

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Sección de Posgrado y Segunda Especialización  
Profesional**



Tesis para Optar el Grado Académico  
de Doctor en Ciencias con  
mención en Matemática

**"Homología de Hochschild y Homología  
Cíclica para Intersección Completa con  
Singularidades Aisladas"**

Presentada por:

**Rubén Esteban Burga Barboza**

**LIMA - PERÚ**

**2009**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA**  
**FACULTAD DE CIENCIAS**  
**SECCIÓN DE POSGRADO Y 2DA. ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL**

**RESUMEN DE LA TESIS**  
**DE DOCTORADO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA**

Alumno: Mg. RUBÉN ESTEBAN BURGA BARBOZA  
Título: Homología de Hochschild y Homología Cíclica para Intersección Completa con Singularidades Aisladas

La tesis de doctorado se realizó en cooperación con la Universidad de Buenos Aires y la UNI.  
Asesor Externo: Dr. Guillermo Cortiñas, UBA, Buenos Aires, Argentina.  
Asesor Local: Dr. Christian Valqui, UNI.

Sea  $A = R/I$  un anillo regular de funciones de una variedad algebraica con una singularidad aislada en el punto racional  $\eta$ ; donde  $(R, \eta)$  es un anillo r.l.e.t.f de dimensión  $m$ , e  $I$  es un ideal de intersección completa. El teorema de HKR para el álgebra diferencial graduada  $R \otimes \wedge V$  nos lleva a expresar homología cíclica y de Hochschild del álgebra  $R/I$  en función de la cohomología de los complejos  $L_j$  y  $D_j$ . En el primer capítulo desarrollamos las herramientas necesarias para poder llegar a este resultado.

En este trabajo suponemos que el anillo  $R/I$  tiene sólo una singularidad aislada en  $\eta$ . En caso que el ideal  $I = \langle f \rangle$  sea principal, los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  y  $D_j$  fueron calculados por Hülb en "Divided Powers and Hochschild Homology of Complete Intersections" y por Michler en "Torsion of differentials of hypersurfaces with isolated singularities" cuando  $R$  es el anillo de polinomios. La fórmula  $H^{m-j}(L_j) = \text{Tor}_*(R/I, R/J_f)$  para valores  $j \geq m$  se debe a que  $ht(J_f) = \dim(R) = m$ . Nuestro estudio se centra en calcular los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  y  $D_j$ , cuando el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es generado por una intersección completa con una singularidad aislada en  $\eta$ . Los cálculos que se presentan no se encuentran en la literatura. En este caso se tiene que  $ht(J_f) = m - r + 1$  para una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Notemos que en el caso particular que  $r = 1$  obtenemos  $ht(J_f) = m$ . Uno de los principales resultados del trabajo es el Teorema de Clasificación de Singularidades Aisladas. A grandes rasgos este teorema nos dice que toda icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  puede ser generado por elementos  $g_1, \dots, g_r$ , donde cada uno de los  $g_i$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Este teorema permite generalizar los métodos de cálculos para un solo polinomio, al caso de un ideal que sea una icis generado por  $r$  polinomios.

En el caso que el ideal este generado por una secuencia regular de longitud dos llegamos a los siguientes resultados:  $H^i(L_j) = 0$ , para todo  $i < m-1$ , e  $i \neq j$ . Cuando  $j = m+k > m-1$  presentamos la secuencia espectral  $E_{*,*}$  que converge a la cohomología del complejo  $L_{m+k}$ , y colapsa en  $E^2$ . Calculamos los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+k}$  en nivel  $m$  y  $m-2$ , para el término en grado  $m-1$  hallamos su dimensión. Cuando  $L_{m-1}$  llegamos a la siguiente igualdad  $H^{m-1}(L_{m-1}) = \text{Tor}_*(J_f/J_{f,g}, R/I)$ . Mostramos que la cohomología de

los complejos  $L_j$  para  $j < m-1$  es exacta. En la Sección 2.3 generalizamos los resultados de la sección anterior al caso de  $r$  polinomios. En el tercer capítulo, debido a que los complejos  $L_j$  tienen cohomología cero para todo término menor que  $m - r$ , y al saber la imagen de la aplicación  $S$  en la secuencia SBI expresamos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$ , para grados menores que  $m - r - 1$ , en función de la cohomología de Rham del álgebra  $R/I^s$ , para algún  $s$  adecuado. Los demás términos se encuentran en secuencia exacta corta, y pueden ser calculados de manera recurrente. Cuando  $S = 0$  expresamos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  en función de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . Los complejos que proporcionan la homología cíclica negativa  $\Omega^{z_p}$  para  $p > 0$  se descompone en casi un producto tensorial de complejos. En el caso  $r = 2$  esto permite tomar un subcomplejo  $\Omega_f^{z_m}$ . El complejo cociente  $\Omega^{z_m}/\Omega_f^{z_m}$  es isomorfo a  $\Omega_f^{z_m}$ . Mostramos una secuencia espectral que se genera a partir de este subcomplejo. Este estudio permite presentar una secuencia espectral que converge a la cohomología de  $\Omega^{z_m}$ .

# Indice general

<b>Introducción</b>	<b>III</b>
<b>1. Homología de Hochschild y Cíclica</b>	<b>1</b>
1.1. Homología de Hochschild . . . . .	2
1.2. Homología Cíclica. . . . .	16
1.3. Método de Cálculo . . . . .	22
<b>2. Homología de Hochschild para icis</b>	<b>49</b>
2.1. Singularidades Aisladas. . . . .	50
2.2. Homología de Hochschild para $I = \langle f, g \rangle$ . . . . .	63
2.2.1. El Complejo $L_j$ . . . . .	64
2.2.2. Una Generalización del Complejo de Koszul . . . . .	75
2.2.3. Cálculo de la Homología de Hochschild . . . . .	79
2.3. Homología de Hochschild para $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . . . . .	98
2.3.1. Homología de Hochschild . . . . .	100
2.3.2. El Algoritmo . . . . .	110
<b>3. Homología Cíclica.</b>	<b>116</b>
3.1. Homología Cíclica . . . . .	116
3.2. El Caso Quasihomogéneo . . . . .	121
3.3. Ejemplos. . . . .	125
3.3.1. El Número de Milnor. . . . .	130
3.4. La Homología Cíclica Negativa. . . . .	133
3.4.1. El Complejo $\Omega_f^{\geq m}$ . . . . .	140
3.4.2. El Complejo $M(f, g)$ . . . . .	142
3.4.3. El Complejo $\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f, g)}$ . . . . .	146
3.4.4. La Cohomología del Complejo $M(f, g)$ . . . . .	147

<b>A. Álgebra Conmutativa</b>	<b>159</b>
A.1. Definiciones y Propiedades . . . . .	159
A.2. Complejo Koszul . . . . .	167
A.3. El Ideal Jacobiano. . . . .	172
A.4. El Anillo de Polinomios. . . . .	182

# Introducción

En la presente tesis desarrollaremos herramientas para calcular la homología cíclica y la homología de Hochschild para  $A = R/\langle f, g \rangle$ ; aquí  $R$  es el anillo local de un punto racional regular de un esquema de tipo finito sobre un cuerpo  $k$  de característica cero. Es decir  $R = (k[x_1, \dots, x_n]/I')_\eta$  y  $\eta = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ . El ideal  $I = \langle f, g \rangle$  es de tipo intersección completa con una singularidad aislada en  $(R, \eta)$ . Este anillo es un caso particular de un anillo regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f). Los cálculos que aquí se obtienen generalizan los resultados de Michler, Hübl, Bach, [Mich1], [BKH], [BACH].

Como  $R$  es proyectivo como  $k$ -módulo, podemos escribir la homología de Hochschild como  $HH_*(R) = \text{Tor}_*^{R^e}(R, R)$ . En particular, si el ideal  $J = \ker(R \otimes R \rightarrow R)$  es localmente generado por una secuencia regular, tenemos una descripción concreta de la homología de Hochschild :  $HH_*(R) = \Omega_R^*$  (Teorema de Hochschild Kostant Rosenberg). Las álgebras con esta propiedad se llamarán suaves. En esta dirección, podemos indicar que la homología de Hochschild caracteriza la suavidad de un anillo regular local e.t.f : Por un lado si  $A$  es suave entonces la homología de Hochschild en grado  $n$  se anula para todo  $n > m := \dim(R)$ , por otro lado tenemos el siguiente resultado de Avramov-Vigué [AV] y de BACH [BACH1] :

Sea  $A$  un álgebra f.g. sobre un cuerpo  $k$  tal que la homología de Hochschild se anule en grados  $i$  y  $j$  para algún  $i$  par y  $j$  impar entonces  $A$  es suave. En el caso suave podemos describir a la homología cíclica por medio de la cohomología de deRham

$$HC_n(A) = \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus (\oplus_{i \geq 1} H_{DR}^{n-2i}(A)),$$

según [LQ, Teorema 2.9].

Sea  $A$  un álgebra de la forma  $A = k[x_1, \dots, x_m]/I$  donde  $I$  es un ideal de tipo intersección completa. En [BV] se define la homología cíclica y de Hochschild para álgebras diferenciales graduadas. Sea  $V$  un espacio vectorial graduado concentrado en grado uno. Identificando el álgebra graduada  $\wedge V$  con el módulo graduado del complejo Koszul se proporciona un diferencial a  $\wedge V$ . Esto convierte a  $(\wedge V, d)$  en un álgebra diferencial graduada. Mostrando una versión graduada del teorema de Hochschild Kostant Rosenberg para el álgebra  $(\wedge V, d)$  hallan una fórmula explícita,  $HH_n(\wedge V, d) = \bigoplus_{p \geq 0} HH_n^{(p)}$ ,  $HC_n(\wedge V, d) = HC_n(k) \oplus \bigoplus_{p \geq 0} HC_n^{(p)}$ , que calcula la homología de Hochschild y cíclica de  $A$  (ver [BV]). En [CGG] se usa un método similar para hallar una fórmula que calcula la homología cíclica y de Hochschild para álgebras de la forma  $R/I$ , donde  $R$  es *homológicamente regular* e  $I$  es localmente una intersección completa. Estas fórmulas (ver Corolario 1.107), que en el caso  $R$  regular fueron obtenidas por [FT], expresan la homología de Hochschild y cíclica en función de los complejos  $L_j$  y  $D_j$  para  $j > 0$  respectivamente, definidos de la siguiente manera

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I \Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

y

$$D_j : 0 \longrightarrow \frac{\Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

Basados en la fórmula del Corolario 1.107 en adelante nos dedicaremos a calcular la cohomología de los complejos  $L_j$  y de los  $D_j$ .

En el caso que el ideal  $I$  es principal, para el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  se usa el siguiente método: Primero se prueba que  $L_j$  es quasiisomorfo a  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$ . Si la singularidad de  $I$  en  $\eta$  es aislada y  $(R, \eta)$  es r.l.e.t.f, entonces  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  es una resolución de  $R/J_f$ . Aquí  $J_f$  es el ideal jacobiano de  $f$ , y en general  $J_F$  representa el ideal jacobiano de  $F = (f_1, \dots, f_r)$ .

Esto nos permite describir la cohomología de  $L_j$  mediante la siguiente fórmula

$$H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}^R(H^m(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})), R/I) = \text{Tor}_{m-*}^R(R/J_f, R/I), \quad (1)$$

para valores  $j$  mayores que la dimensión de Krull del anillo  $R$ , además se tiene que  $Tor_1(R/I, R/J_f) = I'/J_f$  donde  $I' = (J : f)$ . Este resultado se encuentra en [BKH] cuando  $R = k[x_1, \dots, x_n]$ , y en [LM] en el caso de un álgebra r.l.e.t.f. Todos ellos se limitan al caso en que  $I = \langle f \rangle$ .

Nosotros generalizamos estos cálculos al caso en que  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  sea una intersección completa. La generalización natural directa de las fórmulas anteriores al caso de dos polinomios sería

$$H^*(L_m) = Tor_{m-*}(R/\langle f, g \rangle, R/\langle J_f, J_g \rangle).$$

Sin embargo, esta nueva fórmula no se cumple en general, como se ve en el Ejemplo 2.34. Allí presentamos un ideal  $I = \langle f, g \rangle$ , donde  $f$  y  $g$  es una secuencia regular con una singularidad aislada en  $\eta$  que cumple

$$H^{m-1}(L_m) \neq Tor_1(R/\langle J_f, J_g \rangle, R/I) = Tor_1(H^m(L'_m), R/I).$$

Aquí  $L'_j$  es un complejo de  $R$ -módulos libres que se define de modo que  $L_j = L'_j \otimes_R R/I$  (ver Observación en la Página 70).

La Ecuación (1) se obtuvo gracias al hecho que  $ht(J_f) = dim(R) = m$ . En el caso que  $I = \langle f, g \rangle$  se tiene que  $ht(J_F) = m - 1$ . Cuando el ideal  $I$  es generado por una secuencia regular de  $r$  elementos obtenemos que  $ht(J_F) = m - r + 1$ . Esta es la principal obstrucción para seguir el método empleado para el caso de un solo polinomio. Sin embargo el cálculo de la altura del ideal jacobiano nos permite brindar información sobre los ideales de tipo intersección completa con una singularidad aislada (icis por sus siglas en inglés). Estas propiedades permitirán calcular la homología de Hochschild y serán descritas más adelante. A continuación describimos los resultados obtenidos sobre la cohomología de los complejos  $L_j$  y  $L'_j$ .

Para el caso en que el ideal esté generado por una secuencia regular de longitud dos,  $I = \langle f, g \rangle$ , obtenemos :

*Los complejos  $H^i(L'_j) = 0$  para todo  $i \neq j$ .*

La prueba se presenta en la **Proposición 2.49** y **Corolario 2.52** de la tesis. El significado de esta afirmación cuando  $j = m - 1$  se refleja en poder escribir

$$H^*(L_{m-1}) = Tor_{m-1-*}(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I);$$

donde  $H^{m-1}(L'_{m-1}) = \frac{J_f}{J_{f,g}}$ . Otra conclusión que se desprende del corolario anterior es el hecho de tener que los complejos  $L_j$  satisfacen que  $H^i(L_j) = 0$

para todo  $i \neq j$  para  $j \leq m - 2$ . El hecho que  $H^i(L'_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  para  $j < m$  nos permite escribir

$$H^s(L_j) = \text{Tor}_{j-s}(H^j(L'_j), R/I).$$

Como los complejos  $L_j$  para  $j \leq m - 1$  son exactos salvo en el último nivel,  $\text{Tor}_t(H^j(L'_j), R/I) = 0$  para todo  $t > 0$ . Esto significa que  $f, g$  forman una secuencia  $H^j(L'_j)$ -regular.

Luego demostramos que los complejos  $L_j$  para valores de  $j$  mayores o iguales que la dimensión del anillo  $R$  sólo tienen tres términos no nulos en cohomología. También describimos su último término de cohomología como una generalización de (1) :

*Para todo  $j \geq m$  se cumple : los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  son cero para todo grado menor  $m - 2$ . Los términos en grado  $m - 2$  se expresan como*

$$\text{Tor}_1(H^{m-1}(L'_j{}^{\leq m-1}), R/I).$$

Aquí  $L'_j{}^{\leq m-1}$  es el complejo truncado en nivel  $m - 1$ . Las pruebas se encuentran en el **Teorema 2.54** y **Corolario 2.59** . Con respecto a la cohomología de los complejos  $L_{m+k}$  en grados  $m$  y  $m - 1$  mostramos que existe una secuencia espectral  $E_{p,q}^r$  que converge a la cohomología de los complejos  $L_{m+k}$  y colapsa en el segundo término (Teorema 2.62).

Esta información se puede resumir en el siguiente cuadro

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \min\{j, m - 2\}. \\ \frac{df \wedge \Omega^j}{df \wedge dg \wedge \Omega^{j-1}} \otimes R/I & \text{si } i = j \text{ y } j \leq m. \\ \text{Tor}_{m-1-i}\left(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I\right) & \text{si } j = m - 1. \\ \text{Tor}_1(H^{m-1}(C_{k+1}), R/I) & \text{si } j > m - 1 \text{ e } i = m - 2, \end{cases} \quad (2)$$

donde  $C_{k+1} = (L'_{m+k})^{\leq m-1}$  (ver Proposición 2.55). Para los términos en nivel  $m - 1$  y  $m$  presentamos una secuencia espectral

$$E_{2,0}^1 = \text{Tor}_2(M_k, \frac{R}{I}) \quad (3)$$

$$E_{1,0}^1 = \text{Tor}_1(M_k, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{1,1}^1 = \text{Tor}_1(M_k, \frac{R}{I})$$

$$E_{0,0}^1 = \text{Tor}_0(M_k, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{0,1}^1 = \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}),$$

donde  $Gr(M_k) = \bigoplus_{i=0}^k R/J_f$  (ver Teorema 2.62) y  $d^1$  es el producto exterior con  $dg$ .

En el caso que  $J_g$  este contenido en el ideal  $J_f$ , se cumple  $E^1 = E^\infty$ , lo cual se demuestra en el **Corolario 2.65**. Aunque la condición  $J_g \subset J_f$  simplifica significativamente los cálculos, esta se da en muchos ejemplos conocidos. Ello nos permite calcular los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+k}$  para el caso en que  $R/I$  es de dimensión cero y la singularidad es simple (clasificación de Guisti [G]) [Looj, 7.19], a excepción de  $H_\mu$  para  $\mu \geq 7$ , y **las singularidades simples de curvas inmersas en dimensión tres** (ver Ejemplo 2.67). El cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

En general, cuando el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una intersección completa y tiene una singularidad aislada en  $\eta$  encontramos una secuencia espectral  $E_{*,*}$  que converge hacia la cohomología del complejos  $L_{m+k}$ . El primer término  $E^1$  de la secuencia espectral se expresa en función de ciertos  $\text{Tor}$  (Teorema 2.76).

Usando el mismo argumento dado para el caso de dos polinomios probamos que  $H^s(L_{m+k}) = 0$  para todo  $s \leq m - r - 1$ .

Este último resultado significa que los complejos  $L_{m+k}$  tienen a lo más  $r + 1$  términos de cohomología no nulos.

Para poder establecer las propiedades mencionadas anteriormente, en el camino probamos los siguientes resultados algebraicos, que no se encuentran en la literatura. Una de las piedras angulares en el trabajo es el Corolario 2.19 que dice que

$$ht(J_F) = m - r + 1,$$

cuando  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una icis en un anillo r.l.e.t.f.  $(R, \eta)$ . **Notemos que en el caso  $r = 1$ , obtenemos  $ht(J_f) = m$ .**

En general en una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  pueden existir elementos  $f_i$  tales

que la hipersuperficie  $\{f_i = 0\}$  sea regular, esto significa que el anillo  $R/\langle f_i \rangle$  es regular. Por ejemplo los polinomios  $f = x^2 + xy + z$ ,  $g = x^2 + y^2 + z$ , y  $h = z$  en el anillo  $R = k[x, y, z]_{(x, y, z)}$  nos proporcionan una icis  $\langle f, g, h \rangle$ . Es evidente que  $R/\langle h \rangle \simeq k[x, y]_{(x, y)}$  es un anillo r.l.e.t.f. Para evitar estos casos triviales ponemos como condición que ninguna de las hipersuperficies  $\{f_i = 0\}$  sea regular. Ésto equivale a pedir que el ideal  $J_{f_i}$  esté contenido en el maximal  $\eta$ ; notemos que esta condición significa, en el caso particular que  $R = k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ , que el jacobiano evaluado en  $0 = (0, \dots, 0)$  tiene rango cero. En estos casos puede suceder que el lugar singular de  $f_i$  sea más grande que un punto, es decir  $ht(J_{f_i}) < m = \dim(R)$ . Notemos que  $ht(J_f) = m$  si sólo si la singularidad de  $f_i$  es aislada. Si embargo nosotros tenemos el siguiente resultado :

*Sea una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  de modo que ninguno de sus generadores es regular. Entonces se pueden escoger generadores  $g_1, \dots, g_r$  de  $I$  de manera que cada  $g_i$  tenga una singularidad aislada. (Teorema 2.25)*

Esta propiedad nos permite reducir el lugar singular de cada uno de los generadores de  $I$  a un punto. En el Ejemplo 2.27 se muestra un ideal  $I$  generado por una secuencia regular de dos elementos en  $k[x, y]_{(x, y)}$ , que tiene una singularidad aislada en  $\eta$ , y no podemos hallar un representante que sea regular. Esto significa que, bajo las hipótesis planteadas anteriormente, no podemos reducir más el lugar singular de los generadores de una icis.

El resultado anterior también se puede interpretar como un teorema de **clasificación local de las singularidades aisladas de tipo intersección completa**; y nos garantiza que todas ellas se pueden formar a partir de polinomios con singularidades aisladas. Esta propiedad de clasificación es uno de los principales resultados de la tesis.

El Teorema 2.25 es consecuencia inmediata de la Proposición 2.24 :

*Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Entonces podemos modificar los generadores para que los primeros  $r - 1$  generadores formen una icis.*

Una versión topológica, en el caso  $k = \mathbb{C}$ , del Corolario 2.19 y de la Proposición 2.24 se encuentran en [Looj] y [AGV, Teorema 5.4, página 157]. Las demostraciones se basan en propiedades topológicas del cuerpo  $\mathbb{C}$ . Esta versión topológica se sigue inmediatamente de nuestros resultados.

En relación a la homología cíclica, en el caso quasihomogéneo, expresamos los  $k$ -espacios vectoriales de cohomología de los complejos  $D_j$  en función de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . Para las singularidades clasificadas en el Ejemplo 2.67 mencionadas líneas atrás hallamos todos los  $k$ -espacios vectoriales de cohomología de los complejos  $D_j$ .

En general obtenemos que  $H^k(D_j) = H_{DR}^k(R/I)$  para todo  $k \leq m - r - 2$ , y  $H^j(D_j) = \Omega_A^j/d(\Omega_A^j)$ . Los términos restantes se encuentran envueltos en secuencias exactas, donde los elementos involucrados son conocidos.

Los complejos  $\Omega^{\geq p}$  definidos en 1.78 proporcionan la homología cíclica negativa (ver Proposición 1.80). Estos complejos tienen a lo más  $r+1$  términos de cohomología no nulos. En el caso de dos polinomios presentamos una secuencia espectral que converge hacia la homología cíclica negativa de  $R/I$  (Proposición 3.34).

A continuación presentamos los resultados principales del trabajo divididos en capítulos :

En el **Primer Capítulo** presentamos la definición y principales propiedades de la homología de Hochschild. Ponemos de manifiesto la estrecha relación entre esta homología y los diferenciales de Kähler. Esta relación nos permite describir la suavidad del álgebra  $R$  en función de sus diferenciales de Kähler. Basados en el Corolario 2.2 de [HS] vemos que en un anillo regular local  $(R, \eta)$  todo elemento  $f$  en  $\eta$  cumple que  $f \in \sqrt{J_f}$  (ver Corolario 1.38).

Luego demostramos un resultado clave para el desarrollo del segundo capítulo, el Corolario 1.41 :

*Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $\{f_1, \dots, f_r\} \subset R$ ,  $P$  un ideal primo con  $J_{\mathcal{F}} \subset P$ . Supongamos que  $f_j \notin P$  para todo  $j = 1, \dots, r$ . Entonces en  $T = Q(\frac{R}{P})$  (el cuerpo de fracciones de  $R/P$ ) los elementos  $\{f_1, \dots, f_r\}$  no son algebraicamente independientes sobre  $k$ .*

La principal información que tomamos del enunciado anterior es la existencia de un polinomio  $p(x_1, \dots, x_r)$  no nulo para el cual se cumple que  $p(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $R/P$ . Esta relación algebraica entre los elementos  $f_1, \dots, f_r$  resulta crucial para demostrar los principales resultados de la tesis.

Luego presentamos la definición y propiedades de la homología cíclica. A modo de ejemplo calculamos la homología cíclica del álgebra graduada  $k[x]/\langle x^{m+1} \rangle$ .

En la última sección del primer Capítulo presentamos un bosquejo de la demostración de la descomposición de Hodge de la homología cíclica y de Hochschild. Para ello desarrollamos la teoría de homología cíclica y Hochschild para álgebra diferenciales graduadas. Entre los principales ejemplos de estas álgebras se encuentran el complejo de Koszul  $K(a_1, \dots, a_r)$ . Conocer su homología es importante en el trabajo. Se sabe que si la secuencia  $a_1, \dots, a_r$  es regular el complejo  $K(a_1, \dots, a_r)$  es exacto salvo en el último nivel.

Un hecho fundamental, que hacemos notar en el primer Capítulo y que usamos en repetidas ocasiones, es el siguiente :

Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Para todo ideal  $I$  propio se cumple que la altura del ideal  $I$  es igual que la *profundidad* de  $I$ . Para presentar el resultado anterior introducimos las principales definiciones del álgebra conmutativa que se emplean en esta sección. Un pilar importante introducido en este capítulo se refiere a la definición de ideal jacobiano. Presentamos una interpretación geométrica de esta definición en el ámbito de la geometría algebraica.

En el **Segundo Capítulo** con ayuda de las propiedades descritas anteriormente probamos un resultado fundamental en el trabajo :

$$ht(J_F) = m - r + 1$$

para una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Esta propiedad, junto al hecho de que  $f \in \sqrt{J_f}$  nos permiten demostrar el teorema de clasificación de singularidades aisladas. Este resultado también se puede obtener usando directamente la Proposición 2.24. El único requisito que se pide en esta segunda prueba es que el cuerpo  $k$  sea infinito. Este teorema permite generalizar los métodos de cálculos para un sólo polinomio, al caso de un ideal que sea una icis generado por  $r$  polinomios. Otro ítem importante que presentamos es el Corolario 2.70:

*Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces para todo primo  $P$  tal que  $J_F \not\subseteq P$  el complejo  $L'_j$ , localizado en  $P$ ,  $(L'_j)_P$ , para todo  $1 \leq j < m$  satisface que  $H^i(L'_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  y exacto para todo  $j \geq m$ .*

Este corolario nos dice que los módulos de cohomología de los complejos  $L'_j$  para  $j > 0$  están soportados en los ideales primos que contienen al ideal jacobiano  $J_F$ . En la Sección 2.2 estudiamos el caso que el ideal este generado por una secuencia regular de longitud dos. El resultado enunciado líneas



cohomología de  $L_j$ . El Teorema 3.9 nos da la cohomología de los  $D_j$  en este caso :

Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces

$$H^t(D_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \min\{j-1, m-r-1\} \\ \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}} & \text{si } i = j \text{ y } j < m-r \\ H^{m-r}(D_{m-r}) = \frac{\Omega_A^{m-r}}{d\Omega_A^{m-r-1}} & \text{si } j = m-r; \text{ y } t = m-r \\ H^{m-r}(D_j) = H^{m-r}(L_j) & \text{si } j > m-r; \text{ y } t = m-r. \end{cases} \quad (5)$$

Si  $m-r < t < m$  entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \longrightarrow 0.$$

con  $t \leq j$ . Si  $j \geq m$  entonces  $H^m(D_j) = 0$ , y  $H^{m-1}(D_j) = H^m(L_j)$  para todo  $j \geq m-1$ .

Notemos que este caso abarca todas las curvas inmersas en dimensión tres en el cuerpo  $\mathbb{C}$  de la lista que se presenta en [Looj, 7.22].

En la última sección describimos la homología cíclica negativa que se calcula a partir de los complejos  $\Omega^{\geq p}$  para  $p > 0$  (ver Definición 1.78). Para poder emplear los resultados que se plantean en [LM] descomponemos el complejo  $\Omega^{\geq m}$  en dos complejos; el complejo  $\Omega_f^{\geq m}$  y  $\Omega_f^{\geq m}y$ . Ambos complejos son isomorfos y dependen de  $f$ ,  $df$  y  $dg$ . En particular se tiene la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega_f \longrightarrow \Omega^{\geq m} \longrightarrow \Omega_f[-1] \longrightarrow 0$$

Del subcomplejo  $\Omega_f^{\geq m}$  tomamos cierto subcomplejo  $M(f, g)$ . La cohomología del complejo cociente  $\frac{\Omega_f^{\geq m}}{M(f, g)}$  se calcula en el Lema 3.35. Finalmente descomponemos  $M(f, g)$  en dos copias de un complejo  $\Gamma$ , obteniendo una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow M(f, g) \longrightarrow \Gamma[-1] \longrightarrow 0.$$

Aquí las columnas de  $\Gamma$  son los complejos  $E'_{m+k}$  (Definición 2.60) satisfacen  $H^i(E'_{m+k}) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Su cohomología se calcula en el Lema 3.34

Otra forma de abordar el estudio de la cohomología del complejo  $M(f, g)$  es la siguiente : Tomamos un subcomplejo  $F$  de  $M(f, g)$  (ver Definición 3.42). En el complejo cociente  $\frac{M(f, g)}{F}$  presentamos una filtración

$$I_p \subset \dots \subset I_1 = \frac{M(f, g)}{F},$$

y calculamos el  $E^1$  de esta filtración. Para el complejo  $F$  presentamos una filtración

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F.$$

Esta filtración proporciona una secuencia espectral que colapsa en  $E^1$ , sin embargo, en general no se sabe si converge.

El **Apéndice** se divide en cuatro partes. En la primera de ellas se presentan las definiciones y propiedades básicas del álgebra conmutativa. En la segunda sección presentamos la propiedades que usamos en el trabajo sobre el complejo de Koszul. En la sección del ideal jacobiano se establece la definición del ideal jacobiano para ideales en anillos r.l.e.t.f. Esta definición también generaliza la definición de icis para polinomios. En la última sección se presenta algunas propiedades básicas del anillo de polinomios  $k[x_1, \dots, x_r]$  cuando el cuerpo  $k$  es infinito.

# Capítulo 1

## Homología de Hochschild y Cíclica

El objetivo será presentar un bosquejo de la demostración de la descomposición de Hodge de la homología Cíclica y de Hochschild para el caso de intersecciones completas. Esto nos servirá de pretexto para proporcionar las definiciones y propiedades a emplearse en el trabajo. Los anillos que aquí presentamos son álgebras sobre un cuerpo  $k$  de característica cero

La homología de Hochschild y su conocida relación con los diferenciales de Kähler nos sirve para exportar un pilar fundamental en el trabajo : Si  $(R, \eta)$  es un anillo local de un punto racional regular,  $f$  es un elemento en su ideal maximal y  $df \in J \cdot \Omega_R^1$ , entonces  $f$  se encuentra en la clausura algebraica de  $J$  (Proposición 1.36). Este resultado nos permite probar un hecho importante: Sean  $(R, \eta)$ ,  $f$  como antes, entonces  $f$  pertenece a  $\sqrt{J_f}$ , el radical de su ideal jacobiano (ver Corolario 1.38). En el transcurso del capítulo ponemos de manifiesto la estrecha relación entre el ideal jacobiano  $J_F$  de  $F = (f_1, \dots, f_r)$  y la dependencia algebraica de los  $f_i$  (ver Corolario 1.41). Estos dos Corolarios son las principales propiedades que se usan en el transcurso del trabajo.

En la segunda sección desarrollamos las principales propiedades de la homología cíclica. Calculamos la homología cíclica del álgebra  $k[x]/\langle x^{m+1} \rangle$ .

En la última sección presentamos los elementos necesarios para demostrar el principal teorema de [CGG]. Este se refiere a la descomposición de la homología cíclica y Hochschild para álgebras diferenciales graduadas homológicamente regulares.

## 1.1. Homología de Hochschild

En esta parte presentamos las definiciones del complejo y homología de Hochschild. La homología de Hochschild y los diferenciales de Kähler tienen una estrecha y conocida relación. Este hecho nos faculta a desarrollar una teoría con amplia base con respecto a las propiedades de los diferenciales de Kähler. Presentamos las secuencias exactas cotangente y conormal. También ponemos de manifiesto las relaciones que guardan los diferenciales de Kähler y las propiedades de regularidad del anillo. Un ejemplo de ello es la caracterización de un anillo regular local en función del primer módulo de los diferenciales de Kähler (ver Teorema 1.28). Un resultado importante de la teoría de diferenciales que presentamos se encuentra en el Corolario 1.41. De esta relación depende la mayoría de los resultados de la tesis.

**Definición 1.1.** Sean  $A$  una  $k$ -álgebra y  $M$  un  $A$ -bimódulo. Definamos los módulos  $C_n(A, M) = M \otimes A^{\otimes n}$  y  $b : C_n(A, M) \rightarrow C_{n-1}(A, M)$  como

$$b(m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_n) = \sum_{i=0}^{i=n-1} (-1)^i (m \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) \\ + (-1)^n (a_n m \otimes \dots \otimes a_{n-1}).$$

Se verifica que  $b \circ b = 0$  y por lo tanto  $C(A, M)$ :

$$0 \longleftarrow C_0(A, M) \xleftarrow{b} \dots \xleftarrow{b} C_n(A, M) \xleftarrow{b} C_{n+1}(A, M) \xleftarrow{b} \dots$$

es un complejo. Su Homología  $HH_*(A, M) := H(C(A, M))$  es la homología de Hochschild de  $A$  con coeficientes en  $M$ .

Cuando  $M = A$  denotaremos  $C(A, A) = C(A)$  y  $HH_n(A, A) = HH_n(A)$ .

**Ejemplo 1.2.** Sea  $A = M = k$ ,

$$C(k) : 0 \longleftarrow k \xleftarrow{0} \dots \xleftarrow{1} k \xleftarrow{0} k \xleftarrow{1} \dots$$

Con ello vemos

$$HH_n(k) = \begin{cases} k & \text{si } n=0. \\ 0 & \text{si } n \neq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

**Teorema 1.3.** Si  $A$  es una  $k$ -álgebra unital, proyectiva como  $k$ -módulo, entonces para todo  $A$ -bimódulo  $M$  se cumple

$$H(A, M) = \text{Tor}_n^{A^e}(M, A)$$

**Prueba.** [Lod, Proposición 1.1.13]. ■

**Ejemplo 1.4.** Sea  $k$  un cuerpo de característica cero y  $A = \frac{k[x]}{\langle x^{n+1} \rangle}$ . Consideremos el complejo

$$C : 0 \longleftarrow A^e \xleftarrow{\cdot u} A^e \xleftarrow{\cdot v} \dots$$

con  $u = x \otimes 1 - 1 \otimes x$  y  $v = x^n \otimes 1 + x^{n-1} \otimes x + \dots + 1 \otimes x^n$ . Bajo el isomorfismo  $A^e \simeq \frac{k[x, y]}{\langle x^{n+1}, y^{n+1} \rangle}$  tenemos que  $u = x - y$ ,  $v = \sum_{i=0}^n x^{n-i} y^i$ . Es decir, el complejo  $C$  se escribe

$$C : 0 \longleftarrow \frac{k[x, y]}{\langle x^{n+1}, y^{n+1} \rangle} \xleftarrow{\cdot u} \frac{k[x, y]}{\langle x^{n+1}, y^{n+1} \rangle} \xleftarrow{\cdot v} \dots$$

Es claro que  $u \cdot v = v \cdot u = 0$ . Ahora si  $p(x, y)u \in \langle x^{n+1}, y^{n+1} \rangle$ , entonces

$$p(x, y)u = \alpha x^{n+1} + \beta y^{n+1} = \alpha x^{n+1} - \alpha y^{n+1} + (\beta - \alpha)y^{n+1}.$$

Como  $u$  divide a  $\alpha(x^{n+1} - y^{n+1})$  y no a  $y^{n+1}$  entonces  $u$  divide  $\beta - \alpha$ , es decir, existe  $\delta$  tal que  $u \cdot \delta = \beta - \alpha$  y por lo tanto

$$p(x, y) = \alpha \cdot v + \delta \cdot y^{n+1} \in \langle v \rangle + \langle y^{n+1} \rangle.$$

Esto nos permite afirmar que  $p \in \langle v \rangle$  en  $A^e$  y garantiza la exactitud de  $C$  en grados impares. La exactitud de  $C$  en grados pares se verifica de manera similar.

Con esto queda claro que  $C$  es una resolución de  $A$  como  $A^e$  módulo. Si aplicamos el functor  $A \otimes_{A^e}$ , obtenemos

$$0 \longleftarrow A \xleftarrow{0} A \xleftarrow{(n+1)x^n} \dots \xleftarrow{0} A \xleftarrow{(n+1)x^n} A \xleftarrow{\dots}$$

Un cálculo directo muestra que  $HH_i(A) = \text{Tor}_i^{A^e}(A, A) = \frac{A}{\langle x^n \rangle}$  si  $i$  es impar y que  $HH_i(A) = (0 : x^n) = \text{Ker}(\cdot x^n)$  si  $i$  es par. En grado cero  $HH_0(A) = A$ . Se sigue que si  $n \geq 1$  entonces  $\dim_k(HH_n(A)) = \dim_k(HH_{n+1})$ .

**Definición 1.5.** Sean  $A$  una  $k$ -álgebra unital y  $\bar{A} = \frac{A}{k}$ . Definimos el complejo

$$\begin{aligned} \bar{C}(A, M) : 0 \longleftarrow M \xleftarrow{b} M \otimes \bar{A} \xleftarrow{b} \dots \\ \dots \xleftarrow{b} M \otimes \bar{A}^{\otimes n} \xleftarrow{b} M \otimes \bar{A}^{\otimes n+1} \xleftarrow{b} \dots \end{aligned}$$

**Proposición 1.6.** Sea  $(D, b)$  el complejo

$$D : 0 \longleftarrow D_0 \xleftarrow{b} D_1 \xleftarrow{b} \dots \xleftarrow{b} D_n \xleftarrow{b} D_{n+1} \xleftarrow{b} \dots$$

Donde  $D_n = \{(m, a_1, \dots, a_n) : \exists i \text{ con } a_i \in k\}$ . Entonces  $(D, b)$  es acíclico. Más aún  $\frac{C_n(A, M)}{D_n} = \bar{C}_n(A, M)$  y por lo tanto  $\pi : C(A, M) \rightarrow \bar{C}(A, M)$  es un quasi-isomorfismo.

**Prueba.** [Lod, Proposición 1.1.15]. ■

**Definición 1.7.** Una  $k$ -derivación de  $A$  en  $M$  es una aplicación  $k$ -lineal

$$D : A \longrightarrow M,$$

que cumple la regla de Leibniz  $D(ab) = aD(b) + D(a)b$ .

**Ejemplo 1.8.** Sea  $A = k[x_1, \dots, x_m]$  entonces  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  es una derivación para todo  $i = 1, \dots, m$ .

**Definición 1.9.** Sea  $A$  una  $k$ -álgebra unital y  $\bar{A} = A/k$ . Definamos

$$\Omega_{A|k}^1 := \frac{A \otimes \bar{A}}{N},$$

donde  $N$  es el  $A$ -módulo generado por  $\{a_0 a_1 \otimes \bar{a}_2 - a_0 \otimes \bar{a}_1 a_2 + a_2 a_0 \otimes \bar{a}_1\}$ , con la estructura de  $A$ -módulo obvia y  $d : A \rightarrow \Omega_{A|k}^1$ ,  $d(a) = [1 \otimes \bar{a}]$ .

**Lema 1.10.** La derivación  $d : A \rightarrow \Omega_{A|k}^1$  es universal : para toda derivación  $D : A \rightarrow M$  existe un único morfismo  $f : \Omega_{A|k}^1 \rightarrow M$  de  $A$ -módulos tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{D} & M \\ & \searrow d & \nearrow \exists! f \\ & \Omega_A^1 & \end{array}$$

conmuta.

**Prueba.** Si definimos  $f([a \otimes \bar{b}]) = aD(b)$  se prueba que  $f$  esta bien definida,  $f \circ d(a) = D(a)$  y además que  $f$  es única. ■

**Corolario 1.11.** Si  $I = \text{Ker}(A \otimes A \rightarrow A)$  entonces  $\frac{I}{I^2} \simeq \Omega_A^1$ .

**Prueba.** [Eis, Teorema 16.24].

**Corolario 1.12.** Si  $S \subset A$  es un subconjunto multiplicativamente cerrado entonces  $\Omega_{S^{-1}A}^1 \simeq S^{-1}A \otimes_A \Omega_A^1$

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.9]. ■

Entre las secuencias que emplearemos se encuentran las siguientes :

**Proposición 1.13.** Si  $A \rightarrow B \rightarrow C$  es una secuencia de anillos entonces existe una secuencia exacta de  $B$ -módulos

$$C \otimes_B \Omega_{B|A}^1 \rightarrow \Omega_{C|A}^1 \rightarrow \Omega_{C|B}^1 \rightarrow 0$$

donde la aplicación del lado derecho envía  $dc$  a la clase de  $dc$ , y la aplicación del lado izquierdo envía  $c \otimes db$  a  $cdb$ .

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.2]. ■

**Proposición 1.14.** Si  $\pi : A \rightarrow B$  es un epimorfismo de  $k$ -álgebras con  $\ker(\pi) = I$ , entonces existe una secuencia exacta de  $B$ -módulos

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A|k}^1 \xrightarrow{\pi} \Omega_{B|k}^1 \longrightarrow 0,$$

donde la aplicación del lado derecho es dado por  $b \otimes da \mapsto bda$  y la del lado izquierdo envía la clase de  $f$  a  $1 \otimes df$ .

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.3]. ■

**Definición 1.15.** Sea  $k$  un anillo conmutativo y  $A$  una  $k$ -álgebra. Un  $A$ -módulo finito universal con derivada finita es un  $A$ -módulo finitamente generado  $(f.g)$   $\tilde{\Omega}_{A|k}^1$  y una  $k$ -derivada  $d : A \rightarrow \tilde{\Omega}_{A|k}^1$ , con la siguiente propiedad universal : Si  $M$  es un  $A$ -módulo f.g y  $D : A \rightarrow M$  es una  $k$ -derivada entonces existe un único homomorfismo de  $A$ -módulos

$$f : \tilde{\Omega}_{A|k}^1 \rightarrow M$$

tal que  $D = f \circ d$ .

**Observación.** Notemos que todas las álgebras con las que trabajamos tienen derivada universal finita.

**Notación.** Sea  $(R, \eta)$  un dominio local con derivada universal finita, pongamos

$$(\Omega_R^1)^* := \frac{\tilde{\Omega}_{R|k}^1}{T(\tilde{\Omega}_{R|k}^1)},$$

donde  $T(\tilde{\Omega}_{R|k}^1)$  es el módulo torsión y definamos  $d^* : A \rightarrow (\Omega_R^1)^*$  por medio de  $d^* = \pi \circ d$ .

**Observación.** Usaremos las definiciones de *dimensión de Krull*, *altura*, *secuencia regular*, *profundida*, *anillo Cohen Macaulay*, según se presentan en [Eis] o [Mats] y se detallan a continuación.

**Definición 1.16.** Sea  $R$  un anillo. La **dimensión de Krull** o simplemente la **dimensión** de un anillo  $R$ , denotada como  $\dim(R)$ , es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos en  $R$ . Es decir,  $\dim(R) = n$  si existe una cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

y ninguna cadena es de longitud mayor. Una Cadena de ideales de longitud  $n$  se define como una secuencia

$$I_0 \subsetneq I_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I_n$$

de ideales dos a dos disjuntos.

**Definición 1.17.** Sea  $P$  un ideal primo de  $R$ . Definimos la **altura**  $ht(P)$  como el supremo de la longitud de las cadenas de primos

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n = P.$$

Si el ideal  $I$  no es primo definimos la **altura** del ideal  $I$  como el mínimo de las alturas de los primos  $P$  que contienen a  $I$ .

**Observación.** Cabe resaltar que algunos autores (ej. [Eis]) a la altura del ideal  $I$  la llaman **codimensión**.

Si el anillo  $(R, \eta)$  es local entonces

$$\dim(R) = ht(\eta).$$

**Teorema 1.18.** Sea  $x_1, \dots, x_c \in R$  y  $P$  ideal primo minimal entre los primos que contienen a  $x_1, \dots, x_c$ . Entonces  $ht(P) \leq c$ .

**Prueba.** [Eis, Teorema 10.2]. ■

**Definición 1.19.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. La sucesión  $x_1, \dots, x_n$  se denomina una **secuencia de parámetros** si sólo si

$$\eta^k \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \eta,$$

y  $\dim(R) = n$ . Si además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \eta$  la secuencia se llama **secuencia regular de parámetros** -Ver [Eis., Corolario 10.7, pág 242]-.

**Definición 1.20.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. Una sucesión  $\{x_1, \dots, x_n\}$  se denomina **secuencia regular** (o **secuencia  $R$ -regular**) si sólo sí la aplicación

$$\bar{x}_i : R / \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle \longrightarrow R / \langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$$

definida por  $\bar{a} \mapsto \bar{x}_i \cdot \bar{a}$ , es inyectiva para todo  $i = 1, \dots, n$ , y además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq R$ .

**Definición 1.21.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local, por definición la máxima longitud de secuencias regulares del anillo  $(R, \eta)$  se denomina **profundidad del anillo  $R$**  y se denota como  $\text{depth}(R)$ .

**Definición 1.22.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo,  $I$  un ideal. La máxima longitud de secuencias regulares de  $R$  contenidas en  $I$  se define como **profundidad( $I$ )**.

**Definición 1.23.** Un anillo  $(R, \eta)$  local es llamado **Cohen Macaulay** si sólo sí  $\text{profundidad}(R) = \dim(R)$ . Ver [Mats., 16.A., Pág 103].

**Proposición 1.24.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local Cohen Macaulay. Entonces para todo ideal  $I$  tenemos

$$\text{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R). \quad (1.2)$$

**Prueba.** [Mats, Teorema 29, parte (i)]. ■

**Definición 1.25.** Sea  $k$  un cuerpo de característica cero. Sea  $(R, \eta)$  un anillo local de un punto cerrado suave y tal que  $R/\eta = k$ . Es decir

$$R = (k[x_1, \dots, x_n]/I)_{\bar{\eta}_1} \simeq k[x_1, \dots, x_n]_{\eta_1}/I_{\eta_1},$$

con  $\eta_1 = (x_1 - a_1, \dots, x_n - a_n)$ . Este anillo es un ejemplo de un anillo regular local esencialmente de tipo finito. (r.l.e.t.f.) Nosotros lo llamaremos r.l.e.t.f.

**Observación.** En esta tesis trabajaremos exclusivamente con los anillos r.l.e.t.f, y sus cocientes. Notemos la forma especial que exigimos sobre el maximal  $\eta_1$ . En el caso que  $k$  sea algebraicamente cerrado esta condición se da automáticamente. Como sus elementos son imágenes de polinomios entonces abusando del lenguaje también los llamaremos polinomios.

**Ejemplo 1.26.** El anillo  $(R, \eta) = (k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}, \eta)$  es r.l.e.t.f.

**Observación.** Una manera de caracterizar los anillos r.l.e.t.f. es la que presentamos a continuación :

**Teorema 1.27.** Sea  $S = k[x_1, \dots, x_r]$  el anillo de polinomios sobre un cuerpo  $k$ , sea  $I \subset S$  un ideal y  $R = S/I$ . Sea  $P$  un ideal primo de  $S$  que contiene a  $I$  cuyo cuerpo residual  $k(P) = K(S/P)$  es separable sobre  $k$  y sea  $c = ht(I_P) \subset S_P$ .  $R_P$  es regular local si y sólo si  $\Omega_{R/k}^1$  es localmente libre en  $P$  de rango  $r - c$ .

**Prueba.**[Eis, Corolario 16.21] ■

Nosotros requerimos la siguiente versión.

**Teorema 1.28.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local e.t.f. El anillo  $(R, \eta)$  es regular local si  $\Omega_R^1$  es libre de rango igual a la dimensión de Krull del anillo  $R$ .

**Prueba.** Se sigue del Teorema 1.27. ■

**Observación.** Como el módulo  $\Omega_R^1$  es libre, usando una base de  $\Omega_R^1$  definiremos en primer lugar la *matriz jacobiana* de  $F = (f_1, \dots, f_r)$  y luego su *ideal jacobiano*. La independencia de la definición del ideal jacobiano de la base elegida se demuestra en el Apéndice. La definición de ideal jacobiano que presentamos en el anillo  $R$  depende de los representantes, y del número de representantes del ideal  $I$  (ver Apéndice).

También demostramos que los elementos  $dx_1, \dots, dx_m$  generan una base de  $\Omega_R^1$  si  $x_1, \dots, x_m$  forman una secuencia regular de parámetros.

**Definición 1.29.** Sea  $R$  un anillo r.l.e.t.f. Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ ,  $F = (f_1, \dots, f_r)$  con  $r > 0$  y  $c = ht(I)$ . Sea  $e_1, \dots, e_m$  una base de  $\Omega_R^1$  donde  $m = dim(R)$ . Definamos la *matriz jacobiana* de  $F$  en la base  $e_1, \dots, e_m$  como  $Jac(F) =$

$(f_{i,j})$ , donde  $df_j = \sum_{i=1}^m f_{i,j} e_i$ . Por definición el ideal jacobiano  $J_F$  es el ideal generado por los menores  $c \times c$  de  $Jac(F) = (f_{i,j})$ . En particular, si  $F = f$ , y  $R = k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$  entonces  $J_f = \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\rangle_{i=1, \dots, m}$ .

**Observación.** Notemos que de la definición del ideal jacobiano se tiene que si  $f \in R$  y  $df = \sum_{i=1}^m f_i e_i$  entonces  $J_f = \langle f_1, \dots, f_m \rangle$ . Más aún  $df \in J_f \cdot \Omega_R^1$ .

**Observación.** Una propiedad que usaremos más adelante es el hecho que todo menor  $M$  de orden  $r \times r$  de la matriz  $Jac(F)$  esta contenido en el ideal  $J_F$  (ver Corolario 1.40). Para demostrar esta afirmación es suficiente notar que  $c \leq r$  (ver Teorema 1.18), y que los menores de orden  $r$  son combinación lineal de los menores de orden  $c$  de  $(f_{i,j})$ .

**Observación** En el caso particular que  $R = k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ ,  $I = (f_1, \dots, f_t)$  y la base elegida sea  $dx_1, \dots, dx_m$  tenemos que la matriz jacobiana de  $I$  coincide con la matriz jacobiana que se define en [Hart., Cap 1, & 5]. Más aún, si definimos  $I(Y) := \{f \in k[x_1, \dots, x_n] : f(x) = 0 \text{ para todo } x \in Y\}$ , como el ideal de  $Y$ , donde  $Y = Z(\mathfrak{a})$ , entonces podemos definir :

**Definición 1.30.** Sea  $Y$  una variedad afín y  $\{f_1, \dots, f_t\}$  generadores de ideal de  $Y$ . La variedad  $Y$  es **no singular** en  $P \in Y$  si el rango de la matriz  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$  en  $P$  es  $m - r$ , donde  $r$  es la dimensión de  $Y$ . (ver [Hart., & 5]).

Podemos asumir que  $P$  es el origen. La condición que la matriz  $(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})$  tenga rango  $c := m - r$  equivale a que al menos un menor de orden  $c \times c$  sea unidad en  $k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ .

Por lo anterior el punto  $P = 0$  es singular si  $J_F \subseteq \eta = \langle x_1, \dots, x_m \rangle$ . Es decir todo menor de orden  $c \times c$  de  $J_F$  al ser evaluado en  $P = (0, \dots, 0)$  es cero.

**Ejemplo 1.31.** Sea  $f = x^2 + y^3 + z$  y  $g = x^4 z + y$  en  $k[x, y, z]_{(x, y, z)}$ , entonces  $(k[x, y, z] / \langle f, g \rangle)_{(x, y, z)}$  es regular local.

**Observación.** Los ejemplos anteriores se pueden deducir de un hecho conocido en geometría algebraica : Sea  $Y = Z(\mathfrak{a})$  una variedad e  $I(Y)$  el ideal de esta. Se prueba que  $I(Y) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ . Sea  $F = (f_1, \dots, f_t)$ , donde  $I(Y) =$

$\langle f_1, \dots, f_t \rangle$ . El jacobiano de  $F$  no se *anula* en un punto  $p$  de  $Y$  si sólo si el anillo de gérmenes de funciones regulares de  $Y$  en  $p$

$$O_{p,Y} := \{ \langle U, f \rangle : U \text{ es un abierto en } Y, f \text{ es una función regular} \}$$

es un anillo regular local. A continuación presentamos brevemente los elementos que intervienen en esta afirmación. Por definición una aplicación  $f : X \rightarrow k$  es regular si para todo punto  $p \in Y$  existe un abierto  $U$  con  $p \in U \subset Y$ , y polinomios  $g, h \in k[x_1, \dots, x_n]$  tal que  $h$  es no nulo en  $U$  y  $f = \frac{g}{h}$ . Aquí interpretamos los polinomios como funciones de  $k^n$  a  $k$ . Diremos que  $f$  es regular en  $Y$  si es regular en todo punto de  $Y$ . El elemento  $\langle U, f \rangle$  es una clase de equivalencia, donde dos pares  $(U, f)$  y  $(V, g)$  son equivalentes si sólo si  $f = g$  en  $U \cap V$ . Gracias a [Hart, Teorema I.3.2] se puede identificar  $O_{p,Y}$  con  $(k[x_1, \dots, x_n]/I(Y))_P$ . Por otro lado se prueba que en el anillo  $(k[x_1, \dots, x_n])_P$  se cumple que  $c = ht(I(Y))$ , donde  $\dim(O_{p,Y}) = n - c$ . Finalmente presentamos formalmente la afirmación que realizamos al inicio de la observación :

**Teorema 1.32.** *Sea  $Y \subset k^n$  una variedad afín. Sea  $p \in Y$  un punto de  $Y$ . Entonces  $Y$  es no singular en  $p$  si sólo si el anillo local  $O_{p,Y}$  es un anillo regular local.*

**Prueba.** [Hart, Teorema 5.1]. ■

**Ejemplo 1.33.** Usaremos el teorema para verificar que el punto  $(0,0)$  es singular para  $f(x,y) = x^2 + y^3$  en el anillo  $(k[x,y]_{(x,y)}, \eta)$ . El polinomio  $f$  es irreducible. A partir de aquí se prueba que  $\sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$ . Por lo tanto si tomamos  $Y = Z(f)$  entonces  $I(Y) = I(Z(f)) = \sqrt{\langle f \rangle} = \langle f \rangle$ .

La dimensión del anillo  $(k[x,y]/\langle f \rangle)_{(x,y)}$  es uno. Si evaluamos la matriz jacobiana de  $f$  en el punto  $(0,0)$  obtenemos que el rango de esta es cero. Por lo tanto usando el Teorema 1.32 obtenemos que  $(k[x,y]/\langle f \rangle)_{(x,y)}$  no es regular local.

**Ejemplo 1.34.** Si  $(R, \eta)$  es un anillo r.l.e.t.f. Entonces  $R$  es un dominio -ver Lema A.6 o Corolario 10.14 de [Eis.]- y  $\Omega_R^1$  es un  $R$ -módulo libre finitamente generado por el Teorema 1.28. Entonces  $\Omega_{R|k}^1$  es un  $R$ -módulo finito universal con derivada finita, es decir

$$\tilde{\Omega}_{R|k}^1 = \Omega_{R|k}^1.$$

Como  $\Omega_R^1$  es libre, si  $x \in T(\Omega_R^1)$  (el módulo torsión de  $\Omega_R^1$ ) entonces  $x = (x_1, \dots, x_m)$  donde  $x_1, \dots, x_m \in R$ , y existe un  $\lambda \in R$  no nulo tal que

$$\lambda \cdot x = 0.$$

Esta última igualdad equivale a tener  $\lambda \cdot x_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ . Como  $R$  es un dominio y  $\lambda$  es no nulo entonces  $x_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$  y entonces

$$(\Omega_R^1)^* = \Omega_R^1,$$

y  $d^* = d$ . Notemos también que  $d$  cumple la propiedad universal para todo módulo, en particular la cumple para los módulos finitamente generados.

**Observación.** A continuación presentaremos una relación entre la *clausura integral* de un ideal  $I$ , denotada por  $\bar{I}$ , y la derivada universal finita.

**Definición 1.35.** Un elemento  $x$  está en la *clausura integral* de un ideal  $I$  si satisface una ecuación  $x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$  con  $a_l \in I^l$  para  $l = 1, \dots, n$  (ver [H-S, & 2.]).

Es obvio de la definición de clausura integral de un ideal que  $\bar{I} \subset \sqrt{I}$ . En particular  $\bar{J}_f \subset \sqrt{J_f}$ .

**Proposición 1.36.** Sea  $(R, \eta)$  y  $k$  como antes y  $J \subset R$  un ideal propio de  $R$ . Si  $r \in \eta$  verifica que  $dr \in J \cdot \Omega_R^1$ , entonces  $r \in \bar{J}$ .

**Prueba.** [HS, Corolario 2.2]. ■

**Corolario 1.37.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $r \in \eta$ . Si  $d(r)$  es un elemento en  $J \cdot \Omega_R^1$  entonces  $r \in \bar{J}$ .

**Prueba.** En efecto, del Ejemplo 1.34 obtenemos que  $(\Omega_R^1)^* = \Omega_R^1$ , y  $d^* = d$ . La Proposición anterior nos da  $r \in \bar{J}$ . ■

**Corolario 1.38.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $f \in \eta$ . Entonces  $f \in \sqrt{J_f}$ .

**Prueba.** Notemos que

$$df \in J_f \cdot \Omega_R^1 := \left\{ \sum_{finita} \lambda \cdot \omega : \omega \in \Omega_R^1; \lambda \in J_f \right\}.$$

En efecto, como  $df = \sum_{i=1, \dots, m} f_i dx_i$  en la base  $dx_i$  con  $i = 1, \dots, m$  y el ideal jacobiano  $J_f$  es generado por  $f_i$ , entonces  $df \in J_f \cdot \Omega_R^1$ .

Del Corolario 1.37 obtenemos que  $f \in \overline{J_f} \subset \sqrt{J_f}$ . ■

**Proposición 1.39.** Sean  $K \subset L$  cuerpos de característica cero y  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset L$  una colección de elementos. Entonces  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de  $\Omega_{L|K}^1$  como un espacio vectorial sobre  $L$  si sólo si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de trascendencia de  $L$  sobre  $K$ .

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.14]. ■

Una aplicación de la Proposición anterior se manifiesta en el siguiente Corolario.

**Corolario 1.40.** Sea  $(R, \eta) = (k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}, \eta)$ , y  $\{f_1, \dots, f_r\} \subset R$ ,  $P$  un ideal primo con  $J_F \subset P$ . Supongamos que  $f_i \notin P$  para todo  $i$ . Entonces en  $T = Q(\frac{R}{P})$  (el cuerpo de fracciones de  $R/P$ ) los elementos  $\{f_1, \dots, f_r\}$  no son algebraicamente independientes sobre  $k$ .

**Prueba.** El grado de trascendencia de  $R$  es  $m$ . Si  $r > m$  entonces los elementos  $\{f_1, \dots, f_r\}$  en  $Q(R)$  no son algebraicamente independientes sobre  $k$ . Por lo tanto los elementos  $f_1, \dots, f_r$  en  $Q(\frac{R}{P})$  tampoco son algebraicamente independientes sobre  $k$ .

Supongamos que  $r \leq m$ . Sea  $W = T^m$  y  $L : W \rightarrow \Omega_T^1$  definido por  $L(e_j) = dx_j$ . Si ponemos

$$v_j = (\partial f_j / \partial x_1, \dots, \partial f_j / \partial x_m)$$

entonces  $L(v_j) = df_j$ . También notemos que los  $v_j$  para  $j = 1, \dots, r$  no son l.i, pues el jacobiano de la matriz de los vectores  $v_j$  en la base canónica es siempre cero ya que todo menor  $M$  de orden  $r \times r$  de la matriz  $(\partial f_j / \partial x_i)$  (de orden  $m \times r$ ) es un elemento de  $J_F$  y  $J_F \subset P$ . Es decir  $\overline{M} = 0$  en  $R/P \subset T$ . Por lo tanto existen  $\lambda_j \in T$  tal que  $\sum \lambda_j v_j = 0$ . Si aplicamos  $L$  tenemos que  $\sum_j \lambda_j df_j = 0$ .

Por la Proposición 1.39 ello significa que los  $\{f_1, \dots, f_r\}$  no son algebraicamente independientes sobre  $k$ . ■

**Observación.** Una generalización del Corolario anterior para álgebras r.l.e.t.f. se presenta a continuación :

**Corolario 1.41.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $\{f_1, \dots, f_r\} \subset R$ ,  $P$  un ideal primo con  $J_F \subset P$ . Supongamos que  $f_j \notin P$  para todo  $j = 1, \dots, r$ . Entonces en  $T = Q(\frac{R}{P})$  (el cuerpo de fracciones de  $R/P$ ) los elementos  $\{f_1, \dots, f_r\}$  no son algebraicamente independientes sobre  $k$ .

**Prueba.** Sea  $dx_1, \dots, dx_m$  una base con la que se definió el ideal jacobiano y

$$df_j = \sum_{i=1}^m f_{i,j} dx_i$$

la representación de  $df_j$  en esta base. Si ponemos  $v_j = (f_{1,j}, \dots, f_{m,j})$  y definimos  $L : W \rightarrow \Omega_T^1$  como  $L(e_j) = dx_j$  la demostración del Corolario 1.40 permanece válida. ■

A continuación mostraremos un ejemplo donde la situación planteada anteriormente sucede.

**Ejemplo 1.42.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$  y  $f = x^2 + y^2$ ,  $g = x^2 - y^2$ . Entonces  $J_{f,g} = \langle xy \rangle \subset P = \langle x \rangle$  y el ideal primo  $P$  no contiene a  $f$  ni a  $g$ . Más aún si tomamos el polinomio  $Q(w, z) = w + z$  entonces  $Q(f, g) = 0$  en  $T = Q(R/P)$  el cuerpo de fracciones de  $\hat{R}/P$ .

**Observación.** Bajo las hipótesis del Corolario 1.41 hemos obtenido un polinomio no nulo  $Q(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  tal que  $Q(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el cuerpo  $T$ . Como  $Q(f_1, \dots, f_r) \in R/P$  de la inclusión natural  $R/P \hookrightarrow T$  es claro que  $P(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $R/P$ . Esta relación,  $P(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $R/P$ , será una de las más importantes en la que se basará la mayoría de los resultados que presentaremos en los demás capítulos.

Entre otras estructuras que se le proporcionan al complejo de Hochschild se encuentra el producto barajado que definimos a continuación.

**Definición 1.43.** Sea  $S_n$  el grupo simétrico. Una  $(p, q)$  baraja es  $\sigma \in S_{p+q}$  tal que  $\sigma(1) < \dots < \sigma(p)$ ;  $\sigma(p+1) < \dots < \sigma(p+q)$

**Definición 1.44.** Definamos el producto barajado

$$* = sh_{p,q} : C_p(A) \otimes C_q(A) \rightarrow C_{p+q}(A)$$

$$(a_0, a_1, \dots, a_p) * (a'_0, a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) =$$

$$\sum_{\sigma} |\sigma| \sigma(a_0 a'_0, a_1, \dots, a_p, a_{p+1}, \dots, a_{p+q}) := \sum_{\sigma} |\sigma| (a_0 a'_0, a_{\sigma^{-1}(0)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(p)}, a_{\sigma^{-1}(p+1)}, \dots, a_{\sigma^{-1}(p+q)}),$$

donde  $\sigma$  recorre sobre las  $(p, q)$  barajas, y  $|\sigma|$  es el signo de la permutación, ver [Lod, Definición 4.2.1].

**Definición 1.45.** Una  $k$ -álgebra se denomina no negativamente graduada si  $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$  y  $x \cdot y \in A_{i+j}$  para  $x \in A_i$  e  $y \in A_j$ . Si además  $x \cdot y = (-1)^{|x||y|} y \cdot x$  entonces  $A$  se denomina conmutativa graduada.

**Proposición 1.46.** *El borde de Hochschild cumple*

$$b(X * Y) = b(X) * Y + (-1)^{|X|} X * b(Y)$$

**Prueba.** [Lod, Proposición 4.2.2]. ■

**Definición 1.47.** Una  $k$ -álgebra diferencial graduada (A.D.G) se define como un álgebra graduada con un morfismo  $\partial : A_n \rightarrow A_{n-1}$  que cumple la regla de Leibniz

$$\partial(ab) = \partial(a)b + (-1)^{|a|} a\partial(b)$$

y es un diferencial, es decir  $\partial \circ \partial = 0$ .

De la definición anterior tenemos la siguiente proposición

**Proposición 1.48.** *Si  $A$  es una álgebra conmutativa entonces  $(C(A), *, b)$  es un ADG y  $HH(A)$  es un álgebra conmutativa en el sentido graduado, es decir  $xy = (-1)^{|x||y|} yx$*

**Prueba.** [Wei, Proposición 9.4.2]. ■

**Corolario 1.49.** *Existe un morfismo de anillos graduados*

$$\psi : \Lambda^* \Omega^1 \longrightarrow HH_*(A),$$

dado por  $\psi(r_0 dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) = [(r_0 \otimes r_1) * \dots * (1 \otimes r_n)]$ . Si  $\mathbb{Q} \subset k$  entonces la aplicación es inyectiva.

**Prueba.** [Wei, Corolario 9.4.4]. ■

La siguiente definición nos indica bajo que condiciones el morfismo  $\psi$  es un isomorfismo.

**Definición 1.50.** Diremos que un álgebra conmutativa unital  $A$  es suave si el ideal  $I = \text{Ker}(\mu : A \otimes A \rightarrow A)$  es generado por una secuencia regular en el anillo local  $(A \otimes A)_{(\mu)^{-1}(\eta)}$ , para todo ideal maximal  $\eta$  en  $A$ .

**Observación.** Como el álgebra  $A$  es proyectiva como  $k$ -módulo tenemos que  $HH_n(A) = \text{Tor}_n^{A \otimes A^{op}}(A, A)$ . Si además el álgebra es suave entonces  $I$  es generado localmente por una secuencia regular. El complejo de Koszul de esta secuencia es una resolución de  $A$  como  $A \otimes A^{op}$ -módulo. Si usamos estos dos hechos obtenemos que  $HH_*(A) = \Omega_A^*$ .

La formalización del comentario anterior se refleja en siguiente teorema.

**Teorema 1.51. (Teorema de Hochschild-Konstant-Rosenberg.)** *Sea  $A$  una álgebra conmutativa e.t.f. sobre un cuerpo  $k$ . Si  $A$  es suave entonces*

$$\psi : \Omega_A^* \rightarrow HH_*(A)$$

*es un isomorfismo de álgebras graduadas.*

**Prueba.** Ver [HKR]. ■

**Proposición 1.52.** *Si  $(R, \eta)$  es un anillo r.l.e.t.f entonces  $R$  es suave*

**Prueba.** Ver [Apéndice, Proposición A.58]. ■

**Corolario 1.53.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. entonces*

$$HH_*(R) = \Omega_R^*.$$

**Prueba.** Se sigue del Teorema 1.51 y Proposición 1.52 ■

**Proposición 1.54.** *Sea  $R$  un anillo local noetheriano conteniendo un cuerpo  $k$ . Si  $R$  es suave sobre  $k$  entonces  $R$  es un anillo regular local.*

**Prueba.** Ver [Wei, Teorema 9.3.11]. ■

## 1.2. Homología Cíclica.

Presentamos la definición así como las propiedades básicas de la homología cíclica. Un hecho que queremos destacar es el cálculo de la homología cíclica del álgebra graduada  $k[x]/(x^{m+1})$ . En los dos libros básicos [Lod] y [Wei] que citamos así como en [Vi] se encuentra planteado solamente.

Existen diferentes maneras de definir la homología Cíclica, nosotros partiremos de un complejo simplificado.

**Definición 1.55.** Sea  $A$  una  $k$  álgebra unital. Definimos

$$B : A \otimes A^{\otimes n} \longrightarrow A \otimes A^{\otimes n+1}$$

por medio de  $B(a_0, \dots, a_n) = \sum (-1)^{in} (1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes \dots \otimes a_{i-1}) - (-1)^{(i-1)n} (a_{i-1} \otimes 1 \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n \otimes a_0 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-2})$ .

Se verifica que  $B \circ B = 0$  y  $B \circ b + b \circ B = 0$ .

**Definición 1.56.** Sea el bicomplejo  $\mathcal{B}(A)$

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow b \\
 A \otimes A^{\otimes 2} & \longleftarrow & A \otimes A & \xleftarrow{B} & A \\
 \downarrow b & & \downarrow & & \\
 A \otimes A & \longleftarrow & A & \xleftarrow{B} & \\
 \downarrow b & & & & \\
 A & & & & 
 \end{array}$$

Definimos la homología Cíclica de  $A$  como  $HC_n(A) = H_n(\text{Tot}(\mathcal{B}(A), B + b))$ .

**Observación.** Es claro que la homología de las columnas de  $\mathcal{B}(A)$  calculan la homología de Hochschild de  $A$ . Si reemplazamos las columnas del complejo  $\mathcal{B}(A)$  por el complejo de Hochschild reducido obtenemos que la homología

cíclica es isomorfa a la homología del bicomplejo  $\overline{\mathcal{B}}(A)$

$$\overline{\mathcal{B}}(A) : \begin{array}{ccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\ & A \otimes \overline{A}^2 & \xleftarrow{\overline{B}} & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\quad} & A \\ & \downarrow b & & \downarrow b & & \\ & A \otimes \overline{A} & \xleftarrow{\overline{B}} & A & & \\ & \downarrow & & & & \\ & A & & & & \end{array}$$

donde  $\overline{A} = A/k$  y  $B(a_0, \dots, a_n) = \sum (-1)^{in} (1 \otimes \overline{a}_i \otimes \dots \otimes \overline{a}_n \otimes \overline{a}_0 \otimes \dots \otimes \overline{a}_{i-1})$ . De manera más precisa tenemos el siguiente Teorema.

**Teorema 1.57.** *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra unital entonces*

$$HC_n(A) = H_n(\text{Tot}(\overline{\mathcal{B}}(A))).$$

**Prueba.** Como el morfismo de álgebras  $\pi : A \rightarrow \overline{A}$  se extiende a un morfismo de bicomplejos  $\pi : \mathcal{B}(A) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(A)$  y las columnas de  $\mathcal{B}(A)$  y  $\overline{\mathcal{B}}(A)$  son quasi isomorfias entonces las homología de los complejos  $\mathcal{B}(A)$  y  $\overline{\mathcal{B}}(A)$  son isomorfias. ■

**Ejemplo 1.58.** Si  $A = k$  obtenemos  $HC_n(k)$  es  $k$  en grado par y cero en grado impar. De manera general tenemos

**Proposición 1.59.** *Para toda  $k$ -álgebra conmutativa con unidad se cumple*

$$HC_1(A) \simeq \frac{\Omega_A^1}{dA}$$

**Prueba.** [Lod, Proposición 2.1.14]. ■

**Teorema 1.60.** *Dado una  $k$ -álgebra  $A$  existe una secuencia exacta larga*

$$\dots \longrightarrow HC_{n-1}(A) \longrightarrow HH_n(A) \xrightarrow{I} HC_n(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} \dots$$

**Prueba.** Es suficiente tomar la secuencia exacta larga en homología de

$$0 \longrightarrow (C_*(A), b) \longrightarrow (CC_*(A), b + B) \longrightarrow (CC_{*-2}(A), b + B) \longrightarrow 0$$

■

**Observación.** Es claro que si  $f : A \rightarrow A'$  es un morfismo de  $k$ -álgebras entonces este induce un morfismo de complejos  $CC_n(f) : CC_n(A) \rightarrow CC_n(A')$ .

A continuación veremos la homología cíclica en el caso suave

**Lema 1.61.** *Sea  $A$  una  $k$ -álgebra conmutativa con unidad. Entonces el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{A/k}^n & \xrightarrow{\psi} & HH_n(A) \\ \downarrow d & & \downarrow B \\ \Omega_{A/k}^{n+1} & \xrightarrow{\psi} & HH_{n+1}(A), \end{array}$$

donde  $\psi(r_0 dr_1 \wedge \dots \wedge dr_n) = [(r_0 \otimes r_1) * \dots * (1 \otimes r_n)]$ , es conmutativo.

**Prueba.** [Wei, Lema 9.8.10].

■

**Observación.** La aplicación  $(1/n!)\pi$  de Loday Quillen induce un morfismo de bicomplejos.

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ A \otimes \bar{A}^2 \xleftarrow{B} A \otimes \bar{A} \xleftarrow{B} A \\ \downarrow b \quad \downarrow b \\ A \otimes \bar{A} \xleftarrow{B} A \\ \downarrow b \\ A \end{array} & \xrightarrow{(1/n!)\pi} & \begin{array}{c} \vdots \\ \downarrow \\ \Omega^2 \xleftarrow{d} \Omega^1 \xleftarrow{d} \Omega^0 \\ \downarrow 0 \quad \downarrow \\ \Omega^1 \xleftarrow{d} \Omega^0 \\ \downarrow 0 \\ \Omega_0 \end{array} \end{array} \quad (1.3)$$

En el caso suave usando el hecho de que  $\psi$  en cada columna induce un isomorfismo  $\Omega_A^n \simeq HH_n(A)$  (ver Teorema 1.51) tenemos :

**Teorema 1.62.** *Si  $A$  es un álgebra e.t.f suave sobre  $k$  entonces*

$$HC_n(A) = \frac{\Omega_A^n}{d\Omega_A^{n-1}} \oplus H_{DR}^{n-2}(A) \oplus \dots$$

**Prueba.** Basta tomar las homología de los complejos totales en 1.3. ■

**Observación.** Para ver algunos ejemplos más analizaremos la definición de la homología cíclica en el caso graduado.

De la definición vemos que  $C(A)$  y  $CC(A)$  se descomponen en  $C(A) = \bigoplus_i C(A)_i$  y  $CC(A) = \bigoplus_i CC(A)_i$ , donde

$$(A \otimes \bar{A}^n)_i = \bigoplus_{\sum i_j=i} A_{i_0} \otimes \bar{A}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{A}_{i_n}.$$

Lo que si es menos obvio es el Teorema que enunciamos a continuación.

**Teorema 1.63.** *Sea  $A$  un álgebra graduada unital sobre  $k \supset \mathbb{Q}$ . Entonces la secuencia SBI se descompone en*

$$0 \longrightarrow HC_{n-1}(A)_i \longrightarrow HH_n(A)_i \xrightarrow{I} HC_n(A)_i \xrightarrow{S} 0,$$

$\forall i \geq 1$ .

**Prueba.** [Wei, Teorema 9.9.1]. ■

Continuemos con nuestro ejemplo.

**Ejemplo 1.64.** Sea  $A = \frac{k[x]}{\langle x^{m+1} \rangle}$ , entonces por definición tenemos

$$\Omega_A^1 = \frac{\Omega_{k[x]}^1}{d(x^{m+1}) + x^{m+1} \cdot \Omega_{k[x]}^1}.$$

Como  $d(x^{m+1}) = (m+1)x^m dx$ , usando el isomorfismo  $\Omega_{k[x]}^1 \simeq k[x]$ , la igualdad anterior es equivalente a

$$\Omega_A^1 = \frac{k[x]}{\langle x^m \rangle},$$

y la aplicación  $d : A \rightarrow \Omega_A^1$  quedaria definida como  $\bar{x}^k \mapsto k\bar{x}^{k-1}$ . Para todo  $\bar{x}^k$  en  $\Omega_A^1$  con  $k < m$  podemos tomar  $(1/(k+1))\bar{x}^{k+1} \in A$  no nulo, y tenemos que  $d((1/(k+1))\bar{x}^{k+1}) = \bar{x}^k$ . Entonces  $d(A) = \Omega_A^1$ . Por lo tanto de la Proposición 1.59 obtenemos

$$HC_1(A) = \frac{\Omega_A^1}{dA} = 0.$$

Definamos los módulos  $\tilde{H}H_n(A) := \frac{HH_n(A)}{HH_n(A_0)}$  y  $\tilde{H}C_n(A) := \frac{HC_n(A)}{HC_n(A_0)}$ . De las secuencias exactas

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_0(A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}H_1(A) \longrightarrow \tilde{H}C_1(A) \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_1(A) \longrightarrow \tilde{H}H_2(A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}C_2(A) \longrightarrow 0$$

como  $HC_1(A) = 0$  se sigue que

$$\tilde{H}C_0(A) \simeq \tilde{H}C_2(A) \simeq \tilde{H}H_2(A) \simeq \tilde{H}H_1(A).$$

Debido que  $A_0 = k$  entonces  $HH_n(A_0) = 0$  para todo  $n > 0$ . Esto significa que  $\tilde{H}H_n(A) = HH_n(A)$  para todo  $n > 0$ . Por lo tanto

$$\tilde{H}C_0(A) \simeq \tilde{H}C_2(A)_k \simeq HH_2(A) \simeq HH_1(A).$$

El isomorfismo  $\tilde{H}C_0(A) \simeq HH_1(A)$  prueba que  $HC_0(A) = HC(A_0) \oplus HH_1(A)$ . Debido a que  $HC_0(A_0) \oplus HH_1(A)$  y  $A = HH_0(A)$  son espacios vectoriales de igual dimensión entonces  $HC_0(A) \simeq HH_0(A)$ .

De la secuencia

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_2(A) \xrightarrow{\cong} HH_3(A) \xrightarrow{0} \tilde{H}C_3(A)_k \longrightarrow 0,$$

como  $\dim_k(\tilde{H}C_2(A)) = \dim_k(HH_2(A)) = \dim_k(HH_n(A))$  para todo  $n > 0$  entonces  $\tilde{H}C_3(A) = 0$ .

Admitamos como hipótesis inductiva que  $\tilde{H}C_n(A) \simeq HH_n(A)$  para  $n$  par y  $\tilde{H}C_{n+1} = 0$ . De la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_{n+1}(A) \xrightarrow{0} HH_{n+2}(A) \xrightarrow{\cong} \tilde{H}C_{n+2}(A) \longrightarrow 0$$

como  $\tilde{H}C_{n+1}(A) = 0$ , por hipótesis inductiva, entonces  $HC_{n+2}(A) \simeq HH_{n+2}(A)$ . Finalmente de la secuencia

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_{n+2}(A) \xrightarrow{\cong} HH_{n+3}(A) \xrightarrow{0} \tilde{H}C_{n+3}(A) \longrightarrow 0$$

como  $\dim_k(\tilde{H}C_{n+2}(A)) = \dim_k(HH_{n+2}(A)) = \dim_k(HH_{n+3})$  entonces  $\tilde{H}C_{n+3}(A) = 0$ . Esto finaliza la prueba de inducción. Como  $HC_0(A) = HH_0(A)$  de la ecuación

$$HC_n(A) = HC_n(A_0) \oplus \tilde{H}C_n(A)$$

para  $n \geq 1$  y el hecho que  $A_0 = k$  se prueba que

$$HC_n(A) = \begin{cases} HH_0(A) & \text{si } n=0 \\ HH_n(A) \oplus k & \text{si } n \text{ es par} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases} \quad (1.4)$$

**Definición 1.65.** Dada la  $k$ -álgebra  $A$ , definamos el complejo periódico

$$CP(A) : \begin{array}{ccccccc} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longleftarrow & A \otimes \bar{A}^2 & \longleftarrow & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A \\ & & \downarrow^{b+d} & & \downarrow & & \\ \cdots & \longleftarrow & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\ & & \downarrow^b & & & & \\ & & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\ & & \downarrow^b & & & & \\ & & A & & & & \end{array}$$

y la homología cíclica periódica  $HP_n(A) = H_n(CP(A))$ .

**Definición 1.66.** Definamos el complejo periódico negativo, al cual denotaremos como  $CN(A)$ , de la siguiente forma

$$CN(A) : \begin{array}{ccccccc} & & \cdots & & \cdots & & \cdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \cdots & \longleftarrow & A \otimes \bar{A}^2 & \xleftarrow{B} & A \otimes \bar{A} & & \\ & & \downarrow^b & & \downarrow^b & & \\ \cdots & \longleftarrow & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\ & & \downarrow^b & & & & \\ & & A \otimes \bar{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\ & & \downarrow^b & & & & \\ & & A & & & & \end{array}$$

y la homología cíclica negativa como  $HN_n(A) = H_n(CN(A))$ .

**Observación.** De las definiciones anteriores tenemos las secuencias exactas cortas

$$0 \longrightarrow CN_*(A) \longrightarrow CP_*(A) \longrightarrow CC_{*-2}(A) \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow CN_{*+2}(A) \longrightarrow CN_*(A) \longrightarrow (C(A), b) \longrightarrow 0,$$

las cuales proporcionan una secuencia exacta larga que relaciona sus homología.

### 1.3. Método de Cálculo

Desarrollamos la teoría de la homología de Hochschild y cíclica para *álgebras diferenciales graduadas*. Este estudio nos lleva a conocer la homología cíclica y Hochschild para álgebras de la forma  $R/I$ , donde  $R$  es un anillo r.l.e.t.f. e  $I$  es un ideal de *tipo intersección completa*. Presentamos la definición de un álgebra diferencial graduada, y calculamos el primer módulo de diferenciales de Kähler graduado para álgebras de la forma  $\wedge V$ , y  $R \otimes \wedge V$  donde  $V$  es un espacio vectorial graduado. Finalmente desarrollamos las herramientas necesarias para poder demostrar una versión graduada del Teorema de Hochschild Kostant Rosenberg, presentamos un bosquejo de la demostración de la descomposición de Hodge de la homología de Hochschild y cíclica. Esta descomposición se realiza de la siguiente manera : El complejo cíclico de  $R/I$  se reemplaza por el complejo cíclico de  $R \otimes \wedge(V)$ , que es el complejo cíclico de  $(T(R \otimes \wedge(V)), \partial, b, B)$ . Este es quasiisomorfo a un complejo de la forma  $(\xi, \delta, 0, \beta)$ . El complejo cíclico y de Hochschild de este se descomponen en ciertos complejos  $\xi_{j+k}^j$  y  $\xi^j$  que son quasiisomorfos a  $L_j$  y  $D_j$ . De aquí se sigue que estos complejos calculan la homología cíclica y de hochschild del álgebra  $R/I$ .

**Observación.** Recordemos que una  $k$ -álgebra diferencial graduada (A.D.G) se define como un álgebra graduada con un morfismo  $\partial : A_n \rightarrow A_{n-1}$  que cumple la regla de Leibniz

$$\partial(ab) = \partial(a)b + (-1)^{|a|}a\partial(b)$$

y es un diferencial, es decir  $\partial \circ \partial = 0$ . Entre los ejemplos que nos interesa se encuentra el siguiente

**Ejemplo 1.67.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal. Definamos  $N = \bigoplus_{i=1}^r R \cdot e_i$  y el complejo

$$K(f_1, \dots, f_r) = \wedge N = \bigoplus_{p=0}^r \wedge^p N,$$

donde  $d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} d(e_{i_j}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e_{i_j}} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ , con  $d(e_{i_j}) = f_j$ . El producto en  $K(f_1, \dots, f_r)$  se define como  $\omega \cdot \eta := \omega \wedge \eta$ . También se prueba que el diferencial  $d$  cumple  $d(\omega \wedge \eta) = d(\omega) \wedge \eta + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge d(\eta)$ .

**Observación.** Notemos que si  $V = \bigoplus_{i=1}^r k \cdot e_i$  entonces  $N = R \otimes V$  y  $K \cong R \otimes \wedge V$  como álgebras graduadas. Más aún  $K(f_1, \dots, f_r) = \bigotimes_{i=1}^r K(f_i)$ . A continuación presentaremos un teorema que será pieza fundamental en las propiedades que presentamos en el segundo Capítulo. Este Teorema se llama *criterio de exactitud* y es enunciado a continuación

**Teorema 1.68.** *Sea  $A$  un anillo noetheriano. Un complejo de longitud finita de módulos libres (de tipo finito)*

$$M : 0 \longleftarrow M_0 \longleftarrow M_1 \longleftarrow \dots \longleftarrow M_n \longleftarrow 0$$

*es exacto excepto posiblemente en el nivel 0 si al localizar en cada primo  $P$  de profundidad  $(P) \leq n - 1$ ,  $M_P$  es exacto salvo el nivel cero.*

**Prueba.** Corolario 1.4.14 de [BH]. ■

**Corolario 1.69.** *Sea*

$$M : 0 \longrightarrow M^0 \longrightarrow M^1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M^m \longrightarrow \dots$$

*un complejo de módulos libres f.g. y  $H^i(M_P) = 0$  para todo  $P$  con  $ht(P) < m$ , entonces  $H^i(M) = 0$  para todo  $i < m$*

**Prueba.** Se sigue del teorema anterior. ■

Para ilustrar su uso presentamos la demostración del siguiente lema.

**Lema 1.70.** *Sea  $(R; \eta)$  es un anillo r.l.e.t.f. Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  donde  $\{f_1, \dots, f_r\}$  es una secuencia regular entonces  $H^i(K(f_1, \dots, f_r), d) = 0$  para todo  $i \neq m$  y  $H^r(K(f_1, \dots, f_r)) = R/\langle f_1, \dots, f_r \rangle$ .*

**Prueba.** La demostración se basa en el **Criterio de Exactitud**.

Como  $K(f_1, \dots, f_r)$  es un complejo de módulos libres f.g de longitud  $r$  aplicamos el Teorema 1.68 cuando  $n = r$ .

Sea  $P$  un primo tal que  $\text{profundidad}(P) \leq r-1$ . Como  $\text{profundidad}(I) = r$ , entonces  $P \not\subseteq I$ . Es decir algún  $f_i$  no esta en  $P$ . Sin perdida de generalidad podemos asumir que el elemento  $f_r$  es unidad en el anillo  $R_P$ . Como  $K(f_1, \dots, f_r) = \bigotimes_{i=1}^r K(f_i)$  entonces podemos escribir el complejo  $K(f_1, \dots, f_r)$  de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccc}
 \dots & & \dots \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_2 & \xleftarrow{f_r} & (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_2 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_1 & \xleftarrow{f_r} & (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_1 \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_0 & \xleftarrow{f_r} & (K(f_1, \dots, f_{r-1}))_0
 \end{array}$$

Debido a que el elemento  $f_r$  es unidad, al calcular los módulos de homología de las filas del complejo anterior obtenemos cero en todo nivel. Es decir el complejo  $K(f_1, \dots, f_r)_P$  es exacto en  $R_P$ . Por lo tanto, usando el criterio de exactitud obtenemos que el complejo  $H^i(K(f_1, \dots, f_r)) = 0$  para todo  $i \neq r$ . ■

A continuación definimos la homología de Hochschild y la cíclica para álgebras diferenciales graduadas.

**Definición 1.71.** Sea  $(A, \partial)$  una  $k$ -álgebra diferencial graduada. Definamos en

$$C_{p,q}(A) = (A \otimes \bar{A}^{\otimes p})_q = \bigoplus A_{i_0} \otimes \bar{A}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{A}_{i_p},$$

donde la suma recorre las  $(p+1)$ -tuplas  $(i_0, \dots, i_p)$  tal que  $i_0 + \dots + i_p = q$ , los morfismos

$$\partial(a_{i_0} \otimes \bar{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p}) = \sum_{j=0}^n (-1)^{i_0 + \dots + i_{j-1}} a_{i_0} \otimes \dots \otimes \overline{\partial(a_{i_j})} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p},$$

$$b(a_{i_0} \otimes \bar{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p}) = \sum_{j=0}^p (-1)^j a_{i_0} \otimes \bar{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_j} \bar{a}_{i_{j+1}} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p} +$$

$$(-1)^{i_p(i_0+\dots+i_{p-1})+p} a_{i_p} a_{i_0} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_{p-1}}.$$

**Observación.** Se verifica que  $\partial \circ \partial = 0$ ,  $b \circ b = 0$ ,  $\partial \circ b - b \circ \partial$ .

**Definición 1.72.** Definamos el complejo de Hochschild del A.D.G  $(A, \partial)$  como el complejo total de

$$T(A) : \begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{20} & \xleftarrow{\partial} & C_{21} & \xleftarrow{\partial} & C_{22} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\ C_{10} & \xleftarrow{-\partial} & C_{11} & \xleftarrow{-\partial} & C_{12} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b & & \\ C_{00} & \xleftarrow{\partial} & C_{01} & \xleftarrow{\partial} & C_{02} & \xleftarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

Acá  $C_{pq} := C_{p,q}(A)$ . La homología de Hochschild del A.D.G  $(A, \partial)$  se define como  $HH_n(A, \partial) := H_n(Tot(T(A)))$ .

**Definición 1.73.** Definamos  $B : C_{p,q}(A) \rightarrow C_{p+1,q}(A)$  como

$$B(a_{i_0} \otimes \bar{a}_{i_1} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p}) = \sum_{j=0}^p (-1)^{e(j)} 1 \otimes \bar{a}_{i_j} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_p} \otimes \bar{a}_{i_0} \otimes \dots \otimes \bar{a}_{i_{j-1}},$$

donde  $e(j) = jp + \sum_{h=j}^p i_h (\sum_{k \neq h} i_k)$ .

**Observación.** Se verifica que  $b \circ B + B \circ b = B \circ \partial - \partial \circ B = 0$ ; y  $B \circ B = 0$ .

**Definición 1.74.** Definamos el complejo cíclico del A.D.G  $(A, \partial)$  como

$$\begin{array}{ccccccc} \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ Tot(T(A))_2 & \xleftarrow{\quad} & Tot(T(A))_1 & \xleftarrow{B} & Tot(T(A))_0 & & \\ \downarrow b+d & & \downarrow & & & & \\ Tot(T(A))_1 & \xleftarrow{B} & Tot(T(A))_0 & & & & \\ \downarrow b+d & & & & & & \\ Tot(T(A))_0 & & & & & & \end{array}$$

La homología cíclica del A.D.G  $(A, \partial)$  es por definición

$$HC_n(A, \partial) := H_n(Tot(Tot(T(A), b + \partial), B)).$$

**Observación.** Generalizar la estructura anterior nos lleva a la siguiente definición.

**Definición 1.75.** Dado el bicomplejo  $(M_{p,q}; b, d)$

$$M : \begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ M_{10} & \xleftarrow{d} & M_{11} & \xleftarrow{\quad} & M_{12} & \xleftarrow{\quad} & \cdots \\ & \downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow & \\ M_{00} & \xleftarrow{d} & M_{01} & \xleftarrow{\quad} & M_{02} & \xleftarrow{\quad} & \cdots \end{array}$$

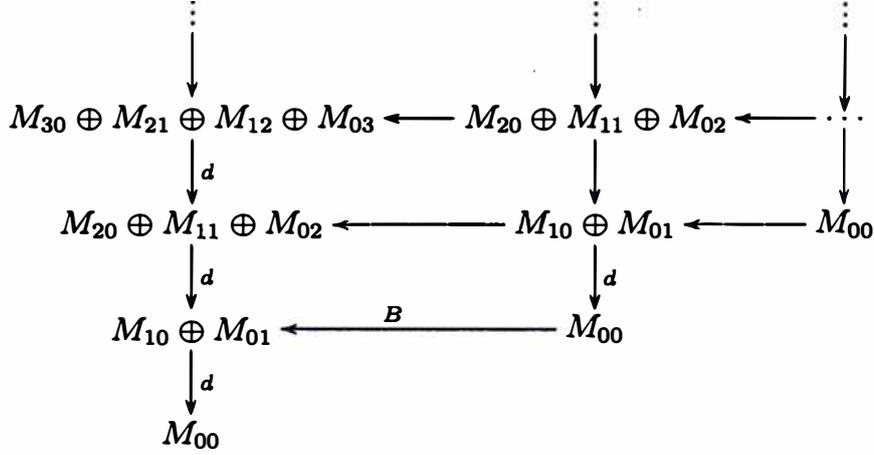
Definimos  $HH_n(M) = H_n(Tot(M), b + d)$ .

**Definición 1.76.** Sean  $(M_{p,q}, b, d)$  y  $B : M_{p,q} \rightarrow M_{p+1,q}$ , con  $B \circ B = B \circ d + d \circ B = B \circ b + b \circ B = 0$ . Definamos el bicomplejo  $D$

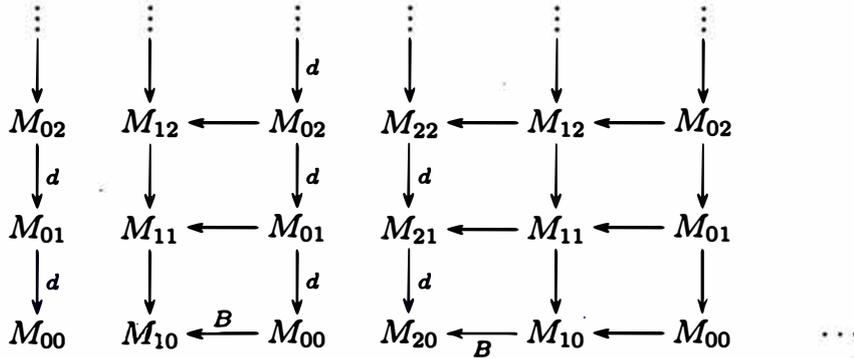
$$\begin{array}{ccccccc} & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ M_2 & \xleftarrow{\quad} & M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & & \\ & \downarrow b+d & & \downarrow & & & \\ M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & & & & \\ & \downarrow b+d & & & & & \\ M_0 & & & & & & \end{array}$$

donde  $M_n = \bigoplus_{p+q=n} M_{p,q}$ ,  $B : M_n \rightarrow M_{n+1}$  y  $HC_n(M) = H_n(Tot(D))$ .

**Observación.** Veamos lo que sucede si  $b = 0$ . Para dimensiones bajas, el complejo  $D$  se expresa como



Analizando los morfismos vemos que  $D$  se descompone en los complejos  $E_*^0$ ,  $E_*^1$  y  $E_*^2$ , ... los cuales son



respectivamente. De aquí obtenemos que  $HC_0(D)$  es la homología en nivel cero del primer complejo,  $HC_1(D)$  resulta la suma de la homología de grado uno del primer complejo y cero del segundo complejo. Finalmente  $HC_2(D)$  resulta la suma de la homología en grado dos del primer complejo, en grado uno del segundo y cero del tercer complejo. En general tenemos:

$$Tot(D)_n = \bigoplus_{i \geq 0} M_{n-2i} = \bigoplus_{i \geq 0} \{ \bigoplus_{n-2i} M_{p,q} \}, \text{ y como}$$

$$M_n : M_{n,0} \oplus M_{n-1,1} \oplus M_{n-2,2} \oplus \dots \oplus M_{2,n-2} \oplus M_{1,n-1} \oplus M_{0,n}$$

$$M_{n-2} : 0 \oplus M_{n-2,0} \oplus M_{n-3,1} \oplus \dots \oplus M_{1,n-3} \oplus M_{0,n-2} \oplus 0$$

$$M_{n-4} : 0 \oplus 0 \oplus M_{n-4,0} \oplus \dots \oplus M_{0,n-4} \oplus 0 \oplus 0$$

entonces  $Tot(D)_n = \bigoplus_{p+q=n} \{ \bigoplus_{i \geq 0} M_{p-i, q-i} \}$ . Por lo tanto, si definimos  $E_q^p := \bigoplus_{i \geq 0} M_{p-i, q-i}$  tenemos que  $(E_*^p, B + b)$  es un bicomplejo. En efecto si  $(a_{p, q+1}, a_{p-1, q}, \dots, a_{n-k-i, k+1-i}, a_{n-k-(i+1), k+1-(i+1)}, \dots) \in E_{q+1}^p$  entonces

$$(B + d)(a_{p, q+1}, a_{p-1, q}, \dots, a_{n-k-i, k+1-i}, a_{n-k-(i+1), k+1-(i+1)}, \dots) =$$

$$(da_{p, q+1} + Ba_{p-1, q}, \dots, da_{n-k-i, k+1-i} + Ba_{n-k-(i+1), k+1-(i+1)}, \dots) \in E_q^p.$$

Mas aún  $Tot(D)_n = \bigoplus_{p+q=n} E_q^p$  y  $HC_n(M) = \bigoplus_{p=0}^n H_{n-p}(E_*^p)$ .

La afirmación anterior se refleja en el siguiente diagrama

$$\begin{array}{cccccc} Tot_{n+1} = & E_{n+1}^0 \oplus & E_{n+1}^1 \oplus & E_{n+1}^2 & \oplus \dots \oplus & E_0^{n+1} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Tot_n = & E_n^0 \oplus & E_n^1 \oplus & E_n^2 & \oplus \dots \oplus & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ Tot_{n-1} = & E_{n-1}^0 \oplus & E_{n-1}^1 & E_{n-1}^2 & \oplus \dots \oplus & 0 \end{array}$$

el cual en cada sumando se escribe como

$$\begin{array}{c} E_{k+1}^{n-k} : M_{n-k, k+1} \\ \downarrow \\ M_{n-k, k} \longleftarrow M_{n-k-1, k} \\ \downarrow \\ M_{n-k-1, k-1} \longleftarrow M_{n-k-2, k-1} \\ \downarrow \\ M_{n-k-2, k-2} \longleftarrow \end{array}$$

Con ello vemos en la definición anterior que si  $b = 0$ , la homología cíclica se descompone en suma de la homología de ciertos complejos  $(E_*^p, d + B)$ . La homología de Hochschild tiene una descomposición similar.

**Definición 1.77.** Dado  $(M_{p, q}, b, d)$  y  $B : M_{p, q} \rightarrow M_{p+1, q}$ , donde  $B \circ B = B \circ d + d \circ B = B \circ b + b \circ B = 0$ . Definamos el bicomplejo negativo  $CN$

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \dots & & \dots & & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_3 & \xleftarrow{B} & M_2 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & d+b & & d+b & \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_2 & \xleftarrow{B} & M_0 & \\
& & & \downarrow & & \downarrow & \\
& & & d+b & & & \\
& M_1 & \xleftarrow{B} & M_0 & & & \\
& \downarrow & & & & & \\
& d+b & & & & & \\
& M_0 & & & & & 
\end{array}$$

y la homología como  $HN_*(M) := H_*(Tot(CN))$  como la homología cíclica negativa.

**Definición 1.78.** Dado el bicomplejo  $(M_{p,q}, b, d)$  y  $B$  como en la Definición 1.76 definamos los complejos  $L_j$  de la siguiente manera

$$M_{j,0} \xleftarrow{d} M_{j,1} \xleftarrow{d} M_{j,2} \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} M_{j,*} \xleftarrow{d} \dots$$

y el bicomplejo  $(M_{p,q}, d, B)$  como

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \dots & & \dots & & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & d & & d & & d \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_{2,1} & \xleftarrow{B} & M_{1,1} & \xleftarrow{B} & M_{0,1} \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & d & & d & & d \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_{2,0} & \xleftarrow{B} & M_{1,0} & \xleftarrow{B} & M_{0,0} \\
& & & & & & & 
\end{array}$$

Finalmente definamos el complejo  $M^{\geq p}$  como

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \dots & & \dots & & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & d & & d & & d \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_{p+2,1} & \xleftarrow{B} & M_{p+1,1} & \xleftarrow{B} & M_{p,1} \\
& & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
& & & d & & d & & d \\
& \dots & \xleftarrow{B} & M_{p+2,0} & \xleftarrow{B} & M_{p+1,0} & \xleftarrow{B} & M_{p,0} \\
& & & & & & & 
\end{array}$$

**Proposición 1.79.** Sea  $(M_{p,q}, b)$  y  $B : M_{p,q} \longrightarrow M_{p+1,q}$  como en la Definición 1.76. Si  $b = 0$  entonces

$$HH_n(M) = \bigoplus_{p=0}^n H_{n-p}(L_p),$$

y

$$HC_n(M) = \bigoplus_{p=0}^n H_{n-p}(E_*^p).$$

**Prueba.** Se sigue del análisis anterior. ■

**Proposición 1.80.** Sea  $(M_{p,q}, b, d)$  y  $B : M_{p,q} \longrightarrow M_{p+1,q}$  como en la Definición 1.76. Si  $b = 0$  entonces

$$HN_k(M) = \prod_{p \in \mathbb{Z}} H_{k-2p}(M^{\geq p})$$

**Prueba.** Similar a la prueba anterior. ■

Para grados bajos basta analizar la descomposición de la homología del siguiente complejo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \cdots \longleftarrow & \cdots \longleftarrow \\
 & & M_{30} \oplus M_{21} \oplus M_{12} \oplus M_{03} & \longleftarrow & M_{20} \oplus M_{11} \oplus M_{02} & & \\
 & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 \cdots \longleftarrow & M_{30} \oplus M_{21} \oplus M_{12} \oplus M_{03} & \longleftarrow & M_{20} \oplus M_{11} \oplus M_{02} & \longleftarrow & M_{10} \oplus M_{01} & \\
 & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & \\
 \cdots \longleftarrow & M_{20} \oplus M_{11} \oplus M_{02} & \longleftarrow & M_{10} \oplus M_{01} & \longleftarrow & M_{00} & \\
 & \downarrow d & & \downarrow d & & & \\
 \cdots \longleftarrow & M_{10} \oplus M_{01} & \longleftarrow & M_{00} & & & \\
 & \downarrow d & & & & & \\
 \cdots \longleftarrow & M_{00} & & & & & 
 \end{array}$$

La definición de la homología cíclica nos permite apreciar de manera inmediata la siguiente proposición

**Proposición 1.81.** *Dada  $(A, \partial)$  una  $k$ -álgebra diferencial graduada entonces existe una secuencia exacta larga*

$$\cdots \longrightarrow HH_n(A, \partial) \xrightarrow{I} HC_n(A, \partial) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A, \partial) \xrightarrow{B} \cdots$$

**Prueba.** Es suficiente tomar homología en la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow Tot(T(A))_* \longrightarrow Tot(Tot(T(A)), B)_* \longrightarrow Tot(Tot(T(A)), B)_{*-2} \longrightarrow 0$$

■.

**Observación.** En el teorema que viene a continuación usamos la siguiente propiedad : si  $f$  es un morfismo de bicomplejos el cual restringido a cada columna o fila es un quasiisomorfismo entonces  $f$  induce un quasiisomorfismo de bicomplejos.

**Teorema 1.82.** *Sea  $f : (A, \partial) \rightarrow (B, \partial)$  un quasiisomorfismo y  $k$  un cuerpo entonces  $f$  induce un isomorfismo en la homología de Hochschild y por lo tanto en la Cíclica.*

**Prueba.** En los complejos de Hochschild  $T(A), T(B)$  las filas resultan ser  $(A; \partial)^\otimes, (B; \partial)^\otimes$ , y  $f : (A, \partial) \rightarrow (B, \partial)$  es un quasi isomorfismo. Entonces las fórmulas de Künneth indican que  $f : T(A) \rightarrow T(B)$  establece un quasiisomorfismo a nivel de cada fila de los complejos  $T(A)$  y  $T(B)$ . Esto significa que tenemos un quasiisomorfismo entre los bicomplejos  $T(A)$  y  $T(B)$  - de acuerdo a la observación anterior-. De aquí, del mismo modo, se prueba también que  $f$  establece un quasiisomorfismo entre la homología cíclica de  $A$  y  $B$ . ■

A continuación desarrollaremos los conceptos necesarios para presentar una generalización del Teorema de H.K.R (Teorema 1.51) para el caso graduado.

**Definición 1.83.** Sea  $(A, \partial)$  una  $k$ -álgebra diferencial graduada. Definamos el  $(A, \partial)$ -módulo graduado

$$\Omega_{(A, \partial)}^1 := \frac{A \otimes A[-1]}{N},$$

donde  $N = \langle 1 \otimes \overline{ab} - (-1)^{|a|} a \otimes \overline{b} - (-1)^{|a||b|} b \otimes \overline{a} \rangle$ ,  $a, b$  homogéneos,  $A[-1] = \bigoplus_n A[-1]_n$  y  $A[-1]_n = A_{n-1}$ .

**Definición 1.84.** Sea  $(A, \partial)$  una  $k$ -A.D.G y  $M$  un  $(A, \partial)$ -módulo graduado. Diremos que una aplicación  $k$ -lineal

$$D : (A, \partial) \rightarrow M$$

es una **derivación graduada** si

$$D(a \cdot b) = (-1)^{|a|} a \cdot D(b) + (-1)^{|a||b|} b \cdot D(a).$$

**Ejemplo 1.85.** Sea  $(A, \partial)$  una  $k$ -A.D.G. La aplicación

$$d : (A, \partial) \rightarrow \Omega_{(A, \partial)}^1$$

definida como  $d(a) = \overline{1 \otimes \bar{a}}$  cumple la definición anterior. La relación que guarda  $\partial$  y  $d$  es la siguiente : Si en  $A \otimes A[-1]$  definimos el diferencial

$$\partial_{A \otimes A}(a \otimes \bar{b}) = \partial(a) \otimes \bar{b} - (-1)^{|a|} a \otimes \overline{\partial(b)},$$

y denotamos por  $\delta$  la aplicación  $\partial$  en el  $\Omega_{(A, \partial)}$ . Entonces

$$d \circ \partial(a) + \delta \circ d(a) = \overline{1 \otimes \overline{\partial(a)}} + \delta(\overline{1 \otimes \bar{a}}) = \overline{1 \otimes \overline{\partial(a)}} - \overline{1 \otimes \overline{\partial(a)}} = 0.$$

**Nota.** Existen diferentes maneras de definir un derivada para el caso graduado; una que se encuentra en [Vi] y otra la de [Lod]. En esta parte se analiza la relación entre ellas; la que presentamos a continuación.

**Definición 1.86.** Definamos la aplicación  $\mu : A \otimes A \rightarrow A$  como  $\mu(a \otimes b) = a \cdot b$ , e  $I = \text{Ker}(\mu)$ .

**Lema 1.87.** Con la estructura de álgebra  $(a \otimes b) \cdot (x \otimes y) = (-1)^{|b||x|} ax \otimes by$ , definida en  $A \otimes A$  el ideal  $I$  es generado por  $a \otimes 1 - 1 \otimes a$ .

**Prueba.** En efecto si  $\mu(\sum_i a_i \otimes b_i) = \sum_i a_i \cdot b_i = 0$ , entonces

$$\sum_i (a_i \otimes b_i - a_i b_i \otimes 1) = \sum_i (a_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i - b_i \otimes 1)$$

■

**Lema 1.88.** Sea  $A$  un A.D.G., entonces  $\frac{A \otimes A}{N'} \simeq \frac{I}{I^2}$ , donde  $N$  se define de la siguiente manera  $N := \langle 1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a \rangle$ .

**Prueba.** Sea  $\alpha : A \otimes A \longrightarrow \frac{I}{I^2}$  definida como  $\alpha(a \otimes b) = a \otimes b - ab \otimes 1$ , de las igualdades

$$\alpha(c \cdot (a \otimes b)) = \alpha(ca \otimes b) = ca \otimes b - cab \otimes 1 = c \cdot \alpha(a \otimes b)$$

y

$$\begin{aligned} & \alpha(1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a) = \\ & 1 \otimes ab - ab \otimes 1 - (a \otimes b - ab \otimes 1) - (-1)^{|a||b|} (b \otimes a - ba \otimes 1) = \\ & 1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a + ab \otimes 1 = (1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1), \end{aligned}$$

tenemos que  $\alpha$  induce una aplicación  $\alpha : \frac{A \otimes A}{N'} \longrightarrow \frac{I}{I^2}$  a la cual también denominaremos  $\alpha$ . Ahora tomemos  $\beta : A \otimes A \longrightarrow \frac{A \otimes A}{N'}$  definida como  $\beta(a \otimes b) = \overline{a \otimes b}$ . Del hecho

$$-a \otimes 1 = 1 \otimes a \cdot 1 - a \otimes 1 - (-1)^{|a||1|} 1 \otimes a$$

tenemos que  $\beta(1 \otimes a - a \otimes 1) = \overline{1 \otimes a}$ . Por otro lado notemos que todo elemento  $x \in I^2$  se escribe como

$$x = \sum_i r_i(1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)r'_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) = \sum_i (-1)^{t_i} r_i r'_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1),$$

(ver Lema 1.87), pues

$$\begin{aligned} & (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)r'_i(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1) = \\ & (-1)^{|a_i||r'_i|} r'_i \otimes a_i b_i - (-1)^{|a_i|(|r'_i|+|b_i|)} r'_i b_i \otimes a_i - a_i r'_i \otimes b_i + a_i r'_i b_i \otimes 1 = \\ & (-1)^{|a_i||r'_i|} r'_i (1 \otimes a_i - a_i \otimes 1)(1 \otimes b_i - b_i \otimes 1), \end{aligned}$$

y como

$$\beta((1 \otimes a - a \otimes 1)(1 \otimes b - b \otimes 1)) = \overline{1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a + ab \otimes 1} \in N'$$

y  $\beta$  es  $A$  lineal. Entonces hemos definido una aplicación  $\beta : \frac{I}{I^2} \longrightarrow \frac{A \otimes A}{N'}$ . Ahora como

$$\beta \circ \alpha(\overline{a \otimes b}) = \beta(\overline{a \otimes b - ab \otimes 1}) = \overline{a \otimes b},$$

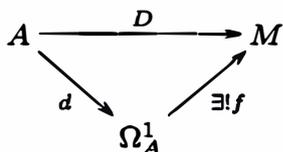
y

$$\alpha \circ \beta(\overline{1 \otimes a - a \otimes 1}) = \alpha(\overline{1 \otimes a}) = \overline{1 \otimes a - a \otimes 1}$$

concluimos la prueba del lema. ■

Una de las propiedades que se preservan del caso no graduado es la siguiente

**Lema 1.89.** *El  $A$ -módulo  $\Omega_A^1$  tiene la propiedad universal : Dado cualquier derivación  $D : A \rightarrow M$  existe un único  $f : \Omega_A^1 \rightarrow M$  morfismo de  $A$  módulos que hace que el diagrama*



conmute.

**Prueba.** Es suficiente definir  $f(a \otimes \bar{b}) = aD(b)$  ■

**Observación.** notemos que el morfismo  $d_1 : A \rightarrow \frac{A \otimes A}{N'}$  definido como  $d_1(a) = \overline{1 \otimes a}$  verifica la siguiente igualdad

$$d_1(ab) = ad_1(b) + (-1)^{|a||b|}bd_1(a).$$

Definamos la aplicación

$$d'(a) = (-1)^{|a|}d_1(a).$$

De la definición tenemos que

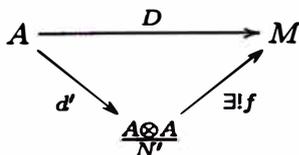
$$\begin{aligned} d'(ab) &= (-1)^{|a|+|b|}d_1(ab) = (-1)^{|a|+|b|}(ad_1(b) + (-1)^{|a||b|}bd_1(a)) = \\ &= (-1)^{|a|}a(-1)^{|b|}d_1(b) + (-1)^{|b|+|a||b|}b(-1)^{|a|}d_1(a) = \\ &= (-1)^{|a|}ad'(b) + (-1)^{|b|+|a||b|}bd'(a) \\ &= (-1)^{|a|}ad'(b) + (-1)^{|a||b|}bd'(a), \end{aligned}$$

es decir  $d'$  es una derivación.

**Lema 1.90.** *La derivada  $d' : A \rightarrow \frac{A \otimes A}{N'}$  cumple la propiedad universal : Para toda derivación graduada*

$$D : A \rightarrow M$$

existe un único morfismo  $f : \frac{A \otimes A}{N'} \rightarrow M$ , tal que el diagrama



conmute.

**Prueba.** Definamos la aplicación  $f_1 : A \otimes A \rightarrow M$  como  $f_1(a \otimes b) = (-1)^b aD(b)$ . Sea  $1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a$  un generador de  $N'$ , entonces

$$\begin{aligned} & f_1(1 \otimes ab - a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a) \\ &= (-1)^{|a|+|b|} D(ab) - (-1)^{|b|} aD(b) - (-1)^{|a||b|+|a|} bD(a) = \\ & (-1)^{|a|+|b|} ((-1)^{|a|} aD(b) + (-1)^{(|a|+1)|b|} bD(a)) - (-1)^{|b|} aD(b) - (-1)^{|a||b|+|a|} bD(a) \\ &= (-1)^{|b|} aD(b) + (-1)^{|a||b|+|a|} bD(a) - (-1)^{|b|} aD(b) - (-1)^{|a||b|+|a|} bD(a) = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f_1$  induce una aplicación en el cociente

$$f : \frac{A \otimes A}{N'} \rightarrow M,$$

más aún notemos que  $f \circ d'(a) = D(a)$ . Además es claro que  $f$  es única. ■

**Corolario 1.91.** El módulo  $\Omega_{(A,\partial)}^1$  es isomorfo al módulo graduado  $\frac{A \otimes A}{N'}$ .

**Prueba.** Se sigue directamente de la propiedad universal. ■

**Ejemplo 1.92.** Sea  $V$  un espacio vectorial graduado y  $\wedge V$  el álgebra simétrica libre en el sentido graduado, entonces  $\Omega_{\wedge V}^1 = \wedge V \otimes V[-1]$ . En efecto, definamos la aplicación

$$d : \wedge V \longrightarrow \wedge V \otimes V[-1]$$

como

$$d(v_1 \cdots v_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{|v_1|+\cdots+|v_{i-1}|+|\bar{v}_i|(|v_{i+1}|+\cdots+|v_n|)} v_1 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_n \otimes \bar{v}_i.$$

Sean  $x, y$  elementos en  $\wedge V$ . Sin pérdida de generalidad los podemos suponer que son de la forma  $x = v_1 \cdots v_n$  y  $y = w_1 \cdots w_m$ . Entonces

$$\begin{aligned} & d(v_1 \cdots v_n \cdot w_1 \cdots w_m) = \\ & \sum_{i=1}^n (-1)^a v_1 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_n \cdot y \otimes \bar{v}_i + \sum_{j=1}^m (-1)^b x \cdot w_1 \cdots \widehat{w}_j \cdots w_m \otimes \bar{w}_j, \end{aligned}$$

donde  $a = |v_1| + \cdots + |v_{i-1}| + |\bar{v}_i|(|v_{i+1}| + \cdots + |v_n| + |y|)$  y  $b = |x| + |w_1| + \cdots + |w_{j-1}| + |\bar{w}_j|(|w_{j+1}| + \cdots + |w_m|)$ . Como

$$v_1 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_n \cdot y = (-1)^{|w|(|v|-|v_i|)} y \cdot v_1 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_n,$$

entonces la igualdad anterior se escribe

$$(-1)^{|y||\bar{x}|}y \cdot d(x) + (-1)^{|x|}x \cdot d(y).$$

Esto indica que la aplicación  $d$  es una derivada.

Por otro lado, para toda derivada  $D : A \rightarrow M$  y  $x = v_1 \cdots v_n$  elemento en  $\wedge V$  se cumple que

$$D(x) = \sum_{i=1}^n (-1)^{|v_1|+\cdots+|v_{i-1}|+|\bar{v}_i|(|v_{i+1}|+\cdots+|v_n|)} v_1 \cdots \widehat{v}_i \cdots v_n \cdot D(v_i);$$

por lo tanto si definimos

$$f : \wedge V \otimes V[-1] \rightarrow M$$

como  $f(x \otimes \bar{v}) = xD(v)$  obtenemos que  $f \circ d = D$ . Esto significa que

$$\Omega_{\wedge V}^1 = \wedge V \otimes V[-1].$$

Entre los ejemplos que nos interesa se encuentra el ADG  $(A \otimes \wedge V, \partial)$ , en un caso particular, cuando  $A$  es un anillo r.l.e.t.f. En general tenemos el siguiente Lema.

**Lema 1.93.** *Sea  $A_0 \otimes \wedge V$  un A.D.G., entonces*

$$d : A_0 \otimes \wedge V \longrightarrow \Omega_A^1 := \Omega_{A_0}^1 \otimes \wedge V \oplus A_0 \otimes \Omega_{\wedge V}^1$$

*dado por  $d(a \otimes v) := da \otimes v + a \otimes dv$  es la derivada universal.*

**Prueba.** Notemos que  $\Omega_A^1$  tiene una estructura de  $A$  módulo, pues  $\Omega_{A_0}^1$  y  $\Omega_{\wedge V}^1$  tienen estructura de  $A_0$  y  $\wedge V$  módulos respectivamente, donde  $\Omega_{A_0}^1$  tiene grado uno. Ahora definamos la siguiente aplicación  $d : A \longrightarrow \Omega_A^1$  como  $d(a \otimes v) = da \otimes v + a \otimes dv$ . Veamos que  $d$  sea una derivación. En efecto, de las igualdades

$$d(a \otimes v \cdot b \otimes w) = d_{DR}(ab) \otimes vw + ab \otimes d_{DR}(vw) =$$

$$d(a)b \otimes vw + ad(b) \otimes vw + ab \otimes d(v)w + (-1)^{|v|}ab \otimes vd(w) =$$

$$d(a) \otimes v \cdot b \otimes w + a \otimes d(v) \cdot b \otimes w + (-1)^{|v|}a \otimes v \cdot d(b) \otimes w + (-1)^{|v|}a \otimes v \cdot b \otimes d(w) =$$

$$d(a \otimes v) \cdot b \otimes w + (-1)^{|v|}a \otimes v \cdot d(b \otimes w);$$

tenemos que  $d$  es una derivación según se define en [Vi]. A continuación veremos que  $d$  cumple la propiedad universal. En el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
A_0 & \xrightarrow{id \otimes 1} & A & \xrightarrow{D} & M \\
& \searrow d & & \searrow d & \nearrow \exists! f \\
& & \Omega_{A_0}^1 & \xrightarrow{id \otimes 1} & \Omega_A^1
\end{array}$$

claramente  $A_0 \hookrightarrow A$  y  $\Omega_{A_0}^1 \hookrightarrow \Omega_A^1$  (pues  $k$  es un cuerpo). Es decir  $D$  induce una derivación  $d_1 = D \circ (id \otimes 1)$  sobre  $A_0$  y por la propiedad universal existe una única aplicación  $f_1 : \Omega_{A_0}^1 \rightarrow M$ . El mismo análisis para  $\wedge V$  nos proporciona  $f_2 : \Omega_{\wedge V}^1 \rightarrow M$ . Definamos  $f : \Omega_A^1 \rightarrow M$  como  $f(adb \otimes v) = f_1(bda)v$ ,  $f(a \otimes dv) = af_2(v)$ , y como  $f(d(a) \otimes v + a \otimes d(v)) = f_1 d(a)v + af_2 d(v) = D(a \otimes 1)v + aD(1 \otimes v) = D(a \otimes v)$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
A & \xrightarrow{D} & M \\
& \searrow d & \nearrow \exists! f \\
& & \Omega_A^1
\end{array}$$

conmuta. La unicidad se sigue del hecho que  $f$  restricto a cada uno de los sumandos es único por la propiedad universal de  $\Omega_{A_0}^1$  y  $\Omega_{\wedge V}^1$  respectivamente.

**Lema 1.94.** *En  $\wedge V \otimes \wedge \bar{V} \otimes \wedge V$  existe un diferencial*

$$\delta : \wedge V \otimes \wedge^p \bar{V} \otimes \wedge V \rightarrow \wedge V \otimes \wedge^{p-1} \bar{V} \otimes \wedge V,$$

con  $\delta|_{\wedge V \otimes \wedge V} = m$  tal que el complejo

$$\dots \wedge V \otimes \wedge^p \bar{V} \otimes \wedge V \xrightarrow{\delta} \wedge V \otimes \wedge^{p-1} \bar{V} \otimes \wedge V \rightarrow \dots \rightarrow \wedge V \otimes \wedge V \xrightarrow{m} \wedge V,$$

donde  $m(x \otimes y) = xy$ , es exacto salvo posiblemente en el último nivel.

**Prueba.** Sea  $(\wedge V, 0)$  y  $(\wedge \bar{V} \otimes \wedge V, D)$  donde  $D(\bar{v}) = v$  y  $D^2 = 0$ . Veamos que este último complejo es exacto. Si  $V = 0$  no hay nada que probar. Por lo tanto podemos asumir que  $V \neq 0$  y tomar una base  $(B, \prec)$  totalmente ordenada de  $V$ ; entonces en elementos de  $\wedge(k \cdot \bar{w}_1) \otimes \wedge(k \cdot w_1)$  definimos :

Si  $|w|$  es impar  $h(\bar{w}^p \otimes w) = \bar{w}^{p+1}/(p+1)$ , y  $h(\bar{w}^p) = 0$ . Si  $|w|$  es par  $h(\bar{w} \otimes w^p) = 0$  y  $h(w^p) = \bar{w} \otimes w^{p-1}$ . De la definición anterior tenemos : Si  $|w|$  es impar,

$$(hD + Dh)(\bar{w}^p \otimes w) = Dh(\bar{w}^p \otimes w) = D(\bar{w}^{p+1}/(p+1)) = \bar{w}^p \otimes w$$

pues  $hD(\bar{w}^p \otimes w) = \bar{w}^p \otimes w^2 = 0$  (pues  $w^2 = 0$ ) y

$$(hD + Dh)(\bar{w}^p) = hD(\bar{w}^p) = h(p\bar{w}^{p-1} \otimes w) = \bar{w}^p.$$

En el caso cuando  $|w|$  es par el análisis es similar. Si definimos

$$A(w_1, \dots, w_r) = \wedge(k \cdot \bar{w}_1) \otimes \wedge(k \cdot w_1) \otimes \dots \otimes \wedge(k \cdot \bar{w}_r) \otimes \wedge(k \cdot w_r),$$

para una secuencia estrictamente creciente  $w_1 < \dots < w_r$ ,  $h$  se extiende a una aplicación

$$h : \wedge^* \bar{V} \otimes \wedge V \longrightarrow \wedge^{*+1} \bar{V} \otimes \wedge V,$$

definida como  $h(x_1, \dots, x_r) = (-1)^{|x_1|+\dots+|x_r|} x_1 \otimes \dots \otimes x_{r-1} \otimes h(x_r)$ , pues

$$\wedge^* \bar{V} \otimes \wedge V = \bigcup_{r \geq 1} \left( \bigcup_{w_1 < \dots < w_r} A(w_1, \dots, w_r) \right)$$

De aquí obtenemos

$$\begin{aligned} (hD + Dh)(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) &= hD(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) + Dh(x_1 \otimes \dots \otimes x_r) = \\ h\left(\sum (-1)^{|x_1|+\dots+|x_{i-1}|} x_1 \otimes \dots \otimes D(x_i) \otimes \dots \otimes x_r\right) &+ D\left((-1)^{|x_1|+\dots+|x_{r-1}|} x_1 \otimes \dots \otimes h(x_r)\right) = \\ (-1)^{\alpha_{r-1}-1} \sum_{i=1}^{r-1} (-1)^{\alpha_i-1} x_1 \otimes \dots \otimes D(x_i) \otimes \dots \otimes h(x_r) &+ x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes hD(x_r) + \\ (-1)^{\alpha_{r-1}} \sum_{i=1}^r (-1)^{\alpha_i-1} x_1 \otimes \dots \otimes D(x_i) \otimes \dots \otimes h(x_r) &= x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes hD(x_r) + \\ x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes Dh(x_r) &= x_1 \otimes \dots \otimes x_i \otimes \dots \otimes x_r; \end{aligned}$$

es decir el complejo  $(\wedge \bar{V} \otimes \wedge V, D)$  es exacto. Ahora tomando el producto tensorial con  $(\wedge V, 0)$  obtenemos que  $(\wedge V \otimes \wedge \bar{V} \otimes \wedge V, D)$  es una resolución de  $\wedge V$  como  $\wedge V \otimes \wedge V$  módulo; aquí denotamos el diferencial del producto tensorial como  $D$ .

[ Definamos la aplicación  $(1 \otimes h)(x \otimes y) = (-1)^{|x|} x \otimes h(y)$ . De la definición obtenemos :

$$(D(1 \otimes h) + (1 \otimes h)D) = D((-1)^{|x|} x \otimes h(y)) + (1 \otimes h)((-1)^{|x|} x \otimes D(y)) = x \otimes y]$$

Definamos  $f : \wedge V \otimes \wedge \bar{V} \otimes \wedge V \rightarrow \wedge V \otimes \wedge \bar{V} \otimes \wedge V$  por  $f(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = 1 \otimes \bar{v} \otimes 1$ ,  $f(1 \otimes 1 \otimes v) = v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v$ , y  $f(v \otimes 1 \otimes 1) = v \otimes 1 \otimes 1$ ; como  $f \circ f = Id$  entonces  $f$  establece un isomorfismo. Esto indica que  $\delta = f^{-1} \circ D \circ f$  es una derivada. Esta derivada cumple

$$\begin{aligned} \delta(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) &= f^{-1} \circ D(f(1 \otimes \bar{v} \otimes 1)) = f^{-1} \circ D(1 \otimes \bar{v} \otimes 1) = \\ f^{-1}(1 \otimes 1 \otimes v) &= v \otimes 1 \otimes 1 - 1 \otimes 1 \otimes v \end{aligned}$$

y  $\delta(v \otimes 1 \otimes 1) = \delta(1 \otimes 1 \otimes v) = 0$

[ notemos también que todo elemento  $x \otimes \bar{y} \otimes z = (x \otimes 1 \otimes 1)(1 \otimes \bar{y} \otimes 1)(1 \otimes 1 \otimes z)$  ] ■

Usando este último resultado podemos demostrar una versión graduada del teorema H.K.R para el álgebra  $\wedge V$ . Para la definición del bicomplejo  $(\xi(\wedge V), \delta, \beta)$  nos remitimos al Ejemplo 2 de [BV].

**Teorema 1.95.** *Sea  $(\wedge V, \partial)$  una  $k$ -álgebra diferencial graduada y  $k$  un cuerpo de característica cero entonces*

$$\theta_{p,q} : T_{p,q} \longrightarrow \xi_{p,q}$$

definida como

$$\theta_{p,q}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_p) = \frac{(-1)^{i_1+i_3+\cdots}}{p!} a_0 \beta(a_1) \cdots \beta(a_p),$$

donde  $\xi_{p,q} = (\wedge V \otimes \wedge^p \bar{V})_{p+q}$  verifica :

1)  $\theta \circ b = 0$ ,  $\theta \circ \partial = \delta \circ \theta$ , y  $\theta \circ B = \beta \circ \theta$ .

2)  $H(\theta) : H_*(Tot(T_{p,q}), b + \partial) \longrightarrow H_*(Tot(\xi(A)), \delta)$  es un isomorfismo.

3)  $H(\theta) : H_*(Tot(T_{p,q}), b + \partial, \beta) \longrightarrow H_*(Tot(\xi(A)), \delta, \beta)$  es un isomorfismo.

**Prueba.** Para el caso  $\theta \circ b = 0$  :

$$\theta \circ b(a_0 \otimes a_1 \cdots \otimes a_p) =$$

$$\theta\left(\sum_{i=0}^{p-1} (-1)^i (a_0 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_p) + (-1)^{p+\alpha_p} a_p a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{p-1}\right) =$$

$$\frac{1}{p!} \left( \sum_{i=0}^{p-1} (-1)^{i+i_1+i_3+\cdots} a_0 \otimes \beta(a_1) \otimes \cdots \otimes \beta(a_i a_{i+1}) \otimes \cdots \otimes \beta(a_p) + \right.$$

$$\left. (-1)^{p+\alpha_p} a_p a_0 \otimes \beta(a_1) \otimes \cdots \otimes \beta(a_{p-1}) \right)$$

donde  $\alpha_p = i_p(i_0 + \cdots + i_{p-1})$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $i$  es par, entonces

$$\left( (-1)^{(i-1)+i_1+i_3+\cdots+i_{i-1}+i_i+i_{i+2}+\cdots} a_0 \otimes \beta(a_1) \otimes \cdots \otimes (\beta(a_{i-1}) a_i + (-1)^{i-1} a_{i-1} \beta(a_i)) \otimes \cdots \otimes \beta(a_p) \right) +$$

$$\left( (-1)^{i+i_1+i_3+\cdots+i_{i-1}+i_i+i_{i+2}+\cdots} a_0 \otimes \beta(a_1) \otimes \cdots \otimes (\beta(a_i) a_{i+1} + (-1)^i a_i \beta(a_{i+1})) \otimes \cdots \otimes \beta(a_p) \right)$$

De aquí se sigue que el primer término de la primera igualdad con el último término se cancelan consecutivamente. Analizando el caso  $i = p - 1$  e  $i = p$ , obtenemos :

Si  $p$  es par

$$\begin{aligned} & \dots + (-1)^{(p-1)+i_1+i_3+\dots+i_{p-1}+i_p} a_0 \beta(a_1) \cdots (\beta(a_{p-1})a_p + a_{p-1}\beta(a_p)) + \\ & (-1)^{p+\alpha_p+i_1+i_3+\dots+i_{p-1}} a_p a_0 \beta(a_1) \cdots \beta(a_{p-1}) = 0, \end{aligned}$$

la razón de esta afirmación es que al permutar  $a_p$  para tener  $a_p a_0 \beta(a_1) \cdots \beta(a_{p-1})$  en el primer sumando generamos el signo  $\alpha_p + i_p(p-1)$  el cual permite eliminar el signo de  $i_p$  (pues  $p-1$  es impar) y tener un signo opuesto al del último sumando. El caso cuando  $p$  es impar es similar.

Para  $\theta \circ \partial = \delta \circ \theta$  obtenemos

$$\theta \circ \partial(a_0 \otimes \cdots \otimes a_p) = \theta \left( \sum_k (-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} a_0 \otimes \cdots \otimes \partial(a_k) \otimes \cdots \otimes a_p \right) =$$

aquí analizaremos dos casos (obviando el término  $1/p!$ ): Si  $k$  es par obtenemos la expresión:

$$(-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} (-1)^{i_1+i_3+\dots} a_0 \beta(a_1) \cdots \beta(\partial(a_k)) \cdots \beta(a_p)$$

como  $k-1$  es impar y  $\beta(\partial(a_k)) = -\partial(\beta(a_k))$ , la última expresión se puede escribir

$$(-1)^{i_0+(i_1+1)+\dots+(i_{k-1}+1)} (-1)^{i_1+i_3+\dots} a_0 \beta(a_1) \cdots \partial(\beta(a_k)) \cdots \beta(a_p).$$

Si  $k$  es impar obtenemos

$$(-1)^{i_0+\dots+i_{k-1}} (-1)^{i_1+i_3+\dots+(i_{k-1})+\dots} a_0 \beta(a_1) \cdots \beta(\partial(a_k)) \cdots \beta(a_p)$$

como  $\beta(\partial(a_k)) = -\partial(\beta(a_k))$  y  $k-1$  es par

$$(-1)^{i_0+(i_1+1)+\dots+(i_{k-1}+1)} (-1)^{i_1+i_3+\dots+(i_{k-1})+\dots+1} a_0 \beta(a_1) \cdots \partial(\beta(a_k)) \cdots \beta(a_p).$$

Del análisis anterior es claro que  $\theta \circ \partial = \partial \circ \beta$ . La última igualdad se demuestra de manera similar.

A continuación abordamos la segunda parte de la demostración. Establecemos un quasiisomorfismo entre los bicomplejos  $(T_{p,q}, b + \partial)$  y  $(\xi(A)_{p,q}, 0 + \delta)$ . Para ello será suficiente demostrar que  $\theta$  establece un quasiisomorfismo entre  $(T_{p,q}, b)$  y  $(\xi(A)_{p,q}, 0)$ . Aquí nuevamente estamos usando el mismo argumento que se usó en el Teorema 1.82. Tomando homología en estos últimos complejos obtenemos el morfismo

$$\theta_1 : H_1(T_{p,q}, b) \longrightarrow \xi_1,$$

como  $\xi_1 = \wedge V \otimes \overline{V}$  definamos

$$\theta'_1 : \wedge V \otimes \overline{V} \rightarrow H_1(T_{p,q}, b)$$

como  $\theta'_1(x \otimes \bar{v}) = \overline{x \otimes v}$ . Notemos que

$$\theta_1 \circ \theta'_1(x \otimes \bar{v}) = \theta_1(\overline{x \otimes v}) = (-1)^{|v|} x \otimes \bar{v}$$

de lo que se concluye que  $\theta$  es inyectiva. Para sobreyectividad es suficiente observar el cociente

$$H_1(T_{p,q}, b) = \frac{\wedge V \otimes \overline{\wedge V}}{ab \otimes c - a \otimes bc + (-1)^{|c|(|a|+|b|)} ca \otimes b},$$

él nos indica que todo elemento  $\overline{x \otimes y} = \overline{x \otimes v_1 \cdots v_l}$  se puede escribir como

$$\sum (-1)^{l_i} \overline{x_i \otimes v_i},$$

indicando con ello que  $\theta'_1$  es sobreyectiva. Del hecho que  $\wedge V \otimes \overline{\wedge V}$  es un álgebra graduada libre generada por  $\wedge V \otimes \overline{V}$ , tenemos que  $\theta'_1$  se extiende a

$$\theta'_k : \wedge V \otimes \wedge^k \overline{V} \rightarrow H_k(\text{Tot}(T_{p,q}), b)$$

Como  $\theta'_1$  es un isomorfismo si probamos que  $H_k(\text{Tot}(T_{p,q}), b)$  es una álgebra libre generada por  $H_1(\text{Tot}(T_{p,q}), b)$  tendríamos que  $\theta'_k$  es un isomorfismo. Para probar esta última afirmación nos basamos en el cálculo de la homología del álgebra graduada  $\wedge V$  como  $\text{Tot}^{\wedge V \otimes \wedge V}(\wedge V, \wedge V)$ , (Proposición 2.5 [V.B].) Tomando la resolución

$$(\wedge V \otimes \wedge \overline{V} \otimes \wedge V, D)$$

y efectuando el producto tensorial como  $\wedge V \otimes \wedge V$  módulos, obtenemos que

$$(H_k(\text{Tot}(T_{p,q}), b)) = (\wedge V \otimes \wedge^k \overline{V}),$$

que prueba la afirmación. ■

**Observación.** La generalización del teorema anterior para ciertas álgebras de la forma  $A_0 \otimes \wedge V$  donde  $V := \bigoplus_{i \geq 1} V_i$ , es un espacio vectorial graduado, se presenta a continuación.

**Definición 1.96.** Una  $k$ -álgebra  $A$  es llamada homológicamente regular si y sólo si la aplicación  $\varepsilon : (A \otimes \overline{A}^*, b) \rightarrow (\Omega_R^*, 0)$  definida en [LQ] es un isomorfismo y  $\Omega_A^1$  es flat.

**Ejemplo 1.97.** Del Teorema 1.28 y Corolario 1.52 tenemos que si el anillo  $(R, \eta)$  es r.l.e.t.f. entonces  $\Omega_R^*$  es flat y  $HH_*(R) \simeq \Omega_R^*$  respectivamente. Es decir  $(R, \eta)$  es un álgebra homológicamente regular.

**Definición 1.98.** Una  $k$ -álgebra diferencial graduada  $(A, d)$  se llama homológicamente regular si  $A = A_0 \otimes \wedge V$  donde  $A_0$  es homológicamente regular y  $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots$  es un espacio vectorial graduado.

**Ejemplo 1.99.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Del Ejemplo 1.67 tenemos que el complejo de Koszul  $K(f_1, \dots, f_r)$ , de una secuencia de elementos  $f_1, \dots, f_r$  en el anillo  $R$ , es un A.D.G de la forma  $R \otimes \wedge V$ , donde  $V = V_1 = \bigoplus_{i=1}^r k \cdot e_i$ . Por otro lado del ejemplo anterior tenemos que el anillo  $R$  es un álgebra homológicamente regular. Por lo tanto el álgebra  $K(f_1, \dots, f_r)$  (descrita en el Ejemplo 1.67) es una  $k$ -A.D.G. homológicamente regular.

**Definición 1.100.** (Ver definición 2.3 y Definición 2.4 de [CGG].) Sea el complejo Koszul  $(A_0 \otimes \wedge V, d)$ . Definamos el bicomplejo (como se indica en la Definición 1.76)

$$\xi = (\xi_{p,q}, \delta_{p,q}^d, 0, \beta_{p,q})$$

donde  $\xi_{p,q} = \bigoplus_{i=0}^p \Omega_{A_0}^i \otimes (\wedge V \wedge \overline{V}^{p-i})_{p+q-i}$  si  $p \geq 0$  y  $q \geq 0$ , y cero en otro caso. Ponemos  $\delta_{p,q}(w \otimes x) = (-1)^i w \otimes \delta(x)$ ,  $\delta|_A = d$ ,  $\beta$  como la derivada que definimos en el Lema 1.93 y sujeta a la condición  $\delta \circ \beta + \beta \circ \delta = 0$ .

**Observación.** En algunas ocasiones (ver Sección 3.3) usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{p,q} = \xi_{p,q}.$$

Con esta definición tenemos :

**Teorema 1.101.** *La homología cíclica, (respectivamente la homología de Hochschild), del A.D.G.  $A_0 \otimes \wedge V$  es la homología cíclica, (respectivamente de Hochschild), del bicomplejo  $\xi$ .*

**Prueba.** [CGG, Teorema 2.6]. ■

Notemos que aquí estamos haciendo referencia a la Definición 1.72 y Definición 1.74 que se dio para A.D.G. Recordemos también que en caso que  $b = 0$ , como este, las homologías antes mencionadas tienen cierta descomposición. Esto se manifiesta en el siguiente Corolario.

**Corolario 1.102.** *La homología cíclica y Hochschild de  $(A \otimes \wedge V, b)$  se descompone en la suma de las homologías de los complejos  $(\xi^j, \delta, \beta)$  y  $(\xi_{j+k}^j, \delta)_{k \geq 0}$*

$$\begin{array}{ccccccc}
 \xi_{j+2}^j & \xleftarrow{\beta} & \xi_{j+1}^{j-1} & \xleftarrow{\dots} & \xi_3^1 & \xleftarrow{\beta} & \xi_2^0 \\
 \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \xi_{j+1}^j & \xleftarrow{\beta} & \xi_j^{j-1} & \xleftarrow{\dots} & \xi_2^1 & \xleftarrow{\beta} & \xi_1^0 \\
 \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \xi_j^j & \xleftarrow{\beta} & \xi_{j-1}^{j-1} & \xleftarrow{\dots} & \xi_1^1 & \xleftarrow{\beta} & \xi_0^0
 \end{array}$$

donde  $\xi_{m-2h}^{j-h} = \bigoplus_{i=0}^{j-h} \Omega_{A_0}^i \otimes (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}^{j-h-i})_{m-2h-i}$ .

**Prueba.** [CGG, Corolario 2.7]. ■

Notemos que

$$\xi_{p,q} = \xi_{p+q}^p.$$

**Observación.** A continuación justificaremos, sin demostración, por que la necesidad de calcular  $HH(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$  y  $HC(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$ . Primero debemos de recordar que el álgebra  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$ , si  $V = V_1 = \bigoplus_{i=1}^r e_i$ , es el complejo de Koszul (ver Ejemplo 1.67). Cuando  $\partial(e_i) = f_i$  con  $i = 1, \dots, r$  forman una secuencia regular se prueba que el álgebra  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$  es una resolución de  $A_0/I$ , donde  $I = \langle f_i : i = 1, \dots, r \rangle$  (ver Lema 1.70.) De la definición del bicomplejo  $T(A_0 \otimes \wedge V)$  se observa que las filas de este complejo son dadas por el producto tensorial del complejo  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$ , sobre el cuerpo  $k$ . Por lo tanto usando las fórmulas de Kunnet se prueba que la filas  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)^{\otimes *}$  son quasisomorfos a  $(A_0/I)^{\otimes *}$  y que por lo tanto el bicomplejo  $T(A_0 \otimes \wedge V)$  es quasisomorfo al complejo de Hochschild  $(C(A_0/I), b)$ . Siguiendo los mismos lineamientos se demuestra que la homología cíclica del álgebra  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$  proporciona la homología cíclica del álgebra  $A_0/I$ . A continuación describimos los complejos  $\xi_k^j$  y proporcionamos de manera informal cierto quasiisomorfismo entre el complejo  $\xi_k^j$  y cierto complejo  $L_j$  que luego formalizamos. En efecto, sea

$$\xi_*^j : 0 \longleftarrow \xi_j^j \xleftarrow{\delta} \xi_{j+1}^j \xleftarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} \xi_{j+*}^j \xleftarrow{\delta} \dots$$

donde  $\xi_k^j = \bigoplus_{i=0}^j \Omega_{A_0}^i \otimes (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}^{j-i})_{k-i}$ . Usando el isomorfismo

$$\xi_k^j \simeq \bigoplus_{i=0}^j (\Omega_{A_0}^i \otimes \bar{V}^{j-i}) \otimes_{A_0} (A_0 \otimes \wedge V)_{k+i-2j},$$

si definimos  $t := 2j - i$  se prueba que

$$\xi_k^j \simeq \bigoplus_{t=j}^{2j} (\Omega^{2j-t} \otimes \bar{V}^{t-j}) \otimes_{A_0} (A_0 \otimes \wedge V)_{k-t}.$$

**Definición 1.103.** Definamos el complejo  $(L'_j, \delta)$  como

$$(L'_j, \delta) : \Omega^j \otimes \wedge \bar{V}^0 \xleftarrow{\delta} \Omega^{j-1} \otimes \wedge \bar{V}^1 \xleftarrow{\delta} \dots \xleftarrow{\delta} \Omega^0 \otimes \wedge \bar{V}^j \xleftarrow{\delta} 0.$$

**Lema 1.104.** Sea  $j$  en los naturales entonces  $\xi_*^j \simeq (L'_j, \delta) \otimes_{A_0} K(f_1, \dots, f_r)$  con  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ .

**Prueba.** Basta formalizar el análisis anterior. ■

Como lo indicamos líneas atrás bajo de la hipótesis que el ideal  $I$  sea intersección completa tenemos que  $\xi_*^j \simeq (L'_j, \delta) \otimes_{A_0} \frac{R}{I}$ . Notemos que aquí estamos proporcionando el quasiisomorfismo entre  $\xi_*^j$  y cierto complejo  $L_j$ . Este quasiisomorfismo será fundamental en la prueba de la descomposición de la homología de Hochschild y cíclica. Para continuar daremos algunas definiciones.

**Definición 1.105.** Sea  $A_0 \otimes \wedge V$  el complejo de Koszul con  $\partial(V_1) = (f_1, \dots, f_r)$  una secuencia regular, definamos los complejos

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I \Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

y

$$D_j : 0 \longrightarrow \frac{\Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j}$$

**Teorema 1.106.** Sea  $(A_0 \otimes \wedge V, \partial)$  el complejo de Koszul e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una intersección completa local. Entonces los complejos  $(\xi^j, \delta, \beta)$  y  $(\xi_{j+k}^j, \delta)_{k \geq 0}$  son quasisomorfos a  $L_j^{2j-*}$  y  $D_j^{2j-*}$

**Prueba.** Formalicemos el quasi isomorfismo que dimos anteriormente de la siguiente manera : Definamos

$$\varphi_m^j : \bigoplus_{h=0}^{m-j} \xi_{m-2h}^{j-h} \longrightarrow \frac{\Omega^{2j-m}}{I^{m-j+1} \Omega^{2j-m}}$$

como

$$\varphi_m^j(w \cdot x \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-h-i}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \text{grado}(x) \geq 1 \\ (-1)^{j-h-i} \bar{w} \cdot x \cdot \partial(v_1) \cdots \partial(v_{j-h-i}) & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (1.5)$$

y

$$\bar{\varphi}_m^j : \xi_m^j \longrightarrow \frac{I^{m-j} \Omega^{2j-m}}{I^{m-j+1} \Omega^{2j-m}}$$

como la restricción. Notemos que esta última aplicación es en esencia el quasiisomorfismo  $L'_j \otimes_{A_0} K(f_1, \dots, f_r) \simeq L_j$ , que dimos anteriormente. En nuestro caso  $\text{grado}(v_i) = 1$ . Veamos que  $\bar{\varphi}_m^j$  es un morfismo de complejos. Es decir, veamos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \xi_m^j & \xrightarrow{\bar{\varphi}_m^j} & \frac{I^{m-j}\Omega^{2j-m}}{I^{m-j+1}\Omega^{2j-m}} \\ \downarrow \delta & & \downarrow d \\ \xi_{m-1}^j & \xrightarrow{\bar{\varphi}_{m-1}^j} & \frac{I^{m-1-j}\Omega^{2j-(m-1)}}{I^{m-1-j+1}\Omega^{2j-(m-1)}} \end{array}$$

conmute. Para ello evaluemos

$$\bar{\varphi}_{m-1}^j(\delta(w \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-i})) = (-1)^i \bar{\varphi}_{m-1}^j(w \cdot \sum_{k=1}^{j-i} \delta(\bar{v}_k) \bar{v}_1 \cdots \widehat{\bar{v}}_k \cdots \bar{v}_{j-i}) =$$

como  $\delta(\bar{v}_k) = -df_{l_k}$  y  $w \in \Omega^i$  tenemos

$$(-1)^i \sum_{k=1}^{j-i} \bar{\varphi}_{m-1}^j((-1)^{i+1} df_{l_k} \wedge w \cdot \bar{v}_1 \cdots \widehat{\bar{v}}_k \cdots \bar{v}_{j-i}) =$$

$$\sum_{k=1}^{j-i} (-1)^{1+j-i-1} f_{l_1} \cdots \widehat{f}_{l_k} \cdots f_{l_{j-i}} df_{l_k} \wedge w = d(\bar{\varphi}_m^j(w \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-i})).$$

Una de las razones de la ultima igualdad se debe a que  $d_{DR}(w) f_{l_1} \cdots f_{l_{j-i}} = 0$  en el módulo  $\frac{I^{m-1-j}\Omega^{2j-(m-1)}}{I^{m-1-j+1}\Omega^{2j-(m-1)}}$ , pues  $j-i = m-j$ .

Si en  $w \cdot x \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-h-i}$   $\text{grado}(x) \geq 1$  entonces

$$\bar{\varphi}_{m-1}^j(\delta(w \cdot x \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-h-i})) = d(\bar{\varphi}_{m-1}^j(w \cdot x \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-h-i})) = 0$$

y

$$\delta(\bar{\varphi}_{m-1}^j(w \cdot x \cdot \bar{v}_1 \cdots \bar{v}_{j-h-i})) = \delta(0) = 0,$$

por lo tanto

$$\bar{\varphi}_{m-1}^j \circ \delta = \delta \circ \bar{\varphi}_{m-1}^j$$

El caso  $Tot(\xi^j, \delta, \beta)$  es similar. Del diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & (\xi_{j+k}^i, \delta)_{k \geq 0} & \longrightarrow & Tot(\xi^j, \delta, \beta) & \longrightarrow & Tot(\xi^j, \delta, \beta) \longrightarrow 0. \\
& & \downarrow \bar{\varphi}_m^j & & \downarrow \varphi_m^j & & \downarrow \varphi_m^{j-1} \\
0 & \longrightarrow & L_j^{2j-*} & \longrightarrow & D_j^{2j-*} & \longrightarrow & D_{j-1}^{2j-*} \longrightarrow 0
\end{array}$$

al tomar homología y ver que  $\bar{\varphi}_m^j$  es un isomorfismo entre las homología de los complejos  $(\xi_{j+k}^i, \delta)_{k \geq 0}$  y  $L_j^{2j-*}$  (ver Teorema 3.3 [CGG]) tenemos que  $\varphi_m^j$  es un isomorfismo entre las homología de los complejos  $Tot(\xi^j, \delta, \beta)$  y  $D_j^{2j-*}$ . El argumento es el mismo que demuestra que un isomorfismo en homología de Hochschild produce un isomorfismo en cíclica. La demostración que  $\bar{\varphi}_m^j$  es un quasi isomorfismo se presenta en el Teorema 3.3 de [CGG]. ■

**Corolario 1.107.** *Bajo las hipótesis del Teorema anterior, tenemos*

$$\begin{aligned}
1) \quad HC_n(A_0/I) &= \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(D_{n-i}^*) \\
2) \quad HH_n(A_0/I) &= \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(L_{n-i}^*)
\end{aligned}$$

donde  $[s]$  representa el máximo entero de  $s$  y la secuencia exacta larga de Gysin-Connes es la suma de las secuencias exactas largas de homología asociadas con la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow L_j^* \longrightarrow D_j^* \longrightarrow D_{j-1}^* \longrightarrow 0.$$

**Prueba.** [CGG, Corolario 3.4]. ■

**Observación.** A continuación describiremos la aplicación  $\theta : T(A) \rightarrow \xi$  de [CGG, Teorema 2.6]. Esta nos permitirá apreciar mejor la descomposición de la secuencia S.B.I. Que es el motivo por el cual presentamos esta observación.

El primer hecho a tener en cuenta es que  $\theta : T_{p,q} \rightarrow \xi_{p+q}^p$ . En efecto un elemento  $z \in T_{p,q}$  es de la forma  $z = a_0 x_0 \otimes a_1 x_1 \otimes \dots \otimes a_p x_p$ ; donde  $a_i \in A_0$ ,  $x_i \in \wedge V$ , y  $\sum_{i=1}^p |x_i| = q$ . Entonces se prueba usando la definición de  $\beta$  que  $\theta(z)$  esta formado por sumas de elementos de la forma

$$a_0 a_{j_1} \dots a_{j_{p-s}} \beta(a_{i_1}) \dots \beta(a_{i_s}) \cdot x_{i_1} \dots x_{i_s} \bar{x}_{j_1} \dots \bar{x}_{j_{p-s}},$$

donde  $1 \leq s \leq p$  y  $|\bar{x}_{j_s}| = |x_{j_s}| + 1$ . De esta descripción se prueba que  $\theta(z) \in \Omega_{A_0}^{i_s} \otimes (\wedge V \otimes \wedge \bar{V}^{p-s})_{p+q-s} \subset \xi_{p+q}^p$ . Entonces tenemos que  $\theta$  a demás de establecer un quasi isomorfismo entre el bicomplejo  $T(A)$  y  $(\xi, \delta, 0)$  (Teorema 1.101) preserva el orden, en el sentido que  $\theta : T_{p,q}(A) \rightarrow \xi_{p+q}^p$ . De la Definición 1.100 se prueba que

$\xi_{p+q}^p = \xi_{p,q}$ . Esta descripción nos permite definir el complejo  $(\xi_{p,q}, \delta, 0)$  y  $(\tilde{\xi}, \delta + \beta)$  según se presentan en la Definición 1.75 y Definición 1.76.

Por otro lado de la observación anterior tenemos un quasi isomorfismo  $\pi$  entre  $T(A)$  y  $(A_0/I, b)$ . Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc}
 (C(A_0/I))_* & \longrightarrow & (CC(A_0/I))_* & \longrightarrow & CC(A_0/I)_{*-2} \\
 \uparrow \pi & & \uparrow \pi & & \uparrow \pi \\
 (T(A))_* & \longrightarrow & (Tot(T(A), b + \partial, B))_* & \longrightarrow & (Tot(T(A), b + \partial, B))_{*-2} \\
 \downarrow \theta & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\
 (\xi, \delta, 0)_* & \longrightarrow & (\tilde{\xi}, \delta + \beta) & \longrightarrow & (\tilde{\xi}, \delta + \beta)_{*-2}
 \end{array}$$

donde los morfismos verticales son el quasi isomorfismo  $\theta$  del Teorema 1.101 y el quasi isomorfismo  $\pi : (A_0 \otimes \wedge V, \partial) \rightarrow A_0/I$ . Para probar que  $\pi$  es un quasi isomorfismo se usa el mismo argumento que prueba que un quasi isomorfismo en homología de Hochschild produce un quasi isomorfismo en Cíclica.

Del diagrama anterior observamos que el bicomplejo  $(\tilde{\xi}, \delta, \beta)$  proporciona la homología cíclica del álgebra  $A_0/I$ . De la Definición 1.76 y el análisis que se hace de su homología tenemos que la homología cíclica se descompone en la cohomología de los complejos  $(\tilde{\xi}^j, \delta + \beta)$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\
 \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
 \xi_{j,2} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{j-1,2} & \xleftarrow{\dots} & \xi_{1,2} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{0,2} \\
 \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \xi_{j,1} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{j-1,1} & \xleftarrow{\dots} & \xi_{1,1} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{0,1} \\
 \downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \delta \\
 \xi_{j,0} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{j-1,0} & \xleftarrow{\dots} & \xi_{1,0} & \xleftarrow{\beta} & \xi_{0,0}
 \end{array}$$

Un hecho importante a tener en cuenta, de la descripción anterior, es que las columnas de complejo cíclico  $(\tilde{\xi}, \delta + \beta)$  (es decir el complejo  $(\xi, \delta, 0)$ ) se descomponen en las primeras columnas de los complejos  $(\tilde{\xi}^j, \delta + \beta)$ , (ver Definición 1.76) y el cociente  $(\tilde{\xi}^j, \delta + \beta)/(\xi^j, \delta) = ((\tilde{\xi}^{j-1}, \delta + \beta))$  descomponen al complejo  $(\tilde{\xi}^j, \delta + \beta)[-2]$ . Por lo tanto del diagrama conmutativo establecido anteriormente se prueba que la secuencia S.B.I se parte en las cohomologías de los complejos

$$0 \longrightarrow (\xi_{j,*}, \delta, 0) \longrightarrow (\tilde{\xi}^j, \delta + \beta) \longrightarrow (\tilde{\xi}^{j-1}, \delta + \beta) \longrightarrow 0.$$

Usando el hecho que  $\xi_{p+q}^p = \xi_{p,q}$  tenemos que la secuencia S.B.I se descompone en las secuencias exactas de cohomología de los complejos

$$0 \longrightarrow (\xi_{j+*}^j, \delta, 0) \longrightarrow (\xi^j, \delta + \beta) \longrightarrow (\xi^{j-1}, \delta + \beta) \longrightarrow 0.$$

Finalmente, de la prueba Teorema 1.106 se tiene el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & (\xi_{j+k}^i, \delta)_{k \geq 0} & \longrightarrow & Tot(\xi^j, \delta, \beta) & \longrightarrow & Tot(\xi^{j-1}, \delta, \beta) \longrightarrow 0. \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & L_j^{2j-*} & \longrightarrow & D_j^{2j-*} & \longrightarrow & D_{j-1}^{2j-*} \longrightarrow 0, \end{array}$$

donde los morfismos verticales son quasisomorfismos. De aquí tenemos que la secuencia S.B.I se descompone en las sumas de las secuencias exactas largas

$$\begin{array}{ccccccc} H^{*-1}(L_j) & \xrightarrow{I} & H^{*-1}(D_j) & \xrightarrow{S} & H^{*-1}(D_{j-1}) & \xrightarrow{B} & \\ & & & & & & \\ H^*(L_j) & \longrightarrow & H^*(D_j) & \longrightarrow & H^*(D_{j-1}) & \longrightarrow & \end{array}$$

Recordemos que si el álgebra  $A = A_0/I$  es graduada del Teorema 1.63 tenemos que la aplicación  $S = 0$ . La situación más relevante, en nuestro caso, se presenta cuando el ideal  $I$  es generado por polinomios  $f_1, \dots, f_r$  quasihomogéneos. Esta conclusión se enuncia en el siguiente Corolario :

**Corolario 1.108.** *Sea  $(R, \eta) = (k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}, \eta)$ ,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal generado por polinomios quasihomogéneos. Entonces la aplicación  $\pi^* : H^*(D_j) \rightarrow H^*(D_{j-1})$  es nula.*

**Prueba.** Como los generadores del ideal  $I$  son quasihomogéneos de grado  $d$  entonces por definición podemos proporcionar pesos a las variables  $x_1, \dots, x_n$  para convertir a los polinomios  $f_1, \dots, f_r$  en homogéneos de grado  $d$ . También esta graduación convierte al anillo  $R$  en graduado. Por lo tanto el álgebra  $R/I$  es un álgebra graduada. Una aplicación del Teorema 1.63 demuestra el Corolario. ■

## Capítulo 2

# Homología de Hochschild para ícis

El punto neurálgico en la primera sección es el cálculo de la altura del *ideal jacobiano* de un ideal  $I$  de *intersección completa con una singularidad aislada*. El Corolario 2.19 nos permite develar los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ , presentados en la Definición 1.105. Otro resultado importante del trabajo es el Teorema de Clasificación de Singularidades Aisladas de Intersección Completa. En la segunda sección revisamos el caso en que el ideal  $I$  este generado por un sólo polinomio y tenga una singularidad aislada. En este caso demostramos que  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_f, R/I)$ , este resultado fue demostrado por Michler en [Mich]. Cuando el ideal esté generado por dos polinomios damos un ejemplo (ver Ejemplo 2.34) que muestra que la afirmación anterior no se puede generalizar. Cuando el ideal  $I$  es generado por dos polinomios, para cada  $j \geq m$ , presentamos una secuencia espectral  $E_{p,q}$  que converge a la cohomología de los complejos  $L_j$  y colapsa en  $E^2$ . Cuando  $j = m-1$  demostramos que  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-1-*}(R/I, \frac{J_f}{J_{f,g}})$  y que en los demás casos los  $L_j$  satisfacen que  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i \neq j$ . En el caso particular que  $J_f \supset J_g$  demostramos que  $E^1 = E^\infty$ . Las curvas complejas inmersas en dimensión tres de la Tabla 2.1 cumplen con esta condición. Este cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

En la última sección se generaliza los resultados para  $r$  polinomios. Presentamos una secuencia espectral  $E_{p,q}$  que colapsa en  $E^r$  (Teorema 2.76). Finalmente demostramos que los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  sólo tienen  $r+1$  términos de cohomología no nulos. Para cada  $m-r < j < m$  el complejo  $L_j$  sólo tiene  $j-m-r+1$  términos en cohomología no nulos. En los demás casos los complejos  $L_j$  son exactos salvo en el último nivel. Estas dos últimas afirmaciones son el punto de partida

del Capítulo tres.

## 2.1. Singularidades Aisladas.

Nuestro objetivo será presentar propiedades técnicas de las *singularidades aisladas*. Específicamente calculamos la altura del ideal jacobiano de los generadores de un ideal  $I$  de *intersección completa* con una *singularidad aislada*.

**Definición 2.1.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f., e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  y  $F = (f_1, \dots, f_r)$ . Diremos que el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset \eta$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si

$$ht(\langle I, J_F \rangle) = m = \dim\left(\frac{\eta}{\eta^2}\right),$$

donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$ .

**Observación.** La definición anterior nace de la siguiente situación : Sea  $R = k[x_1, \dots, x_m]_\eta$ , e  $I$  un ideal propio de  $R$ . La condición impuesta en la definición anterior significa que la única componente irreducible que pasa por el punto  $P$  -que representa el maximal  $\eta$ - de los ceros del ideal  $\langle J_f + I \rangle$ ,  $Z(J_f + I)$ , es el punto  $P$ . Si  $p \in C \subset Z(J_f + I)$  y  $C$  es una componente irreducible, entonces  $C = P$ . En lenguaje algebraico la afirmación anterior se escribe de la siguiente manera: Sean  $\eta$  y  $\mathcal{P}_C$  un ideal maximal y primo respectivamente (que representa el punto  $P$  y la componente irreducible  $C$ ). Si  $\eta \supset \mathcal{P}_C \supset \langle J_f, I \rangle$  entonces  $\mathcal{P}_C = \eta$ .

Observemos que la singularidad de  $I$  es aislada si  $\sqrt{\langle I, J_f \rangle} = \eta$ .

**Lema 2.2.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Entonces  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle \subset \eta$  es un ideal con una singularidad aislada en  $\eta$  si y sólo si  $\eta^i \subset \langle I, J_f \rangle$  para algún  $i$ .

**Prueba.** Se sigue de la definición.

**Lema 2.3.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. El ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una icis si sólo si para todo primo  $P$  diferente del maximal el anillo  $(R/I)_P$  es el un anillo regular local.

**Prueba.** Será suficiente demostrar que en el anillo  $R_P$  la secuencia  $f_1, \dots, f_r$  es parte de una secuencia regular de parámetros. Esto último es claro pues los elementos  $df_1, \dots, df_r$  tienen como ideal jacobiano la unidad. ■

**Observación.** Cuando el anillo  $R$  es r.l.e.t.f. se tiene una propiedad importante : Para todo ideal propio  $I$  de  $R$  se cumple  $ht(I) = \text{profundidad}(I)$  (ver Teorema A.20 del Apéndice). Esta propiedad se debe al hecho que un anillo r.l.e.t.f. es Cohen Macaulay (ver Proposición A.19). Por ello en adelante no distinguiremos las dos

definiciones altura y profundidad de un ideal; teniendo en cuenta -claro está- que el anillo donde se hace esta identificación sea Cohen Macaulay.

Cuando el ideal  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada y es generado por un sólo polinomio tenemos la siguiente caracterización (en el caso particular que  $k$  sea el cuerpo de los números complejos obtenemos la Proposición 1.2 de [Looj]).

**Proposición 2.4.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f e  $I = \langle f \rangle \subset \eta$  un ideal. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1.  $\langle f, J_f \rangle \supset \eta^j$  para algún  $j$ .
2.  $J_f \supset \eta^j$  para algún  $j$ .
3.  $\dim_k(\frac{R}{J_f}) < \infty$ .
4.  $\dim_k(\frac{R}{\langle J_f, f \rangle}) < \infty$ .

**Observación.** *Las dimensiones de  $R/J_f$  y  $R/\langle J_f, f \rangle$  -en las equivalencias 3 y 4- se llaman **Número de Milnor** y **Tjurina** respectivamente*

**Prueba.** La equivalencia de 1 y 2 se debe a que  $f \in \sqrt{J_f}$  ( Corolario 1.38.)

Para demostrar que 2 implica 3, si usamos el epimorfismo

$$R/\eta^j \longrightarrow R/J_f,$$

(que proviene de la hipótesis  $J_f \supset \eta^j$ ), será suficiente notar que  $R/\eta^j$  es un espacio vectorial de dimensión finita.

Sea  $R/J_f$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Del epimorfismo

$$R/J_f \longrightarrow R/\langle J_f, f \rangle$$

se sigue que  $R/\langle J_f, f \rangle$  es un espacio vectorial de dimensión finita. Es decir, 3 implica 4.

Finalmente para demostrar que 4 implica 1 usaremos el hecho que si  $M$  es un  $R$ -módulo de  $k$ -dimensión finita, entonces existe  $j$  en los naturales tal que  $\eta^j \cdot M = 0$ . En el caso que  $M = R/\langle J_f, f \rangle$  esto significa que existe algún  $j$  tal que  $\eta^j \subset \langle J_f, f \rangle$ .

■.

**Corolario 2.5.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. El ideal  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si sólo si  $ht(J_f) = ht(\langle J_f, f \rangle) = m = \dim(R)$ .*

**Prueba.** Del Lema 2.2, las equivalencias 1 y 2 de la Proposición anterior y la aplicación directa de la definición de altura de un ideal obtenemos que  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  si sólo si  $ht(J_f) = ht(\langle J_f, f \rangle) = m = \dim(R)$ .

■

**Corolario 2.6.** Si  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada entonces el complejo de Koszul  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  cumple  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i < m$ , y  $H^m(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) \neq 0$ .

**Prueba.** Del Corolario anterior se tiene que  $\text{profundidad}(J_f) = m$ . Esto significa que  $J_f$  contiene a alguna secuencia regular de longitud  $m$ . Como  $J_f = \langle f_{x_1}, \dots, f_{x_m} \rangle$  donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} e_i$ , la Proposición A.38 nos dice que los elementos  $f_{x_1}, \dots, f_{x_r}$  forman una secuencia regular. ■

La propiedad del corolario anterior sólo se cumple en el caso local (ver Ejemplo 2.7). Esta propiedad se usa en [Mich], cuando  $R = k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ , para calcular de manera eficiente la homología de Hochschild para álgebras de la forma  $R/\langle f \rangle$ .

Veamos el siguiente ejemplo de Michler :

**Ejemplo 2.7.** El polinomio  $f = \frac{(c+x)^2 y^2}{2} + \frac{cx^2}{2} + \frac{x^3}{3}$  en  $(k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$ , donde  $c$  es un elemento no nulo del cuerpo, tiene una singularidad aislada en el origen. Sus derivadas parciales  $\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\} = \{(c+x)(x+y^2), (c+x)^2 y\}$ , no forman una secuencia regular en  $k[x, y]$ , [Mich, Ejemplo 2]. Sin embargo, en el anillo local  $(k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$  si es una secuencia regular.

Interesados en el caso cuando el ideal  $I$  este generado por una secuencia regular, daremos la siguiente definición.

**Definición 2.8.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $f_1, \dots, f_r$  forman una secuencia regular entonces diremos que el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es **intersección completa**.

**Definición 2.9.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si el ideal  $I$  es una intersección completa y tiene una singularidad aislada en  $\eta$ , diremos que  $I$  tiene una singularidad aislada de intersección completa (**icis**, por sus siglas en inglés).

**Observación.** Cuando el ideal  $I$  es generado por una secuencia regular  $f_1, \dots, f_r$  se cumple  $ht(I) = r$ . Entonces el ideal jacobiano  $J_F$  está generado por los menores  $M$  de orden  $r \times r$  de la matriz jacobiana  $Jac(F) = (f_{i,j})$ , donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$ . En adelante trataremos solamente con icis, y cuando escribamos  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  suponemos que  $ht(I) = r$  y que por lo tanto de la Proposición A.38  $f_1, \dots, f_r$  es una secuencia regular.

**Ejemplo 2.10.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$  e  $I = \langle x^2, y^3 \rangle$ . Como el ideal  $\langle J_{f,g}, f, g \rangle$  contiene una potencia de  $\eta$  entonces  $I$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún, como  $\{x^2, y^3\}$  es una secuencia regular, entonces  $I$  es una icis.

**Observación.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  se cumple que  $ht(J_f) = m$  por Corolario 2.5. Esta propiedad permite expresar los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  de manera simple (ver Corolario 2.32.) Esta es la razón de nuestro interés en esta sección de calcular la altura del ideal  $J_F$  cuando  $F$  tiene una singularidad aislada de intersección completa. En el siguiente ejemplo mostramos que la propiedad  $ht(J_F) = m$ , que se cumple para un polinomio ( $F = f$ ) ya no se satisface para el caso en que el ideal  $I$  este generado por más de un polinomio.

**Ejemplo 2.11.** Es claro que  $f = x^2 + y^2 \in (k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$  presenta una singularidad aislada en  $\eta$ . Ahora sea  $f'(x, y, z) = f(x, y)$ , y  $g = z$  entonces  $J_F = \langle x, y \rangle$  en  $(k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ . El ideal  $I = \langle f', g \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  pero  $ht(J_F) < m = 3$ . En general siempre se puede agregar una variable  $z$  a una icis y se obtiene  $ht(J_F) < m$ . Lo mismo sucede si en el ideal  $I$  uno de los generadores es parte de una secuencia regular de parámetros.

**Observación.** En adelante sólo trataremos con icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  donde **ninguno de sus generadores es regular**.

En el siguiente ejemplo también tenemos que  $ht(J_F) < m$ , y no se puede eliminar ninguno de los generadores pues no son regulares.

**Ejemplo 2.12.** Sea  $I = \langle x^2, y^3 \rangle$ , entonces el ideal jacobiano  $J_F = \langle xy^2 \rangle$  cumple  $ht(J_F) = 1 < 2$ . El ideal  $I$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún tenemos que  $I = \langle f - g, f + g \rangle$ . Estos nuevos generadores de  $I$ , cada uno de ellos, tiene una singularidad aislada en  $\eta = \langle x, y \rangle$ ; sin embargo  $ht(J_{F'}) = ht(J_F) < 2$  donde  $F' = (f - g, f + g)$ .

**Observación.** Cuando el ideal  $I$  es generado por más de un polinomio tenemos  $ht(J_F) < m$ . Esta es la principal obstrucción para seguir el camino trazado en el caso de un polinomio. Para superar esta dificultad calculamos  $ht(J_F)$  (Corolario 2.19). A continuación demostramos tres lemas básicos que nos ayudarán en la demostración del Lema 2.16.

**Lema 2.13.** Sean  $(R, \eta)$  un anillo local,  $z \in R$ , e  $I$  un ideal con  $\langle I, z \rangle \neq R$ . Si existe polinomio  $P \in k[x]$  no nulo tal que  $P(z) \in I$  entonces  $z \in \sqrt{I}$ .

**Prueba.** Sea  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in I$ . Afirmamos que  $a_0 = 0$ . En efecto si  $a_0 \neq 0$ , se prueba que  $1 \in \langle I, z \rangle = R$ , una contradicción con la hipótesis. Por lo tanto

$$P(z) = z^k(a_k + \dots + a_n z^{n-k}) \in I,$$

y  $a_k \neq 0$ . Como  $a_k + \dots + a_n z^{n-k}$  es unidad en  $R$ , se tiene  $z^k \in I$ . Esto significa que  $z \in \sqrt{I}$ . ■

**Lema 2.14.** Sean  $J, \langle J, f_1, \dots, f_r \rangle$  ideales propios de  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Sea  $P$  ideal primo con  $J \subset P$ , y  $Q(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  un polinomio no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in J$ . Entonces existen dos posibilidades

- 1)  $f_1$  se encuentra en el ideal  $\langle P, f_2, \dots, f_r \rangle$ , o
- 2) Existe  $Q_1(x_2, \dots, x_r) \in k[x_2, \dots, x_r]$  polinomio no nulo, tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle P, f_1 \rangle$ .

**Prueba.** Sea  $Q(x_1, \dots, x_r) = \sum_{j=1}^s T_j$  el polinomio no nulo de la hipótesis, donde  $T_j$  son las formas homogéneas de grado  $j$ . Para la prueba del Lema analizaremos dos casos.

Primer caso : Existe algún  $j$  tal que  $x_1$  no divide a  $T_j$ . Entonces el polinomio  $Q(x_1, \dots, x_r)$  se puede escribir como

$$Q(x_1, \dots, x_r) = Q_1(x_2, \dots, x_r) + x_1 \cdot \alpha(x_1, \dots, x_r), \quad (2.1)$$

donde  $Q_1(x_2, \dots, x_r) = \sum_{j: x_1 \nmid T_j} T_j$  es un polinomio no nulo. De la ecuación (2.1) y el hecho que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in J$  podemos concluir que

$$Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle J, f_1 \rangle \subset \langle P, f_1 \rangle.$$

El segundo caso sucede si  $x_1$  divide  $T_j$  para todo  $j$ . Entonces

$$Q(x_1, \dots, x_r) = x_1^k \bar{Q}(x_1, \dots, x_r),$$

donde  $\bar{Q}(x_1, \dots, x_r) = \sum \bar{T}_j$ , y existe algún  $\bar{T}_j$  tal que  $x_1 \nmid \bar{T}_j$ . Esta última condición significa que

$$\bar{Q}(x_1, \dots, x_r) = Q_1(x_2, \dots, x_r) + x_1 \cdot \alpha(x_1, \dots, x_r).$$

Es decir  $Q(f_1, \dots, f_r) = f_1^k \cdot \bar{Q}(f_1, \dots, f_r)$ , y

$$\bar{Q}(f_1, \dots, f_r) = Q_1(f_2, \dots, f_r) + f_1 \cdot \alpha(f_1, \dots, f_r). \quad (2.2)$$

Sea  $P$  el ideal primo de la hipótesis. Como  $J \subset P$  entonces

$$f_1^k \cdot \bar{Q}(f_1, \dots, f_r) \in P.$$

Si  $f_1^k \in P$  entonces  $f_1 \in P$ , por lo tanto  $f_1 \in \langle P, f_2, \dots, f_r \rangle$ .

Si  $f_1^k \notin P$  entonces  $\bar{Q}(f_1, \dots, f_r) \in P$ . De la ecuación (2.2) tenemos que

$$\bar{Q}(f_1, \dots, f_r) = Q_1(f_2, \dots, f_r) + f_1 \cdot \alpha(f_1, \dots, f_r) \in P$$

donde  $Q_1(x_2, \dots, x_r)$  es un polinomio no nulo. Por lo tanto

$$Q_1(f_2, \dots, f_r) \in \langle P, f_1 \rangle.$$

■

**Lema 2.15.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal propio,  $r \geq 1$ . Sea  $P$  ideal primo tal que  $ht(\langle P, I \rangle) = m = \dim(R)$ . Si existe un polinomio  $Q(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_r) \in P$  entonces  $ht(P) \geq m - r + 1$ .*

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $r \geq 1$ .

Si  $r = 1$  del Lema 2.13 tenemos que  $f_1 \in \sqrt{P} = P$ . Por lo tanto  $\langle P, f_1 \rangle \subset P$ . Esto significa que  $ht(P) = ht(\sqrt{P}) = ht(\langle P, f_1 \rangle) = m$ . Es decir  $ht(P) \geq m$ .

Supongamos que el Lema se cumple para  $r = s$ . Veamos que se satisface para  $r = s + 1$ .

Sea  $r = s + 1$ . Sea  $P$  un ideal primo propio,  $I = \langle f_1, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$  un ideal propio tal que  $ht(P, I) = m$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_s, x_{s+1})$  polinomio no nulo tal que  $Q(f_1, \dots, f_s, f_{s+1}) \in P$ . Del Lema 2.14 con  $J = P, r = s + 1$  tenemos dos posibilidades :

$f_1 \in \langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ , o existe  $Q_1(x_2, \dots, x_s, x_{s+1})$  polinomio no nulo tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in \langle P, f_1 \rangle$ .

En el primer caso tenemos que  $\langle P, I \rangle \subset \langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ . De la hipótesis  $ht(\langle P, I \rangle) = m$  tenemos que  $ht(\langle P, f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle) = m$ . De la fórmula  $ht(I, a) \leq ht(I) + 1$  se tiene que  $ht(P) + s \geq ht(P, f_2, \dots, f_{s+1}) = m$ . Entonces  $ht(P) \geq m - (s + 1) + 1$ .

En el segundo caso existe un polinomio  $Q_1(x_2, \dots, x_s, x_{s+1})$  no nulo tal que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in \langle P, f_1 \rangle$ . Sea  $P_1$  ideal primo tal que  $P_1 \supset \langle P, f_1 \rangle$ , y  $ht(P_1) = ht(\langle P, f_1 \rangle)$ . Notemos que  $Q_1(f_2, \dots, f_s, f_{s+1}) \in P_1$ , y  $ht(\langle P_1, I_1 \rangle) = m$ , donde  $I_1 = \langle f_2, \dots, f_s, f_{s+1} \rangle$ . Aplicamos el lema para  $r = s, I = I_1, P = P_1, Q = Q_1$  y obtenemos  $ht(P_1) \geq m - s + 1$ . Como  $ht(P_1) = ht(\langle P, f_1 \rangle) \leq ht(P) + 1$  entonces

$$ht(P) \geq m - (s + 1) + 1.$$

Esto finaliza la prueba por inducción y demuestra el Lema.

■

**Lema 2.16.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal con una icis en  $\eta$ . Entonces  $ht(J_F) \geq m - r + 1$ .*

**Prueba.** Sea  $P \supseteq J_F$  un ideal primo.

Si  $f_i \in P$ , para algún  $i = 1, \dots, r$ , sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $f_1 \in P$ . Sea  $Q(x_1, \dots, x_r) = x_1$  polinomio no nulo entonces  $Q(f_1, \dots, f_r) = f_1 \in P$ . Como  $ht(P, I) = m = \dim(R)$ , del Lema 2.15 se tiene que

$$ht(P) \geq m - r + 1.$$

Si  $f_i \notin P$  para todo  $i = 1, \dots, r$  debemos probar que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . Del Corolario 1.41 tenemos que en  $K = Q(D)$ , el cuerpo de fracciones de  $D = R/P$ , los elementos  $f_1, \dots, f_r$  no forman un conjunto algebraicamente independiente sobre  $k$  -el cuerpo base- ( $f_i$  denota también a la clase  $f_i$  en  $R/P$ ). Es decir, existe un polinomio  $S(x_1, \dots, x_r) \in k[x_1, \dots, x_r]$  no nulo tal que  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el cuerpo  $K$ . Como  $D$  es un dominio y  $D \hookrightarrow K$  entonces  $S(f_1, \dots, f_r) = 0$  en el anillo  $(D, \eta)$ . Esta última condición significa que  $S(f_1, \dots, f_r) \in P$ . Finalmente, como  $ht(\langle I, J_F \rangle) = m$  y  $P \supset J_F$  se tiene que  $ht(\langle P, I \rangle) = m$ . Del Lema 2.15 se sigue que  $ht(P) \geq m - r + 1$ . ■

**Ejemplo 2.17.** En este ejemplo mostramos que sin la hipótesis de singularidad aislada el lema anterior no se satisface. Sean  $f = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^3}{3}$ , y  $g = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2}$  polinomios en el anillo  $(k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ . Como  $\langle f, g, x \rangle$  es un ideal que contiene una potencia del maximal entonces  $\langle f, g \rangle$  forman una secuencia regular (ver Proposición A.38 del Apéndice). Más aún, cada ideal  $\langle f \rangle$  y  $\langle g \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Sin embargo debido a que  $J_{f, g} \subset \langle z \rangle$  entonces  $ht(J_{f, g}) \leq 1$ . Como  $ht(J_{f, g}) \geq 1$  obtenemos  $ht(J_{f, g}) = 1 < m - r + 1 = 3 - 2 + 1 = 2$ . Por lo tanto  $I = \langle f, g \rangle$  no puede tener una icis, pues de lo contrario se contradice al lema.

**Observación.** La desigualdad contraria se presenta en el siguiente Teorema el cual se llama **La generalización del P.I.T de Macaulay**. Aquí usaremos la notación  $I_t(A)$  (según se presenta en [Eis1]) para indicar el ideal generado por los menores  $t \times t$  de una matriz  $A$  de orden  $p \times q$ .

**Teorema 2.18.** Si  $A$  es una  $p \times q$  matriz con elementos en un anillo noetheriano  $R$  e  $I_t(A) \neq R$  entonces

$$ht(I_t(A)) \leq (p - t + 1)(q - t + 1)$$

**Prueba.** [Eis1, Teorema A.2.54]. ■

**Corolario 2.19.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Entonces

$$ht(J_F) = m - r + 1.$$

**Prueba.** Del Lema 2.16 tenemos la siguiente desigualdad

$$ht(J_F) \geq m - r + 1.$$

Por otro lado notemos que

$$J_F = I_r(Jac(F))$$

(según la notación establecida líneas atrás), donde  $Jac(F)$  es una matriz de orden  $m \times r$ . De la generalización del P.I.T de Macaulay tenemos que

$$ht(J_F) \leq (m - r + 1)(r - r + 1) = m - r + 1.$$

De aquí se tiene que  $ht(J_F) = m - r + 1$ . ■

**Observación.** El siguiente Lema será uno de los pilares de la demostración del Corolario 2.23, que es un caso particular del Teorema 2.25 de *clasificación de singularidades aisladas*.

**Lema 2.20.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Definamos  $h_\alpha := f + \alpha \cdot g$  y  $J_\alpha := J_{h_\alpha}$  para  $\alpha \in k$ . Si  $ht(J_\alpha) = m - 1$ , entonces existe un primo  $p_i$  que pertenece a la descomposición primaria del ideal  $J_{f,g}$  tal que  $J_\alpha \subset p_i$  y  $ht(p_i) = ht(J_\alpha) = m - 1$ . Más aún, si existe un primo  $p$  tal que  $\langle J_\alpha, J_\beta \rangle \subset p$ , con  $\alpha \neq \beta$  entonces  $ht(p) = dim(R) = m$ .*

**Prueba.** Notemos que para  $\alpha \neq \beta$  tenemos

$$J_{f,g} = J_{h_\alpha, h_\beta} \subset J_\alpha. \tag{2.3}$$

Sea

$$J_{f,g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right)$$

la descomposición primaria del ideal jacobiano, con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , y  $ht(p_i) = m - 1$ ,  $ht(p'_j) = m$ . Notemos que aquí hemos usado el hecho que  $ht(J_{f,g}) = m - 2 + 1$  según el Corolario 2.19.

Sea  $p$  un ideal primo tal que  $p \supset J_\alpha$  y  $ht(p) = ht(J_\alpha) = m - 1$ . Como  $J_\alpha \supset J_{f,g}$  (ver ecuación (2.3)) entonces

$$p \supset J_{f,g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right).$$

Por lo tanto existe algún  $i$  tal que  $q_i \subseteq p$ , lo cual significa que  $p_i \subset p$ . Como  $ht(p_i) = ht(p)$  entonces  $p = p_i$ . Por lo tanto  $J_\alpha \subset p_i$ .

Finalmente sean  $\alpha \neq \beta \in k$  y  $p$  primo tal que  $\langle J_\alpha, J_\beta \rangle \subset p$ . Como  $h_\alpha \in \sqrt{J_\alpha}$  y  $h_\beta \in \sqrt{J_\beta}$  (Corolario 1.38) entonces

$$p \supset \langle h_\alpha, h_\beta, J_{h_\beta, h_\alpha} \rangle.$$

Como  $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle = \langle f, g \rangle$  y  $J_{h_\alpha, h_\beta} = J_{f, g}$ , se tiene que

$$p \supset \langle f, g, J_{f, g} \rangle.$$

Por hipótesis  $ht(\langle f, g, J_{f, g} \rangle) = m$  entonces se tiene que

$$ht(p) = m.$$

■

**Corolario 2.21.** *Conservamos la notación del Lema anterior. Sea*

$$J_{f, g} = \left( \bigcap_{i=1}^{i=t} q_i \right) \bigcap \left( \bigcap_{j=1}^{j=t'} q'_j \right)$$

la descomposición primaria del ideal jacobiano, con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , y  $ht(p_i) = m - 1$ ,  $ht(p'_j) = m$ . Entonces el número de elementos del conjunto

$$W := \{ \lambda \in k : ht(J_\lambda) < m. \}$$

es menor o igual a  $t$ .

**Prueba.** De la definición del determinante tenemos que  $J_{f, g} = J_{h_\lambda, g}$ . De la inclusión  $J_{h_\lambda, g} \subset J_\lambda$  tenemos que  $J_{f, g} \subset J_\lambda$ . Esta última conclusión implica la desigualdad  $ht(J_{f, g}) \leq ht(J_\lambda)$ . Como  $ht(J_{f, g}) \geq m - 1$  (ver Lema 2.16) entonces  $ht(J_\lambda) \geq m - 1$ . Por lo tanto suponer que  $ht(J_\lambda) < m$  equivale asumir que  $ht(J_\lambda) = m - 1$ . Esto significa que

$$W = \{ \lambda : ht(J_\lambda) = m - 1 \}.$$

Del Lema anterior se desprende que cada  $J_\lambda$  con  $\lambda \in W$  está contenido en el primo  $p_i$  para algún  $i = 1, \dots, t$ .

Como cada  $p_i$  contiene a lo más un  $J_\lambda$  (por que sino  $ht(p_i) = m$  por el Lema 2.20), el número de elementos de  $W$  es menor igual a  $t$ . ■

**Proposición 2.22.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Entonces existe  $h \in I$  tal que  $ht(J_h) = m$*

**Prueba.** Como el conjunto  $W$  tiene a lo más  $t$  elementos y  $k$  es un cuerpo infinito entonces basta tomar  $h = h_\alpha$  con  $\alpha \notin W$ . ■

**Nota.** Del Corolario 2.21 se desprende que la mayoría (salvo tal vez un número finito) de representantes de la forma  $f + \lambda g$  cumple la tesis anterior. Más aún, la Proposición 2.22 se puede optimizar de la siguiente manera:

**Corolario 2.23.** *Sea  $(R, \eta)$  anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f, g \rangle$  ideal de intersección completa con una singularidad aislada en  $\eta$ . Entonces existe  $h_\alpha, h_\beta \in I$  tal que  $ht(J_{h_\alpha}) = ht(J_{h_\beta}) = m$  e  $I = \langle h_\alpha, h_\beta \rangle$ .*

**Prueba.** Nuevamente como  $W$  tiene a lo más  $t$  elementos y  $k$  es infinito entonces basta tomar  $h_\alpha$  y  $h_\beta$  con  $\alpha$  y  $\beta$  diferentes en  $k \setminus W$ . La igualdad  $\langle h_\alpha, h_\beta \rangle = \langle f, g \rangle$  finaliza la prueba. ■

**Observación.** El Corolario 2.23 también se puede interpretar como un **Teorema de Clasificación de las singularidades aisladas de intersección completa** para dos polinomios. Nos indica que las icis son sólo aquellas que se pueden formar con las hipersuperficies que tengan una singularidad aislada de modo que sus respectivos generadores formen una secuencia regular y una singularidad aislada.

Notemos también que la **única hipótesis** que se usa respecto al cuerpo  $k$  es que este sea de característica cero.

Este resultado se extiende para icis que estén generadas por  $r$  elementos en el Teorema 2.25.

A continuación veremos que podemos modificar el ideal de intersección completa generado por  $r$  elementos para tener que los primeros  $r - 1$  generan una icis.

**Proposición 2.24.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f e  $I = \langle f_i, i = 1, \dots, r \rangle$  una icis entonces podemos modificar los generadores  $f_1, \dots, f_r$  de  $I$  para tener que los primeros  $r - 1$  sean una icis.*

**Prueba.** Sea  $J_F = (\cap_{i=1}^t q_i) \cap (\cap_{j=1}^{t'} q'_j)$ , la descomposición primaria del ideal jacobiano con  $\sqrt{q_i} = p_i$ ,  $\sqrt{q'_j} = p'_j$ , donde los  $p_i$  no contienen a ningún  $f_k$  para todo  $k = 1, \dots, r$ , y los  $p'_j$  contienen al menos un  $f_k$ . Sea  $p_i$  un ideal primo en la descomposición primaria de  $J_F$ . Entonces existe  $P_i$  polinomio no nulo en  $k[x_1, \dots, x_r]$ , tal que  $P_i(f_1, \dots, f_r) = 0$  en  $\frac{R}{p_i}$  (ver Corolario 1.41). Sea  $P = \prod_{i=1}^t P_i$  entonces

$$P(f_1, \dots, f_r) = 0 \tag{2.4}$$

en  $\frac{R}{\mathfrak{p}^i}$  para todo  $i = 1, \dots, t$ . Por otro lado sabemos que para  $P(x_1, \dots, x_r)$  existen  $\lambda_i \in k$  para  $i = 1, \dots, r-1$  todos diferentes de cero, tal que  $P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r) \neq 0$  (ver Corolario A.62). A partir de las constantes  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  definamos  $g_i = f_i - \lambda_i f_r$ , y  $J_G$  como el jacobiano de los  $g_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$ .

Los ideales  $J_G$  y  $J_F$  guardan la siguiente relación de inclusión :  $J_G \supseteq J_F$ . En efecto es claro que  $J_{g_1, \dots, g_{r-1}, f_r} = J_F$ . Por lo tanto la definición del determinante y del ideal jacobiano prueban la afirmación.

Sea  $\mathfrak{p}$  un ideal primo tal que

$$\mathfrak{p} \supseteq \langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r-1 \rangle$$

y  $ht(\mathfrak{p}) = ht(\langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r-1 \rangle)$ . De la relación  $J_G \supseteq J_F$  tenemos que

$$\mathfrak{p} \supseteq J_G \supseteq J_F = (\cap_{i=1}^t q_i) \cap (\cap_{j=1}^{t'} q'_j), \quad (2.5)$$

entonces  $\mathfrak{p} \supseteq q'_i$  o  $\mathfrak{p} \supseteq q_j$ .

Primer caso: Si  $\mathfrak{p} \supseteq q'_i$ , entonces al menos un  $f_k \in \mathfrak{p}$  pues  $\mathfrak{p} \supseteq \sqrt{q'_i} = \mathfrak{p}'_i$ . Si  $f_r \in \mathfrak{p}$ , como para todo  $i = 1, \dots, r-1$  se cumple que  $f_i = g_i + \lambda_i \cdot f_r$  entonces  $f_i \in \mathfrak{p}$  para todo  $i$ . Si  $k \neq r$  como  $f_r = (f_k - g_k)/\lambda_k$  tenemos que  $f_r \in \mathfrak{p}$  y por lo tanto  $f_j \in \mathfrak{p}$  para todo  $j = 1, \dots, r$ . Recapitulando, por hipótesis

$$\mathfrak{p} \supset \langle J_G, g_i, i = 1, \dots, r-1 \rangle,$$

sabemos que  $J_G \supset J_F$  y hemos probado  $\mathfrak{p} \supset \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Entonces  $\mathfrak{p} \supset \langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle$ . De la hipótesis  $ht(\langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle) = m$  se sigue que  $ht(\mathfrak{p}) = m$ .

Segundo caso : Si  $\mathfrak{p} \supseteq q_i$ , tomemos  $P(x_1, \dots, x_r)$ , el polinomio que definimos anteriormente. Notemos que en el anillo  $R/\mathfrak{p}$  tenemos  $f_i = \lambda_i f_r$  y  $P(f_1, \dots, f_r) = 0$  (ver Ecuación (2.4)). Entonces  $P(\lambda_1 f_r, \dots, \lambda_{r-1} f_r, f_r) = 0$  en el anillo  $\frac{R}{\mathfrak{p}}$  ( $f_i$  denota la clase de  $f_i$  en  $R/\mathfrak{p}$ .) Es decir, si definimos  $Q(f_r) := P(\lambda_1 f_r, \dots, \lambda_{r-1} f_r, f_r)$  tenemos que  $Q(f_r) \in \mathfrak{p}$ , y el polinomio  $Q(x_r) = P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r)$  es **no nulo**. Por lo tanto del Lema 2.13 tenemos que  $f_r \in \sqrt{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}$ . Como  $f_i = \lambda_i f_r = 0$  en el anillo  $R/\mathfrak{p}$  y las constantes  $\lambda_i$  son diferentes de cero para todo  $i = 1, \dots, r-1$  entonces  $\mathfrak{p} \supseteq \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Como por hipótesis  $\mathfrak{p} \supset J_F$  entonces

$$\mathfrak{p} \supseteq \langle J_F, f_1, \dots, f_r \rangle.$$

Por lo tanto  $ht(\mathfrak{p}) = m$ .

Si  $t = 0$  no necesitamos definir el polinomio  $P$ . Simplemente tomamos elementos no nulos  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$  en el cuerpo  $k$ . Con ellos formamos los elementos  $g_i = f_i - \lambda_i \cdot f_r$  y estamos en el primer caso.

En ambos casos obtenemos  $ht(\langle J_G, g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = m$ . Para demostrar que  $\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle$  tiene una icis, sólo resta probar que los elementos  $g_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$  forman una secuencia regular. Para demostrar esta afirmación será suficiente probar que

$$\text{profundidad}(\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = ht(\langle g_1, \dots, g_{r-1} \rangle) = r - 1$$

(ver Proposición A.38 del Apéndice). En efecto, como

$$\langle g_1, \dots, g_{r-1}, f_r \rangle = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$$

y  $ht(\langle f_1, \dots, f_r \rangle) = r$ , entonces  $ht(\langle g_1, \dots, g_{r-1}, f_r \rangle) = r$ . Por lo tanto de la desigualdad

$$ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1; f_r \rangle) \leq ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) + 1$$

tenemos que  $ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) \geq r - 1$ . Por otro lado, el P.I.T (Teorema 1.18 del Apéndice) nos indica que  $ht(\langle g_i : i = 1, \dots, r-1 \rangle) \leq r - 1$ . ■

**Observación.** A continuación generalizamos el Corolario 2.23. Mostramos la siguiente propiedad : Si  $I = \langle f_i; i = 1, \dots, r \rangle$  es una icis, podemos elegir generadores  $\{g_i; i = 1, \dots, r\}$  de  $I$  de tal forma que cada  $\langle g_i \rangle$  tiene una singularidad aislada.

**Teorema 2.25.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Entonces existen generadores  $g_1, \dots, g_r$  tal que  $I = \langle g_1, \dots, g_r \rangle$  y cada  $g_i$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ .*

**Prueba.** El proceso se desarrollará de manera inductiva sobre  $r \geq 2$  el número de polinomios. Para dos polinomios es claro que se pueden elegir representantes con estas características usando el Corolario 2.23.

Supongamos que el teorema se cumple para toda  $I_r = \langle f_i; i = 1, \dots, r \rangle$  icis. Sea  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  una icis. De la Proposición 2.3 podemos fijar  $f_{r+1}$  y hallar elementos  $g_i$  con  $i = 1, \dots, r$ , generadores de  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  de tal forma que  $I_{r+1} = \langle g_i, f_{r+1}, i = 1, \dots, r \rangle$  y el ideal  $I_r = \langle g_i : i = 1, \dots, r \rangle$  sea una icis. De la hipótesis inductiva podemos asumir que cada  $g_i; i = 1, \dots, r$  tiene una singularidad aislada. Nuevamente para no cargar la notación denotemos los  $g_i$  por  $f_i$ . Este análisis previo nos permite afirmar que para  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$ , al menos un generador tiene una singularidad aislada en  $\eta$ ; que sin pérdida de generalidad podemos suponer que es  $f_{r+1}$ . Si fijamos este último y usamos la Proposición 2.24 podemos hallar nuevos generadores  $g_1, \dots, g_r$  tales que  $I'_r = \langle g_i; i = 1, \dots, r \rangle$ , sea una icis e  $I_{r+1} = \langle I'_r, f_{r+1} \rangle$ . De la hipótesis inductiva los generadores de

$I'_r = \langle g_i; i = 1, \dots, r \rangle$ , se pueden cambiar, **sin cambiar el ideal**, por generadores  $g'_i$  para  $i = 1, \dots, r$  tales que cada uno tenga una singularidad aislada en  $\eta$ ; a estos los denotaremos nuevamente por  $\{f_i; i = 1, \dots, r\}$ . Con ellos tenemos que  $I_{r+1}$  tiene generadores  $\{f_i; i = 1, \dots, r+1\}$ , para los cuales cada  $\langle f_i \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún, como los nuevos  $f_i$  hallados cumplen que  $I_{r+1} = \langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle$  entonces  $r+1 = ht(\langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle) = \text{profundidad}(\langle f_i; i = 1, \dots, r+1 \rangle)$  lo que nos permite afirmar (del Corolario 17.7 de Eisembud) que los nuevos elementos  $\{f_i; i = 1, \dots, r+1\}$  forman una secuencia regular. ■

**Observación.** A continuación mostramos un ejemplo de como aplicar la Proposición 2.24 de manera algorítmica en un ideal  $I$  que sea una icis.

**Ejemplo 2.26.** Los polinomios  $f = x^2$  y  $g = y^2$  en el anillo  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$  generan una icis. El ideal jacobiano  $J_{f, g} = \langle xy \rangle$  tiene la siguiente descomposición primaria

$$J_{f, g} = P_1 \cap P_2$$

donde  $P_1 = \langle x \rangle$  y  $P_2 = \langle y \rangle$ . Como  $f \in P_1$  y  $g \in P_2$  de la Proposición 2.24 es suficiente tomar  $\lambda$  no nulo en el cuerpo base  $k$ ,

$$g_1 = f - \lambda \cdot g = x^2 - \lambda y^2,$$

y tener que  $g_1$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Es claro que  $f := y^2, g := x^2 - \lambda y^2$  generan el ideal  $I$ , y  $g$  tiene una singularidad aislada.

Si aplicamos nuevamente el proceso a los nuevos generadores  $f, g$ , (ver Proposición 2.24) obtenemos que  $J_{f, g} = \langle xy \rangle$ . La descomposición primaria de este ideal nuevamente es

$$J_{f, g} = P_1 \cap P_2,$$

donde  $P_1 = \langle x \rangle$  y  $P_2 = \langle y \rangle$ . Notemos que en este caso ni  $f$  ni  $g$  se encuentran en el primo  $P_1$ . En el cuerpo  $K := Q(R/P_1)$  los elementos  $f, g$  no son  $k$  algebraicamente independientes. En efecto, para  $Q(z_1, z_2) = \lambda \cdot z_1 + z_2 \in k[z_1, z_2]$  tenemos que

$$Q(\bar{f}, \bar{g}) = \lambda \cdot \bar{y}^2 - \lambda \cdot \bar{y}^2 = 0.$$

Sea  $z_1 = t \cdot z_2$  entonces

$$Q_1(t, z_2) = Q(t \cdot z_2, z_2) = (\lambda \cdot t + 1)z_2 \in k[t, z_2]$$

es un polinomio no nulo (ver Lema A.60). Sea  $t = \beta \in k - \{0\}$  tal que  $Q_1(\beta, z_2)$  es no nulo. Es decir, sea  $\beta$  no nulo tal que  $\beta \neq -1/\lambda$ . Entonces de la Proposición 2.24

$$g_1 := f - \beta \cdot g = y^2 - \beta(x^2 - \lambda \cdot y^2) = -\beta x^2 + (1 + \beta\lambda)y^2$$

tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Notemos que en el caso que  $\beta = -1/\lambda$  entonces  $g_1 := -\beta x^2$  no tiene una singularidad aislada.

Por lo tanto,  $g_1 = -\beta x^2 + (1 + \beta\lambda)y^2$  y  $g_2 = x^2 - \lambda y^2$  generan al ideal  $I$  y cada una de ellas tiene una singularidad aislada. La constante  $\lambda$  es no nula y  $\beta$  es no nula y diferente de  $-1/\lambda$ .

**Observación.** Hemos demostrado que un elemento  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  sí sólo si  $ht(J_f) = m$ . Es decir si  $ht(J_f) < m$ , el lugar singular de  $f$  tiene dimensión mayor que cero (más complicada). En el ámbito de la geometría el lugar singular de  $f$  representa el conjunto  $Z(\langle f, J_f \rangle)$ . En el álgebra representan los ideales primos  $P$  que contienen a  $\langle f, J_f \rangle$ . Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis donde ninguno de sus generadores sea regular. Es decir  $ht(J_{f_i}) \leq m$  y puede suceder que  $ht(J_{f_i}) < m$  para todo  $i$ . Esta última condición significa que para cada  $f_i$  el lugar singular es de dimensión mayor o igual a cero. En el Teorema 2.25 hemos demostrado que podemos hallar generadores  $g_1, \dots, g_r$  donde cada uno de ellos tiene una singularidad aislada. Este resultado se puede interpretar como una *reducción de la singularidad* de los representantes  $f_1, \dots, f_r$ . Es decir, los generadores  $f_i$  tienen un lugar singular de dimensión mayor que un punto ( $ht(J_{f_i}) < m$ ), ahora para los generadores  $g_1, \dots, g_r$  sus respectivos lugares singulares son solo puntos.

Es lícito pensar que podemos hallar generadores  $h_1, \dots, h_r$  donde al menos uno de ellos sea regular. Es decir proporcionar una reducción total de la singularidad de por lo menos un generador. En el siguiente ejemplo veremos que esto no es posible. La hipótesis que el ideal  $I$  no tenga generadores regulares nos indica que  $I \subset \eta^2$ . Esto significa que no podemos hallar en el ideal  $I$  un elemento regular.

**Ejemplo 2.27.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x, y)}, \eta)$ , el anillo regular local y  $f = x^2 + y^2$ ,  $g = xy + y^2$  entonces  $J_F = \langle x(2y + x) - y^2 \rangle$ . Se prueba que  $I = \langle f, g \rangle$  es una icis. Se cumple que  $I \subset \eta^2$ . Si  $I = \langle f', g' \rangle$  donde al menos  $f'$  es regular entonces del Lema A.57 se desprende que  $J_{f'} = R$ . Esto significa que  $f' = P + ax + by$ , donde  $P \in \eta^2$  y  $a$  o  $b$  es diferente de cero. Esto significa que  $f' \notin \eta^2$  y por lo tanto  $I \not\subset \eta^2$ , una contradicción.

## 2.2. Homología de Hochschild para $I = \langle f, g \rangle$

Describiremos los complejos  $L_j$  de tal manera que nos permita develar su cohomología. En un primer momento abordamos el caso  $I = \langle f \rangle$ . Calculamos la cohomología de los complejos  $L_j$  para todo  $j > m$ . Finalmente en el caso  $I = \langle f, g \rangle$  presentamos un ejemplo que nos demuestra que no podemos seguir el camino que se planteó para el caso en que  $I = \langle f \rangle$ , donde  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}(R/\langle f \rangle, R/J_f)$

(ver [BKH]). En nuestro caso esto sólo sucede cuando  $j < m$  donde se pueden emplear las mismas técnicas. Para  $j \geq m$  mostramos que los complejos  $L_j$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos. En este caso proporcionamos una secuencia espectral  $E^*$  que converge a la cohomología de  $L_j$  y colapsa en el segundo término. Calculamos de manera conveniente el término  $E_{*,*}^1$ . En el caso particular en que  $J_g \subset J_f$  demostramos que  $E^\infty = E^1$ . La mayoría de ejemplos que conocemos cumplen esta condición, por ejemplo las curvas sobre  $\mathbb{C}$  inmersas en dimensión 3 clasificadas por ejemplo en [Looj]. En estos ejemplos podemos calcular entonces los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$ .

En el caso general demostramos que los complejos  $L_j$  para  $j < m - 1$  cumplen que  $H^t(L_j) = 0$  para todo  $t < j$ , y  $H^j(L_j) \neq 0$ . En general, para los complejos  $L_j$  con  $j > m - 1$  calculamos los módulos de cohomología en los grados  $m - 2$  y  $m$ . El término en grado  $m - 1$  se encuentra en una secuencia exacta larga donde los términos son conocidos.

### 2.2.1. El Complejo $L_j$ .

Describimos de manera conveniente el complejo  $L_j$ . Bajo la hipótesis de singularidad aislada calculamos la cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  en el caso  $I = \langle f \rangle$ . Mostramos que en el caso  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  no se puede generalizar los cálculos que presentamos cuando  $I = \langle f \rangle$ .

Sea  $I$  un ideal generado por una secuencia regular. Del Corolario 1.107 se desprende que la homología de Hochschild del álgebra  $R/I$  se descompone en los módulos de cohomología de los complejos

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I \Omega_R^{j-1}}{I^2 \Omega_R^{j-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{\Omega_R^j}{I \Omega_R^j},$$

si  $j \leq m := \dim(R)$  y

$$L_j : 0 \longrightarrow \frac{I^j \Omega_R^0}{I^{j+1} \Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-1} \Omega_R^1}{I^j \Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-m+1} \Omega_R^{m-1}}{I^{j-m+2} \Omega_R^{m-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{j-m} \Omega_R^m}{I^{j-m+1} \Omega_R^m}$$

si  $j > m$ . Vamos a describir a estos complejos  $L_j$  de una manera conveniente en la Proposición 2.28. Cuando el anillo  $R$  es r.l.e.t.f. se tiene que

$$\frac{I^s \Omega^{j-s}}{I^{s+1} \Omega^{j-s}} \simeq \frac{I^s}{I^{s+1}} \otimes_R \Omega^{j-s}$$

pues  $\Omega^s$  es libre (Teorema 1.28).

Debido a que el ideal  $I$  es de intersección completa, el  $R/I$ -módulo graduado  $\bigoplus_{s \geq 0} \frac{I^s}{I^{s+1}}$  es isomorfo al anillo de polinomios  $\frac{R}{I}[y_1, \dots, y_r]$  (ver Proposición A.29) donde  $ht(I) = r$ . Denotemos al espacio vectorial de los polinomios homogéneos de  $k[y_1, \dots, y_r]$  de grado  $s$  por  $\bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r}$ , donde  $a = (a_1, \dots, a_r)$  y  $|a| = a_1 + \dots + a_r$ . Con esta notación se prueba que

$$\frac{I^s}{I^{s+1}} \simeq \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \frac{R}{I}.$$

Usando estos isomorfismos veremos que el morfismo borde resulta ser casi la multiplicación por los  $df_i$ . En efecto definamos  $\bar{\Omega} := \Omega \otimes R/I$ , el siguiente diagrama conmutativo define  $\delta$

$$\begin{array}{ccc} \frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s}} & \xrightarrow{d} & \frac{I^{s-1} \Omega_R^{j-s+1}}{I^s \Omega_R^{j-s+1}} \\ \simeq \uparrow & & \simeq \uparrow \\ \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s} & \xrightarrow{\delta'} & \bigoplus_{|a|=s-1} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s+1}, \end{array}$$

donde  $z = y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes \bar{\omega} \in \bigoplus_{|a|=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s}$  corresponde a  $x = \overline{f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} \omega}$  en el módulo  $\frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s}}$ . De la definición del morfismo  $d$  se sigue que

$$\begin{aligned} d(x) &= \sum_{i=1}^r \overline{f_1^{a_1} \cdots f_i^{a_i-1} \cdots f_r^{a_r} \cdot a_i \cdot df_i \wedge \omega} + \overline{f_1^{a_1} \cdots f_r^{a_r} d(\omega)} = \\ &= \sum_{i=1}^r \overline{f_1^{a_1} \cdots f_i^{a_i-1} \cdots f_r^{a_r} \cdot a_i \cdot df_i \wedge \omega}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $d(x)$  corresponde al elemento  $\sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-1} \cdots y_r^{a_r} \otimes a_i \cdot \overline{df_i \wedge \omega}$  en el módulo  $\bigoplus_{|a|=s-1} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \otimes_k \bar{\Omega}_R^{j-s+1}$ . Entonces podemos escribir

$$\delta'(z) = \sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \cdots y_i^{a_i-1} \cdots y_r^{a_r} \otimes a_i \cdot \overline{df_i \wedge \omega}$$

Notemos que  $a_i$  puede ser cero.

Como  $k \supset \mathbb{Q}$  podemos reemplazar las potencias  $f_i^j$  por  $f_i^{(j)} = \frac{f_i^j}{j!}$  entonces el morfismo se define sólo con la multiplicación por  $df_i$ , para  $i = 1, \dots, r$ . Es decir el

siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \frac{I^s \Omega_R^{j-s}}{I^{s+1} \Omega_R^{j-s+1}} & \xrightarrow{d} & \frac{I^{s-1} \Omega_R^{j-s+1}}{I^s \Omega_R^{j-s+1}} \\
 \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq \\
 \bigoplus_{|\alpha|=s} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^{j-s} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|\alpha|=s-1} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^{j-s+1}
 \end{array}$$

es conmutativo, donde

$$\delta(y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes \omega) = \sum_{i=1}^r y_1^{(\alpha_1)} \dots y_i^{(\alpha_i-1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes \overline{df_i} \wedge \omega.$$

Por convención  $y_i^{(b)} = 0$  si  $b < 0$ , para todo  $i = 1, \dots, r$ .

**Proposición 2.28.** *El complejo  $L_j$  es isomorfo a*

$$\begin{aligned}
 0 &\longrightarrow \bigoplus_{|\alpha|=j} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|\alpha|=j-1} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^1 \xrightarrow{\delta} \dots \\
 \dots &\longrightarrow \bigoplus_{|\alpha|=1} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^{j-1} \longrightarrow \bigoplus_{|\alpha|=0} y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes_k \overline{\Omega}_R^j,
 \end{aligned}$$

donde

$$\delta(y_1^{(\alpha_1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes \omega) = \sum y_1^{(\alpha_1)} \dots y_i^{(\alpha_i-1)} \dots y_r^{(\alpha_r)} \otimes \overline{df_i} \wedge \omega,$$

$$y \overline{\Omega}_R^* = \Omega_R^* \otimes_R R/I.$$

**Prueba.** Se sigue del análisis anterior. ■

**Observación.** Veamos rápidamente el caso en el cual  $I = \langle f \rangle$  para valores de  $j \geq m = \dim(R)$ . En este caso se prueba que el complejo  $L_j$  es isomorfo a

$$\overline{\Omega}_R^0 \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^1 \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^m$$

(usar Proposición 2.28 y notar que  $k[x]_s \otimes_k \overline{\Omega}^i \simeq \overline{\Omega}^i$ .) Esto se puede escribir como

$$(\Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} \Omega_R^m) \otimes_R R/\langle f \rangle.$$

Es decir  $L_j = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R \frac{R}{I}$ , donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$  para cierta base  $dx_1, \dots, dx_m$  del módulo  $\Omega_R^1$ .

**Observación.** Basados en la descripción anterior podemos demostrar, en el caso particular que  $I = \langle f \rangle$ , lo siguiente : Sea el anillo  $R = k[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)}$ . Si  $f$  es regular (es decir  $J_f = R$ , ver Lema A.57) entonces  $HH_*(R/I) = \Omega_{R/I}^*$ . La demostración de esta afirmación se esboza en el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 2.29.** Sea  $A = ((k[x_1, \dots, x_m]/\langle f \rangle)_{(x_1, \dots, x_m)}, \eta)$  un anillo donde  $f$  es un polinomio regular en el punto  $(0, \dots, 0)$ . Esto significa que la matriz  $Jac(f)$  evaluada en el punto  $(0, \dots, 0)$  tiene rango uno. Es claro observar que esto equivale a tener que el ideal jacobiano  $J_f$  es unidad en el anillo  $k[x_1, \dots, x_m]_{(x_1, \dots, x_m)}$ . Entonces algún  $f_{x_i}$  se encuentra fuera del maximal  $\eta$ . Por lo tanto se prueba que

$$T : \overline{\Omega}_R^1 \longrightarrow \overline{\Omega}_R^1$$

definido por  $T(dx_j) = dx_j$  para  $j \neq i$ ; y  $T(dx_i) = df$  es un isomorfismo. Este isomorfismo prueba que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \overline{\Omega}^* & \xrightarrow{df} & \overline{\Omega}^{*+1} \\ \wedge^* T \uparrow & & \downarrow \wedge^{*+1} T^{-1} \\ \overline{\Omega}^* & \xrightarrow{dx_i} & \overline{\Omega}^{*+1} \end{array}$$

es conmutativo. Esto significa que el complejo

$$\overline{\Omega}_R^0 \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^1 \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} \overline{\Omega}_R^m \longrightarrow 0,$$

es quasi isomorfo al complejo exacto

$$\overline{\Omega}_R^0 \xrightarrow{dx_1} \overline{\Omega}_R^1 \xrightarrow{dx_1} \dots \xrightarrow{dx_1} \overline{\Omega}_R^m \longrightarrow 0.$$

Del Corolario 1.107 se desprende que

$$HH_n(R/\langle f \rangle) = H^n(L_n) = \overline{\Omega}^n / (dx_1 \wedge \overline{\Omega}^{n-1}) \simeq \Omega_{R/\langle f \rangle}^n,$$

si  $n < m$ . Esto nos indica que  $HH_n(A) = \Omega_A^n$ , para todo valor de  $n < m$  y cero para valores mayores o iguales a  $m$ , donde  $A = R/\langle f \rangle$ .

**Observación.** El Propósito del ejemplo anterior es ilustrar la técnica que en él se emplea. Una manera directa de calcular  $HH_*(A)$  cuando  $A = R/\langle f \rangle$  y  $f$  es regular, es usar el Teorema 1.51 (ver Lema A.57).

**Observación.** Si a la hipótesis de intersección completa impuesta al ideal  $I$  (recordemos que esta hipótesis es la que nos permite usar el Corolario 1.107) le agregamos la hipótesis de singularidad aislada, es decir

$$ht(\langle J_f, f \rangle) = \dim(R) = m$$

tenemos la siguiente Proposición.

**Proposición 2.30.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada. La cohomología de los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  cumple

$$H^s(L_j) = \text{Tor}_{m-s}\left(\frac{R}{J_f}, \frac{R}{I}\right)$$

para todo  $s \leq m$ .

**Prueba.** En efecto, sea

$$L_j : (\Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} \Omega_R^m) \otimes_R \frac{R}{I} = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I,$$

donde  $df = \sum_{i=1}^m df_{x_i} dx_i$ . Como  $I = \langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces  $\{f_{x_1}, \dots, f_{x_m}\}$  forman una secuencia regular. Por lo tanto el complejo Koszul  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  de  $f_{x_1}, \dots, f_{x_m}$  es una resolución de  $R/J_f \simeq \Omega^m/df$ , donde  $df$  denota la imagen de  $df \wedge - : \Omega^{m-1} \rightarrow \Omega^m$  (ver Lema 1.70). Es decir  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right)$ . ■

**Ejemplo 2.31.** Sea  $f = x^2 + y^2 + z^2$  en  $(k[x, y, z]_{(x, y, z)}, \eta)$ , entonces  $J_f = \eta$ . Como  $H^*(L_j) = \text{Tor}_{m-*}\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right)$ , si usamos la resolución

$$K(f) : R \xrightarrow{f} R$$

de  $R/I$  tenemos que

$$K(f) \otimes_R R/\eta : k \xrightarrow{0} k.$$

Por lo tanto

$$H^*(L_j) = \begin{cases} k & \text{si } * = m \\ k & \text{si } * = m-1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Para el caso de un polinomio el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  fueron realizados por Michler. Presentamos una leve generalización de su resultado.

**Corolario 2.32.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f,  $I = \langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada en  $\eta$  entonces*

$$H^*(L_j) = \begin{cases} \frac{(J_f:f)}{J_f} & \text{si } * = m-1 \\ \frac{R}{\langle f, J_f \rangle} & \text{si } * = m \end{cases} \quad (2.7)$$

para  $j \geq m = \dim R$ .

**Prueba.** Será suficiente hallar una resolución de  $R/\langle f \rangle$  (ver Proposición 2.30). Como  $R$  es un dominio, el complejo

$$K(f) : R \xrightarrow{f} R$$

es una resolución de  $R/\langle f \rangle$ . Por lo tanto el complejo  $K(f) \otimes R/J_f$  se escribe como

$$K(f) \otimes R/\langle J_f \rangle : 0 \longrightarrow R/\langle J_f \rangle \xrightarrow{f} R/\langle J_f \rangle.$$

De aquí se sigue que  $H^{m-1}(L_j) = \frac{(J_f:f)}{J_f}$ , y  $H^m(L_j) = R/\langle f, J_f \rangle$ . ■

**Observación.** Notemos que la dimensión de  $H^m(L_j)$  (para  $j \geq m$ ) es el número de Tjurina de la singularidad (ver Observación en la Proposición 2.4)

De ahora en adelante, hasta finalizar la sección, veremos solamente el caso en el que  $I = \langle f, g \rangle$  sea intersección completa y tenga una singularidad aislada. Es decir trabajaremos bajo la hipótesis que el ideal  $I$  sea intersección completa y cumpla la siguiente propiedad :

$$ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m.$$

Nuestro estudio se centrará en la cohomología de los complejos  $L_j$  para valores  $j \geq \dim(R)$ . En adelante para no cargar la notación escribiremos  $y_i^a$  por  $y_i^{(a)}$ . La Proposición 2.28 prueba que los complejos  $L_{m+k}$  se expresan de la siguiente manera

$$L_{m+p} : \bigoplus_{|a|=m+p} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=m+p-1} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p+1} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^{m-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \bar{\Omega}^m,$$

donde  $\bar{\Omega}^s = \Omega^s \otimes_R R/I$ . A partir de aquí usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \bigoplus_{|\alpha|=i+p; a_2=l} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \Omega^{m-i},$$

especialmente cuando escribamos  $L'_{m+p}$  como un bicomplejo. Cuando no halla lugar a duda en que complejo  $L_j$  estemos trabajando sólo pondremos  $\Omega_{i,l}^{m-i}$ . Notemos que  $y_1^j y_2^i \bar{\Omega}^s \simeq y_1^j y_2^{i-1} \bar{\Omega}^s \simeq \bar{\Omega}^s$ .

**Definición 2.33.** Definamos los complejos  $L'_{m+p}$  de la siguiente manera :

$$L'_{m+p} : \bigoplus_{l=0}^{m+p} \Omega_{m,l}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{m+p-1} \Omega_{m-1,l}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^p \Omega_{0,l}^m \longrightarrow 0,$$

y el morfismo borde se define como  $\delta(y_1^a y_2^b \omega) = y_1^{a-1} y_2^b df \wedge \omega + y_1^a y_2^{b-1} dg \wedge \omega$ , donde  $y_1^a = y_2^a = 0$  si  $a < 0$ .

**Observación.** Notemos que  $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes_R R/I$  y que  $\delta^2 = 0$ . Una idea natural para generalizar la Proposición 2.30 en el caso de más un polinomio es intentar probar que  $H^*(L_m) = \text{Tor}_{m-*}(\frac{R}{I}, R/\langle J_f, J_g \rangle)$  donde  $L'_m$  es una resolución de  $R/\langle J_f, J_g \rangle = H^m(L'_m)$ . El siguiente ejemplo muestra que esto no es posible :

**Ejemplo 2.34.** Sea  $f = x^2 + y^2 + z^2$  y  $g = xy + z^2$  en  $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x,y,z)}, \eta)$ . Se prueba que  $f, g$  forman una secuencia regular. Un cálculo muestra que  $J_{f,g} = \langle x^2 - y^2, z(2x - y), z(2y - x) \rangle$ ,  $ht((J_{f,g}, f, g)) = 3$ . Es decir el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  tiene una singularidad aislada de intersección completa en  $\eta$ . Más aún como  $J_f = J_g = \eta$  entonces  $ht(J_f) = ht(J_g) = 3 = \dim Krull(R)$ . Del Corolario 2.5 la última conclusión significa que  $f$  y  $g$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$ . Esto a su vez equivale a tener que los complejos  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  y  $K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m})$ , tienen cohomología cero para todo  $i \neq m$ , donde  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$  y  $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$ .

Debido a que el complejo  $L_m$  se puede escribir como

$$L_m : \begin{array}{ccccccc} \dots & & \dots & & \dots & & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \Omega_{1,1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,1}^{m-2} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{3,1}^{m-3} & \xleftarrow{\dots} & \dots \\ \downarrow df & & \downarrow df & & \downarrow df & & \downarrow df \\ \Omega_{0,0}^m & \xleftarrow{dg} & \Omega_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,0}^{m-2} & \xleftarrow{\dots} & \dots \end{array}$$

tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I \longrightarrow L_m \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0,$$

donde, en  $L_m$ , identificamos la primera columna de la izquierda con el complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes_R R/I$ , y el cociente con  $L_{m-1}$  (notemos que  $x^j y^i \overline{\Omega}^s \simeq x^j y^{i-1} \overline{\Omega}^s$ ). Como  $f$  tiene una singularidad aislada entonces

$$H^*(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*} \left( \frac{R}{I}, \frac{R}{J_{f,g}} \right).$$

Por lo tanto si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología tenemos

$$\begin{aligned} \dots &\longrightarrow H^{m-2}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_1} \\ \text{Tor}_1 \left( \frac{R}{I}, \frac{R}{J_f} \right) &\longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df+dg} \xrightarrow{\delta_0} \\ \text{Tor}_0 \left( \frac{R}{I}, \frac{R}{J_f} \right) &\longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^m}{df+dg}. \end{aligned}$$

Sin dificultad se prueba que  $\delta_0 = 0$  pues  $J_g \subset J_f$  y entonces  $\delta_0([\overline{\omega}]) = \overline{dg \wedge \omega} = 0 \in H^m(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = R/J_f = R/J_g$ . Veamos qué sucede con  $\delta_1$ . Sea  $[(\overline{w}_0, \overline{w}_1)]$  un elemento en el módulo  $H^{m-2}(L_{m-1})$ . Entonces para representantes  $(w_0, w_1)$  en la clase  $(\overline{w}_0, \overline{w}_1)$  de  $(L_{m-1})_{m-2}$  se cumple

$$df \wedge w_1 + dg \wedge w_0 = f \cdot \eta_1 + g \cdot \eta_2.$$

Si efectuamos el producto  $dg \wedge$  en la igualdad anterior tenemos

$$dg \wedge (df \wedge w_1 + dg \wedge w_0) = dg \wedge (f \cdot \eta_1 + g \cdot \eta_2) \quad (2.8)$$

Como  $J_f = J_g$  se tiene  $dg \wedge \eta_1, dg \wedge \eta_2 \in dg \wedge \Omega_R^{m-1} \simeq J_g = J_f \simeq df \wedge \Omega_R^{m-1}$ . Entonces existen  $\eta'_1, \eta'_2 \in \Omega_R^{m-1}$  tal que  $dg \wedge \eta_1 = df \wedge \eta'_1$  y  $dg \wedge \eta_2 = df \wedge \eta'_2$ . Por lo tanto podemos escribir

$$(f \cdot dg \wedge \eta_1 + g \cdot dg \wedge \eta_2) = (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2).$$

De aquí se sigue que la ecuación 2.8 se escribe como

$$dg \wedge df \wedge w_1 - (f \cdot df \wedge \eta'_1 + g \cdot df \wedge \eta'_2) = 0.$$

Si factorizamos  $df \wedge$  obtenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 + f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = 0.$$

Como  $df \wedge$  es el diferencial del complejo  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  que tiene cohomología cero en todos los grados salvo en nivel  $m$  (pues  $ht(J_f) = m$ ), tenemos que  $dg \wedge w_1 + (f \cdot \eta'_1 + g \cdot \eta'_2) = df \wedge \eta_2$ , para algún  $\eta_2$ . Es decir  $\overline{dg \wedge w_1} = \overline{df \wedge \eta_2}$  en  $\overline{\Omega}^{m-1}$  y

$$\delta_1([\overline{w_1}, \overline{w_2}]) = \overline{[dg \wedge w_1]} = \overline{[df \wedge \eta_2]} = 0$$

en  $H^{m-1}(K(f_1, \dots, f_m))$ . Por lo tanto tenemos la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) \longrightarrow H^{m-1}(L_m) \longrightarrow \frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df + dg} \longrightarrow 0. \quad (2.9)$$

A continuación calculamos el módulo  $Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right)$ . Si Usamos la hipótesis que el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  es intersección completa tenemos que el complejo

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(f,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,f)} R \longrightarrow 0$$

es una resolución de  $\frac{R}{I}$ . Si efectuamos el producto tensorial  $\otimes_R \frac{R}{J_f} = \otimes_R k$  en el complejo anterior obtenemos

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0$$

Esto significa que  $Tor_1\left(\frac{R}{I}, \frac{R}{J_f}\right) = k \oplus k$ . Antes de continuar un lema que nos permitirá demostrar que  $\frac{\overline{\Omega}^{m-1}}{df + dg}$  es un módulo no nulo.

**Lema 2.35.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f, y  $\langle f \rangle$  un ideal con una singularidad aislada. La aplicación*

$$df : \frac{\Omega^{m-1}}{df \wedge \Omega^{m-2} + dg \wedge \Omega^{m-2}} \rightarrow \frac{J_f \Omega^m}{J_{f,g} \Omega^m} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$$

definida por  $\overline{w} \mapsto \overline{df \wedge w}$  es un isomorfismo.

**Prueba.** Sólo la inyectividad no es clara. Si  $\overline{df \wedge w} = 0$  entonces  $df \wedge w = df \wedge dg \wedge w_1$ , por lo tanto  $df \wedge (w - dg \wedge w_1) = 0$ . Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$  entonces existe  $w_2 \in \Omega^{m-2}$  tal que  $w = dg \wedge w_1 + df \wedge w_2$ , es decir  $\overline{w} = 0$ . ■

Notemos que,  $\frac{\Omega^{m-1}}{df+dg} \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes_R \frac{R}{I} \neq 0$  por que si no  $M = \frac{J_f}{J_{f,g}}$  cumpliría que  $\frac{M}{IM} = 0$  y por el Lema de Nakayama se tendría  $M = 0$ . Pero  $J_f = \eta$  y  $J_{f,g} \subset \eta^2$  nos dice que  $M \neq 0$ . Por (2.9),  $\dim(H^{m-1}(L_m)) > 2$  y no puede ser isomorfo a

$$\text{Tor}_1(R/I, R/\langle J_f, J_g \rangle) = \text{Tor}_1(R/I, R/J_f).$$

Esto finaliza el Ejemplo 2.34.

**Corolario 2.36.** *El complejo  $L'_m$  no es exacto en general.*

**Prueba.** Si no  $L'_m$  sería una resolución de  $R/\langle J_f, J_g \rangle$  y

$$H^{m-1}(L_m) = \text{Tor}_1(R/I, R/\langle J_f, J_g \rangle).$$

■

**Observación.** Con respecto a la cohomología de los complejos  $L_j$  podemos decir es que esta corresponde al *Hipertor* de  $L'_j$  y  $R/I$ ; tal como enunciamos a continuación.

**Definición 2.37.** Una resolución de Cartan-Eilenberg  $P_{**}$  de un complejo  $(C_*, d)$  es un complejo doble en el semiplano superior de módulos proyectivos ( $P_{pq} = 0$  si  $q < 0$ ), con una aplicación

$$\epsilon : P_{*0} \rightarrow A_*$$

tal que para todo  $p$  se cumple :

Si  $C_p = 0$  la columna  $P_{p*}$  es cero. La aplicaciones

$$B(\epsilon) : B_p(P, d^h) \rightarrow B_p(C)$$

y

$$H(\epsilon) : H_p(P, d^h) \rightarrow H_p(C)$$

son resoluciones proyectivas. El módulo  $B_p(P, d^h)$  es el borde horizontal.

**Observación.** Toda cadena compleja  $(C, d)$  tiene una resolución de Cartan-Eilenberg  $P_{**}$  (ver [Wei, Lema 5.7.2]).

**Definición 2.38.** Sean  $(C_*, d)$  una cadena,  $B$  un módulo, y  $P \rightarrow (C_*, d)$  una resolución de Cartan-Eilenberg. Definimos el *Hipertor* ( TOR ) de  $(C_*, d)$  y  $B$  como

$$\text{TOR}_i(C_*, B) = H_i(\text{Tot}(P \otimes B)).$$

**Observación.** En el caso que  $C$  sea un módulo  $A$  concentrado en grado cero obtenemos la definición de  $Tor_i(A, B)$ .

Si el complejo  $(C, d)$  es finito entonces

$$TOR_i(C_*, B) = H_i(C_* \otimes B)$$

para todo  $i$  (ver [Wei, Aplicación 5.7.8]). Como  $L_j = L'_j \otimes R/I$  entonces

$$H^i(L_j) = TOR_{m-*}(L'_j, R/I).$$

**Observación.** A continuación veremos cuantos módulos de cohomología nulos existen en los complejos  $L_j$  para todo  $j \geq 1$  donde  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es una icis.

**Lema 2.39.** Sean  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f., e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces para todo primo  $P$  en el anillo  $R/I$  se tiene  $H^i((L_j)_P) = 0$  es exacto para todo  $j > m - r + 1$  e  $i \geq 0$ .

$$H^i((L_j)_P) = \begin{cases} 0 & \text{para todo } i \text{ si } j > m - r \\ 0 & \text{si } j \leq m - r \text{ e } i \neq j \\ \wedge^j N & \text{si } i = j \leq m - r, \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $N = \bigoplus_{i=1}^{m-r+1} R_P \cdot e_i$

**Prueba.** Sea  $P$  un ideal primo diferente que el maximal en el anillo  $A := R/I$ . Del Lema 2.3 se sigue que el anillo  $A_P$  es regular local. Esto significa que  $R$  es suave. Por lo tanto, del Teorema de Hochschild Konstant Rosenberg tenemos que

$$HH_n(A_P) = \Omega_{A_P}^n = H^n(L_n).$$

Por otro lado sabemos que

$$HH_n(A_P) = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} H^{n-2i}((L_{n-i})_P),$$

para todo  $n \leq m - r + 1$ . De aquí se sigue que  $H^n((L_n)_P) = \Omega_{A_P}$  y  $H^i((L_{n-i})_P) = 0$  para todo  $i > 0$ , y  $n \leq m - r + 1$ . Como  $HH_n(A_P) = 0$  para todo  $n > m - r + 1$  obtenemos que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $j > m - r + 1$ . ■

**Corolario 2.40.** Sean  $(R, \eta)$  un a.r.l.e.t.f e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces

$$H^i((L_j)) = 0$$

para todo  $i < m - r$  e  $i > m$  si  $j > m - r$ ; y si  $j \leq m - r$  e  $i \neq j$ .

**Prueba.** Notemos que el anillo  $A = R/I$  tiene dimensión  $m - r$ . Los complejos  $L_j$  son complejos de  $A$ -módulos libres. Sea  $j > m - r$  entonces del lema anterior tenemos que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $i$ . Del Corolario 1.69 se sigue que  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i < m - r - 1$ . La longitud del complejo  $L_j$  es a lo más igual a  $m$ . Por lo tanto  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i > m$ .

Sea  $j \leq m - r$ , del lema anterior se tiene que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $i < j$  y para todo primo  $P$  de altura menor que  $m - r$ . El criterio de exactitud nos indica que  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i < j$ . ■

**Observación.** Interesados en conocer la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  presentaremos el cálculo de la cohomología de ciertos complejos  $L_j(x_1, \dots, x_r)$  isomorfos a  $L_j$  en cierta localización  $R_P$ . Ellos se pueden asumir como una generalización del complejo de Koszul. Por esta razón presentamos la siguiente subsección :

## 2.2.2. Una Generalización del Complejo de Koszul

En este ítem trabajaremos en  $A$  una  $k$ -álgebra local e.t.f. Entre los principales ejemplos de estas álgebras se encuentran los anillos  $(R, \eta)$  r.l.e.t.f., sus localizaciones y los anillos  $R/I$ , donde  $I$  es un ideal de intersección completa con una singularidad aislada.

En base a los complejos  $L_j$  para  $j > 0$  daremos la siguiente definición :

**Definición 2.41.** Sea  $(A, \eta)$  un anillo local con una estructura de  $k$ -álgebra,  $N = \bigoplus_{i=1}^m A \cdot dx_i$  un  $A$ -módulo libre. Denotemos  $N^i := \wedge^i N$ , y  $N^0 = A$ . Definamos los complejos  $L_j(dx_1, \dots, dx_r, N)$  con  $r \leq m$  de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{|a|=j} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^0 & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N & \xrightarrow{\delta} & \cdots & & \\ & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^{j-1} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^j, & & \end{array}$$

si  $j < m$ , y

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{|a|=j} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k A & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N & \xrightarrow{\delta} & \cdots & & \\ & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-m+1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^{m-1} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-m} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^m, & & \end{array}$$

si  $j \geq m$ . Donde  $\delta(x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \omega) = \sum_{i=1}^r x_1^{a_1} \cdots x_i^{a_i-1} \cdots x_r^{a_r} dx_i \wedge \omega$ , y  $x_i^b = 0$ , si  $b < 0$ . Donde  $a = (a_1, \dots, a_r)$ , y  $|a| = a_1 + \dots + a_r = j - s$ .

**Observación.** Cuando no haya lugar a confusión escribiremos  $L(x_1, \dots, x_r)$  por  $L_j(dx_1, \dots, dx_r, N)$ . Cuando  $df_1, \dots, df_r$  es parte de una base en  $\Omega_{R_P}^1$  es obvio que  $L(df_1, \dots, df_r, \Omega_{R_P}^1)$  es isomorfo a  $L(x_1, \dots, x_r)$  sobre un  $R_P$ -módulo libre de rango  $m$ .

**Lema 2.42.** *El complejo  $L_j(x_1, \dots, x_r)$  esta bien definido*

**Prueba.** Será suficiente demostrar que  $\delta^2 = 0$ . Sea  $x = x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \omega$  entonces

$$\delta(x) = \sum_{i=1}^r x_1^{a_1} \dots x_i^{a_i-1} \dots x_r^{a_r} dx_i \wedge \omega,$$

y

$$\delta(\delta(x)) = \sum_{i=1}^r \left( \sum_{j=1}^r x_1^{a_1} \dots x_j^{a_j-1} \dots x_i^{a_i-1} \dots x_r^{a_r} dx_j \wedge dx_i \wedge \omega \right). \quad (2.11)$$

Sea  $l < s \in \{1, \dots, r\}$  dos índices arbitrarios. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $a_l, a_s > 0$ . En efecto si  $a_l = 0$  o  $a_s = 0$  entonces el término  $x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s-1} \dots x_l^{a_l-1} \dots x_r^{a_r} dx_j \wedge dx_i \wedge \omega = 0$ .

Si en la ecuación 2.11 ponemos  $i = l$  y  $j = s$  obtenemos

$$z = x_1^{a_1} \dots x_s^{a_s-1} \dots x_l^{a_l-1} \dots x_r^{a_r} dx_s \wedge dx_l \wedge \omega.$$

Si ponemos  $i = s$  y  $j = l$  obtenemos

$$z' = x_1^{a_1} \dots x_l^{a_l-1} \dots x_s^{a_s-1} \dots x_r^{a_r} dx_l \wedge dx_s \wedge \omega.$$

Como  $z + z' = 0$  entonces  $\delta \circ \delta = 0$ . ■

**Proposición 2.43.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$ , entonces existe una secuencia exacta corta de complejos*

$$0 \longrightarrow L_j(x_1, \dots, x_{r-1}) \longrightarrow L_j(x_1, \dots, x_r) \xrightarrow{\varphi} L_{j-1}(x_1, \dots, x_r) \longrightarrow 0.$$

**Prueba.** Supongamos que  $j \geq m$ , es decir  $j = m + p$ . Definamos la aplicación

$$\varphi_t : \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N_R^t \longrightarrow \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t-1} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^j$$

de la siguiente manera : Sea  $x = x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \cdot \omega \in \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N_R^t$ ,

$$\varphi_t(x) = x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r-1} \cdot \omega. \quad (2.12)$$

Por linealidad  $\varphi$  se extiende a todo el módulo  $\bigoplus_{|\alpha|=m+p-t} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^t$ . Notemos que  $\varphi_t$  define una aplicación  $\varphi : L_{m+p}(x_1, \dots, x_r) \longrightarrow L_{m+p-1}(x_1, \dots, x_r)$  de módulos graduados. Veamos que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t+1} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^{t-1} & \xrightarrow{\varphi_{j-1}} & \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^{t-1} \\ \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\ \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^t & \xrightarrow{\varphi_t} & \bigoplus_{|\alpha|=m+p-t-1} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^t. \end{array}$$

conmute. Como ya sabemos que  $\varphi : L_{m+p}(x_1, \dots, x_r) \longrightarrow L_{m+p-1}(x_1, \dots, x_r)$ . Sea  $x$  un elemento de  $\bigoplus_{|\alpha|=m+p-t+1} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} N^{t-1}$ . Debemos demostrar que

$$\delta \circ \varphi_{t-1}(x) = \varphi_t \circ \delta(x).$$

En efecto sin pérdida de generalidad podemos asumir que  $x = x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \cdot \omega$ , entonces

$$\begin{aligned} \varphi_t \circ \delta(x) &= \varphi_t(\delta(x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \omega)) = \sum_{i=1}^r \varphi_t(x_1^{a_1} \dots x_i^{a_i-1} \dots x_r^{a_r} dx_i \wedge \omega) = \\ &= \sum_{i=1}^r x_1^{a_1} \dots x_i^{a_i-1} \dots x_r^{a_r-1} dx_i \wedge \omega. \end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\delta \circ \varphi_{t-1}(x) = \delta(x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r-1} \omega) = \sum_{i=1}^r x_1^{a_1} \dots x_i^{a_i-1} \dots x_r^{a_r-1} dx_i \wedge \omega.$$

Notemos que puede ocurrir que  $a_i - 1 < 0$ . De las dos últimas ecuaciones se desprende que  $\varphi \circ \delta = \delta \circ \varphi$ . Es decir  $\varphi$  es un morfismo de complejos.

Es claro que  $\ker(\varphi) = L_{m+p}(x_1, \dots, x_{r-1})$  esta incluido de manera natural en  $L_{m+p}(x_1, \dots, x_r)$ .

El caso  $j < m$  es similar con un caso particular para  $\varphi_j$ . ■

**Observación.** En esta parte abordaremos el cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j(x_1, \dots, x_r)$  donde  $A$  es un álgebra como en la Definición 2.41. Sean  $A$  una  $k$ -álgebra, y  $y_1, \dots, y_m$  variables. La  $A$ -álgebra  $B := A[y_1, \dots, y_m]$  es suave sobre  $A$ . Por lo tanto del teorema de Hochschild-Kostant-Rosenberg tenemos que

$$HH_n^A(B) = \Omega_{B|A}^n = \bigwedge_{i=1}^n \left[ \bigoplus_{i=1}^m B \cdot dy_i \right]$$

si  $n \leq m$  y cero en otro término (ver [Wei, Ejercicio 9.1.3]). Es decir,  $HH_n(B)$  es un módulo  $B$ -libre, más aún la álgebra  $B$  es homológicamente regular. El ideal  $I = \langle y_1, \dots, y_r \rangle$  es intersección completa, y  $C := B/I = A[y_{r+1}, \dots, y_m]$  es suave sobre  $A$ . Por lo tanto tenemos que

$$HH_n^A(C) = \Omega_C^n = \bigwedge_{i=r+1}^n \left[ \bigoplus_{i=r+1}^m C \cdot dy_i \right],$$

si  $n < m - r + 1$  y cero en los demás casos. Por otro lado, dado que  $I$  es intersección completa, tenemos que

$$HH_n^A(C) = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} H^{n-2i}(L_{n-i}),$$

donde el complejo  $L_j$  es de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} \bigoplus_{|a|=j} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^0 & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=j-1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N & \xrightarrow{\delta} & \cdots & & \\ & & & & & & \\ \cdots & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=1} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^{j-1} & \xrightarrow{\delta} & \bigoplus_{|a|=0} x_1^{a_1} \cdots x_r^{a_r} \otimes_k N^j, & & \end{array}$$

y  $N = \overline{\Omega}_{B|A}^1 = \Omega_{B|A}^1 \otimes_B C$ . Notemos que  $\wedge^j N = 0$  si  $j > m$  y  $\wedge^m N = B$ .

**Lema 2.44.** Sean  $n$  en los naturales. Si

$$HH_n^A(C) = \Omega_C^n = \bigoplus_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} H^{n-2i}(L_{n-i}),$$

entonces  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i \neq j \leq m - r$ ,  $H^j(L_j) = \Omega_C^j$  si  $j \leq m - r$  y  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i$  si  $j > m - r$ .

**Prueba.** Se sigue de la descomposición de Hogde de la homología de Hochschild y homología Cíclica ■

**Observación.** En el anillo  $C$  la secuencia  $y_{r+1}, \dots, y_m$  es una secuencia regular, entonces el complejo Koszul  $K(y_{r+1}, \dots, y_m)$  es exacto.

Ahora la cohomología que nos interesa es la de los complejos

$$L_j \otimes_C C / \langle y_{r+1}, \dots, y_m \rangle = L_j \otimes_C A.$$

Como  $K(y_{r+1}, \dots, y_m)$  es una resolución de  $A$  de  $C$ -módulos libre entonces

$$H^*(L_j \otimes_C K(y_{r+1}, \dots, y_m)) = H^{*-j}(H^j(L_j) \otimes_C K(y_{r+1}, \dots, y_m)),$$

y cero si  $j > m - r + 1$  (ver Lema 2.44). El módulo  $H^j(L_j) = \Omega_C^j$  es un  $C$ -módulo libre. Como  $y_{r+1}, \dots, y_m$  es una secuencia regular en  $C$  entonces  $K(y_{r+1}, \dots, y_m)$  es una resolución de  $A$ , entonces

$$\begin{aligned} H^*(L_j \otimes_C K(y_{r+1}, \dots, y_m)) &= H^{*-j}(H^j(L_j) \otimes_C K(y_{r+1}, \dots, y_m)) = \\ &H^j(L_j) \otimes_C A. \end{aligned}$$

**Corolario 2.45.** *Sea  $j > m - r$  entonces*

$$H^i(L_j \otimes A) = 0$$

para todo  $i \geq 0$ . Sea  $j \leq m - r$  entonces

$$H^i(L_j \otimes A) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ H^j(L_j) \otimes_C A = \Omega_C^j \otimes_C A & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (2.13)$$

**Prueba.** Se sigue de la observación anterior. ■

### 2.2.3. Cálculo de la Homología de Hochschild

En esta parte nos encaminamos en dirección al cálculo de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . Como sabemos el complejo  $L'_m$  no es exacto en general. En relación a sus módulos de cohomología podemos precisar lo siguiente: *Los módulos de cohomología del complejo  $L'_{m+p}$  están soportados en los primos  $P$  que contienen al ideal  $J_{f,g}$ .*

Él es pieza fundamental para demostrar que los complejos  $L_{m+p}$  para  $k \geq 0$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos. Este Teorema será uno de los pilares donde se sentara las bases de la siguiente sección. La igualdad  $ht(J_F) = m - r + 1$  conjuntamente con el resultado anterior nos permitirán demostrar:

Los complejos  $L_j$  para  $j \leq m - 2$  tienen cohomología cero para todo  $i \neq j$ . Para  $j = m - 1$  llegamos a que  $H^s(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-s}(J_f/J_{f,g}, R/I)$ . Finalmente para  $j \geq m$  presentamos una secuencia espectral  $E_{p,q}$  que converge a la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  y  $E^2 = E^\infty$ .

Los cálculos mencionados líneas atrás se sintetizan en el siguiente Teorema

**Teorema 2.46.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces*

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < \min\{j, m-2\}. \\ \frac{df \wedge \Omega^j}{df \wedge dg \wedge \Omega^{j-1}} \otimes R/I & \text{si } i = j \text{ y } j \leq m. \\ \text{Tor}_{m-1-i}(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I) & \text{si } j = m-1. \\ \text{Tor}_1(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I) & \text{si } j > m-1 \text{ e } i = m-2, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde  $C_{p+1} = (L'_{m+p})^{\leq m-1}$  (ver Proposición 2.55). Para los términos en nivel  $m-1$  y  $m$  presentamos una secuencia espectral

$$E_{2,0}^1 = \text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad (2.15)$$

$$E_{1,0}^1 = \text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{1,1}^1 = \text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I})$$

$$E_{0,0}^1 = \text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} E_{0,1}^1 = \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}),$$

donde  $\text{Gr}(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p R/J_f$  (ver Teorema 2.62) y  $d^1$  es el producto exterior con  $dg$ .

En el caso que  $J_g$  este contenido en el ideal  $J_f$ , se cumple  $E^1 = E^\infty$ , lo cual se demuestra en el Corolario 2.65. Aunque la condición  $J_g \subset J_f$  simplifica significativamente los cálculos, esta se da en muchos ejemplos conocidos. Ello nos permite calcular los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  para el caso en que  $R/I$  es de dimensión cero y la singularidad es simple (clasificación de Guisti [G]) [Looj, 7.19], a excepción de  $H_\mu$  para  $\mu \geq 7$ , y las singularidades simples de curvas inmersas en dimensión tres (ver Ejemplo 2.67). El cálculo de estos grupos de cohomología fue una de las motivaciones originales de este trabajo.

Formalmente tenemos :

**Teorema 2.47.** *Sea  $P$  un ideal primo con  $P \not\subseteq J_{f,g}$ . Entonces  $(L'_j)_P \simeq L_j(x_1, x_2)$  (con  $N = \Omega_{R_P}^1$  y  $A = R_P$ ). En particular los complejos  $L'_j$  localizados en todo primo  $P \not\subseteq J_{f,g}$  son exactos en  $(R_P, \eta_P)$  para todo  $j \geq m-1$ . Para  $j < m-1$  los complejos  $(L'_j)_P$  son exactos excepto posiblemente en grado  $j$ .*

**Prueba.** Sea  $dx_1, \dots, dx_m$  una base del módulo libre  $\Omega_R^1$ , y  $df = \sum_{i=1}^m f_{x_i} dx_i$ ,  $dg = \sum_{i=1}^m g_{x_i} dx_i$  la representaciones de los diferenciales de  $f$  y  $g$  en dicha base.

Entonces el ideal  $J_{f,g}$  es generado por los elementos  $f_{x_i}g_{x_j} - f_{x_j}g_{x_i}$ . Con estos lineamientos establecidos iniciemos la prueba del Teorema :

Sea  $P$  ideal primo tal que  $P \not\subseteq J_{f,g}$  entonces algún

$$f_{x_i}g_{x_j} - f_{x_j}g_{x_i} \notin P$$

para índices  $i, j$  diferentes. Es decir  $f_{x_i}g_{x_j} - f_{x_j}g_{x_i}$  es unidad en  $R_P$ .

**Afirmación.** Sin pérdida de generalidad podemos suponer (por un isomorfismo del módulo libre  $\Omega_R^1$  que reordene la base) que

$$f_{x_1}g_{x_2} - f_{x_2}g_{x_1} \notin P.$$

Por otro lado como  $\Omega_{R_P}^1 = \bigoplus_{i=1}^m R_P dx_i$ , definamos  $N := \Omega_{R_P}^1$ . Esta notación es sólo para indicar que  $T$  establece un isomorfismo entre los complejos  $(L'_j)_P$  y  $L_j(x_1, x_2)$ . Definamos la aplicación  $R_P$  lineal

$$T : N \longrightarrow \Omega_{R_P}^1$$

como  $Tdx_1 = df$ ,  $Tdx_2 = dg$  y  $Tdx_i = dx_i$  para  $i \geq 3$ . De la representación matricial de  $T$  en la base  $dx_1, \dots, dx_m$  tenemos que  $|T| = f_{x_1}g_{x_2} - f_{x_2}g_{x_1}$  es unidad en  $R_P$ . Por lo tanto  $T^{-1} = \frac{Adj(T)}{|T|}$  esta bien definido. Esto significa que  $df_1, \dots, df_r$  forman parte de una base de  $\Omega_{R_P}^1$ . Entonces  $(L'_j)_P = L_j(df_1, \dots, df_r, \Omega_{R_P}^1)$

El hecho que  $L'_j$  sea exacto para  $j \geq m - 1$  se sigue del Corolario 2.45. La conclusión que los  $L_j$  para  $j < m - 1$  sean exactos excepto en el último nivel se sigue también del Corolario 2.45. ■

**Observación.** Si repetimos la demostración anterior ahora para el módulo  $\overline{\Omega}_R^*$  obtenemos

**Teorema 2.48.** *Los complejos  $L_j$  localizados en todo primo  $P \not\subseteq J_{f,g}$  son exactos en  $((R/I)_P, \overline{\eta}_P)$  para todo  $j \geq m - 1$ . Para  $j < m - 1$  los complejos  $(L_j)_P$  son exactos salvo posiblemente en grado  $j$ .*

**Prueba.** Es la misma que la demostración anterior con  $A = (R/I)_P$  y  $N = \bigoplus_{i=1}^m Adx_i$ . ■

**Proposición 2.49.** *El complejo  $L'_{m-1}$  es exacto salvo en nivel  $m - 1$ .*

**Prueba.** Es claro que el complejo  $L'_{m-1}$  tiene longitud  $m - 1$ . Entonces demostrar que  $H^i(L'_{m-1}) = 0$  para todo  $i \neq m - 1$  -usando el criterio de exactitud- equivale a probar que :

$(L'_{m-1})_P$  tiene cohomología cero para todo  $i \neq m - 1$  para todo primo  $P$  tal que  $\text{profundidad}(P) = \text{ht}(P) < m - 1$ .

En efecto sea  $P$  primo tal que  $\text{ht}(P) < m - 1$ . Del Corolario 2.19 tenemos

$$\text{ht}(J_F) = m - r + 1.$$

En el caso particular que  $r = 2$  obtenemos  $\text{ht}(J_{f,g}) = m - 2 + 1$ , es decir  $J_{f,g} \not\subseteq P$ . Entonces en  $R_P$  el complejo  $(L'_{m-1})_P$  es exacto. (ver Teorema 2.47). Esto finaliza la prueba. ■

**Corolario 2.50.** *La cohomología del complejo  $L_{m-1}$  cumple*

$$H^*(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-*}(R/I, \frac{J_f}{J_{f,g}}),$$

donde  $I = \langle f, g \rangle$  y el generador  $\langle f \rangle$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ .

**Prueba.** Por la proposición, reindexando,  $L'_{m-1}$  es una resolución de

$$H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq \frac{J_f}{J_{f,g}}$$

(Lema 2.35) y  $L_{m-1} = L'_{m-1} \otimes R/I$ . Entonces

$$H^*(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-*}(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I).$$
■

**Observación.** El corolario anterior es una generalización del Corolario 2.30.

**Observación.** Hemos expresado los módulos de cohomología del complejo  $L_{m-1}$  en función de  $\text{Tor}_*(R/I, J_f/J_{f,g})$ . A continuación veremos cuantos de ellos son nulos.

**Corolario 2.51.** *Si  $i \neq m - 1, m - 2$  entonces  $H^i(L_{m-1}) = 0$ .*

**Prueba.** Se sigue del corolario 2.40.

**Observación.** A continuación veremos que la cohomología de los complejos  $L'_j$  cumple que  $H^i(L'_j) = 0$  si  $i \neq j < m - 1$ . Existen diferentes maneras de demostrar esta afirmación (ver Corolario 2.40), nosotros nos basaremos en el criterio de exactitud.

**Corolario 2.52.** *Los complejos  $L'_j$  son exactos  $\forall j < m - 1$  salvo en grado  $j$ .*

**Prueba.** Sea  $L'_j$  con  $j < m - 1$  entonces el complejo tienen longitud  $j$ . Sea  $P$  un ideal primo tal que  $ht(P) < j$ . Como  $ht(J_{f,g}) \geq m - 1$  entonces  $P \not\subseteq J_{f,g}$ . Del Teorema 2.47 se sigue que  $(L'_j)_P$  es exacto salvo posiblemente en grado  $j$ . Una aplicación directa del criterio de exactitud finaliza la prueba. ■

**Observación.** Del argumento del Corolario 2.40 obtenemos que  $H^i(L_j) = 0$  si  $i \neq j \leq m - 2$ . A continuación nosotros presentaremos otra demostración.

**Proposición 2.53.** Sea  $j \leq m - 2$  entonces para todo  $t \neq j$  tenemos  $H^t(L_j) = 0$ .

**Prueba.** Sea  $P$  un ideal primo en el anillo  $R/I$  diferente del maximal. Como siempre obviaremos la notación de clase de equivalencia en el anillo  $R/I$ . Como  $ht(J_{f,g}) = m - 2$  entonces  $P \not\subseteq J_{f,g}$ . Por lo tanto del Teorema 2.48 se tiene que  $H^i((L_j)_P) = 0$  para todo  $i \neq j$ . Una aplicación directa del Criterio de exactitud en el anillo  $R/I$  concluye la prueba. ■

**Observación.** A continuación demostraremos que los generadores  $f, g$  del ideal  $I$  forman una secuencia  $H^j(L'_j)$ -regular para  $j \leq m - 2$ . Esta propiedad no se usa en el trabajo pero afianza el manejo de las propiedades del complejo de Koszul. Como los complejos  $L'_j$  para  $j \leq m - 2$  tienen cohomología cero para todo  $i \neq j$  (Corolario 2.52) y  $L_j = L'_j \otimes R/I$  entonces

$$H^s(L_j) = \text{Tor}_{j-s}(H^j(L'_j), R/I).$$

De la proposición anterior tenemos que  $\text{Tor}_{j-s}(H^j(L'_j), R/I) = H^s(L_j) = 0$ , para todo  $s < j$ . De aquí (siguiendo el mismo procedimiento que se presenta en el Teorema A.33 del Apéndice) se prueba que  $f, g$  forman un secuencia  $H^j(L'_j)$ -regular para todo  $j \leq m - 2$ .

**Observación.** Una de las principales propiedades que usamos en las demostraciones anteriores y que se manifiesta en el Teorema 2.47 es que los módulos de cohomología de los complejos  $L'_{m+p}$  están soportados en los primos  $P \supset J_{f,g}$ . La otra propiedad que hemos usado es que los módulos de cohomología de los complejos  $L_{m+p}$  están soportados sólo en el ideal maximal (Proposición 2.53.)

A continuación demostraremos que los complejos  $L_{m+p}$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos.

**Teorema 2.54.** Se cumple que  $H^s(L_j) = 0$ , para todo  $s \leq m - 3$ ,  $s > m$  y  $j \geq m$ .

**Prueba.** Se sigue del Corolario 2.40 para  $j > m - 2$ . ■

**Observación.** A continuación presentamos el cálculo del módulo de cohomología  $H^{m-2}(L_{m+p})$  para todo  $p \geq 0$ . La primera parte de la prueba se basa en el Teorema 2.47 y el hecho que  $ht(J_{f,g}) \geq m-1$ . A continuación usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \bigoplus_{|\alpha|=i+p; a_2=l} y_1^{a_1} y_2^{a_2} \Omega^{m-i},$$

establecida líneas atrás

**Proposición 2.55.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f entonces el complejo*

$$C_{p+1} : \bigoplus_{l=0}^{m+p} \Omega_{m,l,m+p}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{m+p-1} \Omega_{m-1,l,m+p}^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{p+1} \Omega_{1,l,m+p}^{m-1} \longrightarrow 0,$$

es exacto salvo en grado  $m-1$ .

**Prueba.** Notemos que  $C_{p+1}$  es un complejo de módulos libres de longitud  $m-1$  tal que  $(C_{p+1})_s = (L'_{m+p})_s$  para todo  $s \leq m-1$ . A continuación aplicamos el criterio de exactitud al complejo  $C_{p+1}$ :

En efecto, sea  $P$  primo con  $ht(P) < m-1$ . Como  $ht(J_{f,g}) \geq m-1$  entonces  $P \not\subseteq J_{f,g}$ . Del Teorema 2.47 tenemos que  $H^s((L'_{m+p})_P) = 0$  para todo  $s \leq m$ . Es decir  $H^s((C_{p+1})_P) = 0$  en  $R_P$  para todo primo  $P \subset \eta$ , con  $ht(P) < m-1$ , y  $s \leq m-2$ . Esto significa, si empleamos el criterio de exactitud, que  $H^i(C_{p+1}) = 0$  para todo  $i \neq m-1$  en el anillo local  $(R, \eta)$ . ■

**Observación.** El siguiente lema tiene como fin calcular el último módulo de cohomología del complejo  $C_{p+1}$ .

**Lema 2.56.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. El complejo*

$$K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) : 0 \longrightarrow \Omega_R^0 \xrightarrow{df} \Omega_R^1 \xrightarrow{df} \dots \xrightarrow{df} \Omega_R^m,$$

tiene a lo más los dos últimos módulos de cohomología no nulos.

**Prueba.** Como  $J_f = (f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \supset J_{f,g}$  y  $ht(J_{f,g}) = m-1$  (Corolario 2.19) entonces  $ht(J_f) \geq m-1$ . Por lo tanto una aplicación del Corolario A.37 del Apéndice concluye la demostración del Corolario. ■

**Observación.** Si en el complejo  $L'_{m+p}$  usamos la notación

$$\Omega_{i,l,m+p}^{m-i} = \Omega_{i,l}^{m-i} = x^a y^l \Omega^{m-i},$$

entonces el complejo  $C_{p+1}$  se escribe de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc}
 C_{p+1} : & & \vdots & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \Omega_{2,p+2}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots & & \\
 & & \downarrow df & & \downarrow & & \\
 & & \Omega_{1,p+1}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,p+1}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots \\
 & & & & \downarrow df & & \\
 & & & & \cdots & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots \\
 & & & & & & \downarrow df & & \\
 & & & & & & \Omega_{1,0}^{m-1} & \xleftarrow{dg} & \Omega_{2,0}^{m-2} & \longleftarrow & \cdots
 \end{array}$$

y podemos identificar la primera columna de la izquierda con el complejo  $K'$

$$\Omega^0 \xrightarrow{df} \Omega^1 \xrightarrow{df} \cdots \xrightarrow{df} \Omega^{m-2} \xrightarrow{df} \Omega^{m-1}.$$

Del Lema anterior se sigue que  $K'$  es exacto excepto en el último nivel.

Si describimos el complejo  $C_p$  como un bicomplejo se tiene que

$$C_p \cong \frac{C_{p+1}}{K'} \quad (2.16)$$

identificando  $\Omega_{s,t}^j$  en  $C_{p+1}$  con  $\Omega_{s,t-1}^j$  en  $C_p$ . Notemos que por definición el complejo  $C_p$  es el complejo  $L'_{m+p-1}$  cortado en grado  $m-1$ . Por lo tanto tenemos la siguiente secuencia exacta corta de complejos.

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_{p+1} \longrightarrow C_p \longrightarrow 0. \quad (2.17)$$

Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología obtenemos la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_{p+1}) \longrightarrow H^{m-1}(C_p) \longrightarrow 0.$$

Notemos que

$$C_0 = L'_{m-1}. \quad (2.18)$$

**Lema 2.57.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $K'$  el complejo

$$\Omega^0 \xrightarrow{df} \Omega^1 \xrightarrow{df} \dots \Omega^{m-2} \xrightarrow{df} \Omega^{m-1}.$$

Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^{m-1}(K') \simeq J_f,$$

y  $H^i(K') = 0$  si  $i \neq m - 1$ .

**Prueba.** Definamos la aplicación

$$df : \frac{\Omega^{m-1}}{df \wedge \Omega^{m-2}} \longrightarrow J_f \Omega^m \simeq J_f$$

de la siguiente manera  $\bar{\omega} \mapsto df \wedge \omega$ . La buena definición se sigue del hecho que  $df \wedge df = 0$ . Si identificamos  $\Omega^m$  con el anillo  $R$  entonces  $df \wedge \Omega^{m-1} = J_f$ . Por lo tanto la aplicación  $\omega \mapsto df \wedge \omega$  es sobre. Sea  $df \wedge \bar{\omega} = df \wedge \omega = 0$ . La hipótesis que  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  es equivalente a que  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Por lo tanto si  $df \wedge \omega = 0$  entonces  $\omega = df \wedge \omega_0$ . Es decir  $\bar{\omega} = 0$ . ■

**Observación.** A continuación calculamos los módulos de cohomología de los complejos  $C_{p+1}$ . Dicho cálculo se basa en la filtración por columnas del complejo  $L_{m+p}$ , secuencia exacta 2.17 y en el isomorfismo 2.18.

**Lema 2.58.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f, g \rangle$  una icis. Si  $f$  y  $g$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$Gr(H^{m-1}(C_{p+1})) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \oplus \left[ \bigoplus_{i=1}^{p+1} (J_f)_i \right],$$

donde  $(J_f)_i = J_f$ .

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $k$  para valores de  $k \geq 0$ .

Sea  $k = 0$ . Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología en la secuencia

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

obtenemos

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_1) \longrightarrow H^{m-1}(C_0) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$Gr(H^{m-1}(C_1)) = H^{m-1}(K') \oplus H^{m-1}(C_0). \quad (2.19)$$

Como  $C_0 \simeq L'_{m-1}$  entonces  $H^{m-1}(C_0) = H^{m-1}(L'_{m-1})$ . Del Lema 2.35 se sigue que  $H^{m-1}(C_0) = \frac{J_f}{J_{f,g}}$ . Si reemplazamos los cálculos obtenidos en el isomorfismo (2.19) obtenemos

$$Gr(H^{m-1}(C_1)) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \oplus J_f.$$

Supongamos que el lema se cumple para  $p = s$ . Entonces

$$Gr(H^{m-1}(C_s)) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \oplus \left[ \bigoplus_{i=1}^s (J_f)_i \right]$$

Sea  $p = s + 1$ . Sea la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K' \longrightarrow C_{s+1} \longrightarrow C_s \longrightarrow 0.$$

Si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología tenemos

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(K') \longrightarrow H^{m-1}(C_{s+1}) \longrightarrow H^{m-1}(C_s) \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$Gr(H^{m-1}(C_{s+1})) = H^{m-1}(C_{s+1}) \oplus H^{m-1}(K')$$

El caso  $p = s$  y Lema 2.57 finaliza la prueba. ■

**Observación.** El módulo graduado del lema anterior anterior se obtiene filtrando el complejo por columnas. Si filtramos el complejo  $C_{p+1}$  por filas obtenemos el siguiente módulo graduado

$$Gr_F(H^{m-1}(C_{p+1})) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \oplus \left[ \bigoplus_{i=1}^{p+1} (J_f)_i \right],$$

donde  $(J_f)_i = J_f$ . Develado el módulo  $H^{m-1}(C_{p+1})$  presentamos uno de los cálculos al cual se hizo alusión al inicio de la sección.

**Corolario 2.59.**  $H^{m-2}(L_{m+p}) = Tor_1(H^{m-1}(C_{p+1}), \frac{R}{I})$

**Prueba.** Como  $H^i(C_{p+1}) = 0$  para todo  $i \neq m - 1$  y

$$(L_{m+p})_s = (C_{p+1} \otimes_R R/I)_s$$

para todo  $s \leq m - 1$  entonces

$$H^s(C_{p+1} \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-1-s}(H^{m-1}(C_{p+1}), R/I)$$

y

$$H^{m-2}(L_{m+p}) = \text{Tor}_1(H^{m-1}(C_{p+1}), \frac{R}{I}).$$

■

**Observación.** Esto es lo más lejos que podemos llegar siguiendo la idea de la Proposición 2.30 (ver Ejemplo 2.34).

A continuación veremos de que forma podemos calcular  $H^m(L_{m+p})$ , y  $H^{m-1}(L_{m+p})$ . De manera precisa presentamos una secuencia espectral tal que  $E^2 = E^\infty$  y converge a la cohomología de  $L_{m+p}$ . Se calcula  $H^{m-2}(L_{m+p})$  como  $H^m(L_{m+p})$ .

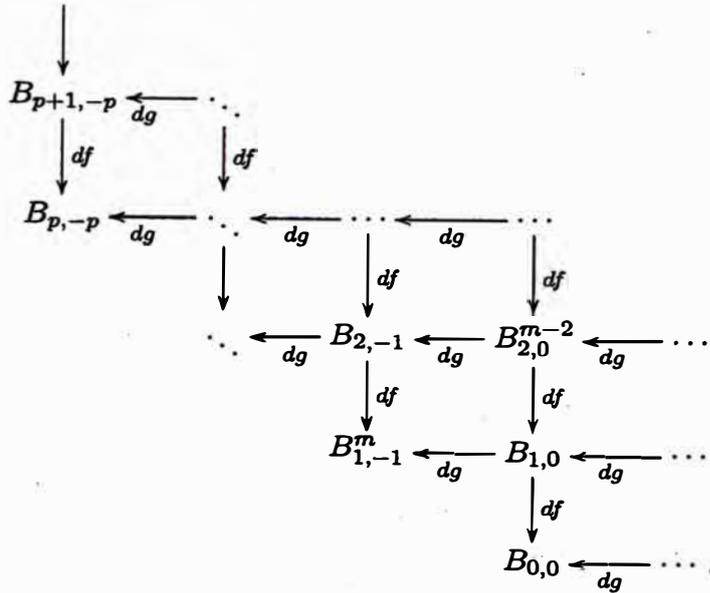
**Observación.** En estas líneas describiremos brevemente lo que más adelante formalizaremos. El complejo  $L'_{m+p}$  se puede escribir de la siguiente manera

$$L'_{m+p} : \quad \begin{array}{ccccccc} & \vdots & & & & & \\ & \downarrow df & & & & & \\ \Omega_{1,p+1}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \\ & \downarrow df \\ \Omega_{0,p}^m & \longleftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \\ & & \downarrow df \\ & & \cdots & \longleftarrow \Omega_{1,1}^{m-1} & \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} \\ & & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df \\ & & & \Omega_{0,0}^m & \longleftarrow \Omega_{1,0}^{m-1} & \longleftarrow \Omega_{2,0}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,0}^{m-2} \end{array} \quad (2.20)$$

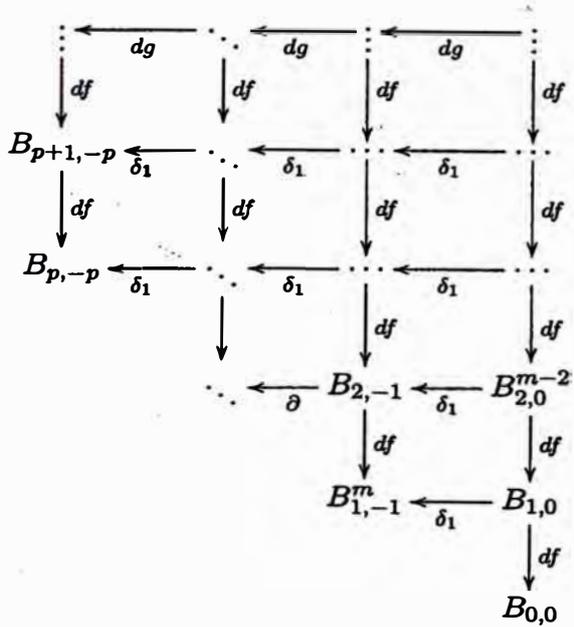
**Notación.** A continuación usaremos la siguiente notación

$$B_{l,i-l} := \Omega_{i,l}^*.$$

Con esta notación el bicomplejo  $L'_{m+p}$  se escribe



De este complejo vamos a tomar el subcomplejo  $E'_p$



Demostraremos que este complejo es exacto salvo en el nivel  $m$ . Esta construcción y la prueba de la afirmación se presentan a continuación.

**Definición 2.60.** Dado el complejo  $L'_{m+p}$  definamos el subcomplejo  $(E'_p, \delta)$ , de la siguiente manera :

$$(E'_p)^{m-i} := \bigoplus_{s+t=i; t \leq 0} B_{s,t},$$

donde  $i + j + s = m + p$ .

**Observación.** Notemos que  $(E'_p, \delta)$  esta formado por las primeras  $p + 1$  columnas de la izquierda del complejo  $L'_{m+p}$  (ver 2.20).

**Lema 2.61.** Si  $ht(J_f) = m$  entonces el complejo  $E'_p$  es exacto salvo en el nivel cero. Sea  $M_p := H^m(E'_p)$  entonces  $Gr(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$ .

**Prueba.** La prueba será por inducción sobre  $p$  el número de columnas del complejo  $E'_p$ . Para el caso  $p = 0$  tenemos que  $E'_0 = K(df)$  el cual tiene cohomología cero para todo  $i \neq m$ . Más aún  $H^m(E'_0) = H^m(K(df)) = R/J_f$ .

De un proceso de inducción y la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(df) \longrightarrow E'_{p+1} \longrightarrow E'_p \longrightarrow 0$$

se prueba que  $H^i(E_{p+1}) = 0$  para todo  $i \neq m$ . Si tomamos homología en la secuencia anterior nos queda la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow R/J_f \longrightarrow H^m(E_{p+1}) \longrightarrow H^m(E_p) \longrightarrow 0.$$

Esto significa que  $Gr(M_p) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$ . Notemos que la filtración por columnas es la que da origen al módulo graduado  $Gr(M_p)$ . ■

**Observación.** El Lema anterior nos indica que el módulo  $H^m(E_p)$  es isomorfo a  $\bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$  sólo como  $k$ -espacios vectoriales. Esto es debido a que no se encontró un split de  $R$ -módulos en la secuencia anterior. En el siguiente teorema vemos los complejos de cocadenas  $E_p$  y  $L_{m-1}$  como complejos de cadenas de la siguiente manera  $(E_p)^* = (E_p)_{m-*}$  y  $(L_{m-1})^* = (L_{m-1})_{m-1-*}$

**Teorema 2.62.** Existe una secuencia espectral  $E_{p,q}^r$  que converge a  $H^*(L_{m+p})$ ,  $E^2 = E^\infty$  y el  $E^1$  es

$$\text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} \text{Tor}_1(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{d^1} \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I}),$$

donde  $d^1$  es el producto exterior por  $dg$ .

**Prueba.** La demostración se basa en escribir el complejo  $L_{m+p}$  como

$$\begin{array}{ccc} \cdots & \xleftarrow{dg} & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_3 & \xleftarrow{dg} & (L_{m-1})_3 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_2 & \xleftarrow{dg} & (L_{m-1})_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_1 & \xleftarrow{dg} & (L_{m-1})_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ (E_p)_0 & \xleftarrow{dg} & (L_{m-1})_0 \end{array}$$

donde  $E_p = E'_p \otimes R/I$ . Como  $E_p = E'_p \otimes R/I$  entonces del Lema 2.61 se prueba que

$$H^*(E_p) = \text{Tor}_{m-*}(R/I, M_p).$$

Por lo tanto si calculamos el primer término de la secuencia espectral al complejo anterior tenemos

$$\text{Tor}_2(M_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{dg} \text{Tor}_1(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{dg} \text{Tor}_0(\frac{J_g}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

y  $E_{p,q}^2 = E_{p,q}^\infty$  ■

**Corolario 2.63.** El módulo de cohomología  $H^m(L_{m+p})$  es isomorfo a  $(\frac{M_p \otimes_R R}{J_g})$ .

**Prueba.** Del Lema 2.61 se prueba que

$$\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I}) = M_p \otimes_R R/I.$$

Por otro lado como

$$\text{Tor}_0(\frac{R}{I}, \frac{J_g}{J_{f,g}}) = (\frac{J_g}{J_{f,g}}) \otimes \frac{R}{I}$$

tenemos

$$E_{0,0}^2 = \frac{\text{Tor}_0(M_p, \frac{R}{I})}{J_g} = \frac{M_p \otimes_R \frac{R}{I}}{J_g}.$$

Aquí  $J_g$  representa la imagen de la aplicación  $\wedge dg$  en la secuencia espectral del Teorema 2.62. ■

**Observación.** Debido al Corolario 2.23 podemos asumir que el generador  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Por lo tanto podemos establecer la existencia de otra secuencia espectral  $E'$  tal que  $E' \rightarrow L_{m+p}$  y  $E'^\infty = E'^2$ . Para la prueba basta notar que  $I = \langle g, f \rangle$ . Un hecho que consideramos más interesante es proporcionar un ejemplo donde los términos  $E^1$  y  $E'^1$  son diferentes. Es decir estamos proporcionando información nueva sobre la cohomología de los complejos  $L_{m+p}$ .

**Observación.** Existe una secuencia espectral  $E'_{*,*}$  que converge a la cohomología del complejo  $L_{m+p}$  y colapsa en  $E'^2$ . La secuencia se obtiene al intercambiar el rol de  $f$  por el de  $g$ . A continuación presentaremos el término  $E'^1$

$$\text{Tor}_2(N_p, \frac{R}{I}) \quad 0$$

$$\text{Tor}_1(N_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{df} \text{Tor}_1(\frac{J_f}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

$$\text{Tor}_0(N_p, \frac{R}{I}) \xleftarrow{df} \text{Tor}_0(\frac{J_f}{J_{f,g}}, \frac{R}{I})$$

En el siguiente ejemplo demostramos que  $E^1$  y  $E'^1$  son diferentes.

**Ejemplo 2.64.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y, z]_{(x,y,z)}, \eta)$ ,  $f = x^3 + y^2 + z^2$  y  $g = xy + z^2$ . Un cálculo demuestra que  $J_f = \langle 3x^2 - 2y^2, 6x^2z - 2yz, 4yz - 2xz \rangle$  y que  $I = \langle f, g \rangle$

tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Más aún,  $f$  y  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Para demostrar que  $E^1$  y  $E^1$  son diferentes es suficiente mostrar que la cohomología de  $K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I$  y  $K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \otimes R/I$  son diferentes. En efecto como  $f$  y  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^*(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_f, R/I)$$

y

$$H^*(K(g_{x_1}, \dots, g_{x_m}) \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_g, R/I).$$

Sea

$$0 \longrightarrow R \xrightarrow{(f,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,f)} R \longrightarrow 0$$

una resolución de  $R/I$ . Como los elementos  $f, g$  pertenecen a los ideales  $J_f$ , y  $J_g$  respectivamente entonces se prueba que  $K(f, g) \otimes R/J_f$ :

$$0 \longrightarrow \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \xrightarrow{0} \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \oplus \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \xrightarrow{0} \frac{k[x]_{(x)}}{\langle x^2 \rangle} \longrightarrow 0,$$

y que  $K(f, g) \otimes R/J_g$ :

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{0} k \oplus k \xrightarrow{0} k \longrightarrow 0.$$

Esto finaliza el ejemplo.

A continuación veremos un ejemplo donde la secuencia espectral  $E_{**}^n$  del Teorema 2.62 colapsa en  $E^1$

**Corolario 2.65.** Si  $J_g \subset J_f$  entonces la secuencia espectral del Teorema 2.62 cumple que  $E^1 = E^\infty$ .

**Prueba.** Una propiedad que usaremos en repetidas ocasiones en la prueba del corolario es la que pasamos a demostrar:

Recordemos que en la Sección 2.1 asumimos que ninguno de los generadores del ideal  $I$  es regular, es decir  $J_f \neq R$ . Si  $J_g \subset J_f$  entonces  $ht(J_f) = m$ . En efecto, como  $f \in \sqrt{J_f}$ ,  $g \in \sqrt{J_g}$  se tiene que  $ht(J_f) = ht(\sqrt{J_f}) \geq ht(\langle f, g, J_{f,g} \rangle) = m$ . Esto a su vez significa que  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$  (ver Corolario 2.6). Es decir si  $w \in \Omega^*$  y  $df \wedge w = 0$  entonces existe  $w' \in \Omega^{*-1}$  tal que  $w = df \wedge w'$ .

Por otro lado para demostrar el Corolario será suficiente probar que los morfismos de conexión, dados por  $\wedge dg$ , de la secuencia exacta larga en cohomología de la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow E_p \longrightarrow L_{m+p} \longrightarrow L_{m-1} \longrightarrow 0$$

son nulos. En efecto, si tomamos la secuencia exacta larga en cohomología a la secuencia anterior obtenemos la secuencia

$$\begin{aligned} H^{m-2}(E_p) &\longrightarrow H^{m-2}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_1} \\ H^{m-1}(E_p) &\longrightarrow H^{m-1}(L_{m+p}) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m-1}) \xrightarrow{\delta_0} \\ H^m(E_p) &\longrightarrow H^m(L_{m+p}) \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

La condición  $J_g \subset J_f$  implica que  $\delta_0 = 0$ , y  $\delta_1 = 0$ . Verificaremos sólo que  $\delta_1 = 0$ , pues el otro caso es similar.

En efecto sea  $[(\bar{w}_1, \bar{w}_0)]$  una clase en el módulo  $H^{m-2}(L_{m-1})$  con  $(w_1, w_0) \in \Omega^{m-2} \oplus \Omega^{m-2}$ . Entonces

$$df \wedge w_1 + dg \wedge w_0 = f \cdot \eta_1^1 + g \cdot \eta_1^2 \in \Omega^{m-1}.$$

Si multiplicamos por  $dg \wedge$  a la igualdad anterior obtenemos

$$dg \wedge df \wedge w_1 = f \cdot dg \wedge \eta_1^1 + g \cdot dg \wedge \eta_1^2. \quad (2.21)$$

Como  $dg \wedge \eta_1^1, dg \wedge \eta_1^2 \in \Omega_{\mathbb{R}}^m \simeq R$  y  $J_g \subset J_f$  se tiene que existe  $\eta_2^1, \eta_2^2 \in \Omega^{m-1}$  tal que  $dg \wedge \eta_1^1 = -df \wedge \eta_2^1$  y  $dg \wedge \eta_1^2 = -df \wedge \eta_2^2$ . Por lo tanto la ecuación (2.21) se escribe de la siguiente forma

$$dg \wedge df \wedge w_1 = -f \cdot df \wedge \eta_2^1 - g \cdot df \wedge \eta_2^2.$$

Si factorizamos  $df \wedge$  tenemos

$$df \wedge (dg \wedge w_1 - f \eta_2^1 - g \eta_2^2) = 0.$$

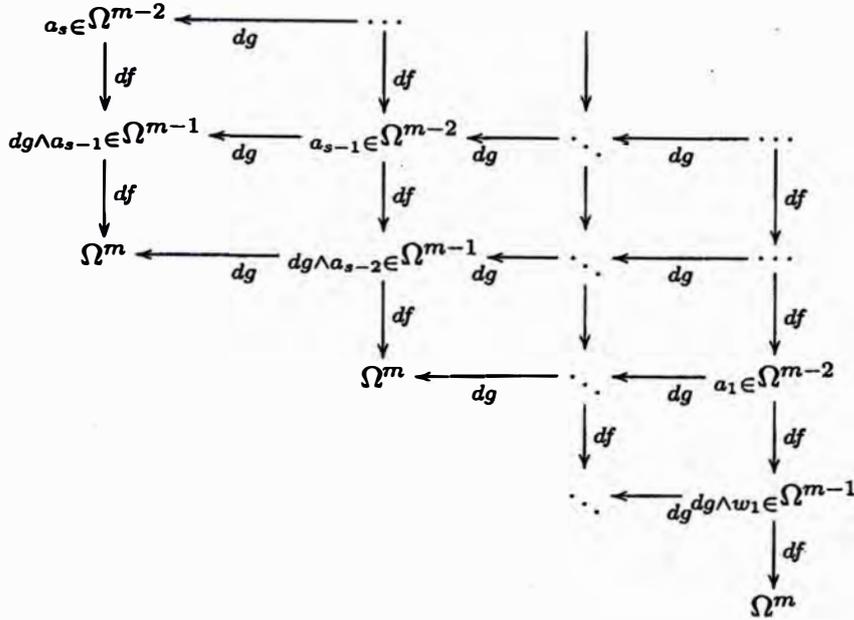
Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_1 \in \Omega^{m-1}$  tal que

$$dg \wedge w_1 = f \cdot \eta_2^1 + g \cdot \eta_2^2 + df \wedge a_1.$$

Si  $k = 0$  la prueba terminó pues  $[dg \wedge w_1] = 0 \in H^{m-1}(E_0)$ . De lo contrario definamos  $a_0 := w_1$  y continuamos la demostración por un proceso inductivo. Admitamos como hipótesis inductiva que

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \quad (2.22)$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Por el método de la escalera en el diagrama



tenemos que existe  $a_s$  tal que  $\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}$ . En efecto de hipótesis inductiva si tiene

$$-dg \wedge a_{s-2} = \eta_s + df \wedge a_{s-1} \quad (2.23)$$

con  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$ . Es decir  $\eta_s = \eta_s^1 \cdot f + \eta_s^2 \cdot g$ . Si aplicamos  $dg \wedge$  a (2.23) tenemos

$$dg \wedge (\eta_s + df \wedge a_{s-1}) = 0. \quad (2.24)$$

Como  $\eta_s \in I\Omega^{m-1}$  entonces  $\eta_s = f \cdot \eta_s^1 + g \cdot \eta_s^2$ . Como  $J_g \subset J_f$ , se tiene que  $dg \wedge \eta_s = df \wedge \eta_{s+1}$ , para algún  $\eta_{s+1} \in I\Omega^{m-1}$ . Por lo tanto la ecuación (2.24) se escribe como

$$df \wedge (\eta_{s+1} - dg \wedge a_{s-1}) = 0.$$

Como  $H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , existe  $a_s$  tal que

$$\eta_{s+1} = dg \wedge a_{s-1} + df \wedge a_s \in I\Omega^{m-1}.$$

Esto finaliza la inducción y demuestra que

$$dg \wedge a_{l-2} + df \wedge a_{l-1} = \eta_l \in I\Omega_R^{m-1}$$

para todo  $l = 1, \dots, p$ . Esto significa que

$$[(0, \dots, \overline{dg \wedge w_1})] = [(df \wedge a_{p+1} + dg \wedge a_p \dots, \overline{df \wedge a_2 + dg \wedge a_1}, \overline{df \wedge a_1})] = 0.$$

■

**Observación.** A continuación, bajo la hipótesis  $J_g \subset J_f$ , describiremos los módulos de cohomología del complejo  $E_p$ .

**Lema 2.66.** Si  $J_g \subset J_f$  entonces

$$Gr(H^*(E_p)) = \bigoplus_{i=0}^p (Tor_{m-i}(R/I, R/J_f))_i$$

**Prueba.** Demostraremos que los morfismos conexión de la secuencia exacta corta

$$(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow E_{p+1} \longrightarrow E_p$$

son cero, para todo  $p \geq 1$ . En efecto si tomamos cohomología a la secuencia anterior obtenemos la secuencia exacta larga

$$H^{m-2}(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^{m-2}(E_{p+1}) \longrightarrow H^{m-2}(E_p) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$H^{m-1}(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^{m-1}(E_{p+1}) \longrightarrow H^{m-1}(E_p) \xrightarrow{\delta_0}$$

$$H^m(\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow H^m(E_{p+1}) \longrightarrow H^m(E_p).$$

De la hipótesis  $J_g \subset J_f$  obtenemos que  $\delta_0 = 0$ . Veamos que  $\delta_1 = 0$ . En efecto, con el mismo argumento que el Corolario 2.65, sea  $x = [(\eta_p, \eta_{p-1}, \dots, \eta_1)]$  un elemento en  $H^{m-2}(E_p)$  entonces

$$df \wedge \eta_p + dg \wedge \eta_{p-1} = f \cdot a + g \cdot b$$

donde los elementos  $a, b$  se encuentran en el módulo  $\Omega^{m-1}$ . Si aplicamos  $dg \wedge$  a la igualdad anterior podemos escribir

$$dg \wedge df \wedge \eta_p = f \cdot dg \wedge a + g \cdot dg \wedge b.$$

Como  $J_g \subset J_f$  se tiene que  $dg \wedge a = df \wedge a'$  y  $dg \wedge b = df \wedge b'$  para algún  $a'$  y  $b'$  en el módulo  $\Omega^{m-1}$ . Más aún como  $dg \wedge df = -df \wedge dg$ , la igualdad anterior se puede escribir

$$-df \wedge dg \wedge \eta_p = f \cdot df \wedge a' + g \cdot df \wedge b'.$$

Además  $H^i(\Omega, df) = H^i(K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})) = 0$  para todo  $i \neq m$ , entonces

$$dg \wedge \eta_p = -(f \cdot a' + g \cdot b' + df \wedge \omega),$$

para algún  $\omega \in \Omega^{m-1}$ . Como  $\delta_1(x) = \overline{[dg \wedge \eta_p]} = \overline{[-(f \cdot a' + g \cdot b' + df \wedge \omega)]}$  entonces  $\delta_1(x) = 0$ .

Ahora, la secuencia

$$0 \longrightarrow (\overline{\Omega}^*, df) \longrightarrow E_{p+1} \longrightarrow E_p \longrightarrow 0$$

nos da el isomorfismo de espacios vectoriales

$$H^*(E_{p+1}) \simeq H^*(\overline{\Omega}, df) \oplus H^*(E_p).$$

Como

$$H^*(E_0) = H^*(\overline{\Omega}, df) \simeq \text{Tor}_{m-*}(R/I, R/J_f)$$

pues

$$(\overline{\Omega}, df) = K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I$$

tenemos que  $Gr(H^*(E_{p+1})) = \bigoplus_{i=0}^p (\text{Tor}_{m-*}(R/I, R/J_f))_i$ . ■

**Observación.** Notemos que la condición  $J_g \subset J_f$  es natural. En efecto, si tomamos un generador  $f \in I$  con una singularidad aislada entonces para algún  $s \in \mathbb{N}$  tenemos  $J_g^s \subset J_f$ . Además, todas las icis clasificadas en [Looj] salvo  $H_\mu$ , con  $\mu \geq 7$ , cumplen esta condición.

**Ejemplo 2.67.** En este ejemplo presentaremos las variedades de intersección completa que cumplen y también las que no satisfacen la propiedad anterior. Los ejemplos que aquí se presentan son de dimensión cero y dimensión uno inmersas en el espacio  $\mathbb{C}^3$ , según se presentan en [Looj].

Símbolo	Fórmula	Número de Tjurina
$F_{p+q+1}^{p,q}; 2 \leq p \leq q$	$(xy, x^p + y^p)$	$p + q$
$G_5$	$(x^2, y^3) = (x^2 + y^3, y^3)$	7
$G_7$	$(x^2, y^4) = (x^2 + y^4, y^4)$	10
$H_\mu; 6 \leq \mu$	$(x^2 + y^{\mu-3}, xy^2)$	$\mu + 2$
$I_\mu, 7 \leq \mu$	$(x^2 + y^3, y^k)$ si $\mu = 2k - 1$	$\mu + 2$
$I_\mu, 7 \leq \mu$	$(x^2 + y^3, xy^{k-1})$ si $\mu = 2k$	$\mu + 2$

Símbolo.	Fórmula.
$S_\mu, 5 \leq \mu$	$(x^2 + y^2 + z^{\mu+3}, yz)$
$T_\mu; \mu = 7, 8, 9$	$(x^2 + y^3 + z^\mu, yz)$
$U_7$	$(x^2 + yz, xy + z^3)$
$U_8$	$(x^2 + yz, xy + xz^3)$
$U_9$	$(x^2 + yz, xy + z^4)$
$W_8$	$(x^2 + yz, y^2 + z^3)$
$W_9$	$(x^2 + yz, y^2 + xz^2)$
$Z_9$	$(x^2 + y^2 + z^3, xy)$
$Z_{10}$	$(x^2 + yz^2, y^2 + z^3)$

Tabla 2.1: Singularidades

### 2.3. Homología de Hochschild para $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$

Generalizaremos los resultados de la sección anterior para  $r$  polinomios. Demostramos que para  $j \geq m$  los complejos  $L_j$  tiene sólo los últimos  $r + 1$  términos de cohomología no nulos. Presentamos una secuencia espectral que converge a la cohomología de los complejos  $L_j$  y colapsa en  $E^r$ . Para los complejos  $L_j$  con  $j < m$  demostramos que sus módulos de cohomología  $H^s(L_j)$  son cero para todo  $s < \min\{j, m - r\}$ . Nuevamente el punto clave para este análisis es el cálculo de la altura  $ht(J_F) = m - r + 1$  y la generalización del Teorema 2.47.

Recordemos la estructura de los complejos  $L_{m+p}$ . Sea

$$L_{m+p} : 0 \longrightarrow \frac{I^{m+p}\Omega_R^0}{I^{m+p+1}\Omega_R^0} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{m+p-1}\Omega_R^1}{I^{m+p}\Omega_R^1} \xrightarrow{d_{DR}} \dots \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^{p+1}\Omega_R^{m-1}}{I^{p+2}\Omega_R^{m-1}} \xrightarrow{d_{DR}} \frac{I^p\Omega_R^m}{I^{p+1}\Omega_R^m}$$

Sea  $a = (a_1, \dots, a_r)$  y  $y = (y_1, \dots, y_r)$ , como  $I$  es intersección completa entonces

$$\frac{I^l}{I^{l+1}} = \bigoplus_{|a|=l} y_1^{a_1} \dots y_r^{a_r} \cdot R/I = \bigoplus_{|a|=l} y^a \cdot R/I,$$

Por lo tanto el complejo  $L_{m+s}$  se escribe como

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \bigoplus_{|a|=m+p} y^a \otimes_k \bar{\Omega}_R^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=m+p-1} y^a \otimes_k \bar{\Omega}_R^1 \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots \longrightarrow \bigoplus_{|a|=p+1} y^a \otimes_k \bar{\Omega}_R^{m-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p} y^a \otimes_k \bar{\Omega}_R^m, \end{aligned}$$

donde  $\bar{\Omega}_R = \Omega_R \otimes_R R/I$ . El morfismo borde  $\delta$  se escribe como

$$\delta(y_1^{a_1} \dots y_r^{a_r} \otimes \omega) = \sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \dots y_1^{a_i-1} \dots y_r^{a_r} \otimes \overline{df_i} \wedge \omega,$$

por definición  $y_i^{a_i} = 0$  si  $a_i < 0$ . También obviamos poner  $y^a \otimes \bar{\omega}$  y sólo colocamos  $y^a \omega$ . Para  $\bigoplus_{|a|=j-s} y^a \otimes_k \bar{\Omega}_R^p$  sólo ponemos  $\bigoplus_{|a|=j-s} y^a \bar{\Omega}_R^p$

**Definición 2.68.** Bajo la notación anterior definamos

$$L'_{m+p} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{|a|=m+p} y^a \Omega_R^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=m+p-1} y^a \Omega_R^1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=p} y^a \Omega_R^m,$$

donde el morfismo borde se define como

$$\delta(y^a \omega) = \delta(y_1^{a_1} \dots y_r^{a_r} \omega) = \sum_{i=1}^r y_1^{a_1} \dots y_1^{a_i-1} \dots y_r^{a_r} df_i \wedge \omega$$

**Nota.** De esta última definición es claro que  $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes_R R/I$ .

**Observación.** De manera similar podemos definir el complejo  $L'_j$  para  $j < m$  de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} L'_j : 0 \longrightarrow \bigoplus_{|a|=j} y^a \Omega_R^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=j-1} y^a \Omega_R^1 \xrightarrow{\delta} \dots \\ \dots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=1} y^a \Omega_R^{j-1} \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{|a|=0} y^a \Omega_R^j. \end{aligned}$$

El complejo  $L_j$  cumple  $L_j = L'_j \otimes_R R/I$ .

### 2.3.1. Homología de Hochschild

Esta sección es dirigida a presentar una secuencia espectral  $E_{*,*}$  que converge a la cohomología de los complejos  $L_j$  y colapsa en el término  $r$ . Cuando  $j \geq m$  mostramos que los complejos  $L_j$  sólo tienen  $r+1$  términos en cohomología no nulos. Si  $m - r < j < m$  entonces los complejos  $L_j$  tienen  $j - m + r + 1$  términos de cohomología no nulos. En los demás casos  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i \neq m$ .

**Teorema 2.69.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo local,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una variedad de intersección completa,  $f_1, \dots, f_r$  una secuencia regular. Entonces para todo primo  $P$  tal que  $J_F \not\subseteq P$  el complejo  $L'_j$  localizado en  $P$ ,  $(L'_j)_P$ , es quasi isomorfo a  $L_j(dx_1, \dots, dx_r, N)$ , donde  $N = \bigoplus_{i=1}^r R_P dx_i$ .*

**Prueba.** Sea  $P \not\supseteq J_F$  entonces el determinante de algún menor  $r \times r$  de la matriz  $Jac(F)$ , al cual denotaremos por  $M(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})$ , no está contenido en  $P$ . Nuevamente por un reordenamiento de índices podemos suponer que se trata de  $M(x_1, \dots, x_r)$  el determinante del menor de las primeras  $r$  filas de la matriz jacobiana. Por lo tanto, si definimos la aplicación

$$T : \Omega_{R_P}^1 \longrightarrow \Omega_{R_P}^1$$

por  $T(e_i) = df_i$  para  $i = 1, \dots, r$  y  $T(e_i) = e_i$  para  $i \geq r + 1$  tenemos que  $T$  es un isomorfismo. En efecto, basta notar que  $T^{-1} = adj(T) \cdot |T|^{-1}$  está bien definida. Entonces  $df_1, \dots, df_r$  es parte de una base de  $\Omega_{R_P}^1$  y  $(L'_j)_P = L_j(df_1, \dots, df_r, \Omega_{R_P}^1)$ . ■

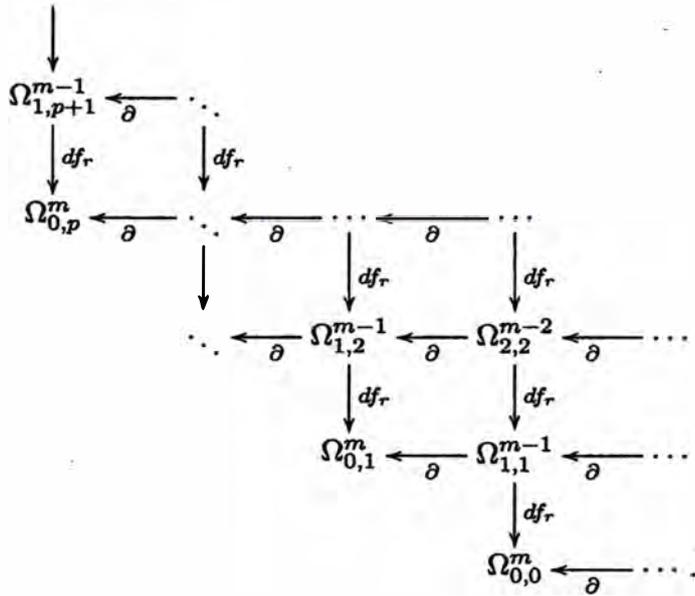
**Corolario 2.70.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces para todo primo  $P$  tal que  $J_F \not\subseteq P$  el complejo  $L'_j$  localizado en  $P$ ,  $(L'_j)_P$ , para todo  $1 \leq j < m$  tiene cohomología cero para todo  $i \neq j$  y es exacto para todo  $j \geq m$ .*

**Prueba.** Del teorema anterior se sigue que  $L'_j$  es quasi isomorfo a  $L_j(x_1, \dots, x_r)$ . El Corolario 2.45 finaliza la prueba del corolario. ■

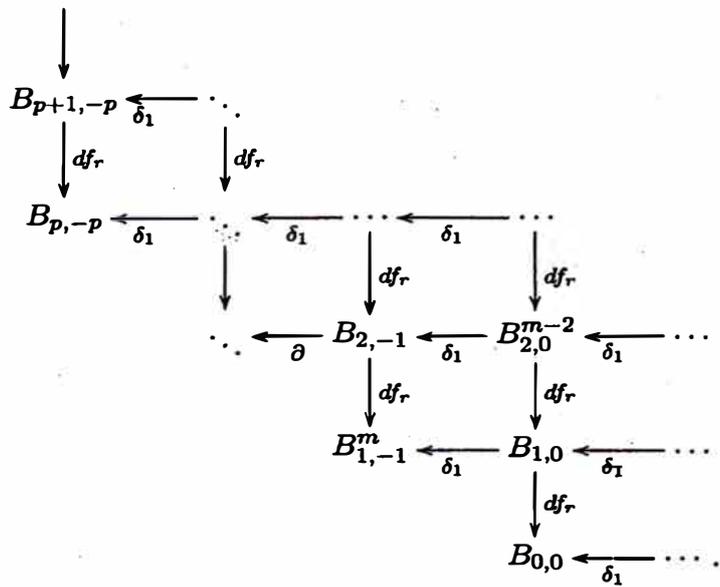
**Observación.** A continuación presentaremos los ingredientes para poder demostrar una generalización del Teorema 2.62. Si usamos la notación

$$B_{l,i-t} = \Omega_{i,t}^*$$

el complejo  $L'_{m+p}$



se escribe como un bicomplejo  $(B_{s,t}, \delta_1 + df_r)$



**Lema 2.71.** *El complejo  $(B_{s,t}, \delta_1 + df_r)$  está bien definido.*

**Prueba.** Sea  $x \in y_1^{a_1} \dots y_r^{a_r} \omega \in B_{s,t} = \Omega_{s+t,s} = \bigoplus_{|\alpha|=s+t+p; a_r=s} y^\alpha \Omega^{m-s-t}$ , entonces

$$\delta(x) = \sum_{v=1}^{r-1} y_1^{a_1} \dots y_v^{a_v-1} \dots y_r^{a_r} df_v \wedge \omega + y_1^{a_1} \dots y_{r-1}^{a_{r-1}} y_r^{a_r-1} df_r \wedge \omega,$$

$a_1 + \dots + (a_v - 1) + \dots + a_r = s + (t - 1) + p$  y  $df_v \wedge \omega \in \Omega^{m-s-(t-1)+p}$  y  $a_r = s$ . Esto significa, por definición, que

$$\delta_1(x) := \sum_{v=1}^{r-1} y_1^{a_1} \dots y_v^{a_v-1} \dots y_r^{a_r} df_v \wedge \omega \in \Omega_{s+(t-1),s}^{m-s-(t-1)} = B_{s,t-1}.$$

El término

$$y_1^{a_1} \dots y_{r-1}^{a_{r-1}} y_r^{a_r-1} df_r \wedge \omega$$

se encuentra en el módulo

$$\bigoplus_{|\alpha|=(s-1)+t+p; a_r=s-1} f^\alpha \Omega^{m-(s-1)-t} = \Omega_{s-1+t,s-1}^{m-(s-1)-t} = B_{s-1,t}.$$

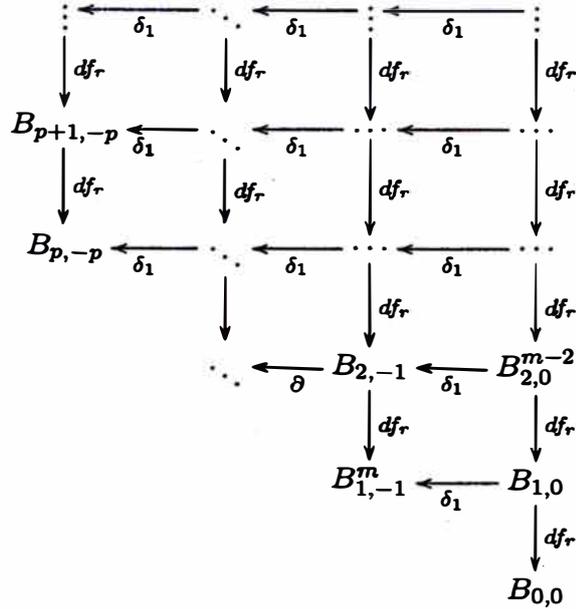
■

**Lema 2.72.** Los complejo  $Tot(B)$  y  $L'_{m+p}$  son iguales.

**Prueba.** Se sigue de la definición de  $(B_{s,t}, \delta_1, df_r)$ .

■

**Observación.** Del complejo doble  $(B_{s,t}, \delta_1, df_r)$  tomamos el sub-complejo doble  $E'_{s,t} = B_{s,t}$  para  $t \leq 0$ .



**Observación.** De la definición del bicomplejos  $(E'_{s,t}, \delta_1, df_\tau)$  tenemos que las columnas son dadas por los complejos

$$0 \longrightarrow E'_{m+p,-p} \xrightarrow{df_\tau} \cdots \xrightarrow{df_\tau} E'_{p+1,-p} \xrightarrow{df_\tau} E'_{p,-p},$$

donde el morfismo borde  $df_\tau : E'_{i,-p} \longrightarrow E'_{i-1,-p}$  es definido de la siguiente manera

$$df_\tau : \bigoplus_{|a|=i-p+p; a_r=i} y^a \Omega^{m-i+p} \longrightarrow \bigoplus_{|a|=i-1-p+p; a_r=i-1} y^a \Omega^{m-i+1+p}$$

$$df_\tau(y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \omega) = y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r-1} df_\tau \wedge \omega.$$

De aquí se desprende que las columnas del bicomplejo  $(E'_{s,t}, \delta_1, df_\tau)$  son dadas por los complejos

$$\bigoplus_{|a'|=i+p-p} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r-1} K(df_\tau),$$

donde  $a = (a_1, \cdots, a_{r-1})$ .

A continuación trabajamos con el graduado a la filtración por columnas del complejo anterior.

**Lema 2.73.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Si  $f_r$  tiene una singularidad aislada entonces  $H^i(E'_{s,t}, \delta_1, df_r) = 0$  para todo  $i \neq m$  y

$$Gr(H^m(Tot(E'_{s,t}))) = \bigoplus_{s=0}^p \left\{ \bigoplus_{|\alpha'|=s} y_1^{\alpha_1} \cdots y_{r-1}^{\alpha_{r-1}} (R/J_{f_r}) \right\},$$

donde el graduado se toma con respecto a la filtración por columnas del complejo doble anterior.

**Prueba.** De la Observación anterior las columnas del complejo doble  $(E'_{s,t}, \delta_1, df_r)$  son sumas directas del complejo de Koszul  $K(df_r)$ . Del Corolario 2.6 se sigue que

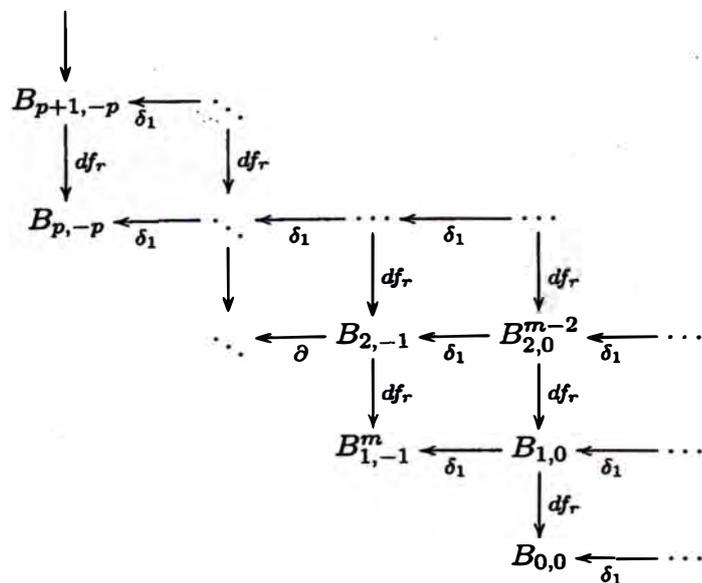
$$H^i(K(df_r)) = 0$$

para todo  $i \neq m$ . Por lo tanto las columnas de  $(E'_{s,t}, \delta_1, df_r)$  son exactas salvo en el último nivel. Un argumento rutinario de filtraciones por columnas nos indican que

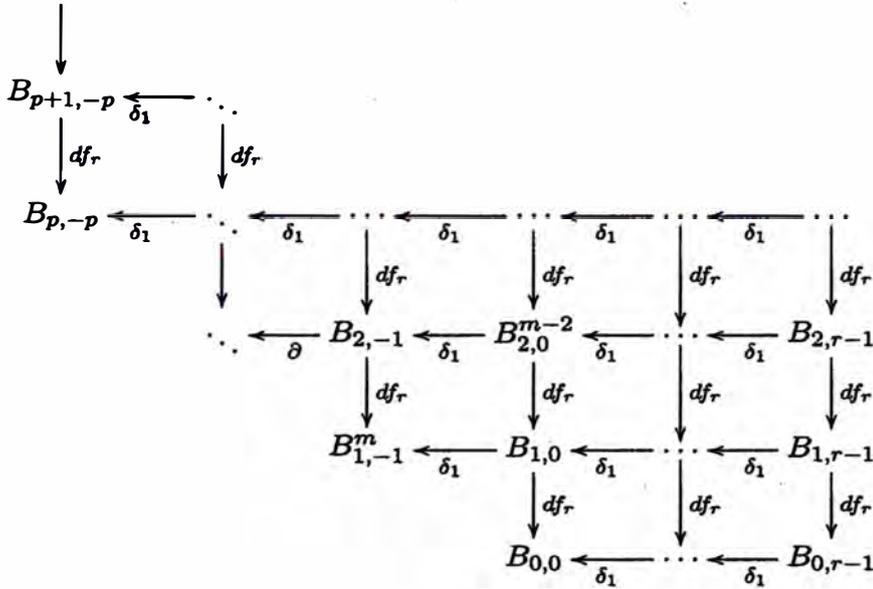
$$Gr(H^m(E'_{p+*, -p}, \delta_1, df_{r-1})) = \bigoplus_{s=0}^p \left\{ \bigoplus_{|\alpha'|=s} y_1^{\alpha_1} \cdots y_r^{\alpha_r} H^m(K(df_r)) \right\},$$

notemos que  $H^m(K(df_r)) = R/J_{f_r}$ . ■

**Observación.** Del bicomplejo  $(B_{s,t}, \delta_1, df_r)$  :



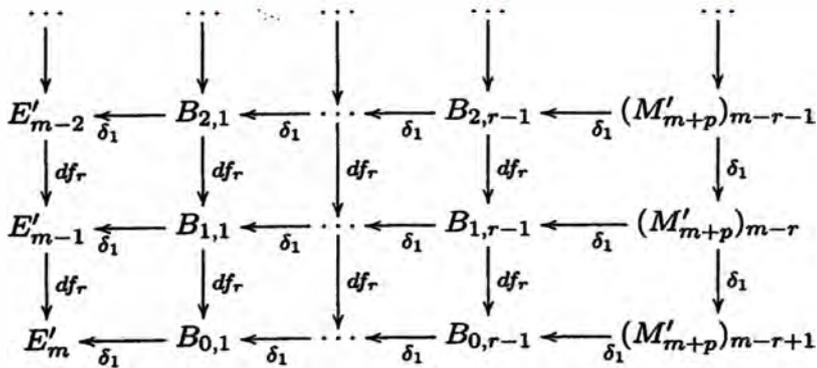
vamos a tomar el subcomplejo  $(D'_{s,t}, \delta_1, df_r)$  :



Si denotamos al complejo

$$\left( \frac{L'_{m+p}}{D'}, \delta \right)$$

como  $(M'_{m+p}, \delta)$  entonces el complejo  $L'_{m+p}$  se escribe como :



Tal como se presentó en el caso de dos polinomios debemos de probar que cada columna en el bicomplejo anterior es exacta salvo en el último nivel. En este caso

al tomar cohomología a las columnas de  $L'_{m+p} \otimes R/I$  podemos calcular el primer término en la secuencia espectral  $E$  que proporciona el bicomplejo  $L'_{m+p} \otimes R/I$ .

**Lema 2.74.** *Si  $f_r$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces  $H^i(B_{*,t}, df_r) = 0$  con  $1 \leq t \leq r-1$  para todo  $i \neq m-t$ , y*

$$H^{m-t}(B_{*,t}, df_r) = \bigoplus_{|\alpha'|=m+p-t} y_1^{\alpha_1} \cdots y_{r-1}^{\alpha_{r-1}} y_r^t df_r \wedge \Omega^t$$

**Prueba.** El complejo  $(B_{*,t}, df_r)$  se define de la siguiente manera

$$0 \longrightarrow B_{m-t,t} \xrightarrow{df_r} B_{m-t-1,t} \xrightarrow{df_r} \cdots \longrightarrow B_{1,t} \xrightarrow{df_r} B_{0,t}.$$

El morfismo borde

$$df_r : B_{s,t} \longrightarrow B_{s-1,t}$$

se define de la siguiente manera

$$df_r : \bigoplus_{|a|=p+t+s; a_r=s} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \Omega^{m-s-t} \longrightarrow \bigoplus_{|a|=p+t+s-1; a_r=s-1} y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \Omega^{m-s-t+1}$$

$y_1^{a_1} \cdots y_r^{a_r} \omega \rightarrow y_1^{a_1} \cdots y_{r-1}^{a_{r-1}} y_r^{a_r-1} df_r \wedge \omega$ . De aquí se desprende que

$$(B_{*,t}, df_r) = \bigoplus_{|a|=p+t} y_1^{a_1} \cdots y_{r-1}^{a_{r-1}} K(df_r)^{\leq m-t}$$

Como  $f_r$  tiene una singularidad aislada entonces  $H^i(K(df_r)) = 0$  para todo  $i \neq m$ . De la definición del complejo de Koszul se sigue que

$$H^{m-t}(K(df_r)) = \frac{\Omega^{m-t}}{df_r \wedge \Omega^{m-t-1}}$$

Por lo tanto será suficiente demostrar que

$$\frac{\Omega^t}{df_r \wedge \Omega^{t-1}} \simeq df_r \wedge \Omega^t.$$

En efecto, definamos el morfismo

$$df_r : \frac{\Omega^t}{df_r \wedge \Omega^{t-1}} \longrightarrow df_r \wedge \Omega^t.$$

como  $\bar{\omega} \rightarrow df_r \wedge \omega$ . Es claro que la aplicación es sobre. Veamos la inyectividad. Si  $df \wedge \omega = 0$ , como  $f_r$  tiene una singularidad aislada, entonces  $\omega = df \wedge \omega_1$  (ver Corolario 2.6). Por lo tanto  $\omega = 0$  en el módulo  $\frac{\Omega^t}{df_r \wedge \Omega^{t-1}}$ . ■

**Lema 2.75.** *El complejo  $(M', \delta)$  tiene cohomología cero en todo nivel excepto en grado  $m-r+1$ .*

**Prueba.** Es claro que  $M'$  es un complejo de módulos libres de longitud  $m - \tau + 1$ . Si empleamos el criterio de exactitud debemos demostrar que : para todo primo  $P$  tal que  $ht(P) < m - \tau + 1$  se tiene que  $H^i(M'_P) = 0$  para todo  $i \neq m - \tau + 1$ . En efecto sea  $P$  un primo con tales características. Como  $ht(J_F) = m - \tau + 1$  entonces  $P$  no contiene al ideal jacobiano  $J_F$ . Por lo tanto el complejo  $(L'_{m+p})_P$  es exacto.

Por otro lado como el complejo  $M'$  se escribe como

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & & \dots & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 B_{2,r} & \longleftarrow & \dots & & & & \\
 \downarrow df_r & & \downarrow df_r & & & & \\
 B_{1,r} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B_{1,m-1} & & \\
 \downarrow df_r & & \downarrow df_r & & \downarrow df_r & & \\
 B_{0,r} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & B_{0,m-1} & \longleftarrow & B_{0,m}
 \end{array} \tag{2.25}$$

Como sabemos las columnas de este complejo son sumas directas de complejos Koszul  $K(df_r)$  truncados

En el anillo  $R_P$  se cumple que

$$(L'_{m+p})_P = L'_{m+p}(x_1, \dots, x_r).$$

Es decir la aplicación  $\omega \rightarrow df_r \wedge \omega$  y el complejo  $K((f_r)_{x_1}, \dots, (f_r)_{x_m})$  se transforma en  $\omega \rightarrow dx_r \wedge \omega$ , y  $K(dx_r)$ . Se prueba que este último complejo es exacto. Como los complejos  $E'$ , y  $(B_{*,t}, df_r)$  para  $t \in \{0, 1, \dots, m\}$  son sumas directas del complejo de Koszul  $K(dx_r)$ , y de complejos que se obtienen de truncar el complejo de Koszul entonces  $E'$  es exacto y  $U'_t$  es exacto excepto posiblemente en el último nivel.

Si tomamos cohomología a las columnas del complejo  $L'_{m+p}$  obtenemos el siguiente complejo  $C$  :

$$H^m(E') \longleftarrow H^{m-1}(B_{*,1}, df_r) \longleftarrow \dots \longleftarrow H^{m-r-1}(B_{*,r+1}, df_r)$$

$$H^{m-r}(B_{*,r}, df_r) \longleftarrow \dots \longleftarrow H^1(U'_1) \longleftarrow \Omega^0$$

El complejo  $C$  es quasi isomorfo al complejo  $L'_{m+p}$ . Por lo tanto  $C$  es exacto. Esto significa que el complejo  $M''$  definido como

$$\begin{aligned}
H^{m-r}(B_{*,r}, df_r) &\longleftarrow H^{m-r-1}(B_{*,r+1}, df_r) \longleftarrow H^{m-r-2}(B_{*,r+2}, df_r) \\
&\dots \longleftarrow H^2(B_{*,m-2}, df_r) \longleftarrow H^1(B_{*,m-1}, df_r) \longleftarrow B_{0,m}
\end{aligned}$$

tiene cohomología cero para todo grado diferente de  $m - r$ . Como el complejo  $M''$  se obtiene al tomar cohomología a las columnas del complejo  $M'_p$  (ver Complejo 2.25) entonces  $M'_p$  y  $M''$  son quasi isomorfos. Por lo tanto  $M'_p$  es exacto salvo en el último nivel. ■

**Observación.** Notemos  $L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes_R R/I$ . Como el complejo  $L_{m+p}$  se puede escribir como un bicomplejo (ver Página 109), tenemos una secuencia espectral  $E^*_{*,*}$  que converge a la cohomología del complejo  $L_{m+p}$ .

**Teorema 2.76.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis. Si  $f_r$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces existe una secuencia espectral  $E^*_{p,q}$  tal que  $E^\infty = E^r$ , y converge a la cohomología del complejo  $L_{m+p}$ .

**Prueba.** La prueba se basa en escribir el complejo

$$L_{m+p} = L'_{m+p} \otimes_R R/I$$

de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc}
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
E_{m-2} & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{2,1} & \xleftarrow{\delta_1} \cdots & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{2,r-1} & \xleftarrow{\delta_1} (M_{m+p})_{m-r-1} & & \\
\downarrow df_r & \downarrow \delta_1 & \\
E_{m-1} & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{1,1} & \xleftarrow{\delta_1} \cdots & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{1,r-1} & \xleftarrow{\delta_1} (M_{m+p})_{m-r} & & \\
\downarrow df_r & \downarrow \delta_1 & \\
E_m & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{0,1} & \xleftarrow{\delta_1} \cdots & \xleftarrow{\delta_1} \bar{B}_{0,r-1} & \xleftarrow{\delta_1} (M_{m+p})_{m-r+1} & & 
\end{array}$$

donde  $E_* = E'_* \otimes_R R/I$ ,  $\bar{B}_{*,*} = B_{*,*} \otimes R/I$  y  $M_* = M'_* \otimes_R R/I$ . Las columnas de  $L'_{m+p}$  son exactas excepto en el último nivel. Entonces podemos tomar cohomología a las columnas del bicomplejo  $L'_{m+p} \otimes R/I$  y tener

$$\begin{array}{ccccc}
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\text{Tor}_2(H^m(E'), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_2(H^{m-1}(B_{*,1}, df_r), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \cdots \\
\downarrow df_r & & \downarrow df_r & & \downarrow df_r \\
\text{Tor}_1(H^m(E'), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_1(H^{m-1}(H^{m-1}(B_{*,1}, df_r)), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \cdots \\
\downarrow df_r & & \downarrow df_r & & \downarrow df_r \\
\text{Tor}_0(H^m(E'), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_0(H^{m-1}(B_{*,1}, df_r), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \cdots \\
\cdots & & \cdots & & \cdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \xleftarrow{\partial} \text{Tor}_2(H^{m-r+2}((B_{*,r-2}, df_r), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_2(H^{m-r+1}(M'_{m+p}), R/I) & & \cdots \\
\downarrow df_r & & \downarrow \partial & & \\
\cdots \xleftarrow{\partial} \text{Tor}_1(H^{m-r+2}(B_{*,r-2}, df_r), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_1(H^{m-r+1}(M'_{m+p}), R/I) & & \cdots \\
\downarrow df_r & & \downarrow \partial & & \\
\cdots \xleftarrow{\partial} \text{Tor}_0(H^{m-r+2}((B_{*,r-2}, df_r), R/I) & \xleftarrow{\partial} & \text{Tor}_0(H^{m-r+1}(M'_{m+p}), R/I) & & \cdots
\end{array}$$

el primer término de la secuencia espectral. De la definición de secuencia espectral se sigue que  $E^\infty = E^r$ . ■

A continuación damos otra demostración del Corolario 2.40, donde se refleja la relación que existe entre que un anillo sea regular  $R/I$  y que su ideal jacobiano de  $I$  sea unidad.

**Proposición 2.77.** Sean  $(R, \eta)$  un a.r.l.e.t.f e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces

$$H^i((L_j)) = 0$$

para todo  $i < m - r$  e  $i > m$  si  $j > m - r$ ; y si  $j \leq m - r$  e  $i \neq j$ .

**Prueba.** Sea  $P$  un ideal primo en el anillo  $R/I$  diferente del maximal. Entonces  $P \not\subseteq J_F$ , por lo tanto el complejo  $(L_j)_P$  es exacto para todo  $j > m - r$  y tiene cohomología cero para todo grado  $i \neq j$  si  $j < m - r + 1$ . Del Corolario 1.69 se sigue la prueba de la Proposición. ■

### 2.3.2. El Algoritmo

Como sabemos los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  de una icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  generado por una secuencia regular de  $r$  elementos son espacios vectoriales de dimensión finita. A continuación presentamos un algoritmo para calcular la dimensión de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ , para todo  $r \geq 2$ , y  $j > m - r + 1$ . Dejamos en libertad al lector para que pueda implementar este algoritmo en algún programa de matemáticas, como por ejemplo el programa Singular.

En el caso que el ideal  $I = \langle f, g \rangle$  este generado por una secuencia regular de longitud dos sabemos que

$$H^*(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-*}(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I).$$

Con este resultado podemos calcular la dimensión de los módulos de cohomología del complejo  $L_{m-1}$ ; pues estos pueden ser calculados por ejemplo por el programa Singular. También tenemos la secuencia exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I \longrightarrow L_{m+s} \longrightarrow L_{m+s-1} \longrightarrow 0.$$

De la ecuación anterior podemos suponer por inducción que hemos calculado la dimensión de los módulos de cohomología del complejo  $L_{m+s}$ . Notemos que  $H^m(L_{m+s})$  es un espacio vectorial de dimensión finita; más aún es el coker de una aplicación entre  $R$ -módulos libres donde el morfismo entre estos se conoce. Para el término en nivel  $m - 2$  sabemos que

$$H^{m-2}(L_{m+s}) = \text{Tor}(H^{m-2}((L'_{m+s})^{\leq m-1}, R/I)),$$

y su dimensión es finita. Del teorema de clasificación podemos suponer que  $K := K(f_{x_1}, \dots, f_{x_m})$  es una resolución de  $R/J_f$ . Nuevamente de esta información tenemos que

$$H^*(K \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-*}(R/J_f, R/I).$$

La dimensión de todos los módulos anteriormente mencionados pueden ser calculados por el programa Singular; debido a los resultados precisados líneas atrás. Del análisis anterior es claro que la dimensión que nos falta calcular es la del modulo  $H^{m-1}(L_{m+s})$ .

**Proposición 2.78.** *Sea  $I = \langle f, g \rangle$  una icis, entonces*

$$\dim(H^{m-1}(L_{m+s})) = -\dim(H^{m-2}(K \otimes R/I))$$

$$\begin{aligned}
& + \dim(\text{Tor}(H^{m-2}((L'_{m+s})^{\leq m-1}, R/I))) - \dim(H^{m-2}(L_{m+s-1})) \\
& + \dim(H^{m-1}(K \otimes R/I)) + \dim(H^{m-1}(L_{m+s-1})) \\
& - \dim(H^m(K \otimes R/I)) + \dim(H^m(L_{m+s})) - \dim(H^m(L_{m+s-1})).
\end{aligned}$$

**Prueba.** De la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow K(f_{x_1}, \dots, \dots, f_{x_m}) \otimes R/I \longrightarrow L_{m+s} \longrightarrow L_{m+s-1} \longrightarrow 0$$

obtenemos la secuencia exacta larga

$$H^{m-2}(K \otimes R/I) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m+s}) \longrightarrow H^{m-2}(L_{m+s-1})$$

$$H^{m-1}(K \otimes R/I) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m+s}) \longrightarrow H^{m-1}(L_{m+s-1})$$

$$H^m(K \otimes R/I) \longrightarrow H^m(L_{m+s}) \longrightarrow H^m(L_{m+s-1}).$$

Sabemos que la suma y resta alternada de las dimensiones en la secuencia anterior es cero, es decir tenemos

$$\begin{aligned}
& \dim(H^{m-2}(K \otimes R/I)) - \dim(\text{Tor}(H^{m-2}((L'_{m+s})^{\leq m-1}, R/I))) + \dim(H^{m-2}(L_{m+s-1})) \\
& - \dim(H^{m-1}(K \otimes R/I)) + \dim(H^{m-1}(L_{m+s})) - \dim(H^{m-1}(L_{m+s-1})) \\
& + \dim(H^m(K \otimes R/I)) - \dim(H^m(L_{m+s})) + \dim(H^m(L_{m+s-1})) = 0.
\end{aligned}$$

De aquí es simple hallar la dimensión de  $H^{m-1}((L'_{m+s}))$ . ■

Más aún recordemos que los complejos  $L_j$  para  $j < m - \tau + 1$  son exactos (ver Corolario 2.40), en el caso que  $j = m - \tau + 1$  tenemos el siguiente resultado.

**Lema 2.79.** *Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis entonces*

$$H^*(L_{m-\tau+1}) = \text{Tor}_{m-\tau-1-*}(H^{m-\tau+1}(L'_{m-\tau+1}), R/I)$$

**Prueba.** Notemos que la longitud del complejo  $L'_{m-\tau+1}$  es  $m - \tau + 1$ , y  $ht(J_F) = m - \tau + 1$ . Sea  $P$  un primo de altura menor que  $m - \tau + 1$  entonces  $P$  no contiene a  $J_F$ , el ideal jacobiano de  $F$ . De la Corolario 2.70 se sigue que

$$H^i((L_{m-\tau+1})_P) = 0$$

para todo  $i \neq m - r + 1$ . Del criterio de exactitud tenemos que el complejo  $L'_{m-r+1}$  es una resolución de  $H^{m-r+1}(L'_{m-r+1})$ . De aquí se sigue directamente que

$$H^*(L_{m-r+1}) = \text{Tor}_{m-r+1-*}(H^{m-r+1}(L'_{m-r+1}), R/I).$$

■

**Observación.** El resultado anterior es una generalización del cálculo obtenido por [Mich]. Supongamos que en  $I = \langle f, g \rangle$  el generador  $f$  tenga una singularidad aislada. Cuando  $r = 2$  obtenemos

$$H^*(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-*}(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/I) = \text{Tor}_{m-1-*}\left(\frac{J_f}{J_{f,g}}, R/I\right).$$

**Lema 2.80.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis y  $s > m - r + 1$  un entero entonces

$$H^{m-r}(L_s) = \text{Tor}_1((L'_s)^{\leq m-r+1}, R/I).$$

**Prueba.** El complejo  $(L'_s)^{\leq m-r+1}$  tiene longitud  $m - r + 1$ . Sea  $P$  un ideal primo de altura menor que  $m - r + 1$ . Como  $ht(J_F) = m - r + 1$  entonces  $P \not\subseteq J_F$ . Del Corolario 2.70 esto significa que  $H^i((L'_s)_P) = 0$  para todo  $i \neq s \leq m$ , si  $s > m$  entonces  $L_s$  es exacto. Como

$$H^t(((L'_s)^{\leq m-r+1})_P) = H^t((L'_s)_P) = 0$$

para todo  $t < m - r + 1$  entonces el complejo  $H^i(((L'_s)^{\leq m-r+1})_P) = 0$  para todo  $i \neq m - r + 1$ . Por lo tanto  $(L'_s)^{\leq m-r+1}$  es una resolución de  $H^{m-r+1}((L'_s)^{\leq m-r+1})$ . Como  $L_s = L'_s \otimes R/I$ , entonces

$$H^{m-r}(L_s) = \text{Tor}_1((L'_s)^{\leq m-r+1}, R/I).$$

■

**Observación.** A continuación presentamos un algoritmo para calcular la dimensión de los módulos de cohomología de una icis cuando el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  este generado por una secuencia regular de longitud  $r$ . De manera precisa tenemos el siguiente teorema.

**Teorema 2.81.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis,  $j > m - r + 1$  y  $t < j$ . entonces

$$\begin{aligned} \dim(H^t(L_j(f_1, \dots, f_r))) &= \pm(\dim(H^{m-r}(L_j(f_1, \dots, f_{r-1}))) - \\ &\dim(H^{m-r}(L_j(f_1, \dots, f_r))) + \dim(H^{m-r}(L_{j-1}(f_1, \dots, f_r))) - \\ &\dots + \dots \end{aligned}$$

$$\dim(H^{t-1}(L_j(f_1, \dots, f_{r-1}))) - \dim(H^{t-1}(L_j(f_1, \dots, f_r))) \\ \dim(H^{t-1}(L_{j-1}(f_1, \dots, f_r))) - \dim(\ker(i^*)),$$

donde  $i^* : H^t((L_j(f_1, \dots, f_{r-1})))^{\leq t+1} \rightarrow H(L_j((f_1, \dots, f_r))^{\leq t+1})$ , las dimensiones del lado derecho se conocen, y el signo  $\pm$  depende con el signo que se comience la suma y resta alternada.

**Prueba.** Del Lema anterior conocemos la dimensión de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  cuando  $I = \langle f, g \rangle$  es generado por una secuencia regular de longitud dos. Por lo tanto por inducción podemos suponer que hemos calculado la dimensión de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  cuando  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es generado por una secuencia regular de longitud  $r$ . Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r, f_{r+1} \rangle$  una icis generada por una secuencia regular de longitud  $r + 1$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $I' = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  genera una icis (ver Proposición 2.24). Del Lema 2.80 tenemos ya calculado el módulo

$$H^{m-r}(L_j) = \text{Tor}_1(H^{m-r+1}(L'_j)^{\leq m-r+1}, R/I),$$

para toda icis. Como

$$H^*(L_{m-(r+1)+1}) = \text{Tor}_{m-(r+1)+1}^*(H(L'_{m-(r+1)+1}), R/I)$$

podemos admitir que hemos calculado la dimensión de los módulos de  $L_{j-1}$  para la icis  $I = \langle f_1, \dots, f_r, f_{r+1} \rangle$ , para  $j \geq m - (r + 1) - 1$ .

De la Proposición 2.43 tenemos la secuencia exacta de complejos

$$0 \longrightarrow L_j(f_1, \dots, f_r) \longrightarrow L_j(f_1, \dots, f_{r+1}) \longrightarrow L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}) \longrightarrow 0.$$

Si cortamos la secuencia anterior en nivel  $m - r + 2$  tenemos la secuencia exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow (L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2} \longrightarrow (L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2} \longrightarrow \\ (L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2} \longrightarrow 0.$$

En general los módulos de cohomología en nivel  $m - r + 2$  de los complejos en la secuencia anterior son espacios vectoriales de dimensión infinita. Si tomamos cohomología obtenemos la secuencia exacta

$$\begin{aligned}
H^{m-r}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r+1}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r+2}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2}) &\xrightarrow{i^*} H^{m-r+2}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r+2}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

Los módulos de cohomología de nivel menor que  $m - r + 1$  son espacio vectoriales de dimension finita, pues son los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$  y  $L_{j-1}$  de una icis generado por una secuencia regular de longitud  $r$  y  $r + 1$ . Por lo tanto  $\ker(i^*)$  es un espacio vectorial de dimensión finita. El cual es sólo el cociente de la aplicación inclusión  $i$ ; y puede ser calculado por el programa Singular. Por lo tanto tenemos la siguiente secuencia exacta

$$\begin{aligned}
H^{m-r}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2}) \\
H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) &\longrightarrow H^{m-r+1}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
\ker(i^*) &\longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

En la secuencia anterior la única dimensión que nos falta calcular es

$$\dim(H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2})) = \dim(H^{m-r+1}(L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))).$$

En la secuencia anterior sabemos que la suma y resta alternada de las dimensiones de los módulos nos debe dar cero. De aquí es sencillo calcular

$$\dim(H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_{r+1}))) = -\dim(H^{m-r}((L_j(f_1, \dots, f_r))))$$

$$\begin{aligned}
& H^{m-r}(L_j(f_1, \dots, f_{r+1})) - H^{m-r}((L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))^{\leq m-r+2}) \\
& \dim(H^{m-r+1}((L_j(f_1, \dots, f_r))^{\leq m-r+2})) + \dim(H^{m-r+1}(L_{j-1}(f_1, \dots, f_{r+1}))) \\
& \quad - \dim(\ker(i^*)).
\end{aligned}$$

Un proceso de inducción finaliza la prueba. ■

# Capítulo 3

## Homología Cíclica.

Los complejos  $L_j$  tienen cohomología cero para todo término menor que  $m - r$ . Debido a este hecho y al Lema 3.3 podemos calcular los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para grados menores que  $m - r - 1$ . Los demás términos se encuentran en una secuencia exacta corta, y pueden ser calculados de manera recurrente. En el caso que  $S = 0$  expresamos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  en función de los módulos de cohomología de los complejos  $L_j$ . El complejo que proporciona la homología cíclica negativa  $\Omega^{\geq m}$  se descompone en casi un producto tensorial de complejos. En el caso  $r = 2$  esto permite tomar un subcomplejo  $\Omega_f^{\geq m}$ . El complejo cociente  $\Omega^{\geq m} / \Omega_f^{\geq m}$  es isomorfo a  $\Omega_f^{\geq m}$ . Mostramos una secuencia espectral que se genera a partir de este subcomplejo. Este estudio permite presentar una secuencia espectral que converge a la cohomología de  $\Omega^{\geq m}$ .

### 3.1. Homología Cíclica

En esta Sección calculamos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para todo  $j$ . Vamos a demostrar el siguiente teorema :

**Teorema 3.1.** *Sea  $A_1 = R/\langle I \rangle$ , y  $A_t = R/I^t$ . Para  $j \in \mathbb{N}$  se tiene que*

$$H^i(D_j) = \begin{cases} H_{DR}^i(A_1) & \text{si } i < \min\{m - r - 2, j\}. \\ H_{DR}^{m-r}(A_{j-m+r+1}) & \text{si } i = m - r - 1, j > m - r - 1. \\ \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}} & \text{si } i = j \end{cases} \quad (3.1)$$

Si  $j \geq m - r$  para  $m - r + 1 \leq t \leq m - 1$  existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H_{DR}^{t-1}(A_{j-t+1}) \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow \\ H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^t(A_{j-t}) \longrightarrow 0$$

**Prueba.** En lo que sigue de la sección demostraremos los distintos casos del teorema. ■

Los resultados se basan en el Corolario 2.40 y Lema 4 de [BACH] que pasamos a enunciar.

**Notación.** En este Capítulo usaremos la siguiente notación

$$\Omega_{A_r}^i = \frac{\Omega_A^i}{I^r \Omega_A^r + dI^r \Omega_A^r}$$

**Lema 3.2.** La imagen del morfismo  $\pi : H^{j-r}(D_j) \longrightarrow H^{j-r}(D_{j-1})$  inducido por la proyección canónica  $\pi^* : D_j \longrightarrow D_{j-1}$  para todo  $1 \leq r \leq j$  es dado por

$$\pi^*(H^{j-r}(D_j)) = H_{DR}^{j-r}(A_r)$$

**Prueba.** Lema 4 de [BACH]. ■

**Observación.** A continuación describimos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para grados menores que  $m - r$ . El primer paso es demostrar la siguiente proposición :

**Proposición 3.3.** Si  $j < m - r$  entonces

$$H^t(D_j) = H^t(D_{t+1})$$

para todo  $t \leq j - 2$ .

**Prueba.** Sea  $j < m - r$  y  $t \leq j - 2 < j$ . En la secuencia

$$0 \longrightarrow L_j \longrightarrow D_j \xrightarrow{\pi} D_{j-1} \longrightarrow 0.$$

el complejo  $L_j$  tiene cohomología cero para todo  $i \neq j$  (Corolario 2.40). Tomemos

la secuencia exacta larga asociada

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^t(L_j) & \longrightarrow & H^t(D_j) & \xrightarrow{\pi} & H^t(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
 H^{t+1}(L_j) & \longrightarrow & H^{t+1}(D_j) & \xrightarrow{\pi} & H^{t+1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
 \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
 H^{j-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{j-1}(D_j) & \xrightarrow{\pi} & H^{j-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\
 & & & & & & \\
 H^j(L_j) & \longrightarrow & H^j(D_j) & \longrightarrow & 0. & & 
 \end{array} \tag{3.2}$$

Como  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i \neq j$  y  $t \leq j - 2$ , se sigue que  $H^i(D_j) = H^i(D_{j-1})$  para todo  $i \leq j - 2$ .

Un proceso inductivo concluye la prueba. ■

**Proposición 3.4.** *Sea  $A_1 = R/I$  y  $j < m - r$  entonces*

$$H^t(D_j) \simeq \pi^*(H^t(D_j)) = H_{DR}^t(A_1)$$

para todo  $t \leq j - 1$ .

**Prueba.** Sea  $t = j - 1$ . En la secuencia 3.2,  $H^{j-1}(L_j) = 0$  implica que

$$\pi : H^{j-1}(D_j) \longrightarrow H^{j-1}(D_{j-1})$$

es inyectivo. Por el Lema 3.2

$$H_{DR}^{j-1}(A_1) = \pi^*(H^{j-1}(D_j)) \simeq H^{j-1}(D_j). \tag{3.3}$$

En el caso general, por la Proposición 3.3

$$H^t(D_j) \simeq H^t(D_{t+1}).$$

La fórmula 3.3 con  $j = t + 1$  nos da

$$H^t(D_{t+1}) = \pi^*(H^t(D_{t+1})) = H_{DR}(A_1).$$

Es decir  $H^t(D_j) \simeq H_{DR}^t(A_1)$ .

**Proposición 3.5.** Sea  $j \geq m - r$  entonces para todo  $t \leq m - r - 2$

$$H^t(D_j) = H^t(D_{t+1}).$$

**Prueba.** Sea  $j \geq m - r$  y la secuencia

$$0 \longrightarrow L_j \longrightarrow D_j \longrightarrow D_{j-1} \longrightarrow 0.$$

La secuencia exacta larga asociada es

$$\begin{array}{ccccccc} H^t(L_j) & \longrightarrow & H^t(D_j) & \longrightarrow & H^t(D_{j-1}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\ H^{m-r-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{m-r-1}(D_j) & \longrightarrow & H^{m-r-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\ H^{j-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{j-1}(D_j) & \longrightarrow & H^{j-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \dots \\ \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & \dots \\ H^j(L_j) & \longrightarrow & H^j(D_j) & \longrightarrow & H^j(D_{j-1}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Como  $H^i(L_j) = 0$  para todo  $i \leq m - r - 1$  por el Corolario 2.40 entonces  $H^s(D_j) \simeq H^s(D_{j-1})$  para todo  $s \leq m - r - 2$ . De la hipótesis  $t \leq m - r - 2$ , entonces

$$H^t(D_j) = H^t(D_{j-1}).$$

Si  $t + 2 = j$  la prueba terminó. Notemos que este caso  $j = m - r$ ,  $t = m - r - 2$ .

Un proceso inductivo concluye la prueba. ■

**Proposición 3.6.** Sea  $j \geq m - r$  entonces

$$H^t(D_j) = \pi^*(H^t(D_{t+1})) = H_{DR}^t(A_1)$$

para todo  $t \leq m - r - 2$ . Si  $t = m - r - 1$  entonces

$$H^{m-r-1}(D_j) = \pi^*(H^{m-r-1}(D_j)) = H_{DR}^{m-r-1}(A_{j-m+r+1})$$

**Prueba.** Sea  $j \geq m - r$ , del Corolario 2.40 se sigue que  $H^t(L_j) = 0$  para todo  $t \leq m - r - 1$ . Por lo tanto de la secuencia 3.2 tenemos que

$$\pi^* : H^{t-1}(D_j) \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1})$$

es un isomorfismo.

Un proceso de inducción finaliza la prueba. Si  $t = m - r - 1$ ,  $\pi^*$  es inyectivo. Del Lema 3.2 se sigue

$$H^{m-r-1}(D_j) = \pi^*(H^{m-r-1}(D_j)) = H_{DR}^{m-r-1}(A_{j-m+r+1})$$

■

**Observación.** Presentamos una secuencia exacta que relaciona los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para grados mayores o iguales que  $m - r$ . y menores que  $m - 1$ .

**Proposición 3.7.** *Sea  $j \geq m - r$  para  $m - r + 1 \leq t \leq m - 1$  existe una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H_{DR}^{t-1}(A_{j-t+1}) & \longrightarrow & H^{t-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ H^t(L_j) & \longrightarrow & H^t(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H_{DR}^t(A_{j-t}) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

**Prueba.** Para la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow L_j \longrightarrow D_j \xrightarrow{\pi} D_{j-1} \longrightarrow 0$$

tenemos la secuencia exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \dots & & \dots & & \\ & & & & & & \\ H^{t-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{t-1}(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{t-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ H^t(L_j) & \longrightarrow & H^t(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^t(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ & & & & & & \\ H^{t+1}(L_j) & \longrightarrow & H^{t+1}(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{t+1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ & & \dots & & \dots & & \dots \end{array}$$

Del Lema 3.2 se sigue que

$$\pi^*(H^{t-1}(D_j)) = H_{DR}^{t-1}(A_{j-t+1})$$

y

$$\pi^*(H^t(D_j)) = H_{DR}^t(A_{j-t}).$$

Por lo tanto tenemos la secuencia exacta larga

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H_{DR}^{t-1}(A_{j-t+1}) \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow \\ H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H_{DR}^t(A_{j-t}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

■

**Lema 3.8.** Si  $j < m$  entonces  $H^j(D_j) = \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}}$  donde  $A = R/I$ .

**Prueba.** De la definición del complejo  $D_j$  tenemos

$$H^j(D_j) = \frac{\frac{\Omega_R^j}{I \cdot \Omega_R^j + dI \wedge \Omega_R^{j-1}}}{\frac{d\Omega^{j-1}}{d(I\Omega^{j-1}) + I\Omega^j \cap d\Omega^{j-1}}} = \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}}.$$

■

## 3.2. El Caso Quasihomogéneo

En esta parte trabajamos sobre el anillo de polinomios  $k[x_1, \dots, x_m]$ . El ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es generado por polinomios quasihomogéneos. Por lo tanto el álgebra  $R/I$  es graduada.

Si el ideal  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  es generado por polinomios quasihomogéneos entonces la única singularidad aislada que pueden tener es el cero. Si existiese otro punto  $x = (x_1, \dots, x_m)$  que fuese singular para los generadores entonces los puntos  $\lambda \cdot x$  también pertenecen al conjunto de puntos singulares de  $f_1, \dots, f_r$ . En efecto es suficiente notar que  $f_i(\lambda \cdot x) = \lambda^d \cdot f_i(x)$ , donde  $d$  es el grado de quasihomogeneidad.

Sean  $A = R/I$ , y  $\tilde{H}C(A) = HC(A)/HC(k)$ , en el caso quasihomogéneo sabemos que

$$HC(A) = HC(k) \oplus \tilde{H}C(A)$$

Más aún, en la secuencia SBI el morfismo  $S = 0$  es nulo. Debido a esto tenemos la secuencia exacta corta de  $k$ -espacios vectoriales

$$0 \longrightarrow \tilde{H}C_n(A) \xrightarrow{B_n} \tilde{H}H_{n+1}(A) \xrightarrow{I_{n+1}} \tilde{H}C_{n+1}(A) \longrightarrow 0.$$

De esta secuencia se sigue que

$$\tilde{H}C_n(A) = \ker(B_{n+1}I_{n+1} : \tilde{H}H_{n+1}(A) \rightarrow \tilde{H}H_{n+2}(A)).$$

La homología de Hochschild localiza, es decir

$$HH_n(A) \otimes A_T = HH_n(A_T)$$

para todo  $n$ , donde  $T$  es un conjunto multiplicativamente cerrado conteniendo al uno (ver [Lod, Proposición 1.1.7]). Sea  $\zeta$  un maximal en el anillo de polinomios  $k[x_1, \dots, x_m]$  diferente de  $\eta$  el punto singular entonces  $A_\zeta$  es regular y la homología de Hochschild es conocida para términos mayores que  $\dim(A_\zeta)$  es cero. Si  $\zeta = \eta$  entonces La homología de Hochschild es no nula para todo  $n > 0$ . Por lo tanto es suficiente analizar la secuencia anterior en el anillo local

$$A_\eta = k[x_1, \dots, x_m]_\eta / I_\eta.$$

Los resultados se resumen en el siguiente teorema

**Teorema 3.9.** *Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces*

$$H^t(D_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \min\{j-1, m-r-1\} \\ \frac{\Omega_A^j}{d\Omega_A^{j-1}} & \text{si } i = j \text{ y } j < m-r \\ H^{m-r}(D_{m-r}) = \frac{\Omega_A^{m-r}}{d\Omega_A^{m-r-1}} & \text{si } j = m-r \\ H^{m-r}(D_j) = H^{m-r}(L_j) & \text{si } j > m-r. \end{cases} \quad (3.4)$$

Si  $m-r < t < m$  entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \longrightarrow 0.$$

con  $t \leq j$ . Si  $j \geq m$  entonces  $H^m(D_j) = 0$ , y  $H^{m-1}(D_j) = H^m(L_j)$  para todo  $j \geq m-1$ .

**Observación.** A continuación veremos para que términos la homología de los complejos  $D_j$  se anula. La herramienta básica será usar el hecho que  $\pi^* = 0$ .

**Proposición 3.10.** Sea  $j \in \mathbb{N}$  entonces

$$H^t(D_j) = 0$$

para todo  $t \leq \min\{j - 1, m - r - 1\}$ .

**Prueba.** Del Corolario 1.108 se tiene que  $\pi^* = 0$ . La afirmación para  $j < m - r$  se sigue directamente de la Proposición 3.4. La afirmación para  $j \geq m - r$  se obtiene de la Proposición 3.6. ■

**Proposición 3.11.** Se cumple  $H^{m-r}(D_j) = H^{m-r}(L_j)$  para todo  $j > m - r$ . Si  $j = m - r$  entonces

$$H^{m-r}(D_{m-r}) = \frac{\Omega_A^{m-r}}{d\Omega_A^{m-r-1}}$$

**Prueba.** Para la secuencia

$$0 \longrightarrow L_j \longrightarrow D_j \xrightarrow{\pi} D_{j-1} \longrightarrow 0.$$

tomamos la secuencia exacta larga

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & \dots & & \dots & & \\ H^{m-r-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{m-r-1}(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{m-r-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ H^{m-r}(L_j) & \longrightarrow & H^{m-r}(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{m-r}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ \dots & & \dots & & \dots & & \\ H^{j-1}(L_j) & \longrightarrow & H^{j-1}(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & H^{j-1}(D_{j-1}) & \longrightarrow & \\ H^j(L_j) & \longrightarrow & H^j(D_j) & \xrightarrow{\pi^*} & 0 & & \end{array}$$

Si  $j > m - r$  entonces  $j - 1 \geq m - r$ . De la Proposición 3.10 se sigue que  $H^{m-r-1}(D_{j-1}) = 0$ . Sabemos que  $\pi^* = 0$ , entonces

$$H^{m-r}(L_j) = H^{m-r}(D_j).$$

Si  $j = m - r$  entonces

$$H^{m-r}(D_{m-r}) = \frac{\Omega_A^{m-r}}{d\Omega_A^{m-r-1}}$$

**Proposición 3.12.** Si  $m - r < t < m$  entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \longrightarrow 0.$$

con  $t \leq j$ . Si  $j \geq m$  entonces  $H^m(D_j) = 0$ , y  $H^{m-1}(D_j) = H^m(L_j)$  para todo  $j \geq m - 1$ .

**Prueba.** Sea la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow L_j \longrightarrow D_j \xrightarrow{\pi} D_{j-1} \longrightarrow 0. \quad (3.5)$$

En la secuencia exacta larga asociada

$$\dots \longrightarrow H^{t-1}(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow$$

$$H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H^t(D_{j-1}) \longrightarrow \dots$$

tenemos que  $\pi^* = 0$  (Corolario 1.108). De aquí se desprende la secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{t-1}(D_{j-1}) \longrightarrow$$

$$H^t(L_j) \longrightarrow H^t(D_j) \longrightarrow 0.$$

De la secuencia exacta larga asociada a la secuencia (3.5) para los últimos niveles obtenemos

$$H^{m-1}(L_j) \longrightarrow H^{m-1}(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H^{m-1}(D_{j-1}) \longrightarrow$$

$$H^m(L_j) \longrightarrow H^m(D_j) \xrightarrow{\pi^*} H^m(D_{j-1}) \longrightarrow 0$$

Como  $\pi^* = 0$  entonces  $H^m(D_{j-1}) = 0$  para todo  $j \geq m - 1$ . Esto significa que  $H^m(D_j) = 0$  para  $j \geq m - 2$ . Por lo tanto

$$H^{m-1}(D_{j-1}) \simeq H^m(L_j).$$

### 3.3. Ejemplos.

Esta sección esta orientada a presentar la cohomología de los complejos  $D_j$  para el caso de curvas complejas inmersas en dimensión 3. Como se observa en el Ejemplo 2.67 todas ellas son quasihomogéneas. Por lo tanto podemos aplicar los cálculos de la sección anterior.

**Ejemplo 3.13.** Este ejemplo recopila los cálculos del capítulo anterior para el caso  $r = 2$ .

Si  $j < m - 2$  entonces  $H^t(D_j) = 0$  para todo  $t \leq j - 1$  (Proposición 3.10). Un cálculo directo muestra que  $H^j(D_j) = \Omega_A^j/d\Omega_A^{j-1}$ .

Si  $j \geq m - 2$  entonces  $H^t(D_j) = 0$  para todo  $t \leq m - 2 - 1$  (ver Proposición 3.10). Un cálculo muestra que  $H^{m-2}(D_{m-2}) = \Omega_A^{m-2}/d\Omega_A^{m-3}$ , y que  $H^{m-1}(D_{m-1}) = \Omega_A^{m-1}/d\Omega_A^{m-2}$ .

De la Proposición 3.11 tenemos que  $H^{m-2}(D_j) = H^{m-2}(L_j)$  para todo  $j > m - 2$ , y  $H^{m-2}(D_{m-2}) = \Omega_A^{m-2}/d\Omega_A^{m-3}$ .

Notemos que hemos calculado todos los módulos de cohomología de los complejos  $D_j$  para  $t \leq m - 2$ , y todo  $j$ .

Sea  $j > m - 1$ . Si  $m - 2 < t < m$  entonces  $t = m - 1$ . De la Proposición 3.12 se sigue que

$$H^{m-1}(D_j) = H^m(L_{j+1}).$$

De la Proposición 3.12 con  $t = m - 1$  obtenemos

$$0 \longrightarrow H^{m-2}(D_{j-1}) \longrightarrow$$

$$H^{m-1}(L_j) \longrightarrow H^{m-1}(D_j) \longrightarrow 0.$$

Sabemos que  $H^{m-2}(D_j) = H^{m-2}(L_j)$  para todo  $j > m - 2$  ( ver Proposición 3.11). Por lo tanto tenemos la siguiente secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow H^{m-2}(L_{j-1}) \longrightarrow H^{m-1}(L_j) \longrightarrow H^{m-1}(D_j) \longrightarrow 0.$$

Como espacio vectorial tenemos

$$H^{m-1}(D_j) \simeq \frac{H^{m-1}(L_j)}{H^{m-2}(L_{j-1})}.$$

Si usamos la Proposición 3.12 tenemos que

$$H^{m-1}(D_j) \simeq H^m(L_j).$$

Como sabemos (Proposición 3.12)

$$H^m(D_j) = 0,$$

para todo  $j$ . Por lo tanto si  $j < m$

$$H^i(D_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ \Omega_A^j/d\Omega_A^{j-1} & \text{si } i = j. \end{cases} \quad (3.6)$$

Si  $j \geq m - 1$  podemos escribir

$$\begin{cases} 0 & \text{si } i < m - 2, \\ H^{m-2}(L_j) & \text{si } i = m - 2, \\ \Omega_A^{m-1}/d\Omega_A^{m-2} & \text{si } i = m - 1 \text{ y } j = m - 1, \\ \frac{H^{m-1}(L_j)}{H^{m-2}(L_j)} \simeq H^m(L_j) & \text{si } i = m - 1 \text{ y } j > m - 1, \\ 0 & \text{si } i \geq m \text{ y } j > m - 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

**Ejemplo 3.14.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $I = \langle f, g \rangle$  una icis quasihomogénea donde  $J_f = \eta$ . Del Corolario 2.65 se desprende que para  $j > m - 1$

$$H^i(L_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < m - 2 \\ \text{Tor}_1(\eta/J_{f,g}, R/I) \oplus \{\bigoplus_{t=1}^{j-m+1} k \cdot x_t\} & \text{si } i = m - 2, \\ \text{Tor}_0(\eta/J_{f,g}, R/I) \oplus \{\bigoplus_{t=1}^{j-m+1} k \oplus k\} \cdot x_t & \text{si } i = m - 1, \\ \bigoplus_{t=1}^{j-m+1} k \cdot x_t & \text{si } i = m. \end{cases} \quad (3.8)$$

**Observación.** A continuación proporcionamos información sobre los módulos  $\text{Tor}_0(\eta/J_{f,g}, R/I)$  y  $\text{Tor}_1(\eta/J_{f,g}, R/I)$ . Específicamente demostramos que si

$$\sigma := \dim\left(\frac{R}{I + J_F}\right)$$

entonces

$$\dim(\text{Tor}_0(\eta/J_{f,g}, R/I)) = \dim(\text{Tor}_1(\eta/J_{f,g}, R/I)) = \sigma.$$

La primera igualdad se sigue de la ecuación

$$\frac{H^{m-1}(L_j)}{H^{m-2}(L_j)} \simeq H^m(L_j),$$

y de (3.8).

En el caso, trivial, que  $f$  sea regular obtenemos el resultado dado por Michler.

Para demostrar la caracterización de la cohomología del complejo  $L_{m-1}$  presentamos el siguiente análisis.

**Observación.** Del Capítulo anterior tenemos que los elementos  $f + \alpha \cdot g$  que cumplen la condición  $ht(J_\alpha) < m$  son un número finito. Entonces definamos, como en el Capítulo 2,

$$W := \{\alpha/ht(J_\alpha) < m\}.$$

**Lema 3.15.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $I = \langle f, g \rangle$  un ideal de intersección completa con una singularidad aislada en  $\eta$ . Sea  $h = f + \alpha_0 \cdot g$  generador de  $I$  con una singularidad aislada en  $\eta$ . Entonces existe  $h'$  generador del ideal  $I$  el cual cumplen las siguientes condiciones :

- 1) El generador  $h'$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$ , e  $I = \langle h, h' \rangle$ .
- 2) La aplicación

$$h' : \frac{J_h}{J_{h,h'}} \longrightarrow \frac{J_h}{J_{h,h'}}$$

definida como  $a \mapsto a \cdot h'$  es inyectiva.

**Prueba.** Sea  $M = \frac{J_h}{J_{h,g}}$ , donde  $h = f + \alpha_0 \cdot g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ . Definamos  $h_\lambda := f + \lambda \cdot g \in R$  con  $\lambda \in k - \{W \cup \alpha_0\}$ , y asumamos que para todo  $\lambda \in k - W$  se cumple que la aplicación

$$h_\lambda : \frac{J_h}{J_{h,g}} \longrightarrow \frac{J_h}{J_{h,g}}$$

definida como  $a \mapsto a \cdot h_\lambda$  no es inyectiva. Entonces para cada  $\lambda \in k - W$  existe  $x_\lambda \in M$  tal que  $h_\lambda \in \text{Ann}(x_\lambda)$ .

De la Proposición A.26 podemos decir que cada  $\text{Ann}(x_\lambda)$  esta contenido en al menos un ideal primo  $p \in \text{Ass}(M)$ . De la Proposición A.27 se sigue que  $\text{Ass}(M)$  son un conjunto finito. Los elementos  $f + \lambda \cdot g$  con  $\lambda \in k - \{W \cup \alpha_0\}$  son infinitos. Por lo tanto podemos afirmar que existe un primo  $p \in \text{Ass}(M)$  y elementos  $\alpha \neq \beta$  tal que  $f + \alpha \cdot g, f + \beta \cdot g \in p = \text{ann}(x)$  y  $x \in M$  es no nulo (ver Definición [Mats]). Como  $\alpha \neq \beta$  se prueba que  $f \cdot x = g \cdot x = 0$ . Es decir

$$x \cdot h_\lambda = 0 \tag{3.9}$$

para todo  $\lambda \in k$ .

Por otro lado hemos probado que :

Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f y  $I = \langle f, g \rangle$  una variedad con una singularidad aislada en  $\eta$  entonces el complejo  $L_{m-1}$  cumple  $H^i(L_{m-1}) = 0$  para todo  $i \leq m - 3$  (ver Corolario 2.51)

Más aún, como el complejo  $L'_{m-1}$  tiene cohomología cero para todo grado  $i \neq m-1$  (ver Proposición 2.49) y  $L_{m-1} = L'_{m-1} \otimes R/I$ ,

$$H^i(L_{m-1}) = H^k(L'_{m-1} \otimes R/I) = \text{Tor}_{m-1-i}(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/I). \quad (3.10)$$

Como por hipótesis la secuencia  $f, g$  es regular y  $\langle h, g \rangle = \langle f, g \rangle$  se prueba que  $h$  y  $g$  también forman una secuencia regular. Esto significa que el complejo

$$K(x, y) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{(h,g)} R \oplus R \xrightarrow{(-g,h)} R \longrightarrow 0$$

es una resolución de  $R/I$ , ver Apéndice.

Por otro lado, como  $h$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces

$$H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq \frac{J_h}{J_{h,g}}$$

(ver Lema 2.35). Más aún la cohomología del complejo  $L_{m-1}$  es isomorfa a la homología del complejo  $K(h, g) \otimes_R \frac{J_h}{J_{h,g}}$  (ver Ecuación (3.10)). Por lo tanto, del Corolario 2.51, el complejo

$$K(x, y) \otimes M : 0 \longrightarrow \frac{J_h}{J_{h,g}} \xrightarrow{(h,g)} \frac{J_h}{J_{h,g}} \oplus \frac{J_h}{J_{h,g}} \xrightarrow{(-g,h)} \frac{J_h}{J_{h,g}} \longrightarrow 0$$

tiene sólo dos términos de homología no nulos. De la Ecuación (3.9) se sigue que existe  $x \in M = \frac{J_h}{J_{h,g}}$  no nulo tal que  $x \cdot h = x \cdot g = 0$ . Es decir  $\bar{x} \in H^{m-3}(L_{m-1}) = 0$ , una contradicción.

Por lo tanto existe  $h_\lambda = f + \lambda \cdot g$  donde  $\lambda \in k - \{W \cup \alpha_0\}$  tal que la aplicación

$$h_\lambda : \frac{J_h}{J_{h,g}} \longrightarrow \frac{J_h}{J_{h,g}}$$

es inyectiva.

Para finalizar la demostración es suficiente notar que  $J_{h,g} = J_{f,g} = J_{h,h_\lambda}$ . Esto significa que

$$h_\lambda : \frac{J_h}{J_{h,h_\lambda}} \longrightarrow \frac{J_h}{J_{h,h_\lambda}}$$

es una aplicación inyectiva y tanto  $h$  como  $h_\lambda$  tienen una singularidad aislada en  $\eta$ . ■

**Lema 3.16.** *El complejo  $L'_{m-1} \otimes K(f)$  tiene cohomología cero para todo grado  $i \neq m$ , donde  $f$  satisface las propiedades del Lema 3.15.*

**Prueba.** El Lema 3.15 nos permite asumir sin pérdida de generalidad que la aplicación

$$f : \frac{J_g}{J_{f,g}} \longrightarrow \frac{J_g}{J_{f,g}}$$

definida como  $x \mapsto xf$  es inyectiva, y  $f$  así como  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$ .

Por otro lado, como  $L'_{m-1}$  es un complejo exacto excepto en el último nivel tenemos que

$$H^*(L'_{m-1} \otimes K(f)) = \text{Tor}_{m-1-*}(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/\langle f \rangle).$$

Cuando  $g$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  se probó que

$$H^{m-1}(L'_{m-1}) \simeq \frac{J_g}{J_{f,g}}$$

(ver Lema 2.35). Es claro que

$$K(f) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{f} R$$

es una resolución de  $R/\langle f \rangle$ . Entonces el complejo  $K(f) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}}$  es dado por

$$0 \longrightarrow \frac{J_g}{J_{f,g}} \xrightarrow{f} \frac{J_g}{J_{f,g}}.$$

De Lema anterior tenemos que  $H^{m-2}(L'_{m-1} \otimes K(f)) = H_1(K(f) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}}) = 0$ . ■

**Corolario 3.17.** *Existen generadores  $f, g$  del ideal  $I$  tal que*

$$H^{m-2}(L_{m-1}) = \text{Tor}_1\left(\frac{J_g}{J_{f,g}} \otimes R/\langle f \rangle, R/\langle g \rangle\right).$$

**Prueba.** Como  $L'_{m-1}$  es un complejo exacto excepto en el último nivel entonces

$$H^*(L_{m-1}) = \text{Tor}_{m-1-*}\left(\frac{J_g}{J_{f,g}}, R/\langle f, g \rangle\right).$$

Por lo tanto, para calcular la cohomología del complejo  $L_{m-1}$  podemos usar la resolución  $K(f, g)$  de  $R/\langle f, g \rangle$ . Como

$$K(f, g) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}} \simeq K(g) \otimes K(f) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}}$$

y como  $K(g)$  es una resolución libre de  $R/\langle g \rangle$  y  $C := K(f) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}}$  es una resolución de  $H_0(C) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes R/\langle f \rangle$ , entonces

$$K(f, g) \otimes \frac{J_g}{J_{f,g}}$$

calcula  $\text{tor}(R/\langle g \rangle, H_0(C))$  ■

**Observación.** La conclusión anterior también se puede obtener asumiendo que el ideal  $\langle J_{f,g}, f \rangle$  cumplen  $\text{ht}(\langle J_{f,g}, f \rangle) = m = \dim(R)$ . Tal como sucede en el siguiente ejemplo :

**Ejemplo 3.18.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$  el anillo local y  $g = x^2 + y^3$ ,  $f = x^2 - y^3$  una variedad de intersección completa con una singularidad aislada en  $\eta$ . Entonces es claro que  $\text{ht}(\langle J_{f,g}, f \rangle) = \dim(R) = 2$ .

**Observación.** Notemos que la condición establecida en la observación anterior no siempre se cumple. Veamos el siguiente ejemplo :

**Ejemplo 3.19.** Sea  $(R, \eta) = (k[x, y]_{(x,y)}, \eta)$ ,  $f = x^2$  y  $g = y^3$ . Entonces  $J_{f,g} = (xy^2)$  y  $\text{ht}(\langle f, J_{f,g} \rangle) = \text{ht}(\langle g, J_{f,g} \rangle) = 1 < 2$

**Observación.** El Lema 3.15 se interpreta de la siguiente manera : siempre se puede elegir un representante  $f$  el cual cumpla que  $\text{ht}(\langle J_{f,g}, f \rangle) = m$ .

### 3.3.1. El Número de Milnor.

A continuación estudiamos la dimensión de  $H^{m-1}(L_{m-1})$ , cuando  $I = \langle f, g \rangle$  es una icis y  $J_f = \eta$ . También ponemos de manifiesto la relación de la dimensión de este espacio con el número de Milnor, según se define en [Looj]. Trabajaremos sólo bajo las hipótesis que aquí se presentan.

**Definición 3.20.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis tal que  $I_s = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  sea una icis para todo  $1 \leq s \leq r$ . Sea

$$A_s = \frac{R}{\langle J_{f_s}, f_1, \dots, f_{s-1} \rangle}$$

Definamos el número de Milnor de la singularidad  $R/I$  en  $\eta$  como

$$\mu = \sum_{s=1}^r (-1)^{r-s} A_s,$$

siempre que los sumandos  $A_s$  sean de dimensión finita.

**Observación.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis; sin pérdida de generalidad podemos suponer que para todo  $s$  el ideal  $I_s = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$  es una icis y que  $I_{s-1}$  es una icis (ver Proposición 2.24). Es decir los elementos  $f_i$  son los hallados en la Proposición 2.24. Denotemos al jacobiano de  $F_s = (f_1, \dots, f_s)$  como  $J_{F_s}$ .

**Lema 3.21.** Sea  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  una icis como en la observación anterior. Entonces el anillo  $R/\langle J_{F_s}, I_{s-1} \rangle$  tiene dimensión finita para todo  $1 \leq s \leq r$ .

**Prueba.** Será suficiente demostrar que el anillo

$$R/\langle J_{F_r}, I_{r-1} \rangle$$

es de dimensión finita. Esta afirmación es equivalente a demostrar que

$$ht(\langle J_{F_r}, I_{r-1} \rangle) = m.$$

Esta última demostración es similar a la prueba de la Proposición 2.24. ■

**Observación.** El lema anterior nos dice que los representantes hallados en la observación anterior sirven para calcular el número de Milnor según se define en 5.11.c de [Looj].

**Lema 3.22.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo regular local,  $I = \langle f, g \rangle$  donde  $J_f = \eta$ . Entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\varphi} \frac{\eta}{J_{f,g} + g \cdot \eta} \longrightarrow \frac{R}{J_{f,g} + \langle g \rangle} \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

el morfismo  $\varphi$  se define como  $\varphi(1) = \bar{g}$

**Prueba.** Se sigue de la definición de  $\varphi$ . ■

**Observación.** En el caso que  $J_f = \eta$  se tiene que  $R/J_f = k$ . Si además  $ht(J_{f,g}, f) = m$  del lema anterior se sigue que

$$\mu = \dim(R/\langle J_{f,g}, f \rangle) - \dim(R/\eta) = \dim(\text{Tor}_0(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/\langle f \rangle)) - \dim(k).$$

**Lema 3.23.** Bajo las hipótesis del lema anterior la secuencia

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\varphi \otimes 1} \frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{J_{f,g} + I} \longrightarrow k \longrightarrow 0.$$

es exacta.

**Prueba.** Notemos que la secuencia anterior surge al efectuar el producto tensorial de la secuencia

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\varphi} \frac{\eta}{J_{f,g} + g \cdot \eta} \longrightarrow \frac{R}{J_{f,g} + \langle g \rangle} \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

con  $R/\langle f \rangle$ . Será suficiente demostrar que la aplicación

$$\varphi \otimes 1 : k \otimes R/\langle f \rangle \longrightarrow \frac{\eta}{J_{f,g} + g \cdot \eta} \otimes R/\langle f \rangle$$

es inyectiva. Sea  $I = \langle f, g \rangle$ , entonces

$$\frac{\eta}{J_{f,g} + g \cdot \eta} \otimes R/\langle f \rangle \simeq \frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta}.$$

Al tensorizar la secuencia anterior por  $R/\langle f \rangle$  tenemos

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow k \xrightarrow{\varphi \otimes 1} \frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{J_{f,g} + I} \longrightarrow k \longrightarrow 0,$$

donde  $N$  es el núcleo de  $\varphi \otimes 1$ . Notemos que en el módulo  $\frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta}$  los elementos  $\bar{f}$  y  $\bar{g}$  son no nulos a la vez (a lo más uno puede ser nulo). Pues si  $\bar{f} = \bar{g} = 0$  entonces en el anillo  $R/J_{f,g}$  tendríamos que  $\bar{I} = \bar{I} \cdot \bar{\eta}$ , es decir  $\bar{I} = 0$ . Para demostrar esto basta usar la inclusión

$$\eta/J_{f,g} \hookrightarrow R/J_{f,g}.$$

Notemos que  $\bar{f}, \bar{g} \in \ker(\psi)$ , y al menos uno de ellos es no nulo. Como  $\dim(k) = 1$  concluimos que

$$\ker(\psi) = k.$$

Por lo tanto  $\varphi \otimes 1$  es inyectiva. ■

**Corolario 3.24.** Sean  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f, g \rangle$  una icis donde  $J_f = \eta$ , sea

$$\chi := \dim_k \frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta}.$$

Entonces

$$\chi = \dim_k(\text{Tor}_0(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/I)) = \dim_k(\text{Tor}_0(R/J_{f,g}, R/I))$$

**Prueba.** Sabemos que

$$H^{m-1}(L'_{m-1}) = \frac{J_f}{J_{f,g}},$$

entonces

$$\text{Tor}_0(H^{m-1}(L'_{m-1}), R/I) = \frac{J_f}{J_{f,g}} \otimes R/I \simeq \frac{J_f}{J_{f,g} + I \cdot J_f}.$$

Del lema anterior tenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow k \xrightarrow{\varphi \otimes 1} \frac{\eta}{J_{f,g} + I \cdot \eta} \xrightarrow{\psi} \frac{R}{J_{f,g} + I} \longrightarrow k \longrightarrow 0.$$

Sabemos que la suma alternada de las dimensiones en la secuencia anterior nos debe dar cero. De aquí se sigue que

$$\dim(\text{Tor}_0(R/J_{f,g}, R/I)) = \chi.$$

■

**Observación.** La única condición que imponemos sobre al menos un representante  $f$  es que  $J_f = \eta$ . Notemos que en el caso que  $J_f = \langle 1 \rangle$  entonces obtenemos  $R/\langle J_g \rangle$ .

A continuación presentamos algunos ejemplos que cumplen esta condición y aparecen en la tabla de la Sección 2.2.

Símbolo.	Fórmula.
$S_\mu, 5 \leq \mu$	$(x^2 + y^2 + z^{\mu+3}, yz)$
$T_\mu; \mu = 7, 8, 9$	$(x^2 + y^3 + z^\mu, yz)$
$U_7$	$(x^2 + yz, xy + z^3)$
$U_8$	$(x^2 + yz, xy + xz^3)$
$U_9$	$(x^2 + yz, xy + z^4)$
$W_8$	$(x^2 + yz, y^2 + z^3)$
$W_9$	$(x^2 + yz, y^2 + xz^2)$
$Z_{10}$	$(x^2 + yz^2, y^2 + z^3)$

### 3.4. La Homología Cíclica Negativa.

Según lo establecido en la Proposición 1.80 el complejo cíclico negativo se descompone como

$$CN = \prod_{p \in \mathbb{Z}} \Omega^{\geq p}$$

y por lo tanto

$$HN_k = \prod_{p \in \mathbb{Z}} H_{k-2p}(\Omega^{\geq p}),$$

donde  $\Omega^{\geq m}$  y  $\Omega$  se definen como

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ \dots & \xleftarrow{B} & \Omega_{m+2,1} & \xleftarrow{B} & \Omega_{m+1,1} & \xleftarrow{B} & \Omega_{m,1} \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ \dots & \xleftarrow{B} & \Omega_{m+2,0} & \xleftarrow{B} & \Omega_{m+1,0} & \xleftarrow{B} & \Omega_{m,0}. \end{array}$$

y

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ \dots & \xleftarrow{B} & \Omega_{2,1} & \xleftarrow{B} & \Omega_{1,1} & \xleftarrow{B} & \Omega_{0,1} \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ \dots & \xleftarrow{B} & \Omega_{2,0} & \xleftarrow{B} & \Omega_{1,0} & \xleftarrow{B} & \Omega_{0,0}. \end{array}$$

respectivamente (ver Proposición 1.80).

**Observación.** Dado el complejo  $\Omega^{\geq p_0}$  definamos los complejos

$$\hat{D}_j := \text{Ker}(D_j \rightarrow D_{p_0})$$

para todo  $j \geq p_0$ . El complejo  $D_{p_0}$  es

$$\begin{array}{ccccccc} & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (L_{p_0})_{p_0-1} & \xleftarrow{\beta} & \dots & \xleftarrow{\beta} & \dots & \xleftarrow{\beta} & \dots \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ (L_{p_0})_{p_0} & \xleftarrow{\beta} & \dots & \xleftarrow{\beta} & (L_1)_0 & \xleftarrow{\beta} & (L_0)_{-1} \\ & & \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d \\ & & \dots & \xleftarrow{\beta} & (L_1)_1 & \xleftarrow{\beta} & (L_0)_0. \end{array}$$

y el complejo  $D_j$  para  $j \geq p_0$  se define como

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 (L_j)_{j-1} & \xleftarrow{\beta} & \cdots & & & & \\
 \downarrow d & & \downarrow d & & & & \\
 (L_j)_j & \xleftarrow{\beta} & \cdots & \xleftarrow{\beta} & (L_{p_0})_{p_0-1} & \xleftarrow{\beta} & \cdots \\
 & & & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 & & & & (L_{p_0})_{p_0} & \xleftarrow{\beta} & \cdots \xleftarrow{B} (L_0)_{-1} \\
 & & & & \downarrow d & & \downarrow d \\
 & & & & \cdots & & \cdots \xleftarrow{B} (L_0)_0
 \end{array}$$

De aquí se observa que  $\ker(D_j \rightarrow D_{p_0})$  consiste del complejo

$$\begin{array}{ccccccc}
 \vdots & & & & & & \\
 \downarrow & & & & & & \\
 (L_j)_{j+1} & \xleftarrow{\beta} & \cdots & \xleftarrow{\beta} & \cdots & & \\
 \downarrow d & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
 (L_j)_j & \xleftarrow{\beta} & \cdots & \xleftarrow{\beta} & (L_{p_0+1})_{p_0} & & \\
 & & & & \downarrow d & & \\
 & & & & (L_{p_0+1})_{p_0+1} & &
 \end{array}$$

Por lo tanto  $\Omega^{\geq p_0+1} = \varprojlim \hat{D}_j$ .

Por otro lado, como la proyección  $\hat{D}_j \rightarrow \hat{D}_{j-1}$  es sobre, donde  $\hat{D}_j = \ker(D_j \rightarrow D_{p_0})$  para  $j \geq p_0$  entonces se satisface la condición de Mittag-Leffler. Debido a que  $\dim_k(H(\hat{D}_j)) < \infty$ , el sistema inverso  $(H(\hat{D}_j), \mu)$  donde  $\mu : H(\hat{D}_j) \rightarrow H(\hat{D}_{j-1})$  cumple la condición de Mittag-Leffler. Por lo tanto se tiene que  $\varprojlim^1 H_*(\hat{D}_j) = 0$ . Del Teorema 3.5.8 de [Wei] se tiene una secuencia

$$0 \longrightarrow \varprojlim^1 H_{s+1}(\hat{D}_j) \longrightarrow H_s(\varprojlim \hat{D}_j) \longrightarrow \varprojlim H_s(\hat{D}_j) \longrightarrow 0.$$

Como  $\varinjlim^1 H(\hat{D}_j) = 0$  entonces

$$H(\varinjlim \hat{D}_j) \simeq \varinjlim H_*(\hat{D}_j)$$

**Proposición 3.25.** *Para todo  $p_0 > 0$  se tiene que*

$$H^s(\Omega^{\geq p_0}) \simeq \varinjlim H^s(\hat{D}_j).$$

**Prueba.** Se sigue del desarrollo anterior. ■

**Corolario 3.26.** *Los complejos  $\Omega^{\geq p_0}$  con  $p_0 \geq m$  sólo tienen tres términos de cohomología no nulos.*

**Prueba.** Los complejos  $L_j$  para  $j \geq m$  sólo tienen los últimos tres términos de cohomología no nulos. Entonces  $\hat{D}_j$  tienen a lo más los tres últimos términos de cohomología no nulos. Por lo tanto

$$H^s(\Omega^{\geq p_0}) \simeq \varinjlim H^s(D_j) = 0$$

para todo  $s < m - 2$ . Es decir el complejo  $\Omega^{\geq p_0}$  con  $p \geq m$  sólo tienen posiblemente los últimos tres términos de cohomología no nulos. ■

Interesados en emplear los resultados que se plantean en [ML] descomponemos el complejo  $\Omega^{\geq m}$  en dos complejos; el complejo  $\Omega_f^{\geq m}$  y  $\Omega_f^{\geq m}y$ . Ambos complejos son isomorfos y dependen de  $f$ ,  $df$ , y  $dg$ . Esto nos proporciona una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \Omega_f^{\geq m} \longrightarrow \Omega^{\geq m}(f, g) \longrightarrow \Omega_f^{\geq m}[-1] \longrightarrow 0.$$

Del subcomplejo  $\Omega_f^{\geq m}$  tomamos cierto subcomplejo  $M(f, g)$ . La cohomología de  $\frac{\Omega_f^{\geq m}}{M(f, g)}$  se calcula en el Lema 3.35. Finalmente descomponemos  $M(f, g)$  en dos copias de un complejo  $\Gamma$ , obteniendo una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow \Gamma \longrightarrow M(f, g) \longrightarrow \Gamma[-1] \longrightarrow 0$$

Aquí las columnas de  $\Gamma$  son los complejos  $E'_{m+p}$  (Definición 2.60) y son exacto salvo en el último nivel. Su cohomología se calcula en el Lema 3.34

**Observación.** Otra forma de abordar el estudio de la cohomología del complejo  $M(f, g)$  es la siguiente : Tomamos un subcomplejo  $F$  de  $M(f, g)$  (ver Definición 3.42). En el complejo cociente  $\frac{M(f, g)}{F}$  presentamos una filtración

$$I_p \subset \cdots \subset I_1 = \frac{M(f, g)}{F},$$

y que calculamos en el Lema 3.48. Para el complejo  $F$  presentamos una filtración

$$F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F.$$

Esta filtración proporciona una secuencia espectral que colapsa en  $E^1$ . No se sabe si  $E^1 \Rightarrow H^*(F)$ .

**Observación.** A continuación presentamos el complejo  $\Omega^{\geq m}$ , primero para el caso de un polinomio, y luego para el caso de dos polinomios.

Cuando el ideal  $I$  es generado por un sólo polinomio de la definición

$$\Omega_{p,q} = \xi_{p,q} = \bigoplus_{i=0}^p \Omega^i \otimes (\wedge(V) \otimes (\wedge^{p-i}\overline{V}))_{p+q-i}, \quad (3.11)$$

(ver Observación después de la Definición 1.100) tenemos que el complejo  $\Omega^{\geq m}$  se expresa como

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longleftarrow & \Omega^{m-1} \cdot x \cdot \overline{x}^2 \oplus \Omega^{m-2} \overline{x}^3 & \longleftarrow & \Omega^{m-2} \cdot x \cdot \overline{x}^2 \oplus \Omega^{m-3} \overline{x}^3 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \dots & \longleftarrow & \Omega^m \cdot x \cdot \overline{x} \oplus \Omega^{m-1} \overline{x}^2 & \longleftarrow & \Omega^{m-1} \cdot x \cdot \overline{x} \oplus \Omega^{m-2} \overline{x}^2 & & \\
 & & \downarrow \delta & & \downarrow & & \\
 & & \Omega^m \cdot \overline{x} & \longleftarrow & \Omega^m \cdot x \oplus \Omega^{m-1} \overline{x} & & \\
 & & & & \downarrow \delta & & \\
 & & & & \Omega^m & & 
 \end{array}$$

y una columna en general se representa como

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\downarrow \\
\cdots \longleftarrow \Omega^{m-1} \cdot x \cdot \bar{x}^{p+2} \oplus \Omega^{m-2} \bar{x}^{p+3} \longleftarrow \cdots \\
\downarrow \\
\cdots \longleftarrow \Omega^{m-1} \cdot x \cdot \bar{x}^{p+1} \oplus \Omega^{m-2} \bar{x}^{p+2} \longleftarrow \cdots \\
\downarrow \delta \\
\longleftarrow \beta \quad \Omega^m \cdot x \cdot \bar{x}^p \oplus \Omega^{m-1} \bar{x}^{p+1} \longleftarrow \cdots \\
\downarrow \delta \\
\Omega^m \cdot \bar{x}^p \longleftarrow \cdots,
\end{array}
\tag{3.12}$$

donde  $\beta$  y  $\delta$  se presentan en la Definición 1.100 del primer Capítulo. Las variables  $x$  y  $\bar{x}$  tienen grado uno y dos respectivamente. En nuestro caso, cuando el ideal es generado por dos polinomios, el complejo  $\Omega^{\geq m}$  quedaría de la siguiente forma :

$$\begin{array}{c}
\vdots \\
\downarrow \\
\cdots \longleftarrow \Omega^{m-1} \wedge^1(\bar{V}) \wedge^2(V) \oplus \Omega^{m-2}(\wedge^2(\bar{V}))(\wedge(V)) \oplus \Omega^{m-3} \wedge^3(\bar{V}) \\
\downarrow \\
\Omega^m(\wedge(\bar{V}))(\wedge(V)) \oplus \Omega^{m-1}(\wedge^2\bar{V}) \longleftarrow \Omega^m \wedge^2 V \oplus \Omega^{m-1}(\wedge\bar{V})(\wedge(V)) \oplus \Omega^{m-2}(\wedge^2\bar{V}) \\
\downarrow \delta \\
\Omega^m(\wedge\bar{V}) \longleftarrow \beta \quad \Omega^m(\wedge(V)) \oplus \Omega^{m-1}(\wedge\bar{V}) \\
\downarrow \delta \\
\Omega^m.
\end{array}
\tag{3.13}$$

En general, de la ecuación 3.11 tenemos que las columnas del complejo  $\Omega^{\geq m}$  son el complejo total del producto tensorial de los complejos  $(L'_{m+p}, \delta)$  y  $K(f, g)$  (ver Lema 1.104). La  $p$ -ésima columna se puede presentar como el complejo total del bicomplejo

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\oplus_{i=0}^{p+2} \Omega_{2,l}^{m-2} & \longleftarrow & [\oplus_{i=0}^{p+2} \Omega_{2,l}^{m-1}]y \oplus [\oplus_{i=0}^{p+2} \Omega_{2,l}^{m-1}]x & \longleftarrow & [\oplus_{i=0}^{p+2} \Omega_{2,l}^{m-2}]xy \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\oplus_{i=0}^{p+1} \Omega_{1,l}^{m-1} & \longleftarrow & [\oplus_{i=0}^{p+1} \Omega_{1,l}^{m-1}]y \oplus [\oplus_{i=0}^{p+1} \Omega_{1,l}^{m-1}]x & \xleftarrow{\delta} & [\oplus_{i=0}^{p+1} \Omega_{1,l}^{m-1}]xy \\
\downarrow \delta & & \downarrow & & \downarrow \\
\oplus_{i=0}^p \Omega_{0,l}^m & \xleftarrow{\delta} & [\oplus_{i=0}^p \Omega_{0,l}^m]y \oplus [\oplus_{i=0}^p \Omega_{0,l}^m]x & \longleftarrow & [\oplus_{i=0}^p \Omega_{0,l}^m]xy
\end{array}$$

De manera similar al segundo Capítulo (ver Definición 1.103) definimos

$$L'_{m+p} : 0 \longrightarrow \bigoplus_{l=0}^{m+p} \Omega_{m,l}^0 \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^{m+p-1} \Omega_{m-1,l}^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{l=0}^p \Omega_{0,l}^m.$$

donde  $\delta$  se presenta en la Definición 1.100. Notemos que estos últimos complejos varían salvo signo la definición del morfismo borde de los complejos  $L'_j$  que se presentaron en el primer capítulo. Sin embargo estos son evidentemente quasisomorfos. Para no introducir otra notación simplemente también los llamamos  $(L'_j, \delta)$ . En [CGG, Teorema 3.3] se prueba que las columnas del complejo  $\Omega^{\geq m}$  son quasisomorfos a  $L_{m+p} = (L'_{m+p}, df + dg) \otimes_R R/I$ . El complejo  $\Omega^{\geq m}$  se puede escribir como :

$$\begin{array}{ccccccc}
\longleftarrow \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & (3.14) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
\cdots \longleftarrow & (L'_{m+p+1} \otimes K(f, g))_{m-1} & \longleftarrow & (L'_{m+p} \otimes K(f, g))_{m-2} & \longleftarrow & \beta & \cdots & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
(L'_{m+p+1} \otimes K(f, g))_m & \longleftarrow & \beta & (L'_{m+p} \otimes K(f, g))_{m-1} & \longleftarrow & \beta & \cdots & \\
\downarrow \delta & & & \downarrow \delta & & & \downarrow \delta & \\
(L'_{m+p} \otimes K(f, g))_m & \longleftarrow & \beta & \cdots & & & &
\end{array}$$

El complejo  $L'_{m+p}$  se escribe como

$$L'_{m+p} : \begin{array}{ccccccc} & \vdots & & & & & \\ & \downarrow df & & & & & \\ \Omega_{1,p+1}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \\ & \downarrow df \\ \Omega_{0,p}^m & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,p}^{m-1} \\ & & \downarrow df \\ & & \cdots & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,1}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,1}^{m-2} \\ & & & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df & \downarrow df \\ & & & \Omega_{0,0}^m & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{1,0}^{m-1} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,0}^{m-2} & \longleftarrow \cdots \longleftarrow \Omega_{2,0}^{m-2} \end{array}, \quad (3.15)$$

donde el morfismo horizontal se define de la siguiente manera

$$df \wedge (\omega \bar{x}^i \bar{y}^j) = (-1)^{|\omega|+1} \omega \wedge df \bar{x}^i \bar{y}^{j-1}$$

y el vertical como

$$dg \wedge (\omega \bar{x}^i \bar{y}^j) = (-1)^{|\omega|+1} \omega \wedge dg \bar{x}^{i-1} \bar{y}^j.$$

Usando el hecho que  $\delta \circ \delta = 0$  se prueba que  $df \wedge dg + dg \wedge df = 0$ .

### 3.4.1. El Complejo $\Omega_f^{\geq m}$ .

En esta primera parte definiremos un subcomplejo  $\Omega_f^{\geq m}$  de  $\Omega^{\geq m}$  y demostraremos que esta bien definido.

**Definición 3.27.** Definamos el complejo  $\Omega_f^{\geq m}$  como

$$\begin{array}{ccccccc}
& & \dots & & \dots & & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\dots & \xleftarrow{\beta} & [(L'_{m+p+1})_m]y \oplus [(L'_{m+p+1})_{m-1}] & \xleftarrow{\beta} & [(L'_{m+p})_{m-1}]y \oplus [(L'_{m+p})_{m-2}] & \xleftarrow{\beta} & \dots \\
& & \downarrow & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
& & (L'_{m+p+1})_m & \xleftarrow{\beta} & [(L'_{m+p})_m]y \oplus [(L'_{m+p})_{m-1}] & \xleftarrow{\beta} & \dots \\
& & & & \downarrow \delta & & \downarrow \delta \\
& & & & (L'_{m+p})_m & \xleftarrow{\beta} & \dots
\end{array}$$

**Observación.** Notemos que las columnas de  $\Omega_f^{\geq m}$  son subcomplejos de las columnas del complejo  $\Omega^{\geq m}$ . También es claro que el complejo

$$[L'_{m+p}]_0 \xrightarrow{\delta} [L'_{m+p}]_1 \xrightarrow{\delta} \dots \xrightarrow{\delta} [L'_{m+p}]_{m-1} \xrightarrow{\delta} [L'_{m+p}]_m$$

esta bien definido. Finalmente, se observa que el complejo  $C_{m+p}$  definido como el complejo total del bicomplejo

$$\begin{array}{ccc}
\dots & \xleftarrow{\quad} & \dots \\
\downarrow & & \downarrow \\
(L'_{m+p})_{m-2} & \xleftarrow{\quad} & [(L'_{m+p})_{m-2}]y \\
\downarrow & & \downarrow \\
(L'_{m+p})_{m-1} & \xleftarrow{\quad} & [(L'_{m+p})_{m-1}]y \\
\downarrow \delta & & \downarrow \delta_1 \\
(L'_{m+p})_m & \xleftarrow{\delta^*} & [(L'_{m+p})_m]y,
\end{array}$$

donde  $\delta^*(\omega y) = (-1)^{|\omega|} f\omega$ , y  $\delta_1(\omega \bar{x}^a \bar{y}^b y) = \delta(\omega \bar{x}^a \bar{y}^b) y$  esta bien definido.

A continuación veremos que el complejo  $\Omega_f^{\geq m}$  esta bien definido. También notemos que la definición de  $\Omega^{\geq m}$  depende de  $f$  pues existe una construcción similar para el generador  $g$ .

**Lema 3.28.** El morfismo  $\beta$  restricto a  $(L'_{m+p})_s y \oplus (L'_{m+p})_{s-1}$  cumple

$$\beta((L'_{m+p})_s y \oplus (L'_{m+p})_{s-1}) \subset (L'_{m+p+1})_{s+1} y \oplus (L'_{m+p+1})_s,$$

y  $\beta \circ \delta + \delta \circ \beta = 0$ .

**Prueba.** Sea  $z \in (L'_{m+p})_s y \oplus (L'_{m+p})_{s-1}$ . Si  $z = \omega \bar{x}^a \bar{y}^l y \in (L'_{m+p})_s y = \bigoplus_{l=0}^{p+m-s} \Omega_{m-s, l, m+p}^s y$  entonces

$$\beta(z) = d_{DR}(\omega) \bar{x}^a \bar{y}^l y + (-1)^{|\omega|} \bar{x}^a \bar{y}^{l+1} \omega.$$

Por definición

$$(L'_{m+p+1})_{s+1} y = \bigoplus_{l=0}^{p+1+m-s-1} \Omega_{m-s-1, l, m+p}^{s+1} y = \bigoplus_{l=0}^{p+1+m-s-1} \bar{x}^a \bar{y}^l \Omega^{s+1} y$$

tal que  $a+l+s+1 = m+p+1$ . De aquí se sigue que  $d_{DR}(\omega) \bar{x}^a \bar{y}^l y \in (L'_{m+p+1})_{s+1} y$ . De igual modo por definición tenemos que

$$(L'_{m+p+1})_s = \bigoplus_{l=0}^{p+1+m-s} \Omega_{m-s, l, m+p+1} = \bigoplus_{l=0}^{p+1+m-s} \bar{x}^a \bar{y}^l \Omega^s$$

tal que  $a+l+s = m+p+1$ . Por lo tanto  $(-1)^{|\omega|} \bar{x}^a \bar{y}^{l+1} \omega \in (L'_{m+p+1})_s$ . De manera similar se prueba que  $\beta(z) \in (L'_{m+p+1})_{s+1} y \oplus (L'_{m+p+1})_s$  si  $z \in (L'_{m+p})_{s-1}$ .

Finalmente la ecuación  $\beta \circ \delta + \delta \circ \beta = 0$  se cumple debido al hecho que esta igualdad se cumple en el complejo  $\Omega^{\geq m}$ , ver Definición 2.3 de [CGG]. ■

Por lo tanto existe una secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega_f^{\geq m} \longrightarrow \Omega^{\geq m}(f, g) \longrightarrow \Omega_f^{\geq m}[-1] \longrightarrow 0.$$

**Observación.** Notemos que como módulos graduados los complejos  $C_{m+p}$  y  $L'_{m+p} \otimes K(f)$  son iguales. Sus morfismos borde son iguales salvo signo. Es decir las cohomología de ambos son iguales. Por este motivo a  $C_{m+p}$  lo denotaremos como  $L'_{m+p} \otimes K(f)$ .

### 3.4.2. El Complejo $M(f, g)$

Esta parte esta dedicada a demostrar la buena definición de cierto subcomplejo  $M(f, g)$  de  $\Omega_f^{\geq m}$ .

A partir de los complejos  $L'_{m+p}$  daremos la siguiente definición :

**Definición 3.29.** Definamos los complejos  $E'_{m+p}(0)$ , con  $p$  en los números naturales, como

$$(E'_{m+p}(0))_0 \xrightarrow{\delta} (E'_{m+p}(0))_1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} (E'_{m+p}(0))_{m-1} \xrightarrow{\delta} (E'_{m+p}(0))_m$$

donde  $(E'_{m+p}(0))_{m-s} = \bigoplus_{l=s}^{p+s} \Omega_{s,l,m+p}^{m-s} = \bigoplus_{l=s}^{p+s} B_{l,s-l,m+p} = \bigoplus_{t+q=s; q=0}^{-p} B_{t,q,m+p}$ . Cuando sea claro en que complejo  $L_{m+p}$  estemos trabajando sólo pondremos  $B_{p,q}$ . Notemos que  $K(f) \otimes E'_{m+p}$  es un subcomplejo de  $L'_{m+p} \otimes K(f)$ . Para ello basta usar que  $\delta(y) = f$ .

**Observación.** Los complejos  $E'_{m+p}(0)$  son subcomplejos de los complejo  $L'_{m+p}$ . Notemos que los complejos  $E'_{m+p}(0)$  coinciden con los complejos  $E'_p$  de la Definición 2.60.

**Lema 3.30.** *El complejo  $(E'_{m+p}(0), \delta)$  esta bien definido.*

**Prueba.** Se sigue del hecho que  $L'_{m+p}$  se puede escribir como un bicomplejo. ■

Posteriormente generalizaremos esta definición para ciertos complejos  $E'_{m+p}(l)$  donde  $l$  es un número natural con ciertas restricciones.

**Lema 3.31.** *El morfismo  $\beta$  restricto al módulo  $(K(f) \otimes E'_{m+p}(0))_t$  cumple*

$$\beta((K(f) \otimes E'_{m+p}(0))_t) \subset (K(f) \otimes E'_{m+p+1}(0))_{t+1}$$

**Prueba.** En efecto, sea  $z \in (E'_{m+p}(0))_t \oplus (E'_{m+p}(0))_{t+1}y$ . Analizaremos dos casos :

Primer caso, sea  $z = \omega \bar{x}^j \bar{y}^i \in (E'_{m+p}(0))_t = \bigoplus_{l=m-t}^{p+m-t} \Omega_{m-t,l,m+p}^t$  entonces  $z \in \Omega_{m-t,i,m+p}^t$  para algún  $l = i$ . Por lo tanto

$$\beta(z) = d(\omega) \bar{x}^j \bar{y}^i \in \Omega_{m-(t+1),i,m+p+1}^{t+1} \subset (E'_{m+p+1}(0))_{t+1} = \bigoplus_{l=m-t-1}^{p+1+m-t-1} \Omega_{m-t-1,l,m+p+1}^{t+1}.$$

Es decir

$$\beta(z) = d(\omega) \bar{x}^j \bar{y}^i \in (E'_{m+p+1}(0))_{t+1} \oplus (E'_{m+p+1}(0))_{t+2}y.$$

Si  $z = \omega \bar{x}^i \bar{y}^j y \in (E'_{m+p}(0))_{t+1}y = \bigoplus_{l=m-t-1}^{m-t-1+p} \Omega_{m-(t+1),l,m+p}^{t+1} y$  entonces  $z = \omega \bar{x}^i \bar{y}^j y \in \Omega_{m-(t+1),j,m+p}^{t+1} y$  para algún  $m-t-1 \leq l = j \leq m-t-1+p$  y

$$\beta(z) = d(\omega) \bar{x}^i \bar{y}^j y + (-1)^{|\omega|} \omega \bar{x}^i \bar{y}^{j+1}.$$

Entonces  $d(\omega) \bar{x}^i \bar{y}^j y \in \Omega_{m-(t+2),j,m+p+1}^{t+2} y \subset \bigoplus_{l=m-t-2}^{m-t-2+p+1} \Omega_{m-(t+2),m+p+1}^{t+2} y = (E'_{m+p+1}(0))_{t+2}y$ . Por otro lado  $\omega \bar{x}^i \bar{y}^{j+1} \in \Omega_{m-(t+1),j+1} \subset (E'_{m+p+1}(0))_{t+1} = \bigoplus_{l=m-t-1}^{m-t-1+p+1} \Omega_{m-(t+1),l,m+p+1}$ , pues en el último sumando  $l$  puede tomar el valor de  $j = m-t-1+p$ . ■

Del Lema anterior podemos presentar la siguiente definición

**Definición 3.32.** Definamos el bicomplejo  $M(f, g)$  como

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & (E_{m+2}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E_{m+1}(0))_{m-2} & \longleftarrow & (E_m(0))_{m-3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & (E_{m+2}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_{m+1}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E_m(0))_{m-2} \\
 & & & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
 & & & & (E_{m+1}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_m(0))_{m-1} \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & (E_m(0))_m,
 \end{array}$$

y  $H_*(M(f, g)) = H_*(Tot(M(f, g)))$ , donde  $(E_{m+p}(0))_s = (E'_{m+p}(0) \otimes K(f))_s$ .

**Observación.** Cada columna  $E_{m+p}(0)$  del complejo  $M(f, g)$  esta formada por el complejo  $E'_{m+p}(0) \otimes K(f)$ . De este último complejo vamos a tomar el subcomplejo  $E'_{m+p}(0)$ . Con él definamos el subcomplejo  $\Gamma(f, g)$  :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & (E'_{m+2}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E'_{m+1}(0))_{m-2} & \longleftarrow & (E'_m(0))_{m-3} \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots & \longleftarrow & (E'_{m+2}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E'_{m+1}(0))_{m-1} & \longleftarrow & (E'_m(0))_{m-2} \\
 & & & & \downarrow \delta & & \downarrow \\
 & & & & (E'_{m+1}(0))_m & \xleftarrow{\beta} & (E'_m(0))_{m-1} \\
 & & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & & (E'_m(0))_m,
 \end{array}$$

A continuación demostramos que este complejo esta bien definido.

**Lema 3.33.** El morfismo  $\beta$  cumple

$$\beta(E'_{m+p}(0)_s) \subset E'_{m+p+1}(0)_{s+1}.$$

**Prueba.** Por definición

$$E'_{m+p}(0)_s = \bigoplus_{l=m-s}^{p+m-s} \Omega_{m-s,l,m+p}^s,$$

y

$$E'_{m+p+1}(0)_{s+1} = \bigoplus_{l=m-s-1}^{p+1+m-s-1} \Omega_{m-s-1,l,m+p+1}^{s+1}$$

Si  $z \in E'_{m+p}(0)_s$  entonces  $\beta(z) = d_{DR}(w)\bar{x}^a\bar{y}^l \in \bigoplus_{l=m-s-1}^{p+1+m-s-1} \Omega_{m-s-1,l,m+p+1}^{s+1}$ . ■

**Observación.** De la definición del complejo  $\Gamma(f, g)$  tenemos la secuencia exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \Gamma(f, g) \longrightarrow M(f, g) \longrightarrow \Gamma(f, g)[-1] \longrightarrow 0$$

**Lema 3.34.** Si  $f$  tiene una singularidad aislada en  $\eta$  entonces existe una secuencia exacta

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(M(f, g)) \longrightarrow H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow$$

$$H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow H^m(M(f, g)) \longrightarrow 0,$$

$Gr(H^m(\Gamma(f, g))) = \bigoplus_{p \geq 0} H^m(E_{m+p}(0))$ , y  $Gr(H^m(E_{m+p}(0))) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$ .

**Prueba.** Notemos que las columnas del complejo  $E'_{m+p}(0)$  están formadas por el complejo  $K(df)$ . Como por hipótesis  $f$  tiene una singularidad aislada,  $K(df)$  es exacto excepto en el último nivel. Por lo tanto  $H^s(\Gamma(f, g)) = 0$  para todo  $s < m$ . De la secuencia exacta larga en cohomología de la secuencia

$$0 \longrightarrow \Gamma(f, g) \longrightarrow M(f, g) \longrightarrow \Gamma(f, g)[-1] \longrightarrow 0$$

obtenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow H^{m-1}(M(f, g)) \longrightarrow H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow$$

$$H^m(\Gamma(f, g)) \longrightarrow H^m(M(f, g)) \longrightarrow 0.$$

Como los complejos  $(E'_{m+p}(0), \delta)$  son exactos salvo en el último nivel un argumento rutinario de filtraciones nos llevan a la igualdad

$$Gr(H^m(\Gamma(f, g))) = \bigoplus_{p \geq 0} H^m(E_{m+p}(0)).$$

El hecho que  $Gr(H^m(E_{m+p}(0))) = \bigoplus_{i=0}^p (R/J_f)_i$  se sigue del Lema 2.61. ■

### 3.4.3. El Complejo $\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)}$ .

Brindamos información sobre los módulos de cohomología del complejo  $\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)}$ . Para ello nos basamos en el Lema 3.15.

**Lema 3.35.** *El complejo*

$$\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)}$$

*es exacto excepto en el último nivel, y*

$$Gr(H_0(\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)})) = Gr(H^{m-1}(\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)})) = \bigoplus_{i>0} [(\frac{J_g}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle]_i$$

**Prueba.** En efecto, para ello debemos notar primero que las columnas del complejo

$$\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)}$$

son isomorfas a  $L'_{m-1} \otimes K(f)$ . Estas son exactas excepto en el último nivel por el Lema 3.15. Por lo tanto el primer término de la secuencia espectral del  $\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)}$  quedaría de la siguiente manera

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \dots & \leftarrow & (\frac{J_f}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle & \leftarrow & 0 & \leftarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & & (\frac{J_f}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle & \leftarrow & 0 \\
 & & & & & & \downarrow \\
 & & & & & & (\frac{J_f}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle,
 \end{array}$$

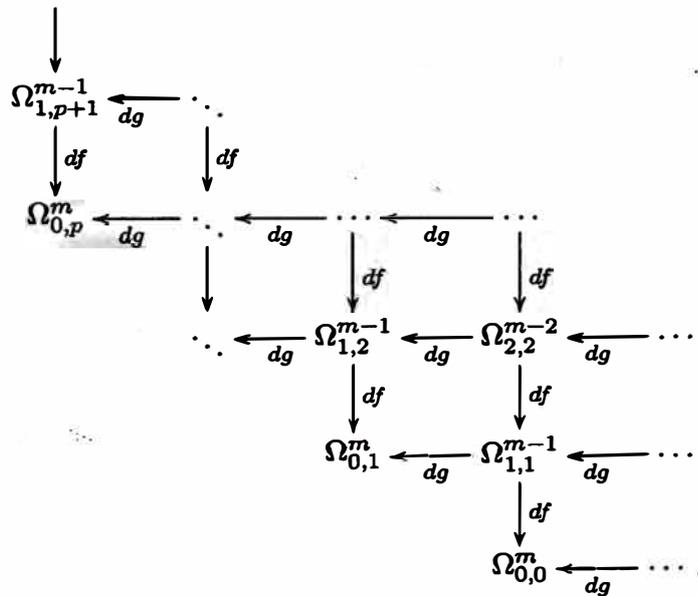
Es decir  $E^1 = E^\infty$ . Esto significa que

$$Gr(H_0(\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)})) = Gr(H^{m-1}(\frac{\Omega^{\geq m}}{M(f,g)})) = \bigoplus_{i>0} [(\frac{J_g}{J_{f,g}}) \otimes R/\langle f \rangle]_i$$

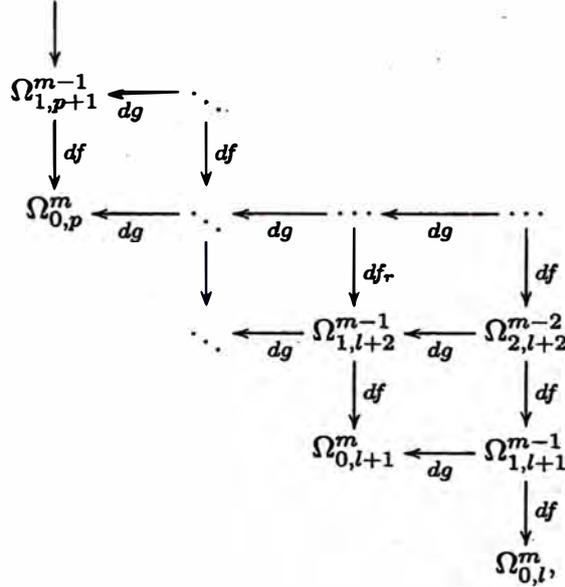


### 3.4.4. La Cohomología del Complejo $M(f, g)$

El siguiente paso es estudiar la cohomología del complejo  $M(f, g)$ . Para ellos definiremos ciertos complejos  $E'_{m+p}(*)$  que serán subcomplejos de las columnas de  $M(f, g)$ . Basados en estos complejos definiremos un subcomplejo  $F$  y una filtración del mismo. Del complejo  $L'_{m+p}$



tomamos el subcomplejo  $E'(l)$



donde los morfismo borde  $df$  y  $dg$  tienen un signo establecido. A continuación definimos estos complejos.

**Definición 3.36.** Dado el complejo  $L'_{m+p}$  definamos el subcomplejo  $(E'_{m+p}(l), \delta)$ , para  $l = 0, \dots, p$ , de la siguiente manera :

$$(E'_{m+p}(l))_s := \bigoplus_{t=l+m-s}^{p+m-s} \Omega_{m-s,t}^s.$$

**Definición 3.37.** El complejo  $E'_{m+p}(l) \otimes K(f)$  es por definición

$$(E'_{m+p}(l) \otimes K(f))_s := ((E'_{m+p}(l))_s \oplus (E'_{m+p}(l))_{s+1} \mathcal{Y}, \delta)$$

**Lema 3.38.** El complejo  $(E'_{m+p}(l) \otimes K(f), \delta)$  esta bien definido.

**Prueba.** Similar a las pruebas anteriores. ■

**Lema 3.39.** Dado

$$\begin{array}{c} \Omega_{0,l}^m \longleftarrow \xrightarrow{df} \Omega_{1,l+1}^{m-1} \longleftarrow \dots \\ \Omega_{m-s,l+m-s}^s \longleftarrow \xrightarrow{df} \dots \longleftarrow \xrightarrow{df} \Omega_{m,l+m}^0 \end{array}$$

la columna  $l$ -ésima de  $L'_{m+p}$  y

$$\begin{array}{c} \Omega_{0,l+1}^m \xleftarrow{df} \Omega_{1,l+2}^{m-1} \xleftarrow{df} \dots \\ \xleftarrow{df} \Omega_{m-s-1,l+1+m-s-1}^{s+1} \xleftarrow{df} \dots \end{array}$$

la  $(l+1)$ -ésima columna de  $L'_{m+p+1}$ . Entonces

$$\beta(\Omega_{m-s,l+m-s}^s) \subset \Omega_{m-s-1,l+1+m-s-1}^{s+1}$$

**Prueba.** Sabemos que

$$\Omega_{m-s,l+m-s}^s = \bar{x}^a \bar{y}^{l+m-s} \Omega^s,$$

donde  $a + l + m = m + p$  y

$$\Omega_{m-s-1,l+1+m-s-1}^{s+1} = \bar{x}^a \bar{y}^{l+1+m-s-1} \Omega^{s+1}$$

y  $a + l + 1 + m = m + p + 1$ . Entonces claramente el lema se satisface. ■

**Lema 3.40.** El morfismo  $\beta$  restricto al módulo  $(E'_{m+p}(l) \otimes K(f))_s$  cumple

$$\beta((E'_{m+p}(l) \otimes K(f))_s) \subset (E'_{m+p+1}(l+1) \otimes K(f))_{s+1}$$

**Prueba.** Por definición

$$(E'_{m+p}(l) \otimes K(f))_s = (E'_{m+p}(l))_s \oplus (E'_{m+p}(l))_{s+1} \mathcal{Y}.$$

Del lema anterior se sigue que

$$\beta(E'_{m+p}(l)) \subset E'_{m+p+1}(l+1).$$

Por definición

$$E_{m+p}(l)_{s+1} \mathcal{Y} = \bigoplus_{t=l+m-s-1}^{p+m-s-1} \Omega_{m-s-1,t}^{s+1} \mathcal{Y}. \quad (3.16)$$

Sea  $z \in E_{m+p}(l)_{s+1} \mathcal{Y}$  entonces  $z = \bar{x}^a \bar{y}^{t'} \omega \mathcal{Y}$  para algún  $t'$  tal que

$$l + m - s - 1 \leq t' \leq p + m - s - 1$$

y

$$\beta(z) = \bar{x}^a \bar{y}^{t'} d(\omega) \mathcal{Y} + (-1)^{|\omega|} \bar{x}^a \bar{y}^{t'+1} \omega.$$

Por un lado tenemos

$$\bar{x}^a \bar{y}^t d(\omega) y \in \beta(E_{m+p}(l)_{s+1}) y \subset E_{m+p+1}(l+1)_{s+2} y \subset (E'_{m+p+1}(l+1) \otimes K(f))_{s+1}.$$

De igual forma tenemos que

$$(-1)^{|\omega|} \bar{x}^a \bar{y}^{t+1} \omega \in (E'_{m+p+1}(l+1))_{s+1} = \bigoplus_{t=l+1+m-s-1}^{p+1+m-s-1} \Omega_{m-s-1,t}^{s+1}$$

ver ecuación 3.16. ■.

**Lema 3.41.** *El complejo*

$$\left( \frac{E'_{m+p}(l) \otimes K(f)}{E'_{m+p}(l+1) \otimes K(f)}, \bar{\delta} \right)$$

es isomorfo al complejo  $L'_i(f) \otimes K(f)$ .

**Prueba.** De la definición de  $E'_p(l)$  tenemos que

$$\left( \frac{E'_{m+p}(l) \otimes K(f)}{E'_{m+p}(l+1) \otimes K(f)} \right)_s \simeq \Omega_{m-s,l+m-s}^s \bigoplus \Omega_{m-s-1,l+m-s-1}^{s+1} y.$$

Como  $\bar{\delta}(\bar{x}) = 0$  podemos eliminar el término  $\bar{x}^*$ . Por lo tanto el complejo quedaría

$$\begin{array}{ccc} \vdots & \longleftarrow & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{m-2} \bar{y}^{l+2} & \longleftarrow & \Omega^{m-2} \bar{y}^{l+2} y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Omega^{m-1} \bar{y}^{l+1} & \longleftarrow & \Omega^{m-1} \bar{y}^{l+1} y \\ \downarrow & & \downarrow \delta_1 \\ \Omega^m \bar{y}^l & \longleftarrow f & \Omega^m \bar{y}^l y; \end{array}$$

el cual es isomorfo a la columna  $l$ -ésima del complejo  $\Omega^{\geq m}$  del polinomio  $f$  (ver (3.12)). Este complejo lo denotaremos como  $\Omega^{\geq m}(f)$ . ■.

**Observación.** A partir de la definición de los complejos  $E'_{m+p}(l)$  definiremos una filtración del complejo  $M(f, g)$  y por lo tanto una secuencia espectral. El primer

término de esta secuencia estará conformada por la homología de los complejos  $\Omega^{\geq m}(f)$  para un polinomio.

**Observación.** Notemos que de la definición de los complejos

$$(E'_{m+p}(l))_s.$$

tenemos que  $E'_{m+p}(l) \subset E'_{m+p}(l-1)$ .

**Nota.** En la siguiente definición como en adelante usaremos la siguiente **conven-**  
**ción** :  $E_{m+p}(l) := E'_{m+p}(l) \otimes K(f)$ . El complejo

$$\begin{array}{ccccc}
 \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 \cdots \xleftarrow{\beta} & (E_{*+2}(l+2))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_{*+1}(l+1))_{m-1} & \xleftarrow{\beta} & (E_*(l))_{m-2} \\
 & & & \downarrow \beta & & \downarrow \\
 & & & (E_{*+1}(l+1))_m & \xleftarrow{\beta} & (E_*(l))_{m-1} \\
 & & & & & \downarrow \delta \\
 & & & & & (E_*(l))_m,
 \end{array}$$

se denotará como

$$\cdots \xleftarrow{\beta} E_{*+3}(l+3) \xleftarrow{\beta} E_{*+2}(l+2) \xleftarrow{\beta} E_{*+1}(l+1) \xleftarrow{\beta} E_*(l)$$

donde sólo se indican las columnas que conforman el bicomplejo.

**Definición 3.42.** Sea  $p \gg$  un número natural. Definamos el complejos  $F$  como

$$\cdots \xleftarrow{\beta} E_{m+p+*+1}(p) \xleftarrow{\beta} E_{m+p+*}(p) \xleftarrow{\beta} \cdots \xleftarrow{\beta} E_{m+p+1}(p) \xleftarrow{\beta} E_{m+p}(p)$$

**Observación.** De la definición de los complejos

$$(E'_{m+p}(l'), \delta)$$

tenemos que  $E'_{m+p}(l') \subset E'_{m+p}(l'-1)$ . Como

$$\beta((E'_{m+p}(l))_s) \subset (E'_{m+p+1}(l+1))_{s+1} \subset (E'_{m+p+1}(l+1))_{s+1} \oplus (E'_{m+p+1}(l+1))_{s+2y},$$

de la relación de inclusión  $E'_{m+p}(l') \subset E'_{m+p}(l' - 1)$ , tenemos

$$\beta((E'_{m+p}(l))_s) \subset E'_{m+p+1}(l)_{s+1} \oplus E'_{m+p+1}(l)_{s+2} \mathcal{Y}$$

y por lo tanto la buena definición del complejo  $F$ .

**Observación.** Cada columna  $E_{m+p+*}(p)$  esta conformada por un bicomplejo de  $* + 1$  columnas. Cada columna es isomorfa a  $L'_q \otimes K(f)$  para algún  $q$  adecuado.

**Definición 3.43.** Para cada  $i$  en los números naturales definamos los complejos  $F_i$  de la siguiente forma

$$F_1 : \dots \xleftarrow{\beta} E_{m+p+2}(p+2) \xleftarrow{\beta} E_{m+p+1}(p+1) \xleftarrow{\beta} E_{m+p}(p)$$

$$F_2 : \dots \xleftarrow{\beta} E_{m+p+2}(p+1) \xleftarrow{\beta} E_{m+p+1}(p) \xleftarrow{\beta} E_{m+p}(p)$$

y en general

$$F_i : E_{m+p+i-1}(p) \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} E_{m+p+1}(p) \xleftarrow{\quad} E_{m+p}(p)$$

$$\downarrow$$

$$E_{m+p+i}(p+1) \xrightarrow{\beta} E_{m+p+i+1}(p+2) \xrightarrow{\beta} \dots$$

$$F_{i+1} : E_{m+p+i}(p) \xleftarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\quad} E_{m+p+1}(p) \xleftarrow{\quad} E_{m+p}(p)$$

$$\downarrow$$

$$E_{m+p+i+1}(p+1) \xrightarrow{\quad} E_{m+p+i+2}(p+2) \xrightarrow{\beta} \dots$$

**Observación.** De la definición de los complejos  $F_i$  se sigue que

$$0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_i \subset \dots \subset F.$$

Más aún tenemos que

$$\frac{F_{i+1}}{F_i} : \dots \xleftarrow{\quad} \frac{E_{m+p+i+2}(p+2)}{E_{m+p+i+2}(p+3)} \xleftarrow{\quad} \frac{E_{m+p+i+1}(p+1)}{E_{m+p+i+1}(p+2)} \xleftarrow{\quad} \frac{E_{m+p+i}(p)}{E_{m+p+i}(p+1)} \xleftarrow{\quad} 0.$$

Del Lema 3.41 y la notación que se refirió anteriormente el complejo  $\frac{F_{i+1}}{F_i}$  se puede escribir como

$$\dots \longleftarrow L_{m+p+3}(f) \xleftarrow{\beta} L_{m+p+2}(f) \xleftarrow{\beta} L_{m+p+1}(f) \xleftarrow{\beta} L_{m+p}(f)$$

Este es isomorfo al complejo  $\Omega^{\geq m+p}(f)$ . Al emplear la notación  $L_{m+*}(f)$  nos referimos al complejo  $(L'_{m+*}(f) \otimes K(f), \delta)$ . Este módulo quasisomorfismo es igual al complejo  $\Omega^{\geq m+p}$  del primer Capítulo para un sólo polinomio.

De [LM, Teorema 3.4.7] tenemos que los complejos  $\Omega^{\geq m+p}(f)$  son exactos excepto en el último nivel cuando  $p + m \geq m + c_{r+1}$ , para cierto  $c_{r+1}$ . El análisis anterior es la prueba del siguiente Lema:

**Lema 3.44.** *La secuencia espectral  $E^s$  asociada a la filtración*

$$0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \dots$$

*colapsa en  $E^1$ .*

**Prueba.** Se sigue del desarrollo anterior. ■

**Lema 3.45.** *Los complejos  $F_i$  para todo  $i \geq 0$  son exactos excepto en el último nivel.*

**Prueba.** La demostración será por inducción. Para  $F_1$  tenemos que  $F_1 = \Omega^{\geq m+p}(f)$ . Este por hipótesis es exacto excepto en el último nivel pues según [LM] existe un  $p$  para el cual el complejo es exacto excepto en el último nivel.

Supongamos por hipótesis inductiva que  $F_s$  es exacto excepto en el último nivel. Sea  $F_{s+1}$ , de la observación anterior tenemos la siguiente secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow F_s \longrightarrow F_{s+1} \longrightarrow \Omega^{\geq m+p}(f) \longrightarrow 0.$$

De la secuencia exacta larga en cohomología

$$H^{m-1}(F_s) \longrightarrow H^{m-1}(F_{s+1}) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega^{\geq m+p}(f))$$

$$H^m(F_s) \longrightarrow H^m(F_{s+1}) \longrightarrow H^m(\Omega^{\geq m+p}(f))$$

tenemos que  $H^{m-1}(F_{s+1}) = 0$ , pues  $H^{m-1}(F_s) = H^{m-1}(\Omega^{\geq m+p}(f)) = 0$ . ■

**Observación.** A continuación estudiamos la cohomología del complejo  $\frac{M(f, \mathfrak{a})}{F}$ . Este se puede escribir como

$$\begin{array}{c} \longleftarrow E_{m+p-1}(0) \longleftarrow \dots \longleftarrow E_{m+1}(0) \longleftarrow E_m(0) \\ \dots \longleftarrow \frac{E_{m+p+2}(0)}{E_{m+p+2}(p)} \longleftarrow \frac{E_{m+p+1}(0)}{E_{m+p+1}(p)} \longleftarrow \frac{E_{m+p}(0)}{E_{m+p}(p)} \longleftarrow \dots \end{array}$$

**Definición 3.46.** Definamos los complejos  $I_{p-i}$  para  $i = 1, \dots, p$  de la siguiente manera :

$$\begin{array}{c} I_p : E_{m+p-2}(p-2) \longleftarrow \dots \longleftarrow E_{m+1}(1) \longleftarrow E_m(0) \\ \downarrow \\ E_{m+p-1}(p-1) \longrightarrow \frac{E_{m+p}(p-1)}{E_{m+p}(p)} \longrightarrow \frac{E_{m+p+1}(p-1)}{E_{m+p+1}(p)} \longrightarrow \dots \end{array}$$

y de manera general

$$\begin{array}{c} I_{p-i} : E_{m+i-1}(0) \longleftarrow \dots \longleftarrow E_{m+1}(0) \longleftarrow E_m(0) \\ \downarrow \\ E_{m+i}(0) \longrightarrow E_{m+i+1}(1) \longrightarrow \dots \longrightarrow E_{m+p-2}(p-i-2) \\ \downarrow \\ \dots \longleftarrow \frac{E_{m+p+1}(p-i-1)}{E_{m+p+1}(p)} \longleftarrow \frac{E_{m+p}(p-i-1)}{E_{m+p}(p)} \longleftarrow E_{m+p-1}(p-i-1) \end{array}$$

De la definición tenemos que  $I_p \subset \dots \subset I_1 = \frac{M(f,g)}{F}$ .

**Lema 3.47.** El complejo  $\frac{I_{p-i}}{I_{p-i+1}}$  es isomorfo al complejo

$$\dots \longleftarrow \frac{\beta_1}{L_{m+p-i-1}} \longleftarrow \frac{\beta_1}{L_{m+p-i-1}} \longleftarrow \dots \longleftarrow \frac{\beta}{L_{m+1}} \longleftarrow \frac{\beta}{L_m},$$

donde los complejos  $L_{m+p} \simeq K(df) \otimes K(f)$  y  $\beta_1 = 0$ .

**Prueba.** De la convención de la notación el complejo  $\frac{I_{p-i}}{I_{p-i+1}}$  se puede escribir como

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{E_{m+i}(0)}{E_{m+i}(1)} & \longleftarrow & \frac{E_{m+i-1}(0)}{E_{m+i-1}(0)} & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & \frac{E_m(0)}{E_m(0)} \\
\downarrow & & & & & & \\
\frac{E_{m+i+1}(1)}{E_{m+i+1}(2)} & \longrightarrow & \dots & \xrightarrow{\beta_1} & \frac{E_{m+p}(p-(i+1))}{E_{m+p}(p-i)} & \xrightarrow{\beta_2} & \frac{E_{m+p+1}(p-(i+1))}{E_{m+p+1}(p-i)}
\end{array}$$

donde  $\beta_2 = 0$  pues  $\beta(E_{m+p}(p-(i+1))) \subset E_{m+p}(p-i)$ . Por lo tanto del Lema 3.41 obtenemos que el complejo anterior se escribe como

$$\dots \longleftarrow {}^0 L_{m+p-i-1}(f) \longleftarrow {}^0 L_{m+p-i-1}(f) \xleftarrow{\beta} \dots \xleftarrow{\beta} L_{m+1}(f) \xleftarrow{\beta} L_m(f) \longleftarrow 0$$

■

**Observación.** De la notación de [LM] el complejo anterior se escribe como

$$\dots \longleftarrow {}^0 L_{m+p-i-1}(f) \longleftarrow {}^0 L_{m+p-i-1}(f) \xleftarrow{} \Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f).$$

Calculamos la cohomología de los complejos

$$\frac{I_{p-i}}{I_{p-i+1}}$$

**Lema 3.48.** Existe dos secuencias exactas cortas

$$0 \longrightarrow \bigoplus H^j(L_{m+p-i}(f); \delta) \longrightarrow H^j\left(\frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}}\right) \longrightarrow H^j(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) \longrightarrow 0$$

para  $j = m, m-1$ . La Cohomología en los demás casos es cero.

**Prueba.** Tomando la secuencia exacta larga de cohomología de la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \bigoplus (L_{m+p-i}(f), \delta) \longrightarrow \frac{I_{p-i}}{I_{p-i+1}} \longrightarrow \Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f) \longrightarrow 0$$

tenemos

$$\begin{array}{c}
0 \longrightarrow \bigoplus H^{m-1}(L_{m+p-i}(f); \delta) \longrightarrow H^{m-1}\left(\frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}}\right) \longrightarrow \\
H^{m-1}(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) \xrightarrow{0} \bigoplus H^m(L_{m+p-i}(f); \delta) \longrightarrow H^m\left(\frac{I_{p-i+1}}{I_{p-i}}\right) \longrightarrow \\
H^m(\Omega^{m \leq \cdot \leq m+p-i-1}(f)) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Del hecho que el morfismo conexión es cero tenemos la prueba del lema. ■

**Observación.** De la filtración  $\frac{M(f,g)}{F} = I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_p$ , tenemos una secuencia espectral  $E^*$  convergente cuyo término  $E^1$  es dado por el Lema anterior.

**Proposición 3.49.** *Existe una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccc}
H^{m-1}(F) & \longrightarrow & H^{m-1}(M(f, g)) & \longrightarrow & H^{m-1}\left(\frac{M(f, g)}{F}\right) \\
& & & & \downarrow \\
H^m\left(\frac{M(f, g)}{F}\right) & \longleftarrow & H^m(M(f, g)) & \longleftarrow & H^m(F).
\end{array}$$

que relaciona los módulos de cohomología del complejo  $M(f, g)$ .

**Prueba.** De la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow M(f, g) \longrightarrow M(f, g)/F \longrightarrow 0$$

tomando cohomología tenemos la secuencia :

$$\begin{array}{ccccc}
H^{m-1}(F) & \longrightarrow & H^{m-1}(M(f, g)) & \longrightarrow & H^{m-1}\left(\frac{M(f, g)}{F}\right) \\
& & & & \downarrow \\
H^m\left(\frac{M(f, g)}{F}\right) & \longleftarrow & H^m(M(f, g)) & \longleftarrow & H^m(F).
\end{array}$$

**Observación.** De la definición del complejo  $L'_{m+p}$  el complejo  $\Omega^{\geq m}(f, g)$  se escribe como:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots & \longleftarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longleftarrow & (C_{m+1})_m \oplus (C_{m+1})_{m-1}x & \longleftarrow & (C_m)_{m-2} \oplus (C_m)_{m-1}x & \longleftarrow & \cdots \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \\
& & (C_{m+1})_m & \longleftarrow & (C_m)_{m-1} \oplus (C_m)_m x & \longleftarrow & \cdots \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & (C_m)_m & & 
\end{array}$$

Como  $\beta(x) = \bar{x}$ , entonces el morfismo  $\beta(x) = 0$  en el módulo  $\frac{\Omega^{\geq m}(f, g)}{\Omega_f^{\geq m}}$ . Esto significa que  $\frac{\Omega^{\geq m}(f, g)}{\Omega_f^{\geq m}} \simeq \Omega_f^{\geq m}[-1]$ . Por lo tanto, tenemos la siguiente secuencia exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \Omega_f^{\geq m} \longrightarrow \Omega^{\geq m}(f, g) \longrightarrow \Omega_f^{\geq m}[-1] \longrightarrow 0.$$

**Proposición 3.50.** *Existe una secuencia exacta*

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^{m-2}(\Omega^{\geq m}(f, g)) & \longrightarrow & H^{m-1}(\Omega_f^{\geq m}) & \longrightarrow & 0 \\
& & & & & & \\
H^{m-1}(\Omega_f^{\geq m}) & \longrightarrow & H^{m-1}(\Omega^{\geq m}(f, g)) & \longrightarrow & H^m(\Omega_f^{\geq m}) & \longrightarrow & 0 \\
& & & & & & \\
H^m(\Omega_f^{\geq m}) & \longrightarrow & H^m(\Omega^{\geq m}(f, g)) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

que relaciona los módulos de cohomología del complejo  $\Omega^{\geq m}(f, g)$ .

**Prueba.** De la secuencia exacta corta

$$0 \longrightarrow \Omega_f^{\geq m} \longrightarrow \Omega^{\geq m}(f, g) \longrightarrow \Omega_f^{\geq m}[-1] \longrightarrow 0.$$

tenemos la secuencia

$$0 \longrightarrow H^{m-2}(\Omega^{\geq m}(f, g)) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega^{\geq m}(f))$$

$$H^{m-1}(\Omega^{\geq m}(f)) \longrightarrow H^{m-1}(\Omega^{\geq m}(f, g)) \longrightarrow H^m(\Omega^{\geq m}(f))$$

$$H^m(\Omega^{\geq m}(f)) \longrightarrow H^m(\Omega^{\geq m}(f, g)) \longrightarrow 0$$

■

# Apéndice A

## Algebra Conmutativa

Este apéndice está destinado a presentar las principales definiciones y propiedades de la teoría de anillos. También será el sustento de las demostraciones de propiedades que se usan en el cuerpo de la tesis y son parte fundamental en el trabajo. Nos referimos en especial a la sección titulada *El Ideal Jacobiano*. Aquí se presenta la prueba que la definición de los dos principales cimientos de la tesis : *El Ideal Jacobiano* y las *singularidades aisladas de tipo intersección completa* no depende de los generadores del ideal  $I$ .

### A.1. Definiciones y Propiedades

Todos los anillos tratados son noetherianos. Entre las principales definiciones que usaremos se encuentra la *dimensión de Krull*.

**Definición A.1.** Sea  $R$  un anillo. La **dimensión de Krull** o simplemente la dimensión del anillo  $R$ , denotada como  $\dim(R)$ , es el supremo de las longitudes de las cadenas de ideales primos en  $R$ . Es decir,  $\dim(R) = n$  si existe una cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

y ninguna cadena es más grande.

**Definición A.2.** Sea  $I$  un ideal primo de  $R$ . Definimos la **altura**  $ht(I)$  del ideal  $I$  como el supremo de la longitud de las cadenas de primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq I = P_n.$$

que finalizan en  $I$ .

Si el ideal  $I$  no es primo definimos la **altura** del ideal  $I$  como el mínimo de las alturas de los primos  $P$  que contienen a  $I$ .

**Observación.** Cabe resaltar que algunos autores (ej [Eis]) a la altura del ideal  $I$  la llaman **codimensión**.

Si el anillo  $(R, \eta)$  es local entonces

$$\dim(R) = ht(\eta).$$

**Teorema A.3.** Sea  $x_1, \dots, x_c \in R$  y  $P$  ideal primo minimal entre los primos que contienen a  $x_1, \dots, x_c$ . Entonces  $ht(P) \leq c$ .

**Prueba.** [Eis, Teorema 10.2]. ■

El teorema anterior se llama P.I.T. (según sus siglas en inglés de Principal Ideal Theorem.)

**Corolario A.4.** Para todo primo  $P$  con  $ht(P) = c$  existe un ideal  $I$  generado por  $c$  elementos de modo que  $P$  sea minimal entre los primos que contienen al ideal  $I$ .

**Prueba.** [Eis, Corolario 10.5]. ■

**Definición A.5.** Diremos que un anillo local  $(R, \eta)$  es regular si y sólo si

$$\dim Krull(R) = \dim_k \left( \frac{\eta}{\eta^2} \right)$$

donde  $k = R/\eta$ .

**Lema A.6.** Si  $(R, \eta)$  es un anillo regular local entonces  $R$  es un dominio.

**Prueba.** [Eis, Corolario 10.14]. ■

**Definición A.7.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. El conjunto  $x_1, \dots, x_n$  se denomina una **secuencia de parámetros** si sólo si

$$\eta^j \subset \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \eta,$$

para algún  $j \in \mathbb{N}$  y  $\dim(R) = n$ . Si además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \eta$  la secuencia se llama **secuencia regular de parámetros** -Ver [Eis, Corolario 10.7], pág 242-.

**Lema A.8.**  $(R, \eta)$  es un anillo regular local si sólo si  $\eta$  posee una **secuencia regular de parámetros**.

**Prueba.** Sea

$$\dim(R) = \dim_k(\eta/\eta^2) = n,$$

y  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  una base del espacio vectorial  $\eta/\eta^2$ . Tomemos  $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset \eta$  y  $\eta/I$ . Como  $(\eta/I)^2 = \frac{\eta^2+I}{I}$  entonces

$$\frac{\eta/I}{(\eta/I)^2} = \frac{\eta}{\eta^2 + I}.$$

Por otro lado como  $\bar{I} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \rangle = \eta/\eta^2$  entonces

$$\frac{\eta/\eta^2}{\bar{I}} = 0$$

donde  $\bar{I} = \frac{I+\eta^2}{\eta^2}$ . Por lo tanto si usamos los isomorfismos

$$\frac{\eta/\eta^2}{\bar{I}} \simeq \frac{\eta/\eta^2}{(I+\eta^2)/\eta^2} \simeq \frac{\eta}{\eta^2 + I}$$

tenemos que

$$\frac{\eta/I}{(\eta/I)^2} = 0;$$

y del Lema de Nakayama ([Eis, Corolario 4.8]) obtenemos que  $\eta = I$ . Es decir  $\dim(R) = n$  y  $\eta = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ . Por definición esto significa que  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  es una secuencia regular de parámetros.

Para el retorno supondremos que  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \eta$  es una secuencia regular de parámetros. Entonces por definición  $\dim(R) = ht(\eta) = n$ .

Notemos también que

$$\dim(\eta/\eta^2) \leq n,$$

pues  $\{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}$  generan  $\eta/\eta^2$ . Si  $\dim(\eta/\eta^2) < n$  a decir

$$\eta/\eta^2 = \langle \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m \rangle$$

con  $m < n$ , usando el Lema de Nakayama (de la misma forma que se usó líneas atrás) tenemos que  $\eta = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$ . Esto significaría usando el P.I.T que  $ht(\eta) \leq m < n$ , lo cual es una contradicción y prueba el Lema. ■

**Definición A.9.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. La colección  $(x_1, \dots, x_n)$  se denomina **secuencia regular** (o **secuencia  $R$ -regular**) si sólo sí la aplicación

$$\bar{x}_i : R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle \longrightarrow R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$$

definida por  $\bar{a} \mapsto \bar{x}_i \cdot \bar{a}$  es inyectiva para todo  $i = 1, \dots, n$ , y además  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \neq R$ .

**Corolario A.10.** Si  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular de parámetros en un anillo regular local entonces  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular.

**Prueba.** [Eis, Corolario 10.15.] ■

**Nota.** Del hecho que :

$$\text{Divcero}(R) = \bigcup_i P_i$$

donde  $P_i$  son los primos minimales; se prueba que la definición anterior significa que  $\bar{x}_i$  no se encuentra en ningún primo minimal del anillo  $R/\langle x_1, \dots, x_{i-1} \rangle$ .

**Definición A.11.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local. Definamos la **filtración I-ádica** como la cadena

$$R = I^0 \supset I^1 \supset I^2 \supset \dots,$$

y su anillo graduado como

$$\text{gr}^I(R) = \frac{I^n}{I^{n+1}}.$$

Para una definición más general ver [Mats., 10.c].

**Observación.** El anillo graduado definido anteriormente caracteriza las secuencias regulares de la siguiente manera :

**Teorema A.12.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local y  $a_1, \dots, a_s$  elementos en  $\eta$ . Definamos  $J = \langle a_1, \dots, a_s \rangle$ . Entonces  $a_1, \dots, a_s$  es una secuencia regular si y sólo si

$$(R/J)[x_1, \dots, x_s] \simeq \text{gr}^J(R).$$

**Prueba.** [Mats, Teorema 33]. ■

**Definición A.13.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local, por definición la longitud máxima de las cadenas de secuencias regulares del anillo  $(R, \eta)$  se denomina **profundidad** del anillo  $R$  y se escribe como *profundidad*( $R$ ).

**Definición A.14.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo,  $I$  un ideal. La longitud de la máxima cadenas de secuencias regulares de  $R$  contenidas en  $I$  se define como *profundidad*( $I$ ).

**Observación.** Si en la Definición A.9 en lugar de  $R$  tomamos cualquier  $R$ -módulo  $M$ , la secuencia  $\{x_1, \dots, x_n\}$  se denomina  $M$ -regular. La máxima longitud de cadena de secuencias  $M$ -regulares contenidas en  $I$  se denomina **profundidad de  $M$  en  $I$**  y se denota como *depht*( $M, I$ ) (ver [Eis, Cap. 17,18]). Si  $M = R$  tenemos que *profundidad*( $R, I$ ) = *profundidad*( $I$ ).

**Observación.** Notemos que bajo esta definición tenemos que

$$\text{profundidad}(R) = \text{profundidad}(\eta)$$

**Proposición A.15.** Sea  $R$  un anillo,  $I$  un ideal. Entonces

$$\text{profundidad}(I) \leq \text{ht}(I)$$

**Prueba.** Si usamos la Proposición 18.2 de [Eis] tenemos

$$\text{profundidad}(I, R) \leq \text{codim}(I).$$

Como se indico líneas atrás  $\text{codim}(I) = \text{ht}(I)$  y  $\text{profundidad}(I, R) = \text{profundidad}(I)$  según [Eis, pag 429]. Entonces

$$\text{profundidad}(I) \leq \text{ht}(I).$$

■.

**Lema A.16.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo local.  $I$  un ideal de  $R$  e  $y \in \eta$ . Entonces

$$\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) \leq \text{profundidad}(I) + 1.$$

**Prueba.** Del Lema 18.3 de [Eis] con  $M = R$  obtenemos

$$\text{profundidad}(\langle I, y \rangle; R) \leq \text{profundidad}(I, R) + 1.$$

Por definición sabemos que  $\text{profundidad}(\langle I, y \rangle; R) = \text{profundidad}(\langle I, y \rangle)$  y  $\text{profundidad}(I, R) = \text{profundidad}(I)$ . Entonces

$$\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) \leq \text{profundidad}(I) + 1.$$

■

**Definición A.17.** Un anillo local  $(R, \eta)$  es llamado Cohen Macaulay (C.M) si sólo si  $\text{profundidad}(R) = \text{dim}(R)$  (ver [Mats, 16.A, Pág 103]).

**Observación.** Notemos que esta definición coincide con la que se presenta en [Eis.]

:

*Un anillo para el cual  $\text{profundidad}(P) = \text{codim}(P)$ , para todo ideal maximal  $P$  de  $R$  es llamado anillo Cohen Macaulay.*

En efecto,  $\text{profundidad}(R) = \text{dim}(R)$  si sólo si  $\text{profundidad}(\eta) = \text{ht}(\eta)$ . Como  $\eta$  es el único ideal maximal de  $R$  tenemos que las definiciones coinciden en al caso que  $R$  sea un anillo local.

**Proposición A.18.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo regular local. Entonces  $(R, \eta)$  es Cohen-Macaulay.

**Prueba.** Sea  $\{x_1, \dots, x_n\}$  una secuencia regular de parámetros. Del Corolario A.10 tenemos que  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular. Esto significa, a partir de la definición, que

$$\text{profundidad}(R) \geq n.$$

Si usamos la Proposición A.15 tenemos que

$$\text{profundidad}(\eta) \leq ht(\eta) = \dim(R) = n.$$

Por lo tanto  $\dim(R) = \text{profundidad}(R)$ . ■

**Observación.** Un hecho importante que se obtiene del último teorema es el que para todo ideal  $I$  de un anillo regular local esencialmente de tipo finito (r.l.e.t.f) se cumple

$$ht(I) = \text{profundidad}(I).$$

Esta propiedad se presenta a continuación :

**Teorema A.19.** Sea  $R$  un anillo tal que  $\text{profundidad}(P) = ht(P)$  para todo ideal maximal  $P$  de  $R$ . Si  $I \subset R$  es un ideal propio, entonces  $\text{profundidad}(I) = ht(I)$ .

**Prueba.** [Eis, Teorema 18.7].

Para anillos r.l.e.t.f se tiene la siguiente versión :

**Teorema A.20.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. Si  $I \subset R$  es un ideal propio, entonces

$$\text{profundidad}(I) = ht(I).$$

**Prueba.** De la definición de anillo Cohen Macaulay tenemos que

$$\text{profundidad}(R) = \dim(R).$$

Esto significa que

$$\text{profundidad}(\eta) = ht(\eta).$$

Como  $\eta$  el único ideal maximal de  $R$ , del Teorema A.19 se desprende que

$$ht(I) = \text{profundidad}(I)$$

para todo ideal  $I$  propio de  $R$ . ■

**Corolario A.21.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.,  $y \in \eta$ . Entonces

$$ht(\langle I, y \rangle) \leq ht(I) + 1.$$

**Prueba.** Del Lema A.16 obtenemos

$$\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) \leq \text{profundidad}(I) + 1. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado del Teorema anterior se sigue que  $\text{profundidad}(\langle I, y \rangle) = \text{ht}(\langle I, y \rangle)$  y  $\text{profundidad}(I) = \text{ht}(I)$ . Entonces de A.1 se sigue

$$\text{ht}(\langle I, y \rangle) \leq \text{ht}(I) + 1. \quad \blacksquare$$

**Proposición A.22.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo local Cohen Macaulay. Entonces para todo ideal  $I$  tenemos*

$$\text{ht}(I) + \dim(R/I) = \dim(R).$$

**Prueba.** [Mats, Teorema 29, parte (i)] (por esto  $\text{ht}(I)$  se llama también codimensión.)  $\blacksquare$

**Teorema A.23.** *Sea  $R$  un anillo regular local y  $\{x_1, \dots, x_m\}$  una secuencia regular de parámetros. Entonces*

- 1)  $R$  es un dominio que es integralmente cerrado en su cuerpo de fracciones.
- 2)  $x_1, \dots, x_m$  es una secuencia regular y por tanto  $R$  es un anillo Cohen Macaulay.
- 3)  $\langle x_1, \dots, x_i \rangle = P_i$  es un ideal primo de altura  $i$  para cada  $1 \leq i \leq m$  y  $R/P_i$  es un anillo regular local de dimensión  $d - i$ .
- 4) Recíprocamente,  $\forall 0 \leq i \leq m$  si  $P$  es un ideal primo de  $R$  y si  $R/P$  es regular y tiene dimensión  $d - i$  entonces existe un sistema regular de parámetros  $y_1, \dots, y_m$  tal que  $P = \langle y_1, \dots, y_i \rangle$ .

**Prueba.** [Mats, Teorema 36].  $\blacksquare$

**Definición A.24.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo. Diremos que  $P$  es un primo asociado si existe  $x \in M$  tal que  $\text{ann}(x) = P$ . Aquí*

$$\text{ann}(x) := \{\lambda \in R : \lambda \cdot x = 0\}.$$

El conjunto de los primos asociados de  $M$  se denota como  $\text{Ass}(M)$ .

**Proposición A.25.** *Sea  $P$  un elemento maximal del conjunto de ideales  $\text{Ann} = \{\text{Ann}(x) : x \in M, x \neq 0\}$  entonces  $P \in \text{Ass}(M)$*

**Prueba.** [Mats, Proposición 7.B].  $\blacksquare$

**Proposición A.26.** *Sea  $M$  un  $R$ -módulo f.g., todo elemento  $\text{Ann}(x)$  esta contenido en un elemento de  $\text{Ass}(M)$ .*

**Prueba.** En efecto, sea

$$\Delta(x) := \{Ann(y) : Ann(x) \subset Ann(y); y \in M\}.$$

El conjunto  $\Delta(x)$  es no vacío pues  $Ann(x) \in \Delta(x)$ . Sea

$$Ann(x) = Ann(x_1) \subset Ann(x_2) \subset \dots$$

una cadena de elementos en  $\Delta(x)$ . Como el anillo  $R$  es noetheriano satisface la condición de cadena ascendente. Es decir existe  $s$  en los naturales tal que  $Ann(x_s) = Ann(x_i)$  para todo  $i \geq s$ . Por lo tanto basta tomar  $Ann(x_s)$  como elemento maximal de la cadena. El Lema de Zorn nos indica entonces que  $\Delta(x)$  tiene elementos maximales. Se prueba también que si  $Ann(x')$  es un elemento maximal de  $\Delta(x)$  entonces también lo es de  $Ann$ . En efecto si  $Ann(x')$  no fuera un elemento maximal en  $Ann$  entonces existe  $y \in M$  tal que  $Ann(x') \subsetneq Ann(y)$ . Como  $Ann(x) \subset Ann(x')$  y  $Ann(x') \subset Ann(y)$ . Entonces  $Ann(y) \in \Delta(x)$  y  $Ann(x') \subsetneq Ann(y)$ , una contradicción con la hipótesis de elemento maximal de  $Ann(x')$ . Por tanto  $Ann(x') \in Ass(M)$  y  $Ann(x) \subset Ann(x')$ . Esto finaliza la prueba de la proposición. ■

**Proposición A.27.** *Sea  $R$  un anillo noetheriano y  $M$  un módulo finito. Entonces  $Ass(M)$  es un conjunto finito.*

**Prueba.** [Mats, Proposición 7.G]. ■

**Definición A.28.** Sea  $R$  un anillo e  $I$  un ideal. Sea  $Ass(R/I) = \{P_1, \dots, P_s\}$ . Diremos que  $I$  es **Unmixed** si  $ht(P_i) = ht(I)$  para todo  $i$ .

**Proposición A.29.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo local de dimensión  $m$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :*

- 1)  $(R, \eta)$  es Cohen Macaulay, es decir,  $profundidad(R) = m$ .
- 2) Si  $J = \langle a_1, \dots, a_r \rangle$  es un ideal de altura  $r$  generado por  $r$  elementos entonces  $J^v$  es unmixed para todo entero  $v$ .
- 3) Si  $a_1, \dots, a_r$  y  $J$  cumplen las hipótesis de (2) entonces

$$gr_J(R) \simeq (R/J)[x_1, \dots, x_r]$$

- 4) Existe un sistema de parámetros  $a_1, \dots, a_n$  tal que

$$gr_I(R) \simeq (R/I)[x_1, \dots, x_n],$$

donde  $I = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$ .

*Nota.* En 3 y 4 los isomorfismos son naturales. Ellos son definidos como  $a_i \text{ mod } J^2 \mapsto x_i$ .

**Prueba.** [Mats, Teorema 32]. ■

**Corolario A.30.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  un ideal generado por una secuencia regular entonces

$$\frac{I^s}{I^{s+1}} \simeq ((R/I)[x_1, \dots, x_r])^s,$$

donde  $((R/I)[x_1, \dots, x_r])^s$  representa en  $R/I$ -módulo de los polinomios de grado  $s$  con coeficientes en  $R/I$ .

**Prueba.** Como  $f_1, \dots, f_r$  forman una secuencia regular entonces  $ht(I) = r$ . De la Proposición A.29 tenemos que

$$gr^I(R) \simeq R/I[x_1, \dots, x_r].$$

Donde el isomorfismo es definido como  $\bar{f}_i \mapsto x_i$ . Denotemos a este isomorfismo como  $\varphi$ . Un elemento generador de  $I^s$  es de la forma  $z = \alpha f_1^{\alpha_1} \dots f_r^{\alpha_r}$ , donde  $\alpha_1 + \dots + \alpha_r = s$ , y  $\alpha \in R$ . De la definición del isomorfismo  $\varphi$  obtenemos  $\varphi(\bar{z}) = \bar{\alpha} x_1^{\alpha_1} \dots x_r^{\alpha_r}$ . De aquí se prueba que el  $R/I$ -módulo  $\frac{I^s}{I^{s+1}}$  representan los polinomios de grado  $s$  sobre  $R/I$ . ■

## A.2. Complejo Koszul

Nuestro principal interés se centra en presentar dos maneras distintas de construir el complejo de Koszul  $K(x_1, \dots, x_n)$  (ver Definición A.35 y Corolario A.40). Esta descripción nos permite aprovechar el estrecho lazo que existe entre la propiedad que el complejo de Koszul sea exacto excepto en el último nivel y que la secuencia  $x_1, \dots, x_n$  sea regular (ver Proposición A.36).

**Definición A.31.** Sea  $(R, \eta)$  anillo local,  $x \in R$ . Definamos el complejo de cocadenas

$$K(x) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{x} R,$$

el cual llamaremos **complejo de Koszul**.

Notemos que si el elemento  $x$  es regular entonces  $H^0(K(x)) = 0$ .

**Definición A.32.** Sean  $x, y \in R$ . Definamos el complejo

$$K(x, y) : 0 \longrightarrow R \xrightarrow{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{(-x, y)} R \longrightarrow 0$$

**Observación.** De la definición obtenemos que  $K(x, y) \simeq K(x) \otimes K(y)$ .

Notemos también que  $(a, b) \in \ker(-x, y)$  si sólo si  $-ax + by = 0$ . A su vez esto equivale a que  $ax = by$ . Si  $x$  no es divisor de cero, estas equivalencias nos permiten establecer un isomorfismo de módulos

$$\varphi : \ker(-x, y) \longrightarrow (x : y)$$

definido de la siguiente manera  $\varphi(a, b) = b$ . Es claro que la aplicación esta bien definida. La igualdad

$$\varphi(a, b) = \varphi(a', b)$$

equivale a que  $x(a - a') = 0$ , y como  $x$  no es divisor de cero entonces  $a = a'$ . Esto significa que  $\varphi$  es inyectiva. La sobreyectividad de  $\varphi$  se sigue de la definición de  $(x : y)$ . La linealidad de  $\varphi$  también es clara.

Un cálculo muestra que

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot R\right) = \langle x \rangle,$$

esto significa que

$$H^1(K(x, y)) = \frac{\ker(-x, y)}{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot R} \simeq \frac{(x : y)}{\langle x \rangle}.$$

De esta ecuación se ve directamente que si  $\{x, y\}$  es una secuencia regular entonces  $H^0(K(x, y)) = H^1(K(x, y)) = 0$ , pues  $a \in \langle x : y \rangle$  entonces  $a \cdot y = 0$  en  $R/\langle x \rangle$ .

Por otro lado supongamos que  $H^1(K(x, y)) = 0$ . Si usamos el isomorfismo  $K(x, y) \simeq K(x) \otimes K(y)$  tenemos la secuencia exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow K(x)[-1] \longrightarrow K(x, y) \longrightarrow K(x) \longrightarrow 0.$$

La secuencia exacta larga en cohomología nos da

$$0 \longrightarrow H^0(K(x, y)) \longrightarrow H^0(K(x)) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$H^0(K(x)) \longrightarrow H^1(K(x, y)) \longrightarrow H^1(K(x)) \xrightarrow{\delta_1}$$

$$H^1(K(x)) \longrightarrow H^2(K(x, y)) \longrightarrow 0.$$

Como  $H^1(K(x, y)) = 0$  entonces

$$\frac{H^0(K(x))}{y \cdot H^0(K(x))} = 0,$$

pues  $\delta_1$  es la multiplicación por  $y$ . Esto significa que  $H^0(K(x)) = y \cdot H^0(K(x))$ . Del Lema de Nakayama se sigue que  $H^0(K(x)) = 0$ . Es decir  $x$  es un elemento regular. El hecho que

$$\bar{y} : R/\langle x \rangle \rightarrow R/\langle x \rangle$$

sea una aplicación inyectiva se obtiene de la hipótesis

$$H^1(K(x, y)) = \frac{\langle x : y \rangle}{\langle x \rangle} = 0.$$

El análisis anterior es un bosquejo de la prueba del siguiente Teorema

**Teorema A.33.** *Sea  $(R, \eta)$  anillo local noetheriano y  $\{x, y\} \subset \eta$ , entonces  $\{x, y\}$  es una secuencia regular si y solo si  $H^1(K(x, y)) = 0$ .*

**Prueba.** [Eis, Teorema 17.1] ■

**Corolario A.34.** *Sea  $(R, \eta)$  es un anillo local noetheriano y  $\{x_1, \dots, x_r\}$  una secuencia regular de elementos en  $\eta$  entonces toda permutación  $\{x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}\}$  es una secuencia regular.*

**Prueba.** [Eis, Corolario 17.2]. ■

**Definición A.35.** Sea  $R$  un anillo y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in N \simeq R^n$ . Definimos el complejo de Koszul de  $x$  como

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow R \xrightarrow{dx} N \xrightarrow{dx} \wedge^2 N \longrightarrow \dots \\ &\dots \longrightarrow \wedge^{n-1} N \xrightarrow{dx} \wedge^n N \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

donde  $d_x(\omega) = x \wedge \omega$ .

**Observación.** Si  $N$  no es libre simplemente habremos definido el complejo de Koszul de un elemento  $x \in N$  (ver [Eis, Sección 17.2]).

Si  $x = x_1$  entonces

$$K(x_1) : 0 \longrightarrow R \cdot e \xrightarrow{\partial} R,$$

donde  $\partial(e) = x$ . Es claro que este complejo coincide con el que se presentó en la Definición A.31.

**Proposición A.36.** *Si*

$$H^j(K(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

*para todo  $j < r$  y*

$$H^r(K(x_1, \dots, x_n)) \neq 0,$$

*entonces todo  $R$ -secuencia maximal en  $I = \langle x_1, \dots, x_n \rangle \subset R$  tiene longitud  $r$ .*

**Prueba.** La demostración se sigue de [Eis, Teorema 17.4] si tomamos  $M = R$ . ■

**Corolario A.37.** Si  $\text{profundidad}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle) \geq r$  entonces

$$H^t(K(x_1, \dots, x_n)) = 0$$

para todo  $t < r$ .

**Prueba.** Admitamos que la tesis no se cumple. Es decir  $H^t(K(x_1, \dots, x_n)) = 0$  para todo  $t \leq r_1$  y  $r_1 < r$ . Entonces del Teorema anterior tenemos que la máxima cadena de  $R$ -secuencias tiene longitud menor igual a  $r_1$ . Lo cual significa que  $\text{profundidad}(x_1, \dots, x_n) \leq r_1 < r$ . La última desigualdad es una contradicción con la hipótesis y prueba el Corolario. ■

**Proposición A.38.** Si  $(R, \eta)$  es local y  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$  es un ideal propio conteniendo una secuencia regular de longitud  $n$  entonces  $x_1, \dots, x_n$  es una secuencia regular.

**Prueba.** De la definición de secuencia regular y el Corolario 17.7 de [Eis] será suficiente tomar  $M = R$ . ■

**Proposición A.39.** Si  $N = N' \oplus N''$  entonces  $\wedge N = \wedge N' \oplus \wedge N''$  como álgebra conmutativa graduada. Sea  $x' \in N'$  y  $x'' \in N''$  tal que  $x = (x', x'') \in N$  entonces

$$K(x) = K(x') \otimes K(x'')$$

como complejos.

**Prueba.** [Eis, Proposición 17.9]. ■

**Nota.** Un hecho que usaremos repetidas ocasiones en la tesis es el siguiente

**Corolario A.40.** Sea  $R$  un anillo y  $x = (x_1, \dots, x_n) \in N \simeq R^n$  entonces

$$K(x_1, \dots, x_n) = K(x_1) \otimes \cdots \otimes K(x_n)$$

**Prueba.** La demostración será por inducción sobre  $n$ , para valores mayores que uno.

Si  $n = 2$  entonces  $x = (x_1, x_2) \in N$ . De la proposición anterior con  $x' = x_1$  y  $x'' = x_2$ ,  $N' = R$ ,  $N'' = R$  se tiene que

$$K(x_1, x_2) = K(x_1) \otimes K(x_2).$$

Si  $n = r$ , supongamos que  $K(x_1, \dots, x_r) = K(x_1) \otimes \cdots \otimes K(x_r)$ .

Sea  $x = (x_1, \dots, x_{r+1}) = (x', x'')$  donde  $x' = (x_1, \dots, x_r)$  y  $x'' = x_{r+1}$ . De la proposición anterior tenemos que

$$K(x_1, \dots, x_{r+1}) = K(x') \otimes K(x'').$$

De la hipótesis inductiva se sigue que

$$K(x_1, \dots, x_{r+1}) = K(x_1) \otimes \dots \otimes K(x_{r+1})$$

■

**Lema A.41.** Sea  $K(x_1, \dots, x_n)$  el complejo de Koszul,  $N = \bigoplus_{i=1}^n R \cdot e_i$  y

$$C : 0 \longleftarrow R \xleftarrow{d} N \xleftarrow{d} \wedge^2 N \xleftarrow{d} \dots \xleftarrow{d} \wedge^{n-1} N \xleftarrow{d} R \xleftarrow{d} 0,$$

donde  $d(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j} \wedge e_{i_k}) = \sum_j (-1)^j \partial(e_{i_j}) e_{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{e}_{i_j} \wedge \dots \wedge e_{i_k}$ . Entonces  $K(x_1, \dots, x_n) \simeq C$ .

**Prueba.** Del corolario anterior tenemos  $K(x_1, \dots, x_n) = K(x_1) \otimes \dots \otimes K(x_n)$ . Veamos ahora a  $K(x_1, \dots, x_n)$  como complejo de cadenas poniendo  $K(x)_i = K(x)^{1-i}$

$$\psi_j : \bigoplus_{i_1 < \dots < i_j} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j} \longrightarrow \bigoplus_{i_1 < \dots < i_j} 1 \otimes \dots \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_j} \otimes \dots$$

la aplicación definida como

$$\psi(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_j}) = (-1)^{t_1 + \dots + t_{n-j}} 1 \otimes \dots \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_j} \otimes \dots$$

donde  $\{i_1, \dots, i_j, t_1, \dots, t_{n-j}\} = \{1, \dots, n\}$  y  $j = 1, \dots, n$ . De la definición de  $\psi_j$  se prueba que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} 1 \otimes \dots \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \otimes \dots & \xleftarrow{\partial^\otimes} & \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} 1 \otimes \dots \otimes e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_{k+1}} \otimes \dots \\ \psi_k \uparrow & & \psi_{k+1} \uparrow \\ \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} & \xleftarrow{d} & \bigoplus_{i_1 < \dots < i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} \end{array}$$

conmuta. Es decir los complejos  $K(x_1, \dots, x_n)$  y  $C$  son isomorfos. ■

**Nota.** A continuación damos una homotopía del complejo de Koszul bajo las siguientes condiciones :

Sea  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset R$ ,  $N = \bigoplus_{i=1, \dots, n} R \cdot e_i$  y  $\varphi : N \longrightarrow R$  un morfismo. A partir de  $\varphi$  definamos  $\partial(e_{i_k}) := \varphi(e_{i_k})$  y el complejo  $(K(x_1, \dots, x_n), \partial_\varphi)$ , donde  $\partial_\varphi = d$ .

**Lema A.42.** Si  $x \in N$  y  $\varphi : N \rightarrow R$ . Entonces las aplicaciones  $\partial_\varphi$  y  $d_x$  satisfacen la identidad

$$d_x \partial_\varphi + \partial_\varphi d_x = \varphi(x) \cdot 1$$

donde  $1$  es la identidad en  $\wedge N$ .

**Prueba.** [Eis, Lema 17.13]. ■

**Corolario A.43.** Si algún  $x_i$  es unidad en el anillo  $(R, \eta)$  entonces

$$K^*(x_1, \dots, x_n) : R \longrightarrow N \xrightarrow{d_x} \wedge^2 N \xrightarrow{d_x} \dots \xrightarrow{d_x} \wedge^{n-1} N \xrightarrow{d_x} \wedge^n N$$

donde  $N = \bigoplus_1^n e_i \cdot R$  es contráctil.

**Prueba.** Si  $x_1$  es unidad en  $R$ , definamos

$$\varphi : N \longrightarrow R$$

como  $\varphi(e_1) = \frac{1}{x_1}$ , y  $\varphi(e_i) = 0$  para todo  $i$  mayor que uno.

De la definición de  $\varphi$  tenemos que  $\varphi(x) = 1$ . Del lema anterior se sigue que

$$d_x \cdot \partial_\varphi + \partial_\varphi \cdot d_x = \varphi(x) = 1 - 0.$$

■

### A.3. El Ideal Jacobiano.

La definición que presentaremos del ideal jacobiano será sólo para anillos regulares locales. Esta se basó en el hecho que  $\Omega_R^1$  es libre.

**Definición A.44.** Sea  $R$  un anillo r.l.e.t.f. Sea  $F = (f_1, \dots, f_r)$  con  $r \geq 1$  tal que  $ht(I) = c$  e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ . Sea  $e_1, \dots, e_m$  una base de  $\Omega_R^1$  donde  $m = \dim(R)$ . Definamos la **matriz jacobiana de  $F$**  en la base  $e_1, \dots, e_m$  como  $Jac(F) = (f_{i,j})$ , donde  $df_j = \sum_{i=1}^m f_{i,j} e_i$ . Por definición el **ideal jacobiano  $J_F(e_1, \dots, e_m)$**  es el ideal generado por los menores  $c \times c$  de  $Jac(F) = (f_{i,j})$ .

**Observación.** La definición de ideal jacobiano  $J_F$  que presentamos depende de los generadores y del número de estos en el ideal  $I$ . Para probar esta afirmación basta ver el siguiente ejemplo.

**Ejemplo A.45.** Sea  $(R; \eta) = k[x, y]_{(x,y)}$  e  $I = \langle f = x^2 + y^2, g = x^2 - y^2 \rangle$ , es claro que  $I$  representa una icis. Un cálculo nos hace ver  $J_{f,g} = \langle xy \rangle$ . Los polinomios  $f' = (1 + xy)(x^2 + y^2)$  y  $g' = y^2$  generan el ideal  $I$ . De la definición de ideal jacobiano tenemos que  $J_{f',g'} = \langle y^2 x^2 + y^4 + 2xy + 2x^2 y^2 \rangle$ .

Por otro lado si  $h = (1 - xy)x^2$ , es claro que  $I = \langle f, g, h \rangle$  y un cálculo nos lleva a que  $J_{f,g,h} = \langle xy, x^4 + y^4, x^4 - y^4 \rangle$ , aquí estamos tomando todos los menores de orden  $2 \times 2$  de la matriz jacobiana de  $F = (f, g, h)$ . Es claro que  $ht(J_{f,g,h}) = m = 2$ .

**Observación.** Notemos también que en la definición del ideal jacobiano hacemos uso de una base del módulo  $\Omega_R^1$ . De aquí la razón de denotar el ideal jacobiano de  $F = (f_1, \dots, f_r)$  como  $J_F(e_1, \dots, e_m)$ . Aquí si veremos que si cambiamos la base del módulo libre  $\Omega_R^1$  el ideal jacobiano sigue siendo el mismo. La prueba de esta afirmación sigue a continuación. Para iniciar presentamos algunas propiedades conocidas.

**Lema A.46.** Sea  $A_{s \times m}$ ,  $B_{m \times s}$  y  $C_{s \times s}$  matrices con entradas en un anillo  $R$  con  $s \leq m$ . Si

$$A \cdot B = C$$

entonces  $\det(C)$  es combinación lineal de menores  $s \times s$  de la matriz  $A$ . Si  $s > m$  entonces  $\det(C) = 0$ .

**Prueba.** Sea  $C = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_s)$ , y  $A = (A_1 \ A_2 \ \dots \ A_m)$ , donde  $A_i, C_j$  representan los vectores columnas de  $A$  y  $C$  respectivamente. De la hipótesis  $C = A \cdot B$  se prueba que  $C_k = \sum_{i_k=1}^m b_{i_k, k} A_{i_k}$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \det(C) &= \det(C_1 \ C_2 \ \dots \ C_s) = \\ &= \det\left(\sum_{i_1=1}^m b_{i_1, 1} A_{i_1} \ \dots \ \sum_{i_k=1}^m b_{i_k, k} A_{i_k} \ \dots \ \sum_{i_s=1}^m b_{i_s, s} A_{i_s}\right) = \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^m b_{i_1, 1} b_{i_2, 2} \dots b_{i_s, s} \cdot \det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s}). \end{aligned}$$

Si  $s > m$  entonces en la ecuación

$$\det(C) = \sum_{i_1, \dots, i_s=1}^m b_{i_1, 1} b_{i_2, 2} \dots b_{i_s, s} \cdot \det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s})$$

alguna columna  $A_{i_k}$  se repite en  $(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s})$ . Es decir

$$\det(A_{i_1} \ \dots \ A_{i_k} \ \dots \ A_{i_s}) = 0.$$

Por lo tanto  $\det(C) = 0$ . ■

**Corolario A.47.** Sean  $A$ ,  $B$ , y  $C$  matrices de rango  $m \times n$ ,  $n \times s$  y  $m \times s$  respectivamente y  $c \in \mathbb{N}$  tal que  $c \leq m$ ,  $c \leq s$ . Si

$$A \cdot B = C$$

entonces todo menor  $C_1$  de orden  $c$  de  $C$  es combinación lineal de menores de orden  $c$  de  $A$ .

**Prueba.** Sea  $C_1 = (c_{i_j, i_k})$  una submatriz de orden  $c$  de  $C$ . Entonces existen  $A_1 = (a_{i_j, l})$  y  $B_1 = (b_{t, i_k})$  matrices de orden  $c \times n$  y  $n \times c$  respectivamente tal que

$$A_1 \cdot B_1 = C_1.$$

Una aplicación directa del Lema anterior finaliza la prueba. Notemos que aún en el caso  $c > n$  se cumple el corolario. En efecto, si  $c > n$  entonces del lema anterior tenemos que  $\det(C_1) = 0$ . ■

**Observación.** Notemos que para  $n$  puede suceder que  $n \geq m$  o  $n < m$  y lo mismo para  $s$ . Este comentario tiene su asidero en el Corolario A.50 y Proposición A.51

**Corolario A.48.** *Con las hipótesis del Lema anterior si*

$$A \cdot B = C$$

*entonces todo menor de orden  $c \times c$  de  $C$  es combinación lineal de menores de orden  $c$  de la matriz  $B$ .*

**Prueba.** Si tomamos transpuesta a la ecuación anterior tenemos

$$C^t = B^t \cdot A^t.$$

Si  $M$  es un menor de orden  $c$  de  $C$  entonces  $M$  es un menor de orden  $c$  de  $C^t$ . Por lo tanto  $M$  se escribe como combinación lineal de menores de orden  $c$  de  $B^t$ . Esto significa, que  $M$  es combinación lineal de menores de orden  $c$  de la matriz  $B$ . ■

**Corolario A.49.** *Sea  $A$  una matriz  $m \times m$  invertible,  $B, C$  matrices de orden  $m \times n$  y  $c$  en los naturales tal que  $c \leq m$  y  $c \leq n$ . Si*

$$A \cdot B = C$$

*entonces el ideal  $\mathcal{C}$  generado por los menores de orden  $c$  de la matriz  $C$  es igual al ideal  $\mathcal{B}$  generado por los menores de orden  $c$  de la matriz  $B$ .*

**Prueba.** Del Corolario anterior tenemos que todo menor de orden  $c$  de la matriz  $C$  se escribe como combinación lineal de menores de orden  $c$  de la matriz  $B$  por lo tanto  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ . Como  $A$  es invertible de igual forma se prueba que  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ . ■

A continuación veremos que el ideal jacobiano no depende de la base del módulo  $\Omega_R^1$  que se elija.

**Corolario A.50.** *La definición anterior del ideal jacobiano de  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  no depende de la base de  $\Omega_R^1$  que se tome. Es decir, si  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$  es otra base del módulo  $\Omega_R^1$  donde la matriz  $\text{Jac}(F) = (f'_{i,j})$ , entonces  $J_F = J'_F$ , donde  $J'_F$  es el ideal generados por los menores de orden  $c$  de la matriz  $(f'_{i,j})$ .*

**Prueba.** Sea  $A : \Omega^1 \rightarrow \Omega^1$  la matriz de cambio de la base  $\{e_1, \dots, e_m\}$  a la base  $\{e'_1, \dots, e'_m\}$ , es decir  $A \cdot e_i = e'_i$ . Notemos que  $A$  es invertible pues si definimos  $A' : \Omega^1_R \rightarrow \Omega^1_R$  como  $A'(e'_i) = e_i$  tenemos que  $A \cdot A' = Id$ , y  $A' \cdot A = Id$ .

Por otro lado si

$$A(e_j) = e'_j = \sum_{i=1}^m a_{i,j} e_i$$

entonces

$$\begin{aligned} df_j &= \sum_{i=1}^m f'_{i,j} e'_i = \sum_{i=1}^m f'_{i,j} \left( \sum_{k=1}^m a_{k,i} e_k \right) = \\ &= \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^m a_{k,i} f'_{i,j} \right) e_k = \sum_{k=1}^m f_{k,j} e_k. \end{aligned}$$

En lenguaje matricial esto significa tener la siguiente igualdad

$$A \cdot \begin{pmatrix} f'_{1,1} & f'_{1,2} & \cdots & f'_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f'_{m,1} & f'_{m,2} & \cdots & f'_{m,r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m,1} & f_{m,2} & \cdots & f_{m,r} \end{pmatrix}.$$

Donde  $A = (a_{i,j})$  es invertible y  $A(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{i,j} e_i$ . Por lo tanto el Corolario A.49 con  $n = r$  prueba que

$$J_F(e_1, \dots, e_m) = J_{F'}(e'_1, \dots, e'_m).$$

Notemos que no existe restricción sobre el número  $r$  con respecto a  $m$ . Es decir puede suceder que  $r$  sea igual, mayor o menor que  $m = \dim(R)$  (ver Corolario A.47). ■

**Observación.** A continuación veremos que la definición de una icis no depende del número de generadores ni de los generadores del ideal  $I$ . En un primer momento demostramos lo siguiente :

**Proposición A.51.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. e  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  tal que  $ht(I) = c$ . Si  $I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  entonces se cumple*

$$J_F = J_G$$

en el anillo  $R/I$ , donde  $F = (f_1, \dots, f_r)$  y  $G = (g_1, \dots, g_s)$ .

**Prueba.** Como  $f_j \in I = \langle g_1, \dots, g_s \rangle$  para todo  $j = 1, \dots, r$  entonces

$$f_j = \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} g_i.$$

Si aplicamos la derivada universal  $d : R \rightarrow \Omega_R^1$  obtenemos

$$df_j = \sum_{i=1}^s (\lambda_{i,j} dg_i + g_i d(\lambda_{i,j})).$$

La igualdad anterior en el módulo  $\Omega_R^1 \otimes_R R/I$  se escribe como

$$df_j = \sum_{i=1}^s \bar{\lambda}_{i,j} \bar{d}g_i \quad (\text{A.2})$$

De ahora en adelante trabajaremos en el anillo  $R/I$ , y obviaremos la notación de clase de equivalencia. Tenemos que

$$df_j = \sum_{k=1}^m f_{kj} e_k$$

y

$$dg_j = \sum_{k=1}^m g_{kj} e_k,$$

entonces la ecuación A.2 se escribe como

$$\sum_{k=1}^m f_{kj} e_k = \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} \left( \sum_{k=1}^m g_{k,i} e_k \right) = \sum_{k=1}^m \left( \sum_{i=1}^s \lambda_{i,j} g_{k,i} \right) e_k.$$

Por lo tanto  $f_{k,j} = \sum_{i=1}^s g_{k,i} \lambda_{i,j}$ , es decir

$$Jac(F) = Jac(G) \cdot \Lambda,$$

donde  $\Lambda = (\lambda_{i,j})$ .

Del Corolario A.47 se sigue que los menores de orden  $c$  de  $Jac(F)$  son combinación lineal de menores de  $Jac(G)$  de orden  $c$ , es decir  $J_F \subseteq J_G$ . De la misma manera se prueba que  $J_G \subseteq J_F$ .

Notemos que no existe restricción sobre los número de generadores  $r$  y  $s$  del ideal  $I$ . Es decir puede suceder que  $r \geq m$  o  $r < m$ , lo mismo para  $s$ . ■

**Corolario A.52.** *La definición de singularidad aislada de tipo intersección completa de  $I = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$  no depende de los representantes del ideal  $I$  ni del ideal Jacobiano.*

**Prueba.** De la Proposición anterior tenemos que para generadores  $f_1, \dots, f_r$  y  $g_1, \dots, g_t$  se cumple  $J_F = J_G$  en el anillo  $R/I$ . Esto significa que

$$\langle J_F, I \rangle = \langle J_G, I \rangle.$$

Es decir  $ht(\langle J_F, I \rangle) = ht(\langle J_G, I \rangle)$ . Por lo tanto la definición de una icis no depende de los representantes de  $I$  ni del ideal jacobiano de estos representantes. ■

**Observación.** A continuación presentaremos los ingredientes que nos permitirán probar lo siguiente : los elementos  $dx_i$  forman una base de  $\Omega_R^1$  si  $\{x_1, \dots, x_m\}$  forman una secuencia regular de parámetros de  $R$ .

**Lema A.53.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $x_1, \dots, x_m$  un sistema regular de parámetros. Entonces no existe polinomio no nulo  $P(z_1, \dots, z_m) \in k[z_1, \dots, z_m]$  tal que  $P(x_1, \dots, x_m) = 0$ .*

**Prueba.** Supongamos que existe un polinomio  $P(z_1, \dots, z_m) \in k[z_1, \dots, z_m]$  no nulo tal que  $P(x_1, \dots, x_m) = 0$ . El polinomio  $P(z_1, \dots, z_m)$  se puede escribir como

$$P = \sum_{n=n_0}^N P_n(z_1, \dots, z_m),$$

donde  $P_n$  es un polinomio homogéneo de grado  $n$ , y  $P_{n_0}(z_1, \dots, z_m)$  es un polinomio homogéneo no nulo. Como  $P(x_1, \dots, x_m) = 0$  entonces

$$P_{n_0}(x_1, \dots, x_m) = - \sum_{n=n_0+1}^N P_n(x_1, \dots, x_m).$$

Notemos que  $P_n(x_1, \dots, x_m) = 0$  en  $\eta^{n_0}/\eta^{n_0+1}$  para todo  $n > n_0$ . Por lo tanto de la ecuación anterior tenemos que

$$P_{n_0}(x_1, \dots, x_m) = 0$$

en  $\eta^{n_0}/\eta^{n_0+1} \subset gr(\eta) \simeq k[z_1, \dots, z_m]$ . Esto significa que  $P_{n_0}(z_1, \dots, z_m)$  es el polinomio nulo, una contradicción. Por lo tanto  $P(z_1, \dots, z_m) = 0$ . ■

**Proposición A.54.** *Sean  $S \subset T$  cuerpos de característica cero y  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda} \subset T$  una colección de elementos. Entonces  $\{dx_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de  $\Omega_{T|S}^1$  como un espacio vectorial sobre  $T$  si sólo si  $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$  es una base de trascendencia de  $T$  sobre  $S$ .*

**Prueba.** [Eis, Proposición 16.14]. ■

**Proposición A.55.** *Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $x_1, \dots, x_m$  un sistema regular de parámetros. Entonces  $dx_1, \dots, dx_m$  es una base de  $\Omega_R^1$ .*

**Prueba.** Para el epimorfismo de anillos

$$R \longrightarrow R/\eta = k,$$

de la secuencia conormal (ver Proposición 16.3 [Eis]), tenemos la secuencia exacta

$$\frac{\eta}{\eta^2} \xrightarrow{d} \Omega_R^1 \otimes R/\eta \longrightarrow \Omega_{k|k}^1 \longrightarrow 0,$$

donde  $\Omega_R^1 \otimes R/\eta$  es un  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $m$  (Teorema 1.28). Como  $\Omega_{k|k}^1 = 0$  y  $\frac{\eta}{\eta^2} = \langle \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m \rangle$  es  $k$ -espacio vectorial de dimensión  $m$  entonces  $d$  es un isomorfismo de e.v. Es decir, los elementos  $dx_i \otimes 1$  generan  $\Omega_R^1 \otimes R/\eta$ .

Sea  $N = \langle dx_1, \dots, dx_m \rangle_R$  y  $M = \Omega_R^1$  entonces  $N \otimes R/\eta = M \otimes R/\eta$ . Por lo tanto

$$\frac{M}{N} \otimes R/\eta = \frac{M \otimes R/\eta}{N \otimes R/\eta} = 0.$$

Como

$$\frac{M/N}{\eta \cdot M/N} = \frac{M}{N} \otimes R/\eta,$$

entonces  $M/N = \eta(M/N)$ . El lema de Nakayama (ver Corolario 4.8 [Eis]) nos indica que  $M/N = 0$ , es decir  $M = N$ . Por lo tanto  $dx_1, \dots, dx_m$  generan  $\Omega_R^1$ . Supongamos por contradicción que los generadores  $dx_1, \dots, dx_m$  no son  $R$ -linealmente independientes entonces tampoco son  $Q(R)$ -linealmente independientes ( $Q(R)$  es por definición el cuerpo de fracciones de  $R$ ). Si usamos la Proposición A.54 tendríamos que los elementos  $x_1, \dots, x_m$  no son algebraicamente independiente. Esto significa que existe un polinomio no nulo  $P(z_1, \dots, z_m)$  tal que  $P(x_1, \dots, x_m) = 0$ , lo cual contradice al Lema A.53. ■

**Definición A.56.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f. y  $f \in \eta$ . Diremos que  $f$  es regular si  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local.

**Lema A.57.** Sea  $(R, \eta)$  un anillo r.l.e.t.f.  $f \in \eta$  es regular si y sólo si  $J_f = \langle 1 \rangle$ .

**Prueba.** Sea  $m = \dim(R)$ . Notemos que  $R/\langle f \rangle$  es esencialmente de tipo finito. Por definición  $f$  es regular si  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local. Por lo tanto del Teorema A.23 afirmación 4) el elemento  $f$  es parte de una secuencia regular de parámetros  $x_1 := f, \dots, x_n$ . De la proposición anterior tenemos que  $dx_1, \dots, dx_n$  es una base de  $\Omega_R^1$ . Por lo tanto en esta base  $J_f = R$ .

Por otro lado si  $J_f = R$  entonces  $f \in \eta \setminus \eta^2$ . En efecto si  $f \in \eta^2$  entonces  $f = \sum_{i=1}^t x_i y_i$  donde  $x_i, y_i \in \eta$ . Si aplicamos la derivada universal tenemos  $df = \sum_{i=1}^t (dx_i y_i + x_i dy_i)$ . Como  $x_i, y_i \in \eta$  entonces se prueba que  $J_f \in \eta$ . Por lo tanto

$f \in \eta \setminus \eta^2$ . Esto significa que  $\bar{f} \in \frac{\eta}{\eta^2}$  es no nulo. Entonces  $\bar{f}$  es parte de una base del espacio vectorial  $\frac{\eta}{\eta^2}$ . Sean  $v_1 := \bar{f}, v_2 := \bar{f}_2, \dots, v_m := \bar{f}_m$  una base de  $\frac{\eta}{\eta^2}$ . Sean  $f, f_2, \dots, f_m$  representantes de las clases  $v_1, \dots, v_m$  e  $I := \langle f, f_2, \dots, f_m \rangle$ . Como  $\bar{I} := \frac{I + \eta^2}{\eta^2} = \frac{\eta}{\eta^2}$ , entonces  $I + \eta^2 = \eta$ . Es decir en el anillo  $R/I$  tenemos  $\bar{\eta} = \bar{\eta}^2$ . Una aplicación del Lema de Nakayama prueba que  $I = \eta$ . Es decir  $f, f_2, \dots, f_m$  es un sistema regular de parámetros. Del Teorema A.23 afirmación 3) tenemos que  $R/\langle f \rangle$  es un anillo regular local. ■

**Observación.** A continuación presentaremos una demostración del hecho que los anillos r.l.e.t.f. son suaves según se definen en 3.4.1 de Loday. Como un anillo  $(R, \eta)$  r.l.e.t.f. es una  $k$ -álgebra conmutativa donde  $k$  es un cuerpo de característica cero, entonces  $R$  es  $k$ -flat.

**Proposición A.58.** *Si  $(R, \eta)$  es un anillo r.l.e.t.f, entonces es suave.*

**Prueba.** Como  $(R, \eta)$  es un álgebra  $k$ -flat entonces será suficiente demostrar que  $R$  cumple con las condiciones establecidas en el enunciado e de la Proposición 3.4.2 de Loday :

*Para cualquier par  $(C, J)$ , donde  $C$  es una  $k$ -álgebra y  $J$  es un ideal tal que  $J^2 = 0$ , la aplicación  $\text{Hom}_{\text{alg}}(R, C) \rightarrow \text{Hom}_{\text{alg}}(R, C/J)$  es sobreyectiva. (Aquí  $\text{Hom}_{\text{alg}}$  significa morfismo de  $k$ -álgebras.)*

Sea  $(C, J)$  un par donde  $C$  es una  $k$ -álgebra y  $J$  es un ideal tal que  $J^2 = 0$ . Sea  $f : R \rightarrow C/J$  un morfismo de  $k$ -álgebras. Debemos demostrar la existencia de un morfismo de  $k$ -álgebras  $g : R \rightarrow C$  tal que  $\varepsilon \circ g = f$  donde  $\varepsilon : C \rightarrow C/J$  es el morfismo proyección.

Por definición de anillo r.l.e.t.f. tenemos que

$$R = \left( \frac{k[x_1, \dots, x_n]}{I} \right)_{\eta}.$$

Más aún es claro que existe un epimorfismo de  $k$ -álgebras

$$\pi : P := k[x_1, \dots, x_n]_{\eta} \rightarrow R.$$

Es decir tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & P & & \\ & & & & \downarrow \pi & & \\ & & & & R & & \\ & & & & \downarrow f & & \\ 0 & \longrightarrow & J & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\varepsilon} & C/J \longrightarrow 0. \end{array}$$

Como  $P$  es suave (del enunciado  $c$  de la Proposición 3.4.2 de Loday presentado líneas atrás) tenemos que para el morfismo  $f \circ \pi$  existe  $f_1 : P \rightarrow C$  morfismo de  $k$ -álgebras tal que  $\varepsilon \circ f_1 = f \circ \pi$ .

Como  $\varepsilon \circ f_1(I) = f \circ \pi(I) = 0$  entonces  $f_1(I) \subset J$ . Por lo tanto la aplicación

$$f_1 : I \rightarrow J$$

esta bien definida. Más aún si  $x \in I^2$  entonces  $x = \sum x_i y_i$  donde  $x_i, y_i \in I$ . Como  $f_1(x_i) f_1(y_i) \in J^2 = 0$  entonces  $f_1$  induce una aplicación

$$\bar{f}_1 : \frac{I}{I^2} \longrightarrow J.$$

Notemos que  $\bar{f}_1$  es sólo un morfismo  $k$  lineal y que  $\bar{f}_1(\bar{x}) = f_1(x)$ . Dotemos a  $J$  de una estructura de  $R$ -módulo. Definamos la siguiente acción

$$\bar{\lambda} \cdot a = f_1(\lambda)a,$$

donde  $\lambda$  es un representante de la clase  $\bar{\lambda}$  en el anillo  $R = P/I$ , y  $a \in J$ . Veamos que la definición no depende del representante elegido : En efecto sea  $\lambda + \beta$  otro representante de la clase  $\bar{\lambda}$  (es decir  $\beta \in I$ ). Entonces

$$\bar{\lambda} \cdot a = f_1(\lambda + \beta)a = (f_1(\lambda) + f_1(\beta))a = f_1(\lambda)a + f_1(\beta)a.$$

Como  $f_1(\beta)$  y  $a$  son elementos de  $J$ , entonces  $f_1(\beta)a \in J^2 = 0$ . Es decir la acción que convierte a  $J$  en un  $R$ -módulo esta bien definida.

Por otro lado tomemos la secuencia conormal (ver Proposición 1.14)

$$\frac{I}{I^2} \xrightarrow{d} \Omega_P^1 \otimes_P R \longrightarrow \Omega_R^1 \longrightarrow 0.$$

Como  $\Omega_R^1$  es un  $R$ -módulo libre, la secuencia conormal se parte. Para todo elemento  $\bar{x} \in \frac{I}{I^2}$  y  $[\lambda] \in R$  se cumple que

$$d(\overline{\lambda \cdot x}) = \overline{d(\lambda \cdot x)} = \overline{xd(\lambda) + \lambda d(x)},$$

pues  $d$  es una derivada. Como  $x \in I$  la última igualdad, en el módulo  $\Omega_P^1 \otimes_P R$ , se escribe como

$$d(\overline{\lambda \cdot x}) = [\lambda]d(\bar{x}).$$

Esto significa que  $d$  es un morfismo  $R$  lineal.

Otro hecho que se desprende, esta vez, de la propiedad que la secuencia conormal se parte es que nos permite probar la existencia de un morfismo de  $R$ -módulos

$h : \Omega_P^1 \otimes_P R \rightarrow J$  tal que  $h \circ d = \bar{f}_1$ . (Para probar esta afirmación es suficiente usar el isomorfismo  $\Omega_P^1 \otimes_P R \simeq \frac{I}{I^2} \oplus \Omega_R^1$ .) Es decir tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \frac{I}{I^2} & \xrightarrow{d} & \Omega_P^1 \otimes_P R & \longrightarrow & \Omega_R^1 \longrightarrow 0 \\ & & \swarrow h & & \\ & & J & & \end{array}$$

Donde el triángulo inferior es conmutativo.

Luego definamos la aplicación

$$g : R \rightarrow C$$

como  $g(\bar{x}) = f_1(x) - h(\overline{d(x)})$ . La buena definición se prueba usando el hecho que  $h \circ d = \bar{f}_1$ .

Veamos que  $g$  es un morfismo de  $k$ -álgebras. En efecto es claro que  $g$  es  $k$ -lineal. Veamos que  $g(\overline{xy}) = g(\bar{x})g(\bar{y})$ .

Por un lado tenemos

$$g(\overline{xy}) = f_1(xy) - h(\overline{d(xy)}) = f_1(x)f_1(y) - h(\overline{xd(y) + yd(x)})$$

pues  $d$  es una derivada. Si continuamos tenemos

$$\begin{aligned} & f_1(x)f_1(y) - h(\overline{xd(y)}) - h(\overline{yd(x)}) = \\ & f_1(x)f_1(y) - h(\overline{x \cdot d(y)}) - h(\overline{y \cdot d(x)}) = \\ & f_1(x)f_1(y) - \bar{x} \cdot h(\overline{d(y)}) - \bar{y} \cdot h(\overline{d(x)}). \end{aligned}$$

Como  $h(\overline{dx}), h(\overline{dy}) \in J$ , si recordamos la estructura de  $R$ -módulo de  $J$ :

$$\begin{aligned} \bar{x} \cdot h(\overline{d(y)}) &= f_1(x)h(\overline{d(y)}), \\ \bar{y} \cdot h(\overline{d(x)}) &= f_1(y)h(\overline{d(x)}), \end{aligned}$$

tenemos que

$$g(\overline{xy}) = f_1(x)f_1(y) - f_1(x)h(\overline{dy}) - f_1(y)h(\overline{dx}).$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned} g(\bar{x})g(\bar{y}) &= (f_1(x) - h(\overline{d(x)}))(f_1(y) - h(\overline{d(y)})) = \\ & f_1(x)f_1(y) - f_1(x)h(\overline{dy}) - f_1(y)h(\overline{dx}) + h(\overline{dx})h(\overline{dy}). \end{aligned}$$

Como  $h(\overline{dx}), h(\overline{dy}) \in J$  y  $J^2 = 0$  (por hipótesis) entonces  $h(\overline{dx})h(\overline{dy}) = 0$ . Es decir  $g(\overline{xy}) = g(\bar{x})g(\bar{y})$ .

Finalmente veamos que  $\varepsilon \circ g = f$ . En efecto

$$\begin{aligned}\varepsilon \circ g(\bar{x}) &= \varepsilon(f_1(x) - h(\overline{d(x)})) = \\ &= \varepsilon(f_1(x)) - \varepsilon(h(\overline{d(x)}))\end{aligned}$$

como  $\overline{h(d(x))} \in J$  (es decir  $\varepsilon(h(\overline{d(x)})) = 0$ ) y  $\varepsilon(f_1(x)) = f \circ \pi(x)$  entonces

$$\varepsilon \circ g(\bar{x}) = f(\bar{x}).$$

■

## A.4. El Anillo de Polinomios.

En esta sección demostramos la siguiente propiedad

Sea  $k$  un cuerpo de característica cero y  $k[x_1, \dots, x_r]$  el anillo de polinomios. Para todo polinomio  $P(x_1, \dots, x_r)$  no nulo existen elementos  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  todos no nulos en el cuerpo  $k$  tal que el polinomio  $P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r)$  es no nulo.

**Lema A.59.** Si  $k$  es un dominio entonces el anillo  $k[x_1, \dots, x_n]$  es un dominio.

**Prueba.** Trivial. ■

**Lema A.60.** Sea  $Q(x_1, \dots, x_r)$  polinomio no nulo con coeficientes en  $k$  un cuerpo infinito. Entonces existen constantes  $c_i \in k - \{0\}$  para  $i = 1, \dots, r - 1$  tal que  $Q(c_1, \dots, c_{r-1}, x_r)$  es un polinomio no nulo de  $k[x_r]$ .

**Prueba.** La prueba se desarrollará por inducción sobre  $r$  el número de variables para  $r \geq 2$ .

Si  $r = 2$  el polinomio  $Q(x_1, x_2)$  se puede escribir como

$$Q(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^l Q_i(x_1)x_2^i.$$

Sea  $P(x_1) = (Q_0 \cdot Q_1 \cdots Q_l)(x_1)$  y  $s$  el grado de  $P$ . Entonces  $P$  tiene a lo más  $s$  raíces. Como  $k$  es infinito, existe  $c_1 \in k$  no nulo tal que  $P(c_1)$  es no nulo. Entonces  $Q_i(c_1)$  para  $i = 0, \dots, l$  es un elemento no nulo en el cuerpo  $k$ . Por lo tanto el polinomio  $Q(c_1, x_2)$  es no nulo.

Por hipótesis inductiva tenemos lo siguiente : Si  $Q(x_1, \dots, x_n)$  es un polinomio no nulo entonces existen constantes  $c_1, \dots, c_{n-1}$  todas ellas no nulas tal que  $Q(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n)$  es un polinomio no nulo.

Sea  $Q(x_1, \dots, x_{n+1})$  polinomio no nulo. Entonces  $Q$  se puede escribir como

$$Q(x_1, \dots, x_{n+1}) = \sum_{i=0}^l Q_i(x_1, \dots, x_n) x_{n+1}^i,$$

donde los polinomios  $Q_i$  son no nulos. Sea  $P(x_1, \dots, x_n) = Q_0 \cdot Q_1 \cdots Q_l$ , entonces  $P$  es un polinomio no nulo pues  $k[x_1, \dots, x_n]$  es un dominio. De la hipótesis inductiva tenemos que existen constantes  $c_1, \dots, c_{n-1}$  todas no nulas tales que  $P(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n)$  es un polinomio no nulo. Como  $k[x_n]$  es un dominio entonces  $Q_i(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n)$  es un polinomio no nulo para todo  $i = 0, \dots, l$ . Como  $Q(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n, x_{n+1}) \in (k[x_n])[x_{n+1}]$  y sus coeficientes  $Q_i(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n)$  son elementos no nulos de  $k[x_n]$  entonces  $Q(c_1, \dots, c_{n-1}, x_n, x_{n+1})$  es polinomio no nulo en dos variables. Del caso  $r = 2$  tenemos que existe  $c_n \in k$  no nulo tal que  $Q(c_1, \dots, c_{n-1}, c_n, x_{n+1})$  es un polinomio no nulo de  $k[x_{n+1}]$ . ■

**Lema A.61.** Sea  $P(x_1, \dots, x_r)$  un polinomio no nulo. Entonces

$$Q(y_1, \dots, y_{r-1}, x_r) = P(y_1 \cdot x_r, \dots, y_{r-1} \cdot x_r, x_r)$$

es un polinomio no nulo en las variables  $(y_1, \dots, y_{r-1}, x_r)$ .

**Prueba.** Como  $P$  es un polinomio no nulo entonces el grado de  $P$  respecto a alguna variable  $x_k$  es no nulo. Si el grado de  $P$  respecto de  $x_k$  para  $k < r$  es positivo entonces el grado de  $Q$  respecto a  $y_k$  es también positivo. Por lo tanto  $Q(y_1, \dots, y_{r-1}, x_r)$  es un polinomio no nulo. Si el grado de  $Q$  es cero con respecto a las variables  $x_k$  para todo  $k < r$  entonces  $P = P(x_r) = Q(x_r)$  es un polinomio no nulo. ■

**Corolario A.62.** Sea  $P(x_1, \dots, x_r)$  polinomio no nulo. Entonces existen constantes  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$  todas no nulas tal que el polinomio

$$P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r) \in k[x_r]$$

es no nulo.

**Prueba.** Del Lema A.61 tenemos que

$$Q(y_1, \dots, y_{r-1}, x_r) = P(y_1 \cdot x_r, \dots, y_{r-1} \cdot x_r, x_r)$$

es un polinomio no nulo. Entonces del Lema A.60 tenemos que existen constantes  $\lambda_i$  para  $i = 1, \dots, r-1$  todas no nulas tal que  $Q(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}, x_r)$  es polinomio no nulo. Por lo tanto  $P(\lambda_1 x_r, \dots, \lambda_{r-1} x_r, x_r)$  es un polinomio no nulo, donde las constantes  $\lambda_i \in k$  son todas no nulas. ■

# Bibliografía

- [AGV] Arnol'd, V.I; Gusein-Zade, S.M; Varchenko, A.N *Singularities of Differentiable Maps* ; Vol I, II; Birkhauser Boston, Switzerland 1985; Germany 1988.
- [A] Atiyah, M.F; Macdonald, I.G.; *Introduction to Commutative Algebra*; Addison-Wesley; 1969.
- [AV] Avramov, L.L., Vigué-Poirrier, *Hochschild Homology criteria for smoothness*, Internat. Math. Res. Notices 2 [in Duke Math. J. 65 n.º 2] (1992), 17-25.
- [BV] Burghelea, D. ; Vigué-Poirrier, M., *Cyclic Homology of commutative algebra I*, Algebraic Topology Rational Homotopy, Louvain-la-Neuve, 1986- , Lectures Notes in Math. 1318, Springer Verlag, 1988.
- [BACH] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *Cyclic Homology of Hypersurface*, J. Pure and App. Algebra, 83, 205 – 218.
- [BACH1] Buenos Aires Cyclic Homology Group, *A Hochschild homology criterium for smoothness of an algebra*, Commentarii Mathematici Helvetici. , v.69, p.163 - 168, 1994.
- [BH] Bruns, W.; Herzog, J. ; *Cohen-Macaulay rings*, Cambridge University Press 1996.
- [BKH] Brüderle, S., Kunz E., *Divided Powers and Hochschild Homology of Complete Intersections.*, Math. Ann 299, 57-76, (1994).
- [Cort] Cortiñas G., *On the Cyclic Homology of Commutative Algebra Over Arbitrary Ground Rings*, Arxiv : Math 0001145v1(2000)
- [CGG] Cortiñas, G., Guccione, J.A., Guccione J.J., *Decomposition of Hochschild and Cyclic homology of Commutative Differential graded Algebra*, J. Pure and App. Algebra, 83, 219 – 235, 1992.

- [Eis] Eisenbud, D., *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1995.
- [Eis1] Eisenbud, D., *The Geometry of Syzygies. A second Course in Commutative algebra and Algebraic Geometry*, Springer-Verlag 1995.
- [Emma] Emmanouil, I., *The Cyclic Homology of Affine Algebra*, Invent. Math. 121, 1-19, (1995).
- [FT] Feigin, B.L., Tsygan, B.L., *Additive K-theory and crystalline cohomology*, Funct. Anal. Appl., 19, 124 – 132, (1985).
- [G] Giusti, M.; *Classification des singularités isolées d'intersections complètes simples*; C.R. Acad. Sc. Paris, 284, 168-170, (1977).
- [Hart] Hartshorne, R., *Algebraic Geometry*, Springer-Verlag, 1977.
- [HS] Hübl, R., Swanson, I., *Derivations and the Integral Closure of Ideals*, Proc. of Amer. Math. Soc., 127, 3503 – 3511, 1999.
- [Hor] Hormander Lars, *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North-Holland, 1990.
- [HKR] Hochschild, G., Kostant, B., Rosenberg, A., *Differential forms on regular affine algebras*, Trans. AMS 102 (1962), 383-408. 26 # 167 HOOD, C, JONES, J.D.S., *Some algebraic properties of cyclic homology*
- [Hu-S] Huneke, C., Swanson I., *Integral Closure of Ideals, Rings, and Modules*, Cambridge University Press, 2006.
- [Hung] Hungerford, T. W., Springer-Verlag, 1974.
- [K1] Kunz, E., *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*, Birkhäuser Boston, 1985.
- [K] Kunz, E., *Kähler Differentials*, Friedr. Vieweg & Sohn Verlagsgesellschaft mbH, Braunschweig 1986.
- [LM] Mayorquín León, *K-teoría y homología cíclica de hipersuperficies*, Tesis de Doctorado, 2007.
- [Lod] Loday J.L., *Cyclic Homology*, Springer Verlag, 1992.
- [LQ] Loday J.L., Quillen D., *Cyclic homology and the lie algebra of matrices*. Comment. Math. Helv. Vol 59, (1984), p. 565-591.

- [Looj] Looijenga E., *Isolated Singular Points on Complete Intersections*, Cambridge University Press, 1984.
- [Mats] Matsumura, H., *Commutative Algebra*, W. A. Benjamin, 1970.
- [Mich] Michler, R., Hodge-Components of Cyclic Homology for Affine Quasi-Homogeneous Hypersurfaces, *K-Theory*, Strasbourg, 1992, 321 – 334.
- [Mich1] Michler, R., *Torsion of differentials of hypersurfaces with isolated singularities*, *J. Pure and App. Algebra*, 104 (1995), 81-88.
- [Mich2] Michler, R., *Invariants of Singular Plane Curves*, *Fields Institute Communications*, 00, (1997).
- [Mich3] Michler, R., *On the Number of Generators of the Torsion Module of Differentials*, *Procc. Amer. Math. Soc.*, 129 n 3, 639-643 (2000).
- [Seibt] Seibt, P., *Cyclic homology of algebras*, Singapore : World Scientific, 1987.
- [Vi] Vigué Micheline, *Homologie de Hochschild Homologie cyclique*, Departamento de Matematica : Cursos y Seminarios, Fascículo 40.
- [Wei] Weibel Ch., *An introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, 1994.
- [ZS] Zariski, O., Samuel, P., *Commutative Algebra*, Vol. I, II, Van Nostrand, Princeton (1958, 1960), 104 (1985).