

UNIVERSIDAD NACIONAL
DE INGENIERIA
Facultad de Geología Minas y Metalurgia
Escuela de Metalurgia



“Diseños Experimentales en Mineralurgia
y Metalurgia Extractiva”

Tesis

Para optar el título de Ingeniero Metalurgista

Por:

RICHARD JOE PARDO MERCADO

LIMA - PERU

1987

CON INFINITO AMOR Y GRATITUD A:
SILVERIA MERCADO Y PORFIRIO PARDO

AGRADECIMIENTO

Mi más grande reconocimiento y gratitud al Ing. Edwilde Yoplac Castromonte quien fué el que me motivó y ayudó en la elaboración de este trabajo, también hago extensivo mi agradecimiento al Ingeniero Iván Quiroz quien apoyó su realización.

Sé que no menciono a muchas personas quienes también aportaron para hacer este trabajo, a estas personas también les digo **¡MUCHAS GRACIAS!**.

I N D I C E

CAPITULO I . INTRODUCCION

- 1.1. *Exposición de Motivos que originó la Tesis.*
- 1.2. *Introducción.*
- 1.3. *Alcances y Objetivos del Estudio.*

CAPITULO II . PRINCIPIOS ESTADISTICOS DE LOS DISEÑOS EXPERIMENTALES .

- 2.1. *Etapas de un Proceso de investigación .*
- 2.2. *VARIABLES de un Proceso.*
- 2.3. *Conceptos Elementales de la Estadística.*
- 2.4. *Estimación de Parámetros Estadísticos.*
- 2.5. *Hipótesis de significación.*

CAPITULO III . DISEÑOS FACTORIALES .

- 3.1. *Introducción.*
- 3.2. *Diseño Factorial en dos Niveles
Trabajo de Aplicación.*

CAPITULO IV . DISEÑOS EXPERIMENTALES ORTOGONALES .

- 4.1. *Técnica del Confundido.
Trabajo de Aplicación.*

CAPITULO V . DISEÑO ROTABLES COMPUESTOS .

- 5.1. *Generalidades.*
- 5.2. *Diseños rotables de 2 variables.*
- 5.3. *Trabajo de aplicación.
(Diseño Octogonal)*

CAPITULO VI. TEORIA DE OPTIMIZACION.

- 6.1. Concepto de la Optimización.*
- 6.2. Métodos de Optimización en Ingeniería.*
- 6.3. Análisis Canónico de los Modelos de Segundo Orden.*

APENDICES.

- A. * Aplicación de los Diseños de Plackett y Burman.
 - * Aplicación del método pendiente Ascendente.
 - * Aplicación de los diseños hexagonales.
- B. * Algoritmo para determinar un programa computacional de regresión lineal múltiple.
- C. * Programa para desarrollar el diseño hexagonal.
- D. * Distribución F de Fisher - Tablas.
- E. * Distribución t-student - tablas.

BIBLIOGRAFIA.

C A P I T U L O I

1.1. EXPOSICIÓN DE MOTIVOS QUE ORIGINAN LA TESIS.

La investigación en el país es uno de los tantos problemas que tenemos, ya que no se ha llegado a incidir en ésta como debería de ser, la investigación es algo tan fundamental y que va marcando el desarrollo integral de un país, pensamos en una serie de razones que no ha permitido su desarrollo y mencionaremos a nuestro criterio las razones por las cuales todavía no se ha llegado a un estudio detallado y concienzudo de la moderna experimentación en la ciencia metalúrgica.

La primera razón sería a que en el Perú estamos aún tratando minerales con unas leyes de cabeza muy altas o relativamente altas comparadas con las leyes de minerales aptas de tratamiento en otros países, las cuales son aptas de tratamiento debido a su avanzada tecnología y a las directi

vas que se siguen a una severa y concienzuda investigación y a la utilización de todas las técnicas estadísticas las que le permiten optimizaciones de sus parámetros de trabajo, y que estos deben de girar alrededor de una mejora en lo técnico - económico del tratamiento.

Con el transcurso de los años llegaremos a situaciones en que los minerales que tengamos que tratar metalúrgicamente serán los que ahora son considerados marginales.

Es mentalidad de nuestros mineros que cuando tenemos minerales con leyes bajas o con problemas en el tratamiento deja el mineral y busca otros que tenga mejores leyes y sin problemas de índole técnico.

También otra de las razones es cuestión de costumbre y que la mayoría de pequeños y medianos mineros están acostumbrados a la improvisación y son reticentes a un trabajo serio y planificado; pero es tarea de los técnicos en ir cambiando esa arraigada costumbre que tanto daño hace al país.

Finalmente tocaré lo que considero de primer orden, la cuestión política, que en las direcciones de nuestras organizaciones que deberían estar abocadas a la promoción, desarrollo y apoyo a nuestra pequeña y mediana minería, no lo hacen porque consideran que estar apoyando la investigación es estar invirtiendo en cuestiones insustanciales sin percatarse que si tuvieramos laboratorios bien implementados y con profesionales dedicados a solucionar problemas

tendríamos menos de lo que tenemos.

Esperamos que con el tiempo éstos aspectos vayan cambiando y que cargos directrices vayan siendo copados por personas con ideas que vayan en favor de la investigación y el desarrollo.

Todos los puntos tratados con anterioridad creo que han permitido hacer de la investigación y de las técnicas utilizadas para ser desarrolladas, esta un privilegio de muy pocas personas para lo cual queriendo colaborar con las personas que quisieran hacer investigación fue el motivo que me llevó a realizar este trabajo **DISEÑO EXPERIMENTAL**.

En el cual trato de mostrar esta herramienta, el **DI-SEÑO EXPERIMENTAL** como una técnica de alternativa que nos ayudará en la solución de muchos de nuestros problemas.

1.2. INTRODUCCIÓN,

El objeto de esta tesis es mostrarnos la base del diseño y análisis de experimentos, herramienta fundamental en la investigación. El diseño y el análisis de experimentos no es sino la planificación racional de las experiencias a realizar, de manera que podemos obtener de sus resultados el máximo de información y con un número mínimo de experiencias. Lo que indudablemente tiene incidencia en el costo y el tiempo de una investigación y además se obtiene certeza estadística en cuanto a sus resultados y conclusiones, se concede así mismo un mayor grado de libertad al ingeniero o investigador para seleccionar a aquella teoría que mejor se adapte a sus resultados.

En el estudio analítico de sus resultados se hace por métodos estadísticos, y desde el momento que usamos la Estadística se tendrá - como algo intrínseco el estar sujeto a un error experimental, cuyo valor nos llevará a analizar la influencia real de los parámetros (efectos) e interacciones y la influencia que pueden tener en los resultados, es decir nos permitirá ver la influencia que puede tener una variable dentro del contexto general del experimento y por ende en los resultados siempre que se produzcan variaciones en ella, significativamente diferentes al error experimental.

También nos dedicaremos a los métodos experimentales de optimización de resultados y otra de nuestras finalidades será la obtención de modelos matemáticos en zonas de interés que nos darán finalmente la información máxima y lo que indudablemente constituirá una gran ayuda para el ingeniero o investigador.

La Estadística basa sus conclusiones en números y por lo tanto los números son de importancia fundamental para cualquier investigación, sin embargo mucho mas importante que los mismos números es el

problema de cuan significativos son, o del grado de confiabilidad de que puede tener el investigador o sus colaboradores de su trabajo. Es implícito que el investigador tiende a creer en sus propias conclusiones, conclusiones fundamentadas principalmente en los resultados la significatividad y la confiabilidad en un experimento debe de indicarse incluso más, exigirse explícitamente en toda y cada una de las investigaciones tecnológicas.

Sin embargo la ausencia de estos datos es una tendencia que está adoptándose, en la mayoría de los trabajos de investigación tecnológica, por considerarse una complejidad innecesaria para el experimento a lo que es peor todavía, como una regla general al publicar los trabajos, salvándose de estos escasos trabajos publicados.

Se mostrará que la obtención de tales datos indispensables para el análisis de los resultados obtenidos, representa un proceso fácil utilizando técnicas estadísticas simples.

Sin embargo en nuestro país solamente se utilizan aquellos de acceso inmediato, considerándose con recelo por la mayoría de los investigadores, que tienden a considerar la Estadística como una especialidad demasiado nebulosa, para que cualquier aventura en sus dominios valga la pena.

De este modo, el método clásico de investigar las variables una a una es utilizada aún en nuestros días en trabajos de investigación, los cuales muchas veces restringen el campo de las conclusiones, o yerran al proponer inferencias falsas ya sean cualitativas o cuantitativas, totalmente de acuerdo con los resultados numéricos obtenidos.

He ahí una de las finalidades de este trabajo, el mostrarnos los diseños experimentales que nos evitará cometer cualquier error o

subjetivismo existente en el método clásico.

El uso de la Estadística al planificar y evaluar los resultados de una investigación es una herramienta valiosísima porque proporciona al investigador o ingeniero una precisa interpretación del fenómeno investigado, investigar siguiendo estos criterios nos permite obtener no solo la influencia individual de cada variable estudiada, sino también toda la gama de interacciones entre las variables consideradas.

Todos los trabajadores de la investigación planifican su trabajo y diseñan sus experimentos de una manera, la cual está basada sobre sus experiencias, las cuales le parecen más racionales, el investigador confía que producirá la información esencial para la resolución del problema.

Si los resultados obtenidos son abiertos a múltiples interpretaciones y no son de una definitiva formalidad, el fracaso del diseño del experimento a producir la deseada información puede ser debido a diversas causas.

Eso incluye juicios defectuosos en la selección de factores a ser probados, ignorando la importancia de las interacciones entre factores.

Un experimentado investigador probablemente deduciría de la naturaleza de los datos obtenidos que el diseño es defectuoso y puede por prueba y error llegar a la concreta solución del problema. Los métodos estadísticos de planeamiento de investigación minimiza la oportunidad de defecto del experimento diseñado, abarca procedimientos concretos para probar la validez y la integridad de los datos de la prueba y para indicaciones mandadas cambiar en el diseño y hace al investigador obtener significativa información con el menor número de pruebas.

El método clásico o "Edisonian" diseño un programa de investigación en la esencia de simplicidad, cada factor considerado a tener una significativa influencia sobre los resultados es separadamente investigados. Los efectos de cada factor son estimados por una serie de pruebas el cual varía un factor sobre un rango seleccionado de valores, mientras tenemos todos los otros factores constantes, cuando como es común, la investigación involucra complejas interrelaciones entre muchas diversos factores, definitivas tendencias y conclusiones pueden ser hechos solamente de datos, estos pueden ser analizados y probados como válidos y significantes.

Un diseño experimental basado en el método clásico sin embargo no podría detectar o rendir, estimados de significativos efectos de interacción entre los factores importantes, ni pueden los datos ser objetivamente analizados a condición de que la información sea considerada como integra.

El propósito del diseño estadístico es planificar experimentos por lo tanto esos resultados rendirían significativa información acerca de los fundamentales relaciones empíricas.

Los métodos estadísticos abarca diseños codificados por varios tipos de condiciones experimentales y también posee formas a determinar los méritos de tales diseños para proveer información en la investigación. Sobrediseños y subdiseños son inevitables a menos que se utilice un adecuado criterio de juzgar el correcto número y tipo de observaciones a hacer.

Los diseños estudiados en esta tesis son para :

1. Estimar el efecto de una o mas variables independientes sobre una o mas variables dependientes.

2. Definir una ecuación para la cual la variable dependiente puede ser estimada de valores de las variables independientes.

En la Estadística la investigación y la postulación de variables dependientes e independientes determina un hipotético espacio matemático, provee el escenario teórico para el desarrollo de expresiones matemáticas que vienen a ser relaciones empíricas y fundamentales.

Cuando los efectos principales no son lineales sobre la región de interés y los efectos de interacción son relativamente grandes, mas de dos niveles para los factores son necesarios para un completo estudio de las respuestas.

Cuando un experimento es diseñado por métodos estadísticos los errores experimentales son asociados con cada observación son asumidas a ser variables randomizadas, esas son no correlativas entre replicaciones y entre niveles de factor.

La correlación debido a factores no pueden ser controlados pero pueden ser minimizadas por randomización en la ejecución de el experimento, la correlación entre errores puede causar tendencia en los resultados eso contribuye a los estimados de efectos importantes.

La precisa formulación de objetivos del experimento y un adecuado diseño de experimentos, seguido por específicos análisis de datos son características de investigaciones bien ejecutadas.

Una de las ventajas mas preciadas que resultan del uso de los métodos estadísticos es una analítica disciplina de consideración guiando a la precisa formulación de investigar problemas y objetivos experimentales. Este es el fundamento sobre el cual está basado el diseño de experimentos.

También se puede hablar de la posibilidad de extender para el campo industrial los modelos estadísticos obtenidos, lo cual nos permitiría que un ingeniero de procesos puede tener a su disposición un modelo representado por medio de una ecuación, que proporcione la información buscada y en función de las variables operacionales.

Y para acabar con la presentación de las finalidades de este trabajo podemos resumir las normas que tendrá nuestra sistematización.

1. La obtención del valor real de la información buscada, tan próximo como sea posible el valor verdadero.
2. Toda y cualquier insuficiencia en la expresión propuesta podrá ser detectada e identificada.
3. El error del proceso podrá ser estimada durante la ejecución de los ensayos.
4. Minimizar el número de ensayos a ser efectuados para obtener la información necesaria y todo esto es muy importante porque representa una reducción de los costos.
5. Otra de las finalidades es incrementar la EXACTITUD de los experimentos.

1.3. ALCANCES Y OBJETIVOS DE LA TESIS.

Los estudios reportados en esta tesis fueron emprendidos como una parte del amplio programa sobre la aplicación de los métodos estadísticos a planificar y evaluar investigaciones en la Metalurgia extractiva y en el beneficio de minerales.

Investigar tiene como conviniencia, que cada vez más cuenta con los servicios de técnicos expertos y semiexpertos guiados por un limitado staff de profesionales. Por eso tiene como imperativo la uti

lización de todos los medios posibles de incrementar la eficiencia y la efectividad en la planificación, dirección, conducción y evaluación del programa de investigación.

La sobresaliente utilidad de los métodos estadísticos son los controles, los cuales pueden ser ejercidos sobre los experimentos y deducidos con un específico grado de probabilidad.

El investigador debe ejercer su propio juicio en la selección del método estadístico mejor adaptado al problema particular y la interpretación de los resultados obtenidos por análisis estadístico.

Las decisiones y conclusiones basadas sobre el análisis estadístico debe ser propiamente integrado por el reconocimiento técnico peculiar a cada investigación.

Presentar una coherente discusión de una materia tan compleja como es la aplicación de los métodos estadísticos al diseño de la investigación metalúrgica ha sido necesaria una considerable simplificación, tratando de ilustrar por intermedio de ejemplos concretos de problemas metalúrgicos, cuando y como diferentes métodos estadísticos pueden ser usados a diseñar de manera mas sencilla y mas eficiente el programa de experimentos, el cual nos dará como resultados datos completamente significativos y los cuales a su vez nos llevarán a conclusiones con un específico grado de confiabilidad.

DISEÑO DE EXPERIMENTOS

Un buen diseño experimental es el que tiene 3 requisitos:

- 1) Una correcta formulación de la información requerida.
- 2) Una correcta selección del método experimental, y de las consideraciones de precisión y exactitud experimental.
- 3) Una correcta selección del número e interrelaciones de pruebas individuales, las cuales caracterizan el diseño del experimento en total.

El tercer requisito que es el diseño, este debe de permitir - nos obtener máximo resultados de un mínimo de trabajo experimental.

Los métodos estadísticos tienen como condiciones:

- 1) Diseños bien codificados para varios tipos de condiciones experimentales.
- 2) Recursos para determinar el mérito relativo a tales diseños.
- 3) Bajo ciertas condiciones estimadas con respecto al necesario número de observaciones que han de ser hechas en un experimento, - un experimento subdiseñado, con pocas observaciones puede guiar a falsas conclusiones y un experimento sobrediseñado también con muchas observaciones resulta inservible. Experimentos subdiseñados y sobrediseñados son inevitables a menos que un criterio adecuado sea usado en la selección del número correcto de observaciones a realizar.

La economía de un diseño correcto y un apropiado número de observaciones exceden en valor el tiempo extra y las ideas requeridas - en el planeamiento del experimento.

Las variables independientes los cuales afectan la respuesta son llamadas "factores". Usualmente muchos factores influyen en la respuesta que se está investigando, y es esencial darle a todos ellos las debidas consideraciones.

Cada factor uno a otro serían investigados para estos efectos sobre la respuesta o deberían ser controlados, entonces la influencia de estos factores que son investigados pueden ser independientemente estudiados. Debido a las limitaciones prácticas, esos factores que son considerados a tener los efectos mas importantes sobre la respuesta usualmente son seleccionados para el estudio. Factores tales como tiempo, temperatura y concentración son llamados factores cuantitativos porque ellos pueden ser clasificados de acuerdo a una escala. Factores tales como operadores, máquinas, tipo de reactivo etc. que no pueden ser definidos por una escala son llamados factores cualitativos.

El mejor diseño para un experimento requiere un previo reconocimiento de los errores involucrados y el tamaño del efecto que es necesario detectar.

Los diseños que son discutidos, deben ser con el propósito de estimación de efectos de una o mas variables independientes sobre una variable dependiente y en muchos casos a determinar una ecuación estimada por promedios, de la cual la variable dependiente puede ser determinada de valores de las variables independientes.

Hay otras clases de problemas en el cual el interés principal está en determinar la existencia de una relación entre dos o mas variables sobre un rango específico con un grado específico de certeza estadística. El procedimiento estadístico para determinar estas relaciones es conocida como "Correlación".

C A P I T U L O I I

PRINCIPIOS ESTADÍSTICOS DE LOS DISEÑOS EXPERIMENTALES

2.1, ETAPAS EN UNA INVESTIGACION.

En general se puede dividir en tres partes en cualquier trabajo de investigación experimental,

- a) El Experimento
- b) El Diseño
- c) El Análisis

a) EL EXPERIMENTO.-

Es la acción de probar y examinar prácticamente un problema a estudiar, constituye el punto de partida, y es tan importante que el éxito de la investigación está fundamentalmente en éste.

En esta etapa es necesario considerar.

Una comprensión profunda del problema a estudiar, es decir considerar todos los antecedentes teóricos y bibliográficos que nos aclaren perfectamente lo que queremos obtener, y los elementos que entran en juego.

La selección de las variables dependientes (respuestas) a ser estudiadas deben ser factibles de medición y debemos de tener disponibilidad de aparatos con los que vamos a hacer, y de una manera controlada y precisa.

También deben definirse las variables independientes a factores que pueden afectar la respuesta o variables dependientes.

Los niveles que le daremos a estos factores cuando estos sean cuantitativos tales como: temperatura, pH, etc. o algunas desiciones si estos son de tipo cualitativo, por ejemplo diferentes operadores.

Todas estas consideraciones y otras que son posibles de intuir nos llevan a cumplir con esta etapa y que no es otra cosa que la exposición de finalidades. Estas pueden hacerse en forma de preguntas y respuestas, las hipótesis sujetas a pruebas o los efectos por estimar.

b) EL DISEÑO.

Consiste en delinear todas las experiencias a ser realizadas, no solamente en cuanto a su número, sino a las condiciones de operación para cada una de ellas.

Hay varios tipos de diseños, pero indudablemente uno de los mas importantes son los diseños factoriales y que estudiaremos en detalle.

Un buen diseño debe darnos una información total acerca de la influencia cuantitativa que tiene las variables independientes sobre las dependientes y también la influencia en la respuesta de las interacciones entre las variables independientes. Los diseños fraccionados (screening experiments) por otra parte son diseños especiales en los cuales sin hacer un gran número de experiencias nos permite definir las variables independientes que realmente influyen en la respuesta.

La influencia real solo puede ser decidida en forma estadística a través de tests y análisis de varianzas.

Este tipo de diseños nos permite postular modelos matemáticos de primer orden que describen el experimento y por lo tanto nos da información para optimizar la respuesta (maximizar, minimizar) por medio de experiencias adicionales que nos llevan a una zona donde finalmente podemos ajustar un modelo matemático que nos de información total.

c) **ANALISIS.**

Es el paso final, éste consiste en el recogimiento de resultados, la reducción de datos, y la computación de ciertos tests estadísticos, que serán usados para la toma de decisiones acerca de los diferentes aspectos del experimento.

El análisis incluye el cálculo del test "t" y "F" principalmente en nuestro estudio.

En la figura N°. 2.1 se muestra el procedimiento iterativo que se requiere para optimizar un proceso. Como podemos ver esto incluye 2 pasos fundamentales.

- 1.- La división de los experimentos de acuerdo a los objetivos de el estudio. Esto está basado en la experiencia del investigador (formulación del problema, diseño y ejecución del experimento).
- 2.- La evaluación de los resultados, es la base para reformular el problema y continuar con el próximo ciclo iterativo hasta que la optimización del proceso se logra alcanzar.

Un procedimiento más detallado que se sigue durante un trabajo experimental podemos encontrarlos en la figura 2.2, esta es la secuencia que se usa durante un ciclo iterativo completo de experimentación, para cada uno de los procesos estudiados.

La optimización de un proceso involucra diversas maneras de encarar el problema y que pueden ser logradas por el uso de diferentes diseños experimentales (Fig. 2.3). Sin embargo no todos ellos son factibles cuando queremos optimizar un proceso con el mínimo costo y con la mayor rapidez posible, por ejemplo si utilizamos un diseño factorial completo para estudiar 5 variables reales esto nos demandará la ejecución de 32 pruebas y si queremos estudiar 8 variables reales el número de pruebas, será 28 pruebas, de tal manera que esos casos de usar el diseño factorial para mas de 4 variables es ineficiente desde el punto de vista económico.

2.2. VARIABLES DE UN PROCESO,

En general, en un sistema multivariable - disponemos de 2 tipos de variables, de cuyo conocimiento depende el control que sobre el proceso podemos ejercer.

a) **VARIABLES DE ENTRADA.-**

Son las variables independientes del proceso y estas definen las características del experimento y según los valores que estas tengan determinan los valores de las otras variables dependientes del sistema.

b) **VARIABLES DE SALIDA.-**

Son las variables dependientes del proceso y pueden considerarse como efectos o respuestas a las variables de entrada.

CLASIFICACION DE VARIABLES

I.- Variables Independientes

A. *CONTROLABLES*

1. *Básicas o Primarias*
2. *Transformadas*

B. *INCONTROLABLES*

1. *Materias Primas*
2. *Condiciones ambientales*
3. *Condiciones de Operación.*
4. *Factores Económicas*

II.- Variables Dependientes

A. *DE RENDIMIENTO*

1. *Económicas*
2. *Constreñidas*

B. a) *FISICAS*

b) *OPERACIONALES*

1. *Cualitativas*
2. *Cuantitativas*

A continuación clasificaremos las variables de un proceso tomando en cuenta la tabla mostrada en la parte superior y lo que nos dará pautas para clasificaciones de variables en distintos procesos metalúrgicos Fig. 2.4 Tomaremos para esto las variables de un proceso de flotación.

I.A. **Variables Incontrolables de Entrada.**

Por ejemplo tendremos:

1. *Ley del Mineral (% fino)*

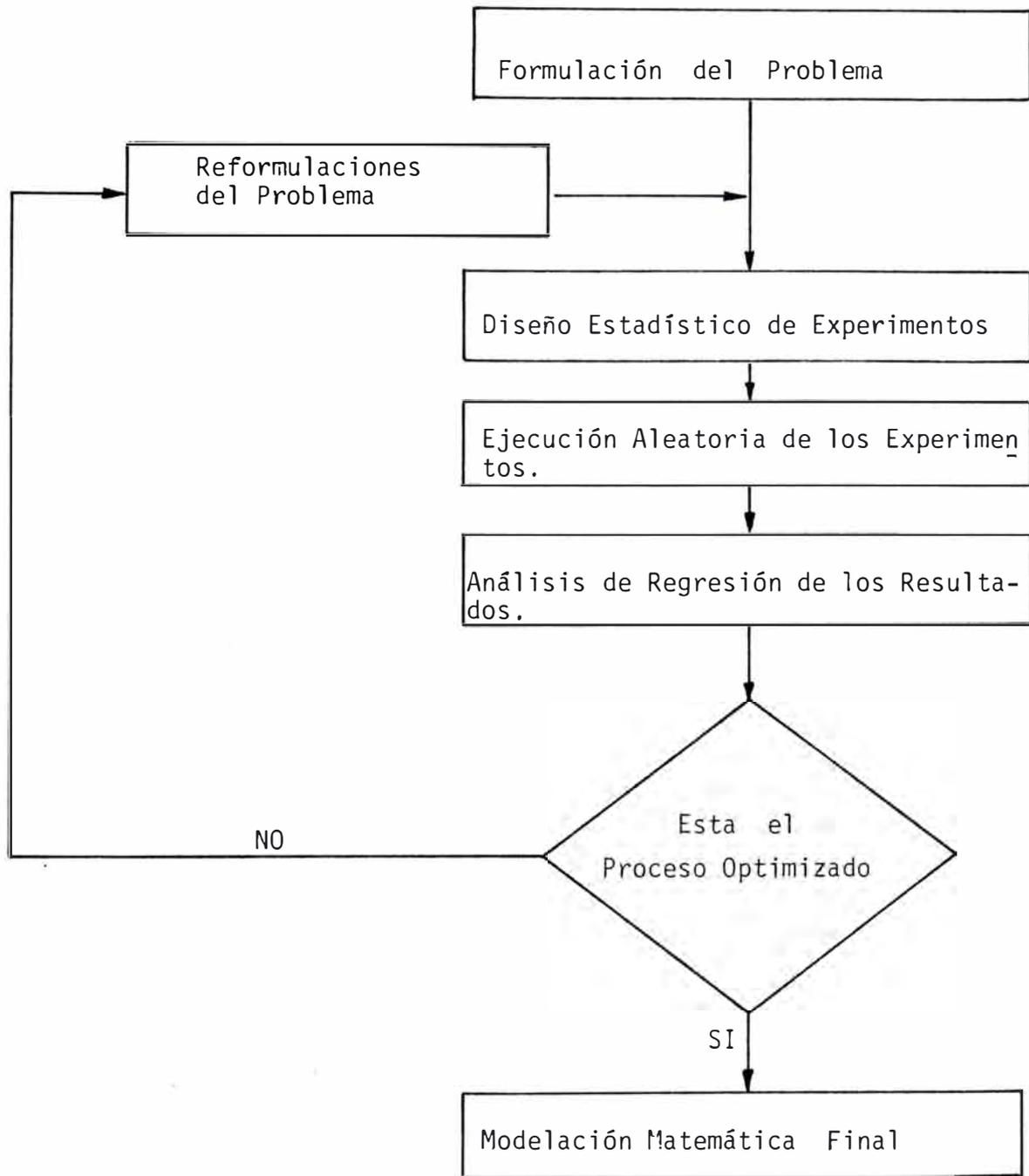


Fig. 2.1.- Ciclos Iterativos de Experimentación.

PROCESO DE FAMILIARIZACION

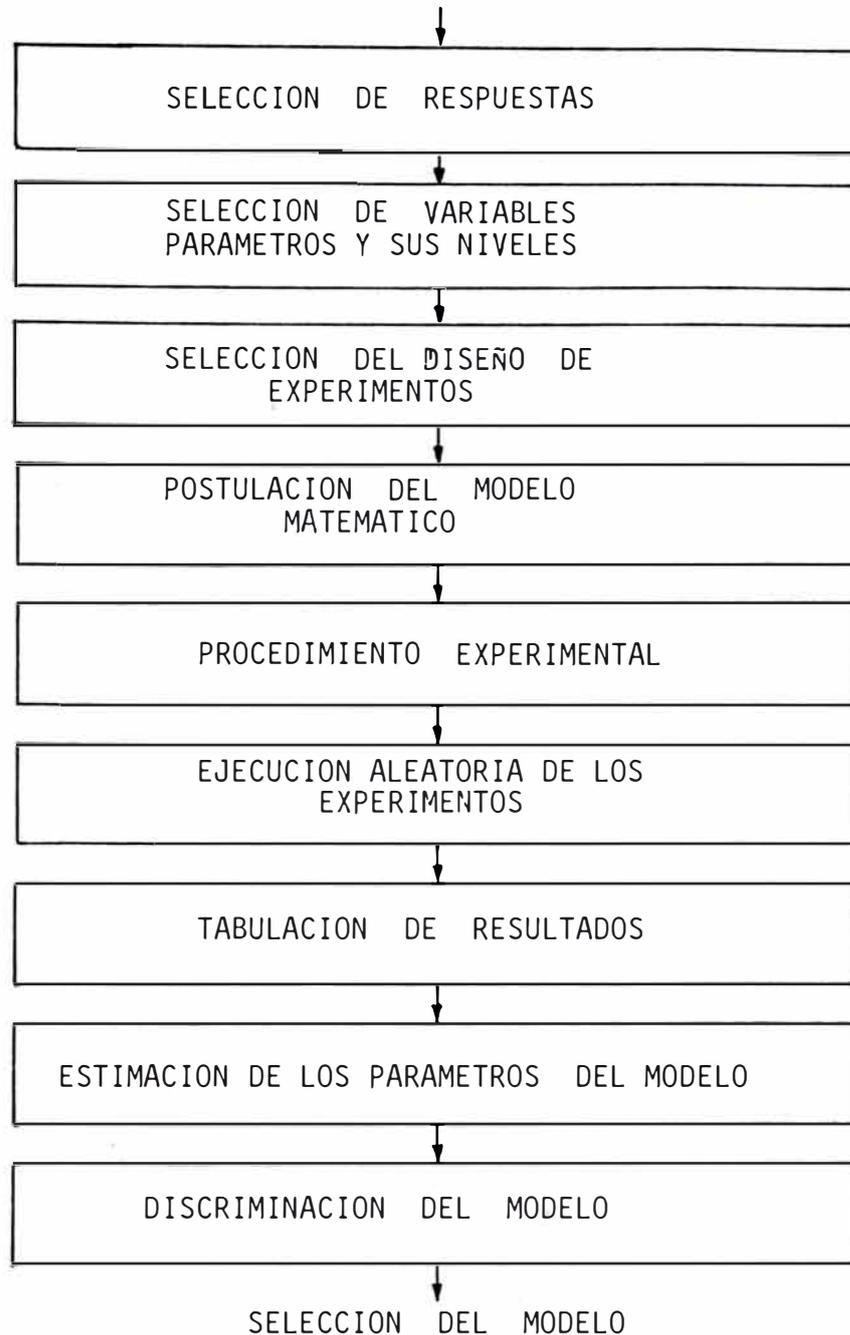


Fig. 2.2. Pasos Básicos en el Planteo de un Problema Metalúrgico.

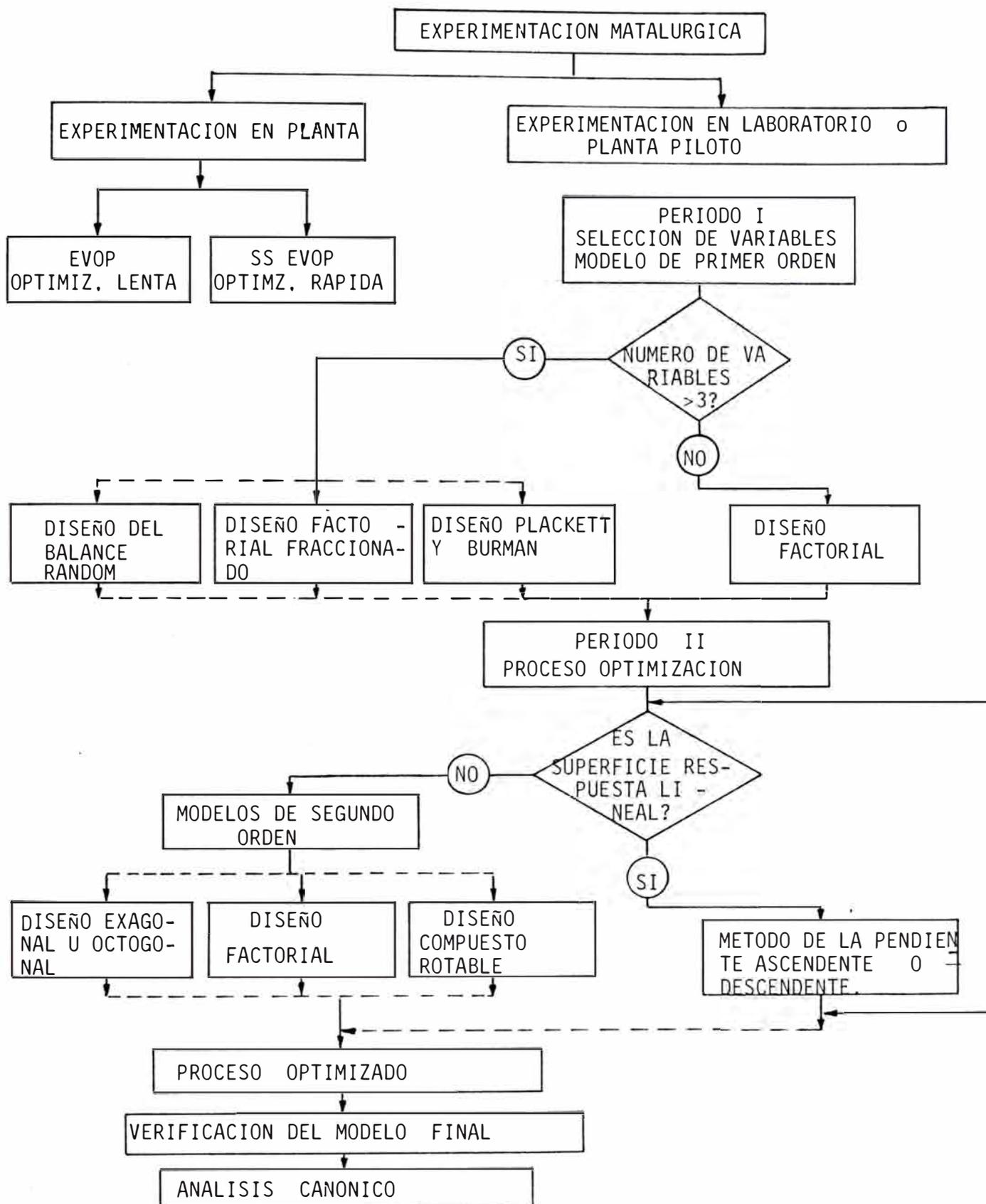


Fig. 2.3.- Planteo Racional para un modelo empírico usando diseños experimentales.

... significa alternativas secundarias.

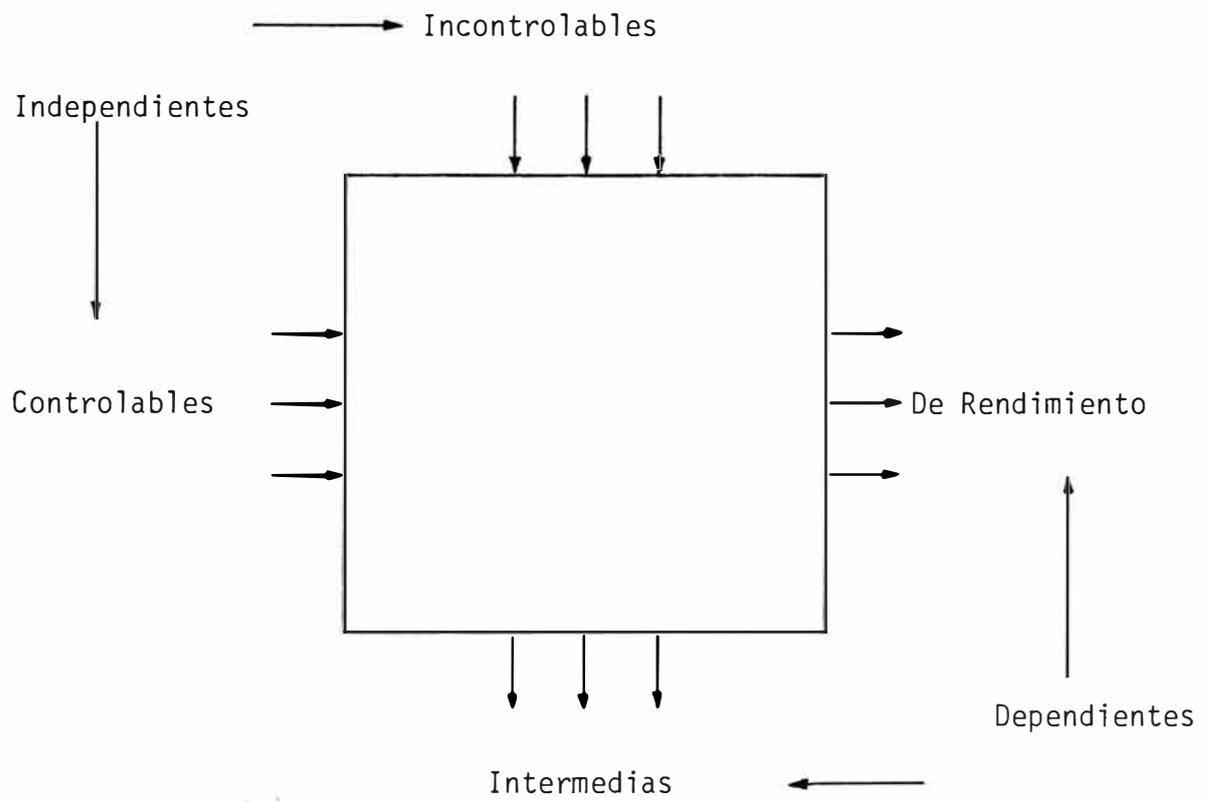


Fig. 2.4.- Variables de un Proceso.

2. Impurezas

3. Ganga

4. Grado de Oxidación

B. Parámetros de Tamaño

C. Grado de Liberación

I.B. Variables Controlables de Entrada.

D. Tonelaje de Alimentación

E. Dosificación de Reactivos.

1. Tiempo

2. pH

3. Colector

4. Espumante

5. Diversos modificadores

F. Agua de Alimentación

G. Recirculación de pulpas

H. Aireación

II, Variables de Salida.

1. Cantidad de concentrado producido

2. Contenido fino del concentrado

3. Granulometría del concentrado

4. Cantidad de relaves producidos

5. Contenido fino en los relaves

6. Granulometría de los relaves

7. Concentración de reactivos residuales

III. Variables de Rendimiento.

1. Constantes dinámicas de flotación
2. Recuperación de minerales útiles
3. Recuperación de minerales inútiles (impurezas)
4. Ley de Concentrados
5. Pérdidas en colas
6. Valor de Concentrado producido
7. Consumo por tonelada beneficiada
8. Consumo por día.

2.2.1. VARIABLES DE UN DISEÑO EXPERIMENTAL.

En una investigación podemos controlar algunas variables y si ellas en una manera deliberada son controlables se denominan "factores" y su acción combinada entre ellos se denomina "interacción".

Los factores pueden ser:

- a) **Cuantitativos:** como temperatura, presión, dosificación de reactivos etc.
- b) **Cualitativos:** como diferentes maquinarias, operadores, calidades de reactivos etc.

2.3 CONCEPTOS ELEMENTALES EN LA ESTADISTICA.

En un experimento indudablemente tratamos de hacer nuestras experiencias con la mayor exactitud y precisión posibles. Sin embargo toda medición lleva asociada un error experimental, que en trabajos de investigación metalúrgica y en cualquier otro se encuentran de una manera intrínseca, estos están sujetos

a variaciones que muchas veces son casi imposibles de aislar o eliminar, y así solo podemos usar métodos estadísticos para evaluar debidamente nuestros resultados.

Los resultados de los experimentos están afectados no solamente por la acción de los tratamientos sino también por las variaciones extrañas que tienden a encubrir sus efectos.

El término error experimental se aplica frecuentemente a estas variaciones, donde la palabra "error" no es sinónimo de "equivocación", sino que incluye a todos los tipos de variación extraña.

Se distinguen 2 fuentes de error experimental, los primeros que son inherentes a la unidad experimental que viene a ser la porción de mineral sobre la cual se va hacer el experimento, y la segunda fuente de variabilidad es la falta de uniformidad en la conducción física del experimento.

Los errores experimentales se pueden clasificar en tres tipos generales:

a) ERRORES RELATIVOS.

Están caracterizados por la distribución gaussiana de frecuencias mostrada en la fig. N° 2.5. Estos errores tienden a tomar valores cercanos a un valor medio, teniendo igual probabilidad de ser mayores o menores que el valor promedio. Al hacer determinaciones repetidas del error, la frecuencia con que se presentan desviaciones pequeñas respecto al promedio, es mayor que la frecuencia de las desviaciones grandes.

Se presentan frecuentemente en experimentos en los cuales se repiten ensayos tales como: pesajes, adiciones de reactivos, tiempos

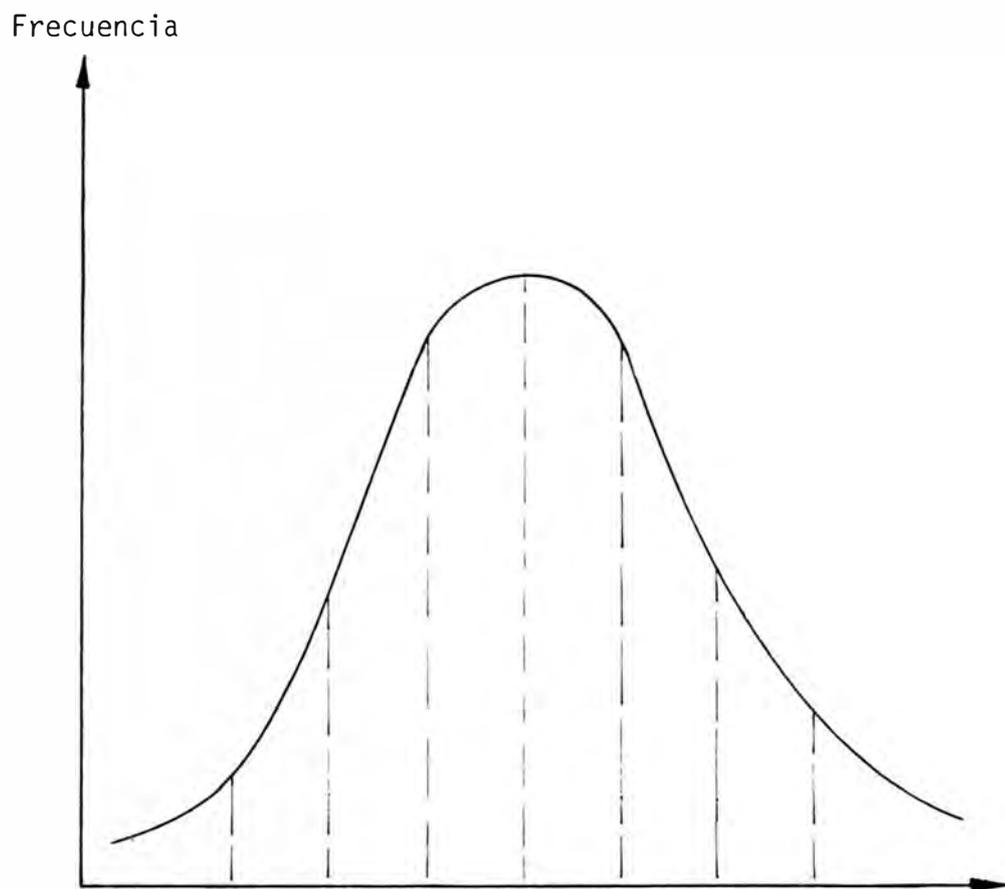


Fig. 2.5,- Distribución Gaussiana de Frecuencia.

de reacción, temperaturas etc. En todos estos tipos de mediciones el investigador tiene la igual probabilidad de cometer un error en cualquiera de las direcciones del valor deseado. Este tipo de errores se pueden corregir usando algún método para incrementar la exactitud, - entre los cuales podemos mencionar.

1. Aumentar la magnitud del experimento, por medio de más repeticiones o por la adición de mas tratamientos.
2. Refinar la técnica experimental.
3. Manejar el material experimental de tal manera que los efectos de variabilidad se reduzcan, seleccionando cuidadosamente el material tomando medidas adicionales que den información respecto al material o finalmente por un agrupamiento hábil de unidades experimentales en tal forma que las unidades tratadas queden estrechamente comparables con aquellas a las que se les aplica otro tratamiento.

El módulo de variaciones de los ensayos repetidos mide la precisión del sistema y es corriente presentar algún índice de precisión cuando se informa de un valor medido.

b) ERRORES SISTEMATICOS.

Se diferencian de los errores relativos porque estos siempre tienen el mismo signo algebraico, estos errores no varían con el tiempo y no se pueden someter a un análisis estadístico. Este tipo de errores se detectan generalmente en referencia a un estandar. Algunos de estos errores son tales como: uso de una balanza no estandarizada, uso de un estandar incorrecto, errores en todo tipo de medidas con aparatos no estandarizados o calibrados con errores. Este tipo de errores son particularmente peligrosas, puesto que un investigador puede obtener resultados reproducibles pero completa

mente incorrectas.

c) **ERRORES.**

Este tipo llamado propiamente errores abarca a los realizados al intercambio de muestras, lecturas y anotaciones mal hechas etc. Estos errores pueden ser fácilmente detectados haciendo lecturas repetidas. Tal vez el error menos obvio es el uso de un diseño experimental inapropiado. Por ejemplo un error común debido a la inexperiencia del investigador es la incorrecta determinación de un óptimo en el estudio de variables que afectan un proceso determinado, estudiando una variable cada vez, supongamos que la recuperación de un mineral en un sistema depende del tiempo de acondicionamiento y temperatura, supongamos además que la dependencia entre el porcentaje de recuperación y los factores tiempo de acondicionamiento y temperatura están dados por las líneas de contorno en la figura N° 2.6.

Usando el método de variar un factor cada vez, concluimos que la respuesta óptima corresponde al punto A_2 , lo cual se demuestra bajando primero a temperatura constante, variando el tiempo de un acondicionamiento y viceversa.

En el caso presentado se ven que aún cuando los resultados son reproducibles y cuidadosos se han determinado un óptimo que no corresponde al verdadero, según se puede apreciar analizando la figura N° 2.6.

d) **ESTIMACION DEL ERROR EXPERIMENTAL.**

Cualquiera que sea la fuente del error experimental una forma de minimizar el error experimental asociado a la medición es la repetición del experimento, siempre y

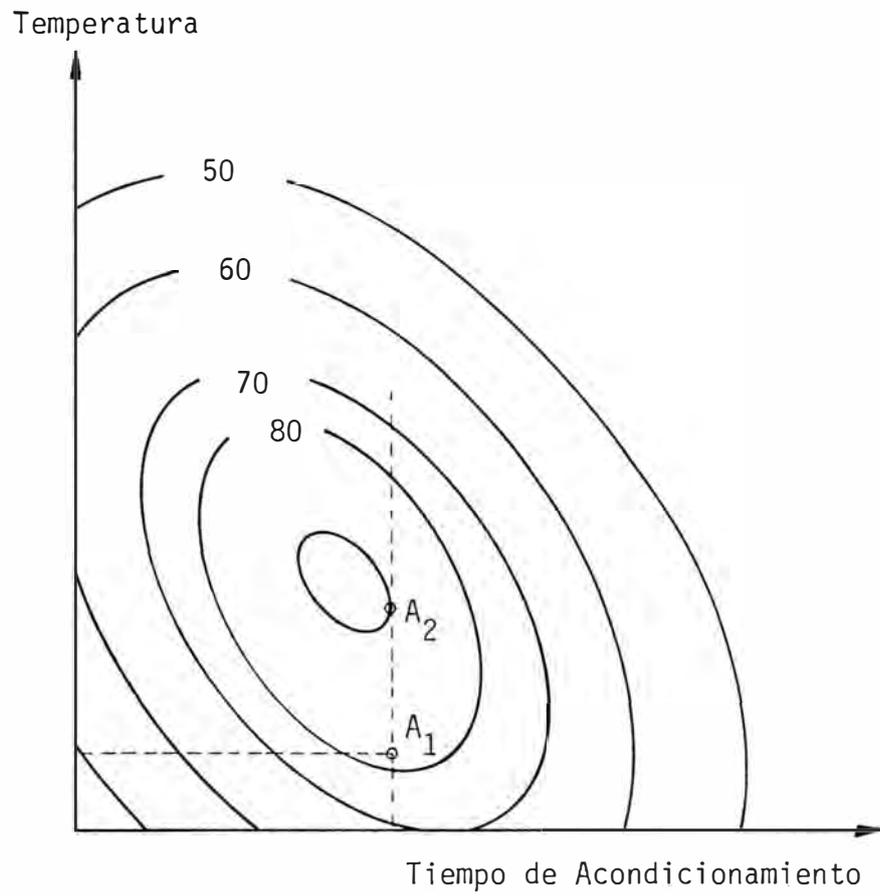


Fig. 2.6.- Determinación incorrecta de un óptimo.

cuando se tomen ciertas precauciones como por ejemplo la aleatorización. Esto asegura que un tratamiento ("el conjunto de niveles de los diferentes factores estudiados que componen un ensayo o experiencia") no está siendo más favorecido en una repetición que en otra, de este modo los errores que afecten a cualquier tratamiento tienden a anularse cuando el número de repeticiones aumenta.

Lo mas lógico es diseñar un experimento y obtener una estimación del error experimental haciendo distintas mediciones en las mismas condiciones.

Consideremos el caso de una prueba de flotación 6 experiencias repetidas cuyos datos están indicados por la tabla siguiente:

N° de Experiencia	Ley del Concentrado
1	32.2
2	33.4
3	31.6
4	34.2
5	30.6
6	31.8

En estas pruebas vemos que la ley del concentrado no es el mismo para las 6 experiencias, a pesar de haber sido trabajadas en las mismas condiciones entre las 6 experiencias, a variaciones en las técnicas usadas por el experimentador o a otras causas que no estan bajo control del experimentador. En consecuencia vemos que el repetir experiencias no conduce a resultados que podrían mejorar respecto al valor medio.

La experiencia nos dice que las variaciones, estas de las que hablamos son generalmente errores relativos y que la distribución de frecuencia de un número grande de experiencias tiene la forma gaussiana de la figura N° 2.5

De todo lo anterior deducimos que la forma mas sencilla de de terminar el error experimental es realizando cierto número de experiencias repetidas ya que la variabilidad en ellas representa nuestro error experimental.

2.4, ESTIMACION DE PARAMETROS ESTADISTICOS.

En el análisis de los diseños experimentales recurrimos a la estadística la cual nos da las herramientas para un análisis de una forma lógica y ordenada.

Entre estas herramientas tenemos:

2,4.1. LA MEDIA MUESTRAL.

Que es el estadígrafo más eficiente para caracterizar el valor central de datos experimentales, es decir se requieren menos datos para alcanzar el mismo grado de certidumbre.

Sea X una variable aleatoria, de la cual se toma una muestra de n observaciones, cuyos valores son $X_1, X_2, X_3, \dots, X_N$ de tal modo que la media muestra esta definida por:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.1)$$

La media muestral es un estimativo de μ_x y es a menudo designado $\hat{\mu}_x$

2,4,2. LA VARIANZA MUESTRAL,

De una variable aleatoria la varianza muestral es también una variable aleatoria que a su vez es el mejor estimativo de σ_x^2 (varianza del conjunto a universo) y se denota por el símbolo S_x^2 (también $\hat{\sigma}_x^2$).

Para una muestra de n observaciones de la variable aleatoria X con media muestral \bar{X} , el mejor estimador para la varianza asociada es:

$$S_x^2 = \sigma_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.2)$$

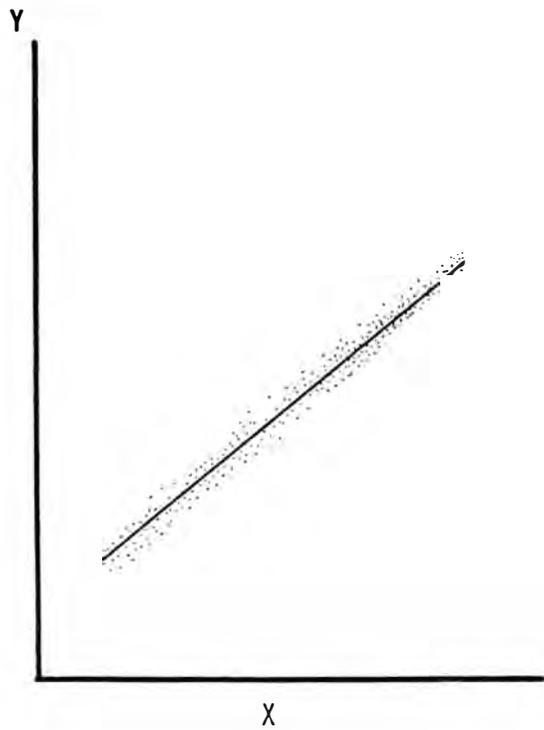
En forma equivalente a la ecuación anterior es la siguiente ecuación:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^n X_i^2}{n} \quad (2.3)$$

El término entre paréntesis de la relación (2.3) se denomina suma total de cuadrados (STC); el denominador $(n-1)$ corresponde a los grados de libertad.

Frecuentemente se debe determinar cualitativamente y según sea posible, cuantitativamente si existe correlación entre dos variables, por ejemplo, si el aumento de la presión en un reactor aumenta el rendimiento.

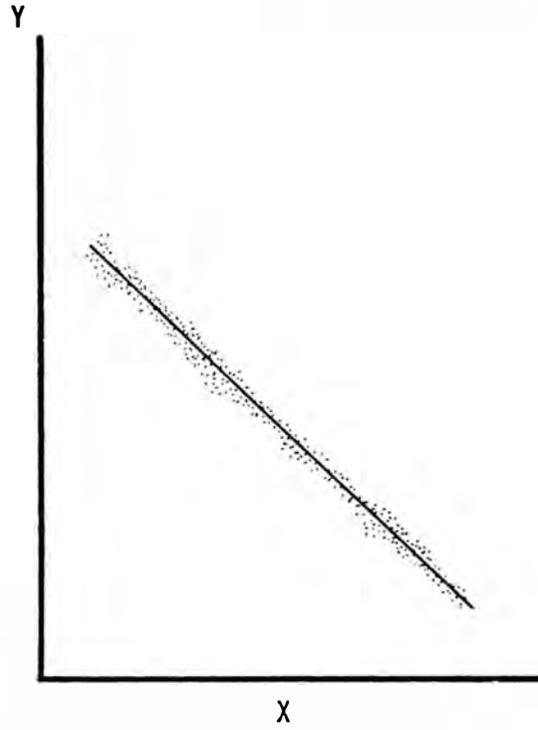
Una medida de la dependencia lineal entre dos variables es el denominado "coeficiente de correlación" (ρ), el cual se calcula en función de la covarianza (Cov) y las desviaciones típicas respectivas.



Correlación lineal positiva

(Cov > 0)

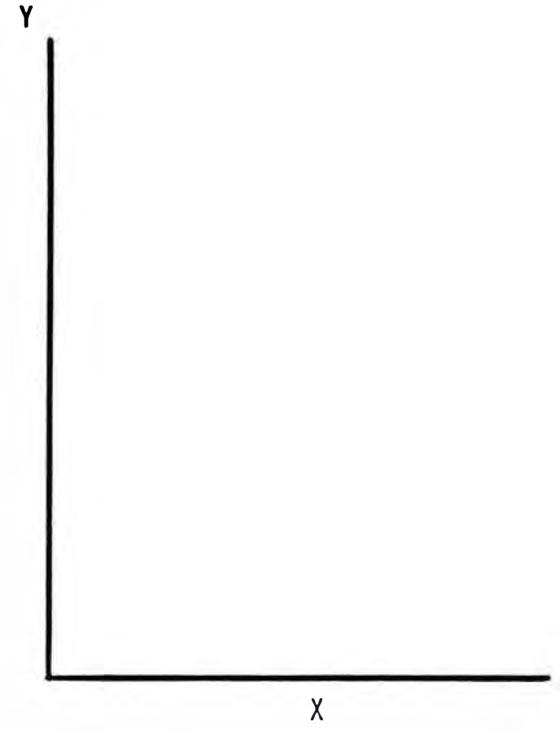
(a)



Correlación lineal negativa

(Cov < 0)

(b)



No hay correlación

(Cov = 0)

(c)

Fig. 2.7

Sean X e Y dos variables aleatorias cualquiera entonces

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{1}{n} \sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) \quad (2.4)$$

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{S_x S_y} \quad (2.5)$$

$$\text{donde: } S_x = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{n} \quad (2.6)$$

$$S_y = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}{n} \quad (2.7)$$

De este modo, el coeficiente de correlación (ρ), se expresa

$$\rho = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2 \cdot \sum (Y_i - \bar{Y})^2} \quad (2.8)$$

El coeficiente de correlación varía entre -1 y $+1$ y de una medida del grado de ajuste entre las dos variables. Si $\rho = 0$ no existe correlación entre las variables como lo muestra la fig. N° 2.7 (c).

Si X e Y no están correlacionadas o son independientes, entonces $\text{Cov}(X,Y) = 0$ y $\rho = 0$. Sin embargo si $\text{Cov}(X,Y) = 0$ no necesariamente X,Y son independientes.

Una correlación positiva ($\rho > 0$) significa que $\text{Cov}(X,Y) > 0$ mientras que un valor de $\text{Cov}(X,Y) < 0$ significa que valores grandes de una variable están asociados con valores pequeños de la otra.

2.4.3. DISTRIBUCIONES ESTADÍSTICAS.

Debido a que las distribuciones muestrales de la mayoría de las estadísticas utilizadas son aproximadamente normales, nombraremos las más utilizadas y de ellas deta

llaremos la distribución de razón de varianzas F, y estas son:

- i) Distribución normal N
- ii) Distribución chi-cuadrado χ^2
- iii) Distribución t - student
- iv) Distribución de razón de varianzas F

DISTRIBUCION DE RAZON DE VARIANZAS F.

Una distribución muy útil para el análisis de varianza y en construcción de modelos, es la distribución de razón de varianzas. Si se toma dos muestras, una consistente en n_1 mediciones independientes de una variable aleatoria X_1 cuya media y varianza son μ_1 y σ_1^2 , respectivamente, y la otra muestra consistente en n_2 mediciones independientes de una variable aleatoria normal X_2 cuya media y varianza por μ_2 y σ_2^2 ; entonces la variable aleatoria F está definida por:

$$F(\vartheta_1, \vartheta_2) = \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \quad (2,9)$$

Con $\vartheta_1 = n_1 - 1$ y $\vartheta_2 = n_2 - 1$ grados de libertad

Los grados de libertad asociados con el numerador y denominador son aquellos asociados con S_1^2 y S_2^2 respectivamente, y pueden ser diferentes de $n - 1$ si la varianza muestral es determinada por alguna expresión distinta d las relaciones siguientes:

$$S_x^2 = \frac{1}{n - 1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (2.10)$$

$$y \quad S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x})^2 n_i \quad (2.11)$$

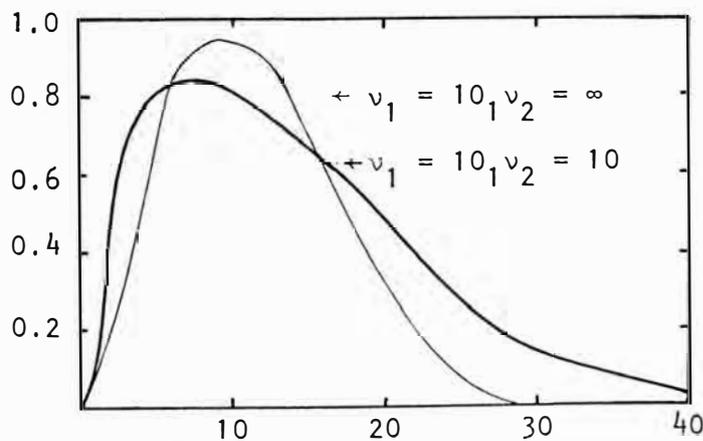
Si $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ y si usa la definición de χ^2 (chi - cuadrado) entonces:

$$F(\phi_1, \phi_2) = \frac{S_1^2}{S_2^2} = \frac{\chi_1^2 / \phi_1}{\chi_2^2 / \phi_2} \quad (2.12)$$

La función densidad de probabilidad F está dada por la ecuación siguiente:

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\phi_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\phi_2}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\phi_1/2 - 1} (\phi_2 - x)^{\phi_2/2 - 1}}{(\phi_1 + \phi_2)^{\phi_1/2 + \phi_2/2}} \quad (2.13)$$

y es la que se encuentra en la tabla F para ϕ_1 y ϕ_2 grados de libertad y cuyo gráfico es el siguiente:



C A P I T U L O I I I

DISEÑOS FACTORIALES

3.1 INTRODUCCION.

En el campo aplicado a la Metalurgia, se estudian los diseños factoriales uno de los diseños experimentales más útiles y prácticos para analizar un gran número de variables, todas ellas variando = al mismo tiempo, y que permite determinar el efecto de cada una de ellas por separado, además del efecto combinado de dos o más variables - el cual es llamado (efecto de interacción).

Este tipo de diseños permite determinar el efecto de cada uno de los factores involucrados con la misma seguridad, como si solo un factor estuviera variando a la vez, así como también permite determinar el grado de influencia de un factor sobre otro.

Experimentos llevados a cabo por ingenieros metalúrgicos, ya sea en el laboratorio o en la planta están en general encamina-

dos a determinar los efectos de uno o más factores sobre:

- i) La calidad de un producto.*
- ii) El rendimiento de un proceso.*
- iii) El comportamiento de una máquina,*
- iv) La resistencia de un material al ataque químico.*
- v) El consumo de energía o combustible de un proceso y así sucesivamente.*

Los diseños factoriales permiten obtener el máximo de información, con el número mínimo de experiencias.

Una manera de alcanzar este objetivo es determinar un conjunto de valores o niveles para cada una de las variables a ser estudiadas y llevar a cabo uno o más ensayos o experiencias del proceso, con todas y cada una de las posibles combinaciones de los niveles del factor.

Uno de los más importantes diseños estadísticos es el diseño factorial por intermedio del cual diversos factores y sus interacciones son estudiadas.

El diseño factorial de 2 niveles son particularmente aplicables en investigaciones preliminares y en la determinación de condiciones óptimas de operación.

El diseño factorial en el que se tienen más de dos niveles para algunos o todos de los factores a estudiar, son utilizados cuando se desea una más completa investigación de las relaciones entre factores y respuestas.

Cuando los efectos principales no son lineales sobre la región de interés y los efectos de interacción son relativamente

grandes es necesario utilizar mas de dos niveles en los factores para un completo estudio de la respuesta.

La selección de un número suficiente de niveles de factor para la investigación en un experimento es muy importante.

a) **DEFINICIONES Y TERMINOLOGIA.**

Definiremos algunos términos usados en los diseños experimentales.

i) *Factor.* Denota cualquier característica de las condiciones experimentales (variables controlables de un proceso) la cual será asignada de un ensayo a otro.

Los factores pueden ser de dos tipos: Cualitativo y Cuantitativo.

ii) *Factor Cualitativo.* Se caracteriza porque sus niveles no pueden ser arreglados en orden de magnitud (tipos de productos, características de una o mas máquinas).

iii) *Factor Cuantitativo.* Por el contrario si pueden ser arreglados por orden de magnitud (temperatura, presión, PH, etc.).

iv) *Niveles de un Factor.* Se refiere a los diferentes valores de un factor estudiado en un experimento.

v) *Efecto de un Factor.* Es el cambio promedio producido en la respuesta medida, debido a un cambio en los niveles del factor.

vi) *Respuesta.* Es el resultado numérico de un ensayo basado sobre un tratamiento o combinación experimental.

vii) *Tratamiento o Combinación Experimental.* Se denomina al efecto promedio de un factor, para distinguirlo del efecto promedio

de una interacción (efecto combinado de factores).

Si solamente el efecto principal de diversos factores son importantes y no existen interacciones significantes, luego puede ser usado el método clásico, en el cual el efecto de un factor es estimado por una serie de pruebas en el cual un factor es variado y los otros se mantienen constantes, pero si existe una posibilidad de efecto de interacción entre dos factores el método clásico no podría detectar ni estimar el rendimiento de ambos efectos,

El diseño factorial, uno de los más importantes diseños estadísticos es aquel en el cual los diversos factores pueden ser estudiados en un específico número de niveles con todas las posibles combinaciones de los niveles del factor incluidos.

Semejante a un diseño puede ser usado a investigar los efectos de ambos factores cualitativos y cuantitativos, pueden ser analizados por componentes lineal, cuadráticos y cúbicos y mas grandes ordenes, dependiendo del número de niveles seleccionados para estos factores.

Con el diseño factorial es posible obtener estimaciones independientes de efectos principales y todos los posibles efectos de interacción de los factores existentes estudiados.

Los efectos de interacción son comunes entre los factores físicos y químicos por ejemplo el tiempo al alcanzar la máxima reducción del metal puede decrecer como la temperatura de tostación es incrementado, o la mejor temperatura de lixiviación en un valor de pH puede no por la mejor temperatura de lixiviación a o-

tro valor de pH.

También podemos ver que algunos factores no interactúan y semejante experiencia podría ser usada en el planeamiento de un programa de investigación. Sin embargo en la ausencia de evidencias previas es imprudente asumir que los factores no interactúan.

La siguiente notación es usada a representar las pruebas individuales en un diseño en orden a facilitar la explicación de las propiedades del diseño factorial.

Cuando un solo factor cuantitativo X_a está a ser probado en diversos niveles, la prueba hecha en el mas bajo nivel es representado por a_0 y las pruebas hechas sucesivamente en el nivel más alto son representados por $a_1, a_2, a_3, etc.$

También puede decirse que las respuestas Y_1 corresponde a la prueba a_0 , Y_2 a la prueba a_1 y así sucesivamente.

En general el subscrito para el símbolo de la prueba es uno menor que su respuesta correspondiente.

El nivel de un factor cualitativo puede ser arreglado en cualquier orden conveniente para usar esta notación cuando nos referimos a las pruebas hechas.

La notación es extendida a experimentos involucrando más de un factor en el experimento, por ejemplo:

$X_a =$ tiempo de acondicionamiento

$X_b =$ temperatura

Las letras a y b con apropiados subscritos identifica los niveles de los factores X_a y X_b .

Así la prueba hecha en el segundo nivel de tiempo = a_1
y en el tercer nivel de temperatura = b_2
y la prueba se podría nombrar $a_1 b_2$.

Una ventaja adicional de la notación simple es aprovechada si la letra correspondiente a un factor particular es omitido cuando ese factor en su mas bajo nivel así la prueba para el tercer nivel en el tiempo y el primer nivel de la temperatura la simbolo - gía de la prueba será b_2 .

La prueba hecha en el más bajo nivel de todos los factores es representada por 1. Este último signo es seleccionado por su correspondiente con el concepto de una identidad en teoría de grupos y además simplifica los procedimientos para determinar las pruebas a ser incluidas en el diseño factorial fraccionado.

Con un ejemplo ilustraremos un diseño factorial de más de 2 niveles,

X_a = *tiempo de acondicionamiento*

X_a = 3, 4 y 5 minutos

X_b = *Temperatura de Flotación*

X_b = 30, 40, 50 y 60 °C

TABLA N° 3,1: Prueba de un Experimento Factorial a 3 y 4 Niveles de Acondicionamiento,

Número de Experiencia	Simbolo de la Prueba	Tiempo de Acondicionamiento	Temperatura °C
1	1	3	30
2	a ₁	4	30
3	a ₂	5	30
4	b ₁	3	40
5	a ₁ b ₁	4	40
6	a ₂ b ₁	5	40
7	b ₂	3	50
8	a ₁ b ₂	4	50
9	a ₂ b ₂	5	50
10	b ₃	3	60
11	a ₁ b ₃	4	60
12	a ₂ b ₃	5	60

3.2. DISEÑO FACTORIAL A 2 NIVELES.

Es el diseño en el cual han sido seleccionados 2 niveles para cada factor y son muy aplicados en la conducta de investigaciones preliminares y en la determinación de las condiciones óptimas de la operación o sea llegar a un procedimiento estandar.

Ejemplo Tenemos un mineral por lixiviar.

X_a = % de sólidos

X_b = tiempo de lixiviación

X_c = temperatura de lixiviación

X_a = 15 y 45 % de sólidos

X_b = 10 a 60 minutos

X_c = 15 a 90 °C

Las 8 pruebas establecidas en los diseños factoriales de 2 niveles puede ser el primer paso en una exploración de una gran región, La evaluación de los resultados mostrará como uno o varios de los factores influyen en encontrar las condiciones óptimas de la lixiviación. La relativa localización de las varias pruebas en los tres factores del diseño factorial a 2 niveles son mostrados geométricamente en la fig. N° 3.1. En esta figura el nivel mas bajo - 1/2 representa el 25% de sólidos para X_a , 30 minutos para X_b y 25 °C para X_c temperatura de lixiviación.

Los niveles mas grandes, + 1/2 representado por 35% sólidos; 40 minutos y 35°C respectivamente para X_a , X_b y X_c ; cada punto diseñado es identificado por el símbolo de la prueba, las coordenadas del punto en las unidades de diseño, y la respuesta obtenida de la prueba en el punto.

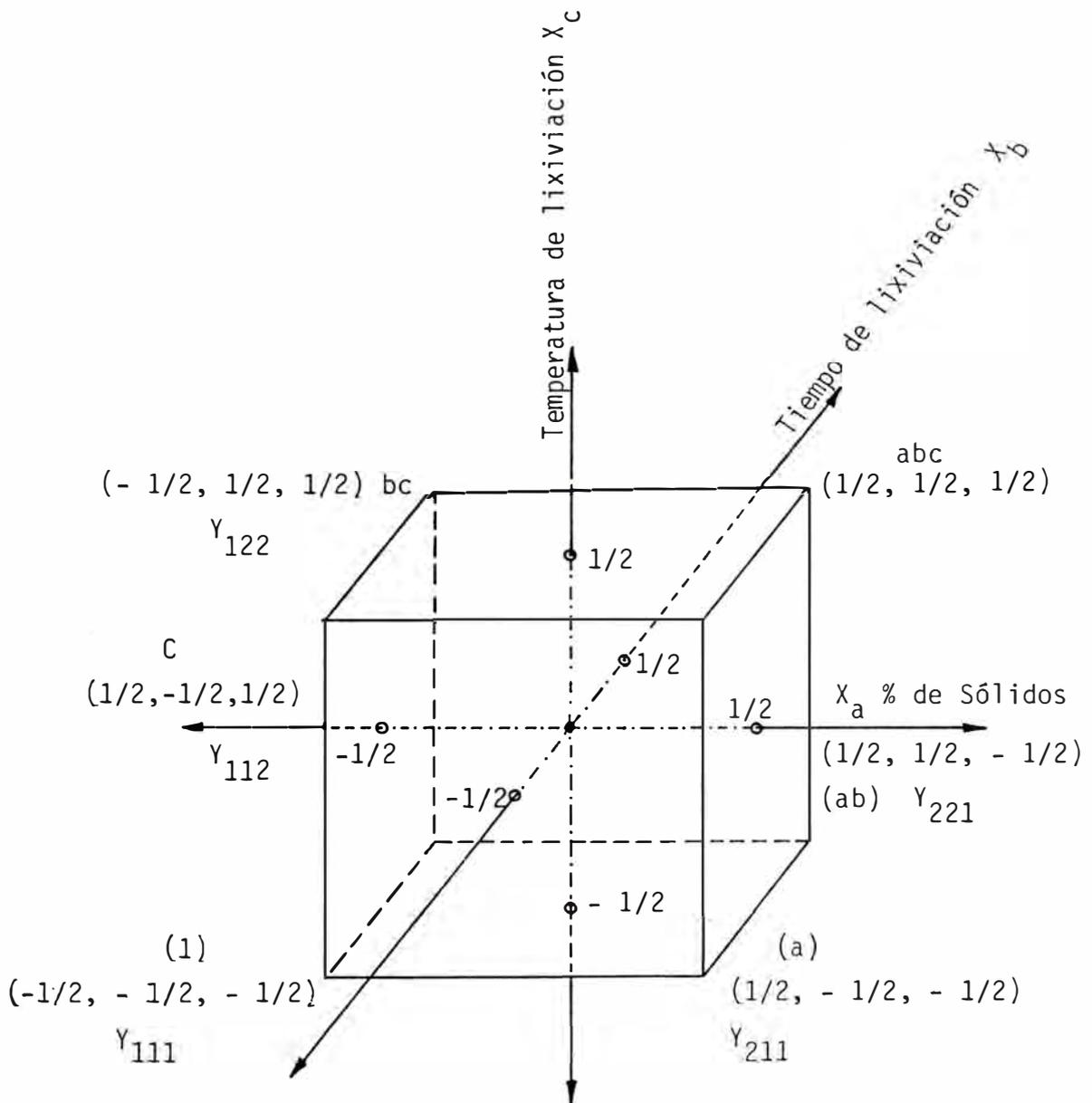


Fig. 3.1.- Diagrama de un diseño factorial de 2 niveles y tres Factores.

En la discusión e ilustración de 2 niveles en un diseño factorial, los subscritos son omitidos de los símbolos de la prueba.

En los diseños a 2 niveles se puede encontrar el coeficiente estimado A de un efecto lineal principal de % de sólidos como la diferencia entre las respuestas promedio para las cuatro pruebas a 35% sólidos y las respuestas promedio para las cuatro pruebas a 25% esto es:

$$A = 1/4 (Y_{211} + Y_{212} + Y_{221} + Y_{222}) - 1/4(Y_{111} + Y_{112} + Y_{121} + Y_{122}) \quad (3.1)$$

Similarmente combinaciones lineales de las respuestas podrán rendir cálculos de los coeficientes B, C, AC y BC.

La teoría de un diseño factorial de dos niveles puede ser desarrollada por enfoque de la atención sobre los signos asociados con cada una de las respuestas en la combinación lineal usada a calcular los coeficientes.

Las funciones de respuesta transformadas puede ser usada a encontrar la apropiada combinación lineal. Sin embargo hay un procedimiento más simple el cual puede ser usado para diseño de 2 niveles.

El procedimiento es algebraico e involucra sustitución de símbolos de la prueba mostrados en la fig. N° 2.5 para las respuestas correspondientes en los cálculos para los coeficientes.

Si la fracción 1/4 es omitida los miembros de la mano derecha de la ecuación (3.1) se convierte en:

$$a + ac + ab + abc \quad 1 + c + b + bc \quad (3.2)$$

y de allí a

$$(a - 1) (b + 1) (c + 1) \quad (3.3)$$

Los signos menos en la expresión del arreglo II corresponde a los factores involucrados en el coeficiente a ser estimados e so es (a - 1) corresponde al factor Xa % de sólidos.

Expresiones similares para los coeficientes B, C, AC y BC respectivamente son:

$$(a + 1) (b - 1) (c + 1) \quad (3.4)$$

$$(a + 1) (b + 1) (c - 1) \quad (3.5)$$

$$(a - 1) (b + 1) (c - 1) \quad (3.6)$$

$$(a + 1) (b - 1) (c - 1) \quad (3.7)$$

Por eso en el caso general expresiones similares a estos en los arreglos (3.2) y (3.3) pueden ser puestos con el signo menos correspondiente a los factores involucrados en el coeficiente a ser estimado y luego estas expresiones desarrolladas a obtener los propios signos para las pruebas como muestra en las expresiones del arreglo (3.1). Los signos semejantes luego son usados en la combinación lineal de las respuestas correspondientes el cual son usados a calcular los coeficientes.

A continuación presentaremos una tabla las cuales son útiles en el diseño factorial fraccionado de 2 niveles y por esta razón la columna para el efecto promedio del coeficiente, I es incluido, la esquina superior de la mano izquierda de la tabla puede ser usada para el experimento de dos factores y esta tabla puede ser extendida para el uso con cuatro o mas factores.

TABLA N° 3,2: Signos a ser asociados con las respuestas para las pruebas en tres factores a 2 niveles de un experimento factorial, calculando los coeficientes de los efectos principales y de interacción por los factores Xa, Xb y Xc.

Prueba N°	Coeficiente							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
(1)	+	-	-	+	-	+	+	-
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
ab	+	+	+	+	-	-	-	-
c	+	-	-	+	+	-	-	+
ac	+	+	-	-	+	+	-	-
bc	+	-	+	-	+	-	+	-
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Para entender como la tabla es extendida para mas factores prestaremos atención a los signos en las columnas A, B y C los signos menos de la columna A corresponde a las pruebas en los cuales el factor Xa esta en su nivel mas bajo y el signo mas corresponde a las pruebas en las cuales el factor Xa está en su nivel mas alto, lo mismo es cierto para las columnas B y C osea los factores Xb y Xc respectivamente.

Para cada una de las pruebas los signos en las columnas A,B y C están de acuerdo con los signos de las coordenadas de los puntos de las pruebas en la fig. N° 3.1 El signo en la columna

AB para cualquier fila es el producto de los signos para esos de igual fila en las columnas A y B. Los signos en las columnas AC, BC y ABC son obtenidos en la misma forma.

Al desarrollar la tabla para un cuarto factor X_d, los símbolos de las pruebas del diseño factorial a tres factores en la columna de la izquierda cada uno es multiplicada por la letra d estos, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, y abcd, ocho filas adicionales son agregadas a la tabla anterior de tres factores estos símbolos son adicionados en el orden dado. Similarmente los símbolos de los coeficientes en la cabeza de las columnas restantes son cada una multiplicadas por la letra D es decir D, AD, BD, ABD, CD, ACD, BCD y ABCD, signos menos son colocados en las primeras 8 filas de la columna D de la tabla que se está extendiendo, y signos mas son colocados en las ocho últimas filas de esta columna. Los signos de las siete restantes columnas adicionales son obtenidas como productos de los signos correspondientes de las columnas A, B, C y D como se explicó previamente para la tabla N° 3.3

La tabla puede ser sucesivamente extendida en forma similar para un número cualquiera de factores.

Si tuvieramos factores cualitativos en lugar de cuantitativos uno u otro de los niveles puede ser seleccionado como el más bajo nivel.

El efecto del factor cualitativo tiene un componente lineal artificial para el cual el coeficiente correspondiente puede ser calculado de los resultados de un experimento factorial a 2 niveles.

Generalizando para un diseño factorial de 2 niveles , para n factores A, B, C, D, ..., Q se tendrá:

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a - 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \dots (q + 1) \quad (3.8)$$

$$B = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a + 1)(b - 1)(c + 1)(d + 1) \dots (q + 1) \quad (3.9)$$

$$ABC \dots Q = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} (a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1) \dots (q - 1) \quad (3.10)$$

Es de principal importancia recordar que estas fórmulas deben expandirse a desarrollarse totalmente para obtener el valor de los efectos e interacciones deseadas.

Otro método para calcular los efectos principales e interacciones de un diseño factorial 2^n es el siguiente:

- a) Si tiene una matriz diseño, una matriz de variables independientes y un vector observación. A la lista de los puntos experimentales se le denomina matriz diseño y denomina D, para un factorial 2^n la matriz del diseño contiene n columnas y $2^n = N$ filas.

Hay una columna para cada una de las n variables y cada fila de la combinación de niveles de cada experiencia. Supongamos el caso de un diseño factorial 2^3 factores A, B, y C y un conjunto de respuestas,

TABLA N° 3,3.

MATRIZ DISEÑO D			MATRIZ DE VARIABLES INDEPENDIENTES X							VECTOR OBSERV. Y _i	
A	B	C	I	A	B	C	AB	AC	BC	ABC	
-	-	-	+	-	-	-	+	+	+	-	2
+	-	-	+	+	-	-	-	-	+	+	12
-	+	-	+	-	+	-	-	+	-	+	8
+	+	-	+	+	+	-	+	-	-	-	10
-	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	6
+	-	+	+	+	-	+	-	+	-	-	7
-	+	+	+	-	+	+	-	-	+	-	5
+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	3

La matriz de variables independientes se obtiene agregando un sector columna I, que consiste de signos (+), el cual es usado para estimar la media; los otros vectores columna se generan a partir de la matriz diseño. Así el vector AB se obtiene tomando los productos interiores de los vectores A y B.

$$(-) (-) = + ; (+) (-) = - , \text{ etc.}$$

b) Los efectos se obtienen tomando los productos interiores de los elementos del vector observación con los correspondientes elementos del efecto deseado en la matriz de variables independientes y dividiendo el resultado por 2^{n-1} .

Así para el efecto A se tendrá :

$$\text{Efecto A} = \frac{\vec{A} \cdot \vec{Y}}{2^{n-1}} = \frac{\sum A_i Y_i}{2^{n-1}}$$

$$A = \frac{-2 + 12 - 8 + 10 - 6 + 7 - 5 + 3}{2^{3-1}}$$

$$A = 2.75$$

Este método tiene la ventaja de que se puede programar fácilmente en un computador para calcular las estimaciones de los efectos principales en diseños factoriales con varios factores se desea estudiar la influencia de la temperatura y el tiempo de acondicionamiento en un experimento de flotación.

Su variable respuesta Y_i es el % de recuperación del mineral.

Factores	Niveles	
A = Temperatura °C	20	30
B = tiempo de acondicionamiento (minutos)	1	3

Como tenemos dos variables, el número de experiencias es 2^2 y el diseño será:

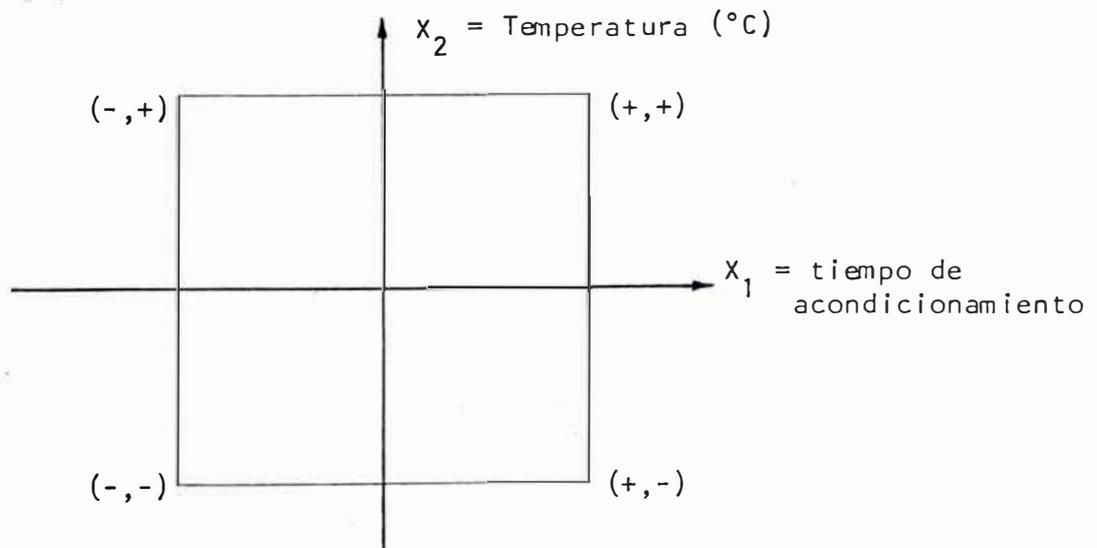


Fig. N° 3.2. DISEÑO DE UN DISEÑO FACTORIAL DE 2 VARIABLES Y 2 NIVELES.

TABLA N° 3.4.

Experiencia N°	Diseño	Nivel de A (°C)	Nivel de B (minutos)	Respuesta (%)
1	1	20	1	65
2	a	80	1	80
3	b	20	3	70
4	ab	80	3	85

El efecto principal del factor A es simplemente la diferencia entre el promedio de la respuesta cuando A está en su nivel superior menos el promedio de la respuesta cuando A está en su nivel inferior.

$$A = 1/2 (a + ab) - 1/2 (b + 1) \quad (3.11)$$

$$A = 1/2 (80 + 85) - 1/2 (70 + 65) = 15.0$$

Esto significa que el efecto de aumentar la temperatura de 20°C a 80°C se produce un aumento en la recuperación de 15%

$$B = 1/2 (b + ab) - 1/2 (a + 1) = 5\%$$

3.2.1. ANALISIS DE UN DISEÑO FACTORIAL.

Realizado el diseño experimental y determinados los efectos e interacciones de los factores, es necesario hacer un análisis de significación de estos en nuestro experimento.

Para ello se realiza una estimación de las varianzas de los efectos e interacciones y posteriormente se aplica una

décima de significación en nuestros casos aplicamos un test F.

(1) Algoritmo de Yates.

La técnica de cuantificar efectos principales e interacciones en la forma señalada anteriormente es especialmente práctica, cuando el diseño es pequeño (menos de cuatro factores) o cuando interesan algunos de los efectos; pero para el caso de diseños mayores o la necesidad de cuantificar el máximo de efectos es mucho más rápido emplear el método tabular sistemático desarrollado por Frank Yates el que utilizaremos en este diseño

En la tabla 3.5 se muestran valores de una respuesta medida en un diseño 2^3 indicados en la segunda columna.

En la tercera columna se ha restado el valor promedio de estas respuestas, para facilitar el cálculo.

Las columnas (4) , (5) y (6) se construyen de la siguiente manera:

- i) La primera mitad de la columna se construye a partir de la columna (3), sumando los valores de pares: $7 = 11 + (-4)$
 $- 19 = - 15 + (- 4)$ y así sucesivamente.
- ii) La mitad inferior se construye restando algebraicamente el número superior del inferior : $15 = 11 - (- 4)$;
 $11 = - 4 - (- 15)$ y así sucesivamente.
- iii) La columna (5) se forma a partir de la (4), en igual forma y la (6) de la (5) y así sucesivamente si el diseño fuera mayor. En general para un diseño 2^n se tienen n - columnas que se forman de la manera descrita, y que son las columnas (4), (5) y (6) para este diseño 2^3

TABLA 3.5, Algoritmo de Yates para Cálculos de Efectos y Varianzas.

(1) Comb. Exp.	(2) Yi	(3) Yi-27	(4)	(5)	(6) Efecto total	(7) E.P.(6)/2 ⁿ⁻¹	(8) S.T.C. (6) ² /2 ⁿ
1	23	-4	7	-12	0		
a	38	11	-19	12	-2	-0.5	0.5
b	12	-15	18	26	-50	-12.5	312.5
ab	23	-4	-6	-28	32	8	128.0
total		-12	0	- 2	- 20		
c	52	25	15	-26	24	6	72.0
ac	20	- 7	11	-24	-54	-13.5	364.5
bc	22	-5	-32	-4	2	0.5	0.5
abc	26	- 1	4	36	40	10.0	200.0
Impares		+ 1	8	- 16			
Pares		- 1	-10	- 4			
Total		0	- 2	- 20			1078

E,P, = Efecto Promedio

S,T,C, = Suma total de cuadrados

Al confeccionar esta tabla en forma manual, se pueden cometer errores de cálculo lo cual es fácilmente comprobable, haciendo las siguientes comparaciones,

- i) La suma de la mitad superior de cualquier columna debe de ser igual a la suma total de la columna anterior.
- ii) La diferencia entre las sumas de las mitades superiores debe de ser igual a la diferencia entre pares e impares.
- iii) La suma total de cuadrados debe de ser igual a:

$$\sum_{i=1}^n Y_i^2 - \frac{(Y_1)^2}{2^n} \quad (3.12)$$

En este caso $n = 3$

Estas formas de comprobación se puede generalizar.

3.2.2, ANALISIS DE VARIANZA DE UN DISEÑO FACTORIAL DE 2 NIVELES.

Para realizar el análisis estadístico de los resultados obtenidos y poder cuantificar el grado de significación de un efecto dados, se debe realizar un análisis de varianza, para lo cual se debe determinar la varianza asociada a la cuantificación de un efecto principal y de enteracción, así como también una estimación del error experimental.

Para estimar la varianza del error experimental existen varias formas:

- i) Se puede considerar que no existen interacciones entre factores. Esto significa que los factores son independientes entre sí. Obliga a conocer muy bien el proceso y las características en las variables del mismo. En este caso

se considera que los efectos de interacciones se deben al error experimental y su magnitud se traspasa al error.

ii) Repetir dos o más experiencias que merezcan duda y estimar la magnitud del error por diferencia en mediciones, o hacer varias experiencias o ensayos en el nivel central del diseño.

iii) Repetir el experimento completo dos o más veces.

De todas estas formas, la más práctica es la referente a la repetición de experiencias.

La forma de cuantificar la varianza del error experimental en experiencias repetidas es:

$$S_{ee}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta Y_i^2}{2 \cdot k} \quad (3.13)$$

donde k es el número de repeticiones.

ΔY_i es la diferencia entre 2 respuestas

En el caso de hacer varias determinaciones en el nivel central o estandar del diseño, se puede cuantificar la varianza del error en la forma usual es decir:

$$S^2 = \frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{n - 1} \quad (3.14)$$

Para el análisis de varianza de los resultados obtenidos en un experimento se debe hacer uso de un test estadístico apropiado. Este test apropiado es la distribución F ó razón de varianzas.

Realizando un test de hipótesis obtendremos información útil que permita obtener conclusiones válidas y razonables.

Se pueden plantear las siguientes hipótesis nulas:

$$\begin{aligned} \text{i) } H_0 &: \sigma_e^2 = \sigma_{ee}^2 \\ H_1 &: \sigma_e^2 \neq \sigma_{ee}^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

α : representa la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0 , siendo esta verdadera.

En este caso no interesa si es mayor o menor que σ_{ee}^2 - solo interesa probar que son iguales.

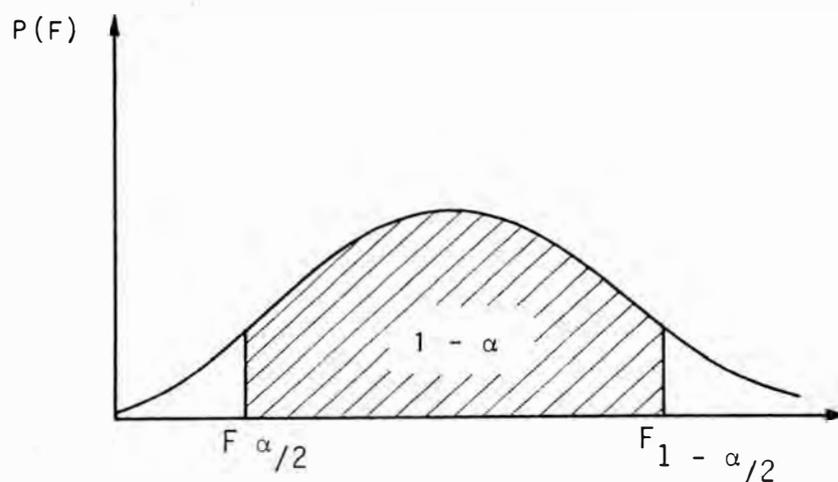


Fig. 3.3

Si la hipótesis H_0 es verdadera la región de aceptación para colas de áreas iguales se determina como sigue:

$$\Pr F_{\alpha/2} \leq F \leq F_{1-\alpha/2} = \Pr F \leq F_{1-\alpha/2}$$

$$\Pr F \leq F_{\alpha/2} = 1 - \alpha \quad (3.15)$$

Considerando el argumento

$$F_{\alpha/2} \leq F \leq F_{1-\alpha/2}, \text{ donde } F = \frac{S_1^2(v_1)}{S_2^2(v_2)} \quad (3.16)$$

y que $F_{\alpha/2}(v_1, v_2) = \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(v_2, v_1)} < 1$ por

definición (3.17)

Y como $S_1^2 / S_2^2 = 1$ (planteamiento de hipótesis) entonces la desigualdad de la izquierda siempre se satisface y solo resta demostrar que:

$$S_1^2 / S_2^2 = F \leq F_{1-\alpha/2}(v_2, v_1)$$

Por lo tanto la región de aceptación de H_0 es:

$$F \leq F_{1-\alpha/2}(v_1, v_2)$$

ii) $H_0 : S_1^2 > S_2^2 \quad (3.18)$

$H_1 : S_1^2 < S_2^2 \quad (3.19)$

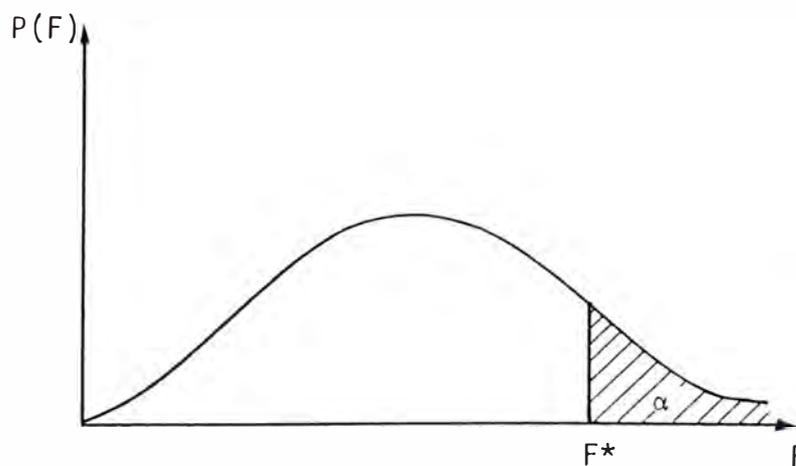


FIG. N° 3.4. DISTRIBUCION F PARA TEST DE UNA COLA

La probabilidad de encontrar un valor de F mayor que F* se designe P(F*) y se expresa

$$\begin{aligned}
 P(F^*) &= \Pr F \geq F^* = \int_{F^*}^{\infty} P(F) dF \\
 &= \Pr F \geq F_{1-\alpha} = \alpha \quad (3.20)
 \end{aligned}$$

Entonces la región de aceptación para H₀ es.

$$F_1 \geq F_{1-\alpha} (v_1, v_2) \quad (3.21)$$

iii) H₀ : S₁² < S₂²
 H₁ : S₁² ≥ S₂²

Para este planteamiento tenemos la siguiente región de aceptación:

$$\begin{aligned}
 P(F^*) &= \Pr F \leq F^* = \int_0^{F^*} P(F) dF = \Pr F \leq F_{1-\alpha} = 1-\alpha \\
 & \quad (3.23)
 \end{aligned}$$

Entonces la región de aceptación de H₀ es

$$F \leq F_{1-\alpha} (v_1, v_2)$$

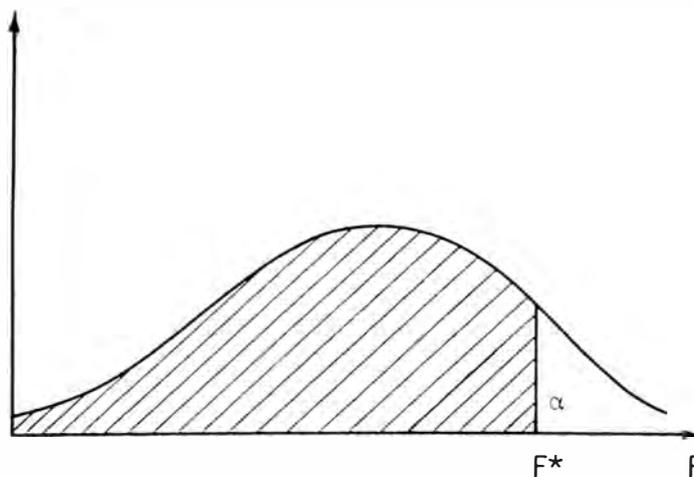


FIG. N° 3.5. DISTRIBUCION F PARA TEST DE UNA COLA.

En esta tabla veremos el análisis de varianza de las respuestas obtenidas anteriormente:

TABLA 3.6.

Fuente de Variación	Efectos	S.T.C.	Grado de Libertad	Varianza Se^2	Fc	G. S. $\alpha = 0.10 \quad 0.05$	
Efectos Principales							
X_1	- 0,50	0.50	1	0.50	0,20	-	-
X_2	-12,50	312,50	1	312.50	31.3	*	**
X_3	6,00	72.00	1	72.00	7.2	-	-
Interacciones							
X_1X_2	8.00	128,00	1	128.00	12.8	*	-
X_1X_3	-13.50	364,50	1	364.50	36.4	*	**
X_2X_3	0.50	0.50	1	0.50	0.20	-	-
$X_1X_2X_3$	10.00	200.00	1	200.00	20.0	*	**
Error exp,		30.00	3	10.00			

Analizando efectos principales e interacciones para planteamiento de hipótesis

i) Un efecto será significativo si se cumple que:

$$Se^2 > See^2 \cdot F_{1 - \alpha/2} (v_1, v_2)$$

O lo que es lo mismo; $F_c > F_{1 - \alpha/2} (v_1, v_2)$

Para los niveles de significación α dados, se tiene :

$$F_{0.95}(1;3) = 10.1 \qquad F_{0.95}(3;1) = 215.7$$

$$F_{0.975}(1;3) = 17.4 \qquad F_{0.975}(3;1) = 864.2$$

* Efecto significativo

** Efecto muy significativo

Este análisis de varianza entrega la siguiente información:

i) Tanto el factor X_1 como X_3 no son significativos para los niveles de significación elegidos y en sus niveles estudiados, y además tienen diferentes efectos.

ii) Aún cuando los factores X_1 y X_3 no son significativos su interacción si lo es. Convendrá analizar su naturaleza.

iii) El factor X_2 es muy negativo con un efecto negativo.

iv) Conviene considerar la interacción de tercer orden.

Las razones por las cuales un efecto resulta no significativo puede deberse a:

i) El factor se encuentra en la vecindad de su valor - óptimo.

ii) El nivel elegido para tal factor es desproporcionalmente pequeño.

iii) El sistema es independiente de los niveles de este factor

Cuando una interacción es grande, los correspondientes efectos principales dejan de tener muchos significados, la presencia de un gran efecto de interacción significa que el efecto de un factor es marcadamente dependiente de

los niveles del otro, y cuando se considera el efecto de uno, es necesario especificar el nivel del otro.

Si la interacción entre factores resulta ser - despreciable, se puede inferir la independencia de los factores involucrados, y por lo tanto con conclusiones válidas pueden ser obtenidas a partir de la significancia o no de los efectos principales. Por otro lado si una interacción - AB resulta significativa; pero el efecto principal no lo es no se puede concluir la despreciable de A, la existencia de AB significa que tanto A como B afectan a la respuesta; pero no en forma independiente.

La no existencia del efecto de A puede deberse a que este afecta a la respuesta en diferentes sentidos para los distintos niveles del factor B, y cuando su efecto - es promediado, sobre los diferentes niveles de B usados, su efecto promedio resulta pequeño.

Por lo tanto, en estas situaciones en la consideración del efecto de A es necesario establecer los niveles de B y viceversa.

Los diseños factoriales de dos niveles pueden ser usados para explorar una región solamente cuando los efectos principales de los factores son lineales o aproximadamente lineales sobre la región, y los efectos de las interacciones son relativamente pequeños comparados con los efectos principales.

Sin embargo, cuando los efectos principales son no lineales sobre la región de interés y los efectos de interacción son relativamente grandes, más de dos niveles para los factores son necesarios para un estudio completo de la superficie respuesta.

El procedimiento para la obtención de los efectos y por tanto de la significancia o no de los efectos es el mismo que para los diseños factoriales de dos niveles con la diferencia que las tablas de signos que son asociados con las respuestas para las diferentes pruebas no pueden ser preparadas para diseños que involucran tres o más niveles por factor. Hay solamente dos signos algebraicos por lo tanto la conveniencia de asociar un signo con cada nivel de un factor se pierde.

Después de haber analizado los diseños factoriales a 2 y 3 variables y 2 niveles vamos a generalizar los diseños factoriales a 2 niveles pero para k variables.

Si k variables van a ser controlados en 2 niveles podemos llamarlo diseño 2^k

Los niveles son las fronteras del área a ser investigada para un proceso dado de variables,

Cuando se trabaja a 2 niveles se tiene un nivel máximo y uno llamado nivel mínimo y podemos determinar a partir de esto,

$$Z_j = \frac{Z_j^{\max} - Z_j^{\min}}{2} \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3.24)$$

$$\Delta Z_j = \frac{Z_j \max - Z_j \min}{2} \quad (3.25)$$

El punto con coordenadas $(Z_1^0, Z_2^0, \dots, Z_k^0)$ es llamada el punto central del diseño o también se le llama nivel base Δz_j es el intervalo.

Es usual pasar de Z_1, Z_2, \dots, Z_k coordenadas a un nuevo sistema dimensional de coordenadas X_1, X_2, \dots, X_k por la ecuación :

$$x_j = \frac{Z_j - Z_j^0}{\Delta Z_j} \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (3.26)$$

En este sistema dimensional el nivel superior es + 1 y el mínimo - 1 y el nivel central es 0 y coincide con el origen de coordenadas.

Después de haber introducido la variable falsa $X_0 = 1$ se puede generalizar una matriz diseño que tiene las siguientes propiedades:

$$\sum_{i=1}^N X_{ui} X_{ji} = 0 \quad u \neq j \quad u, j = 0, 1, \dots, k \quad (3.27)$$

$$\sum_{i=1}^N X_{ji} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k \quad j \neq 0 \quad (3.28)$$

$$\sum_{i=1}^N X_{ji}^2 = N \quad j = 0, 1, 2, \dots, k \quad (3.29)$$

Donde K es el número de factores y N es el número de experimento en la matriz diseño.

La primera propiedad Eq (3.27) representa la propiedad de ortogonalidad, este es la igualdad de los pro-

ductos escalares de los vectores a cero.

Esta propiedad reduce las dificultades en la estimación de coeficientes para la ecuación de regresión - porque el coeficiente matriz (X^*X) de las ecuaciones normales viene a ser la diagonal y esta diagonal sus elementos son iguales al número de experimentos, N, en la matriz diseño, los elementos de la diagonal de la matriz inversa $(X^*X)^{-1}$ son:

$$(j,j) = 1/N \quad (3.28)$$

Así:

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix} = (X^* X)^{-1} X^* Y = \begin{pmatrix} 1/N & 0 \\ & 1/N \\ & & \ddots \\ & & & \ddots \\ 0 & & & & 1/N \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \sum X_{0i} & Y_i \\ \sum X_{1i} & Y_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum X_{ki} & Y_i \end{pmatrix}$$

$$(3.29)$$

$$B = \begin{vmatrix} \Sigma \frac{X_{0i}}{N} & Y_i \\ \Sigma \frac{X_{1i}}{N} & Y_i \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \Sigma \frac{X_{ki}}{N} & Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{vmatrix} \quad (3.30)$$

Como consecuencia, cualquier coeficiente b_j de la ecuación de regresión es definido por el producto escalar de una columna Y por su respectiva columna X_j dividido entre el número de experimentos N en la matriz diseño.

$$b_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{ji} Y_i \quad (3.31)$$

En el caso de una ecuación que contiene todas las interacciones y sus respectivas coeficientes por ejemplo

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3 + b_{123} x_1 x_2 x_3$$

donde tenemos b_{12} , b_{13} , b_{23} son términos de interacción de segundo orden y b_{123} es un término interacción de tercera orden.

Por ejemplo:

$$b_{12} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_1 x_2)_i Y_i}{N} \quad (3.32)$$

También podemos determinar:

$$S_{bj} = S_e / \sqrt{N} \quad (3.33)$$

Para calcular \bar{y}^0 , se deben de hacer observaciones replicadas o repetidas en el nivel base y con \bar{y}^0 podemos obtener S_e .

$$\bar{y}^0 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i^0}{N} \quad (3.34)$$

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i^0 - \bar{y}^0)^2}{N - 1} \quad (3.35)$$

$$S_{bj} = S_e / \sqrt{N} \quad (3.36)$$

luego podemos calcular:

$t_0, t_1, t_2, \dots, t_k, t_{12}, t_{13}, \dots, t_{1k}, t_{21}, t_{22}, \dots, etc.$

$$t_j = \frac{b_j}{S_{bj}} \quad (3.37)$$

luego buscaremos un nivel de significación p , y f , los grados de libertad y buscaremos $t_p(f)$ en la tabla t de student y comparamos $t_p(f)$ con t_j considerando en el modelo solo los $t_j > t_p(f)$ como coeficientes en el modelo.

Luego tendremos $F = \frac{S_r^2}{S_e^2}$, F es la prueba de Fisher y S_r^2 es calculado de la siguiente manera:

$$S_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{N - l} \quad (3.38)$$

Luego el valor F es comparado con $F_p (f_1, f_2)$

Si $F < F_p (f_1, f_2)$ el modelo expresa bien el experimento

3.2.3. TRABAJO PRACTICO DE APLICACION.

La utilidad de los diseños factoriales será visto con el siguiente trabajo realizado en unos polvos de chimenea que es obtenido de los hornos de fundición de Zinc y cobre. La finalidad es la disolución selectiva del Bi con las mínimas disoluciones de Ag, y Pb y esto puede realizado con una adecuada manipulación de temperatura, adición de ácido sulfúrico, y adición de cloruro de sodio. Los niveles óptimos para esas variables fueron determinados cuando la técnica de las superficies respuestas que maximize la función objetivo :

$$Y = \% B_i / (1 + \% Ag) \quad (3.39)$$

Las tres variables fueron manipuladas en estos experimentos; temperatura, adición de ácido sulfúrico y adición de cloruro de sodio.

Las condiciones que se buscan obtener son los resultados con la máxima recuperación de Ag y plomo en el residuo y máxima remoción del Bi.

Los resultados de experimentos preliminares a 70°C indicó que una adición mínima de cloruro de sodio a

0.1 M es requerida para lograr una remoción del 75% de Bi. - También se mostró que resultados satisfactorios son logrados a 50°C , H₂SO₄ , 0.5 M y NaCl 1.0 M.

Condiciones prácticas obligadas desde el punto de vista operacional requiere que las temperaturas no exedan - 70°C, que el H₂SO₄ debe de ser adicionado en concentraciones menores que 1.0 M y que la adición de NaCl debe de ser menor que 2.0 M.

Para identificar los niveles de las tres variables las cuales resultarían en una separación óptima, se emplea - rán el método de la superficie respuesta, para planificar y analizar todo experimento adicional. Este método involucra - diseñar un grupo de experimentos los cuales permiten la cons - trucción de un modelo empírico que representa en forma cuan - titativa los efectos de cada una de las variables y sus in - teracciones sobre el porcentaje de extracción.

En este caso utilizaremos un diseño factorial 2³ - con el punto central de replicación.

$$Y = \frac{\% \text{ Bi}}{1 + \% \text{ Ag}} = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4X_1X_2 + B_5X_1X_3 + B_6X_2X_3 + B_7X_1X_2X_3$$

Donde:

X₁ = temperatura de reacción en °C

X₂ = adición de ácido sulfúrico (M)

X₃ = adición de cloruro de sodio (M)

$B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7$ son constantes de ajuste.

La respuesta Y fue seleccionada en tal forma que mida la selectividad del bismuto extraído con respecto a la plata.

Una extracción completa del bismuto con toda la plata presente en los residuos rinde un valor de $Y = 100$ - mientras que una disolución de la plata con la no extracción del bismuto nos da un valor de $Y = 0$

El diseño experimental empleado fue centrado alrededor del punto $(X_1, X_2, X_3) = (50^\circ\text{C}, 0.505 \text{ M}, 1.05 \text{ M})$ con puntos periféricos como la muestra la figura N° 3.6

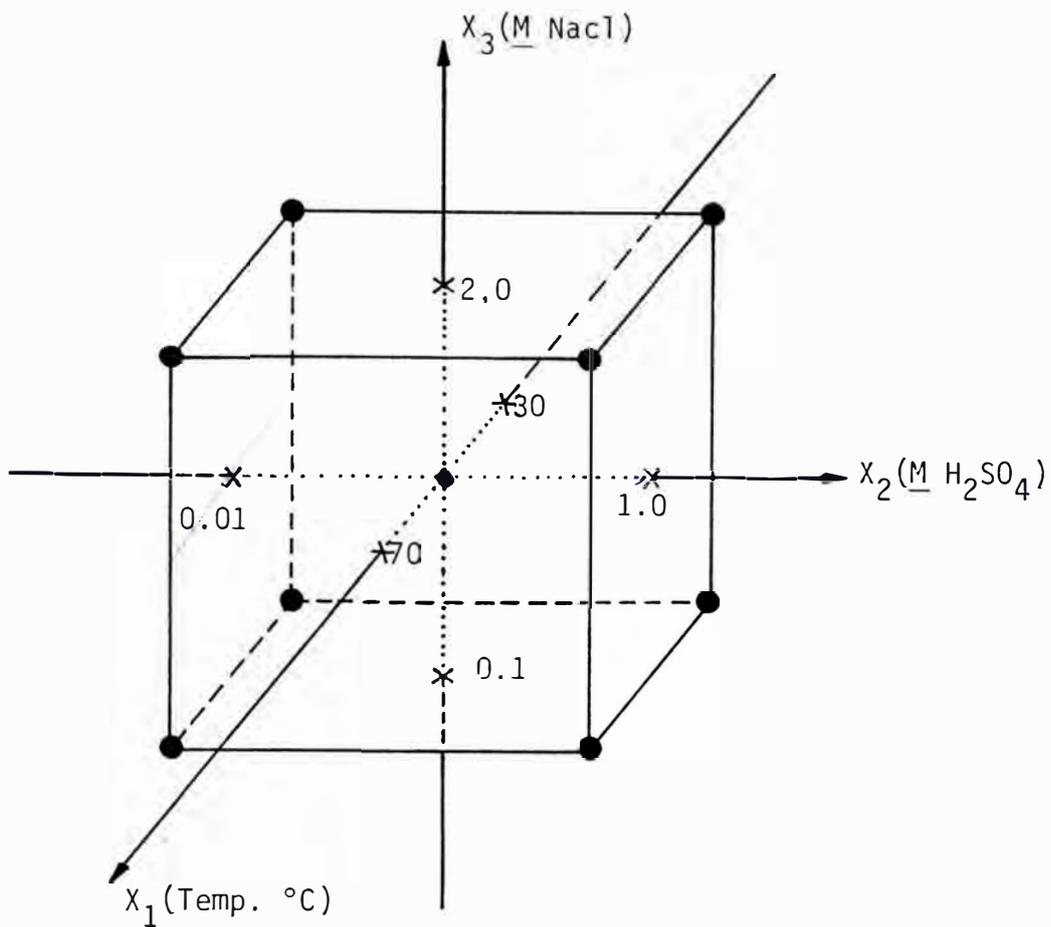


Fig. 3.6 Diseño factorial con punto de replicación en el centro. Los círculos sólidos representa la posición de los experimentos X_1 - Temp (°C); X_2 - concentración de ácido sulfúrico (M); X_3 - concentración del cloruro de sodio (M).

La Fig. 3.7 muestra pruebas realizadas por el método " Edosinian".

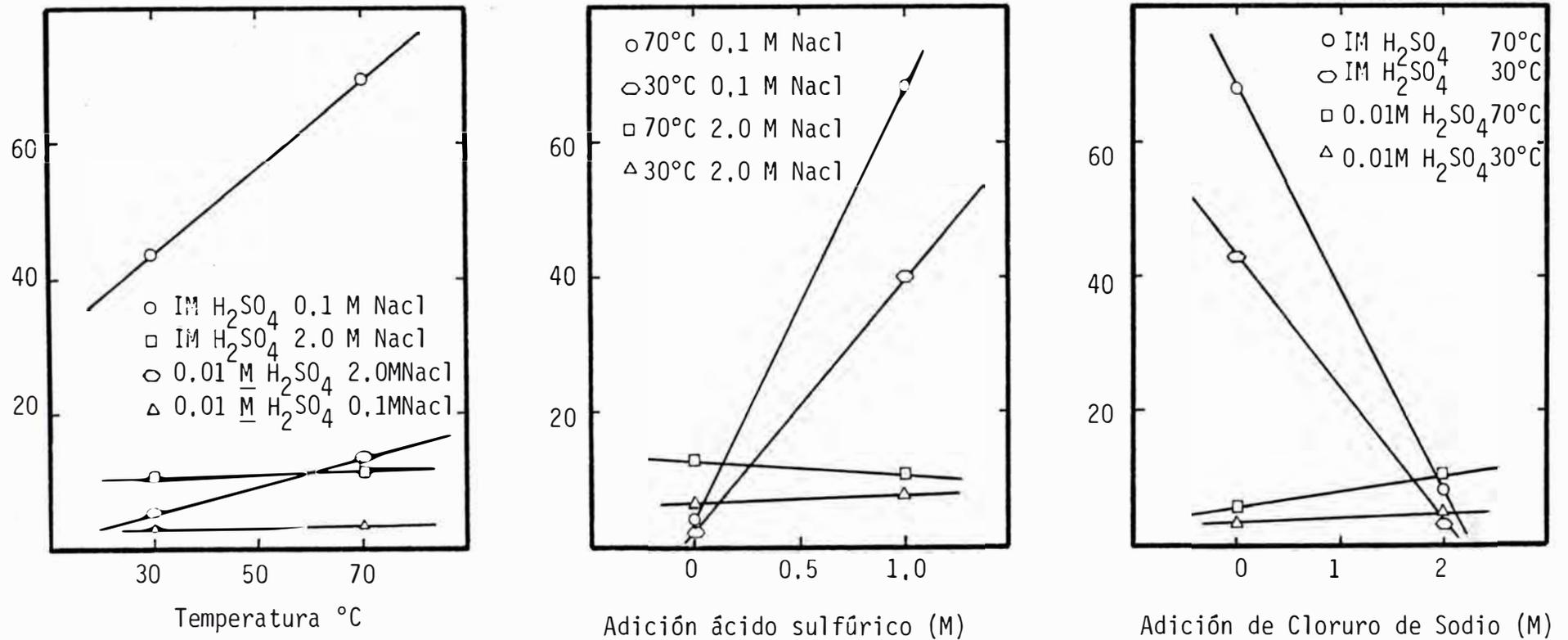


Fig. 3,7.- Lixiviación con cambios de temperatura, adición de ácido, y adición de Cloruro de Sodio.

Los círculos sólidos representa la posición de los experimentos X_1 - temp ($^{\circ}\text{C}$) X_2 - Concentración de ácido sulfúrico (M) X_3 - concentración del cloruro de sodio (M)

Los resultados experimentales obtenidos para cada una de las combinaciones del diseño factorial de tres variables después de 16 horas de lixiviación son mostrados en la tabla N° 3.7 y también los valores ajustados de B_0, B_1, \dots, B_7 obtenidos por regresión lineal de estos datos.

El modelo:

$$Y = \frac{\% \text{ Bi}}{1 + \% \text{ Ag}} = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_1 X_2 + B_5 X_1 X_3 + B_6 X_2 X_3 + B_7 X_1 X_2 X_3$$

$$(1) \bar{Y} = 15.6773 + 3.54375 X_1 + 12.71375 X_2 - 10.85875 X_3 + 2.78375 X_1 X_2 - 2.40875 X_1 X_3 - 12.55875 X_1 X_3 - 3.19875 X_1 X_2 X_3$$

(1) \bar{Y} en función de los niveles del diseño X_1, X_2, X_3 de valores entre -1 y +1

$$(2) \bar{Y} = 1.145 - 0.01192 X_1 + 21.81 X_2 - 0.1869 X_3 + 0.6382 X_1 X_2 + 0.04484 X_1 X_3 - 9.704 X_2 X_3 - 0.34 X_1 X_2 X_3$$

(2) \bar{Y} En función de los niveles de los factores.

La tabla N° 3.8 muestra el análisis de varianza usado a probar la "bondad del ajuste" del modelo empírico a los datos experimentales y a la significancia de los efectos de las tres variables y sus interacciones sobre la variable dependiente.

TABLA N° 3.7 ANALISIS ESTADISTICO

FACTORES

X_1 = temperatura °C

X_2 = Conc de ácido sulfúrico en moles

X_3 = Conc de cloruro de sodio en moles

PRUEBA N°	DISEÑO	NIVELES DEL DISEÑO			% DISUELTO				RESPUESTA EXPERIMENTAL	RESPUESTA PREDICHA
		X_1	X_2	X_3	Bi	Ag	Pb	Zn	(Y)	(Y)
1	1	30	0.01	0.1	1.56	0.04	0.07	18.78	1.50	1.29
2	a	70	0.01	0.1	1.95	0.35	0.07	23.35	1.44	1.24
3	b	30	1.0	0.1	46.09	0.15	0.06	35.53	40.08	39.87
4	ab	70	1.0	0.1	86.33	0.35	0.09	63.75	63.95	63.74
5	c	30	0.01	2.0	38.28	10.52	7.85	21.56	3.32	3.12
6	ac	70	0.01	2.0	44.92	6.0	7.95	25.38	6.42	6.21
7	bc	30	1.0	2.0	56.64	11.69	1.02	31.97	4.46	4.26
8	abc	70	1.0	2.0	89.84	14.22	4.77	80.19	5.90	5.70
9	-	50	0.505	1.05	82.03	4.48	0.42	48.72	14.97	15.68
10	-	50	0.505	1.05	82.03	4.67	0.56	48.21	14.97	15.68
11	-	50	0.505	1.05	78.13	3.90	1.19	53.80	15.94	15.68

La tabla N° 3.8 muestra el análisis de varianza usado a probar la "bondad del ajuste" del modelo empírico a los datos experimentales y a la significancia de los efectos de las tres variables y sus interacciones sobre la variable dependiente.

TABLA N° 3.8 ANALISIS DE VARIANZA PARA EL DISEÑO 2³

FUENTE DE VARIACION EFECTO DE EXTRACCION	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADOS MEDIOS	F= EFECTOS CUADRADOS MEDIOS RESIDUOS CUADRADOS MEDIOS
X ₁	100.4	1	100.4	125.5*
X ₂	1293.1	1	1293.1	1616.4*
X ₃	943.2	1	943.2	1179.0*
X ₁ X ₂	62.0	1	62.0	77.5*
X ₁ X ₃	46.5	1	46.5	58.1*
X ₂ X ₃	1261.4	1	1261.4	1576.8*
X ₁ X ₂ X ₃	81.8	1	81.8	102.3*
SUB-TOTAL (REGRESION)	3988.4	7	541.2	
DESVIACION ACERCA DE LA REGRESION LINEAL	1.3	1	1.3	
ERROR EXPERIMENTAL	1.1	2	0.6	
RESIDUO SUB-TOTAL	2.4	3	0.8	
TOTAL AJUSTADO	3790.8	10	379.1	

* Significante en un nivel de confianza de 99.5%

$$F_{0.995} (1,3) = 55.6$$

Por el gran número de parámetros en el modelo empírico la capacidad del modelo no es muy alto. Posteriores tentativas para verificar el modelo para comparar la respuesta experimental a (70, 05, 0.1) con las respuestas predichas sugiere que este simple modelo puede ser inadecuado para predicciones exactas,

Estos resultados sugiere que la introducción de términos cuadráticos en la ecuación (1) puede mejorar su capacidad de predicción. Experimentos adicionales se requeriran para expandir el modelo y que incluye términos cuadráticos, pero que no fue considerado adecuado en el presente estudio.

C A P I T U L O I V

4,1. TECNICA DEL CONFUNDIDO.

No es siempre práctico o necesario hacer todas las pruebas en un diseño factorial completo. Como el número de factores a ser probados en un experimento crece, el número de pruebas en un diseño factorial completo crece rápidamente. Si alguno de los factores son insignificantes puede ser posible reducir el número de pruebas en un diseño combinando los estimados de los diversos efectos de modo que solamente los efectos importantes necesitan ser estudiados en un experimento.

Cuando las estimaciones de los efectos así son combinados, ellos son llamados a ser confundidos.

Para determinar este problema que introduce un error más en las observaciones, existe una técnica que consiste en dividir el conjunto de tratamientos experimentales en pequeños bloques de una manera particular, tal que los efectos principales y los efectos de las interacciones mas importantes son investigados

bajo condiciones uniformes.

Por otro lado, la heterogeneidad introducida como consecuencia de la división en bloques del diseño experimental, se deja afectar solamente a interacciones que se consideren, por alguna razón fundamentada, poco importantes.

Las situaciones que requiere el uso del principio del confundido pueden ser algunas de estas:

- i) Cuando existe escasez de material de las mismas características, para llevar a cabo un experimento completo (por ejemplo material de una misma sección de la mina, material preparado de un mismo molino y condiciones de molienda etc.)
- ii) Cuando por problemas de rapidez, se hace necesario emplear diferentes unidades experimentales (por ejemplo experiencias de flotación en diferentes celdas de flotación; diferentes reactivos químicos, etc).
- iii) Necesidad de utilizar diferentes experimentadores para llevar a cabo las mediciones,
- iv) Cuando se requiere una mayor precisión en las medidas asegurándose de obtener los efectos más importantes bajo condiciones lo más homogéneas posibles,
- v) Es requerida en los diseños factoriales, en los cuales el número de observaciones capaces de ser llevados a cabo, bajo condiciones estrictamente comparables, es menor que el número requerido para el diseño completo.

4.2.1. ILUSTRACION SIMPLE DEL CONFUNDIDO.

Supongamos que se desea - estudiar el efecto de los factores A, B y C.

Sobre una determinada respuesta. El material base se encuentra esparcido en varias porciones, los cuales es necesario mezclar para obtener lotes más homogéneos. Se requieren dos lotes de este material, cada uno suficiente para realizar cuatro experiencias a lo menos.

En un diseño 2^3 completo se obtienen 8 observaciones, cuyas combinaciones experimentales puestas en orden - estandar son:

(1) a, b, ab, a, ac, bc, abc.

El problema es determinar el mejor arreglo para - un experimento, es decir cuales van a par las combinaciones experimentales que integrarán el lote 1 y cuales lote 2.

Si se eligen las combinaciones experimentales (1), a, c, ac (nivel inferior de B) en un lote y los tratamien - tos b, ab, bc, abc (nivel superior de B en el otro, entonces el efecto del factor B medido como la diferencia entre los promedios de las respuestas de ambos lotes, estará confundido con la diferencia entre lotes. En otras palabras si ambos lotes difieren en calidad, al punto de producir una - diferencia apreciable en la respuesta, esta `diferencia será incluida en el efecto de B, tal como se indica:

Lote (1)	Lote (2)
1	b + X
a	ab + X
c	bc + X
ac	abc + X

Donde X denota la contribución debida a la diferencia entre lotes (efecto de bloque).

Por lo tanto al medir el efecto de bloque que se está midiendo $E_B + X$. Todos los demás efectos se determinan en forma clara sin ser afectados por ese efecto. Por ejemplo, A está dado por la diferencia entre el promedio de las observaciones que contienen a y el promedio de las que no contienen a o sea:

$$E_A = 1/4 (ab + X) + (abc + X) + a + ac - 1/4 (b + X) + (bc + X) + 1 + c \quad (4.1)$$

Donde puede verse que las X se cancelan y el efecto de A queda, tal cual se conoce para un diseño 2^3 ,

Igual cosa ocurre para los efectos e interacciones, por ejemplo, el efecto de AB.

$$E_{AB} = 1/4 (abc + X) + (ab + x) + (1) + (c) - (b + x) - (ac) - (a) \quad (4.2)$$

Donde la X otra vez se cancelan y la expresión de AB se transforma en la usual para un diseño 2^3 .

Al experimentador, al elegir los efectos a confundir siempre deseará hacerlo con aquel menos importante, lo cual llevará a elegir las interacciones de orden superior.

En este caso (3 factores) conviene elegir la interacción, de tener orden ABC, por lo tanto se debe dividir los 8 tratamientos experimentales en 2 lotes de 4 tratamientos cada uno, de tal modo que las combinaciones experimentales correspondientes al nivel superior de la interacción - ABC (a, b, c, abc) formen un lote y las restantes ((1), ab, ac, bc) formen el segundo lote, de este modo, la diferencia entre lotes corresponde al efecto de la interacción de tercer orden.

Entonces:

Lote (1)	Lote 2
a + x	1
b + x	ab
c + x	ac
abc + x	bc

Todos los restantes efectos A, B, C, AC, AB, BC - se obtienen en forma clara, y no afectados al efecto de bloque.

Una suposición importante considerada en este tipo de diseño es que no existe interacciones apreciables entre los efectos y los lotes (o bloques) de material base es to significa.

"Si una combinación experimental produce un mejoramiento dado con un lote en ausencia del error experimental, producirá un mejoramiento equivalente con el otro",

Si el efecto de la interacción puede ser supuesto despreciable, la diferencia registrada entre los bloques, mide, mide el efecto de la diferencia en calidad entre los dos lotes de material, lo cual puede ser muy importante.

4.1.1. METODO DE EFECTOS CONFUNDIDOS POR TABLA DE SIGNOS.

El procedimiento para efectos confundidos en el diseño factorial fraccionado estan basados en los principios de la teoría matemática de grupo, el método por tabla de signos puede ser usado para un diseño de 2 niveles porque un signo menos puede ser asociado con el más bajo nivel y un signo más con el nivel más alto de cada factor. El método basado sobre una tabla de signos no puede ser usado si algunos factores estan a ser probados en más de dos niveles.

El método del confundido por el uso de signos es ilustrado por un experimento con tres factores con un diseño de dos niveles en el cual es necesario a estimar los efectos principales de los factores X_a , X_b y X_c en el cual todas las interacciones entre los tres factores son inexistentes o sin cuidado.

En una típica ocasión el factor X_c puede ser el necesario resultado de investigación del factor X_a y X_b en 2 bloques de pruebas debido a limitaciones de equipos, tiempo y personal.

El primer paso es construir una tabla de signos a ser asociada con las respuestas para pruebas. Cuando al calcular los coeficientes de los diversos efectos componentes.

Se hace una tabla ilustrada como la tabla 3.3. El segundo paso es seleccionar 4 de las 8 pruebas de la tabla 3.3 de modo que al efecto principal del bloque factor X_c es confundido con el efecto interacción entre el tiempo X_a , y la temperatura X_b , este es completado por selección de esas pruebas de la tabla 3.3 por el cual el signo en la columna AB es el mismo como el signo en la columna C.

Estas pruebas y sus signos luego son incorporados a una segunda tabla como muestra la tabla 4.1.

Las primeras 2 pruebas son hechas en los niveles más bajos del factor X_c y las 2 últimas pruebas son hechas en el más alto nivel esto es, pruebas en a y b son hechas - en el primer bloque y las pruebas c y abc son hechas en el segundo bloque.

TABLA 4.1. Pruebas seleccionadas de las ocho pruebas de un experimento factorial de 3 factores y 2 niveles, en tal forma la interacción del coeficiente AB es confundida con el efecto principal.

SIMBOLO DE LA PRUEBA	COEFICIENTES							
	I	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
a	+	+	-	-	-	-	+	+
b	+	-	+	-	-	+	-	+
c	+	-	-	+	+	-	-	+
abc	+	+	+	+	+	+	+	+

Siempre que las pruebas de un diseño factorial completo son seleccionadas para confundir 2 efectos particulares, todos los efectos serán confundidos en pares.

La tabla 4.1 muestra la confusión de los efectos cuyos coeficientes son AB y C.

Un estudio de la tabla muestra que los efectos cuyos coeficientes son B y AC también son confundidos. Lo mismo ocurre con los efectos cuyos coeficientes son A y BC y de esos cuyos coeficientes son I y ABC.

La naturaleza de los factores menores los cuales causan los efectos de bloque es tal que solamente los efectos principales son considerados importantes.

El metalurgista debe ser cuidadoso en conducir experimentos para minimizar tales efectos, y el principio de confundido puede ser usado como una precaución contra variaciones imprevistas en las condiciones de las pruebas.

En este caso los efectos de interacción entre bloques y los factores mayores de experimentación, tiempo y temperatura y los correspondientes coeficientes AC, BC, ABC no

son de cuidado. Sin embargo en el caso más general es necesario estudiar el sistema completo de confundido, el cual resulta cuando dos efectos o sus coeficientes son seleccionados a ser confundidos. Al mostrar como los efectos y sus correspondientes coeficientes son confundidos para seleccionar las cuatro pruebas en la tabla 4.1, permiten niveles para los factores Xa, Xb y Xc ser identificados por las letras i, j, y k respectivamente. La respuesta para un experimento de tres factores a dos niveles luego serán;

$$\begin{aligned}
 Y_{ijk} = & IZ_{00}(ijk) + ACZ_{100}(ijk) + BZ_{010}(ijk) + CZ_{001}(ijk) \\
 & + ABZ_{110}(ijk) + ACZ_{101}(ijk) + BCZ_{011}(ijk) \\
 & + ABCZ_{111}(ijk) \qquad \qquad \qquad (4.3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 = & I \pm 1/2 A \pm 1/2 B \pm 1/2 C \pm 1/4 AB \pm 1/4 AC \pm 1/4 BC \\
 & \pm 1/8 ABC \qquad \qquad \qquad (4.4)
 \end{aligned}$$

Si cada prueba en la tabla 4.1 fueron hechos una vez, la respuesta promedio \bar{y}_{ijk} para cada prueba sería la respuesta simple y_{ijk} obtenida. Los términos en la ecuación (4.4) puede ser arreglada para las cuatro pruebas: a, b, c y abc respectivamente a dar las siguientes sumas algebraicas:

$$\begin{aligned}
 Y_{211} = & I + 1/8 ABC + 1/2 A + 1/4 BC - (1/2 B + 1/4 AC) - \\
 & - (1/2 C + 1/4 AB)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{121} = & I + 1/8 ABC - (1/2 A + 1/4 BC) + (1/2 B + 1/4 AC) - \\
 & - (1/2 C + 1/4 AB)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{112} = & I + 1/8 ABC - (1/2 A + 1/4 BC) - (1/2 B + 1/4 AC) + \\
 & + (1/2 C + 1/4 AB)
 \end{aligned}$$

$$Y_{222} = I + 1/8 ABC + (1/2 A + 1/4 BC) + (1/2 B + 1/4 AC) + (1/2 C + 1/4 AC) \quad (4.5)$$

Ahora las cuatro respuestas y sus igualdades en la ecuación del grupo 4.5 puede ser combinado algebraicamente a calcular

$$C + 1/2 AB = \frac{1}{2} (- Y_{211} - Y_{121} - Y_{112} + Y_{222}) \quad (4.6)$$

Desde que los datos de las cuatro pruebas no pueden ser usados a calcular C y AB separadamente, pero solamente la suma $C + 1/2 AB$, los dos coeficientes pueden ser confundidos con cada otra.

Las otras tres sumas de coeficientes confundidos, - los cuales pueden ser calculados de los datos son:

$$I + (1/8) ABC, A + 1/2 BC \text{ y } B + 1/2 AC \quad (4.7)$$

El otro bloque, el cual puede ser usado para el experimento da el mismo sistema de confundido, es el medio replicado que consta de las cuatro pruebas permanentes de las tablas, esto es, prueba: (1), ab, ac y bc. Estas pueden haber sido encontradas primero por selección de esas pruebas en la tabla el cual tiene signos opuestos en las columnas AB y C. En este caso, cuatro combinaciones algebraicas de las respuestas pueden ser obtenidos los cuales son iguales a

$$C - 1/2 AB, I - (1/8)ABC, A - (1/2) BC , \text{ y } B - (1/2)AC \quad (4.8)$$

Cuando estas asunciones son válidas, ambas de las cuatro pruebas en la tabla 4.1 ó este segundo block de cuatro pruebas puede ser hecho para obtener cálculos de los coeficientes deseados.

Los coeficientes que son confundidos con cada o -
tro en un diseño factorial confundido son llamados **ALIASES**.
Por tanto, en ambos de estos diseños constan de cuatro pruebas, los coeficientes C y AB son aliases, los coeficientes I and ABC son aliases y así sucesivamente.

En general un diseño factorial a dos niveles con n factores a investigar contiene 2^n pruebas, y que las respuestas obtenidas pueden ser usadas a calcular el efecto - promedio.

Estos 2^n coeficientes todos pueden ser confundi - dos en pares de aliases siempre y cuando un medio replica do de dicho experimento sea diseñado. El valor de tales di - seños depende de la habilidad para seleccionar las pruebas en tal caso o forma que dos no importantes coeficientes se - rán confundidos con cada otro.

Cuando tenemos sistemas mas complejos de confundidos pueden ser usados a reducir el número de pruebas necesarias para una investigación si los efectos de interacción - de factores mayores son de poco cuidado. Por ejemplo, si cinco factores quieren ser probados y todos los efectos de interacción son conocidos como de poco cuidado, solamente - los efectos principales de cada factor necesita ser estima - do. Un diseño factorial a dos niveles completos para cinco factores contiene 32 pruebas. Las ocho pruebas en el diseño un cuarto replicado puede ser seleccionado en tal forma que las combinaciones algebraicas de respuestas puede ser usado a calcular las siguientes sumas de aliases.

$$I + (1/8) ABD + (1/8) ACE + (1/16) BCDE$$

$$A + (1/2) BD + (1/2) CE + (1/8) ABCDE$$

$$B + (1/2) AD + (1/8) ABCE + (1/4) CDE$$

$$C + (1/8) ABCD + (1/2) AE + (1/4) BDE$$

$$D + (1/2) AB + 1/8 ACDE + (1/4) BCE$$

$$E + (1/2) AC + (1/8) ABDE + (1/4) BCD$$

$$DE + BC + (1/2) ABE + 1/2 ACD$$

$$BE + CD + (1/2) ABC + 1/2 ADE$$

Los seis coeficientes I, A, B, C, D y E son calculados de las respuestas de las ocho pruebas seleccionadas

También desde que todos los efectos de interacciones son de poco cuidado, las combinaciones algebraicas de las respuestas que dan las dos últimas sumas de aliases pueden ser usadas para un estimado del error experimental.

4.1.2. METODO GENERAL PARA CONFUNDIR EFECTOS.

El método de confundir por intermedio de una tabla de signos es relativamente simple; pero es limitado a dos niveles por factor. También el método se convierte engorroso como el número de factores se incrementa y como el confundido se hace mas complejo.

El procedimiento general para determinar las pruebas a ser realizadas confundiendo efectos en un diseño factorial fraccionado, puede aparecer altamente abstracto por la poca familiaridad con la teoría matemática de grupo y

trataremos de dar una ligera revisión de los conceptos de teoría de grupo antes de tratar de entender el procedimiento.

a) *TEORIA DE GRUPO,*

Un grupo es definido matemáticamente como un conjunto de elementos todos con una operación definida en tal forma que cualquier operación realizada con dos elementos en el conjunto el resultado es otro elemento del conjunto, tal que cuando la operación es realizada con el elemento identidad y cualquier otro elemento el resultado obtenido es el segundo elemento. Finalmente, para cada elemento en el conjunto, habrá un segundo elemento tal que cuando la operación es realizada con esos dos elementos el resultado es el elemento identidad. Estos dos elementos son llamados inversos de cada otro.

Por ejemplo, el grupo de números enteros positivos y negativos y la operación de suma, constituyen un grupo. Los números 5 y 19 son enteros y $5 + 19 = 24$, también es entero.

El elemento identidad en este caso es 0, por ejemplo $0 + 7 = 7$. La inversa de un entero, por ejemplo 5, es -5, esto es $5 + (-5) = 0$. Hay un infinito número de elementos en este grupo.

b) *TEORIA DE GRUPO DE MULTIPLICACION,*

Es una operación usada a obtener productos de coeficientes y de este modo determinar cuales coeficientes son aliases, en un diseño

factorial fraccionado.

En este caso el producto de 2 o más coeficientes - son puramente simbólicos y no se refiere a los valores numéricos de los coeficientes involucrados.

Cuando dos coeficientes diferentes son establecidos igual a cada otro el signo igual representa la expresión "es confundido con"

En un experimento de cuatro niveles el coeficiente A^4 es confundido con I por eso el símbolo indica $A^4 = I$. En este caso define las propiedades del grupo multiplicación para este experimento. Con esta definición, el producto de cualquier coeficiente podría ser uno de los cuatro coeficientes I, A, A^2 y A^3 .

El coeficiente I sirve como elemento identidad en el grupo. Por eso $A(A^2) = A^3$, $A(A^3) = I$, $A^2A^3 = IA = A$ y así etc.

La inversa es cualquier elemento A^i es A^{4-i} donde i es 1, 2, 3 para ejemplo $A(A^3) = I$. Los cuatro coeficientes y el grupo operación multiplicación consiste en un grupo finito con la siguiente tabla.

TABLA 4.2.

	I	A	A^2	A^3
I	I	A	A^2	A^3
A	A	A^2	A^3	I
A^2	A^2	A^3	I	A
A^3	A^3	I	A	A^2

c) *TEORIA DE GRUPO EN DISEÑO.*

Los principios de teoría de grupo forma las bases para un procedimiento general para efectos del confundido en el diseño factorial fraccionado.

Los grupos de mayor interés son esos el cual consta de grupos de coeficientes los cuales son calculados de un experimento factorial completo y de la teoría de grupo de la operación de multiplicación desarrollada para el uso en experimentos teniendo mas de un factor.

Experimentos factoriales de 2 niveles están diseñados a la estimación de componentes lineales de los efectos principales de los factores y los componentes correspondientes de los efectos de interacción, tales diseños no pueden ser usados en estimaciones de componentes cuadráticos de los efectos principales.

Una aplicación del método del confundido basado sobre una tabla de signos, podría mostrar que todo el efecto principal de coeficientes de componentes cuadráticos son confundidos con cada otro factor y con el efecto promedio del coeficiente I en un diseño de dos niveles. Esto es expresado en la notación simbólica de la teoría de grupo como sigue.

$$A^2 = B^2 = C^2 = D^2 = I \quad (4.9)$$

Un experimento con 4 factores a dos niveles podría ser usado como ejemplo si confundimos $D = ABC$ y multiplicamos a ambos miembros por D entonces tendremos $D^2 = ABCD$ y por lo anteriormente detallado $D^2 = I = ABCD$ de ahí obtendremos:

$$\begin{array}{ll}
 D = ABC & C = ABD \\
 I = ABCD & AB = CD \\
 A = BCD & AC = BD \\
 B = ACD & AD = BC
 \end{array} \tag{4.10}$$

4.1.3, DEFINIR CONTRASTES Y EL BLOCK PRINCIPAL.

El próximo paso para diseñar experimentos factoriales fraccionados por métodos de teoría de grupo es determinar cual prueba debe de ser hecha a obtener los coeficientes confundidos deseados. Esto es automático en el método de confundido por selección de prueba de una tabla de signos para dos niveles en un diseño factorial.

Sin embargo cuando usamos el método de la teoría de grupos es necesario hacer uso de los conceptos de *DEFINICIÓN DE CONTRASTES Y EL BLOCK PRINCIPAL*.

En cualquier sistema de confundido, el grupo de definición de contrastes es el grupo de alias el cual contiene el coeficiente I este grupo es así llamado por que sirve para definir el sistema completo de confundido y es usado también a determinar las pruebas los cuales van a ser hechos.

El sistema completo de confundido es definido por el grupo de definición de contrastes, porque este grupo de alias y grupos de multiplicación son usados para encontrar todos los otros grupos de alias. Las pruebas a ser realizadas son seleccionadas primero por uso de la definición de contrastes para encontrar las pruebas del bloque principal. Al bloque principal y el grupo de operación de multiplicación definido, para los símbolos de las pruebas son usados en encontrar las pruebas en otros bloques.

Inicialmente uno de los bloques de pruebas es seleccionado para un experimento.

El coeficiente ACD es también escrito así $A^1 B^0 C^1 D^1$ y la prueba ab también es escrito $a_1 b_1 c_0 d_0$. Cada coeficiente puede ser escrito en la forma $A^p B^q C^r D^t$, y cada prueba puede ser escrita $a_v b_w c_x d_y$, donde, p, q, r, t, v, w, x, y pueden ser iguales a cero o uno.

La prueba $a_v b_w c_x d_y$ es comparado con el coeficiente $A^p B^q C^r D^t$ para obtener la suma $pv + qw + rx + ty$.

Una prueba esta en el bloque principal si la comparación entre la prueba y cada uno de los contrastes definidos da una suma igual a cero o multiplo de R; esto es si

$$pv + qw + rx + ty = 2n ; n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

para $A^p B^q C^r D^t$

En este caso $p = 1$ $q = 0$, $r = 1$, y $t = 1$

Estas comparaciones son mostrados como sigue en la tabla 4.3.

TABLA 4,3.

SIMBOLO DE LA PRUEBA	p _v	q _w	m _x	t _y	sum
(1)	0	0	0	0	0
a	1	0	0	0	1
b	0	0	0	0	0
c	0	0	1	0	1
d	0	0	0	1	1
ab	1	0	0	0	1
ac	1	0	1	0	2
ad	1	0	0	1	2
bc	0	0	1	0	1
bd	0	0	0	1	1
cd	0	0	1	1	2
abc	1	0	1	0	2
abd	1	0	0	1	2
acd	1	0	1	1	3
bcd	0	0	1	1	2
abcd	1	0	1	1	3

Las pruebas en el bloque principal son esas para - las cuales la suma es cero o 2 esto es (1), b, se, ad, cd, - abc, abd y bcd (4.12)

El otro bloque consta de las pruebas remanentes eso es:

$$a, c, d, ab, cd, bd, acd, y abcd \quad (4.13)$$

Uno ú otro de los dos bloques de pruebas (4.12) y (4.13) pueden ser usadas a obtener el sistema de confundido dado por los pares de alias en el arreglo (4.10). En un experimento de dos niveles con cualquier número de factores $x_a, x_b, x_c, \dots, x_x$ las pruebas en el bloque principal son establecidas por cálculos de sumas de productos a sus correspondientes superescritos, similar a la suma en el lado izquierdo de la ecuación (4.11). La prueba $a_v b_w c_x d_y \dots z_k$ está en el bloque principal si para cada coeficiente $A^p B^q C^r \dots K^u$ en el grupo de definición de contrastes la suma :

$$pv + qw + rx + \dots + uz = 2n \quad n = 0,1,2,3,4,\dots$$

Donde:

$$p, q, r, \dots, u, v, w, x, \dots, z = 0 \text{ ó } 1 \quad (4.14)$$

Cuando se va a confundir se debe tener cuidado al escoger los efectos de interacción con los que se van a confundir con un efecto principal mayor.

Una vez determinada las interacciones a ser confundidas se determina el grupo de contrastes definidos en las cuales todos son iguales a I partiendo de los efectos confundidos.

Luego se encuentran los alias de coeficientes multiplicando cada coeficiente por el grupo de alias.

El proximo paso es diseñar un diseño con el número de pruebas el cual puede ser 1/2 replicado ó 1/4 replicado etc,

Para encontrar las pruebas en el bloque principal en este caso cada prueba puede ser comparada con 1, 2 ó 3 ó más coeficiente de acuerdo a 1/2, 1/3 ó 1/4 replicado.

La prueba $a_u b_v c_w d_x e_y f_z$ es comparada con los coeficientes $A^n B^i C^q D^r E^s F^t$ por obtención de la suma $nu + pv + qw + rx + sy + tz$, si una suma es igual a cero o múltiplo de 2.

☺ Ahora mostraremos la técnica del confundido en un ejemplo práctico, nuestras variables respuestas serán:

Y_1 = Porcentaje de recuperación de cobre total.

Y_2 = Porcentaje de eficiencia de la recuperación, parametro definido por

$$Y_2 = \frac{(c - h)}{(C_m - h)} \times Y_1$$

C = ley del concentrado obtenido

h = ley de cabeza

C_m = ley máxima de concentrado obtenible

Consideremos a priori que estas variables respuestas dependen de los siguientes factores que definiremos a continuación:

	Niveles		
	0	+	
A = tiempo de acondicionamiento en minutos	1.0	2.0	3.0
B = Dosificación de colector (lb/Ton)	0.05	0.10	0.15
C = Dosificación de espumante (lb/Ton)	0.05	0.10	0.15
D = PH	8.5	9.5	10.5
E = Agitación (r.p.m.)	1400	1600	1800
F = Porcentaje de sólidos	22	30	38

Postularemos un modelo de primer orden.- Supondremos que nuestras variables respuestas son funciones lineales de los factores definidos anteriormente por lo tanto.

$$Y_1 = B_0 X_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4 + B_5 X_5 + B_6 X_6 + \epsilon$$

$$Y_2 = B_0^1 X_0 + B_1^1 X_1 + B_2^1 X_2 + B_3^1 X_3 + B_4^1 X_4 + B_5^1 X_5 + B_6^1 X_6 + \epsilon$$

a) Elección del Diseño.- Eligiremos el diseño fraccional del tipo $(\frac{1}{2})^2$, $2^6 = 2^{6-2} = 2^4$ en el que confundiremos los siguientes factores e interacciones.

$$E = ABC$$

$$F = BCD$$

En la tabla N° 4.4 puede apreciarse el conjunto de efectos confundidos. Se observa que en este diseño obtenemos información clara sobre los efectos principales ni se considera que las interacciones de tercer orden y superiores son insignificantes.

Respecto de las interacciones de segundo orden observamos que están confundidas entre sí y con interacciones de cuarto orden, su análisis permitirá comprobar el comportamiento lineal de nuestras variables respuestas en la re -

gión experimental estudiada.

- b) *Experimentación*.- Los resultados experimentales se presentan en las tablas números 4.6 y 4.7 el cálculo de los efectos y suma de cuadrados correspondientes se hizo utilizando el método de YATES.
- c) *Análisis del Experimento*.- Para decidir si una variable es o no es significativa en el rango experimental estudiado. tomaremos un nivel de significación $\alpha = 0.01$, que corresponde a un nivel de confianza del 99% el cual nos proporciona alta seguridad en el análisis. El análisis de varianza (ANAVA) para ambas respuestas Y_1 e Y_2 Tablas Nos. 4.7 y 4.8 ; indica que las variables A, C y E no son significativos en los niveles elegidos y podemos suponer que estamos en el rango óptimo para estas variables. En efecto, el factor A representa el tiempo necesario para que una partícula de calcopirita esté en condiciones de flotar y estando estas liberadas o parcialmente liberadas y sin oxidación superficial que impida o demore la adhesión del colector, no hay razón para suponer que sea necesario un tiempo mayor de acondicionamiento que el nivel superior de la variable A.

El factor C, cantidad de espumante incide fundamentalmente en la estabilidad y tamaño de la espuma y la observación cualitativa, de tipo de espuma generada en las experiencias indicó que ésta era buena cuando C estaba en su nivel superior. En cuanto al factor E, agitación, hemos elegido niveles que comprenden los usados en pruebas estandar de flotación y del diseño no hace sino con -

firmar lo que la práctica dice.

Tanto Y_1 como para Y_2 vemos que los modelos lineales postulados describen aproximadamente el proceso en los niveles elegidos, ya que en ambos casos no se tienen interacciones significativas para $\alpha = 0.01$ y en consecuencia la superficie respuesta puede aproximarse por un plano en la región experimental. Aún tomando en cuenta que los efectos de los factores descartados con el análisis de varianza los modelos estimados resultan ser:

$$Y_1 = 92.60 + 0.06 X_1 - 0.43 X_2 + 0.005 X_3 + 0.51 X_4 \\ + 0.36 X_5 + 0.36 X_6$$

$$Y_2 = 36.38 + 0.72 X_1 - 0.98 X_2 + 0.75 X_3 + 2.88 X_4 \\ - 0.25 X_5 - 1.79 X_6$$

TABLA 4.4 Efectos confundidos mostrando los aliases.

a		A	BCE	ABCDF	DEF
b		B	ACE	CDF	ABDEF
ab		AB	CE	ACDF	BDEF
c		C	ABE	BDF	ACDEF
ac		AC	BE	ABDF	CDEF
bc		BC	AE	DF	ABCDEF
abc	E	ABC	E	ADF	BCDEF
d		D	ABCDE	BCF	AEF
ad		AD	BCDE	ABCF	EF
bd		BD	ACDE	CF	ABEF
abd		ABD	CDE	ACF	BEF
cd		CD	ABDE	BF	ACF
acd		ACD	BDE	ABF	CEF
bcd	F	BCD	ADE	F	ABCEF
abcd		ABCD	DE	AF	BCEF

TABLA 4.5.

COMBINACIONES EXPERIMENTALES	FACTORES						RESPUESTAS	
	A	B	C	D	E	F	Y ₁	Y ₂
1	-	-	-	-	-	-	92.00	31.80
aë	+	-	-	-	+	-	90.00	35.84
bef	-	+	-	-	+	+	91.00	29.10
abf	+	+	-	-	-	+	91.20	36.18
cef	-	-	+	-	+	+	90.30	29.35
acf	+	-	+	-	-	+	92.00	36.10
bc	-	+	+	-	-	-	90.20	34.80
abce	+	+	+	-	+	-	89.50	34.35
df	-	-	-	+	-	+	92.30	38.20
adef	+	-	-	+	+	+	92.80	36.60
bde	-	+	-	+	+	-	90.70	37.60
abd	+	+	-	+	-	-	90.40	39.60
cde	-	-	+	+	+	-	91.60	44.50
acd	+	-	+	+	-	-	92.60	46.60
bcdf	-	+	+	+	-	+	91.60	38.10
abcdef	+	+	+	+	+	+	92.00	31.55
EXPERIENCIAS REPETIDAS								
bef	-	+	-	-	+	+	90.30	29.35
bc	-	+	+	-	-	-	90.50	35.50
bcdf	-	+	+	+	-	+	92.10	41.00
-	0	0	0	0	0	0	90.40	39.80
-	0	0	0	0	0	0	91.20	37.80

TABLA N° 4.6. ESTA TABLA MUESTRA LOS ANALISIS QUIMICOS POR Cu DE LOS CONCENTRADOS Y COLAS, RECUPERACIONES Y EFICIENCIA DE RECUPERACION.

COMBINACIONES EXPERIMENTALES	CONCENTRADO		COLA		% R (Y ₁)	% Er (Y ₂)
	% Cu T	% Cu NS	% Cu T	% Cu NS		
1	13,50	0,20	0,23	0,07	92,00	31,80
ae	15,20	0,24	0,27	0,02	90,00	35,84
bef	12,70	0,16	0,25	0,04	91,00	29,10
abf	14,00	0,48	0,24	0,04	91,20	36,18
cef	12,90	0,36	0,27	0,08	90,30	29,35
acf	14,00	0,20	0,22	0,03	92,00	36,10
bc	14,80	0,20	0,27	0,03	90,20	34,80
abce	15,00	0,20	0,26	0,07	89,50	34,35
df	15,70	0,24	0,21	0,04	92,30	38,20
adef	15,10	0,24	0,24	0,04	92,80	36,60
bde	15,70	0,40	0,25	0,06	90,70	37,60
abd	16,70	0,20	0,24	0,03	90,40	39,60
cde	18,00	0,22	0,23	0,04	91,60	44,50
acd	18,60	0,24	0,19	0,03	92,60	46,60
bcdf	14,90	0,20	0,21	0,06	91,60	38,10
abcde	13,40	0,40	0,22	0,04	92,00	31,55
EXP. REPETIDAS						
bef	12,90	0,20	0,27	0,04	90,30	29,35
bc	15,00	0,20	0,26	0,07	90,50	35,50
bcdf	15,50	0,20	0,21	0,06	92,10	41,00
CENTRO DEL DISEÑO	15,40	0,24	0,26	0,04	90,40	39,80
	14,50	0,24	0,24	0,04	91,20	37,80

TABLA N° 4.7 ANALISIS DE VARIANZA DE (Y_1)

FACTORES	EFFECTOS	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADO MEDIO	F
A	0.12	0.060	1	0.060	
B	-0.87	3.060	1	3.060	**
C	0.01	0.000	1	0.000	
D	1.02	4.200	1	4.200	**
E	0.66	1.760	1	1.760	*
F	0.73	2.180	1	2.180	**
INTERACCIONES					
AB-CE	0.17	0.123	1	0.123	
AC-BE-	0.43	0.760	1	0.760	
BC-AE-BF	0.16	0.105	1	0.105	
AD-EF	0.27	0.302	1	0.302	
BD-CF	- 0.22	0.202	1	0.202	
CD-BF	0.43	0.760	1	0.760	
AF-DE	0.66	1.760	1	1.760	*
ABD-CED	0.17	0.123	1	0.123	
ACD-ABF	0.14	0.070	1	0.070	
ERROR EXPERIMENTAL		0.735	4	0.184	

* Significativo para $\alpha = 0.05$

** Muy significativo para $\alpha = 0.01$

Cálculo del error experimental usamos la fórmula para experiencias duplicadas.

$$s^2 = \frac{(0.70)^2 + (0.30)^2 + (0.50)^2 + (0.80)^2}{2 \times 4} = \frac{1.470}{8}$$

$$s^2 = 0.184$$

TABLA N° 4.8 **ANALISIS DE VARIANZA DE (Y₂)**

FACTORES	EFFECTOS	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADO MEDIO	F
A	1.43	8.230	1	8.230	
B	- 1.97	15.560	1	15.560	*
C	1.51	9.130	1	9.130	
D	5.96	134.000	1	134.000	**
E	- 0.50	1.034	1	1.034	
F	= 3.58	51.600	1	51.600	**
INTERACCIONES					
AB-CE	1.13	5.150	1	5.150	
AC-BE	- 1.42	8.050	1	8.050	
AC-BC-BF	- 2.01	16.250	1	16.250	*
AD-EF	- 2.80	31.560	1	31.560	*
BC-CF	- 2.43	23.500	1	23.500	*
CD-BF	1.03	4.320	1	4.320	
AF-DE	2.11	17.750	1	17.750	*
ABD-CDE	2.29	21.000	1	21.000	*
ACD-ABF	0.10	0.936	1	0.936	
ERROR EXPERIMENTAL		6.461	4	6.461	

* Significativo para $\alpha = 0.05$

** Muy significativo para $\alpha = 0.01$

Cálculo del error experimental: Usamos la fórmula para experiencias duplicadas.

$$s^2 = \frac{(0.15)^2 + (0.70)^2 + (2.90)^2 + (2.00)^2}{2 \times 4} = \frac{12.925}{8}$$

$$s^2 = 1.625$$

CAPITULO V

DISEÑOS ROTABLES Y COMPUESTOS

5.1. GENERALIDADES.

Un diseño experimental rotatable, es aquel en el cual se tiene igual facultad de predicción en todas las direcciones a partir de un punto experimental central y donde los otros puntos experimentales están a una distancia del punto central. De acuerdo a esta definición todos los diseños de primer orden son rotables, es decir los factoriales 2^n y 2^{n-p} .

Nosotros nos dedicaremos a los diseños rotables que son especialmente útiles en el ajuste de modelos de segundo orden en los cuales es necesario disponer de datos suficientes para poder estimar los coeficientes del modelo propuesto.

Cuando los factores e interacciones son probadas a un grado de significación y algunas interacciones son significativas es que un modelo lineal no es satisfactorio, para hacer más exacto y a-

justar a un modelo cuadrático o de segundo orden se debe utilizar - los diseños rotables de segundo orden.

Un diseño rotable es también cercanamente ortogonal y por eso los efectos e interacciones pueden ser independientemente - estimadas sin ninguna dificultad.

5.2. DISEÑOS ROTABLES DE DOS VARIABLES.

a) *DISEÑO TRIGONAL.*

Es un diseño de primer orden en el cual los puntos experimentales corresponden a las coordenadas de un triángulo equilátero, en el plano $X_1 - X_2$. Para proporcionar una estimación del error experimental, se puede agregar dos o mas puntos - experimentales en el centro del diseño.

b) *DISEÑO PENTAGONAL.*

Es el más simple de los diseños de segundo orden y en el los puntos experimentales corresponden a las coordenadas de los vértices de un pentágono regular en el plano $X_1 - X_2$ incluyendose puntos experimentales en el centro del diseño, para determinar el error experimental.

c) *DISEÑO HEXAGONAL.*

Es un diseño de segundo orden y como su nombre lo indica los puntos experimentales corresponden a las coordenadas de los vértices de un hexágono regular y considera 3 puntos experimentales en el centro del diseño.

d) *DISEÑO OCTOGONAL.*

Lo mismo que los casos anteriores, es un diseño de segundo orden tratándose ahora de un octágono regular con cua

tro puntos experimentales en el centro.

En su uso es muy frecuente, junto con el diseño hexagonal son los más usados, más el hexagonal pero como la manera de utilizar estas herramientas es el mismo, hacemos la utilización y desarrollo en un trabajo completo.

5.3. TRABAJO DE APLICACION.

Para un mejor entendimiento del uso de esta importante herramienta en la investigación, retomaremos los modelos y las conclusiones a las que se llegaron, para seguir ajustando las condiciones óptimas de trabajo.

Las ecuaciones:

$$Y_1 = 92.60 + 0.06 X_1 - 0.43 X_2 + 0.005 X_3 + 0.51 X_4 + 0.33 X_5 + 0.36 X_6$$

$$Y_2 = 36.38 + 0.72 X_1 - 0.98 X_2 + 0.75 X_3 + 2.88 X_4 - 0.25 X_5 - 1.79 X_6$$

nos permitirán aplicar el método de la pendiente ascendente y progresar en la búsqueda de las condiciones óptimas Tablas Nos.5,1 y 5.2

Del análisis de las tablas anteriores concluimos que la dirección en que se maximizan las respuestas Y_1 e Y_2 es la misma, excepto en el caso de las variables E y F.

Se observa que el paso correspondiente a los factores A,C y E es proporcionalmente pequeño, lo que hace que estos factores permanezcan en el nivel central o cerca de él. Puesto que, según hemos visto estos factores están en las cercanías de sus condi-

ciones óptimas y permanecerán constantes en el próximo experimento, debemos elegir sus valores en su nivel central o según lo aconseje el análisis de algunas interacciones significativas a su nivel inferior de seguridad que el tomado como base.

TABLA 5.1, Paso de la Pendiente Ascendente.
(Y_1)

FACTORES	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Nivel base	2.00	0,10	0.10	9.50	1600	30,0
Unidad u_i	1,00	0.05	0.05	1,00	200	8.0
pend est. b_i	0,06	- 0,43	0.005	0.51	0.33	0.36
$u_i \cdot b_i$	0,06	- 0.023	0.003	0.51	66,00	2.88
Δx_i	0,03	- 0.011	0.0001	0.25	32.20	1.40

Experiencias
Posibles

(1)	2.00	0,10	0.10	9.5	1600	30.00
(2)	2,03	0.089	0.10	9.75	1632	31.40
(3)	2.06	0.078	0,10	10.00	1664	32.80
(4)	2.09	0.067	0.10	10.25	1696	34.20
(5)	2.12	0.056	0.10	10.50	1728	35.60
(6)	2.15	0.045	0.10	10.75	1760	37.00
(7)	2.18	0,034	0.10	11.00	1792	38.40
(8)	2.21	0.028	0.10	11.25	1824	39.80
(9)	2.24	0.012	0.10	11.50	1856	41.20

El incremento Δx_i elegido para formar la secuencia anterior correspondió al factor de mayor pendiente es decir X_4 .

$$\Delta x_4 = 0.25$$

TABLA N° 5.2. Paso de la Pendiente Ascendente.
(Y_2)

Factores	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
Nivel Base	2.00	0.10	0.10	9.50	1600	30.0
Unidad u_i	1.00	0,05	0.05	1.00	200	8.0
Pend, est b_i	0.72	0.98	0.75	2.88	-0.28	- 1.79
$U_i b_i$	0.72	- 0.049	0.04	2.88	-50.00	- 14.32
Δx_i	0.06	0.004	0.003	0.75	- 4.50	1.25

Expeiriencias
Posibles

(1)	2.00	0.100	0.10	9.50	1600	30.0
(2)	2.06	0.096	0.103	9.75	1596	28.7
(3)	2.12	0.092	0,106	10.00	1592	27.5
(4)	2,18	0.088	0.109	10,25	1588	26,7
(5)	2.24	0.084	0.112	10.50	1584	25.0
(6)	2.30	0.080	0.115	10.75	1580	23,7
(7)	2.36	0.076	0.118	11.00	1576	22,5
(8)	2.42	0.072	0.121	11.25	1572	21.2
(9)	2,48	0.068	0.124	11.50	1568	20.0
(10)	2.54	0,064	0.127	11.75	1564	18.7
(11)	2.60	0.060	0.130	12.00	1560	17.5

- El factor A, tiempo de acondicionamiento, conviene fijarlo en su nivel superior, pues produce mejores recuperaciones y mejores eficiencias de la recuperación en dicho nivel.

- Para C cantidad de espumante, el análisis de interacciones aconseja mantenerlo constante en su nivel superior puesto que da mejores Y pero como cualitativamente produce también una buena espuma en su nivel central y es más económico usar 0.10 libras por tonelada que 0.15, lo fijaremos en su nivel central.
- Para el factor E, agitación, vemos que desde el punto de vista de la recuperación conviene fijarlo en su nivel superior, pero para Y_2 en su nivel inferior. Tomaremos en consecuencia un nivel central, como óptimo para ambas variables respuestas.

En cuanto a los factores significativos no cabe duda en que dirección debemos elegir los nuevos niveles. Sin embargo, observamos que el factor F, porcentaje de sólidos, influye en forma distinta en ambas respuestas como nuestro objetivo es obtener máxima respuesta para Y_1 e Y_2 se tendrá que tomar niveles intermedio para esta variable.

Después del análisis tendremos que realizar un nuevo grupo de pruebas en el cual mantendremos constantes los factores considerados ya en sus condiciones óptimas.

Tiempo de acondicionamiento	3.0 Minutos
Dosificación de espumante	0.10 Lbs/Ton
Agitación	1600 R.P.M.

Los factores y niveles que definen el próximo diseño son

Factores	Niveles		
	0	+	
A = Dosificación de Colector lb/ton	0.02	0.04	0.06
B = PH (unidades de PH)	10.0	10.5	11.0
C = % de sólidos	27.5	30.5	33.5

Postulación de Modelos.

Igual que en el caso anterior supondremos comportamiento lineal de nuestras variables respuestas en el rango de estudio.

$$Y_1 = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + \epsilon$$

$$Y_2 = B_0^1 + B_1^1X_1 + B_2^1X_2 + B_3^1X_3 + \epsilon$$

- a) *El diseño.*- En estas pruebas consideramos como variables aquellos factores altamente significativos en el diseño anterior, utilizaremos un diseño factorial 2^3 , el cual nos proporciona información completa sobre los efectos e interacciones en el experimento en cuestión.
- b) *Experimentación.*- Las tablas N^{os}. 5.3 y 5.4 resumen los resultados obtenidos en este experimento.

TABLA 5.3. Resultados Experimentales.

Combinaciones Experimentales	Matriz diseño D			Respuesta	
	A	B	C	Y_1	Y_2
(1)	-	-	-	94.00	53.20
a	+	-	-	94.00	44.70
b	-	+	-	94.60	55.30
ab	+	+	-	92.60	48.40
c	-	-	+	92.40	48.40
ac	+	-	+	92.50	36.90
bc	-	+	+	93.20	48.60
abc	+	+	+	92.20	35.80
0	0	0	0	92.60	45.00

TABLA N° 5.4. Resultados experimentales.

Combinaciones Experimentales	Concentrado		Colas		% R	% Er
	% Cu T	% Cu NS	% Cu T	% Cu NS	(Y ₁)	(Y ₂)
(1)	20.60	0.16	0.16	0.03	94.00	53.20
a	17.70	0.18	0.16	0.03	94.00	44.70
b	21.20	0.27	0.14	0.05	94.60	55.30
ab	19.25	0,27	0.20	0.03	92.20	48.40
c	19.20	0.22	0.19	0.04	92.50	48.40
ac	15.20	0.15	0.20	0.02	92.50	36.90
bc	14.40	0.16	0.18	0.03	93.20	48.60
abc	14.85	0.15	0.21	0.03	92.10	35.80
0	18.00	0.17	0.19	0.08	92.60	45.00

TABLA N° 5.5. ANAVA (Y₁)

FACTORES	EFFECTOS	SUMAS DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADOS MEDIOS	F
A	- 0.87	1.53	1	1.53	*
B	- 0.22	0.11	1	0.11	
C	- 1.12	2.56	1	2.56	**
Interacciones					
AB	- 0.87	1.53	1	1.53	*
BC	0.37	0.28	1	0.28	
AC	0.30	0.21	1	0.21	
ABC	0.32	0.21	1	0.21	
Error Experimental		0.735	4	0.184	

TABLA N° 5.6. ANAVA (Y_2)

FACTORES	EFFECTOS	SUMAS DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADO MEDIO	F
A	- 9.92	197,50	1	197,50	**
B	1.22	3.00	1	3.00	
C	- 7.97	127,50	1	127.50	**
Interacciones					
AB	0.07	0.01	1	0.01	
BC	1.67	5.62	1	5.62	
AC	- 2.22	9.80	1	9.80	*
ABC	0.72	1.05	1	1.05	
Error Experimental		6.461	4	1.625	

Nota * Significativo $\alpha = 0.05$

** Muy significativo $\alpha = 0.01$

c) *Análisis*.- Las tablas 5.5. y 5.6 resumen el análisis estadístico del experimento. En el análisis de varianza correspondiente hemos tomado el error experimental determinado en el primer experimento.

Si para Y_1 , escribimos los efectos unitarios correspondientes de los factores, tendremos:

$$\begin{array}{ll}
 b_1 = - 0.43 & b_{12} = 0.43 \\
 b_2 = - 0.11 & b_{13} = 0,15 \\
 b_3 = - 0.56 & b_{23} = 0.18
 \end{array}$$

Se puede observar que las interacciones tienen valores más o menos de la misma magnitud que los efectos principales.

Además, si hacemos la diferencia entre los promedios de las experiencias periféricas y del centro del diseño, obtenemos:

$$Y_p - Y_c = 93.23 - 92.60 = 0.63$$

La existencia de esta diferencia nos dice que los efectos cuadráticos ya no se pueden despreciar. Todo lo anterior significa que hemos llegado a una región experimental de respuesta estacionaria y que un modelo lineal ya no explica en forma satisfactoria la variable respuesta en función de los factores estudiados. El ANAVA tabla N° 5.5, indica que el factor B, pH no es significativo y puesto que su efecto ha cambiado de signo en relación al diseño anterior podemos concluir con toda seguridad que el nivel elegido para este factor encierra sus condiciones óptimas. Resultan significativas, en cambio, los factores A, C y la interacción AB, la cual nos ayuda a confirmar las conclusiones anteriores.

En cuanto a la respuesta Y_2 , si bien la comparación de los efectos e interacciones no nos indican que hemos llegado a una región experimental de respuesta estacionaria, la diferencia entre el promedio de las respuestas periféricas y del centro nos demuestran que existen efectos de tipo cuadrático ya que:

$$Y_p - Y_c = 1.64$$

Además de esto, el ANAVA correspondiente dice que los factores A y C son altamente significativos y que la interacción AC es importante.

Las consideraciones anteriores permiten concluir que la superficie respuesta tiene una cierta curvatura en la región experimental estudiada y probablemente estamos cerca de las condiciones óptimas para Y_2 . Sin embargo, a fin de construir el -paso de la pendiente ascendente. Tablas N° 5.7 y 5.8 aproximaremos las respuestas a un plano las cuales resultan ser:

$$Y_1 = 93.23 - 0.435 X_1 - 0.110 X_2 - 0.560 X_3$$
$$Y_2 = 46.41 - 4.960 X_1 + 0.610 X_2 - 3.985 X_3$$

Posteriormente se han hecho algunas de las experiencias posibles, cuyos resultados se pueden apreciar en las tablas mencionadas. La experiencia (4) de la tabla N° 5.7 dió las mejores respuestas, como tratándose que la recuperación disminuye en ambos sentidos, pues la experiencia (1) y (6) dan recuperaciones y eficiencias menores.

Estas experiencias permiten comprobar que efectivamente la región experimental estudiada encierra las condiciones óptimas para Y_1 y que es necesario estudiar en forma detallada esta región experimental la forma verdadera de la superficie respuesta.

TABLA N° 5,7. Paso de la Pendiente Ascendente (Y_1)

Factores	X_1	X_2	X_3		
Nivel base	0.040	10.50	30.50		
Unidad U_i	0.020	0.05	3.0		
Pend. Estim. b_i	-0.435	- 0.11	- 0.56		
U_i, b_i	-0.0087	- 0.055	- 1.68		
ΔX_i	-0.005	- 0.0316	- 0.955		
Experiencias posibles	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
(1)	0.040	10.50	30.50	92.60	45.00
(2)	0.035	10.47	29.55	-	-
(3)	0.030	10.43	28.60	94.00	60.50
(4)	0.025	10.40	27.65	94.00	63.20
(5)	0.020	10.37	26.70	-	-
(6)	0.015	10.33	25.75	91.30	55.20
(7)	0.010	10.30	24.80	-	-

DATOS ANEXOS

Experiencias	Concentrados		Cola			
	% Cu T	% Cu NS	% Cu T	% Cu NS	% R	% Er
(1)	18.00	0.17	0.19	0.08	92.60	45.00
(3)	22.40	0.20	0.16	0.04	94.00	60.50
(4)	24.60	0.19	0.16	0.03	94.00	63.20
(6)	21.90	0.18	0.22	0.05	91.30	55.20

Para Y_2 también se realizaron algunas de las experiencias posibles comprobándose que también la región experimental estudiada encierra su óptima, como se puede concluir al ver los resultados de las experiencias (3), (4) y (5), Tabla N° 5.8

Como hemos dicho, el factor B no resulta significativo para ninguna de las variables respuestas y se puede observar que su efecto tiene signos opuestos, según sea el Y desplazándose prácticamente poco de su valor central - 10.5 - al hacer el paso respectivo. En consecuencia mantendremos fijo el PH en 10.5 en el diseño detallado próximo y con seguridad no cometeremos error al afirmar que este pH es el óptimo en la flotación del compuesto mineral problema.

TABLA 5,8 Paso de la Pendiente Ascendente (Y_2)

Factores	X_1	X_2	X_3		
Nivel base	0.040	10.5	30.50		
Unidad U_i	0.020	0.5	3.00		
Pend. estim b_i	-4.960	- 0.61	- 3.985		
$U_i b_i$	-0.099	0.305	-11.955		
ΔX_i	-0.005	0.015	- 0.601		
Experiencias Posibles	X_1	X_2	X_3	Y_1	Y_2
(1)	0.040	10.50	30.50	-	-
(2)	0.035	10.51	29.90	-	-
(3)	0.030	10.52	29.30	93.00	65.40
(4)	0.025	10.53	28.70	92.50	70.70
(5)	0.020	10.54	28.10	92.60	59.40
(6)	0.015	10.55	27.50	-	-
(7)	0.010	10.56	26.90	-	-

DATOS ANEXOS

Experiencias	Concentrado		Colas		% R	% Er
	% Cu T	% Cu NS	% Cu T	% Cu NS		
(3)	24.00	0.20	0.18	0.05	93.00	65.40
(4)	26.20	0.23	0.17	0.05	92.00	70.70
(5)	23.00	0.24	0.19	0.06	92.60	59.40

El experimento realizado anteriormente tiene el objetivo de mostrarnos, como en algunos experimentos no pueden dejarse de lado los efectos cuadráticos y solamente se llega a determinar lo óptimo para el pH, teniéndose que continuar el trabajo para optimizar las dos variables restantes.

Utilizaremos un diseño octogonal que nos permitirá conocer la verdadera naturaleza de las superficies respuestas respectivas.

$$Y_1 = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{12}X_1X_2 + \epsilon$$

$$Y_2 = B_0 + B_1X_1 + B_2^1X_2 + B_2^1X_1^2 + B_{11}^1X_1^2 + B_{12}^2X_1X_2 + \epsilon$$

El experimento estará definido por las siguientes condiciones experimentales

Tiempo de Acondicionamiento	3.0 min
Dosificación de espumante	0.10 lb/Ton
Agitación	1600 r.p.m.
PH	10.5
Factores	Niveles

		-	0	+
A = Dosificación colector (lb/Ton)	0.0150	0.0250	0.0350	
B = % sólidos	25.0	27.5	30.0	

DISEÑO OCTOGONAL

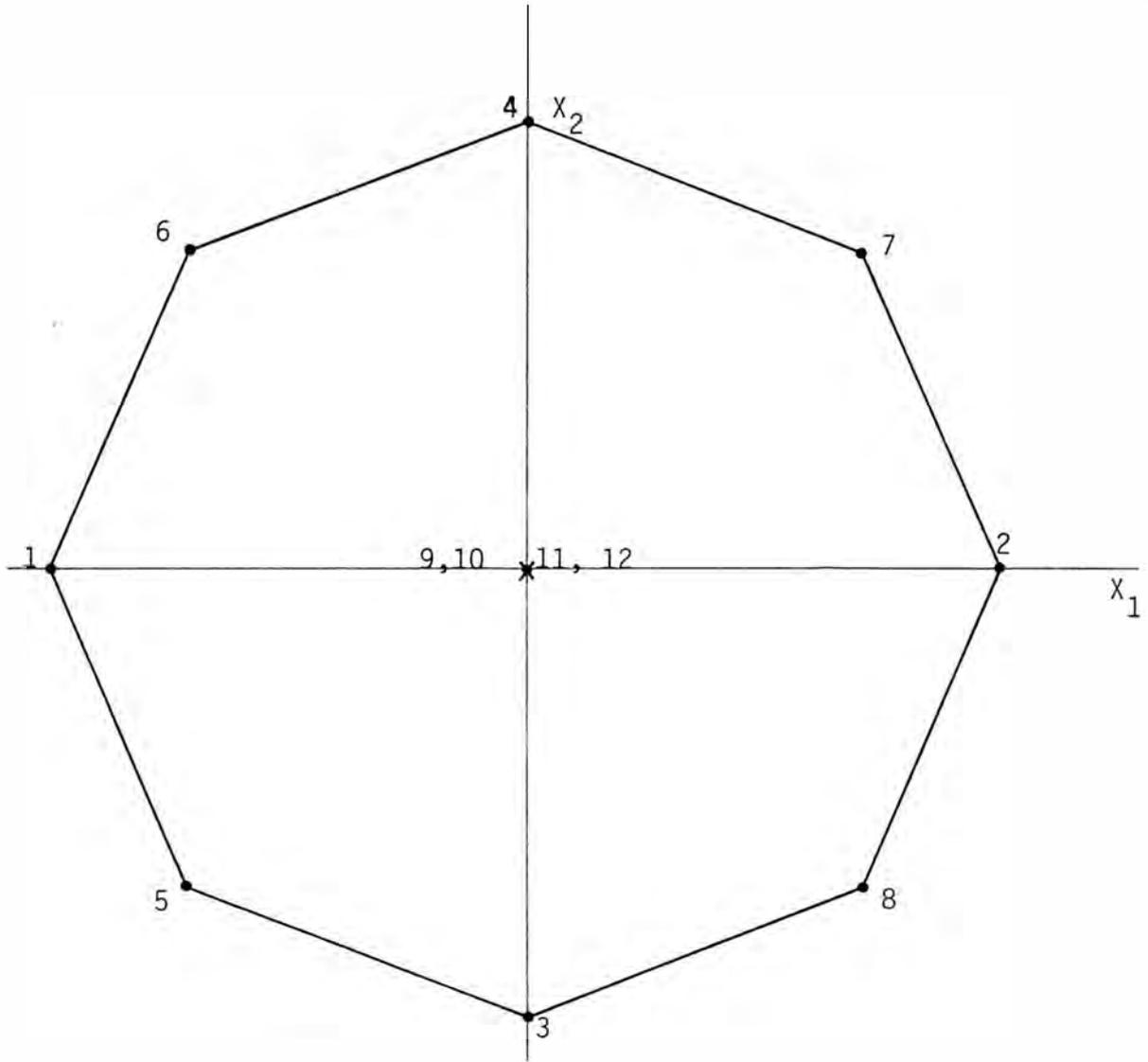


Fig. 5.1. OCTOGONO INDICANDO LAS PRUEBAS A REALIZAR.

TABLA 5,9. Diseño Octogonal

Factores	Niveles		
	-	0	+
A = Dosificación del Colector	0.015	0.025	0.035
B = % de sólidos	25	27.5	30.0

$A = 0.005 X_1 + 0.025$
 $B = 2.00 X_2 + 27.50$

Experiencia N°	Matriz diseño D		Respuestas	
	X_1	X_2	Y_1	Y_2
1	- 1.0	0.0	90.90	69.70
2	1.0	0.0	92.20	57.50
3	0.0	- 1.0	92.80	51.10
4	0.0	1.0	93.60	53.30
5	- 0.707	- 0.707	92.20	55.00
6	- 0.707	0.707	93.50	60.60
7	0.707	- 0.707	93.30	51.60
8	0.707	0.707	94.00	64.70
9	0.0	0.0	94.10	67.80
10	0.0	0.0	94.30	70.00
11	0.0	0.0	93.90	69.50
12	0.0	0.0	94.00	65.60

TABLA 5.10 Resultados Experimentales

N° Exp.	Concentrados		Colas		% R Y ₁	% Er (Y ₂)
	% Cu T	Cu NS	% Cu T	Cu NS		
1	27.10	0.17	0.23	0.03	90.90	69.70
2	22.50	0.20	0.20	0.03	92.20	57.50
3	20.10	0.17	0.19	0.03	92.80	51.10
4	20.70	0.17	0.17	0.03	93.60	53.30
5	21.60	0.15	0.20	0.04	92.20	55.00
6	23.30	0.15	0.17	0.03	93.50	60.60
7	20.20	0.17	0.18	0.03	93.30	51.60
8	24.40	0.18	0.15	0.04	94.00	64.30
9	25.60	0.17	0.15	0.08	94.10	67.80
10	26.30	0.16	0.15	0.03	94.30	70.00
11	26.20	0.16	0.16	0.03	93.90	69.50
12	24.90	0.20	0.16	0.03	94.00	65.60

TABLA 5.11. Diseño Octogonal y Variables

Experiencias N°	X ₁	X ₂	A	B
1	-1.0	0.0	0.020	27.50
2	1.0	0.0	0.030	27.50
3	0.0	- 1.0	0.025	25.50
4	0.0	1.0	0.025	29.50
5	- 0.707	- 0.707	0.021	26.10
6	- 0.707	0.707	0.021	28.91
7	0.707	- 0.707	0.028	26.10
8	0.707	0.707	0.028	28.91
9	0.0	0.0	0.025	27.50
10	0.0	0.0	0.025	27.50
11	0.0	0.0	0.025	27.50
12	0.0	0.0	0.025	27.50

Luego plantearemos las ecuaciones que nos servirán para la determinación de los coeficientes.

N	ΣX_1	ΣX_2	ΣX_1^2	ΣX_2^2	$\Sigma X_1 X_2$	ΣY
	ΣX_1^2	$\Sigma X_1 X_2$	ΣX_1^3	$\Sigma X_1 X_2^2$	$\Sigma X_1^2 X_2$	$\Sigma X_1 Y$
		ΣX_2^2	$\Sigma X_1^2 X_2$	ΣX_2^3	$\Sigma X_1 X_2^2$	$\Sigma X_2 Y$
			ΣX_1^4	$\Sigma X_1^2 X_2^2$	$\Sigma X_1^3 X_2$	$\Sigma X_1^2 Y$
				ΣX_2^4	$\Sigma X_1 X_2^3$	$\Sigma X_2^2 Y$
					$\Sigma X_1^2 X_2^2$	$\Sigma X_1 X_2 Y$

N = Número de observaciones

Luego de la tabla 5.12 y con las ecuaciones arriba mostradas llegamos al planteamiento de las siguientes ecuaciones, para Y_1

b_0	b_1	b_2	b_{11}	b_{22}	b_{12}	
<u>12</u>	0	0	4	4	0	= 1118.800
0	4	0	0	0	0	= 2.430
0	0	4	0	0	0	= 2.214
4	0	0	3	1	0	= 369.600
4	0	0	1	3	0	= 372.900
0	0	0	0	0	1	= - 0.300

La matriz arriba mostrada en forma normal es una matriz simétrica, esto es que los elementos que no están en la diagonal son una imagen de cada uno de los otros.

En esta tabla tabularemos todos los datos que nos servirán para determinar cada una de los coeficientes del modelo.

TABLA N° 5.12 Tabulación de Datos

Experiencia N°	Y_1	Y_2	X_0	X_1	X_2	X_1^2	X_2^2	X_1X_2
1	90.90	69.70	1	- 1.0	0.0	1.0	0.0	0.0
2	92.20	57.50	1	1.0	0.0	1.0	0.0	0.0
3	92.80	51.10	1	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0
4	93.60	53.30	1	0.0	1.0	0.0	1.0	0.0
5	92.20	55.00	1	- 0.707	- 0.707	0.5	0.5	0.5
6	93.50	60.60	1	- 0.707	0.707	0.5	0.5	- 0.5
7	93.30	51.60	1	0.707	- 0.707	0.5	0.5	- 0.5
8	94.00	64.30	1	0.707	0.707	0.5	0.5	0.5
9	94.10	67.80	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
10	94.30	70.00	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	93.90	69.50	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
12	94.00	65.60	1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ϵ Total	1118.80	736.00	12	0.0	0.0	4.0	4.0	0.0

Las ecuaciones normales quedarán escritas de la siguiente manera:

$$\begin{array}{rcccccc}
 b_0 & b_1 & b_2 & b_{11} & b_{22} & b_{12} & \\
 12b_0 & & & 4b_{11} & 4b_{22} & & = 1118.800 \\
 & 4b_1 & & & & & = 2.430 \\
 & & 4b_2 & & & & = 2.214 \\
 4b_0 & & & 3b_{11} & 1b_{22} & & = 369.600 \\
 4b_0 & & & 1b_{11} & 3b_{22} & & = 372.900 \\
 & & & & & 1b_{12} & = 0.300
 \end{array}$$

Estas ecuaciones se pueden resolver muy facilmente de la solución de las ecuaciones arriba mostradas obtenemos el modelo para

$$Y_1 = 94.075 + 0.607X_1 + 0.553X_2 - 2.088X_1^2 - 0.438X_2^2 + 0.300X_1X_2$$

TABLA N° 5,13 Respuestas Teóricas y Prácticas (Y_1)

Exp. N°	Y_1	\hat{Y}_1	$Y_1 - \hat{Y}_1$	$(Y_1 - \hat{Y}_1)^2$
1	91.38	90.90	0.48	0.23
2	92.59	92.20	0.39	0.15
3	93.08	92.80	0.28	0.08
4	94.19	93.60	0.59	0.35
5	91.84	92.20	- 0.36	0.13
6	92.93	93.50	- 0.57	0.32
7	93.00	93.30	- 0.30	0.09
8	93.49	94.00	- 0.51	0.26
9	94.075	94.10	- 0.025	0.00
10	94.075	94.30	- 0.225	0.05
11	94.075	93.90	0.175	0.03
12	94.075	94.00	0.75	0.00
	18.73	1118.8	- 0.02	1.6975

ANAVA (Y_1)

Se realizaron 12 pruebas, 6 grados de libertad se han perdido en la estimación de los coeficientes.

FUENTE DE VARIACION		GRADO DE LIBERTAD	VARIANZA
Suma residual de cuadrados	= 1.6975	6	0.2829
Error Experimental	= 0.0880	3	0.0293
Reajuste	1.6095	3	0.5365

De la tabla F para (3,3) grados libertad al 99% de confianza = 29.46

Del cálculo:;

$$\frac{\text{Varianza del reajuste}}{\text{Varianza del error experimental}} = \frac{0.5365}{0.0293} = 18.31$$

Esto nos indica que el modelo empírico es un excelente ajuste en rango investigado.

Del mismo modo como encontramos los coeficientes para Y_1 encontraremos

$$Y_2 = 68.275 - 2.997X_1 + 3.785X_2 - 4.688X_1^2 - 16.088X_2^2 + 3.551X_1X_2$$

TABLA N° 5.14 Respuestas Teóricas y Prácticas (y_2)

Exp. N°	y_2	\bar{y}_2	$(y_2 - \bar{y}_2)$	$(y_2 - \bar{y}_2)^2$
1	66.58	69.70	- 3.12	9.74
2	60.59	57.70	2.81	7.90
3	48.40	51.10	- 2.70	7.30
4	55.97	53.30	2.67	7.10
5	59.10	55.00	4.10	16.81
6	60.91	60.60	0.31	0.10
7	51.34	51.60	- 0.26	0.07
8	60.22	64.30	- 4.08	16.64
9	68.28	67.80	- 0.48	0.23
10	68.28	70.00	- 1.72	2.96
11	68.28	69.50	- 1.22	1.49
12	68.28	65.60	2.68	7.18
Σ TOTAL	736.23	736.3	1.01	77.52

ANAVA (Y_2)

Fuente de Variación		Grado de Libertad	Varianza
Suma residual de cuadrados	= 77.52	6	12.920
Error Experimental	= 11.85	3	3.950
Reajuste	= 65.67	3	21.89

De la tabla F para 3.3 grados de libertad al 99% de confianza = 29.46

Del Cálculo

$$\frac{\text{Varianza del reajuste}}{\text{Varianza del error Exp.}} = \frac{21.89}{3.95} = 5.54$$

Por 29.46 \Rightarrow 5.54

Esto nos indica que el modelo empírico es un excelente ajuste en el rango investigado.

Determinaremos la recuperación máxima y también la eficiencia de recuperación máxima por el método de las derivadas parciales de donde obtenemos:

$$X_1 = 0.1025 \quad \text{de donde} \quad A = 0.0255 \quad \text{lb/Ton}$$

$$X_2 = 0.5962 \quad \text{de donde} \quad B = 28.70 \% \quad \text{sólidos}$$

para Y_1

$$X_1 = 0.2871 \quad \text{de donde} \quad A = 0.024 \quad \text{lb/Ton}$$

$$X_2 = 0.08595 \quad \text{de donde} \quad B = 27.68 \% \quad \text{sólidos}$$

para Y_2

De todo lo anterior se ve confirmado en las figuras 5.2 y 5.3 en las cuales se han graficado las líneas de contorno de ambas superficies respuestas. Si se superponen ambos gráficos se obtiene en panorama glo

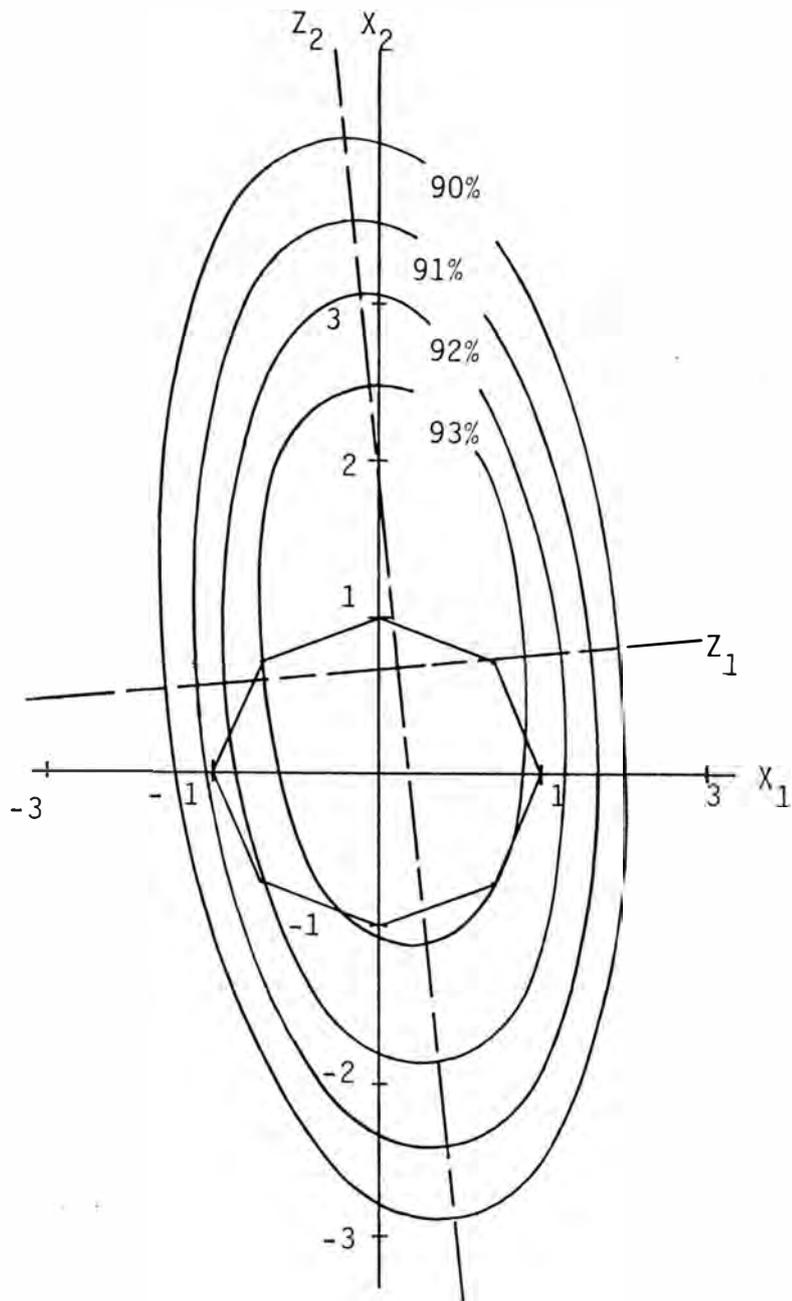


Fig. 5.2.- Líneas de contorno de la superficie respuesta de Y_2 (recuperación).

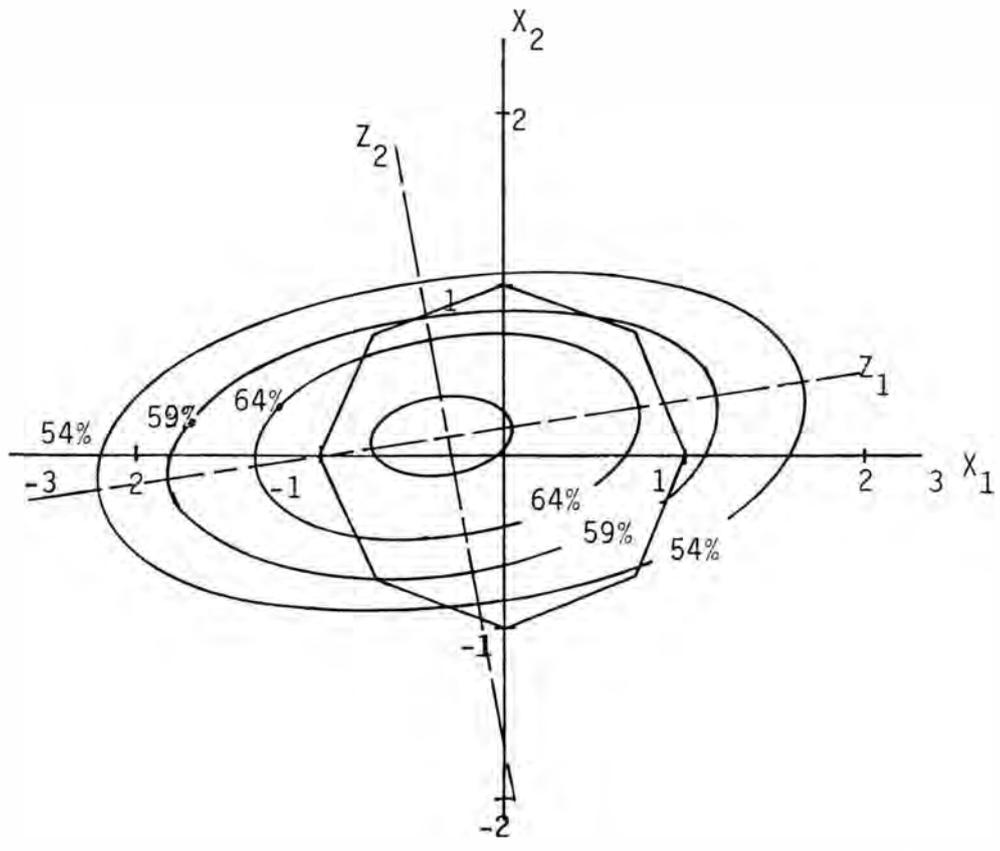


Fig. 5.3.- Líneas de Contorno de la Superficie de Y_2 (eficiencia de R).

bal del comportamiento de las variables respuestas frente a cualquier variación en los factores X_1 y X_2 . Estas gráficas, además no hacen necesario disponer de las ecuaciones que definen los nuevos ejes Z en función de los ejes X.

Si bien el óptimo no coincide en ambas superficies, estos están bastante cercanos entre si y definen una región experimental en la cual se obtiene máxima recuperación y máxima eficiencia. Se ha observado que al calcular Y_2 el factor que más influye en este parámetro es la ley del concentrado, pero como en la flotación, interesa más obtener una alta recuperación que una ley alta de concentrado, Y_1 es más importante en este estudio que Y_2 , en consecuencia elegiremos como óptimo las condiciones experimentales correspondientes al punto de Y_1 máximo.

La recuperación máxima será de 94.27 %

C A P I T U L O VI

TEORIA DE LA OPTIMIZACIÓN

6.1. OPTIMIZACION.-

En la mayoría de los procesos de Ingeniería Metalúrgica, es necesario determinar las condiciones óptimas por experimentación, Optimizar significa determinar el conjunto de valores de las variables independientes, considerando las restricciones propias del proceso en estudio, tales que estas nos permitan lograr un rendimiento óptimo, es decir maximicen o minimicen la función res - puesta o función objetivo.

6.2. METODOS DE OPTIMIZACION USADOS EN INGENIERIA

6.2.1. METODOS ANALITICOS.-

Método	Aplicación
<i>Optimización por investigación directa de un extremo.</i>	<i>Determina procesos descritos por funciones diferenciales.</i>

<i>Método de los Multiplí- cadores de Lagrange.</i>	<i>Determina procesos descritos por funciones diferenciables con iní- gual número restricciones.</i>
<i>Variación de Cálculos</i>	<i>Realiza determinaciones en la - forma de funciones. Solución de las ecuaciones de Eu- ler, Reactores adiabáticos de - multicapa. Condiciones óptimas - de temperatura para reacciones - reversibles exotérmicas del tipo flujo pistón.</i>
<i>Principio de maximiza- ción de Pontryagin.</i>	<i>Para un rango amplio de problemas especialmente en control automáti- co.</i>

P R O G R A M A C I O N
M A T E M A T I C A

<i>Programación Geométrí- ca.</i>	<i>Optimización de funciones alge- braicas.</i>
<i>Programación Lineal.</i>	<i>Manufactura de productos de máxi- mo retorno de diferentes materias primas. Utilización óptima de e - quipos. Problemas de transporte.</i>
<i>Programación Dinámica.</i>	<i>Procesos de multiestados; destila- ción, extracción, absorción, etc.</i>

6.2.2. METODOS DE LA GRADIENTE.-

Todas sus formas

Optimización de funciones lineales y no lineales con o sin restricciones lineales procesos complejos en ingeniería.

6.2.3. METODOS DE OPTIMIZACION POR CONTROL DE COMPUTADORAS. _

Todas las formas

Sistemas complejos de ingeniería.

6.2.4. METODOS DE OPTIMIZACION ESTADÍSTICA.-

Análisis de regresión

Sistemas no determinados

Análisis de correlación método de Brandon, método de Box-Wilson etc.

Experimentos de optimización y diseños.

En nuestro caso nos abocamos al estudio de los métodos de optimización estadística que es el que mejor se acomoda a nuestro tipo de trabajo de optimizaciones a nivel de laboratorio.

Los análisis de regresión, cuando son usados convenientemente, pueden dar indicaciones correctas de como son las relaciones entre las variables del proceso y las condiciones óptimas. En ambos casos el modelo matemático es una función respuesta el cual relaciona los parámetros a optimizar el cual describe el resultado de un experimento con las variables que el investigador manipula en el desarrollo del experimento

$$Y = \psi (X_1, X_2, \dots, X_k) \qquad 6.1$$

Las variables independientes X_1, X_2, \dots, X_k son normalmente llamadas "factores" el espacio con coordenadas X_1, X_2, \dots, X_k es llamado "el espacio factorial" y un cuadro geométrico de funciones respuesta en el espacio factorial es llamada "Superficie respuesta".

La superficie respuesta puede ser descrita como en las figuras 5.2 y 5.3. Los experimentos fueron realizados y sus resultados fueron analizados por métodos convencionales, esto es, variando solamente una variable en un tiempo mientras se mantiene las otras constantes.

Usando los modelos estadísticos, un modelo matemático es un modelo truncado de la serie de Taylor de una relación desconocida.

$$Y = B_0 + \sum_{j=1}^k B_j X_j + \sum_{\substack{u,j=1 \\ u \neq j}}^k B_{uj} X_u X_j + \sum_{j=1}^k B_{jj} X_j^2 + \dots \quad (6.2)$$

Donde:

$$B_j = \frac{\delta \psi}{\delta x_j} \Big|_{x=0} \quad B_{uj} = \frac{\delta^2 \psi}{\delta x_u \delta x_j} \Big|_{x=0} ; \quad B_{jj} = \frac{\delta^2 \psi}{\delta x_j^2} \Big|_{x=0}$$

Desde que en un proceso real hay siempre variables incontrolables y otras inobservables, cambia en "y" y son de característica fortuita o aleatoria. Esto es porque en un proceso experimental se usa los coeficientes de regresión b_0, b_j, b_{uj} y b_{jj} los cuales son estimados de los coeficientes teóricos B_0, B_j, B_{uj} y B_{jj} . La ecuación de regresión estimada desarrollada sobre las bases de un experimento tomará la forma:

$$\hat{Y} = b_0 + \sum_{j=1}^k b_j X_j + \sum_{uj=1}^k b_{uj} X_u X_j + \sum_{j=1}^k b_{jj} X_j^2 + \dots \quad (6.3)$$

El coeficiente b_0 es el término libre de la ecuación de regresión, los coeficientes b_j son los términos lineales, los coeficientes b_{jj} son los términos cuadráticos, y los coeficientes b_{uj} son los términos de interacción.

Los términos de la ecuación (6.3) son estimados por el método de mínimos cuadrados de la condición.

$$\phi = \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 = \text{mínimo} \quad (6.4)$$

Donde N es el número de pruebas, la diferencia entre el número de pruebas y el número de ajustes o de coeficientes estimados ℓ , es el número de grado de libertad f ,

$$f = N - \ell \quad (6.5)$$

6.3. ANALISIS DE REGRESION Y CORRELACION.

Regresión lineal con una variable.- Busca estimar por medio del método de los mínimos cuadrados los coeficientes en una ecuación lineal de regresión de la forma:

$$\hat{Y} = b_0 + b_1 X \quad (6.6)$$

de un número de pruebas N

El grupo de ecuaciones normales para este caso será:

$$\sum_{i=1}^N Y_i - \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 X_i) = 0 \quad (6.7)$$

$$\sum_{i=1}^N Y_i X_i - \sum_{i=1}^N (b_0 + b_1 X_i) x_i = 0 \quad (6.8)$$

ó

$$N b_0 + b_1 \sum_{i=1}^N X_i = \sum_{i=1}^N Y_i \quad (6.9)$$

$$b_0 \sum_{i=1}^N X_i + b_1 \sum_{i=1}^N X_i^2 = \sum_{i=1}^N X_i Y_i$$

de donde:

$$b_0 = \frac{\sum_{i=1}^N Y_i \sum_{i=1}^N X_i^2 - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N X_i Y_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2} \quad (6.10)$$

$$b_1 = \frac{N \sum_{i=1}^N X_i Y_i - \sum_{i=1}^N X_i \sum_{i=1}^N Y_i}{N \sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2} \quad (6.11)$$

Para estimar la fuerza de la correlación lineal encontraremos γ^* llamado el "coeficiente de correlación"

$$\gamma^* = \frac{\sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{(N-1) S_x S_y} \quad (6.12)$$

Donde S_x y S_y son las desviaciones estandar de las pruebas. De las ecuaciones (6.11) y (6.12) tenemos :

$$\gamma^* = \frac{b_1 S_x}{S_y} = b_1 \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N X_i^2 - (\sum_{i=1}^N X_i)^2}{N \sum_{i=1}^N Y_i^2 - (\sum_{i=1}^N Y_i)^2}} \quad (6.13)$$

Después de la estimación de la ecuación de regresión, está dado de estar sujeto a un análisis estadístico. El análisis consiste en lo siguiente:

Todo coeficiente son probados por significancia en comparación con el error de replicación, y la ecuación misma es probada por adecuación. Esto es análisis de regresión.

Para que sea posible el análisis de regresión se debe de cumplir las siguientes condiciones:

- 1.- *Las variables X de entrada deben de ser medidas con bastante cuidado. Cualquier error en la determinación de X es debido al hecho que el proceso tiene variables inobservables que no están incluidos en la ecuación de regresión.*
- 2.- *Las medidas de las variables de salida Y_1, Y_2, \dots, Y_N deberían de ser normalmente independientes distribuidos en una forma aleatoria.*
- 3.- *En la realización de un experimento con un número de pruebas N y con m repeticiones, las varianzas de las pruebas $S_1^2, S_2^2, \dots, S_N^2$ debe de ser la misma, o deben de ser homogéneas.*

Las varianzas son probadas por homogeneidad como sigue:

- 1) Encontrar el promedio de las observaciones de replicación:

$$\bar{Y}_i = \frac{\sum_{u=1}^m Y_{iu}}{m} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.14)$$

- 2) Determinar las varianzas de las muestras:

$$S_i^2 = \frac{\sum_{u=1}^m (Y_{iu} - \bar{Y}_i)^2}{m - 1} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6.15)$$

3) Encontrar la suma de las varianzas

$$\sum_{i=1}^N S_i^2 \quad (6.16)$$

4) Forma del radio

$$G_{\max} = \frac{S_{\max}^2}{\sum_{i=1}^N S_i^2} \quad (6.17)$$

Donde S_{\max}^2 es el máximo valor de la varianza de las pruebas

Si las varianzas son homogéneas, luego

$$G_{\max} < G_p(N, m - 1)$$

Donde $G_p(N, m - 1)$ el valor del criterio de Cochran para un nivel de significación p

Si la varianza de las pruebas son homogéneas, el error promedio cuadrado es calculado de la siguiente manera

$$S_e^2 = \frac{\sum_{i=1}^N S_i^2}{N} \quad (6.18)$$

El error promedio cuadrado tiene un número f de grados de libertad, dado por:

$$f = N(m - 1) \quad (6.19)$$

Conocer el error promedio cuadrado es esencial en la prueba de significancia de la estimación de coeficientes de la ecuación de regresión (6.6) (Esto es hecho usando la t de student.

$$t_j = \frac{b_j}{Sb_j} \quad (6.20)$$

Donde b_j es el j -ésimo coeficiente estimado de la ecuación de regresión y Sb_j es la desviación estándar de la prueba del j -ésimo coeficiente.

Si t_j excede los valores tabulados de $tp(f)$ para el nivel de significancia α y el número f de grados de libertad, el coeficiente estimado b_j es sustancialmente non-zero; S_{bj} es encontrado por la ley de acumulación del error.

$$S_{bj} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{ab_j}{aY_i} \right)^2 S_i^2} \quad (6.21)$$

Si $S_1^2 = S_2^2 = \dots S_N^2 = S_e^2$, luego

$$S_{b_0} = \sqrt{\frac{S_e^2 \sum_{i=1}^N X_i^2}{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \quad (6.22)$$

$$S_{b_i} = \sqrt{\frac{S_e^2 N}{N \sum X_i^2 - (\sum X_i)^2}} \quad (6.23)$$

Los coeficientes estimados no significativos son retirados de la ecuación de regresión. Los coeficientes estimados que quedan son recalculados, porque ellos están interrelacionados. Luego la ecuación es probada por el uso de las tablas estadísticas de radio de varianza de Fisher.

$$F = \frac{S_r^2}{S_e^2} \quad (6.24)$$

Donde S_e es el error promedio cuadrado y S_r^2 es el residuo promedio cuadrado definido por:

$$S_r^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\hat{Y}_i - \bar{Y}_i)^2}{N - l} \quad (6.25)$$

Donde α es el número de coeficientes en la ecuación de regresión si el radio (6.25) es más pequeño que los valores tabulados de $F_p(f_1, f_2)$ la ecuación es la adecuada.

En la ausencia de observaciones replicadas y de un error promedio cuadrado la adecuación de la ecuación de regresión estimada puede ser probado por comparación S_r^2 y la varianza estimada promedio, S_y^2 .

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_i - \bar{Y})^2}{N - 1} \quad (6.26)$$

Usando las tablas F de Fisher

$$F = \frac{S_y^2}{S_r^2} \quad (6.27)$$

En este caso F - ratio es el factor por el cual la dispersión alrededor de la línea de regresión es relativamente reducido a la dispersión promedio. El más grande valor de F en comparación con el valor tabulado. $F_p(f_1, f_2)$ para el valor de significancia seleccionado (p) y el número de grados de libertad

$$f_1 = N - 1 \quad \text{y} \quad f_2 = N - \alpha$$

6.3.1. REGRESION PARABOLICA.

Si la estimación de una ecuación de regresión es un polinomio. Los coeficientes por el método de mínimos cuadrados son hallados resolviendo un sistema lineal de ecuaciones, por ejemplo si deseamos estimar los coeficientes de una función cuadrática, la cual es una parábola de segundo orden definida por:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x + b_{11} x^2 \quad (6.28)$$

Por el método de los mínimos cuadrados

luego

$$\delta f(x) / \delta b_0 = 1 \quad \delta f(x) / \delta b_1 = x \quad \delta f(x) / \delta b_{11} = 2x$$

y el sistema de ecuaciones normales tiene la forma

$$\begin{aligned} b_0 N + b_1 \sum x_i + b_{11} \sum x_i^2 &= \sum Y_i \\ b_0 \sum x_i + b_1 \sum x_i^2 + b_{11} \sum x_i^3 &= \sum x_i y_i \\ b_0 \sum x_i^2 + b_1 \sum x_i^3 + b_{11} \sum x_i^4 &= \sum x_i^2 Y_i \end{aligned} \quad (6.29)$$

Los coeficientes para una parábola de cualquier otro orden se rán estimados de la misma estructura.

6.3.2. ESTIMACION DEL PODER DE CORRELACION.

Si asumimos que una ecuación de regresión ha sido determinada con suficiente precisión, el residuo de mínimos cuadrados se deberá solamente al error de mínimos cuadrado, esto es:

$$s_r^2 = s_e^2$$

La más pequeña contribución de $s_r^2 \approx s_e^2$ a la varianza estimada de todo el grupo s_y^2 , el mas fuerte poder de correlación entre x e y , por que la aleatoriedad es esta correlación es reducida proporcionalmente.

Asi el poder de correlación puede ser calculado o definido como:

$$\xi = \frac{(N - 2) S_r^2}{(N - 1) S_y^2} \quad (6.30)$$

El valor de ξ decrece con el incremento del poder de correlación

$$\theta = \sqrt{1 - \xi} \quad (6.31)$$

este término es llamado el índice de correlación y tiene la siguiente propiedad

$$0 \leq \theta \leq 1$$

Si $\theta = 1$, existe una relación entre las 2 variables y cuando $\theta = 0$, sin embargo las variables x e y no pueden ser consideradas independientes. Sin afectar el respectivo promedio de cuadrados y varianzas, la dependencia entre ellas pueden manifestarse en un más alto orden.

Pero así mismo en otros casos de una normal distribución que una correlación de índice cero puede ser considerado como una indicación de que no hay una relación entre las variables.

Igual que los coeficientes de correlación en una regresión lineal, el índice de correlación da una medida del grado de relación entre las variables aleatorias.

El análisis del poder de correlación sobre los valores de θ constituye el análisis de correlación.

6.3.3. METODO DE CORRELACION MULTIPLE.

El análisis de correlación entre varias variables, se usa una ecuación de regresión múltiple de la forma:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_kx_k \quad (6.32)$$

Para construir una superficie respuesta, los valores independientes de las variables o factores son colocados en los ejes de un factor espacio. Los datos usados para este propósito son tabulados en la tabla 6.1.

TABLA 6.1.

Observación N°	x_1	x_2	x_3	x_k	y
1	x_{11}	x_{21}	x_{31}	x_{k1}	y_1
2	x_{12}	x_{22}	x_{32}	x_{k2}	y_2
3	x_{13}	x_{23}	x_{33}	x_{k3}	y_3
.
.
.
N	x_{1N}	x_{2N}	x_{3N}	x_{kn}	Y_N

El primer paso a seguir es transformar los datos originales a una nueva escala. Esto se hace normalizando todos los variables por el uso de las ecuaciones.

$$y_i^0 = \frac{y_i - \bar{y}}{S_y} \quad x_{ji}^0 = \frac{x_{ji} - \bar{x}_j}{S_{xj}} \quad \begin{matrix} i = 1, 2, \dots, N \\ j = 1, 2, \dots, k \end{matrix} \quad (6.33.)$$

Donde y_i^0 y x_{ji}^0 son los valores normalizados de los respectivos factores, \bar{x} e \bar{y} son los factores, S_y y S_{ij} son las desviaciones standar de los factores definidos como:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}{N - 1}} \quad (6.34)$$

$$S_{xj} = \frac{\sum_{i=1}^N (X_{ji} - \bar{X}_j)^2}{N - 1} \quad (6.35)$$

Después de normalizar tendremos la tabla 6.2

TABLA 6.2.

Observación N°	X_1°	X_2°	X_3°	X_k°	y°
1	X_{11}°	X_{21}°	X_{31}°	X_{k1}°	y_1°
2	X_{12}°	X_{22}°	X_{32}°	X_{k2}°	y_2°
3	X_{13}°	X_{23}°	X_{33}°	X_{k3}°	y_3°
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
N	X_{1N}°	X_{2N}°	X_{3N}°		X_{kn}°	y_N°

En la nueva escala nosotros tenemos

$$\bar{X}_j^{\circ} = 0 \quad \bar{y}^{\circ} = 0$$

$$S_{x^{\circ}j} = 1 \quad S_{y^{\circ}} = 1$$

Luego el coeficiente de correlación es

$$r_{y^{\circ}x^{\circ}j}^* = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N Y_i^{\circ} X_{ji}^{\circ} \quad (6.36)$$

$$r_{x_{\ell}^{\circ}x_m^{\circ}}^* = \frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N X_{\ell i}^{\circ} X_{mi}^{\circ}$$

$$\ell > m \quad \ell, m = 1, 2, \dots, k$$

Los coeficientes de correlación encontrados de las ecuaciones (6.36) es igual a los coeficientes de correlación para las variables tomadas sobre la escala natural

$$r_{yx}^* \tag{6.13}$$

La ecuación de regresión estimada para las variables normalizadas no tiene término libre y toma la forma

$$\bar{Y}^\circ = a_1 x_1^\circ + a_2 x_2^\circ + \dots + a_k x_k^\circ \tag{6.37}$$

Los coeficientes de las ecuaciones (6.37) son hallados de la condición

$$S = \sum_{i=1}^N (Y_i^\circ - \hat{Y}_i^\circ)^2 = \text{mínimo} \tag{6.38}$$

Las condiciones para determinar un número de la función S son definidos en la misma manera como en el caso de una función de una variable simple.

$$\delta S / \delta a_1 = 0 \quad \delta S / \delta a_2 = 0 \quad \dots \delta S / \delta a_k = 0$$

Y el grupo de ecuaciones simultáneas toman la forma

$$a_1 \sum_{i=1}^N (X_{1i}^\circ)^2 + a_2 \sum_{i=1}^N X_{1i}^\circ X_{2i}^\circ + \dots + a_k \sum_{i=1}^N X_{1i}^\circ X_{ki}^\circ = \sum_{i=1}^N X_{1i}^\circ Y_i^\circ$$

$$a_1 \sum_{i=1}^N X_{2i}^\circ X_{1i}^\circ + a_2 \sum_{i=1}^N (X_{2i}^\circ)^2 + \dots + a_k \sum_{i=1}^N X_{2i}^\circ X_{ki}^\circ = \sum_{i=1}^N X_{2i}^\circ Y_i^\circ$$

(6.39)

$$a_1 \sum_{i=1}^N X_{ki}^\circ X_{1i}^\circ + a_2 \sum_{i=1}^N X_{ki}^\circ X_{2i}^\circ + \dots + a_k \sum_{i=1}^N (X_{ki}^\circ)^2 = \sum_{i=1}^N X_{ki}^\circ Y_i^\circ$$

A estas ecuaciones si dividimos ambos lados por (N - 1) encontraremos los coeficientes de correlación r*, de acuerdo a las ecuaciones arriba mostradas (6.39), para cada coeficiente a_j.
 Notando que:

$$\frac{1}{N - 1} \sum_{i=1}^N (X_{ji}^o)^2 = S^2_{x_j^o} = 1$$

y reemplazando tendremos un sistema de ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 r^*_{x_1x_2} + a_3 r^*_{x_1x_3} + \dots + a_k r^*_{x_1x_k} &= r^*_{yx_1} \\ a_1 r^*_{x_2x_1} + a_2 + a_3 r^*_{x_2x_3} + \dots + a_k r^*_{x_2x_k} &= r^*_{yx_2} \\ \dots & \\ \dots & \\ a_1 r^*_{x_kx_1} + a_2 r^*_{x_kx_2} + a_3 r^*_{x_kx_3} + \dots + a_k &= r^*_{yx_k} \end{aligned} \tag{6.40}$$

Se debe de recordar que $r^*_{x_lx_m} = r^*_{x_mx_l}$. Los coeficientes de correlación pueden ser encontrados multiplicando juntos las respectivas columnas en la tabla 6.2 para procesos multivariantes ecuación (6.40) tiene un grado mas alto y puede ser solucionado solamente en una computadora. Solucionando las ecuaciones (6.40) encontraremos los coeficientes de correlación multiple, R

$$R = a_1 r^*_{yx_1} + a_2 r^*_{yx_2} + \dots + a_k r^*_{yx_k} \tag{6.41}$$

Los coeficientes de correlación multiple es una medida del poder de correlación y en el caso de regresión multiple.

$$0 \leq R \leq 1$$

El valor de R debe de ser corregido por el error sistemático

La fórmula corregida es definida como:

$$R' = \sqrt{1 - (1 - R^2) \frac{N - 1}{N - \ell}} \quad (6.42)$$

Donde R es el coeficiente de correlación múltiple corregido, ℓ es el número de coeficientes en la ecuación de regresión (6.32)

$$\ell = k + 1$$

Se puede usar para casos prácticos el volver a la escala natural usando las ecuaciones.

$$b_j = a_j \frac{S_y}{S_{x_j}} \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$j \neq 0 \quad (6.43)$$

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^k b_j x_j$$

6.3.4. ANÁLISIS DE REGRESION EN FORMA DE MATRIZ.

Esta forma de análisis de regresión es adaptable a una solución por computadora. El primer paso es estimar los coeficientes de la ecuación de regresión por el procedimiento de números cuadrados sobre las bases de la tabla (6.2)

$$\hat{y} = b_0 X_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k \quad (6.44)$$

Donde X_0 es una variable falsa y toma el valor de 1

Los datos estadísticos son presentados en la forma de matriz.

La matriz,

$$X = \begin{pmatrix} X_{01} & X_{11} & X_{21} & \dots\dots\dots & X_{k1} \\ X_{02} & X_{12} & X_{22} & \dots\dots\dots & X_{k2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{0N} & X_{1N} & X_{2N} & & X_{kN} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

La matriz X es llamada matriz de variables independientes

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N \end{pmatrix} \quad (6.46)$$

La matriz Y es llamado vector de observación. También podemos introducir un coeficiente matriz de la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

La transpuesta de la matriz X es X*

$$X^* = \begin{pmatrix} X_{01} & X_{02} & \dots\dots\dots & X_{0N} \\ X_{11} & X_{12} & \dots\dots\dots & X_{1N} \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ X_{k1} & X_{k2} & \dots\dots\dots & X_{kN} \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Un grupo para estimar b_0, b_1, \dots, b_k tiene la forma

$$\begin{aligned} b_0 \sum X_{0i}^2 + b_1 \sum X_{0i} X_{1i} + \dots + b_k \sum X_{0i} X_{ki} &= \sum X_{0i} Y_i \\ b_0 \sum X_{1i} X_{0i} + b_1 \sum X_{1i}^2 + \dots + b_k \sum X_{1i} X_{ki} &= \sum X_{1i} Y_i \\ b_0 \sum X_{2i} X_{0i} + b_1 \sum X_{2i} X_{1i} + \dots + b_k \sum X_{2i} X_{ki} &= \sum X_{2i} Y_i \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ b_0 \sum X_{ki} X_{0i} + b_1 \sum X_{ki} X_{1i} + \dots + b_k \sum X_{ki}^2 &= \sum X_{ki} Y_i \end{aligned} \quad (6.49)$$

En forma de matriz esta se reduce a:

$$X^* X B = X^* Y \quad (6.50)$$

Multiplicando la matriz X^* por la matriz X da:

$$X^* X = \begin{pmatrix} \sum X_{0i}^2 & \sum X_{0i} X_{1i} & \dots\dots\dots & \sum X_{0i} X_{ki} \\ \sum X_{1i} X_{0i} & \sum X_{1i}^2 & \dots\dots\dots & \sum X_{1i} X_{ki} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum X_{ki} X_{0i} & \sum X_{ki} X_{1i} & \dots\dots\dots & \sum X_{ki}^2 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

Los elementos de la matriz inversa son definidos por la relación

$$C_{jk} = \frac{\left(\sum_{i=1}^N X_{ki} X_{ji} \right)}{\Delta} \quad (6.56)$$

Donde Δ es la determinante de matriz X^*X , $\left(\sum X_{ki} X_{ji} \right)'$ es el cofactor del elemento $\left(\sum X_{ki} X_{ji} \right)$ en la matriz X^*X

La matriz $(X^*X)^{-1}$ es llamada matriz error o matriz correlación. Desde que la matriz correlación es non-diagonal, como una consecuencia todos los coeficientes de regresión son interrelacionados, cada coeficiente puede ser probado por un grado de significancia separadamente.

Por lo tanto la relación
$$t_j = \frac{|b_j|}{s_y \sqrt{C_{jj}}} \quad (6.57)$$

puede solamente ser considerado como un promedio para un rango de factores.

6.4, OPTIMIZACIÓN POR LA MAXIMA PENDIENTE ASCENDENTE SOBRE UNA SUPERFICIE RESPUESTA.

El objetivo de la optimización es determinar las coordenadas de un punto $x_1^{opt}, x_2^{opt}, \dots, x_k^{opt}$ sobre la superficie respuesta

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_k) \quad (6.58)$$

La gradiente de la función será definida como:

$$\text{grad } f = \frac{\delta f}{\delta x} \vec{i} + \frac{\delta f}{\delta x_2} \vec{j} + \dots + \frac{\delta f}{\delta x_k} \vec{k} \quad (6.59)$$

Donde i, j, \dots, k son los vectores unidad en la dirección de los

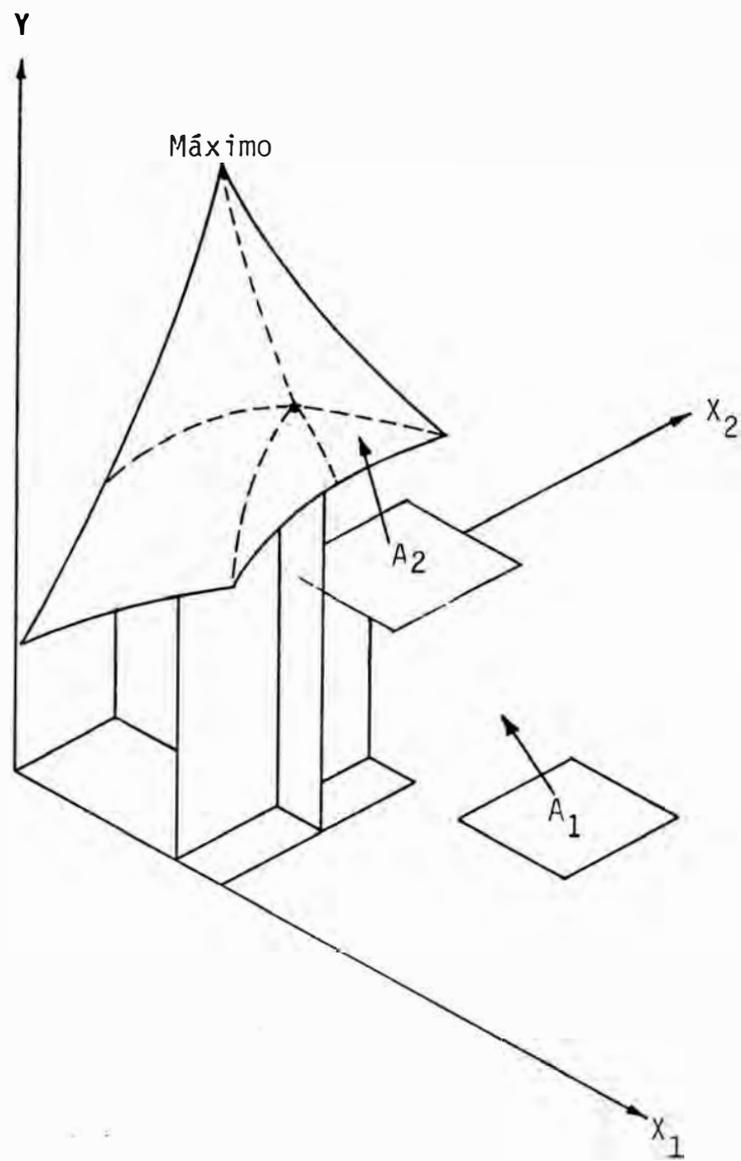


Fig. 6.1. Visualización del método de la pendiente ascendente.

ejes de coordenadas.

Box y Wilson han propuesto un procedimiento "Step by Step" para avanzar sobre la superficie respuesta. El experimentador empieza seleccionando una región a un punto conocido de observaciones previas y describe la respuesta superficie por una ecuación de regresión lineal estimada de la forma

$$\hat{Y} = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 \dots\dots\dots + b_kX_k \quad (6.60)$$

Luego se calcula los componentes de la gradiente de Y

$$\frac{\delta \hat{y}}{\delta x_1} = b_1 \quad , \quad \frac{\delta \hat{y}}{\delta x_2} = b_2 \quad , \quad \dots \quad \frac{\delta \hat{y}}{\delta x_k} = b_k \quad (6.61)$$

y se mueve sobre la superficie respuesta en la dirección de la gradiente.

El tamaño del paso o del incremento debería ser proporcional al producto de los coeficientes b_j por el incremento del tamaño Δz_j ó $b_j \Delta z_j$. Si una aproximación lineal es insuficiente, el experimentador selecciona una nueva región para experimentar alrededor del punto donde Y es máximo y averigua la dirección de la máxima pendiente otra vez.

Este procedimiento "step by step" es realizado hasta que el experimentador se encuentra en las cercanías del extremo o cerca a la región estacionaria.

Una aplicación práctica de esto se muestra en las tablas 5.7 y 5.8 y en el apéndice (A.3.2).

En la figura 6.1 mostramos una visualización del método.

6.5. ANALISIS CANONICO DE MODELOS DE SEGUNDO ORDEN.

En la mayoría de los casos es suficiente ajustar modelos de segundo orden en la región experimental que encierra el óptimo y por simple inspección de los coeficientes de estos modelos, usualmente no podemos percibir el tipo de superficie respuesta que representan. Esta es la razón del empleo del análisis canónico, que consiste esencialmente en tomar la información contenida en los coeficientes de la ecuación original y darle una forma más manejable y entendible.

Estudiaremos el análisis canónico de los casos en que disponemos de dos o tres variables independientes. En forma general cuando se optimiza un sistema multivariable, casi siempre es posible reducir el número de factores a dos o tres más importantes, lo cual facilita enormemente el control de las condiciones óptimas y la predicción del comportamiento del sistema.

En el análisis de un modelo de dos variables el modelo de segundo orden es:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_{11} X_1^2 + B_{22} X_2^2 + B_{12} X_1 X_2 + \epsilon \quad (6.62)$$

Al reducir la ecuación anterior a un nuevo sistema de coordenadas queda:

$$Y - Y_s = \beta_{11} Z_1^2 + \beta_{22} Z_2^2 \quad (6.63)$$

DONDE Y_s = respuesta en s coordenadas X_{15} y X_{25}

$$Z_1 = F(X_1)$$

$$Z_2 = F(X_2)$$

S corresponde al máximo o al mínimo de la ecuación (6.4) para obtener la respuesta en S es necesario derivar la ecuación anterior respecto de cada variable independiente y hace las derivadas igual a cero. Posteriormente se resuelve al sistema formado y se determinan las coordenadas X_{1S} y X_{2S} que son reemplazadas en (6.62) y dan Y_S .

6.5.1. ANALISIS DE LOS COEFICIENTES.

- 1) Si β_{11} y β_{22} tienen el mismo signo, se tiene una superficie respuesta de contornos elípticos como la figura (6a). En esta figura β_{11} y β_{22} son negativos y el centro del sistema es un máximo. Si β_{11} y β_{22} son positivos, se tiene un mínimo.
- 2) Si β_{11} y β_{22} son de signos opuestos, tenemos una superficie respuesta de contornos semejantes a la figura (6b). En tres dimensiones sería una figura parecida a una silla de montar.
- 3) Si uno de los coeficientes es pequeño comparado con el otro, la superficie es atenuado a lo largo del eje correspondiente. En la figura (6a), β_{22} es menor que β_{11} .
- 4) Si β_{22} fuera cero, tendríamos una superficie cuyos contornos los muestra la figura (6c), que puede considerarse semejante a la figura (6b), pero infinitamente atenuada a lo largo del eje Z_2 . No existe un centro único, puntual, sino una línea de centros a lo largo de Z_2 . La ecuación canónica es de la forma

$$Y - Y_S = \beta_{11} Z_1^2 \quad (6.63)$$

Donde Y_S es la respuesta en cualquier punto del eje Z_2

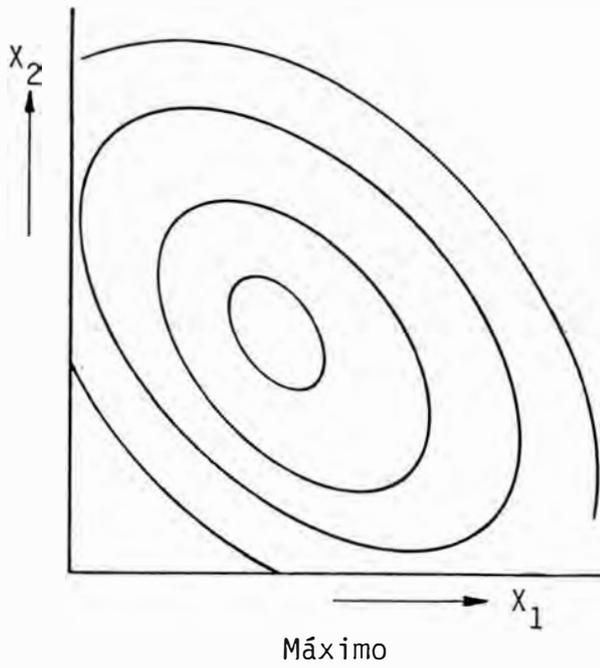


Fig. 6,2 (a)

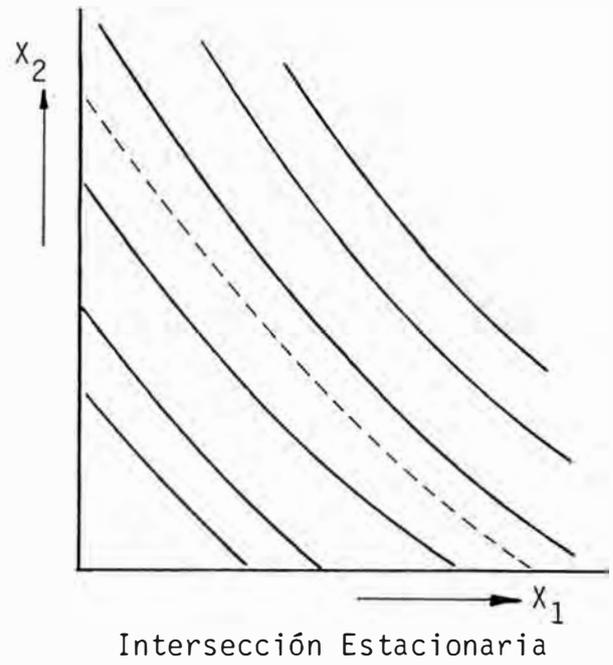


Fig. 6.2 (c)

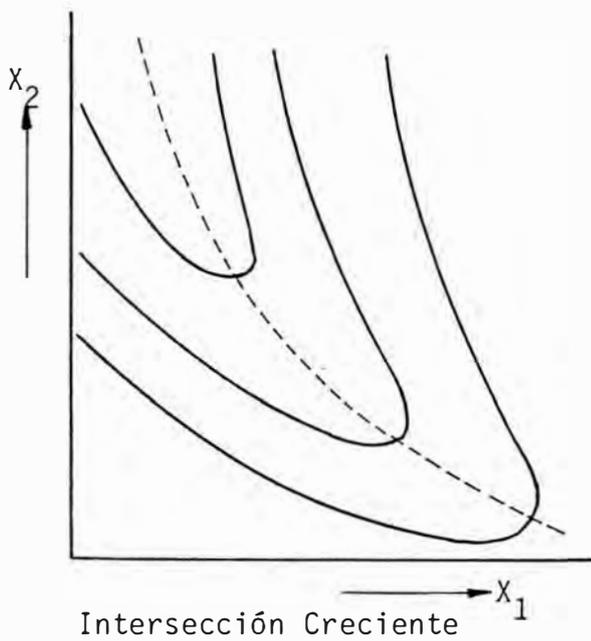


Fig. 6.2 (d)

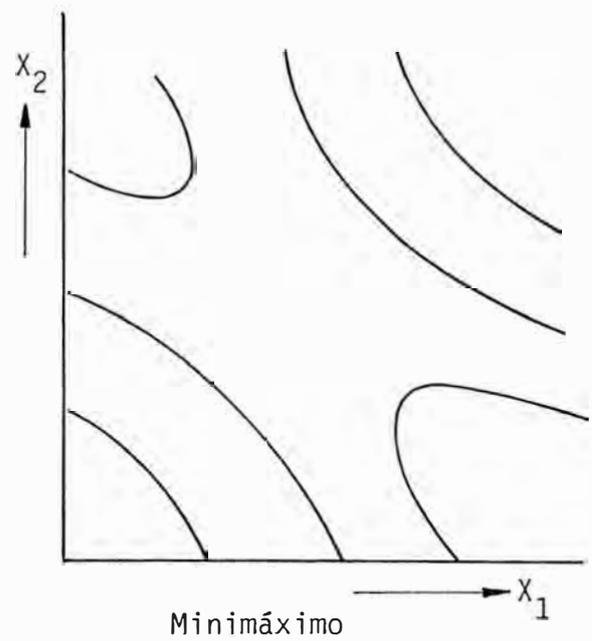


Fig. 6.2 (b)

Fig. 6.2.- Superficies óptimas típicas.

5) Si β_{22} fuera cero y el centro del sistema estuviese en el infinito, se tendría una superficie respuesta de contornos parabólicos, según se muestra en la figura (6d).

Generalizando podemos decir que si uno de los coeficientes es pequeño comparado con el otro, y el centro está muy lejos del centro del diseño, no podemos sacar conclusiones acerca de la naturaleza de la superficie respuesta.

Podemos usar sin embargo el centro calculado, el cual solo con la información relativa a la dirección de los ejes, nos permita determinar aproximadamente la naturaleza de la superficie local tomando como origen cualquier punto conveniente del eje Z_2 , la ecuación canónica queda:

$$Y = Y_s = \beta_{11} Z_1^2 + \beta_{22} Z_2^2 \quad (6.64)$$

El coeficiente β_{22} mide el incremento de la respuesta a lo largo de Z_2 .

En el trabajo experimental es poco probable que la ecuación ajustada represente superficies del tipo (c) con valores de B iguales a cero y por el contrario tenga valores positivos o negativos pequeños. Sin embargo, haciendo las consideraciones correspondientes podemos analizar los casos particulares comparándolos con las superficies tipos presentadas.

El análisis de un modelo de tres variables partiendo de un modelo que involucra X_1 , X_2 , y X_3 es:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_{11} X_1^2 + B_{21} X_2^2 + B_{31} X_3^2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{13} X_1 X_3 + B_{23} X_2 X_3 + B_{123} X_1 X_2 X_3 + \epsilon \quad (6.65)$$

La ecuación canónica será de la forma:

$$Y - Y_s = \beta_{11}Z_1^2 + \beta_{22}Z_2^2 + \beta_{33}Z_3^2 \quad (6.66)$$

En la fig. mostramos algunas de las superficies tipos para las ecuaciones de segundo orden en tres dimensiones.

Generalizando para k variables, tendremos las n coordenadas del nuevo centro del sistema $X_{1S}, X_{2S}, \dots, X_{kS}$, y el valor de Y_s de la respuesta en ese punto.

La forma canónica de la ecuación será:

$$Y - Y_s = \beta_{11}Z_1^2 + \beta_{22}Z_2^2 + \beta_{33}Z_3^2 + \dots + \beta_{kk}Z_k^2 \quad (6.67)$$

Para explicar la secuencia de cálculos necesarios en el procedimiento descrito anteriormente, tomaremos un sistema de tres variables ecuación (6.65).

Posición de S, el centro del diseño. Una vez obtenida la ecuación ajustada, la derivamos parcialmente respecto cada variable dependiente según

$$\left(\frac{\delta y}{\delta x_i} \right) = 0 \quad (6.68)$$

Con lo cual se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2\beta_{11}X_1 + \beta_{12}X_2 + \beta_{13}X_3 &= -B_1 \\ \beta_{12}X_1 + 2\beta_{22}X_2 + \beta_{23}X_3 &= -B_2 \\ \beta_{13}X_1 + \beta_{23}X_2 + 2\beta_{33}X_3 &= -B_3 \end{aligned} \quad (6.69)$$

Al resolver el sistema anterior, se obtiene las coordenadas del centro del diseño X_{1s} , X_{2s} , X_{3s} . Reemplazando estos valores en la ecuación (6.8) se obtiene el valor Y_s .

La determinación de la forma canónica. Utilizamos los coeficientes del sistema anterior para construir la siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} B_{11} - \beta & \frac{1}{2} B_{12} & \frac{1}{2} B_{13} \\ \frac{1}{2} B_{12} & B_{22} - \beta & \frac{1}{2} B_{23} \\ \frac{1}{2} B_{13} & \frac{1}{2} B_{23} & B_{33} - \beta \end{vmatrix} = 0 \quad (6.70)$$

Resolviendo el determinante anterior, se obtiene una ecuación de tercer grado, cuyas raíces son los coeficientes de la ecuación canónica.

$$a\beta^3 + b\beta^2 + c\beta + d = 0 \quad (6.71)$$

Las raíces asociadas a los coeficientes deben ser tales que:

$$\beta_{11} < \beta_{22} < \beta_{33}$$

Aplicando los métodos de determinación de la ecuación canónica tendremos,

Para Y_1 se obtiene;

La ecuación cuadrática ajustada.

$$Y_1 = 94,075 + 0.607X_1 + 0.553X_2 - 4688X_1^2 - 16.088X_2^2 + 3.551X_1X_2$$

Encontramos que las coordenadas del nuevo centro S del sistema y la respuesta Y_s predicha en dicho punto.

$$X_{1s} = 0.1025 \quad X_{2s} = 0.5962$$

De donde $Y_s = 94.27$

Entonces la ecuación canónica será

$$Y_1 - 94.27 = - 2.07 Z_1^2 - 0.45 Z_2^2$$

Para Y_2 se obtuvo;

La ecuación cuadrática ajustada

$$Y_2 = 68.275 - 2.997 X_1 + 3.785 X_2 - 4.688 X_1^2 + 16.088 X_2^2 + 3.551 X_1 X_2$$

Encontramos que las coordenadas del nuevo centro S del sistema y la respuesta Y_s predicha en dicho punto

$$X_{1s} = - 0.2871 \quad X_{2s} = 0.08595$$

De donde $Y_s = 69.34$

Entonces la ecuación canónica será

$$Y_2 - 69.34 = - 4.97 Z_1^2 - 15.80 Z_2^2$$

Una vez que hemos determinado la región experimental óptima y la superficie respuesta a escala de laboratorio, debemos de continuar la investigación a escala de planta piloto utilizamos las condiciones óptimas en laboratorio, como punto de partida de la experimentación a escala de planta piloto. -

Luego debería continuarse la investigación a planta industrial, usando las condiciones óptimas determinadas en - planta piloto, lo cual conducirá finalmente a determinar la superficie respuesta real y las condiciones óptimas correctas

Esto como consecuencia de las condiciones óptimas de experimentación a escala de operación.

Otra alternativa es experimentar directamente en la planta, partiendo de las condiciones óptimas de laboratorio, sin determinar previamente la naturaleza de la superficie respuesta.

Sin embargo, siempre es conveniente determinar la superficie respuesta en el laboratorio, información que nos ayudará en la determinación de las condiciones óptimas en la planta, pues la superficie respuesta se desplazará o si distorsionará; pero no cambiarán sus características fundamentales.

Para la optimización de un proceso industrial este pasa por muchos estados de desarrollo.

Así en la evolución de un proceso metalúrgico empieza por un trabajo en laboratorio para explorar sus posibilidades. El resultado del trabajo de laboratorio nos da una estimación preliminar de factibilidad, nos permite encuadrarnos dentro de los objetivos o ser obtenidos y nos orienta a una tentativa en un proceso industrial.

Box y Wilson describieron una simple pero poderosa técnica la cual nos permite optimizar un proceso a nivel industrial, Esta técnica es llamada "Evolutionary Operation" o simplemente EVOP. Esta técnica ha sido mas amplia y exitosamente aplicado en la industria metalúrgica.

EVOP es una importante herramienta en el cual una rutina de investigación continua es el modo de operación de una planta industrial.

Las variables C E y F son ficticias y sus efectos se calculan de la misma forma que las variables reales.

La fila N se completa con signos (-)

La primera fila de signos (niveles) para otros diseños.

N = 12	+	+	-	+	+	+	-	-	-	+	-																			
N = 16	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	-	-	-															
N = 20	+	+	-	-	+	+	+	+	-	+	-	+	-	-	-	-														
	+	+	-																											
N = 24	+	+	+	+	+	-	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-	+	-	-	-	-									
N = 32	-	-	-	-	+	-	+	-	+	+	+	-	+	+	-	-	-	+	+	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	+

El efecto de un factor o variable se determina como la diferencia entre el promedio de respuestas en el nivel superior y el promedio de respuestas en el nivel inferior o sea:

$$E_A = \frac{\sum_{i=1}^r R_i(+)}{r} - \frac{\sum_{i=1}^r R_i(-)}{r} \tag{A.1.1}$$

Siendo:

- r = N/2
- E_A = efecto de un factor A cualquiera
- R = respuesta o resultado

Bajo el supuesto de que no hay interacciones y no existe error experimental, el efecto de una variable ficticia debe de ser ce ro, de lo contrario indicará presencia de interacciones o error experimental. El efecto de una variable ficticia se determina de la misma forma que (A.1.1).

La varianza de un efecto (Vef) se determina a través de los efectos de las variables ficticias tal como:

$$V_{ef} = \frac{\sum_{i=1}^n (E_f)^2}{n} \quad (A.1.2)$$

Donde:

E_f = efecto mostrado por una variable ficticia

n = número de variables ficticias

El grado de significancia de cada efecto puede ser determinado mediante el uso del test - t de student de la siguiente manera.

$$t_c = \frac{\text{Efecto del factor}}{\text{Desviación standar del efecto}} = \frac{E_i}{\sqrt{V_{ef}}} \quad (A.1.3)$$

Asociados a n grados de libertad (igual al número de variables ficticias).

Entonces el efecto E_i es significativo para α dado y ϕ grados de libertad si solo si.

$$t_c > t_{1 - \alpha/2, \phi} \quad (A.1.4)$$

A.2. ESTUDIO PIROMETALURGICO USANDO LOS DISEÑOS DE PLACKETT - BURMAN.

La recuperación de cobre a partir de un material que contiene cobre y otras impurezas tales como arsénico va a ser optimizada por el tratamiento con cal recuperando el cobre y tratando de que permanezca la mayor cantidad de impurezas en el residuo.

Las variables seleccionadas para el estudio en las pruebas de segregación con cal y sus niveles a ser estudiados fueron escogidos de pruebas o de investigación previa.

VARIABLE X_i	VALORES DE LAS VARIABLES	
	NIVEL SUPERIOR (+)	NIVEL INFERIOR (-)
1. Adición cal, % Peso estequiom*	90	25
2. Tiempo tostado, minutos	90	30
3. Temperatura tostado, °C	800	400
4. Adición sal, % Peso	0.75	0.25
5. Cantidad coque % Peso	15	5
6. Tamaño coque, malla	-20 +28	-35 +48
7. Tiempo segregación, minuto	90	30
8. Temperatura segregación, °C	850	650

El modelo de primer orden de Plackett - Burman para m variables pueden ser representados por la siguiente ecuación:

$$\hat{Y} = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + \dots + B_m X_m \quad (A.2.1)$$

donde:

- \hat{Y} = respuesta esperada
- B_0 = Promedio de respuestas experimentales
- B_i = parámetros del modelo
- X_i = Valor codificado de la variable i

* Cantidad estequiométrica de CaO necesaria para ligar al arsénico y azufre presente en el material como $Ca_3 (AsO_4)_2$ y $Ca SO_4$.

La matriz del diseño experimental.

En este caso la matriz experimental viene a ser:

$$(N)(N- 1)$$

Para este caso particular, las ocho variables reales tienen que ser incluidas en nuestra matriz del diseño y además se incluirá 3 variables ficticias que sirven para calcular la significancia de los efectos de las variables reales es muy conveniente usar al menos 3 variables ficticias de otra manera el cálculo de las significancias es no confiable.

En la tabla (A.2.1) se presenta la matriz del diseño para las 12 pruebas en este caso. Las respuestas medidas fueron recuperación de cobre por segregación retención de arsénico durante el tostado y retención de arsénico durante la segregación. Sin embargo solamente la recuperación del cobre se reporta en la tabla (A.2.1).

Para calcular los parámetros del modelo (efectos principales) de esas variables, es necesario un programa de regresión lineal múltiple (MLR) para pruebas no replicadas,

Usando un programa de regresión lineal múltiple se calculan los efectos y sus significancias relativas para cada una de las variables estudiadas.

En la tabla (A.2.2) se presentan los resultados y se evaluarán con una significancia mayor que el 80%

TABLA (A.2.1) MATRIZ DEL DISEÑO DE PLACKETT - BURMAN PARA UN PROCESO DE SEGREGACION;

VARIABLES ESTUDIADAS	NIVELES		NUMERO DE PRUEBAS											
	INFERIOR (-1)	SUPERIOR (+1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
X ₁ Adicional % Peso esteq.	23,9	85.9	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1
X ₂ Tiempo tost min	30	90	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
X ₃ Temp. Tost °C	400	800	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
X ₄ Variable ficticia			1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
X ₅ Adición sal % Peso	0,25	0,75	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
X ₆ Cantidad coque %Peso	5	15	1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
X ₇ Tamaño coque malla	-35 +48	-20 +28	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1
X ₈ Variable ficticia			-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
X ₉ Tiempo segrg. min	30	90	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
X ₁₀ Temp segreg.	650	850	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
X ₁₁ Variable ficticia			-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
Recup cobre (resultados)			29.9	10.3	29.9	7.8	0.0	10.8	59.7	67.0	15.0	0.0	3.5	4.5

TABLA (A.2.2). EFECTOS DE LA RECUPERACIÓN DE COBRE.

VARIABLES ESTUDIADAS	NIVELES		EFECTO % Cu	SIGNIFICANCIA RELATIVA
	BAJO	ALTO		
1. Adición cal % Peso esteq.	23.9	85.9	-20.13	> 95 %
2. Tiempo tost min	30	90.0	-11.03	> 80%
3. Temp. tost °C	400	800	- 0.23	--
4. Variable ficticia			8.53	--
5. Adición sal % Peso	0.25	0.75	5.77	--
6. Cantidad coque % Peso	5	15	13.63	> 90 %
7. Tamaño coque malla	-35+48	-20+28	- 7.47	--
8. Variable ficticia			7.00	--
9. Tiempo segreg. min	30	90	13.53	> 90%
10. Temp.segreg. °C	650	850	28.63	> 95%
11. Variable ficticia			1.67	--

El modelo planteado en este caso para la recuperación de co
bre será:

$$\hat{Y} = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_3X_3 + B_4X_4 + B_5X_5 + B_6X_6 + B_7X_7 + B_8X_8 + \epsilon$$

Los parámetros B_1, B_2, \dots, B_8 se calculan dividiendo los e
fectos de las variables principales y B_0 es el promedio de las respuestas
experimentales.

$$B_0 = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i}{n}$$

En este caso $B_0 = 19.87$

El modelo quedará de la siguiente manera:

$$\hat{Y} = 19.87 - 10.065 X_1 - 5.513 X_2 - 0.115 X_3 + 5.770 X_4 + 6.815 X_5 - 7.470 X_6 + 6.765 X_7 + 14.315 X_8 + \varepsilon$$

\hat{Y} = respuesta esperada o calculada.

para encontrar el grado de significancia en este caso > 80% buscamos en la tabla de t-student al 80% y 3 grados de libertad que coincide con el número de variables ficticias encontrando que :

$$t_t = 1.638$$

Ahora para ver el grado de significancia debemos comparar: si $t_c > t_t$

la variables es significativa $t_c = \frac{t_i}{\sqrt{Vef}}$

$$Vef = \frac{\sum_{i=1}^n (Ef)^2}{n} = \frac{(8.53)^2 + (7.0)^2 + (-1.67)^2}{3}$$

$$Vef = 41.51$$

$$\sqrt{Vef} = 6.44$$

Si conocemos E_i , \sqrt{Vef} podemos conocer t_c para cada efecto principal.

por ejemplo para el primer factor (tomando valor absoluto)

$$t_c = \frac{20.13}{6.44} = 3.126$$

$3.126 > 1.638$ ∴ el factor es significativo y si comparamos 3.126 en la tabla t student podemos ver su grado de significancia en este caso 95%.

La recuperación máxima de cobre obtenida en las pruebas realizadas fué de 67%, indicando que nosotros estamos muy lejos de la región óptima que es nuestro objetivo entonces necesitaremos mas experimentación

La tabla N° (A.2.2) nos muestra que 5 variables pasan la primera evaluación, para los próximos experimentos mantendremos constante el tiempo de tostado porque tiene el efecto más pequeño, la reformulación del problema incluye revisiones teóricas y prácticas del proceso a optimizar. Por supuesto la comprensión de estas consideraciones no estan al alcance de este trabajo.

Los diseños de Plackett y Burman miden solamente el efecto lineal sin considerar los efectos de curvatura. Estos efectos si pueden ser notados cuando la superficie respuesta es no-lineal, para que pueda ser notado por la variación de una variable dada se trabaja su nivel central hasta su más alto nivel (+ 1) y de esta manera se obtendrá una mejor determinación de los efectos porque los efectos cuadráticos no pueden ser calculados usando los diseños de Plackett y Burman en este caso los métodos de la pendiente ascendente y descendente nos permite detectar la presencia de la curvatura o ver si no existe efectos de curvatura,

A.3. METODO DE LA PENDIENTE ASCENDENTE.

Para el presente estudio, las variables solamente muestran un efecto de la recuperación del cobre con un nivel de significancia mayor del 80%, las variables seleccionadas a optimizar la recuperación de cobre como función de esas variables.

Esto será hecho siguiendo la dirección del cambio indicados por los efectos principales de los diseños de Plackett y

Burman, El tamaño de la pendiente para cada variable fue calculado en forma relativa a una de ellas, un tamaño seleccionado de 50 °C - para la variable con el efecto mas grande que en nuestro caso es la temperatura de segregación, Los tamaños de las pendientes unitarias se calculó usando la siguiente expresión:

$$\text{Variación de pendiente unitaria} = \frac{50^{\circ}\text{C}}{100} \times \frac{\text{Efecto Principal}}{14.32} \times U_i$$

U_i = Unidad de cambio

Los resultados de las variaciones de pendiente unitario para cada variable fueron estimados como sigue:

TABLA (A.3.1)

VARIABLES	UNIDADES DE CAMBIO DE P & B	EFFECTO PRINCIPAL	VARIACION DE PENDIENTE UNITARIA
1. Temp Segreg	100°C	+ 14.32	50°C *
2. Adición cal	32.5%	- 10.07	-11.0%
3. Cantidad coke	5.0%	+ 6.82	1.2%
4. Tiempo Segreg.	30 min	+ 6.77	7.5 min

La temperatura de 50°C fué escogida como base de acuerdo a las experiencias anteriores.

Basado en los parámetros anteriores se programarán 5 pruebas usando la técnica de optimización de la pendiente ascendente y las pruebas programadas se presentan en la tabla (A.3.2).

Se empezó a investigar en el nivel central de los diseños de Plackett y Burman para determinar la presencia de la curvatura (máxima o mínima) en este región. Sin embargo solamente se corrieron las pruebas 1,3,5. La razón para esto fue alejarse lo más rá-

pido posible de la región experimental de los diseños de Plackett y Burman en la dirección indicada, por los efectos y así determinar más rápido una región cercana al óptimo.

Se hicieron solamente 3 pruebas de las programadas por cuestiones de tiempo y material.

TABLA (A.3.2) PRUEBAS DE OPTIMIZACION POR LA MAXIMA PENDIENTE ASCENDENTE.

PRUEBA N°	ADICION CAL % STEQ.	CANTIDAD COQUE %	TIEMPO SEGREG min	TEMP SEGREG °C	% Cu RECUP
1	54.9	10.0	60	750	87.6
2	43.9	11.2	67.5	800	--
3	32.9	12.4	75.0	850	67.0
4	21.9	13.6	82.5	900	---
5	11.5	14.8	90.0	950	40.6

Los otros parámetros experimentales fueron:

- Temp. Tostado 400°C
- Tiempo tostado 30 min
- Adición N.e1 0.75 wt
- Adición Coque - 35 + 48 malla

En este caso evaluamos solamente la recuperación de Cu que se reporta en la tabla (A.3.2).

Como se observa en la tabla (A.3.2) la máxima cantidad de cobre recuperado es de 87.6 que se obtiene en la región central de los diseños de Plackett y Burman lo cual nos explica porque el cobre se recupera menos cuando se investiga a lo largo de la pendiente en lugar de incrementar como lo predice el efecto de la variable.

En este sentido la figura (A.3.1) nos ayuda a entender

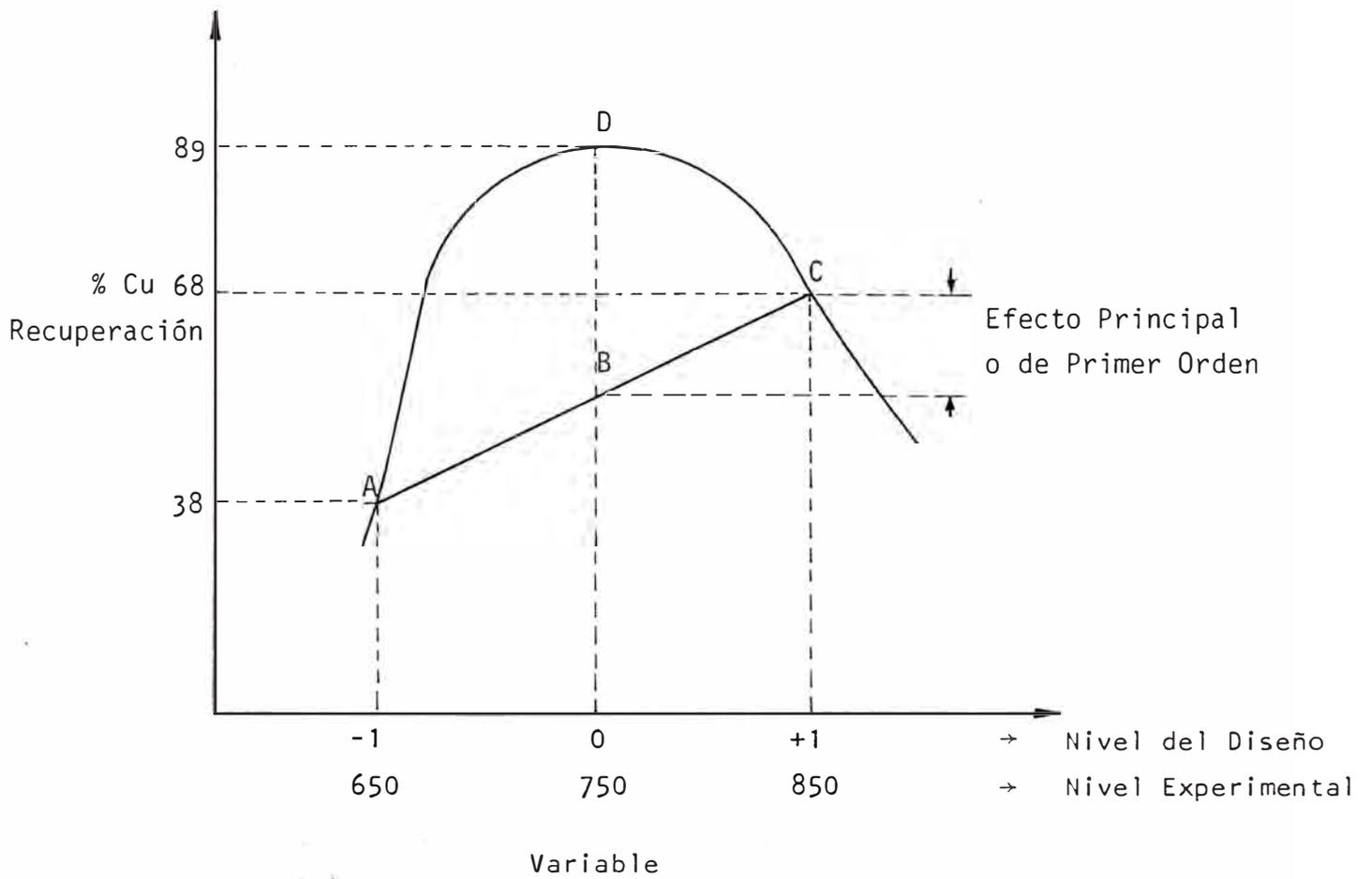


Fig. (A.3.1).- Comparación del efecto lineal y el efecto de Curvatura.

el efecto de curvatura en el nivel central de los diseños de P & B y cuya presencia no puede ser notada por estos diseños.

Una vez que se detecta un punto cercano al óptimo se utilizará un diseño experimental de segundo orden el cual se planificará para un posterior estado de optimización.

A.4. DISEÑO HEXAGONAL.

El diseño hexagonal es un diseño rotatable compuesto de segundo orden que usa 6 niveles distintos lo cual nos permite ver los efectos de curvatura de las dos variables estudiadas.

$$\text{modelo } Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{12}X_1X_2$$

donde

Y = Respuesta predicha o calculada

B_0 = promedio de las respuestas observadas

B_1, B_2 = Efectos de primer orden o efectos principales

B_{11}, B_{22} = Efectos de segundo orden

B_{12} = Efectos de interacción.

X_1, X_2 = Valores de los variables codificados.

El objetivo del estudio en esta etapa, fue de explorar la región experimental en la que se obtiene la más alta recuperación con la realización de las pruebas programadas por el método de la pendiente ascendente. Como podemos ver las variables, adición de cal y la temperatura de segregación fueron las dos variables estudiadas, ellas tienen los más grandes efectos en la recuperación de cobre.

En la tabla (A.4.1) se dan los niveles del diseño y los niveles experimentales de las dos variables del diseño hexagonal.

Las recuperaciones de Cu también se presentan en la tabla (A.4.1).

TABLA (A.4.1) MATRIZ DEL DISEÑO EXPERIMENTAL HEXAGONAL

PRUEBA N°	NIVELES DE LAS VARIABLES DEL DISEÑO		EXPERIMENTALES		RESPUESTAS EXPERIMENTALES
	X ₁ Adición cal	X ₂ Temp Segreg.	X ₁ Adición cal	X ₂ Temp Segreg	% Cu Recuperado
1	1.0	0.	85.9	750	64.1
2	0.5	0.866	70.4	837	61.8
3	-0.5	0.866	39.4	837	65.3
4	-1.0	0.00	23.9	750	77.3
5	-0.5	- 0.866	39.4	663	63.2
6	0.5	- 0.866	70.4	663	69.1
7	0.	0	54.9	750	87.9
8	0	0	54.9	750	89.9
9	0	0	54.9	750	88.3

Los demás parámetros experimentales:

Tostado	Segregación
Temperatura = 400 °C	Adición NaCl = 0.75 % wt
Tiempo = 30 min	Cantidad Coque = 10 % wt
	Tamaño Coque = - 35 + 48 m
	Tiempo reacción = 60 min

Se calculará los parámetros y su significancia y luego se compararán las recuperaciones calculadas y las experimentales con lo cual evaluaremos la bondad de ajuste del modelo de regresión. Esto es medido por la distribución F en el error experimental en la -

TABLA (A.4.2). MODELO MATEMATICO PARA RECUPERACION DE COBRE POR SEGREGACION

Modelo del diseño hexagonal	$Y = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + B_{11}X_1^2 + B_{22}X_2^2 + B_{12}X_1X_2$								
	$X_1 = \text{Adición de cal}$								
Modelo del Diseño	$X_2 = \text{Temp. de Segregación}$	$Y = 88.700 - 7.333 X_1 + 4.273 X_2 - 18.000 X_1^2 - 39.136 X_2^2 + 17.667 X_1X_2$							
	$X_1 = \text{Adición de cal}$								
	% Cantidad esteq.								
Modelo del Experimento.	$X_2 = \text{Temp. segregación } ^\circ\text{C}$	$Y = 1953.558 - 2.454X_1 + 5.600X_2 - 0.01837X_1^2 - 0.003914X_2^2 + 0.0057X_1X_2$							
Datos Experimentales	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Y = \% \text{ Recuperación de cobre}$	64.10	61.80	55.30	77.30	63.20	39.10	87.90	89.90	88.30
Predicciones del modelo									
$Y \text{ estimado} = \% \text{ recup. de cobre}$	63.37	62.53	54.57	78.03	62.47	39.83	88.70	88.70	88.70

Evaluación del	Modelo y	su Ajuste	Fuente	Suma de Cuadrados	Número de grados de Libertad	Promedio de Varianza ó Promedio Cuad. (Ms)	F modelo (1,2)	F Tabla (1,2)95
			total	5.466	3	1.822	$= \frac{Ms(**)}{Ms(*)}$	
			* Error Experim.	2.240	2	1.120 *		
			** Falta de ajuste	3.226	1	3.226 **	$= \frac{3.226}{1.120} = 2.88$	18.5
			Si el F del modelo < F tabla : Modelo Aceptado		SI			
			Si el F del modelo > F tabla : Modelo rechazado					

falta de ajuste de la varianza promedio como lo muestra la tabla (A.4.2)

La comparación del valor F del modelo de recuperación con el valor F de las tablas, para un 95% de significancia nos indica que - la discrepancia observada entre la recuperación predicha y la experimental pueden ser atribuidas al error experimental.

Además el modelo puede considerarse como un buen ajuste - del experimento.

Un racional análisis de la varianza puede ser fácilmente aplicado para el caso de un modelo lineal con una variable independiente como lo muestra la figura (A.4.1) y (A.4.2). Normalmente los diseños de primer orden no incluye replicaciones en su matriz diseño. En este - caso puede conocerse la variación debido a la regresión y la variación acerca de la regresión sin ser capaz de distinguir la variación debido al error experimental y la falta de ajuste del modelo (ver figura (A.4.1). Por otro lado los diseños de segundo orden incluye replicaciones en su matriz del diseño con la finalidad de poder distinguir la variación debido a la falta de ajuste del error experimental (fig. A.4.2). Esto es lo que nos permite realizar el análisis de discriminación del - modelo.

Una confirmación de la significancia del modelo de recuperación de cobre está dada por la magnitud de los efectos de las variables en relación a su intervalo de confianza. Por ejemplo una magnitud más grande en los efectos de segundo orden con respecto a los de primer orden nos indica que una región con curvatura o cerca a una región estacionaria ha sido lograda.

Finalmente aceptar un modelo que pueda predecir una respuesta con suficiente confiabilidad, es decir adecuadamente discriminada está mostrado en la figura (A.4.3).

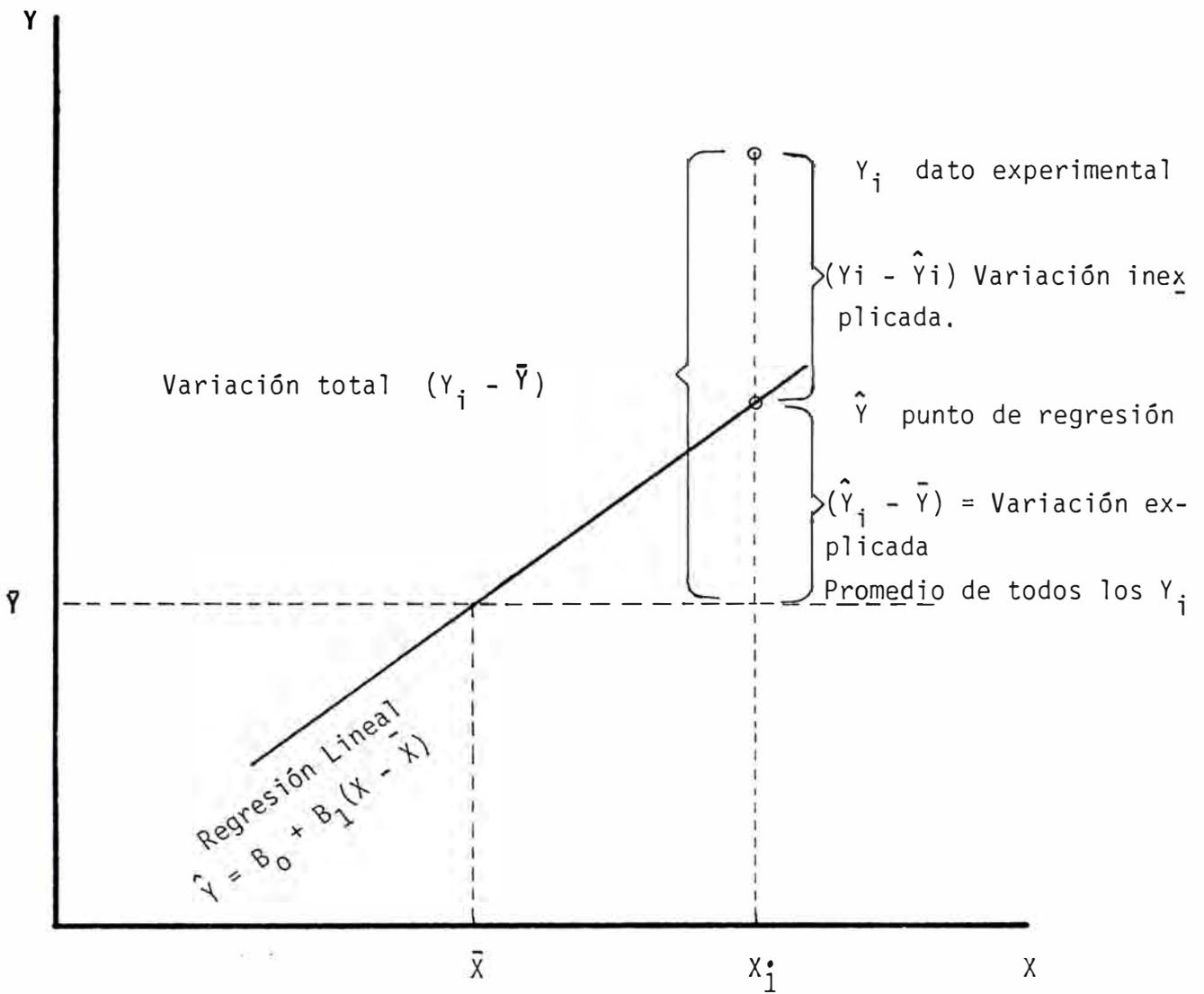


Fig. A. 4.1.- Análisis de varianza sin replicaciones

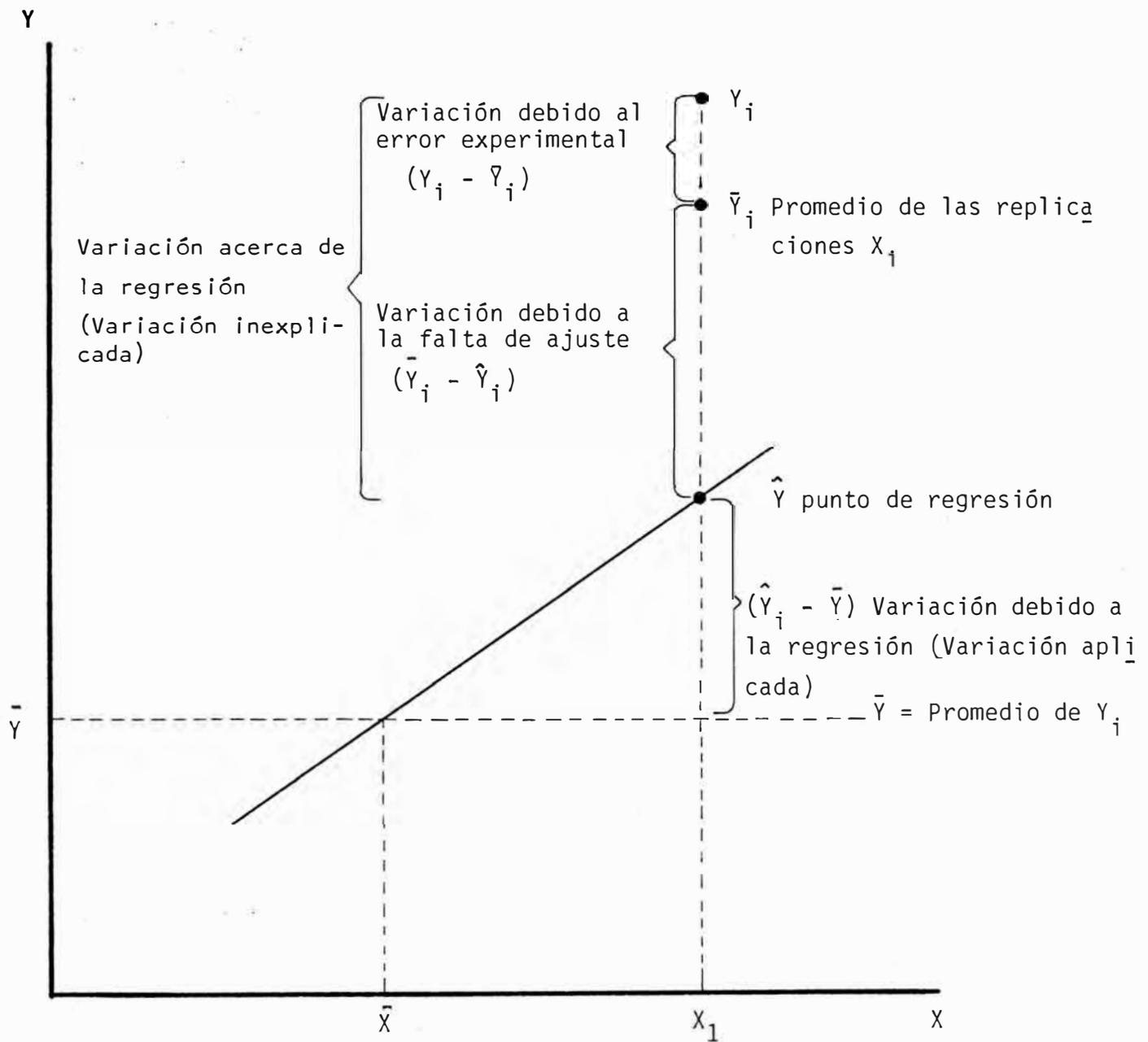


Fig. A.4.2.- Análisis de Varianza con replicaciones.

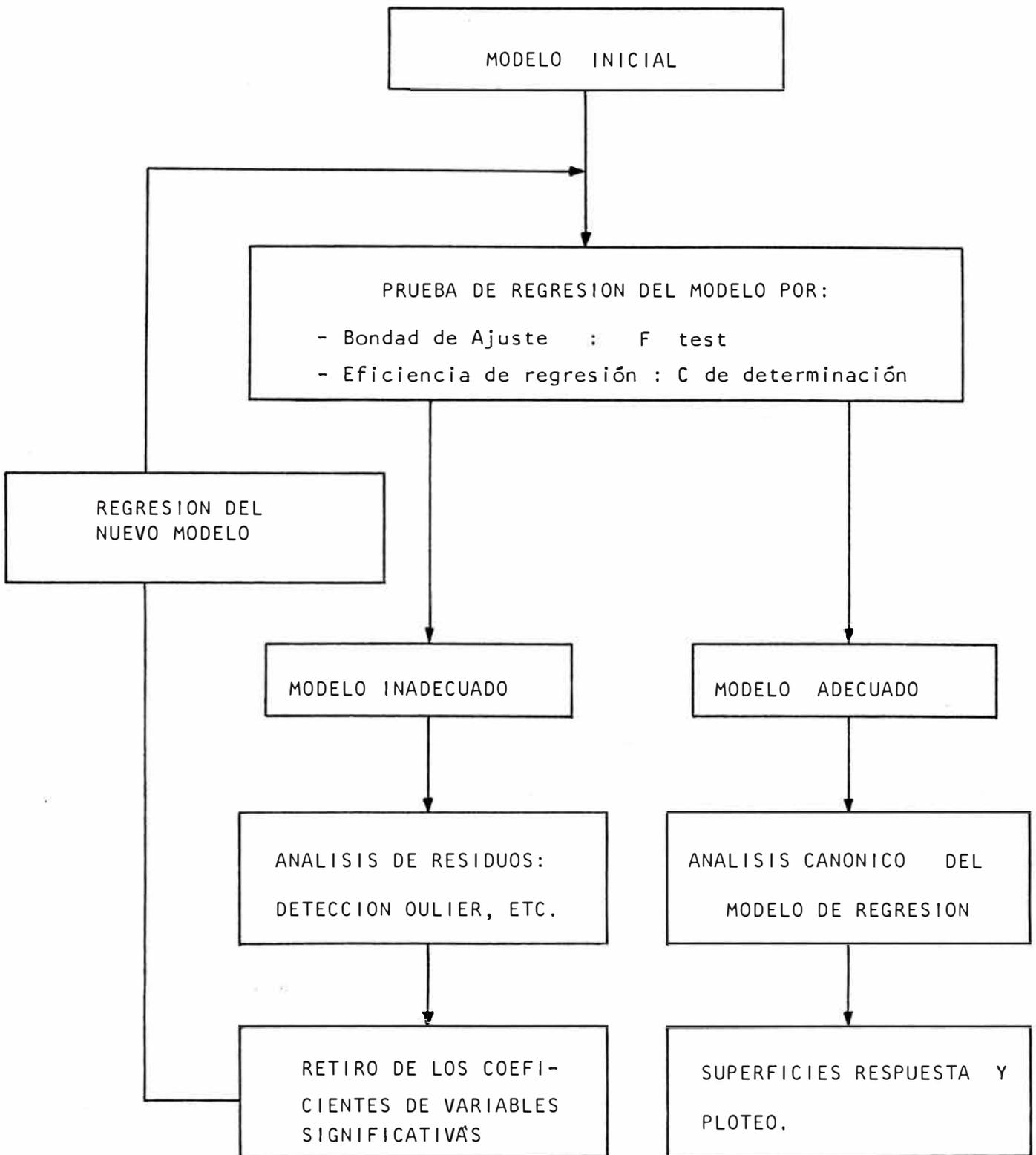


FIG. (A.4.3) . DISCRIMINACION DE MODELOS POR EL ESTADO DE OPTIMIZACION.
(DISEÑOS ROTABLES COMPUESTOS DE SEGUNDO ORDEN)

- ANALISIS CANONICO.

Desde que el modelo matemático he. gonal no nos da información con respecto a la forma geométrica de la superficie de recuperación en una región estacionaria, es necesario dibujar o delinear la superficie respuesta o los contornos, usando la ecuación modelo, para averiguar si el punto estacionario es máximo, un punto superior o un punto en la parte inferior.

Esto puede ser determinado usando el análisis canónico - que transforma la ecuación de regresión estimada en una más simple - que puede ser interpretada en términos de concepto geométrico.

Una vez que la superficie respuesta ploteada se obtiene por el uso del modelo seleccionado se puede visualizar mejor la perspectiva de los efectos y sus interacciones de las interacciones del proceso. Este ploteo hace más fácil predecir el resultado para cualquier cambio en los niveles de la variable, siempre y cuando ellos estén comprendidos en la región experimental.

Para nuestro caso los contornos ploteados para la recuperación de cobre como una función de la temperatura de segregación es presentada en la fig.(A.4.4). Esta superficie respuesta corresponde a una superficie elíptica en forma de cerro en su punto más alto con un óptimo de 89.7 % de recuperación de cobre, predicho por el análisis canónico en las siguientes condiciones:

49% de adición de cal y 751 °C de temperatura de segregación. Este punto máximo se relaciona muy bien con los resultados experimentales en las pruebas 7, 8 y 9 en la tabla (A.4.2). Esto nos muestra que para la región experimental comprendido en el diseño 89.7% de recuperación, es la más alta que puede ser obtenida en el proceso.

Otras recuperaciones pueden ser fácilmente predichas usando las superficies respuestas ploteadas.

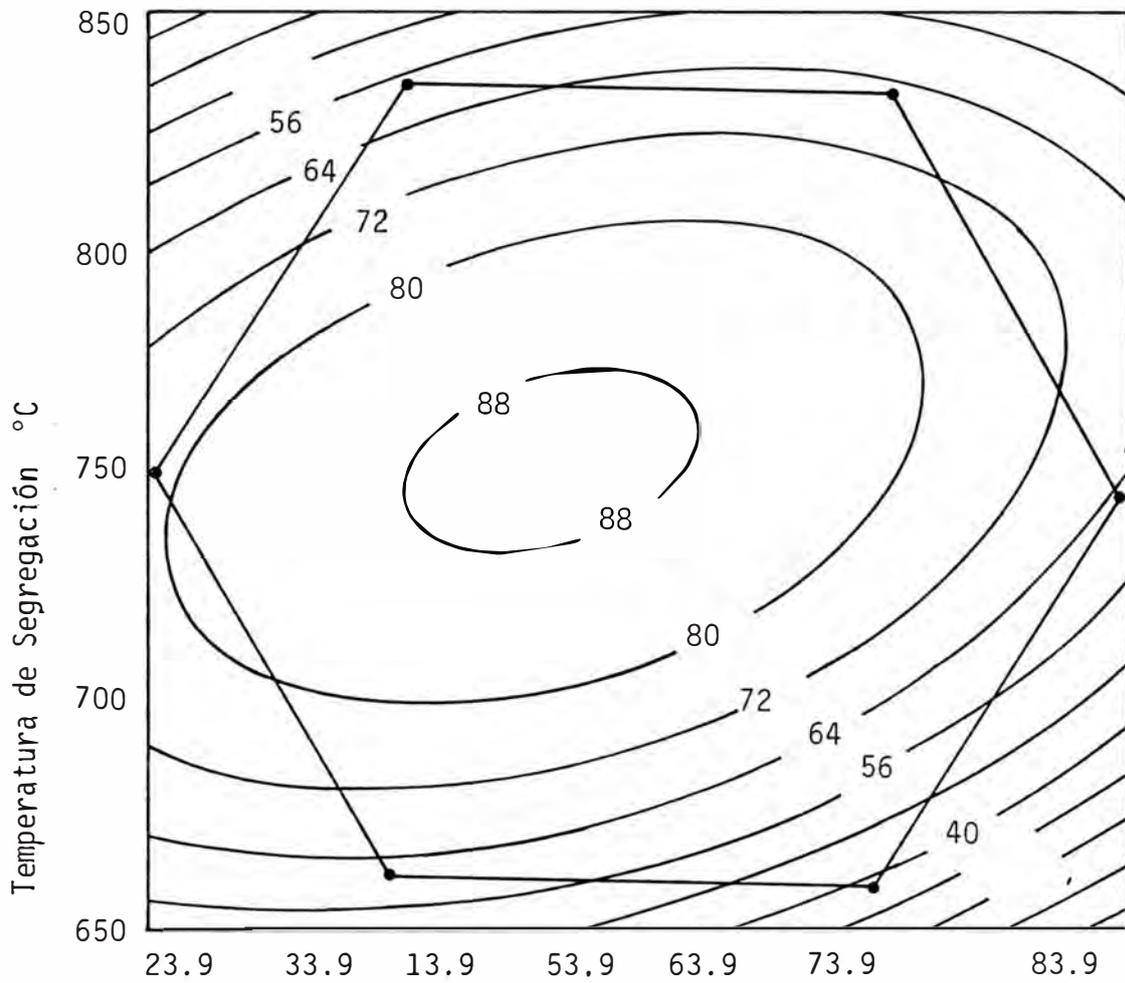


Fig. A 4.4.- Efecto de la adición de cal y temperatura de segregación sobre la recuperación de cobre.

La determinación de la recuperación máxima en forma matemática se realiza derivando en forma parcial respecto a X_1 y X_2 determinando estos valores de X_1 y X_2 por la igualación de estas derivadas a cero, en donde encontraremos un máximo que en este caso es de 89.7 % de recuperación de Cu, los valores X_1 y X_2 serán nuestro nuevo centro de un posterior diseño experimental, hasta la optimización de nuestro proceso por escalamiento.

A P E N D I C E B

ALGORITMO PARA DETERMINAR UN PROGRAMA COMPUTACIONAL DE REGRESION LINEAL MULTIPLE

CASO 1. Regresión lineal múltiple sin repeticiones.

Medir el efecto de diversas variables independientes ($X_1, X_2, X_3, \dots, X_m$) sobre mas respuestas dadas (Y) es una práctica común cuando se usan diseños experimentales.

El modelo usualmente postulado para ajustar los datos experimentales en los modelos lineales (parámetros) en forma general es el siguiente:

$$\hat{Y} = B_0 + B_1 X_1 + \dots + B_{11} X_1^2 + \dots + B_{mm} X_m^2 + B_{12} X_1 X_2 + B_{1m} X_1 X_m + \dots \\ \dots B_{(m-1)m} X_{m-1} X_m$$

Donde:

Y = Respuesta predicha o esperada

B_0 = Promedio de los valores de la respuesta experimental

B_i = Efectos de las variables principales o parámetros de primer orden.

B_{ii} = Efecto de curvatura o parámetros de segundo orden.

B_{ij} = Efectos de interacción de dos variables o parámetros de interacción .

X_i = Valor de la variable codificada i .

El máximo número de variables que pueden ser evaluadas con n pruebas es $(n - 1)$. Solamente efectos principales pueden ser estimadas cuando se usa diseños experimentales de primer orden, ya que sus diseños solamente incluye dos niveles experimentales de estudio para cada variable. Para estimar efectos o interacciones de segundo orden, deben de usarse diseños experimentales con más de dos niveles de estudio para cada variable requerida.

ESTIMACION DE LOS PARAMETROS DEL MODELO.

Los coeficientes o parámetros del modelo postulado son estimados usando la estrategia de los mínimos cuadrados. El objetivo de esta función ϕ es minimizar la suma total de cuadrados de los residuos entre la respuesta experimental y las respuesta estimadas \hat{Y} :

$$\phi = \sum_{i=1}^n R_i^2 = \sum (Y_i - (B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + \dots + B_{mi} X_{mi}))^2$$

En forma de matrices y vectores la función puede ser escrita como:

$$\phi = \begin{matrix} \text{TRANSPUESTA } R^T \\ \left[R_1, R_2, R_3, \dots, R_n \right] \end{matrix} \cdot \begin{matrix} R \\ R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_n \end{matrix} = \text{VALOR ESCALAR} = (R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + \dots + R_n^2)$$

Donde R es definido como sigue:

$$R = \begin{matrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_n \end{matrix} \cdot \begin{matrix} 1 & X_{11} & X_{21} & \dots & X_{m1} \\ 1 & X_{12} & X_{22} & \dots & X_{m2} \\ 1 & X_{13} & X_{23} & \dots & X_{m3} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & X_{1n} & X_{2n} & \dots & X_{mn} \end{matrix} \cdot \begin{matrix} B_0 \\ B_1 \\ B_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ B_m \end{matrix}$$

Y
 X
 B

Consideraremos la notación : Vector = $\underline{\quad}$
 Matriz = $\underline{\underline{\quad}}$

Finalmente, la expresión para el R puede ser escrita en matriz y vector con la notación siguiente:

$$\bar{R} = \bar{Y} - \bar{X} \cdot \bar{B}$$

Los elementos del vector B corresponden a los parámetros del modelo los efectos de las variables y ellos pueden ser calculados usando la siguiente expresión, derivada por diferenciación de la función objetivo con respecto a cada parámetro del modelo

$$\bar{B} = (\bar{X}^T \cdot \bar{X})^{-1} \cdot \bar{X}^T \cdot \bar{Y} \quad \text{Algoritmo para los mínimos cuadrados.}$$

Donde :

\bar{B} = Vector que contiene los parámetros desconocidos del modelo.

\bar{X} = Matriz del diseño experimental.

\bar{X}^T = Transpuesta de \bar{X}

\bar{Y} = Vector que contiene las respuestas experimentales.

CASO 2. Regresión lineal múltiple con repeticiones.

Una práctica normal para encontrar el error experimental de un grupo de pruebas experimentales es la replicación o repetición de una de las pruebas al menos tres veces.

En este caso el algoritmo que calcula los parámetros del modelo toma la siguiente forma:

$$\bar{B} = (\bar{X}^T \cdot \bar{W} \cdot \bar{X})^{-1} \cdot \bar{X}^T \cdot \bar{W} \cdot \bar{Y} \quad \text{Algoritmo para un programa computarizado.}$$

donde:

\bar{W} = Diagonal de la matriz que contiene el número de repeticiones para cada prueba experimental.

\bar{Y} = vector que contiene el promedio \bar{Y}_i de la respuesta experimental Y_i .

Esto es:

$$\bar{W} = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & r_3 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & r_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} \bar{Y}_1 \\ \bar{Y}_2 \\ \bar{Y}_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{Y}_n \end{pmatrix}$$

Intervalos de confianza de los parámetros del modelo.

La varianza promedio S_y^2 , de la respuesta Y es definida por:

- Cuando las replicaciones no son disponibles o sin replicaciones.

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{d.f.}$$

- Cuando se tienen replicaciones:

$$S_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^r (Y_{ij} - \hat{Y}_i)^2}{d.f.}$$

donde d.f. = son los grados de libertad definido, como el número de experimentos menos el número de parámetros del modelo.

Los intervalos de confianza de los parámetros son estimados como sigue:

$$B_i = B_i \pm t_{95^\circ} \sqrt{\text{Varianza de } B_i}$$

$$\text{Varianza de } B_i = S_y^2 \text{ (Diagonal de la matriz C)}$$

y donde matriz C es:

- Cuando el experimento no tiene replicaciones:

$$\bar{C} = (\bar{X}^T, \bar{X})^{-1}$$

- Cuando el experimento tiene replicaciones:

$$\bar{C} = (\bar{X}^T, \bar{W}, \bar{X})^{-1}$$

Intervalos de confianza de la respuesta Y

- Intervalo de confianza de :

$$Y_i = \hat{Y}_i \pm t_{95\%} \sqrt{S_y^2 (diagonal\ matriz\ D)}$$

donde:

$$\bar{D} = (\bar{X}, \bar{C}, \bar{X}^T).$$

APENDICE C

PROGRAMA PARA DESARROLLAR DISEÑO HEXAGONAL

```

REM HEXDISPM
D=0
READ 9
DIM X1 (N), X2(N), X3(N), X4(N),Y(N),Z(N),D(N)
FOR I=1 TO 9
READ X1 (I), X2(I), X3(I), X4 (I), Y (I)
NEXT I
FOR I=1 TO 6
FOR J=I TO 7
M(I,J) = 0
NEXT J:NEXT I
M(1,1) = N
FOR I=1 TO 9
M(1,2) = M(1,2) + X1 (I)
M(1,3) = M(1,3) + X2 (I)
M(1,4) = M(1,4) + X1 (I)^ 2
M(1,5) = M(1,5) + X2 (I)^ 2
M(1,6) = M(1,6) + X1 (I)* X2(I)
M(1,7) = M(1,7) + Y (I)
M(2,4) = M(2,4) + X1 (I)^ 3
M(2,5) = M(2,5) + X1 (I)* (X2(I) ^ 2)
M(2,6) = M(2,6) + (X1 (I) ^ 2)*X2(I)
M(2,7) = M(2,7) + X1 (I) * Y (I)
M(3,5) = M(3,5) + X2 (I) ^ 3
M(3,7) = M(3,7) + X2 (I) * Y (I)
M(4,4) = M(4,4) + X1 (I) ^ 4
M(4,5) = M(4,5) + (X1 (I)^ 2)*(X2(I) ^ 2)
M(4,6) = M(4,6) + (X1 (I)^ 3)*X2 (I)
M(4,7) = M(4,7) + (X1 (I)^ 2)*Y(I)
M(5,5) = M(5,5) + X2(I) ^ 4
M(5,6) = M(5,6) + X1 (I) * (X2 (I) ^ 3)
M(5,7) = M(5,7) + (X2 (I) ^ 2)*Y(I)
M(6,7) = M(6,7) + (X1 (I)) * (X2 (I)) * (Y(I))
NEXT I
M(2,2) = M(1,4)
M(2,3) = M(1,6)
M(3,3) = M(1,5)
M(3,4) = M(2,6)
M(3,6) = M(2,5)
M(6,6) = M(4,5)
FOR J=1 TO 5
FOR I=J + 1 TO 6
M(I,J)= M(J,I)
NEXT I: NEXT J
FOR L=1 TO 5
GOSUB 125
NEXT L
GOTO 175
FOR I=L TO 6
FOR J=L TO 7
P(I,J) = M(I,J)/M(I,L)
NEXT J: NEXT I
FOR I = L + 1 TO 6
FOR J=L TO 7
P(I,J) = P(I,J) - P(L,J)

NEXT J : NEXT I
RETURN
A6 = P(6,7)/P(6,6)

```

```

A5 = P(5,7) - P(5,6) * A6
A4 = P(4,7) - P(4,6) * A6 - P(4,5) * A5
A3 = P(3,7) - P(3,6) * A6 - P(3,5) * A5 - P(3,4) * A4
A2 = P(2,7) - P(2,6) * A6 - P(2,5) * A5 - P(2,4) * A4 - P(2,3) * A3
A1 = P(1,7) - P(1,6) * A6 - P(1,5) * A5 - P(1,4) * A4 - P(1,3) * A3 - P(1,2) * A2
LPRINT "Ecuación Polinómica Ajustada"
LPRINT "-----"
LPRINT "Y =";: LPRINT USING "##.####" : A1:
IF A2<0 THEN LPRINT USING "##.####" : A2;:LPRINT "*X1";:GOTO 220
LPRINT "+";: LPRINT USING "##.####" : A2;:LPRINT "*X1":
IF A3 < 0 THEN LPRINT USING "##.####" : A3;:LPRINT "*X2";: GOTO 230
LPRINT "+" ;: LPRINT USIGN "##.####" : A3;:LPRINT "*X2":
IF A4<0 THEN LPRINT USING "##.####" : A4;:LPRINT "*X1^2";: GOTO 240
LPRINT "+";: LPRINT USING "##.####" : A4;:LPRINT "*X1^2";
IF A5<0 THEN LPRINT USING "##.####" : A5;:LPRINT "*X2^2";: GOTO 250
LPRINT "+" ;: LPRINT USING "##.####" : A5;:LPRINT "*X2^2";
IF A6<0 THEN LPRINT USING "##.####" : A6;:LPRINT "(X1)(X2)", GOTO 256
LPRINT "+";: LPRINT USING "##.####" : A6;:LPRINT "(X1)(X2)";
LPRINT: " -----
LPRINT " DATOS
LPRINT " -----

LPRINT " REC EXP. REC CALC. IND. SELECT EXP. IND.SELECT CALC. % ERROR
FOR I=1 TO 9
Z(I) = A1 + A2*X1(I) + A3*X2(I) + A4*(X1(I)^2) + A5*(X2(I)^2) + A6*(X1(I))*(X2(I))
D(I) = (Y(I) - Z(I))/Y(I) * 100
D = D + D(I)^2
NEXT I
LPRINT " -----

FOR I=1 TO 9
LPRINT USING "#####.##"; X1(I); X2(I); Y(I); Z(I); D(I)
NEXT I
LPRINT " -----

LPRINT " SUMA DE LOS ERRORES AL CUADRADO" ; D

DATA
DATA
* LENGUAJE FORTRAN

```

A P E N D I C E D

DISTRIBUCION DE FISHER

Supongamos que tenemos dos sistemas de observaciones independientes de la magnitud aleatoria X .

$$\begin{aligned} X'_1, X'_2, \dots, X'_{n_1} \\ X''_1, X''_2, \dots, X''_{n_2} \end{aligned}$$

con número de mediciones n_1 y n_2 y dispersiones muestrales S_1^2 y S_2^2 respectivamente: Si las dispersiones generales σ_1^2 y σ_2^2 correspondientes a las dispersiones muestrales S_1^2 y S_2^2 satisfacen una misma dispersión general, es decir, se produce la igualdad.

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

La relación de las dispersiones muestrales

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

es una magnitud aleatoria, que obedece a la ley de distribución.

La función de la densidad de probabilidad se determina por la fórmula:

$$\psi(F) = \frac{\Gamma\left(\frac{f_1 + f_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f_1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{f_2}{2}\right)} f_1^{f_1/2} f_2^{f_2/2} \frac{F^{f_1/2 - 1}}{(f_2 + f_1 F)^{(f_1 + f_2)/2}}$$

$$0 \leq F < \infty$$

VALUES of $F_{.05}^*$

v_2 = GRADOS DE LIBERTAD DEL DENOMINADOR

v_1 = GRADOS DE LIBERTAD DEL NUMERADOR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	244	246	248	249	250	251	252	253	254
2	18.50	19.00	19.20	19.20	19.30	19.30	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.40	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50	19.50
3	10.10	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.80	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.20	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.81
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.70	1.73
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
*	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

* Esta tabla es reproducida de M. Merrington y C.M. Thompson, "Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution", Biometrika, Vol. 33 (1943), by permission of the Biometrika trustecs.

VALUES of $F_{.01}$ *

v_2 = GRADOS DE LIBERTAD
PARA EL DENOMINADOR

v_1 = GRADOS DE LIBERTAD PARA EL NUMERADOR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
1	4,052	5,000	5,403	5,625	5,764	5,859	5,928	5,982	6,023	6,056	6,106	6,157	6,209	6,235	6,261	6,287	6,313	6,339	6,366
2	98.50	99.00	99.20	99.20	99.30	99.30	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.40	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50	99.50
3	34.10	30.80	29.50	28.70	28.20	27.90	27.70	27.50	27.30	27.20	27.10	26.90	26.70	26.60	26.50	26.40	26.30	26.20	26.10
4	21.20	18.00	16.70	16.00	15.50	15.20	15.00	14.80	11.70	14.50	14.40	14.20	14.00	13.90	13.80	13.70	13.70	13.60	13.50
5	16.30	13.30	12.10	11.40	11.00	10.70	10.50	10.30	10.20	10.10	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6	13.70	10.90	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7	12.20	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.81	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8	11.30	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.83
9	10.60	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10	10.00	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.70	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.53	2.45	2.36	2.27	2.17
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

* Esta tabla es reproducida de M. Merrington and C.M. Thompson, "Tables of percentage points of the inverted beta (F) distribution." Biometrika, Vol. 33 (1943), by permission of the Biometrika trustees.

A P E N D I C E E

DISTRIBUCION DE LA t-STUDENT

La distribución de una magnitud aleatoria, análoga a:

$$u = \frac{\bar{x} - u}{\sigma(x)} \quad (I)$$

donde en lugar de la desviación cuadrática media general se encuentra la correspondiente desviación muestral.

$$t = \frac{x - u}{s(x)} \quad (II)$$

Fue deducida por primera vez por student (seudónimo del matemático y químico inglés Gosset) y lleva su nombre la función de la densidad de probabilidad de la magnitud t de student (distribución t) depende solo de un parámetro, es decir, del número de grado de libertad f de la dispersión muestral $S^2(x)$ y se determina por la fórmula

$$\delta(t) = \frac{1}{(\pi f)^{1/2}} \frac{\Gamma\left(\frac{f+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{f}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{f}\right)^{-\frac{f+1}{2}} \quad (III)$$

$$-\infty < t < \infty$$

El símbolo Γ de la ecuación (III) denota la conocida función Gamma de Euler, representada por la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-y} y^{z-1} dy$$

TABLA DE DISTRIBUCION t-STUDENT

VALORES DE t *

v	$\alpha = 0.10$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.005$	v
1	3.078	6.314	12.700	31.821	63.657	1
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	2
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.811	3
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.004	4
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	5
6	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	6
7	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	7
8	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	8
9	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	9
10	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	10
11	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	11
12	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	12
13	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	13
14	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	14
15	1.341	1.753	2.131	2.602	2.917	15
16	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	16
17	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	17
18	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	18
19	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	19
20	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	20
21	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	21
22	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	22
23	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	23
24	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	24
25	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	25
26	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	26
27	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	27
28	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	28
29	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	29
inf.	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	inf.

Esta tabla es reproducida de R.A. Fisher "Statistical Methods for Research Workers"

B I B L I O G R A F I A

1. DORONFELD A.C. "FIVE VARIABLE FLOTATION TEST USING FACTORIAL DESIGN"
MINING ENGINEERING DECEMBER 1951 p.p. 1073 - 1080
2. LAWYER J.E. "ELEMENTS OF DECEPTIVE DATA PRESENTATION",
MINING ENGINEERING JUNE 1962 p.p. 46-51
3. DAVIES O.L. (EDITOR) "THE DESIGN AND ANALYSIS OF INDUSTRIAL EXPERI-
MENTS", PUBLISHED FOR ICI LTD. BY OLIVER AND
BOYD, LONDON 1956.
4. YATES F. THE DESIGN AND ANALYSIS OF FACTORIAL EXPERIMENTS IM-
PERIAL BUREAU OF SOIL SCIENCE, TECHNICAL COMM 35
HARPENDEN 1937.
5. ARRATIA J.R. "OPTIMIZATION OF LIME ROASTING - SEGREGATION TREAT -
MENT OF FLUE DUST" , MSc THESIS, MONTANA
COLLEGE OF MINERAL SCIENCE AND TECHNOLOGY USA. 1985.
6. PLACKET B.L. AND BURMAN J.P. "THE DESIGN OF OPTIMUM MULTIFACTORIAL
EXPERIMENTS", BIOMETRICA VOL 33 1946 p.p. 305-325.
7. BOX G.E.P. AND HUNTER J.S. THE 2^k-p FRACTIONAL FACTORIAL DESIGN PART
TECHNOMETRICS , VOL 3 N° 3 AUGUST 1961.
8. BOX G.E.P. "THE EXPLORATION AND EXPLOITATION OF RESPONSE SURFACES"
SOME GENERAL CONSIDERATIONS AND EXAMPLES;
BIOMETRICS VOL 10, 1954 p.p. 16-60.
9. BOX G.E.P. "THE EXPLORATION AND EXPLOITATION OF RESPONSE SURFACES"
AN EXAMPLE OF THE LINK BETWEEN THE FITTED SURFACE AND
THE BASIC MECHANISM OF THE SYSTEM BIOMETRICS
SEPT. 1955 p.p. 287 - 323.
10. LAWYER JAMES E "THE TECHNIQUE OF MINERAL PROCESSING RESEARCH"
MET 127 COURSE MINNESOTA UNIVERSITY.
11. HICKS, CHARLES "FUNDAMENTAL CONCEPTS IN THE DESIGN OF EXPERIMENTS"
1st. EDITION p.p. 1-8
HOLT RINEHART AND WINSTON NEW YORK (1965)

12. HUNTER, J. STUART "DETERMINATION OF OPTIMUM OPERATING CONDITIONS BY EXPERIMENTAL METHODS"
PART II - 2 p.p. 13-14 JANUARY 1959.
13. WILDE, J. DOUGLAS "OPTIMUM SEEKING METHODS" 2ND. EDITION p.p. 159-162,
PRENTICE HALL INC. NEW YORK (1965).
14. DAVIES OWEN L. "METODOS ESTADÍSTICOS APLICADOS A LA INVESTIGACION y
A LA PRODUCCION " 2º EDICION p.p. 31-41 ,
AGUILAR S.A. (1965).
15. DRAPER, N.R. "APPLIED REGRESSION ANALYSIS"
1ST. EDITION p.p. 128-135 JOHN WILEY & SONS
NEW YORK (1966).
16. BOX G.E.P. "TRANSFORMATIONS OF THE INDEPENDENT VARIABLES"
TECHNOMETRICS, VOL 4, p.p. 521 - 550 (1962)
17. DAY B.B. "THE TECHNIQUE OF REGRESSION ANALYSIS"
INDUSTRIAL QUALITY CONTROL, p.p. 10-19 AUGUST 1965
18. HUNTER J. STUART "DETERMINATION OF OPTIMUM OPERATING CONDITION BY
EXPERIMENTAL METHODS" PART II - 1
19. BOX GEP "MULTIFACTOR EXPERIMENTAL DESIGN"
ANNALS OF MATHEMATICS STATISTICS, VOL 28 p.p. 195-
241 (1957).
20. HARTLEY "SMALLEST COMPOSITE DESIGN FOR QUADRATIC RESPONSE
SURFACES"
BIOMETRICS, VOL 15 N° 1-4 p.p. 611 - 624 (1959)
21. ROSENBRACK "COMPUTATIONAL TECHNIQUES FOR CHEMICAL ENGINEERS"
1ST. EDITION pp. 48 - 85 PERGAMON PRESS LTD. LONDON
(1965).
22. BOX GEP "EVOLUTIONARY OPERATION : A METHOD FOR INCREASING
INDUSTRIAL PRODUCTIVITY "
APPLIED STATISTICS VOL II pp. 4 (1955).

23. BARTLETT, M.S. "THE USE OF TRANSFORMATIONS : BIOMETRICS"
VOL 3 , N°1 MARCH 1947 pp. 39-52.
24. KENDALL, M.G. "THE ADVANCED THEORY OF STATISTICS"
HAFNER PUBLISHING CO. NEW YORK, N.Y.
VOL 2, 3d. ed. 1951 pp. 206 - 209.
25. BENNET C.A. AND FRANKLIN N,L "STATISTICAL ANALYSIS IN CHEMISTRY AND
THE CHEMICAL INDUSTRY"
JOHN WILEY & SONS, INC, NEW YORK, N.Y. 1954
pp. 355 - 357.
26. COCHRAN, W.G. AND G.M. COX "EXPERIMENTAL DESIGNS" (2ND. EDITION)
JOHN WILEY, NEW YORK (1957).
27. MONTEALEGRE, RAUL "DISEÑO EXPERIMENTAL CON APLICACIONES EN METALURGIA
EXTRACTIVA".
UNIVERSIDAD CONCEPCION CHILE 1971.
28. CAICEO, FERNANDO, "TESIS DE INGENIERO CIVIL METALURGICO "
UNIVERSIDAD CONCEPCION CHILE 1968.
29. KAFAROV, V. "CYBERNETIC METHODS IN CHEMISTRY & CHEMICAL ENGINEERING"
MIR PUBLISHERS MOSCOW (1976).
30. SPIRIDINOV, V.P. AND LOPATKIN A.A. "TRATAMIENTO MATEMATICO DE DATOS FI
SICOQUIMICOS" EDITORIAL MIR 1973.
31. ARRATIA, RUBEN L. Y DE ARRATIA, JUANA "A COMPUTARIZED NATIONAL APPROACH
FOR PROCESS EVALUATION AND OPTIMIZATION IN MINERAL -
PROCESSING AND EXTRACTIVE METALLURGY".
87 TH ANNUAL GENERAL MEETING OF CIM 1985.