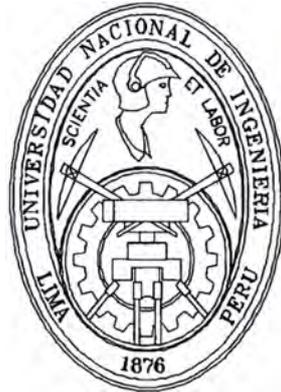


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Sección de Posgrado y Segunda Especialización
Profesional**



Tesis para Optar el Grado Académico
de Maestro en Ciencias con
mención en Matemática Aplicada
**“Equidistribución de Pre-Imágenes
Iteradas en CP^2 ”**

Presentada por:

Oswaldo Ernesto Huamán Romero

LIMA - PERÚ

2009

A María Romero, mi madre

Il n'y a que le premier pas qui coûte

Reconocimientos

A Percy Fernández, sin su colaboración y paciencia, este trabajo nunca hubiera sido culminado.

A Susan Skrtich por su compañía durante estos años inciertos.

Índice general

Introducción	1
1. Mapas Holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	6
1.1. Tópicos de Geometría Algebraica	7
1.1.1. Espacio Proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	7
1.1.2. Subespacios lineales y rectas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	11
1.2. Holomorfía en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y operadores diferenciales asociados	16
1.2.1. Mapas holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	16
1.2.2. Mapas meromorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	18
1.2.3. Espacios proyectivos de mapas holomorfos y meromorfos. Algunos aspectos relativos a las iteraciones.	19
1.2.4. Operadores diferenciales complejos	21
1.3. Propiedades locales de mapas holomorfos.	25
1.3.1. Comportamiento local	25
1.3.2. Ceros de jacobianos en \mathbb{C}^k y \mathbb{C}^{k+1}	26
1.3.3. Conjuntos analíticos	27
1.3.4. Germen analítico e ideales	29
1.3.5. Mapas holomorfos en coordenadas locales	31
1.3.6. Conjuntos de Fatou y Julia	32
2. Corrientes positivas cerradas y funciones pluri-subarmónicas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	35
2.1. Formas diferenciales en variedades complejas	36
2.1.1. Formas diferenciales de bigrado	36
2.1.2. Operaciones en el espacio de formas diferenciales	38
2.1.3. Grupos de cohomología	42
2.2. Formas métricas y de volumen	43
2.2.1. Formas de Fubini-Study-Kähler .	43
2.2.2. Formas métricas y volumétricas en \mathbb{C}^k y $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$	47
2.2.3. Formas diferenciales positivas	52
2.3. Distribuciones	60
2.3.1. Espacios topológicos vectoriales de funciones y duales	60
2.3.2. Regularización de distribuciones	64
2.3.3. Propiedades globales y locales	65
2.3.4. Distribuciones positivas y medidas asociadas	66
2.4. Corrientes de De Rham	69
2.4.1. Espacios topológicos vectoriales de formas diferenciales .	69

2.4.2.	Corrientes de De Rham como funcionales lineales continuas	71
2.4.3.	Operaciones en el espacio de corrientes	74
2.4.4.	Regularización de corrientes	78
2.5.	Corrientes positivas y cerradas	79
2.5.1.	Positividad en el espacio de corrientes	79
2.5.2.	Caracterizaciones y propiedades de las corrientes positivas	81
2.6.	Funciones PSA	84
2.6.1.	Funciones PSA	84
2.6.2.	Caracterización distribucional de una función plurisub-armónica	96
2.6.3.	Sub-niveles de funciones plurisub-armónicas. Teorema de Kiselman-Skoda	101
3.	Singularidades	103
3.1.	Tópicos de Teoría del Pluri-Potencial	104
3.1.1.	Producto cuña de Bedford-Taylor. Desigualdad CLN	104
3.1.2.	Otras cuestiones asociadas al operador de Monge-Ampere	107
3.2.	Índices de singularidades para funciones PSA	109
3.2.1.	Números de Lelong para funciones PSA	109
3.2.2.	Teorema de Siu	114
3.3.	Extensiones de los índices de singularidad a corrientes y a conjuntos analíticos	118
3.3.1.	Potenciales de corrientes de bigrado (1,1). Corrientes de integración en conjuntos analíticos.	118
3.3.2.	Números de Lelong para corrientes positivas cerradas	126
3.3.3.	Números de Lelong para conjuntos analíticos	133
3.4.	Números de Lelong generalizados	137
4.	Corriente de Green. Formulación del Teorema de Favre-Jonsson	143
4.1.	Corriente de Green y el Problema de la Convergencia	143
4.1.1.	Definición y caracterizaciones	143
4.1.2.	Propiedades fundamentales	145
4.1.3.	El Problema de la Convergencia	147
4.2.	Formulación del Teorema de Favre-Jonsson	148
5.	Prueba del Teorema de Favre-Jonsson	152
5.1.	Teorema Ergódico Fuerte de Birkhoff	152
5.1.1.	Planteamiento del problema	152
5.1.2.	Cociclos analíticamente rígidos	153
5.2.	Conjuntos excepcionales y su estructura geométrica	157
5.2.1.	Multiplicidades asintóticas	157
5.2.2.	Conjuntos excepcionales	166
5.2.3.	Estimaciones de volumen fuera del conjunto excepcional	170
5.2.4.	Comportamiento dinámico de un número de Lelong	173
5.2.5.	Estimaciones de Volumen dentro del conjunto excepcional	174
5.3.	Prueba del Teorema Fundamental. Corolarios	176
5.4.	Conjetura de Favre-Jonsson sobre la estructura de E_2	177

A. Dinámica local	179
A.1. Descripción topológica	179
B. Teoría L^2 y aproximación de funciones plurisub-armónicas	184
B.1. Teoría L^2 de Hörmander	184
B.2. Teorema de extensión L^2 de Osawa-Takegoshi y aproximación de funciones PSA según Demailly	190
Bibliografía	192

Introducción

En este trabajo se estudia la distribución asintótica de las preimágenes de una curva algebraica en el espacio proyectivo complejo $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ bajo la acción de $\{f^m\}_{m \in \mathbb{Z}^+}$, donde f es un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

En general, si consideramos las iteraciones de pre-imágenes sabemos que no es posible hablar de órbitas unívocamente determinadas sino de un número de pre-imágenes que en cada paso de la iteración se multiplica a lo más por d (el grado de polinomio f). En este contexto, uno de los problemas de naturaleza ergódica más simple que se puede plantear es el de estudiar la frecuencia con la cual dichas pre-imágenes aparecen en un subconjunto dado E del espacio en consideración. Tomemos para especificar una función holomorfa en \mathbb{C} y sea $w \in E \subset \mathbb{C}$, donde E es un boreliano, se tiene entonces que la frecuencia con la cual las pre-imágenes de $f^{-m}(w)$ están en E está dada por:

$$\frac{1}{d^n} \sum_{f^n(z)=w} \delta_z(E), \quad (1)$$

donde δ_z es la medida atómica de Dirac en el punto z . Si pasamos dicha secuencia de medidas al límite ($m \rightarrow \infty$), se establece que converge débilmente a una medida μ que no depende del punto w . Este hecho, por tanto, puede ser interpretado en el sentido que, en todo el plano complejo (salvo quizá un punto) las pre-imágenes de f^m se equidistribuyen asintóticamente en cierta región del plano. Brolin [11] estableció en 1965 esta propiedad de las iteraciones. Su trabajo continuó la dirección teórica iniciada por Schroeder, Fatou, y Julia en el estudio de las iteraciones polinomios en \mathbb{C} (véase [12, 25, 60]), enfocando sus esfuerzos en aclarar la relación entre las iteraciones de pre-imágenes y el conjunto de Julia de dicha iteración. Brolin introdujo el uso de la teoría del potencial en el plano complejo \mathbb{C} . Hay que recordar que la importancia del problema de la distribución de pre-imágenes se remonta a los primeros pasos dados por la teoría de iteraciones, cuando Fatou demuestra que la cerradura del conjunto de pre-imágenes de un punto del plano (bajo ciertas condiciones) genera el conjunto de puntos caóticos de la iteración conocido como el conjunto de Julia. En [11] se encontró por primera vez una serie de relaciones muy importantes de naturaleza ergódica relativas al comportamiento de las pre-imágenes aunque quedó implícita la definición de la función dinámica de Green g_{f_∞} , la cual constituye el nexo entre los objetos analíticos, ergódicos y geométrico-topológicos (tales como la cuenca de atracción del infinito F_∞ correspondiente a una iteración (véase [12, 92])). La forma explícita de dicha función fue introducida luego por Carleson [12] y Tortrat [113]. Para un polinomio f de grado d en \mathbb{C} la función dinámica de Green en el plano tiene la siguiente expresión:

$$g_{f_\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{d^m} \log |f^m(z)|. \quad (2)$$

Dichos autores describieron propiedades teórico-potenciales de g_{f_∞} y J (el conjunto de Ju-

lia)(véase [11, 12, 113]).

De este modo μ (tal como se describió más arriba) es la distribución de equilibrio de J (en el sentido de la teoría del potencial [92]), y también la medida armónica de J donde $\mu = \Delta g_{f_\infty}$ (en el sentido distribucional).

El trabajo de Brolin tuvo como aporte fundamental la incorporación de una herramienta típicamente analítica como la de la teoría del potencial al estudio de la dinámica de iteraciones. Más adelante, Sibony probó en [102] que los aspectos básicos de la teoría de Fatou-Julia podían desarrollarse independientemente del Teorema de Montel reemplazando éste por un Teorema de Compacidad para funciones sub-armónicas que admiten un mayorante local (para las definiciones véase [92, 112]). Este hecho, que equivale a reconstruir los fundamentos de la teoría Fatou-Julia a partir de ciertos hechos de la teoría del potencial en \mathbb{C} , ha tenido gran influencia en las construcciones subsecuentes especialmente para la teoría multidimensional de iteraciones en el espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, mapas de Henon, etc.

**

El siguiente paso en el problema de la distribución de pre-imágenes fue dado casi simultáneamente por Lyubich [77] y por Mañé [81, 82] los que extendieron el Teorema de Equidistribución de Pre-imágenes a las funciones racionales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Más precisamente, dado $f = [f_0, f_1]$, un mapa racional en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, la sucesión de medidas que expresa la distribución de preimágenes de un punto $w \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tiene la misma forma que para \mathbb{C} , es decir:

$$\mu_m = \frac{1}{d^m} \sum_{f^m(z)=w} \delta_z, \quad (3)$$

y ésta converge a la medida invariante μ a excepción de los puntos del conjunto $Expf = \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \setminus \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} f^m(U_x)$, $x \in J$, el cual a lo sumo está formado por dos puntos. Esta medida, sin embargo, carece de las propiedades teórico-potenciales de su análogo en \mathbb{C} pero si preserva todas las propiedades de naturaleza ergódica (f -invariancia, ergodicidad y mixing) Mañé caracterizó μ (véase [81, 82]) en el sentido que es la única medida que hace máxima la entropía del sistema.

El problema de la distribución de preimágenes en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ resultó teniendo una naturaleza distinta al problema análogo en el plano. En primer lugar, la naturaleza teórico potencial del problema en el plano \mathbb{C} no se repite en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ en donde no existe tal teoría de la ecuación de Laplace y del potencial. En segundo lugar, la mayoría de desarrollos en la teoría de funciones en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ habiendo seguido un enfoque geométrico (véase [1]) dieron un impulso a la teoría de iteraciones distinto al que ésta adquirió en el plano.¹En [77], Lyubich construyó una medida invariante basándose en argumentos geométricos que luego serían utilizados por Jean Yves Briend y Julian Duval para una construcción análoga en el caso multidimensional. Por otro lado, la aproximación de Mañé basada en una construcción sutil que combina argumentos topológicos y de medida, no ha encontrado una generalización adecuada en el caso multidimensional. Es importante, sin embargo, señalar que a pesar de la diferencia esencial en la construcción de Lyubich y Mañé ambas hacen uso crítico del Teorema de Distorsión de Koebe (véase [85]). Este hecho muestra que el problema de distribución en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tiene un fundamento esencialmente geométrico que lo diferencia de su análogo en \mathbb{C} el cual presenta una naturaleza teórico-potencial.

¹Ya en los años 80 siguiendo esta línea fecunda de pensamiento a la Ahlfors, D. Sullivan hizo descubrimientos fundamentales en la teoría de iteraciones racionales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (véase [85, 107]).

* * *

Las generalizaciones del problema de distribución de preimágenes en el caso multidimensional, incluso en el caso más "simple" de iteración de polinomios de \mathbb{C}^k en \mathbb{C}^k , tropieza con una serie de dificultades cuando se intenta desarrollar un esquema teórico análogo al caso \mathbb{C} . Por otro lado, si procedemos escribiendo un análogo a la función de Green dinámica en el plano

$$G = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{d^m} \log |f^m(z)|, \quad (4)$$

resulta que, como veremos más adelante (Capítulo [4]), en el caso holomorfo (con las componentes de f homogéneas del mismo grado) la masa de Monge-Ampere de $G : dd^c G$, se relaciona con la estructura geométrica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Esta circunstancia ha sido uno de los hechos que ha inclinado el desarrollo de la dinámica de los mapas holomorfos hacia $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Fueron Hubbard y Papadopol los que definieron tal medida de probabilidad invariante como la masa de Monge-Ampere de una función de Green dinámica en el transcurso de su estudio de los mapas de Henon [58, 59]. Fornæss y Sibony usando métodos de la teoría del pluripotencial para el caso más general de un mapa racional probaron que dicha masa $\mu = (dd^c)^k G$ refleja la distribución asintótica de los preimágenes de $\{f^m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ a excepción de cierto conjunto pluripolar, y que además es invariante y mixing. Este resultado situó la teoría de distribuciones de preimágenes en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ en la dirección de los resultados obtenidos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

En [6, 39, 104], Fornæss, Sibony y otros autores estudiaron la corriente $dd^c G$ y establecieron que

$$dd^c G = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f^{*m}[\omega]}{d^m} \quad (5)$$

donde $[\omega]$ es la corriente positiva cerrada de bigrado $(1, 1)$ que se asocia a la geometría de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, puesto que ω es la forma métrica de Fubini-Study-Kähler (véase [88, 119]). Además f^{*m} son las iteraciones del pull-back de $[\omega]$. Este resultado establece una relación profunda entre la corriente $dd^c G$ y las propiedades geométricas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. La corriente $T = dd^c G$ fue denominada Corriente de Green asociada al mapa holomorfo f .

Hay que señalar que en el caso de la teoría multidimensional, estos resultados no han aparecido sólo en relación a los problemas de las preimágenes de f^m sino en íntima relación con el desarrollo de una teoría Fatou-Julia para mapas holomorfos y racionales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Fornæss-Sibony [38, 40] haciendo uso de la hiperbolicidad de Kobayashi (como herramienta teórica capaz de sustituir a la teoría de familias normales en dimensión compleja 1) desarrollaron una teoría Fatou-Julia para mapas holomorfos y racionales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, y establecieron entre otros hechos que $\text{supp } T = J$. La nueva teoría multidimensional en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ puso de manifiesto fenómenos inexistentes en dimensión 1. En particular la convergencia de los pull-backs de $[\omega]$ a la Corriente de Green llevó a diversos autores [41, 94] a plantear el problema acerca de que clase de corrientes positivas y cerradas son tales que la sucesión de sus pull-backs converge a T . Más precisamente, el Problema de la Convergencia hacia T quedó formulado del siguiente modo:

¿Para que corriente S de bigrado $(1, 1)$ positiva y cerrada en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se cumple que:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{d^m} f^{*m} S \longrightarrow T?$$

Este problema, como veremos pronto, en el caso particular que S es la corriente de integración de una curva algebraica con ciertas condiciones, nos lleva al problema de la distribución de

preimágenes de una curva algebraica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Además de los nuevos problemas planteados, Briend y Duval trabajando en la dirección clásica del problema de las preimágenes y la medida de equilibrio asociada demostraron en [9] para un mapa holomorfo f en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ que la secuencia de medidas $\delta_{m,w} = \frac{1}{d^m} \sum_{f^m(z)} \delta_z$ converge a la medida μ de equilibrio de Hubbard-Papadopol. Briend-Duval, además generalizaron el Teorema de Mañé en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ y probaron que μ es la única medida invariante asociada al sistema dinámico que alcanza la entropía máxima (esto en relación al principio variacional de la entropía).

* * *

El esquema descrito de la dinámica de polinomios en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y del problema de la distribución de preimágenes condujo, como ya se observó más arriba, al descubrimiento de un objeto con propiedades analíticas y ergódicas importantes llamada la Corriente de Green. Ya se ha mencionado, que esta corriente está relacionada a las propiedades geométricas de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ pero también lo está de manera sutil con la estructuras de las preimágenes de f . Esto es el punto más importante cuando pasamos del estudio de preimágenes de puntos al de objetos tales como curvas e hiperplanos.

Varios autores han estudiado el problema, descrito mas arriba, de la convergencia de la Corriente de Green. El principal ingrediente de la mayoría de estos estudios ha sido el uso de las así llamadas "Estimaciones de Volúmenes". La idea básica de este método es la de estudiar el comportamiento del volumen de una bola $B \subset \mathbb{P}^k$ bajo interacciones de f relacionando esto con propiedades analíticas de mos mapas o con propiedades geométrico-topológicas de ciertos conjuntos invariantes asociados a la iteración. Como se verá más adelante las Estimaciones de Volumen depende del punto $z \in B$ o bien del conjunto A (tal que $B \subset A$) que se está analizando, así como también de la circunstancia que se quiere establecer (cota superior o inferior del volumen de $f^m(B)$).²

En el trabajo [31], Favre y Jonsson estudiaron el Problema de la Convergencia de una corriente positiva cerrada S de bigrado $(1, 1)$ bajo la iteración del pull-backs hacia la Corriente de Green. Ellos probaron el siguiente importante teorema:

Teorema(Favre-Jonsson) Sea $f : \mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{P}^n$ (holomorfa de grado $d \geq 2$). Existe

E_1 : conjunto algebraico, totalmente invariante, formado a lo más partes rectas complejas.

E_2 : finito, totalmente invariante,

tal que para todo S (cerrada, positiva y bigrado $(1, 1)$ y masa unitaria)

- S no carga ninguna componente irreducible de E ,
- S tiene un potencial local acotado para todo $p \in E_2$

y $\frac{f^m \circ S}{d^m} \rightarrow T$ cuando $(m \rightarrow \infty)$.

²En esencia las estimaciones de volúmenes como técnica de análisis en el Problema de Convergencia, tiene su origen en la existencia de potenciales locales para corrientes positivas cerradas de bigrado $(1,1)$ y al hecho conectado a esto que se obtiene del Teorema de Lelong [71] que establece que la corriente de integración de un conjunto analítico es positiva y cerrada.

El enunciado del Teorema de Favre-Jonsson no contiene suposiciones sobre la dinámica de f lo que permite obtener los conjuntos E_1, E_2 como objetos que caracterizan en general la dinámica de f : Si S (corriente positiva, cerrada) posee las propiedades arriba mencionadas entonces se puede afirmar que la secuencia de corrientes $\frac{f^{n*} S}{d^n}$ tiende a la Corriente de Green. Un caso particular es entonces aquel en el que S es la corriente de integración de una curva algebraica. En estas condiciones se puede verificar que S cumple las condiciones respecto a E_1 y E_2 . Por otro lado aquellas curvas cuyas corrientes no satisfacen la condición de convergencia forman un conjunto algebraico propio en el espacio proyectivo de curvas algebraicas en $\mathbb{C}P^k$.

Este trabajo está organizado del siguiente modo:

El primer capítulo está dedicado fundamentalmente a las funciones holomorfas definidas en espacios proyectivos junto con algunas cuestiones locales de interés para la dinámica de iteraciones. El segundo capítulo estudia fundamentalmente las corrientes de De Rham y en particular las corrientes positivas definidas por Lelong, así como las propiedades más importantes de las funciones pluri-subarmónicas. Se hace incidencia en el enfoque distribucional de las funciones plurisub-armónicas puesto que este aspecto es fundamental para los desarrollos posteriores. El Capítulo [3] es desde el punto de vista de la demostración del teorema principal de este trabajo el de más importancia. Aquí el centro de atención es el estudio de los números de Lelong como medida de las singularidades de una función pluri-subarmónica. Además de demostrar algunos teoremas importantes un objetivo importante es el de extender los números de Lelong a las corrientes y conjuntos analíticos. En el Capítulo [4] se presenta la teoría estándar de la corriente de Green en $\mathbb{C}P^k$; en relación a esto se formula el Problema de la Convergencia y en particular el teorema fundamental de este trabajo (Teorema de Favre-Jonsson). El Capítulo [5] presenta las magnitudes asintóticas (multiplicidad del jacobiano, grado topológico y diámetro local) las cuales nos llevan al concepto de co-ciclo multiplicativo. El comportamiento asintótico de este objeto está definido por el llamado Teorema Fuerte de Birkhoff formulado y probado por Favre. A partir de las propiedades de las magnitudes asintóticas se define los conjuntos excepcionales y se caracteriza algunas de sus propiedades geométricas y dinámicas. La estimación de volúmenes dentro y fuera de los conjuntos excepcionales es el punto concluyente de estos desarrollos. Es la última sección de este capítulo se prueba finalmente el Teorema de Favre-Jonsson y también algunos corolarios que generalizan ciertas aproximaciones previas del Problema de Convergencia.

Capítulo 1

Mapas Holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$

El capítulo empieza con una revisión breve de dos objetos geométricos fundamentales: el espacio proyectivo y los sub-espacios lineales que se definen en él. Para la teoría de iteraciones estos objetos han resultado de importancia tanto para describir las propiedades de los mapas definidos en dichos espacios como también para el estudio de los conjuntos invariantes correspondientes a la dinámica de dichas iteraciones. Luego de definir el espacio proyectivo y sus propiedades más importantes, procedemos a estudiar los llamados sub-espacios lineales que en cierto sentido recuerdan los sub-espacios de un espacio afín. Para más detalles referentes a estos tópicos tanto como a las definiciones fundamentales de mapas racionales y variedades algebraicas se puede consultar [22],[52],[70]. La siguiente sección tiene como objetivo principal presentar los conceptos de mapa holomorfo y meromorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ así como la relación de estos conceptos con algunos entes conocidos de la geometría algebraica. Este enfoque lleva a la definición de espacios proyectivos que contienen como puntos de dichos espacios todos los mapas ya sea holomorfos como meromorfos (para más detalles sobre este punto, se puede consultar [38], [39]). Al final de esta sección se hace una revisión de los operadores diferenciales ([48],[69]). La siguiente sección repasa brevemente algunos puntos referentes al comportamiento de las pre-imágenes (véase [69], [100]) para luego establecer una propiedad sencilla pero importante entre los jacobianos de un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y el de su correspondiente levantamiento en $\mathbb{C}^k - \{0\}$. En la Sub-secciones [1.3.3] y [1.3.4] se introduce los conjuntos analíticos como lugares geométricos de las funciones holomorfas así como algunas de las profundas relaciones que tienen estos conjuntos con las variedades algebraicas dentro de un espacio proyectivo ([14],[75],[86]). La siguiente sub-secciones continúan estos desarrollos locales por lo que se introduce el germen de funciones y de conjuntos analíticos citándose algunas de sus propiedades algebraicas de interés para el análisis (véase [17],[45],[75]). La siguiente sub-sección se ocupa de la representación local de un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ dada alguna condición geométrica adicional sobre la vecindad en la cual se necesita expresar el mapa localmente. Para concluir, en la última sección se enuncian algunas definiciones y propiedades correspondientes a los conjuntos de Fatou y Julia. La inclusión de esta sub-sección se dá con el propósito de completar la exposición y no será usada en los desarrollos más importantes de este trabajo.

1.1. Tópicos de Geometría Algebraica

1.1.1. Espacio Proyectivo $\mathbb{C}P^k$

Definición algebraica del espacio proyectivo. Sobre el campo \mathbb{C} se define el espacio afín \mathbb{C}^k tal como se le conoce en el análisis. En principio definimos el espacio $\mathbb{C}P^k$ de forma algebraica como: $\mathbb{C}^{k+1} - 0/\mathbb{C}^*$ (\mathbb{C}^* como grupo multiplicativo). Esto equivale a afirmar que $\mathbb{C}P^k$ tiene como elementos las clases de equivalencias de elementos de \mathbb{C}^{k+1} definidas de modo que para :

$$z, w \in \mathbb{C}^{k+1}, z \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} : \lambda z = w, \tag{1.1}$$

dicho de otro modo, $\mathbb{C}P^k$ tiene como elementos los subespacios de \mathbb{C}^{k+1} de dimensión 1 los cuales son rectas complejas que pasan por el origen.

La relación de equivalencia (1.1) induce la aplicación: $\pi : \mathbb{C}^{k+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}P^k$ llamada proyección canónica.

Para $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ representante de una clase, $[z] = [z_0 : z_1 : \dots : z_k] \in \mathbb{C}P^k$ y los z_i se llaman coordenadas homogéneas de $[z]$.

Una caracterización útil del espacio proyectivo proviene de la aplicación biunívoca de $\mathbb{C}P^k$ (como conjunto de rectas en \mathbb{C}^{k+1} que pasa por el origen) con el conjunto de circunferencias máximas de la esfera $S^{2k+1} \subset \mathbb{R}^{2k+2}$. Esta aplicación biunívoca existe pues para una de dichas rectas la intersección $l \cap S^{2k+1}$ es una circunferencia máxima definida unívocamente, por tanto:

$$\mathbb{C}P^k = \{c : c \text{ es la circunferencia máxima de } S^{2k+1} \subset \mathbb{C}^k\}. \tag{1.2}$$

En la Sub-sección [2.2.1] veremos el uso de esta caracterización para obtener una métrica en $\mathbb{C}P^k$.

Estructura compleja de $\mathbb{C}P^k$ — En el punto anterior se introdujo las coordenadas homogéneas para los puntos de $\mathbb{C}P^k$ como $[z_0 : z_1 : \dots : z_k]$, siendo en ese caso el punto $(z_0, z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ un elemento de la recta compleja que pasa por el origen.

Probemos que $\mathbb{C}P^k$ posee de forma natural una estructura de variedad compleja. En efecto, definamos primero una regla de correspondencia que relacione localmente las coordenadas homogéneas de $\mathbb{C}P^k$ con las coordenadas afines de \mathbb{C}^k y viceversa (para la definición de variedad compleja y mapa holomorfo véase [100]).

El conjunto $\mathbb{C}P^k$ posee de forma natural la topología cociente $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ de tal modo que $U \subset \mathbb{C}P^k$ es abierto sí y sólo sí $\pi^{-1}(U)$ es abierto en \mathbb{C}^{k+1} . En particular $\mathbb{C}P^k$ hereda la propiedad de Hausdorff del espacio \mathbb{C}^k . Consideremos entonces los abiertos $U_i \subset \mathbb{C}P^k$,

$U_i = \{[z_0 : z_1 : \dots : z_k], z_i \neq 0\}$ de modo que $\mathbb{C}P^k = \bigcup_{i=1}^k U_i$ y las cartas (U_i, f_i) se definen como:

$$f_i : U_i \longrightarrow \mathbb{C}^k$$

$$[z_0 : \dots : z_k] \mapsto (z_0/z_i, \dots, z_{i-1}/z_i, z_{i+1}/z_i, \dots, z_k).$$

De aquí, los mapas inversos están dados por:

$$f_i^{-1} : \mathbb{C}^k \longrightarrow U_i$$

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto [z_1 : \dots : 1, \dots : z_k].$$

Así pues $\mathbb{C}P^k$ como espacio de Hausdorff y con el atlas $\{(U_i, f_i)\}_{i=1}^k$ definido arriba, sólo basta comprobar que las relaciones de compatibilidad se cumplen. Esto es: $\forall i, j (i \neq j) f_i \circ$

f_j^{-1} es un biholomorfismo de $f_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}^k$ sobre $f_i(U_i \cap U_j) \subset \mathbb{C}^k$.
En efecto, para $z \in f_j(U_i \cap U_j)$ ($j < i$)

$$f_i \circ f_j^{-1}(z) = f_i \circ f_j^{-1}(z_1, \dots, z_k) = f_i[z_1 : \dots : z_{j-1} : 1 : z_{j+1} : \dots, z_k]$$

$$= \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_k}{z_i} \right), \quad (1.3)$$

($z_i \neq 0$ puesto que $[z_1 : \dots : z_{j-1} : 1, z_{j+1} : \dots, z_i : \dots : z_k] \in U_i \cap U_j$).
Análogamente cuando $i < j$ se tiene:

$$f_i \circ f_j^{-1}(z) = f_i \circ f_j^{-1}(z_1, \dots, z_k) = \left(\frac{z_1}{z_i}, \dots, \frac{z_{i-1}}{z_i}, \frac{z_{i+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_{j-1}}{z_i}, \frac{1}{z_i}, \frac{z_{j+1}}{z_i}, \dots, \frac{z_k}{z_i} \right), \quad (1.4)$$

los cuales son biholomorfos, puesto que $z_i \neq 0$.

El espacio proyectivo $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ como compactificación de \mathbb{C}^k . - Sea el siguiente mapa biholomorfo ($\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$):

$$I_\lambda : \mathbb{C}^k \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$$

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto [\lambda : \lambda z_1 : \dots : \lambda z_k].$$

Bajo I_λ , \mathbb{C}^k esta inmerso en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Los otros elementos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ son de la forma $[0 : w_1 : \dots : w_k]$. Evidentemente $\{[0 : w_1 : \dots : w_k]\}$ es biyectivo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}$, de donde $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ puede entenderse como $\mathbb{C}^k \cup \mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}$. Demos una interpretación del conjunto $\{[0 : w_1 : \dots : w_k]\}$. Tomemos cualquier elemento $(w_1, w_2, \dots, w_k) \in \mathbb{C}^k$ fijo y analicemos un elemento arbitrario de la forma $z = (z_1, \dots, z_k) = (\lambda w_1, \dots, \lambda w_k)$ $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Luego $I_{1/\lambda}(z) = [1/\lambda : w_1, \dots : w_k]$. Pero para $\lambda \rightarrow \infty$, z es un elemento del infinito en \mathbb{C}^k , además $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} I_{1/\lambda}(z) = [0 : w_1 : \dots : w_k]$ con lo que queda establecido que el conjunto $\{[0, w_1 : \dots : w_k]\}$ representa los elementos del infinito para \mathbb{C}^k .

Definición 1 *Un mapa $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, es tal que asocia a $[z_0 : \dots : z_k] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ el elemento $[f_0(z) : \dots : f_k(z)]$, donde todos los $f_i(z)$ son polinomios $\mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}$ homogéneos y del mismo grado.*

La definición se repite si introducimos la aplicación $\mathbb{C}\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ con $n \neq k$.

Ejemplo 1 (Espacio $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$) Para una dimensión compleja $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tiene el siguiente sistema de coordenadas locales:

$$U_1 = \{[1 : z], z \in \mathbb{C}\}, U_2 = \{[w : 1], w \in \mathbb{C}\}.$$

Definamos los f_i como: $f_1 : [1, z] \mapsto z$. Ahora antes de escribir la expresión para f_2 demos una forma más conveniente a U_2 :

$$U_2 = \{[w : 1], w \in \mathbb{C}\} = \{[1 : z], z \in \mathbb{C} - \{0\}\} \cup \{[0 : 1]\}.$$

Entonces: $f_2[1 : z] = \frac{1}{z}$ y $f_2[0 : 1] = 0$, y como $U_1 \cup U_2$ contiene una copia de $\mathbb{C} = \{[1 : z]\}$ además de un punto $[0 : 1]$ este último representa el infinito:

$$\mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \{[1 : z], z \in \mathbb{C}\} \cup \{[0 : 1]\}.$$

De esta forma abstracta de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se puede pasar a una realización más concreta como superficie de Riemann (X, \mathcal{A}) donde $X = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ junto con su atlas \mathcal{A} :

$$\begin{aligned}
 U_1 = \mathbb{C} , f_1 : U_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 & z \longmapsto z \\
 U_2 = (\mathbb{C} - \{0\}) \cup \{\infty\} , f_2 : U_2 &\longrightarrow \mathbb{C} \\
 & z \mapsto \frac{1}{z} \quad z \neq \infty \\
 & z \mapsto 0 \quad z = \infty.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

Otra realización de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ es la conocida esfera de Riemann. Esta realización sin embargo no puede extenderse a dimensiones mayores.

Topología de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Primero recordemos la definición del espacio cociente S^{2k+1}/S^1 , donde S^{2k+1} y S^1 son las esferas de dimensión $2k+1$ y 1 respectivamente.

Definición 2 *El espacio topológico cociente S^{2k+1}/S^1 es el conjunto formado por las clases de elementos de S^{2k+1} (con coordenadas complejas $x = (x_1, \dots, x_k)$ e $y = (y_1, \dots, y_k)$) definidas como:*

$$x, y \in S^{2k+1} \text{ son equivalentes si existe un } \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, \text{ tal que } x = \lambda y,$$

dotado además de la topología cociente heredada de S^{2k+1} .

Pasemos a probar que los espacios $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ y S^{2k+1}/S^1 son equivalentes en las topologías cocientes definidas en ellos. Para éste propósito y sin entrar en complicados razonamientos topológicos usaremos el siguiente lema:

Lema 1 *Si A es abierto en S^{2k+1} entonces $l_A = \bigcup_{z \in A} l_z$ es abierto en \mathbb{C}^{k+1} , donde l_z son las rectas complejas que unen z y el origen de coordenadas.*

Demostración: De la definición $A \subset l_A$. Tomemos primeramente $w \in A \subset l_A$. Como A es abierto en S^{2k+1} existe $B(w, \epsilon) \subset \mathbb{C}^{k+1}$:

$$\Omega = B(w, \epsilon) \cap S^{2k+1} \subset A.$$

Sea ahora $l_\Omega = \bigcup_{z \in \Omega} l_z$. De esta definición $B(w, \epsilon) \setminus l_\Omega$ no es necesariamente vacío (de lo contrario no habría necesidad de probar nada). Sea además $A^* = B(w, \epsilon) \setminus l_\Omega$ y calculemos la distancia $d(w, A^*)$:

$$d(w, A^*) = \inf_{z \in \partial A^*} d(w, z),$$

y puesto que ∂A^* contiene solamente componentes desconexas tanto en S^{2k+1} y en las rectas complejas OM (donde O es el origen de \mathbb{C}^{k+1} y $M \in \partial \Omega$) entonces:

$$d(w, A^*) = \inf_{z \in OM \cap S^{2k+1}} d(w, z).$$

Ahora basta tomar $\epsilon' = d(w, OM)/2 < d(w, A^*)$ para que la bola $B(w, \epsilon')$ sea tal que $B(w, \epsilon') \subset l_\Omega \subset l_A$, lo cual implica que w es punto interior de l_A .

Sea ahora $w \in l_A \setminus A$. Como $w \in l_{z_0}$ para algún $z_0 \in A$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda w \in A$. De lo anterior eso implica que λw es un punto interior de l_A , por lo que:

$$B(\lambda w, \epsilon) \subset l_A \text{ o bien, } |z - \lambda w| < \epsilon, \text{ para } z \in l_A.$$

De ahí: $\left| \frac{z}{\lambda} - w \right| < \frac{\epsilon}{|\lambda|}$ pero en cuanto $z/\lambda \in l_A$ se tiene que $B(w, \epsilon/\lambda) \subset l_A$, con lo cual se prueba que w es un punto interior de l_A . \square

Proposición 1 *Se verifica la siguiente equivalencia de espacios topológicos:*

$$\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^* \cong S^{2k+1}/S^1,$$

estando ambos espacios dotados de la topología cociente.

Demostración: Denotemos primero las clases de equivalencia en $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ por $[\]_{\mathbb{C}}$ y las de S^{2k+1}/S^1 por $[\]_S$. Tomemos la aplicación:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^* & \longrightarrow & S^{2k+1}/S^1 \\ [z]_{\mathbb{C}} & \longmapsto & [z/|z|]_S. \end{array}$$

En particular, si se toma el representante $w = [z/|z|]$ de la clase $[z]_{\mathbb{C}} \in \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$, entonces la aplicación f se puede escribir como:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^* & \longrightarrow & S^{2k+1}/S^1 \\ [w]_{\mathbb{C}} & \longmapsto & [w]_S, \end{array}$$

lo cual es una aplicación biunívoca entre estos dos espacios, puesto que en $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ el elemento $[w]_{\mathbb{C}}$ representa una recta compleja que pasa por w mientras que $[w]_S$ en S^{2k+1}/S^1 representa $l_w \cap S^{2k+1}$. De aquí:

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} S^{2k+1}/S^1 & \longrightarrow & \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^* \\ [w]_S & \longmapsto & [w]_{\mathbb{C}}, \end{array}$$

y sólo basta establecer que estas dos aplicaciones son abiertas. Tomaremos A abierto en $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$ y probaremos que $f(A)$ es abierto en S^{2k+1}/S^1 . Por definición de topología cociente $\pi^{-1}(A)$ es abierto en $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}$ (π es la aplicación proyección de $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}$ a $\mathbb{C}^{k+1} - \{0\}/\mathbb{C}^*$) y por lo tanto basta establecer que $\pi_1^{-1}f(A)$ (π_1 es la proyección de S^{2k+1} a S^{2k+1}/S^1) es también abierto. Puesto que $\pi_1^{-1}f(A) = \{z \in S^{2k+1}/l_z \subset \pi^{-1}A\}$ se tiene que:

$$\pi_1^{-1}f(A) = \pi^{-1}A \cap S^{2k+1},$$

y como $\pi^{-1}A$ es abierto entonces $\pi_1^{-1}f(A)$ es abierta en S^{2k+1} .

Probaremos ahora que f^{-1} es también una aplicación abierta. Tomemos B (abierto) en S^{2k+1}/S^1 entonces $\pi^{-1}B$ es abierto en S^{2k+1} . Del lema anterior y puesto que $\pi^{-1}f^{-1}(B) = \{l_z/z \in \pi_1^{-1}(B)\}$ se tiene que $\pi^{-1}f^{-1}(B)$ también es un conjunto abierto. \square

La equivalencia topológica establecida nos permite dar una definición adicional de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ como el cociente S^{2k+1}/S^1 .

Esto induce la proyección $\pi_0 : S^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. En lo ulterior no haremos distinción entre las proyecciones π y π_0 denotándolas por π . Tampoco habrá distinción entre las clases de equivalencia de ambos espacios topológicos denotándolas simplemente por $[\]$.

Establezcamos ahora que π es abierta. Para esto basta probar que $\pi^{-1}(\pi(A))$ es abierto en S^{2k+1} (siendo A abierto en S^{2k+1}). Puesto que $\pi(A) = \{[z]/z \in A\}$ entonces $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup_{\lambda \in S^1} \lambda A$.

Como A es abierto entonces λA es también abierta por lo que finalmente $\pi^{-1}(\pi(A))$ también lo es en S^{2k+1} .

Comentario 1 La propiedad que π es abierta nos permite establecer una serie de hechos topológicos para $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, en particular que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es un espacio T_2 . En efecto, tomemos $[w], [v] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y de acuerdo a lo establecido en la proposición anterior, tomemos $w \in \pi^{-1}[w] \subset S^{2k+1}$, $v \in \pi^{-1}[v] \subset S^{2k+1}$ donde los puntos w y v no están en un mismo círculo máximo. Sea además $B(w, \epsilon)$ y $B(v, \epsilon)$ tal que $\epsilon < \frac{1}{3}d(S_w, S_v)$ (donde S_w, S_v son círculos máximos que pasan por w y v respectivamente). Probaremos que para todo $w' \in B(w, \epsilon)$ y para todo $v' \in B(v, \epsilon)$ se cumple que $[w'] \neq [v']$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $\lambda \in S^1$, tal que $w' = \lambda v'$. De $|v - v'| < \epsilon$ se tiene $|\lambda v - w'| < \epsilon$. Pero $|\lambda v - w| < |\lambda v - w'| + |w' - w| < 2\epsilon$ lo que contradice el hecho que $|\lambda v - w| \geq 3\epsilon$. Esto prueba que $\pi(B(v, \epsilon)) \cap \pi(B(w, \epsilon)) = \emptyset$.

Comentario 2 Como π es continua en la topología cociente entonces $\pi(S^{2k+1}) = \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ implica que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es compacto. Más adelante se probará que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ hereda una métrica hermitiana de S^{2k+1} , más precisamente una métrica kähleriana (véase la Sección [2.2]).

1.1.2. Subespacios lineales y rectas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$

Estructuras lineales inducidas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ - El espacio proyectivo no es un espacio lineal en el sentido de \mathbb{C}^k sino la colección de rectas complejas que pasan por el origen de \mathbb{C}^{k+1} . Sin embargo, es posible definir sub-conjuntos de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ que tienen en cierto sentido una definición análoga a la de los espacios lineales convencionales; de ahí que convendremos en llamarlos sub-espacios lineales en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Empecemos definiendo la noción de hiperplano:

Definición 3 Un hiperplano \mathcal{H} en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es un subconjunto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ definido como:

$$\mathcal{H} = \left\{ [z_0 : \cdots : z_k] / \sum_{i=0}^k \alpha_i z_i = 0 \right\},$$

donde los α 's no son nulos simultáneamente. Además a todo hiperplano en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se le asocia un número al que se le llamará la dimensión del hiperplano: $\dim \mathcal{H} = k - 1$.

La definición anterior de dimensión proviene del hecho que un hiperplano de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ cualquiera tiene una correspondencia biunívoca con $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}$. En efecto, de la ecuación $\sum_{i=0}^k \alpha_i z_i = 0$, se tiene

que: $z_k = -\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} z_i$ siendo $\alpha_k \neq 0$. Luego las coordenadas del hiperplano \mathcal{H} se pueden escribir como:

$$\left[z_0 : z_1 \cdots : z_{k-1}, \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\alpha_i}{\alpha_k} z_i \right],$$

lo cual implica que la aplicación $g : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathcal{H}$ definida por $z_i = w_i, i = 1, \dots, k - 1$ junto con la relación $\sum_{i=0}^k \alpha_i z_i = 0$ ($z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y $w \in \mathcal{H}$) es biyectiva.

Otra forma útil para expresar el subespacio \mathcal{H} de dimensión $k - 1$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ consiste en considerar la inclusión inyectiva $i : \mathbb{C}^k - \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}^{k+1} - \{0\}$ para así obtener el mapa inducido de $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ vía la proyección π .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k - \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{k+1} - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbb{C}\mathbb{P}^k, \end{array}$$

donde $\pi \circ i = \mathcal{I} \circ \pi$. Y además la inclusión i :

$$(z_0, z_1, \dots, z_{k-1}) \rightarrow (z_0, z_1, \dots, z_{k-1}, 0),$$

induce una nueva inclusión \mathcal{I} :

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_{k-1}] \rightarrow [z_0 : z_1 : \dots : z_{k-1} : 0].$$

Luego se puede decir que $\mathcal{I}(\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1})$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es un subespacio lineal de dimensión $k - 1$ (siendo el término lineal tomado en el sentido de la definición anterior).

Definición 4 (Espacio dual de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$) El conjunto:

$$\left\{ \alpha = [\alpha_0 : \dots : \alpha_k] / L_\alpha : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1, \text{ aplicación, tal que } L_\alpha = \sum_{i=0}^k \alpha_i z_i, [z_0, \dots, z_k] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k \right\},$$

Se llama el espacio dual de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Es sencillo comprobar que el espacio dual es también un espacio proyectivo de dimensión k . En efecto considerando los α como k -uplas de un espacio $\mathbb{C}^{k+1} : \alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$ y teniendo en cuenta que:

$$L_\alpha \sim L_\beta, \text{ si y sólo si existe un } \lambda \in \mathbb{C}^* \text{ tal que } \alpha = \lambda\beta,$$

define una relación de equivalencia tal como en la expresión (1.1), por lo que el conjunto de las aplicaciones L_α constituye un espacio proyectivo de dimensión k . Este espacio se denotará como $(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)^*$.

De la definición anterior de los hiperplanos se puede por tanto establecer una relación biyectiva entre el conjunto de hiperplanos de dimensión $k - 1$ (los cuales nuevamente forman un espacio proyectivo) y el espacio dual $(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)^*$. Más aún, estos dos espacios coinciden puesto que se puede establecer con bastante facilidad que el conjunto de hiperplanos de dimensión $k - 1$ es un espacio k -dimensional con elementos $\alpha = [\alpha_1 : \dots : \alpha_k]$.

Procedamos a generalizar la definición de hiperplano:

Definición 5 (Subespacio lineal de dimensión $k - l$ ($1 \leq l \leq k - 1$)) El conjunto:

$$\mathcal{S} = \left\{ [z_0 : \dots : z_k] / \sum_{i=0}^k \alpha_i^j z_i = 0, j = 1, \dots, l \right\},$$

es un sub-espacio lineal de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Se dice además que la dimensión de este espacio es igual a $k - l$. El sub-espacio lineal con $\dim \mathcal{S} = 1$ se denomina recta en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Expresemos los subespacios de dimensión $k - l$ en función de los mapas inducidos por la inclusión: $\mathbb{C}^{k-l+1} - \{0\}$ a \mathbb{C}^{k+1} .

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{k-l+1} - \{0\} & \xrightarrow{i} & \mathbb{C}^{k+1} - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{CP}^{k-l} & \xrightarrow{\mathcal{I}} & \mathbb{CP}^k, \end{array}$$

$\mathcal{I}(\mathbb{CP}^{k-l})$ es el subespacio lineal de dimensión $k - l$ en \mathbb{CP}^k .

Demostremos un par de proposiciones de utilidad en lo posterior:

Proposición 2 *Por dos puntos en \mathbb{CP}^k pasa una sola recta.*

Demostración: Sean z_0, z_1 puntos de \mathbb{CP}^k y tomemos una recta L que pasa por ellos. Como L es un sub-espacio de dimensión 1 escribamos explícitamente la aplicación $\mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^k$. A fin de obtener dicha aplicación empecemos considerando las ecuaciones lineales que definen una recta en la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i^j z_i = -\alpha_k^j z_k - \alpha_{k-1}^j z_{k-1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1.$$

Entonces en particular z_0 y z_1 deben satisfacer dichas ecuaciones. Por otro lado, considerando que no todos los $\alpha_k^j, \alpha_{k-1}^j$ son nulos (de lo contrario siempre se puede cambiar de coordenadas) y que $\det(\alpha_i^j)_{k-1, k-1} \neq 0, i, j = 0, \dots, k-1$ (ya que si tal determinante fuera cero entonces en el sistema de $k-1$ ecuaciones podría eliminarse al menos una ecuación lo que haría que el sistema de ecuaciones que define la recta L se reduzca al menos en una ecuación, lo cual contradice que L es una recta), se obtiene que un punto arbitrario z de la recta L puede ser expresado como: $z_i = \beta_i z_k + \gamma_i z_{k-1}; i = 0, \dots, k-2$ donde $\beta_i, \gamma_i \in \mathbb{C}$ son determinados por el sistema de $k-1$ ecuaciones lineales. De este modo, las coordenadas de los puntos de la recta pueden ser expresados como función lineal de dos parámetros. Esto a su vez puede conducir a que la recta L pueda considerarse como la imagen de una aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{CP}^1 & \longrightarrow & \mathbb{CP}^k \\ [w_0 : w_1] & \longmapsto & [\beta_0 w_0 + \gamma_0 w_1 : \beta_1 w_0 + \gamma_1 w_1 : \dots : \beta_{k-2} w_0 + \gamma_{k-2} w_1], \end{array}$$

pero como los puntos z_0 y $z_1 \in \mathbb{CP}^k$ están en la imagen de dicha aplicación, entonces dados dos puntos aquellos parámetros pueden ser determinados unívocamente. De ahí se deduce lo buscado. \square

Proposición 3 *Dado un subespacio l -lineal, $\mathbb{CP}^l \subset \mathbb{CP}^k$, los subespacios $l+1$ -lineales que contienen a dicho subespacio l -lineal conforman un espacio proyectivo \mathbb{CP}^{k-l-1} .*

Demostración: Consideremos el diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^{l+1} - \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}^{k+1} - \{0\} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{CP}^l & \xrightarrow{F} & \mathbb{CP}^k. \end{array}$$

Nótese que aquí consideramos a f en lugar de la aplicación inclusión i . Esta nueva aplicación inserta el espacio \mathbb{C}^{l+1} dentro de \mathbb{C}^{k+1} de modo que $f = T \circ i$, donde i es la aplicación inclusión previamente considerada y T es una transformación invertible cualquiera de \mathbb{C}^{k+1} en \mathbb{C}^{k+1} . Puesto que:

$$i = \begin{pmatrix} I_{l+1, l+1} \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}_{k+1, l+1}, \quad T = (\alpha_{i,j})_{k+1, k+1}, \quad i, j = 0, \dots, k$$

entonces se tiene la expresión matricial: $f = (\alpha_{i,j})$ con $i = 0, 1, \dots, k$ y $j = 0, 1, \dots, l$ y como $F = \pi \circ f \circ \pi^{-1}$ se concluye que:

$$F[z_0, \dots, z_l] = \left[\sum_{i=0}^l \alpha_{0,i} z_i : \sum_{i=0}^l \alpha_{1,i} z_i : \cdots : \sum_{i=0}^l \alpha_{k,i} z_i \right], \quad (1.6)$$

la cual es una expresión general para un sub-espacio lineal en \mathbb{CP}^k en función de $[z_0 : \dots : z_l] \in \mathbb{CP}^l$. Denotemos dicho sub-espacio como S y sea ahora un punto cualquiera $[w_0 : \dots : w_k] \in \mathbb{CP}^k$ que no pertenece a dicho subespacio lineal. Construyamos a continuación un subespacio lineal que contiene a L y a $[w_0 : \dots : w_k]$ de dimensión $l+1$.

Puesto que $[w_0 : \dots : w_k] \notin L$, consideremos la aplicación $G : \mathbb{CP}^{l+1} \rightarrow \mathbb{CP}^k$:

$$G([z_0 : \dots : z_{l+1}]) = \left[\sum_{i=0}^{l+1} \alpha_{0,i} z_i : \sum_{i=0}^{l+1} \alpha_{1,i} z_i : \cdots : \sum_{i=0}^{l+1} \alpha_{k,i} z_i \right].$$

tal que $G([0, 0 : \dots : 0 : 1]) = [w_0 : \dots : w_k]$ y además

$$\left\{ G([z_0 : z_1 : \dots : z_l, 0]) / [z_0, z_1, \dots, z_l, 0] \in \mathbb{CP}^{l+1} \right\} = L,$$

por lo que en particular:

$$\alpha_{j, l+1} = w_j, \quad (1.7)$$

donde $j = 0, 1, \dots, k$.

Apliquemos esto para determinar el conjunto de subespacios lineales de dimensión $l+1$ que pasa por L . Tomemos para simplificar, y sin pérdida de generalidad, el subespacio L de dimensión l de la forma:

$$L = \{[z_0 : \dots : z_l : 0 : 0 : \dots : 0]\} \subset \mathbb{CP}^k.$$

Considerando W (subespacio lineal) contenido en \mathbb{C}^{k+1} tal que $\pi(W) = L$ se deduce que $\pi(\mathbb{C}^{k+1} \setminus W) = \{[0 : 0 : \dots : 0 : z_{l+1} : \dots : z_k]\}$ (donde no todos los z_i son nulos simultáneamente). Tomemos ahora el punto $w \in \pi(\mathbb{C}^{k+1} \setminus L)$ junto con L y consideremos la aplicación G arriba introducida. Demos una condición más fuerte para construir G :

$$G([z_0 : z_1 : \dots, z_l : 0]) = [z_0 : z_1 : \dots : z_l : 0 : \dots : 0] \in L \subset \mathbb{CP}^k$$

Teniendo en cuenta esto, se tiene las siguientes relaciones adicionales para los coeficientes de la aplicación G que define el sub-espacio de dimensión $l+1$ que pasa por L :

$$\alpha_{i,j} = \delta_{i,j}, \quad \text{para: } 0 \leq i, j \leq l. \quad \text{Y además: } \alpha_{i,j} = 0, \quad \text{cuando } l+1 \leq i \leq k, \quad \text{y } 0 \leq j \leq l,$$

($\delta_{i,j}$ es el delta de Kronecker). Tomando ahora la relación (1.7):

$$\alpha_{i,l+1} = 0, \quad 0 \leq j \leq l.$$

Se tiene finalmente, por tanto, que el sub-espacio que pasa por L y un punto exterior w está definido solamente por las $k - l - 1$ coordenadas simultáneamente no nulas de $w = [0 : \dots : 0 : w_{l+1} : \dots : w_k]$. Esto implica que $k - l - 1$ parámetros pueden definir dicho sub-espacio, lo cual finalmente implica la proposición buscada. \square

Ejemplo 2 En particular, si consideramos un punto $p \in \mathbb{CP}^k$, el conjunto de subespacios 1-dimensionales (rectas) que pasan por p es un espacio proyectivo \mathbb{CP}^{k-1} . Este conjunto de rectas es llamado el pencil de rectas que pasa por p

Definición 6 El conjunto $\{v^i \in \mathbb{C}^{k+1} : i = 1, \dots, l\}$, $l \leq k + 1$, son independientes si los correspondientes vectores en \mathbb{C}^{k+1} lo son, o equivalentemente, si su cápsula lineal es un subespacio lineal de dimensión l en \mathbb{C}^{k+1} , o bien si su proyección es un sub-espacio lineal de dimensión $l - 1$ en \mathbb{CP}^k .

De esta definición se concluye que $k + 2$ puntos en \mathbb{CP}^k son siempre dependientes.

Definición 7 Un conjunto finito Γ de puntos están en posición general en \mathbb{CP}^k si ningún subconjunto de puntos $A \subset \Gamma$, ($|A| \leq k + 1$) es dependiente.

Esta definición nos lleva de manera natural el concepto de rectas en posición general.

Definición 8 El conjunto de rectas $\{l_i \subset \mathbb{CP}^k : i = 1, \dots, r\}$ son independientes si su cápsula lineal (formada por vectores direccionales en \mathbb{C}^{k+1}) es un subespacio de dimensión r en \mathbb{C}^{k+1} o bien de dimensión $r - 1$ en \mathbb{CP}^k .

Definición 9 un conjunto Γ de rectas están en posición general en \mathbb{CP}^k si cualquier subconjunto $A \subset \Gamma$, ($|A| \leq k$) es independiente.

Dadas las definiciones anteriores, la siguiente proposición se puede obtener sin complicaciones:

Proposición 4 Un conjunto de l puntos independientes genera un conjunto de $l - 1$ rectas independientes y viceversa.

Ejemplo 3 Sea el hiperplano $\mathcal{H} : a_0 z_0 + a_1 z_1 = 0$, $a_0 \neq 0$, $a_1 \neq 0$ en \mathbb{CP}^1 donde $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$. En este caso trivial el hiperplano se reduce a un punto. En efecto, $z_0 = -\frac{a_1}{a_0} z_1$, de donde en \mathbb{C}^2 los puntos que satisfacen la ecuación serán de la forma $(-\frac{a_1}{a_0} z_1, z_1)$ para cualquier $z_1 \in \mathbb{C}$, los cuales constituyen un punto en \mathbb{CP}^1 .

Ejemplo 4 Sea el hiperplano $\mathcal{H} : a_0 z_0 + a_1 z_1 + a_2 z_2 = 0$ en \mathbb{CP}^2 donde $(z_0, z_1, z_2) \in \mathbb{C}^3$. Mostremos que \mathcal{H} es un sub-espacio lineal de dimensión 1. En efecto: $z_0 = -\frac{a_1}{a_0} z_1 - \frac{a_2}{a_0} z_2$ de donde:

$$\left(-\frac{a_1}{a_0} z_1 - \frac{a_2}{a_0} z_2, z_1, z_2 \right) = z_1 \left(\frac{a_1}{a_0}, 1, 0 \right) + z_2 \left(\frac{a_2}{a_0}, 0, 1 \right) \in \mathbb{C}^3.$$

Este es el conjunto formado por las combinaciones lineales de vectores complejos $(\frac{a_1}{a_0}, 1, 0)$ y $(\frac{a_2}{a_0}, 0, 1)$. Además para cualquier punto z definido de este modo, toda la recta compleja que pasa por el origen y por z queda definida por la misma expresión. De este modo, en \mathbb{CP}^2 la proyección será los puntos de la forma:

$$[-a_1 z_1 - a_2 z_2 : a_0 z_1 : a_0 z_2].$$

1.2. Holomorfía en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y operadores diferenciales asociados

1.2.1. Mapas holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$

Demos la definición general de un mapa holomorfo entre dos variedades complejas.

Definición 10 Sean X_1, X_2 dos variedades complejas con atlas \mathcal{U}^1 y \mathcal{U}^2 respectivamente. Sea $\Omega_1 \subset X_1, \Omega_2 \subset X_2$ dos dominios. Un mapa $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ es holomorfo si para todo $(U, \rho) \in \mathcal{U}^1, (V, \sigma) \in \mathcal{U}^2$ con $V \cap f(U \cap \Omega_1) \neq \emptyset$ el mapa

$$\sigma \circ f \circ \rho : \rho^{-1}(U \cap \Omega_1) \rightarrow \sigma(V) \quad (1.8)$$

es holomorfo.

En particular si $X_1 = X_2 = \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ (con el sistema usual de abiertos) se tiene un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

La siguiente caracterización muy importante es válida para dichos mapas.

Teorema 1 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ un mapa holomorfo (no constante). Si f es dado en forma de coordenadas homogéneas $f = [f_0 : f_1 : \dots : f_k]$ entonces $f_i (i = 0, \dots, k)$ es un polinomio homogéneo de grado fijo d y los f_i no tienen más que un cero común (el origen).

Para la prueba de este teorema véase [40].

Introduzcamos la noción de mapa levantado para $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\mathbb{P}^k \\ \pi \uparrow & & \uparrow \pi \\ \mathbb{C}^{k+1} & \xrightarrow{F} & \mathbb{C}^{k+1} \end{array}$$

Definimos $F = \pi^{-1} \circ f \circ \pi$ y a fin que esto tenga sentido uniformizamos π^{-1} del siguiente modo:

$$\pi^{-1}[z] = z \in \mathbb{C}^{k+1}.$$

Se tiene entonces que:

$$F(z_0, \dots, z_k) = \pi^{-1} \circ f \circ \pi(z_0, \dots, z_k) = \pi^{-1} \circ f[z_0 : \dots : z_k],$$

$$F(z_0, \dots, z_k) = \pi^{-1}[f_0 : f_1 : \dots : f_k] = (f_0, f_1, \dots, f_k).$$

El concepto de mapa levantado no presenta ninguna restricción respecto a la naturaleza de f por lo que puede ser aplicado a otro tipo de mapa. En determinadas circunstancias será útil referirnos al jacobiano $J(f)$ del mapa levantado F .

Pasemos a estudiar el mapa inducido por f (holomorfo) en \mathbb{C}^k por acción de los biholomorfismos locales h_i $i = 0, \dots, k$ del atlas correspondientes a $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Del diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\mathbb{P}^k \\ h_i \downarrow & & \downarrow h_i \\ \mathbb{C}^k & \xrightarrow{f_*} & \mathbb{C}^k \end{array}$$

se tiene que $f_* = h_i \circ f \circ h_i^{-1}$ y de las propiedades de f y h_i , f_* es holomorfa. Además $f_* : \text{Rang } h_i \rightarrow h_i[\text{Rang } f \cap \text{Dom } h_i]$ por lo que f y f_* serán llamadas conjugadas en estas circunstancias también. Como $f_*^n = h_i \circ f^n \circ h_i^{-1}$ entonces las iteraciones de ambos mapas son también conjugados.

Para más concreción, sea $f = [f_0 : f_1 : \dots : f_k]$ y tomemos h_0 tal que $h_0^{-1}(z_1, \dots, z_k) = [1 : z_1 : \dots : z_k]$. De donde:

$$h_0 \circ f \circ h_0^{-1}(z_1, \dots, z_k) = \left(\frac{f_1}{f_0}, \dots, \frac{f_k}{f_0} \right) \Big|_{[1:z_1:\dots:z_k]}.$$

Ejemplo 5 Sea $f : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ tal que

$$f = [z_0^3 : z_1^3 + z_2 z_0^2 : z_0 z_1^2 + 2z_2 z_0^2],$$

entonces:

$$f_*(z_1, z_2) = h \circ f \circ h_0^{-1}(z_1, z_2) = (z_1^3 + z_2, z_1^2 + 2z_2).$$

Inversamente $f = h_0^{-1} \circ f_* \circ h_0$.

Ejemplo 6 Sea un mapa $g(z_1, z_2) = (z_1^3 + z_2^3, z_1^2 + z_2^2)$ holomorfo en \mathbb{C}^2 . Obtengamos un mapa local en el entorno $U_1 \subset \mathbb{CP}^2$. Tomemos un punto $[w_0 : w_1 : w_2] \in \mathbb{CP}^2$ se tiene que:

$$h_1[w_0 : w_1 : w_2] = \left(\frac{w_0}{w_1}, \frac{w_2}{w_1} \right),$$

y además:

$$g \circ h_1[w_0 : w_1 : w_2] = \left(\frac{w_0^3}{w_1^3} + \frac{w_2^3}{w_1^3}, \frac{w_0^2}{w_1^2} + \frac{w_2^2}{w_1^2} \right).$$

Finalmente tomando g^* conjugado de g en \mathbb{CP}^2

$$g^*[w_0 : w_1 : w_2] = h_1^{-1} \circ g \circ h_1[w_0 : w_1 : w_2] = [w_0^3 + w_2^3 : w_1^3 : w_0^2 w_1 + w_2^2 w_1].$$

Más adelante analizaremos algunas propiedades topológicas de los mapas conjugados.

Comentario 3 Sea $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ y $\tilde{f}_i = h_i \circ f \circ h_i^{-1}$ el conjugado de f en el entorno de U_i . Surge la pregunta natural si \tilde{f}_i y \tilde{f}_j ($i \neq j$) son conjugados holomorfos en $U_i \cap U_j$. La respuesta es afirmativa por cuanto $h_i^{-1} \circ h_j$ como mapa de \mathbb{CP}^k en \mathbb{CP}^k es un biholomorfismo y entonces basta observar que:

$$(h_i^{-1} \circ h_j)^{-1} \circ \tilde{f}_i \circ (h_i^{-1} \circ h_j) = \tilde{f}_j.$$

Para terminar esta subsección, definamos algunos conceptos relacionados a las iteraciones de un mapa racional. Empecemos por el concepto de conjunto de indeterminación de un mapa racional $f : \mathbb{CP}^k \rightarrow \mathbb{CP}^k$.

Definición 11 Sea el levantamiento F de f . El conjunto $I(f)$ de indeterminación de f se define como:

$$I(f) = \pi(F^{-1}(0)) \subset \mathbb{CP}^k.$$

Ejemplo 7 Sea $f : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ (holomorfa)

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0^2 : z_1^2 - z_2^2 : z_1^2 + z_2^2],$$

aquí $I(f) = \emptyset$ (por el teorema que caracteriza los mapas holomorfos).

Ejemplo 8 Sea $f : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$ (racional)

$$f[z_0 : z_1 : z_2] = [z_0^2 - z_1^2 : z_1^2 - z_2^2 : z_1^2 - 2z_1z_2 + z_2^2].$$

Luego: $I(f) = \{[w : w : w] \in \mathbb{CP}^k, w \in \mathbb{C}\}$.

En general $I(f)$, donde f es racional, es de dimensión mayor que 2 puesto que las componentes de f no tienen factores comunes.

Seguidamente introduzcamos la noción de mapa dominante:

Definición 12 $f : \mathbb{CP}^k \rightarrow \mathbb{CP}^k$ (racional) es dominante si el jacobiano $J(f)^1$ no es idénticamente nulo.

Más adelante (Capítulo [3]) usaremos este concepto.

1.2.2. Mapas meromorfos en \mathbb{CP}^k

De acuerdo a las definiciones estándar sobre mapas racionales en variedades proyectivas (véase [52]) se tiene la siguiente proposición que enunciaremos como definición.

Definición 13 $f : \mathbb{CP}^k \rightarrow \mathbb{CP}^k$ es un mapa racional de grado d si las componentes coordenadas de f_i tal que $f = [f_0 : f_1 : \dots : f_k]$ son polinomios homogéneos de grado d sin factores comunes.

Recordemos que de acuerdo a un teorema de Remmert (véase [88]) un mapa de una variedad M a otra N es holomorfo si y sólo si $G(f) = \{(x, f(x)); x \in M\} \subset M \times N$ es un conjunto analítico de dimensión pura en $M \times N$ igual a la dimensión de M .

Este teorema da la posibilidad de definir un mapa meromorfo entre variedades complejas M y N , para lo cual hay que modificar la circunstancia que $G(f)$ es un conjunto analítico de dimensión pura.

Tomemos las proyecciones canónicas $\pi_1 : M \times N \rightarrow N$, $\pi_2 : M \times N \rightarrow M$ y sea W un abierto denso en M . Consideremos $f_W : W \rightarrow N$ (mapa holomorfo).

Definición 14 El mapa f_W tal como se ha definido arriba se dice que es meromorfo con respecto a M si:

- $\overline{G(f_W)} \subset M \times N$ es un conjunto analítico.
- $\pi_1|_{\overline{G(f_W)}} : \overline{G(f_W)} \rightarrow M$ es propia.

Considerando todo esto definamos:

$$\text{mer}(M, N) = \{f_W : W \rightarrow N / (f_W \text{ es holomorfa y meromorfa respecto a } M)\}. \quad (1.9)$$

Sea ahora $f_W, g_V \in \text{mer}(M, N)$ tal que $\overline{G(f_W)} = \overline{G(g_V)}$. Esto define por lo tanto, una relación de equivalencia.

¹El jacobiano aquí se entiende como jacobiano complejo (véase la Sub-sección [1.3.1]).

Definición 15 Sea $f \in \text{Mer}(M, N) = \text{mer}(M, N) / \sim$ se denomina mapa meromorfo de M a N . Si $f = [f_W]$, donde $f_W \in \text{mer}(M, N)$ entonces definimos $G(f) = \overline{G(f_W)}$.

Sea $M' \subset M$ un abierto y $f_{W \cap M'} = f_W|_{W \cap M'}$ de ahí $\overline{G(f_{W \cap M'})} = G(f) \cap \pi_1^{-1}(M')$ por lo que $f_{W \cap M'}$ es meromorfa respecto a M' . De ahí tenemos $f|_{M'} = [f_{W \cap M'}]$ la cual es la restricción del mapa meromorfo a f sobre M' .

De lo obtenido se puede concluir (véase [88]) que $G(f)$, para $f : M \rightarrow N$ meromorfa, es irreducible y $\dim G(f) = \dim M$.

Esta noción nos permite deducir que un mapa meromorfo es una extensión de un mapa holomorfo.

Teorema 2 Sea $f : M \rightarrow N$ un mapa meromorfo, f se representa como un mapa holomorfo $g : M \rightarrow N$ si y solamente si $f(x)$ es un punto unívoco para cualquier $x \in M$.

Demostración: Si $f = g$ entonces evidentemente la imagen de cualquier punto $x \in M$ es unívoca. Definamos un mapa f_M tal que $f_M : x \in M \rightarrow f(x) \in N$ (asumiendo que $f(x)$ sea unívoco) entonces $G(f_M) = G(f)$.

Pero $G(f)$ es irreducible y de dimensión m por lo que por la caracterización de Remmert, $g = f_M$ es holomorfa. \square

Evidentemente, si un mapa $f : M \rightarrow N$ (meromorfo) no es holomorfo entonces existe $x \in M$ donde $f(x)$ no es un punto unívoco. Para otros detalles de los mapas meromorfos, véase [49, 88], sólo añadiremos que se puede establecer que todo mapa meromorfo en $\mathbb{C}P^k$ es racional (véase [49, 101]).

1.2.3. Espacios proyectivos de mapas holomorfos y meromorfos. Algunos aspectos relativos a las iteraciones.

Pasemos a definir espacio proyectivos cuyos elementos son los mapas meromorfos dominantes de $\mathbb{C}P^k$. Denotemos a este espacio por \mathcal{M}_d . Por otro lado si \mathcal{H}_d representa el espacio proyectivo cuyos puntos son mapas holomorfos de grado d en $\mathbb{C}P^k$ se tiene que:

$$\mathcal{H}_d \subset \mathcal{M}_d \subset \mathbb{C}P^N, \quad (1.10)$$

donde $\mathbb{C}P^N$ es el espacio proyectivo que contiene todos los mapas homogéneos de grado d .

Un cálculo combinatorio sencillo establece que:

$$N = (K + 1) \binom{d + k}{k} - 1.$$

y se prueba (véase [40]) que:

Proposición 5 Los espacios \mathcal{H}_d y \mathcal{M}_d son abiertos Zariski de $\mathbb{C}P^N$.

Corolario 1 Si $f \in \mathcal{M}_d$, el grado de $J(f, z)$ es $(k + 1)(d - 1)$.

Como es usual a menos que se diga lo contrario, el jacobiano es aquí el jacobiano complejo.

Conjunto crítico.- Sea $f \in \mathcal{M}_d$. Para f racional en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ el conjunto $\{z : J(F)(z) = 0\}$ (F es el levantamiento de f en \mathbb{C}^{k+1}) define el conjunto crítico asociado a f . lo denotaremos por \mathcal{C}_f .² Puesto que $p \in I$ es una singularidad para $f \in \mathcal{M}_d$ o en otras palabras un cero de los polinomios f_0, f_1, \dots, f_k , introduzcamos el blow-up $B(p)$ de f en p (para las definiciones precisas véase [45, 52]). Sea entonces un entorno $B(p, \epsilon) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, definamos:

$$\mathfrak{B}_p = \bigcap_{\epsilon > 0} f(B(p, \epsilon) \setminus I), \quad (1.11)$$

(I : es el conjunto de indeterminación para f).

Expresemos \mathfrak{B}_p con ayuda del grafo:

$$\Gamma_f = \{(z, f(z)) : z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus I\},$$

el cual es un conjunto analítico en $(\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus I) \times \mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

$\overline{\Gamma}_f$ es también un conjunto analítico, de este modo \mathfrak{B}_p es el subconjunto analítico obtenido por la proyección de $\overline{\Gamma}_f$ sobre p . Se observa que \mathfrak{B}_p es conexo pues $B(p, \epsilon) \setminus I$ es conexo también. Además si \mathfrak{B}_p es de dimensión 0 entonces f se prolonga holomorficamente en p , y $p \notin I$.

En el caso de un mapa birracional f denotemos \mathfrak{B}_p^+ el blow-up en el punto p (singularidad de f) y \mathfrak{B}_q^- el blow-up en el punto q (singularidad de f^{-1}). Además I_+ y I_- son los conjuntos de indeterminación de f y f^{-1} en estas circunstancias se tiene que:

Proposición 6 $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ (birracional). Si $p \in \mathfrak{B}_q^-$, entonces $q \in \mathfrak{B}_p^+$. En particular $f(\mathfrak{B}_q^- \setminus I_+) = q$.

Demostración: Sea $p \in \mathfrak{B}_q^-$, tomemos $\{z_n\}$ tal que $z_n \notin I_-$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = q$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-1}(z_n) = p$ y además $f^{-1}(z_n) \notin I_+$ puesto que $f(f^{-1}(z_n)) = z_n$ es tal que $z_n \rightarrow q$, por lo que $q \in \mathfrak{B}_p^+$. \square

A continuación extendamos algunas cuestiones referentes al conjunto crítico de $f \in \mathcal{H}_d(d \geq 2)$.

Definición 16 La adherencia de la órbita del conjunto crítico \mathcal{C}_f se define como:

$$\mathfrak{C}_f = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^n(\mathcal{C}_f)}. \quad (1.12)$$

Este conjunto será denominado el conjunto post-crítico.

Definición 17 El mapa holomorfo $f \in \mathcal{H}_d(d \geq 2)$ es críticamente finito si \mathfrak{C}_f resulta ser una variedad algebraica.

Ejemplo 9 Demos un ejemplo de un mapa $f \in \mathcal{H}_d(d \geq 2)$ críticamente finito:

Sea $f[z : w : t] = [(z - 2w)^2 : (z - 2t)^2 : z^2]$ entonces

$$J_f = -32(z - 2w)(z - 2t)z,$$

por lo que $\mathcal{C}_f = \{z = 2w\} \cup \{z = 2t\} \cup \{z = 0\}$, y $f(\{z = 2w\}) = [0 : 4(w - t)^2 : 4w^2]$ equivale a $\{z = 0\}$.

Luego $f(\{z = 0\}) = [4w^2 : 4t^2 : 0]$ lo que equivale a $\{t = 0\}$. De ahí:

$$f(\{t = 0\}) = [(z - 2w)^2 : z^2 : z^2] \equiv \{w = t\}$$

²Más adelante en el Capítulo [5], esto será nuevamente tratado desde el punto de vista de la teoría de las magnitudes asintóticas.

$$\begin{aligned}
f(\{w = t\}) &= [(z - 2w)^2 : (z - 2w)^2 : z^2] \equiv \{z = w\} \\
f(\{z = w\}) &= [w^2 : (w - 2t)^2 : w^2] \equiv \{z = t\} \\
f(\{z = t\}) &= [(z - 2w)^2 : z^2 : z^2] \equiv \{w = t\},
\end{aligned}$$

y la generación de variedades algebraicas se hace periódica:

$$\{z = 2w\} \rightarrow \{z = 0\} \rightarrow \{t = 0\} \rightarrow \{t = w\} \rightarrow \{z = w\} \rightarrow \{z = t\} \rightarrow \{t = w\}.$$

Análogamente para $\{z = 2t\}$:

$$\{z = 2t\} \rightarrow \{w = 0\} \rightarrow \{z = t\} \rightarrow \{t = w\},$$

esto implica que \mathcal{C}_f es una variedad algebraica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Análogamente definamos la adherencia del conjunto de indeterminación I .

Definición 18 Sea $f \in \mathcal{M}_d$ y sea F el levantamiento de f . El conjunto $\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(0)}$ se denomina la adherencia del conjunto de indeterminación I .

Definamos un concepto adicional de utilidad en la dinámica:

Definición 19 Sea el mapa $f \in \mathcal{M}_d$ algebraicamente estable. Un punto p se dice que es normal si existe una vecindad U de p tal que para alguna vecindad $V_{\mathcal{J}}$ del conjunto de indeterminación \mathcal{J} se verifica que: $f^n(U) \cap V_{\mathcal{J}} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se puede comprobar que el conjunto de Fatou \mathcal{F} es disjunto con \mathcal{J} y además el conjunto de puntos normales de un mapa $f \in \mathcal{M}_d$ es un abierto en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{J}$. Enunciemos finalmente el concepto de mapa meromorfo normal. Esta definición será usada en el Capítulo 4 para estudiar la corriente de Green.

Definición 20 Un mapa $f \in \mathcal{M}_d$ se denomina normal si el conjunto de puntos normales \mathfrak{N}_f de dicho mapa es tal que:

$$\mathfrak{N}_f = \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{J}.$$

1.2.4. Operadores diferenciales complejos

Sea $Z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ puesto que $z_j = x_j + iy_j$, consideremos:

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j. \quad (1.13)$$

Estas relaciones pueden interpretarse como cambio de base en el espacio $(\mathbb{C}^k)^*$ desde la base $(dx_1, \dots, dx_k, dy_1, \dots, dy_k)$ a la base $(dz_1, \dots, dz_k, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k)$.

Dada las relaciones básicas

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \quad \frac{\partial y_j}{\partial y_k} = \delta_{jk}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial y_k} = \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = 0, \quad (1.14)$$

requerimos que se cumpla las siguientes relaciones para los operadores $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$:

$$\frac{\partial z_j}{\partial z_j} = 1, \quad \frac{\partial z_j}{\partial \bar{z}_j} = 0, \quad \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} = \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} = 0. \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned}
f(\{w = t\}) &= [(z - 2w)^2 : (z - 2w)^2 : z^2] \equiv \{z = w\} \\
f(\{z = w\}) &= [w^2 : (w - 2t)^2 : w^2] \equiv \{z = t\} \\
f(\{z = t\}) &= [(z - 2w)^2 : z^2 : z^2] \equiv \{w = t\},
\end{aligned}$$

y la generación de variedades algebraicas se hace periódica:

$$\{z = 2w\} \rightarrow \{z = 0\} \rightarrow \{t = 0\} \rightarrow \{t = w\} \rightarrow \{z = w\} \rightarrow \{z = t\} \rightarrow \{t = w\}.$$

Análogamente para $\{z = 2t\}$:

$$\{z = 2t\} \rightarrow \{w = 0\} \rightarrow \{z = t\} \rightarrow \{t = w\},$$

esto implica que \mathcal{C}_f es una variedad algebraica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Análogamente definamos la adherencia del conjunto de indeterminación I .

Definición 18 Sea $f \in \mathcal{M}_d$ y sea F el levantamiento de f . El conjunto $\mathcal{J} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F^{-n}(0)}$ se denomina la adherencia del conjunto de indeterminación I .

Definamos un concepto adicional de utilidad en la dinámica:

Definición 19 Sea el mapa $f \in \mathcal{M}_d$ algebraicamente estable. Un punto p se dice que es normal si existe una vecindad U de p tal que para alguna vecindad $V_{\mathcal{J}}$ del conjunto de indeterminación \mathcal{J} se verifica que: $f^n(U) \cap V_{\mathcal{J}} = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Se puede comprobar que el conjunto de Fatou \mathcal{F} es disjunto con \mathcal{J} y además el conjunto de puntos normales de un mapa $f \in \mathcal{M}_d$ es un abierto en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{J}$. Enunciemos finalmente el concepto de mapa meromorfo normal. Esta definición será usada en el Capítulo 4 para estudiar la corriente de Green.

Definición 20 Un mapa $f \in \mathcal{M}_d$ se denomina normal si el conjunto de puntos normales \mathfrak{N}_f de dicho mapa es tal que:

$$\mathfrak{N}_f = \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus \mathcal{J}.$$

1.2.4. Operadores diferenciales complejos

Sea $Z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ puesto que $z_j = x_j + iy_j$, consideremos:

$$dz_j = dx_j + idy_j, \quad d\bar{z}_j = dx_j - idy_j. \quad (1.13)$$

Estas relaciones pueden interpretarse como cambio de base en el espacio $(\mathbb{C}^k)^*$ desde la base $(dx_1, \dots, dx_k, dy_1, \dots, dy_k)$ a la base $(dz_1, \dots, dz_k, d\bar{z}_1, \dots, d\bar{z}_k)$.

Dada las relaciones básicas

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_k} = \delta_{jk} \quad \frac{\partial y_j}{\partial y_k} = \delta_{jk}, \quad \frac{\partial x_j}{\partial y_k} = \frac{\partial y_j}{\partial x_k} = 0, \quad (1.14)$$

requerimos que se cumpla las siguientes relaciones para los operadores $\frac{\partial}{\partial z_j}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$:

$$\frac{\partial z_j}{\partial z_j} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}_j}{\partial \bar{z}_j} = 1, \quad \frac{\partial \bar{z}_k}{\partial z_j} = \frac{\partial z_k}{\partial \bar{z}_j} = 0. \quad (1.15)$$

Para ello se definen dichos operadores del siguiente modo:

$$\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} - i \frac{\partial}{\partial y_j} \right], \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} + i \frac{\partial}{\partial y_j} \right]. \quad (1.16)$$

De lo anterior se obtienen las siguientes relaciones recíprocas:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial z_j} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}, \quad \frac{\partial}{\partial y_j} = i \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) \quad (1.17)$$

y también:

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\bar{z}_j), \quad dy_j = \frac{1}{2i}(dz_j - d\bar{z}_j). \quad (1.18)$$

Tomemos una función $f : \Omega$ (dominio abierto) $\subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ donde $f \in C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$. Interpretada como una función de \mathbb{R}^{2k} a \mathbb{C} se tiene el diferencial total como:

$$df(a) = \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f(a)}{\partial x_j} dx_j + \frac{\partial f(a)}{\partial y_j} dy_j \right), \quad (1.19)$$

usando las equivalencias (1.17,1.18):

$$df(a) = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f(a)}{\partial z_j} dz_j + \frac{\partial f(a)}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j, \quad (1.20)$$

de aquí definimos los operadores:

$$\partial = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial z_j} dz_j \quad \bar{\partial} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j,$$

además:

$$d = \partial + \bar{\partial}. \quad (1.21)$$

Estas relaciones son evidentemente válidas en general para cualquier mapa complejo de clase C^1 que actúa de \mathbb{C}^k en \mathbb{C}^r ($r \geq 1$).

La relación (1.21) en un punto donde el mapa es diferenciable, puede ser escrito como:

$$d_a f = \partial_a f + \bar{\partial}_a f. \quad (1.22)$$

Estrictamente hablando, los operadores $\partial, \bar{\partial}$ mapean elementos del espacio $C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^1)$ sobre el espacio de k -formas diferenciables de grado 1.

A continuación aclaremos como actúan estos operadores para la composición de mapas. Veamos primero el caso $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces:

$$\partial : f \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial z_1}, \frac{\partial f}{\partial z_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial z_k} \right).$$

Análogamente para $\bar{\partial}$.

Sea ahora $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^r$. Entonces:

$$\partial : (f_1, \dots, f_r) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial z_k} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial z_1} & \dots & \frac{\partial f_r}{\partial z_k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial f_1 \\ \partial f_2 \\ \vdots \\ \partial f_r \end{pmatrix}.$$

Análogamente para $\bar{\partial}$.

Esta relación indica que los operadores aplican el vector $1 \times r$ (con elemento en $C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$) sobre el espacio de matrices $r \times k$ (con elemento en $C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$).

Denominaremos a esta matriz, la matriz jacobiana compleja Jf .

Como un ejemplo de aplicación de estas ideas, demos la expresión para $\partial(f \circ g)$, donde $f \in C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$ y $g \in C^1(\mathbb{C}^k, \mathbb{C})$. Puesto que los operadores $\frac{\partial}{\partial z}$ satisfacen la regla de la cadena, es decir:

$$\frac{\partial f \circ g}{\partial z_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial f}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{g}_j} \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial z_i}.$$

De aquí

$$\partial f \circ g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial z_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{g}_j} \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial z_i} \right) dz_i,$$

y análogamente para $\bar{\partial} f \circ g = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k \left(\frac{\partial f}{\partial g_j} \frac{\partial g_j}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial f}{\partial \bar{g}_j} \frac{\partial \bar{g}_j}{\partial \bar{z}_i} \right) d\bar{z}_i$. Interpretando estas relaciones,

como productos escalares de vectores de vectores de la forma $\partial_g f = \left(\frac{\partial f}{\partial g_1}, \frac{\partial f}{\partial g_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial g_k} \right)$, etc. Se tiene entonces que:

$$\partial f \circ g = \partial_g f \partial g + \partial_{\bar{g}} f \partial \bar{g}, \quad (1.23)$$

y

$$\bar{\partial} f \circ g = \partial_g f \bar{\partial} g + \partial_{\bar{g}} f \bar{\partial} \bar{g}. \quad (1.24)$$

Comentario 4 Recordando las definiciones de operadores \mathbb{C} -lineal y \mathbb{C} -antilineal

$L : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^r$

$$L(\lambda z) = \lambda L(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (\mathbb{C} - \text{lineal}),$$

$$L(\lambda z) = \bar{\lambda} L(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad (\mathbb{C} - \text{antilineal}).$$

De la definición de ∂ y $\bar{\partial}$ se deduce que son \mathbb{C} -lineal y \mathbb{C} -antilineal respectivamente. El operador d es por tanto, la suma de un operador \mathbb{C} -lineal y otro \mathbb{C} -antilineal (este es un hecho general para todo operador lineal que actúa en un espacio lineal sobre los complejos).

Ejemplo 10 (Ecuaciones diferenciales del análisis complejo)

Con ayuda de los operadores ∂ y $\bar{\partial}$ podemos definir otros operadores. De $d = \partial + \bar{\partial}$ definimos el operador conjugado de d como $d^c = \frac{i}{4}(\bar{\partial} - \partial)$.³ Puesto que $\partial \bar{\partial} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ en el sentido

³Para otras formas de definir d^c , véase [48].

de producto exterior (para detalles véase la Sección [2.1]) es una forma diferencial compleja de bigrado $(1, 1)$, se tiene que:

$$dd^c = \frac{i}{4}(\partial + \bar{\partial})(\bar{\partial} - \partial) = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial} \quad (1.25)$$

queda también expresado en términos del operador $\partial\bar{\partial}$.

Empecemos tomando una función $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$, como es conocido la condición de Cauchy-Riemann da una condición suficiente y necesaria de holomorfía $\bar{\partial}f = 0$ o bien $\sum_{i=1}^k \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_i} dz_i = 0$, de donde se obtiene el sistema sobre determinado de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \Re f &= \frac{\partial}{\partial y_i} \Im f, \\ \frac{\partial}{\partial x_i} \Im f &= -\frac{\partial}{\partial y_i} \Re f, \end{aligned} \quad (1.26)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$.

Examinemos la forma de la ecuación de Cauchy-Riemann para formas diferenciales f de bigrado $(0, 1)$. Sea u una función compleja tal que:

$$\bar{\partial}u = f.$$

Resulta de la propiedad $\bar{\partial}\bar{\partial} = 0$ que para la que la ecuación anterior sea soluble es necesario que $\bar{\partial}f = 0$. Llamaremos entonces a esta forma diferencial "holomorfa".

Si $f = \sum_{i=1}^k f_i d\bar{z}_i$ en \mathbb{C}^k , entonces:

$$\bar{\partial}f = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_i} \right) d\bar{z}_i \wedge d\bar{z}_j = 0,$$

lo cual nos da el sistema de ecuaciones de Cauchy-Riemann para una forma diferencial f de bigrado $(0, 1)$:

$$\frac{\partial f_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_i}, \quad (1.27)$$

para todo $i, j = 1, \dots, k$.

Tomemos ahora f una forma diferencial de bigrado $(1, 1)$; si $dd^c u = f$, u se denomina el potencial de la forma diferencial.

En una variable compleja $dd^c = 4\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)dx \wedge dy$ por lo que dd^c generaliza en cierto sentido al operador de Laplace en el plano.

Consideremos el producto exterior de dd^c . k veces por si mismo: $(dd^c)^k = dd^c \wedge dd^c \wedge \dots \wedge dd^c$ de donde

$$(dd^c)^k = k! \det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right] \prod_{i=1}^k \frac{j}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i. \quad (1.28)$$

Además se verifica que $\prod_{i=1}^k \frac{j}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i = dV$ (forma volumétrica en \mathbb{R}^{2k}) (véase la Sub-sección [2.2.2]). La ecuación obtenida es llamada de Monge-Ampere y será de importancia esencial en la teoría de funciones pluri-subarmónicas y la teoría del pluripotencial (véase la Sección [3.1]).

1.3. Propiedades locales de mapas holomorfos.

1.3.1. Comportamiento local

Un mapa $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ se puede considerar como un mapa de \mathbb{R}^{2k} a \mathbb{R}^{2k} . Siendo $z_i = x_i + jy_i$ además de $f_i(z) = u_i(z) + jv_i(z)$ para todo $i = 1, 2, \dots, k$ se tiene:

$$f : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k} \\ (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k) \mapsto (u_1, v_1, \dots, u_k, v_k).$$

La matriz jacobiana asociada al mapa real será denominada matriz jacobiana $J_{\mathbb{R}}f$ para distinguirla de la matriz jacobiana compleja $J_{\mathbb{C}}f$ (o simplemente Jf asociada al mapa de \mathbb{C}^k en \mathbb{C}^k). En estas condiciones $J_{\mathbb{R}}f$ y $J_{\mathbb{C}}f$ son matrices cuadradas y sus determinantes son los valores del jacobiano en un punto dado. Se verifica que

$$|J_{\mathbb{R}}f| = \|J_{\mathbb{C}}f\|^2 > 0. \quad (1.29)$$

Sea A, B matrices cuadradas del mismo orden, entonces:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} A - jB & B + jA \\ -B & A \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A - jB & 0 \\ -B & A + jB \end{pmatrix} \\ &= |\det(A + jB)|^2. \end{aligned}$$

En efecto, escribamos además el determinante $|J_{\mathbb{R}}f|$ como:

$$|J_{\mathbb{R}}f| = \det \left(\begin{array}{c|c} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} & \frac{\partial u_j}{\partial y_i} \\ \hline \frac{\partial v_j}{\partial x_i} & \frac{\partial v_j}{\partial y_i} \end{array} \right),$$

y usando la identidad previa además de las ecuaciones de Cauchy-Riemann para f se tiene el resultado.

Conjuntos de nivel de mapas holomorfos Sea $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ holomorfa. Aclaremos la naturaleza del conjunto $\{z : f(z) = a\}$ cuando $|Jf| \neq 0$ en un entorno de z . Del Teorema de la Función Implícita $g = f^{-1}$ existe en un entorno de z . Entonces:

$$\bar{\partial}_z(f^{-1} \circ f) = \bar{\partial}_{f(z)}f^{-1} \circ \partial_z f + \partial_{f(z)}f^{-1} \circ \bar{\partial}_z f.$$

Puesto que f es holomorfa $\bar{\partial}_z f = 0$ y además $f^{-1} \circ f$ es el mapa identidad (holomorfo) por lo que $\bar{\partial}_z(f^{-1} \circ f) = 0$; se tiene:

$$\bar{\partial}_a f^{-1} \circ \partial_z f = 0.$$

Por la condición del jacobiano se tiene entonces que

$$\bar{\partial}_a f^{-1} = 0.$$

Lo que establece que f es un biholomorfismo local bajo la condición del jacobiano no nulo en un entorno de un punto dado.

Probemos ahora que $\{z : f(z) = a\}$ es un conjunto discreto. Sea $z \in \{z : f(z) = a\}$ usando el desarrollo de Taylor en torno de z_0 :

$$f_i(z) - f_i(z_0) \approx df_i|_a = 0,$$

para todo $i = 1, 2, \dots, k$, de donde se obtiene el sistema de ecuaciones lineales

$$df|_a = 0,$$

con solución única (de la condición $|Jf|_{z_0}| = 0$). Esto prueba que z_0 es un punto aislado.

1.3.2. Ceros de jacobianos en \mathbb{C}^k y \mathbb{C}^{k+1}

De la Sub-sección [1.2.1] consideremos nuevamente la conjugación local:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^k & \xrightarrow{g} & \mathbb{C}^k \\ h_i \uparrow & & \uparrow h_i \\ \mathbb{C}\mathbb{P}^k & \xrightarrow{f} & \mathbb{C}\mathbb{P}^k, \end{array}$$

$g = h_i \circ f \circ h_i^{-1}$ donde h_i es un biholomorfismo local. En la Sub-sección [1.2.1] se ha tratado acerca de la conjugación local en los entornos U_i de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Consideremos entonces el mapa levantado $F : \mathbb{C}^{k+1} \rightarrow \mathbb{C}^{k+1}$ y tomemos para simplificar el entorno U_0 y hagamos la siguiente pregunta: ¿Siendo $[z_0 : z_1 : \dots : z_k] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, se cumple que $|JF|_{(z_0, z_1, \dots, z_k)} = 0$ si y sólo si $|Jf|_{(w_1, \dots, w_k)} = 0$ para $w_i = \frac{z_i}{z_0}, i = 1, 2, \dots, k$?

Tomemos primero el caso cuando $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es tal que $f(z) = [z_0^d : f_1(z) : \dots : f_k(z)]$; entonces el mapa levantado:

$$F(z) = (z_0^d, f_1(z), \dots, f_k(z)),$$

y el jacobiano:

$$JF = \begin{pmatrix} dz_0^{d-1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_0} & \frac{\partial f_1(z)}{\partial z_1} & \dots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \\ \frac{\partial f_k(z)}{\partial z_0} & \frac{\partial f_k(z)}{\partial z_1} & \dots & \end{pmatrix},$$

de donde:

$$|JF|_{(z_0, z_1, \dots, z_k)} = d|z_0^{d-1}| \frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(z_1, \dots, z_k)},$$

y finalmente de la homogeneidad de los jacobianos se tiene:

$$|JF|_{(1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_k}{z_0})} = d|Jf|_{(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_k}{z_0})}. \quad (1.30)$$

La igualdad obtenida establece por tanto que un jacobiano se anula si y sólo si se anula el otro.

Ejemplo 11 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ holomorfa definida como:

$$f = [z_0^3 : z_0 z_1^2 - z_2^3 : z_1^3 + 2z_2^2 z_0], \text{ entonces } |JF|_{(z_0, \dots, z_k)} = 3z_0^2(8z_0^2 z_1 z_2 + 9z_1^2 z_2^2)$$

o bien:

$$|JF|_{(1, \frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_k}{z_0})} = 3|Jf|_{(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_k}{z_0})}.$$

Resolvamos ahora el caso general cuando $f_0 \neq z_0^d$ en $f = [f_0 : \dots, f_k]$. De la homogeneidad de los jacobianos se tiene, luego de efectuar cálculos, que:

$$|JF| = f_0^{(d-1)(k+1)} |J\tilde{f}|_{(\frac{z_1}{z_0}, \dots, \frac{z_k}{z_0})}.$$

Donde $z_0 \neq 0$ y $f_0 \neq 0$. De aquí se tiene que un jacobiano se anula si y sólo si el otro también se anula.

Ejemplo 12 Sea $f = [z_0^2 + z_1^2 : z_0^2 - z_1^2 : z_0^2 + 2z_2^2]$, entonces;

$$JF = -16z_0z_1z_2,$$

y usando la fórmula $J\tilde{f} = -16\frac{w_1w_2}{(1+w_1^2)}$.

1.3.3. Conjuntos analíticos

Puntos regulares. Irreducibilidad.- Sea M una variedad compleja. Un conjunto analítico sobre M se define como:

$$V(f_1, \dots, f_r) = \{z \in M : f_1(z) = \dots, = f_r(z) = 0\},$$

V es cerrado y si M es conexo, V es nunca denso en M .

Si $f : M \rightarrow N$ es un mapa holomorfo de una variedad compleja a otra entonces para $V \subset N$ un conjunto analítico, $f^{-1}(V) \subset M$ es también un conjunto analítico. En efecto, Sea $z \in f^{-1}(V)$ luego $f(z) \in V$ pero en N : existe g_i holomorfa para $i = 1, \dots, r$ tal que $g_i(f(z)) = 0$. Esto prueba dicho aserto.

Calculemos en un entorno de z_0 (en coordenadas locales) el jacobiano $J(f_1, \dots, f_r)(z_0)$. Si el rango de dicha matriz es r , entonces a se llama punto regular del conjunto V . Además la dimensión compleja de V en el punto z_0 : $\dim_{z_0} V = k - r$. El conjunto de puntos regulares se denotara $RegV$; el conjunto $V \setminus RegV$ es el conjunto de puntos críticos.

Para $RegV$ se tiene las siguientes propiedades (véase [14] para las demostraciones):

Teorema 3 $RegV \subset M$, donde V es un conjunto analítico, es abierto en V y sus componentes conexas son subvariedades complejas en M .

Del mismo modo:

Teorema 4 El conjunto $V^c = V \setminus RegV$ de puntos críticos es un conjunto analítico distinto de V .

Teorema 5 $RegV$ es siempre denso en V . V^c es nunca denso en V .

Se tiene del hecho que $V \setminus RegV$ es un conjunto analítico que se puede obtener una descomposición de V en términos de variedades complejas de dimensión decreciente.

$$V = RegV_n \cup Reg(V \setminus Reg)_{n-1} \cup \dots$$

$n = \dim V$. Análogo al concepto de irreducibilidad para variedades algebraicas, introduzcamos el concepto de irreducibilidad para conjuntos analíticos.

Definición 21 Sea V (conjunto analítico), D dominio contenido en M (variedad compleja) V es irreducible en D sino puede representarse como la unión de conjuntos analíticos en D distintos de V . Además V es irreducible en $a \in V$ si en una vecindad suficientemente pequeña U , el conjunto $U \cap V$ es irreducible.

La siguiente caracterización de un conjunto analítico es importante:

Proposición 7 Un conjunto V es irreducible si y sólo si el conjunto $RegV$ es conexo.

Demostración: Asumamos V cerrado en D . Sea S una componente conexa en $RegV$ entonces $\overline{S} = V_1, V_2 = RegV \setminus S$. Son conjuntos analíticos en D : $V = V_1 \cup V_2$ (puesto que $RegV$ es denso en V). Puesto que V es irreducible: $V_1 = V$ o $V_2 = V$. Como $V_2 \cap S$ es vacío entonces $V_1 = V$ por lo que S es denso en V y por tanto en $RegV$. De ahí S es cerrado en $RegV$ pero de la condición inicial es también abierto en V lo que implica que $RegV = S$. Esto a su vez significa que $RegV$ es conexo.

Ahora supongamos que $RegV = S$ es conexo y V_1, V_2 son conjuntos analíticos en D : $V = V_1 \cup V_2$ entonces $S_i = S \cap V_i$ ($i = 1, 2$) son subconjuntos analíticos de la variedad compleja conexa S , mas aún $S = S_1 \cup S_2$ por lo tanto algunos de los S_i , sea éste S_1 , es denso en S . Del Teorema de la Unicidad para Funciones Holomorfas (véase [100]) $S = S_1$, por lo que $V = \overline{S} = \overline{S_1} \subset V_1$. Con lo que se concluye finalmente que $V = V_1$ y eso implica la conexidad de V . \square

De aquí se deduce el importante:

Teorema 6 Todo conjunto analítico $V \subset D$ se puede representar como una unión de conjuntos analíticos irreducibles en este dominio.

Demostración: Tomando la clausura de las componentes conexas de $RegV$ ellas son por el teorema anterior, irreducibles en D . \square

Conjuntos analíticos y algebraicos. Como ya se ha examinado, un conjunto analítico de la forma $\{z : f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0\}$, donde $f_i(z)$ son polinomios en \mathbb{C}^k , se denomina variedad algebraica o conjunto algebraico afín. Si los polinomios son homogéneos, como ya se vió antes, el conjunto analítico se denomina conjunto algebraico proyectivo.

La caracterización más importante de los conjuntos analíticos en el espacio proyectivo pertenece a Chow (para detalles véase [49])

Teorema 7 (Chow) Todo conjunto analítico en $\mathbb{C}P^k$ es un conjunto algebraico proyectivo (variedad proyectiva).

Un corolario directo de este hecho es:

Corolario 2 La clausura en $\mathbb{C}P^k$ de un conjunto algebraico (variedad algebraica) $A \subset \mathbb{C}^k$ es un conjunto algebraico proyectivo.

Demostración: Sea A de dimensión p tal que

$$f_1(z) = \dots = f_r(z) = 0 \quad (z \in A).$$

Sea A^* el conjunto de ceros comunes en $\mathbb{C}P^k$ de los polinomios homogéneos $f_i^*(z)$ que proyectivizan $f_i(z)$ para $i = 1, \dots, r$ en el entorno U_0 . Puesto que en $\mathbb{C}^k = \mathbb{C}P^k \setminus U_0$ los ceros de f_i^* y f_i coinciden se tiene que $A = A^* \setminus (A^* \cap U_0)$ pero entonces la clausura de A en $\mathbb{C}P^k$ es un conjunto analítico en $\mathbb{C}P^k$. Del Teorema de Chow se deduce que A es algebraico. \square

1.3.4. Germen analítico e ideales

Introduzcamos el concepto de germen analítico.

Definición 22 Sea M una variedad compleja. Se denomina clase de gérmenes de conjuntos en el punto $a \in M$ a la clase de conjuntos E_a tal que $E' \cap U_a = E'' \cap U_a$ para alguna vecindad de a .

Definición 23 Sea M una variedad compleja, la clase $[V]$ de gérmenes en el punto $a \in M$, donde V es un conjunto analítico $V \subset M$, se llama germen analítico en $a \in M$.

Describamos la relaciones que existe entre el germen de un conjunto analítico y los ideales que se pueden definir sobre él:

Definición 24 Sea V el germen de un conjunto analítico en $a \in \mathbb{C}^k$. El ideal $Id(V) \subset {}_k\mathcal{O}_a$ es el conjunto de gérmenes de funciones tal que para un conjunto analítico V representante de V existe una función holomorfa $f \in \mathcal{f}$ con $f \in Id(V)$, de modo que $f = 0$ en el conjunto analítico V .

Estrictamente el anillo local de gérmenes está definido en $V \subset (\mathbb{C}^k, a)$. Donde (\mathbb{C}^k, a) es el germen de conjuntos analíticos en $a \in \mathbb{C}^k$.

Recíprocamente para cualquier ideal $\mathcal{I} \subseteq {}_k\mathcal{O}$ (nos limitaremos para simplificar al punto $z = 0$) se le puede asociar, $locus(\mathcal{I})$, el germen de un conjunto analítico llamado el lugar geométrico del ideal \mathcal{I} .

Definición 25 Sea \mathcal{I} un anillo local de gérmenes holomorfos. Se dice que $locus(\mathcal{I})$ es el germen analítico asociado a \mathcal{I} de tal modo que existe un conjunto finito de funciones holomorfas f_1, f_2, \dots cuyos gérmenes $f_1, f_2, \dots \in {}_k\mathcal{O}$ son tales que

$$V = \{z \in U : f_1(z) = f_2(z) = \dots = 0\}$$

donde $V \subset U_0 \subset \mathbb{C}^k$ es un representante de V .

Puesto que ${}_k\mathcal{O}$ es un anillo Noetheriano, entonces él contiene el lugar geométrico de cualquier ideal en ${}_k\mathcal{O}$ por lo que $locus(\mathcal{I})$ está bien definido independiente de la elección de los representantes.

Ejemplo 13 Si V es el germen del conjunto vacío ϕ entonces $id(V) = {}_k\mathcal{O}$, por otro lado, si V es el germen de \mathbb{C}^k entonces $id(V) = 0$. Recíprocamente $locus\{z = 0\} = \mathbb{C}^k$, $locus{}_k\mathcal{O} = \phi$.

Una serie de relaciones recíprocas entre el ideal de un germen analítico y el lugar geométrico de un ideal tiene lugar por lo que el lector debe remitirse a las fuentes [49],[75].

Ejemplo 14 Tomemos $V_1 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_1(z_1^2 - z_2) = 0\}$, $V_2 = \{z \in \mathbb{C}^2 : z_2^2(z_1^2 - z_2) = 0\}$ representantes de sus respectivos gérmenes. Luego: $z_1 z_2^2(z_1^2 - z_2) \in id(V_1) \cap id(V_2) \subseteq_2 \mathcal{O}$ pero $z_1 z_2^2(z_1^2 - z_2) \notin id(V_1) \cdot id(V_2) \subseteq_2 \mathcal{O}$ esto muestra que $id(V_1) + id(V_2) = id(V_1 \cap V_2)$ no se cumple en general.

Pasemos a enunciar algunas propiedades de los gérmenes de conjuntos analíticos que pueden ser caracterizadas algebraicamente

Definición 26 Un germen V de un conjunto analítico es reducible si $V = V_1 \cup V_2$ (V_1, V_2 son gérmenes también) y además $V_i = V$ ($i = 1, 2$). Un germen que no es reducible se llama irreducible.

La caracterización topológico-analítica para un conjunto analítico irreducible tiene su análogo algebraico para gérmenes analíticos irreducibles:

Teorema 8 *Un germen analítico V es irreducible si y sólo si $id(V)$ es primo.*

Análogamente al caso de conjuntos analíticos se tiene:

Teorema 9 *Un germen analítico V puede representarse como una unión finita de gérmenes $V = V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_r$, donde dichos gérmenes son irreducibles: $V_j \neq V$; $V_j \not\subseteq V_k$ ($j \neq k$). Además la descomposición de V es única.*

Ejemplo 15 Sea $V = \{z \in \mathbb{C}^2, (z_1 - z_2)(z_1 + z_2) = 0\}$ un conjunto analítico reducible, sin embargo en $z = 0$, $V = \{z_1 = z_2 = 0\}$ es irreducible. Esto muestra que no existe una relación simple entre la irreducibilidad de un conjunto analítico y la de su germen en un punto dado.

Algunas cuestiones puramente analíticas de la teoría de mapas de varias variables complejas pueden ser totalmente o parcialmente reducidas a cuestiones algebraicas. Algunas de estas cuestiones son de interés para la dinámica. Primeramente introduzcamos la siguiente:

Definición 27 *La función $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ (V es un conjunto analítico) es una holomorfa en V si para todo $z \in V$, existe $V_z \subset \mathbb{C}^k$ y una función holomorfa f_z en V_z tal que $f|_{V_z \cap V} = f_z|_{V_z \cap V}$. Además, un mapa $F : V \rightarrow W$ (V, W son conjuntos analíticos) es holomorfo si entre cualquier abierto de V : $U_V \subset \mathbb{C}^k$ y cualquier abierto de W : $U_W \subset \mathbb{C}^r$ existe un mapa cuyas coordenadas son funciones holomorfas de V . El mapa F se llama biholomorfo si es holomorfo y tiene inversa holomorfa.*

Las funciones holomorfas en V forman un anillo que se denotará como ${}_V\mathcal{O}$. Puesto que este anillo contiene a \mathbb{C} entonces ${}_V\mathcal{O}$ puede tener estructura de un álgebra sobre los números complejos. Definamos ahora el germen de una función holomorfa en $z \in V$.

Definición 28 *Sean U_1, U_2 abiertos en V (compacto analítico), $f_1 \in U_1 \mathcal{O}$, $f_2 \in U_2 \mathcal{O}$ si $f_1|_W = f_2|_W$ donde $W \subset U_1 \cap U_2$ se dice que son equivalentes entonces una clase de equivalencia se llama germen de una función holomorfa en $z \in V$. El anillo de gérmenes de funciones holomorfas en el punto $z \in V$ se llama anillo local de V en el punto z y se denota ${}_V\mathcal{O}_z$, lo mismo que su lugar geométrico se denota como V_z .*

Se verifica la importante propiedad algebraica:

Teorema 10 *V (conjunto analítico) contenido en \mathbb{C}^k , $z \in V$, entonces ${}_V\mathcal{O}_z \cong {}_k\mathcal{O}_z/id(V_z)$. Además, el anillo ${}_V\mathcal{O}_z$ es un anillo local noetheriano.*

Demostración: Sea el germen $f_V \in {}_V\mathcal{O}_z$ entonces $f_V = f|_V$ donde $f \in {}_k\mathcal{O}_z$ de este modo el mapa $f \rightarrow f|_V$ es un homomorfismo de álgebras y su núcleo es $id(V_z) \subset {}_k\mathcal{O}_z$ de ahí se tiene ${}_V\mathcal{O}_z \cong {}_k\mathcal{O}_z/id(V_z)$. Puesto que ${}_k\mathcal{O}_z$ es Noetheriano y del isomorfismo se tiene que ${}_V\mathcal{O}_z$ es un anillo local Noetheriano, siendo los elementos distintos de la unidad en ${}_V\mathcal{O}_z$ los gérmenes nulos de funciones holomorfas en z . □

Las propiedades algebraicas de los anillos locales reflejan propiedades globales:

Teorema 11 *Sea V el germen de un conjunto analítico $V \subset \mathbb{C}^k$. El anillo local ${}_V\mathcal{O}$ es un dominio integral si y sólo si V es irreducible.*

Demostración: Si V es un germen en el origen y V un representante, entonces $v\mathcal{O} = {}_k\mathcal{O}/id(V)$ entonces $v\mathcal{O}$ es el dominio integral si y sólo si el ideal $id(V) \subset {}_k\mathcal{O}$ es un ideal primo. Eso, sin embargo, es equivalente a afirmar que el representante arbitrario V es irreducible lo cual implica el resultado esperado. \square

Para más detalles acerca de los gérmenes de conjuntos analíticos y los gérmenes de funciones holomorfas véase [14], [45], [49], [75], etc.

1.3.5. Mapas holomorfos en coordenadas locales

Grupos de transformación $GL_k\mathbb{C}$, $PGL_k\mathbb{C}$ — Se define el grupo $GL_k\mathbb{C}$ en el espacio afín \mathbb{C}^{k^2} como el conjunto de matrices $n \times n$ con determinante no nulo. Este conjunto es en sí, un abierto en el sentido de Zariski en dicho espacio (el complemento de la variedad determinada por $det A = 0$). Por otro lado $GL_k\mathbb{C}$ está dotado con la operación usual de multiplicación de matrices y es por tanto un grupo algebraico. El grupo de transformaciones proyectivas $PGL_k\mathbb{C}$ se define como el cociente $GL_k\mathbb{C}/\sim$ donde la relación de equivalencia está dada por:

$$A, B \in GL_k\mathbb{C} \text{ son equivalentes si existe } r \in \mathbb{C}, \text{ tal que: } A = rB.$$

De este modo $PGL_k\mathbb{C} \subset \mathbb{C}P^{k^2-1}$ representa también un grupo algebraico.

Acciones de grupo.— La acción de un grupo algebraico G sobre una variedad algebraica $X \subset \mathbb{C}^N$ se define como el mapa $\varphi : G \times X \rightarrow X$ el cual satisface las reglas de composición de mapas, es decir: sea f, g elementos de G entonces $\varphi(f, (g, P)) = \varphi(fg, P)$ donde $P \in X$. Una acción proyectiva sobre una variedad $X \subset \mathbb{C}P^N$ se define como la acción del grupo algebraico $PGL_k\mathbb{C}$ sobre X . Adicionalmente, si se exige que la acción del grupo $PGL_k\mathbb{C}$ sobre X tenga un levantamiento sobre el anillo coordinado homogéneo $S(X) = K[Z_0, \dots, Z_k]/I(X)$, es decir para φ existe el mapa $\Phi : G \times S(X) \rightarrow S(X)$, se tiene entonces que la acción del grupo proyectivo es lineal (véase [52]).

Estrictamente $GL_{k+1}\mathbb{C}$ es el grupo de automorfismos biholomorfos para $\mathbb{C}P^k$. Veamos esto más de cerca: Sea $A \in GL_{k+1}\mathbb{C}$ definida como $A = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : 0 \leq i, j \leq n\}$ y definamos la acción sobre un elemento $Z = [z_0 : \dots : z_n]$ como $\varphi(A, Z) = \left[\sum_{j=0}^n a_{0j} z_j : \dots : \sum_{j=0}^n a_{nj} z_j \right]$. Evidentemente esta aplicación es un automorfismo biholomorfo en $\mathbb{C}P^k$. Sin perder generalidad tomemos el biholomorfismo $h_0 : U_0 \rightarrow \mathbb{C}P^k$ tanto en la pre-imágen como en la imágen de $\varphi(A, Z)$ donde se toma un Z y un W en los respectivos entornos U_0 . De este modo:

$$w_i = \frac{\sum_{j=0}^n a_{ij} z_j}{\sum_{j=0}^n a_{0j} z_j} = \frac{a_{i0} + \sum_{j=1}^n a_{ij} z'_j}{a_{00} + \sum_{j=1}^n a_{0j} z'_j},$$

donde $z'_j = z_j/z_0$ para $1 \leq j \leq k$. Queda definido entonces para \mathbb{C}^k una familia de transformaciones similar a la de Möbius para \mathbb{C} la cual resulta ser la familia de automorfismos biholomorfos en \mathbb{C}^k . Al igual que en la dinámica unidimensional, las transformaciones proyectivas acarrear el concepto de conjugación:

Definición 29 Sean dos sistemas dinámicos (M, f) y (N, g) donde M y N son variedades proyectivas de $\mathbb{C}P^k$ y f, g son mapas holomorfos en $\mathbb{C}P^k$. Entonces dichos sistemas se denominan conjugados si existe un mapa biholomorfo $h : \mathbb{C}P^k \rightarrow \mathbb{C}P^k$ tal que se cumple la relación de conjugación $f = h^{-1} \circ g \circ h$.

Sea h una transformación proyectiva lineal sobre $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ tal que $h(M) \subseteq N$ y (M, f) y (N, g) dos sistemas dinámicos.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}\mathbb{P}^k & \xrightarrow{h} & \mathbb{C}\mathbb{P}^k \\ f \uparrow & & \uparrow g \\ M \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^k & \xrightarrow{h} & N \subseteq \mathbb{C}\mathbb{P}^k. \end{array}$$

Si tomamos las copias biholomorfas locales en \mathbb{C}^k vía los biholomorfismos locales tenemos que la conjugación en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ induce una conjugación por mapas de Möbius multidimensionales en \mathbb{C}^k . Es una tarea inmediata comprobar que cualquier concepto de dinámica local en (M, f) tiene su correlato en su conjugado (N, g) por lo que ambas dinámicas pueden considerarse idénticas localmente. En efecto tomemos por ejemplo Ω no-errante en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, si $z \in U$ entonces para un n_0 dado : $f^{n_0}(U_z) \cap U_z \neq \emptyset$ pero entonces si $w = h^{-1}(z)$ se tiene que $h^{-1}(U_w) \subseteq U_z$ de donde $f^{n_0} \circ h^{-1}(U_w) \subseteq f^{n_0}(U_z) \subseteq U_z$ de donde se obtiene que para cierto entorno de w se cumple $g^{n_0}(U_w) \cap U_w \neq \emptyset$.

Comentario 5 Otra manera de ver el grupo de transformaciones proyectivas consiste en tomar el sub-grupo H de $GL_{k+1}\mathbb{C}$ consistente en los elementos que dejan invariante la recta $[z_0 : 0 : \dots : 0]$ entonces:

$$PGL_k\mathbb{C} = GL_{k+1}\mathbb{C}/H.$$

Ejemplo 16 Sea p un punto homogéneo respecto al mapa holomorfo $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. f es entonces localmente conjugada en p al mapa de la forma

$$(z, w) \longrightarrow (P(z, w), Q(z, w)),$$

donde P y Q son polinomios homogéneos de grado d .

Para probar esto primero asumamos que $p = [0 : 0 : 1]$, con esto no perdemos generalidad. Ahora bien, en coordenadas homogéneas f puede ser escrita como

$$f[z : w : t] = [P(z, w) : Q(z, w) : R(z, w, t)]$$

para polinomios homogéneos P , Q y R de grado d con $R(0, 0, 1) = 1$. Por tanto, se tiene en coordenadas locales de \mathbb{C}^2 que: $f(z, w) = (P(z, w)(1 + \eta), Q(z, w)(1 + \eta))$ siendo η algún germen que cumple $\eta(0, 0) = 1$. Puesto que f termina siendo un mapa que se contrae en $(0, 0)$ entonces podemos definir:

$$\phi = \prod_{j=0}^{\infty} (1 + \eta \circ f^j)^{d^{-j-1}}.$$

Con el cual, el mapa $(z, w) \longrightarrow (z\phi, w\phi)$ es el mapa que conjuga f con (P, Q) , que es lo que se quería probar.

1.3.6. Conjuntos de Fatou y Julia

La discusión acerca de la estabilidad (en el sentido de Liapunov) de una órbita bajo la familia $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ lleva en la teoría clásica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ a los conceptos de conjunto de Fatou, Julia. La definición de estos conjuntos está íntimamente asociado al concepto de familia normal. En particular el conjunto de Fatou para un mapa racional en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se define como el conjunto en el que para un elemento arbitrario z se tiene un entorno U_z en el cual la familia $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$ es normal (véase [3]).

En este contexto la equivalencia entre normalidad y equicontinuidad en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ establecida por el Teorema de Arzelá-Ascoli es vital para la estabilidad. En \mathbb{C}^k o $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ ($k > 1$) esta equivalencia entre normalidad y equicontinuidad no subsiste por lo que es necesario establecer los conceptos relativos a la estabilidad de órbitas directamente a través de la equicontinuidad de $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}^+}$: En el caso de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ ($k > 1$) se tiene los siguientes enunciados:

Definición 30 Sea f un mapa racional, $f \in \mathcal{M}_d$, el cual es algebraicamente estable. Se define entonces los siguientes conjuntos asociados a f :

- $p \in F(f)$ (conjunto de Fatou) si existe una vecindad U_p tal que la familia es equicontinua en U_p .
- El conjunto de Julia Jf es tal que $Jf = \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus F(f)$.

A continuación nos limitaremos a comentar algunos resultados y definiciones cuando $f \in \mathcal{H}_d$. Introduzcamos los conjuntos de Fatou de índice l . En particular quedará claro que $F_0(f)$ y $J_0(f)$ son los conjuntos de Fatou y de Julia usuales.

Definición 31 Sea f un mapa holomorfo, $f \in \mathcal{H}_d$, $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Sea además $0 \leq l \leq k-1$. El punto p pertenece al conjunto de Fatou de índice l , $F_l(f)$, si existe U_p tal que para cualquier $q \in U_p$ existe una variedad compleja V_q de codimensión l que pasa por q y f^n es equicontinua en $V_q \cap U_p$.

De la definición se tiene:

$$F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_{k-1},$$

correspondientemente $J_l(f) = \mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus F_l(f)$ son los conjuntos de Julia de índice l . El conjunto $J_0(f)$ corresponde al conjunto de Julia $J(f)$ definido previamente.

Teorema 12 Sea f un mapa holomorfo, $f \in \mathcal{H}_d$, $d \geq 2$. $J_0(f) \neq \emptyset$.

Demostración: Supongamos lo contrario: $F_0(f) = \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. La equicontinuidad de la familia $\{f^n\}$ en todo el espacio implica que el límite de la sub-secuencia $\{f^{n_k}\}$ hacia una función holomorfa de grado finito F . Esto contradice que $\text{grad}(f^{n_k})$ es ilimitado. La contradicción muestra que $Jf \neq \emptyset$. □

En lo anterior es de interés conocer el número de órbitas periódicas para $f \in \mathcal{H}_d$ ($d \geq 2$).

Teorema 13 Sea $f \in \mathcal{H}_d$ ($d \geq 2$). Existen infinitas órbitas periódicas.

Para la prueba consúltese: [38].

Pasemos a definir las componentes de Fatou para $f \in \mathcal{H}_d$ ($d \geq 2$).

Definición 32 Una componente de Fatou Ω para f es una componente conexa de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus J$.

Recordando la definiciones de periodicidad (véase [61]) se dice que $\Omega \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es periódico si $f^n(\Omega) = \Omega$ para algún $n \geq 1$, y además teniendo en cuenta la definición de conjunto errante, se puede señalar que cuestiones tales como la periodicidad y la existencia de componentes errantes para el conjunto de Fatou no se encuentran resueltas para $k > 1$ (para $k = 1$, por otro lado, se prueba que no existen componentes errantes, véase [107]).

La noción de hiperbolicidad de Kobayashi resulta ser la herramienta teórica que sustituye al Teorema de Montel en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$.

Si M es una variedad compleja, consideremos la familia de aplicaciones holomorfas

$$\varphi : D(\text{disco unitario}) \longrightarrow M$$

tal que $\varphi(0) = p$, $\varphi'(0) = c\xi$ donde $p \in M$ y $\xi \in T_p(M)$. En estas circunstancias, la pseudométrica Kobayashi-Royden se define como:

$$K_M(p, \xi) = \inf \frac{1}{C}.$$

Definición 33 Sea N (subvariedad) $\subset M$ (variedad compleja). N es hiperbólicamente inmersa si existe una constante $C > 0$ tal que:

$$K_M(p, \xi) \geq C|\xi|,$$

para todo $(p, \xi) \in T_N$ y $|\xi|$ es la norma hermitiana de ξ .

Se verifica la siguiente relevante propiedad para una componente de Fatou:

Teorema 14 Sea $f \in \mathcal{H}_d$ ($d \geq 2$). Una componente de Fatou Ω de f es hiperbólicamente inmersa.

Para la prueba véase [103].

Aquí no desarrollaremos más la teoría de los conjuntos de Fatou-Julia en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ ni sus implicaciones dinámicas. Para detalles véase [38, 103].

Capítulo 2

Corrientes positivas cerradas y funciones pluri-subarmónicas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$

En este capítulo se exponen algunas herramientas del análisis complejo a ser usadas más adelante. En la primera sección se repasa las definiciones fundamentales acerca de las formas diferenciales, las operaciones que se pueden definir en el espacio de formas y las propiedades más importantes. Para mayores detalles sobre esta sección se puede consultar [17], [35], y [119]. La siguiente sección introduce las formas métricas y de volumen lo cual en cierta forma adelanta la introducción de las formas diferenciales positivas. Aquí además de introducir las formas métricas fundamentales tanto para \mathbb{C}^k como para $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se introducen las respectivas formas volumétricas en dichos espacios considerándose algunas propiedades importantes tales como el Teorema de Wirtinger y otros además de la definición de otras formas diferenciales auxiliares asociadas a la geometría de dichos espacios. En la última parte de dicha sección se estudian las formas diferenciales positivas partiendo del concepto de positividad para formas diferenciales introducido por Lelong (véase también [14], [17], [69], [74] y [101]). La Sección [2.3] es un repaso breve de la teoría de distribuciones. En este tratamiento se enfatiza el papel que juegan los diversos espacios funcionales dotados de la τ -topología definida por semi-normas. Las distribuciones son definidas entonces como los espacios duales de funcionales lineales. Algunas propiedades son estudiadas como introducción a la teoría de corrientes que se expone en la siguiente sección (para más detalles de la teoría de distribuciones véase [57], [97], [99]). La teoría de corrientes es expuesta en su forma más general sin apelar a ninguna estructura compleja tal como fueron definidas por De Rham partiendo de los diversos espacios de formas diferenciales reales [19]. Muchas de las propiedades expuestas en esta sección para las corrientes guarda estrecha analogía con la teoría de distribuciones (para otras referencias véase además, [34], [85], [88]). En la siguiente sección, y en analogía a las distribuciones positivas introducidas en la Sección [2.3] se definen las corrientes positivas y cerradas las cuales resultan tener soporte compacto y otras propiedades íntimamente relacionadas al análisis complejo y la geometría [14],[17],[55],[101]. Hasta este punto el material cubre una exposición general de los fundamentos de la teoría de formas diferenciales y corrientes, por lo que en la última sección se cambia un poco la temática para estudiar diversas propiedades de las funciones pluri-subarmónicas (PSA) las cuales, como se verá en el Capítulo [3] tienen íntima relación con las corrientes y otros objetos analíticos (para más detalles véase [18], [48], [55], etc).

2.1. Formas diferenciales en variedades complejas

En esta sección, se expone brevemente algunos aspectos de la teoría de formas diferenciales en variedades complejas. Se ha considerado las formas diferenciales en variedades complejas como secciones continuas (o diferenciables) del fibrado cotangente de la variedad compleja en la cual ellas se definen. Esta noción es conveniente pues permite considerar dichos objetos independiente del sistema de coordenadas locales a usar. En el caso de formas diferenciales de grado superior, dicha definición de formas nos permite construir rápidamente las secciones correspondientes a fibrados más complejos. Esta manera de ver a las formas diferenciales, naturalmente puede repetirse en el caso que aquellas se definan en una variedad suave arbitraria con coordenadas locales en \mathbb{R}^n .

2.1.1. Formas diferenciales de bigrado

Sea M una variedad C^∞ , $2k$ -dimensional y con coordenadas locales en \mathbb{R}^{2k} . Para esta variedad podemos introducir en un punto $x = (x_1, y_1, \dots, x_k, y_k)$ de su representación coordenada, sus espacios tangente y cotangente: $T_x M$, $T_x^* M$ respectivamente. Estos espacios son como es sabido espacios lineales $2k$ -dimensionales en \mathbb{R} . Si procedemos a complexificar dichos espacios (véase [35], pag 66) bajo la hipótesis adicional que M es también una variedad compleja k -dimensional, entonces los espacios tangente y co-tangente resultantes en $z = (z_1, \dots, z_k)$, $z_i = x_i + y_i$ son los espacios vectoriales complejos k -dimensionales a los que denotaremos como $T_z M^c$ y $T_z^* M^c$ respectivamente. Es también conocido [35] que una base del espacio $T_z M^c$ es:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, k. \quad (2.1)$$

Llamamos también a $T_z M^c$ el espacio vectorial k -dimensional de vectores tangentes. Tomemos el espacio vectorial dual $T_z^* M^c$ y denotemos la base como:

$$\{dz_i, d\bar{z}_i\} \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad (2.2)$$

$T_z^* M^c$ será denominado espacio vectorial k -dimensional de vectores cotangentes (covectores). Como es sabido, por dimensión se entiende la dimensión compleja del espacio lineal complejo (véase [45]).

Recordemos que un campo vectorial asigna de forma continua a un punto $z \in M$ un elemento del espacio vectorial. En caso de definirse un campo vectorial en M la continuidad se establece por medio de la topologización del fibrado tangente $\bigcup_{z \in M} T_z M^c$ (véase [100]).

Concretamente, en el caso que el espacio vectorial sea $T_z M^c$ y siendo la base:

$\left\{ \frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, k$ se tiene que un campo vectorial con elementos de $T_z M^c$ es una expresión de la forma:

$$\alpha(z) = \sum_{i=1}^k \left(a_i(z) \frac{\partial}{\partial z_i} + b_i(z) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) \quad z \in M,$$

donde $a_i, b_i \in C^\infty(M)$; el campo vectorial se dice que es de clase C^∞ .¹

De esta representación se establece la siguiente descomposición del espacio tangente en el punto $z \in M$:

¹En la Sección [2.4] se definirá otros espacios vectoriales de formas diferenciales definidos por la clase de funciones a las que pertenecen sus coeficientes.

$$T_z M^c = T_z M \oplus \overline{T_z M}.$$

Por otro lado, en el caso de las formas diferenciales expresadas con elementos de $T_z^* M^c$ se tiene:

$$u(z) = \sum_{i=1}^k u_i(z) dz_i + v_i(z) d\bar{z}_i \quad z \in M.$$

La cual es una forma diferencial de bigrado del tipo más simple, a saber, la suma de una forma de tipo $(1, 0)$ y de una de tipo $(0, 1)$. De aquí también se deduce la descomposición del espacio co-tangente:

$$T_z^* M^c = T_z^* M \oplus \overline{T_z^* M}.$$

En lo ulterior nos restringiremos al espacio co-tangente y a las estructuras de fibrado que se obtienen de él (para mayores detalles sobre los fibrados véase [17],[45]).

Recordemos sólo de manera breve como se construye para un fibrado tal como el co-tangente $T_z^* M$ un nuevo fibrado el cual es formalmente una potencia del producto exterior \wedge aplicado sobre este espacio. Como es conocido la p -ésima potencia $\wedge^p V$ de un espacio vectorial V es el cociente del espacio de tensores $V \otimes \cdots \otimes V$ de rango p con el sub-espacio cuyos elementos son de la forma $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p - \text{sgn}(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(p)}$ donde el símbolo σ se refiere en este caso al signo de la permutación del conjunto $\{1, \dots, p\}$ (véase también [34]). Se sabe entonces que si V tiene dimensión k entonces la dimensión de $\wedge^p V$ será $\binom{k}{p}$. Visto esto de una forma más constructiva se tiene a partir de las proyecciones del fibrado $T_z^* M$ sobre M tenemos para un punto $z \in M$ el conjunto de las fibras a las que denotaremos por $\pi^{-1}(z)$. Tomando ahora el producto $\wedge^p \pi^{-1}(z)$ tal como se acaba de definir entonces se tiene las secciones del fibrado $\wedge^p T_z^* M$. Esta construcción se puede repetir en otros casos, por ejemplo cuando consideramos los fibrados obtenidos después de la complejización de $T_z^* M$. En tal caso, al repetir el procedimiento en relación a la p -ésima potencia exterior del espacio de fibras se obtienen las secciones que definen los fibrados $\wedge^{p,q} T^* M$ y sus secciones.

Demos entonces una definición general de una forma diferencial de bigrado (p, q) :

Definición 34 Una forma diferencial de clase C^s en una variedad compleja M es una aplicación de un punto $z \in M$ a una sección C^s del fibrado $\wedge^{p,q} T_z^* M^c$. Donde $T_z^* M^c$ es el complejificado del fibrado co-tangente en el punto z .

En lo que sigue, no habrá distinción en denotar el conjunto de formas diferenciales (secciones) con el mismo símbolo usado para denotar el respectivo fibrado.

Consideremos entonces el espacio vectorial de formas diferenciales $\wedge^{p,q} T_z^* M^c$ para $z \in M$ (véase [69], es decir el espacio vectorial de las formas diferenciales de bi-grado (p, q) , y escribamos la base de este espacio:

$$\{dz_I, d\bar{z}_J\}, \quad I = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_q\}.$$

Donde I, J son multi-índices definidos como:

$$dz_I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p}, \quad d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q}.$$

De esto se tiene entonces que, una forma diferencial de bigrado (p, q) en $z \in M$ se define como:

$$u(z) = \sum_{I, J} u_{I, J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J \quad I = \{i_1, \dots, i_p\}, \quad J = \{j_1, \dots, j_q\}.$$

Los I, J expresan en este caso un elemento de la base cuya cardinalidad también es $\binom{k}{p} \times \binom{k}{q}$ para z fijo.

Comentario 6 Como se verá en la Sección [2.4] podemos imponer diversas condiciones sobre las secciones de los fibrados para así obtener diversos espacios topológicos lineales de formas diferenciales. La definición de las formas por medio de fibrados nos permite la representación de una forma sobre una carta independiente de las coordenadas (véase [35, 69]).

Comentario 7 De las relaciones conocidas entre la bases $\{dz_i, d\bar{z}_i\}$ con: $\{dx_1, dy_1, \dots, dx_k, dy_k\}$ se tiene que, recíprocamente, las formas complejas de bigrado pueden escribirse como formas diferenciales de grado simple con coeficientes que son en general funciones complejas. Veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 17 Sea $u \in \bigwedge^{1,1} T_z^* M^c$ donde $z \in M \subset \mathbb{C}^2$ y $u(z) = f dz_1 \wedge d\bar{z}_2$ y $f \in C^\infty(M)$. Luego de efectuar las transformaciones:

$$u(x_1, y_1, x_2, y_2) = f dx_1 \wedge dx_2 + f dy_1 \wedge dy_2 + g dy_1 \wedge dx_2 - g dx_1 \wedge dy_2,$$

donde $f = f(x_1, y_1, x_2, y_2) \in C^\infty(M, \mathbb{C})$ y además $g = if \in C^\infty(M, \mathbb{C})$, M está ahora expresada como una variedad en \mathbb{R}^4 y $C^\infty(M, \mathbb{C})$ representa los mapas de $M \subset \mathbb{R}^4$ a el conjunto de números complejos. ¿Es la forma u un elemento de $\bigwedge^2 T_x^* M$? Si nos atenemos a la definición de un espacio lineal real entonces esta \mathbb{R} -forma diferencial no pertenece a $\bigwedge^2 T_x^* M$ y sólo en su forma compleja de bigrado es admisible en el espacio $\bigwedge^{1,1} T_z^* M^c$.

Este ejemplo nos advierte acerca de la cautela que hay que tener al hacer cambios de bases en el espacio vectorial recipiente de las formas diferenciales.

2.1.2. Operaciones en el espacio de formas diferenciales

Producto cuña- Las propiedades iniciales del producto cuña para formas diferenciales obedecen a las leyes generales del algebra multilineal (véase [34], Cap.1) Partiendo de esas propiedades pasemos a definir algunas cuestiones relativas al producto cuña para formas diferenciales complejas.

Empecemos por el caso de formas diferenciales de grado simple definidas en una variedad C^∞ . Sea $u \in \bigwedge^p T_x^* M$, $v \in \bigwedge^q T_x^* M$ (M variedad C^∞ , $\dim M = m$), se define el producto cuña como la forma $u \wedge v \in \bigwedge^{p+q} T_x^* M$ $p + q \leq m$

$$\begin{aligned} u &= \sum u_I(x) dx_I \\ v &= \sum v_J(x) dx_J \\ u \wedge v &= \sum_{I,J} u_I(x) v_J(x) dx_I \wedge dx_J \quad I, J \subset \{1, \dots, m\}. \end{aligned}$$

Veamos ahora el caso de las formas de bigrado. Sea $u \in \bigwedge^{q,r} T_z^* M^c$, $v \in \bigwedge^{s,t} T_z^* M^c$ donde M variedad compleja, $\dim M = m$

$$u = \sum_{I,J} u_{I,J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad v = \sum_{I',J'} v_{I',J'}(z) dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}$$

y se tiene que

$$u \wedge v = \sum_{I, I', J, J'} u_{I, J}(z) v_{I', J'}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}.$$

Modificando el orden de los factores y teniendo en cuenta la relación fundamental:

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx,$$

tenemos:

$$u \wedge v = \sum_{I'', J''} \alpha_{I'', J''} dz_{I''} \wedge d\bar{z}_{J''},$$

donde $|I''| = q + s \leq m, |J''| = r + t \leq m$. Además $\alpha_{I'', J''} = (I, I')(J, J')(-1)^{qs} u_{I, J}(z) v_{I', J'}(z)$ donde $(I, I'), (J, J')$ son las paridad de las permutaciones $\{i_1, i_2, \dots, i_q, i'_1, \dots, i'_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ y $\{j_1, j_2, \dots, j_r, j'_1, \dots, j'_t\} \subseteq \{1, 2, \dots, k\}$ además $I'' = \{i''_1, \dots, i''_{q+s}\}$ con $i''_1 < i''_2 < \dots < i''_{q+s}$, y también: $J'' = \{j''_1, \dots, j''_{r+t}\}$ con $j''_1 < j''_2 < \dots < j''_{r+t}$.

En el caso particular:

$$u = \sum_I u_{I, J}(z) dz_I \wedge d\bar{z}_J, v = \sum_{I', J'} u_{I', J'}(z) dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'} \quad |I| = |J| = q, \quad |I'| = |J'| = s,$$

se tiene que: $u \wedge v = \sum \alpha_{I'', J''} dz_{I''} \wedge d\bar{z}_{J''}$ donde $|I''| = |J''| = q + s \leq m$. Además $\alpha_{I'', J''}(z) = (-1)^{qs} u_{I, J}(z) v_{I', J'}(z)$.

Derivada exterior- Formalmente d es el operador lineal:

$$d : C^l(\bigwedge^p T^*(M)) \rightarrow C^{l-1}(\bigwedge^{p+1} T^*(M))$$

donde M es una variedad C^∞ y $C^l(\bigwedge^p T^*(M))$ es el espacio lineal de formas diferenciales con coeficientes en $C^l(M, \mathbb{C})$ (véase Sección [2.4] para más detalles). En estas condiciones y tomando en cuenta la forma del operador diferencial d :

$$d = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} dx_i,$$

se tiene la siguiente fórmula en coordenadas locales: $u \in \bigwedge^p T_z^* M$

$$du = \sum_i \sum_I \frac{\partial u_I}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_I, \quad (2.3)$$

donde $I \in \{k; p\}$ de donde se verifica:

$$- d^2 = 0$$

$$- d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge dv \text{ (Regla de Leibnitz).}$$

Recordemos además que una forma u es cerrada si $du = 0$ y se llama exacta si u puede ser escrita como $u = dv$, para algún v .

En el caso que M sea una variedad compleja introduzcamos los operadores fundamentales $\partial, \bar{\partial}$ (véase la Sub-sección [1.2.4]):

$$\partial : C^l(\bigwedge^{r,s} T^* M) \rightarrow C^{l-1}(\bigwedge^{r+1,s} T^* M),$$

$$\text{donde } \partial u = \sum_i \sum_{I,J} \frac{\partial u_I}{\partial z_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Del mismo modo para $\bar{\partial}$

$$\bar{\partial} : C^l(\bigwedge^{r,s} T^*M) \rightarrow C^{l-1}(\bigwedge^{r+1,s} T^*M),$$

$$\text{donde } \bar{\partial} u = \sum_i \sum_{I,J} \frac{\partial u_I}{\partial \bar{z}_i} dz_i \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.$$

Comentario 8 Las formas con coeficientes holomorfos pueden denominarse de manera natural como formas holomorfas de donde si ω es una forma holomorfa $\bar{\partial}\omega = 0$.

En el caso del operador $dd^c = \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}$

$$dd^c : C^l(\bigwedge^{r,s} T^*M) \rightarrow C^{l-2}(\bigwedge^{r+1,s+1} T^*M),$$

donde $dd^c(u) = \sum_{i,j} \sum_{I,J} \frac{\partial^2 u_I}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} dz_i \wedge d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J$ puesto que $d = \partial + \bar{\partial}$ y ambos operadores complejos operan sobre sub-espacios complementarios entonces ellos deben de satisfacer independientemente la regla de Leibnitz.

Para dd^c se tiene entonces:

$$\begin{aligned} dd^c(u \wedge v) &= \frac{i}{2}\partial\bar{\partial}(u \wedge v) = \frac{i}{2}\partial[\bar{\partial}u \wedge v + (-1)^{\deg u} u \wedge \bar{\partial}v] = \frac{i}{2}[\partial\bar{\partial}u \wedge v + \\ &+ (-1)^{\deg u+1}\bar{\partial}u \wedge \partial v + (-1)^{\deg u}\partial u \wedge \bar{\partial}v + (-1)^{2\deg u} u \wedge \partial\bar{\partial}v]. \end{aligned}$$

Finalmente:

$$dd^c(u \wedge v) = dd^c u \wedge v + u \wedge dd^c v + (-1)^{\deg u}[\partial u \wedge \bar{\partial}v - \bar{\partial}u \wedge \partial v]. \quad (2.4)$$

Aplicación directa (pull-forward). Aplicación inversa (pull-back)- Consideremos las aplicaciones entre espacios de formas diferenciales que son inducidas por mapas entre variedades diferenciables o complejas.

Sea $F : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa entre dos variedades C^∞ (o complejas). Sea F un difeomorfismo C^∞ o un biholomorfismo.

Primero consideremos la aplicación inversa inducida sobre las clases $C^s(M)$, $C^s(\tilde{M})$ ($s \geq 1$):

$$\begin{aligned} F : C^s(M) &\rightarrow C^s(\tilde{M}) \\ f &\rightarrow f \circ F. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la aplicación directa que se induce entre espacios tangentes.

$$\begin{aligned} F_* : T_z M &\rightarrow T_{F(z)} \tilde{M} \\ \alpha &\rightarrow F_* \alpha. \end{aligned}$$

Tomemos $\psi \in C^1(M)$ y $F_* \alpha(\psi)$ se define como:

$$F_* \alpha(\psi) = \alpha(\tilde{F}\psi) = \alpha(\psi \circ F).$$

Esto se puede extender directamente a los campos definidos por multi-índices:

$$F_* \sum a_I(x) \frac{\partial}{\partial x_I}(\psi) = \sum a_I(x) \frac{\partial}{\partial x_I}(\psi \circ F).$$

Consideremos ahora la aplicación inversa sobre el espacio cotangente

$$F^* : \begin{array}{ccc} T_{F(z)}^* \widetilde{M} & \longrightarrow & T_z^* M \\ \omega & \longrightarrow & F^* \omega, \end{array}$$

donde $(F^* \omega)(x) = \sum_I \omega_I \circ F(x) \cdot \det\left(\frac{\partial F_I}{\partial x_I}\right) dx_I$ donde F_I son las componentes de F según el multi-índice I .

Enumeremos algunas propiedades que satisface el pull-back de formas diferenciales.

Se verifican las siguientes relaciones:

- a) $F^*(\omega_1 + \omega_2) = F^*\omega_1 + F^*\omega_2$; $\omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^p T_z^* \widetilde{M}$.
- b) $F^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = F^*\omega_1 \wedge F^*\omega_2$; (pull-back preserva el producto cuña).
- c) $F_1^*(F_2^*(\omega)) = (F_1 \circ F_2)^*(\omega)$.
- d) $dF^*\omega = F^*(d\omega)$; ω es de clase C^1 .

En particular si ω es cerrada, $F^*\omega$ también lo es.

Integración de formas diferenciales- Consideremos una variedad M suficientemente diferenciable. Primeramente establezcamos la siguiente:

Proposición 8 Sea $U \subset M$ Si $F : U \rightarrow F(U)$ es un difeomorfismo que preserva la orientación (en particular un biholomorfismo); además $\omega \in \bigcup_{z \in U} \bigwedge^p T_{F(z)}^* \psi(U)$, donde $\dim U = p$, entonces

$$\int_{\psi(U)} \omega = \int_U \psi^*(\omega).$$

Demostración: Tomando en $\int_{\psi(U)} \omega$ el cambio de coordenadas $z = \psi^{-1}(t)$ y usando la definición de pull-back se deduce el resultado. \square

La integral de la forma ω sobre M (de clase C^∞) es definida primeramente para k -células, esto es mapas suaves de cubos k -dimensionales. Supongamos que la imagen del cubo Q^k está en los límites de la carta entonces, la integral

$$\int_\gamma \omega = \int_{Q^k} \sum_J \omega_J \circ \gamma \frac{\partial(x_{j_1}, \dots, x_{j_k})}{\partial(t_1, \dots, t_k)} dt_1 \wedge \dots \wedge dt_k.$$

Si $\gamma(Q^k)$ esta fuera de una carta es necesario usar una partición de la unidad en $\{U_\alpha\}$. De donde

$$\int_\gamma \omega = \sum_\alpha \int_\gamma \omega \phi_\alpha.$$

El concepto de integral puede luego ser expresado a cadenas k -dimensionales. El conjunto de cadenas k -dimensionales puede ser considerado como un grupo abeliano con la operación de adición de coeficientes.

Usando coordenadas locales y partición de la unidad se puede introducir el concepto de integral sobre un dominio con borde orientable, de ello se tiene el importante:

Teorema 15 (Stokes) Para la forma ω de grado $k - 1$ en M (variedad k -dimensional, orientable), $D \subset M$:

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega.$$

Para la prueba véase [119].

Comentario 9 Si tomamos ω como forma compleja entonces ω es de bigrado $(k - 1, k - 1)$. Si se cambia el operador d por $\bar{\partial}$ o ∂ entonces el bigrado de ω será $(k, k - 1)$. $(k - 1, k)$.

Comentario 10 La fórmula de Stokes es válida para los conjuntos analíticos (véase [14]).

Ejemplo 18 Generalicemos la fórmula integral de Cauchy para $f \in C^\infty(\bar{\Delta})$, donde Δ es un disco en \mathbb{C} .

Consideremos la forma diferencial

$$\eta = \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - w} dz,$$

diferenciando

$$d\eta = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - w}.$$

Sea $\Delta_\epsilon = \Delta(w, \epsilon)$. Aplicando el Teorema de Stokes:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\epsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta - \Delta_\epsilon} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - w}.$$

Haciendo $z - w = re^{i\theta}$:

$$dz \wedge d\bar{z} = -2irdr \wedge d\theta.$$

Además

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta_\epsilon} \frac{f(z)}{z - w} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(w + \epsilon e^{i\theta}) d\theta.$$

Pasando al límite la expresión principal y teniendo en cuenta que $\int \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - w}$ es absolutamente integrable sobre Δ , se tiene:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial \Delta} \frac{f(z)}{z - w} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Delta} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z - w}.$$

2.1.3. Grupos de cohomología

Citemos sin demostración una serie de resultados que corresponden a la teoría cohomológica de variable compleja. Para una exposición exhaustiva véase [17, 45], etc.

Cohomología de Dolbeault y De Rham. Sea M una variedad compleja de dimensión k además sea $z \in M$. Denotemos por

$$Z_{\partial}^{q,r} T_z^* M \text{ y } Z_{\bar{\partial}}^{q,r} T_z^* M \quad (q + r = p)$$

las formas cerradas por el operador ∂ y $\bar{\partial}$ respectivamente de bigrado (q, r) . Definamos además:

$$\bar{\partial}(\bigwedge^{q,r} T_z^* M) = \left\{ \bar{\partial}\omega / \omega \in \bigwedge^{q,r} T_z^* M \right\},$$

análogamente:

$$\partial(\bigwedge^{q,r} T_z^* M) = \left\{ \partial\omega / \omega \in \bigwedge^{q,r} T_z^* M \right\}.$$

Teniendo en cuenta que $\bar{\partial}^2 = 0$ y

$$\bar{\partial}(\bigwedge^{q,r} T_z^* M) \subset Z_{\bar{\partial}}^{q,r+1} T_z^* M,$$

obtenemos los grupos de cohomología de Dolbeault:

$$H_{\bar{\partial}}^{q,r}(M) = Z_{\bar{\partial}}^{q,r} T_z^* M / \bar{\partial}(\bigwedge^{q,r-1} T_z^* M). \quad (2.5)$$

Notemos que si f es un mapa holomorfo de M a N entonces se induce un mapa $f^* : H_{\bar{\partial}}^{q,r}(N) \rightarrow H_{\bar{\partial}}^{q,r}(M)$.

Enunciemos el importante:

Teorema 16 (Dolbeault) *En un policilindro Δ de \mathbb{C}^k : $H_{\bar{\partial}}^{q,r}(\Delta) = 0$ con $r \geq 1$. En particular si una forma diferencial es $\bar{\partial}$ -cerrada entonces es localmente exacta.*

Consideremos ahora los grupos de cohomología De Rham. Tomemos ahora una variedad diferenciable M y el espacio de formas diferenciales $\bigwedge^p T^* M$. Sea además $Z^p T^* M$ el sub-espacio de p -formas cerradas con $z \in M$ y definamos:

$$d(\bigwedge^p T^* M) = \left\{ d\omega / \omega \in \bigwedge^p T^* M \right\}.$$

Ahora, del hecho que $d(\bigwedge^{p-1} T^* M) \subset Z^p T^* M$, se define:

$$\mathcal{H}_{DR}^p(M) = \frac{Z^p T^* M}{d(\bigwedge^{p-1} T^* M)} \quad (2.6)$$

el cual es un grupo de cohomología de De Rham.

En estas condiciones se verifica el siguiente

Teorema 17 (De Rham) *Para los grupos de cohomología:*

$$\mathcal{H}_{DR}^0(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}, \quad n \geq 1,$$

$$\mathcal{H}_{DR}^p(\mathbb{R}^n) = 0. \quad (2.7)$$

En particular en un entorno de un punto de \mathbb{R}^n una forma cerrada es localmente exacta.

2.2. Formas métricas y de volumen

2.2.1. Formas de Fubini-Study-Kähler

Definición 35 *Sea M una variedad compleja y sea z_j^v coordenadas locales. Tomemos una sección C^∞ , $g_j^{\alpha\beta}(z)$ de $T^* M^c \otimes \overline{T^* M^c}$ tal que: $\overline{g_j^{\alpha\beta}}(z) = g_j^{\alpha\beta}(z)$ y además:*

$$\sum_{\alpha, \beta=1}^n g_j^{\alpha\beta} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \geq 0. \quad (2.8)$$

Aquí la igualdad se realiza sí y solo sí $\zeta = 0$. Una métrica hermitiana en M se define como:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_j^{\alpha\beta}(z) dz_j^\alpha \otimes d\bar{z}_j^\beta, \quad (2.9)$$

o bien, considerando las coordenadas locales y la definición del producto tensorial (véase [35]) la forma hermitiana se puede expresar simplemente como:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_j^{\alpha\beta}(z) dz_j^\alpha d\bar{z}_j^\beta$$

Teorema 18 Para toda variedad compleja M existe al menos una métrica hermitiana en M .

Demostración: Tomemos $\mathcal{U} = \{U_j\}$ una cobertura localmente finita de M . En U_j tomemos las coordenadas locales (z_j^1, \dots, z_j^n) .

Hacemos previamente un cambio de notación conveniente usando el delta de Kronecker:

$$\sum_{\lambda=1}^n dz_j^\lambda d\bar{z}_j^\lambda = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \delta_{\alpha\beta} dz_j^\alpha d\bar{z}_j^\beta$$

y tomemos una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} $\{\rho_j\}$ donde $\overline{\{z/\rho_j(z) > 0\}} \subset U_j$. Definamos:

$$ds^2 = \sum_j \rho_j(z) \left[\sum_{\lambda=1}^n dz_j^\lambda d\bar{z}_j^\lambda \right]$$

una forma cuadrática y probemos que cumple las condiciones para ser una métrica de Hermite.

Usando un cambio de coordenadas: $dz_j^\lambda = \sum_{\alpha} \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} dz_k^\alpha$. Luego:

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta=1}^n g_{k\alpha\beta}(z) dz_k^\alpha d\bar{z}_k^\beta, \quad (2.10)$$

donde $g_{k\alpha\beta} = \sum_{j, \lambda} \rho_j(z) \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} \frac{d\bar{z}_j^\lambda}{d\bar{z}_k^\beta}$ entonces $\overline{g_{k\alpha\beta}} = g_{k\beta\alpha}$. Falta probar la positividad de la forma (2.10). En efecto:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha, \beta} g_{k\alpha\beta} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta &= \sum_{\alpha, \beta} \sum_{\lambda, j} \rho_j(z) \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} \frac{d\bar{z}_j^\lambda}{d\bar{z}_k^\beta} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \\ &= \sum_j \rho_j(z) \sum_{\alpha, \beta, \lambda} \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} \frac{d\bar{z}_j^\lambda}{d\bar{z}_k^\beta} \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \\ &= \sum_j \rho_j(z) \sum_{\alpha, \lambda} \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} \zeta^\alpha \overline{\sum_{\alpha, \lambda} \frac{dz_j^\lambda}{dz_k^\alpha} \zeta^\alpha} \geq 0. \end{aligned}$$

□

Pasemos ahora a definir una métrica de Kähler, denominada en la literatura como métrica de Fubini-Study-Kähler. Hay que recordar que existe una correspondencia biunívoca entre las formas hermitianas y las formas diferenciales positivas por lo que se usará de aquí en adelante estas últimas en los cálculos.

Definición 36 La métrica hermitiana ω sobre M (variedad compleja)

$$\omega = \sum g_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta \quad (2.11)$$

es de Kähler si $d\omega = 0$.

Demos una caracterización de las formas de Kähler.

Teorema 19 Sea ω una forma hermitiana. ω es una forma de Kähler si y solo si existe una función diferenciable K_j sobre cada U_j tal que $\omega = \partial\bar{\partial}K_j$ sobre U_j .

Demostración: Probemos que $\omega = \sum \omega_{\alpha\beta} dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta$ satisface $d\omega = 0$ en un abierto U si y solo si existe $f \in C^\infty$ tal que $\omega = \partial\bar{\partial}f$.

En efecto: sea $\omega = \partial\bar{\partial}f$ luego $d\omega = 0$. Sea ahora $d\omega = \partial\omega + \bar{\partial}\omega = 0$ luego puesto que $\partial\omega$ es de bigrado $(2, 1)$ y $\bar{\partial}\omega$ es de bigrado $(1, 2)$ se tiene $\partial\omega = 0$ y $\bar{\partial}\omega = 0$. Usando el Lema de Dolbeault: existe $\psi^{(1,0)}$ tal que $\bar{\partial}\psi^{(1,0)} = \omega$ en U de ahí $\psi^{(1,0)} = \sum \psi_\alpha dz_\alpha$ y además se tiene las siguientes expresiones:

$$\partial\bar{\partial}\psi^{(1,0)} = \partial\omega = 0 \quad (2.12)$$

y

$$\partial\psi^{(1,0)} = \sum \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi_\beta}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z_\beta} \right) dz_\alpha \wedge dz_\beta. \quad (2.13)$$

Puesto que ω es holomorfa, de la primera expresión: $\partial\omega = \partial\bar{\partial}\psi^{(1,0)} = 0$ entonces $-\bar{\partial}\partial\psi^{(1,0)} = 0$. Por lo que $\partial\psi^{(1,0)}$ es también holomorfa. Tomando el operador $\bar{\partial}$ en la expresión (2.12), tenemos que:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\lambda} \left(\frac{\partial\psi_\beta}{\partial z_\alpha} - \frac{\partial\psi_\alpha}{\partial z_\beta} \right) = 0.$$

Por lo que en U existe la $(1, 0)$ forma η tal que

$$\partial\psi^{(1,0)} = \partial\eta,$$

de donde $\partial(\psi^{(1,0)} - \eta) = 0$. Ello implica que existe una función C^∞ tal que $\psi^{(1,0)} - \eta = \partial f$ por lo que:

$$\omega = \bar{\partial}\psi^{(1,0)} = \bar{\partial}(\eta + \partial f) = \bar{\partial}\eta + \partial\bar{\partial}f = \bar{\partial}\bar{\partial}(-f)$$

y $-f$ aún pertenece a C^∞ . Tomando $U = U_j$ obtenemos que ω es Kähler en M bajo las condiciones ya enunciadas. \square

Probemos ahora que $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad Kähler.

Teorema 20 $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ es una variedad de Kähler.

Demostración: Como se sabe $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \cup_{j=0}^n U_j$ donde $U_j = \{\zeta/\zeta = (\zeta_0, \dots, \zeta_n), \zeta_j \neq 0\}$ y la relación con las coordenadas afines: $z_j = (z_j^0, \dots, z_j^{d-1}, z_j^{d+1}, \dots, z_j^n)$ en C^n donde $z_j^i = \frac{\zeta_i}{\zeta_j}$.

Tomemos

$$K_j = \log(1 + \sum_{\alpha \neq j} |z_j^\alpha|^2) = \log(\sum_{\alpha} |\zeta_\alpha|^2) - \log |\zeta_j|^2.$$

Y también $U_j \cap U_k$:

$$\begin{aligned} K_j - K_k &= \log |\zeta_k|^2 - \log |\zeta_j|^2 \\ &= \log |z_j^k|^2 = \log z_j^k + \log \bar{z}_j^k. \end{aligned}$$

Luego $\partial\bar{\partial}(K_j - K_k) = 0$ sobre $U_j \cap U_k$.

Definimos ahora

$$\omega = i\partial\bar{\partial}K_j$$

sobre U_j . Ahora para aplicar el teorema anterior falta sólo establecer que ω es hermitiana. Para simplificar tomemos $j = 0$, $z^\alpha = Z_0^\alpha$. Entonces $k_0 = \log(1 + \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2)$ y

$$\partial\bar{\partial}K_0 = \frac{1}{1 + \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2} [\delta_{\alpha\beta}(1 + \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2) - \bar{z}^\alpha z^\beta] dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta.$$

Inmediatamente se tiene que

$$\overline{g_{\alpha\beta}} = g_{\alpha\beta}.$$

Analizamos ahora la expresión:

$$\begin{aligned} \sum (\delta_{\alpha\beta}(1 + \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2) - \bar{z}^\alpha z^\beta) \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta &= \sum \delta_{\alpha\beta}(1 + \sum_{\alpha=1}^n |z^\alpha|^2) \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta - \sum \bar{z}^\alpha z^\beta \zeta^\alpha \bar{\zeta}^\beta \\ &= (\zeta, \zeta)^2 [1 + (z, z)^2] - |(\zeta, z)|^2. \end{aligned}$$

De la igualdad de Schwartz:

$$|(\zeta, z)|^2 \leq (\zeta, \zeta)^2 (z, z)^2.$$

Luego:

$$(\zeta, \zeta)^2 [1 + (z, z)^2] - |(\zeta, z)|^2 \geq 0.$$

□

Daremos una interpretación de esta métrica.

Sea $w \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ el cual se corresponde con un círculo unitario en \mathbb{C}^{k+1} (unívocamente), luego la distancia entre $[w]$ y $[w'] \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es:

$$d^2([w][w']) = \min_{\theta, \theta', w, w'} |we^{i\theta} - w'e^{i\theta'}|^2$$

(el segundo miembro expresa la distancia euclidiana).

$$\begin{aligned} |we^{i\theta} - w'e^{i\theta'}| &= |(w_0e^{i\theta}, \dots, w_n e^{i\theta}) - (w'_0e^{i\theta'}, \dots, w'_n e^{i\theta'})| \\ &= \sum_{j=0}^n (w_j e^{i\theta} - w'_j e^{i\theta'}) (\bar{w}_j e^{-i\theta} - \bar{w}'_j e^{-i\theta'}) \\ &= \sum_{j=0}^n (|w_j|^2 + |w'_j|^2 - \bar{w}_j w'_j e^{-i(\theta-\theta')} - w_j \bar{w}'_j e^{i(\theta-\theta')}) \\ &= 2 - 2 \sum_{j=0}^n \Re w_j \bar{w}'_j e^{i(\theta-\theta')} \\ &= 2[1 - e^{i(\theta-\theta')} \sum_{j=0}^n \Re w_j \bar{w}'_j] \\ &= 2[1 - e^{i(\theta-\theta')} \Re(w, w')] \end{aligned}$$

y el mínimo de la expresión se alcanza cuando $\theta = \theta'$ y w, w' son tales que

$$\Re(w, w') = |(w, w')|.$$

Luego:

$$d^2([w], [w']) = 2(1 - |(w, w')|)$$

para $|w| = |w'| = 1$. en el caso de números de módulo arbitrario.

$$d^2([w], [w']) = 2\left(1 - \frac{|(w, w')|}{|w||w'|}\right).$$

Ahora tomando $w' = w + dw$ obtenemos la forma diferencial de la distancia (despreciando los términos de orden superior)

$$d^2([w], [w']) = \frac{(dw, dw)}{(w, w)} - \frac{(dw, w)(w, dw)}{(w, w)^2}.$$

Ahora, teniendo en cuenta $dw = \sum \frac{\partial w}{\partial z_i} dz_i + \frac{\partial w}{\partial \bar{z}_i} d\bar{z}_i$ se tiene finalmente:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{dd^c |w|^2}{|w|^2} - \frac{d|w|^2 \wedge d^c |z|^2}{|z|^4} \\ &= dd^c \ln |w|^2. \end{aligned}$$

Teorema 21 *Una subvariedad de una variedad de Kähler es también de Kähler.*

Demostración: Sea $N \subset M$ donde ω es de Kähler sobre M . Probemos que $\omega|_N$ es también de Kähler.

Definamos la restricción $U_j \cap N$, donde U_j es un entorno de M con la coordenadas locales $(z_j^1, \dots, z_j^n, w_j^1, \dots, w_j^r)$ donde $m = \dim M$, $n = \dim N$ y $r = m - n$ de modo que: $N \cup U_j = \{(z_j^1, \dots, z_j^n, 0, \dots, 0)\}$ sea

$$\begin{aligned} \omega &= \sum g_{\alpha\beta}(z_j^1, \dots, z_j^n, w_j^1, \dots, w_j^r) dz_j^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\beta \\ &+ \sum g_{\alpha'\beta'}(z_j^1, \dots, z_j^n, w_j^1, \dots, w_j^r) dz_j^{\alpha'} \wedge d\bar{z}_j^{\beta'} \\ &+ \dots + \sum g_{\alpha''\beta''}(z_j^1, \dots, z_j^n, w_j^1, \dots, w_j^r) dz_j^{\alpha''} \wedge d\bar{z}_j^{\beta''}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\omega|_N = \sum g_{\alpha\beta}(z_j^1, \dots, z_j^n, 0, \dots, 0) dz_j^\alpha \wedge d\bar{z}_j^\beta.$$

□

2.2.2. Formas métricas y volumétricas en \mathbb{C}^k y $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$

Métrica hermitiana en \mathbb{C}^k . La métrica usual en \mathbb{R}^{2k} viene dada por

$$\sum_{i=1}^k dx_i \wedge dy_i. \quad (2.14)$$

Es natural extender esta métrica a \mathbb{C}^k ; de acuerdo a la relación:

$$dx_i \wedge dy_i = \frac{i}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i.$$

Queda de este modo definida la métrica en \mathbb{C}^k :

$$\varphi_0 = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i, \quad (2.15)$$

y se verifica que $\varphi = dd^c \|z\|^2$, además $d\varphi_0 = 0$ lo cual implica que φ_0 es cerrada.

Consideremos ahora la (k, k) forma diferencial de volumen en \mathbb{C}^k . La forma volumétrica estándar en \mathbb{R}^{2k} es

$$dV = dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_k \wedge dy_k,$$

de donde: $dV = \left(\frac{i}{2}\right)^k \bigwedge_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i.$

Calculando $\varphi_0^k = \wedge^k \varphi_0$ se tiene:

$$\varphi_0^k = k! \left(\frac{i}{2}\right)^k \bigwedge_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i = k! dV. \quad (2.16)$$

Esta ecuación establece la relación entre la forma métrica euclidiana y la forma volumétrica.

Sea M una variedad compleja de dimensión m entonces se define:

Definición 37 El volumen complejo para M (variedad compleja de dimensión m) se define como:

$$\frac{1}{m!} \int \varphi_0^m.$$

Establezcamos algunas propiedades para el volumen complejo:

Teorema 22 (Wirtinger) El área de una vecindad Γ (no necesariamente compleja) $\dim \Gamma = 2$ es tal que:

$$Vol \Gamma \geq \int_{\Gamma} \varphi_0, \quad (2.17)$$

donde la igualdad es alcanzada si Γ es compleja de dimensión 1.

Demostración: Puesto que basta establecer la prueba para elementos de área se puede tomar Γ como un plano. Sea Γ dado por la ecuación paramétrica $z = aw + b\bar{w}$ donde $a, b \in \mathbb{C}^k$, $w = \xi + i\eta$.

El elemento de área dado por la ecuación $z = z(\xi, \eta)$ es:

$$ds = \sqrt{EG - F^2} d\xi d\eta,$$

donde $E = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \xi}\right)$, $F = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$, $G = \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right)$ están dados por los respectivos productos hermitianos. Efectuando operaciones:

$$EG - F^2 = (|a|^2 + |b|^2)^2 - 4|(a, b)|^2;$$

de la desigualdad de Cauchy-Bunyakovski se tiene $EG - F^2 \geq |a|^2 - |b|^2$ y la igualdad se alcanza cuando $b = \lambda a$, ($\lambda \in \mathbb{C}$), es decir cuando Γ es una línea compleja.

Por otro lado, haciendo los cálculos resulta que $\varphi_0|_{\Gamma} = (|a|^2 - |b|^2)d\xi d\eta$. Este último hecho establece lo que queríamos probar. \square

Corolario 3 *El área de una variedad compleja uni-dimensional $\Gamma \subset \mathbb{C}^k$ es igual a la suma de sus proyecciones en los ejes coordenados.*

Demostración: Ello se deduce de la igualdad

$$Vol\Gamma = \int_{\Gamma} \varphi_0 = \int_{\Gamma} \frac{i}{2} \sum_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i = \int_{\Gamma} \sum_{i=1}^k dx_i.$$

\square

Para la generalización del Teorema de Wirtinger a variedades de dimensión mayor es necesario recurrir a una desigualdad sobre las formas hermitianas de \mathbb{C}^k .

Consideremos una forma hermitiana $\varphi(u, v)$ que implica $\mathbb{C}^k \times \mathbb{C}^k$ en \mathbb{C} tal que $\varphi(u, v)$ es \mathbb{C} -lineal y $\varphi(u, v) = \overline{\varphi(v, u)}$.

Sea $\{C_i\}$ una base compleja en \mathbb{C}^k y sea $\{\varphi_i\}$ la base dual, luego φ se puede expresar como:

$$\varphi(u, v) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \varphi_i(u) \overline{\varphi_j(v)},$$

donde $\varphi(e_i, e_j) = \alpha_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Supongamos que $h(u, v)$ es una forma positiva, ello implica (véase [79]) que la forma $\varphi(u, u) = \Re\varphi(u, u)$ es definida positiva además $\varphi(u, v)$ define un producto interno hermitiano en \mathbb{C}^k $\langle u, v \rangle = \varphi(u, v)$ mientras $\Re\varphi(u, v)$ es el producto interno riemanniano en \mathbb{R}^{2k} , más precisamente:

$$\langle u, v \rangle = \varphi(u, v) = \sum_{i=1}^k dz_i(u) \overline{dz_i(v)},$$

de donde: $\Re\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^k (dx_i^2 + dy_i^2)(u, v)$ y la parte imaginaria está asociada a la forma diferencial φ_0 por las reglas de acción de dicha forma sobre vectores:

$$f(u, v) = \Im\varphi(u, v) = \sum_{i=1}^k [dy_i(u) dx_i(v) - dx_i(u) dy_i(v)],$$

se tiene entonces:

Lema 2 *Para los vectores $u^1, \dots, u^{2r} \in L$ (sub-espacio lineal en \mathbb{C}^k)*

$$|f^r(u^1, \dots, u^{2r})|_L \leq r! \omega$$

donde Ω es el volumen del paralelepido formado por u^1, \dots, u^{2r} en la métrica φ . La igualdad se alcanza si y sólo si L es un plano complejo.

Para los detalles complementarios véase [79, 101].

Con ayuda de esta desigualdad podemos establecer la siguiente generalización del Teorema de Wirtinger:

Teorema 23 Sea $M \subset \mathbb{C}^k$ una variedad de clase C^2 , real de dimensión $2r$ ($r \leq k$), entonces su volumen (en la métrica euclidiana) satisface:

$$\text{Vol}M \geq \frac{1}{r!} \int_M \varphi_0^r, \quad (2.18)$$

alcánzandose la igualdad cuando M es una variedad compleja.

Demostración: Nuevamente basta tomar un pequeño elemento de volumen. En efecto, para $z \in M$ en la métrica dada el valor del elemento del volumen es igual al valor de la forma Ω sobre $2r$ vectores independientes en el espacio tangente real $T_z M$. Pero Ω satisface la desigualdad que acaba de ser probada, entonces integrando se obtiene la desigualdad buscada. Del mismo lema si $T_z M$ es compleja r -dimensional para todo $z \in M$, eso implica sin embargo (véase [100]) que M es una variedad compleja de dimensión r . \square

Ejemplo 19 La bola $B(0, R) = \{z \in \mathbb{C}^k, \|z\| < R\}$ es una variedad compleja k -dimensional. Del teorema anterior:

$$\frac{1}{k!} \int_{B(0,R)} \varphi_0^k = \frac{\pi^k R^{2k}}{k!} = \lambda_{2k} R^{2k}, \quad (2.19)$$

λ_{2k} : volumen de la bola unitaria $2k$ -dimensional.

Ejemplo 20 Del Teorema de Wirtinger se deduce que las variedades complejas minimizan el volumen. En efecto, sea $\gamma \subset \mathbb{C}^k$ un ciclo real $\dim \gamma = 2r - 1$ que limita a una variedad compleja M y a una variedad real M' ; $\dim_{\mathbb{C}} M = r$, $\dim_{\mathbb{R}} M = 2r$ con $r \leq k - 1$. Ahora bien, puesto que $\varphi_0^r = \varphi_0 \wedge \varphi_0^{r-1} = d(d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_0^{r-1})$ se tiene de acuerdo al Teorema de Stokes:

$$r! \text{Vol}M = \int_M \varphi_0^r = \int_{\gamma} d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_0^{r-1} = \int_{M'} \varphi_0^r \leq r! \text{Vol}M'.$$

Forma métrica homogénea en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ – De la Sección [2.2.1] se sabe que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es una variedad Kähleriana cuya métrica en coordenadas locales $(z_0, \dots, z_{j-1}, z_j, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$ tiene la forma:

$$\omega_0 = dd^c \log(1 + \|z\|^2). \quad (2.20)$$

Estrictamente, ω_0 definido así en coordenadas locales es el pull-back $h_j^* \omega$ de la forma métrica ω en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ ($h_j : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es un biholomorfismo canónico local).

Introduzcamos la siguiente:

Definición 38 Sea ω la forma de Fubini-Study-Kähler, ω^k es la forma diferencial volumétrica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

En coordenadas locales ω^k asume la forma ω_0^k . Calculemos esta forma diferencial: (véase la Sección [2.2.1])

$$\begin{aligned} \omega_0^k &= \left(\frac{i}{2}\right)^k \left\{ \frac{(dz, dz)^k}{(1 + \|z\|^2)^k} - \frac{k(dz, dz)^{k-1} \wedge (dz, \dot{z}) \wedge (z, dz)}{(1 + \|z\|^2)^{k+1}} \right\} \\ &= \left(\frac{i}{2}\right)^k \left\{ \frac{k! \prod_{i=1}^k dz_i \wedge d\bar{z}_i}{(1 + \|z\|^2)^k} - \frac{k!}{(1 + \|z\|^2)^{k+1}} \sum_{i=1}^k \wedge_j^{(i)} dz_j d\bar{z}_j \wedge \sum_{i,j}^k z_i z_j dz_i \wedge dz_j \right\}. \end{aligned}$$

El símbolo $\wedge_j^{(i)} dz_j d\bar{z}_j$ indica el producto cuña de todas las parejas $dz_j d\bar{z}_j$ para $j = 1, \dots, k$ $j \neq i$. El sustraendo se cancela por lo que finalmente:

$$\omega_0^k = \frac{k!}{(1 + \|z\|^2)^{k+1}} \wedge_{i=1}^k dz_i d\bar{z}_i,$$

o bien

$$\omega_0^k = \frac{k!}{(1 + \|z\|^2)^{k+1}} \varphi_0^k. \quad (2.21)$$

Esta última ecuación expresa la relación entre ω_0^k y φ_0^k en \mathbb{C}^k .

El siguiente teorema justifica la elección de ω^k como forma volumétrica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Teorema 24 $\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^k} \omega^k = \pi^k$ para la forma Fubini-Study-Kähler. Esto implica en particular que $\text{Vol}(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) = \pi^k/k!$.

Demostración: Para $k = 1$ esto se comprueba directamente. Llevando a coordenadas locales: $\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \omega = \frac{i}{2} \int_{V_0} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{(1 + \|z\|^2)^2}$ donde $V_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{P}^1 : z_0 \neq 0\}$ llevando $dz \wedge d\bar{z}$ a coordenadas polares:

$$\int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^1} \omega = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(1 + r^2)^2} = \pi.$$

Sea ahora, para $k > 1$ e integrando para la última variable:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^k} \omega^k &= \int_{\mathbb{C}^k} \omega_0^k = \left(\frac{i}{2}\right)^k \int_{\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}} k! \bigwedge_{i=1}^{k-1} dz_i \wedge d\bar{z}_i \cdot \frac{2}{i} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{r dr}{(1 + \|z\|^2 + r^2)^k} \\ &= \pi \left(\frac{i}{2}\right)^{k-1} \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \frac{(k-1)!}{(1 + \|z\|^2 + r^2)^k} \bigwedge_{i=1}^{k-1} dz_i \wedge d\bar{z}_i, \end{aligned}$$

donde $'z = (z_1, \dots, z_{k-1})$. Entonces $\int_{\mathbb{C}^k} \omega_0^k = \pi \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \omega_0^{k-1}$. \square

Comentario 11 Para la proyección π de $\mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ a $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se puede definir el pull-back $\pi^*[\omega]$ en \mathbb{C}^{k+1}

$$\pi^*[\omega] = \frac{dd^c \|z\|^2}{\|z\|^2} - \frac{d\|z\|^2 \wedge d^c \|z\|^2}{\|z\|^4},$$

o bien $\pi^*[\omega] = \frac{\varphi_0}{\|z\|^2} - \frac{d\|z\|^2 \wedge d^c \|z\|^2}{\|z\|^4}$ para $z \in \mathbb{C}^{k+1}$ y φ_0 en \mathbb{C}^{1+k} . El sentido de esta métrica ha sido estudiada en la Sección [2.2].

Pasemos a definir la métrica que generaliza la forma diferencial $\frac{1}{\pi} d^c \log \|z\|^2 = \frac{d\theta}{2\pi}$, $z \in \mathbb{C}$, la cual representa el índice de un camino alrededor de $z = 0$.

Para \mathbb{C}^{k+1} ($k > 0$) fijemos la condición $\|z\| \neq 0$ de tal manera que $z_0 \neq 0$ y definamos la forma de Poincaré como

$$\sigma = \frac{1}{\pi^{k+1}} d^c \log \|z\|^2 \wedge (dd^c \log \|z\|)^k, \quad (2.22)$$

donde d^c, dd^c son los operadores diferenciales en \mathbb{C}^{k+1} . Puesto que $z_0 \neq 0$ se tiene que $\log \|z_0\|$ es armónica, por lo que: $dd^c \log \|z\|$ se transforma en $dd^c \log \|z\|^2$ tal que dd^c actúa en \mathbb{C}^k y $z = (z_1, \dots, z_k)$. De esta circunstancia se obtiene:

$$\sigma = \frac{1}{\pi^{k+1}} d^c \log \|z\|^2 \wedge \omega_0^k, \quad (2.23)$$

donde ω_0 es la forma volumétrica en coordenadas locales de \mathbb{C}^k puesto que $\omega_0^{k+1} = 0$ se tiene $d\sigma = 0$, es decir σ es cerrada.

Probemos que $\int_{\partial V(0,r)} \sigma = 1$. En efecto, de las relaciones en $\partial V(0,r)$: $d^c \log \|z\|^2 = \frac{d^c \|z\|^2}{r^2}$ y además: $\omega_0^k = \frac{\varphi_0^k}{r^{2k}}$ se tiene:

$$\int_{\partial V(0,r)} \sigma = \frac{1}{\pi^{k+1}} \int_{\partial V(0,r)} \frac{d^c \|z\|^2}{r^2} \wedge \frac{\varphi_0^k}{r^{2k}} = \frac{1}{\pi^{k+1} r^{2k+2}} \int_{\partial V(0,r)} d^c \|z\|^2 \wedge \varphi_0^k.$$

Usando el Teorema de Stokes:

$$\int_{\partial V(0,r)} \sigma = \frac{1}{\pi^{k+1} r^{2k+2}} \int_{\partial V(0,r)} dd^c \|z\|^2 \wedge \varphi_0^k = 1.$$

2.2.3. Formas diferenciales positivas

La noción de formas positivas fué introducido por Lelong para dar respuesta a la cuestión si era posible considerar algún tipo de positividad en el espacio de formas diferenciales. Resulta que la noción de positividad está íntimamente asociada a la orientación del espacio que se escoge para la forma volúmetrica. Puesto que para un mapa holomorfo f de \mathbb{C}^k en \mathbb{C}^k se tiene que $J_{\mathbb{R}} f \geq 0$, entonces la positividad debería ser una propiedad invariante de transformaciones de \mathbb{C}^k por mapas holomorfos. Esto a su vez hace natural definir las formas positivas como formas de bigrado (p,p) donde $p \leq k$ y asociarlas a la forma volúmetrica del espacio.

Definición 39 La forma diferencial $\alpha(z) = \sum_{I,J \in \{k,p\}} \alpha_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ se llama positiva de bigrado

(p,p) (o abreviadamente, de grado p) si para toda colección de formas $\{\alpha_i\}_{i=1}^{k-p}$ donde $\alpha_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i dz_j$ el producto $\alpha \wedge \prod_{i=1}^{k-p} \frac{i}{2} \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i = \psi(z) V(z)$ donde la función $\psi \geq 0$ y $V(z)$ es la forma volúmetrica de \mathbb{C}^k .

Introduzcamos una noción más fuerte de positividad:

Definición 40 Una forma diferencial se llama fuertemente positiva de bigrado (p,p) si es la combinación convexa de formas diferenciales de tipo: $\psi \alpha \wedge \bar{\alpha} = \psi \prod_{i=1}^p \frac{i}{2} \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i$ (ψ es una función

compleja). Donde $\alpha_i = \sum_{j=1}^k \alpha_j^i dz_j$.

Definamos la magnitud σ_p en $T_z^* M$ como: (M es una variedad compleja de dimensión k)

$$\prod_{r=1}^p \frac{i}{2} dz_{j_r} \wedge d\bar{z}_{j_r} = \sigma_p \prod_{r=1}^p dz_{j_r} \wedge \prod_{r=1}^p d\bar{z}_{j_r} = \sigma_p dz_J \wedge d\bar{z}_J$$

donde $j_1 < j_2 \cdots < j_p$; $J = \{j_1, j_2, \dots, j_p\} \subset \{k; p\}$. Efectuando los cálculos:

$$\sigma_p = \frac{i^{p^2}}{2^p}, \quad (2.24)$$

de donde $\sigma_p = 2^{-p}$ ($p = \text{par}$); $\sigma_p = i2^{-p}$ ($p = \text{impar}$).

Además:

$$\sigma_p \sigma_m = \frac{i^{p^2+m^2}}{2^{p+m}} = \frac{i^{(p+m)^2} \cdot i^{-2pm}}{2^{p+m}} = \sigma_{p+m} (-1)^{pm},$$

o bien:

$$\sigma_{p+m} = \sigma_p \sigma_m (-1)^{pm}. \quad (2.25)$$

Sea ahora $\alpha_j = \sum_{i=1}^k a_i^j dz_i$. Probemos la siguiente expresión:

$$\bigwedge_{r=1}^p \frac{i}{2} \alpha_{j_r} \wedge \bar{\alpha}_{j_r} = \sigma_p \bigwedge_{r=1}^p \alpha_{j_r} \wedge \bigwedge_{r=1}^p \bar{\alpha}_{j_r}.$$

En efecto, para $p = 1$, la relación es inmediata ya que $\sigma_1 = \frac{i}{2}$. Supongamos que la relación es válida para $p > 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{r=1}^{p+1} \frac{i}{2} \alpha_{j_r} \wedge \bar{\alpha}_{j_r} &= \bigwedge_{r=1}^{p+1} \frac{i}{2} \alpha_{j_r} \wedge \bar{\alpha}_{j_r} \wedge \frac{i}{2} \alpha_{j_{p+1}} \wedge \bar{\alpha}_{j_{p+1}} \\ &= \sigma_p \bigwedge_{r=1}^{p+1} \alpha_{j_r} \wedge \bigwedge_{r=1}^p \bar{\alpha}_{j_r} \wedge \frac{i}{2} \alpha_{j_{p+1}} \wedge \bar{\alpha}_{j_{p+1}} \\ &= \sigma_p \frac{i}{2} (-1)^p \bigwedge_{r=1}^{p+1} \alpha_{j_r} \wedge \bigwedge_{r=1}^{p+1} \bar{\alpha}_{j_r}, \end{aligned}$$

pero $\sigma_p \frac{i}{2} (-1)^p = \frac{i^{p^2} \cdot i \cdot i^{2p}}{2^{p+1}} = \sigma_{p+1}$ con lo que queda probada la igualdad.

Otra forma de ver esta igualdad es teniendo en cuenta la relación:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{r=1}^p \alpha_{j_r} &= \sum_{l_1=1}^k a_{l_1}^{j_1} dz_{l_1} \wedge \sum_{l_2=1}^k a_{l_2}^{j_2} dz_{l_2} \wedge \cdots \wedge \sum_{l_p=1}^k a_{l_p}^{j_p} dz_{l_p} \\ &= \sum a_{l_1}^{j_1} a_{l_2}^{j_2} \cdots a_{l_p}^{j_p} dz_{l_1} \wedge dz_{l_2} \wedge \cdots \wedge dz_{l_p}, \end{aligned}$$

considerando $\{l\}$ tal que:

$$dz_{l_1} \wedge dz_{l_2} \wedge \cdots \wedge dz_{l_p} = \{L\} dz_{l'_1} \wedge dz_{l'_2} \wedge \cdots \wedge dz_{l'_p}$$

con $l'_1 < l'_2 < \cdots < l'_p$, se tiene: $\bigwedge_{r=1}^p \alpha_{j_r} = \sum_L a^J d_L$ con: $dz_L = dz_{l'_1} \wedge dz_{l'_2} \wedge \cdots \wedge dz_{l'_p}$ y

$a_L^J = a_{l'_1}^{j_1} a_{l'_2}^{j_2} \cdots a_{l'_p}^{j_p}$. De ahí se tiene que:

$$\begin{aligned} \sigma_p \bigwedge_{r=1}^p \alpha_{j_r} \wedge \bigwedge_{r=1}^p \bar{\alpha}_{j_r} &= \sigma_p \sum_L \{L\} a_L^J d_L^J dz_L \wedge \sum_L \{L\} \bar{a}_L^J d\bar{z}_L \\ &= \sigma_p \sum_{L,I} a_L^J \bar{a}_L^J dz_L \wedge d\bar{z}_I \end{aligned}$$

y usando la relación $\sigma_p dz_L \wedge d\bar{z}_I = \bigwedge_{r=1}^p \frac{i}{2} dz_{l_r} \wedge d\bar{z}_{i_r}$ (la cual es sólo otra forma de definición σ_p):

$$\sigma_p \bigwedge_{r=1}^p \alpha_{j_r} \wedge \bigwedge_{r=1}^p \bar{\alpha}_{j_r} = \sum_{L,I} a_L^J \bar{a}_I^{\bar{J}} \bigwedge_{r=1}^p \frac{i}{2} dz_{l_r} \wedge d\bar{z}_{i_r},$$

por lo que usando la definición de a_L^J se tiene nuevamente la relación deseada.

Denotaremos el espacio de formas positivas de grado p por $^+ \bigwedge^{p,p} T^*M$ y el espacio de formas fuertemente positivas de grado p por $^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M$.

La igualdad demostrada nos permite por lo tanto escribir una forma fuertemente positiva en una forma conveniente para los cálculos.

Sea u fuertemente positiva de bigrado (p, p) , entonces u puede ser escrita como: $u = \sigma_p \sum_{\tau} m_{\tau} \alpha_{\tau} \wedge$

$\bar{\alpha}_{\tau}$, donde α_{τ} es de la forma $\alpha_{\tau} = \bigwedge_{l=1}^p \alpha_{j_l}^{\tau}$ (α_{j_l} es de bigrado $(1,0)$) y $\sum m_{\tau} = 1$.

De este hecho se obtiene la siguiente proposición

Proposición 9 *Una forma fuertemente positiva es positiva.*

Demostración: Primero observemos que para α y β de bigrado $(p, 0)$ y $(m, 0)$ respectivamente, descomponibles en forma de bigrado $(1, 0)$ se verifica que:

$$\begin{aligned} \sigma_p \alpha \wedge \bar{\alpha} \wedge \sigma_m \beta \wedge \bar{\beta} &= \sigma_p \sigma_m \alpha \wedge ((-1)^{pm} \beta \wedge \bar{\alpha}) \wedge \bar{\beta} \\ &= \sigma_{p+m} \alpha \wedge \beta \wedge \overline{\alpha \wedge \beta}. \end{aligned}$$

Una vez establecido esto, tenemos que: si $u = \sum_{\tau} m_{\tau} \sigma_p \alpha_{\tau} \wedge \bar{\alpha}_{\tau}$ es fuertemente positiva de bigrado (p, p) , luego multiplicando por $\sigma_m \beta \wedge \bar{\beta} = \bigwedge_{l=1}^m \frac{i}{2} \beta_l \wedge \bar{\beta}_l$ donde $(m + p = k, \text{ dimensión de } M)$:

$$\begin{aligned} u \wedge \sigma_m \beta \wedge \bar{\beta} &= \sum_{\tau} m_{\tau} \sigma_p \sigma_m \alpha_{\tau} \wedge \bar{\alpha}_{\tau} \wedge \beta \wedge \bar{\beta} \\ &= \sum_{\tau} m_{\tau} \sigma_k \alpha_{\tau} \wedge \beta \wedge \overline{\alpha_{\tau} \wedge \beta}, \end{aligned} \tag{2.26}$$

pero la forma $\alpha_{\tau} \wedge \beta$ es de bigrado $(k, 0)$ por lo que:

$$\alpha_{\tau} \wedge \beta \wedge \overline{\alpha_{\tau} \wedge \beta} = |\alpha_{\tau}|^2 dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_k \wedge d\bar{z}_1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_k;$$

reemplazando en la ecuación (2.26) y teniendo en cuenta que $\sigma_k \bigwedge_{i=1}^k dz_i \wedge \bigwedge_{i=1}^k d\bar{z}_i = dV$, tenemos que:

$$u \wedge \sigma_m \beta \wedge \bar{\beta} = \sum_{\tau} m_{\tau} |\lambda_{\tau}|^2 dV > 0,$$

lo cual implica que u es positiva. □

Comentario 12 En todo este parágrafo, en lo que respecta a la topología de espacios tales como $\bigwedge^{p,p} T^*M$, nos restringiremos a la topología ordinaria que hereda este espacio (cuando se considera las correspondientes secciones del fibrado). Es de notar que estructuras tales como $K(\bigwedge^{p,p} T^*M)$ o $D(\bigwedge^{p,p} T^*M)$ que se definirán en la Sección [2.4] corresponden a espacios cuya topología de naturaleza teórico-funcional se define sobre ciertos subconjuntos del espacio $\bigwedge^{p,p} T^*M$.

A continuación probemos que los conjuntos de formas positivas y fuertemente positivas son conos convexos cerrados.

Proposición 10 *En la topología de $\bigwedge^{p,p} T^*M$ los conjuntos*

$$\{u \in {}^+ \bigwedge^{p,p} T^*M : u_{I,J} \in K(M)\}, \{u \in {}^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M : u_{I,J} \in K(M)\}$$

son conos convexos cerrados.

En el enunciado de la proposición anterior:

$$u(z) = \sigma_p \sum_{I,J} u_{I,J}(z) dz_I d\bar{z}_J, \quad z \in M$$

y además $K(M)$ representa la clase de funciones complejas continuas y de soporte compacto. Recordemos además la definición de como convexo (véase [55, 93]). Un conjunto $C \subset L$ (espacio vectorial) se denomina cono si para todo $x \in C$ y para todo $\alpha \geq 0$: $\lambda x \in C$.

Demostración: La condición de ser conos convexos se obtiene directamente. Probemos que dichos conos son cerrados en la topología del espacio $\bigwedge^{p,p} T^*M$: Sea $u_n \in {}^+ \bigwedge^{p,p} T^*M$ que cumple la condición sobre los coeficientes (la prueba cuando $u \in {}^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M$ será completamente análoga) y supongamos que $u_n \rightarrow u$ en la topología de $\bigwedge^{p,p} T^*M$, entonces usando la hipótesis de $u_{I,J} \in K(M)$, se tiene para $\beta \in \bigwedge^{m,0} T^*M$ ($\beta = \bigwedge_{j=1}^m \beta_j$, $\beta_j \in \bigwedge^{1,0} T^*M$, $m + p = k$)

$$u_n \wedge \sigma_m \beta \wedge \bar{\beta} \rightarrow u \wedge \sigma_m \beta \wedge \bar{\beta}$$

uniformemente en $K \subset \text{supp } u_n$. De ahí, tomando en cuenta la dimensión:

$$\lambda_n dV \rightarrow \lambda dV$$

donde dV es la forma volumétrica en \mathbb{C}^k y puesto que $\lambda_n \geq 0$ se tiene que $\lambda \geq 0$ en K . Esto implica que u es positiva y pertenece al cono en cuestión. \square

Denotaremos a los conos $K({}^+ \bigwedge^{p,p} T^*M)$ y $K({}^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M)$ y tenemos $u \in K({}^+ \bigwedge^{p,p} T^*M)$, $v \in K({}^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M)$ entonces $u \wedge v$ tiene la forma $\sum_j m_j |\lambda_j|^2 dV$, donde: $\sum_j m_j = 1$. Este

último hecho induce la aplicación:

$$\begin{aligned} K({}^+ \bigwedge^{p,p} T^*M) \times K({}^{++} \bigwedge^{p,p} T^*M) &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (u, v) &\longrightarrow \frac{u \wedge v}{dV}, \end{aligned}$$

o bien la aplicación $(v, u) \longrightarrow \frac{v \wedge u}{dV}$ (puesto que $u \wedge v = v \wedge u = \sum_j m_j |\lambda_j|^2 dV$).

Las aplicaciones anteriores pueden ser vistas como la acción de un cono de funciones positivas sobre otro cono. Llamemos a los conos que cumplen dicha relación, conos duales. Se puede probar que el dual de un cono convexo es su cerradura (véase [93]).

Cambiando este hecho con la proposición anterior se tiene las relaciones:

$$K^*(\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M) = K(\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M), \quad (2.27)$$

$$K^*(\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M) = K(\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M) \quad (2.28)$$

y además el dual del dual de cualquiera de estos conos es él mismo.

Íntimamente conectado al hecho que acabamos de exponer es la siguiente:

Proposición 11 $u \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ si y sólo si para todo $v \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ se cumple que $u \wedge v \geq 0$. Del mismo modo $v \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ si y sólo si para todo $u \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ se cumple que $u \wedge v = v \wedge u \geq 0$.

Demostración: La primera parte de la proposición es inmediata. Para probar la segunda parte sólo hay que recordar que $v \wedge u = \sum_j m_j |\lambda_j|^2 dV$ siendo $v \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ de donde

$u \wedge v = v \wedge u$. Sea ahora $u \wedge v = v \wedge u \geq 0$ (para cualquier $u \in \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$). Entonces por las relaciones de dualidad

$$v \in K(\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M) \subset \overset{p,p}{\bigwedge} T^*M.$$

□

Corolario 4 *El producto de dos formas positivas puede no ser positivo; por otro lado, el producto de dos formas fuertemente positivas es fuertemente positiva. Este segundo hecho, se puede establecer fácilmente:*

$$\sigma_p \sum_j m_j \alpha_j \wedge \bar{\alpha}_j \wedge \sigma_q \sum_l n_l \beta_l \wedge \bar{\beta}_l = \sigma_p \sigma_q (-1)^{pq} \sum_{j,l} m_j n_l \alpha_j \wedge \beta_l \wedge \overline{\alpha_j \wedge \beta_l}.$$

La siguiente proposición establece una descomposición de formas positivas en términos de formas fuertemente positivas.

Proposición 12 *El espacio vectorial $\overset{p,p}{\bigwedge} T^*M$ admite una base que consiste de formas fuertemente positivas del tipo σ_p donde $\alpha_s = \overset{p}{\bigwedge}_{l=1} \beta_l^s$, $1 \leq s \leq \binom{k}{p}$; siendo β_l^s de la forma $dz_r \pm dz_q$ o bien $dz_r \pm idz_q$ para $1 \leq r, q \leq k$.*

Demostración: Tomemos una base cualquiera $\{\sigma_p dz_{R_s} \wedge d\bar{z}_{Q_s}\}$, R_s, Q_s son multi-índices tal que $\sigma_p dz_{R_s} \wedge d\bar{z}_{Q_s} = \overset{i}{\bigwedge} dz_{r_s} \wedge d\bar{z}_{q_s}$, consideremos la igualdad:

$$dz_r \wedge d\bar{z}_q = \frac{1}{4} \sum_{x=0}^3 i^x (dz_r + i^x dz_q) \wedge \overline{(dz_r + i^x dz_q)}, \quad (2.29)$$

y evaluemos el producto:

$$\bigwedge_{m=1}^p \frac{i}{2} dz_r^m \wedge d\bar{z}_q^m = \frac{1}{4^p} \left(\frac{i}{2}\right)^p \bigwedge_{m=1}^p \sum_{x_m=0}^3 i^{x_m} (dz_r^m + i^{x_m} dz_q^m) \wedge \overline{(dz_r^m + i^{x_m} dz_q^m)}.$$

haciendo los cálculos:

$$= \frac{1}{4^p} \left(\frac{i}{2}\right)^p (-1)^{p(p-1)/2} \sum_{l=1}^{4^p} \alpha_s \bar{\alpha}_s = \sigma_p \sum_{l=1}^{4^p} \frac{1}{4^p} \alpha_s \wedge \bar{\alpha}_s,$$

donde α_s tiene forma esperada. □

Probemos, a continuación, que una forma positiva o fuertemente positiva es invariante a cambios de coordenadas \mathbb{C} -lineal.

Teorema 25 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^k$, $\Omega^1 \subset \mathbb{C}^k$; $f : \Omega \rightarrow \Omega^1$ un cambio de coordenadas \mathbb{C} -lineal (definido por $z'_j = \sum_i C_{ij} z_i$). Entonces, si $u(z)$ es positiva, $u(z')$ también lo es.

Demostración: De la fórmula del jacobiano para la forma volumétrica, sólo es necesario analizar el caso $J \neq 0$. En las nuevas coordenadas, la forma volumétrica dV' es tal que $dV' = JdV$ donde $J \geq 0$. Por otro lado de la inversibilidad de $J > 0$ se tiene que la aplicación \tilde{f} inducida del espacio de formas fuertemente positivas del tipo $\sum m_i \wedge \alpha_i \wedge \bar{\alpha}_i$ (donde α_i es de bigrado $(p,0)$ sobre el espacio de formas fuertemente positivas en $f(\mathbb{C}^k)$) es biyectiva.

Sea $u \in \wedge^{m,m}(T^*\Omega)$ luego para cualquier forma fuertemente positiva v : $u \wedge v = \tau dV$, donde $\tau > 0$. Al cambiar las coordenadas se tiene entonces $u' \wedge v' = \tau' dV'$; pero v' es fuertemente positiva, $\tau = \tau' > 0$ y $dV' = JdV$ ($J > 0$). De todo esto se deduce finalmente lo que se quiere probar. □

Caractericemos ahora las formas diferenciales positivas:

Teorema 26 Una forma diferencial $u \in \wedge^{p,p} T^*M$ es positiva en $U(z_0, r)$ si y sólo si para todo subespacio p -dimensional $S \subset T_z M$ ($z \in U(z_0, r)$) se tiene que $u|_S = \psi_s dV_s$ ($\psi_s \geq 0$).

Demostración: Sea u positiva. Para simplificar tomemos simplemente un entorno en \mathbb{C}^k puesto que el resultado es local. Sea $u = \sigma_p \sum_{I, J \in k; p} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ y tomemos el sub-espacio lineal S definido por $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 0$ donde $r = k - p$. Entonces del teorema anterior se tiene que la restricción $u|_S$ es positiva. El recíproco se obtiene tomando S igual a todo el espacio. □

Corolario 5 El pull-back de una forma positiva es positiva.

Demostración: Sea $u = \sigma_p \sum_{I, J \in k; p} a_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ positiva, y $f : M \rightarrow N$ un mapa holomorfo.

Como para cualquier sub-espacio S se tiene que $u|_S = \psi dV_s$ con $\psi \geq 0$ y $f^*u|_S = \psi(f(x)) |J|^2 dV_S$, entonces nuevamente por el teorema anterior, el pull-back es una forma positiva. □

Corolario 6 Una forma $u \in {}^+ \Lambda^{1,1} T^* M$, donde

$$u = \sum_{j,k} u_{jk} \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

es positiva si y sólo si $\sum_{jk} u_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k$ es una forma semi-positiva de Hermite.

Demostración: Es suficiente examinar el caso $M = \mathbb{C}^k$ (ya que el resultado es local). Si S es una línea compleja definida por la transformación $t \rightarrow t\xi$ (donde $\xi \in \mathbb{C}$ es fijo) entonces $u|_S = \sum_{jk} u_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k \frac{i}{2} dt \wedge d\bar{t}$ es positiva por lo que siendo $\frac{i}{2} dt \wedge d\bar{t}$ la forma de volumen en S se concluye que la forma cuadrática $\sum_{jk} u_{jk} \xi_j \bar{\xi}_k$ es semi-positiva. \square

Proposición 13 Las formas positivas y fuertemente positivas son reales.

Demostración: Sea $u \in {}^{++} \Lambda^{p,p} T^* M$ y $u = \sum_r \gamma_j \bigwedge_r \frac{i}{2} \beta_r \wedge \bar{\beta}_r$ entonces $\bar{u} = \sum_r \gamma_j \bigwedge_r \frac{-i}{2} \bar{\beta}_r \wedge \beta_r$

Como β_r es de bigrado $(1,0)$ entonces :

$$\bar{u} = \sum_r \gamma_j \bigwedge_r \frac{i}{2} \beta_r \wedge \bar{\beta}_r = u.$$

Por otro lado, sea $v \in {}^+ \Lambda^{p,p} T^* M$; entonces se sabe que $v \wedge u = \tau dV$ (para $u \in {}^{++} \Lambda^{m,m} T^* M$ con $m+p=k$ además $\tau \geq 0$). Luego $\bar{v} \wedge \bar{u} = \bar{v} \wedge u$ (por lo que ya se probado para u) Luego: $(v - \bar{v}) \wedge u = 0$ y como u es arbitraria $v = \bar{v}$ y además $v_{IJ} = \bar{v}_{IJ}$. \square

Comentario 13 Existe una correspondencia uno a uno entre las formas hermitianas y las formas reales $(1,1)$ en \mathbb{C}^k . En efecto, la correspondencia puede ser dada por:

$$h = \sum_{1 \leq j,l \leq k} h_{jl}(z) dz_j \otimes d\bar{z}_l \longrightarrow u = \sum_{1 \leq j,l \leq k} h_{jl}(z) dz_j \wedge d\bar{z}_l.$$

Esta aplicación no depende de la elección del sistema de coordenadas; en efecto: $\mu(\xi, \eta) = \frac{i}{2} \sum_{j,l} h_{jl}(\xi_j \bar{\eta}_l - \eta_j \bar{\xi}_l) = -2\Im h(\xi, \eta)$ para cualquier ξ, η en el espacio tangente. Esto establece la independencia respecto al sistema de coordenadas. Más aún se tiene que $h \geq 0$ es una forma hermitiana si y sólo si $u \geq 0$ como una $(1,1)$ -forma.

\square

Probemos a continuación que:

Proposición 14 Toda forma positiva $(1,1)$ es fuertemente positiva.

Demostración: Diagonalizando $u \in {}^+ \Lambda^{1,1} T^* M$ se obtiene:

$$u = \sum_{j=1}^r \frac{i}{2} \gamma_j \bar{\gamma}_j, \quad r \text{ es el rango de } h.$$

Lo cual puede escribirse como:

$$u = \sum_{j=1}^r \frac{1}{r} \frac{i}{2} \sqrt{r} \gamma_j \sqrt{r} \bar{\gamma}_j.$$

Lo cual representa una forma fuertemente positiva. \square

Corolario 7 Toda forma positiva de bigrado $(k-1, k-1)$ en \mathbb{C}^k es fuertemente positiva.

Demostración: El cono $+\bigwedge^{k-1, k-1} T^*M$ es dual del cono $++\bigwedge^{1,1} T^*M$, pero como es sabido:

$$+\bigwedge^{1,1} T^*M = ++\bigwedge^{1,1} T^*M,$$

y teniendo en cuenta además que el dual del dual de un cono cerrado es el mismo (es decir: $(+\bigwedge^{k-1, k-1} T^*M)^* = +\bigwedge^{k-1, k-1} T^*M$) se tiene que $(+\bigwedge^{1,1} T^*M)^* = ++\bigwedge^{1,1} T^*M$.

Finalmente:

$$(+\bigwedge^{1,1} T^*M)^* = ++\bigwedge^{k-1, k-1} T^*M = +\bigwedge^{k-1, k-1} T^*M.$$

\square

Probemos el siguiente enunciado que será de utilidad luego:

Proposición 15 Sea M una variedad compleja de dimensión k . Sea ahora $\alpha \in +\bigwedge^{p,p} T^*M$ con soporte compacto en $\Omega \subset M$. Luego

$$\int_M \alpha = [M](\alpha) \geq 0. \quad (2.30)$$

Demostración: Puesto que M admite una partición de la unidad $\{\phi_i\}$ asociada a un cubrimiento de M (en particular el sistema de entornos $\{U_i\}$) del atlas M :

$$\int_M \alpha = \sum_i \int_M \phi_i \alpha = \sum_i [M](\phi_i \alpha) < +\infty$$

donde la acotación superior se desprende del soporte compacto de ϕ_i .

Tomemos los entornos $\{V_i\} \subset \mathbb{C}^k$ correspondientes a U_k y sea h_i los homeomorfismos holomorfos del atlas de M

$$\int_M \phi_i \alpha = \int_{V_i} h_i^*(\phi_i \alpha)$$

donde $h_i^*(\phi_i \alpha)$ es positiva (en virtud de ser el pull-back de una forma positiva). De aquí se deduce el resultado. \square

En particular $[M](d\alpha) = \sum_i \int_{V_i} \phi_i' d\alpha_i' = \sum_k \int_{V_i} d(\alpha_i' \phi_i') - \sum_i \int_{V_i} d\phi_i' \wedge \alpha_i'$. Del Teorema de Stokes el primer sumando del segundo miembro de la última igualdad es cero (supp ϕ_i' es compacto en V_i). Además, Puesto que $\sum \phi_i = 1$ se tiene que

$$\sum_i \int_{V_i} d\phi_i' \wedge \alpha_i' = \int_M (\sum d\phi_i) \wedge \alpha = 0.$$

Comentario 14 Con esta simbología, el área de una variedad compleja $M \subset \mathbb{C}^k$ definida por $f = 0$ (f holomorfa en \mathbb{C}^k) se puede escribir como

$$S = \int_{f=0} \frac{\varphi^p}{p} = [M] \left(\frac{\varphi^p}{p!} \right). \quad (2.31)$$

2.3. Distribuciones

En esta sección se introduce el espacio topológico dual a un espacio topológico de funciones con topología inducida por las semi-normas. Esto nos conduce al concepto de distribución cuando consideremos las funcionales continuas. Como se verá mas adelante, una distribución puede verse como una restricción del objeto más general denominado corriente, aún cuando históricamente la teoría de corrientes fué construída por De Rham siguiendo el trabajo de Schwartz [99]. Aquí y en la sección siguiente se toma dicho camino conceptual construyéndose primero la teoría de distribuciones para luego construir por analogía la teoría general de corrientes.

2.3.1. Espacios topológicos vectoriales de funciones y duales

Primero procedemos a la descripción de ciertos conjuntos de funciones como espacios topológicos vectoriales y sus duales. En toda esta sección consideraremos a M como una variedad C^∞ con coordenadas locales en \mathbb{R}^m . Se define las siguientes familias: (siendo $f : M \rightarrow \mathbb{C}$)

$$\begin{aligned} C(M) &= \{f : f \text{ es continua en } M\} \\ C^\infty(M) &= \{f : \text{es infinitamente diferenciable en } M\} \\ C^s(M) &= \{f : f \text{ es } s \text{ veces diferenciable en } M\} \\ \mathcal{K}(M) &= \{f : \text{supp } f \text{ es compacto en } M\} \cap C(M) \\ L_{loc}(M) &= \{f : \forall K \text{ (compacto)} \subset M \text{ y } \int_K |f| dx < \infty\}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Además $D(M) = \mathcal{K}(M) \cap C^\infty(M)$.

Son todos espacios vectoriales con la siguiente jerarquía:

$$D(M) \subset C^\infty(M) \subset C(M) \subset L_{loc}(M),$$

$$D(M) \subset \mathcal{K}(M) \subset C(M) \subset L_{loc}(M).$$

Es necesario equipar estos espacios con topologías que los conviertan en espacios topológicos vectoriales. En particular estamos interesados en topologías para $D(M)$, $C^\infty(M)$ y $\mathcal{K}(M)$.

Definamos las siguientes seminormas para $f : M \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|f\|_K^0 &= \sup_{x \in K} \{|f(x)|, x \in K \text{ (compacto)} \subset M\}, (f \in \mathcal{K}(M)) \\ \|f\|_K^l &= \sup_{x \in K} \{\text{máx}_{|\alpha| \leq l} \{|D^\alpha f(x)|, x \in K \text{ (compacto)} \subset M, \alpha \in (\mathbb{Z}^+)^m\}\}, (f \in C^\infty(M)). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Como $D(M) = C^\infty(M) \cap \mathcal{K}(M)$ entonces la correspondiente semi-norma para $f \in D(M)$ se define igual que en $C^\infty(M)$ y la denotamos como: $\|f\|_K^{0,l}$. Se tiene además la siguiente notación:

$$\begin{aligned} D^\alpha &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)^{\alpha_m} \\ \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \quad |\alpha| = \sum_i \alpha_i. \end{aligned}$$

Comentario 15 De la semi-norma para el espacio de funciones $C^\infty(M)$ podemos establecer una semi-norma para $C^s(M)$ donde l cumple la restricción adicional: $l \leq s$. De ahí, más adelante, usando estas seminormas se define la topología para dichos espacios (llamada C^s -topología).

Tomemos ahora la familia de compactos $\{K_n\}_{n=1}^\infty$, $K_n \subset M$ que cubren a M y: $\text{int}(K_i) \neq \emptyset$, $K_n \subset \text{int}(K_{n+1})$ y definamos (véase [34], y la Sección [4.1]) la topología por medio del siguiente sistema de abiertos:

$$\begin{aligned} U_E(f, \epsilon) &= \{g \in \mathcal{K}(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^0 < \epsilon, n \in E \subseteq \mathbb{N}\} \\ U_E(f, \epsilon) &= \{g \in C^\infty(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^l < \epsilon, n \in E \subseteq \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}. \\ \mathcal{U}_E(f, \epsilon) &= \{g \in D(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^l < \epsilon, n \in E \subseteq \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Comentario 16 Observemos que la norma usada para el espacio $D(M)$ es el mismo a usar para $C^\infty(M)$ puesto que el primero es un subconjunto del segundo.

Introduzcamos las siguientes definiciones:

Definición 41 *El conjunto $\mathcal{K}(M) \cap U_E(f, \epsilon)$ es un abierto en la topología de $\mathcal{K}(M)$ Análogamente para $C^\infty(M)$: $C^\infty \cap U_E(f, \epsilon)$ es un abierto en dicha topología. Estas topologías se denominan inductivas y se representan con la letra τ .*

Comentario 17 Se puede probar que las τ -topologías son localmente convexas, invariantes por traslación y de Hausdorff (véase [97]). Además para estos espacios se puede establecer que para un compacto $K \subset M$ el espacio $(\tau, C^\infty(K))$ es de Frechet (es decir un espacio completo, metrizable y localmente convexo). Más aún, si definimos $(\tau, D(K))$ de manera análoga se tiene que es un espacio de Banach, es decir un caso especial de un espacio de Frechet (véase [36], [99]).

La definición de continuidad para una funcional lineal comúnmente se introduce por “aproximaciones” en espacios de funciones definidas en compactos. Veamos esto:

Definición 42 *Una funcional lineal $T : D(M) \rightarrow \mathbb{C}$ ($T : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{C}$) es continua si sus restricciones $T|_{D(K)}$ ($T|_{C^\infty(K)}$) son continuas para todo K (compacto) $\subset M$.*

Para $M \subset \mathbb{R}^n$ se tiene las siguientes equivalencias para la continuidad (véase [99]):

Teorema 27 (Continuidad secuencial) *Sea $M \subset \mathbb{R}^m$. Una funcional lineal T en $D(M)$ ($C^\infty(M)$) es continua si y sólo si para cada sucesión $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $D(M)$ (en $C^\infty(M)$ respectivamente) la sucesión $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ en \mathbb{C} .*

Demostración: Sea T una funcional continua en cualquiera de los espacios de funciones mencionados, entonces de la definición de continuidad $T|_K$ es continua, donde K es un compacto en M . Usando ahora la propiedad enunciada en el comentario 17 se tiene que el espacio $D(M)$ (o bien $C^\infty(M)$) es metrizable lo cual implica que la continuidad es equivalente a la continuidad secuencial. Recíprocamente, tomando un compacto $K \subset M$ se tiene que al cumplirse la condición de continuidad secuencial para $D(M)$ (o bien $C^\infty(M)$) entonces eso implica que la funcional $T|_K$ es continua. Con ello concluye la prueba. \square

Antes de enunciar el siguiente teorema recordemos que la continuidad de una funcional es equivalente a su continuidad en el origen. Denominaremos también a la propiedad a demostrar “continuidad en el origen”.

Teorema 28 (Continuidad en el origen) Una funcional lineal T en $D(M)$ ($C^\infty(M)$) es continua si y sólo si para todo compacto $K \subset M$ existe $C > 0$ (existe $l \in \mathbb{N}$ y $C > 0$) tal que para todo $f \in D(M)$ ($f \in C^\infty(M)$) con $\text{supp } f \subset K$ se tiene que:

$$\|T(f)\| \leq C \|f\|_K^l.$$

Demostración: Puesto que para una funcional lineal la continuidad es equivalente a la continuidad en el origen de coordenadas, se tiene entonces que si aplicamos la continuidad en el punto 0 se tiene que en una vecindad del origen V_0 si tomamos un elemento $\varphi \in V_0$ se tiene que $T(\varphi) < \epsilon$. En particular, si tomamos $\varphi/\|\varphi\|_K^l$ entonces obtenemos el enunciado buscado. Recíprocamente, si ahora suponemos que se cumple el enunciado del teorema entonces tomando una sucesión de funciones φ_i en $D(K)$ (o bien en $C^\infty(K)$) de tal modo que $\varphi_i \rightarrow 0$ entonces se tiene que la funcional es continua en el origen ya que $T(\varphi_i) \rightarrow 0$, pero en virtud de la equivalencia entre la continuidad en el origen y la continuidad para una funcional se tiene que la funcional es continua. \square

Esta última proposición sugiere la noción de orden:

Definición 43 Sea T una funcional lineal y sea $\|T(\varphi)\| \leq C\|\varphi\|_K^l$ donde $C > 0$ es una constante real, además φ pertenece a algún espacio topológico de funciones y $l \geq 0$ es el mínimo valor posible que satisface la desigualdad. Entonces el orden de T se define como $\text{ord}(T) = l$.

De este modo, si una distribución es continua en $C^\infty(M)$ eso equivale a que para cualquier sucesión de funciones $\{f_i\}_{i=1}^\infty \subset C^\infty(M)$ donde existe $f \in C^\infty(M)$: $f_i \rightarrow f$ se cumple que $T(f_i) \rightarrow T(f)$. En el caso que $T \in \mathcal{K}'(M)$ es continua, se tiene que: $\|T(f)\| \leq C\|f\|_K^0$ de donde se concluye que para todo $T \in \mathcal{K}'(M)$, el orden es siempre nulo, $l = 0$.

Comentario 18 La noción de orden para las funcionales lineales se deriva de la continuidad de estas en los respectivos espacios de formas diferenciales. En particular si una distribución en $D'(M)$ es de orden $l \geq 0$ entonces sin condiciones suplementarias no se puede afirmar que es de orden $l - 1$, en particular no se puede afirmar que es continua en $\mathcal{K}'(M)$. Sin embargo más adelante se establecerá una condición que garantiza que una funcional tenga soporte compacto, es decir sea un elemento de $\mathcal{K}(M)$.

Introduzcamos el concepto de distribución:

Definición 44 Una distribución en M es una funcional lineal continua sobre el espacio de funciones $D(M)$ con topología límite inducida.

Ejemplo 21 Sea $\varphi \in L_{loc}(M)$ y definamos:

$$T_\varphi : D(M) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$T_\varphi(f) = \int_U f\varphi dx.$$

Comprobemos que T_φ es continua:

Sea $f_n \rightarrow f$ en $D(U)$, K (compacto) tal que $\text{supp } f \subset K$ ($n \in \mathbb{N}$). De la condición $f_n \rightarrow f$, para $\epsilon > 0$ y $n > N$: $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon/C$ para todo $x \in K$ (C es una constante a fijar). Luego

$$|T(f_n) - T(f)| \leq \int_K |\varphi(x)| |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{C} \int_K |\varphi(x)| dx,$$

fijando $C = \int_K |\varphi(x)| dx$ se obtiene el resultado.

Ejemplo 22 Para $x_0 \in U$ definamos $\delta_{x_0} : D(U) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $\delta_{x_0}(f) = f(x_0)$. Probaremos que es continua:

Sea $f_n(x) \rightarrow f(x)$ uniformemente en K , luego $|\delta_{x_0}(f_n) - \delta_{x_0}(f)| = |f_n(x_0) - f(x_0)| < \epsilon$.

Pasemos a definir topologías en los espacios vectoriales duales. Primero definamos semi-normas en $D'(M)$. Tomemos $\varphi \in D(M)$ y consideremos la aplicación $\tau_\varphi : D'(U) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como: $\tau_\varphi(T) = \|T(\varphi)\|$ para $T \in D'(U)$. Definida así, la aplicación τ_φ es una funcional lineal perteneciente al dual del dual de $D(M)$. Por otro lado se puede comprobar que τ_φ define una seminorma en $D'(M)$.

La topología generada por las seminormas $\{\tau_\varphi\}_{\varphi \in D(U)}$ constituye la llamada topología débil sobre $D(M)$.

Más precisamente, el sistema de abiertos se define como:

$$U_E(T_0, \epsilon) = \{t : \tau_\varphi(t - T_0) < \epsilon, \varphi \in E \subseteq D(M)\}. \quad (2.35)$$

Puesto que para cualquier funcional lineal continua T actuando en espacios de funciones "más grandes" se cumple que $T|_{D(M)} \in D(M)$ se tiene entonces que tanto $\mathcal{K}'(M)$ y $C^{\infty}'(M)$ son sub-conjuntos de $D'(M)$, en particular, el sistema de entornos para $\mathcal{K}'(M)$ como para $C^{\infty}'(M)$ se definen como:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}'(M) : U_E(T_0) &= \{t : \tau_\varphi(t - T_0) < \epsilon, \varphi \in E \subseteq \mathcal{K}(M)\} \\ C^{\infty}'(M) : U_E(T_0) &= \{t : \tau_\varphi(t - T_0) < \epsilon, \varphi \in E \subseteq C^\infty(M)\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

De esta discusión se deduce entonces las siguientes relaciones de inclusión entre los espacios de funcionales lineales continuas duales a los espacios funcionales.

$$L'_{loc}(M) \subset C'(M) \subset C^{\infty}'(M) \subset D'(M),$$

y además

$$L'_{loc}(M) \subset C'(M) \subset \mathcal{K}'(M) \subset D'(M).$$

De manera recíproca, sea dada una funcional definida en el espacio $D'(M)$ se establece que ella puede extenderse a los espacios los espacios $C^\infty(M)$ o bien a $\mathcal{K}(M)$. para las demostraciones véase [36].

Definamos la noción de derivada para una distribución: $T \in D'(M)$:

Definición 45 La derivada de grado α de una distribución ($\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m$) es una funcional lineal $D^\alpha T : D(M) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi).$$

De la definición se tiene que $D^\alpha T \in D'(M)$ si $T \in D'(M)$. Además, si $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j = T$ entonces

$\lim_{j \rightarrow \infty} D^\alpha T_j = D^\alpha T$ (véase [99] para más detalles).

Definamos además el producto de una función infinitamente diferenciable y una distribución:

Definición 46 Sean la distribución $T \in D'(M)$ y $f \in C^\infty(M)$ entonces se define el producto $fT \in D'(M)$:

$$fT(\varphi) = T(f\varphi), \varphi \in D(M).$$

Destaquemos ahora el concepto de soporte de una distribución T :

Definición 47 Sea el conjunto:

$$W = \{x \in M : \text{existe un entorno coordinado } U(x) \text{ tal que } T|U(x) = 0\}$$

entonces el soporte de la distribución T se define como: $\text{supp}(T) = M \setminus W$.

Hay que observar que de la definición de W éste es un abierto por lo que $\text{supp } T$ es cerrado.

2.3.2. Regularización de distribuciones

En la literatura $D(M)$ también es denominada espacio de funciones de prueba; destacaremos una subclase de dichas funciones

$$\{\chi \in D(M) / \chi \geq 0, \text{ supp } \chi \subset B(0, 1)\}, \quad (2.37)$$

donde además $\chi(x) = \chi(x')$ para todo $x, x' \in \mathbb{R}^m$: $\|x\| = \|x'\|$.

Introduzcamos ahora los núcleos regularizantes definidos como:

$$\chi_\epsilon = \frac{1}{\epsilon^n} \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right), \text{ supp } \chi_\epsilon \subset B(0, \epsilon), \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\epsilon dx = 1, \epsilon > 0$$

Recordemos la convolución de una función $f \in L_{loc}(M)$ con un núcleo regularizante:

$$f * \chi_\epsilon(x) = \int_M f(y) \chi_\epsilon(y - x) dy = \int_{\mathbb{R}^m} f(x + y) \chi_\epsilon(y) dy.$$

De acuerdo a la definición de convolución, su dominio U_ϵ es:

$$U_\epsilon = \{x \in U, \inf_{y \in \partial U} \|x - y\| > \epsilon\} \quad (2.38)$$

Enunciemos algunas propiedades de la convolución (para las demostraciones, consúltese [36]):

Teorema 29 Se verifican los siguientes enunciados:

- Sea $f \in L_{loc}$ entonces $f * \chi_\epsilon(x) \in C^\infty(U_\epsilon)$ y en particular podemos definir una sucesión regularizante $f_m = f * \chi_{1/m}$
- $f * \chi_\epsilon(x) \rightarrow f$ en la topología de L_{loc} cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de donde se deduce que $C^\infty(U)$ es denso en $L_{loc}(U)$.
- El espacio $D(U)$ es denso en $C^\infty(U)$ por lo que resulta que $D(U)$ es denso en $L_{loc}(U)$.
- Si $f \in C(U) \subset L_{loc}(U)$ entonces $f * \chi_\epsilon \rightarrow f$ uniformemente en compactos. Además si $f \in C^\infty(U), \alpha \in \mathbb{Z}^+{}^m : D^\alpha(f * \chi_\epsilon) = D^\alpha f * \chi_\epsilon$.

Basándonos en la regularización de funciones por medio de la convolución procedamos a definir la regularización de distribuciones:

Definición 48 Sea la distribución $T \in D'(U)$, $U \subset M$. Se define la regularización $T_\epsilon \in D'(U)$ $\epsilon > 0$ como:

$$T_\epsilon(\varphi) = T(\varphi * \chi_\epsilon) = [T_y(\chi_\epsilon(x - y))]_x \phi(x)$$

donde $\phi \in D(U_\epsilon)$ y T_y es la distribución aplicada sobre funciones definidas en el argumento y , mientras que $[T_y(\chi_\epsilon(x - y))]_x$ es la distribución sobre funciones de argumento x .

Pasemos a enunciar y probar el teorema de regularización para distribuciones:

Teorema 30 Una distribución T puede ser aproximada por medio de su regularización T_ϵ . Dicho de otro modo $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon = T$ en la topología débil de $D'(M)$.

Demostración: Analicemos en un compacto $K \subset M$ la diferencia $|T_{1/n}(f) - T(f)|$ donde f es una función en $D(M)$ y además $\epsilon = 1/n$. Usando la definición de convolución de una distribución y la condición de continuidad:

$$|T_{1/n}(f) - T(f)| = |T(f_{1/n} - f)| \leq C \|f_{1/n} - f\|_K^0$$

Donde C es una constante (véase el Teorema 28). Ahora teniendo en cuenta que $f_{1/n} \rightarrow f$ uniformemente en compactos entonces $\|f_{1/n} - f\|_K^l \leq \delta$ donde δ puede ser tan pequeño como se quiera. Reemplazando esta relación en la última expresión se concluye que:

$$|T_{1/n}(f) - T(f)| \leq \|T(f_{1/n} - f)\| \leq C\delta$$

Pero esto significa que $T_{1/n}(f) \rightarrow T(f)$ en \mathbb{C} para una función arbitraria $f \in D(M)$, De acuerdo al Teorema 27 se tiene entonces que: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{1/n} = T$. Con esto concluye la prueba. \square

Respecto a la regularización se puede citar algunas propiedades cuya prueba la remitimos a [99]:

Teorema 31 Se verifica los siguientes enunciados:

- Para todo $\alpha \in (\mathbb{Z}^+)^m$: $D^\alpha T_\epsilon = (D^\alpha T)_\epsilon$ ($\epsilon > 0$)
- Para $f \in L_{loc}(U)$: $[f]_\epsilon = [f * \chi_\epsilon]$ ($\epsilon > 0$).

Otras propiedades que merecen ser citadas se refieren a las relaciones que existen entre los espacios de funcionales definidos más arriba (véase [99] para las demostraciones). Para terminar esta sub-sección citemos sin demostración el siguiente:

Teorema 32 El espacio $C^{\infty'}(M)$ es el espacio de todas las distribuciones de soporte compacto.

Además de este teorema es importante remarcar otros resultados como aquel que establece la densidad de $C^{\infty'}(M)$ en $D'(M)$ y que el sub-espacio de distribuciones $\{T_\varphi = [\varphi]/\varphi \in D(M)\}$ es a su vez denso en $C^{\infty'}(M)$ para los detalles véase [36], [99].

2.3.3. Propiedades globales y locales

En el análisis es conocido que un espacio topológico de Hausdorff paracompacto M admite una partición de la unidad: Es decir, dado un cubrimiento $\{U_i\}$ de V , existe una colección de funciones $\{\phi_i\}$ tal que:

- 1) $\phi_i \geq 0$, $\sum_i \phi_i = 1$
- 2) $\phi_i \in C^\infty(U_i)$, $\text{supp } \phi_i \subset U_i$
- 3) todo punto de M posee una vecindad que interseca un número finito de soportes en ϕ_i .

Citemos las siguientes propiedades que son a la vez locales y globales (véase [19]). Sea U un subconjunto abierto de M (paracompacto de Hausdorff)

- a) $\{T_j\} \subset D(U)'$ converge a $T \in D(U)'$ si y solo si para todo $x \in U$, existe $V_x \subset U$ tal que $\{T_j|_{V_x}\} \subset D(V_x)'$ converge a $T|_{V_x} \in D(V_x)'$
- b) Sea $T, S \in D(U)'$. $T = S$ si y sólo si para todo $x \in U$ existe $V_x \subset U$ tal que $T|_{V_x} = S|_{V_x} \in D(V_x)'$
- c) $T \in D(U)'$ tiene orden $l \leq L$ si y sólo si para todo punto $x \in U$ existe una vecindad $V_x \subset U$ tal que $T|_{V_x}$ tiene orden $l \leq L$.

Como un ejemplo del uso de la partición de la unidad probemos la primera afirmación:

La necesidad es trivial. Pasemos a probar la suficiencia por medio de un argumento de partición de la unidad: Sea $\{V_i\}$ un cubrimiento de U y sea $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j|_{V_i} \rightarrow T|_{V_i}$. puesto que existe la familia de funciones $\{\phi_i\}$ asociadas a $\{V_i\}$ se tiene que $\phi = \sum \phi_i$ para $\phi \in D(U)$ y además $\phi_i \in D(V_i)$. Por tanto:

$$\begin{aligned} T(\phi) &= T\left(\sum_i \phi_i\right) = \sum_i T(\phi_i) = \sum_i T|_{V_i}(\phi_i) \\ &= \sum_i \lim_{j \rightarrow \infty} T_j|_{V_i}(\phi_i) = \lim_{j \rightarrow \infty} T_j|_{V_i}\left(\sum \phi_i\right) \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} T_j(\phi), \end{aligned}$$

con lo que se concluye la prueba. Las otras afirmaciones se prueban siguiendo exactamente el mismo método.

2.3.4. Distribuciones positivas y medidas asociadas

Sea $T \in \mathcal{K}'(M)$ definamos $\|T\|(f) = \sup\{|T(\eta)|, \eta \in D(M), |\eta| \leq f\}$ para $f \in \mathcal{K}(M)$ y $f \geq 0$. Llamaremos a esta distribución, variación total de T siendo ésta positiva para f positiva. Si tomamos $f \in \mathcal{K}(M)$ arbitraria, se puede extender la definición de $\|T\|$ usando el hecho que

$$f(x) = \max[f(x), 0] - \max[-f(x), 0] = f^+ - f^-$$

es decir, que una función arbitraria es la diferencia de dos funciones positivas. Se tiene entonces que:

$$\|T\|(f) = \|T\|(f^+) - \|T\|(f^-)$$

y $\|T\|$ queda definida para cualquier $f \in \mathcal{K}(M)$.

La magnitud $\|T\|$ se denomina variación total de T y se muestra que $\|T\| \in \mathcal{K}'(M)$. En efecto, tomemos $f \geq 0$, $f \in \mathcal{K}(M)$, $\|\eta\| \leq f$ y un compacto $K \subset M$ arbitrario entonces puesto que $\eta \in D(M) \subset \mathcal{K}(M)$ se tiene que: $\|\eta\|_0 \leq \|f\|_0$, además existe $C_K > 0$ tal que $|T(\eta)| \leq C_K \|\eta\|_0 \leq C_K \|f\|_0$; tomando el supremo de esta desigualdad $\|T\|(f) \leq C_K \|f\|_0$.

A partir de $\|T\|$ introducimos la siguiente definición:

Definición 49 Una distribución $T \in D'(M)$, que satisface $T(f) \geq 0$ para todo $f \geq 0$, se denomina distribución positiva.

El resultado clásico de la teoría de la medida conocido como el Teorema de Representación de Riesz establece que toda funcional positiva tiene un representación en términos de una única medida positiva (véase [97]). Enunciamos una extensión importante de este teorema en términos de las así llamadas medida de Radon.

Definamos primero esta medida (véase [50])

Definición 50 Sea X un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff: Una medida de Radon μ es aquella que cumple las siguientes condiciones:

- K (compacto) $\subset X$ entonces $\mu(K) < \infty$
- V (abierto) $\subset X$ entonces $\mu(V) = \sup\{\mu(K), K(\text{compacto}) \subset V\}$
- $A \subset X$ entonces $\mu(A) = \inf\{\mu(V), A \subset V(\text{abierto})\}$.

Teorema 33 Sea $T \in D'(M)$ de orden cero, U (abierto) $\subset M$ entonces, existe una medida única de Radon μ tal que:

- $T(f) = \int_U f d\mu, f \in D(M)$
- $\|T\|(f) = \int_U f d\|\mu\|, f \in D(M)$, además $\|\mu\|$ es la medida positiva asociada a la medida de Radon μ definida por:

$$\|\mu\|(B) = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty} |\mu(B_j)|; B_j \text{ son conjuntos de Borel en } B : B_j \cap B_k = \emptyset (j \neq k),\right.$$

$$\left. \text{además } B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\right\}.$$

Además

$$\|T\|(f) = \sup_{|\eta| \leq |f|} |T(\eta)|.$$

Probemos que una distribución positiva puede ser extendida a $\mathcal{K}'(M)$:

Proposición 16 Sea $T \in D'(M)$, tal que: $T \geq 0$ entonces $T \in \mathcal{K}'(M)$.

Demostración: Sea K (compacto) $\subset M$ y tomemos $\chi_K \in D(M)$ la cual es la función característica de K . Para cualquier $f \in D(M)$ tal que $\text{supp } f \subset K$ definamos $\chi_K \|f\|_K^0 - f$ la cual es evidentemente positiva; se tiene entonces que:

$0 \leq T(\chi_K \|f\|_K^0 - f)$. De ahí sigue que: $T(f) = \|T(f)\| \leq T(\chi_K \|f\|_K^0)$. Esto establece que T es de orden cero. Del Teorema de Representación de Riesz, se tiene que: $T(f) = \int_U f d\mu$ para $f \in D(M)$. Extendamos T para $\varphi \in \mathcal{K}(M)$. En efecto, puesto que $\varphi_\epsilon = \varphi * \chi_\epsilon \in D(M)$, definimos $T(\varphi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} T(\varphi_\epsilon)$, la cual está bien definida de acuerdo al Teorema de la Convergencia Monótona y al hecho que siendo $\mathcal{K}(M) \subset L_{loc}(M)$, al aplicar el Teorema de Regularización de Funciones se obtiene que φ_ϵ también tiene soporte compacto lo cual implica que T extendida a dichos elementos también tiene soporte compacto. La positividad se mantiene al extender la funcional, puesto que si $\varphi \geq 0$ entonces $\varphi_\epsilon \geq 0$. □

Comentario 19 La cuestión referente al orden cero de una distribución por el Teorema 33 queda aclarada como la cuestión acerca de la existencia de una medida de Radon asociada.

Comentario 20 La denominación de variación total para $\|T\|$ proviene de la terminología de la teoría de la medida donde $\|\mu\|$ se denomina variación total de μ .

Comentario 21 Señalemos que recíprocamente una medida de Radon compleja μ , puede inducir una funcional en $\mathcal{K}(M)$ por:

$$T_\mu(f) = \int f d\mu$$

para $f \in \mathcal{K}(M)$ entonces $T_\mu \in \mathcal{K}'(M)$.

Se puede demostrar que de la positividad global de una distribución se deduce su positividad local y viceversa siempre que M sea para-compacta. Asimismo una distribución T es positiva si y sólo si $T * \chi_\epsilon$ lo es. Este último hecho se deduce de la definición de $T * \chi_\epsilon(f) = T(f_\epsilon)$ donde f es un elemento positivo arbitrario. Enunciemos esto como un teorema:

Teorema 34 Para $T \in D'(U)$, U subconjunto de M (variedad paracompacta)

- i) $T \geq 0$.
- ii) Para todo $x \in U$ existe $V_x \subset U$ tal que $T|_{V_x} = 0$.
- iii) Para todo $\epsilon > 0$, $T_\epsilon \geq 0$.

Consideremos algunos ejemplos en donde el concepto de distribución positiva es relevante. Estos ejemplos están relacionados con tópicos de la teoría del potencial. Para más detalles de esta teoría se puede consultar [2]).

Ejemplo 23 (Teoría del potencial y distribuciones)

Definamos para $y \in \mathbb{R}^m$ la función:

$$U_y(x) = \begin{cases} -\log \|x - y\| & (x \neq y, m = 2) \\ \|x - y\|^{m-2} & (x \neq y, m > 2) \\ \infty & (x = y) \end{cases}$$

que es super-armónica en \mathbb{R}^m (o bien $-U_y(x)$ es sub-armónica) y armónica en $\mathbb{R}^m \setminus \{y\}$.

Consideremos aquellos conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ tal que para todo $y \in \Omega$ la función U_y tiene un minorante sub-armónico en Ω (a estos dominios se les denomina de Green). En Ω (de Green) definamos $G_\Omega : \Omega \times \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ como $G_\Omega(\cdot, y) = U_y - h_y$ donde h_y es el más grande minorante sub-armónico de U_y . La función positiva G_Ω se llama función de Green para el dominio de Green Ω . Sea una medida μ en Ω y la distribución T_μ inducida por μ . La función

$$T_{\mu(y)}(G_\Omega) = \int_\Omega G_\Omega(x, y) d\mu(y)$$

($x \in \Omega$) se llama potencial si en cada componente existe al menos un punto en donde la función (denotémosla $G_\Omega \mu(x)$) es finita. Para $m \geq 3$ la función de Green de \mathbb{R}^m es $G(x, y) = U_y(x)$ donde $x, y \in \mathbb{R}^m$. En efecto, $G(x, y) = U_y(x) - h_y(x)$, tomemos h cualquier minorante sub-armónico de U_y entonces $h \leq r^{2-N}$ en $U(y, r)$, haciendo r grande se tiene que $h \leq 0$ en \mathbb{R}^m de donde $h_y = 0$. Este último hecho establece que el potencial de todo el espacio \mathbb{R}^m ($m \geq 3$) es de la forma $T_{\mu(y)}(\|x - y\|^{2-N})$ al cual también se le llama potencial Newtoniano. Finalmente, para que $T_{\mu(y)}(G_\Omega)$ sea un potencial es suficiente que μ tenga soporte compacto en Ω . En efecto, tomemos una componente de Ω (el análisis es el mismo para las otras componentes), sea $K = \text{supp } \mu$, $y_0 \in K$ y elijamos W (abierto, acotado y conexo) tal que $K \subset W \subset \Omega$. La función $G_\Omega(x, \cdot)$, $x \in \Omega \setminus W$ es positiva y armónica en W y de la desigualdad de Harnack aplicada a la bola $U(y_0, \epsilon) \subset K$ se tiene que: $G_\Omega(x, y) \leq C G_\Omega(x, y_0)$ para un $C > 0$ dado e $y \in U(y_0, \epsilon) \subset K$. Integrando la desigualdad respecto a $d\mu(y)$ tenemos $G_\Omega \mu(x) \leq C \mu(K) G_\Omega(x, y_0)$. Esto significa que al menos para los puntos $x \in \Omega \setminus W$, $G_\Omega \mu(x) < \infty$ con lo que queda establecido que es un potencial.

Ejemplo 24 Sea μ una medida en \mathbb{R}^2 que satisface $\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0, \epsilon)} \log \|y\| d\mu(y) < +\infty$ entonces definimos $T_{\mu(y)}(\log \|x - y\|) = U_{\mu}(x) = - \int \log \|x - y\| d\mu(y)$ para $x \in \mathbb{R}^2$. La función $U_{\mu}(x)$ se denomina potencial logarítmico.

Ejemplo 25 Sea $\mu \in L_{Loc}(\Omega)$, $\psi \in D_c(U)$ entonces $T_{\mu}(\Delta\psi)$ ($\Delta\psi$ es el laplaciano de ψ) se llama Laplaciano Distribucional y lo denotaremos $L_{\mu}(\psi)$. Sea $\mu \in C^2(\Omega)$, probemos que $L_{\mu}(\psi) = \int_{\omega} \psi \Delta\mu d\lambda$ (λ es la medida de Lebesgue) además si $\mu \in S(\Omega)$ (μ es sub-armónica) T_{μ} es una distribución positiva en $D_c\Omega$. En efecto, tomemos W (abierto, acotado) tal que $\text{supp } \psi \subset W \subset \overline{W} \subset \Omega$, además consideremos la bola abierta $B_0 \supset W$; de la fórmula de Green

$$\int_{B_0} \{\mu\chi_W \Delta\psi - \psi \Delta(\mu\chi_W)\} d\lambda = \int_{\partial B_0} \mu\chi_W \nabla\psi - \psi \Delta(\mu\chi_W) dv,$$

pero $\chi_W = 0$ en ∂B_0 de donde: $\int_{\Omega} \mu \Delta\psi d\lambda = \int_{\Omega} \psi \Delta\mu d\lambda$.

Consideremos ahora $\mu \in S(\Omega)$ entonces usando una secuencia decreciente $\{s_n\} \subset S(W) \cap C^{\infty}(W)$ (W del mismo modo como fue definido arriba): $s_n \rightarrow s$ puntualmente en W , además $\Delta s_n \geq 0$ de donde $\int_{\Omega} s_n \Delta\psi d\lambda \geq 0$ para $\psi \geq 0$ (lo que se deduce de $L_{\mu}(\psi) = \int_{\Omega} \psi \Delta\mu d\lambda$). Usando la convergencia monótona se obtiene el resultado. Finalmente hay que indicar que usando este último resultado y el Teorema de Riesz se obtiene que existe una única medida μ_S : $L_S(\psi) = \int_{\Omega} \psi d\mu_S$. A la medida $\sigma_m \text{máx}\{1, m - 2\} \mu_S = \mu_R^s$ se conoce como la medida de Riesz z (m es la dimensión del espacio, σ_m es área de la bola S^{m-1}) asociada a la función sub-armónica S . Esta noción de una función asociada a una función positiva y una medida se usará en muchas circunstancias.

Ejemplo 26 Un caso interesante de la medida de Riesz, es dicha medida asociada a la función $\log|f|$ donde f es una función holomorfa en el plano con ceros z_1, \dots, z_l con multiplicidades m_1, \dots, m_l . Resulta que la medida de Riesz es $\mu_R^f = \sum_{i=1}^m m_i \delta_{z_i}$ (véase la Sección [3.2] para los cálculos relacionados a este ejemplo o bien consúltese [2]).

2.4. Corrientes de De Rham

El primer paso en la construcción de la teoría de corrientes es la introducción de ciertos espacios topológico-vectoriales de formas diferenciales análogos a los espacios de funciones. En la subsección siguiente se introduce la definición de corriente así como la estructura topológica del espacio de corrientes además de las operaciones más notables que se definen en estos espacios. En esta sección no se considera ninguna estructura compleja, por lo que se estudia las corrientes definidas en variedades suaves y orientables con coordenadas locales en \mathbb{R}^m .

2.4.1. Espacios topológicos vectoriales de formas diferenciales

Sea M una variedad diferenciable C^{∞} , $m = \dim_{\mathbb{R}} M$. De aquí en adelante asumimos que M es orientable y T_2 . En concordancia con la Sección [2.3] definimos diversos espacios vectoriales de formas diferenciales de acuerdo a la naturaleza de sus coeficientes:

$$\begin{aligned}
C(\bigwedge^p T^*M) &= \{u : u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \quad u_I \in C(M)\}, \\
C^\infty(\bigwedge^p T^*M) &= \{u : u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \quad u_I \in C^\infty(M)\}, \\
C^s(\bigwedge^p T^*M) &= \{u : u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \quad u_I \in C^s(M)\}, \\
\mathcal{K}(\bigwedge^p T^*M) &= \{u : u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \quad u_I \in \mathcal{K}(M) \cap C(M)\}, \\
L_{loc}(\bigwedge^p T^*M) &= \{u : u = \sum_{|I|=p} u_I dx_I \quad u_I \in L_{loc}(M)\}.
\end{aligned} \tag{2.39}$$

Consideremos también, en analogía con la sección anterior: $D(\bigwedge^p T^*M) = C^\infty(\bigwedge^p T^*M) \cap \mathcal{K}(\bigwedge^p T^*M)$ además podemos definir ${}^sD(\bigwedge^p T^*M) = C^s(\bigwedge^p T^*M) \cap \mathcal{K}(\bigwedge^p T^*M)$. Por otro lado, si en vez de M usamos M^c (cuando eso sea posible) entonces podremos también definir todos estos espacios vectoriales para las formas de bigrado (r, s) .

Comentario 22 Los espacios vectoriales definidos arriba están bien definidos de acuerdo a las siguientes operaciones:

$$u + v|_x \stackrel{def}{=} u(x) + v(x) \quad \text{donde } u(x), v(x) \in \bigwedge^p T_x^*M, \quad x \in M \tag{2.40}$$

$$\lambda u|_x \stackrel{def}{=} \lambda u(x) \quad \text{donde } u(x) \in \bigwedge^p T_x^*M, \quad x \in M, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2.41}$$

Pasemos a introducir topologías en los espacios de formas diferenciales, basta para ello seguir el procedimiento para introducir semi-normas expuesto en la sección anterior: Tomando K (compacto) $\subset M$ se define las siguientes semi-normas:

$$u \in \mathcal{K}(\bigwedge^p T^*M) : \|u\|_K^0 = \sup_{x \in K} \{ \max_I \|u_I(x)\| \} \tag{2.42}$$

$$u \in C^\infty(\bigwedge^p T^*M) : \|u\|_K^l = \sup_{x \in K} \{ \max_{I, |\alpha| \leq l} \|D^\alpha u_I(x)\| \} \quad \alpha \in (\mathbb{Z}^+)^m. \tag{2.43}$$

Para $u \in D(\bigwedge^p T^*M)$ se introduce la misma semi-norma que en el caso del espacio $C^s(\bigwedge^p T^*M)$. Definiendo el sistema de entornos para la topología de la misma forma que se hizo para funciones se tiene el siguiente sistema de abiertos:

$$\begin{aligned}
U_E(f, \epsilon) &= \{g \in \mathcal{K}(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^0 < \epsilon, \quad n \in E \subseteq \mathbb{N}\}. \\
U_E(f, \epsilon) &= \{g \in C^\infty(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^l < \epsilon, \quad n \in E \subseteq \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}. \\
U_E(f, \epsilon) &= \{g \in D(K_n) : \|f - g\|_{K_n}^l < \epsilon, \quad n \in E \subseteq \mathbb{N}, l \in \mathbb{N}\}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Estos sistemas de abiertos definen entonces las τ -topologías para los espacios de corrientes.

Comentario 23 Puesto que M se asume de Hausdorff, entonces al igual que para los espacios de funciones se tiene que $C^\infty(\bigwedge_p T^*M)$ y $C^s(\bigwedge_p T^*M)$ tienen una topología que se puede definir por un conjunto contable de normas, lo que implica que es un espacio de Frechet. En el caso de $D(\bigwedge^p T^*M)$ y ${}^sD(\bigwedge^p T^*M)$ se prueba que la topología es inducida por un conjunto finito de normas por lo que los espacios son de Banach aunque no de Frechet. Se puede probar además que $D(\bigwedge^p T^*M)$ es denso en $C^\infty(\bigwedge^p T^*M)$ (véase[97]).

2.4.2. Corrientes de De Rham como funcionales lineales continuas

Siguiendo lo hecho en la sección anterior, consideremos los espacios vectoriales duales a los espacios de formas diferenciales ya definidos.

Definición 51 Una funcional lineal continua definida en el espacio de formas $D(\bigwedge^p T^*M)$ se denomina corriente de dimensión p (o grado $m - p$) sobre M si todas las restricciones $T|_{D^p(K)}$ sobre un compacto cualquiera $K \subset M$ son también funcionales lineales. El espacio lineal formado por todas las corrientes definidas de esta manera se denomina por $D'_p(M)$.

Del mismo modo podemos introducir los otros espacios vectoriales de funcionales lineales continuas a los que denotaremos como ${}^sD'_p(M)$, $C^\infty'_p(M)$, $\mathcal{K}'_p(M)$ y que se definen como los espacios duales a ${}^sD(\bigwedge^p T^*M)$, $C^\infty(\bigwedge^p T^*M)$ y $\mathcal{K}(\bigwedge^p T^*M)$ respectivamente.

Comentario 24 Sea M una variedad C^∞ con $\dim M = m$. Establezcamos la siguiente notación: $D^{m-p}(M) = D'_p(M)$ entonces p se denomina la dimensión de la corriente $T \in D'_p(M)$ y $m - p$ se denomina el grado de $T \in D^{m-p}(M) = D'_p(M)$. Además $\langle T, u \rangle$ denota la acción de una corriente (función lineal continua) sobre una forma diferencial. Sea ahora M una variedad compleja de dimensión m , entonces, en el caso de una corriente de bigrado actuando en un espacio de formas diferenciales de bigrado (p, p) , también se puede hablar de una corriente de bi-dimensión (p, p) y bigrado $(m - p, m - p)$.

Comentario 25 En lo que sigue el concepto de corriente, el cual ha sido definido restringido al espacio $D(\bigwedge^p T^*M)$, será entendido como sinónimo de "funcional lineal" en cierto espacio de formas diferenciales. En realidad esto tiene justificación en el hecho que una funcional de $D(\bigwedge^p T^*M)$ puede extenderse bajo ciertas condiciones a otros espacios más generales, o en otras palabras, de acuerdo a las relaciones de dualidad: $C^\infty(\bigwedge^p T^*M) \subset D(\bigwedge^p T^*M)$, etc.

Ejemplo 27 a) Sea M una variedad suave de dimensión m . La corriente de integración sobre M :

$$\langle [M], \phi \rangle = \int_M \phi, \quad \phi \in D(\bigwedge^m T^*M)$$

$$\langle [M], \phi \rangle = 0, \quad \phi \in D(\bigwedge^p T^*M) \quad (p < m).$$

b) Sea M una variedad suave de dimensión m , $w \in L_{loc}(\bigwedge^p T^*M)$. La corriente $[w]$ de dimensión $m - p$ se define por la regla

$$\langle [w], \phi \rangle = \int_M w \wedge \phi \quad \phi \in D(\bigwedge^m T^*M).$$

c) Sea la corriente T p -dimensional sobre M , $\alpha \in D(\wedge^q T^*M)$ $q \leq p$. La nueva corriente $T \wedge \alpha$ está definida por:

$$\langle T \wedge \alpha, \varphi \rangle = \langle T, \alpha \wedge \varphi \rangle,$$

entonces $\varphi \in D(\wedge^{p-q} T^*M)$ y por consiguiente $T \wedge \alpha$ es una corriente de dimensión $p - q$.

Del mismo modo que para las distribuciones, podemos señalar dos formas equivalentes para la continuidad cuando $M \subset \mathbb{R}^n$ (véase [19]):

Proposición 17 (Continuidad secuencial) Sea $M \subset \mathbb{R}^m$. Una funcional lineal T en $D(\wedge^p T^*M)$ es continua si y sólo si para cada sucesión $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $D(\wedge^p T^*M)$, la sucesión $T(\varphi_n) \rightarrow T(\varphi)$ en \mathbb{C} .

Proposición 18 (Continuidad en el origen) Una funcional lineal T en $D(\wedge^p T^*M)$ es continua si y sólo si para todo compacto $K \subset M$ existe $C > 0$ (existe $l \in \mathbb{N}$ y $C > 0$) tal que para todo $\varphi \in D(\wedge^p T^*M)$ con $\text{supp } \varphi \subset K$ se tiene que:

$$\|T(\varphi)\| \leq C \|\varphi\|_K^l.$$

Pasemos a introducir dos conceptos de importancia:

Definición 52 Sea T una funcional lineal. El orden l de T se define como $l = \text{mín } s$ donde s :

$$|T(\varphi)| \leq C \|\varphi\|_K^s, \quad C > 0.$$

Aquí φ pertenece al espacio donde se aplica la funcional.

Definición 53 El soporte de una corriente $\text{supp } T$ es tal que:

$$\text{supp } T = A \subset M.$$

Donde $T|_{M \setminus A} = 0$.

Probemos ahora la siguiente proposición:

Proposición 19 El dual topológico $C_p^{\infty'}(M)$ es el espacio de funcionales continuas de soporte compacto.

Demostración: En efecto, Sea $T \in C_p^{\infty'}(M)$ entonces $|\langle T, u \rangle| \leq C \max\{\|u\|_{K_j}^s\}, C > 0$ la cual es válida para un número finito de conjuntos compactos $\{K_j\}$. De ahí $\text{supp } T \subset \bigcup_j K_j$.

Recíprocamente sea $T \in D_p'(M)$, tomemos K_j entornos compactos de coordenadas locales tal que $K \subset (\cup K_j)^o$ y $\psi \in D(M)$ tal que $\psi = 1$ en K y ψ es nula fuera de K entonces $\text{supp } \psi \subset \cup K_j$. Sea $u \in C^\infty(\wedge^p T^*M)$ y definamos $\langle T, u \rangle = \langle T, \psi u \rangle$ (lo cual es independiente de ψ), T es por lo tanto continua en $C_p^{\infty'}(M)$ que es lo que se quería probar. \square

Ejemplo 28 Sea la corriente $[w]$ de grado p donde $w \in L_{loc}(\wedge^p T^*M)$ definida en el ejemplo anterior. La aplicación $L_{loc}(\wedge^p T^*M) \rightarrow D_{m-p}'(M)$ definida por la correspondencia $w \rightarrow T_w$ es inyectiva. Luego de topologizar L_{loc} (véase [99]) se puede probar que dicha aplicación es continua en la topología débil.

Comentario 26 En realidad el concepto de orden de una corriente introducido aquí no coincide con el concepto de orden introducido originalmente por De Rham (véase [19]). En su trabajo el concepto de orden queda definido de tal modo que la clase de corrientes de orden cero abarca las demás clases de corrientes de órdenes $l > 0$.

Comentario 27 Para corrientes definidas en una variedad paracompacta M se puede establecer, de manera completamente análoga al caso de las distribuciones, que propiedades tales como el orden y la nulidad de una corriente son tanto propiedades locales como globales (véase [88]).

Definamos el complemento de los multi-índices, a usarse más adelante.

Definición 54 Sea el multi-índice $I \in \{k; p\}$ definido en la variedad de dimensión k . Su complemento \hat{I} se expresa como $\hat{I} = \{1, 2, \dots, k\} \setminus I$.

De esta definición, dada una base $\{dx_i\}_{i=0}^k$ en T^*M se tiene que $dx_I \wedge dx_{\hat{I}} = (-1)^{I, \hat{I}} dV$ donde I, \hat{I} es la paridad de la permutación de I con \hat{I} .

Para concluir esta sub-sección establezcamos el siguiente hecho de importancia:

Proposición 20 Sea la funcional $T = \sum_{I \in \{m, p\}} T_I dx_I$ una forma diferencial que tiene coeficientes distribucionales $T_I \in D'(M)$ expresados localmente entonces $T \in D'_p(M)$. Recíprocamente, para $T \in D'_p(M)$ la corriente puede representarse localmente como una forma diferencial con coeficientes distribucionales.

Demostración: Para probar el resultado debe tenerse en cuenta que los espacios $D'_0(M)$ y $D(M)'$ son isomorfos, esto es, debido a la aplicación biyectiva natural entre estos espacios.

Sea $T \in D'_m(M)$ (siendo $\dim M = m$), tomando entonces una función test ϕ se tiene que $\langle T, \phi dV \rangle = a dV$ además, puesto que se puede considerar que $T \in D'(M)$ entonces $\langle T, \phi \rangle = a \in \mathbb{C}$.

Probemos ahora que $T = \sum_{I \in \{m; p\}} T_I dx_I$ es una funcional lineal en el espacio de formas diferenciales $D(\wedge^{m-p} T^*M)$.

Consideremos $\phi = \sum_{\hat{I} \in \{m, m-p\}} \phi_{\hat{I}} dx_{\hat{I}}$ donde $T_{\hat{I}}$ son distribuciones.

Entonces: $T(\phi) = \sum_{I, \hat{I}} T_I(\phi_{\hat{I}}) dx_I \wedge dx_{\hat{I}} = \sum_{I, \hat{I}} \{I, \hat{I}\} T_I(\phi_{\hat{I}}) dV$ lo cual nos lleva a afirmar que T es

una funcional lineal continua, ya que los coeficientes son distribuciones.

Pasemos al enunciado recíproco:

Definamos la colección de índices:

$$\{m; p\}_T = \{I : \langle T, dx_I \rangle \neq 0\}, \quad \text{donde } I \in \{m, p\}.$$

Sea ahora $\langle T, \phi_I dx_I \rangle = a_I = a_I dv$, $\forall I \in \{m; p\}_T$ entonces T_I definida tal que $T|_{dx_J=0, J \neq I} = T_I dx_I$ con $I, J \in \{m, p\}$ $T_I \in D'(M)$ es una distribución donde $T_I dx_I \wedge \phi_J dx_J = T(\phi_J) dv$.

Luego en el espacio de funcionales usando la suma directa de sub-espacios tenemos que:

$$T = \sum_{I \in \{m, p\}} T_I dx_I$$

y T_I son distribuciones. □

De este hecho se desprende la representación de una corriente definida en una variedad compleja en coordenadas locales. En efecto, sea U en M (variedad compleja de dimensión m) un entorno con coordenadas locales x_1, \dots, x_k . Tomemos además T de dimensión p luego:

$$T|_U = \sum_{|I|=m-p} T_I dX_I \text{ donde } I = (i_1, \dots, i_{m-p}), i_1 < i_2 < \dots < i_{m-p}$$

$$\langle T_I dX_I, \phi_J dX_J \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } I \cup J \neq \{1, \dots, m\} \\ (-1)^{\sigma(I,J)} \langle T_I, \phi_J \rangle & \text{si } I \cup J = \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

2.4.3. Operaciones en el espacio de corrientes

Derivada exterior-Es posible extender o inducir ciertas operaciones en espacios de formas diferenciales a sus duales.

Sea $T \in {}^s D'_p(M)$ entonces se define $dT \in {}^{s+1} D'_{p-1}(M)$, $\langle dT, u \rangle = (-1)^{q+1} \langle T, du \rangle$ donde $u \in {}^{s+1} D^{p-1}(M)$, $p + q = m = \dim M$. Además usando la representación de T como forma diferencial se tiene la fórmula explícita para la derivada exterior de T :

$$dT = \sum_{J \in \{m,p\}} \sum_{i=1}^k \frac{\partial T_J}{\partial x_i} dx^i \wedge dx^J,$$

T_J son distribuciones en $D'(M)$.

El operador d en el espacio ${}^s D'_p(M)$ es un operador lineal continuo. Verificar la linealidad es trivial. Probemos la continuidad: sean $T_n \rightarrow T$ y $\langle dT_n, \phi \rangle = (-1)^{q+1} \langle T_n, d\phi \rangle$. Donde $\phi \in D^{s'}(\wedge^q T^*M)$ y $q = m - p$.

Pasando al límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle dT_n, \phi \rangle = (-1)^{q+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T_n, d\phi \rangle = (-1)^{q+1} \langle T, d\phi \rangle = \langle dT, \phi \rangle.$$

Lo que prueba que $dT_n \rightarrow dT$

Ejemplo 29 De la Fórmula de Stokes se tiene que $T_{dw} = dT_w$ para $w \in C^\infty(\wedge^q T^*M)$. En efecto, sea $T_{dw} \in D'_{m-q-1}(M)$ y tomemos $u \in D^{m-q-1}(M)$, entonces, usando dicho teorema:

$$0 = \int_M d(w \wedge u) = \int_M dw \wedge u + (-1)^q \int_M w \wedge du,$$

de donde se deduce la igualdad buscada.

Otra aplicación de la fórmula de Stokes establece que $\int_Z du = \int_{\partial Z} u$ es decir:

$\langle [Z], du \rangle = \langle [\partial Z], u \rangle$ donde $Z \subset M$ (subvariedad de M cerrada y orientada, $\dim Z = p$) $u \in D(\wedge^p T^*M)$ de: $\langle d[Z], u \rangle = (-1)^{q+1} \langle [Z], du \rangle$ de donde: $d[Z] = (-1)^{m-p+1} [\partial Z]$.

Introduzcamos la importante definición:

Definición 55 Una corriente $T \in D'_p(M)$ se llama cerrada si $dT = 0$. Aquí el operador diferencial está definido en coordenadas canónicas.

Nuevamente si M es un espacio de Hausdorff paracompacto se tiene que la propiedad de cerradura es una propiedad global y local. Más precisamente:

Proposición 21 Sea $T \in D'_p(M)$ donde M es paracompacta. T es cerrada en M si y sólo si para todo punto $x \in M$ existe un abierto U tal que $T|_U$ es cerrada.

Demostración: Es sólo necesario establecer que de la cerradura local se deduce la cerradura global. Usando una partición de la unidad $\{\alpha_i\}$ subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ se tiene que:

$$\langle dt, \phi \rangle = \langle dT, \sum_i \alpha_i \phi \rangle = \sum_i \langle dT|_{U_i}, \alpha_i \phi \rangle = 0.$$

□

Residuos- Volvamos a la relación $dT_\omega = Td_\omega$ para $\omega \in C^\infty(\wedge^p T^*M)$. En general, para un ω dado pueden existir puntos donde esta igualdad no se cumple. Es de interés en ciertas aplicaciones conocer la diferencia entre estas dos magnitudes cuando no se cumple la igualdad. Introduzcamos la siguiente:

Definición 56 Sea $\omega \in C^\infty(\wedge^p T^*(M \setminus S))$. La cantidad $R(\omega)$ en $dT_\omega = Td_\omega + R(\omega)$ se denomina residuo en $S \subset M$.

Evidentemente para $x \in M \setminus S$, $R(f) = 0$ para algún entorno U_x , entonces $\text{supp } R(f) \subset S$.

Ejemplo 30 Tomemos $\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z}$ el núcleo de Cauchy en \mathbb{C} . En este caso $S = \{0\} \subset \mathbb{C}$ se tiene además $d\omega = \bar{\partial}\omega = 0$.

De aquí considerando que $Td_\omega = T\bar{\partial}\omega = 0$ para $z \neq 0$ Entonces, $dT_\omega = \bar{\partial}T_\omega$ implica que

$$\langle T_\omega, \bar{\partial}\varphi \rangle = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} \wedge \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} d\bar{z}.$$

Por otro lado, de la versión en términos de formas diferenciales de la fórmula de Cauchy (véase la Sección [2.1]), se tiene que para $\varphi \in D(\mathbb{C})$

$$\varphi(0) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi i} \frac{dz \wedge d\bar{z}}{z} \frac{\partial\varphi(z)}{\partial\bar{z}} + \int_{\partial\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi i} \frac{\varphi(z)}{z} dz,$$

y el segundo miembro se hace cero debido al soporte compacto de φ

De aquí se concluye que:

$$\bar{\partial}(T_\omega) = \delta_0 = R(\omega),$$

lo cual puede considerarse una expresión en términos de corriente de la fórmula de Cauchy. Del mismo modo pueden considerarse expresiones análogas en \mathbb{C}^k que se expresan en términos del núcleo de Bochner-Martinelli (véase [69]).

Producto cuña- El producto cuña de una corriente con una forma diferencial se define como una nueva corriente de grado mayor que la corriente inicial.

Definición 57 (Producto cuña) Sea $T \in D'_p(M)$ y $v \in C(\wedge^r T^*M)$ donde $r < p$. El producto cuña $T \wedge v \in D'_{p-r}(M)$:

$$\langle T \wedge v, u \rangle = \langle T, v \wedge u \rangle,$$

donde $u \in D'(\wedge^{p-r} T^*M)$.

La definición tiene sentido pues $v \wedge u$ es continuo en la topología C^s . De ahí se establece que la aplicación ${}^sD'_p(M) \rightarrow {}^sD'_{p-r}(M)$ definida como $T \mapsto T \wedge v$ donde v es una forma diferencial pre-fijada en ${}^sC(\wedge^r T^*M)$. En efecto: Sea $T \wedge v \in U_E(T_0 \wedge v, \epsilon)$ entonces para $\varphi \in E$ se tiene: $\|(T \wedge v - T_0 \wedge v)(\varphi)\| = \|(T - T_0, v \wedge \varphi)\|$ de ahí $T \in U_{E'}(T_0, \epsilon)$ donde $E' = \{\varphi' / \varphi' = v \wedge \varphi\}$. Se verifica además que:

$$d(T \wedge v) = dT \wedge v + (-1)^{\deg T} T \wedge dv.$$

Del mismo modo se puede establecer que:

$$v \wedge T = (-1)^{q+r} T \wedge v, \quad (q + p = m).$$

Imagen directa (push-forward)- Sea M, \tilde{M} variedades diferenciales orientadas; $k = \dim M$, $\tilde{k} = \dim \tilde{M}$. Además $F : M \rightarrow \tilde{M}$ es un mapa C^∞ . Como es sabido la aplicación imagen inversa ${}^sD(\wedge^p T^*\tilde{M}) \rightarrow {}^sD(\wedge^p T^*M)$ es continua en la topología C^s y $\text{supp } F^*u \subset F^{-1}(\text{supp } u)$ (donde $u \in {}^sD(\wedge^p T^*\tilde{M})$) aún cuando en general F^*u no tiene soporte compacto. Sea entonces $T \in {}^sD'_p(M)$ y sea $F|_{\text{supp } T}$ propia, de tal modo que para todo compacto $K \subset \tilde{M}$ la aplicación lineal $u \rightarrow \langle T, F^*u \rangle$ está bien definida en $\text{supp } T \cap F^{-1}K$ y es continua en ${}^sD^p(\tilde{M})$, denotémosla por $F_*T \in {}^sD'_p(\tilde{M})$ y denominémosla como la imagen directa (push-forward) de T por F .

Probemos que la aplicación directa ${}^sD'_p(M) \rightarrow {}^sD'_p(\tilde{M})$ es continua en la topología de ${}^sD'_p(M)$. En efecto, sea $F_*T \in U_E(F_*T_0, \epsilon)$ donde T y $T_0 \in {}^sD'_p(M)$ entonces para $\varphi \in E$: $\|\langle F_*T - F_*T_0, \varphi \rangle\| = \|\langle T - T_0, F^*\varphi \rangle\| \leq \epsilon$ de ahí $T \in U_{F^*E}(T_0, \epsilon)$ donde $F^*E = \{u/u = F^*v, v \in E\}$. De la continuidad del pull-back de formas diferenciales se tiene que $U_{F^*E}(T_0, \epsilon)$ es un entorno de T_0 .

Las siguientes propiedades son fácilmente demostrables:

Proposición 22 Para todo $T \in {}^sD'_p(M)$ tal que $F|_{\text{supp } T}$ es propia, F_*T es tal que:

- $\text{supp } F_*T \subset F(\text{supp } T)$
- $d(F_*T) = F_*(dT)$
- $F_*(T \wedge F^*g) = (F_*T) \wedge g$ para todo $g \in {}^sC(\wedge^q T^*\tilde{M})$
- Si $G : \tilde{M} \rightarrow N$ es un mapa de clase C^∞ tal que $G \circ F|_{\text{supp } T}$ es propia, entonces $G_*(F_*T) = (G \circ F)_*T$.

Ejemplo 31 Sea T_u la corriente asociada a $u \in D(\wedge^p T^*M)$, donde $\dim M = k > p$. Sea $F : M \rightarrow \tilde{M}$ propia en $\text{supp } T_u$, esto equivale a que sea propia en $\text{supp } u$. Puesto que la imagen directa verifica: $\langle F_*T_u, v \rangle = \langle T_u, F^*v \rangle$ entonces:

$$F_*[u](v) = F_* \int_M u \wedge v = \int_{\tilde{M}} F_*u \wedge v = \int_M u \wedge F^*v.$$

Sea ahora $F : M \rightarrow \tilde{M}$ una submersión, y sea $d_x F : T_x M \rightarrow T_{F(x)} \tilde{M}$ también suryectiva. Sea u una p -forma diferenciable en M con coeficientes en L'_{loc} y sea $F|_{\text{supp } u}$ propia, entonces $F_*T_u \in D'_{k-p}(\tilde{M})$ ($\dim M = k, \dim \tilde{M} = \tilde{k}$). Además el grado de F_*T_u es $k - (k - p)$. Probemos la siguiente fórmula:

$$F_*u(z) = \int_{w \in F^{-1}(z)} u(w).$$

En efecto, de la definición de F_*T_u basta establecer: $\int_M u \wedge F^*v = \int_{z \in \tilde{M}} \left(\int_{w \in F^{-1}(z)} u(w) \right) \wedge v(z)$ para todo $v \in D(\wedge^p T^*\tilde{M})$.

Usemos el Teorema del Rango para la submersión de M en \tilde{M} : $M \cong A \times \tilde{M}$ donde $A \cong F^{-1}(z)$, $F = \text{proy}_2$ y también las fibras se orientan de tal modo que la orientación de M es el producto de la orientación de A y \tilde{M} . Sea $\dim A = k - \tilde{k}$. Sea además $(t, z) \in A \times \tilde{M}$ entonces la aplicación pull-back está inducida por $F = \text{proy}_2$:

$$\int_M u(w) \wedge F^*v(z) = \int_{A \times \tilde{M}} u(t, z) \wedge v(z).$$

Del Teorema de Fubini:

$$\int_{A \times \tilde{M}} u(t, z) \wedge v(z) = \int_{z \in \tilde{M}} \left[\int_{t \in A} u(t, z) \right] \wedge v(z),$$

donde la imagen directa de $u(w)$ se obtiene al integrar la forma equivalente

$$u(t, z) = \sum_{I, J} u_{I, J}(t, z) dt_I \wedge dz_J$$

y $|I| + |J| = p$, con la fórmula: $F_*u(w) = \int_{t \in A} u(t, z)$.

De aquí se obtiene que el grado de F_*T_u es $p - (k - \tilde{k})$, además de la expresión anterior se observa que F_*u tiene coeficientes L'_{loc} en \tilde{M} si u los tiene en M y el mapa $u \rightarrow F_*u$ es continuo en la topología C^s .

Imagen inversa (pull back)- Pasemos ahora a discutir el pull-back de corrientes. Sea al igual que arriba dos variedades diferenciables M, \tilde{M} y una aplicación F diferenciable entre ellas. Si intentamos dar la definición general de pull-back de corrientes F^*T para $T \in D'_p(\tilde{M})$ de modo que:

$$\langle F^*T, v \rangle = \langle T, F_*v \rangle, \quad v \in D\left(\wedge^p T^*M\right).$$

Se tiene que esta definición tropieza con serias dificultades puesto que no existe una definición general de aplicación directa para formas diferenciales. Veamos, sin embargo, algunos casos donde se define el pull-back de una corriente:

- Sea $T = [Z]$, donde Z es una sub-variedad de \tilde{M} de clase C^1 . Luego $F^{-1}(Z)$ es una subvariedad de M y tiene una orientación natural dada por el isomorfismo:

$$T_z M / T_z F^{-1}(Z) \rightarrow T_{F(z)} \tilde{M} / T_{F(z)}(Z)$$

inducido por $d_z F$ en cada punto $z \in Z$. Probemos que $[F^{-1}(Z)]$ es una corriente en M cuando F es una submersión. En efecto, tomando la expresión de $F_*u(z)$ se tiene que:

$$\langle F^*[z], u \rangle = \langle [z], F_*u \rangle = \int_{z \in Z} F_*u(z) = \int_{(t, z) \in A \times Z} u(t, z) = \int_{F^{-1}(z)} u,$$

(usando una partición de la unidad en M y tomando nuevamente $M = A \times \tilde{M}$ y $F = \pi_2$) de donde se deduce que $\int_Z F_*u = \int_{F^{-1}(Z)} u = \langle [F^{-1}(z)], u \rangle$, y luego $F^*[z] = [F^{-1}(z)]$.

En general sea $F : M \rightarrow \tilde{M}$ una submersión. Podemos definir $F^*T \in {}^s D^q(M)$ de una corriente $T \in {}^s D^q(\tilde{M})$ como $\langle F^*T, u \rangle = \langle T, F_*u \rangle$, $u \in {}^s D^{q+k-\tilde{k}}(M)$ ($\dim M = k$, $\dim \tilde{M} = \tilde{k}$). Bajo esta definición $\dim F^*T = \dim T + k - \tilde{k}$ y además: $d(F^*T) = F^*(dT)$, $F^*(T \wedge u) = F^*T \wedge F^*u$, $u \in {}^s D(\tilde{M})$.

- Sea T_u donde $u \in {}^s D(\wedge^p T^*M^c)$, y sea $F : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa holomorfo (o complejo C^∞). El pull-back está definido como $T_{u \circ F} = \int_{F^{-1}(\tilde{M})} u \circ F$ donde $F^{-1}\tilde{M}$ es una subvariedad compleja orientable, tal como se discutió en el ejemplo previo.

- En la Sección [??] estableceremos que para una función plurisub-armónica $u : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{C}$ se tiene que la corriente $T = dd^c u$ es cerrada y positiva (para el concepto de positividad véase la Sección [2.5]). Sea $f : M \rightarrow \tilde{M}$ un mapa holomorfo entre dichas variedades entonces el pull-back se define como: $F^*T = dd^c(u \circ F)$.

Esta aplicación está bien definida pues $u \circ f$ es también una función plurisub-armónica (véase la Sección [2.6]), por lo que $dd^c u \circ f$ tiene las mismas propiedades que la corriente inicial.

2.4.4. Regularización de corrientes

Puesto que una corriente tiene una representación local única en términos de una forma diferencial con coeficientes distribucionales, se tiene que la regularización de corrientes tiene localmente un enfoque análogo al empleado para las distribuciones.

Sea una corriente $T \in D'_p(M)$, M una variedad C^s ($s > 0$). Construyamos la sucesión de corrientes suaves $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset D'_p M$ tal que $T_n \rightarrow T$ en la topología débil.

Definamos ahora, con ayuda de las formas diferenciales regularizantes, la corriente T_ϵ puede definirse como:

$$T_\epsilon(\varphi) = T(\varphi_\epsilon), \quad \varphi \in D(\wedge^p T^*M) \text{ y } \varphi_\epsilon = \varphi * \chi_\epsilon,$$

y χ_ϵ es una función regularizante tal como se definió en la Sub-sección [2.3.2]. Con ayuda de la representación local de una corriente $T \in D'_p(M)$ como una p -forma diferencial con coeficientes distribucionales se tiene que:

$$T_\epsilon = T * \chi_\epsilon = \sum_I (T_I * \chi_\epsilon) dx_I, \tag{2.45}$$

la cual está definida en $\Omega_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^m; d(x, \Omega^c) > \epsilon\}$ (Ω es abierto).

Enunciemos el teorema de regularización:

Teorema 35 *La sucesión de corrientes T_ϵ ($\epsilon > 0$), converge a $T \in D'_p(M)$ en la topología débil del espacio de corrientes cuando $\epsilon \rightarrow 0$. En particular, la sucesión $T_n = T * \chi_{1/n}$ converge débilmente a T .*

Para efectuar la demostración basta seguir punto por punto la demostración efectuada para el teorema de regularización de distribuciones, véase la Sub-sección [2.3.2].

Este teorema establece que la clase de corrientes regularizantes en $D'_p(\Omega)$ es denso.

2.5. Corrientes positivas y cerradas

2.5.1. Positividad en el espacio de corrientes

Definición 58 Una corriente $T \in D'_{p,p}(M)$ se dice que es positiva (respectivamente fuertemente positiva) si $\langle T, u \rangle \geq 0$ para todas las formas test (es decir elementos de $D(\wedge^{p,p} T^*M)$) que son fuertemente positivas (respectivamente positivas) en cada punto. El conjunto de corrientes positivas (respectivamente fuertemente positivas) de bidimensión (p, p) se denotará: ${}^+D'_{p,p}(M)$ (respectivamente ${}^{++}D'_{p,p}(M)$).

Comentario 28 De su definición se tiene que la positividad fuerte es una propiedad local y que los conjuntos ${}^{++}D'_{p,p}(M) \subset {}^+D'_{p,p}(M)$. Ambos conjuntos son conos convexos cerrados con respecto a la topología débil. Por otro lado la positividad tomada como propiedad local puede ser extendida en un espacio que admita la propiedad de para-compacidad:

Proposición 23 Sea M una variedad paracompacta. $T \in D'_{p,p}(M)$ es positiva si y sólo si para todo $x \in M$, existe $V_x: T|_{V_x}$ es positiva.

Demostración: Sea $z \in M$ tal que $T|_{U_z}$ es positiva, donde U_z es un entorno de z . Sea $\{U_\alpha\}$ un cubrimiento localmente finito de M y sea $\{\phi_\alpha\}$ la partición de la unidad subordinada a $\{U_\alpha\}$. Consideremos una forma test positiva ψ , luego: $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, \sum_\alpha \phi_\alpha \psi \rangle = \sum_\alpha \langle T, \phi_\alpha \psi \rangle = \sum_\alpha \langle T|_{U_\alpha}, \phi_\alpha \psi \rangle \geq 0$. \square

Equivalentemente, es posible definir una corriente positiva basándonos en el concepto de distribución positiva:

Definición 59 $T \in D'_{p,p}(M)$ es positiva (fuertemente positiva) si y sólo si $T \wedge u \in D'_{0,0}(M)$ es una distribución positiva para todas las formas fuertemente positivas (positivas) $u \in D(\wedge^{p,p} T^*M)$.

Proposición 24 Las dos definiciones de positividad para corrientes son equivalentes.

Demostración: Establezcamos el resultado para las formas positivas; en el caso de las formas fuertemente positivas el resultado se establece en forma completamente análoga. Sea una corriente $T \in D'_{p,p}(M)$ que cumple la primera definición. Tomemos ahora el producto cuña $T \wedge u$ y también una función test α positiva, entonces $\langle T \wedge u, \alpha \rangle = \langle T, \alpha u \rangle$. Pero αu es una forma fuertemente positiva tipo test por lo que $\langle T \wedge u, \alpha \rangle = \langle T, \alpha u \rangle \geq 0$ de lo cual se tiene que $T \wedge u$ es una distribución positiva. Tomemos ahora T que satisface la segunda definición y sea u una forma fuertemente positiva. De la condición: $\langle T \wedge u, \alpha \rangle \geq 0$ (α forma test) se tiene que: $\langle T \wedge u, \alpha \rangle = \langle T, \alpha u \rangle$ y puesto que u es una forma fuertemente positiva arbitraria se tiene la primera definición de positividad. \square

Escribamos las corrientes positivas de la siguiente forma cómoda para los cálculos:

$$T = \sigma_{k-p} \sum T_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \quad I, J \in \{k; k-p\}, \quad (2.46)$$

si $T \in {}^+D_{p,p}(M)$ ($\dim M = k$).

Sea $u = \sigma_p \sum_{I',J'} u_{I',J'} dz_{I'} \wedge d\bar{z}_{J'}$ donde $I', J' \in \{k; p\}$ y efectúemos los cálculos para $\langle T, u \rangle$:

$$\langle T, u \rangle = \sigma_p \sigma_{k-p} (-1)^{p(k-p)} \sum_{I,J} \sum_{I',J'} T_{I,J} (u_{I',J'}) dz_I \wedge dz_{I'} \wedge d\bar{z}_J \wedge d\bar{z}_{J'} =$$

$$= \sum_{I, \hat{I}, J, \hat{J}} \{I, \hat{I}\} \{J, \hat{J}\} T_{I, J}(u_{\hat{I}, \hat{J}}) dV = \sum_{I, J} \{I, \hat{I}\} \{J, \hat{J}\} T_{I, J}(u_{\hat{I}, \hat{J}}) dV$$

donde $\{I, \hat{I}\}, \{J, \hat{J}\}$ representa la signatura de las permutaciones y dV es el elemento de volumen en \mathbb{C}^k .

Si u es una forma fuertemente positiva, entonces tomando un I, J fijo perteneciente a la colección de multi-índices de T para \hat{I}, \hat{J} que pertenece a la colección de índices de u se tiene:

$$\sigma_{k-p} dz_I \wedge d\bar{z}_J \wedge u = u \wedge \sigma_{k-p} dz_I \wedge d\bar{z}_J = \{I, \hat{I}\} \{J, \hat{J}\} u_{\hat{I}, \hat{J}} dV = \tau_{I, J} dV$$

donde $\tau_{I, J} \geq 0$. Finalmente, para T positiva y u fuertemente positiva, se obtiene la fórmula:

$$\langle T, u \rangle = \sum_{I, J} T_{I, J}(\tau_{I, J}) dV.$$

De donde para las distribuciones $T_{I, J}$ y los coeficientes tipo test $\tau_{I, J} = \{I, \hat{I}\} \{J, \hat{J}\} u_{\hat{I}, \hat{J}}$ asociados a cualquier forma fuertemente positiva, se cumple que:

$$\sum_{I, J} T_{I, J}(\tau_{I, J}) \geq 0.$$

Ya que $\tau_{I, J}$ es arbitraria se tiene que $\sum_{I, J} T_{I, J} \geq 0$.

Definición 60 Una corriente se denomina real si $T = \bar{T}$.

Proposición 25 Una corriente positiva es real.

Demostración: Sea $T \in {}^+D'_{p,p}(M)$ y tomemos una forma test u fuertemente positiva con coeficientes $\tau_{I, J}$. Como $\langle T, u \rangle = \sum T_{I, J}(\tau_{I, J}) dv \geq 0$. De la misma forma $\langle \bar{T}, \bar{u} \rangle = \sum T_{I, J}(\tau_{I, J}) dv$ pero como $\bar{u} = u$ entonces

$$\langle T, u \rangle = \langle \bar{T}, u \rangle.$$

Siendo u arbitrario se concluye que $\bar{T} = T$. □

Introduzcamos la noción más importante de esta sección:

Definición 61 Una corriente $T \in D'_{p,p}(M)$ se denomina cerrada positiva si además de satisfacer la condición de positividad se verifica que $dT = 0$.

De la representación de una corriente cerrada positiva como forma diferencial de coeficientes distribucionales se tiene que:

$$dT = \sigma_{k-p} \sum_{I, J} \sum_m \frac{\partial T_{I, J}}{\partial z_m} dz_m \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J + \sigma_{k-p} \sum_{I, J} \sum_n \frac{\partial T_{I, J}}{\partial \bar{z}_n} d\bar{z}_n \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J,$$

de donde para $m, n \in (I \cup J)^c$ se tiene que

$$\frac{\partial T_{I, J}}{\partial z_m} = \frac{\partial T_{I, J}}{\partial \bar{z}_n} = 0.$$

Ejemplo 32 En la Sección [2.6] se ha probado que para $u \in PSA(M) \cap L'_{loc}(M)$ (M variedad compleja), $T = dd^c u$ es una corriente positiva de bigrado $(1,1)$. Mas aún es inmediato que $dT = 0$. Más adelante (véase la Sección [3.3]) se probará el resultado recíproco.

Ejemplo 33 En la Sección [3.3] estableceremos el siguiente resultado: Sea $Z \subset M$ una subvariedad compleja orientada de dimensión p , y además $T = [Z]$, entonces $T \in {}^+ D'_{p,p}(M)$. Con ayuda del Teorema de Stokes se probó que $d[Z] = \pm[\partial Z] = 0$ por lo que $[Z]$ es una corriente cerrada y positiva de bigrado $(k-p, k-p)$.

2.5.2. Caracterizaciones y propiedades de las corrientes positivas

Usaremos la siguiente notación: $\{I\}$ denotará el conjunto de multi-índices de la forma diferencial $u = \sum_I u_I dx_I$, siempre y cuando esté claro que se está hablando de los multi-índices de dicha forma; si es que hay ambigüedad se escribirá: $\{I\}_u$. Por otro lado, $\{\hat{I}\}$ denotará el conjunto de multi-índices complementarios a los de la forma u . Todo lo dicho se repite para los multi-índices I, J para la forma de bigrado $\sum u_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J$.

Proposición 26 $T \in {}^+ D'_{p,p}(M)$ es de orden 0, esto es, sus coeficientes $T_{I,J}$ son medidas complejas. Además sus coeficientes satisfacen:

$$\overline{T_{I,J}} = T_{J,I} \quad (|I| = |J| = n - p).$$

Más aún $T_I \geq 0$ y además:

$$\lambda_I \lambda_J |T_{I,J}| \leq \sum_L \lambda_L^2 T_{L,L},$$

donde $\{I\} \cap \{J\} \subset \{L\}$, λ_i son coeficientes arbitrarios y $\lambda_I = \prod_{i \in I} \lambda_i$.

Demostración: Apliquemos la corriente T a una forma test fuertemente positiva del tipo $\sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{I}}$ ($f \geq 0$) donde I es fijo. Luego $T_{I,I} dV = T \wedge \sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{I}} \geq 0$ por lo que T_I es una distribución positiva o equivalentemente una medida positiva.

Por otro lado, apliquemos la corriente T a una forma de tipo $\sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{J}}$, donde I, J son multi-índices fijos. Efectuando operaciones:

$$T_{I,J} dV = \pm T \wedge \sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{J}}.$$

Transformemos $\sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{J}}$ adecuadamente:

$$\sigma_p dz_{\hat{I}} \wedge d\bar{z}_{\hat{J}} = \bigwedge_{1 \leq s \leq p} dz_{i_s} \wedge d\bar{z}_{j_s}.$$

Usando el lema de descomposición en formas del tipo $\frac{i}{2} \alpha \wedge \bar{\alpha}$ se obtiene:

$$= \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p} \epsilon_\alpha \gamma_\alpha = \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p} \frac{1}{4^p} \bigwedge_{1 \leq s \leq p} \frac{i}{2} (dz_{i_s} + i^{\alpha_s} dz_{j_s}) \wedge \overline{(dz_{i_s} + i^{\alpha_s} dz_{j_s})}.$$

Entonces:

$$T_{I,J} dV = \pm \sum_{\alpha \in (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^p} \frac{1}{4^p} T \wedge \gamma_\alpha.$$

De la hipótesis, cada $T \wedge \gamma_\alpha$ es una medida positiva, por lo tanto $T_{I,J}$ es una medida compleja y:

$$\begin{aligned}
|T_{I,J}|dV &\leq \frac{1}{4^p} \sum_{\alpha} T \wedge \gamma_{\alpha} = \frac{1}{4^p} T \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} 2i(dz_{i_s} \wedge d\bar{z}_{i_s} + dz_{j_s} \wedge d\bar{z}_{j_s}) \\
&= \frac{1}{2^p} T \wedge \bigwedge_{1 \leq s \leq p} (idz_{i_s} \wedge d\bar{z}_{i_s} + idz_{j_s} \wedge d\bar{z}_{j_s}).
\end{aligned}$$

El último producto cuña es una suma de a lo más 2^p términos, cada uno de los cuales es de la forma $\sigma_p dz_{\hat{L}} \wedge d\bar{z}_{\hat{L}}$ con $|\hat{L}| = p$, $\hat{L} \in \{\hat{I}\} \cup \{\hat{J}\}$. Puesto que $T \wedge \sigma_p dz_{\hat{L}} \wedge d\bar{z}_{\hat{L}} = T_{L,L} dV$ y además $\{L\} \supset \{I\} \cap \{J\}$ se tiene que:

$$|T_{I,J}| \leq \sum_{I \cap J \subset L \subset I \cup J} T_{L,L}.$$

Es decir T está acotada por medidas positivas las cuales son a su vez de orden cero. Si tomamos un cambio de coordenadas $z = Aw$, $(z_1, z_2, \dots, z_k) = (\lambda_1 w_1, \dots, \lambda_k w_k)$; $\lambda_i > 0$. En el nuevo sistema de coordenadas la corriente T se transforma en A_*T y sus coeficientes se convierten en $\lambda_I \lambda_J T_{I,J}(Aw)$. Por lo que se verifica la desigualdad buscada para $\lambda_i > 0$. El caso $\lambda_i = 0$ se puede obtener pasando al límite. \square

Comentario 29 Puesto que de lo anterior se tiene que T es de orden 0, se define la medida de masa T como $\|T\| = \sum_{I,J} |T_{I,J}|$ (donde $\|T\|$ depende del sistema de coordenadas elegido). Del Teorema de Radon-Nikodym se puede escribir $T_{I,J} = t_{I,J} \|T\|$ donde $t_{I,J}$ es una función de Borel tal que $\sum |t_{I,J}| = 1$.

Por lo tanto se tiene: $T = \|T\|t$ donde $t = \sigma_{k-p} \sum t_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_k$.

Definida de esta forma T es positiva (fuertemente positiva) si la forma $t \in \bigwedge^{k-p, k-p} T^*M$ es positiva (fuertemente positiva) en $\|T\|$ -ctp de M . La suficiencia es trivial; para la necesidad se tiene que si T es positiva (fuertemente positiva) y $\{u_j\}$ es una secuencia de formas con coeficientes constantes en $\bigwedge^{p,p} T^*M$ la cual es densa en el conjunto de formas fuertemente positiva (positivas), luego $T \wedge u_j = \|T\|t \wedge u_j$ por lo que $t \wedge u_j$ tiene que ser una forma de bigrado (k, k) positiva a excepción quizá de un conjunto de medida nula. De la densidad, obtenemos que t es positiva (fuertemente positiva) a excepción de un conjunto de medida nula.

En particular, del último teorema se desprende que si T es positiva (fuertemente positiva) en una carta entonces la convolución $T * \chi_{\epsilon}$ es positiva (fuertemente positiva) en Ω_{ϵ} . De la misma forma establezcamos el siguiente corolario:

Corolario 8 Si $T \in {}^+D'_{p,p}(M)$ y $v \in C^0(\bigwedge^{s,s} T^*M)$ son positivas, una de ellas (o bien ambas) son fuertemente positivas, entonces el producto cuña $T \wedge v$ es una corriente positiva (fuertemente positiva).

Aprovechemos el concepto de medida de masa $\|T\|$ para dar una definición que será usada constantemente luego:

Definición 62 Se dice que una corriente T definida en una variedad compleja M carga un conjunto $U \subset M$ si $\|T\|(U) \neq 0$. En caso contrario se dice que la corriente no carga U .

Introduzcamos una noción asociada al orden cero de una corriente positiva.

Definición 63 Una corriente se denomina normal si tanto T como dT son de orden cero.

Puesto que para una corriente positiva cerrada $dT = 0$ entonces ésta es normal. Establezcamos otra caracterización de una corriente positiva:

Teorema 36 Una corriente $T \in {}^+D'_{p,p}(M)$ es positiva si y sólo si

- $\overline{T_{I,J}} = T_{J,I}$
- para todo $\xi^j \in \mathbb{C}^p$: $\sum T_{I,J} \xi^I \bar{\xi}^J$ es una distribución positiva.

Demostración: La primera condición es suficiente y necesaria para que T sea real. Sea ahora T una corriente positiva y tomemos el vector ξ^J , pongamos:

$$\eta = \sum_{J \in k;p} \xi^J (J, \bar{J}) dz^{\bar{J}},$$

(J, \bar{J}) es el signo de la permutación. Como $\sigma_p T \wedge \eta \wedge \bar{\eta}$ es positiva por hipótesis:

$$\sigma_p T \wedge \eta \wedge \bar{\eta} = \sigma_{k-p} \sigma_p \sum T_{I,J} dz \wedge d\bar{z}_J \wedge \eta \wedge \bar{\eta}.$$

Efectuando operaciones:

$$\sigma_p T \wedge \eta \wedge \bar{\eta} = \sum T_{I,J} \xi^I \bar{\xi}^J dV.$$

Lo cual prueba la segunda condición.

Recíprocamente, supongamos que una corriente real T satisface la segunda condición. De ella se deriva que $T_{IJ} + T_{JI}$ y $i(T_{IJ} - T_{JI})$ son distribuciones positivas, esto hace que T_{IJ} sea una medida compleja (orden 0). Tomemos $\eta \in \wedge^{p,0} T^*M$, $f \in D(M)$: $f \geq 0$, $\text{supp } f \subset K$ (compacto) contenido en M . Teniendo en cuenta que $\eta = \sum \eta_J dz^J$ y además considerando la sucesión de formas $\eta_\lambda \rightarrow \eta$ y la de funciones $\eta_{J_\lambda} \rightarrow \eta_J$ se tiene la siguiente descomposición: $\eta_\lambda = \sum \eta_{J_\lambda} dz^{J_\lambda}$ tal que a su vez las funciones η_{J_λ} pueden ser aproximadas con una secuencia de la forma $\eta_{J_\lambda} = \sum_{\alpha} (\lambda_{J_\alpha} \chi_{B_{J_\alpha}})$ donde $\{B_{\lambda J_\alpha}\}$ es una familia disjunta de borelianos en K y las funciones χ son las funciones características. De este modo:

$$\begin{aligned} (\sigma_p T \wedge \eta \wedge \bar{\eta})(f) &= T(\sigma_p f \eta \wedge \bar{\eta}) \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T(\sigma_p f \eta_\lambda \wedge \bar{\eta}_\lambda). \end{aligned}$$

Es entonces suficiente mostrar que $\sigma_p T \wedge \chi_B \eta_\lambda \wedge \bar{\eta}_\lambda \geq 0$ para B (boreliano) contenido en K . Haciendo los cálculos:

$$(\sigma_p T \wedge \eta \wedge \bar{\eta})(\chi_B) = \sigma_k \sum T_{I,J,\alpha} (\chi_{B \cap B_{J_\alpha}}) \lambda^I \bar{\lambda}^J \geq 0.$$

□

El pull-back (en las situaciones donde pueda ser definido) y el push-forward son operadores que mantienen la positividad invariante bajo ciertas condiciones mínimas adicionales:

Proposición 27 Sea $F : M \rightarrow \widetilde{M}$ un mapa holomorfo entre variedades complejas. Entonces:

- a) si $T \in {}^+D'_{p,p}(M)$ y $F|_{\text{supp } T}$ es propia entonces $F_* T \in {}^+D'_{p,p}(\widetilde{M})$.

b) Si $T \in {}^+D'_{p,p}(\widetilde{M})$, y F es una submersión con fibras m -dimensionales, entonces $F^*T \in {}^+D'_{p+m,p+m}(M)$.

Demostración: El resultado se desprende de la definición de pull-back y de push-forward de corrientes junto con la la definición de forma positiva. \square

Ejemplo 34 Definamos para $T \in {}^+D'_{p,p}(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$ ($k > p$) la medida traza de T con respecto a la forma de Fubini-Study-Kähler: $\Omega_T = \frac{1}{p!} T \wedge \omega^p$. Probemos que Ω_T es positiva.

En efecto, si $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ son coordenadas para $T^*\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ en relación a la métrica ω , se puede escribir localmente:

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_j \zeta_j \wedge \bar{\zeta}_j \quad \omega^p = \sigma_p p! \sum_{|k|=p} \zeta_L \wedge \bar{\zeta}_L,$$

además $T = \sigma_p \sum T_{I,J} \zeta_I \wedge \bar{\zeta}_J$, haciendo cálculos $\Omega_T = \sum_I T_{I,I} dV$ lo cual prueba que Ω_T es positiva.

Establezcamos ahora el significado geométrico de la medida de traza de una corriente de integración T de una sub-variedad compleja X p -dimensional en M (variedad compleja) $\subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. De la expresión para $\Omega_T = \sum_I T_{I,I} dV$ y siendo $\langle T, \omega^p/p! \rangle$ igual al volumen complejo de X se tiene finalmente que:

$$\sum_I T_{I,I}(X) = Vol_{\mathbb{C}} X.$$

Ejemplo 35 Examinemos la corriente $T = dd^c \log |f|$ donde f es una función analítica en un entorno $U \subset \mathbb{C}^k$. Esta corriente es tal que $\text{supp } T \subset \text{Zero}(f)$. En efecto, sea $f \neq 0$ entonces se puede escribir $f = e^g$ donde g es también analítica; de este modo $\log |f| = \Re g = \frac{g+\bar{g}}{2}$ la cual se hace cero bajo la acción de dd^c . Tomemos $z_0 \in \text{Zero}(f)$ y un entorno V_{z_0} , además sea $\partial f_{z_0} \neq 0$. Es posible entonces encontrar nuevas coordenadas (w_1, \dots, w_k) tal que en particular $w_k = f$. Luego para T :

$$T = dd^c \log \|f\| = dd^c \log \|w_k\| = T_{w_k} \frac{i}{2} dw_k \wedge d\bar{w}_k = \frac{\partial^2 \log \|w_k\|}{\partial w_k \partial \bar{w}_k} \frac{i}{2} dw_k \wedge d\bar{w}_k.$$

Donde T_{w_k} es una distribución positiva. Tomemos una forma de bigrado $(k-1, k-1)$ $u = \sigma_{k-1} \sum_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J$ con soporte en V_{z_0} , entonces:

$$\langle T, u \rangle = \int_{w_k=0} u = \int_{f^{-1}(0)} u = \langle T_{w_k} \frac{i}{2} dw_k \wedge d\bar{w}_k, u \rangle = \langle T_{w_k}, \sum_{I',J'} u_{I',J'} \rangle dV.$$

Donde los I', J' son los I, J iniciales tal que k no pertenece a $I \cup J$.

Este resultado obtenido para un punto regular z_0 (para la definición de punto regular véase la Sub-sección [2.6.3]) del conjunto $\text{Zero}(f)$ puede extenderse por medio de una partición de la unidad a todo el conjunto $\text{Zero}(f)$ por lo que T constituye de manera natural la corriente de integración en la parte regular de dicho conjunto analítico.

2.6. Funciones PSA

2.6.1. Funciones PSA

Recordemos la definición de función sub-armónica.

Definición 64 Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ (semi-continua superior (SCS)), $u \neq -\infty$ en una componente conexa de Ω . u es sub-armónica si para cualquier $G \subset \Omega$ relativamente compacto y abierto y para cualquier h continua y armónica que satisface $u \leq h$ en ∂G se cumple que $u \leq h$ en G .

Denotaremos al conjunto de las funciones sub-armónicas en Ω como $SA(\Omega)$. El teorema que se enuncia a continuación provee definiciones equivalentes para una función sub-armónica (véase [65]).

Teorema 37 Sea $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$, $u \in SA(\Omega)$ y Ω abierto. Los siguientes enunciados son equivalentes:

a) $u \in SA(\Omega)$

b) Si $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ entonces $u(a) \leq L(u; a, r) = \frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int_{\partial B(a, r)} u(x) d\sigma(x)$.

c) Si $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ entonces $u(a) \leq A(u; a, r) = \frac{1}{\lambda_m r^{m-1}} \int_{B(a, r)} u(x) d\lambda(x)$.

d) Si $\bar{B}(a, r) \subset \Omega$ entonces $u(x) \leq r^{m-2} L(P(y - a, x - a)u(y); a, r)$ para todo $x \in B(a, r)$
 $\left(P(y, x) = \frac{\|y\|^2 - \|x\|^2}{\|x - y\|^m} \right)$.

(λ_m, σ_m son el volumen y la superficie de la esfera n -dimensional unitaria).

Una función sub-armónica es localmente integrable, para probar ello primero establezcamos que:

Proposición 28 Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u : \Omega \rightarrow [-\infty, 0]$ (SCS) entonces $u \in SA(\Omega)$ si y sólo si para todo $a \in \Omega$, $r > 0$, $S \geq 0$ tal que $\bar{B}(a, r + 2S) \subset \Omega$ se tiene que $u(x) \leq \frac{r^m}{(r + s)^m} A(u; a, r)$; para $x \in \{\|x - a\| \leq S\}$.

Demostración: Sea $u \in SA(\Omega)$, entonces para $x \in B(a, S)$ se tiene que $B(a, r) \subset B(x, r + S) \subset B(x, r + 2S) \subset \Omega$. En efecto, sea $y \in B(a, r)$ o bien $\|y - a\| < r$ entonces $\|y - x\| - \|x - a\| < r$ de donde

$$\|y - x\| < r + S \text{ (o bien } y \in B(x, r + S)\text{)}.$$

Finalmente: $\|y - a\| - \|x - a\| < r + S$ por lo que:

$$\|y - x\| < r + 2S.$$

Aplicando la propiedad de la desigualdad de la media aritmética en el punto X y para el entorno $B(x, r + S)$:

$$u(x) \leq \frac{r^m}{(r + s)^m} A(u; x, r + S) = \frac{1}{\lambda_m (r + S)^m} \int_{\partial B(x, r + S)} u(y) d\lambda(y);$$

como $\|y - x\| \leq r + S$ hagamos el cambio de variable:

$$\frac{r}{r + S}(y - x) = z - a \text{ luego: } \|z - a\| < r,$$

reemplazando en la integral y usando la expresión del jacobiano de esta transformación:

$$u(x) \leq \frac{r^m}{\lambda_m(r+S)^{2m}} \int_{\partial B(a,r)} u(z) d\lambda(z) = \frac{r^m}{(r+S)^m} A(u; a, r).$$

Por lo que integrando en el compacto K :

$$\left| \int_K u d\lambda \right| < \infty.$$

□

Como es conocido, las funciones sub-armónicas representan una extensión natural de las funciones armónicas. Los dos siguientes teoremas representan en efecto una generalización de las propiedades de dichas funciones.

Teorema 38 (*Principio del máximo*) Sea Ω (acotado, conexo, abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u \in SA(\Omega)$. Se tiene entonces que u o bien es constante, o bien para todo $x \in \Omega$ se tiene que:

$$u(x) < \sup_{z \in \partial\Omega} [\limsup_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in \Omega}} u(y)].$$

La prueba de este hecho depende en gran parte de las propiedades de la semicontinuidad superior.

Demostración: Tomemos:

$$v(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega \\ \limsup_{y \rightarrow z} u(y) & z \in \partial\Omega \end{cases}.$$

La cual es por definición *SCS* por lo cual alcanza su máximo en el compacto $K \subset \bar{\Omega}$. Definamos $A = \{x \in \Omega / u(x) = M\}$ donde M es el máximo en dicho compacto. Supongamos que A es vacío para $K = \bar{\Omega}$ y puesto que $M = \sup_{z \in \partial\Omega} [\limsup_{\substack{y \rightarrow z \\ y \in \Omega}} u(y)]$ se tiene el resultado buscado. Sea ahora

$A \neq \emptyset$, mostremos que en este caso $A = \Omega$ con lo cual quedará establecido que $u \equiv M$. En efecto, $\{u(x) < M\}$ es abierto (de la semicontinuidad de u) entonces $\{u(x) \geq M\} = \{u(x) = M\} \cup \{u(x) > M\} = A \cup \emptyset = A$ es cerrado. Por otro lado probemos ahora que A es abierto en Ω . Tomemos $a \in A$ y sea $b \in U(a, r)$ tal que $u(b) \neq M$. De la definición de v , $u(b) \neq M$ equivale a $u(b) < M$. Ahora bien, de la semicontinuidad existe un entorno $U(b, r')$ donde para $z \in U(b, r')$: $u(z) < M$ (además $U(b, r') \cap U(a, r) \neq \emptyset$). Usando la desigualdad de la media aritmética para $u(x)$ en $x = a$:

$$u(a) \leq A(u; a, r) < A(M; a, r) = M = u(a),$$

la contradicción demuestra que el conjunto A es también abierto y con ello se concluye la prueba.

□

Probemos ahora la propiedad que relaciona las funciones sub-armónicas suaves con el laplaciano.

Teorema 39 Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u \in C^2(\Omega)$. Entonces $u \in SA(\Omega)$ si y sólo si $\Delta u \geq 0$ en Ω .

Demostración: Sea $\Delta u \geq 0$ (abierto y compacto relativo en Ω), $G \subset \Omega$. Tomemos ahora $h \in \mathbb{H}(G) \cap C(\bar{G})$ ($\mathbb{H}(G)$ es el conjunto de funciones armónicas en G) tal que $u \leq h$ en ∂G . Para que u sea sub-armónica debemos probar que $u \leq h$ en G . Tomemos para ellos la función auxiliar:

$$v(x) = u(x) - \varepsilon \delta \|x\|^2$$

donde $\delta R < \varepsilon$ y $R = \sup\{\|x\|^2, x \in \partial G\}$.

De la construcción $v(x) < u(x)$, por lo que si probamos que $v \leq h$ en G entonces haciendo ε arbitrariamente pequeño se obtendría que $u \leq h$ en G . Probemos entonces ese hecho: Tomando $\omega = v - h$, supongamos que existe un $a \in G$ tal que $\omega(a) > 0$; ahora por otro lado de la semi-continuidad existe $b \in G$ en donde ω alcanza el máximo. Tomemos la función $f(t) = \omega(b + te_j)$ ($\{e_1, \dots, e_m\}$ es la base canónica de \mathbb{R}^m) la cual de las consideraciones anteriores tienen un mínimo local en $t = 0$. Eso implica que

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \omega(b + te_j) \right|_{t=0} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x_j^2}(b) \leq 0 \text{ (para todo } j = 1, \dots, m).$$

De ahí: $\Delta \omega(b) \leq 0$.

Pero, por otro lado $\Delta \omega(b) = \Delta(v - h)(b) = \Delta u(b) + 2\delta > 0$. La contradicción establece lo buscado.

Recíprocamente, sea u sub-armónica y supongamos para un $a \in \Omega$: $\Delta(u) < 0$ eso implica $\Delta(-u) \geq 0$ en una vecindad de a . Pero de lo obtenido en la primera parte de la demostración $-u$ es sub-armónica lo cual implica que $\Delta(u) = 0$. \square

Adicionalmente, adelantemos la introducción de la función de valor medio asociada a una función SA

$$M_u(z, r) = \int_{|\xi|=1} u(z + r\xi) d\omega(\xi) / \sigma_{2k}. \quad (2.47)$$

En el siguiente ejemplo daremos una caracterización adicional para una función sub-armónica que será usada más adelante:

Ejemplo 36 La función de valor medio asociada a una función diferenciable da lugar a una serie de relaciones interesantes. Probemos que si $u \in C^2(\Omega)$ donde Ω es un conjunto abierto en \mathbb{R}^n entonces:

$$\lim_{r \rightarrow 0} (M_u(z, r) - u(z)) / r^2 = \Delta u(z) / 2n, \quad z \in \Omega$$

donde en particular se desprende nuevamente que u es sub-armónica en Ω si y sólo si $\Delta u \geq 0$. En efecto, basta probar esto para $z = 0$. Usando la fórmula de Taylor ²:

$$u(z) = u(0) + \sum_{j=1}^n z_j \partial_j u(0) + \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n z_j z_k \partial_j \partial_k u(0) + R(z), \quad R(z) = o(|z|^2).$$

Por lo tanto para el término residual se tiene: $\int_{|y|=1} R(ry) d\lambda(y) / r^2 \rightarrow 0$. Por otro lado las integrales sobre el contorno ∂B_r de los términos de la última suma son nulos a excepción de:

$$\frac{1}{2} \int_{|y|=1} \sum_{j=1}^n (ry_j)^2 \partial_j^2 u(0) d\lambda(y) = \frac{1}{2} r^2 \Delta u(0) \sigma_n / n$$

² Aquí y en lo ulterior cuando usemos el símbolo ∂_i nos referiremos a la derivada parcial $\partial/\partial x_i$ o bien la derivada $\partial/\partial z_i$ dependiendo del tipo de variables que estemos usando.

donde σ_n representa el area de una esfera en \mathbb{R}^n y por otro lado la igualdad en cuestión se obtiene haciendo uso de la relación elemental $\int_{|y|=1} y_j^2 d\lambda(y) = \sigma_n/n$. De la igualdad obtenida se tiene ahora, que si u es sub-armónica entonces $\Delta u \geq 0$. Por otro lado, si $\Delta \geq 0$ se puede concluir que $u(z) + \epsilon|z|^2$ es sub-armónica para cualquier ϵ y por lo tanto cuando $\epsilon \downarrow 0$ tenemos que u es armónica.

Introduzcamos ahora la definición de función plurisub-armónica.

Definición 65 Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$; $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ semicontinua superior, u se llama plurisub-armónica en $a \in \Omega$ si $\lambda \mapsto u(a + \lambda b)$ es sub-armónica.

Aqui dejaremos de lado la mención de las propiedades más elementales de las funciones plurisubarmónicas. Para detalles véase [55, 65].

A continuación definimos la forma de Levi:

Definición 66 Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{R}$ una función con valores reales. La forma de Levi asociada a u en el punto $a \in \Omega$ es:

$$\langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 u(a)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} b_i \bar{c}_j, \quad (2.48)$$

para $b = (b_1, \dots, b_k)$ y $c = (c_1, \dots, c_k)$ vectores complejos.

La forma de Levi es una generalización del hessiano el cual está asociado a la segunda diferencial de una función en varias variables.

Si consideramos la matriz $\left(\frac{\partial^2 u(a)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right)_{k \times k}$ la forma de Levi se puede escribir como:

$$\langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle = \sum_{r,s} \frac{\partial^2 u}{\partial w_r \partial \bar{w}_s} \frac{\partial f_r}{\partial z_i} \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial \bar{z}_j} \quad (f = (f_1, \dots, f_k)),$$

de donde:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle &= \sum_{i,j=1}^k \sum_{r,s=1}^k \frac{\partial^2 u(f(a))}{\partial w_r \partial \bar{w}_s} \frac{\partial f_r}{\partial z_i} b_i \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_j \\ &= \sum_{r,s=1}^k \frac{\partial^2 u(f(a))}{\partial w_r \partial \bar{w}_s} \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_r}{\partial z_i} b_i \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_j \end{aligned}$$

y denotando:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \frac{\partial f_r}{\partial z_i} b_i &= \partial_a f(b) \\ \sum_{j=1}^k \frac{\partial \bar{f}_s}{\partial \bar{z}_j} \bar{c}_j &= \bar{\partial}_a f(c), \end{aligned}$$

se tiene finalmente

$$\langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle = \langle \mathcal{L}u(f(a))\partial_a f(b), \partial_a \bar{f}(c) \rangle. \quad (2.49)$$

Tomemos ahora $u \in PSA(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ y consideremos $u|_L$ donde L es una recta compleja en \mathbb{C}^k .

$u|_L = u \circ f$ donde $f(z) = a + z$ o bien $f(\lambda) = a + \lambda b$, siendo $b \in \mathbb{C}^k - \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C}^k$ y además $a \in \Omega \subset \mathbb{C}^k$. Calculamos $\Delta(u \circ f)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u \circ f) &= 2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u \circ f}{\partial f_i \partial f_j} b_i b_j + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial f_i \partial f_j} b_i b_j + \frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial \bar{f}_i \partial \bar{f}_j} \overline{b_i b_j} \right) \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}(u \circ f) &= 2 \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u \circ f}{\partial f_i \partial \bar{f}_j} b_i \bar{b}_j - \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial f_i \partial f_j} b_i b_j + \frac{\partial^2(u \circ f)}{\partial \bar{f}_i \partial \bar{f}_j} \overline{b_i b_j} \right), \end{aligned}$$

de donde para $\lambda = 0$ se tiene:

$$\Delta(u \circ f)(0) = \Delta(u(a + \lambda b))|_{\lambda=0} = 4 \langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle. \quad (2.50)$$

Esta importante igualdad implica la siguiente proposición:

Proposición 29 Sean un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ y $u \in C^\infty(\Omega)$, entonces:

$$u \in PSA(\Omega) \text{ si y sólo si } \langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle \geq 0 \quad (a \in \Omega).$$

De aquí se deduce en particular que para $u \in PSA(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$

$$dd^c u = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \frac{i}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_j,$$

la cual es una forma de bigrado (1,1). Restringidos a una recta compleja $(dz_1, \dots, dz_k) = (b_1, \dots, b_k)dt$

$$dd^c u|_L = \langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle \frac{i}{2} dt \wedge d\bar{t},$$

la cual es positiva. Pero por el Teorema [30] se puede enunciar el siguiente corolario.

Corolario 9 Sea $u \in C^\infty(\Omega)$ (Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$) entonces $u \in PSA(\Omega)$ si y sólo si $dd^c u$ es una forma positiva en Ω .

Se ha comentado acerca de la relación que existe entre la forma de Levi y el hessiano $d_a^2 u$. La siguiente proposición (cuya prueba se reduce a realizar los cálculos) nos dice que:

Proposición 30 Sea $u \in C^\infty(\Omega)$ (Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$) entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle &= \frac{1}{4} [d_a^2 u(b, c) + d_a^2 u(ib, ic)] \\ &\quad + \frac{i}{4} [d_a^2 u(b, ic) - d_a^2 u(ib, c)], \end{aligned}$$

donde $d_a^2 u(b, c) = \sum_{i,j=1}^{2k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} b_i \bar{c}_j$ es el hessiano de la "función real" $u : \mathbb{R}^{2k} \rightarrow \mathbb{R}$.

En particular de aquí se desprende el siguiente importante corolario.

Corolario 10 Si $u \in C^2(\Omega)$ es convexa entonces $u \in PSA(\Omega)$.

En el siguiente ejemplo investigaremos las condiciones para las cuales una función $u(x, t) \in C^2(\Omega \times I) \cap SA(\Omega \times I)$, donde $t \in I \subset \mathbb{R}$ y $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, es tal que $U(x) = \min_{t \in I} u(x, t)$ resulta ser sub-armónica en Ω . Este problema tiene una aplicación directa en la Sección [3.2].

Ejemplo 37 Dada la función $u(x, t)$ se afirma que las tres condiciones siguientes son suficientes y necesarias para que $U(x)$ sea sub-armónica :

- La derivada $u'_x(x, t)$ en $x \in \Omega$ no depende de t en los puntos en donde se alcanza el mínimo respecto a t : $J(x) = \{t / u(x, t) = U(x)\}$.

Para cualquier $x \in \Omega$ y $t \in J(x)$ se tiene que $\Delta_x u(x, t) \geq 0$.

- Para cualquier $x \in \Omega$ y $t \in J(x) \setminus \partial I$ se tiene que:

$$\Delta_x u + 2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \partial_i \partial_t u + \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \partial_t^2 u \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Probemos esto. Asumamos primero que U es sub-armónica, entonces para $x \in \Omega$ y r pequeño:

$$\int_{|y|=1} [U(x + ry) - U(x)] d\sigma(y) \geq 0.$$

Tomando ahora dos elementos s, t del conjunto $J(x)$ se tiene estimando la diferencia dentro de la integral con la ayuda de la Fórmula de Taylor³:

$$\begin{aligned} U(x + ry) - U(x) &\leq r \min(\langle u'_x(x, t), y \rangle, \langle u'_x(x, s), y \rangle) + O(r^2) = \\ &= -\frac{r}{2} \int_{|y|=1} |\langle u'_x(x, t) - u'_x(x, s), y \rangle| d\sigma(y) + O(r^2), \end{aligned}$$

Dividiendo por r y pasando al límite $r \rightarrow 0$ obtenemos la primera condición.

Tomemos ahora $t \in J(x)$ entonces por el Ejemplo 36:

$$\begin{aligned} \Delta_x u(x, t)/2n &= \lim_{r \rightarrow 0} r^{-2} \int_{|y|=1} (u(x + ry, t) - u(x, t)) d\sigma(y) / \sigma_n \\ &\geq \lim_{r \rightarrow 0} r^{-2} \int_{|y|=1} (U(x + ry) - U(x)) d\sigma(y) / \sigma_n \geq 0. \end{aligned}$$

Esto prueba la segunda condición.

Si ahora se toma $t \in J(x) \setminus \partial I$ usando el mismo argumento para $s + \langle x, \lambda \rangle$ (en la segunda variable de u) se tiene que $\Delta_x u(x, s + \langle x, \lambda \rangle) \geq 0$. Expandiendo esta expresión obtenemos la tercera condición.

Si suponemos ahora que las tres condiciones se cumplen, entonces haciendo los cálculos tenemos la relación:

³Aquí para abreviar los cálculos usaremos la notación del producto escalar ordinario en \mathbb{R}^n $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Usualmente esta notación se refiere al producto cuña usado a lo largo de este trabajo, por lo que si no se menciona nada, se entenderá que el símbolo en cuestión corresponde al producto cuña.

$$\partial_i \partial_j U(x) = \partial_i \partial_j u(x, t) - (\partial_i \partial_t u(x, t))(\partial_j \partial_t u(x, t)) / \partial_t^2 u(x, t), \quad (2.51)$$

la cual al ser usada para calcular el laplaciano de U en el sentido distribucional nos dá la siguiente expresión:

$$\Delta U(x) = \Delta_x u(x, t) - \sum_i \lambda_i = 1^n |\partial_t \partial_t u(x, t)|^2 / \partial_t^2 u(x, t),$$

para $x \in \Omega'$, donde $\Omega' = \{x \in \Omega / t \notin \partial I \text{ y } \partial_t^2 u(x, t) \neq 0 \text{ cuando } t \in J(x)\}$. Usando entonces la tercera condición y tomando $\lambda_i = -\partial_i \partial_t u(x, t) / \partial_t u(x, t)$ se tiene que $\Delta U(x) \geq 0$ para los $t \in J(x) \setminus \partial I$. En el caso de los puntos $x \in \Omega \setminus \Omega'$ se tiene que para casi todo punto de $\Omega \setminus \Omega'$: $\Delta U(x) = \Delta_x u(x, t)$ siendo los puntos $t \in J(x)$ por lo que usando la segunda condición se tiene que $\Delta U(x) \geq 0$ en el sentido distribucional. Con esto queda establecido que U es sub-armónica.

Regularización Siguiendo las técnicas de regularización estándar se puede establecer teoremas de regularización para funciones sub-armónicas y plurisub-armónicas. A pesar de su similitud exterior los teoremas de regularización para funciones sub-armónicas y plurisub-armónicas son esencialmente distintos puesto que en el primer caso se afirma que la sucesión $u * \chi_\epsilon$ es sub-armónica (para las definiciones estándar de la teoría de la regularización, véase [55, 57]) mientras que en el segundo caso $u * \chi_\epsilon$ es plurisub-armónica. Enunciemos los teoremas de regularización.

Teorema 40 (Regularización de funciones sub-armónicas) Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u \in SA(\Omega)$. Si $\epsilon > 0$ tal que $\Omega_\epsilon \neq \emptyset$ entonces $u * \chi_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap SA(\Omega)$ y la secuencia $\{u * \chi_\epsilon\}$ decrece con ϵ . Además se verifica la siguiente convergencia puntual:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u * \chi_\epsilon = u(x).$$

Teorema 41 (Regularización de funciones plurisub-armónicas) Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$, $u \in SA(\Omega)$. Si $\epsilon > 0$ tal que $\Omega_\epsilon \neq \emptyset$ entonces $u * \chi_\epsilon \in C^\infty(\Omega) \cap SA(\Omega)$ y la secuencia $\{u * \chi_\epsilon\}$ decrece con ϵ tendiendo monótonamente a u (puntualmente) entonces:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} u * \chi_\epsilon = u(x).$$

Un ingrediente fundamental para la prueba de estos teoremas es el siguiente.

Lema 3 Sea $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ y Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$. Se verifica que:

$$[L(u; \cdot, r) * \chi_\epsilon](x) = L(u * \chi_\epsilon; x, r)$$

$$y u * \chi_\epsilon(x) = \int_0^1 \chi(r) \sigma_m r^{m-1} L(u; x, \epsilon r) dr \quad (\overline{B}(x, r) \subset \Omega_\epsilon).$$

Demostración:

Procedemos a hacer manipulaciones en el primer miembro de la igualdad a probar:

$$[L(u; \cdot, r) * \chi_\epsilon] * \chi_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int_{\partial B(0, r)} u(x + a - y) d\sigma(x) \right] \chi_\epsilon(y) d\lambda(y).$$

De $\text{supp } \chi_\varepsilon = B(0, \varepsilon)$ y tomemos la propiedad radial de χ (véase [57]): $\text{supp } \chi(\varepsilon(y)) = \underline{B(0, 1)}$. De ahí se tiene que:

$$[L(u; \cdot, r) * \chi_\varepsilon] * \chi_\varepsilon(x) = \int_{B(0,1)} \left[\frac{1}{\sigma_m r^{m-1}} \int_{\partial B(0,r)} u(x + \omega - \varepsilon y) d\sigma(\omega) \right] \chi(y) d\lambda(y),$$

al hacer el cambio de la variable en la integral a través de la superficie de $B(0, r)$ se tiene:

$$= \int_{B(0,1)} \left[\frac{1}{\sigma_m} \int_{\partial B(0,r)} u(x + \omega - \varepsilon y) \chi(y) d\lambda(y) \right] d\sigma(\omega) = L(u * \chi_\varepsilon; x, r),$$

con lo que se concluye la prueba de la primera igualdad. Para probar la segunda expresión hagamos el cambio de la integral de volumen a la de superficie y usamos la radialidad de χ :

$$\begin{aligned} u * \chi_\varepsilon(x) &= \int_{B(0,1)} u(x - \varepsilon y) \chi(y) d\lambda(y) \\ &= \int_0^1 \chi(r) \left[\int_{\partial B(0,1)} u(x - \varepsilon y) \sigma(y) \right] dr. \end{aligned}$$

En donde usando la definición de $L(u; x, \varepsilon r)$ se obtiene la segunda igualdad. \square

Probemos otro lema de importancia para los teoremas de regularización.

Lema 4 Si $u \in SA(B(a, R_0))$ ($a \in \mathbb{R}^m$, $R_0 > 0$) entonces la función $R \mapsto L(u; a, R)$ es creciente en $]0, R_0[$.

Demostración: Esta propiedad depende de las propiedades de semi-continuidad superior de u . En efecto (véase [92, 112]) en un conjunto compacto K situado en un espacio métrico se tiene que para $u : K \rightarrow]-\infty, +\infty[$ (SCS) existe una secuencia decreciente $\{u_i\}$ de funciones continuas tal que $\lim_{j \rightarrow \infty} u_j(x) = u(x)$ para $x \in K$. De acuerdo a esto para $0 < r_1 < r_2 < R$ tomemos una secuencia decreciente $\{u_j\}$ continuas en $\partial B(a, r_2)$, entonces $u_j \rightarrow u$ en $\partial B(a, r_2)$. De la unicidad de la solución del Problema de Dirichlet, existe $h_j \in \mathbb{H}(B(a, r_2)) \cap C(B(a, r_2))$ tal que $h_j|_{\partial B(a, r_0)} = u_j$ ($j \in \mathbb{N}$).

Ahora se tiene:

$$L(u; a, r_1) \leq L(h_j; a, r_1) = h_j(a).$$

La última parte de la igualdad es debida a que h_j es armónica, la primera parte es debida a que h_j mayor a u en la frontera y por tanto dentro de $B(a, r_2)$.

Del mismo modo: $h_j : L(h_j; a, r_2) = L(u_j; a, r_2) \rightarrow L(u; a, r_1)$. El último límite tomado cuando $j \rightarrow \infty$. \square

Pasemos a probar el Teorema de Regularización de Funciones Pluri-sub-armónicas (para la prueba correspondiente a las funciones sub-armónicas véase [55]). Probemos primero una caracterización importante de una función plurisub-armónica.

Teorema 42 Sea $u : \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty[$ SCS, $u \not\equiv -\infty$ en cualquier componente conexa de Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$. Entonces $u \in PSA(\Omega)$ si y sólo si para cada $a \in \Omega$ y $b \in \mathbb{C}^k$ tal que: $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda\| \leq 1\} \subset \Omega$ se tiene que:

$$u(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta.$$

Demostración: Si $u \in PSA(\Omega)$ entonces u es sub-armónica en cualquier recta que para por un $a \in \Omega$. De ahí se obtiene inmediatamente la desigualdad. Sea ahora que se cumple dicha desigualdad y sea $v(\lambda) = u(a + \lambda b)$. Como $u(a) = v(0)$ y $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(e^{i\theta}) d\theta$ se deduce que v es sub-armónica, eso implica que $u(a + \lambda b)$ también lo es, lo cual por definición lleva a concluir que $u \in PSA(\Omega)$. \square

Sea $u \in PSA(\Omega)$, puesto que para $a \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^k$; u es sub-armónica en $\{a + \lambda b : \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda\| \leq 1\} \subset \Omega$. Entonces denotando $l(u; a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + e^{i\theta}b) d\theta$ se tiene:

$$(l(u; a, b) * \chi_\varepsilon)(a) = l(u * \chi_\varepsilon; a, b). \quad (2.52)$$

Demostración: (Del Teorema de Regularización de Funciones Pluri-sub-armónicas) Primero establezcamos que $u * \chi_\varepsilon$ está bien definida:

$$u * \chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} u(y) \chi_\varepsilon(x - y) d\lambda(y).$$

En efecto, la integración se efectúa en el soporte de χ_ε el cual es compacto, pero de la semi-continuidad de u , ésta alcanza su máximo valor en dicho compacto, luego $u(y)\chi_\varepsilon$ es acotado y por tanto integrable. Antes de continuar hagamos las siguientes modificaciones a la integral:

$$u * \chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} u(y) \chi_\varepsilon(x - y) d\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x - y) \chi_\varepsilon(y) d\lambda(y),$$

y haciendo el cambio de variable de y por $-\varepsilon\omega$ (con jacobiano ε^m) se obtiene:

$$u * \chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^m} u(x + \varepsilon\omega) \chi(\omega) d\lambda(\omega).$$

De la definición de $u * \chi_\varepsilon$ se sabe que es C^∞ así que hay que probar que $u * \chi_\varepsilon \in PSA(\Omega_\varepsilon)$, en efecto:

$$\begin{aligned} u * \chi_\varepsilon(x) &= \int_{\mathbb{R}^m} u(x + \varepsilon\omega) \chi(\omega) d\lambda(\omega) \leq \int_{\mathbb{R}^m} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x + \varepsilon\omega + e^{i\theta}b) d\theta \right] \chi(\omega) d\lambda(\omega) \\ &= l(u; \cdot, b) * \chi_\varepsilon = l(u * \chi_\varepsilon; x, b), \end{aligned}$$

con lo cual queda probado que $u * \chi_\varepsilon \in PSA(\Omega_\varepsilon)$.

Mostremos que la sucesión $u * \chi_\varepsilon$ es monótona (creciente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$). Fijemos ω tal que $\|\omega\| = 1$:

$$u * \chi_\varepsilon = \int_{\mathbb{C}^k} u(z + \varepsilon_1\omega) \chi(\omega) d\lambda(\omega) = \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \left[\int_{\mathbb{C}} u(z_1 + \varepsilon_1\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_1\omega_k) \chi(\omega) d\lambda(\omega) \right] d_{k-1}\lambda(\omega),$$

donde $d_{k-1}\lambda$ representa la medida $k-1$ -dimensional en la integral iterada. Usando la propiedad del soporte de χ además de la dependencia radial se tiene:

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} u(z_1 + \varepsilon_1\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_1\omega_k) \chi(\omega) r dr d\theta \right] d_{k-1}\lambda(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \left[\int_0^1 \left\{ \int_0^{2\pi} u(z_1 + \varepsilon_1\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_1\omega_k) d\theta \right\} \chi(\omega) r dr \right] d_{k-1}\lambda(\omega). \end{aligned}$$

Usando la propiedad de monotonía, para $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$:

$$\begin{aligned} &\geq \int_{\mathbb{C}^{k-1}} \left[\int_0^1 \int_0^{2\pi} u(z_1 + \varepsilon_2\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_2\omega_k) \chi(\omega) r dr d\theta \right] d_{k-1}\lambda(\omega) \\ &= \int_{\mathbb{C}^k} u(z_1 + \varepsilon_2\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_2\omega_k) d\lambda(\omega). \end{aligned}$$

Lo hecho hasta aquí para la función sub-armónica $v_1(z_1) = u(z_1, \cdot)$ se puede repetir en $k-1$ pasos para las demás coordenadas. Por lo que:

$$\int_{\mathbb{C}^k} u(z_1 + \varepsilon_2\omega_1, \dots, z_k + \varepsilon_2\omega_k) d\lambda(\omega) = u * \chi_{\varepsilon_2}.$$

En particular: $u * \chi_{\varepsilon_1} \geq u * \chi_{\varepsilon_2} \geq u$ ($\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq 0$).

Finalmente, observando que para una función SCS en el punto z ($u(z) = \limsup_{y \rightarrow z} u(y)$, $y \in U(z, \varepsilon)$) se tiene que en dicho entorno $u < u(\zeta) + \eta$ (donde $\eta > 0$ es un número que depende de ε y se hace nulo cuando $\varepsilon \rightarrow 0$)

$$u * \chi_\varepsilon(z) = \int_{B(0, \varepsilon)} u(z - y) \chi_\varepsilon(y) d\lambda(y) \leq (u(z) + \eta) \int_{B(0, \varepsilon)} \chi_\varepsilon(y) d\lambda(y) = u(z) + \eta$$

(esto pues $\|y\| = \varepsilon$ o bien $\|z - (z - y)\| < \varepsilon$ lo que significa que $z - y \in U(z, \varepsilon)$).

La última condición más la de monotonía implican el resultado buscado. \square

El Teorema de Regularización que se acaba de probar es uno de los más importantes para las funciones plurisub-armónicas y acarrea varios corolarios importantes.

Corolario 11 Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$, entonces $PSA(\Omega) \subset SA(\Omega) \subset L_{loc}^1(\Omega)$.

Demostración: Tomemos la regularización $\{u_\varepsilon\} \subset PSA(\Omega)$, usando la relación de la forma de Levi: $\langle \mathcal{L}u_\varepsilon(a)b, b \rangle = \frac{1}{4}\Delta(u_\varepsilon(a))$ y teniendo en cuenta que el primer miembro es positivo entonces se tiene que $\Delta_\varepsilon(a) \geq 0$, $\forall a \in \Omega_\varepsilon$, eso implica que $u_\varepsilon \in SA(\Omega_\varepsilon)$. Usando el Teorema de Regularización para Funciones Sub-armónicas se tiene que $u_\varepsilon \rightarrow u \in SA(\Omega)$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. \square

Corolario 12 Sean Ω_1, Ω_2 (abiertos) $\subset \mathbb{C}^k$, $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ (holomorfa), $u \in PSA(\Omega_2)$ entonces $u \circ f \in PSA(\Omega_1)$.

Demostración: Tomemos nuevamente: $u_\epsilon \in PSA(\Omega_2) \cap C^\infty(\Omega_2)$. De:

$$\langle \mathcal{L}(u_\epsilon \circ f)(a)b, b \rangle = \langle \mathcal{L}u(f(a))\partial_a f(b), \bar{\partial}_a f(b) \rangle \geq 0$$

se tiene que $u_\epsilon \circ f$ es plurisub-armónica. Pasando al límite se obtiene el resultado. \square

En ciertas cuestiones será útil determinar cuando el $\min_{t \in I} u(z, t)$ de una función plurisub-armónica $u(z, t) \in C^2(\Omega \times I)$, $\Omega \in \mathbb{C}^k$, $I \subset \mathbb{R}$ es plurisub-armónica en Ω . Veamos el siguiente ejemplo en el cual usaremos el material acumulado hasta aquí:

Ejemplo 38 Probemos que las tres condiciones siguientes son necesarias y suficientes para que $U(z) = \min_{t \in I} u(z, t)$ sea plurisub-armónica en Ω . Antes, recordemos la forma de Levi 2.48:

$$\langle \mathcal{L}u(a)b, c \rangle = \sum_{i,j=1}^k \frac{\partial^2 u(a)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} b_i \bar{c}_j$$

- La derivada $u'_z(z, t)$ en $z \in \Omega$ no depende de t en los puntos en donde se alcanza el mínimo respecto a t : $J(z) = \{t / u(z, t) = U(z)\}$.
- Para cualquier $z \in \Omega$ y $t \in J(z)$ se tiene que $\langle \mathcal{L}u(z, t)w, w \rangle \geq 0$. Donde, $a = b = w = (w_1, w_2, \dots, w_k) \in \mathbb{C}^k$.
- Para cualquier $z \in \Omega$ y $t \in J(z) \setminus \partial I$ se tiene que:

$$\langle \mathcal{L}u(z, t)w, w \rangle + 2 \Re \sum_{i=1}^n w_i \partial_i \partial_t u + |w|_i^2 \partial_t^2 u \geq 0.$$

Para $n = 1$ esta afirmación coincide con el Ejemplo 37. Tomemos ahora $u \in C^2(\Omega \times I)$ y asumiendo que se cumplen las condiciones arriba mencionadas. Tomemos una recta compleja, de lo asumido se deduce que $U(z)$ es sub-armónica en dicha recta compleja. Eso implica que $U(z)$ es plurisub-armónica. Sea ahora $U(z)$ una función plurisub-armónica. entonces de su definición al tomar una recta compleja arbitraria se verifican las condiciones del Ejemplo 37 para la función sub-armónica definida en dicha recta pero esto implica a su vez que se cumplen las condiciones indicadas al principio de este ejemplo. Con esto concluye la demostración de esta equivalencia.

Introduzcamos los conceptos de conjunto polar y pluripolar.

Definición 67 Un conjunto $E \subset \mathbb{R}^m$ ($E \subset \mathbb{C}^k$) es polar (pluripolar) si para cada punto $z \in E$ hay un abierto U y una función sub-armónica (plurisub-armónica) denotado por u_z , tal que $E \cap U \subset \{\omega / u_z(\omega) = -\infty\}$.

Un problema que se plantea inmediatamente sobre los conjuntos polares y pluripolares es si la medida de Lebesgue de estos conjuntos es no nula. Este problema está ligado directamente con la integrabilidad local de una función sub-armónica. En efecto, si $E_u = \{z / u(z) = -\infty\}$ tiene medida no nula, entonces $\left| \int_{E_u \cap K} u \right|$ es no convergente, por lo que u no sería integrable en el compacto K . Se tiene entonces el siguiente corolario.

Corolario 13 El conjunto polar E_u asociado a la función sub-armónica u en Ω (abierto) $\subset \mathbb{R}^m$ es tal que $m(E_u) = 0$.

Inmediatamente si $u \in PSA(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}^k$) entonces el conjunto pluripolar E_u asociado también tiene medida nula. Generalizando esto:

Corolario 14 *El conjunto polar $E \subset \mathbb{R}^m$ (pluripolar $E \subset \mathbb{C}^k$) es tal que $m(E) = 0$.*

La estructura y propiedades de los conjuntos pluripolares no se agotan describiendo la estructura de los conjunto polares sino que presentan propiedades muy complicadas. En la Sub-sección [3.1.1] nos referiremos a algunas cuestiones adicionales de estos conjuntos.

2.6.2. Caracterización distribucional de una función plurisub-armónica

Como se sabe si $u \in PSA(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ entonces la forma de Levi de dicha función es no nula. Generalizaremos esa propiedad para funciones que carecen de la condición de suavidad. Empecemos con la caracterización de las funciones sub-armónicas en términos del laplaciano distribucional.

Teorema 43 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $u \in SA(\Omega)$; entonces $\Delta u \geq 0$ en el sentido distribucional. Esto es $\int_{\Omega} u(x)\Delta\varphi(x)d\lambda(x) \geq 0$ para cualquier función test $\varphi \in D(\Omega)$ no negativa. Recíprocamente si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ y $\Delta v \geq 0$ en el sentido distribucional entonces $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v * \chi_{\epsilon} \in SA(\Omega)$ y además $v = u$ c.t.p. (m) (m : medida de Lebesgue).*

Antes de acometer la pruebas de éste y del siguiente teorema demostremos el lema que a veces es referido como “la fórmula de integración por partes” aún cuando se trata de una fórmula de conmutación de ciertos operadores diferenciales.

Lema 5 *Sea $u, v \in C^2(\Omega)$, Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$. Al menos una de las funciones tiene soporte compacto. Entonces:*

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} u(z)\Delta v(z)d\lambda(z) &= \int_{\Omega} v(z)\Delta u(z)d\lambda(z) \\ - \int_{\Omega} u(z) \langle \mathcal{L}v(z)b, b \rangle d\lambda(z) &= \int_{\Omega} v(z) \langle \mathcal{L}u(z)b, b \rangle d\lambda(z). \end{aligned}$$

Demostración: Analicemos los operadores $\partial, \bar{\partial}$ cuando $k = 1$ (la dimensión del espacio). Tomemos $u\bar{\partial}v, v\partial u$ las cuales tiene soporte compacto (de acuerdo a la hipótesis del lema), luego: $\int_{\partial\Omega} u\bar{\partial}v = 0$ entonces usando el Teorema de Stokes

$$\int_{\Omega} (\partial + \bar{\partial})(u\bar{\partial}v) = 0.$$

Pero:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}(u\bar{\partial}v) &= \bar{\partial}u \wedge \bar{\partial}v + u\bar{\partial}\bar{\partial}v = 0 \\ \partial(u\bar{\partial}v) &= \partial u \wedge \bar{\partial}v + u\partial\bar{\partial}v = 0. \end{aligned}$$

entonces la integral queda como:

$$\int_{\Omega} \partial u \wedge \bar{\partial} v + \int_{\Omega} u \partial \bar{\partial} v = 0.$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} \partial(v\partial u) &= \partial v \wedge \partial u + v\partial\partial u = 0 \\ \bar{\partial}(v\partial u) &= \bar{\partial} v \wedge \partial u + v\bar{\partial}\partial u = -\partial u \wedge \bar{\partial} v - v\partial\bar{\partial} u = 0 \\ \text{o bien } \partial u \wedge \bar{\partial} v + v\partial\bar{\partial} u &= 0, \end{aligned}$$

la integral queda como

$$\int_{\Omega} \partial u \wedge \bar{\partial} v + \int_{\Omega} v\partial\bar{\partial} u = 0.$$

De las dos últimas integrales

$$\int_{\Omega} u\partial\bar{\partial} v = \int_{\Omega} v\partial\bar{\partial} u.$$

Para $n \geq 1$. En cada componente coordenada los operadores $(\partial\bar{\partial})_i : \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} dz_i \wedge d\bar{z}_i$ son tales que:

$$\int_{\Omega_i} u(\partial\bar{\partial})_i v = \int_{\Omega_i} v(\partial\bar{\partial})_i u$$

donde $\Omega_i = \Omega \cap l_i$ ($l_i = \{(z_1, \dots, z_i, \dots, z_k) : z_j = \text{cte.}, j \neq i\}$).

Como $\frac{\partial^2}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} = \Delta_i$

evaluemos por medio de la integral iterada: $(d\lambda = \bigwedge_{j=1}^k \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \Delta_i v d\lambda &= \int \left\{ \left[\frac{i}{2} \int_{\Omega_i} u \Delta_i v dz_i \wedge d\bar{z}_i \right] \bigwedge_{j \neq i} \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right\} \\ &= \int \left\{ \frac{i}{2} \left[\int_{\Omega_i} v \Delta_i u dz_i \wedge d\bar{z}_i \right] \bigwedge_{j \neq i} \frac{i}{2} dz_j \wedge d\bar{z}_j \right\} \\ &= \int_{\Omega} v \Delta_i u d\lambda. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\sum_{i=1}^k \int_{\Omega} u \Delta_i v d\lambda = \int_{\Omega} u \Delta v d\lambda = \sum_{i=1}^k \int_{\Omega} v \Delta_i u d\lambda = \int_{\Omega} v \Delta u d\lambda,$$

de ahí probamos la primera relación.

Sea ahora b arbitrario en la forma de Levi y consideremos $M \in GL(n, \mathbb{C})$ tal que $M^{-1}b = (1, 0, \dots, 0)$.

Usemos además la siguiente transformación de coordenadas $z = M\omega$ en la integral que contiene la forma de Levi:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(z) \langle \mathcal{L}v(z)b, b \rangle d\lambda(z) &= \int_{F^{-1}(\Omega)} u \circ F(\omega) \langle \mathcal{L}v \circ F(\omega)M^{-1}b, M^{-1}b \rangle |M|^2 d\lambda(\omega) \\ &= \int_{F^{-1}(\Omega)} v \circ F(\omega) \langle \mathcal{L}u \circ F(\omega)M^{-1}b, M^{-1}b \rangle |M|^2 d\lambda(\omega) = \int v(z) \langle u(z)b, b \rangle d\lambda(z). \end{aligned}$$

□

Demostración: (del teorema) Sea $u_\varepsilon = u * \chi_\varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) y tomemos $\varphi \in D(\Omega)$ (positiva), usando el Teorema de Convergencia Dominada:

$$\int_{\Omega} u \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon \Delta \varphi.$$

Del lema anterior: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} u_\varepsilon \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \Delta u_\varepsilon \geq 0$ (usando la condición que u_ε es tal que $\Delta u_\varepsilon \geq 0$). Esto prueba que el laplaciano distribucional de u es positivo. Recíprocamente, sea $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que $\Delta v \geq 0$ en Ω pero en el sentido distribucional. Tomemos $v_\varepsilon = v * \chi_\varepsilon$ (tal que $\Omega_\varepsilon \neq \emptyset$ de $\int_{\Omega} v \Delta \varphi \geq 0$ (por hipótesis) y $\int_{\Omega} v \Delta \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega} \varphi \Delta v_\varepsilon \geq 0$ se tiene que $\Delta v_\varepsilon \geq 0$; entonces, del Teorema [30], $v_\varepsilon \in SA(\Omega_\varepsilon)$. Consideremos las funciones $v_\varepsilon^\delta = v_\varepsilon * \chi_\delta$ para $\delta > 0$. Se tiene entonces que:

$$v_{\varepsilon_2}(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} v_{\varepsilon_2}^\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} v_{\varepsilon_2} * \chi_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} (v * \chi_{\varepsilon_2}) * \chi_\delta.$$

Del Teorema de Fubini: $(v * \chi_{\varepsilon_2}) * \chi_\delta = (v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_2}$ y del hecho que para la función sub-armónica $v * \chi_\delta$ se tiene que $(v * \chi_\delta)_\varepsilon$ decrece según ε :

$$(v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_2}(x) \geq (v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_1}$$

para $\varepsilon_2 \geq \varepsilon_1$.

Usando estas consideraciones:

$$\begin{aligned} v_{\varepsilon_2}(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} (v * \chi_{\varepsilon_2}) * \chi_\delta = \lim_{\delta \rightarrow 0} (v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_2} \\ &\geq \lim_{\delta \rightarrow 0} (v * \chi_\delta) * \chi_{\varepsilon_1} = v_{\varepsilon_1}(x). \end{aligned}$$

La secuencia de funciones sub-armónicas $\{v_\varepsilon\}$ es decreciente por lo que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_\varepsilon = u$ (puntualmente) es sub-armónica (véase [112]). Sin embargo, de la regularización de una función localmente integrable (tal como v) se tiene que $v_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} v$ y $v = u$ en casi todo punto de Ω . Con esto culmina la prueba. □

La segunda parte del teorema afirma que dadas dichas condiciones para una función ella es sub-armónica en c.t.p. La versión análoga del teorema anterior es una caracterización general para una función plurisub-armónica.

Teorema 44 Sea Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$, $u \in PSA(\Omega)$ entonces $\langle \mathcal{L}u(z)b, b \rangle \geq 0$ (en sentido distribucional) para cualquier $z \in \Omega$, $b \in \mathbb{C}^k$. Recíprocamente, si $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ es tal que para todo $b \in \mathbb{C}^k$

$$\langle \mathcal{L}u(a)b, b \rangle \geq 0 \quad (a \in \Omega)$$

en el sentido distribucional, entonces la función $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (v * \chi_\epsilon)$ está bien definida, es plurisub-armónica en Ω y además $u = v$ c.t.p.

El enunciado de este teorema es completamente análogo al teorema anterior aunque la prueba se verá bastante simplificada gracias a los resultados previos.

Demostración: Sea $u \in PSA(\Omega)$; tomemos $u_\epsilon = u * \chi_\epsilon$ con $\epsilon > 0$. Tomando una función test positiva cualquiera y $b \in \mathbb{C}^k$ se tiene por el Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue, además del lema previo y del teorema de aproximación que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(z) \langle \mathcal{L}\varphi(z)b, b \rangle d\lambda(z) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} u_\epsilon(z) \langle \mathcal{L}\varphi(z)b, b \rangle d\lambda(z) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\epsilon} \varphi_\epsilon(z) \langle \mathcal{L}\varphi(z)b, b \rangle d\lambda(z) \geq 0, \end{aligned}$$

con lo que se concluye la primera parte de la prueba.

Tomemos ahora $v \in L_{Loc}(\Omega)$ tal que satisface la condición de forma de Levi positiva. Tómesese $v_\epsilon = v * \chi_\epsilon$ (para $\epsilon > 0$), además tomando el vector $b^i = (0, 0, \dots, a_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{C}^k$ ($a_i = 1$) se tiene $\langle \mathcal{L}v(a)b^i, b^i \rangle = \Delta_i v(a) \geq 0$, de ahí $\Delta v(a) \geq 0$ (en el sentido distribucional) por lo que el teorema anterior existe $u \in SA(\Omega)$ tal que $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} v_\epsilon$ (puntualmente). Por otro lado por el Teorema de Fubini se tiene:

$$\langle \mathcal{L}v * \chi_\epsilon(a)b, b \rangle \geq 0,$$

por lo que $v_\epsilon = v * \chi_\epsilon$ es plurisubarmónica; además de la prueba del teorema anterior $v_{\epsilon_1} < v_{\epsilon_2}$ ($\epsilon_1 < \epsilon_2$) por lo que el límite puntual es plurisub-armónico (véase [55]) eso implica que $u \in PSA(\Omega)$; además $u = v$ c.t.p. \square

Un corolario inmediato es:

Corolario 15 Sea $u \in PSA(\Omega)$, entonces dd^c es una corriente positiva de bigrado (1, 1).

Enunciemos y probemos aquí un lema de regularización de corrientes positivas que será usado más adelante. Las ideas de la demostración provienen de lo expuesto hasta aquí para la regularización de funciones plurisub-armónicas.

Teorema 45 (Sobre regularización de corrientes positivas en $\mathbb{C}P^k$) Toda corriente positiva, cerrada de bigrado (p, p) es el límite de una sucesión de corrientes positivas de bigrado (p, p) de clase C^∞ .

Demostración: Sea S una corriente arbitraria de bigrado (p, p) . Tomemos ρ_ϵ una aproximación suave de la identidad del grupo de rotaciones $U(k)$ del espacio $\mathbb{C}P^k$ (véase [50]). Tomando la medida de Haar $d\nu(g)$ sobre $U(k)$ entonces la regularización:

$$S_\epsilon = \int_{U(k)} \rho_\epsilon(g) * S d\nu_g$$

$(g \in U(k))$ y S_ϵ es una corriente de clase C^∞ . □

De acuerdo a los resultados anteriores introduzcamos la noción de función estrictamente plurisub-armónica.

Definición 68 Sea $u \in PSA(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^k$. Se dice que u es estrictamente plurisub-armónica si $u \in L_{Loc}(\Omega)$ y para todo $z \in \Omega$, existe V_z (vecindad de z) y $c > 0$ tal que:

$$\sum \frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} b_i \bar{b}_j \geq c|b|^2$$

(en el sentido distribucional).

Así mismo, positividad de la forma de Levi para $u \in PSA(\Omega)$ nos lleva a introducir una función que generaliza las funciones armónicas:

Definición 69 Una función $u : \Omega \subset \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$ se dice que es pluri-armónica si las funciones u y $-u$ son plurisub-armónicas.

De la positividad de la forma de Levi para una función plurisub-armónica se tiene que para una función pluri-armónica u : $dd^c u = 0$ o bien $\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = 0$ para todo $i, j = 1, \dots, k$.

De las ecuaciones de Cauchy-Riemann para una función holomorfa f se deduce directamente que $\Im f$ y $Re f$ son pluri-armónicas.

El siguiente resultado importante se deduce directamente a partir de lo expuesto:

Teorema 46 Si el grupo de cohomología de De Rham $H'_{DR}(X, \mathbb{R})$ es cero entonces la función pluri-armónica en $X \subset \mathbb{C}^k$ puede ser escrita como $u = Re f$ donde f es una función holomorfa en X .

Demostración: Tomando la función $u \in C^\infty(X)$ donde $dd^c u = \frac{i}{2} \bar{\partial} \partial u = \frac{i}{2} d \partial u = 0$ se tiene de la hipótesis sobre el grupo de cohomología que existe $g \in C^\infty(X)$ tal que $dg = \partial u$. De ello se deduce que g es del tipo $(1, 0)$ y que además del hecho que dg es una forma holomorfa se deduce que g también es holomorfa. Usando estas consideraciones, tenemos por tanto que:

$$d(u - 2 Re g) = d(u - g - \bar{g}) = (\partial u - dg) + (\bar{\partial} u - d\bar{g}) = 0$$

Y ambos sumandos son nulos puesto que son formas de grado $(1, 0)$ y $(0, 1)$. Integrando se tiene finalmente que $u = Re(2g + C)$, donde C es una constante. Con esto concluye la demostración. □

Conjuntos pseudo-convexos Para terminar esta sub-sección referente a las funciones plurisub-armónicas, introduzcamos la noción de conjunto pseudo-convexo. Para ello introducimos la función distancia para un dominio en \mathbb{C}^k . Si el negativo del logaritmo de dicha función distancia es una función plurisub-armónica se dice que el dominio en cuestión es pseudo-convexo (de este hecho proviene dicha terminología, puesto que ello generaliza la positividad del hessiano de la función que define el borde de un dominio convexo de frontera suave). La cuestión planteada por mucho tiempo acerca que si un dominio pseudo-convexo es un dominio de holomorfía y viceversa (y resuelta positivamente en los trabajos de Cartan, Lelong y Bremerman) ha venido a aclarar y generalizar los descubrimientos tempranos acerca del comportamiento de las funciones de varias variables hechos por Hartogs (Para una discusión detallada de estos véase [69]) y acentuar la íntima relación entre holomorfía y pluri-subarmonicidad.

Definición 70 Sea δ una función de distancia homogénea en \mathbb{C}^n tal que $\delta(tz) = |t|\delta(z)$, $t \in \mathbb{C}$, $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ ($z \neq 0$). Definamos la distancia-frontera como $d_\Omega(z) = \inf_{\zeta \in \Omega^c} \delta(z - \zeta)$, con $z \in \Omega$. En caso que $\Omega = \mathbb{C}^n$ entonces $d_\Omega = 0$.

Definición 71 Las siguientes condiciones sobre $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (abierto), son equivalentes:

1. Existe $u \in PSA(\Omega)$, $u \neq -\infty$ tal que $\{z \in \Omega; u(z) \leq t\} \Subset \Omega$. para todo $t \in \mathbb{R}$.
2. $K \subset \Omega$ compacto, entonces: $\widehat{K} = \{z \in \Omega; u(z) \leq \sup_K u\}$, para todo $u \in PSA(\Omega)$ $\Subset \Omega$ ⁴
3. $z \mapsto -\log d_\Omega(z) \in PSA(\Omega)$, para toda función distancia d que satisface la homogeneidad
4. $z \mapsto -\log d_\Omega(z) \in PSA(\Omega)$, para alguna función distancia d_Ω .

Aquí no se discutirá la equivalencia de estos enunciados (véase [55, 56, 69]) para los detalles. Pasemos a la siguiente

Definición 72 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (abierto), que satisface alguna de las condiciones del teorema anterior, entonces Ω se denomina pseudo-convexo.

2.6.3. Sub-niveles de funciones plurisub-armónicas. Teorema de Kiselman-Skoda

En esta sub-sección se probará el importante Teorema de Acotación de Volúmenes de Sub-niveles de Funciones Plurisub-armónicas. En el Capítulo [5] se verá que este teorema es un elemento fundamental para la estimación de volúmenes de las bolas asociadas a las iteraciones de un potencial plurisub-armónico correspondiente a una corriente positiva y cerrada dada.

Definición 73 (Conjunto de sub-niveles) Sea $u \in PSA(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto. El conjunto de sub-niveles de u se define como:

$$A_u(t) = \{z \in \Omega; u(z) \leq t\}, t \in \mathbb{R}.$$

Antes de probar que el volumen de $A_u(t)$ decrece exponencialmente en cuanto t tiende a $-\infty$ daremos algunos ejemplos

Ejemplo 39 Sea $u(z) = a \log \|z\| + b$, $z \in \mathbb{C}^k$, $\|z\| < R$. Entonces tomando $t = \log r + b$ se tiene:

$$\lambda_u(A_u(t)) = \lambda(rB) = r^{2k} \lambda(B) = \lambda(B) e^{\alpha(t-b)},$$

donde $\alpha = 2k/a = 2k/V_u(0)$.

Un caso más general que el ilustrado por el ejemplo anterior se obtiene si se toma una función G convexa y estrictamente creciente en $] -\infty, \alpha_0]$. Si tomamos $f(z) = G(\log \|z\|)$ (con $\|z\| < e^{\alpha_0}$) se puede probar usando la forma distribucional de Levi que f es plurisubarmónica. Además

$$\nu_u(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{g(\log r)}{\log r} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{g(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{t}{g^{-1}(t)}.$$

De la expresión del volumen en el ejemplo anterior se obtiene entonces que:

$$\lambda(A_u(t)) \lambda(B) e^{2kg^{-1}(t)} \quad t \leq t_0 = g(\alpha_0).$$

⁴Hay que señalar que en la notación tomada aquí de Hörmander, $A \Subset B$ significa que la clausura de A es un subconjunto compacto de B .

El siguiente teorema de acotación superior del volumen de un conjunto de sub-niveles se basa en un trabajo previo de Skoda del cual enunciamos el teorema en cuestión (véase para detalles [106]).

Teorema 47 *Sea la función $u \in PSA(\Omega)$ en el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto. Si en el punto $z \in \Omega$ se cumple que $\nu_u(z) < 2$ entonces $e^{-u} \in L^1_{loc}(U_z)$ donde U_z es un entorno de z .*

Pasemos a probar el teorema fundamental de este apartado.

Teorema 48 (Kiselman-Skoda) *Sea la función $u \in PSA(\Omega)$ en el dominio $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto, $K \subset \Omega$ compacto. Entonces para cualquier $\alpha < 2 \left[\sup_K \nu_u(z) \right]^{-1}$ existe una constante C_α tal que*

$$Vol(K \cap A_u(t)) \leq C_\alpha e^{\alpha t} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Demostración: Usando el teorema de Skoda para la función pluri-subarmónica $h = \alpha u$, se tiene que la hipótesis concerniente al número de Lelong implica que $e^{-h} = e^{-\alpha u} \in L^1_{loc}(U_z)$ (siendo U_z un entorno de $z \in K$). Además, siendo K compacto, entonces $e^{-\alpha u} \in L^1_{loc}(K)$. Como $e^{\alpha(t-u(z))} \geq 1$, para todo $z \in A_u(z)$ se concluye que:

$$Vol(K \cap A_u(t)) \leq \int_K e^{\alpha(t-f(z))} d\lambda(z) \leq e^{\alpha t} \int_K e^{-\alpha u(z)} d\lambda(z) = C_\alpha e^{\alpha t}. \quad (2.53)$$

□

Capítulo 3

Singularidades

La Sección [3.1] trata sobre algunos conceptos de la teoría del pluripotencial. La extensión del producto cuña para dos corrientes positivas es un elemento importante para el estudio del operador de Monge -Ampere el cual generaliza al operador de Laplace y presenta una serie de propiedades interesantes en relación a las funciones plurisub-armónicas. Además de la introducción del producto cuña, en esta sección se presenta la desigualdad de Chern-Levine-Niremberg de importancia en el análisis y geometría. Se revisa además brevemente ciertos conceptos relativos al Problema de Dirichlet para la ecuación de Monge Ampere los cuales proporcionan conceptos útiles para el estudio de las funciones plurisub-armónicas y otros objetos (véase para más detalles [2],[18],[65],[72]). En la siguiente sección se define el concepto más importante de este capítulo: el número de Lelong, el cual es una medida del tipo de singularidad de una función plurisub-armónica. Se estudian en esta sección las múltiples definiciones equivalentes que posee el número de Lelong empezando de aquella que fija de manera directa el grado de la singularidad logarítmica de una función plurisub-armónica. El siguiente punto consiste en tratar los conjuntos de sub-niveles definidos por el número de Lelong. Esta cuestión proviene en principio de la pregunta si el número de Lelong visto como una función real es semicontinua superior (SCS) en un espacio proyectivo complejo. La respuesta positiva a esta cuestión fue dada por Siu ([105]) y ha significado el punto de partida de una serie de desarrollos interesantes ([14],[17],[]). La Sección [3.3] representa una extensión de los números de Lelong a otros objetos analíticos tales como las corrientes. En el caso general de las corrientes, la idea de singularidad es mucho más compleja que en el caso de una función plurisub-armónica abarcando una variedad de objetos geométricos y topológicos aún no bien estudiados. En esta sección se da una definición satisfactoria del número de Lelong para cualquier tipo de corriente positiva cerrada de bigrado (p, p) lo cual nos permite extender el Teorema de Siu para dichas corrientes ([55],[65][101]). La última parte de esta sección extiende los números de Lelong para los conjuntos analíticos y se da además la interpretación geométrica y analítica para dicho número en dicho caso. La última sección introduce el tratamiento de Demailly de los números de Lelong generalizados. Este tratamiento nos permite introducir en particular los números de Lelong direccionales conocidos como los números de Kiselman los cuales definen el grado de la singularidad de una función plurisub-armónica en una recta compleja dada ([17],[64]). Una aplicación del número de Kiselman se estudia en la última parte lo cual se usará en el Capítulo 5.

3.1. Tópicos de Teoría del Pluri-Potencial

3.1.1. Producto cuña de Bedford-Taylor. Desigualdad CLN

Producto cuña para corrientes positivas.- El problema de definir el producto cuña $dd^c u \wedge T$ radica en que ambos factores tienen coeficientes que son medidas las cuales no se pueden multiplicar. Si u es una función PSA entonces la corriente uT está bien definida puesto que u es una función localmente acotada de Borel (véase la Sección [2.6]) y T tiene coeficientes de medida.

Definición 74 El producto cuña de Bedford-Taylor se define como

$$dd^c u \wedge T = dd^c(uT) \quad (3.1)$$

(en el sentido distribucional).

Probemos que:

Proposición 31 El producto cuña $dd^c u \wedge T$ es una corriente positiva si T es corriente positiva.

Demostración: En un abierto $U \subset \mathbb{C}^k$ definamos una secuencia decreciente de funciones PSA suaves $u_k = u * \chi_k$. Del Teorema de Convergencia Dominada $u_k T \rightarrow uT$ (débilmente); de este modo por la continuidad débil de la diferenciación: $dd^c(u_k T) \rightarrow dd^c(uT)$. Puesto que u_k es suave: $dd^c(u_k T) = dd^c u_k \wedge T \geq 0$. Esto prueba que $dd^c(uT) \geq 0$. \square

Generalizando el producto Bedford-Taylor, se tiene por inducción: Sea $u_1, u_2, \dots, u_q \in PSA(\Omega)$, Ω un abierto contenido en \mathbb{C}^k

$$dd^c u_1 \wedge dd^c u_2 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T = dd^c(u_1 dd^c u_2 \wedge \dots \wedge dd^c u_q \wedge T), \quad (3.2)$$

el producto también es una corriente positiva.

Tomemos ahora $u \in PSA(\Omega)$ y además u es localmente acotada, en este caso la corriente de bigrado (k, k) de la forma $(dd^c u)^k$ está bien definida y es una medida positiva. Cuando $u \in C^2(\Omega)$ después de efectuar cálculos tenemos la expresión diferencial ya obtenida para el operador de Monge-Ampere

$$(dd^c)^k u = k! \det \left[\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} \right] \prod_{i=1}^k \frac{j}{2} dz_i \wedge d\bar{z}_i. \quad (3.3)$$

Desigualdad Chern-Levigne-Nirenberg (CLN) Definamos primero una norma especial, útil en lo que sigue.

Definición 75 Sea T una corriente de orden 0 definida en M (variedad compleja). Sea K un subconjunto compacto de M . La seminorma de masa se define como:

$$\|T\|_K = \sum_j \int_{K_j} \sum_{I,J} |T_{I,J}|, \quad (3.4)$$

$T_{I,J}$ son los coeficientes de la corriente T y K_i son conjuntos tal que $K = \cup_i K_i$ es una partición de K de tal modo que \bar{K}_i está contenida en un mismo entorno de coordenadas locales.

La seminorma no depende de la elección del sistema de coordenadas. En efecto, dados dos sistemas de coordenadas locales y el sistema de compactos $\{K_i\}$, $\{K'_j\}$, entonces en la intersección de estos dos sistemas locales se puede tomar el sistema de compactos $\{K_i \cap K'_j\}$, de este modo.

para el nuevo sistema de coordenadas la norma respecto al compacto K será $\sum_j \int_{\mathcal{K}_j} \sum_{I,J} |T_{I,J}|$, donde $\mathcal{K}_j \in \{K_i \cap K'_j\}$. Dicho valor de la norma es igual a ambos valores de la norma respecto a los dos sistemas de coordenadas considerados al principio y esto prueba que la norma no depende del sistema de coordenadas.

Si K está contenido en un entorno de coordenadas locales se tiene para $T \geq 0$ existen $C_1, C_2 > 0$ tal que

$$C_1 \|T\|_K \leq \int_K T \wedge \varphi_0^p \leq C_2 \|T\|_K.$$

Para comprobar esto sólo hay que aplicar la Proposición [29]. Denotemos además $T \in L^p(K)$, $p \in \mathbb{Z}^+$, $\varphi_0 = dd^c|z|^2$. Enunciemos y probemos la importante desigualdad de Chern-Levine-Niremberg:

Teorema 49 (Desigualdad CLN) Sean K, K' compactos contenidos en M , $K' \subset K^\circ$. Existen constantes $C_{K,K'} \geq 0$ tal que:

$$\|dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T\|_{K'} \leq C_{K,K'} \|u_1\|_{L^\infty(K)} \cdots \|u_q\|_{L^\infty(K)} \|T\|_K. \quad (3.5)$$

Demostración: Por inducción basta probar el resultado para $q = 1$ y $u_1 = u$. Procedamos a cubrir K' con una familia de bolas $B'_j \subset\subset B_j \subset K$ contenidos en las cartas de M . Definamos $\chi(z) \in D(B_j)$ tal que $\chi|_{\overline{B'_j}} = 1$, luego se tiene:

$$\|dd^c u \wedge T\|_{K' \cap \overline{B'_j}} \leq C \int_{\overline{B'_j}} dd^c u \wedge T \wedge \varphi_0^{p-1} \leq C \int_{B_j} \chi dd^c u \wedge T \wedge \varphi_0^{p-1}.$$

Tomando en cuenta que T y φ_0 son cerradas e integrando por partes de acuerdo al lema [5]:

$$\|dd^c u \wedge T\|_{K' \cap \overline{B'_j}} \leq C \int_{B_j} u T \wedge dd^c \chi \wedge \varphi_0^{p-1} \leq C' \|u\|_{L^\infty(K)} \|T\|_K,$$

(donde C' queda como el producto de C por una constante que acota los coeficientes de la corriente $(dd^c \chi \wedge \varphi_0^{p-1})$). \square

Corolario 16 Sean $u_1, \dots, u_q \in PSA(\Omega) \cap C^0(\Omega)$; $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto y sea

$$\{u_1^k\}, \{u_2^k\} \dots \{u_q^k\}$$

sucesiones, tales que $\{u_i^k\} \subset PSA(\Omega)$ ($i = 1, \dots, q$) los cuales convergen uniformemente localmente a u_1, \dots, u_q . Si T_k es una secuencia de corrientes positivas y cerradas tal que se cumple $T_k \rightarrow T$ en el sentido débil. Entonces se tiene los siguientes enunciados:

1. $u_1^k dd^c u_2^k \wedge \cdots \wedge dd^c u_q^k \wedge T_k \rightarrow u_1 dd^c u_2 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T$ (débilmente).
2. $dd^c u_1^k u_2^k \wedge \cdots \wedge dd^c u_q^k \wedge T_k \rightarrow dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_q \wedge T$ (débilmente).

Demostración: El segundo enunciado se obtiene del primero debido a la continuidad débil de dd^c . Usando la inducción es suficiente probar el primer enunciado cuando $q = 1$. Si u^k converge uniformemente localmente a $u \in PSA(\Omega)$, se tienen las regularización $u_\epsilon * \rho_\epsilon$ y podemos escribir:

$$u^k T_k - uT = (u^k - u)T_k + (u - u_\epsilon)T_k + u_\epsilon(T_k - T) + (u_\epsilon - u)T.$$

Como la secuencia T_k es convergente débilmente es también localmente y uniformemente acotada en masa, por tanto, de la desigualdad CLN:

$$\|u^k T_k - uT_k\|_K \leq \|u^k - u\|_{L^\infty(K)} \|T_k\|_K$$

converge a cero sobre cualquier compacto K .

El mismo argumento muestra que $\|(u - u_\epsilon)T_k\|_K$ puede ser hecho arbitrariamente pequeño al escoger ϵ suficientemente cercano a cero. Como u_ϵ es suave, entonces $u_\epsilon(T_k - T)$ converge débilmente a cero. Para el último miembro para finalizar también es suficiente sólo aplicar la misma desigualdad CLN. \square

El siguiente resultado establece una fórmula multiplicativa para el producto cuña de corrientes:

Teorema 50 (Producto de masas) Sean las funciones $u_1, \dots, u_q \in PSA(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{C}^{k+1} \setminus \{0\}$ localmente acotadas y que satisfacen la condición:

$$u_j(\lambda z) = c_j \log |\lambda| + u_j(z), \text{ para } z \in \mathbb{C}^{k+1}, \lambda \in \mathbb{C}.$$

Sean además T_j corrientes de bigrado $(1, 1)$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, $j = 1, \dots, q$ donde $\pi * T_j = dd^c u_j$. Se verifica entonces que:

$$\|T_1 \wedge \dots \wedge T_q\| = \|T_1\| \dots \|T_q\|.$$

Demostración:

Primero establezcamos la siguiente igualdad:

$$\|T_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_q\| = \|T \wedge S\|$$

donde $S = \frac{1}{(k-q)!} T_2 \wedge \dots \wedge T_q \wedge \omega_0^{k-q}$ y además ω_0 es la forma métrica de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. En efecto, de la definición de $\|T\|$:

$$\|T_1 \wedge \dots \wedge T_q\| = \frac{1}{(k-q)!} \int (T_1 \wedge \dots \wedge T_q) \wedge \omega_0^{k-q} = \frac{1}{(k-q)!} \int dd^c u_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_q \wedge \omega_0^{k-q} =$$

Usando la diferenciabilidad de u_1 y teniendo en cuenta que S es de bigrado $(k-1, k-1)$:

$$= \frac{1}{(k-q)!} \int dd^c(u_1 \wedge T_2 \wedge \dots \wedge T_q \wedge \omega_0^{k-q}) = \frac{1}{(k-q)!} \int dd^c u_1 \wedge (T_2 \wedge \dots \wedge T_q \wedge \omega_0^{k-q}) = \|T_1 \wedge S\|.$$

Tomemos ahora $u_\epsilon \rightarrow u_1$ (la sucesión estándar suave de plurisubarmónicas), sea además $\tau = \|T_1\|$ y tomemos $T_\epsilon - \tau\omega$ Puesto que las corrientes son ambas positivas, cerradas de bi-grado $(1, 1)$ entonces pueden ser expresadas localmente como $dd^c v_\epsilon$, donde $v_\epsilon \in PSA(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) \cap C^\infty(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$. En la igualdad $T_\epsilon - \tau\omega_0 = dd^c v_\epsilon$ integrando en todo el espacio y pasando al límite $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene que $\|dd^c v_\epsilon\| = 0$. De este modo, se tiene que:

$$\begin{aligned} \|T_1 \wedge \dots \wedge T_q\| &= \|T_1 \wedge S\| = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \|T_\epsilon \wedge S\| \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int (\tau\omega_0 + dd^c v_\epsilon) \wedge S = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tau \int S \wedge \omega_0 + \int S \wedge dd^c v_\epsilon = \tau \int S \wedge \omega_0 \\ &= \|T_1\| \|S\|, \end{aligned}$$

la cual establece el teorema. \square

3.1.2. Otras cuestiones asociadas al operador de Monge-Ampere

Medida plurisub-armónica.- Para generalizar la medida armónica en \mathbb{C} tomemos un dominio $D \subset \mathbb{C}P^k$, $k > 1$, y definamos ($E \subset D$)

$$w_D(z, E) = \sup\{u(z) : u \in PSA(D), u \leq 0, u|_E \leq -1\}, \quad (3.6)$$

para tomar seguidamente su regularización superior:

$$w_D^*(z, E) = \limsup_{z' \rightarrow z} w_D(z', E). \quad (3.7)$$

Esta función es PSA y se denomina la medida plurisub-armónica relativa al dominio D . Si bien $w_D \equiv -1$ sobre E , la regularización superior puede no cumplir esta propiedad; si $w_D^* \equiv -1$ sobre E entonces E se denomina pluriregular. Se prueba que si el dominio D es fuertemente convexo y $E \subset\subset D$ entonces E es pluriregular. La función w_D^* es continua y satisface la ecuación compleja de MA.

Método de Perron-Bremermann para el Problema de Dirichlet de la ecuación

MA El Problema de Dirichlet para la ecuación de Monge-Ampere se enuncia de modo totalmente similar a su análogo unidimensional para la ecuación de Laplace:

Encuéntrese una solución φ en $D \subset \mathbb{C}^k$ para la ecuación de Monge-Ampere la cual tiene valores prefijados continuos en ∂D .

Consideremos un enfoque del problema en cuestión que extiende el método clásico de Perron para el Problema de Dirichlet en \mathbb{C} .

Definamos para cada función continua $f : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ la familia de funciones plurisubarmónicas:

$$\mathcal{P}_{D,f} = \{u \in PSA(\bar{D}); u|_{\partial D} \leq f\}.$$

Tomemos la función de envoltura superior $w(z)$ definida como $w(z) = \sup\{u(z) : u \in \mathcal{P}_{D,f}\}$. Hay que notar que en el caso particular en el que $f \equiv -1$ la función de envoltura superior coincide con la medida plurisub-armónica del dominio D . La regularización superior $w^*(z) = \limsup_{z \rightarrow z'} w(z')$ es plurisubarmónica y se le conoce como la función de Perron-Bremermann. Este último autor probó que cuando D es estrictamente (o fuertemente) pseudoconvexo y $f \in C(\partial D)$ se verifica que w^* es una solución distribucional del Problema de Dirichlet (véase [7]). En particular w^* es un elemento de la familia Perron-Bremermann. La unicidad de dicha solución viene determinada por la propiedad de maximalidad de Bedford-Taylor (véase [4]):

Teorema 51 *Sea D pseudoconvexo, además consideremos $u \in C(\bar{D})$ una solución de la ecuación de Monge-Ampere y $v \in PSA(D) \cap C(\bar{D})$, entonces $u|_{\partial D} \geq v|_{\partial D}$ implica $u(z) \geq v(z)$, $z \in D$.*

En realidad de lo expuesto se desprende el principio que cualquier función plurisub-armónica y continua que posee la propiedad de maximalidad en subdominios $G \subset\subset D$ resulta ser una solución distribucional de la ecuación de Monge-Ampere en D .

Conjuntos pluripolares.- En la teoría unidimensional del potencial (y en su generalización en \mathbb{R}^n) los llamados conjuntos polares juegan un rol importante en diversos problemas. Pasemos a definir un concepto análogo para varias dimensiones complejas.

Definición 76 *Un conjunto $E \subset \mathbb{C}^k$ es pluripolar si para cada punto $z \in E$ hay un abierto U y una función PSA u_z tal que $E \cap U \subset \{u_z = -\infty\}$.*

Un conjunto pluripolar es siempre de medida Lebesgue nula (véase la Sub-sección [??]).
 Establezcamos la relación entre los conjuntos pluripolares y la propiedad de extensión de las funciones PSA.

Teorema 52 *Sea X un conjunto pluripolar en una variedad compleja Y . Entonces, si una función $u \in PSA(Y \setminus X)$ es localmente acotada alrededor de X se extiende únicamente a una función $\tilde{u} \in PSA(Y)$.*

En forma sucinta este teorema de extensión de una función plurisub-armónica en un conjunto pluripolar nos dice que dicho conjunto X particiona el conjunto $PSA(Y \setminus X)$ en dos conjuntos de funciones: uno en el cual las funciones se pueden extender en todo el espacio y el otro en el cual las funciones tienen una singularidad esencial en X . Un teorema probado por Josefson establece además las condiciones por las cuales un conjunto pluripolar puede ser definido por una sola función plurisub-armónica (véase [55]).

Demostración: La unicidad de la extensión (en caso de existir) está garantizada a través del conjunto X por el hecho que dicho conjunto tiene medida de Lebesgue cero. Por otro lado, todo punto $z \in X$ es tal que para una vecindad U se tiene que $X \cap U \subset \{z \in U; v(z) = -\infty\}$ donde v es una plurisub-armónica que no es idéntica al $-\infty$. Tomando U convenientemente más pequeño y sustrayendo una constante para hacer $v \leq 0$ se tiene que para $\epsilon > 0$, la función $u_\epsilon = u + \epsilon v \in PSA(U \setminus X)$ puede ser extendida como una función SCS sobre U al hacer $u_\epsilon = -\infty$ sobre $X \cap U$.

Más si tomamos una recta compleja que pasa por el origen se puede comprobar de la definición de u_ϵ que la desigualdad del valor medio se satisface en el punto $z \in U \setminus X$: $u_\epsilon(z) \leq L(u_\epsilon, z, r)$ donde $r < d(z, X \cup U^c)$ como también si $z \in X$ con $r < d(z, U^c)$. De ahí se tiene por lo tanto que: $u_\epsilon \in PSA(U)$ y más aún la así llamada Regularización superior $\tilde{u} = \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon$ donde $z \in B(z, \epsilon)$ también será un elemento de $PSA(U)$. Precisamente es esta función la que extiende u ya que ellas coinciden en $U \setminus X$. □

Corolario 17 *Sea X un conjunto pluripolar en $D \subset \mathbb{C}^k$. Toda función holomorfa $f \in \mathcal{O}(D \setminus X)$ que está localmente acotada en X se extiende a una función holomorfa $\tilde{f} \in \mathcal{O}(D)$.*

Demostración: Si aplicamos el teorema a $\Re f$ y $\Im f$ se sigue que ambas tienen extensiones pluri-armónicas en todo D tal que $\tilde{f} \in C^\infty(D)$. Usando un criterio de densidad en $D \setminus X$ se tiene que $\bar{\partial} \tilde{f} = 0$ en D . □

Corolario 18 *Sea $X \subset D$ un conjunto pluripolar cerrado. Si D es conexo entonces $D \setminus X$ es también conexo.*

Demostración: Si $D \setminus X$ es una unión disjunta $\Omega_1 \cup \Omega_2$ de subconjuntos no vacíos, la función de f definida como $f = 0$ en Ω_1 , $f = 1$ en Ω_2 tendrían extensiones holomorfas en X lo cual contradice la unicidad de la extensión. □

La siguiente importante caracterización de los conjuntos pluripolares pertenece a Sadullaev (véase [98])

Teorema 53 *Si D es un dominio fuertemente pseudoconvexo, entonces $X \subset D$ es pluripolar si y sólo si $w_D^*(z, X) = 0$.*

Capacidad de Bedford-Taylor

Definición 77 Para E (boreliano) contenido en D se define:

$$C(X, D) = \sup_u \left\{ \int_X (dd^c u)^k; u \in PSA(D), 0 \leq u \leq 1 \right\}. \quad (3.8)$$

de la desigualdad Chern-Levine-Niremberg se tiene que $C(X, D) < \infty$ si $X \subset\subset D$; además $C(X, D) = 0$ para X pluripolar (esto de manera análoga a la capacidad de un conjunto polar en \mathbb{R}^n).

Señalemos una desigualdad bastante simple que se deriva de la noción de capacidad de Bedford-Taylor:

Proposición 32 (Desigualdad de Alexander-Taylor) Sea $K \subset B(0, r)$ compacto ($r < 1$). Entonces existe una constante A_r tal que se verifica:

$$C(K, B) \leq \frac{A_r}{m(K)},$$

donde $C(K, B)$ es la capacidad de Bedford-Taylor y $m(K)$ es la medida de Lebesgue de K .

Demostración: Basta aplicar la desigualdad CLN a las corrientes $dd^c u$ y $(dd^c u)^{k-1}$, para luego usar el hecho que $C(K, B) = \int_B (dd^c u)^k$. Véase la definición [110] acerca de la capacidad de Bedford-Taylor. \square

Para el estudio de las propiedades mas importantes de la capacidad de Bedford-Taylor: (véase [4, 5]). Para más detalle sobre la teoría de capacidades en \mathbb{C}^k véase además [18, 65, 98].

3.2. Índices de singularidades para funciones PSA

3.2.1. Números de Lelong para funciones PSA

El número de Lelong mide cuan "grande" las singularidades de una función plurisub-armónica son. Es en sí una generalización de la multiplicidad de un cero de una función holomorfa. Examinemos a continuación el siguiente ejemplo para ver esto con más detalle:

Ejemplo 40 Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f|$. En el sentido distribucional $\mu = 0$ en todo punto donde $f \neq 0$. Calculemos el valor de dicha funcional en $f = 0$. Tomemos para ello $\phi \in D(\mathbb{C})$ y notemos que es suficiente examinar la funcional:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z|,$$

(esto debido a la descomposición $f(z) = (z - z_i)^{r_i} g(z)$ alrededor del cero z_i de multiplicidad r_i).

$$\int_{\mathbb{C}} \log |z| \Delta \phi(z) d\lambda(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbb{C} - B(0, r)} \log |z| \Delta \phi(z) d\lambda(z).$$

Expresando el elemento de área y el laplaciano en coordenadas polares, se tiene:

$$\left\langle \frac{1}{2\pi} \Delta \log |z|, \phi \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} [\phi(re^{i\theta}) - r \log r \frac{\partial \phi}{\partial r}(re^{i\theta})] d\theta,$$

pasando al límite $r \rightarrow 0$ e integrando: $\langle \frac{1}{2\pi} \Delta \log |z|, \phi \rangle = \phi(0)$. Esto prueba que $\frac{1}{2\pi} \Delta \log |z| = \delta_0$ y para el caso de m polos de $f \in \mathcal{H}(\Omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \Delta \log |f| = \sum_{i=1}^m r_i \delta_{z_i},$$

donde r_i es la multiplicidad del polo z_i .

Tomando ahora la masa de $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f|$ alrededor de un entorno de radio r de una raíz (digamos z_0) entonces se tiene que la masa será igual a la multiplicidad de z_0 .

Este mismo resultado se extiende a funciones holomorfas $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}$. es decir, si tomamos la medida $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta \log |f|$ donde Δ es el laplaciano en $2k$ variables reales $\Re z_j, \Im z_j$ se tiene que μ es la suma de masas puntuales en cada cero y con coeficientes iguales a la multiplicidad de cada cero (donde la multiplicidad está definida como el grado del primer término en la expansión de Taylor en polinomios homogéneos de la función f). Esto es:

$$\mu = \sum_i r_i \delta_{z_i},$$

(r_i es la multiplicidad del cero z_i).

De acuerdo a esto, si tomamos la masa de μ en un entorno arbitrario de una raíz de $f = 0$ (digamos alrededor de z_0) y lo dividimos por el volumen de la bola $B(0, r)$ en \mathbb{C}^{k-1} se verifica que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|\xi - z_0| < r} d\mu(\xi) / \lambda_{2k-2} r^{2k-2} = r_0.$$

Nótese que la magnitud obtenida es la densidad de la medida μ en el punto z_0 y la comparación con la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^{2k-2} tiene sentido pues de la definición de μ aquella es una medida $2k - 2$ -dimensional.

Ahora bien, puesto que $u = \log |f|$ es plurisub-armónica procedamos a generalizar dichas ideas. Introduzcamos el concepto de número de Lelong para una función plurisub-armónica arbitraria.

Definición 78 Sea Ω un abierto contenido en \mathbb{C}^k , $u \in PSA(\Omega)$, $z \in \Omega$. El número de Lelong para u en z , $\nu_u(z)$, se define como:

$$\nu_u(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{|\xi - z| < r} d\mu(\xi) / \lambda_{2k-2} r^{2k-2}, \quad (3.9)$$

donde $d\mu = \frac{\Delta u}{2\pi}$, la cual es una medida positiva.

Antes de estudiar las formas equivalentes que adquiere el número de Lelong demos un teorema acerca del comportamiento de la función de valor medio para $u \in PSA(\Omega)$:

$$M_u(z, r) = \int_{|\xi|=1} u(z + r\xi) d\omega(\xi) / \sigma_{2k}. \quad (3.10)$$

Este teorema a enunciarse es análogo en cierto sentido a un resultado similar para funciones sub-armónicas (véase [2, 71])

Teorema 54 Sea $\Omega = \Omega_1 + i\Omega_2$, donde Ω_1, Ω_2 dos abiertos en \mathbb{R}^k para $k \geq 2$. Si $u \in PSA(\Omega)$ tal que sólo depende de $\Re z$, entonces para $x \in \Omega_1$, la función $x \rightarrow u(x)$ es convexa.

Demostración: Tomemos primero $u \in C^2 \cap PSA(\Omega)$, entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Esto implica de la positividad de la forma de Levi para u , que el Hessiano de $u(x)$ es positiva lo cual implica que u es convexa en Ω_1 .

En el caso general, la regularización

$$u_\epsilon(x) = \int_{\mathbb{C}^k} u(z-w) \chi_\epsilon(w) d\lambda(w),$$

es decir depende sólo de $x \in \Omega_1$; esto implica de lo anterior que $u_\epsilon(x)$ es convexa y puesto que el límite $u = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u_\epsilon(x)$ existe, podemos afirmar que u es convexa. \square

Corolario 19 Sea $u \in PSA(D(a, R))$, donde $D(a, R) = \prod D(a_j, R_j) \subset \mathbb{C}^k$ es un polidisco. Entonces:

$$\tau(u; r_1, \dots, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} u(a_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \dots, a_n + r_n e^{i\theta_n}) d\theta_1 \cdots \theta_n,$$

es una función convexa no decreciente de $(\log r_1, \dots, \log r_k)$.

Demostración: Que τ es no decreciente proviene de la propiedad de crecimiento de la función promedio de una función sub-armónica (véase[2]) y del hecho que u es subarmónica en cada eje. Tomemos la función $\tilde{\tau}$:

$$\tilde{\tau}(z_1, \dots, z_k) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} u(a_1 + e^{z_1} e^{i\theta_1}, \dots, a_k + e^{z_k} e^{i\theta_k}) d\theta_1 \cdots d\theta_k.$$

Entonces, puesto que:

$$e^{z_j} e^{i\theta_j} = e^{\Re z_j} e^{i(\theta_j + \Im z_j)},$$

y haciendo el cambio de variable se concluye que $\tilde{\tau}$ depende sólo de $\Re z_j$ y además si tomamos $\Re z_j = \log r_j$ se tiene $\tilde{\tau} = \tau$.

Falta probar entonces que $\tilde{\tau}$ es plurisubarmónica con lo cual aplicando el teorema anterior se concluirá la demostración del corolario.

Para probar que $\tilde{\tau}$ sea plurisubarmónica establezcamos que es semicontinua superior. En efecto, introduciendo el límite dentro del símbolo de integración se tiene:

$$\begin{aligned} \limsup_{w \rightarrow z} \tilde{\tau}(w) &= \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} \limsup_{w \rightarrow z} u(a + e^w e^{e^{i\theta}}) d\Theta \\ &\geq \frac{1}{(2\pi)^k} \int_0^{2\pi} u(a + e^z e^{i\theta}) d\Theta \\ &= \tau(z), \end{aligned}$$

donde $d\Theta = d\theta_1 d\theta_2 \cdots, \theta_k$. Efectuando los cálculos se obtiene finalmente la desigualdad del valor medio con lo cual concluye la prueba. \square

Corolario 20 $M_u(z, r)$ es una función convexa y no decreciente de $\log r$.

Demostración: Basta considerar que $M_u(z, r) = \tau(u; r, \dots, r)$. □

Puesto que $M_u(z, r)$ es una función de $\log r$ la cual es infinitamente derivable entonces podemos afirmar que $M_u(z, r)$ es también infinitamente derivable. Esto nos conduce a la primera forma equivalente del número de Lelong. Antes de dar dicha definición demos un ejemplo de como la función $M(z, r)$ se usa en diversas cuestiones que conciernen a la convexidad y a las medidas asociadas a ciertas funciones plurisub-armónicas.

Formulemos y probemos ahora la siguiente condición equivalente del número de Lelong;

Teorema 55 Sea $u \in PSA(\Omega)$ y Ω abierto contenido en \mathbb{C}^k . Entonces el número de Lelong existe y:

$$\nu_u(z) = \lim_{r \rightarrow 0} r \frac{\partial M(z, r)}{\partial r}. \quad (3.11)$$

Demostración: Tomemos $u_j \rightarrow u$, $\{u_j \in C^\infty(\Omega)\}$, podemos entonces afirmar que $\Delta u_j \rightarrow \Delta u$ en el sentido distribucional. En efecto, de las propiedades de la forma de Levi (véase las secciones [2.2] y [2.6]) se deduce que para $v \in C^\infty(\Omega)$:

$$\int_{B(z, r)} v \Delta u_j = \int_{B(z, r)} u_j \Delta v;$$

puesto que $u_j \Delta v \rightarrow u \Delta v$, entonces se deduce la convergencia en el sentido débil buscada. Usando esto tomemos $u \in PSA(\Omega) \cap C^\infty$. Del Teorema de Gauss:

$$\int_{B(z_0, r)} \Delta u d\lambda = \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma,$$

donde $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ indica la derivada en dirección de la normal. De la definición de $M_u(z_0, r)$ y usando el Teorema de Leibnitz y luego el cambio de coordenadas de la bola $B(0, 1)$ a la bola $B(z_0, r)$ se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} M_u(z_0, r) &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{|\xi|=1} u(z_0 + r\xi) d\sigma(\xi) / \sigma_{2k} = \int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial r} u(z_0 + r\xi) d\sigma(\xi) / \sigma_{2k} \\ &= \int_{|\xi|=1} \frac{\partial}{\partial \eta} u d\sigma(\xi) / \sigma_{2k} = \int_{\partial B(z_0, r)} \frac{\partial}{\partial \eta} u d\sigma(\xi) / r^{2k-1} \sigma_{2k} \\ &= \int_{B(z_0, r)} \Delta u d\lambda / r^{2k-1} \sigma_{2k} = 2\pi \int_{B(z_0, r)} \Delta \mu / r^{2k-1} \sigma_{2k}. \end{aligned}$$

Pero

$$\frac{2\pi}{r^{2k-1} \sigma_{2k}} = \frac{1}{\frac{\pi^{k-1}}{(k-1)!} r^{2k-1}} = \frac{1}{\lambda_{2k-2} r^{2k-2}}.$$

De donde se obtiene la igualdad postulada. La existencia del número de Lelong se deduce de la igualdad anterior y de las propiedades de monotonía y convexidad de $M_u(z, r)$. □

Del resultado anterior se deduce directamente que:

Teorema 56 Dada las condiciones del teorema anterior. El número de Lelong satisface:

$$\nu_u(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{M_u(z, r)}{\log r}. \quad (3.12)$$

Demostración: Es suficiente probar el siguiente enunciado: Para $M(x)$ convexa, creciente en todo el eje real, $C^2(\mathbb{R})$ se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{dM}{dx} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{M(x)}{x}.$$

En efecto, como se sabe para una función convexa se tiene que $\frac{M(x) - M(c)}{x - c}$ es creciente para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x - c$ diferente de cero, esto es: $\frac{d}{dx} \left[\frac{M(x) - M(c)}{x - c} \right] \geq 0$ de donde $M'(x) \geq \frac{M(x) - M(c)}{x - c}$. Ahora, como $M'(x)$ es creciente, se puede encontrar un $x^* < x$ tal que

$$M'(x^*) \leq \frac{M(x) - M(c)}{x - c} \leq M'(x),$$

de donde, pasando el límite, para $x \rightarrow -\infty$ se obtiene el resultado. \square

Mostremos otra forma equivalente del número de Lelong para una función plurisub-armónica.

Teorema 57 Sea $u \in PSA(\Omega)$, Ω abierto contenido en \mathbb{C}^k , $z_0 \in \Omega$. En una vecindad pequeña de z_0 son equivalentes:

- a. $\nu_u(z_0) = \sup r$
- b. $u(z) \leq r \log |z - z_0| + O(1)$, $z \rightarrow z_0$.

Demostración: Sea para simplificar $z_0 = 0$. Probemos que (b) implica (a). Integrando la desigualdad:

$$M(0, r) \leq \nu \log |r| + O(1)/\sigma_{2k}.$$

Luego para $r > 1$

$$\frac{M(0, r)}{\log |r|} \leq \nu + \frac{O(1)}{\sigma_{2k} \log |r|}.$$

De la monotonía de $M(0, r)/\log |r|$ se tiene para $0 < r^* < 1$ que:

$$\frac{M(0, r^*)}{\log r^*} \leq \frac{M(0, r)}{\log r} \leq \nu,$$

de donde $\nu_f(0) \leq \sup \nu$.

Nuevamente, en la desigualdad para $M(0, r)$ dividiendo por $\log r$ ($0 < r < 1$) se tiene:

$$\frac{M(0, r)}{\log r} \geq \nu + \frac{O(1)}{\sigma_{2k} \log r},$$

de donde $\nu_f(0) \geq \sup \nu$.

Probemos ahora que (a) implica (b). Se tiene de las propiedades de $M(z_0, r)$:

$$M(z_0, r) \approx \nu_u(z_0) \log r + O(1).$$

Expresando como una integral:

$$\int_{|\xi|=1} [u(z_0 + \xi r) - \nu_u(z_0) \log |z - z_0| + O(1)] d\sigma(\xi) = 0.$$

Luego: $u(z) = \nu_u(z_0) \log |z - z_0| + O(1)$, $z = z_0 + \xi r$ y por tanto:

$$u(z) \leq \nu \log |z - z_0| + O(1),$$

donde $\sup \nu = \nu_u(z_0)$. □

Un corolario directo es:

Corolario 21 *En las condiciones del teorema anterior se tiene que:*

$$\nu_u(z_0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sup_{\Delta(r)} u}{\log |r|}. \quad (3.13)$$

Donde $\Delta(r)$ es el polidisco de radio r .

Ilustremos el cálculo del número de Lelong on un ejemplo sencillo:

Ejemplo 41 Sea $u(z) = C \log |z|$, $z \in \mathbb{C}^k$. Entonces

$$M(0, r) = \int_{B(0,1)} C \log |r e^{i\theta}| d\sigma / \sigma_{2k} = C \log |r|.$$

De donde $\nu_u(0) = C$.

Pasemos a probar la invariancia del número de Lelong, respecto a las transformaciones biholomorfas.

Teorema 58 *El número de Lelong es invariante bajo biholomorfismos, es decir: $\nu_u(z_0) = \nu_{u \circ h^{-1}}(h(z_0))$, donde $h : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ (biholomorfismo), $f \in PSA(\Omega)$, Ω abierto contenido en \mathbb{C}^k .*

Demostración: Basta tomar $u \in PSA(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Entonces la medida :

$$d\mu(\xi) = \frac{\Delta[f(\xi)]}{2\pi} = \frac{[\Delta f]}{2\pi} = \frac{[\Delta f \circ h^{-1}(h(\xi))]}{2\pi},$$

por lo que es válida para cualquier $f \in PSA(\Omega)$. □

3.2.2. Teorema de Siu

Demostremos el importante hecho que los sub-niveles del número de Lelong de una función plurisub-armónica son conjuntos analíticos.

Probemos antes algunos hechos auxiliares:

Lema 6 *Sea $u \in PSA(\Omega)$, Ω (abierto) $\subset \mathbb{C}^k$. Si e^{-u} es integrable en una vecindad de z entonces*

$$\nu_u(z) < 2k.$$

Demostración: Usemos la propiedad de la convexidad de $M_u(z, r)$ (Corolario [20]):

$$\nu_u(z) \leq \frac{M_u(z, r) - M_u(z, r_0)}{\log r - \log r_0},$$

para $r, r_0 < d(z, \Omega^c)$. por tanto $M_u(z, r) \leq \nu_u(z) \log r + c$ si $0 < r < r_0$.

Y considerando la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética (caso particular del Teorema de Jensen, véase [97]):

$$\begin{aligned} \int_{|w|=1} e^{-u(z+rw)} \frac{d\sigma(w)}{S_{2n}} &\geq \exp\left(-\int_{|w|=1} u(z+rw) \frac{d\sigma(w)}{S_{2n}}\right) \\ &= \exp(-M_u(z, r)) \\ &\geq r^{-\nu_u(z)} e^{-c}, \end{aligned}$$

de ahí, considerando que la función $u(z) |z|^{-2k}$ ($z \in \mathbb{C}^k$) no es integrable en el origen. Tenemos que e^{-u} no es integrable en ninguna vecindad de z si $\nu_u \geq 2k$. con ello concluye la prueba. \square

Antes de enunciar los siguientes lemas previos al teorema principal, hagamos la siguiente disgresión. Tomemos Ω pseudo-convexo y abierto de \mathbb{C}^k y construyamos

$$\widehat{\Omega} = \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C}; |w| < d(z, \Omega^c)\}.$$

Ahora teniendo en cuenta que $M_u(z, |w|) = \int_{|\xi|=1} u(z+w\xi) \frac{d\omega(\xi)}{\omega_{2k}}$ y que $(z, w) \mapsto u(z+w\xi)$ es plurisub-armónica en $\widehat{\Omega}$ para un ξ fijo, se tiene que la función $(z, w) \mapsto F(z, w) = M_u(z, |w|)$ es PSA para $(z, w) \in \widehat{\Omega}$.

Además siendo $|z|^2 - \log d(z, \Omega^c)$ y $-\frac{1}{\log w} - \log d(z, \Omega^c)$ plurisub-armónicas en $\widehat{\Omega}$ podemos entonces podemos escoger una función de agotamiento estrictamente pseudoconvexa (véase Apéndice B.1) $\varrho \in C^\infty(\widehat{\Omega})$ y puesto que $\varrho(z, w)$ se puede reemplazar por $\int_0^{2\pi} \varrho(z, e^{i\theta}w) d\theta$ podemos asumir que ϱ es una función de z y $|w|$.

Consideremos además el siguiente lema técnico:

Lema 7 Sea $\widehat{\Omega}$ un abierto en \mathbb{C}^{k+1} tal que:

$$\widehat{\Omega} = \{(z, w) \in \Omega \times \mathbb{C}; r(z) < |w| < R(z)\},$$

donde Ω es un abierto contenido en \mathbb{C}^k y $0 \leq r(z) \leq R(z)$, $z \in \Omega$. Sea $u \in PSA(\widehat{\Omega})$ tal que:

$$\{(z, w) \in \widehat{\Omega} / u(z, w) \leq t, z \in K\} \in \widehat{\Omega}.$$

Para cualquier compacto $K \subset \Omega$ y $t \in \mathbb{R}$. Además la función u es tal que: $u(z, e^{i\theta}w) = u(z, w)$ cuando $(z, w) \in \widehat{\Omega}$, $\theta \in \mathbb{R}$. En estas condiciones se tiene que la función:

$$U(z) = \inf_{r(z) \leq |w| \leq R(z)} u(z, w)$$

es una función plurisub-armónica en Ω .

Demostración: De la definición de U se tiene que es SCS. Sea ahora $z_0 \in \Omega$ y tomemos un M tal que $U(z_0) < M$ entonces de la semi-continuidad superior se tiene que $U < M$ en un entorno $V_0(z_0, \epsilon)$. Usando ahora la condición del lema:

$$\{(z, w) \in \widehat{\Omega} / u(z, w) \leq M, z \in V_0\} \Subset \widehat{\Omega},$$

se puede encontrar una vecindad abierta V'_0 de z_0 y $r < R$ tal que $K = \bar{V} \times \{w \in \mathbb{C}; r \leq |w| < R\} \subset \widehat{\Omega}$ y por tanto:

$$U(z) = \inf_{r < |w| < R} u(z, w), z \in V'_0.$$

Usando el Teorema de Regularización de Funciones Plurisub-armónicas se puede escoger una secuencia de funciones plurisub-armónicas C^∞ en una vecindad del compacto K . Además, puesto que u es invariante por rotaciones según la última coordenada entonces los términos de la sucesión u_ϵ también pueden escogerse invariantes por rotaciones según la última coordenada. Así pues:

$$U_\epsilon(z) = \inf_{r < |w| < R} u_\epsilon(z, w) \downarrow U(z), z \in V'_0$$

Tomando z fijo se tiene que la función $u_\epsilon(z, w)$ es una función convexa de $\log |w|$ (véase Ejemplo 38). Analizando la expresión:

$$\sum_{i,j=1}^k \partial^2 u_\epsilon / \partial z_i \partial \bar{z}_j t_i \bar{t}_j + 4\Re \sum_{i=1}^k \partial^2 u_\epsilon(z, w) / \partial z_i \partial \bar{w} t_j + 4\partial^2 u_\epsilon(z, w) / \partial w \partial \bar{w},$$

se tiene en el punto $w \in [r, R]$ donde $\partial u_\epsilon / \partial w = 0$, que el último término de dicha expresión es el Laplaciano en w , es decir la segunda derivada en la dirección radial. Por otro lado la derivada radial de $\partial u_\epsilon(z, w) / \partial z_i$ resulta ser después de efectuar los cálculos $2\partial^2 u_\epsilon / \partial z_i \partial \bar{w}$. Esto implica entonces que dicha expresión es positiva y por tanto usando el Ejemplo 38 se concluye que U es plurisub-armónica.

□

Apliquemos este lema y las consideraciones previas acerca de la función de agotamiento para probar el siguiente:

Lema 8 *Sea la función $u \in PSA(\Omega)$ donde Ω es pseudo-convexo, conexo y abierto en \mathbb{C}^k , $u \neq -\infty$. Sea ρ una función de agotamiento en $\widehat{\Omega} \subset \mathbb{C}^{k+1}$ del tipo definido arriba. Entonces la función:*

$$u_\alpha(z) = \inf_{(z,w) \in \widehat{\Omega}, w \neq 0} (M_u(z, |w|) + \rho(z, w) - \alpha \log |w|),$$

$\alpha \geq 0$ es plurisub-armónica. en $z \in \Omega$.

Por otro lado se tiene que el número de Lelong: $\nu_{u_\alpha} = \max(\nu_u - \alpha, 0)$, $\alpha \geq 0$; y cuando $\nu_u(z) < \alpha$ se concluye que $u_\alpha(z) > -\infty$.

Demostración: Usando la disgresión previa definamos la función plurisub-armónica:

$$u_\alpha^\epsilon(z, w) = M_u(z, |w|) + \rho(z, w) + \epsilon |w|^2 + \frac{1}{\log(\frac{|w|}{\epsilon})} - \alpha \log |w| \},$$

entonces del lema previo (7), la función:

$$u_\alpha^\epsilon(z) = \inf_{(z,w) \in \hat{\Omega}, |w| > \epsilon} u_\alpha^\epsilon(z, w)$$

es plurisub-armónica cuando $\epsilon > 0$ en el subconjunto Ω . Ahora bien, puesto que $u_\alpha^\epsilon \downarrow u_\alpha$ (cuando $\epsilon \downarrow 0$) de ahí se tiene (usando el Teorema de Aproximación de Funciones PSA) que u_α es también plurisub-armónica.

Considerando que cuando $\nu_u(z) < \alpha$, $\varrho(z, w) + M_u(z, w) - \alpha \log |w|$ es una función decreciente de $|w|$ (para $|w|$ pequeño) puesto que $\varrho(z, w) - \epsilon \log |w|$ es decreciente para cualquier $\epsilon > 0$ se tiene por tanto que $\nu_\alpha(z) > -\infty$ lo que implica $\nu_{\nu_\alpha}(z) = 0$.

Por otro lado, ν_α es cóncava respecto de α lo cual por el teorema 56 y de las relaciones elementales entre convexidad y concavidad nos lleva a concluir que ν_{ν_α} es una función convexa de α ; además $\nu_{u_0}(z) \leq \nu_u(z)$ (lo cual se obtiene del hecho que $u_0 \geq u + \text{mín } \varrho$).

De lo expuesto entonces: $\nu_{u_\alpha}(z) \leq \text{máx}(\nu_u(z) - \alpha, 0)$, lo cual es cierto cuando $\alpha = 0$ y también cuando $\alpha > \nu_u(z)$. De este modo, se obtiene la primera parte de la prueba.

Para probar la desigualdad opuesta, usemos la definición:

$$u_\alpha(z) \leq M_u(z, r) + \varrho(z, r) - \alpha \log r$$

cuando $0 < r < d(z, \Omega^c)$. El valor medio de $M_u(z + \zeta, r)$ cuando $|\zeta| = r' < d(z, \Omega_0^c) - r$ es el valor medio de $Z \mapsto u(z, Z)$ en la bola, donde $|z| < r' + r$ e invariante bajo transformaciones ortogonales de Z . Estimando tales valores:

$$M_{u_\alpha}(z, r') \leq M_u(z, r + r') + \int_{|\zeta|=1} \varrho(z, r'\zeta, r) \frac{d\sigma(\zeta)}{S_{2k}} - \alpha \log r.$$

Si se toma $r = r'$ y se divide por $\log r$ para luego pasar al límite para $r \rightarrow 0$ se tiene: $\nu_{u_\alpha}(z) \leq \nu_u(z) - \alpha$. Pero para valores pequeños $\log r < 0$ y $\frac{\log(2r)}{\log r} \rightarrow 1$ entonces se obtiene la desigualdad opuesta, con lo cual culmina la prueba. \square

Enunciemos ahora un lema más cuya prueba usando la L^2 -teoría de Hörmander se posterga hasta el Apéndice B.1 de este trabajo. Para más detalles consúltese [55, 64].

Lema 9 *Sea $u \in \text{PSA}(X)$, donde X es pseudoconvexo y $u \neq -\infty$, entonces e^{-u} es localmente integrable en un subconjunto abierto G denso en Ω el cual contiene $\{z : u(z) > -\infty\}$. Además para cada $a > 0$, el complemento de G es la intersección de todos los conjuntos analíticos $\{z : f(z) = 0\}$ en X , tal que $f \in \mathcal{H}(X)$ satisface:*

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 e^{-u(z)} (1 + |z|^2)^{-n-a} d\lambda(z) < +\infty.$$

Formulemos finalmente y probemos el teorema principal de este apartado:

Teorema 59 *(Siu) Sea $u \in \text{PSA}(\Omega)$, distinto de $-\infty$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ (pseudoconvexo, conexo y abierto), y sea $\alpha > 0$. Entonces: $\Theta(u, \alpha) = \{z \in \Omega : \nu_u(z) \geq \alpha\}$ es un conjunto analítico.*

Demostración: Del lema 6 se tiene para un $n \in \mathbb{N}$:

$$\Theta(u, 2n) \subset Z(u) = \{z \in \Omega : e^{-u} \notin L_{loc}^1\}.$$

Por otro lado, del Lema 9 tenemos que:

$$Z(u) \subset \{z \in \Omega : u(z) = -\infty\}.$$

Usemos la función plurisubarmónica u_α construida en el lema anterior. Entonces, para $\alpha > 0$ y dadas las propiedades de $Z(n)$

$$\Theta(u, \alpha + 2n) = \Theta(u_\alpha, 2n) \subset Z(u_\alpha) \subset \{z \in \Omega, : u_\alpha(z) = -\infty\} \subset \Theta(u, \alpha).$$

Reemplacemos u y α por su y $s\alpha$ respectivamente (para s suficientemente grande). Esto dá:

$$\Theta(u, \alpha + 2n/s) \subset Z((su)_{s\alpha}) \subset \Theta(u, \alpha).$$

Pero ahora, reemplazando α por $\alpha - 2n/s$, se obtiene por un argumento conjuntista elemental que:

$$\Theta(u, \alpha) = \bigcap_{s > 2n/\alpha} Z((su)_{s\alpha - 2n}).$$

Del lema anterior, se tiene que el lado derecho de la igualdad es una intersección de conjuntos analíticos en Ω . Esto prueba el teorema. \square

3.3. Extensiones de los índices de singularidad a corrientes y a conjuntos analíticos

3.3.1. Potenciales de corrientes de bigrado (1, 1). Corrientes de integración en conjuntos analíticos.

Potencial local plurisub-armónico de una corriente positiva cerrada de bigrado (1, 1)
La existencia del potencial plurisub-armónico para una corriente positiva, es conocido también en la literatura como el “ dd^c -lema de corrientes positivas y cerradas”. Esta propiedad puede ser tratada desde distintos enfoques (véase por ejemplo [45, 55]): en lo siguiente haremos uso del llamado núcleo de Cauchy-Fantappie (véase [69]).

Sea el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^k, h(z) < 0\} \subset \mathbb{C}^k$ definido por la función estrictamente convexa $h(z)$. En estas condiciones (debido a la convexidad de la función que define el dominio) es posible orientar la frontera de Ω para que pueda usarse el Teorema de Stokes. Sea $\psi(t)$ una función C^∞ tal que $\psi(t) \equiv 0$ cuando $t \leq 1/2$ y $\psi(t) \equiv 1$ cuando $t \geq 3/4$.

Por otro lado definamos las funciones $\varphi(z, \xi) = \psi\left(\frac{h(\xi)}{h(z)}\right)$ y además:

$$g_i(z, \xi) = (\bar{\xi} - \bar{z}_i)\varphi(z, \xi) + (1 - \varphi(z, \xi))\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(\xi)$$

Para ξ fijo, el conjunto $K_\xi = \{z : h(z) < h(\xi)\}$ es estrictamente convexo y contiene en particular el $\text{supp } \varphi$. Teniendo esto en cuenta consideremos el plano tangente al contorno de $K_\xi : \Re \sum_{i=1}^k (\xi_i^0 - z_i) \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(\xi^0) = 0$ para cualquier $\xi^0 \in \partial\Omega$ y por tanto $\Re \sum_{i=1}^k (\xi_i^0 - z_i) \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(\xi^0) > 0$ cuando $z \in K_\xi$ (lo cual se deduce de la definición de K_ξ así como de la convexidad de $h(z)$). De esto concluimos que $\Re \sum_{i=1}^k (\xi_i - z_i)g_i(z, \xi) > 0$ para cualquier $z \in \text{supp } \varphi$.

Introduzcamos el núcleo de Cauchy-Fantappie en \mathbb{C}^k :

$$K(z, \xi) = C_k \frac{\sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} g_j \wedge_{i=1, i \neq j} \bar{\partial}_\xi g_i \wedge_{i=1}^k d\xi_i}{\left[\sum_{i=1}^k (\xi_i - z_i)g_i\right]^k}$$

donde $C_k = \frac{(k-1)!(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}}{(2\pi i)^k}$. Se verifica directamente que $\bar{\partial}_\xi K(z, \xi) = 0$ siempre que el denominador no sea nulo. Más aún si damos una condición extra sobre el conjunto K_ξ tal como

$K_\infty = \{z : \frac{1}{2}h(z) < h(\xi)\}$ (en particular esto es válido cuando ξ se encuentra en una pequeña bola con centro en z) tenemos que la expresión del núcleo de Cauchy-Fantappie se hace independiente de la función definidora $h(z)$. En estas condiciones:

$$K(z, \xi) = -\frac{(k-2)!i}{2\pi^k} \partial_\xi \|z - \xi\|^{2-2k} \wedge \frac{\varphi_0^{k-1}}{(k-1)!} = -\frac{i}{2(k-1)\pi^k} \partial_\xi \|z - \xi\|^{2-2k} \wedge \varphi_0^{k-1}.$$

Demostremos el siguiente:

Teorema 60 (Fórmula de Cauchy-Fantappie) Sea $h(z) \in C^2(\mathbb{C}^k)$ una función estrictamente convexa y consideremos $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^k, h(z) < 0\}$. Para $g(z) \in C^1$ en una vecindad de $\bar{\Omega}$ se verifica la siguiente fórmula:

$$g(z) = -\int_{\partial\Omega} g(\xi)K(z, \xi) + \int_{\Omega} \partial g(\xi) \wedge K(z, \xi). \quad (3.14)$$

donde $K(z, \xi)$ es el núcleo de Cauchy-Fantappie.

Demostración: Fijemos z y apliquemos el Teorema de Stokes (de acuerdo a la orientación previamente definida):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \bar{\partial}g(\xi) \wedge K(z, \xi) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - B(z, \epsilon)} \bar{\partial}g(\xi) \wedge K(z, \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega - B(z, \epsilon)} d(g(\xi)K(z, \xi)) \\ &= \int_{\partial\Omega} g(\xi)K(z, \xi) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(z, \epsilon)} g(\xi)K(z, \xi) = \int_{\partial\Omega} g(\xi)K(z, \xi) + g(z) \end{aligned}$$

Y el último paso se justifica por:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(z, \epsilon)} K(z, \xi) = 1$$

Con esto concluye la prueba. □

Corolario 22 Sea u una forma $(0, 1)$ en V_0 con coeficientes C^∞ tal que $\bar{\partial}u = 0$, entonces si existe un $v(z)$ tal que:

$$v(z) = \int_{B(0,1)} u(\xi) \wedge K(z, \xi). \quad (3.15)$$

entonces se cumple que: $\bar{\partial}v = u$.

Demostración: Tomemos una función definidora de la bola $h(z) = \|z\|^2 - 1$ la cual es estrictamente convexa). Sea $\tilde{v} \in C^\infty(\bar{B}(0,1))$ tal que $\bar{\partial}\tilde{v} = u$ (su existencia está garantizada por el Teorema de Doubeault). Usemos ahora la fórmula de Cauchy-Fantappie para la función \tilde{v} :

$$\tilde{v}(z) = -\int_{\partial B} \tilde{v}(\xi)K(z, \xi) + \int_B u(\xi) \wedge K(z, \xi).$$

Aplicando el operador $\bar{\partial}$ a ambos miembros e introduciendo el operador dentro de la primera integral se tiene que éste se anula puesto que el núcleo $K(z, \xi)$ es holomorfo (véase también [69]) en $z \in B$ para $\xi \in \partial B$ entonces $\bar{\partial}\tilde{v}(z) = \bar{\partial}v(z) = u$ y el corolario está probado. □

Pasemos a probar el Teorema del Potencial PSA Local para corrientes positivas cerradas:

Teorema 61 Sea T una corriente positiva cerrada de bigrado $(1, 1)$ definida en $B(0, 1) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ entonces existe una función $u(z) \in PSA(B(0, 1))$ tal que $dd^c u = T$.

Demostración: Sea $T = \sigma_{k-1} \sum_{i,j} T_{i,j} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ escrita en coordenadas locales y tomemos las ϵ -regularizaciones para $T_{i,j} : T_{i,j}^\epsilon = T_{i,j} * \chi_\epsilon$ en $B(0, 1)$, de donde se obtiene la siguiente regularización para T : $T_\epsilon = T * \chi_\epsilon$ la cual también es cerrada y positiva (véase Sección [2.5]). Ahora, como T_ϵ es regular entonces se tiene una forma diferencial suave tal que $T = [v]$ y de la cerradura de T_ϵ tenemos que $dv_\epsilon = 0$. Usando entonces los Teoremas de Doulbealt y De Rham se puede encontrar $t_\epsilon = [u_\epsilon]$ tal que $dt_\epsilon = T_\epsilon$. Expresemos ahora t_ϵ por conveniencia como la diferencia de dos corrientes $(1, 0)$ y $(0, 1) : t_\epsilon = t''_\epsilon - t'_\epsilon$. Como $t' = [u']$ de bigrado $(1, 0)$ y $t'' = [u'']$ de bigrado $(0, 1)$ se tiene al igualar los coeficientes de ambas formas diferenciales que:

$$u''_\epsilon = \sum_{i,j} \left[\int_0^1 s T_{ij}^\epsilon(sz) ds \right] z_i d\bar{z}_j, \quad u'_\epsilon = \sum_{i,j} \left[\int_0^1 s T_{ij}(sz) ds \right] \bar{z}_j dz_i. \quad (3.16)$$

donde para economizar notación, los coeficientes T_{ij}^ϵ son las funciones C^∞ que generan los coeficientes distribucionales. Por otro lado, por la consideración del grado $\bar{\partial}t''_\epsilon = \partial t'_\epsilon = 0$, de donde $t''_\epsilon = \bar{t}'_\epsilon$.

Introduzcamos la función $V_\epsilon = \int_{B(0,1)} t''_\epsilon(\xi) \wedge K(z, \xi) + \int_{B(0,1)} t'_\epsilon(\xi) \wedge \overline{K(z, \xi)} = 2\Re \int_{B(0,1)} t''_\epsilon(\xi) \wedge K(z, \xi)$ la cual satisface $dd^c V_\epsilon = id(u''_\epsilon - u'_\epsilon) = T_\epsilon$.

Usando el Teorema de Stokes para evaluar $V_\epsilon(z)$:

$$V_\epsilon = \int_{\partial B(0,1)} -iC'_k \|z - \xi\|^{2-2k} u''_\epsilon \wedge \varphi_{k-1} = iC'_k \int_{B(0,1)} \partial u''_\epsilon \wedge (-\|z - \xi\|^{2-2k}) \wedge \varphi_{k-1} + iC'_k \int_{B(0,1)} u''_\epsilon \wedge \partial \|z - \xi\|^{2-2k} \wedge \varphi_{k-1}.$$

Aquí φ_k representa $\varphi_k = \frac{\varphi_0^k}{k!}$ siendo φ_0 la forma métrica para \mathbb{C}^k . Además $C'_k = \frac{(k-2)!}{2\pi^k}$. Introduciendo ahora la expresión 3.16 para $\partial u''_\epsilon$:

$$V_\epsilon = C'_k \int_{B(0,1)} -\|z - \xi\|^{2-2k} d\sigma_\epsilon + iC'_k \int_{B(0,1)} u''_\epsilon \wedge \partial \|z - \xi\|^{2-2k} \wedge \varphi_{k-1},$$

donde σ_ϵ se introduce de manera natural al agrupar términos de modo que:

$$\sigma_\epsilon = \sum_{i=1}^k T_{ij}^\epsilon d\lambda$$

De este modo se tiene que:

$$V_\epsilon = 2\Re \int_{B(0,1)} u''_\epsilon(z) \wedge [K(z, \xi) + iC'_k \partial \|z - \xi\|^{2-2k} \wedge \varphi_{k-1}] + 2C'_k \int_{B(0,1)} -\|z - \xi\|^{2-2k} d\sigma_\epsilon + 2\Re \int_{\partial B(0,1)} iC'_k \|z - \xi\|^{2-2k} u''_\epsilon \wedge \varphi_{k-1}.$$

Puesto que $\int_{B(0,1)} d\sigma_\epsilon$ es acotado para cualquier ϵ entonces los u''_ϵ están acotados en $L^1(\partial B(0,1))$. En estas condiciones existe $\epsilon_n \rightarrow 0$ tal que u''_{ϵ_n} converge débilmente a una medida. Definamos ahora $\tilde{V}(z)$ de tal modo que $\tilde{V}(z) = -\int_{B(0,1)} \frac{(k-2)!}{2\pi^k} \|z - \xi\|^{2-2k} d\sigma(\xi)$ donde σ es el límite en el sentido débil de las medidas σ_ϵ cuando $\epsilon \rightarrow 0$, además de ello la función $\tilde{V}(z)$ es sub-armónica y por tanto se puede introducir su regularización \tilde{V}_ϵ . Con esta notación tenemos que en un entorno de z :

$$C'_k \int_{B(0,1)} -\|z - \xi\|^{2-2k} d\sigma_\epsilon \geq \tilde{V}_\epsilon - C, \text{ para una constante } C < +\infty$$

Esta última acotación aplicada a la última igualdad nos permite afirmar que existe al menos una sub-secuencia ϵ_m tal que $V_{\epsilon_m} \rightarrow V$ de manera puntual. Más aún, de la misma igualdad anterior para V_ϵ se tiene que para z en un compacto $K \subset B(0,1)$:

$$V_\epsilon \geq \tilde{V}_\epsilon(z) + C_K \geq \tilde{V}(z) + C_K$$

Tomando una forma diferencial suave φ de bigrado $(k-1, k-1)$, y usando el Teorema de la Convergencia Dominada:

$$dd^c V(\varphi) = \int_{B(0,1)} V dd^c \varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,1)} dd^c V_\epsilon \wedge \varphi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \langle T_\epsilon, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

□

Podemos dar ahora una extensión global de este teorema:

Corolario 23 *Sea T positiva, cerrada y de bigrado $(1,1)$ en \mathbb{C}^k , entonces existe $u \in PSA(\mathbb{C}^k)$ tal que $dd^c u = T$.*

Demostración: Del teorema, en un entorno de $B(0,m)$ se puede encontrar u_m tal que $dd^c u_m = T$. Luego $u_{m+1} - u_m$ es pluri-armónica en $B(0,m)$ debido a que $dd^c(u_m - u_{m-1}) = 0$. De ahí existe una función holomorfa $h_m(z) \in \mathcal{H}(B(0,m))$ tal que $\Re h_m = u_{m+1} - u_m$. Puesto que las funciones enteras son densas en $\mathcal{H}(B(0,m))$ (véase [74]) se puede encontrar una función entera $g_m(z)$ tal que $|h_m(z) - g_m(z)| < 2^{-m}$ en $B(0,m-1)$.

Pongamos $\tilde{u}_0 \equiv 0$ y $\tilde{u}_m \equiv 0$ en $B(0,m)^c$ mientras que $\tilde{u} = u$ en $B(0,m)$. Evidentemente las funciones \tilde{u}_m son plurisub-armónicas. Tomando ahora la función:

$$U(z) = \Re \sum_{i=0}^{\infty} [(\tilde{u}_m(z) - \tilde{u}_{m-1}(z)) - \Re g_m(z)]$$

la cual está bien definida por cuanto $U(z) \leq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} = 2$.

Escribiendo esta función de forma distinta: $U(z) = u_m(z) + \Re \sum_{i=m+1}^{\infty} (h_i - g_i)(z) - \sum_{i=1}^m \Re g_i(z)$ y teniendo en cuenta que los dos últimos miembros son pluri-armónicos se tiene que $U(z)$ es plurisub-armónica en todo el espacio \mathbb{C}^k . Finalmente $dd^c U = T$ en $B(0,m)$ para $m \in \mathbb{Z}^+$ y con esto hemos concluido. □

Corriente de integración de un conjunto analítico

Sea V un conjunto analítico p -dimensional el cual es un sub-conjunto de una variedad compleja M . Consideremos la corriente de integración $[V]$:

$$\langle [V], u \rangle = \int_{Reg V} u, \text{ donde } u \in D(\bigwedge^{p,p} T^* M). \quad (3.17)$$

El resultado correspondiente que establece que $[V]$ es una corriente positiva y cerrada pertenece a P. Lelong. Antes de enunciar y probar dicho resultado formulemos el importante Teorema de Extensión de una Corriente Cerrada y Positiva que pertenece a El Mir (véase [17]).

Teorema 62 (El Mir) Sea $E \subset M$ un conjunto pluripolar cerrado y $T \in {}^+D'_{p,p}$ una corriente positiva y cerrada definida en $M \setminus E$. Si T tiene masa finita en una vecindad de cada punto de E entonces la extensión trivial de $\tilde{T} \in {}^+D'_{p,p}(M)$ (haciendo $T_{I,J} = 0$ en E) es cerrada.

Para la prueba necesitamos un lema de importancia por sí mismo:

Lema 10 Sea $E \subset M$ un conjunto pluripolar cerrado. Si $z_0 \in M$ y U_{z_0} es una vecindad pequeña de z_0 . Entonces:

- Existe una función $v \in PSA(U_{z_0}) \cap C^\infty(U_{z_0})$ tal que $v = -\infty$ en $E \cap U_{z_0}$.
- Existe una secuencia creciente $v_k \in PSA(U_{z_0}) \cap C^\infty(U_{z_0})$; $0 \leq v_k \leq 1$ que converge uniformemente a 1 sobre cada subconjunto compacto de $U_{z_0} - E$ y tal que $v_k = 0$ en una vecindad de $E \cap U_{z_0}$.

Demostración: Sea $U_0 \subset M$ un entorno de una carta: $z_0 \in U_0$ y $E \cap U_0 = \{z \in U_0 : u(z) = -\infty\}$; $u \in PSA(U_0)$. Tomemos $u \leq 0$ haciendo U_0 suficientemente pequeño y/o restando una constante. Tómese además una función convexa creciente infinitamente derivable definida de la siguiente manera: $\tau(x) = 0$ cuando $0 \leq x \leq 1/2$ y $\tau(1) = 1$. Con estos elementos introduzcamos la sucesión $u_k = \tau(\exp(u/k))$. De la convexidad de τ se tiene que $\{u_k\}$ es una sucesión de funciones plurisubarmónicas en U_0 y además $u_k = 0$ en una vecindad $U_k \subset E \cap U_0$ y $\lim u_k = 1$ en $U_0 - E$. Sea $U \subset\subset U_0$ otra vecindad de z_0 . Tómese $d_0 = d(U, CU_0)$ y $\epsilon_k \in]0, \delta_0[$ tal que $\epsilon_k < d(E \cap \bar{U}, \bar{U} - U_k)$; entonces la sucesión $\max_{j \geq k} (u_j * \chi_{\epsilon_j}) \in PSA(U) \cap C^0(U)$ y además $0 \leq w_k \leq 1$; $w_k = 0$ en una vecindad de $E \cap U$, por lo que hemos construido una secuencia creciente que converge a 1 en $U - E$ (además $w_k \geq u_k$). De ahí, y de acuerdo al Teorema de Dini la convergencia es uniforme sobre compactos en $U - E$.

Eligiendo una subsecuencia w_{k_s} tal que $w_{k_s}(z) \geq 1 - 2^{-s}$ sobre una secuencia creciente de conjuntos abiertos U'_s con $\bigcup U'_s = U - E$ se tiene por tanto que la función

$$w(z) = |z|^2 + \sum_{s=0}^{\infty} (w_{k_s}(z) - 1)$$

es estrictamente plurisubarmónica en U y continua en $U - E$, además $w = -\infty$ en $E \cap U$. Usando el Teorema de Richberg (véase [17], pag 48) en $U - E$ se obtiene $v \in PSA(U - E) \cap C^\infty(U - E)$ tal que $w \leq v \leq w + 1$. Se define $v = -\infty$ en $U \cap E$ entonces se puede extender v a todo U verificando (a). Ahora si restamos una constante a v tal que $v \leq 0$ en U entonces $v_k = \tau(\exp(v/k))$ será la sucesión requerida en (b). \square

Pasemos a la demostración del Teorema de El Mir:

Demostración: El resultado es local, tomemos entonces Ω un abierto pequeño tal que existe una secuencia $v_j \in PSA(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$. Sea $\theta \in C^\infty[0, 1]$ tal que $\theta = 0$ para $[0, 1/3]$ y $\theta = 1$ para $[2/3, 1]$, además $\theta \in [0, 1]$ para los otros valores. Con esta definición $\theta \circ v_j = 0$ en una vecindad de $E \cap \Omega$ y además $\theta \circ v_j = 1$ para $j > N$ en todo compacto fijo de $\Omega - E$. De este modo: $\tilde{T} = \lim_{j \rightarrow \infty} (\theta \circ v_j)T$ y también $\partial \tilde{T} = \lim_{j \rightarrow \infty} T \wedge \partial(\theta \circ v_j)$ en la topología débil de corrientes. Basta entonces demostrar que $T \wedge \partial(\theta \circ v_j)$ tiende a cero débilmente en $D'_{p-1,p}(\Omega)$.

Probemos primero para $p = 1$. Se tiene que $T \wedge \partial(\theta \circ v_j) \in D'_{0,1}(\Omega)$ Además puesto que $\lambda \rightarrow \langle T, i\lambda \wedge \lambda \rangle$ es una forma hermitiana no negativa en $D(\wedge^{1,0} T^*\Omega)$, se tiene de la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\|\langle T, i\beta \wedge \bar{\lambda} \rangle\|^2 \leq \langle T, i\beta \wedge \bar{\beta} \rangle \langle T, i\lambda \wedge \bar{\lambda} \rangle,$$

donde α y $\beta \in D(\wedge^{1,0} T^*\Omega)$. Tomemos $\psi \in D(\Omega)$, $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi|_U = 1$ donde U es una vecindad de $\text{supp } \alpha$, $\alpha \in D(\wedge^{1,0} T^*\Omega)$; se tiene entonces que:

$$\|\langle T, \theta'(v_i) d'v_j \wedge \bar{\alpha} \rangle\|^2 \leq \langle T, \psi i \partial v_j \wedge \bar{\partial} v_j \rangle \langle T, \theta'(v_j)^2 i\alpha \wedge \bar{\alpha} \rangle,$$

donde $\partial(\theta \circ v_j) = \theta'(v_j) \partial v_j$.

De la hipótesis $\int_{\Omega \setminus E} T \wedge \alpha \wedge \bar{\alpha} < +\infty$ además $\theta'(v_j)$ converge a 0 en todo el conjunto Ω por lo tanto usando el Teorema de la Convergencia Dominada: $\langle T, \theta'(v_j)^2 i\alpha \wedge \bar{\alpha} \rangle \rightarrow 0$. Por otro lado se tiene derivando que: $i\partial\bar{\partial}v_i^2 = 2v_i i\partial^2 v_i + 2i\partial v_i \wedge \bar{\partial} v_i \geq 2i\partial v_i \wedge \bar{\partial} v_i$ y además $2\langle T, \psi i\partial v_i \wedge \bar{\partial} v_i \rangle \geq \langle T, \psi i\partial\bar{\partial}v_i^2 \rangle$.

Como $\psi \in D(\Omega)$, $v_i = 0$ en una vecindad de E y además $\partial T = \bar{\partial} T = 0$ en $\Omega \setminus E$. Ahora, integrando por partes:

$$\langle T, \psi i\partial\bar{\partial}v_i^2 \rangle = \langle T, 2\psi i\partial d'v_i^2 \rangle \leq C \int_{\Omega \setminus E} \|T\| < +\infty.$$

De este modo $\langle T, \psi i\partial v_i \bar{\partial} v_i \rangle$ es acotada lo cual asegura el resultado para $p = 1$.

En el caso general, tomemos $\beta_s = i\beta_{s_1} \wedge \bar{\beta}_{s_1} \wedge \cdots \wedge \beta_{s_{p-1}} \wedge \bar{\beta}_{s_{p-1}}$ una forma positiva de bigrado $(p-1, p-1)$ con coeficientes constantes. Luego $T \wedge \beta_s \in {}^+ D'_{1,1}(\Omega \setminus E)$ tiene masa finita alrededor de E y es cerrada en $\Omega \setminus E$. Entonces: $d(\tilde{T} \wedge \beta_s) = d\tilde{T} \wedge \beta_s = 0$ sobre Ω para todo s , por lo que $d\tilde{T} = 0$. \square

Antes de enunciar el Teorema de Lelong, probemos el siguiente:

Lema 11 *La corriente $[RegV] \in {}^+ D'_{p,p}(M \setminus V_{sing})$ tiene masa finita en una vecindad de cada punto $z_0 \in V_{sing}$.*

Demostración: Sea $T = [RegV]$, $z_0 \in \Omega$ (entorno de una carta), si se escribe $dz_I \wedge d\bar{z}_J$ en términos de la base con términos $\beta_s = i\beta_{s_1} \wedge \bar{\beta}_{s_1} \wedge \cdots \wedge i\beta_{s_p} \wedge \bar{\beta}_{s_p}$, se tiene que las medidas T_J , JdV son combinaciones lineales de las medidas positivas $T \wedge \beta_s$.

Es suficiente probar que $T \wedge \beta_s$ tiene masa finita alrededor de V_{sing} . Sin pérdida de generalidad asumamos que el germen (V, z_0) es irreducible. Hagamos el siguiente cambio de coordenadas $w_j = \beta_{s_j}^x(z - z_0)$, donde $\beta_{s_j}^x$ para $j = 1, 2, \dots, p$ es el vector de coeficientes de la forma β_{s_j} . Para una variación pequeña $\Delta\beta$ de β_{s_j} se puede asumir que cada proyección:

$$\pi_s : w \in V \cap (\Delta' \times \Delta'') \longrightarrow w' = (w_1, \dots, w_p),$$

define un cubrimiento ramificado de V (véase [100], y $\{\beta_{s_j} + \Delta\beta\}_{j=1}^p$ permanece siendo una base para $\Lambda^{p,p} T^*\Omega$. Sea S el lugar geométrico de ramificación de π_s y $V_s = V \cap ((\Delta' - S) \times \Delta'') \subset RegV$. La restricción de $\pi_s : V_s \longrightarrow \Delta' - S$ es entonces un cubrimiento con un número q_s finito de

hojas; por tanto:

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta' \times \Delta''} [RegV] \wedge \beta_s &= \int_{RegV \cap (\Delta' \times \Delta'')} idw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge idw_p \wedge d\bar{w}_p \\
&= \int_{V_S} idw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge idw_p \wedge d\bar{w}_p \\
&= q_S \int_{\Delta' - S} idw_1 \wedge d\bar{w}_1 \wedge \cdots \wedge idw_p \wedge d\bar{w}_p < +\infty.
\end{aligned}$$

Esto, pues V_S es el complemento de $RegV \cap (\Delta' \times \Delta'')$ de un subconjunto analítico (tal conjunto es de medida de Lebesgue cero en $RegV$). \square

Formulemos y probemos el Teorema de Lelong:

Teorema 63 *Sea V un conjunto analítico p -dimensional $V \subset M$ (variedad compleja) entonces $[V] \in {}^+ D'_{p,p}(M)$, además $d[V] = 0$.*

Demostración: Del lema anterior $[RegV]$ tiene masa finita alrededor de V_{sing} por lo que usando el Teorema de El Mir esta corriente se puede extender a todo $[V]$. \square

Fórmula de Lelong-Poincaré La prueba de la fórmula de Lelong-Poincaré se basará en los Teoremas de Soporte de una Corriente definida en la variedad de Cauchy-Riemann (CR). El concepto de variedad CR se refiere a aquellas variedades complejas que mantienen la dimensión del subespacio que se extiende en la parte holomorfa del espacio tangente holomorfo de una variedad compleja M .

Definición 79 *Sea el punto $z \in M$ (Variedad compleja). El espacio tangente holomorfo en z se define como el subespacio $\mathbb{C} \left(\frac{\partial}{\partial z_i} \right) \subset T_z M$ y es denotado por $T'_z M$.*

Por las ecuaciones de Cauchy-Riemann es fácil advertir que las derivadas de las funciones antiholomorfas definidas en M se anulan en $T'_z M$ (independiente del sistema de coordenadas elegido). Análogamente se puede definir el sub-espacio $\mathbb{C} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right)$ como el espacio tangente antiholomorfo $T''_z M$, siendo $T_z M = T'_z M \oplus T''_z M$.

Sea ahora $f : M \rightarrow N$ un mapa de tipo C^∞ entre variedades complejas, entonces se induce un mapa entre espacios tangentes $f_* : T_z M \rightarrow T_{f(z)} N$ aunque no necesariamente se induce un mapa entre sus respectivos sub-espacios holomorfos. Más aún si f es holomorfa, de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se puede afirmar que los vectores de $T'_z M$ no tienen imagen con componente en $T''_{f(z)} N$, es decir $f_*(T'_z M) \subset T'_{f(z)} N$.

Definición 80 *Sea M una variedad compleja. La dimensión de Cauchy-Riemann de M se define tal que $dim_{CR_z} M = dim T'_z M$. Si M tiene dimensión CR constante para todo $z \in M$ entonces M se denomina variedad Cauchy-Riemann.*

Enunciemos sin demostración los Teoremas de Soporte (véase [15]). El primero de ellos se usará directamente en la demostración de la fórmula de Lelong-Poincaré mientras que el segundo se enuncia aquí sólo para completar la exposición de las propiedades de las corrientes que actúan en variedades CR . Para más detalles se puede consultar [15].

Teorema 64 (Primer Teorema de soporte) *Sea $T \in D'_{p,p}(M)$ con $supp T \subset N$ donde N es una variedad compleja $dim_{CR} N < p$. Entonces $T = 0$.*

Antes de enunciar el segundo teorema del soporte, introduzcamos alguna terminología acerca de los campos holomorfos definidos en variedades complejas y recordemos algunos resultados (para los detalles puede consultarse [108]). Sea una variedad M de tipo CR de dimensión p y clase C^1 tal que dos campos vectoriales complejos en $T'M$ el Corchete de Lie también está en $T'M$ (es decir de acuerdo a la terminología en uso $T'M$ es un subfibrado integrable de TM). En estas circunstancias se puede inferir del teorema de Frobenius ([108]) que si existe una submersión de M en otra variedad de clase C^1 es decir $\eta : M \rightarrow Y$ entonces las fibras $\eta^{-1}(t)$; $t \in Y$, tiene como espacio tangente $T'M$. Más aún, en estas circunstancias se tiene que dichas fibras son sub-variedades complejas y reciben el nombre de variedades integrales.

Teorema 65 (Segundo Teorema de soporte) Sea M (variedad compleja) de tipo CR y dimensión p tal que existe una submersión $\eta : M \rightarrow Y$ de clase C^1 cuyas fibras $F_t = \eta^{-1}(w)$ son conexas y son las variedades integrales del espacio tangente holomorfo $T'M$. Entonces, para todo $T \in D'_{p,p}(M)$ de orden 0 y con $\text{supp } T \subset M$, existe $\mu(t)$ medida compleja única en Y tal que para todo $v \in D(\wedge^{p,p} T^*M)$ se tiene

$$\langle T, v \rangle = \int_Y \langle [F_t], v \rangle d\mu(t).$$

Más aún T es fuertemente positiva si y sólo si la medida $\mu(t)$ es positiva.

Luego de enunciar los teoremas procedamos a mencionar algunas consecuencias directas de ellos. Para empezar, del primer teorema se desprende:

Corolario 24 Sea $T \in D'_{p,p}(M)$ una corriente normal. Si $\text{supp } T \subset V$ (conjunto analítico), $\dim V < p$, entonces $T = 0$.

Demostración: Como $\text{Reg } V$ es tal que $\dim_{CR} \text{Reg } V < p$ entonces $T = 0$ en $M - V_{sing}$. Pero por el Teorema de El Mir $T = 0$ en M . \square

Ejemplo 42 Sea $T \in D'_{p,p}(C)$ con $p > 1$, donde C es una curva algebraica en \mathbb{C}^k ($k > 1$). Entonces $T = 0$. Basta para ello aplicar el corolario anterior. Este hecho es análogo al hecho conocido que la medida multidimensional de un conjunto unidimensional es cero.

Del segundo teorema se deduce el importante:

Corolario 25 Sea V un conjunto analítico contenido en M , donde M es una variedad compleja con componentes irreducibles V_i de dimensión pura p . Entonces toda corriente $T \in D'_{p,p}(M)$ de orden cero con soporte en V es de la forma $T = \sum \lambda_i [V_i]$, donde $\lambda_i \in \mathbb{C}$. Mas aún, T es fuertemente positiva si y sólo si $\lambda_i \geq 0$.

Demostración: Tomemos una submersión $\eta : M - V_{sing} \rightarrow \{0\} \in \mathbb{C}$ entonces ella cumple las condiciones del teorema. Por tanto, para cualquier $T \in D'_{p,p}(M)$ se tiene que $T = \sum \lambda_i [A_i]$ en $M - V_{sing}$. Puesto que $\dim V_{sing} < p$ y además $\sigma = T - \sum \lambda_i [A_i] \in D'_{p,p}(M)$ es cerrada, de orden cero y además $\text{supp } \sigma \subset V_{sing}$. Por lo anterior y teniendo en cuenta el Corolario 24 $\sigma = 0$ de donde se sigue $T = \sum \lambda_i [A_i]$ en M . \square

Formulemos y probemos la fórmula de Lelong-Poincaré en su forma más amplia haciendo uso del concepto de divisor (para las definiciones véase [45]).

Teorema 66 (Fórmula de Lelong-Poincaré) Sea una función meromorfa f en M (variedad compleja de dimensión k), la cual no se hace nula en ninguna componente de M , sea además $\sum m_i Z_i$ el divisor de f . Entonces $\log \|f\|$ es localmente integrable sobre X y además satisface la ecuación:

$$dd^c \log \|f\| = \sum_i [Z_i], \quad (3.18)$$

en el espacio $D'_{k-1, k-1}(M)$. Si los números m_i son positivos enteros, entonces $\sum_i m_i [Z_i] \in^+ D'_{k-1, k-1}(M)$.

Demostración: Sea $Z = \cup Z_j$ el soporte de $\text{div}(f)$. De este modo $\partial\bar{\partial} \log \|f\|$ tiene soporte en Z puesto que $\partial \log \|f\|^2 = \partial(f\bar{f}) = \frac{\partial f}{f} = \frac{df}{f}$ (siendo f es holomorfa) en $M - Z$.

Sea $z \in Z_j \cap \text{Reg} Z$ y tomemos una de sus vecindades Ω con sistema de coordenadas (w_1, \dots, w_k) tal que $Z_j \cap \Omega$ esta dado por la ecuación $w_1 = 0$. En estas coordenadas, del Teorema de Factorización de Weirstrass f se puede escribir como $f(w) = v(w)w_1^{m_j}$ (donde $Jv \neq \text{cero}$ en $\Omega' \subset \Omega$). Entonces:

$$dd^c \log \|f\| = dd^c (\log |v| + m_j \log |w_1|) = m_j dd^c \log \|w_1\|.$$

Como se sabe $dd^c \log \|z\|^2 = \pi \delta_0 dz \wedge d\bar{z}$ donde $z \in \mathbb{C}$. Además, si $\phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es la proyección $z \rightarrow z_1$ se tiene (teniendo en cuenta que ϕ es una submersión:

$$dd^c \log |z_1| = dd^c \log \|\phi(z)\| = \phi^*(dd^c \log |z|) = \pi \phi^*(\delta_0 dz \wedge d\bar{z}) = \pi [H],$$

donde $H \subset \mathbb{C}^k$ es el hiperplano $\{z_1 = 0\}$. Se obtiene por tanto $dd^c \log \|f\| = m_j [z_j]$ en $\Omega' \subset \Omega$. Esto implica que la fórmula de Lelong-Poincaré es válida al menos en $M \setminus Z_{\text{sing}}$. Como $\dim Z_{\text{sing}} < k - 1$ entonces usando el Corolario 24 para la corriente $\sigma = dd^c \log \|f\| - \sum_i [Z_i]$ se tiene que $\sigma = 0$ con lo cual la fórmula es válida en todo M . \square

Un corolario inmediato, el cual es la formulación del teorema en su forma más usual, se expresa como:

Comentario 30 Si f es holomorfa en particular entonces $\log \|f\| \in \text{PSA}(M)$ y los m_i son positivos enteros, entonces $\sum_i m_i [Z_i] \in^+ D'_{k-1, k-1}(M)$.

3.3.2. Números de Lelong para corrientes positivas cerradas

Enunciemos primero la propiedad que fundamenta la existencia de los números de Lelong para corrientes positivas:

Teorema 67 Sea $T \in^+ D'_{p,p}(|z| < R)$ con $dT = 0$

$$I(r) = \int_{|z| < r} T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}. \quad (3.19)$$

donde $0 < r < R$. Entonces $\frac{I(r)}{r^{2p}}$ es una función creciente de r .

Demostración: Basta tomar T de clase C^∞ . En efecto, si T arbitrario se aproxima por corrientes de clase C^∞ , $\{T_j\}$ tal que $T_j \rightarrow T$ en $|z| < R$, entonces se tiene:

$$\frac{1}{r^{2p}} \int_{|z|<r} T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2p}} \int_{|z|<r} T_j \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!},$$

pero para $r < r_1 < r_2$

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2p}} \int_{|z|<r} T_j \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{r^{2p}} \int_{|z|<r_1} T_j \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \leq \frac{1}{r^{2p}} \int_{|z|<r_2} T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!},$$

de donde $I(r)$ es creciente para T arbitrario.

Tomando ahora T de clase C^∞ . Escribamos ahora $I(r)$ usando la función de Heaviside H :

$$\begin{aligned} I(r) &= \int H(r^2 - |z|^2) dd^c |z|^2 \wedge T \wedge \frac{\varphi_0^{p-1}}{p!} \\ &= \int d(H(r^2 - |z|^2)) \frac{i}{2} \bar{\partial} |z|^2 \wedge T \wedge \frac{\varphi_0^{p-1}}{p!} + \int \delta(r^2 - |z|^2) \partial |z|^2 \wedge \bar{\partial} |z|^2 \wedge T \wedge \frac{\varphi_0^{p-1}}{p!}. \end{aligned}$$

Del Teorema de Stokes:

$$I(r) = \int \delta(r^2 - |z|^2) dd^c |z|^2 \wedge T \wedge \frac{\varphi_0^{p-1}}{p!}.$$

Además

$$I'(r) = 2r \int \delta(r^2 - |z|^2) T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}.$$

Evaluando $|z|^2 \varphi_0 - \frac{i}{2} \partial |z|^2 \wedge \bar{\partial} |z|^2$, tomando la potencia de p se concluye (de la positividad de T) que:

$$T \wedge (|z|^2 \varphi_0^p - p \varphi_0^{p-1} \wedge \frac{i}{2} \partial |z|^2 \wedge \bar{\partial} |z|^2) |z|^{p-1} \geq 0.$$

Entonces, usando esta expresión y la derivada $I'(r)$:

$$\begin{aligned} I(r) &\leq \frac{1}{p} \int \delta(r^2 - |z|^2) |z|^2 T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} = \frac{r^2}{p} \int \delta(r^2 - |z|^2) T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \\ &= r \frac{I'(r)}{2p}. \end{aligned}$$

De $\frac{d}{dr} \left(\frac{I(r)}{r^{2p}} \right) = \frac{rI'(r) - 2pI(r)}{r^{2p+1}} \geq 0$ se obtiene el resultado. \square

Introduzcamos ahora la noción del número de Lelong para una corriente cerrada y positiva.

Definición 81 Sea T una corriente cerrada y positiva de bigrado $(k-p, k-p)$ definida en una variedad compleja M ($\dim M = k$). El número de Lelong $\nu_T(z)$ en $z \in M$ se define como:

$$\nu_T(z) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_{2p} r^{2p}} \int_{V(z,r)} T \wedge \frac{\varphi^p}{p!}. \quad (3.20)$$

En el caso general $V(z,r) \subset \mathbb{C}^k$ es un entorno adjunto a la carta de M . Recordemos que λ_{2p} representa el volumen de una esfera $2p$ -dimensional de radio 1: $\lambda_{2p} = \frac{\pi^p}{p!}$.

Teorema 68 El número de Lelong $\nu_T(z)$ de una corriente positiva cerrada de bigrado $(k-p, k-p)$ definida en M ($\dim M = k$) existe.

Demostración: Puesto que $\frac{I(r)}{\lambda_{2p} r^{2p}} \geq 0$ y usando el teorema anterior, se tiene que $\nu_T(z)$ existe.
□

Extensión del Teorema de Siu para corrientes Lo que queda de esta sub-sección será empleado en la demostración del teorema de Siu en el caso de corrientes positivas y cerradas. Si consideramos el teorema del potencial para corrientes de bi-grado $(1, 1)$ entonces la extensión del teorema de Siu a esas corrientes es más o menos inmediata. Empecemos probando un teorema en el cual estableceremos que el número de Lelong para una corriente en \mathbb{C}^k es una función semi-continua superior. Más adelante estableceremos como consecuencia del Teorema de Siu la semi-continuidad superior del número de Lelong en $\mathbb{C}P^k$.

Teorema 69 El número de Lelong de una corriente definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}^k$ es una función semicontinua superior (SCS).

Demostración: Sea $0 \leq \chi \in C^\infty(\mathbb{R})$ una función test decreciente en \mathbb{R}_+ y tomemos la convolución de la corriente $T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}$:

$$T_\epsilon(z) = \int_{\mathbb{C}^k} \chi(|z - \zeta|/\epsilon) T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}.$$

Definamos además:

$$I_r(z) = \int_{B(z,r)} T \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}.$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} \Omega_{T_\epsilon} &= \int \chi\left(\frac{r}{\epsilon}\right) dI_r(r) = - \int I_r(r) \chi'\left(\frac{r}{\epsilon}\right) \frac{dr}{\epsilon} \\ &= - \int I_r(\epsilon r) \chi'(r) dr. \end{aligned}$$

Como $\Omega_{T_\epsilon}/\epsilon^{2p}$ es una función decreciente y acotado cuando $\epsilon \rightarrow 0$, entonces

$$\begin{aligned} \Omega_T(z) &= -\nu_T(z) \lambda_{2p} \int r^{2p} \chi'(r) dr \\ &= \nu_T(z) \lambda_{2p} \int r^{2p} (2p-1) \chi(r) dr. \end{aligned}$$

De aquí se deduce que $\nu_T(z)$ es SCS. □

Procedamos entre tanto a probar algunos resultados que permitirán reducir la demostración del Teorema de Siu para corrientes al teorema ya probado para funciones plurisub-armónicas.

Lema 12 Sea la corriente $S \in C_{(p,p)}^{\infty'}(\mathbb{C}^k)$ donde $1 \leq p < k-1$ y sea además la convolución

$$U(z) = -p! \int_{\mathbb{C}^k} |z - \zeta|^{-2p} S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}.$$

Entonces tomando $\alpha = i\partial\bar{\partial}L$ y $L = \log|z - \zeta|^2$ se tiene que:¹

$$2^p U_{j\bar{l}}(z) = p(p+1) \int_{\mathbb{C}^k} (L_{j\bar{l}} \alpha^p - pi \partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-1}) \wedge S + \int R_{jl} \wedge dS. \quad (3.21)$$

Además:

$$\sum_{j=1}^k U_{ij}(z) = p^{(k-1-p)} \int_{\mathbb{C}^k} |z - \zeta|^{-2p-2} \varphi_0^p \wedge S, \quad (3.22)$$

(R_{jl} son formas en ζ de grado $2p - 1$ con coeficientes que son funciones homogéneas de $z - \zeta$ de grado $-2p - 1$ y suaves para $z \neq \zeta$). Las fórmulas anteriores dan las expresiones para la convolución de la distribución $S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}$.

Demostración: Usando las relaciones de la teoría de distribuciones basta analizar el caso cuando S es suave. Puesto que los núcleos de las integrales en cuestión son homogéneos en $z - \zeta$ de grado $-2(p+1) \geq -2(n-1)$ entonces las expresiones dentro de la integral son localmente integrables y por lo tanto convergentes en el sentido usual.

De la expresión $\bar{\partial}L = |z - \zeta|^{-2} \sum_l (\zeta_l - z_l) d\bar{\zeta}_l$, se tiene entonces que $\partial\bar{\partial}L = |z - \zeta|^{-2} \sum_l d\zeta_l \wedge d\bar{\zeta}_l - \partial L \wedge \bar{\partial}L$. Introduzcamos ahora α definido como:

$$\alpha = 2|z - \zeta|^{-2} \varphi_0 - i\partial L \wedge \bar{\partial}L,$$

(siendo $\varphi_0 = \sum_l d\zeta_l \wedge \bar{\zeta}_l$). De ahí:

$$(\alpha + i\partial L \wedge \bar{\partial}L)^p = 2^p |z - \zeta|^{-2p} \varphi_0^p = \alpha^p + pi\partial L \wedge \bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1}.$$

y la integral puede ser re-escrita como:

$$\begin{aligned} 2^p U(z) &= - \int (\alpha + i\partial L \wedge \bar{\partial}L)^p \wedge S = - \int (\alpha^p + pi\partial L \wedge \bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1}) \wedge S \\ &= - \int \alpha^p \wedge s - p \int i\partial L \wedge \bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1} \wedge S. \end{aligned}$$

Puesto que $\alpha^p \wedge S = d(i\bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1} \wedge \theta) + i\bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1} \wedge \partial S$ y usando el Teorema de Stokes

$$U'(z) = -i \int \bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1} \wedge \partial S,$$

también se tiene

$$U_{\bar{l}}^2(z) = - \int (w_{\bar{l}} \wedge \alpha^{p-1} + (p-1)w \wedge \alpha_{\bar{l}} \wedge \alpha^{p-2}) \wedge S,$$

donde definimos $w = i\partial L \wedge \bar{\partial}L$ y $w_{\bar{l}} = i(\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial}L + \partial L \wedge \bar{\partial}L_{\bar{l}})$; $\alpha_l = i\partial\bar{\partial}L_{\bar{l}}$.

Usando nuevamente el Teorema de Stokes:

$$U_{\bar{l}}^2(z) = -(p+1) \int i\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial}L \wedge \alpha^{p-1} \wedge s + i \int L_{\bar{l}} \partial L \wedge \alpha^{p-1} \wedge \bar{\partial}S$$

¹Consideremos para abreviar los cálculos voluminosos de esta sub-sección, que los sub-índices j, \bar{l} representan las derivadas $\partial/\partial z_j, \partial/\partial \bar{z}_l$, etc.

$$+i \int L_{\bar{l}} \bar{\partial} L \wedge \alpha^{p-1} \wedge \partial S - (p-1) \int \partial L \wedge \bar{\partial} L \wedge \partial L_{\bar{l}} \wedge \alpha^{p-2} \wedge \bar{\partial} S.$$

La derivada de los tres últimos términos pueden ser incluidos en el término residual, por lo que sólo se examinará la derivada del primer término

$$i(\partial L_{j\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L + \partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j) = i\partial(L_{j\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L) - L_{j\bar{l}}\alpha + i\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j$$

y si $p > 1$,

$$(p-1)i\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L \wedge \alpha_j \wedge \alpha^{p-2} = (p-1)i^2\partial(\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-2}) + (p-1)i\partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-1}.$$

Ahora usando el Teorema de Stokes se obtiene la expresión 3.21. Respecto a la expresión 3.22 puede ser obtenida al diferenciar bajo el signo de la integral (teniendo en cuenta que: $\Delta|z|^{-2p} = (\frac{\partial^2}{\partial r^2} + (2k-1)r^{-1}\frac{\partial}{\partial r})r^{-2p} = 4p(p+1-k)r^{-2p-2}$. \square

Comentario 31 La fórmula 3.21 implica el cálculo de una forma de Levi. Examinemos dicha forma más de cerca:

Para $z \neq \zeta$:

$$\sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l L_{j\bar{l}} = |z - \zeta|^{-2} \sum_{j=1}^k |\lambda_j|^2 - |z - \zeta|^{-4} \sum_{j=1}^k \bar{\lambda}_j (\zeta_j - z_j)^2$$

es positiva a menos que λ contenga como factor a $\zeta - z$. Luego,

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l L_{j\bar{l}} \alpha^p - pi \sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l \partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-1} \right) \wedge S \cdot \left(\sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l L_{j\bar{l}} \right)^{p-1} \\ &= \left(\sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l L_{j\bar{l}} \alpha^p - i \sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l \partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j \right)^p \wedge S. \end{aligned}$$

Donde la forma hermitiana del primer factor del último producto cuña es positiva. Esto hace que para S suave (y por tanto en general) se tenga que:

$$\left(\sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l L_{j\bar{l}} \alpha^p - pi \sum_{j,l=1}^k \lambda_j \bar{\lambda}_l \partial L_{\bar{l}} \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-1} \right) \wedge S \geq 0.$$

Comentario 32 Siendo $d\mu$ una medida o T una distribución positiva (y por tanto asociada a una medida de Radon), la notación $T \in C^\infty(\Omega)$ o bien $d\mu \in C^\infty(\Omega)$ se refiere a que $T = [f]$, donde $f \in C^\infty(\Omega)$ o bien $d\mu = f dm$, donde $f \in C^\infty(\Omega)$ (dm es la medida de Lebesgue en \mathbb{C}^n). Hay que indicar esta notación es común en la teoría de la distribuciones y en la de ecuaciones parciales, por tanto no debe haber confusión cuando se use aquí.

Examinemos ahora el teorema que establece la existencia de una función plurisubarmónica que “regulariza” en cierto sentido una corriente positiva y cerrada cualquiera en un abierto pseudoconvexo. Para dicha prueba recuérdese que $\Delta|z| = 2\pi\delta_0$, de donde se prueba siguiendo el mismo método que $-\Delta|z|^{2-2k} = \frac{4\pi^k}{(k-2)!}\delta_0$. Más aún $(-\Delta)^p|z|^{2p-2k} = 4^p\pi^k \frac{(p-1)!}{(k-p-1)!}\delta_0$, para $1 \leq p < k$.

Teorema 70 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto pseudo convexo $S \in D'_{p,p}(\Omega)$ positiva y cerrada ($0 < p < k-1$). Existe una función $f \in PS\Delta(\Omega)$ tal que

$$(-\Delta)^{k-p} f + 4^{k-p} \pi^k p(k-1-p)! S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \in C^\infty(\Omega).$$

Demostración: Tomando la colección creciente de compactos $K_i \subset \Omega$ y las funciones regularizadoras χ_i asociadas a K_i definidas como: $\chi_i \in D(K_{i+1})$ tal que $\chi_i = 1$ en una vecindad de K_i .

Sea además $\psi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} (\chi_i(z) - \chi_{i-1}(z)) \int |\zeta - z|^{-2p} \varphi_0^p \wedge \chi_{i+1} S$.

Entonces se tiene que $\psi(z) + \int |\zeta - z|^{-2p} \varphi_0^p \wedge \chi_{i+1} S \in C^\infty$ en una vecindad de K_i . Usando el lema 12 para calcular las derivadas $\frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_i}$ y puesto que $d(\chi_{i+1} S) = 0$ en una vecindad de K_i se tiene que los términos $R_{j\bar{i}}$ son suaves y por tanto se tiene que:

$$\psi_{j\bar{i}} - 2^{-p} p(p+1) \int (L_{j\bar{i}} \wedge \alpha^p - p i \partial L_{\bar{i}} \wedge \bar{\partial} L_j \wedge \alpha^{p-1}) \wedge \chi_{i+1} S \in C^\infty,$$

y usando el signo de la forma hermitiana (véase Comentario 31) se obtiene que:

$$\sum_{j,l=1}^k \psi_{j\bar{i}}(z) \lambda_j \bar{\lambda}_l \geq -C_0(z) |\lambda|^2; \lambda \in \mathbb{C}^n, z \in \Omega, C_0 \in C^0(\Omega).$$

Ahora, de la condición de pseudo-convexidad para Ω se tiene que se puede escoger una función estrictamente pluri-subarmónica $s \in C^\infty(\Omega)$ tal que $\{z \in \Omega, s(z) \leq t\}$ es compacto para cualquier valor de t (véase [55] para los detalles). De ahí se deduce que existe una función $f \in C^\infty(\Omega)$ tal que $f = \varphi + \chi(s)$. Usando la equivalencia 3.21 se tiene entonces que

$$\frac{1}{4} \Delta \varphi(z) - p(k-1-p)p! \int |\zeta - z|^{-2p-2} \chi_{i+1} S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p} \in C^\infty(\Omega)$$

y usando la expresión para $(-\Delta)^p |z|^{2p-2k}$ se obtiene el enunciado del teorema. \square

Lema 13 Sea la función f integrable en un entorno de cero en \mathbb{C}^k y supongamos que se cumple la siguiente condición:

$(-\Delta)^{k-p} f + du \in C^\infty$, donde $0 < p < k-1$, y du es una medida tal que:

$$\int_{|z|<r} du(z)/r^{2p} \longrightarrow A$$

cuando $r \rightarrow 0$ y

$$\int Ad\lambda(z)/r^{2(k-1)} \longrightarrow B$$

cuando $r \rightarrow 0$. Entonces:

$$A = 4^{k-p-1} B(k-p-1)!(k-1)!/p!.$$

Demostración: Tómesese $\chi \in D(\mathbb{R})$ y sea $M(r) = \int_{|z|<r} du(z)$. Para r pequeño se tiene entonces:

$$\begin{aligned} \int \chi(|z|/r) du(z) &= \int_0^\infty \chi(t/r) dM(t) = - \int_0^\infty M(t) \chi'(t/r) dt/r \\ &= - \int_0^\infty M(rt) \chi'(t) dt. \end{aligned}$$

puesto que $M(rt)/t^{2p} \rightarrow At^{2p}$ ($r \rightarrow 0$) y además localmente acotada se sigue que:

$$\int \chi(|z|/r) du(z)/r^{2p} \rightarrow -A \int_0^\infty t^{2p} \chi'(t) dt = 2pA \int_0^\infty t^{2p-1} \chi(t) dt.$$

Usando

$$(-\Delta)^{k-p-1} \chi(|z|/r) = \psi(|z|/r) r^{2p+2-2k}, \quad \psi \in D(\mathbb{R})$$

entonces:

$$\int \chi(|z|/r) (-\Delta)^{k-p-1} \Delta F d\lambda(z) = r^{2p+2-2k} \int \psi(|z|/r) \Delta f(z) d\lambda(z),$$

pasando a dividir r^{2p} y luego pasando al límite cuando $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \int \chi(|z|/r) (-\Delta)^{k-p} f(z) d\lambda(z) / r^{2p} &= r^{2-2k} \int \psi(|z|/r) \Delta f(z) d\lambda(z) \\ &\rightarrow -(2k-2)B \int_0^\infty t^{2k-3} \psi(t) dt. \end{aligned}$$

Por lo que

$$2pA \int_0^\infty t^{2p-1} \chi(t) dt = (2k-2)B \int_0^\infty t^{2k-3} \psi(t) dt,$$

donde

$$\psi(t) = (-1)^{k-p-1} (\partial^2 / \partial t^2 + (2k-1)t^{-1} \partial / \partial t)^{k-p-1} \chi(t).$$

Usando el argumento de inducción para p :

$$(-1)^{k-p-1} (\partial^2 / \partial t^2 - (2k-1)t^{-1} \partial / \partial t)^{k-p-1} t^{2k-3} = 4^{k-p-1} t^{2p-1} (k-p-1)! (k-2)! / (p-1).$$

Reemplazando las expresiones de A y B en esta última relación nos lleva a obtener finalmente el enunciado del lema. \square

Teorema 71 *Sea S corriente positiva y cerrada en Ω (pseudo-convexo) contenido en \mathbb{C}^k , $\alpha > 0$. Entonces:*

$$\{z \in X, \nu_S(z) \geq \alpha\}$$

es un conjunto analítico.

Demostración: Sea la forma positiva cerrada $S \in D'_{p,p}(\Omega)$ y tomemos según el Teorema 70 la función plurisubarmónica $f \in PSA(\Omega)$ con la que cumplen la relación:

$$(-\Delta)^{k-p} f + 4^{k-p} \pi^k p(k-1-p)! S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!} \in C^\infty(\Omega).$$

Nótese que $d\mu = 4^{k-p} \pi^k p(k-1-p)! S \wedge \frac{\varphi_0^p}{p!}$, entonces aplicando el Lema 13 se tiene que es posible relacionar los dos números de Lelong de f y S . En efecto, teniendo en cuenta que, de acuerdo a la definición de A y B : $A = 4^{k-p} \pi^k p(k-1-p)! \lambda_{2p} \nu_S$ y $B = \nu_f (2\pi \lambda_{2k-2})$. Entonces por el lema en cuestión:

$$\nu_f = 2\pi^p p \nu_S,$$

para $1 \leq p < k-1$. Aplicando finalmente el Teorema de Siu para funciones pluri-subarmónicas 59 se obtiene el resultado esperado. \square

3.3.3. Números de Lelong para conjuntos analíticos

Al igual que en la sección anterior empecemos estableciendo un teorema de monotonía:

Lema 14 (Lelong) *Sea un conjunto analítico V de dimensión p en \mathbb{C}^k tal que $0 \in V$, y sea además $\text{Vol}(V)$ su medida de Lebesgue. Consideremos por otro lado que $\bar{V} \setminus V$ está fuera de la bola $B(r_0)$ de radio r_0 .*

Entonces $\theta(r) = \text{Vol}(V \cap B(r)) / \lambda_{2p} r^{2p}$, es una función creciente de r .

Demostración: Usando el Teorema de Stokes ($r < R < r_0$ y para abreviar la notación consideremos $V_r = V \cap B(r)$):

$$\begin{aligned} \theta(R) - \theta(r) &= \frac{1}{\lambda_{2p}} \left[\frac{1}{R^{2p}} \int_{V_R} \varphi^p - \frac{1}{r^{2p}} \int_{V_r} \varphi^p \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_{2p} R^{2p}} \int_{\partial V_R} d^c |z|^2 \wedge \varphi^{k-1} - \frac{1}{\lambda_{2p} r^{2p}} \int_{\partial V_r} d^c |z|^2 \wedge \varphi^{k-1} \\ &= \int_{\partial V_r} d^c \log |z|^2 \wedge \omega^{k-1} - \int_{\partial V_r} d^c \log |z|^2 \wedge \omega^{k-1} = \int_{V \cap \{r < |z| < R\}} \omega^k. \end{aligned}$$

□

De acuerdo a la fórmula para el volumen complejo la expresión $\theta(r)/\pi^k$ nos dá el cociente entre la porción del volumen del conjunto analítico comprendido entre $B(0, r)$ y $B(0, R)$.

Definición 82 *El cociente expresado por $\theta(r)/\pi^k$ es el número de Lelong en $z = 0$ del conjunto analítico V .*

Del lema anterior es evidente que el límite: $\lim_{r \rightarrow 0} \theta(r)/\pi^k$ existe y se denota como $\nu_V(0)$. Es evidente que dada las condiciones ya descritas es posible definir el número de Lelong $\nu_V(z_0)$ para un punto arbitrario $z_0 \in V$.

El número de Lelong se puede también expresar en términos del número de Lelong de la corriente de integración de V :

$$\nu_V(0) = \nu_{[V]}(0).$$

Lo cual se desprende directamente de la definición.

Procedamos a interpretar geoméricamente al número de Lelong para un conjunto analítico. Para ello introduzcamos el concepto de cono tangente al conjunto analítico $V \subset \mathbb{C}P^k$ en el punto $z = 0$:

Definición 83 *El cono tangente $C_0(V)$ en $z = 0$ es la colección de vectores $v \in \mathbb{C}^k$ para los cuales existen los números $z_j \in V \setminus \{0\}$ que tienden a cero, y además existen los números complejos α_j tal que $\alpha_j z_j \rightarrow v$ para cada $v \in C_0$.*

En particular para todo $v \in C_0$ y todo número complejo λ se tiene que $\lambda v \in C_0$.

Empecemos aclarando el significado del número de Lelong para las hipersuperficies. Tomemos la expansión de Taylor de la función $f(z)$ definidora de la hipersuperficie: $f(z) = \sum_{i=s}^{\infty} P_i(z)$ (i es el grado del polinomio $P_i(z)$ (homogéneo). Luego se tiene

$$0 = f(z^\delta) = \frac{1}{a_j^s} P_s(a_j z^\delta) + \frac{1}{a_j^{s+1}} P_{s+1}(a_j z^\delta) + \dots$$

Multiplicando por a_j^s y pasando al límite $a_j^s \rightarrow +\infty$ se tiene de la definición de $v \in C_0(V)$ que $P_s(v) = 0$.

Recíprocamente, sea $P_s(v) = 0$. Rotando las coordenadas podemos asumir que $v = (v', 0)$ donde $v' \in \mathbb{C}^{k-1}$, luego se verifica:

$$P_s(v', z_m) = \sum_{r=1}^s q_r(v') z_m^r,$$

donde $q_{r_0}(v') \neq 0, r_0 \geq 1$.

De aquí:

$$|P_s(v', z_m)| > |z_m|^{r_0} \left\{ |q_{r_0}(v')| - \sum_{r=r_0+1}^s |q_r(v')| |z_m|^{r-r_0} \right\},$$

y para $|z_m| < 1$ y v' fijo:

$$|P_s(v', z_m)| \geq a |z_m|^{r_0} \geq a |z_m|^s,$$

con $a > 0$. Por otro lado $g_s(v', z_m) = \sum_{r=s+1}^{\infty} P_r(v', z_m)$ satisface para cualquier número complejo λ , ($|\lambda| \leq 1$) y z_m (con $|z_m| < 1$);

$$|g_s(\lambda v', \lambda z_m)| = \left| \sum_{i=s+1}^{\infty} \lambda^i p_i(v', z_m) \right| \leq b |\lambda|^{s+1},$$

(b es una constante $b > 0$).

Tomando z_m en el círculo $|z_m| = \rho$ y haciendo $\rho^s = 2b \frac{|\lambda|}{a} < 1$ se tiene que:

$$|P_s(\lambda v', \lambda z_m)| \geq a |\lambda z_m|^s = 2b |\lambda|^{s+1} > |g_s(\lambda v', \lambda z_m)|.$$

Pero, puesto que $P_s(\lambda v', 0) = 0$ y teniendo en cuenta que $f(\lambda v', \lambda z_m) = P_s(\lambda v', \lambda z_m) + g_s(\lambda v', \lambda z_m)$ (como función de $z_m \in \mathbb{C}$) se concluye del Teorema de Rouché que $f(\lambda v', \lambda z_m)$ tiene un cero en el disco $\{|z_m| < \rho\}$. Tomemos ahora la secuencia $\lambda_j \rightarrow 0$ y sea z_m^δ un cero de $f(\lambda v', \lambda z_m)$ para $\{|z_m| < 2b|\lambda_\delta|/a\}$. Los puntos $z^\delta = (\lambda_\delta v', \lambda_\delta z_m) \in \Delta - \{0\}$ por lo que $a_\delta z^\delta = (v', z_m^\delta) \rightarrow v$, ($a_j = \lambda_j^{-1}$ y para $\lambda_j \rightarrow 0$). Esto implica que $v \in C_0(V)$.

Apliquemos estas consideraciones al cálculo del número de Lelong para una hipersuperficie analítica en \mathbb{C}^k . Sea para simplificar $z = 0$, usando el Teorema de Stokes:

$$\begin{aligned} \nu_V(0) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\lambda_{2(k-1)} r^{2(k-1)}} \int_{V \cap B_r} d(d^c |z|^2 \wedge \frac{\varphi_0^{k-2}}{(k-1)!}) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{k-1} r^{2(k-1)}} \int_{V \cap \partial B_r} d(d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2}) \\ &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{k-1}} \int_{V \cap \partial B_r} d^c \log |z|^2 \wedge \omega_0^{k-2}. \end{aligned}$$

Pasemos a examinar esta última integral. De $f(z) = p_s(z) + g_s(z)$, sea $f_t(z) = p_s(z) + g_s(z)$ y denotemos $\sigma_t = \{z \in S_r, t \in [0, 1] : f_t(z) = 0\}$.

$$\begin{aligned} \int_{V \cap \partial B(0,r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} &= \int_{\{z \in \partial B(0,r) : p_s(z) = 0\}} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} + \int_{\partial \sigma_t} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} \\ &= \int_{C_0 \cap \partial B(0,r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} + \int_{\sigma_t} \varphi_0^{k-1}. \end{aligned}$$

(denotando $C_0 \cap \partial B(0, r) = \{z \in \partial B(0, r) : p_s(z) = 0\}$ en la primera integral y usando el Teorema de Stokes en la segunda integral). Usando ahora el Teorema de Wirtinger:

$$\int_{V \cap \partial B(0, r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} - \int_{V_0 \cap \partial B(0, r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2} \leq \text{Vol } \sigma_t.$$

Puesto que:

$$\text{Vol } \sigma_t = o(r^{2k-3})o(r) = o(r^{2k-2}),$$

se tiene entonces que $\text{Vol } \sigma_t / r^{2k-2} \rightarrow 0$ cuando $r \rightarrow 0$ y por tanto la integral $\int_{V \cap \partial B(0, r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2}$ puede ser remplazado por la integral $\int_{C_0 \cap \partial B(0, r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2}$, en términos del cono tangente a V . De este modo:

$$\nu_V(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{k-1} r^{2k-2}} \int_{C_0 \cap \partial B(0, r)} d^c |z|^2 \wedge \varphi_0^{k-2},$$

o bien:

$$\pi^{k-1} \nu_V(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{2k-2}} \int_{C_0 \cap \partial B(0, r)} d^c \log |z|^2 \wedge w_0^{k-2}.$$

Usando el Teorema de Fubini se tiene:

$$\pi^{k-1} \nu_V(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\overline{C_0}} \int_{S' \cap C_0(V)} d^c \log |z|^2 \wedge w_0^{k-2},$$

donde $\overline{C_0} = \rho(C_0(V))$ es la proyección de A_0 (Esto es posible por el hecho que $C_0(V)$ es una reunión de rectas complejas, lo cual se deduce del hecho que $p_s(z)$ es homogéneo). Además

$$\overline{C_0} = \{z = (z_1, z_2, \dots, z_m) : p_s(z_1, z_2, \dots, z_m) = 0 \ (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m\}.$$

Por otro lado, en la línea compleja $l_z = \{w = \lambda z\}$ se tiene que el factor $d^c \log |z|^2 = i \frac{\partial - \bar{\partial}}{4} \log |\lambda|^2 = \frac{d\theta}{2}$, donde $\theta = \arg \lambda$. Por lo que

$$\nu_V(0) = \frac{1}{\pi^{k-2}} \int_{\overline{C_0}} w^{k-2} \int_{l_z \cap S_1} d^c \log |z|^2 = \frac{1}{\pi^{k-2}} \int_{\overline{C_0}} w^{k-2}.$$

Pero la última integral representa el volumen proyectivo de una variedad en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k-1}$ la cual es igual al grado S (véase [86]). Esto muestra el que el número de Lelong de una hipersuperficie compleja $\{f(z) = 0\}$ en un punto z_0 es igual al grado del término no nulo de menor grado en la expresión de f en polinomios homogéneos de $z - a$.

Resumamos esta discusión en las siguientes proposiciones:

Proposición 33 *Sea V una hiper-superficie compleja determinada por $f(z) = 0$, donde f es una función holomorfa. Entonces:*

$$C_0(A) = \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k : P_s(z) = 0\},$$

donde P_s es el polinomio homogéneo formado por los términos de menor orden diferentes de cero en la expansión de Taylor de f en el punto $z = 0$.

Proposición 34 *El número de Lelong de un conjunto analítico $V = \{z/f(z) = 0\}$ en un punto cualquiera $z_0 \in V$ es igual al grado del término no nulo de grado mínimo que se obtiene en la expansión de f en polinomios homogéneos.*

Antes de enunciar un teorema que generaliza en cierto sentido nuestros hallazgos para un conjunto analítico p -dimensional, recordemos el concepto de multiplicidad de un conjunto analítico en un punto.

Definición 84 *Sea V un conjunto analítico de dimensión p en todos sus puntos $V \subset \mathbb{C}^k$. Sea L un plano $(k-p)$ -dimensional que pasa por cero tal que $V \cap (z_0 + L)$ es un punto aislado $z_0 \in V$. Sea además $\text{mult}_{z_0}(\pi)$ donde $\pi : V \rightarrow L$. Entonces:*

$$\mu_{z_0}(V) = \min\{\text{mult}_{z_0}(\pi) : L \in G(k-p, k)\}.$$

Hay que notar que $\text{mult}_{z_0}(\pi)$ es un número finito para cualquier $z_0 \in V$. En particular si $z_0 \in V$ es regular se puede probar que ello equivale a $\text{mult}_{z_0}(V) = 1$ (véase [14]).

Introduzcamos además el concepto de cadena holomorfa el cual es útil en muchos problemas de análisis y geometría.

Definición 85 (Cadena holomorfa) *Una cadena holomorfa sobre una variedad compleja M es una suma formal, localmente finita $\sum_j m_j V_j$, donde V_j son subconjuntos analíticos distintos en M y $m_j \neq 0$, $m_j \in \mathbb{Z}$ denominados componentes de la cadena. Si los V_j son p -dimensionales puros, entonces T se llama p -cadena holomorfa.*

Una cadena se llama positiva si todos los m_j son positivos.

Un ejemplo importante de cadena holomorfa la proporciona el cono tangente en un punto $z \in V$ de un conjunto analítico.

Antes de enunciar la relación que nos interesa aquí entre una cadena holomorfa y un cono tangente demos la siguiente:

Definición 86 *La multiplicidad de la cadena holomorfa en el punto z_0 , μ_{z_0} es tal que*

$$\mu_{z_0}(T) = \sum_j \mu_{z_0}(V_j).$$

Pasemos a enunciar el teorema que relaciona las cadenas p -holomorfas con los conos convexos.

Teorema 72 *Sea T una p -cadena holomorfa en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^k$. Entonces $\mu_0(T) = \text{deg}C_0(V)$.*

Aquí no se desarrollará más la teoría de cadenas holomorfas. Para más información, véase [53, 54]. Pasemos a demostrar el teorema que establece de forma general el significado geométrico del número de Lelong para un conjunto analítico $V \subset \mathbb{C}^k$ (p -dimensional).

Teorema 73 *El número de Lelong de un conjunto analítico $V \subset \mathbb{C}^k$ de dimensión pura p -dimensional en el punto $a \in V$ es igual a la multiplicidad de V en ese punto.*

Demostración: El caso $p = k - 1$ ya ha sido establecido, pasemos a analizar el caso general cuando $1 \leq p \leq k - 2$. Consideremos la familia de dilataciones $\phi_r : z \mapsto z/r$, $r > 0$ se tiene

entonces que la imagen de $V_r = V \cap \{ |z| < r \}$ bajo ϕ_r es V_r/r y además el pull-back de la forma Fubini-Study-Kähler será $\phi_r^*(w) = w(z/r) = w(z)/r^2$. Por lo tanto

$$\frac{1}{r^{2p}} \int_{V_r} w^p = \int_{V_r/r} (\phi_r^*(w))^p = \int_{V_r/r} w^p,$$

y puesto que para $r \rightarrow 0$ la cadena holomorfa $[V_r/r]$ tiende a $C_0(V) \cap \{ |z| < 1 \}$ (donde $C_0(V)$ es el cono tangente en z_0).

Tomemos a su vez la representación canónica de esta cadena $C_0(V) = \sum_j m_j S_j$, si ahora elegimos las coordenadas tal que $k - p$ planos coordenados $\{z_i = 0\}$ se intersectan con $C_0(V)$ solamente en el 0, entonces, del Teorema de Wirtinger:

$$\nu_V(0) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^p} \int_{V_r/r} w^p = \frac{1}{\pi^p} \sum_j m_j \int_{S_j} w^p.$$

Pero de la expresión del volumen proyectivo se tiene que:

$$\nu_V(0) = \sum_j m_j \deg S_j = \deg C_0(V) = \mu_0(V).$$

□

Ejemplo 43 Usando la fórmula del producto de corrientes se obtiene la siguiente propiedad multiplicativa del número de Lelong:

$$\nu_{\log |f \circ g|}(z) = \nu_{\log |g|}(z) \nu_{\log |f|}(g(z)). \quad (3.23)$$

Donde f y g son mapas holomorfos con las dimensiones adecuadas. En particular

$$\nu_{\log |f^{m+n}|}(z) = \nu_{\log |f^n|}(z) \nu_{\log |f^m|}(f^n(p)).$$

3.4. Números de Lelong generalizados

Sea X una variedad Stein, esto es, X tiene una función de agotamiento estrictamente plurisubarmónica (véase Apéndice B.1).

Consideremos las pseudo-esferas y pseudo-bolas asociadas con $\varphi \in PSA(X) \cap C(X)$ ($\varphi : X \rightarrow [-\infty, +\infty[)$)

$$S(r) = \{x \in X; \varphi(x) = r\},$$

$$B(r) = \{x \in X; \varphi(x) < r\}, \quad (3.24)$$

$$\overline{B}(X) = \{x \in X; \varphi(x) \leq r\}.$$

Definición 87 $\varphi \in PSA(X) \cap C(X)$ es *semi-exhaustiva* si existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $B(r_0) \subset\subset X$. Similarmente φ es *semi-exhaustiva en un subconjunto cerrado* $A \subset X$ si existe $r_0 \in \mathbb{R}$ tal que $A \cap B(r_0) \subset\subset X$.

Es de interés para el análisis el conjunto de polos $S(-\infty)$ y el comportamiento de φ cerca a este conjunto.

Sea T una corriente positiva y cerrada de bidimensión (p, p) sobre X y supongamos que φ es semi-exhaustiva sobre $\text{supp } T$ y que $B(r_0) \cap \text{supp } T \subset\subset X$. Luego $S(-\infty) \cap \text{supp } T$ es compacto y por tanto se tiene que la medida $T \wedge (dd^c \varphi)^p$ está bien definida.

Establezcamos la definición generalizada de un número de Lelong

Definición 88 Sea X una variedad de Stein, T corriente positiva y cerrada, y φ semi-exhaustiva sobre $\text{supp } T$. Sea $r_0 \in \mathbb{R} : B(r_0) \cap \text{supp } T \subset\subset X$. Para $r \in]-\infty, r_0[$ definimos

$$\nu(T, \varphi, r) = \int_{B(r)} T \wedge (dd^c \varphi)^p, \quad (3.25)$$

$$\nu(T, \varphi) = \int_{S(-\infty)} T \wedge (dd^c \varphi)^p = \lim_{r \rightarrow -\infty} \nu(T, \varphi, r). \quad (3.26)$$

El número $\nu(T, \varphi)$ se llama el número de Lelong generalizado con respecto al peso φ y representa en cierto sentido una generalización directa de la definición del número de Lelong de una corriente al sustituir el valor de la forma métrica $\varphi_0 = dd^c \log \|z^2\|$ por $dd^c \varphi$, siendo φ una función plurisubarmónica arbitraria. Con respecto a la integración esta se efectúa alrededor del conjunto singular de estas formas diferenciales. La siguiente proposición será de utilidad para lo que sigue.

Proposición 35 Para toda función creciente convexa $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se tiene

$$\int_{B(r)} T \wedge (dd^c \chi \circ \varphi)^p = \chi'(r-0) \nu(T, \varphi, r),$$

donde $\chi'(r-0)$ denota la derivada izquierda de χ en r .

Demostración: Tomemos χ_ϵ una función convexa igual a χ en $[r-\epsilon, +\infty[$ y a la función lineal de pendiente $\chi'(r-\epsilon-0)$ sobre $]-\infty, r-\epsilon]$. Por lo tanto $dd^c(\chi_\epsilon \circ \varphi) = \chi'(r-\epsilon-0) dd^c \varphi$ sobre $B(r-\epsilon)$, por lo que usando el Teorema de Stokes

$$\begin{aligned} \int_{B(r)} T \wedge (dd^c \chi \circ \varphi)^p &= \int_{B(r)} T \wedge (dd^c \chi_\epsilon \circ \varphi)^p \geq \int_{B(r-\epsilon)} T \wedge (dd^c \chi_\epsilon \circ \varphi)^p \\ &= \chi'(r-\epsilon-0) \nu(T, \varphi, r-\epsilon). \end{aligned}$$

De la misma forma, tomando $\tilde{\chi}_\epsilon$ igual a χ sobre $]-\infty, r-\epsilon]$ y lineal sobre $[r-\epsilon, r]$ se tiene:

$$\int_{B(r)} T \wedge (dd^c \chi \circ \varphi)^p \leq \int_{B(r)} T \wedge (dd^c \tilde{\chi}_\epsilon \circ \varphi)^p = \chi'(r-\epsilon-0) \nu(T, \varphi, r),$$

pasando al límite $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene el resultado. \square

De la fórmula obtenida, se tiene tomando $\chi(t) = \frac{e^{2t}}{2}$ que:

$$\int_{B(r)} T \wedge \left(\frac{1}{2} dd^c e^{2\varphi}\right)^p = e^{2pr} \nu(T, \varphi, r).$$

Tomemos ahora $\varphi(z) = \log |z - z_0|$ para $z_0 \in X$, entonces:

$$\nu(T, \varphi, r) = e^{-2pr} \int_{B(r)} T \wedge \left(\frac{i}{2} dd^c |z|^2\right)^p.$$

Haciendo el cambio de r a $\log r$:

$$\nu(T, \varphi, \log r) = r^{-2p} \int_{|z-z_0|<r} T \wedge \varphi_0^p = \frac{\frac{1}{p!} T \wedge \varphi_0^p}{\frac{\pi^p r^{2p}}{p!}}.$$

Lo cual coincide con la versión clásica del número de Lelong.

Del mismo modo, tomemos $\varphi(z) = \log(\max_j |z_j|^{\lambda_j})$, donde $\lambda_j > 0$ y $(z_1, z_2, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k$. Reemplazando en $\{\varphi(z) < r\}$ se tiene que $B(r)$ es el polidisco de radios: $(e^{r/\lambda_1}, \dots, e^{r/\lambda_k})$ y evaluando la expresión del número de Lelong generalizado (para detalles véase [17], en particular su discusión masas de los números de Lelong en relación a la masa de Monge-Ampere) para $T = dd^c \mu$ ($\mu \in PSA(X)$) se tiene:

$$\nu(dd^c \mu, \varphi, \log r) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_k}{\log r} \sup_{\theta_1 \cdots \theta_n} \mu(r^{1/\lambda_1} e^{i\theta_1}, \dots, r^{1/\lambda_k} e^{i\theta_k}), \quad (3.27)$$

lo que se denotará $\nu_T(0, (\lambda_1, \dots, \lambda_k))$. La expresión en el segundo miembro fue introducida por Kiselman (véase [64]) como un índice asociado a una función plurisubarmónica μ y se le denominará número de Kiselman $\nu(\mu, 0, (\lambda_1, \dots, \lambda_n))$.

A continuación formularemos y demostraremos un teorema referente a la comparación de dos números de Lelong generalizados, en particular, el número de Lelong con el número de Kiselman.

Teorema 74 Si $\varphi, \psi : X \rightarrow [-\infty, +\infty[$ tal que $\varphi, \psi \in PSA \cap C^0(X)$ (X es variedad de Stein).

Sean φ, ψ semi-exhaustivos sobre $\text{supp } T$ y que $l = \limsup_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{\varphi(z)} < +\infty$ ($z, z_0 \in \text{supp } T$, z_0 es el punto de donde se hallan los respectivos números de Lelong). Entonces se concluye que:

$$\nu(T, \psi) \leq l^p \nu(T, \varphi),$$

y además la igualdad se verifica si $l = \lim_{z \rightarrow z_0} \psi(z)/\varphi(z)$.

Demostración: De la definición $\nu(T, \lambda\varphi) = \lambda^p \nu(T, \varphi)$ para todo escalar $\lambda > 0$. De esto es suficiente demostrar que $\nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi)$ bajo la hipótesis $\limsup \psi/\varphi < 1$. Tomemos ahora la función $\mu_c = \max(\psi - c, \varphi)$ y sean r_φ, r_ψ tal que $B_\varphi(r_\varphi) \cap \text{supp } T$ lo mismo que $B_\psi(r_\psi) \cap \text{supp } T$ estan en un compacto relativo de X . Para un $r < r_\varphi$ y $a < r$ fijo, además $c > 0$ (suficientemente grande), se tiene que $\mu_c = \varphi$ (sobre $\varphi^{-1}([a, r])$) y la fórmula de Stokes dá:

$$\nu(T, \varphi, r) = \nu(T, \mu_c, r) \geq \nu(T, \mu_c).$$

Por otro lado, la hipótesis $\limsup \psi/\varphi < 1$ implica que existe $t_0 < 0$ tal que $\mu_c = \psi - c$ sobre $\{\mu_c < t_0\} \cap \text{supp } T$ de lo cual se infiere que:

$$\nu(T, \mu_c) = \nu(T, \psi - c) = \nu(T, \psi) \leq \nu(T, \varphi).$$

En el caso que se verifique la igualdad basta revertir los papeles de φ y ψ y notar que $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi/\psi = 1/l$ de donde $l = \lim_{z \rightarrow z_0} \psi/\varphi$. □

De este teorema se deduce en particular el siguiente:

Corolario 26 En Ω abierto contenido en \mathbb{C}^k , los números de Lelong y de Kiselman verifican que:

$$\nu_T(z_0) = \nu_T(z_0, (1, 1, \dots, 1)).$$

Demostración: Los números clásicos de Lelong están asociados con el peso $\varphi(z) = \log |z - z_0|$ mientras que los números de Kiselman están asociados al peso $\psi(z) = \log \max(z_j - z_{0,j})$. Pero de $\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)/\psi(z) = 1$ se tiene la desigualdad en un sentido e invirtiendo los roles de φ y ψ se obtiene la desigualdad en el otro sentido. Esto prueba la desigualdad esperada. \square

En particular, si tomamos $T = dd^c u$, donde $u \in PSA(X)$ se tiene que:

$$\nu(u, z_0, (1, \dots, 1)) = \nu_u(z_0).$$

Del mismo se puede probar con ayuda del mismo teorema que

$$\nu(u, z_0, \lambda(\lambda_1, \dots, \lambda_k)) = \lambda \nu(u, z_0, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)),$$

y además:

$$\nu(u, z_0, (\lambda_1, \dots, \lambda_k)) \geq \min(\lambda_1, \dots, \lambda_k) \nu_u(z_0).$$

Para concluir esta sección, demostraremos una propiedad de los números de Kiselman en \mathbb{C}^2 que será de gran importancia para estudiar el número de Lelong en ciertas corrientes (véase el Capítulo [5]).

Teorema 75 Sea $u \in PSA(U)$, U abierto contenido en \mathbb{C}^2 , $u \leq 0$. Sea además la corriente cerrada y positiva $S = dd^c u$, que que no carga en la curva $\{z = 0\}$. Entonces:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sup_{\{z=0\}} \nu(u, p, (\alpha, 1)) = 0,$$

donde $p \in \{z = 0\}$.

Demostración: Hagamos uso del método de aproximación de funciones pluri-subarmónicas perteneciente a Demailly (véase Apéndice B.2). Para ello definamos el siguiente espacio de Hilbert ($U \subset \mathbb{C}^2$):

$$\mathcal{H}(su) = \{h \in \mathcal{H}(U) : |h|_{su}^2 = \int_U |h|^2 e^{-2su} < +\infty\}$$

con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_U f \bar{g} e^{-2su}$; $f, g \in \mathcal{H}(U)$ (véase también el Apéndice B.2). Definamos ahora $u_s = s^{-1} \sup_{|h|_{su} \leq 1} \log |h|$ donde $|h| \in PSA(U)$. De las propiedades del supremo

de funciones plurisubarmónicas se tiene que $u_s \in PSA(U)$. Sea σ_i una base ortonormal de $\mathcal{H}(su)$ entonces $\sup_{|h|_{su} \leq 1} \log |h| = \log \sqrt{\sum_i |\sigma_i|^2}$. Por lo que $u_s = \frac{1}{2s} \log \sum_i |\sigma_i|^2$. Procedamos a probar

un par de relaciones de los números de Kiselman y Lelong correspondientes a u_s y u :

$$\nu(u, z_0, (\lambda_1, \lambda_2)) \leq \nu(u_s, z_0, (\lambda_1, \lambda_2)) + \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{s} \tag{3.28}$$

$$\nu_{u_s}(z_0) \leq \nu_u(z_0), \quad (3.29)$$

para $z_0 \in U$ y $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$.

Probemos la primera relación. Sea $h \in \mathcal{H}(su)$ normalizado tal que $|h|_{su} = 1$. Usando la propiedad del valor medio para $|h|$ junto con el Teorema de Fubini: ($z_0 = (z^0, w^0)$)

$$|h(z^0, w^0)|^2 \leq \frac{1}{\pi^2 r^{2(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)}} \int_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} |h(z^0 + \zeta r^{1/\alpha_1}, w^0 + \zeta r^{1/\alpha_2})|^2 d\eta d\zeta.$$

Multiplicando por $e^{-su} * e^{su}$ y usando la condición de la norma $|h|_{su} = 1$ se tiene:

$$|h(z^0, w^0)| = \frac{1}{\pi^2 r^{2(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)}} \sup_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} e^{2su} \quad ((z^0, w^0) \in U).$$

Usando la definición de u_s se tienen entonces que:

$$u_s(z^0, w^0) \leq \frac{1}{s} \log \frac{1}{\pi^2 r^{2(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2)}} + \sup_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} u,$$

pero de la definición de los números de Kiselman:

$$\sup_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} u \leq (\lambda_1, \lambda_2)^{-1} \nu(u, z_0, (\lambda_1, \lambda_2)) \log r + C_0,$$

luego:

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} u_s &\leq \sup_{\substack{|z-\zeta| \leq r^{1/\alpha_1} \\ |w-\zeta| \leq r^{1/\alpha_2}}} u \leq (\lambda_1, \lambda_2)^{-1} \log(2^{-1/\max\{\lambda_1, \lambda_2\}} r) \nu(u, z_0, (\lambda_1, \lambda_2)) \\ &\quad - \frac{1}{s} \log \left(\frac{1}{\pi r^{1/\lambda_1 + 1/\lambda_2}} \right) + C_0. \end{aligned}$$

Dividiendo entonces por $\log r$ y pasando al límite se tiene la desigualdad esperada.

La prueba del segundo enunciado la remitimos a [17], sin embargo en el Apéndice B.2 situaremos esta desigualdad en el marco de la teoría de aproximación de Demailly [109] construida a partir del Teorema de Extensión de Ohsawa-Takegoshi [108].

Concluamos la prueba del teorema con ayuda de las dos desigualdades anteriores: en efecto, puesto que $dd^c u$ no carga sobre $\{z = 0\}$ entonces, del Teorema de Siu, existe $z' = (0, w')$ tal que $\nu_u(0, w') = 0$, pero usando la desigualdad 3.29 se deduce entonces que $dd^c u_s$ no carga tampoco a $\{z = 0\}$. Esto implica (de la definición de u_s) que debe existir una función holomorfa $f \in \mathcal{H}(su)$ que no se anula idénticamente en $\{z = 0\}$ (de lo contrario $\nu_{u_s}(z_0) \neq 0$) en $\{z = 0\}$).

Usando ahora la desigualdad de Lojasiewicz (véase [75],[76]) se tiene que:

$$|h(z, w)| + |z| \geq C \text{dist}((z, w), K)^\alpha,$$

donde $C, \alpha > 0$ son constantes y $K = h^{-1}(0) \cap \{z = 0\}$. Teniendo entonces $\lambda < 1/\alpha$ tenemos:

$$\sup_{\Delta(r^{1/\lambda}) \times (w+A(r))} \log |h| \geq C' \alpha \log \quad \text{para cualquier } w \in \mathbb{C}.$$

de ahí para $0 < r < 1$ y pasando al límite $r \rightarrow 0$ se tiene que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\{z=0\}} \nu(\log |h|, (\alpha, i)) = 0,$$

pero como $u_s \leq \frac{1}{s} \log |h|$ entonces se infiere que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\{z=0\}} \nu(u_s, z_0, (\alpha, 1)) \leq \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\{z=0\}} s^{-1} \nu(\log |h|, z_0, (\alpha, 1)) = 0;$$

pasando al límite en la primera de las desigualdades ya probadas:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sup_{\{z=0\}} \nu(\log |h|, z_0, (\alpha, i)) \leq \frac{1}{s}.$$

Esto implica el resultado esperado. □

Capítulo 4

Corriente de Green. Formulación del Teorema de Favre-Jonsson

El capítulo empieza con la definición de la Corriente de Green. La función de Green definida para iteraciones complejas en espacios proyectivos nos proporciona un parámetro analítico útil para estudiar el comportamiento asintótico de las iteraciones de pre-imágenes. Se estudian las propiedades más importantes de esta corriente. Para más referencias acerca de la Corriente de Green véase [8],[?],[41],[103]. El planteamiento del problema general de convergencia de la sucesión de pull-backs en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ precede al planteamiento del problema de convergencia planteado por Favre-Jonsson. En la siguiente sección procedemos a reducir el problema en cuestión a un problema de Estimación de Volúmenes donde en particular para una de las cotas de los volúmenes de bolas se hace necesario usar un teorema importante de Kiselman el cual se expone al final de la Sección [2.6], para detalles suplementarios se puede consultar [31],[46],[64].

4.1. Corriente de Green y el Problema de la Convergencia

4.1.1. Definición y caracterizaciones

Sea $f \in \mathcal{M}_d$ una aplicación meromorfa dominante en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Procedemos a asociar a f una corriente positiva cerrada de bigrado $(1, 1)$, la que se denominará Corriente de Green T .

Definición 89 *La Corriente de Green dinámica T es una corriente en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ de modo que:*

$$\pi^*T = \frac{1}{d^n} \lim_{n \rightarrow \infty} f^{n*}[\omega], \quad (4.1)$$

donde ω es la forma de Fubini-Study-Kähler en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

De la definición de pull-back y de las propiedades de la forma de Fubini-Study-Kähler:

$$\frac{1}{d^n} f^{n*}[\omega] = \frac{1}{d^n} dd^c \log \|F^n\|, \quad (4.2)$$

donde $F = (f_0, \dots, f_k)$ es el levantamiento de f . De acuerdo a todo esto, introduzcamos la siguiente:

Definición 90 *El $\lim_{n \rightarrow \infty} G_n(z)$, donde $G_n(z) = \frac{1}{d^n} \log \|F^n\|$, se denomina función de Green dinámica $G(z)$ asociada a la función $f \in \mathcal{M}_d$.*

De acuerdo a esta definición se tiene entonces que:

$$T \in {}^+D'_{1,1}(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) \text{ se define tal que } \pi^*T = dd^cG.$$

La existencia de G queda garantizada por el siguiente:

Teorema 76 *La función de Green dinámica G asociada a $f \in \mathcal{M}_d$ siempre existe. Además G verifica $G(\lambda z) = \log \|\lambda\| + G(z)$ y $G(F(z)) = dG(z)$.*

Demostración: La función F se define salvo una constante multiplicativa. Sea $B(0,1) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y tomemos $\sup_B \|F\| = 1$. De la homogeneidad: $\|F(z)\| \leq \|\lambda\| \|z\|^d$ donde $\|\lambda\| \leq 1$. De ahí se obtiene que $\|F(z)\| \leq \|z\|^d$. Iterando esta desigualdad: $\|F^{n+1}(z)\| \leq \|F^n(z)\|^d$. Definiendo $G_n = \frac{1}{d^n} \log \|F^n\|$ se tiene que: $G_{n+1}(z) = \frac{1}{d^{n+1}} \log \|F^{n+1}(z)\| \leq \frac{1}{d^n} \log \|F^n(z)\| = G_n(z)$. De este modo, la sucesión $G_n(z)$ es una sucesión decreciente de funciones PSA y por el Teorema de Aproximación de una función PSA se tiene que su límite G es también una función PSA. Mostremos entonces que $G \neq \infty$. En efecto, tomemos la secuencia de pull-backs:

$$\sigma_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{d^n} f^{n*}[\omega]. \quad (4.3)$$

De la Sección [2.5] se tiene, por la relación para la masa de una corriente: $\|f^{n*}[\omega]\| = d^n$. Por lo que $\sigma_N = 1$. Es posible entonces encontrar una sub-secuencia σ_{N_i} tal que $\sigma_{N_i} \rightarrow \sigma$ (en el sentido de la topología débil) de donde usando:

$$d^{-1} f^{n*} \sigma_n = \sigma_n + n^{-1} (d^{-n-1} (f^{n+1})^*[\omega] - d^{-1} f^*[\omega]),$$

se deduce que $f^{n*} = d\sigma$. Sea ahora h el potencial de la corriente σ , entonces de la relación de invariancia $\frac{1}{d} dd^c(h \circ f) = dd^c h$, se tiene que $h \circ F = d(h + c)$ ($c \in \mathbb{C}$).

Tomemos ahora:

$$H = h + cd/d - 1$$

otro potencial de σ que satisface $H \circ F = dH$ entonces, usando $H(\lambda z) = \log \|\lambda\| + H(z)$ se deduce que $H(z) \leq \log \|z\| + C_1$ ($C_1 \in \mathbb{C}$). Además, de $H \circ F = dH$ se tiene que $H \circ F^n = d^n H$ por lo que:

$$H(z) = \frac{1}{d^n} H \circ F^n \leq \frac{1}{d^n} (\log \|F^n\| + C_1). \quad (4.4)$$

De aquí se obtiene que $H \leq G$. Una vez establecida la existencia de G se tiene inmediatamente que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} \log \|F^n(\lambda z)\| = \log \|\lambda\| + G(z)$. Además $d^{-1}G(F(z)) = \lim_{n \rightarrow \infty} G_n(F(z)) = G(z)$. \square

Corolario 27 *Sea H otra función que verifica las relaciones para G del teorema anterior entonces $H \leq G$. Es decir, en cierto modo G tiene un carácter maximal.*

La prueba se deduce inmediatamente de (4.4). Del mismo modo se puede establecer las siguientes propiedades adicionales de la corriente de Green:

Corolario 28 *La Corriente de Green T verifica :*

$$- f^*(T) = dT$$

$$- \|T\| = 1.$$

A continuación estableceremos otra caracterización de T útil en las aplicaciones:

Teorema 77 *Sea el mapa $f \in \mathcal{M}_d$ y T la Corriente de Green asociada a f . Existe una función H continua tal que:*

$$T = \omega + dd^c H. \quad (4.5)$$

Donde ω es la corriente de integración correspondiente a la forma de Fubini-Study-Kähler

Demostración: De la representación de una corriente positiva por medio de un potencial u (plurisub-armónico), se tiene que $f^*(\omega)$ y $d\omega$ son dd^c -cohomólogos. Esto es, $f^*(\omega) = \omega d + dd^c u$, donde u es una función continua. Iterando esta igualdad se tiene que: $d^{-n} f^{n*}(\omega) = \omega + dd^c(\sum_{i=1}^n) d^{-i} u \circ f^{i-1}$. Puesto que el primer miembro converge débilmente entonces lo mismo sucederá con el segundo miembro, esto implica a su vez que $\sum_{i=1}^n d^{-i} u \circ f^{i-1} \rightarrow H$ (uniformemente). \square

Un resultado análogo al teorema anterior válido para cualquier corriente cerrada y positiva se establecerá en la Sub-ección [4.1.3].

4.1.2. Propiedades fundamentales

Proposición 36 Propiedad extremal de la Corriente de Green *Sea \mathcal{D} el conjunto de corrientes positivas cerradas S de bigrado $(1,1)$ tal que $f^*(S) = dS$ y masa $\|S\| = 1$. Entonces \mathcal{D} es un convexo compacto y la Corriente de Green es extremal en \mathcal{D} .*

Demostración: Por la dualidad se tiene que \mathcal{D} es compacto mientras que para $T_1, T_2 \in \mathcal{D}$ entonces $T = \lambda T_1 + (1 - \lambda)T_2$ donde $0 \leq \lambda \leq 1$ es cerrada, positiva y $\|T\| = 1$. Sea ahora $t_1, t_2 \in \mathcal{D}$ tal que $f^*(t_i) = dt_i$ ($i = 1, 2$). Sea $t = (t_1 + t_2)/2$ y consideremos los potenciales G_i para t_i entonces se tiene que $G_i(F(z)) = dG_i(z)$ por lo que $G_i \leq G$ de donde se deduce que el potencial H de t : $H \leq G$. Pero $G - H$ satisface $(G - H) \circ F(z) = d(G - H)(z)$ entonces $G = H$ y finalmente $G_1 = G_2 = G$, lo que prueba que T es extremal. \square

Probemos a continuación la relación fundamental entre la corriente de Green T y el conjunto de Julia de f

Teorema 78 *Sea $f \in \mathcal{M}_d$ una aplicación algebraicamente estable. Sea además \mathcal{J}_0 el conjunto de Julia asociado a f . Entonces:*

$$1) \text{ supp } T \subset \mathcal{J}_0$$

2) N : conjunto de puntos normales, entonces para todo compacto K de N :

$$\text{Para } j \geq 1: \quad \|G_{n+j} - G_n\| \leq \frac{C_K}{d^n},$$

y además $N \subset \mathcal{F}_0$ (conjunto de Fatou). En particular la función de Green G es continua sobre $\pi^{-1}(N)$.

Demostración: Demostremos la primera afirmación:

Sea $z \in U$ y U un abierto del conjunto de Fatou. Sin perder generalidad podemos considerar a U conteniendo una sub-sucesión $\{f^{n_j}\}$ que converge al mapa holomorfo h tal que $f^{n_j}(U) \subset \{z_0 = 1, \|z_j\| < 2\}$. Escribamos ahora la secuencia de los $\{G_{n_j}\}$ generada por los levantamientos $F^{n_j} = [F_0^{n_j} : \dots : F_k^{n_j}]$:

$$G_{n_j} = \frac{1}{d^{n_j}} \log \|F_0^{d^{n_j}}\| + \frac{1}{d^{n_j}} \log \|(1, A_j^1, \dots, A_j^k)\|.$$

Este último término converge uniformemente a cero y el primer término es pluri-armónico, de ello se deduce que $T = dd^c G = 0$ y U no intersecta al soporte de T .

Pasemos a probar el segundo aserto: Tomemos la bola U tal que $U \subset K \subset N$. Mostremos que si $dd^c G = 0$ en $\pi^{-1}(U)$ la sucesión $\{f^n|_U\}$ es equicontinua. Puesto que f es algebraicamente estable, existe una constante C_K tal que la distancia $d(f^n(z), I) \geq C_K$. (I es el conjunto de indeterminación). Por tanto:

$$\|F(\frac{F^n(z)}{\|F^n(z)\|})\| \geq C \quad \text{entonces } \|F^{n+1}(z)\| \geq C \|F^n(z)\|^d.$$

De ahí se tiene $\frac{\log C}{d^n} \leq G_{n+1} - G_n \leq 0$. Entonces para todo $j : \|G_{n+j} - G_n\| < C_1/d^n$.

Pasando al límite $j \rightarrow \infty : \|G - G_n\| < C_1/d^n$.

De la hipótesis que establece que G es pluri-armónica en $\pi^{-1}(U)$ se tiene que existe una función holomorfa h tal que $G = \log \|h\|$, entonces:

$$\|\frac{1}{d^n} \log \frac{\|F^n\|}{\|h\|^{d^n}}\| = \|\frac{1}{d^n} \log \|F^n\| - \frac{1}{d^n} \log \|h\|^{d^n}\| \leq C_1/d^n,$$

y: $e^{-C_1} \leq \frac{\|F^n\|}{\|h\|^{d^n}} \leq e^{C_1}$. Como $F^n/\|h\|^{d^n}$ es un levantamiento de f^n , la familia $\{f^n\}$ es equicontinua en U . □

Corolario 29 Sea $f \in \mathcal{M}_d$ (algebraicamente estable) y tomemos U (abierto) $\subset N$. Si una sub-sucesión $\{f^{n_i}\}$ es equicontinua en U entonces $U \subset \mathcal{F}_0$ (conjunto de Fatou).

Demostración: Bajo la hipótesis del corolario en el teorema anterior se estableció que $G_i \rightarrow G$ (pluri-armónica) en U . Esto implica que $U \subset \mathcal{F}_0$. □

Corolario 30 Si f es normal entonces el soporte de T es igual a \mathcal{J} . El soporte de T es siempre conexo y el conjunto de Fatou es una variedad de Stein.

Demostración: Si f es normal, es inmediato que $\text{supp } T = \mathcal{J}_0$. Probemos primero que \mathcal{F}_0 es una variedad de Stein. Del Teorema del Potencial PSA de una Corriente Positiva Cerrada de Bigrado $(1, 1)$ se tiene que el complemento de su soporte es un conjunto pseudo-convexo. Por otro lado, en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ el problema de Levi tiene una solución positiva la cual afirma en particular que U (pseudo-cónvexo) $\subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ es también una variedad de Stein (véase [56]). Con esto concluimos que \mathcal{F}_0 es de Stein. Finalmente pasemos a probar que $\text{supp } T$ es conexo. Para establecer ello basta probar que \mathcal{J}_0 lo es. En efecto, sea $\mathcal{J}_0 = K_1 \cup K_2$ donde K_1 y K_2 son dos compactos disjuntos no vacíos. Es posible encontrar una corriente $T_1 = T|_{K_1}$ cerrada positiva de bigrado $(1, 1)$ tal que $K_1 = \text{supp } T_1$, entonces por lo que se acaba de establecer acerca del complemento del soporte de una corriente podemos decir que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus K_1$ es una variedad de Stein lo mismo que $\mathbb{C}\mathbb{P}^k \setminus (K_1 \cup K_2)$ esto sin embargo no es posible por la conocida propiedad de las variedades de

Stein que afirma que el complemento de un compacto dentro de una variedad de Stein no puede ser de Stein (véase [69] para un tratamiento exhaustivo de las variedades de Stein). \square

Hasta aquí estudiaremos las propiedades más elementales de la Corriente de Green asociada a $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$. Para más detalles véase [21, 39, 40] etc.

4.1.3. El Problema de la Convergencia

De lo expuesto y considerando la definición de la corriente de Green en forma de la convergencia de una sucesión de pull-backs de la corriente $[\omega]$ asociada a la geometría de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se plantea el problema de determinar las condiciones en las cuales una corriente S o una familia de corrientes positiva y cerrada $\{S\}$ verifican el siguiente límite en sentido débil.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} f^{n*} S = T,$$

para $f \in \mathcal{M}_d$ (algebraicamente estable). El teorema fundamental de este trabajo es un resultado de convergencia a la corriente de Green, por lo cual esta sub-sección es sólo una breve introducción a dicho problema. Las primeras aproximaciones al Problema de la Convergencia o bien imponían condiciones sobre la clase de corrientes a iterar con ayuda del pull-back, o bien sobre la clase de mapas holomorfos o meromorfos a ser usados. Uno de los primeros resultados de convergencia de la sucesión de pull-backs pertenece a Shiffman y Russakovski [94]. En este trabajo se demuestra la convergencia a la corriente de Green de toda corriente de integración de una recta compleja $[L] : d^{-n} f^{n*}[L] \rightarrow T$ a excepción de un conjunto de rectas que forma un conjunto pluripolar en el espacio $\mathbb{C}\mathbb{P}^{2*}$. En realidad la formulación inicial de aquel teorema en términos de medidas invariantes tiene aplicación a la equidistribución de pre-ímagenes de diversos objetos que pueden ser representados a través de dichas medidas. En otro estudio importante, Fornaess y Sibony probaron un teorema que se aproximaba al Problema de Convergencia [39] en el sentido que se establecía la convergencia $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{d^n} f^{n*} S = T$ para aquellas f fuera de un conjunto de \mathcal{H}_d el cual es una unión contable (tal vez infinita) de conjuntos algebraicos. En artículos posteriores, Fornaess y Sibony (véase [41, 42]) plantearon otra aproximación que imponía una fuerte restricción sobre la multiplicidad local de f .

Teorema 79 $f \in \mathcal{H}_d$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ($d \geq 3$) y la multiplicidad local de f es a lo mas $(d - 1)$ excepto en un conjunto finito que no contiene puntos periódicos. S una corriente positiva cerrada $(1, 1)$. $\|S\| = 1$. Luego:

$$\frac{f^{n*} S}{d^n} \rightarrow T.$$

Otra solución parcial fue propuesta por Sibony [103] para una familia de corrientes dependientes de un punto. Introduzcamos primero la siguiente:

Definición 91 Sea $B \subset \mathbb{C}^n$ y $w \in B(0, 1) \in \mathbb{C}$ y definamos $U : \mathbb{C}^{k+1} \times B(0, 1) \rightarrow [-\infty, +\infty]$ una función medible. S_w se llama familia admisible de corrientes si para todo $w \in B$, S_w es tal que $\pi^* S_w = dd_z^c U(z, w)$ con U que satisface:

- 1) $U(\lambda z, w) = \log \lambda + U(z, w)$
- 2) $z \mapsto U(z, w)$ es p.s.h para todo w
- 3) $w \mapsto U(z, w)$ es p.s.h para todo z

$$4) U(\xi, w) \leq 0 \text{ si } |\xi| = 1$$

$$5) \int_B U(\xi, w) dm(w) \leq C \text{ m: medida de Lebesgue sobre } |\xi| = 1.$$

Y el teorema establece la convergencia de la familia de corrientes asociadas a esta familia de funciones PSA excepto un conjunto pluri-polar dentro de la bola donde se definen dichos sub-índices.

Teorema 80 *Sea $f \in \mathcal{M}_d$ una aplicación algebraicamente estable. Sea $S_w, w \in B$ una familia admisible de corrientes de bigrado $(1, 1)$ positivas y cerradas. Entonces existe un conjunto pluripolar $E \subset B$ tal que:*

$$\frac{1}{d^n} f^{n*} S_w \longrightarrow T$$

para todo $w \in B \setminus E$.

Otros resultados parciales del Problema de la Convergencia hacen restricciones mixtas (multiplicidad, propiedades de los conjuntos excepcionales etc). Para más detalles véase por ejemplo [21, 39], etc. En este trabajo se probará como resultado central un teorema de convergencia para un tipo de corriente cerrada y positiva la cual en un caso particular comprende la corriente de integración de un conjunto analítico de co-dimensión uno. El mérito de este resultado es que no hace uso de las restricciones ya vistas hasta ahora, sino tan sólo impone ciertas condiciones naturales para la corriente al actuar en los conjuntos invariantes según f . En este sentido hay que señalar que existen algunos teoremas cercanos al que probaremos aquí para mapas holomorfos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ establecidos previamente para mapas de Henon y mapas birracionales [21],[30].

El teorema de Favre-Jonsson que se enuncia en la siguiente sub-sección y se demuestra en el capítulo 5 da una condición suficiente de convergencia que es bastante general y tiene como caso particular la convergencia hacia la corriente de Green de la corriente asociada a una curva algebraica. Este enunciado lleva a conjeturar un teorema que establece condiciones suficientes y necesarias para la convergencia de una corriente cerrada y positiva de bi-grado $(1, 1)$ hacia la corriente de Green. Aquí no expondremos tal conjetura (véase para los detalles [31]) sin embargo destacaremos el hecho que ya se ha hecho progreso en este sentido gracias a los trabajos de Vincent Guedj (véase [46, 47]).

4.2. Formulación del Teorema de Favre-Jonsson

Teorema de Favre-Jonsson El problema fundamental que se plantea en esta monografía es una extensión del Problema de la Convergencia hacia la Corriente de Green enunciado en la Sub-sección [4.1.3]. Puesto que una curva algebraica o en general cualquier conjunto analítico se asocia a cualquier corriente positiva cerrada entonces es natural plantear el problema de convergencia de sus pull-backs, ¿como se comportan asintóticamente las preimágenes de curvas algebraicas bajo $\{f^n\}_{n \in \mathbb{Z}^-}$?

En la introducción se ha mencionado de forma general los antecedentes de este problema, especialmente el trabajo seminal de Brolin. La formulación del problema de Favre-Jonsson sobre una corriente S impone sobre ella ciertas condiciones generales, veamos esto en detalle:

Teorema 81 *Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \circlearrowleft$ un mapa holomorfo de grado $d \geq 2$. f tiene asociada, entonces, un conjunto algebraico E_1 que consiste a lo sumo de tres líneas complejas, y un conjunto totalmente invariante E_2 .*

Sea ahora S una corriente positiva y cerrada en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de bigrado $(1, 1)$ con masa total unitaria tal que:

- S no carga ninguna componente irreducible de E_1 ;
- S tiene un potencial local acotado en cada punto de E_2 .

Entonces se tiene la siguiente convergencia en el sentido de la topología débil de corrientes:

$$\frac{1}{d^n} f^{n*} S \rightarrow T \quad (n \rightarrow \infty),$$

para T Corriente de Green.

De este teorema se deriva el siguiente corolario que responde la pregunta acerca de la convergencia de las corrientes asociada a curvas algebraicas. Recuérdese que el espacio de curvas en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ coincide con el espacio de polinomios homogéneos de grado r : $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$ donde $N = N(r, k)$.

Corolario 31 Sea f como en el teorema principal, sea además $r \geq 1$ el grado de la curva algebraica C en $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$.

Si $\Sigma^* \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$ tal que $\Sigma^* = \{C / \frac{1}{d^{nk}} f^{n*} [C] \rightleftharpoons T, n \rightarrow \infty\}$ entonces Σ^* es un subconjunto propio algebraico de $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$.

Este resultado establece que las curvas cuyos pull-backs de corrientes no convergen a la Corriente de Green son un subconjunto propio de la clase de curvas algebraicas y pueden en principio ser descritos con ayuda de las expresiones que describen el conjunto algebraico Σ^* .

También es posible caracterizar el tipo de mapas holomorfos que para una corriente positiva cerrada S de bigrado $(1, 1)$ y masa unitaria inducen una sucesión de pull-backs que tiende a la Corriente de Green.

Corolario 32 En \mathcal{H}_d existe un subconjunto propio algebraico $\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_d$ tal que $f \notin \mathcal{H}$:

$$\frac{1}{d^n} f^{n*} [S] \rightarrow T \quad (n \rightarrow \infty)$$

para esta corriente S cerrada, positiva, de bigrado $(1, 1)$ y de masa unitaria.

Es de notar que el Teorema de Favre-Jonsson es un resultado de gran alcance que en cierto sentido supera cualquiera de las aproximaciones al problema de la convergencia que se dieron en la Sub-sección [4.1.3] en donde se imponían condiciones a los mapas holomorfos o a la dinámica del sistema. En el Teorema de Favre-Jonsson se logra levantar estas condiciones restrictivas. Más aún el corolario caracteriza \mathcal{H} como un conjunto algebraico en \mathcal{H}_d . Sería interesante encontrar una descripción mas detallada de este conjunto.

La prueba de estos corolarios se diferirá hasta la Sección [5.3].

Comentario 33 (Acerca de notación y terminología) En el siguiente punto así como en las siguientes sub-secciones de este capítulo y del Capítulo [5] se tomará la convención de hablar de f en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ indistintamente de su copia biholomorfa en \mathbb{C}^k (así como también se evitará hacer distinción del espacio de "origen" para cualquier objeto generado por f y aquel correspondiente a su representación local \tilde{f}), esto en las situaciones donde debiera uno referirse estrictamente a f o a su copia biholomorfa. En realidad este criterio de "ahorro de notación" ya ha sido

usado antes cuando se ignoró la distinción entre f definida en el proyectivo y su levantamiento F definido en $\mathbb{C}\mathbb{P}^{k+1}$ (por ejemplo en aquellas situaciones en donde se ha hecho uso de las estructuras diferenciables). Naturalmente en todos esos casos nosotros sabemos que estamos tratando estructuras formales distintas que sólo en el nivel de la terminología y la notación pueden ser “confundidas” por mera comodidad. Ejemplo de esto es la Corriente de Green T cuya definición se completa en base a la acción del operador diferencial dd^c sobre la función de Green dinámica asociada a f . Aquí T es legítimamente un objeto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ definido unívocamente a través de su pull-back en \mathbb{C}^k . Una situación similar se suscitará cuando en la Sección [5.2.1] se definan las magnitudes asintóticas asociadas a la dinámica de f^n . Debido a su carácter topológico-analítico y local ellas son definidas de manera natural en \mathbb{C}^k es decir en coordenadas locales de f . De este modo, los objetos de carácter geométrico y/o analítico definidos a partir de estas magnitudes son objetos en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Es claro que, en cuanto es necesario transitar repetidamente entre las representaciones locales a las estructuras en el proyectivo, una notación y terminología única es de extrema necesidad.

Reducción del Teorema de Favre-Jonsson a un problema de Estimación de Volúmenes

En este punto reduciremos el Problema de la Convergencia de las corrientes S a un problema de Estimación de Volúmenes en \mathbb{C}^k . Empecemos introduciendo la siguiente definición:

Definición 92 $u : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{R}$ es una función quasi-plurisub-armónica si $u = v - \varphi$ donde φ es diferenciable y v es PSA.

Lema 15 Sea S una corriente positiva, cerrada, de masa unitaria entonces S se puede representar como:

$$S = w + dd^c u,$$

donde $u \leq 0$ es una función quasi-plurisub-armónica en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Demostración: S y w son cohomológicos en un entorno de $z_0 \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. En efecto, $S = dd^c u_S$, $w = dd^c \ln \|z - z_0\|^2$ donde u_S es una función plurisub-armónica en un entorno $U_z \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Luego tomando u_S en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ tal que $u_S - \ln(1 + \|z - z_0\|^2) = u(z)$. Con lo que se establece lo buscado. \square

Antes de enunciar el corolario que prepara el camino para la Estimación Superior de Volúmenes enunciaremos el Lema de Hartog.

Lema 16 Sea la familia de funciones $u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ($\Omega \subset \mathbb{C}^k$) una sucesión de funciones plurisub-armónicas en Ω tal que $u_n \rightarrow u \in C(\Omega)$ en el sentido $L'_{Loc}(\Omega)$, luego, para todo K compacto contenido en Ω se puede fijar $\epsilon > 0$ tal que $\sup_K (u_n - u) \leq \epsilon$ (cuando $n > N_0$).

Comentario 34 Si se cambia de condición de plurisub-armonicidad por la de quasi-plurisub-armonicidad, el Lema de Hartog continua siendo válido.

Corolario 33 Si $\frac{1}{d^n} f^{n*} S \rightarrow T$ entonces existe una bola $B \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, una constante $\alpha > 0$ y una secuencia $n_j \rightarrow \infty$ tal que $f^{n_j} B \subset \{u < -\alpha d^{n_j}\}$.

Demostración: De $S = w + dd^c u$ se tiene $d^{-n} f^{n*} S = d^{-n} f^{n*} w + d^{-n} dd^c (u \circ f^n)$ entonces de la condición se tiene $d^{-n} dd^c (u \circ f^n) \rightarrow 0$, de la integrabilidad de $u \circ f^n$ se tiene $d^{-n} u \circ f^n \rightarrow \bullet$. Puesto que $d^{-n} u \circ f^n$ es quasi-plurisub-armónica, del Lema de Hartog y de la negatividad de u

se tiene al menos una subsucesión $d^{-n_j} u \circ f^{n_j} < -\alpha$ con $\alpha > 0$ lo cual equivale para una bola B en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$:

$$f^{n_j} B \subset \{u < -\alpha d^{n_j}\},$$

donde el segundo miembro se define a los puntos en coordenadas locales de la imagen de f en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. \square

Si se supone, en el teorema principal que $\frac{1}{d^n} f^{n^*} S \rightarrow T$ entonces la demostración del teorema se reduce a probar que la inclusión anterior no es posible. El trabajo ulterior consistirá en establecer ello.

Capítulo 5

Prueba del Teorema de Favre-Jonsson

La primera sección está dedicada al comportamiento asintótico de los co-ciclos multiplicativos los cuales son los objetos que resumen las propiedades más importantes de las llamadas Magnitudes Asintóticas que constituyen la sucesión de ciertos índices de singularidad asociados a la iteración. El Teorema Fuerte de Birkhoff es el principal teorema de esta sección el cual se basa en previos desarrollos en Combinatoria y Teoría Ergódica ([28],[44],[91]). En la siguiente sección es donde se introducen las Magnitudes Asintóticas de Favre-Jonsson para luego definir ciertos objetos geométricos relacionados con el comportamiento “límite” de dichas magnitudes. El conjunto obtenido se le denomina excepcional y resulta ser un sub-conjunto del Conjunto Invariante ([10],[38]). Las propiedades más trascendentales de estos conjuntos así como de las Magnitudes Asintóticas se estudian en esta sección como antesala a los teoremas acerca de las Estimaciones de Volúmenes dentro de los conjuntos excepcionales [31],[28]. En la Sección [5.3] se demuestra finalmente el Teorema de Favre-Jonsson después de juntar todos los resultados previos acerca de la Estimación de Volúmenes dentro y fuera del conjunto excepcional además del Teorema de Kiselman-Skoda ([31],[64]. La última sección es una breve mención de la conjetura acerca de la estructura del conjunto excepcional discreto definido en la Sección [5.2]. La estructura aparentemente “misteriosa” de este conjunto tiene varias consecuencias importantes para la caracterización de la dinámica en $\mathbb{C}P^k$ por lo que al final de esta sección se utiliza esta conjetura para caracterizar las posibles configuraciones del conjunto excepcional [31].

5.1. Teorema Ergódico Fuerte de Birkhoff

5.1.1. Planteamiento del problema

Pasemos a introducir la noción de cociclo:

Definición 93 Una función $K_n : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ ((A, μ) espacio probabilístico) se denomina cociclo si satisface la propiedad

$$K_{n+m}(z) = K_n(z)K_m(f^n(z)),$$

donde $n, m \in \mathbb{Z}$, $f : A \rightarrow A$ es una transformación invariante de medidas.

Recordemos el enunciado del Teorema Ergódico de Birkhoff para cociclos tal como se enuncia en [61].

Teorema 82 Sea $K_n(z)$ un cociclo tal que la función $K_1(z) : A \rightarrow \mathbb{R}_+$ es μ -integrable, entonces existe el límite:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z) \rightarrow K_\infty(z), \quad \mu\text{-c.t.p.},$$

donde $K_\infty(z)$ es un función que preserva la medida μ .

Para las cuestiones que nos interesan obtendremos un teorema análogo que tenga un contenido mas analítico que de medida. Así mismo se plantea modificar el concepto de cociclo para estudiar las así llamadas multiplicidades asintóticas asociadas a una iteración holomorfa en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Sobre el primer punto, es necesario sustituir la condición de existencia de una medida invariante por una condición analítica sobre K_n el cual a su vez debe estar definido sobre una variedad algebraica tal como $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Dicha condición resulta ser la de semicontinuidad superior en el sentido de Zariski para $K_n : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow [1, +\infty[$, respecto al segundo punto en la siguiente sub-sección se introducirá el concepto que resume las propiedades de las multiplicidades asintóticas.

5.1.2. Cociclos analíticamente rígidos

La introducción de las multiplicidades asintóticas, tal como serán definidas en la próxima sección, plantea la necesidad de estudiar el concepto de Cociclo Analíticamente Rígido (CAR). Este objeto resume las propiedades comunes de dichas multiplicidades y permite estudiar el Problema de la Convergencia de

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(x)^{1/n}, \quad \text{donde, } K_n(x), \text{ es un CAR}$$

como Problema General de Convergencia de las multiplicidades asintóticas.

Como será examinado en la próxima sección, el límite de $K_n(x)^{1/n}$ es un elemento de vital importancia para el estudio de ciertos aspectos topológico-geométricos, pero también ergódicos de las iteraciones.

Enunciamos el concepto de cociclo analíticamente rígido. De la definición se verá que un CAR está asociado a un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y a sus iteraciones.

Definición 94 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ holomorfo de grado $d \geq 2$. Sea $K_n : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow [1, +\infty[$ una secuencia de funciones tal que:

- K_1 es semicontinua superior (scs) con respecto a la topología de Zariski.
- Para $n, m \geq 0$ y $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$:

$$K_{n+m}(z) = K_n(z)K_m(f^n(z)).$$

- Para todo $n \geq 0$ se tiene $\min_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} K_n = 1$.

Se dice que K_n define un cociclo analíticamente rígido (CAR).

Comentario 35 Como se verá en la siguiente sección la tercera condición es típica de las multiplicidades asintóticas y puede ser levantada sin perjuicio del resultado fundamental de convergencia.

Establezcamos algunas propiedades para los cociclos analíticamente rígidos:

Proposición 37 Sea K_n un cociclo analíticamente rígido $K_n : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow [1, +\infty[$. Entonces

- Sea $Y \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ un subespacio irreducible entonces existe $Y' \subset Y$ el cual es una unión a lo más contable de subespacios complejos propios de Y tal que

$$K_1(z)|_{Y \setminus Y'} = \min\{K_1, z \in Y\}.$$

- $K_1(z)$ es acotada superiormente.
- Para todo $n \in \mathbb{N}$, $K_n(z)$ es semicontinua superior respecto a la topología de Zariski.

Demostración: Para la primera afirmación sea $\alpha = \inf\{K_1(z), z \in Y\}$ y sea $Y' = \{z \in Y, K_1(z) > \alpha\} = \bigcup_{n \geq 0} \{z \in Y, K_1 \geq \alpha + n^{-1}\}$. Y' es una unión creciente de subespacios propios

de Y . Para todo $z \in Y \setminus Y'$ se tiene debido a la propiedad de la semicontinuidad superior que $K_1(z) \leq \alpha$ lo que implica $K_1(z) = \alpha$.

Para la segunda afirmación basta considerar que la función $K_1(z)$ es semicontinua superior por lo que toma su máximo en un conjunto compacto en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

La tercera afirmación se deduce de la propiedad multiplicativa de funciones SCS. \square

Antes de enunciar el teorema más importante de esta sección introduzcamos algunas definiciones auxiliares:

Definición 95 Sea dado un cociclo $K_n(z)$ y una variedad irreducible $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. Se define:

- $K_n(V) := \min\{K_n(z), z \in V\}$ es el valor genérico de el cociclo sobre V .
- $\deg(K) := \max\{K_1(z), z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k\}$.

Para un número real α tal que $\alpha > K_1(V)$ se definen los siguientes conjuntos analíticos:

- $\mathcal{C}_V(K, \alpha) := \{z \in V, K_1(z) \geq \alpha \geq K_1(V)\}$.
- $\mathcal{C}(K, \alpha) := \mathcal{C}_{\mathbb{C}\mathbb{P}^k}(K, \alpha)$
- Para $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ definimos su macro órbita $GO(z) := \bigcup_{l, m \geq 0} f^{-l} f^m z$.

Teorema 83 (Teorema fuerte de Birkhoff) Sea $K_n(z)$ un cociclo multiplicativo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ entonces se tiene que:

- Para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$: $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n(z)^{1/n} = K_\infty(z)$ existe.
- Si $K_\infty(z) > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$, entonces existe una variedad proyectiva irreducible V y dos enteros l, m tal que $f^l(z) \in V$ y $f^m(V) = V$. Más aún $V \subset \mathcal{C}(K, \alpha)$ para todo $\alpha : K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) < \alpha < K_\infty(z)$
- Para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$: $K_\infty(z) \in [K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k), \deg(k)]$
- La función $K_\infty(z)$ es constante sobre cualquier macro órbita $GO(z)$.
- Para cualquier variedad proyectiva irreducible V , la función $K_\infty(z)$ es constante sobre V excepto los puntos que pertenecen a una unión contable de variedades proyectivas propias, y es igual a su mínimo valor en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. A este valor se le denotará por $K_\infty(V)$.

La prueba del teorema (la existencia del límite) se basa en el Teorema de Szemerédi sobre conjuntos de números enteros con densidad superior positiva (véase [Poll-Yu])¹

Definición 96 Un conjunto $\mathcal{N} \subset \mathbb{Z}$ tiene densidad positiva si:

$$\delta(\mathcal{N}) := \limsup_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \text{Card}\{-N \leq n \leq N : n \in \mathcal{N}\} > 0.$$

Enunciemos el Teorema de Szemerédi:

Teorema 84 Si \mathcal{N} tiene densidad positiva entonces para todos los $r \geq 1$ existe una progresión aritmética de longitud r en \mathcal{N} .

Comentario 36 El Teorema de Szemerédi establece que un conjunto discreto de densidad superior positiva es “suficientemente grande” como para admitir dentro de sí sucesiones aritméticas de cualquier longitud.

Enunciemos dos lemas necesarios para la prueba del Teorema Fuerte de Birkhoff.

Lema 17 Sea $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ una variedad proyectiva irreducible y además $l > \dim V$ y m enteros. Si el conjunto $\{n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in V \cap f^{-m}(V) \cap f^{-2m}(V) \dots \cap f^{-lm}(V)\}$ es infinito entonces existe una variedad compleja irreducible en V tal que

- $f^m(W) = W$,
- $\text{Orb}(z) \cap W \neq \emptyset$.

Demostración: Probemos por inducción sobre la dimensión de V . Si $\dim V = 0$ entonces sea $V = \{p\}$ y por lo tanto $z \in V \cap f^{-1}(V)$ implica que $z = p = f(p)$. Ahora en el caso general, se tiene ya sea que $V \subset f^{-1}(V)$ entonces $V = f(V)$ o bien $V_1 = V \cap f^{-m}(V)$ tiene dimensión estrictamente menor que V . Pero de $f^n(z) \in V \cap f^{-m}(V) \cap f^{-2l}(V) \dots \cap f^{-lm}(V)$ sigue que $f^{n+l}(z) \in V \cap f^{-m}(V) \cap f^{-2l}(V) \dots \cap f^{-lm+l}(V)$, por lo que podemos elegir una componente irreducible $V_2 \subset V_1$ tal que $\{n \in \mathbb{N}, f^n(z) \in V_2 \cap f^{-m}(V_2) \cap f^{-2m}(V_2) \dots \cap f^{-lm}(V_2)\}$ no es finito. Aplicando entonces la hipótesis de inducción, se tiene el resultado buscado. \square

Lema 18 Para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, si $\limsup_{n \rightarrow \infty} K_n^{1/n}(z) > \alpha > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$ existe l y $m \in \mathbb{N}^*$ y V una variedad compleja irreducible de $\mathcal{C}(K, \alpha)$ tal que $f^l(z) \in V$ y $f^m(V) = V$.

¹La prueba original de Szemerédi apareció en el marco de la Combinatoria (véase el artículo original de Szemerédi [110] además de la primera aproximación lograda por éste para determinar que existen series aritméticas de cuatro términos [109]). Furstenberg descubrió luego que el Teorema de Szemerédi junto con otros teoremas combinatorios tenían un fundamento ergódico basado en un nuevo Principio de Recurrencia que generaliza el conocido Teorema de Recurrencia de Poincaré (véase [44]) haciendo uso de ello la prueba de Furstenberg representa una simplificación considerable del teorema además de fundamentar la conexión entre la Combinatoria y los Sistemas Dinámicos. En [111] y numerosos artículos más, Terence Tao ha estudiado la conexión que existe entre los diferentes enfoques de demostración del Teorema de Szemerédi y la relación de estos desarrollos con la extensión debida a él y Ben Green del Teorema de Szemerédi a los números primos. Para más detalles véase el sitio de internet de Terence Tao: <http://www.math.ucla.edu/~tao/>. Para una exposición concisa del Teorema de Szemerédi véase el libro de Pollicot y Yuri [91]

Demostración: Primero se tiene que para $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$: $K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) \leq K_1(z) \leq \text{deg}(K)$. Fijemos $\alpha > 0$ tal que $\limsup_{n \rightarrow \infty} K_n^{1/n}(z) > \alpha > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$ y definamos el conjunto:

$$E := \{l \in \mathbb{N}, K_1(f^l(z)) \geq \alpha > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)\} = \{l \in \mathbb{N}, f^l(z) \in \mathcal{C}(K, \alpha)\}.$$

Usando la propiedad multiplicativa del CAR:

$$K_n^{1/n}(z) = \prod_{r=0}^{n-1} K_1^{1/n}(f^r(z)) \leq \alpha \prod_{r \in E \cap \{0, \dots, n-1\}} K_1^{1/n}(f^r(z)) \leq \alpha(1 + \text{deg}(K))^{\frac{|E \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n}},$$

donde $\{1, \dots, n-1\}$ es el conjunto de números naturales de 1 hasta $n-1$. Tomando el logaritmo y el límite superior se tiene:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{|E \cap \{0, \dots, n-1\}|}{n} \geq \frac{\log \bar{K}_\infty(z) - \log \alpha}{\log(1 + \text{deg}(K))} > 0,$$

donde $\bar{K}_\infty(z) > \limsup_{n \rightarrow \infty} K_n^{1/n}(z)$. Lo cual prueba que la densidad superior de E es estrictamente positiva. Del Teorema de Szemerédi para cualquier r existen n_i y l tal que: $f^{n_i}(z), f^{n_i+l}(z), \dots, f^{n_i+rl}(z) \in \mathcal{C}(K, \alpha)$, pero del lema previo aplicado a $V := \mathcal{C}(K, \alpha)$ se concluye la prueba. \square

Pasemos a la prueba del Teorema Fuerte de Birkhoff:

Demostración: (C. Favre) Probemos el enunciado de la existencia de $K_\infty(z)$. En efecto, tomemos z tal que $\bar{K}_\infty(z) > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k) = 1$ (por la definición de cociclo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$). Del lema anterior se tiene que los iterados de z tienen que estar en una variedad $\mathcal{C}(K, \alpha)$ para $\alpha > K_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^k)$ y además para l y m enteros : $f^l(z) \in V$ y $f^m(V) = V$ donde $V \subset \mathcal{C}(K, \alpha)$. Antes de continuar probemos que si $K_\infty(z_0)$ existe para un z_0 entonces para cualquier $z \in GO(z_0)$ existe $K_\infty(z)$ y además $K_\infty(z_0) = K_\infty(z)$. En efecto, para cierto N y M se tiene que $f^N(z) = f^M(z_0)$ entonces para $n > N$:

$$\begin{aligned} K_n^{1/n}(z) &= K_N^{1/n}(z) \times K_{n-N}^{1/n}(f^N(z)) = K_N^{1/n}(z) \times K_{n-N}^{1/n}(f^M(z_0)), \\ &= K_N^{1/n}(z) \times \frac{K_{n-N+M}^{1/n}(z_0)}{K_M^{1/n}(z_0)} \rightarrow K_\infty(z_0). \end{aligned}$$

Es necesario ahora usar la hipótesis de inducción sobre la dimensión k del espacio. Si $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ fuera sólo un punto la existencia del límite sería trivial. Tomemos ahora los sub-espacios $f^r(V) \subset V$ para todo $r = 1, 2, \dots, m-1$ y apliquemos la hipótesis de inducción. De ello por tanto existe el límite $K_\infty(f^r(z))$ para $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ ($k > 0$). Ahora bien, puesto que $z \in GO(f^r(z))$ se tiene que el límite $K_\infty(z)$ existe.

La demostración de la segunda proposición se sigue inmediatamente de la definición de $\mathcal{C}(K, \alpha)$. El tercer enunciado se deduce directamente una vez asumida la existencia de $K_\infty(z)$

El cuarto aserto se deduce de $K_\infty(z) = K_\infty(w)$ donde $w \in GO(z)$.

Pasemos a probar el último enunciado: Tomemos $V \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ alguna variedad irreducible. Definamos $\tilde{V}_r := \{z \in V, K_1(f^r(z)) > K_1(f^r(V))\}$, entonces de la semi-continuidad de $K_1(z)$ se tiene que \tilde{V}_r es una unión contable de sub-variedades propias de V . Tomando ahora $z \in V \cup_{r \geq 0} \tilde{V}_r$ y para cualquier $n \in \mathbb{N}$ se tiene que:

$$K_n^{1/n}(z) = K_n^{1/n}(V) = \min_{z \in V} K_n^{1/n}(z).$$

Por tanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n^{1/n}(V) := K_\infty(V)$ existe y además $K_\infty(V) = \min_{z \in V} K_\infty(z)$, y, para todo $z \in V \cup_{r \geq 0} \tilde{V}_r$ se tiene que $K_\infty(V) = K_\infty(z)$. Lo cual demuestra que el límite es constante en V menos una unión contable de sub-variedades propias de V , siendo ese valor constante el menor valor en el dominio de definición. \square

Una variante especialmente útil para el estudio de las multiplicidades asintóticas y que se deduce directamente del teorema es el siguiente:

Corolario 34 *Sea un cociclo analíticamente rígido en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ con límite $K_\infty(z)$ en $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Entonces $K_\infty(z) = K_\infty(f(z))$ y además si $K_\infty(z) > 1$ se tiene una de las dos posibilidades:*

- z es pre-periodico
- $z \in V$ donde V es una curva algebraica tal que $\min_V K_\infty = K_\infty(z)$ y V contiene una componente irreducible del conjunto analítico $\{K_1(z) > 1\}$.

5.2. Conjuntos excepcionales y su estructura geométrica

5.2.1. Multiplicidades asintóticas

Pasemos a definir aquellas magnitudes que se relacionan con el conjunto de indeterminación $\mathcal{I}(f)$ y con el conjunto crítico \mathcal{C}_f . Estas magnitudes serán de utilidad en la estimación de volúmenes.

Introduzcamos primero algunas definiciones:

Definición 97 *Sea el mapa holomorfo $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$. El grado local de f en el punto $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se define como el número de pre-ímagenes distintas de un punto genérico w cercano a $f(z)$. Las pre-ímagenes están situadas en la cercanía de z . En otros términos:*

$$\deg_z f = \max_{w \in B(f(z), \varepsilon)} \{\text{Card } f^{-1}(w) \cap B(z, \varepsilon)\}, \quad (5.1)$$

(para ε suficientemente pequeño).

Esta definición da una estratificación natural en sub-niveles $A_s = \{z, \deg_z f \geq s\}$
 $A_1 = \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, $A_2 = \mathcal{C}_f$ (el conjunto crítico), etc.

Definamos además:

$$\deg_A(f) = \min\{\deg_z(f), z \in A\} \quad (5.2)$$

si z es genérico en A : $\deg_A(f) = \deg_z(f)$.

Recordemos además el concepto de cubrimiento:

Definición 98 *Sean los espacios topológicos X, M de Hausdorff y conexos por caminos. Sea además el mapa continuo $\pi : X \rightarrow M$. El trío (X, M, π) define un cubrimiento si:*

- Para cada punto $p \in M$ existe una vecindad $U_p \subset M$ tal que $\pi^{-1}(U_p)$ es homeomorfo al producto $U_p \times E$ donde E es un conjunto discreto.

- El homeomorfismo $h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times E$ y la proyección usual $\pi' : (p, \varepsilon) \rightarrow p$ poseen la propiedad de conmutación, esto es:

$$\pi' \circ h(x) = \pi(x), \text{ para todo } x \in \pi^{-1}(U).$$

El espacio X es llamado el espacio cobertor o simplemente el cubrimiento. El espacio M es la base (en otras palabras, el espacio que es "cubierto") y el mapa π es la proyección.

Apoyándonos en esta definición, pasemos a definir el importante concepto de cubrimiento ramificado.

Definición 99 Sean los espacios topológicos X, M tal como en la definición anterior y $\pi : X \rightarrow M$ es una aplicación continua, finita ², propia y suryectiva. En estas condiciones, el trío (X, M, π) es un cubrimiento ramificado si existen conjuntos siempre densos $X_0 \subset X$ y $M_0 \subset M$ tal que $X_0 = \pi^{-1}(M_0)$ y además $(X_0, M_0, \pi|_{X_0})$ es un cubrimiento.

Si generalizamos la Definición 97 para un mapa continuo de un espacio topológico a otro, podemos entonces usar aquella definición para introducir el grado local de un cubrimiento (X, M, π) como:

$$deg_z \pi = \max_{w \in B(z, \varepsilon)} \{Card \pi^{-1}(w) \cap B(z, \varepsilon)\}.$$

En el caso del grado del cubrimiento ramificado podemos entonces aplicar la misma definición. Demos finalmente una definición equivalente de la multiplicidad de un conjunto analítico basada en el grado de un cubrimiento ramificado:

Definición 100 Sea $V \in \mathbb{C}^k$ un conjunto analítico ($dim(V) = p$). El número $e(V, z)$ es el grado del cubrimiento ramificado inducido por la proyección de una vecindad de $z \in V$ sobre un polidisco lineal genérico arbitrariamente pequeño de dimensión p que pasa por z .

Grado topológico asintótico Sea V un conjunto analítico en \mathbb{C}^k de dimensión p y sea $z \in V$. Definamos el grado topológico local $e(z, f)$ de una función holomorfa f en el punto $z \in \mathbb{C}^k$.

Definición 101 Sea un germen de funciones \mathbf{f} con representante $f : \mathbb{C}P^k \rightarrow \mathbb{C}$. El número $e(z, f)$ es el grado topológico local del germen en el punto z .

Hay que recordar que el grado local del germen de funciones en el punto $z \in \mathbb{C}^k$ se define como el número de pre-imágenes $f^{-1}(q)$ donde f es un representante del germen \mathbf{f} y $q \in U(z, \varepsilon)$ para $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeño. Se puede comprobar que el concepto de grado local del germen está bien definido, es decir que para cualquier $q \in U(z, \varepsilon)$, $Card\{f^{-1}(q)\} = constante$.

En efecto, usando una transformación de coordenadas estudiemos el problema del grado local del germen alrededor del cero. Sea $Card\{f^{-1}(0)\} = r > 0$ y un punto $q \in U(0, \varepsilon)$ tal que $Card\{f^{-1}(q)\} \neq r$ usando el Teorema de Preparación de Weierstrass para $z^0 \in \{f^{-1}(0)\}$ y tomemos un \tilde{z}_k tal que $f'(z^0, \tilde{z}_k) \neq 0$ se tiene para $z \in U(0, \varepsilon)$:

$$f(z) = \{(z_k - \tilde{z}_k)^r + c_1(z)(z_k - \tilde{z}_k)^{r-1} + \dots + c_r(z)\} \varphi(z), \quad (5.3)$$

donde $c_i(z^0) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, r$ y en general $'z = (z_1, \dots, z_{k-1})$.

Consideremos que $w \in f^{-1}(q)$ y de la continuidad, tomemos ε suficientemente pequeño tal que

²Un mapa finito se refiere a un mapa en el cual la imagen inversa de un punto es un conjunto finito.

$w \in U(0, \epsilon)$; tomemos además una conveniente transformación de coordenadas tal que $'w = ' z^0$. Entonces la expresión proveniente del Teorema de Preparación queda como:

$$f(w) = (w_k - \bar{z}_k)^r \varphi(w). \quad (5.4)$$

Esta última expresión contradice el hecho que $Card\{f^{-1}(q)\} \neq r$.

Comentario 37 La definición anterior dada para el germen de funciones puede ser extendida directamente para el caso de mapas holomorfos. De aquí en adelante usaremos indistintamente la notación $e(z, f)$ para referirnos al grado topológico ya sea de una función o un mapa.

Comentario 38 Si para un mapa racional $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ de grado d (en particular una función holomorfa) se define el grado topológico (global) como d^2 se tiene que $e(z, f) \leq d^2$ es decir $e(z, f) : z \in \mathbb{C}^n \mapsto \{1, 2, \dots, d^2\}$. Además $e(z, f) > 1$ sí y solo sí $z \in C_f$

Comentario 39 Se puede probar que la función $e(z, f)$ actúa multiplicativamente bajo una iteración. Esto es:

$$e(z, f^n \circ f^m) = e(z, f^n)e(f^n(z), f^m). \quad (5.5)$$

En efecto, analicemos el conjunto $(f^n \circ f^m)^{-1}(q)$ donde $q \in U(f^n \circ f^m(z), \epsilon)$, $(f^n \circ f^m)^{-1}(q) = f^{-m} \circ f^{-n}(q)$.

El número de elementos de $\{f^{-n}(q)\}$ esta dado por definición como $e(z, f^n)$ para cada $p \in \{f^{-1}(q)\}$ el número de preímagenes en $f^{-m}(p)$ es igual a $e(f^n(z), f^m)$ por lo que el número total de preímagenes es $e(z, f^n)e(f^n(z), f^m)$. Se puede establecer una relación entre la multiplicidad de un conjunto analítico y el grado topológico local:

Proposición 38 Para f holomorfa en \mathbb{C}^k existe un conjunto analítico $V \subset B \times B$, donde B es una bola en \mathbb{C}^k , $V = \{(z, w) \subset B \times B : F(z, w) = 0\}$ y además $F(z, w) = f(z) - f(w)$, tal que:

$$e(V, (z, z)) = e(z, f). \quad (5.6)$$

Demostración: Tomemos el polidisco que pasa por el punto $(0, 0) \in V$. Entonces de acuerdo a la definición de $V = \{(z, w) / f(z) - f(w) = 0\}$ el cubrimiento ramificado que se induce tiene grado equivalente a $Card\{f(z) = 0\}$ lo cual es suficiente para establecer el resultado. \square

Probemos ahora una relación entre $e(z, f)$ y el número de Lelong de cierta corriente:

Teorema 85 Sea $f : \mathbb{C}P^2 \rightarrow \mathbb{C}P^2$ holomorfa de grado p entonces:

$$e(z, f) = \nu_{f \circ \delta_z} \quad (5.7)$$

$$\text{donde } \delta_z = dd_w^c \log |w - z| \wedge dd_w^c \log |w - z|. \quad (5.8)$$

Demostración: Es suficiente probar el teorema para $z = 0$. De la propiedad que establece que la multiplicidad de un conjunto analítico es igual al número de Lelong de dicho conjunto en el punto dado (véase Sub-sección [3.3.3]) se tiene que el pull-back de $dd_w^c \log |w - z|^2$ equivale a $e(V, (z, z))$. Aplicando entonces la Proposición 38 se tiene el resultado. \square

En lo que sigue estudiaremos el comportamiento de $\lim_{n \rightarrow \infty} e(z, f^n)^{1/n}$ al que denominaremos Grado Topológico Asíntotico. La existencia de dicho límite se deducirá del Teorema Fuerte de Birkhoff. Para ello primero probemos el siguiente:

Teorema 86 *La función $e(z, f)$ es SCS en la topología de Zariski.*

Demostración: Asumamos que f está definido en la bola $B \subset \mathbb{C}^n$ con valores en B esto es admisible pues el análisis es local. De acuerdo a la Proposición 38:

$$e(V, (z, z)) = e(z, f).$$

De allí también, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$ el conjunto $\{z \in V, e(V, z) \geq n\}$ es analítico (veáse [14],[118]). Entonces usando la inyección $I : B \longrightarrow B \times B$, donde $I(z) = (z, z)$ es en particular propia, se tiene:

$$\{z \in B, e(V, (z, z)) \geq n\} = I^{-1}\{z \in V, e(V, z) \geq n\}. \quad (5.9)$$

Con lo que concluye la prueba. □

El teorema anterior establece en particular que $e(z, f^n)$ es un cociclo multiplicativo $k_n(z)$ $e(z, f^n)$. Aplicando entonces el Teorema Fuerte de Birkhoff se tiene directamente:

Teorema 87 *Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ un mapa holomorfo de grado $d \geq 2$. Para $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ la secuencia $e(z, f^n)^{1/n}$ converge a un número real $e_\infty(z) \geq 1$ donde $e_\infty \circ f = e_\infty$. Además si $e_\infty(z) > 1$ una de las dos posibilidades se cumple:*

1. $f^N(z)$ es un punto crítico periódico para algún $N \geq 0$.
2. Existe una curva fija V tal que $f^N(z) \in V$ para algún $N \geq 0$ y $\min_V e_\infty = e_\infty(z)$

Pasemos a probar algunas propiedades de la función $e_\infty(z)$:

Teorema 88 *Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (mapa holomorfo de grado $d \geq 2$), entonces se cumple que:*

- i.) $\{z : e(z, f) > d\}$ es un conjunto finito con cardinalidad acotada en terminos de d .
- ii. $1 \leq e_\infty(z) \leq d^2$ para todo $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y el conjunto $\{z : e_\infty(z) = d^2\}$ es finito, totalmente invariante y contenido en $\{e(z, f) = d^2\}$.

Demostración: i) De $\{e(z, f) > 1\} = C_f$ se cumple $\{e(z, f) > d\} \subset C_f$. Estudiemos el conjunto C_f con la ayuda de la corriente $[C_f]$. Como se sabe C_f es un conjunto analítico y $[C_f]$ es una corriente positiva. De los resultados de la Sub-sección [1.3.5], se tiene que f puede escribirse en coordenadas locales como $f(z, w) = (z, w^e)$. Entonces:

$$f_*[C_f] = e[C_f], \quad (5.10)$$

$$f^*[fC_f] \geq e[C_f], \quad (5.11)$$

donde fC_f es la imagen de C_f bajo f . Esta imagen es un subconjunto analítico propio de C_f , en efecto: si $f(z) \in C_f$ donde $z \in C_f$, entonces $|Jf^2| = |Jf|^2 = 0$ lo cual implica lo afirmado (para $d \geq 2$ el mapa f no es inyectivo por lo que fC_f es necesariamente propio). Además:

$$\deg(f_*[C_f]) = d \cdot \deg[C_f], \quad (5.12)$$

$$\deg(f^*[C_f]) = d \cdot \deg[C_f]. \quad (5.13)$$

Las relaciones (5.12 y (5.13) se cumplen si z está en el complemento de $C_{f \text{ sing}}$.

Del mismo modo las relaciones (5.10) y (5.11 exigen que z no pertenezca a $Df|_{C_f=0} \cap fC_{f \text{ sing}}$. Ahora bien, los conjuntos $C_{f \text{ sing}}$, $fC_{f \text{ sing}}$ y $\{Df|_{C_f=0}\}$ son finitos por lo que $z \in C_f$ fuera del conjunto finito $C_{f \text{ sing}} \cup fC_{f \text{ sing}} \cup \{Df|_{C_f=0}\}$ se tiene:

$$f^* f_*[C_f] = f^* e[fC_f] = e f^*[fC_f] \geq e^2[C_f],$$

y usando la monotonicidad de la función grado para corrientes respecto al pull-back y las expresiones (5.12 y (5.13):

$$\begin{aligned} \deg[f^* f_*[C_f]] &\geq \deg[e^2[C_f]] \\ d \cdot \deg[f_*[C_f]] &\geq e^2 \cdot \deg[C_f] \\ d^2 \cdot \deg[C_f] &\geq e^2 \cdot \deg[C_f]. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Finalmente $d \geq e$, de donde $\{p : d < e(p, f)\}$ es finito.

ii) Usando $1 \leq e(p, f) \leq d^2$ luego $1 \leq e(p, f^n) \leq d^{2n}$ ya que el grado topológico de f^n es d^{2n} . de ahí se obtiene directamente:

$$1 \leq e_\infty(p) \leq d^2. \quad (5.15)$$

Probemos la invariancia de $\{p : e_\infty(p) = d^2\}$, sea $p = f(q)$ (o bien $q \in f^{-1}(p) \subset \{e_\infty = d^2\}$), luego $e_\infty(f(q)) = d^2$ de donde $e_\infty(q) = d^2$ es decir $q \in \{e_\infty = d^2\}$.

Probemos ahora que

$$\{e_\infty = d^2\} \subset \{e = d^2\} : \quad (5.16)$$

$p \in \{e_\infty = d^2\}$ significa que a partir de un N , $f^{n_0}(p) \in \{e = d^2\}$ para $n_0 > N$. Por el Teorema Fuerte de Birkhoff. existen dos posibilidades para p . La segunda se descarta debido a la finitud de $\{e = d^2\}$ (de lo probado en la parte (i) de esta prueba) por tanto p es un punto pre-periódico. De ahí se desprende que para $m \in \mathbb{N}$:

$$\text{Orb}[f^m(p)] \subset \{e = d^2\},$$

donde $q = f^m(p)$ tiene período mínimo $n \in \mathbb{N}$: $f^n(q) = q$ y además de:

$$e(f^i(q), f) = d^2 \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5.17)$$

Tenemos además usando la propiedad del cociclo submultiplicativo:

$$\begin{aligned} e(q, f^n) &= e(q, f)e(f(q), f^{n-1}) = e(q, f)e(f(q), f)e(f^2(q), f^{n-2}) \\ &= \dots = e(q, f)e(f(q), f) \dots e(f^{n-1}(q), f) \\ &= (d^2)^n = d^{2n}, \end{aligned}$$

de donde $e(q, f^n)^{1/n} = d^2$ y entonces $e_\infty(q) = d^2$. Asimismo $e_\infty(f^i(q)) = d^2$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ (lo cual también puede deducirse directamente de $e_\infty \circ f = e_\infty$). \square

Multiplicidad asintótica del jacobiano En este punto estudiaremos el orden en el cual se anula el jacobiano Jf^n ($n \in \mathbb{N}$) del mapa $f^n : U \rightarrow V$ donde $U, V \subset \mathbb{C}^2$ son entornos de una carta correspondiente a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$.

Definición 102 El orden del anulamiento de Jf^n en el punto z se denota por $\mu(z, Jf^n)$ y se define como:

$$\mu(z, Jf^n) = \nu_{dd^c \log |Jf^n|}(z) \quad (n \in \mathbb{N}). \quad (5.18)$$

Esta definición se justifica por cuanto el número de Lelong de $dd^c \log |Jf^n|$ “mide” el orden en que la función $|Jf^n| : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se anula. Por otro lado, de las propiedades del número de Lelong se sabe que esta definición es independiente de la carta que se elija.

Proposición 39 $\mu(p, Jf) \geq 1$ si y sólo si $z \in C_f$.

Demostración: En efecto, si $z \in C_f$ entonces eso equivale a que $|Jf(z)| = 0$ lo cual a su vez equivale a $\nu_{dd^c \log |Jf|}(z) \geq 1$. El enunciado recíproco se desprende directamente de la definición del número de Lelong. \square

Definición 103 La multiplicidad del jacobiano de f en el punto z se define como el límite: $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(p, Jf^n)^{1/n}$ y se denota como $\mu_\infty(z)$ siempre que esté claro que la multiplicidad es del jacobiano de f , de lo contrario se puede usar la notación $\mu_\infty(z, f)$.

Para establecer que la multiplicidad está bien definida debemos probar que aquel límite existe para cuyo efecto basta verificar que se cumplen las condiciones del Teorema Fuerte de Birkhoff para la función $\mu_n(z) = \mu(z, Jf^n)$:

$\mu_n : C_f \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow [1, +\infty]$ donde $\min_{\mathbb{C}\mathbb{P}^2} \mu_n = 1$.

Por otro lado, del Teorema de Siu $\{z : \nu_{dd^c |Jf^n|}(z) > k\}$ es un conjunto analítico o equivalentemente en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ dicho conjunto es un cerrado Zariski. Esto prueba el teorema:

Teorema 89 La función $\mu_n(z)$ es SCS en la topología de Zariski.

Falta probar que $\mu_n(z)$ es un cociclo multiplicativo:

$$\mu_{n+m}(z) = \mu(p, |Jf^{n+m}|) = \nu_{dd^c \log |Jf^{n+m}|}(z). \quad (5.19)$$

Usando $|Jf^{n+m}| = |Jf^n \circ f^m| |Jf^m|$ en la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned} \mu(p, Jf^{n+m}) &= \nu_{dd^c \log |Jf^n \circ f^m|}(z) + \nu_{dd^c \log |Jf^m|}(z) \\ &= \mu(z, Jf^n \circ f^m) + \mu(z, Jf^m). \end{aligned}$$

Esto establece que la secuencia $\{\mu(z, Jf^n)\}_{n \geq 0}$ no es un cociclo multiplicativo. Para superar esta dificultad construyamos una nueva secuencia: $\tilde{\mu}_n = a\mu_n + b$ ($a, b > 0$) de tal modo que se cumplan las condiciones que garantizan la existencia de $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_n^{1/n}$ (esto porque μ_∞ existe si y sólo si $\tilde{\mu}_\infty$ existe y además $\tilde{\mu}_\infty = \mu_\infty$). De la relación entre $\tilde{\mu}_n$ y μ_n se desprende inmediatamente que $\tilde{\mu}_n$ es también SCS en la topología de Zariski. Para construir tal secuencia probemos la siguiente:

Proposición 40 La siguiente desigualdad se satisface, $z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2; n, k \geq 0$

$$\mu(z, Jf^m \circ f^n) \leq (3 + 2\mu(z, Jf^n))\mu(f^n, Jf^n). \quad (5.20)$$

Demostración: Usando el Teorema de Favre-Kiselman (véase [27],[64])³ que establece una desigualdad de los números de Lelong de una corriente cerrada positiva T y su pull-back:

$$\mu(T, 0) \leq \mu(f^*T, 0) \leq C\mu(T, 0), \quad (5.21)$$

donde C para dimensión 2 es:

$$C = 3 + 2\mu(0, Jf).$$

Hay que recordar que en el teorema, f se toma como germen holomorfo $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ donde se han tomado coordenadas locales de tal modo que $p = f(p) = 0$.

Tomemos el lado derecho de la desigualdad (20) y reemplacemos f^n por f , $T = dd^c \log |Jf^n|$:

$$\mu(0, Jf^m \circ f^n) \leq (3 + 2\mu(0, Jf^n))\mu(0, Jf^m).$$

Volviendo a las coordenadas iniciales se obtiene el resultado □

De la Proposición 40 se tiene:

$$\begin{aligned} 3 + 2\mu(p, Jf^{m+n}) &= 3 + 2\mu(p, Jf^m \circ f^n) + 2\mu(p, Jf^n) \\ &\leq 3 + 2\mu(p, Jf^n) + 2(3 + 2\mu(p, Jf^n))\mu(f^n(p), Jf^m) \\ &\leq 3(3 + 2\mu(p, Jf^n) + 2(3 + 2\mu(p, Jf^n)))\mu(f^n(p), Jf^m) \\ &= [3 + 2\mu(f^n(p), Jf^m)][3 + 2\mu(p, Jf^n)]. \end{aligned}$$

Entonces $\tilde{\mu}_n = 3 + 2\mu_n$ es un cociclo multiplicativo. Por el Teorema Fuerte de Birkhoff aplicado a $\tilde{\mu}$ se tiene:

Teorema 90 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (mapa de grado $d \geq 2$) la secuencia $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}(p, Jf^n)^{1/n}$ converge a $\mu_\infty(p) \geq 1$ y además $\mu_\infty \circ f = \mu_\infty$. si $\mu_\infty(p) > 1$ se tiene una de las siguientes posibilidades:

1. p es un punto crítico (totalmente invariante) pre-periódico
2. Existe una curva V tal que para algún n , $f^n(p) \in V$ y $\min_V \mu_\infty = \mu_\infty(p)$.

Comentario 40 Como se sabe, para $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ el grado del conjunto crítico es $3(d-1)$ por lo que se infiere que la multiplicidad de Jf en un punto p es menor que $3(d-1)$.

En general:

$$1 \leq \mu(p, Jf^n) \leq 3(d^n - 1) \quad p \in C_f, \quad (5.22)$$

o bien:

$$0 \leq \mu(p, Jf^n) \leq 3(d^n - 1) \quad p \in \mathcal{P}^2. \quad (5.23)$$

Usando estas expresiones:

$$\begin{aligned} 1 &\leq \mu(p, Jf^n)^{1/n} \leq [3(d^n - 1)]^{1/n} \\ 1 &\leq \mu_\infty(p) \leq d. \end{aligned} \quad (5.24)$$

³El teorema en cuestión fue probado independientemente por Favre y Kiselman usando métodos distintos pero en cierto modo complementarios. La exposición de esos métodos rebasaría el alcance de este trabajo por lo que remitimos al lector a las fuentes indicadas.

Diámetro asintótico

Definición 104 Sea el mapa $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (holomorfo de grado $d \geq 2$). El orden del primer término no nulo en el desarrollo de Taylor de la función f en el punto z se denomina diámetro local $c(p, f)$.

El nombre de diámetro local proviene del hecho que si fijamos coordenadas locales tal que $z = f(z) = 0$ entonces $\zeta(z, f)$ es el entero positivo más grande tal que:

$$|f(w)| \leq A|w|^{c(0,f)} \text{ cuando } w \rightarrow 0. \quad (5.25)$$

Para A constante positiva.

Proposición 41 Para el mapa holomorfo $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ se tiene:

$$c(z, f) = \nu_{dd^c \log |f|}(z).$$

Demostración: Basta usar la propiedad del número de Lelong para el conjunto analítico $f(z) = 0$. \square

Usando la proposición anterior se tiene:

$$c(z, f^{m+n}) = \nu_{dd^c dd^c \log |f^{m+n}|}(z),$$

luego usando la equivalencia del número de Lelong en un conjunto analítico:

$$c(z, f^{m+n}) = \nu_{dd^c \log |f^{m+n}|}(z) = \nu_{dd^c \log |f^n|}(z) \nu_{dd^c \log |f^m|}(f^n(p)),$$

o bien

$$c(p, f^{m+n}) = c(p, f^n) c(f^n(p), f^m). \quad (5.26)$$

Esto significa que $c(p, f)$ es un cociclo multiplicativo.

Usando nuevamente el Teorema Fuerte de Birkhoff se tiene:

Teorema 91 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (holomorfa de grado $d \geq 2$). La secuencia $c_n = c(p, f^n)^{1/n}$ converge a un número real $c_\infty(p) \geq 1$. Además $c_\infty \circ f = c_\infty$ y si $c_\infty(p) > 1$ una de las siguientes posibilidades se cumple.

1. p es un punto crítico pre-periódico
2. existe una curva fija V tal que $f^n(p) \in V$ ($n \geq 0$) y $\min_V c_\infty = c_\infty(p)$.

Probemos una propiedad sencilla para $c(p, f)$:

Proposición 42 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (holomorfa de grado $d \geq 2$) luego

$$1 \leq c(p, f) \leq d \text{ para todo } p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2.$$

Se tiene:

$$1 \leq c_\infty(p) \leq d.$$

Aquí tal como en el caso de $e_\infty(p, f)$, $\mu_\infty(p, f)$ hemos simplificado la notación de $c_\infty(p, f)$ escribiendo simplemente $c_\infty(p)$.

Más aún, $c(p, f) = d$ si y sólo si p es homogéneo.

Demostración: Fijemos $p = f(p) = 0$ en \mathbb{C}^2 , entonces en coordenadas locales de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$: $f = [P, Q, R] = [\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}, 1]$, donde $R(0) = 1, P(0) = Q(0) = 0$ se tiene el mapa f en \mathbb{C}^2 : $f(\zeta) = (\frac{P(\zeta)}{R(\zeta)}, \frac{Q(\zeta)}{R(\zeta)})$ puesto que P, Q, R son a lo más de grado d entonces $1 \leq c(p, f) \leq d$. (de ahí se deduce como se hizo para μ_∞) que:

$$1 \leq c_\infty(p) \leq d.$$

Por otro lado la igualdad $c(p, f) = d$ es equivalente a que las coordenadas de f en \mathbb{C}^2 son polinomios homogéneos de grado d , pero esto implica a su vez que el punto p es homogéneo. \square

Desigualdades entre multiplicidades

Teorema 92 *Sea el mapa $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (holomorfa de grado $d \geq 2$). Para cualquier $p \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ se tiene:*

$$2[c(p, f) - 1] \leq \mu(p, Jf) \leq 2[e(p, f) - 1], \quad c^2(p, f) \leq e(p, f).$$

Además, de estas desigualdades se deduce inmediatamente (tomando el límite) que:

$$c_\infty(p) \leq \mu_\infty(p) \leq e_\infty(p) \leq d^2, \tag{5.27}$$

$$c_\infty \leq \sqrt{e_\infty(p)} \leq d. \tag{5.28}$$

Demostración: Probemos la primera expresión. Por simplicidad en la notación durante esta demostración:

$$\mu(p, f) = \mu \quad c(p, f) = c, \quad e(p, f) = e.$$

Por ser un resultado local tomemos coordenadas tal que $f(p) = p = 0, f = (f_1, f_2)$ entonces $f_i(z) = f_i^c(z) + O(|z|^{c+1})$ ($i = 1, 2$) donde $f_i^c(z)$ es la parte homogénea de grado c . El jacobiano $\frac{\partial(f_1^c, f_2^c)}{\partial(z_1, z_2)}$ tiene entonces una parte principal Jf^c de grado $2(c-1)$ (o bien idénticamente nula) de donde:

$$Jf(z) = Jf^c(z) + O(z^{2(c-1)+1}).$$

Usando la definición de $\mu(p, Jf)$ en el punto $z = p$

$$\mu(p, Jf) \geq 2[c(p, f) - 1].$$

Para probar la otra parte de la desigualdad; tenemos nuevamente coordenadas locales $p = f(p) = 0$.

Usamos el hecho que en un entorno del cero $|f(z)| > B|z|^e$ para alguna constante B . Para establecer esta desigualdad notemos que la función $g(z) = \frac{|z|^e}{|f(z)|}$ es holomorfa en la bola $U(0, \epsilon)$ excepto $z = 0$. Usando una consecuencia del Teorema de División de Weierstrass (véase [100]) se tiene que $|f(z)| = |z||h(z)|$ donde h es holomorfa en $U(0, \epsilon)$, de ahí $g(z) = \frac{|z|^{e-1}}{|h(z)|}$ y $|h(z)|$ se anula en $e-1$ puntos. Si $h(0) = 0$ y repetimos el mismo procedimiento se tiene por tanto que $g(z)$ es acotada en $z = 0$ (en particular $g(0) = 0$). De ahí, por el Teorema de Extensión de Riemann (véase por ejemplo [100, 119]) $g(z)$ es holomorfa en $\Delta(0, \epsilon)$. Tomemos la bola cerrada $\bar{\Delta}(0, \epsilon') \subset \delta(0, \epsilon)$. En esta bola $g(z)$ alcanza su máximo y mínimo valor. Sea $1/c \neq 0$ el máximo valor, entonces $|f(z)| > c|z|^e$ en $\Delta(0, \epsilon')$ (véase también [38]).

Por otro lado, usando la desigualdad $|Jf(z)| \leq D|z|^\mu$ en un entorno de 0 y para una constante

$D > 0$ (lo cual se deduce por un procedimiento similar al anterior), tomemos una bola $B(r)$ que satisfaga dicha condición lo mismo que:

$$\text{Vol } f[B(r)] \geq \text{Vol } B(cr^e) = \frac{\pi^2 c^4}{16} r^{4e} = C' r^{4e}, \quad (5.29)$$

y además se tiene al integrar:

$$\begin{aligned} \text{Vol } f[B(r)] &= \int_{B(r)} |Jf|^2 dV \leq \int_{B(r)} D|z|^{2\mu} dV \\ &\leq D r^{2\mu} \int_{B(r)} dV = \frac{\pi^2}{16} D r^{2\mu+4} = D' r^{2\mu+4}, \end{aligned}$$

donde $B', D' > 0$ son nuevas constantes. De las últimas dos expresiones

$$D' r^{2\mu+4} \geq B' r^{4e},$$

o bien

$$\frac{1}{r^{4e-4-2\mu}} \geq \frac{B'}{D'} = k > 0.$$

Haciendo $r \rightarrow 0$ la desigualdad anterior se mantiene solo sí: $4e - 4 - 2\mu \geq 0$ luego $\mu \leq 2(e - 1)$. Probaremos finalmente que $c \leq \sqrt{e}$. Usando para ello la definición de c en términos de corrientes:

$$\begin{aligned} e = \nu(0, f^* \delta_0) &= \nu(0, f^* dd^c \log |z| \wedge f^* dd^c \log |z|) \\ &\geq \nu(0, f^* dd^c \log |z|)^2 = \nu(0, dd^c |f(z)|^2) = c^2. \end{aligned}$$

Con lo que concluye la prueba. \square

Corolario 35 *El conjunto $\{c_\infty = d\}$ esta incluido en $\{e_\infty = d^2\}$ es finito y totalmente invariante.*

Demostración: De $c \leq \sqrt{e}$ se tiene que $\{c_\infty = d\} \subset \{e_\infty = d^2\}$ y como $\{e_\infty = d^2\}$ es finito, idem para $\{c_\infty = d\}$. La invariancia se obtiene de $c_\infty \circ f = c_\infty$. En efecto, sea $q \in f^{-1}(\{c_\infty = d\})$ eso implica que existe $p \in \{c_\infty = d\}$ tal que $f(q) = p$. De $c_\infty(p) = d$ se tiene $c_\infty(f(q)) = c_\infty(q) = d$. \square

5.2.2. Conjuntos excepcionales

Sea un mapa $f : \mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^2$ (holomorfo de grado d). Definamos los conjuntos:

$$E_1 = \bigcup_i V_i, \quad V_i \text{ es una curva algebraica irreducible para la cual, todo punto } p \in V_i : \mu_\infty(p) = d.$$

$$E_2 = \{p / c_\infty(p) = d\}.$$

E_1 y E_2 se denominan el primer y segundo conjunto excepcional respectivamente, además $E_1 \cup E_2 = \mathcal{E}$ es el conjunto excepcional total.

De los resultados obtenidos más arriba se sabe que E_2 es finito y totalmente invariante. En esta sección estudiaremos otras propiedades geométricas y dinámicas de estos conjuntos.

Podemos interpretar intuitivamente la definición de los conjuntos excepcionales. Para $p \in E_1$ la

bola con centro en p decrece más rápidamente (bajo iteraciones de f^n) que en cualquier otro punto fuera de E_1 . Para $p \in E_2$ el diámetro en una bola con centro en p decrece más rápidamente (bajo iteraciones de f^n) que en otra parte (y por ende también el volumen) fuera de E_2 . De estas consideraciones es posible intuir que \mathcal{E} es el conjunto de todos los puntos en cuyos entornos el volumen y/o el diámetro de las bolas decrece más rápidamente que en otros puntos. Este hecho será de utilidad para la estimación de volúmenes, dicha estimación se hará dentro y fuera del conjunto excepcional.

El primer conjunto excepcional E_1 . De los resultados anteriores se sabe que $c_\infty \leq \mu_\infty \leq d$ en particular será de interés estudiar el conjunto $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$. Intuitivamente dado $p \in \{c_\infty < \mu_\infty = d\}$, un entorno $U(p)$ se contrae volumétricamente más rápido que $diam U(p)$ (bajo iteraciones de f^n).

Esto implica que $f^n U(p)$ tiende a un conjunto unidimensional. Esto en términos dinámicos significa que $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ es "muy recurrente".

Probemos el siguiente teorema auxiliar de interés por sí mismo.

Teorema 93 Sea $f : (\mathbb{C}^2, U) \circlearrowleft$ un germen holomorfo. Sean V_1, V_2, \dots, V_k las componentes irreducibles de \mathcal{C}_f . Si $c_\infty(0) < \mu_\infty(0)$ luego existen $a_1, \dots, a_k \geq 0$ tal que :

$$f^*(\sum_i a_i [V_i]) \leq \mu_\infty(0) \sum_i a_i [V_i]. \quad (5.30)$$

Demostración: El operador f^* está definido sobre el espacio lineal generado por las corrientes $[V_i]$, donde $[V_i]$ es la corriente correspondiente al conjunto analítico irreducible correspondiente a los factores irreducibles ϕ_i de $\phi = Jf$ los cuales son además mapas holomorfos y:

$$\phi_i \circ f = \tilde{\phi}_i * \prod_{j=1}^k \phi_j^{t_{ij}}.$$

Para ciertos enteros t_{ij} y ciertos mapas holomorfos $\tilde{\phi}_i$ teniendo que $\tilde{\phi}_i^{-1}(0) \cap \mathcal{C}_f = \emptyset$. de la desigualdad de Lojasiewicz (véase [75]), existen constantes $C, \alpha \geq 0$ tal que:

$$|\tilde{\phi}_i(\zeta)| + |\phi(\zeta)| \geq C|\zeta|^\alpha$$

en una vecindad del origen. Tomando las multiplicidades en el punto 0: μ_n y c_n , para un n fijo se tiene que: $f^n = f_{c_n} + O(|\zeta|^{c_n+1})$ y $\phi \circ f^n = \phi_{\mu_n} + O(|\zeta|^{\mu_n+1})$ donde f_{c_n} es un polinomio homogéneo de grado c_n .

De las propiedades de las multiplicidades asintóticas se tiene que existen c, μ que cumplen $c_\infty < c < \mu < \mu_\infty$ tal que

$$c_n \leq Ac^n, \quad \mu_n \geq B\mu^n.$$

Para $n \geq 0$ y para las constantes $A, B > 0$. De aquí se tiene entonces que para $\zeta \ll 1$ (definiendo $|\zeta_n| = |f^n(\zeta)|$):

$$|\zeta_n| \geq C_n |\zeta|^{Ac^n}.$$

Además para constantes $\tau_n, n \in \mathbb{N}$:

$$|\phi \circ f^n(\zeta)| = |\phi(\zeta_n)| \leq \tau_n |\zeta|^{B\mu^n}.$$

Sea ahora M la matriz de entradas t_{ij} y sea ρ el radio espectral de M , sea además M^n denotada como $t_{ij}^{(n)}$. Se sabe entonces que para un cierto K se tiene que $t_{ij}^{(n)}/\rho^n \leq K$. Además para

n suficientemente grande tal que $Ac^n \leq B\mu^n$ se tiene la siguiente estimación para $|\tilde{\phi}_j(\zeta_n)|$:
 $|\tilde{\phi}_j(\zeta_n)| \geq C|\zeta_n|^\alpha - |\phi(\zeta_n)| \geq CC_n^\alpha |\zeta|^{Ac^n} \geq C'_n |\zeta|^{Ac^n}$ Para ciertas constantes $C'_n \geq 0$.
 De ahí tenemos:

$$\begin{pmatrix} |\phi_1| \\ \vdots \\ |\phi_k| \end{pmatrix} (\zeta_{n+1}) = \begin{pmatrix} |\tilde{\phi}_1| \prod_j |\phi_j|^{t_{1j}} \\ \vdots \\ |\tilde{\phi}_k| \prod_j |\phi_j|^{t_{kj}} \end{pmatrix} (\zeta_n) \geq C'_n |\zeta|^{Ac^n} \begin{pmatrix} \prod_j |\phi_j|^{t_{1j}} \\ \vdots \\ \prod_j |\phi_j|^{t_{kj}} \end{pmatrix} (\zeta_n).$$

Así mismo se tiene una expresión matricial análoga para $|\phi(\zeta)|$ Usando entonces la inducción para $1 \leq i \leq k$ se tiene las siguientes expresiones análogas para $|\phi|$ y $|\phi_i|$:

$$C''_n |\zeta|^{AK \frac{\rho^n - c^n}{\rho - c}} \leq |\phi_i(\zeta_{n+1})|,$$

$$C'''_n |\zeta|^{AK \frac{\rho^{n+1} - c^{n+1}}{\rho - c}} \leq |\phi(\zeta_{n+1})| \leq \tau_{n+1} |\zeta|^{B\mu^{n+1}}.$$

Como ζ es arbitrario y haciendo tender n al infinito se obtiene que $\rho \geq \mu$ y por tanto $\rho \geq \mu_\infty(0)$
 Para finalizar sólo hay que usar el Teorema de Perron-Frobenius que establece la existencia de un vector propio de componentes positivas (a_1, \dots, a_k) asociado a ρ por lo que se tiene finalmente que:

$$f^*(\sum_i a_i [V_i]) = \rho \sum_i a_i [V_i] \geq \mu_{\text{inf ty}}(0) \sum_i a_i [V_i].$$

□

El teorema principal de esta sección es:

Teorema 94 *Sea un mapa $f : \mathbb{C}P^2 \dashrightarrow \mathbb{C}P^2$ (holomorfa de grado $d \geq 2$), se tiene que E_1 consiste de la unión de todas las curvas totalmente invariantes (no necesariamente irreducibles) más aún E_1 es la cerradura Zariski de $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$.*

Demostración: Sea V una curva totalmente invariante. Mostraremos que $V \subset E_1$. Para ello, empecemos tomando $p \in V \setminus E(n)$ donde $E(n)$ es un conjunto finito que depende de $n \geq 1$. Tomemos en un entorno de p coordenadas locales tal que $p = (z, w)$ $f^n(p) = (z^{d^n}, w)$. De tal forma local de $f^n(p)$ se deduce que $\mu(p, Jf^n) = d^n - 1$ en $V \setminus E(n)$. Como $\mu(p, Jf^n)$ es SCS en la topología de Zariski se tiene que $\mu(p, Jf^n) \geq d^n - 1$ se verifica en cualquier entorno $p \in V \setminus E(n)$ de donde para $p \in V$: $\mu_p = d$ es decir $p \in E_1$.

Recíprocamente probemos que E_1 sólo puede contener curvas totalmente invariantes. Para ello tomemos una componente irreducible $V \subset E_1$ y probemos que V pertenece a una curva totalmente invariante (en particular V misma). Procedamos de la siguiente forma:

Supongamos por un instante que se prueba la siguiente inclusión: $\{c_\infty < \mu_\infty = d\} \subset E_1$ (esta inclusión no es trivial pues $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ podría contener puntos aislados fuera de curvas invariantes) de ello se deduciría que $E_1 - \{c_\infty < \mu_\infty = d\} \subset \{c_\infty < \mu_\infty = d\}^c = \{c_\infty = d\}$. pero $\{c_\infty = d\}$ es finito lo que implica que la clausura de $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ es E_1 . De este modo $V \subset \overline{\{c_\infty < \mu_\infty = d\}}$ es decir V está incluida en una curva algebraica la cual por la discusión previa es invariante (si $f(q) = p \in E_1 - \{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ luego $c_\infty(f(q)) < \mu_\infty(f(q)) = d$). Tomando cerraduras se obtiene lo afirmado en el teorema.

La prueba se reduce a establecer la inclusión:

$$\{c_\infty < \mu_\infty = d\} \subset E_1.$$

Sea $p \in \{c_\infty < \mu_\infty = d\}$, entonces por el Teorema Ergódico Fuerte, p tiene dos posibilidades. Analicemos la primera:

i) p es pre-periódico, luego para un $m > 0$ $m \in \mathbb{N}$: $f^m(p) = q \in C_f$ y $q = f^N(q)$ (N es el tamaño de la órbita de q). Basta mostrar que $p \in \{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ pertenece a alguna curva invariante pues por lo probado en la primera parte del teorema $p \in E_1$. Para esto consideremos la unión W de las componentes críticas irreducibles que pasan por p (la cual es una unión finita por cuanto el número de componentes irreducibles de un conjunto analítico es finito (véase [14])). Supongamos que W es invariante bajo f^N luego la curva $W^1 = W \cup fW \dots \cup f^{N-1}W$ es totalmente invariante respecto a f y $q = f^m(p) \in W'$. Entonces de $f^m(p) \in W'$ más la invariancia de W' se deduce que $p \in W'$ lo cual es el resultado buscado. Falta entonces sólo probar que W es totalmente invariante según f^N . Para ello, de acuerdo al teorema anterior es suficiente que exista $a_1, a_2, \dots, a_k \geq 0$ tal que $f^{N*} \sum_i a_i [V_i] \geq d^N \sum_i a_i [V_i]$ donde V_i son las componentes irreducibles de C_f . En efecto se verifica si $c_\infty(q, f^N) < \mu_\infty(q, f^N)$.

Comprobemos ahora que se cumple la condición $c_\infty(q) < \mu_\infty(q)$ para f^N . En efecto:

$$\begin{aligned} \mu_\infty(p, f^N) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(q, (f^N)^n)^{1/n} = [\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(q, f^{Nn})^{1/Nn}]^N \\ &= [\mu_\infty(q, f)]^N = [\mu_\infty f^m(p)]^N = [\mu_\infty(p)]^N = d^N. \end{aligned} \quad (5.31)$$

Análogamente para c_∞ :

$$c_\infty(q, f^N) = [c_\infty(p, f)]^N < [\mu_\infty(p)]^N = d^N. \quad (5.32)$$

ii) Examinemos a continuación la segunda posibilidad para p : para una curva $W \subset C_f$, $f^m(p) \in W$ donde $\min_W \mu_\infty = \mu_\infty(p) = d$. Puesto que $f^*[W] \geq l[W]$ para l máximo ($2 \leq l \leq d$). Puesto que $l = d$ entonces W es invariante por lo que, de $f^m(p) \in W$ se infiere que $p \in W$ y de ahí $p \in W$. \square

El siguiente corolario es una consecuencia inmediata de lo expuesto:

Corolario 36 E_1 es la unión de a lo más tres líneas en posición genérica.

El segundo conjunto excepcional E_2 . El conjunto E_2 resulta ser más complicado de analizar que el conjunto E_1 , el teorema siguiente es un resultado parcial útil para el trabajo posterior.

Teorema 95 El segundo conjunto excepcional E_2 está formado por los puntos:

- i) $p \in E_1^c$ con $\mu_\infty(p) = d$, o bien
- ii) de órbitas periódicas totalmente invariantes de f en E_1 .

Más aún E_2 es finito, totalmente invariante y superatractivo.

Demostración: Se ha establecido que E_2 es finito y totalmente invariante. Si consideramos ahora un punto cualquiera $p \in E_2$ se tiene de $f^n p = p$ que cualquier punto es super-atractor ya

que la expansión de f^n se anula para $c(p, f) \geq 2$.

Probemos ahora que un punto $p \in E_2$ es tal que la multiplicidad asintótica del jacobiano es igual a d . En efecto: sea primero $p \in E_1^c$; de acuerdo a ello si $p \in E_2$ se tiene que de $c_\infty(p) = d$ se deduce que $\mu_\infty(p) = d$. Recíprocamente, sea $\mu_\infty(p) = d$, luego por el Teorema 94 se tiene que si $p \in E_1^c$ entonces $p \in \{c_\infty < \mu_\infty = d\}^c$ por lo que $p \in \{c_\infty = d\} = E_2$.

A continuación sea $p \in E_1$. Debemos probar que $c_\infty(p) = d$ sí y sólo sí p es periódico y su órbita es totalmente invariante. Asumamos que $p \in E_1$ está en una de las líneas totalmente invariantes. Supongamos además que esta línea es $\{W = 0\}$ (lo cual se puede obtener por una rotación de coordenadas) y analicemos el comportamiento de las iteraciones de f en esta línea (en particular para $p \in E_1$): sea $R = f|_{W=0}$, entonces R es un mapa racional de grado d y al anularse algunos términos para $W = 0$ se tiene $c(p, f^n) \leq c(p, R^n)$. Como R depende sólo de una variable $c(p, R^n) = e(p, R^n) \leq d$, pasando al límite $c_\infty(p) = e_\infty(p, R) = d$. Este último hecho implica que p pertenece a una órbita totalmente invariante.

Recíprocamente, sea $p \in E_1$ que pertenece a una órbita periódica totalmente invariante para f . Después de reemplazar f por f^2 se puede asumir que $p = (0, 0)$ es un punto fijo para R y debido a esto podemos escribir:

$$f(z, w) = ((z^d + wQ)(1 + \eta), w^d(1 + \eta))$$

en coordenadas locales $\zeta = (z, w)$, para Q holomorfa y también $\eta(0, 0) = 0$. De ahí por tanto $c(p, f^n) \geq d^{n-1}$, y finalmente $c_\infty = d$. Con esto culmina la prueba. \square

5.2.3. Estimaciones de volumen fuera del conjunto excepcional

Sea E un boreliano en \mathbb{CP}^2 . Estudiaremos una cota inferior para $f^n(E)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $f^n(E) \cap \Omega = \emptyset$. Donde Ω es una vecindad del conjunto excepcional \mathcal{E} . Esto es siempre posible ya que basta tomar E fuera de la base de atracción de \mathcal{E} .

Teorema 96 *Sea el mapa holomorfo $f : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow$ de grado $d \geq 2$, y sea fijada una vecindad abierta $\Omega \supset \mathcal{E}$ del conjunto excepcional entonces existe una constante $\lambda < d$ y constantes $c_1, c_2 > 0$ tal que:*

$$\text{Vol } f^n(E) \geq (c_1 \text{Vol } E)^{c_2 \lambda^n}. \quad (5.33)$$

Para cualquier conjunto de Borel $E \subset \mathbb{CP}^2$ y cualquier entero $n \geq 0$ que verifique $E, \dots, f^n(E) \subset \mathbb{CP}^2 - \Omega$.

Antes de hacer la prueba estableceremos una cota inferior para $\text{Vol } f(E)$ en términos de $\text{Vol}(E)$ y una cota superior para las multiplicidades del jacobiano.

Proposición 43 *Sea $f : \mathbb{CP}^2 \dashrightarrow$ (mapa holomorfo de grado d), K compacto en \mathbb{CP}^2 , $E \subset K$ boreliano y definamos la máxima multiplicidad en dicho compacto: $\tau_f(K) = \max\{\mu(p, Jf), p \in K\}$. Luego para $\epsilon > 0$ existe una constante $c_\epsilon > 0$ tal que:*

$$\text{Vol } f(E) \geq c_\epsilon (\text{Vol } E)^{1 + \tau_f(K) + \epsilon}. \quad (5.34)$$

Demostración: Aplicando el Teorema de Kiselman-Skoda a la función $\log |Jf|$ en cada carta de un atlas de \mathbb{CP}^2 se tiene que: $\text{Vol}(K \cap \{|Jf|^2 \leq t\}) = \text{Vol}(K \cap \{|Jf| \leq \sqrt{t}\}) \leq c_\alpha e^{\alpha \sqrt{t}}$

donde $\alpha < 2[\sup_{z \in K} \nu(z, \log |Jf|)]^{-1}$, pero de $\nu(z, \log |Jf|) = \nu(z, dd^c \log |Jf|) = \mu(z, Jf)$ se tiene que $\alpha < \frac{2}{\tau_f(K)}$ o bien para un $\epsilon > 0$ adecuado $\alpha < \frac{2}{\tau_f(K) + \epsilon} < \frac{2}{\tau_f(K)}$. Escribamos $\tau_\epsilon = \tau_f(K) + \epsilon$ y por tanto tenemos finalmente:

$$\text{Vol}(K \cap \{|Jf|^2 \leq t\}) \leq c_\epsilon t^{1/\tau_\epsilon}, \quad \forall t \geq 0.$$

Teniendo en cuenta la desigualdad de Chebyshev para una función positiva f (véase [51]):

$$\int_E f \geq t(\text{Vol } E - \text{Vol} \{f \leq t\}), \quad \text{para todo } t > 0,$$

se tiene:

$$\text{Vol } f(E) \geq \frac{1}{d^2} \int_E |Jf|^2 \geq \frac{t}{d^2} [\text{Vol } E - \text{Vol} \{|Jf|^2 \leq t\}],$$

tomando $t: c_\epsilon t^{1/\tau_\epsilon} = \frac{1}{2} \text{Vol } E$ obtenemos:

$$\text{Vol } f(E) \geq \frac{t}{2d^2} \text{Vol } E \geq c'_\epsilon (\text{Vol } E)^{1+\tau_\epsilon}$$

, donde $c'_\epsilon = \frac{1}{2^{\tau_\epsilon+1} d^2 c_\epsilon^{\tau_\epsilon}}$. □

Proposición 44 *Para las condiciones del teorema anterior existe $\rho < d$ y $c > 0$ tal que:*

$$\mu(z, Jf^n) \leq c\rho^n, \quad (5.35)$$

para $z \in \mathcal{E}^c$ y cualquier entero $n \geq 0$.

Demostración: Basta analizar para $z \in \mathcal{C}_f - E_1$ (puesto que $\mu(z, Jf)$ se define en \mathcal{C}_f) esto equivale a analizar el cumplimiento de la desigualdad en las componentes irreducibles de \mathcal{C}_f que no están en E_1 (en E_2 la desigualdad se cumple ya que suponiendo lo contrario tendríamos que $\mu(z, Jf^n) > c\rho^n$ por lo que pasando al límite $\mu_\infty = d > \rho$ lo cual contradice la suposición $\rho < d$). Sean las componentes de \mathcal{C}_f : V_1, \dots, V_r y tomemos $z_i \in V_i$, entonces $\mu_\infty(z_i) < d$. Fijemos $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda < d$ tal que $\max_i \mu_\infty(z_i) < \lambda$ (en particular si $\max_i \mu_\infty(z_i) = d - 1$ entonces $d - 1 < \lambda < d$). Bajo estas condiciones es posible encontrar una constante $c > 0$ tal que

$$\mu(z_i, Jf^n) \leq c\lambda^n \quad \text{para todo } n, i \geq 0. \quad (5.36)$$

(De lo contrario $\mu_\infty(z_i) > \lambda$ lo que contradeciría las condiciones en las que se eligió λ .) Consideremos además el conjunto $\mathcal{F}_N = \{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{E}, \mu(z, Jf^N) > c\lambda^N\}$ es decir el conjunto de los z fuera del conjunto excepcional \mathcal{E} que no satisface la desigualdad en cuestión para un N que será elegido convenientemente luego. De la definición de \mathcal{F}_N se tiene que es a lo sumo finito. Examinemos el comportamiento de $\mu(z, Jf^n)$ en la órbita $\{z, fz, \dots, f^n z\}$: Para ello primero supongamos que $\{z, fz, \dots, f^n z\} \cap \mathcal{F}_N = \emptyset$. Tomando $n > N$, $n = kN + l$, $0 \leq l \leq N - 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \mu(z, Jf^n) &= \mu(z, Jf^{kN+l}) = \mu(z, Jf^l) + \mu(z, Jf^{kN} \circ f^l) \\ &\leq \mu(z, Jf^l) + [2\mu(z, Jf^l)]\mu(f^l z, Jf^{kN}). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Pero $3 + 2\mu(z, Jf^l) = \widehat{\mu}(z, Jf^l)$ es un cociclo multiplicativo, de ahí se infiere que:

$$3 + 2\mu(f^l z, Jf^{kN}) \leq \prod_{j=0}^{k-1} (3 + 2\mu(f^{l+j} z, Jf^N)) \leq (3 + 2c\lambda^N)^k.$$

Usando esta expresión y tomando $c_N = \max_{z \in \mathbb{C}\mathbb{P}^2} \mu(z, Jf^N)$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mu(z, Jf^n) &\leq c_N + (3c_N + 2)\mu(f^l z, Jf^{Nk}) \\ &\leq c_N + (3c_N + 2)(\mu(f^l z, Jf^{Nk}) + 2/3) - 2/3(3c_N + 2) \leq (c_N + 2/3)(3 + 2c\lambda^N)^k. \end{aligned}$$

Tomando ahora $\lambda < \rho < d$ y para N suficientemente grande $3 + 2c\lambda^N < \rho^N$. Sea además $n = Nk$ y $c' = 3c_N + 2$ se tiene lo buscado.

Supongamos ahora que $\{z, fz, \dots, f^n(z)\} \cap \mathcal{F}_N \neq \emptyset$. Para $n > N$ y puesto que $\mathcal{F}_N \cap \mathcal{E} = \emptyset$ se tiene que para todo $p \in \mathcal{F}_N$:

$$\mu(p, Jf^n) \leq c\lambda^n.$$

Sea ahora $f^s z \in \mathcal{F}_N$ con s el mas pequeño número posible, entonces:

$$\begin{aligned} \mu(z, Jf^n) &\leq \mu(z, Jf^s) + \mu(f^s z, Jf^{n-s})(3 + 2\mu(z, Jf^s)) \\ &\leq c\lambda^s + (3 + 2c\lambda^s)(c\lambda^{n-s}). \end{aligned}$$

Para $\lambda < \rho < d$ y n suficientemente grande se obtiene el resultado. \square

Comentario 41 Los puntos del conjunto \mathcal{F}_N para $N \in \mathbb{N}$ no influyen en el comportamiento de $\mu(\rho, Jf^n)$.

Procedamos a la demostración del teorema:

Demostración: Para ρ y c definido en la proposición anterior consideremos un N adecuado tal que para dicha constante $c > 0$:

$c\rho^N < d^N$ fijemos $\beta < d$ tal que $c\rho^N < \beta^N < d^N$. Apliquemos la cota inferior de $\text{vol}(f^N E)$ con $K = \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \Omega$:

$$\text{Vol}(f^N E) \geq c_\epsilon (\text{Vol}(E))^{1+\tau_f(K)} + \epsilon.$$

Pero de la proposición para la cota superior de $\mu(z, Jf^n)$ se tiene que $\tau_{f^N}(K) \leq c\rho^N < \lambda^N$. Luego para un c' adecuado:

$$\text{Vol}(f^N E) \geq c' (\text{vol}(E))^{\lambda^N},$$

para un conjunto de Borel $E \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \setminus \Omega$.

Del mismo modo, para $0 \leq j \leq N - 1$ podemos encontrar t, t'

$$\text{Vol}(f^j E) \geq t' (\text{Vol}(E))^t.$$

En efecto, basta tomar de cada desigualdad $\text{Vol}(f^j E) \geq k_j (\text{Vol}(E))^{\lambda^d}$, donde $t' = \min\{t_j\}$, $t = \min\{\lambda^d\}$ o bien $k = \max\{\lambda^d\}$.

Probemos ahora que existe una acotación para cualquier n . Sea $n = kN + l$, entonces: $l \leq N - 1$

$$\begin{aligned} \text{Vol}(f^n(E)) &= \text{Vol}(f^l(f^{kN} E)) \geq t' (\text{Vol}(f^{kN} E))^t \\ &\geq t' [(\text{Vol}(E))^{\lambda^{kN}} c^{\lambda^N + \lambda^{2N} + \dots + \lambda^{(k-1)N}}]^t \\ &\geq c' (\text{Vol}(E))^{t\lambda^{kN}}. \end{aligned}$$

Pero para n suficientemente grande $t\lambda^{kN} \sim c_1 \lambda^n$. De donde finalmente $\text{Vol}(f^n(E)) \geq (c'' \text{Vol}(E))^{c_1 \lambda^n}$. \square

5.2.4. Comportamiento dinámico de un número de Lelong

Para la estimación de volúmenes será necesario conocer el comportamiento de:

$$\sup_{p \in E_1} \nu_{d^{-n} f^{n*} S}(p),$$

cuando $n \rightarrow \infty$ y S es una corriente cerrada y positiva. En el caso que S tenga un comportamiento regular, es decir su potencial u es tal que $u \neq \infty$ en una componente irreducible de E_1 y además sea acotado en cualquier punto de $E_1 \cap E_2$, el número de Lelong del pull-back iterado de S tiende a cero. En efecto, si V es una componente irreducible de E_1 , esto es, como ya se ha probado, una línea compleja, entonces se puede entonces asumir que V está fijado para f y por lo tanto $R = f|_V$ induce un mapa racional de grado d . Introduzcamos una medida de probabilidad $m_S = S|_V$ a través de la curva V . Entonces se tiene usando las propiedades del pull-back de una medida de probabilidad:

$$\nu_{d^{-n} f^{n*} S}(p) \leq \nu_{d^{-n} R^{n*} m_S}(p) = d^{-n} e(p, R^n) \nu_{m_S}(p).$$

Pero de la segunda condición m_S no carga a las órbitas totalmente invariantes de R pues e lo contrario la medida sería atómica en los puntos de $E_1 \cap E_2$ lo cual contradice la hipótesis que el potencial de S es acotado en dichos puntos. Por otro lado es posible encontrar un $\lambda < d$ tal que para un $n > 0$ bastante grande y algún $p \in V \setminus E_2$ se tiene que $e(p, R^n) \leq \lambda^n$. De ahí se obtiene: $\sup_{p \in E_1} \nu_{d^{-n} f^{n*} S}(p) \leq (\lambda/d)^n \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$

Probemos este resultado ahora bajo condiciones más generales:

Teorema 97 Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ un mapa holomorfo de grado $d > 2$ y sea $S = w + dd^c \mu$ una corriente positiva en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ tal que

- S no carga ninguna componente de E_1

El número de Lelong en $p \in E_1 \cap E_2$ es tal que $\nu_S(p) = 0$.

Luego $\sup_{E_1} \nu(\rho, d^{-n} f^{n*} s) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$.

Comentario 42 La segunda condición para S es satisfecha inmediatamente por una corriente S que cumple las condiciones del teorema de Favre-Jonsson puesto que el potencial acotado en una vecindad de E_2 implica $\nu_S(p) = 0$ donde $p \in E_2$.

Demostración: Tomemos una de las rectas irreducibles V de E_1 y consideremos $R = f|_V$. Cubramos V con un número finito de cartas coordenadas U_i de tal modo que si $(z_i, w_i) \in U_i$ entonces $V \cap U_i = \{z_i = 0\}$. De acuerdo a esto, localmente en el conjunto $f^{-1}(U_i \cap U_j)$ el mapa f puede ser escrito como:

$$f(z_i, w_i) = (z_i^d, R(w_i) + O(|z_i|))(1 + O(|z_i, w_i|)).$$

Usemos ahora coordenadas locales tal que $p = f(p) = 0$ entonces la función $f(z, w)$ queda como:

$$f(z, w) = (z^d(1 + O(|z|)), w^k(1 + O(|w|) + O(|z|)(1 + O(|z, w|))),$$

con $k = e(p, R)$.

Con f expresado de este modo, podemos establecer directamente que existen constantes $c, c' > 0$ tal que para $\alpha: 0 < \alpha < 1$

$$\Delta(c r^{d/\alpha}) \times \Delta(c' r^{k/d+1}) \subset f(\Delta(r^{1/\alpha}) \times \Delta(r^{1/(d+1)})). \quad (5.38)$$

Esta última inclusión nos servirá para inferir la siguiente desigualdad para los números de Kiselman de $d^{-1}f^*s$:

$$\begin{aligned}\nu(p, d^{-1}f^*s, (\alpha, d+1)) &= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha(d+1)}{d \log r} \sup_{\Delta(r^{1/\alpha}) \times \Delta(r^{1/d+1})} \mu \circ f \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\alpha(d+1)}{d \log r} \sup_{\Delta(cr^{d/\alpha}) \times \Delta(c'r^{k/(d+1)})} \mu \\ &= k\nu(f(p), s, (\alpha/d, (d+1)/k))\end{aligned}$$

Finalmente:

$$\nu(p, d^{-1}f^*S, (\alpha, d+1)) \leq \nu(f(p), S, (\alpha k/d, d+1)). \quad (5.39)$$

Usando esta desigualdad para estimar el comportamiento asintótico del número de Lelong de $d^{-n}f^n^*S$

$$\begin{aligned}\nu(p, d^{-n}f^n^*S,) &\leq \nu(p, d^{-n}f^n^*S, (1, d+1)) \\ &\leq \nu(f^n p, S, (e(p, R^n)/d^n, d+1)) \\ &\leq \sup_{p \in V} \nu(p, S, (e(p, R^n)/d^n, d+1))\end{aligned}$$

La primera desigualdad se deduce de la desigualdad $\nu_u(p, (\alpha_1, \alpha_2)) \geq \min(\alpha_1, \alpha_2)\nu_u(p)$ (véase el corolario 26). La segunda corresponde a la desigualdad 5.39. Por otro lado, si seguimos el argumento que usamos para probar tal desigualdad, se puede fijar para un n suficientemente grande $\lambda < d$ o bien $e(p, R^n) \leq \lambda^n$. Continuando entonces se tiene que:

$$\sup_{p \in V} \nu(p, S, (e(p, R^n)/d^n, d+1)) \leq \sup_{p \in V} \nu(p, S, ((\lambda/d)^n, d+1)).$$

Usando ahora el teorema 75 se tiene finalmente el resultado esperado. \square

5.2.5. Estimaciones de Volumen dentro del conjunto excepcional

Teorema 98 *Sea un mapa holomorfo $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 \dashrightarrow$ de grado $d \geq 2$ y sean Ω_i ($i = 1, 2$) vecindades abiertas de los conjuntos E_1, E_2 . Luego existen $c > 0$ y un entero $N \geq 1$ tal que*

$$Vol(f^n(E)) \geq (cVol(E))^{d^n}.$$

Para cualquier boreliano $E \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ tal que $E, f^n(E) \subset \Omega_1 \setminus \Omega_2$ y un entero $n \geq N$.

Demostración: Usemos la desigualdad de Chebyshev para establecer la siguiente acotación:

$$Vol(f^n(E)) \geq \frac{1}{d^{2n}} \int_E |Jf^n|^2 \geq \frac{1}{d^{2n}} t_n (Vol(E) - Vol\{|Jf^n|^2 \leq t_n\}),$$

para un t_n que será precisado luego.

Ahora es necesario conocer el comportamiento de $Vol\{|Jf^n|^2 \leq t_n\}$ cerca a E_1 . Como el resultado es local tomemos $p \in E_1$ $p = (0, 0)$ y E_1 será ya sea $w = 0$ $zw = 0$ Tenemos entonces que analizar la estructura del jacobiano, por lo que éste puede ser escrito como:

$$Jf(z, w) = w^{d-1} \prod_{i=1}^k (z - \alpha_i(w)),$$

donde $1 \leq k \leq d - 1$ es la multiplicidad de $z = 0$ como punto crítico de la función $f|_{w=0}$ y $\alpha_i(0) = 0$.

Acotemos el volumen del conjunto $\Omega_s = \Delta^2(0, 1) \cap \{p : |Jf(p)| < s\}$ donde $\Delta^2(0, 1) = \Delta(0, 1) \times \Delta(0, 1)$, para cualquier $s > 0$, además $p = (z, w)$. Estimemos primero :

$$\begin{aligned} \text{Area}\{z \in \Delta(0, 1) : |\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i(w))| \leq \tau\} &\leq \sum_i \text{Area}\{|(z - \alpha_i(w))| \leq \tau^{1/k}\} \\ &\leq C\tau^{2/k}, \end{aligned}$$

donde $\tau \leq \sup_{\delta^2} (z - \alpha_i(w)) = M$ y C es una constante positiva. Integrando y usando el Teorema de Fubini:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\Omega_s) &\leq 2\pi \int_0^{(s/M)^{1/(d-1)}} r dr + \\ &\int_{(s/M)^{\frac{1}{d-1}}}^1 \text{Area}\{|\prod_{i=1}^k (z - \alpha_i(w))| < \frac{s}{r^{d-1}}\} r dr \leq C s^{\frac{2}{d-1}} + C s^{\frac{2}{k}} \int_{(s/M)^{\frac{1}{d-1}}}^1 r^{1 - \frac{2(d-1)}{k}} dr. \end{aligned}$$

Ahora veamos todos los posibles casos para terminar el cálculo de esta integral.

Empecemos con el caso $k < d - 1$:

Se tiene que el segundo término es tal que: $C s^{\frac{2}{k}} s^{\frac{1}{d-1}(2 - \frac{2(d-1)}{k})} = C s^{\frac{2}{d-1}}$, de donde

$$\text{Vol} \Omega_s \leq C s^{\frac{2}{d-1}}.$$

Sea ahora $k = d - 1$.

Entonces el segundo término es acotado por $C s^{\frac{2}{d-1}} \log(s^{\frac{1}{d-1}}) = C s^{\frac{2}{d-1}} \log s$. Y de ahí $\text{Vol} \Omega_s \leq C s^{\frac{2}{d-1}} \log s$.

De lo cual se deduce la acotación:

$$\text{Vol} \{p \in \Omega_1 : |Jf(p)| < s\} \leq C s^{\frac{2}{d-1}} \log s.$$

Además, para $n > N$ (N prefijado) se tiene que todos los puntos críticos de $f^n|_{w=0}$ a excepción de los puntos situados en E_2 (los cuales poseen multiplicidad máxima) tendrán multiplicidad menor que $d^n - 1$, entonces repitiendo los cálculos hechos arriba se tiene que existen constantes C_n que verifican:

$$\text{Vol} \{p \in \Omega_1 \setminus \Omega_2 : |Jf^n(p)| < s\} \leq C_n s^{\frac{2}{d^n-1}} \log s.$$

Una vez obtenida esta estimación retomemos la estimación hecha al principio con ayuda de la desigualdad de Chebyshev. Fijemos para $N \leq n \leq 2N$ las magnitudes t_n de tal modo que satisfagan $C_n t_n^{\frac{1}{d^n-1}} = \frac{1}{2} \text{Vol} E$. Entonces:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(f^n(E)) &\geq \frac{1}{d^{2n}} \int_E |Jf^n|^2 \geq \frac{1}{d^{2n}} t_n (\text{Vol}(E) - \text{Vol} \{|Jf^n|^2 \leq t_n\}) \\ &\geq \frac{t_n}{2d^{2n}} \text{Vol} E \geq C'_n (\text{Vol} E)^{d^n}, \end{aligned}$$

para un C'_n que depende de C_n . □

5.3. Prueba del Teorema Fundamental. Corolarios

Probaremos por contradicción. Asumiendo la expresión

$$f^{n_j} B \subset \{u < -\alpha d^{n_j}\}, \quad (5.40)$$

llegaremos a una contradicción.

Fijemos vecindades abiertas Ω_i para E_i ($i=1,2$), además por la naturaleza super-atractiva de E_i podemos considerar $f(\Omega_i) \subset \Omega_i$. consideremos los tres casos para $f^n B$

- a) $f^n B \subset \Omega_2$
- b) $f^n B \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2)^c$
- c) $f^n B \subset \Omega_1 \setminus \Omega_2$.

Procedamos con el caso (a). Por la suposición del teorema, u está acotado en Ω_2 y esto contradice inmediatamente la expresión 5.40 puesto que para un n_j dado se tendría que $f^{n_j} B \subset \emptyset$. Pasemos al caso (b) Del Teorema 96:

$$Vol(f^n B) \geq (c_1 Vol(B))^{c_2 \lambda^n} \quad (\lambda < d).$$

Considerando el Teorema de Kiselman-Skoda, tomemos un compacto $K \subset (\Omega_1 \cup \Omega_2)^c$ y teniendo en cuenta que $\beta < 2[\sup_k \nu_u(z)]^{-1}$ (es decir $\sup_k \nu_u(z) < \frac{2}{\beta}$) luego:

$$Vol(f^n B) \leq Vol\{u \leq -\alpha d^n\} \leq c_\beta \exp(-\beta \alpha d^n),$$

y haciendo $c_1 Vol(B) = e^{-\beta \alpha}$ ($\beta \alpha > 0$, $k > 0$) para algún n . Pero esto es una contradicción puesto que $\lambda < d$.

Finalmente el caso (c): de acuerdo al Teorema 98, siendo $f^n B \subset \Omega_1 \setminus \Omega_2$ se tiene que

$$Vol(f^n B) \geq (c Vol(B))^{d^n}. \quad (5.41)$$

Necesitamos ahora una acotación superior del Teorema de Kiselman-Skoda para $Vol(f^n B)$. Sin embargo para hacer esto es necesario ante todo que tengamos una cota superior para $\nu_u(z)$ en $\Omega_1 \setminus \Omega_2$. Para esto procedemos del siguiente modo:

$$\begin{aligned} f^{n-m} B &\leq Vol\{u \circ f^m < -\alpha d^n\} \quad (\text{m fijo}) \\ f^{n-m} B &\leq Vol\{d^{-m} u \circ f^m < -\alpha d^{n-m}\}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

La función $d^{-m} u \circ f^m$ es el potencial de la corriente $d^{-m} f^{m*} S$ por lo que de acuerdo al Teorema 97 existe $\beta > 0$ (arbitrariamente grande) y m prefijado, tal que:

$$\sup_{E_1} \nu(\rho, d^{-m} f^{m*} s) < 2/\beta,$$

entonces usando nuevamente el Teorema de Kiselman-Skoda:

$$(c Vol(B))^{d^{n-m}} \leq Vol f^{n-m} B \leq \exp(-\beta \alpha d^{n-m}).$$

Tomemos ahora $c Vol B > \exp(-\alpha \beta)$ para obtener una contradicción.

□

Demostración: (Del Corolario 1) (**Equidistribución de pre-imágenes de curvas**) Tomemos una curva C de grado $k \geq 1$ su corriente de integración es $k^{-1}[C]$. Puesto que satisface las hipótesis generales del teorema para una corriente entonces sólo se debe comprobar que se cumplen las condiciones respecto a los conjuntos excepcionales:

- a) No contiene una componente irreducible de E_1
- b) No interseca al conjunto E_2 .

En efecto, la primera condición se cumple debido a la estructura lineal de E_1 mientras que la segunda condición proviene del hecho que los puntos de E_2 so super-atractores Luego el conjunto de curvas que satisfacen (a) ó (b) es un subconjunto propio algebraico del espacio curvas $\mathbb{C}\mathbb{P}^N$. ya que se puede definir un polinomio en dicho espacio que cumpla las condiciones anteriores. \square

Demostración: (Del Corolario 2) Primero definamos

$$\mathcal{H} = \{f \text{ holomorfa de grado } d : \mathcal{E} = E_1 \cup E_2 \neq \emptyset\},$$

el cual también es un conjunto algebraico en el sub-espacio $\mathcal{H}_d \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^N$. Ahora es necesario mostrar que existe al menos un elemento $g \in \mathcal{H}_d \setminus \mathcal{H}$ para el cual su conjunto \mathcal{E} es vacío. Recordemos que un mapa que no contiene puntos críticos periódicos tiene automáticamente su conjunto excepcional nulo, por ello para construir tal mapa tomemos el conocido mapa de Lattés en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 : R(z) = (z - 2/z)^d$ el cual no contiene puntos críticos periódicos. Construyamos ahora el mapa $h : \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ definido como $h(z, w) = (R(z), R(w))$. Éste no posee puntos periódicos críticos y tiene grado topológico d^2 . Considerando ahora que el espacio cociente de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ por la simetría $(z, w) \rightarrow (w, z)$ es isomorfo a $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ y además el mapa inducido por h en el cociente es holomorfo y sin puntos periódicos críticos. Este es precisamente el mapa que estamos buscando. \square

5.4. Conjetura de Favre-Jonsson sobre la estructura de E_2

La conjetura de Favre-Jonsson sobre el conjunto E_2 establece que éste sólo consiste de los siguientes tipos del siguiente tipo de elementos:

- a) Puntos totalmente invariantes en curvas totalmente invariantes (con lo cual en particular estarían en E_1)
- b) Puntos homogéneos.

En esta sección usaremos esta conjetura para mostrar que se puede obtener con ella una caracterización completa de la configuración del conjunto excepcional.

Configuración de conjuntos excepcionales.- Se ha visto que si se acepta la conjetura de Favre-Jonsson sobre el conjunto E_2 se llega a una caracterización completa del Problema de la Convergencia hacia la Corriente de Green en $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, más aún, como se mostrará en esta sección, también se hace posible la caracterización sencilla de todos las posibles configuraciones de los conjuntos E_1 y E_2 . En el trabajo conjunto de Briend, Shishikura y Cantat se probó el conjunto excepcional E tiene una estructura lineal en lo que respecta a sus componentes conexas, mientras que la naturaleza de sus puntos discretos queda aún desconocida. Enunciemos el teorema en cuestión (para los detalles véase [10] o bien también puede consultarse [13]):

Teorema 99 (Briend-Shishikura-Cantat) Sea $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ holomorfa entonces cualquier variedad irreducible completamente invariante es lineal. El conjunto excepcional es por tanto la unión finita de sub-espacios lineales de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

De este modo, en el caso de las iteraciones complejas en \mathbb{CP}^2 las variedades irreducibles complejas pueden ser tanto rectas complejas como puntos. En dimensiones superiores $k > 2$ se puede establecer, en general, la configuración del conjunto excepcional cuando f admite $k + 1$ hiperplanos completamente invariantes. En este caso los hiperplanos están en posición general. En caso que los subespacios lineales tengan dimensión inferior se desconoce su configuración (una manifestación de esto es, sin embargo, la estructura E_2 conjeturada por Favre y Jonsson).

Estos hechos muestran la complejidad que tiene la caracterización completa del conjunto excepcional, aunque la caracterización completa del Problema de la Convergencia ha sido obtenida recientemente por V. Guedj sin hacer uso de la hipótesis acerca de la estructura de E_2 [46],[47]. Procedamos a usar la respuesta afirmativa de la conjetura de Favre-Jonsson y el Teorema de Briend-Shishikura-Cantat para caracterizar ambos conjuntos excepcionales. Para simplificar denotemos: $z_0 = [1 : 0 : 0]$, $w_0 = [0 : 1 : 0]$, $t_0 = [0 : 0 : 1]$ y $l_z = \{z = 0\}$, $l_w = \{w = 0\}$, $l_t = \{t = 0\}$. Además nos limitaremos a analizar aquellos mapas que mantienen invariante cada elemento de E_1 y E_2 .

Primero es necesario establecer que la intersección de dos componentes de E_1 , es un elemento de E_2 . En efecto, puesto que cada componente es la cerradura (Zariski) de una componente de $\{c_\infty < \mu_\infty = d\}$ entonces para un punto p intersección de dos componentes debe verificarse que $c_\infty(p) = d$ lo cual prueba que $p \in E_2$.

Pasemos ahora a probar que si E_2 tiene dos puntos homogéneos p, q entonces E_1 contiene a L_{pq} (la línea que pasa por p y q). En efecto, tomemos $f^{-1}L_{pq}$, como p, q son homogéneos entonces el conjunto de preimágenes contiene todas las líneas que pasan por p y q y tomemos un levantamiento de f para el cual $F(L_{pq}) = L$ (F es el levantamiento de f). De acuerdo a este último hecho L_{pq} puede contraerse a un punto (para simplificar el análisis) y el mapa inducido se puede representar como el mapa $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$. Si tomamos $(p, q) = (z_0, w_0)$ entonces el mapa será de la forma $f = [P(z, t) : Q(w, t) : t^d]$ y $l_t \subset E$.

Finalmente puesto que E_1 contiene a lo más tres rectas invariantes en posición general entonces E_2 contendrá a los más tres puntos.

Apéndice A

Dinámica local

A.1. Descripción topológica

Convengamos denominar sistema dinámico al par formado por un conjunto y la familia o representante de la familia de transformaciones que actúan sobre él. En este trabajo estamos interesados en la acción de las iteraciones de un mapa holomorfo f sobre una variedad compleja M . Denotemos este par por (M, f) . Para definiciones básicas de conceptos como órbitas, periodicidad, cuencas de atracción y repulsión, conjuntos límites, etc., véase [61].

Puntos fijos atractivos y repulsivos.- Sea a un punto fijo de $f : \mathbb{C}\mathbb{P}^k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^k$, es decir $f(a) = a$. Necesitamos una descripción del comportamiento de los puntos en una vecindad del punto a . Por medio de coordenadas locales (V_i, h_i) , podemos considerar la copia local de f en \mathbb{C}^k a la que denotaremos por \tilde{f} (véase las Sub-secciones [1.2.1] y [1.2.3]).

Es claro que un punto fijo para f induce un punto fijo de \tilde{f} , en efecto $\tilde{f}h_i = h_i f$ luego $\tilde{f}h_i(a) = h_i(a)$ es decir $\tilde{f}(\tilde{a}) = \tilde{a}$. Recíprocamente un punto fijo de \tilde{f} induce uno en f .

En lo ulterior sin perder generalidad consideraremos la carta (U_0, h_0) , es claro que todo lo dicho se extiende a cualquier otra carta sin ninguna restricción.

Primero introduzcamos la noción de punto fijo atractivo y repulsivo.

Definición 105 Sea F un mapa holomorfo en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ y a un punto fijo. Se dice que a es un punto fijo atractivo (repulsivo) si el módulo de todo los valores propios de la matriz jacobiano $J\tilde{f}(\tilde{a})$ son menores (mayores) que 1. En caso que los valores propios sean nulos, el punto se denomina super-atractivo.

Comentario 43 Así dados los puntos fijos atractivos corresponden a el tipo de puntos hiperbólicos. Un punto mixto con valores propios mayores y menores que la unidad denominado punto silla en la bibliografía (véase por ejemplo [61]) no será considerado en esta sección.

Comentario 44 En la teoría de iteraciones en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ se define un polinomio $f(z)$ hiperbólico como aquel en el cual el conjunto post-crítico es absorbido por el conjunto de órbitas atractivas. De manera formal si $J \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(C_p) = \emptyset$ (donde C_p es el conjunto crítico de f y J es el conjunto de Julia). Esta noción es equivalente en dimensión 1 a la de un mapa con carácter ya sea expansivo o contractante lo cual equivale a su vez a $|f'(a)| \neq 1$ (donde a es el punto fijo). En la teoría multidimensional en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$ no es claro que el conjunto post-crítico se comporta de modo que $C_f \subset F_f$ (conjunto de Fatou de f), en particular la existencia de puntos sillan (en los cuales el espacio tangente se parte en la suma de Whitney de dos sub-fibrados) presenta dificultades no existentes en el caso unidimensional.

Enunciemos el siguiente resultado en \mathbb{C}^k :

Proposición 45 *Un mapa holomorfo f tiene un punto atractivo a si y sólo si existe una vecindad V_a con la siguiente propiedad: $f(V_a) \subset V_a$, y $f^n : V_a \rightarrow V_a$ ($n = 1, 2, \dots$) es uniformemente convergente a el mapa constante $g(z) = a$.*

Para la prueba, véase [85].

De la equivalencia biholomorfa local entre \mathbb{C}^k y \mathbb{CP}^k es posible establecer que ambas dinámicas son equivalentes localmente.

Corolario 37 *Si a es un punto fijo atractivo del mapa $f : \mathbb{CP}^2 \cup$ entonces existe una vecindad de a tal que $f(V_a) \subset V_a$ y además $f^n : V_a \rightarrow V_a$ converge uniformemente al mapa constante $J(z) = a$.*

Demostración: Sea a un punto fijo de f en \mathbb{CP}^k entonces $h_o^{-1}(a)$ es un punto fijo para \tilde{f} en \mathbb{C}^k . De la proposición anterior, para un entorno V de dicho punto se verifica que $\tilde{f}(V) \subseteq V$; entonces de la conjugación local $f(\hat{V}) \subseteq \hat{V}$ donde $\hat{V} \subseteq h_o^{-1}(V)$ y \hat{V} es un entorno de a . Del mismo modo, puesto que $\tilde{f}^n \circ h_o^{-1}(z) \in V$ donde V es un ϵ -entorno de $h_o^{-1}(a)$ y $z \in V$ entonces $f^n(w) \in \hat{V}$ para un ϵ_1 -entorno de a ($w \in \hat{V}$). \square

Si a es un punto fijo repulsivo, del Teorema de la Función Inversa podemos aplicar los resultado anteriores a f^{-1} . El siguiente corolario es válido:

Corolario 38 *Si a es un punto fijo repulsivo de f entonces existe una vecindad $V_a: f(V_a) \not\subseteq V_a$*

Demostración: Puesto que $|Jf| \neq 0$ (ya que de otro modo el punto sería super-atractivo) entonces por el Teorema de la Función Inversa tomemos un entorno suficientemente V_a donde f^{-1} existe. Como $f^{-1}(a) = a$ entonces a es un punto atractivo para f^{-1} . Del resultado anterior, para un punto fijo atractivo existe $V'_a \subset V_a$ tal que $f^{-1}(V'_a) \subset V'_a$. De aquí se tiene que $V'_a \subset f(V'_a)$ lo cual a su vez implica que $f(V'_a) \not\subseteq V'_a$. \square

Comentario 45 En el caso de una órbita periódica, todos los puntos de la trayectoria comparten las mismas propiedades descritas arriba (atractor, repulsor, etc). Esto se debe a que todos los puntos comparten los mismos valores propios del jacobiano. Eso puede comprobarse aplicando la regla de la cadena.

Invariancia y recurrencia Introduzcamos los siguientes conceptos:

Definición 106 *Sea A un abierto en un variedad compleja M . Sea además $f : M \rightarrow M$ una aplicación compleja suave. se dice que:*

- A es invariante hacia adelante si $f(A) \subset A$.
- A es invariante hacia atrás si $f^{-1}(A) \subset A$.
- A es completamente invariante hacia atrás $f^{-1}(A) = A$, A es completamente invariante hacia adelante $f(A) = A$. A es completamente invariante si ambas invariancias se cumplen.
- Un punto z_0 es no errante si para toda vecindad V_{z_0} existe $n \in \mathbb{Z}$ ($n \geq 1$) tal que $V_{z_0} \cap f^n(V_{z_0}) \neq \emptyset$. Un conjunto es no errante si todos sus puntos son no errantes.

- Un conjunto se denomina recurrente si para todo entorno V_z de un punto arbitrario $z \in A$ existe $n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots$ tal que $f^{n_i}(V_z) \cap V_z \neq \emptyset$. Si $f^{n_i}(V_z) \subset V_z$ entonces A se denomina fuertemente recurrente.
- Un punto $z \in A$ es errante si existe una vecindad V_z tal que para todo $r \in \mathbb{N} : f^r(V_z) \cap V_z = \emptyset$.

Comentario 46 Los conceptos de invariancia son en general conceptos globales. Si $A \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ está dentro de uno de los entornos fundamentales $U_i \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^k$ entonces siendo A invariante (en algún sentido de los descritos arriba) implica que su copia holomorfa en \mathbb{C}^k es invariante en el mismo sentido. Si $A \not\subset U_i$ entonces no se puede afirmar que haya una copia de A en \mathbb{C}^k que sea invariante.

Comentario 47 Si A es completamente invariante hacia atrás entonces es completamente invariante hacia adelante. Esto implica que la invariancia hacia atrás es equivalente a la invariancia completa. No se puede afirmar lo mismo de la invariancia completa hacia adelante, en realidad para que esta invariancia completa implique la otra es necesario añadir la hipótesis de suryectividad a f .

Comentario 48 La condición de ser no-errante puede formularse equivalentemente como $V_{z_0} \cap f^{-n}(V_{z_0}) \neq \emptyset$. La condición de recurrencia es más fuerte que la de ser no-errante. En relación a esto, si consideramos el Teorema de Brien-Duval según el cual existe una medida invariante μ asociada al sistema dinámico $(\mathbb{C}\mathbb{P}^k, f)$, se tiene como consecuencia del Teorema de la Recurrencia de Poincaré que casi todo punto de J es recurrente. Por otro lado, la condición de ser errante es completamente equivalente a la condición: para todo n_1, n_2 ($n_1 \neq n_2$) $f^{-n_1}(V_{z_0}) \cap f^{-n_2}(V_{z_0}) = \emptyset$. Además se puede afirmar que el conjunto W de todos los puntos errantes de un sistema dinámico (M, f) es abierto. D. Sullivan mostró en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ que el conjunto de puntos no errantes está formado por todo el espacio.

En relación a la noción de invariancia, introduzcamos el concepto importantísimo de conjunto excepcional:

Definición 107 Sea E un subconjunto de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. E se denomina excepcional si es una variedad proyectiva invariante hacia atrás.

Introduzcamos para un conjunto una noción más débil que la de ser no-errante la cual es válida si M tiene una métrica:

Definición 108 Sea $f : M \rightarrow M$ donde M es una variedad compleja, $M \subset \mathbb{C}^k$. Dado $\epsilon > 0$, una ϵ -cadena de longitud $n \geq 1$ desde x hasta y es la secuencia de puntos

$$\{x = x_0, x_1, \dots, y = x_n\}$$

que satisfacen la condición $d((x_i), x_{i+1}) < \epsilon$.

Además, un punto $z \in M$ se denomina recurrente de cadena si existe una ϵ -cadena de x a sí mismo para cada $\epsilon > 0$.

Intuitivamente un punto es recurrente de cadena si puede ser convertido en recurrente por perturbaciones arbitrarias de el mapa.

Los conceptos de transitividad y minimalidad son de utilidad en la descripción de un sistema caótico el cual se discutirá luego. Definamos estos conceptos de naturaleza topológica:

Definición 109 *El sistema dinámico (M, f) es topológicamente transitivo si para cada par de conjuntos abiertos U y V no vacíos existe un entero $n \geq 0$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ (equivalentemente $U \cap f^{-n}(V) \cap V \neq \emptyset$).*

En un espacio métrico como \mathbb{C}^k la noción de transitividad adquiere la forma equivalente: (véase [117])

Definición 110 *Sea $f : M \rightarrow M$ continua, (M, f) es topológicamente transitiva si existe $z \in M$ tal que la órbita $O_f(z) = \{f^n(z), n \geq 0\}$ es densa en M .*

Un concepto más fuerte que el de transitividad topológica es el dado por la siguiente:

Definición 111 *El sistema dinámico (M, f) es minimal si toda órbita es densa en M . Un subconjunto $A \subset M$ es minimal si, para todo $z \in A : \overline{O_f(z)} = A$.*

Ejemplo 44 En la dinámica de una función compleja f en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, el conjunto de Julia J asociado a f es minimal (véase [12]).

Sistema caótico Las primeras ideas de dependencia sensible provienen de Poincaré quien intuyó correctamente que en ciertos sistemas la proximidad es un concepto completamente inestable. Sólo después de los descubrimientos de Henon, Ueda y Lorenz se pudo comprender y apreciar las intuiciones de Poincaré el cual en su tiempo no dispuso de un aparato teórico adecuado para expresar sus ideas. En forma sucinta, la idea de dependencia sensible es opuesta a la de estabilidad según Liapunov:

“ Un mapa $f : M \rightarrow M$ (M : métrico) es Liapunov estable en $z \in M$ si para todo $\epsilon > 0$ existe una vecindad U_z tal que $d(f^n(z), f^n(w)) < \epsilon$ donde w es un punto cualquiera de U_z , $n \geq 0$ ”. La estabilidad según Liapunov equivale a la equicontinuidad de $\{f^n\}_{n>0}$ en el punto $z \in M$, esta idea fue empleada por Fatou y Julia para definir la parte estable e inestable de una iteración holomorfa en \mathbb{C} . Más adelante las mismas ideas han sido usadas para definir la parte estable e inestable de una iteración holomorfa en $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$.

Definamos a continuación, la dependencia sensible:

Definición 112 *El sistema dinámico (M, f) tiene dependencia sensible en el punto $z \in M$ si existe un número $\epsilon > 0$ tal que para toda vecindad U_z existe $w \in U_z$ y un $n \geq 0$ tal que $d(f^n(z), f^n(w)) > \epsilon$.*

Hay acuerdo entre los autores que un sistema caótico debe poseer la dependencia sensible. El desacuerdo surge cuando se trata de imponer las condiciones de tipo topológico y/o ergódico que debe satisfacer un sistema caótico. Aquí se enunciará algunas condiciones topológicas aunque debe ser dicho que debido al comportamiento de dichos sistemas, es necesario imponer condiciones ergódicas más precisas. Una definición de un sistema caótico como aquel que posee entropía topológica positiva (esto es, un índice disgregador del sistema) (véase [78]) parece ser insuficiente para caracterizar un sistema caótico puesto de acuerdo al Teorema de Lyubich-Mañé un mapa tal como $f(z) = z^2$ en $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ debería ser considerado caótico aún cuando la mayor parte de sus órbitas convergen a 0 o al ∞ . Bajo estas consideraciones, adoptaremos aquí aquella definición de sistema caótico que establezca entre otras cosas que todas las órbitas del sistema son caóticas. Esta definición se debe a Devaney (véase [20]).

Definición 113 *Un sistema dinámico (M, f) es caótico en el sentido de Devaney si M es un conjunto infinito y además cumple las siguientes condiciones:*

- *El conjunto de puntos periódicos es denso en M .*
- *f es topológicamente transitiva.*
- *Posee dependencia sensible respecto a los valores iniciales.*

Comentario 49 En realidad respecto a esta última definición hay que decir que una objeción bastante seria es que en muchos sistemas multidimensionales (incluso holomorfos) no hay necesidad de la presencia de la periodicidad para observar muchas características que empíricamente se le atribuyen a un sistema caótico. En realidad el problema de definir un sistema caótico con más precisión es un problema abierto, especialmente en el caso de sistemas $(\mathbb{C}P^k, f)$ donde la comprensión de el comportamiento de las órbitas es bastante pobre aún.

Apéndice B

Teoría L^2 y aproximación de funciones plurisub-armónicas

B.1. Teoría L^2 de Hörmander

En esta sección se expondrán los elementos más importantes de la teoría desarrollada por Hörmander para resolver las ecuaciones de Cauchy-Riemann no homogéneas en dominios de \mathbb{C}^n , el llamado $\bar{\partial}$ -problema:

$$\bar{\partial}u = v \text{ o bien } \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v_j \quad (j = 1, \dots, k),$$

o más abreviadamente $\bar{\partial}u = v_j$.

La influencia de esta teoría se ha hecho presente en varias partes de este trabajo (Teoremas de Siu, subniveles de funciones plurisubarmónicas, etc) por lo que se hace necesario dar algunos rudimentos de aquella aunque aquí no se dan demostraciones de los resultados. Para referencias véase [55],[56], [57]. Hay que decir, antes de entrar en detalles, que existe otro enfoque para la solución del $\bar{\partial}$ -problema el cual pertenece a Joe Kohn y que, si bien más complicado, conduce a resultados de mayor alcance y precisión. Para detalles véase [37, 66], etc.

Para la solución del $\bar{\partial}$ -problema según Hörmander nos limitaremos aquí a tomar dominios con función de agotamiento plurisubarmónica. Definamos esto.

Definición 114 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ abierto. Una función continua real u es llamada de agotamiento si los conjuntos abiertos

$$\Omega_t^u = \{z \in \Omega : u(z) < t\} \quad t \in \mathbb{R},$$

es decir los sub-niveles de u , tienen cerradura compacta en Ω .

Recuérdese además que para un dominio convexo existe la siguiente caracterización equivalente (véase [100], etc):

Teorema 100 $\Omega \in \mathbb{C}^k$ es pseudo-convexo si y sólo si existe una función de agotamiento plurisub-armónica.

Introduzcamos el concepto de solución débil

Definición 115 Una función u en $\Omega \in \mathbb{C}^k$ es una solución débil de $\bar{\partial}u = v$ si las derivadas distribucionales $\bar{\partial}_j u$ satisfacen $\bar{\partial}_j u = v_j$ en Ω .

Nótese $\bar{\partial}_j v_k = \bar{\partial}_j \bar{\partial}_i u = \bar{\partial}_i \bar{\partial}_j u = \bar{\partial}_i v_j$ para i, j arbitrarios, esto implica que para $v = \sum_{i=1}^k v_i d\bar{z}_i$

$$\bar{\partial}v = \sum_{1 \leq i, j \leq k} (\bar{\partial}_j v_i - \bar{\partial}_i v_j) d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_i = 0,$$

Por lo cual, la condición de integrabilidad local puede ser escrita como

$$\bar{\partial}v = 0.$$

Definiendo además el operador :

$$\bar{\partial}_* = \sum_{1 \leq i, j \leq k} (\bar{\partial}_j - \bar{\partial}_i) d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_i$$

Suponiendo que exista una solución débil (provista por el método de Hörmander) se verifica el siguiente teorema.

Teorema 101 *Sea $\bar{\partial}u = v$ en $\Omega \subset \mathbb{C}^k$, con v de clase C^r , $1 \leq r \leq \infty$, tiene una solución débil u_0 en Ω . Entonces la ecuación tendrá soluciones C^r en Ω tal que una de aquellas será igual a u_0 en casi todo punto.*

Empecemos con el caso $k = 1$ para el $\bar{\partial}$ -problema. En este caso la $\bar{\partial}$ -ecuación se convierte en

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} \right) = v \quad \text{en } \Omega \subset \mathbb{C},$$

donde v puede ser vista como una función en $L^2(\Omega)$. Una solución débil u en Ω satisface (para ϕ función test): $\langle \bar{\partial}u, \phi \rangle = -\langle v, \phi \rangle$, o bien: $\langle v, \phi \rangle_{L^2} = -\langle u, \partial\phi \rangle_{L^2}$ (en términos del producto interno de L^2). Introduzcamos ahora la idea fundamental del Hörmander la cual consiste en introducir los espacios L^2 con pesos: $L^2(\Omega, e^{-\beta})$ donde $\beta \in C^\infty(\Omega)$. El producto interno entonces se define como:

$$\langle f, g \rangle_\beta = \int_\Omega f \bar{g} e^{-\beta} d\lambda(z).$$

De ahí obtenemos para la solución débil la condición

$$\langle v, \phi \rangle_\beta = \langle u, \delta\phi \rangle_\beta, \quad \text{donde } \delta = -\partial + \partial\beta.$$

Formulemos ahora el resultado fundamental para este caso

Teorema 102 *La ecuación $\bar{\partial}u = v$ ($v \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$) tiene una solución débil μ en $L^2_\beta = L^2(\Omega, e^{-\beta})$ si y sólo si existe A (constante no dependiente de ϕ , la función test) tal que:*

$$|\langle \phi, v \rangle_\beta| \leq A \|\delta\phi\|_\beta, \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

Considerando las relaciones del conmutador $\bar{\partial}\delta - \delta\bar{\partial}$ se tiene que ($\phi \in D(\Omega)$)

$$(\bar{\partial}\delta - \delta\bar{\partial})\phi = \bar{\partial}(-\partial\phi + \beta\partial\phi) - (-\partial + \partial\beta)\bar{\partial}\phi = (\bar{\partial}\partial\beta)\phi.$$

Luego $\bar{\partial}\delta - \delta\bar{\partial} = \frac{1}{4}\Delta\beta = b$.

y además $\langle b\phi, \phi \rangle_\beta = \langle \bar{\partial}\delta\phi, \phi \rangle - \langle \delta\bar{\partial}\phi, \phi \rangle = \langle \delta\phi, \delta\phi \rangle_\beta - \langle \bar{\partial}\phi, \bar{\partial}\phi \rangle_\beta$,

de donde, tomando $b > 0$ (es decir β estrictamente subarmónica):

$$\int_\Omega |\phi|^2 e^{-\beta} b \leq \int_\Omega |\delta\phi|^2 e^{-\beta} \quad \forall \phi \in D(\Omega).$$

o bien usando la desigualdad de Schwartz:

$$|\langle \phi, v \rangle|^2 \leq \int |\phi|^2 e^{-\beta b} \int |v|^2 e^{-\beta b^{-1}} \leq \int |v|^2 e^{-(\beta + \log b)} \|\delta \phi\|_\beta,$$

por lo que, comparando con el teorema anterior, la constante A se expresa como $A = \|v\|_{\beta + \log b}$ (notemos que A no depende de la función test elegida). De aquí concluimos con el Teorema Fundamental de Hörmander para $k = 1$

Teorema 103 Sea $\beta \in C^\infty(\Omega)$ estrictamente subarmónica (tal que $b = \frac{1}{4}\Delta\beta > 0$) y $v \in L^2(\Omega, e^{-\beta b^{-1}})$, luego existe $\mu \in L^2(\Omega, e^{-\beta})$ que satisface $\bar{\partial}u = v$ en el sentido débil y además se verifica la condición de crecimiento:

$$\int_\Omega |u|^2 e^{-\beta} d\lambda(z) \leq \int_\Omega |v|^2 e^{-\beta b^{-1}} d\lambda(z),$$

y además puede ser modificada en un conjunto de medida nula tal que se convierta en una solución clásica.

Esbozemos ahora el método L^2 para el caso $k \geq 2$: En este caso sea $v = \sum_{i=1}^k v_i d\bar{z}_i$ ((0,1)-forma)

localmente integrable en $L^2(\Omega)$, satisfaciendo además la condición de integrabilidad $\bar{\partial}v = 0$. Definiendo ahora, análogamente al caso $k = 1$, el producto escalar en el espacio L^2 con pesos:

$$\langle f, g \rangle_\beta = \sum_{i=1}^k \langle f_i, g_i \rangle_\beta,$$

y tomemos además formas test del sub-espacio $D(\Lambda^{(0,1)}T^*\Omega) \subset D(\Lambda^{(0,1)}T^*\mathbb{C}^k)$.

Entonces, análogamente al caso anterior (considerando $\delta_j = -\bar{\partial}_j + (\partial_j\beta)id$ y $\delta = \sum_{i=1}^k \delta_j$) se tiene que:

$$\langle v, \phi \rangle_\beta = \langle \bar{\partial}u, \phi \rangle_\beta = \langle u, \delta\phi \rangle_\beta.$$

Es decir δ es la adjunta de $\bar{\partial}$.

De esta igualdad sigue que la ecuación $\bar{\partial}u = v$ tiene una solución débil u en $L^2_\beta(\Omega)$ si y sólo si se cumple la siguiente desigualdad para todas las formas test ϕ en Ω :

$$|\langle \phi, v \rangle_\beta| = |\langle v, \phi \rangle_\beta| \leq A \|\delta\phi\|_\beta,$$

donde A es una constante independiente de ϕ .

Ahora obtendremos una desigualdad similar a la anterior necesaria para la extensión del teorema de Hörmander. Tomemos una función test ψ en Ω y los operadores $\bar{\partial}_j$ junto con sus operadores adjuntos δ_j en L^2_β . Considerando todo ello tenemos la siguiente relación para el conmutador $\bar{\partial}_k\delta_j - \delta_j\bar{\partial}_k$:

$$(\bar{\partial}_k\delta_j - \delta_j\bar{\partial}_k)\psi = \bar{\partial}_k(-\partial_j\psi + \partial_j\beta.\psi) - (-\partial_j + (\partial_j)\beta.id)\bar{\partial}_k\psi = \partial\bar{\partial}_k\beta.\psi.$$

Aplicando dicha expresión a $\sum_{j,k=1}^n (\partial_j\bar{\partial}_k\beta.\phi_j, \phi_k)$ se tiene que:

$$\sum_{j,k=1}^n (\partial_j \bar{\partial}_k \beta \cdot \phi_j, \phi_k) = \sum_{j,k} (\delta_j \phi_j, \delta_k \phi_k) + \left\{ - \sum_{j,k} (\bar{\partial}_k \phi_j, \bar{\partial}_j \phi_k) \right\}.$$

Reescribiendo el último término y usando el operador $\bar{\partial}_*$:

$$\begin{aligned} - \sum_{j,k} (\bar{\partial}_k \phi_j, \bar{\partial}_j \phi_k) &= \frac{1}{2} \sum_{j,k} (\bar{\partial}_k \phi_j - \bar{\partial}_j \phi_k, \bar{\partial}_k \phi_j - \bar{\partial}_j \phi_k) - \sum_{j,k} (\bar{\partial}_k \phi_j, \bar{\partial}_k \phi_j) = \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \|\bar{\partial}_k \phi_j - \bar{\partial}_j \phi_k\|^2 - \sum_{j,k} \|\bar{\partial}_k \phi_j\|^2 = \|\bar{\partial}_* \phi\|^2, \end{aligned}$$

Reemplazando todo esto en la expresión para $\sum_{j,k=1}^n (\partial_j \bar{\partial}_k \beta \cdot \phi_j, \phi_k)$:

$$\sum_{j,k=1}^n (\partial_j \bar{\partial}_k \beta \cdot \phi_j, \phi_k) \leq \|\delta \phi\|_\beta^2 + \|\bar{\partial}_* \phi\|_\beta^2.$$

Finalmente consideremos la forma de Levi distribucional para β : $\langle \mathcal{L}\beta(z) \phi_j, \phi_k \rangle$. Tomemos el menor valor propio $b(z)$ de la forma de Levi (vista como una forma cuadrática en el vector formado por las componentes ϕ_j). Entonces, de la diagonalización para las formas cuadráticas se tiene que:

$$\langle \mathcal{L}\beta(z) \phi_j, \phi_k \rangle \geq b| \phi|^2,$$

reemplazando esta expresión en la del producto escalar en el espacio L_2^β se tiene que:

$$\sum_{j,k=1}^n (\partial_j \bar{\partial}_k \beta \cdot \phi_j, \phi_k) \geq \int_\Omega b(z) |\phi|^2 e^{-\beta}.$$

En las aplicaciones la desigualdad tiene sentido al considerar $b > 0$, lo cual implica que todos los valores propios de la forma cuadrática son positivos, lo cual a su vez considerando la diagonalización de una forma cuadrática significa que dicha forma es positiva, lo cual implica que $\beta(z)$ es pluri-subarmónica en Ω . Enunciemos todo esto en forma de un teorema:

Teorema 104 *Sea la función $\beta(z)$ en Ω estrictamente pluri-subarmónica. Tomando b el menor valor propio de la forma de Levi de β y teniendo en cuenta que $\delta = \delta_\beta$ se tiene la siguiente desigualdad:*

$$\int_\Omega b(z) |\phi|^2 e^{-\beta} \leq \|\delta \phi\|_\beta^2 + \|\bar{\partial}_* \phi\|_\beta^2.$$

Para ϕ_j funciones test en Ω .

El segundo sumando del lado derecho causa algunas dificultades técnicas (véase [56]) para tener un análogo al caso unidimensional. Finalmente llegamos a la desigualdad fundamental que requeríamos:

$$\langle \phi, v \rangle \leq \|v\|_{\beta + \log b} \|\delta \phi\|_\beta.$$

lo cual nos conduce al Teorema de Existencia de Hörmander.

Teorema 105 Sea $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ pseudoconvexo, $b(z) \in PSA(\Omega)$, v una forma $(0, 1)$ en $L^2(\Omega, e^{-\beta}b^{-1})$ tal que $\bar{\partial}_*v = 0$ (distribucionalmente). Entonces existe $u \in L^2(\Omega, e^{-\beta})$ tal que $\bar{\partial}u = v$ en sentido débil y si satisface la condición de crecimiento

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\beta} d\lambda(z) \leq \int_{\Omega} |v|^2 e^{-\beta} b^{-1} d\lambda(z).$$

Además si $v \in C^p(\Lambda^{(0,1)}T^*\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) la solución u puede ser ajustada a una solución clásica de tipo C^p .

Algunos corolarios inmediatos del Teorema de Existencia de Hörmander son expuestos en [55].[56], veamos algunos de ellos aquí.

Corolario 39 Sea Ω (pseudoconvexo) entonces la ecuación $\bar{\partial}u = v$ es globalmente C^p -soluble para cualquier forma $v \in C^p(\Lambda^{(0,1)}T^*\Omega)$ tal que $\bar{\partial}_*v = 0$.

Además puesto que un dominio en el cual el problema de Cousin I sea soluble es un dominio de holomorfía y siendo dicha solución alcanzable a través de la respuesta positiva de la solubilidad de la $\bar{\partial}$ -ecuación (véase [119]) se tiene entonces que:

Corolario 40 Todo dominio pseudoconvexo es un $\bar{\partial}$ -dominio y por tanto un dominio Cousin I, esto es, un dominio de holomorfía.

Con el fin de eliminar la presencia de b lo cual incluye derivadas de la función de peso β es posible dar una segunda versión del teorema de Hörmander que incluye estimaciones de crecimiento.

Teorema 106 (Segunda versión del Teorema de existencia de Hörmander con condición de crecimiento) Sea el dominio pseudo-convexo $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ y sea además v una $(0, 1)$ forma de clase $C^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$ tal que $\bar{\partial}_*v = 0$. Tomemos $\beta \in PSA(\Omega)$ tal que $v \in L^2_{\beta}$ y $\tau > 0$. En estas condiciones se tiene que la ecuación $\bar{\partial}u = v$ tiene una solución u de clase $C^p(\Omega)$ la cual satisface la siguiente condición de crecimiento:

$$\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\beta} (1 + |z|^2)^{-\tau} d\lambda(z) \leq \int_{\Omega} |v|^2 e^{-\beta} (1 + |z|^2)^{2-\tau} \tau^{-1} d\lambda(z).$$

Para la prueba de este teorema es necesario sustituir β por la función pluri-subarmónica $\beta + \tau \log(1 + |z|^2)$ donde $\tau > 0$.

Una aplicación al problema sobre la integrabilidad de $e^{-\beta}$ donde β es plurisubarmónica conduce a las siguiente proposiciones de utilidad en la demostración del Teorema de Siu (véase Sub-sección 3.2.2 en particular el Lema 9) y en el estudio de sub-niveles de funciones plurisubarmónicas (Teorema de Kiselman-Skoda, véase la Sub-sección [2.6.3]).

Teorema 107 Sea una función $\beta \in PSA(\Omega)$, donde $\Omega \subset \mathbb{C}^k$ es pseudoconvexo. Sea además $e^{-\beta} \in L^1(B(z_0, r) \cap \Omega)$; entonces, se puede encontrar para todo $\tau > 0$ una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f(z_0) = 1$ y

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |f(z)|^2 e^{-\beta(z)} (1 + |z - z_0|^2)^{-n-\tau} d\lambda(z) \\ & \leq \left[2 + (1 + r^2)^2 (k + 1)^2 a^{-1} r^{-2k-2} \right] \int_{B \cap \Omega} e^{-\beta(z)} d\lambda(z). \end{aligned}$$

En la segunda versión del Teorema de Hörmander es necesario sustituir β por $\beta + 2k \log |z|$, donde k es la dimensión del espacio y además es necesario construir para cada τ una solución de la ecuación $\bar{\partial}u = v$ (para los detalles véase [[55]]).

El siguiente ejemplo es el ingrediente que necesitamos para establecer condiciones de integración para e^{-u} , siendo u pluri-subarmónica.

Ejemplo 45 La cuestión sobre la integrabilidad de e^{-u} donde $u \in PSA(\Omega)$ es un problema importante para el análisis. Sea $\Omega = \{z/|z| < 1\}$ y $u \in PSA(\Omega)$ tal que $u(z) < 1$ y $u(0) = 0$. Probemos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{|z| < 1/2} e^{-u(z)} d\lambda(z) \leq C.$$

Primero probemos esto para $u \in SA(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{C}$). En efecto, de la fórmula de representación de los hermanos Riesz para una función sub-armónica (véase [55]) aplicada a $u(z) - 1$ $z \in \Omega$ se tiene:

$$2\pi [u(z) - 1] \int_{|\zeta| < 1} \log \left| \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}} \right| d\mu(\zeta) + \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\sigma(\theta),$$

donde $d\mu = \Delta u \geq 0$ y $d\sigma$ es la medida de superficie.

Para $z = 0$ $\int_{|\zeta| < 1} \log \frac{1}{|\zeta|} d\mu(\zeta) + \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} d\sigma(\theta) = 2\pi$ De aquí tenemos las siguientes acotaciones:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|z - e^{i\theta}|^2} |d\sigma(\theta)| \leq 3, \quad |z| < 1/2,$$

y además tomando $R: R \in \langle 1/2, e^{-1/2} \rangle$ donde R es tal que:

$$m = \int_{|\zeta| < R} d\mu(\zeta)/2\pi \leq -\frac{1}{\log R} < 2,$$

y por la otra acotación: $\left| \int_{|\zeta| < R} \log \left| \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}} \right| d\mu(\zeta) \right| < C$

para $|z| < 1/2$ (C es una constante).

Usando la desigualdad entre medias aritmética y geométrica ($|z| < 1/2$) se tiene:

$$\begin{aligned} \exp \left[\frac{1}{2} \int_{|\zeta| < R} \log \left| \frac{z - \zeta}{1 - z\bar{\zeta}} \right| d\mu(\zeta) \right] &\leq \int_{|\zeta| < R} \left| \frac{1 - z\bar{\zeta}}{z - \zeta} \right|^m d\mu(\zeta)/2\pi m \\ &\leq C \int_{|\zeta| < R} \log |z - \zeta|^{-m} d\mu(\zeta). \end{aligned}$$

La última integral es acotada pues lo es la medida y además $|z - \zeta|^{-m}$ es integrable ya que $m < 2$. Esto prueba la integrabilidad de $e^{u(z)}$.

Para $k > 1$, introduciendo las coordenadas polares:

$$\int_{|z| < 1/2} e^{u(z)} d\lambda(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} ds(\zeta) \int_{|w| < 1/2} |w|^{2k-2} e^{-u(w\tau)} d\lambda(w),$$

y por tanto el caso $k > 1$ se reduce al ya analizado para $k = 1$.

Ejemplo 46 A continuación probemos el lema 9 de la Sub-sección 3.2.2 con ayuda del aparato expuesto hasta aquí. Tomemos un punto z_0 tal que $\beta(z_0) > -\infty$ entonces podemos encontrar un entorno de z_0 tal que $\beta(z) - \beta(z_0) < 1$. Usando ahora los resultados del ejemplo anterior se tiene que $e^{-\beta}$ es integrable en un entorno de z_0 . De este modo, el conjunto de puntos z_0 es denso en Ω . Llamemos a este conjunto de puntos G . Con esto hemos demostrado la primera parte del teorema. Fijemos ahora τ y tomemos $z \notin G$. Puesto que $e^{-\beta}$ no es integrable en un entorno de z se tiene que la desigualdad sólo puede cumplirse si z es un cero de la función analítica f . Pero, puesto que el segundo miembro en la misma desigualdad es infinito se tiene entonces que:

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 e^{-u(z)} (1 + |z|^2)^{-n-a} d\lambda(z) < +\infty.$$

Es evidente que todos los puntos del complemento de G serán ceros comunes de todas las funciones holomorfas que cumplan esta desigualdad.

B.2. Teorema de extensión L^2 de Osawa-Takegoshi y aproximación de funciones PSA según Demailly

Usando las técnicas de Hörmander y Kohn para el $\bar{\partial}$ -problema se obtiene un teorema de extensión de múltiples aplicaciones en el análisis. Aquí daremos la versión más sencilla de este teorema.

Teorema 108 (Osawa-Takegoshi) Sea el dominio pseudo-convexo $\Omega \subset \mathbb{C}^k$, la función plurisubarmónica $u \in PSA(\Omega)$ y sea además la hipersuperficie definida por una función holomorfa $h : V = \{h = 0\}$ tal que $\partial h \neq 0$ en V y $|h| \leq 1$ en Ω . En estas condiciones, dada una función holomorfa f en V , existe una extensión de f a todo Ω tal que $F|_V = f$ y además se cumple la desigualdad:

$$\int_{\Omega} |F|^2 e^{-u} d\lambda \leq C \int_V |f|^2 e^{-u} / |\partial h|^2 d\lambda,$$

donde C es una constante universal.

El siguiente resultado es necesario para completar el argumento de la demostración para el teorema 75. La idea del proceso de aproximación en un espacio de Hilbert pertenece a Demailly y está fundamentado en el teorema de Osawa-Takegoshi (Para las demostraciones véase [16, 17, 90]).

Teorema 109 (Aproximación de Demailly) Sea φ una función plurisubarmónica sobre un conjunto abierto pseudoconvexo acotado $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ para $m > 0$ definamos el espacio de Hilbert de funciones holomorfas f sobre Ω tal que:

$$\int_{\Omega} |f|^2 e^{-2m\varphi} d\lambda < +\infty,$$

y sea $\varphi_m = \frac{1}{2m} \log \sum_{l=1}^m |\sigma_l|^2$ donde $\{\sigma_l\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}_{\Omega}(m\varphi)$. Entonces existen constantes $c_1, c_2 > 0$ que no dependen de m tal que:

$$a) \quad \varphi(z) - \frac{c_1}{m} \leq \varphi_m(z) \leq \sup_{|\zeta-z|<r} \varphi(\zeta) + \frac{1}{m} \log \frac{c_2}{r^n} \text{ para todo } z \in \Omega \text{ y } r < d(z, \partial\Omega). \text{ En particular}$$

$$\varphi_m \longrightarrow \varphi \text{ puntualmente y en la topología } L'_{loc} \text{ sobre } \Omega \text{ cuando } m \rightarrow +\infty$$

b) Se verifica la siguiente relación para el número de Lelong:

$$\nu(\varphi, z) - \frac{n}{m} \leq \nu(\varphi_m, z) \leq \nu(\varphi, z).$$

para todo $z \in \Omega$.

Bibliografía

- [1] L.V. Ahlfors. Conformal invariants: topics in geometric function theory (1973). *McGraw-Hill Series in Higher Mathematics*.
- [2] D.H. Armitage and S.J. Gardiner. Classical Potential Theory. *Springer Verlag, Mathematical Monographs* 2001.
- [3] Alan Beardon. Iteration of Rational Functions, *Graduate Texts in Mathematics*, 132, Springer-Verlag, 1991
- [4] E. Bedford and B.A. Taylor. The Dirichlet problem for Monge-Ampère equation. *Invent. Math.*, 37, p. 1-44, 1976.
- [5] E. Bedford and B.A. Taylor. A new capacity for plurisubharmonic functions. *Acta Math.*, 149, p. 1-40, 1982.
- [6]] E. Bedford, J. Smillie. Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity. *Invent. Math.* 87, 1990, 69-99.
- [7] H.J. Bremermann Complex convexity, *Trans. Amer. Math. Soc.* 82, (1956), 17-51.
- [8] J.Y. Briend Exposants de Liapounoff et points périodiques d'endomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$. *Thèse de l'université Paul Sabatier Toulouse III*. 1997.
- [9] J.Y. Briend and J. Duval. Deux caractérisations de la mesure d'équilibre d'un endomorphisme de $\mathbb{C}\mathbb{P}^k$, *IHES Publ. Math.*, 93 (2001), 145-159
- [10] J.Y. Briend, S. Cantat, and M. Shishikura. Linearity of the exceptional set for maps of $\mathbb{P}^k(\mathbb{C})$, *Math. Ann.* 330 (2004), no. 1, 39-43
- [11] H. Brolin Invariant sets under iteration of rational functions. *Ark. Mat.*, 6, p. 103-144, 1965.
- [12] L. Carleson and T. Gamelin. Complex Dynamics, *Univeristext Tracts in Mathematics*, Springer-Verlag, 1993
- [13] D. Cerveau, A. Lins Neto Hypersurfaces exceptionnelles des endomorphismes de $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 31 (2000), no. 2, 155-161.
- [14] E.M. Chirka Complex Analytic Sets. *Kluwer Academic Publishers, Dordrecht. The Netherlands*, 1989
- [15] J.P. Demailly. Monge-Ampère Operators, Lelong numbers and Intersection theory in Complex Analysis and Geometry, *Plenum Press* (1993), 115-193 (V. Ancona and A. Silva editors).

- [16] J.P. Demailly. Pseudoconvex-concave duality and regularization of currents. Several complex variables (Berkeley, CA, 1995-1996), 233-271, *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 37, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
- [17] J.P. Demailly Complex analytic geometry, available at www.fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly
- [18] J.P. Demailly. Potential Theory in several complex variables, *ICPAM Summer School of Complex Analysis, Nice France*, 1989.
- [19] G. De Rham. Differentiable manifolds, *Springer Verlag* (1984)
- [20] Robert Devaney. Chaos and fractals. The mathematics behind the computer graphics. *Keen L. Editors* (AMS, 1989)
- [21] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces, *Amer. J. Math.* 123 (2001), no. 6, 1135 - 1169.
- [22] Igor Dolgachev. Introduction to Algebraic Geometry, <http://www.math.lsa.umich.edu/~idolga/lecturenotes.html>
- [23] A. Eremenko. Value distribution and potential theory (2002). *Proceedings of the International Congress of Mathematicians* <http://www.math.purdue.edu/~eremenko/.dvi/icm2.ps>
- [24] A. Eremenko-M. Sodin. The value distribution of meromorphic functions and meromorphic curves from the point of view of potential theory, *Algebra i Analiz* 3:1 (1991)
- [25] Pierre Fatou. Sur les ´equations fonctionnelles, *Bull. Soc. math. France* 47 (1919), pp. 161-271; 48 (1920), pp. 33-94; 48 (1920), pp. 208-314.
- [26] Charles Favre. Points p´eriodiques d’applications birationnelles de P^2 , *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* 48 (1998), no. 4.
- [27] Charles Favre. Note on pull-back and Lelong number of currents. *Bull. Soc. Math. France* 127 (1999), 445-458.
- [28] Charles Favre. Multiplicity of holomorphic functions. *Math. Ann.* 316 (2000), 355-378.
- [29] Charles Favre. Dynamique des applications rationnelles. PhD thesis, *Universit´e de Paris-Sud, Orsay*, 2000.
- [30] C. Favre and V. Guedj. Dynamique des applications rationnelles des espaces multiprojectifs. *Indiana Univ. Math. J.*, 50 (2001), no. 2, 881 - 934.
- [31] Charles Favre and Mattias Jonsson. Brodin’s theorem for curves in two complex dimensions, *Ann. Inst. Fourier*, 53 (2003), no. 5, 1461-1501.
- [32] C. Favre and M. Jonsson. Valutive analysis of planar plurisubharmonic functions. *Invent. Math.* 162 (2005), no. 2, 271-311.
- [33] C. Favre and M. Jonsson. Eigenvaluations, *Ann. Sci. ´Ecole Norm. Sup.*, (4) 40 (2007), no. 2, 309-349.
- [34] H. Federer. Geometric Measure Theory, *Springer Verlag*, 1969

- [35] P. Fernández Notas de Fibrados Vectoriales y sus Clases Características. Notas de clase. *IMCA, Lima-Perú.*
- [36] Gerald Folland. Real Analysis. Modern techniques and their applications. Second Edition. *John Wiley and Sons, Inc.* 1999.
- [37] G.b. Folland and J.J. Kohn. The Neumann problem for the Cauchy-Riemann complex. *Princeton University Press*, 1972.
- [38] J.E. Fornæss and N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension I, *Astérisque* 222 (1994), 201 - 231
- [39] J.E. Fornæss and N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension II. *Modern Methods in complex Analysis, Ann Studies*, 137, 135-182.
- [40] J.E. Fornæss and N.Sibony. Fatou and Julia sets for entire maps in \mathbb{C}^k . *Math. Ann.* 311 (1998), no. 1, 27-40.
- [41] J.E. Fornæss and N.Sibony. Complex Dynamics. *CBMS Lecture Series. Albany, New York*, June 1994.
- [42] J.E. Fornæss and N. Sibony. Complex dynamics in higher dimension, Complex Potential Theory. *Ed. Paul M. Gauthier, Nato Asi. series Math and Phys. Sc* (1994) 131-186.
- [43] J.E. Fornæss and N. Sibony. Real Methods in Complex Dynamics. *CIME Lectures* (2002) Summer School. Martina Franca Italy.
- [44] H. Furstenberg. Recurrence in Ergodic Theory and Combinatorial Number Theory, *Princeton University Press*, (1981).
- [45] P. Griffiths and J. Harris. Principles of algebraic geometry, *John Wiley and Sons Inc., New York*, 1994.
- [46] Vincent Guedj. Equidistribution towards the Green current, *Bull. Soc. Math. France*, 131 (2003), no. 3, 359-372.
- [47] Vincent Guedj. Decay of volumes under iteration of meromorphic mappings, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 54 (2004), no. 7, 2369-2386.
- [48] R. Gunning. Introduction to Holomorphic Functions Several Variables, Vol. I : Function Theory. *Wadsworth and Brooks/Cole*, 1990.
- [49] R. Gunning. Introduction to Holomorphic Functions Several Variables, Vol. II: Local Theory. *Wadsworth and Brooks/Cole*, 1990.
- [50] P. R. Halmos. Measure theory. New York, *Van Nostrand*, 1950.
- [51] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. Inequalities. *Cambridge Mathematical Library.*
- [52] Joseph Harris. Algebraic Geometry: A First Course, *Springer-Verlag*, 1995.
- [53] R. Harvey and J. Polking. Extending analytic objects, *Comm. Pure Appl. Math.* 28 (1975). p. 701-727

- [54] R. Harvey and B. Shiffman. A characterization of holomorphic chains, *Ann. of Math.* (2) 99 (1974), p. 553-587
- [55] L. Hörmander. Notions of Convexity, *Birkhäuser*, 1994.
- [56] L. Hörmander. Introduction to complex analysis in several variables. *North Holland*, 1990.
- [57] L. Hörmander. The analysis of Linear partial differential operators I, *Springer-Verlag*, 1983
- [58] J. Hubbard and P. Papadopol. Superattractive fixed points in \mathbb{C}^n . *Indiana Univ. Math. J.* 43 (1994), 321–365.
- [59] J. Hubbard and P. Papadopol. Newton ´s method applied to two quadratic equations in \mathbb{C}^2 viewed as a global dynamical system. *Memoirs of the AMS* 891.
- [60] Gaston Julia. Memoires sur l’iteration des fonctions rationnelles. Oeuvres de Gaston Julia, *Gauthier-Villars*, Vol. I, Paris, 1968, pp. 121-319.
- [61] A. Katok and B. Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems, *Encycl. of Math. and its Appl.* 54, *Cambridge Univ. Press.*, 1995
- [62] C. O. Kiselman. Ensembles de sous-niveau et images inverses des fonctions plurisousharmoniques. *Bull. Soc. Math. France* 124 (2000), 75-92.
- [63] C.O. Kiselman. Plurisubharmonic functions and potential theory in several complex variables. *Development of mathematics 1950-2000*, 655-714, *Birkhäuser*, Basel, 2000.
- [64] C.O. Kiselman Attenuating the singularities of plurisubharmonic functions. *Ann. Polon. Math.* 60 (1994), 173-197.
- [65] M. Klimek. Pluripotential theory. *Oxford University Press*, 1991.
- [66] John J. Kohn. Solution of the $\bar{\partial}$ -Neumann problem on strongly pseudo-convex manifolds, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 47, 1961, 1198-1202.
- [67] John J. Kohn. Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, I, *Annals of Mathematics*, 78, 1963, 112-148.
- [68] John J. Kohn. Harmonic integrals on strongly pseudo-convex manifolds, II, *Annals of Mathematics*, 79, 1964, 450-472.
- [69] Stephen Krantz. Function Theory of Several Complex Variables, *Wadsworth and Brooks/Cole*, 1992.
- [70] Ernst Kunz. Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry. *Birkhäuser*, Boston; 1st edition
- [71] Pierre Lelong. Fonctions plurisousharmoniques et formes differentielles positives, *Dunod*, 1968.
- [72] Pierre Lelong. Integration sur un ensemble analytique complexe, *Bull. Soc. Math. France* 85 (1957), 239-260.
- [73] Pierre Lelong Sur la structure des courants positifs fermés, Séminaire P. Lelong (Analyse), années 1975/1976. *Lecture Notes in Math.* 578, pp. 136-156. Springer: Berlin. 1977.

- [74] P. Lelong, L. Gruman. Entire functions of several complex variables. *Springer-Verlag, Berlin*, 1986.
- [75] S. Lojasiewicz. Introduction to complex analytic geometry. *Birkhäuser Verlag*, Basel, 1991.
- [76] S. Lojasiewicz. Ensembles semi-analytiques. *Institut des Hautes Etudes Scientifiques*. Juillet 1965.
- [77] M.Y. Lyubich. Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere. *Ergodic Th. and Dynam. Syst.*, 3, p. 351-385, 1983.
- [78] R.S. Mac Kay and C. Tresser. Boundary of topological chaos for bimodal maps of the interval. *J. London Mathematical Society* 37 (1988)164-181.
- [79] Maltsev A.I. Fundamentos de Álgebra Lineal, *Mir, Moscu*.
- [80] Ricardo Mañé. Introducao à Teoría Ergódica, IMPA, *Projeto Euclides, Rio de Janeiro*, 1983.
- [81] Ricardo Mañé. On the uniqueness of the maximizing measure for rational maps, *Bol. Soc. Bras. Math.* 14.1 (1983), 27-43.
- [82] Ricardo Mañé, Alexandre Freire and Artur Lopes. An invariant measure for rational maps, *Bol. Soc. Bras. Math.* 14.1 (1983), 45-62.
- [83] John Milnor. Dynamics in one complex variable: introductory lectures. *Stony Brook Preprint* (1990)
- [84] John Milnor. Dynamics.Introductory Lectures.
<http://www.math.sunysb.edu/~jack/DYNOTES/>
- [85] S. Morosawa, Y. Nishimura, M. Taniguchi, and T. Ueda. Holomorphic dynamics, *Vol. 66 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge* (2000).
- [86] D. Mumford. Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties, *Springer-Verlag New York*, 1975.
- [87] D. Mumford. The Red Book of Varieties and Schemes, in Lecture Notes in Mathematics 1348, *Springer-Verlag* 1988.
- [88] J. Noguchi and T. Ochiai. Geometric function theory in several complex variables, *Vol. 80 of Translations of Mathematical Monographs, American Mathematical Society, Providence, RI* (1990).
- [89] Junjiro Noguchi. Introduction to Complex Analysis. *AMS Mathematical Monographs* 168.
- [90] T. Ohsawa and K. Takegoshi. On the extension of L^2 holomorphic functions. *Math. Zeitschrift* 195 (1987), 197-204.
- [91] Mark Pollicot, Michiko Yuri. Dynamical systems and ergodic theory. *Cambridge Univ. Press*, 1998.

- [92] Thomas Ransford. Potential Theory in the Complex Plane, London Math Society Student Texts No. 28, *Cambridge University Press*, 1995.
- [93] R.T. Rockefeller. Convex Analysis, *Princeton Univ. Press* 1970.
- [94] A. Russakovskii and B. Shiffman. Value distribution for sequences of rational mappings and complex dynamics, *Indiana Univ. Math. J.*, 46 (1997), no. 3, 897-932
- [95] A. Russakovskii, M. Sodin. Equidistribution for sequences of polynomial mappings. *Indiana Univ. Math. J.* 44 (1995), 850882.
- [96] Walter Rudin. Function theory in the unit ball of \mathbb{C}^n . *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 241*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980,
- [97] Walter Rudin. Functional Analysis. *Mc Graw Hill Higher Education* 1991.
- [98] A. Sadullaev. Plurisubharmonic measures and capacities on complex manifolds 1981 *Russ. Math. Surv.* 36 61-119.
- [99] L. Schwartz. Théorie des distributions, *Hermann* (1966)
- [100] E.M. Shabat. Introduction to complex analysis. Part II, 3rd ed. (Nauka, Moscow), 1985; *English transl. Amer. Math. Soc., Providence, RI*, 1992
- [101] E.M. Shabat. Distribution of values of holomorphic mappings. *Translations of Mathematical Monographs, 61. American Mathematical Society, Providence, RI*, 1985.
- [102] Nessim Sibony. Exposés a Orsay non publiés (1981). *Cours UCLA* (1984).
- [103] Nessim Sibony. Dynamique des applications rationnelles de \mathbb{P}^k . *Panoramas et Synthèses* (1999) 97-185.
- [104] Nessim Sibony. Montreal Sibony's Conference (1996). <http://www.math.lsa.umich.edu/~fornaess/complexdynamics.html>.
- [105] Y. T. Siu. Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Invent. Math.*, 27 (1974), 53-156.
- [106] Henri Skoda. Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans \mathbb{C}^n . *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 100 (1972), p. 353-408.
- [107] David Sullivan. Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I. *Solution of the Fatou-Julia problem on wandering domains. Annals of Math.* 122.(1985)401-418.
- [108] Tatsuo Suwa. Indices of Vector Fields and Residues of Singular Holomorphic Foliations. *Hermann, Editeurs des Sciences et des Arts*. 1998.
- [109] E. Szemerédi. On sets of integers containing no four elements in arithmetic progression, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 20 (1969), 89-104.
- [110] E. Szemerédi, On sets of integers containing no k elements in arithmetic progression. *Acta Arith.* 27 (1975), 299-345.
- [111] Terence Tao. The ergodic and combinatorial approaches to Szemerédi's theorem. <http://front.math.ucdavis.edu/math.CO/0604456>

- [112] M. Tsuji Potential theory in modern function theory. *Mazuren*, 1959.
- [113] P. Tortrat Aspects potentialistes de l'itération des polynômes, Séminaire de Théorie du Potentiel, *Paris, No. 8, Vol. 1235 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin* (1987). 195-209.
- [114] T. Ueda. Complex dynamical systems on projective spaces, *Surikaisekikenkyusho Kokyuro-ka no. 814* (1992), 169 - 186.
- [115] T. Ueda. Critical orbits of holomorphic maps on projective spaces, *J. Geom. Anal. 8* (1998), 319 - 334
- [116] T. Ueda Fatou sets in complex dynamics on projective spaces. *J. Math. Soc. Japan*, 46, p. 545-555, 1994.
- [117] P. Walters. An Introduction to Ergodic Theory, Graduate Texts in Mathematics, 79, *Springer-Verlag*, 1982
- [118] H. Whitney Complex Analytic Varieties. *Addison-Wesley, Philippines*, 1972.
- [119] J. Wiergerinck, J. Korevaar Several Complex Variables. Lecture Notes. <http://staff.science.uva.nl/~janwieg/edu/scv/scv.pdf>