ESPACIOS DEFINIDOS

DEFINITE SPACES

Héctor Carlos Guimaray Huerta[1]

RESUMEN

La matemática ha desarrollado, haciendo uso de axiomas, espacios matemáticos como espacios vectoriales, normados, métricos, topológicos, etc. El objetivo principal en este artículo es definir un espacio en el que las propiedades de un conjunto sean las mismas en los espacios mencionados anteriormente, para lo cual se considera una función conjunto a conjunto llamada función definida.

Palabras clave.- *Espacio vectorial, Espacio topológico, Conjunto definido, Cápsula definida.*

ABSTRACT

Mathematics has been developed, using axioms, mathematical spaces as vector spaces, normed, metric, topological and so on. The primary objective in this article is to define a space in which the properties of a set are the same in the spaces above, for which is considered a function set to set called defined function.

Key words.- *Vector space, Topological space, Defined set, Defined hull.*

INTRODUCCIÓN

En el espacio vectorial surgen los conceptos de subespacio vectorial, conjunto afín, conjunto convexo y cono, entre otros, los que a su vez dan lugar a cápsula lineal, afín, convexa y positiva respectivamente. Similarmente, en espacio topológico usando el concepto de conjunto cerrado consideramos la cápsula cerrada que no es otra cosa que la clausura de dicho conjunto. En el presente artículo se introduce el concepto de conjunto definido, cápsula definida para luego considerar el espacio definido con el objetivo de que las propiedades sean válidas en los espacios mencionados.

PRELIMINARES

Subespacio vectorial

Definición.- Sean X un espacio vectorial sobre un campo C, $A \subseteq X$.
Se dice que A es subespacio vectorial si:

i) $x + y \in A \ \forall x, y \in A$
ii) $\alpha x \in A \ \forall \alpha \in C, x \in A$ [5]

Proposición.- Sea X un espacio vectorial sobre un campo C. Luego, $\bigcap A_i$ es un subespacio vectorial $\forall$ colección de subespacios vectoriales $\{ A_i \}$ [1 - 5].

Definición:.- Sean X un espacio vectorial sobre un campo C, $A \subseteq X$. Luego,
$\langle A \rangle = \{x \in X \ / \ x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \ , \ x_k \in A, \ \alpha_k \in C \ \}$
se llama cápsula lineal de A. [4].

Proposición.- Sean X un espacio vectorial sobre un campo C; A, B $\subseteq$ X. Luego:
i) $\langle A \rangle$ es un subespaciovectorial $\forall \ A \subseteq X$ [1]
ii) $A \subseteq B \ \rightarrow \langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$
iii) A es subespacio vectorial si y sólo si
$A = \langle A \rangle$

Conjunto afín

Definición.- Sean X un espacio vectorial sobre un

[1]Maestro y Docente de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, Perú

campo C, $A \subseteq X$. Se dice que A es conjunto afín si $A = x + S$ donde $x \in X$ y S es un subespacio vectorial.

Proposición.- Sea X un espacio vectorial sobre un campo C. Luego, $\bigcap A_i$ es un conjunto afín $\forall$ colección de conjuntos afines $\{ A_i \}$.

Definición.- Sean X un espacio vectorial sobre un campo C, $A \subseteq X$. Luego,
$\mathcal{A}(A) = \{x \in X / x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k , x_k \in A, \alpha_k \in C, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1\}$ se llama cápsula afín de A [7 y 8].

Proposición.- Sean X un espacio vectorial sobre un campo C; A, B $\subseteq X$. Luego:
i) $\mathcal{A}(A)$ es un conjunto afín
$\forall A \subseteq X$
ii) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{A}(A) \subseteq \mathcal{A}(B)$
iii) A es conjunto afín si y sólo si
$A = \mathcal{A}(A)$

Conjunto convexo

Definición.- Sean X un espacio vectorial real, $A \subseteq X$. Se dice que A es unconjunto convexo si
$\lambda A + (1 - \lambda) A \subseteq A \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

Proposición.- Sea X un espacio vectorial real. Luego, $\bigcap A_i$ es un conjunto convexo $\forall$ colección de conjuntos convexos $\{ A_i \}$ [6].

Definición.- Sean X un espacio vectorial real, $A \subseteq X$. Luego, $[A] = \{x \in X / x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k ,$
$x_k \in A, \alpha_k \in C, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0 \}$ se llama cápsula convexa de A.

Proposición.- Sean X un espacio vectorial real; A, B $\subset X$. Luego:
i) [A] es un conjunto convexo
$\forall A \subseteq X$
ii) $A \subseteq B \Longrightarrow [A] \subseteq [B]$
iii) A es conjunto convexo si y sólo si
$A = [A]$

Cono convexo

Definición.- Sean X un espacio vectorial real, $A \subset X$. Se dice que A es uncono si $\lambda A \subseteq A \ \forall \lambda \geq 0$.

Se dice que $A \subseteq X$ es cono convexo si A es cono y convexo.

Proposición.- Sea X un espacio vectorial real. Luego, $\bigcap A_i$ es un cono convexo $\forall$ colección de conos convexos $\{ A_i \}$.

Definición.- Sean X un espacio vectorial real, $A \subseteq X$. Luego, $\mathcal{P}(A) = \{x \in X / x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k,$
$x_k \in A, \alpha_k \in C, \alpha_k \geq 0\}$ se llama cápsula positiva de A.

Proposición.- Sean X un espacio vectorial real; A, B $\subseteq X$. Luego:
i) $\mathcal{P}(A)$ es un cono convexo
$\forall A \subseteq X$
ii) $A \subseteq B \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
iii) A es cono convexo si y sólo si
$A = \mathcal{P}(A)$ [2 y 8]

Conjunto cerrado

Definición.- Sean X un espacio topológico, $A \subseteq X$. Se dice que A es conjunto cerrado si $X \setminus A$ es abierto [7].

Proposición.- Sea X un espacio topológico. Luego, $\bigcap A_i$ es un conjunto cerrado $\forall$ colección de conjuntos cerrados $\{A_i\}$ en X [7].

Definición.- Sean X un espacio topológico $A \subseteq X$. Luego, $\bar{A} = \{x \in X /$
$V \cap A \neq \emptyset \ \forall$ vecindad V de x$\}$ se llama cápsula cerrada de A [3].

Proposición.- Sean X un espacio topológico; A, B $\subseteq X$. Luego:
i) $\bar{A}$ es un conjunto cerrado
$\forall A \subseteq X$
ii) $A \subset B \Longrightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
iii) A es conjunto cerrado si y sólo si
$A = \bar{A}$ [3].

PROPUESTA DE INVESTIGACIÓN ESPACIO DEFINIDO

Notación.- $\mathcal{P}(X)$ conjunto potencia de un conjunto X.

Observación.- Conjunto definido es, por ejemplo, conjunto abierto, cerrado, subespacio vectorial, conjunto afín, convexo, etc.

Definición.- Sea X un conjunto dotado de un concepto de conjunto definido en X donde $\bigcap A_i$ es un conjunto definido $\forall$ colección de conjuntos definidos $\{ A_i \}$ en X,
D:$\mathcal{P}$ (X) $\to \mathcal{P}$ (X) se llama función definida en X si:
i) D (A) es conjunto definido
$\forall$ A $\subseteq$ X
ii) A $\subseteq$ B $\Longrightarrow$ D (A) $\subseteq$ D (B)
iii) A es conjunto definido si y sólo si
A = D (A)

D (A) se llama cápsula definida de A

(X, D) se llama espacio definido

Ejemplos: (X, < >), (X, $\mathcal{A}$), (X, [ ]),
(X, $\mathcal{P}$), (X, $\overline{\ }$) expresadas anteriormente son espacios definidos.

Ejemplo: Sea X un espacio topológico dotado del concepto de conjunto abierto, int A el interior de A. Luego, (X, int) no es espacio definido.

Solución

Se tiene que.-
i) int A es conjunto abierto$\forall$ A $\subseteq$ X
ii) A $\subseteq$ B $\Longrightarrow$ int A$\subseteq$ int B
iii) A es conjunto abierto si y sólo si
A = int A
Sin embargo, $\bigcap A_i$no es un conjunto abierto$\forall$ colección de conjuntos abiertos.
$\{ A_i \}$ en X
$\Longrightarrow$
(X, int) no es espacio definido.

Resultados

Proposición: A $\subseteq$ D (A)
Prueba:
Sea x $\in$ A
Ahora, sea $\{A_i\}$ una colección de conjuntos definidos en X donde A $\subseteq A_i$.
$\Longrightarrow$
x$\in A_i \forall$ i
$\Longrightarrow$
x$\in \bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con A_i conjunto definido.
$\Longrightarrow$
x$\in$ D (A)
$\Longrightarrow$
A $\subseteq$ D (A)

Observación.- Considerando la proposición anterior se tiene:

A $\subseteq$<A>

A $\subseteq \mathcal{A}$ (A)

A $\subseteq$ [A]

A $\subseteq \mathcal{P}$ (A)

A $\subseteq \bar{A}$

Proposición.- D (A) = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$con A_i conjunto definido.

Prueba:
A $\subseteq A_i$
$\Longrightarrow$
A $\subseteq \bigcap A_i$
$\Longrightarrow$
D (A) $\subseteq$ D ($\bigcap A_i$) = $\bigcap A_i$, por el axioma iii)
D (A) $\subseteq \bigcap A_i$ (I)
Por otra parte:
$\bigcap A_i \subseteq A_j \forall$j

Se tiene que A $\subseteq$ D (A) con D (A) conjunto definido.
$\Longrightarrow$
D (A) = A_j, algún j
$\Longrightarrow$
$\bigcap A_i \subseteq$ D (A) (II)
De (I) y (II):
D (A) = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con A_i conjunto definido.

CONCLUSIONES

Considerando la proposición anterior se tiene:

<A> = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con $A_i$subespacio vectorial.

$\mathcal{A}$ (A) = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con A_i conjunto afín.

[A] = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con A_i conjunto convexo.

$\mathcal{P}$ (A) = $\bigcap A_i$ donde A $\subseteq A_i$ con A_i cono convexo.

$\bar{A}$ = $\bigcap A_i$ donde A $\subset A_i$ con A_i conjunto cerrado.

Es decir, usando el concepto introducido, hemos probado simultáneamente para subespacio vectorial, conjunto afín, conjunto convexo, cono convexo y conjunto cerrado; de igual manera para otros conceptos matemáticos siempre que cumplan los axiomas de la propuesta de investigación dada en el punto 3.

REFERENCIAS

1. **Howard**, **A.**, "Introducción al Álgebra Lineal", pp. 279, Editorial Limusa S. A., México, 2003.
2. **Berge, C.**, "Topological Spaces", pp. 14, the Macmillan Company, New York, 1963.
3. **Dugundji, J.**, "Topology", pp. 69, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1966.
4. **Herstein, I. N.**, "Álgebra Moderna", pp. 163, Editorial Trillas S. A. de C. V., México, 2002.
5. **Hoffman, K.,** "Álgebra lineal", pp. 34, 36, Editorial Dossat, S. A., Madrid, 1973.
6. **Magaril-Il'yaevG, G.**, "Convex Analysis: Theory and Applications", pp. 30, American Mathematical Society, USA, 2003.
7. **Munkres, J. R.**, "Topología", pp. 105, 106, Pearson Educación, S. A., Madrid, 2002.
8. **Kusraev, A. G., Kitateladze, S. S.**, "Subdifferentials: Theory and Applications", pp. 3, 2 - 6, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 1995.

hguimaray@hotmail.com

Recepción de originales: enero 2013
Aceptación de originales: marzo 2013