UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POSGRADO Y SEGUNDA ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

Tésis para Optar el Grado de Maestro en Ciencias con Mención en Matemática Aplicada

TITULO

Solución de una Ecuación Polinomial Matricial por el Método de Newton

Por

Julio César Barraza Bernaola

Asesor

Msc. William Carlos Echegaray Castillo

Lima-Perú

2012

Tabla de Contenido

Dedicatoria

El presente trabajo se la dedico a mi familia por todo el apoyo y las palabras de aliento. A mi madre, que Dios la tenga en su gloria, por sus enseñanzas y amor. A mi padre por brindarme los recursos para obtener una carrera y aconsejarme siempre. A mi esposa por estar a mi lado apoyándome siempre para cumplir mis objetivos.

Agradecimientos

Mi más sincero agradecimiento al Profesor Asesor Magister William Carlos Echegaray Castillo, al Ing. Leonardo Flores Gonzalez por su apoyo y colaboración en los problemas de vibraciones que aparecen en el campo de la ingeniería Civil.

Resumen

Sea $P(X) = X^m + A_1X^{m-1} + \cdots + A_{m-1}X + A_m$, un polinomio matricial con A_i, X matrices complejas de orden $n \times n$ $(i = 1, \cdots, m)$.

En el presente trabajo de tesis implementaremos el método de Newton basado en la descomposición de Schur y la derivada de Fréchet para la resolución númerica de la ecuación polinomial matricial $P(X) = 0$, se da un teorema de existencia de la solvente de dicha ecuación y se prueba la convergencia del método cuando el punto inicial es próximo a una solvente simple. Presentamos un algoritmo y el programa que lo implementa, finalmente utilizaremos el método propuesto para resolver un problema donde se presenta este tipo de ecuaciones

Abstract

Let $P(X) = X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1}X + A_m$, a polynomial matrix with A_i, X of complex matrices $n \times n$ $(i = 1, \cdots, m)$.

This thesis will implement the Newton method based on the decomposition Schur and the derivative of Fréchet for the numerical resolution of equation polynomial matrix $P(X) = 0$, we give an existence theorem that the solvent equation and proves the convergence of especially when the point initial is close to a simple solvent. We present an algorithm and program that implements it, finally we use the method proposed to resolve an issue where this type of equations.

Notación

Introducción

En el presente trabajo estudiamos las ecuaciones polinomiales matriciales del tipo:

$$P(X) = A_0X^m + A_1X^{m-1} + \cdots + A_{m-1}X + A_m = 0$$

donde $A_0, A_1, \cdots, A_m, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

Este tipo de ecuaciones polinomiales aparece en la teoría de sistemas de ecuaciones diferenciales, en el análisis dinámico de vibraciones [10], el estudio de los procesos casi aleatorio de nacimiento-muerte [8], en el problema con ruidos de Wiener-Hopf de las cadenas de Markov [3].

En el capítulo (1) y (2) introducimos los conceptos del producto de Kronecker y la descomposición de Schur, así como la derivada deFrechet en la cuál está basado el algoritmo del método de Newton para el cálculo de la solución de las ecuaciones polinomiales matriciales.

En el capítulo (3) desarrollamos la teoria de los polinomios matriciales y su relación con las ecuaciones matriciales del tipo

$$P(\lambda) = A_0\lambda^m + A_1\lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\lambda + A_m = 0$$

en la cuál se basa la aplicación que presentamos en la última parte de este trabajo

En el capítulo (4) desarrollamos el Método de Newton para encontrar una solución de la ecuación polinomial matricial y hacemos el estudio de su convergencia.

En el capítulo (5) se presenta un aporte del método propuesto para hallar el periodo de vibración de un edificio simple.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Producto de Kronecker

Una noción que es bastante usado en el estudio de matrices y otras aplicaciones, es el producto Kronecker, producto directo ó producto tensor de matrices. Este producto es definido para dos matrices de tamaños arbitrarios sobre cualquier anillo. Estamos interesados en matrices sobre el campo de los escalares $F = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

Definición 1.1 ([1]). *Sea la matriz $A \in F^{m\times n}$ se define el operador vec como*

$$vecA = \begin{pmatrix} \operatorname{col}_1 A \\ \vdots \\ \operatorname{col}_n A \end{pmatrix}$$

que pertenece a F^{nm}

Notamos que $vecA$ es un vector columna de tamaño nm obtenido por el apilamiento de las columnas de la matriz A

Proposición 1.1 ([1]). *Sea $A \in F^{m\times n}$ y $B \in F^{n\times m}$. Entonces,*

$$Traz\,(AB) = \left(vecA^T\right)^T vecB = \left(vecB^T\right)^T vecA$$

Prueba. De la definición de traza se tiene que

$$\begin{aligned} Traz\,(AB) &= \sum_{i=1}^{n} fil_i\,(A) \operatorname{col}_i(B) \\ Traz\,(AB) &= \sum_{i=1}^{n} \left[\operatorname{col}_i\left(A^T\right)\right]^T \operatorname{col}_i(B) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Traz\,(AB) &= \left[\mathrm{col}_1\left(A^T\right)\cdots\mathrm{col}_n\left(A^T\right)\right]\begin{bmatrix}\mathrm{col}_1\,(B)\\ \vdots\\ \mathrm{col}_n\,(B)\end{bmatrix}\\
Traz\,(AB) &= \left(vecA^T\right)^T vecB \qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

Proposición 1.2 ([1])**.** *Sea $A, B \in F^{m\times n}$. Entonces,*

$$vec\,(A+B) = vecA + vecB$$

Prueba. De la definición

$$\begin{aligned}
vec\,(A+B) &= \begin{pmatrix}\mathrm{col}_1\,(A+B)\\ \vdots\\ \mathrm{col}_n\,(A+B)\end{pmatrix}\\
vec\,(A+B) &= \begin{pmatrix}\mathrm{col}_1\,A+\mathrm{col}_1\,B\\ \vdots\\ \mathrm{col}_n\,A+\mathrm{col}_1\,B\end{pmatrix}\\
vec\,(A+B) &= \begin{pmatrix}\mathrm{col}_1\,A\\ \vdots\\ \mathrm{col}_n\,A\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\mathrm{col}_1\,B\\ \vdots\\ \mathrm{col}_1\,B\end{pmatrix}\\
vec\,(A+B) &= vecA + vecB \qquad\blacksquare
\end{aligned}$$

Ahora definiremos el producto Kronecker

Definición 1.2. *Sea $A \in F^{n\times m}$ y $B \in F^{l\times k}$. Entonces, el producto Kronecker es denotado por $A\otimes B$ y es definido por la matriz por bloques*

$$A\otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B\end{bmatrix}$$

a menudo denotaremos $A\otimes B = (a_{ij}B)$

A diferencia del producto de matrices, el producto Kronecker $A\otimes B$ no restringe acerca del tamaño de la matriz A o de la matriz B.

Observación 1.1. *En general $A\otimes B \neq B\otimes A$*

Proposición 1.3 ([1]). *Sea* $A, B \in F^{n\times m}$ *y* $C \in F^{l\times k}$. *Entonces*

$$\begin{aligned} (A+B)\otimes C &= A\otimes B + B\otimes C \\ C\otimes(A+B) &= C\otimes A + C\otimes B \end{aligned}$$

Prueba. De la definición

$$\begin{aligned} (A+B)\otimes C &= ((a_{ij}+b_{ij})\,C) \\ (A+B)\otimes C &= (a_{ij}C + b_{ij}C) \\ (A+B)\otimes C &= (a_{ij}C) + (b_{ij}C) \\ (A+B)\otimes C &= A\otimes B + B\otimes C \end{aligned}$$

de manera análoga se prueba $C\otimes(A+B) = C\otimes A + C\otimes B$ ■

Proposición 1.4 ([1]). *Sea* $A \in F^{n\times m}$,$B \in F^{l\times k}$ *y* $C \in F^{p\times q}$. *Entonces*

$$A\otimes(B\otimes C) = (A\otimes B)\otimes C$$

Prueba. De la definición

$$B\otimes C = \begin{bmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots & b_{1k}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{l1}C & b_{l2}C & \cdots & b_{lk}C \end{bmatrix}$$

luego $t\,(B\otimes C)$ viene dado por

$$\begin{aligned} t\,(B\otimes C) &= \begin{bmatrix} tb_{11}C & tb_{12}C & \cdots & tb_{1k}C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ tb_{l1}C & tb_{l2}C & \cdots & tb_{lk}C \end{bmatrix} \\ t\,(B\otimes C) &= (tB)\otimes C \end{aligned} \tag{1.1}$$

tambien tenemos que

$$A\otimes(B\otimes C) = \begin{bmatrix} a_{11}(B\otimes C) & a_{12}(B\otimes C) & \cdots & a_{1m}(B\otimes C) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(B\otimes C) & a_{n2}(B\otimes C) & \cdots & a_{nm}(B\otimes C) \end{bmatrix}$$

usando la ecuación (1.1)

$$
\begin{aligned}
A \otimes (B \otimes C) &= \begin{bmatrix} (a_{11}B) \otimes C & (a_{12}B) \otimes C & \cdots & (a_{1m}B) \otimes C \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_{n1}B) \otimes C & (a_{n2}B) \otimes C & \cdots & (a_{nm}B) \otimes C \end{bmatrix} \\
A \otimes (B \otimes C) &= \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nm}B \end{bmatrix} \otimes C \\
A \otimes (B \otimes C) &= (A \otimes B) \otimes C
\end{aligned}
$$

■

Proposición 1.5 ([1]). *Sea* $A \in F^{n\times m}$,$B \in F^{l\times k}$ *y* $C \in F^{m\times q}$, *y* $D \in F^{k\times p}$. *Entonces*

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

Prueba. De la definición, tenemos

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = \begin{pmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1m}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nm}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}D & \cdots & c_{1p}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}D & \cdots & c_{mp}D \end{pmatrix}$$

entonces el bloque ij de la matriz $(A \otimes B)(C \otimes D)$ es

$$
\begin{aligned}
((A \otimes B)(C \otimes D))_{ij} &= \begin{bmatrix} a_{i1}B & \cdots & a_{im}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{1j}D \\ \vdots \\ c_{mj}D \end{bmatrix} \\
((A \otimes B)(C \otimes D))_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} a_{ik}Bc_{kj}D = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}BD \\
((A \otimes B)(C \otimes D))_{ij} &= \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}c_{kj}\right) BD = (AC)_{ij}\, BD \\
((A \otimes B)(C \otimes D))_{ij} &= AC \otimes BD
\end{aligned}
$$

lo cual prueba este teorema. ■

Proposición 1.6. *Si* $A \in F^{n\times n}$ *y* $B \in F^{m\times m}$ *son matrices no singulares. Entonces*

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

Prueba. Usando la proposición (1.5) tenemos

$$\begin{aligned}(A\otimes B)\left(A^{-1}\otimes B^{-1}\right) &= \left(AA^{-1}\right)\otimes\left(BB^{-1}\right)\\ (A\otimes B)\left(A^{-1}\otimes B^{-1}\right) &= I\otimes I = I\end{aligned}$$

■

Proposición 1.7 ([1]). *Sea $x\in F^{n\times 1}$ y $y\in F^{m\times 1}$. Entonces*

$$xy^T = x\otimes y^T = y^T\otimes x$$

y

$$vec\left(xy^T\right) = y\otimes x \tag{1.2}$$

Prueba. Sea $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$, $y=(y_1,y_2,\cdots,y_m)^T$
entonces

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_m\\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_m\\ \vdots & & & \vdots\\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_m\end{pmatrix} \tag{1.3}$$

$$xy^T = \begin{pmatrix} x_1y^T\\ x_2y^T\\ \vdots\\ x_ny^T\end{pmatrix} = x\otimes y^T$$

tambien de (1.3)

$$xy^T = \begin{pmatrix} y_1x & y_2x & \cdots & y_mx\end{pmatrix} = y^T\otimes x$$

aplicando la función vec a la última ecuación

$$vec\left(xy^T\right) = \begin{pmatrix} y_1x\\ y_2x\\ \vdots\\ y_mx\end{pmatrix} = y\otimes x$$

■

Proposición 1.8 ([1]). *Sea $A\in F^{n\times m}$,$B\in F^{m\times l}$ y $C\in F^{l\times k}$. Entonces*

$$vec\,(ABC) = \left(C^T\otimes A\right) vecB$$

Prueba. Considerando $e_i\in\mathbb{R}^{l\times 1}$ con 1 en la $i-\acute{e}sima$ componente y ceros en los demas entonces

$$\operatorname{col}_i B e_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \operatorname{col}_i B & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ de orden } m \times l$$

luego

$$B = \sum_{i=1}^{l} \operatorname{col}_i B e_i^T \tag{1.4}$$

por lo que

$$\begin{aligned} ABC &= A\left(\sum_{i=1}^{l} \operatorname{col}_i B e_i^T\right) C = \left(\sum_{i=1}^{l} A \operatorname{col}_i B e_i^T\right) C \\ ABC &= \sum_{i=1}^{l} A \operatorname{col}_i B e_i^T C \end{aligned}$$

aplicando la función vec tenemos

$$vec\,(ABC) = vec\left(\sum_{i=1}^{l} A \operatorname{col}_i B e_i^T C\right)$$

de la proposición (1.2) tenemos

$$\begin{aligned} vec\,(ABC) &= \sum_{i=1}^{l} vec\left(A \operatorname{col}_i B e_i^T C\right) \\ vec\,(ABC) &= \sum_{i=1}^{l} vec\left(A \operatorname{col}_i B \left(C^T e_i\right)^T\right) \end{aligned}$$

usando la ecuación (1.2)

$$vec\,(ABC) = \sum_{i=1}^{l} \left(C^T e_i\right) \otimes \left(A \operatorname{col}_i B\right)$$

usando la proposición (1.5) tenemos

$$\begin{aligned} vec\,(ABC) &= \sum_{i=1}^{l} \left(C^T \otimes A\right)\left(e_i \otimes \operatorname{col}_i B\right) \\ vec\,(ABC) &= \left(C^T \otimes A\right) \sum_{i=1}^{l} \left(e_i \otimes \operatorname{col}_i B\right) \end{aligned}$$

de (1.2)

$$
\begin{aligned}
vec\,(ABC) &= \left(C^T \otimes A\right) \sum_{i=1}^{l} vec\left(\mathrm{col}_i\, Be_i^T\right) \\
vec\,(ABC) &= \left(C^T \otimes A\right) vec \sum_{i=1}^{l} \mathrm{col}_i\, Be_i^T
\end{aligned}
$$

usando la ecuación (1.4) concluimos que

$$
vec\,(ABC) = \left(C^T \otimes A\right) vecB \qquad \blacksquare
$$

1.2 Diagonalización Por Transformaciones Similares

Escoger o cambiar a un sistema de coordenadas mas apropiado es siempre deseable en el algebra lineal. Para un operador lineal L sobre un espacio de dimensión finita V, el objetivo es encontrar una base $\mathcal{B}$ de V tal que la representación de L con respecto de la base $\mathcal{B}$ sea tan simple como sea posible.

Definición 1.3 ([14]). *Dos matrices A y B de orden $n \times n$, se dice que son similares siempre que exista una matriz no-singular P tal que $P^{-1}AP = B$*

El problema fundamental es dada una matriz A, reducirla a la forma mas simple posible por medio de una transformación de similaridad.

1.2.1 Descomposición de Schur

La descomposición de Schur usa una transformación de similaridad unitaria para transformar una matriz cuadrada arbitraria en una matriz triangular superior

Definición 1.4 ([13]). *Sea A una matriz de orden $m \times n$. La transpuesta de la matriz A es una matriz de orden $n \times m$*

$$
A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}
$$

la conjugada transpuesta de A es la matriz

$$A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} & \cdots & \bar{a}_{m1} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} & \cdots & \bar{a}_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1n} & \bar{a}_{2n} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix}$$

Definición 1.5 ([13]). *Sea $u_1, u_2, \cdots, u_k \in \mathbb{C}^n$. entonces los vectores u_i son ortonormales si*

$$u_i^* u_j = \begin{cases} 0 & si\ i \neq j \\ 1 & si\ i = j \end{cases}$$

equivalentemente si $U = [u_1\ u_2\ \cdots\ u_k]$ entonces

$$U^*U = I_k$$

donde I_k es la matriz identidad de orden $k \times k$. A la matriz U se le llama matriz ortonormal.

Definición 1.6 ([14]). *Sea A una matriz de orden $n \times n$ y sea U una matriz no-singular de orden $n \times n$. Entonces las matrices A y $B = U^{-1}AU$ se dicen que son similares. También decimos que B es obtenido por una transformación de similardad.*

Teorema 1.9 ([14]). *Sea A una matriz de orden n y $B = U^{-1}AU$ similar a A. Entonces los valores propios de A y B son los mismos y tienen las mismas multiplicidades. Si λ, x son un valor propio y vector propio correspondiente de A, entonces λ, $U^{-1}x$ son el valor propio y vector propio correspondiente de B.*

Prueba. Tenemos que $\det(U^{-1})\det(U) = \det(U^{-1}U) = \det(I) = 1$, luego

$$\begin{aligned} \det(\lambda I - A) &= \det\left(U^{-1}\right)\det(\lambda I - A)\det(U) \\ \det(\lambda I - A) &= \det\left(\lambda I - U^{-1}AU\right) \\ \det(\lambda I - A) &= \det(\lambda I - B) \end{aligned}$$

Esto es, A y B tienen el mismo polinomio característico, y por tanto tienen los mismos valores propios y las mismas multiplicidades.

Si λ, x son un valor propio y vector propio correspondiente de A, entonces

$$\begin{aligned} B\left(U^{-1}x\right) &= \left(U^{-1}AU\right)\left(U^{-1}x\right) \\ B\left(U^{-1}x\right) &= U^{-1}Ax = U^{-1}\lambda x \\ B\left(U^{-1}x\right) &= \lambda\left(U^{-1}x\right) \end{aligned}$$

así, de este modo $\lambda, U^{-1}x$ son el valor propio y vector propio correspondiente de B. ■

Teorema 1.10 ([14]). *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz triangular superior $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = UBU^* \tag{1.5}$$

y los elementos de la diagonal de B son los valores propios de A

Prueba. Sea $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ un ordenamiento de los valores propios de A. Sea x_1 el vector propio correspondiente normalizado, esto es $x^*x = 1$. Podemos extender a una base de $\mathbb{C}^n$, y aplicando el proceso de Gram-Schmidt, obtener una matriz unitaria $X = (x_1 \; X_2)$. Entonces

$$\begin{aligned}
X^*AX &= \begin{pmatrix} x_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x_1 & X_2 \end{pmatrix} \\
X^*AX &= \begin{pmatrix} x_1^* \\ X_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax_1 & AX_2 \end{pmatrix} \\
X^*AX &= \begin{pmatrix} x_1^*Ax_1 & x_1^*AX_2 \\ X_2^*Ax_1 & X_2^*AX_2 \end{pmatrix} \\
X^*AX &= \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^*x_1 & x_1^*AX_2 \\ \lambda_1 X_2^*x_1 & X_2^*AX_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Dado que la matriz X es unitaria entonces $x_1^*x_1 = 1$ y $X_2^*x_1 = 0$, vector nulo de orden $(n-1)\times 1$. Luego

$$X^*AX = \begin{pmatrix} \lambda_1 & x_1^*AX_2 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

Por tanto los valores propios de A_1 son $\lambda_2, \cdots, \lambda_n$, aplicando el mismo proceso a la matriz $A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)}$, podemos obtener una matriz unitaria U_2 tal que

$$U_2^*A_1U = \begin{pmatrix} \lambda_2 & * \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

y haciendo

$$V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}$$

tenemos que V_2 es unitaria puesto que

$$V_2^*V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^*U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix} = I_n$$

también XV_2 es unitaria, puesto que

$$\begin{aligned}(XV_2)^* XV_2 &= V_2^* X^* XV_2 \\ (XV_2)^* XV_2 &= I\end{aligned}$$

por lo que $V_2^* X^* AXV_2$ es de la forma

$$V_2^* X^* AXV_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \\ 0 & \lambda_2 & * \\ & 0 & A_3 \end{pmatrix}$$

Continuando con la reduccón obtenemos matrices unitarias $V_3, V_4, \cdots, V_{n-1}$ donde

$$U = XV_2V_3, \cdots, V_{n-1}$$

es la matriz unitaria buscada y

$$B = UAU^*$$

■

Una versión estrictamente real del teorema (1.10) es enunciado en el siguiente teorema

Teorema 1.11 ([14]). *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, existe una matriz ortogonal $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que*

$$Q^T AQ = \begin{pmatrix} A_1 & & & * \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & 0 & & A_k \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}, 1 \leq k \leq n$$

donde cada A_i es una matriz real 1×1, o una matriz real 2×2 con un par de valores propios complejos conjugados.

Prueba. Supongamos que la matriz A tiene un valor propio $\lambda \in \mathbb{C}$, y su vector propio correspondiente $x \in \mathbb{C}^n$, por tanto $\bar{\lambda}$ y $\bar{x}$ son también valor y vector propio correspondiente de A, puesto que $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Sea $\lambda = \alpha + i\beta, \quad x = u + iv$. Entonces

$$u = \frac{x+\bar{x}}{2}, \qquad vi = \frac{x-\bar{x}}{2} \tag{1.6}$$

$$\alpha = \frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}, \qquad \beta i = \frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2} \tag{1.7}$$

luego

$$\begin{aligned}
Au &= A\left(\frac{x+\bar{x}}{2}\right) = A\left(\frac{x}{2}\right) + A\left(\frac{\bar{x}}{2}\right)\\
Au &= \frac{\lambda x}{2} + \frac{\bar{\lambda}\bar{x}}{2} = \frac{\lambda}{2}(u+iv) + \frac{\bar{\lambda}}{2}(u-iv)\\
Au &= u\left(\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}\right) + iv\left(\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2}\right)\\
Au &= \alpha u - \beta v \quad \text{(de 1.7)}
\end{aligned}$$

también

$$\begin{aligned}
A(vi) &= A\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right)\\
A(vi) &= \left(\frac{\lambda x}{2} - \frac{\bar{\lambda}\bar{x}}{2}\right)\\
A(vi) &= \frac{\lambda}{2}(u+iv) - \frac{\bar{\lambda}}{2}(u-iv)\\
A(vi) &= u\left(\frac{\lambda-\bar{\lambda}}{2}\right) + iv\left(\frac{\lambda+\bar{\lambda}}{2}\right)\\
A(vi) &= u\beta i + iv\alpha \quad (de\ 1.7)
\end{aligned}$$

de donde $Av = u\beta + v\alpha$. Tenemos entonces

$$\begin{aligned}
Au &= \alpha u - \beta v\\
Av &= u\beta + v\alpha
\end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned}
A\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Au & Av \end{pmatrix}\\
A\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \alpha u - \beta v & \beta u + \alpha v \end{pmatrix}\\
A\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} L
\end{aligned}$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

notamos que los valores propios de L son $\lambda = \alpha + i\beta$ y $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ ■

Capítulo 2

Cálculo Diferencial en Espacios Vectoriales Normados

2.1 Diferenciabilidad de Funcionales

En este capítulo, trataremos la generalización de los conceptos de diferenciales, gradientes, para espacios normados, se introduce el diferencial de Gateaux de una transformación de un espacio vectorial a un espacio vectorial normado.

2.1.1 Diferencial de Gateaux

Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T : D \to R$ una transformación definido sobre un dominio $D \subset X$ con rango $R \subset Y$.

Definición 2.1 ([7]). *Si T es una transformación de D hacia R, $x \in D \subset X$ y sea $h \in X$ un elemento arbitrario, el diferencial de Gateaux $D_G T$ de T en x en la dirección $h \in X$ se define como*

$$D_G T\left(x, h\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{T\left(x + \epsilon h\right) - T\left(x\right)}{\epsilon} \tag{2.1}$$

cuando el límite existe.

La existencia de la derivada Gateaux requiere la existencia de la diferencial de Gateaux. Pero también requiere que la derivada defina un operador que sea lineal y acotada en la dirección que se toma la derivada.

Definición 2.2 ([7]). *Sea $T : X \to Y$ una transformación de un espacio vectorial X hacia un espacio vectorial normado Y. Una función $D_G T : X \times X \to Y$ es la derivada Gateaux en $x \in X$ y en la dirección $y \in X$ si*

1. *El diferencial de Gateaux*

$$D_G T\left(x,h\right) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{T\left(x+\epsilon h\right) - T\left(x\right)}{\epsilon}$$

existe para todo $h \in X$

2. $D_G T\left(x,\cdot\right)$ *es lineal, y*

3. *La transformación* $D_G T\left(x,\cdot\right)$ *es acotada*

La transformación T que usamos en el presente trabajo, actua desde un espacio vectorial normado X hacia un espacio vectorial normado Y

$$T : X \to Y$$

y el diferencial de Gateaux $D_G T\left(\cdot,\cdot\right)$ transforma

$$D_G T\left(\cdot,\cdot\right) : X \times X \to Y$$

para cualquier $x \in X$, la transformación

$$D_G T\left(x,\cdot\right) : X \to Y$$

es lineal y acotado. Frecuentemente usaremos la notación

$$D_G T\left(x,\cdot\right) \in \mathcal{L}\left(X,Y\right)$$

Ejemplo 2.1. *Se da* $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}$ *y* $f : X \to Y$, *si* $f\left(x\right) = f\left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right)$ *con* $x = \left(x_1, x_2, \cdots, x_n\right) \in X$ *es una funcional sobre* $\mathbb{R}^n$ *que tiene derivadas parciales continuas con respecto a cada variable* x_i.

Entonces

$$\begin{aligned} D_G f\left(x,h\right) &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f\left(x+\epsilon h\right) - f\left(x\right)}{\epsilon} \\ D_G f\left(x,h\right) &= \nabla f\left(x\right) \cdot h \end{aligned}$$

por lo tanto la diferencial de Gateaux de f *es*

$$D_G f\left(x,h\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f\left(x\right)}{\partial x_i} h_i$$

2.1.2 Diferencial de Fréchet

El diferencial de Gateaux generaliza el concepto de derivada direccional de las funciones reales en un espacio finito-dimensional. La existencia del diferencial de Gateaux es un requerimento bastante débil dado que el diferencial de Gateaux puede existir y la derivada de Gateaux no, mientras que para que exista la derivada de Gateaux tiene que existir el diferencial de Gateaux, además el producto de dos funciones diferenciables Gateaux no necesariamente es diferenciable Gateaux , sin embargo, debido a que su definición no requiere de ninguna norma sobre X, es por lo que las propiedades del diferencial de Gateaux no son fácilmente relacionados con la continuidad. Cuando X es normado, una definición mas apropiada es dada por la diferencial de Fréchet.

Definición 2.3 ([7]). *Sea T la transformación definida sobre un dominio abierto $D \subset X$ en un espacio vectorial normado X hacia un espacio vectorial normado Y. Si para un $x \in D$ fijo y para cada $h \in X$ existe una transformación lineal y acotada A tal que*

$$\textit{para todo } \epsilon > 0 \textit{ existe } \delta > 0 \ / \ \|h\| < \delta \Longrightarrow \|T(x+h) - T(x) - Ah\| < \epsilon \|h\| \tag{2.2}$$

entonces se dice que T es diferenciable Fréchet en x y A se dice que es el diferencial Fréchet en x con incremento h.

Esta definición es equivalente a decir que

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|T(x+h) - T(x) - Ah\|}{\|h\|} = 0 \tag{2.3}$$

Proposición 2.1 ([9]). *Si la transformación T tiene una diferencial de Fréchet, esta es única.*

Prueba. Supongamos que A_1 y A_2 son dos diferenciales de Fréchet de T. Como A_1 y A_2 son lineales y acotados entonces de la definicón (2.2) se tiene que para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|T(x+h) - T(x) - A_1 h\| &< \epsilon \|h\| \\ \|T(x+h) - T(x) - A_2 h\| &< \epsilon \|h\| \end{aligned}$$

siempre que $\|h\| < \delta$

haciendo $d(h) = T(x+h) - T(x)$ tenemos

$$\begin{array}{rcl} \|A_1h - A_2h\| & = & \|d(h) - A_2h - (d(h) - A_1h)\| \\ \|A_1h - A_2h\| & \leq & \|(d(h) - A_1)\| + \|d(h) - A_2x\| \\ \|A_1h - A_2h\| & \leq & 2\epsilon \|h\| \end{array}$$

entonces

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|A_1h - A_2h\|}{\|h\|} = 0$$

Si $u \in D \subset X$, entonces $tu \to 0$, cuando $t \to 0$, donde $u \neq 0$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{\|A_1(tu) - A_2(tu)\|}{\|tu\|} = 0$$

por la linealidad de A_1 y A_2, $A_1 - A_2$ es lineal

$$\begin{array}{rcl} 0 & = & \lim_{t\to 0} \frac{\|A_1(tu) - A_2(tu)\|}{\|tu\|} \\ 0 & = & \lim_{t\to 0} \frac{\|(A_1 - A_2)(tu)\|}{\|tu\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|t(A_1 - A_2)(u)\|}{\|tu\|} \\ 0 & = & \lim_{t\to 0} \frac{|t| \|(A_1 - A_2)(u)\|}{|t| \|u\|} = \lim_{t\to 0} \frac{\|(A_1 - A_2)(u)\|}{\|u\|} \\ 0 & = & \frac{\|(A_1 - A_2)(u)\|}{\|u\|} \end{array}$$

$$\|(A_1 - A_2)(u)\| = 0$$

esto es para cualquier $u \in D \subset X$
como T es acotado entonces T es continua ver [2] pag 25, entonces

$$A_1 - A_2 = 0$$

por tanto $A_1 = A_2$. ■

Teorema 2.2 ([2])**.** *Si T es una transformación acotada en D una vecindad de x y si una transformación lineal A tiene la propiedad de la ecuación (2.3),entonces A es una transformación lineal y acotada, esto es, A es la derivada de Fréchet.*

Prueba. Como T es acotado existe un $M > 0$ tal que $\|T(x)\| \leq M$ para todo $x \in D$.

De la definición (2.2) se tiene que para $\epsilon = 1$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$\|(T(x+h) - T(x) - A(h))\| \leq \|h\|$$

entonces

$$\begin{aligned}
\|Ah\| &= \|T(x+h)-T(x)-(T(x+h)-T(x)-A(h))\| \\
\|Ah\| &\leq \|T(x+h)\|+\|T(x)\|+\|(T(x+h)-T(x)-A(h))\| \\
\|Ah\| &\leq 2M+\|h\| \leq 2M+\delta \qquad (2.4)
\end{aligned}$$

ahora para $\|u\| \leq 1$, tenemos que $\|\delta u\| \leq \delta$ entonces

$$\|A(\delta u)\| = \delta\|Au\| \leq 2M+\delta$$

luego tenemos

$$\|Au\| \leq \frac{2M+\delta}{\delta} \qquad (2.5)$$

como

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1}(\|Ax\|) \geq \|Ax\|$$

tomando el supremo en la ecuación (2.5) sobre $\|u\| \leq 1$

$$\|A\| \leq \frac{2M+\delta}{\delta}$$

esto es, A es acotada. ∎

Teorema 2.3 ([2]). *Si T es diferenciable en x, entonces es continua en x.*

Prueba. Sea $A = T'(x)$. entonces $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dado un $\epsilon > 0$, elegimos un $\delta > 0$ tal que $\delta < \frac{\epsilon}{1+\|A\|}$, de aqui tenemos

$$\|h\| < \delta \quad \text{entonces} \quad \|(T(x+h)-T(x)-A(h))\| < \|h\|$$

dado que T es diferenciable, luego

$$\begin{aligned}
\|T(x+h)-T(x)\| &= \|T(x+h)-T(x)-Ah+Ah\| \\
\|T(x+h)-T(x)\| &\leq \|T(x+h)-T(x)-Ah\|+\|Ah\| \\
\|T(x+h)-T(x)\| &\leq \|h\|+\|Ah\| \leq \|h\|+\|A\|\|h\| \\
\|T(x+h)-T(x)\| &= \|h\|(1+\|A\|) < \delta(1+\|A\|) < \epsilon
\end{aligned}$$

por tanto T es continua en x. ∎

Teorema 2.4 ([2]). *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Si cada derivada parcial $D_i f$ existe en un entorno* *de x y es continuo en x entonces $f'(x)$ existe y una fórmula para ello es*

$$f'(x)\,h = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\,h_i \qquad h = (h_1, h_2, \cdots, h_n) \in \mathbb{R}^n$$

Prueba. Sea $e_i = (0, 0, \cdots, 1, 0, \cdots 0)$ el i-ésimo vector unitario y

$$\begin{aligned} v^0 &= x \\ v^i &= v^{i-1} + h_i e_i \end{aligned}$$

de aqui tenemos que los vectores v^i y v^{i-1} difieren en una sola coordenada, entonces

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= f(v^n) - f\left(v^0\right) \\ f(x+h) - f(x) &= \sum_{i=1}^{n} \left[f\left(v^i\right) - f\left(v^{i-1}\right) \right] \end{aligned}$$

por el teorema del valor medio para funciones de una variable

$$\begin{aligned} f\left(v^i\right) - f\left(v^{i-1}\right) &= f\left(v^{i-1} + h_i e_i\right) - f\left(v^{i-1}\right) \\ f\left(v^i\right) - f\left(v^{i-1}\right) &= h_i D_i f\left(v^{i-1} + \theta_i h_i e_i\right) \end{aligned}$$

donde $0 < \theta_i < 1$, entonces

$$\begin{aligned} \|h\|^{-1} \left| f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\,h_i \right| &= \\ & \|h\|^{-1} \left| \sum_{i=1}^{n} h_i D_i f\left(v^{i-1} + \theta_i h_i e_i\right) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\,h_i \right| \\ \|h\|^{-1} \left| f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} D_i f(x)\,h_i \right| &= \\ & \|h\|^{-1} \left| \sum_{i=1}^{n} h_i \left[D_i f\left(v^{i-1} + \theta_i h_i e_i\right) - D_i f(x) \right] \right| \end{aligned}$$

usando la desigualdad triangular de Cauchy-Schwarz

$$\|h\|^{-1}\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x)h_i\right| \leq$$

$$\|h\|^{-1}\|h\|\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[D_if\left(v^{i-1}+\theta_ih_ie_i\right)-D_if(x)\right]^2}$$

$$\|h\|^{-1}\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x)h_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[D_if\left(v^{i-1}+\theta_ih_ie_i\right)-D_if(x)\right]^2}$$

$$\|h\|^{-1}\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x)h_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[D_if\left(v^{i-1}+\theta_ih_ie_i-x\right)\right]^2}$$

como

$$\left\|v^{i-1}+\theta_ih_ie_i-x\right\| = \|(h_1,\cdots,h_{i-1},\theta_ih_i,0,\cdots,0)\| \leq \|h\|$$

cuando $\|h\|\to 0$ y por la continuidad de D_if en x tenemos

$$\|h\|^{-1}\left|f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x)h_i\right| \to 0$$

por tanto

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\|h\|}\left[f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^{n}D_if(x)h_i\right]=0$$

entonces $\sum_{i=1}^{n}D_if(x)$ es la derivada de Fréchet. ■

Teorema 2.5 ([2]). *Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, y sea $f_1,f_2,\cdots,f_n$ las componentes de la función f. Si todas las derivadas parciales D_if existen en un entorno de x y son continuas en x, entonces $f'(x)$ existe, y*

$$\left(f'(x)h\right)_i=\sum_{j=1}^{n}D_jf_i(x)h_j \qquad \textit{para todo } h\in\mathbb{R}^n$$

Prueba. Sea J la matriz derivada de Fréchet en $x: J_{ij}=D_if_j(x)$
Por la definición de la norma tenemos

$$\frac{\|f(x+h)-f(x)-Jh\|^2}{\|h\|^2}=\frac{1}{\|h\|^2}\sum_{i=}^{n}\left[f_i(x+h)-f_i(x)-\sum_{j=1}^{n}D_jf_i(x)h_j\right]^2$$

ahora como

$$\frac{f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} D_j f_i(x) h_j}{\|h\|} \to 0 \quad \text{para } i = 1, \cdots, n$$

entonces

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - Jh\|^2}{\|h\|^2} \to 0$$

por tanto

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - Jh\|}{\|h\|} = 0$$

esto es J es la derivada de Fréchet de f en x

La derivada de Fréchet para una matriz de funciones $f : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ en el punto X es una transformación lineal L

$$\mathbb{C}^{n\times n} \xrightarrow{L} \mathbb{C}^{n\times n}$$

$$E \to L(X, E)$$

tal que para todo $E \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$f(X+E) - f(X) - L(X,E) = o(\|E\|) \tag{2.6}$$

que es la derivada de Fréchet en X en la dirección E
En adelante L_f denota la derivada de Frechet de la función f. ■

A continuación demostraremos dos teoremas para obtener la suma y el producto de funciones $f, g, h \in \mathbb{C}^{n\times n}$

Teorema 2.6 ([4]). *Si g y h son diferenciable Fréchet en X entonces $f = \alpha g + \beta h$ es diferenciable Fréchet y*

$$L_f(X,E) = \alpha L_g(X,E) + \beta L_h(X,E)$$

Prueba. De la ecuación (2.6)

$$\begin{aligned}
f(X+E) - f(X) &= (\alpha g + \beta h)(X+E) - (\alpha g + \beta h)(X) \\
f(X+E) - f(X) &= \alpha g(X+E) + \beta h(X+E) - \alpha g(X) - \beta h(X) \\
f(X+E) - f(X) &= \alpha (g(X+E) - g(X)) + \beta (h(X+E) - h(X)) \\
f(X+E) - f(X) &= \alpha (o(\|E\|) + L_g(X,E)) + \beta (o(\|E\|) + L_h(X,E)) \\
f(X+E) - f(X) &= \alpha o(\|E\|) + \beta o(\|E\|) + \alpha L_g(X,E) + \beta L_h(X,E)
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned} f(X+E) - f(X) - (\alpha L_g(X,E) + \beta L_h(X,E)) &= \alpha o(\|E\|) + \beta o(\|E\|) \\ &= o(\|E\|) \end{aligned}$$

por tanto existe la derivada de Fréchet y

$$L_f(X,E) = \alpha L_g(X,E) + \beta L_h(X,E) \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.7 ([4]). *Si g, h son diferenciables Fréchet en X entonces $f = gh$ es diferenciable Fréchet y*

$$L_f(X,E) = L_g(X,E)\, h(X) + g(X)\, L_h(X,E)$$

Prueba. Tenemos

$$\begin{aligned} f(X+E) &= (gh)(X+E) \\ f(X+E) &= g(X+E)\, h(X+E) \end{aligned}$$

como g y h son diferenciable Fréchet entonces

$$\begin{aligned} f(X+E) &= (g(X) + L_g(X,E) + o(\|E\|))\,(h(X) + L_h(X,E) + o(\|E\|)) \\ f(X+E) &= g(X)\,h(X) + g(X)\,L_h(X,E) + L_g(X,E)\,h(X) + o(\|E\|) \\ f(X+E) &= f(X) + g(X)\,L_h(X,E) + L_g(X,E)\,h(X) + o(\|E\|) \end{aligned}$$

por tanto

$$f(X+E) - f(X) - (g(X)\,L_h(X,E) + L_g(X,E)\,h(X)) = o(\|E\|)$$

por lo tanto f es diferenciable Fréchet y

$$L_f(X,E) = L_g(X,E)\,h(X) + g(X)\,L_h(X,E) \qquad \blacksquare$$

Proposición 2.8 ([6]). *Sea $f(X) = A_0X^m + A_1X^{m-1} + \cdots A_m$ donde $A_i, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $0 \le i \le m$. Entonces el diferencial de Fréchet viene dado por*

$$L_f(X,H) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)} \right) H X^{i-1} \right\} \tag{2.7}$$

Prueba. Lo haremos por inducción sobre m

para $m = 1$, de la ecuación (2.7)

$$L_f(X,H) = A_0 H$$

por lo tanto es verdadero

Supongamos que se cumple para $n = m$, por tanto asumimos que

$$L_f(X,H) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)} \right) H X^{i-1} \right\} \tag{2.8}$$

probaremos que es cierto para $n = m+1$. Esto es para

$$f(X) = A_0 X^{m+1} + A_1 X^m + \cdots A_m X + A_{m+1}$$

probaremos que

$$L_f(X,H) = \sum_{i=1}^{m+1} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{m+1-i} A_j X^{m+1-(j+i)} \right) H X^{i-1} \right\} \tag{2.9}$$

de la ecuación polinómica

$$\begin{aligned} f(X) &= A_0 X^{m+1} + A_1 X^m + \cdots A_m X + A_{m+1} \\ f(X) &= \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m \right) X + A_{m+1} \end{aligned}$$

usando el teorema (2.6) con $g = (A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m) X$ y $h = A_{m+1}$. Entonces

$$\begin{aligned} L_f(X,H) &= L_g(X,H) + L_h(X,H) \\ L_f(X,H) &= L_g(X,H) \end{aligned}$$

ahora sea $r = (A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m)$ y $s = X$, usando el teorema (2.7) tenemos

$$L_f(X,H) = L_r(X,H)\, s(X) + r(X)\, L_s(X,H)$$

de la ecuación (2.8)

$$L_r(X,H) = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)} \right) H X^{i-1} \right\}$$

además $L_s(X,H) = H$. entonces

$$\begin{aligned}
L_f(X,H) &= \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\} X + \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m\right) H \\
L_f(X,H) &= \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)}\right) H X^{i}\right\} + \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m\right) H
\end{aligned}$$

haciendo un cambio de índice $l = i+1$, tenemos

$$L_f(X,H) = \sum_{l=2}^{m+1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m+1-l} A_j X^{m+1-(j+l)}\right) H X^{l-1}\right\} + \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m\right) H$$

entonces

$$L_f(X,H) = \sum_{i=2}^{m+1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m+1-i} A_j X^{m+1-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\} + \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m\right) H \tag{2.10}$$

ahora de (2.9) tenemos que el primer término, esto es cuando $i = 1$, viene dado por

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{m} A_j X^{m-j} H X^0 &= \sum_{j=0}^{m} A_j X^{m-j} H \\
\sum_{j=0}^{m} A_j X^{m-j} H X^0 &= A_0 X^m H + A_1 X^{m-1} H + \cdots A_m H \\
\sum_{j=0}^{m} A_j X^{m-j} H X^0 &= \left(A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots A_m\right) H
\end{aligned}$$

entonces en la ecuación (2.10) se tiene

$$\begin{aligned}
L_f(X,H) &= \sum_{i=2}^{m+1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m+1-i} A_j X^{m+1-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\} + \sum_{j=0}^{m} A_j X^{m-j} H X^0 \\
L_f(X,H) &= \sum_{i=2}^{m+1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m+1-i} A_j X^{m+1-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\} + \sum_{j=0}^{m+1-1} A_j X^{m+1-(j+1)} H X^{1-1} \\
L_f(X,H) &= \sum_{i=1}^{m+1}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m+1-i} A_j X^{m+1-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\}
\end{aligned}$$

con lo cual queda probado la proposición. ■

Capítulo 3

Teoría de Polinomios Matriciales

En este capítulo se estudian los polinomios matriciales de la forma $P(X) = \sum_{i=0}^{m} A_i X^{m-i}$ y la ecuación $P(X) = 0$, donde $A_0, A_1, \cdots, A_m, X$ son matrices de orden $n \times n$.

Aquí se estudia algunos aspectos de la solución de la ecuación $P(X) = 0$, así como su relación con la matriz de polinomios $P(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} A_i \lambda^{m-i}$

Definición 3.1 ([11]). *Una ecuación polinomial matricial se define como sigue*

$$P(X) = A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0 \tag{3.1}$$

donde $A_0, A_1, \cdots, A_m, X \in \mathbb{C}^{n \times n}$.
Si $A_0 = I$ *donde* I *es la matriz identidad de orden* $n \times n$, *entonces diremos que* $P(X)$ *es mónico.*

Definición 3.2 ([11]). *Una matriz* S *que satisface la ecuación (3.1) es llamado una solvente, o mas precisamente solvente derecha de* $P(X)$.

En relación con el polinomio $P(X)$ tenemos el polinomio matricial

$$P(\lambda) = A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \lambda + A_m \tag{3.2}$$

el cuál nos lleva al problema de valores propios asociado a $P(\lambda)$

$$P(\lambda) v = \left(A_0 \lambda^m + A_1 \lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1} \lambda + A_m\right) v = 0 \tag{3.3}$$

Si $P(\lambda_0)$ es singular, λ_0 es llamado valor propio polinomial y el vector propio v_0 correspondiente a λ_0 es llamado vector propio polinomial de $P(\lambda)$, esto es

$$P(\lambda_0) v_0 = 0 \tag{3.4}$$

Teorema 3.1 ([11]). *Si un problema de valores propios polinomial (3.3) tiene un conjunto de n vectores propios linealmente independientes $v_1, v_2, \cdots, v_n$ correspondientes a distintos valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, entonces $Q\Lambda Q^{-1}$ es una solvente de la matriz polinomial (3.1), donde $Q = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ y $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$*

Prueba. De la definición de $P(X)$

$$\begin{aligned}
P\left(Q\Lambda Q^{-1}\right) &= A_0\left(Q\Lambda Q^{-1}\right)^m + A_1\left(Q\Lambda Q^{-1}\right)^{m-1} + \cdots + A_{m-1}\left(Q\Lambda Q^{-1}\right) + A_m \\
P\left(Q\Lambda Q^{-1}\right) &= A_0 Q\Lambda^m Q^{-1} + A_1 Q\Lambda^{m-1}Q^{-1} + \cdots + A_{m-1}Q\Lambda Q^{-1} + A_m QQ^{-1} \\
P\left(Q\Lambda Q^{-1}\right) &= \left(A_0 Q\Lambda^m + A_1 Q\Lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}Q\Lambda + A_m Q\right)Q^{-1}
\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos que

$$A_{m-p}Q\Lambda^p = [A_{m-p}\lambda_1^p v_1, A_{m-p}\lambda_2^p v_2, \cdots, A_{m-p}\lambda_n^p v_n] \quad \text{para} \quad 0 \leq p \leq m$$

entonces

$$\sum_{p=0}^{m} A_{m-p}Q\Lambda^p = \left[\sum_{p=0}^{m} A_{m-p}\lambda_1^p v_1, \sum_{p=0}^{m} A_{m-p}\lambda_2^p v_2, \cdots, \sum_{p=0}^{m} A_{m-p}\lambda_n^p v_n\right]$$

luego usando las ecuaciones (3.2) y (3.4) tenemos

$$\sum_{p=0}^{m} A_{m-p}Q\Lambda^p = A_0 Q\Lambda^m + A_1 Q\Lambda^{m-1} + \cdots + A_{m-1}Q\Lambda + A_m Q = 0$$

por lo tanto

$$P\left(Q\Lambda Q^{-1}\right) = 0 \qquad \blacksquare$$

El siguiente teorema nos da información sobre el número de solventes de $P(X)$

Teorema 3.2 ([11]). *Supongamos que $P(\lambda)$ en (3.3) tiene p valores propios distintos $\{\lambda_i\}_{i=1}^p$, con $n \leq p \leq mn$, y el correspondiente conjunto de vectores propios $\{v_i\}_{i=1}^p$ satisface la condición de Haar (cada conjunto de n vectores es linealmente independiente), entonces existe al menos $\binom{p}{n}$ solventes diferentes de $P(X)$, y exactamente igual si $p = mn$, que vienen dados por*

$$S = Qdiag(\mu_i)Q^{-1}, \qquad Q = [q_1, q_2, \cdots, q_n]$$

donde el conjunto de valores y vectores propios $\{\mu_i, q_i\}_{i=1}^n$ son elegidos de entre el conjunto de valores y vectores propios $\{\lambda_i, v_i\}_{i=1}^p$ de $P(\lambda)$

Prueba. Como $v_1, v_2, \cdots, v_p$ satisfacen la condición de Haar, entonces sean $v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}$ un subconjunto de n vectores propios asociados a los valores propios $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_n}$

Definimos la matrices Q y Λ como

$$Q = [v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_n}] \quad \Lambda = diag\left(\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \cdots, \lambda_{i_n}\right)$$

entonces del teorema (3.1) se tiene que $Q\Lambda Q^{-1}$ es una solvente de $P(X)$

Ahora existen $\binom{p}{n}$ conjuntos distintos de valores propios por tanto el polinomio $P(X)$ tiene al menos $\binom{p}{n}$ solventes. Si $p = mn$ entonces $P(X)$ tiene exactamente $\binom{mn}{n}$ solventes. ■

Lema 3.1 ([11]). *Sea el polinomio* $N(\lambda) = \sum\limits_{p=0}^{m} R_p \lambda^{m-p}$, *Si* R_p *es una matriz triangular superior de orden* $n \times n$, *para* $p = 0, 1, \cdots, m$ *entonces*

$$\det\left(N(\lambda)\right) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,j}(\lambda)$$

donde $f_{j,j}(t) = \sum\limits_{p=0}^{m} [R_p]_{jj}\, t^{m-p}$

Prueba. Como R_p es una matriz triangular superior entonces $N(\lambda)$ es una matriz triangular superior, luego el $\det(N(\lambda))$ es el producto de los elementos de la diagonal, es decir

$$\det\left(N(\lambda)\right) = \prod_{j=}^{n} [N(\lambda)]_{j,j}$$

además

$$[N(\lambda)]_{i,j} = \sum_{p=0}^{m} [R_p]_{ij}\, \lambda^{m-p} \tag{3.5}$$

para $i = j$ tenemos

$$\begin{aligned} [N(\lambda)]_{j,j} &= \sum_{p=0}^{m} [R_p]_{jj}\, \lambda^{m-p} \\ [N(\lambda)]_{j,j} &= f_{j,j}(\lambda) \end{aligned}$$

por tanto

$$\det\left(N(\lambda)\right) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,j}(\lambda)$$ ■

Teorema 3.3 ([11]). *Sea* $P(X) = A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m$ *una matriz polinomial con* $A_p = U R_p U^*$ *para* $p = 0, 2, \cdots, m$, *donde* U *es una matriz unitaria y las matrices* R_p *son triangulares superiores. Entonces, si para* $i, j = 1, 2, \cdots, n$, $s_{i,j}$

es una solución del polinomio de coeficientes escalares $f_{i,j}(t) = \sum_{p=0}^{m} [R_p]_{ij} t^{m-p}$ *y* $i > j$ *implica que* $f_{j,j}(s_{i,i}) \neq 0$*, entonces existe un solvente* S *de* $P(X) = 0$ *de la forma* $S = URU^*$ *para alguna matriz triangular superior* R

Prueba. Definamos

$$N(X) = \sum_{p=0}^{m} R_p X^{m-p}$$

Si R es un solvente de $N(X) = 0$, esto es $N(R) = 0$

entonces

$$\begin{aligned} P(URU^*) &= A_0 (URU^*)^m + A_1 (URU^*)^{m-1} + \cdots + A_{m-1} URU^* + A_m \\ P(URU^*) &= A_0 UR^m U^* + A_1 UR^{m-1} U^* + \cdots + A_{m-1} URU^* + A_m UU^* \end{aligned}$$

por otro lado tenemos que $A_p U = UR_p$, entonces

$$\begin{aligned} P(URU^*) &= UR_0 R^m U^* + UR_1 R^{m-1} U^* + \cdots + UR_{m-1} RU^* + UR_m U^* \\ P(URU^*) &= U \left(\sum_{p=0}^{m} R_p R^{m-p} \right) U^* = U(N(R)) U^* = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto URU^* es solución de $P(X) = 0$

Por tanto es suficiente demostrar que existe una solvente de $N(X) = 0$

Para el problema de valores polinomial asociado $N(\lambda)$, del lema (3.1) tenemos

$$\det(N(\lambda)) = \prod_{j=1}^{n} f_{j,j}(\lambda)$$

luego la matriz $N(\lambda)$ es singular si y solo si $\det(N(\lambda)) = 0$
esto es, el conjunto de todas las soluciones de $f_{j,j}(\lambda) = 0$ para $j = 1, \cdots, n$ es tambien un conjunto de los valores propios de $N(\lambda)$.

Para cada valor propio elegido $\lambda_i = s_{i,i}$ para $i = 1, 2, \cdots, n$ tenemos un vector propio asociado x_i, luego de la ecuación (3.3) podemos encontrar un vector propio x_i resolviendo el sistema

$$N(\lambda_i) x_i = 0$$

de la ecuación (3.5), obtenemos

$$N(\lambda_i)\,x_i = \begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda_i) & f_{1,2}(\lambda_i) & \cdots & * & * \\ 0 & f_{2,2}(\lambda_i) & \ddots & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & f_{n-2,n-1}(\lambda_i) & \vdots \\ & & \ddots & f_{n-1,n-1}(\lambda_i) & * \\ 0 & \cdots & & 0 & f_{n,n}(\lambda_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ x_2^{(i)} \\ \vdots \\ \\ x_n^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora como para $i > j$ implica que $f_{j,j}(s_{i,i}) \neq 0$ entonces

$$f_{jj}(\lambda_i) \neq 0 \quad \text{para } j = 1, \cdots, i-1$$

Como la matriz $N(\lambda_i)$ es triangular superior, podemos encontrar la solución del sistema usando el método de sustitución hacia atras.
entonces

$$f_{n,n}(\lambda_i)\,x_n^{(i)} = 0$$

que $x_n^{(i)} = 0$ es una solución trivial, continuando

$$f_{n-1,n-1}(\lambda_i)\,x_{n-1}^{(i)} + f_{n-1,n}(\lambda_i)\,x_n^{(i)} = 0$$

por lo anterior se tiene que

$$f_{n-1,n-1}(\lambda_i)\,x_{n-1}^{(i)} = 0$$

así $x_{n-1}^{(i)} = 0$ es solución trivial, continuando de esta manera, obtenemos

$$x_k^{(i)} = 0 \qquad \text{para } k = i+1, \cdots, n \tag{3.6}$$

en la ecuación $i - \acute{e}sima$ tenemos

$$f_{i,i}(\lambda_i)\,x_i^{(i)} + f_{i,i+1}(\lambda_i)\,x_{i+1}^{(i)} + \cdots + f_{i,n}(\lambda_i)\,x_n^{(i)} = 0$$

usando (3.6) se tiene

$$f_{i,i}(\lambda_i)\,x_i^{(i)} = 0$$

como λ_i es valor propio de $N(\lambda)$, se tiene que $f_{i,i}(\lambda_i) = 0$, luego

$$0 \cdot x_i^{(i)} = 0$$

luego $x_i^{(i)}$ es un escalar arbitrario, elegimos $x_i^{(i)} = 1$

para las ecuaciones $k = i-1, i-2, \cdots, 1$ usando (3.6) y $x_i^{(i)} = 1$, obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} f_{1,1}(\lambda_i) & f_{1,2}(\lambda_i) & \cdots & * & * & * \\ 0 & \ddots & \ddots & * & * & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_{i-1,i-1}(\lambda_i) & \cdots & f_{i-1,n}(\lambda_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{(i)} \\ \vdots \\ x_{i-1}^{(i)} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \\ 0 \end{pmatrix}$$

ahora como por hipótesis $f_{k,k}(\lambda_i) \neq 0$, entonces el sistema tiene rango igual a $(i-1)$ por lo que podemos obtener $x_k^{(i)}$ para $k = i-1, i-2, \cdots, 1$. Por lo tanto para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ el vector propio x_i, tiene la forma

$$x_i = \begin{pmatrix} x_1^{(i)} & x_2^{(i)} & \cdots & x_{i-1}^{(i)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}^T$$

Ahora con el conjunto de vectores $x_1, x_2, \cdots, x_n$ hallados por el método de arriba, formamos la matriz Q

$$\begin{aligned} Q &= [x_1, x_2, \cdots, x_n] \\ Q &= \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & * & & * \\ \vdots & \ddots & 1 & & * \\ & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

el cual es no singular y por tanto los vectores $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ forman un conjunto linealmente independiente.

Por el teorema (3.1), la matriz triangular superior R el cual es solvente de $N(X) = 0$ puede ser obtenido por $R = Qdiag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)Q^{-1}$ ■

Corolario 3.1 ([11]). *Sea la ecuación polinomial matricial el cual tiene todos sus coeficientes matriciales triangulares superiores (o triangulares inferiores) y se cumplen las hipótesis del teorema (3.3). Entonces existe una solvente.*

Prueba. La prueba se induce directamente, pues en este caso $A_p = R_p$ para $p = 1, 2, \cdots, m$. ■

Capítulo 4

Cálculo de la Solvente de la Ecuación Polinomial Matricial

Este capítulo trata de la resolución númerica de la ecuación

$$P(X) = A_0 X^m + A_1 X^{m-1} + \cdots + A_{m-1} X + A_m = 0$$

El algoritmo utilizado es el método de Newton, el cálculo está basado en la derivada de Frechet y la descomposición de Schur, también trata acerca de la convergencia del método.

4.1 Método de Newton

El método de Newton para una función real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, es un proceso iterativo para resolver la ecuación $f(x) = 0$, basado en la existencia de la derivada de f en cada paso y en la elección de un punto inicial próximo que garantice la convergencia, esto es

$$\left.\begin{array}{c} \text{Dado } x_0 \\ f(x_k) + f'(x_k) h_k = 0 \\ x_{k+1} = x_k + h_k \end{array}\right\} \quad k = 0, 1, \cdots$$

El método iterativo de Newton, es también utilizado para encontrar la solución de la ecuación matricial no lineal

$$G(X) = 0 \tag{4.1}$$

donde $G : \mathbb{C}^{n\times n} \to C^{n\times n}$. Definimos $H_k \in C^{n\times n}$ como la solución de la ecuación lineal

$$G(X_k) + G'(X_k) H_k = 0 \tag{4.2}$$

donde el operador lineal $G'(X)H : \mathbb{C}^{n\times n} \to C^{n\times n}$ es la derivada de Fréchet de G en X y la dirección H. Entonces el método iterativo de Newton para la ecuación matricial no lineal (4.1) puede ser definido por

$$\left.\begin{array}{c} \text{Dado } X_0 \\ G(X_k) + G'(X_k)H_k = 0 \\ X_{k+1} = X_k + H_k \end{array}\right\} \quad k = 0, 1, \cdots$$

Por lo tanto, cada paso del método de Newton implica encontrar la solución $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de la ecuación lineal

$$G'(X_k)H_k = -G(X_k) \tag{4.3}$$

Para la ecuación polinomial matricial $P(X) = 0$, usando la ecuación (2.7), se tiene que la ecuación (4.2) puede ser reemplazada por

$$P'(X)H = \sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)}\right) H X^{i-1}\right\} = -P(X) \tag{4.4}$$

Encontraremos las solventes de la matriz polinomial resolviendo la ecuación lineal (4.4). Usaremos el producto de Kronecker y la función *vec*.

Usando el operador *vec*, entonces $vec(P'(X)H)$ es representado por

$$vec(P'(X)H) = vec\left(B_1 H + B_2 H X + \cdots + B_m H X^{m-1}\right)$$

usando la proposición (1.2)

$$vec(P'(X)H) = vec(B_1 H I) + vec(B_2 H X) + \cdots + vec\left(B_m H X^{m-1}\right)$$

usando la proposición (1.8)

$$\begin{aligned} vec(P'(X)H) &= \\ &\quad (I \otimes B_1)\, vec(H) + \left(X^T \otimes B_2\right) vec(H) + \cdots + \left(\left(X^T\right)^{m-1} \otimes B_m\right) vec(H) \\ vec(P'(X)H) &= \left(I \otimes B_1 + X^T \otimes B_2 + \cdots + \left(X^T\right)^{m-1} \otimes B_m\right) vec(H) \\ vec(P'(X)H) &= \left(\sum_{i=1}^{m} \left(X^T\right)^{i-1} \otimes B_i\right) vec(H) \\ vec(P'(X)H) &= \left(\sum_{i=1}^{m}\left(\left(X^T\right)^{i-1} \otimes \sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)}\right)\right) vec(H) \qquad (4.5) \end{aligned}$$

donde

$$B_p = A_0 X^{m-p} + A_1 X^{m-(p+1)} + \cdots + A_p, \qquad p = 1, 2, \cdots, m \tag{4.6}$$

y

$$D=\sum_{i=1}^{m}\left(\left(X^{T}\right)^{i-1}\otimes\sum_{j=0}^{m-i}A_{j}X^{m-(j+i)}\right)$$

entonces

$$Dvec\left(H\right)=vec\left(-P\left(X\right)\right) \tag{4.7}$$

el cual es un sistema lineal de $n^2\times n^2$

En el siguiente paso reduciremos el tamaño de la ecuación (4.7) a $n\times n$.

Dado $X\in\mathbb{C}^{n\times n}$, calculamos la descomposición de Schur de X

$$Q^{*}XQ=R$$

donde Q es una matriz unitaria y R es una matriz triangular superior. Entonces

$$QR^{k}Q^{*}=X^{k}\quad k\in\mathbb{Z}$$

sustituyendo esta ecuación en (4.4) tenemos

$$P'\left(X\right)H=\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-i}A_{j}X^{m-(j+i)}\right)HQR^{i-1}Q^{*}\right\}=-P\left(X\right)$$

haciendo $H'=HQ$

$$P'\left(X\right)H=\sum_{i=1}^{m}\left\{\left(\sum_{j=0}^{m-i}A_{j}X^{m-(j+i)}\right)H'R^{i-1}Q^{*}\right\}=-P\left(X\right)$$

por tanto

$$B_{1}H'Q^{*}+B_{2}H'RQ^{*}+\cdots+B_{m}H'R^{m-1}Q^{*}=-P\left(X\right)$$

de donde obtenemos

$$B_{1}H'+B_{2}H'R+\cdots+B_{m}H'R^{m-1}=-P\left(X\right)Q$$

esto es

$$P'\left(R\right)H'=B_{1}H'+B_{2}H'R+\cdots+B_{m}H'R^{m-1}=C \tag{4.8}$$

donde $C=-P\left(X\right)Q$, $B_i=\sum_{j=0}^{m-i}A_jX^{m-(j+i)}$.

Ahora tomamos la función vec en la ecuación (4.8)

$$\begin{aligned} vec\left(P'\left(R\right)H'\right) &= vec\left(B_{1}H'+B_{2}H'R+\cdots+B_{m}H'R^{m-1}\right)\\ vec\left(P'\left(R\right)H'\right) &= \sum_{i=1}^{m}\left(\left(R^{T}\right)^{i-1}\otimes B_{i}\right)vec\left(H'\right)\end{aligned}$$

haciendo

$$\tilde{D} = \sum_{i=1}^{m} \left(\left(R^T\right)^{i-1} \otimes B_i \right)$$

donde $\tilde{D}$ es una matriz de orden $n^2 \times n^2$, tenemos

$$\tilde{D} = I \otimes B_1 + R^T \otimes B_2 + \cdots + \left(R^T\right)^{m-1} B_m$$

luego

$$\begin{aligned}
\tilde{D}_{ij} &= I_{ij} B_1 + \left[R^T\right]_{ij} \otimes B_2 + \cdots + \left[\left(R^T\right)^{m-1}\right]_{ij} B_m \\
\tilde{D}_{ij} &= I_{ji} B_1 + [R]_{ji} \otimes B_2 + \cdots + \left[R^{m-1}\right]_{ji} B_m \\
\tilde{D}_{ij} &= R_{ji}^{0} B_1 + [R]_{ji} \otimes B_2 + \cdots + \left[R^{m-1}\right]_{ji} B_m \\
\tilde{D}_{ij} &= \sum_{k=1}^{m} \left(\left[R^{k-1}\right]_{ji} \otimes B_k \right)
\end{aligned}$$

como R es triangular superior entonces $\tilde{D}$ es una matriz triangular inferior por bloques, luego

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & & & \\ \tilde{D}_{21} & \tilde{D}_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ \tilde{D}_{n1} & \cdots & \cdots & \tilde{D}_{nn} \end{pmatrix}$$

por tanto nos queda el sistema

$$\tilde{D} vec\left(H'\right) = vec\left(C\right)$$

usando la sustitución por bloques hacia adelante

$$\begin{aligned}
h_1' &= \tilde{D}_{11}^{-1} c_1 \\
h_2' &= \tilde{D}_{22}^{-1} \left(c_2 - \tilde{D}_{21}^{-1} {h'}_1 \right) \\
&\vdots \\
h_n' &= \tilde{D}_{nn}^{-1} \left(c_n - \tilde{D}_{n1}^{-1} {h'}_1 - \cdots - \tilde{D}_{n,n-1}^{-1} {h'}_{n-1} \right)
\end{aligned}$$

donde h_i' y c_i son la $i-ésima$ columna de la matriz H' y C respectivamente.

Algoritmo 1. *Dada las matrices $R, B_1, B_2, \cdots, B_m$ las cuales estan definidas en (4.6) y (4.8) y números positivos i, j ($i \leq j$ y $i, j \leq n$) el siguiente algoritmo calcula $\tilde{D}_{ij}$*

for $r = 1 : m$
$\tilde{D}_{ij} \leftarrow \tilde{D}_{ij} + R^{r-1}\left(j, i\right) B_r$

end

Algoritmo 2. *(Solución de la ecuación $P'(X)H = -P(X)$ por descomposición de Schur). Dado $A_0, \cdots, A_m, X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y usando la descomposición de Schur de X, $X = QRQ^*$. El algoritmo encuentra $H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ el cual es solución de $P'(X)H = -P(X)$ en (4.4)*

$B_m \leftarrow A_0, \quad R_1 \leftarrow I$
for $i = 1 : m-1$
  $B_{m-i} \leftarrow B_{m-i+1}X + A_i$
  $R_{i+1} \leftarrow R_i R$
end
$C \leftarrow -(B_1X + A_m)Q$
for $i = 1 : n$
  d$\leftarrow 0$
  for $j = 1 : i-1$
    Use el algoritmo (1) y calcule $\tilde{D}_{ij}$
    d$\leftarrow$**d**$+\tilde{D}_{ij}H(:,j)$
  end
  Use el algoritmo (1) y calcule $\tilde{D}_{ii}$
  $H(:,j) \leftarrow \tilde{D}_{ii}^{-1}(C(:,i) - \mathbf{d})$
end
$H \leftarrow HQ^*$

4.2 Convergencia del Método de Newton

En este sección se muestra que el método de Newton converge cuadráticamente cuando el punto inicial esta lo suficientemente cerca de una solvente simple.

Estableceremos primero que $\|\cdot\|$ es la norma de Frobenius si se trata de matrices y la norma euclideana si se trata de vectores.

Definición 4.1 ([6])**.** *Diremos que $P'(X)$ es regular, si la transformación $P'(X)$ es biyectiva.*

Proposición 4.1. *$P'(X)$ es regular si y solo si* $\inf_{\|H\|=1}\|P'(X)H\| > 0$

Prueba. Dado que el operador $P'(X)$ es regular si y solo es inyectivo, esto es si y solo si existe el operador inversa de $P'(X)$ denotado por $inv(P'(X))$ entonces

$$\inf_{H\in X}\frac{\|P'(X)H\|}{\|H\|} = \inf_{\|H\|=1}\|P'(X)H\| = \frac{1}{\|inv(P'(X))\|} > 0$$

∎

Lema 4.1 ([6]). *Dada las matrices $A_j, B_j, A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y la correspondiente matriz polinomial definido en (3.1) tenemos*

1. (a) $\|A\| = \|vec\,(A)\|$

   (b) $vec\,(\alpha A + \beta B) = \alpha vec\,(A) + \beta vec\,(B)$ *para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

   (c) $vec \sum_{j=1}^{n} A_j X B_j = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j^T \otimes A_j\right) vec\,(X)$

   (d) $vec\,(P'(X)\,H) = P^*(X)\,vec\,(H)$ *donde la matriz* $P^*(X) \in \mathbb{C}^{n^2\times n^2}$ *y esta dado por*

$$P^*(X) = \sum_{i=1}^{m}\left(\left(X^T\right)^{i-1} \otimes \sum_{j=0}^{m-i} A_j X^{m-(j+i)}\right)$$

   (e) $P'(X)$ *es regular si y solo si* $P^*(X)$ *es una matriz no singular, y entonces*

$$c = \inf_{\|H\|=1} \|P'(X)\,H\| = \min_{\|H\|=1} \|P^*(X)\,vec\,(H)\| > 0$$

Prueba. 1. (a) De la definición de norma de frobenius tenemos

$$\|A\| = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

por otro lado

$$vec\,(A) = \begin{pmatrix} \mathrm{col}_1\, A \\ \vdots \\ \mathrm{col}_n\, A \end{pmatrix}$$

tomando la norma euclideana

$$\begin{aligned} \|vec\,(A)\| &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|\mathrm{col}_j\, A\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|vec\,(A)\| &= \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \|a_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \|vec\,(A)\| &= \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \|a_{ij}\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(b) Tenemos que $vec\,(\alpha A) = \alpha vec\,(A)$ y usando la proposición (1.2)

$$\begin{aligned} vec\,(\alpha A + \beta B) &= vec\,(\alpha A) + vec(\beta B) \\ vec\,(\alpha A + \beta B) &= \alpha vec\,(A) + \beta vec(B) \end{aligned}$$

(c) Usando la proposición (1.2) tenemos que

$$vec\sum_{j=1}^{n} A_j X B_j = \sum_{j=1}^{n} vec\left(A_j X B_j\right)$$

por otro lado de la proposición (1.8) se tiene que

$$vec\left(ABC\right) = \left(C^T \otimes A\right) vecB$$

entonces

$$\sum_{j=1}^{n} vec\left(A_j X B_j\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j^T \otimes A_j\right) vec\left(X\right)$$

con lo que se prueba que

$$vec\sum_{j=1}^{n} A_j X B_j = \left(\sum_{j=1}^{n} B_j^T \otimes A_j\right) vec\left(X\right)$$

(d) Este item ya fue probado, ver la ecuación (4.5)

(e) De la definición $P'\left(X\right)H$ es regular si y solo si la transformación $P'(X)$ es biyectiva esto es si y solo si la transformación $P'(X)$ tiene inversa si y solo si la ecuación

$$vec\left(P'\left(X\right)H\right) = P^*\left(X\right) vec\left(H\right) = -P\left(X\right)$$

tiene una única solución, esto es si y solo si $P^*\left(X\right)$ es una matriz no-singular, entonces

$$c = \inf_{\|H\|=1} \left\|P'\left(X\right)H\right\| > 0$$

de la proposición (4.1).

$\blacksquare$

Proposición 4.2 ([6])**.** *Sean $m \in \mathbb{N}$, y $A, B, C \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices. Entonces*

1. *(a)* $\|A^m - B^m\| \leq c\,\|A - B\|$ *donde* $c = \sum\limits_{j=0}^{m-1} \|A\|^j \|B\|^{m-1-j}$

   (b) $\left\|A^m - B^m - \sum\limits_{j=1}^{m} C^{j-1}\left(A - B\right)C^{m-j}\right\| \leq \|A - B\|\left(c_1\|A - B\| + c_2\|A - C\|\right)$
   con

$$c_1 = \sum_{j=2}^{m} \binom{m}{j} \|A - B\|^{j-2} \|A\|^{m-j}, \quad c_2 = m\sum_{j=0}^{m-2} \|C\|^j \|A\|^{m-j-2}$$

Prueba. El primer item lo haremos por inducción matemática sobre m

para $m = 1$, tenemos que

$$\|A^m - B^m\| = \|A - B\| \leq \|A - B\| \text{ con } c = 1$$

Suponiendo que se cumple para m entonces debemos probar que se cumple para $m+1$

$$\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| = \frac{1}{2}\left\|2A^{m+1} - 2B^{m+1}\right\|$$

sumando y restando los términos $A^m B, B^m A$ y agrupando convenientemente

$$\begin{aligned}
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &= \\
&\frac{1}{2}\left\|A^{m+1} - A^m B - B^{m+1} - B^m A + A^{m+1} + A^m B - B^{m+1} + B^m A\right\| \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|A^m (A - B) - B^m (B + A) + A^m (A + B) + B^m (A - B)\right\| \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &= \frac{1}{2}\left\|(A^m + B^m)(A - B) + (A^m - B^m)(A + B)\right\| \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\|(A^m + B^m)\right\|\left\|(A - B)\right\| + \left\|(A^m - B^m)\right\|\left\|(A + B)\right\|
\end{aligned}$$

usando la hipótesis de inducción

$$\begin{aligned}
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\|(A^m + B^m)\right\|\left\|(A - B)\right\| + c\left\|A - B\right\|\left\|(A + B)\right\| \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\left\|A^m + B^m\right\| + c\left\|A + B\right\|\right) \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\|A\|^m + \|B\|^m + (\|A\| + \|B\|)\, c\right) \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\|A\|^m + \|B\|^m + (\|A\| + \|B\|)\sum_{j=0}^{m-1}\|A\|^j\|B\|^{m-1-j}\right) \\
\left\|A^{m+1} - B^{m+1}\right\| &\leq \\
&\frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\|A\|^m + \sum_{j=0}^{m-1}\|A\|^j\|B\|^{m-j} + \|B\|^m + \sum_{j=0}^{m-1}\|A\|^{j+1}\|B\|^{m-1-j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\sum_{j=0}^{m}\|A\|^j\|B\|^{m-j} + \|B\|^m + \sum_{j=0}^{m-1}\|A\|^{j+1}\|B\|^{m-1-j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\sum_{j=0}^{m}\|A\|^j\|B\|^{m-j} + \|B\|^m + \sum_{j=1}^{m}\|A\|^j\|B\|^{m-j}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\|(A - B)\right\|\left(\sum_{j=0}^{m}\|A\|^j\|B\|^{m-j} + \sum_{j=0}^{m}\|A\|^j\|B\|^{m-j}\right)
\end{aligned}$$

de donde

$$\left\|A^{m+1}-B^{m+1}\right\| \leq \|(A-B)\| \left(\sum_{j=0}^{m} \|A\|^{j} \|B\|^{m-j}\right)$$

con lo cuál queda establecido el item (a)

Ahora probaremos el item (b)

Sea $E = B - A$, entonces desarrollando el binomio de Newton

$$B^{m} = (A+E)^{m}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \text{término 1} &: \ A^{m} \\ \text{término 2} &: \ \sum \text{términos que contienen a } E \\ \text{término 3} &: \ \sum \text{términos que contienen a } E, E \end{aligned}$$

y todos los demás términos, entonces

$$B^{m} = (A+E)^{m} = A^{m} + \sum_{i=0}^{m-1} A^{i} E A^{m-1-i} + \sum_{l+i+j=m-2} A^{l} E A^{i} E A^{j} + \cdots\cdots$$

luego

$$A^{m} - B^{m} = -\sum_{i=0}^{m-1} A^{i} E A^{m-1-i} - \sum_{l+i+j=m-2} A^{l} E A^{i} E A^{j} + \cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} A^{m} - B^{m} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1}(A-B)C^{m-j} &= -\sum_{i=0}^{m-1} A^{i} E A^{m-1-i} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1}(A-B)C^{m-j} \\ &\quad - \sum_{l+i+j=m-2} A^{l} E A^{i} E A^{j} + \cdots\cdots \\ A^{m} - B^{m} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1}(A-B)C^{m-j} &= \sum_{i=0}^{m-1} A^{i}(A-B)A^{m-1-i} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1}(A-B)C^{m-j} \\ &\quad - \sum_{l+i+j=m-2} A^{l} E A^{i} E A^{j} + \cdots\cdots \end{aligned}$$

tomando la norma de Frobenius

$$\left\| A^{m} - B^{m} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1}(A-B)C^{m-j} \right\| \leq r_1 + r_2$$

donde

$$r_2 = \left\| \sum_{i=0}^{m-1} A^i (A-B) A^{m-1-i} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1} (A-B) C^{m-j} \right\|$$

haciendo $j = i+1$

$$r_2 = \left\| \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) A^{m-j} - \sum_{j=1}^{m} C^{j-1} (A-B) C^{m-j} \right\|$$

$$\begin{aligned}
r_2 &= \left\| \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) A^{m-j} - \sum_{j=1}^{m} \left(C^{j-1} - A^{j-1} + A^{j-1}\right) (A-B) C^{m-j} \right\| \\
r_2 &= \left\| \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) A^{m-j} - \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) C^{m-j} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j=1}^{m} \left(C^{j-1} - A^{j-1}\right) (A-B) C^{m-j} \right\| \\
r_2 &= \left\| \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) \left(A^{m-j} - C^{m-j}\right) - \sum_{j=1}^{m} \left(C^{j-1} - A^{j-1}\right) (A-B) C^{m-j} \right\|
\end{aligned}$$

entonces tenemos

$$\begin{aligned}
r_2 &\leq \left\| \sum_{j=1}^{m} A^{j-1} (A-B) \left(A^{m-j} - C^{m-j}\right) \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{m} \left(C^{j-1} - A^{j-1}\right) (A-B) C^{m-j} \right\| \\
r_2 &\leq \|A-B\| \sum_{j=1}^{m} \|A\|^{j-1} \left\|A^{m-j} - C^{m-j}\right\| + \|A-B\| \sum_{j=1}^{m} \left\|A^{j-1} - C^{j-1}\right\| \|C\|^{m-j}
\end{aligned}$$

usando la parte (a) de esta proposición convenientemente, tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\|A^{m-j} - C^{m-j}\right\| &\leq \|A-C\| \sum_{l=0}^{m-j-1} \|C\|^l \|A\|^{m-j-1-l} \\
\left\|A^{j-1} - C^{j-1}\right\| &\leq \|A-C\| \sum_{l=0}^{j-2} \|C\|^l \|A\|^{j-2-l}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \|A\|^{j-1} \left(\sum_{l=0}^{m-j-1} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-j-1-l} \right) \\
&\qquad + \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \|C\|^{m-j} \left(\sum_{l=0}^{j-2} \|C\|^{l}\,\|A\|^{j-2-l} \right) \\
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{l=0}^{m-j-1} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} + \sum_{l=0}^{j-2} \|C\|^{l+m-j}\,\|A\|^{j-2-l} \right]
\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variable $t = l + m - j$, tenemos

$$\begin{aligned}
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{l=0}^{m-j-1} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{t=m-j}^{m-2} \|C\|^{t}\,\|A\|^{m-2-t} \right] \\
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{l=0}^{m-j-1} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} \right. \\
&\qquad \left. + \sum_{l=m-j}^{m-2} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} \right] \\
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\| \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=0}^{m-2} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} \right) \\
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\|\, m \sum_{l=0}^{m-2} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l} \\
r_2 &\leq \|A-B\|\,\|A-C\|\, c_2
\end{aligned}$$

donde $c_2 = m \sum_{l=0}^{m-2} \|C\|^{l}\,\|A\|^{m-2-l}$

tambien

$$
\begin{aligned}
r_1 &= \left\| \sum_{l+i+j=m-2} A^l E A^i E A^j + \cdots\cdots \right\| \\
r_1 &\leq \sum_{l+i+j=m-2} \|A\|^l \|E\| \|A\|^i \|E\| \|A\|^j + \cdots\cdots \\
r_1 &\leq \sum_{l+i+j=m-2} \|A\|^{l+i+j} \|E\|^2 + \sum_{l+i+j=m-3} \|A\|^{l+i+j} \|E\|^3 + \cdots\cdots \\
r_1 &\leq \|A-B\| \left(\|A-B\| \sum_{j=2}^{m} \binom{m}{j} \|A\|^{m-j} \|A-B\|^{j-2} \right) \\
r_1 &\leq \|A-B\| \left(c_1 \|A-B\| \right)
\end{aligned}
$$

donde $c_1 = \sum_{j=2}^{m} \binom{m}{j} \|A\|^{m-j} \|A-B\|^{j-2}$ ■

Teorema 4.3 ([6])**.** *Dada la matriz polinomial* $P(X) = \sum_{i=0}^{m} A_{m-i} X^i$ *y las matrices* $X, Y, H \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y* $b = \max\{\|X\|, \|Y\|, \|H\|\}$.

Si el $\max_{1\leq l\leq m} \|A_l\| = a$ *entonces*

$$
\|P(X+H) - P(X) - P'(Y)H\| \leq \; 2^{m+1} a b^{m-2} \|H\| (\|H\| + \|X-Y\|) \quad \textit{si } b \geq 1
$$

y

$$
P(X+H) = P(X) + P'(Y)H + O\left(\|H\|^2\right) \; \textit{cuando} \; \|H\| \to 0
$$

Prueba. Tenemos que

$$
P(X+H) - P(X) = \sum_{i=1}^{m} A_{m-i} \left((X+H)^i - X^i \right)
$$

además

$$
P'(Y)H = \sum_{i=1}^{m} A_{m-i} \sum_{j=1}^{i} Y^{j-1} H Y^{i-j}
$$

luego entonces

$$
\begin{aligned}
\|P(X+H) - P(X) - P'(Y)H\| &= \left\| \sum_{i=1}^{m} A_{m-i} \left((X+H)^i - X^i - \sum_{j=1}^{i} Y^{j-1} H Y^{i-j} \right) \right\| \\
\|P(X+H) - P(X) - P'(Y)H\| &= \left\| \sum_{i=2}^{m} A_{m-i} \left((X+H)^i - X^i - \sum_{j=1}^{i} Y^{j-1} H Y^{i-j} \right) \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=2}^{m} A_{m-i} \left(X^i - (X+H)^i - \sum_{j=1}^{i} Y^{j-1} (-H) Y^{i-j} \right) \right\|
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\left\|P\left(X+H\right)-P\left(X\right)-P'\left(Y\right)H\right\| &\leq \\ &\sum_{i=2}^{m}\left\|A_{m-i}\right\|\left\|\left(X^{i}-\left(X+H\right)^{i}-\sum_{j=1}^{i}Y^{j-1}\left(-H\right)Y^{i-j}\right)\right\|\end{aligned}$$

aplicando la proposición (4.2) con $A=X, \quad B=X+H, \quad C=Y$

$$\left\|X^{i}-\left(X+H\right)^{i}-\sum_{j=1}^{i}Y^{j-1}\left(-H\right)Y^{i-j}\right\|\leq\left\|H\right\|\left(c_{1}\left\|H\right\|+c_{2}\left\|X-Y\right\|\right)$$

entonces

$$\begin{aligned}\left\|P\left(X+H\right)-P\left(X\right)-P'\left(Y\right)H\right\| \leq\ & a\left\|H\right\|\sum_{i=2}^{m}\left[\left\|H\right\|\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}\left\|H\right\|^{j-2}\left\|X\right\|^{i-j}\right.\\ &\left.+\left\|X-Y\right\|i\sum_{j=0}^{i-2}\left\|Y\right\|^{j}\left\|X\right\|^{i-j-2}\right]\end{aligned}$$

como $\left\|X\right\|,\left\|Y\right\|,\left\|H\right\|\leq b$ con $b>1$ entonces

$$\left\|P\left(X+H\right)-P\left(X\right)-P'\left(Y\right)H\right\|\leq a\left\|H\right\|\sum_{i=2}^{m}\left[\left\|H\right\|\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}b^{i-2}+\left\|X-Y\right\|i\sum_{j=0}^{i-2}b^{i-2}\right]$$

ahora $b^{i-2}\leq b^{n-2}$, luego

$$\begin{aligned}\left\|P\left(X+H\right)-P\left(X\right)-P'\left(Y\right)H\right\| &\leq a\left\|H\right\|b^{n-2}\sum_{i=2}^{m}\left[\left\|H\right\|\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}+\left\|X-Y\right\|i\sum_{j=0}^{i-2}1\right]\\ &\leq a\left\|H\right\|b^{n-2}\sum_{i=2}^{m}\left[\left\|H\right\|\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}+\left\|X-Y\right\|i\left(i-1\right)\right]\\ &\leq a\left\|H\right\|b^{n-2}\left[\left\|H\right\|\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}+\left\|X-Y\right\|\sum_{i=2}^{m}i\left(i-1\right)\right]\end{aligned}$$

por propiedades de sumatorias

$$\sum_{j=2}^{i}\binom{i}{j}=2^{i}-1-i$$

y que $i\left(i-1\right)\leq 2^{i}$ para todo $i\geq 1$ entonces

$$\left\|P\left(X+H\right)-P\left(X\right)-P'\left(Y\right)H\right\|\leq a\left\|H\right\|b^{n-2}\left[\left\|H\right\|\sum_{i=2}^{m}\left(2^{i}-1-i\right)+\left\|X-Y\right\|\sum_{i=2}^{m}2^{i}\right]$$

como

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^{m} 2^{i} &\leq \sum_{i=0}^{m} 2^{i} = 2^{m+1} - 1 \leq 2^{m+1} \qquad y \\
\sum_{i=2}^{m} \left(2^{i} - 1 - i\right) &\leq \sum_{i=2}^{m} 2^{i} \leq 2^{m+1}
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
\left\| P(X+H) - P(X) - P'(Y)H \right\| &\leq a \|H\| b^{n-2} \left[\|H\| 2^{m+1} + \|X-Y\| 2^{m+1} \right] \\
\left\| P(X+H) - P(X) - P'(Y)H \right\| &\leq a b^{n-2} 2^{m+1} \|H\| \left(\|H\| + \|X-Y\| \right)
\end{aligned}$$

para la otra aseveración hacemos $Y = X$, entonces

$$\left\| P(X+H) - P(X) - P'(X)H \right\| \leq a b^{n-2} 2^{m+1} \|H\|^{2}$$

con lo que queda probado el teorema. ■

Teorema 4.4 ([6]). *Supongase que $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ es una solvente simple de la ecuación polinomial $P(X) = 0$ y $\mathbf{P}'(S)$ es regular. Entonces, si la matriz inicial X_0 esta suficientemente cerca de S, el algoritmo*

$$\begin{aligned}
X_{k+1} &= X_k - Q(X_k) \ \ \textit{con} \\
P'(X_k) Q(X_k) &= P(X_k)
\end{aligned}$$

converge cuadraticamente a S. Mas precisamente. Si

$$\|X_0 - S\|_F = \varepsilon_0 < \varepsilon = \min \left\{ \delta, \frac{c_0}{c} \right\}$$

donde $c = 2^{m+1} a (1 + \|S\|)^{m-2}$ con $a = \max_{r=1,\ldots,m} \{\|A_r\|\}$ y
$c_0 = \inf \{ \|P'(X_k) H\|, \|H\|_F = 1, \|X - S\| \leq \delta \} > 0$ para $\delta \in (0,1]$ suficientemente pequeño, entonces tenemos

1. (a) i. $\lim_{k \to \infty} X_k = S$
   ii. $\|X_k - S\| \leq \varepsilon_0 q^k$ *con* $q = \frac{c}{c_0} \varepsilon_0 < 1$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots,$
   iii. $\|X_{k+1} - S\| \leq \frac{c}{c_0} \|X_k - S\|^2$ *para* $k = 0, 1, 2, \ldots,$

Prueba. Sea $b = 1 + \|S\|_F$ y $X \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $\|X - S\|_F < \varepsilon$

Por propiedad de normas

$$\|X - S\|_F = \|vec(X - S)\| = \|vec(X) - vec(S)\| \leq \varepsilon$$

tambien

$$|\|vec\,(X)\| - vec\,\|S\|| < \|vec\,(X) - vec\,(S)\| \leq \varepsilon$$

por lo tanto

$$\|vec\,(X)\| \leq vec\,\|S\| + \varepsilon$$

luego

$$\|X\|_F \leq \|S\|_F + \varepsilon \leq 1 + \|S\|_F = b$$

Como $c_0 > 0$, por la proposición (4.1) la derivada de Fréchet es regular en $\{X \in \mathbb{C}^{n\times n} / \|X - S\|_F < \varepsilon\}$, luego la función $\phi\,(X)$ está bien definido por

$$\phi\,(X) = X - Q\,(X)\,, \qquad P'\,(X)\,Q\,(X) = P\,(X)$$

para toda X tal que $\|X - S\|_F < \varepsilon$

Como S es solvente de $P\,(X)$, usando el lema (4.1) y el teorema (4.3)

$$\begin{aligned}
\|\phi\,(X) - S\| &= \|X - Q\,(X) - S\| \\
&= \|X - S - Q\,(X)\| \\
&= \|vec\,(X - S - Q\,(X))\| \\
&= \|vec\,(X - S) - vec\,(Q\,(X))\| \\
&= \left\|vec\,(X - S) - vec\left(P'\,(X)^{-1}\,P\,(X)\right)\right\| \\
&= \left\|vec\,(X - S) - P^*\,(X)^{-1}\,vec\,(P\,(X))\right\| \\
\|\phi\,(X) - S\| &= \left\|P^*\,(X)^{-1}\,(P^*\,(X)\,vec\,(X - S) - vec\,(P\,(X)))\right\|
\end{aligned}$$

usando la proposición (4.1)

$$\begin{aligned}
\|\phi\,(X) - S\| &\leq \frac{1}{c_0}\,\|P^*\,(X)\,vec\,(X - S) - vec\,(P\,(X))\| \\
\|\phi\,(X) - S\| &\leq \frac{1}{c_0}\,\|vec\,(P'\,(X)\,(X - S)) - vec\,(P\,(X))\| \\
\|\phi\,(X) - S\| &\leq \frac{1}{c_0}\,\|vec\,(P'\,(X)\,(X - S) - P\,(X))\| \\
\|\phi\,(X) - S\| &\leq \frac{1}{c_0}\,\|P'\,(X)\,(X - S) - P\,(X)\|_F \\
\|\phi\,(X) - S\| &\leq \frac{1}{c_0}\,\|P'\,(X)\,(X - S) - P\,(X) + P\,(S)\|_F
\end{aligned}$$

usando el teorema (4.3) con $H = (X - S)$ entonces

$$\begin{aligned}
\|P\,(X) - P\,(S) - P'\,(X)\,(X - S)\|_F &\leq c\,\|X - S\|\,(\|X - S\| + \|X - X\|) \\
&\leq c\,\|X - S\|^2
\end{aligned}$$

por tanto

$$\|\phi(X) - S\| \leq \frac{c}{c_0} \|X - S\|^2 \tag{4.9}$$

La prueba del item (ii) y (iii) se sigue por inducción sobre i.

Por hipótesis, $\|X_0 - S\|_F = \varepsilon_0 < \varepsilon$ y por lo tanto

$$X_1 = X_0 - Q(X_0)$$

esta bien definido, sea $q = \frac{c}{c_0}\varepsilon_0$, como por definición

$$\varepsilon_0 < \frac{c_0}{c} \rightarrow \frac{c}{c_0}\varepsilon_0 < 1 \rightarrow q < 1$$

de la ecuación (4.9) se tiene que

$$\begin{aligned} \|\phi(X_0) - S\| &\leq \frac{c}{c_0} \|X_0 - S\|^2 \\ \|X_1 - S\| &\leq \frac{c}{c_0} \|X_0 - S\|^2 \end{aligned}$$

y tambien tenemos que

$$\begin{aligned} \|X_1 - S\| &= \frac{c}{c_0} \|X_0 - S\|^2 = \frac{c}{c_0}\varepsilon_0^2 \\ \|X_1 - S\| &\leq \varepsilon_0 \frac{c}{c_0}\varepsilon_0 = \varepsilon_0 q < \varepsilon_0 \end{aligned}$$

Suponiendo que la afirmación del item (ii) y (iii) es valida para i probaremos que es valida para $i+1$

$$\|X_{i+1} - S\|_F = \|\phi(X_i) - S\|_F$$

ahora por la ecuación (4.9)

$$\|X_{i+1} - S\|_F \leq \frac{c}{c_0} \|X_i - S\|^2$$

como

$$\frac{c}{c_0} \|X_i - S\|^2 \leq \frac{c}{c_0} \|X_i - S\| \|X_i - S\|$$

por hipotesis de inducción

$$\begin{aligned} \frac{c}{c_0} \|X_i - S\| \|X_i - S\| &\leq \frac{c}{c_0} \|X_i - S\| \varepsilon_0 q^i \\ &\leq q \|X_i - S\| \leq q\varepsilon_0 q^i = \varepsilon_0 q^{i+1} \end{aligned}$$

entonces

$$\|X_{i+1} - S\|_F \leq \varepsilon_0 q^{i+1}$$

esto prueba los item (ii) y (iii)

Ahora para la prueba del item (i), teniendo en cuenta que $q < 1$

$$\|X_{i+1} - S\|_F \leq \varepsilon_0 q^{i+1} < \varepsilon_0 < \varepsilon$$

lo cuál prueba que la sucesión de matrices $\{X_{i+1}\}$ es convergente y converge a S ■

4.3 Ejemplos Numéricos

En esta sección presentamos algunos resultados de la solución de ecuaciones polinomiales matriciales, los cuales fueron hechos con Matlab, las iteraciones para el método de Newton son terminados cuando el error residual de $P(X_k)$

$$\frac{\|P(X_k)\|_F}{\|A_0\|_F \|X_k\|_F^m + \|A_1\|_F \|X_k\|_F^{m-1} + \cdots + \|A_m\|_F} < nu$$

donde $u = 1.1\left(10^{-16}\right)$ y n es el orden de las matrices.

Ejemplo 4.1. *Sea el polinomio matricial*

$$P(X) = X^2 + \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 & 12 \\ -2 & 14 \end{pmatrix}$$

utilizando el punto inicial

$$X0 = \pm \begin{pmatrix} 11.6517 & 0 \\ 0 & 11.6517 \end{pmatrix}$$

se obtiene la solución

$$S_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

respectivamente, ambos con 10 iteraciones.

Ejemplo 4.2. *Sea el polinomio matricial*

$$P(X) = \begin{pmatrix} 51.6 & 0 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} X^2 - \begin{pmatrix} 17500 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{pmatrix}$$

utilizando el punto inicial

$$X0 = \begin{pmatrix} 193638.3089074608 & 0 \\ 0 & 193638.3089074608 \end{pmatrix}$$

se obtiene la solución

$$S=\begin{pmatrix} 17.6255 & -7.4304 \\ -3.8341 & 8.4564 \end{pmatrix}$$

la cual converge con 21 iteraciones.

Ejemplo 4.3. *Sea el polinomio*

$$P(X)=X^4+\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}X^2+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}X+\begin{pmatrix} -20 & 2 & 1 \\ 2 & -20 & 0 \\ 1 & 0 & -20 \end{pmatrix}$$

utilizando el punto inicial

$$X0=\pm\begin{pmatrix} 38.6488 & 0 & 0 \\ 0 & 38.6488 & 0 \\ 0 & 0 & 38.6488 \end{pmatrix}$$

se obtiene la solución

$$S_1=\begin{pmatrix} 2.056 & -0.113 & -0.149 \\ -0.057 & 2.054 & -0.063 \\ -0.088 & 0.003 & 2.062 \end{pmatrix} \text{ y } S_2=\begin{pmatrix} -2.170 & -0.004 & 0.142 \\ 0.048 & -2.170 & -0.049 \\ 0.197 & -0.00003 & -2.169 \end{pmatrix}$$

respectivamente, ambos con 16 *iteraciones.*

Usando los puntos iniciales

$$X0=\begin{pmatrix} 38.6488 & 0 & 0 \\ 0 & 38.6488 & 0 \\ 0 & 0 & -38.6488 \end{pmatrix} \quad X0=\begin{pmatrix} 38.6488 & 0 & 0 \\ 0 & -38.6488 & 0 \\ 0 & 0 & -38.6488 \end{pmatrix}$$

se obtiene la solución

$$S_3=\begin{pmatrix} 0.797 & 3.736 & -2.170 \\ 0.067 & 1.673 & 0.137 \\ -1.616 & 4.674 & -0.390 \end{pmatrix} \text{ y } S_4=\begin{pmatrix} 0.545 & 0.065 & -2.150 \\ -0.197 & -2.176 & 0.157 \\ -1.941 & -0.055 & -0.365 \end{pmatrix}$$

respectivamente, ambos con 30 *iteraciones.*

Ejemplo 4.4. *Sea el polinomio*

$$P(X) = X^2 - 327.35 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

utilizando el punto inicial

$$X0 = \pm \begin{pmatrix} 108.841 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 108.841 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 108.841 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 108.841 \end{pmatrix}$$

se obtiene la solución

$$\begin{aligned} S_1 &= \begin{pmatrix} 24.5502 & -7.0714 & -1.2673 & -0.6140 \\ -7.0714 & 23.2829 & -7.6853 & -1.8813 \\ -1.2673 & -7.6853 & 22.6689 & -8.9527 \\ -0.6140 & -1.8813 & -8.9527 & 15.5976 \end{pmatrix} \quad y \\ S_2 &= \begin{pmatrix} -24.5502 & 7.0714 & 1.2673 & 0.6140 \\ 7.0714 & -23.283 & 7.6853 & 1.8813 \\ 1.2673 & 7.6853 & -22.669 & 8.9527 \\ 0.6140 & 1.8813 & 8.9527 & -15.598 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

respectivamente ambos con 10 iteraciones

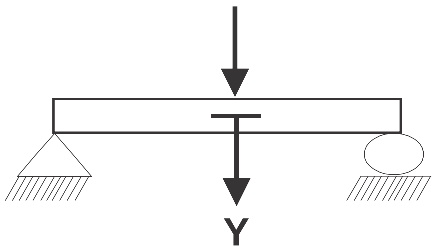
Capítulo 5

Aplicación

5.1 Grados de Libertad

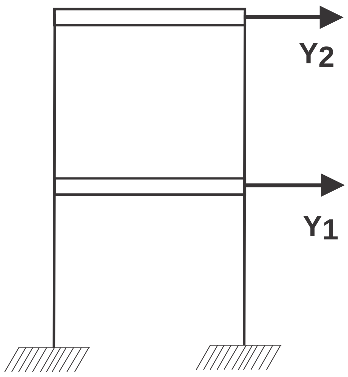
En dinámica estructural [10], el número de coordenadas independientes necesario para especificar la configuración o posición de un sistema en cualquier instante de tiempo se conoce como el número de grados de libertad. Toda estructura continua tiene un número infinito de grados de libertad. En la idealización mediante un modelo matemático el número de grados de libertad es finito. A continuación mostramos algunas estructuras con diversos grados de libertad

Ejemplo 5.1. *Estructuras que pueden ser representadas con un grado de libertad*



Estructura con un grado de libertad

Ejemplo 5.2. *Gráfico que representa a una estructura con dos grados de libertad*



Estructura con dos grados de libertad

5.2 Vibración Libre de un Edificio Simple

Cuando una estructura no está sometida a excitación externa (fuerza o desplazamiento del soporte) y su movimiento esta gobernado solo por las condiciones iniciales, se considera que esta en vibración libre. Existen, ocasionalmente, circunstancias en la que es necesario determinar el movimiento de la estructura en condiciones de vibración libre, pero son casos especiales. No obstante, el análisis de la estructura en movimiento libre proporciona las propiedades dinámicas más importantes de la estructura que son las frecuencias naturales y los correspondientes modos normales

5.2.1 Ecuación de Rigidez para un Edificio Simple

Un edificio simple puede ser definido como un edificio en el cuál no se producen rotaciones en los mienbros horizontales a la altura de los pisos. Para obtener la deformación horizontal en un edificio debemos suponer las siguientes condiciones

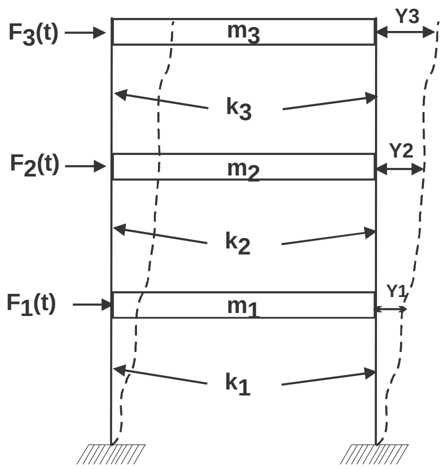
1. Toda la masa de la estructura esta concentrada al nivel de los pisos
2. Las viga en los pisos son infinitamente rigidas, con relación a la rigidez de las columnas
3. La deformación de la estructura es independiente de las fuerzas axiales presentes en las columnas.

La primera condición transforma el problema, de un sistema de infinitos grados de libertad (debido a la masa uniformemente distribuido) a un sistema que tiene solamente tantos grados de libertad como números de masas concentradas a nivel de los pisos

La segunda condición introduce el requisito de que las uniones entre las vigas y las columnas estén fijas sin rotación

La tercera condición establece que las vigas rígidas en los pisos permanezcan horizontales durante el movimiento de la estructura

La figura representa el modelo de un edificio



Una alternativa para representar un edificio simple es adoptar un modelo de resortes y masas como se muestra en el gráfico (5.1)

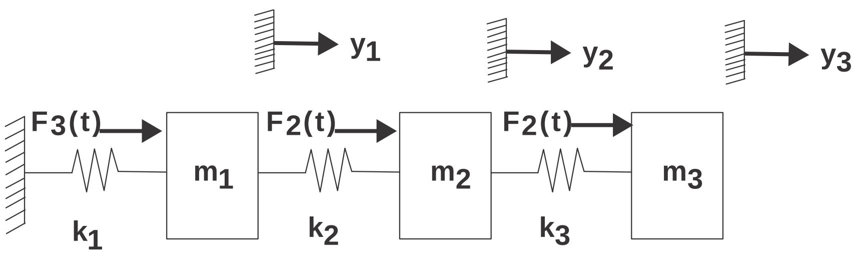
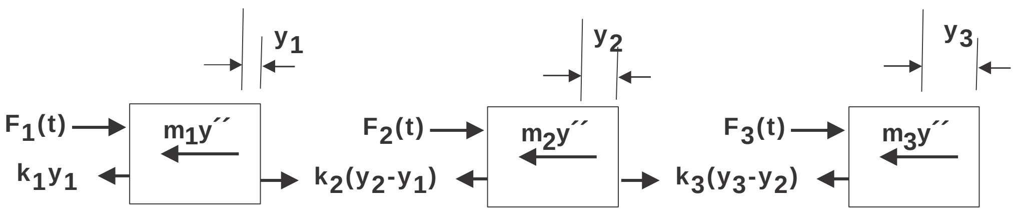


Gráfico 5.1: Modelo de masas concentradas y resortes para representar un edificio



Debe tenerse en cuenta que las representaciones que aparecen en las figuras son equivalentes. En consecuencia, las ecuaciones del movimiento, se pueden obtener de cualquiera de ellos, así tenemos:

$$
\begin{aligned}
m_1\ddot{y}_1 + k_1 y_1 - k_2\left(y_2 - y_1\right) - F_1\left(t\right) &= 0 \\
m_2\ddot{y}_2 + k_2\left(y_2 - y_1\right) - k_3\left(y_3 - y_2\right) - F_2\left(t\right) &= 0 \\
m_3\ddot{y}_3 + k_3\left(y_3 - y_2\right) - F_3\left(t\right) &= 0
\end{aligned}
$$

este sistema de ecuaciones constituye la formulación de rigidez de las ecuaciones del movimiento de un edificio simple de tres pisos. Utilizando la forma matricial este sistema puede escribirse como

$$M\ddot{y} + Ky = F\left(t\right)$$

donde M y K son respectivamente las matrices de masas y de rigidez, dadas por

$$M = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{pmatrix}$$

y donde $y, \ddot{y}, F$, son, respectivamente, los vectores de desplazamiento, aceleración y fuerzas dadas por

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \ddot{y} = \begin{pmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ F_3(t) \end{pmatrix}$$

5.2.2 Frecuencias Naturales

El problema de vibración libre requiere que el vector fuerza $[F]$ sea igual a cero en cualquiera de las formulaciones de las ecuaciones del movimiento. La ecuación que modela este comportamiento es la siguiente

$$M\ddot{y} + Ky = F$$

entonces para la ecuación de la rigidez tenemos la ecuación

$$M\ddot{y} + Ky = 0$$

Buscamos soluciones reales que representan la parte real de

$$p = qe^{i\lambda t}$$

donde q es independiente de t. Luego tenemos que

$$\ddot{p} = -q\lambda^2 e^{i\lambda t}$$

por lo tanto la ecuación queda determinado por

$$-Mq\lambda^2 e^{i\lambda t} + Kqe^{i\lambda t} = 0$$

luego

$$\left(-Mq\lambda^2 + Kq\right) e^{i\lambda t} = 0$$

el cuál tiene soloción si y solo si

$$\left(M\lambda^2 - K\right) q = 0$$

Proposición 5.1. *Sea S una solvente de la ecuación polinomial matricial $P(X) = MX^2 - K$ entonces el par (λ, q) valor y vector propio de S es solución de la ecuación $\left(M\lambda^2 - K\right) q = 0$*

Prueba. Tenemos que $Sv = \lambda v$ entonces reemplazando

$$\begin{aligned}
\left(M\lambda^2 - K\right) q &= M\lambda^2 q - Kq \\
\left(M\lambda^2 - K\right) q &= M\lambda(\lambda q) - Kq = M\lambda(Sq) - Kq \\
\left(M\lambda^2 - K\right) q &= MS(\lambda q) - Kq = MS(Sq) - Kq \\
\left(M\lambda^2 - K\right) q &= MS^2 q - Kq = \left(MS^2 - K\right) q
\end{aligned}$$

como S es solvente de la ecuación polinomial entonces

$$\left(M\lambda^2 - K\right) q = 0$$

■

Por tanto proponemos resolver la ecuación polinomica matricial, para encontrar el par (λ, q) que resuelve el problema de la ecuación diferencial

Algoritmo 3. *Dada la ecuación diferencial $M\ddot{y} + Ky = F(t)$*

Paso 1. Resolver $MX^2 - K = 0$

Paso 2. Calcular $Xv = \lambda v$

Paso 3. Hacer $y = Vu$ donde $V = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$ es la matriz de vectores propios de X

Paso 4 Resolver $D_1\ddot{u} + D_2 u = c$ donde

$$D_1 = V^T M V, \quad D_2 = V^T K V, \quad c = V^T F$$

Paso 6. La solución viene dado por

$$y = u_1(t) v_1 + u_2(t) v_2 + \cdots + u_n(t) v_n$$

Los siguientes ejemplos determinan el cálculo de los valores y vectores propios que determinan la solución

Ejemplo 5.3 ([10] pag 256). *El gráfico (5.2) muestra un edificio simple, de iguales propiedades en todos sus pisos. Para esta estructura hallaremos sus frecuencias* *naturales*

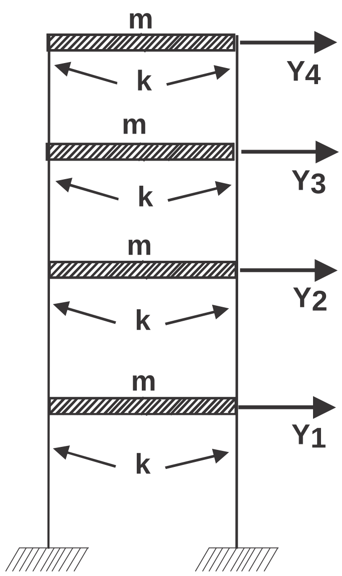


Gráfico 5.2: Edificio simple

donde

$$\begin{aligned} m &= 1\frac{kp.seg^2}{cm} \qquad y \\ k &= 327.25\frac{kp}{cm} \qquad \text{para todos los pisos} \end{aligned}$$

para esta edificio la matriz de masa M y de rígidez K vienen dado por

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad K = 327.35 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

de acuerdo a la ecuación resolveremos el siguiente problema

$$MX^2 - K = 0$$

el cual tiene como solución la matriz

$$X = \begin{pmatrix} 24.5502 & -7.0714 & -1.2673 & -0.6140 \\ -7.0714 & 23.2829 & -7.6853 & -1.8813 \\ -1.2673 & -7.6853 & 22.6689 & -8.9527 \\ -0.6140 & -1.8813 & -8.9527 & 15.5976 \end{pmatrix}$$

hallando sus valores y vectores propios tenemos

$$
\begin{aligned}
V &= \begin{pmatrix} -0.2280 & 0.5774 & 0.6565 & -0.4285 \\ -0.4285 & 0.5774 & -0.2280 & 0.6565 \\ -0.5774 & 0.0000 & -0.5774 & -0.5774 \\ -0.6565 & -0.5774 & 0.4285 & 0.2280 \end{pmatrix} \\
D &= \begin{pmatrix} 6.2836 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18.0928 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27.7198 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 34.0034 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

donde las frecuencias naturales vienen dado por

$$
f = \frac{1}{2\pi} \begin{pmatrix} 6.2836 \\ 18.0928 \\ 27.7198 \\ 34.0034 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.0001 \\ 2.8796 \\ 4.4118 \\ 5.4119 \end{pmatrix}
$$

Capítulo 6

Conclusiones

La principal ventaja de este método es que es de convergencia cuadrática cuando el punto inicial es próximo y la derivada de frechet es no-singular, sin embargo cada iteración es bastante extensa.

Uno de los aspectos sensibles del método de Newton es la elección del punto inicial, la aproximación inicial que se utiliza es empírica, se utilizó la regla establecida por [6] la cuál establece iniciar como punto inicial la matriz kI, donde k es definida para el caso cuadrático $P(X) = AX^2 + BX + C$ como

$$k = \frac{\|B\|_F + \sqrt{\|B\|_F^2 + 4\|A\|_F \|C\|_F}}{2\|A\|_F}$$

y en el caso general

$$k = \max\{1, \sum_{i=1}^{m} \|A_i\|_F\}$$

sin embargo, muchas veces el punto inicial es dado por el investigador.

El método propuesto trabaja correctamente cuando la derivada de Frechet es no singular, hay estudios para casos particulares cuando la derivada de frechet es singular, como en el cálculo de las solventes de la ecuación polinomial matricial para una matriz simétrica y centro-simétrica generalizada ver [15]

Bibliografía

[1] Bernstein, Dennis S.Matrix Mathematics:Theory, Facts, and Formulas (Second Edition) Published by Princeton University Press, 2009.

[2] Cheney, Ward. Analysis for Applied Mathematics, Springer 2001

[3] Chun-Hua Guo. On a quadratic matrix equation associated with an M-matrix, IMA Journal of Numerical Analysis (2003) 23 (1): 11-27.

[4] Higham, Nicholas. Functions of Matrices, Siam 2008

[5] Horn Roger y Johnson Charles, Matrix Analysis, Cambridge University Press 1990

[6] Kratz y Stickel, Numerical Solution of matrix polynomial equations by Newton's method, IMA J. Numer. Anal., 7(1987), 355-369

[7] Kurdila Andrew y Zabarankin Michael. Convex Functional Analysis, Birkhäuser Verlag 2005

[8] Latouche and Ramaswami, Introduction to Matrix Analytic Methods in Stochastic Modeling, SIAM, Philadelphia, PA, 1999.

[9] Luenberger, David. Optimization by Vector Space Methods, John Wiley, New York, 1969.

[10] Paz Mario, Structural Dynamics, Theory and Computation, Van Nostrand Reinhold Company, Second Edition,1985

[11] Seo Jong y Kim Hyun, Solving Matrix Polynomials by Newton's Method With Exact Line Searches.

[12] Spivak Michael, Calculus on Manifolds, Addison-Wesley Publishing Company 1965

[13] Stewart G.W. Matrix Algorithms Vol I, Siam Philadelphia 1998

[14] Stewart G. W. Matrix Algorithms Vol II, Siam Philadelphia 2001

[15] Yin Huan Han and Hyun Min Kim, Solving Matrix Polynomikal by Newton's Method, KSIAM Vol 14 No 12, 113-124, 2010