincaré. La gráfica de una variable de

estado versus el parámetro ( $\lambda$ ) es el diagrama de bifurcación deseado. Este método ha sido empleado en [12].

- **El método de continuación**, en el cual, empleando como base una solución inicial determinada por algún método numérico de los presentados en 2.38, “Determinación de la operación estacionaria de un circuito ferroresonante”, se obtienen luego los otros puntos del diagrama empleando un método numérico de continuación.

Existen muchos programas informáticos que realizan dicho proceso, se tienen por ejemplo: XPPAUT [9], Matcont [31], AUTO [32], entre otros. Para fines de este trabajo se empleará el programa XPPAUT.

El programa XPPAUT, se compone de dos programas: XPP que integra las ecuaciones diferenciales y AUTO que obtiene los diagramas de bifurcación por continuación.

XPPAUT emplea el método de continuación conocido como “seudo longitud de arco” para obtener los ramales de bifurcación [9]. La Figura 2.14 muestra su principio.

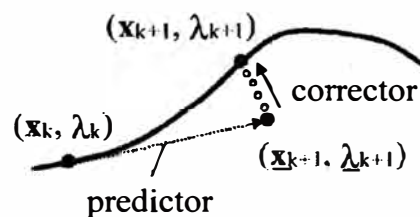


Figura 2.14 Principio de la continuación por pseudo longitud de arco (De [9])

El punto  $(x_k, \lambda_k)$  es la solución previa y a partir de la cual se obtiene el próximo valor  $(x_{k+1}, \lambda_{k+1})$ . Donde  $k$  indica la  $k$ -ésima solución del método de continuación. Inicialmente el predictor determina una probable solución cercana, por extrapolación lineal en base al vector tangente actual,

obteniéndose el punto  $(\underline{x}_{k+1}, \underline{\lambda}_{k+1})$ , luego este es corregido a la solución verdadera empleando el algoritmo de Newton-Raphson.

La norma L2 (L2-Norm) puede ser empleada como medida característica de la solución periódica y es definida por:

$$\|X\| = \sqrt{\int_0^T \frac{1}{T} \sum_{i=1}^n x_i^2(t) dt} \quad (2.14)$$

Donde T es el período del sistema, n es el orden del sistema de ecuaciones diferenciales y  $x_i$  es la i-ésima variable de estado.

La pérdida de estabilidad de las soluciones encontradas ocurre cuando los multiplicadores de Floquet dejan el círculo unitario.

## 2.3 Ferroresonancia

### 2.3.1 Definición

La ferroresonancia es un fenómeno oscilatorio estacionario no lineal, que se presenta en un sistema eléctrico AC debido a la interacción entre un condensador y un inductor con núcleo ferromagnético saturable. Una vez iniciada la ferroresonancia, el comportamiento resultante del sistema puede moverse de su ciclo límite actual a otro, en donde se tienen ondas de tensión con presencia de la frecuencia fundamental más sus armónicas y subarmónicas asociadas o bifurcar a un comportamiento quasiperiódico o caótico.

Algunas definiciones ilustrativas son:

- Es un fenómeno oscilante entre una inductancia no lineal y un capacitor, cuyos resultados son sobretensiones y sobrecorrientes altamente distorsionadas [6].
- Es un fenómeno eléctrico complejo que es peligroso para un sistema eléctrico de potencia debido a las sobretensiones y sobrecorrientes generadas [7].
- Es una clase de efectos no lineales causados por saturación magnética [9].
- Es una oscilación que ocurre en sistemas eléctricos que contienen un inductor



electromagnético y un capacitor excitados por una fuente de tensión sinusoidal [11]

- Es un fenómeno eléctrico no lineal que usualmente ocurre en un sistema de potencia que contiene transformadores saturables con baja carga, líneas de transmisión (o cables) y energización monofásica desde una fuente trifásica [15].
- Es un fenómeno que involucra no solo el salto del punto de operación de un sistema eléctrico a un estado de operación en el que la corriente es más alta y de frecuencia igual a la fundamental, sino también bifurcaciones a oscilaciones subarmónicas, quasiperiódicas y caóticas, en circuitos que contienen inductancias no lineales [20].

### 2.3.2 Entorno eléctrico mínimo para la ocurrencia de ferresonancia

En la ferresonancia siempre se encuentran mínimamente involucrados [7, 8, 20]:

- Una fuente de tensión alterna: E
- Una capacitancia: C
- Un transformador o una inductancia con núcleo ferromagnético saturable: L
- Bajas pérdidas o poca carga: R

Sin embargo, estas condiciones no son suficientes para definir completamente la ferresonancia; la siguiente propiedad fundamental debe también tenerse presente [7, 8]: **“en un circuito eléctrico real varios puntos de operación estables pueden existir en condiciones estacionarias, la aparición de uno u otro depende de la condición presente al momento de la interrupción o cierre hecha en el circuito; es decir dependen de las condiciones iniciales”**. Por ejemplo si desenergizamos un transformador de potencia conectado a una barra por intermedio de un interruptor que tiene capacitancias de normalización de potencial en las cámaras de extinción, dependiendo del instante de

interrupción, la tensión del transformador puede disminuir a cero o sino incrementar oscilatoriamente su amplitud debido a la ferresonancia.

Al ser la ferresonancia un fenómeno no lineal las siguientes características de los sistemas dinámicos no lineales están presentes [8]:

- Sensitividad a la variación de parámetros que conlleva a que se observe el fenómeno del salto; siendo el nivel de tensión del generador, la capacitancia y la carga, los parámetros que usualmente pueden desencadenarlo.
- Sensitividad a las condiciones iniciales.

### **2.3.3 Condiciones necesarias para la ocurrencia de ferresonancia**

Deben verificarse las tres condiciones necesarias siguientes pero no suficientes para la ocurrencia de ferresonancia [8]:

- Presencia simultánea de capacitancias con inductancias no lineales.
- Existencia dentro del sistema de algún punto con potencial no fijo, por ejemplo un neutro aislado o fase flotante luego de un fusible quemado o por realizar un cierre o apertura monofásica.
- Equipos con baja carga (transformadores de potencia o medida) o generadores en sistemas con baja potencia de cortocircuito.

Si una de estas condiciones no se cumple, la aparición de la ferresonancia es altamente improbable; de lo contrario es necesaria una investigación más amplia.

### **2.3.4 Tipos de Ferresonancia**

#### **2.3.4.1 Ferresonancia monofásica y trifásica**

La ferresonancia se presenta tanto en sistemas eléctricos monofásicos como en los trifásicos, de allí que podría clasificarse como monofásica y trifásica. Sin embargo, la ocurrencia de la ferresonancia no distingue el tipo de sistema, y esta condicionada por la presencia de las características mencionadas en el ítem 2.3.2 “Entorno eléctrico mínimo para la ocurrencia de ferresonancia”. Si no fuera así, en un sistema con un transformador

trifásico no podría tenerse ferroresonancia monofásica por efecto de un cierre monofásico. Para clasificar la ferroresonancia en monofásica o trifásica debe tenerse en cuenta que no siempre es posible y aún correcto, simplificar un circuito trifásico a un equivalente monofásico. El motivo está en la asimetría que usualmente existe en el acoplamiento magnético de las fases de un transformador trifásico. Asimetría que a su vez es debida al tipo constructivo de los núcleos de los transformadores. En base a la premisa mencionada, se puede decir que la ferroresonancia es trifásica si están presentes las tres fases de tensión y además no es factible obtener un circuito equivalente monofásico del sistema en estudio.

#### **2.3.4.2 Ferroresonancia de acuerdo a su Topología**

Al igual que la resonancia lineal, la ferroresonancia puede ser también del tipo serie y paralela.

##### **a) Ferroresonancia Serie**

Este tipo es la manera más usual de aparición; de allí que muchos artículos describan a la ferroresonancia como un fenómeno que tiene lugar en circuitos serie no lineales. Un ejemplo de configuración para su ocurrencia se tiene en la Figura 2.15. La cual es muy empleada para realizar la alimentación eléctrica de muchas industrias a partir de la red aérea de las empresas de distribución. Lo correcto en este caso es que el primario del transformador sea Y aterrado, pero en algunas circunstancias por efecto de eventos ocurridos, el neutro queda flotante, tal como se observa en la Figura 2.15. El circuito equivalente final de este escenario se muestra en la figura 2.17. Donde:  $L_p$  es la inductancia no lineal de magnetización;  $R_1$  y  $R_2$  son las resistencias que representan las pérdidas ohmicas de energía en el cableado incluyendo el bobinado y las pérdidas del núcleo del transformador respectivamente;  $C_0$  es la suma de las capacitancias parásitas de los bobinados y del cable a tierra. Esta capacitancia homopolar ( $C_0$ ) es dependiente de la capacitancia parásita y la longitud del cable. En varios artículos se han planteado fórmulas para determinar la longitud

crítica que da inicio a la ferresonancia, por lo que es bueno mencionar que dichas fórmulas solo corresponden a ese caso particular. La ferresonancia, según se mencionó en 2.3.2 “Entorno eléctrico mínimo para la ocurrencia de ferresonancia”, depende también de las pérdidas o carga del transformador y condiciones iniciales.

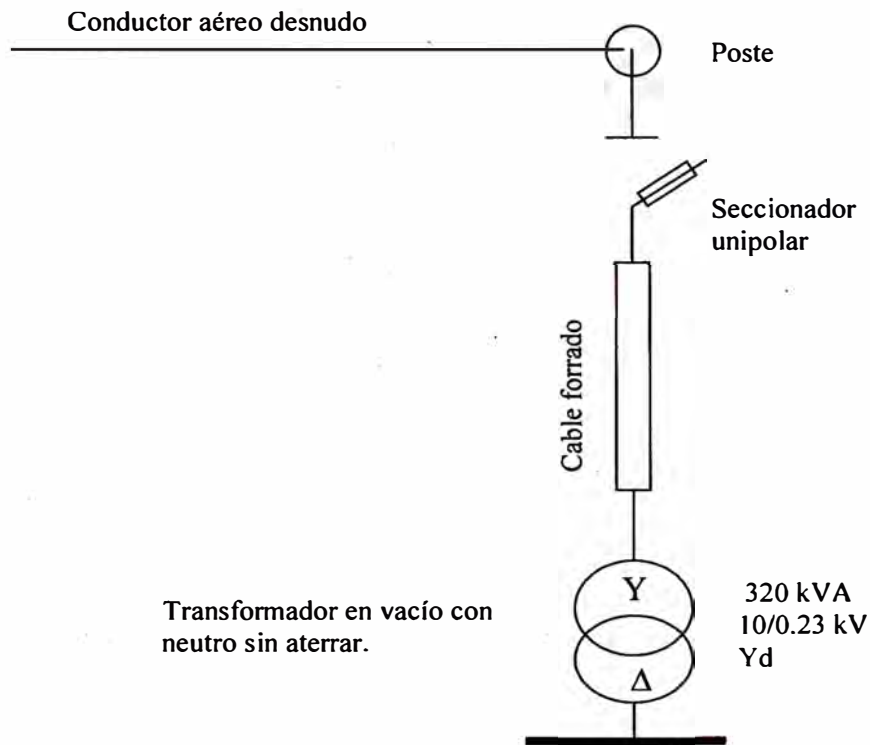


Figura 2.15 Ejemplo de ocurrencia de Ferresonancia Serie (De [8])

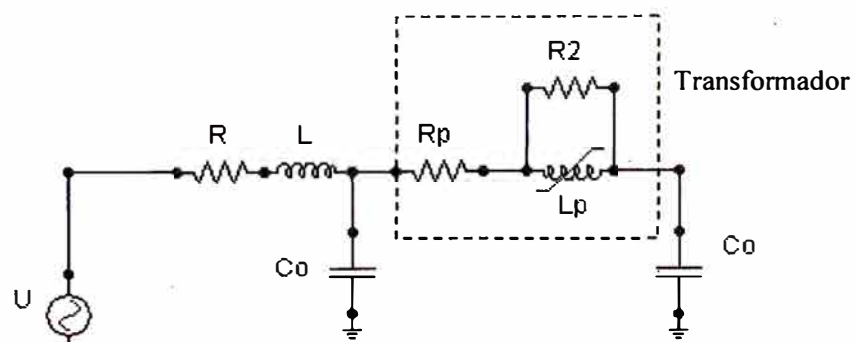


Figura 2.16 Esquema equivalente monofásico

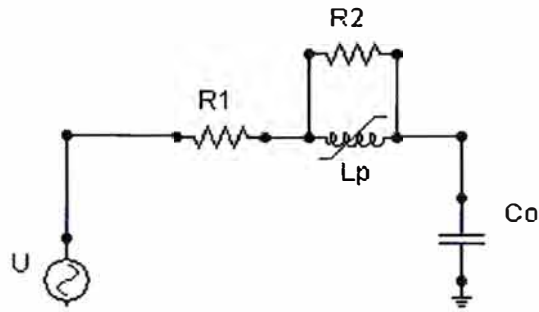


Figura 2.17 Esquema simplificado

### b) Ferroresonancia Paralela

Es de muy rara ocurrencia y su análisis corresponde más a un tratamiento teórico de casos monofásicos que a alguna situación real presentada. Se tienen ejemplos de estudio de ferroresonancia paralela en [27] y [28]. De [27] se ha extraído el circuito que se muestra en la figura 2.18, donde por ejemplo  $C$  puede representar las capacitancias parásitas a tierra de un cable que alimenta un transformador monofásico representado por el ramal no lineal  $R$ - $L$  y  $R1$  las pérdidas óhmicas del cable y bobinado.

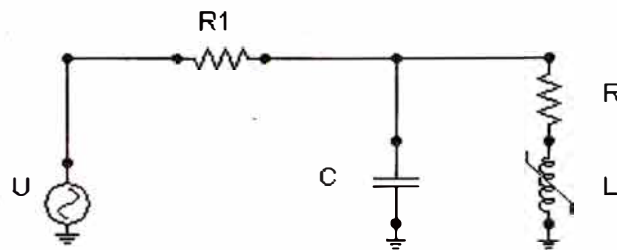


Figura 2.18 Ejemplo de ocurrencia de ferroresonancia paralela

### 2.3.4.3 Ferroresonancia de acuerdo a su Comportamiento

Las formas de onda producto de simulaciones, experimentos realizados y casos ocurridos, han permitido determinar que existen cuatro tipos de ferroresonancia: fundamental, subarmónica, quasiperiódica y caótica [8]. Las mismas que están ligadas con los comportamientos explicados para los sistemas dinámicos no lineales desde 2.2.4.3 hasta 2.2.4.6.

**a) Ferroresonancia Fundamental**

En este tipo de ferroresonancia las ondas de tensión y corriente son periódicas, con igual periodo ( $T$ ) que la onda del generador y usualmente con gran contenido armónico. El espectro de Fourier es discontinuo compuesto de la onda fundamental y sus armónicos (generalmente los de orden impar). El corte de Poincaré presenta un único punto (Figura 2.19).

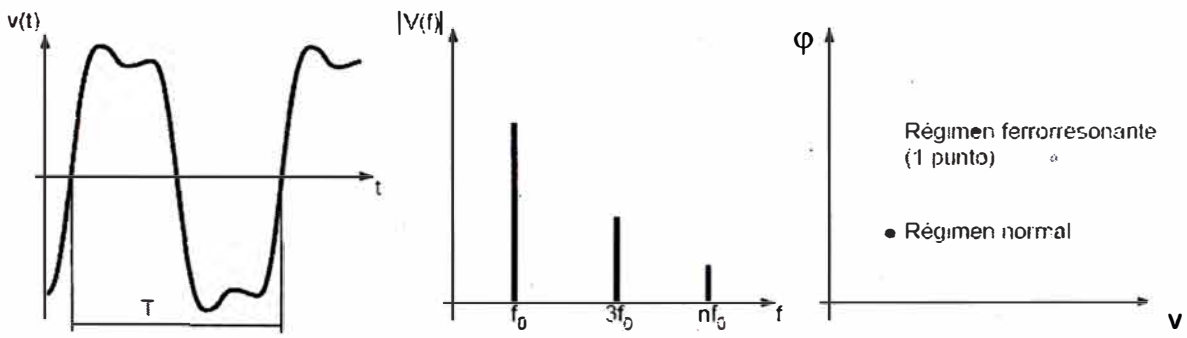


Figura 2.19 Ejemplo de Ferroresonancia Fundamental (De [8])

**b) Ferroresonancia Subarmónica**

Las formas onda también son periódicas, pero en este caso, de un periodo que es múltiplo entero del periodo de la onda del generador. El espectro de Fourier presenta una componente a una frecuencia que es menor que la fundamental con sus correspondientes armónicas, siendo justamente la fundamental una de ellas. El corte de Poincaré muestra una cantidad discreta de puntos (Figura 2.20).

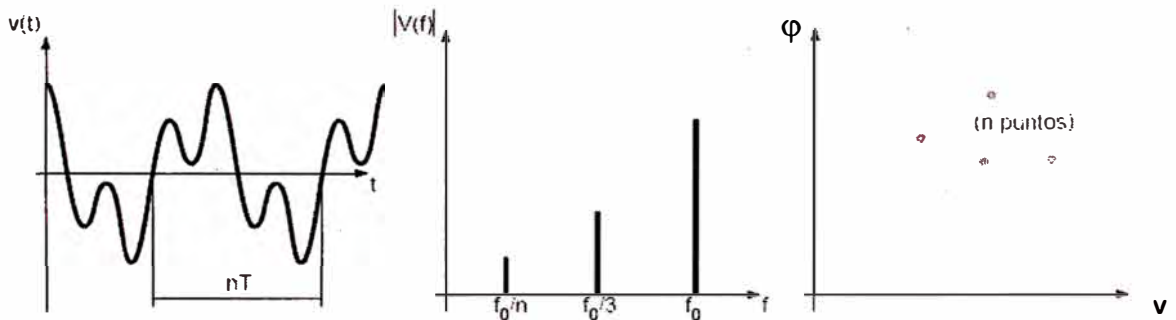


Figura 2.20 Ejemplo de Ferroresonancia Subarmónica (De [8])

### c) Ferroresonancia Quasiperiódica

En este tipo de comportamiento, las señales de tensión y corriente ya no son periódicas. El espectro de Fourier es discontinuo presentando dos frecuencias dominantes con sus correspondientes armónicas; la relación entre dichas frecuencias es un número real irracional de acuerdo a lo explicado en 2.2.4.5 “Comportamiento quasiperiódico” y el Corte de Poincaré muestra una curva continua (Figura 2.21).

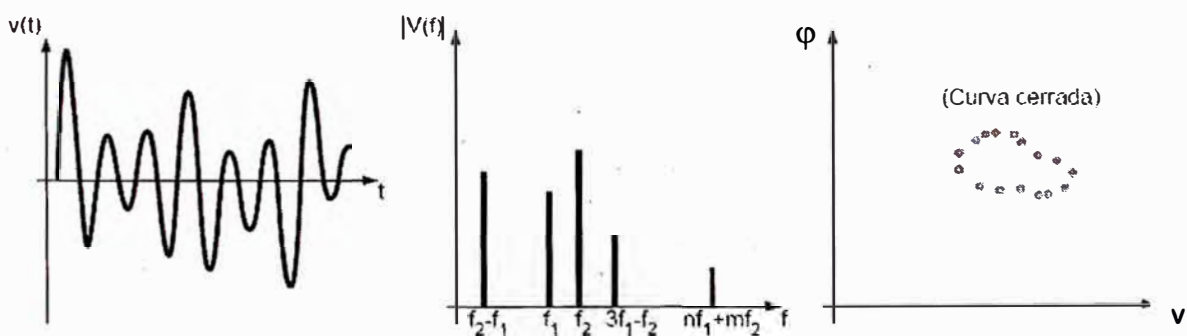


Figura 2.21 Ejemplo de Ferroresonancia Quasiperiódica (De [8])

### d) Ferroresonancia Caótica

Este tipo de comportamiento fue explicado en 2.2.4.6 “Comportamiento caótico”. El espectro de Fourier se presenta continuo para todas las frecuencias. El Corte de Poincaré está compuesto de una serie de puntos agrupados que ocupan un área del plano de fase, formando un “atractor extraño” (Figura 2.22)

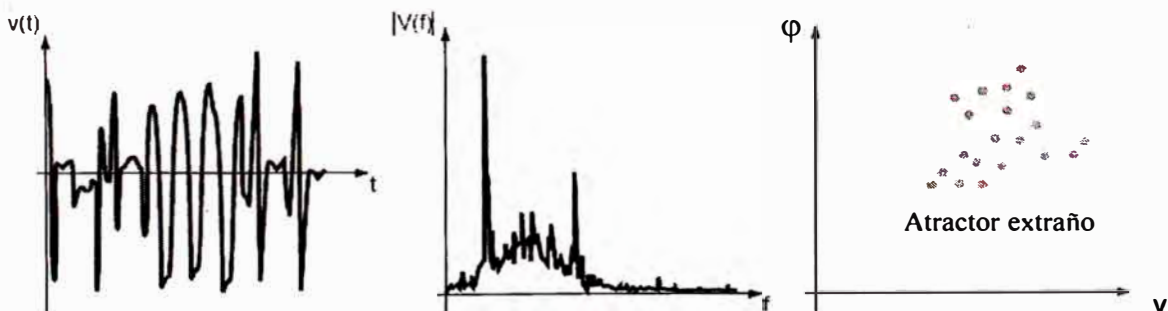


Figura 2.22 Ejemplo de Ferroresonancia Caótica (De [8])

### **2.3.5 Síntomas de Ferroresonancia**

Durante la ocurrencia de ferroresonancia se presentan algunos de los síntomas físicos y eléctricos, que se describen a continuación:

- Altas sobretensiones, bien sea entre fases o entre fase y tierra.
- Altas sobrecorrientes permanentes
- Oscilación luminosa en lámparas (Flicker) y altas distorsiones en las formas de onda de tensión y corriente, debido a la existencia de armónicas y subarmónicas.
- Calentamiento excesivo de un transformador operando en vacío, debido a que el núcleo del transformador se encuentra saturado y por ende ofrece mayor oposición al paso del flujo magnético. Esto a su vez ocasiona que el flujo encuentre nuevas trayectorias en partes metálicas no previstas, como por ejemplo el tanque, ocasionando su calentamiento. Sin embargo, el calentamiento del transformador depende del grado de ferroresonancia presentada, pues algunos modos ferroresonantes no ocasionan gran saturación al núcleo.
- Continuo y excesivo ruido en el transformador por la alta y aleatoria saturación del núcleo. Conforme aumenta la densidad del flujo, provoca la magnetostricción del acero y el consecuente movimiento de las láminas del núcleo.
- Fallas frecuentes con deterioro de los pararrayos y supresores de transitorios debido al calentamiento excesivo ocasionado por sobretensiones mayores a sus valores nominales de fabricación. Los pararrayos y supresores son usualmente fabricados con capacidad de disipación de energía para eliminar sobretensiones de poca duración y no permanentes como la ferroresonancia.



### **2.3.6 Medios de Protección contra la ferresonancia**

Los escenarios de ocurrencia de la ferresonancia en un sistema eléctrico real son numerosos, pues si bien en un circuito determinado podría existir un solo transformador o reactor, la capacitancia puede tener diversos orígenes. Dependiendo del equipo conectado puede provenir de una línea de transmisión, un banco de compensación reactiva, una línea de transmisión cercana y paralela a aquella conectada al transformador, los pasatapas del mismo transformador, los propios bobinados entre fases y de fase a tierra, la capacitancia parásita entre fases y de fase a tierra de un cable tripolar conectado, etc. En la supuesta posibilidad que se hayan previsto todas las fuentes de capacitancia debe tenerse en cuenta también las causas que la inician. Se pueden mencionar algunas más comunes:

- Voladura de fusible o apertura o energización unipolar del seccionador de línea de un transformador trifásico.
- Pérdida de la conexión del neutro del circuito con tierra de un sistema aterrado.
- Caída de rayos
- Energización de una línea larga que alimenta un transformador con poca carga.
- Aislamiento por falla de una barra que dispone de interruptores con condensadores normalizadores de potencial entre sus contactos.
- Falta de un adecuado nivel de carga del devanado en delta abierto de un transformador VT.

La consecuencia de la ferresonancia sobre un sistema eléctrico puede variar desde una aparente falsa operación de un relé hasta el deterioro del transformador involucrado o equipos que este alimenta.

La mejor manera para protegerse de la ferresonancia es la realización de un estudio

de acuerdo a 2.3.9 “Procedimiento para realizar un estudio de ferresonancia”, antes de poner en servicio un transformador o reactor. Luego de diagnosticada su presencia se puede optar por:

- Evitar las configuraciones de riesgo mediante la implementación de un procedimiento de operación. De esta manera se evitará que aparezca el nivel mínimo de capacitancia que desencadena la ferresonancia.
- Realizar en la medida de lo posible la conexión o desconexión tripolar de un transformador en vacío. Las energizaciones unipolares son causas de innumerables casos de ferresonancia en transformadores de distribución sin carga.
- Evitar que el transformador opere con un nivel mínimo de carga. Las pérdidas y carga del transformador tienen un rol amortiguador para la aparición de ferresonancia. La tecnología actual también tiene consecuencias en los transformadores. El hecho que ahora se fabriquen transformadores con bajas pérdidas mejora su eficiencia energética pero por otro lado los hace más susceptibles a tener comportamientos ferresonantes.
- La colocación de pararrayos y supresores de picos en ambos lados del transformador. A pesar que fallan indefectiblemente, dependiendo del nivel de capacidad de disipación de calor, cumplen el rol de protección por algunos segundos hasta que actúe el sistema de protección. En [29] se menciona que los pararrayos inmersos en aceite son una buena alternativa para protegerse de la ferresonancia.
- En la medida de lo posible emplear transformadores de medida de tensión con divisor capacitivo y circuito antiferresonante, en lugar de transformadores VT.

### **2.3.7 Métodos para estudiar la Ferroresonancia**

Existen tres maneras de estudiar la ferroresonancia [13]:

- Mediante pruebas en laboratorio y/o campo.
- Mediante el empleo de modelos matemáticos y técnicas analíticas.
- Mediante simulaciones en el tiempo para analizar el comportamiento de modelos de transformadores (método de fuerza bruta).

La primera opción ha dado conocimientos grandes e intuitivos sobre el fenómeno pero sus resultados están limitados, pues no es posible generalizar a otras situaciones no probadas. La segunda permite estudiar una variedad de escenarios pero esta limitada principalmente a casos monofásicos y pocos trifásicos debido a la complejidad de los elementos involucrados. Finalmente, la tercera opción tiene la ventaja de estudiar casi cualquier condición y es útil para predecir el complejo comportamiento no lineal. Sin embargo, por el hecho de no ser analítica no da el beneficio directo de mostrar el comportamiento y dependencia del gran rango posible de parámetros y condiciones iniciales.

### **2.3.8 Determinación de la operación estacionaria de un circuito ferroresonante**

Realizar un estudio para detectar estados ferroresonantes en un sistema con simulación directa en el dominio del tiempo con programas tales como ATP-EMTP o PSCAD [15], según se mencionó en el ítem anterior emplearía demasiado tiempo debido al largo transitorio de la ferroresonancia; y si fuera así, aún no se tendría gran conocimiento de su comportamiento en vista que la ferroresonancia es además extremadamente sensitiva a los parámetros y condiciones iniciales del sistema [8]. Felizmente se han desarrollado herramientas para evitar la parte transitoria y determinar directamente un estado ferroresonante estacionario.

Los siguientes métodos permiten determinar un estado estacionario ferroresonante de un sistema, tanto para la ferroresonancia fundamental como para la subarmónica:

- Balance Armónico
- Punto fijo del mapa de Poincaré

- Esquema de Newton-Raphson
- Método Promedio Generalizado
- Método usado por programas de Continuación

Luego de obtenido el estado estacionario inicial, los diagramas de bifurcación pueden ser elaborados con algún método de continuación. Uno de los más usuales es el de “seudo longitud de arco”, descrito en 2.2.6.5 “Elaboración de los diagramas de bifurcación”.

### 2.3.8.1 Método de Balance Armónico

Es el más común y consiste en considerar que el flujo estacionario del núcleo ( $\varphi$ ) tiene un comportamiento final compuesto por una serie finita de Fourier [8,14]:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \sum_{k \in K} (\varphi_{k,c} \cos(k\omega t) + \varphi_{k,s} \text{seno}(k\omega t)) \quad (2.8)$$

Donde  $k$  pertenece al grupo de armónicos seleccionados de acuerdo al tipo de ferresonancia presentada.

Esta expresión se introduce en las ecuaciones diferenciales del sistema no lineal transformándolo en un sistema no lineal de ecuaciones algebraicas donde las variables desconocidas son los coeficientes  $\varphi_{k,c}$  y  $\varphi_{k,s}$ .

El sistema se resuelve con la consideración de que no existe acoplamiento magnético entre elementos no lineales o entre los no lineales y lineales. De este modo un circuito puede ser dividido en dos partes como se muestra en la Figura 2.23

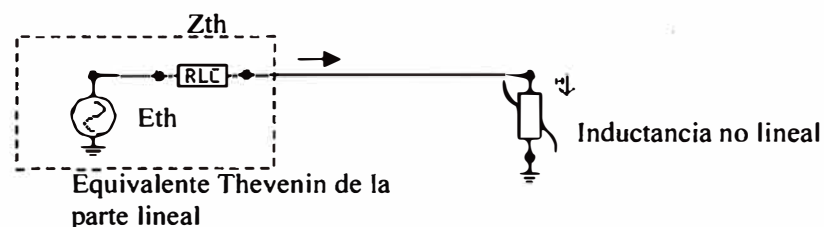


Figura 2.23 Circuito No Lineal (De [30])

La solución del sistema se obtiene resolviendo dos sistemas: la parte lineal y aquella asociada al elemento no lineal.

### 2.3.8.2 Método del Punto Fijo del Mapa de Poincaré

Como la solución se supone periódica sobre un periodo  $T$ , entonces en cada periodo transcurrido se tendrá el mismo valor para las variables de estado. El método consiste de una búsqueda iterativa de una solución invariante por simulación numérica del sistema sobre un periodo  $T$ .

La ecuación a resolver es encontrar un estado estacionario tal que  $\mathbf{x} = \mathbf{F}(\mathbf{x})$  donde  $\mathbf{F}$  es la función de mapeo del corte de Poincaré definida en la ecuación (2.6) y  $\mathbf{x}$  es un vector de estado.

La función  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  es obtenida por métodos temporales de integración paso a paso. El sistema es inicializado con vector de estado  $\mathbf{x}$  en  $t=0$ , y es simulado por un periodo  $T$ , de donde se obtiene  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

Para resolver la ecuación  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 0$  y por tanto la búsqueda de  $\mathbf{x}$ , se utiliza el método de Newton-Raphson; para ello es necesario calcular su Jacobiano, el cual es simplemente la derivada de  $\mathbf{J}$  con respecto a  $\mathbf{x}$  (ecuación 2.9) [7].

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.9)$$

### 2.3.8.3 Método del Esquema de Newton-Raphson

En este tipo de método también se supone que la solución final es periódica sobre un periodo  $T$  y por tanto su solución consiste en resolver las ecuaciones del sistema como un problema de dos valores de frontera. Para ello se obtiene un vector discrepancia  $\delta = \mathbf{x}_{(T)} - \mathbf{x}_{(0)}$  donde  $\mathbf{x}_{(T)}$  es el vector de estado en  $t=T$  y  $\mathbf{x}_{(0)}$  es el estado inicial del circuito [11].

### 2.3.8.4 Método del Promedio Generalizado

Este método se puede utilizar en sistemas lineales y no lineales cuyas formas de onda son periódicas o quasiperiódicas [13]. Suponiendo que el estado transitorio ya finalizó y que

la forma de onda  $x(\tau)$  presente es estacionaria, entonces esta puede ser representada en el intervalo  $\tau \in [t-T, t]$  por una serie de Fourier de la forma:

$$x(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k(t) e^{jk\omega\tau} \quad (2.10)$$

Donde:  $\omega=2\pi/T$

$X_k(t)$  es el k-ésimo coeficiente complejo de Fourier y que usualmente es conocido como fasor dinámico. Estos coeficientes serán variantes en el tiempo. Indudablemente no se emplearán todos los coeficientes sino los suficientes como para dar una buena aproximación de la forma de onda original, siendo el k-ésimo coeficiente (o k-fasor) en el tiempo t, determinado por la siguiente operación promedio:

$$X_k(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(\tau) e^{-jk\omega\tau} d\tau = \langle x \rangle_k(t) \quad (2.11)$$

La derivada del k-ésimo coeficiente de Fourier es dada por la siguiente expresión [13]:

$$\frac{dX_k}{dt}(t) = \left\langle \frac{dx}{d\tau} \right\rangle_k(t) - jk\omega X_k(t) \quad (2.12)$$

Una importante propiedad es el cálculo del promedio del producto de dos señales  $x(t)$  y  $q(t)$ ; así el k-ésimo factor del producto es dado por:

$$\langle qx \rangle_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \langle q \rangle_{k-i} \langle x \rangle_i \quad (2.13)$$

### 2.3.8.5 Método usado por programas de Continuación

Este método es empleado en XPPAUT, Matcont, AUTO entre otros, y consiste en obtener una solución inicial integrando las ecuaciones diferenciales del sistema con algún método de integración (por defecto Runge-Kutta).

### 2.3.9 Procedimiento para realizar un estudio de ferresonancia

P. Ferracci en [8] propone seguir los siguientes pasos cuando se desee realizar un estudio cualquiera de ferresonancia:

1. Identificar la configuración de riesgo

2. Simplificar el circuito
3. Determinar los siguientes parámetros del sistema de potencia:
  - Característica no lineal de la inductancia
  - Variación y tolerancias de la carga R y la capacitancia C
4. Determinar las áreas de riesgo:
  - Obtener los estados estacionarios
  - Obtener los diagramas de bifurcación
5. Verificar si en la práctica, las condiciones iniciales llevan a un área de riesgo.
6. Consecuencias sobre la capacidad térmica, mecánica y dieléctrica del equipamiento.
7. Proponer las soluciones.

### **2.3.10 Modelamiento de componentes eléctricos para simulación de ferroresonancia**

En [1] se indica la importancia de realizar un modelamiento adecuado para reproducir un evento realmente ocurrido.

La ferroresonancia trifásica se halla menos desarrollada en su estudio que la monofásica, debido básicamente a la complejidad de las ecuaciones no lineales involucradas y adicionalmente a dificultades encontradas al momento de modelar el transformador.

### **2.3.11 Modelos de fuentes de capacitancias**

Como fuentes de capacitancias en un circuito eléctrico se tienen principalmente las líneas de transmisión y cables. Para estudios de ferroresonancia es suficiente con modelarlas en base a su circuito “pi” equivalente y si es línea larga considerar varios circuitos “pi” en cascada [1].

En el caso de presencia de condensadores de compensación reactiva sea serie o paralela es suficiente con su capacitancia estándar asociada con su respectiva resistencia de dispersión en paralelo. Similarmente se procede con otras fuentes de capacitancias que pueden adicionarse, por ejemplo, las capacitancias parásitas de los bobinados de transformadores a

tierra, entre bobinados, de los aisladores pasatapas, etc.

### **2.3.12 Modelos de generadores**

Si se considera que la fuente tiene comportamiento lineal para su representación es suficiente con la inclusión de su equivalente Thevenin en estado estacionario [1].

#### **2.3.12.1 Modelos del equipamiento inductivo**

El modelamiento inadecuado de un transformador puede algunas veces ocasionar que un evento sea difícilmente reproducido [2]. La representación de un transformador puede ser muy compleja debido al gran número de modelos de núcleos y al hecho que algunos parámetros sean no lineales y dependientes de la frecuencia. En [21] se muestra el estado del arte acerca de los modelos de transformadores para transitorios de baja frecuencia.

### **2.3.13 Ferroresonancia y resonancia eléctrica**

En muchas ocasiones la palabra ferroresonancia equivocadamente se ve asociada a otro fenómeno denominado resonancia, aunque las diferencias son bastante sustanciales y más bien la única similitud es el nombre que tienen. La resonancia es un tema bastante tratado en los textos de electricidad, sin embargo, no es vano en este punto indicar su definición y tipos.

La resonancia en un circuito eléctrico es el fenómeno lineal por el cual las reactancias del condensador e inductor se anulan mutuamente. Es decir, desde el punto de vista de la fuente del circuito, el comportamiento global de circuito es netamente resistivo. Ello ocurrirá cuando la frecuencia natural de oscilación del circuito sea igual a la frecuencia de la fuente. Esta última puede ser a frecuencia fundamental (50 – 60 Hz) o alguna armónica producida por una carga no lineal. En un circuito eléctrico se pueden encontrar de acuerdo a su configuración topológica, dos tipos de resonancia eléctrica: serie y paralela.

Considerando que la resonancia tiene lugar a frecuencia fundamental o armónicas de esta, puede ser estudiada con la ayuda de diagramas fasoriales.

#### **2.3.13.1 Resonancia Serie**

Llamada así porque se presenta de manera fundamental en un circuito RLC serie



(Figura 2.24) La tensión eficaz en la inductancia ( $I.X_L$ ) adelanta  $90^\circ$  a la corriente resultante ( $I$ ), mientras que la tensión a través del condensador ( $I.X_C$ ) se atrasa en  $90^\circ$ , en consecuencia las dos caídas de tensión son opuestas. Si se hacen iguales las partes reactivas, como en el diagrama vectorial de la Figura 2.24, se neutralizan y la tensión resultante corresponde solamente a la parte resistiva ( $I.R$ ) En la mayoría de circuitos reales, con la finalidad de tener pocas pérdidas, la resistencia serie es usualmente pequeña, dando por resultado que en condiciones de resonancia aparezca una corriente elevada.

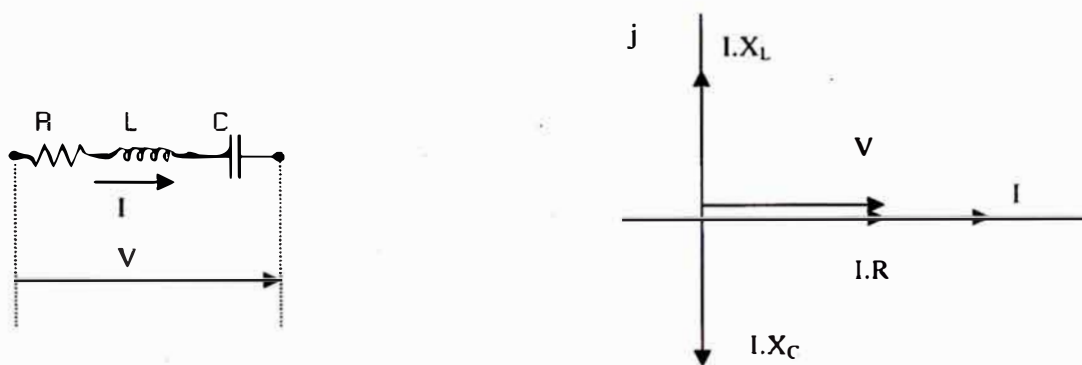


Figura 2.24 Resonancia serie

La frecuencia de resonancia ( $f_r$ ) se puede obtener a partir de igualar las reactancias inductiva y capacitiva del circuito.

$$\text{Así } X_L = X_C, \text{ con } X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C} \quad \text{y} \quad \omega = 2\pi n.f_r$$

Despejando  $f_r$  resulta:

$$f_r = \frac{1}{2.\pi.n.\sqrt{LC}} \tag{2.15}$$

Donde  $n$  es el orden armónico a la cual ocurre la resonancia.

### 2.3.13.2 Resonancia Paralela

Siendo el circuito RLC paralelo el dual del circuito serie, estará en resonancia cuando la corriente que circula por la inductancia sea igual y opuesta a la corriente en la capacitancia. En este caso, la corriente resultante entre la fuente y el circuito RLC es únicamente aquella debida a la rama resistiva. En algunos circuitos paralelos RLC reales, el valor de  $R$  es alto. El

diagrama fasorial se muestra en la Figura 2.25, de donde puede observarse que la corriente fluyente ( $I$ ) desde la fuente es pequeña debido justamente al valor de la resistencia  $R$ .

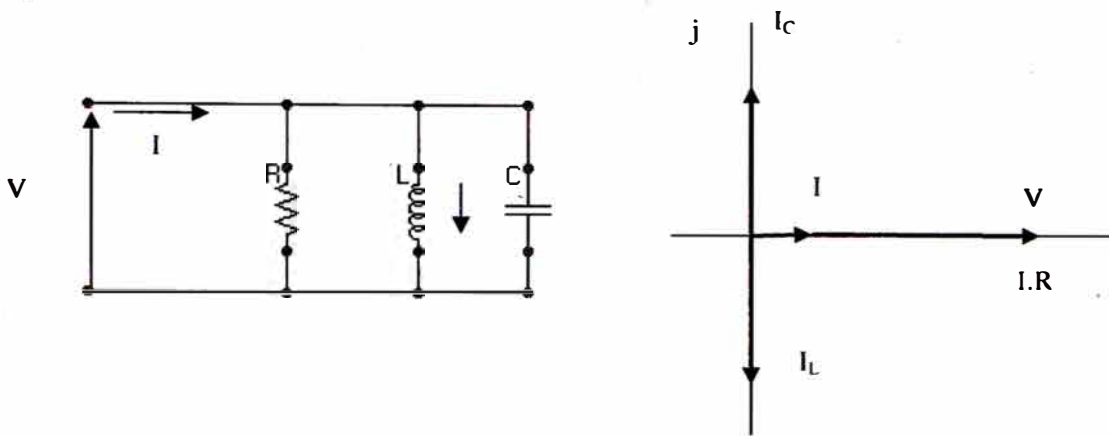


Figura 2.25 Resonancia paralela

El ramal R-L en paralelo puede simular el comportamiento del núcleo de un transformador operando en la zona lineal de su curva de magnetización. La capacitancia “C” en un circuito real puede corresponder a un equipo de compensación reactiva o ser la suma de capacitancias parásitas de otros equipos de la red. En este último caso circularía una gran corriente  $I_C$  por los elementos capacitivos parásitos, los cuales seguramente no han sido diseñados ni previstos para soportarla y como consecuencia podría ocurrir un calentamiento excesivo con el consecuente deterioro de los equipos involucrados.

La resonancia no se produce necesariamente a la frecuencia fundamental sino que puede ocurrir a un valor mayor. En el caso de la resonancia paralela no habría mayor inconveniente para la fuente de generación al quedar el circuito netamente resistivo a una frecuencia mayor sino fuera por la existencia de armónicos, siempre presentes en la actualidad por la proliferación de cargas no lineales (por ejemplo rectificadores de corriente) y que van actuar sobre el circuito resonante como fuentes constantes de corriente. De este modo empleando el equivalente Norton (Figura 2.26), la tensión resultante ( $V_p$ ) es la superposición de dos tensiones, aquella debido a la fuente de tensión del sistema ( $V$ ) y la segunda debida al armónico cuya frecuencia es la misma que la frecuencia de resonancia del circuito y que es

originado usualmente en cargas no lineales ( $V_n$ ). Teniendo en cuenta que  $R$  es bastante alta, por ejemplo del orden de Megohmios, una corriente  $I_n$  en miliamperios ocasionaría que  $V_n$  sea del orden de los kilovoltios, los cuales se suman a la tensión normal  $V$  del sistema.

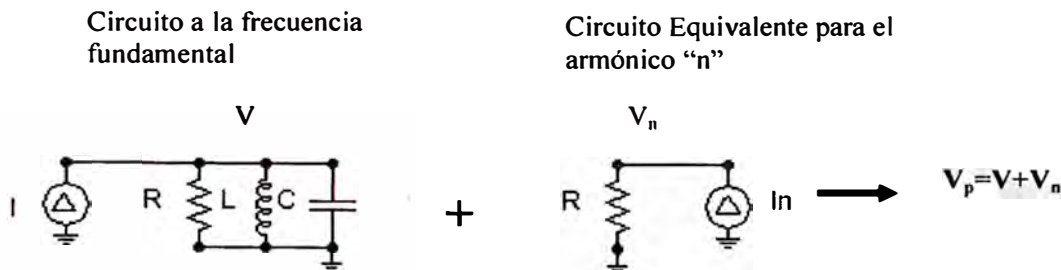


Figura 2.26 Resonancia paralela por efecto de armónicos

La frecuencia de resonancia paralela se puede obtener de manera idéntica a la obtenida para la resonancia serie:

$$f_r = \frac{1}{2\pi n \sqrt{LC}}$$

Donde  $n$  es el orden armónico a la cual ocurre la resonancia

### 2.3.13.3 Diferencias entre un circuito ferroresonante y un circuito resonante lineal

Las principales diferencias entre un circuito ferroresonante y un resonante lineal a una frecuencia determinada son [8]:

- La ferroresonancia puede ocurrir para un amplio rango de valores de capacitancia ( $C$ ) y en cambio la resonancia solo tiene lugar para un único valor de  $C$  puesto que debe cumplirse que  $X_C = X_L$
- En la ferroresonancia la frecuencia de las ondas de tensión y corriente resultantes puede ser diferente de la frecuencia de la fuente sinusoidal, contrariamente en la resonancia solo existe un único valor dado por la ecuación (2.15).
- En la ferroresonancia pueden existir varios estados estacionarios para una configuración dada y valores de parámetros. Esto puede ser verificado en base

a los diagramas de bifurcación (ver ítem 3.6) donde para un cierto rango de un parámetro existen varios ramales paralelos de operación. De este modo por ejemplo para el valor nominal de tensión del sistema pueden existir dos posibles puntos estables de operación: el normal y uno más alto denominado ferroresonante. Por su parte, la resonancia solo tiene lugar para un único punto de operación

Como parte final de este capítulo, debe mencionarse que si bien el tratamiento teórico de la primera sección sobre dinámica no lineal fue encausado para mostrar específicamente los distintos comportamientos que tienen lugar en los sistemas dinámicos reales y presentar las herramientas gráficas para estudiarlos, así como la teoría de la bifurcación orientada en la construcción de los diagramas de bifurcación con XPPAUT , la segunda sección fue explayada tratando de mostrar el “estado del arte” actual que existe entorno a la ferroresonancia. Por lo cual es necesario indicar para fines del siguiente capítulo que:

- Los tipos de ferroresonancia clasificados en base a su comportamiento (fundamental, subarmónica, quasiperiódica y caótica), encajan perfectamente en los distintos tipos de comportamiento (ciclo límite, quasiperiódico y caótico) que pueden presentar los sistemas dinámicos. De allí que la identificación del tipo de ferroresonancia ocurrida en una situación real o teórica, consiste básicamente en comparar los gráficos del diagrama de fase, corte y mapa de Poincaré y espectro de Fourier con las formas gráficas presentadas en el ítem 2.3.4.3 “Ferroresonancia de acuerdo a su comportamiento”.
- En este trabajo, el estado estacionario del circuito ferroresonante inicial para obtener los diagramas de bifurcación será obtenido con el método de colocación ortogonal empleado en XPPAUT. Además, para la determinación

de dichos diagramas se emplearán los métodos: analítico (también llamado “continuación”) y fuerza bruta.

- El procedimiento descrito en el ítem 2.3.9 “Procedimiento para realizar un estudio de ferresonancia”, contiene todos los pasos a seguir cuando se realiza la evaluación de un caso diagnosticado de ferresonancia. En consecuencia, el procedimiento a ser propuesto en el siguiente capítulo para obtener los diagramas de bifurcación debe considerarlo.

## **CAPITULO 3**

# **ELABORACIÓN DE LAS HERRAMIENTAS PARA EL ESTUDIO DE LA FERRORESONANCIA**

### **3.1 Introducción**

Este capítulo corresponde a la exposición del método para construir las herramientas HDNL que se emplearán en el análisis de ferresonancia.

Inicialmente se presentan las consideraciones a tener en cuenta en el tratamiento de las formas de onda resultantes de casos teóricos y reales. Luego, se explica la obtención del plano de fase, corte de Poincaré, mapa de Poincaré y espectro de Fourier, tanto para casos teóricos y reales. Seguidamente se expone el procedimiento para la elaboración de los diagramas de bifurcación. A continuación, por intermedio de un diagrama de flujo se consolida el método a ser aplicado a un caso real de ferresonancia. Finalmente, se verifica la eficacia de las herramientas HDNL aplicándolas en un circuito monofásico empleado en las referencias [4] y [14]

### **3.2 Herramientas basadas en las formas de onda**

Las formas de onda de tensión y corriente son los primeros datos registrados en un disturbio real y conforman también la base para construir las herramientas mencionadas en el capítulo II. Con dichas herramientas se tiene un conocimiento preliminar del evento ocurrido por asociación con las formas del ítem 2.3.4.3 “Ferresonancia de acuerdo a su comportamiento”. Su aplicación no implica tener un diagnóstico definitivo de ferresonancia, deben verificarse adicionalmente las condiciones presentadas en 2.3.3 “Condiciones necesarias para la ocurrencia de ferresonancia”

#### **3.2.1 Consideraciones a tomar en cuenta en su construcción**

Para elaborar las herramientas gráficas se necesita realizar un procesamiento previo de datos. Se pueden tener dos situaciones:

## Casos teóricos

Los datos provienen del resultado de simulaciones en modelos. Los valores de las variables de estado son obtenidos con la ayuda de algún método de integración (por ejemplo Euler o Runge-Kuta) Lo más recomendable es seleccionar un paso de integración “dt” que sea divisor exacto del periodo de la onda de la fuente del sistema. De este modo, si la frecuencia y periodo son 50 Hz y 0.02 s respectivamente, se puede elegir para “dt” valores de 0.002, 0.005, 0.0001, etc. Sin embargo, cuando la frecuencia es 60 Hz se tiene un periodo de  $0.016\bar{6}$  segundos. El cual es un número irracional y como tal, ocasiona errores de precisión al momento de realizar la integración. Dichos errores a su vez afectan la selección y valores para el corte de Poincaré. Este inconveniente puede ser superado empleando una de las siguientes alternativas:

- Seleccionar un paso de integración “dt” que sea divisor entero con una buena aproximación del periodo de la onda fundamental. Para 60 Hz un valor adecuado es 0.0000500500500500501; implicando así obtener 333 puntos en cada ciclo de la onda fundamental.
- Escalar la variable tiempo con  $\tau = t.f$ , donde f es la frecuencia de la red. Así se tendrá que el diferencial de tiempo sea  $dt = d\tau/f$  y el periodo y frecuencia se normalicen a “1”. Este cambio de variable facilita la integración de las ecuaciones diferenciales y la selección de valores del corte de Poincaré. El retorno al tiempo original es simple y directo.

Los registros válidos a emplearse deben ser aquellos en los que el sistema se encuentra estable. En algunas ocasiones esto puede implicar la necesidad de un tiempo largo de simulación para eliminar completamente la parte transitoria.

## Casos reales

En estos casos, las oscilografías son registradas generalmente por relés digitales o

analizadores de calidad de energía. Lo más recomendable es programar dichos equipos con una frecuencia de muestreo que sea múltiplo de la frecuencia del sistema.

Se pueden presentar los siguientes problemas:

- La frecuencia de muestreo no es múltiplo de la frecuencia del sistema.
- Los equipos de registro comúnmente solo almacenan tensiones y corrientes.
- La frecuencia no es exactamente 60 Hz y consecuentemente aparecerán ciertos componentes armónicos que deberán ser tomados en cuenta en el resultado final.
- La oscilografía usualmente contiene la parte transitoria del evento, y por ende el sistema no esta totalmente estabilizado.

Las dos primeras pueden ser evitadas con tratamiento matemático de las señales. En el primer caso, puede emplearse un método de interpolación y para el segundo, obtenerse una segunda variable de estado mediante integración o derivación de la señal de tensión.

Por otro lado, las dos últimas afectan principalmente la obtención del corte de Poincaré y el espectro de Fourier. En el corte de Poincaré se notará una ligera dispersión de puntos y en el espectro de Fourier un aparente espectro continuo.

El código fuente en matlab del programa para la obtención de las herramientas de esta sección se presenta en el anexo 3.1.

### **3.2.2 Formas de onda**

#### **Casos Teóricos**

La obtención de esta gráfica es inmediata, pues el valor de las variables de estado será conocido al integrar las ecuaciones diferenciales del sistema.

#### **Casos Reales**

En este caso el gráfico también puede ser obtenido directamente de los datos registrados.



### 3.2.3 Plano de fase

#### Casos Teóricos

Según se señaló en el capítulo anterior, el plano de fase se obtiene a partir de graficar la evolución de dos variables de estado (una versus la otra) en un plano cartesiano. Se utilizan los mismos valores empleados en las formas de onda.

#### Casos Reales

Los registradores de eventos (relés y analizadores) usualmente solo almacenan las señales de tensión y corriente. Lo cual, implica que se cuente con el registro de la tensión como única variable de estado. En ese caso y de acuerdo a lo señalado en el acápite anterior, se puede obtener una variable de estado adicional a partir de un proceso de integración o derivación. En el caso que se integre la tensión, la nueva variable es el flujo y que justamente es regido por la ley de Faraday (Ec. 3.1).

$$v = \frac{d\phi}{dt} \quad (3.1)$$

Donde  $v$  es la tensión registrada,  $\phi$  es el flujo,  $t$  es el tiempo y  $\frac{d\phi}{dt}$  es la derivada del flujo con respecto al tiempo.

Luego de (3.1) se obtiene:

$$\phi = \int v dt \quad (3.2)$$

Para realizar la integración numérica de (3.2) se puede emplear el método trapezoidal. De este modo, teniendo los valores de tensión ( $v$ ) y flujo ( $\phi$ ) se procede similarmente al caso teórico.

### 3.2.4 Corte de Poincaré

#### Casos Teóricos

La obtención del corte de Poincaré implica conocer el valor de las variables de estado

solamente en tiempos “t” que son múltiplos del periodo (T) de la onda del generador. Es decir, “t”  $\in [T, 2T, 3T, \dots]$

Seleccionando para la solución de la ecuación diferencial, un paso de integración que es divisor exacto de T (ver ítem 3.2.1), los datos para obtener el corte de Poincaré se limitan a escoger los valores de las variables de estado en los tiempos indicados

### Casos Reales

Si la frecuencia de muestreo programada para la oscilografía es múltiplo de la frecuencia de la red, se sigue el mismo procedimiento explicado para los casos teóricos. En caso contrario, debe darse un tratamiento previo a los datos registrados. Los pasos a seguir se basan en la Figura 3.1

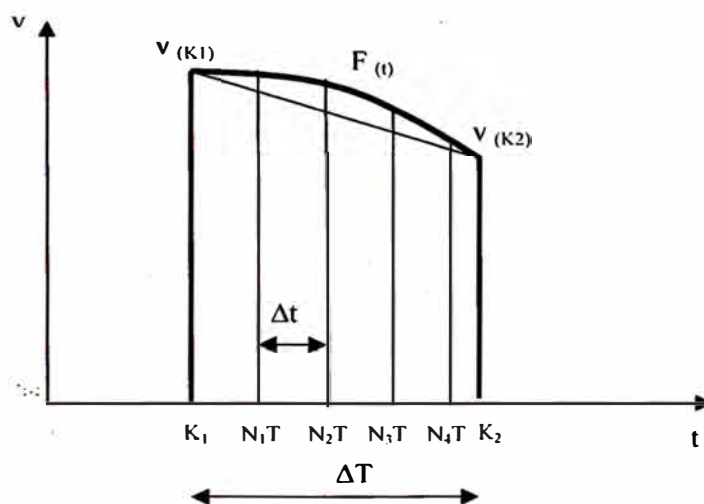


Figura 3.1 Interpolación a partir de mediciones

Sea por ejemplo la señal de tensión v, cuyos “n” valores registrados son  $v_{(K1)}, v_{(K2)}, \dots, v_{(Kn)}$  y periodo de muestreo del equipo  $\Delta T$  (cuya frecuencia  $1/\Delta T$  no es múltiplo de la frecuencia de la red). Con dichos valores se halla la función  $F(t)$  empleando un procedimiento de interpolación. Luego, con  $F(t)$  se obtienen los valores de la tensión V para los nuevos instantes de tiempo  $N_1T, N_2T, \dots, N_mT$  y que están separados un periodo  $\Delta t$ , cuya frecuencia  $1/\Delta t$  ahora es múltiplo exacto de la frecuencia de la red.

El método de interpolación esta basado en el Teorema de Muestreo de Shannon [22]

(ver anexo 3.2), que aplicado a la tensión (v) resulta:

$$v(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} v(k) \frac{\text{seno}\left(\omega_s \frac{(t-k)}{2}\right)}{\omega_s \frac{(t-k)}{2}} \quad (3.3)$$

Donde:  $v(k)$  son los valores registrados:  $v(k_1), v(k_2), \dots, v(k_n)$

“k” son los tiempos de registro:  $K_1, K_2 \dots K_n$

“t” son los nuevos tiempos a ser interpolados:  $N_1T, N_2T \dots N_mT$

“seno” es la función senoidal

“ $\omega_s$ ” es la frecuencia angular de muestreo del equipo definida por  $\omega_s = 2\pi \frac{1}{\Delta T}$

T es el periodo de la red ( $T = 1/f$ )

De manera similar se procede con el flujo.

Finalmente, con los nuevos valores de tensión y flujo, se elabora el corte de Poincaré.

Sin embargo debe señalarse que los nuevos valores del flujo determinados por interpolación, no son los exactos y por ende contienen un margen de error, el cual, se verá reflejado al mostrar una ligera dispersión en los puntos del corte de Poincaré.

### 3.2.5 Mapa de Poincaré

Una vez obtenido el corte de Poincaré, con el procedimiento descrito en 3.2.4 “Corte de Poincaré”, la gráfica del mapa de Poincaré es inmediata. Se grafican, tanto para el flujo y tensión, los valores de corte de Poincaré hasta el punto “n+1” versus los valores hasta el punto “n”.

Esta herramienta será presentada en los casos quasiperiódico y caótico.

### 3.2.6 Espectro de Fourier

#### Casos Teóricos

El espectro de Fourier según se indicó en el capítulo II (ítem 2.2.5.5 “Espectro de Fourier”), permite obtener las componentes armónicas y subarmónicas de una onda mediante el empleo de la transformada rápida de Fourier (FFT). Su evaluación es también relativamente

sencilla pues existen programas de cómputo que entre sus herramientas de análisis, suministran la FFT. En este trabajo se utiliza el comando “fft” de matlab para obtener el módulo de cada componente armónica. En el anexo 2.2 se dan algunas consideraciones para el cálculo de FFT en matlab.

Es necesario recalcar que la muestra a ser evaluada debe corresponder al periodo estable del sistema.

### **Casos Reales**

Se aplica el mismo procedimiento que el caso teórico.

## **3.3 Diagramas de Bifurcación**

Se elaborarán tres diagramas, basados en los tres principales parámetros de un circuito ferresonante: tensión máxima de la fuente, capacitancia y nivel de carga. Para lograr este objetivo se plantea el siguiente procedimiento, siguiendo lo descrito en 2.3.9 “Procedimiento para realizar un estudio de ferresonancia”. Los pasos a seguir en un caso real comprenden:

- Identificar las configuraciones de riesgo.
- Obtener el circuito equivalente simplificado.
- Determinar los parámetros del circuito equivalente, involucrando:
  - La obtención de la curva de magnetización
  - El cálculo de parámetros para el estado normal del circuito equivalente
- Derivar las ecuaciones diferenciales a partir del circuito equivalente.
- Construir los diagramas de bifurcación con los métodos de fuerza bruta y continuación, en XPPAUT.

### **3.3.1 Identificación de las configuraciones de riesgo**

Se evalúan las condiciones indicadas en 2.3.3 “Condiciones necesarias para la ocurrencia de ferresonancia”. De este modo se elabora una tabla con las tres condiciones. Cada condición con una casilla de verificación y otra para describir entre que componentes se

presenta, según se muestra a continuación.

No	Condición	¿Se aplica?	Observaciones
1	Presencia simultánea de capacitancias con inductancias no lineales	(Si/No)	
2	Existencia de al menos de un nodo cuyo potencial no es fijo.	(Si/No)	
3	Componentes del sistema ligeramente cargados o fuentes de pequeña capacidad de cortocircuito.	(Si/No)	

### 3.3.2 Obtención del circuito equivalente simplificado

El modelamiento de las capacitancias y el generador se hará de acuerdo a los lineamientos dados en 2.3.10 “Modelamiento de componentes eléctricos para simulación de ferresonancia”. El transformador puede ser modelado considerando un ramal R-L en paralelo que simula el comportamiento del núcleo (Figura 3.2). La resistencia “Rp” emula las pérdidas y se considera un valor constante y la inductancia no lineal “NL” por su parte, modela el comportamiento magnético del núcleo.

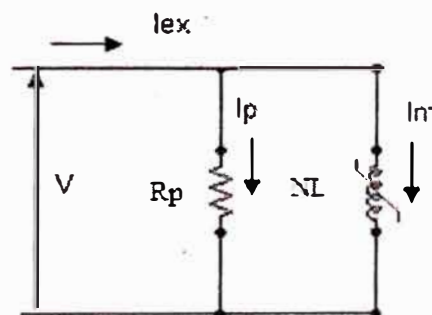


Figura 3.2 Ramal equivalente del núcleo de un transformador  $1\phi$

#### 3.3.2.1 Determinando la curva de magnetización

Si tomamos como ejemplo un transformador monofásico (Figura 3.2), cuyos valores determinados en la prueba de vacío han sido:  $V$ ,  $I_{ex}$  y  $P_{ex}$  en valores eficaces (RMS)

La corriente de pérdidas ( $I_p$ ) será:

$$I_p = \frac{P_{ex}}{V} \quad (3.4)$$

Considerando la tensión nominal se obtiene la resistencia equivalente  $R_p$ :

$$R_p = \frac{V}{I_p} \quad (3.5)$$

Luego, la corriente de magnetización  $I_m$  viene dada por:

$$I_m = \sqrt{I_{ex}^2 - I_p^2} \quad (3.6)$$

Por último se confecciona una tabla  $V_{ex}$  versus  $I_m$  en valores RMS, que será empleada en la determinación de la característica no lineal  $i-\phi$ , denominada curva de magnetización, donde  $i$  es la corriente y  $\phi$  es el flujo magnético a través del núcleo. Dicha característica se puede aproximar por una relación binomial ([2, 4, 9, 11, 14]) de la forma (3.7):

$$i = a_1 \cdot \phi + a_3 \cdot \phi^n \quad (3.7)$$

Donde:

- Los coeficientes  $a_1$  y  $a_3$ , son determinados por el método de mínimos cuadrados.
- “ $n$ ” es impar y usualmente se emplea 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Su selección se hace de acuerdo al menor error residual presentado.

Para el caso de transformadores trifásicos se aplica un procedimiento similar; solo que ahora “ $P_{ex}$ ” es tres veces las pérdidas monofásicas y “ $V$ ” es la tensión de fase.

### 3.3.2.2 Cálculo de parámetros para el estado normal del circuito equivalente

Se determinan:

- La tensión por fase del generador (Thevenin equivalente) del sistema.
- La capacitancia equivalente identificada en 3.3.1 “Identificación de las configuraciones de riesgo”.

- Las resistencias equivalentes de pérdidas del núcleo (ecuación 3.5) y aquella que representa la carga actual del transformador.

### 3.3.3 Derivación de las ecuaciones diferenciales

A partir del circuito equivalente, las ecuaciones diferenciales son obtenidas aplicando las leyes de Kirchoff, cuya expresión matricial tiene la forma (3.8):

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \lambda) + B * \text{Cos}(\omega t) \quad (3.8)$$

Donde:

$x$  es el vector de las variables de estado

$\lambda$  es el conjunto de todos los parámetros del sistema

$B$  es un vector de valores constantes

$F(x, \lambda)$  es una función vectorial no lineal

$\omega = 2\pi f$  siendo  $f$  la frecuencia del sistema.

El sistema (3.8) es un sistema no autónomo, pues el lado derecho contiene la función “coseno” que depende del tiempo. Sin embargo (3.8) puede convertirse en sistema autónomo con las siguientes alternativas:

- Considerando una variable de estado adicional ( $z = \omega t$ )
- Con la adición de un excitador no lineal estable (3.9), de frecuencia igual a la del generador.

$$\frac{du}{dt} = u(1 - u^2 - v^2) - 2\pi f v \quad (3.9)$$

$$\frac{dv}{dt} = v(1 - u^2 - v^2) + 2\pi f u$$

La solución ( $u(t)$ ,  $v(t)$ ) de este oscilador (sistema 3.9) es justamente ( $\cos \omega t$ ,  $\text{seno } \omega t$ ).

De este modo, se resuelven conjuntamente los sistemas (3.8) y (3.9). Así, reemplazando “ $\text{Cos } \omega t$ ” en (3.8) por “ $u$ ”, se tiene el nuevo sistema (3.10):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= f(x, \lambda) + B * u \\ \frac{du}{dt} &= u(1-u^2-v^2) - 2\pi f v \\ \frac{dv}{dt} &= v(1-u^2-v^2) + 2\pi f u\end{aligned}\tag{3.10}$$

Un punto de valores iniciales de  $u$  y  $v$  en la resolución de (3.10) es  $(1, 0)$ .

### 3.3.4 Construcción de los diagramas de Bifurcación

Su obtención se basará en los métodos descritos en 2.2.6.5 “Elaboración de los diagramas de bifurcación”: fuerza bruta y continuación. Ambos pueden ser procesados con el programa XPPAUT [23]. Se presentan ejemplos de archivos de entrada en los anexos 4.3 y 4.4.

La obtención del primero consiste en agregar una ecuación diferencial lineal al sistema que implique una variación muy lenta del parámetro. Deben hacerse dos integraciones: la primera con un incremento positivo y constante a partir del valor mínimo y la segunda con un decremento constante desde el valor máximo del parámetro. Luego se toman los puntos de Poincaré y se grafica una variable de estado versus el parámetro. La gráfica obtenida constituye el diagrama de bifurcación por el método de la fuerza bruta.

La obtención del diagrama de bifurcación por continuación es más sencilla una vez que se tiene el diagrama del método de la fuerza bruta, debido a que se disponen de todos los estados asintóticamente estables y necesarios para iniciar el cálculo por continuación.

El método para construir diagramas de bifurcación por continuación con XPPAUT se presenta con ejemplos en [9] y [23]. Adicionalmente, en el anexo 3.3 se explica todo el procedimiento para obtener el diagrama de la figura 3.28.

### 3.4 Método para la aplicación de las herramientas HDNL.

De lo descrito en este capítulo y el anterior, se puede elaborar un procedimiento cuyo



diagrama de flujo se presenta en la figura 3.3; y en el que se muestran los pasos a seguir para realizar el diagnóstico y análisis de ferroresonancia.

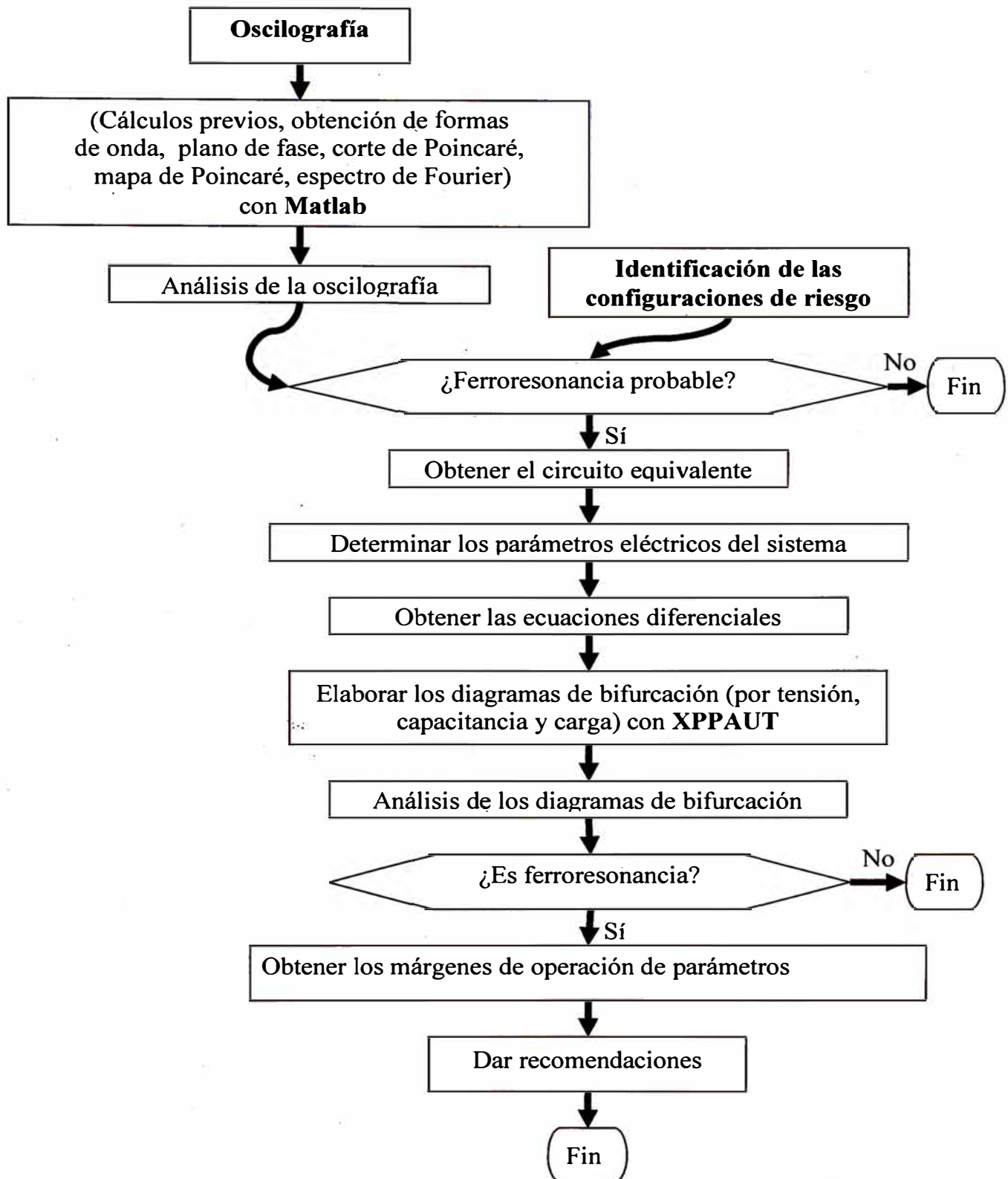


Figura 3.3 Método a seguir

### 3.5 Aplicación de las herramientas basadas en las formas de onda

Para mostrar la aplicación de las formas de onda, planos de fase, corte y mapa de Poincaré y espectro de Fourier, se utilizará el circuito no lineal de la Figura 3.4. Donde “NL” podría representar por ejemplo la inductancia no lineal de magnetización del núcleo de un transformador monofásico, “R” emular las pérdidas y carga aplicada, y “C” la capacitancia parásita proveniente de la suma de capacitancias de barra y la existente entre los contactos de un interruptor abierto.

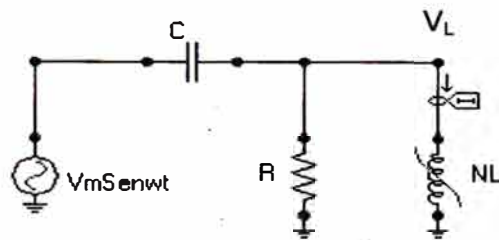


Figura 3.4 Circuito eléctrico no lineal

Aplicando la primera y segunda ley de Kirchoff se obtiene la ecuación diferencial (3.11) que domina el comportamiento del circuito.

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{d\varphi}{dt} + \frac{a_1}{C} \varphi + \frac{a_3}{C} \varphi^n = \omega V_m \cos \omega t \quad (3.11)$$

La ecuación diferencial (3.11) es de segundo orden y puede ser expresada como un grupo de ecuaciones diferenciales acopladas de primer orden (forma canónica). Para lo cual,

se definen las variables de estado:  $\varphi = x$  (flujo del núcleo de la bobina) y  $\frac{d\varphi}{dt} = V_L = y$

(tensión en la bobina). Reemplazando las nuevas variables en (3.11) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon y - ax - bx^n + B \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Donde  $\varepsilon = \frac{1}{RC}$ ,  $a = \frac{a_1}{C}$ ,  $b = \frac{a_3}{C}$ ,  $B = \omega V_m$ ,  $x = \varphi$  (flujo)  $y = V_L$

Agregando el oscilador no lineal, de acuerdo a lo señalado en 3.3.3 “Derivación de las ecuaciones diferenciales” se tiene el sistema (3.13):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -\varepsilon y - ax - bx^n + Bu \\ \frac{du}{dt} &= u(1-u^2-v^2) - 2\pi f v \\ \frac{dv}{dt} &= v(1-u^2-v^2) + 2\pi f u\end{aligned}\tag{3.13}$$

Para este circuito la frecuencia del generador es 60 Hz

La curva de magnetización del transformador esta definida por:  $a_1=0.0028$ ,  $a_3=0.0072$  y  $n=11$ .

Las salidas del circuito serán empleadas para evaluar dos casos:

- a) Cuando la frecuencia de muestreo “ $1/\Delta T$ ” es múltiplo de la frecuencia del generador (Se hace  $\Delta t = \Delta T$ ). Con el objeto de mostrar la aplicación de las herramientas en los distintos tipos de ferresonancia que puede tener el circuito (casos 3.5.1, 3.5.2, 3.5.3 y 3.5.4).
- b) Cuando la frecuencia de muestreo “ $1/\Delta T$ ” no es múltiplo de la frecuencia del generador. Para lo cual en base a los valores obtenidos a frecuencia  $1/\Delta T$  y el teorema de muestreo de Shannon, se obtienen nuevos valores a la frecuencia  $1/\Delta t$ . Esta evaluación se hace con el objeto de verificar y tomar en cuenta la influencia que pudiera ocasionar el hecho de que el periodo de muestreo ( $\Delta T$ ) a ser fijado en los equipos de registro, no sea necesariamente divisor exacto del periodo ( $T$ ) de la onda fundamental (caso 3.5.5).

### 3.5.1 Caso de Ferroresonancia Fundamental (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)

El circuito 3.4 presenta un caso de ferroresonancia fundamental para los siguientes parámetros:  $V_m=313$  V,  $R=10$  kOhms,  $C=3.16$   $\mu$ F.

Al ser la frecuencia del generador 60 Hz, se toman el paso de integración y periodo de muestreo iguales a 0.0000500500500500501.

Los gráficos de las formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré, mapa de Poincaré y espectro de Fourier, elaborados luego de la integración del sistema (3.13) con los parámetros establecidos, son presentados a continuación:

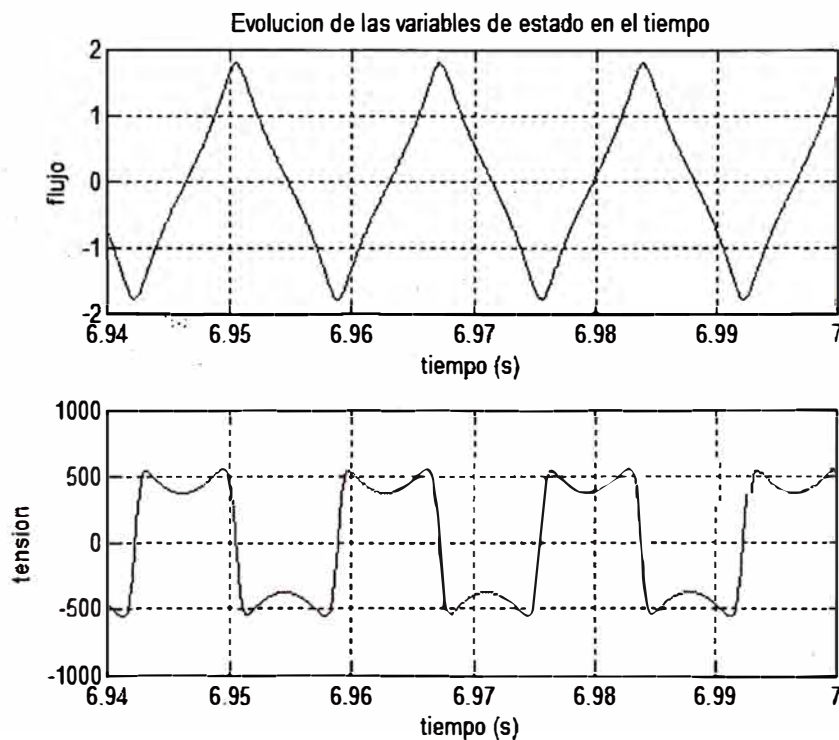


Figura 3.5 Evolución temporal de la tensión y flujo en la bobina (ferroresonancia fundamental)

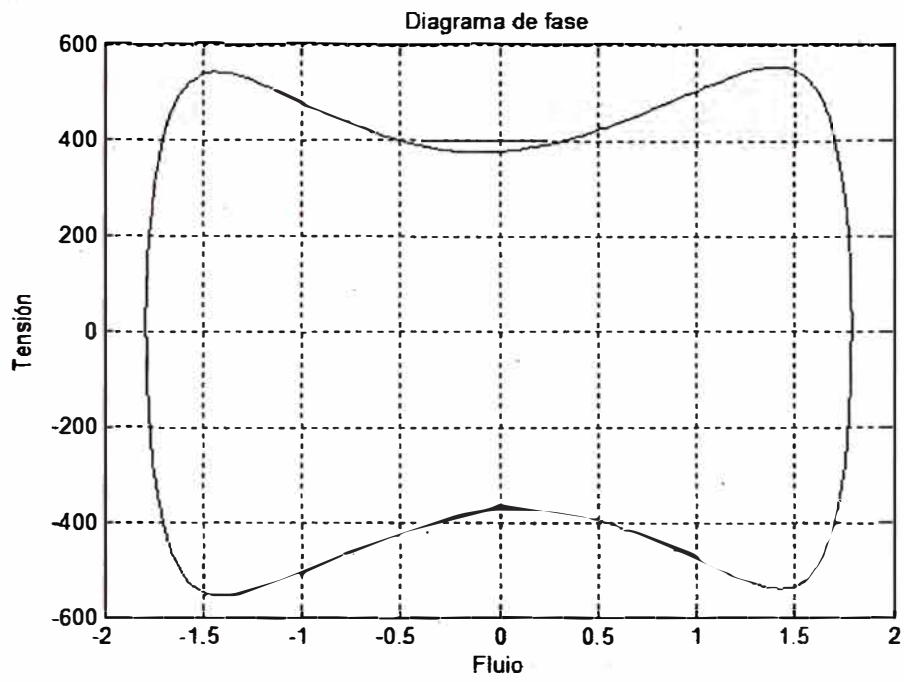


Figura 3.6 Plano de fase (ferroresonancia fundamental)

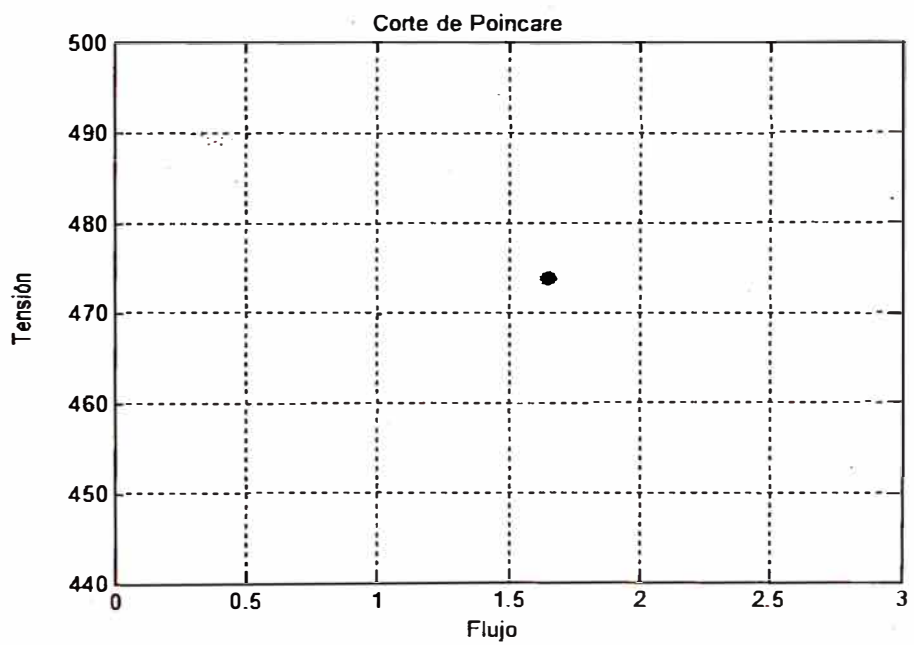


Figura 3.7 Corte de Poincaré (ferroresonancia fundamental)

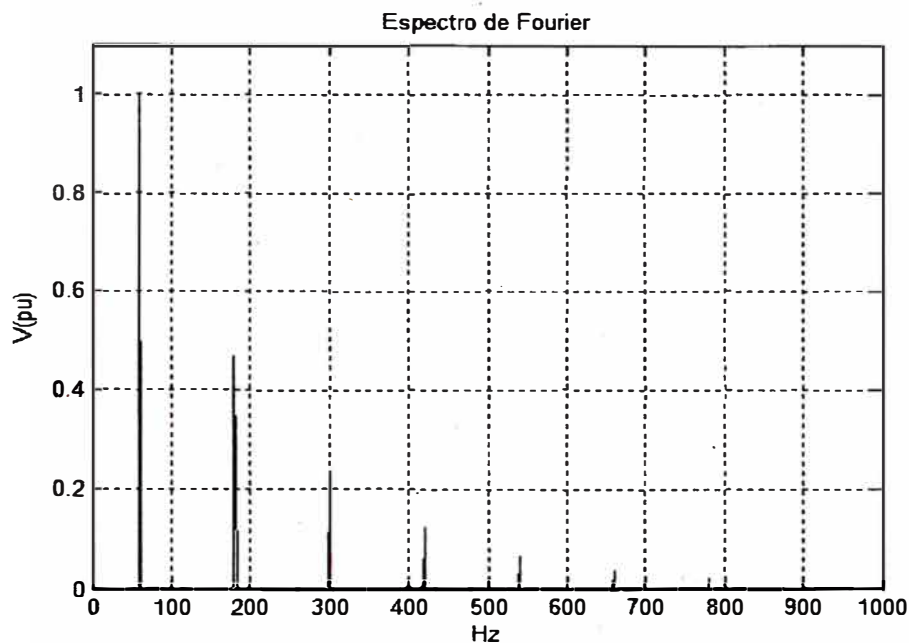


Figura 3.8 Espectro de frecuencia de la tensión (ferroresonancia fundamental)

**Comentarios:** Del gráfico 3.5 se observa una sobretensión de más de 500 V siendo la tensión máxima de la fuente 313V. El plano de fase (Figura 3.6) muestra una trayectoria de un solo lazo, indicando que la ferroresonancia es del tipo fundamental. El corte de Poincaré en la Figura 3.7 confirma aún más este tipo ferroresonancia, pues consta de un único punto permanente. Del espectro de Fourier en la Figura 3.8, se puede observar que la onda se compone solamente de armónicos impares.

### 3.5.2 Caso de Ferroresonancia Subarmónica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)

Un caso de Ferroresonancia Subarmónica ocurre para los siguientes valores de parámetros:

$V_m=890V$ ,  $R=10\text{ k}\Omega$ ,  $C=3.16\mu F$  y  $dt = 0.0000500500500500501$

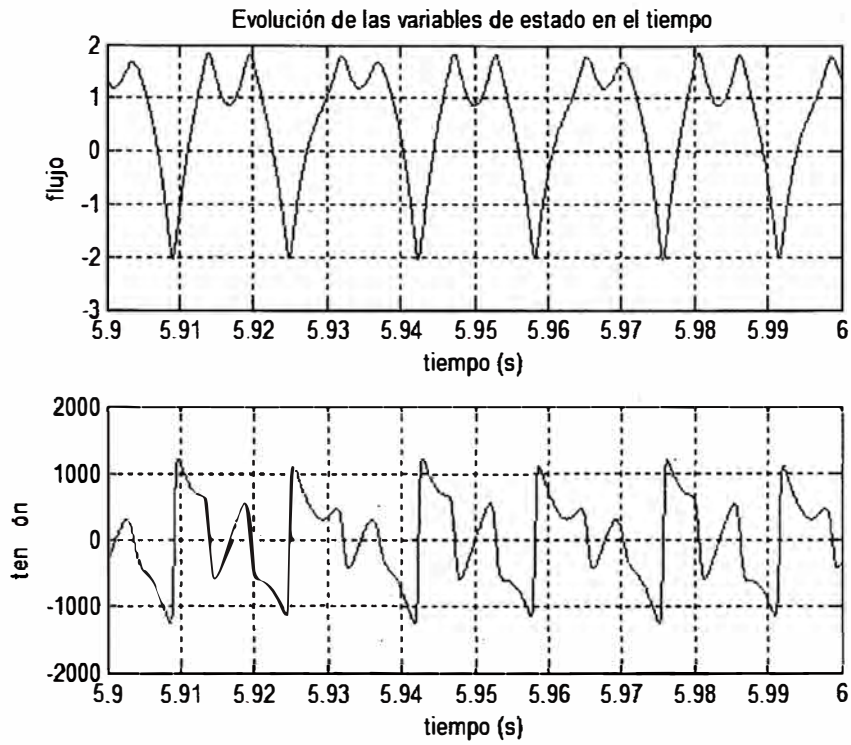


Figura 3.9 Evolución del flujo y tensión en la bobina (subarmónica)

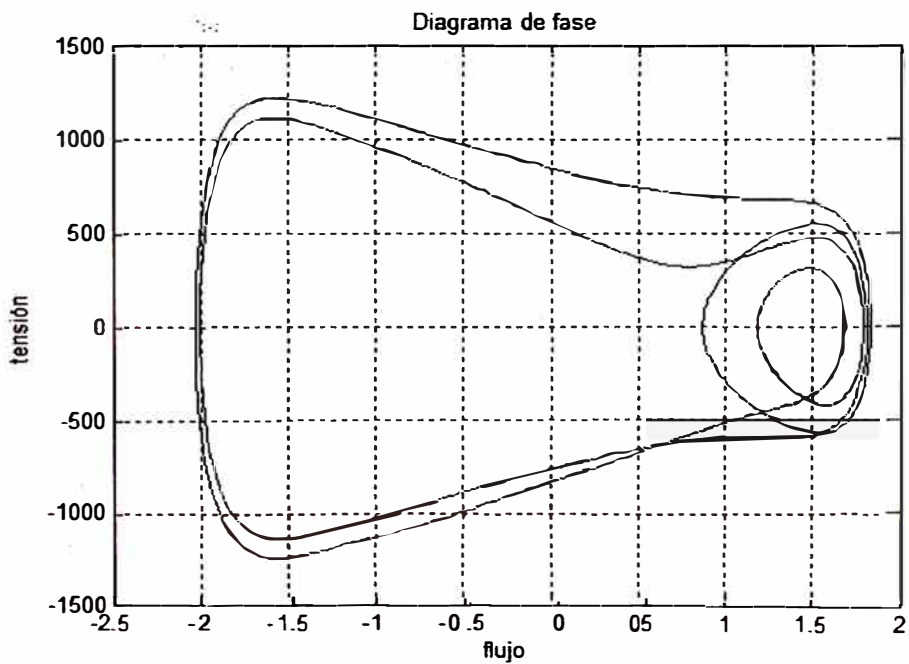


Figura 3.10 Plano de fase (subarmónica)

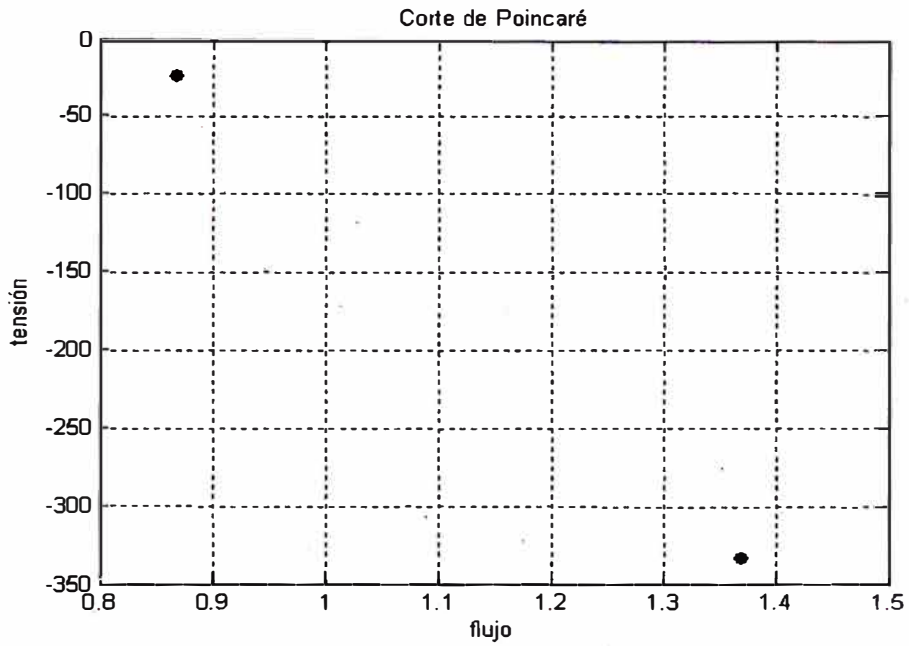


Figura 3.11 Corte de Poincaré (subarmónica)

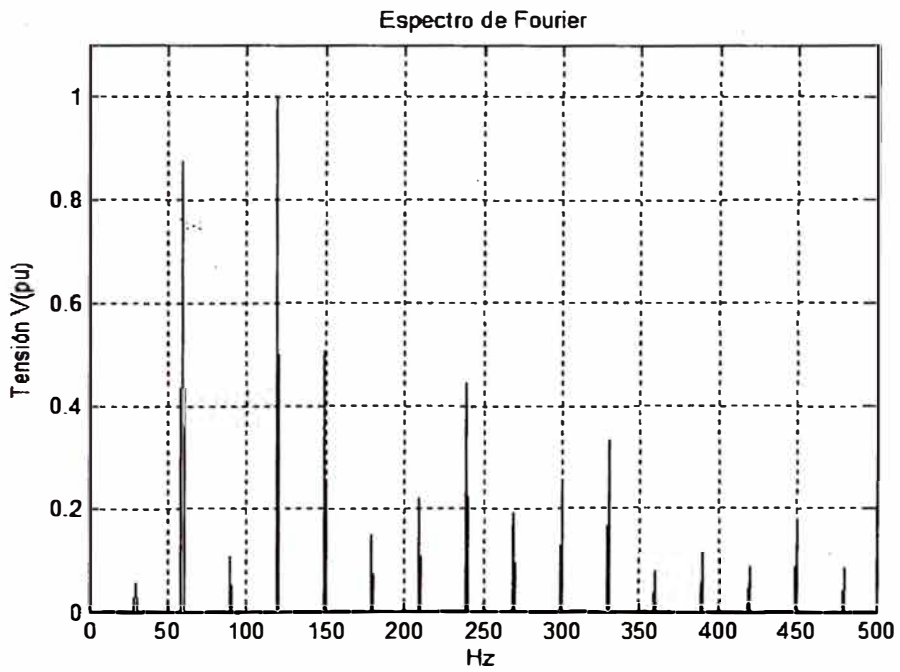


Figura 3.12 Espectro de frecuencia de la tensión (subarmónica)

**Comentarios:** De las formas de onda (Figura 3.9) se puede estimar, aunque no de manera precisa, que el comportamiento del sistema es periódico para los parámetros evaluados, pues,



las ondas de un periodo a otro se repiten. Además, se observa bastante distorsión en las ondas de flujo y tensión. Del plano de fase (Figura 3.10) se confirma realmente que el sistema es periódico pues existe una trayectoria con dos lazos bien definidos. La presencia de dos lazos indica también que existe una componente subarmónica cuya frecuencia es la mitad de la frecuencia del generador. Del corte de Poincaré (Figura 3.11) también se nota que el sistema es periódico pues la trayectoria del sistema intercepta dos veces (dos puntos) al plano de Poincaré. El espectro de Fourier (Figura 3.12) es discreto presentando componentes armónicas (120, 180, 240,... Hz), subarmónicas (30 Hz) y combinaciones de estas (90, 150, 210,... Hz).

### 3.5.3 Caso de Ferroresonancia Quasiperiódica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)

Para obtener este comportamiento se considera:  $V_m=300V$ ,  $R=10^{20}$  Ohms (transformador sin pérdidas),  $C=1250.77nF$  y  $dt = 0.0000500500500500501$

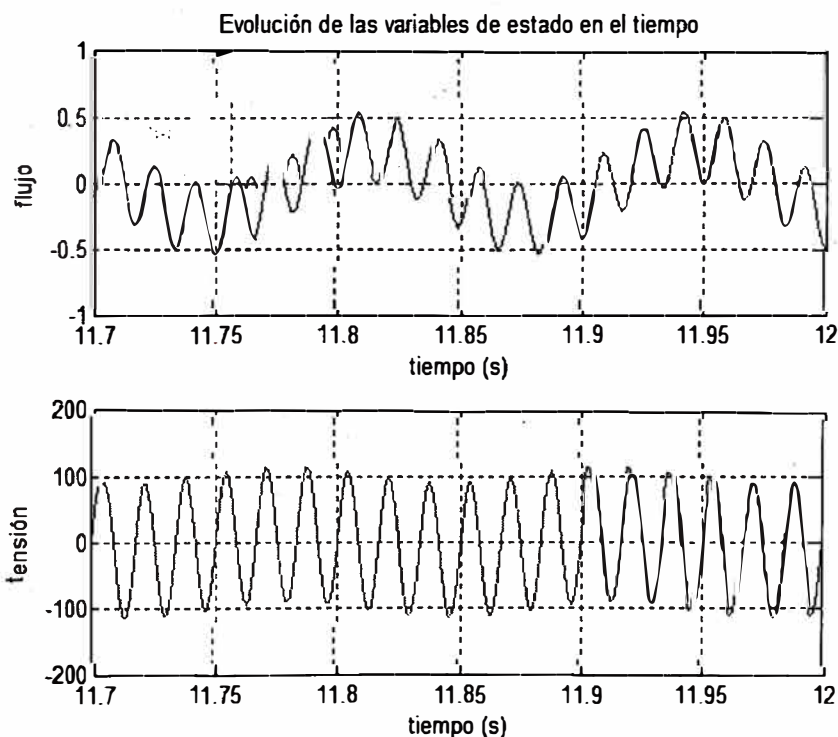


Figura 3.13 Evolución en el tiempo de la tensión en la bobina (quasiperiódica)

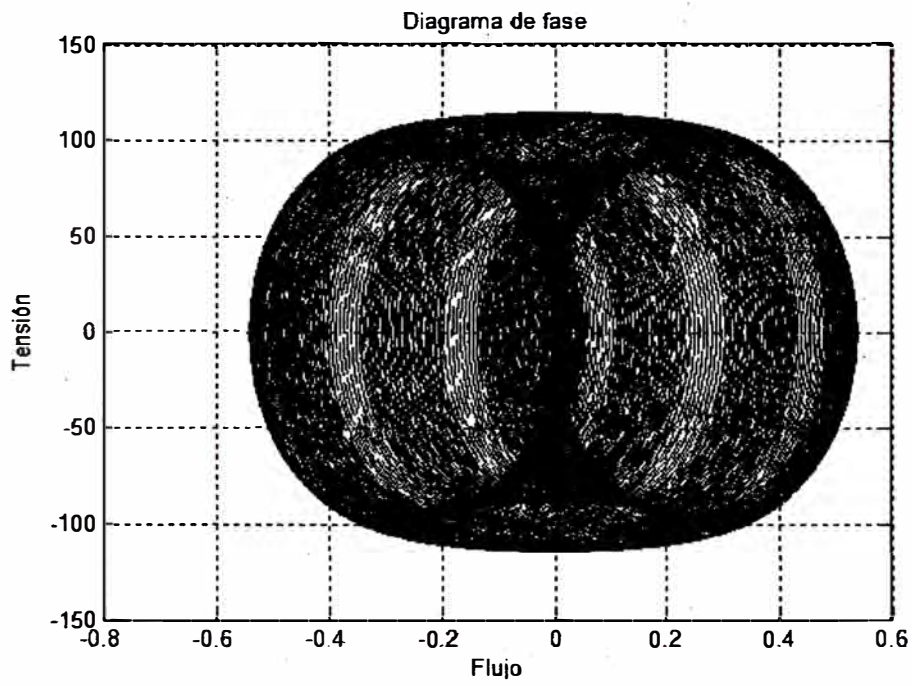


Figura 3.14 Plano de fase (quasiperiódica)

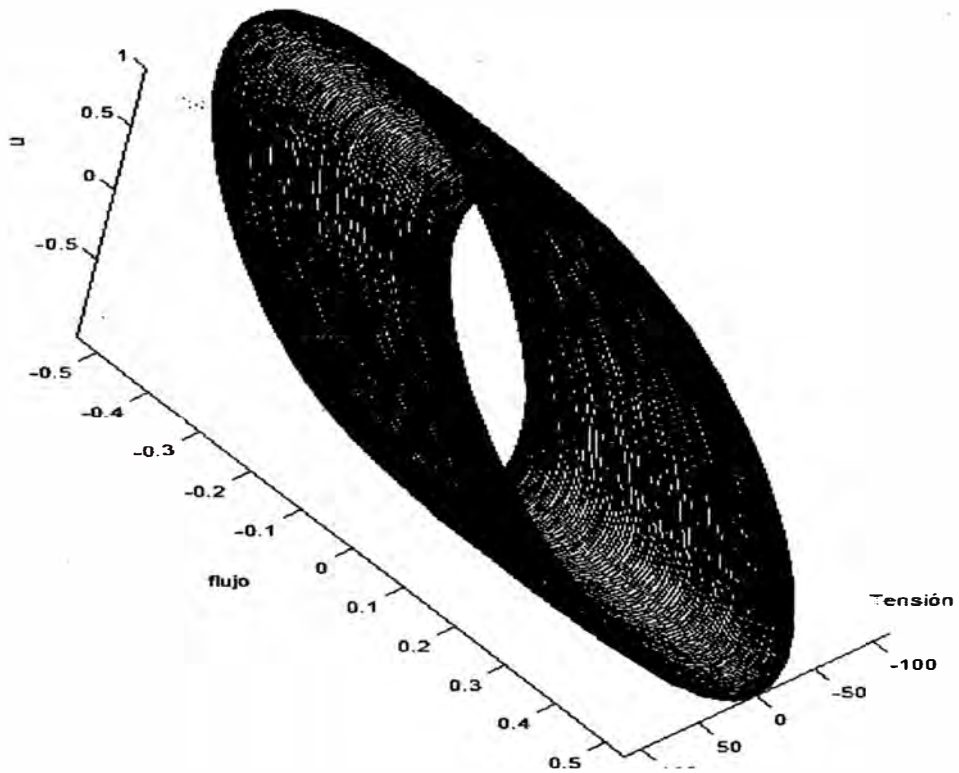


Figura 3.15 Vista tridimensional de la trayectoria (quasiperiódica)

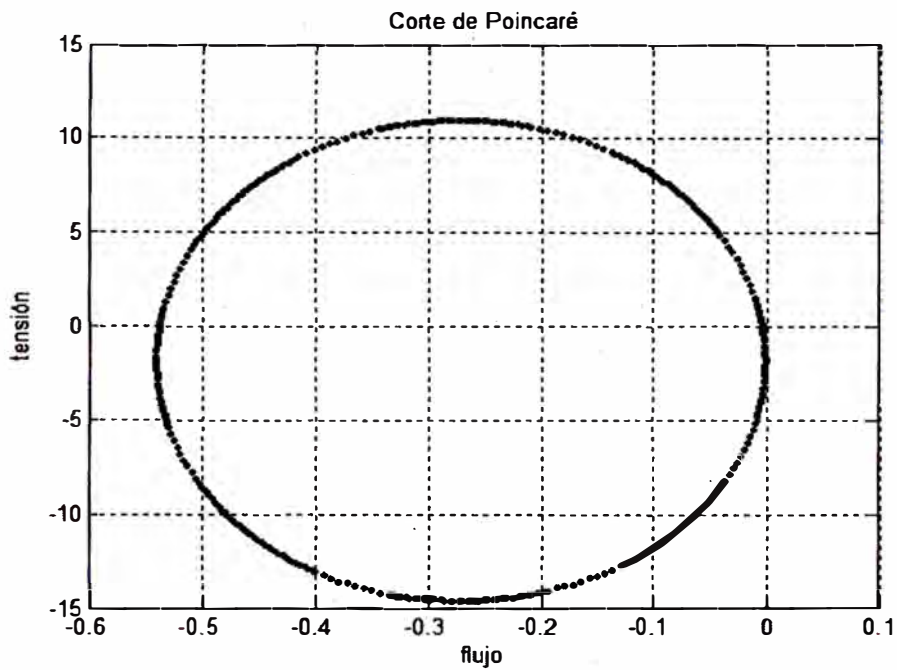


Figura 3.16 Corte de Poincaré (quasiperiódica)

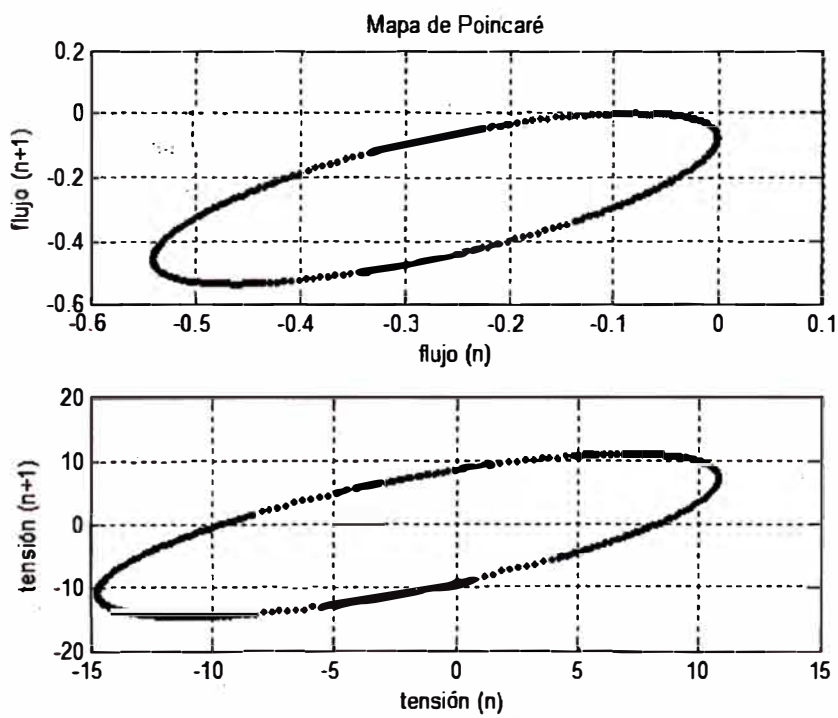


Figura 3.17 Mapas de Poincaré de las variables de estado (quasiperiódica)

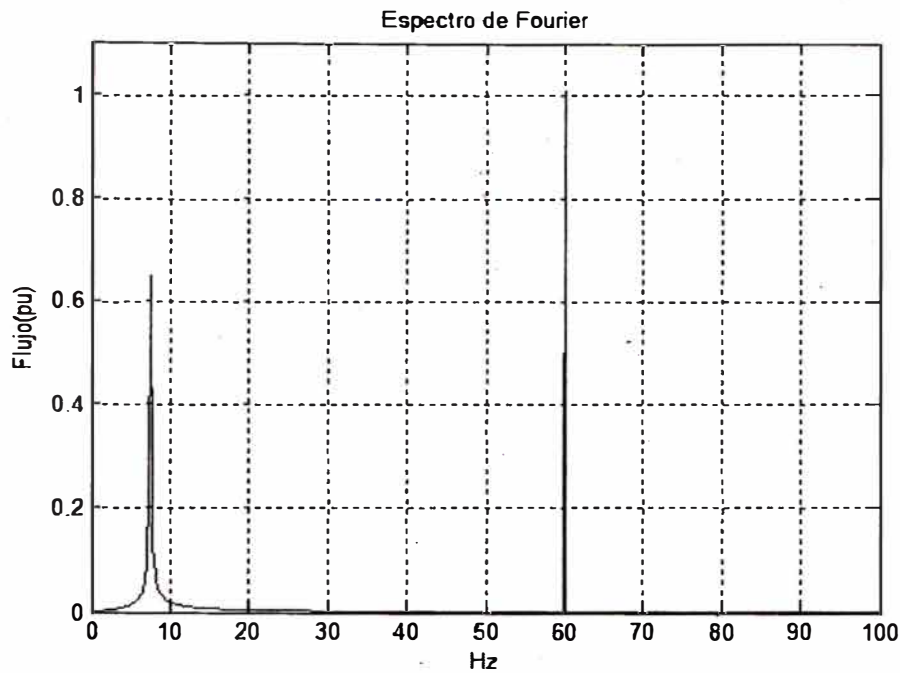


Figura 3.18 Espectro de frecuencia del flujo (quasiperiódica)

**Comentarios:** Para este caso las formas de onda (Figura 3.13) presentan un comportamiento modulado, implicando la existencia de dos frecuencias asociadas. Lo cual daría a entender que es un caso quasiperiódico según lo explicado en el capítulo 2. En el plano de fase (Figura 3.14), se puede observar que no existe una trayectoria única. Al graficar la trayectoria tridimensional se observa que esta evoluciona en un anillo (Figura 3.15). El corte de Poincaré (Figura 3.16) es una curva cerrada, definiendo claramente que es un caso quasiperiódico. La misma conclusión se puede obtener del mapa de Poincaré (Figura 3.17) pues también se presenta una forma elíptica en cada variable de estado. El espectro de Fourier (Figura 3.18) muestra básicamente dos frecuencias: la fundamental de 60 Hz y la otra de aproximadamente de 7.5 Hz pero no totalmente definida, pues presenta un espectro continuo a su alrededor.

### 3.5.4 Caso de Ferroresonancia Caótica (frecuencia de muestreo múltiplo de la frecuencia del sistema)

Se presenta para los siguientes parámetros:  $V_m=900V$ ,  $R=10^{20}$  Ohms,  $C=1250.77nF$  y  $dt = 0.0000500500500500501$ .

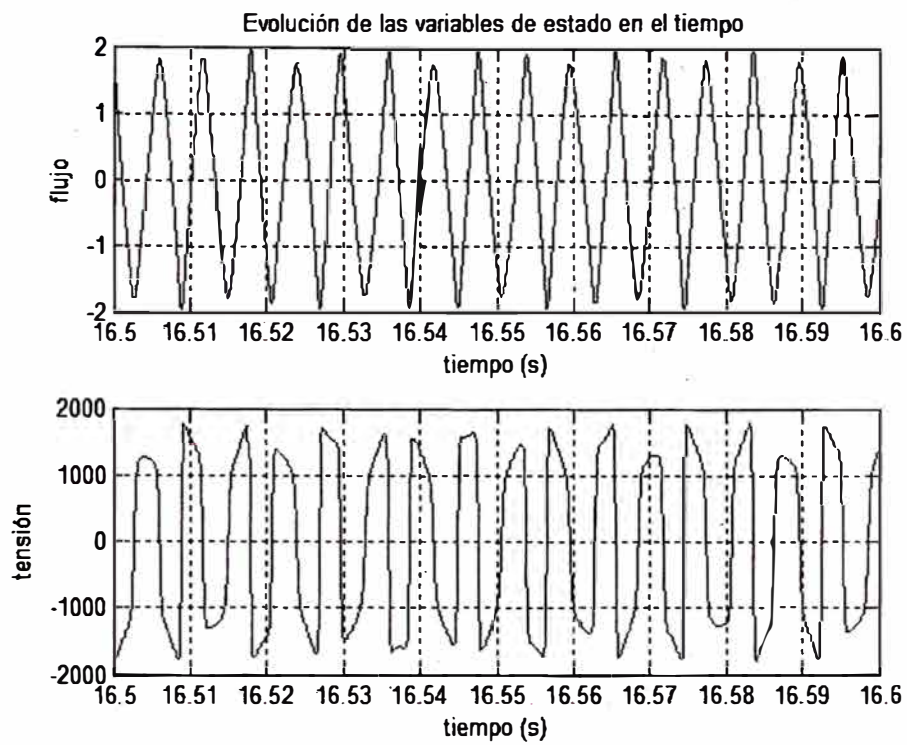


Figura 3.19 Evolución de la tensión y flujo en la bobina (caótica)

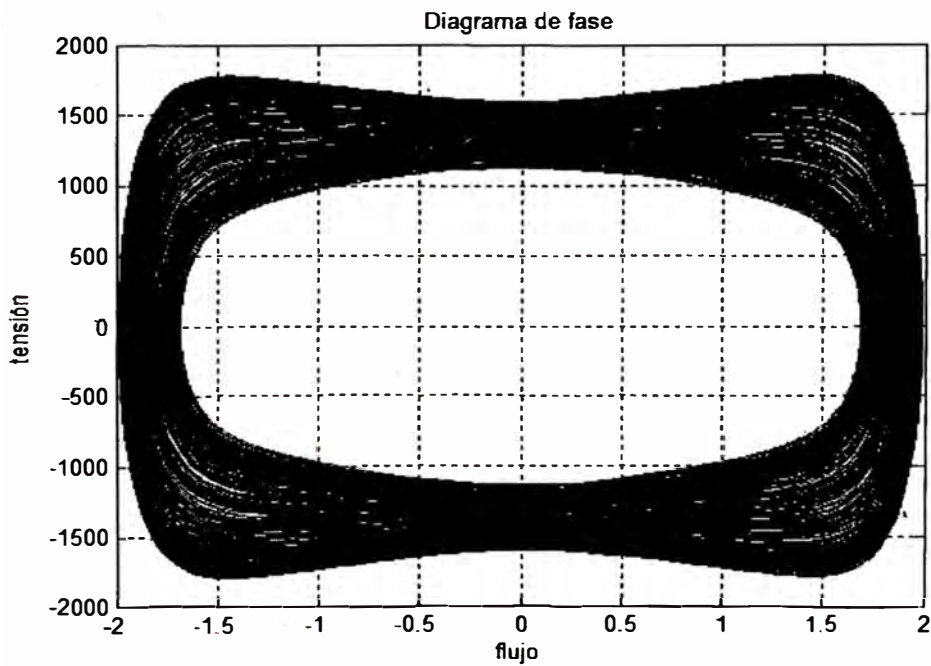


Figura 3.20 Plano de fase (caótica)

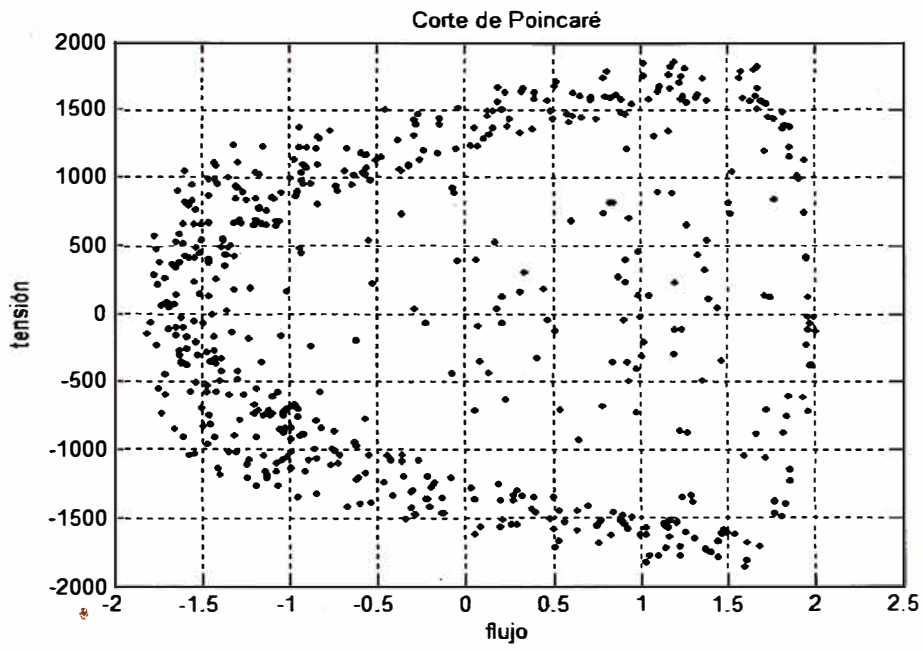


Figura 3.21 Corte de Poincaré (caótica)

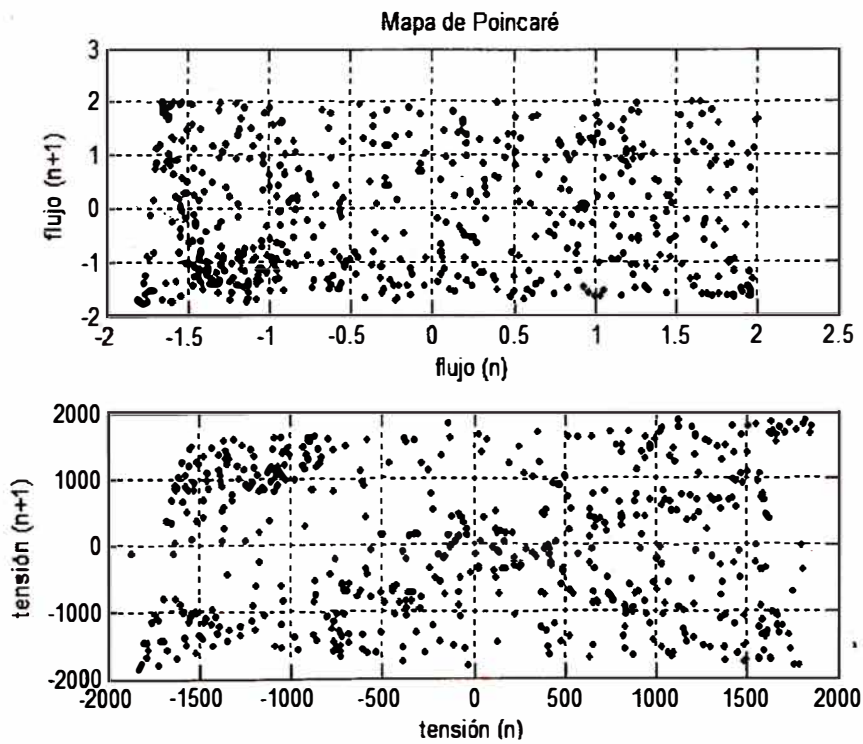


Figura 3.22 Mapa de Poincaré (caótica)

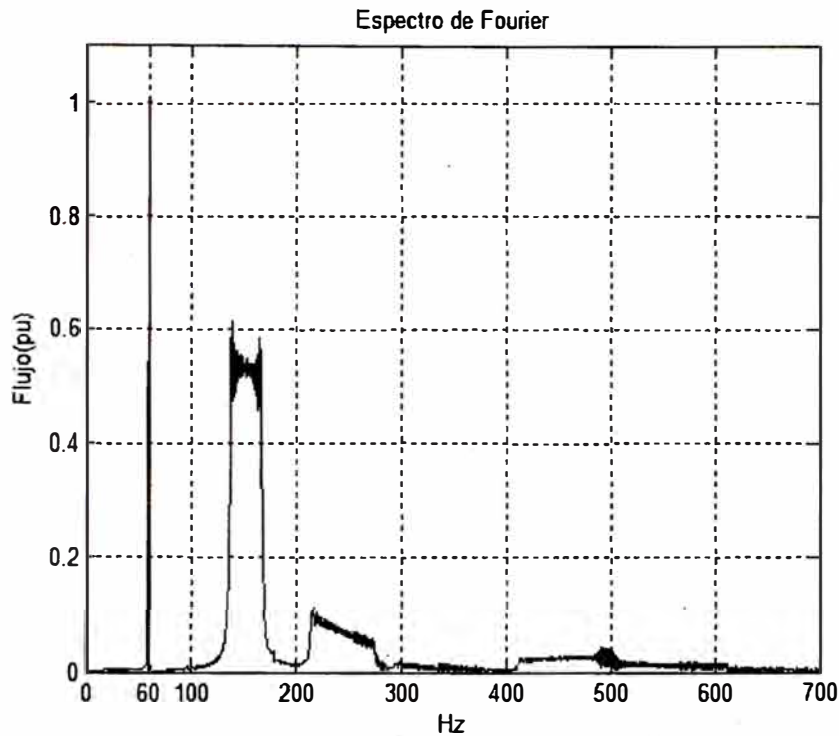


Figura 3.23 Espectro de frecuencia del flujo (caótica)

**Comentarios:** La observación de la gráfica en el dominio del tiempo (Figura 3.19) podría hacer creer que existe cierta periodicidad del sistema. Sin embargo el plano de fase (Figura 3.20), al igual que en el caso anterior, consiste de un área, indicando que el sistema no es periódico. El corte de Poincaré (Figura 3.21) muestra una forma irregular o atractor extraño, por lo que este es un caso de ferresonancia caótica. Similar conclusión se obtiene del mapa de Poincaré (Figura 3.22). El espectro de Fourier (Figura 3.23), se presenta continuo, lo que es típico en sistemas caóticos.

### 3.5.5 Caso de Ferresonancia Subarmónica (la frecuencia de muestreo no es múltiplo de la frecuencia del sistema)

La simulación será efectuada para el mismo caso presentado en 3.4.2 (caso subarmónico) pero con  $\Delta T=0.004$ ,  $\Delta t = 0.0000500500500500500$  y  $dt = 0.00004$ .

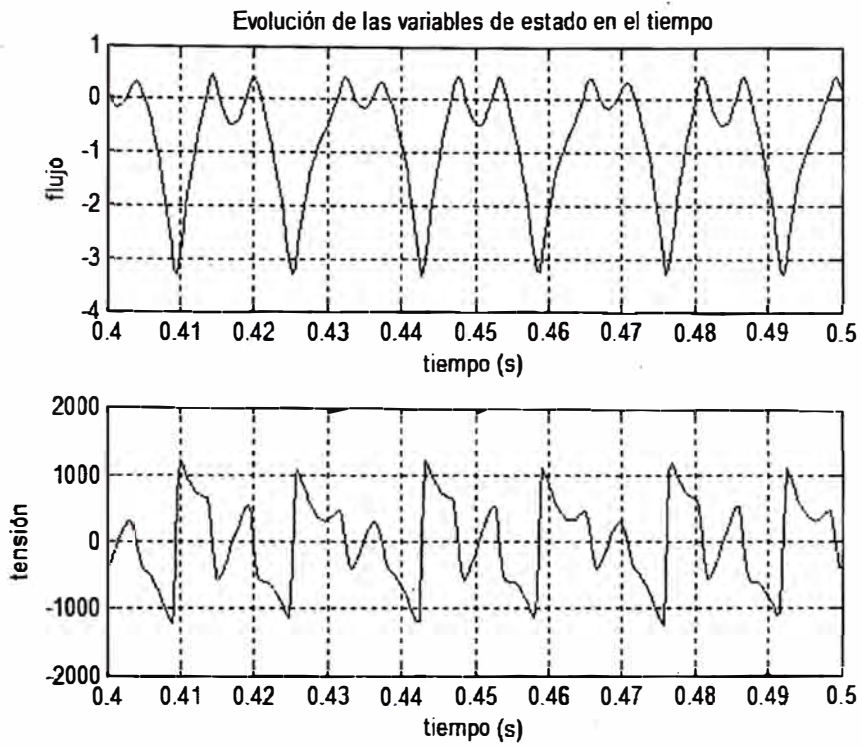


Figura 3.24 Evolución de la tensión y flujo en la bobina

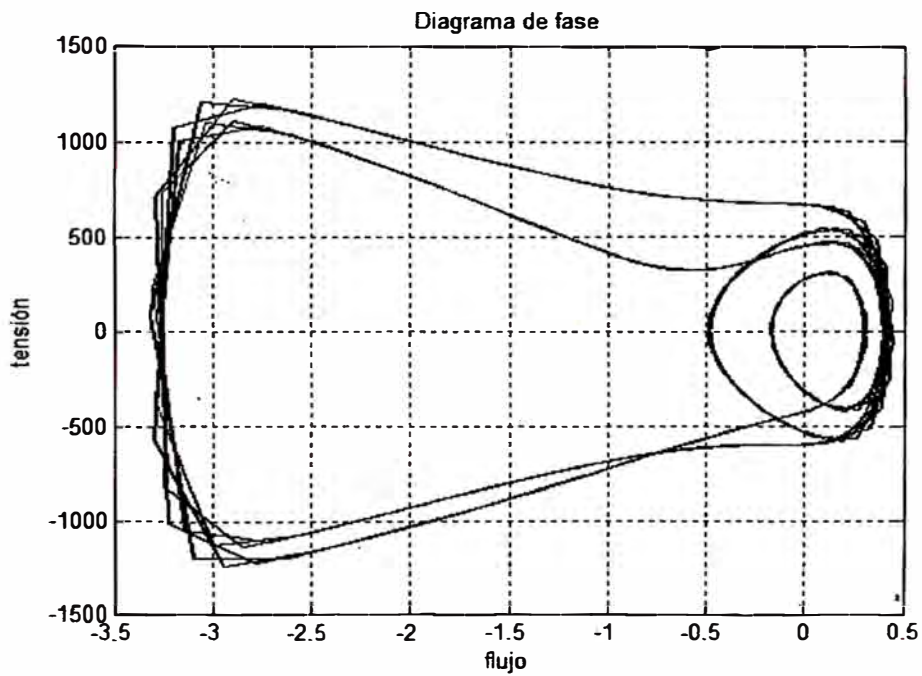


Figura 3.25 Plano de fase tensión versus flujo



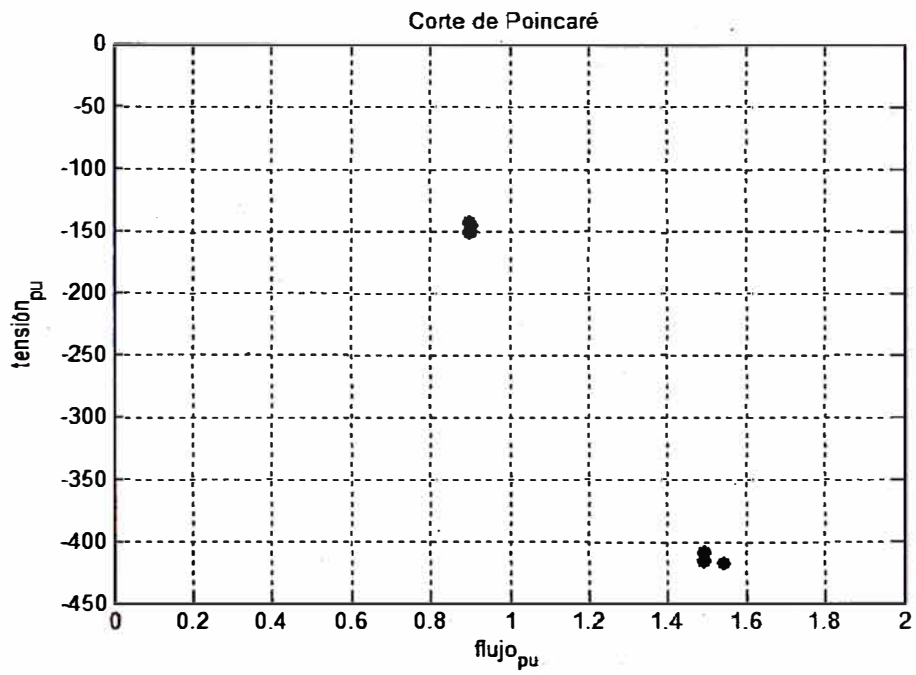


Figura 3.26 Corte de Poincaré

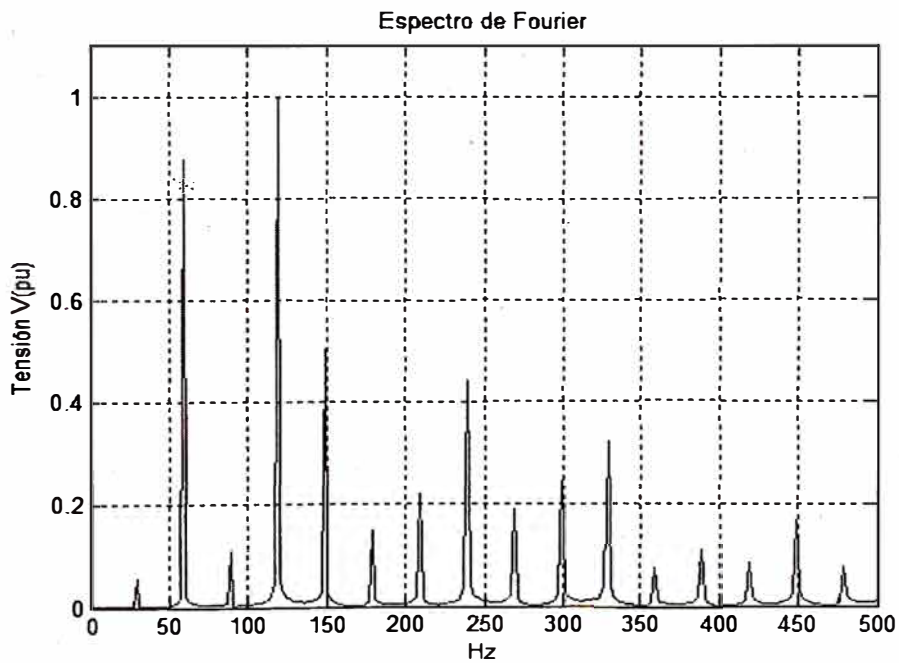


Figura 3.27 Espectro de frecuencia del flujo

## **Comentarios:**

Por comparación con el caso presentado en el ítem 3.4.2 (caso subarmónico) se puede observar que los gráficos de las formas de onda y plano de fase, presentan la misma tendencia, con la salvedad de una menor resolución gráfica. En el corte de Poincaré (Figura 3.26) se observa la ligera dispersión que aparece en los puntos de intersección, que tiene lugar según se indicó debido a la interpolación de datos. El espectro de Fourier (Figura 3.27) presenta los mismos armónicos y subarmónicos que el caso 3.4.2, con la diferencia de mostrar continuidad alrededor de los mismos. Esta continuidad es motivada por la cantidad de periodos de la onda involucrados en el análisis. Mientras más periodos se dispongan, su forma espectral se aproximará a pulsos (ver anexo 3.3).

Finalmente, se puede afirmar que las herramientas gráficas presentadas y el procedimiento de interpolación son válidos para aplicar a cualquier registro oscilográfico real, teniendo en cuenta las consideraciones mencionadas.

### **3.6 Aplicación de los diagramas de Bifurcación**

De acuerdo a lo explicado en 2.2.6.5 “Elaboración de los diagramas de bifurcación”, 3.3.4 “Construcción de los diagramas de bifurcación” y empleando las ecuaciones del sistema (3.13) se obtienen los diagramas de bifurcación con XPPAUT.

Los parámetros de operación normal del circuito 3.4 son:  $V_m=313V$ ,  $R=10k\Omega$  y  $C=3.16 \mu F$ .

Los rangos posibles de variación a ser considerados son:

- Tensión del generador:  $V_m \in [0..1600] V$
- Capacitancia:  $C \in [0..5] \mu F$
- Carga:  $R \in [0..30000] \Omega$

### 3.6.1 Diagrama de Bifurcación variando la magnitud de la fuente ( $V_m$ )

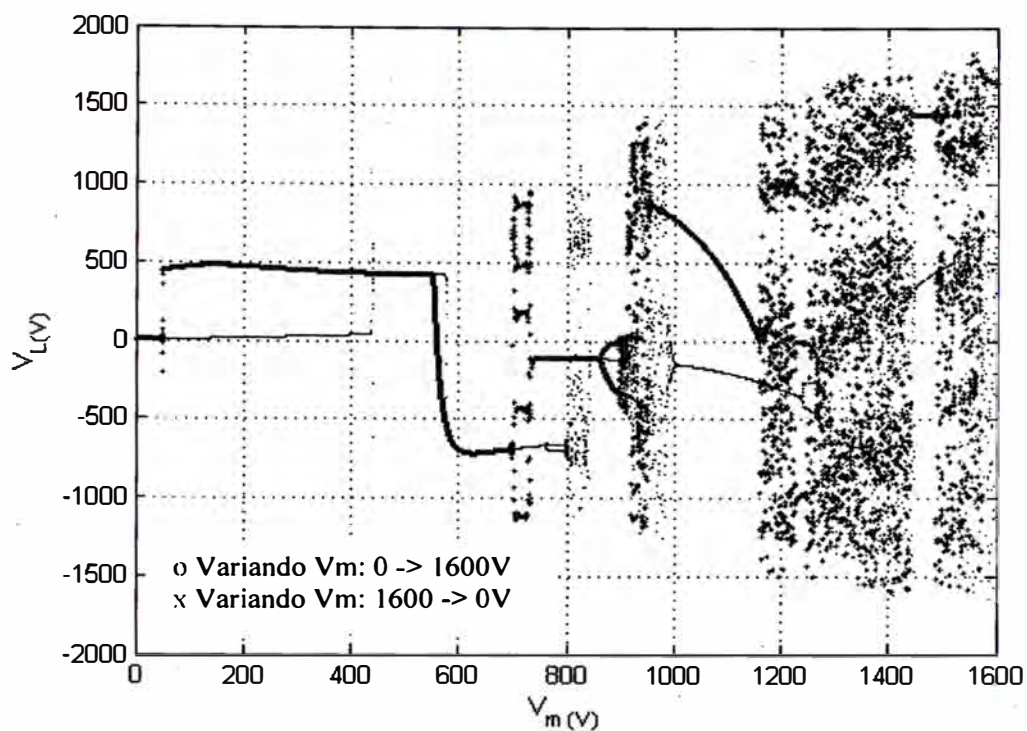


Figura 3.28 Tensión en el transformador ( $V_L$ ) versus el nivel de la fuente ( $V_m$ )

(Método de Fuerza Bruta)

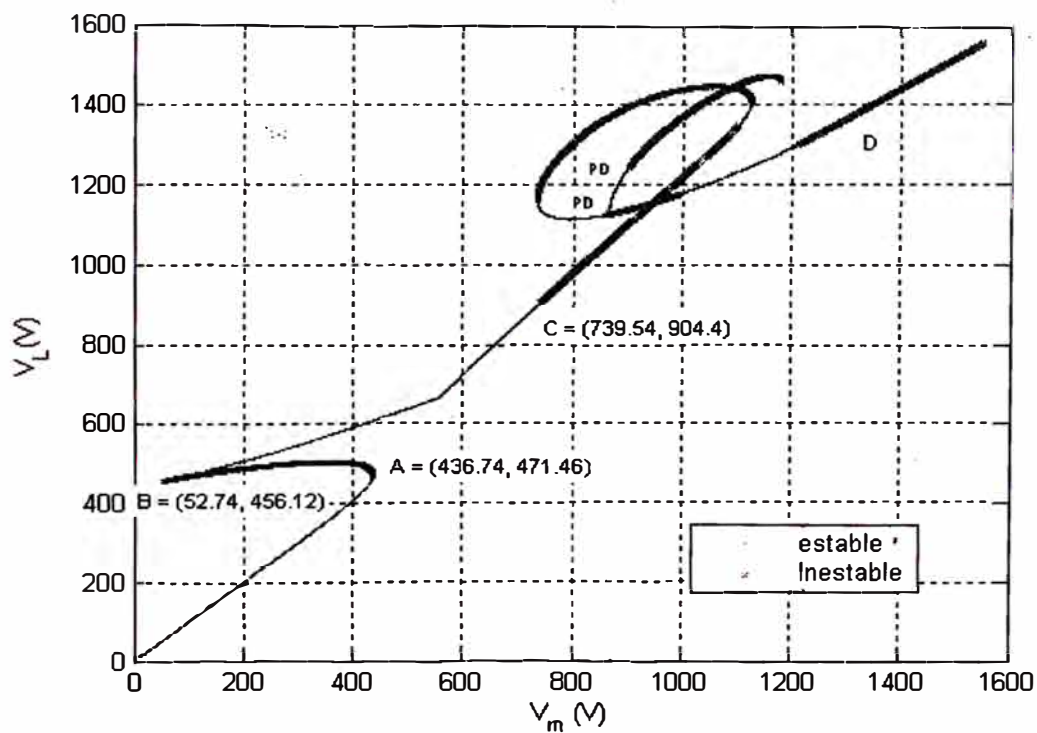


Figura 3.29 Tensión en el transformador ( $V_L$ ) versus el nivel de la fuente ( $V_m$ )

(Método de Continuación)

En el gráfico 3.28 cada punto corresponde a un punto del corte de Poincaré. La estabilización del sistema en este diagrama depende de las condiciones iniciales de las variables de estado. Por ejemplo si el valor inicial del flujo es  $\phi_0 = -1$  Wb, el sistema se estabilizará en el punto correspondiente de la curva superior (variando  $V_m$ :  $1600 \rightarrow 0$  V); y si fuera  $\phi_0 = 0$  Wb, se estabilizará en la curva inferior (variando  $V_m$ :  $0 \rightarrow 1600$  V). Para la tensión máxima del generador  $V_m=313$ V se observan que existen dos puntos de operación: uno normal con 26.57V y otro ferroresonante con 448.96V. Todos los puntos contiguos y que forman una curva definida en la Figura 3.28 son estados estables; los dispersos corresponden a estados inestables y posiblemente caóticos.

Del diagrama obtenido por Continuación (Figura 3.29) y que corresponde a valores máximos de tensión en bornes de la inductancia ( $V_L$ ), se aprecia que existen cuatro tramos bien definidos.

El segmento 0A es la región normal, donde todos los puntos de operación son estables (curva delgada). Para un transformador esta constituye la zona lineal de operación. Los valores de tensión posibles en la inductancia no lineal (NL) y por tanto del transformador cuando la tensión máxima de la fuente es 313V (221.3V RMS), según el diagrama son: 312 V para el estado normal y 553V para el estado ferroresonante.

El segmento AB es una región de estados inestables (curva gruesa) y más bien corresponde a una zona de transición o también llamada salto ferroresonante.

El segmento BC es la región de estados ferroresonantes estables (curva delgada)

Finalmente, el segmento CD es una zona de estados estables e inestables. Además se observa la presencia de puntos de bifurcación del tipo periodo doble, signados con "PD".

### 3.6.2 Diagrama de Bifurcación variando la magnitud de la capacitancia ( C )

Variando el valor del condensador “C” y manteniendo el resto de parámetros ( $V_m$  y  $R$ ) constantes, se obtienen los diagramas de las figuras 3.30 y 3.31 y que corresponden a los métodos Fuerza Bruta y Continuación respectivamente.

De la figura 3.30 se observa que existen dos estados estables para una capacitancia mayor a  $0.41 \mu\text{F}$ : un estado normal y otro ferroresonante. Así para una capacitancia  $C$  de  $3.16 \mu\text{F}$  y  $V_m=313\text{V}$ , existen dos posibles valores de tensión del transformador, 324 y 553V.

Del diagrama obtenido por continuación (Figura 3.31) se observa un ramal de estados inestables que se inicia en el punto LP. Ramal que no es detectado por el método de la Fuerza Bruta y muestra la importancia del método de Continuación para la obtención de los diagramas de bifurcación.

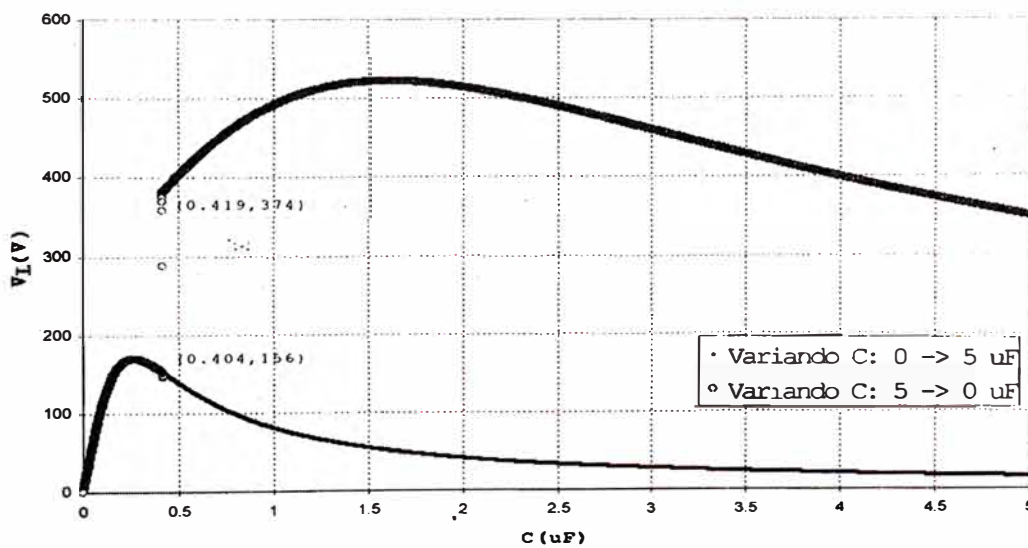


Figura 3.30 Tensión del transformador ( $V_L$ ) versus la capacitancia (C)

(Método de la Fuerza Bruta)

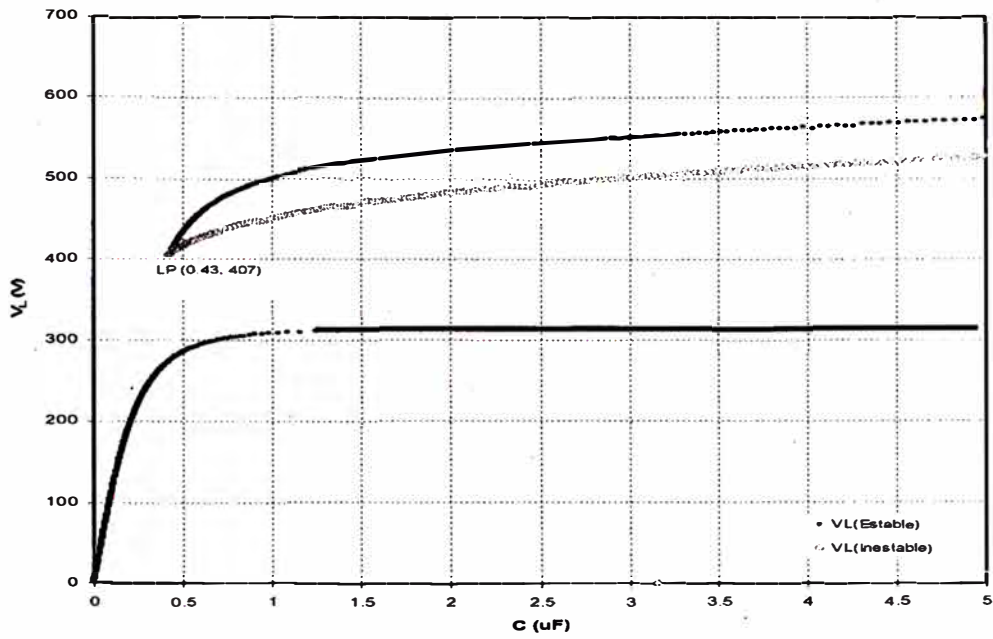


Figura 3.31 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la capacitancia ( $C$ )  
(Método de Continuación)

### 3.6.3 Diagrama de Bifurcación variando la carga (R)

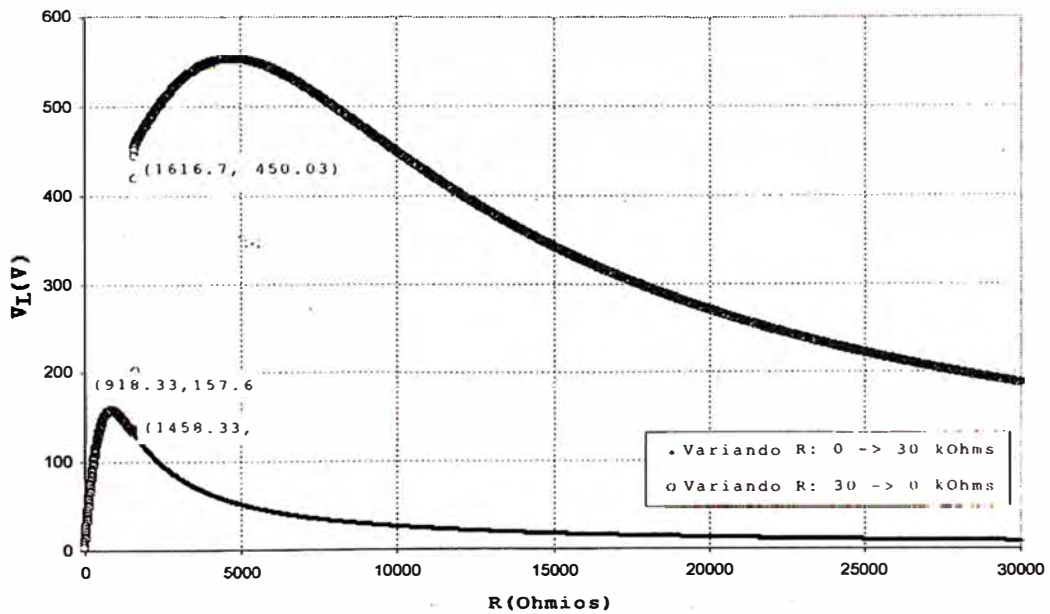


Figura 3.32 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la Carga,(R)  
(Método de la Fuerza Bruta)

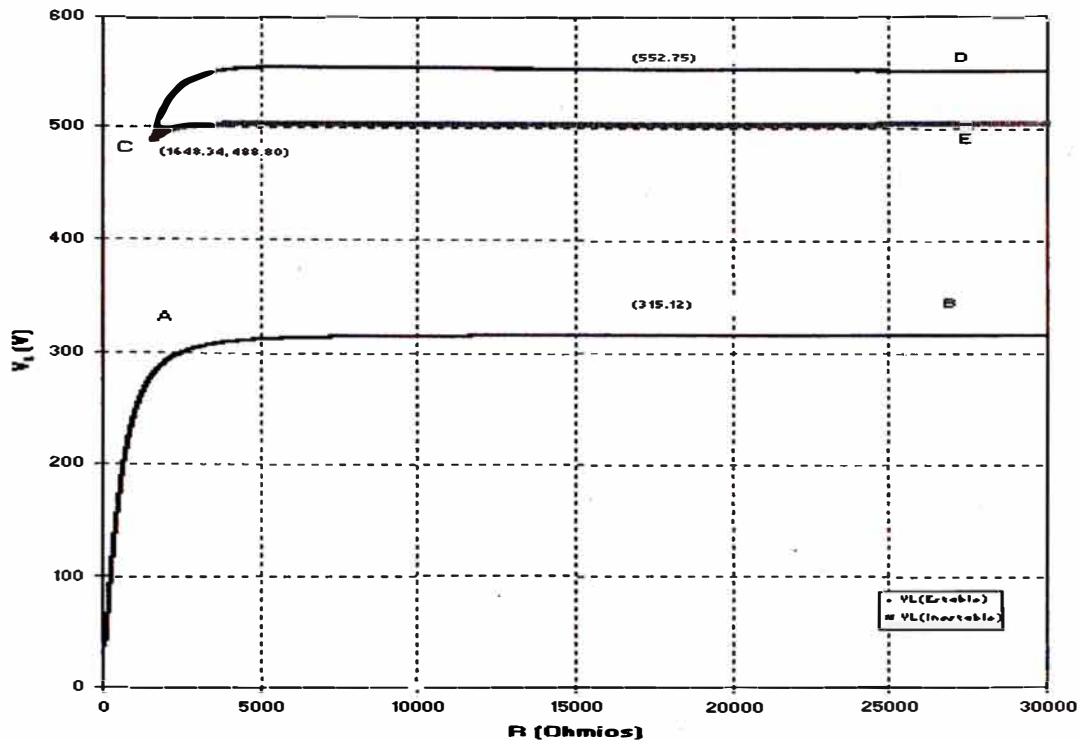


Figura 3.33 Tensión del transformador ( $V_L$ ) variando la carga ( $R$ )

(Método de Continuación)

Este diagrama es de particular importancia pues nos permite ver cuan determinante es la carga en el comportamiento ferroresonante del transformador. Los gráficos obtenidos en cada método son parecidos a los obtenidos variando la capacitancia.

La Figura 3.33 (método de continuación), presenta la curva 0AB que corresponde al conjunto de puntos de operación normales, cuyo valor máximo alcanzado es 315.12 V.

La curva CD esta constituida por todos los puntos de operación ferroresonantes estables y el valor máximo es 552.75 V. Se puede observar que cuando  $R$  es menor a 1.648 kOhms, el sistema tiene un solo estado estable y por tanto la ferroresonancia nunca se produce.

El segmento CE es un conjunto de estados inestables, intermedio entre los estados normales y ferroresonantes.

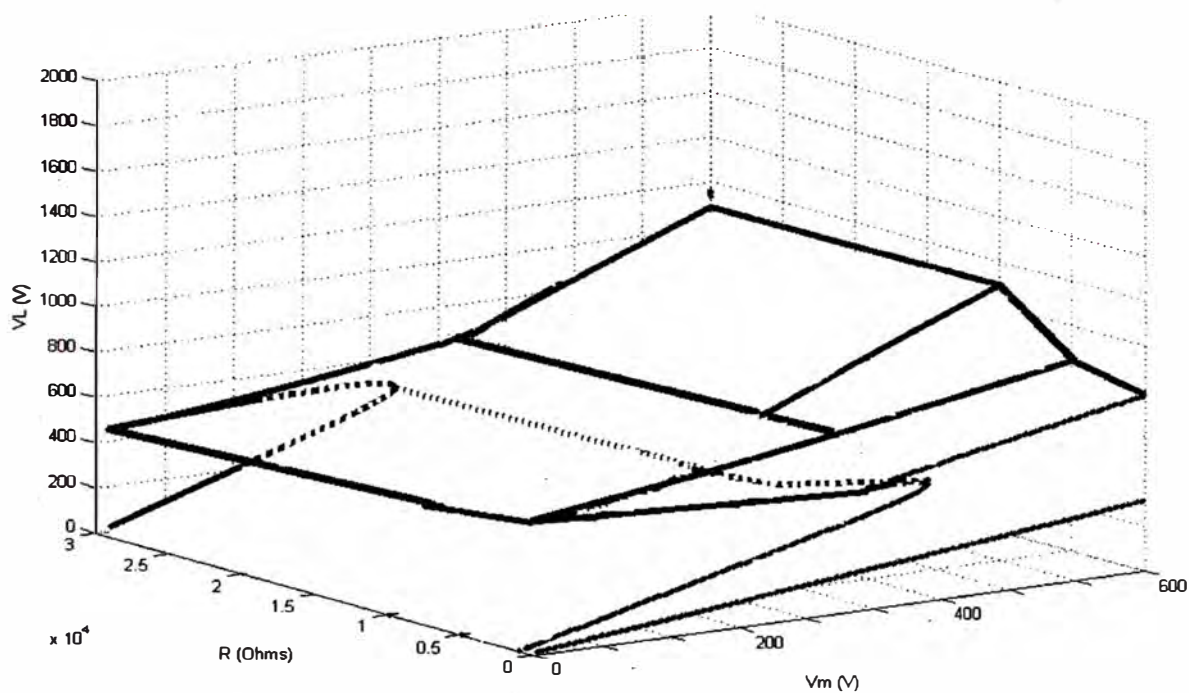


Figura 3.34 Forma aproximada de  $V_L$  variando  $V_m$  y  $R$

Realmente lo que se está obteniendo con la construcción de los diagramas de bifurcación son gráficos de las secciones transversales del sólido cuya superficie representa todos los puntos posibles que puede tomar la tensión  $V_L$ . En la Figura 3.34 se observa un comportamiento aproximado de la tensión de transformador en la región del plano formado por la tensión del generador ( $V_m$ ) y la carga ( $R$ ). Dicho gráfico ha sido obtenido evaluando siete diagramas de bifurcación de tensión. Cada uno con distintos valores de ( $R$ ) y manteniendo ( $C$ ) constante e igual  $3.16 \mu\text{f}$ . Los valores de ( $R$ ) considerados fueron: 3, 2.5, 2, 1.5, 1, 0.5 y 0.001 Ohmios.

### 3.6.4 Análisis de los diagramas de Bifurcación presentados

En el gráfico 3.29 (bifurcación de tensión) se puede observar que la máxima tensión que debe aplicarse al transformador del circuito 3.4 debe ser como máximo  $52.74\text{V}$ , pues para una mayor tensión se produciría el salto ferresonante. Es decir que pasaría a operar en los puntos de la curva superior BC donde están los estados ferresonantes estables.

De otra parte, el valor de  $V_m$  igual a  $52.74\text{V}$  (punto B de la figura 3.29) es un valor muy bajo comparado con la tensión nominal del operación ( $313\text{V}$ ) Por lo cual, ese



transformador presenta alta tendencia a la ferresonancia. Para tensiones mayores a 739V (punto C) el sistema se vuelve irregular, coexistiendo estados estables e inestables, según se observa en la Figura 3.28 (método de Fuerza Bruta).

Del diagrama 3.31 (bifurcación de capacitancia) se observa que el sistema tiene un solo punto de operación hasta una capacitancia de 0.43  $\mu\text{F}$ , a partir de la cual existen tres estados de operación: normal estable (curva inferior), inestable (curva intermedia) y ferresonante estable (curva superior).

En el diagrama 3.33 (bifurcación de carga) podemos observar que para un valor de resistencia mayor a 1.648 kOhms (29.4 W a 220 V), el sistema tiene tres posibles estados de operación. De allí que debería evitarse la operación del transformador por debajo de dicha carga.

Resumiendo: de los tres diagramas expuestos, se deduce que este circuito debe tener los siguientes márgenes de parámetros de modo de evitar la ferresonancia:

- En el supuesto que los valores de R y V permanezcan constantes, el valor máximo ( $V_m$ ) nunca debe ser mayor a 52.74V pues para valores mayores se tiene un ramal de estados ferresonantes.
- Teniendo  $V_m$  y C constantes, la carga nunca debe ser menor a 29.4 W.
- Con  $V_m$  y R constantes, la capacitancia (C) total de barras y entre contactos del interruptor no debe ser superior a 430 nF.

A pesar que estas evaluaciones fueron realizadas variando un solo parámetro a la vez, han ayudado a entender los modos de operación que puede presentarse en un circuito no lineal.

En el caso que se desee mejorar la condición para evitar la ferresonancia en este circuito, deben obtenerse las áreas de riesgo tal como se realiza en el ítem 4.3.7.5 “Determinación de los márgenes de operación”. Dichas áreas se obtienen variando

simultáneamente dos parámetros y deben ser evaluadas en el primer punto ferroresonante del diagrama de bifurcación por Continuación. Para el diagrama 3.29, le corresponde el punto B. El programa XPPAUT permite realizar dicha evaluación.

## **CAPITULO 4**

### **APLICACIÓN A CASOS REALES**

#### **4.1 Introducción**

En este capítulo se presentan dos casos reales considerados inicialmente como ferroresonancia. Para cada uno de ellos se hace uso de las herramientas HDNL con la finalidad de diagnosticar y analizar el fenómeno de ferroresonancia presentado.

#### **4.2 Caso 1: Disturbio ocurrido en la S.E. Aguaytía 220 kV**

##### **4.2.1 Descripción del evento**

El domingo 26 de enero del 2003, se había programado el mantenimiento de la línea de transmisión en 220 kV, L-252 Vizcarra-Tingo María (Figura 4.1). Dentro de las condiciones previas se tenía que los dos grupos a gas y de 80 MW de la CT Aguaytía, se encontraban fuera de servicio, cumpliendo con la programación diaria del despacho económico del COES. Cada grupo se conecta con el SEIN a través de un transformador elevador de 13.8/223 kV. La operación en una salida normal de un grupo consistía únicamente en abrir el interruptor en 13.8 kV, quedando el transformador conectado en vacío al sistema, a través del devanado en 220 kV. El motivo de esa operación, era evitar el transitorio originado por la corriente de conexión al poner en servicio los transformadores.

A las 6:00 a.m. se sacó de servicio la línea L-252, con lo cual, el suministro hacia las ciudades de Pucallpa y Tingo María, quedó en forma radial, según se puede observar del diagrama unifilar mostrado en la Figura 4.1. Luego, a las 6:08 AM se desconecta súbitamente un lado de la línea L-251 Aguaytía-Tingo María por actuación de la protección de sobretensión en la SE Aguaytía, dejando sin suministro eléctrico a la ciudad de Pucallpa. El valor del seteo del relé de máxima tensión se encontraba en 115% de la tensión nominal, lo cual quiere decir que la sobretensión registrada fue de 253 kV. Se hicieron varios reintentos de conexión de la línea pero todos fallaron. La solución temporal adoptada para abastecer a la

carga aguas abajo fue poner en operación los grupos térmicos de la empresa distribuidora, hasta terminar los trabajos de mantenimiento de la línea L-252. El tiempo transcurrido desde el inicio de la falla y la puesta en servicio de la generación local fue de 1 hora 17 minutos. Finalmente, a las 6:00 PM se puso en operación la línea L-252 luego de haber terminado el mantenimiento programado; con lo cual la reconexión de la línea L-251 también se realizó normalmente.

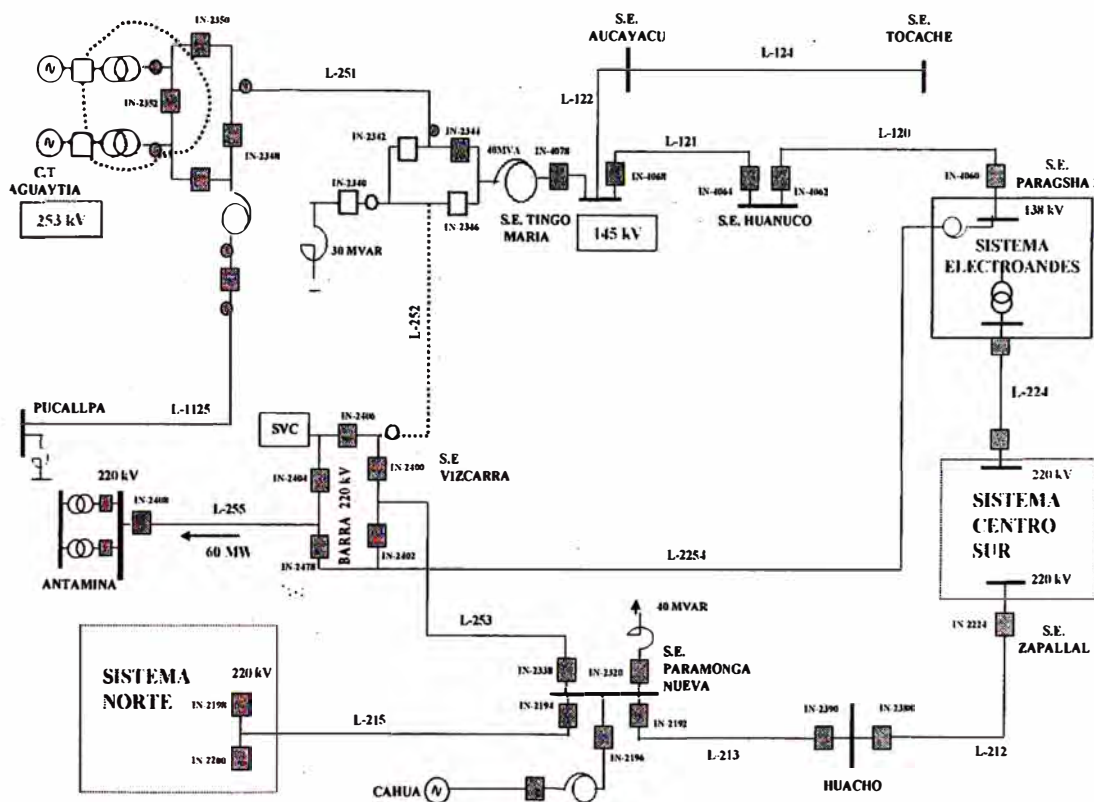


Figura 4.1 Anillo de Tingo María

Lamentablemente no hubo ningún registro de la falla inicial y solo se cuenta con los oscilogramas registrados en la subestación Tingo Maria-138 kV de los eventos posteriores (Figura 4.2). La gran distorsión presentada y el hecho de tener transformadores operando en vacío, llevó al Comité de Operación del Sistema (COES) a indicar que el fenómeno presentado correspondía a un caso de ferresonancia. Luego recomendó al Coordinador de la

Operación del sistema en Tiempo Real no autorizar la operación de los dos transformadores mientras los grupos se encuentren fuera de servicio, hasta encontrar una solución definitiva.

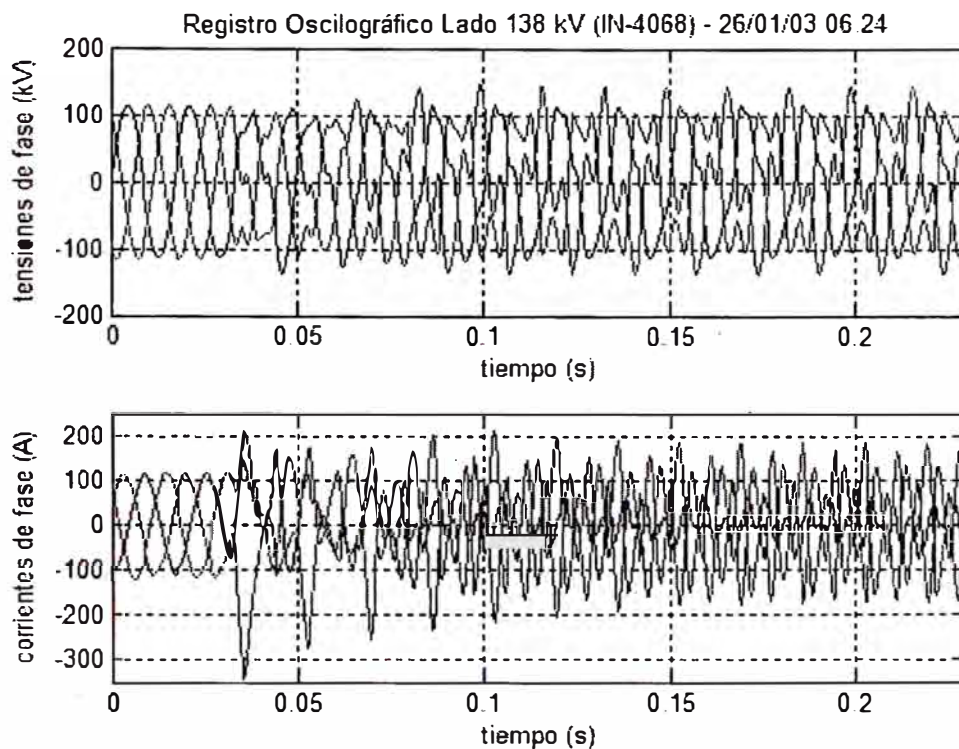


Figura 4.2 Oscilografía Reconexión 6:24 a.m. SE Tingo Maria 138kV

#### 4.2.2 Evaluación de la oscilografía (caso 1)

Con la premisa de considerar esta falla como un caso de ferroresonancia y en base a la información teórica de los capítulos 2 y 3, se realizará un análisis de la oscilografía para identificar el tipo de ferroresonancia presentada.

La muestra a ser evaluada corresponde al intervalo de tiempo entre 0.12 y 0.22 ms de la Figura 4.2, en donde se aprecia que las señales son más estables. Además, para facilitar la comparación, los registros serán expresados en por unidad, donde:

- Tensión base es la tensión máxima de fase:  $V_{base} = 138 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$  kV (la oscilografía fue registrada en el lado de 138 kV de la S.E. Tingo María)
- Flujo base:  $Flujo\_base = \frac{V_{base}}{\omega}$  Webers y  $\omega = 2\pi 60$  rad/s

### 4.2.2.1 Gráfico de las formas de onda

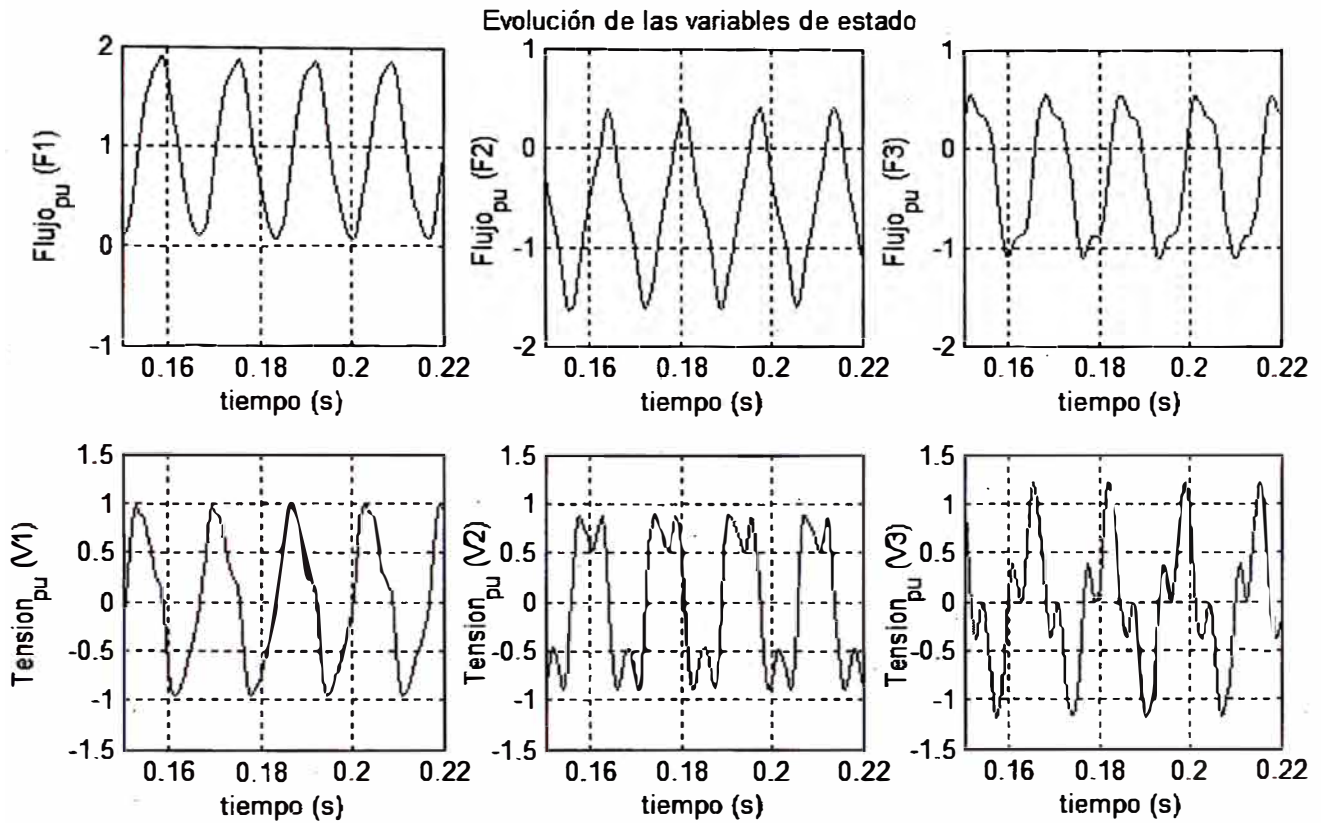


Figura 4.3 Evolución temporal de la tensión y flujo

### 4.2.2.2 Gráfico del plano de fase

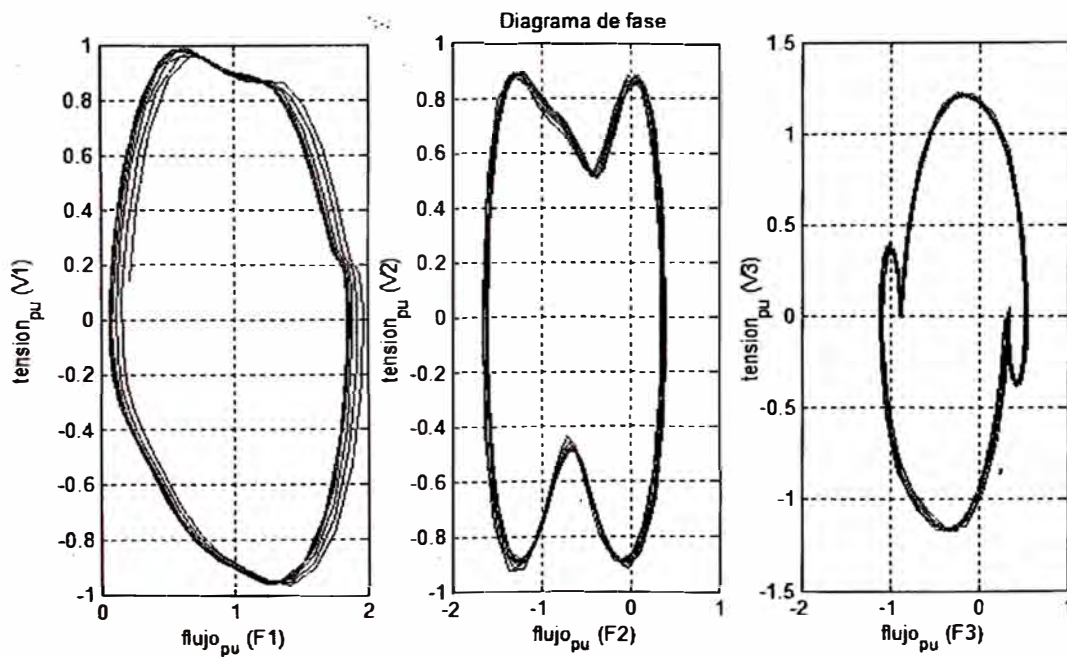


Figura 4.4 Diagramas de Fase

### 4.2.2.3 Gráfico del corte de Poincaré

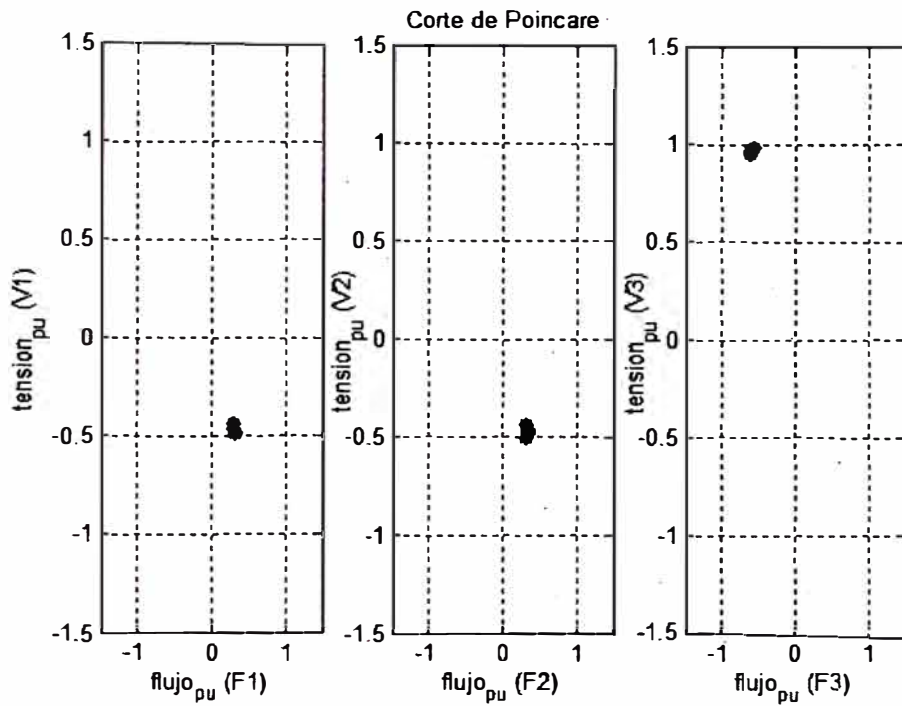


Figura 4.5 Corte de Poincaré

### 4.2.2.4 Gráfico del mapa de Poincaré

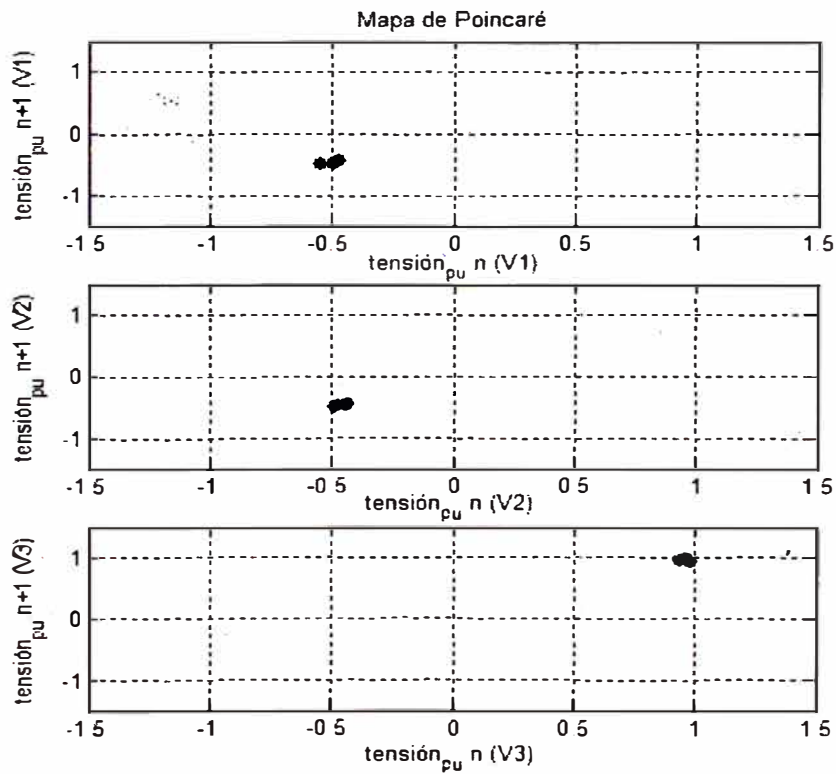


Figura 4.6 Mapa de Poincaré

#### 4.2.2.5 Gráfico del espectro de Fourier (FFT)

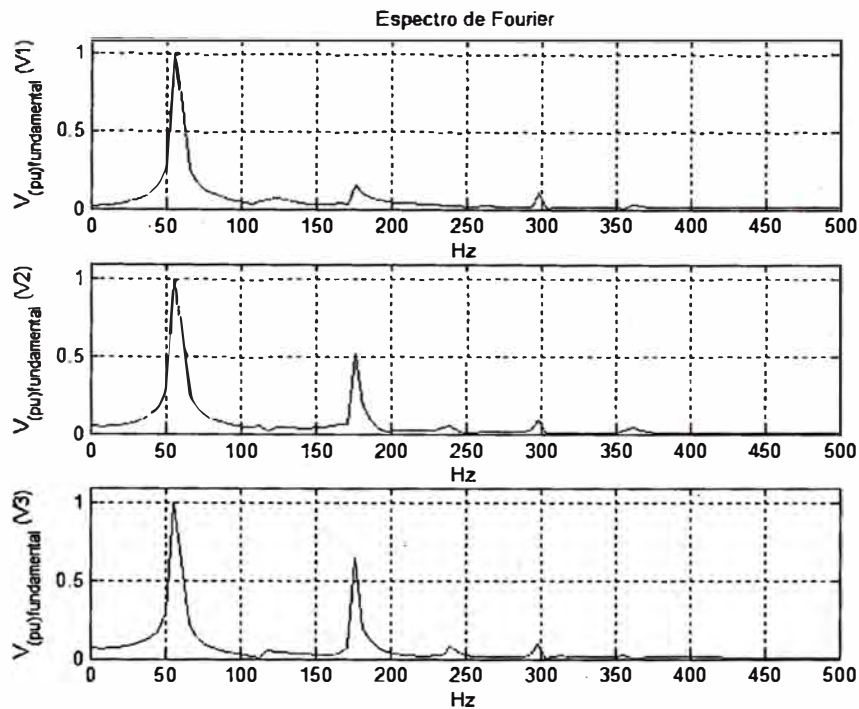


Figura 4.7 Espectro de Fourier

#### 4.2.2.6 Análisis de la oscilografía (caso 1)

De la Figura 4.3 se puede observar que las formas de onda de las variables de estado (flujo, tensión) en las tres fases tienen un comportamiento aproximadamente periódico.

En el plano de fase (Figura 4.4) se observa que la trayectoria final no es única, debido a que el sistema estaba tendiendo a estabilizarse.

Del corte de Poincaré (Figura 4.5), podemos observar que la serie de puntos de intersección tiende a un único valor a pesar que existe un ligero desplazamiento entre ellos. Dicha dispersión puede atribuirse a dos factores, primero al error cometido durante la interpolación y segundo, si se observan cuidadosamente las formas de onda (Figuras 4.3) y el plano de fase (Figura 4.4), se debería a que el sistema no estaba estabilizado. Salvando estas observaciones se puede considerar que el plano de Poincaré presenta un solo punto. Algo similar ocurre con el mapa de Poincaré en la Figura 4.6.



Tomando en cuenta las anotaciones mencionadas se puede concluir que el comportamiento del sistema durante la falla fue periódico.

Respecto al espectro de Fourier (Figura 4.7), se puede observar la existencia de un tercer armónico (180 Hz) bastante preponderante, más de la mitad del armónico fundamental en la tercera fase de la tensión V3. El hecho que el espectro sea continuo se debe a que se aplicó la FFT a una forma de onda aún no estabilizada y más aún a la poca cantidad de datos del registro oscilográfico.

Finalmente, en base al análisis realizado, se puede considerar que este sería un caso de ferresonancia fundamental. Sin embargo, esta conclusión no es determinante y por ello es necesario verificar las condiciones de ferresonancia.

#### 4.2.3 Identificación de las configuraciones de riesgo

Deben verificarse si las tres condiciones necesarias pero no suficientes siguientes están presentes:

Nº	Condición	¿Se aplica?	Observaciones
1	Presencia simultánea de capacitancias con inductancias no lineales	Si	Existen las capacitancias propias de la línea de transmisión L-251 y las inductancias no lineales de los transformadores en vacío de la CT de Aguaytía.
2	Existencia de al menos de un nodo cuyo potencial no es fijo.	No	Los transformadores durante la falla estuvieron energizados desde el lado 220 kV cuya configuración es Y aterrado.
3	Componentes del sistema ligeramente cargados o fuentes de pequeña capacidad de cortocircuito.	Si	Los transformadores estuvieron operando en vacío.

Hay solamente dos condiciones que se cumplen por tanto se puede afirmar que la ferroresonancia es altamente improbable. Esta conclusión se puede corroborar obteniendo los diagramas de bifurcación.

#### 4.2.4 Circuito equivalente simplificado

El esquema unifilar alrededor de los transformadores de la CT Aguaytía se presenta en la Figura 4.8.

Los dos transformadores TR1 y TR2 de la SE Aguaytía y el autotransformador de la SE Tingo María tienen el lado 220kV aterrado. Considerando que durante los instantes previos y a lo largo de la ocurrencia de la perturbación, los transformadores y línea de transmisión trabajaron en forma balanceada, se puede reducir el circuito (Figura 4.8) a su equivalente monofásico referido al lado 220 kV (Figura 4.9.)

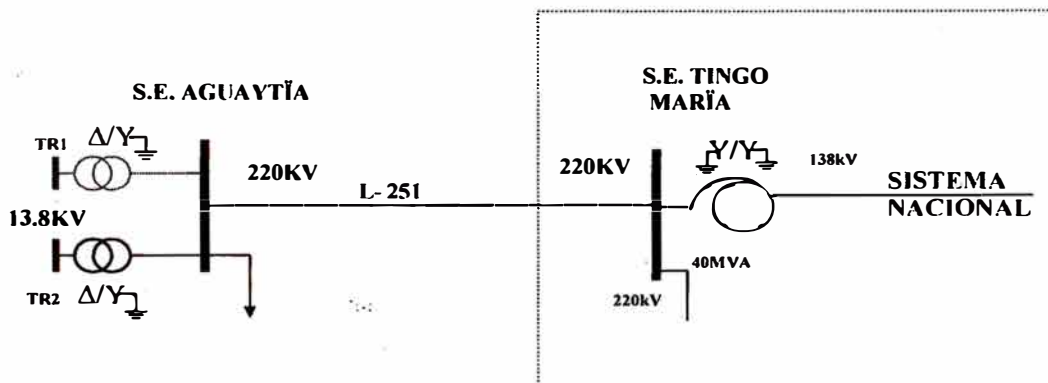


Figura 4.8 Diagrama unifilar

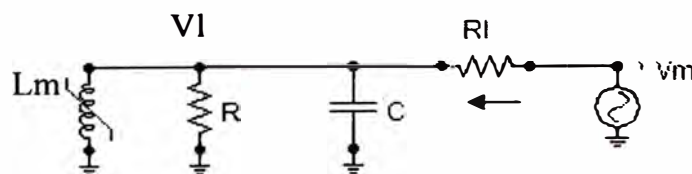


Figura 4.9 Circuito equivalente

En este circuito:

- $V_m$  es la tensión máxima por fase del sistema en V
- $R_I$  es la suma de resistencias de línea y Thevenin del sistema en Ohmios. Se ha

considerado solo la resistencia para simplificar el número de ecuaciones del sistema.

- C comprende la capacitancia de la línea en nF.
- R es la resistencia que emula las pérdidas del núcleo y carga asociada del transformador en Ohmios.
- Lm es la inductancia no lineal de magnetización del núcleo del transformador en Hr.

#### 4.2.5 Determinación de los parámetros del circuito equivalente

##### 4.2.5.1 Curva de magnetización

Los valores obtenidos, en la prueba de vacío de los transformadores, se presentan en la tabla 4.1

**Tabla 4.1 Datos de la prueba de Vacío**

Transformador	% Tensión nominal	% Corriente Vacío	Pérdidas (W)
TR1	90	0.082	37763
	100	0.138	51270
	110	0.497	76656

Según lo indicado en 3.3.2.1 “Determinando la curva de magnetización”, se obtiene:

$a_1=0.0002458278$ ,  $a_3=3.51749e-6$  y  $n=17$ ; con lo que la curva de magnetización es:

$$i = 0.0002458278 * \varphi + 3.517495246e - 6 * \varphi^{17} \quad (4.1)$$

La grafica 4.10 presenta la comparación entre los datos medidos y la curva (4.1). El error residual es de  $1.45302196e-8$ .

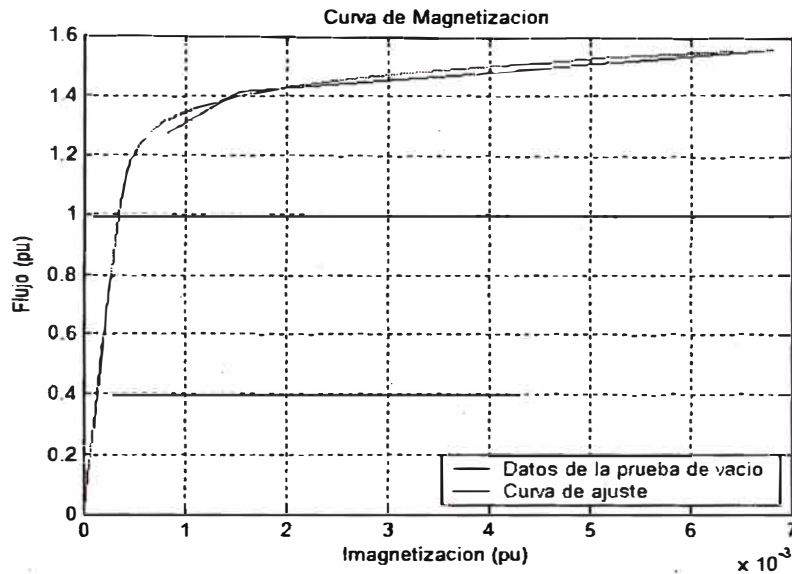


Figura 4.10 Curva de magnetización

#### 4.2.5.2 Parámetros del circuito equivalente

La máxima tensión por fase:  $V_m = 220 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 179.63 \text{ kV}$

Los parámetros de la línea L-251<sup>2</sup> son:

Barra de Envío	Barra de Recepción	Rl (ohms)	Ll (Hr)	C (nF)
Aguaytía	Tingo María	4.69120	0.09566167	322.52

De la prueba de vacío (tabla 4.1) se obtiene R:

Tensión de prueba (Uex) (kV)	Corriente de excitación (A RMS)	Pérdidas (kW)	Corriente de pérdidas (A)	R (Ohms)
223	0.214	51.27	0.1327	1 679,991.31

#### 4.2.6 Ecuaciones Diferenciales del sistema

El circuito de la figura 4.9 puede ser descrito por dos ecuaciones diferenciales, cuya forma canónica es el sistema (4.2).

<sup>2</sup> Datos de COES

$$\frac{d\phi}{dt} = VI$$

$$\frac{dVI}{dt} = \frac{Vm * \cos \omega t}{RI * C} - \frac{VI}{RC} - \frac{a_1}{C} * \phi - \frac{a_3}{C} \phi^{17} \quad (4.2)$$

Donde: RI, R, C, Vm, a1, a3 y n son los valores obtenidos en 4.2.5

$\phi$  es el flujo en el núcleo del transformador y  $\omega = 2\pi 60$  rad/s

### 4.2.7 Diagramas de Bifurcación

Se elaborarán tres diagramas de bifurcación. de manera similar a lo realizado en el capítulo 3.

#### 4.2.7.1 Variando el nivel de tensión

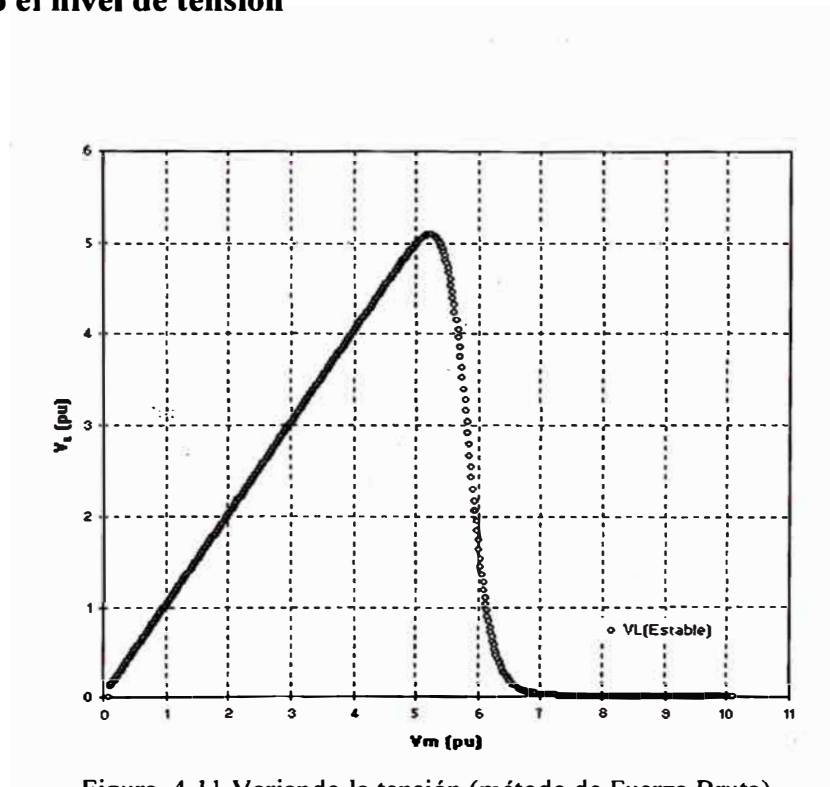


Figura 4.11 Variando la tensión (método de Fuerza Bruta)

### 4.2.7.2 Variando la capacitancia

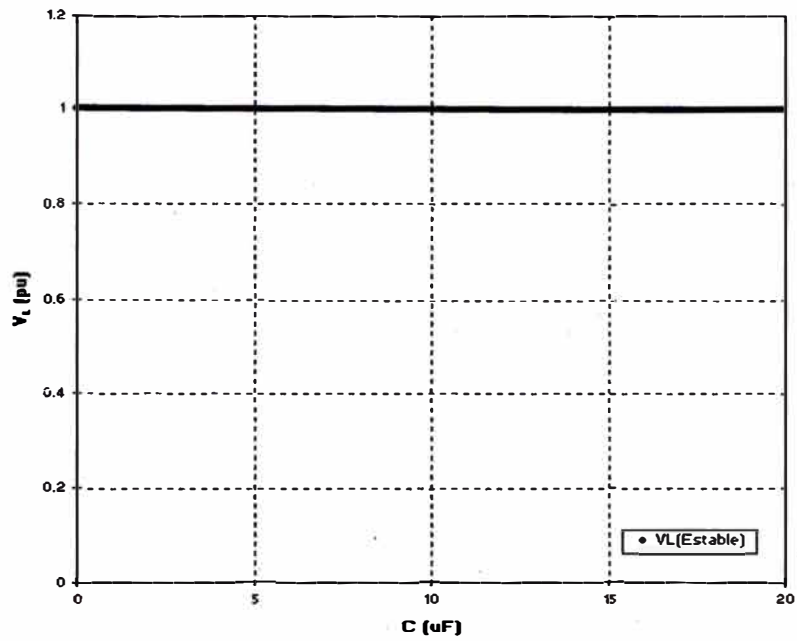


Figura 4.12 Variando la capacitancia (método de Fuerza Bruta)

### 4.2.7.3 Variando la carga

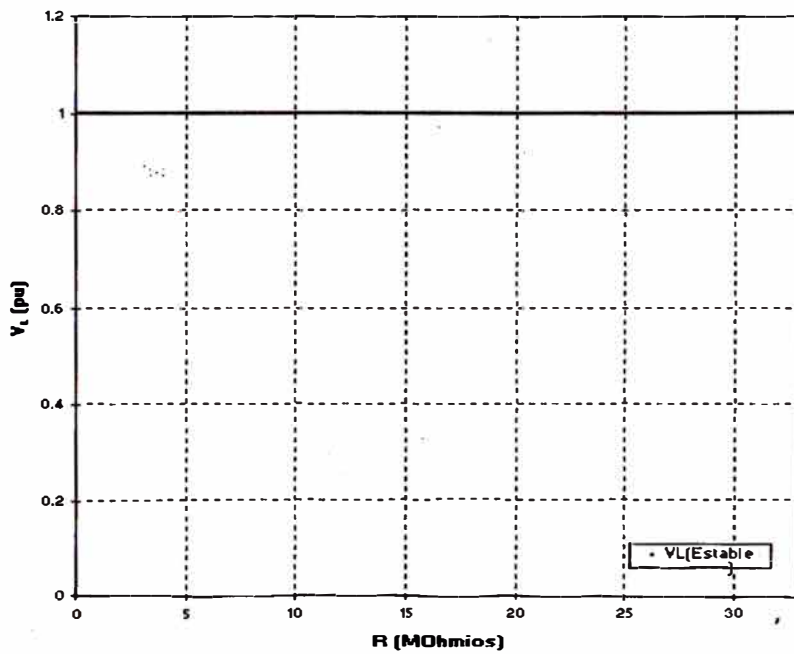


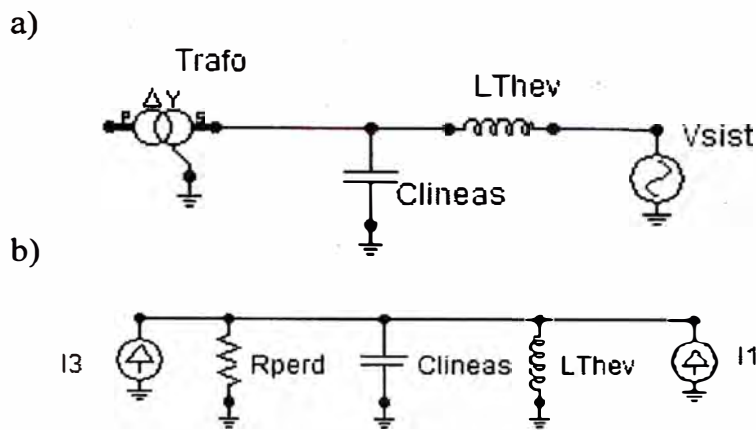
Figura 4.13 Variando la carga (método de Fuerza Bruta)

#### 4.2.7.4 Análisis de los diagramas (caso1)

De los diagramas 4.11, 4.12 y 4.13 se observa que no existen estados ferresonantes para ningún valor de parámetros  $V_m$ ,  $C$  y  $R$  respectivamente. De este modo, se ha comprobado que este evento no correspondió a un caso de ferresonancia. Es necesario aclarar sin embargo que por motivos prácticos hubiera bastado con verificar las configuraciones de riesgo. Además, como diagnóstico se puede decir que la falla fue originada por una resonancia lineal paralela. Ello se puede notar del espectro de Fourier (Figura 4.7), al tener una elevada magnitud del tercer armónico, en un punto del sistema que a simple vista no tiene procedencia. La explicación del origen se puede encontrar en la referencia [24].

El sistema Eléctrico alrededor de la barra de Tingo María presenta un punto de resonancia bastante cercano a la frecuencia nominal según se ha confirmado en [25]. De este modo al salir de servicio la línea L-252 para mantenimiento, el suministro hacia Aguaytía quedó en forma radial y por la hora del corte, 6 AM, las cargas eran mínimas, implicando una elevación de tensión por el efecto capacitivo de las líneas. El tercer armónico de tensión (180 Hz) en la barra de Aguaytía fue bastante alto, lo cual pudo ser provocado por la inyección de pequeñas magnitudes del tercer armónico, amplificadas por el efecto resonante. Los esquemas presentados en la figura 4.14 explican mejor lo descrito. En a) se tiene el circuito equivalente justo antes de la desconexión y en b) su circuito equivalente Norton monofásico.

De la Figura 4.14 b) se observa que la resonancia a la tercera armónica se da entre la inductancia equivalente ( $L_{Thev}$ ) del sistema y la capacitancia equivalente de las líneas ( $C_{líneas}$ ). La fuente de las armónicas  $I_3$  para el primer evento pudo provenir de la carga o de los mismos transformadores en vacío por efecto de la elevación de tensión. En los eventos posteriores la fuente de armónicos  $I_3$  fue constituida indudablemente por las corrientes de conexión (“Inrush”) de los transformadores por efecto de las energizaciones.



LThev: Inductancia equivalente del sistema  
 Clineas: Capacitancia equivalente de líneas  
 Vsist: Tensión Thevenin del sistema  
 Rperd: Pérdidas en el transformador.  
 I3: Corriente armónica tercera generada por la curva de magnetización del transformador  
 I1: Corriente fundamental del sistema

Figura 4.14 a) Circuito equivalente justo antes de la desconexión de L-252 b) Equivalente Norton

### 4.3 Caso 2: Transformador de medida de tensión

#### 4.3.1 Descripción del evento

Este caso ocurrió en el lado 10 kV de una subestación de distribución perteneciente a la parte sur del SEIN, cuyo diagrama unifilar se presenta en la Figura 4.15. En varias ocasiones y sin motivo aparente, salvo la ocurrencia de tormentas eléctricas en la zona, las líneas de distribución L-01 y L-02 salieron súbitamente de servicio al actuar la protección de sobretensión de la barra de 10 kV.

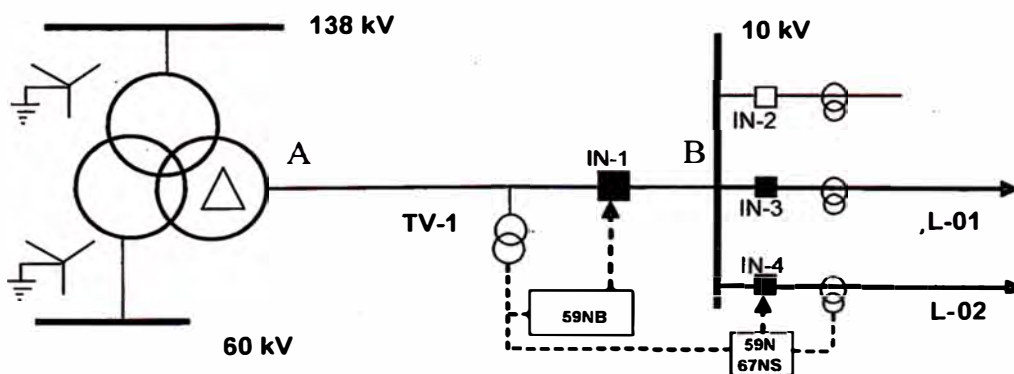


Figura 4.15 Diagrama unifilar caso 2



Los registros oscilográficos fueron obtenidos a partir del transformador de medida de tensión TV-1 y los correspondientes de corriente en cada línea. La Figura 4.16 muestra una de las oscilografías registradas.

El diagnóstico efectuado por la empresa concesionaria indica que se trató de un caso de ferresonancia subarmónica en el transformador de medida TV-1. La justificación se sustenta en que la deformación de las formas de onda de las señales de medida solo se presenta en la tensión y no en la corriente. Por ello y con el propósito de notar las diferencias, se han graficado las formas de onda en distintos periodos de tiempo.

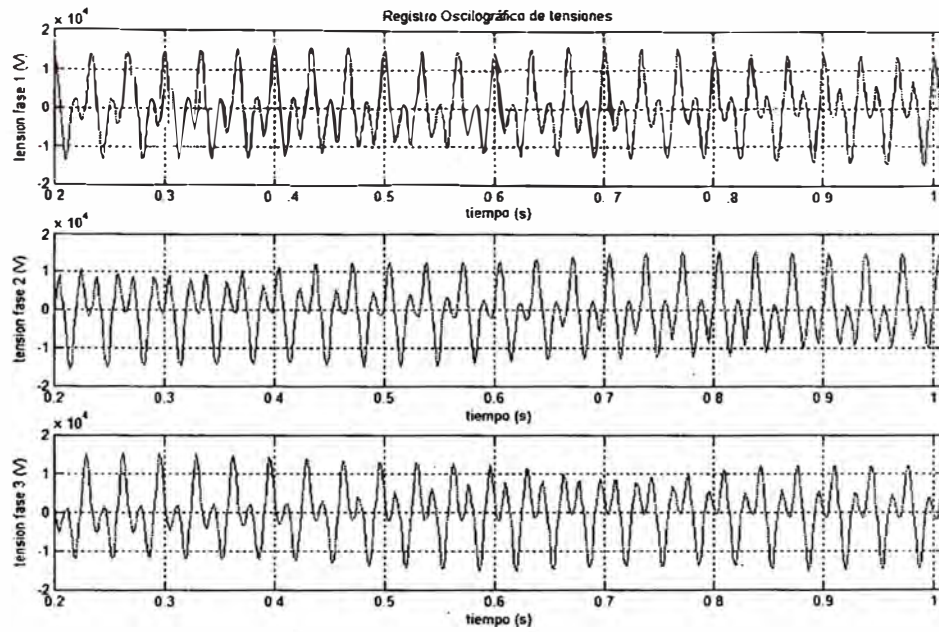
El análisis espectral de Fourier realizado indicaba la presencia de una componente subarmónica de 30 Hz presente en la forma de onda de tensión.

La recomendación para evitar el fenómeno fue incrementar la carga del transformador.

El transformador de medida TV-1 es del tipo inductivo, conformado realmente por un banco de tres transformadores monofásicos de tres devanados conectados según la Figura 4.16. Cada transformador VT tiene los devanados secundario y terciario de 50 y 100 VA respectivamente, y relación de transformación de  $(\frac{10000}{\sqrt{3}} / \frac{100}{\sqrt{3}} / \frac{100}{3})$

Según la indicación del fabricante, los transformadores instalados cuentan con una resistencia antiferresonante  $R_d$  de 22 Ohmios en el circuito que se utiliza para detectar las fallas a tierra del sistema. Este modo de operación del transformador por encima de una carga mínima determinada, es una medida usual en transformadores con riesgo de ferresonancia. Sin embargo, al parecer en este caso dicha carga ( $R_d$ ) no es suficiente para evitar la aparición de la misma.

a)



b)

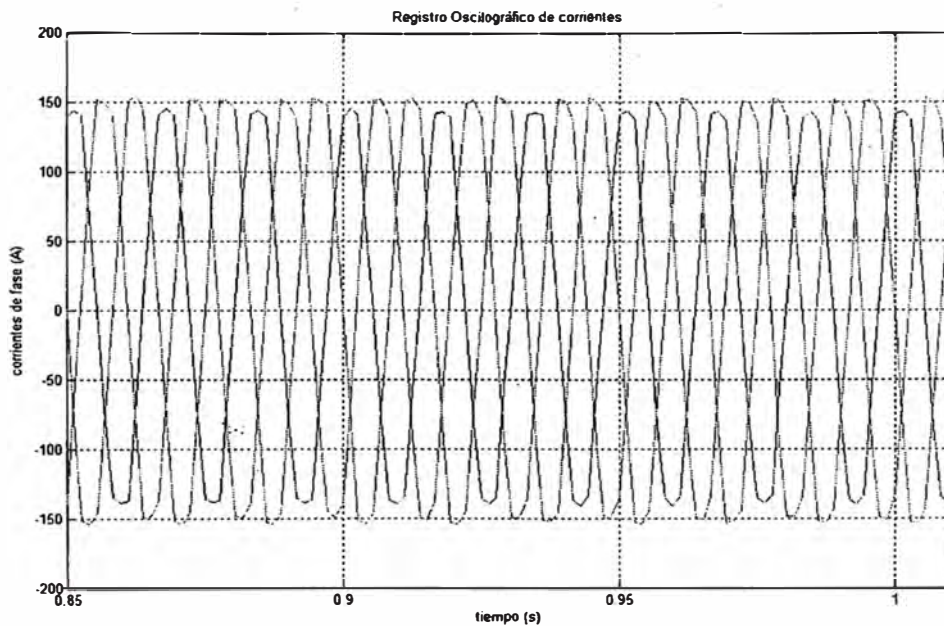


Figura 4.16 a) Oscilograma de tensiones; b) Oscilograma de corrientes

El tramo del alimentador AB (Figura 4.14) consiste en 80m de tres cables unipolares del tipo N2XSY 15/8.7 kV de  $400 \text{ mm}^2$  de sección cada uno.

De manera similar al Caso 1, se iniciará el análisis con el estudio de la oscilografía para luego determinar los rangos de operación de los parámetros del sistema por intermedio de los diagramas de bifurcación.

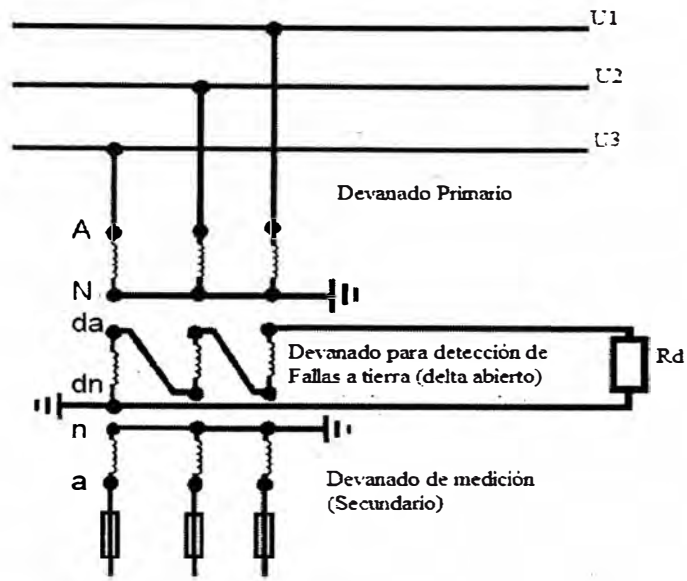


Figura 4.17 Configuración del transformador TV-1

### 4.3.2 Evaluación de la oscilografía (caso 2)

#### 4.3.2.1 Gráfico de las formas de onda

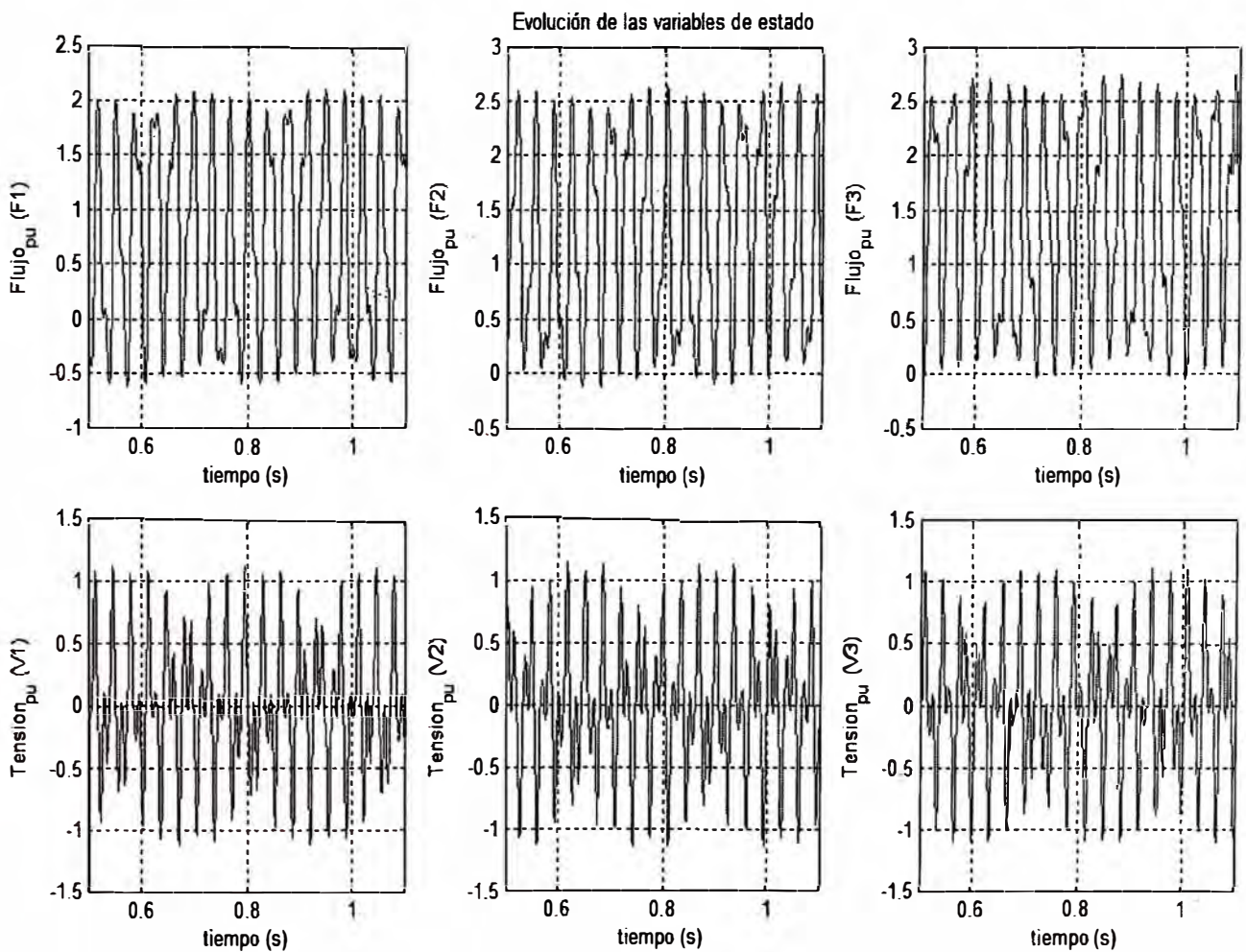


Figura 4.18 Evolución temporal de la tensión y flujo

### 4.3.2.2 Gráfico del plano de fase

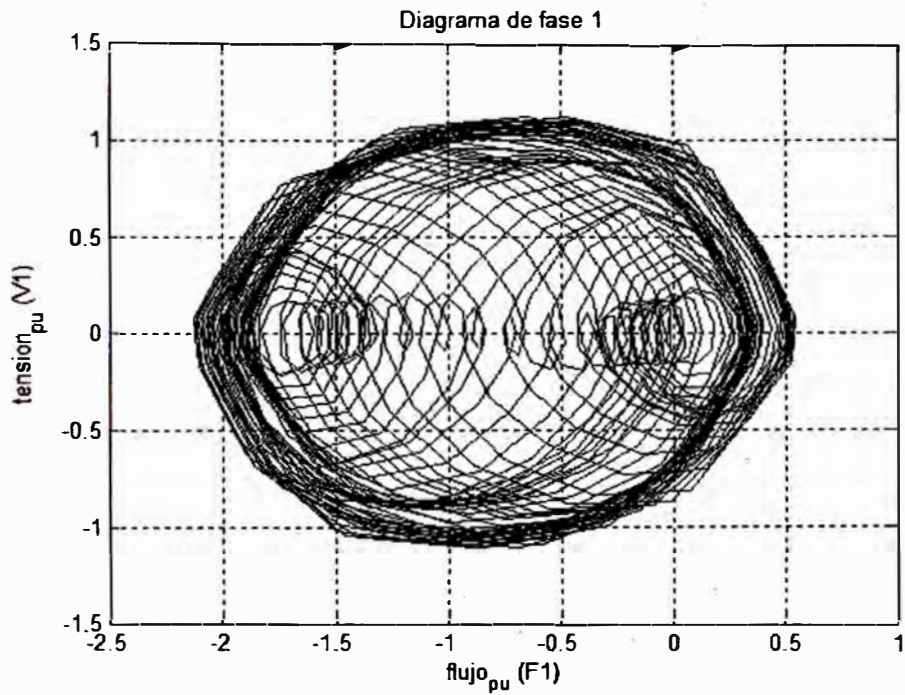


Figura 4.19 a) Plano de fase (Fase 1)

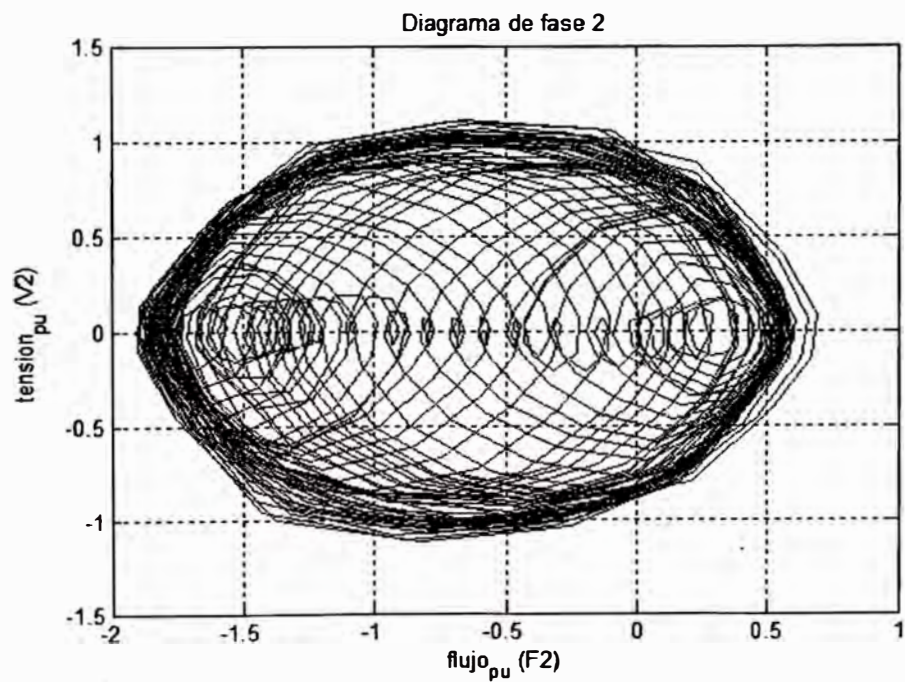


Figura 4.19 b) Plano de fase (Fase 2)

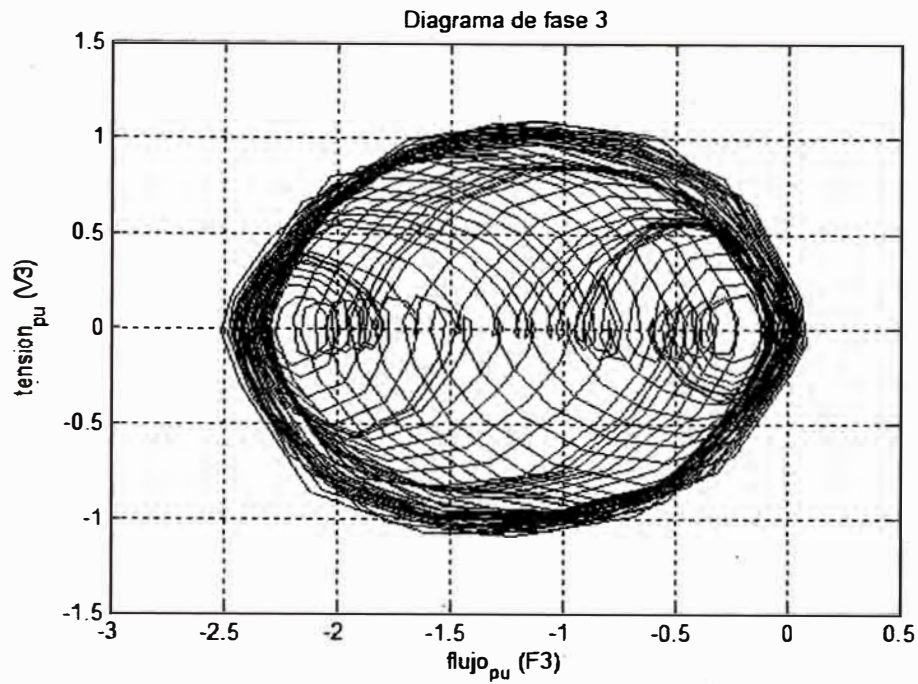


Figura 4.19 c) Plano de fase (Fase 3)

### 4.3.2.3 Gráfico del corte de Poincaré

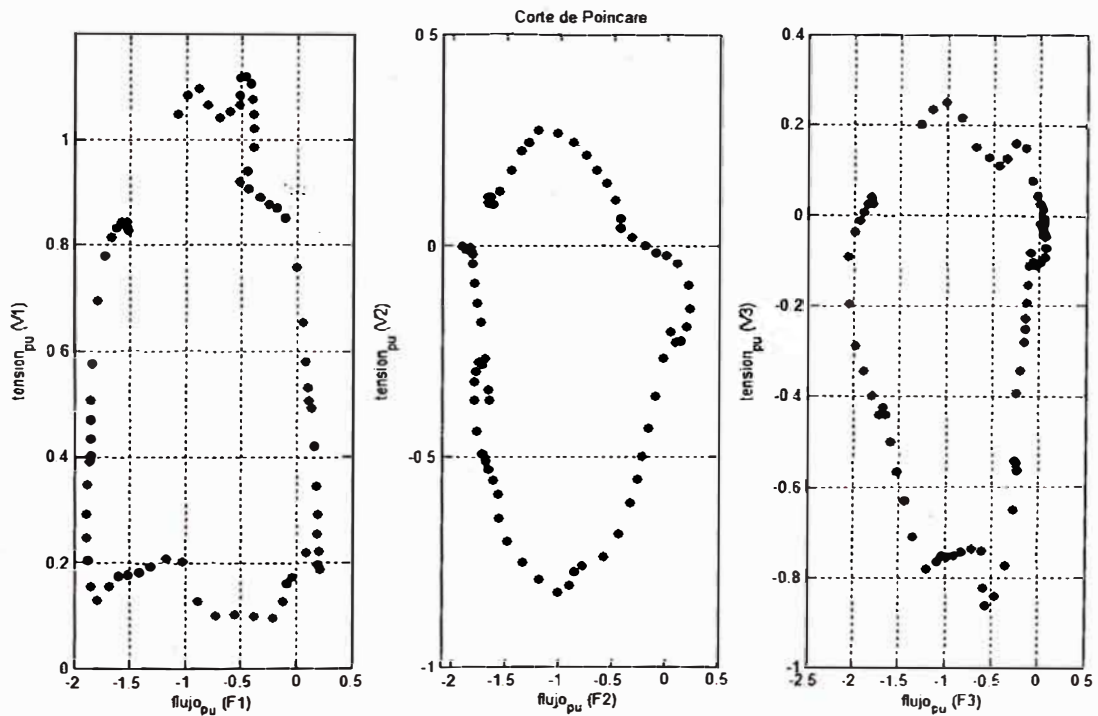


Figura 4.20 Cortes de Poincaré

### 4.3.2.4 Gráfico del mapa de Poincaré

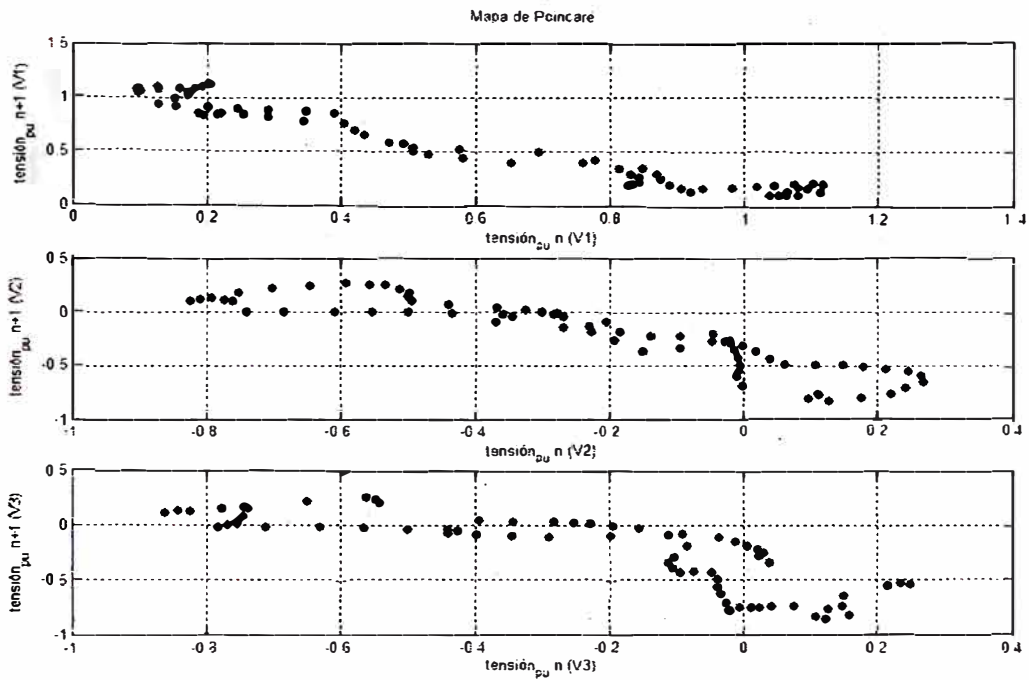


Figura 4.21 Mapas de Poincaré

### 4.3.2.5 Gráfico del espectro de Fourier (FFT)

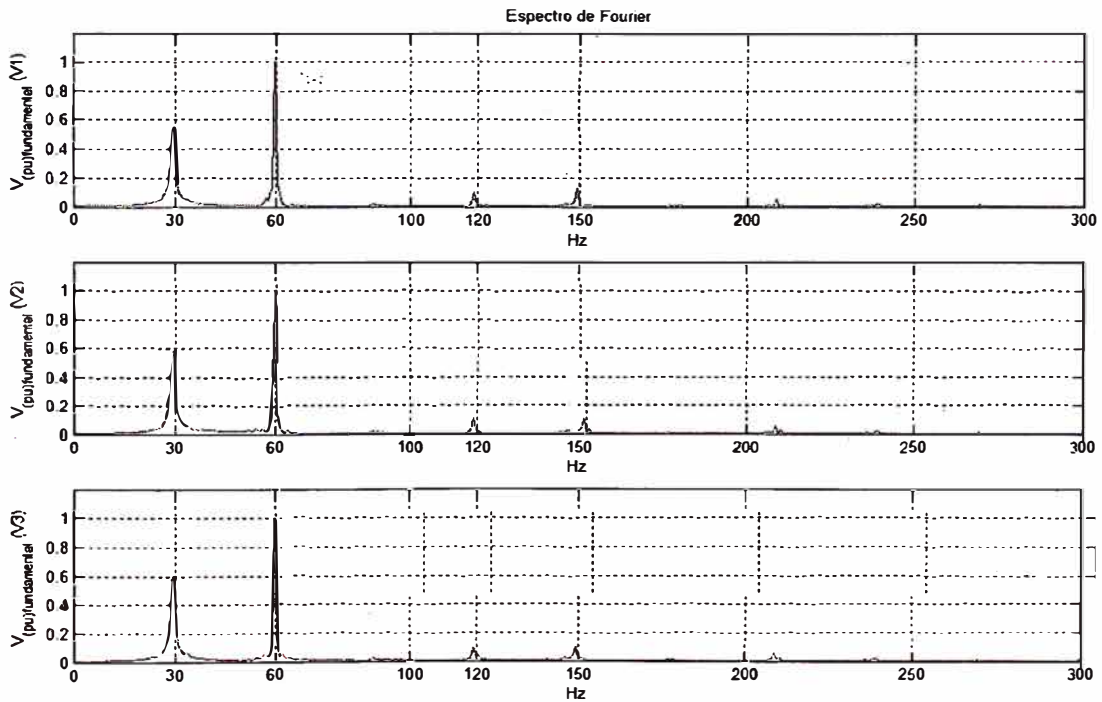


Figura 4.22 Espectros de Fourier

#### 4.3.2.6 Análisis de la oscilografía (caso 2)

De las oscilografías, figuras 4.16 a) y b), se observa claramente que la distorsión es solamente en la tensión (V). Lo cual es un indicio que la perturbación ocurre únicamente en el circuito de medida de tensión. Si este no fuera el caso y la perturbación tuviera lugar en los alimentadores de 10kV, la corriente (I) también debería mostrar distorsión de manera de cumplir la ley de Ohm ( $I = V / Z$ ). Las cargas del tipo domiciliario de las líneas tienen comportamiento aproximadamente lineal por lo que se puede decir que la impedancia  $Z$  es constante en el rango de ocurrencia del evento y en consecuencia la forma de onda de corriente depende únicamente de la tensión.

De la Figura 4.18, se puede notar que las formas de onda, sobre todo la tensión, se encuentran moduladas (obsérvese como varían los máximos y mínimos). El comportamiento modulado nos da a entender que la onda contiene por lo menos dos componentes principales: la lenta y envolvente y la rápida; cada una con su respectiva frecuencia asociada.

Del plano de fase (Figura 4.19) se observa que el gráfico es bastante complejo. Las trayectorias nunca se repiten pues existe siempre un ligero desplazamiento de puntos en cada vuelta.

En el plano de Poincaré (Figura 4.20) se observa que los puntos de corte claramente conforman una curva cerrada, por lo que se puede decir que este sería un caso de ferresonancia quasiperiódica.

El mapa de Poincaré (Figura 4.21) es algo indefinido en formar una curva cerrada en la fase V1. En la fase V2 se puede observar que existe cierta tendencia a formar una figura cerrada. Es la cercanía de la línea superior a la inferior en algunas partes lo que hace imprecisa la forma perimetral. En fase V3, sí se tiene claramente que el mapa es una curva cerrada. Ello nos permite deducir que una situación similar debe tenerse en las fases V1 y V2.

De este modo, se puede afirmar también que la ferresonancia presentada sería quasiperiódica.

Del espectro de frecuencia (Figura 4.22) se observa que el comportamiento del sistema estudiado, es en efecto, dominado por dos frecuencias principales: la normal de 60 Hz y la otra de 29.6134 Hz con un pequeño espectro continuo alrededor. La relación entre ambas frecuencias es aproximadamente un número irracional (0.4935566...), confirmando aún más la ferresonancia quasiperiódica.

### 4.3.3 Identificación de las configuraciones de riesgo

Debe verificarse si las tres siguientes condiciones necesarias pero no suficientes están presentes:

No	Condición	¿Se aplica?	Observaciones
1	Presencia simultánea de capacitancias con inductancias no lineales.	Si	Existen: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Capacitancias propias de las líneas de distribución L-01 y L-02 y las correspondientes al tramo AB del cable N2XSY</li> <li>• Inductancias no lineales de los transformadores de medida de tensión (TV-1).</li> </ul>
2	Existencia de al menos de un nodo cuyo potencial no es fijo.	Si	El devanado del transformador de distribución del cual se alimentan las cargas tiene configuración delta.
3	Componentes del sistema ligeramente cargados o fuentes de pequeña capacidad de cortocircuito.	Si	Se siguieron todas las indicaciones del fabricante para evitar ferresonancia en el transformador de medida pero quizás la carga conectada no sea suficiente.



El cumplimiento de las tres condiciones nos indica que estamos indefectiblemente ante un caso de ferresonancia y además, complementando con los resultados del análisis oscilográfico, que esta es del tipo quasiperiódica.

Confirmada la ferresonancia debe detectarse con la ayuda de los diagramas de bifurcación, cuál parámetro es el desencadenante y luego determinar los márgenes de su ocurrencia.

#### 4.3.4 Circuito Equivalente simplificado

Del diagrama unifilar de la Figura 4.15 se obtiene el circuito equivalente de la Figura 4.23, donde:

- La alimentación a través del transformador de distribución cuyo devanado es en delta, ha sido reemplazado por su equivalente Thevenin a través de tres generadores ideales AC conectados en estrella (Y) con el neutro flotante.
- Las capacitancias de la barra 10 kV, líneas distribución derivadas y el cable unipolar de alimentación hasta el punto de conexión del transformador TV-1 de tensión, están agrupadas en  $C_0$ .
- El transformador de medida está compuesto por tres transformadores monofásicos, por ende no hay acoplamiento inductivo entre fases.

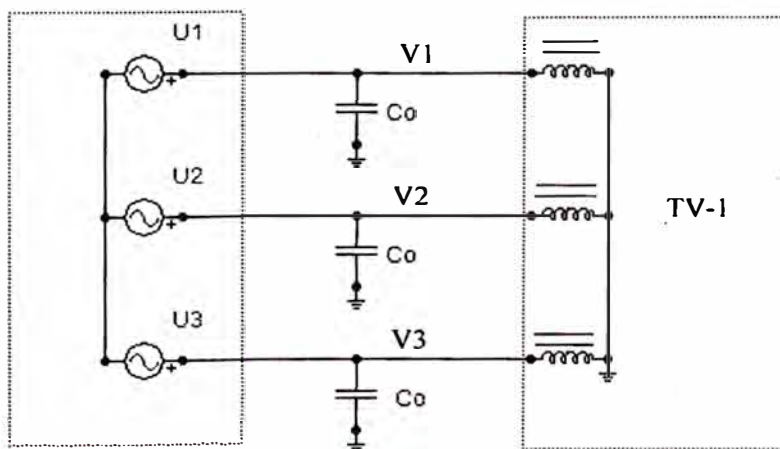


Figura 4.23 Circuito equivalente simplificado

Con algunas consideraciones, el circuito de la Figura 4.23, puede ser reducido al de la Figura 4.24 (ver la deducción en el Anexo 4.1). Este circuito permite una simplificación del número de ecuaciones diferenciales necesarias para representar su comportamiento, sin alterar las formas de onda en bornes del transformador [10].

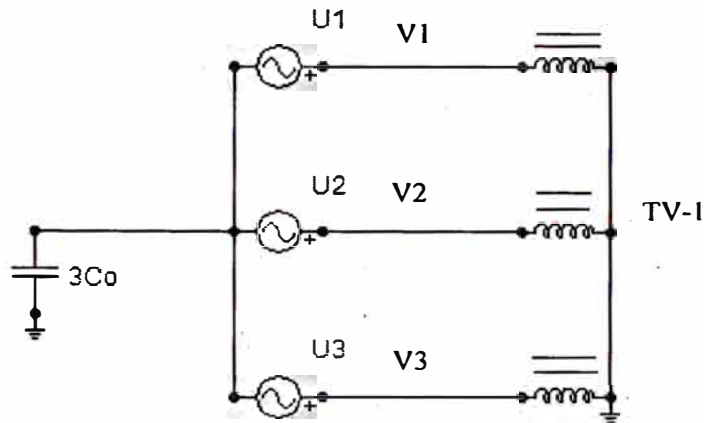


Figura 4.24 Circuito equivalente simplificado

En el circuito equivalente del transformador TV-1 de la Figura 4.24, se considerará por simplicidad solo elementos resistivos en los tres devanados. Las pérdidas del devanado primario serán representadas por la resistencia  $R_s$ ; la carga y pérdidas del secundario por  $R_t$ ; y la carga y pérdidas del terciario por  $R_d$ .

El comportamiento del núcleo es simulado por la resistencia  $R_n$  y una inductancia no lineal.

Las relaciones de transformación de los transformadores ideales son:

$$\frac{V_p}{V_s} = a_1 \text{ y } \frac{V_p}{V_t} = a_2, \text{ donde } V_p, V_s \text{ y } V_t \text{ son las tensiones nominales de cada devanado del transformador de medida en el lado primario, secundario y terciario respectivamente.}$$

transformador de medida en el lado primario, secundario y terciario respectivamente.

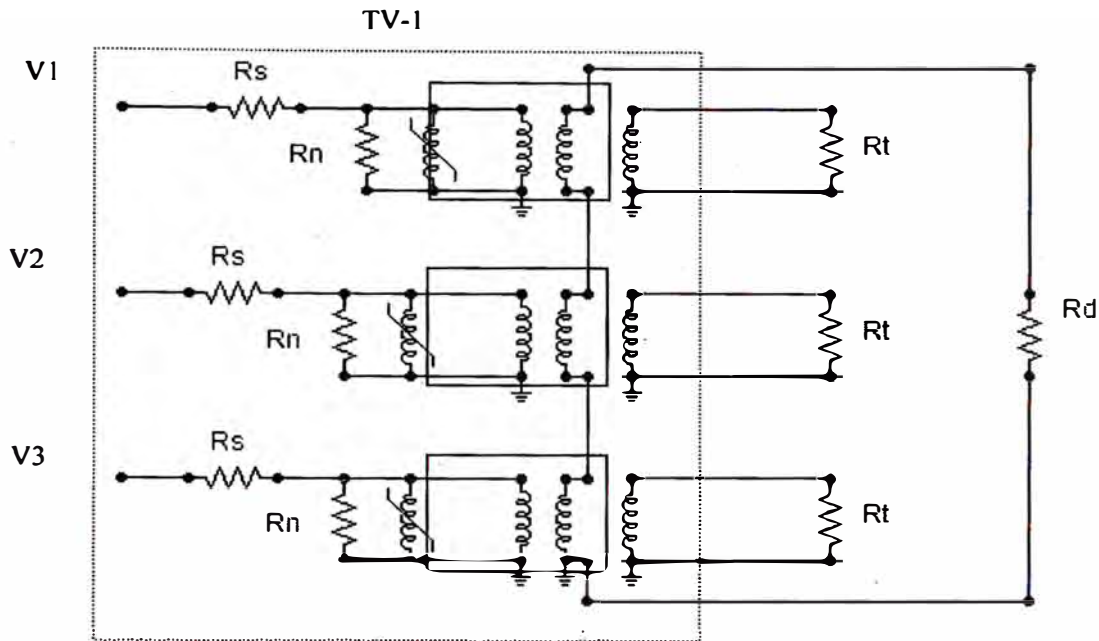


Figura 4.25 Circuito equivalente del transformador TV-1

### 4.3.5 Determinación de los parámetros del circuito equivalente

#### 4.3.5.1 Curva de magnetización

No fue factible obtener los datos del fabricante ni el protocolo de pruebas de recepción del transformador. Sin embargo, ello no desmerece el uso de una curva de magnetización de otro transformador. Al respecto es oportuno mencionar que no está dentro del objetivo de esta tesis reproducir el evento, sino, determinar si es ferresonancia mediante la aplicación de las herramientas expuestas en el capítulo 3; por ello se emplearán los datos de la tabla 4.2, que corresponden a los valores registrados en la prueba en vacío de un transformador de igual capacidad y tensión nominal.

Tabla 4.2 Datos de la prueba en vacío

Transformador	Unominal (pu)	Corriente Vacío (% corriente nominal)	Pérdidas (W)
TV-1	0.917	7.9872%	10.629
	1.000	10.9056%	15.736
	1.083	17.0496%	26.392

Con los datos de la tabla 4.2 se obtienen los coeficientes de la curva de magnetización (4.3) cuyo error residual es  $7.8824e-6$ .

$$i = 0.02216 * \varphi + 1.2023e - 005 * \varphi^{19} \quad (4.3)$$

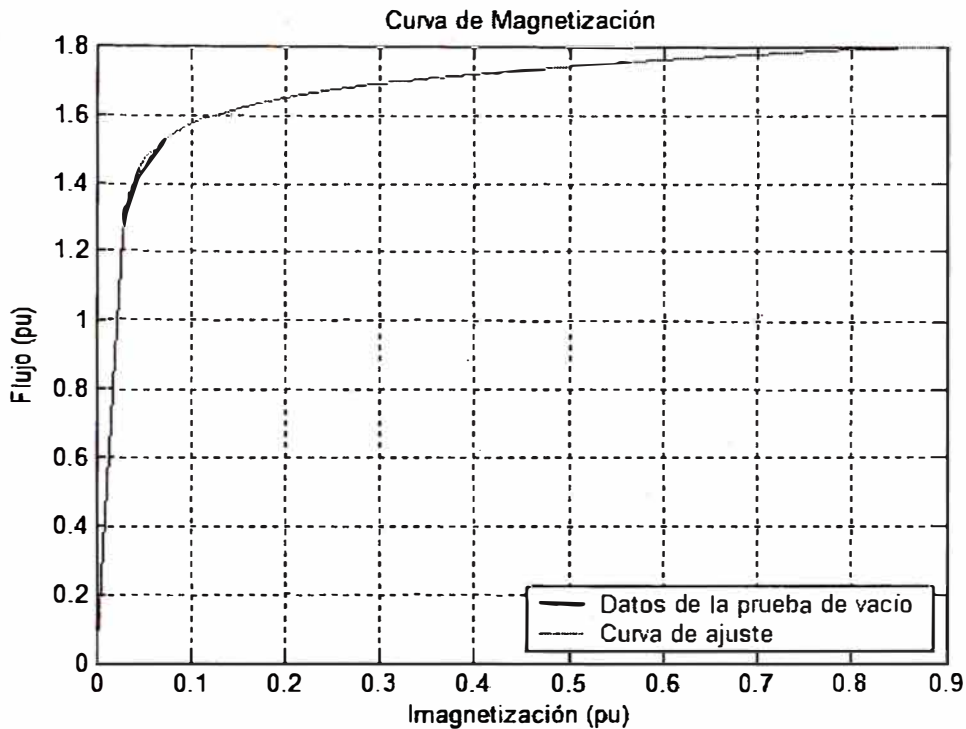


Figura 4.26 Curva de magnetización del transformador TV-1

#### 4.3.5.2 Parámetros del circuito equivalente

La máxima tensión ( $V_m$ ) de fase del sistema es:  $V_m = 10 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 8.165 \text{ kV}$

La capacitancia  $C_0$  se ha considerado en  $0.04 \mu\text{F}$ .

La resistencia  $R_n$  que emula las pérdidas del núcleo se obtiene de los resultados de la prueba de vacío, siguiendo el procedimiento explicado en 3.3.2.1 “Determinando la curva de magnetización”

Tensión Nominal (kV)	Corriente de excitación (mA RMS)	Potencia de Pérdidas (W)	Corriente de pérdidas (mA)	$R_n$ (Ohms)
5.7735	2.83	15.74	2.73	2118275

De la medición de resistencia del arrollamiento primario se obtuvo  $R_s = 417$  Ohmios.

La resistencia equivalente del devanado secundario es 400 Ohmios y corresponde a un consumo de 8.3 VA por fase.

La resistencia de amortiguamiento ferroresonante  $R_d$  se considera la indicada por el fabricante y es 22 Ohmios.

#### 4.3.6 Ecuaciones diferenciales del sistema

Tomando en cuenta las figuras 4.24 y 4.25 se halla el sistema de ecuaciones diferenciales cuya deducción se presenta en el anexo 4.2.

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} \\ \frac{R_s}{R_d} & 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} \\ \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} & 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - R_s.i_1(\phi_1) - u_n \\ u_2 - R_s.i_2(\phi_2) - u_n \\ u_3 - R_s.i_3(\phi_3) - u_n \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$i_1(\phi_1) + i_2(\phi_2) + i_3(\phi_3) + \left(\frac{1}{R_p} + \frac{3}{R_d}\right)\left(\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_3}{dt}\right) - 3C_o \frac{du_n}{dt} = 0$$

Donde:

$u_1, u_2$  y  $u_3$  son las tensiones de la red

$i_1, i_2$  y  $i_3$  son las corrientes por las inductancias no lineales

$\phi_1, \phi_2$  y  $\phi_3$  son los flujos en cada transformador monofásico.

$$R_p = \frac{R_n * a_1^2 * R_t}{R_n + a_1^2 * R_t}$$

El sistema (4.4) puede llevarse a la forma canónica empleando la transformación normalizada de Clarke [10].

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} v_0 \\ v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Donde v puede ser: u, i ó  $\phi$

De este modo se obtiene el sistema (4.6):

$$\begin{bmatrix} \frac{d\phi_0}{dt} \\ \frac{d\phi_\alpha}{dt} \\ \frac{d\phi_\beta}{dt} \\ \frac{du_n}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{u_0(t) - R_s i_0 - \sqrt{3}u_n}{1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{3R_s}{R_d}} \\ \frac{u_\alpha(t) - R_s i_\alpha}{1 + \frac{R_s}{R_p}} \\ \frac{u_\beta(t) - R_s i_\beta}{1 + \frac{R_s}{R_p}} \\ - \left( u_n - \frac{i_0}{\sqrt{3}} \left( \frac{R_p R_d}{R_d + 3R_p} \right) \right) \\ C_0 \left( \frac{R_p R_d}{R_d + 3R_p} + R_s \right) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Con la aplicación de (4.5) a las tensiones de red (4.7) se obtiene (4.8).

$$\begin{aligned} u_1 &= V_m \cos \omega t \\ u_2 &= V_m \cos(\omega t + 120^\circ) \\ u_3 &= V_m \cos(\omega t - 120^\circ) \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 \\ u_\alpha &= V_{LL} \cos \omega t \\ u_\beta &= V_{LL} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Donde  $V_{LL}$  es la tensión RMS de línea y es  $V_{LL} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} V_m$  (kV)

#### 4.3.7 Diagramas de Bifurcación

Para el sistema 4.6 se obtienen los diagramas de bifurcación correspondientes, con los métodos de Fuerza Bruta y Continuación.

### 4.3.7.1 Variando el nivel de tensión

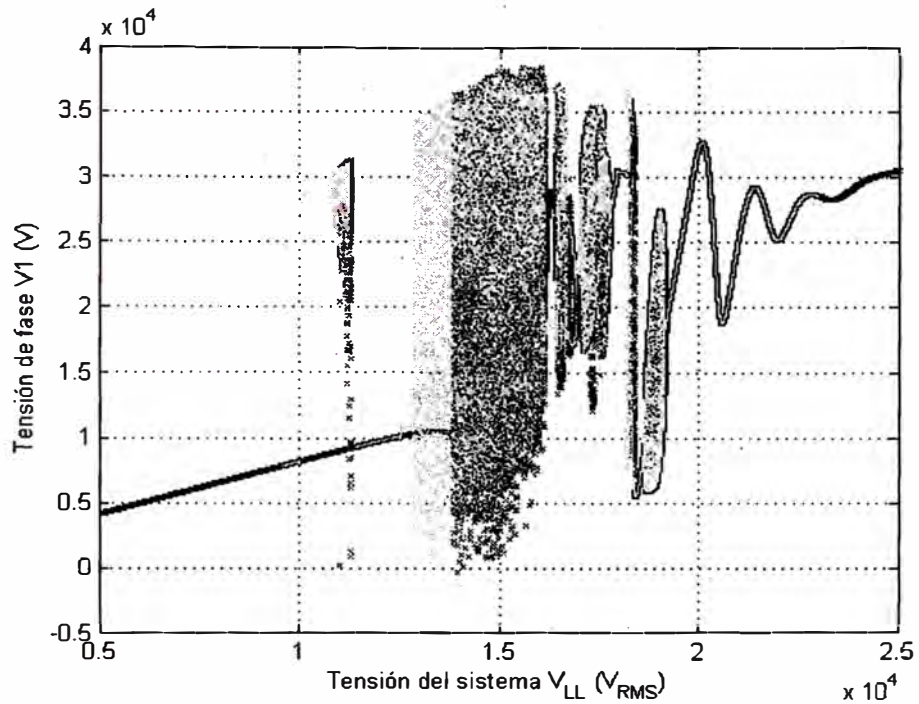


Figura 4.27a Tensión de la fase V1 variando  $V_{LL}$  [5-25kV] (Método de la Fuerza Bruta)

Con la finalidad de observar mejor la figura 4.27a se realizarán ampliaciones por zonas del diagrama presentado.

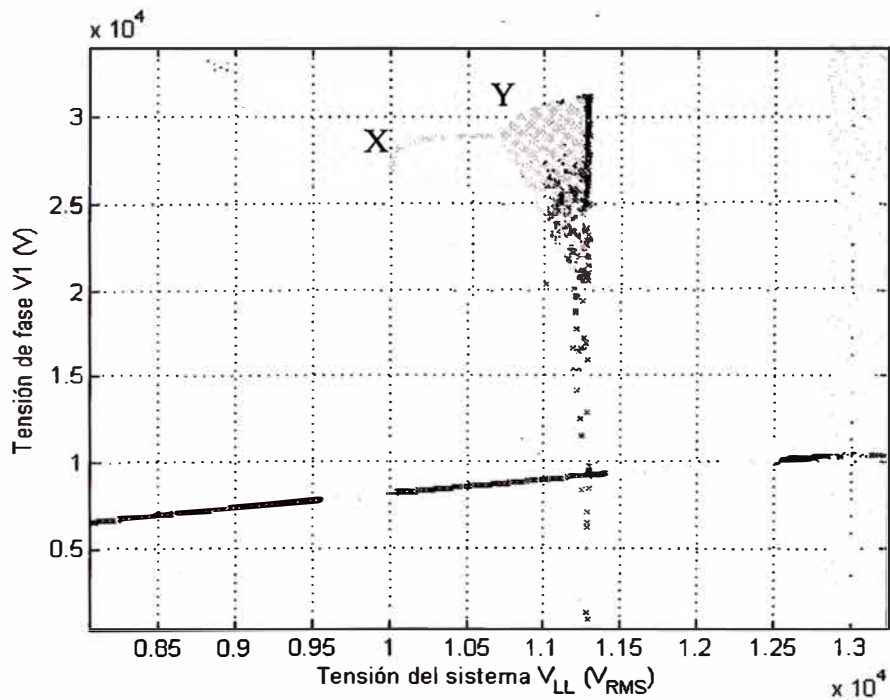


Figura 4.27b Tensión de la fase V1 variando  $V_{LL}$  [8-13.5kV]  
(Método de la Fuerza Bruta)

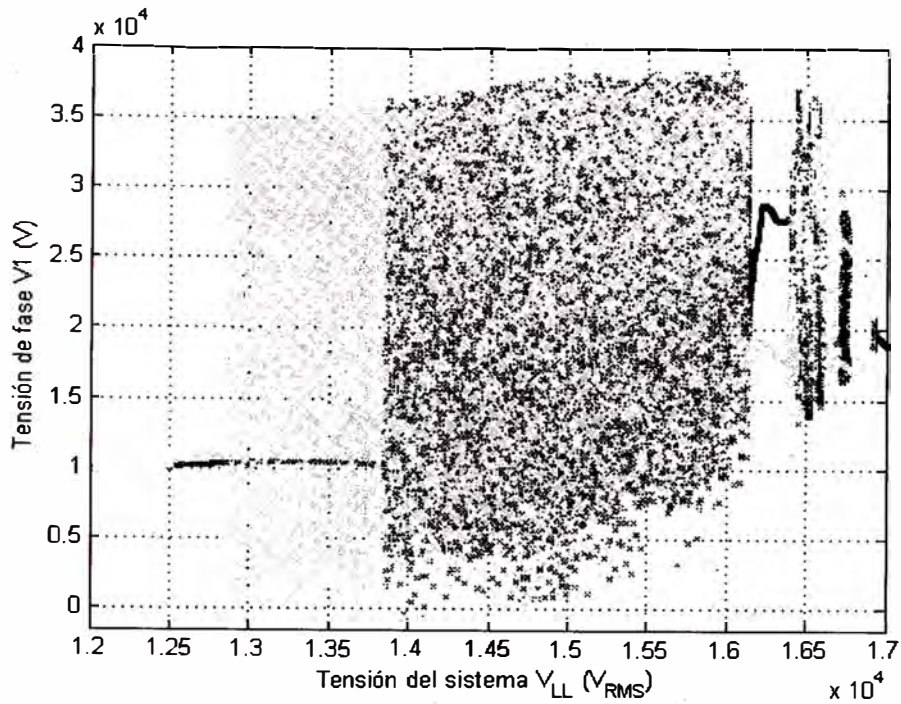


Figura 4.27c Tensión de la fase V1 variando  $V_{LL}$  [12-17kV]  
(Método de la Fuerza Bruta)

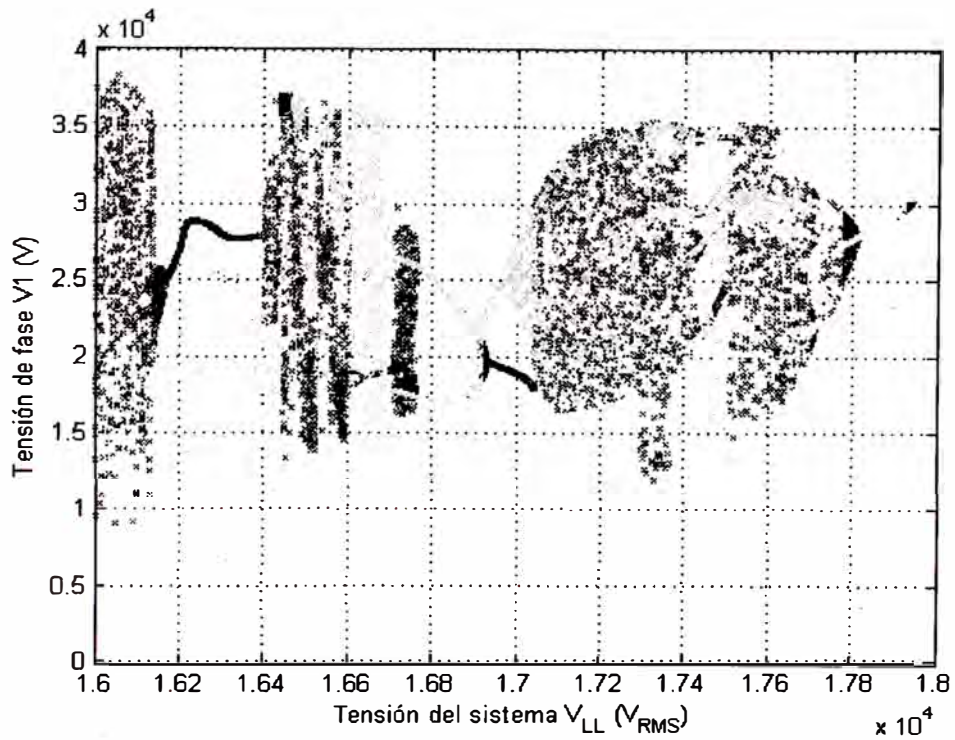


Figura 4.27d Tensión de la fase V1 variando  $V_{LL}$  [16-18kV]  
(Método de la Fuerza Bruta)



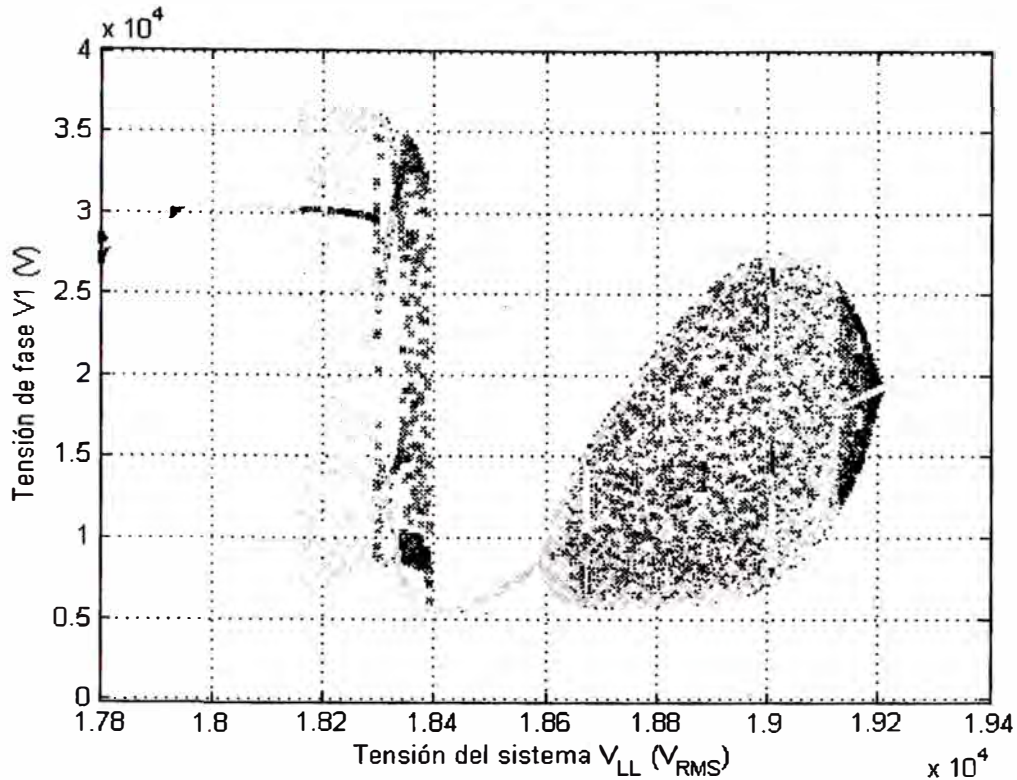


Figura 4.27e Tensión de la fase V1 variando  $V_{LL}$  [17.8-19.4kV]  
(Método de la Fuerza Bruta)

Al observar las figuras 4.27 a, b, c, d, y e se puede ver la gran complejidad del diagrama de bifurcación. Esta intrincada variabilidad tácitamente también permite deducir lo dificultosa que conlleva su determinación con el método de continuación. Sin embargo, se puede pasar por alto la obtención del diagrama completo y, tan solo, obtener el ramal que presenta el primer salto ferrosesonante, tal como se muestra en la Figura 4.28 donde la línea delgada indica estados “estables” y la gruesa “inestables”. Se han graficado los valores de la norma L2 en vista que esta agrupa el comportamiento de todas las variables de estado.

Este diagrama guarda similitud con el obtenido con el método de la fuerza bruta pues el segmento BC de periodos ferrosesonantes estables entre 10 y 10.75 kV corresponde al XY de la Figura 4.27b.

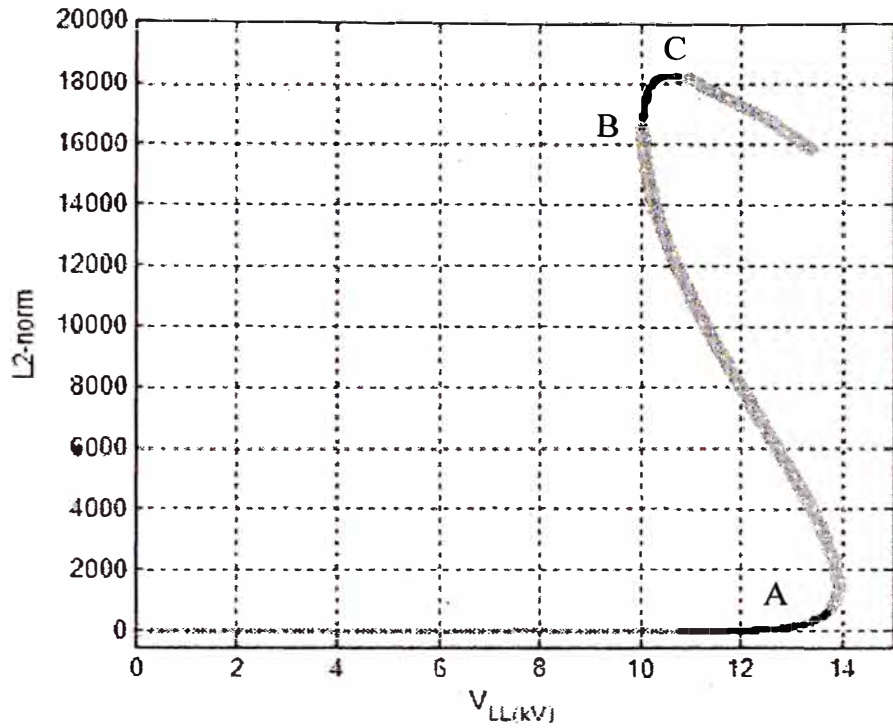


Figura 4.28 L2-norm variando  $V_{LL}$  [0-14kV] (Método de Continuación)

### 4.3.7.2 Variando la capacitancia

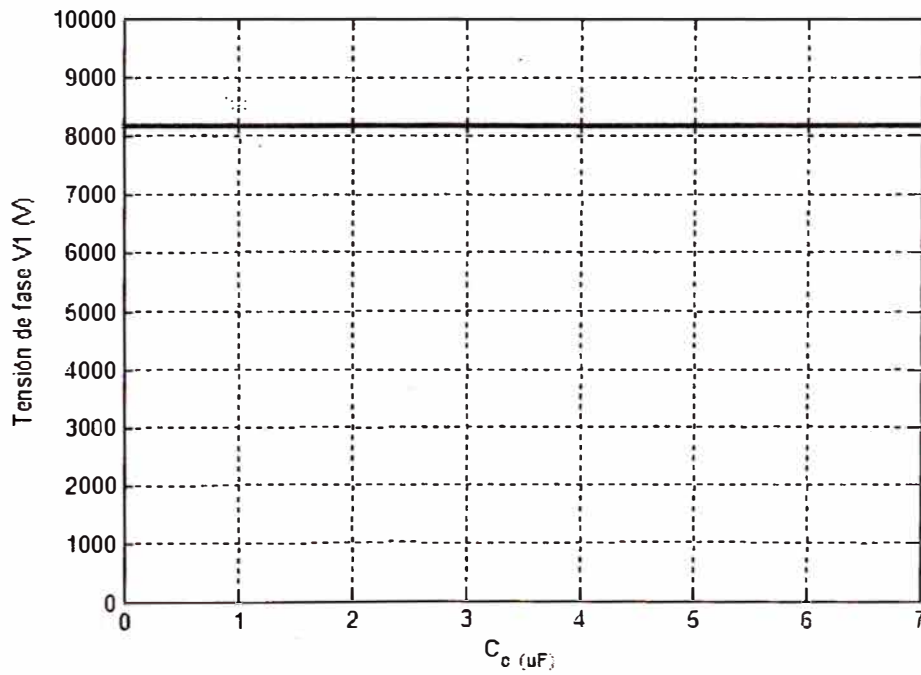


Figura 4.29 Tensión de la fase  $V_1$  variando  $C_0$  [0-7  $\mu\text{F}$ ] (Método de Fuerza Bruta)

### 4.3.7.3 Variando la carga

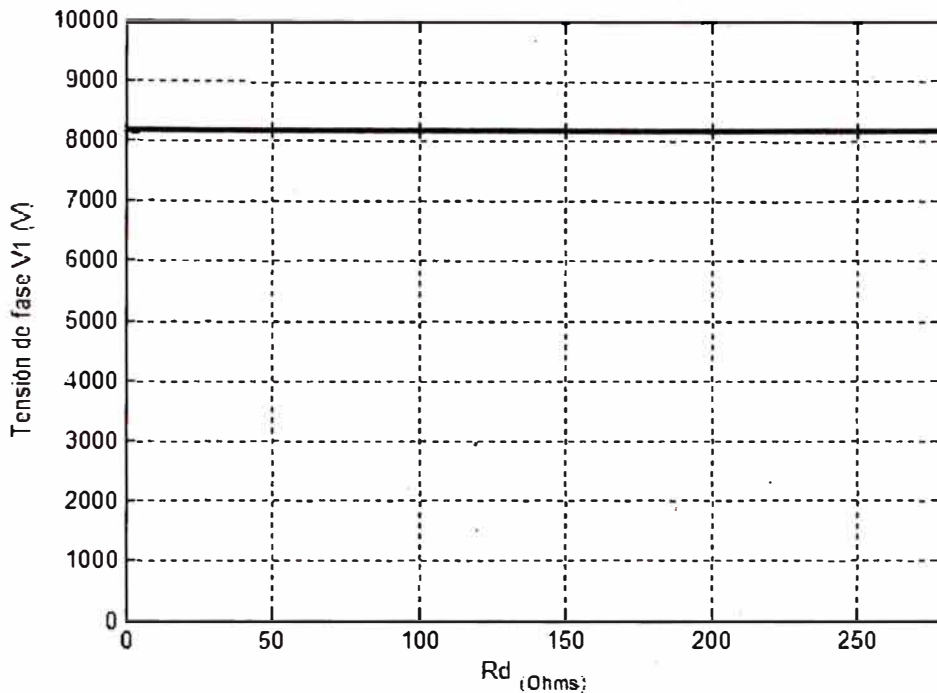


Figura 4.30 Tensión de la fase V1 variando Rd [0-280 Ohms] (Método de Fuerza Bruta)

### 4.3.7.4 Análisis de los diagramas

Del diagrama de bifurcación por tensión variando  $V_{LL}$  (Figura 4.28) se observa que existe el tramo BC de estados ferroresonantes estables, cuyo valor de  $V_{LL}$  en el punto B es 10.02 kV. Este valor es bastante próximo a 10 kV (tensión nominal de sistema) y por ende la ferroresonancia es inminente. Solo es necesario que la tensión sea mayor a 10.02 kV y estén reunidas las condiciones iniciales necesarias para que el salto ferroresonante se produzca y el sistema se estabilice en un punto del segmento BC.

Del diagrama de bifurcación “variando la capacitancia  $C_0$ ” (Figura 4.29), se observa que no existe ningún punto de ferroresonancia para algún valor de la capacitancia  $C_0$  con  $V_{LL}=10$  kV y  $R_d=22$  Ohmios

Del diagrama de la Figura 4.30, obtenido variando la carga, se observa que tampoco existe estado ferroresonante para ningún valor de la resistencia de amortiguamiento  $R_d$  con  $V_{LL}=10$  kV y  $C_0=0.04 \mu\text{F}$ .

Finalmente, de los tres diagramas observados se concluye que solo aparecerá ferroresonancia cuando exista una variación de tensión del sistema.

La mayor atención debe centrarse en el punto B de la Figura 4.28, pues es el primer punto de estados ferroresonantes estables y es necesario observar como es afectado por los parámetros. A manera de ilustración se obtienen los diagramas de bifurcación del punto B variando  $C_0$  (Figura 4.31) y  $R_d$  (Figura 4.32)

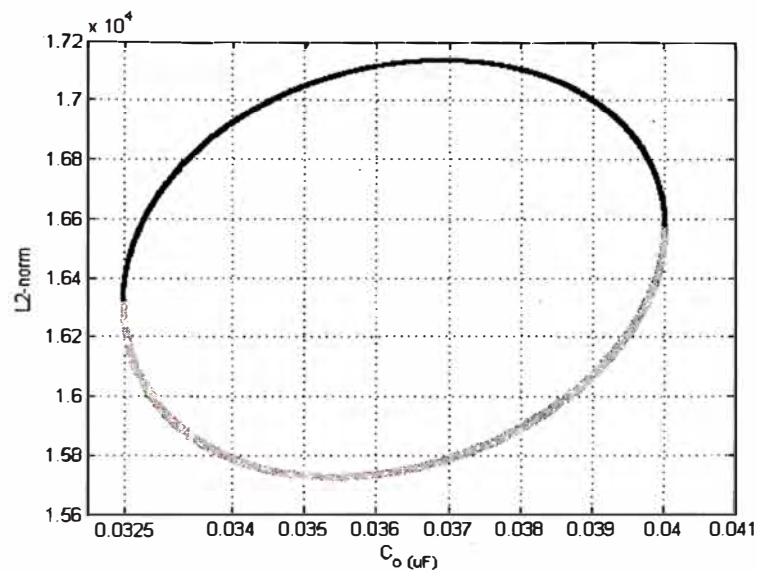


Figura 4.31 Diagrama de bifurcación del punto B variando  $C_0$

(Método de Continuación)

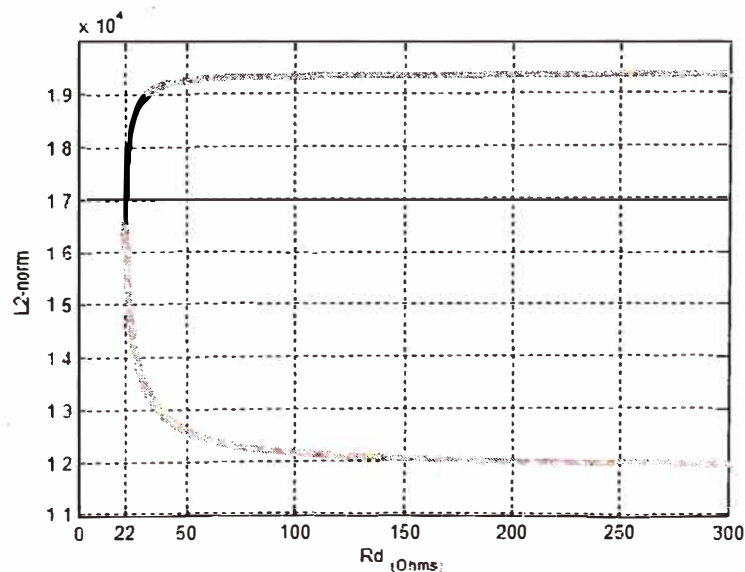


Figura 4.32 Diagrama de bifurcación del punto B variando  $R_d$

(Método de Continuación)

El diagrama del punto B (Figura 4.31), es una curva cerrada (“isla” en el argot de los diagramas de bifurcación) donde la línea delgada superior muestra los estados estables y la gruesa inferior los inestables. De este modo para una capacitancia  $C_0$  entre 32.5 y 40 nF,  $V_{LL}=10.02$  kV y  $R_d=22$  Ohmios se tienen dos posibles estados: estable e inestable.

De otro lado, del diagrama de la Figura 4.32, obtenida con  $V_{LL}=10.02$  kV,  $C_0=0.04$   $\mu$ F y variando la resistencia de amortiguamiento  $R_d$ , se observa que para valores mayores a 22 Ohmios existen dos ramales posibles de valores. El inferior que tiene solo estados inestables y el superior donde existe un segmento entre 22 y 31.47 Ohmios de estados estables.

#### **4.3.7.5 Determinación de los márgenes de operación**

Un gráfico importante es el lugar geométrico del punto B en el plano  $V_{LL}$  y  $C_0$  y manteniendo constante  $R_d$  en 22 Ohmios (50.5 VA). Este se obtiene liberando el parámetro  $C_0$ , durante el cálculo de bifurcación con el programa XPPAUT. El área interior de la curva obtenida comprende todos los puntos posibles de ferresonancia cuando la carga es disminuida ( $R_d > 22$  Ohmios). De allí, su nombre de área de riesgo. La forma gráfica determinada se presenta en la Figura 4.33 y se observa que también es una “isla”. Se tienen dos puntos extremos: M cuyos valores de parámetros justamente son  $(V_{LL}, C_0, R_d) = (10.02$  kV,  $0.04$   $\mu$ F,  $22$  Ohmios) y N con  $(V_{LL}, C_0, R_d) = (15.96$  kV,  $0.4184$   $\mu$ F,  $22$  Ohmios). De este modo, si se quisiera eliminar la posibilidad de ocurrencia de ferresonancia del transformador manteniendo la carga constante ( $R_d=22$  Ohmios) se deberá evitar que la tensión de la red sea mayor a 10.02 kV y que la capacitancia  $C_0$  jamás tome valores entre 40 y 418.4 nF.

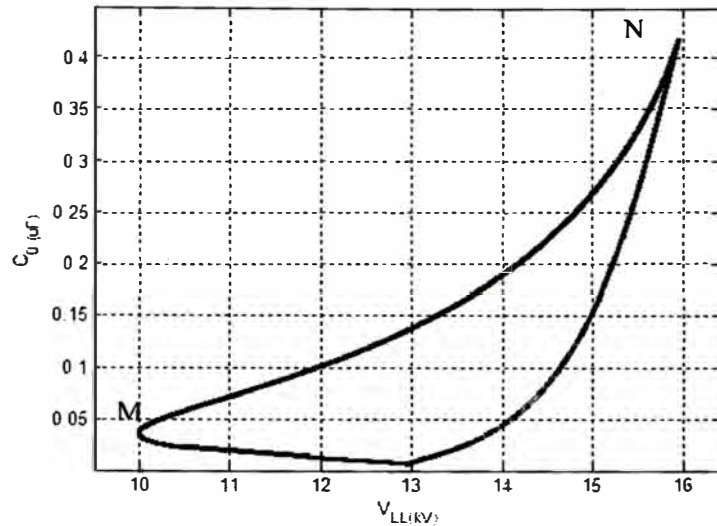


Figura 4.33 Región de estabilidad  $V_{LL}$  versus  $C_0$  para  $R_d=22$  Ohmios

Otra área de riesgo es aquella que se presenta en el plano  $V_{LL}$  y  $R_d$  y suponiendo que  $C_0$  se mantiene constante. La figura 4.34 presenta los resultados obtenidos. En dicho gráfico, todas las combinaciones de valores de  $R_d$  y  $V_{LL}$  por encima de la curva provocan ferresonancia. Los valores de  $V_{LL}$ ,  $C_0$  y  $R_d$  en el punto P son 14.27 kV, 0.04  $\mu F$  y 3.74 Ohmios respectivamente.

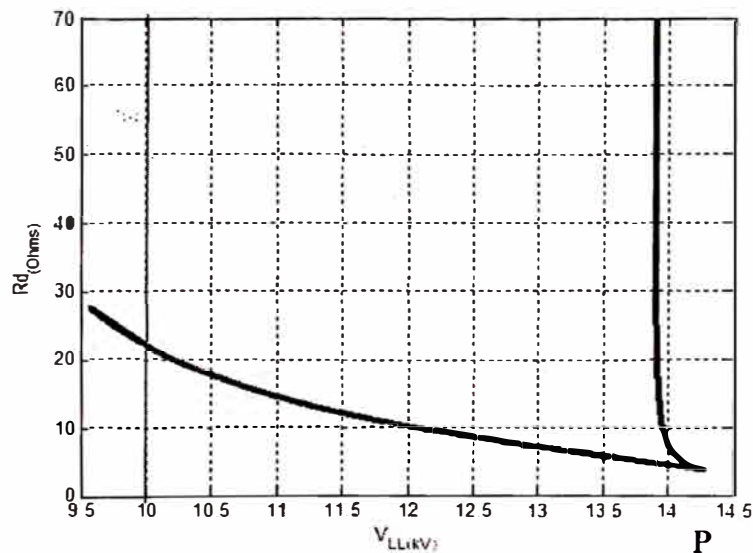


Figura 4.34 Región de estabilidad  $V_{LL}$  versus  $R_d$  para  $C_0=0.04$   $\mu F$

Seleccionando valores para  $R_d$  de 0.5, 2 y 3 Ohmios (menores a 3.74 Ohmios) y elaborando sus diagramas de bifurcación por tensión se obtiene la Figura 4.35. En donde, se puede observar que no hay ferresonancia a 10 kV como ocurría en el diagrama de la figura

4.28. Es decir se ha eliminado completamente el salto ferroresonante y ahora la transición de un estado a otro es continua

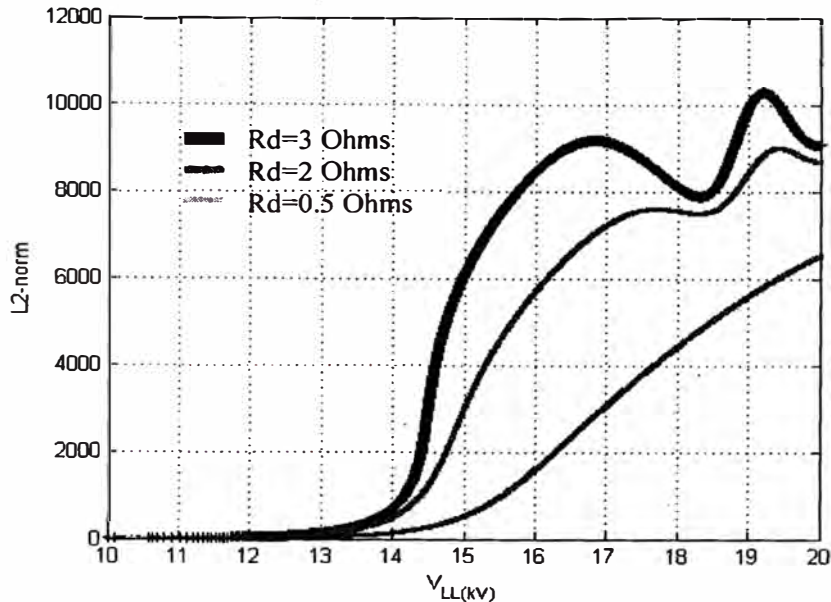


Figura 4.35 L2-norm variando V<sub>LL</sub> [10-20kV] y C<sub>0</sub>=0.04 μF

(Método de Continuación)

El siguiente paso es verificar la demanda que puede soportar el transformador. Para lo cual, debe hallarse la resistencia máxima que puede ser conectada en el devanado terciario.

Cada transformador VT que conforma TV-1, en el devanado terciario tiene tensión y potencia nominal de 100/3V y 100 VA respectivamente. Con lo cual, se obtiene que dicho devanado admite una resistencia de 11.11 Ohmios. Este valor de acuerdo a la Figura 4.34 elimina la ferroresonancia siempre y cuando la tensión no sea mayor a 11.8 kV. El margen con respecto a 10 kV es pequeño y por tanto la ocurrencia de ferroresonancia es todavía bastante posible. Se puede concluir entonces que no es factible eliminar completamente la posibilidad de ferroresonancia del transformador TV-1, debido a la limitación de capacidad de carga. Y la única opción sería recomendar su cambio por otro cuyo codo de saturación se encuentre más alejado del punto de operación nominal. Al respecto, un margen recomendado

en [26], es tomar el 150% del valor nominal. En ese caso deberíamos especificar un transformador VT cuya tensión nominal sea 15 kV.



# **CAPITULO 5**

## **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

### **5.1 Introducción**

Inicialmente en este capítulo se plasman las conclusiones principales de este trabajo de tesis cuyos objetivos son a propósito nuevamente repetidos:

- Presentar un método que permita realizar el análisis de la presencia de ferresonancia en un transformador.
- Determinar los márgenes permitidos de los parámetros de red que eviten la operación ferresonante de un transformador.

Luego, se exponen las conclusiones secundarias que fueron obtenidas durante el desarrollo y análisis de los capítulos 3 y 4. Por último, se indican las recomendaciones para trabajos futuros que podrían derivarse de esta tesis.

### **5.2 Conclusiones**

De acuerdo a los objetivos planteados debe concluirse que:

- El método propuesto y basado en las herramientas HDNL permite realizar un correcto diagnóstico del tipo de ferresonancia presentada en un transformador. De este modo, para los casos reales presentados en el capítulo 4, se determinó luego de la evaluación que solo uno correspondía a ferresonancia. El diagnóstico se inicia obteniendo: el plano de fase, corte y mapa de Poincaré y espectro de Fourier. Luego, por asociación con las formas gráficas típicas del comportamiento ferresonante, se determina la posible ocurrencia o no de un cierto tipo de ferresonancia. A continuación, en caso el diagnóstico no fuera concluyente, se verifica si existen configuraciones de riesgo para su ocurrencia. En algunas situaciones, sobre todo donde la ferresonancia es del tipo fundamental, pudieran estar teniendo lugar otros fenómenos que ocurren en los sistemas eléctricos tales

como la resonancia eléctrica; de allí que se hace necesario realizar un descarte y continuar con la construcción de los diagramas de bifurcación. Los cuales, finalmente permiten determinar los distintos comportamientos que puede tener el circuito eléctrico ante la variación de sus parámetros.

- Con el método propuesto fue factible determinar, en base a las áreas de riesgo, los márgenes de operación normal y ferroresonante de un transformador. Dichas áreas de riesgo son obtenidas determinando inicialmente el primer punto ferroresonante estable y, liberando luego dos parámetros para el proceso de continuación. La curva obtenida delimita todas las combinaciones ferroresonantes de los dos parámetros seleccionados o, lo que es lo mismo, el área de riesgo. Luego de determinadas todas las áreas, se pueden indicar los márgenes de los parámetros de red que establecen la operación normal y ferroresonante del transformador.

A lo largo de este trabajo también fueron obtenidas otras conclusiones adicionales. Así, del capítulo 3 se tiene las siguientes:

- Las herramientas gráficas de la dinámica no lineal basadas en las formas de onda, plano de fase, corte de Poincaré, mapa de Poincaré y espectro de Fourier permiten identificar los tipos de comportamientos ferroresonantes que puede tener un circuito no lineal, mediante la comparación de sus formas gráficas resultantes, con las formas típicas de la ferroresonancia fundamental, subarmónica, quasiperiódica y caótica
- Para el registro de las formas de onda, debe elegirse siempre una frecuencia de muestreo que sea múltiplo de la frecuencia del circuito. Tanto en la situación donde se van a resolver ecuaciones diferenciales de un caso teórico como en la oscilografía de un caso real. De este modo, no será necesario realizar un tratamiento previo de los datos para obtener el corte y mapa de Poincaré.

Adicionalmente, para caso teóricos existe la opción de normalizar el periodo y frecuencia a 1, haciendo el cambio de variable del tiempo  $t$  a  $\tau/f$

- Los diagramas de bifurcación son herramientas importantes para conocer el tipo de comportamiento que presenta una variable de estado cuando varía un parámetro de un circuito eléctrico. Con todos los parámetros linealmente independientes se puede formar un sistema coordenado rectangular entre ellos y la variable de estado. En este caso, los diagramas de bifurcación son los puntos de intersección del plano formado por la variable y un parámetro y el sólido. cuya superficie representa a todos los valores posibles que dicha variable de estado puede tener variando todos los parámetros del sistema. Gráficamente se pueden observar dos tipos de comportamiento: estable e inestable. El estado estable es producto de la intersección descrita y el inestable es la proyección de un pliegue formado por la superficie del sólido sobre el plano del parámetro. Además, los diagramas de bifurcación también permiten certificar que un circuito no lineal puede tener varios estados estable (normales y ferroresonantes) para ciertos valores de un mismo parámetro.
- Los métodos Fuerza Bruta y Continuación obtienen diagramas de bifurcación similares en los puntos donde el comportamiento del circuito eléctrico es estable. El primero resalta por su sencillez y rapidez de evaluación pero no presenta los estados inestables, y el segundo por su precisión y sí muestra todos los estados estables e inestables. Ambos métodos pueden ser implementados en el programa XPPAUT.

Del capítulo 4:

- Los métodos de Fuerza Bruta y Continuación pueden trabajarse complementariamente para evaluar un diagrama de bifurcación complejo. Con el primero se logra tener una visión preliminar del comportamiento del sistema y sirve de ayuda para verificar el diagrama por Continuación. Este último, además puede determinar nuevas condiciones iniciales que pueden servir para obtener a su vez nuevos ramales en el diagrama de Fuerza Bruta. Este procedimiento ahorra tiempo en la obtención del diagrama completo, pues obtener el diagrama por continuación implica tener cierta destreza al seleccionar adecuadamente el estado inicial y el paso de iteración; más aún, cuando en algunas circunstancias no se detectan los puntos de bifurcación, dando cierta incertidumbre al diagrama obtenido. De allí la importancia de trabajar con ambos métodos.

### **5.3 Sugerencias para futuros trabajos**

Algunos trabajos pendientes en esta tesis son:

- Implementar el método de balance armónico [14] para realizar el análisis de estados ferrosesonantes de un transformador. Dicho método es considerado uno de los más prominentes para la evaluación de ferrosesonancia.
- Implementar un método para la determinación del exponente de Lyapunov de manera de medir el nivel de inestabilidad de un comportamiento ferrosesonante caótico en un circuito.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. "Modeling and Analysis Guidelines for Slow Transients- Part III: The Study of Ferroresonance", M. R. Iravani, A. K. S. Chaudhary, W. J. Giesbracht, I. E. Hassan, A. J. F. Keri, K. F. C Lee, J. A. Martinez, A. S. Morched, B. A. Mork, M. Parniani, A. Sharshar, D. Shirmohammadi, R. A. Walling and D. A. Woodford, IEEE Transaction On Power Delivery, Vol. 15, No1, January 2000.
2. "Investigation of Station Service Transformer Ferroresonance in Manitoba Hydro's 230 kV Dorsey Converter Station", D.A.N. Jacobson and R.W. Menzies, IPST '2001, June 2001
3. "Application of Nonlinear Dynamics and Chaos to Ferroresonance in Distribution Systems", B.A. Mork, D.L. Stuehm, IEEE Transaction On Power Delivery, Vol. 9, No. 2, April 1994
4. "Ferroresonance in Power Systems: Chaotic Behavior", A.E.A. Araujo, A.C. Soudack, J.R. Marti, IEE Proceedings-C, Vol.140, No.3, May 1993
5. "Characterization of Ferroresonant Modes in HV Substation with CB Grading Capacitors", M. Val. Escudero, I. Dudurych, M.A. Redfern, IPST05-146, June 2005.
6. "Chaos in ferroresonante wound voltage transformers: effect of core losses and universal circuit behaviour", B.A.T. Al Zanawi, Z. Emin y Y.K. Tong, IEE Proceedings, Vol. 145, No 1, January 1998.
7. " Application of the bifurcation theory in studying and understanding the global behavior of a ferroresonance electric circuit", G. Kieny, IEEE Transaction on Power Delivery, Vol. 6, No.2, April 1991
8. "Ferroresonance", P. FERRACCI, Artículo Técnico nº 190, Groupe Schneider, March 1998.

9. "Analysis of a Ferroresonant Circuit Using Bifurcation Theory and Continuation Techniques", Frank Wornle, David K. Harrison and Chengke Zhou, Transactions On Power Delivery, Vol 20, No. 1, January 2005.
10. "Bifurcation Analysis of Three-Phase Ferroresonant Oscillations in Ungrounded Power Systems", T. Van Craenenbroeck, W. Michiels, D. Van Dommelen, K. Lust, Transactions On Power Delivery, Vol 14, No.2, April 1999.
11. "Analysis of Ferroresonant Circuits using a Newton-Raphson Scheme", S. R. Naidu, B. A. Souza, Transactions on Power Delivery, Vol. 12, October 1997.
12. "Five - Legged Wound-Core Transformer Model: Derivation, Parameter, Implementation and Evaluation", B.A. Mork, Transactions on Power Delivery, Vol. 14, October 1999.
13. "Analysis of Ferroresonance in Three-Phase Transformers", Bernard C. Lesieutre, Jama A. Mahamed, Aleksandar M. Stankovic, IEEE PowerCon 2000, Vol. 2, Dec. 2000.
14. "Ferroresonance in Power Systems: Fundamental Solutions", J.R. Marti, A.C. Soudack, IEE Proceedings-C, Vol.138, No.4, July 1991
15. "Application of PSCAD/EMTDC and Chaos Theory to Power System Ferroresonance Analysis", P. Sakarung, S. Chatratan, IPST05-227, June 2005.
16. "Modeling Ferroresonance Phenomena in an Underground Distribution System", S. Santoso, R. Dugan, T. Grebe, P. Nedwick, The International Power System Transients Conference-IPST 2001, Rio de Janeiro, Brazil, June 2001.
17. "Analytical Prediction of Sub harmonic Oscillations in a Ferroresonant Circuit", Rajesh G. Kavasseri, Department of Electrical and Computing Engineering North Dakota State University, USA, Proc. 35th North American Power Symposium, Rolla, Missouri, October 2003
18. "Linear Systems-A state Variable Approach with Numerical Implementation", Raymund A. DeCarlo, Prentice Hall, 1989.

19. "Chaos and Nonlinear Dynamics: An introduction for Scientists and Engineers", Second Edition, Robert C. Hilborn, Oxford University Press 2000.
20. "Examples of ferroresonance in a High voltage Power System", D.A.N. Jacobson
21. "Transformer Modeling for Low Frequency Transients – The State of the Art" , Juan A. Martinez\_Velasco, Bruce A. Mork, IPST '2003
22. "Teorema de Shannon", apuntes de Internet
23. "Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems- A Guide to XPPAUT for Researchers and Students", Bard Ermentrout, SIAM, 2002.
24. "Overvoltage control during restoration", M.M. Adibi, R.W. Alexander y B. Avramovic, Transactions On Power Systems, Vol.7, No 4, November 1992.
25. "Análisis de un caso de resonancia a frecuencia industrial en el sistema eléctrico Peruano", Francisco Torres G. y Yofré Jácome D., XVI CONIMERA 2005, artículo 46, setiembre 2005.
26. "Ferroresonance in a transformer switched with an EHV line", E. J. Dolan, D.A. Gillies and E.W. Kimbark, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, PAS-91, May 1972.
27. "An analytical investigation of a ferroresonante circuit", Maher S. Maklad and Moustafa M. Fahmy, IEEE Transactions on Magnetics, Vol Mag-16, N° 2, March 1980.
28. "An analytical approach to ferroresonance", Glenn W. Swift, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS-88, N° 1, January 1969.
29. "Performance of metal-oxide arresters exposed to ferroresonance in padmount transformers", R. A. Walling, R. K. Hartana, R.M. Reckard, M. P. Sampat, T. R. Balgie, IEEE Transactions on Power Delivery, Vol 9, N° 2, April 1994.

30. "Ferroresonance study using Galerkin method with pseudo-arc length continuation method", C. Kieny, G. Le Roy A. SBAI, IEEE Transactions On Power Delivery, Vol. 6, N° 4, October 1991.
31. "MATCONT and CL MATCONT: Continuation toolboxes in matlab", A. Dhooge, W. Govaerts, Yu.A. Kuznetsov, W. Mestrom, A.M. Riet and B. Sautois, December 2006, [www.matcont.ugent.be/manual.pdf](http://www.matcont.ugent.be/manual.pdf)
32. "AUTO-07P: continuation and bifurcation software for ordinary differential equations", Eusebius J. Doedel, Concordia University, Montreal, Canada, April 2006, [www.math.gatech.edu/~dieci/AUTO.ps](http://www.math.gatech.edu/~dieci/AUTO.ps).



## ANEXO 2.1

### TEORÍA DE FLOQUET

La teoría de Floquet es una parte de la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias relacionadas a un tipo de solución de las ecuaciones diferenciales de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (2.1.1)$$

Donde  $A(t)$  es una función periódica de periodo  $T$ .

El teorema de Floquet da una forma canónica para cada matriz solución fundamental del sistema lineal (2.1.1); establece un cambio de coordenadas  $y = Q^{-1}(t)x$  con  $Q(t+2T)=Q(t)$  que transforma el sistema periódico (2.1.1) en un sistema lineal tradicional con coeficientes constantes y reales. Las soluciones de las ecuaciones diferenciales forman un espacio vectorial.

Una matriz  $\varphi(t)$  es llamada solución matricial fundamental, si todas las columnas son soluciones linealmente independientes. Además, es llamada matriz fundamental principal en  $t_0$  si  $\varphi(t_0)$  es la matriz identidad. Debido a la existencia y unicidad de las soluciones existe una matriz fundamental principal  $\Phi(t_0) = \varphi(t) \varphi^{-1}(t_0)$  para cada  $t_0$ .

La solución de la ecuación diferencial lineal (2.1.1) con condición inicial  $x(0)=x_0$  es  $x(t) = \varphi(t) \varphi^{-1}(0)x_0$  donde  $\varphi(t)$  es cualquier matriz solución fundamental.

#### Teorema de Floquet

Si  $\varphi(t)$  es una matriz solución fundamental del sistema periódico  $\frac{dx}{dt} = A(t)x$ , donde

$A(t)$  es una función de período  $T$ , entonces para todo  $t \in \mathbb{R}$  se cumple:

$$\varphi(t+T) = \varphi(t) \varphi^{-1}(0) \varphi(T)$$

Adicionalmente para cada matriz  $B$  (posiblemente compleja) tal que  $e^{TB} = \varphi^{-1}(0)\varphi(T)$ , hay una función matricial periódica  $P(t)$  de periodo  $T$  tal que:

$$\varphi(t) = P(t)e^{tB} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

También, hay una matriz real MJ y una función matricial periódica Q(t) (periodo 2T) tal que:

$$\varphi(t) = Q(t)e^{t.MJ} \text{ para todo } t \in \mathbb{R}$$

### Consecuencias y aplicaciones

Este mapeo  $\varphi(t) = Q(t)e^{t.MJ}$  da lugar a un cambio de coordenadas dependientes del tiempo ( $y = Q^{-1}(t)x$ ), bajo los cuales el sistema original (2.1.1) se convierte en un sistema lineal con coeficientes constantes  $\frac{dy}{dt} = MJ.y$

Debido a que Q(t) es continua y periódica, es también acotada. De este modo la estabilidad de la solución cero para y(t) y x(t) es determinada por los eigenvalores de MJ.

La representación  $\varphi(t) = P(t)e^{tB}$  es denominada “**forma normal de Floquet**” para la matriz fundamental  $\varphi(t)$ .

Los eigenvalores de  $e^{TB}$  son llamados multiplicadores característicos del sistema. Son también los eigenvalores del mapa de Poincaré  $x(t) \rightarrow x(t+T)$ .

Un exponente de Floquet (llamado también exponente característico), es un número complejo  $\mu$  tal que  $e^{\mu t}$  es un multiplicador característico del sistema. Notar que los exponentes de Floquet no son únicos, dado que  $e^{\mu + \frac{2\pi ik}{T}} = e^{\mu}$ .

La parte real de los exponentes de Floquet son los llamados exponentes de Lyapunov. La solución es asintóticamente estable si todos los exponentes de Lyapunov son negativos.

## ANEXO 2.2

### CONSIDERACIONES SOBRE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER (FFT) EN MATLAB

#### ¿Qué es la FFT?

FFT = Fast Fourier Transform. La FFT es la versión de cálculo más rápida y eficiente de la Transformada Discreta de Fourier (TDF).

#### ¿Qué es la TDF?

La TDF es extremadamente importante en el área del análisis de frecuencia que toma una señal discreta en el dominio del tiempo y la transforma en una representación discreta en el dominio de la frecuencia.

#### Transformadas

Transformada de Laplace:  $x(t) \leftrightarrow X(s)$  donde  $X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$

Transformada de Fourier:  $x(t) \leftrightarrow X(j\omega)$  donde  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt$

Transformada z:  $x[n] \leftrightarrow X(z)$  donde  $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$

Transformada Discreta en el tiempo de Fourier (TDTF):

$$x[n] \leftrightarrow X(e^{j\psi}) \text{ donde } X(e^{j\psi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\psi n}$$

#### ¿Cómo se relaciona la TDF con otras transformadas?

Primeramente la TDF no es lo mismo que la transformada discreta en el tiempo de Fourier (TDTF). Ambas utilizan señales discretas en el dominio del tiempo, pero la TDF produce una representación discreta en el dominio de la frecuencia mientras que la TDTF es continua. Sin embargo ambas transformadas tienen mucho en común, por consiguiente ayuda mucho tener un entendimiento básico de las propiedades de la TDTF.

## Periodicidad

La TDTF es periódica, cuyo periodo se extiende desde  $f=0$  hasta  $f_s$  y donde  $f_s$  es la frecuencia de muestreo. Tomando ventaja de esta redundancia la TDF en cambio es solamente definida en la región entre 0 y  $f_s$

## Simetría

Cuando la región entre 0 y  $f_s$  es examinada, puede observarse que hay una simetría del tipo par alrededor del punto,  $0.5 f_s$ , denominada frecuencia de Nyquist. Esta simetría adiciona información redundante. La Figura 2.2.1 presenta la DFT (implementada con la función FFT de matlab) de una función coseno y de frecuencia 10 veces menor a la frecuencia de muestreo. Debe notarse que la gráfica entre  $0.5 f_s$  y  $f_s$  es imagen de aquella entre 0 y  $0.5 f_s$

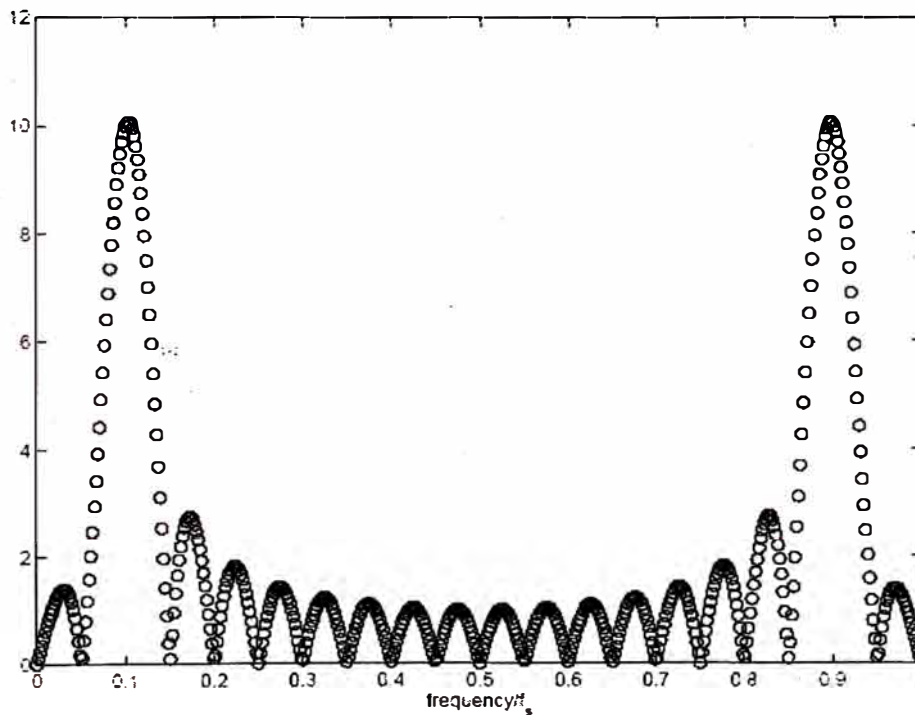


Figura 2.2.1 Graficando la simetría de la TDF

## FFT en matlab

En matlab el comando para obtener la transformada discreta de Fourier (TDF) es “fft”. El siguiente ejemplo ayudará a comprender los pormenores en el cálculo de FFT.

### a) Efecto de la cantidad de puntos en el dominio de la frecuencia (N)

Para demostrar el efecto de N, se empleará una función coseno con 30 muestras a 10 muestras por período.

```
n = [0:29];
```

```
x = cos(2*pi*n/10);
```

Se define 3 diferentes valores de N.

Luego se toma la transformada de  $x[n]$  para cada uno de los 3 valores. La función “abs” obtiene la magnitud de la transformada.

```
N1 = 64;
```

```
N2 = 128;
```

```
N3 = 256;
```

```
X1 = abs(fft(x,N1));
```

```
X2 = abs(fft(x,N2));
```

```
X3 = abs(fft(x,N3));
```

La escala de frecuencia empieza en 0 y se extiende hasta N-1 para una FFT de N puntos. Luego se normaliza la escala para que se extienda desde 0 a  $\frac{(N-1)}{N}$ .

```
F1 = [0 : N1 - 1]/N1;
```

```
F2 = [0 : N2 - 1]/N2;
```

```
F3 = [0 : N3 - 1]/N3;
```

Ploteando cada una de las transformadas.

```
subplot(3,1,1); plot(F1,X1,'-x'),title('N = 64'),axis([0 1 0 20])
```

```
subplot(3,1,2); plot(F2,X2,'-x'),title('N = 128'),axis([0 1 0 20])
```

```
subplot(3,1,3); plot(F3,X3,'-x'),title('N = 256'),axis([0 1 0 20])
```

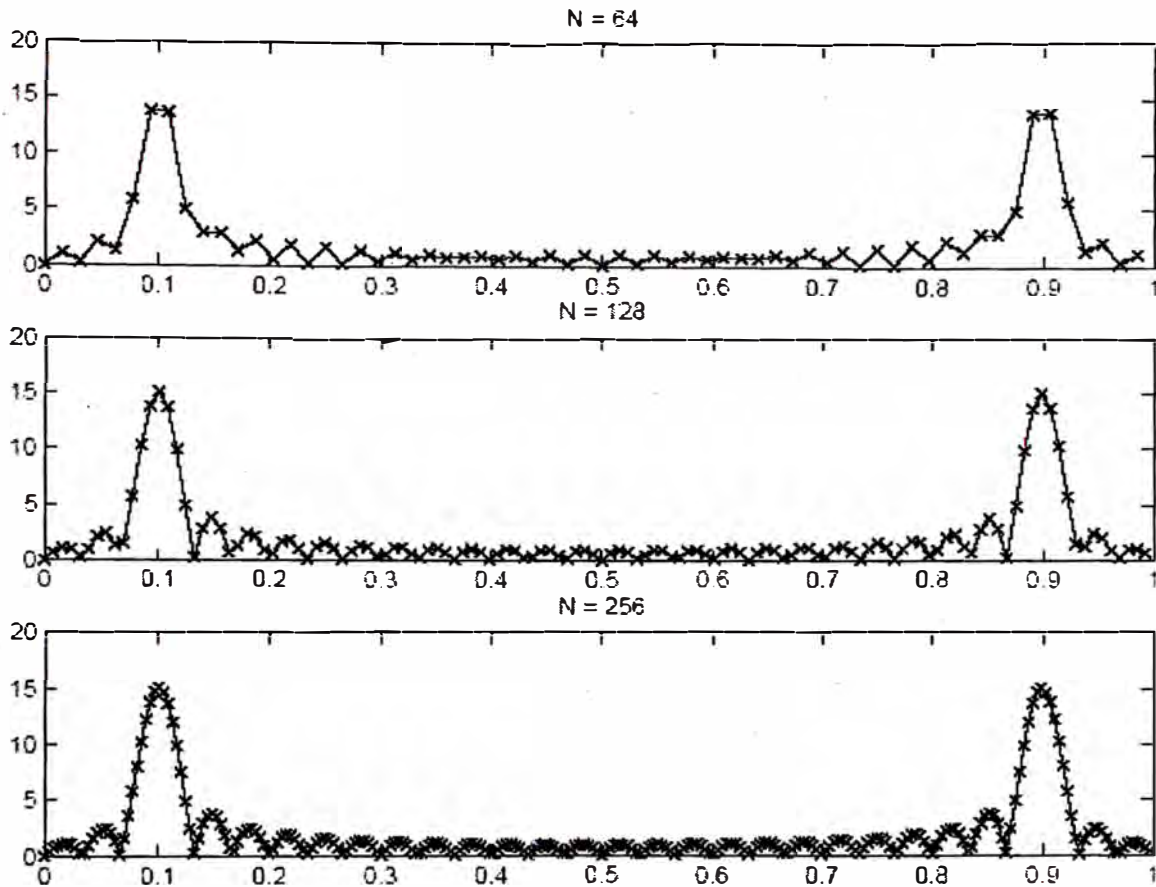


Figura 2.2.2 FFT de una función cosenoidal para N = 64, 128 y 256

Examinando la Figura 2.2.2 se puede observar que cada una de las transformadas tiene la misma forma, difiriendo únicamente en el número de muestras empleadas para aproximar la forma.

### b) Efecto de la cantidad de puntos en el dominio del tiempo

Para verificar el efecto se variará el número de periodos.

```
n = [0:29];
```

```
x1 = cos(2*pi*n/10); % 3 periodos
```

```
x2 = [x1 x1]; % 6 periodos
```

```
x3 = [x1 x1 x1]; % 9 periodos
```

```
N = 2048;
```

```
X1 = abs(fft(x1,N));
```

```
X2 = abs(fft(x2,N));
```

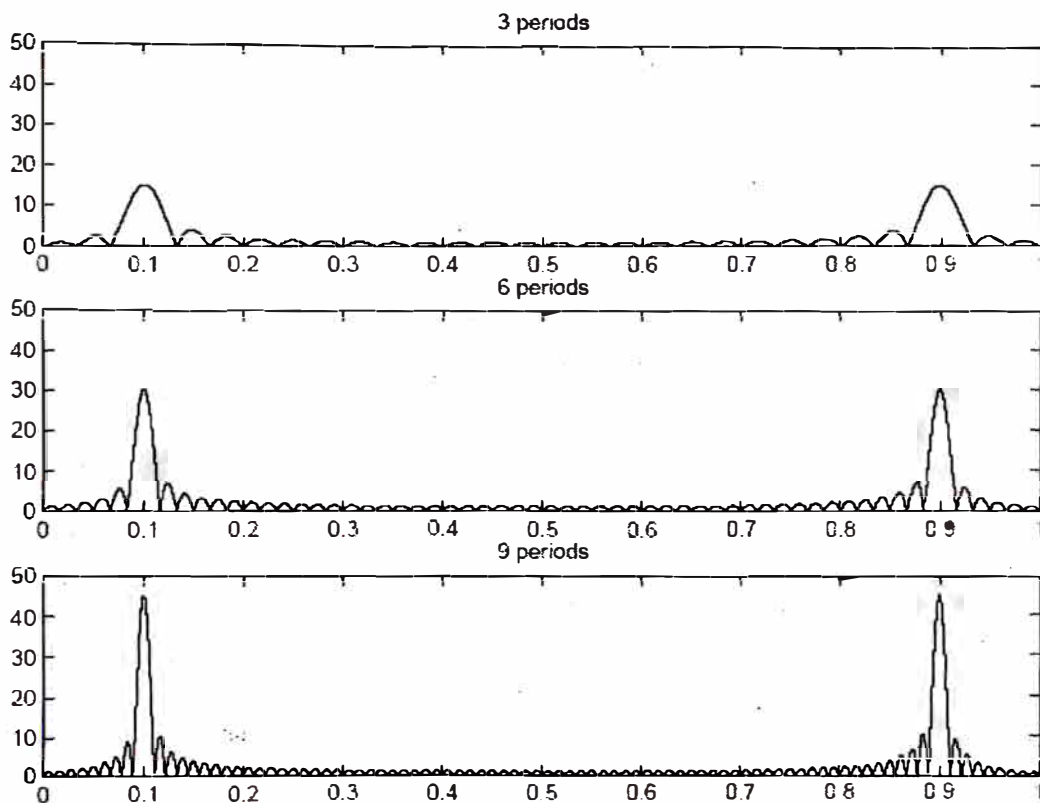
```
X3 = abs(fft(x3,N));
```

```
F = [0:N-1]/N;
```

```
subplot(3,1,1); plot(F,X1),title('3 periods'),axis([0 1 0 50])
```

```
subplot(3,1,2); plot(F,X2),title('6 periods'),axis([0 1 0 50])
```

```
subplot(3,1,3); plot(F,X3),title('9 periods'),axis([0 1 0 50])
```



2.2.3 FFT para 3, 6, y 9 periodos

De la Figura 2.2.3 se observa que mientras mayor sea la muestra en el dominio del tiempo, en el espectro en frecuencia la magnitud de la transformada se hace más grande y tipo impulso.

Debe recordarse que la transformada de una función tipo senoidal es un impulso en el dominio de la frecuencia, entonces ¿Por qué se presenta un espectro continuo alrededor de la frecuencias finales “0.1” y “0.9” donde se ubica dicho impulso?

## **Explicación**

Cuando la FFT es calculada con un valor de  $N$  más grande que el número de muestras en el tiempo  $x[n]$ , matlab llena el resto con ceros. De este modo en el último ejemplo se tiene sólo 30 muestras pero la FFT en el dominio de la frecuencia tiene  $N=2048$ . Por lo cual, automáticamente matlab llena de los espacios desde  $n=30$  hasta  $n=2047$  con ceros. Esto es como tomar una onda sinusoidal y multiplicarlo con una caja rectangular de longitud 30. Una multiplicación de este tipo en el dominio del tiempo resulta una convolución de impulsos en el dominio de la frecuencia.





```

% plotando las formas de onda
figure
subplot(2,1,1);
plot(time(:),x(1,b:e));
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('flujo')
title('Evolución de las variables de estado en el tiempo')
grid on;

subplot(2,1,2);
plot(time(:),x(2,b:e));
xlabel('tiempo (s)')
ylabel('tensión')
grid on;

% plotando el plano de fase
% -----
figure;
plot(x(1,b:e),x(2,b:e));
xlabel('flujo');
ylabel('tensión');
title('Diagrama de fase')
grid on;

% plot phase space tridimensional:
figure
plot3(x(1,b:e),x(2,b:e),x(3,b:e))
xlabel('flujo')
ylabel('tensión')
zlabel('w*t')
title('Trayectoria del sistema')
grid on;

% plot de los puntos de poicare
% -----
figure
plot(x(1,b:Npuntoxciclo:e),x(2,b:Npuntoxciclo:e),'linestyle','none','Marker','.', 'MarkerSize',20)
xlabel('flujo')
ylabel('tension')
title('Corte de Poincaré')
grid on;

% plot del mapa de Poincaré tensión
% -----
xnm=x(2,b:Npuntoxciclo:e);
lgsh=length(xnm(1,:));
figure
subplot(2,1,2);
plot(xnm(1,2:lgsh),xnm(1,1:lgsh-1),'linestyle','none','Marker','.', 'MarkerSize',20)
xlabel('tensión n+1')
ylabel('tensión n')
grid on;
ynm=x(1,b:Npuntoxciclo:e);
subplot(2,1,1);
plot(ynm(1,2:lgsh),ynm(1,1:lgsh-1),'linestyle','none','Marker','.', 'MarkerSize',20)
xlabel('flujo n+1')
ylabel('flujo n')
title('Mapa de Poincaré')
grid on;

```

```

%Determinando el espectro de Fourier
% -----
% fs es la frecuencia de muestreo
fs=1/delta_t;

% escogiendo muestra de tensiones
NP=length(x(1,:));

% se seleccionan los valores a partir de 75%
b=floor(0.75*NP);
e=N;
y33=x(1,b:e);
N=length(y33);

F2=(-N/2:N/2-1)*fs/N;

y=fft(y33);
mg =abs(y);
mg=fftshift(mg);
magmax=max(mg);

%ploteando
figure;
plot(F2,mg/magmax);
xlabel('Hz');
ylabel('Flujo(pu)');
title('Espectro de Fourier');
axis([0 500 0 1.1])
grid on;

% -----

function ff=rhs(x,a,E,b,w,B)
ff=[x(2),-E*x(2)-a*x(1)-b*x(1)^11+B*cos(x(3)),w]'

```

## ANEXO 3.2

### MUESTREO DE SEÑALES Y TEOREMA DE SHANNON

#### Introducción

El muestreo es un proceso a través del cual se transforma una señal continua en el tiempo, por una secuencia de números que representan o tienen valores, de dicha señal en ciertos instantes de tiempo. El espaciamiento que existe entre cada muestra de la señal continua puede ser uniforme o no; para el primer caso, se dice que se tiene un muestreo uniforme o periódico con un período de muestreo  $T$ .

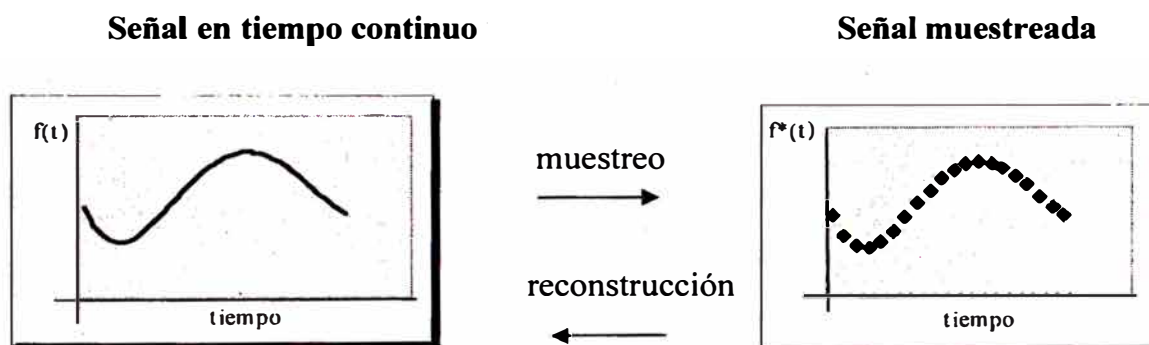


Figura 3.2.1 Muestreo y reconstrucción de una señal

El proceso inverso de muestreo se llama reconstrucción de una señal.

Una descripción analítica de muestreo puede ser la siguiente: Sea  $Z = \{\dots, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  el conjunto de números enteros y sea  $\{t_k / k \in Z\}$  una colección de números llamados instantes de muestreo. Sea  $f$  una función que representa una señal y  $f^*$  la señal correspondiente muestreada, la relación entre ellas es la siguiente:

$$f(t) = f^*(t_k), \quad \text{si } t = t_k$$

Supongamos que el muestreo se realiza con espaciamientos iguales en el tiempo, es decir, se tiene un muestreo periódico, entonces:

$$t_k = kT$$

Donde  $T$  es el período de muestreo en segundos y la frecuencia de muestreo ( $f_s$ ), en Hz es:

$$f_s = \frac{1}{T}$$

### Análisis de Fourier y Sistemas Muestreados

Si  $f_{(t)}$  es una función periódica  $f_{(t)} = f_{(t+T)}$ , entonces su serie de Fourier está dada por:

$$f_{(t)} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k \omega_1 t + b_k \senk \omega_1 t$$

Donde:  $\omega_1 = 2\pi f_1$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{(t)} \cos k \omega_1 t dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{(t)} \senk \omega_1 t dt$$

En forma exponencial,  $f(t)$  se puede expresar como:

$$f_{(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{-jk \omega_1 t}$$

$$C_k = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f_{(t)} e^{-jk \omega_1 t} dt$$

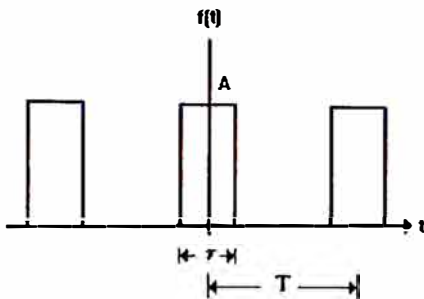
Donde  $C_k$  es un número complejo, por lo tanto:

$$C_k = |C_k| e^{j\phi_k}$$

Donde  $C_k$  es el espectro de frecuencia de  $f_{(t)}$  y  $|C_k|$  es el espectro de magnitud y  $\phi_k$  es el espectro de fase. Es importante notar que el espectro es un conjunto discreto.

**Ejemplo 1.** Calcular el espectro de frecuencia de un tren de pulsos  $p(t)$  de período  $T$  y ancho de pulso  $\tau$ :

### Tren de pulsos



### Espectro de frecuencia

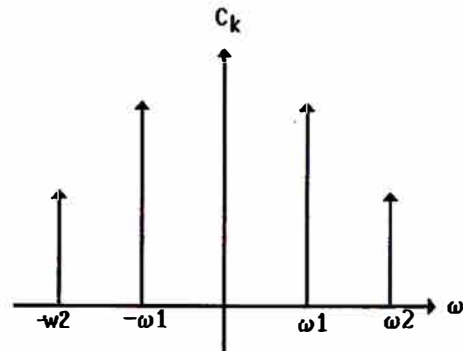


Figura 3.2.2 Espectro de frecuencia de un tren de pulsos

El desarrollo en Series de Fourier es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 C_k &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}\left(\frac{k\omega_1 \tau}{2}\right)}{\left(\frac{k\omega_1 \tau}{2}\right)} = \frac{A\tau}{T} \text{sinc}\left(\frac{k\omega_1 \tau}{2}\right)
 \end{aligned}$$

En la Figura 3.2.2 se presenta el espectro de esta señal, donde la amplitud de los pulsos tiene una envolvente del tipo sinc(x) donde x es  $\frac{k\omega_1 \tau}{2}$ .

Ahora considérese una función f(t) no periódica, entonces la transformada de Fourier  $F_\omega = |f_\omega|$  se define como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$$

y la transformada inversa asociada es:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

La Transformada de Fourier  $F(\omega)$  es una variable compleja, por lo que se puede expresar como:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= |F(\omega)| \angle F(\omega) \\ &= |F(\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \end{aligned}$$

**Ejemplo 2:** Calcular la Transformada de Fourier de un pulso de ancho  $\tau$  y amplitud  $A$ .

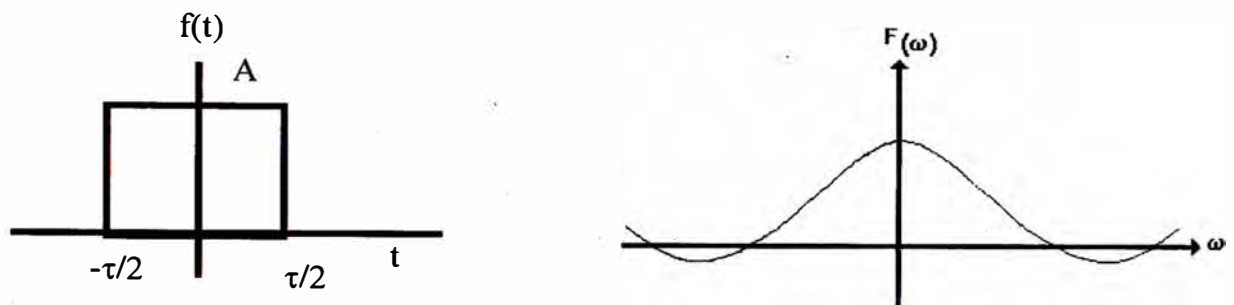


Figura 3.2.3 Transformada de un pulso de ancho  $\tau$  y amplitud  $A$

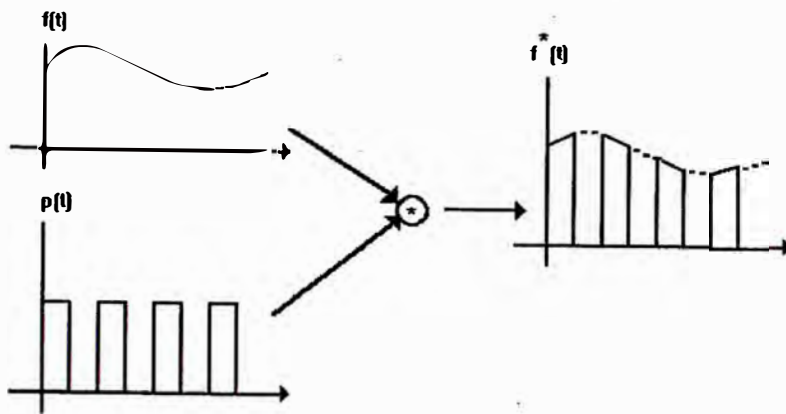
Aplicando la definición de Transformada de Fourier, se tiene que:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} A e^{-j\omega t} dt \\ &= A\tau \frac{\text{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \end{aligned}$$

En la Figura 3.2.3 se presenta el espectro de esta señal; nótese que ahora el espectro es continuo para todas las frecuencias.

Considérese ahora el muestreo de una señal continua  $f(t)$  por un tren de pulsos  $p(t)$ :

$$f^*(t) = f(t) \cdot p(t)$$



$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\omega_s t}$$

Entonces la serie de Fourier de la señal muestreada  $f^*(t)$  está dada por:

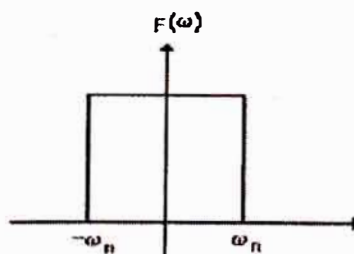
$$f^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k f(t) e^{jk\omega_s t}$$

Ahora,  $f(t)$  no es periódica, por lo que su transformada de Fourier es:

$$F^*(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k F(\omega + k\omega_s)$$

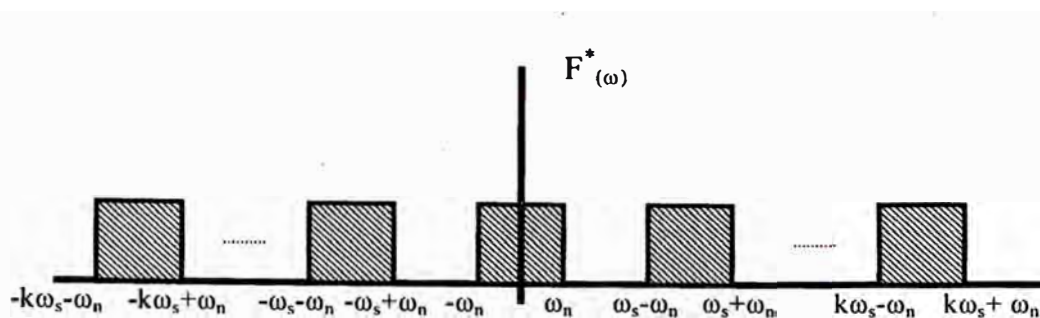
Multiplicar por una exponencial compleja produce un corrimiento en frecuencia.

Supongamos por ejemplo que  $F(\omega)$  está dada por:



Entonces el espectro de  $F^*(\omega)$  está dado por:





A partir de la gráfica anterior, se pueden apreciar que la mínima distancia entre espectros para poder recuperar la señal original y que no se encimen los espectros, está dada por la relación:

$$f_s = 2f_n$$

Es decir, si  $f_s > 2f_n$ , la recuperación de  $f(t)$  es posible. Si  $f_s < 2f_n$ , la recuperación no es posible; hay sobre posición de espectros, presentándose el fenómeno de **alias**.

**TEOREMA DEL MUESTRO DE SHANNON:** Una señal continua  $f(t)$  con una transformada de Fourier  $F(\omega)$  que es cero fuera del intervalo  $[-\omega_0, \omega_0]$ . Se puede recuperar en forma única por sus valores en puntos equidistantes si la frecuencia de muestreo es mayor a  $2\omega_0$ , la señal continua se puede calcular a partir de la señal muestreada por medio de la interpolación:

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{(kT)} \frac{\sin \omega_s \frac{(t - kT)}{2}}{\omega_s \frac{(t - kT)}{2}} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{(kT)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_s(t - kT)}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Donde  $\omega_s$  es la frecuencia angular de muestreo en [rad/s].

## ANEXO 3.3

### DIAGRAMA DE BIFURCACIÓN POR CONTINUACIÓN CON XPPAUT

En este anexo se presenta el proceso usual para obtener un diagrama de bifurcación con XPPAUT. Se han omitido pasos que pueden complementarse con la revisión de la bibliografía [9,23] e Internet.

XPPAUT es la fusión de dos programas XPP y AUTO y se puede descargar libremente de [www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html](http://www.math.pitt.edu/~bard/xpp/xpp.html) con alguna documentación teórica y un tutorial. Sin embargo, un manual completo para trabajar con XPPAUT es el libro "Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems- A Guide to XPPAUT for Researchers and Students", de Bard Ermentrout [23].

La elaboración del diagrama de bifurcación por Continuación se inicia con la edición del archivo de entrada en un editor de texto como "notepad" de windows.

A continuación se describe mediante comentarios el archivo de entrada "aacap31.ode", empleado en la elaboración del diagrama de la Figura 3.29

```
# Primeramente se definen los parámetros del sistema, definiéndolos con la
# palabra clave "par", seguida del nombre del parámetro y su valor actual
# (no deben estar separado por espacios )
par vbase=10,R=1e4,C=3.1

# seguidamente se definen las constantes y su valor
a1=0.28e-2
an=0.72e-2
n=11
f=60
w=2*pi*f

# Se definen las ecuaciones diferenciales del sistema en la forma d Var /dt o Var'
#donde Var es la variable de estado y d /dt es el operador derivada.
dPHI/dt=v/f
dv/dt=(-1/(R*(C*1e-6))*v-a1/(C*1e-6)*PHI-an/(C*1e-6)*(PHI)^n+w*vbase*u1)/f
du1/dt=(u1*(1-u1^2-u2^2)-w*u2)/f
du2/dt=(u2*(1-u1^2-u2^2)+w*u1)/f
#Observese que el periodo y frecuencia han sido normalizados a "1"
```

```

# Se dan los valores iniciales de las variables de estado para la integración de las
# ecuaciones diferenciales
init PHI=0,v=0,u1=1,u2=0
# Parámetros de XPP
# Se establecen los parámetros de integración: paso de integración “dt”, tiempo total
# de integración “total” en segundos, el límite máximo permitido de la variable y
# la variable a presentar en pantalla en este caso “v”.
# Todo los parámetros del programa se ingresan con “@”
# Sin embargo todos estos valores pueden ser corregidos en el menú correspondiente
# dentro del programa
#
@ dt=0.004,total=1,bound=100000,yp=v

```

```

#Parámetros de AUTO
@ ntst=20,nmax=10000,npr=10,dsmin=1e-9,dsmax=10,ds=1e-2,parmin=0,parmax=1000
@ autoxmax=1000,autoxmin=0,autoymin=0,autoymax=1000,autovar=vbase
@ eps1=1e-5,epsu=1e-5,epss=1e-5

```

```

# El archivo de ingreso termina con la palabra clave “done”
done

```

La ventana del programa XPP luego de cargado el archivo “aacap31.ode” se muestra en la Figura 3.3.1

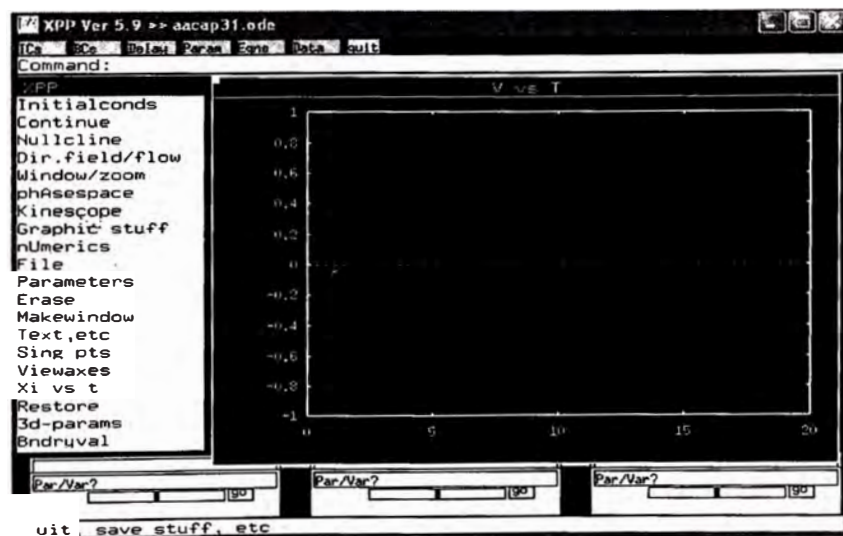


Figura 3.3.1 Ventana Inicial de XPPAUT

Se sabe que el atractor normal del sistema eléctrico de la Figura 3.4 es un ciclo límite; además, este se presenta con toda seguridad para valores de tensión del generador “vbase” cercanos a cero (Por ejemplo vbase=10), por ser la zona lineal de la curva de saturación. Para obtener dicho ciclo límite, se deben integrar las ecuaciones diferenciales con la mayor precisión posible y cuando el sistema este totalmente estabilizado. Este atractor inicial,

obtenido con XPP, será la base para el cálculo del diagrama de bifurcación completo con AUTO. La estabilidad del sistema se obtendrá si se integran las ecuaciones diferenciales para un tiempo total de 30 segundos.

Así, en la ventana de la Figura 3.3.1 y dentro de la barra de menús textuales al lado derecho, seleccionamos Numerics → Total y corregimos a 30. Luego salimos y entramos a Initialconds → Go. XPP empieza a integrar las ecuaciones y al mismo tiempo muestra los resultados gráficamente en pantalla. Para ver el grafico en toda su amplitud ejecutamos Window/zoom → (F)it. En esas condiciones deberíamos ver una salida como la que se muestra en la Figura 3.3.2.

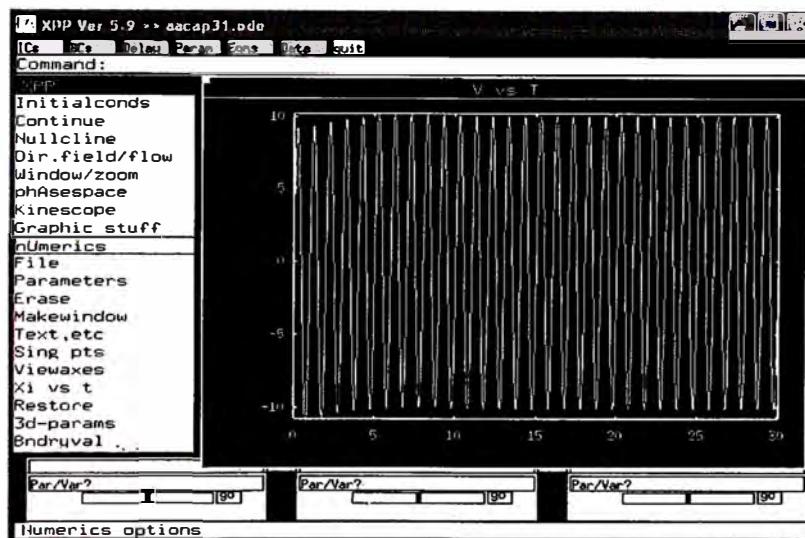


Figura 3.3.2 Resultado luego de integrar por 30 segundos

De esta figura observamos, por la excursión que tienen los máximos y mínimos que el sistema es ya estable a partir de los 15 segundos.

Para obtener exactamente el ciclo límite estacionario, nuevamente integramos pero esta vez con periodo 1. Seleccionamos Numerics → Total y corregimos a 1, salimos e integramos con Initialconds → Last. Actualizando el gráfico en pantalla veremos ahora solamente una onda senoidal de periodo 1. El ciclo límite lo podemos ver con el menú de la barra superior "ICs"; seleccionándolo aparece el cuadro de dialogo de la Figura 3.3.3 y en el

cual debemos escoger dos variables de estado. En este caso se han escogido “PHI” y “v”. De este modo se obtiene el ciclo límite de la Figura 3.3.4

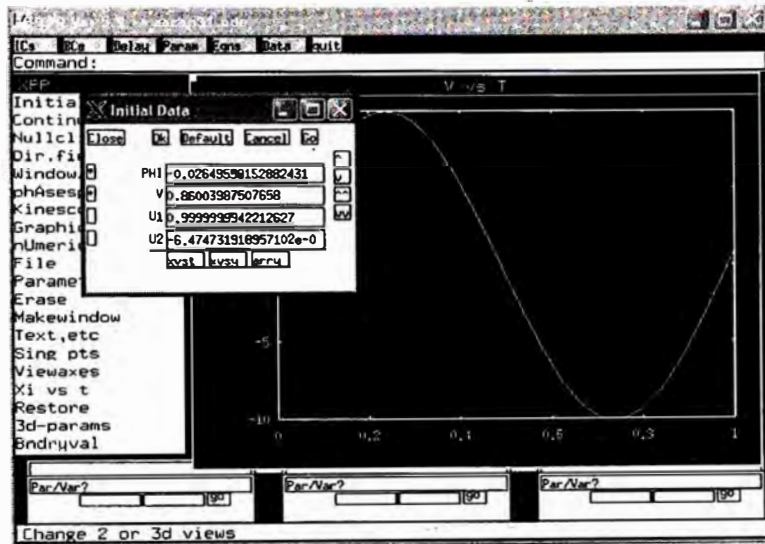


Figura 3.3.3 Datos iniciales y gráfico de curvas

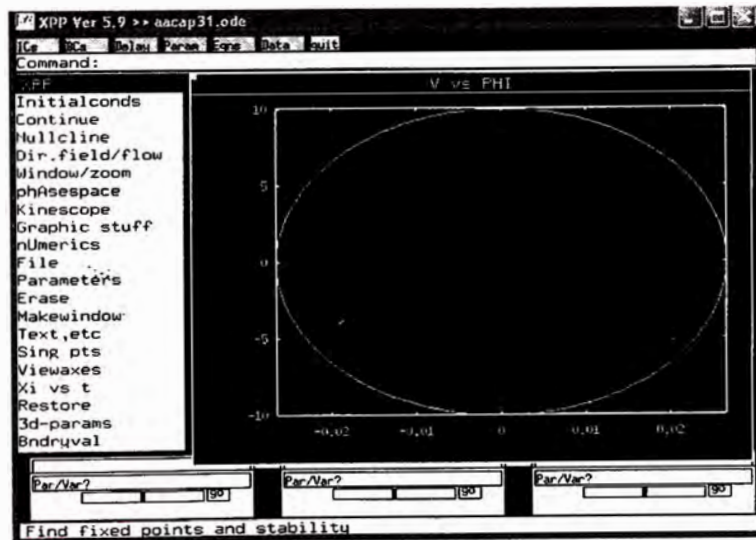


Figura 3.3.4 Ciclo límite

Con el ciclo límite inicial de la Figura 3.3.4 ya obtenido, debemos ingresar al menú textual derecho FILE → AUTO. Tras lo cual aparece en pantalla la Figura 3.3.5.

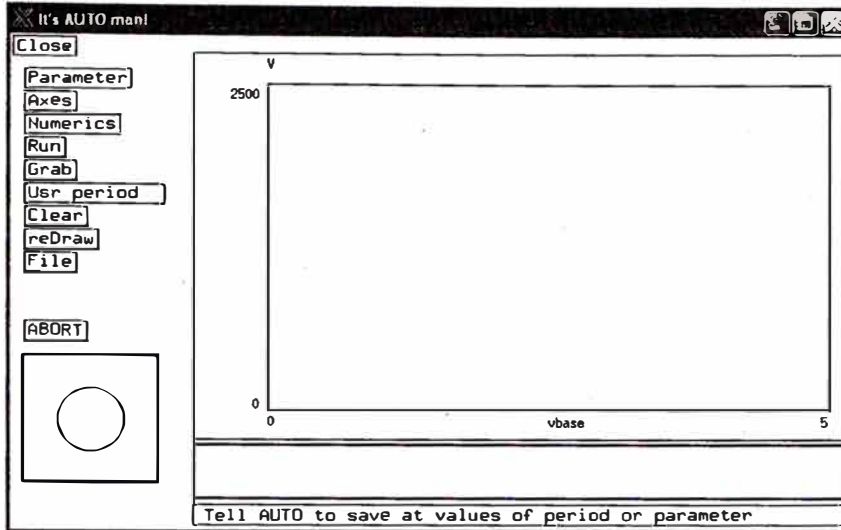


Figura 3.3.5 Pantalla inicial de AUTO (XPPAUT)

Si se han colocado los valores indicados en el archivo de entrada no será necesario cambiar los datos para la continuación. En caso contrario se puede emplear los menús “Parameter” para cambiar el parámetro a presentar en pantalla, “Axes” para dar los límites de los ejes y “Numeric” para los datos del proceso de continuación.

Una vez realizado todas las correcciones pertinentes, seleccionamos el menú “Run”, y AUTO empieza a obtener el diagrama por continuación. Al finalizar el proceso debe obtenerse un diagrama similar al de la Figura 3.3.6

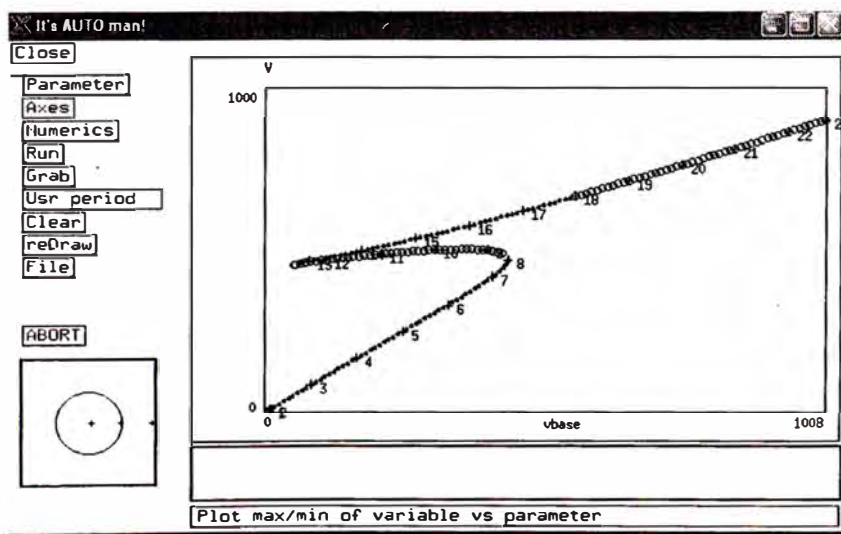


Figura 3.3.6 Diagrama de bifurcación por continuación

En este gráfico observamos tramos de la curva con puntos y otros con círculos. Los primeros representan estados estables y los otros, estados inestables. También podemos observar en el lado izquierdo inferior, un cuadro con un círculo interior. Así mientras nos movilizamos con la tecla “Tab” dentro del diagrama, van apareciendo signos “+” dentro o fuera del círculo. Dicho círculo representa el círculo unitario y los signos “+” los valores de los multiplicadores de Floquet descritos en 2.2.6.4. Así visitando todos los puntos del diagrama podemos observar que los estados estables tienen todos los multiplicadores de Floquet dentro del círculo y los inestables al menos uno fuera.

De otro lado, el gráfico de la Figura 3.3.6 ha sido obtenido para valores de  $v_{base} \geq 10$  V y con valor de  $D_s = 0.01$ . La parte faltante para  $v_{base} \leq 10$  V debe obtenerse seleccionando el menú “Numerics” y cambiando  $D_s$  a  $-0.01$ , según se muestra la Figura 3.3.7. Luego del cual nuevamente seleccionamos el menú “Run”. Por último, para ver el diagrama completo de la Figura 3.3.8, ejecutamos Axes  $\rightarrow$  Fit.

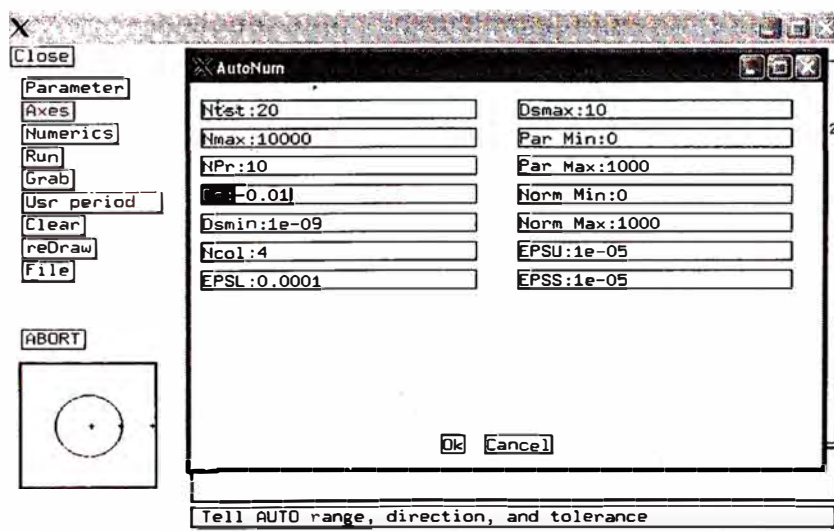


Figura 3.3.7 Ventana de cambio de settings para la continuación

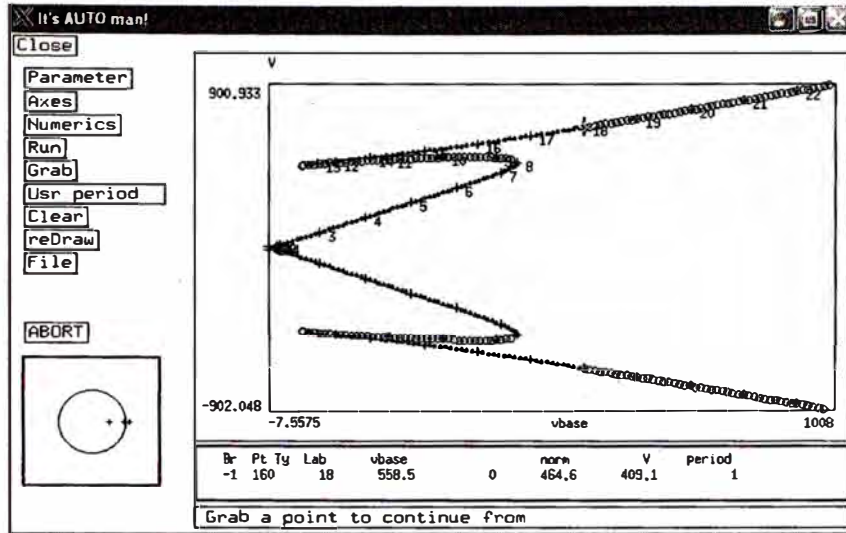


Figura 3.3.8 Diagrama de bifurcación completo

Este es el diagrama final de bifurcación por continuación y según podemos observar presenta simetría respecto al eje horizontal. Es decir, se cumple de igual manera para los valores positivos y negativos de tensión. De allí que sea suficiente con presentar la parte positiva.



## ANEXO 4.1

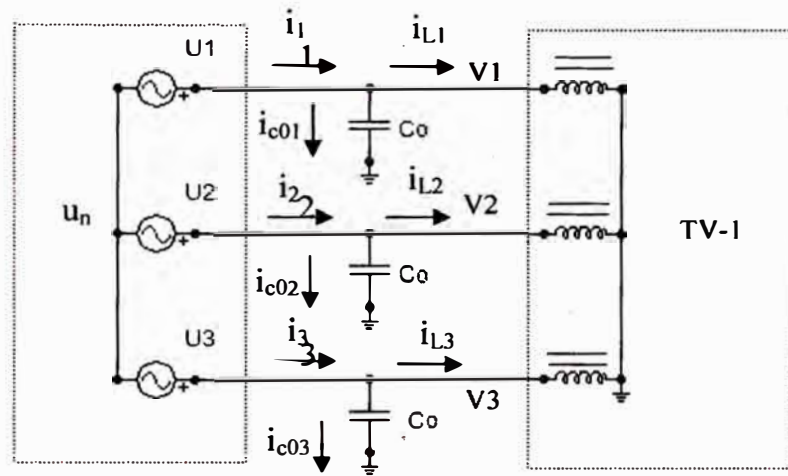


Figura 4.1.1 Circuito equivalente

Usando la primera Ley de Kirchoff en los puntos 1,2 y 3 se tiene de la Figura 4.1.1:

$$i_1 = i_{c01} + i_{L1}$$

$$i_2 = i_{c02} + i_{L2} \quad (41.1)$$

$$i_3 = i_{c03} + i_{L3}$$

También

$$i_{c01} = c_0 \frac{dv_1}{dt}$$

$$i_{c02} = c_0 \frac{dv_2}{dt} \quad (42.2)$$

$$i_{c03} = c_0 \frac{dv_3}{dt}$$

Además

$$i_1 + i_2 + i_3 = 0 \quad (42.3)$$

Reemplazando (41.1), (42.2) en (42.3) resulta:

$$c_0 \left( \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} + \frac{dv_3}{dt} \right) + i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} = 0 \quad (42.4)$$

Luego:

$$c_0 \left( \frac{d(v_1 + v_2 + v_3)}{dt} \right) + i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} = 0 \quad (42.5)$$

También:

$$v_n = u_1 - v_1 = u_2 - v_2 = u_3 - v_3 \quad (42.6)$$

De (42.6) se puede obtener:

$$v_1 + v_2 + v_3 = u_1 + u_2 + u_3 - 3v_n \quad (42.7)$$

Como las tensiones de generación se consideran balanceadas

$u_1 + u_2 + u_3 = 0$  y reemplazando en (42.7) resulta:

$$v_1 + v_2 + v_3 = -3v_n \quad (42.8)$$

Reemplazando (42.8) en (42.5):

$$i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} = 3c_0 \left( \frac{dv_n}{dt} \right) \quad (42.9)$$

De (42.6) y (42.9) se puede elaborar el circuito equivalente siguiente:

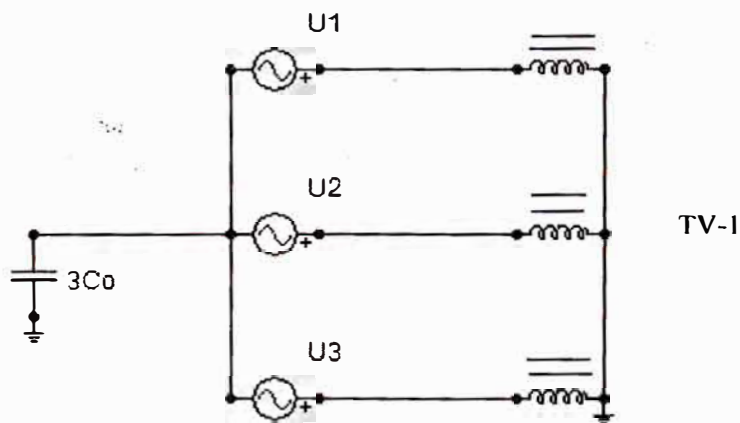


Figura 4.1.2 Circuito final

## ANEXO 4.2

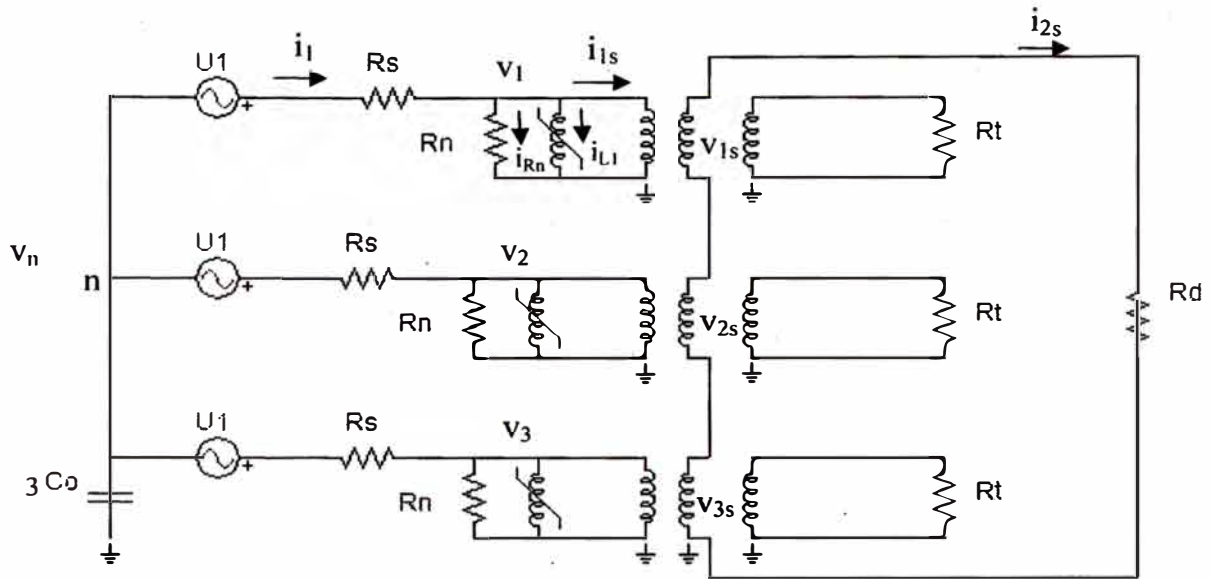


Figura 4.2.1 Circuito trifásico equivalente

Para la fase 1 se tiene en el circuito 4.2.1:

$$v_1 = u_1 - i_1 R_s - v_n \quad (\text{a42.1})$$

$$i_1 = i_{Rn} + i_{Ll} + i_{1s} \quad (\text{a42.2})$$

Reemplazando (a42.2) en (a42.1)

$$v_1 = u_1 - R_s * (i_{Rn} + i_{Ll} + i_{1s}) - v_n \quad (\text{a42.3})$$

En el lado Delta se cumple:

$$i_{2s} = \frac{v_{1s} + v_{2s} + v_{3s}}{R_d} \quad (\text{a42.4})$$

Además

$$i_{1s} = \frac{i_{2s}}{a_2} \quad (\text{A42.5})$$

Reflejando en el primario la resistencia  $R_t$  del devanado de medición se tiene:

$$R_{t_1} = a_1^2 * R_t \quad (\text{a42.6})$$

Esta resistencia  $R_{t_1}$  estará en paralelo con  $R_n$ . Hallando su equivalente ( $R_p$ ):

$$R_p = R_n // R_t$$

$$R_p = \frac{a_1^2 * R_t * R_n}{a_1^2 * R_t + R_n} \quad (a42.7)$$

Pero

$$i_{R_n} = \frac{v_1}{R_p} \quad (a42.8)$$

Reemplazando (a42.5), (a42.6) y (a42.8) en (a42.3) y ordenando resulta:

$$v_1 \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d}\right) + v_2 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} + v_3 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} = u_1 - R_s * i_{L1} - v_n \quad (a42.9)$$

De manera similar se procede con las fases 2 y 3, obteniéndose:

$$v_2 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} + v_2 \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d}\right) + v_3 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} = u_2 - R_s * i_{L2} - v_n \quad (a42.10)$$

$$v_1 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} + v_2 * \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d} + v_3 \left(1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{a_2^2 \cdot R_d}\right) = u_3 - R_s * i_{L3} - v_n \quad (a42.11)$$

Aplicando la Primera Ley de Kirchoff en el punto "n":

$$3C_0 \frac{dv_n}{dt} = i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} + \frac{v_1}{R_p} + \frac{v_2}{R_p} + \frac{v_3}{R_p} + i_{1s} + i_{2s} + i_{3s} \quad (a42.12)$$

Pero

$$i_{1s} = i_{2s} = i_{3s} = \frac{i_{2s}}{a_2} = \left( \frac{v_{1s} + v_{2s} + v_{3s}}{a_2 \cdot R_d} \right) \text{ y } v_{1s} = \frac{v_1}{a_2}, v_{2s} = \frac{v_2}{a_2}, v_{3s} = \frac{v_3}{a_2}$$

Reemplazando en (a42.12) y ordenando:

$$i_{L1} + i_{L2} + i_{L3} + \left( \frac{1}{R_p} + \frac{3}{a_2^2 \cdot R_d} \right) (v_1 + v_2 + v_3) - 3C_0 \frac{dv_n}{dt} = 0 \quad (a42.13)$$

Teniendo en cuenta que  $v_1 = \frac{d\phi_1}{dt}$ ,  $v_2 = \frac{d\phi_2}{dt}$ ,  $v_3 = \frac{d\phi_3}{dt}$ , con (a42.9), (a42.10),

(a42.11) y (a42.13) se tiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} \\ \frac{R_s}{R_d} & 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} \\ \frac{R_s}{R_d} & \frac{R_s}{R_d} & 1 + \frac{R_s}{R_p} + \frac{R_s}{R_d} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \frac{d\phi_1}{dt} \\ \frac{d\phi_2}{dt} \\ \frac{d\phi_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 - R_s i_1(\phi_1) - u_n \\ u_2 - R_s i_2(\phi_2) - u_n \\ u_3 - R_s i_3(\phi_3) - u_n \end{bmatrix}$$

$$i_1(\phi_1) + i_2(\phi_2) + i_3(\phi_3) + \left(\frac{1}{R_p} + \frac{3}{R_d}\right)\left(\frac{d\phi_1}{dt} + \frac{d\phi_2}{dt} + \frac{d\phi_3}{dt}\right) - 3C_0 \frac{du_n}{dt} = 0$$

## ANEXO 4.3

```
# Diagramas de Bifurcación usando XPPAUT
# Método de fuerza bruta variando la tensión
# Caso 2- Capitulo IV
#-----
# Definición de parámetros
param c0=0.040,Rd=22

#-----
# valores fijos
Rs=400
Rt=667.67
Rn=2118275
f=60
w=2*pi*f
a1=100
a2=100*sqrt(3)

#-----
# Definición de la curva de magnetización

n=19
k1=0.0221586499416485
kn=1.20219119618659e-005

#-----
# Valores base

Sbase=150
vbase=10000/sqrt(3)
ibase=Sbase/vbase
flbase=vbase/w

#-----
# Equivalente de resistencias

Rp=(Rn*(a1^2)*Rt)/(Rn+(a1^2)*Rt)
Rdd=(a2^2)*Rd
Rpp=Rp*Rdd/(Rdd+3*Rp)

#conversión de Clarke
# de ab0 → I23
fl1=1/sqrt(3)*fl0+sqrt(2/3)*fla
fl2=1/sqrt(3)*fl0-1/sqrt(6)*fla+1/sqrt(2)*flb
fl3=1/sqrt(3)*fl0-1/sqrt(6)*fla-1/sqrt(2)*flb

#-----
# Obtención de las corrientes por las inductancias no lineales

fl1pu=fl1/flbase
fl2pu=fl2/flbase
fl3pu=fl3/flbase

i1=(k1*fl1pu+kn*fl1pu^n)*ibase
i2=(k1*fl2pu+kn*fl2pu^n)*ibase
i3=(k1*fl3pu+kn*fl3pu^n)*ibase
```

```

# Conversión de Clarke
# de 123 → ab0

i0=1/sqrt(3)*i1+1/sqrt(3)*i2+1/sqrt(3)*i3
ia=sqrt(2/3)*i1-1/sqrt(6)*i2-1/sqrt(6)*i3
ib=1/sqrt(2)*i2-1/sqrt(2)*i3

#-----
#ecuaciones del sistema

fla'=(Rp/(Rp+Rs)*(ua*vml*1000-Rs*ia))
flb'=(Rp/(Rp+Rs)*(ub*vml*1000-Rs*ib))
fl0'=(Rpp/(Rpp+Rs)*(-Rs*i0-sqrt(3)*un))
un'=(-1/(c0*1e-6*(Rs+Rpp))*(un-Rpp*i0/sqrt(3)))
ua'=(ua*(1-(ua^2+ub^2))-w*ub)
ub'=(ub*(1-(ua^2+ub^2))+w*ua)
vml'=0.1
#-----
#datos iniciales

init fla=0,flb=0,fl0=0,un=0,ua=1,ub=0
init vml=1
# xpp opciones
@ dt=1e-4,total=1e4,bound=10000000,maxstor=1000000,yp=v1
@ n_out=1e4
done

```

## ANEXO 4.4

```
# Diagramas de Bifurcación usando XPPAUT
# empleado el método de continuación
# Caso 2- Capítulo IV
#-----
# Definición de parámetros
param vml=0.1,c0=0.040,Rd=22

#-----
# valores fijos
Rs=400
Rt=667.67
Rn=2118275
f=60
w=2*pi*f
a1=100
a2=100*sqrt(3)

#-----
# Definición de la curva de magnetización

n=19
k1=0.0221586499416485
kn=1.20219119618659e-005

#-----
# Valores base

Sbase=150
vbase=10000/sqrt(3)
ibase=Sbase/vbase
flbase=vbase/w

#-----
# Equivalente de resistencias

Rp=(Rn*(a1^2)*Rt)/(Rn+(a1^2)*Rt)
Rdd=(a2^2)*Rd
Rpp=Rp*Rdd/(Rdd+3*Rp)

#conversion de Clarke
# de ab0 → 123
f11=1/sqrt(3)*f10+sqrt(2/3)*f1a
f12=1/sqrt(3)*f10-1/sqrt(6)*f1a+1/sqrt(2)*f1b
f13=1/sqrt(3)*f10-1/sqrt(6)*f1a-1/sqrt(2)*f1b

#-----
# Obtención de las corrientes por las inductancias no lineales

f11pu=f11/flbase
f12pu=f12/flbase
f13pu=f13/flbase

i1=(k1*f11pu+kn*f11pu^n)*ibase
i2=(k1*f12pu+kn*f12pu^n)*ibase
i3=(k1*f13pu+kn*f13pu^n)*ibase

#conversión de Clarke
```



```
# de 123 → ab0
```

```
i0=1/sqrt(3)*i1+1/sqrt(3)*i2+1/sqrt(3)*i3  
ia=sqrt(2/3)*i1-1/sqrt(6)*i2-1/sqrt(6)*i3  
ib=1/sqrt(2)*i2-1/sqrt(2)*i3
```

```
#-----
```

```
#ecuaciones del sistema
```

```
fla'=(Rp/(Rp+Rs))*(ua*vml*1000-Rs*ia)  
flb'=(Rp/(Rp+Rs))*(ub*vml*1000-Rs*ib)  
fl0'=(Rpp/(Rpp+Rs))*(-Rs*i0-sqrt(3)*un)  
un'=(-1/(c0*1e-6*(Rs+Rpp))*(un-Rpp*i0/sqrt(3)))  
ua'=(ua*(1-(ua^2+ub^2))-w*ub)  
ub'=(ub*(1-(ua^2+ub^2))+w*ua)
```

```
#-----
```

```
#datos iniciales
```

```
init fla=0,flb=0,fl0=0,un=0,ua=1,ub=0
```

```
# xpp opciones
```

```
@ dt=1E-4,total=10,bound=10000000,maxstor=1000000,yp=v1
```

```
# auto opciones
```

```
@ntst=40,nmax=1000000,npr=100,dxmin=0.001,dxmax=1
```

```
@ds=0.5,parmin=0,parmax=30
```

```
@ autoxmin=0,autoxmax=20,autoymin=0,autoymax=10000,autovar=fla
```

```
done
```