

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA**



**Diseño e Implementación de un Sistema de  
Control de Posición Digital Predictivo para un  
Motor DC sujeto a Cargas No Lineales**

**TESIS**

**Para optar el Grado de Maestro en Ciencias**

**Mención: Automática e Instrumentación**

**Presentada por:**

**Nicanor Raúl Benites Saravia**

**LIMA - PERU**

**2000**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**

**Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica**

**Diseño e Implementación de un Sistema de Control de Posición Digital Predictivo  
para un Motor DC sujeto a Cargas No Lineales**

**TESIS**

**Para optar el grado de Maestro en Ciencias**

**Mención: Automática e Instrumentación**

**Presentada por:**

**Nicanor Raúl Benites Saravia**

**Lima - Perú**

**Extracto**

En esta tesis se plantea el problema de control de posición de un sistema de una entrada y una salida (SISO), sujeto a cargas no lineales, empleando la metodología de Control Predictivo Basado en Modelo (MBPC). El sistema no lineal a controlar consiste de un servomotor DC de imán permanente con reducción, una etapa de potencia y una varilla acoplada al eje del motor. Los componentes del sistema de control de posición son: El actuador, que incluye un generador PWM (Modulación por Ancho de Pulso) y un amplificador PWM tipo H; un servomotor DC; el bloque sensor, que incluye un codificador óptico incremental que sensa la posición angular y su sentido de giro; una interfaz de entrada/salida LAB-PC+; y, una PC Pentium.

El software usado para la simulación es MATLAB y el lenguaje usado para la implementación del algoritmo de control de posición es C para la plataforma DOS.

El proceso no lineal se modela usando ecuaciones que gobiernan su dinámica, que luego de ser linealizadas y discretizadas, se aplica la técnica de control predictivo para mostrar la respuesta del sistema controlado a referencias deseadas.

Los resultados experimentales demuestran que el controlador predictivo es capaz de estabilizar la posición del servomotor en presencia de cargas no lineales variables y en presencia de restricciones a la entrada del sistema.

En el apéndice A se estudia la técnica de control de posición polinomial usando la ecuación Diofantina, presentando los resultados de la simulación para efectos de

**comparación con el control predictivo.**

Universidad Nacional de Ingeniería  
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica

Design and Implementation of the Position Digital Predictive Control System  
subject to the linear or nonlinear loading

THESIS

Requirement for the degree of Master in Science  
Field: Automatic and instrumentation

by:

Nicanor Raúl Benites Saravia

Lima - Perú

**Abstract**

This thesis deals with the problem of controlling a nonlinear position process using the Model Based Predictive Control (MBPC). The single-input-single-output (SISO) process is a DC servomotor (with permanent magnet, commutation brushes and gear reduction mechanism) driving a nonlinear load. Such a load, a metal road attached to the motor shaft, is able to rotate (like a robot manipulator) in a plane perpendicular to the shaft. The components of the implemented position control system are: The actuator, that includes a PWM (Pulse Width Modulation) signal generator and a H-type PWM-amplifier; DC servo motor; the sensor block, that includes an incremental optical encoder that senses angular position and its sign; a Lab-PC+ Input/Output interface; and, a compatible PC with Pentium microprocessor.

All the simulation tasks were developed using MATLAB and the required control software were written in c-code by DOS platform.

The non-linear process is modelled using linearized and discretized equations in order to apply the predictive control technic for different set-points signals.

The experimental results demonstrates that the predictive controller is able to stabilize the position of the nonlinear load despite the presence of variable non-linear loads restrictions in the input process.

**Appendix A deals with the position control problem developed above, but using the Diofantina equation.**

5.3.3	Interfaz LAB-PC+ . . . . .	47
5.3.4	Software de Control . . . . .	48
<b>Capítulo 6</b>		
	<b>Simulaciones</b> . . . . .	49
6.1	Simulaciones sin Restricciones . . . . .	49
6.1.1	Respuesta a una señal escalón unitario . . . . .	49
6.1.2	Respuesta a una señal diente de sierra . . . . .	52
6.1.3	Respuesta a una señal sinusoidal . . . . .	53
6.2	Simulaciones con Restricciones de Entrada . . . . .	54
6.2.1	Respuesta a una señal escalón unitario . . . . .	55
6.2.2	Respuesta a una señal diente de sierra . . . . .	56
6.2.3	Respuesta a una señal sinusoidal . . . . .	57
6.3	Simulaciones con Restricciones de Entrada y de Salida . . . . .	58
6.3.1	Respuesta a una señal escalón unitario . . . . .	59
6.3.2	Respuesta a una señal diente de sierra . . . . .	60
6.3.3	Respuesta a una señal sinusoidal . . . . .	61
6.3.4	Respuesta a una señal de escalones variantes . . . . .	62
<b>Capítulo 7</b>		
	<b>Resultados Experimentales</b> . . . . .	64
7.1	Resultados con Restricciones de Entrada . . . . .	64
7.1.1	Respuesta a Señal Fija . . . . .	64
7.1.2	Respuesta a Señales Variantes . . . . .	66
7.2	Resultados con Restricciones de Entrada y de Salida . . . . .	73
7.2.1	Respuesta a Señal Fija . . . . .	73
7.2.2	Respuesta a Señales Variantes . . . . .	79
<b>Capítulo 8</b>		
	<b>Conclusiones</b> . . . . .	93
8.1	Resúmen de los resultados . . . . .	93
8.2	Recomendaciones para trabajos futuros . . . . .	95
<b>Apéndice A</b>		
	<b>Control Polinomial Clásico</b> . . . . .	96
A.1	La Ecuación Diofantina . . . . .	96
A.2	Diseño del Sistema de Control . . . . .	99
A.3	Aplicación a nuestro sistema . . . . .	100
A.4	Simulaciones . . . . .	103
<b>Apéndice B</b>		
	<b>Programas y Diagrama de Flujo</b> . . . . .	106
B.1	Diagrama de Flujo del Algoritmo de Control . . . . .	106
B.2	Programas . . . . .	107
B.2.1	Programa de Control para Referencias Variantes . . . . .	109
B.2.2	Programa de Control para Referencias Fijas . . . . .	114
B.3	Programa de simulación . . . . .	119
<b>Apéndice C</b>		

<b>Diagramas Circuitales</b>	123
<b>Bibliografía</b>	126

# Capítulo 1

## Introducción

El Control Predictivo Basado en Modelos (MBPC: Model Based Predictive Control) es una metodología de control que usa un modelo del proceso en línea para calcular las predicciones y optimizar las acciones de control. Esta metodología se ha desarrollado alrededor de ciertos principios comunes [1], [2], [3]. Dos de esos principios son:

- Uso explícito de un modelo del proceso para pronosticar la salida del proceso en instantes de tiempo futuro (horizonte);
- Cálculo de una acción de control óptimo basado en la minimización o maximización de funciones de costo, posiblemente incluyendo restricciones en las variables del proceso.

Los diferentes miembros de la familia MBPC difieren principalmente en:

- El modelo usado para representar el proceso y las perturbaciones;
- La(s) función(es) de costo a ser minimizadas, con o sin restricciones.

El control predictivo es de naturaleza abierta, con muchas contribuciones tanto en lo académico como también en el mundo industrial. Muchas aplicaciones de control predictivo son usadas hoy en todos los campos de la actividad industrial. La buena performance de esas aplicaciones es muy apreciada y actualmente existe un creciente interés en esta metodología, si bien el trabajo pionero se inició alrededor de hace dos décadas pasadas.

La importancia del Control Predictivo es la de pronosticar la salida de la planta sobre un horizonte de magnitud  $N_2$  mayor que el retardo de la planta. La predicción depende de las salidas y entradas pasadas, pero también del escenario del control futuro.

La obtención del modelo que refleje lo más fielmente posible la evolución dinámica de la planta es la llave del éxito de las aplicaciones.



# Capítulo 1

## Introducción

El Control Predictivo Basado en Modelos (MBPC: Model Based Predictive Control) es una metodología de control que usa un modelo del proceso en línea para calcular las predicciones y optimizar las acciones de control. Esta metodología se ha desarrollado alrededor de ciertos principios comunes [1], [2], [3]. Dos de esos principios son:

- Uso explícito de un modelo del proceso para pronosticar la salida del proceso en instantes de tiempo futuro (horizonte);
- Cálculo de una acción de control óptimo basado en la minimización o maximización de funciones de costo, posiblemente incluyendo restricciones en las variables del proceso.

Los diferentes miembros de la familia MBPC difieren principalmente en:

- El modelo usado para representar el proceso y las perturbaciones;
- La(s) función(es) de costo a ser minimizadas, con o sin restricciones.

El control predictivo es de naturaleza abierta, con muchas contribuciones tanto en lo académico como también en el mundo industrial. Muchas aplicaciones de control predictivo son usadas hoy en todos los campos de la actividad industrial. La buena performance de esas aplicaciones es muy apreciada y actualmente existe un creciente interés en esta metodología, si bien el trabajo pionero se inició alrededor de hace dos décadas pasadas.

La importancia del Control Predictivo es la de pronosticar la salida de la planta sobre un horizonte de magnitud  $N_2$  mayor que el retardo de la planta. La predicción depende de las salidas y entradas pasadas, pero también del escenario del control futuro.

La obtención del modelo que refleje lo más fielmente posible la evolución dinámica de la planta es la llave del éxito de las aplicaciones.

## 1.1 Formulación del problema

Las metodologías de diseño de sistemas de control actuales se basan en la formulación de modelos lineales y no lineales para reflejar el comportamiento dinámico del proceso. La aplicación de un modelo lineal permite conocer con antelación la evolución del proceso en un horizonte de predicción ante cualquier valor de la entrada; dicha evolución estará afectada de forma lineal por la influencia del pasado y del futuro.

El algoritmo clásico de control, el PID, aún continúa siendo válido para el mantenimiento de la estabilidad de las variables de calidad en la mayoría de los casos, pero presenta un problema fundamental: no está preparado para responder ante determinadas evoluciones dinámicas del proceso, caracterizadas por la aparición de importantes no linealidades, por retardos puros, etc. Tampoco resuelve los problemas de acoplamiento entre diversas variables (sistemas multivariantes). Estos problemas, inherentes a su propia concepción y diseño, son la causa de inestabilidades y obliga a que el operador actúe manualmente sobre los lazos de control más críticos.

Debido al desarrollo de computadores digitales de alta velocidad y capacidad ha sido posible implementar por software algoritmos de control de alto rendimiento, entre los que destaca el algoritmo de control predictivo, que siendo lineal, presenta una enorme robustez, capaz de proporcionar una solución aceptable a la mayoría de los casos planteados.

Cabe destacar que la formulación de un buen modelo es la parte esencial de la aplicación del control de procesos, pues el controlador se va a especificar para optimizar una trayectoria deseada en un horizonte extendido de predicción, comportándose como un inverso del proceso.

En la presente tesis se plantea el problema de control de posición SISO de un servomotor DC con mecanismo de reducción sujeto a cargas no lineales, usando la técnica de Control Predictivo.

## 1.2 Perspectiva Histórica

A finales de la década de 1970 aparecieron varios artículos mostrando un interés incipiente en la aplicación industrial del *MBPC*.

Desarrollos industriales en Europa (MAC: Model Algorithmic Control [14]) y en USA (DMC: Dynamic Matrix Control [15]) a finales de los '70 resultaron en el primer paquete comercial de control predictivo usando explícitamente un modelo

del proceso para predecir y controlar sus variables. Simultáneamente, aunque independientemente, algunos grupos académicos europeos, con una fuerte historia en control y predicción adaptiva, iniciaron el desarrollo de controladores basados en predictores multipaso (EPSAC: Extended Prediction Self Adaptive Control [1]), (EHAC: Extended Horizon Adaptive Control [16]), (GPC: Generalized Predictive Control [17]), (MUSMAR: Multistep Multivariable Adaptive Control [18]).

Después de los trabajos pioneros de esos grupos industrial/académicos, el interés en el MBPC creció gradualmente cerca de los finales de los '80 y otros se unieron a la familia (UPC: Unified Predictive Control [19]), (PFC: Predictive Functional Control [20]), (SMCA: Setpoint Multivariable Control Architecture), (OPC: Optimum Predictive Control), (PCT: Predictive Control Technology).

Desde el inicio de los '90, se produjo un *boom* en el número de aplicaciones que fueron reportadas (primero en USA y Japón, ahora también en Europa).

Una serie de beneficios en su diseño y aplicación son la base para el uso creciente del Control Predictivo:

- Los conceptos del MBPC, ha generado en poco tiempo la simpatía y uso por un numeroso grupo de investigadores. Los principios son *intuitivos* y los parámetros de diseño son *flexibles* a los requerimientos de las aplicaciones.
- EL MBPC puede resolver problemas de *control no lineal multivariable* en forma directa.
- El MBPC es actualmente el más aproximado al control restringido (restricciones en los actuadores, restricciones de seguridad, restricciones de calidad, etc), un tópico de vital importancia práctica en la industria de la automatización.
- El MBPC tiene inherentemente compensación de *tiempo muerto* y compensación en adelanto de las perturbaciones, lo que le permite el control de procesos con inusual comportamiento dinámico (como en procesos de fase no mínima, procesos de alta oscilación o inestables).
- El MBPC es una metodología abierta, basada en ciertos *principios*, que permite extensiones, contribuciones, alternativas y mejoras desde fuentes muy diferentes.
- El MBPC resulta *natural* cuando se le relaciona con *los conceptos* tales como diseño integrado, pruebas de plantas virtuales, etc.

### 1.3 Objetivo de esta tesis

El objetivo de este trabajo de tesis es resolver el problema de control de posición y seguimiento a una trayectoria dada, mediante la optimización de una función de costo dentro de un horizonte de predicción.

El control predictivo basado en modelos se impuso en la década de los 80, ofreciendo un algoritmo de control que optimizaba una función objetivo en un horizonte de predicción. En esta tesis se hace uso de la técnica de Control Predictivo Basado en Modelo (MBPC) para implementar un control de posición para un sistema no lineal *SISO*. El modelo del proceso no lineal es linealizado usando la expansión en series de Taylor, luego es discretizado y finalmente representada mediante el modelo CARIMA (Controlled Autoregressive Integrated Moving Average) del proceso.

La importancia del control predictivo es el de pronosticar la salida de la planta sobre un horizonte de predicción máximo de magnitud  $N_2$ , así como el de considerar otros parámetros de diseño como son: el horizonte de predicción mínimo de magnitud  $N_1$ , horizonte de control de magnitud  $N_u$ , los parámetros de peso  $\lambda$  y de filtraje  $\alpha$ , conceptos que se explicarán con amplitud posteriormente.

### 1.4 Organización de la tesis

En el Capítulo 2 se modela y se plantea las ecuaciones de la planta no lineal, en donde se discute las condiciones de modelamiento con y sin carga no lineal, así como las ventajas o desventajas de considerar la inductancia de armadura dentro de las ecuaciones que gobiernan la planta no lineal. El capítulo 3 aborda la tarea de linealizar el modelo no lineal y discretizarla. La obtención de las ecuaciones discretizadas será de suma utilidad en los capítulos posteriores. Los principios y algoritmos de Control Predictivo se discuten en el capítulo 4. En el capítulo 5 se aplica el método de Control Predictivo Basado en Modelo (MBPC) a la planta linealizada y discretizada, presentando y discutiendo las ecuaciones que optimizan el sistema de control; asimismo, se presenta el esquema de implementación del sistema de control y se comentan algunos aspectos característicos funcionales de su implementación. Las gráficas de la simulación usando MATLAB se presentan y se discuten en el capítulo 6. En el capítulo 7 se presentan los resultados en tiempo real. Un resumen y conclusiones de los resultados relevantes de esta tesis y recomendaciones para futuros trabajos de investigación se muestran en el Capítulo 8. Finalmente, en el apéndice A se explica el método de control polinomial usando la ecuación Diofantina, presen-

tando las simulaciones. En el apéndice B se presentan en código C los programas de control predictivo implementado y el diagrama de flujo correspondiente, así como el programa de simulación en MATLAB para la respuesta del sistema de control a una referencia variable. Por último, en el apéndice C se muestran los diagramas circuitales usados en la implementación física del sistema de control.

## Capítulo 2

# Estructura y Modelo de la Planta

La Planta es un sistema *SISO* no lineal, que consiste de dos partes fundamentales [4], [5]:

### 1. Parte Eléctrica:

- Generador PWM + Amplificador de Potencia.
- Servomotor DC controlado por voltaje de armadura.

### 2. Parte Mecánica:

- Una varilla metálica acoplada al eje del motor y un engranaje reductor de velocidad. En el extremo de la varilla se puede acoplar cargas adicionales.

En la figura 2.1 se muestra la planta no lineal a controlar.

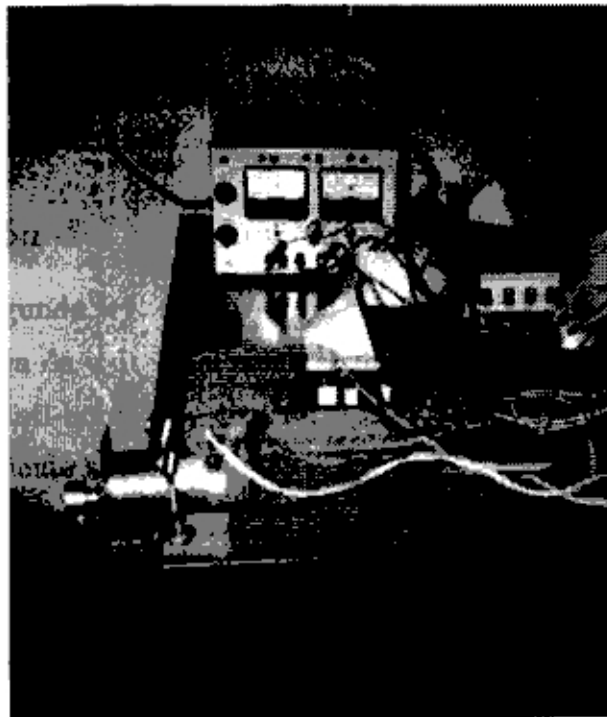


Figura 2.1: Planta no lineal a controlar.

El esquema de estructura se aprecia en la figura 2.2; en la cual podemos distinguir las siguientes denominaciones a ser usadas:

- $u$  = Tensión de entrada al amplificador
- $V_a$  = Tensión de entrada en los bornes del motor.
- $I$  = Corriente de armadura del motor.
- $R$  = Resistencia de armadura.
- $L$  = Inductancia de armadura.
- $T_M$  = Torque del motor.
- $T_C$  = Torque producido por la fricción estática y de coulomb
- $J_m$  = Momento de inercia del motor.
- $J_L$  = Momento de inercia de la carga.
- $b_m$  = Coeficiente de fricción viscosa del motor.
- $b_L$  = Coeficiente de fricción viscosa de la carga.
- $M$  = Masa de la esfera.
- $m$  = Masa de la varilla.
- $L_0$  = Longitud de la varilla.
- $R_0$  = Radio de la esfera.
- $e_b$  = Fuerza contra-electromotriz.
- $n = a/b$  = Reducción de velocidad.
- $w_m$  = Frecuencia angular del motor.
- $w$  = Frecuencia angular de la carga.
- $q_m$  = Posición angular del eje del motor.
- $q$  = Posición angular de la carga.
- $T_L$  = Ecuación diferencial del torque producido por la varilla y la esfera.
- $T_E$  = Torque producido por el peso de la varilla y su esfera.

## 2.1 Modelo Matemático del Sistema

### 2.1.1 Ecuación del Sistema Mecánico

Aplicando la segunda ley de Newton al movimiento rotacional del motor, considerando la posición de reposo tal como se muestra en la figura 2.2, y, asumiendo positivo el sentido anti-horario de giro del eje del motor, el torque resultante puede escribirse de la siguiente manera:

$$nT = nT_M + T_E + T_L + nT_C \quad (2.1)$$

donde  $n=a/b$  es la relación de radios de los engranajes,  $nT$  es el torque reflejado a la salida del motor, por tanto:  $T_M = J_m \dot{w} + b_m w_m$ . Considerando  $w_m = nw$  obtendremos:

$$T_M = nJ_m \dot{w} + nb_m w \quad (2.2)$$

$$T_L = (ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2 + \frac{1}{3}mL_o^2 + J_L)\dot{w} + b_L w \quad (2.3)$$

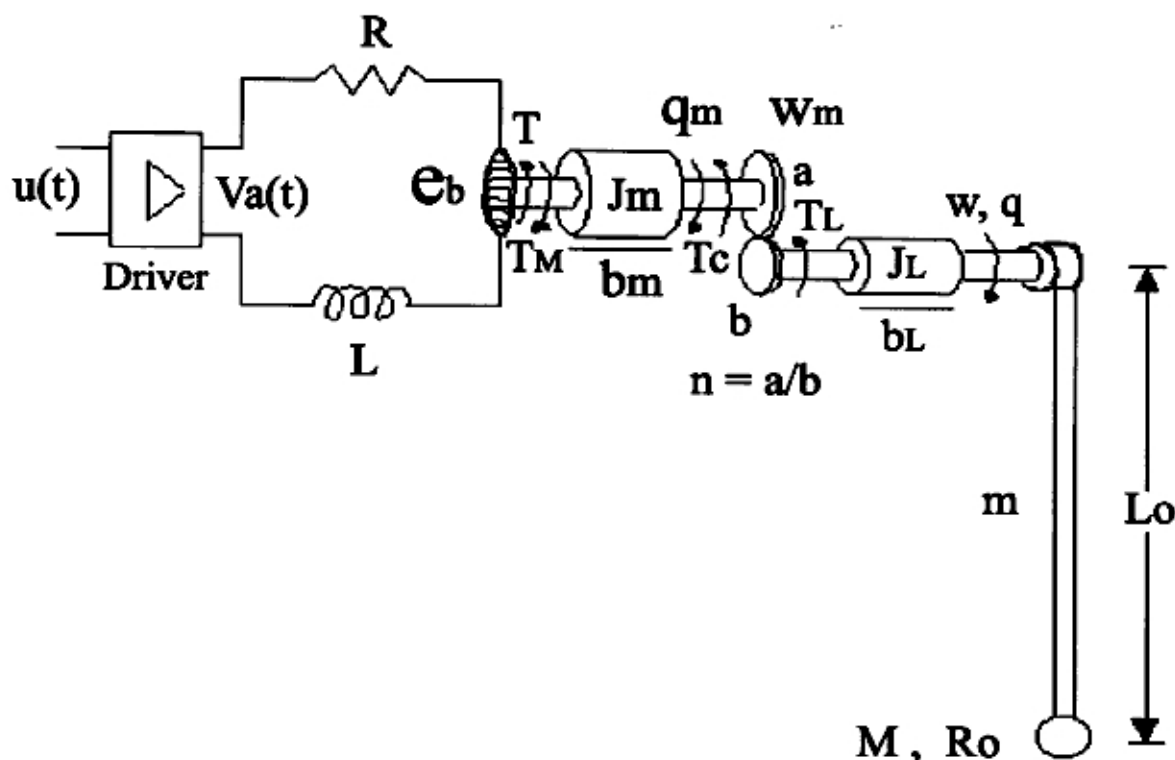


Figura 2.2: Estructura de la planta no lineal.

$$T_E = gL_o(M + \frac{m}{2})\text{sen}q \quad (2.4)$$

$$T_C = f(nw) \quad (2.5)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.2) a (2.5) en la ecuación (2.1) se obtiene:

$$nT = n^2 J_m \dot{w} + n^2 b_m w + gL_o(M + \frac{m}{2})\text{sen}q + (ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2 + \frac{1}{3}mL_o^2 + J_L)\dot{w} + b_L w + nf(nw) \quad (2.6)$$

donde:

- $n^2 J_m$ : Momento de inercia del motor reflejado a la salida
- $\frac{1}{3}mL_o^2$ : Momento de inercia de la varilla
- $ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2$ : Momento de inercia de la esfera
- $gL_o(\frac{m}{2})\text{sen}q$ : Torque producido por el peso de la varilla
- $n^2 b_m$ : Constante de fricción viscosa del eje del motor

Despejando T de la ecuación (2.6), y acomodando las variables convenientemente, se obtiene:



$$T = (nJ_m + \frac{J_L}{n} + \frac{1}{n}(ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2 + \frac{1}{3}mL_o^2))\dot{w} + (nb_m + \frac{b_L}{n})w + \frac{gL_o}{n}(M + \frac{m}{2})\text{sen}q + f(nw) \quad (2.7)$$

y ahora considerando:

$$J_{eff} = nJ_m + \frac{J_L}{n} \quad (2.8)$$

$$b_{eff} = nb_m + \frac{b_L}{n} \quad (2.9)$$

entonces la ecuación (2.7) se expresa como:

$$T = (J_{eff} + \frac{1}{n}(ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2 + \frac{1}{3}mL_o^2))\dot{w} + b_{eff}w + \frac{gL_o}{n}(M + \frac{m}{2})\text{sen}q + f(nw) \quad (2.10)$$

De la ecuación (2.10) podemos asignar :

$$N = J_{eff} + \frac{1}{n}(ML_o^2 + \frac{2}{5}MR_o^2 + \frac{1}{3}mL_o^2) \quad (2.11)$$

$$A = \frac{gL_o}{n}(M + \frac{m}{2}) \quad (2.12)$$

### 2.1.2 Ecuación del Sistema Eléctrico

La tensión de armadura  $V_a$  que permite controlar la velocidad del motor viene expresada por:

$$V_a = IR + L\dot{I} + e_b$$

donde  $e_b$  es igual al producto de la constante de fuerza contra electromotriz  $E$  por la velocidad angular  $w_m$ . Por consiguiente:

$$V_a = IR + L\dot{I} + Ew_m \quad (2.13)$$

El amplificador del motor tiene una ganancia  $K_{act}$  y una tensión de entrada  $u$ , relacionadas así:

$$V_a = uK_{act} \quad (2.14)$$

### 2.1.3 Conversión de Energía Eléctrica en Mecánica

Las ecuaciones (2.10) y (2.13) se encuentran relacionadas por la conversión de energía eléctrica en mecánica, por la siguiente igualdad:

$$T = KI \quad (2.15)$$

donde  $K$  es la constante del par motriz. Igualando las ecuaciones (2.13) y (2.14), y evaluando obtenemos:

$$\dot{I} = \frac{K_{act}u - Enw - IR}{L} \quad (2.16)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.15) en (2.10) y despejando  $\dot{w}$  obtenemos:

$$\dot{w} = -\frac{A}{N}\text{sen}q - \frac{b_{eff}}{N}w - \frac{f(nw)}{N} + \frac{KI}{N} \quad (2.17)$$

Las ecuaciones (2.16) y (2.17) representan el sistema de ecuaciones de la planta no lineal y pueden tomar la siguiente representación:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(x) + G(x)u \\ y &= H(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Eligiendo las siguientes variables de estado:  $x_1 = q$ : posición angular,  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{q} = w$ : velocidad angular y  $x_3 = I$ : intensidad de corriente, obtenemos:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\left(\frac{A}{N}\right)\text{sen}x_1 - \left(\frac{b_{eff}}{N}\right)x_2 - \frac{f(nx_2)}{N} + \left(\frac{K}{N}\right)x_3 \\ \dot{x}_3 &= -\left(\frac{En}{L}\right)x_2 - \left(\frac{R}{L}\right)x_3 + \left(\frac{K_{act}}{L}\right)u \end{aligned} \quad (2.19)$$

con salida:

$$Y = x_1 \quad (2.20)$$

Usando las ecuaciones (2.19) y (2.20), la expresión (2.18) puede reescribirse como:

$$F(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\left(\frac{A}{N}\right)\text{sen}x_1 & -\left(\frac{b_{eff}}{N}\right)x_2 - \frac{f(nx_2)}{N} & +\left(\frac{K}{N}\right)x_3 \\ -\left(\frac{En}{L}\right)x_2 & -\left(\frac{R}{L}\right)x_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{K_{act}}{L} \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = x_1 \quad (2.22)$$

Las ecuaciones (2.21) y (2.22) representan el modelo matemático de la planta considerando la carga no lineal y la inductancia  $L$  de la armadura del motor. Sin embargo, debido a que el valor de  $L$  es muy pequeño, se puede despreciar, simplificando el sistema de tercer orden a uno de segundo. También se puede determinar el modelo del sistema sin carga, con o sin  $L$ . En este trabajo se estudia el caso del modelo del sistema con carga y despreciando  $L$ .

### Modelo Matemático de la Planta con Carga y despreciando la Inductancia de Armadura

Al despreciar la inductancia de armadura, entonces la derivada de la intensidad de corriente de armadura se hace nula, por lo que la derivada de la variable de estado  $x_3$  desaparece, reduciéndose así el orden del sistema no lineal. La consideración de  $L=0$  prácticamente no afecta el comportamiento de la planta. Entonces, considerando  $L=0$ , la ecuación (2.17) con  $I = (K_{act}.u - n.E.w)/R$  pasa a ser:

$$\dot{w} = -\frac{A}{N} \text{sen}q - \frac{b_{eff}}{N} w - \frac{f(nw)}{N} + \frac{K.K_{act}}{NR} u - \frac{K.n.E}{NR} w \quad (2.23)$$

y con  $x_1 = q$  obtenemos:

$$\dot{x}_1 = x_2 = f_1(x_1, x_2, u)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{A}{N} \text{sen}(x_1) - \left(\frac{b_{eff}}{N} + \frac{K.n.E}{NR}\right)x_2 - \frac{f(nx_2)}{N} + \frac{K.K_{act}}{NR} u = f_2(x_1, x_2, u) \quad (2.24)$$

Reescribiendo la ecuación (2.23) en la forma:

$$\ddot{q} = -\frac{A}{N} \text{sen}q - \left(\frac{b_{eff}}{N} + \frac{K.n.E}{NR}\right)\dot{q} - \frac{f(n\dot{q})}{N} + \frac{K.K_{act}}{NR} u \quad (2.25)$$

donde  $f(n\dot{q})=C.\text{Sign}(n\dot{q})$ , y evaluando la ecuación (2.25) apropiadamente obtenemos:

$$\dot{q} = \frac{1}{s + (\frac{b_{eff}}{N} + \frac{K_n E}{NR})} \cdot \frac{1}{N} (-A \text{sen} q - C \text{Sign}(n\dot{q}) + \frac{K K_{act}}{R}) u \quad (2.26)$$

El diagrama de bloques correspondiente se muestra en la figura 2.3.

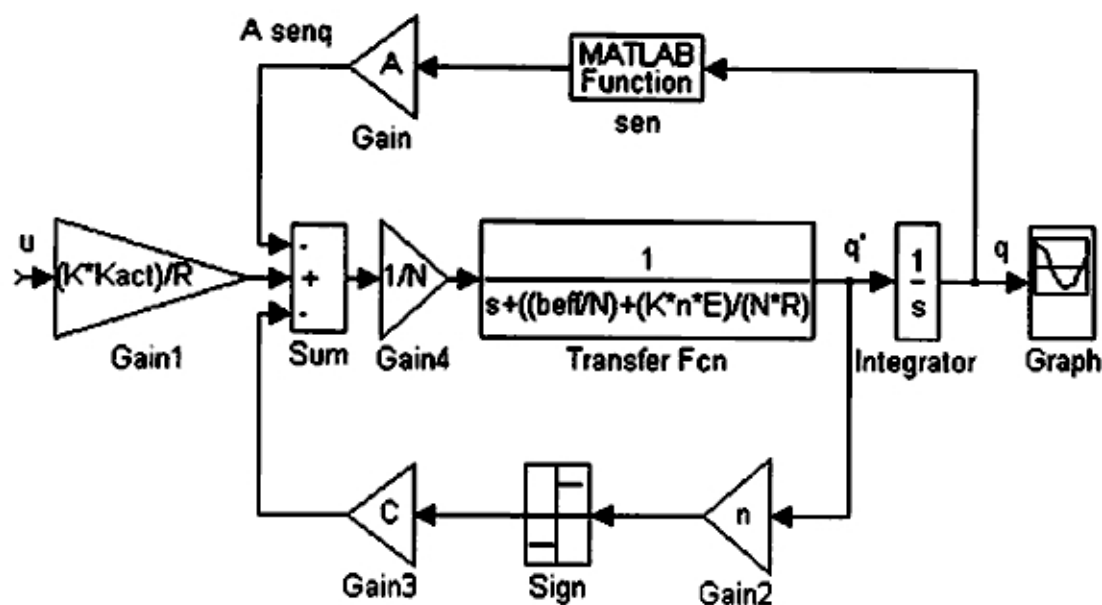


Figura 2.3: Planta no lineal a controlar con  $L=0$ .

## Capítulo 3

# Linealización y Discretización

En el modelado de la planta no lineal, las ecuaciones obtenidas para el caso general como para el caso de la planta con carga y despreciando  $L$ , están en función de determinados parámetros, tales como:

- $K_{act}$  : ganancia del amplificador de potencia
- $J_{eff}$  : momento de inercia referido a la carga
- $b_{eff}$  : coeficiente de fricción viscosa referido a la carga
- $f(nw)$ : fricción estática y de coulomb

Por consiguiente, es necesario identificar apropiadamente estos parámetros. En [6] y [7] se realiza este proceso, cuyos resultados, presentados a continuación, serán usados en esta tesis.

Símbolo	Descripción	Valor
$K_{act}$	Ganancia del amplific. de potencia	14.9
$E$	Constante de fuerza electromotriz del motor	$31.0352 \times 10^{-3}$ v/rad/s
$J_{eff}$	Momento de Inercia referido a la carga	$5.63 \times 10^{-5}$ Kg m <sup>2</sup>
$n$	Reducción de velocidad	19.741
$b_{eff}$	Coef. de fricción viscosa referido a la carga	$7.05 \times 10^{-5}$ Nm/rad s <sup>-1</sup>
$L$	Inductancia de armadura	0 mH
$R$	Resistencia de armadura	7.38 $\Omega$
$J_m$	Momento de inercia del motor	$1.9066 \times 10^{-6}$ Kg m <sup>2</sup>
$b_m$	Coef. de fricción viscosa del motor	$1.83 \times 10^{-6}$ Nm/rad s <sup>-1</sup>
$g$	gravedad	9.81 m/s <sup>2</sup>
$m$	Masa de la varilla	0.06377 Kg
$Lo$	Longitud de la varilla	0.776m
$K$	Constante del par del motor	$31.071 \times 10^{-3}$ Nm/A

### 3.1 Linealización aproximada

Entendiendo que las no linealidades introducidas por las fricciones estática y de coulomb son abruptas, y que se presentan para frecuencias muy bajas, se opta por despreciar sus efectos. La linealización aproximada se puede conseguir usando

la expansión en series de Taylor, eligiendo al origen como el punto de equilibrio estable, que en términos generales se expresa por:

$$\dot{x} = f(0, 0) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=0, u=0}x + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{x=0, u=0}u + f_{(t.o.s.)}(x, u) \quad (3.1)$$

donde  $f_{t.o.s.}$  representa los términos de orden superior en  $x$  y en  $u$ . A continuación se tratará la linealización para el caso de la planta con carga no lineal despreciando la inductancia de armadura.

### 3.1.1 Linealización para la planta con carga no lineal y despreciando la inductancia de armadura

Aplicando la ecuación (3.1) a la ecuación (2.23) y despreciando los términos de orden superior de la expansión en series de Taylor, obtenemos:

$$\dot{x} = f(0, 0) + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial x_2} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(0,0)}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial u} \end{pmatrix} u \quad (3.2)$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{A}{N} & -(\frac{beff}{N} + \frac{K.n.E}{NR}) \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K.Kact}{NR} \end{pmatrix} u \quad (3.3)$$

$$y = [1 \quad 0]x \quad (3.4)$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{A}{N} & -(\frac{beff}{N} + \frac{K.n.E}{NR}) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{K.Kact}{NR} \end{pmatrix}; \quad C = (1 \quad 0) \quad (3.5)$$

#### Estabilidad

La estabilidad del sistema puede determinarse resolviendo el determinante:

$$|\lambda I - A| = 0 \quad (3.6)$$

Evaluando dicho determinante, se obtienen los valores propios:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\frac{beff}{N} + \frac{K.n.E}{NR}) \pm \sqrt{(\frac{beff}{N} + \frac{K.n.E}{NR})^2 - 4(\frac{A}{N})}}{2} \quad (3.7)$$

Los valores propios  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  contienen parte real negativa, por consiguiente el sistema es estable.

## Controlabilidad

Se dice que un sistema de control es de estado completamente controlable, si es posible transferir el sistema de un estado inicial arbitrario a cualquier estado deseado, en un período finito. Es decir, un sistema de control es controlable si todas las variables de estado pueden ser controladas en un período finito, mediante alguna señal de control no restringida.

Dado el sistema en tiempo continuo:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.8)$$

Si el sistema es totalmente controlable, entonces requiere que el rango de la matriz  $[B \ AB]$  sea de rango  $n=2$ , igual al orden de la planta, lo cual se verifica fácilmente.

## Observabilidad

Se dice que un sistema en tiempo continuo es totalmente observable, si cada estado  $x(t_0)$  se puede determinar a partir de la observación de  $y(t)$  en un intervalo de tiempo finito  $t_0 \leq t \leq t_1$ . Por lo tanto, el sistema es completamente observable si cada transición del estado afecta eventualmente a cada elemento del vector de salida. El sistema descrito en este trabajo es totalmente observable si y solo si la matriz de observabilidad  $[C^T \ A^T C^T]$  sea de rango  $n=2$ , lo que se puede verificar fácilmente.

## 3.2 Discretización

La discretización de las ecuaciones (3.8) y (3.4) toma la forma siguiente [8], [9]:

$$x((k+1)T) = G(T)x(kT) + H(T)u(kT) \quad (3.9)$$

donde:

$$G(T) = e^{AT} \quad (3.10)$$

$$H(T) = \left( \int_0^T e^{A\lambda} d\lambda \right) B \quad (3.11)$$

$$y(kT) = Cx(kT) + Du(kT) \quad (3.12)$$

siendo C y D matrices constantes independientes del tiempo de muestreo T. Se puede demostrar que la correspondiente función de transferencia pulso es:

$$F(z) = C(zI - G)^{-1}H + D \quad (3.13)$$

Evidentemente, los polos de F(z) son los ceros de  $|zI - G| = 0$ . Es decir:

$$z^n + a_1z^{n-1} + a_2z^{n-2} + \dots + a_{n-1}z + a_n = 0$$

donde los coeficientes  $a_i$  dependen de los elementos de G. Para nuestro sistema de orden 2 tenemos:  $z^2 + a_1z + a_2 = 0$

Para un período de muestreo de T=0.01 seg., las ecuaciones (3.10) y (3.11) toman la forma:

$$G = \begin{bmatrix} 0.999138 & 0.009811 \\ -0.171185 & 0.962232 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$H = \begin{bmatrix} 0.004396 \\ 0.87369 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Reemplazando las expresiones de C, G, H y D en la ecuación (3.13) y evaluando, se obtiene la función transferencia pulso siguiente:

$$F(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{0.0044z + 0.0043}{z^2 - 1.9614z + 0.9631} \quad (3.16)$$

A la expresión F(z) también se le denomina  $G_p(z)$ . La ecuación (3.16) es de la forma:

$$F(z) = G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1z + b_2}{z^2 + a_1z + a_2} \quad (3.17)$$

luego podemos obtener los siguientes parámetros discretos (que también dependen de la frecuencia de muestreo):

$$a_0 = 1; \quad a_1 = -1.9614; \quad a_2 = 0.9631;$$

$$b_0 = 0; \quad b_1 = 0.0044; \quad b_2 = 0.0043$$

La respuesta del modelo de la planta discretizada a una entrada escalón unitario se muestra en la figura 3.1.



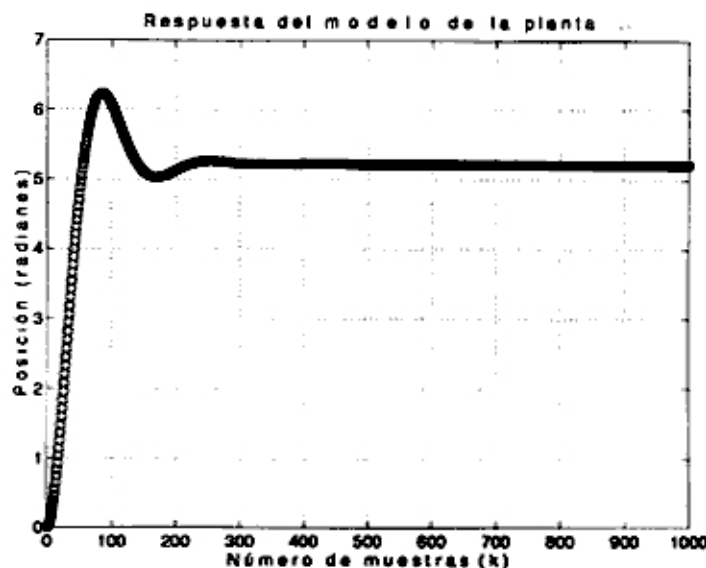


Figura 3.1: Respuesta del modelo de la planta al escalón.

### Forma Canónica Controlable

La ecuación (3.17) se puede reescribir como:

$$F(z) = G_p(z) = \frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} \quad (3.18)$$

y su correspondiente ecuación de diferencias es:

$$y(k) = -a_1 y(k-1) - a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2) \quad (3.19)$$

Las expresiones dadas en las ecuaciones (3.9) y (3.12) se pueden expresar en su forma canónica controlable como sigue:

$$\hat{x}(k+1) = \hat{G}\hat{x}(k) + \hat{H}u(k); \quad y(k) = \hat{C}\hat{x}(k) + \hat{D}u(k) \quad (3.20)$$

donde:

$$\hat{G} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0.9631 & 1.9614 \end{bmatrix}; \quad \hat{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{C} = [b_2 - a_2 b_0 \quad b_1 - a_1 b_0] = [0.0043 \quad 0.0044]; \quad \hat{D} = D = 0 \quad (3.21)$$

por consiguiente:

$$y(k) = \begin{bmatrix} b_2 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

## **Controlabilidad y Observabilidad Discretas**

Los conceptos de controlabilidad y observabilidad completa para plantas discretas es similar que para el caso continuo. Los resultados son los mismos si la frecuencia de muestreo se selecciona adecuadamente.

# Principios y Algoritmos MBPC

## 4.1 Principios del MBPC

El Control Predictivo Basado en un Modelo (MBPC) [1] es una metodología de control desarrollada alrededor de ciertos principios comunes, entre los cuales podemos citar:

- Uso explícito de un modelo del proceso para pronosticar su salida en instantes de tiempo futuro.
- Cálculo de una acción de control óptima basada en la minimización o maximización de las funciones de costo, posiblemente incluyendo restricciones en las variables del proceso.

La notación usada es la siguiente:

- $t$ : Denota el índice de tiempo discreto ( $t=0, 1, 2, \dots$ ).
- $u(t)$ : Denota la entrada o la variable manipulada (VM) del proceso.
- $y(t)$ : Denota la salida o la variable controlada (VC) del proceso.
- $w(t)$ : Denota la trayectoria deseada o "setpoint".
- $r(t)$ : Denota la trayectoria de referencia.
- $u(t+k/t)$ : Denota los valores futuros de la entrada, postulados en el tiempo  $t$ , es decir:

$$\{u(t/t), u(t+1/t), \dots\}$$

- $y(t+k/t)$ : Denota los valores pronosticados o futuros de la salida basados en:  
a) Mediciones disponibles en el tiempo  $t$  y para diferentes valores de  $k$ . Estas mediciones son:

$$\{y(t), y(t-1), \dots, u(t-1), u(t-2), \dots\}$$

- b) Valores futuros de la entrada:

$$\{u(t/t), u(t+1/t), \dots\}$$

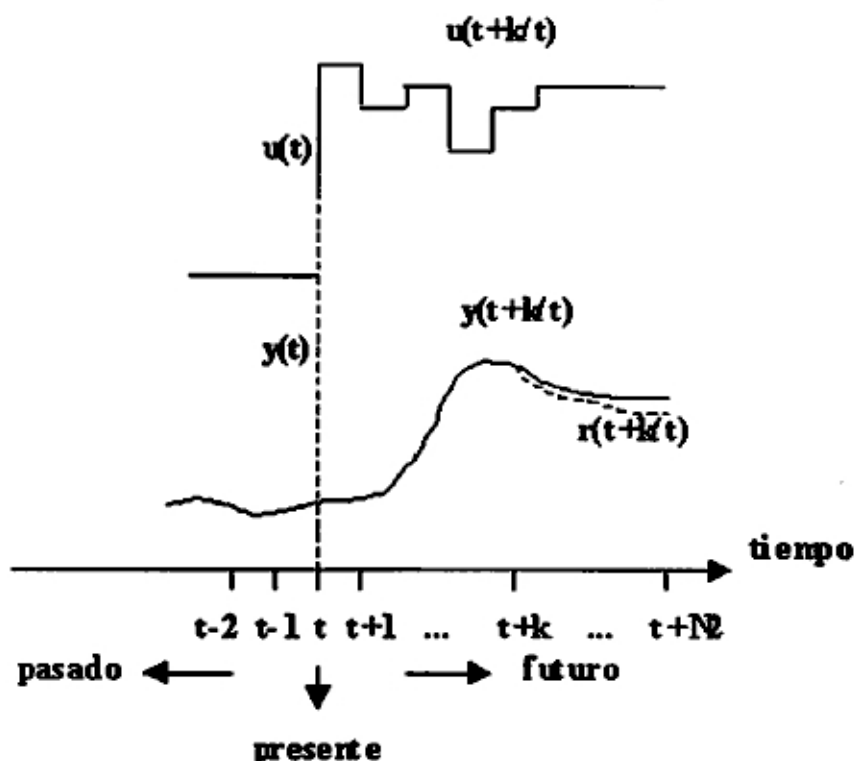


Figura 4.1: Estrategia del Control Predictivo.

Con relación a la figura 4.1, el principio del MBPC se caracteriza por la siguiente estrategia [1], [2]:

- A cada momento  $t$ , la salida del proceso  $y(t+k)$  se pronostica sobre un horizonte de tiempo  $k=1 \dots N2$ . Los valores pronosticados son indicados por  $y(t+k/t)$  y el valor  $N2$  se denomina el horizonte de predicción. La predicción se determina por medio de un modelo del proceso; se asume que el modelo está disponible. El pronóstico depende de las entradas y salidas pasadas, pero también del escenario del control futuro:  $u(t+k/t)$ ,  $k = 0 \dots N2 - 1$ .
- Una trayectoria de referencia  $r(t+k/t)$ ,  $k = 1 \dots N2$  iniciándose en  $r(t/t)=y(t)$  se define sobre el horizonte de predicción, obteniéndose que la salida del proceso  $y(t)$  siga a la trayectoria deseada  $w(t)$ .
- El vector de control  $u(t+k/t)$ ,  $k = 0 \dots N2 - 1$  se calcula para minimizar una función de costo específica que depende de los errores de control pronosticados:  $[r(t+k/t) - y(t+k/t)]$ ,  $k = 1 \dots N2$ .
- Sólo el primer elemento  $u(t/t)$  del vector de control óptimo

$u(t+k/t)$ ,  $k = 0 \dots N-1$  se aplica al proceso real. Todos los otros elementos del vector de control no participan. Sin embargo, al siguiente instante de muestreo, todas las secuencias de tiempo son desplazadas; una nueva medición de la salida  $y(t+1)$  es obtenida y el procedimiento íntegro se repite. Este procedimiento conduce a una nueva entrada de control  $u(t+1/t+1)$ , que es generalmente diferente a  $u(t+1/t)$  calculado previamente. Este principio se denomina la estrategia de horizonte recesivo.

Sobre la estrategia de control pueden ser mencionados algunos elementos característicos del MBPC :

- Predicción usando el modelo del proceso.
- Especificación de una trayectoria.
- Estructuración de la futura ley de control.
- Definición de la función de costo (y sus restricciones).
- Cálculo de la optimización del escenario de control.

La estructura del MBPC puede ser visualizada en el diagrama de bloques mostrado en la figura 4.2.

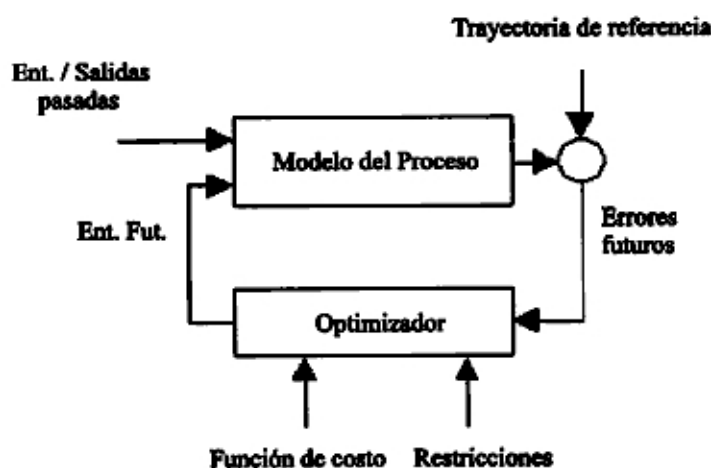


Figura 4.2: Estructura del MBPC

## 4.2 Algoritmos de Control

### 4.2.1 El Modelo del Proceso

En la figura 4.3 se muestra el modelo linealizado y discretizado con perturbaciones.

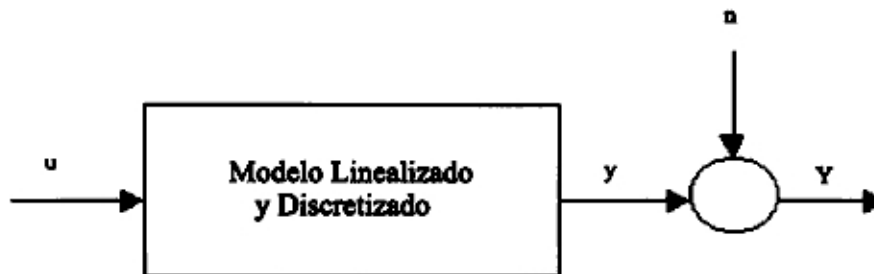


Figura 4.3: Modelo general del proceso bajo perturbaciones.

El modelo CARIMA (Controlled Autoregressive Integrated Moving Average) es un modelo lineal básico usado con el GPC (Control Predictivo Generalizado; [3]). Este modelo también es usado en el EPSAC original (Extended Prediction Self-Adaptive; [1]). El modelo del proceso puede ser representado por:

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{C(q^{-1})}{\Delta}e(t) \quad (4.1)$$

donde  $q^{-1}$  es el operador de retardo,  $\Delta = 1 - q^{-1}$ , y:

$$B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m} \quad (4.2)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n} \quad (4.3)$$

El origen del término CARIMA se debe a que la ecuación de diferencias del modelo del proceso presenta tres componentes siguientes:

$$Y(k) = -a_1Y(k-1) - a_2Y(k-2) - \dots - a_mY(k-m)$$

(*"output Auto Regressive component"*)

$$+b_0u(k-1) + b_1u(k-2) + \dots + b_nu(k-n-1)$$

("control Moving Average component")

$$\frac{+e(k) + c_1 e(k-1) + c_2 e(k-2) + \dots + c_{n_c} e(k-n)}{\Delta}$$

("disturbance Integrated Moving Average component")

Para nuestro proceso de segundo orden:

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2} \quad (4.4)$$

$$B(q^{-1}) = b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2} \quad (4.5)$$

con  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  conocidos. Entonces, la salida del modelo sin considerar las perturbaciones se puede escribir:

$$Y(t) = y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} u(t) = \frac{b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2}}{1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}} u(t) \quad (4.6)$$

que conduce a la ecuación de diferencias:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) \quad (4.7)$$

El modelo lineal más general es de la forma:

$$A(q^{-1})Y(t) = \frac{B(q^{-1})}{E(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (4.8)$$

La salida total del modelo está representada por la expresión:

$$Y(t) = y(t) + n(t) \quad (4.9)$$

y su representación predictiva es:

$$Y(t+k/t) = y(t+k/t) + n(t+k/t) \quad (4.10)$$

con:

$$n(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (4.11)$$

## 4.2.2 El Predictor

**Predicción de  $y(t+k/t)$ :**

Existen dos posibles configuraciones de implementación. Las configuraciones mostradas en la figura 4.4 ilustran un modelo de segundo orden (que es nuestro caso).

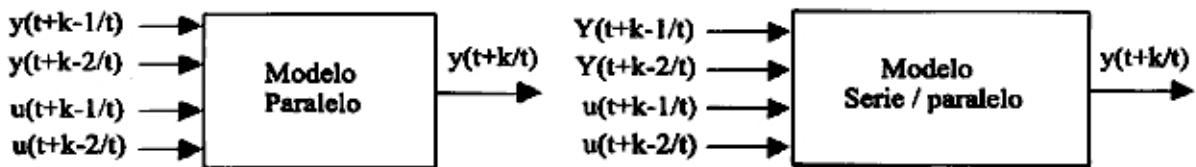


Figura 4.4: Representación de los modelos paralelo y serie/paralelo.

### Modelo Paralelo

El modelo paralelo sólo puede ser usado para procesos estables. El modelo paralelo es la implementación del modelo por defecto, en el que la salida  $y(t)$  se realimenta así misma:

$$Y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) + \frac{1}{1 - q^{-1}}e(t) = y(t) + n(t) \quad (4.12)$$

con:

$$C(q^{-1}) \equiv 1; \quad D(q^{-1}) \equiv (1 - q^{-1}); \quad n(t) = \frac{1}{1 - q^{-1}}e(t); \quad y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t). \quad (4.13)$$

La salida del proceso sin considerar las perturbaciones puede ser reescrita como:

$$y(t) = (1 - A(q^{-1}))y(t) + B(q^{-1})u(t)$$

$$y(t) = -a_1y(t - 1) - a_2y(t - 2) - \dots + b_1u(t - 1) + b_2u(t - 2) + \dots \quad (4.14)$$

La expresión más general es:

$$y(t + k/t) = -a_1y(t + k - 1/t) - a_2y(t + k - 2/t) - \dots + b_1u(t + k - 1/t) + b_2u(t - 2/t) + \dots \quad (4.15)$$

Para nuestro sistema de segundo orden, la salida  $y(t+k/t)$  puede ser representada en el diagrama de bloques de la figura 4.5, que es el que usaremos para nuestra implementación.



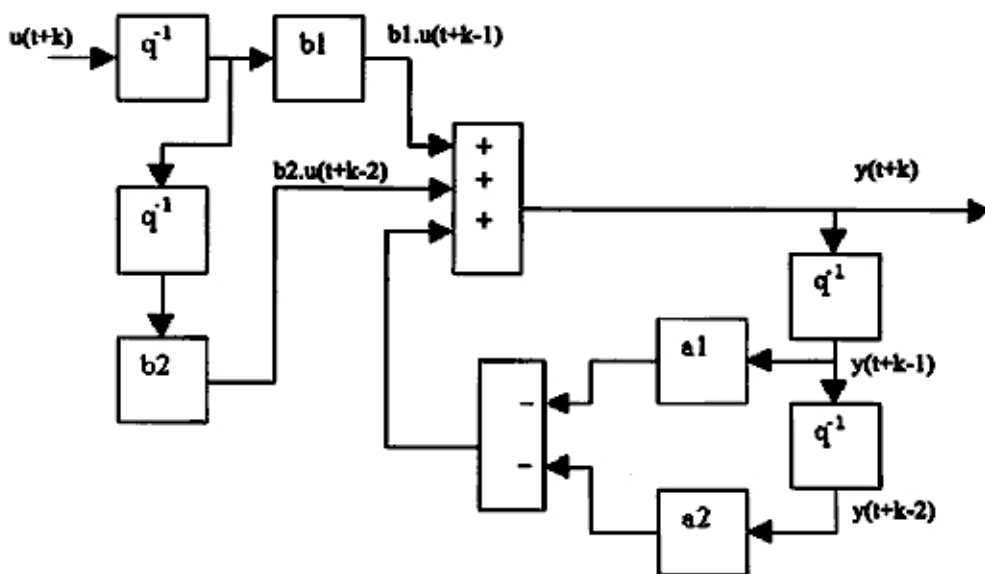


Figura 4.5: Modelo paralelo sin perturbaciones

### Modelo Serie/Paralelo

El modelo serie/paralelo puede ser usado en procesos estables e inestables. En este caso, el modelo de perturbaciones  $C(q^{-1})/D(q^{-1})$  puede ser escogido diferente al modelo paralelo. El modelo serie/paralelo se obtiene reescribiendo el modelo paralelo como:

$$A(q^{-1})Y(t) = B(q^{-1})u(t) + \frac{A(q^{-1})}{1 - q^{-1}}e(t) \quad (4.16)$$

con:

$$C(q^{-1}) \equiv A(q^{-1}); \quad D(q^{-1}) = 1 - q^{-1} \quad (4.17)$$

entonces:

$$Y(t) = (1 - A(q^{-1}))Y(t) + B(q^{-1})u(t) + \frac{A(q^{-1})}{1 - q^{-1}}e(t) = y(t) + n(t) \quad (4.18)$$

siendo:

$$y(t) = -a_1Y(t-1) - a_2Y(t-2) - \dots + b_1u(t-1) + b_2u(t-2) + \dots \quad (4.19)$$

$$n(t) = \frac{A(q^{-1})}{1 - q^{-1}}e(t) \quad (4.20)$$

Una expresión general del modelo serie/paralelo es:

$$y(t+k/t) = -a_1Y(t+k-1/t) - a_2Y(t+k-2/t) - \dots + b_1u(t+k-1/t) + b_2u(t+k-2/t) + \dots \quad (4.21)$$

La diferencia del modelo serie/paralelo con respecto al modelo paralelo radica en que la salida  $y(t+k/t)$  depende de la salida total  $Y$  de la planta o proceso. Para nuestro proceso de segundo orden, la salida  $y(t+k/t)$  puede ser representada por la figura 4.6.

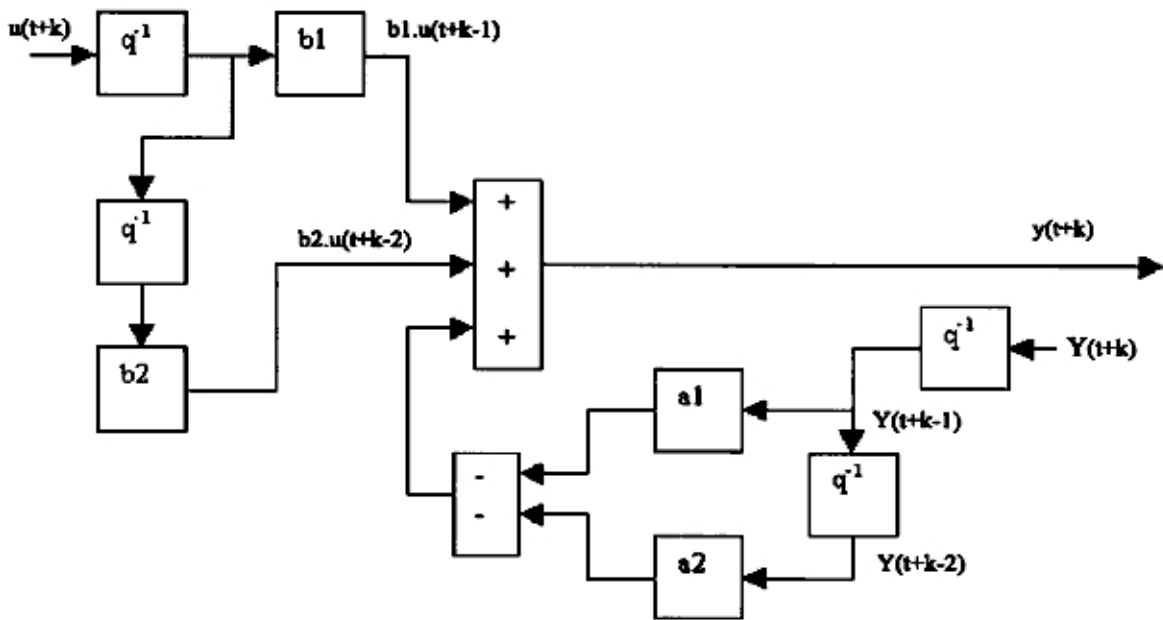


Figura 4.6: Modelo serie/paralelo sin perturbaciones

La implementación de los modelos paralelo y serie/paralelo que pueden ser usados en la identificación de parámetros del proceso para su posterior validación, se muestran en la figura 4.7.

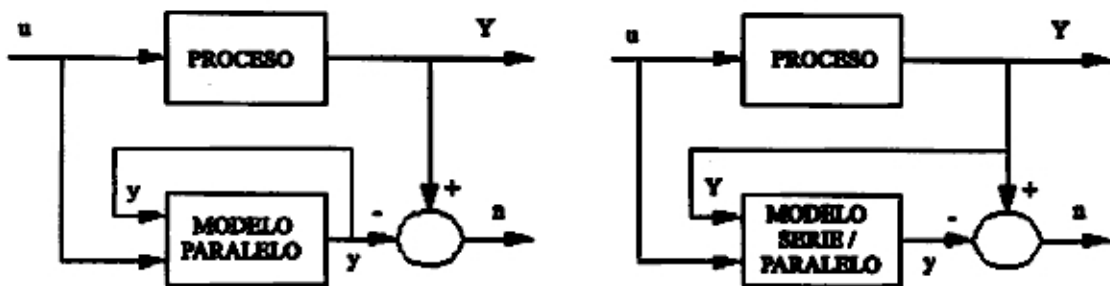


Figura 4.7: Implementación de los modelos paralelo y serie/paralelo.

### Predicción de $n(t+k/t)$ :

La perturbación  $n(t)$  incluye todos los efectos en la medición de la salida  $Y(t)$ . Así, incluye los efectos de las perturbaciones del proceso, otras entradas al proceso (no modeladas), mediciones de ruido, errores del modelo, etc. Usando nuestro modelo genérico del proceso:

$$Y(t + k/t) = y(t + k/t) + n(t + k/t)$$

podemos calcular  $y(t)$  usando la data

$$y(t-1) y(t-2) y(t-3) \dots u(t-1) u(t-2) u(t-3) \dots]$$

Luego, usando las mediciones de salida  $Y(t)$  del proceso, podemos calcular el valor de la perturbación  $n(t)$ :

$$n(t) = Y(t) - y(t) \tag{4.22}$$

Observar que también tenemos los valores previos  $n(t-1)$ ,  $n(t-2)$ ,... disponibles en la base de datos.

### Modelo Paralelo

Considerando:

$$n(t) = \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \tag{4.23}$$

con:

$$C(q^{-1}) \equiv 1; \quad D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

El filtro para contrarrestar las perturbaciones  $n(t)$  puede ser escrito como:

$$n_f(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q-1)}n(t) \quad (4.24)$$

Dicho filtro puede ser usado para eliminar perturbaciones en estado estable, suprimir perturbaciones para frecuencias específicas, etc. Reemplazando la ecuación (4.23) en (4.24) se obtiene:

$$n_f(t) = e(t) \quad (4.25)$$

Se concluye entonces que la señal  $n_f(t)$  puede ser ruido blanco. Como el ruido blanco es no correlacionado, entonces por definición, su valor medio es cero:

$$n_f(t + k/t) = 0 \quad \text{para } k = 1 \dots N/2; k > 0$$

$$n_f(t + k/t) = n(t + k/t) \quad \text{para } k < 0$$

La ecuación (4.24) puede reescribirse como:

$$n(t) = n(t-1) + n_f(t) \quad (4.26)$$

o de la siguiente forma:

$$n(t + k/t) = n(t + k - 1/t) + n_f(t + k/t) \quad (4.27)$$

El modelo paralelo de las perturbaciones dada por la ecuación (4.27) se representa en la figura 4.8.

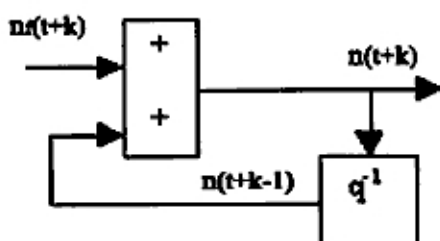


Figura 4.8: Modelo paralelo de las perturbaciones

### Modelo Serie/Paralelo

Idéntico al modelo paralelo pero con:

$$C(q^{-1}) = A(q^{-1})$$

$$D(q^{-1}) = 1 - q^{-1}$$

y haciendo las mismas consideraciones que en el caso paralelo, entonces usando el filtro  $D(q^{-1})/C(q^{-1})$  para contrarrestar las perturbaciones  $n(t)$  y considerando el proceso de segundo orden obtenemos:

$$n(t) = \frac{(1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2})}{1 - q^{-1}}n_f(t) \quad (4.28)$$

Luego, la ecuación de diferencias que lo representa puede ser escrita así:

$$n(t+k) = n(t+k-1) + n_f(t+k) + a_1n_f(t+k-1) + a_2n_f(t+k-2) \quad (4.29)$$

y puede ser representada en la figura 4.9.

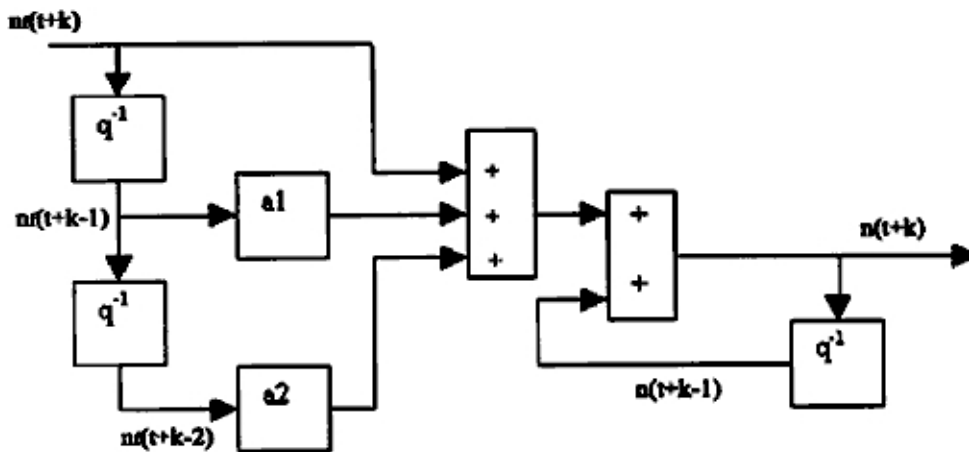


Figura 4.9: Modelo serie/paralelo de las perturbaciones

### Salida del modelo en función de los incrementos de entrada y salida

Considerando el primer término de la ecuación (4.12) y reemplazando en ella las ecuaciones (4.4) y (4.5) se obtiene:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})}u(t) = \frac{b_1q^{-1} + b_2q^{-2}}{1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2}}u(t)$$

su correspondiente ecuación de diferencias es:

$$y(t) = -a_1y(t-1) - a_2y(t-2) + b_1u(t-1) + b_2u(t-2)$$

y haciendo  $t=t+k$  obtenemos:

$$y(t+k) = -a_1y(t+k-1) - a_2y(t+k-2) + b_1u(t+k-1) + b_2u(t+k-2) \quad (4.30)$$

Asimismo, la ecuación (4.12) en el tiempo  $t+k$  toma la forma:

$$Y(t+k) = y(t+k) + n(t+k)$$

y reemplazando las ecuaciones (4.30) y (4.27) en esta última ecuación se obtiene:

$$\begin{aligned} Y(t+k) &= -a_1y(t+k-1) - a_2y(t+k-2) + b_1u(t+k-1) \\ &+ b_2u(t+k-2) + n(t+k-1) + n_f(t+k) \end{aligned} \quad (4.31)$$

Considerando los incrementos de la entrada y de la salida:

$$\Delta u(t+k/t) = u(t+k/t) - u(t+k-1/t)$$

$$\Delta y(t+k/t) = y(t+k/t) - y(t+k-1/t)$$

y como dichos incrementos son válidos para cualquier tiempo  $k$ , entonces podemos despejar  $u(t)$ ,  $u(t+1)$ , ...,  $y(t)$ ,  $y(t+1)$ , ... y reemplazarlas en (4.31), obteniéndose las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} Y(t+1) &= -(a_1 + a_2)y(t-1) + (b_1 + b_2)u(t-1) - a_1\Delta y(t) + b_1\Delta u(t) + n(t) \\ &+ n_f(t+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t+2) &= -(a_1 + a_2)y(t-1) + (b_1 + b_2)u(t-1) - (a_1 + a_2)\Delta y(t) - a_1\Delta y(t+1) \\ &+ (b_1 + b_2)\Delta u(t) + b_1\Delta u(t+1) + n(t+1) + n_f(t+2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t+3) &= -(a_1 + a_2)y(t-1) + (b_1 + b_2)u(t-1) - (a_1 + a_2)\Delta y(t) \\ &- (a_1 + a_2)\Delta y(t+1) - a_1\Delta y(t+2) + (b_1 + b_2)\Delta u(t) + (b_1 + b_2)\Delta u(t+1) \\ &+ b_1\Delta u(t+2) + n(t+2) + n_f(t+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y(t+4) &= -(a_1 + a_2)y(t-1) + (b_1 + b_2)u(t-1) - (a_1 + a_2)\Delta y(t) \\ &- (a_1 + a_2)\Delta y(t+1) - (a_1 + a_2)\Delta y(t+2) - a_1\Delta y(t+3) + (b_1 + b_2)\Delta u(t) \\ &+ (b_1 + b_2)\Delta u(t+1) + (b_1 + b_2)\Delta u(t+2) + b_1\Delta u(t+3) + n(t+3) + n_f(t+4) \end{aligned}$$

Este conjunto de expresiones se representa mediante la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} Y(t+1) \\ Y(t+2) \\ Y(t+3) \\ Y(t+4) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(a1+a2) \\ -(a1+a2) \\ -(a1+a2) \\ -(a1+a2) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} y(t-1) + \begin{pmatrix} (b1+b2) \\ (b1+b2) \\ (b1+b2) \\ (b1+b2) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} u(t-1)$$

$$+ \begin{pmatrix} -a1 & 0 & 0 & 0 \\ -(a1+a2) & -a1 & 0 & 0 \\ -(a1+a2) & -(a1+a2) & -a1 & \dots \\ -(a1+a2) & -(a1+a2) & -(a1+a2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y(t) \\ \Delta y(t+1) \\ \Delta y(t+2) \\ \Delta y(t+3) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} b1 & 0 & 0 & 0 \\ (b1+b2) & b1 & 0 & 0 \\ (b1+b2) & (b1+b2) & b1 & \dots \\ (b1+b2) & (b1+b2) & (b1+b2) & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u(t) \\ \Delta u(t+1) \\ \Delta u(t+2) \\ \Delta u(t+3) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n(t/t) \\ n(t+1/t) \\ n(t+2/t) \\ n(t+3/t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_f(t+1/t) \\ n_f(t+2/t) \\ n_f(t+3/t) \\ n_f(t+4/t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

Entonces, se puede expresar la salida total del proceso (4.9) como:

$$Y = GU + \dot{Y} + n_f \quad (4.33)$$

donde:

$G$ : Matriz de dimensión  $N_2 \times N_2$

$U$ : Vector de señales de control futuras

$\dot{Y}$ : Vector de salida, que representa la respuesta libre del proceso

$n_f$ : Vector de errores debido a términos de ruido futuros

siendo  $n_f = 0$  por las consideraciones expuestas para la ecuación (4.25).

### 4.2.3 Algoritmos de Control Predictivo

En esta sección se presentan y discuten los algoritmos de control predictivo sin y con restricciones, sea en la entrada, salida, o ambas [1], [2] y [10].

#### Ley de Control Sin Restricciones

El objetivo del controlador predictivo es encontrar el vector de control  $u(t+k/t)$ ,  $k = 0, \dots, N_2 - 1$  que minimize la función de costo:

$$J = \sum_{K=N_1}^{N_2} [r(t+k/t) - Y(t+k/t)]^2 + \lambda \sum_{K=0}^{N_u-1} [\Delta u(t+k/t)]^2 \quad (4.34)$$

donde  $\Delta u(t+k/t) \equiv 0$  para  $k \geq N_u$  y con

$$\Delta u(t+k/t) = u(t+k/t) - u(t+k-1/t) \quad (4.35)$$

La trayectoria de referencia se representa por la ecuación

$$r(t+k/t) = \alpha r(t+k-1/t) + (1-\alpha)w(t+k/t) \quad (4.36)$$

evaluados desde  $k = 1, \dots, N_2$ , donde  $r(t/t) = y(t)$

Los parámetros de diseño son:



- $N_1$ : Horizonte de predicción mínimo
- $N_2$ : Horizonte de predicción máximo (por defecto  $N_2 = N_1+1, \dots, N_1+10$ )
- $N_u$ : Horizonte de control (por defecto  $N_u=1$ )
- $N_1 \dots N_2$ : Horizonte de coincidencia (por defecto  $N_1$ )
- $\lambda$ : Parámetro de peso (por defecto cero)
- $\alpha$ : Parámetro de filtraje (por defecto cero)

Es importante observar que:

1. La trayectoria de referencia dada por la ecuación (4.36), viene a constituir un filtro de primer orden para  $w(t)$ , que puede reescribirse como la función de transferencia:

$$\frac{r(q)}{w(q)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha q^{-1}} \quad (4.37)$$

2. El filtro para  $w(t)$  puede considerarse fuera del lazo de control, no afectando así al lazo de estabilidad y el rechazo al ruido.

Considerando  $q^{-1} \equiv z^{-1}$  la ecuación (4.37) se expresa así:

$$\frac{r(z)}{w(z)} = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}} \quad (4.38)$$

Por otro lado, la respuesta total del sistema se puede considerar como el resultado acumulativo de 2 efectos, expresada así:

$$Y(t + k/t) = Y_{libre}(t + k/t) + Y_{forzada}(t + k/t) \quad (4.39)$$

La componente  $Y_{libre}(t + k/t)$  viene a ser:

- El efecto del control pasado  $\{u(t-1), u(t-2), \dots\}$
- El efecto de control futuro:  $u(t/t) = u(t-1)$ ;  $u(t+1/t) = u(t-1)$ ;  $u(t+2/t) = u(t-1)$ ;  $\dots$ ;  $\Delta u(t/t) = \Delta u(t+1/t) = \dots = \Delta u(t + N_u - 1/t) \equiv 0$
- El efecto de las perturbaciones futuras  $n(t+k/t)$

La componente  $Y_{forzada}(t + k/t)$  viene a ser el efecto de la acción del control futuro, como sigue:

$$\Delta u(t/t), \Delta u(t + 1/t), \dots, \Delta u(t + N_u - 1/t).$$

Además, la componente  $Y_{forzada}(t + k/t)$  es también el efecto de una secuencia de entradas escalón. Esas entradas escalón son las siguientes:

- Un escalón con amplitud  $\Delta u(t/t)$  al tiempo  $t$ , resultando en una contribución  $g_k \Delta u(t/t)$  para los procesos de salida al tiempo  $t+k$  ( $k$  períodos de muestreo posteriores).
- Un escalón con amplitud  $\Delta u(t + 1/t)$  al tiempo  $t+1$ , resultando en una contribución  $g_k \Delta u(t + 1/t)$  para los procesos de salida al tiempo  $t+k$  ( $k-1$  períodos de muestreo posteriores).

El efecto acumulativo de todos los escalones es:

$$Y_{forzada}(t+k/t) = g_k \Delta u(t/t) + g_{k-1} \Delta u(t+1/t) + \dots + g_{k-N_u+1} \Delta u(t+N_u-1/t) \quad (4.40)$$

Los parámetros  $g_1, g_2, \dots, g_k, \dots, g_{N_2}$  son los coeficientes de la respuesta del sistema al escalón unitario. Estos coeficientes pueden ser calculados como sigue:

- Para un sistema *lineal*, la respuesta al escalón unitario no depende del punto de operación. Este punto es fijado y puede ser calculado "off line" usando el modelo del sistema.
- Para un sistema *no lineal* semejante a una Red Neuronal (RN), la respuesta al escalón unitario es diferente para cada punto de operación. Esta respuesta tiene que ser calculada a cada instante de muestreo "on line" iterativamente.

De la ecuación (4.2.2) se obtiene la componente  $Y_{forzada}$ , así:

$$\begin{pmatrix} Y_{forzada}(t + N_1/t) \\ Y_{forzada}(t + N_1 + 1/t) \\ \dots \\ \dots \\ Y_{forzada}(t + N_2/t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{N_1} & g_{N_1-1} & g_{N_1-2} & \dots \\ g_{N_1+1} & g_{N_1} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta u(t/t) \\ \Delta u(t + 1/t) \\ \dots \\ \dots \\ \Delta u(t + N_u - 1/t) \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

que es de la forma:

$$Y_{forzado} = GU \quad (4.42)$$

conduciendo a la ecuación clave del MBPC:

$$Y = \hat{Y} + GU \quad (4.43)$$

con la siguiente notación:

$$Y = [Y(t + N1/t) \dots Y(t + N2/t)]^T$$

$$R = [r(t + N1/t) \dots r(t + N2/t)]^T$$

$$\hat{Y} = [Y_{libre}(t + N1/t) \dots Y_{libre}(t + N2/t)]^T$$

$$U = [\Delta u(t/t) \dots \Delta u(t + Nu - 1/t)]^T \quad (4.44)$$

Con la notación de arriba, la función de costo llega a ser:

$$(R - Y)^T(R - Y) + \lambda U^T U = [(R - \hat{Y}) - GU]^T[(R - \hat{Y}) - GU] + \lambda U^T U \quad (4.45)$$

Esta es una forma cuadrática en U, cuya minimización por diferenciación nos dá la siguiente solución óptima:

$$\hat{U} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (R - Y) \quad (4.46)$$

Es importante indicar que:

- La matriz  $[G^T G + \lambda I]$  a ser invertida tiene dimensión  $N_u \times N_u$ . Para el caso por defecto  $N_u=1$ , esto resulta en una ley de control escalar, con muy buenos resultados en muchos casos prácticos:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t + k/t) - \hat{Y}(t + k/t)]}{(\sum_{k=1}^{N_2} g_k^2 + \lambda)} \quad (4.47)$$

- La optimización de la señal de control  $u(t+k/t)$  considera los parámetros  $\mu_i$  como bases de una función polinomial. Por ejemplo, según [1],[2], la señal de control se puede representar en ecuación de diferencias así:

$$u(t + k/t) = \mu_0 + \mu_1 \cdot k + \mu_2 \cdot k^2 \quad (4.48)$$

con:  $k = 0 \dots N2 - 1$

En la la figura 4.10 se presenta el diagrama de bloques del sistema de control predictivo.

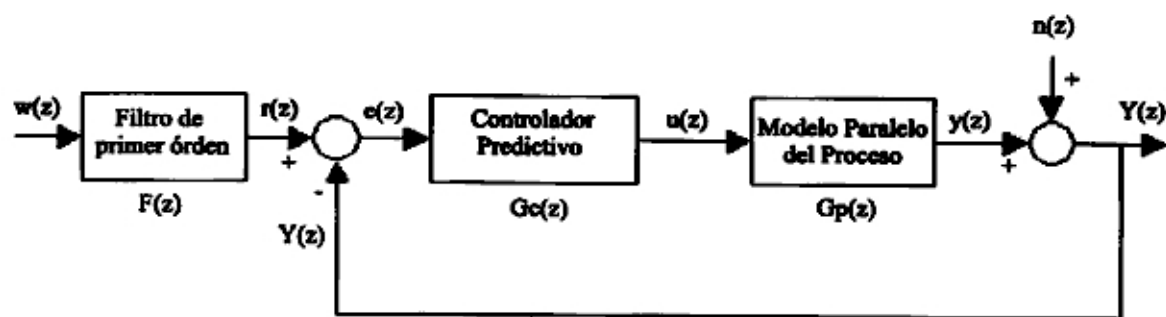


Figura 4.10: Diagrama de bloques del Sistema de Control Predictivo.

El Control Predictivo puede mostrar diferentes propiedades [2], [4], [6], [7], dependiendo del horizonte escogido, es decir,  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $N_u$ . Por ejemplo:

- Si  $N_1 = n$ ,  $N_2 = 2n - 1$ ,  $N_u = n$ ,  $\lambda = 0$ , entonces la optimización del control dá un mínimo cero, la salida alcanza la referencia después de  $n$  muestras y subsecuentemente se mantiene aquí proporcionando una vigorosa acción de control apropiadas para aplicaciones de alto rendimiento, como en la robótica.
- Si escogemos  $N_1 = N_u = 1$ ,  $N_2 \rightarrow \infty$  y  $\lambda = 0$ , entonces obtendremos un resultado particularmente relevante en aplicaciones en control de procesos, naturalmente con un control lento, pero con una mejor respuesta en estado transitorio.

### Ley de Control con Restricciones

El problema de control presentado en la subsección anterior fue formulado bajo condiciones de control sin restricciones; es decir, considerando a todas las señales con un rango ilimitado. Sin embargo, esto no es realista. En la práctica, todos los procesos son sujetos a restricciones. Por ejemplo, en el caso de nuestro servosistema si la señal de control  $u(t)$  es demasiado grande, entonces el amplificador se puede saturar produciéndose su deterioro. En presencia de restricciones, no es posible la resolución analítica del problema de minimización, debiendo recurrirse a dos posibles soluciones:

- Tratar a las variables como si fueran no restringidas para, posteriormente, proceder al corte o limitación por software para obtener valores dentro de un rango especificado.
- Usar técnicas numéricas, como la de "programación cuadrática" (QP), cuya expresión general está dada por:

$$\text{mínimo } V(U) = U^T H U + 2f^T U + c \quad (4.49)$$

donde:

$$H = G^T G + \lambda I$$

$$f = -(r - \bar{Y})^T G$$

sujeto a restricciones de la forma:

$$AU \leq b$$

donde A es una matriz y b es un vector, los cuales contienen valores máximos y mínimos que puede tomar la variable de control y la variable de salida, así:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_M(t/t) \\ u_M(t+1/t) \\ u_M(t+Nu-1/t) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ -u_M(t/t) \\ -u_M(t+1/t) \\ -u_M(t+Nu-1/t) \end{pmatrix} \quad (4.50)$$

$$\begin{pmatrix} -G \\ G \end{pmatrix} u(t) \leq \begin{pmatrix} -Y_{\min}(t) + \bar{Y}(t) \\ Y_{\max}(t) - \bar{Y}(t) \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

donde:

$Y_{\min}, Y_{\max}$ : Valores que acotan la salida

$\bar{Y}$ : Respuesta libre del sistema.

## Capítulo 5

# Aplicación del MBPC al proceso

En el presente capítulo se presentan y discuten los algoritmos de control predictivo aplicados a nuestro sistema, en primera instancia sin considerar restricciones, y luego, considerando restricciones de entrada y de entrada/salida.

### 5.1 Control Predictivo Sin Restricciones

Reescribiendo la ecuación (4.47):

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=N_1}^{N_2} g_k [r(t+k/t) - \hat{Y}(t+k/t)]}{(\sum_{k=1}^{N_2} g_k^2 + \lambda)} \quad (5.1)$$

y considerando  $Nu = 1$ ,  $N1 = 2$ ,  $N2 = 4$ , se obtiene:

$$\Delta u(t) = \frac{\sum_{k=2}^4 g_k [r(t+k/t) - \hat{Y}(t+k/t)]}{(\sum_{k=2}^4 g_k^2 + \lambda)} \quad (5.2)$$

Si  $\lambda=0$ , entonces:

$$\Delta u(t) = \frac{g_2 e(t+2/t) + g_3 e(t+3/t) + g_4 e(t+4/t)}{g_2^2 + g_3^2 + g_4^2} \quad (5.3)$$

Como  $g_2 = g_3 = g_4 = (b_1 + b_2)$  (ver ecuación 4.2.2) se obtiene:

$$\Delta u(t) = \frac{e(t+2/t) + e(t+3/t) + e(t+4/t)}{3(b_1 + b_2)} \quad (5.4)$$

Efectuando la siguiente asignación:

$$q_0 = \frac{1}{(b_1 + b_2)} \quad (5.5)$$

que se obtiene del antepenúltimo miembro de la ecuación (4.32), entonces la ecuación (5.4) se puede reescribir así:

$$\Delta u(t) = \frac{q_0 [e(t+2/t) + e(t+3/t) + e(t+4/t)]}{3} \quad (5.6)$$

Por otro lado, el error  $e(t+k/t)$  viene expresado por:

$$e(t+k/t) = r(t+k/t) - \hat{y}(t+k/t) \quad (5.7)$$

y la trayectoria de referencia considerada es:

$$r(t + k/t) = \alpha r(t + k - 1/t) + (1 - \alpha)w(t + k/t) \quad (5.8)$$

La optimización de la señal de control para nuestro proceso de segundo orden puede usar la ecuación (4.48), la cual, considerando la referencia  $r$  y los parámetros  $q$  puede reescribirse así:

$$u(t + k/t) = q_0 r(t + k/t) + q_1 r(t + k - 1/t) + q_2 r(t + k - 2/t) \quad (5.9)$$

con  $k=0, \dots, N2-1$ . Considerando una referencia escalón unitario, la secuencia  $u(t+k/t)$  se obtiene como:

$$u(t/t) = q_0$$

$$u(t + 1/t) = q_0 + q_1$$

$$u(t + 2/t) = q_0 + q_1 + q_2$$

$$u(t + 3/t) = q_0 + q_1 + q_2$$

Para  $k \geq 2$ , la señal de control se mantiene constante; esto significa teóricamente que en dos pasos se debe llegar a la convergencia.

Idénticamente que para  $u(t + k/t)$ , se puede asumir que la salida controlada del sistema sin perturbaciones puede expresarse como:

$$y(t + k/t) = p_1 r(t + k - 1/t) + p_2 r(t + k - 2/t) \quad (5.10)$$

Nuevamente, considerando una referencia escalón unitario, la secuencia  $y(t+k/t)$  se obtiene como:

$$y(t/t) = 0$$

$$y(t + 1/t) = p_1$$

$$y(t + 2/t) = p_1 + p_2$$

$$y(t + 3/t) = p_1 + p_2$$

Para  $k \geq 2$ , la señal de salida controlada se mantiene constante; esto confirma que en dos pasos se llega a la convergencia. Asimismo, reescribiendo la salida del modelo de la planta de la ecuación (3.19) en la forma:

$$y(t+k/t) = -a_1y(t+k-1/t) - a_2y(t+k-2/t) + b_1u(t+k-1/t) + b_2u(t+k-2/t) \quad (5.11)$$

y tomando transformadas  $Z$  a las ecuaciones (5.9), (5.10) y (5.11) se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\frac{u(z)}{r(z)} = q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2} \quad (5.12)$$

$$\frac{y(z)}{r(z)} = p_1z^{-1} + p_2z^{-2} \quad (5.13)$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad (5.14)$$

Asimismo, la función de transferencia de la salida del proceso respecto a la señal de control puede expresarse así:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{\frac{y(z)}{r(z)}}{\frac{u(z)}{r(z)}} = \frac{p_1z^{-1} + p_2z^{-2}}{q_0 + q_1z^{-1} + q_2z^{-2}} \quad (5.15)$$

Las ecuaciones (5.14) y (5.15) son equivalentes y tienen la misma forma polinómica; por consiguiente, las ecuaciones (5.9) y (5.10) se asumieron correctamente.

Si multiplicamos numerador y denominador de la ecuación (5.14) por  $q_0$ , se obtiene:

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{q_0b_1z^{-1} + q_0b_2z^{-2}}{q_0 + a_1q_0z^{-1} + a_2q_0z^{-2}} \quad (5.16)$$

Igualando los coeficientes de las ecuaciones (5.15) y (5.16) resulta:

$$p_1 = q_0b_1; \quad p_2 = q_0b_2; \quad q_1 = a_1q_0; \quad q_2 = a_2q_0 \quad (5.17)$$

Conocido el valor de  $q_0$  por la ecuación (5.5), y conocidos los valores de los parámetros  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $q_1$  y  $q_2$  a una determinada frecuencia de muestreo, se pueden evaluar las ecuaciones (5.9) y (5.10). Así, para una frecuencia de muestreo de  $f_s = 100Hz$  y diferentes valores de  $k$ , la ecuación (5.10) se expresa como:



$$\begin{aligned}
 y(t/t) &= 0 \\
 y(t + 1/t) &= 0.505747 \\
 y(t + 2/t) &= 0.99999975 \approx 1 \\
 y(t + 3/t) &= 0.99999975 \approx 1
 \end{aligned}$$

Entonces para  $k \geq 2$ , la salida se mantiene en 1 (salida deseada). En forma análoga, para la misma frecuencia de muestreo, de la ecuación (5.9) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 u(t/t) &= 114.9425 \\
 u(t + 1/t) &= -225.4482 \\
 u(t + 2/t) &= 110.7011 \\
 u(t + 3/t) &= 110.7011
 \end{aligned}$$

Entendiendo que estos valores para  $u$  están dados en voltios, entonces, resultan excesivos y por consiguiente no convenientes en una aplicación real. Por otro lado, la función de transferencia de pulso del controlador predictivo vendrá dada por:

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{e(z)}$$

Del diagrama de bloques del sistema de control mostrado en la figura 4.10, el error  $e(z)$  se expresa por:

$$\begin{aligned}
 e(z) &= r(z) - y(z) \\
 e(z) &= r(z) - G_p(z)u(z)
 \end{aligned}$$

Luego:

$$G_c(z) = \frac{u(z)}{r(z) - G_p(z)u(z)} = \frac{u(z)/y(z)}{r(z)/y(z) - G_p(z)\frac{u(z)}{y(z)}}$$

Denominando:

$$\begin{aligned}
 G_p(z) &= \frac{y(z)}{u(z)} \\
 \frac{y(z)}{r(z)} &= P(z)
 \end{aligned}$$

$$\frac{y(z)}{u(z)} = \frac{y(z)/r(z)}{u(z)/r(z)} = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

entonces evaluando:

$$G_c(z) = \frac{Q(z)}{1 - P(z)} \quad (5.18)$$

y reemplazando valores para  $P(z)$  y  $Q(z)$  se obtiene:

$$G_c(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-2}} \quad (5.19)$$

Reemplazando los valores de  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $p_1$  y  $p_2$  y factorizando  $q_0$  en la ecuación (5.19), resulta:

$$G_c(z) = \frac{q_0[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}]}{1 - b_1 q_0(z)^{-1} - b_2 q_0 z^{-2}} \quad (5.20)$$

La ecuación diferencia para (5.20) es:

$$\begin{aligned} u(t + k/t) &= q_0 b_1 u(t + k - 1/t) + q_0 b_2 u(t + k - 2/t) \\ &+ q_0 e(t + k) + q_0 a_1 e(t + k - 1/t) + q_0 a_2 e(t + k - 2/t) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Si  $\lambda \neq 0$ , entonces la ecuación (5.21) deviene en:

$$\begin{aligned} u(t + k/t) &= [\lambda + q_0 b_1 (1 - \lambda)]u(t + k - 1/t) \\ &+ q_0 (1 - \lambda)[b_2 u(t + k - 2/t) + e(t + k) \\ &+ a_1 e(t + k - 1/t) + a_2 e(t + k - 2/t)] \end{aligned} \quad (5.22)$$

Tomando transformadas  $Z$  a la ecuación (5.22) se obtiene:

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 (1 - \lambda)[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}]}{1 - [\lambda + q_0 b_1 (1 - \lambda)]z^{-1} - q_0 b_2 (1 - \lambda)z^{-2}} \quad (5.23)$$

Se puede apreciar que las ecuaciones (5.22) y (5.23) están escritas en función del parámetro  $q_0$ ; sin embargo, usando la ecuación (5.17) dichas ecuaciones se pueden reescribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} u(t + k/t) &= [\lambda + p_1 (1 - \lambda)]u(t + k - 1/t) \\ &+ p_2 (1 - \lambda)u(t + k - 2/t) + q_0 (1 - \lambda)e(t + k) \\ &+ q_1 (1 - \lambda)e(t + k - 1/t) + q_2 (1 - \lambda)e(t + k - 2/t) \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\frac{u(z)}{e(z)} = \frac{q_0 (1 - \lambda) + q_1 (1 - \lambda)z^{-1} + q_2 (1 - \lambda)z^{-2}}{1 - [\lambda + p_1 (1 - \lambda)]z^{-1} - p_2 (1 - \lambda)z^{-2}} \quad (5.25)$$

## 5.2 Control Predictivo Con Restricciones

En la sección anterior se han discutido los algoritmos, tanto para la señal de control como para la posición, sin y con el factor de peso  $\lambda$ . En esta sección se presentan los algoritmos de control considerando las restricciones para la señal de control  $u$  como para la posición  $y$ .

### 5.2.1 Restricciones de Entrada

Los valores de tensión para la señal  $u$  obtenidos en la sección anterior fueron excesivos. Considerarlos significaría destruir parte de la circuitería usada en la implementación y/o destruir el servomotor. Los valores numéricos de las restricciones para la señal  $u$  deben estar comprendidas en el siguiente rango:

$$-1.5 v \leq u(t + k/t) \leq 1.4 v \quad (5.26)$$

Es importante indicar que estos valores de  $u$  no incluyen el "offset" necesario para obtener el cero de referencia o reposo para la varilla, que en nuestro sistema viene a ser la posición vertical (hacia abajo). El "offset" para nuestra aplicación es de 2.3 voltios.

### 5.2.2 Restricciones de Salida

Las restricciones de salida tienen por objetivo limitar o cortar los sobreimpulsos en la salida  $y$  del sistema producidos en los transitorios, para obtener respuestas de salida estables, buscando que la salida, en nuestro caso la posición angular, siga a la referencia deseada, sea ésta fija o variable.

Las restricciones de salida para nuestro sistema están consideradas dentro de los siguientes rangos:

$$\begin{aligned} -1.0 * r(t + k/t) \leq y(t + k/t) \leq 0.0 & \quad \text{sentido de rotación horaria} \\ 0.0 \leq y(t + k/t) \leq 1.0 * r(t + k/t) & \quad \text{sentido de rotación anti-horaria} \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde  $r(t + k/t)$  viene expresada por:

$$r(t + k/t) = \alpha r(t + k - 1/t) + (1 - \alpha)w(t + k/t) \quad (5.28)$$

Considerando estas restricciones para las señales de control  $u$  y posición  $y$ , la ecuación (5.24) puede aplicarse satisfactoriamente.

### 5.3 Implementación

El sistema de control de posición consta de un servomotor DC con mecanismo de reducción, una varilla acoplada al rotor del motor (carga no lineal) perpendicular al eje de giro del motor, una etapa de potencia y un sensor de posición conformado por un codificador óptico (acoplado al eje del motor), un decodificador de cuadratura y un contador de 16 bits. Asimismo se hace uso de una PC Pentium y una tarjeta de adquisición de datos LAB-PC+. El esquema de implementación puede observarse en la figura 5.1 y el sistema real en la figura 5.2.

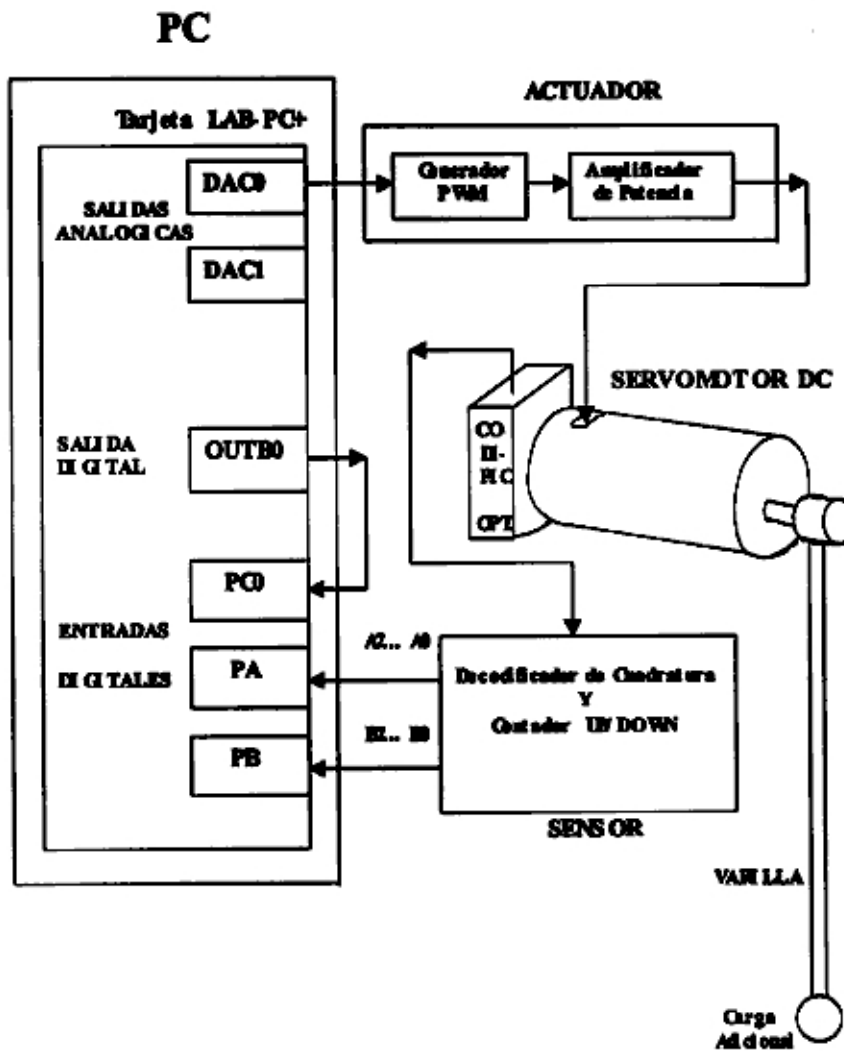


Figura 5.1: Esquema de Implementación del Sistema de Control de Posición



Figura 5.2: Sistema de Control de Posición

### 5.3.1 Actuador

El actuador está conformado por el servomotor DC (de campo magnético permanente y escobillas conmutadas), un generador PWM y una etapa de potencia. Debido a que el motor no responde inmediatamente a una tensión de entrada, es decir, le toma un pequeño tiempo para llegar a la máxima velocidad, es entonces necesario usar un sistema que permita variar la velocidad entre un mínimo y un máximo, de modo que nos permita un cambio seguro en el sentido de la rotación del motor. Dicho sistema lo constituyen justamente el Generador PWM y el Circuito de Potencia, que nos permite variar la velocidad de acuerdo al ancho de pulso de la señal PWM. El generador de PWM LM3524 genera una modulación por ancho de pulsos de 15.4 KHz, siendo amplificada por el circuito de potencia, el cual entrega una tensión de alimentación al motor de  $\pm 25$  voltios. El Circuito de Potencia está conformado por un sistema de disparo y dos pares de conmutadores A y B, según se muestra en la figura 5.3

El sistema de disparo permite la conmutación de cada par A y B, de tal forma que se eviten cortocircuitos durante el tiempo de conmutación de A y B. Cuando el sistema de disparo cierra el conmutador A y abre B, el sentido de la corriente es la línea

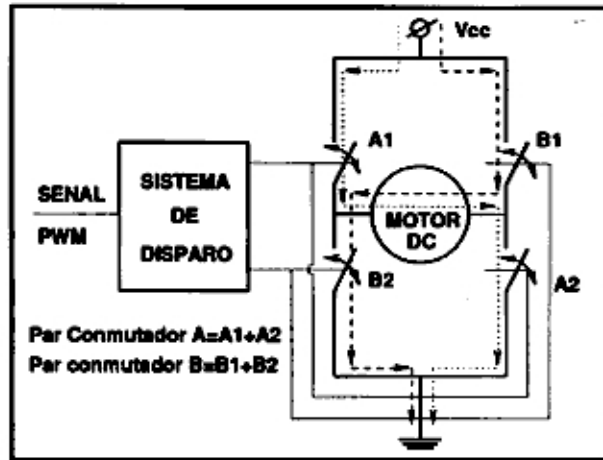


Figura 5.3: Esquema general del sistema de disparo y conmutación

punteada, induciendo de esta forma una tensión de  $+V_{cc}$  en el motor. Ahora, si el sistema de disparo abre el conmutador A y cierra B, el sentido de la corriente es la línea segmentada, induciendo así una tensión  $-V_{cc}$  en el motor. Esto significa que el motor recibe en sus bornes una tensión de onda cuadrada cuyo valor varía entre  $\pm V_{cc}$ , con un consumo de corriente que depende de los conmutadores conformados por transistores MOSFET.

### 5.3.2 Sensor

El sensor de posición está conformado por un codificador óptico rotatorio (interno al motor), un decodificador de cuadratura, y un contador UP/DOWN. El codificador óptico rotatorio consiste de:

- Una fuente de luz que puede ser un LED infrarrojo o láser.
- Un disco opaco ranurado (gratícula) acoplado al eje del motor, que se mueve entre una fuente de luz permanente habilitada y un detector. A medida que gira el rotor, el paso de luz hacia el detector es habilitado e inhabilitado por un patrón de áreas oscuras y transparentes impreso en el disco, produciendo una señal digital que puede ser fácilmente interpretada por el controlador de movimiento del sistema.
- Un sensor de luz; usualmente es un fototransistor o un fotodiodo.
- Un conformador de pulsos que convierte la señal sinusoidal proveniente de la salida del fotodetector en señal de onda cuadrada.

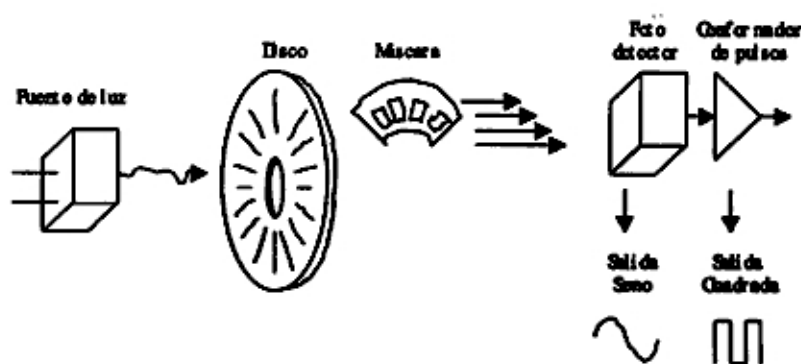


Figura 5.4: Estructura de un codificador óptico rotatorio

El esquema básico del codificador óptico se muestra en la figura 5.4.

El codificador usado en esta implementación, como en la mayoría de los casos, incluye dos pistas de marcas o ranuras en cuadratura (canales A y B), cada una asociada a una fuente de luz y un fotodetector independientes. Los canales A y B producen dos ondas cuadradas desfasadas  $90^\circ$  entre sí que se utilizan para determinar la dirección del movimiento. Por ejemplo, si el canal B adelanta al canal A, el eje está girando en sentido antihorario y viceversa. Si no se utiliza detección de cuadratura, la vibración puede causar el envío de pulsos erráticos al contador, incluso si la máquina está detenida. El codificador usado tiene una resolución de 512 ppr (pulsos por revolución). El decodificador de cuadratura es el CI LS7083, que activará la cuenta ascendente o descendente del contador UP/DOWN de 16 bits, dependiendo del sentido de giro del motor, captado por el desfasaje entre los trenes de pulsos de los canales A y B. El contador UP/DOWN lo conforman 4 CI 74HC193; dos de ellos entregan un grupo de 8 bits de datos (bus A) a la tarjeta LAB-PC+; similarmente otro grupo igual de bits conforman el bus B.

### 5.3.3 Interfaz LAB-PC+

La interface entre el microcomputador, la planta, el actuador y el sensor es la tarjeta de adquisición de datos LAB-PC+. Los terminales usados para el control son:

1. Una salida analógica (DAC0). La señal de control se envía por el terminal DAC0 al CI LM3524 (Generador PWM) con una resolución de 12 bits para generar la señal analógica.

2. Dos puertos digitales de entrada (PA y PB) de 8 bits cada uno. Dichos puertos reciben los datos provenientes del contador UP/DOWN.
3. El terminal OUTB0, que se utiliza como salida de una señal de reloj, para el funcionamiento del sistema de control.
4. El terminal PC0 (bit 0 del puerto C), que se utiliza como entrada de la señal de reloj proveniente de OUTB0.

La señal de reloj OUTB0 se genera a partir de una base de tiempos de 2 MHz que activa la salida del contador/temporizador 8253. Los puertos de entrada/salida provienen del PPI (Interface Paralela Programable) 8255.

### **5.3.4 Software de Control**

El software usado para la implementación de los algoritmos de control de posición emplea el lenguaje C y se ejecuta en una PC Pentium. Previamente, las simulaciones se realizaron empleando MATLAB.



# Capítulo 6

## Simulaciones

En esta sección se presentan las simulaciones del Sistema de Control Predictivo para nuestro proceso. Dichas simulaciones han sido obtenidas utilizando *SIMULINK* y ejecutando programas en *MATLAB*. Ver [11], [12], [13]. Se ha escogido tiempos de simulación pequeños de 1 y 5 segundos, para observar adecuadamente el tiempo de establecimiento o de convergencia de la salida del sistema de control.

### 6.1 Simulaciones sin Restricciones

El diagrama de bloques usando *SIMULINK*, considerando  $\lambda = \alpha = 0$  se muestra en la figura 6.1.

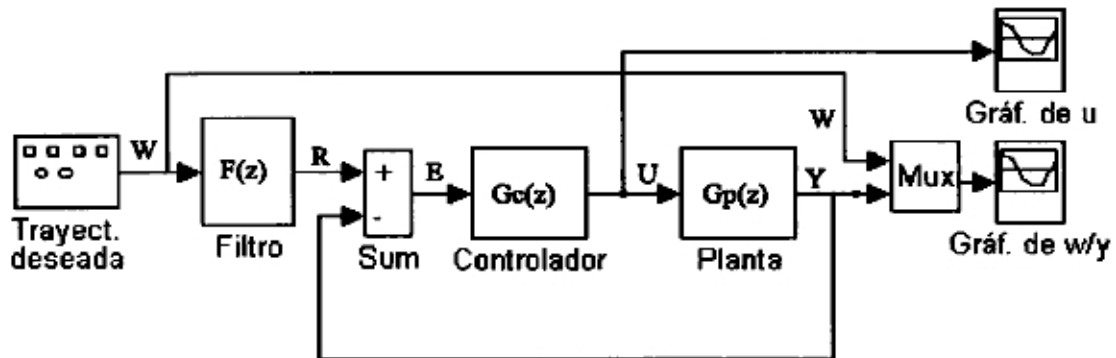


Figura 6.1: Diagrama de bloques del sistema de control predictivo sin restricciones, considerando  $\lambda = \alpha = 0$

donde las funciones de transferencia  $G_p(z)$ ,  $G_c(z)$  y  $F(z)$  están representadas por las ecuaciones (5.14), (5.20) y (4.38) respectivamente.

#### 6.1.1 Respuesta a una señal escalón unitario

Considerando una trayectoria deseada  $w$  escalón unitario como entrada al diagrama de bloques mostrada en la figura 6.1, se obtiene la salida mostrada en la

figura 6.2. En dicha figura se puede observar que la salida controlada  $y$  (en radianes) llega a converger a la trayectoria deseada  $w$  en aproximadamente 0.025 segundos, luego del cual permanece estable. También puede observarse que no se presentan sobreimpulsos de salida en estado transitorio. La señal de control generada para obtener tal salida se muestra en la figura 6.3, en la cual se observa una amplitud máxima inicial de aproximadamente 90 voltios que disminuye rápidamente a cero voltios en tan sólo 0.025 segundos, siendo el mismo tiempo empleado para que la salida alcance a la referencia.

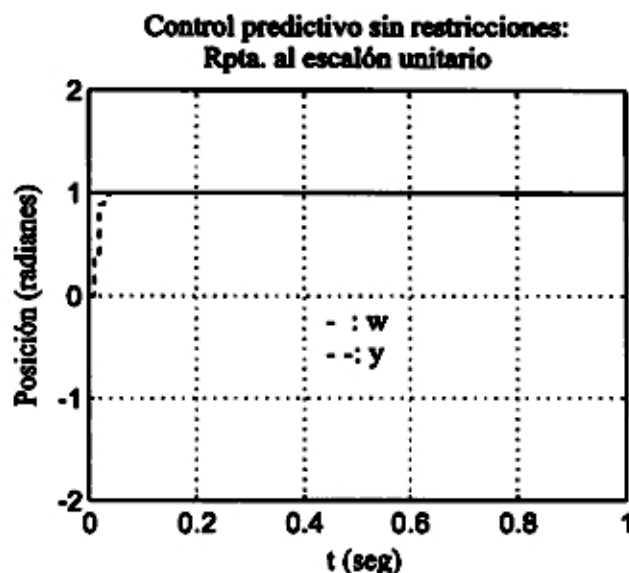


Figura 6.2: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

Por otro lado, la confirmación a las simulaciones mostradas se obtienen ejecutando un programa en *MATLAB*, considerando para ello las ecuaciones (5.14) y (5.20) que permiten obtener resultados similares. Según puede observarse en la figura 6.4, la convergencia se obtiene en  $k=2$ , lo que equivale a 0.02 segundos, donde  $t=kT$ , siendo  $T=0.01$  segundos. La figura 6.5 presenta una señal de control similar a la mostrada en la figura 6.3 con una amplitud de aproximadamente 120 voltios, decreciendo a -120 voltios para luego subir y estabilizarse a una tensión de cero voltios en el mismo tiempo de convergencia de 0.02 segundos.

Se debe tener presente que estas respuestas son válidas cuando la señal de control es no restringida; sin embargo, veremos que en presencia de restricciones de la señal de control, estas respuestas varían, como apreciaremos posteriormente.

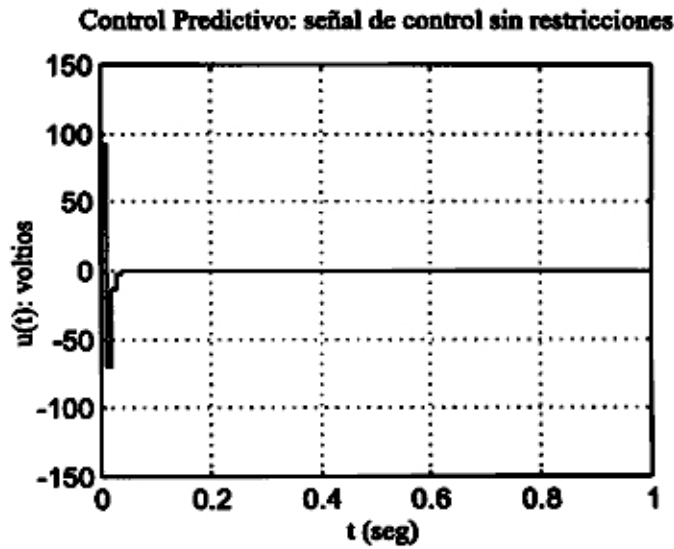


Figura 6.3: Señal de control  $u$  vs tiempo  $t$

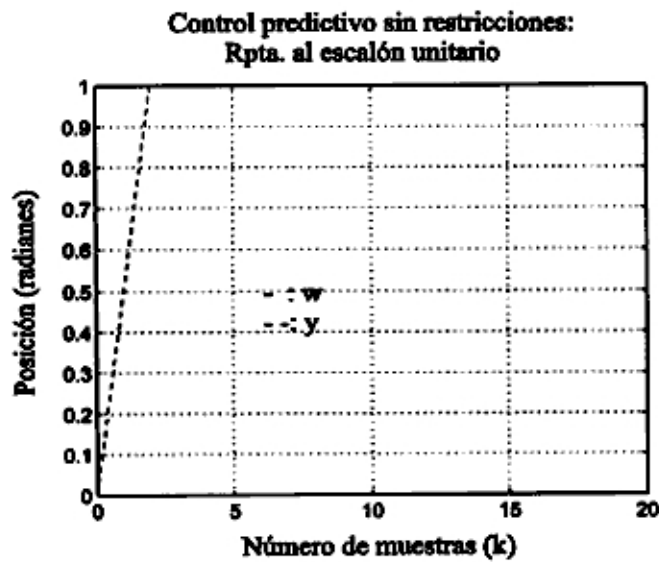


Figura 6.4: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs número de muestras  $k$

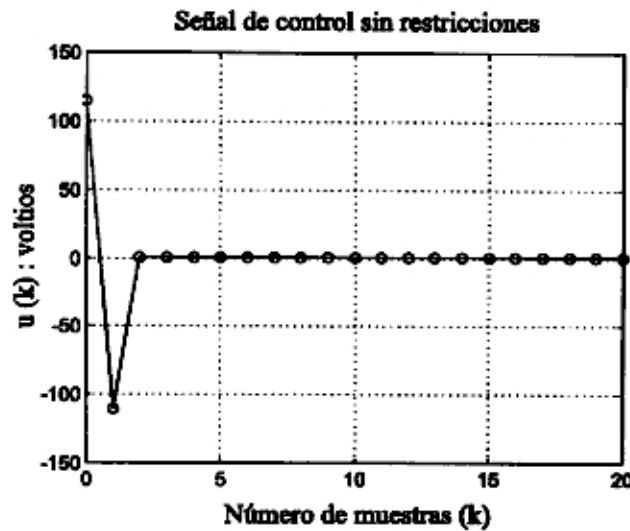


Figura 6.5: Señal de control  $u$  vs número de muestras  $k$

### 6.1.2 Respuesta a una señal diente de sierra

Considerando el mismo diagrama de bloques que para el caso anterior pero con una trayectoria diente de sierra, se obtiene la respuesta mostrada en la figura 6.6 en la que se aprecia que luego de 0.025 segundos la salida sigue a la trayectoria deseada. La salida del sistema está representada en radianes y la señal de control en voltios.

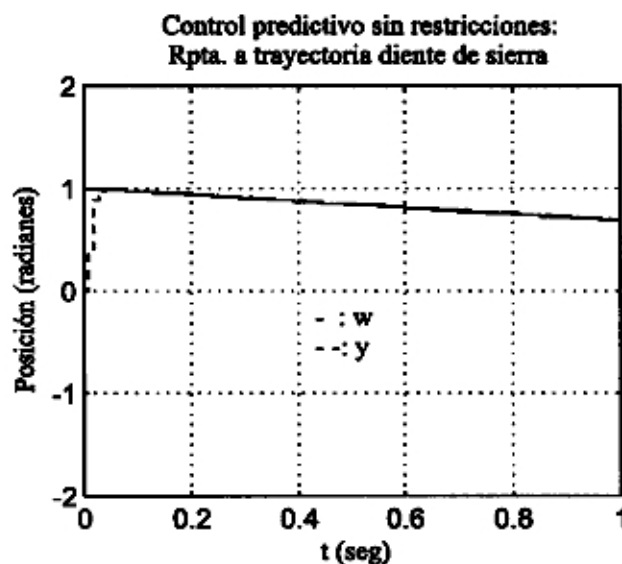


Figura 6.6: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

La figura 6.7 muestra la señal de control generada con un valor inicial máximo de 90 voltios, y decreciendo rápidamente a un mínimo valor de cero voltios.

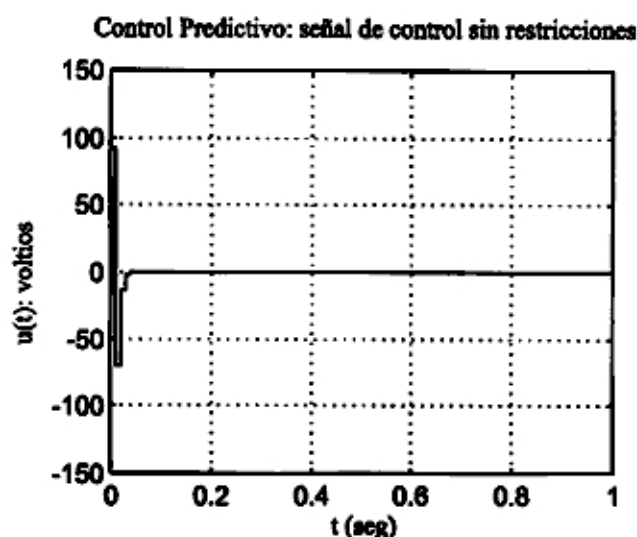


Figura 6.7: Señal de control  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.1.3 Respuesta a una señal sinusoidal

En este caso usamos una trayectoria sinusoidal como entrada al diagrama de bloques del sistema de control, obteniéndose una respuesta prácticamente perfecta como puede observarse en la figura 6.8.

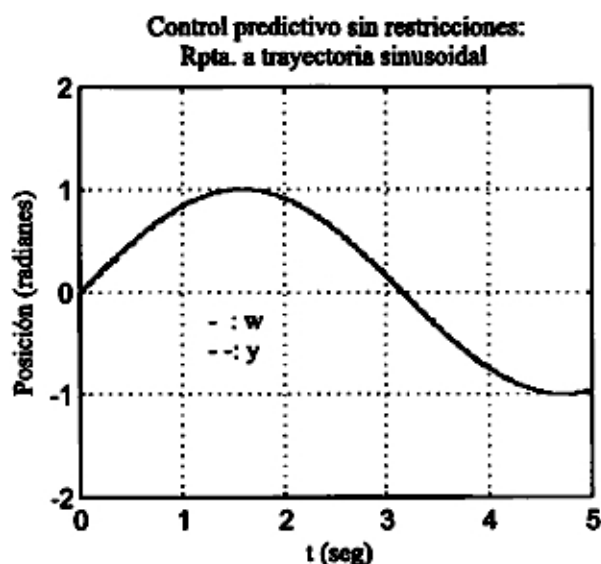


Figura 6.8: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

La señal de control  $u$  correspondiente se muestra en la figura 6.9, con un impulso inicial máximo de 9 voltios, bajando inmediatamente y manteniéndose con amplitudes

sinusoidales muy suaves de aproximadamente  $\pm 0.2$  voltios pico.

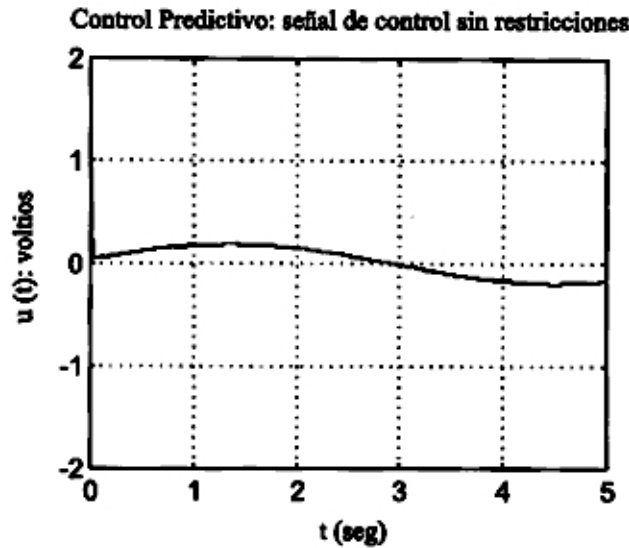


Figura 6.9: Señal de control  $u$  vs tiempo  $t$

## 6.2 Simulaciones con Restricciones de Entrada

El diagrama de bloques del sistema de control, considerando  $\lambda = 0.942$  y  $\alpha = 0.01$ , se muestra en la figura 6.10. Las funciones de transferencia  $G_p(z)$ ,  $G_c(z)$  y  $F(z)$  están representadas por las ecuaciones (5.14), (5.25) y (4.38) respectivamente.

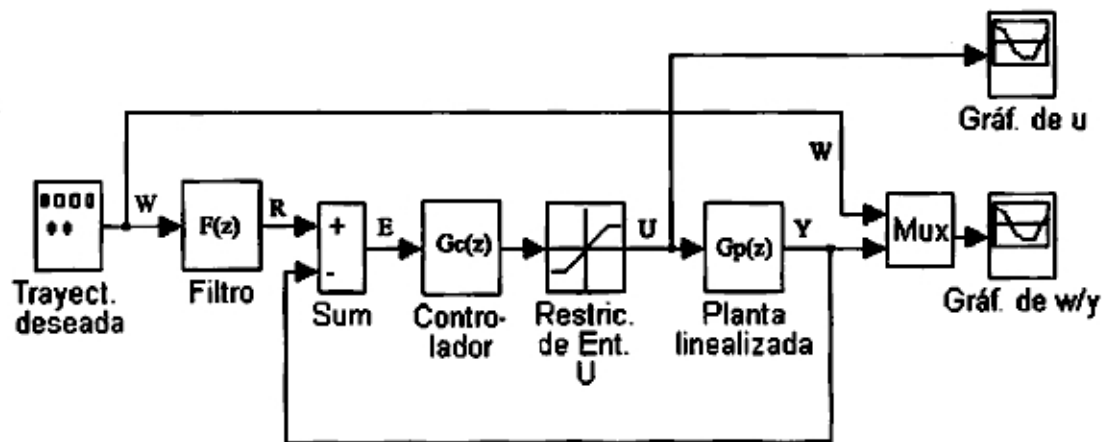


Figura 6.10: Diagrama de bloques del sistema de control predictivo con restricciones de entrada, considerando  $\lambda = 0.942$  y  $\alpha = 0.01$ .

### 6.2.1 Respuesta a una señal escalón unitario

Considerando una trayectoria escalón unitario como entrada al diagrama de bloques del sistema de control en referencia, se obtiene la salida mostrada en la figura 6.11, en la cual se puede observar que la salida controlada  $y$  llega a converger a la trayectoria deseada  $w$  en aproximadamente 2.1 segundos, luego del cual permanece estable. En este caso puede observarse un sobreimpulso máximo de la salida en estado transitorio de 1.25 radianes.

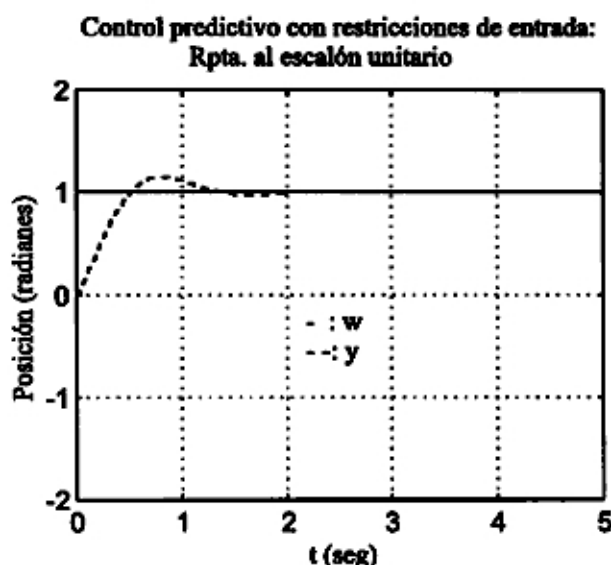


Figura 6.11: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

La señal de control generada para obtener tal salida se muestra en la figura 6.12, en la cual se observa una amplitud máxima inicial de 1.4 voltios, disminuyendo rápidamente y estableciéndose a 0.2 voltios en un tiempo de 0.5 segundos.

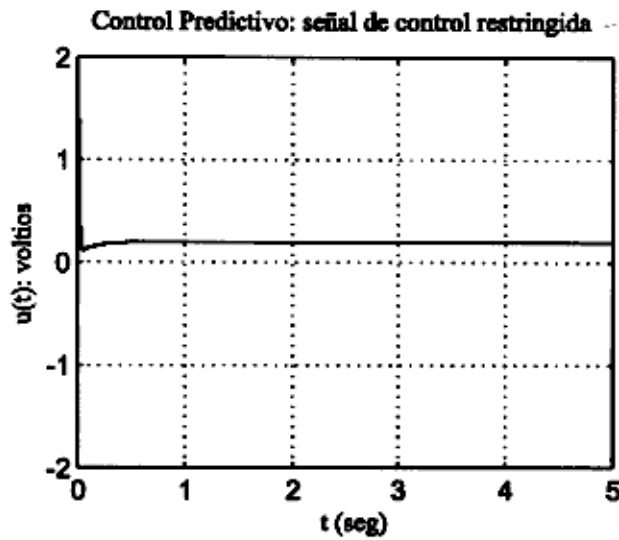


Figura 6.12: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.2.2 Respuesta a una señal diente de sierra

En este caso la entrada al diagrama de bloques del sistema de control en mención es una señal diente de sierra, obteniéndose la respuesta mostrada en la figura 6.13, en el que se aprecia que el tiempo de establecimiento es de 2.2 segundos.

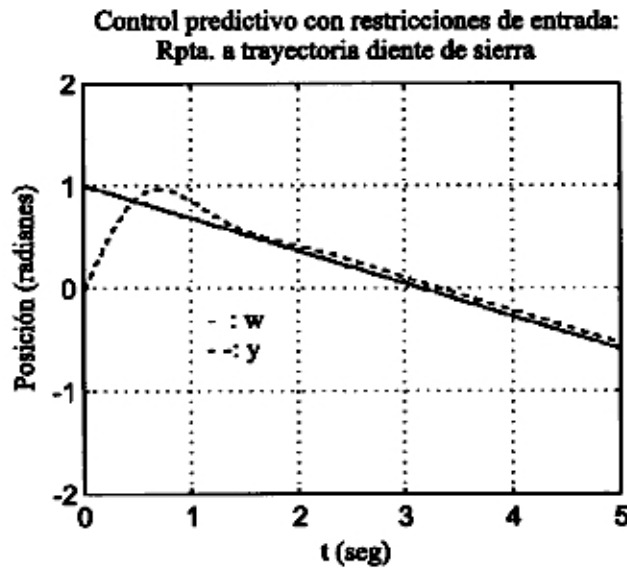


Figura 6.13: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$



La figura 6.14 muestra la señal de control generada con un valor máximo inicial de 1.4 voltios, decreciendo rápidamente con una pendiente muy pequeña, llegando a aproximadamente 0.2 voltios en un tiempo de simulación de 5 segundos.

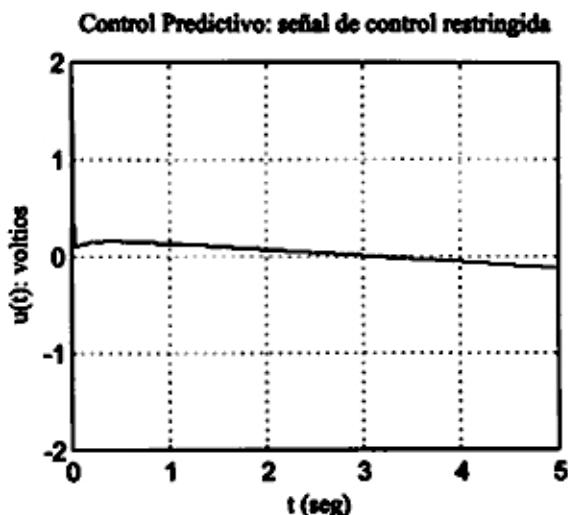


Figura 6.14: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.2.3 Respuesta a una señal sinusoidal

La figura 6.15 muestra una respuesta aproximada a una trayectoria sinusoidal como entrada al diagrama de bloques del sistema de control.

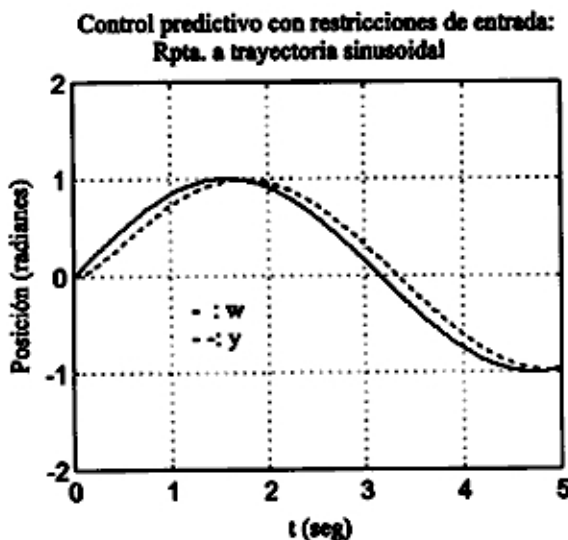


Figura 6.15: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

La señal de control generada para obtener dicha salida se muestra en la figura 6.16 con amplitudes sinusoidales muy suaves de aproximadamente  $\pm 0.2$  voltios pico.

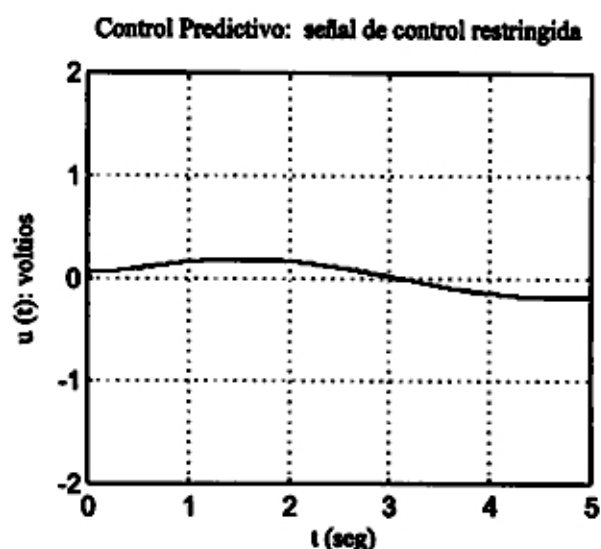


Figura 6.16: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.3 Simulaciones con Restricciones de Entrada y de Salida

El diagrama de bloques usado, considerando  $\lambda = 0.942$  y  $\alpha = 0.01$ , se muestra en la figura 6.17.

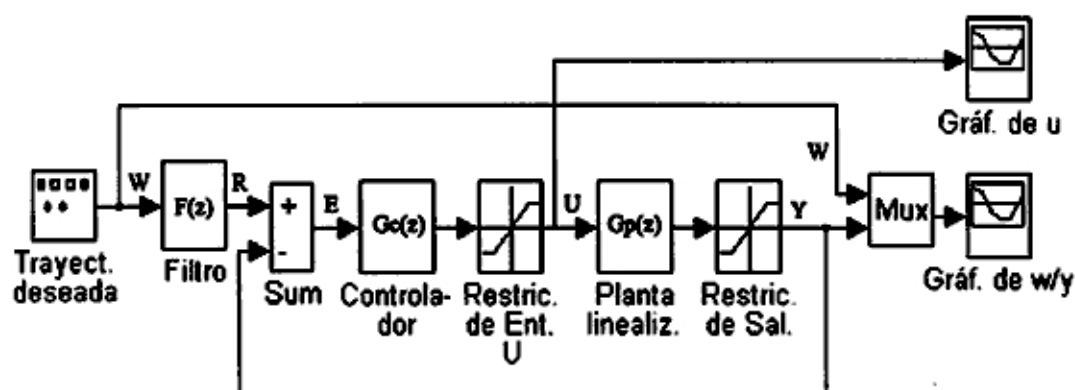


Figura 6.17: Diagrama de bloques del sistema de control predictivo con restricciones de entrada y de salida, considerando  $\lambda = 0.942$  y  $\alpha = 0.01$ .

Las funciones de transferencia  $G_p(z)$ ,  $G_c(z)$  y  $F(z)$  son las mismas que las consideradas en la sección anterior; pero considerando restricciones para las señales de

control  $u$  y de salida  $y$ .

### 6.3.1 Respuesta a una señal escalón unitario

Considerando una trayectoria escalón unitario como entrada al diagrama de bloques mostrada en la figura 6.17, se obtiene la salida mostrada en la figura 6.18, en la cual se puede observar que la salida controlada  $y$  llega a converger a la trayectoria deseada  $w$  en aproximadamente 0.5 segundos, luego del cual permanece estable. En este caso no se presenta sobreimpulso alguno.

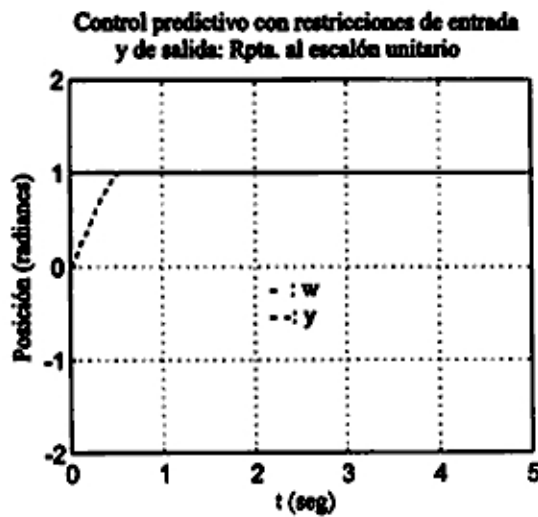


Figura 6.18: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

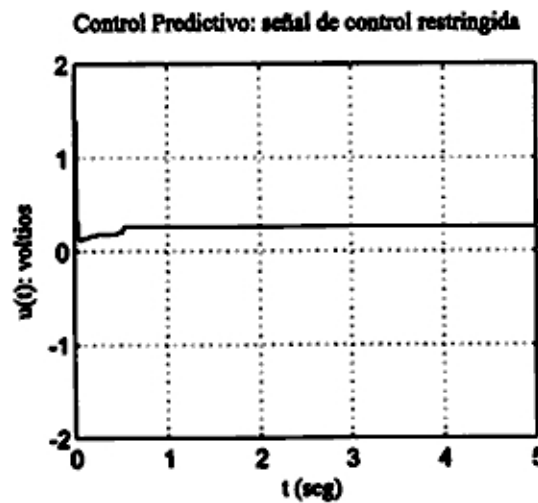


Figura 6.19: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

La señal de control generada para obtener tal salida se muestra en la figura 6.19, en la cual se observa una amplitud máxima inicial de 1.4 voltios y disminuyendo rápidamente y estableciéndose a 0.25 voltios en un tiempo de 0.5 segundos.

### 6.3.2 Respuesta a una señal diente de sierra

Usando una trayectoria diente de sierra como entrada al diagrama de bloques del sistema de control, se obtiene la figura 6.20, en el que se aprecia que el tiempo de establecimiento es de 2.2 segundos. La figura 6.21 muestra la señal de control generada con un valor máximo inicial de 1.4 voltios, decreciendo rápidamente con una pendiente muy pequeña.

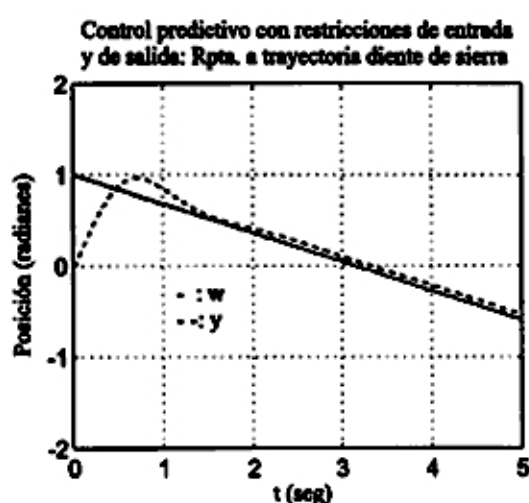


Figura 6.20: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

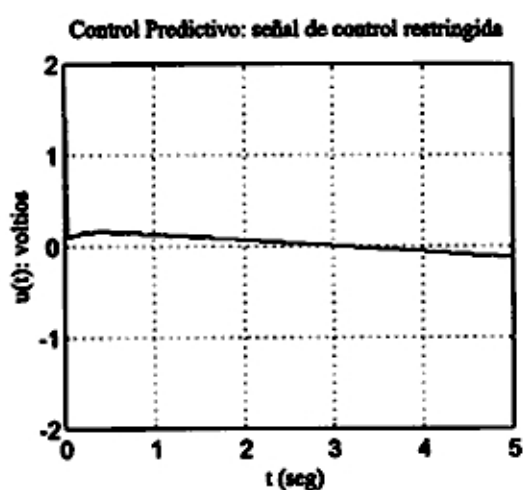


Figura 6.21: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.3.3 Respuesta a una señal sinusoidal

Usando una señal sinusoidal como entrada al diagrama de bloques en mención, se obtiene la salida mostrada en la figura 6.22, que se aproxima a la trayectoria deseada. Idénticamente a los anteriores casos, las señales de salida  $y$  y de control  $u$  están representadas en radianes y voltios respectivamente. La señal de control generada para obtener dicha salida se muestra en la figura 6.23 con amplitudes sinusoidales muy suaves de aproximadamente  $\pm 0.2$  voltios pico.

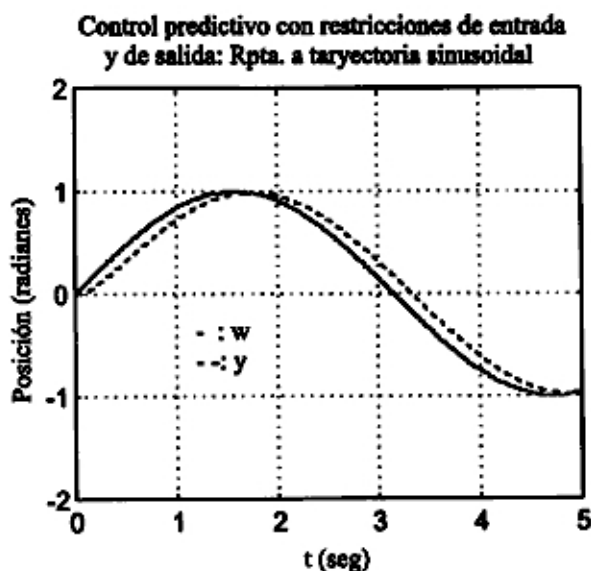


Figura 6.22: Trayectoria deseada  $w$  y salida  $y$  vs tiempo  $t$

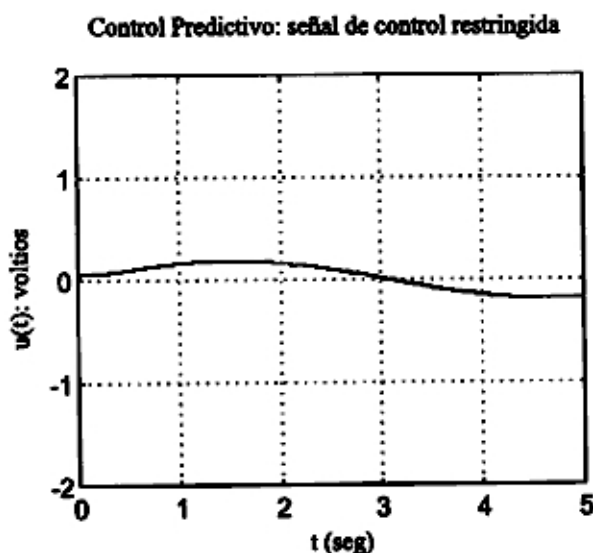


Figura 6.23: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

### 6.3.4 Respuesta a una señal de escalones variantes

Para este caso se ha ejecutado un programa en *MATLAB* considerando restricciones de entrada y de salida, así como los factores  $\lambda$  y  $\alpha$  indicados. Dicho programa de simulación se presenta en el apéndice B.

La respuesta del sistema a una trayectoria deseada ( $w$ ) de  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $37.5^\circ$  y  $30^\circ$  se muestra en la figura 6.24. Dicha salida  $y$  representada en *grados* es muy aproximada a la trayectoria deseada como puede apreciarse en la figura referida. La señal de control generada se muestra en la figura 6.25, en la que se puede apreciar una tensión mínima de 0.7 voltios para una salida de  $30^\circ$  y una tensión máxima de 1.4 voltios correspondiente a  $60^\circ$ . La forma de onda de la señal de control es la misma que la de la trayectoria deseada  $w$ , debido a que la ecuación de la señal de control está escrita en función de la señal de error  $e$ , y ésta a su vez depende de la referencia  $r$ .

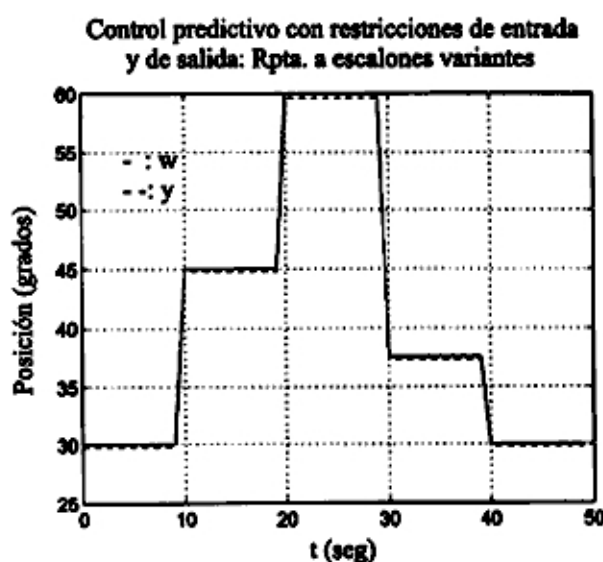


Figura 6.24: Trayectoria deseada  $w$  y salida restringida  $y$

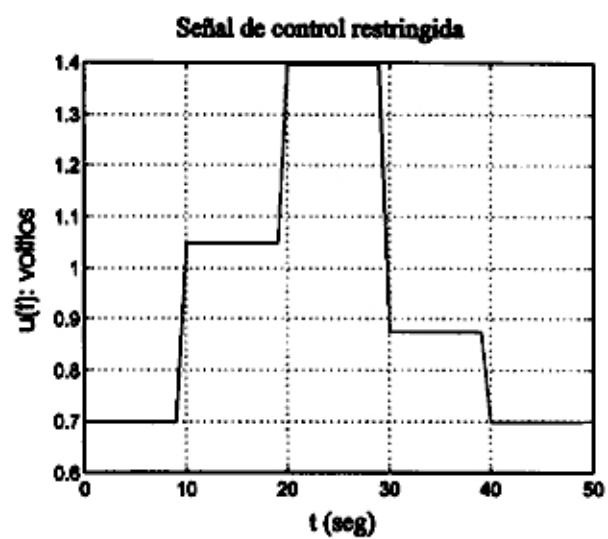


Figura 6.25: Señal de control restringida  $u$  vs tiempo  $t$

## Capítulo 7

# Resultados Experimentales

En esta sección se presentan y discuten los *resultados en tiempo real* para el sistema de control *SISO* con restricciones de entrada y de entrada/salida. Dichos resultados consideran trayectorias deseadas fijas y variantes. Para cualquiera de los casos, en las gráficas comparativas se usan líneas continuas para la trayectoria deseada ( $w$ ) y líneas discontinuas para la salida del sistema ( $y$ ). Los programas fuente, escritos en *C*, se presentan en el apéndice B.

Las pruebas experimentales se han efectuado considerando diferentes cargas y por consiguiente con diferentes momentos de inercia calculados a partir de la ecuación (2.11). La Varilla presenta una inercia  $J=7.0471 \times 10^{-4} \text{Kgm}^2$  y adicionando a la varilla masas distintas obtendremos inercias de  $1.42J$ ,  $1.84J$  y  $2.98J$ .

Para todos los casos, se ha considerado un factor de filtraje  $\alpha = 0.01$ , la salida  $y$  del sistema representa *grados* y la señal de control  $u$  representa *voltios*.

## 7.1 Resultados con Restricciones de Entrada

### 7.1.1 Respuesta a Señal Fija

Considerando una trayectoria deseada  $w$  fija de  $90^\circ$ , con  $\lambda = 0.95$  y un *momento de inercia*  $J$  se obtiene la salida mostrada en la figura 7.1. Se puede apreciar que el máximo sobreimpulso de la salida es de aproximadamente  $130^\circ$ , luego converge hacia  $90^\circ$  a partir de un tiempo de aproximadamente 2.7 segundos para adelante. La señal de Control necesaria para lograr la convergencia de la salida del sistema, se muestra en la figura 7.2 y se observa que inicialmente se producen pequeños sobreimpulsos positivos y negativos, para luego tender a *cero*. El tiempo de ejecución es de 40 segundos.



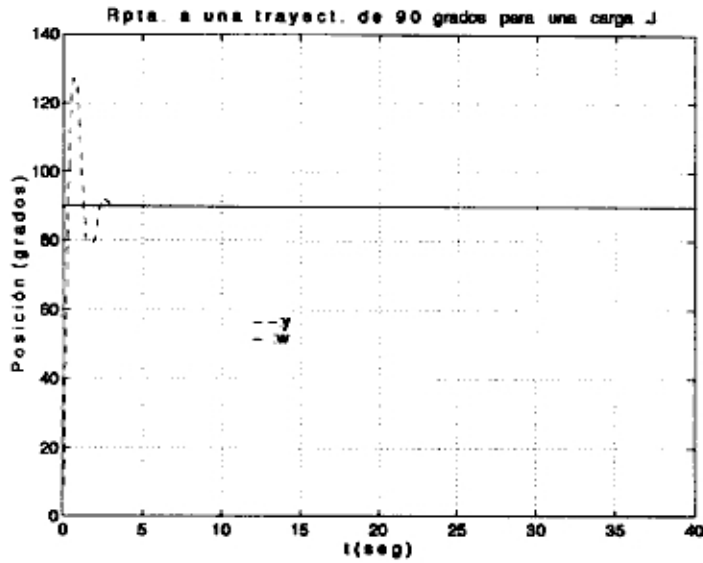


Figura 7.1: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria deseada  $w$  para una carga  $J$

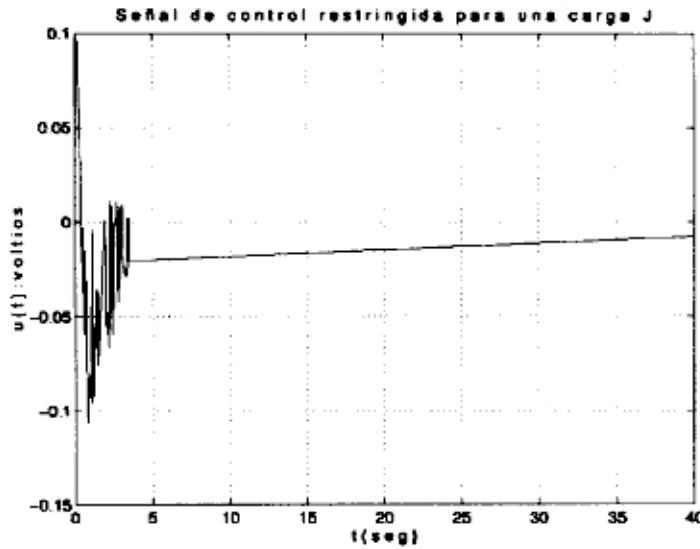


Figura 7.2: Señal de control  $u$  para una carga  $J$

Si consideramos la misma trayectoria fija de  $90^\circ$ , pero con  $\lambda = 0.967$  para la misma inercia  $J$ , se obtiene la figura 7.3 como salida del sistema de control, en la cual se observa que al aumentar el valor del factor de peso  $\lambda$  la respuesta de salida del sistema se empobrece mostrándose pequeñas oscilaciones hasta un tiempo de aproximadamente 13 segundos, luego permanece estable en  $90^\circ$  durante todo el tiempo de ejecución. La correspondiente señal de control se observa en la figura 7.4, en la que se aprecian variaciones rápidas hasta un tiempo de 13 segundos, luego la señal muestra variaciones con tramos más lineales alrededor de  $u = 0$ .

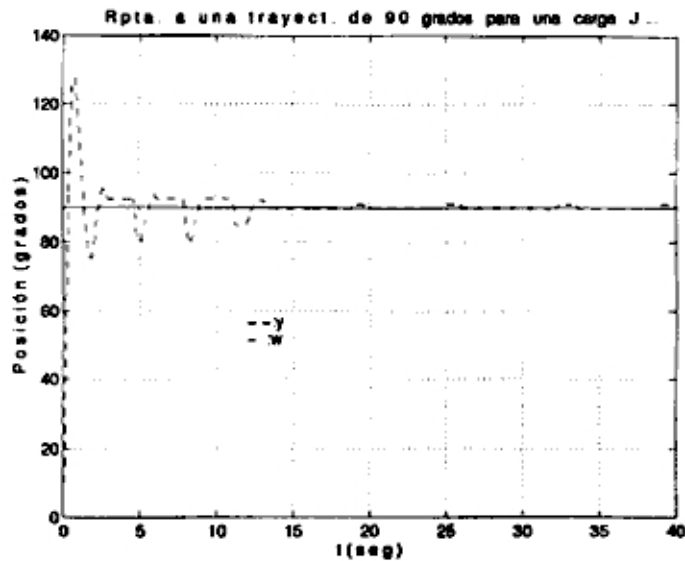


Figura 7.3: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria deseada  $w$  para una carga  $J$

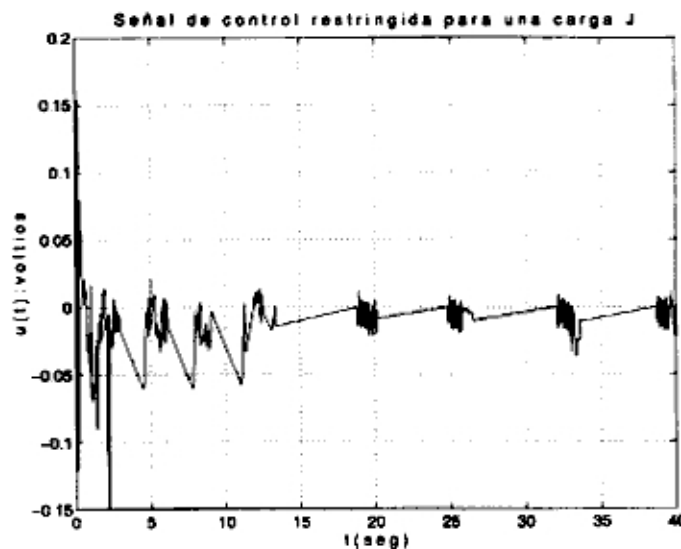


Figura 7.4: Señal de control  $u$  para una carga  $J$

Los resultados para otras inercias en cualquiera de los dos casos tratados, son similares a los presentados y comentados.

### 7.1.2 Respuesta a Señales Variantes

Los resultados que se presentan a continuación corresponden al seguimiento a una trayectoria variante cada 10 segundos, con un tiempo total de ejecución de 50 segundos y un factor de filtraje  $\lambda = 0.97$ . La trayectoria seguida corresponde a  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $37.5^\circ$  y  $30^\circ$ .

1. Considerando una inercia  $J$ .

La salida  $y$  del sistema hace un seguimiento algo pobre a la trayectoria en mención, según se puede apreciar en la figura 7.5. Adicionalmente, puede observarse los sobreimpulsos en cada cambio de nivel de los escalones; lo que no es apropiado en aplicaciones de control. La señal de control correspondiente se puede apreciar en la figura 7.6, en la que puede observarse un impulso inicial de 1.4 voltios y variaciones suaves de tensión alrededor de cero voltios, con impulsos positivos y negativos muy rápidos de amplitud aproximada a los 0.75 voltios. Estos impulsos se presentan a los 10, 20 y 30 segundos del tiempo de ejecución. La señal de error de seguimiento a la trayectoria deseada  $w$  representada en *grados* puede apreciarse en la figura 7.7, que muestra las imperfecciones en el seguimiento a la trayectoria en mención. Se entiende que la salida del sistema nunca será exactamente igual a la trayectoria deseada en ningún sistema de control, por más eficiente que éste sea.

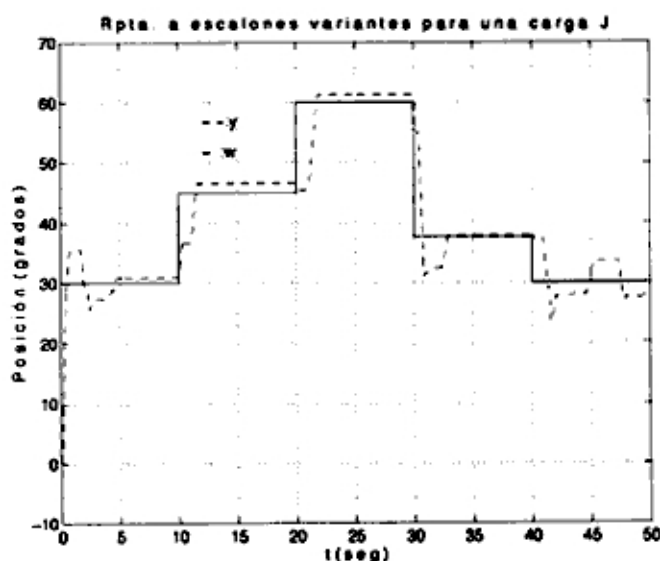


Figura 7.5: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para una carga  $J$

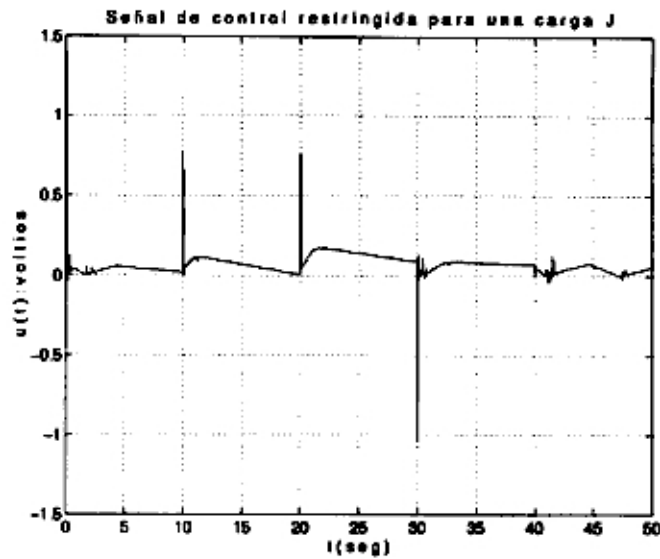


Figura 7.6: Señal de control  $u$  para una carga  $J$

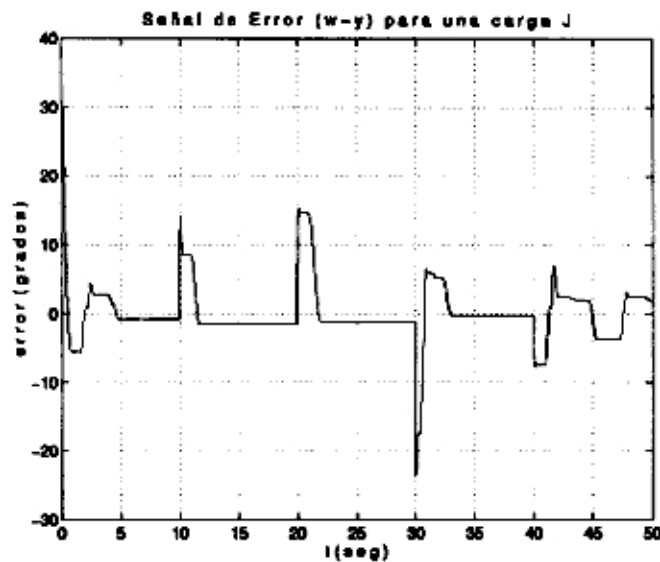


Figura 7.7: Señal de error  $e$  para una carga  $J$

## 2. Considerando una inercia $1.42J$

La respuesta a la trayectoria solicitada es similar que en el caso anterior, según se puede ver en la figura 7.8. Las señales de control y error también son idénticas al caso anterior y pueden apreciarse en las figuras 7.9 y 7.10 respectivamente.

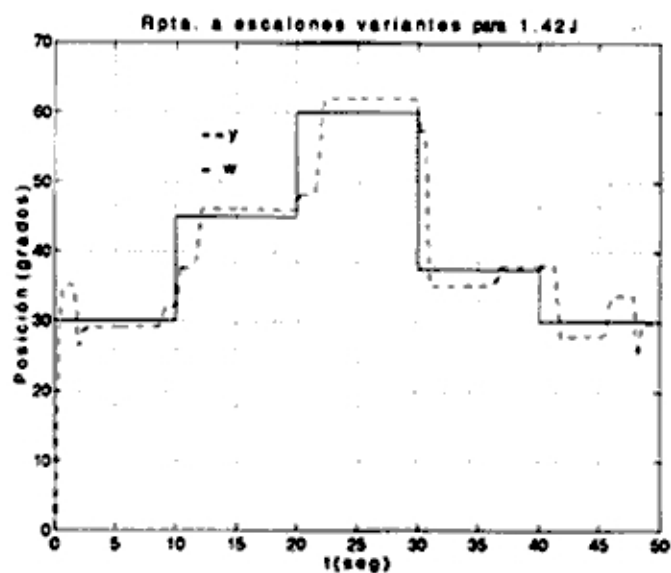


Figura 7.8: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.42J

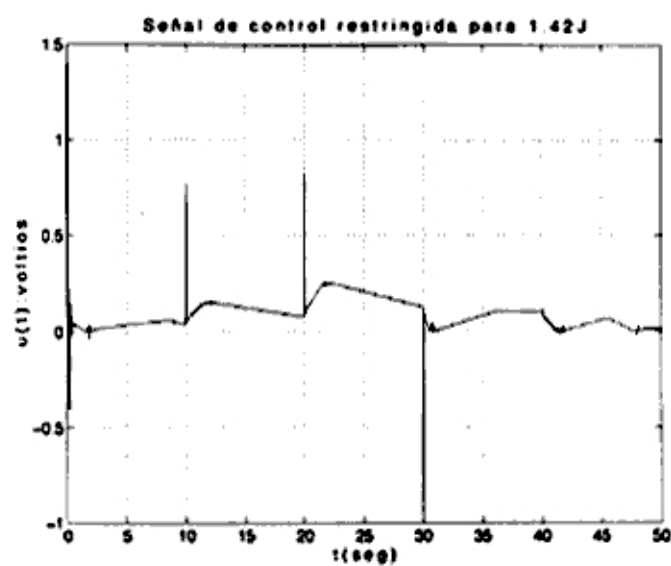


Figura 7.9: Señal de control  $u$  para 1.42J

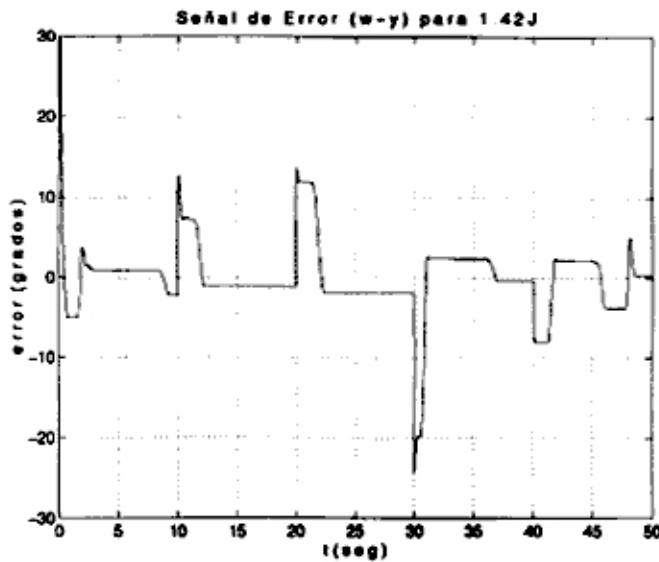


Figura 7.10: Señal de error  $e$  para 1.42J

### 3. Considerando una inercia 1.84J.

La respuesta del sistema es similar a las anteriores, con pequeñas variaciones apreciadas en la figura 7.11. La señal de control mostrada en la figura 7.12 también es muy parecida a las anteriores, con amplitudes ligeramente mayores en todo el tiempo de ejecución. La señal de error de seguimiento presenta ligeras variaciones, y puede observarse en la figura 7.13.

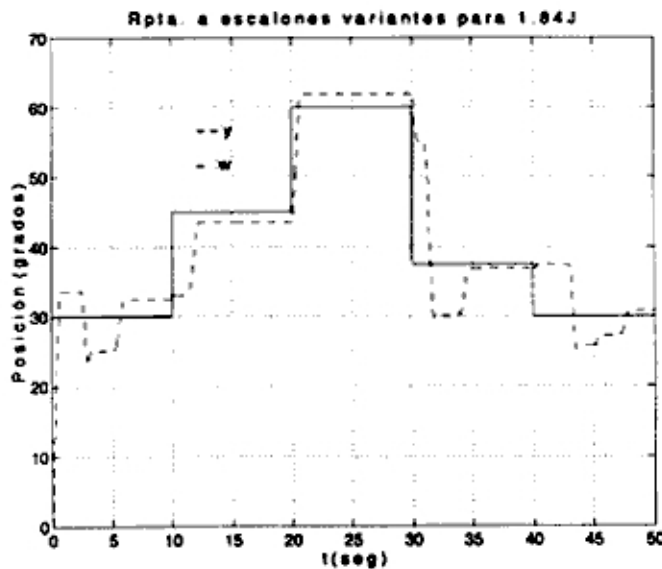


Figura 7.11: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.84J

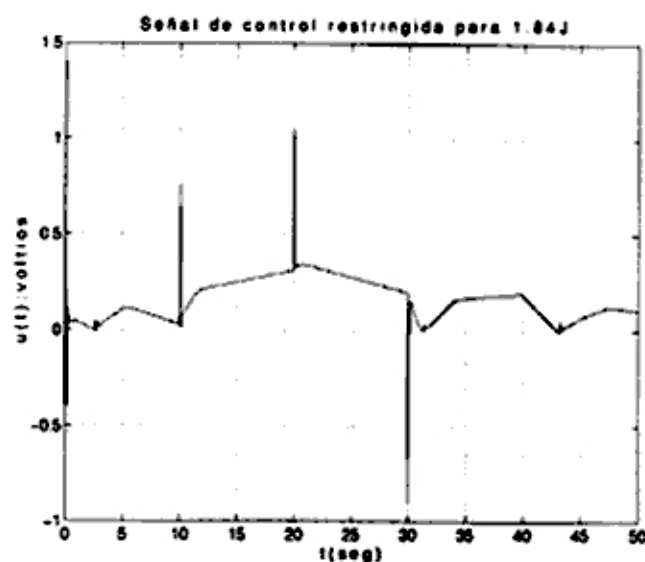


Figura 7.12: Señal de control  $u$  para 1.84J

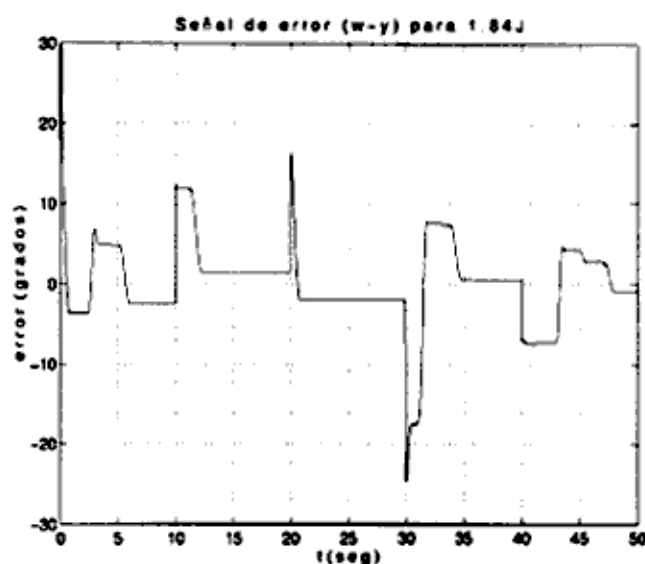


Figura 7.13: Señal de error  $e$  para 1.84J

4. Considerando una inercia 2.98J.

En este caso, la salida presenta una ligera mejora respecto a las anteriores, con seguimientos mas estables según puede apreciarse en la figura 7.14. La señal de control de la figura 7.15 es similar a la anterior, con un pequeño incremento negativo a los 30 segundos . La señal de error, muy parecida a la anterior, se presenta en la figura 7.16.

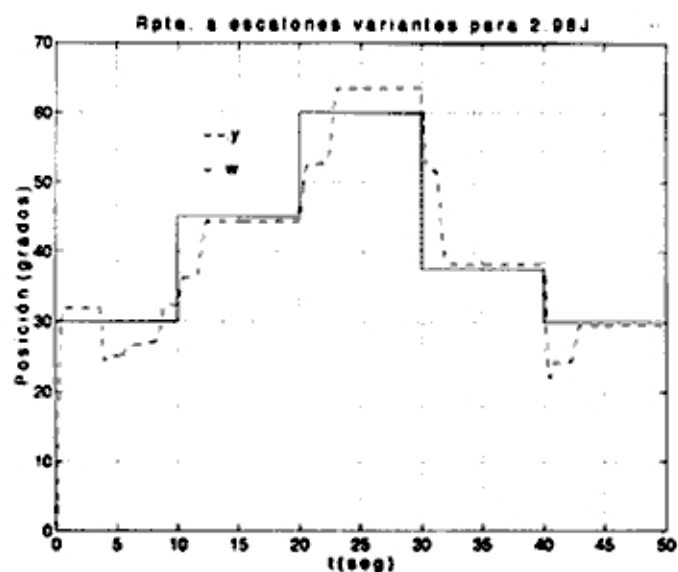


Figura 7.14: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 2.98J

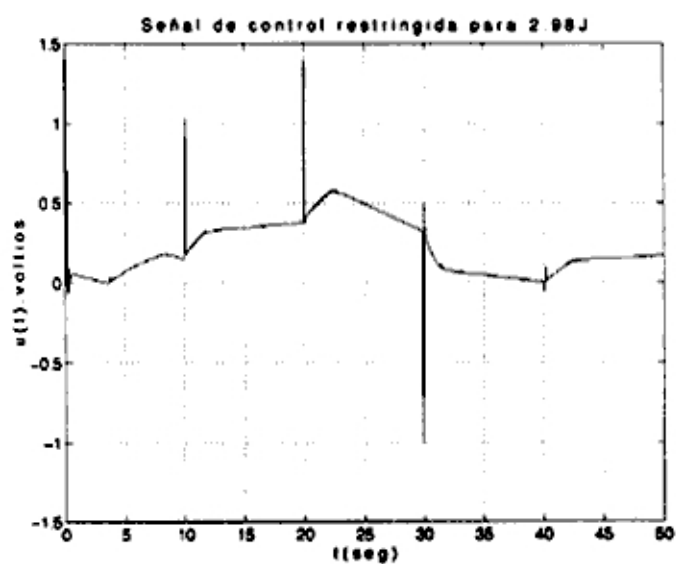


Figura 7.15: Señal de control  $u$  para 2.98J



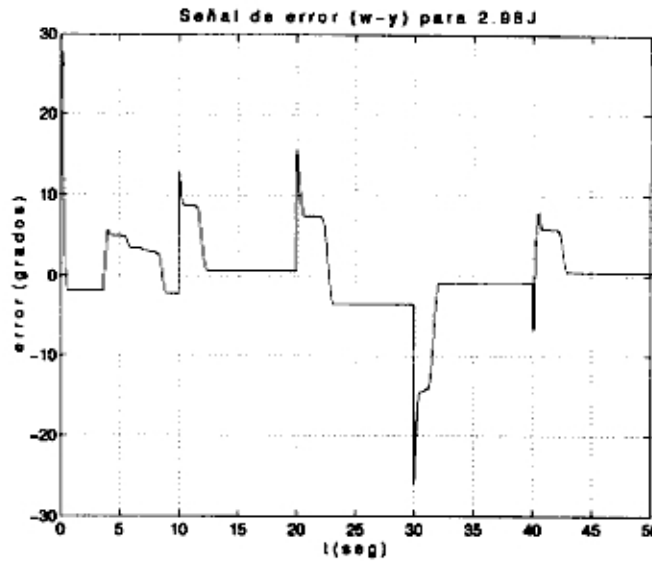


Figura 7.16: Señal de error  $e$  para 2.98J

## 7.2 Resultados con Restricciones de Entrada y de Salida

Los resultados obtenidos en la sección anterior, no son del todo satisfactorios; por consiguiente, en esta sección se presentan resultados considerando restricciones de salida  $y$  y de entrada  $u$ , que permitan cumplir con los requerimientos esperados.

### 7.2.1 Respuesta a Señal Fija

En las pruebas efectuadas para diferentes valores de  $\lambda$ , los resultados obtenidos son prácticamente los mismos, en tal sentido, se ha considerado presentar resultados para una trayectoria deseada de  $45^\circ$  y  $\lambda = 0.97$  bajo diferentes condiciones inerciales.

1. Considerando una inercia  $J$ .

La figura 7.17 muestra la respuesta comparativa de la salida del proceso controlado  $y$  con la trayectoria deseada  $w$ , pudiendo observarse que son exactamente iguales luego de un tiempo de convergencia de menos de 1 segundo. Evidentemente este resultado es de alta estabilidad y precisión. La figura 7.18 muestra la señal de control, con un valor 1.4 voltios (señal restringida) en el tiempo inicial  $t = 0$ , para luego bajar rápidamente a valores cercanos a *cero voltios* y luego crecer suavemente a un valor constante de aproximadamente *0.1 voltio* a partir de un tiempo menor de 1 segundo. En la figura 7.19 se observa la

señal de error, que luego de menos de 1 segundo, cae a *cero*, lo que significa una óptima respuesta del sistema de control.

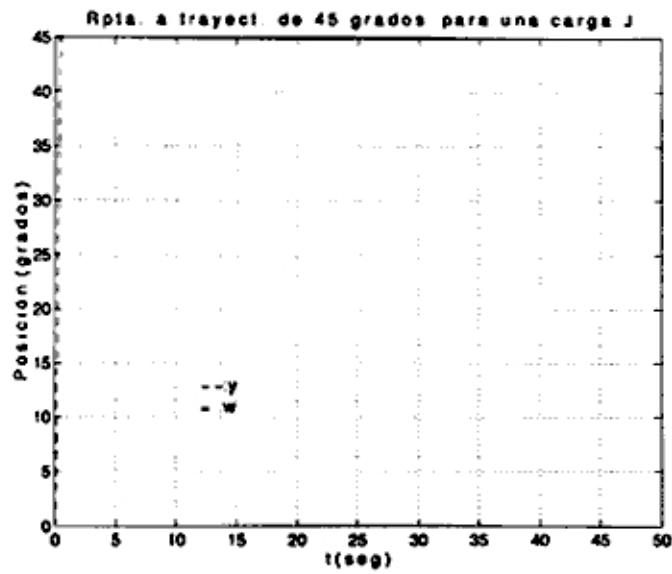


Figura 7.17: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para una carga J

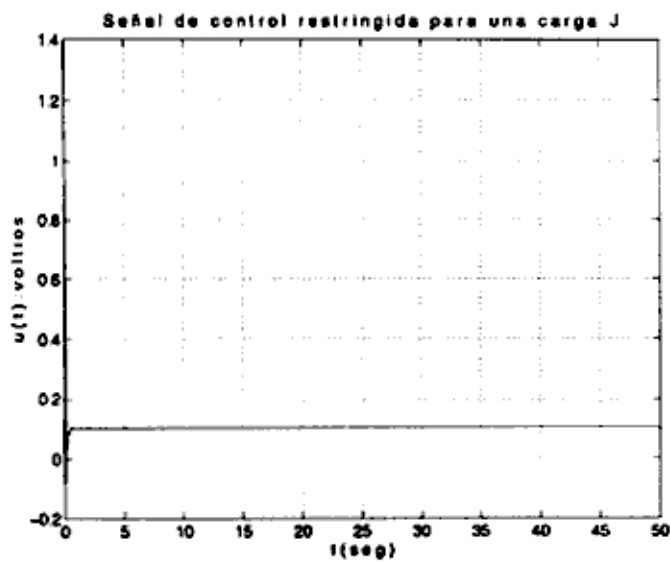


Figura 7.18: Señal de control  $u$  para una carga J

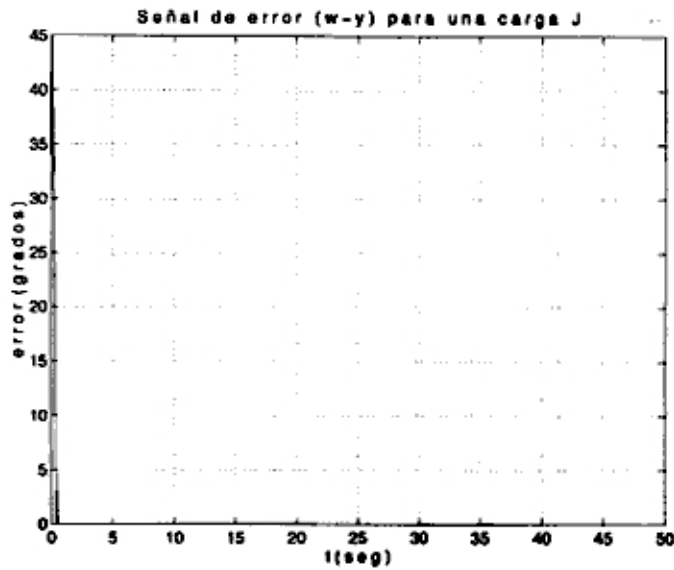


Figura 7.19: Señal de error e para una carga J

2. Considerando una inercia  $1.42J$ .

La salida del sistema mostrada en la figura 7.20 es la misma que al caso anterior, según puede verificarse en la figura 7.17. Las señales de control y error para este caso, también son las mismas que a las del caso precedente y pueden observarse en las figuras 7.21 y 7.22.

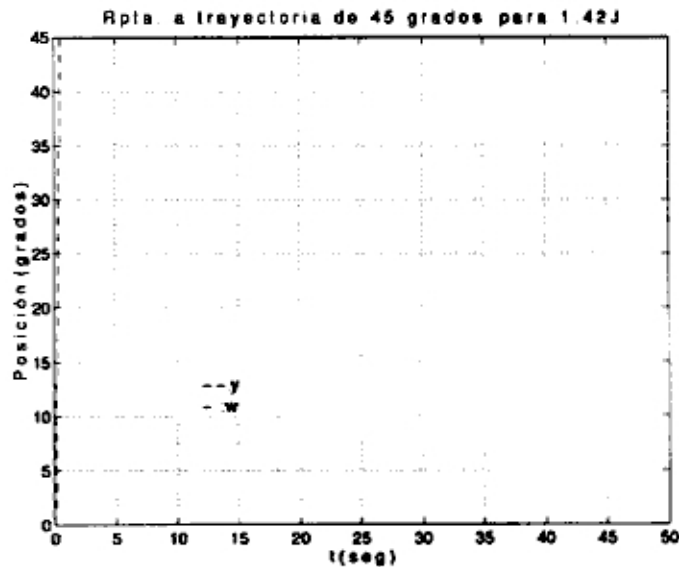


Figura 7.20: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para  $1.42J$

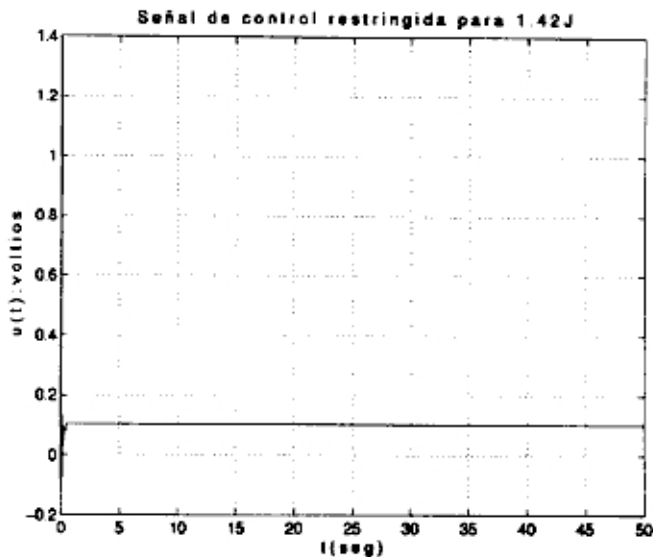


Figura 7.21: Señal de control  $u$  para 1.42J

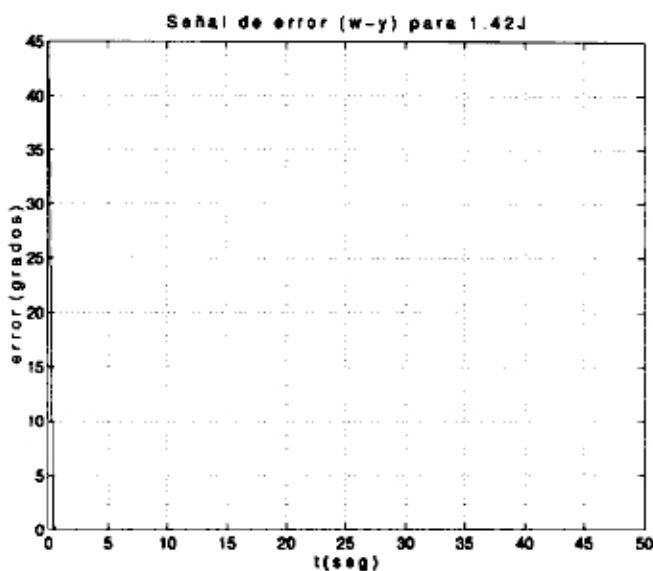


Figura 7.22: Señal de error  $e$  para 1.42J

### 3. Considerando una inercia 1.84J.

La figura 7.23 muestra la salida del sistema con una pérdida de exactitud en comparación a la trayectoria deseada. Puede observarse que entre un tiempo menor de 1 segundo hasta 4.5 segundos, la posición de salida se mantiene en  $40^\circ$ , para luego alcanzar los  $45^\circ$ , constituyendo un error de enganche, que puede deberse a un desajuste en la presión entre la varilla y el eje de salida del motor por las sucesivas pruebas a la que fue sometido. Obviamente la señal de control, observada en la figura 7.24 es ligeramente diferente a la de los casos

anteriores. Justamente en el rango de aproximadamente 1 a 4.5 segundos se aprecia una pendiente lineal creciente, necesaria para lograr que el motor rote hasta llegar a los  $45^\circ$  deseados. Cuando esto ocurre, la señal de control permanece constante a un valor de aproximadamente 0.38 voltios. La señal de error de seguimiento se muestra en la figura 7.25.

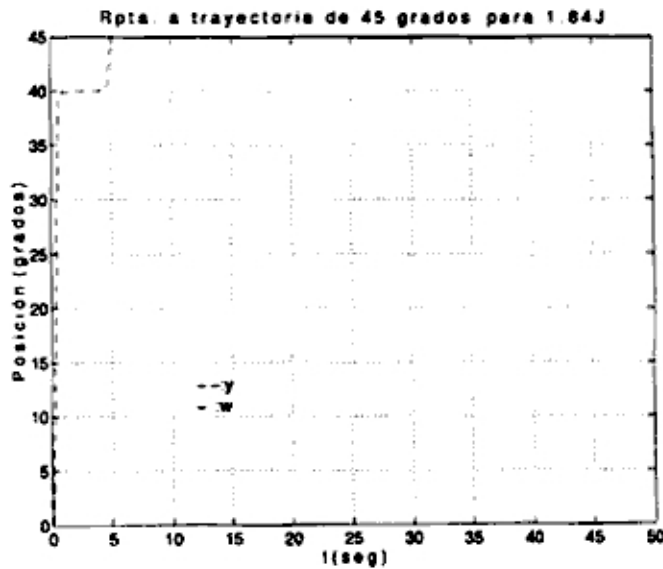


Figura 7.23: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.84J

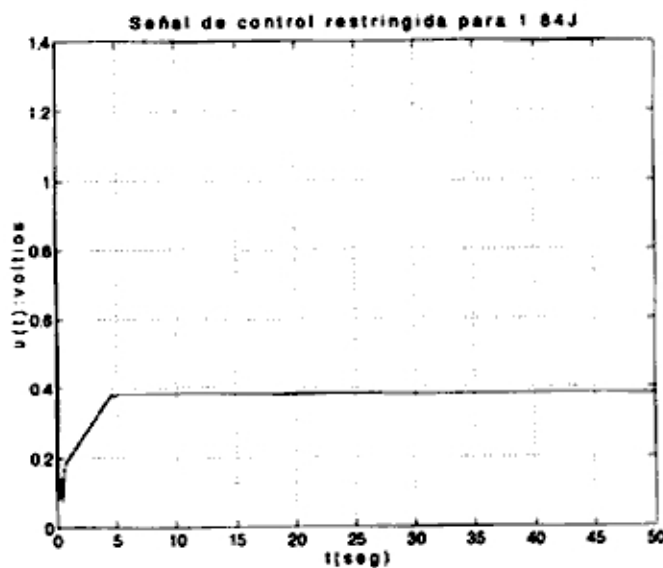


Figura 7.24: Señal de control  $u$  para 1.84J

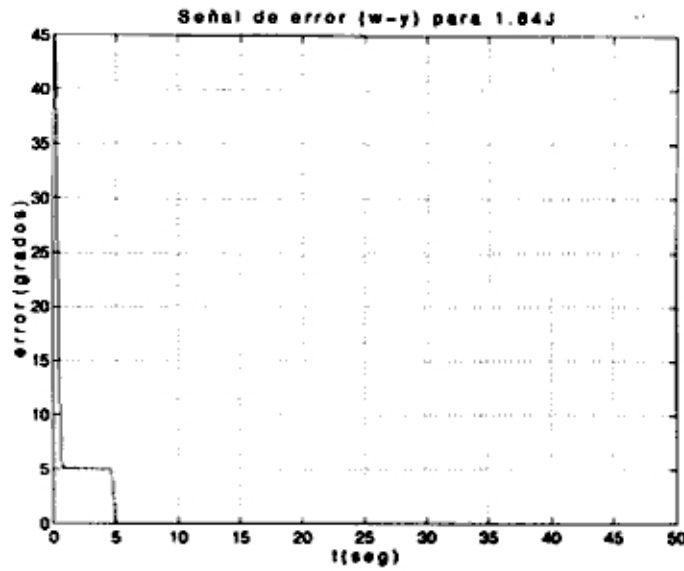


Figura 7.25: Señal de error  $e$  para  $1.84J$

4. Considerando una inercia  $2.98J$ .

Para estas condiciones, la salida del sistema presenta una mejora en relación al tiempo de convergencia, respecto a la salida del caso anterior. La inexactitud de la respuesta se encuentra en el rango de 1 a 3 segundos, llegando a converger en aproximadamente 2.8 segundos según puede observarse en la figura 7.26.

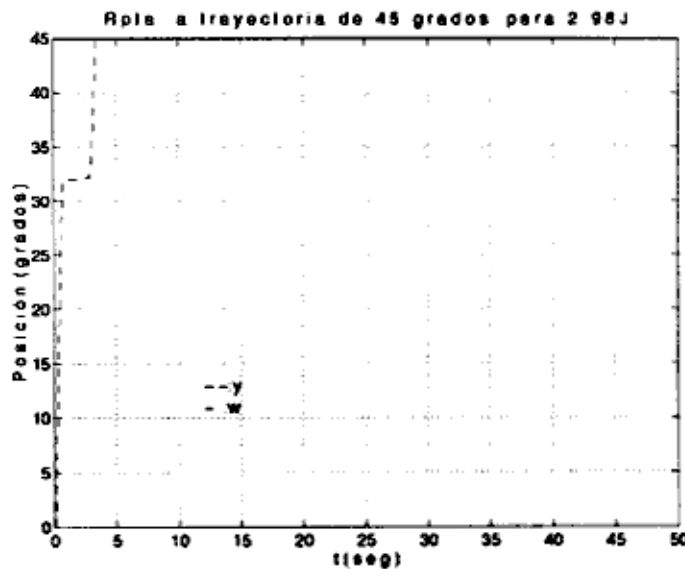


Figura 7.26: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para  $2.98J$

La señal de control generada para producir la salida de  $45^\circ$ , se aprecia en la figura 7.27 con un impulso inicial de aproximadamente 1.4 voltios, e inmediatamente después disminuye a 0.8 voltios, bajando luego a un valor de

aproximadamente 0.1 voltio, y luego producir un incremento lineal hasta llegar a aproximadamente 0.55 voltios en un tiempo de convergencia de aproximadamente 2.8 segundos. la figura 7.28 muestra la señal de error.

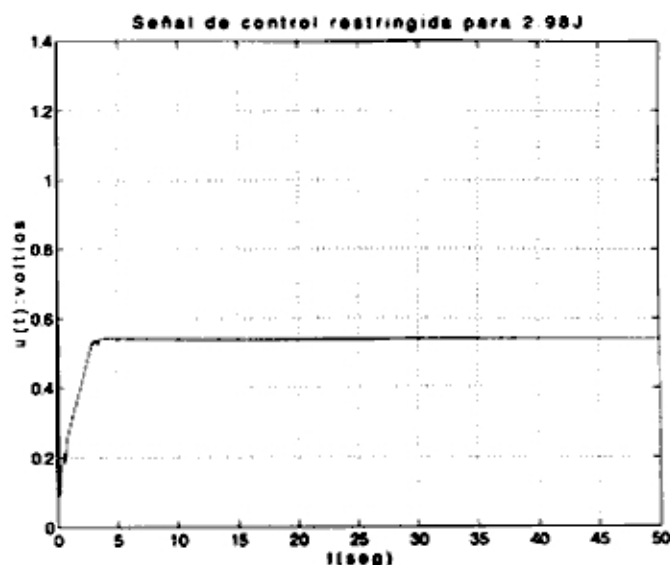


Figura 7.27: Señal de control  $u$  para 2.98J

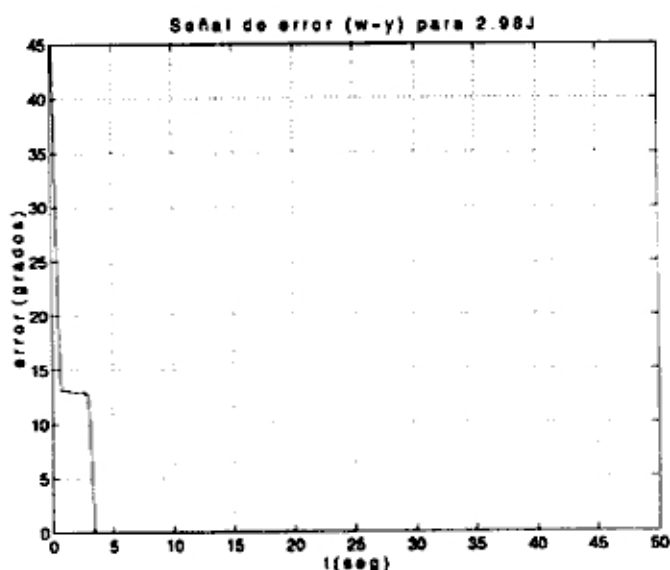


Figura 7.28: Señal de error  $e$  para 2.98J

## 7.2.2 Respuesta a Señales Variantes

Los resultados que se presentan a continuación corresponden al seguimiento a una trayectoria variante cada 20 segundos, con un tiempo total de ejecución de 100 segundos. La trayectoria seguida corresponde a  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $37.5^\circ$  y  $30^\circ$ . Se

consideran parámetros de peso distintos para las inercias consideradas en la sección anterior.

Considerando un factor de peso  $\lambda = 0.935$

### 1. Con carga inercial $J$ .

En la figura 7.29 se muestra un buen seguimiento de la salida del sistema a la trayectoria en referencia. Puede observarse que los cambios de posición angular del motor es bastante aproximado a los niveles angulares esperados, con pequeñas caídas ocurridas entre 18 y 20 segundos, luego un pequeño desnivel entre 60 y 67 segundos, y, finalmente una caída impulsiva muy rápida a los 88 segundos, que puede deberse a ligeros desajustes de presión entre la varilla y el eje del motor. La señal de control mostrada en la figura 7.30 presenta un impulso inicial de 1.4 voltios y cierta regularidad en la secuencia de ocurrencia. La pendiente positiva de la señal de control corresponde al cambio de un nivel menor a otro mayor, y la pendiente negativa corresponde al cambio de un nivel superior a otro inferior.

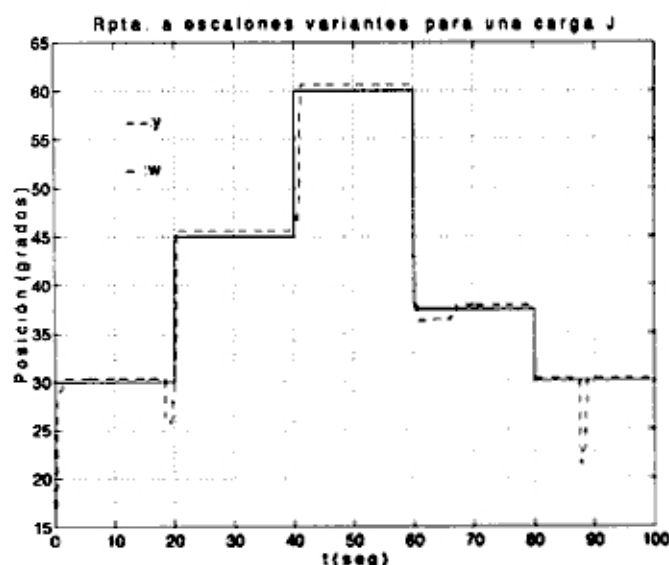


Figura 7.29: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para una carga  $J$

Puede apreciarse también que a los 20 segundos se produce otro impulso muy rápido de 1.4 voltios para producir una salida de 45°. En la figura 7.31 se observa la señal de error, cuyo máximo valor ocurre alrededor de los 20 y 40 segundos.



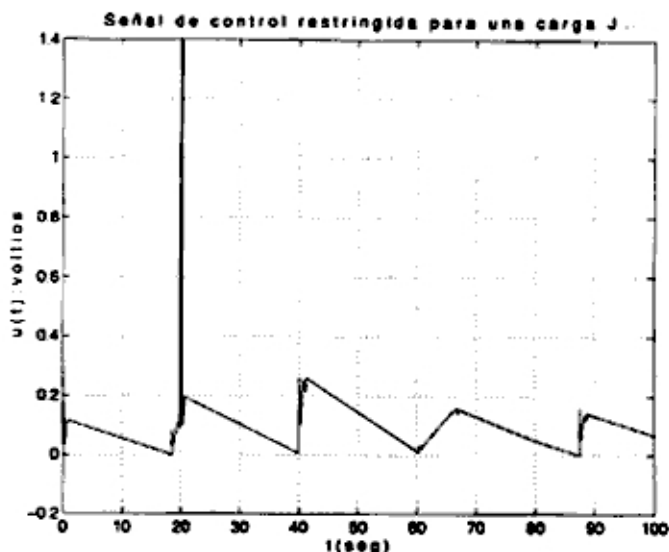


Figura 7.30: Señal de control  $u$  para una carga  $J$

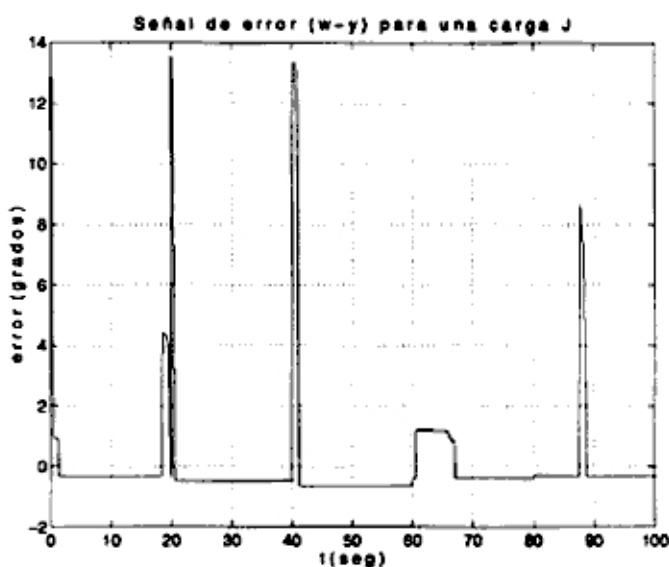


Figura 7.31: Señal de error  $e$  para una carga  $J$

## 2. Con carga inercial $1.42J$

Para estas condiciones de carga, la respuesta a la trayectoria es muy parecida a la de una carga inercial  $J$ , con ligeras mejoras en los primeros 60 segundos de ejecución, y con pequeñas *caídas* ocurridas entre 64 y 66 segundos, y finalmente entre 92 a 94 segundos, según puede apreciarse en la figura 7.32. Las señales de control y error mostradas en las figuras 7.33 y 7.34 respectivamente, son idénticas a las del caso anterior con inercia  $J$ .

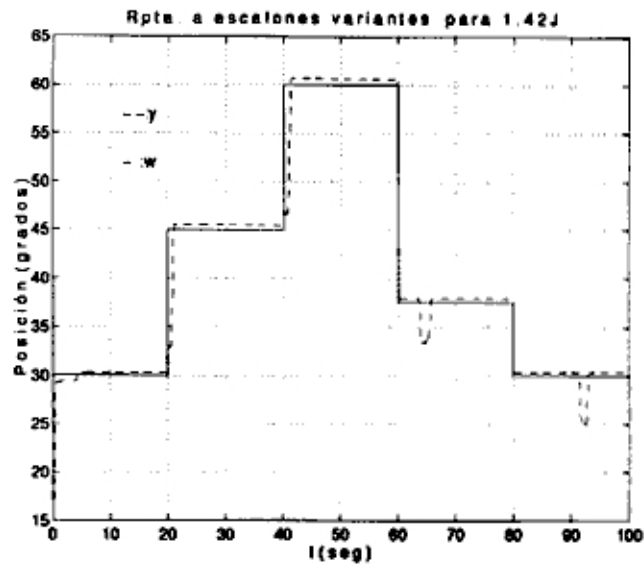


Figura 7.32: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.42J

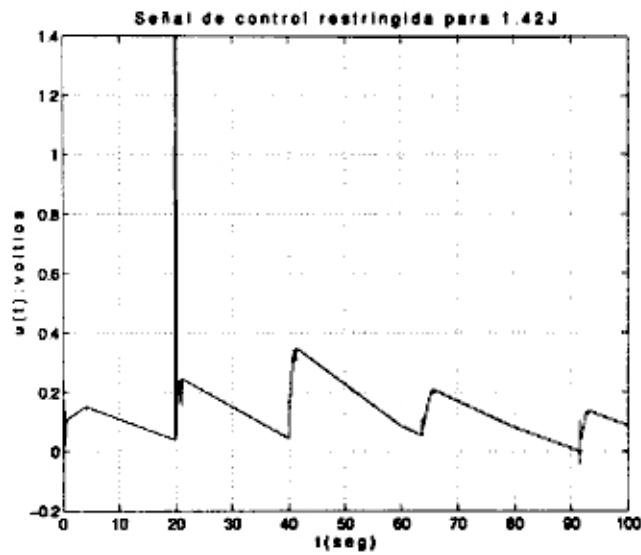


Figura 7.33: Señal de control  $u$  para 1.42J

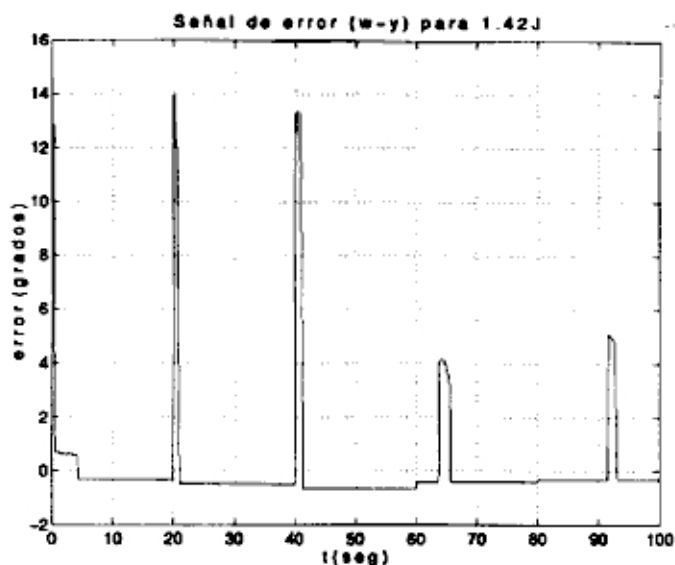


Figura 7.34: Señal de error  $e$  para 1.42J

### 3. Con carga inercial 1.84J

La figura 7.35 presenta un mejor seguimiento a la trayectoria considerada, con una pequeñísima *caída* instantánea a los 40 segundos de iniciadas las pruebas. Entre 77 y 80 segundos se presenta un pequeño error de seguimiento. La figura 7.36 muestra la señal de control con un impulso inicial de 1.4 voltios, otro impulso de 1.4 voltios a los 20 segundos y un impulso negativo de 0.05 voltios a los 40 segundos de iniciadas las pruebas. En la figura 7.37 se muestra la señal de error correspondiente.

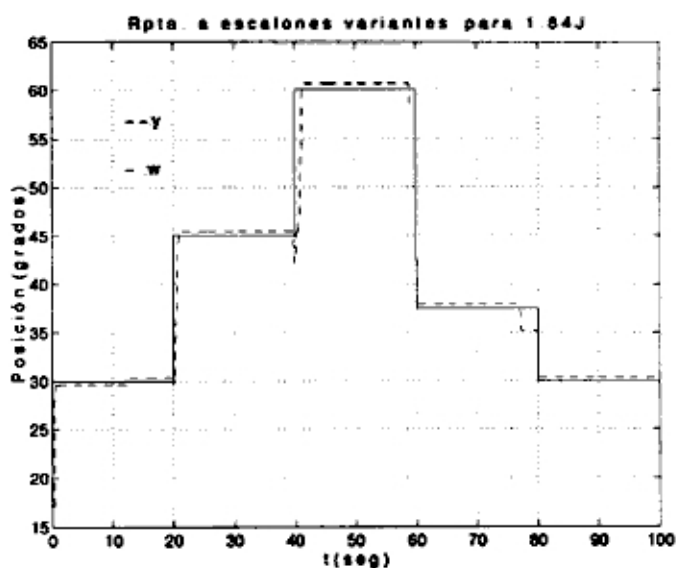


Figura 7.35: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.84J

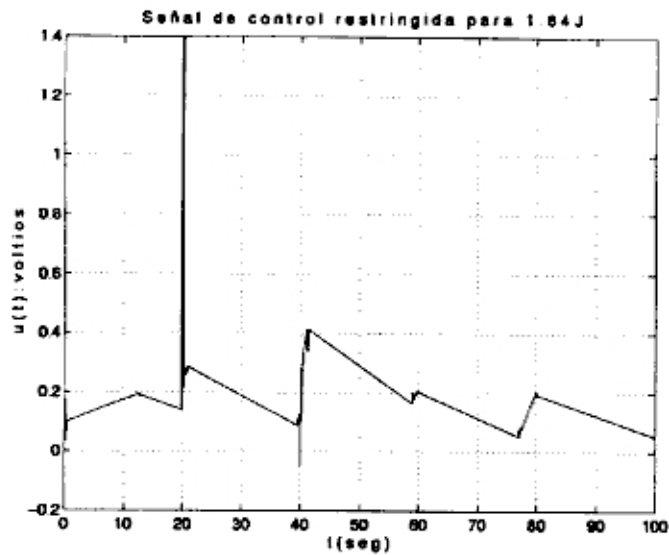


Figura 7.36: Señal de control  $u$  para 1.84J

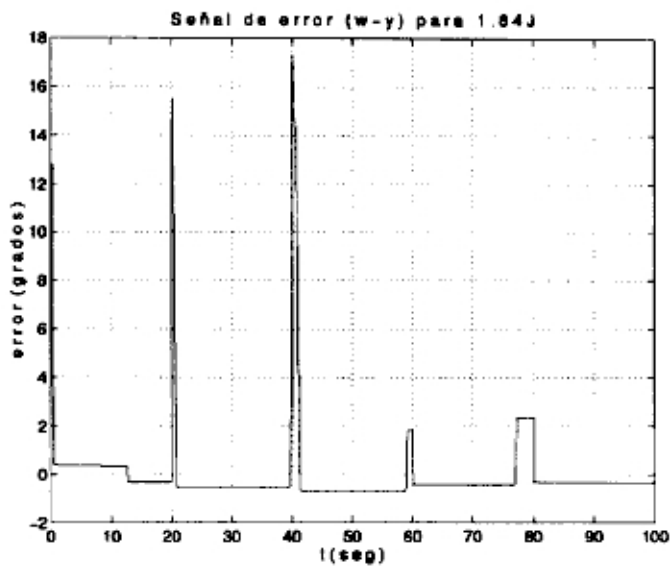


Figura 7.37: Señal de error  $e$  para 1.84J

#### 4. Con carga inercial 2.98J

La respuesta del sistema bajo las presentes condiciones de carga es, en general muy parecida a la anterior, según se puede observar en la figura 7.38. Las señales de control y error pueden observarse en las figuras 7.39 y 7.40 respectivamente.

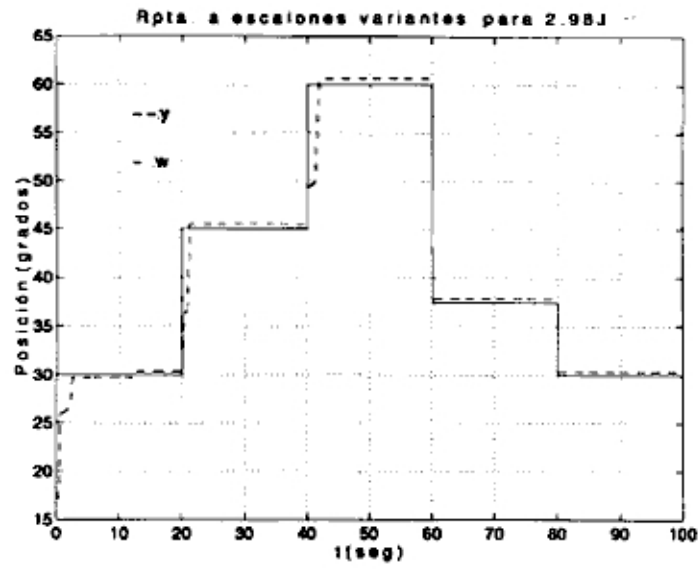


Figura 7.38: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 2.98J

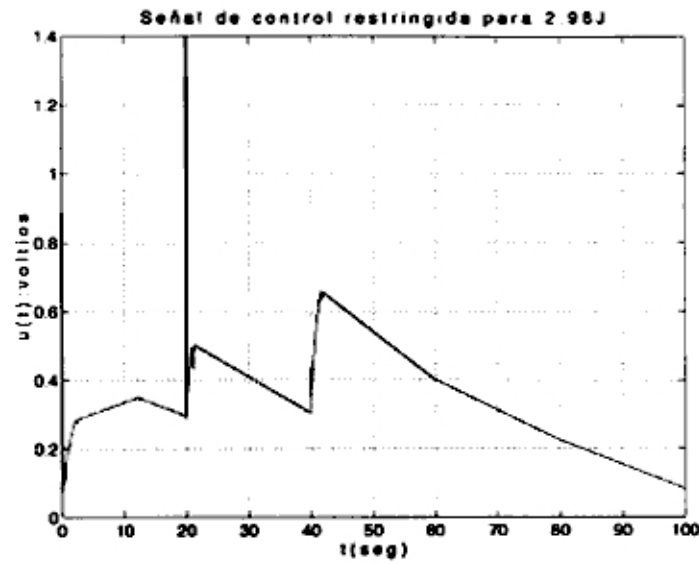


Figura 7.39: Señal de control  $u$  para 2.98J

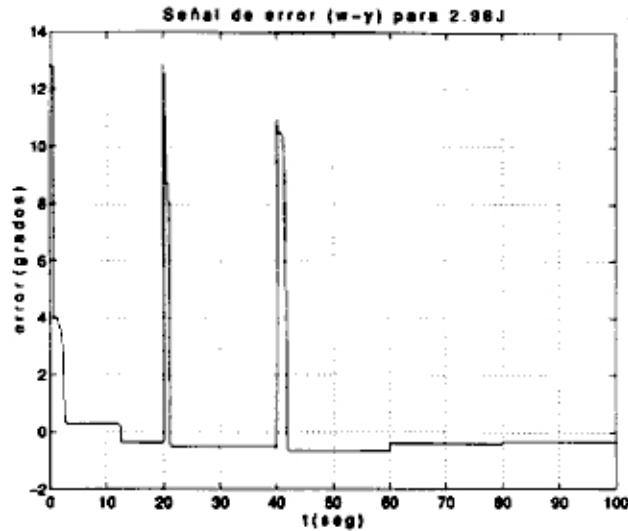


Figura 7.40: Señal de error  $e$  para 2.98J

Considerando un factor de peso  $\lambda = 0.942$

1. Con carga inercial  $J$ .

En este caso, la respuesta a la trayectoria en mención, presenta buen performance, a pesar de pequeñas *caídas* muy rápidas, según puede apreciarse en la figura 7.41. La señal de control es bastante regular y muy parecida a las ya vistas anteriormente, según puede observarse en la figura 7.42. En la figura 7.43 puede apreciarse que el error de seguimiento ha mejorado.

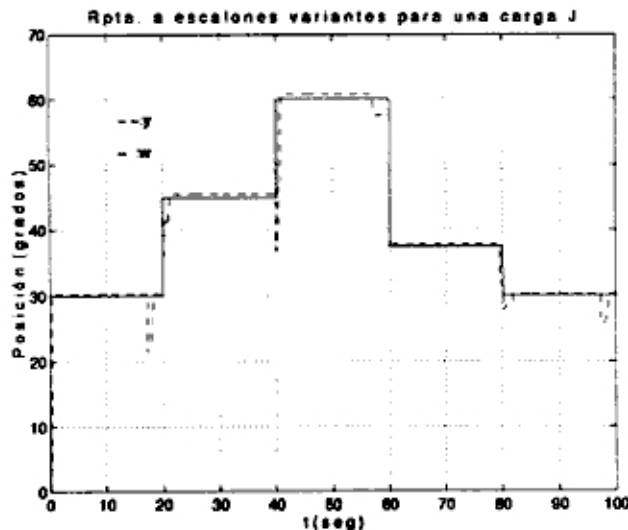


Figura 7.41: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para una carga  $J$

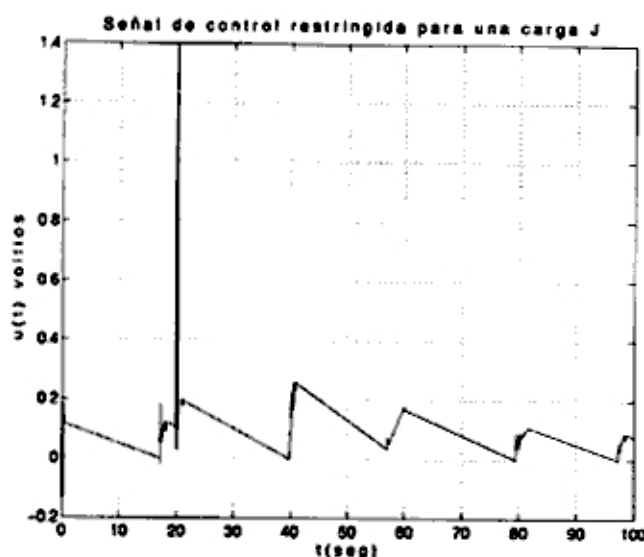


Figura 7.42: Señal de control  $u$  para una carga  $J$

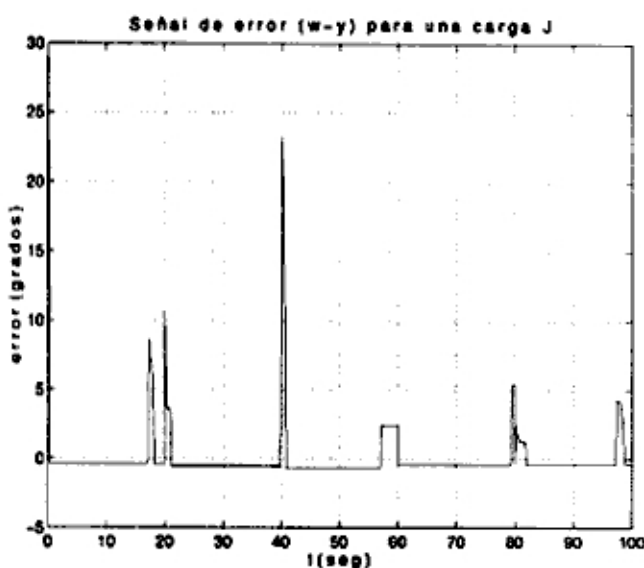


Figura 7.43: Señal de error  $e$  para una carga  $J$

## 2. Con carga inercial $1.42J$

El seguimiento a la trayectoria en referencia es muy buena según puede observarse en la figura 7.44. La señal de control de la figura 7.45 muestra un máximo impulso de 1.4 voltios en  $t=0$ , luego otro de 0.47 voltios, inmediatamente después otro de -0.25 voltios, para luego generar otro impulso de 0.82 voltios a los 20 segundos del tiempo de ejecución. Los demás niveles de tensión son de forma diente de sierra muy pequeños. En este caso, como en los demás, cada vez que la señal de salida converge a una posición deseada, la señal de

control tiende linealmente a cero; a otro cambio de posición, la señal de control incrementa linealmente su valor hasta llegar nuevamente a converger a la nueva posición, repitiéndose así sucesivamente para nuevos cambios de posición. El error angular en el transcurso de la ejecución de las pruebas, muestra una tendencia decreciente, según puede observarse en la figura 7.46.

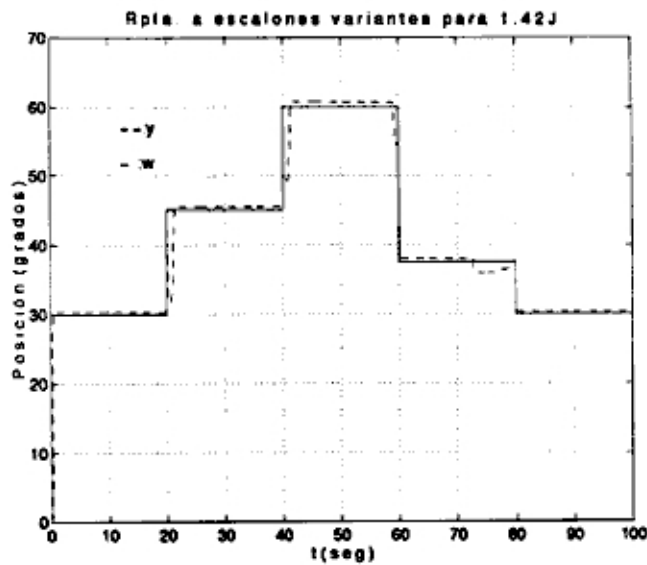


Figura 7.44: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.42J

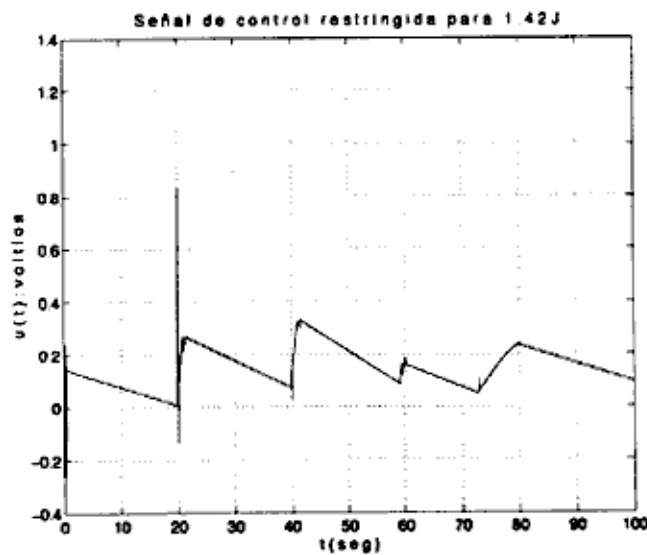


Figura 7.45: Señal de control  $u$  para 1.42J



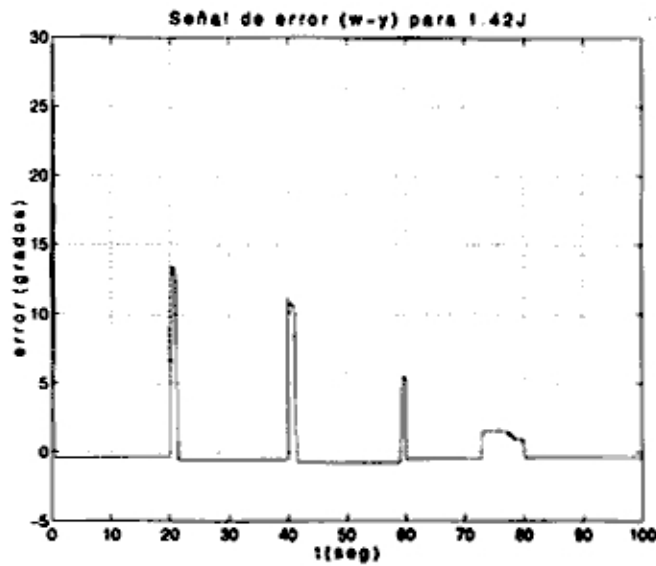


Figura 7.46: Señal de error  $e$  para 1.42J

### 3. Con carga inercial 1.84J

Las gráficas de seguimiento a la trayectoria en mención, de control y error son idénticas a las correspondientes condiciones de carga anteriores, según se observa en las figuras 7.47, 7.48 y 7.49 respectivamente.

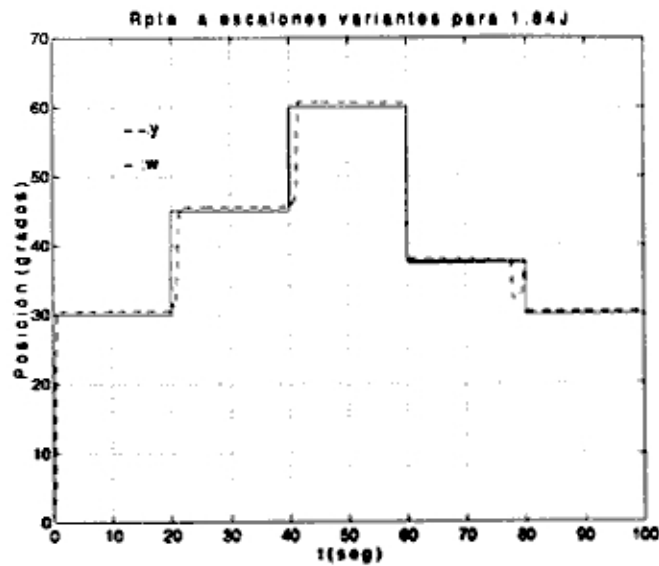


Figura 7.47: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 1.84J

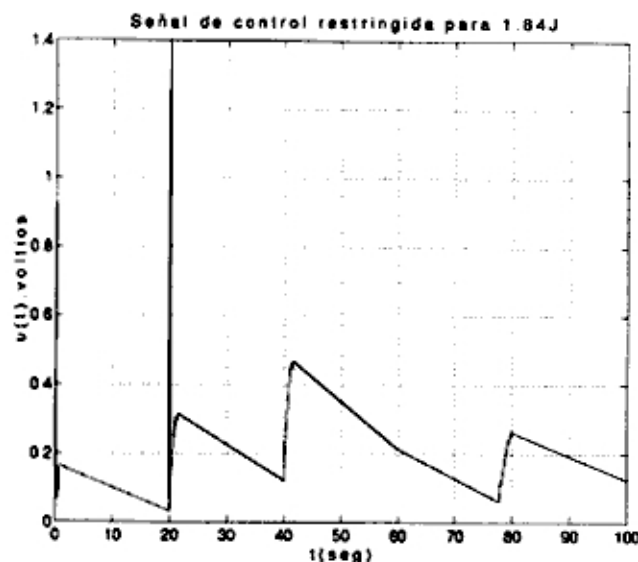


Figura 7.48: Señal de Control  $u$  para 1.84J

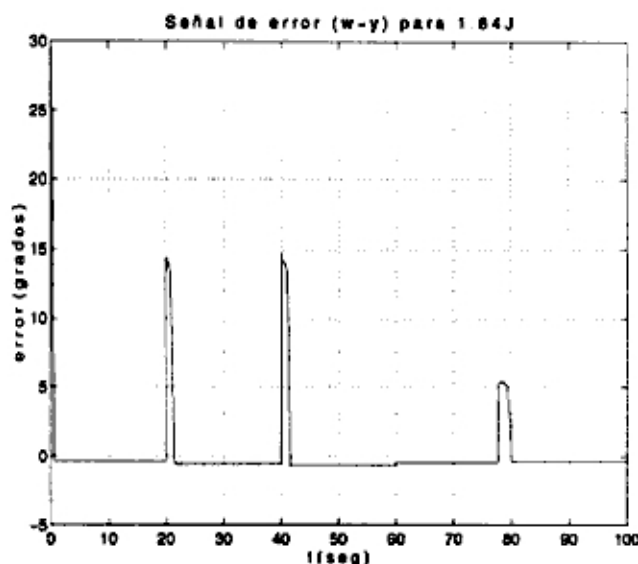


Figura 7.49: Señal de error  $e$  para 1.84J

#### 4. Con carga inercial 2.98J

La respuesta del sistema de control para esta otra condición, es igualmente muy parecida, con mejoras muy finas desde los 41 segundos hasta la finalización de las pruebas, como se muestra en la figura 7.50. La señal de control de la figura 7.51 corrobora dicho comportamiento, pudiendo verse que a partir de aproximadamente 41 segundos para adelante, el cambio en las pendientes entre los 3 tramos finales (de 20 segundos por tramo) son muy suaves. La señal de error de la figura 7.52 muestra errores con valores cercanos

a *cero* y, con impulsos muy estrechos de 17.5 y 7.5 grados alrededor de los 20 y 40 segundos del tiempo de ejecución.

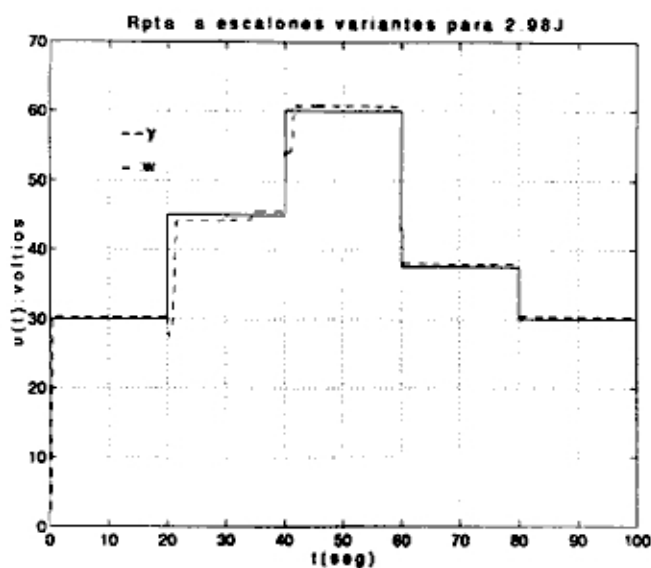


Figura 7.50: Comparación entre la salida  $y$  y la trayectoria  $w$  para 2.98J

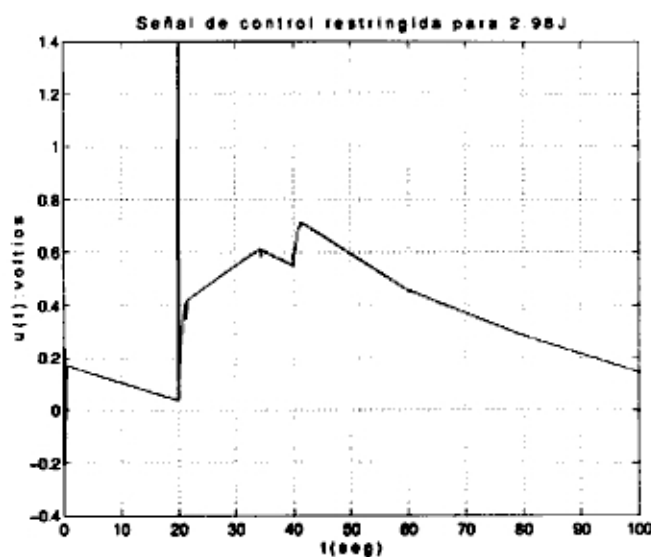


Figura 7.51: Señal de Control  $u$  para 2.98J

En la figura 7.53 se aprecia el instante preciso de funcionamiento del sistema.

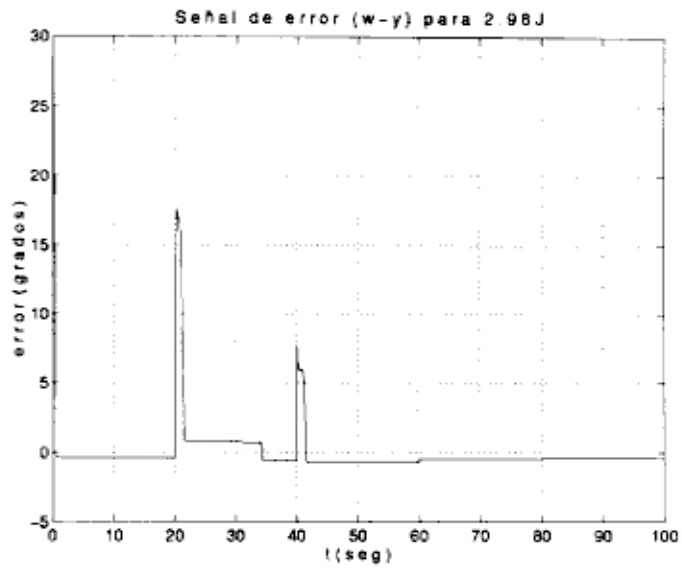


Figura 7.52: Señal de error  $e$  para 2.98J



Figura 7.53: Instante preciso de funcionamiento del sistema

## Capítulo 8

# Conclusiones

### 8.1 Resumen de los resultados

La observación de las simulaciones ejecutadas en MATLAB y los resultados experimentales, permiten extraer las siguientes conclusiones:

1. En primera instancia, los resultados en tiempo real para referencias fijas con restricciones de entrada, no son satisfactorios, debido al excesivo sobreimpulso en estado transitorio, tal como pueden observarse en las figuras 7.1 y 7.3 de la sección 7.1. En el seguimiento a referencias o trayectorias variantes, tal como puede observarse en las figuras 7.5, 7.8, 7.11 y 7.14, se presentan sobreimpulsos a cada cambio de nivel y cierta inestabilidad en el seguimiento.
2. Los resultados en tiempo real con restricciones entrada y de salida, en general, son satisfactorios; ya que la respuesta a trayectorias fijas y variantes son muy aproximadas, evidentemente, con una respuesta más exacta a referencias fijas. Tales salidas pueden apreciarse en las figuras 7.17, 7.20 a 7.50 de la sección 7.2.
3. Para todos los resultados en tiempo real se ha considerado un factor de filtraje  $\alpha = 0.01$ . Para valores de  $\alpha$  mayores, la respuesta del sistema se hace más lenta e inexacta, lo que no es conveniente en aplicaciones de rapidez y precisión, como por ejemplo en robótica.
4. Inicialmente se hicieron pruebas asumiendo  $\lambda = 0$  con resultados insatisfactorios, por lo que se optó por considerar este factor de peso.
5. Es necesario indicar, que en las gráficas de las simulaciones sin restricciones (sección 6.1) no aparecen los sobreimpulsos en estado transitorio, debido a la no limitación de la señal de control; sin embargo no es posible implementarlas en tiempo real por las consideraciones expuestas en la sección 5.2.
6. Las simulaciones con restricciones de entrada (sección 6.2), nos muestra salidas con sobreimpulsos en estado transitorio. Por ejemplo, la figura 6.11 (referen-

cia fija) presenta un sobreimpulso de aproximadamente 20 por ciento con un tiempo de convergencia de 2.1 segundos, mientras que la figura 7.1 (salida en tiempo real para referencia fija), presenta un sobreimpulso mayor, de aproximadamente 44 por ciento con un tiempo de convergencia de 2.7 segundos. A pesar que el sobreimpulso es mayor en tiempo real, los tiempos de convergencia prácticamente son los mismos.

7. Las gráficas de las simulaciones con restricciones de entrada y de salida (sección 6.3), como por ejemplo las relativas a trayectoria fija (escalón unitario) y trayectoria variable (escalones variantes), no se presentan sobreimpulsos. Idénticamente, en la sección 7.2 las gráficas en tiempo real correspondientes tampoco presentan sobreimpulsos.
8. Para referencias fijas con restricciones de entrada, y con  $\lambda$  más alejados de la unidad, la respuesta del sistema en tiempo real es más lenta e inestable (comparar figuras 7.1 y 7.3). Se puede observar que el tiempo de convergencia es de 2.7 y 13 segundos respectivamente, y el correspondiente a referencias de escalones variantes es de un tiempo promedio de 2.5 segundos en cada cambio de nivel (ver figuras de la sección 7.1).
9. Considerando restricciones de entrada y de salida (sección 7.2), se puede observar que el tiempo de convergencia a referencias fijas es menor a 1 segundo, y el correspondiente a referencias variantes es de aproximadamente 1 segundo. La diferencia y ventaja de usar restricciones de entrada y de salida es obvia, se ha logrado reducir el tiempo de convergencia debido al corte del sobreimpulso que ocupaba un tiempo adicional.
10. Para seguimiento a referencia variante, con restricciones de entrada y de salida (sección 7.2), y con  $\lambda$  más cercano a la unidad, el sistema adquiere mayor robustez, la respuesta es más estable y más exacta; sin embargo pierde rapidez. La combinación de los factores  $\lambda$  más cercano a la unidad y  $\alpha$  más alejado de la unidad, nos permite obtener resultados satisfactorios.
11. Para todas las pruebas se han considerado restricciones de entrada, condición necesaria si se desea proteger las condiciones físicas y de seguridad de la planta.
12. Si se desea obtener respuestas óptimas, siempre, se tendrá que considerar simultáneamente los factores de peso y filtraje.

13. Para todas las pruebas en tiempo real, podemos observar que el máximo valor que adquiere la señal de control en el transitorio es de 1.4 voltios (gracias a las restricciones de entrada); luego de la convergencia dicho valor tiende a cero.
14. Finalmente, con el objetivo de comparar las ventajas del sistema de control predictivo frente a otras técnicas de control, en el apéndice A se estudia y simula el comportamiento del sistema de control polinomial clásico sin restricciones. Como conclusión de dichas simulaciones, se puede anotar que el controlador predictivo presenta ventajas respecto a éste otro método, debido a un menor tiempo de convergencia, mayor amplitud de la señal de control, y el uso de parámetros  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $N1$ ,  $N2$  y  $Nu$  que permiten un mejor ajuste del sistema de control.

## 8.2 Recomendaciones para trabajos futuros

Un modelo lineal es válido para determinados entornos de operación (como es el caso de esta tesis). Sin embargo para otros entornos desconocidos y con distintos modos de operación, podría ser necesario establecer las relaciones no lineales apropiadas entre las diferentes entradas existentes, conduciéndonos entonces a un modelo no lineal del proceso.

Existen varias técnicas de control predictivo no lineal, de los cuales se puede resaltar la gran importancia del Control Predictivo Neuronal, que se plantea como una opción posterior.

La técnica de control predictivo desarrollada para un proceso SISO, también puede extenderse en su aplicación para un proceso MIMO (Multiple-Input-Multiple-Output).

# Bibliografía

- [1] De Keyser, R. "A Gentle Introduction to Model Based Predictive Control", *PADI2 International Conference on Automatic Control*, october 1998, Piura - Perú.
- [2] Camacho, E.F., Bordons, C. *Model Predictive Control*. Springer, 1999.
- [3] Clarke, D.W. *Application of Generalized Predictive Control to Industrial Processes*. IEEE Transactions on Automatic Control, 1998.
- [4] Ogata, K. *Ingeniería de Control Moderna*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1993.
- [5] Mathur, P.D. *Servo Design for High-Speed Low-Tension Tape Transport*. Mellon University Pittsburg, Pennsylvania, December 1994.
- [6] Ponce Dioses, L.A., Rojas Moreno, A., Herrera Bendezú, L.G. "Control de Servosistemas No Lineales Usando Redes Neuronales", *PADI2 International Conference on Automatic Control*, october 1998, Piura - Perú.
- [7] Tupayachi Calderón, O.A., Herrera Bendezú, L.G. "Servo-Control No Lineal para Sistemas Precisos de Seguimiento", *PADI2 International Conference on Automatic Control*, october 1998, Piura - Perú.
- [8] Ogata, K. *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. Prentice-Hall Hispanoamericana, 1996.
- [9] Isermann, R. *Digital Control Systems*. Springer, 1989.
- [10] De Prada, C. "Optimización de Consignas en Control Predictivo", *PADI2 International Conference on Automatic Control*, october 1998, Piura, Perú.
- [11] Grace, A., Laub, A.J., Little, J.N., Thompson, C.M. *Control System TOOLBOX, for Use with MATLAB*. The Math Works Inc., 1994.



- [12] Simon, A. Schuster Company. *The Student Edition of SIMULINK*. The Math Works Inc., 1996.
- [13] Krauss, T.P., Shure, L., Little, J.N. *Signal Processing TOOLBOX*. The Math Works Inc., 1994.
- [14] Richalet, J., Rault, A., Testud, J.L., and Papon, J. *Model Predictive Heuristic Control: Application to Industrial Processes*. *Automatica*, 14(2):413-428, 1978.
- [15] Cutler, C.R. and Ramaker, B.C. "Dynamic Matrix Control-A Computer Control Algorithm ", *Automatic Control Conference*, 1980, San Francisco.
- [16] Ydstie, B.E. "Extended Horizon Adaptive Control ", *Proc. 9th IFAC World Congress*, 1984, Budapest, Hungary.
- [17] Clarke, D.W., Mohtadi, C., and Tuffs, P.S. *Generalized Predictive Control. The Basic Algorithm*. *Automatica*, 23(2):137-148, 1987.
- [18] Greco, C., Menga, G., Mosca, E., and Zappa, G. *mal, Performance Improvement of self Tunning Controllers by Multistep Horizons: the Musmar approach*. *Automatica*, 20:681-700, 1984.
- [19] Seterboek, R. *Predictive Control. A unified approach*. Pentice Hall, 1992.
- [20] Richalet, J., Abu el Ata-Doss, S., Arber, C., Kuntze, H.B., Jacobash, A., and Schill, W. "Predictive Funcional Control. Application to fast and accurate robots ", *Proc. 10th IFAC Congress*, 1987, Munich.