DESACOPLAMIENTO Y DEFINICIÓN DEL DOMINIO DE DEPENDENCIA DE UN SISTEMA DE CONSERVACIÓN LINEAL HIPERBÓLICO

DISCONECTATION AND DEFINITION OF THE DOMAIN DEPENDENCE OF A HYPERBOLIC CONSERVATION LINEAR SYSTEM

Irla Mantilla Núñez[1], Rosa Ñique Álvarez[2]

RESUMEN

Las ecuaciones que rigen el comportamiento de alguna de las ecuaciones de la Física – Matemática, como por ejemplo de ondas elásticas, acústicas y de electromagnetismo, son posibles reducirlas a sistemas de EDP'S de primer orden, los que resultan de operar sobre una EDP hiperbólica de segundo orden. Con la finalidad de resolver numéricamente este tipo de ecuaciones, éstas pueden llevarse a este tipo de sistemas lineales de EDP'S. Nuestro objetivo en este artículo es presentar una técnica de la transformación de la EDP de segundo orden hiperbólica a un sistema lineal de EDP de primer orden, para el caso de una ecuación de onda cualesquiera, así como el desacoplamiento de dicho sistema para reducirlas a EDP'S independientes de primer orden y definir así el dominio de Dependencia del sistema, a fin de determinar el lugar geométrico donde permitirá establecer la existencia y unicidad de solución del problema de valor Inicial o de Cauchy, asociado al sistema.

Palabras clave.- Sistemas de conservación hiperbólico lineal, Desacoplamiento, Valores y vectores propios, Dominio de dependencia del sistema hiperbólico de EDP'S.

ABSTRACT

The equations that govern the behavior of some equations of the Physics - Mathematics as for example elastic, acoustic and of electromagnetism they are possible to reduce them to systems of EDP'S of first order, those that are of operating on a hyperbolic EDP of second order. In the Purpose of solving this type of equations numerically, these can be taken to this type of lineal systems of EDP'S. Our objective in this article is to present a technique of the transformation of the EDP from second hyperbolic order to a lineal system of EDP of first order, for the case of a wave equation any, as well as the disconectation of this system to reduce them to independent EDP'S of first order and to define this way the domain of Dependence of the system, in the purpose of determining the geometric place where it will allow to establish the existence and unicidad of solution of the problem of initial value or of Cauchy, associated to the system.

Key words.- Linear hyperbolic conservation systems, Disconectation, Eigen values and eigen vectors, Dependence domain, hyperbolic system EDP'S.

INTRODUCCIÓN

Consideremos el caso de un sistema de *n* ecuaciones diferenciales en derivadas parciales unidimensionales, o sea con una sola variable espacial y un número *n* de variables dependientes.

[1]Magister, Docente investigador del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, [2]Docente investigador de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Universidad Nacional de Ingeniería.

El concepto de sistema hiperbólico lineal unidimensional se puede concretar [3] como sigue:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + BU = F, \qquad \Omega_T \equiv \Omega \times [0,T], \quad \Omega \subset R$$
$$U : R \times [0,T) \to R^n \tag{1}$$

con:

$$U(x,t) = \begin{bmatrix} u_1(x,t) \\ \vdots \\ u_n(x,t) \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}; \; F = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}$$

Para el sistema (1) podemos decir que si los elementos de las matrices $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ y las componentes del vector $\boldsymbol{F}$ son constantes, el sistema es lineal de coeficientes constantes, si $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(x, t)$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}(x, t)$, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x, t)$ el sistema es lineal con coeficientes variables. Por otro lado, si $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ el sistema es homogéneo [1 y 2]. El sistema (1) es hiperbólico lineal en un dominio, si la matriz $\boldsymbol{A}$ es diagonalizable con valores propios reales $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$. El sistema (1) es llamado estrictamente hiperbólico si los valores propios reales son todos diferentes.

Consideremos $\Omega_t \subset R \times [0,T)$ y el PVI asociado a la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{2}$$

Condiciones iniciales:

$$w(x,0) = w_0(x)$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = v_0(x)$$

Realizando el siguiente cambio de variables:

$$u_1 = \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad u_2 = \frac{\partial w}{\partial t}$$

Entonces la ecuación (2) se puede reducir a un sistema lineal [4] de la forma (1), este resultado puede verse en [4], haciendo:

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{bmatrix},$$
$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ \\ c^2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_1}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \end{bmatrix}$$

Acompañado de las siguientes condiciones iniciales:

$$u_1(x,0) = w_0'(x) \quad ; \quad u_2(x,0) = w_0(x)$$

Técnica del desacoplamiento para un sistema hiperbólico lineal EDP's.

Dado un sistema de la forma (1) hiperbólico lineal en un dominio $\Omega_t \subset R \times [0,T)$, es decir que la matriz $\boldsymbol{A}$ de orden n x n, es diagonalizable, con valores propios reales $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, entonces existe una matriz.

$T = [\, v^1 | \, v^2 \ldots v^k \ldots \, v^n \,]$ inversible y cuyas columnas son los vectores propios de A. La matriz A se puede expresar mediante la siguiente relación:

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{T}\,\boldsymbol{D}\,\mathrm{T}^{-1} \tag{3}$$

donde: $\boldsymbol{D} = diag\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es una matriz diagonal de valores propios y T la matriz de vectores propios.

Esta relación es también posible expresarla asi: $AT = TD$, es decir, cada columna de T satisface la transformación lineal:

$$A\,v^k = \lambda_k v^k \qquad \text{para} \qquad k = 1,2,\cdots,n$$

Multiplicando (1) por T^{-1} e introduciendo la función $\boldsymbol{W} = T^{-1}\,U$, utilizando (3) y como T^{-1} es una matriz de coeficientes constantes, se obtiene:

$$\begin{cases} T^{-1}U_t + DT^{-1}U_x + BT^{-1}U = T^{-1}F \\ \dfrac{\partial W}{\partial t} + D\dfrac{\partial W}{\partial x} + BW = H, \\ \text{para} \quad H = T^{-1}F \end{cases} \tag{5}$$

D es una matriz diagonal, entonces (5) se puede desacoplar en un sistema de n ecuaciones escalares independientes una de la otra, y cada ecuación quedaría de la forma:

$$\frac{\partial W_k}{\partial t} + \lambda_k \frac{\partial W_k}{\partial x} = H_{1k} - b_{nn} W_k, \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{6}$$

Curvas características del sistema

De cada ecuación (6) determinaremos su curva característica, para ello se considera las ecuaciones diferenciales ordinarias respecto al parámetro s

$$\frac{dt}{ds} = 1 \quad , \quad \frac{dx}{ds} = \lambda_k \tag{7}$$

De la solución de estas ecuaciones se obtienen las *curvas característica* $\gamma_k(s)$.

Para la variable dependiente W_k, si $\gamma(s)$ es una curva característica, entonces se puede expresar

$$\frac{dW_k(\gamma(s))}{ds} - b_{nn} W_k(\gamma(s)) = H_{1k}(\gamma(s)), \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

Así, a lo largo de cada curva característica la ecuación (6) se ha reducido a una ecuación diferencial ordinaria.

La solución de la ecuación (8) está dada por la función implícita

$$W_k(x, t) = W_k(x - \lambda_k t, 0).$$

Entonces la función $U(x, t)$, satisface el sistema original (1) donde:

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x - \lambda_k t, 0)\, v^k \tag{9}$$

Observe que $U(x, t)$ solo depende de los n puntos iniciales $x - \lambda_k t$.

La curva $\gamma_k(s)$ que verifica (7) queda expresada como $x = x_0 + \lambda_k t$. Este es un conjunto de rectas, puesto que el sistema (1) tiene coeficientes constantes. Además si el sistema es *estrictamente hiperbólico* las n- curvas características son diferentes y pasan a través de cada punto en el plano x-t. El coeficiente del vector propio v^k, definido por W_k en (9) es constante a lo largo de la curva característica respectiva.

Dominio de dependencia del sistema en un punto inicial

Dado el problema de Cauchy asociado al sistema de EDP hiperbólico (1), la obtención del dominio de Dependencia del sistema consiste en obtener una región, donde la solución $U(x,t)$ en $t = 0$, satisfacen (1) y toman valores particulares sobre a, la curva inicial Γ. Si Γ no es tangente en ningún punto a las curvas características de (1) y si los coeficientes de (1) son continuos, entonces el problema de Cauchy se encuentra bien definido en una vecindad de Γ.

Sea $P = (\bar{x}, \bar{t})$ un punto inicial, donde $x \in R \mid x + \lambda_k \bar{t} = \bar{x}$, $k = 1, \cdots, n$

Supóngase que $n = 3$ y sean γ_1, γ_2, γ_3 las curvas características de (1) que pasan a través de punto P ver figura 1. El intervalo $\Gamma_P = AB$ que es una porción de Γ, se conoce como *dominio de dependencia del punto P*.

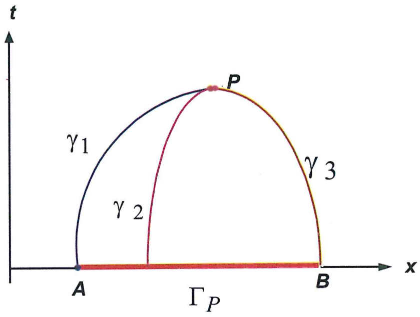

***Fig. 1** Dominio de dependencia.*

Por esta razón el dominio de dependencia del sistema en el punto $P = (\bar{x}, \bar{t})$ se define como la región delimitada por las curvas características y el segmento Γ_P, donde

$$\Gamma_P = \left\{ x \in R \;\middle|\; x = \bar{x} - \lambda_k \bar{t},\ k = 1, \cdots, n \right\}$$

es decir, aquí es donde se asegura la existencia y unicidad de la solución del problema de Cauchy asociado al sistema (1).

CONCLUSIONES

Mediante ésta metodología se consigue predecir el lugar geométrico donde existe solución única del problema de valor inicial.

El método de desacoplamiento permitirá también resolver de modo independiente y de forma más cómoda, el sistema de primer orden en espacio y tiempo para cualquier sistema de leyes de conservación lineal.

Cualquier EDP tipo onda de segundo orden lineal es posible hallar su solución numérica explicita, mediante esquemas de diferencias y elementos finitos.

REFERENCIAS

1. **Falk, R., Richter G.,** "Explicit finite element methods for symmetric hyperbolic equations"; pp.935-937, Journal SIAM, 1999.
2. **Godunov, S. K.,** "Ecuaciones de la Física Matemática"; pp. 91-102, MIR 1978.
3. **Claes, J.,** "Numerical solution of partial differential equations by the finite element method"; pp. 168-171, Cambridge University Press, 1987.
4. **Quarteroni, A.,** "Numerical Approximation of Partial Differential Equations"; pp.451-454. Springer-Verlag, 1994.

Correspondencia: irlam@uni.edu.pe

Recepción de originales: enero 2007
Aceptación de originales: abril 2007