

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA  
FACULTAD DE INGENIERÍA CIVIL**



**MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS APLICADOS AL  
DISEÑO DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES  
CONSIDERANDO SU INTERACCIÓN CON EL SUELO**

**TESIS**

**PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS  
CON MENCIÓN EN INGENIERÍA GEOTÉCNICA**

ELABORADO POR

**JOSÉ CARLOS BERROCAL CANCHARI**

ASESOR

**Dr. JORGE ELÍAS ALVA HURTADO**

LIMA-PERÚ

2013

MÉTODOS ANALÍTICOS Y NUMÉRICOS APLICADOS AL DISEÑO  
DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES CONSIDERANDO SU  
INTERACCIÓN CON EL SUELO

José Carlos Berrocal Canchari

Presentado a la Sección de Posgrado de la Facultad de Ingeniería Civil en  
cumplimiento parcial de los requerimientos para el grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS CON MENCIÓN EN INGENIERÍA GEOTÉCNICA  
DE LA  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

2013

Autor : José Carlos Berrocal Canchari

Recomendado : Dr. Jorge Elías Alva Hurtado  
Asesor de la Tesis

Aceptado por : Dr. Jorge Elías Alva Hurtado  
Jefe de la Sección de Posgrado

Es propiedad intelectual del autor.

el autor autoriza a la UNI-FIC a reproducir la tesis en su totalidad o en partes.

A LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

## AGRADECIMIENTO

Al doctor Jorge Alva Hurtado por haber asumido la revisión del presente trabajo.

# ÍNDICE

RESUMEN .....	iv
ABSTRACT .....	v
LISTA DE FIGURAS .....	vi
LISTA DE TABLAS .....	x
LISTA DE SÍMBOLOS .....	xii
INTRODUCCIÓN .....	xv
Objetivo de la tesis .....	xvi
Contenido de la tesis .....	xvi
1 CONSIDERACIONES GENERALES .....	1
1.1 ESTADO DEL CONOCIMIENTO .....	1
1.1.1 Cimentaciones superficiales.....	1
1.1.2 Funcionalidad del conjunto suelo estructura de cimentación .....	3
1.1.3 Comportamiento de acuerdo al tipo de suelo .....	4
1.2 ENFOQUES DE ANALISIS DEL PROBLEMA.....	4
1.2.1 Métodos analíticos.....	5
1.2.2 Métodos numéricos .....	5
1.2.3 Métodos empíricos .....	6
1.3 MODELOS DEL COMPORTAMIENTO SUELO ESTRUCTURA .....	7
1.4 CRITERIOS DE CAPACIDAD PORTANTE.....	9
1.4.1 Métodos analíticos basados en la teoría de la plasticidad.....	9
1.4.2 La Fórmula general de capacidad de carga.....	13
1.4.3 Presión admisible por limitación de asientos .....	13
1.4.4 Presión admisible final .....	14
1.4.5 Capacidad admisible para cimentaciones superficiales sobre roca .....	14
1.4.6 Relación capacidad de carga asentamiento .....	15
1.4.7 Cálculo de asientos por el método elástico.....	16
1.4.8 Distribución de tensiones con la profundidad por sobrecarga .....	17
1.4.9 Método de equilibrio límite .....	18
1.4.10 Últimos avances relacionados con el cálculo de capacidad portante .....	20
1.4.11 Procedimientos numéricos aplicados al cálculo de capacidad portante.....	21
1.5 DISEÑO POR EL METODO DE ESTADOS LIMITE .....	22
1.5.1 Generalidades .....	22
1.5.2 Métodos de cálculo.....	23
1.5.3 Concepto de análisis límite .....	25

1.5.4	Diseño por factores de carga y resistencia (LRFD) .....	25
1.5.5	Determinación de factores de resistencia .....	28
1.5.6	Posibilidades del diseño geotécnico mediante LRFD .....	29
2	EL METODO DEL COEFICIENTE DE BALASTO .....	31
2.1	EL MODELO DE WINKLER.....	31
2.1.1	Correlación con métodos numéricos.....	34
2.2	CRITERIOS DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD .....	34
2.2.1	El problema de la presión de contacto .....	34
2.2.2	Rigidez del terreno de cimentación .....	35
2.2.3	Rigidez del elemento de cimentación.....	35
2.2.4	Rigidez relativa .....	36
2.2.5	Distribución de las tensiones de contacto .....	43
2.3	DETERMINACION DE PARAMETROS DE DISEÑO .....	45
2.3.1	Expresiones analíticas del coeficiente de balasto.....	45
2.3.2	Obtención del coeficiente de balasto .....	47
2.3.3	Extrapolación y ajuste del coeficiente de balasto .....	53
2.3.4	Coeficiente de balasto horizontal .....	55
2.3.5	Determinación del módulo elástico del suelo .....	56
2.4	PROPUESTAS MEJORADAS AL COEFICIENTE DE BALASTO.....	57
2.4.1	Modelos de dos parámetros .....	57
2.5	EL MODELO DEL SEMI ESPACIO ELASTICO .....	60
2.5.1	El concepto de Boussinesq .....	61
3	APLICACIÓN DE METODOS NUMERICOS .....	63
3.1	SOLUCIONES POR DIFERENCIAS FINITAS.....	63
3.1.1	Viga de cimentación sobre medio elástico .....	63
3.1.2	Soluciones y aproximaciones por diferencias finitas unidimensionales.....	63
3.1.3	Soluciones y aproximaciones por diferencias finitas bidimensionales.....	65
3.1.4	Sustitución del medio elástico por miembros estructurales equivalentes.....	67
3.2	ANALISIS DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES POR ELEMENTOS FINITOS... 68	
3.2.1	El MEF aplicado a problemas geotécnicos en general .....	70
3.2.2	Viga de cimentación sobre medio elástico .....	71
3.3	FORMULACIONES BASICAS .....	75
3.3.1	Teoría conceptual.....	75
3.3.2	Discretización para elementos finitos.....	76
3.3.3	Matriz de rigidez para el suelo considerando la hipótesis de Winkler .....	77
3.3.4	Modelos constitutivos para suelos .....	79
3.4	MODELIZACION DE ELEMENTOS Y DOMINIOS .....	84
3.4.1	Concepto de modelización .....	84

3.4.2	Interpolación para elementos finitos lineales .....	84
3.4.3	Interpolación para elementos área de 15 nodos .....	85
3.4.4	Elementos estructurales e integración numérica .....	86
3.4.5	Interpolación de funciones e integración numérica para elementos volumen .....	89
3.5	UTILIZACION DEL PROGRAMA PLAXIS 3D .....	91
3.5.1	Aspectos generales del modelado por elementos finitos con el programa Plaxis 3D Foundation .....	91
3.5.2	Etapas de cálculos .....	92
3.5.3	Resultados obtenidos .....	93
4	ANALISIS COMPARATIVO.....	95
4.1	CALCULO ANALITICO .....	95
4.1.1	Métodos analíticos para el cálculo de losas de cimentación .....	95
4.1.2	Vigas continuas de cimentación rígidas .....	99
4.1.3	Vigas de cimentación sobre medios elásticos .....	100
4.1.4	Estimación de tensiones de contacto en zapatas .....	110
4.2	SOLUCION DE CASOS PRACTICOS.....	115
4.2.1	Aplicación para el caso de una viga de cimentación sobre medio elástico ...	115
4.2.2	Aplicación del método diferencias finitas al mismo caso .....	119
4.2.3	Aplicación del método de elementos finitos al mismo caso .....	120
4.2.4	Estudio de una losa de cimentación.....	125
4.2.5	Aplicación del programa SAFE .....	136
4.3	ANALISIS DE DEFLEXIONES Y MOMENTOS FLECTORES .....	137
4.3.1	El caso de la viga de cimentación sobre medio elástico.....	137
4.3.2	El caso de la losa de cimentación .....	140
4.4	COMPROBACIONES ESTRUCTURALES.....	142
4.4.1	Acciones sobre la cimentación .....	142
4.4.2	Verificación del peralte en losas.....	143
4.4.3	Diseño estructural de la cimentación .....	144
4.5	POSIBILIDADES Y LIMITACIONES DE LOS METODOS PROPUESTOS .....	145
4.5.1	De los métodos numéricos.....	145
4.5.2	De los modelos Winkler y elástico.....	146

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANEXOS

## RESUMEN

En este trabajo se presentan dos modelos existentes en la actualidad para el cálculo de cimentaciones superficiales: el modelo de resortes basados en la teoría de Winkler y el Método de elementos finitos.

Como tal se abordan esquemas y conceptos que integran mecanismos de interacción entre dos materiales de distinta rigidez como parte de diseño de cimentaciones superficiales; bajo este contexto se hacen aplicaciones de casos prácticos tanto con criterios analíticos y numéricos; se cuenta con la asistencia del programa de aplicaciones geotécnicas Plaxis 3D, que está formulada mediante la técnica de elementos finitos en tres dimensiones, utilizando modelos constitutivos para materiales geotécnicos que analiza el modelo numérico desde una perspectiva del comportamiento tensión deformación. Alternativamente se utiliza el programa SAFE para caso específico. La información así obtenida es contrastada objetivamente proponiéndose, según el caso, pautas que permitan integrar estos procedimientos con los habitualmente empleados en el tratamiento de la problemática. Dentro del enfoque conceptual se da énfasis a tendencias actuales para el diseño de cimentaciones superficiales como es la teoría de estados límite.

Teniendo en cuenta que el suelo presenta menos resistencia y mayor deformabilidad que el resto del conjunto de materiales, no puede resistir cargas por sobre su capacidad de soporte; debido a ello los diseños y procedimientos constructivos previenen transmitir y repartir las cargas al terreno buscando no exceder su resistencia nominal, definiendo criterios analíticos y numéricos.

De acuerdo a los resultados y de la relación entre las tensiones y las deflexiones determinadas se pueda deducir, con mejor conocimiento de causa, el valor o los valores que conviene adoptar para el coeficiente de balasto y demás parámetros, en aplicación de la teoría de Winkler, e incluso su variación a nivel del contacto suelo-estructura de cimentación.

De forma general, el diseño geométrico de una cimentación y su refuerzo está directamente relacionado con su rigidez, flexibilidad y las características de resistencia y deformación del suelo sobre el cual se sustenta. Los aspectos comprendidos en la presente tesis encaminan a un mejor entendimiento de tópicos elementales de manera didáctica y aplicativa.

## ABSTRACT

In this paper we present two models currently available for the calculation of shallow foundations : the spring model based on Winkler theory and finite element method .

As such schemes are discussed and concepts that integrate mechanisms of interaction between two materials of different stiffness as part of shallow foundations design , in this context are applications of case studies both analytical and numerical criteria , it is assisted program Plaxis 3D geotechnical applications , which is formulated by the finite element technique in three dimensions, using constitutive models for geotechnical materials that analyzes the numerical model from a stress-strain behavior . Alternatively, use the SAFE program for specific case. The information thus obtained is contrasted objectively propose, as appropriate, guidelines that integrate these procedures with those normally used in the treatment of the problem . Within the conceptual approach emphasizes current trends in the design of shallow foundations such as the theory of limit states .

Given that the ground has less resistance and greater deformability than the rest of all the materials can not withstand loads on the bearing capacity , due to this design and construction procedures foresee transmit and distribute the loads to the ground looking not exceed nominal resistance , defining analytical and numerical criteria .

According to the results and the relationship between the stresses and deflections can deduct certain , with better knowledge of the value or values to be taken to the ballast coefficient and other parameters , applying the theory of Winkler , and even contact level variation of soil-structure foundation.

Generally , the geometrical design of a foundation and reinforcement is directly related to its stiffness , flexibility and strength and deformation characteristics of the soil on which it is based. The aspects covered by this thesis routed to a better understanding of basic topics in a didactic and applicative.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1.1	Tipos convencionales de cimentaciones superficiales. (Jiménez Salas , 1981).....	2
FIGURA 1.2	Modelos de comportamiento del suelos (Miñón Santos, 1981) .....	8
FIGURA 1.3	Mecanismo de rotura propuesto por Terzaghi para cimientos superficiales.....	10
FIGURA 1.4	Comparación entre los valores experimentales (entrecortado) y teóricos del factor de capacidad de carga $N_y$ . Publicado por Zadroga (1994) .....	12
FIGURA 1.5	Capacidad de carga del terreno definida a partir del gráfico tensión aplicada versus deformación. ....	15
FIGURA 1.6	Isolíneas de distribución de tensiones en el terreno con la profundidad en función a la sobrecarga de contacto.....	17
FIGURA 1.7	Círculo de rozamiento para evaluar la rotura de una cimentación superficial .....	18
FIGURA 1.8	Superficie de rotura no circular para análisis por equilibrio límite .....	19
FIGURA 1.9	Valores de $N_y$ para cimentaciones rugosas. Publicado por Griffiths (1982).....	20
FIGURA 1.10	Mecanismo general de carga y condiciones de carga. Georgiadis y Michalopoulos(1985) .....	21
FIGURA 1.11	Diagrama de flujo para el diseño de cimentaciones superficiales por Estados límite, en donde CC es capacidad de carga, DE deformación excesiva, ULS estados límites últimos y SLS Estados límites de servicio.....	24
FIGURA 1.12	Diagrama de flujo del LRFD para verificaciones de estados límites últimos en el diseño de cimentaciones. ....	26
FIGURA 2.1	Modelo de viga sobre fundación elástica .....	32
FIGURA 2.2	Modelo acoplado de fundación tipo Winkler.....	33
FIGURA 2.3	Variación del módulo de balasto para una fundación con el modelo pseudo acoplado.(Coduto D, 2001) .....	33
FIGURA 2.4	Molde de asentamiento en una fundación flexible .....	35
FIGURA 2.5	Asentamiento típico de una fundación rígida .....	36
FIGURA 2.6	Asentamiento típico de una fundación rígida .....	36
FIGURA 2.7	Momentos y asientos de una zapata combinada según su rigidez (Bowles 1968).....	37
FIGURA 2.8	Determinación de la rigidez en función a la compresibilidad del terreno .....	39
FIGURA 2.9	Tensiones de contacto debajo de una cimentación circular. Adaptado por Brown (1969) .....	42
FIGURA 2.10	Asentamientos y coeficientes de asentamiento diferencial para una cimentación rectangular con una relación $L/B=2$ en función a la rigidez relativa de cimentación. Adaptado por Fraser y Wardle (1976) .....	43
FIGURA 2.11	Tensión en la base de la fundación flexible (izquierda) y rígida (derecha).....	43
FIGURA 2.12	Distintos casos de distribuciones de tensiones bajo una cimentación de acuerdo al tipo de suelo.....	44
FIGURA 2.13	Determinación del módulo de balasto por aproximación .....	50
FIGURA 2.14	Coefficiente de balasto para cimentaciones sobre arenas para diversas condiciones de densificación en toneladas por pie cúbico. (Baker A.L.L, 1957).....	51
FIGURA 2.15	Coefficiente de balasto para cimentaciones sobre arcilla en toneladas por pie cúbico. (Baker A.L.L, 1957) .....	51
FIGURA 2.16	Factores de corrección al coeficiente de balasto en función de las posiciones de las cargas. ....	53
FIGURA 2.17	Comparativo de factores de corrección propuestos por diversos autores. Tomado de Freire Tellado (1999).....	54

FIGURA 2.18	Coeficiente de balasto horizontal. Sociedad Española de Mecánica del Suelo y Cimentaciones.....	55
FIGURA 2.19	Resultados de un ensayo típico triaxial.....	56
FIGURA 2.20	Modelo de Borodich.....	58
FIGURA 2.21	Modelo de Hetenyi.....	58
FIGURA 2.22	Modelo de Pasternak.....	59
FIGURA 2.23	Modelo de Kerr.....	59
FIGURA 2.24	Modelo de Vlazov.....	60
FIGURA 3.1	Malla de Diferencias Finitas para una viga de cimentación. Tomado de Adel Azzawi (2010).....	64
FIGURA 3.2	Solución por el método de Malter: (a) Fundación Winkler (b) deflexiones y (c) carga equivalente. Saca G. (1984).....	65
FIGURA 3.3	Elemento diferencial bidimensional para la solución por diferencias finitas.....	66
FIGURA 3.4	Puntos nodales y condiciones de contorno para un modelo de diferencias finitas.....	67
FIGURA 3.5	Viga sobre apoyos elásticos.....	67
FIGURA 3.6	Viga con miembros sustitutos de los resortes.....	68
FIGURA 3.7	Acciones y deformada de un elemento viga. Tomado de Bowles (1968).....	71
FIGURA 3.8	Acciones y deformada de un elemento viga. Tomado de Bowles (1968).....	72
FIGURA 3.9	Acciones y deformada de un elemento de viga.....	73
FIGURA 3.10	Modelo de elemento finito con resortes en los nodos. Modelo de Mindlin (1951).....	78
FIGURA 3.11	(a) Superficie de fluencia según el modelo de Tresca, (b) según el modelo de Von Mises y (c) el plano octaédrico en el que se superponen ambas superficies.....	80
FIGURA 3.12	(a) Superficie de fluencia según el modelo de Mohr-Coulomb, (b) según el modelo de Drucker-Prager y (c) el plano octaédrico en el que se superponen ambas superficies.....	80
FIGURA 3.13	Comportamiento elastoplástico progresivo.....	81
FIGURA 3.14	Comportamiento elástico seguido de plástico perfecto.....	81
FIGURA 3.15	Superficie de fluencia para el modelo Mohr Coulomb.....	82
FIGURA 3.16	Interpolación de elementos lineales.....	85
FIGURA 3.17	Funciones de forma para elementos triangulares de quince nodos. Fuente: (Bringkreve et al, 2002). .....	85
FIGURA 3.18	Ubicación de los quince nodos en un elemento triangular. Fuente; (Bringkreve et al, 2002). .....	86
FIGURA 3.19	Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento cuadrilátero de 8 nodos.....	87
FIGURA 3.20	Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento triangular de 6 nodos.....	88
FIGURA 3.21	Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento cuadrilátero de 16 nodos.....	88
FIGURA 3.22	Elemento tridimensional tipo cuña de 15 nodos.....	89
FIGURA 3.23	Elemento tipo tetraedro elemental de 10 nodos.....	90
FIGURA 3.24	Esfuerzos principales en el suelo: sin sobrecarga lado izquierdo, suelo cargado lado derecho.....	93
FIGURA 4.1	Representación de la variación lineal de las tensiones de contacto de una losa.....	96
FIGURA 4.2	Gráfico para la determinación de los factores Z. (Hetenyi, 1946).....	98

FIGURA 4.3	Representación de la variación lineal de las tensiones de contacto para un elemento lineal tipo viga. ....	99
FIGURA 4.4	Equilibrio de fuerzas y momentos en un elemento diferencial de viga. ....	100
FIGURA 4.5	Esquema de deformada, diagrama de momentos y fuerzas cortantes de una viga infinita solicitada por una carga puntual. ....	102
FIGURA 4.6	Esquema de una viga de cimentación infinita con carga distribuida finita .....	102
FIGURA 4.7	Identificación de los grados de libertad de la viga de longitud finita .....	103
FIGURA 4.8	Viga de longitud finita solicitada por carga puntual centrada. ....	105
FIGURA 4.9	Modelo de Timoshenko. Viga de cimentación real y ficticia con acciones ficticias que reproducen las condiciones de borde en A y B. ....	105
FIGURA 4.10	Modelo de Bleich de viga de longitud finita.....	106
FIGURA 4.11	Cortantes, momentos y deflexiones para vigas infinitas y semi infinitas sobre fundación elástica. Tomado de Naval Facilities Engineering Command Virginia (1986). ....	108
FIGURA 4.12	Funciones para cortantes, momentos y deflexiones para vigas sobre fundación elástica. Tomado de Naval Facilities Engineering Command Virginia (1986) .....	109
FIGURA 4.13	Distribución de la presión de contacto para una zapata cuadrada sometida a una carga puntual P. (Reimbert et al,1979) .....	110
FIGURA 4.14	Comprobación de la distribución parabólica de la presión de contacto para una zapata sobre suelo no cohesivo. (Reimbert, 1979).....	111
FIGURA 4.15	Ensayo de carga sobre una zapata circular, la curva I representa suelo cohesivo y la II suelo no cohesivo; a 0.85D se produce la intersección de las curvas. (Reimbert, 1979) .....	112
FIGURA 4.16	Distribución de las tensiones en la interfaz de una zapata rígida corrida con el suelo al aplicar una carga central; 1, diagrama teórico; 2, diagrama real. Dashko (1980) .....	113
FIGURA 4.17	Distribución de tensiones de contacto para un caso particular de cargas aplicadas.....	113
FIGURA 4.18	Diagrama de reacción del suelo sobre una losa convencional .....	114
FIGURA 4.19	Area de fundaciones equivalentes y efectivas. Tomado de Brinch Hansen (1961).....	115
FIGURA 4.20	Viga de cimentación sobre medio elástico. ....	116
FIGURA 4.21	Diagramas de deflexiones, momentos y fuerzas cortantes.....	118
FIGURA 4.22	Vista en planta de elemento de cimentación.....	121
FIGURA 4.23	Configuración tridimensional de discretización por elementos finitos del conjunto .....	122
FIGURA 4.24	Campo de desplazamientos del modelo en 3 dimensiones .....	122
FIGURA 4.25	Campo de desplazamientos a través de un eje longitudinal central del elemento .....	123
FIGURA 4.26	Campo de tensiones totales en el suelo e interfaz.....	123
FIGURA 4.27	Campo de esfuerzos cortantes en el sentido del eje longitudinal de la viga.....	124
FIGURA 4.28	Momentos flectores del elemento de cimentación en el sentido de su eje longitudinal. Los colores oscuros corresponden a los momentos negativos y los claros a los positivos .....	124
FIGURA 4.29	Modelo en planta de la losa de cimentación .....	125
FIGURA 4.30	Discretización en 3 dimensiones del conjunto cimentación suelo .....	126
FIGURA 4.31	Campo de desplazamientos del modelo con un máximo de 5.52 mm.....	127
FIGURA 4.32	Campo de tensiones totales en el suelo e interfaz con un máximo de - 87.15KN/m <sup>2</sup> .....	127

FIGURA 4.33 Campo de deflexiones del elemento estructural con un máximo de 5.52 mm .....	128
FIGURA 4.34 Fuerzas cortantes en el elemento losa con un máximo de 7.43 KNm. ....	128
FIGURA 4.35 Momentos flectores en la dirección de mayor longitud en el elemento losa con un máximo de -69.70 KNm.m .....	129
FIGURA 4.36 Campo de desplazamientos eje longitudinal con un máximo de -11.47 mm .....	132
FIGURA 4.37 Campo de desplazamientos eje transversal con un máximo de -11.26 mm.....	133
FIGURA 4.38 Campo de desplazamientos eje diagonal con un máximo de -11.41 mm.....	133
FIGURA 4.39 Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -152.88 KN/m2....	134
FIGURA 4.40 Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -152.36 KN/m2....	134
FIGURA 4.41 Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -132.38 KN/m2....	135
FIGURA 4.42 Modelo geométrico de simulación de la losa con el programa SAFE .....	136
FIGURA 4.43 Deflexiones obtenidas por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte h=1.00 metros. ....	138
FIGURA 4.44 Deflexiones obtenidas por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte h=0.50 metros considerada flexible .....	139
FIGURA 4.45 Momentos flectores obtenidos por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte h=1.00 metros.....	139
FIGURA 4.46 Momentos flectores obtenidos por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte h=0.50 metros.....	140
FIGURA 4.47 Acciones sobre la cimentación. Tomado de Rodriguez J.M (1980).....	142
FIGURA 4.48 Verificación de peralte de losa por criterio de punzonamiento. (Ramírez G, 1969).....	144

## LISTA DE TABLAS

TABLA 1.1	Factores de carga asumidos para el diseño por Estados límite. Los valores entre paréntesis se aplican cuando para una combinación de cargas dada los efectos de las cargas tienden a resistir la falla. ....	27
TABLA 1.2	Factores de carga y combinaciones de carga gravitatoria adoptadas por diferentes códigos .....	27
TABLA 1.3	Factores de carga para Estados límites de servicio. El índice a indica que los valores para cargas temporarias están dados en el Código estructural.....	28
TABLA 2.1	Intervalos de variación del factor de amortiguación para vigas .....	38
TABLA 2.2	Valores de N para cimentaciones según su rigidez.....	39
TABLA 2.3	Valores de la relación h/L según la calidad de roca y suelo. (Muzas Labad, 2002) .....	40
TABLA 2.4	Valores estimados por diversos autores para el coeficiente de balasto en placas cuadradas de 0.30x0.30 metros. ....	52
TABLA 2.5	Coeficientes de forma de cimentación rectangular .....	55
TABLA 3.1	Puntos de Gauss para elemento viga .....	87
TABLA 3.2	Cuatro puntos de integración gaussiana para los 8 nodos del cuadrilátero elemental.....	87
TABLA 3.3	Tres puntos de integración gaussiana para los 6 nodos del triángulo elemental ...	88
TABLA 3.4	9 puntos de integración gaussiana para el elemento de interfase de 16 nodos.....	89
TABLA 3.5	Puntos de integración gaussiana para el elemento volumen de 15 nodos (cuña).....	91
TABLA 3.6	4 puntos de integración gaussiana para el elemento volumen tetraedro elemental de 10 nodos .....	91
TABLA 4.1	Determinación de la condición de rigidez para la viga del presente ejemplo. ....	117
TABLA 4.2	Determinación de los factores de viga en base a las líneas de influencia F-0 a F-5. Ver anexo 4.....	117
TABLA 4.3	Resumen de las tensiones de contacto obtenidos para la viga sobre apoyo elástico, $k=4 \text{ kg/cm}^3$ .....	118
TABLA 4.4	Deflexiones y presiones de contacto obtenidos por el método de diferencias finitas .....	120
TABLA 4.5	Obtención de parámetros.....	125
TABLA 4.6	Parámetros físicos y de deformabilidad para el suelo y el concreto.....	126
TABLA 4.7	Cálculo de coeficiente de balasto representativo del modelo.....	129
TABLA 4.8	Obtención del radio de rigidez .....	130
TABLA 4.9	Obtención del coeficiente de balasto del modelo por iteración.....	130
TABLA 4.10	Obtención del coeficiente de balasto en la interfaz cimiento terreno .....	131
TABLA 4.11	Parámetros físicos y de deformabilidad para la presente aplicación.....	132
TABLA 4.12	Determinación del módulo de coeficiente en puntos representativos de la losa de cimentación flexible sobre suelo no cohesivo .....	135
TABLA 4.13	Determinación del coeficiente de balasto en puntos representativos de la losa de cimentación rígida sobre suelo no cohesivo .....	136
TABLA 4.14	Deflexiones de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos.....	137
TABLA 4.15	Momentos flectores de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos.....	137
TABLA 4.16	Deflexiones de viga de cimentación obtenida por métodos analíticos y numéricos.....	137

TABLA 4.17 Momentos flectores de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos .....	138
TABLA 4.18 Comparativo entre deflexiones y módulo de balasto en la losa de cimentación ..	140
TABLA 4.19 Comparativo entre momentos máximos y coeficiente de balasto en la losa de cimentación .....	140
TABLA 4.20 Resultados En Cuanto A Asentamientos, Tensiones De Contacto Máximas Y Mínimas Para La Losa. ....	141
TABLA 4.21 Comprobaciones a realizar en zapatas aisladas. ....	143
TABLA 4.22 Constante adimensional C para varios tipos de suelos. ....	144

## LISTA DE SÍMBOLOS

$N_c, N_\gamma$ y $N_q$	: Factores de capacidad de carga
$D_f$	: profundidad de desplante
$B$	: ancho de zapata
$L$	: longitud de zapata
$h$	: peralte de zapata
$H$	: espesor de estrato compresible de suelo
$C$	: Propiedades constitutivas del material
$\gamma$	: densidad del material
$c$	: cohesión
$q$	: sobrecarga
$q_u$	: capacidad de carga última
$q_a$	: capacidad de carga admisible
$q_c$	: resistencia a la compresión simple
$q_o$	: carga de consolidación de suelo
$\phi$	: ángulo de fricción interna del suelo
$\varepsilon$	: campo de deformaciones
$\sigma$	: campo de esfuerzos
$N_{60}$	: número de golpes en prueba de penetración estándar
$\delta$	: asentamiento
$\Delta H$	: asentamiento por consolidación
$E_s$	: módulo de elasticidad del suelo
$E_z$	: módulo de elasticidad del suelo a cierta profundidad
$E_o$	: módulo edométrico del suelo
$c_u$	: resistencia al corte no drenada del suelo
$m_v$	: módulo de compresibilidad del suelo
$E$	: módulo de elasticidad del concreto
$EI$	: rigidez del concreto
$E^\circ$	: módulo de elasticidad de miembro sustituto de resorte
$A_i$	: área de sección de miembro sustituto de resorte

$L_i$	: longitud de miembro sustituto de resorte
$S_i$	: rigidez de miembro sustituto de resorte
$I$	: momento de inercia de sección de viga
$G$	: módulo de cortante del concreto
$\nu_s$	: coeficiente de Poisson del suelo
$P$	: Presión vertical transmitida por la cimentación al terreno
$P_h$	: carga que produce la rotura en el método equilibrio límite
$RF$	: factor de resistencia para diseño por estados límite
$R_n$	: resistencia nominal
$LF$	: factor de carga
$Q_i$	: carga de un tipo particular para el diseño por estados límite
$k_s$	: coeficiente de balasto del suelo
$k_1$	: coeficiente de balasto para placas cuadradas de 0,3m de lado ensayada sobre arcilla
$k_2$	: coeficiente de balasto para placa cuadrada de lado 0.3 m ensayada sobre arena
$k_o$	: coeficiente de balasto obtenido en ensayo de placa de carga
$p$	: presión de contacto con el suelo
$w(x)$	: función de deformada de viga
$\lambda$	: factor de amortiguación del conjunto suelo cimiento
$L$	: longitud característica
$N_i$	: factor de rigidez del conjunto suelo estructura de cimentación
$K_r$	: factor de rigidez relativa cimiento-suelo-superestructura
$F_s$	: fuerza de rozamiento suelo estructura
$T$	: esfuerzo cortante en la interfaz suelo estructura cimentación
$D$	: rigidez a la flexión de viga o placa en el modelo de Hetenyi
$V^A, V^2$	: operadores diferenciales
$N_o$	: normal de contacto suelo estructura
$c_s$	: coeficiente de rozamiento
$\alpha$	: relación longitud-ancho de una cimentación
$M$	: momento flector de elemento viga

$P_i$	: representa fuerzas externas en modelo de elementos finitos
$F_i$	: representa fuerzas internas en modelo de elementos finitos
$e$	: deformaciones internas en modelo de elementos finitos
$X$	: deformaciones externas en modelo de elementos finitos
$S$	: matriz que relaciona fuerzas y desplazamientos internos
$A$	: matriz constitutiva de material
$p$	: vector de fuerzas externas en el MEF
$u$	: vector de desplazamientos totales en el MEF
$v$	: vector de desplazamientos nodales
$L^T$	: operador diferencial
$N$	: matriz de funciones de forma del MEF
$K^i$	: matriz de rigidez de sistema
$C_w$	: coeficiente de balasto de acuerdo al modelo de Mindlin
$J$	: matriz jacobiana de conversión de coordenadas
$f_i$	: funciones de forma en el modelo Mohr Coulomb
$g_i$	: funciones de potencial plástico
$\xi, \eta$	: coordenadas locales interpolación de funciones de forma
$R$	: radio de rigidez en el modelo Westergaard
$K$	: coeficiente de balasto por ancho de viga

## INTRODUCCIÓN

Actualmente en el país no está difundido un método analítico suficientemente contrastado y ampliamente difundido que nos permita efectuar el diseño de cimentaciones superficiales tipo vigas continuas y losas de cimentación considerando los efectos de contacto entre el elemento estructural y el suelo que lo sustenta, dentro de los criterios de seguridad y confiabilidad.

Entender la mecánica conceptual de la interacción entre dos elementos de diferente comportamiento y poder llevarlo a la práctica del diseño cotidiano de elementos estructurales de cimentación, constituye un avance importante dentro del proceso de innovación a que se encuentran sujetas las materias en investigación dentro de las diversas ramas y en especial de la Geotecnia. El tema ha sido relegado un tanto debido a la carencia de material de consulta de poca difusión en nuestro medio.

El contenido es especialmente importante tanto para los profesionales dedicados a la Geotecnia como para aquellos inmersos en el diseño estructural. Identificar acertadamente los criterios inmersos en un problema típico de interacción entre el terreno y el cimiento permite reunir información útil a fin de complementar la data que normalmente se maneja dentro del procedimiento tradicional.

En el contexto del diseño, es importante la elección del coeficiente de balasto como parámetro básico, no siendo una constante que caracteriza el terreno sino que tiende a variar con la geometría y el tipo de problema que se trate. En el presente estudio se hace una revisión de los conceptos y las propuestas existentes en la bibliografía dando recomendaciones y fórmulas de aplicación al respecto.

Los métodos numéricos permite abordar el problema de manera conjunta siendo el más empleado el de elementos finitos de medio continuo en 2 y 3 dimensiones, que implica la definición del criterio de compatibilidad nodal entre suelo y estructura en la superficie de contacto, imponiendo la restricción de que los elementos adyacentes que lo componen tengan desplazamientos nodales comunes. Además, en el caso de un análisis de este tipo, las presiones y/o desplazamientos en la superficie de contacto se evalúan a partir extrapolaciones de los valores obtenidos a nivel de puntos de integración en los elementos de suelo o estructura cercanos a la interfaz.

Últimamente se ha implementado los elementos finitos de junta o interfase que representan una alternativa para evitar ciertas desventajas inherentes a las formulaciones de continuo y modelar apropiadamente el comportamiento del conjunto. Como parte de este estudio se presenta un análisis por elementos finitos a fin de tratar con precisión la interacción entre estructura y suelo evaluándose su performance y comparando sus resultados con otros los métodos de cálculo.

## **Objetivo de la tesis**

El objetivo del presente trabajo es presentar aspectos y conceptos relacionados con el diseño de cimentaciones superficiales asumiendo un modelo que incluye la estructura de cimentación con el suelo que lo sustenta empleándose para el caso métodos analíticos y numéricos a efectos de reunir criterios que complementen el curso de análisis teniendo en cuenta el comportamiento de ambos elementos.

## **Contenido de la tesis**

Para lograr el objetivo planteado se ha estructurado el presente trabajo en el siguiente contenido

Capítulo 1 en donde se expone el estado del conocimiento relacionado con los modelos del comportamiento suelo estructura existentes en la literatura, igualmente los principios de diseño referidos a la capacidad admisible del suelo y los criterios conceptuales de las tendencias actuales para el diseño basados en los estados límite los cuales tienden a unificar el análisis geotécnico con el análisis estructural.

Capítulo 2 se desarrolla el modelo del coeficiente de balasto enfocado a un concepto de aplicación directa, versátil, cuestionable en ciertos casos pero bastante útil al momento de tratar un caso puntual de manera preliminar. Se presentan los criterios de rigidez y flexibilidad para cada componente y de manera conjunta bajo el término de rigidez relativa dadas por diversos autores; igualmente los modelos que se han venido dando a manera de cubrir algunas deficiencias del coeficiente de balasto como los denominados de dos parámetros.

Capítulo 3 se desarrollan los conceptos básicos de los métodos de diferencias finitas y de elementos finitos aplicables a problemas geotécnicos que involucren cimentaciones superficiales, dándose a conocer las formulaciones básicas y el proceso de modelización del conjunto cimiento terreno.

Capítulo 4 se exponen los conceptos ligados a los métodos analíticos de diseño de cimientos continuos y losas efectuándose luego las aplicaciones de casos prácticos a fin de contrastar objetivamente los resultados y poder ver las posibilidades y limitaciones que nos ofrecen los métodos desarrollados.

Finalmente se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas del presente trabajo.

Los anexos, que contienen información complementaria de utilidad, comprenden:

En el Anexo 1, se incluye salidas gráficas del programa SAFE para la losa de cimentación.

Asimismo, en el Anexo 2 se presentan los ábacos de líneas de influencia para diseño de vigas de cimentación sobre medio elástico.

# **CAPÍTULO I**

## **1 CONSIDERACIONES GENERALES**

### **1.1 ESTADO DEL CONOCIMIENTO**

Como parte del diseño de los elementos estructurales en contacto con el suelo se requieren establecer conceptos ligados a la distribución de esfuerzos y asentamientos en la interfaz dentro de un enfoque racional del tema. Cada edificación demanda la necesidad de plantear y resolver un problema de cimentación. En la práctica comúnmente se usan cimentaciones superficiales o cimentaciones profundas, las cuales presentan importantes diferencias en cuanto a su geometría, al comportamiento del suelo, a su funcionalidad estructural y procedimientos constructivos.

#### **1.1.1 Cimentaciones superficiales**

Se define como cimentación superficial a un elemento estructural cuya sección transversal es de dimensiones grandes con respecto a la altura y cuya función es trasladar las cargas de una edificación a profundidades relativamente cortas, menores de 4 metros aproximadamente con respecto al nivel de la superficie natural de un terreno o de un sótano. Se proyectan este tipo de elementos cuando el suelo es de buena calidad.

En una cimentación superficial la reacción del suelo se equilibra con las fuerzas transmitidas por la estructura. Esta reacción de fuerzas, que no tiene un patrón determinado de distribución, se realiza en la interfase entre el suelo y la base de la cimentación que está en contacto con él. En este caso, el estado de esfuerzos laterales no reviste mayor importancia. En tal sentido, el comportamiento estructural de una cimentación superficial, puede adoptar las características de una viga o de una placa.

Las cimentaciones superficiales, cuyos sistemas constructivos generalmente no revisten mayores dificultades pueden ser de varios tipos, según su función: zapata aislada, zapata combinada, zapata corrida y losa de cimentación. En una estructura de tipo zapata aislada, que puede ser concéntrica, medianera o esquinera, se caracteriza por soportar y trasladar al suelo la carga de un apoyo individual; una zapata combinada por soportar y trasladar al suelo la carga de varios apoyos; y una losa de cimentación por sostener y transferir al suelo la carga de todos los apoyos.

Las zapatas aisladas se opta como solución para casos sencillos, en suelos de poca compresibilidad, suelos duros, con cargas de la estructura moderadas pudiendo ser edificios hasta de 6 pisos. Con el fin de darle rigidez lateral al sistema de cimentación, en la mayoría de los casos las zapatas aisladas siempre deben interconectarse en ambos sentidos por medio de vigas de amarre.

Las zapatas combinadas son convenientes en casos intermedios, esto es, suelos de mediana compresibilidad y cargas no muy altas. Con esta solución se busca una reducción de esfuerzos, dándole cierta rigidez a la estructura, de modo que se restrinjan algunos movimientos relativos. La losa de cimentación por lo general ocupa toda el área de la edificación y es competente cuando el suelo tiene limitada capacidad portante, ver Figura 1.1. Mediante esta solución se disminuyen los esfuerzos en el suelo y se minimizan los asentamientos diferenciales.

Cuando se tenga que transmitir al suelo las fuerzas de un muro de carga con una longitud ampliamente superior a su ancho, se usa una zapata continua o corrida, cuyo comportamiento es similar al de una viga. Se debe dar la rigidez suficiente a la cimentación a fin de impedir que el muro absorba las sollicitaciones inducidas por asentamientos diferenciales.

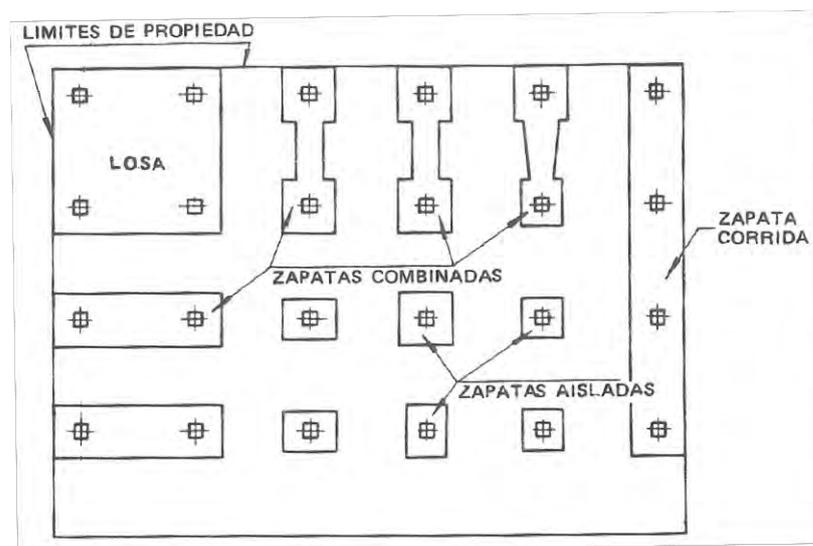


FIGURA 1.1 Tipos convencionales de cimentaciones superficiales, (Jiménez Salas, 1981).

### 1.1.2 Funcionalidad del conjunto suelo estructura de cimentación

En el caso en que el suelo es solicitado por un incremento de esfuerzos sufre deformaciones horizontales, normales y cortantes. Las cargas que transmite la cimentación dan lugar a desplazamientos totales y diferenciales en la interfase de la estructura de cimentación y el suelo. La estructura de la cimentación en conjunto con las cargas que actúan sobre ella y las reacciones que ocurren en el suelo están comprendidas en el mismo escenario que el suelo adoptaría como producto de las reacciones que este aporta a la estructura de cimentación para su equilibrio. La configuración de esfuerzos y deformaciones en la superficie de contacto depende de la rigidez de la estructura, de la rigidez de la cimentación, la deformabilidad del suelo y la distribución de cargas aplicadas sobre la estructura de la cimentación, (Wood D.M, 1990).

De ello se desprende el concepto de interacción cimiento terreno, que consiste en un sistema de reacciones que aplicadas a la estructura de cimentación y al suelo producen la misma configuración de desplazamientos entre los dos elementos, es decir, establecer expresiones de compatibilidad para el cálculo de los esfuerzos de contacto entre la cimentación y el suelo. (Zeevaert, 1980).

Las primeras aplicaciones en la ingeniería civil del método de interacción suelo estructura de cimentación fueron efectuadas por Zimmerman en 1888 quien empleó este modelo para calcular las tensiones que producían las obras ferroviarias sobre el terreno. Posteriormente el desarrollo de estos métodos llevó a que se aplicaran en losas y zapatas combinadas.

El tratamiento del problema así planteado considera dentro del análisis los siguientes aspectos:

- Efecto del proceso constructivo.
- Distribución de la carga.
- Rigidez y deformación del suelo a corto y largo plazo.
- Rigidez de la estructura de cimentación y de la superestructura.

La teoría elástica considera la masa de suelo donde se apoya la estructura de cimentación como un medio continuo en el que una acción en un punto  $i$  de la masa ejerce influencia en otro punto  $j$  de ella; (Zeevaert, 1980). Un modelo más avanzado se aboca al estudio de la fase sólida considerando el comportamiento esfuerzo-deformación-tiempo de la estructura del suelo. Los desplazamientos verticales se estiman determinando el cambio de esfuerzos por medio de soluciones aproximadas de la teoría de la elasticidad. Para cada estrato se determina la deformabilidad para el nivel medio de esfuerzos efectivos estimando el tipo de esfuerzo aplicado: estático, transitorio o dinámico.

### **1.1.3 Comportamiento de acuerdo al tipo de suelo**

Un suelo granular es apto para cimentar si el espesor del estrato es suficiente y la compacidad es media o alta. Los asientos en estos suelos se acusan de forma inmediata frente a cargas estáticas y con magnitudes considerables frente a cargas dinámicas. En los suelos cohesivos o de granulometría fina, la consistencia varía con la humedad, y el asiento bajo carga estática es lento pero importante. Según el grado de humedad, la arcilla tendrá una consistencia fluida, plástica o seca. Los puntos de inflexión entre un estado y otro se llaman límites de consistencia. Estos límites se usan para clasificar un suelo y conocer el comportamiento de estos materiales.

Saber el carácter de deformabilidad de un suelo, nos permitirá poder calcular los previsible asientos. No todos los suelos se deforman igual, ya que las arcillas se caracterizan por su gran compresibilidad y capacidad de retener el agua en relación a las arenas. El estudio de la compresibilidad se realiza para suelos arcillosos y en estado de saturación.

Es de prioridad estudiar la compresibilidad de los estratos situados entre el plano de la cimentación y una profundidad igual o mayor al ancho del edificio. La ejecución de un ensayo de campo normalizado al menos nos permitirá tener una idea de la calidad del suelo. A partir de ensayos en laboratorio sobre muestras inalteradas podremos conocer con buena aproximación las características geotécnicas de resistencia y deformabilidad del suelo (cohesión, ángulo de rozamiento interno, módulo de deformación bajo carga constante).

Para simular el carácter de deformabilidad de un suelo cohesivo es imprescindible la realización del ensayo edométrico así como el tiempo requerido para su consolidación a mediano y largo plazo.

## **1.2 ENFOQUES DE ANALISIS DEL PROBLEMA**

Dentro del tratamiento de los problemas que conllevan el cálculo de la distribución e identificación de las presiones de contacto entre materiales de diferente rigidez se han desarrollado soluciones que van desde simples hasta aquellas que emplean modelos avanzados. En el desarrollo del presente trabajo se tocarán aspectos puntuales dentro del planteamiento matemático.

Los enfoques comprenden:

- Métodos analíticos
- Métodos numéricos
- Métodos empíricos

### **1.2.1 Métodos analíticos**

Los métodos analíticos plantean y resuelven ecuaciones más o menos complejas donde se incluyen los aspectos más importantes del problema. Normalmente se adecuan a geometrías muy simples e introducen simplificaciones notables en su planteamiento.

A pesar de que los métodos analíticos brindan una herramienta de cálculo bastante simple para los esfuerzos y las deformaciones, no determinan con generalidad y suficiente precisión el comportamiento estructural del elemento de fundación debido a limitantes como simplificaciones en su planteamiento y restricciones inherentes al modelo. El método se enfoca a discernir el dimensionamiento del elemento estructural adoptando diseño por tensiones admisibles.

El método de estados límite constituye también un procedimiento analítico para abordar el diseño de cimentaciones superficiales adoptando criterios de seguridad y confiabilidad. La teoría de análisis límite y el método de equilibrio constituyen también herramientas importantes para abordar el problema dentro de este contexto.

#### ***Método simplificado***

Una de las formas más simples de estimar el comportamiento de una fundación superficial es la conocida como principio de los apoyos independientes de los desplazamientos. Se basa en determinar en primer lugar la carga para la cual la zapata experimenta asentamientos admisibles.

Obviamente, esta forma de análisis desprecia por completo toda interacción entre los elementos de la cimentación superficial y el suelo, en particular las interacciones entre el referido elemento y la superestructura, las cuales en rigor dominan el comportamiento de una cimentación superficial. A pesar de ello, este método se usa con frecuencia con motivo de su relativa sencillez y facilidad de aplicación.

Gran parte de los métodos analíticos se basan en la teoría de la elasticidad.

### **1.2.2 Métodos numéricos**

Los métodos numéricos aportan soluciones más precisas que el anterior, pudiéndose incluir un gran número de características singulares. El contorno sobre el que se aplica el método puede ser más preciso y no está sujeto a formas geométricas con formulación conocida. La aplicación de estas alternativas basadas en aproximaciones numéricas permite incluir los diferentes aspectos tanto físicos como geométricos, así como las ecuaciones constitutivas con el suficiente rigor. El estudio se da a partir de un proceso de discretización que consiste en la división del sistema analizado en múltiples subdominios (elementos).

Con base en este tipo de modelos computacionales, bajo las consideraciones apropiadas, es posible encontrar soluciones bastante buenas al problema estructural del equilibrio

(ecuaciones 1.1 y 1.2) entre las cargas aplicadas “ $f$ ” y los esfuerzos internos inducidos “ $\sigma$ ” y que conducen a deformaciones unitarias “ $\epsilon$ ”, vía las propiedades constitutivas (elásticas) del material “ $C$ ”; resultando una ecuación gobernante, y en este caso muy útil para resolver problemas de cimentaciones superficiales de características diversas y expuestas a diferentes condiciones.

$$\nabla \sigma + f = 0 \quad (\text{Ec. 1.1})$$

$$\sigma = C * \epsilon \quad (\text{Ec. 1.2})$$

Con ayuda de esta técnica se estudiará el comportamiento simulado del problema estático de cimientos superficiales de concreto sometido a la presión ejercida por el elemento, y a su vez soportada por un suelo de propiedades definidas. Dentro del proceso de simulación se tiene en cuenta la distribución de la carga, las condiciones de contorno, la interacción con la base y el apoyo de la base sobre el terreno, haciendo posible construir un modelo más aproximado y consecuente con el sistema estudiado y de este modo realizar un análisis más robusto, completo y acertado en relación al sistema que se quiere representar. Las leyes constitutivas que se incorporan son parte de la información importante que se asimilan en este proceso.

Igualmente, mediante la integración con un sistema de seguimiento in situ apropiado, este tipo de modelamientos puede brindar una herramienta de prevención y control más eficientes que los que tradicionalmente se utilizan de tal modo que se permita corroborar y retroalimentar los modelos computacionales y en la medida de lo posible desarrollar un esquema de estudio, caracterización y prevención de fallas para este tipo de estructuras.

### ***Métodos numéricos alternativos***

Para la solución de casos particulares de cimentaciones superficiales también se aplican el Método de diferencias finitas, de Elementos de borde y los llamados Métodos híbridos. Este desarrollo ha posibilitado tener en cuenta influencias complejas en el análisis, tales como el comportamiento no lineal del suelo, heterogeneidad, la rigidez real de los elementos estructurales y casos generales de sollicitación.

Más allá de los modelos conocidos, existen otros multicapas que conducen a soluciones que se aproximan mejor a la realidad, y otros que excluyen características esenciales del sistema físico como unas condiciones de frontera bien definidas, ofreciendo solamente soluciones parciales o fragmentarias al problema planteado.

### **1.2.3 Métodos empíricos**

Los métodos empíricos aportan soluciones basadas en la experiencia acumulada en casos similares al que ahora se estudia, no interviniendo una variedad de factores. Se incluyen gran número de hipótesis simplificadoras y se adopta un margen de seguridad elevado.

Estos métodos que pueden catalogarse como simplificados nos permiten predecir el comportamiento de una cimentación en estado de servicio, pueden resultar satisfactorios en la etapa de predimensionado de la estructura, tratándose de cimientos continuos y losas. Con los mismos se puede en principio estimar los componentes de partida como dimensiones geométricas, peralte y profundidad de desplante.

Los mismos métodos también son aplicables en la estimación de presiones de carga admisibles en cimentaciones los cuales pueden efectuarse a través de valores de carga estimados y por medio de ensayos insitu.

### **1.3 MODELOS DEL COMPORTAMIENTO SUELO ESTRUCTURA**

Los modelos expuestos permiten resolver el problema de distribución de tensiones en el suelo debido a las cargas aplicadas en la superficie, constituyendo un criterio más elaborado en relación a los basados en tensiones admisibles. En un caso particular la forma de estudiar esta distribución tiene dependencia con las características del suelo:

Estratos homogéneos: Modelo del semiespacio elástico infinito, lineal, isótropo y homogéneo (Teoría de Boussinesq).

Para estratos heterogéneos existen varios modelos:

- Modelo de capa elástica sobre base rígida
- Modelo del semiespacio elástico heterogéneo con variación lineal del Módulo elástico.
- Modelos de Frolich
- Sistemas multicapas

El modelo de Boussinesq (1885) que pudo determinar mediante la aplicación de la teoría de los potenciales la expresión general para la determinación del asiento producido por una carga concentrada dentro del semi espacio fue un paso importante que juntamente con las de Flamet (1892), constituyen las bases de la conceptualización de las soluciones dentro del semi espacio homogéneo.

Dentro del grupo mostrado es de rescatar el de O.K. Frohlich (1949) que corresponde a un modelo que introduce una variación significativa con respecto al elástico lineal.

De las consideraciones expuestas es obvio lo complicado que representa efectuar el modelamiento que más se aproxime a lo real del problema de contacto entre el elemento de fundación y el suelo que lo sustenta constituyendo un reto dentro del campo de la investigación; para lo cual se emplean una gran variedad de suelos llamados ideales dentro de la esquematización de modelos adaptados con planteamientos matemáticos de la relación carga asentamiento y que forma parte del presente trabajo.

Diversos autores han coincidido en subdividir los modelos en tres grandes grupos:

- Modelos basados en el coeficiente de balasto
- Modelos basados en el semi espacio elástico
- Modelos mixtos.

Los dos primeros se desarrollan en el siguiente capítulo.

En cuanto a los modelos mixtos se sustentan en el hecho de que diversos modelos de suelos tienen una variedad de aplicaciones en suelos reales por lo que tratándolo de forma interdependiente resuelven el problema bajo esta perspectiva.

Miñón Santos (1981) resume en la Figura 1.2 los principales modelos de comportamiento para el suelo.

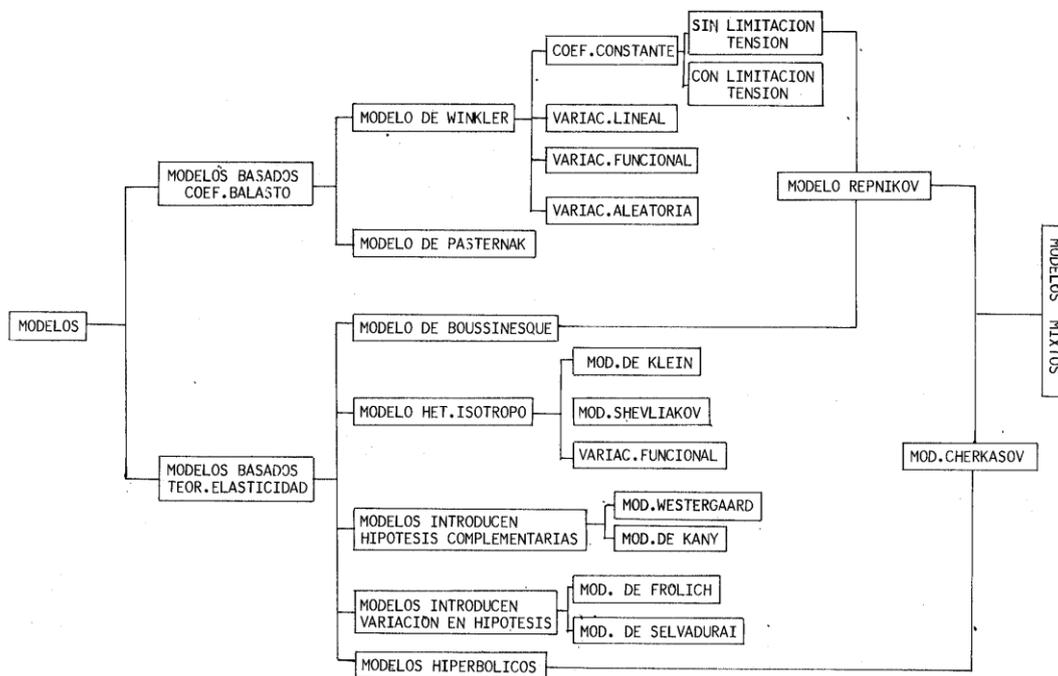


FIGURA 1.2 Modelos de comportamiento del suelos (Miñón Santos, 1981)

Los últimos conceptos abogan por el cálculo de deformaciones y distribución de tensiones en el suelo asumiendo el modelo elástico lineal, mientras que para los problemas de inestabilidad y ruptura el modelo más acertado es el rígido plástico.

## 1.4 CRITERIOS DE CAPACIDAD PORTANTE

### 1.4.1 Métodos analíticos basados en la teoría de la plasticidad

La filosofía de análisis dentro de estos criterios desarrollados bajo los fundamentos de la mecánica del suelo comprende la verificación de comportamiento y funcionalidad de una cimentación superficial y que debe cumplir con dos características inherentes al terreno:

- Debe poseer una seguridad adecuada a la falla por esfuerzo cortante del suelo que la soporta.
- Debe experimentar asentamientos o deformaciones dentro del rango de compatibilidad con la funcionalidad de la estructura.

Ambos aspectos deben ser verificados al realizar el diseño de la cimentación en términos de dimensionamiento.

La capacidad de carga es de difícil evaluación, ya que depende de diferentes factores como son:

- De las características geotécnicas del terreno, principalmente del ángulo de rozamiento interno y de la cohesión.
- De la estratificación de las diferentes capas de suelo y la profundidad del nivel freático.
- Del nivel de desplante de cimentación.
- De las dimensiones del cimientto.
- Del tipo de carga (dirección, excentricidad, periodicidad, etc).

La capacidad de soporte de cimentaciones superficiales es un tema con una larga lista de investigaciones. Sin embargo, la estructura básica de las formulaciones usadas hoy en día para calcularlo no difiere mayormente de la propuesta por Terzaghi en 1943.

Las primeras contribuciones importantes corresponden a Prandtl en 1921 y a Reissner en 1924. Ambos aportes tuvieron su base conceptual en una placa sobre un espacio semi-infinito sin peso. Sokolovskii en 1965 incorpora el peso del suelo y al igual que las anteriores contribuciones, analiza el modelo bajo condición de deformación plana.

La capacidad de soporte de cimentaciones superficiales es usualmente calculada por el método de superposición sugerido por Terzaghi, en el cual son sumadas las contribuciones a la capacidad de soporte de los diferentes parámetros del suelo y de la carga (Figura 1.3). Estas contribuciones consideran los factores de capacidad de carga,  $N_c$ ,  $N_\gamma$  y  $N_q$ , los efectos de la cohesión  $c$  del suelo, el peso unitario del suelo  $\gamma$  y a la carga distribuida equivalente  $q$ , actuando al nivel del desplante de cimentación, respectivamente. Los factores de capacidad de carga son función del ángulo de fricción interna  $\phi$ .

La expresión para el cálculo de la capacidad portante última tiene la siguiente forma:

$$q_u = cN_c + qN_q + 0.5\gamma BN_\gamma \quad (\text{Ec. 1.3})$$

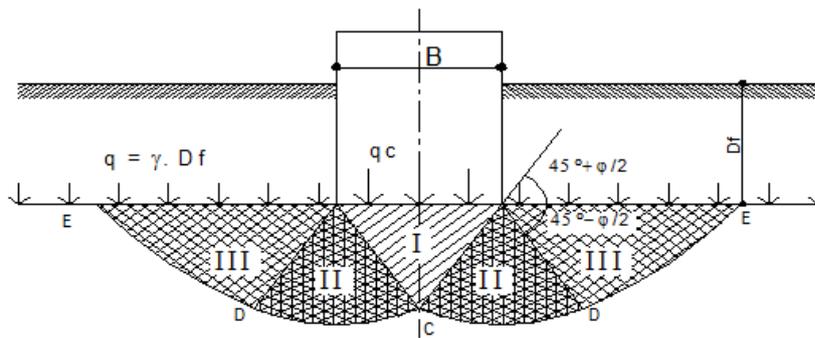
Obteniéndose los factores de capacidad de carga con las expresiones

$$N_c = \text{ctg } \phi (N_q - 1) \quad (\text{Ec. 1.4})$$

$$N_q = \frac{e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \phi\right) \tan \phi}}{2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)} \quad (\text{Ec. 1.5})$$

$$N_\gamma = 2(N_q + 1) \tan \phi \quad (\text{Ec. 1.6})$$

Terzaghi (1943) empleó una aproximación a la realidad física en donde impuso la condición de equilibrio límite a los bloques rígidos definidos por el mecanismo de falla de Prandtl, pero considerando los ángulos basales de la cuña central iguales a  $\phi$ , en vez de  $45^\circ + \phi/2$ .



**FIGURA 1.3** Mecanismo de rotura propuesto por Terzaghi para cimentaciones superficiales

Meyerhof (1953) obtuvo, con una técnica similar a la de Terzaghi, soluciones aproximadas para el equilibrio plástico de zapatas superficiales y no superficiales, asumiendo un mecanismo de falla diferente y asimilando al de Terzaghi, expresando los resultados en la forma de factores de capacidad de soporte en términos del ángulo de fricción interna  $\phi$ .

Bajo la misma consideración pero asumiendo una cimentación de longitud finita de dimensiones  $B \cdot L$  desplantada a una profundidad  $D$ , Skempton (1960) ha definido la expresión

$$q_u = 5.14c \left(1 + 0.2 \frac{B}{L}\right) \left(1 + 0.2 \frac{D}{B}\right) + \bar{q} \quad (\text{Ec. 1.7})$$

Donde  $q$  es la carga unitaria efectiva sobre la superficie fuera de la cimentación.

La teoría de Terzaghi es válida para zapatas de hasta 5 metros de lado. El valor proporcionado para esta magnitud se considera aceptable como presión de hundimiento de losas. Con esta formulación se puede obtener la presión admisible de hundimiento de este

tipo de cimentación independientemente de sus dimensiones eligiendo coeficientes de seguridad apropiadamente definidos.

Vista la bibliografía especializada, la mayor parte de los autores coinciden en las expresiones usadas para  $N_c$  y  $N_q$ , sin embargo, existe una fuerte discrepancia con respecto a los valores a utilizar para el parámetro  $N_\gamma$ , el cual todavía ocupa a muchos como tema de investigación.

Hettler y Gudehus (1988) evaluaron la influencia del ancho de la cimentación en el valor final del factor  $N_\gamma$  en base a una serie de ensayos verificando que este valor disminuye cuando se aumenta el ancho de la cimentación debido a:

- El ángulo de fricción disminuye para grandes deformaciones
- La deformación del terreno no es uniforme en la base de la cimentación
- Existencia de una influencia mínima del modo de rotura en el valor de  $N_\gamma$
- El nivel de tensiones influye en el valor del ángulo de fricción interna.

La granulometría del material no reviste mayor importancia en este trabajo.

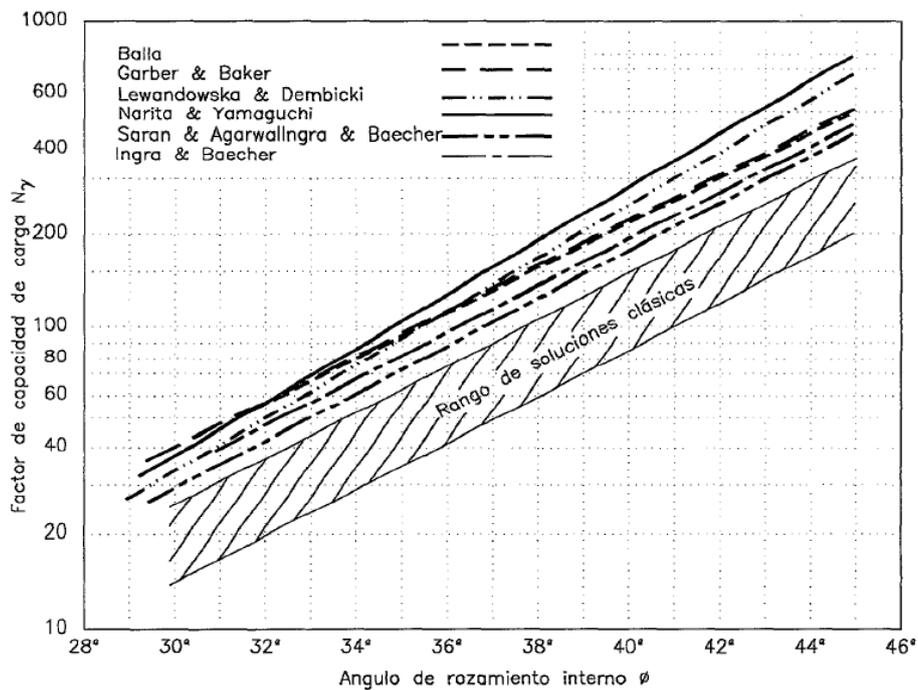
Zadroga B (1994) desarrolló una recopilación de los distintos métodos de cálculo para la obtención de la carga de hundimiento en base a la sensibilidad de los factores de carga ante las condiciones impuestas como se aprecia en la Figura 1.4. Realizó una serie de ensayos para comparar los resultados de los mismos con los propuestos por otros métodos para obtener la carga de hundimiento de cimentaciones apoyadas sobre suelos granulares concluyendo que dichas cargas son menores a las que resultan de los ensayos y en función a ello propone las siguientes relaciones empíricas para hallar  $N_\gamma$

Para cimentaciones cuadradas

$$N_\gamma = 0.096.e^{0.188\phi} \quad (\text{Ec. 1.8})$$

Para cimentaciones rectangulares ( $L/B=6$ )

$$N_\gamma = 0.657.e^{0.14\phi} \quad (\text{Ec. 1.9})$$



**FIGURA 1.4** Comparación entre los valores experimentales (entrecortado) y teóricos del factor de capacidad de carga  $N_\gamma$ . Publicado por Zadroga (1994)

Dentro de lo comentado no se dejan de mencionar lo concerniente a los problemas especiales de capacidad portante dentro del que existen muchas divergencias no existiendo soluciones acordes con los problemas involucrados, por ejemplo, para los casos

- Cimentación sobre taludes
- Interacción entre zapatas
- Estrato superior más resistente que el interior y viceversa
- Varios estratos de distinta naturaleza, etc.

Cuando es solicitado un suelo arcilloso, el exceso de presión intersticial que se genera en el terreno se disipa con lentitud, lo cual conlleva un aumento lento del esfuerzo efectivo, y por tanto, un aumento de la resistencia al corte. Es por ello que el periodo crítico para la estabilidad de la cimentación se presenta justo al final de la construcción (corto plazo), cuando la arcilla no está drenada.

En este caso, la rotura se produce movilizandando la resistencia al corte sin drenaje del material ( $C_u$ ), con un ángulo de rozamiento sin drenaje nulo ( $\phi = 0$ ), de manera que la expresión original queda como sigue:

$$q_u = 5.14c + q \quad (\text{Ec. 1.10})$$

Dentro de esta lógica el dimensionado de las cimentaciones se efectúa comprobando la tensión admisible del suelo.

### 1.4.2 La Fórmula general de capacidad de carga

A partir de la fórmula de Terzaghi, diferentes investigadores fueron modificando sucesivamente tanto la fórmula como los coeficientes de corrección. Hoy en día, la fórmula más empleada es la fórmula generalizada de Brinch Hansen que tiene similitud con la propuesta de Meyerhof. Ambos autores parten de un mismo planteamiento pero que los coeficientes de forma, profundidad, inclinación y el factor  $N$  lo calculan de diferente manera. La metodología de Brinch Hansen es ampliamente utilizada en Europa mientras que la de Meyerhof tiene amplia aceptación en Norteamérica

$$q_u = 0.5\gamma BN_\gamma S_\gamma d_\gamma i_\gamma + \bar{q} N_q S_q d_q i_q + c N_c S_c d_c i_c \quad (\text{Ec. 1.11})$$

En los que  $N$  es el factor de capacidad de carga,  $S$  factor de forma,  $d$  factor de profundidad e  $i$  factor de inclinación, los cuales se pueden obtener utilizando fórmulas empíricas y gráficos elaborados por los autores.

Bajo este concepto se consideran un conjunto de factores influyentes que se asumen en el cálculo de la capacidad portante del terreno:

- Influencia de la forma de la cimentación
- Influencia de la excentricidad de la carga que se aplica
- Influencia de la inclinación de la carga
- Influencia de la profundidad de la cimentación en el estrato resistente
- Influencia de la topografía del terreno.

#### ***Deducción de la capacidad portante para el caso de losas de cimentación***

Se utiliza la misma expresión anterior, asumiéndose para el término  $B$  la dimensión más pequeña de la losa. En el caso de ser el terreno una arcilla saturada el ángulo de fricción interna se hace cero, la capacidad de carga se simplifica a:

$$q_u = c_u N_c S_c d_c i_c + q \quad (\text{Ec.1.12})$$

### 1.4.3 Presión admisible por limitación de asientos

La tensión máxima transmitida por la cimentación al terreno no deberá ser superior a la que produzca el asiento máximo admisible por la estructura a construir. De acuerdo a la normativa de construcción el asiento máximo tolerable por la estructura debe ser fijado por el autor del proyecto, atendiendo a las características especiales de cada tipo de obra.

En algunos casos no es necesario realizar ninguna comprobación de asientos. En todos los casos de cimentaciones sobre suelos secos no cohesivos, y en la mayoría de cimentaciones anchas y profundas en suelos acuosos no cohesivos, las presiones de carga permisibles están gobernadas por consideraciones de asentamientos tolerables. (Tomlinson M. J, 1996).

No obstante, a título orientativo, en las normas se dan unos asientos generalmente admisibles en función del tipo de terreno y del tipo de estructura del edificio. La falla de la cimentación supone asientos importantes, giro y vuelco de la estructura; según la estructura y el tipo de suelo la falla puede producirse de tres formas: rotura general, rotura local y punzonamiento. (Vesic, 1973).

Para el caso de suelos granulares, dada una zapata de ancho menor o igual a 1.22 metros y asentamiento máximo de 1 pulgada, Meyerhof (1956) ha propuesto las siguientes expresiones para la capacidad admisible en base a resultados de prueba de penetración estándar y penetración de cono:

$$q_a = 11.98(N_1)_{60} \quad (\text{Ec. 1.13})$$

$$q_a = \frac{q_c}{15} \quad \text{ambos se expresan en KN/m}^2 \quad (\text{Ec. 1.14})$$

Cuando se trate de arenas con excepción de las zapatas de anchura de hasta 1 metro aproximadamente, suele ser el criterio del asiento el que define la carga admisible. (Jiménez Salas et al, 1981).

#### **1.4.4 Presión admisible final**

La tensión admisible a adoptar será aquella que haga que el conjunto de estructura y cimentación presente una seguridad razonable frente a la rotura del terreno (hundimiento) y pueda provocar un asiento por debajo del estimado como admisible.

Es por ello que se considerará como tensión admisible final la menor de las obtenidas por ambos criterios (hundimiento y asiento admisible), quedando así del lado de la seguridad en ambos aspectos. El estado de equilibrio se alcanzará cuando a una cierta profundidad de la cimentación la capacidad de carga del suelo sea lo suficientemente alta para asumir movimientos futuros.

#### **1.4.5 Capacidad admisible para cimentaciones superficiales sobre roca**

Por lo general estos materiales constituyen un excelente terreno para cimentación por su elevada capacidad de carga, no obstante de presentarse una serie de dificultades en su diseño por cuanto presentan irregularidades en su conformación, discontinuidades y sensibilidad a variaciones de sus propiedades en las direcciones que se asuman. En la mayoría de los casos se optan valores superiores a los 3 kg/cm<sup>2</sup> como capacidad para cimentaciones de distinta tipología. Para el cálculo analítico, los códigos americanos adoptan la siguiente relación

$$q_a = 0.2q_c \quad (\text{Ec. 1.15})$$

siendo  $q_c$  la resistencia a la compresión simple de la roca. Los códigos ingleses adoptan valores algo más del doble del mencionado.

#### 1.4.6 Relación capacidad de carga asentamiento

Al cargar un suelo de fundación su superficie sufre asentamientos que se pueden graficar en función de la carga unitaria o presión media, Figura 1.5. Si el suelo es compacto la curva se asemeja a  $C_1$  y la presión  $q_{d1}$  representa su capacidad de carga; se observa que el asentamiento tiende a incrementarse de manera continua sin necesidad de aumentar la carga. Si el suelo es blando, curva  $C_2$ , las deformaciones serán más importantes en función de la carga. La capacidad de carga en este caso no queda bien definida. Hay varias teorías para determinar el valor de  $q_{d'}$ ; una de ellas es establecer  $q_{d'}$  en forma gráfica como la intersección de dos tangentes la inicial y el punto de donde la curva adquiere la máxima pendiente. Las curvas representadas se obtienen con ensayos de carga directa.

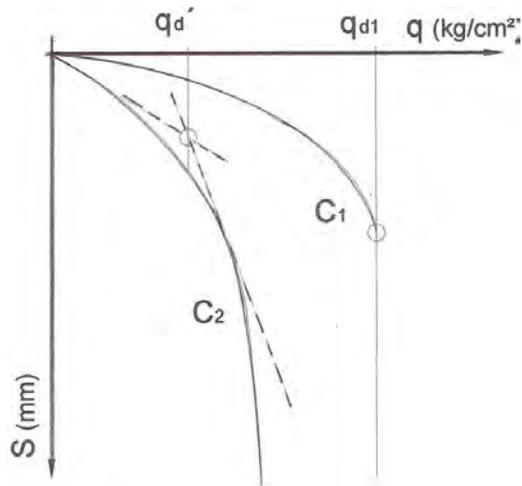


FIGURA 1.5 Capacidad de carga del terreno definida a partir del gráfico tensión aplicada versus deformación.

Varios autores han intentado establecer relaciones que permitan estimar asentamientos en materiales granulares en función a los estimados mediante pruebas convencionales como los ensayos de placa; la relación empírica más conocida por su antigüedad corresponde a Terzaghi (1955):

$$\delta = \delta_0 \left( \frac{2B}{B + 0.3} \right)^2 \quad (\text{Ec. 1.16})$$

Que relaciona en forma directa el asiento de una cimentación de ancho  $B$  con el de una placa convencional de  $0.3 \times 0.3 \text{ m}^2$  para la misma presión unitaria; a la vez la fórmula

$$\delta = \delta_0 \frac{4}{\left( 1 + \frac{B_0}{B} \right)^2} \quad (\text{Ec. 1.17})$$

relaciona el asentamiento de la misma cimentación con la dimensión de una placa arbitraria de lado  $B_0$ . Puede observarse que cuando el ancho de la cimentación tiende al infinito el

asentamiento final sería 4 veces al del ensayo lo cual resulta improbable ya que las experiencias han demostrado que cuanto mayor es el área de contacto con el suelo estos valores tienden a incrementarse de acuerdo a leyes tipo parabólico.

#### 1.4.7 Cálculo de asientos por el método elástico

Como se sabe en arcillas saturadas los asientos que se presentan inmediatamente después de la construcción se producen sin drenaje del agua intersticial del terreno. Debido a esto, el cambio de volumen del suelo será nulo, siendo razonable la hipótesis de un módulo de elasticidad constante para predecir los asientos elásticos que tienen lugar en este tipo de materiales.

Para el cálculo de estos asientos se acostumbra emplear el método elástico multicapa. Según este método, el asiento producido por una carga vertical uniforme aplicada a través de una cimentación rectangular viene dado por la siguiente expresión:

$$\delta_e = \frac{P \cdot b}{2E_o} [A * N_1(a, b, c) - D * N_2(a, b, c)] \quad (\text{Ec. 1.18})$$

Siendo:

$P$  = Presión vertical uniforme transmitida por la cimentación al terreno.

$b$  = Ancho de la cimentación.

$E_o$  = Modulo de elasticidad del suelo

$A$  y  $D$  = Coeficientes dependientes del módulo de Poisson considerado.

$N_1, N_2$  = Funciones dependientes de las dimensiones de la cimentación y de la profundidad estimada.

Mayne y Poulos (1999) establecieron una fórmula mejorada dentro del rango elástico para determinar los asientos inmediatos en un estrato al someterse a carga de una cimentación convencional. Cabe resaltar que en el desarrollo han tomado en cuenta la rigidez de la cimentación, la profundidad de desplante, localización del estrato rígido y la variación del módulo elástico del suelo con la profundidad.

Debajo del centro de una cimentación, su asiento se puede calcular mediante la expresión

$$\delta_e = \frac{q_o B_e I_g I_f I_e}{E_o} (1 - \nu_s^2) \quad (\text{Ec. 1.19})$$

Siendo

$q_o$  presión neta aplicada sobre la cimentación

$I_g$  factor de influencia de la variación del módulo de elasticidad con la profundidad

$I_f$  factor de corrección por rigidez de la cimentación

$I_e$  factor de corrección por la profundidad de desplante

$E_o$  módulo de elasticidad del suelo

$\nu_s$  coeficiente de Poisson

$B_e$  diámetro equivalente de una cimentación rectangular deducido a partir de

$$B_e = \sqrt{\frac{4BL}{\pi}} \quad (\text{Ec. 1.20})$$

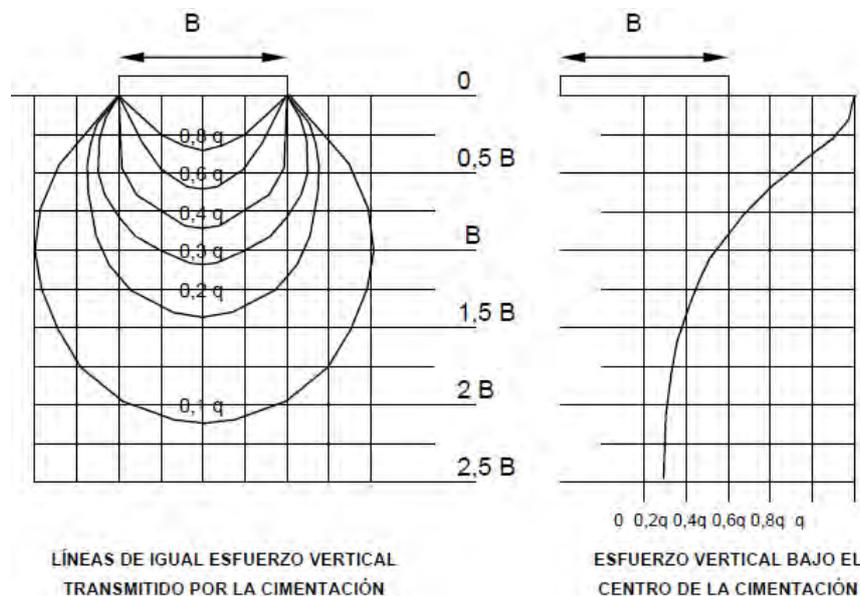
Donde

$B$  y  $L$  son el ancho y longitud de la cimentación respectivamente.

#### 1.4.8 Distribución de tensiones con la profundidad por sobrecarga

Se representa a través de bulbo de tensiones en la zona situada bajo la superficie cargada, hasta el punto que se considera llegan los esfuerzos transmitidos por la cimentación. Su forma depende de las dimensiones de la cimentación y su magnitud es proporcional a la carga ( $q$ ) transmitida por la misma, decreciendo en profundidad.

Se observa que para cualquier profundidad, el mayor esfuerzo tiene lugar debajo del centro de la cimentación, Figura 1.6. La profundidad hasta la cual el esfuerzo es significativo se denomina zona de Influencia, y se suele considerar generalmente como aquella a la cual dicho esfuerzo alcanza un valor igual o inferior al 10% de la sobrecarga (peso del suelo por encima de la cota considerada). En cimentación por losa se considera que la zona de influencia llega hasta una profundidad de 1 vez el ancho.



**FIGURA 1.6** Isolneas de distribución de tensiones en el terreno con la profundidad en función a la sobrecarga de contacto

La tensión normal media en el plano de falla es un parámetro de importancia a tomar en cuenta en el análisis. Meyerhof (1951) sugirió que esta tensión está en el rango del décimo de

la capacidad portante última de la cimentación; De Beer (1970), en tanto, propuso la siguiente expresión para calcular el promedio  $\sigma_o$ :

$$\sigma_o = \frac{q_u + 3\gamma D}{4} (1 - \text{sen}\phi) \quad (\text{Ec. 1.21})$$

Igualmente propusieron que el ángulo de fricción interna del suelo a ser aplicado en las fórmulas de capacidad portante sea seleccionado de acuerdo al nivel de tensiones bajo la cimentación. La fórmula tiene relación directa con la capacidad última, densidad del suelo, profundidad de desplante y la función seno del ángulo de fricción.

#### 1.4.9 Método de equilibrio límite

Cuando no es posible aplicar las fórmulas concebidas bajo el criterio de plasticidad por la configuración misma del terreno y características de su conformación estratigráfica, se podrá calcular la capacidad de carga aplicando el Método de equilibrio límite que permite entre otras incorporar al problema situaciones de flujo de agua y geometrías complejas.

El método tiene sus antecedentes en el cálculo de estabilidad de taludes y estructuras de contención debiéndose sus principios generales a Fellenius (1927).

Existen varios procedimientos para el cálculo por este método siendo el de mayor trascendencia el del Círculo de rozamiento el cual supone que la rotura del terreno sigue una superficie circular y además como hipótesis específica se admite que la resultante de las fuerzas de compresión y fricción en la línea de rotura pasa a una distancia de la línea de rotura que está en función al radio  $R$  y el ángulo de fricción interna del suelo. El concepto se esquematiza en la Figura 1.7:

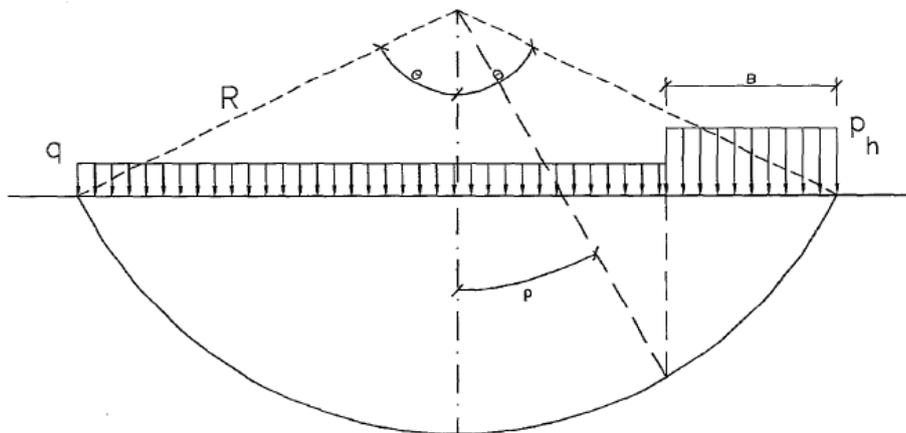


FIGURA 1.7 Círculo de rozamiento para evaluar la rotura de una cimentación superficial

Se establecen las condiciones de equilibrio en términos de fuerzas y momentos a fin de calcular  $Ph$  que representa la carga máxima para el cual se produce la condición de rotura llegándose a la expresión de la forma

$$Ph = c.N_c + q.N_q + \gamma \cdot \frac{B}{2} \cdot N_\gamma \quad (\text{Ec. 1.22})$$

Con los siguientes factores de capacidad de carga

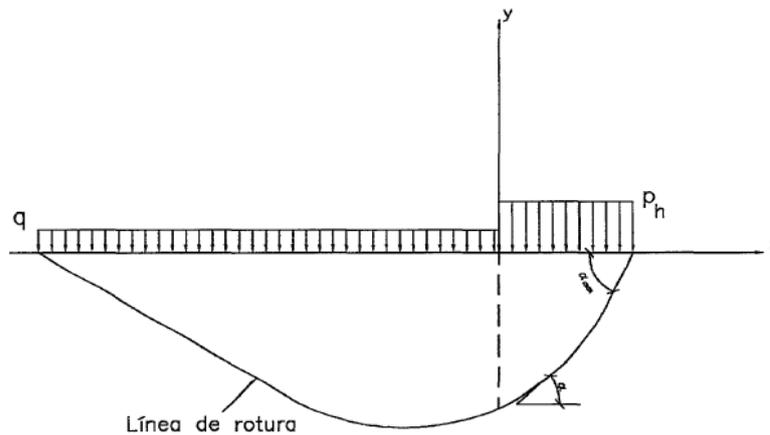
$$N_c = \frac{4\theta}{(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi)^2} \quad (\text{Ec. 1.23})$$

$$N_q = \left( \frac{\text{sen}\theta + \text{sen}\phi}{\text{sen}\theta - \text{sen}\phi} \right)^2 \quad (\text{Ec. 1.24})$$

$$N_\gamma = \frac{4 \cdot \text{sen}\phi (\theta - \text{sen}\theta \cos \theta)}{(\text{sen}\theta - \text{sen}\phi)^2} \quad (\text{Ec. 1.25})$$

Igualmente se cuentan con otros métodos de rotura circulares, ya que son las condiciones que mejor se acomodan para resolver el problema ciertamente con un margen de error tolerable. También se tienen superficies de rotura no circulares que son los adecuados cuando el ángulo de fricción del suelo es relativamente elevado.

En la Figura 1.8 se grafica el tipo de rotura no circular que se extiende por fuera de la superficie cargada.



**FIGURA 1.8** Superficie de rotura no circular para análisis por equilibrio límite

#### 1.4.10 Últimos avances relacionados con el cálculo de capacidad portante

Los criterios más recientes para el cálculo de capacidad portante están ligados al desarrollo de métodos numéricos y a la implementación de nuevas herramientas que permitan reproducir con mejor efectividad el problema que se trate.

Griffiths (1982) estudió el valor de la carga de hundimiento de una cimentación superficial mediante el empleo de un programa de Elementos finitos bajo la hipótesis de deformación plana y asumiendo el modelo elasto plástico de Mohr Coulomb. Aplicó las fuerzas mediante velocidades en los nodos. Los valores de los factores de carga resultaron similares a los teóricos de Prandtl e independiente del ancho de la cimentación con excepción al factor de sobrecarga que sí guarda relación directa a este ancho. Para referencia se presenta la Figura 1.9 publicada por el mismo autor.

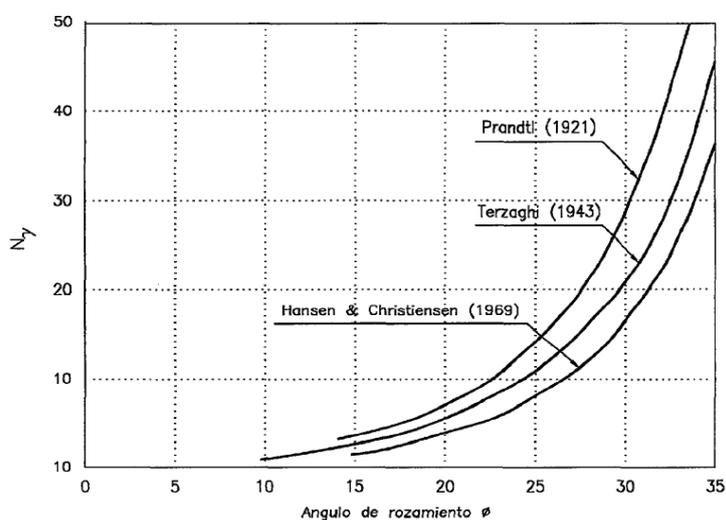
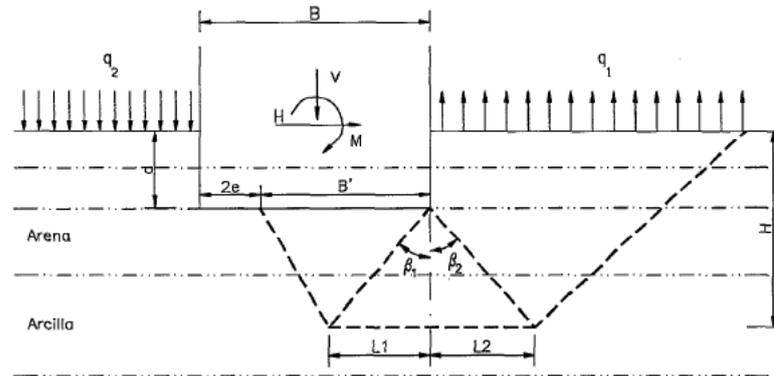


FIGURA 1.9 Valores de  $N_\gamma$  para cimentaciones rugosas. Publicado por Griffiths (1982)

Georgiadis y Michalopoulos(1985) establecieron un método numérico para el cálculo de la carga de hundimiento. Consideran distintas hipótesis para la cohesión y el ángulo de fricción interna de las capas de suelo del modelo. Se supone un mecanismo de rotura formado por triángulos y aplican el equilibrio de momentos y fuerzas de acuerdo al mecanismo de rotura de la Figura 1.10. En este caso las cargas pueden ser inclinadas o verticales. A fin de determinar el coeficiente de seguridad mínimo se tantean diferentes combinaciones de las variables  $H$ ,  $L1$  y  $L2$ .



**FIGURA 1.10** Mecanismo general de carga y condiciones de carga. Georgiadis y Michalopoulos(1985)

Siddiquee, Tanaka, Tatsuoka, Tani, Yoshida y Morimoto (2001) analizaron la carga de hundimiento de una cimentación rígida y rugosa mediante un programa de Elementos finitos en dos y tres dimensiones; como resultado de este trabajo pudieron corroborar que la carga de hundimiento resultante del cálculo en 3D es mayor que el cálculo realizado en 2D para deformación plana. Igualmente, del estudio del factor de forma se desprende que la carga de hundimiento de cimentaciones superficiales es mayor que el empleado normalmente en la hipótesis de deformación plana.

Mizumo y Tsuchida (2002) evaluaron la veracidad de los resultados de un programa de Elementos finitos basados en el modelo elastoplástico, se verifica que los valores son parecidos a los de la teoría de la plasticidad para el caso de arenas sueltas con ángulo de fricción menor a 30 grados, para valores mayores los resultados obtenidos fueron menores a los de la Teoría de la plasticidad.

Drounic, Magnan, Humbert y Mestat (2003) estudiaron la carga de hundimiento en cimentaciones superficiales sometidas a acciones inclinadas y/o excéntricas; para ello emplearon la teoría del Análisis límite.

Por lo cual, el tema de la determinación de la capacidad portante del terreno sigue siendo abierto para el campo de la investigación, habiendo temas que se mantienen divergentes para diversos autores los cuales están relacionados con el cálculo del factor de capacidad de carga debido al peso propio, el efecto del rozamiento del terreno, el efecto de la inclinación de las cargas y la proximidad de una cimentación al borde de un talud.

#### **1.4.11 Procedimientos numéricos aplicados al cálculo de capacidad portante**

En la actualidad es más frecuente aplicar métodos numéricos al tratamiento de problemas concretos lo que nos permite reproducir con amplia exactitud los distintos aspectos de un problema. El cálculo de la capacidad portante se puede abordar mediante el método de Diferencias finitas a través del programa FLAC.

El software no facilita directamente cuándo se produce el colapso de la cimentación no obstante que algunos autores han dado ciertas pautas para interpretar los resultados y relacionar con la capacidad de carga final. El criterio utilizado con frecuencia para poder hallar la capacidad portante es interpretando adecuadamente la curva fuerza-desplazamiento.

La aplicación del Método de elementos finitos con el Plaxis 3D Foundation permite resolver el problema bajo un esquema determinado a través de un proceso de reducción progresiva de los parámetros resistentes del suelo hasta provocar la falla del mismo.

La aplicación de la carga se puede hacer mediante dos opciones distintas, una de ellas se denomina “staged construction” y la otra “total multipliers”. Con el primero se aplica el total de la carga al modelo no garantizando la consecución del equilibrio para obtener la capacidad portante, es mas ello puede derivar en una situación de no convergencia de los cálculos. Con el segundo da la posibilidad de ir introduciendo las fuerzas de manera progresiva conduciendo a la resolución del problema en forma estable, lo que equivale a decir sin problemas de convergencia.

## **1.5 DISEÑO POR EL METODO DE ESTADOS LIMITE**

### **1.5.1 Generalidades**

Diseñar fundaciones consiste en seleccionarlos y dimensionarlos de manera tal de evitar los estados límites. Hay dos tipos de estados límites: Estados Límites Últimos (ULS) y Estados Límites de Servicio (SLS). Los Estados Límites Últimos están relacionados con situaciones de riesgo que pueden involucrar consecuencias tales como el colapso estructural. Los Estados Límites de Servicio están relacionados con la pérdida de funcionalidad, los que generalmente son provocados por asentamientos excesivos.

Las bases de los cimientos deben diseñarse a partir de (Eurocódigo 7):

- Los resultados de las investigaciones ingeniero-geológicas, hidrológicas y condiciones climatológicas de la zona de construcción.
- La experiencia que se posea en condiciones ingeniero geológicas análogas.
- Las características de la edificación, su estructura, las cargas que actúan sobre los cimientos.
- Las condiciones locales de la zona de construcción.
- Las características tenso-deformacionales de la base de cimentación, que en función del tipo de suelo y el estado tensional actuante, determinarán el método de cálculo de las deformaciones a emplear, ya sea lineal o no lineal.
- La comparación técnico-económica de las variantes posibles de las soluciones de diseño, teniendo en cuenta la necesidad de tomar la óptima, que asegure la utilización más completa de las características de resistencia y deformación de los suelos, valorando las soluciones sobre la base de los gastos de inversiones.

No obstante, existe tal diversidad de procedimientos en este ámbito que es difícil reordenarlos todos en torno a unas reglas mínimas de funcionamiento. La mayoría de los métodos se basan en planteamientos empíricos, reglas aproximadas o simulaciones estimativas cuyo tratamiento conjunto es complejo. No existe aún en este campo, como pudiera ser en el de las estructuras, un programa o sistema de cálculo genérico que, aplicado a cualquier problema, proporcione una solución “estándar”.

Sin embargo, en los últimos años, existen importantes y lógicas tendencias normativas que pretenden un intento de homogenización en los proyectos geotécnicos, basado en establecer criterios generales.

Esta tendencia es más acusada en los problemas de cimentaciones, en que estando planteado esta normalización ya se contaba con importantes avances en las normativas de otros países. Según ella, el procedimiento de comprobación se basará en cálculos justificativos que habrán de hacerse con la ayuda de un modelo de comportamiento de la cimentación a estudiar y que deben concluir con la comprobación de que los coeficientes de seguridad resultantes superan los valores mínimos establecidos.

Se indican los caracteres de los Estados límite

#### ***Estados límite últimos***

Los estados límite últimos generales de tipo geotécnico, están atribuidos principalmente por las características del terreno, son los siguientes:

- Socavación de cimientos.
- Inestabilidad global.
- Falta de capacidad de soporte del terreno.

Es posible identificar otros tipos de estados límite último correspondiente a obras de cimentación específicas.

#### ***Estados límite de servicio***

Los estados límite que condicionan el servicio de las infraestructuras por razones de durabilidad o estéticas, son los siguientes:

- Movimientos excesivos.
- Plastificaciones localizadas.
- Vibraciones excesivas.

Existen otros estados límite de utilización menos frecuentes o que no son susceptibles de un cálculo específico.

### **1.5.2 Métodos de cálculo**

Los métodos de cálculo geotécnicos, en general, consisten en desarrollos matemáticos que permiten discernir en cada caso concreto la superficie de falla. Además, permiten la

determinación de un coeficiente de seguridad o en su defecto asumir uno como referencial inicial y subsiguiente calibración a un valor más consistente.

Otro concepto ligado es el de los Estados críticos en donde bajo la condición de cargas interpuestas las deformaciones plásticas se hacen permanentes en el suelo sin que se produzcan cambios de volumen y en las tensiones efectivas producidas.

Por otro lado, el uso de métodos de cálculo sencillos sólo permite explorar zonas o partes concretas de la superficie de falla. Es lo que se conoce con el concepto de “modo de fallo” que se refiere a una forma o mecanismo de rotura concreto que tiene una ecuación suficientemente simple para que sea susceptible de análisis con procedimientos sencillos o analíticos.

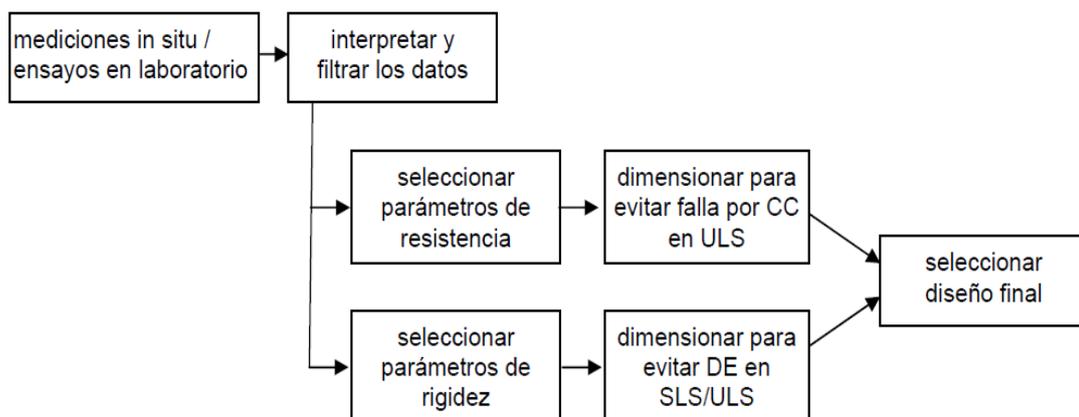
Así, el estado límite último de falta de capacidad de soporte del terreno de cimentación para cimentaciones superficiales se puede definir mediante los siguientes modos de fallo específicos:

- Hundimiento
- Deslizamiento
- Vuelco

En la verificación de estos estados límite en el proceso de dimensionamiento siempre se tendrá que asumir que el valor de cálculo del efecto de las acciones sea menor a los factores inherentes a la resistencia del terreno de cimentación.

Con esos tres mecanismos quedará suficientemente explorada la superficie de falla y puede emitirse un juicio relativo a la seguridad de la cimentación.

La filosofía de diseño por Estados límite para cimentaciones superficiales se basa en el siguiente diagrama de flujo esquematizado (Figura 1.11):



**FIGURA 1.11** Diagrama de flujo para el diseño de cimentaciones superficiales por Estados límite, en donde CC es capacidad de carga, DE deformación excesiva, ULS estados límites últimos y SLS Estados límites de servicio.

### **1.5.3 Concepto de análisis límite**

Los mecanismos, desarrollo y evolución que lleva un sistema al colapso ha sido un tema ampliamente estudiado por los ingenieros a lo largo de la historia. La teoría más utilizada al respecto ha sido la de la elasticidad lineal, pero es evidente que el comportamiento real de un sólido dista notablemente de dicha teoría, lo que conlleva a una problemática bajo este contexto.

Justamente el análisis límite nace de la necesidad de complementar los conceptos relacionados con la elasticidad lineal para conseguir resultados más realistas con respecto a la evolución hacia el colapso. Es lógico pensar que el realismo añadido por el análisis límite a la teoría de la elasticidad nos complica el problema de una forma importante.

Harr (1966) ha resuelto problemas relacionados con la estabilidad y capacidad de carga utilizando el análisis límite. El desarrollo nos ayuda a tener un mejor entendimiento de la forma en que ocurre la ruptura del suelo en una diversidad de situaciones permitiendo además asumir los errores cometidos cuando se aplican métodos convencionales.

### **1.5.4 Diseño por factores de carga y resistencia (LRFD)**

Este método se enfoca dentro del campo analítico en la solución de tópicos relacionados con las cimentaciones superficiales y geotecnia en general.

El LRFD se adecúa al diseño en base a la confiabilidad (RBD) que es una filosofía de diseño cuyo objetivo es mantener la probabilidad de alcanzar los estados límites por debajo de algún valor límite. En otras palabras, el objetivo del diseño es producir estructuras cuyas probabilidades de falla sean menores que un valor aceptable determinado. La mecánica del RBD permite una evaluación directa en términos de riesgo, procedimiento que no es posible con el diseño tradicional en base a las tensiones de trabajo. Salvo que se trate de un proyecto de gran presupuesto, el RBD no se puede aplicar en forma directa y resulta laborioso para los diseñadores.

El Diseño por Factores de Carga y Resistencia (LRFD) es una metodología de diseño que es similar a las prácticas existentes, pero que se puede desarrollar utilizando conceptos del RBD. El LRFD comparte la mayor parte de los beneficios del RBD, pero es mucho más fácil de aplicar.

Tradicionalmente el LRFD se ha utilizado para verificar los Estados Límites Últimos de las estructuras, pero recientemente los Estados Límites de Servicio se han incorporado al marco del LRFD.

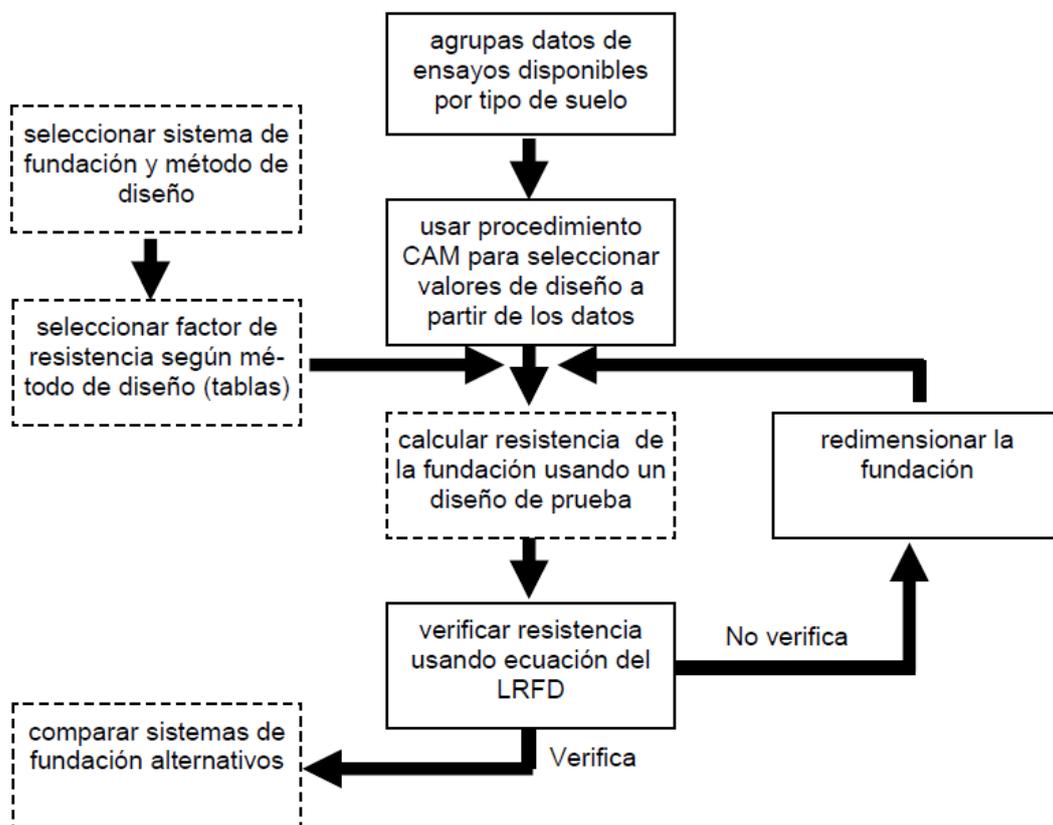
El Diseño por Factores de Carga y Resistencia (LRFD) es un método de diseño en el cual las cargas de diseño se mayoran y las resistencias de diseño se minoran multiplicando por factores mayores y menores que la unidad, respectivamente. En este método las

cimentaciones se dimensionan de modo que las cargas mayoradas sean menores o iguales que las resistencias minoradas:

$$(RF) \cdot R_n \geq \sum (LF)_i Q_i \quad (\text{Ec. 1.26})$$

Donde  $RF$  es el factor de resistencia,  $R_n$  es la resistencia nominal (no minorada),  $(LF)_i$  es el factor de carga para una carga y combinación de cargas determinada, y  $Q_i$  es una carga de un tipo particular (por ejemplo carga permanente, sobrecarga viva, etc.). La resistencia nominal  $R_n$  es análoga a la carga admisible calculada en el Diseño por tensiones de trabajo tradicional.

En el diagrama de flujo para el diseño por LRFD Figura 1.12, las líneas de trazos indican pasos específicos de un método de diseño particular; las líneas llenas indican pasos comunes para todos los tipos de cimentaciones.



**FIGURA 1.12** Diagrama de flujo del LRFD para verificaciones de estados límites últimos en el diseño de cimentaciones.

### **Factores de carga aplicables al diseño geotécnico**

En vista de la tendencia hacia el mayor uso del LRFD, en los últimos tiempos los nuevos Códigos sobre LRFD de Estados Unidos, Canadá y Europa (AASHTO 1994, API 1993, MOT 1992, NRC 1995, y ECS 1994) han incluido la implementación del LRFD para el diseño geotécnico. Además, un documento de ACI actualmente en preparación también aboga por el

diseño LRFD para cimentaciones superficiales. En la figura 13 se observa el diagrama de flujo y verificación de los Estados límite a través del LRFD.

El Código AASHTO (1998) propone utilizar para el diseño de las cimentaciones las mismas cargas, factores de carga y combinaciones de carga empleadas para el diseño estructural. A efectos de lograr el uso generalizado en aplicaciones geotécnicas es necesario hacer la calibración de los factores de carga tal como se hizo en su momento en el contexto del análisis estructural.

Las siguientes tablas nos proporcionan parámetros de diseño requeridos para la verificación del diseño por LRFD:

**TABLA 1.1** Factores de carga asumidos para el diseño por Estados límite. Los valores entre paréntesis se aplican cuando para una combinación de cargas dada los efectos de las cargas tienden a resistir la falla.

Carga	Estados Unidos				Canadá		Europa	
	AASHTO (1998)	ACI (1999)	AISC (1994)	API (1993)	MOT (1992)	NRC (1995)	DGI (1985)	ECS (1995)
Permanentes	1.25-1.95 (0.65-0.90)	1.40 (0.9)	1.2-1.4 (0.9)	1.1-1.3 (0.9)	1.10-1.50 (0.65-0.95)	1.25 (0.85)	1.00 (0.85)	1.00-1.35 (0.95)
sobrecargas vivas	1.35-1.75	1.7	1.6	1.10-1.50 (0.80)	1.15-1.40	1.5	1.3	1.30-1.50
viento	1.40	1.30	1.30	1.20-1.35	1.30	1.50	1.30	1.30-1.50
sismo	1.00	1.40	1.00	0.90	1.30	1.00	1.00	1.00

**TABLA 1.2** Factores de carga y combinaciones de carga gravitatoria adoptadas por diferentes códigos

Código	Combinación de carga representativa
AASHTO (1998)	1.25D + 1.75L
ACI (1999)	1.40D + 1.70L
AISC (1994)	1.20D + 1.60L
API (1993)	1.30D + 1.50L
MOT (1992)	1.20D + 1.40L
NRC (1995)	1.25D + 1.50L
DGI (1985)	1.00D + 1.30L
ECS (1995)	1.35D + 1.50L

**TABLA 1.3** Factores de carga para Estados límites de servicio. El índice  $\alpha$  indica que los valores para cargas temporarias están dados en el Código estructural

Carga	Estados Unidos			Canadá		Europa	
	AASHTO (1998)	ACI (1999)	AISC (1994)	MOT (1992)	NRC (1995)	DGI (1985)	ECS (1995)
Permanentes	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
sobrecargas vivas	1.00	1.00	1.00	0.75	1.00	N/A	1.00
viento	0.30	1.00	1.00	0.70	1.00	N/A	1.00

Se han realizado análisis de confiabilidad simple utilizando métodos estadísticos para hallar rangos apropiados de los valores de los factores de carga para cada una de las cargas consideradas en los Códigos mencionados encontrándose correspondencia.

En el LRFD el objetivo es obtener un conjunto de factores de carga y resistencia que le permitan al ingeniero producir diseños con un índice de confiabilidad consistente. Por tanto, en la determinación de factores de carga y resistencia el índice de confiabilidad se debe fijar igual a cierto valor a fin de obtener una confiabilidad uniforme en la totalidad de un sistema estructural y geotécnico.

### 1.5.5 Determinación de factores de resistencia

Existen muchas técnicas posibles para seleccionar Factores de Resistencia (RF) para utilizar en el diseño LRFD aplicado a la geotecnia. Una técnica muy común consiste en “calibrar” los factores de resistencia usando como datos de partida los factores o coeficientes de seguridad existentes y los Factores de Carga especificados en los códigos. De este modo se pueden especificar factores de resistencia que permitan obtener resistencias consistentes con los factores de seguridad existentes.

Esta técnica es aceptable como primer paso en la adopción del LRFD, pero también hay mejores métodos disponibles. El método más racional disponible para determinar factores de resistencia es el análisis de confiabilidad.

Se han publicado numerosos estudios que abogan por el uso de los análisis de confiabilidad para el desarrollo del LRFD.

Las técnicas más difundidas involucran realizar cálculos estadísticos sobre grandes bases de datos que contienen datos combinados en forma indiscriminada. Un ejemplo de esta técnica aplicada a bases de datos de resultados de ensayos en laboratorio es el reciente Informe NCHRP 507, Paikowsky (2004).

Un ejemplo de esta técnica aplicada a las propiedades del suelo es el trabajo de Phoon y Kulhawy (1999). Estos métodos tienen la ventaja que se pueden aplicar fácilmente en el corto plazo. Sin embargo, tienen la desventaja que virtualmente no hay ningún control sobre la calidad o la aplicabilidad de los datos recolectados.

Siguiendo el marco modelo para determinar factores de resistencia para el diseño estructural propuestos por Ellingwood et al. (1980), se han propuesto los siguientes pasos como marco para la aplicación de dicho método al diseño geotécnico:

- Identificar las ecuaciones utilizadas para calcular la resistencia de la fundación;
- identificar las variables que componen las ecuaciones de resistencia;
- identificar las cantidades mensurables (ensayos geotécnicos) asociadas con cada una de las variables utilizadas como datos de partida;
- identificar todas las incertidumbres que componen cada variable, incluyendo las transformaciones;
- evaluar las incertidumbres compuestas usando los análisis estadísticos disponibles (literatura, ensayos/análisis, investigación actual);
- utilizar las incertidumbres para seleccionar funciones de densidad de probabilidad (PDF1) para el análisis de confiabilidad;
- seleccionar variables de diseño representativas (dimensiones, resistencias, cargas);
- ejecutar el análisis de confiabilidad para obtener factores de resistencia;
- ajustar los factores de resistencia para los factores de carga determinantes;
- repetir el análisis de confiabilidad para abarcar un rango de condiciones de diseño representativas.

Bajo este concepto y asumiendo la ecuación dada a fin de minorar el factor de resistencia que implica a la vez mayorar las cargas evitando de esta forma el estado límite, resulta

$$(RF).R_n \geq (LF)_{DL}.DL + (LF)_{LL}.LL \quad (\text{Ec. 1.27})$$

Donde  $DL$  representa carga permanente y  $LL$  sobrecarga viva.

### 1.5.6 Posibilidades del diseño geotécnico mediante LRFD

Los factores de carga y resistencia están inexorablemente relacionados al tipo de análisis que se aplique para su ajuste enmarcado en el campo de la estadística. Esto significa que cada Código asignará diferentes valores a los factores de resistencia, ya que cada uno de ellos adopta valores diferentes para los factores de carga.

Esto aumenta la complejidad del LRFD comparado con el diseño por tensiones admisibles (ASD). Para el diseño por tensiones admisibles lo único que los ingenieros deben comprender es el concepto de factor de seguridad global, el cual se viene utilizando desde hace al menos cien años. Por ejemplo, el factor de seguridad para una zapata típicamente estaría

comprendido entre 2 y 4, y el ingeniero selecciona el valor a utilizar en el diseño en base a lineamientos generales. En el caso del LRFD es fundamental utilizar los valores de LF y RF especificados en el Código, además de una resistencia nominal consistente con los valores de LF y RF.

Esto requiere comprender conceptos más complejos. La aceptación del enfoque del LRFD depende de que el método sea comprensible y utilizable por los ingenieros geotécnicos. La gran variedad de factores de carga actualmente existentes, la cual lleva a una gran variedad de factores de resistencia diferentes, contribuye a la complejidad global del LRFD desde el punto de vista del ingeniero y en última instancia desalienta el uso de este método de diseño.

Desde una óptica general, los factores de carga propuestos por los diferentes códigos son todos aceptables desde un punto de vista teórico. Idealmente, a fin de facilitar el uso del LRFD en la práctica habitual, los líderes de las organizaciones responsables por cada código deberían unirse para adoptar un conjunto único de factores de carga, al menos para las cargas primarias, tales como los cuatro tipos de cargas expuestas (carga permanente, sobrecarga viva, carga de viento y carga sísmica), lo cual tiene que ver con obstáculos que no son técnicos sino políticos.

La alternativa es que los ingenieros se acostumbren a utilizar diferentes factores de carga y resistencia al diseñar el mismo tipo de elemento de cimentación dependiendo del Código vigente para cada diseño particular.

## CAPÍTULO II

### 2 EL MÉTODO DEL COEFICIENTE DE BALASTO

#### 2.1 EL MODELO DE WINKLER

El método de cálculo más utilizado para modelizar la interacción entre estructuras de cimentación y terreno es el que supone el suelo equivalente a un número infinito de resortes elásticos, muelles o bielas biarticuladas, cuya rigidez denominada coeficiente de balasto ( $k_s$ ), se corresponde con el cociente entre la presión de contacto ( $p$ ) y el desplazamiento o asiento ( $\delta$ ):

$$k_s = \frac{P}{\delta} \quad (\text{Ec. 2.1})$$

La denominación de balasto nace a partir del análisis de las traviesas del ferrocarril donde se utilizó por primera vez esta teoría. El balasto es la capa de grava que se tiende sobre la explanación de los ferrocarriles para asentar y sujetar las traviesas. A este modelo de interacción se le conoce generalmente como modelo de Winkler debido al nombre de su creador, y tiene múltiples aplicaciones, no sólo en el campo de las cimentaciones, sino en cualquiera problema que pueda adaptarse a este modelo; por ejemplo mediante la teoría del balasto se calcula la carga  $P$  que es capaz de soportar una espiga de acero anclada en una masa de concreto:

La aplicación de la teoría del coeficiente de balasto ha ganado aceptación en los últimos tiempos, en cuanto que permite una fácil asimilación del modelo de la interacción cimiento terreno dentro del cual se han implementado los métodos matriciales de cálculo. Como tal se incluyen bielas biarticuladas (muelles) en los nudos con la rigidez correspondiente al balasto

(en elementos lineales mediante su discretización en varias barras cuyos nudos incluyen bielas; en elementos superficiales mediante un emparrillado de barras con las bielas en los nudos).

En el quehacer del cálculo y diseño de cimentaciones superficiales tiene aplicación la teoría de Winkler al dimensionamiento de elementos tales como vigas flotantes o de cimentación y losas de cimentación que trabajan sobre un corte horizontal de terreno, pero también para elementos tales como pantallas para excavaciones o tablestacas que trabajan sobre un corte vertical. Por lo que son útiles los coeficientes de balasto vertical y horizontal bajo el mismo concepto.

Incluimos aquí, como ejemplo, la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento de la clásica solución de viga flotante o viga sobre fundación elástica, (Hahn J., 1994).

$$p - k.w(x) = EI \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (\text{Ec. 2.2})$$

El cual resulta por sumatoria de efectos en la dirección vertical de acuerdo a la Figura 2.1. La integración de esta ecuación permite obtener la deformada de la viga de cimentación.

$$w(x) = f[p(x)] \quad (\text{Ec. 2.3})$$

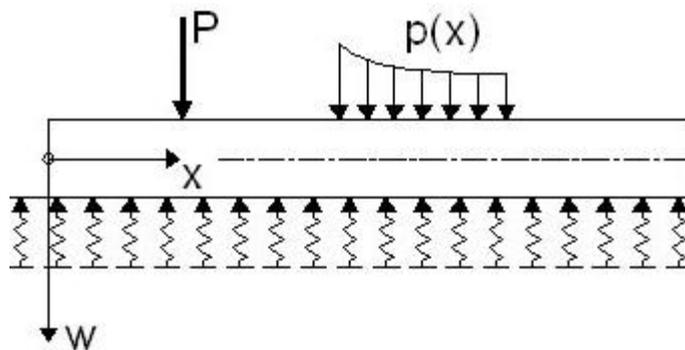


FIGURA 2.1 Modelo de viga sobre fundación elástica

De esta manera, la reacción del terreno se considera proporcional a su desplazamiento vertical, igual que en un sistema de muelles, debido a que la losa o viga presenta una flexibilidad que puede ser comparable a la reacción del terreno.

Este modelo es muy utilizado desde el punto de vista estructural, y se utiliza habitualmente para la consideración de la rigidez del apoyo en losas.

Se debe acotar que el coeficiente de balasto no es un parámetro intrínseco del suelo, por lo que su valor no sólo depende del tipo de terreno sino también de la magnitud de la carga aplicada.

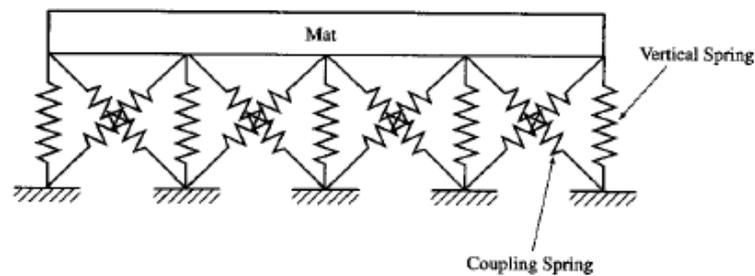
Respecto del Modelo de Winkler se puede adelantar

- Su aplicación a problemas prácticos es de mediana dificultad, muy flexible de uso.
- Precisan de programas de cálculo matricial
- Adecuados para el tratamiento de cimentaciones flexibles.

### **Métodos acoplados**

En este caso se usan resortes que conectan los nudos adyacentes, permiten que los movimientos de cada nudo sea dependientes del resto obteniéndose resultados más cercanos a la realidad, lo que implica un aumento considerable en el tiempo de cálculo, además de requerir una implementación específica en los programas de cálculo generales (que, sin embargo, se adaptan fácilmente al método de Winkler).

Se muestra la figura 2.2 que ilustra el método acoplado. (Coduto D, 2001)

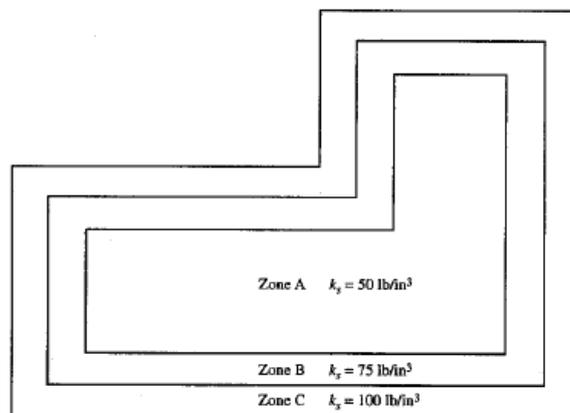


**FIGURA 2.2** Modelo acoplado de fundación tipo Winkler

### **Métodos pseudo acoplados**

Divide el elemento de cimentación en distintas zonas a las que varía su coeficiente de balasto. El balasto se hace mayor en las zonas extremas, por ejemplo, el doble del valor en el contorno que en la zona central. También el ancho de las zonas se hace disminuir al acercarse a los extremos, todo ello con el objeto de aumentar las tensiones en los bordes de las cimentaciones ya que en otros estudios pudieron observar que el modelo de Winkler obtiene tensiones más bajas que las constatadas con otros métodos en dichos puntos.

Se muestra la figura que ilustra el método acoplado.



**FIGURA 2.3** Variación del módulo de balasto para una fundación con el modelo pseudo acoplado.(Coduto D, 2001)

### **2.1.1 Correlación con métodos numéricos**

Actualmente para el cálculo de estructuras de concreto en contacto con el suelo es frecuente utilizar programas de ordenador asimilando el modelo de Winkler a modelos matemáticos más complejos que utilizan parámetros similares a unos Coeficientes de balasto. En la información que manejan dan recomendaciones para la elección de los coeficientes, pero, sin prever que estos parámetros tienden a variar en espacios reducidos del terreno y su dependencia con el problema estudiado y de su geometría. Basándose en diversos cálculos por elementos finitos (MEF) es posible obtener formulaciones y relaciones para cuantificar los coeficientes de balasto en función de las características de deformabilidad y de resistencia del terreno, así como de la geometría del problema en cada fase de ejecución. Este problema es de particular importancia en este estudio y se abordará con aplicaciones prácticas.

## **2.2 CRITERIOS DE RIGIDEZ Y FLEXIBILIDAD**

### **2.2.1 El problema de la presión de contacto**

En los problemas de mecánica se asume que todos los materiales sufren deformaciones en mayor o menor magnitud bajo la aplicación de un cierto esquema de cargas en su contorno. Los suelos, a pesar de ser medios no homogéneos, no son ajenos a esta característica.

Su principal diferencia frente a materiales convencionales como el concreto o el acero se encuentra en que la ley que liga esfuerzos con deformaciones tiene un carácter fuertemente no lineal, dificultando por lo general la resolución de una variedad de problemas.

Se debe mencionar que ciertos problemas relacionados con la Mecánica del suelo se resuelven mediante el método analítico de equilibrio límite, que consiste en suponer una superficie de rotura y establecer en el contorno de ella qué condiciones de resistencia son necesarias para mantener el equilibrio. Su uso es frecuente en los análisis de estabilidad de cimentaciones superficiales, estructuras de retención o de estabilidad de taludes.

Hay sin embargo casos en los que antes de alcanzarse esta hipotética superficie de rotura se producen unos movimientos del terreno de tal magnitud que hacen que la función para la que fue diseñada inicialmente la estructura deje de cumplirse. Por ello, cuando se trata del análisis del comportamiento tenso-deformacional del terreno sujeto a una determinada carga, es preciso tener siempre presente la magnitud de los esfuerzos generados en ciertos puntos, para comprobar cuan alejados se encuentran de los que producirían su rotura y los asientos originados, para verificar que son aceptables para la seguridad de la estructura. (Reimbert, 1979)

Esta última parte representa la filosofía de diseño de cimentaciones superficiales que se ha venido asumiendo a lo largo del tiempo y que tendrá vigencia siempre y cuando los conceptos sobre los que se sustenta tengan asidero y aplicación a problemas prácticos.

Antes de pasar al estudio de la forma en que se distribuyen en el suelo las tensiones y deformaciones originadas en el terreno por cargas aplicadas en el exterior conviene, por último, prestar atención a lo que en la práctica se denomina como presión de contacto, es decir, la presión que transmite la base de una cimentación sometida a una carga en su cara superior sobre el suelo en el que se apoya.

La distribución de esta presión dependerá:

- De la rigidez del terreno de cimentación
- Del cociente rigidez de la cimentación–rigidez del terreno de cimentación.

### 2.2.2 Rigidez del terreno de cimentación

Por lo general son inferiores al del elemento de cimentación. Cuando el terreno sobre el que se apoya una superestructura es una roca competente la rigidez del terreno se expresa a través de la presión de contacto demostrando que puede asumir esfuerzos sin llegar a la falla; cuando la competencia del terreno es menor, al no poder soportar unos esfuerzos tan elevados se rompe, redistribuyendo lateralmente las tensiones de manera que la tensión máxima y por ende su rigidez es menor que en el caso anterior. En la mayoría de los casos la distribución de tensiones se asume como uniforme.

### 2.2.3 Rigidez del elemento de cimentación

La forma del asentamiento es determinado por la rigidez del elemento de cimentación. Si la fundación es flexible  $[E]$  tiende a 0 (Figura 2.4), entonces el suelo de fundación y la estructura se deforman de igual forma y se forma el molde de asentamiento. La distribución de tensiones en la base podrá asumirse como uniforme. Ejemplo: rellenos sanitarios, terraplenes, plateas de cimentación.

De ser predominante la rigidez de la cimentación  $[E]$  tiende al infinito (Figura 2.5), la fundación se asienta en el terreno de manera uniforme siendo por lo tanto iguales en toda la base de la fundación. La distribución de tensiones es creciente hacia los extremos. Ejemplo: cimentaciones aisladas.

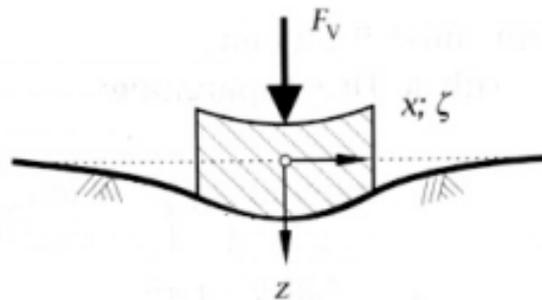
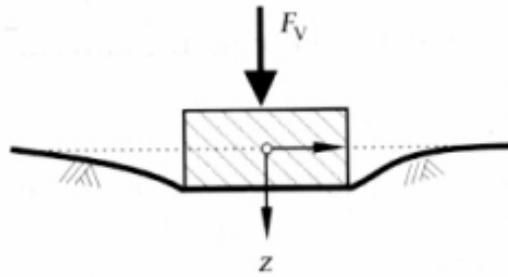


FIGURA 2.4 Molde de asentamiento en una fundación flexible

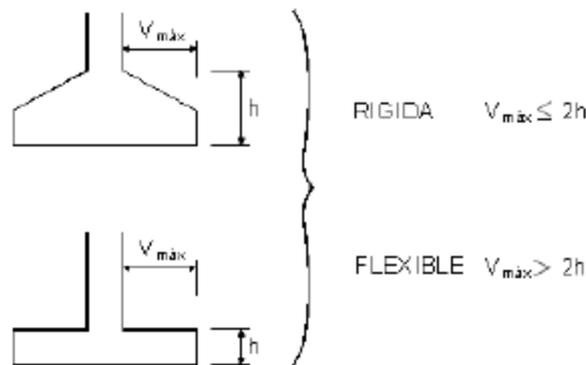


**FIGURA 2.5** Asentamiento típico de una fundación rígida

Para fines de diseño considerando la presión de contacto actuando entre ambos elementos se han desarrollado una serie de criterios para definir su rigidez, dentro de las cuales se destacan las siguientes. (Muzas Labad, 2002):

- Criterio considerado en el cálculo estructural
- Criterio contemplado en la teoría de viga flotante
- Criterio deducido de la interacción cemento-terreno

En el campo del Análisis estructural, define una estructura rígida cuando la distancia de la columna al borde de la zapata sea menor que dos veces el canto de la zapata; por el contrario se considerará como flexible si es que esta distancia es superior en dos veces al canto que se indica (ver Figura 2.6). Lo mencionado representa al criterio de rigidez adoptado por la Instrucción de Hormigón Estructural (EHE) del Ministerio de Fomento de España (1999).



**FIGURA 2.6** Asentamiento típico de una fundación rígida

#### 2.2.4 Rigidez relativa

Toma en cuenta el comportamiento del elemento de cimentación y del suelo de manera simultánea para establecer relaciones más o menos simples que nos permitan cuantificar un valor asociado a su condición rígida o flexible. Para los casos de carga uniformemente repartida y carga puntual centrada, para que el cimiento rectangular resulte rígido debe cumplirse, (Olmos M, 2007):

$$\frac{h}{L} \geq \sqrt[3]{\frac{Bk_s(L/B)}{2.03E}} \quad (\text{Ec. 2.4})$$

Donde  $h$ ,  $L$  y  $B$  representan las dimensiones del elemento de cimentación,  $k_s$  el Coeficiente de balasto y  $E$  el módulo de deformabilidad del concreto.

El criterio que contempla la teoría de viga flotante se basa en la solución de la ecuación diferencial que gobierna la interacción de este elemento sobre una fundación modelo Winkler:

Resultando el parámetro

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{Bk_s}{4EI}} \quad (\text{Ec. 2.5})$$

Que se denomina factor de amortiguación del conjunto suelo-cimiento, siendo su inversa la denominada longitud característica  $L$  que cuantifica el grado de rigidez y flexibilidad de acuerdo al valor que adopte; un valor mayorado implica una rigidez grande, por el contrario un valor pequeño de la longitud característica significa la interacción entre un elemento deformable sobre suelo rígido lo que significa flexibilidad. A diferencia del anterior, en la evaluación de este parámetro intervienen las propiedades del elemento de cimentación y el suelo de manera interdependiente.

En la Figura 2.7 se muestra la reducción que presentan los momentos flectores en un elemento de cimentación continua al variar sustancialmente el factor de amortiguación. Ello tiene que ver con el peralte de la zapata que repercute en un incremento de asientos.

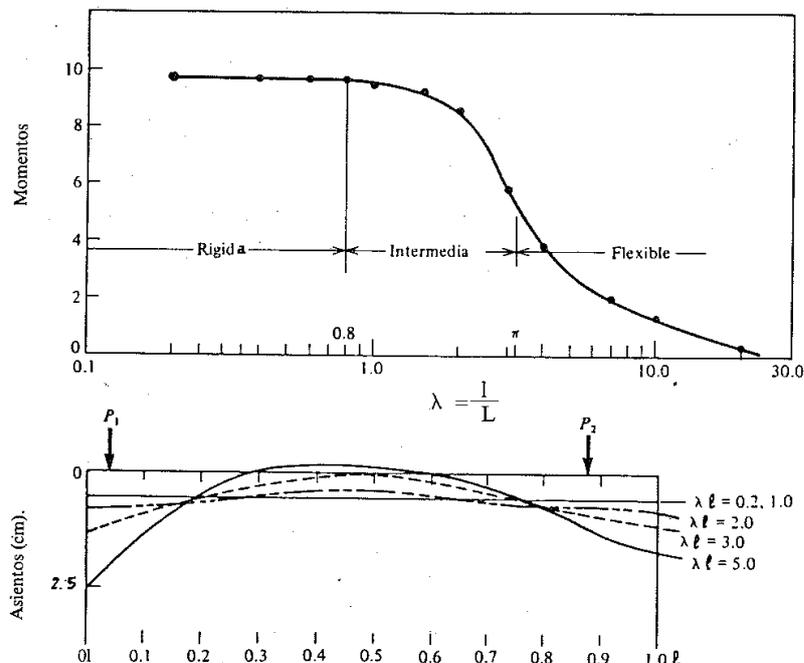


FIGURA 2.7 Momentos y asientos de una zapata combinada según su rigidez (Bowles 1968)

Hetenyi (1946) desarrolló intervalos de variación del factor de amortiguación en función a la longitud del elemento de cimentación a efectos de determinar la distribución de presiones de contacto, su rigidez y flexibilidad, el que se resume en la tabla:

**TABLA 2.1** Intervalos de variación del factor de amortiguación para vigas

Intervalo $\lambda L$	Identificación de la viga	Criterio para la distribución de la presión de contacto	
$\lambda L < \pi/4$	Viga rígida	Distribución lineal de la presión	$\frac{\pi/4}{\lambda} > L \quad \text{ó} \quad L < \frac{\pi/4}{\lambda} \quad \text{ó} \quad L < \frac{0,785}{\lambda}$
$\pi/4 \leq \lambda L \leq \pi$	Viga de flexibilidad intermedia	Determinarla como viga sobre fundación elástica	$L < \frac{\pi}{\lambda} \quad L < \frac{3,14}{\lambda}$
$\lambda L > \pi$	Viga flexible	Determinarla como viga sobre fundación elástica	$\frac{\pi}{\lambda} < L \quad \text{ó} \quad L > \frac{\pi}{\lambda}$

De acuerdo a lo deducido por Wolfer K.H. (1969) para el caso de cimentación combinada de ancho B, la cimentación se considerará rígida si es que

$$\lambda L \leq \frac{\pi}{2} \quad (\text{Ec. 2.6})$$

Pudiendo asumirse una distribución lineal de presiones en la base. Igualmente considera como flexible cuando

$$\lambda L \geq 5.5 \quad (\text{Ec. 2.7})$$

y las semi rígidas se ubican en el intervalo

$$1.57 < \lambda L < 5.5 \quad (\text{Ec. 2.8})$$

Las cimentaciones continuas flexibles por lo general no presentan una deformación uniforme en toda su longitud por lo que tampoco podrán ser los asientos y tensiones generadas en dicha interfaz.

**Criterio del Comité 436 del American Concrete Institute**

El criterio refiere directamente en términos de la longitud característica. De acuerdo a este ente regulador la separación entre columnas soportadas por una fundación continua es determinante en la distribución de la presión de contacto suelo estructura.

Para el caso de una cimentación continua que soporta columnas si el promedio de luces adyacentes (en metros) es mayor que  $1.75/\lambda$  dentro del diseño estructural debe considerarse la incidencia de la rigidez relativa cimentación suelo.

### Parámetro N de rigidez

Desde el punto de vista del criterio deducido de la interacción suelo estructura de cimentación resulta clave la evaluación del factor  $N$ , denominado módulo de rigidez del conjunto. Es un criterio desarrollado dentro del modelo elástico y tiene la siguiente relación

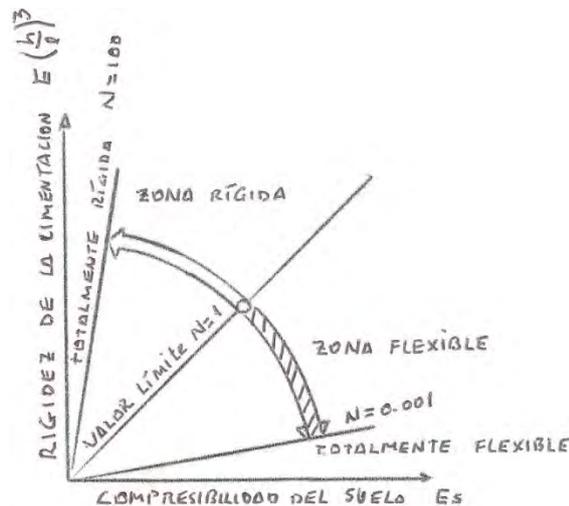
$$N = \frac{E_s}{E} \left( \frac{l}{h} \right)^3 \quad (\text{Ec. 2.9})$$

Donde  $h$  es el peralte de la viga y  $l$  su longitud. Por consenso entre diversos autores y por experiencia en campo se ha convenido en categorizar a las cimentaciones en función al criterio de rigidez de acuerdo a la siguiente tabla, (Rodríguez et al, 1980).

**TABLA 2.2** Valores de  $N$  para cimentaciones según su rigidez

	$l$	$N$
Cimentación rígida	$\leq L$	1
Cimentación semirígida	$L - 2,5 L$	3-5
Cimentación semiflexible	$2,5 L - 5,0 L$	5-30
Cimentación flexible	$> 5,5 L$	$> 30$

Se debe mencionar que las rigideces obtenidas bajo este concepto tienen en cuenta la geometría de la cimentación vale decir longitud y peralte y la calidad del suelo pudiendo ser este de consistencia dura o blanda. Esta premisa se ilustra en la Figura 2.8 (Konig y Sherif 1975):



**FIGURA 2.8** Determinación de la rigidez en función a la compresibilidad del terreno

A la vez el EHE (Instrucción de Hormigón Estructural) indica, de la evaluación del parámetro  $N$ , la condición de rigidez se da siempre y cuando

$$\frac{h}{L} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{E_s}{E}} \quad (\text{Ec. 2.10})$$

De acuerdo a la Tabla 2.3 elaborada por Muzas Labad (2002), teniendo en cuenta la clasificación del suelo o roca, considera como cimentación rígida cuando la relación h/L sea igual o mayor al valor que se indica en la misma:

**TABLA 2.3** Valores de la relación h/L según la calidad de roca y suelo. (Muzas Labad, 2002)

Tipo de terreno		Teoría de la viga flotante		Teoría interacción suelo estructura
		L=B	L=10B	
ROCA	DURA	1	2	1.40
	MEDIA	0.5	0.9	1
	BLANDA	0.35	0.65	0.6
SUELO	GRAVA	0.10	0.20	0.20
	ARENA	0.08	0.15	0.15
	ARCILLA	0.06	0.10	0.10

Con lo que se puede tener

$$v \geq 2h$$

$$L = 2v + a \quad (\text{Ec. 2.11})$$

Debiendo cumplir

$$\frac{h}{L} \geq 0.25 \quad (\text{Ec. 2.12})$$

En la ecuación anterior  $a$  es el ancho de la columna y  $v$  la distancia entre su borde y el de la cimentación.

Se llega a la conclusión de que en los suelos la condición de rigidez impuesta por la Mecánica del suelo es menos restrictiva que la condición impuesta por la EHE; no siendo así en el caso de cimentaciones sobre roca en las que es más estricta la condición impuesta por la Mecánica del suelo, (Olmos Martínez, 2007).

### **El factor de rigidez $K_r$**

En el tratamiento de la interacción cimiento-suelo-superestructura se aplica el concepto del factor  $K_r$  de rigidez mediante la siguiente expresión:

$$Kr = \frac{EI_b}{E_s B^3} \quad (\text{Ec. 2.13})$$

En donde:

$$EI_b = EI_f + \sum EI_b + \sum \frac{ah^3}{12} \quad (\text{Ec. 2.14})$$

Que es la rigidez flexional de la superestructura y fundación.

$E_s$ : El módulo de deformación del suelo supuesto en un comportamiento elástico y lineal.

$B$ : El ancho de la cimentación.

El primer sumando del segundo miembro corresponde a la flexibilidad de la cimentación, el segundo es la sumatoria de las rigideces por flexión de los elementos estructurales en ángulo recto con  $B$ , y el tercero sumatoria de las rigideces por flexión de los muros de cortante. Además  $a$  es el espesor de los muros de cortante,  $h$  su altura.

En base a este valor considera en conjunto que “la estructura es rígida” en relación con el suelo cuando  $Kr > 0,5$  mientras que la considera flexible cuando  $Kr < 0,5$ .

Sin embargo, este tipo de calificación no presupone ningún comportamiento específico respecto de la distribución de presiones que transmite al suelo, y se incluye sólo con el objetivo de diferenciarla respecto del concepto de “rigidez relativa de la cimentación”.

Este concepto es de suma importancia en la determinación de posibles asentamientos diferenciales en losas de cimentación. Al respecto el Comité 336 (1988) del American Concrete Institute recomienda aplicar el factor de rigidez para este propósito a través del parámetro  $\delta^r$  denominado razón del asentamiento diferencial respecto del total, estableciéndose como regla:

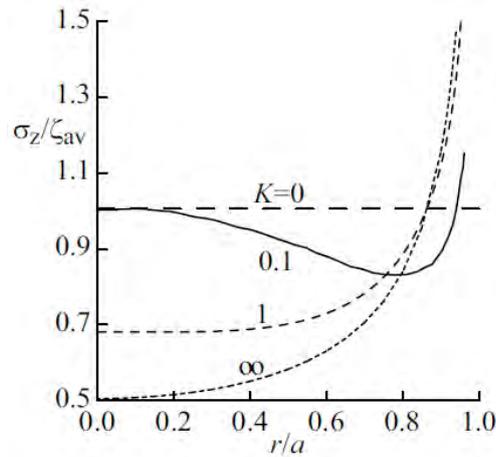
- Cuando  $Kr > 0.5$ , no hay asentamiento diferencial por ser el elemento rígido
- Cuando  $Kr = 0.5$ , la razón del asentamiento diferencial respecto al total es aproximadamente 0.1
- Si  $Kr = 0$  entonces  $\delta^r = 0.35$  para losas cuadradas y  $\delta^r = 0.5$  para cimentaciones en donde la longitud es muy superior al ancho.

### **Expresiones de rigidez relativa adicionales**

Para el caso de cimentaciones circulares de radio  $a$ , Brown (1969) ha definido la siguiente expresión de rigidez relativa

$$Kr = \frac{E}{E_s} (1 - \nu_s^2) \left( \frac{h}{a} \right)^3 \quad (\text{Ec. 2.15})$$

En donde  $h$  y  $E$  son el peralte y el módulo de elasticidad del concreto,  $E_s$  y  $\nu_s$  son el módulo de elasticidad y coeficiente de Poisson del suelo de apoyo,  $a$  el radio. En la Figura 2.9 se muestra la variación de la presión de contacto en este caso



**FIGURA 2.9** Tensiones de contacto debajo de una cimentación circular. Adaptado por Brown (1969)

La relación

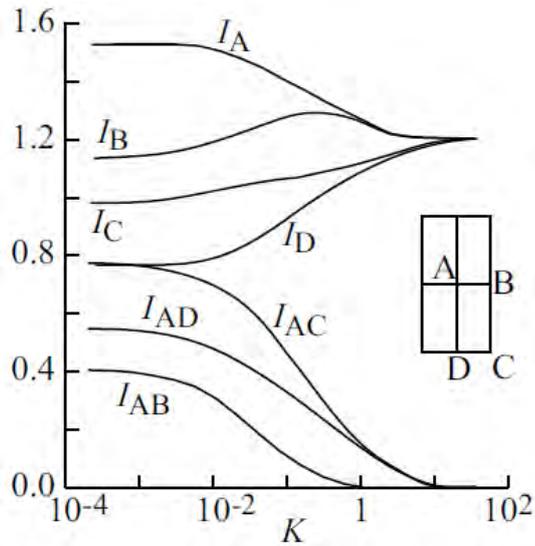
$$\frac{\sigma_z}{\zeta_{av}} \quad (\text{Ec. 2.16})$$

Indica el cociente entre la presión de contacto en la interfaz y la carga media distribuida sobre la cimentación.

Para otro tipo de cimentaciones la expresión de rigidez relativa es similar, por ejemplo para uno de tipo rectangular de lado menor igual a  $B$  Fraser y Wardle (1976) sugieren:

$$Kr = \frac{4E}{3E_s} \left( \frac{1-\nu_s^2}{1-\nu_c^2} \right) \left( \frac{h}{B} \right)^3 \quad (\text{Ec. 2.17})$$

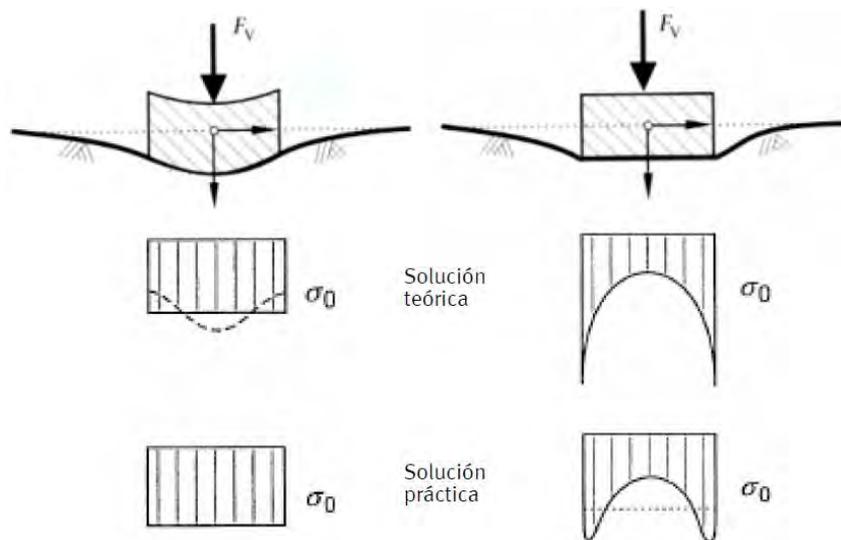
Los mismos autores nos presentan la figura con el que podemos estimar los coeficientes de asentamiento y asentamiento diferencial para una cimentación rectangular que cumpla la relación  $L/B=2$  en función a la rigidez relativa cimiento terreno (Figura 2.10):



**FIGURA 2.10** Asentamientos y coeficientes de asentamiento diferencial para una cimentación rectangular con una relación  $L/B=2$  en función a la rigidez relativa de cimentación. Adaptado por Fraser y Wardle (1976)

### 2.2.5 Distribución de las tensiones de contacto

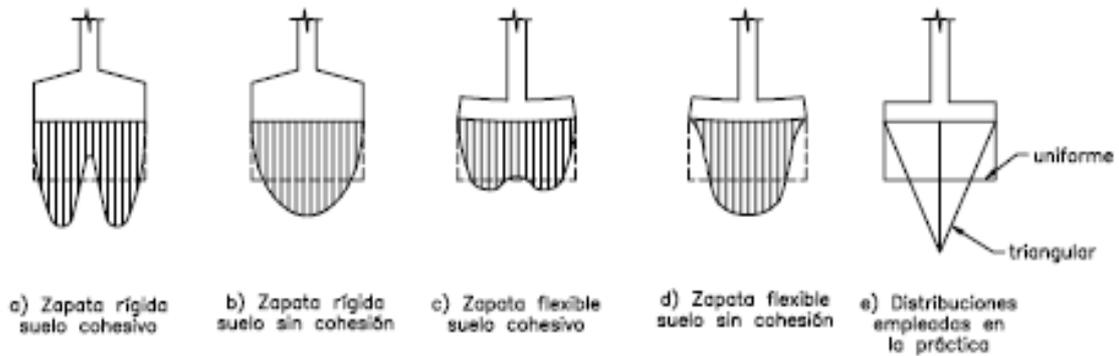
De acuerdo a lo comentado la tensión existente en la base de la cimentación depende básicamente de la rigidez relativa con el suelo. En condiciones de perfecta rigidez y flexibilidad en las cimentaciones flexibles la tensión se distribuirá de forma uniforme en la base (Figura 2.11 izquierda). Según la teoría de Boussinesq, en la base de fundaciones rígidas las tensiones tienden a crecer indefinidamente hacia los bordes de la fundación (derecha) ya que en el centro considera que no existe resistencia.



**FIGURA 2.11** Tensión en la base de la fundación flexible (izquierda) y rígida (derecha)

La distribución de tensiones bajo una zapata no es uniforme ni igual según la rigidez de la zapata y la naturaleza del suelo, tal y como se puede ver en la Figura 2.12. En la práctica, para evitar cálculos complejos, se adoptan distribuciones uniformes o lineales.

En los cálculos de asentamiento por consolidación interesa conocer la distribución de presión para una presión de contacto que cuente con un factor de seguridad aceptable frente a una posible falla por corte del suelo.



**FIGURA 2.12** Distintos casos de distribuciones de tensiones bajo una cimentación de acuerdo al tipo de suelo.

Para los casos de cimentaciones cargadas por varias columnas, con excentricidades y reparto irregular de solicitaciones, la distribución de presiones igualmente se torna irregular y de difícil determinación por medios analíticos.

### ***El rozamiento entre el cimiento y el suelo***

Cuando dos superficies de distinta rigidez están en contacto existe una fuerza perpendicular (normal) al plano de contacto, se genera una fuerza de rozamiento que intenta impedir el desplazamiento de una superficie respecto de la otra.

El valor de la resistencia de rozamiento debe ser mayor o igual a la normal multiplicada por el coeficiente de rozamiento

$$F_s \geq N_o * c_s \quad (\text{Ec. 2.18})$$

En la evaluación de inestabilidad del conjunto suelo estructura al deslizamiento, el coeficiente de rozamiento entre el terreno y el cimiento no puede ser superior al coeficiente de rozamiento interno del terreno, que es igual al valor de su tangente; parámetro que es determinante para conocer y evaluar el empuje en reposo del terreno.

Este parámetro no es de uso común en los análisis y diseño de cimientos superficiales salvo casos excepcionales; no obstante su consideración en trabajos y modelos mejorados del coeficiente de balasto, debiendo cumplir en todos los casos que debe ser menor o igual a la tangente del ángulo de fricción interna del suelo:

$$c_s \leq \tan \phi \quad (\text{Ec. 2.19})$$

Es una práctica habitual utilizar un valor equivalente a los dos tercios de la tangente del ángulo en referencia aunque hay casos donde este valor podría resultar conservador para el diseño.

La resistencia de rozamiento entre el terreno y el cimiento se produce en situaciones diferentes, con consideraciones de tratamiento también diferentes.

## **2.3 DETERMINACION DE PARAMETROS DE DISEÑO**

En la revista *Geotechnique* publicada en 1955, Terzaghi dio a conocer los coeficientes de reacción vertical del terreno a emplearse en el estudio de vigas horizontales como parte del diseño de cimentaciones superficiales así como los coeficientes de reacción horizontal a emplearse en los análisis de estructuras verticales, muros pantalla, pilotes, tablestacas, etc. Igualmente estableció las primeras formulaciones aplicables tanto a suelos cohesivos y suelos friccionales para un amplio rango de casos concretos, a la vez que define lineamientos adicionales para derivar conceptos al caso de suelos intermedios.

Para situaciones en las que el terreno resulte heterogéneo en sentido horizontal, será recomendable emplear herramientas de cálculo que permitan introducir coeficientes de balasto variables capaces de reproducir dicha heterogeneidad.

Gibson (1967) demostró que el Modelo de Winkler se vincula con el modelo elástico heterogéneo e incompresible, es decir con el coeficiente de Poisson igual a 0.5, correspondiendo una variación lineal del módulo de Young con la profundidad y valor nulo en la superficie.

J. Verdeyen (1964) expuso los criterios básicos para el tratamiento de la teoría de la viga flotante recogiendo las propuestas originales de Terzaghi relacionadas con el coeficiente de balasto en unidades convencionales.

Actualmente para adoptar el coeficiente de balasto en un caso concreto, se tiende a establecer relaciones con el módulo de deformación del terreno, lo cual equivale a adoptar unos parámetros ficticios que relacionan la presión con la deformación que se producen en casos sencillos. El módulo de deformación aún no correspondiendo exactamente al comportamiento del terreno por no ser perfectamente elástico, sí constituye un parámetro más o menos constante, cuya estimación puede hacerse analíticamente.

### **2.3.1 Expresiones analíticas del coeficiente de balasto**

Según Terzaghi (1955), para cimientos cuadrados de lado  $B$ , en suelos cohesivos se puede estimar mediante la siguiente expresión (unidades en KN/m<sup>3</sup>):

$$k_s = k_1 \left( \frac{0.3}{B} \right) \quad (\text{Ec. 2.20})$$

Siendo  $k_1$  un valor estimado de coeficiente de balasto para placas cuadradas de 0,3m de lado ensayada sobre arcilla,  $L$  variable,  $k_2$  corresponde a una placa cuadrada de lado 0.3 m ensayada sobre arena.  $B$  el ancho de la cimentación.

Para una zapata rectangular de ancho  $B$  y largo  $L$ , se tiene

$$k_s = \frac{0.2}{B} \left( 1 + \frac{0.15}{L} \right) k_1 \quad (\text{Ec.2.21})$$

Para zapatas sobre terrenos granulares

$$k_s = k_2 \left( \frac{B + 0.3}{2B} \right)^2 \quad (\text{Ec. 2.22})$$

Trabajos realizados con posterioridad han replanteado estas expresiones optando por los siguientes, (Hahn J, 1994)

Para el caso de arenas sueltas o muy sueltas, limos, arcillas

$$k_s = k_0 \left( \frac{b_0}{B} \right) \quad (\text{Ec. 2.23})$$

Para el caso de arenas densas

$$k_s = k_0 \left( \frac{B + b_0}{2B} \right)^2 \quad (\text{Ec. 2.24})$$

En arenas compactas

$$k_s = k_0 \left( \frac{B + b_0}{3B} \right)^2 \quad (\text{Ec. 2.25})$$

En estas últimas  $k_0$  representa el coeficiente de balasto obtenido en ensayo convencional y  $b_0$  su lado respectivo. En base a las formulaciones propuestas por Terzaghi, otros autores han propuesto expresiones válidas para cimientos rectangulares de proporciones variadas sobre arcillas preconsolidadas:

$$k_s = k_0 \left( \frac{b_0}{B} \right) \left( \frac{2\alpha + 1}{3\alpha} \right) \quad (\text{Ec. 2.26})$$

En donde

$$\alpha = \left( \frac{L}{B} \right) \quad (\text{Ec. 2.27})$$

### 2.3.2 Obtención del coeficiente de balasto

1. A partir de ensayo de Placa de carga realizado sobre el terreno, siendo habitual que dicha placa sea cuadrada de 30x30cm (1 pie x 1 pie), o bien circular de diámetros 30, 60 y 76,2 cm. El subíndice identifica el tamaño de la placa con que se realizó el ensayo  $k_{30}$ ,  $k_{60}$ , etc.

Correspondencia entre ensayos sobre arena y arcilla para una placa rectangular de 0.3 m de ancho y longitud  $L$ :

$$k_2 = k_1 \left( \frac{L + 0.15}{1.5L} \right) \quad (\text{Ec. 2.28})$$

Para el caso de una placa continua de ancho 0.3 m y largo tendiendo al infinito se tiene

$$k_2 = \left( \frac{k_1}{1.5} \right) \quad (\text{Ec. 2.29})$$

2. A partir de la determinación de parámetros característicos del suelo (módulo de deformación, tensión admisible, etc.) que se relacionan con el coeficiente de balasto mediante fórmulas dadas por varios autores. Estas tienen mejor asidero en relación a las formuladas empíricamente.

Es conocida, por ejemplo, la fórmula de Vesic en función del módulo de deformación o elasticidad ( $E_s$ ) y coeficiente de Poisson ( $\nu_s$ ) el terreno, que en su forma reducida para vigas tiene la siguiente expresión:

$$k_s = \frac{1}{B * C} \left( \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \right) \quad (\text{Ec. 2.30})$$

Igualmente el autor ha planteado una relación compatible con la propuesta del semi espacio elástico por el ancho de la viga de fundación  $B$ , en el que también tiene que ver la rigidez del conjunto suelo cimentación

$$k_s = \frac{0.65}{B} \left( \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \right)^{1/2} \sqrt{\frac{E_s B^4}{EI}} \quad (\text{Ec. 2.31})$$

Para zapatas en que la relación  $(L/B) > 10$ , la expresión se reduce a:

$$k_s = \frac{0.65}{B} \left( \frac{E_s}{1 - \nu_s^2} \right) \quad (\text{Ec. 2.32})$$

Otros autores como Timoshenko, Woinowsky-Krieger proponen

$$k_s = \frac{2.15}{h} \left( \frac{E_s^4}{E} \right)^{1/3} \quad (\text{Ec. 2.33})$$

Vlasov y Leontiev

$$k_s = \frac{E_s}{H(1 + \nu_s)(1 - 2\nu_s)} \quad (\text{Ec. 2.34})$$

Para una carga de gran extensión sobre un estrato compresible de espesor  $H$ , Kogler y Scheidig han propuesto

$$k_s = \frac{E_s}{H} \quad (\text{Ec. 2.35})$$

Los resultados que se obtienen mediante la correlación con parámetros de deformabilidad del suelo pueden ser extrapolados a placas de cimentación mediante el concepto de radio de rigidez propuesto por Westergaard en 1926 que ha sido aplicado inicialmente al diseño de pavimentos rígidos sobre suelo de comportamiento elástico.

3. A partir del cálculo del problema en un programa que contemple la posibilidad de modelizar el terreno (usualmente mediante elementos finitos). De esta manera se introducirán sobre el terreno las acciones consideradas y se analizarán los desplazamientos (asientos) que resultan. El coeficiente de balasto se hallará directamente de su formulación teórica:  $k_s = q/s$ .

4. Cálculo aproximado por ensayo de laboratorio o in situ. Para obtener el asiento en una muestra de suelo se procede por integración numérica de la deformación unitaria a lo largo de la profundidad de influencia, calculando posteriormente el coeficiente de balasto con la relación conocida.

Se deben usar varios valores de deformación en la profundidad de influencia, aproximadamente  $4B$ , donde  $B$  es la mayor dimensión de la base del cimiento.

Los valores de los parámetros elásticos determinados en laboratorio son fuertemente dependientes de las perturbaciones de la muestra y del tipo y calidad de los resultados del ensayo triaxial.

El módulo edométrico  $E_o$  obtenido a través de ensayos en laboratorio también es un parámetro útil para relacionar con el coeficiente de balasto en un ensayo de placa de carga en arcilla:

$$k_1 = \left( \frac{E_o}{B_p * C} \right) \left( \frac{1 - 2\nu}{(1 - 2\nu)^2} \right) \quad (\text{Ec. 2.36})$$

También se ha establecido, para el caso de arcillas, una relación directa entre el ensayo de una placa de carga y la resistencia al corte no drenada mediante la expresión

$$k_1 = 300 * Cu \quad (\text{Ec. 2.37})$$

Bowles (1968) presenta una expresión que relaciona el coeficiente de balasto en el proceso de consolidación en suelos cohesivos a partir del ensayo edométrico

$$k_s' = \frac{q_o}{\Delta H} \quad (\text{Ec. 2.38})$$

El asentamiento de la muestra son los debidos a la aplicación de la carga inmediata seguida de consolidación, por lo que

$$\Delta H' = \Delta H + \Delta H_c \quad (\text{Ec. 2.39})$$

$$k_s = \frac{q_o}{\Delta H + \Delta H_c} \quad (\text{Ec. 2.40})$$

Combinando las ecuaciones resulta

$$k_s = \frac{k_s' \Delta H}{\Delta H + \Delta H_c} \quad (\text{Ec. 2.41})$$

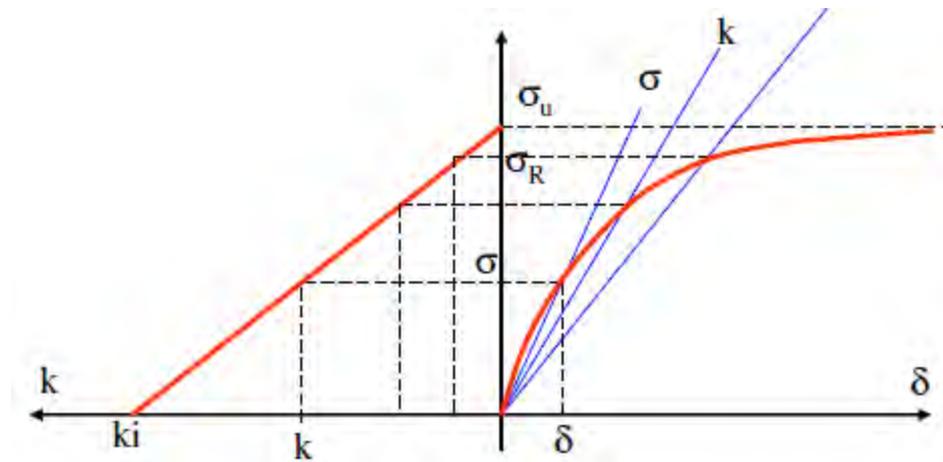
En suelos granulares en donde los ensayos de campo como el SPT son más confiables, sus resultados en términos de  $N$  se correlacionan con el respectivo ensayo de placa de carga a través de

$$k_2 = 1800 * N \quad (\text{Ec. 2.42})$$

La determinación de  $N$  es a nivel de la base de la fundación que se trate y su corrección por presión de sobrecarga. (Scott, 1981)

5. Relación tensión-deformación en placa de carga con el coeficiente de balasto. De acuerdo al modelo propuesto por Duncan-Chang, Kondner, Núñez y otros, interpretan con algo más de precisión el concepto de coeficiente de balasto relacionando con el campo de las tensiones aplicadas sobre el terreno y las deformaciones producidas en el mismo.

La propuesta permite representar los resultados de un ensayo de carga en un gráfico tensión-deformación donde además se han trazado los distintos valores de " $k$ " y representando los resultados como se aprecia en la Figura 2.13:



**FIGURA 2.13** Determinación del módulo de balasto por aproximación

En la parte derecha se pueden trazar algunos de los infinitos valores de " $k$ " correspondientes a los pares de valores tensión-deformación. En la parte izquierda, los distintos valores de " $k$ " en la representación tensión-coeficiente de balasto se alinean según una recta. Si obtenemos la ecuación de esta recta podremos definir la forma de la curva tensión deformación y también considerar la variación de " $k$ " para cualquier valor de la tensión aplicada.

Por razones geométricas se deduce

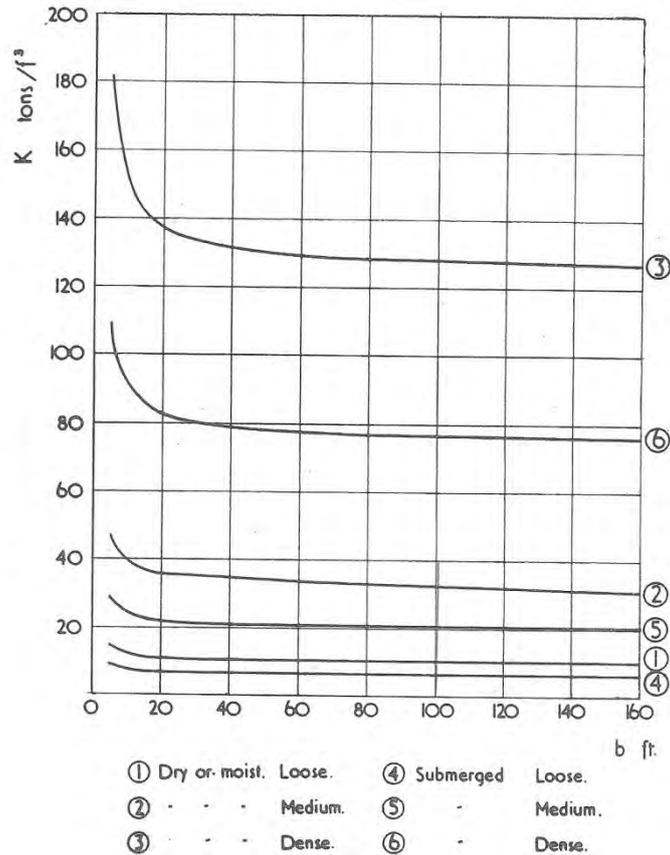
$$(\sigma_u - \sigma) = \frac{k * \sigma_u}{k_i} \quad \text{y} \quad \text{(Ec. 2.43)}$$

$$k = k_i \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_u}\right) \quad \text{(Ec. 2.44)}$$

Donde  $\sigma_u$  es la tensión última del ensayo al que le correspondería una deformación infinita, mientras que  $\sigma_R$  es la tensión de rotura que medimos en el ensayo.

6. Uso mixto. Se puede interrelacionar los métodos anteriores para estimar el coeficiente de balasto, pero además, considerando la respuesta del subsuelo a las condiciones de carga dependiente del tiempo. (Freire Tellado, 2000).

En este caso no es de menos acudir a la bibliografía especializada para obtener en forma directa este valor en base a datos experimentales plasmados en gráficos como los presentados por Baker A.L.L, (1957):



**FIGURA 2.14** Coeficiente de balasto para cimentaciones sobre arenas para diversas condiciones de densificación en toneladas por pie cúbico. (Baker A.L.L, 1957)

Para el caso de cimentaciones sobre arcilla toma en cuenta la rigidez y las dimensiones de la cimentación resumida en el gráfico

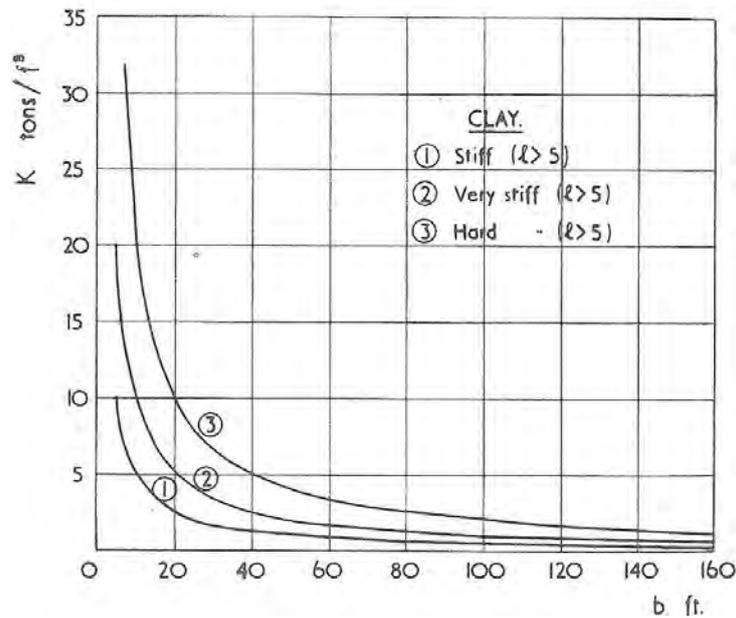


FIGURA 2.15 Coeficiente de balasto para cimentaciones sobre arcilla en toneladas por pie cúbico. (Baker A.L.L., 1957)

TABLA 2.4 Valores estimados por diversos autores para el coeficiente de balasto en placas cuadradas de 0.30x0.30 metros.

Suelo	$K_{30}$ (Kp/cm <sup>3</sup> )
Arena fina de playa	1,0-1,5
Arena floja, seca o húmeda	1,0-3,0
Arena media, seca o húmeda	3,0-9,0
Arena compacta, seca o húmeda	9,0-20,0
Gravilla arenosa floja	4,0-8,0
Gravilla arenosa compacta	9,0-25,0
Grava arenosa floja	7,0-12,0
Grava arenosa compacta	12,0-30,0
Margas arcillosas	20,0-40,0
Rocas blandas o algo alteradas	30,0-500
Rocas sanas	800-30.000

### Aplicación del método

El método puede ser aplicado a suelos con comportamiento cercano al modelo elástico por ejemplo a terrenos granulares o arcillas pre consolidadas cuando las cargas que se aplican estén lo suficientemente alejados de la capacidad admisible o que éste haya sido determinado con un adecuado coeficiente de seguridad. Para el caso de las arcillas normalmente consolidadas no es recomendable su aplicación ya que el coeficiente de balasto que produjera los asentamientos medios esperados resultaría ínfimo desvirtuando el estudio de las tensiones de contacto.

En la determinación del valor de  $k$  para suelos arcillosos se debe tomar en cuenta el escenario del proyecto pudiendo corresponder a una situación de corto o largo plazo, es decir

si la respuesta del terreno se adecúa a una sollicitación instantánea sin posibilidades de drenaje o disipación de presión intersticial o esperando el tiempo necesario para que se desarrollen las presiones efectivas.

### **2.3.3 Extrapolación y ajuste del coeficiente de balasto**

Acertar en la elección de un valor representativo del coeficiente de balasto permite obtener valores de asientos medios bajo cada una de las cargas los más reales posibles comparables con los que se obtendrían por análisis geotécnico. Un cálculo acertado del modelo tensional en la interfaz suelo estructura nos conduce a suavizar valores predeterminados a fin de optimizar el diseño.

Para efectos prácticos se suele fijar un valor de  $k$  para las dimensiones reales del cimiento y se corrige la posible falta de precisión del método tanteando diversos valores entre los límites más probables en que pueda estar comprendido este valor.

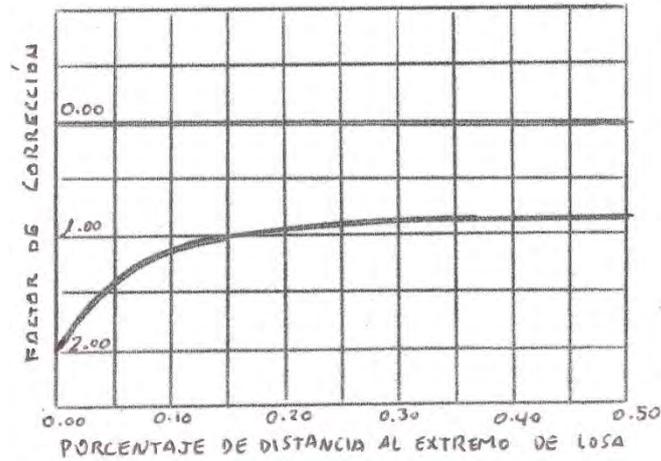
Para cimientos pequeños  $B < 1,50$  m se puede estimar el coeficiente de balasto sobre la base de ensayos de Placa de carga o sobre la base de las características de los suelos conocidos no requiriéndose corrección.

Para cimentaciones grandes como losas se hará la estimación por tabulaciones del coeficiente de balasto. La razón estriba en que los efectos de escala resultan demasiado severos. En este sentido, el ACI-336 en su apartado 2.2.8, Modulus of Subgrade Reaction, indica que: Para losas de cimentación, esta propiedad del suelo no puede ser convenientemente estimada con ensayos de campo de placa de carga, porque los efectos de escala son deficientes como para cubrir el rango de variación de este parámetro. Se recomienda considerar zonas de coeficiente de balasto constantes de diferente valor para conseguir una mejor aproximación a diferencia cuando se asume un solo valor para el conjunto.

Se pueden obtener resultados suficientemente precisos usando la teoría del coeficiente de balasto pero modificada, para considerar individualmente cargas muertas, cargas vivas, efectos del tamaño, respuestas del terreno asociado entre otros.

La teoría del semiespacio elástico conduce a la determinación de un coeficiente de balasto variable dentro de la superficie de la cimentación, cualquiera que sea el tipo de ésta. Según Dimitrov cuando la carga está aplicada en un extremo, debe tomarse para  $k$  el doble del valor medio de dicho coeficiente.

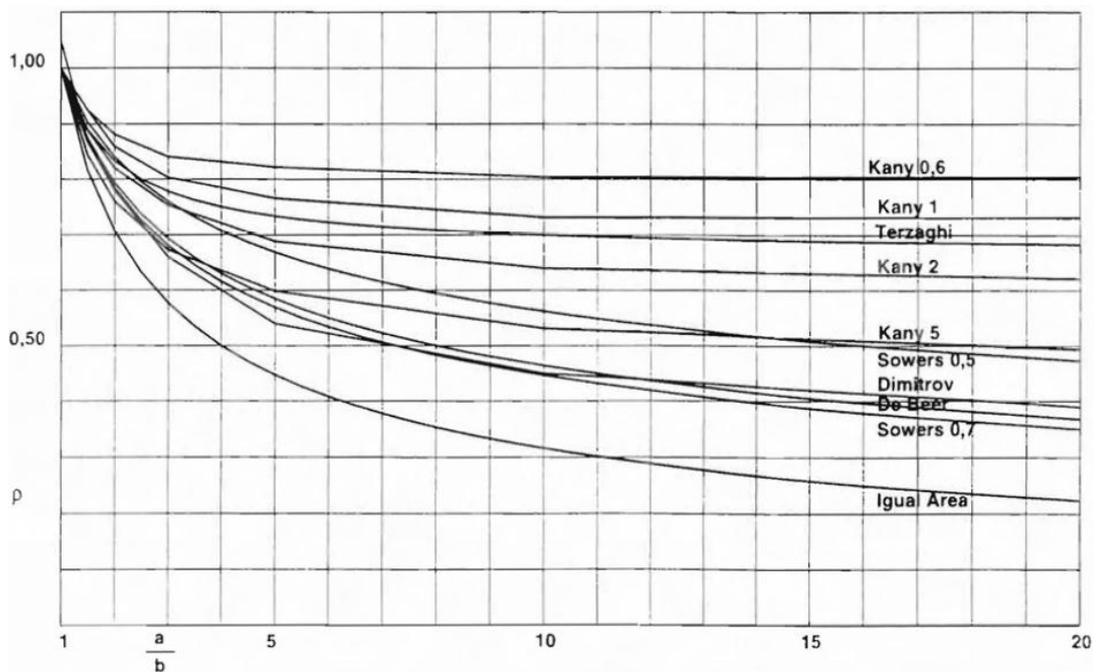
Este autor, en la referencia citada, propone unos valores de longitudes elásticas virtuales de las vigas flotantes en función de las distintas posiciones de la carga sobre ella. A partir de ellos se han obtenido las correcciones al coeficiente de balasto que considera en función de la posición relativa de la carga. Estos valores se reflejan en la Figura 2.16. (Freire Tellado, 1999).



**FIGURA 2.16** Factores de corrección al coeficiente de balasto en función de las posiciones de las cargas.

También Bowles (1968) recomienda correcciones al coeficiente de balasto en cimentaciones desplantadas sobre suelos cohesivos en proceso de consolidación para lo cual, como en el caso de losas de cimentación, se tiene que duplicar la cantidad de resortes en los extremos como un modo de aproximación entre los datos reales y experimentales.

En la Figura 2.17 se presenta factores de minoración al coeficiente de balasto comparativas con los factores correctores por forma de las propuestas de Terzaghi, Sowers, De Beer, Dimitrov y Kani en función a las relaciones largo-ancho ( $a/b$ ) de la cimentación y el coeficiente gama.



**FIGURA 2.17** Comparativo de factores de corrección propuestos por diversos autores. Tomado de Freire Tellado (1999).

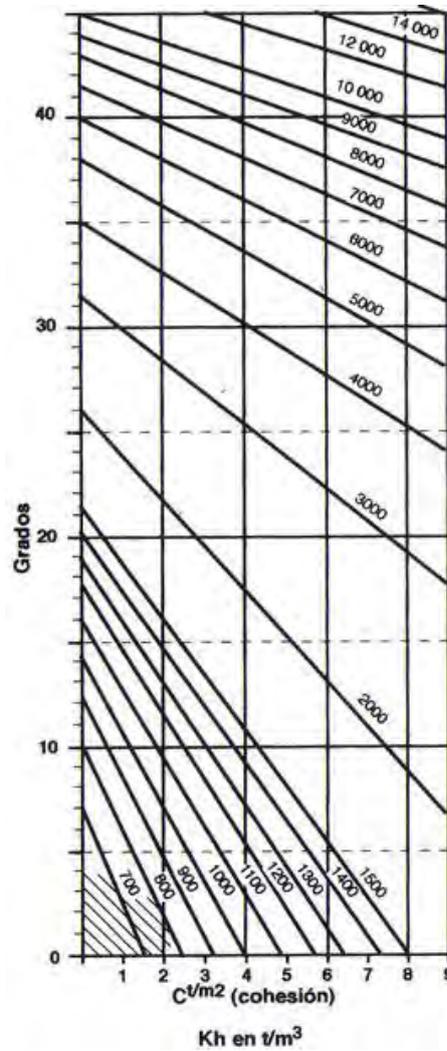
El valor de  $\gamma$  denominado como coeficiente de forma de cimentación rectangular tiene los siguientes valores:

**TABLA 2.5** Coeficientes de forma de cimentación rectangular

a:b	1,00	1,50	2,00	3,00	5,00	10	20	30	50
$\rho$	1,05	0,87	0,78	0,66	0,54	0,45	0,39	0,33	0,30

### 2.3.4 Coeficiente de balasto horizontal

Aplicable principalmente al estudio de estructuras de retención. Es de utilidad la Figura 2.18 que relaciona el ángulo de fricción interna y la cohesión del suelo que se trate:



**FIGURA 2.18** Coeficiente de balasto horizontal. Sociedad Española de Mecánica del Suelo y Cimentaciones.

### 2.3.5 Determinación del módulo elástico del suelo

Considerando al suelo como un material comprendido en un medio perfectamente elástico, homogéneo e isótropo, le corresponde caracterizarse por los parámetros  $E_s$  módulo elástico y  $\nu$  relación de Poisson y tienen como relaciones

$$E_s = \frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} \quad (\text{Ec. 2.45})$$

y

$$-\nu = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \quad (\text{Ec. 2.46})$$

Los cuales pueden ser determinados mediante ensayos triaxiales sobre muestras inalteradas mediante una correcta interpretación de la figura generada en el proceso:

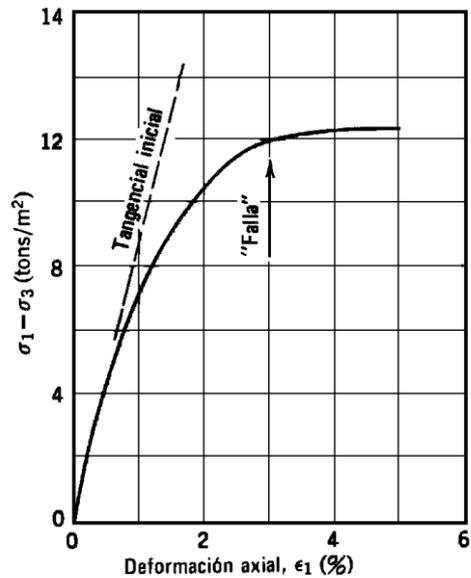


FIGURA 2.19 Resultados de un ensayo típico triaxial

Teniendo en cuenta que dentro del análisis de cimentaciones son poco importantes las deformaciones horizontales que experimente el suelo, a efectos de diseño puede asumirse que

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 0 \quad (\text{Ec. 2.47})$$

A partir del que se define el módulo de elasticidad edométrico o confinado que es el inverso del módulo de compresibilidad del mismo

$$E_0 = \frac{1}{m_v} \quad (\text{Ec. 2.48})$$

## 2.4 PROPUESTAS MEJORADAS AL COEFICIENTE DE BALASTO

En general, el método de Winkler se puede aplicar al cálculo de cimentaciones rígidas y flexibles, si bien en el caso de cimentaciones rígidas las normas suelen permitir la utilización de leyes de tensiones lineales del terreno más simplificadas, dejándose la obligatoriedad del método del balasto para el cálculo de elementos flexibles en los que la distribución de tensiones es irregular. El criterio de clasificación de la rigidez de los elementos de cimentación tiene cierta complicación conforme se trató en apartado anterior.

Las propuestas mejoradas nacen de la necesidad de suplir ciertas deficiencias del modelo convencional.

Como se sabe el coeficiente de balasto no es un parámetro intrínseco del terreno sino que depende también de las características geométricas de la cimentación e incluso de la estructura que ésta sostiene, lo cual hace compleja la extrapolación de los resultados de los ensayos, principalmente los de placa de carga a las cimentaciones reales.

La precisión del modelo dependerá de la rigidez relativa del conjunto estructura-cimentación respecto a la del suelo. Supone que cada punto del suelo se comporta independientemente de las cargas existentes en sus alrededores, lo cual no ocurre en la realidad ya que las zonas contiguas también tienen que asumir algún tipo de esfuerzo y por ende asentamientos. Las inexactitud en la periferia de la cimentación y variación del estado tensional fuera del área cargada hicieron que algunos autores recomienden hacer un estudio de su sensibilidad. El ACI (1988), por ejemplo, sugiere variar el valor de  $k$  desde la mitad hasta cinco o diez veces del calculado y basar el diseño estructural en el peor de los resultados obtenidos de esta manera.

### 2.4.1 Modelos de dos parámetros

Las deficiencias descritas del modelo convencional en representar el comportamiento continuo de los suelos reales por una parte, y las complejidades matemáticas de los modelos elásticos del continuo por otra, han llevado al desarrollo de modelos de respuesta más elaborados como los de dos parámetros. El término "dos parámetros" indica que los modelos son definidos por dos constantes elásticas independientes.

El desarrollo de los modelos de dos parámetros ha sido tratada desde dos filosofías distintas. Los modelos propuestos por Filonenko-Borodich en 1940, Hetenyi en 1946, Pasternak en 1954 y Kerr en 1964 son extensiones del modelo de Winkler en donde la interacción entre los elementos de resorte es representada según el caso por membranas elásticas, vigas elásticas o por capas elásticas que asumen esfuerzos cortantes. Los modelos de suelo propuestos por Reissner en 1958, Vlazov y Leontiev en 1966 representan la segunda forma de abordar el desarrollo de estos modelos de dos parámetros, empezando con la Teoría de la Elasticidad e introduciendo las simplificaciones en las suposiciones y en las restricciones con

respecto a la distribución de esfuerzos, deformaciones unitarias y desplazamientos. En el libro de Scott (1981) podemos encontrar más detalles sobre el particular.

**Modelo de Filonenko-Borodich**

El coeficiente de balasto  $k$  del modelo de Winkler es conectado a una membrana delgada sometida a una tracción constante  $T$  (Figura 2.20). Teniendo en cuenta el equilibrio estático de un elemento diferencial del sistema resorte-membrana se obtiene, para cimentaciones planas (placas, zapatas, losas flotantes, etc.), la deflexión superficial debida a una carga normal por unidad de área  $q$  aplicando las siguientes expresiones:

1 Para el caso de una cimentación rectangular o circular:

$$p = kw - T * V^2 w \tag{Ec. 2.49}$$

2 Para una franja o cimentación continua:

$$p = kw - T * (d^2 w / dx^2) \tag{Ec. 2.50}$$

$T$  es la fuerza de tensión.

El operador de Laplace  $V^2 = (\partial^2 / \partial x^2) + (\partial^2 / \partial y^2)$ .

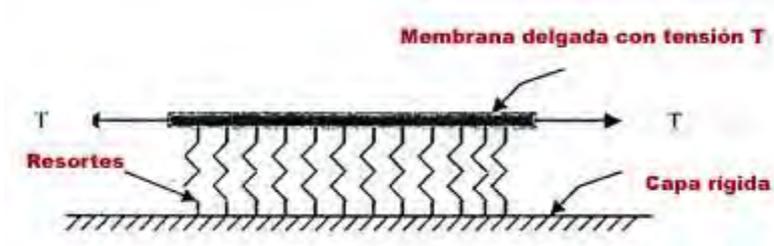


FIGURA 2.20 Modelo de Borodich

**Modelo de Hetenyi (1946)**

La propuesta sintetiza que el elemento de resorte independiente  $k$  llega a ser interactivo con una placa elástica embebida en el caso de cimentaciones planas (zapatas, losas flotantes, etc.), o con una viga elástica embebida, en el caso de fundaciones en forma de vigas. La siguiente figura grafica lo expuesto:



FIGURA 2.21 Modelo de Hetenyi

La expresión que gobierna es

$$p = kw - D * V^4 w \quad (\text{Ec. 2.51})$$

Donde,

$D = (E_p h_p^3) / [12(1 - \mu_p)^2]$  rigidez de la placa elástica a la presión.

La presión en la interface de la placa y los resortes es  $p$ ,

$E_p$  es el módulo de Young de la placa y

$\mu_p$  es su relación de Poisson,

$h_p$  es el espesor de la placa, y

$V^4 = (\partial^4 / \partial x^4) + (\partial^4 / \partial y^4) + 2(\partial^4 / \partial x^2 \partial y^2)$  es un operador diferencial.

### Modelo de Pasternak

El autor plantea un esquema con interacción de cortante entre los elementos de resorte (ver Figura 2.22). Ello se obtiene al conectar a los resortes  $k$  una capa de elementos verticales incompresibles de grosor unitario ( $t = 1$ ) deformándose a cortante pura.

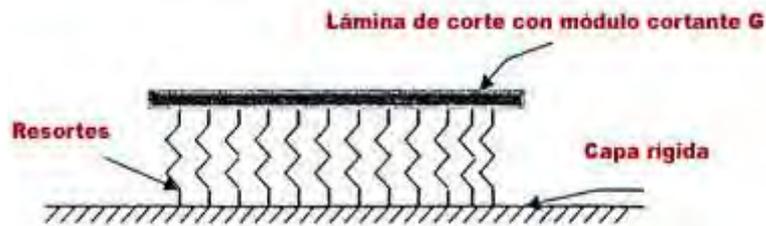


FIGURA 2.22 Modelo de Pasternak

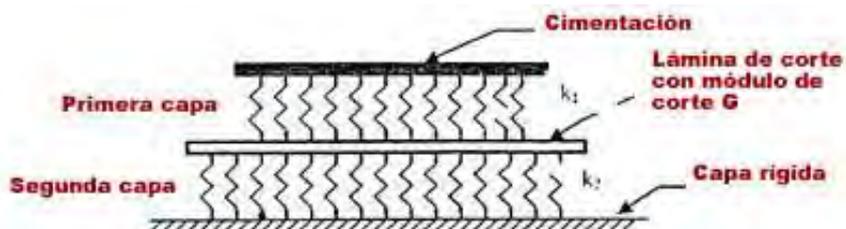
La relación presión–deflexión está dada por

$$p = kw - G * V^2 w \quad (\text{Ec. 2.52})$$

donde  $G$  es el módulo cortante de la lámina de corte.

### Modelo de Kerr

Al esquema de Winkler se introduce una capa de corte apreciándose dos niveles de resortes con características diferentes  $k_1$  y  $k_2$  como se aprecia en la figura:



**FIGURA 2.23** Modelo de Kerr

Siendo la ecuación diferencial que lo gobierna el siguiente

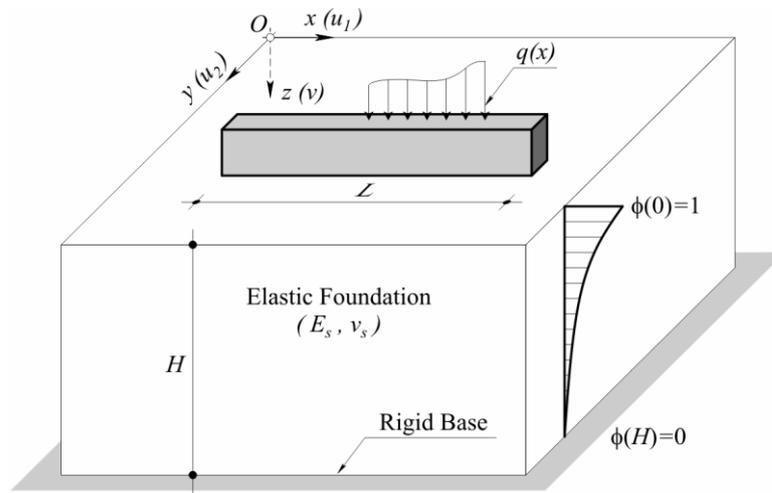
$$(1 + k_2 / k_1) p = \left( \frac{G}{k_1} \right) V^2 p + k_2 w - G * V^2 w \quad (\text{Ec. 2.53})$$

Donde  $V^2$  es utilizado como operador de Laplace, y  $w$  es la deflexión de la primera capa.

**Modelo de Vlazov-Leontiev**

La formulación del modelo de suelo se basa en la Teoría de la elasticidad y en el Método variacional. Se obtuvieron expresiones suponiendo deformaciones unitarias en el plano y ciertas restricciones en la distribución de desplazamientos en el medio elástico semi-infinito  $s$  con  $E_s$  (módulo elástico) y  $\nu_s$  (relación de Poisson). El enfoque de Vlazov y Leontiev provee adicionalmente una propiedad al modelo de Winkler haciendo posible considerar deflexiones fuera de la superficie cargada logrando obtener correspondencia entre deflexiones y momentos flectores.

El modelo en que se basa la hipótesis se representa en la Figura 2.24:



**FIGURA 2.24** Modelo de Vlazov

**2.5 EL MODELO DEL SEMI ESPACIO ELASTICO**

Las soluciones en el contexto del semi espacio elástico tienen sustento en procedimientos matemáticos para evaluar los problemas de asentamientos y esfuerzos producidos a distintos niveles del sistema continuo que en este caso pueden ser homogéneos y heterogéneos. En el primer caso el módulo de elasticidad del suelo es considerado constante tratándose un material de potencia finita apoyado sobre estrato rígido. En el caso de un medio heterogéneo el módulo de elasticidad experimenta variación directa creciente con la profundidad siendo su tendencia lineal para mejor tratamiento. No obstante que este mecanismo de tratar el

problema puede provocar trastornos en el cálculo de las tensiones y disminución de los asientos al desaparecer parte del semi espacio.

La masa del suelo está constituida por partículas discretas compactadas por una fuerza intergranular. Como estas partículas son muy pequeñas comparadas con el área de carga y la frontera, se asume un medio continuo, semi-infinito, homogéneo, isotrópico, elástico lineal, sometido a una fuerza concentrada normal al plano de frontera. Parámetros: módulo de elasticidad y relación de Poisson.

### 2.5.1 El concepto de Boussinesq

En el semiespacio elástico de Boussinesq asume un ente delimitado por una superficie horizontal que sustituye en primera aproximación al terreno, de tal manera que sus límites no afectan al análisis tensión-deformación. Al decir elástico lo entendemos en sentido restringido, es decir, admite que se cumple la ley de Hooke y que el módulo de elasticidad es el mismo en tracción que en compresión. Suponemos también que la materia que lo constituye tiene resistencia suficiente para seguir respondiendo elásticamente sin romperse, las tensiones que se producen en todos y cada uno de los puntos del semiespacio contribuyen a mantener este equilibrio.

#### **Expresiones analíticas**

En este tipo de análisis, el tratamiento de vigas sobre un medio elástico homogéneo discretizado, la deflexión vertical en el punto central de un segmento dado es dependiente de la presión de contacto de los elementos adyacentes de dicho continuo pudiendo expresar la correspondencia

$$y = a_{i1} p_1 + a_{i2} p_2 + \dots + a_{in} p_n \quad (\text{Ec. 2.54})$$

donde las constantes se determinan de acuerdo a las condiciones del problema; la ecuación diferencial de la elástica de una viga que es

$$-\frac{M}{EI} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (\text{Ec. 2.55})$$

En el desarrollo de un problema concreto se plantean las ecuaciones correspondientes y se complementan las restantes por principios de la estática vale decir sumatoria de fuerzas y momentos respecto a un punto. Los desplazamientos se determinan por la fórmula elástica apropiada. Terzaghi (1943)

$$y = p * B \left( \frac{1 - \nu_s^2}{E_s} \right) I \quad (\text{Ec. 2.56})$$

Donde  $I$  es el factor de influencia por asentamiento para una esquina del elemento rectangular cargado que depende básicamente de las dimensiones geométricas en planta

$$I = \frac{1}{\pi} \left[ \ln \left( \frac{\sqrt{1+m^2} + m}{\sqrt{1+m^2} - m} \right) + m * \ln \left( \frac{\sqrt{1+m^2} + 1}{\sqrt{1+m^2} - 1} \right) \right] \quad (\text{Ec. 2.57})$$

$$m = L / B = \alpha$$

$B$  es el ancho de la cimentación y  $L$  su longitud

### ***Semi espacio elástico heterogéneo***

Brown y Gibson (1973) estudiaron la variación del módulo de elasticidad del suelo con la profundidad bajo la consideración que el coeficiente de Poisson permanece constante, llegando a establecer que

$$E_z = E_{(0)} \left( 1 + \frac{z}{\beta} \right) \quad (\text{Ec. 2.58})$$

Donde  $E_z$  es el módulo de elasticidad a una profundidad requerida,  $E_{(0)}$  el valor a nivel de superficie y  $\beta$  es un parámetro con dimensiones de longitud que caracteriza el grado de heterogeneidad del material.

### ***Aplicación al caso conjunto suelo estructura de cimentación***

Son aplicables las técnicas de discretización del área de contacto suelo cimentación para luego establecer las ecuaciones para el asentamiento debajo de cualquier tramo en función a las presiones ejercidas sobre la misma y demás solicitaciones. Por lo general el proceso se efectúa mediante cálculos matriciales.

A efectos de contar con un esquema compatible que represente la interacción cimiento terreno se vinculan los resultados anteriores para asentamientos con expresiones que grafican el comportamiento de la estructura. Los métodos iterativos y los procedimientos por diferencias finitas también son apropiados para abordar la solución bajo este contexto.

Esta representación del terreno tan simplificada cumple un objetivo muy importante, el de haber permitido resolver numerosos problemas de distribución de tensiones. Las experiencias han demostrado que los modelos elásticos son más apropiados en cimentaciones a profundidad en suelos granulares o en cimentaciones rígidas sobre suelos cohesivos. También en aquellos casos en que por la existencia de fuertes cargas de borde sea previsible una distribución de presiones cóncava hacia abajo, (Rodríguez O, 1980).

## CAPÍTULO III

### 3 APLICACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS

#### 3.1 SOLUCIONES POR DIFERENCIAS FINITAS

##### 3.1.1 Viga de cimentación sobre medio elástico

La curva de deformaciones elásticas de la viga se reemplaza por un polígono con el fin de expresar de manera aproximada las primeras y segundas derivadas de la curva elástica en función de las ordenadas del polígono y a partir de la relación básica para flexión de vigas:

$$\left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = \frac{M}{EI} \quad (\text{Ec. 3.1})$$

se plantea para cada punto ecuaciones lineales y la solución simultánea de éstas permite conocer las deformaciones y de allí las fuerzas internas de la viga.

Es importante anotar, que este método requiere considerar un menor ancho de las bandas y resolver una mayor cantidad de ecuaciones en comparación con los métodos de flexibilidad y rigidez para lograr resultados de mayor precisión.

##### 3.1.2 Soluciones y aproximaciones por diferencias finitas unidimensionales

De acuerdo a la Figura 3.1 se tienen las siguientes soluciones de la ecuación de la elástica por diferencias finitas para una viga de cimentación

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (\text{Ec. 3.2})$$

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_i = \frac{1}{h^2}(y_{i+1} - 2y_i - y_{i-1}) \quad (\text{Ec. 3.3})$$

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_i = \frac{1}{2h^3}(y_{i+2} - y_{i+1} + 2y_{i-1} - y_{i-2}) \quad (\text{Ec. 3.4})$$

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)_i = \frac{1}{2h^4}(y_{i+2} - 4y_{i+1} + 6y_i - 4y_{i-1} + y_{i-2}) \quad (\text{Ec. 3.5})$$

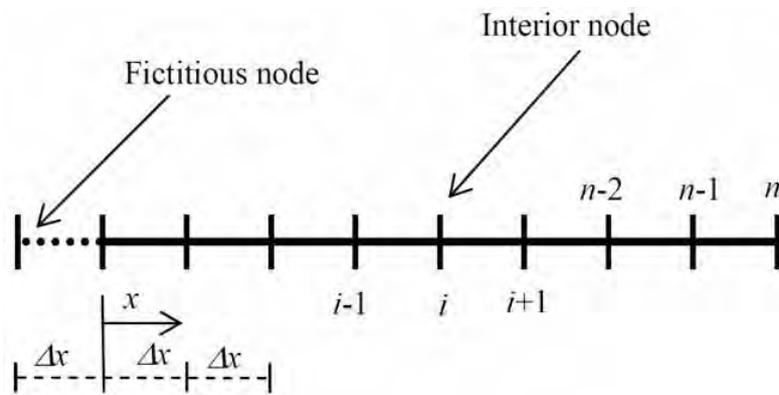


FIGURA 3.1 Malla de Diferencias Finitas para una viga de cimentación. Tomado de Adel Azzawi (2010)

Para el caso de una cimentación continua de longitud  $L$  la ecuación diferencial que lo gobierna es

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right) = \frac{w}{EI} - \frac{k}{EI} y \quad (\text{Ec. 3.6})$$

Aplicando la aproximación por diferencias finitas para la viga dividida en dos de longitudes iguales se tiene

$$\frac{1}{h^4}(y_{-1} - 4y_0 + 6y_1 - 4y_2 + y_3) = \frac{w}{EI} - \frac{k}{EI} y_1 \quad (\text{Ec. 3.7})$$

Para cuya solución se deben adoptar las condiciones de contorno del problema que son

$y=0$  cuando  $x=0$  y  $x=L$

$M=0$  en  $x=0$  y  $x=L$

Se debe precisar que si se adopta una mayor cantidad de elementos en la subdivisión de la viga podremos obtener mejores resultados próximos a los hallados por métodos convencionales.

### Método de Malter

El método fue propuesto por Malter en 1960. Requiere del planteamiento de una serie de ecuaciones simultáneas fundamentadas en la estática. El modelo matemático de una viga de cimentación sobre medio elástico para la solución por diferencias finitas se describe en la Figura 3.2.

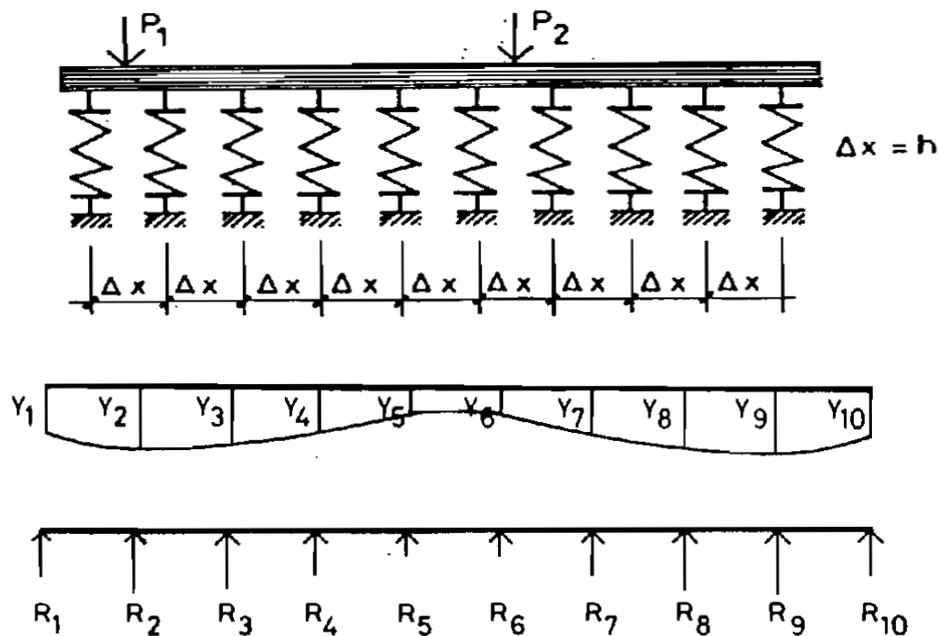


FIGURA 3.2 Solución por el método de Malter: (a) Fundación Winkler (b) deflexiones y (c) carga equivalente. Saca G. (1984).

Planteando la cantidad de ecuaciones requeridas se resuelven simultáneamente obteniéndose las deflexiones para cada punto, evaluándose finalmente los momentos flectores y esfuerzos cortantes. El método de Malter se sigue paso a paso en la aplicación para el caso de una viga de cimentación resuelto por diferencias finitas en el siguiente capítulo.

### 3.1.3 Soluciones y aproximaciones por diferencias finitas bidimensionales

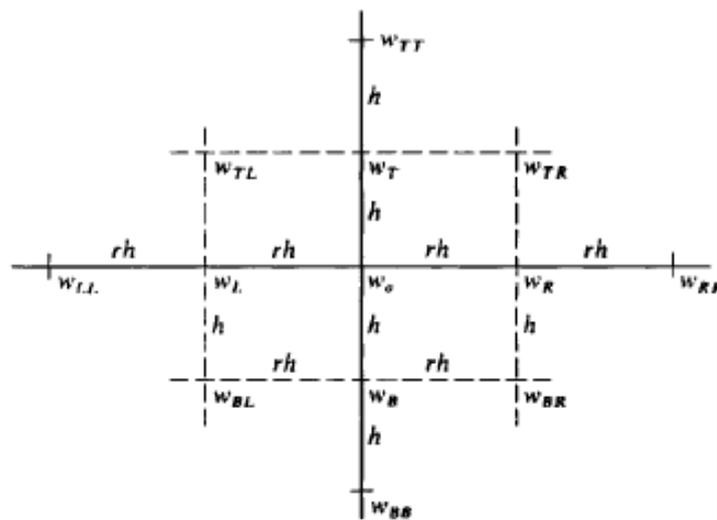
Una losa de cimentación se comporta como una placa que en su cara inferior sufre fuerzas verticales proporcionales coeficiente de balasto el que a la vez es función directa a las presiones de contacto producidas. Para el caso se cuenta con la ecuación diferencial, resuelta en el campo de la Teoría de placas que gobierna su comportamiento, (Timoshenko, 1951):

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{2\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} + \frac{P}{D(\partial x \partial y)} \quad (\text{Ec. 3.8})$$

La deflexión para el nodo central se relaciona con las deflexiones en los puntos que lo rodean por medio de la solución en diferencias finitas deducida por Bowles (1968):

De la Figura 3.3, cuando  $r=1$  se cumple

$$20w_0 - 8(w_T + w_B + w_R + w_L) + 2(w_{TL} + w_{TR} + w_{BL} + w_{BR}) + (w_{TT} + w_{BB} + w_{LL} + w_{RR}) = \frac{qh^4}{D} + \frac{Ph^2}{D} \quad (\text{Ec. 3.9})$$



**FIGURA 3.3** Elemento diferencial bidimensional para la solución por diferencias finitas

Igualmente los momentos producidos en el elemento estructural tienen las siguientes relaciones

$$M_{xx} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (\text{Ec. 3.10})$$

$$= D \left[ \frac{w(x+h, y) + w(x-h, y) - 2w(x, y)}{h^2} + \nu \frac{w(x, y+h) + w(x, y-h) - 2w(x, y)}{h^2} \right]$$

$$M_{yy} = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (\text{Ec. 3.11})$$

$$= D \left[ \frac{vw(x+h, y) + w(x-h, y) - 2w(x, y)}{h^2} + \frac{w(x, y+h) + w(x, y-h) - 2w(x, y)}{h^2} \right]$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (\text{Ec. 3.12})$$

$$= D(1-\nu) \frac{1}{4h^2} [w(x+h, y+h) - w(x-h, y+h) - w(x+h, y-h) + w(x-h, y-h)]$$

(Ec. 3.13)

La cantidad de ecuaciones a establecerse en su arreglo algebraico se encuentra en el orden de  $1/8(n+1)(n+3)$  y tomando en cuenta las condiciones de contorno propias del modelo, Figura 3.4.

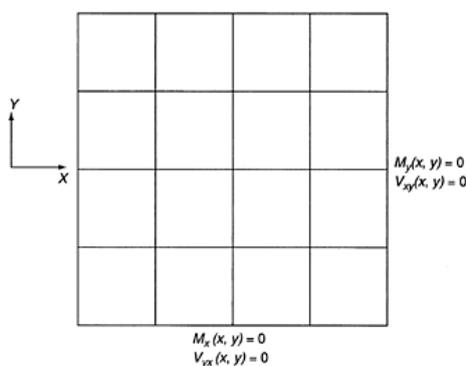


FIGURA 3.4 Puntos nodales y condiciones de contorno para un modelo de diferencias finitas.

### 3.1.4 Sustitución del medio elástico por miembros estructurales equivalentes

El suelo, que constituye un medio elástico continuo, puede considerarse un apoyo con condiciones de restricción intermedia entre los extremos de restricción nula y restricción total. (Freire T, 1999)

El suelo puede ser sustituido por una serie de soportes elásticos separados uniformemente con una constante de rigidez definida cuyas unidades son fuerza por unidad de deflexión ( $FL^{-1}$ ) y una magnitud congruente con las características del suelo y el ancho de la viga como se muestra en la Figura 3.5.

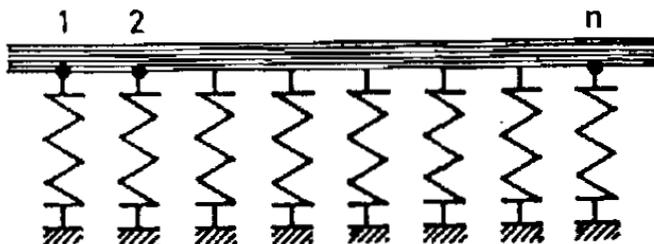


FIGURA 3.5 Viga sobre apoyos elásticos

El problema de apoyos elásticos puede resolverse introduciendo miembros estructurales equivalentes a las restricciones producidas por el suelo. Como aplicación de esta técnica, consideramos los puntos 1, 2, .....N restringidos contra la traslación vertical por resortes que tienen rigideces  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ; los resortes se pueden sustituir por los miembros estructurales 1, 2, .....N mostrados en la Figura 3.6.

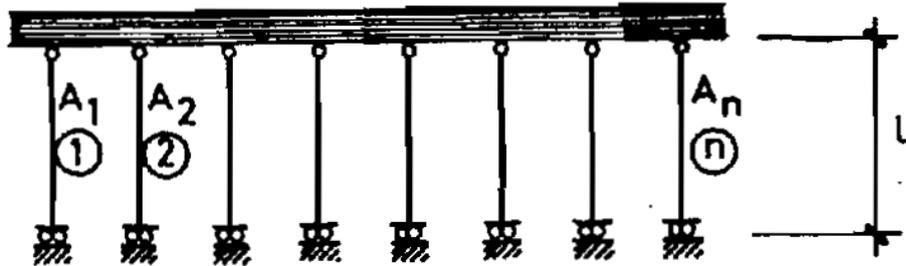


FIGURA 3.6 Viga con miembros sustitutos de los resortes.

A estos miembros se les puede asignar arbitrariamente las longitudes  $L_1, L_2, \dots, L_n$ ; las áreas de las secciones transversales de dichos elementos tendrán las siguientes relaciones

$$A_1 = \frac{L_1 * S_1}{E^\circ}; A_2 = \frac{L_2 * S_2}{E^\circ}, \dots, A_n = \frac{L_n * S_n}{E^\circ} \quad (\text{Ec. 3.14})$$

Siendo  $E^\circ$  el módulo de elasticidad del miembro ( $FL^{-2}$ )

La asignación de estas áreas transversales da rigideces axiales a los miembros equivalentes a las restricciones elásticas que ellos reemplazan y que obedecen a la Ley de Hooke.

### 3.2 ANALISIS DE CIMENTACIONES SUPERFICIALES POR ELEMENTOS FINITOS

Alternativamente a los métodos clásicos empleados para el análisis y cálculo de cimentaciones superficiales, se presenta el Método de elementos finitos que emplea procedimientos numéricos en base a modelos no lineales a fin de evaluar las variables más significativas inmersas en el proceso así como cuantificar la interacción entre los mecanismos presentes.

La modelación tiene la capacidad de combinar conceptos matemáticos para producir sistemas de ecuaciones. El método seleccionado debe permitir ser aplicado a cuerpos de forma irregular compuestos de varios materiales con condiciones de borde diferentes, a problemas estáticos dependientes del tiempo y a cuerpos compuestos por materiales con propiedades no lineales, es decir, el método seleccionado debe permitir el modelamiento del suelo, de la estructura y de ambos a la vez.

Se han desarrollado numerosos métodos de análisis que incluyen modelos constitutivos para el modelamiento del comportamiento esfuerzo-deformación del suelo. Estos métodos utilizan criterios de axisimetría, deformación plana y condiciones tridimensionales en problemas de interacción suelo-estructura. El método de análisis depende considerablemente de las relaciones entre los esfuerzos y deformaciones de los materiales involucrados en la estructura geotécnica. En el cálculo numérico las relaciones entre esfuerzos y deformaciones de un material son representadas por los modelos constitutivos, los cuales consisten en expresiones matemáticas que modelan el comportamiento del suelo como un elemento simple. (Geomec, 1982).

Es necesario el uso de programas de computador para la solución de problemas de estabilidad y deformación del suelo si se considera el suelo como un medio continuo debido a que los sistemas de ecuaciones son muy grandes. A medida que se procesa un mayor número de ecuaciones se obtienen por lo general resultados más precisos y esto es posible en la actualidad debido a la rapidez de los cálculos efectuados con el computador y la precisión de la respuesta.

Fueron Turner, Clough, Martin y Topp en 1956 quienes presentaron el MEF en la forma aceptada hoy en día. En su trabajo introdujeron la aplicación de elementos finitos simples (barras y placas triangulares con cargas en su plano) al análisis de estructuras, utilizando los conceptos de discretizado y funciones de forma.

Los libros de Przemieniecki y de Zienkiewicz y Holister en 1966 y 1968 presentan el MEF en su aplicación al análisis estructural. El trabajo de revisión de Oden en 1972 presenta algunas de las contribuciones matemáticas importantes al MEF.

El libro de Zienkiewicz y Cheung o Zienkiewicz y Taylor en 1967 presenta una interpretación amplia del MEF y su aplicación a cualquier problema de campos. En él se demuestra que las ecuaciones de los EF pueden obtenerse utilizando un método de aproximación de pesos residuales, tal como el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados.

Esta visión del problema difundió un gran interés entre los matemáticos para la solución de ecuaciones diferenciales lineales y no lineales mediante el MEF, que ha producido una gran cantidad de publicaciones hasta tal punto que hoy en día el MEF está considerado como una de las herramientas más potentes y probadas para la solución de problemas de ingeniería y ciencia aplicada.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión. Es ampliamente utilizado dentro del campo del conocimiento y la investigación. Entre éstas, además de permitir la difusión de los programas de EF, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

### 3.2.1 El MEF aplicado a problemas geotécnicos en general

El planteamiento y diseño de cimentaciones superficiales son un caso más dentro de toda la gama de problemas a los que se enfrenta la Mecánica del suelo o la Geotecnia. Las razones por las cuales el uso del MEF ha tardado más en generalizarse en aplicaciones concretas dentro de esta rama son varias, entre las cuales destacan:

Los materiales que se emplean en la Geotecnia, al contrario que en el cálculo de estructuras donde se trabaja con acero y concreto, son de origen natural y por tanto muy heterogéneos. En el caso de macizo rocoso los bloques rígidos de roca suelen estar rodeados por discontinuidades de propiedades muy difíciles de estimar. Además, su comportamiento es de compleja comprensión y por tanto no resulta sencillo establecer leyes constitutivas válidas en un amplio rango de casos. Así, la teoría de la Elasticidad lineal, que como sabemos establece proporcionalidad directa entre las tensiones y las deformaciones con constante de proporcionalidad denominada módulo de elasticidad, constituye tan sólo una aproximación grosera al comportamiento real del medio que se analiza.

Por otro lado, las condiciones geométricas de los dominios de cálculo no son simples figuras geométricas como pueden ser las vigas o los forjados, sino que se deben adaptar a la realidad topográfica y geológica de cada lugar.

Aunque en el presente trabajo no se ha tenido en cuenta su efecto, en muchos problemas geotécnicos tanto en rocas como en suelos, el agua tiene un papel fundamental en los mecanismos que desencadenan los comportamientos anómalos. Esto obliga a introducir una ecuación de gobierno adicional, lo que nos lleva a un problema acoplado entre la deformación y el flujo que depende del tiempo, de resolución mucho más difícil, además de tener que tratar con tensiones efectivas y no totales.

Por otro lado, los problemas geotécnicos en general requieren considerar unas tensiones iniciales que actúan sobre el dominio de cálculo. Estas tensiones son de difícil determinación ya que son fruto de los distintos procesos de glaciación, erosión, tectónica, etc. que se han producido a lo largo de las distintas épocas geológicas.

La excavación es otro problema frecuente fundamental dentro de la Geotecnia. Tal y como hemos mencionado en el párrafo anterior, excavar (pero también erosionar) implica modificar la forma del dominio sobre el cual aplicamos las ecuaciones que queremos resolver. Pero el proceso inverso la construcción, también es muy importante dentro del que se puede modelizar, por ejemplo, la secuencia constructiva de una presa por capas.

Finalmente, la teoría y experiencia acumuladas a lo largo del tiempo, demuestran que la captura de los fenómenos mecánicos de interés con fidelidad requiere una malla más tupida con el consiguiente aumento de la dimensión del sistema de ecuaciones a resolver. En el proceso de construcción de cimentaciones superficiales involucra movilizar importantes

volúmenes de material producto de excavación, lo cual dependiendo de su magnitud forma parte de los problemas a resolver dentro de este contexto, requiriéndose la utilización de ordenadores de gran capacidad tanto de cálculo como de almacenamiento.

Por todos estos motivos, podemos afirmar que el uso generalizado del Método de elementos finitos en Geotecnia es muy reciente lo que explica la poca información disponible en la literatura.

Los programas y paquetes actuales para la aplicación del método de elementos finitos a problemas de cimentaciones contemplan en su modelamiento la estructura de concreto y el suelo de manera simultánea, los que se encuentran en contacto por intermedio de una interfaz a la que también se le asignan automáticamente sus propiedades.

### 3.2.2 Viga de cimentación sobre medio elástico

Bowles J (1968) planteó una formulación para el desarrollo por elementos finitos de una viga de cimentación sobre medio elástico basado en principios de la mecánica estructural aplicado a este elemento, en él se caracteriza al suelo por medio del coeficiente de balasto modelizado en los nodos de la viga que interactúan con el suelo.

En el desarrollo se parte por relacionar las fuerzas  $P$  externas actuando sobre los nodos con las internas  $F$  y la constante  $A$ , ver Figura 3.7.

$$P_i = A_i F_i \quad (\text{Ec. 3.15})$$

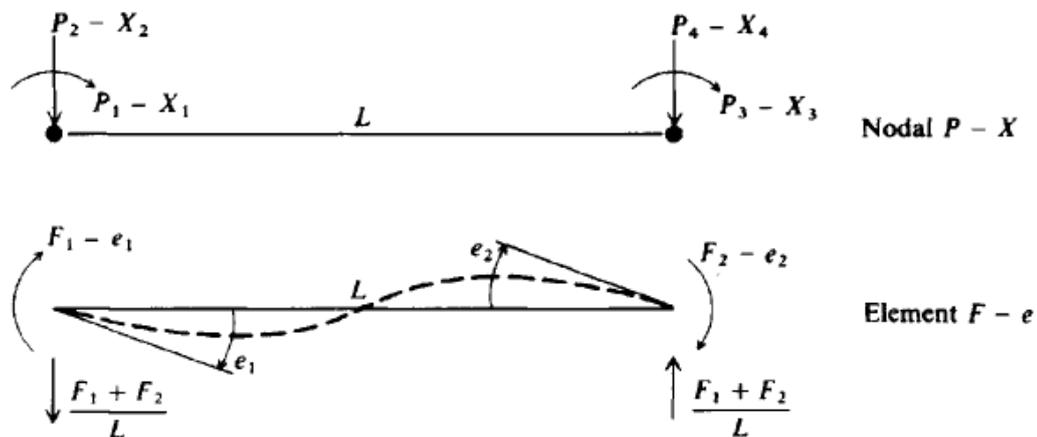


FIGURA 3.7 Acciones y deformada de un elemento viga. Tomado de Bowles (1968)

En notación matricial se escribe

$$P = AF \quad (\text{Ec. 3.16})$$

$P$  comprende fuerzas y momentos. Seguidamente plantea una expresión que relaciona las deformaciones internas del elemento ( $e$ ) con las externas ( $X$ ) utilizando la constante de conexión  $B$ .

$$e = BX \quad (\text{Ec. 3.17})$$

Por mecánica estructural la matriz  $B$  es la traspuesta de  $A$

$$B = A^T \quad (\text{Ec. 3.18})$$

Reemplazando en la expresión anterior

$$e = A^T X \quad (\text{Ec. 3.19})$$

Para el siguiente paso relaciona las fuerzas internas  $F$  con los desplazamientos internos  $e$  y la matriz  $S$

$$F = Se \quad (\text{Ec. 3.20})$$

Sustituyendo la expresión anterior en esta última resulta

$$F = SA^T X \quad (\text{Ec. 3.21})$$

Reemplazando en la expresión de las fuerzas externas resulta

$$P = ASA^T X \quad (\text{Ec. 3.22})$$

Para hallar las deformaciones externas (desplazamientos y giros útiles para el diseño) de la expresión anterior se despeja  $X$

$$X = (ASA^T)^{-1} P \quad (\text{Ec. 3.23})$$

Como un tercer paso hace el desarrollo para obtener los elementos de la matriz  $A$ , de la Figura 3.8 se tiene:

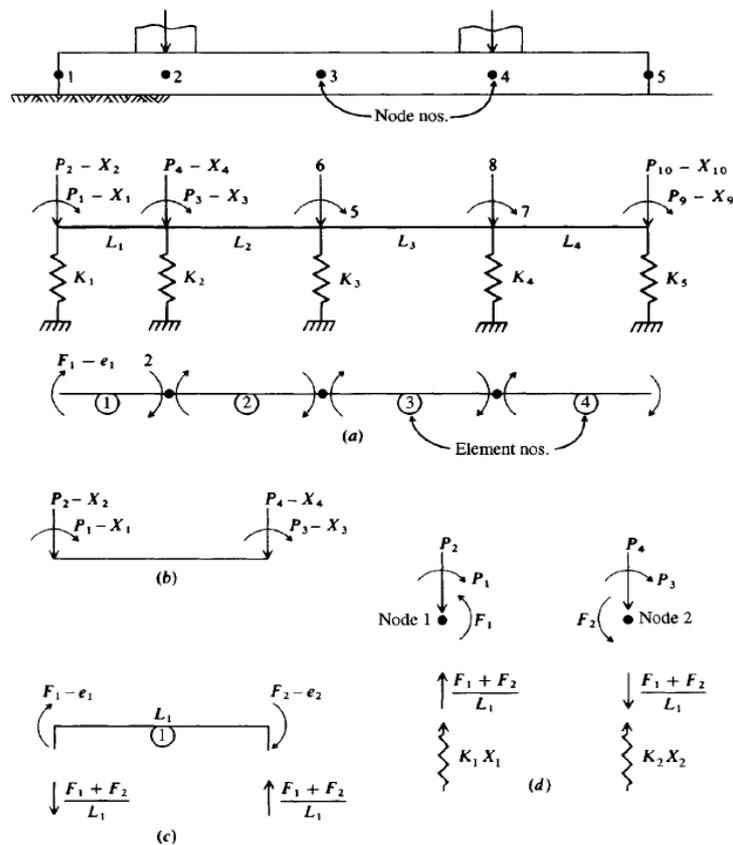


FIGURA 3.8 Acciones y deformada de un elemento viga. Tomado de Bowles (1968)

Para el elemento en referencia, las ecuaciones referidas al nodo 1

$$P_1 = F_1$$

$$P_2 = \frac{F_1}{L} + \frac{F_2}{L}$$

Para el nodo 2

$$P_3 = F_2$$

$$P_4 = -\frac{F_1}{L} - \frac{F_2}{L}$$

En su expresión matricial

$$EA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/L & 1/L \\ 0 & 1 \\ -1/L & -1/L \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.24})$$

El siguiente paso considera el desarrollo de la matriz S. Visualizando la Figura 3.9 y aplicando el criterio de la viga conjugada

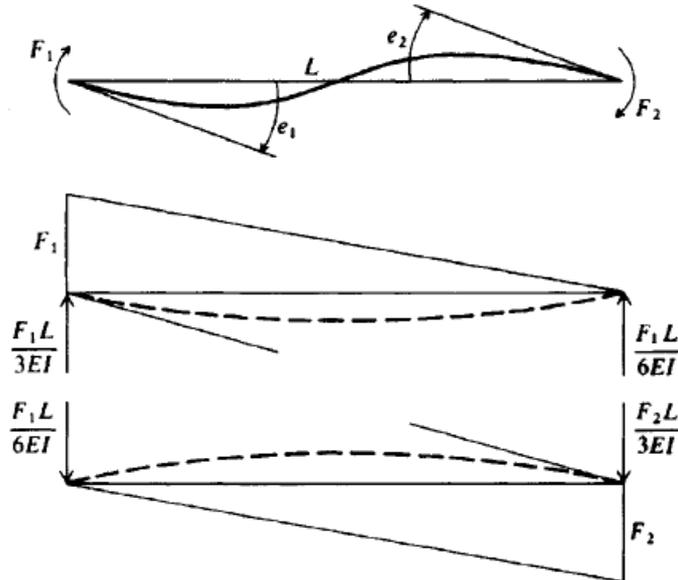


FIGURA 3.9 Acciones y deformada de un elemento de viga

Se tiene

$$e_1 = \frac{F_1 L}{3EI} - \frac{F_2 L}{6EI} \quad (\text{Ec. 3.25})$$

$$e_2 = -\frac{F_1 L}{6EI} + \frac{F_2 L}{3EI} \quad (\text{Ec. 3.26})$$

Resolviendo el sistema se tiene

$$F_1 = -\frac{4EI}{L}e_1 + \frac{2EI}{L}e_2 \quad (\text{Ec. 3.27})$$

$$F_2 = \frac{2EI}{L}e_1 + \frac{4EI}{L}e_2 \quad (\text{Ec. 3.28})$$

Teniendo en cuenta las fuerzas relacionadas con el coeficiente de balasto en los nodos, se representan por

$$F_3 = k_1 e_3$$

$$F_4 = k_2 e_4$$

En donde

$$K_1 = \frac{L_1 Bk_s}{2}; K_2 = \frac{(L_1 + L_2) Bk_s}{2} \quad (\text{Ec. 3.29})$$

Agrupando los términos se obtiene la matriz S

$$ES = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_1 & \\ 0 & 0 & & K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.30})$$

Multiplicando la matriz S por la traspuesta de A se tiene

$$ESA^T = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & K_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.31})$$

Finalmente obtiene la matriz correspondiente al elemento siendo simétrico y que en la diagonal principal todos los valores son diferentes de cero. La matriz global se obtendrá por ensamble con las matrices del resto de los elementos

$$EASA^T = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} + K_1 & \frac{6EI}{L} & -\frac{12EI}{L^2} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L} & \frac{12EI}{L^3} + K_2 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.32})$$

La inversa de esta matriz multiplicada por  $P$  nos da los desplazamientos y momentos en la interfaz estructura suelo necesarios para el diseño de los componentes de la cimentación.

### 3.3 FORMULACIONES BASICAS

Para el estudio de las aplicaciones propuestas como zapatas continuas, combinadas y losas de cimentación se utiliza el programa de aplicaciones geotécnicas por el Método de elementos finitos Plaxis 3D Foundation versión 1.1 de origen holandés, el cual está signado para el análisis específico de cimentaciones superficiales y profundas en términos de tensión-deformación en 3 dimensiones. Se exponen las formulaciones necesarias para su entendimiento e interpretación, datos extraídos del Manual Científico que viene adjunto en el paquete comercial del referido programa. Se recalca la importancia de modelar un problema típico de cimentación superficial en 3 dimensiones ya que habitualmente se ha tratado en el contexto plano obteniéndose información limitada.

#### 3.3.1 Teoría conceptual

De la mecánica del medio continuo, el equilibrio estático para el sólido elástico cumple la relación

$$L^T \sigma + p = 0 \quad (\text{Ec. 3.33})$$

$p$  es el vector de fuerzas externas del sólido

$\sigma$  es el vector de tensiones definido por

$$\sigma = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{yz}]^T \quad (\text{Ec. 3.34})$$

$$L^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 3.35})$$

Un operador diferencial

El campo de deformaciones se define como

$$\varepsilon = Lu \quad (\text{Ec. 3.36})$$

$u$  es el vector de desplazamientos totales

La ley de Hooke relaciona las tensiones con las deformaciones con la expresión matricial

$$\sigma = M\varepsilon \quad (\text{Ec. 3.37})$$

$M$  es la matriz constitutiva del material

A partir de los anteriores se puede establecer una relación entre los desplazamientos y las tensiones, dicha solución es posible en su forma débil partiendo del principio variacional de Cheung y Zienkiewicz (1965)

$$\int \delta u^T (L^T \sigma + p) dV = 0 \quad (\text{Ec. 3.38})$$

Aplicando el Teorema de Green que es el Principio de Trabajos Virtuales se tiene

$$\int \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int \delta u^T p dV + \int \delta u^T t dS \quad (\text{Ec. 3.38})$$

$\delta u$  movimiento cinemáticamente admisible

$t$  vector de tracciones sobre la superficie del sólido

la variación del estado tensional da la necesidad de tener que expresarlo en forma incremental

$$\sigma^i = \sigma^{i-1} + \Delta \sigma$$

$$\Delta \sigma = \int \sigma dt \quad (\text{Ec. 3.39})$$

Que corresponden al estado tensional actual desconocido y previo conocido. De las expresiones anteriores se obtienen para el estado actual  $i$

$$\int \delta \varepsilon^T \Delta \sigma dV = \int \delta u^T p^i dV + \int \delta u^T t^i dS - \int \delta \varepsilon^T \sigma^{i-1} dV \quad (\text{Ec. 3.40})$$

### 3.3.2 Discretización para elementos finitos

El medio continuo se divide en un número finito de elementos (volúmenes) en cuyos vértices se asignan los nudos con sus correspondientes grados de libertad siendo en este caso los desplazamientos. La discretización se da a partir de la expresión

$$u = Nv$$

$N$  es la matriz de funciones de forma del MEF

$v$  valor de los desplazamientos nodales

de la ecuación 3.36 se tiene

$$\varepsilon = LNv = Bv \quad (\text{Ec. 3.41})$$

$B$  es la matriz de interpolación de deformaciones conteniendo la derivada espacial de las funciones de forma. Tal como se hizo anteriormente la ecuación 3.40 puede descomponerse en forma incremental (variacional) introduciendo el campo de deformaciones cinemáticamente admisibles

$$\int B^T \Delta \sigma dV = \int N^T p^i dV + \int N^T t^i dS - \int B^T \sigma^{i-1} dV \quad (\text{Ec. 3.42})$$

En esta expresión el primer y segundo términos del lado derecho corresponden al vector de fuerzas actual, el tercero representa el previo. Del desarrollo mediante procesos iterativos podrán obtenerse las tensiones en los nudos de la malla y luego las deformaciones

### **Procedimiento iterativo**

Sustituyendo en la ecuación 3.42 la relación entre los incrementos de los valores de las tensiones y los incrementos de las deformaciones dadas por

$$\Delta \sigma = M \Delta \varepsilon \quad (\text{Ec. 3.43})$$

Resulta

$$K^i \Delta v^i = f_{ex}^i - f_{in}^{i-1} \quad (\text{Ec. 3.44})$$

$K^i$  es la matriz de rigidez del sistema

El proceso de iteración de la expresión puede escribirse

$$K^j \Delta v^j = f_{ex}^i - f_{in}^{j-1} \quad (\text{Ec. 3.45})$$

El superíndice  $j$  está referido al número de iteración. El incremento de desplazamientos para el paso  $i$  es

$$\Delta v^i = \sum_{j=1}^n \delta v^j \quad (\text{Ec. 3.46})$$

$n$  es el número de iteración del paso  $i$ . La matriz de rigidez de la respuesta elástica lineal para un elemento volumen puede expresarse

$$K^i = \int B^T D^e B dV \quad (\text{Ec. 3.47})$$

donde

$D$  es la matriz de las características elásticas del material y

$B$  es la matriz de interpolación del campo de deformaciones

### **3.3.3 Matriz de rigidez para el suelo considerando la hipótesis de Winkler**

Mindlin R.D. (1951) ha propuesto relaciones para considerar la matriz de rigidez del suelo considerando el módulo de balasto para ser ensamblado con el de la estructura de cimentación y ser resuelto por el Método de elementos finitos, Figura 3.10. Los coeficientes referidos están asociados con los nodos del elemento estructural mediante formulación isoparamétrica

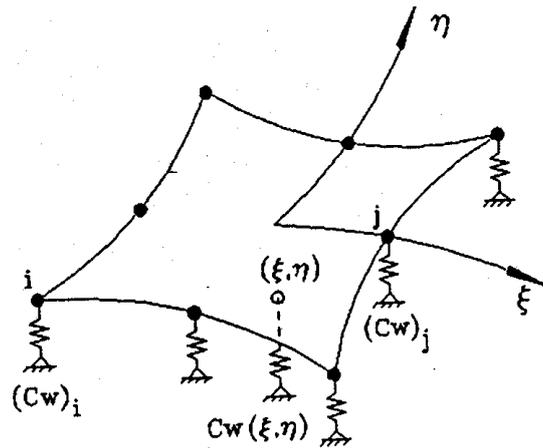


FIGURA 3.10 Modelo de elemento finito con resortes en los nodos. Modelo de Mindlin (1951)

Estableciendo la relación

$$C_w(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^n (Cw)_i N_i(\varepsilon, \eta) \quad (\text{Ec. 3.48})$$

Con el que los coeficientes de balasto para el elemento se expresan en coordenadas locales a través de las funciones de forma  $N$ , en esta formulación  $C$  es el coeficiente de balasto referida a la dirección  $w$ . Los desplazamientos virtuales en la dirección vertical referidas a la interfaz se evalúan en los correspondientes nudos a través de

$$dw(\varepsilon, \eta) = \sum_{i=1}^n dw_i N_i(\varepsilon, \eta) \quad (\text{Ec. 3.49})$$

El trabajo virtual de las fuerzas internas del elemento está dado por

$$dW_s = \int_A dw C_w dA \quad (\text{Ec. 3.50})$$

Usando el teorema de los trabajos virtuales y aplicando la integración numérica de Gauss se pueden obtener los coeficientes de rigidez para los nodos  $i, j$  del elemento asociado con la contribución del suelo con la matriz de rigidez global del conjunto suelo estructura mediante

$$(k_s)_{ij} = \sum_{p=1}^{N_g} \sum_{q=1}^{N_g} N_i(\varepsilon_p \eta_q) C_w(\varepsilon_p \eta_q) N_j(\varepsilon_p \eta_q) \det J \cdot w_p w_q \quad (\text{Ec. 3.51})$$

Donde

$J$  es la matriz jacobiana para la conversión de las coordenadas globales  $x, y$  a las locales del elemento; a la vez

$N_i$  es el numero de puntos de integración de Gauss (2 puntos por cada elemento de cuatro nodos y 3 puntos de integración por cada elemento de 9 nodos), y

$w_p, w_q$

Los pesos de integración del sistema asociados con las coordenadas locales del mismo.

### **3.3.4 Modelos constitutivos para suelos**

En el pasado se formularon ecuaciones constitutivas para materiales ideales, como el sólido lineal elástico (Hooke) y el sólido de comportamiento plástico. Estas ecuaciones se introdujeron por separado para resolver necesidades específicas y son tan sencillos en su estructura que simplifican muchas situaciones físicas reales.

En la actualidad las ecuaciones constitutivas para medios continuos se especializan y aumentan en complejidad para no ignorar los fenómenos de acoplamiento entre distintos tipos de comportamiento. Se han desarrollado expresiones matemáticas para modelar el comportamiento de esfuerzo-deformación de los suelos, los cuales sintetizados matricialmente son incorporados a los sistemas para su resolución empleando métodos numéricos.

En este contexto son importantes los trabajos desarrollados por R. L. Kondner (1963), el cual tiene en cuenta la no linealidad, esfuerzo-dependencia y la inelasticidad del comportamiento de éstos. Comportamiento que puede ser aproximado por medio del análisis con elementos finitos asignando diferentes valores de módulo a cada uno de los elementos en los que el continuo es dividido.

Los modelos constitutivos se han formulado con base en los principios de la mecánica, las leyes de la física, evidencia experimental, y otros se han basado en principios teóricos.

La caracterización del comportamiento del suelo tiende a complicarse, porque las relaciones esfuerzo-deformación son no-lineales en la naturaleza; los suelos son fundamentalmente materiales friccionantes y los cambios de volumen son susceptibles en los procesos de drenado. Los aspectos importantes de estos modelos son los datos experimentales requeridos para la calibración y la facilidad con que los parámetros de los materiales sean determinados.

#### ***Modelos simplificados***

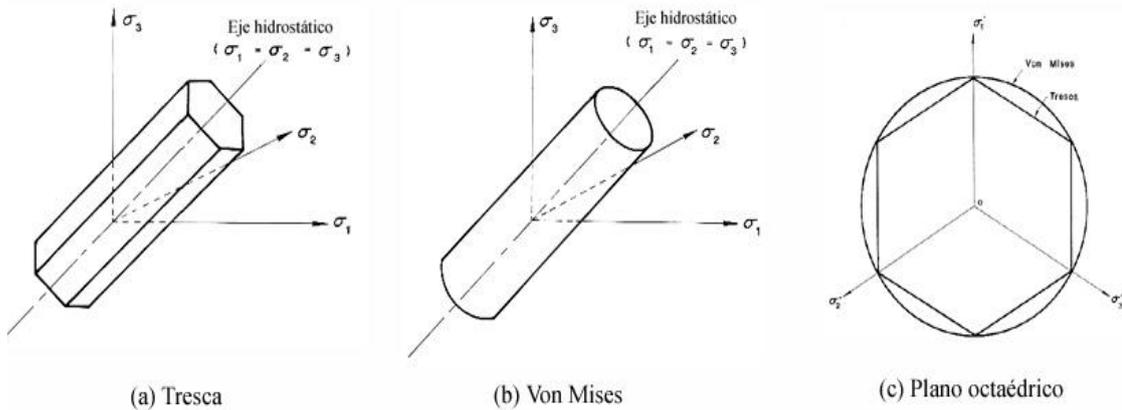
El suelo es por lo general el material más débil involucrado en los problemas de ingeniería si se compara con otros materiales típicos de construcción como el concreto y el acero. Por esta razón, es el suelo el material que determina las deformaciones y las posibilidades de falla de la estructura como conjunto, de ahí la importancia de efectuar una caracterización con precisión del rango de esfuerzos y deformaciones a los que serán expuestos.

El concreto y el acero pueden ser caracterizados como materiales elásticos o plásticos, a diferencia del suelo que por la complejidad de su naturaleza no encaja dentro de una teoría única de comportamiento elástico o plástico debiendo plantearse las simplificaciones conforme al tipo de análisis. Así, el propósito de un modelo constitutivo es simular el

comportamiento del suelo con la exactitud suficiente bajo todas las condiciones de carga. (Lade y Duncan, 2005).

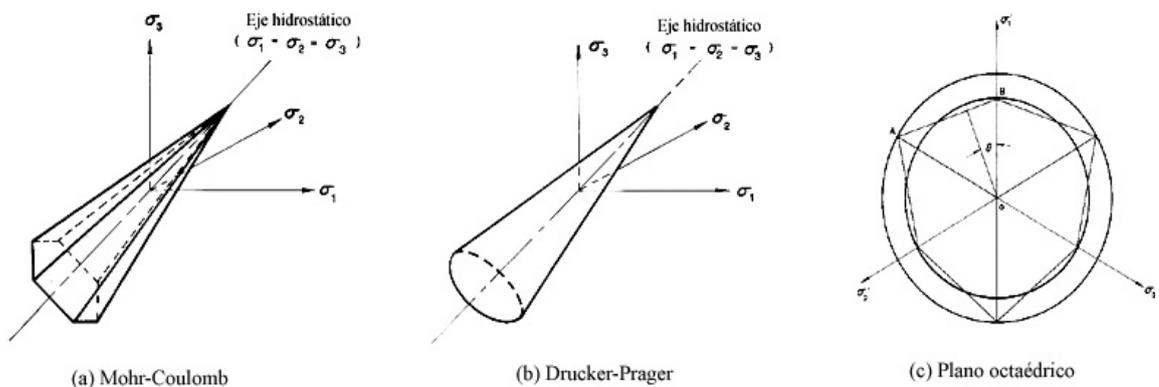
**Modelos de rotura en general**

Podemos hablar de la existencia de 6 modelos de rotura extensamente aceptados en la mecánica de materiales, para los cuales pueden considerarse entre uno y dos parámetros que caracterizan la naturaleza del sólido deformable. Por un lado tenemos 3 modelos de un sólo parámetro (Von Mises, Tresca y Lade-Duncan) ver Figura 3.11 y, por otro lado, tenemos modelos de dos parámetros (Drucker-Prager, Lade y, el aquí utilizado, Mohr-Coulomb) Figura 3.12.



**FIGURA 3.11** (a) Superficie de fluencia según el modelo de Tresca, (b) según el modelo de Von Mises y (c) el plano octaédrico en el que se superponen ambas superficies.

En general los dos primeros modelos (V-M y T) no pueden ser aplicados dentro de la mecánica de suelos puesto que descuidan el efecto de uno de sus componentes que es la presión hidrostática (solamente podrían ser válidos para el caso de suelos saturados bajo condiciones no drenadas, es decir, en tensiones totales).



**FIGURA 3.12** (a) Superficie de fluencia según el modelo de Mohr-Coulomb, (b) según el modelo de Drucker-Prager y (c) el plano octaédrico en el que se superponen ambas superficies.

### Modelo de Mohr Coulomb

El modelo constitutivo Mohr-Coulomb es considerado como una aproximación de primer orden al comportamiento no lineal del suelo. Se trata de un modelo elastoplástico perfecto (isotrópico) desarrollado a partir de la composición de la ley de Hooke y la forma generalizada del criterio de falla Mohr-Coulomb. Puede simular el comportamiento de suelos granulares sueltos o finos normalmente consolidados y se debe tener en cuenta que no representa el comportamiento elastoplástico progresivo (Figura 3.13) sino que es un modelo elástico y luego plástico perfecto (Figura 3.14). Su formulación involucra dos elementos generales: la elasticidad perfecta y la plasticidad asociada al desarrollo de deformaciones plásticas o irreversibles. La superficie de fluencia se observa en la Figura 3.15.

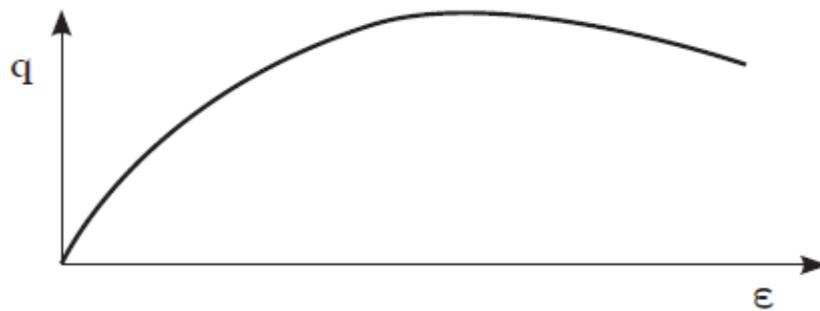


FIGURA 3.13 Comportamiento elastoplástico progresivo

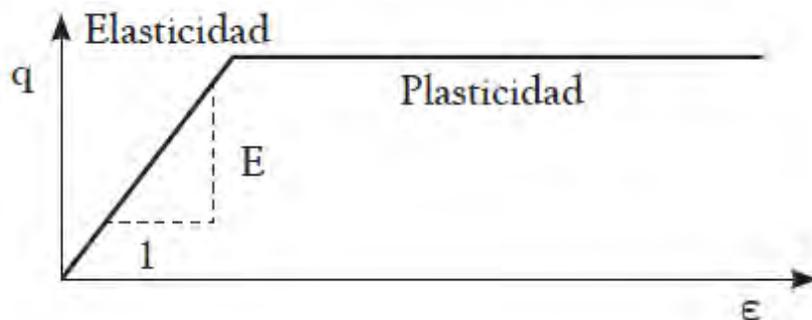


FIGURA 3.14 Comportamiento elástico seguido de plástico perfecto

De esta forma el campo de deformaciones se expresa como la suma de los aportes de la parte elástica más la plástica

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p \quad \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p \quad (\text{Ec. 3.52})$$

y las tensiones

$$\boldsymbol{\sigma} = D\boldsymbol{\varepsilon}^e = D(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) \quad (\text{Ec. 3.53})$$

Para evaluar si la plasticidad ocurre o no en un análisis específico, el modelo Mohr-Coulomb involucra un conjunto de funciones de fluencia  $f$  (yield functions) que definen el límite entre el comportamiento elástico y plástico del material:

$$f_{1a} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 - \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_3)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0 \quad (\text{Ec. 3.54})$$

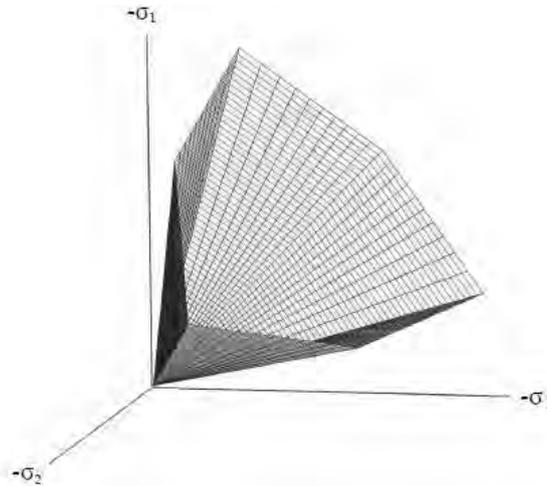
$$f_{1b} = \frac{1}{2}(\sigma'_3 - \sigma'_2) + \frac{1}{2}(\sigma'_3 + \sigma'_2)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0$$

$$f_{2a} = \frac{1}{2}(\sigma'_3 - \sigma'_1) + \frac{1}{2}(\sigma'_3 + \sigma'_1)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0$$

$$f_{2b} = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0$$

$$f_{3a} = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_2)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0$$

$$f_{3b} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 - \sigma'_1) + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_1)\sin\varphi - c\cos\varphi \leq 0$$



**FIGURA 3.15** Superficie de fluencia para el modelo Mohr Coulomb

No obstante, la teoría de plasticidad asociada relativa a esta relación básica tiende a una sobreestimación del fenómeno de dilatancia en el suelo, para lo cual el modelo Mohr-Coulomb en adición a la función de fluencia  $f$ , incorpora una función de potencial plástico  $g$ , que en el caso particular  $g \neq f$  describe plasticidad no asociada. Dadas estas consideraciones un grupo de funciones de potencial plástico  $g$  son definidas para el modelo:

$$g_{1a} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 - \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_3)\sin\psi \quad (\text{Ec. 3.55})$$

$$g_{1b} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 - \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_3)\sin\psi$$

$$g_{2a} = \frac{1}{2}(\sigma'_3 - \sigma'_1) + \frac{1}{2}(\sigma'_3 + \sigma'_1)\sin\psi$$

$$g_{2b} = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_3) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_3)\sin\psi$$

$$g_{3a} = \frac{1}{2}(\sigma'_1 - \sigma'_2) + \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_2)\sin\psi$$

$$g_{3b} = \frac{1}{2}(\sigma'_2 - \sigma'_1) + \frac{1}{2}(\sigma'_2 + \sigma'_1)\sin\psi$$

A partir de esta consideración, las deformaciones plásticas son expresadas como:

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \quad (\text{Ec. 3.56})$$

$\lambda$  Es el multiplicador plástico que define el tipo de comportamiento del material

$$\lambda = 0$$

Para

$$f < 0$$

Se encuentra del campo de la elasticidad y se cumple

$$\frac{\partial f^T}{\partial \sigma'} D^e \varepsilon \leq 0$$

Igualmente para el campo plástico se da con

$$\lambda > 0; f = 0 \quad \text{y}$$

$$\frac{\partial f^T}{\partial \sigma'} D^e \varepsilon > 0$$

Las ecuaciones anteriores componen la relación fundamental del modelo Mohr-Coulomb entre esfuerzos efectivos y deformaciones para elastoplasticidad. El campo de esfuerzos se define:

$$\sigma' = \left( D^e - \frac{\alpha}{d} \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \cdot \frac{\partial f^T}{\partial \sigma'} D^e \right) \dot{\varepsilon} \quad (\text{Ec. 3.57})$$

Donde

$$d = \frac{\partial f^T}{\partial \sigma'} D^e \frac{\partial g}{\partial \sigma'} \quad (\text{Ec. 3.58})$$

De acuerdo a Koiter (1960) el campo de deformaciones plásticas puede ser extendida a fin de cubrir a más de dos funciones de potencial plástico dentro del modelo de forma similar a la que se hizo con las funciones de forma  $f$  mediante

$$\dot{\varepsilon}^p = \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial \sigma'} + \lambda_2 \frac{\partial g_2}{\partial \sigma'} + \dots \quad (\text{Ec. 3.59})$$

### 3.4 MODELIZACION DE ELEMENTOS Y DOMINIOS

#### 3.4.1 Concepto de modelización

Para que el diseño adoptado en un problema de cimentación superficial esté acorde con los requerimientos establecidos es necesario que las fases del proceso: modelización y análisis se resuelvan correctamente. La modelización consiste en la traducción de la estructura real al modelo físico matemático que se plantea.

El análisis permite obtener los valores que alcanzan determinados parámetros numéricos que representan el comportamiento matemático del conjunto suelo estructura.

Por ello, para hacer numéricamente viables los cálculos suelen establecerse una serie de hipótesis simplificadoras: linealidad contra no linealidad, comportamiento elástico frente a comportamiento plástico, régimen estático frente a régimen dinámico, pequeñas deformaciones frente a grandes deformaciones.

#### ***Criterios de discretización***

Está referida a la división del continuo en elementos específicos. Durante el proceso no se establecen limitaciones respecto de la geometría, tipos de carga, vinculaciones externas o tipos de elementos estructurales: barras, elementos finitos bidimensionales o elementos finitos tridimensionales, dependiendo en todo caso de las posibilidades funcionales del ordenador que se emplee para el procesamiento de la información incorporada a su base de datos.

#### 3.4.2 Interpolación para elementos finitos lineales

Para los elementos lineales se dispone de una sola coordenada cuya dirección coincide con el eje del elemento, dicha coordenada nos permitirá conocer el campo de desplazamientos en todo el elemento a partir de los correspondientes en los nudos mediante

$$u(\xi) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi) v_i \quad (\text{Ec. 3.60})$$

Para un elemento lineal de 3 nodos la variación de las funciones de forma se visualiza en la Figura 3.16.

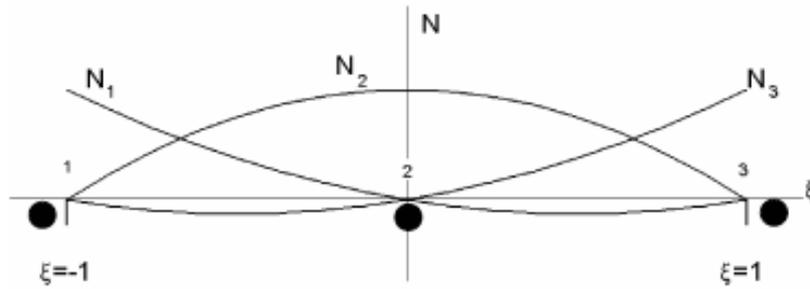


FIGURA 3.16 Interpolación de elementos lineales

### 3.4.3 Interpolación para elementos área de 15 nodos

Para este elemento se cuenta con 5 nodos por lado (lineales) disponiéndose de las siguientes funciones de forma

$$N_1 = -(1 - \xi)(1 - 2\xi)\xi(-1 - 2\xi)/6 \quad (\text{Ec. 3.61})$$

$$N_2 = 4(1 - \xi)(1 - 2\xi)\xi(-1 - \xi)/3$$

$$N_3 = (1 - \xi)(1 - 2\xi)\xi(-1 - 2\xi)(-1 - \xi)$$

$$N_4 = 4(1 - \xi)\xi(-1 - 2\xi)(-1 - \xi)/3$$

$$N_5 = (1 - 2\xi)\xi(-1 - 2\xi)(-1 - \xi)/6$$

En la Figura 3.17 podemos observar la representación gráfica de dichas funciones y como se anulan en los valores nodales excepto en el que le corresponde (cuyo valor es la unidad).

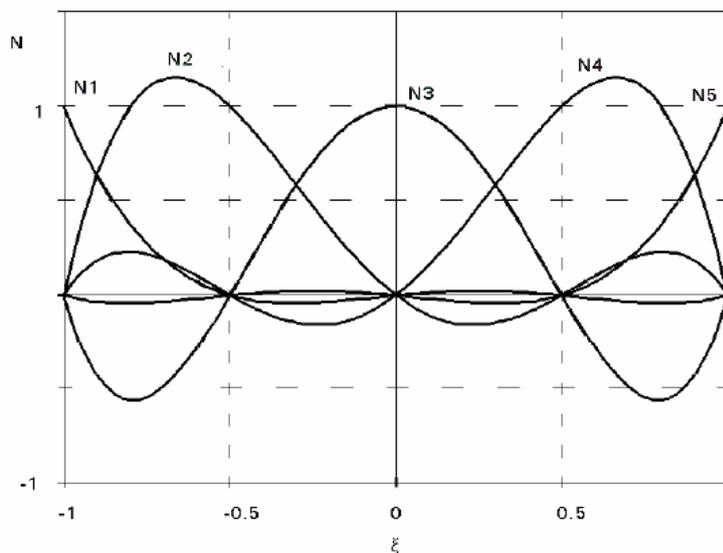


FIGURA 3.17 Funciones de forma para elementos triangulares de quince nodos. Fuente: (Bringreva et al, 2002).

En la Figura 3.18 se esquematiza el elemento con sus nodos y numeración en ejes locales.

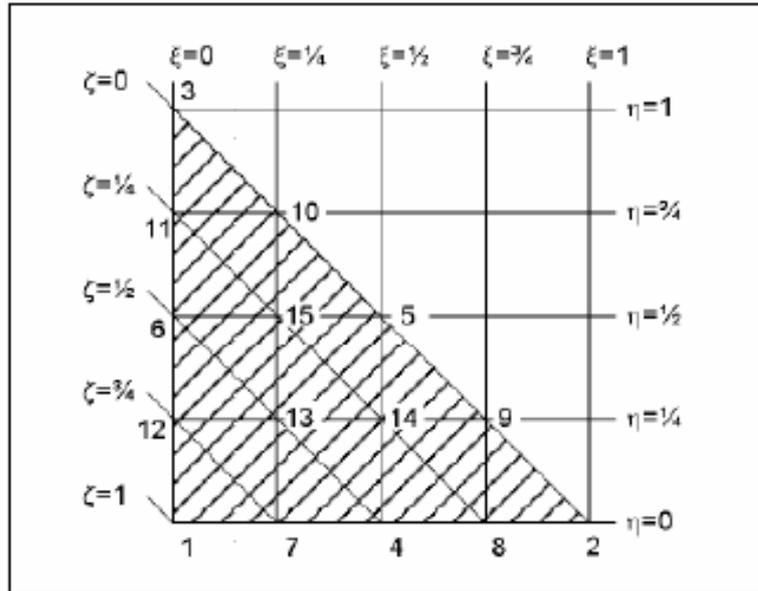


FIGURA 3.18 Ubicación de los quince nodos en un elemento triangular. Fuente; (Bringkreve et al, 2002).

### 3.4.4 Elementos estructurales e integración numérica

El programa Plaxis 3D Foundation tiene una variedad de elementos estructurales a utilizarse en la modelización

#### **Elementos viga**

Su modelización es mediante elementos línea ya descritos en párrafo anterior dentro de los cuales se consideran 6 grados de libertad por nodo (3 desplazamientos más 3 giros). Las funciones de forma en coordenadas locales son

$$N_{1u} = (4\xi^2 - 5\xi^3 - 2\xi^4 + 3\xi^5) / 4 \quad (\text{Ec. 3.62})$$

$$N_{2u} = 1 - 2\xi^2 + \xi^4$$

$$N_{3u} = (4\xi^2 + 5\xi^3 - 2\xi^4 - 3\xi^5) / 4$$

$$N_{1\phi} = (\xi^2 - \xi^3 - \xi^4 + \xi^5) / 4$$

$$N_{2\phi} = \xi - 2\xi^3 + \xi^5$$

$$N_{3\phi} = (-\xi^2 - \xi^3 + \xi^4 + \xi^5) / 4$$

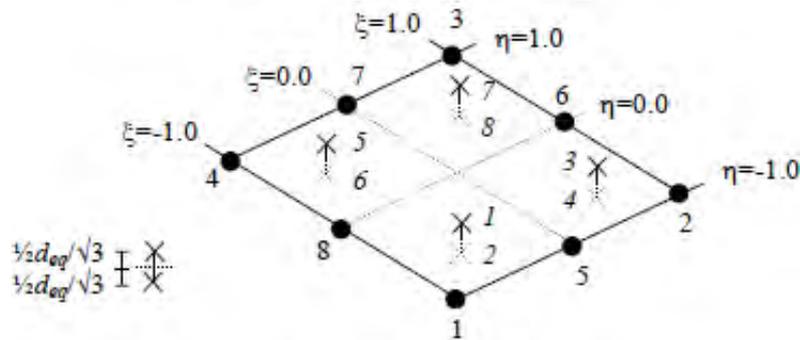
Estos elementos son numéricamente integrables usando los 4 puntos de Gauss de acuerdo a la Tabla 3.1.

**TABLA 3.1** Puntos de Gauss para elemento viga

	$\xi_i$	$w_i$	max. polyn. degree
1 point	0.000000...	2	1
2 points	$\pm 0.577350... (\pm 1/\sqrt{3})$	1	3
3 points	$\pm 0.774596... (\pm \sqrt{0.6})$	0.55555... (5/9)	5
	0.000000...	0.88888... (8/9)	
4 points	$\pm 0.861136...$	0.347854...	7
	$\pm 0.339981...$	0.652145...	
5 points	$\pm 0.906179...$	0.236926...	9
	$\pm 0.538469...$	0.478628...	
	0.000000...	0.568888...	

**Elementos muro**

Están conformados por elementos cuadriláteros de 8 nodos con 6 grados de libertad por cada uno de ellos. En la Figura 3.19 se ve la configuración del elemento en coordenadas locales



**FIGURA 3.19** Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento cuadrilátero de 8 nodos

Estos elementos son numéricamente integrables en la proporción 4x2 puntos de integración gaussiana con los datos de la tabla:

**TABLA 3.2** Cuatro puntos de integración gaussiana para los 8 nodos del cuadrilátero elemental

Point	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
1	$-1/3 \sqrt{3}$	$-1/3 \sqrt{3}$	1
2	$+1/3 \sqrt{3}$	$-1/3 \sqrt{3}$	1
3	$-1/3 \sqrt{3}$	$+1/3 \sqrt{3}$	1
4	$+1/3 \sqrt{3}$	$+1/3 \sqrt{3}$	1

**Elementos losa**

Están conformados por elementos triangulares de 6 nodos con igual cantidad de grados de libertad por cada uno de ellos. En la Figura 3.20 se ve la configuración del elemento en coordenadas locales

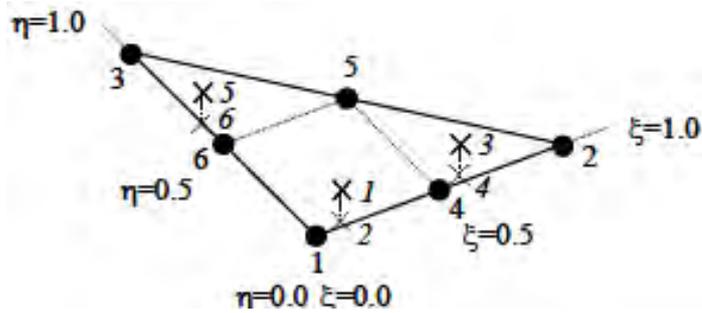


FIGURA 3.20 Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento triangular de 6 nodos

Estos elementos son numéricamente integrables en la proporción 2x3 puntos de integración gaussiana con los datos de la tabla:

TABLA 3.3 Tres puntos de integración gaussiana para los 6 nodos del triángulo elemental

Point	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
1	1/6	2/3	1/3
2	1/6	1/6	1/3
3	2/3	1/6	1/3

**Elementos de interfase**

Están conformados por elementos cuadriláteros de 16 nodos dispuestos en dos niveles cuya distancia nominal entre ellos es cero con 3 grados de libertad por cada uno (desplazamientos). En la Figura 3.21 se ve la configuración del elemento en coordenadas locales

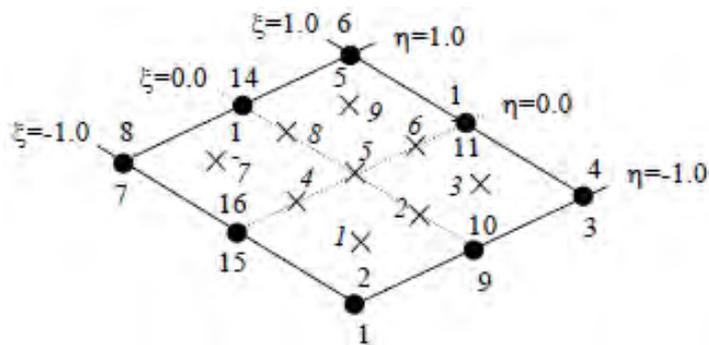


FIGURA 3.21 Coordenadas y puntos de integración gaussiana elemento cuadrilátero de 16 nodos

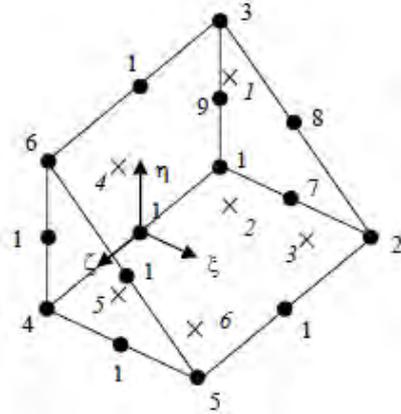
En la Tabla 3.4 se indican las coordenadas de los puntos de integración gaussiana del elemento

**TABLA 3.4** 9 puntos de integración gaussian para el elemento de interfase de 16 nodos

Point	$\xi_i$	$\eta_i$	$w_i$
1	-0.774596	-0.774596	0.308642
2	0.000000	-0.774596	0.493827
3	+0.774596	-0.774596	0.308642
4	-0.774596	0.000000	0.493827
5	0.000000	0.000000	0.790124
6	+0.774596	0.000000	0.493827
7	-0.774596	+0.774596	0.308642
8	0.000000	+0.774596	0.493827
9	+0.774596	+0.774596	0.308642

### 3.4.5 Interpolación de funciones e integración numérica para elementos volumen

Corresponden a los utilizados en el presente estudio. Están compuestos por elementos cuña con un total de 15 nodos dispuestos de acuerdo a la Figura 3.22.



**FIGURA 3.22** Elemento tridimensional tipo cuña de 15 nodos

Este tipo de elementos proporciona un segundo orden de interpolación para desplazamientos.

Las funciones de forma se dan en 3 coordenadas locales para cada nodo

$$N_1 = -(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)(2\xi + 2\eta + \zeta) / 2 \quad (\text{Ec. 3.63})$$

$$N_2 = -\xi(1 - \zeta)(2 - 2\xi - \zeta) / 2$$

$$N_3 = -\eta(1 - \zeta)(2 - 2\eta + \zeta) / 2$$

$$N_4 = -(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta)(2\xi + 2\eta + \zeta) / 2$$

$$N_5 = -\xi(1 + \zeta)(2 - 2\xi + \zeta) / 2$$

$$N_6 = -\eta(1 + \zeta)(2 - 2\eta - \zeta) / 2$$

$$N_7 = (1 - \xi - \eta)\xi(1 - \zeta) * 2$$

$$N_8 = \xi\eta(1 - \zeta) * 2$$

$$N_9 = \eta(1 - \xi - \eta)(1 - \zeta) * 2$$

$$N_{10} = (1 - \xi - \eta)(1 - \zeta)(1 + \zeta)$$

$$N_{11} = \xi(1 - \zeta)(1 + \zeta)$$

$$N_{12} = \eta(1 - \zeta)(1 + \zeta)$$

$$N_{13} = (1 - \xi - \eta)\xi(1 + \zeta) * 2$$

$$N_{14} = \xi\eta(1 + \zeta) * 2$$

$$N_{15} = \eta(1 - \xi - \eta)(1 + \zeta) * 2$$

Igualmente para el tetraedro elemental de 10 nodos dispuestos de acuerdo a la Figura 3.23.

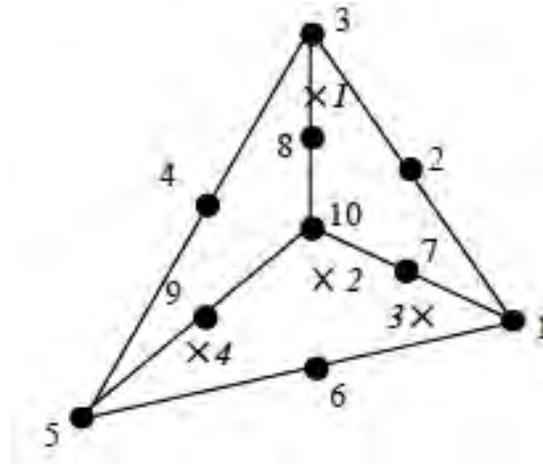


FIGURA 3.23 Elemento tipo tetraedro elemental de 10 nodos

Se tienen las siguientes funciones de forma en coordenadas locales

$$N_1 = (2\xi - 1)\xi \quad (\text{Ec. 3.64})$$

$$N_2 = 4\xi\eta$$

$$N_3 = (2\eta - 1)\eta$$

$$N_4 = 4\eta\zeta$$

$$N_5 = (2\zeta - 1)\zeta$$

$$N_6 = 4\xi\zeta$$

$$N_7 = 4\xi(1 - \xi - \eta - \zeta)$$

$$N_8 = 4\eta(1 - \xi - \eta - \zeta)$$

$$N_9 = 4\zeta(1 - \xi - \eta - \zeta)$$

$$N_{10} = (2(1 - \xi - \eta - \zeta) - 1)(1 - \xi - \eta - \zeta)$$

### Proceso de integración numérica

El proceso de integración de línea y superficie para elementos volumen puede aproximarse mediante la expresión

$$\iiint F(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{i=1}^k F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) w_i \quad (\text{Ec. 3.65})$$

Para el desarrollo se distinguen entre 3 puntos de integración para un triángulo elemental de 6 nodos y cuatro puntos para un cuadrilátero de 8 nodos comprendidos dentro de los elementos volumen. Las posiciones de dichos puntos en coordenadas locales para los dos casos se dan en las siguientes tablas:

**TABLA 3.5** Puntos de integración gaussiana para el elemento volumen de 15 nodos (cuña)

Point	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$
1	1/6	2/3	-1/3√3	1/3
2	1/6	1/6	-1/3√3	1/3
3	2/3	1/6	-1/3√3	1/3
4	1/6	2/3	+1/3√3	1/3
5	1/6	1/6	+1/3√3	1/3
6	2/3	1/6	+1/3√3	1/3

**TABLA 3.6** 4 puntos de integración gaussiana para el elemento volumen tetraedro elemental de 10 nodos

Point	$\xi_i$	$\eta_i$	$\zeta_i$	$w_i$
1	.5854102	.1381966	.1381966	1/4
2	.1381966	.5854102	.1381966	1/4
3	.1381966	.1381966	.5854102	1/4
4	.1381966	.1381966	.1381966	1/4

## 3.5 UTILIZACION DEL PROGRAMA PLAXIS 3D

Para utilizar los resultados que nos ofrece el programa Plaxis 3D Foundation se requiere un análisis crítico de las hipótesis asumidas, de los datos de entrada y de las técnicas de modelización.

### 3.5.1 Aspectos generales del modelado por elementos finitos con el programa Plaxis 3D Foundation

Como primer paso se crea un modelo geométrico usando:

- Puntos (para indicar principio y fin de líneas, posición de anclajes, puntos de fijaciones, para refinamiento local de malla, etc),
- Líneas (para definir bordes o límites físicos de la geometría, bordes y discontinuidades geométricas del modelo ), y

- Clusters (áreas encerradas entre líneas reconocidas automáticamente por PLAXIS. Dentro de un cluster las propiedades del suelo son homogéneas. Cada cambio de propiedades en un cluster afecta a todos los elementos dentro del cluster).

El modelo geométrico incluye una división representativa del subsuelo en las distintas capas de suelo, objetos estructurales y diferentes etapas de construcción y carga. El modelo debe ser lo suficientemente “amplio” de manera tal que los bordes o contornos no influyan en los resultados del problema en estudio.

El modelo de material utilizado en el presente es el elasto-plástico de Mohr – Coulomb. Los parámetros que lo definen son:  $E$  (módulo de Young) y  $\nu$  (módulo de Poisson) relativos a la elasticidad del suelo;  $\phi$  (ángulo de fricción) y  $c$  (cohesión) relativos a la plasticidad; y  $\psi$  (ángulo de dilatación).

Luego de la creación del modelo geométrico se genera automáticamente una malla de elementos finitos, basada en la composición de clusters y líneas del modelo geométrico.

### 3.5.2 Etapa de cálculos

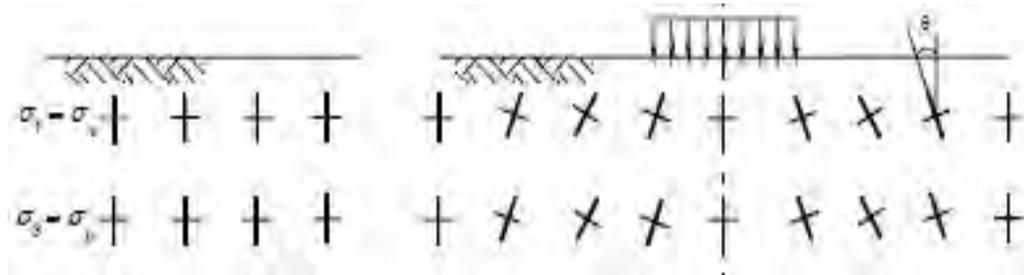
El programa cuenta con una etapa definida para el proceso de los cálculos en el que toda la información suministrada del problema que se plantea como parámetros resistentes, deformabilidad, configuración geométrica y asignado una malla de elementos finitos tridimensionales empieza el respectivo tratamiento para su solución respectiva. Sus componentes son:

- El programa de cálculos
- El menú de cálculos
- Definición de una etapa de cálculo
- Consideraciones generales acerca de los cálculos
- Procedimientos de aplicación de las cargas por pasos
- Parámetros de control del cálculo
- Construcción por etapas
- Multiplicadores de carga
- Reducción  $f_i$ - $c$  para estimar factor de seguridad frente a una posible falla
- Análisis con actualización de malla
- Visión previa de una etapa en construcción
- Selección de puntos para curvas
- Ejecución del proceso de cálculo propiamente dicho
- Resultados generados durante los cálculos
- Selección de fases de cálculo para revisar los resultados
- Ajuste de los datos iniciales efectuado entre cálculos
- Comprobaciones automáticas de los errores

### 3.5.3 Resultados obtenidos

En esta opción ofrece una variedad de resultados luego de finalizado la etapa de cálculos. Los principales resultados que proporciona un cálculo mediante elementos finitos son los desplazamientos en los nodos y las tensiones en los puntos de tensión. Además cuando el modelo incluye elementos estructurales, como es nuestro caso, se calculan los esfuerzos en dichos elementos.

Los esfuerzos principales tienen una interpretación de acuerdo a la Figura 3.24.



**FIGURA 3.24** Esfuerzos principales en el suelo: sin sobrecarga lado izquierdo, suelo cargado lado derecho

En el programa existe una amplia gama de dispositivos para la presentación de los resultados contándose para el caso con los siguientes componentes:

-Deformaciones

- Malla deformada
- Desplazamientos totales, horizontales y verticales
- Desplazamientos incrementales
- Deformaciones totales
- Deformaciones cartesianas
- Deformaciones incrementales
- Incrementos de deformaciones cartesianas

-Tensiones

- Tensiones efectivas
- Tensiones totales
- Tensiones efectivas cartesianas
- Grado de sobreconsolidación del suelo
- Puntos plásticos
- Presiones intersticiales activas
- Excesos de presión intersticial
- Altura piezométrica
- Campo de caudales específicos
- Grado de saturación

-Fuerzas

- Momentos flectores y torsores
- Fuerzas cortantes
- Fuerzas normales

-Estructuras e interfases

- Placas de cimentación
- Muros
- Vigas y zapatas

-Tablas de resultados

-Distribución de variables a lo largo de una sección trnsversal

-Generación de informes y exportación de datos.

## **CAPÍTULO IV**

### **4 ANÁLISIS COMPARATIVO**

Previos a las aplicaciones respectivas se desarrollan los procedimientos analíticos para el cálculo de cimentaciones superficiales sobre medios elásticos complementando con la identificación de tensiones de contacto para elementos simples como zapatas individuales. En el caso de zapatas continuas y combinadas las soluciones se basan en métodos matemáticos rigurosos modelados como vigas de cimentación.

#### **4.1 CÁLCULO ANALÍTICO**

Como herramienta práctica para la modelación del método de análisis de los efectos de la transmisión de un sistema de cargas al suelo, se constituyen los procedimientos analíticos de cálculo, lo que nos permite obtener razonablemente la magnitud y distribución de tensiones sobre el terreno de cimentación y la elástica del elemento. Un incremento de cargas sobre el cimiento produce una transición progresiva en el suelo desde un estado de equilibrio elástico a un estado de plasticidad contenida, llegándose finalmente a la plastificación total cuando se alcanza el valor de la carga de hundimiento dada.

El cálculo de las presiones de contacto en la base de los cimientos, rigidez o flexiones representa un serio problema en el campo de la elasticidad, habiéndose resuelto únicamente algunos casos particulares de forma y carga, (Jiménez Salas et al, 1981).

##### **4.1.1 Métodos analíticos para el cálculo de losas de cimentación**

Para el caso de una cimentación superficial más completa como una losa de concreto son dos los métodos comúnmente aplicables: el rígido convencional y el flexible aproximado.

En el método rígido convencional de diseño, la losa se supone infinitamente rígida. Además, la presión del suelo se distribuye en línea recta y el centroide de su resultante coincide con la línea de acción de las cargas resultantes de las columnas. En el método flexible aproximado de diseño, el suelo se supone equivalente a un número infinito de resortes elásticos, denominada como la cimentación Winkler. La constante elástica de esos resortes supuestos se denomina el coeficiente  $k$  de reacción del subsuelo.

Para propósitos de diseño el ACI Comité 436 recomienda que, cuando el espaciamiento de las columnas sea reducido o cuando la estructura de columnas, vigas y/o placas sean lo suficientemente rígidas para evitar que las columnas y la cimentación sufran asentamientos diferenciales, se asuma que la presión de contacto con el suelo es uniforme.

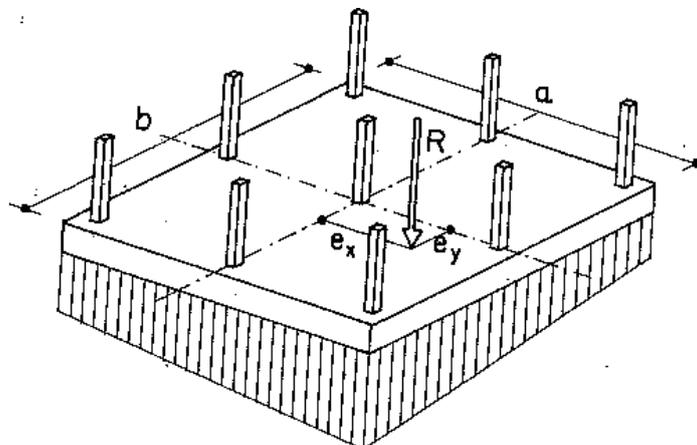
### **El método rígido convencional**

Para el caso de la zapata solicitada por momentos biaxiales se determina la ley de distribución de presiones del suelo de soporte lineal mediante la expresión:

$$q = \frac{R}{A} \pm \frac{M_y e_x}{I_y} \pm \frac{M_x e_y}{I_x} \quad (\text{Ec. 4.1})$$

$R$  es la resultante de las cargas actuantes,  $A$  el área total de contacto,  $M$  los momentos respecto a los ejes  $x$  e  $y$ ,  $e$  las excentricidades,  $I$  los momentos de inercia de las secciones que están en las direcciones de  $x$  e  $y$  (Figura 4.1).

Luego se efectúa el análisis por franjas, tratándose de una platea de cimentación con sollicitación en ambos sentidos. Los elementos así definidos se evalúan independientemente a efectos de obtener los diagramas de esfuerzos, fuerzas cortantes y momentos flectores de acuerdo a los principios de la Estática. Se debe tomar en cuenta la superposición de efectos en las áreas comunes de dos franjas perpendiculares así como la magnitud de las presiones para el suelo determinadas no superen al valor de la capacidad admisible definido por principios de la Mecánica del suelo.



**FIGURA 4.1** Representación de la variación lineal de las tensiones de contacto de una losa.

### **El método flexible aproximado**

Procedimiento que se aplica al caso de losas de fundación. Fue propuesto por el Instituto Americano del Concreto en 1966 basado en la teoría de placas. El diseño se fundamenta en la solución de una viga de fundación sobre un medio elástico como el suelo y en la relación proporcional entre las cargas aplicadas y los asentamientos producidos (coeficiente de balasto), igualmente los momentos flectores y desplazamientos verticales son funciones de un parámetro conocido como radio de rigidez propuesto por Westergaard (1926) y se define:

$$R = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (\text{Ec. 4.2})$$

Donde  $E$ ,  $\nu$  son parámetros de deformabilidad del elemento de cimentación y  $h$  el peralte del mismo. El radio de rigidez efectiva es:

$$R' = \left( \frac{R}{k} \right)^{1/4} \quad (\text{Ec. 4.3})$$

De acuerdo a estas expresiones, Terzaghi definió el concepto de zona de influencia que es aproximadamente 3.5 veces  $R'$ . A la vez Vesic (1973) indicó que este valor era un tanto excesivo por lo que planteó para la zona de influencia de una carga concentrada transmitida por una columna:

$$C = \frac{2h}{\pi} \left( \frac{E}{E_s} \right)^{1/3} \quad (\text{Ec. 4.4})$$

De considerarse el módulo de deformación del suelo como constante, este valor se puede asumir en promedio hasta una profundidad diez veces el radio de rigidez debajo la placa; de tener una tendencia de variación con la profundidad se puede asumir el módulo como promedio hasta una profundidad 3.5 veces el radio de rigidez. Para la aplicación del concepto de Terzaghi para la zona de influencia, el coeficiente de balasto se puede ajustar por iteración partiéndose de un valor para la zona de influencia de 7 veces el peralte del elemento de fundación.

Definidos los parámetros anteriormente expuestos se pueden determinar los momentos en el sistema de coordenadas polares en un punto causado por la carga de la columna mediante

$$M_r = -\frac{P}{4} \left( Z_4 - \frac{1-\nu}{x} Z'_3 \right) \quad (\text{Ec. 4.5})$$

$$M_t = -\frac{P}{4} \left( \nu^* Z_4 + \frac{1-\nu}{x} Z_3 \right) \quad (\text{Ec. 4.6})$$

Siendo el momento radial y tangencial respectivamente.

Los términos Z indicados pueden obtenerse en función a la variación del rango  $r/R'$  en el gráfico propuesto por Hetenyi (1946):

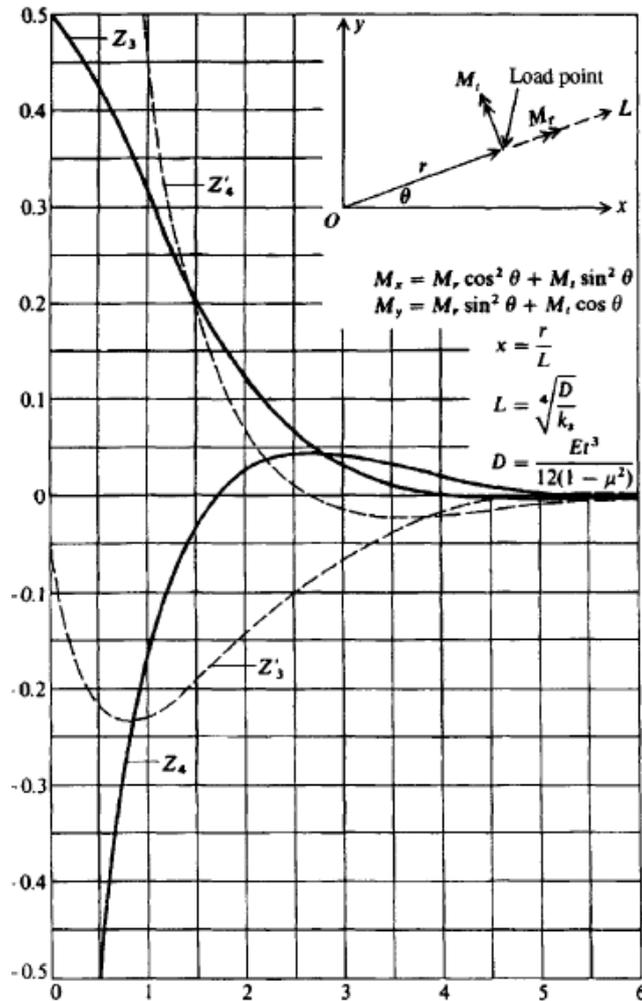


FIGURA 4.2 Gráfico para la determinación de los factores Z. (Hetenyi, 1946)

El análisis se complementa con la determinación de los momentos flectores en las direcciones  $x$  e  $y$ , desplazamientos verticales y fuerzas cortantes en puntos convenientemente fijados:

$$M_x = M_t \text{sen}^2 \theta + M_r \text{cos}^2 \theta \quad (\text{Ec. 4.7})$$

$$M_y = M_t \text{cos}^2 \theta + M_r \text{sen}^2 \theta \quad (\text{Ec. 4.8})$$

$M_t$  y  $M_r$  son los momentos flectores en las direcciones tangencial y radial respectivamente. El desplazamiento debajo de la carga es:

$$\delta = \frac{PR'^2}{8R} \quad (\text{Ec. 4.9})$$

A una distancia  $r$  desde el punto de aplicación de la carga

$$\delta = \frac{PR'^2}{4R} Z_3 \quad (\text{Ec. 4.10})$$

Fuerzas cortantes

$$V = \frac{P}{4R'} Z_4' \quad (\text{Ec. 4.11})$$

Conociéndose los desplazamientos y el valor del coeficiente de balasto empleado, las tensiones de contacto de los puntos evaluados pueden obtenerse fácilmente con la expresión

$$p = k * \delta \quad (\text{Ec. 4.12})$$

#### 4.1.2 Vigas continuas de cimentación rígidas

Para una viga continua solicitada por varias cargas en forma lineal en donde existe una excentricidad de la resultante respecto al centro del elemento viga, las tensiones de contacto máxima y mínima bajo este esquema se obtienen con la siguiente expresión:

$$q_{1,2} = \frac{R}{L} \left( 1 \pm \frac{6e}{L} \right) \quad (\text{Ec. 4.13})$$

Siendo  $R$  la resultante,  $L$  la longitud de la viga y  $e$  la excentricidad. Las tensiones de contacto generalmente tienen variación lineal en forma trapezoidal como se aprecia en la Figura 4.3.

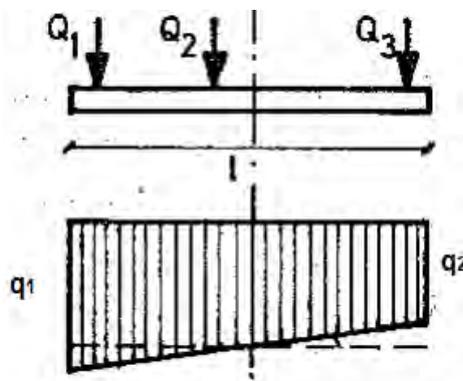


FIGURA 4.3 Representación de la variación lineal de las tensiones de contacto para un elemento lineal tipo viga.

### 4.1.3 Vigas de cimentación sobre medios elásticos

Considerando el elemento diferencial de sección de viga

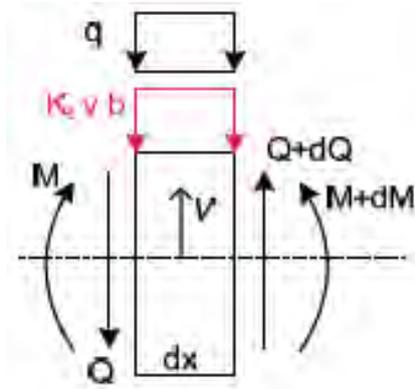


FIGURA 4.4 Equilibrio de fuerzas y momentos en un elemento diferencial de viga.

El equilibrio vertical se cumple

$$dQ = kyBdx + qdx \quad (\text{Ec. 4.14})$$

$$Q = -\frac{dM}{dx} \quad (\text{Ec. 4.15})$$

$$M = EI \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (\text{Ec. 4.16})$$

Sustituyendo en la primera ecuación se tiene

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + kBy + q = 0 \quad (\text{Ec. 4.17})$$

$$K = k * B \quad (\text{Ec. 4.18})$$

Cuando no hay carga exterior la expresión se deduce

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = 0 \quad (\text{Ec. 4.19})$$

Corresponde una solución del tipo

$$y = e^{ax} \quad (\text{Ec. 4.20})$$

Sustituyendo en la expresión anterior se tiene

$$a^4 E I e^{ax} + K e^{ax} = 0 \quad (\text{Ec.4.21})$$

$$a = \sqrt[4]{\frac{K}{EI}} (-1)^{1/4} \quad (\text{Ec. 4.22})$$

$$a = (\pm 1 \pm i) \beta \quad (\text{Ec. 4.23})$$

$$\beta = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}} \quad (\text{Ec. 4.24})$$

La solución final tiene la forma

$$y = \sum_{1,4} A_i e^{a_i x} \quad (\text{Ec. 4.25})$$

En término de exponenciales trigonométricas

$$y = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \text{sen} \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \text{sen} \beta x) \quad (\text{Ec. 4.26})$$

Que corresponde a la solución para tramos de la viga sin carga. Las magnitudes restantes como momentos y cortantes pueden ser fácilmente deducidas por derivación a partir de esta expresión.

#### **El caso de viga infinita con carga puntual**

Se asume que la viga está cargada en el centro del tramo infinito debiendo aplicarse las condiciones de contorno para la determinación de las constantes de la expresión. Estas se deben a las deflexiones en el infinito que valen cero y la pendiente debajo de la carga también vale cero por simetría. Por condición de equilibrio en el punto  $x=0$  se establece (ver Figura 4.5)

$$Q = -EI \frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{P}{2} \quad (\text{Ec. 4.27})$$

$$C_3 = -\frac{P\beta}{2K} \quad (\text{Ec. 4.28})$$

Entonces

$$y = -\frac{P\beta}{2K} e^{-\beta x} (\cos \beta x + \text{sen} \beta x) \quad (\text{Ec. 4.29})$$

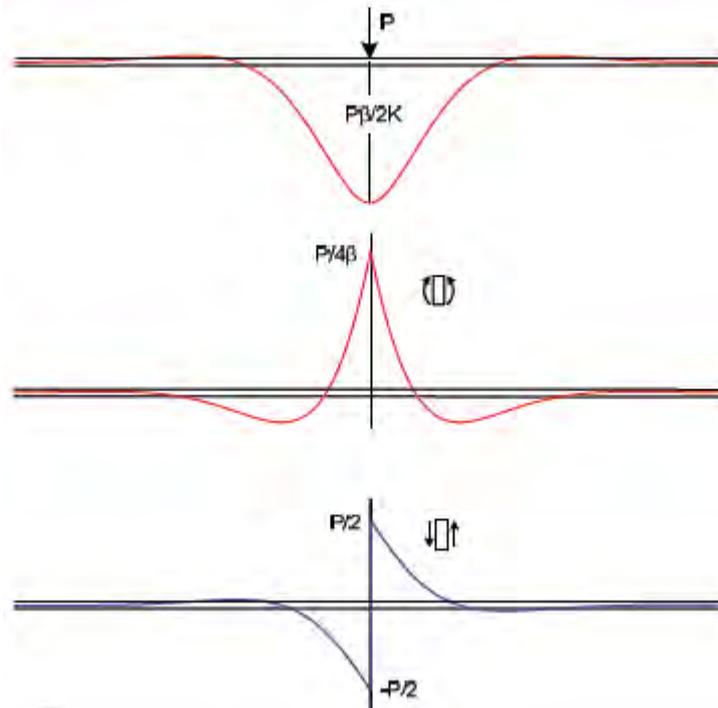


FIGURA 4.5 Esquema de deformada, diagrama de momentos y fuerzas cortantes de una viga infinita solicitada por una carga puntual.

El momento es

$$M = \frac{P}{4\beta} e^{-\beta x} (\cos \beta x - \text{sen} \beta x) \quad (\text{Ec. 4.30})$$

y el cortante

$$Q = \frac{P}{2} e^{-\beta x} (\cos \beta x) \quad (\text{Ec. 4.31})$$

Para la obtención rápida de estos parámetros se han elaborado ábacos y tablas en base a estas funciones denominadas básicas que se adjuntan en el Apéndice.

#### **Viga infinita con carga distribuida**

La evaluación se hace en el tramo izquierdo no cargado y el tramo derecho cargado imponiéndose las respectivas condiciones de contorno en la solución de la ecuación diferencial

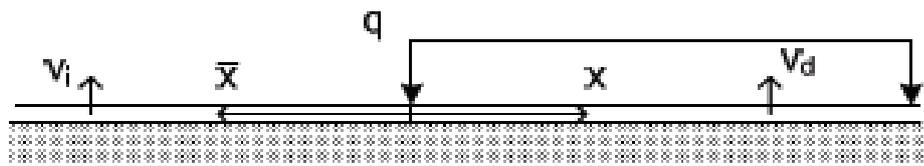


FIGURA 4.6 Esquema de una viga de cimentación infinita con carga distribuida finita

Se obtienen

$$y_i = -\frac{q}{2K} e^{-\beta \bar{x}} \left( \cos \beta \bar{x} \right) \quad (\text{Ec. 4.32})$$

$$y_d = -\frac{q}{K} \left( 1 - \frac{e^{-\beta x} \cos \beta x}{2} \right) \quad (\text{Ec. 4.33})$$

Los momentos

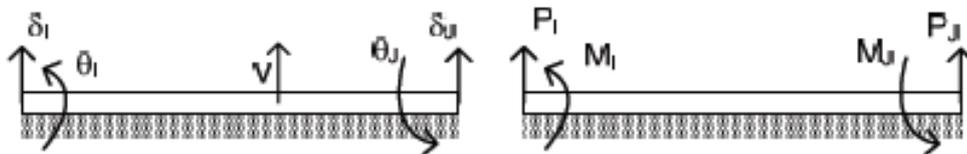
$$M_i = -\frac{q}{4\beta^2} e^{-\beta \bar{x}} \text{sen} \beta \bar{x} \quad (\text{Ec. 4.34})$$

$$M_d = \frac{q}{4\beta^2} e^{-\beta x} \text{sen} \beta x \quad (\text{Ec. 4.35})$$

Observándose que sólo produce momento flector las componente antisimétrica de la carga  $q/2$ .

#### **Viga de longitud finita. Tratamiento analítico**

En la Figura 4.7 se identifican los 4 grados de libertad para la viga y su posterior análisis



**FIGURA 4.7** Identificación de los grados de libertad de la viga de longitud finita

A la ecuación de la homogénea se sustituyen exponenciales por identidades trigonométricas resultando

$$y = A \cos \beta x \cosh \beta x + B \cos \beta x \sinh \beta x + C \text{sen} \beta x \cosh \beta x + D \text{sen} \beta x \sinh \beta x \quad (\text{Ec. 4.36})$$

Resolviendo para los 4 grados de libertad vistos con

$$s = \text{sen} \beta L \quad (\text{Ec. 4.37})$$

$$c = \cos \beta L \quad (\text{Ec. 4.38})$$

$$s' = \text{senh} \beta L \quad (\text{Ec. 4.39})$$

$$c' = \cosh \beta L \quad (\text{Ec. 4.40})$$

Se tiene

$$y_{x=0} = A \quad (\text{Ec. 4.41})$$

$$y_{x=L} = Acc' + Bcs' + Csc' + Dss' \quad (\text{Ec. 4.42})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \beta(B + C) \quad (\text{Ec. 4.43})$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=L} = \beta[A(cs' - sc') + B(cc' - ss') + C(ss' + cc') + D(sc' + cs')] \quad (\text{Ec. 4.44})$$

En el desarrollo se observó un total de cuatro ecuaciones para un número igual de incógnitas A, B, C y D siendo accesible su resolución, las expresiones simplificadas tienen la forma

$$A = y_{x=0} \quad (\text{Ec. 4.45})$$

$$B = \frac{1}{\beta H} \left[ -s^2 \theta_I - ss' \theta_J - \beta(sc + s'c') y_I + \beta(sc' + cs') y_J \right] \quad (\text{Ec. 4.46})$$

$$C = \frac{1}{\beta H} \left[ s'^2 \theta_I + ss' \theta_J + \beta(sc + s'c') y_I - \beta(sc' + cs') y_J \right] \quad (\text{Ec. 4.47})$$

$$D = \frac{1}{\beta H} \left[ (sc - s'c') \theta_I + (s'c - sc') \theta_J - \beta(s'^2 + s^2) y_I + 2\beta ss' y_J \right] \quad (\text{Ec. 4.48})$$

Que corresponden a las 4 constantes de la expresión de la deformada de la viga. Haciéndose el arreglo correspondiente de las soluciones, los cortantes y momentos de la viga pueden obtenerse mediante la expresión matricial:

$$\begin{bmatrix} P_I \\ M_I \\ P_J \\ M_J \end{bmatrix} = \frac{EI}{ss - s's'} \begin{bmatrix} 4(c's' + cs)\beta^3 & 2(s's' + ss)\beta^2 & -4(cs' + c's)\beta^3 & 4ss'\beta^2 \\ & 2(c's' - cs) & -4ss'\beta^2 & 2(c's - cs') \\ & & 4(c's' + cs)\beta^3 & -2(s's' + ss)\beta^2 \\ \textit{simétrico} & & & 2(c's' - cs) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_I \\ \theta_I \\ y_J \\ \theta_J \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.49})$$

La solución particular para una viga de longitud finita solicitada por una carga P en el centro tiene 3 grados de libertad por tramo analizado (Figura 4.8). Por simetría no experimentará giro en la sección media.

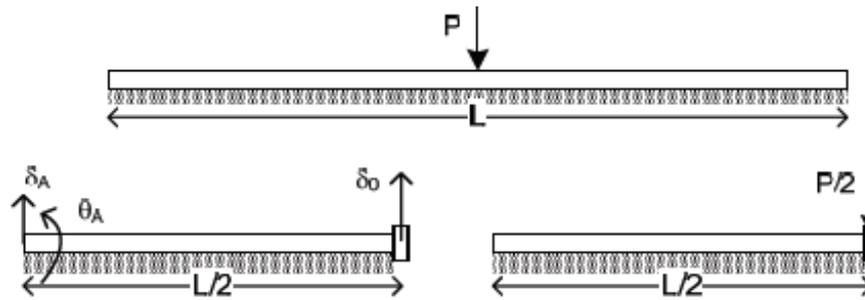


FIGURA 4.8 Viga de longitud finita solicitada por carga puntual centrada.

Para el primer tramo la matriz solución es

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{EI}{ss - s's'} \begin{bmatrix} 4(c's' + cs)\beta^3 & 2(s's' + ss)\beta^2 & -4(cs' + c's)\beta^3 \\ & 2(c's' - cs) & -4ss'\beta^2 \\ & & 4(c's' + cs)\beta^3 \\ & & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_A \\ \theta_A \\ y_0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{Ec. 4.50})$$

#### Viga de longitud finita. Solución de Timoshenko-Hetenyi

Puesto que en la práctica las cimentaciones superficiales continuas son de longitud finita el cual, generalmente, su solución es bastante laboriosa o en su defecto requiere efectuarse una serie de integraciones imponiendo las condiciones de borde específicas. Cuando la cimentación es solicitada por cargas simétricas es perfectamente aplicable el modelo de Timoshenko-Hetenyi considerando la zapata como infinita con las cargas reales, determinando unas acciones ficticias M y Q que aplicadas en los puntos correspondientes a los bordes del elemento den lugar a que en estos se produzcan las condiciones reales como se observa en la Figura 4.9, (Rodríguez J.M, 1980).

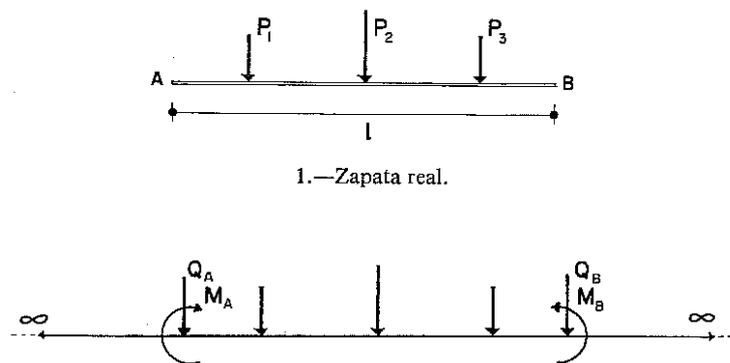


FIGURA 4.9 Modelo de Timoshenko. Viga de cimentación real y ficticia con acciones ficticias que reproducen las condiciones de borde en A y B.

### Solución de Bleich

Es particularmente útil emplear este método cuando no hay simetría en la disposición de las cargas actuando sobre una cimentación. En principio se calcula la viga de longitud infinita hallando en A y B los momentos y cortantes (Figura 4.10). Se determinan a continuación las fuerzas  $F_1, F_2, F_3$  y  $F_4$  que aplicadas a la viga de longitud infinita dan, superponiendo sus efectos a aquellos de  $P_1$  y  $P_2$  etc, los momentos y cortantes en A y B iguales a cero, lo que equivale a las condiciones de extremo de la viga de longitud finita. (Jiménez Salas et al, 1981).

Las cargas ficticias se colocan convenientemente en las abscisas unitarias también ficticias  $\pm \pi L/2; \pm \pi L/4$

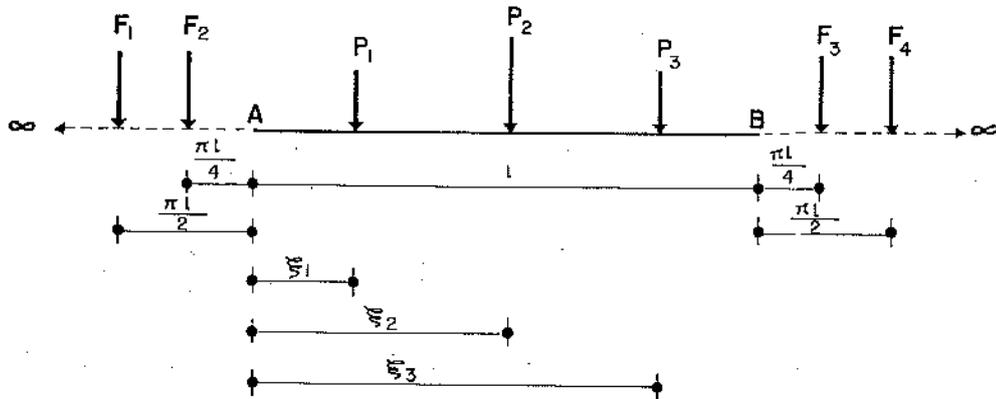


FIGURA 4.10 Modelo de Bleich de viga de longitud finita

El cálculo se simplifica notablemente cuando

$$F_1 = F_2 = F_3 = F_4 \quad (\text{Ec. 4.51})$$

### Correlación con el módulo de deformación cortante

Un caso particular ha sido estudiado referido al suelo en condición no drenada vale decir con el módulo de Poisson igual a 0.5 y con una variación lineal del módulo de cortante  $G$  con la profundidad  $z$  debajo de la cimentación, se tiene la siguiente relación

$$G = \lambda * z \quad (\text{Ec. 4.52})$$

Bajo esta condición, Gibson (1967) demostró que el comportamiento del suelo se asemeja a la de los resortes de Winkler cuando el valor del coeficiente de balasto es de

$$k = 2 * \lambda^2 \quad (\text{Ec. 4.53})$$

En donde  $\gamma$  es un coeficiente de proporcionalidad, que define además la unidad del coeficiente de balasto resultante con esta premisa.

### **Empleo de ábacos**

En el cálculo vigas de cimentación sobre medios elásticos se simplifica notoriamente con el empleo de ábacos y nomogramas, algunas de ellas se incluyen en el Anexo 2.

Para el caso de vigas finitas sometidas a varias cargas concentradas las expresiones para calcular la deflexión, giro, momentos y cortantes son

$$y_{.xi} = \frac{\beta}{2K} \sum_{i=1}^n P_i(Fy)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.54})$$

$$\theta_{.xi} = \frac{\beta^2}{K} \sum_{i=1}^n P_i(F\theta)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.55})$$

$$M_{.xi} = \frac{1}{4\beta} \sum_{i=1}^n P_i(FM)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.56})$$

$$V_{.xi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i(FV)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.57})$$

y cuando es sometido a varios momentos aplicados

$$y_{.xi} = \frac{\beta^2}{K} \sum_{i=1}^n M_i(Fy)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.58})$$

$$\theta_{.xi} = \frac{\beta^3}{K} \sum_{i=1}^n M_i(F\theta)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.59})$$

$$M_{.xi} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M_i(FM)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.60})$$

$$V_{.xi} = \frac{\beta}{2} \sum_{i=1}^n M_i(FV)_{ij} \quad (\text{Ec. 4.61})$$

El índice  $i$  indica la sección en estudio y  $j$  la ubicación de la carga. Los términos entre paréntesis se obtienen de los ábacos o resúmenes calculados. Las presiones de contacto se obtienen directamente aplicando la expresión de Winkler que toma la forma

$$p = k * y \quad (\text{Ec. 4.62})$$

Considerando que las deflexiones han sido obtenidos mediante el procedimiento descrito. Una aplicación detallada sobre este caso se presenta en párrafo posterior.

Además para la aplicación y uso de los datos se considera como viga de longitud finita cuando se cumple

$$\beta L / 2 < \pi$$

Se presenta en la Figura 4.11 el resumen de las fórmulas resumidas de solución para los casos de vigas finitas e infinitas que son las mismas que las anteriores y que solamente varían en forma:

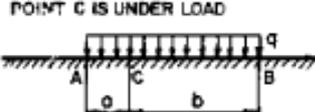
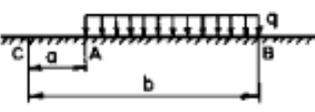
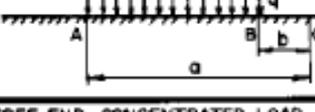
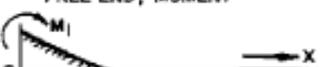
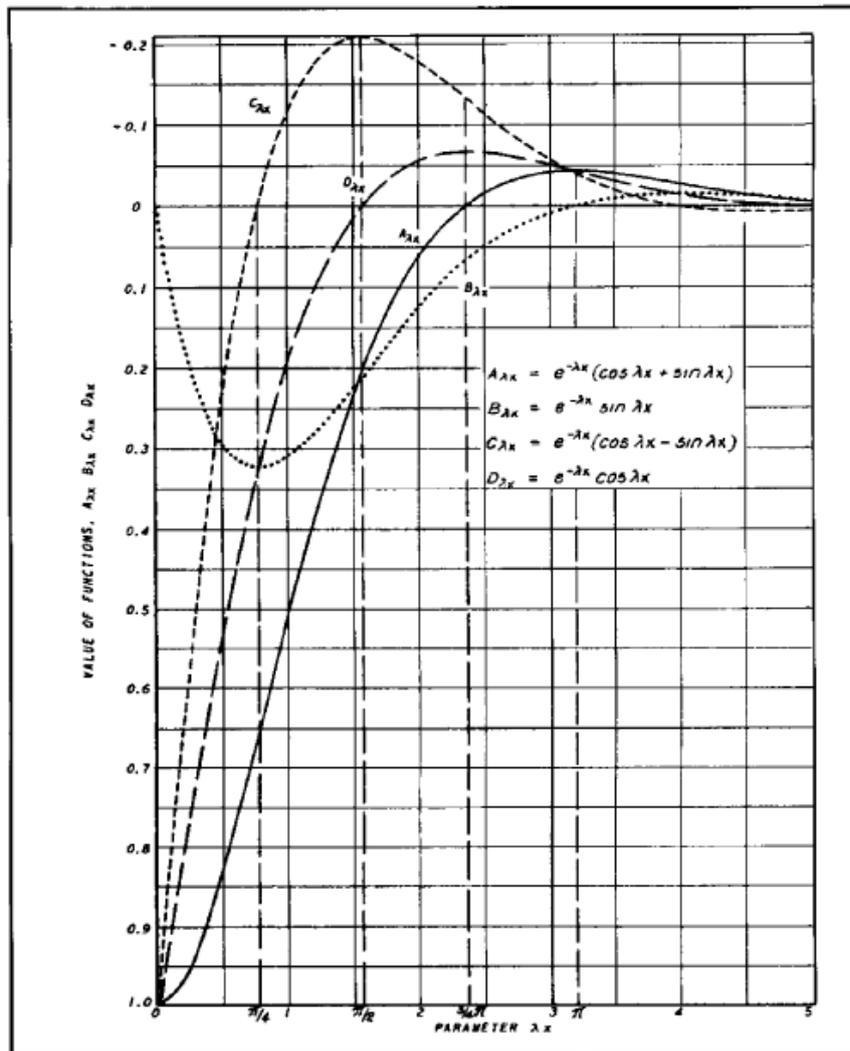
INFINITE BEAM	<p style="text-align: center;">CONCENTRATED LOAD</p>  <p>DEFLECTION: <math>y = \frac{P\lambda}{2K} A_{\lambda x}</math>            MOMENT: <math>M = \frac{P}{4\lambda} C_{\lambda x}</math>            SHEAR: <math>Q = -\frac{P}{2} D_{\lambda x}</math></p>	<p style="text-align: center;">APPLIED MOMENT</p>  <p>DEFLECTION: <math>y = \frac{Mo \lambda^2}{K} B_{\lambda x}</math>            MOMENT: <math>M = \frac{Mo}{2} D_{\lambda x}</math>            SHEAR: <math>Q = -\frac{Mo \lambda}{2} A_{\lambda x}</math></p>
	UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD	
	<p style="text-align: center;">POINT C IS UNDER LOAD</p>  <p>DEFLECTION: <math>y_c = \frac{q}{2K} (2 - D_{\lambda a} - D_{\lambda b})</math>            MOMENT: <math>M_c = \frac{q}{4\lambda^2} (B_{\lambda a} + B_{\lambda b})</math>            SHEAR: <math>Q_c = \frac{q}{4\lambda} (C_{\lambda a} - C_{\lambda b})</math></p>	
	<p style="text-align: center;">POINT C IS LEFT OF LOAD</p>  <p>DEFLECTION: <math>y_c = \frac{q}{2K} (D_{\lambda a} - D_{\lambda b})</math>            MOMENT: <math>M_c = -\frac{q}{4\lambda^2} (B_{\lambda a} - B_{\lambda b})</math>            SHEAR: <math>Q_c = \frac{q}{4\lambda} (C_{\lambda a} - C_{\lambda b})</math></p>	
<p style="text-align: center;">POINT C IS RIGHT OF LOAD</p>  <p>DEFLECTION: <math>y_c = -\frac{q}{2K} (D_{\lambda a} - D_{\lambda b})</math>            MOMENT: <math>M_c = \frac{q}{4\lambda^2} (B_{\lambda a} - B_{\lambda b})</math>            SHEAR: <math>Q_c = \frac{q}{4\lambda} (C_{\lambda a} - C_{\lambda b})</math></p>		
SEMI-INFINITE BEAM	<p style="text-align: center;">FREE END, CONCENTRATED LOAD</p>  <p>DEFLECTION: <math>y = \frac{2P_i \lambda}{K} D_{\lambda x}</math>            MOMENT: <math>M = -\frac{P_i}{\lambda} B_{\lambda x}</math>            SHEAR: <math>Q = -P_i C_{\lambda x}</math></p>	
	<p style="text-align: center;">FREE END, MOMENT</p>  <p>DEFLECTION: <math>y = -\frac{2M_i \lambda^2}{K} C_{\lambda x}</math>            MOMENT: <math>M = M_i A_{\lambda x}</math>            SHEAR: <math>Q = -2M_i \lambda B_{\lambda x}</math></p>	
	<p style="text-align: center;">FREE END BEAM, CONCENTRATED LOAD NEAR END</p>  <p>DEFLECTION: <math>y = \frac{P\lambda}{2K} [(C_{\lambda a} + 2D_{\lambda a})A_{\lambda x} - 2(C_{\lambda a} + D_{\lambda a})B_{\lambda x} + A_{\lambda(a+x)}]</math>            IF NOTATION <math>(C_{\lambda a} + 2D_{\lambda a}) = \alpha</math>            AND <math>(C_{\lambda a} + D_{\lambda a}) = \beta</math> IS USED            MOMENT: <math>M = \frac{P}{4\lambda} \{ \alpha C_{\lambda x} - 2\beta D_{\lambda x} + C_{\lambda(a-x)} \}</math>            SHEAR: <math>Q = -\frac{P}{2} \{ \alpha D_{\lambda x} - \beta A_{\lambda x} \pm D_{\lambda(a-x)} \}</math></p>	

FIGURA 4.11 Cortantes, momentos y deflexiones para vigas infinitas y semi infinitas sobre fundación elástica. Tomado de Naval Facilities Engineering Command Virginia (1986).

Igualmente el ábaco consolidado de las funciones para los esfuerzos cortantes, momentos flectores y deflexiones de los casos considerados se exhibe en la Figura 4.12.



**FIGURA 4.12** Funciones para cortantes, momentos y deflexiones para vigas sobre fundación elástica. Tomado de Naval Facilities Engineering Command Virginia (1986)

Para los casos de análisis se clasifican a las vigas de acuerdo a su rigidez relativa en los siguientes 3 grupos

Grupo 1, vigas cortas

$$\lambda L < \pi/4$$

grupo 2, vigas de longitud media

$$\pi/4 < \lambda L < \pi$$

grupo 3, vigas largas

$$\lambda L > \pi$$

#### 4.1.4 Estimación de tensiones de contacto en zapatas

La determinación de las tensiones de contacto en la interfaz suelo estructura es un problema con una larga data de investigaciones desde diversos puntos de vista especialmente para los casos de zapatas combinadas y losas de cimentación; no obstante para el caso de zapatas individuales solicitadas por carga concentrada transmitida por una columna el tema ha sido apropiadamente manejado llegándose a establecer relaciones más o menos simples.

##### *El caso de la zapata cuadrada sobre suelo granular*

Reimbert et al (1979) muestra la solución aproximada para una zapata cuadrada convencional de lado  $a$  debida a una presión máxima aplicada de magnitud  $P$ . La respuesta del suelo queda definida de acuerdo a los ejes de la zapata por la revolución de los arcos de parábola cuya cuerda es igual al lado  $a$  y flecha igual  $Pm$ . El volumen así generado es igual a

$$Vol = \frac{P_m * \sqrt{2}}{3} a^2 \quad (\text{Ec. 4.63})$$

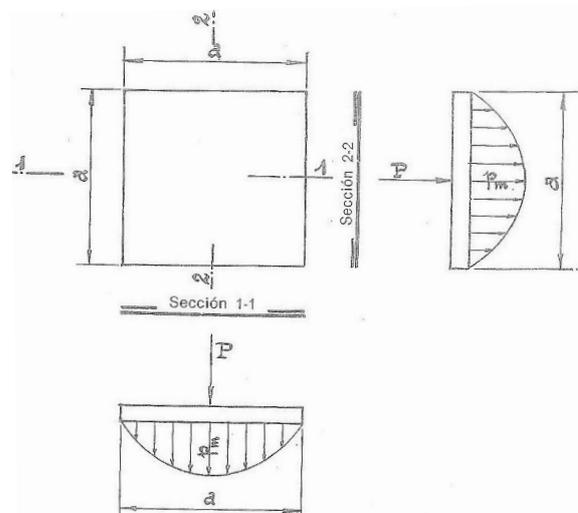
Entonces

$$P = \frac{P_m * \sqrt{2}}{3} a^2 \quad (\text{Ec. 4.64})$$

Obteniéndose

$$P_m = \frac{P * 3}{\sqrt{2} * a^2} \quad (\text{Ec. 4.65})$$

que es la presión máxima referida al terreno y que tiene lugar en el centro del elemento (ver Figura 4.13)



**FIGURA 4.13** Distribución de la presión de contacto para una zapata cuadrada sometida a una carga puntual  $P$ . (Reimbert et al,1979)

### Zapata rectangular

Tiene similitud con la expresión anterior. En el caso en que  $B > b$ , la presión máxima debida a la carga total aplicada  $P$  es

$$P_m = \frac{P * 3}{\sqrt{2} * B * b} \quad (\text{Ec. 4.66})$$

### Zapata continua

Bajo este criterio la presión de contacto en el límite inferior de la zapata se define de acuerdo al volumen limitado por unidad de longitud por el arco de parábola de cuerda igual a  $B$  y flecha en el centro  $P_m$

$$P_m = \frac{P * 1.5}{B * 1.00} \quad (\text{Ec. 4.67})$$

Para el caso de arenas se han hecho las comprobaciones sobre la variación parabólica de la presión de contacto en este tipo de cimientos. En la Figura 4.14 se puede visualizar que cuando la carga media es de 2,71 toneladas por pie cuadrado, la presión sobre el borde de la zapata es despreciable, sin embargo la presión en el centro del elemento es de 5.2 toneladas por pie cuadrado. Ello da una presión máxima casi al doble de la presión media, lo que concuerda con una distribución parabólica.

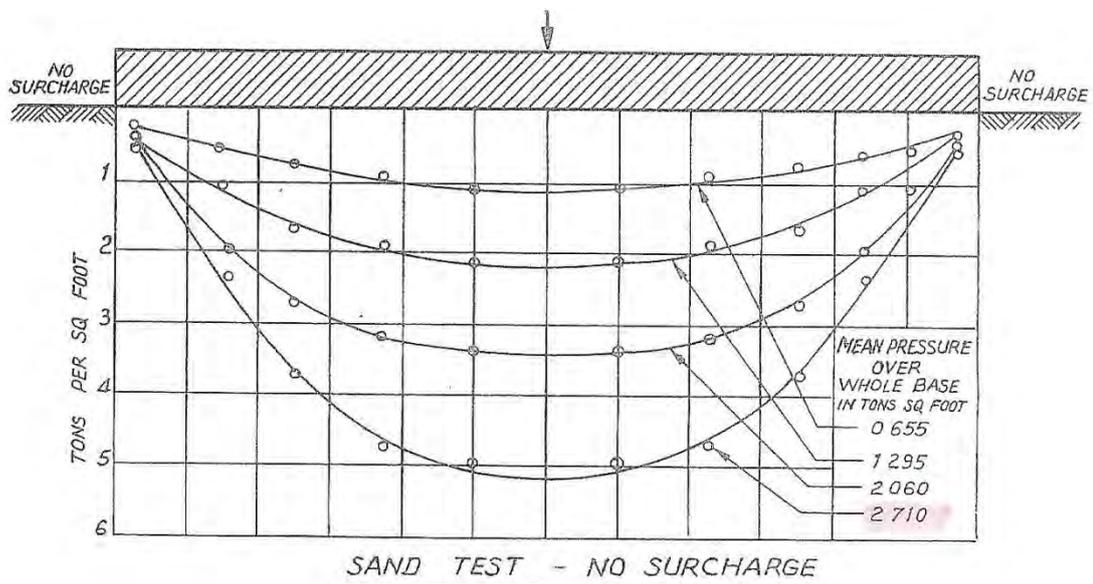
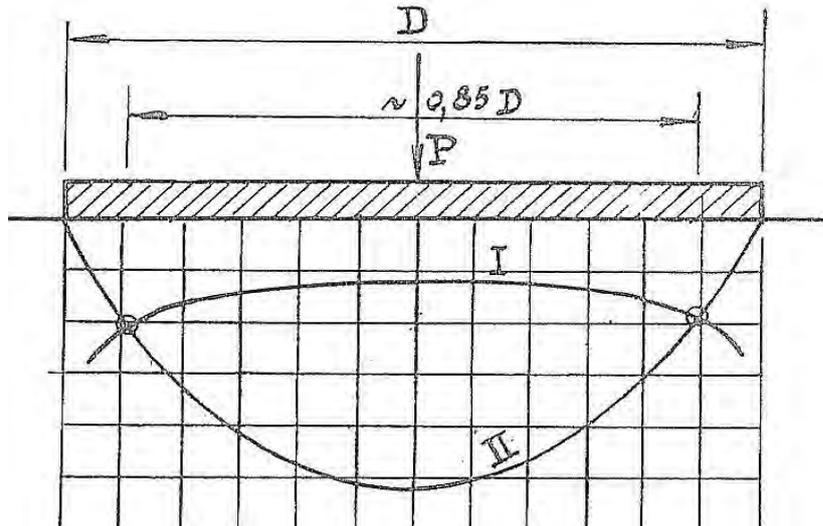


FIGURA 4.14 Comprobación de la distribución parabólica de la presión de contacto para una zapata sobre suelo no cohesivo. (Reimbert, 1979)

### Zapatas sobre suelos cohesivos

La distribución de la presión de contacto es diferente en relación a la que se presenta en suelo tipo granular (ver Figura 4.15), para el caso de zapatas con medidas y formas definidas no se ha podido comprobar experimentalmente la distribución exacta; sin embargo se han adoptado las siguientes simplificaciones:



**FIGURA 4.15** Ensayo de carga sobre una zapata circular, la curva I representa suelo cohesivo y la II suelo no cohesivo; a  $0.85D$  se produce la intersección de las curvas. (Reimbert, 1979)

Para zapata cuadrada

$$P_m = \frac{P * 1.75}{a^2} \quad (\text{Ec. 4.68})$$

Para zapata rectangular

$$P_m = \frac{P * 1.75}{B * b} \quad (\text{Ec. 4.69})$$

Zapata continua

$$P_m = \frac{P * 1.30}{B * 1.00} \quad (\text{Ec. 4.70})$$

Para el caso de una zapata rígida solicitada por una carga con excentricidad  $e$ , Dashko K (1980), presenta la siguiente fórmula:

$$P(y) = \frac{1 + \frac{8e}{B^2}}{\pi \sqrt{\frac{B^2}{4} - y^2}} P \quad (\text{Ec. 4.71})$$

Para  $e$  igual a  $B/2$ , osea en el extremo de la zapata la reacción del suelo toma un valor infinito; haciendo  $e=0$  vale decir para una carga centrada la expresión se reduce a

$$P(y) = \frac{P}{\pi \sqrt{\frac{B^2}{4} - y^2}} \quad (\text{Ec. 4.72})$$

Que tiene alguna similitud en forma con las expresiones mostradas anteriormente (Figura 4.16).

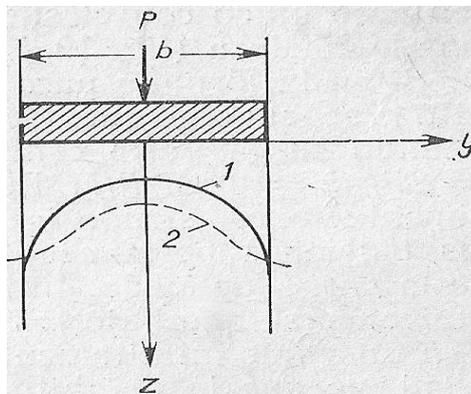


FIGURA 4.16 Distribución de las tensiones en la interfaz de una zapata rígida corrida con el suelo al aplicar una carga central; 1, diagrama teórico; 2, diagrama real. Dashko (1980)

Para una zapata continua con una distribución irregular de cargas tiende a variar la presión de contacto hacia una forma convexa o cóncava con variaciones en los bordes tal como se aprecia en la figura 4.17. (Rodríguez J.M,1980).

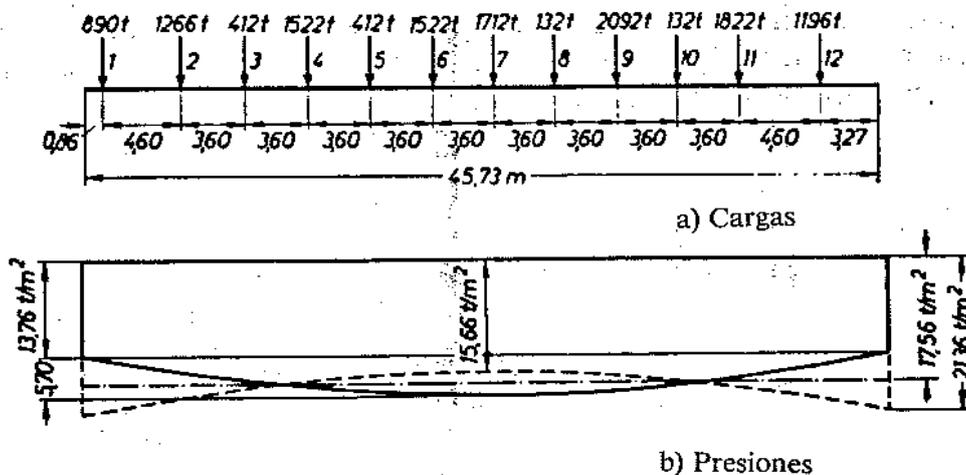


FIGURA 4.17 Distribución de tensiones de contacto para un caso particular de cargas aplicadas.

Coduto D (2001) propone la siguiente expresión para la determinación de las presiones de contacto del suelo  $q$  interactuando con la estructura de cimentación, aplicando la teoría del coeficiente de balasto

$$\sum P + W_f - u_d = \int q^* dA = \int \delta k_s dA \quad (\text{Ec. 4.73})$$

En donde  $P$  representa las cargas actuantes sobre la cimentación,  $W_f$  el peso de la cimentación,  $u_d$  la presión de poros en el suelo,  $q$  la presión de contacto,  $k_s$  coeficiente de balasto,  $\delta$  la deflexión y  $A$  área de contacto. Dicha área se discretiza con una serie de resortes actuando hacia arriba en la cimentación (ver Figura 4.18):

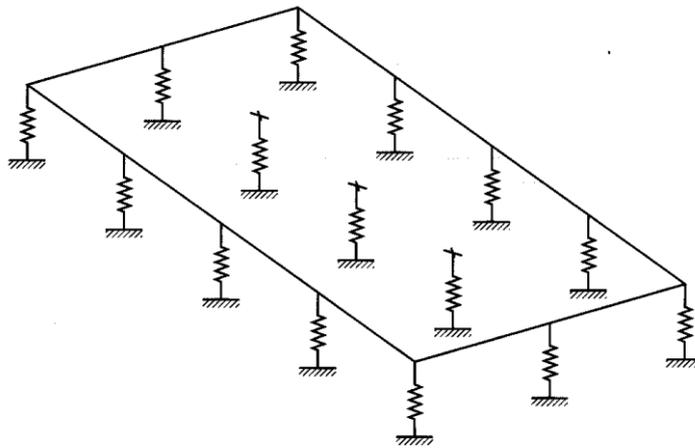


FIGURA 4.18 Diagrama de reacción del suelo sobre una losa convencional

### **Zapatas cargadas excéntricamente**

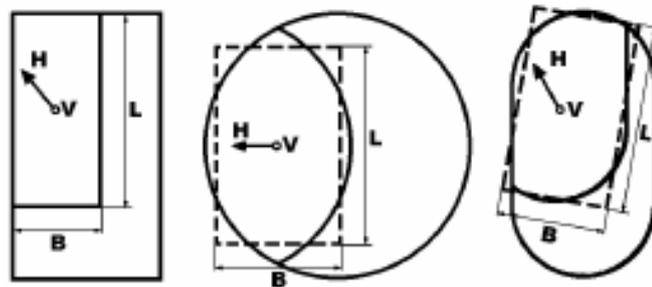
Varios autores han convenido en sugerir una distribución uniforme de las presiones de contacto bajo un área cargada excéntricamente en el área de fundación efectiva, pudiendo ser determinada por medio de las siguientes condiciones. (Brinch Hansen, 1961):

- El área efectiva estará cargada céntricamente.
- Su contorno interno deberá determinarse por el principio de simetría radial

Además la posición y longitud de los lados  $B$  y  $L$  del rectángulo equivalente estarán definidas en función de (Figura 4.19):

- Los centros de gravedad deberán coincidir
- Los ejes principales deberán coincidir
- El área efectiva deberá ser igual a  $B \cdot L$
- La relación de máximo a mínimo en la sección de módulo plástico deberá ser igual a  $L/B$ .

Las dimensiones equivalentes definidas serán utilizadas en los cálculos de capacidad portante usando las fórmulas conocidas.



**FIGURA 4.19** Área de fundaciones equivalentes y efectivas. Tomado de Brinch Hansen (1961)

El área efectiva se calcula mediante las siguientes longitudes corregidas

$$B' = B - 2e_B \quad (\text{Ec. 4.74})$$

$$L' = L - 2e_L \quad (\text{Ec. 4.75})$$

Esta tendencia de los nuevos métodos de comprobación asumiendo una distribución lineal en el área efectiva también es de aceptación en el Eurocódigo 7 para fines de diseño.

## 4.2 SOLUCION DE CASOS PRACTICOS

Como parte del desarrollo del presente sub ítem se hace la aplicación de casos prácticos, uno de ellos consistente en una cimentación continua sobre un suelo con comportamiento mecánico isótropo elástico y lineal, homogéneo en su conformación estratigráfica lo que se evidencia por su continuidad de las funciones de deformabilidad con la profundidad. Como parte de la aplicación se determinarán los asentamientos producidos por el elemento de cimentación. En base a los resultados obtenidos se podrá verificar la capacidad admisible del terreno que no son otros que las mismas tensiones de contacto obtenidas en la interfase y también correlacionar con la constante de rigidez o coeficiente de balasto y poder complementar el diseño estructural. A modo de verificación, el ejercicio también se resuelve por diferencias finitas y elementos finitos.

### 4.2.1 Aplicación para el caso de una viga de cimentacion sobre medio elástico

Se plantea un elemento de cimentación solicitada por dos cargas concentradas dispuestas conforme a la Figura 4.20, ejercicio resuelto por Ramírez G (1969)

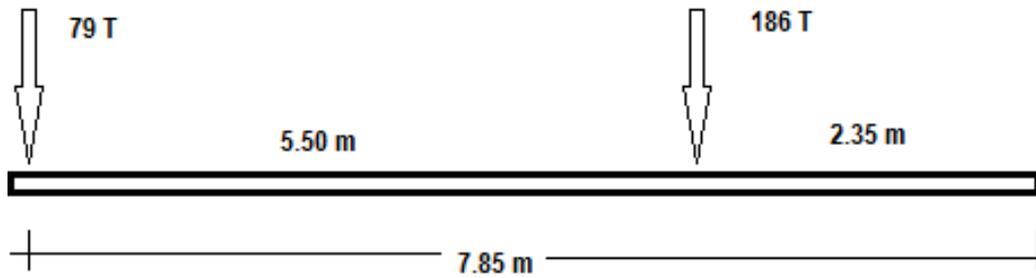


FIGURA 4.20 Viga de cimentación sobre medio elástico.

**Datos**

Presión admisible del suelo

$$\sigma_s = 2 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

Coefficiente de balasto del suelo

$$k_s = 4 \text{ kg} / \text{cm}^3$$

Módulo de elasticidad del elemento viga

$$E = 2.32 \times 10^5 \text{ kg} / \text{cm}^2$$

Longitud de la viga

$$L = 7.85 \text{ m}$$

Ancho de viga

$$B = 2 \text{ m}$$

Peralte de viga

$$h = 1 \text{ m}$$

Característica del sistema, se evalúa con la fórmula

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4EI}}$$

$$K = k_s B$$

$$I = \frac{B * h^3}{12}$$

Reemplazando datos y operando se tiene

$$\lambda = 0.15 * 10^{-2} \text{ cm}^{-1}$$

Por consiguiente

$$\lambda L = 1.18 \approx 1.20$$

$$\lambda L / 2 = 0.59 < \pi$$

Por lo que se trata de una viga de longitud finita

### Condición de rigidez suelo-elemento estructural

El criterio de rigidez en estos casos es gobernado por el peralte del elemento estructural no obstante que los parámetros del suelo de cimentación permanecen invariables. Para el caso que se analiza esta condición se basa en el criterio de Hetenyi y se resume en el cuadro:

**TABLA 4.1** Determinación de la condición de rigidez para la viga del presente ejemplo.

h(m)	L(m)	B(m)	Ks(KN/m3)	E(KN/m2)	I(m4)	$\lambda(1/m)$	$\lambda*L$	criterio	condición
0.5	7.8	2.0	40000	23200000	0.02083	0.451	3.518	$\lambda*L > \pi$	cimiento flexible
1.0	7.8	2.0	40000	23200000	0.16667	0.2682	2.0918	$\pi/2 < \lambda*L < \pi$	flexibilidad intermedia

### Cálculo de asientos en la interfaz suelo viga

Para el caso se utilizan los ábacos F-0 a F-5 que obran en anexos con los siguientes datos

$$P_1 = 79\text{ton} \rightarrow A/L = 0$$

$$P_2 = 186\text{ton} \rightarrow A/L = 5.50/7.85 = 0.7$$

Los asientos se evalúan en nodos pertenecientes a las posiciones 0, 0.3, 0.5, 0.7 y 1 de la longitud respectiva de izquierda a derecha; con estos datos más el valor del factor de amortiguación se acude a los ábacos indicados de líneas de influencia de presiones indicados, obteniendo los datos

**TABLA 4.2** Determinación de los factores de viga en base a las líneas de influencia F-0 a F-5. Ver anexo 4

Posición de la carga A/L	SECCIONES X/L				
	0.0	0.3	0.5	0.7	1.0
0.0	6.852	3.657	1.613	-0.356	-3.262
0.7	-0.356	0.876	1.698	2.519	3.657

Utilizando la expresión para calcular los asientos en las secciones consideradas (Ec. 4.54) y con los valores de la Tabla 4.2 se tiene

$$y_{xi} = \frac{\lambda}{2K} \sum_{i=1}^n P_i (Fy)_{ij}$$

$$y_{0.0} = 0.09375 * 10^{-2} [79(6.852) + 186(-0.356)] = 0.448\text{cm}$$

$$y_{0.3} = 0.09375 * 10^{-2} [79(3.657) + 186(0.876)] = 0.424\text{cm}$$

$$y_{0.5} = 0.09375 * 10^{-2} [79(1.613) + 186(1.698)] = 0.415\text{cm}$$

$$y_{0.7} = 0.09375 * 10^{-2} [79(-0.356) + 186(2.519)] = 0.413\text{cm}$$

$$y_{1.0} = 0.09375 * 10^{-2} [79(-3.262) + 186(3.657)] = 0.398 \text{ cm}$$

Por ser directamente proporcionales la presión de contacto con el asiento, se puede obtener el valor máximo correspondiente también al asiento máximo con

$$p = k_s y = 4 * 0.448 = 1.795 \text{ kg/cm}^2$$

Valor que es menor a la capacidad admisible nominal dada para este ejercicio. Se presenta el cuadro de cálculos para el resto de las posiciones evaluadas (Tabla 4.3) además de las deflexiones y momentos flectores comparado con otros métodos (Tablas 4.14 y 4.15).

Para el cálculo de los momentos flectores y fuerzas cortantes el procedimiento es exactamente el mismo, obteniéndose los diagramas finales (Figura 4.21):

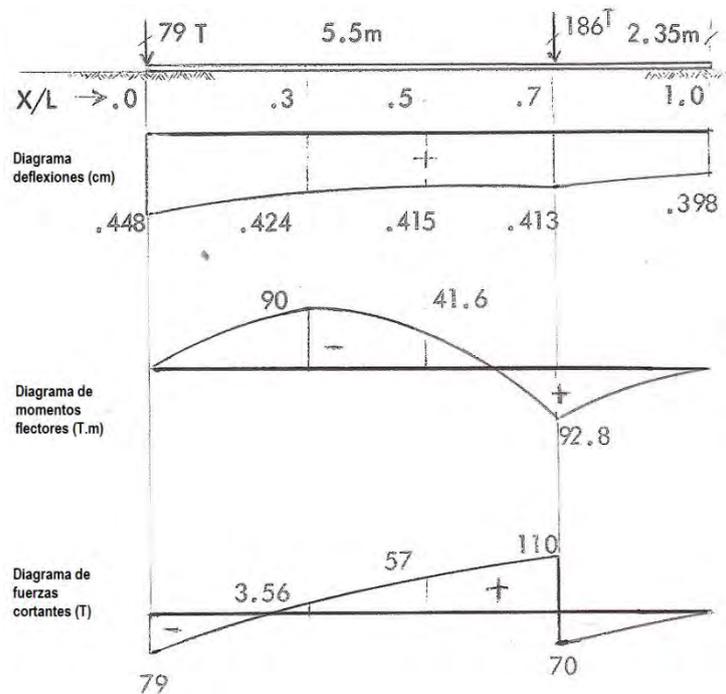


FIGURA 4.21 Diagramas de deflexiones, momentos y fuerzas cortantes

TABLA 4.3 Resumen de las tensiones de contacto obtenidos para la viga sobre apoyo elástico,  $k=4 \text{ kg/cm}^3$

posición	Asiento elástico (cm)	tensión de contacto (Kg/cm <sup>2</sup> )	tensión de contacto (KN/m <sup>2</sup> )
0.0	0.448	1.792	179.20
0.3	0.424	1.696	169.60
0.5	0.415	1.66	166.00
0.7	0.413	1.652	165.20
1.0	0.398	1.592	159.20

#### 4.2.2 Aplicación del método diferencias finitas al mismo caso

Con los mismos datos del elemento anterior hacemos la subdivisión en 5 elementos en las posiciones indicadas imponiendo las reacciones en los nodos con su respectiva área de influencia

$$EI = 23200 \frac{MN}{m^2} \left( \frac{2 * 1^3}{12} \right) = 3866.6 MN.m^2$$

$$k_s = 40 \frac{MN}{m^3}$$

las reacciones en los nodos son

$$Q_1 = Q_5 = k_s * l * B * y = 40 * 0.98 * 2 * y = 78.4 y_1$$

$$Q_2 = Q_3 = Q_4 = k_s * l * B * y = 40 * 1.96 * 2 * y = 156.8 y_2$$

Aplicando la aproximación para el nodo de la segunda posición 0.3

$$M = -EI \frac{1}{l^2} (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1})$$

Lo que implica tomar momentos por la izquierda respecto al nodo

$$1.96 * 78.4 y_1 - 790 * 1.96 = - \frac{3866.6}{1.96^2} (y_1 - 2y_2 + y_3)$$

$$1.15 y_1 - 2y_2 + y_3 = 1.54 \dots \dots \dots (1)$$

Procediendo de la misma forma con los nodos 3 y 4 se tiene

$$y_1 + 4.26 y_2 - 6.53 y_3 + 3.26 y_4 = 10.07 \dots \dots \dots (2)$$

$$y_1 + 1.33 y_2 + 2.85 y_3 - 4.36 y_4 + 2.18 y_5 = 11.6 \dots \dots \dots (3)$$

Por sumatoria de momentos respecto al nodo 5 se tiene

$$2y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 = 34.4 \dots \dots \dots (4)$$

Por sumatoria de fuerzas en la dirección vertical

$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 + y_5 = 33.8 \dots \dots \dots (5)$$

El sistema compuesto por 5 ecuaciones lineales más cinco incógnitas puede resolverse previo el arreglo matricial

$$\begin{bmatrix} 1.15 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4.26 & -6.53 & 3.26 & 0 \\ 1 & 1.33 & 2.85 & -4.36 & 2.18 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.54 \\ 10.07 \\ 11.6 \\ 34.4 \\ 33.8 \end{bmatrix}$$

La matriz solución

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.90 \\ 4.06 \\ 4.03 \\ 4.34 \\ 4.02 \end{bmatrix} mm$$

Que corresponde a los asientos en cada uno de los nodos. Las reacciones en los nodos y las presiones de contacto resultantes se muestran en la siguiente tabla

**TABLA 4.4** Deflexiones y presiones de contacto obtenidos por el método de diferencias finitas

Posición de nodo	asiento (mm)	Q (KN)	p (KN/m <sup>2</sup> )	p(KN/m)	p(T/m)
0.00	4.90	384.16	196.00	392.00	39.20
0.30	4.06	636.61	162.40	324.80	32.48
0.50	4.03	631.90	161.20	322.40	32.24
0.70	4.34	680.51	173.60	347.20	34.72
1.00	4.02	315.17	160.80	321.60	32.16

Con esta información procedemos a la elaboración de los diagramas de presiones de contacto en la interfaz suelo viga asimismo para el elemento estructural los correspondientes a las fuerzas cortantes y momentos flectores requeridos para el diseño racional del mismo.

Son los principios de la estática los que prevalecen para complementar la información requerida para el cálculo estructural.

#### 4.2.3 Aplicación del método de elementos finitos al mismo caso

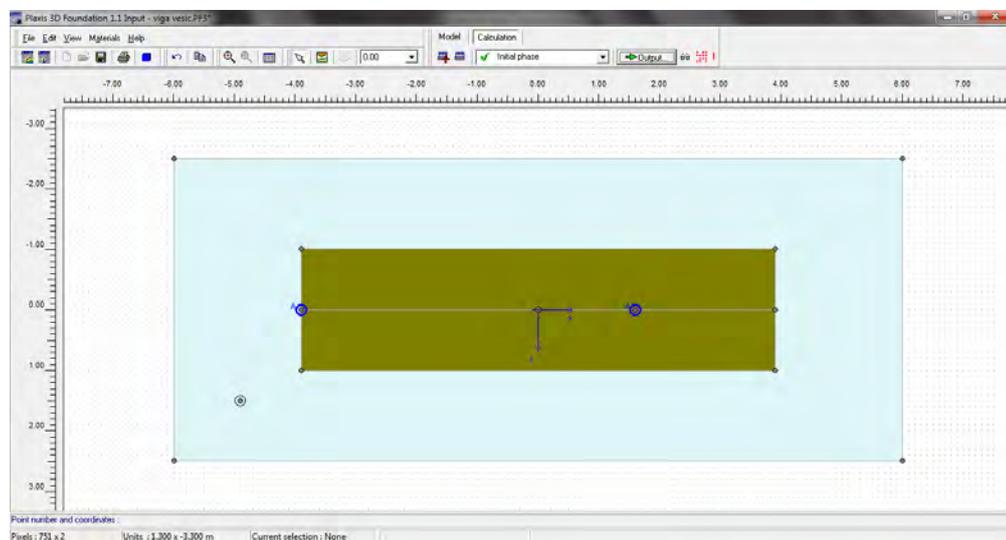
La información general del modelo de discretización para la solución por este método utilizando elementos tridimensionales es

Programa	: Plaxis 3D Foundation
Modelo	: 3D planos paralelos
Modelo constitutivo	: elastoplástico de Mohr Coulomb
Elementos	: tipo cuña de 15 nodos

Declinación : 0.00°  
Número de elementos : 590  
Número de nudos : 1942  
Tamaño promedio : 0.713 metros

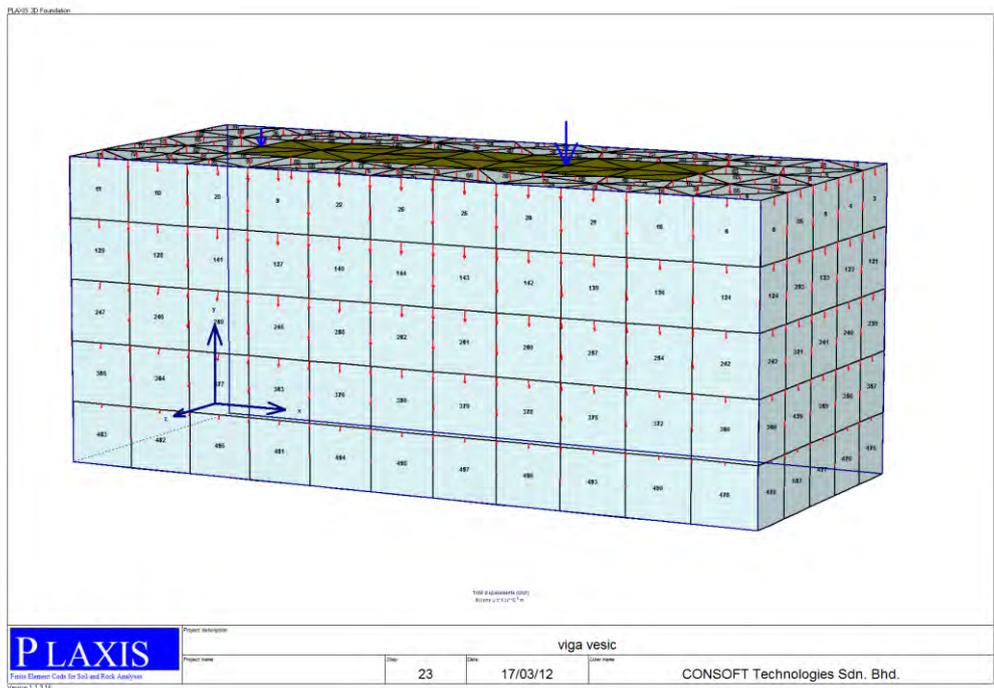
Se aplica un programa de simulación en 3 dimensiones por ser más competente y especializado en cuanto al modelamiento de un problema típico de cimentación ya que para esta categoría el ente que suministra los paquetes no dispone en 2D. Además, se utiliza el modelo elastoplástico perfecto para representar el comportamiento del suelo por ser el más adecuado para un material suelto medianamente denso como es el caso de esta aplicación, la comparación se efectúa con una cimentación sobre medio elástico.

En la Figura 4.22 se observa en planta el modelo



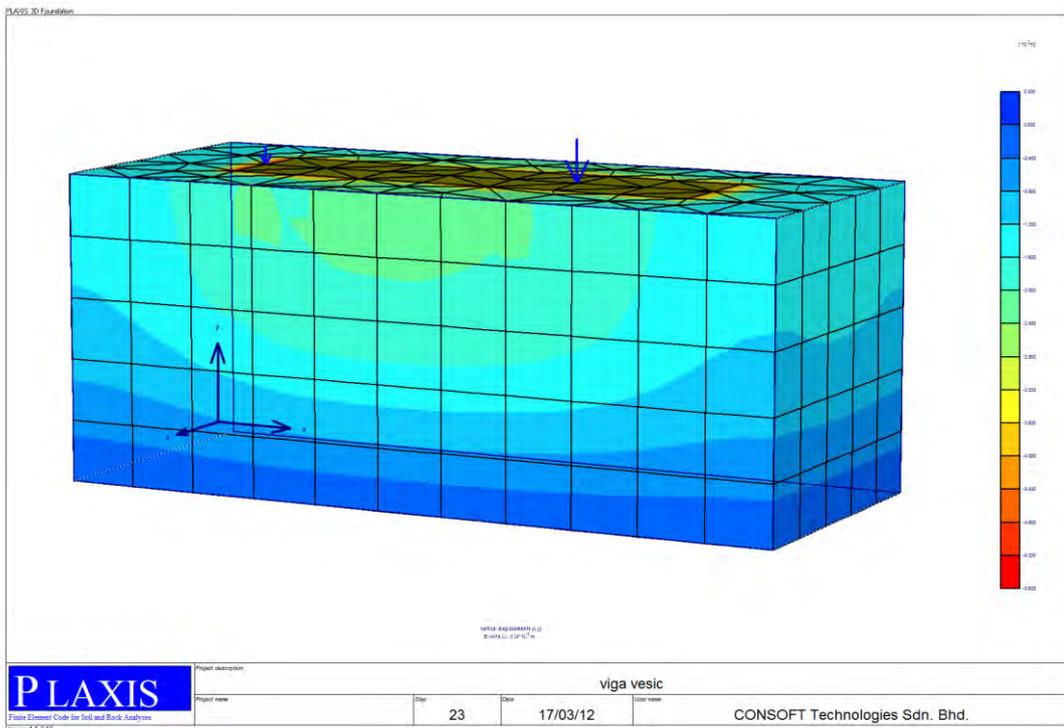
**FIGURA 4.22** Vista en planta de elemento de cimentación

Igualmente su configuración en 3 dimensiones



**FIGURA 4.23** Configuración tridimensional de discretización por elementos finitos del conjunto

Las salidas gráficas para los resultados en términos de deformaciones y tensiones en el suelo e interfaz se muestran en las siguientes figuras:



**FIGURA 4.24** Campo de desplazamientos del modelo en 3 dimensiones

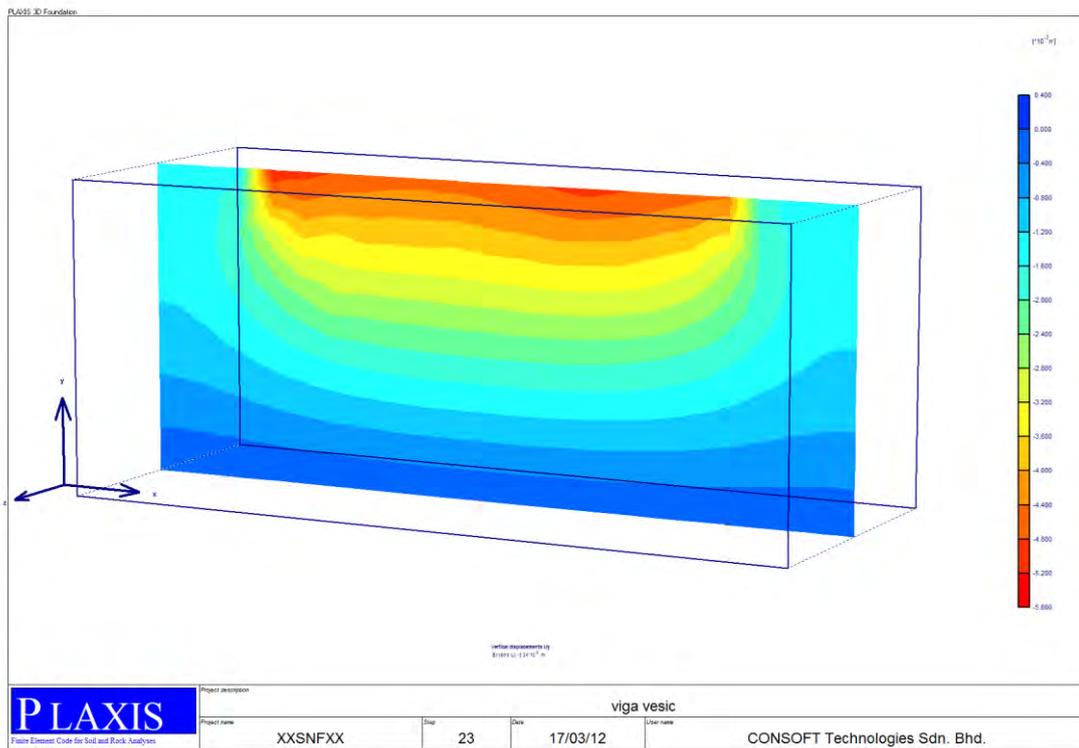


FIGURA 4.25 Campo de desplazamientos a través de un eje longitudinal central del elemento

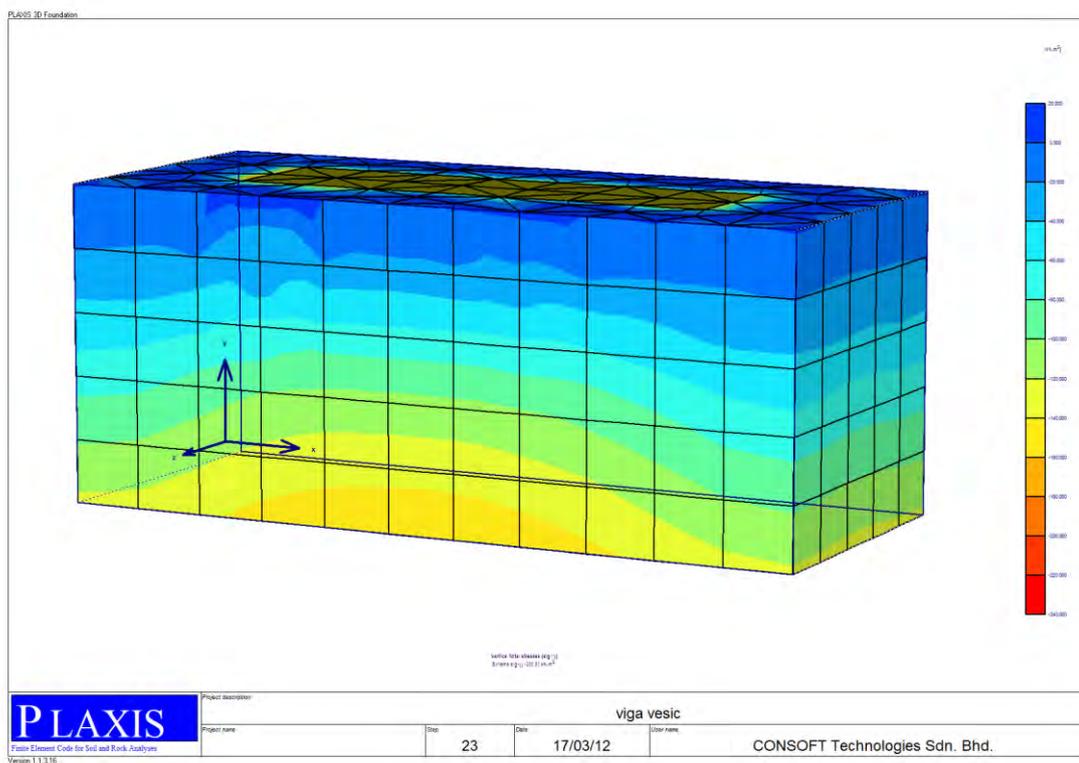


FIGURA 4.26 Campo de tensiones totales en el suelo e interfaz

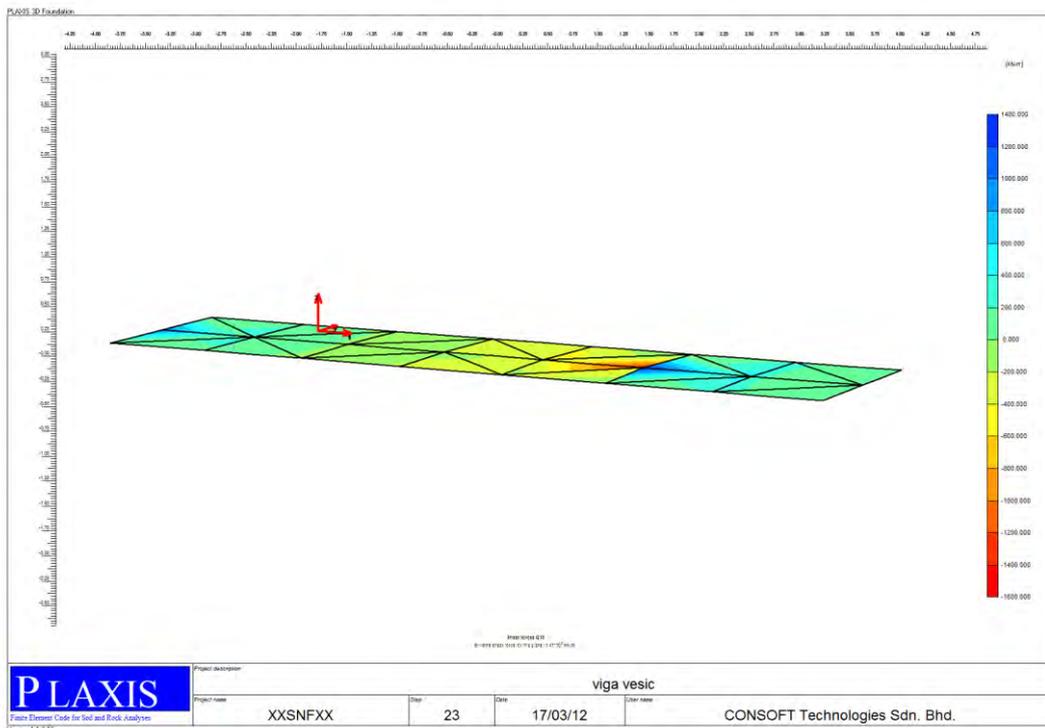


FIGURA 4.27 Campo de esfuerzos cortantes en el sentido del eje longitudinal de la viga

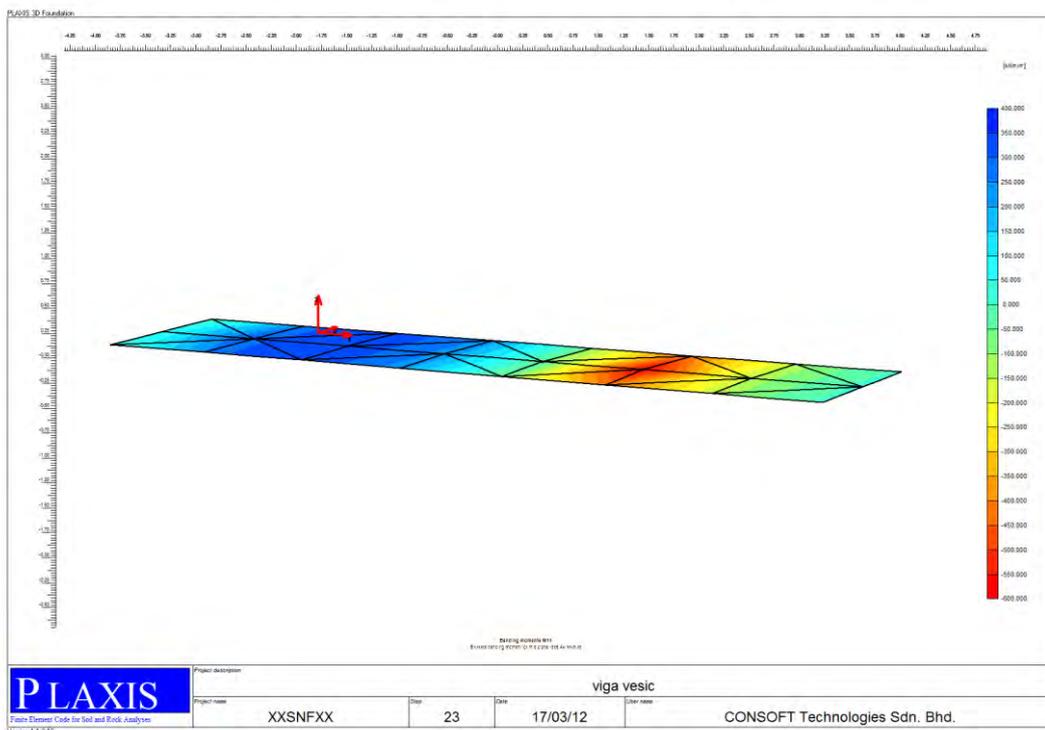


FIGURA 4.28 Momentos flectores del elemento de cimentación en el sentido de su eje longitudinal. Los colores oscuros corresponden a los momentos negativos y los claros a los positivos

### Comprobación del módulo de balasto por Elementos finitos

En base a los resultados del MEF se comprueba el módulo de balasto para el caso de la viga de 1.00 metro de peralte resultando que éstos son aproximadamente 20% menores al valor dado para este ejemplo.

TABLA 4.5 Obtención de parámetros

yi	posición	elem finitos (mm)	tensión de contacto (KN/m2)	módulo balasto (KN/m3)
y1	0.0	-5.24	-161.2	30763.359
y2	0.3	-4.56	-149.6	32807.509
y3	0.5	-4.64	-154.7	33340.517
y4	0.7	-4.82	-183.5	38070.539
y5	1.0	-4.43	-152.9	34514.673

#### 4.2.4 Estudio de una losa de cimentación

Se hace el estudio de una losa de cimentación con especial énfasis en la obtención del módulo de balasto del suelo y los efectos de su variación en relación con el momento flector máximo del elemento de cimentación y viceversa, además se fijan ciertos criterios como para definir el valor del coeficiente de balasto representativo válido para el diseño del resto de componentes dentro de un programa de cimentaciones. El caso se evalúa mediante un ejemplo práctico consistente en una losa de concreto apoyado sobre suelo granular y contando con la asistencia un programa de cálculo basado en el método de elementos finitos:

Se trata de una cimentación tipo flexible desplantada sobre un suelo arenoso (Figura 4.29). El coeficiente de balasto ha sido obtenido por extrapolación del resultado de un ensayo de placa de carga resultando el valor de 10500 KN/m3. Las cargas actuantes en cada una de las columnas es de 500 KN y el espesor de la losa es de 0,50 metros que le da el requisito de flexibilidad y poder analizarlo por este método

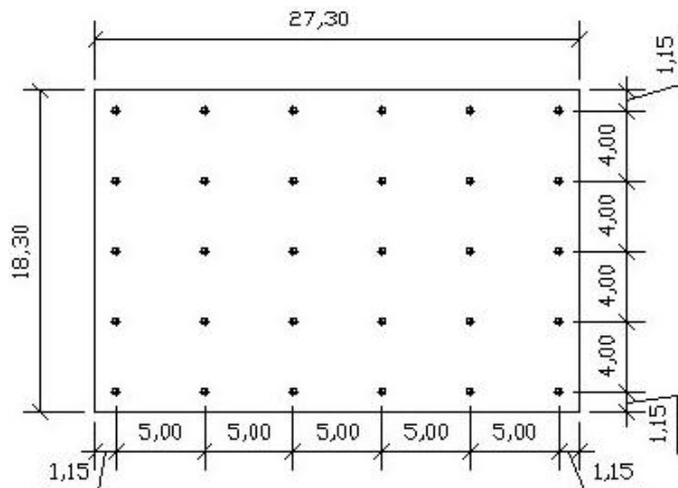


FIGURA 4.29 Modelo en planta de la losa de cimentación

La información general del modelo de discretización para la solución por este método utilizando elementos tridimensionales es

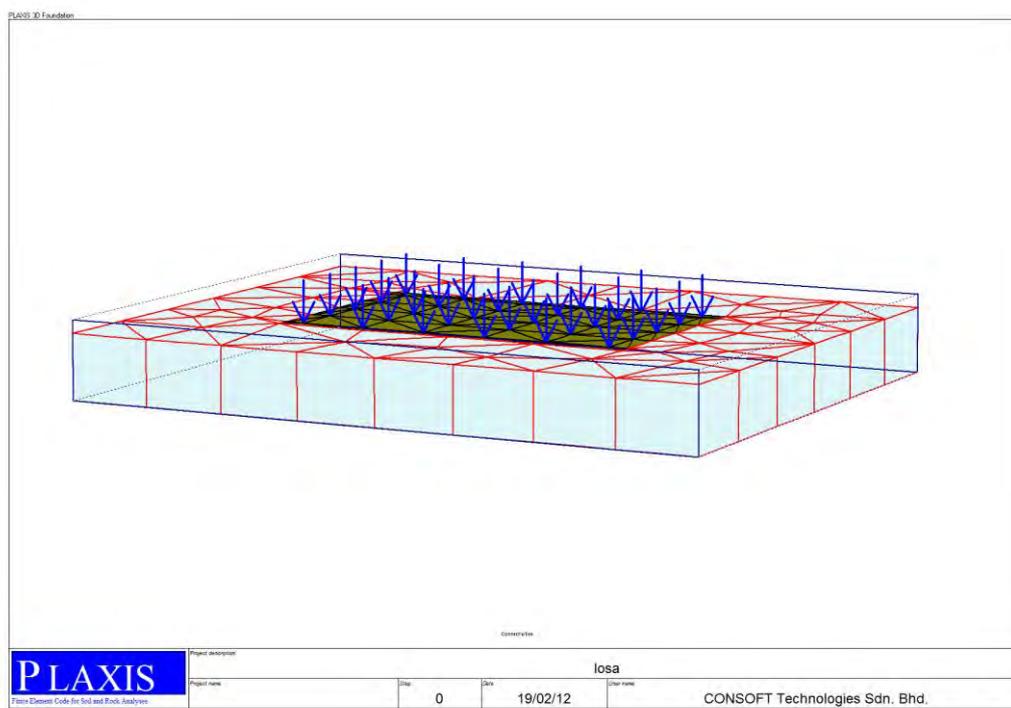
Programa : Plaxis 3D Foundation  
 Modelo : 3D planos paralelos  
 Modelo constitutivo : elasto plástico de Mohr Coulomb  
 Elementos : tipo cuña de 15 nodos  
 Declinación : 0.00°  
 Número de elementos : 360  
 Número de nudos : 1377  
 Tamaño promedio : 5.77 metros

Los parámetros físicos y de deformabilidad del suelo y del elemento estructural se presentan en el cuadro:

**TABLA 4.6** Parámetros físicos y de deformabilidad para el suelo y el concreto

Elemento	$\gamma$ (KN/m3)	$\gamma$ sat (KN/m3)	c (KN/m2)	$\phi$	$\mu$	E (KN/m2)
Suelo arenoso	17	18	1	31	0.3	50000
Concreto	24	---	---	---	0.2	10000000

En las siguientes figuras se observan en planta el modelo y un resumen de los resultados de más importancia



**FIGURA 4.30** Discretización en 3 dimensiones del conjunto cimentación suelo

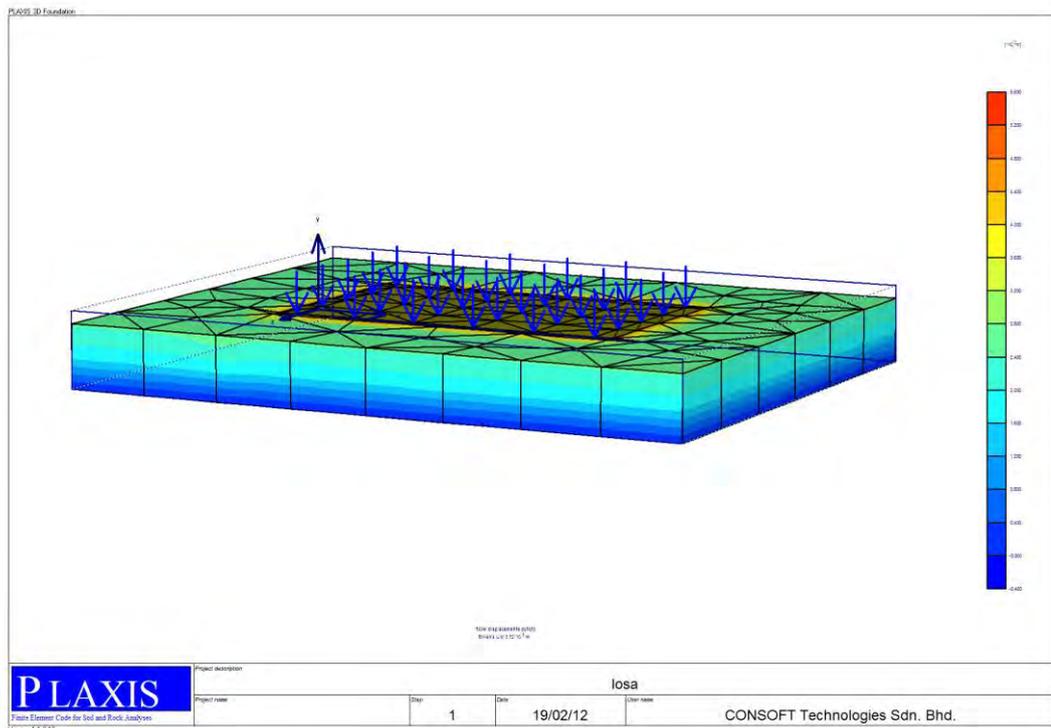


FIGURA 4.31 Campo de desplazamientos del modelo con un máximo de 5.52 mm

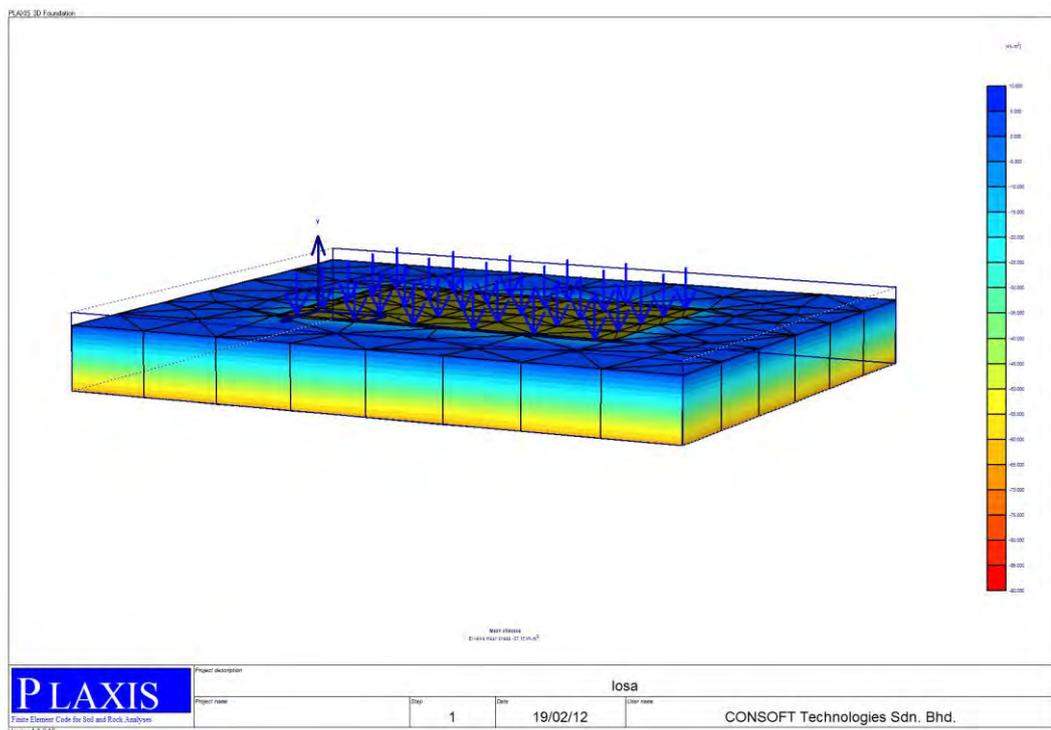
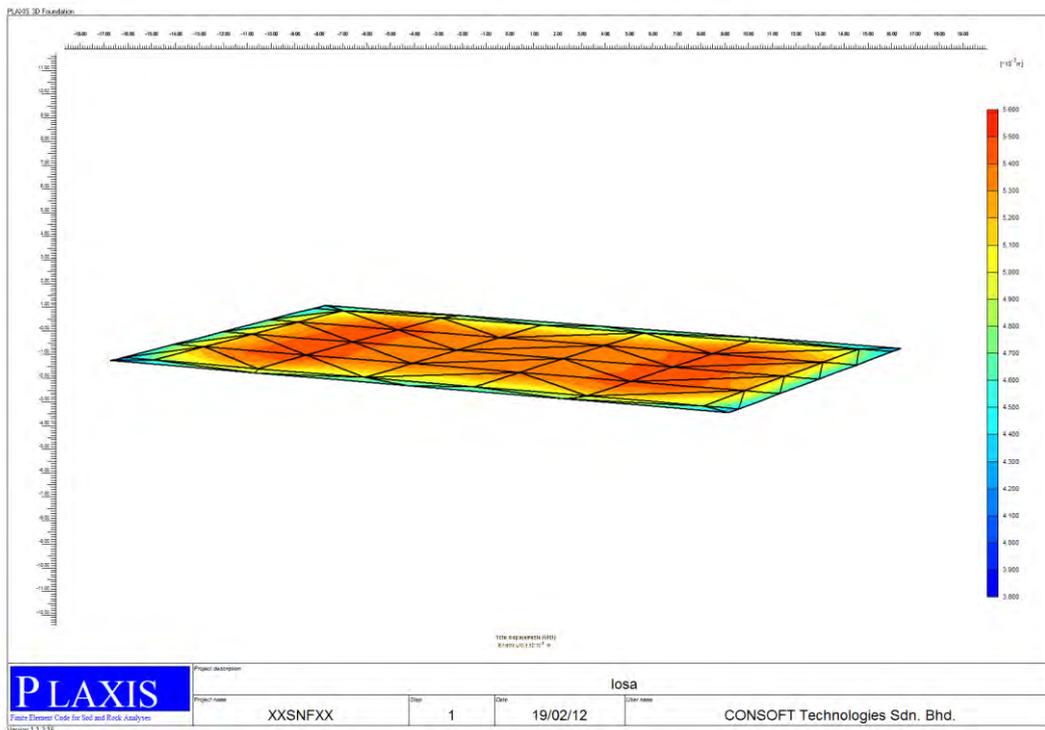
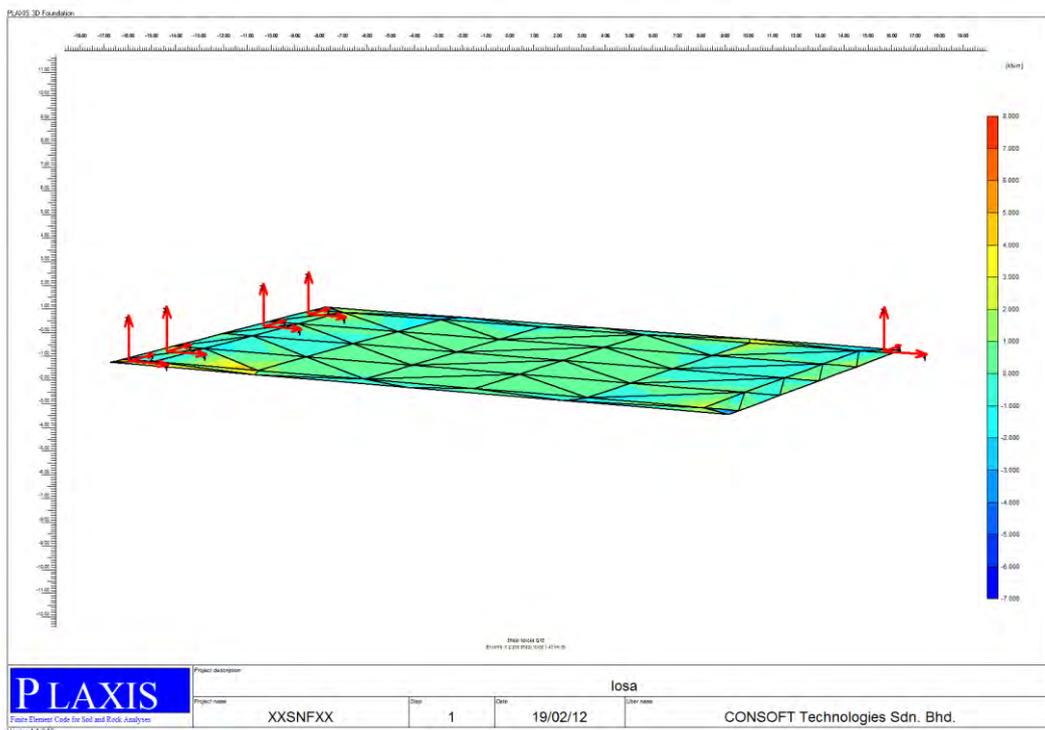


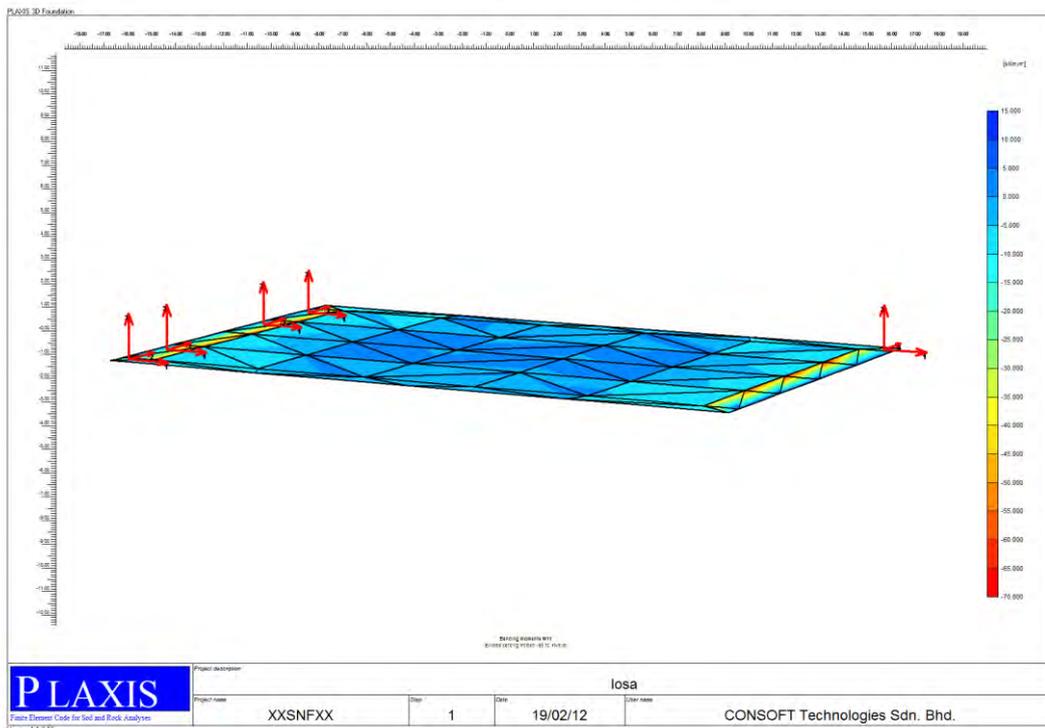
FIGURA 4.32 Campo de tensiones totales en el suelo e interfaz con un máximo de -87.15KN/m<sup>2</sup>



**FIGURA 4.33** Campo de deflexiones del elemento estructural con un máximo de 5.52 mm



**FIGURA 4.34** Fuerzas cortantes en el elemento losa con un máximo de 7.43 kNm.



**FIGURA 4.35** Momentos flectores en la dirección de mayor longitud en el elemento losa con un máximo de -69.70 KNm.m

### ***Cálculo de coeficiente de balasto***

Podemos obtener el valor del coeficiente de balasto representativo del modelo en función al total de cargas interpuestas correspondientes al elemento de cimentación dividido entre la máxima deflexión que se da en la interfaz entre la estructura y el suelo; de la misma forma se calcula dividiendo la máxima tensión y máxima deflexión en dicha interfaz el cual se presentará más adelante. Para este caso particular se exhibe el cálculo respectivo:

**TABLA 4.7** Cálculo de coeficiente de balasto representativo del modelo

<b>Descripción</b>	<b>cantidad</b>	<b>unidad</b>
Total de cargas impuestas	30	u
magnitud de cada carga	500.000	KN
SUB TOTAL	15000.000	KN
Peso del elemento	5995.080	KN
TOTAL	20995.080	KN
Area de contacto 27.3x18.3m2	499.590	M2
Presión de contacto	42.025	KN/M2
Máxima deflexión	0.00552	M
<b>Coeficiente de balasto</b>	<b>7613.156</b>	<b>KN/M3</b>
Momento flector máximo	-69.700	KNm/m
máxima tensión vertical	-142.510	KN/m2

**Coefficiente de balasto en función al criterio de la zona de influencia de carga R**

Para el presente ejercicio tenemos que definir la zona de influencia de una carga arbitraria sin que dé lugar a superposición de sus efectos con los de otras cargas. Se aplica la siguiente expresión dada por Vesic (1973):

$$C = \frac{2h}{\pi} \left( \frac{E}{E_s} \right)^{1/3} \quad (\text{Ec. 4.77})$$

El valor de la zona de influencia es numéricamente igual al radio de rigidez  $R'$ ,

**TABLA 4.8** Obtención del radio de rigidez

H (m)	Es (KN/m2)	E (KN/m2)	C=R' (m)
0.5	50000	10000000	1.85825763

Se aplica un proceso iterativo simple para obtener el coeficiente de balasto aplicando el criterio de radio de rigidez de una placa de pavimento uniforme determinado por Westergaard (1926):

$$R' = \sqrt[4]{\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)K}} \quad (\text{Ec. 4.78})$$

El ajuste se hace para el valor del radio de rigidez dado en la tabla anterior, resulta

**TABLA 4.9** Obtención del coeficiente de balasto del modelo por iteración

K (KN/m3)	E (KN/m2)	H (m)	$\nu$	R' (m)
14000	10000000	0.5	0.3	1.69098531
12000	10000000	0.5	0.3	1.75742392
10000	10000000	0.5	0.3	1.83938162
<b>9600</b>	10000000	0.5	0.3	1.85824955

El coeficiente de balasto resulta 9600 KN/m3. Para poder obtener el cuadrado equivalente de lado B de la zona de influencia de la carga en función al radio de rigidez se aplica la expresión

$$B = R' \sqrt{\pi} \quad (\text{Ec. 4.79})$$

Que resulta el valor de 3.30 metros, cantidad menor a la separación entre columnas que es de 4 y 5 metros respectivamente.

### **Ajuste del coeficiente de balasto en base a la tensión admisible del terreno**

A fin de obtener el coeficiente de balasto representativo de la losa de cimentación y para el modelo de suelo que se trate se podrán hacer los ajustes previos necesarios tomando en cuenta las dimensiones de un área de zapata virtual obtenida dividiendo la carga de una columna representativa entre la tensión admisible final recomendada en el estudio geotécnico de cimentación que tendrá como límite su área de influencia tipo para el caso en que coincida la presión media transmitida por la losa con la dada en el estudio referido.

En el siguiente cuadro se muestran los coeficientes de balasto en puntos representativos deducidos a través de los resultados del MEF en la cota -1 que representa la superficie de contacto observándose que son menores a los teóricamente dados y menores a la capacidad admisible nominal para arenas que es de 1.5 kg/cm<sup>2</sup>.

**TABLA 4.10** Obtención del coeficiente de balasto en la interfaz cimiento terreno

nodo	coordenadas del punto de contacto			presión (KN/M2)	deflexión (M)	balasto (KN/M3)
	x	y	z			
531	-14	-1	-9	-35.886	-0.00418	8593.79
535	-14	-1	-8	-29.844	-0.00436	6851.07
532	-14	-1	-8.5	-32.865	-0.00430	7643.49
644	-14	-1	8	-31.657	-0.00422	7503.14
710	-14	-1	9	-19.522	-0.00386	5057.03
645	-14	-1	8.5	-25.589	-0.00409	6261.96
856	14	-1	9	-29.831	-0.00410	7280.85
853	14	-1	8	-30.681	-0.00434	7077.17
731	14	-1	-9	-23.721	-0.00404	5871.85
730	14	-1	-8.5	-28.669	-0.00423	6770.01
613	-14	-1	4	-32.775	-0.00451	7262.51
644	-14	-1	8	-33.543	-0.00422	7950.17
614	-14	-1	6	-33.159	-0.00447	7414.26
535	-14	-1	-8	-30.437	-0.00436	6987.35
549	-14	-1	-4	-32.199	-0.00453	7106.98
597	-14	-1	0	-29.520	-0.00447	6601.87
555	-3.50	-1	-11.75	-9.660	-0.00265	3647.64

### **Cálculo del coeficiente de balasto con los resultados del MEF**

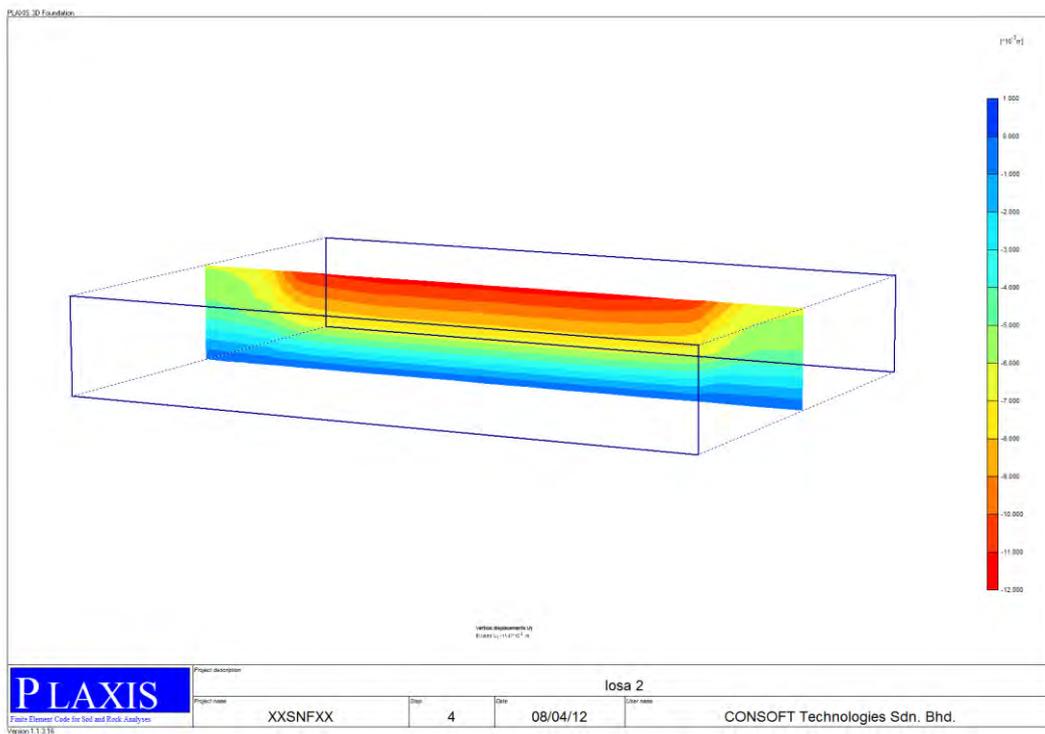
A través de los resultados que nos proporciona el modelamiento numérico podemos hacer cálculos del coeficiente de balasto del suelo y poder definir la forma cómo viene variando en puntos específicos de la interfaz suelo losa de cimentación y que ello obviamente tiene amplia dependencia de la rigidez relativa entre ambos elementos y demás factores. Para hacer esta evaluación nos basamos en las tensiones y deformaciones en cortes

representativos y su visualización didáctica. Igualmente se observa esta dependencia en relación con el peralte de la losa con los siguientes parámetros

**TABLA 4.11** Parámetros físicos y de deformabilidad para la presente aplicación

Componente	$\gamma$ (KN/m <sup>3</sup> )	$\gamma$ sat (KN/m <sup>3</sup> )	c (KN/m <sup>2</sup> )	$\phi$	$\mu$	E (KN/m <sup>2</sup> )
Suelo arenoso	17	18	1	31	0.3	35000
Concreto	24	---	---	---	0.2	10000000

Para esta evaluación se asumen los elementos losa 2 con un peralte de 0.50 metros y otro nominado como losa 3 y peralte de 1.00 metro. Para el primer caso los resultados en términos de deformaciones y tensiones se exhiben en las figuras:



**FIGURA 4.36** Campo de desplazamientos eje longitudinal con un máximo de -11.47 mm

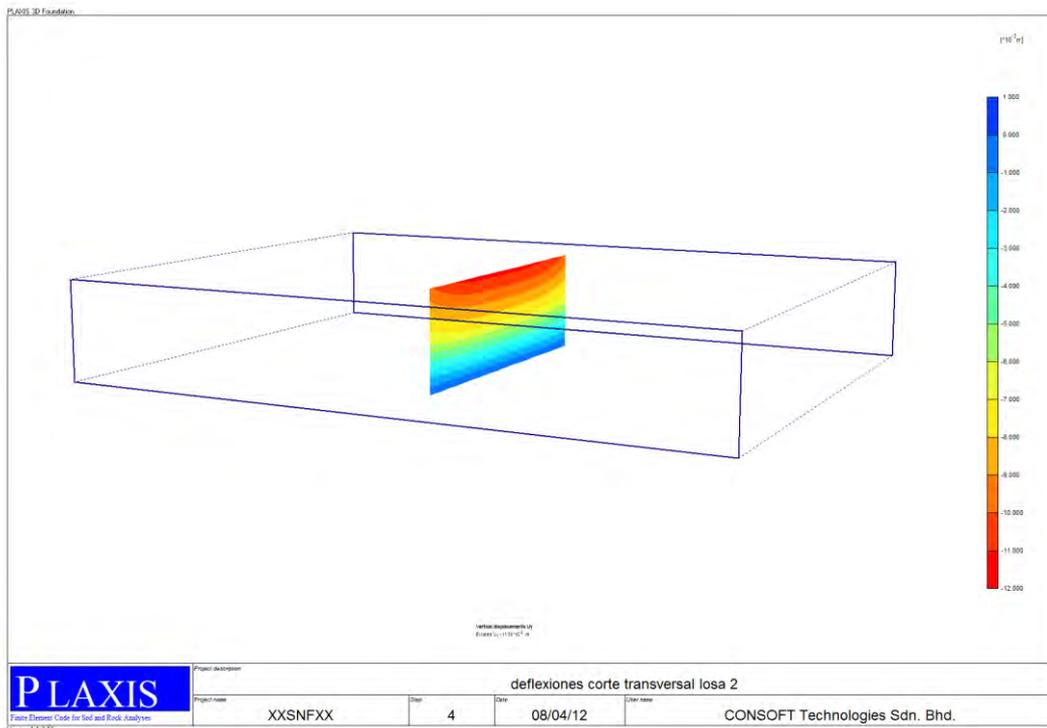


FIGURA 4.37 Campo de desplazamientos eje transversal con un máximo de -11.26 mm

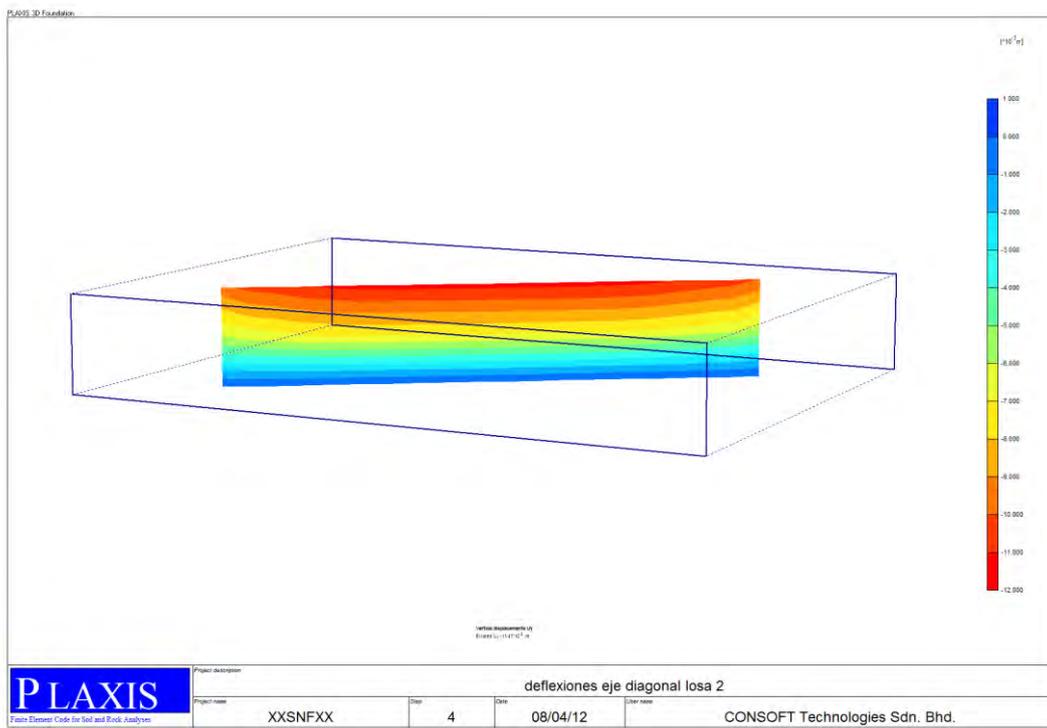


FIGURA 4.38 Campo de desplazamientos eje diagonal con un máximo de -11.41 mm

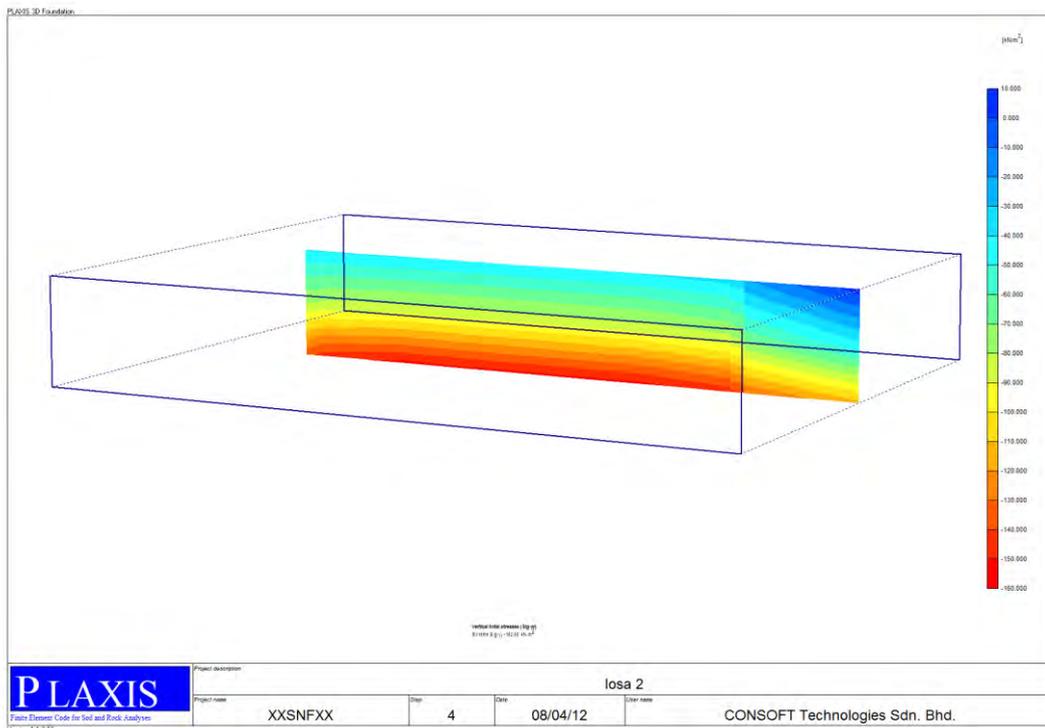


FIGURA 4.39 Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -152.88 KN/m<sup>2</sup>

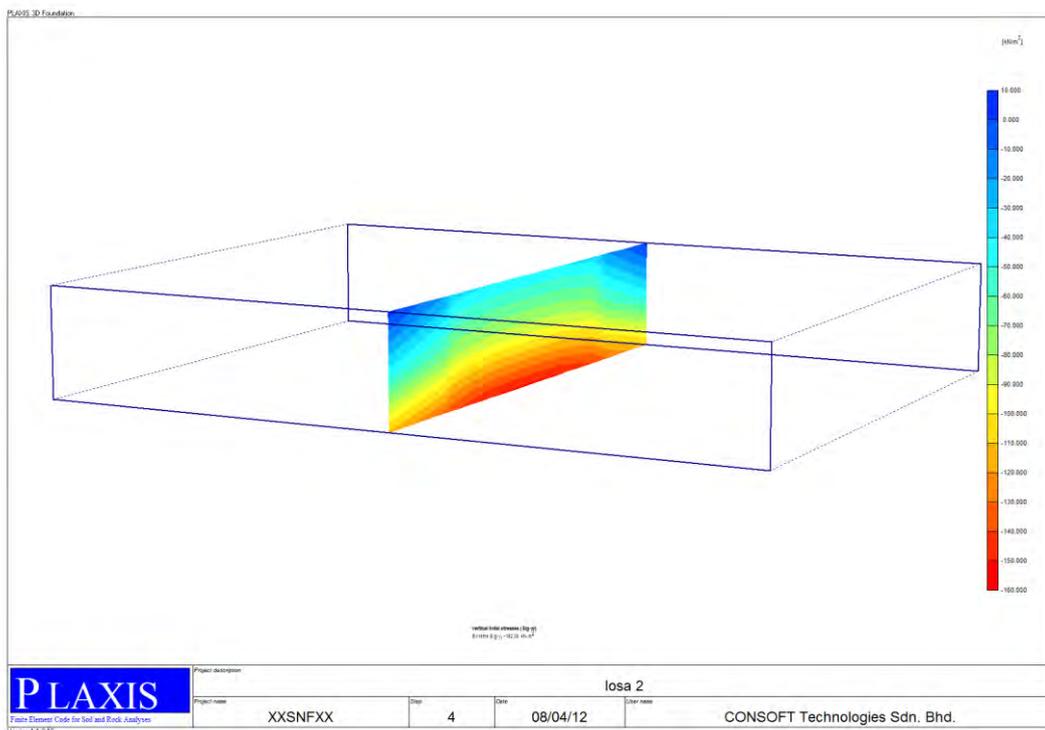
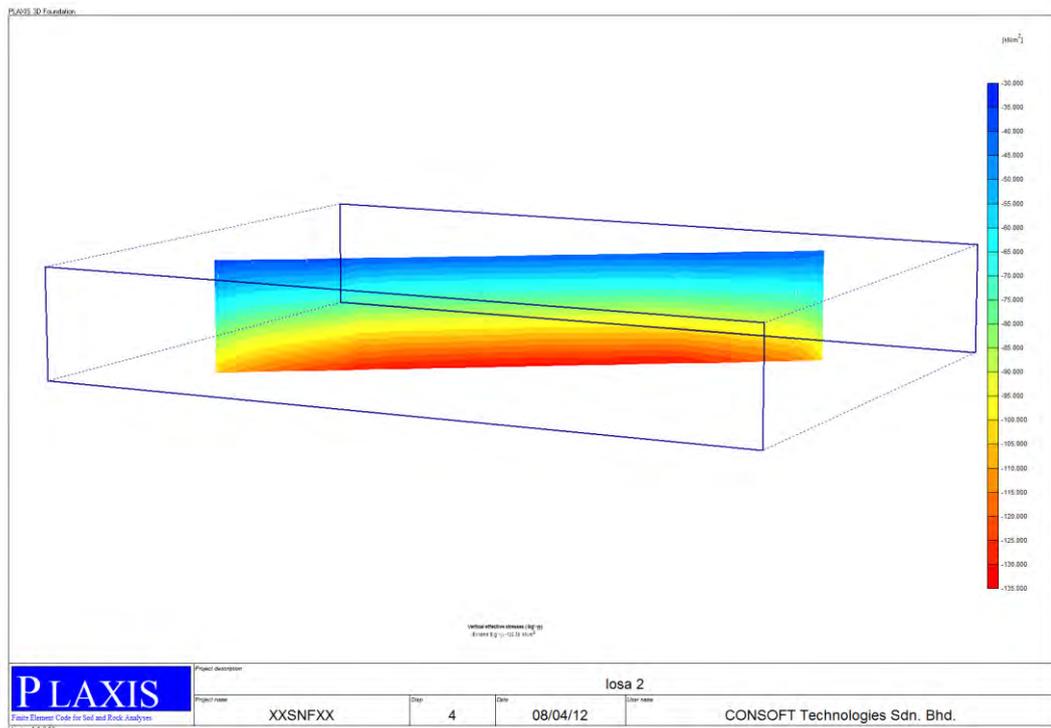


FIGURA 4.40 Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -152.36 KN/m<sup>2</sup>



**FIGURA 4.41** Tensiones verticales con un máximo en la parte inferior de -132.38 KN/m<sup>2</sup>

Hacemos la evaluación del coeficiente de balasto en puntos representativos a fin de tener una idea del perfil de su variación, ello tomando en cuenta los resultados finales dados por el programa. Los resultados totales de las corridas efectuadas se muestran en anexos.

**TABLA 4.12** Determinación del módulo de coeficiente en puntos representativos de la losa de cimentación flexible sobre suelo no cohesivo

elemento	eje	posición	coordenadas del punto de contacto			deflexión (M)	presión (KN/M <sup>2</sup> )	balasto (KN/M <sup>3</sup> )
			x	y	z			
130	longitudinal	centro	0.0	0.0	0.0	-0.0114	-40.201	3529.76
134	longitudinal	canto	-13.5	0.0	0.0	-0.0106	-40.953	3851.02
9	longitudinal	canto	13.5	0.0	0.0	-0.0105	-34.358	3276.71
130	transversal	centro	0.0	0.0	0.0	-0.0114	-40.196	3528.94
101	transversal	canto	0.0	0.0	-9.0	-0.0098	-29.036	2965.17
172	transversal	canto	0.0	0.0	9.0	-0.0098	-27.981	2866.06
130	diagonal	centro	0.0	0.0	0.0	-0.0114	-40.198	3529.10
13	diagonal	esquina	-13.5	0.0	9.0	-0.0096	-36.870	3856.80
93	diagonal	esquina	13.5	0.0	-9.0	-0.0099	-42.143	4259.78
115	plano	arbitraria	6.5	0.0	-4.2	-0.0113	-39.095	3453.29

Para la losa 3 catalogada como rígida por ser su peralte el doble de la anterior se hace exactamente el mismo análisis y se muestran los resultados:



### 4.3 ANALISIS DE DEFLEXIONES Y MOMENTOS FLECTORES

El procedimiento analítico para evaluar los efectos de las deflexiones en la interfaz suelo estructura sobre los momentos flectores y demás esfuerzos generados en el elemento estructural de fundación se hace mediante el análisis comparativo de aplicaciones didácticas resueltas con los métodos desarrollados, a la vez estos tendrán influencia directa sobre el coeficiente de balasto del terreno cuyo ajuste es de importancia para tener un dato de mayor confiabilidad y poder aplicar al resto de los elementos considerando que un proyecto civil es integral.

#### 4.3.1 El caso de la viga de cimentación sobre medio elástico

La viga elástica de cimentación tratada en la sección 4.2 ha sido abordada por métodos analíticos y numéricos cuyos resultados en cuanto a deflexiones y momentos flectores en secciones del elemento definidos para esta finalidad se exhiben en los cuadros:

**TABLA 4.14** Deflexiones de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos

yi	posición	viga elástica (mm)	dif.finitas (mm)	elem finitos (mm)
y1	0.0	4.48	4.90	5.24
y2	0.3	4.24	4.06	4.56
y3	0.5	4.15	4.03	4.64
y4	0.7	4.13	4.34	4.82
y5	1.0	3.98	4.02	4.43

**TABLA 4.15** Momentos flectores de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos

yi	posición	viga elástica (KNm)	dif.finitas (KNm)	elem. finitos (KNm)
y1	0.0	0.00	0.00	115.08
y2	0.3	900.00	912.50	632.92
y3	0.5	416.00	429.65	210.68
y4	0.7	-925.00	-824.00	-687.50
y5	1.0	0.00	0.00	28.28

Para evaluar el efecto de la rigidez del elemento estructural sobre las deflexiones y momentos flectores, se procedió de la misma forma para un elemento considerado flexible con un peralte de  $h=0.5$  metros obteniéndose:

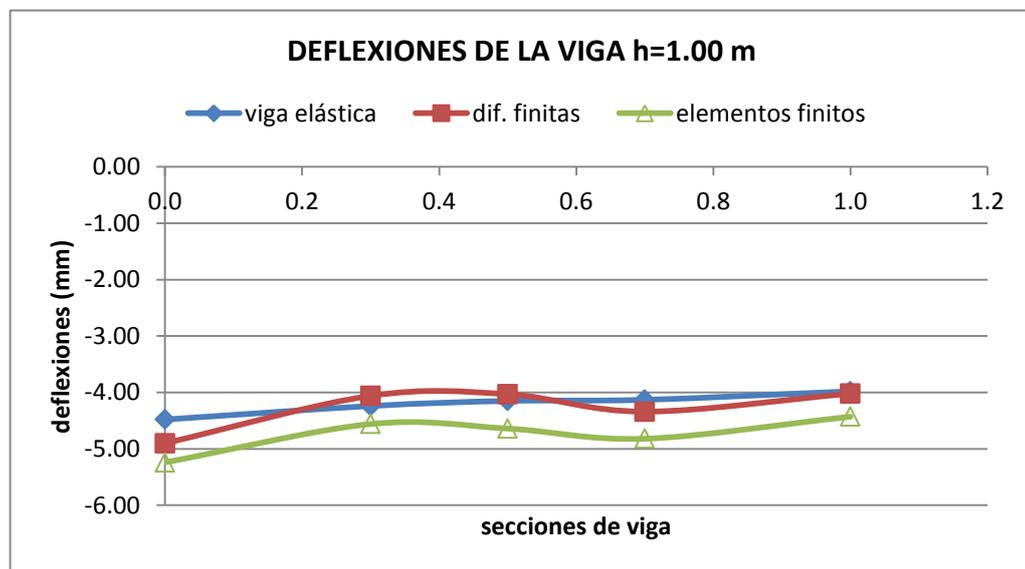
**TABLA 4.16** Deflexiones de viga de cimentación obtenida por métodos analíticos y numéricos

yi	posición	viga elástica (mm)	dif.finitas (mm)	elem finitos (mm)
y1	0.0	-5.15	-5.56	-6.64
y2	0.3	-4.21	-4.26	-3.83
y3	0.5	-4.35	-4.46	-4.22
y4	0.7	-4.89	-5.12	-5.40
y5	1.0	-3.71	-3.79	-3.36

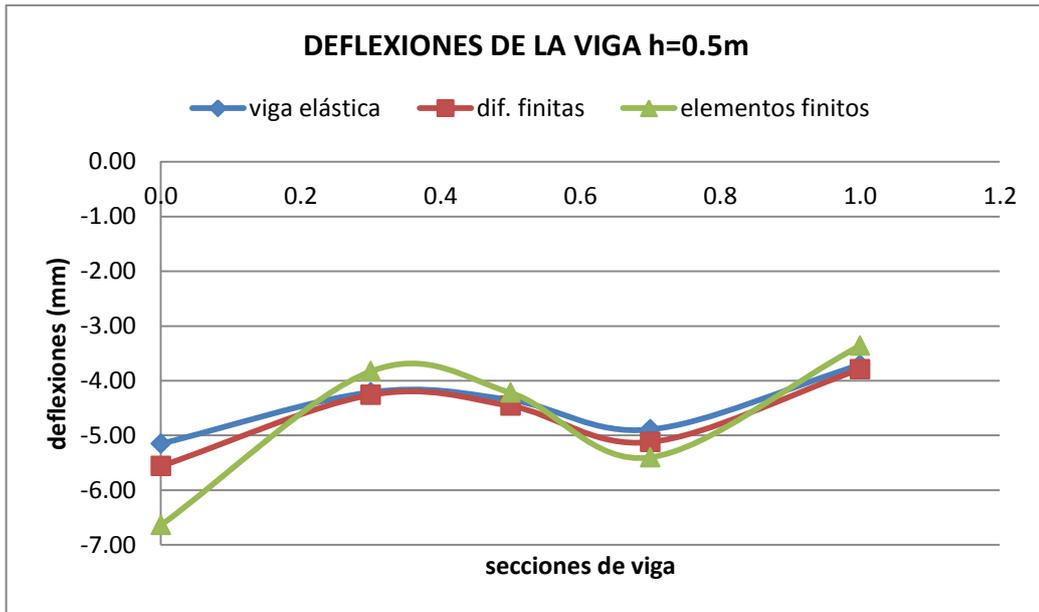
**TABLA 4.17** Momentos flectores de viga de cimentación obtenido por métodos analíticos y numéricos

yi	posición	viga elástica (KNm)	Dif.finitas (KNm)	Elem. Finitos (KNm)
y1	0.0	0.00	0.00	98.47
y2	0.3	721.55	732.15	476.41
y3	0.5	318.75	329.65	156.61
y4	0.7	-784.45	-762.12	-555.23
y5	1.0	0.00	0.00	25.88

Para el caso de las deflexiones son notorias las diferencias de las condiciones interpuestas por el criterio de rigidez, para la viga rígida la distribución de asientos se asemeja a una línea recta, lo que también se puede suponer para la distribución de la presión de contacto suelo cimentación. Para la viga flexible la variación de las deflexiones sigue una curva bien marcada como se puede apreciar en las figuras:

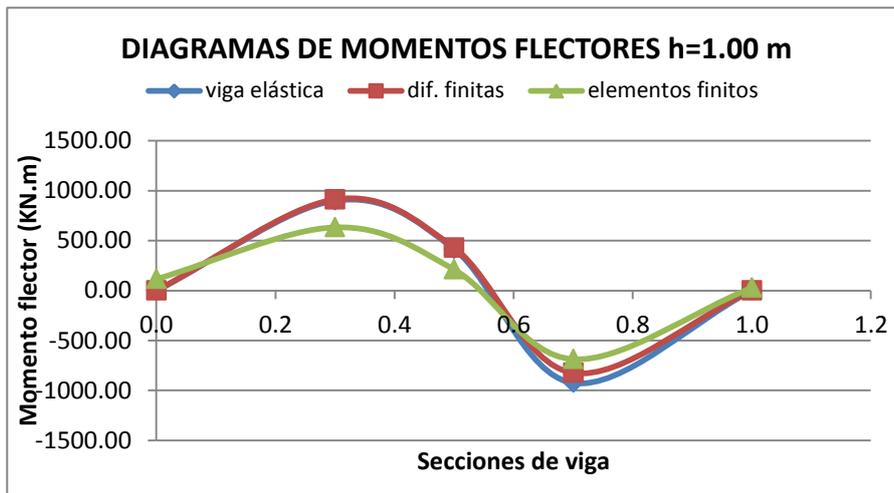


**FIGURA 4.43** Deflexiones obtenidas por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte h=1.00 metros.



**FIGURA 4.44** Deflexiones obtenidas por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte  $h=0.50$  metros considerada flexible

Similarmente al caso de las deflexiones, se presentan las figuras de los diagramas de momentos flectores en donde se observa que los momentos máximos decrecen de la condición rígida a la flexible y que los resultados que presenta el método de elementos finitos son significativamente menores que los otros dos llegando a ser un 30% menor en el centro de la viga. Otra particularidad es que el MEF arroja valores de momentos en los extremos de la viga ello debido a que el proceso de iteración tiene continuidad en los bordes y por los efectos de interacción suelo estructura.



**FIGURA 4.45** Momentos flectores obtenidos por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte  $h=1.00$  metros.

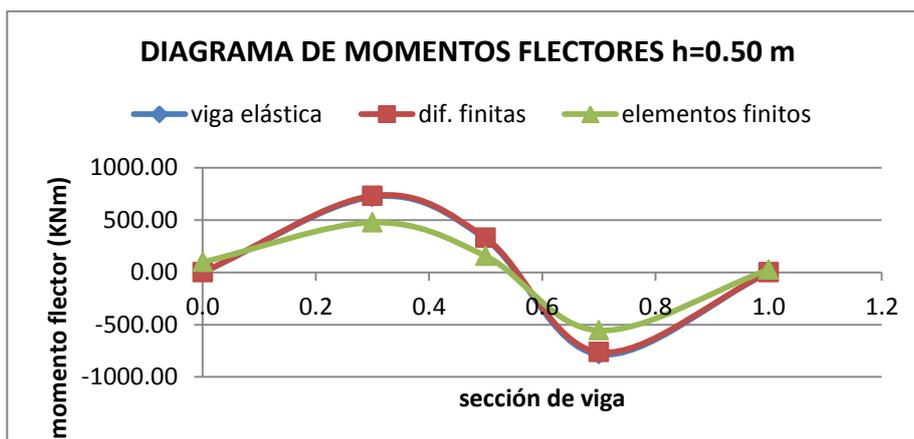


FIGURA 4.46 Momentos flectores obtenidos por métodos analíticos y numéricos para la viga de cimentación con un peralte  $h=0.50$  metros.

### 4.3.2 El caso de la losa de cimentación

Se ha efectuado el análisis con el Método de elementos finitos (programa Plaxis 3D) para la losa de cimentación de la primera aplicación, en las cuales se ha variado el coeficiente de balasto en porcentajes definidos y su implicancia en las máximas deflexiones para cada caso cuyos resultados se muestran

TABLA 4.18 Comparativo entre deflexiones y módulo de balasto en la losa de cimentación

presión de contacto (KN/M <sup>2</sup> )	máx deflexión (M)	%	balasto (KN/M <sup>3</sup> )	%
42.025	0.00552	0	7613.225	0
42.025	0.01147	107	3806.615	-50
42.025	0.01867	238	2250.937	-70
42.025	0.00451	-17	8374.332	10
42.025	0.00368	-42	11419.551	50
42.025	0.00246	-53	15226.032	100

Igualmente se evalúa los efectos de la variación del coeficiente de balasto del terreno en el valor del momento flector máximo

TABLA 4.19 Comparativo entre momentos máximos y coeficiente de balasto en la losa de cimentación

presión de contacto (KN/M <sup>2</sup> )	Máx momento (KNm/m)	%	balasto (KN/M <sup>3</sup> )	%
42.025	69.7	0	7613.225	0
42.025	88.16	26.5	3806.615	-50
42.025	106.54	52.8	2250.937	-70
42.025	62.12	-10.8	8374.332	10
42.025	50.34	-27.7	11419.551	50
42.025	38.71	-44.4	15226.032	100

Cuando se asignan valores altos al coeficiente de balasto del terreno se obtienen momentos flectores bajos los cuales pueden significar inseguridad al momento de dimensionar el elemento estructural y sus refuerzos; cuando se asumen valores menores ocurre lo contrario con valores altos de los momentos. Al incrementar el coeficiente de balasto en un 50% el momento máximo decrece en el orden de 27.7%, cuando se incrementa un 100% repercute en una rebaja del 44.4% del máximo momento con lo cual queda establecido su baja sensibilidad frente a variaciones importantes del valor del coeficiente de balasto.

Se presentan los resultados del programa SAFE para la losa flexible  $h=0.50$  m.

**Tabla 4.20** Resultados en cuanto a asentamientos, tensiones de contacto máximas y mínimas para la losa.

Panel	GlobalX	GlobalY	Uz	MaxPress	MinPress
Text	m	m	m	kN/m2	kN/m2
1	0	0	-0.007098	-62.13	-74.53
2	0	1.375	-0.006568	-51.23	-70.91
3	0	5.375	-0.00555	-49.03	-58.76
4	0	9.375	-0.005423	-48.65	-56.94
5	0	16.925	-0.005545	-48.64	-58.76
6	0	20.925	-0.006565	-51.23	-70.95
7	0	22.3	-0.0071	-62.2	-74.55
8	1.15	0.925	-0.006065	-44.77	-68.33
9	1.15	1.15	-0.006028	-37.16	-63.4
10	1.15	5.15	-0.005036	-35.42	-53.46
11	1.15	9.15	-0.004897	-35.51	-52.21
12	1.15	17.15	-0.005035	-35.49	-53.43
13	1.15	21.15	-0.006034	-37.17	-63.44
14	1.375	22.3	-0.0062	-44.76	-68.38
15	10.925	0	-0.004601	-41.95	-48.75
16	6.15	1.15	-0.004382	-34.84	-46.05
17	6.15	5.15	-0.003615	-33.98	-37.96
18	6.15	13.15	-0.003532	-34.07	-37.08
19	6.15	17.15	-0.003616	-34.02	-37.97
20	6.15	21.15	-0.004386	-35.18	-46.1
21	6.375	22.3	-0.004612	-43.14	-48.75
22	15.925	0	-0.004609	-41.89	-48.4
23	16.15	1.15	-0.004378	-34.77	-46.03
24	16.15	5.15	-0.003614	-33.91	-37.95
25	16.15	13.15	-0.003531	-34	-37.07
26	16.15	17.15	-0.003615	-33.95	-37.96
27	16.15	21.15	-0.004386	-35.11	-46.12
28	15.925	22.3	-0.004616	-42.99	-48.73
29	20.925	0	-0.006203	-44.8	-66.04
30	21.15	1.15	-0.006029	-37.18	-63.39
31	21.15	5.15	-0.005032	-35.19	-53.42
32	21.15	13.15	-0.004894	-35.28	-52.16
33	21.15	17.15	-0.005035	-35.25	-53.42
34	21.15	21.15	-0.006028	-37.18	-63.37
35	20.925	22.3	-0.006202	-44.78	-68.32
36	22.3	0	-0.00709	-62.14	-74.44
37	22.3	1.375	-0.006571	-51.19	-68.99
38	22.3	5.375	-0.005552	-48.35	-58.3
39	22.3	9.375	-0.005423	-48.29	-56.95
40	22.3	16.375	-0.00548	-48.48	-58.85
41	22.3	20.375	-0.006322	-51.24	-70.91
42	22.3	22.3	-0.007098	-62.15	-74.53

## 4.4 COMPROBACIONES ESTRUCTURALES

### 4.4.1 Acciones sobre la cimentación

Están relacionadas con las cargas estructurales solicitantes como momentos flectores, carga normal y esfuerzos cortantes y también debidas al cimiento y su contacto con el suelo como peso propio y peso del suelo que descansa sobre la cimentación, Figura 4.47.

Los esfuerzos cortantes en la base de la zapata, en general son acciones horizontales que deben ser absorbidas por rozamiento entre terreno y zapata o por otro mecanismo.

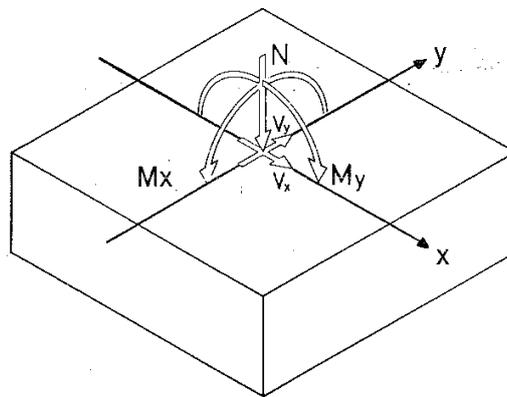


FIGURA 4.47 Acciones sobre la cimentación. Tomado de Rodriguez J.M (1980)

Para el caso de zapatas individuales la comprobación estructural debe seguir la siguiente secuencia. (Jiménez Salas et al, 1981)

- Por punzonamiento
- esfuerzo cortante, y
- flexión

El criterio de punzonamiento nos permitirá definir el peralte del elemento de cimentación, mientras que la flexión y el esfuerzo cortante nos dará la cuantía requerida de acero positivo y negativo.

La comprobación debe ceñirse al nivel de cargas que solicita al elemento viendo que algunas zonas del suelo pueda sobrepasar su resistencia llegando a formar zonas de plastificación que puedan alterar significativamente las relaciones tensión-deformación que hemos venido tratando. Al asumir una distribución uniforme de las tensiones de contacto dadas las dimensiones de la zapata puede considerarse como rígida simplificándose el cálculo de los momentos flectores y esfuerzos cortantes a efectos de dimensionar correctamente el cimiento de que se trate. Los conceptos del método de los estados límite ayudan a manejar convenientemente este tema.

Para el caso de losas, las cargas a considerar están referidas a

- Las cargas que la edificación transmite a la losa
- el peso propio de la losa
- la subpresión
- empuje lateral del terreno en caso de construcción con sótanos
- empuje lateral producido por edificios colindantes.

Un diseño adecuado deberá contemplar obligatoriamente

- Que el Coeficiente de balasto del terreno sea representativo
- que exista un coeficiente adecuado de seguridad al hundimiento con la carga excéntrica e inclinada, si es el caso.
- que se determinen los asientos y posible distorsión angular que se da en la edificación para comprobar que ambos son admisibles
- que se calculen por procedimientos rigurosos la distribución resultante de tensiones en el contacto losa suelo verificando que estos resulten admisibles. En la tabla se resumen las comprobaciones a efectuar dependiendo de su condición de rigidez:

**TABLA 4.21** Comprobaciones a realizar en zapatas aisladas.

TIPO	COMPROBACIONES
ZAPATAS RIGIDAS	Flexión Esfuerzo cortante Fisuración
ZAPATAS FLEXIBLES	Flexión Esfuerzo cortante Punzonamiento Fisuración

#### 4.4.2 Verificación del peralte en losas

Un modelo de losa de cimentación que presente heterogeneidad geométrica y distribución de cargas es tratada apropiadamente por métodos numéricos. Cuando las cargas sobre la losa son relativamente iguales así como las luces en ambos sentidos tiene amplia aceptación resolver como una placa con cargas puntuales sobre un espacio de Winkler; bajo esta consideración se puede asumir que la presión de contacto con el suelo es uniforme. En este caso, se requiere que su peralte cumpla la siguiente condición:

$$h \geq \frac{L}{C} \quad (\text{Ec. 4.80})$$

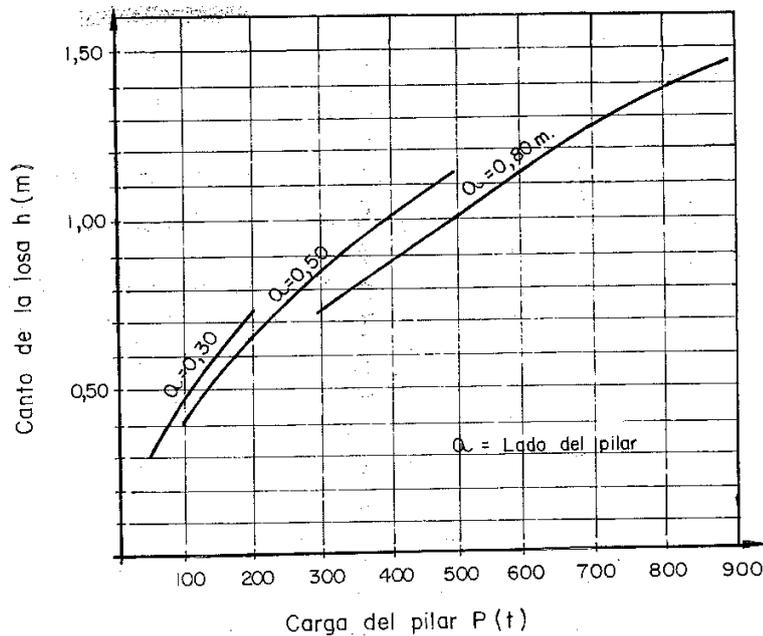
donde  $L$  es la distancia entre pilares en unidades compatible con el peralte y  $C$  una constante adimensional que se define en función al tipo de suelo. Jiménez Salas et al (1981):

**TABLA 4.22** Constante adimensional C para varios tipos de suelos.

TIPO DE SUELO	C
arcilla firme y muy firme	10
arcilla dura	7
arena compacta, seca o anegada	8.5
arena densa y muy densa, seca o anegada	6.5

Un aspecto relevante tiene también que ver con el factor económico. Una losa de gran rigidez debido a su peralte nos garantiza asientos homogéneos pero a cambio de un costo alto; una losa tipo flexible puede ocasionar asientos importantes y diferenciales entre las columnas. El peralte ideal debe satisfacer condiciones de rigidez intermedia con el que el valor  $N$  expuesto en el apartado 2.2.4 debe encontrarse en el intervalo de 8 a 25, (Rodríguez J.M, 1980).

El peralte así determinado debe comprobarse por criterio de punzonamiento debiendo efectuarse reducciones del 10 al 15% teniendo en cuenta que esta condición no considera la calidad del suelo de cimentación. Se presenta la Figura 4.48 para su estimación en función de la carga solicitante en columna y la dimensión del lado mayor del mismo; es aplicable para resistencias a compresión del concreto que van desde 175 a 210 kg/cm<sup>2</sup>.



**FIGURA 4.48** Verificación de peralte de losa por criterio de punzonamiento. (Ramírez G, 1969).

#### 4.4.3 Diseño estructural de la cimentación

En el proceso los parámetros requeridos para el diseño estructural de la cimentación deberán determinarse para cada combinación de acciones señaladas en códigos y demás especificaciones para el corto y largo plazo.

Un diseño óptimo desde el punto de vista técnico-económico implica un análisis exhaustivo a modo de compatibilizar las deformaciones admisibles del suelo con la rigidez del elemento estructural, estas dos variables definen la interacción suelo estructura de cimentación.

El momento flector máximo es el valor predominante dentro del diseño estructural por cuanto determina la cuantía del refuerzo estructural, igualmente el criterio de punzonamiento define el peralte.

Los momentos flectores son controlados eficientemente mejorando el terreno sobre el que se sustenta la cimentación, esto se explica porque la longitud elástica aumenta al hacer este mejoramiento, permitiendo con esto que la cimentación reparta las cargas sobre una superficie más amplia, disminuyendo los momentos flectores.

Para realizar un adecuado diseño de cimentaciones usando las teorías de la viga de cimentación sobre medio elástico, se debe tener presente, que un control de los momentos flectores logrado a través del conocimiento de las características elásticas del suelo y por otra parte el control de las deflexiones obtenido por la rigidez longitudinal de la viga determinarán la geometría y las armaduras adecuadas para resistir los esfuerzos provocados por las cargas de modo que cumpla las restricciones impuestas al diseño.

Las presiones de contacto consideradas deberán ser tales que las deformaciones diferenciales del suelo calculadas con ellas coincidan aproximadamente con las del sistema subestructura-superestructura.

## **4.5 POSIBILIDADES Y LIMITACIONES DE LOS METODOS PROPUESTOS**

### **4.5.1 De los métodos numéricos**

La comparación entre los métodos sucintamente descritos permite discernir que la versatilidad y exactitud de los resultados obtenidos en cada caso depende fundamentalmente de las suposiciones simplificadoras involucradas y de los modelos elegidos.

Los procesos aproximados, como por ejemplo los métodos analíticos, son usados generalmente en la etapa de predimensionado para estimar los posibles asentamientos. Por otra parte, al aplicar un procedimiento convencional basado en la Teoría de la elasticidad, debe tenerse presente que debido al comportamiento plástico del suelo resultan no linealidades que normalmente no son consideradas en el planteamiento. Por consiguiente, conviene limitar la aplicación de tales métodos al estado de servicio.

Respecto a los métodos numéricos, si bien posibilitan una simulación realista y completa del comportamiento de una cimentación superficial, requieren equipos y programas computacionales adecuados y la ejecución de ensayos para determinar los parámetros requeridos por el modelo numérico y poder optimizar el diseño. La calidad de las predicciones está fuertemente condicionada a la calidad de estos datos.

#### **4.5.2 De los modelos Winkler y elástico**

Teniendo en cuenta que el modelo de Winkler subestima un tanto las presiones resultantes en los bordes de una cimentación conduciend,o para el caso de cimentaciones flexibles, a distribuciones convexas con tensiones mayores en la parte central, por lo que su empleo se orienta a los casos de cimentaciones rígidas superficiales sobre arenas de baja a media densidad relativa y también para las flexibles desplantadas a mayor profundidad sobre suelos granulares a cohesivos.

En cambio un modelo eminentemente elástico, su empleo mejor se ajusta para el caso de cimentaciones desplantadas a cierta profundidad sobre suelos granulares o en cimentaciones rígidas sobre suelos cohesivos. Igualmente en aquellos casos en que por la existencia de fuertes cargas de borde se tenga que dar una distribución de presiones con tendencia irregular en estos sectores.

Con lo cual queda claro que la aplicación de estos métodos está supeditados a las características de sus componentes y a las condiciones de simplificación y modelación de casos prácticos.

## CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

De los tópicos y conceptos desarrollados en la presente tesis se evidencia las limitaciones con que se cuenta para conocer la mecánica de interacción, esfuerzos de contacto y desplazamientos en la interfaz de dos componentes de propiedades diferentes requeridos para el diseño; siendo los procedimientos analíticos los menos difundidos y de poca o nula aplicación en nuestro medio cobran especial importancia, a cambio, las aplicaciones numéricas que requieren de herramientas adicionales de poca difusión y uso no masificado.

La mecánica de interacción solamente puede ser conocida para su representación y solución mediante modelos simplificados como ocurre en gran parte de los fenómenos que involucran esfuerzos y deformaciones.

Se ha observado correspondencia entre los resultados que proporcionan los métodos analíticos y numéricos de manera general pero su tratamiento, del primer caso, es más engorroso y laborioso.

Debido a la importancia que cobra la cimentación, la misma está asimilada a cumplir con ciertos parámetros geométricos, de presión, de conformación que responden a las características del suelo y de las cargas interpuestas los cuales se esbozaron a lo largo de este trabajo. Por lo tanto el diseño de una cimentación no es algo que se realiza de manera intuitiva sino que sigue una metodología de cálculo que evalúa desde su forma hasta la profundidad de desplante.

Los puntos de correlación, similitudes y diferencias entre los métodos desarrollados se refuerzan en base a los resultados de las aplicaciones prácticas incluidas en el presente trabajo.

## **Aplicación de una cimentación continua**

Se ha evaluado una zapata continua de cimentación sobre medio elástico el cual ha sido resuelto utilizando el concepto de viga de cimentación y por diferencias finitas, en ambos casos se emplea la hipótesis simplificativa de Winkler que considera una relación directa entre las cargas aplicadas y los asentamientos producidos. En cuanto a los resultados las presiones de contacto resultan técnicamente similares siendo un 5% mayor por diferencias finitas en los extremos y en la zona central prevalece la viga elástica en el mismo porcentaje. Por el Método de elementos finitos y aplicando una relación constitutiva elastoplástica las presiones en la interfaz resultan inferiores hasta en 8% de los obtenidos con los métodos anteriores. En todos los casos las presiones de contacto determinadas son inferiores a la tensión admisible del terreno de este caso particular.

En cuanto a las deflexiones obtenidas y observando el comparativo de la figura se observa uniformidad ya que se trata de un elemento rígido dadas sus dimensiones. Por la viga elástica y diferencias finitas las deflexiones son semejantes y los arrojados por elementos finitos son en promedio 10% menores a los casos anteriores.

Los momentos flectores por elementos finitos son menores en el orden 30% respecto a los otros métodos en los puntos de aplicación de las cargas. Una particularidad observada es que en los extremos de la viga el MEF da valores de los momentos flectores a diferencia de los otros que resulta cero, esto debido a que el proceso de iteración tiene continuidad en los bordes por el efecto de contacto entre dos elementos de distinta rigidez.

El coeficiente de balasto en la viga determinada por elementos finitos resultó en promedio inferior en 20% al valor nominal de 40,000 KN/m<sup>3</sup> asumido para su resolución tanto como viga elástica y por diferencias finitas. Una diferencia sustantiva radica en que el primer método arroja valores para los diferentes nodos que se encuentran en la interfaz siendo menores en los bordes del elemento con respecto a los de la zona central.

Al comparar la viga tipo rígida con una flexible, en esta última las deflexiones son mayores y notorias en los puntos de aplicación de las cargas. Los efectos de flexibilidad son más evidentes por el MEF debido a la deformada de la elástica mayor que de los otros métodos. Por lo general los momentos flectores son menores en un 15% de la viga flexible con relación a la rígida debido a que en esta última el elemento, dada sus dimensiones, tiene que estar en capacidad de asumir mayores momentos.

Las diferencias encontradas de los resultados del MEF con los otros métodos radica también en que el primero asume parámetros de deformabilidad para el terreno obtenidos por correlación con el coeficiente de balasto para vigas continuas de cimentación los cuales denotan compatibilidad para suelos de tipo granular teniendo poca sensibilidad su variación con los momentos flectores finales.

## **Aplicación de cimentación mediante losa**

Mediante el Método de elementos finitos se ha efectuado un análisis tensión deformación en la interfaz suelo estructura para el elemento de cimentación mediante losa haciéndose posteriormente el cálculo de los coeficientes de balasto a dicho nivel.

Se introduce el concepto de coeficiente de balasto representativo que resulta de dividir las solicitaciones totales sobre la losa incluida su propio peso entre la máxima deflexión registrada por el programa de cálculo obteniéndose el valor de 7613.15 KN/m<sup>3</sup>.

Los coeficientes de balasto del MEF se obtuvieron dividiendo las presiones verticales totales en la cota de contacto entre sus respectivas deflexiones de sus nodos resultando valores próximos al representativo en los bordes. La particularidad de los resultados es que en la parte del centro los valores adoptan del 30 al 40% de los obtenidos en los bordes.

Se ha aplicado el concepto de la zona de influencia de carga y radio de rigidez de Westergaard para obtener el coeficiente de balasto resultando un valor 20 por ciento superior al representativo.

Adicionalmente se ha hecho el estudio de variación del coeficiente de balasto para los casos de una losa flexible y otra rígida con un peralte al doble. De acuerdo a los cuadros exhibidos se denota que los del segundo caso tienen valores superiores de 15 a 20% y ambos casos adoptan una diferencia poco significativa en los puntos correspondientes a los bordes y centro.

En el caso de las deflexiones y momentos flectores, se ha hecho una evaluación consistente en la variación del coeficiente de balasto representativo en porcentajes definidos para ver su incidencia en la determinación de las deflexiones y momentos máximos con el Método de elementos finitos notándose marcada sensibilidad; ésta es más evidente en el caso de las deflexiones duplicándose su valor cuando el coeficiente de balasto es reducido en un 50% mientras que los momentos máximos decrecen en el mismo porcentaje cuando al balasto se duplica conforme se detalla en los comentarios al pie de los cuadros exhibidos.

De la comparación de los resultados obtenidos con el programa SAFE, en cuanto a las deflexiones observadas son del orden de 4 a 7 milímetros que representa de un 20 a 25% mayores con relación al Plaxis 3D con preponderancia en los extremos del elemento. Las tensiones de contacto son técnicamente iguales a diferencia de los momentos flectores y esfuerzos cortantes máximos que son en promedio 30% mayores.

Las aplicaciones desarrolladas para casos prácticos han facilitado la comparación con los métodos clásicos de análisis y permitió la observación del comportamiento de las estructuras en función de las más importantes variables que intervienen en el problema: compresibilidad del suelo ( $mv$ ), rigidez de la cimentación continua, rigidez y configuración de la estratigrafía del terreno.

## **Recomendaciones**

Se recomienda ampliar las aplicaciones para los casos en que la variación del coeficiente de balasto pueda ser importante por estar el nivel de desplante cerca o por sobre el nivel freático.

Se recomienda la aplicación de métodos analíticos y numéricos en el diseño de estructuras de cimentación en los casos en que la interacción suelo estructura de cimentación cobre especial importancia por criterios de seguridad y confiabilidad.

No es recomendable utilizar el método tradicional que parte de la suposición de presión de contacto uniforme y lineal, ya que generalmente sobreestima los valores de los momentos flectores, haciendo más costoso el diseño, o los subestima haciéndolo inseguro.

Cuanto mayor sea la separación de las columnas que cargan una cimentación continua, mayor será la justificación para realizar un análisis de Interacción suelo estructura de cimentación.

Para los casos de losas de cimentación no es recomendable aplicar los conceptos ligados al cálculo directo debido a la influencia de la interacción cimiento terreno que toma en cuenta conceptos de deformabilidad, así como para zapatas combinadas y continuas en sistemas aporticados. La determinación de los esfuerzos de contacto, y por lo tanto, los elementos mecánicos, deben ser determinados por medio de un análisis conjunto del suelo y la estructura, con hipótesis de aproximación razonable.

Se recomienda realizar estudios de variación del coeficiente de balasto del suelo y el problema de contacto en los casos que considere carga por sismo.

Se recomienda efectuar evaluaciones bajo estos conceptos y asimilarlos a los criterios y filosofía de diseño por Estados Límite o asociarlos a las tendencias actuales de estudio por confiabilidad.

Por último, se recomienda reunir los criterios recientes incorporados en la literatura tendiente a mejorar el concepto de coeficiente de balasto y que puedan ser fácilmente implementados en sistemas informáticos, y así estar acorde con las necesidades de la modernidad y alcanzar grados de precisión adecuados a exigencias de diseño. Esto permitiría proponer a la Instancia competente asimilar nuevos conceptos en las Normas con miras de masificar su aplicación entre los diversos entes.

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- Adel Azzawi, **Document: Large deflection of deep beams on elastic foundations**. Nahrian University, Baghdad, Iraq, 2100.
- American Concrete Institute, **Comité 336. Journal of the ACI**, 1988.
- Baker A.L.L., **Raft foundations the soil-line method of design**. Concrete Publications Limited. London, 1957.
- Boussinesq J., **Application dès potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques**. Gauthier-Villars: París, 1885.
- Bowles Joseph, **Foundation analysis and design**. The McGraw-Hill New York, 1968.
- Bowles Joseph, **Foundation analysis and design**. The McGraw-Hill Companies, Inc, 1997.
- Brinch Hansen, **Una formula general para la capacidad de carga**. Instituto Geotécnico Danés. Copenhague, 1961.
- Bringkreve et al., **Hysteretic damping in a small-strain stiffness model**. Numogx London, 2002.
- Brown P.T., **Numerical analyses of uniformly loaded circular rafts on deep elastic foundations**. Geotechnique 19 (3) 399-404, 1969.
- Brown P. y Gibson R., **Rectangular load son inhomogeneous elastic soil**. J. Soil Mech ASCE 99, 1973.
- Bull, J. W., **Soil-Structure Interaction: Numerical Analysis and Modeling**. Primera edición. London, Great Britain: Cambridge, University Press, 1994.
- Capítulo Peruano del Instituto Americano del Concreto, **Cimentaciones de concreto armado en edificaciones**. I Congreso Nacional de Ingeniería Estructural y Construcción, 2001
- Coduto Donald P., **Foundation design principles and practices**. Prentice Hall 2da edición, 2001.
- Cheung, Y. K., and Zienkiewicz, O. C., **Plates and tanks on elastic foundations an application of finite-element method**. International Journal of Solids and Structures. Vol. 1, pp. 451-461, 1965.
- Dashko, Kagan, **Mecánica de los suelos en la práctica de la geología aplicada a la ingeniería**. Editorial Mir Moscú, 1980.
- De Beer, E.E., **Experimental determination of the shape factors and the bearing capacity factors of sand**. Geotechnique, 20, nº4, p. 387, 1970.
- Delgado Vargas, Manuel, **Ingeniería de fundaciones. Fundamentos e introducción al análisis geotécnico**. Escuela Colombiana de Ingeniería, 1996.
- Delgado Vargas, Manuel, **Introducción a la interacción estática suelo estructura de fundación**. Escuela Colombiana de Ingeniería, 1998.

Del Río, Carlos, **Algunas contribuciones al estudio de vigas sobre cimentaciones elásticas**. Publicación del II Congreso de Mecánica de Suelos e Ingeniería de Cimentaciones, 1970.

Drounic, Magnan, Humbert y Mestat, **Bearing capacity of shallow foundation under inclined and eccentric loads**. 5ta. Conferencia europea sobre métodos numéricos en Ingeniería geotécnica. Paris, 2003.

Duncan J, Chang C., **Nonlinear analysis of stress and strain in soils**. ASCE J Soil Mech Found Div 96 (SM5), 1970.

Ellingwood et al., **Wind Load As explained**, 1980.

Fang H. Y., **Foundation engineering handbook**. Segunda Edición. Chapman & Hall, 1991.

Fellenius W., **Erdstatische berechnungen**. Berlin, 1927.

Flamant. **Sur la repartition des pressions dans un solide rectangulaire charge transversalement**, 1892.

Fraser y Wardle. **Numerical analysis of rectangular rafts on layered foundations**. Geotechnique, 1976.

Freire Tellado. **Documento: interacción suelo cimiento estructura, el caso de las zapatas partes I y II**. Dpto. Tecnología de la Construcción. Universidad de La Coruña, 1999.

Frohlich O.K., **La repartición de las presiones en el terreno de cimentación con especial examen del fenómeno de plasticidad**. Revista de Obras Públicas. Madrid, 1949.

Geomec. **El Método de los elementos finitos en las aplicaciones geotécnicas, análisis de asentamientos de las fundaciones**. Boletín de divulgación geotécnica No. 9. Universidad Central de Venezuela, 1982.

Georgiadis and Michalopoulos. **Bearing capacity of gravity bases on layered soil**. Journal of the Geotechnical Division, ASCE 111 No. 6 p. 712, 1985.

Gibson, R.E., **Some results concerning displacements and stresses in a non-homogeneous elastic half-space**. Geotechnique 17 (1) 58-67, 1967.

González de Vallejo. **Ingeniería geológica**. Editorial Pearson Prentice Hall, 2001.

Griffiths. **Computation of bearing capacity factors using finite elements**. Geotechnique 32 (3), 195-202, 1982.

Gunaratne M., **The foundation engineering hand book**. CRC Taylor and Francis, 2002.

Hahn J., **Vigas continuas, pórticos, placas y vigas flotantes sobre terreno elástico**. Editorial Gustavo Gill. Tercera edición, 1994.

Harr M.E., **Foundation of theoretical soil mechanics**. McGraw-Hill Nueva York, 1966.

Hetenyi M., **Beams on elastic foundation**. Universidad de Michigan Press, 1946.

Hettler y Gudehus, **Influence of the foundation width on the bearing capacity factor**. Soils and Foundation JGS, Vol. 28, N°4, pp. 81-92, 1988.

**Instrucción del Hormigón Estructural**. Ministerio de Fomento de España, 1999.

Jimenez Salas J., **Geotecnia y cimientos III**. (Primera y segunda partes), Editorial Rueda. España, 1981.

Koiter, W.T., **General theorems for elastic-plastic solids**. in: **progress in solid mechanics**. Edición I.N. Sneddon, R. Hill), Vol. 1., North-Holland, Amsterdam, pp. 165-221, 1960.

Kondner, T., **A hyperbolic stress-strain formulation of sands**, Proc. 2nd Panamerican Conference on Soil Mechanics and Found. Eng., pp. 289-324, 1963.

Konig G. y Sherif G., **Consideracion de las condiciones reales en el calculo de losas de cimentación**. Boletín No. 18 Nov-dic. Sociedad Española de Mecánica de Suelos, 1975.

Lade y Duncan, **Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil**. Proc ASCE, Journal of the Geotechnical Engineering Division 101 (GT10) 1037-1053, 2005.

Lade, P.V. and Duncan J.M., **Elastoplastic Stress-Strain Theory for Cohesionless soils**, 2005.

Lambe y Whitman, **Mecánica de suelos**. Limusa editores 2da. Edición, 2001.

Lopez Villar J., **Documento: Asiento en zapatas corridas. Comparación entre teorías clásicas y el Método de elementos finitos**. Dpto Ingeniería. Universidad de Santiago de Compostela, 2001.

Mayne y Poulos, **Aproximate displacement influence factors for elástico shallow foundations**. ASCE, 1999.

Medina J.A., **Análisis comparativo de las teorías de capacidad portante por corte de cimentaciones superficiales**. Tesis de grado. UNI, 2002.

Meyerhof G.G., **The ultimate bearing capacity of foundations**. Geotechnique London, 1951.

Meyerhof G.G., **The bearing capacity of foundations under eccentric and inclined loads**. Zurich, 1953.

Meyerhof G.G., **Penetration test and bearing capacity of cohesionless soils**. Journal of the soil Mechanics and Foundation vol 82, 1956.

Mindlin R.D., **Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates**. Trans. ASME, 1951.

Ministerio de Fomento de España. **Instrucción de hormigón estructural (EHE)**.

Miñón Santos, **Documento PDF: Análisis de la interacción estática suelo estructura**. Cali Colombia, 1981.

Mizumo y Tsuchida, **Practical use of finite element analysis for slope stability and bearing capacity Foundation design**, 2002.

Muir Wood D., **Geotechnical modeling**. Versión 2.2. Abbots Leigh, 2004.

Murthy V.N.S., **Geotechnical engineering. Principles and practices of soil mechanics and foundation engineering.** Marcel Dekker INC. New York, 1998.

Muzas Labad F., **Documento PDF: La rigidez de las cimentaciones superficiales.** Madrid, 2002.

Naval Facilities Engineering Command Virginia, **Foundations and earth structures.** Alexandria EE.UU., 1986.

Nieves A., **Métodos numéricos aplicados a la ingeniería.** Editora Continental. México, 2003.

Olmos Martínez, Pedro, **Cimentaciones superficiales. diseño de zapatas.** Universidad de Valladolid. España. 2007.

Paikowsky, **Examination of a new cross-hole sonic logging system for integrity testing of drilled shafts.** Sao Paulo, Brasil, 2004.

Paniukov P., **Geología aplicada a la ingeniería.** Editorial Mir-Moscú, 1979.

Peña Fuertes M., **Análisis estático y dinámico entre el suelo y cimentaciones superficiales y piloteadas.** Tesis de grado. Universidad Nacional de Ingeniería, 1988.

Peñafiel P., **Proceso h adaptativo y generacion automatica de elementos finitos.** Tesis de maestria en estructuras. Universidad Nacional de Ingeniería, 2002.

Plaxis 3D Foundation, **Manual científico.** Versión 1.1, 2004.

Phoon y Kulhawy, **Observations on geotechnical reliability-based design development in north america.** International Workshop on foundation Design Codes and Soil Investigation. IWS Kamakura, Tokyo, Japón, 1999.

Prandtl, **Ueber die harte plastischer korper.** Gottingen, Math, Phys. KI 74, 1920.

Ramírez G., **Vigas sobre cimentaciones elásticas, experimentación de modelos.** Tesis de grado Universidad Nacional de Ingeniería, 1969.

Reimbert, Marcel y Andre, **Presiones y asentamientos de las cimentaciones superficiales cálculo de las zapatas. Estado elastoplástico de los suelos.** Barcelona Técnicos Asociados. 1979.

Reissner H., **Zum erddruckproblem proceding.** Delft, 1924.

Rodriguez Ortiz, José M., **Curso aplicado de cimentaciones.** COAM. 1980.

Saca G., **Efecto de las vigas conectoras en la fundación de edificios de marcos rígidos.** Tesis de licenciado en Ingeniería. Universidad Mariano Gálvez de Guatemala, 1984.

Scott, R. F., **Foundation Analysis,** Prentice Hall, 88 -114, 1981.

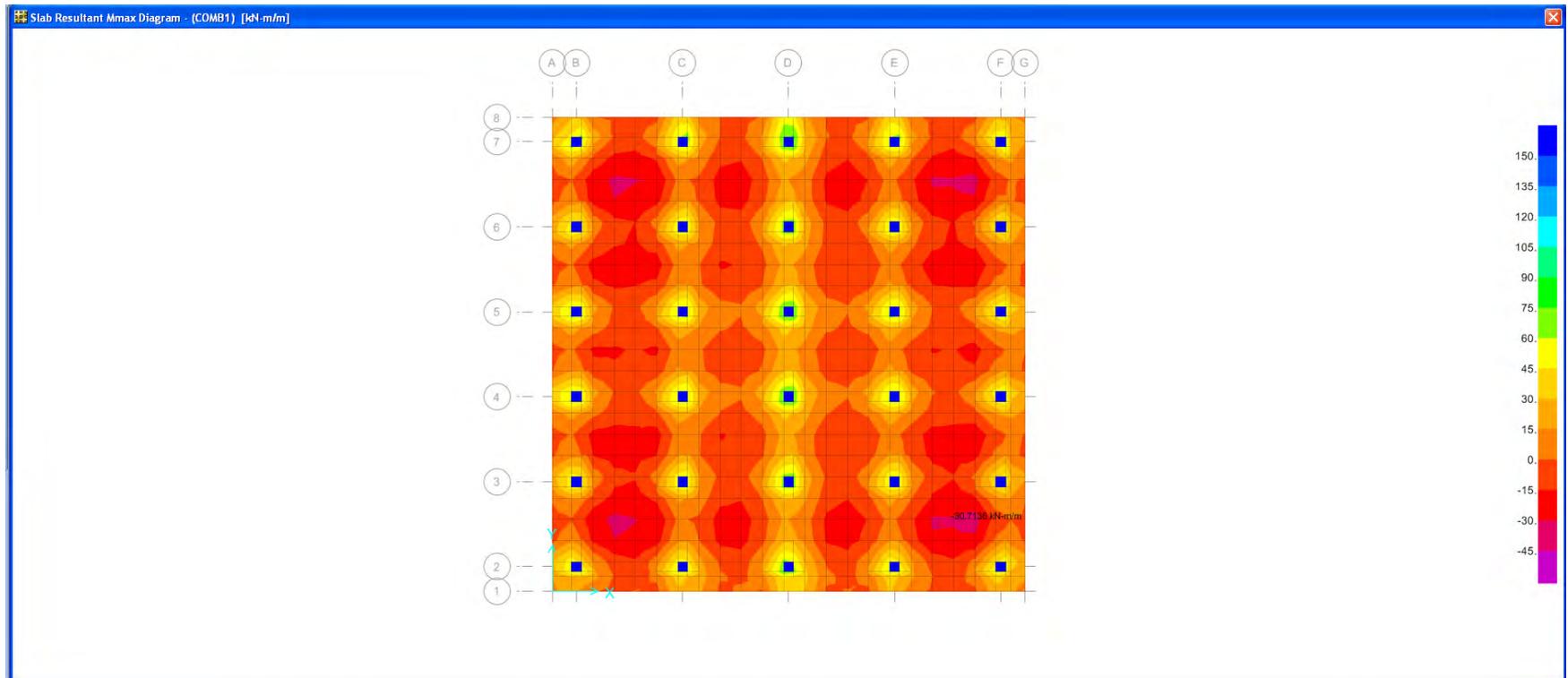
Siddiquee, Tanaka, Tatsuoka, Tani, Yoshida y Morimoto, **Numerical simulation of bearing capacity characteristics of strip footing on sand.** Soil and foundation vol 39, 2001.

Skempton A.W., **Correspondence,** Geotechnique volume 10, 1960

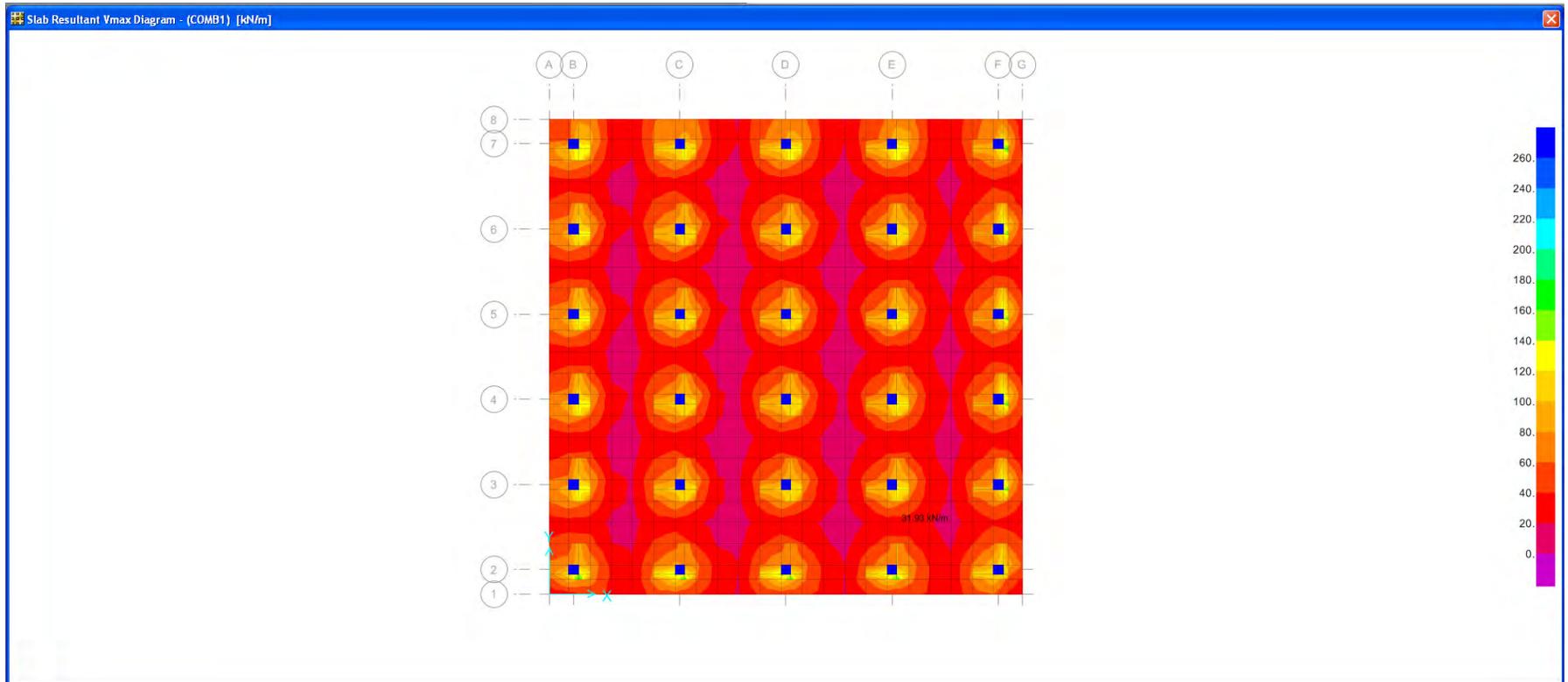
- Smith I.M., **Programing the finite element method with aplicattion to geomechanics**. John Wiley, Chichester, 1982.
- Sokolovskii, V. V., **Statics of granular media**. Pergamon Press, New York, 1965.
- Terzaghi K.V., **Theoretical soil mechanics**. Wiley New York, 1943.
- Terzaghi K.V., **Evaluation of coefficients of subgrade reaction**. Geotechnique, 1955.
- Timoshenko S., **Theory of elasticity**. McGraw-Hill, 1951.
- Tomlinson M. J., **Cimentaciones diseño y construccion**. México Trillas. 1996.
- Valderrama A., **Investigación de la matriz en gravas y su comportamiento para cimentaciones**. Tesis de maestria en geotecnia. Universidad Nacional de Ingenieria, 2001.
- Verdeyen J., **Mecanique du soil ef foundations**. Eyrolles, Paris, 1964.
- Vesic A.B., **Bending of beams resting on isotropic elastic solid**. Journal Engrg. Mech. ASCE 87, 1961.
- Vesic A.B., **Analisy of ultimate loads of shallow foundations**. Journal Engrg. Mech. ASCE 99, 1973.
- Vlasov, V. Z. and U. N. Leontiev, **Beams, Plates, and Shells on Elastic Foundation**. Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem. (Translated from Russian), 1966.
- Wai Fah Chen., **Limit analysis soil plasticity**. Raimbrow Bridge Book, 1974.
- Westergaard, **Stresses in concrete pavements computed by theoretical analysis**. Public Roads Vol. 7 No. 2, 1926.
- Winkler E., **Die Lehre von der Elastizität und Festigkeit, H. Dominicus**. Prague, 1867.
- Wolfer K.H., **Rigidez relative**, 1969.
- Wood D.M., **Soil behaviour and critial state soil mechanics**. Cambridge University Press. EE. UU, 1990.
- Zadroga B., **Bearing capacity of shallow foundations on noncohesive soils**. Journal of geotechnical Engineering vol 120, 1994.
- Zeevaert W. Leonardo, **Interacción suelo estructura de cimentaciones superficiales y profundas sujetas a cargas estáticas y sísmicas**. Limusa México, 1991.
- Zienkiewicz and Cheung, **The Finite Element Method in Continuum and Structural Mechanics**. McGraw Hill, 1967.
- Zimmermann, **Die berechnung des Eisenbahn Oberbaues**. Berlin, 1988.

# **ANEXO 1**

**SALIDAS GRAFICAS DEL PROGRAMA SAFE.  
MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS CORTANTES  
MAXIMOS EN LOSA DE CIMENTACION**



MOMENTOS FLECTORES MAXIMOS PARA EL ELEMENTO LOSA DE CIMENTACION DE ACUERDO AL PROGRAMA SAFE

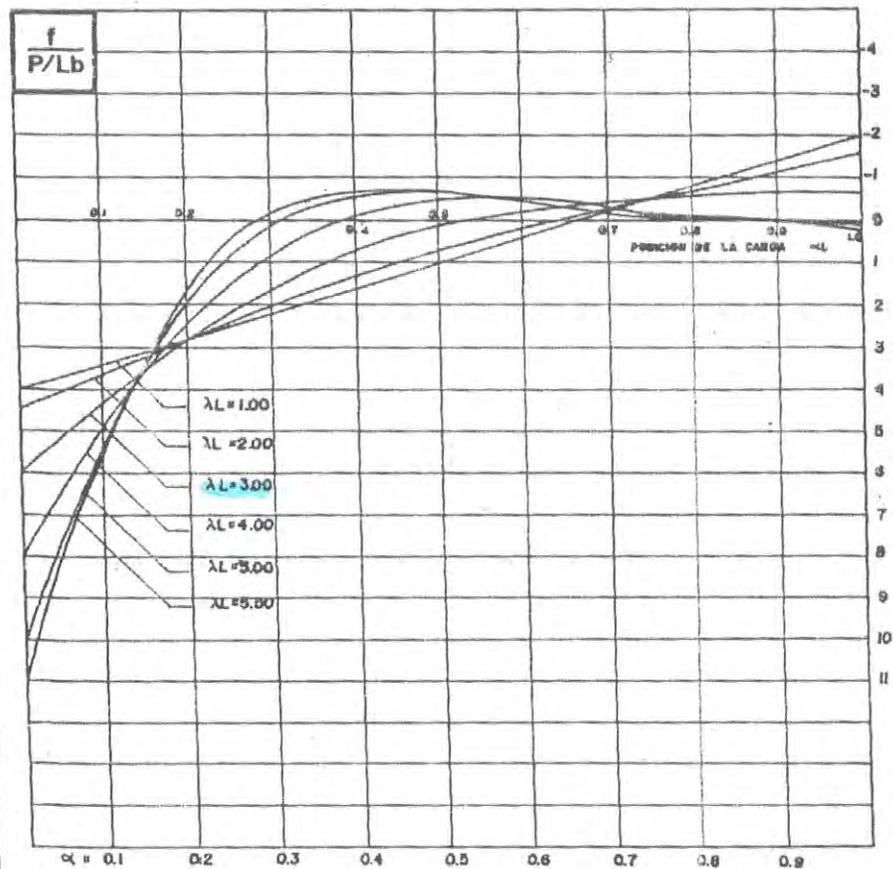


ESFUERZOS CORTANTES MAXIMOS PARA EL ELEMENTO LOSA DE CIMENTACION DE ACUERDO AL PROGRAMA SAFE

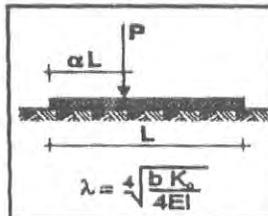
# **ANEXO 2**

**RECOPIACIÓN DE ÁBACOS DE LÍNEAS DE  
INFLUENCIA PARA EL CÁLCULO DE PRESIONES DE  
CONTACTO, MOMENTOS FLECTORES Y ESFUERZOS  
CORTANTES EN VIGAS DE CIMENTACIÓN SOBRE  
MEDIO ELÁSTICO SOLICITADA POR CARGA  
PUNTUAL**

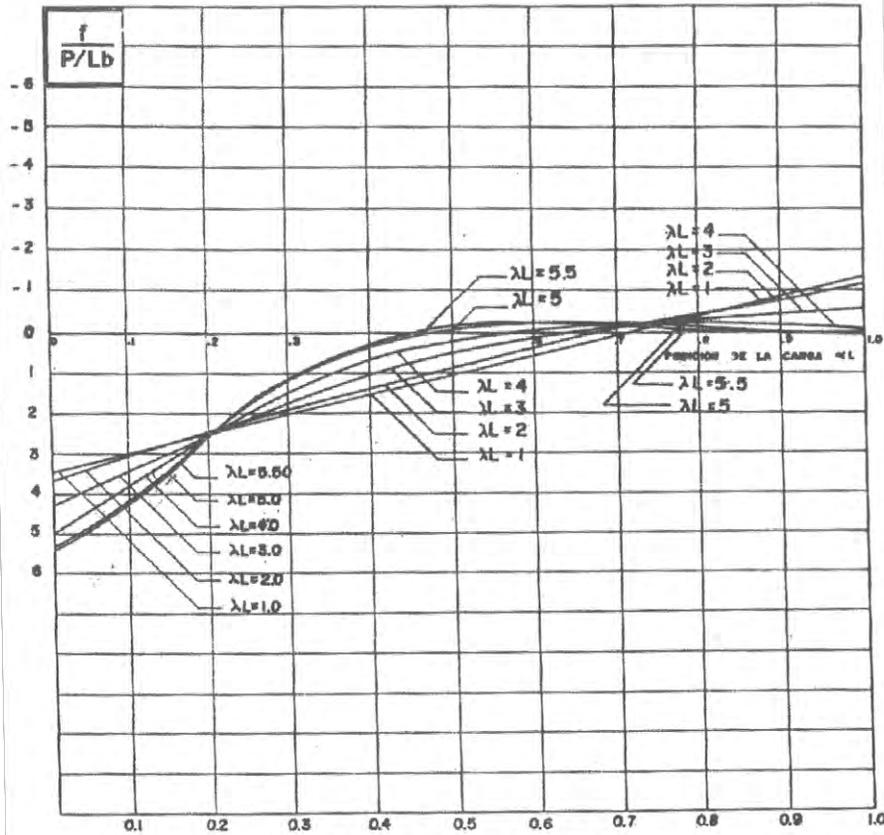
LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 0  
SECCIÓN 0.0L , 1.0L



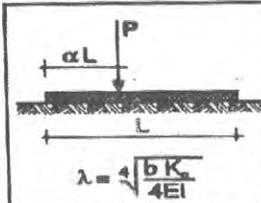
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $Kg/cm^2$ )  
 $I$  = Momento de Inercia de la sección de la viga



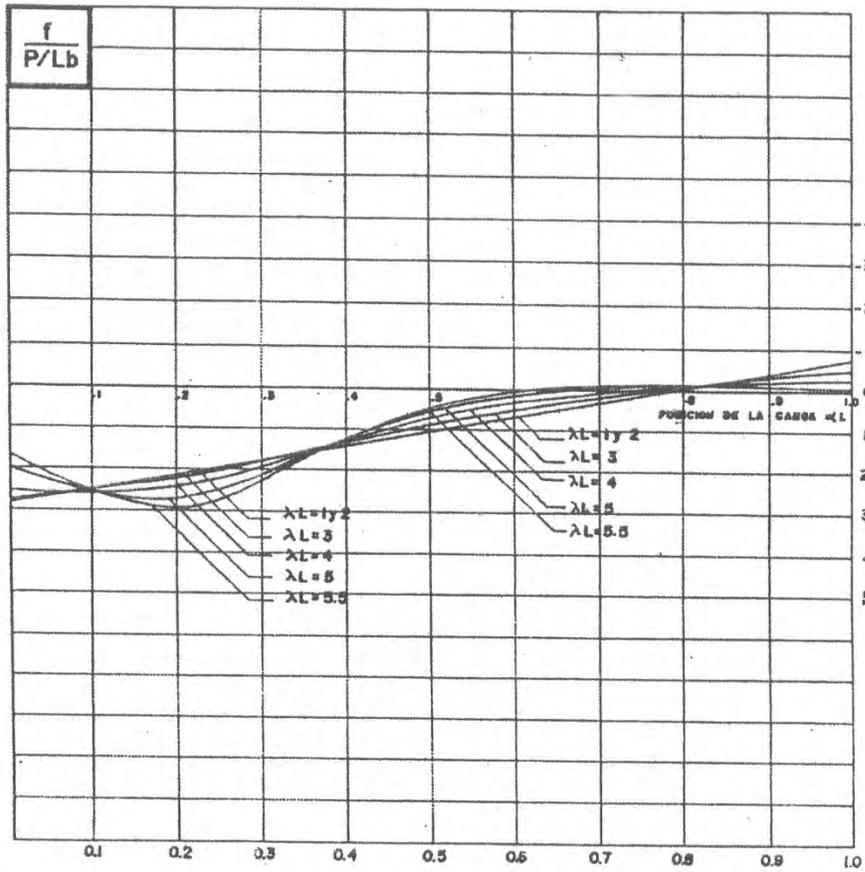
LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 1  
SECCIÓN 0.1L, 0.9L



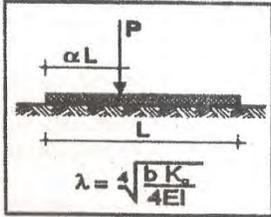
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>2</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga



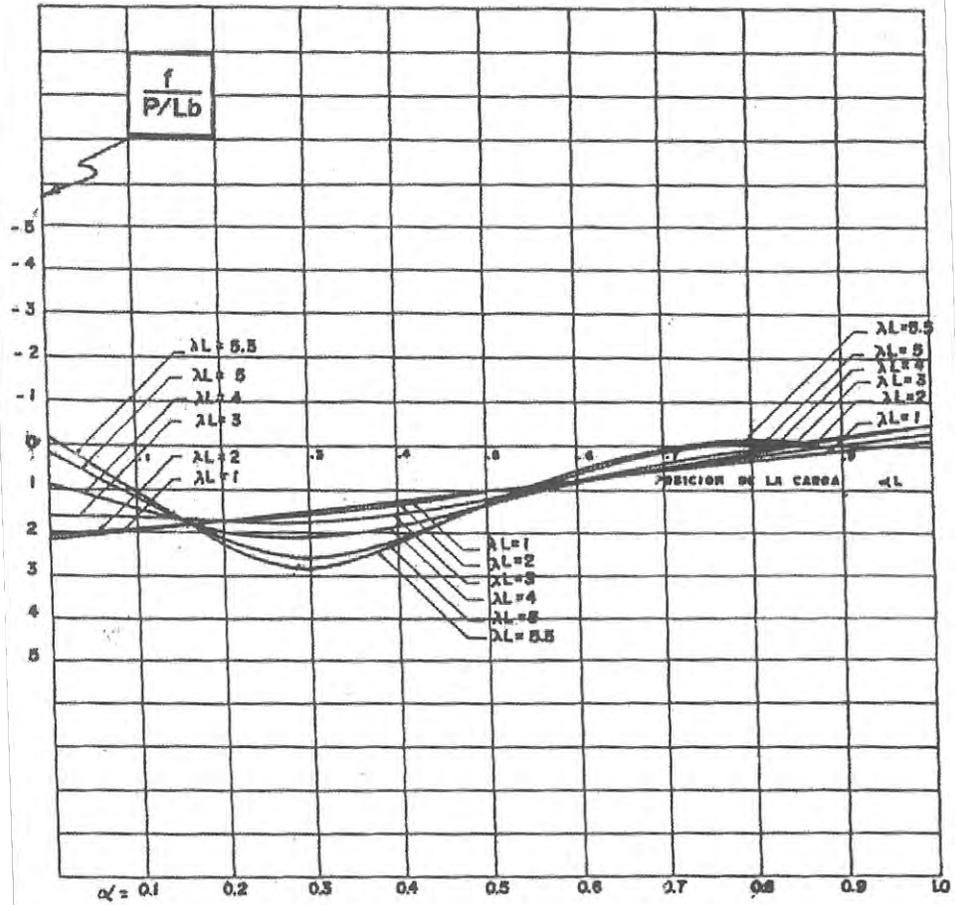
LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 2  
SECCIÓN 0.2L , 0.8L



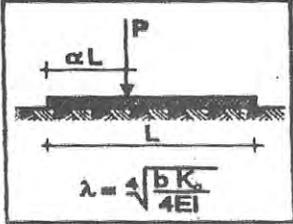
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>3</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga



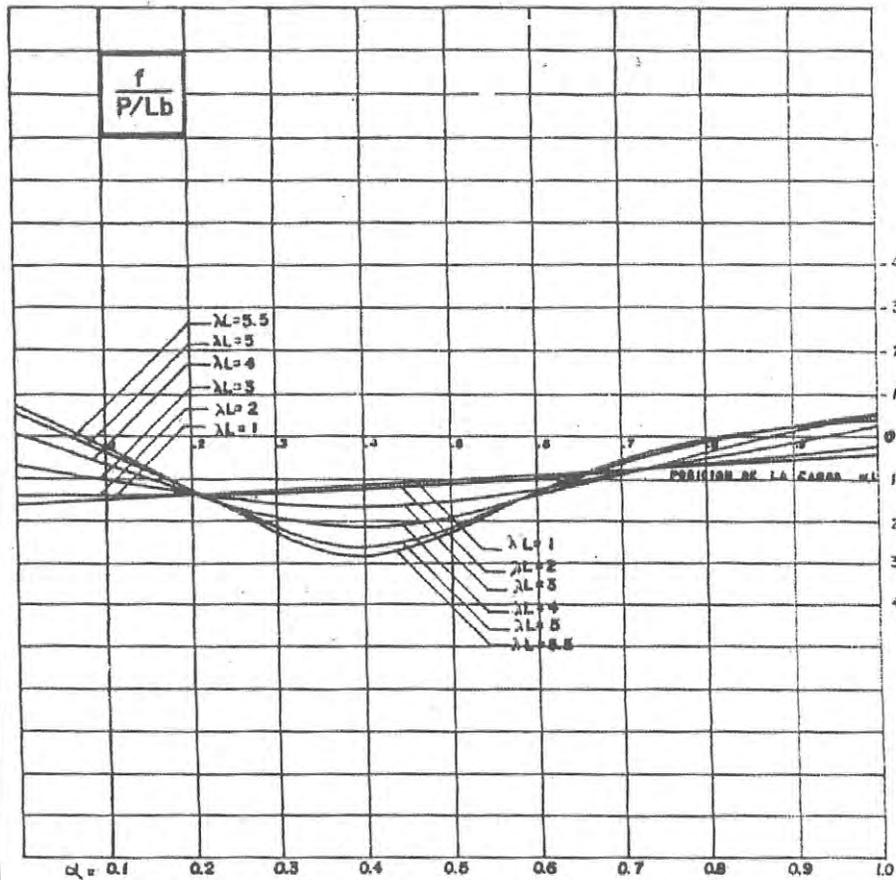
LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 3  
SECCIÓN 0.3L, 0.7L



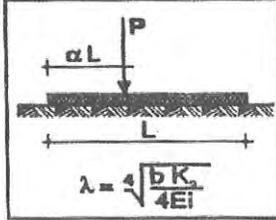
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>2</sup> )  
 $I$  = Momento de Inercia de la sección de la viga



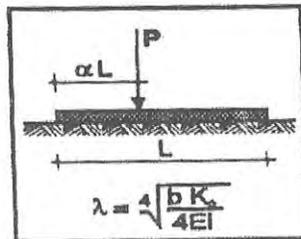
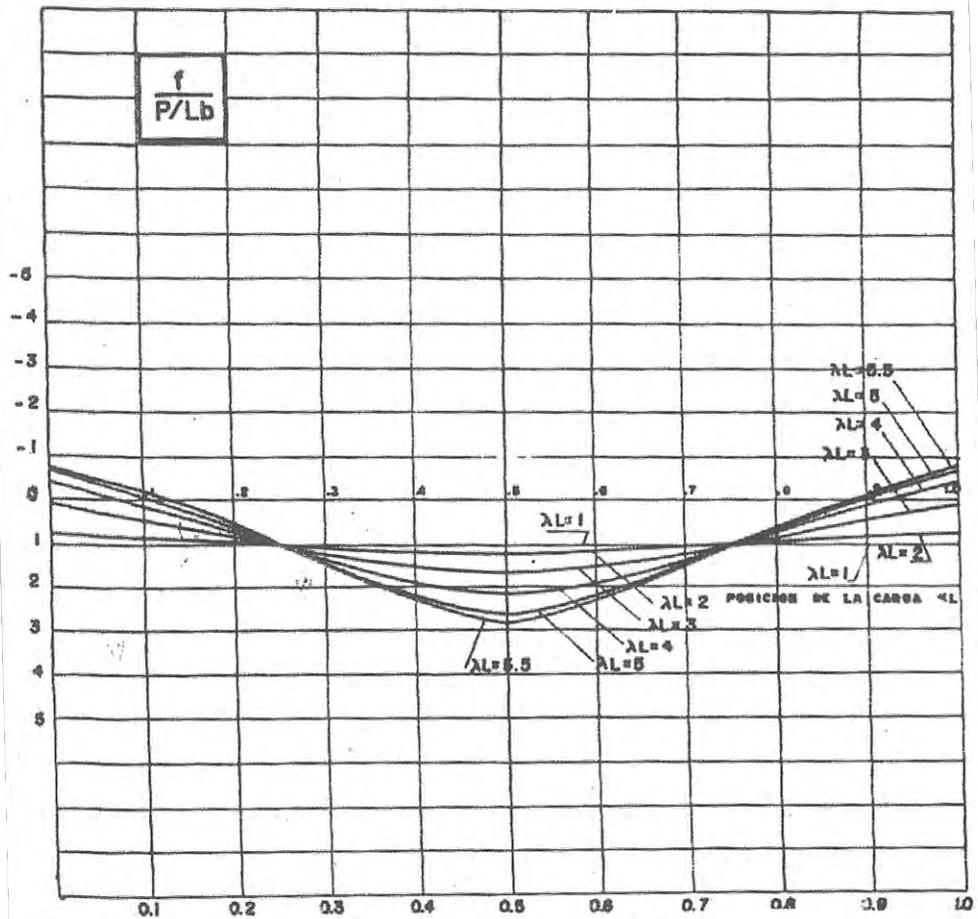
LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 4  
SECCIÓN 0.4L , 0.6L



$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto (  $\text{Kg/cm}^2$  )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

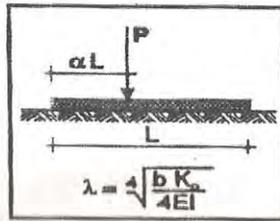
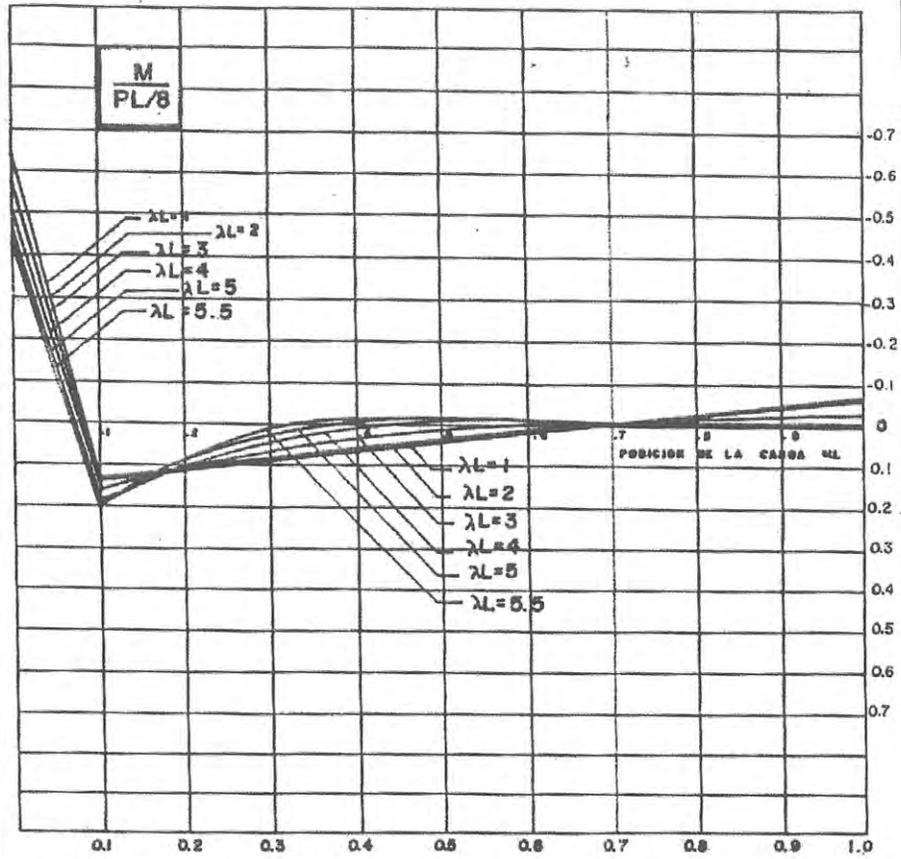


LÍNEA DE INFLUENCIA DE PRESIONES EN EL TERRENO F - 5  
SECCIÓN 0.5L



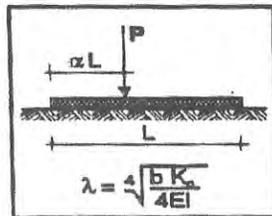
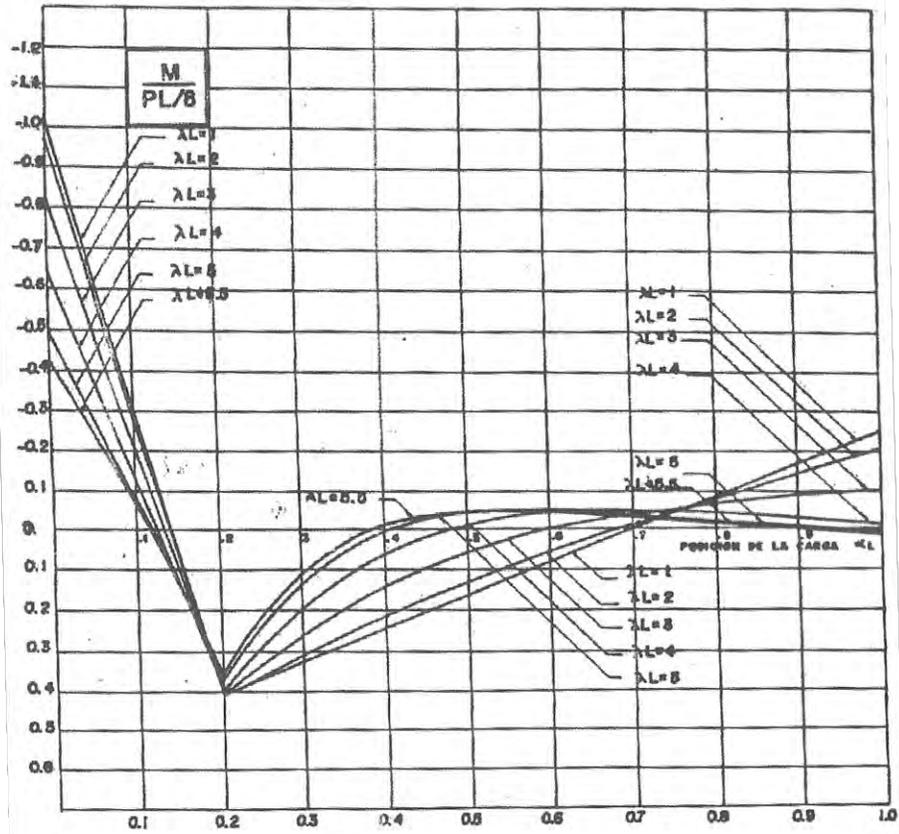
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $\text{Kg/cm}^2$ )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 1  
SECCIÓN: 0.1L , 0.9L



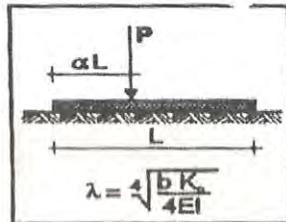
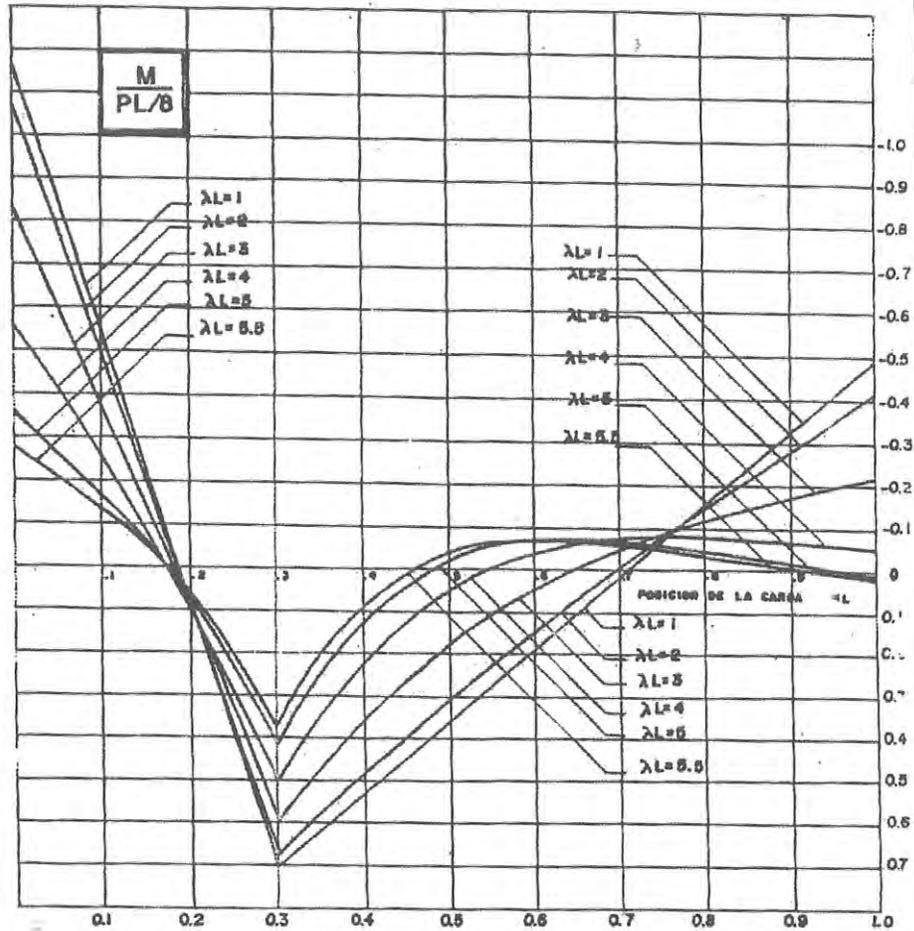
- $b$  = Ancho de la cimentación
- $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $\text{Kg/cm}^2$ )
- $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 2  
SECCIÓN: 0.2L , 0.8L



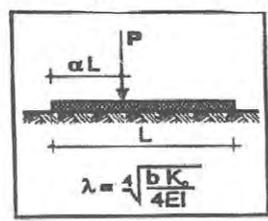
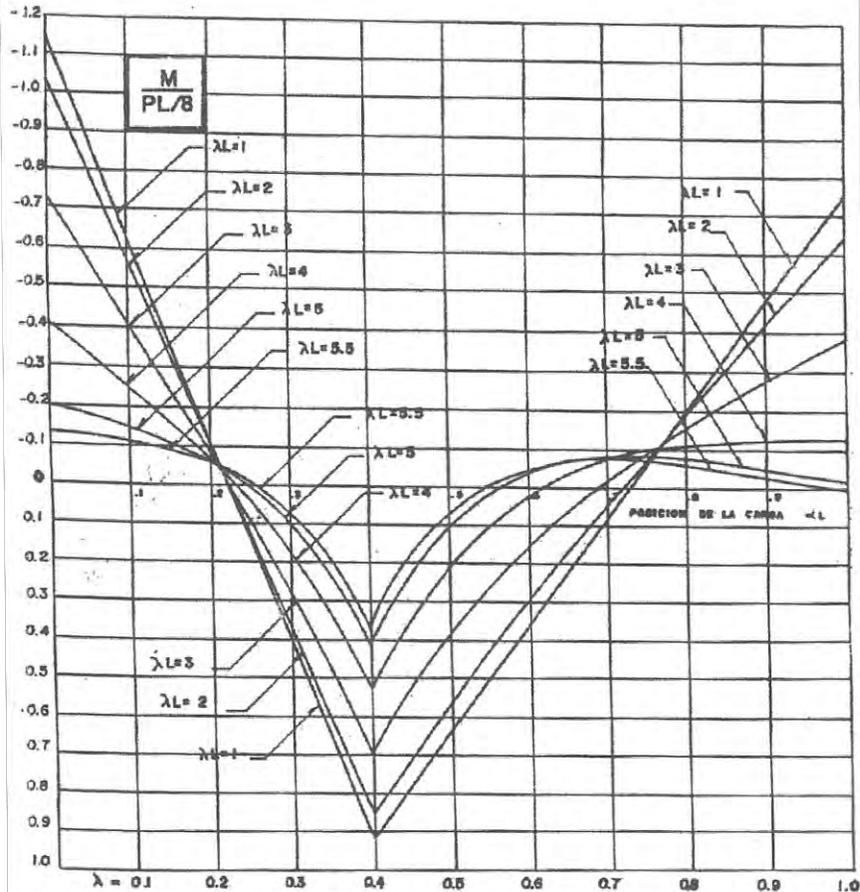
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $\text{Kg/cm}^2$ )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 3  
SECCIÓN: 0.3L , 0.7L



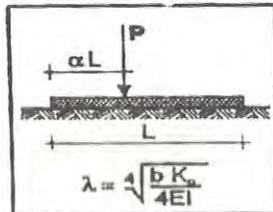
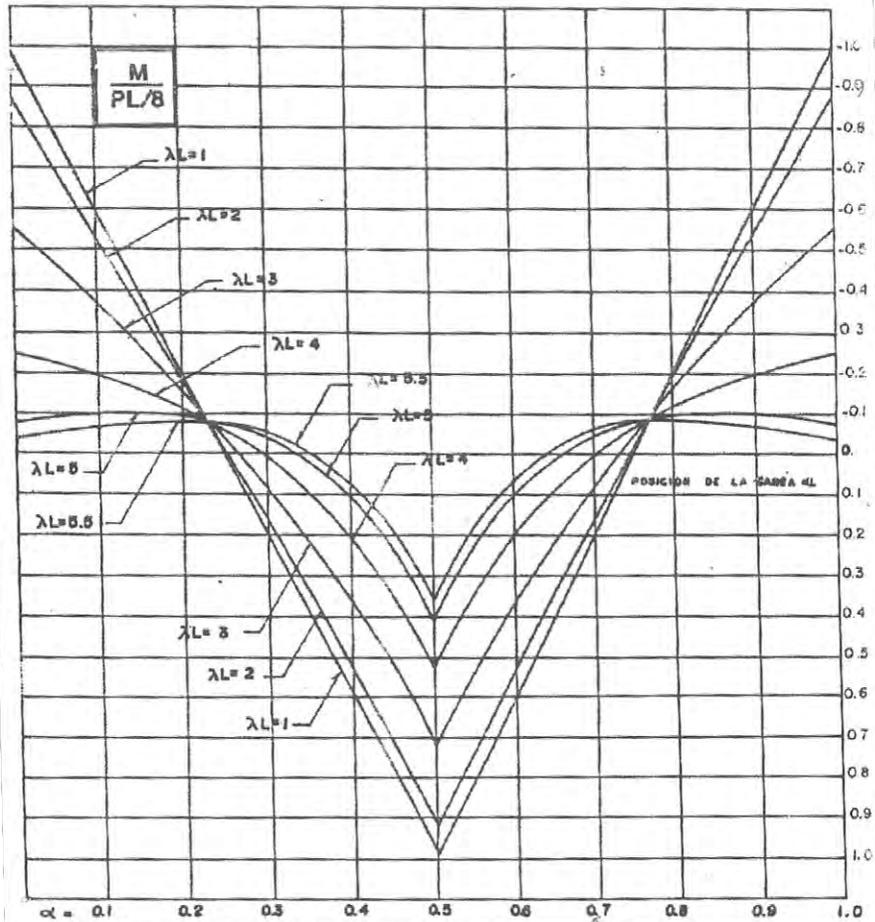
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>2</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 4  
SECCIÓN: 0.4L , 0.6L



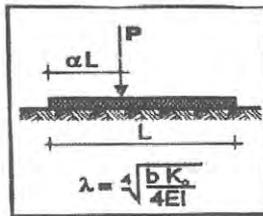
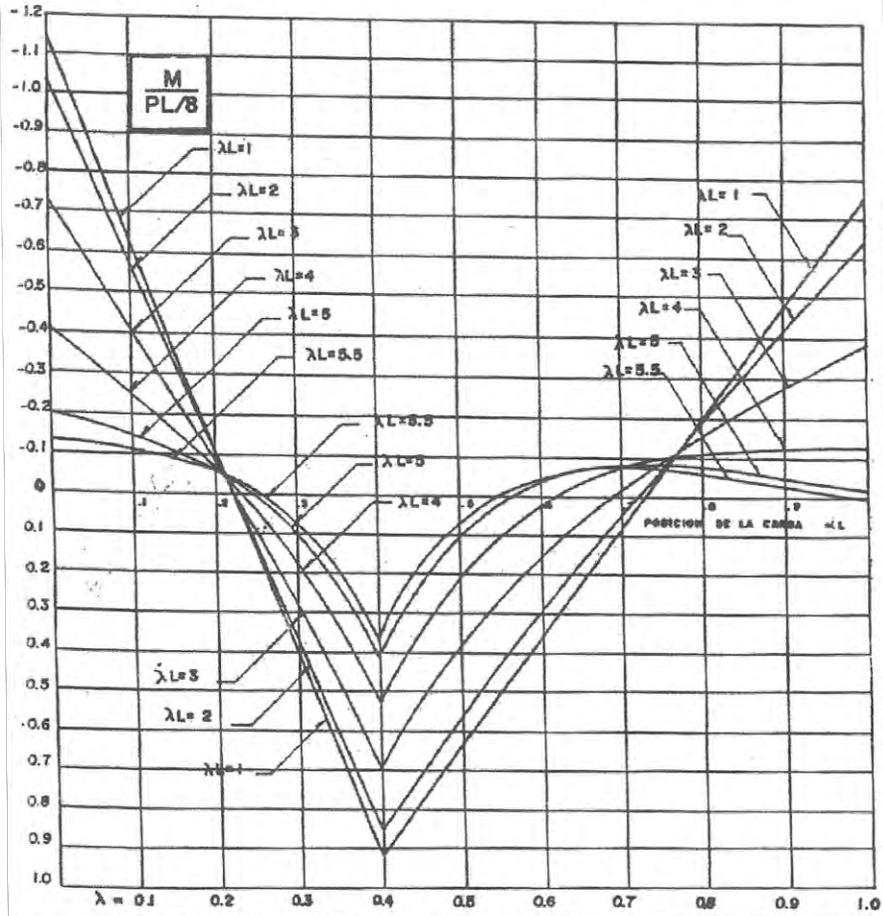
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>2</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 5  
SECCIÓN: 0.5L



$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_o$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>3</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

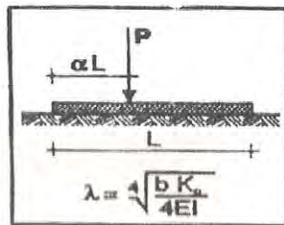
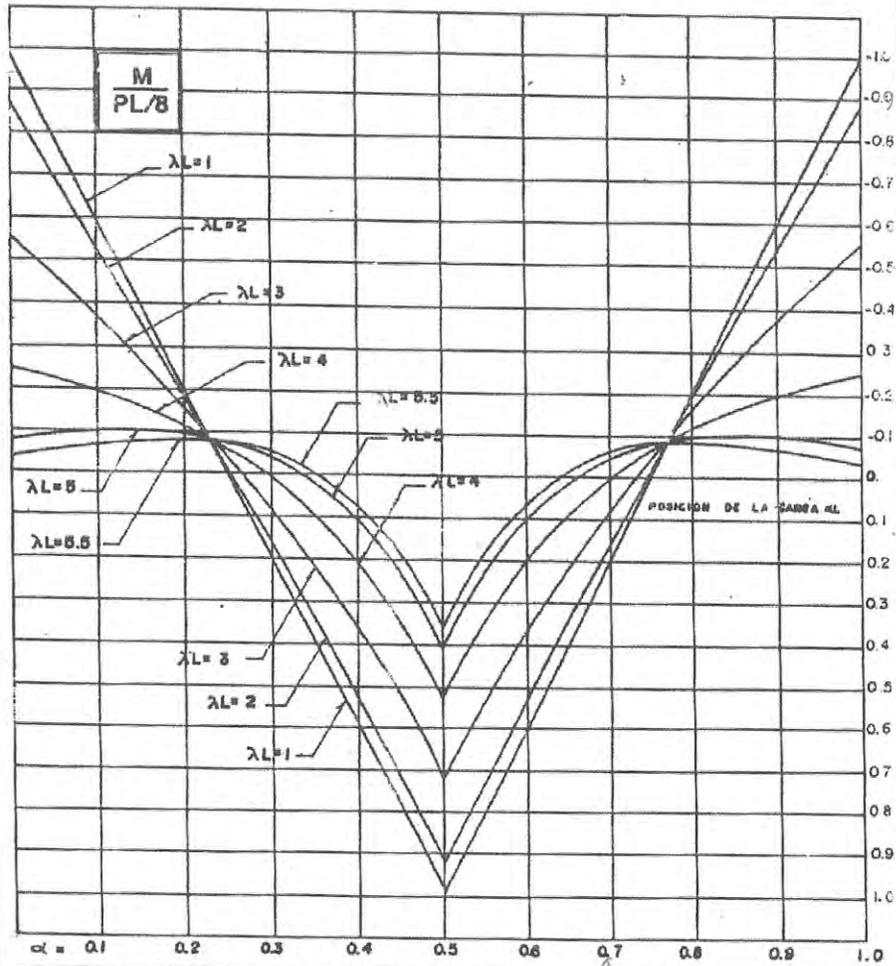
LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 4  
SECCIÓN: 0.4L , 0.6L



$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{b K_0}{4EI}}$$

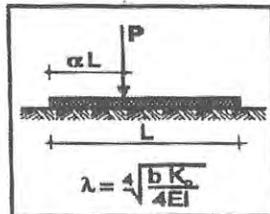
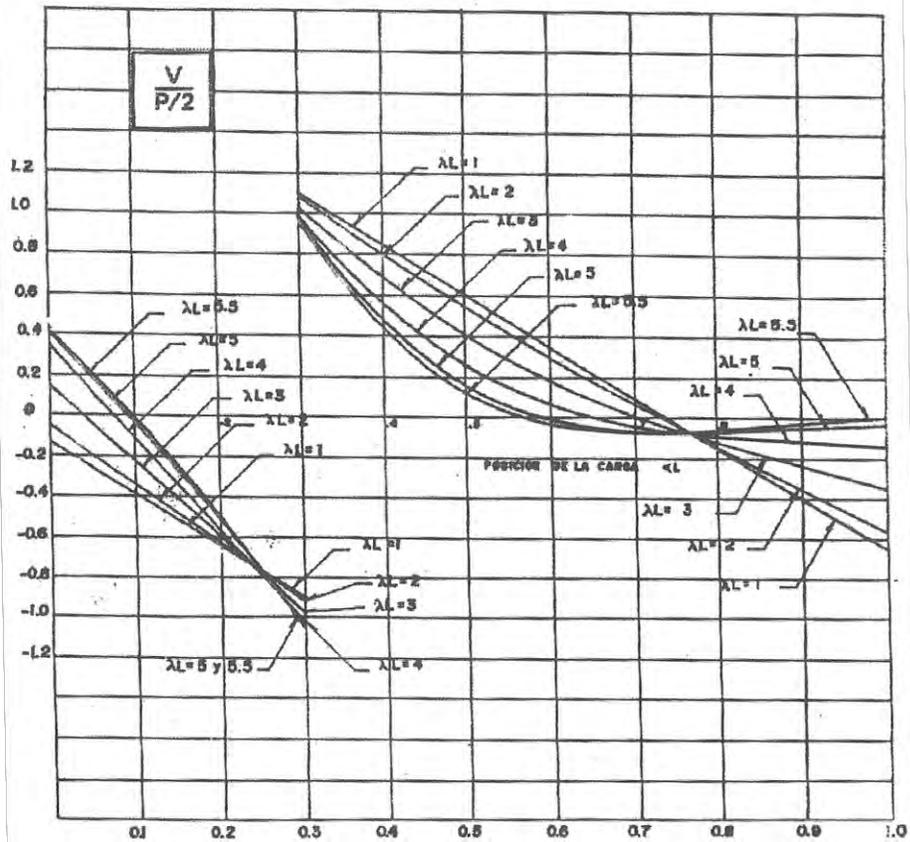
- b = Ancho de la cimentación
- $K_0$  = Coeficiente de balasto (  $\text{Kg/cm}^2$  )
- I = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE MOMENTOS M - 5  
SECCIÓN: 0.5L



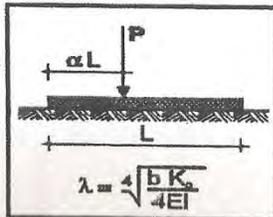
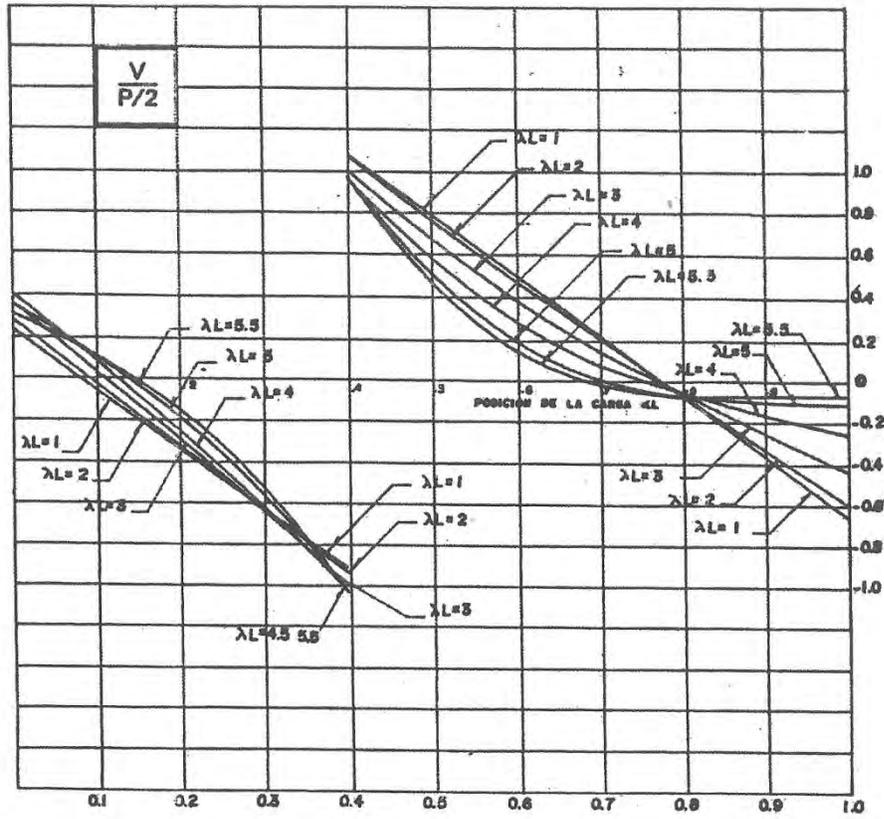
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>3</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE CORTANTES V - 3  
SECCIÓN: 0.3L , 0.7L



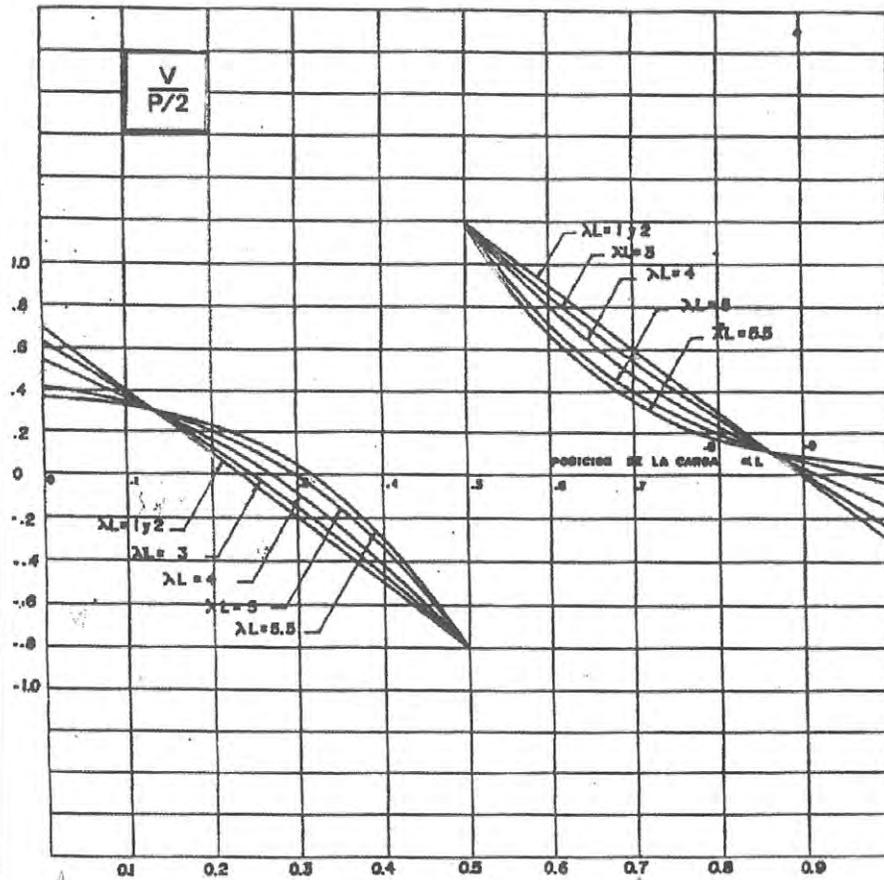
$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $\text{Kg/cm}^2$ )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE CORTANTES V - 4  
 SECCIÓN: 0.4L , 0.6L



- $b$  = Ancho de la cimentación
- $K_0$  = Coeficiente de balasto ( $\text{Kg/cm}^2$ )
- $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

LÍNEA DE INFLUENCIA DE CORTANTES V - 5  
SECCIÓN: 0.5L



$b$  = Ancho de la cimentación  
 $K_0$  = Coeficiente de balasto ( Kg/cm<sup>2</sup> )  
 $I$  = Momento de inercia de la sección de la viga

