

## COMPORTAMIENTO SISMOLÓGICO EN EL PERÚ UTILIZANDO DIMENSIÓN FRACTAL

### SEISMOLOGICAL BEHAVIOR IN THE PERU USING DIMENSION FRACTAL

Irla Mantilla N<sup>1</sup>, Luis Roca G<sup>2</sup>

#### RESUMEN

*El presente trabajo es una muestra de aplicación de los conceptos de medida y dimensión de geometría fractal en la simulación del proceso de fragmentación aplicado al estudio del comportamiento sísmológico en el Perú. En esta investigación se busca relacionar los conceptos de distribución estadística y dimensión fractal; en la finalidad de poder expresar justificadamente de modo más real el comportamiento de magnitud frecuencia y latitud de ocurrencia sísmica.*

*Palabras clave.- Comportamiento sísmológico en el Perú, Dimensión fractal, Fragmentación, distribución fractal.*

#### ABSTRACT

*The present work is a sample of application of the measure concepts and dimension of geometry fractal in the simulation of the process of fragmentation applied to the study of the seismological behavior in Perú. In this investigation it is looked for to relate the concepts of statistical distribution and fractal dimension; in the purpose of being able to express justifiably in a realler way, the behavior of magnitude frequency and latitude of seismic occurrence.*

*Key word.- Seismological behavior in the Perú, Fractal dimension, Fragmentation, Fractal distribution.*

#### INTRODUCCIÓN

El término “fractal” que significa romper o fraccionar fue concebido por Benoit Mandelbrot en la década de los años 70 y la constituyó la moderna Geometría Fractal [5].

Un concepto importante en el marco de esta geometría es el de *dimensión* [7]. Este concepto se puede entender de una manera sencilla, por ejemplo en la geometría usual analítica o Euclideana, para describir una línea curva, necesitamos de una sola variable o un parámetro que identifica a una medida como es la longitud, para describir un área o medida de una región en el plano necesitamos dos variables independientes o

parámetros y para el volumen de un sólido son necesarias tres, en este sentido al número de parámetros independientes que se necesitan para establecer una medida de determinado conjunto se le conoce como *Dimensión Topológica* [7].

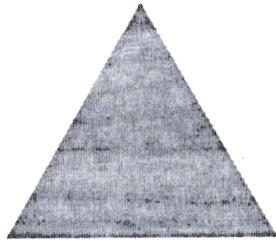
En la geometría fractal [8], el concepto de dimensión está referido a una estimación de formas y procesos aleatorios que generan una estructura fractal a la que se denomina *Dimensión Fractal* [3 y 4], geoméricamente significa el número real que determina el grado de ocupación o recubrimiento por un objeto a un espacio o lo que se conoce como rugosidad del conjunto fractal generado.

---

<sup>1</sup>Magister, Docente investigador del Laboratorio de Simulación e Investigación Numérica de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería, <sup>2</sup>Docente investigador de la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.

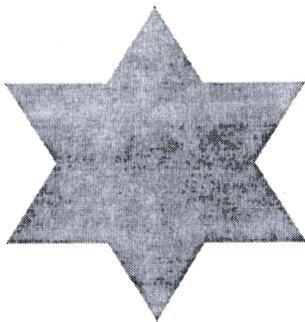
## GENERACIÓN ITERATIVA DE CONJUNTOS FRACTALES: COPO DE NIEVE

Tomemos un triángulo equilátero como el mostrado en la Fig. 1, al que llamaremos iniciador.



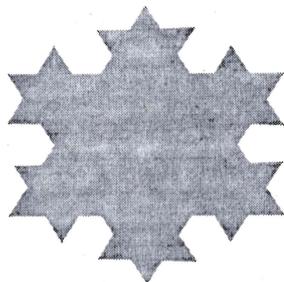
*Fig. 1 Figura inicial.*

Dividimos cada lado en tres partes iguales. En las partes intermedias de cada lado se añaden dos lados de un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a la tercera parte del lado original. Se obtiene así, lo que se muestra en la Fig. 2.



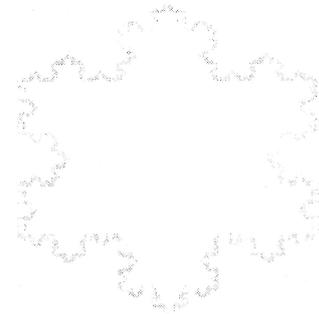
*Fig. 2 Iteración 2 de la construcción.*

Luego se dividen una vez más cada uno de los lados de la figura así formada en tres partes iguales, y en cada una de ellas se añaden dos lados de un triángulo equilátero cuyo lado sea igual a la longitud resultante. Se encuentra así la forma mostrada en la Fig. 3.



*Fig. 3 Iteración 3 de la construcción.*

Si se continúa indefinidamente este procedimiento obtendremos el comportamiento de la curva de Koch [8] que se muestra en la Fig. 4.



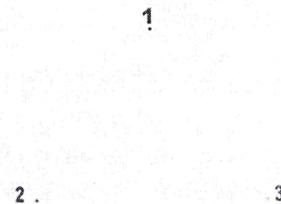
*Fig. 4 Curva de Koch.*

Esta figura es un fractal (curva de Koch), su perímetro tiene longitud infinita, tiene dimensión topológica igual a 1, pues, es un conjunto de líneas, pero tiene dimensión fractal igual a 1.2618.

## EL AZAR EN LA CONSTRUCCIÓN GEOMÉTRICA FRACTAL: TRIÁNGULO DE SIERPINSKY

Es posible generar un fractal de modo aleatorio o al azar, de la siguiente manera:

Comenzamos con tres puntos en vértices de un triángulo equilátero, rojo, azul y verde.



*Fig. 5 Puntos iniciales.*

Luego empezamos con un punto al interior del triángulo y tiramos un dado que solo esté numerado del 1 al 3, tomamos el punto medio de nuestra localización y el vértice correspondiente y lo pintamos del color de tal vértice, ese punto será nuestra nueva localización y repetimos el proceso. Después de 10 000 iteraciones el triángulo tiene la siguiente estructura de color que se muestra en la Fig. 6.

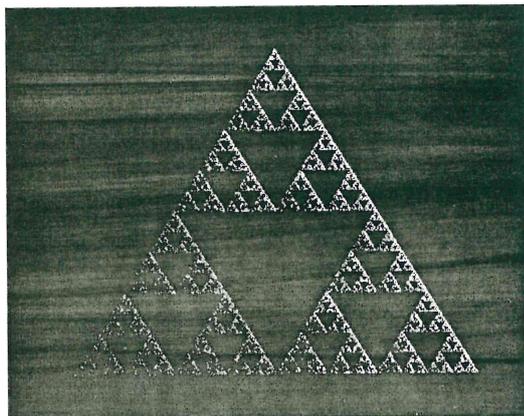


Fig. 6 Triángulo de Sierpinsky.

### DIMENSIÓN FRACTAL

Supongamos que se tiene un conjunto fractal, que satisface la siguiente relación de generación [4].

$$N_i = \frac{C}{r_i^D} \quad (1)$$

Donde:  $N_i$  es el número de objetos a los que en adelante denominaremos fragmentos, con magnitud  $r_i$ ,  $C$  es una constante de proporcionalidad y sea  $D$  la **Dimensión fractal**. Esta dimensión fractal como hemos dicho anteriormente es el número real que usualmente es de tipo fraccionario de ahí su nombre, existen distintas tipos de dimensiones fractales [4] y entre las que se pueden utilizar son la de Hausdorff [7] y la de Box Counting o de recuento por cajas [4].

Para el experimento se ha considerado la de Box Counting. Para ello tomemos un segmento de longitud unitaria y dividámoslo en tres partes, es decir  $r_1 = \frac{1}{3}$  y descartamos el segmento central. Este proceso es repetido  $N$  veces. Por ejemplo:

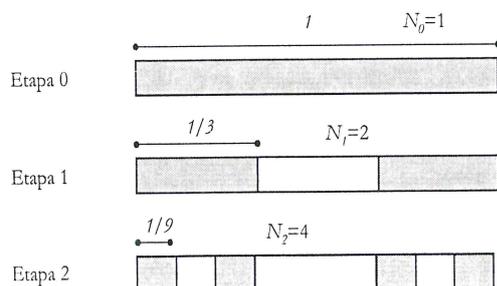


Fig. 7 Determinación de la dimensión fractal.

De la ecuación (1) podemos deducir que para las etapas  $i$  e  $i+1$  se satisface la siguiente relación.

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \left( \frac{r_i}{r_{i+1}} \right)^D \Rightarrow D = \frac{\log \frac{N_{i+1}}{N_i}}{\log \frac{r_i}{r_{i+1}}} \quad (2)$$

Aplicado a este caso resulta:

$$D = \frac{\log \frac{4}{2}}{\log \frac{1/3}{1/9}} = \log 2 / \log 3 \quad (3)$$

El objeto matemático que permite la generación fractal que satisface la relación (2) es conocido como conjunto de Cantor.  $D$  es la Dimensión de Box Counting. La relación (2) nos da la siguiente información adicional: permite ver que el fractal es invariante frente a los escalamientos, es decir existe una constante de proporcionalidad que relaciona dos etapas sucesivas en la construcción del conjunto fractal.

Veamos otro ejemplo, comencemos con un triángulo equilátero con lados de longitud unitaria ( $N_0=3, r_0=1$ ) y coloquemos triángulos equiláteros con lados de longitud  $1/3$ , centrados en cada lado del triángulo de la etapa inicial ( $N_1=12, r_1=1/3$ ).

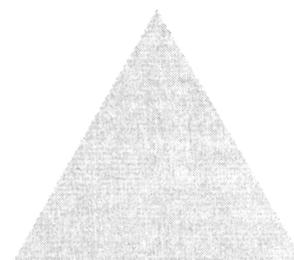


Fig. 8 Etapa inicial:  $N_0=3, r_0=1$ .

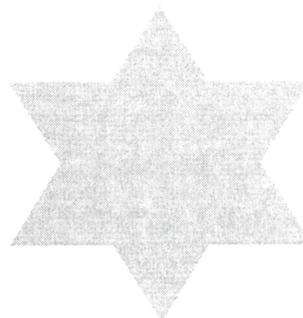


Fig. 9 Segunda etapa:  $N_1=12, r_1=1/3$ .

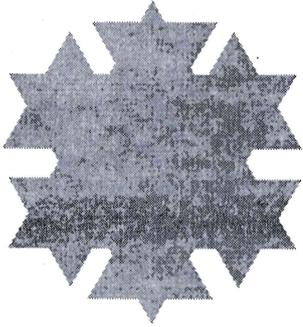


Fig. 10 Tercera etapa:  $N_2=48, r_2=1/9$ .

Aplicando en la relación (2) se obtiene:

$$D = \frac{\log \frac{12}{3}}{\log \frac{1}{1/3}} = \log 4 / \log 3 \quad (4)$$

**UN MODELO DE FRAGMENTACIÓN Y GENERACIÓN FRACTAL PROBABILÍSTICA**

Definimos la función de distribución acumulativa como  $F(x_0)$ , que significa la probabilidad de que  $x$  tenga una valor mayor que  $x_0$ .

$$F(x_0) = \Pr(x > x_0), \quad -\infty < x < \infty \quad (5)$$

La función de distribución acumulativa [6] está relacionada con la función de distribución de probabilidad  $f(x)$  por

$$f(x) = -\frac{dF(x)}{dx} \quad (6)$$

de modo que

$$F(x) = \int_x^\infty f(u) du \quad (7)$$

Y la probabilidad de que  $x$  este entre  $x_1$  y  $x_2$  está dada por

$$\begin{aligned} \Pr(x_1 < x < x_2) &= \int_{x_1}^{x_2} f(u) du \\ &= \Pr(x > x_1) - \Pr(x > x_2) \end{aligned} \quad (8)$$

**Distribución pareto**

Consideremos la distribución Pareto [6] dada por:

$$f(x) = \frac{ab^a}{x^{a+1}}, \quad x \geq b \quad (9)$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^\infty \frac{ab^a}{u^{a+1}} du = ab^a \int_x^\infty \frac{du}{u^{a+1}} \\ &= -b^a u^{-a} \Big|_x^\infty = b^a x^{-a} \end{aligned} \quad (10)$$

Es decir

$$\Pr[X > x] = \frac{b^a}{x^a}, \quad x \geq b \quad (11)$$

Esta relación expresa la probabilidad de que encontrar un valor mayor que  $x$ .

**Distribución weibull**

Consideremos la distribución Weibull [6].

$$f(x) = \frac{k}{\lambda} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \quad x \geq 0 \quad (12)$$

Entonces

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_x^\infty \frac{k}{\lambda} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{u}{\lambda}\right)^k} du \\ &= e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \end{aligned} \quad (13)$$

Si recordamos la expansión de la función exponencial en serie de potencias entonces:

$$e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} = 1 - \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k + \dots \quad (14)$$

Y si  $(x/\lambda)^k$  es pequeño podemos considerar sólo hasta el segundo término, de modo que:

$$1 - F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} = \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k \quad (15)$$

Comencemos con  $N_0$  cubos de lado  $h$  a los que llamaremos celdas base. El proceso de fragmentación [1] implica que si una celda base se subdivide lo hará en 8 celdas base de lado  $h/2$ . Sea

$f$  la probabilidad de que una celda base se subdivida, entonces el número de fragmentos que se genera es  $N_1=8fN_0$ .

Y el número de celdas base que no se fragmentaron es  $NF_0=(1-f)N_0$ .

El volumen de cada fragmento [1] será:  $V_1=V_0/8$ , donde  $V_0$  es el volumen de la celda base.

En una segunda etapa del proceso:

– El volumen de la celda base  
 $V_2=V_1/8=V_0/8^2$  (16)

– El número de fragmentos  
 $N_2=8fN_1=(8f)^2N_0$  (17)

– El número de celdas que no se fragmenta  
 $NF_1=(1-f)N_1=8(1-f)fN_0=8fNF_0$  (18)

– El volumen de la celda base sea  
 $V_k=1/8^kV_0$  (19)

– El número de fragmentos  
 $N_k=(8f)^kN_0$  (20)

– El número de celdas que no se fragmenta  
 $NF_k=(8f)^kNF_0$  (21)

Así podemos esperar que en la etapa  $k$  de la fragmentación tenga un comportamiento fractal que satisface la relación (21)

De las ecuaciones (19 y 21), se obtiene:

$$\ln V_k = -k \ln 8 + \ln V_0 \quad (22)$$

$$\ln NF_k = k \ln 8f + \ln NF_0 \quad (23)$$

Que conducen a  $\ln NF_k/NF_0 = k \ln 8f$  y  $\ln V_k/V_0 = -k \ln 8$  entonces

$$NF_k/NF_0 = (V_k/V_0)^{-\ln 8f / \ln 8} \quad (24)$$

Si suponemos que el volumen es proporcional a  $r^3$  entonces

$$\frac{NF_k}{NF_0} \propto \frac{1}{r^{\frac{3 \ln 8f}{\ln 8}}} \quad (25)$$

Pues  $NF_k$  es el número de celdas que no se fragmentaron, es decir las que tienen dimensiones mayores que  $r$ , y por tanto

$$D = 3 \ln 8f / \ln 8 \quad (26)$$

La siguiente gráfica muestra la construcción anterior con  $d=2$ ,  $N_0=8$ , 2 celdas que no se fragmentan en cada etapa, 6 celdas que se fragmentan en cada etapa y razón de fragmentación  $f=0.75$ .

Finalmente.

$$D = 3 \ln 6 / \ln 8 = 2.585 \quad (27)$$

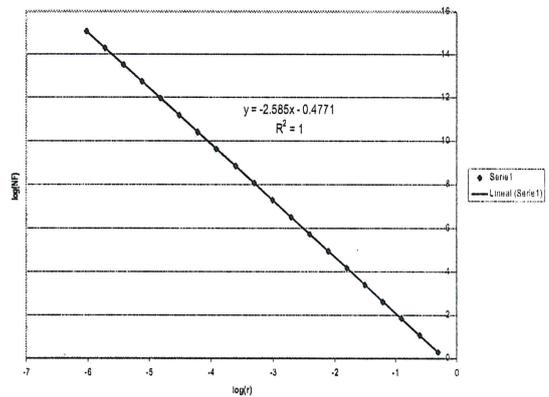


Fig. 11 Relación entre  $NF$  y  $r$ .

### COMPORTAMIENTO SISMOLÓGICO

Nuestro objetivo en esta investigación es visualizar gráficamente cual es la distribución espacial del comportamiento sísmico que se tiene en el Perú, con magnitud entre 3 y 8 grados en la escala de Richter. Existe una ley empírica que relaciona la frecuencia de ocurrencia de los terremotos [2] y la magnitud, ésta es una relación logarítmica lineal conocida como Ley de Gutenberg-Richter (1958) que permite estimar cuantitativamente la frecuencia y magnitud sísmica en una región, esta es:

$$\log N = -b m + \log a \quad (28)$$

Donde  $b$  y  $a$  son constantes,  $N$  es el número de terremotos por unidad de tiempo con magnitud mayor o igual que  $m$  que ocurren en un área específica.

Entonces considerando lo visto anteriormente para dimensión fractal [3 y 4], considerando una proporcionalidad de  $c=1/2$  [8] y  $a$  proporcional a  $r^2$  se obtiene que la dimensión fractal es  $2b$ .

En nuestro caso sería  $D = 2b = 1.8328$ .

### RESULTADOS NUMÉRICOS

Es importante mencionar que para la ejecución del algoritmo de generación fractal se ha utilizado una muestra real que se obtuvo de la base de datos United States Geological Survey, constituida por todos los terremotos a partir del año 1970.

Entonces considerando:

$$N = \beta A^{-\frac{3b}{2c}} \quad (29)$$

y los datos sobre la ocurrencia de terremotos en un radio de 500km de la ciudad de Lima, los mismos que se encuentran en el archivo adjunto **NEICB work.xls**. Se trabajó sobre una muestra de 1505 eventos sísmicos entre magnitudes 3 y 8, como resultado se pudo establecer la siguiente relación:

$$\log N = -0.7591m + 4.5696 \quad (30)$$

Que establece el número de terremotos por año,  $N$ , con magnitud mayor que  $m$ .

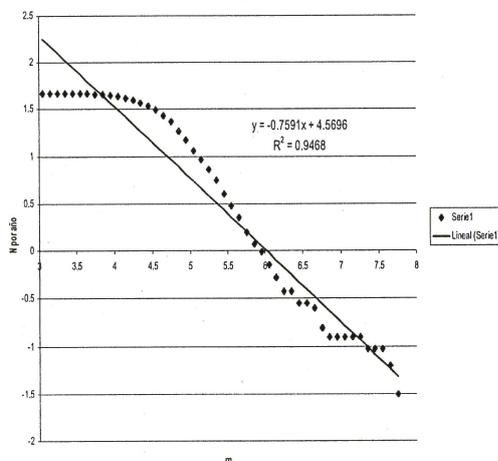


Fig. 12 Relación entre  $N$  y  $m > 3$  y  $b = 0.7591$ .

Es posible obtener una mejor aproximación si consideramos solamente magnitudes mayores a 4, en ese caso la ecuación es la siguiente, ver Fig. 14.

$$\log N = -0.9164m + 5.5715 \quad (31)$$

Entonces los coeficientes en la ley de Gutenberg-Richter son

$$\begin{aligned} b &= 0.9164 \\ a &= 3.728 \times 10^6 / \text{año} \end{aligned} \quad (32)$$

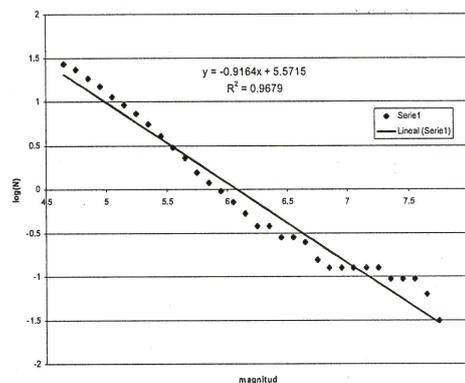


Fig. 13 Relación entre  $N$ ,  $m$  ( $m > 4$ ) y  $b = 0.9164$ .



Fig. 14 Comportamiento de la distribución fractal (puntos azules) de terremotos ocurridos en el Perú con magnitud mayor a 4.

### CONCLUSIONES

Para ilustrar el concepto de dimensión se obtuvo una construcción geométrica y calculamos la

dimensión fractal en base a una relación entre dos pasos consecutivos de la construcción; esto permite definir el problema inverso: *Dada la dimensión fractal  $D$  encontrar una construcción para un fractal de dimensión  $D$* . Si el fenómeno depende solamente de un parámetro entonces con esta construcción podemos hallar dicho fractal, pero el caso de la dependencia multivariable aún continúa abierta para una próxima investigación.

El fractal puede necesitarse cuando se necesita trabajar con formas altamente irregulares y complejas, especialmente si no se dispone de una ley física de tipo determinista y solo se dispone de mediciones empíricas o experimentales.

Es una alternativa de diseño y simulación de estructuras muy complejas a través de procesos muy simples (en su mayoría geometría irregular y comportamiento caótico) lo que hace posible que los fractales puedan modelizar fenómenos naturales, además tales procesos *generadores* requieren de poca información para obtener el objetivo, lo cual es accesible al uso de computadoras de uso personal, ya que ellas trabajan eficiente con procesos repetitivos, que no requieran mucha información bajo un sistema operativo manejable de cualquier usuario que cuenta con una PC.

#### AGRADECIMIENTOS

Nuestro agradecimiento a: Images Terra Metrics 2007 EuropaTechnologies, por la imagen satelital recogida para visualizar la distribución espacial de los eventos sísmicos ocurridos en el Perú, y a United States Geological Survey, por la muestra proporcionada de la base de datos **NEICB work.xls** para ejecutar el algoritmo de generación fractal.

#### REFERENCIAS

1. **Bitelli, M.; Campbell, G. S.; Flury, M.** "Characterization of particle-size distribution in soil with a fragmentation model". Soil Science. Society of America Journal, Madison, v.63, n.4, p.782-788, 1999.
2. **Turcotte, D. L.**, "Fractals and Chaos in Geology and Geophysics". Second Edition. Cambridge University Press, 1997.
3. **Filgueira, R. R., García, M. G., Roggiero, M. F., Cerisola, C., Aragón, A., Sarli, G. O., Soracco G.**, "Caracterización de la distribución de tamaño de partículas en suelos con un modelo fractal". En: Congreso Argentino de la Ciencia del Suelo, 18, 2002, Resúmenes. Puerto Madryn: AACs, 2002a, v.1, pp.13.
4. **Ling, F. H.**, "On the fractal dimension of a combined fractal" set, Phys. Lett., A 138 (1989), n. pp. 1-2, 25-28.
5. **Mandelbrot, B. B.**, "The Fractal Geometry of Nature", W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1977.
6. **Preiss, D.**, "Geometry of measures in  $R^N$ : Distribution, rectifiability, and densities, Annals of Math", pp. 537 - 643, 125 (1987).
7. **Ayala Gómez R.**, et al. "Elementos de la Topología General", Addison - Wesley Iberoamericana, España, S.A. 1997.
8. **Devaney, R., Keen, L.**, eds., "Chaos and Fractals" The Mathematics Behind the Computer Graphics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1989.

Correspondencia: irlamn@uni.edu.pe

Recepción de originales: febrero 2007

Aceptación de originales: mayo 2007

