

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS**

SECCION DE POST-GRADO Y 2DA. ESPECIALIZACION PROFESIONAL



**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
Mención Energía Nuclear**

**APLICACION DEL METODO PERTURBATIVO
DIFERENCIAL AL ANALISIS DE SENSIBILIDAD
EN PROBLEMAS DE GOLPE DE ARIETE
EN REDES HIDRAULICAS**

**PRESENTADA POR:
ALBERTO GALLARDO PADILLA**

LIMA - PERU

1997

Dedicado a mi padre

AGRADECIMIENTOS

- A mis directores, Jorge Baliño y Axel Larreteguy, por los conocimientos brindados y el apoyo constante en la realización de la presente tesis.
- A los integrantes del Grupo de Termohidráulica: a José Converti, el Jefe, por la amplia libertad en el desarrollo del trabajo, a Mario Scheble, Darío Delmastro, Luis Juanicó, Pablo Carrica, Cristina Strizzolo y Osvaldo Azpitarte, por el ambiente amable que me proporcionaron.
- A Viviana Masson, Daniel Mateos y Ernesto Gandolfo por los “mates” que compartimos.
- A la Comisión Nacional de Energía Atómica (CNEA) de Argentina por proporcionarme la beca para la realización de la presente tesis en Argentina.
- Al Centro Atómico Bariloche (CAB) e Instituto Balseiro por el apoyo de su personal y facilidades materiales.
- A la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería (UNI) de Perú y al Instituto Peruano de Energía Nuclear (IPEN) por la formación que me brindaron.
- Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONCYTEC) de Perú por proporcionarme la beca para cursar la maestría en Perú.

INDICE

CONTENIDO	PAGINA
RESUMEN	
ABSTRACT	
1. INTRODUCCION	
1.1. GENERALIDADES	
1.2. JUSTIFICACION DEL PRESENTE TRABAJO	2
1.3. ANTECEDENTES	2
1.4. OBJETIVOS	3
1.5. CONTENIDOS DE LA TESIS	3
2. MARCO TEORICO	5
2.1. EL FORMALISMO DEL METODO PERTURBATIVO DIFERENCIAL PARA EL ANALISIS DE SENSIBILIDAD	5
2.1.1. El Problema Directo	5
2.1.2. El Problema Derivado	6
2.1.3. El Problema Adjunto . El Concomitante Bilineal	7
2.1.4. Análisis de Sensibilidad . El Funcional de respuesta	8
2.2. ECUACIONES DEL GOLPE DE ARIETE EN REDES HIDRAULICAS	9
2.2.1. Definición del Problema	9
2.2.2. Ecuaciones del problema Directo	11

4.4.4. Discretizacion Espacio-temporal	50
4.4.5. Ecuaciones Discretizadas	51
4.4.5.1. Paso Intermedio	51
4.4.5.2. Paso Final	53
4.4.6. Programa ADWHAT	54
4.5. LOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD	55
4.5.1. Ecuaciones Discretizadas	55
4.5.2. Programa SANWHAT	55
5. RESULTADOS	56
5.1. INTRODUCCION	56
5.2. DATOS CASO EJEMPLO	57
5.3. RESULTADOS PROBLEMA DIRECTO	58
5.4. RESULTADOS PROBLEMA ADJUNTO	61
5.5. ANALISIS DE RESULTADOS DEL PROBLEMA ADJUNTO	61
5.6. RESULTADOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD	80
6. OBSERVACIONES, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	82
6.1. EL PROBLEMA DIRECTO	82
6.2. EL PROBLEMA DERIVADO	83
6.3. EL PROBLEMA ADJUNTO	84
6.4. LOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD	85
6.5. LA FUNCION IMPORTANCIA	85
6.6. CONCLUSIONES FINALES	86
6.7. PERSPECTIVAS	87

7. ANEXOS	88
ANEXO 1: CONDICIONES DE CONTORNO DIRECTAS, DERIVADAS Y ADJUNTAS Y COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD PARA DIFERENTES TIPOS DE COMPONENTES	88
ANEXO 2: EJEMPLO DE DETERMINACION DE LOS VALORES ADJUNTOS EN EL NODO DE REFERENCIA CUANDO ES EXTREMO DE UN TRAMO Y VALORES A PROPAGAR EN $t = T^-$	106
ANEXO 3: ANALISIS DE LA FUNCION IMPORTANCIA	109
ANEXO 4: TRABAJO A SER PRESENTADO EN EL XI ENFIR (BRASIL): “ THE IMPORTANCE FUNCTION IN WATERHAMMER PROBLEMS ”	117
8. BIBLIOGRAFIA	123

RESUMEN

En este trabajo se generaliza la aplicación del método perturbativo diferencial al análisis de sensibilidad en problemas de golpe de ariete para redes hidráulicas complejas y se analiza la función importancia.

El formalismo del método, en síntesis, consiste en formular un problema directo, su problema derivado y su correspondiente problema adjunto.

El “problema directo” que tratamos es el fenómeno de golpe de ariete. Partimos de sus ecuaciones clásicas: la ecuación de momento (en la que se considera el término de fricción) y la ecuación de continuidad (en la que se considera el acoplamiento de la compresibilidad del fluido y la elasticidad de la tubería). Las condiciones de borde están dadas por las condiciones iniciales (en nuestro caso analizaremos un estado estacionario) y las condiciones de contorno (en las componentes hidráulicas). Las variables de estado (las variables dependientes) son la altura piezométrica y la velocidad, mientras que el espacio de las fases (variables independientes) está dado por la posición y el tiempo.

El problema derivado se obtiene al derivar las ecuaciones y condiciones de borde directas respecto a un determinado parámetro (constante física o adimensional) que se puede encontrar en las ecuaciones y/o condiciones de borde directas. Las variables derivadas resultan ser las derivadas de las variables de estado respecto a dicho parámetro.

El problema adjunto se obtiene a partir del problema derivado y de la definición dada por el formalismo, de donde resultan las ecuaciones adjuntas y el concomitante bilineal. Las condiciones de borde adjuntas se eligen de tal manera de simplificar la evaluación del concomitante bilineal. Las variables adjuntas constituyen lo que denominaremos la función importancia.

En el presente estudio se analiza la variación de los funcionales de respuesta, los cuales en nuestro caso son la altura piezométrica y la velocidad en una posición y tiempo

predeterminados, respecto a la variación de algún parámetro. Se obtienen mediante este análisis los llamados coeficientes de sensibilidad.

Para la solución de las ecuaciones directas, debido a su naturaleza hiperbólica y no lineal, se utilizó el método de las características y una posterior discretización en el espacio de las fases (posición y tiempo). Como herramienta de resolución de las ecuaciones de golpe de ariete se utilizó el programa **WHAT (Waterhammer Analysis in Tubes)**.

Para la solución de las ecuaciones adjuntas también se utilizó el método de las características, siendo la posterior discretización similar a la del problema directo. Para la resolución se utilizó un paso temporal intermedio. Para la resolución del problema adjunto se desarrolló el programa **ADWHAT (Adjoint Waterhammer Analysis in Tubes)**.

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad por aplicación del método perturbativo, se desarrolló el programa **SANWHAT (Sensitivity Analysis for WHAT)**.

Como ejemplo de aplicación se consideró una red de cierta complejidad en la que se tiene varios tipos de componentes hidráulicos, así como ramas de tuberías. Se calcularon coeficientes de sensibilidad en tres puntos pertenecientes a tramos distintos de la red, para el tiempo en que la altura de presión es máxima. Los resultados de los coeficientes de sensibilidad obtenidos por aplicación del método perturbativo tienen un buen acuerdo con los obtenidos en base a los resultados del problema directo.

Por otro lado, de los resultados obtenidos, se encuentra que la función importancia cuantifica el peso de los resultados del problema directo en toda posición y tiempo en el funcional de respuesta.

En el análisis de la función importancia se determinaron coeficientes de reflexión y transmisión para las variables adjuntas. Esto muestra que la función importancia se propaga en los componentes en forma análoga a lo que sucede en el problema directo.

ABSTRACT

In this work the application of the differential perturbative method to the sensitivity analysis in waterhammer problems for complex hydraulic networks was generalized. The differential perturbative method involves the formulation of a direct problem, a derived problem and its corresponding adjoint problem.

In the direct problem, we started from the waterhammer equations, taking into account the friction term and the elasticity of the pipes. The state variables includes the piezometric height and the velocity, while the phase variables includes the axial position and time. The generalized boundary conditions are given by the initial conditions and the conditions stated at the different hydraulic components.

The derived problem was obtained by taking the partial derivative of the direct problem (direct equations, boundary conditions, state variables) with respect to a given parameter.

From the derived problem and the definition of the adjoint (importance) function, the adjoint equations and the bilinear concomitant were obtained. The adjoint boundary conditions were chosen in order to simplify the evaluation of the bilinear concomitant. In this work the instantaneous values of the piezometric head and the velocity were chosen as response functionals.

The direct problem was solved with the aid of the computer code **WHAT** (**Waterhammer Analysis in Tubes**). In this program, the method of characteristics was used, and the direct equations were discretized in space and time.

The adjoint problem was solved in a similar fashion. The computer code **ADWHAT** (**Adjoint Waterhammer Analysis in Tubes**) was developed.

For the calculation of the sensitivity coefficients, the computer code **SANWHAT** (**Sensitivity Analysis for WHAT**) was developed.

As an example, a complex hydraulic network was considered. The sensitivity coefficients were calculated for different locations and parameters in the network, using both the adjoint function and the perturbed direct problem. The agreement between the sensitivity coefficients calculated in this way is satisfactory.

In the analysis of the adjoint function the corresponding reflection and transmission coefficients were determined for different components. In this way, an analogy can be established with respect to the direct problem.

1. INTRODUCCION

1.1 GENERALIDADES

Las grandes instalaciones industriales y de servicios (alimentación de agua, generación de energía eléctrica, etc.), particularmente las centrales nucleares, tienen redes hidráulicas, sea como un sistema principal o auxiliar, donde a medida que la tecnología ha avanzado se han construido equipos (componentes hidráulicos) cada vez más grandes que trabajan a altas presiones y altas velocidades, por lo que los problemas con transitorios hidráulicos tienen gran importancia. Los transitorios hidráulicos se pueden deber al ajuste de una válvula en un sistema de tuberías, al paro de una bomba, o a las operaciones normales de arranque, parada y a los cambios de carga. En estos casos se producen ondas de presión en la red hidráulica, fenómeno conocido como golpe de ariete (Streeter [21]).

Este fenómeno del golpe de ariete produce altas presiones y depresiones debido a la inercia del flujo y propiedades de compresibilidad del fluido circulante acoplados con las propiedades elásticas de los conductos. El golpe de ariete produce además ruido excesivo, fatiga, desgaste debido a la cavitación y falla en la operación de los circuitos de control. También, debido al período inherente de algunos sistemas de tuberías, las vibraciones resonantes pueden originar tensiones inadmisibles en las tuberías e incluso ocasionar la destrucción de partes del sistema (Chaudhry [9], Kohn [13] y Streeter [21]).

Por lo tanto, el conocimiento del fenómeno de golpe de ariete tiene gran importancia para el diseño de la construcción, operación y seguridad de las instalaciones con redes hidráulicas (Chaudhry [9]). El diseño de la construcción debe prever un dimensionamiento adecuado de las tuberías para soportar los incrementos de presión, así como componentes para amortiguar el efecto de las ondas de presión (válvulas de alivio, tanques de amortiguación, etc.). El diseño de la operación debe garantizar una operación segura durante los transitorios que se producen en las operaciones normales. El diseño de los sistemas de seguridad debe contemplar los circuitos de control y prever las medidas a tomar en caso de accidentes por golpe de ariete.

1.2. JUSTIFICACION DEL PRESENTE TRABAJO

Para el conocimiento de los posibles efectos del golpe de ariete se han confeccionado códigos computacionales (Streeter [20] y [21], Chaudhry [9], Larreteguy *et al.* [14]) que simulan el fenómeno, en cuyo cálculo se han utilizado una gran cantidad de parámetros (constantes físicas o adimensionales) por lo que los resultados obtenidos dependen de los valores adoptados por estos parámetros.

Luego, para determinar la respuesta de interés ante la variación de algún parámetro, se hace necesario realizar un *análisis de sensibilidad*. La metodología utilizada actualmente en cálculos de sensibilidad consiste en la ejecución de los códigos computacionales sucesivas veces para construir lo que se denomina una *superficie de respuesta*, esto es, obtener el comportamiento de la respuesta en función de los parámetros de entrada. Debido al gran número de parámetros que pueden provocar cambios en la respuesta de interés y a la complejidad de los modelos, el estudio de sensibilidad utilizando esta metodología se torna lento, costoso y a veces impracticable (Andrade Lima [4]).

Por lo tanto es necesario encontrar un método más apropiado al análisis de sensibilidad. La reducción de costos computacionales relativos a los cálculos de sensibilidad, así como una mayor eficiencia del analista, pueden conseguirse con el uso del método perturbativo diferencial.

De allí la importancia que tiene el presente trabajo que extiende el desarrollo del formalismo del *método perturbativo diferencial* aplicado al análisis de sensibilidad en redes hidráulicas.

1.3. ANTECEDENTES

Los métodos perturbativos se vienen aplicando al análisis neutrónico y termohidráulicos de las centrales nucleares desde la década de los 70 con buenos resultados (Cacuci *et al.* [8], Gandini [10], [11], [12], Oblow [16], [17]). Y recientemente, utilizando el método

perturbativo diferencial para el análisis de problemas en centrales nucleares: Andrade Lima [1], [2], [3] y [4] , y Baliño *et al.* [6] y [7].

Recientemente Lorenzo [15] en su Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, desarrolló el formalismo aplicado a un solo tramo de tubería conectado uno de sus extremos a un reservorio y el otro a una válvula con extremo de altura constante.

1.4. OBJETIVOS

- Desarrollar la generalización del formalismo del método perturbativo diferencial a redes hidráulicas complejas (con componentes hidráulicos conectados a más de un tramo).
- Determinar las condiciones de contorno adjuntas.
- Resolver el problema adjunto.
- Resolver la integral espacial del concomitante bilineal.
- Determinar los coeficientes de sensibilidad.
- Analizar la función importancia (las variables adjuntas).

1.5. CONTENIDO DE LA TESIS

La presente tesis contiene el desarrollo teórico del formalismo del método perturbativo diferencial aplicado al análisis de sensibilidad en problemas de golpe de ariete en redes hidráulicas así como su resolución numérica.

Primeramente, en el capítulo 1 se describe el fenómeno de golpe de ariete, se dan la justificación, antecedentes, objetivos y contenidos del presente trabajo. En el capítulo 2, introduciremos el formalismo del método perturbativo diferencial y el problema del golpe de ariete. En el capítulo 3, desarrollaremos la aplicación del formalismo para obtener las ecuaciones y condiciones de borde adjuntas; además, desarrollaremos el concomitante bilineal y obtendremos las expresiones de los coeficientes de sensibilidad. En el capítulo 4,

se considera la resolución numérica aplicando el método de las características y planteamos las ecuaciones correspondientes por diferencias finitas. En el capítulo 5, se tendrán los resultados para un caso ejemplo. Finalmente en el capítulo 6 se tendrán los comentarios, conclusiones y perspectivas del presente trabajo.

En el anexo 1 se hace el desarrollo de las condiciones de contorno y de los coeficientes de sensibilidad para los diferentes tipos de componentes. Se desarrollan aquí temas correspondientes al capítulo 3, en el que se dan las expresiones generales.

En el anexo 2 se muestra un ejemplo de cómo se determinan los valores adjuntos en los nodos de los componentes (nodos extremos de los tramos) y valores adjuntos a propagar para el caso de una componente del tipo pérdida concentrada, cuando el nodo de referencia es un nodo extremo de algún tramo.

En el anexo 3 se hace un análisis de la función importancia, el cual nos sirve para analizar los resultados del problema adjunto mostrados en el capítulo 5.

En el anexo 4 se muestra el trabajo relacionado con esta tesis, a ser presentado en el XI ENFIR (Brasil, agosto 1997).

2. MARCO TEORICO

2.1. EL FORMALISMO DEL METODO PERTURBATIVO DIFERENCIAL PARA EL ANALISIS DE SENSIBILIDAD

2.1.1. El Problema Directo

Consideremos el problema general de un sistema de K ecuaciones no lineales acopladas (Andrade Lima *et al.* [4]). Es posible escribir este sistema formalmente como:

$$\vec{m} \equiv \vec{m}(\vec{f}, \vec{p}, \vec{r}) \equiv [m_1, m_2, \dots, m_K] = \vec{0} \quad (2.1)$$

Las condiciones de borde de estas ecuaciones pueden ser escritas como:

$$\vec{C} \equiv \vec{C}(\vec{f}, \vec{p}, \vec{r}) = \vec{0} \quad \text{en } r \equiv r_c \quad (2.2)$$

donde:

\vec{r}_c denota algún punto en la superficie de contorno.

$$\vec{f} \text{ es el vector de variables de estado : } \vec{f} \equiv \vec{f}(\vec{p}, \vec{r}) \equiv [f_1, f_2, \dots, f_K] \quad (2.3)$$

$$\vec{p} \text{ es el vector de parámetros de entrada : } \vec{p} \equiv \vec{p}(\vec{r}) \equiv [p_1, p_2, \dots, p_K] \quad (2.4)$$

$$\vec{r} \text{ es el vector de posición generalizada : } \vec{r} \equiv [r_1, r_2, \dots, r_N] \quad (2.5)$$

t es el superíndice de traspuesta.

Los vectores \vec{m} y \vec{C} incluyen en general las ecuaciones que relacionan a las variables de estado, los parámetros de entrada y las variables independientes contenidas en el vector de posición. Las componentes m_i ($i=1, 2, \dots, K$) son funciones no lineales de \vec{f} ; este sistema de ecuaciones representa las ecuaciones directas.

El vector \vec{r} de posición generalizada usualmente comprende la posición y el tiempo (en problemas no estacionarios), mientras que, el vector \vec{p} de parámetros usualmente involucra constantes físicas contenidas tanto en las ecuaciones directas como en las condiciones de contorno.

2.1.2. El Problema Derivado

Expandiendo la ecuación perturbada (aquí denotada con el símbolo $\bar{\cdot}$), esto es :

$$\bar{m}'(\vec{f}', \vec{p}', \vec{r}) = \bar{0} \quad (2.6)$$

hasta el primer orden en torno a una solución de referencia \vec{f} (unívocamente determinada, dado que los parámetros son conocidos) se obtiene:

$$\delta \bar{m} \equiv \bar{m}'(\vec{f}', \vec{p}', \vec{r}) - \bar{m}(\vec{f}, \vec{p}, \vec{r}) = \sum_{i=1}^l \delta p_i \left(\frac{\partial \bar{m}}{\partial p_i} + \frac{\partial \bar{m}}{\partial \vec{f}} \cdot \frac{\partial \vec{f}}{\partial p_i} \right) = \bar{0} \quad (2.7)$$

Definimos :

$$\vec{f}_{,i} \equiv \frac{\partial \vec{f}}{\partial p_i} \quad \bar{S}(i) \equiv -\frac{\partial \bar{m}}{\partial p_i} \quad (2.8)$$

y \underline{H} el operador derivado como :

$$\underline{H} \equiv \frac{\partial \bar{m}}{\partial \vec{f}} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial f_K} \\ \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial f_K} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \bar{m}_K}{\partial f_1} & \frac{\partial \bar{m}_K}{\partial f_2} & \dots & \frac{\partial \bar{m}_K}{\partial f_K} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

donde $\frac{\partial}{\partial \vec{f}}$ es la derivada de Frechet (Saaty [19]).

Dado que las perturbaciones δp_i (consideradas independientes) son arbitrarias, es necesario para que se cumpla la expresión (2.7) que

$$\underline{H}\tilde{f}_{ii} = \tilde{S}(i) \quad (2.10)$$

Esta expresión constituye el sistema de ecuaciones derivadas. Y las condiciones de borde para las ecuaciones derivadas se obtienen derivando la expresión (2.2), de donde :

$$\frac{\partial \tilde{C}}{\partial p_i} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \tilde{f}} \tilde{f}_{ii} = 0 \quad \text{en } \bar{r} \equiv \bar{r}_c \quad (2.11)$$

2.1.3. El Problema Adjunto. El Concomitante Bilineal

Se define el operador \underline{H}^* , adjunto de \underline{H} (Andrade Lima [4]), por la expresión :

$$\langle \tilde{f}_{ii} \cdot (\underline{H}^* \cdot \tilde{f}^*) \rangle = \langle \tilde{f}^* \cdot (\underline{H} \cdot \tilde{f}_{ii}) \rangle + P \quad (2.12)$$

donde :

$$\tilde{f}^* \equiv [f_1^*, f_2^*, \dots, f_k^*] \quad \text{es el vector adjunto de } \tilde{f}. \quad (2.13)$$

$$\langle (\cdot) \rangle \equiv \int \dots \int (\cdot) dr_1 \dots dr_N \quad \text{es la integral en todo el espacio de las fases.} \quad (2.14)$$

$$P \equiv P(\tilde{f}_{ii}, \tilde{f}^*) \quad \text{es el concomitante bilineal.} \quad (2.15)$$

En base a la definición dada en (2.12) se define el problema adjunto, con

$$\text{ecuaciones adjuntas :} \quad \underline{H}^* \cdot \tilde{f}^* = \tilde{S}^+ \quad (2.16)$$

y condiciones de borde adjuntas $\bar{C}^*(\bar{f}^*) = \bar{0}$ (2.17)

donde :

\bar{S}^+ es el vector de funciones de peso : $\bar{S}^+ = [S_1^+, S_2^+, \dots, S_k^+]$ (2.18)

El concomitante bilineal P es lineal tanto en \bar{f}^* y en $\bar{f}_{/i}$. Veremos más adelante que las condiciones de borde adjuntas se obtienen al simplificar convenientemente de la expresión del concomitante bilineal los términos en $\bar{f}_{/i}$.

La ecuación dada por (2.12) puede ser reescrita considerando las expresiones dadas en (2.10) y (2.16) de las ecuaciones derivadas y adjuntas como

$$\langle \bar{f}_{/i} \cdot \bar{S}^+ \rangle = \langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle + P \quad (2.19)$$

2.1.4. Análisis de Sensibilidad . El Funcional de Respuesta

Para dar forma final a las ecuaciones adjuntas, según la expresión (2.16) es necesario determinar el vector de funciones de peso \bar{S}^+ , el cual depende del funcional de respuesta R a analizar.

Consideremos un funcional de respuesta R definido por :

$$R = \langle \bar{S}^+ \cdot \bar{f} \rangle \quad (2.20)$$

El análisis de sensibilidad consiste en evaluar la variación δR resultante de perturbaciones δp_i ($i = 1, 2, \dots, I$) en los parámetros del sistema.

La variación de R , obtenida a partir de la ecuación (2.20), esta dada por :

$$\delta R = \sum_{i=1}^I \delta \varphi_i \left[\langle \bar{S}^+_{/i} \cdot \bar{f} \rangle + \langle \bar{S}^+ \cdot \bar{f}_{/i} \rangle \right] \quad (2.21)$$

donde :

$$\bar{S}^+_{/i} = \frac{\partial \bar{S}^+}{\partial \varphi_i} \quad (2.22)$$

Sustituyendo (2.19) en (2.21) resulta finalmente :

$$\delta R = \sum_{i=1}^I \delta \varphi_i \left[\langle \bar{f} \cdot \bar{S}^+_{/i} \rangle + \langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle + P(\bar{f}^*, \bar{f}_{/i}) \right] \quad (2.23)$$

2.2. ECUACIONES DEL GOLPE DE ARIETE EN REDES HIDRAULICAS

2.2.1. Definición del Problema

Se estudiará el estado transitorio de las ondas de presión generadas por variaciones de algunos parámetros de una red hidráulica formada por tramos conectados entre sí a través de componentes hidráulicos (extremos abiertos o cerrados, válvulas, bombas, etc.). Las condiciones de borde estarán dadas por las condiciones iniciales correspondientes al estado estacionario y las condiciones de contorno de los tramos estarán dadas por los componentes.

Se considerarán las siguientes hipótesis simplificativas

- a) Flujo unidimensional, por lo que las ecuaciones a utilizar se hallan integradas en el plano normal al eje del conducto. La distribución de velocidad es uniforme en la sección del conducto.
- b) Conducto linealmente elástico, lo que implica que la deformación es directamente proporcional al esfuerzo.

c) Flujos monofásicos, en fase líquida. Esto hace que se simplifique en gran medida el tratamiento del problema dado que solo intervienen las ecuaciones de conservación de la masa y del momento lineal.

d) Condiciones isotérmicas, esto es, las propiedades del fluido son constantes.

Para obtener las ecuaciones diferenciales del flujo transitorio en una tubería, se aplican las ecuaciones de conservación de la masa y conservación del impulso lineal a un volumen de control del fluido entre dos secciones transversales separadas entre sí una distancia pequeña dx , y se plantean las ecuaciones en la dirección axial de la tubería (Ver figura 2.1).

Las variables de estado serán la altura piezométrica H y la velocidad promedio V en una sección transversal. El vector de posición generalizada, de variables independientes, está constituido por la posición x a lo largo de la tubería, medida desde el extremo aguas arriba de la línea, y el tiempo t , de esta manera se tiene :

$$H \equiv H(x,t) \qquad V \equiv V(x,t) \qquad (2.24)$$

La altura piezométrica está definida como (Streeter [20]):

$$H = \frac{p}{\rho g} + z \qquad (2.25)$$

donde :

$p \equiv p(x,t)$ es la presión

ρ es la densidad (constante)

g es la aceleración de la gravedad

z es la altura respecto a un nivel de referencia

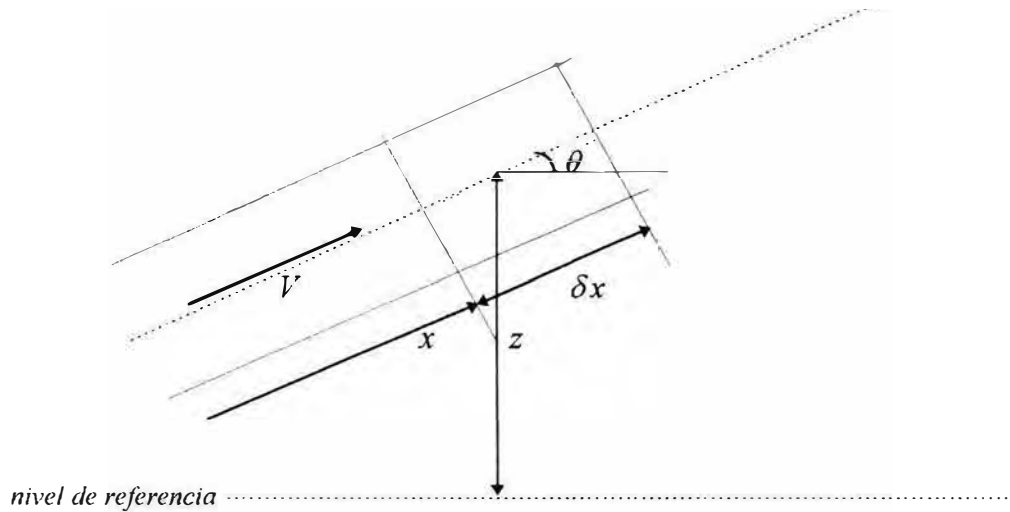


FIGURA 2.1
Volumen de control

2.2.2. Ecuaciones del Problema Directo

Las ecuaciones resultan de aplicar la ecuación de continuidad y la ecuación de movimiento , y estas son respectivamente (Streeter [21]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + g \operatorname{sen} \theta + \zeta \frac{V|V|}{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

En estas ecuaciones no se han considerado los términos convectivos $V \frac{\partial p}{\partial x}$ y $V \frac{\partial V}{\partial x}$ por ser muy pequeños respecto a los demás términos, y usualmente en las aplicaciones de golpe de ariete son despreciados.

De (2.25) se tiene que (Streeter [20]):

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) = \rho g \left(\frac{\partial H}{\partial x} - \text{sen } \theta \right) \quad (2.27)$$

de donde las ecuaciones (2.26) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\alpha^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \zeta \frac{V|V|}{2D} &= 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Estas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, acoplado y no lineal (debido al término de fricción). Por lo general este tipo de sistema no tiene solución analítica. Debido a que los autovalores de este sistema son reales, resulta un sistema hiperbólico, por lo que recurriremos a los métodos numéricos para su resolución, en este caso al método de las características.

En las ecuaciones (2.28) se debe tener en cuenta que :

D es el diámetro de la tubería.

α es la velocidad de propagación, que depende de las propiedades elásticas del fluido y del material del conducto, además del tipo de empotramiento del conducto. Esta dado por (Parmakian [18]):

$$a = \left[\rho \left(\frac{1}{K} + \frac{C_1 D}{e E} \right) \right]^{-1/2} \quad (2.29)$$

en la que :

K es el módulo de elasticidad volumétrica.

C_1 es un coeficiente adimensional el cual está relacionado con el tipo de empotramiento de la tubería.

e es el espesor de la pared del conducto.

E es el módulo de elasticidad de Young para el material del tubo.

ζ es el factor de fricción dado por las relaciones siguientes (White [22]):

$$\text{para flujo laminar } Re_d < 2000 : \quad \zeta = \frac{64}{Re_d} \quad (2.30)$$

$$\text{para flujo turbulento } Re_d > 4000 : \quad \zeta = \left[-1.8 \log_{10} \left(\frac{6.9}{Re_d} + \left(\frac{\varepsilon/D}{3.7} \right)^{1.11} \right) \right]^{-2} \quad (2.31)$$

donde :

ε es la rugosidad absoluta de la tubería (ε/D : rugosidad relativa).

Re_d es el número de Reynolds dado por :

$$Re_d = \frac{\rho |V| D}{\mu} \quad (2.32)$$

μ es el coeficiente de viscosidad absoluta.

3. DESARROLLO DEL METODO PERTURBATIVO DIFERENCIAL PARA EL ANALISIS DE SENSIBILIDAD EN PROBLEMAS DE GOLPE DE ARIETE EN REDES HIDRAULICAS

3.1. DESARROLLO DEL FORMALISMO

3.1.1 El Problema Directo

De acuerdo con el formalismo visto en la sección 2.1., el sistema de ecuaciones directas dado en (2.28) se escribirá de la siguiente manera

$$\bar{m} = [m_1, m_2]^t \quad (3.1)$$

donde :

$$\begin{aligned} m_1 &\equiv \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ m_2 &\equiv g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \zeta \frac{V|V|}{2D} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

En nuestro problema tenemos que

$\bar{f} \equiv [H, V]^t$ es el vector de estado, donde H es la altura piezométrica y V la velocidad.

$\bar{r} \equiv [x, t]^t$ es el vector de posición generalizada, donde x es la posición y t el tiempo.

\bar{p} es el vector de parámetros de entrada.

Las condiciones de borde de las ecuaciones directas incluyen las condiciones iniciales y las condiciones de contorno. En la sección 3.2. veremos el desarrollo de las condiciones de borde.

3.1.2. El Problema Derivado

Determinaremos el operador derivado, según expresión (2.9)

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial H} & \frac{\partial \bar{m}_1}{\partial V} \\ \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial H} & \frac{\partial \bar{m}_2}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a}(\cdot) & a^2 \bar{a}(\cdot) \\ \bar{a} & g \bar{a} \\ g \frac{\bar{a}(\cdot)}{\bar{a}} & \bar{a}(\cdot) + (\cdot) \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

y según las expresiones dadas en (2.8) tenemos :

$$\bar{f}_i \equiv [H_{/i}, V_{/i}]^t = \frac{\bar{f}}{\bar{\varphi}_i} \quad (3.4)$$

$$\bar{S}(i) \equiv [S_H(i), S_V(i)] = - \frac{\partial \bar{m}}{\partial \varphi_i} \quad (3.5)$$

Luego según (2.10) tendremos las ecuaciones derivadas

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_{/i}}{\partial a} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V_{/i}}{\partial \alpha} &= S_H(i) \\ g \frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_{/i}}{\partial a} + V_{/i} \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= S_V(i) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Las condiciones de borde de las ecuaciones derivadas se desarrollan en la sección 3.2., a partir de las condiciones de borde del problema directo.

3.1.3 El Problema Adjunto y el Concomitante Bilineal

La determinación de las ecuaciones adjuntas lo haremos a partir de la expresión (2.19), de donde :

$$\langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle = \langle \bar{f}_{/i} \cdot \bar{S}^+ \rangle - P \quad (3.7)$$

donde ahora

$$\langle (\cdot) \rangle \equiv \int_0^X dx \int_0^T (\cdot) dt \quad (3.8)$$

$$\bar{f}^* \equiv [H^*, V^*] \quad (3.9)$$

Desarrollando el primer miembro de (3.7) donde $\bar{S}(i)$: está dado por (3.6)

$$\langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle = \langle H^* S_H(i) \rangle + \langle V^* S_V(i) \rangle$$

$$\langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle = \langle H^* \left[\frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V_{/i}}{\partial \alpha} \right] \rangle + \langle V^* \left[g \frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_{/i}}{\partial \alpha} + V_{/i} \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right] \rangle$$

Integrando cada uno de los términos, por partes cuando es necesario

$$\begin{aligned} \langle H^* \frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} \rangle &= \int_0^X \left[\int_0^T H^* \frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} dt \right] dx = \int_0^X \left[(H^* H_{/i}) \Big|_0^T - \int_0^T H_{/i} \frac{\partial H^*}{\partial \alpha} dt \right] dx \\ &= \int_0^X (H^* H_{/i}) \Big|_0^T dx + \langle H_{/i} \cdot \left(-\frac{\partial H^*}{\partial \alpha} \right) \rangle \end{aligned}$$

$$\langle H^* \frac{a^2}{g} \frac{\partial V_{/i}}{\partial \alpha} \rangle = \int_0^T \left(\frac{a^2}{g} H^* V_{/i} \right) \Big|_0^X dt + \langle V_{/i} \cdot \left(-\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial \alpha} \right) \rangle$$

$$\langle V g \frac{\partial H_{/i}}{\partial \alpha} \rangle = \int_0^T (g H_{/i} V^*) \Big|_0^X dt + \langle H_{/i} \cdot \left(-g \frac{\partial V^*}{\partial \alpha} \right) \rangle$$

$$\langle V^* \frac{\partial V_{ii}}{\partial t} \rangle = \int_0^x (V^* V_{ii})_0^T dx + \langle V_{ii} \left(-\frac{\partial V^*}{\partial t} \right) \rangle$$

$$\langle V^* V_{ii} \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \rangle = \langle V_{ii} \left(V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right) \rangle$$

reagrupando términos luego se tendrá :

$$\begin{aligned} \langle f^* \cdot \bar{S}(i) \rangle = & \langle H_{ii} \left[-\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} \right] \rangle + \langle V_{ii} \left[-\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right] \rangle \\ & + \int_0^x (H^* H_{ii} + V^* V_{ii})_0^T dx + \int_0^T \left(\frac{a^2}{g} H^* V_{ii} + g V^* H_{ii} \right)_0^x dt \end{aligned} \quad (3.10)$$

Comparando (3.10) con la expresión (3.7) se obtienen las expresiones de las ecuaciones adjuntas y del concomitante bilineal. Entonces tendremos que las ecuaciones adjuntas serán :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= S_H^+ \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= S_V^+ \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde $\bar{S}^+ \equiv [S_H^+, S_V^+]$ es el vector de funciones de peso. La expresión del concomitante bilineal P para un tramo será :

$$P = -\int_0^x (H^* H_{ii} + V^* V_{ii})_0^T dx - \int_0^T \left(\frac{a^2}{g} H^* V_{ii} + g V^* H_{ii} \right)_0^x dt \quad (3.12)$$

Generalizando la expresión del concomitante bilineal para una red con NT tramos de tubería y NC componentes hidráulicos (ver figura 3.1), tendremos :

$$P = \sum_{j=1}^{NT} \left[- \int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^* H_{/i} + V^* V_{/i}) \Big|_0^T dx - \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^* V_{/i} + g V^* H_{/i} \right)_{X_{1j}}^{X_{2j}} dt \right] \quad (3.13)$$

y desarrollando

$$P = \sum_{j=1}^{NT} \left[\int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^*(x,0) H_{/i}(x,0) + V^*(x,0) V_{/i}(x,0)) dx \right. \\ - \int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^*(x,T) H_{/i}(x,T) + V^*(x,T) V_{/i}(x,T)) dx \\ + \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{1j},t) V_{/i}(X_{1j},t) + g V^*(X_{1j},t) H_{/i}(X_{1j},t) \right) dt \\ \left. - \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{2j},t) V_{/i}(X_{2j},t) + g V^*(X_{2j},t) H_{/i}(X_{2j},t) \right) dt \right] \quad (3.14)$$

Donde : X_{1j} es el nodo inicial del tramo j

X_{2j} es el nodo final del tramo j

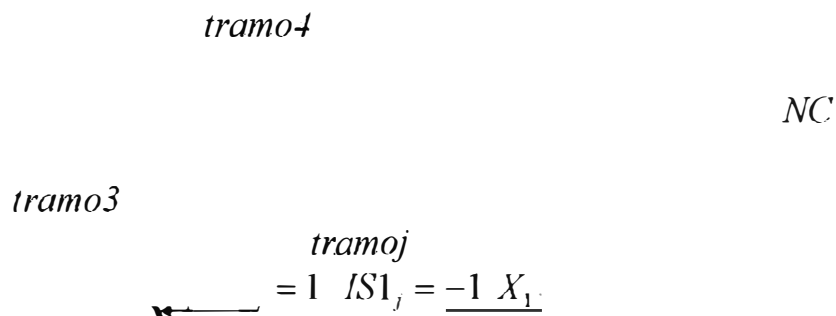


FIGURA 3.1
Esquema de una red hidráulica

En la expresión anterior la tercera y cuarta integral está evaluada en los nodos extremos de los tramos de tubería, estos nodos están conectados a componentes hidráulicos, luego estas integrales se pueden evaluar teniendo en cuenta las condiciones de contorno de los tramos que se dan en los componentes .

Luego si tenemos NC componentes la expresión (3.14) puede reescribirse como:

$$P = \sum_{j=1}^{NT} \left[\int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^*(x,0)H_{,i}(x,0) + V^*(x,0)V_{,i}(x,0)) dx - \int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^*(x,T)H_{,i}(x,T) + V^*(x,T)V_{,i}(x,T)) dx \right] + \sum_{k=1}^{NC} P_c(k) \quad (3.15)$$

donde :

$$\sum_{k=1}^{NC} P_c(k) = \sum_{j=1}^{NT} \left[\int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{1j},t)V_{,i}(X_{1j},t) + gV^*(X_{1j},t)H_{,i}(X_{1j},t) \right) dt - \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{2j},t)V_{,i}(X_{2j},t) + gV^*(X_{2j},t)H_{,i}(X_{2j},t) \right) dt \right] \quad (3.16)$$

y los $P_c(k)$ son las integrales en los nodos de los tramos conectados a la componente k , cuyo desarrollo general lo veremos en la sub-sección 3.2.3. y en forma detallada en el anexo 1.

Haremos una convención de signos para la dirección de los tramos respecto a los componentes de la siguiente manera

$$\text{nodo inicial del tramo } j \text{ (a la salida de un componente) } IS_j = -1 \quad (3.17)$$

$$\text{nodo final del tramo } j \text{ (a la entrada a un componente) } IS_j = +1$$

Luego, teniendo en cuenta (3.17), en (3.16), donde el nodo 1 y el nodo 2 son los nodos inicial y final de cada tramo j , la expresión (3.16) se reescribirá de la manera siguiente :

$$\sum_{k=1}^{NC} P_c(k) = \sum_{j=1}^{NT} \left[-IS1_j \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{1j}, t) V_{,i}(X_{1j}, t) + gV^*(X_{1j}, t) H_{,i}(X_{1j}, t) \right) dt \right. \\ \left. - IS2_j \int_0^T \left(\frac{a_j^2}{g} H^*(X_{2j}, t) V_{,i}(X_{2j}, t) + gV^*(X_{2j}, t) H_{,i}(X_{2j}, t) \right) dt \right] \quad (3.18)$$

3.1.4. El Funcional de Respuesta y las Funciones de Peso

Como indicamos antes, las ecuaciones adjuntas dependen del funcional de respuesta elegido, a través del vector de funciones de peso. En nuestro problema nos interesará evaluar la sensibilidad de las variables de estado H y V en una posición determinada $x = x_0$ y en un instante de tiempo $t = T$.

Previamente recordemos algunas definiciones de las distribuciones. Si $g(x)$ es una función cualquiera definida en el intervalo $[0, X]$ y continua en $x = x_0$; y $\delta_x(x - x_0)$ es una distribución centrada en $x = x_0$, entonces:

$$\int g(x) \delta_x(x - x_0) dx = K_x^{-1}(x_0) g(x_0) \quad (3.19)$$

donde:

$$K_x(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x_0 < X \\ 2 & \text{si } x_0 = 0 \text{ ó } x_0 = X \end{cases} \quad (3.20)$$

en forma similar para una variable temporal, tendremos

$$\int_0^T g(t) \delta_x(t - t_0) dt = K_t^{-1}(t_0) g(t_0) \quad (3.21)$$

donde:

$$K_t(t_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < t_0 < T \\ 2 & \text{si } t_0 = 0 \text{ ó } t_0 = T \end{cases} \quad (3.22)$$

Consideremos ahora una función cualquiera $g(\vec{r}) \equiv g(x, t)$ y una distribución bidimensional definida como:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \equiv \delta(x - x_0, t - t_0) \equiv \delta(x - x_0) \cdot \delta(t - t_0) \quad (3.23)$$

en el dominio espacio-temporal $[0, X] \times [0, T]$. En este caso, tendremos :

$$\langle g(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) \rangle \equiv \int_0^T \int_0^X g(\vec{r}) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) dx dt = K_x^{-1}(x_0) \cdot K_t^{-1}(t_0) \cdot g(x_0, t_0) \quad (3.24)$$

Volviendo a la elección del funcional de respuesta, consideraremos ahora como funcional de respuesta $R \equiv H(x_0, T)$, luego, según ecuación (2.20), tendremos :

$$\begin{aligned} R \equiv H(x_0, T) &= \langle \bar{S}^+ \cdot \bar{f} \rangle = \langle (S_H^+, S_V^+) \cdot (H(x, t), V(x, t)) \rangle \\ &= \int_0^T \int_0^X H(x, t) \cdot S_H^+ \cdot dx \cdot dt + \int_0^T \int_0^X V(x, t) \cdot S_V^+ \cdot dx \cdot dt \end{aligned} \quad (3.25)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (3.24) en (3.25) el vector de funciones de peso, deberá ser entonces:

$$\bar{S}^+(\vec{r}, \vec{r}_0) \equiv (S_H^+(\vec{r}, \vec{r}_0), S_V^+(\vec{r}, \vec{r}_0)) \equiv (K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x - x_0) \cdot \delta_t(t - T), 0) \quad (3.26)$$

De esta manera, la ecuación (3.25) “extraerá” correctamente el valor de H en el punto de referencia $\vec{r}_0 = (x_0, T)$ especificado, aunque el mismo se encuentre en la frontera del dominio espacio-temporal.

Para el otro funcional de respuesta $R \equiv V(x_0, T)$, el vector de funciones de peso tendrá la siguiente forma

$$\bar{S}^+(\bar{r}, \bar{r}_0) \equiv (S_H^+(\bar{r}, \bar{r}_0), S_V^+(\bar{r}, \bar{r}_0)) \equiv (0, K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x - x_0) \cdot \delta_t(t - T)) \quad (3.27)$$

Finalmente las ecuaciones adjuntas tendrán la siguiente forma :

$$\text{Si } R \equiv H(x_0, T) \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x - x_0) \cdot \delta_t(t - T) \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\text{Si } R \equiv V(x_0, T) \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x - x_0) \cdot \delta_t(t - T) \end{aligned} \quad (3.31)$$

En las ecuaciones adjuntas (3.29) y (3.31), se observan las características siguientes :

- Dependen del funcional de respuesta.
- Son lineales en las variables adjuntas.
- Requieren la resolución previa del problema directo.
- Tienen fuentes deltiformes

3.2. DETERMINACION DE LAS CONDICIONES DE BORDE . DESARROLLO DEL CONCOMITANTE BILINEAL

3.2.1 Consideraciones Previas

Las condiciones de borde directas están dadas por las condiciones iniciales y las condiciones de contorno que resultan del modelo matemático que describe el funcionamiento de los componentes hidráulicos (válvulas, tes, codos, medidores de flujo, bombas, etc) ubicado en los extremos de los tramos de tubería. Con las ecuaciones y condiciones de borde directas se resuelve el problema directo.

El modelo matemático de los componentes relaciona las variables de estado (altura piezométrica y velocidad) de los nodos extremos pertenecientes a los tramos conectados a determinado componente y sus respectivos parámetros. Estas relaciones se obtienen de las ecuaciones de conservación.

Hay componentes conectados a uno, dos ó mas de dos tramos. Por lo tanto en el modelo matemático se requiere, por lo menos, tantas ecuaciones como tramos estén conectados a determinado componente.

Las condiciones de borde del problema derivado, resultan de derivar las expresiones de borde directas respecto a algún parámetro de interés p_i

Las condiciones de borde adjuntas se obtendrán a partir de la expresión general del concomitante bilineal.

3.2.2. Condiciones Iniciales Directas, Derivadas y Adjuntas

Para el problema directo consideraremos como condiciones iniciales el estado estacionario. Para tiempo $t = 0$ se tendrá :

$$H - \tilde{H}(x) = 0 \quad \text{y} \quad V - \tilde{V}(x) = 0 \quad (3.32)$$

Derivando las expresiones de (3.32) se obtienen las condiciones iniciales para el problema derivado, las cuales resultan

$$H_{,i} - \tilde{H}_{,i}(x) = 0 \quad \text{y} \quad V_{,i} - \tilde{V}_{,i}(x) = 0 \quad (3.33)$$

Recordemos que elegiremos las condiciones de borde adjuntas de tal manera de simplificar del cálculo de la expresión general del concomitante bilineal (3.28), los términos del vector derivado $(H_{,i}, V_{,i})$.

De esta manera en el tiempo $t = T$, consideraremos :

$$H^*(x, T) = 0 \quad \text{y} \quad V^*(x, T) = 0 \quad (3.34)$$

Luego teniendo en cuenta (3.34) en (3.28), la segunda de las integrales se anulará y la expresión general del concomitante bilineal quedará como :

$$P = P_x + P_t \quad (3.35)$$

donde :

$$P_x = \sum_{j=1}^{NT} \int_{X_{1j}}^{X_{2j}} (H^*(x, 0)H_{,i}(x, 0) + V^*(x, 0)V_{,i}(x, 0))dx \quad (3.36)$$

$$P_t = \sum_{k=1}^{NC} P_c(k)$$

En la expresión (simplificada) del concomitante bilineal general dada en (3.35) debe observarse que hay dos integrales, una espacial P_x y la otra temporal P_t dadas por las expresiones en (3.36). La determinación de las integrales temporales $P_c(k)$ se verán en la siguiente subsección 3.2.3, mientras que la determinación de la integral espacial se verá en la subsección 3.2.4.

3.2.3. Condiciones de Contorno Directas , Derivadas , adjuntas . Desarrollo de la Integral Temporal del Concomitante Bilineal

Consideremos un caso particular de un componente k conectado a dos tramos: tramo1 y tramo2, cuyos nodos extremos 1 y 2, respectivamente, están conectados al componente de la manera mostrada en la figura 3.2 .

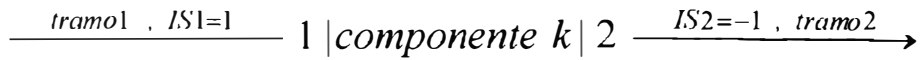


FIGURA 3.2

Esquema de un componente conectado a dos tramos

La contribución al concomitante bilineal de este componente, de la expresión (3.18), será :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* V_{2/i} + g V_2^* H_{2/i} \right) dt \quad (3.37)$$

Las condiciones de contorno directas de los tramos involucrados en los nodos respectivos estarán dados por el modelo matemático del componente k , teniendo en cuenta el formalismo del método, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C_{1k} &\equiv C_{1k}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{p}, \bar{r}) \equiv C_{1k}(H_1, V_1, H_2, V_2, \bar{p}, \bar{r}) = 0 \\ C_{2k} &\equiv C_{2k}(\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{p}, \bar{r}) \equiv C_{2k}(H_1, V_1, H_2, V_2, \bar{p}, \bar{r}) = 0 \end{aligned} \quad (3.38)$$

Y derivando las expresiones en (3.38) respecto a un parámetro p_i se obtendrán las condiciones de borde del problema derivado:

$$\begin{aligned}
C_{1k/i} + \frac{\bar{\alpha}_{1k}}{\partial H_1} H_{1/i} + \frac{\bar{\alpha}_{1k}}{\partial V_1} V_{1/i} + \frac{\bar{\alpha}_{1k}}{\partial H_2} H_{2/i} + \frac{\bar{\alpha}_{1k}}{\partial V_2} V_{2/i} &= 0 \\
C_{2k/i} + \frac{\bar{\alpha}_{2k}}{\partial H_1} H_{1/i} + \frac{\bar{\alpha}_{2k}}{\partial V_1} V_{1/i} + \frac{\bar{\alpha}_{2k}}{\partial H_2} H_{2/i} + \frac{\bar{\alpha}_{2k}}{\partial V_2} V_{2/i} &= 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Despejando $H_{2/i}, V_{2/i}$ en (3.39) y reemplazando en (3.37) se tendrá :

$$P_c(k) = \int_0^T H_{1/i} \cdot F_{1k} \cdot dt + \int_0^T V_{1/i} \cdot F_{2k} \cdot dt + \int_0^T [C_{1k/i} \cdot G_{1k} + C_{2k/i} \cdot G_{2k}] \cdot dt \tag{3.40}$$

donde :

$$F_{1k} = -IS1gV_1^* - IS2 \frac{a_2^2}{g} H_2^* \left[\begin{array}{cc} \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_1} - \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_1} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right] - IS2gV_2^* \left[\begin{array}{cc} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_1} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_1} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right] \tag{3.41}$$

$$F_{2k} = -IS1 \frac{a_1^2}{g} H_1^* - IS2 \frac{a_2^2}{g} H_2^* \left[\begin{array}{cc} \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_1} - \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_1} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right] - IS2gV_2^* \left[\begin{array}{cc} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_1} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_1} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right]$$

$$G_{1k} = IS2 \left| \begin{array}{cc} gV_2^* \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{a_2^2}{g} H_2^* \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right| \quad G_{2k} = IS2 \left| \begin{array}{cc} \frac{a_2^2}{g} H_2^* \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} - gV_2^* \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \\ \frac{\alpha_{1k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{2k}}{\partial V_2} - \frac{\alpha_{2k}}{\partial H_2} \frac{\alpha_{1k}}{\partial V_2} \end{array} \right| \tag{3.42}$$

Como nosotros queremos independizar del cálculo los valores de las variables derivadas $H_{1/i}, V_{1/i}$ eliminaremos las dos primeras integrales de (3.40), haciendo nulos los factores F_{1k}

y F_{2k} que contienen términos de las variables adjuntas. De esta manera se obtienen las condiciones de contorno adjuntas

$$-IS1gV_1^* - IS2\frac{a_2^2}{g}H_2^* \begin{bmatrix} \alpha_{2k} & \alpha_{1k} & -\alpha_{1k} & \alpha_{2k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{H_1} & \partial_{H_2} & \partial_{H_1} \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{V_2} & \partial_{H_2} & \partial_{V_2} \end{bmatrix} - IS2gV_2^* \begin{bmatrix} \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{V_2} & \partial_{H_1} & \partial_{V_2} & \partial_{H_1} \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{V_2} & \partial_{H_2} & \partial_{V_2} \end{bmatrix} = 0 \quad (3.43)$$

$$-IS1\frac{a_1^2}{g}H_1^* - IS2\frac{a_2^2}{g}H_2^* \begin{bmatrix} \alpha_{2k} & \alpha_{1k} & -\alpha_{1k} & \alpha_{2k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{V_1} & \partial_{H_2} & \partial_{V_1} \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{V_2} & \partial_{H_2} & \partial_{V_2} \end{bmatrix} - IS2gV_2^* \begin{bmatrix} \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{V_2} & \partial_{V_1} & \partial_{V_2} & \partial_{V_1} \\ \alpha_{1k} & \alpha_{2k} & -\alpha_{2k} & \alpha_{1k} \\ \partial_{H_2} & \partial_{V_2} & \partial_{H_2} & \partial_{V_2} \end{bmatrix} = 0$$

Luego, la contribución de este componente al concomitante bilineal queda de la siguiente manera :

$$P_c(k) = \int^T [C_{1k/1} \cdot G_{1k} + C_{2k/1} \cdot G_{2k}] \cdot dt \quad (3.44)$$

En caso se trate de componentes conectados a uno o más de dos tramos el desarrollo es similar ya que se tendrán tantas ecuaciones de las condiciones de contorno e integrales temporales del concomitante como el número de tramos , obteniendose, así, el mismo número de condiciones adjuntas.

El desarrollo de las condiciones de contorno y de la integral temporal del concomitante bilineal para diferentes tipos de componentes se muestran en el Anexo 1.

3.2.4. Desarrollo de la Integral Espacial del Concomitante Bilineal

De (3.36) vemos que la integral espacial P_x solo tiene como variable la posición x , por lo que esta se puede reescribir de la siguiente manera :

$$P_x = \sum_{j=1}^{N_T} \int_{X_{1j}}^{X_{2j}} H^*(x,0) \tilde{H}_i(x) + V^*(x,0) \tilde{V}_i(x) dx \quad (3.45)$$

Esta expresión, para un tramo, se puede reescribir de la forma siguiente :

$$P_x^o = \int^x (\tilde{H}_i(x), \tilde{V}_i(x)) \cdot (H^*(x,0), V^*(x,0)) \cdot dx \quad (3.46)$$

Es posible calcular la integral P_x^o planteando otro problema perturbativo para el estado estacionario, si uno elige como función de peso $\tilde{S}^+ \equiv [H^*(x,0), V^*(x,0)]$. Luego de (2.19), tendremos que

$$\langle \tilde{f}_i, \tilde{S}^+ \rangle = \langle \tilde{f}^* \cdot \tilde{S}(i) \rangle + \tilde{P}(\tilde{f}^*, \tilde{f}_i) = P_x^o \quad (3.47)$$

Donde ahora

$$\langle (\cdot) \rangle \equiv \int^x (\cdot) dx \quad (3.48)$$

$$\tilde{f} \equiv [x] \quad (3.49)$$

$$\tilde{f} \equiv [\tilde{H}, \tilde{V}] \equiv [\tilde{H}(x), \tilde{V}(x)] \quad (3.50)$$

$$\tilde{f}_i \equiv [\tilde{H}_i, \tilde{V}_i] \equiv [\tilde{H}_i(x), \tilde{V}_i(x)] \quad (3.51)$$

$$\tilde{m} \equiv [\tilde{m}_1, \tilde{m}_2]^t \quad (3.52)$$

$$\tilde{S}(i) \equiv [\tilde{S}_H(i), \tilde{S}_V(i)] = -\frac{\partial \tilde{m}}{\partial \varphi_i} \equiv \left[-\frac{\partial \tilde{m}_1}{\partial \varphi_i}, -\frac{\partial \tilde{m}_2}{\partial \varphi_i} \right] \quad (3.53)$$

$$\tilde{f}^* \equiv [\tilde{H}^*, \tilde{V}^*] \equiv [\tilde{H}^*(x), \tilde{V}^*(x)] \quad (3.54)$$

$$\bar{S}^+ \equiv [\bar{S}_{II}^+, \bar{S}_I^+] \equiv [H^*(x, 0), V^*(x, 0)] \quad (3.55)$$

El desarrollo del formalismo del método perturbativo al problema estacionario tendrá similares expresiones a las que se obtuvo al desarrollar el formalismo al problema del transitorio, pero, sin considerar los términos temporales.

Las ecuaciones directas del problema estacionario, en forma similar a (3.2) serán

$$\begin{aligned} \bar{m}_1 &\equiv \frac{a^2}{g} \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} = 0 \\ \bar{m}_2 &\equiv g \frac{\partial \bar{H}}{\partial x} + \zeta \frac{\bar{V} |\bar{V}|}{2D} = 0 \end{aligned} \quad (3.56)$$

Las ecuaciones adjuntas, teniendo en cuenta el vector de funciones de peso dado en (3.55), en forma similar a (3.11) serán :

$$\begin{aligned} -g \frac{\partial \bar{V}^*}{\partial x} &= H^*(x, 0) \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial \bar{H}^*}{\partial x} + \bar{V}^* \frac{|\bar{V}|}{D} \left(\zeta + \frac{\bar{V}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \bar{V}} \right) &= V^*(x, 0) \end{aligned} \quad (3.57)$$

Y la expresión del concomitante bilineal, en forma similar a (3.12) , será :

$$\tilde{P} = - \left(\frac{a^2}{g} \tilde{H}^* \tilde{V}_{/i} + g \tilde{V}^* \tilde{H}_{/i} \right) \Bigg|_0^{\lambda} \quad (3.58)$$

Generalizando esta expresión para una red hidráulica con NT tramos y NC componentes, tendremos :

$$\tilde{P} = \sum_{j=1}^{NT} - \left(\frac{a_j^2}{g} \tilde{H}^* \tilde{V}_{/i} + g \tilde{V}^* \tilde{H}_{/i} \right) \Bigg|_{X_{1j}}^{X_{2j}} = \sum_{k=1}^{NC} \tilde{P}_c(k) \quad (3.59)$$

En forma similar al análisis hecho en la sección anterior para el caso de un componente conectado a dos tramos, de (3.44) tendremos :

$$\tilde{P}_c(k) = C_{1k/i} \cdot \tilde{G}_{1k} + C_{2k/i} \cdot \tilde{G}_{2k} \quad (3.60)$$

donde $C_{1k/i}$ y $C_{2k/i}$ están evaluados en $t=0$.

La solución de la integral P_x^o conforme a la ecuación (3.47) tiene dos integrales que resolver, pero, $\langle \tilde{f} \cdot \tilde{S}(i) \rangle = 0$ ya que de la ecuación (3.53) vemos que $\tilde{S}(i)$ son las derivadas de las ecuaciones directas respecto a algún parámetro, pero como en el presente estudio no consideramos parámetros del tramo de tubería y del fluido, dichas derivadas serán nulas. De esta manera queda que la solución de nuestra integral espacial resulta :

$$P_x = \sum_{k=1}^{NC} \tilde{P}_c(k) \quad (3.61)$$

Para conocer la solución de la integral necesitamos resolver primero el problema directo y luego el problema adjunto estacionarios.

Las condiciones de contorno tanto directas como adjuntas son las mismas que para el problema de golpe de ariete.

El problema directo dado por el sistema de ecuaciones (3.56) se puede resolver utilizando el sistema de ecuaciones (3.2) con valores iniciales arbitrarios y dejando evolucionar todo el tiempo que sea necesario hasta alcanzar el estado estacionario.

El problema adjunto dado por el sistema de ecuaciones (3.57), en forma similar al problema directo, se puede resolver con el mismo artificio, pero utilizando las ecuaciones (3.11) con las funciones de peso dadas en (3.55), y con condiciones iniciales arbitrarias (por ejemplo, nulas) dejando evolucionar todo el tiempo que sea necesario para alcanzar el estado

estacionario adjunto. Esto es, que las ecuaciones del pseudotransitorio adjunto para resolver el problema estacionario, serán

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial a} - g \frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial x} &= H^*(x, 0) \\
 -\frac{a^2}{g} \frac{\partial \tilde{H}^*}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{V}^*}{\partial a} + \tilde{V}^* \frac{|\tilde{V}|}{D} \left(\zeta + \frac{\tilde{V}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \tilde{V}} \right) &= V^*(x, 0)
 \end{aligned}
 \tag{3.62}$$

3.3. COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

La variación del funcional de respuesta R respecto a algún parámetro p_i , teniendo en cuenta la expresión dada en (2.23), la podemos expresar como :

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \langle \bar{f} \cdot \bar{S}_i^+ \rangle + \langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle + P
 \tag{3.63}$$

Donde los funcionales de respuesta son : $R = H(x_0, T)$ y $R = V(x_0, T)$, la altura piezométrica y velocidad en una posición x_0 y en el instante de tiempo T de interés, respectivamente. Los parámetros p_i son constantes o variables (respecto al tiempo) que se encuentran en los componentes (altura de tanques, coeficientes de pérdidas de las válvulas, etc.). En la presente tesis no se estudian como parámetros las magnitudes y propiedades físicas de los tramos, tampoco las propiedades del fluido ni la gravedad.

Luego, evaluando el miembro derecho de la ecuación (3.63), tendremos

- En $\langle \bar{f} \cdot \bar{S}_i^+ \rangle$, tenemos que \bar{S}^+ está dado por las expresiones (3.26) ó (3.27), las cuales no dependen de ningún parámetro p_i , por lo tanto $\bar{S}_i^+ = 0$.

- En $\langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle$, de (3.5) tenemos que $\bar{S}(i)$ está dado por las derivadas de las ecuaciones directas respecto a algún parámetro p_i , pero, como los parámetros de estudio se encuentran en los componente, resulta $\bar{S}(i) = 0$.
- Por lo tanto los coeficientes de sensibilidad estarán dados por el valor del concomitante bilineal P , el cual de (3.35) y (3.61) se podrá expresar de la siguiente manera.

$$P = \sum_{k=1}^{NC} P_c(k) + \sum_{k=1}^{NC} \tilde{P}_c(k) \quad (3.64)$$

En (3.64) tanto los $P_c(k)$ como los $\tilde{P}_c(k)$ dependen de las C_i , (ver ecuaciones (3.44) y (3.60)) que son las derivadas de las condiciones de contorno dadas por los componentes respecto a un parámetro p_i de determinado componente. Entonces, en la componente en que se encuentre el parámetro de interés se tendrá que las derivadas de sus condiciones de contorno respecto a dicho parámetro tendrán algún valor, mientras que en los demás componentes las C_i , correspondientes serán nulos.

Por lo tanto un determinado coeficiente de sensibilidad estará dado por

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = P_c(k) + \tilde{P}_c(k) \quad (3.65)$$

Donde p_i se encuentra en el componente k .

En resumen, para calcular la sensibilidad de un funcional de respuesta ante las variaciones de los parámetros de interés, es necesario primero conocer las soluciones directas y adjuntas de los problemas temporal y estacionarios. Luego, determinar las C_i para una parámetro determinado. De esta manera, se obtienen los coeficientes de sensibilidad de los funcionales de respuesta respecto de los diferentes parámetros de interés.

En el Anexo 1 se desarrollan los coeficientes de sensibilidad para los diferentes tipos de componentes.

4. RESOLUCION POR METODOS NUMERICOS

4.1. INTRODUCCION

En este capítulo abordaremos la resolución numérica de los problemas directo y adjunto, así como la obtención de los coeficientes de sensibilidad descritos en el capítulo anterior.

Para resolver el problema directo utilizaremos el método de las características, donde obtendremos las *ecuaciones características*, posteriormente, integraremos estas ecuaciones utilizando un esquema de diferencias finitas, lo cual conlleva determinar una discretización en el espacio de las fases.

Para resolver el problema adjunto, también, seguiremos un procedimiento similar a lo hecho para el directo. Sin embargo, en el problema adjunto debido a los términos de fuentes deltiformes, previamente haremos un tratamiento de las mismas.

4.2. METODO DE LAS CARACTERISTICAS

Para la resolución numérica de las ecuaciones directas (3.2) y adjuntas (3.11) partiremos de expresiones equivalentes, llamadas *ecuaciones características*. Estas ecuaciones equivalentes se obtendrán mediante el llamado *método de las características*.

El método consiste en transformar el sistema de ecuaciones en derivadas parciales en otro sistema equivalente de ecuaciones diferenciales ordinarias (en la variable temporal) llamadas ecuaciones características a lo largo de direcciones características. Esta transformación puede realizarse mediante la diagonalización de la matriz propia del sistema de ecuaciones hiperbólico o mediante una combinación lineal de las ecuaciones originales (Streeter [21]).

Así, el sistema de ecuaciones características tendrán la siguiente forma:

$$E_1 \equiv E_1 \left(\frac{Dy_1(x,t)}{Dt}, \frac{Dy_2(x,t)}{Dt} \right) \quad (4.1)$$

a lo largo de la curva característica C^{++} , y

$$E_2 \equiv E_2 \left(\frac{Dy_1(x,t)}{Dt}, \frac{Dy_2(x,t)}{Dt} \right) \quad (4.2)$$

a lo largo de la curva característica C^{-}

Las variables y_1 e y_2 se corresponden con H y V en el problema directo, o con H^* y V^* en el problema adjunto.

Si se representan en un plano $x-t$ (las variables independientes) dos puntos \mathbf{R} y \mathbf{S} , en los que se conocen los valores de y_1 e y_2 (las variables dependientes), y se trazan las curvas C^{++} y C^{-} partiendo de \mathbf{R} y \mathbf{S} (figura 4.1) existirá un punto de intersección, que llamaremos \mathbf{P} . En este punto las ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2) son ambas válidas y se podrán resolver simultáneamente, obteniéndose los valores de \mathbf{P} : $y_1(x_P, t_P)$ e $y_2(x_P, t_P)$

Esta metodología es la que permite resolver el problema, partiendo de condiciones conocidas y encontrando en nuevas intersecciones de las curvas los valores para tiempos ulteriores.

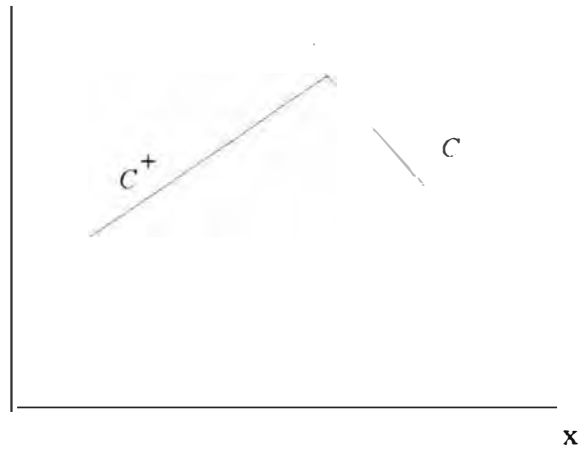


FIGURA 4.1

Esquema del método de las características

4.3. EL PROBLEMA DIRECTO

4.3.1. Ecuaciones Características

Para las ecuaciones directas (3.2) se obtienen las siguientes ecuaciones características (Streeter[21])

$$\frac{DH}{Dt} + \frac{a}{g} \frac{DV}{Dt} + \frac{a}{g} \zeta \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (4.3)$$

a lo largo de la curva $C^+ : \frac{dx}{dt} = a$ y

$$\frac{DH}{Dt} - \frac{a}{g} \frac{DV}{Dt} - \frac{a}{g} \zeta \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (4.4)$$

a lo largo de la curva $C^- : \frac{dx}{dt} = -a$

En las ecuaciones anteriores se tiene que $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial}{\partial x}$, donde $\frac{dx}{dt}$ será $\pm a$ según sea la dirección característica C^+ o C^- .

4.3.2. Discretización Espacio-temporal

Haremos una descripción de la discretización espacio-temporal (Streeter[21]).

Para la discretización espacial, a una tubería de longitud L , la dividiremos en N segmentos iguales de longitud $\Delta x = L/N$, resultando $N+1$ nodos. Según esta discretización tenemos nodos de borde (1 y $N+1$) y nodos interiores (los restantes). Para la discretización temporal elegimos un incremento $\Delta t = \Delta x/a$, donde el paso de tiempo debe ser constante para todos los tramos. De esta forma las curvas características son las diagonales de de la malla rectangular. Además para la solución numérica en nuestra notación los subíndices indican el nodo y los supraíndices el paso temporal.

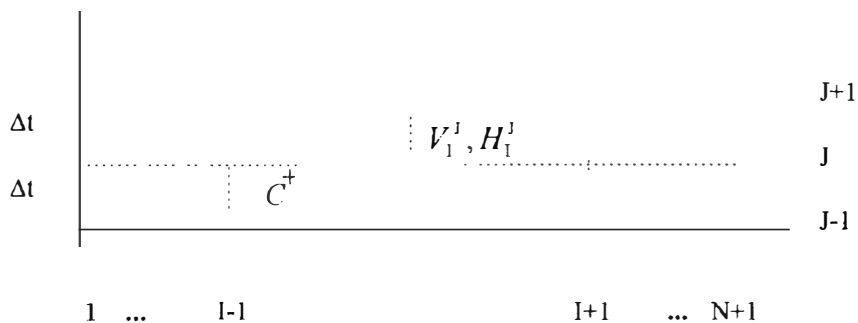


FIGURA 4.2

Malla rectangular para la resolución numérica

por diferencias finitas de las ecuaciones características del problema directo

4.3.3. Ecuaciones Discretizadas

Integramos las ecuaciones (4.3) y (4.4) utilizando un esquema en diferencias finitas (Streeter [21]), con la particularidad de que linealizamos el término de fricción, adelantando la velocidad y atrasando el valor absoluto y el factor de fricción. De esta manera es posible obtener la altura y velocidad en forma explícita y de manera rápida. Siguiendo la nomenclatura de la figura 4.2, resulta:

$$\begin{aligned} H_i^J - H_{i-1}^{J-1} + \frac{\alpha}{g} (V_i^J - V_{i-1}^{J-1}) + \frac{\alpha \zeta}{2gD} \Delta t \cdot V_i^J |V_{i-1}^{J-1}| &= 0 \\ H_i^J - H_{i+1}^{J-1} - \frac{\alpha}{g} (V_i^J - V_{i+1}^{J-1}) - \frac{\alpha \zeta}{2gD} \Delta t \cdot V_i^J |V_{i+1}^{J-1}| &= 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ordenando las relaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} H_i^J + A^+ V_i^J &= B^+ \\ H_i^J - A^- V_i^J &= B^- \end{aligned} \quad (4.6)$$

donde :

$$\begin{aligned} A^+ &= \frac{\alpha}{g} \left(1 + \frac{\zeta}{2D} \Delta t \cdot |V_{i-1}^{J-1}| \right) & B^+ &= H_{i-1}^{J-1} + \frac{\alpha}{g} V_{i-1}^{J-1} \\ A^- &= -\frac{\alpha}{g} \left(1 + \frac{\zeta}{2D} \Delta t \cdot |V_{i+1}^{J-1}| \right) & B^- &= H_{i+1}^{J-1} - \frac{\alpha}{g} V_{i+1}^{J-1} \end{aligned} \quad (4.7)$$

de donde podemos obtener :

$$H_i^J = \frac{A^+ B^- - A^- B^+}{A^+ - A^-} \quad V_i^J = \frac{B^+ - B^-}{A^+ - A^-} \quad (4.8)$$

que es la solución del problema en el nodo interior I en el tiempo J .

Para hallar los valores en los nodos de borde, dependiendo del tipo de componente conectado, y de si es nodo inicial o final se utilizarán las características que intersectan los nodos de dicha componente y las condiciones de contorno directas correspondiente a dicho componente, obteniéndose de esta manera un sistema de ecuaciones que nos permite determinar los valores en los nodos de borde. Un procedimiento similar puede verse en el anexo 2 para calcular los valores adjuntos en los nodos extremos.

4.3.4. Programa WHAT

Como herramienta de resolución del problema directo se utilizó el código *WHAT* (**W**ater **H**ammer **A**nalysis in **T**ubes) [14]. Este programa fue desarrollado en lenguaje FORTRAN y está orientado a la simulación de transitorios de ondas de presión de una red hidráulica, suministrando la evolución temporal y la distribución espacial de las velocidades y alturas piezométricas.

El programa *WHAT* se aplica a sistemas de redes hidráulicas bajo las condiciones de contorno directas (ver Anexo 1) resolviendo las ecuaciones características (4.3) y (4.4). La resolución numérica de la red se lleva a cabo según la descripción hecha en la sub-sección 4.3.3. La discretización espacio-temporal está definida automáticamente por el programa, debido a que el método de las características impone un rígido acoplamiento entre la discretización espacial y la temporal .

Los datos necesarios de la red son provistos por el usuario en un archivo de datos de configuración particular y los resultados de la red se guardan en una base de datos cada cierto número de ciclos temporales.

4.4. EL PROBLEMA ADJUNTO

4.4.1. Ecuaciones Características

Aplicando el método de las características, de las ecuaciones adjuntas (3.11) resultan las ecuaciones características del problema adjunto

$$\frac{DH^*}{Dt} + \frac{g}{a} \frac{DV^*}{Dt} - \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) + S_H^+ + \frac{g}{a} S_V^+ = 0 \quad (4.9)$$

a lo largo de la curva característica C^+ : $\frac{dx}{dt} = a$ y

$$\frac{DH^*}{Dt} - \frac{g}{a} \frac{DV^*}{Dt} + \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) + S_H^+ - \frac{g}{a} S_V^+ = 0 \quad (4.10)$$

a lo largo de la curva característica C^- : $\frac{dx}{dt} = -a$

Observar que las ecuaciones características adjuntas se diferencian de las directas por los términos de fuente S_H^+ y S_V^+ y que estas son deltiformes. Entonces para eliminar de las ecuaciones estos términos de fuente previamente evaluaremos el efecto de estas fuentes en un entorno del punto (x_0, T) en donde actúan. Para ello integraremos las ecuaciones características adjuntas en un entorno infinitesimal del punto (x_0, T) en un tiempo anterior próximo a T , que llamaremos T^- , es decir, $T^- = \lim (T - \varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Determinaremos de esta manera los valores de las variables adjuntas en el tiempo T^- , que luego se van a propagar según el método de las características utilizando las ecuaciones características adjuntas (4.9) y (4.10) sin términos de fuente desde $t = T^-$ hasta $t = 0$.

4.4.2. Tratamiento de las Fuentes Deltiformes

Al integrar las ecuaciones (4.9) y (4.10) habrá que integrar los términos de fuente, los cuales como se vió en (3.26) y (3.27) S_H^+ y S_I^+ tienen como valores 0 ó $K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x-x_0) \cdot \delta_t(t-T)$, por lo que previamente integraremos esta última expresión a lo largo de la curva C^+ entre los límites T y $T^- = \lim (T-\varepsilon)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Entonces, resolveremos la integral siguiente

$$E = \int_{T-\varepsilon}^T K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(x-x_0) \cdot \delta_t(t-T) dt \quad (4.11)$$

De la ecuación de la curva $C^+ : x = x_0 + a(t-T)$, y reemplazando en (4.11) resulta :

$$E = \int_{T-\varepsilon}^T K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot \delta_x(a(t-T)) \cdot \delta_t(t-T) dt \quad (4.12)$$

Definiendo $g(t) = \delta_x(a(t-T))$ (4.13)

y reemplazando en (4.12) resulta

$$E = \int_{T-\varepsilon}^T K_x(x_0) \cdot K_t(T) \cdot g(t) \cdot \delta_t(t-T) dt \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta la definición de la función delta dada en (3.21), resulta :

$$E = K_x(x_0) \cdot g(T) \quad (4.15)$$

donde, según la definición dada en (3.20), se tiene que :

$$K_x(x_0) = \begin{cases} 1 & \text{si el punto } (x_0, T) \text{ está en el interior del tramo} \\ 2 & \text{si el punto } (x_0, T) \text{ está en un extremo del tramo} \end{cases} \quad (4.16)$$

De la definición de $g(t)$ reemplazando en (4.15) se tiene finalmente :

$$E = K_x(x_0) \cdot \delta_x(0) \quad (4.17)$$

Operando en forma similar a lo largo de la curva característica C^- se obtiene el mismo resultado para E ; este valor servirá luego para hallar las integrales de los términos de fuente.

4.4.3. Determinación de los Valores Adjuntos en $t = T^-$

El procedimiento de determinación dependerá de la posición espacial x_0 del punto de referencia elegido para evaluar la sensibilidad correspondiente de los funcionales de respuesta : altura piezométrica $H(x_0, T)$ y velocidad $V(x_0, T)$; distinguiéndose los tres casos siguientes

- a) El punto (x_0, T) está en el interior de algún tramo.
- b) El punto (x_0, T) está al inicio de algún tramo.
- c) El punto (x_0, T) está al final de algún tramo.

a) El punto (x_0, T) está en el interior de algún tramo.

En este caso los valores adjuntos a propagar son de los puntos 1 y 2.

En la figura 4.3 el punto 0 indica la posición y el tiempo de referencia, es decir, el punto (x_0, T) . Los puntos 1 y 2 están infinitesimalmente cercanos al punto 0, situados sobre las curvas características C^{+0} y C^{-0} respectivamente.

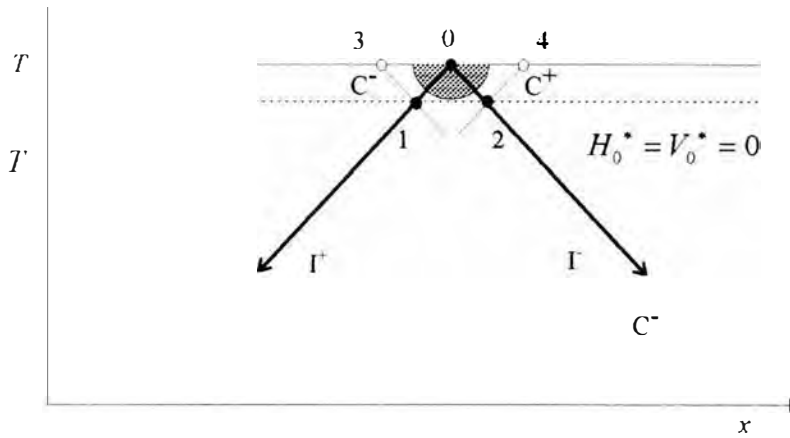


FIGURA 4.3

Esquema de solución de las discontinuidades en el interior de un tramo.

Los valores adjuntos en el punto 1 (en $t = T^-$) se determinan en la intersección de las curvas características $C^+{}_0$ y $C^-{}_3$.

Luego, integrando la ecuación (4.9) a lo largo de la característica $C^+{}_0$ entre los puntos 0 y 1, tenemos :

$$\int_{T-\varepsilon}^T \frac{DH^*}{Dt} dt + \int_{T-\varepsilon}^T \frac{g}{a} \frac{DV^*}{Dt} dt - \int_{T-\varepsilon}^T \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) dt + \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+ + \frac{g}{a} S_V^+ \right) dt = 0 \quad (4.18)$$

haciendo : $F = \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right)$ y evaluando tenemos :

$$H_0^* - H_1^* + \frac{g}{a} (V_0^* - V_1^*) - \bar{F} \cdot \varepsilon + \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+ + \frac{g}{a} S_V^+ \right) dt = 0 \quad (4.19)$$

donde el tercer término se anula en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, ya que \bar{F} es un valor promedio entre los límites de la integral, y recordando que, de las condiciones finales del problema adjunto, los valores adjuntos en el punto 0 son nulos, entonces resulta

$$H_1^* + \frac{g}{a} V_1^* = I^+(\bar{r}_0) \quad (4.20)$$

Integrando de la misma manera la ecuación (4.10), sin términos de fuente, a lo largo de la característica C^-_3 entre los puntos 3 y 1, tenemos :

$$H_1^* - \frac{g}{a} V_1^* = 0 \quad (4.21)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.20) y (4.21) obtenemos los valores adjuntos en el punto 1, y estos son :

$$H_1^* = \frac{1}{2} I^+(\bar{r}_0) \quad \text{y} \quad V_1^* = \frac{1}{2} \frac{a}{g} I^+(\bar{r}_0) \quad (4.22)$$

donde :

$$I^+(\bar{r}_0) = \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+(\bar{r}, \bar{r}_0) + \frac{g}{a} S_V^+(\bar{r}, \bar{r}_0) \right) dt \quad (4.23)$$

De (4.17) y la definición de $K_x(x_0)$ dada en (4.16) y dependiendo del funcional de respuesta elegido, el valor que toma este invariante $I^+(\bar{r}_0)$ resulta :

$$\text{si } R \equiv H(x_0, T) \quad \text{entonces} \quad I^+(\bar{r}_0) = \delta_x(0) \quad (4.24)$$

$$\text{si } R \equiv V(x_0, T) \quad \text{entonces} \quad I^+(\bar{r}_0) = \frac{g}{a} \delta_x(0) \quad (4.25)$$

Análogamente, los valores adjuntos del punto 2, se determinan en la intersección de las curvas características C^-_0 (integrando entre los puntos 0 y 2) y C^+_4 (integrando entre los puntos 4 y 2), de donde, respectivamente, resultan

$$H_2^* - \frac{g}{a} V_2^* = I^-(\bar{r}_0) \quad (4.26)$$

$$H_2^* + \frac{g}{a} V_2^* = 0 \quad (4.27)$$

y resolviendo el sistema de ecuaciones (4.26) y (4.27), tenemos :

$$H_2^* = \frac{1}{2} I^-(\bar{r}_0) \quad \text{y} \quad V_2^* = -\frac{1}{2} \frac{a}{g} I^-(\bar{r}_0) \quad (4.28)$$

donde :

$$I^-(\bar{r}_0) = \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+(\bar{r}, \bar{r}_0) - \frac{g}{a} S_V^+(\bar{r}, \bar{r}_0) \right) dt \quad (4.29)$$

De (4.17) y la definición de $K_x(x_0)$ dada en (4.16) y dependiendo del funcional de respuesta elegido, el valor que toma este invariante $I^-(\bar{r}_0)$ resulta :

si $R \equiv H(x_0, T)$ entonces $I^-(\bar{r}_0) = \delta_x(0)$ (4.30)

si $R \equiv V(x_0, T)$ entonces $I^-(\bar{r}_0) = -\frac{g}{a} \delta_x(0)$ (4.31)

Recordemos que los valores de los puntos 1 y 2 son los valores a propagar, después de haber actuado las fuentes deltiformes, desde un tiempo $t = T^-$ hasta $t = 0$, donde las ecuaciones características adjuntas ya no tienen términos de fuente.

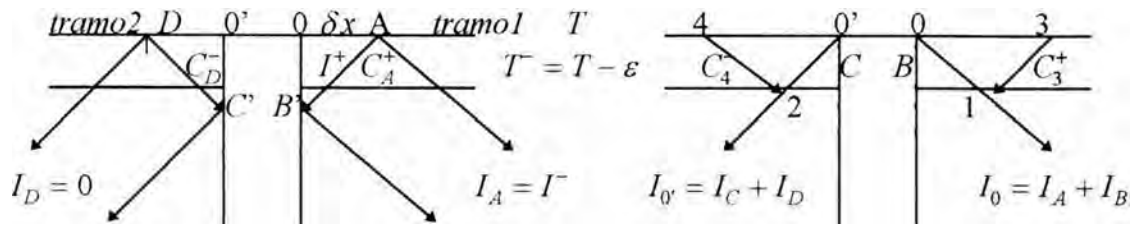
b) El punto (x_0, T) está al inicio de algún tramo.

En este caso los valores adjuntos a determinar son de los puntos 1 y 2 que pertenecen a dos tramos distintos ya que estamos viendo el caso de un componente que tiene dos tramos conectados. Por otro lado, además, debemos determinar los valores adjuntos en los nodos extremos, necesarios para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad.

Para ello haremos una aproximación de un punto interior A al extremo inicial 0 de un tramo1 conectado a un componente k que a su vez tiene otro tramo2 conectado en el punto

0'. Esta aproximación lo hacemos porque los puntos B y C deben cumplir con las condiciones de contorno, donde : $A = \bar{r}_0^+ = (x_0 + \delta x, T)$ con $\delta x \rightarrow 0$.

En la figura 4.4 se muestra el esquema de ubicación de los puntos y el esquema de solución para la determinación de dichos puntos.



A

FIGURA 4.4

Esquema de solución de las discontinuidades

A : aproximación al nodo inicial del tramo

B : resultantes

Luego, integrando la ecuación (4.9) a lo largo de la característica C^+_{A} entre los puntos A y B', tenemos

$$H_{B'}^* + \frac{g}{a} V_{B'}^* = I^+(\bar{r}_0^+) \quad (4.32)$$

Integrando la ecuación (4.10) a lo largo de la característica C^-_{D} entre los puntos D y C', tenemos :

$$H_{C'}^* - \frac{g}{a} V_{C'}^* = 0 \quad (4.33)$$

Teniendo en cuenta que $\bar{f}^* = (H^*, V^*)$ y $\bar{f} = (H, V)$, las condiciones de contorno adjuntas dadas por este componente se pueden escribir así

$$\begin{aligned} F_{1k}(\bar{f}_B^*, \bar{f}_C^*, \bar{f}_0, \bar{f}_0) &= 0 \\ F_{2k}(\bar{f}_B^*, \bar{f}_C^*, \bar{f}_0, \bar{f}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.34)$$

Luego del sistema de ecuaciones (4.32) , (4.33) y (4.34) se pueden determinar los valores de H_B^* , V_B^* , H_C^* y V_C^* , que están en función de $I^+(\bar{r}_0^+)$, sin embargo en el límite el valor de $I^+(\bar{r}_0^+)$ cambia por el de $I^+(\bar{r}_0)$, y es con este último valor del invariante que se calculan los valores de H_B^* , V_B^* , H_C^* y V_C^* .

Por otro lado, se tiene que

$$I_0 = I_A + I_B = I^-(\bar{r}_0^+) + H_B^* - \frac{g}{a} V_B^* \quad (4.35)$$

$$I_0 = I_C + I_D = H_C^* + \frac{g}{a} V_C^* \quad (4.36)$$

Los valores adjuntos del punto 1 se obtendrán en la intersección de las curvas características C^{-}_0 y C^{+}_3 , entonces, integrando en las curvas correspondientes se tendrá lo siguiente :

$$H_1^* - \frac{g}{a} V_1^* = I_0 \quad H_1^* + \frac{g}{a} V_1^* = 0 \quad (4.37)$$

Y los valores adjuntos del punto 2 se obtendrán en la intersección de las curvas características C^{+}_0 y C^{-}_4 , entonces, integrando se tendrá lo siguiente :

$$H_2^* + \frac{g}{a} V_2^* = I_0 \quad H_2^* - \frac{g}{a} V_2^* = 0 \quad (4.38)$$

Del sistema de ecuaciones (4.37) se tienen los valores de H_1^* y V_1^* y del sistema de ecuaciones (4.38) los valores de H_2^* y V_2^* .

Como ya se ha visto el procedimiento consiste primero en determinar los valores adjuntos de los nodos extremos, luego los invariantes y finalmente los valores a propagar por el método de las características con las ecuaciones características adjuntas sin términos de fuente.

En el caso de que el componente tenga un solo tramo, se utilizará la ecuación (4.32), y en este caso la expresión (4.34) tendrá una sola ecuación; luego con estas dos ecuaciones se continúa con el procedimiento ya indicado. Y en el caso de que el componente esté conectado a más de dos tramos, se tendrá para n tramos la ecuación (4.32), $n-1$ ecuaciones como (4.33) y n ecuaciones de las condiciones de contorno, teniendo así un sistema de $2n$ ecuaciones y continuándose con el procedimiento ya visto.

De (4.17) y la definición de $K_x(x_0)$ dada en (4.16) y dependiendo del funcional de respuesta, el valor que toman los invariantes $I^+(\bar{r}_0^+)$, $I^-(\bar{r}_0^+)$ y $I^+(\bar{r}_0)$ son :

$$\text{si } R \equiv H(x_0, T) : I^+(\bar{r}_0^+) = I^-(\bar{r}_0^+) = \delta_x(0) \quad \text{y} \quad I^+(\bar{r}_0) = 2\delta_x(0) \quad (4.39)$$

$$\text{si } R \equiv V(x_0, T) : I^+(\bar{r}_0^+) = -I^-(\bar{r}_0^+) = \frac{g}{a}\delta_x(0) \quad \text{y} \quad I^+(\bar{r}_0) = 2\frac{g}{a}\delta_x(0) \quad (4.40)$$

c) El punto (x_0, T) está al final de algún tramo.

En la figura 4.5 se muestra la ubicación de los distintos puntos y el esquema de solución. Procederemos en forma similar al caso anterior.

En este caso se tiene $A = \bar{r}_0^- = (x_0 - \delta x, T)$ donde $\delta x \longrightarrow 0$

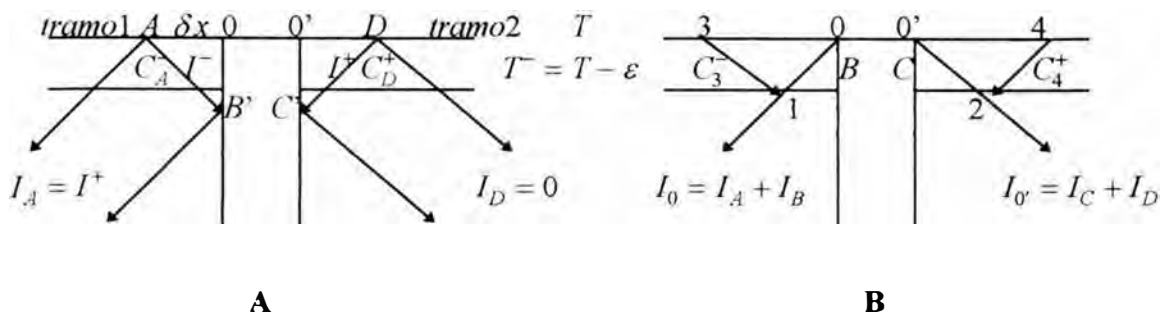


FIGURA 4.5

Esquema de solución de las discontinuidades

A : aproximación al nodo inicial del tramo

B : resultantes

Integrando la ecuación (4.10) a lo largo de la característica C_A^- entre los puntos A y B', tenemos :

$$H_B^* - \frac{g}{a} V_B^* = I^-(\bar{r}_0^-) \quad (4.41)$$

Integrando la ecuación (4.9) a lo largo de la característica C_D^+ entre los puntos D y C', tenemos :

$$H_C^* + \frac{g}{a} V_C^* = 0 \quad (4.42)$$

De las condiciones de contorno adjuntas :

$$\begin{aligned} F_{1k}(\bar{f}_B^*, \bar{f}_C^*, \bar{f}_0, \bar{f}_0) &= 0 \\ F_{2k}(\bar{f}_B^*, \bar{f}_C^*, \bar{f}_0, \bar{f}_0) &= 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Luego del sistema de ecuaciones (4.41) , (4.42) y (4.43) se determinan los valores de H_B^* , V_B^* , H_C^* y V_C^* , que están en función de $I^-(\bar{r}_0^-)$, para obtener los valores de H_B^* , V_B^* , H_C^* y V_C^* se debe cambiar el valor de $I^-(\bar{r}_0^-)$ por el de $I^-(\bar{r}_0)$.

Por otro lado, se tiene que :

$$I_0 = I_A + I_B = I^+(\bar{r}_0^-) + H_B^* + \frac{g}{a} V_B^* \quad (4.44)$$

$$I_{0^*} = I_C + I_D = H_C^* - \frac{g}{a} V_C^* \quad (4.45)$$

Y los valores adjuntos a propagar serán de los puntos 1 y 2 . Los valores del punto 1 se obtendrán de la intersección de las curvas características C^{+0} y C^{-3} y los valores del punto 2 de la intersección de las curvas C^{-0^*} y C^{+4} , entonces se tendrá lo siguiente :

$$H_1^* + \frac{g}{a} V_1^* = I_0 \quad H_1^* - \frac{g}{a} V_1^* = 0 \quad (4.46)$$

$$H_2^* - \frac{g}{a} V_2^* = I_{0^*} \quad H_2^* - \frac{g}{a} V_2^* = 0 \quad (4.47)$$

Del sistema de ecuaciones (4.46) se tienen los valores de H_1^* y V_1^* y del sistema de ecuaciones (4.47) los valores de H_2^* y V_2^*

En el caso de que el componente tenga un solo tramo, se utilizara la ecuación (4.41), y en este caso la expresión (4.43) tendrá una sola ecuación; luego con dos ecuaciones se podrá determinar los valores de H_1^* y V_1^* . Y en el caso de que el componente esté conectado a más de dos tramos , se tendrá para n tramos la ecuación (4.41) y $n-1$ ecuaciones como (4.42) y n ecuaciones de las condiciones de contorno en la expresión (4.43), teniendo así un sistema de $2n$ ecuaciones con los que se determinarán los valores adjuntos de los n puntos.

De (4.17) y la definición de $K_x(x_0)$ dada en (4.16) y dependiendo del funcional de respuesta, el valor que toman los invariantes $I^+(\bar{r}_0^-)$, $I^-(\bar{r}_0^-)$ y $I^-(\bar{r}_0)$ son :

$$\text{si } R \equiv H(x_0, T) : I^+(\bar{r}_0^-) = I^-(\bar{r}_0^-) = \delta_x(0) \quad \text{y} \quad I^-(\bar{r}_0) = 2 \delta_x(0) \quad (4.48)$$

$$\text{si } R \equiv V(x_0, T) : I^+(\bar{r}_0^-) = -I^-(\bar{r}_0^-) = \frac{g}{a} \delta_x(0) \quad \text{y} \quad I^-(\bar{r}_0) = -2 \frac{g}{a} \delta_x(0) \quad (4.49)$$

En el Anexo 2 se puede ver un ejemplo de aplicación de lo expuesto.

4.4.4. Discretizacion Espacio-temporal

Parecería lógico emplear un esquema de diferencias finitas de un solo paso, similar al empleado en el problema directo, con la única diferencia de que debería retroceder en vez de avanzar en el tiempo.

Sin embargo, este esquema resultó ineficaz para propagar las funciones deltiformes a lo largo de las características (Lorenzo [16]). Para solucionar estas dificultades se utilizó un esquema de doble paso o de paso intermedio, como se muestra en la figura 4.6.

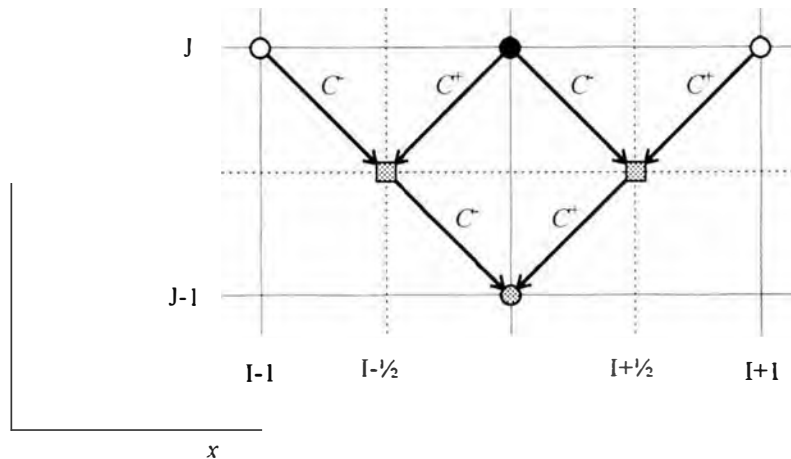


FIGURA 4.6

Esquema doble paso para el problema adjunto

La idea fundamental de este esquema es avanzar medio paso hasta los dos puntos de cruce $(I-1/2, J+1/2)$ e $(I+1/2, J+1/2)$, evaluar los valores intermedios de velocidad y altura en los mismos, y luego avanzar el paso final hasta el punto (I, J) . Para evaluar los puntos intermedios debemos poner en juego las características que vienen desde el punto $(I, J+1)$, con lo cual introducimos la información que el esquema unipaso es incapaz de ver.

Se detalla a continuación el esquema numérico de doble paso asociado a las ecuaciones características del problema adjunto, ecuaciones (4.9) y (4.10) sin términos de fuentes S^+ para todo $t < T$. Partimos de suponer conocidos los valores adjuntos de altura y velocidad para todo nodo en el paso J

4.4.5. ECUACIONES DISCRETIZADAS

4.4.5.1. Paso Intermedio

En la figura 4.7 se muestra la situación típica del avance hasta el valor intermedio, en este caso en el punto $(I-1/2, J-1/2)$. Los valores a propagar por las características C^+ y C^- se indican como puntos negros, y pueden ser o no iguales a los valores adjuntos en los nodos, indicados como puntos blancos, dependiendo de si alguno de ellos es el nodo de referencia. Estos valores a propagar corresponden a lo que habíamos llamado puntos 1, 2 o P , según el caso, en la sección anterior.

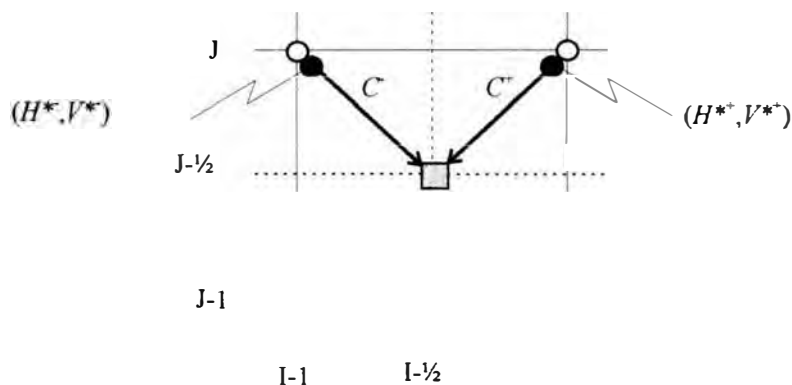


FIGURA 4.7

Paso intermedio

Integrando las ecuaciones (4.9) y (4.10) utilizando un esquema de diferencias finitas, y que, para mantener la máxima coherencia con el esquema numérico del problema directo, se utilizan los valores directos de velocidad evaluados en el paso J-1 en todo lo que tenga que ver con términos de fricción, se tiene :

$$H_{i}^{*j} - H_{i-1/2}^{*j-1/2} + \frac{a}{g} \left(V_{i}^{*j} - V_{i-1/2}^{*j-1/2} \right) - \frac{g \Delta t}{a} \frac{|V_{i-1}^{j-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_{i-1}^{j-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) V_{i}^{*j} = 0$$

$$H_{i-1}^{*j} - H_{i-1/2}^{*j-1/2} - \frac{a}{g} \left(V_{i-1}^{*j} - V_{i-1/2}^{*j-1/2} \right) + \frac{g \Delta t}{a} \frac{|V_{i-1}^{j-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_{i-1}^{j-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) V_{i-1}^{*j} = 0$$

Ordenando estas relaciones tenemos :

$$H_{i-1/2}^{*j-1/2} + A^{+} V_{i-1/2}^{*j-1/2} = B^{+}$$

$$H_{i-1/2}^{*j-1/2} + A^{-} V_{i-1/2}^{*j-1/2} = B^{-}$$
(4.50)

donde :

$$A^{+} = \frac{g}{a} \quad B^{+} = H_{i}^{*j} + \frac{g}{a} V_{i}^{*j} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{|V_{i-1}^{j-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_{i-1}^{j-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right)$$

$$A^{-} = -\frac{g}{a} \quad B^{-} = H_{i-1}^{*j} - \frac{g}{a} V_{i-1}^{*j} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{|V_{i-1}^{j-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_{i-1}^{j-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right)$$
(4.51)

de donde podemos obtener :

$$H_{i-1/2}^{*j-1/2} = \frac{A^{+} B^{-} - A^{-} B^{+}}{A^{+} - A^{-}} \quad V_{i-1/2}^{*j-1/2} = \frac{B^{+} - B^{-}}{A^{+} - A^{-}}$$
(4.52)

Es importante notar que los valores adjuntos de partida (finales) son nulos y que en el nodo de referencia los valores a propagar dependen de los invariantes Γ^{+} e Γ^{-} , según el caso, el valor de la delta para esta discretización valdrá

$$\delta_x(0) = \frac{1}{\Delta x}$$
(4.53)

4.4.5.2. Paso final

En este paso final debemos distinguir entre los nodos interiores y los nodos extremos, ya que la solución en estos últimos depende no sólo de lo que pasa en los tramos, sino también de las condiciones de contorno dadas por el componente conectado a ellos.

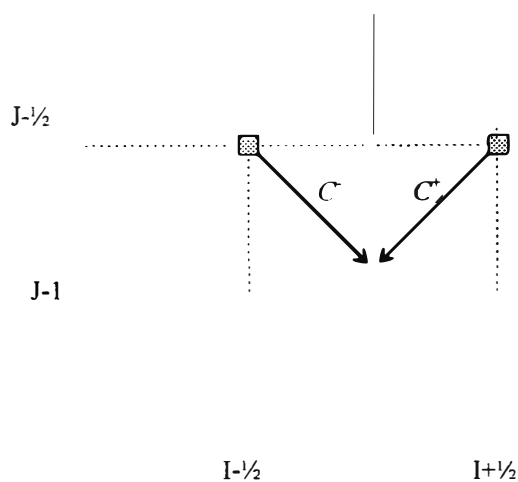


FIGURA 4.8

Paso final

Procediendo en forma similar al paso intermedio, en este paso final para todos los nodos interiores ($1 < I < N+1$) de los tramos, tenemos que:

$$H_I^{J-1} = \frac{A^+ B^- - A^- B^+}{A^+ - A^-} \quad V_I^{J-1} = \frac{B^+ - B^-}{A^+ - A^-} \quad (4.54)$$

donde :

$$\begin{aligned}
A^+ &= \frac{g}{a} & B^+ &= H_{I+\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} + \frac{g}{a} V_{I+\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{|V_I^{J-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_I^{J-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right) \\
A^- &= -\frac{g}{a} & B^- &= H_{I-\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} - \frac{g}{a} V_{I-\frac{1}{2}}^{J-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\Delta t}{2} \frac{|V_I^{J-1}|}{D} \left(\zeta + \frac{V_I^{J-1}}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

Para los nodos extremos la solución saldrá de combinar las ecuaciones características discretas con los valores obtenidos en el paso intermedio proximos a los extremos y las ecuaciones de las condiciones de contorno adjuntas.

4.4.6. Programa *ADWHAT*

El código *ADWHAT* (**A**djoint **W**ater **H**ammer **A**nalysis in **T**ubes) es un programa en lenguaje FORTRAN, desarrollado para la resolución del problema adjunto una vez conocido el problema directo. Sigue básicamente los lineamientos del programa *WHAT* descritos anteriormente, pero, contempla la evolución temporal inversa, sin términos de fuente en el problema adjunto transitorio y con términos de fuentes en el pseudotransitorio adjunto. Debido a la dependencia del problema adjunto con el directo, el programa *ADWHAT* lee en cada paso temporal la base de datos generada por *WHAT* (correspondiente a la solución del problema directo).

El programa cuenta con la posibilidad de considerar dos funcionales: $H(x_{\bullet}, T)$ y $V(x_{\bullet}, T)$ que debe ser introducido como un dato adicional por el usuario. El programa *ADWHAT* crea una base de datos adjunta, de estructura similar a la directa, en la que almacena los valores de la velocidad adjunta y de la altura piezométrica adjunta en cada nodo y en cada paso temporal.

4.5. LOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

4.5.1. Ecuaciones Discretizadas

La resolución numérica de los coeficientes de sensibilidad implica conocer antes la solución de los problemas directo y adjunto (en el que se elige el funcional de respuesta), además de (3.65) sabemos que consta de una integral temporal más un término (que es la solución de la integral espacial), evaluados en la componente en donde se encuentra el parámetro p_i

Luego, los coeficientes de sensibilidad por diferencias finitas de acuerdo a las ecuaciones (3.44) y (3.60) tiene la siguiente expresión :

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \sum_{n=1}^N \left[(C_{1k/i}^n G_{1k}^n + C_{2k/i}^n G_{2k}^n) + (C_{1k/i}^{n-1} G_{1k}^{n-1} + C_{2k/i}^{n-1} G_{2k}^{n-1}) \right] \cdot \frac{\Delta t}{2} + C_{1k/i}^0 \tilde{G}_{1k} + C_{2k/i}^0 \tilde{G}_{2k}$$

donde : N es el número de pasos temporales ($T = N \cdot \Delta t$)

4.5.2. Programa SANWHAT

El código *SANWHAT* (Sensibility **A**nalysis for **W**HAT) es un programa desarrollado en lenguaje FORTRAN para realizar el análisis de sensibilidad. El programa *SANWHAT* trabaja con las bases de datos del programa *WHAT* y *ADWHAT*, resolviendo la integral (3.65) y evaluando el término correspondiente a la solución de la integral espacial.

Obtiene los coeficientes de sensibilidad para los los funcionales de respuesta $H(x_0, T)$ y $V(x_0, T)$ para perturbaciones de los parámetros que se encuentran en los siguientes tipos de componentes: reservorio, válvula con altura de presión constante, pérdida concentrada, cambio de área, tee sin pérdidas, bomba y válvula con flujo másico crítico.

5. RESULTADOS

5.1. INTRODUCCION

En esta sección analizaremos los resultados obtenidos para un caso ejemplo. Primero, veremos un esquema de una red hidráulica conformada por varias tuberías conectadas entre sí a través de componentes de diferente tipo. A continuación, veremos los resultados del problema directo (programa *WHAT*); para ello, graficaremos la evolución temporal de la altura piezométrica y de la velocidad en tres nodos de la red. Luego, veremos los resultados del problema adjunto (programa *ADWHAT*), donde graficaremos y analizaremos los coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos. Finalmente veremos los resultados de los coeficientes de sensibilidad (programa *SANWHAT*).

En el caso ejemplo a analizar, el sistema se encuentra inicialmente en condiciones del estado estacionario. El transitorio hidráulico se produce por el cierre lento (tiempo de cierre $TAU=1.39$ s) de la válvula ubicada en uno de los extremos de la red. El cierre de la válvula se modela mediante el incremento lineal (respecto al tiempo) del coeficiente de pérdidas de la válvula.

Para la resolución numérica de las ecuaciones características por diferencias finitas la discretización adoptada fue de $\Delta x = L/5$ y $\Delta t = \Delta x/a = 1.39E-3$ s donde L es la longitud de los tramos y a es la velocidad de propagación, $a_1 = 1437$ m/s para la tubería de 1" y $a_2 = 1420$ m/s para la tubería de 1.5".

Las constantes utilizadas en el modelo de los componentes (las condiciones de contorno) serán los parámetros respecto de los cuales determinaremos los coeficientes de sensibilidad. Debido a que la máxima altura piezométrica (de presión) se produce para el tiempo $t = 0.2087$ s (ciclo=150) calculamos los coeficientes de sensibilidad para dicho tiempo.

5.2. DATOS CASO EJEMPLO

En la figura 5.1 se muestra el esquema de una red hidráulica conformada por 9 tramos de tuberías y 9 componentes.

Se tiene 6 tuberías iguales del tipo T1 y otras 3 del tipo T2 con las siguientes dimensiones:

T1 : tramos con : $L = 10.0$ m, $D = 0.0254$ m, $RUG = 1E-4$ m, $ESP = 5E-3$ m

T2 : tramos con : $L = 9.88$ m, $D = 0.0381$ m, $RUG = 1E-4$ m, $ESP = 5E-3$ m

En cuanto a los componentes, tenemos:

- En el componente C1 (reservorio) se tiene que: $HT=H+Hatm$, donde H es la altura del nivel de agua ($H=10$ m), $Hatm$ es la altura de presión de la atmósfera ($Hatm=10$ m), HT es la altura de presión constante en el reservorio y KT es el coeficiente de pérdidas a la salida (o entrada) del reservorio.
- En el componente C2 (válvula con extremo de altura constante), se tiene que HV es la altura de presión constante en un extremo de la válvula (en nuestro caso $HV=Hatm$), y $KV = KVI + (KVF-KVI) * t /TAU$ donde KV es el coeficiente de pérdidas en nuestro caso variando linealmente respecto al tiempo desde un KV inicial ($KVI=10$) hasta un KV final ($KVF=1000$) durante un tiempo ($TAU=1.39$ s).
- Los componentes C3 y C9 (tees) no tienen parámetros propios y pueden conectar tramos de diferentes diámetros. Además, se desprecian las pérdidas hidráulicas.
- El componente C4 (cambio de área) conecta 2 tuberías de diámetros diferentes y el coeficiente de pérdidas está en función de los diámetros $KD = f(D1,D2)$.
- En los componentes C5 y C7 (bombas operando en modo normal) se tiene que la curva característica está ajustada a una parábola, como $Hb = A*V^2 + B*V + C$, donde Hb es la altura de elevación de la bomba y V la velocidad. En nuestro caso, las constantes tienen los siguientes valores: $A=-0.6$ s²/m, $B=0$ s y $C=8$ m.

- Los componentes C6 y C8 (pérdidas concentradas) pueden modelar diferentes tipos de componentes con coeficientes de pérdidas K_P . Para nuestro ejemplo $K_{P6} = 100$ y $K_{P8} = 50$.

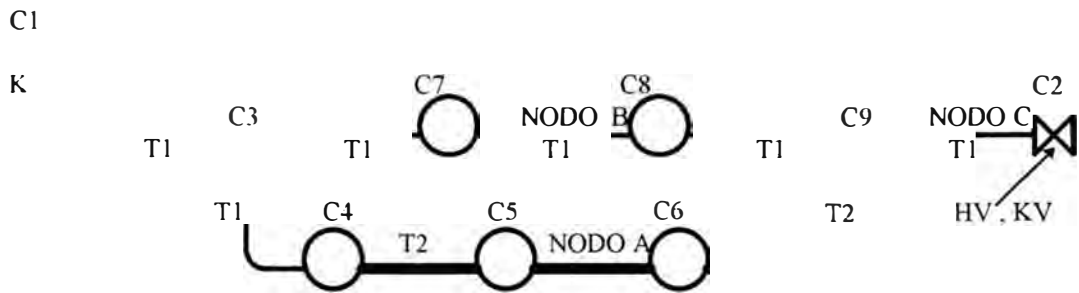


FIGURA 5.1

Esquema de una red hidraulica

5.3. RESULTADOS PROBLEMA DIRECTO

En la figuras 5.2 y 5.3 se muestran la evolución de la altura piezométrica H y la velocidad V en tres nodos A, B y C (la ubicación de los nodos se muestra en la figura 5.1). En la figura 5.2 identificamos la presión máxima que ocurre en el nodo C para el ciclo 150, dato que nos servirá luego para realizar el análisis de sensibilidad, junto a los otros dos nodos A y B.

En la figura 5.2 se observa que la altura piezométrica crece rápidamente, mientras la velocidad disminuye (ver figura 5.3), hasta un tiempo $t=0.2$ s aproximadamente debido al fenómeno de golpe de ariete. Luego la altura piezométrica comienza a disminuir hasta alcanzar un nuevo estacionario después de 1.5 s.

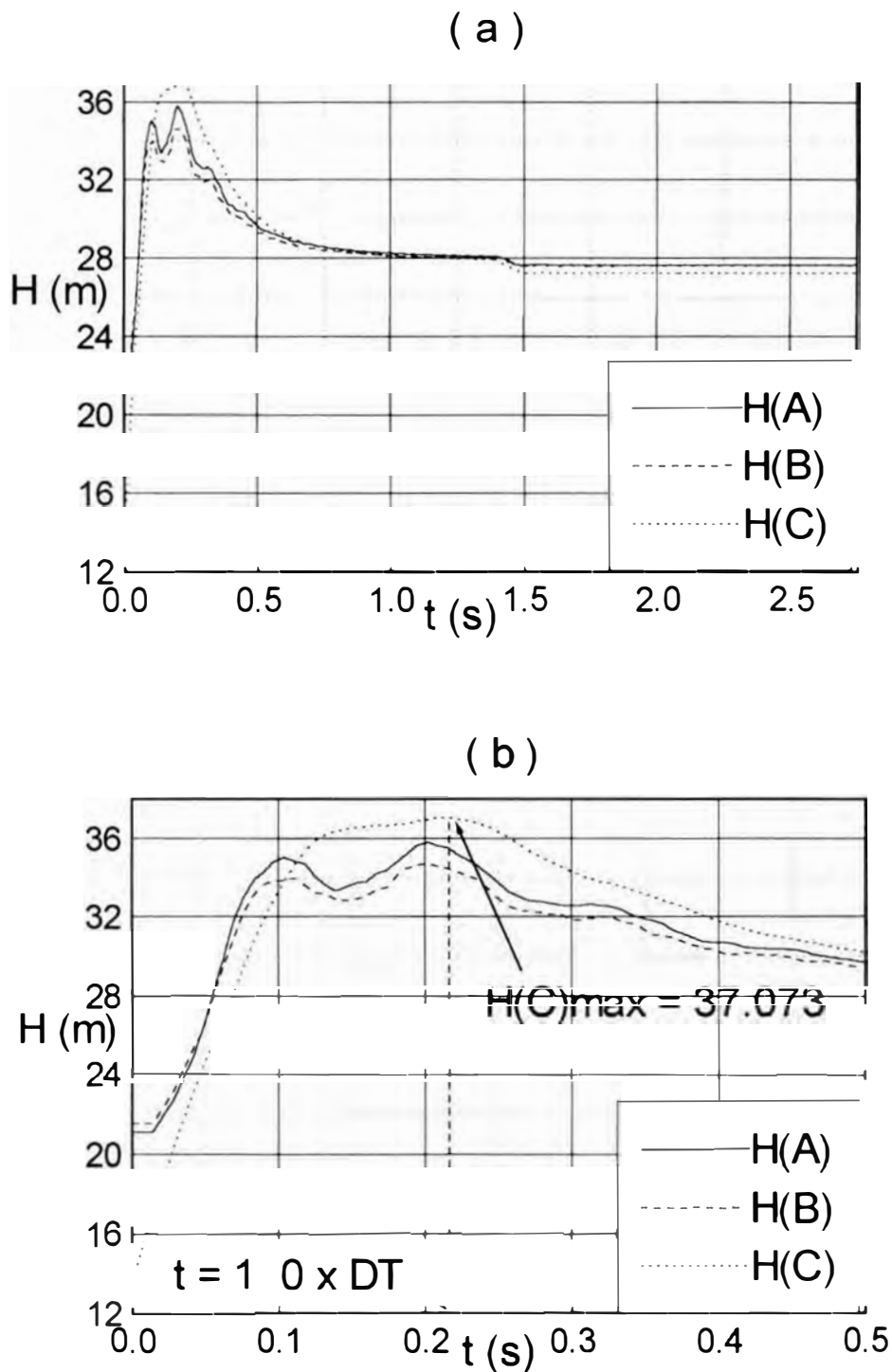


FIGURA 5.2

- a) Evolución de la altura piezométrica en los nodos A, B y C (ver figura 5.1).
 nodo A conectado a la componente pérdida concentrada (C6)
 nodo B conectado a la componente pérdida concentrada (C8)
 nodo C conectado a la componente válvula (C2)
- b) Ampliación de la zona de interés. $DT = 1.39 \text{ E-3 s}$

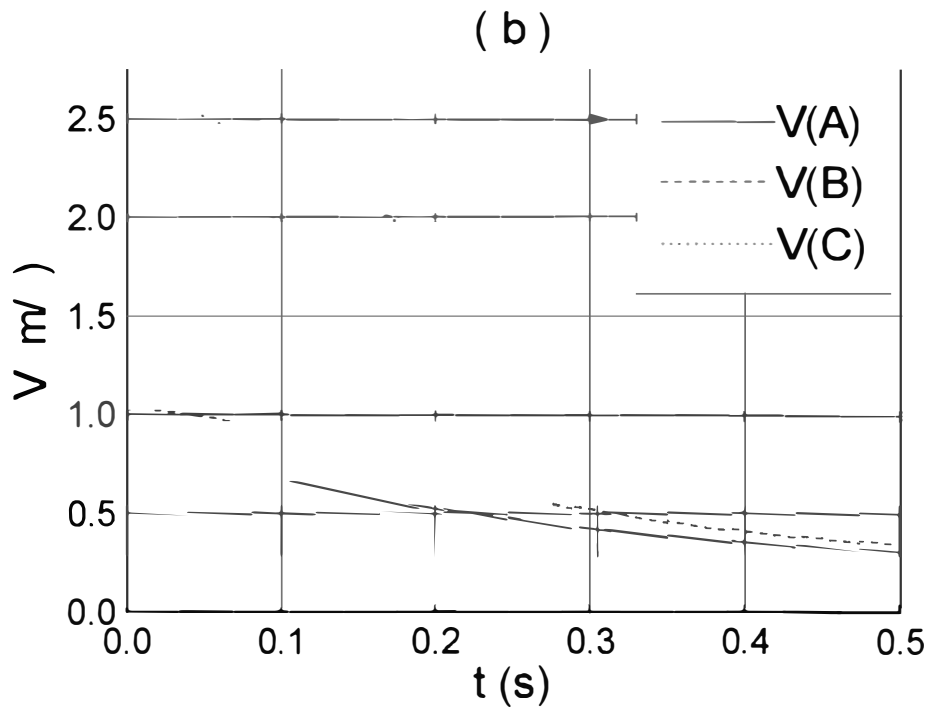
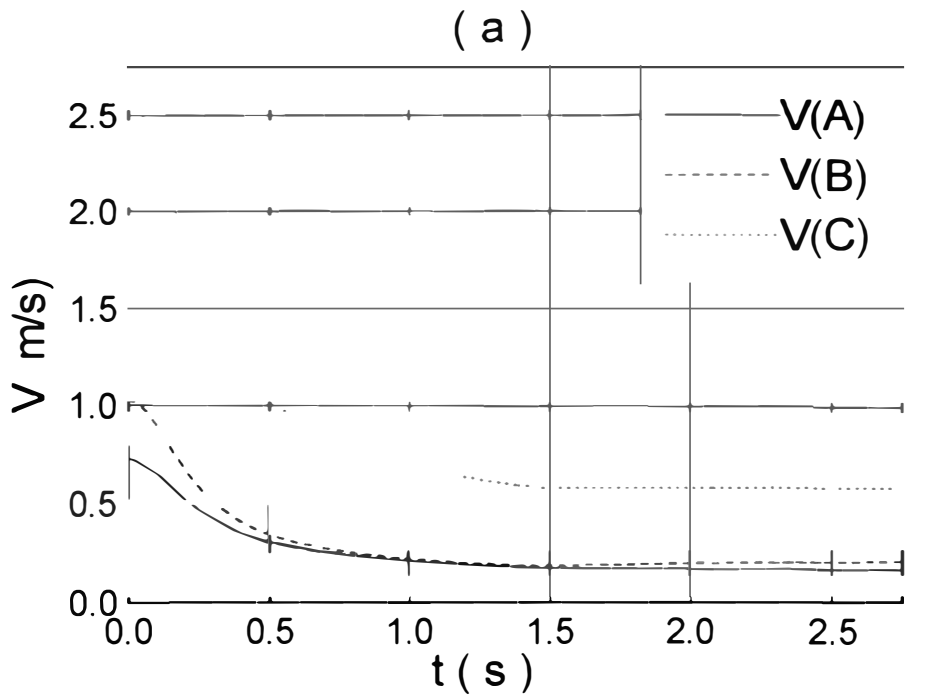


FIGURA 5.3

- a) Evolución de la velocidad en los nodos A, B y C (ver figura 5.1).
 nodo A conectado a la componente pérdida concentrada (C6)
 nodo B conectado a la componente pérdida concentrada (C8)
 nodo C conectado a la válvula (C2)
- b) Ampliación de la zona de interés.

5.4. RESULTADOS PROBLEMA ADJUNTO

En las figuras 5.4 y siguientes. se muestran los resultados de las variables adjuntas H^* y V^* donde se ve la propagación a través de los tramos, así como la reflexión y transmisión en los componentes.

5.5. ANALISIS DE RESULTADOS DEL PROBLEMA ADJUNTO

En el problema adjunto las variables adjuntas H^* y V^* tienen un comportamiento similar a la variable altura piezométrica H del problema directo. Así, en las figuras 5.4 y siguientes. vemos que la magnitud de las variables adjuntas decrecen conforme avanzan a través de los tramos; esto se debe al término de fricción, ecuaciones (3.11). También vemos que las variables adjuntas se transmiten y reflejan a través de los componentes.

Para analizar este efecto de transmisión y reflexión en el anexo 3 se hace un estudio de la función adjunta. Analíticamente se determinan coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos, cuyas expresiones se evalúan con los resultados del problema directo y cuyos resultados compararemos con los resultados del problema adjunto.

A continuación calcularemos los coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos en los diversos componentes que conforman la red de nuestro caso ejemplo.

a) En el reservorio (componente C1):

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.6) tenemos:

$$r_{H'}^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{-2.506E-2}{2.524E-2} = -0.9928 \qquad r_{V'}^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{3.666}{3.699} = 0.9911$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo, tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = -\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$$

donde $\alpha = \frac{2g \cdot (H_1 - H_T)}{a_1 \cdot l_1} = \frac{2 \cdot 9.806 \cdot (19.6908 - 20.)}{1437.4395 \cdot 2.0103} = -0.0021$

luego, $r_H^* = -r_V^* = -0.9958$

b) En la válvula (componente C2):

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.7) tenemos:

$$r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{2.956E-2}{-4.40E-2} = -0.6718 \quad r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{4.319}{6.438} = 0.6709$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los valores del problema directo, tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = -\frac{1 - \beta}{1 + \beta}$$

donde $\beta = \frac{2g \cdot (H_1 - H_T)}{a_1 \cdot l_1} = \frac{2 \cdot 9.806 \cdot (36.8815 - 10)}{1437.4395 \cdot 1.8834} = 0.1947$

luego, $r_H^* = -r_V^* = -0.6740$

c) En las tees (componentes C3 y C9)

c.1) componente C3:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.8) tenemos:

$$r_{H1}^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{-1.269E-2}{3.808E-2} = -0.3306$$

$$r_{V1}^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{1.850}{5.582} = 0.3314$$

$$t_{H2}^* = \frac{H_{r2}^*}{H_i^*} = \frac{2.535E-2}{3.808E-2} = 0.6657$$

$$t_{V2}^* = \frac{V_{r2}^*}{V_i^*} = \frac{3.717}{5.582} = 0.6659$$

$$t_{H3}^* = \frac{H_{r3}^*}{H_i^*} = \frac{2.531E-2}{3.808E-2} = 0.6646$$

$$t_{V3}^* = \frac{V_{r3}^*}{V_i^*} = \frac{-3.710}{5.582} = -0.6646$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo donde $a_1 = a_2 = a_3 = 1437.4395 \text{ m/s}$, $D_1 = D_2 = D_3 = D$, $V_1 = -0.7283 \text{ m/s}$, $V_2 = -1.9726 \text{ m/s}$ y $V_3 = 1.2443 \text{ m/s}$ tenemos que:

$$r_{H1}^* = -r_{V1}^* = \frac{-\left(1 + \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) - \left(1 + \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a}\right)}{\left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a}\right)} = -0.3327$$

$$t_{H2}^* = t_{V2}^* = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{V_3}{a}\right)}{\left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a}\right)} = 0.6670$$

$$t_{H3}^* = t_{V3}^* = \frac{2 \cdot \left(1 + \frac{V_2}{a}\right)}{\left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a}\right)\left(1 + \frac{V_3}{a}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a}\right)} = 0.6657$$

c.2) componente C9:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.14) tenemos:

$$r_{H1}^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{-4.419E-2}{8.349E-2} = -0.5293$$

$$r_{V1}^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{6.466}{12.239} = 0.5283$$

$$t_{H2}^* = \frac{H_{r2}^*}{H_i^*} = \frac{3.893E-2}{8.349E-2} = 0.4663$$

$$t_{V2}^* = \frac{V_{r2}^*}{V_i^*} = \frac{5.707}{12.239} = 0.4663$$

$$t_{H3}^* = \frac{H_{r3}^*}{H_i^*} = \frac{8.975E-2}{8.349E-2} = 1.075$$

$$t_{V3}^* = \frac{V_{r3}^*}{V_i^*} = \frac{12.998}{12.239} = 1.062$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo, donde $a_1 = a_2 = 1437.4395 \text{ m/s}$, $a_3 = 1420.1902 \text{ m/s}$, $D_1 = D_2 = 0.0254 \text{ m}$, $D_3 = 0.0381 \text{ m}$, $V_1 = -1.8572 \text{ m/s}$, $V_2 = -0.6814 \text{ m/s}$, $V_3 = -0.5226 \text{ m/s}$, tendremos que:

$$r_{H1}^* = -r_1^* = \frac{-\left(1 + \frac{V_1}{a_1}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_2 + a_2}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_1 + a_1}\right) - \left(1 + \frac{V_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2}{\left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_2 + a_2}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_1 + a_1}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2} = -0.5311$$

$$i_{H2}^* = i_{r2}^* = \frac{2 \cdot \left(\frac{a_3 + V_3}{a_2 + a_2}\right)}{\left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_2 + a_2}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_1 + a_1}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2} = 0.4672$$

$$i_{H3}^* = \frac{2 \frac{a_1}{a_3} \cdot \left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2}{\left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_2 + a_2}\right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{a_3 + V_3}{a_1 + a_1}\right) + \left(1 - \frac{V_1}{a_1}\right)\left(1 + \frac{V_2}{a_2}\right)\left(\frac{D_3}{D_1}\right)^2} = 1.0768$$

$$i_{r3}^* = \frac{a_3}{a_1} i_{H3}^* = 1.0639$$

d) En el cambio de área (componente C4):

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.9) tenemos:

$$r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{3.407E-2}{8.762E-2} = 0.3888$$

$$r_r^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{-4.952}{12.690} = -0.3902$$

$$i_H^* = \frac{H_i^*}{H_i^*} = \frac{5.278E-2}{8.762E-2} = 0.6024$$

$$i_r^* = \frac{V_i^*}{V_i^*} = \frac{7.737}{12.690} = 0.6097$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo, donde $a_1 = 1420.1902 \text{ m/s}$, $a_2 = 1437.4395 \text{ m/s}$, y $\frac{D_1}{D_2} = \frac{0.0381}{0.0254}$ tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = \frac{\eta - 1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2}{\eta + 1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2} \quad \text{y} \quad t_H^* = \frac{a_1}{a_2} t_V^* = \frac{2 \frac{a_1}{a_2}}{\eta + 1 + \frac{a_2}{a_1} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2}$$

donde $\eta = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 \cdot I_1^*} = \frac{2 \cdot 9.806 \cdot (25.0213 - 24.9824)}{1420.1902 \cdot (-0.5521)} = -9.7E-4$

luego, $r_H^* = -r_V^* = 0.3896$ $t_H^* = 0.6031$ $t_V^* = \frac{a_2}{a_1} t_H^* = 0.6104$

e) En las bombas (componentes C5 y C7):

e.1) componente C5:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.10) tenemos:

$$\begin{aligned} r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} &= \frac{1.4E-4}{8.793E-2} = 0.0016 & r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} &= \frac{-0.039}{12.734} = -0.0030 \\ t_H^* = \frac{H_t^*}{H_i^*} &= \frac{8.769E-2}{8.793E-2} = 0.9973 & t_V^* = \frac{V_t^*}{V_i^*} &= \frac{12.700}{12.734} = 0.9973 \end{aligned}$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los datos y resultados del problema directo, tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = \frac{\varphi}{2 + \varphi} \quad t_H^* = t_V^* = \frac{2}{2 + \varphi}$$

donde $\varphi = -\frac{g}{a_1} (2 \cdot A_n I_1^* + I S 1 \cdot B_n) = -\frac{9.806}{1420.1902} (2 \cdot 0.6 \cdot (-0.5418)) = 0.0045$

luego, $r_H^* = -r_V^* = 0.0022$ $t_H^* = t_V^* = 0.9978$

e.2) componente C7:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.12) tenemos:

$$r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{9.E-5}{3.830E-2} = 0.0023 \qquad r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{-0.023}{5.614} = -0.0041$$

$$t_H^* = \frac{H_i^*}{H_r^*} = \frac{3.814E-2}{3.830E-2} = 0.9958 \qquad t_V^* = \frac{V_i^*}{V_r^*} = \frac{5.591}{5.614} = 0.9959$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo, tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = \frac{\varphi}{2 + \varphi} \qquad t_H^* = t_V^* = \frac{2}{2 + \varphi}$$

donde
$$\varphi = -\frac{g}{a_1} (2A_n V_i^* + IS1 \cdot B_n) = -\frac{9.806}{1437.4395} (2 \cdot 0.6 \cdot (-0.7122)) = 0.0058$$

luego,
$$r_H^* = -r_V^* = 0.0029 \qquad t_H^* = t_V^* = 0.9971$$

f) En las pérdidas concentradas (componentes C6 y C8):

f.1) componente C6:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.11) tenemos:

$$r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{1.59E-3}{8.968E-2} = 0.0177 \qquad r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{-0.249}{12.989} = -0.0192$$

$$t_H^* = \frac{H_i^*}{H_r^*} = \frac{8.799E-2}{8.968E-2} = 0.9811 \qquad t_V^* = \frac{V_i^*}{V_r^*} = \frac{12.744}{12.989} = 0.9811$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo, tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = \frac{\gamma}{2 + \gamma} \qquad t_H^* = t_V^* = \frac{2}{2 + \gamma}$$

donde
$$\gamma = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} = \frac{2 \cdot 9.806 \cdot (34.2292 - 35.6669)}{1420.1902 \cdot (-0.5309)} = 0.0374$$

luego,
$$r_H^* = -r_V^* = 0.0184 \qquad t_H^* = t_V^* = 0.9816$$

f.2) componente C8:

Con los resultados del problema adjunto (figura 5.13) tenemos:

$$r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*} = \frac{4.4E-4}{3.887E-2} = 0.0113 \qquad r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*} = \frac{-0.075}{5.697} = -0.0131$$

$$t_H^* = \frac{H_t^*}{H_i^*} = \frac{3.836E-2}{3.887E-2} = 0.9869 \qquad t_V^* = \frac{V_t^*}{V_i^*} = \frac{5.623}{5.697} = 0.9870$$

En forma analítica, ver anexo 3, y con los resultados del problema directo tenemos que:

$$r_H^* = -r_V^* = \frac{\gamma}{2 + \gamma} \qquad t_H^* = t_V^* = \frac{2}{2 + \gamma}$$

donde
$$\gamma = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} = \frac{2 \cdot 9.806 \cdot (33.3755 - 34.6138)}{1437.4395 \cdot (-0.6969)} = 0.0242$$

luego,
$$r_H^* = -r_V^* = 0.0120 \qquad t_H^* = t_V^* = 0.9880$$

Comparando los resultados tenemos que en general los coeficientes de reflexión y transmisión obtenidos analíticamente son mayores que los calculados en base a los resultados del problema adjunto. Esto es porque debido a la discretización debemos tomar el pulso incidente adelantado; por lo tanto, su magnitud es mayor al que teóricamente incide en la componente. Por otra parte, los pulsos que se reflejan y transmiten se toman atrasados, por lo que son menores a los que teóricamente salen de la componente debido al efecto de la fricción.

En la tee (C3) se tiene que el coeficiente de transmisión calculado en base a los resultados de la V^* en el tramo 3 tiene signo contrario al obtenido analíticamente, esto se debe a que los signos de la velocidad V y la velocidad adjunta V^* dependen de la orientación de los tramos. En el análisis de la función importancia, al adoptar determinada orientación para los tramos, estos pueden haber sido contrarios a la orientación adoptada en la red.

Acontinuación se muestran los resultados del problema adjunto.

Funcional de respuesta : $R=H(x_0, T)$

x_0 : nodo conectado a componente C2

$T = C * DT$ donde: $C = 150$

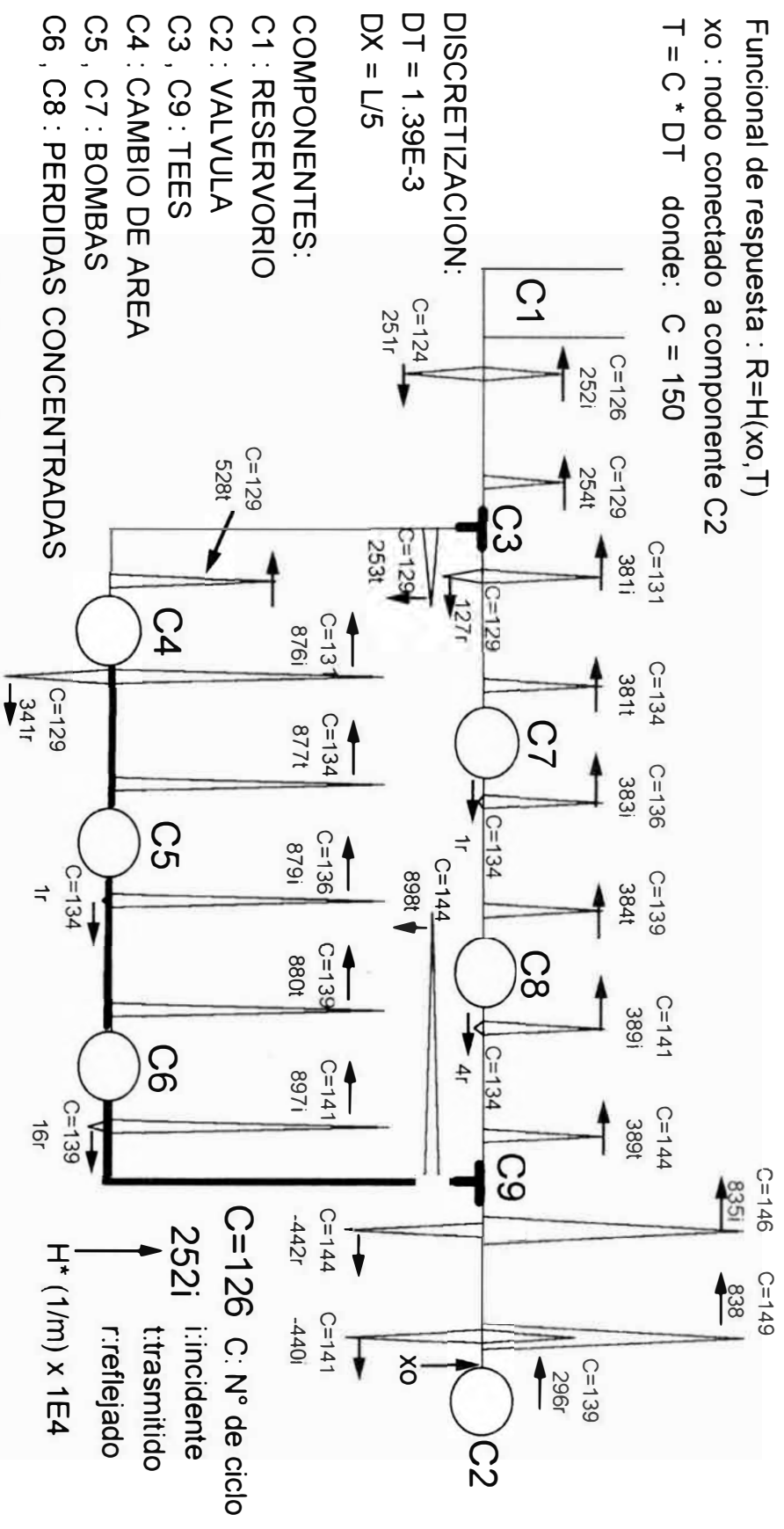


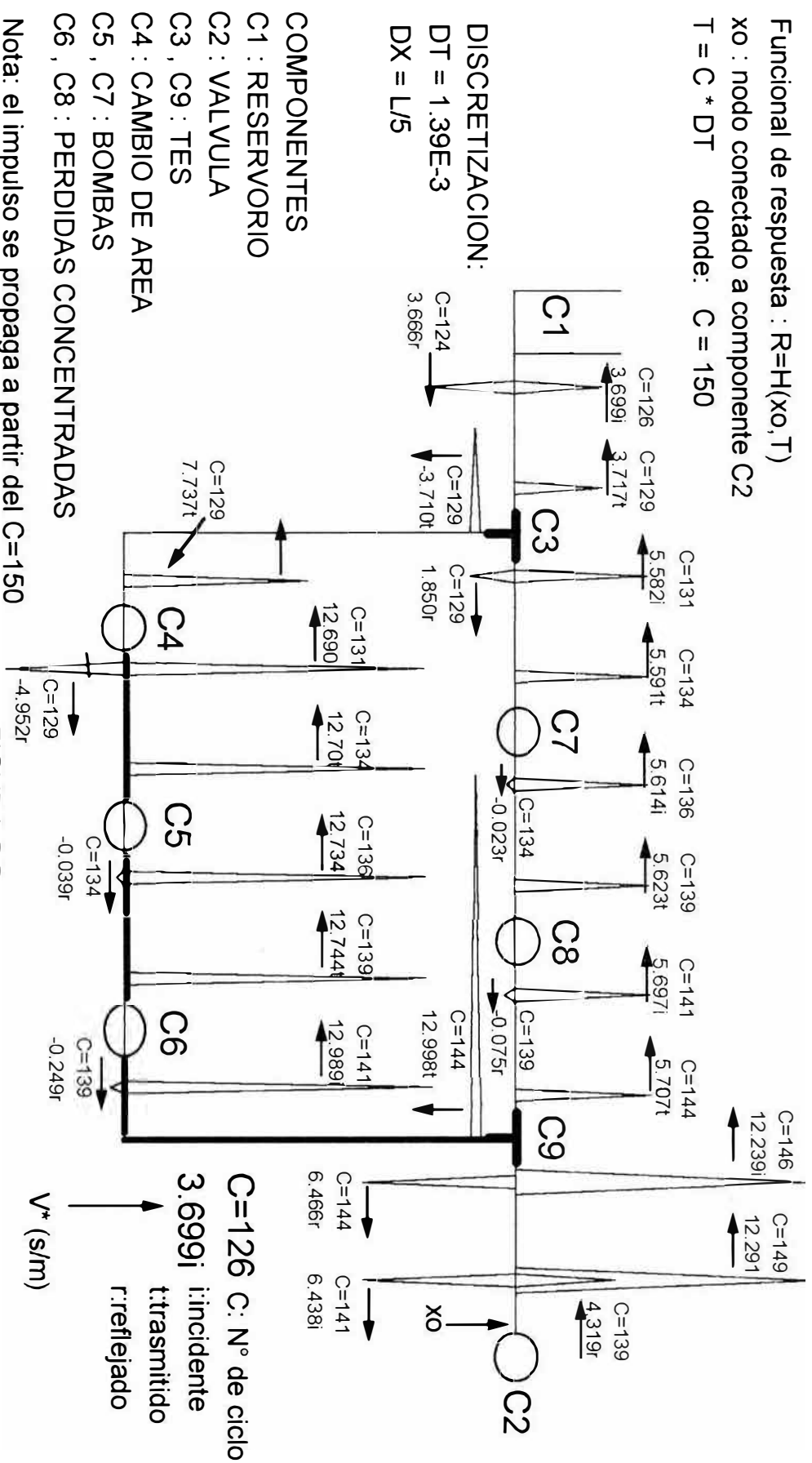
FIGURA 5.4 TRANSMISION Y REFLEXION DE H^* A TRAVES DE LOS COMPONENTES

Funcional de respuesta : $R=H(x_0, T)$

x_0 : nodo conectado a componente C2

$T = C * DT$ donde: $C = 150$

DISCRETIZACION:
 $DT = 1.39E-3$
 $DX = L/5$



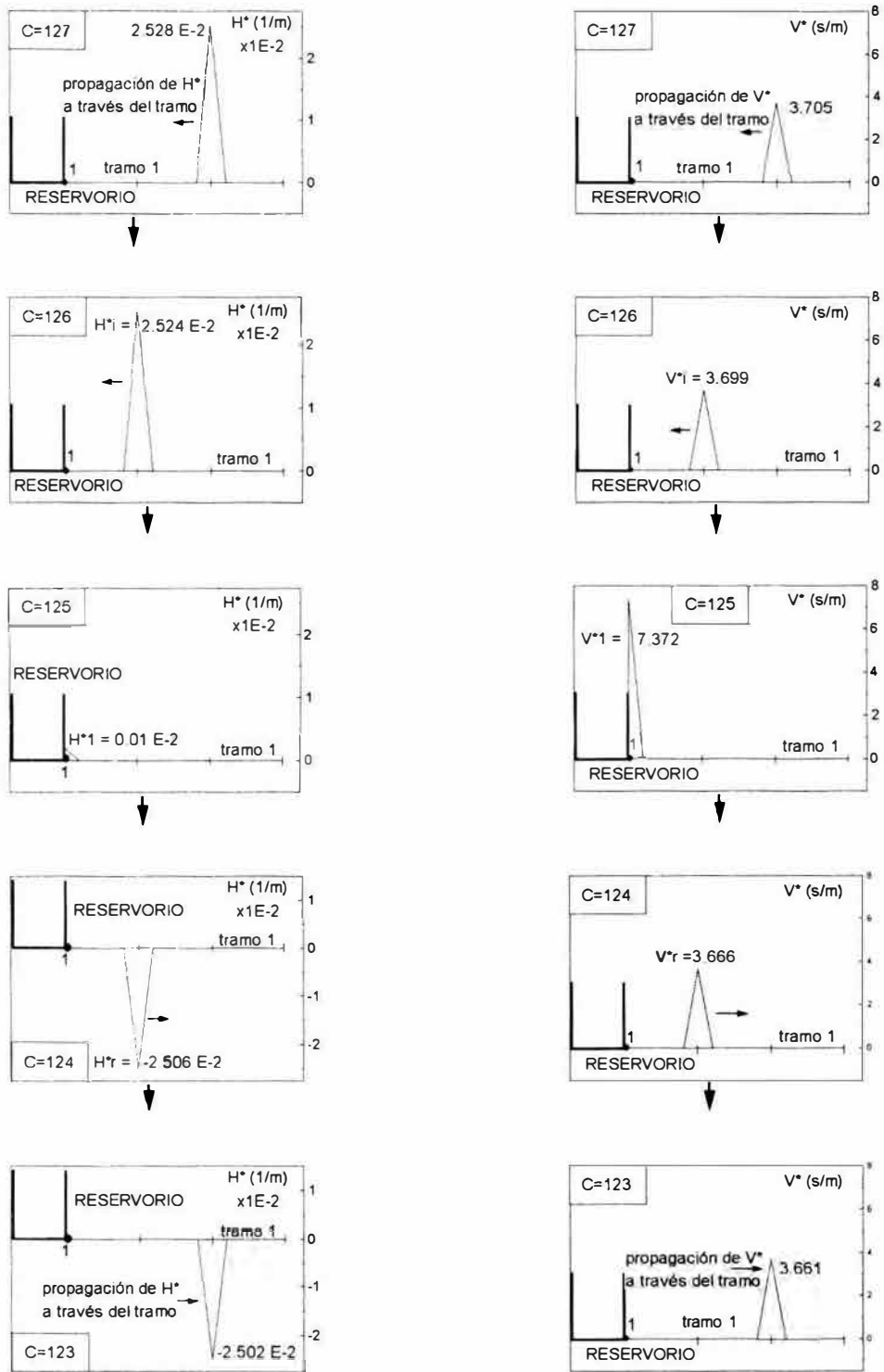


FIGURA 5.6

Reflexión de H^* y V^* en el reservorio (componente C1)

Nota: C es el N° de ciclo, y la numeración del nodo y del tramo es convencional.

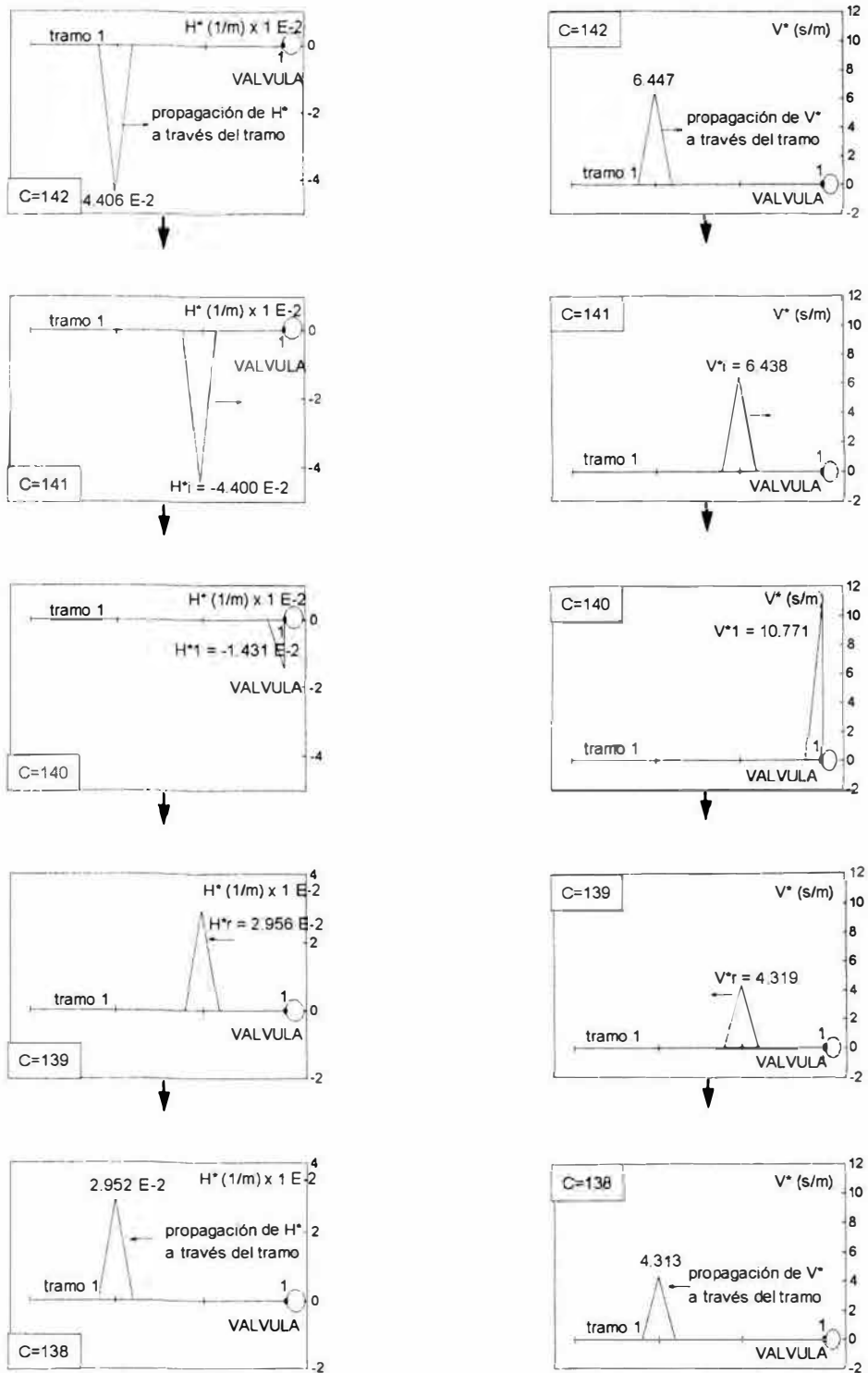


FIGURA 5.7

Reflexión de H^* y V^* en la válvula (componente C2)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración del nodo y del tramo es convencional.

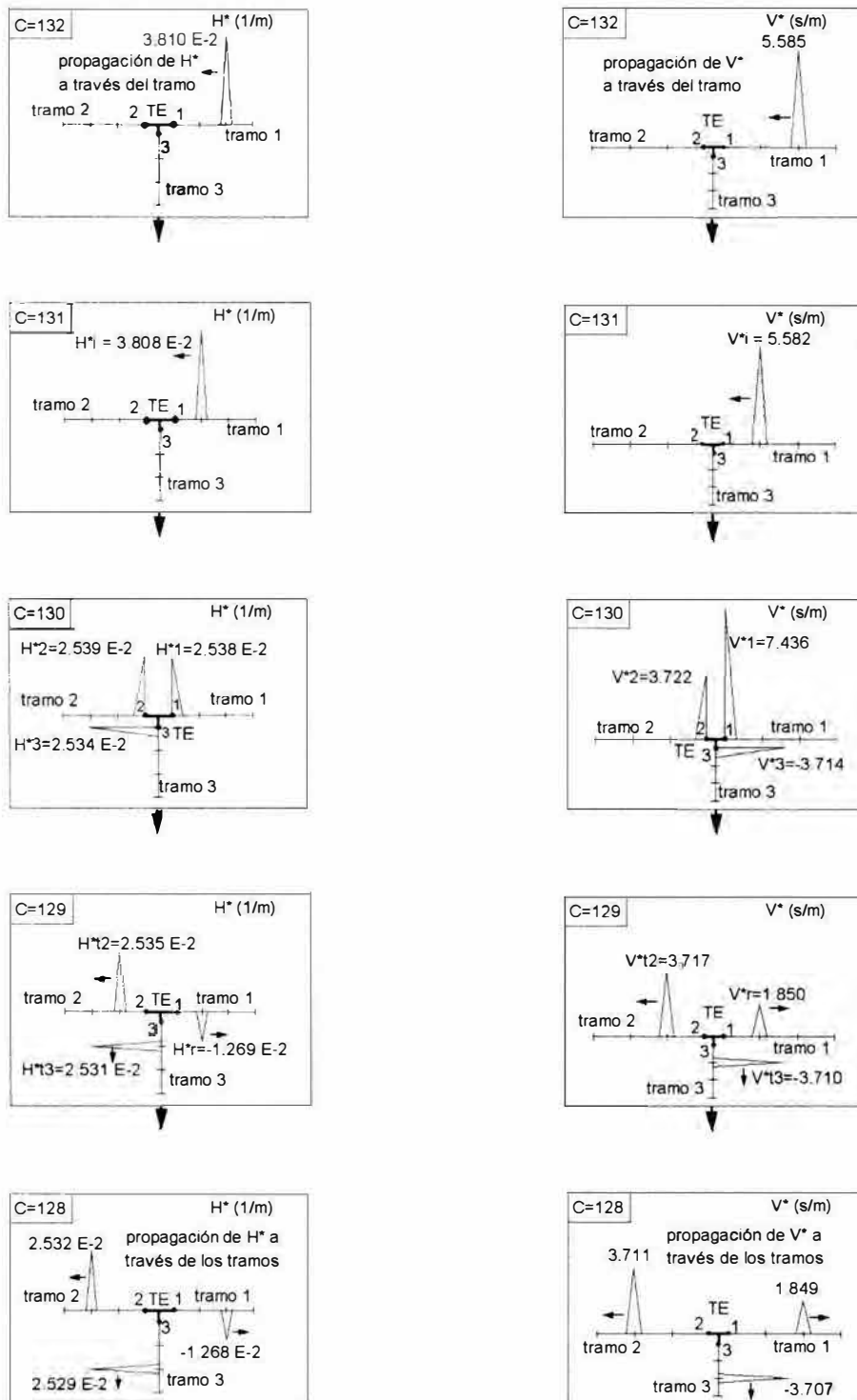


FIGURA 5.8

Reflexión y trasmisión de H^* y V^* en la te (componente C3)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

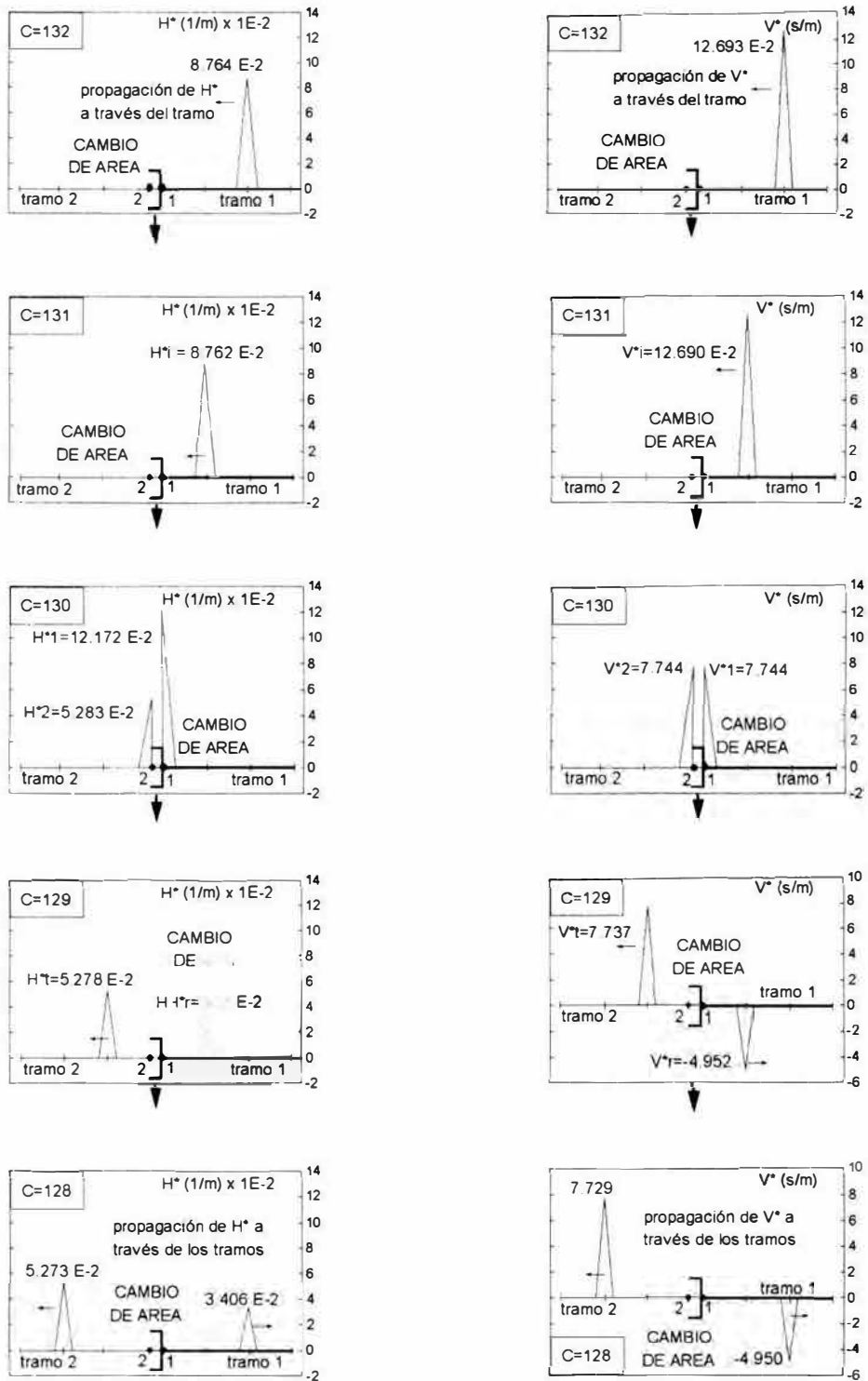


FIGURA 5.9

Reflexión y transmisión de H^* y V^* en el cambio de área (componente C4)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

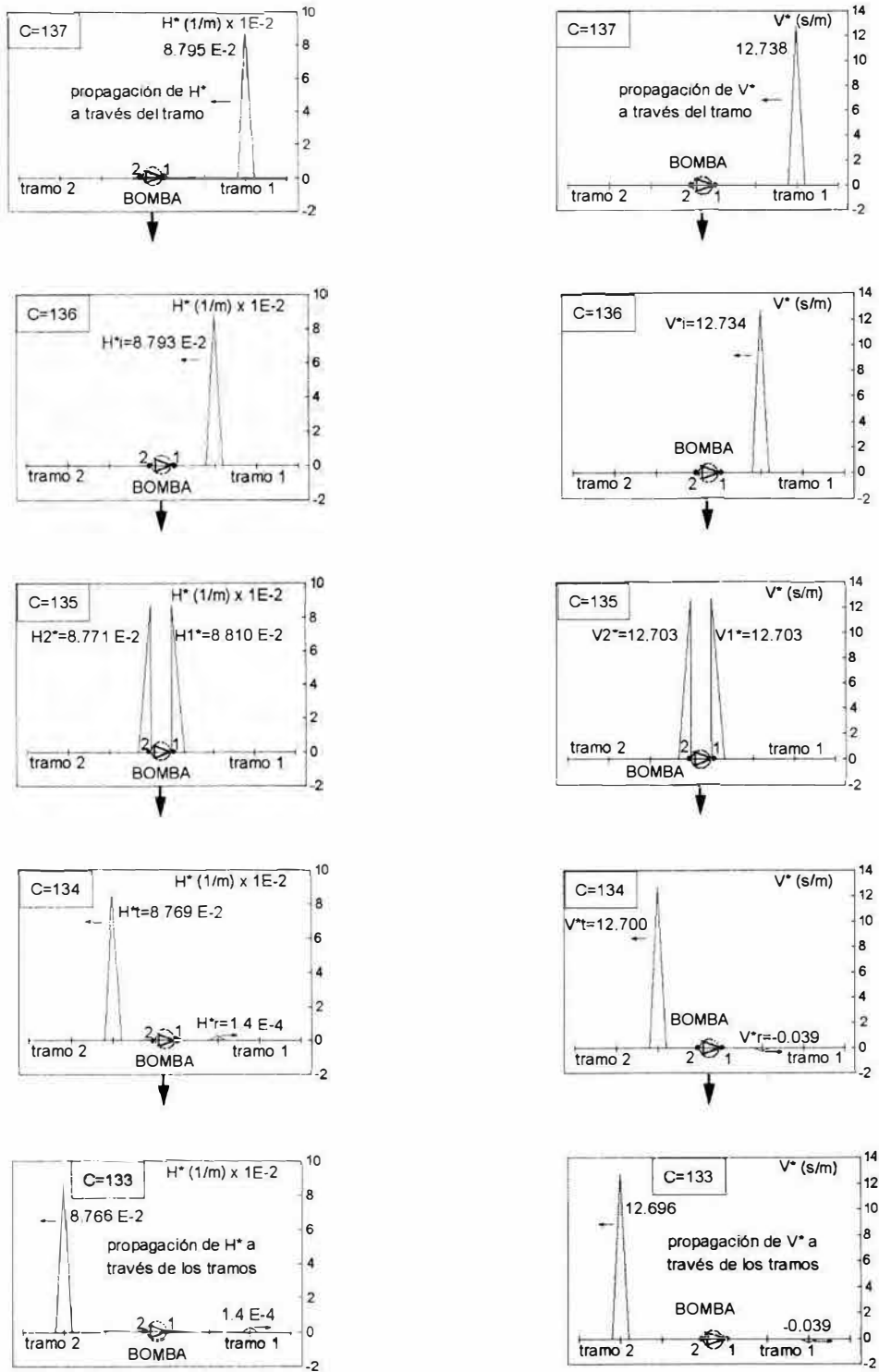


FIGURA 5.10

Reflexión y transmisión de H^* y V^* en la bomba (componente C5)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

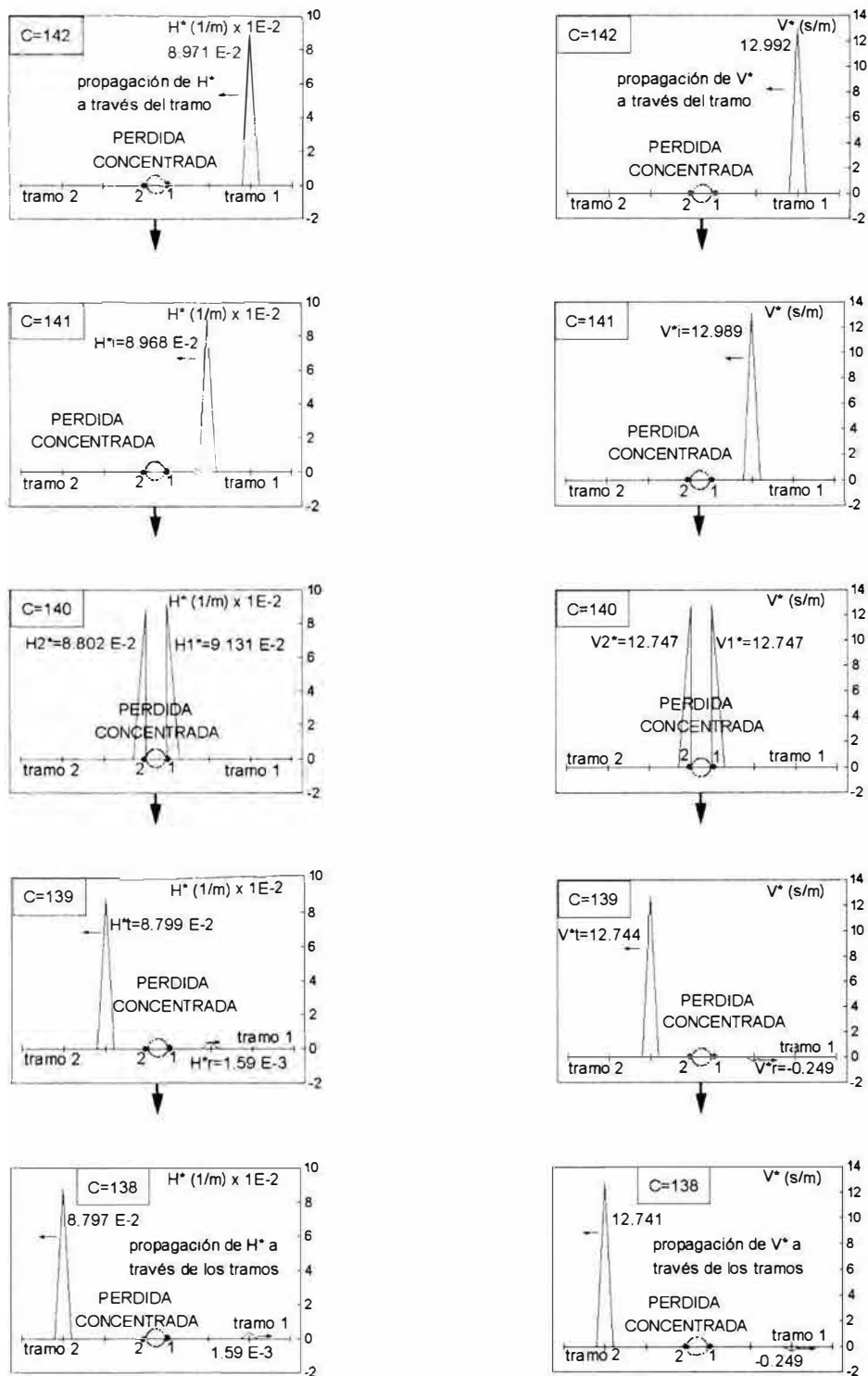


FIGURA 5.11

Reflexión y transmisión de H^* y V^* en la pérdida concentrada (componente C6)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

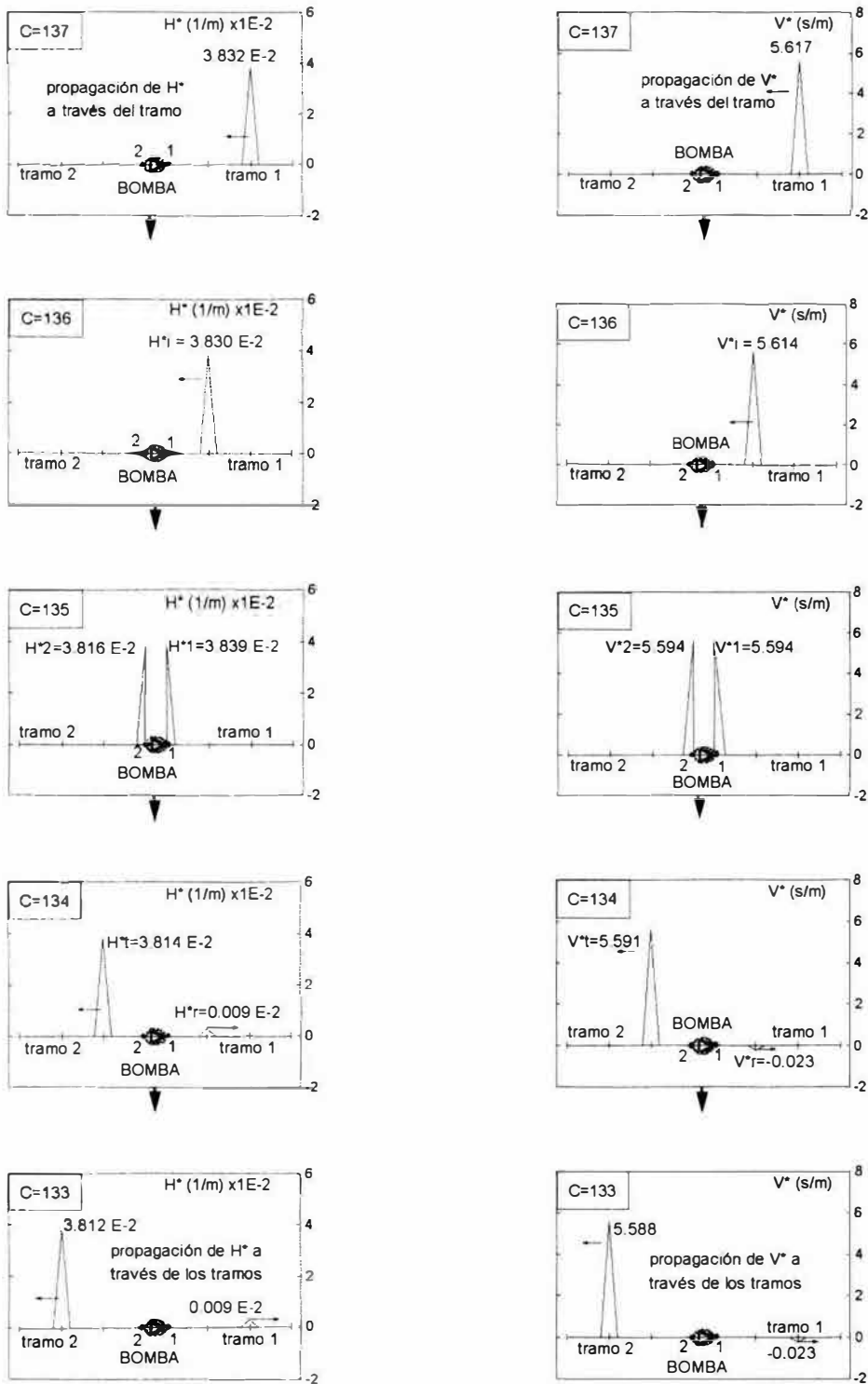


FIGURA 5.12

Reflexión y transmisión de H^* y V^* a través de la bomba (componente C7)
 Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

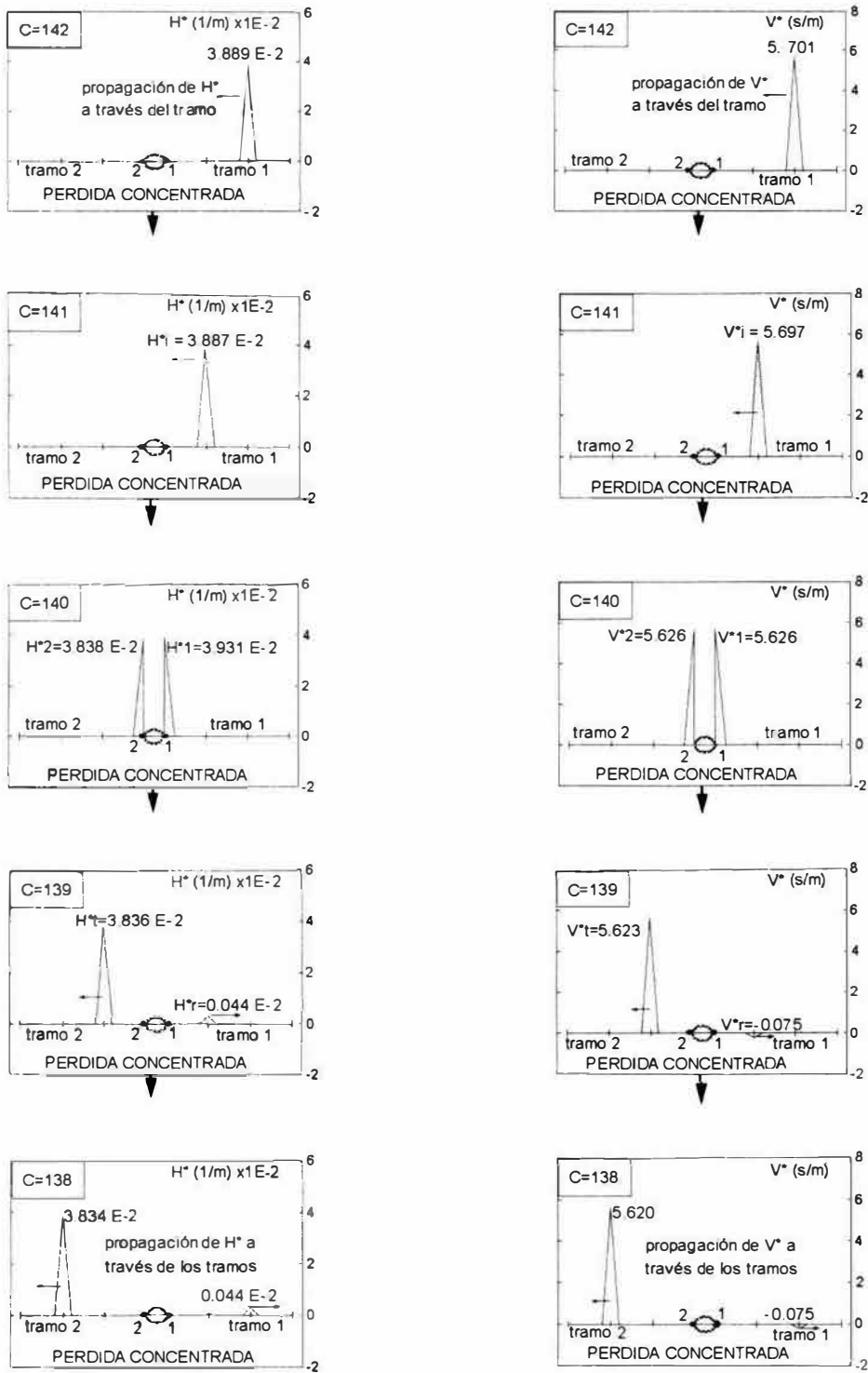


FIGURA 5.13

Reflexión y transmisión de H^* y V^* en la pérdida concentrada (componente C8)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

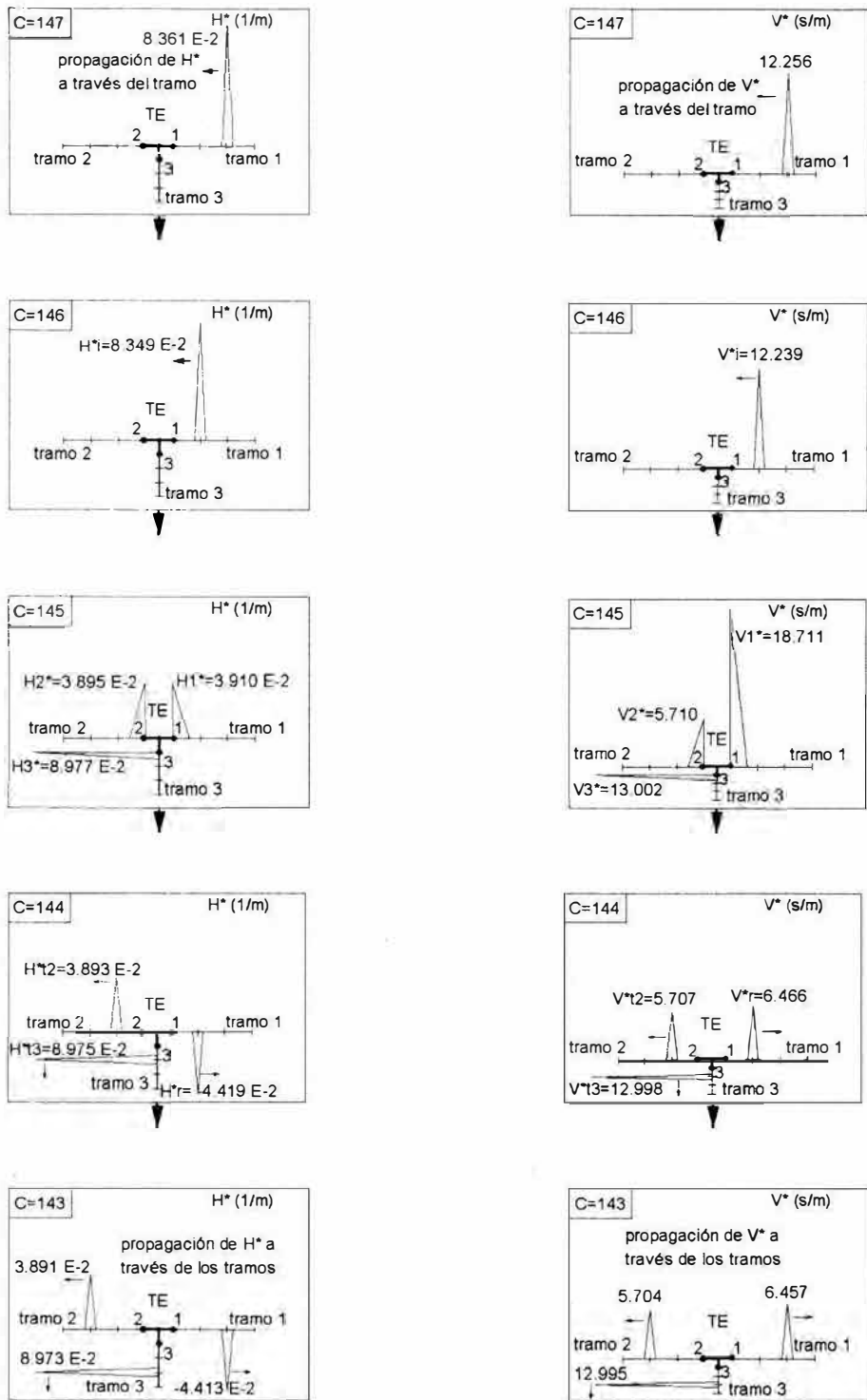


FIGURA 5.14

Reflexión y transmisión en la te (componente C9)

Nota: C es el N° de ciclo y la numeración de los nodos y tramos es convencional.

5.6. RESULTADOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

Los coeficientes de sensibilidad se determinaron utilizando dos métodos, en base a los resultados del problema directo y por aplicación del formalismo del método perturbativo diferencial. Los resultados obtenidos por ambos métodos se muestran en la tabla 5.1.

Los funcionales de respuesta son la altura piezométrica y la velocidad para tres nodos y en el tiempo en que se alcanza la máxima altura de presión. La ubicación de los diversos componentes, así como, los nodos de referencia se pueden ver en la figura 5.1.

TABLA 5.1

Nodo	A		B		C	
	WHAT	SANWHAT	WHAT	SANWHAT	WHAT	SANWHAT
$\text{deltR} / \text{delt } i$	RESULTADOS PARA CIC = 150 (H max = 37.07 m en C)					
dH/dHT m/m	1.190	1.204	1.154	1.167	1.193	1.213
dH/dKT m	-3.108E-1	-3.156E-1	-2.905E-1	-2.946E-1	-3.108E-1	-3.556E-1
dH/dHV m/m	-1.890E-1	-2.040E-1	-1.546E-1	-1.667E-1	-1.928E-1	-2.134E-1
dH/dKVI m	-1.460E-1	-1.509E-1	-1.256E-1	-1.297E-1	-1.804E-1	-1.875E-1
dH/dKVF m	5.524E-3	5.482E-3	4.905E-3	4.866E-3	9.348E-3	9.277E-3
dH/dTAU m/s	-3.933	-3.900	-3.493	-3.463	-6.656	-6.601
dH/dA5 m ² /s ²	3.442E-1	3.499E-1	1.467E-1	1.484E-1	3.165E-1	3.227E-1
dH/dB5 m/s	5.490E-1	5.568E-1	2.305E-1	2.330E-1	4.746E-1	4.833E-1
dH/dC5 m/m	8.946E-1	9.058E-1	3.678E-1	3.713E-1	7.210E-1	7.334E-1
dH/dKP6 m	-4.270E-3	-4.562E-3	-7.648E-3	-7.738E-3	-1.602E-2	-1.634E-2
dH/dA7 m ² /s ²	1.988E-1	2.016E-1	5.127E-1	5.213E-1	3.789E-1	3.873E-1
dH/dB7 m/s	2.392E-1	2.421E-1	6.244E-1	6.329E-1	4.185E-1	4.269E-1
dH/dC7 m/m	2.952E-1	2.982E-1	7.866E-1	7.952E-1	4.714E-1	4.800E-1
dH/dKP8 m	-1.007E-2	-1.021E-2	-3.234E-3	-3.674E-3	-1.925E-2	-1.968E-2
dV/dHT l/s	1.150E-2	1.170E-2	1.404E-2	1.427E-2	4.030E-2	4.101E-2
dV/dKT m/s	-3.418E-3	-3.484E-3	-3.746E-3	-3.820E-3	-1.178E-2	-1.202E-2
dV/dHV l/s	-1.151E-2	-1.170E-2	-1.405E-2	-1.427E-2	-4.032E-2	-4.101E-2
dV/dKVI m/s	-3.248E-3	-3.314E-3	-3.511E-3	-3.584E-3	-1.100E-2	-1.124E-2
dV/dKVF m/s	-1.427E-4	-1.433E-4	-2.431E-4	-2.444E-4	-5.497E-4	-5.522E-4
dV/dTAUm/s ²	1.015E-1	1.019E-1	1.729E-1	1.739E-1	3.910E-1	3.929E-1
dV/dAm ² /s ² -s	1.659E-2	1.701E-2	-2.713E-2	-2.787E-2	1.070E-2	1.090E-2
dV/dB5 m/s ²	2.421E-2	2.478E-2	-3.890E-2	-3.993E-2	1.604E-2	1.633E-2
dV/dC5 l/s	3.570E-2	3.650E-2	-5.622E-2	-5.765E-2	2.437E-2	2.479E-2
dV/dKP6 m/s	-8.435E-4	-8.649E-4	1.376E-3	1.414E-3	-5.414E-4	-5.523E-4
dV/dA m ² /s ² -s	-2.264E-2	-2.327E-2	6.329E-2	6.499E-2	1.280E-2	1.309E-2
dV/dB7 m/s ²	-2.327E-2	-2.389E-2	6.617E-2	6.783E-2	1.414E-2	1.443E-2
dV/dC7 l/s	-2.419E-2	-2.480E-2	7.026E-2	7.192E-2	1.593E-2	1.623E-2
dV/dKP8 m/s	1.152E-3	1.184E-3	-3.217E-3	-3.304E-3	-6.504E-4	-6.651E-4

Para calcular los coeficientes de sensibilidad en base a los resultados del problema directo se utilizó el programa *WHAT* con el cual se hizo una corrida con los datos de los parámetros originales y luego se hicieron tantas corridas como parámetros a analizar donde cada vez se perturbó un parámetro en un 0.1%, (para el parámetro “B” de las curvas características de las bombas, el valor original es B=0 y el valor perturbado es B'=0.001). Luego el cálculo del coeficiente de sensibilidad respecto a un parámetro dado se calcula así:

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \frac{R(x_o, T, p_i') - R(x_o, T, p_i)}{p_i' - p_i}$$

donde: $p_i' = 1.001 p_i$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad por el método perturbativo se utilizó el programa *SANWHAT*, el cual calcula los coeficientes utilizando los resultados del problema directo con los datos originales de los parámetros y con los resultados del problema adjunto para un nodo y tiempo determinado.

6. OBSERVACIONES, CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

6.1. EL PROBLEMA DIRECTO

- En el problema directo las variables de estado son: la altura piezométrica H y la velocidad V . H toma valores positivos (no se contemplan presiones de vacío), mientras que V toma valores positivos cuando el flujo se desplaza según la orientación positiva de los tramos y viceversa, esto es, que el signo de la velocidad depende de la orientación del tramo. Además V puede cambiar de signo debido al contraflujo que se pueda producir en el transitorio.
- El problema directo de golpe de ariete va desde un tiempo inicial ($t=0$) avanzando hasta un tiempo dado ($t>0$), por lo que el problema directo tiene condiciones iniciales, en nuestro caso del estado estacionario, con velocidad constante en cada tramo de la red. En consecuencia hay que resolver primeramente un problema estacionario.
- De los resultados del problema directo, ver figuras 5.2 y 5.3, se deduce que después de un tiempo suficientemente grande se alcanzará un nuevo estado estacionario.
- Teniendo en cuenta lo anterior es que el problema estacionario se puede resolver mediante un problema transitorio con los valores iniciales de los parámetros y con condiciones iniciales arbitrarias, dejando evolucionar todo el tiempo que sea necesario hasta alcanzar el estado estacionario.
- Por otro lado, en las figuras 5.2 y 5.3 se observa que H crece rápidamente cuando la desaceleración del flujo es mayor, alcanzando en nuestro caso ejemplo dos picos de altura máxima. Después de esto, H comienza a disminuir debido a que la desaceleración es menor y a la amortiguación de H a través de las reflexiones y transmisiones en los componentes, así como por el factor de fricción en los tramos.
- En la simulación del problema de golpe de ariete es útil determinar la máxima altura de presión, así como su posición (x_o) y el tiempo ($t=T$) en que se produce.
- El resultado de esta presión máxima es útil para el diseño de la instalación así como para el análisis y diseño de seguridad de las instalaciones. Ahora, como este resultado depende de los valores “adoptados” de los parámetros, es necesario saber la influencia de

la inexactitud de los parámetros en el cálculo de la presión máxima. Para esto se hace un estudio de sensibilidad.

- El análisis de sensibilidad se puede hacer resolviendo el problema directo variando los valores de los parámetros, construyendo de esta manera la “superficie de respuesta”, o en nuestro caso determinando coeficientes de sensibilidad. Los coeficientes de sensibilidad se obtienen del cociente entre la variación de los resultados obtenidos por la variable de estudio y la variación del parámetro considerado.
- Luego, para determinar los coeficientes de sensibilidad respecto a n parámetros será necesario simular un caso el que tendrá los valores “adoptados” de los parámetros y n simulaciones en las que se perturbará algún parámetro. Por otro lado, al ser el sistema de ecuaciones no lineal su resolución requiere convergencias internas que retardan la resolución del problema.
- Teniendo en cuenta las consideraciones anteriores es que el análisis de sensibilidad utilizando esta metodología es computacionalmente lento y costoso.
- Para la resolución del problema directo se utilizó el programa *WHAT*.

6.2 EL PROBLEMA DERIVADO

- Al desarrollar el formalismo del método perturbativo diferencial, vimos que el problema derivado se obtiene directamente del problema directo, esto es, de las ecuaciones y condiciones de borde directas se obtienen respectivamente las ecuaciones y las condiciones de borde derivadas. El problema derivado es un paso intermedio para la obtención del problema adjunto.
- Para plantear el problema derivado es necesario definir “a priori” un determinado parámetro de interés. La solución del problema derivado nos daría como resultado los coeficientes de sensibilidad de las variables de estado H , V respecto de dicho parámetro para todo nodo y en cada paso temporal (considerando una discretización). Esto implica hacer una corrida para tener los resultados del problema directo y otra para el problema derivado.

- Computacionalmente para obtener los coeficientes de sensibilidad respecto a diversos parámetros sería necesario tener tantos códigos de programas como parámetros, lo cual significa un mayor costo. Por esta razón es que esta metodología no es conveniente.

6.3. EL PROBLEMA ADJUNTO

- En el problema adjunto las variables adjuntas son: la altura adjunta H^* y la velocidad adjunta V^* . Si el funcional de respuesta es la altura H o la velocidad V en algún punto y tiempo determinados, las variables adjuntas son funciones deltiformes, las cuales pueden tomar valores positivos o negativos. Al igual que V , el signo de V^* depende de la orientación de los tramos.
- Para seleccionar nuestro funcional de respuesta nos basamos en los resultados del problema directo, eligiendo la situación más crítica, esto es, para cuando se alcanza la máxima presión. De esta manera tenemos que $R = H(x_o, T)$. En nuestro caso adicionalmente hacemos el estudio para $R = V(x_o, T)$ y para otros dos nodos.
- El problema adjunto va desde el nodo de referencia (x_o, T) retrocediendo en el tiempo hacia el tiempo inicial ($t=0$), propagándose a través de los tramos. Por esto, el problema adjunto tiene condiciones finales, en nuestro caso nulas, excepto cuando el nodo de referencia es un extremo de algún tramo conectado a un componente hidráulico.
- Las ecuaciones adjuntas se obtienen de la definición del formalismo en base a las ecuaciones derivadas, mientras que las condiciones de borde adjuntas se “trasmiten” a través del concomitante bilineal.
- Para plantear el problema adjunto no es necesario definir “a priori” los parámetros.
- En forma similar al problema directo, en el transitorio del problema adjunto (si el tiempo de referencia fuese suficientemente grande), es posible que al retroceder en el tiempo se alcance un estado estacionario adjunto. Esto nos sirvió para resolver la integral espacial del concomitante bilineal en $t=0$, a través de resolver otro problema adjunto estacionario. Para esto, planteamos un pseudotransitorio adjunto, donde partimos con condiciones finales nulas, retrocediendo en el tiempo hasta alcanzar un estado estacionario.

- Computacionalmente la resolución del problema adjunto es rápida debido a que las ecuaciones son lineales.
- Para el análisis de sensibilidad por el método perturbativo diferencial. los coeficientes de sensibilidad se obtienen de evaluar el concomitante bilineal con los resultados de un caso del problema directo y su correspondiente problema adjunto para un funcional de respuesta adoptado.
- Para la resolución del problema adjunto se utilizó el programa *ADWHAT*.

6.4. LOS COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD

- Los resultados de los coeficientes de sensibilidad obtenidos por los dos métodos tienen un buen acuerdo. Las diferencias en los resultados se deben a la propagación de errores por el esquema de diferencias finitas empleado.
- Los resultados de los coeficientes de sensibilidad nos sirven para cuantificar en cuánto varía nuestro funcional de respuesta ante una pequeña variación de los diferentes parámetros.
- Además, nos permiten identificar cuáles son los parámetros más importantes a tener en cuenta. En nuestro caso ejemplo son el tiempo de cierre de la válvula y la altura de presión del tanque. Esto nos permite hacer recomendaciones en cuanto a la operación de cierre de la válvula, así como al control del nivel del tanque.
- Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se utilizó el programa *SANWHAT*.

6.5. LA FUNCION IMPORTANCIA

- La función importancia está dado por las variables adjuntas. Al hacer el análisis de la función importancia (anexo 3) se obtuvieron analíticamente coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos en los que no se consideraba el efecto de la fricción. La validez de estos coeficientes obtenidos analíticamente (en función de los resultados del problema

directo) se compararon con los obtenidos en base a los resultados del problema adjunto, resultando tener un buen acuerdo.

- Los coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos verifican que, en caso de que no hubiera pérdidas por fricción, la función importancia se conserva, esto es, tal como se puede apreciar en los resultados la magnitud de la función importancia incidente a un componente es igual a la importancia reflejada más las transmitidas (en el caso de la altura adjunta afectadas por un factor de velocidades de propagación).
- Por otro lado, al reflejarse y transmitirse las ondas deltiformes de la función importancia, así como por el término de la fricción, la magnitud de la función importancia va decreciendo. Esto nos indica que conforme nos alejemos tanto de la posición como del tiempo de referencia la importancia va decreciendo, lo cual nos permite concluir que la naturaleza de la función importancia es la de “pesar” la influencia de los resultados en toda posición de la red y en todo tiempo anterior al tiempo de referencia.

6.6. CONCLUSIONES FINALES

- En este trabajo se ha generalizado la aplicación del método perturbativo diferencial al análisis de redes hidráulicas complejas.
- Se han desarrollado las condiciones de contorno adjuntas para diversos tipos de componentes.
- Se ha resuelto la integral espacial del concomitante bilineal, lo que nos permite evaluar la sensibilidad respecto a parámetros que afectan a las condiciones iniciales del problema directo.
- Se han determinado las expresiones de los coeficientes de sensibilidad para diferentes parámetros que se encuentran en los componentes.
- Para la resolución del problema adjunto y el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se han realizado profundas modificaciones tanto de diseño como de implementación en los programas *ADWHAT* y *SANWHAT*.
- Para el análisis de la función importancia se han determinado analíticamente los coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos.

6.7. PERSPECTIVAS

En el futuro queda por hacer la extensión del análisis de sensibilidad a los parámetros pertenecientes a las tuberías (diámetro, espesor, etc.), al fluido (densidad, viscosidad), así como, a la aceleración de la gravedad, etc. Estos parámetros afectan las ecuaciones del problema directo tanto explícita como implícitamente (a través de los factores de fricción y las velocidades de propagación).

Para ello en la expresión de los coeficientes de sensibilidad dado en (3.63):

$$\frac{\delta R}{\delta p_i} = \langle \bar{f} \cdot \bar{S}_i^+ \rangle + \langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle + P$$

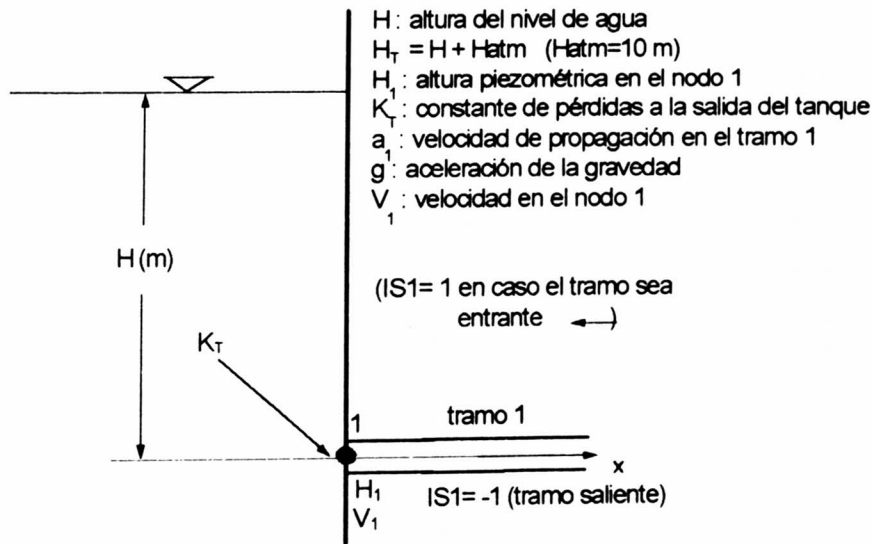
- Deberá evaluarse el término: $\langle \bar{f}^* \cdot \bar{S}(i) \rangle$, dado que para los parámetros mencionados $\bar{S}(i)$ no es nulo.
- Habrá que modificar las condiciones de contorno, debido a que los diámetros serán parámetros.
- Asimismo, recordando que el concomitante bilineal P tiene dos integrales una temporal P_t y otra espacial P_x , deberá modificarse las expresiones finales de P_t , y para la determinación de la integral espacial P_x según (3.47) deberá evaluarse $\langle \tilde{f}^* \cdot \tilde{S}(i) \rangle$ y habrá que modificar las expresiones finales del concomitante bilineal estacionario (P).

7. ANEXOS

ANEXO 1: CONDICIONES DE CONTORNO DIRECTAS, DERIVADAS Y ADJUNTAS Y COEFICIENTES DE SENSIBILIDAD PARA DIFERENTES TIPOS DE COMPONENTES

A) Reservorio de altura constante (lagos, rios, etc.)

Para el desarrollo de las condiciones de contorno y coeficientes de sensibilidad tendremos en cuenta el siguiente esquema:



Esquema de un reservorio con H constante

Para la integral temporal del concomitante bilineal tenemos:

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{Vi} + g V_1^* H_{Vi} \right) dt \quad (A.1)$$

Condición de contorno directa:

$$C_1 \equiv H_1 + \frac{V_1^2}{2g} - \frac{K_T}{2g} IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1| - H_T = 0 \quad (A.2)$$

Condición de contorno derivada:

$$C_{Vi} + H_{Vi} + \frac{V_1 \cdot V_{Vi}}{g} - \frac{K_T}{g} IS1 \cdot V_{Vi} \cdot |V_1| = 0 \quad (A.3)$$

Despejando $H_{1/i}$ en (A.3) reemplazando en (A.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T -IS1 \cdot V_{1/i} \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* - (V_1 - IS1 \cdot K_T |V_1|) \cdot V_1^* \right) \cdot dt + \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt \quad (A.4)$$

Buscando eliminar $V_{1/i}$, escogemos como condición de contorno adjunta :

$$\frac{a_1^2}{g} H_1^* - (V_1 - IS1 \cdot K_T |V_1|) \cdot V_1^* = 0 \quad (A.5)$$

$$\text{Simplificando se obtiene :} \quad H_1^* + \frac{g}{a_1} \alpha \cdot V_1^* = 0 \quad (A.6)$$

$$\text{donde :} \quad \alpha = \frac{2 \cdot g \cdot (H_1 - H_T)}{a_1 \cdot V_1} \quad (A.7)$$

Resulta para la evaluación de la integral temporal :

$$P_c(k) = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt \quad (A.8)$$

En forma similar la integral espacial (en $t=0$) será :

$$\tilde{P}_c(k) = C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (A.9)$$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial \phi_1} = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt + C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (A.10)$$

En este tipo de componente tenemos dos parámetros : H_T y K_T .

$$\text{Derivando } C_1 \text{ respecto a } H_T, \text{ se tendrá :} \quad C_{1/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial H_T} = -1 \quad (A.11)$$

reemplazando en (A.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial H_T} = \int_0^T -IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt - IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (A.12)$$

$$\text{En forma similar para } K_T, \text{ se tendrá :} \quad C_{1/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_T} = -\frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} \quad (A.13)$$

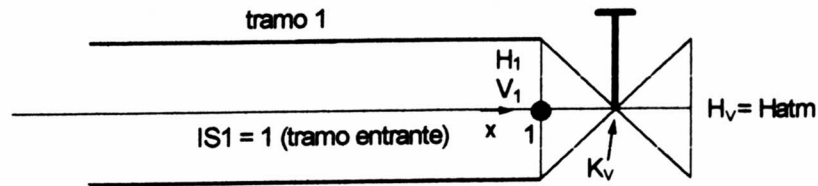
y reemplazando en (A.10) y simplificando tendremos :

$$\frac{\partial R}{\partial K_T} = \int_0^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \cdot V_1^* \cdot dt - \frac{\tilde{V}_1 \cdot |\tilde{V}_1|}{2} \cdot \tilde{V}_1^* \quad (A.14)$$

B) Válvula con extremo de altura de presión constante

Para este componente tenemos el siguiente esquema:

H_1 : altura piezométrica en el nodo 1
 V_1 : velocidad en el nodo 1
 H_V : altura de presión constante
 K_V : constante de pérdidas
 a_1 : velocidad de propagación en el tramo 1
 g : aceleración de la gravedad



Esquema de una válvula con extremo conectado a la atmósfera

Para la integral temporal del concomitante bilineal tenemos :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt \quad (B.1)$$

Condición de contorno directa :

$$C_1 \equiv H_1 - \frac{K_V}{2g} IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1| - H_V = 0 \quad (B.2)$$

Condición de borde derivada :

$$C_{1/i} + H_{1/i} - \frac{K_V}{g} IS1 \cdot V_{1/i} \cdot |V_1| = 0 \quad (B.3)$$

Despejando $H_{1/i}$ en (B.3) reemplazando en (B.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T -IS1 \cdot V_{1/i} \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* - K_V |V_1| \cdot V_1^* \right) dt + \int_0^T IS1 \cdot C_{1/i} \cdot g \cdot V_1^* dt \quad (B.4)$$

Buscando eliminar $V_{1/i}$, escogemos como condición de contorno adjunta :

$$\frac{a_1^2}{g} H_1^* - K_V |V_1| \cdot V_1^* = 0 \quad (\text{B.5})$$

Simplificando se obtiene :
$$H_1^* + \frac{g}{a_1} \beta \cdot V_1^* = 0 \quad (\text{B.6})$$

donde :
$$\beta = \frac{2 \cdot g \cdot (H_1 - H_V)}{a_1 \cdot V_1} \quad (\text{B.7})$$

Resulta para la evaluación de la integral temporal :

$$P_c(k) = \int_0^T IS1 \cdot C_{1/i} \cdot g \cdot V_1^* dt \quad (\text{B.8})$$

En forma similar la integral espacial (en $t=0$) será :

$$\tilde{P}_c(k) = IS1 \cdot C_{1/i} \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (\text{B.9})$$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial p_i} = \int_0^T IS1 \cdot C_{1/i} \cdot g \cdot V_1^* dt + IS1 \cdot C_{1/i} \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (\text{B.10})$$

En este tipo de componente tenemos dos parámetros : H_V y K_V .

Derivando C_1 respecto a H_V , se tendrá :
$$C_{1/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial H_V} = -1 \quad (\text{B.11})$$

reemplazando en (B.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial H_V} = \int_0^T -IS1 \cdot g \cdot V_1^* dt - IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (\text{B.12})$$

En forma similar para K_V , se tendrá :
$$C_{1/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_V} = -\frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} \quad (\text{B.13})$$

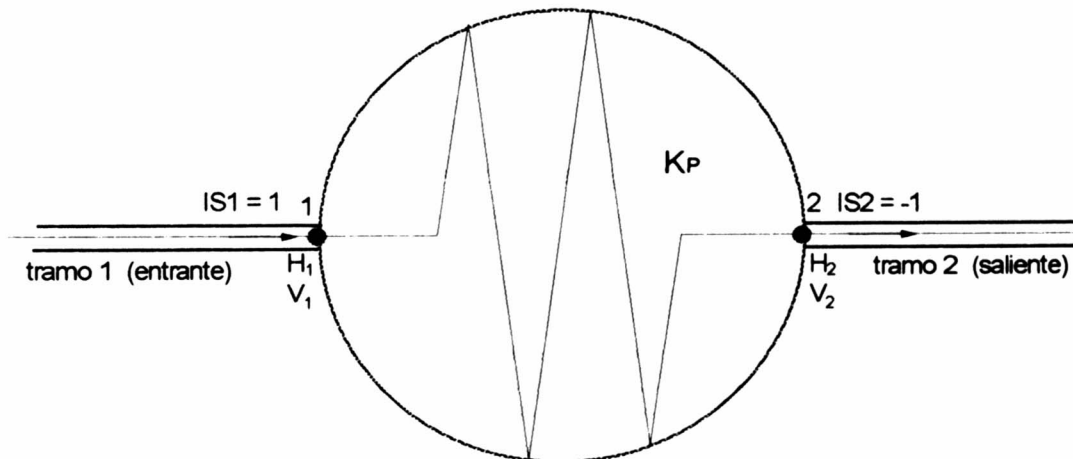
reemplazando en (B.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial K_V} = \int_0^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \cdot V_1^* dt - \frac{\tilde{V}_1 \cdot |\tilde{V}_1|}{2} \cdot \tilde{V}_1^* \quad (\text{B.14})$$

C) Pérdida concentrada (válvulas, codos, medidores de flujo, etc.)

En el siguiente esquema se tiene los términos empleados en este componente .

Esquema de una pérdida concentrada



H_1 y H_2 : alturas piezométricas en los nodos 1 y 2
 V_1 y V_2 : velocidades en los nodos 1 y 2
 a_1 y a_2 : velocidades de propagación en los tramos 1 y 2
 K_p : coeficiente de pérdidas de la componente
 g : aceleración de la gravedad

La integral temporal del concomitante bilineal será :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* \cdot V_{1/i} + g V_1^* \cdot H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* \cdot V_{2/i} + g V_2^* \cdot H_{2/i} \right) dt \quad (C.1)$$

Condiciones de contorno directas :

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 - \frac{K_p \cdot IS1}{2g} V_1 |V_1| = 0 \quad (C.2)$$

$$C_2 \equiv IS1 \cdot IS2 \cdot V_1 + V_2 = 0$$

Condiciones de contorno ecuaciones derivadas :

$$C_{1/i} + H_{1/i} - H_{2/i} - \frac{K_p \cdot IS1}{g} V_{1/i} |V_1| = 0 \quad (C.3)$$

$$C_{2/i} + IS1 \cdot IS2 \cdot V_{1/i} + V_{2/i} = 0$$

C_2 no contiene ningún parámetro, por lo tanto $C_{2/i} = 0$. Luego, despejando $H_{2/i}, V_{2/i}$ en (C.3), reemplazando en (C.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T -C_{1/i} \cdot IS2 \cdot g \cdot V_2^* \cdot dt + \int_0^T -g \cdot H_{1/i} \left(IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* \right) \cdot dt + \int_0^T -IS1 \cdot V_{1/i} \left(\frac{a_1^2}{g} \left(H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* \right) - K_p \cdot IS2 \cdot V_2^* |V_1| \right) \cdot dt \quad (C.4)$$

Luego las condiciones de contorno adjuntas serán :

$$\begin{aligned} IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* &= 0 \\ \frac{a_1^2}{g} \left(H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* \right) - K_p \cdot IS2 \cdot V_2^* |V_1| &= 0 \end{aligned} \quad (C.5)$$

Simplificando :

$$\begin{aligned} IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* &= 0 \\ H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \gamma \cdot V_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (C.6)$$

$$\text{donde : } \gamma = \frac{2g \cdot (H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} \quad (C.7)$$

Resulta para la evaluación de la integral temporal :

$$P_c(k) = \int_0^T -C_{1/i} \cdot IS2 \cdot g \cdot V_2^* \cdot dt = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt \quad (C.8)$$

En forma similar la integral espacial será :

$$\tilde{P}_c(k) = C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (C.9)$$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial \Phi_1} = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt + C_{1/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (C.10)$$

En este tipo de componente tenemos como parámetro K_p

$$\text{Derivando } C_1 \text{ respecto a } K_p, \text{ se tendrá : } C_{V_i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_p} = -\frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} \quad (\text{C.11})$$

reemplazando en (C.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial K_p} = \int_0^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \cdot V_1^* \cdot dt - \frac{\tilde{V}_1 \cdot |\tilde{V}_1|}{2} \cdot \tilde{V}_1^* \quad (\text{C.12})$$

Caso componente de pérdida modelando una válvula variable

En caso tengamos una válvula con K_p variable, esto es cuando se esté abriendo o cerrando una válvula desde un K_{pi} hasta un K_{pf} durante un cierto tiempo τ , y considerando un modelo lineal de esta variación tendremos :

$$K_p = \begin{cases} K_{pi} + (K_{pf} - K_{pi}) \frac{t}{\tau} & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ K_{pf} & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (\text{C.13})$$

Ahora en vez de un parámetro hay tres subparámetros, K_{pi} , K_{pf} y τ , luego :

Derivando C_1 respecto a K_{pi} , se tendrá :

$$C_{V_i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_p} \frac{\partial K_p}{\partial K_{pi}} = \begin{cases} -\frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (\text{C.14})$$

reemplazando en (C.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial K_{pi}} = -\frac{\tilde{V}_1 \cdot |\tilde{V}_1|}{2} \cdot \tilde{V}_1^* + \begin{cases} \int_0^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot V_1^* \cdot dt & \text{si } T \leq \tau \\ \int_0^{\tau} -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) \cdot V_1^* \cdot dt & \text{si } T > \tau \end{cases} \quad (\text{C.15})$$

Derivando C_1 respecto a K_{Pf} , se tendrá :

$$C_{V/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_P} \frac{\partial K_P}{\partial K_{Pf}} = \begin{cases} -\frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} \frac{t}{\tau} & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 1 & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (C.16)$$

notar que en $t=0$, $C_{V/i} = 0$. Reemplazando en (C.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial K_{Pf}} = \begin{cases} \int_0^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \frac{t}{\tau} \cdot V_1^* \cdot dt & \text{si } T \leq \tau \\ \int_0^{\tau} -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \frac{t}{\tau} \cdot V_1^* \cdot dt + \int_{\tau}^T -\frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} \cdot V_1^* \cdot dt & \text{si } T > \tau \end{cases} \quad (C.17)$$

Derivando C_1 respecto a τ , se tendrá :

$$C_{V/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial K_P} \frac{\partial K_P}{\partial \tau} = \begin{cases} \frac{IS1 \cdot V_1 \cdot |V_1|}{2g} (K_{Pf} - K_{Pi}) \frac{t}{\tau^2} & \text{si } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{si } t > \tau \end{cases} \quad (C.18)$$

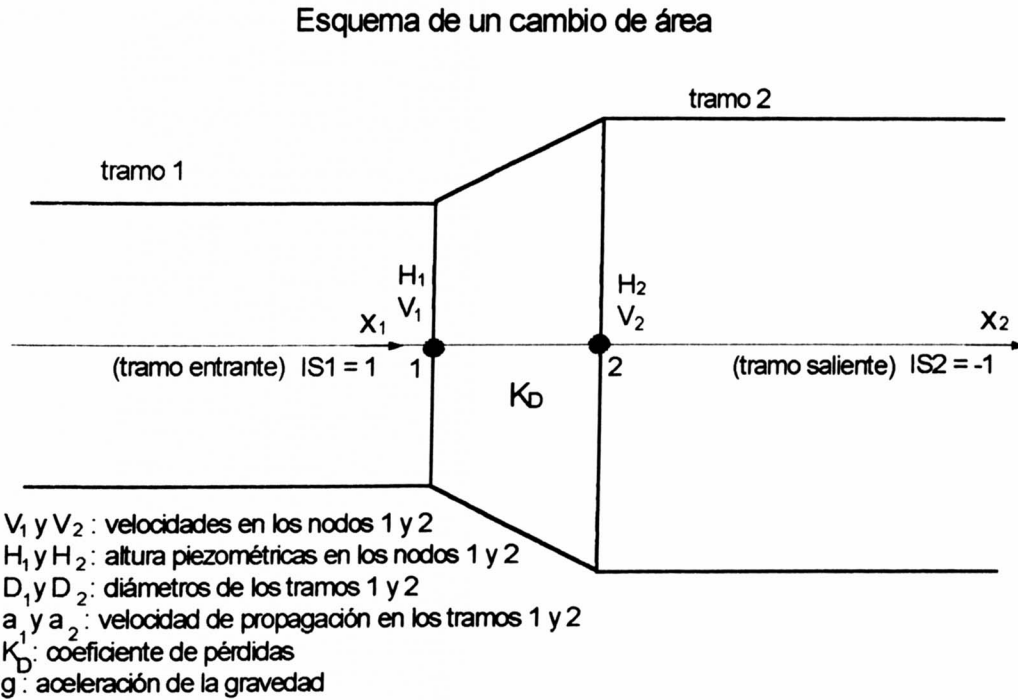
notar que en $t=0$, $C_{V/i} = 0$. Reemplazando en (C.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial \tau} = \begin{cases} \int_0^T \frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} (K_{Pf} - K_{Pi}) \frac{t}{\tau^2} V_1^* \cdot dt & \text{si } T \leq \tau \\ \int_0^{\tau} \frac{V_1 \cdot |V_1|}{2} (K_{Pf} - K_{Pi}) \frac{t}{\tau^2} V_1^* \cdot dt & \text{si } T > \tau \end{cases} \quad (C.19)$$

Estos mismos coeficientes de sensibilidad se pueden aplicar en el caso de una válvula con extremo de altura de presión constante que tenga el coeficiente de pérdida variable.

D) Cambio de área (unión de tramos con diferentes diámetros)

Para el desarrollo de este componente tendremos en cuenta el siguiente esquema:



La integral temporal del concomitante bilineal será :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* \cdot V_{1/i} + g V_1^* \cdot H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* \cdot V_{2/i} + g V_2^* \cdot H_{2/i} \right) dt \quad (D.1)$$

Condiciones de contorno ecuación directa :

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 + \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2) - \frac{K_D}{2g} IS1 \cdot V_1 |V_1| = 0 \quad (D.2)$$

$$C_2 \equiv IS1 \cdot IS2 \cdot \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 + V_2 = 0$$

Teniendo en cuenta C_2 en C_1 esta se puede reescribir de la siguiente manera :

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 + \frac{1}{2g} V_1 \cdot \left(V_1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 V_1 - IS1 \cdot K_D |V_1| \right) = 0 \quad (D.3)$$

Condiciones de contorno ecuación derivada :

$$C_{V_i} + H_{V_i} - H_{2/i} + \frac{1}{g} V_{V_i} \cdot \left(V_1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^4 V_1 - IS1 \cdot K_D |V_1| \right) = 0 \quad (D.4)$$

$$C_{2/i} + IS1 \cdot IS2 \cdot \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_{V_i} + V_{2/i} = 0$$

$$\text{Donde para } D_1 < D_2 \quad K_D = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 & \text{si } IS1 \cdot V_1 \geq 0 \\ 0.42 \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right] & \text{si } IS1 \cdot V_1 < 0 \end{cases} \quad (D.5)$$

Al no tener parámetros propios esta componente podemos considerar $C_{V_i} = C_{2/i} = 0$.

Luego, despejando $H_{2/i}, V_{2/i}$ en (D.4), reemplazando en (D.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T -IS1 \cdot V_{V_i} \left[\frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_2^2}{g} \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 H_2^* + IS1 \cdot IS2 \cdot \left(V_1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 V_1 - IS1 K_D |V_1| \right) V_2^* \right] dt \\ + \int_0^T -g H_{V_i} (IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^*) dt \quad (D.6)$$

Luego las condiciones de contorno adjuntas (simplificadas) serán :

$$IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* = 0 \quad (D.7) \\ H_1^* - \left(\frac{a_2^2}{a_1^2} \right) \cdot \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \eta \cdot V_1^* = 0$$

$$\text{donde : } \eta = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} \quad (D.8)$$

En este componente dado que $C_{V_i} = C_{2/i} = 0$, las integrales temporal y espacial serán nulas:

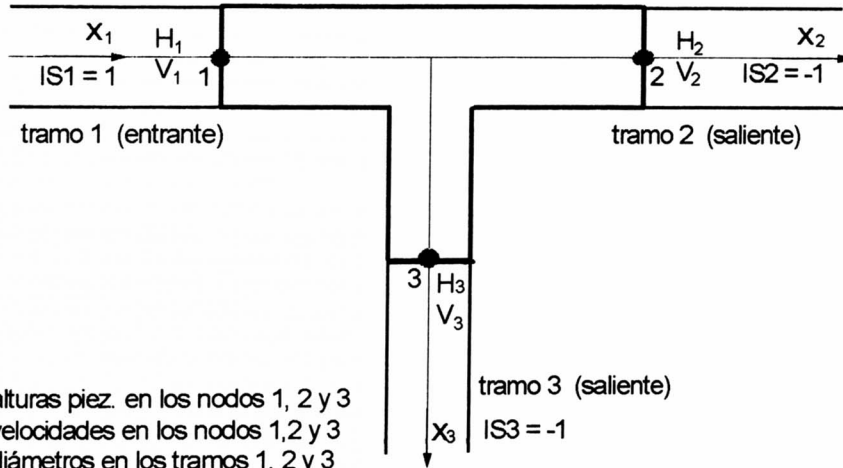
$$P_c(k) = \tilde{P}_c(k) = 0 \quad (D.9)$$

En este componente, al no tener parámetros propios, no se tendrán coeficientes de sensibilidad.

E) Tee sin pérdidas (diámetros cualesquiera)

Para este componente tenemos el siguiente esquema:

Esquema de una tee sin pérdidas



H_1, H_2 y H_3 : alturas piez. en los nodos 1, 2 y 3
 V_1, V_2 y V_3 : velocidades en los nodos 1, 2 y 3
 D_1, D_2 y D_3 : diámetros en los tramos 1, 2 y 3
 a_1, a_2 y a_3 : vel. de propagación en los tramos 1, 2 y 3
 g : aceleración de la gravedad

Para este componente conectado a tres tramos, la integral temporal del concomitante bilineal será :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* V_{2/i} + g V_2^* H_{2/i} \right) dt - IS3 \int_0^T \left(\frac{a_3^2}{g} H_3^* V_{3/i} + g V_3^* H_{3/i} \right) dt \quad (E.1)$$

Condiciones de contorno ecuación directa :

$$C_1 \equiv H_2 - H_1 + \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} = 0$$

$$C_2 \equiv H_3 - H_1 + \frac{V_3^2 - V_1^2}{2g} = 0 \quad (E.2)$$

$$C_3 \equiv (IS1)(IS3) \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 V_1 + (IS2)(IS3) \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 V_2 + V_3 = 0$$

Condiciones de contorno ecuación derivada :

$$\begin{aligned}
H_{2/i} - H_{1/i} + \frac{V_{2/i}V_2 - V_{1/i}V_1}{2g} &= 0 \\
H_{3/i} - H_{1/i} + \frac{V_{3/i}V_3 - V_{1/i}V_1}{2g} &= 0 \\
C_{3/i} + (IS1)(IS3)\left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 V_{1/i} + (IS2)(IS3)\left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 V_{2/i} + V_{3/i} &= 0
\end{aligned} \tag{E.3}$$

C_1 , C_2 y C_3 no contienen ningún parámetro, por lo tanto $C_{1/i} = C_{2/i} = C_{3/i} = 0$. Luego, despejando $H_{2/i}, H_{3/i}, V_{3/i}$ en (E.3), reemplazando en (E.1) y agrupando se tiene:

$$\begin{aligned}
P_c(k) &= \int_0^T -gH_{1/i} (IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* + IS3 \cdot V_3^*) dt \\
&+ \int_0^T -IS2 \cdot V_{2/i} \left[\frac{a_2^2}{g} H_2^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 H_3^* - V_2 \cdot V_2^* + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 V_3 \cdot V_3^* \right] dt + \\
&\int_0^T -IS1 \cdot V_{1/i} \left[\frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 H_3^* + IS1 \cdot V_1 (IS2 \cdot V_2^* + IS3 \cdot V_3^*) + \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 V_3 \cdot V_3^* \right] dt
\end{aligned} \tag{E.4}$$

Las condiciones de contorno adjunta (simplificadas) serán:

$$\begin{aligned}
IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* + IS3 \cdot V_3^* &= 0 \\
\frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 H_3^* - V_1 \cdot V_1^* + \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 V_3 \cdot V_3^* &= 0 \\
\frac{a_2^2}{g} H_2^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 H_3^* - V_2 \cdot V_2^* + \left(\frac{D_2}{D_3}\right)^2 V_3 \cdot V_3^* &= 0
\end{aligned} \tag{E.5}$$

En este componente dado que $C_{1/i} = C_{2/i} = C_{3/i} = 0$ las integrales temporal y espacial serán nulas:

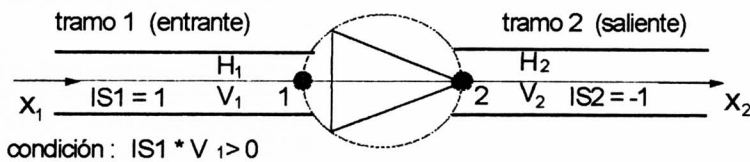
$$P_c(k) = \tilde{P}_c(k) = 0 \tag{E.6}$$

En este componente al no tener parámetros propios, no se tendrán coeficientes de sensibilidad.

F) Bomba operando modo normal (rpm = cte)

Para este componente tenemos el siguiente esquema :

Esquema de una bomba



condición: $IS1 \cdot V_1 > 0$

H_1 y H_2 : altura piezométricas en los nodos 1 y 2

V_1 y V_2 : velocidades en los nodos 1 y 2

a_1 y a_2 : velocidades de propagación en los tramos 1 y 2

$H_2 - H_1 = A \cdot V_1 + B \cdot V_1^2 + C$ (curva característica de la bomba)

g : aceleración de la gravedad

Para la integral temporal del concomitante bilineal tenemos :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* V_{2/i} + g V_2^* H_{2/i} \right) dt \quad (F.1)$$

Condiciones de contorno ecuación directa :

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv H_2 - H_1 - A_n \cdot V_1^2 - B_n \cdot IS1 \cdot V_1 - C_n = 0 \\ C_2 &\equiv IS1 \cdot IS2 \cdot V_1 + V_2 = 0 \end{aligned} \quad (F.2)$$

Condiciones de contorno ecuación derivada :

$$\begin{aligned} C_{1/i} + H_{2/i} - H_{1/i} - 2 A_n \cdot V_1 \cdot V_{1/i} - B_n \cdot IS1 \cdot V_{1/i} &= 0 \\ IS1 \cdot IS2 \cdot V_{1/i} + V_{2/i} &= 0 \end{aligned} \quad (F.3)$$

C_2 no contiene ningún parámetro, por lo tanto $C_{2/i} = 0$. Luego, despejando $H_{2/i}, V_{2/i}$ en (F.3), reemplazando en (F.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T IS2 \cdot C_{V/i} g V_2^* dt + \int_0^T -g H_{V/i} (IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^*) dt \\ + \int_0^T -IS1 \cdot V_{V/i} \left[\frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_2^2}{g} H_2^* + IS1 \cdot IS2 \cdot g \cdot (2A_n \cdot V_1 + IS1 \cdot B_n) \cdot V_2^* \right] dt \quad (F.4)$$

Luego las condiciones de contorno adjuntas serán :

$$IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* = 0 \\ \frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_2^2}{g} H_2^* + IS1 \cdot IS2 \cdot g \cdot (2A_n \cdot V_1 + IS1 \cdot B_n) \cdot V_2^* = 0 \quad (F.5)$$

$$IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* = 0 \\ \text{simplificando :} \quad H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \varphi \cdot V_1^* = 0 \quad (F.6)$$

$$\text{donde :} \quad \varphi = -\frac{g}{a_1} (2A_n \cdot V_1 + IS1 \cdot B_n) \quad (F.7)$$

Resulta para la evaluación de la integral temporal :

$$P_c(k) = \int_0^T C_{V/i} \cdot IS2 \cdot g \cdot V_2^* \cdot dt = \int_0^T -C_{V/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt \quad (F.8)$$

En forma similar la integral espacial será :

$$\tilde{P}_c(k) = -C_{V/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (F.9)$$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial \varphi_1} = \int_0^T -C_{V/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt - C_{V/i} \cdot IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (F.10)$$

En este modelo de bomba tenemos tres parámetros A_n , B_n y C_n .

$$\text{Derivando } C_1 \text{ respecto a } A_n, \text{ se tendrá :} \quad C_{V/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial A_n} = -V_1^2 \quad (F.11)$$

reemplazando en (F.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial K_p} = \int_0^T IS1 \cdot g \cdot V_1^2 \cdot V_1^* \cdot dt + IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^2 \cdot \tilde{V}_1^* \quad (F.12)$$

Derivando C_1 respecto a B_n , se tendrá : $C_{Vi} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial B_n} = -IS1 \cdot V_1$ (F.13)

reemplazando en (F.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial B_n} = \int_0^T g \cdot V_1 \cdot V_1^* \cdot dt + g \cdot \tilde{V}_1 \cdot \tilde{V}_1^* \quad (F.14)$$

Derivando C_1 respecto a C_n , se tendrá : $C_{Vi} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial C_n} = -1$ (F.15)

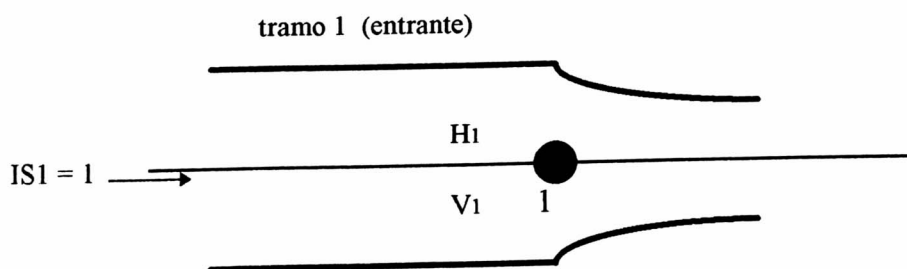
reemplazando en (F.10) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial C_n} = \int_0^T IS1 \cdot g \cdot V_1^* \cdot dt + IS1 \cdot g \cdot \tilde{V}_1^* \quad (F.16)$$

G) Válvula con flujo másico crítico

En este componente se establece una condición de contorno dada por cierta velocidad, en el nodo aguas arriba a la válvula. Para este componente tenemos el siguiente esquema:

Esquema de una válvula con flujo másico crítico



Para la integral temporal del concomitante bilineal tenemos :

$$P_c(k) = \int_0^T -IS1 \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt \quad (G.1)$$

$$\text{Condición de contorno directa :} \quad C_1 \equiv V_1 - V_{cr} = 0 \quad (G.2)$$

$$\text{Condición de contorno derivada :} \quad C_{1/i} + V_{1/i} = 0 \quad (G.3)$$

Despejando $V_{1/i}$ en (G.3), reemplazando en (G.1) y agrupando se tiene :

$$P_c(k) = \int_0^T -IS1 g H_{1/i} V_1^* dt + \int_0^T IS1 \cdot C_{1/i} \frac{a_1^2}{g} H_1^* dt \quad (G.4)$$

$$\text{Luego la condición de contorno adjunta sera :} \quad V_1^* = 0 \quad (G.5)$$

Resulta para la evaluación de la integral temporal :

$$P_c(k) = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot H_1^* \cdot dt \quad (G.6)$$

$$\text{En forma similar la integral espacial será :} \quad \tilde{P}_c(k) = C_{1/i} \cdot IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot \tilde{H}_1^* \quad (G.7)$$

Para el cálculo de los coeficientes de sensibilidad se tendrá :

$$P_c(k) = \int_0^T C_{1/i} \cdot IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot H_1^* \cdot dt + C_{1/i} \cdot IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot \tilde{H}_1^* \quad (G.8)$$

En este tipo de componente tenemos como parámetro V_{cr} .

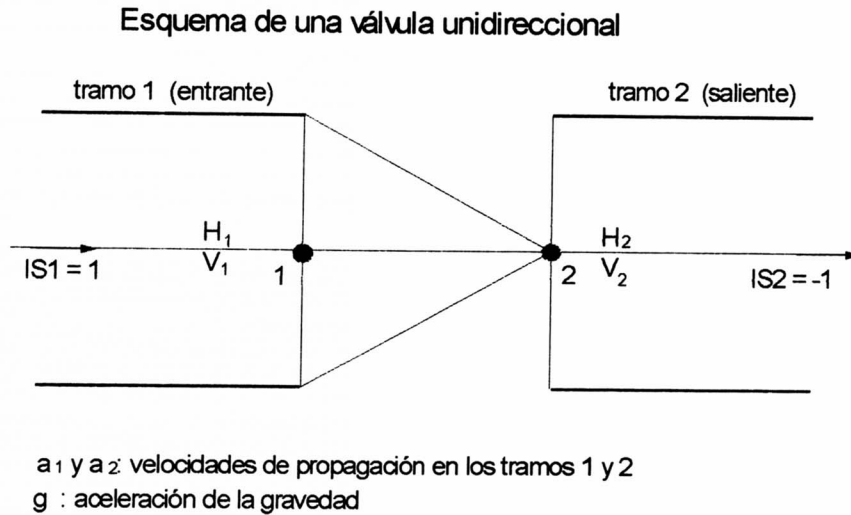
$$\text{Derivando } C_1 \text{ respecto a } V_{cr} \text{ , se tendrá :} \quad C_{1/i} \equiv \frac{\partial C_1}{\partial V_{cr}} = -1 \quad (G.9)$$

reemplazando en (G.8) se tendrá :

$$\frac{\partial R}{\partial V_{cr}} = \int_0^T -IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot H_1^* \cdot dt - IS1 \cdot \frac{a_1^2}{g} \cdot \tilde{H}_1^* \quad (G.10)$$

H) Válvula unidireccional

Para este componente tenemos el siguiente esquema:



Para la integral temporal del concomitante bilineal tenemos :

$$P_c(k) = -IS1 \int_0^T \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* V_{1/i} + g V_1^* H_{1/i} \right) dt - IS2 \int_0^T \left(\frac{a_2^2}{g} H_2^* V_{2/i} + g V_2^* H_{2/i} \right) dt \quad (H.1)$$

Condiciones de contorno directas :

$$\text{Si } IS1 \cdot V_1 > 0$$

$$\text{Si } IS1 \cdot V_1 \leq 0$$

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 = 0$$

$$C_1 \equiv V_1 - 0 = 0$$

$$C_2 \equiv (IS1)(IS2)V_1 + V_2 = 0$$

$$C_2 \equiv V_2 - 0 = 0$$

(H.2)

Condiciones de contorno derivadas :

$$H_{1/i} - H_{2/i} = 0$$

$$V_{1/i} = 0$$

$$(IS1)(IS2)V_{1/i} + V_{2/i} = 0$$

$$V_{2/i} = 0$$

(H.3)

Vemos que en (H.2) no se tiene parámetros, por lo tanto $C_{1/i} = C_{2/i} = 0$. Luego, despejando según convenga en (H.3) y reemplazando en (H.1) se tiene :

$$\begin{aligned}
P_c(k) = \int_0^T -IS1 \cdot V_{1/i} \left(\frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_2^2}{g} H_2^* \right) dt & \quad P_c(k) = \int_0^T -IS1 \cdot g \cdot H_{1/i} \cdot V_1^* dt \\
+ \int_0^T -g H_{1/i} (IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^*) dt & \quad + \int_0^T -IS2 \cdot g \cdot H_{2/i} \cdot V_2^* dt
\end{aligned} \tag{H.4}$$

Luego las condiciones de contorno adjunta serán :

$$\begin{aligned}
IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* = 0 & \quad V_1^* = 0 \\
H_1^* - \frac{a_2^2}{a_1^2} H_2^* = 0 & \quad V_2^* = 0
\end{aligned} \tag{H.5}$$

En este componente las integrales temporal y espacial serán nulas :

$$P_c(k) = \tilde{P}_c(k) = 0 \tag{H.6}$$

En este componente, al no tener parámetros propios, no se tendrán coeficientes de sensibilidad.

ANEXO 2: EJEMPLO DE DETERMINACION DE LOS VALORES ADJUNTOS EN EL NODO DE REFERENCIA CUANDO ES EXTREMO DE UN TRAMO Y VALORES ADJUNTOS A PROPAGAR EN $t = T^-$

Teniendo en cuenta que el problema adjunto parte de condiciones finales nulas, se tiene que:

$$H^* = 0 \quad V^* = 0 \quad \text{en } t = T$$

Sin embargo, para el nodo de referencia se determinan los valores a propagar en $t = T^-$ a través de las curvas características. En este caso desarrollaremos el análisis cuando el nodo de referencia es el extremo final de un tramo1 que se conecta al componente pérdida concentrada, que a su vez está conectado al tramo2, conforme se muestra en la figura 1.

Ahora, debido a que la componente tiene dos tramos, los valores adjuntos se propagan tanto a través de la característica del tramo1 como de la característica del tramo2 a partir de los nodos del componente.

Por otro lado, debido a que los valores adjuntos deben cumplir las condiciones de contorno adjuntas del componente, es que se encuentran los valores adjuntos para cada uno de los nodos del componente.

A continuación en forma breve determinaremos dichos valores teniendo en cuenta los siguientes datos:

Componente : Pérdida concentrada (válvula, medidor de flujo, codo, etc.)

Funcional de Respuesta : $H(x_0, T)$

Tiempo de Referencia : T de donde $T^- = \lim T - \varepsilon$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$

Nodo de Referencia : 1 (nodo final del tramo1 a la entrada al componente)

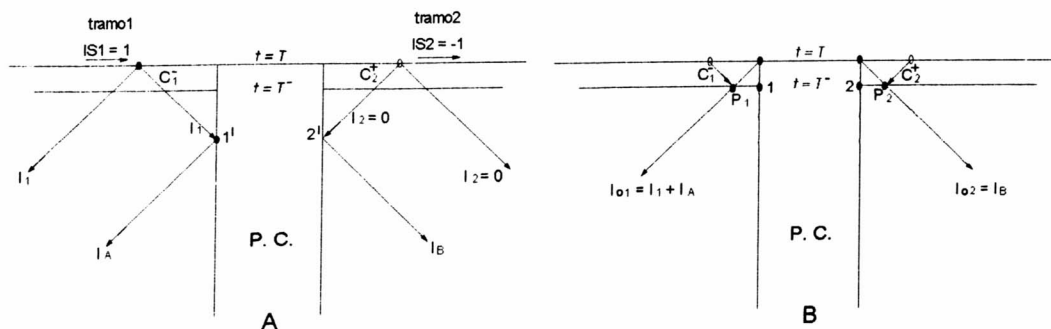


FIGURA 1

**Esquema de solución de las discontinuidades
A : aproximación al nodo de referencia ; B : resultantes**

Se tiene que las ecuaciones características adjuntas son :

$$\frac{DH^*}{Dt} + \frac{g}{a} \frac{DV^*}{Dt} - \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathcal{V}} \right) + S_H^+ + \frac{g}{a} S_V^+ = 0 \quad (1)$$

a lo largo de la curva característica C^+ : $\frac{dx}{dt} = a$ y

$$\frac{DH^*}{Dt} - \frac{g}{a} \frac{DV^*}{Dt} + \frac{g}{a} V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial \mathcal{V}} \right) + S_H^+ - \frac{g}{a} S_V^+ = 0 \quad (2)$$

a lo largo de la curva característica C^- : $\frac{dx}{dt} = -a$

Teniendo en cuenta la notación de la figura 1-A, integrando la ecuación (1) a lo largo de la característica C^+ en el tramo2 e integrando la ecuación (2) a lo largo de C^- en el tramo1 entre T y $T^- = T - \varepsilon$, y simplificando en el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, se obtiene que :

$$\begin{aligned} H_1^* - \frac{g}{a_1} V_1^* &= I_1^- \\ H_2^* + \frac{g}{a_2} V_2^* &= I_2 \end{aligned} \quad (3)$$

donde :

$$I_1^- = \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+ - \frac{g}{a} S_V^+ \right) \cdot dt = K_x / \Delta x_1 \quad (4)$$

$$I_2 = \int_{T-\varepsilon}^T \left(S_H^+ + \frac{g}{a} S_V^+ \right) \cdot dt = 0 \quad (5)$$

K_x depende de la posición x_0 . Además, dado que el funcional de respuesta $R = H(x_0, T)$, se tiene que los invariantes I a lo largo de las características C^+ y C^- en el tramo1 son iguales, mientras que, en el tramo2 son nulos, es decir.

$$I_1^- = I_1^+ = I_1 \quad (6)$$

Teniendo en cuenta una convención de signos para la orientación de los tramos respecto a los componentes, tendremos que :

nodo inicial del tramo (a la salida de un componente) $ISj = -1$
nodo final del tramo (a la entrada a un componente) $ISj = +1$

Luego, las ecuaciones en (3) se pueden reescribir de la siguiente manera :

$$\begin{aligned} H_1^* - IS1 \frac{g}{a_1} V_1^* &= I_1 \\ H_2^* - IS2 \frac{g}{a_2} V_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Las ecuaciones puestas de esta forma nos sirven para cualquier orientación de los tramos.

Las condiciones de contorno adjuntas de la pérdida concentrada son :

$$\begin{aligned} IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* &= 0 \\ H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \gamma \cdot V_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

donde :
$$\gamma = \frac{2g \cdot (H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} \quad (9)$$

resolviendo el sistema de ecuaciones dados en (7) y (8) se tiene :

$$\begin{aligned} V_1^* &= \frac{-a_1/g}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 & V_2^* &= \frac{IS1 \cdot IS2 \cdot a_1/g}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 \\ H_1^* &= \frac{IS1 \cdot a_2/a_1 + \gamma}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 & H_2^* &= \frac{IS1 \cdot a_1/a_2}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 \end{aligned} \quad (10)$$

En (10), $I_1 = 2/\Delta x_1$ ya que está evaluado en el nodo extremo del tramo1.

Luego, siguiendo con la notación de la figura 1-B, las invariantes a propagar en los tramo1 y tramo2, respectivamente, serán :

$$\begin{aligned} I_{o1} = I_1 + I_A = I_1 + H_1^* + \frac{g}{a_1} IS1 \cdot V_1^* & & I_{o2} = I_B + I_2 = H_2^* + \frac{g}{a_2} IS2 \cdot V_2^* + I_2 \\ I_{o1} = \frac{2(IS1 \cdot a_2/a_1 + \gamma)}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 & & I_{o2} = \frac{2 \cdot IS1 \cdot a_1/a_2}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 \end{aligned} \quad (11)$$

donde ahora : $I_1 = 1/\Delta x_1$ ya que está evaluado en el interior del tramo1 próximo al extremo, luego, integrando las ecuaciones (1) y (2) entre T^- y T , en las curvas características de los tramos respectivos, resulta que :

$$\begin{aligned} H_{P1}^* + IS1 \frac{g}{a_1} V_{P1}^* &= I_{o1} & H_{P2}^* + IS2 \frac{g}{a_2} V_{P2}^* &= I_{o2} \\ H_{P1}^* - IS1 \frac{g}{a_1} V_{P1}^* &= 0 & H_{P2}^* - IS2 \frac{g}{a_2} V_{P2}^* &= 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, resolviendo los sistemas de ecuaciones respectivos obtendremos los valores adjuntos a propagar a través de cada tramo y estos son :

$$\begin{aligned} H_{P1}^* &= \frac{IS1 \cdot a_2/a_1 + \gamma}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 & H_{P2}^* &= \frac{IS1 \cdot a_1/a_2}{IS1 \cdot (1 + a_2/a_1) + \gamma} I_1 \\ V_{P1}^* &= IS1 \frac{a_1}{g} H_{P1}^* & V_{P2}^* &= IS2 \frac{a_2}{g} H_{P2}^* \end{aligned} \quad (13)$$

ANEXO 3 : ANALISIS DE LA FUNCION IMPORTANCIA

Las variables adjuntas juegan en estos casos el papel de una “función importancia”, ya que son utilizadas en el análisis de sensibilidad para pesar (asignar una importancia) a los resultados del problema directo. La función importancia se determina a través de la resolución de un problema asociado al original, denominado problema adjunto.

En el análisis de sensibilidad paramétrico al elegirse como funcional de respuesta una variable de estado (en nuestro caso la altura piezométrica H y la velocidad V) en un punto de referencia del espacio de las fases (en nuestro caso la posición y el tiempo) se tiene que el problema adjunto que nos permite resolver la función importancia resulta con fuentes deltiformes. Así para el caso de análisis de sensibilidad del golpe de ariete se tiene que las ecuaciones del problema adjunto son:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= S_H^+ \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{|V|}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= S_V^+ \end{aligned} \quad (1)$$

Las fuentes deltiformes actúan en el punto de referencia asociado al funcional de respuesta, luego al hacer actuar el impulso integrando en un espacio infinitesimal alrededor del punto de referencia, se tendrá un único pulso que se propagará desde el punto de referencia hacia los tramos conforme el tiempo va retrocediendo. Al actuar la función impulso el sistema de ecuaciones (1) queda sin los términos de fuente. Es decir, se tiene que:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= 0 \\ -\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{|V|}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Donde ahora las condiciones finales son, para los funcionales de respuesta tratados, funciones deltiformes. Esto es, las condiciones finales son nulas en todos los nodos, excepto en el nodo de referencia donde se encuentra el impulso inicial.

Dicho impulso inicial se trasmite de un tramo a otro a través de los componentes. Pero no toda la magnitud del impulso se trasmite al pasar de un tramo a otro sino que una parte se refleja. Luego para estudiar que parte de la función importancia se trasmite y refleja al pasar por los componentes es que determinaremos coeficientes de transmisión y reflexión de la función importancia en los componentes.

Para estudiar la propagación del impulso (de la función importancia) a través de los componentes, haremos un análisis similar al realizado para analizar las condiciones de propagación en el problema directo (Parmakian [18]).

Si en el sistema de ecuaciones adjuntas (2) despreciamos los términos de fricción, podemos reescribir a este sistema de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H^*}{\partial t} + g \frac{\partial V^*}{\partial x} &= 0 \\ \frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} + \frac{\partial V^*}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Siguiendo a Parmakian, la solución general de estas ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} H^* - H_T^* &= f^*\left(t - \frac{x}{a}\right) + F^*\left(t + \frac{x}{a}\right) \\ V^* - V_T^* &= \frac{a}{g} \left[f^*\left(t - \frac{x}{a}\right) - F^*\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \end{aligned} \quad (4)$$

En la solución del problema adjunto dada por las expresiones en (4), dado que el tiempo va de un tiempo posterior a uno anterior, esto es, el tiempo es decreciente, se tiene que $f^*\left(t - \frac{x}{a}\right)$ es una onda que se propaga con velocidad a en sentido contrario a la dirección positiva de x , mientras $F^*\left(t + \frac{x}{a}\right)$ es una onda que se mueve en la dirección positiva de x tal como se muestra en la figura 1.

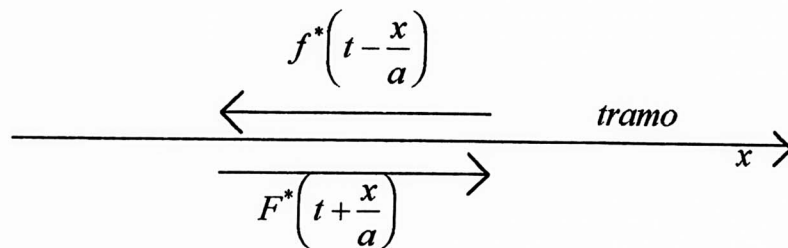


FIGURA 1

Orientación de la propagación de las ondas f^* y F^*

Para cuantificar la propagación de la función importancia, previamente definiremos los coeficientes de reflexión y transmisión para la función importancia dado por las variables adjuntas H^* y V^* .

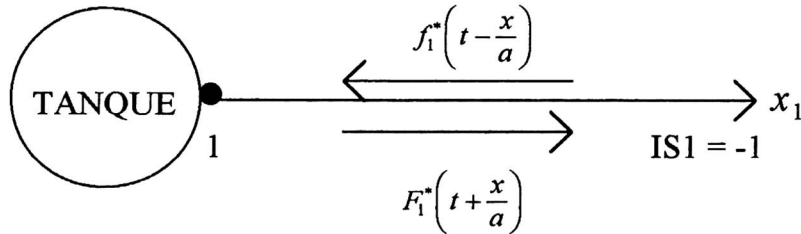
Coefficientes de reflexión adjuntos: $r_H^* = \frac{H_r^*}{H_i^*}$ $r_V^* = \frac{V_r^*}{V_i^*}$ (5)

Coefficientes de transmisión adjuntos: $t_H^* = \frac{H_t^*}{H_i^*}$ $t_V^* = \frac{V_t^*}{V_i^*}$ (6)

A continuación vemos la reflexión y transmisión a través de los diferentes tipos de componentes.

A) RESERVOIRIO DE ALTURA CONSTANTE

Este componente, al tener conectado un solo tramo, sólo reflejará la función importancia. Luego, para determinar los coeficientes de reflexión en este componente tendremos en cuenta el siguiente esquema:



Luego, de (4) las variables adjuntas en el nodo 1 estarán dadas por :

$$\begin{aligned} H_1^* &= f_1^* \left(t - \frac{x}{a} \right) + F_1^* \left(t + \frac{x}{a} \right) \\ V_1^* &= \frac{a_1}{g} \left[f_1^* \left(t - \frac{x}{a} \right) - F_1^* \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

De acuerdo al esquema el pulso incidente es $f_1^* \left(t - \frac{x}{a} \right)$, luego tenemos :

$$\begin{aligned} (H^*)_i &= f_1^* & (V^*)_i &= \frac{a_1}{g} f_1^* \\ (H^*)_r &= F_1^* & (V^*)_r &= -\frac{a_1}{g} F_1^* \end{aligned} \quad (8)$$

donde los subíndices i y r indican respectivamente, el impulso incidente y reflejado.

La condición de contorno adjunta para este componente es:

$$H_1^* + \frac{g}{a_1} \alpha \cdot V_1^* = 0 \quad (9)$$

donde:

$$\alpha = \frac{2g}{a_1 \cdot V} (H_1 - H_r) \quad (10)$$

y α se evalúa con los resultados del problema directo.

reemplazando (7) en (9), resulta :

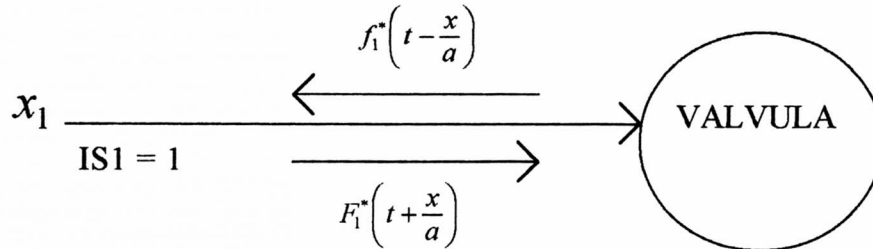
$$F_1^* = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha} f_1^* \quad (11)$$

luego, teniendo en cuenta (8) y (11) en (5) tendremos los coeficientes de reflexión adjuntos para este componente:

$$r_H^* = \frac{(H^*)_r}{(H^*)_i} = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad r_V^* = \frac{(V^*)_r}{(V^*)_i} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \quad (12)$$

B) VALVULA CON EXTREMO DE ALTURA CONSTANTE

En este componente en forma similar al componente reservorio, al tener un solo tramo, determinaremos los coeficientes de reflexión teniendo en cuenta el siguiente esquema:



Las variables adjuntas están dadas por :

$$\begin{aligned} H_1^* &= f_1^* \left(t - \frac{x}{a_1} \right) + F_1^* \left(t + \frac{x}{a_1} \right) \\ V_1^* &= \frac{a_1}{g} \left[f_1^* \left(t - \frac{x}{a_1} \right) - F_1^* \left(t + \frac{x}{a_1} \right) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

De acuerdo al esquema el pulso incidente es $F_1^* \left(t + \frac{x}{a_1} \right)$ luego tenemos :

$$\begin{aligned} (H^*)_i &= F_1^* & (V^*)_i &= -\frac{a}{g} F_1^* \\ (H^*)_r &= f_1^* & (V^*)_r &= \frac{a}{g} f_1^* \end{aligned} \quad (14)$$

La condición de contorno de esta componente es:

$$H_1^* + \frac{g}{a_1} \beta \cdot V_1^* = 0 \quad (15)$$

donde
$$\beta = \frac{2g}{a_1 \cdot V} (H - H_v) \quad (16)$$

y β se evalúa con los resultados del problema directo.

Reemplazando (13) en (15), resulta :
$$f_1^* = -\frac{1-\beta}{1+\beta} F_1^* \quad (17)$$

luego teniendo en cuenta (14) y (17) los coeficientes de reflexión para este componente resultan:

$$r_H^* = \frac{(H^*)_r}{(H^*)_i} = -\frac{1-\beta}{1+\beta} \quad r_V^* = \frac{(V^*)_r}{(V^*)_i} = \frac{1-\beta}{1+\beta} \quad (18)$$

C) PERDIDA CONCENTRADA

Para este componente conectado a dos tramos determinaremos los coeficientes de reflexión y transmisión adjuntos, teniendo en cuenta el siguiente esquema:



Las variables adjuntas están dadas por :

$$\begin{aligned} H_1^* &= f_1^*\left(t - \frac{x_1}{a_1}\right) + F_1^*\left(t + \frac{x_1}{a_1}\right) & V_1^* &= \frac{a_1}{g} \left[f_1^*\left(t - \frac{x_1}{a_1}\right) - F_1^*\left(t + \frac{x_1}{a_1}\right) \right] \\ H_2^* &= f_2^*\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right) + F_2^*\left(t + \frac{x_2}{a_2}\right) & V_2^* &= \frac{a_2}{g} \left[f_2^*\left(t - \frac{x_2}{a_2}\right) - F_2^*\left(t + \frac{x_2}{a_2}\right) \right] \end{aligned} \quad (19)$$

En este caso el pulso incidente es $F_1^*\left(t + \frac{x_1}{a_1}\right)$ luego tenemos :

$$\begin{aligned} (H^*)_i &= F_1^* & (V^*)_i &= -\frac{a_1}{g} F_1^* \\ (H^*)_r &= f_1^* & (V^*)_r &= \frac{a_1}{g} f_1^* \\ (H^*)_t &= F_2^* & (V^*)_t &= -\frac{a_2}{g} F_2^* \end{aligned} \quad (20)$$

Condiciones de contorno :

$$\begin{aligned} H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \gamma \cdot V_1^* &= 0 \\ V_1^* - V_2^* &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

donde :
$$\gamma = \frac{2g}{a_1 \cdot V_1} (H_1 - H_2) \quad (22)$$

Teniendo en cuenta (19) en (21) resolviendo se tiene :

$$f_1^* = \frac{a_2/a_1 + \gamma - 1}{a_2/a_1 + \gamma + 1} F_1^* \quad F_2^* = \frac{2 \cdot a_2/a_1}{a_2/a_1 + \gamma + 1} F_1^* \quad (23)$$

Teniendo en cuenta (20) y (23) determinaremos los coeficientes de reflexión y transmisión :

$$\begin{aligned} r_H^* &= \frac{(H^*)r}{(H^*)i} = \frac{a_2/a_1 + \gamma - 1}{a_2/a_1 + \gamma + 1} & r_V^* &= \frac{(V^*)r}{(V^*)i} = -\frac{a_2/a_1 + \gamma - 1}{a_2/a_1 + \gamma + 1} \\ t_H^* &= \frac{(H^*)t}{(H^*)i} = \frac{2 \cdot a_1/a_2}{a_2/a_1 + \gamma + 1} & t_V^* &= \frac{(V^*)t}{(V^*)i} = \frac{2}{a_2/a_1 + \gamma + 1} \end{aligned} \quad (24)$$

D) CAMBIO DE AREA

Procediendo en igual forma que para el caso de una pérdida concentrada, obtendremos expresiones similares.

Luego para este componente con las condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* &= 0 \\ H_1^* - \left(\frac{a_2^2}{a_1^2}\right) \cdot \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \eta \cdot V_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\text{donde : } \eta = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 \cdot V_1} \quad (26)$$

resulta los coeficientes de reflexión y transmisión siguientes:

$$\begin{aligned} r_H^* &= \frac{(H^*)r}{(H^*)i} = \frac{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta - 1}{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta + 1} & r_V^* &= \frac{(V^*)r}{(V^*)i} = -\frac{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta - 1}{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta + 1} \\ t_H^* &= \frac{(H^*)t}{(H^*)i} = \frac{2 \cdot a_1/a_2}{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta + 1} & t_V^* &= \frac{(V^*)t}{(V^*)i} = \frac{2}{a_2/a_1 \cdot (D_1/D_2)^2 + \eta + 1} \end{aligned} \quad (27)$$

E) BOMBA OPERANDO MODO NORMAL

Procediendo en forma similar a los dos anteriores casos, para la condiciones de contorno siguientes:

$$\begin{aligned} IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* &= 0 \\ H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \varphi \cdot V_1^* &= 0 \end{aligned} \quad (28)$$

$$\text{donde : } \varphi = -\frac{g}{a_1} (2A_n \cdot V_1 + IS1 \cdot B_n) \quad (29)$$

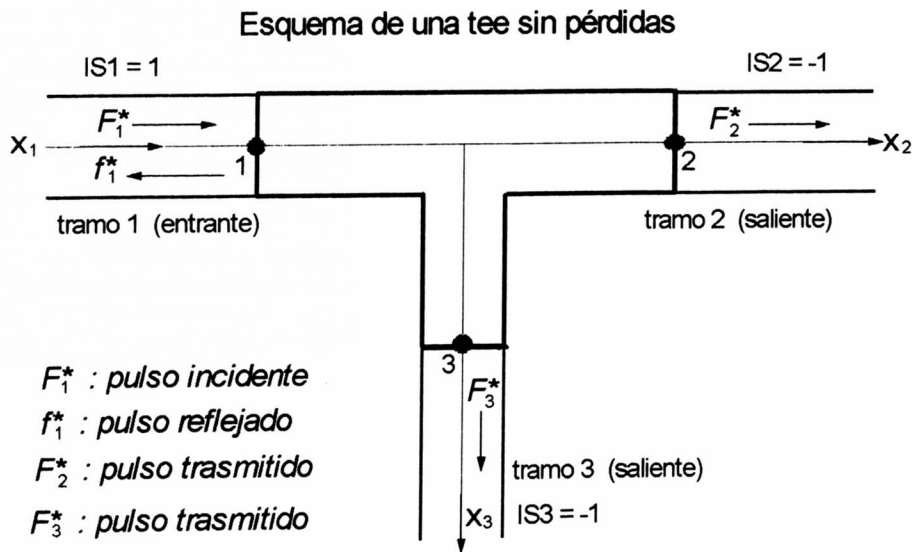
se tendrán los siguientes coeficientes de reflexión y trasmisión:

$$\begin{aligned}
 r_H^* &= \frac{(H^*)_r}{(H^*)_i} = \frac{a_2/a_1 + \varphi - 1}{a_2/a_1 + \varphi + 1} & r_V^* &= \frac{(V^*)_r}{(V^*)_i} = -\frac{a_2/a_1 + \varphi - 1}{a_2/a_1 + \varphi + 1} \\
 t_H^* &= \frac{(H^*)_t}{(H^*)_i} = \frac{2 \cdot a_1/a_2}{a_2/a_1 + \varphi + 1} & t_V^* &= \frac{(V^*)_t}{(V^*)_i} = \frac{2}{a_2/a_1 + \varphi + 1}
 \end{aligned}
 \tag{30}$$

F) TEE SIN PERDIDAS

Para este componente conectado a tres tramos (de cualquier diámetro) hallaremos coeficientes de trasmisión para dos tramos y coeficientes de reflexión para un solo tramo.

Procederemos en forma similar a lo hecho anteriormente.



Las condiciones de contorno de la tee son:

$$\begin{aligned}
 IS1 \cdot V_1^* + IS2 \cdot V_2^* + IS3 \cdot V_3^* &= 0 \\
 \frac{a_1^2}{g} H_1^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 H_3^* - V_1 \cdot V_1^* + \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 V_3 \cdot V_3^* &= 0 \\
 \frac{a_2^2}{g} H_2^* - \frac{a_3^2}{g} \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 H_3^* - V_2 \cdot V_2^* + \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 V_3 \cdot V_3^* &= 0
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Las variables adjuntas serán:

$$\begin{aligned}
 H_1^* &= f_1^* \left(t - \frac{x_1}{a_1} \right) + F_1^* \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right) & V_1^* &= \frac{a_1}{g} \left[f_1^* \left(t - \frac{x_1}{a_1} \right) - F_1^* \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right) \right] \\
 H_2^* &= f_2^* \left(t - \frac{x_2}{a_2} \right) + F_2^* \left(t + \frac{x_2}{a_2} \right) & V_2^* &= \frac{a_2}{g} \left[f_2^* \left(t - \frac{x_2}{a_2} \right) - F_2^* \left(t + \frac{x_2}{a_2} \right) \right] \\
 H_3^* &= f_3^* \left(t - \frac{x_3}{a_3} \right) + F_3^* \left(t + \frac{x_3}{a_3} \right) & V_3^* &= \frac{a_3}{g} \left[f_3^* \left(t - \frac{x_3}{a_3} \right) - F_3^* \left(t + \frac{x_3}{a_3} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{32}$$

$$\text{Teniendo en cuenta que:} \quad f_2^* \left(t + \frac{x_2}{a_2} \right) = f_3^* \left(t + \frac{x_3}{a_3} \right) = 0 \tag{33}$$

Luego teniendo en cuenta el esquema de la tee, las expresiones (32) y (33) en (31), y simplificando se tendrán los siguientes coeficientes de trasmisión y reflexión:

$$\begin{aligned}
 r_H^* &= -r_V^* = \frac{NUM1}{DEN} \\
 t_{V2}^* &= \frac{a_2}{a_1} t_{H2}^* = \frac{NUM2}{DEN} \\
 t_{V3}^* &= \frac{a_3}{a_1} t_{H3}^* = \frac{NUM3}{DEN}
 \end{aligned} \tag{34}$$

donde :

$$\begin{aligned}
 DEN &= \left(1 - \frac{V_1}{a_1} \right) \left(1 + \frac{V_2}{a_2} \right) + \left(1 - \frac{V_1}{a_1} \right) \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{V_3}{a_2} \right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2} \right) \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{V_3}{a_1} \right) \\
 NUM1 &= - \left(1 + \frac{V_1}{a_1} \right) \left(1 + \frac{V_2}{a_2} \right) - \left(1 + \frac{V_1}{a_1} \right) \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{V_3}{a_2} \right) + \left(1 + \frac{V_2}{a_2} \right) \left(\frac{D_1}{D_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{V_3}{a_1} \right) \\
 NUM2 &= 2 \left(\frac{D_2}{D_3} \right)^2 \left(\frac{a_3}{a_2} + \frac{V_3}{a_2} \right) \\
 NUM3 &= 2 \left(1 + \frac{V_2}{a_2} \right)
 \end{aligned} \tag{35}$$

Finalmente, de los coeficientes de reflexión y trasmisión adjuntos obtenidos en (24), (27), (30) y (34) para los diversos componentes aquí tratados se obtiene la siguiente relación:

$$\sum_j \frac{a_j}{a_i} t_{Hj}^* + r_{Hi}^* = 1 \tag{36}$$

$$\sum_j t_{Vj}^* - r_{Vi}^* = 1 \tag{37}$$

En (36) y (37) se tiene que, i es el número del tramo donde se encuentran tanto el impulso incidente y reflejado, y j es el número del tramo en que se trasmite el impulso.

ANEXO 4:

THE IMPORTANCE FUNCTION IN WATERHAMMER PROBLEMS

Jorge L. Baliño*, Axel E. Larreteguy* and Alberto Gallardo Padilla**

* Centro Atómico Bariloche (Comisión Nacional de Energía Atómica)
and Instituto Balseiro (Universidad Nacional de Cuyo) (Argentina)

** Graduate student, Maestría en Ciencias (mención Energía Nuclear),
Instituto Peruano de Energía Nuclear and Universidad Nacional de Ingeniería, Lima (Perú).

ABSTRACT

In a previous work [8] the differential method was applied to the sensitivity analysis for waterhammer problems in hydraulic networks. In this paper, the formalism is generalized to multipipe components (namely concentrated losses --valves, bends, etc.--, tees, pumps, etc.). In this way, the corresponding adjoint component can be derived for any component in the direct problem. Moreover, an analogy is established in which transmission and reflection coefficients can be derived for any adjoint component. The importance or adjoint function is analyzed when the piezometric head or velocity at a given position and time is chosen as response functional. In this case, it is shown that the importance function is represented by delta functions traveling along the hydraulic network with the propagation speed. The calculation of the sensitivity coefficients is extended to the cases in which the initial condition of the problem is the steady state and the parameters under consideration influence this initial condition. For this case, the calculation can be performed by solving sequentially two perturbative problems: the first one is non-steady, while the second one is steady, with an appropriate selection of a weighting function coming from the unsteady perturbative problem.

I. INTRODUCTION

The analysis of waterhammer transients plays an essential role in diverse areas such as hydroelectric projects, pumped-storage schemes, water supply systems, nuclear power plants, oil pipelines and industrial piping systems [1]. In nuclear power plants, various operating transients in the heat transport system can lead to significant pressure changes, which must be taken into account in the design for a safe operation [2].

Coupled to any transient calculation, there is a necessity of estimating the influence of different parameters on the obtained solution. This task, known as sensitivity analysis, can be performed by running repeatedly the computer code used in the calculations for different values of the parameters; in this way, a response surface is generated. However, this method requires time consuming calculations when many parameters are involved.

A different approach to perform the sensitivity analyses are the perturbation methods, which have been

extensively used in reactor physics through the concept of the importance function [3,4,5]. The application of perturbation methods to the thermohydraulics field has been first proposed by Oblow [6] by using the so called differential method; since then, it has been successfully extended [7].

In a previous work [8] the differential method was applied to the sensitivity analysis for waterhammer problems in hydraulic networks. The adjoint operator, the adjoint equations with the general form of their boundary conditions, and the general form of the bilinear concomitant were calculated. The numerical solutions of different waterhammer problems were obtained by using the computer code WHAT (*Water Hammer Analysis in Tubes*) [9]. With this code, any hydraulic network can be built by connecting different components (reservoirs, valves, pumps, tees, etc.) through pipes. The corresponding adjoint boundary conditions for components connected to a single pipe (namely a constant level reservoir and a valve discharging to atmosphere) were programmed, and a simple case was analyzed.

In this paper, the formalism is generalized to multipipe components (namely concentrated losses --valves, bends, etc.--, tees, pumps, etc.).

II. GENERALIZATION TO MULTIPIPE COMPONENTS

Previous results. In [8] it was shown that the change in the response functional δR due to perturbations in the parameters δp_i can be obtained as

$$\delta R = \sum_{i=1}^I \delta p_i \left[\langle \bar{S}_i^+ \cdot \bar{f} \rangle + \langle \bar{f}^* \cdot S(i) \rangle + P \right] \quad (1)$$

where \bar{S}^+ is an assigned vector weighting function related to the response functional, $S(i)$ is a known vector function coming from the direct equations and dependent on the particular parameter, \bar{f} and \bar{f}^* are correspondingly the direct and adjoint state vector (comprised of the piezometric head and the velocity), and P is the bilinear concomitant. The symbol $\langle \rangle$ represents integration over the generalized coordinate (in this case space and time), while the subscript $/i$ denotes partial derivative with respect to p_i .

For a single pipe, it was shown in [8] that the bilinear concomitant results

$$P = - \int_0^X \left(H^* H_{/i} + V^* V_{/i} \right) \Big|_0^T dx - \int_0^T \left(H_{/i} g V^* + V_{/i} \frac{a^2}{g} H^* \right) \Big|_0^X dt \quad (2)$$

where $0 \leq t \leq T$ and $0 \leq x \leq X$.

Generalization to multipipe components. Consider a hydraulic network with NT pipes connected through NC components, as shown in Fig. 1. By assigning an orientation to each pipe, it is possible to generalize Eq. (2) as

$$P = P_x + P_t \quad (3)$$

where

$$P_x = - \sum_{k=1}^{NT} \int_{X_{1k}}^{X_{2k}} \left(H^* H_{/i} + V^* V_{/i} \right) \Big|_0^T dx \quad (4)$$

$$P_t = - \sum_{k=1}^{NT} \int_0^T \left(H_{/i} g V^* + V_{/i} \frac{a^2}{g} H^* \right) \Big|_{X_{1k}}^{X_{2k}} dt \quad (5)$$

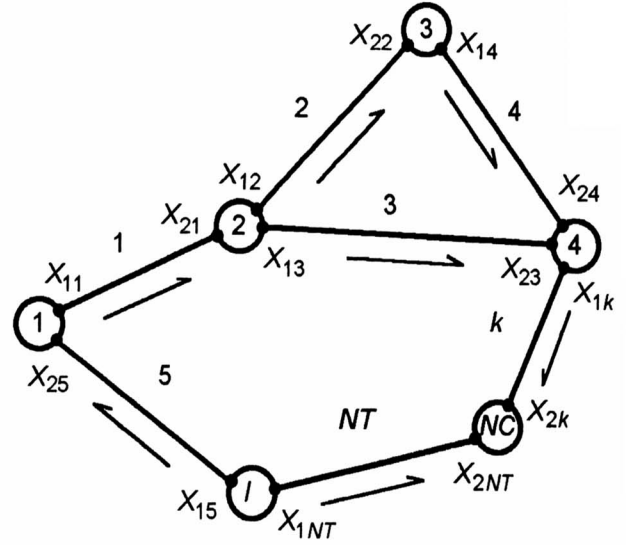


Figure 1. Representation of the hydraulic network.

Eq. (5) involves a time integration of functions evaluated at the pipe boundaries connected to the components, as shown in Fig. 2. It is convenient to rearrange Eq. (5) by summing over the components as

$$P_t = \sum_{l=1}^{NC} P_{tl} \quad (6)$$

where

$$P_{tl} = - \sum_{m=1}^{NL} I_{lm} \int_0^T \left(H_{/i} g V^* + V_{/i} \frac{a^2}{g} H^* \right) (X_{lm}, t) dt \quad (7)$$

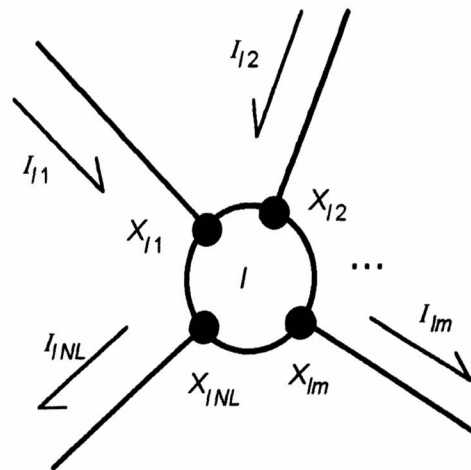


Figure 2. Representation of a component.

In Eq. (7) NL is the number of pipes connected to component l . For instance, $NL=1$ for a constant level reservoir or for a valve discharging to the atmosphere, $NL=2$ for a concentrated head loss (valve, elbow, etc.),

pump or area change, $NL=3$ for a tee, etc. The index I_{lm} takes into account the orientation of the pipe with respect to the component: $I_{lm} = 1$ if the pipe with boundary X_{lm} is oriented toward the component l , while $I_{lm} = -1$ if the pipe is oriented from the component.

Boundary conditions. The particular form of the contribution to the bilinear concomitant and the adjoint boundary conditions can be determined for each component considering that:

i) The bilinear concomitant must not involve the derived functions, except when evaluated at the initial condition $t=0$.

ii) The boundary conditions for the adjoint equations must not involve the derived functions.

Final conditions. From Eq. (4), it can be seen that the adjoint problem must have final conditions in order to be independent of the derived functions:

$$H^*(x, T) = 0 \quad (8)$$

$$V^*(x, T) = 0 \quad (9)$$

Therefore, the contribution to the bilinear concomitant from Eq. (4) is

$$P_x = - \sum_{k=1}^{NT} \int_{X_{1k}}^{X_{2k}} (H^* H_{/i} + V^* V_{/i})(x, 0) dx \quad (10)$$

Component boundary conditions. The corresponding adjoint boundary conditions are presented for some multipipe components. In [8] the adjoint boundary conditions were obtained for components connected to a single pipe, for instance a constant-level reservoir or a valve with a constant piezometric head at the outlet. The derivation is outlined for a concentrated head loss, being the procedure analogous for the other multipipe components.

- Concentrated head loss:

Direct boundary conditions:

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 - I_1 \frac{k_p}{2g} V_1 |V_1| = 0 \quad (11)$$

$$C_2 \equiv I_1 V_1 + I_2 V_2 = 0 \quad (12)$$

where k_p is the head loss coefficient.

Derived boundary conditions:

$$C_{1/i} + H_{1/i} - H_{2/i} - I_1 \frac{k_p}{2g} V_{1/i} |V_{1/i}| = 0 \quad (13)$$

$$I_1 V_{1/i} + I_2 V_{2/i} = 0 \quad (14)$$

Contribution to the bilinear concomitant:

$$P_{it} = -I_1 \int_0^T \left(H_{1/i} g V_1^* + V_{1/i} \frac{a_1^2}{g} H_1^* \right) dt - I_2 \int_0^T \left(H_{2/i} g V_2^* + V_{2/i} \frac{a_2^2}{g} H_2^* \right) dt \quad (15)$$

Substituting $H_{2/i}$ and $V_{2/i}$ from Eqs. (13) and (14) in Eq. (15) and canceling the resulting terms in $H_{1/i}$ and $V_{1/i}$, we have for the adjoint boundary conditions:

$$H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1} \right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \gamma V_1^* = 0 \quad (16)$$

$$I_1 V_1^* + I_2 V_2^* = 0 \quad (17)$$

where

$$\gamma = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 V_1} \quad (18)$$

The final contribution to the bilinear concomitant in Eq. (15), after taking into account the adjoint boundary conditions (16) and (17), is

$$P_{it} = \int_0^T C_{1/i} I_1 g V_1^* dt \quad (19)$$

- Area change ($D_2 \geq D_1$):

Direct boundary conditions:

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 + \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2) - I_1 \frac{k_p}{2g} V_1 |V_1| = 0 \quad (20)$$

$$C_2 \equiv I_1 D_1^2 V_1 + I_2 D_2^2 V_2 = 0 \quad (21)$$

where k_p is the head loss coefficient, calculated as [10]:

$$k_p = \begin{cases} \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right]^2 & \text{if } I_1 V_1 \geq 0 \\ 0.42 \left[1 - \left(\frac{D_1}{D_2} \right)^2 \right] & \text{if } I_1 V_1 < 0 \end{cases} \quad (22)$$

Adjoint boundary conditions:

$$H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 H_2^* + \frac{g}{a_1} \eta V_1^* = 0 \quad (23)$$

$$I_1 V_1^* + I_2 V_2^* = 0 \quad (24)$$

where

$$\eta = \frac{2g(H_1 - H_2)}{a_1 V_1} \quad (25)$$

Final contribution to the bilinear concomitant:

$$P_{it} = \int_0^T I_2 \left(\frac{a_2^2}{g} C_{2/i} H_2^* - C_{1/i} g V_2^* \right) dt \quad (26)$$

- Tee without head losses:
Direct boundary conditions:

$$C_1 \equiv H_1 - H_2 + \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_2^2) = 0 \quad (27)$$

$$C_2 \equiv H_1 - H_3 + \frac{1}{2g} (V_1^2 - V_3^2) = 0 \quad (28)$$

$$C_3 \equiv I_1 D_1^2 V_1 + I_2 D_2^2 V_2 + I_3 D_3^2 V_3 = 0 \quad (29)$$

Adjoint boundary conditions:

$$H_1^* - \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 H_2^* - \frac{g}{a_1} \frac{V_1}{a_1} V_1^* + \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2 \frac{g}{a_1} \frac{V_2}{a_1} V_2^* = 0 \quad (30)$$

$$H_1^* - \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^2 \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 H_3^* - \frac{g}{a_1} \frac{V_1}{a_1} V_1^* + \left(\frac{D_1}{D_3}\right)^2 \frac{g}{a_1} \frac{V_3}{a_1} V_3^* = 0 \quad (31)$$

$$I_1 V_1^* + I_2 V_2^* + I_3 V_3^* = 0 \quad (32)$$

Final contribution to the bilinear concomitant:

$$P_{it} = \int_0^T I_3 C_{3/i} \left(\frac{a_3^2}{g} H_3^* - V_3 V_3^* \right) dt \quad (33)$$

III. ANALYSIS OF THE IMPORTANCE FUNCTION

Direct and adjoint equations. The corresponding direct and adjoint equations are [8]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (34)$$

$$g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} + \zeta \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (35)$$

$$-\frac{\partial H^*}{\partial t} - g \frac{\partial V^*}{\partial x} = S_H^+ \quad (36)$$

$$-\frac{a^2}{g} \frac{\partial H^*}{\partial x} - \frac{\partial V^*}{\partial t} + V^* \frac{|V|}{D} \left(\zeta + \frac{V}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial V} \right) = S_V^+ \quad (37)$$

In [8] it was shown that if the instantaneous values of the piezometric head or velocity are chosen as response functionals, then the source terms (correspondingly S_H^+ or S_V^+) are impulse (delta) functions acting at the observation point at the final time T . Due to the hyperbolic nature of the adjoint equations, the importance function travels along the hydraulic network with the propagation speed. It can be shown that the importance function changes its power due to the influence of the friction term and due to the transmissions and reflections undergone as it reaches the components.

Reflection and transmission coefficients. Neglecting the friction term and considering no source terms, the general solution of Eqs. (36) and (37) is

$$H^* = f^* \left(t - \frac{x}{a} \right) + F^* \left(t + \frac{x}{a} \right) \quad (38)$$

$$V^* = \frac{a}{g} \left[f^* \left(t - \frac{x}{a} \right) - F^* \left(t + \frac{x}{a} \right) \right] \quad (39)$$

where, for *decreasing* times, f^* is a wave propagating in the direction of decreasing positions, while F^* is a wave propagating in the direction of increasing positions. Eqs. (38) and (39) are analogous expressions to the ones obtained in [11] for the direct problem. Therefore, it is possible to derive reflection and transmission coefficients for any component in the adjoint problem.

The adjoint reflection and transmission coefficients are defined correspondingly as

$$r^* = \frac{(H^*)_r}{(H^*)_i} \quad (40)$$

$$t^* = \frac{(H^*)_t}{(H^*)_i} \quad (41)$$

where $(H^*)_r$, $(H^*)_t$ and $(H^*)_i$ are correspondingly the reflected, transmitted and incident adjoint piezometric head. As before, the derivation is outlined for a concentrated head loss, being the procedure analogous for the other multipipe components.

- Concentrated head loss (see Fig. 3):
Assuming $I_1 = 1$ and $I_2 = -1$, the relationships for the concentrated head loss are:

$$H_1^* = f_1^* \left(t - \frac{x_1}{a_1} \right) + F_1^* \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right) \quad (42)$$

$$V_1^* = \frac{a_1}{g} \left[f_1^* \left(t - \frac{x_1}{a_1} \right) - F_1^* \left(t + \frac{x_1}{a_1} \right) \right] \quad (43)$$

$$H_2^* = f_2^* \left(t - \frac{x_2}{a_2} \right) + F_2^* \left(t + \frac{x_2}{a_2} \right) \quad (44)$$

$$V_2^* = \frac{a_2}{g} \left[f_2^* \left(t - \frac{x_2}{a_2} \right) - F_2^* \left(t + \frac{x_2}{a_2} \right) \right] \quad (45)$$

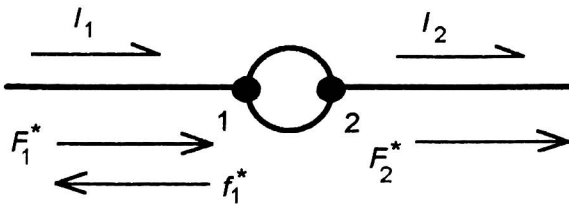


Figure 3. Reflection and transmission at a concentrated head loss.

$$(H_1^*)_i = F_1^* \quad (46)$$

$$(H_1^*)_r = f_1^* \quad (47)$$

$$(H_1^*)_t = F_2^* \quad (48)$$

$$f_2^* = 0 \quad (49)$$

From Eqs. (43) and (45) we have:

$$(V_1^*)_i = -\frac{a_1}{g} F_1^* \quad (50)$$

$$(V_1^*)_r = \frac{a_1}{g} f_1^* \quad (51)$$

$$(V_1^*)_t = -\frac{a_2}{g} F_2^* \quad (52)$$

Taking into account the boundary conditions (16) and (17), we have for the reflection and transmission coefficients:

$$r^* = \frac{\frac{a_2}{a_1} + \gamma - 1}{\frac{a_2}{a_1} + \gamma + 1} \quad (53)$$

$$t^* = \frac{2 \frac{a_1}{a_2}}{\frac{a_2}{a_1} + \gamma + 1} \quad (54)$$

$$\frac{(V^*)_r}{(V^*)_i} = -r^* = -\frac{\frac{a_2}{a_1} + \gamma - 1}{\frac{a_2}{a_1} + \gamma + 1} \quad (55)$$

$$\frac{(V^*)_t}{(V^*)_i} = \frac{a_2}{a_1} t^* = \frac{2}{\frac{a_2}{a_1} + \gamma + 1} \quad (56)$$

From (53) and (54) we have:

$$r^* + \frac{a_2}{a_1} t^* = 1 \quad (57)$$

IV. SENSITIVITY COEFFICIENTS FOR PARAMETERS INFLUENCING THE INITIAL CONDITION

A problem still remains, which is the calculation of Eq. (10). For the sake of consistency with the adjoint problem, it would be convenient to perform this calculation without choosing *a priori* any parameter. Usually, the initial condition for the direct problem corresponds to the system in a steady state; therefore, Eq. (10) can be written as

$$P_x = - \sum_{k=1}^{NT} \int_{x_{1k}}^{x_{2k}} (H^* \tilde{H}_{/i} + V^* \tilde{V}_{/i}) (x,0) dx \quad (58)$$

where the superscript \sim denotes a steady state value.

Let's consider the following *time independent* perturbative problem, characterized by the response functional \tilde{R} :

$$\tilde{R} = \langle \tilde{S}^+ \cdot \tilde{f} \rangle = \sum_{k=1}^{NT} \int_{x_{1k}}^{x_{2k}} (\tilde{S}_H^+ \tilde{H} + \tilde{S}_V^+ \tilde{V}) dx \quad (59)$$

According to the definition of the adjoint operator,

$$\langle \tilde{f}_{/i} \cdot \tilde{S}^+ \rangle = \langle \tilde{f} \cdot \tilde{S}(i) \rangle + \tilde{P}(\tilde{f}^*, \tilde{f}_{/i}) \quad (60)$$

where $\tilde{S}(i)$ is also a known vector function coming from the direct *steady state* equations.

Comparing Eqs. (60) with (58), it can be seen that the left hand side of Eq. (60) is equal to $-P_x$ if the vector weighting function is chosen as

$$\tilde{S}^+ = (H^*(x,0), V^*(x,0)) \quad (61)$$

In summary, the calculation of any sensitivity coefficient can be performed by solving sequentially two perturbative problems: the first one is non-steady and was described in section II, while the second one is steady, with an appropriate selection of a weighting function (Eq. (61)) coming from the unsteady perturbative problem. The adjoint functions \tilde{f}^* and $\tilde{f}_{/i}^*$ are independent of the parameter to be perturbed.

The calculation of the steady adjoint function can be performed with the aid of Eqs. (36) and (37), in which the source terms are given by Eq. (61), starting from any final condition and letting the system evolve to the steady state.

V. CONCLUSIONS

The differential perturbative method was successfully generalized to deal with any kind of hydraulic network. For a prescribed response functional, the adjoint problem can be solved in a way as general as the direct problem. The calculation of any sensitivity coefficient can be performed with the aid of the direct and adjoint functions. If the parameters under consideration influence the initial condition, it is necessary to solve an additional steady perturbative problem.

ACKNOWLEDGEMENTS

Alberto Gallardo Padilla wishes to thank CNEA for the financial support obtained to accomplish this work during his one-year stay at Centro Atómico Bariloche.

REFERENCES

- [1] Chaudhry, M. H., **Applied Hydraulic Transients**, Van Norstrand Reinhold Company, 1979.
- [2] Baliño, J., Carrica, P. and Larreteguy, A., **Transitorios de ondas de presión en el sistema de alimentación de los generadores de vapor de la CNA1**, IX Brazilian Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics, Caixambu, Brasil, 1993 (in spanish).
- [3] Gandini, A., **Generalized Perturbation Theory for Nonlinear Systems from the Importance Conservation Principle**, Nucl. Sci. Eng., vol. 77, p. 316, 1981.
- [4] Gandini, A., **Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach**, Advances in Nuclear Science and Technology, vol. 19, p. 205, 1987.
- [5] Oblow, E. M., **Sensitivity Theory from a Differential Viewpoint**, Nucl. Sci. Eng., vol. 59, p. 187, 1976.
- [6] Oblow, E. M., **Sensitivity Theory for Reactor Thermal-Hydraulics Problems**, Nucl. Sci. Eng., vol. 68, p. 322, 1978.
- [7] Andrade Lima, F. R., **Aplicações de Métodos Perturbativos ao Modelo Mult-Canal COBRA IV-1 para Cálculos de Sensibilidade em Núcleos de Reatores Nucleares**, Doctoral Thesis, COPPE/UFRJ, Brasil, 1990 (in portuguese).
- [8] Baliño, J. L., Larreteguy, A. E., Lorenzo, A. & Andrade Lima, F. R., **Application of Perturbation Methods and Sensitivity Analysis to Waterhammer Problems in Hydraulic Networks**, X Meeting on Reactor Physics and Thermal Hydraulics, Brazil, (1995).
- [9] Larreteguy, A., Carrica, P., Baliño, J. and Santa Ana, P., **WHAT (Water Hammer Analysis in Tubes): descripción y manual de uso del programa**, Informe Técnico CNEA-CAB 3509, 1993 (in spanish).
- [10] White, F. W., **Fluid Mechanics**, Mc Graw-Hill Book Company, 1979.
- [11] Parmakian, J., **Waterhammer Analysis**, Dover Publications Inc., 1963.

8. BIBLIOGRAFIA

- 1.- ANDRADE LIMA, F. R. & DA SILVA, F. C. , "Teoría de Perturbacao Generalizada Aplicada a Termohidráulia de Reatores", PEN-125, Programa de Engenharia Nuclear-COPP/UFRJ, 1984, Brasil.
- 2.- ANDRADE LIMA, F. R. , DA SILVA, F. C. & Otros, "Cálculo de Sensibilidade da Temperatura do Refrigerante em Relacao aos Parâmetros Termohidráulicos", PEN-130, Programa de Engenharia Nuclear-COPP/UFRJ, 1985, Brasil.
- 3.- ANDRADE LIMA, F. R., "Aplicacoes de Métodos Perturbativos ao Modelo Multi-Canal COBRA IV-1 para Cálculos de Sensibilidade em Núcleos de Reatores Nucleares", Tesis Doctoral,-COPP/UFRJ, 1990, Brasil.
- 4.- ANDRADE LIMA, F. R. & BLANCO A., "Introducción a los Métodos Perturbativos Aplicados a Problemas de Ingeniería Nuclear", Carrera de Ingeniería Nuclear, Apuntes de Materia Optativa, Instituto Balseiro, 1984, Argentina.
5. BALIÑO, J., CARRICA, P. & LARRETEGUY, A., "Transitorios de Ondas de Presión en el Sistema de Alimentación de los generadores de vapor de la CNA1", IX Brazilian Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics", 1993, Brasil.
6. BALIÑO, J., LARRETEGUY, A., LORENZO, A., & ANDRADE LIMA, F. R. "Application of Perturbation Methods and Sensitivity Analysis to Waterhammer Problems in Hydraulic Networks", X Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics, 1995, Brazil.
7. BALIÑO, J., LARRETEGUY, A. & GALLARDO, A., "The Importance Function in Waterhammer Problems", XI Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics, 1997, Brazil.

- 8.- CACUCI, D. G., OBLOW, E. M., MARABLE, J. H. & WEBER, C. F., "Sensitivity Theory for General Systems of Nonlinear Equations", Nuclear Science and Engineering, vol. 75, 1980, U.S.A.
- 9.- CHAUDHRY, M. H., "Applied Hydraulic transients", Edit. Van Norstrand Reinhold Company, 1979, U.S.A.
- 10.- GANDINI, A., "A Generalized Perturbation Method for Bilinear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes", Journal Nuclear Energy, vol. 21, 1967, U.S.A.
- 11.- GANDINI, A., "Generalized Perturbation Theory for Nonlinear Systems from the Importance Conservation Principle", Journal Nuclear Energy, vol. 77, 1981, U.S.A.
- 12.- GANDINI, A., "A Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach", Advances in Nuclear Science and Technology, vol. 19, 1987, U.S.A.
- 13.- KOHN, H., "Falla Abierta de la Válvula de Seguridad RR22S16", Informe de Trabajo CNEA 1070/1991, Argentina.
- 14.- LARRETEGUY, A., CARRICA, P. & BALIÑO, J., "WHAT (Water Hammer Analysis in Tubes) : Descripción y Manual de Uso del Programa", Informe Técnico CNEA-CAB 3509, Argentina.
- 15.- LORENZO, A., "Aplicacion del Método Perturbativo Diferencial Para el Análisis de Sensibilidad en Problemas de Propagación de Ondas de Presión en Redes Hidráulicas", Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Universidad de Buenos Aires, 1995, Argentina.
- 16.- OBLOW, E. M., "Sensitivity Theory from a Differential Viewwpoint", Nuclear Science and Engineering, vol. 59, 1976, U.S.A.
- 17.- OBLOW, E. M., "Sensitivity Theory for Reactor Thermal-Hydraulics Problems", Nuclear Science and Engineering, vol. 68, 1978, U.S.A.

18.- PARMAKIAN, J., "Waterhammer Analysis", Edit. Dover Publications, Inc., 1963, New York, U.S.A.

19.- SAATY, T. L., "Modern Nonlinear Equations", Edit. MacGraw Hill Book Company, 1967, New York, U.S.A.

20.- STREETER, V. L., "Mecánica de los fluidos", Edit. McGraw Hill, 1971, Bogota, Colombia.

21.- STREETER, V. L., "Mecánica de los fluidos", Edit. McGraw Hill, 1995, Bogota, Colombia.

22.- WHITE, F. M., "Fluid Mechanics", Mcgraw Hill Publishing Company, 1979, New York, U.S.A.

8. BIBLIOGRAFIA

- 1.- ANDRADE LIMA, F. R. & DA SILVA, F. C. , "Teoría de Perturbacao Generalizada Aplicada a Termohidráulia de Reatores", PEN-125, Programa de Engenharia Nuclear-COPP/UFRJ, 1984, Brasil.
- 2.- ANDRADE LIMA, F. R. , DA SILVA, F. C. & Otros, "Cálculo de Sensibilidade da Temperatura do Refrigerante em Relacao aos Parámetros Termohidráulicos", PEN-130, Programa de Engenharia Nuclear-COPP/UFRJ, 1985, Brasil.
- 3.- ANDRADE LIMA, F. R., "Aplicacoes de Métodos Perturbativos ao Modelo Multi-Canal COBRA IV-1 para Cálculos de Sensibilidade em Núcleos de Reatores Nucleares", Tesis Doctoral,-COPP/UFRJ, 1990, Brasil.
- 4.- ANDRADE LIMA, F. R. & BLANCO A., "Introducción a los Métodos Perturbativos Aplicados a Problemas de Ingeniería Nuclear", Carrera de Ingeniería Nuclear, Apuntes de Materia Optativa, Instituto Balseiro, 1984, Argentina.
5. BALIÑO, J., CARRICA, P. & LARRETEGUY, A., "Transitorios de Ondas de Presión en el Sistema de Alimentación de los generadores de vapor de la CNA1", IX Brazilian Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics", 1993, Brasil.
6. BALIÑO, J., LARRETEGUY, A., LORENZO, A., & ANDRADE LIMA, F. R. "Application of Perturbation Methods and Sensitivity Analysis to Waterhammer Problems in Hydraulic Networks", X Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics, 1995, Brazil.
7. BALIÑO, J., LARRETEGUY, A. & GALLARDO, A., "The Importance Function in Waterhammer Problems", XI Meeting on Reactor Physics and Thermal-hydraulics, 1997, Brazil.

- 8.- CACUCI, D. G., OBLow, E. M., MARABLE, J. H. & WEBER, C. F., "Sensitivity Theory for General Systems of Nonlinear Equations", Nuclear Science and Engineering, vol. 75, 1980, U.S.A.
- 9.- CHAUDHRY, M. H., "Applied Hydraulic transients", Edit. Van Norstrand Reinhold Company, 1979, U.S.A.
- 10.- GANDINI, A., "A Generalized Perturbation Method for Bilinear Functionals of the Real and Adjoint Neutron Fluxes", Journal Nuclear Energy, vol. 21, 1967, U.S.A.
- 11.- GANDINI, A., "Generalized Perturbation Theory for Nonlinear Systems from the Importance Conservation Principle", Journal Nuclear Energy, vol. 77, 1981, U.S.A.
- 12.- GANDINI, A., "A Generalized Perturbation Theory (GPT) Methods. A Heuristic Approach", Advances in Nuclear Science and Technology, vol. 19, 1987, U.S.A.
- 13.- KOHN, H., "Falla Abierta de la Válvula de Seguridad RR22S16", Informe de Trabajo CNEA 1070/1991, Argentina.
- 14.- LARRETEGUY, A., CARRICA, P. & BALIÑO, J., "WHAT (Water Hammer Analysis in Tubes) : Descripción y Manual de Uso del Programa", Informe Técnico CNEA-CAB 3509, Argentina.
- 15.- LORENZO, A., "Aplicacion del Método Perturbativo Diferencial Para el Análisis de Sensibilidad en Problemas de Propagación de Ondas de Presión en Redes Hidráulicas", Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Universidad de Buenos Aires, 1995, Argentina.
- 16.- OBLow, E. M., "Sensitivity Theory from a Differential Viewwpoint", Nuclear Science and Engineering, vol. 59, 1976, U.S.A.
- 17.- OBLow, E. M., "Sensitivity Theory for Reactor Thermal-Hydraulics Problems", Nuclear Science and Engineering, vol. 68, 1978, U.S.A.

- 18.- PARMAKIAN, J., "Waterhammer Analysis", Edit. Dover Publications, Inc., 1963, New York, U.S.A.
- 19.- SAATY, T. L., "Modern Nonlinear Equations", Edit. MacGraw Hill Book Company, 1967, New York, U.S.A.
- 20.- STREETER, V. L., "Mecánica de los fluidos", Edit. McGraw Hill, 1971, Bogota, Colombia.
- 21.- STREETER, V. L., "Mecánica de los fluidos", Edit. McGraw Hill, 1995, Bogota, Colombia.
- 22.- WHITE, F. M., "Fluid Mechanics", Mcgraw Hill Publishing Company, 1979, New York, U.S.A.