

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

**"MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA CARGADA
ALREDEDOR DE UNA ESFERA
UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA"**

**PARA OBTENER EL TITULO PROFESIONAL DE
LICENCIADO EN FISICA**

ELABORADO POR:

JULIO ALFONSO ARAKAKI KIYAN

ASESOR:

Mg. EDGARD VIDALON VIDALON

LIMA-PERÚ

2017

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi madre y a la memoria de mi padre. Ellos me dieron la vida, me brindaron amor. Ellos dieron su constante esfuerzo y sacrificaron muchas horas de descanso para que mi hermana a y a mí nunca nos faltara nada y para que tengamos una educación superior.

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer en primer lugar a mi familia por comprender las muchas horas que tuve que ausentarme de nuestro hogar, para culminar este trabajo.

Quiero agradecer también a mis colegas del Departamento de Ingeniería Ambiental, Física y Meteorología (UNALM). Gracias a los Profesores L. Yoza y E. Cisneros por apoyarme y alentarme a terminar este trabajo. Gracias a los profesores M. Sandoval y E. Guardia (Departamento de Matemáticas) por ayudarme con el software.

Quiero agradecer además al Profesor E. Vidalón por dedicar parte de su tiempo y por su paciencia para guiarme en la realización de este trabajo.

Por último, quiero agradecer a todas las personas que ayudaron a que este trabajo sea culminado.

RESUMEN.

Se obtuvo las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada que se desplaza en el espacio ocupado por el campo magnético producido por una esfera uniformemente magnetizada. El estudio del movimiento se restringió principalmente al caso de órbitas en el plano XY, y que la partícula tiene carga positiva. Se utilizó el concepto de energía potencial efectiva para obtener los radios de posibles órbitas circulares y deducir su estabilidad. Se estudió la estabilidad de órbitas alrededor del movimiento circular en el caso tridimensional usando el método de la linealización, encontrándose que ellas son inestables. Se realizó la solución numérica con el método de Runge-Kutta a las ecuaciones de movimiento y los resultados se mostraron con distintos gráficos, los cuales confirmaron algunas de las deducciones planteadas en la teoría. El análisis numérico verificó que ocurren trayectorias circulares bajo las condiciones iniciales encontradas en la parte teórica. También se confirmó que el momento generalizado de la coordenada polar ϕ se mantiene constante en diversas condiciones iniciales. Además se encontró otros movimientos bidimensionales acotados como se predecía en la teoría. Se corrieron programas para el caso de carga negativa de la partícula y se observó los mismos resultados.

Palabras Claves: ecuaciones de movimiento, campo magnético, órbitas bidimensionales, estabilidad de órbitas, momento generalizado.

ABSTRACT .

The equations of motion of a charged particle that moves in the space occupied by the magnetic field produced by a uniformly magnetized sphere were obtained. The study of the movement was mainly restricted to the case of orbits in the XY plane, and that the particle has positive charge. The concept of effective potential energy was used to obtain the radius of possible circular orbits and deduce its stability. The stability of orbits around the circular motion in the three-dimensional case using the linearization method was studied, being that they are unstable. The numerical solution using the Ruge-Kutta method to the equations of motion was carried and results showed with different graphics, which confirmed some of the deductions in the theory. Numerical analysis verified occurring circular paths under the initial conditions found in the theoretical part. It also confirmed that the generalized moment of the polar coordinate ϕ stays constant at different initial conditions. Also found other limited two-dimensional movements as it is predicted in theory. It ran programs for the case of negative charge of the particle and the same results was observed.

Key Words: equations of motion, magnetic field, two dimensional orbits, stability of orbits, generalized moment.

PROLOGO

Durante mucho tiempo se viene estudiando el comportamiento del campo magnético de la Tierra, iniciándose su estudio sistemático con el evento denominado "Año Geofísico Internacional", en 1957, que trataba de un estudio global de la atmósfera y de la superficie terrestre. El Perú participó con su observatorio de Huayao, perteneciente al Instituto Geofísico Nacional. Los estudios comprenden la influencia sobre el movimiento de las partículas ionizadas, el mecanismo de las auroras polares, las perturbaciones en las comunicaciones y otros fenómenos electromagnéticos y geomagnéticos que se producen en la atmósfera.

El autor con el apoyo del Profesor Edgard Vidalón V, interesados en explicar estos problemas han venido planteando modelos de comportamiento del movimiento de las cargas en el campo geomagnético terrestre. Para lo cual, partiendo de la semejanza experimental de la dependencia espacial del campo magnético terrestre con el de una esfera magnetizada y basándose en un modelo dipolar del campo magnético de una esfera magnetizada, donde las líneas de campo se comportan curvándose y decreciendo en intensidad con la distancia al centro del dipolo a semejanza al campo magnético terrestre, el campo se hace más débil en el ecuador y más fuerte en los polos.

En este trabajo se propone estudiar las ecuaciones del movimiento de una partícula cargada alrededor del campo magnético así formado.

Los resultados nos permiten visualizar mejor el comportamiento de partículas en la atmósfera terrestre y dar las bases de futuros estudios, en especial en el tema de las soluciones numéricas de las ecuaciones de movimiento encontradas.

INDICE.

	Pag
Capítulo I. Introducción.	1
Capítulo II. Campo Magnético Debido a Materiales Magnetizados.	4
Capítulo III. Aplicación de Dinámica de Lagrange en el Movimiento de una Partícula Cargada en un Campo Magnético.	11
Capítulo IV. Movimiento Bidimensional de una Partícula Cargada Alrededor de una Esfera Magnetizada.	18
Capítulo V. Movimiento de la Partícula Cargada Alrededor de la Trayectoria Circular.	32
Capítulo VI. Análisis Numérico.	40
Conclusiones.	60
Recomendaciones.	61
Referencias Bibliográficas.	62
Anexo A.	63
Anexo B.	65
Anexo C.	67
Anexo D.	70
Anexo E.	73
Anexo F.	75

CAPITULO I. INTRODUCCION.

Un ejemplo de movimiento en un campo, cuyo estudio lleva muchos años, es el movimiento de una carga en el campo de un dipolo magnético. Este estudio es importante debido a que la Tierra tiene un campo magnético que se parece al campo de un dipolo. El campo de la Tierra es más complicado que el campo de un dipolo, pero el campo más sencillo que tiene mayor parecido al campo de la Tierra es el campo dipolar.

Resolver las ecuaciones de movimiento de un campo dipolar ayudaría a entender el fenómeno conocido como auroras polares.

En realidad el campo geomagnético no es exactamente el de un dipolo; la existencia de muchos sistemas de corrientes en el interior de la Tierra hace que, para una representación precisa del campo, sea necesario utilizar un desarrollo de multipolos de Gauss: una expresión matemática en donde se considera al dipolo como el primer término de una serie. Los términos no dipolares solo son importantes en la cercanía de la Tierra, por lo que a grandes distancias el campo es dipolar.

El movimiento de las cargas en un campo electromagnético dado obedece a una ecuación de movimiento conocida. Sin embargo, conocer la ecuación del movimiento no quiere decir descubrir como será el movimiento automáticamente, es necesario integrar las ecuaciones de movimiento. Esta es una tarea que puede ser sumamente compleja y tardar años en realizarse.

En unos pocos casos excepcionales este proceso se ha llevado a cabo para ciertos campos electromagnéticos bastante simples. Sin embargo, en general, no se sabe aún como se mueven las cargas. Se conocen algunas propiedades generales del movimiento, pero se desconoce en general su comportamiento.

Aunque el campo dipolar parezca sencillo, integrar las ecuaciones de movimiento de una carga en este campo parece una tarea demasiado compleja. El movimiento de una carga en el campo dipolar es uno de los problemas más interesantes de la física matemática. Un campo dipolar no es un campo uniforme puesto que las líneas de fuerza se curvan y su intensidad decrece con la distancia al centro del dipolo. Para una distancia dada el campo será más débil en el ecuador y más fuerte hacia los polos.

Varios investigadores obtuvieron muchas trayectorias de las cargas en el campo dipolar por diversos métodos numéricos. En este trabajo se emplea también un método numérico para entender aproximadamente como es el movimiento de las cargas en un campo magnético particular.

En el presente trabajo se estudia el movimiento que una partícula cargada realiza en el campo magnético de una esfera uniformemente magnetizada. Estudiar este movimiento puede ayudar a entender parcialmente el movimiento real de partículas cargadas en el campo magnético terrestre, ya que el potencial escalar del campo magnético terrestre en una primera aproximación tiene la misma dependencia espacial que el potencial escalar de una esfera uniformemente magnetizada.

El presente trabajo contiene 6 capítulos incluyendo éste, conclusiones, recomendaciones, referencias bibliográficas y 6 anexos. A continuación se describen brevemente los temas de los capítulos siguientes y de los anexos.

El capítulo dos trata de la deducción de la expresión matemática general de los campos magnéticos generados por cuerpos magnetizados. Gran parte está dedicado a la obtención del campo magnético de una esfera uniformemente magnetizada en diversas coordenadas.

El capítulo tres trata de la obtención de las ecuaciones de movimiento de una partícula cargada en el espacio alrededor de una esfera uniformemente magnetizada tanto en coordenadas cilíndricas como en coordenadas cartesianas; valiéndose para ello de la función Lagrangiano. Además se encuentra una constante del movimiento.

En el capítulo cuatro se analiza la posibilidad de obtener trayectorias circulares en el movimiento de la partícula cargada, si son estables o inestables y bajo que condiciones puede lograrse. Se recurre al concepto de energía potencial efectiva. Se incluye también la deducción de otros movimientos bidimensionales con órbitas acotadas.

El capítulo cinco estudia la estabilidad del movimiento tridimensional de la partícula cargada en trayectorias cercanas al movimiento circular. Usando la serie de Taylor se aproximan las ecuaciones de movimiento a ecuaciones lineales de primer orden que son relativamente fáciles de resolver en forma analítica. Se aplicará también la teoría de estabilidad de Lyapunov.

El capítulo seis muestra algunos ejemplos gráficos de la solución numérica de las ecuaciones de movimiento. La forma que muestran estos gráficos confirma algunas de las afirmaciones deducidas en la parte teórica.

En el anexo A se demuestra una relación que es necesaria para la obtención de los potenciales magnético y vectorial magnético para el caso de una esfera con magnetización uniforme.

El anexo B explica cómo se obtiene uno de los pasos para deducir la expresión del potencial escalar magnético.

El anexo C muestra cómo se puede deducir analíticamente las características de la gráfica energía potencial efectiva. También se muestra el caso cuando la partícula sea de carga negativa.

El anexo D complementa algunos de los conceptos de la teoría de estabilidad utilizados en el capítulo cinco.

El anexo E da una breve introducción al tema de espacio de fases.

El anexo F indica cómo analizar otra característica del movimiento oscilatorio en general, al considerar la influencia del cambio en las condiciones iniciales.

OBJETIVOS.

Los objetivos propuestos en este trabajo son los siguientes:

- Estudiar la posibilidad de encontrar trayectorias circulares como casos particulares de este movimiento.
- Deducir la estabilidad de las órbitas de los posibles movimientos circulares.
- Demostrar que existen constantes del movimiento.
- Utilizar la serie de Taylor para encontrar otros posibles movimientos bidimensionales acotados.
- Demostrar que el estudio realizado en este trabajo es independiente del tipo de carga de la partícula.

CAPITULO II. CAMPO MAGNETICO DEBIDO A MATERIALES MAGNETIZADOS.

2.1. INTRODUCCION.

Es conocido el fenómeno de que las cargas eléctricas en movimiento producen un campo magnético. Sin embargo, también es posible que exista un campo magnético sin necesidad de la presencia de cargas en movimiento, sino que es producido por materiales magnetizados.

En este capítulo primero se definirá la magnetización, que es una propiedad característica de los materiales magnetizados y que está relacionada con el campo magnético. A continuación se mostrará como se relaciona el potencial vectorial magnético con la magnetización. Luego, valiéndose de propiedades de los productos vectorial y escalar, se obtendrá la fórmula para el potencial escalar magnético. Después, se hallará los potenciales vectorial y escalar magnético para el caso particular de una esfera con magnetización uniforme. Por último, a partir del potencial vectorial y/o escalar magnético, se deducirá la fórmula para el campo magnético primero en coordenadas esféricas, luego en coordenadas cilíndricas y en coordenadas cartesianas.

2.2. CONCEPTOS GENERALES.

Un material está magnetizado cuando las corrientes electrónicas dentro de sus átomos generan un momento dipolar magnético dm en cada elemento de volumen dV' . Se define la cantidad física magnetización $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ como:

$$dm(\mathbf{r}') = \mathbf{M}(\mathbf{r}') dV' \quad (2.1)$$

En unos pocos materiales principalmente los ferromagnéticos, la magnetización puede tomar valores altos y existir en ausencia del campo magnético externo.

Un material magnetizado produce un campo magnético \mathbf{B} en cualquier punto del espacio, fuera y dentro del material.

Previo al cálculo del campo magnético, se obtendrá el potencial vectorial magnético \mathbf{A} . En el libro "Teoría Electromagnética" de Talledo (2013) se demuestra cómo se obtiene tanto el campo magnético \mathbf{B} , como el potencial vectorial magnético \mathbf{A} , para el caso de un cuerpo magnetizado.

A continuación se mostrarán las ecuaciones más importantes (tomando como referencia el libro mencionado).

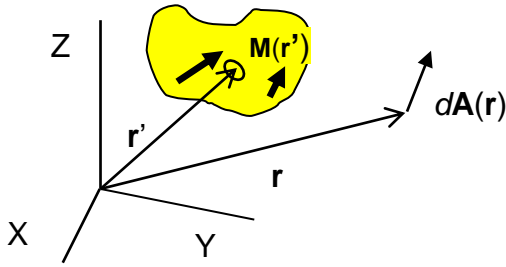


Figura 1. Un material magnetizado produce un potencial vectorial magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

Cada elemento de volumen dV' del material magnetizado, ubicado en \mathbf{r}' produce una contribución $d\mathbf{A}(\mathbf{r})$ al potencial vectorial magnético en \mathbf{r} (vea la figura 1), expresada por:

$$d\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{d\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (2.2.a)$$

Esta ecuación se obtiene considerando el vector potencial magnético de un dipolo magnético elemental para puntos alejados de éste.

Entonces, el potencial vectorial magnético generado por todo el cuerpo se obtiene al integrar la ecuación (2.2.a), que es válida para puntos externos e internos del material magnetizado.

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (2.2.b)$$

El campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ se puede obtener tomando el rotacional a la ecuación (2.2.b):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \right\}. \quad (2.3.a)$$

También se puede hallar una fórmula para el potencial escalar magnético. Para ello, se vuelve a escribir la relación (2.3.a) como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla \times \left\{ \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right\} dV'. \quad (2.3.b)$$

Usando la identidad vectorial:

$$\nabla \times (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + \mathbf{F}(\nabla \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G}(\nabla \cdot \mathbf{F}).$$

Se puede demostrar fácilmente que el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ se puede expresar como la suma de dos campos magnéticos:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{B}_2(\mathbf{r}),$$

donde:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V [M(\mathbf{r}') \cdot \nabla] \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (2.4.a)$$

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V M(\mathbf{r}') \left[\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV'. \quad (2.4.b)$$

Recurriendo a otra identidad vectorial:

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G}) + \mathbf{G} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G}.$$

El campo $\mathbf{B}_1(\mathbf{r})$ se transforma en:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \nabla \left(M(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV',$$

luego:

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \iiint_V \left(M(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) dV'. \quad (2.4.c)$$

Y recordando que: $\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla U^*$,

donde U^* es el potencial escalar magnético.

A partir de (2.4.c) se tiene el potencial escalar magnético $U^*(\mathbf{r})$:

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \iiint_V M(\mathbf{r}') \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (2.5)$$

Por otro lado, la ecuación (2.4.b) se reduce a (vea anexo B, página 65):

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (2.4.d)$$

En base a las relaciones (2.5) y (2.4.d), el campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ puede expresarse como:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla U^*(\mathbf{r}) + \mu_0 \mathbf{M}(\mathbf{r}). \quad (2.6)$$

2.3. CAMPO MAGNETICO EXTERNO DE UNA ESFERA UNIFORMEMENTE MAGNETIZADA.

El caso particular que se estudia en este trabajo corresponde a una esfera de radio R uniformemente magnetizada con magnetización $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$ (vea figura 2), donde M es un valor constante. Los potenciales $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y $U^*(\mathbf{r})$, se obtienen de (2.2.b) y (2.5):

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{M} \times \iiint_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV', \quad (2.7.a)$$

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} M \cdot \iiint_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'. \quad (2.8.a)$$

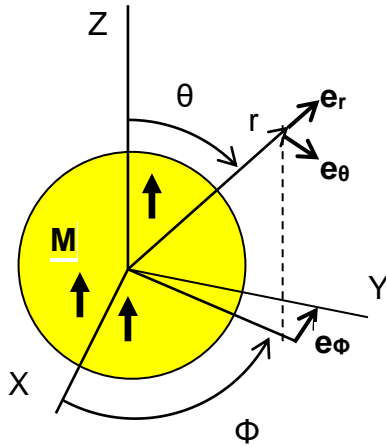


Figura 2. Esfera uniformemente magnetizada con magnetización $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$

Para una esfera la integral que se considera al efectuar la integración en las ecuaciones (2.7.a) y (2.8.a) es (vea anexo A, página 63):

$$\iiint_{V'} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{4\pi R^3}{3r^3} \mathbf{r}. \quad (A.1)$$

Por lo tanto, de las ecuaciones (2.7.a), (2.8.a) y (A.1), los potenciales $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ y $U^*(\mathbf{r})$ en coordenadas esféricas quedan expresados respectivamente como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3r^2} \text{sen}\theta \mathbf{e}_\phi, \quad (2.7.b)$$

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{MR^3}{3r^2} \text{cos}\theta. \quad (2.8.b)$$

Con $r > R$.

Finalmente, el campo $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ se halla tomando el rotacional de $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ en (2.7.b), o el gradiente de $U^*(\mathbf{r})$ en (2.8.b):

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3r^3} (2\text{cos}\theta \mathbf{e}_r + \text{sen}\theta \mathbf{e}_\theta). \quad (2.9)$$

Para efectuar un cambio de coordenadas esféricas (r, θ, Φ) a coordenadas cilíndricas (ρ, Φ, z) , se debe considerar las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\rho^2 + z^2}, \\ \text{cos}\theta &= \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, & \text{sen}\theta &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}, \\ \mathbf{e}_r &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{e}_\rho + \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\theta &= \frac{z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{e}_\rho - \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + z^2}} \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{e}_\phi &= \mathbf{e}_\phi. \end{aligned} \quad (2.10)$$

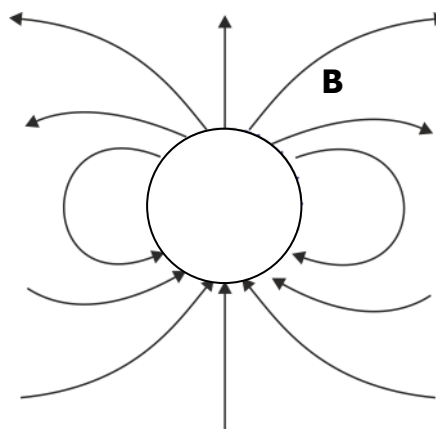
Usando (2.10), las expresiones para $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $U^*(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en coordenadas cilíndricas son, respectivamente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{e}_\phi, \quad (2.11.a)$$

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{MR^3}{3} \frac{z}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.11.b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{(3z\rho \mathbf{e}_\rho + (2z^2 - \rho^2) \mathbf{e}_z)}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (2.11.c)$$

Figura 3. Líneas del Campo Magnético para una esfera con magnetización uniforme $\mathbf{M} = M \mathbf{e}_z$



Haciendo el cambio de coordenadas esféricas (r, θ, Φ) a coordenadas cartesianas (x, y, z) , se encuentra las relaciones:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \text{sen}\theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\mathbf{e}_r = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k}, \quad (2.12)$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{zx}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j} - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \mathbf{k},$$

$$\mathbf{e}_\phi = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{i} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{j}.$$

Usando (2.12), las expresiones para $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $U^*(\mathbf{r})$ y $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ en coordenadas cartesianas son, respectivamente:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \left(\frac{-y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{i} + \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \mathbf{j} \right), \quad (2.13.a)$$

$$U^*(\mathbf{r}) = \frac{MR^3}{3} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}, \quad (2.13.b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{(3z x \mathbf{i} + 3y z \mathbf{j} + (2z^2 - x^2 - y^2) \mathbf{k})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}. \quad (2.13.c)$$

De las ecuaciones (2.7.b), (2.11.a) y (2.13.a) se deduce que el potencial vectorial magnético $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ para $r > R$, está contenido en un plano paralelo al plano XY. Ya que el campo magnético $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ es siempre perpendicular al potencial vectorial magnético, $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ está contenido en un plano perpendicular al plano XY, además de las ecuaciones (2.9) y (2.11.c) se deduce que el módulo de $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ es el mismo para cualquier valor del ángulo Φ , por tanto tiene simetría cilíndrica como se muestra en la figura 3.

Se puede demostrar que el campo magnético para $r > R$, es el mismo que produciría un dipolo magnético centrado en la esfera, y cuyo momento magnético es igual a:

$$\vec{m} = \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{M}$$

Con $\mathbf{M} = M\mathbf{e}_z$.

CAPITULO III. APLICACIÓN DE DINAMICA DE LAGRANGE EN EL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA CARGADA EN UN CAMPO MAGNETICO.

3.1. INTRODUCCION.

La experiencia ha demostrado que cuando una partícula no tiene un movimiento complicado, considerando un sistema de referencia inercial, este movimiento se puede estudiar aplicando solamente la segunda ley de Newton $F = \dot{p}$. Las ecuaciones de movimiento serán relativamente sencillas usando coordenadas rectangulares para describir el movimiento. Sin embargo, no siempre es posible que ocurra esa condición, y las ecuaciones de movimiento pueden hacerse bastante complicadas y difíciles de manejar. Otro procedimiento de abordar el problema es usar la dinámica de Lagrange, que se aplica a una amplia gama de fenómenos físicos (como los relativos a campos), con los que generalmente no se relacionan las leyes de Newton.

En este capítulo se presentará a la función de Lagrange para una partícula cargada que se mueve en un campo electromagnético. Luego, se pasará al caso de estudio de este trabajo: una partícula que se mueve en un campo magnético producido por una esfera uniformemente magnetizada, usando coordenadas cilíndricas, y luego coordenadas cartesianas, para obtener así las ecuaciones diferenciales del movimiento.

3.2. CONCEPTOS GENERALES.

Suponga que una partícula tiene masa m y velocidad \mathbf{v} . Si q_i son las coordenadas generalizadas, se consigue:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial t} \quad (3.1.a)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$. Siendo N el número de grados de libertad.

La energía cinética de la partícula se define como:

$$T = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \quad (3.1.b)$$

Hay que recordar que la función de Lagrange (o lagrangiano) "L" se define como:

$$L=T-V, \quad (3.2)$$

donde V es la energía potencial y T es la energía cinética.

Una función de Lagrange muy importante es la que corresponde a una partícula de carga "q" moviéndose dentro de un campo electromagnético, con potencial eléctrico Φ y potencial vectorial magnético \mathbf{A} . Este lagrangiano está dado por (vea "Mecánica Clásica", Goldstein, 2000):

$$L = \frac{1}{2} m v^2 - q\Phi + q \vec{A} \cdot \vec{v} \quad (3.2.a)$$

Usando las relaciones encontradas en el capítulo anterior, cuando solo existe campo magnético debido a una esfera uniformemente magnetizada, de la ecuación (3.2.a) se obtiene la función lagrangiano en coordenadas cilíndricas:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\Phi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mu_0 MR^3}{3} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \dot{\Phi} \quad (3.2.b)$$

También se puede usar coordenadas cartesianas. En estas coordenadas, la función lagrangiano se expresa como:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{q\mu_0 MR^3}{3} \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.2.c)$$

3.3. ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA EN UN CAMPO MAGNETICO PRODUCIDO POR UNA ESFERA MAGNETIZADA UNIFORMEMENTE.

Las ecuaciones de Lagrange están dadas por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0. \quad (3.3)$$

donde $i = 1, 2, \dots, N$. Siendo N el número de grados de libertad. q_i es una coordenada generalizada y \dot{q}_i es la velocidad generalizada.

Aplicando la ecuación (3.3) al presente trabajo, se tiene que $N = 3$.

Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Cilíndricas.

Las correspondientes ecuaciones de Lagrange en coordenadas cilíndricas son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \rho} \right) = 0, \quad (3.3.a)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial \phi} \right) = 0, \quad (3.3.b)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.3.c)$$

A partir de la relación (3.2.b) y de las ecuaciones de Lagrange (3.3.a, 3.3.b, 3.3.c) se obtiene:

$$m\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 - m\alpha R^3 \frac{(2z^2 - \rho^2)\rho\dot{\phi}}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.d)$$

$$m\rho^2\ddot{\phi} + 2m\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + m\rho\alpha R^3 \frac{(2z^2 - \rho^2)\dot{\rho} - 3z\rho\dot{z}}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.e)$$

$$m\ddot{z} + m\alpha R^3 \frac{3z\rho^2\dot{\phi}}{(\rho^2 + z^2)^{5/2}} = 0. \quad (3.3.f)$$

Con:

$$\alpha = \frac{q\mu_0 M}{3m}$$

En el presente trabajo se considerará $q > 0$, (salvo que se indique lo contrario) y por lo tanto $\alpha > 0$.

Para simplificar, se divide las ecuaciones (3.3.d) y (3.3.f) entre "m", y la ecuación (3.3.e) entre "m" y "ρ", luego haciendo los cambios de variables:

$$\rho_R = \frac{\rho}{R}, \quad z_R = \frac{z}{R}.$$

Las ecuaciones (3.3.d, 3.3.e, 3.3.f) se simplifican a:

$$\ddot{\rho}_R - \rho_R \dot{\phi}^2 - \alpha \frac{(2z_R^2 - \rho_R^2) \rho_R \dot{\phi}}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.g)$$

$$\rho_R \ddot{\phi} + 2\rho_R \dot{\phi} + \alpha \frac{(2z_R^2 - \rho_R^2) \dot{\rho}_R - 3z_R \rho_R \dot{z}_R}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.h)$$

$$\ddot{z}_R + \alpha \frac{3z_R \rho_R^2 \dot{\phi}}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{5/2}} = 0. \quad (3.3.i)$$

Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Polares.

Si la partícula se mueve en el plano XY, se hace $z_R(t) = 0$ en las ecuaciones (3.3.g, 3.3.h, 3.3.i), y se obtienen las ecuaciones de movimiento en el plano XY:

$$\ddot{\rho}_R = \rho_R \dot{\phi}^2 - \frac{\alpha \dot{\phi}}{\rho_R^2}, \quad (3.3.j)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\dot{\rho}_R \dot{\phi}}{\rho_R} + \frac{\alpha \dot{\rho}_R}{\rho_R^4}. \quad (3.3.k)$$

Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Cartesianas.

Las correspondientes ecuaciones de Lagrange en coordenadas cartesianas son:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = 0, \quad (3.3.l)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) = 0, \quad (3.3.m)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial z} \right) = 0, \quad (3.3.n)$$

A partir de la relación (3.2.c) y de las ecuaciones de Lagrange (3.3.l, 3.3.m, 3.3.n) se consigue:

$$m\ddot{x} - m\alpha R^3 \frac{(2z^2 - x^2 - y^2)\dot{y} - 3yz\dot{z}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.o)$$

$$m\ddot{y} - m\alpha R^3 \frac{3zx\dot{z} - (2z^2 - x^2 - y^2)\dot{x}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0, \quad (3.3.p)$$

$$m\ddot{z} - m\alpha R^3 \frac{3z(y\dot{x} - x\dot{y})}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0. \quad (3.3.q)$$

Haciendo los cambios de variables:

$$x_R = \frac{x}{R}, \quad y_R = \frac{y}{R}, \quad z_R = \frac{z}{R}.$$

Las ecuaciones (3.3.o, 3.3.p, 3.3.q) se simplifican a:

$$\ddot{x}_R = \alpha \frac{(2z_R^2 - x_R^2 - y_R^2)\dot{y}_R - 3y_R z_R \dot{z}_R}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{5/2}}, \quad (3.3.r)$$

$$\ddot{y}_R = \alpha \frac{(x_R^2 + y_R^2 - 2z_R^2)\dot{x}_R + 3z_R x_R \dot{z}_R}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{5/2}}, \quad (3.3.s)$$

$$\ddot{z}_R = \alpha \frac{3z_R(y_R \dot{x}_R - x_R \dot{y}_R)}{(x_R^2 + y_R^2 + z_R^2)^{5/2}}. \quad (3.3.t)$$

Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Cartesianas para el Movimiento en el Plano XY.

Considerando que la partícula se mueve en el plano XY, se hace $z_R(t) = 0$ en las ecuaciones (3.3.r, 3.3.s, 3.3.t), y se obtienen las ecuaciones de movimiento en el plano XY:

$$\ddot{x}_R = -\alpha \frac{(x_R^2 + y_R^2)\dot{y}_R}{(x_R^2 + y_R^2)^{5/2}} \quad (3.3.u)$$

$$\ddot{y}_R = \alpha \frac{(x_R^2 + y_R^2)\dot{x}_R}{(x_R^2 + y_R^2)^{5/2}} \quad (3.3.v)$$

Reducción del Número de Ecuaciones de Movimiento en Coordenadas Cilíndricas (Movimiento Tridimensional).

Como la función lagrangiano (3.2.b) no depende de Φ , es decir que:

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = 0.$$

El sistema de 3 ecuaciones (3.3.g, 3.3.h, 3.3.i) se puede reducir a un sistema de 2 ecuaciones. Para conseguir este objetivo hay que considerar que la ecuación (3.3.b) se simplifica a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0,$$

luego de la definición de momento generalizado: $p_{\phi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$

de la última ecuación se deduce que el momento generalizado p_{ϕ} es una cantidad física constante.

Usando la definición de p_{ϕ} se encuentra:

$$p_{\phi} = m\rho^2 \dot{\phi} + \frac{q\mu_0 MR^3}{3} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} \quad (3.4.a)$$

Mediante el cambio de variable indicado en la página 13, se obtiene una expresión equivalente a (3.4.a).

$$p_{\phi} = mR^2 \left[\rho_R^2 \dot{\phi} + \frac{\alpha \rho_R^2}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{3/2}} \right] \quad (3.4.b)$$

La velocidad $\dot{\phi}$ se puede despejar de la ecuación (3.4.b):

$$\dot{\phi} = \frac{p_{\phi}}{mR^2 \rho_R^2} - \frac{\alpha}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{3/2}}$$

Llamando a la constante:

$$v = \frac{p_{\phi}}{mR^2}.$$

En el presente trabajo se considerará que $p_\phi > 0$, y por lo tanto que $v > 0$.

La velocidad $\dot{\phi}$ queda despejada como:

$$\dot{\phi} = \frac{v}{\rho_R^2} - \frac{\alpha}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{3/2}}, \quad (3.4.c)$$

De las ecuaciones (3.4.c), (3.3.g) y (3.3.i) se obtiene:

$$\ddot{\rho}_R = \frac{1}{\rho_R^3} \left(v - \alpha \frac{\rho_R^2}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{3/2}} \right) \left(v + \alpha \frac{\rho_R^2 (z_R^2 - 2\rho_R^2)}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{5/2}} \right), \quad (3.5.a)$$

$$\ddot{z}_R = \frac{1}{\rho_R^3} \left(v - \alpha \frac{\rho_R^2}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{3/2}} \right) \left(-3\alpha \frac{(z_R \rho_R^3)}{(\rho_R^2 + z_R^2)^{5/2}} \right). \quad (3.5.b)$$

que son dos ecuaciones diferenciales de segundo orden y no lineales (considerando las coordenadas cilíndricas adimensionales ρ_R y z_R como coordenadas generalizadas).

CAPITULO IV. MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL DE UNA PARTICULA CARGADA ALREDEDOR DE UNA ESFERA IMANADA.

4.1. INTRODUCCION.

Un caso interesante de movimiento bidimensional ocurre cuando un cuerpo está sometido solamente a fuerzas centrales. Hay que recordar que en este movimiento se conserva el momento angular y la energía mecánica. Considerando el momento angular se define la energía potencial "efectiva" (vea Alonso-Finn, Física, Volumen I, 1986), y con esta nueva magnitud física se deduce las propiedades del movimiento del cuerpo sin necesidad de resolver las ecuaciones de movimiento. Aunque el presente trabajo no corresponde al movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas centrales, se puede demostrar en este capítulo que existe una nueva integral del movimiento (función de las variables dinámicas que permanece constante durante el movimiento). Por medio de esta integral de movimiento se definirá una energía potencial efectiva para el movimiento de la partícula cargada. Luego se demostrará considerando esta energía potencial efectiva (sin resolver las ecuaciones de movimiento) que es posible que exista movimiento circular y después se hallará las condiciones para que ocurra este movimiento. Finalmente se estudiará la estabilidad de la órbita circular.

4.2. CONCEPTOS GENERALES DE LA FUNCION DE HAMILTON.

Primero hay que recordar la definición del Hamiltoniano:

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i - L(q, \dot{q}, t)$$

Donde q_i son las coordenadas generalizadas, \dot{q}_i son las velocidades generalizadas, p_i son los momentos generalizados y N es el número de grados de libertad. Se considera que \dot{q}_i depende de q_i , p_i y t (tiempo).

Se demostrará la propiedad siguiente, si las funciones lagrangiano y hamiltoniano no dependen del tiempo, entonces la función hamiltoniano de un sistema mecánico permanece constante, es decir, si se define la función:

$$H^*(t) = H(q(t), p(t)),$$

al simplificar la función $H^*(t)$ se cumple que:

$$H^*(t) = \text{constante}$$

Este resultado anterior se acostumbra expresar como:

$$H(q, p) = \text{constante}$$

Ahora, se demostrará la propiedad antes mencionada. Hay que recordar que la función Lagrangiano L es una función de las coordenadas generalizadas q_i , velocidades generalizadas \dot{q}_i , y el tiempo t . Si q_i , y \dot{q}_i , se pueden expresar en función del tiempo, L se transforma en una nueva función L^* que depende solo del tiempo, es decir se define:

$$L^*(t) = L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t).$$

Si se deriva a L^* con respecto al tiempo, se obtiene de la teoría de funciones:

$$\frac{dL^*}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial t}, \quad (4.1.a)$$

Si además, la función Lagrangiano no depende explícitamente del tiempo, es decir:

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0,$$

la ecuación (4.1.a) se simplifica a:

$$\frac{dL^*}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i. \quad (4.1.b)$$

De las ecuaciones de Lagrange se deduce:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

y reemplazando en la ecuación (4.1.b), se encuentra que:

$$\frac{dL^*}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i + \sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \left(\frac{d\dot{q}_i}{dt} \right) + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \dot{q}_i \right].$$

Que se puede escribir como:

$$\frac{dL^*}{dt} = \sum_{i=1}^N \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i \right)$$

O también expresarse como:

$$\frac{dL^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i \right), \quad (4.1.c)$$

donde: $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$, son los momentos generalizados.

De la ecuación (4.1.c) se consigue:

$$\frac{dL^*}{dt} - \frac{d}{dt} \left(\sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i \right) = \frac{d}{dt} \left(L^* - \sum_{i=1}^N \dot{q}_i p_i \right) = 0.$$

Se define en general la función H^* , (de una sola variable, t), como:

$$H^*(t) = \sum_{i=1}^N \dot{q}_i(t) p_i(t) - L^*(t) \quad (4.2)$$

Que se relaciona con el Hamiltoniano H .

Se concluye de las ecuaciones anteriores que si la derivada parcial de la función Lagrangiano L con respecto al tiempo es cero, se deduce que H^* es una constante del movimiento, que en adelante se denotará como C . Al usar la notación acostumbrada se tiene que la función hamiltoniano del sistema cumple:

$$H(q, p) = C(\text{constante})$$

Donde C es una constante que depende de las condiciones iniciales.

4.3. ORBITAS CIRCULARES DE LA PARTICULA CARGADA EN SU MOVIMIENTO ALREDEDOR DE LA ESFERA IMANADA.

Fórmula de la Integral de Movimiento.

Aplicando la definición (4.2) al caso de estudio de este trabajo, y considerando la ecuación (3.2.b), (página 12), se obtiene:

$$C = \dot{z}p_z + \dot{\rho}p_\rho + \dot{\phi}p_\phi - \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2) - \frac{q\mu_0 MR^3}{3} \frac{\rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}\dot{\phi}. \quad (4.2.a)$$

Si se usa el lagrangiano en coordenadas cilíndricas, estos momentos son:

$$p_z = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right), \quad p_\rho = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\rho}}\right), \quad p_\phi = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}\right).$$

Luego:

$$p_z = m\dot{z}, \quad p_\rho = m\dot{\rho}.$$

p_ϕ ya fue hallado en la página 16 (ecuación (3.4.a)).

Si en la ecuación (4.2.a) se reemplazan la velocidad generalizada $\dot{\phi}$ por el momento generalizado p_ϕ , (vea página 16) y los momentos p_ρ y p_z respectivamente por las velocidades $\dot{\rho}$, \dot{z} ; la ecuación (4.2.a) se convierte en:

$$C = \frac{1}{2}m(\dot{z}^2 + \dot{\rho}^2) + \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\phi - \frac{\alpha m R^3 \rho^2}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)^2. \quad (4.2.b)$$

La definición de α se encuentra en la página 13.

Análisis del Movimiento Bidimensional.

Por otra parte, si se evalúa el campo magnético en el plano XY, de la ecuación (2.11.c) (página 8), se encuentra que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{-(\hat{e}_z)}{\rho^3},$$

o de la ecuación (2.13.c) (página 9), se encuentra que:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{MR^3}{3} \frac{(-\hat{k})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}},$$

es obvio que ambas expresiones son equivalentes.

Se concluye que el campo magnético apunta en dirección perpendicular al plano XY. Si inicialmente la partícula cargada tiene su velocidad en el plano XY, al aplicar la relación de Lorentz: $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$, se obtiene que la fuerza sobre la partícula se encuentra en el plano XY (figura 4). Entonces, el movimiento estará contenido en el plano XY, si inicialmente la partícula se encuentra en el plano XY y su velocidad inicial está contenida en el plano XY.

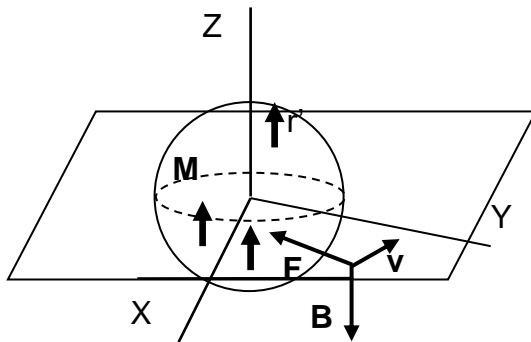


Figura 4. Una partícula cargada que se mueva en el plano XY estará sometida a una fuerza \mathbf{F} ejercida por el campo magnético \mathbf{B} . La fuerza \mathbf{F} está orientada en el plano XY. La figura muestra el caso de que la carga sea positiva.

Para este movimiento bidimensional se tiene que: $z(t) = 0$, $\dot{z}(t) = 0$; se representará a la cantidad C por C' , y luego la ecuación (4.2.b) se simplifica a:

$$C' = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\phi - \frac{amR^3}{\rho} \right)^2 \quad (4.2.c)$$

El segundo término de la ecuación (4.2.c) depende solo de ρ , por ello, puede volverse a escribir como:

$$C' = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + V_{pef}(\rho). \quad (4.2.d)$$

En la cual se ha definido la energía potencial efectiva V_{pef} como:

$$V_{pef} = \frac{1}{2m\rho^2} \left(p_\phi - \frac{amR^3}{\rho} \right)^2 \quad (4.3.a)$$

La ecuación (4.2.d) es similar a la fórmula:

$$E_M = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 + E_{pef}(\rho).$$

Que se considera para analizar cualitativamente el movimiento de una partícula sometida a fuerzas centrales (vea Goldstein, Mecánica Clásica, 2000).

En el curso de Mecánica Teórica se estudia el gráfico de la función energía potencial efectiva. De ese gráfico se obtiene las propiedades de la trayectoria de la partícula. A continuación se aplicará el método usado en ese curso al caso de la presente tesis. Haciendo previamente un cambio de variable $\rho_R = \rho/R$ (en lugar de ρ), y al dividir la ecuación (4.3.a) entre "mR²", se obtiene:

$$V_{pef}^* = \frac{1}{2\rho_R^2} \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2, \quad (4.3.b)$$

Válido para $\rho_R > 1$.

Hay que recordar que la definición de v se encuentra en la página 16.

Como mR^2 es una constante es equivalente analizar las funciones V_{pef} o V_{pef}^* . A continuación se mostrará la gráfica de la función V_{pef}^* para cualquier valor de $\rho_R > 1$.

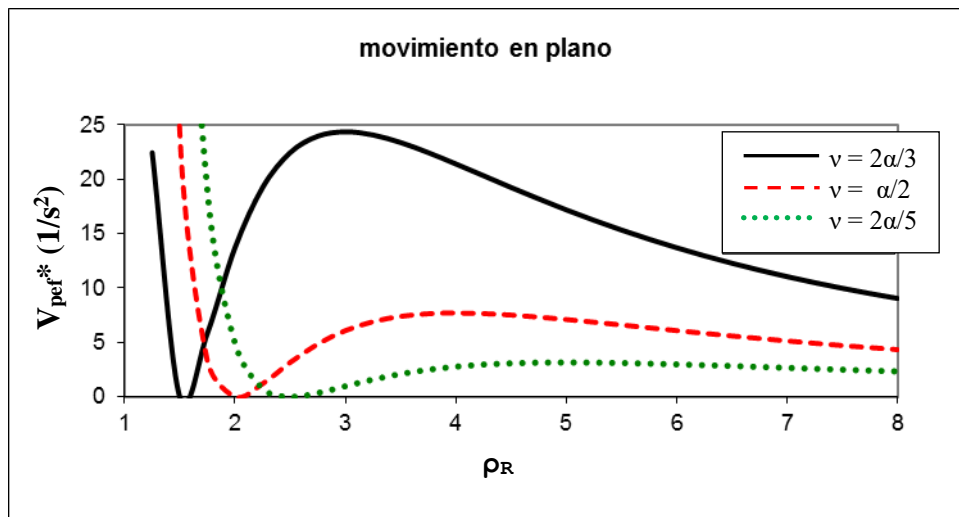


Figura 5. "Energía potencial efectiva" V_{pef}^* en función de la coordenada polar ρ_R ; con $v = 2\alpha/3$, $\alpha/2$ y $2\alpha/5$, donde $\alpha = 20\pi/s$.

En la figura 5, se ha graficado la función V_{pef}^* para tres valores de $v = 2\alpha/3$, $\alpha/2$ y $2\alpha/5$, siendo $\alpha = 20\pi/s$.

Puede observarse que V_{pef}^* es siempre positivo y muestra un mínimo y un máximo. En el Anexo C (página 67) se demuestra que la curva graficada numéricamente es en general una función con un máximo y un mínimo. Además de que V_{pef}^* siempre es positivo. Por lo tanto, las conclusiones que se obtengan de un gráfico de la función V_{pef}^* para un valor particular de α , se pueden generalizar para cualquier valor de α .

De la figura 5 se observa que existen valores de ρ_R en los cuales la función V_{pef} tiene un mínimo y un máximo.

Si en la ecuación (4.2.c) se divide entre " mR^2 ", se obtiene:

$$C'^* = \frac{1}{2}\dot{\rho}_R^2 + \frac{1}{2\rho_R^2}\left(v - \frac{\alpha}{\rho_R}\right)^2. \quad (4.2.e)$$

Como " mR^2 " es constante, C'^* será también una constante del movimiento al igual que C' .

En la figura 6 se muestra el gráfico de la función $V_{\text{pef}}^*(\rho_R)$ para $v = \alpha/2 = 10\pi/s$. Se compara a la energía potencial efectiva V_{pef}^* con la constante C'^* . La línea curva es V_{pef}^* y las líneas rectas son valores posibles de C'^* .

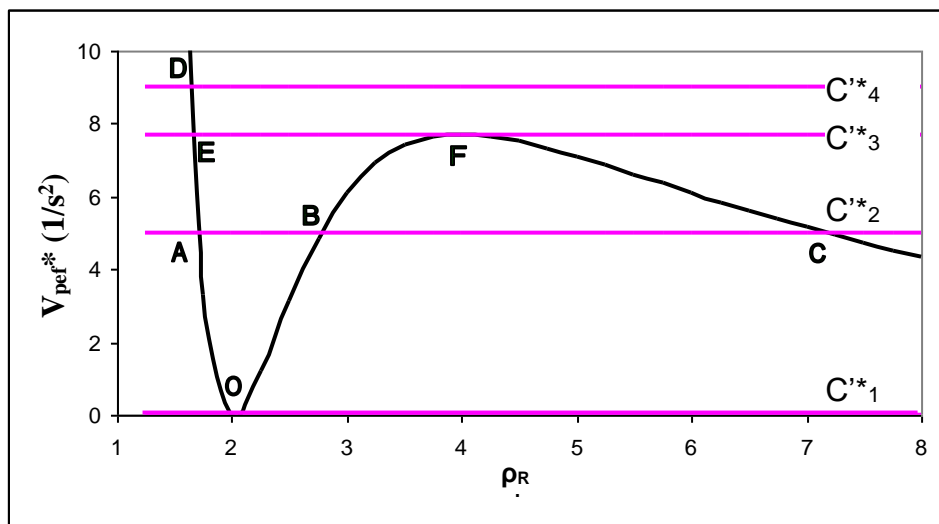


Figura 6. "Energía potencial efectiva" y la función C'^* . La gráfica se realizó para $v = \alpha/2 = 10\pi/s$, $C'^*_1 = 0$, $C'^*_2 = 5/s^2$, $C'^*_3 = 7,711/s^2$, $C'^*_4 = 9/s^2$.

De este gráfico se puede deducir características del movimiento, teniendo los siguientes casos notables:

a. Si $C'^* = C'^*_1$, es decir, coinciden C'^* y el mínimo de V_{pef}^* . En este caso es posible que la partícula describa un movimiento circular y se puede probar que es un movimiento circular uniforme. El punto donde V_{pef}^* es mínimo se dice que es un punto de "equilibrio estable", pues si la partícula es desplazada ligeramente de esa posición, tenderá a regresar a la "posición" original, es decir la distancia de la partícula al origen de coordenadas oscila alrededor del valor de ρ_R (donde V_{pef}^* es mínimo).

b. Si $C'^* = C'^*_2$, hay dos subcasos, ya que el primer término de (4.2.e) no puede ser negativo, V_{pef}^* debe ser menor o igual que C'^*_2 . En uno de los subcasos, existe un valor mínimo y un valor máximo de la coordenada adimensional ρ_R , es decir, el movimiento de la partícula está restringido a moverse en un anillo de radio interior $\rho_{R\text{mínimo}}$ y de radio exterior $\rho_{R\text{máximo}}$. En el otro subcaso, la partícula está confinada a desplazarse a la derecha de C , donde la coordenada ρ_R tiene su valor mínimo.

c. Si $C'^* = C'^*_3$, es decir, coinciden C'^* y el máximo de V_{pef}^* . De modo similar al caso a, en este caso es posible que la partícula describa una trayectoria circular a rapidez constante. El punto donde V_{pef}^* es máximo es un punto de equilibrio inestable, pues si la partícula es desplazada ligeramente de esa posición a la derecha, tenderá a alejarse de la posición original. La partícula está restringida a moverse a la derecha de E (porque el primer término de la ecuación (4.2.e) nunca es negativo).

d. Si $C'^* = C'^*_4$, el movimiento de la partícula estará restringido a moverse a la derecha de D (donde ρ_R toma el valor mínimo), porque si se moviera a la izquierda de D , el primer término de (4.2.e) sería negativo, lo cual es imposible.

Por otra parte, se mencionó anteriormente que es posible que ocurran trayectorias circulares, una estable y la otra inestable, según el gráfico de la figura 5. Para comprobar la conclusión anterior se efectúa el siguiente estudio de las ecuaciones diferenciales del movimiento.

Si se usa la restricción al movimiento en el plano XY en la ecuación (3.5.a) (página 17) se obtiene:

$$\ddot{\rho}_R = \frac{1}{\rho_R^3} \left(\nu - \frac{\alpha}{\rho_R} \right) \left(\nu - \frac{2\alpha}{\rho_R} \right). \quad (4.4.a)$$

Se puede demostrar que la ecuación anterior equivale a la siguiente:

$$\ddot{\rho}_R = -\frac{dV_{pef}^*}{d\rho_R}. \quad (4.4.b)$$

En una órbita circular la coordenada ρ_R es una constante (radio de órbita). Luego tanto $\dot{\rho}_R$ como $\ddot{\rho}_R$ son iguales a cero. Entonces de la ecuación (4.4.b) se deduce que los radios de las órbitas circulares coinciden con los valores de ρ_R donde la función V_{pef}^* es mínima ó máxima, y pueden encontrarse igualando la expresión derecha de la ecuación (4.4.a) a cero, es decir:

$$\frac{dV_{pef}^*}{d\rho_R} = \frac{1}{\rho_R^3} \left(\nu - \frac{\alpha}{\rho_R} \right) \left(\frac{2\alpha}{\rho_R} - \nu \right) = 0. \quad (4.5)$$

Para que la ecuación (4.5) sea cierta se debe cumplir:

$$\rho_R = \frac{\alpha}{\nu} \quad \text{ó} \quad \rho_R = \frac{2\alpha}{\nu}.$$

De acuerdo con la figura 5, los valores primero y segundo corresponden respectivamente a la coordenada polar ρ_R cuando la función V_{pef}^* toma su mínimo y máximo (Vea Anexo C, página 67). Es posible entonces que ocurran trayectorias circulares.

Condiciones Para que el Movimiento sea Circular.

Si se aplica la condición de que la órbita sea una circunferencia en el plano XY, de la ecuación (3.3.j) (página 14) se obtiene:

$$-\rho_R \dot{\phi} + \frac{\alpha}{\rho_R^2} = 0, \quad (4.6.a)$$

O equivalentemente:

$$\rho_R^3 \dot{\phi} = \alpha. \quad (4.6.b)$$

que en particular se cumple para $\rho_R^3(0) \dot{\phi}(0) = \alpha$.

Esta es una relación que debe cumplir las condiciones iniciales $\rho_R(0)$ y $\dot{\phi}(0)$ para que el movimiento sea una trayectoria circular.

A continuación se hallará los valores de la velocidad angular $\dot{\phi}(0)$ que debería tener el movimiento circular. Hay dos casos:

Caso I. Si en la ecuación (3.4.c) se reemplaza el valor $\rho_R = \alpha/v$ y $z_R(t) = 0$, se encuentra que:

$$\dot{\phi} = \left(v - \frac{\alpha}{\alpha/v} \right) \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{v} \right)^2}.$$

Entonces se llega: $\dot{\phi} = 0$, lo cual es un absurdo ya que al moverse la partícula en una circunferencia, $\dot{\phi}$ debe ser diferente de cero.

Caso II. Ahora se reemplaza $\rho_R = 2\alpha/v$ y $z_R(t) = 0$, en la ecuación (3.4.c), obteniendo:

$$\dot{\phi} = \left(v - \frac{\alpha}{2\alpha/v} \right) \frac{1}{\left(\frac{2\alpha}{v} \right)^2},$$

y se encuentra que:

$$\dot{\phi} = \frac{v^3}{8\alpha^2} = \alpha \left(\frac{v}{2\alpha} \right)^3,$$

por lo tanto:

$$\dot{\phi} = \frac{\alpha}{\rho_R^3},$$

Entonces, solo son posibles órbitas circulares inestables. Esta afirmación se comprobará numéricamente en el capítulo seis.

4.4. MOVIMIENTO DE LA PARTICULA CARGADA PROXIMA A LA CIRCUNFERENCIA DE RADIO $\rho_R = \alpha/v$.

En este apartado se hará el análisis usando la aproximación con serie de Taylor. Esta técnica se utilizó en "Classical Dynamics of Particles and Systems" de Thorton y Marion (2003).

Repasando la figura 5, se vio que en el valor de $\rho_R = \alpha/v$, la función V_{pef}^* toma el valor mínimo. Se revisará el caso en que la partícula se mueva en una trayectoria próxima a la circunferencia $\rho_R = \alpha/v = \rho_{RI}$, $z_R(t) = 0$.

Si $\rho_R \sim \rho_{RI}$, se puede expresar la función V_{pef}^* como una serie de Taylor alrededor de ρ_{RI} :

$$V_{pef}^*(\rho_R) = V_{pef}^*(\rho_{RI}) + \left. \frac{dV_{pef}^*}{d\rho_R} \right|_{\rho_{RI}} (\rho_R - \rho_{RI}) + \frac{1}{2} \left. \frac{d^2V_{pef}^*}{d\rho_R^2} \right|_{\rho_{RI}} (\rho_R - \rho_{RI})^2 + \dots$$

Al evaluar los dos primeros términos, se encuentra que:

$$\begin{aligned} V_{pef}^*(\rho_{RI}) &= 0 \\ \left. \frac{dV_{pef}^*}{d\rho_R} \right|_{\rho_{RI}} &= 0 \end{aligned}$$

En el Anexo C (página 67) se demuestra que:

$$\left. \frac{d^2V_{pef}^*}{d\rho_R^2} \right|_{\rho_R = \frac{\alpha}{v}} = \frac{v^6}{\alpha^4} ;$$

Entonces la función V_{pef}^* queda como:

$$V_{pef}^*(\rho_R) = \frac{1}{2} \omega_0^2 (\rho_R - \rho_{RI})^2$$

Donde: $\omega_0 = \frac{v^3}{\alpha^2}$

Luego, recordando la ecuación (4.2.e) se obtiene:

$$C'^* = \frac{1}{2} \dot{\rho}_R^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\rho_R - \rho_{RI})^2$$

Al tomar la derivada de C'^* con respecto al tiempo:

$$\frac{dC'^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\rho}_R^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 (\rho_R - \rho_{RI})^2 \right]$$

e igualando la expresión derecha a cero, se obtiene:

$$0 = \dot{\rho}_R \ddot{\rho}_R + \omega_0^2 (\rho_R - \rho_{RI}) \dot{\rho}_R$$

Si $\dot{\rho}_R \neq 0$, entonces de la expresión anterior queda la ecuación diferencial:

$$\ddot{\rho}_R + \omega_0^2 (\rho_R - \rho_{RI}) = 0$$

Haciendo el cambio de variable: $\rho_R - \rho_{RI} = s$

La ecuación anterior se convierte en: $\ddot{s} + \omega_0^2 s = 0$

cuya solución es: $s(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta)$

Regresando a la variable original en la solución:

$$\rho_R(t) = A \sin(\omega_0 t + \delta) + \rho_{RI}$$

Derivando la solución con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\dot{\rho}_R(t) = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \delta)$$

Imponiendo la condición: $\dot{\rho}_R(0) = 0$,

en la derivada, se encuentra que: $A \omega_0 \cos \delta = 0$

con lo cual se obtiene el valor: $\delta = \frac{\pi}{2}$

Luego, la solución $\rho_R(t)$ queda como:

$$\rho_R(t) = A \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \rho_{RI}$$

Haciendo $t = 0$, en la solución:

$$\rho_R(0) = A \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \rho_{RI} = A + \rho_{RI}$$

Y despejando la constante A de la ecuación anterior:

$$A = \rho_R(0) - \rho_{RI}$$

Entonces la solución $\rho_R(t)$ queda:

$$\rho_R(t) = (\rho_R(0) - \rho_{RI}) \operatorname{sen}\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right) + \rho_{RI}$$

O por propiedad trigonométrica:

$$\rho_R(t) = (\rho_R(0) - \rho_{RI}) \cos(\omega_0 t) + \rho_{RI}$$

Con lo cual se deduce que $\rho_R(t)$ es una función senoidal del tiempo.

Finalmente, reemplazando: $\rho_{RI} = \alpha/v$,

en la solución $\rho_R(t)$:

$$\rho_R(t) = \left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v}$$

Cálculo de la Velocidad Angular $\dot{\phi}(t)$.

De la ecuación (3.4.c) (página 17), se puede encontrar la velocidad angular $\dot{\phi}(t)$, reemplazando la expresión hallada para $\rho_R(t)$:

$$\dot{\phi}(t) = \frac{v}{\left(\left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v}\right)^2} - \frac{\alpha}{\left(\left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v}\right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v}\right)^3}$$

Aunque $\dot{\phi}(t)$ es una función complicada, se puede deducir que tiene un comportamiento periódico.

Si se pudiese integrar: $\int_0^t \dot{\phi}(t) dt$

Por algunos métodos numéricos, se podría hallar las coordenadas cartesianas, mediante las fórmulas:

$$x_R(t) = \left(\left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v} \right) \cos(\phi(t)),$$

$$y_R(t) = \left(\left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v} \right) \text{sen}(\phi(t))$$

Por último, se puede demostrar de las dos últimas relaciones que la ecuación de la trayectoria del movimiento de la partícula cargada es:

$$x_R^2 + y_R^2 = \left(\left(\rho_R(0) - \frac{\alpha}{v} \right) \cos(\omega_0 t) + \frac{\alpha}{v} \right)^2$$

Recordando que: $\mathbf{x}_R^2 + \mathbf{y}_R^2 = \rho_R^2$

La ecuación de la trayectoria coincide justamente con la solución de $\rho_R(t)$ obtenida en la página 30.

CAPITULO V. MOVIMIENTO DE LA PARTICULA CARGADA ALREDEDOR DE LA TRAYECTORIA CIRCULAR.

5.1. INTRODUCCION.

La serie de Taylor proporciona una buena forma de aproximar el valor de una función en un punto donde es difícil hacer un cálculo directo, por ejemplo si se quiere calcular e^{-10} , se debe considerar el teorema de Taylor. Esta técnica se utilizará para simplificar (linealizar) las ecuaciones diferenciales complicadas y resolverlas analíticamente alrededor de puntos en reposo (vea el Anexo D, página 70).

En general las ecuaciones diferenciales del movimiento para el caso bidimensional o tridimensional son difíciles de resolver, por eso se considera la resolución numérica. Pero en el caso del presente trabajo, si el movimiento es aproximado a la trayectoria circular, se puede linealizar las ecuaciones diferenciales del movimiento y se podrán resolver con facilidad. Por otro lado, se puede aplicar la teoría de estabilidad de Lyapunov a las ecuaciones linealizadas.

5.2. CONCEPTOS GENERALES.

Aparte de solucionar las ecuaciones (3.3.j) y (3.3.k) (página 14), mediante algún método numérico, hay que estudiar la estabilidad de las soluciones en los puntos de reposo. Para ello, primero hay que recordar que una función real o compleja $f(x)$ se puede expandir en una serie de potencias o serie de Taylor, en el entorno de un número real x_0 :

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x_0) \frac{(x-x_0)^i}{i!},$$

es decir:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \frac{(x-x_0)}{1!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0) \frac{(x-x_0)^2}{2!} + \dots \quad (5.1.a)$$

Esta expansión (5.1.a.) de serie de potencias también se puede aplicar a una función de dos variables $f(x_1, x_2)$:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial x_1^i} \frac{\partial^j f}{\partial x_2^j}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_1-x_{10})^i}{i!} \frac{(x_2-x_{20})^j}{j!}$$

Que puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
 f(x_1, x_2) = & f(x_{10}, x_{20}) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_1 - x_{10})^1}{1!} + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_2 - x_{20})^1}{1!} \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_1 - x_{10})^2}{2!} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_2 - x_{20})^2}{2!} \\
 & + \frac{\partial^1}{\partial x_1^1} \frac{\partial f}{\partial x_2^1}(x_{10}, x_{20}) \frac{(x_1 - x_{10})^1}{1!} \frac{(x_2 - x_{20})^1}{1!} + \dots \quad (5.1.b)
 \end{aligned}$$

Generalizando (5.1.a)-(5.1.b) a una función de n variables $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$f(\bar{x}) = \sum_{i=0}^{\infty} \dots \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\partial^i}{\partial x_1^i} \dots \frac{\partial^\ell f}{\partial x_n^\ell}(\bar{x}_0) \frac{(x_1 - x_{10})^i \dots (x_n - x_{n0})^\ell}{i! \dots \ell!}. \quad (5.1.c)$$

Donde:

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \text{y} \quad \bar{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}),$$

Si se cumple que en el punto \bar{x}_0 la función se anula:

$$f(\bar{x}_0) = 0.$$

y que además los términos en (5.1.c) de potencias iguales o mayores a 2 son despreciables por ser pequeños, la función f se puede aproximar como:

$$f(\bar{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}_0)(x_1 - x_{10}) \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}_0)(x_n - x_{n0}). \quad (5.1.d)$$

La aproximación (5.1.d) también puede aplicarse si se tiene un conjunto de n funciones f_i ($i = 1, 2, \dots, n$), luego:

$$\begin{aligned}
 f_1(\bar{x}) = & \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0)(x_1 - x_{10}) \quad \dots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0)(x_n - x_{n0}), \\
 & \vdots \\
 f_n(\bar{x}) = & \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_0)(x_1 - x_{10}) \quad \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_0)(x_n - x_{n0}).
 \end{aligned} \quad (5.1.e)$$

El sistema de ecuaciones (5.1.e) puede escribirse en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_n(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ \vdots \\ x_n - x_{n0} \end{bmatrix}, \quad (5.1.f)$$

La matriz cuadrada de orden n en la ecuación (5.1.f), se llama matriz jacobiana.

Por ejemplo, para n = 4, que es el caso de este trabajo, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ f_3(\bar{x}) \\ f_4(\bar{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_4}(\bar{x}_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_4}(\bar{x}_0) \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_3}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_3}{\partial x_4}(\bar{x}_0) \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_4}{\partial x_2}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_4}{\partial x_3}(\bar{x}_0) & \frac{\partial f_4}{\partial x_4}(\bar{x}_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{10} \\ x_2 - x_{20} \\ x_3 - x_{30} \\ x_4 - x_{40} \end{bmatrix}.$$

Con el último resultado, el sistema de ecuaciones $\dot{x}_i = f_i(\bar{x})$:

$$\dot{x}_1 = f_1(\bar{x}), \quad \dot{x}_2 = f_2(\bar{x}), \quad \dot{x}_3 = f_3(\bar{x}), \quad \dot{x}_4 = f_4(\bar{x}).$$

donde $f(\bar{x}_0) = 0$, se linealiza.

A continuación se aplicará esta teoría al ejemplo siguiente, sean las funciones:

$$\begin{aligned} f_1(\bar{x}) &= 2x_3 + 3x_4 \\ f_2(\bar{x}) &= x_4 - 4x_3 \\ f_3(\bar{x}) &= (x_1 - 5)(x_4 + 5x_2) \\ f_4(\bar{x}) &= (x_2 + 2)(x_3 - 2x_1) \end{aligned}$$

considerando $f_i(\bar{x}) = 0$, el punto de reposo es:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0,$$

Obteniendo las derivadas y evaluando en el punto solución, se obtiene la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} f_1(\vec{x}) \\ f_2(\vec{x}) \\ f_3(\vec{x}) \\ f_4(\vec{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \\ -10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 5 \\ x_2 + 2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

que es equivalente a:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{x}) &= 2x_3 + 3x_4 \\ f_2(\vec{x}) &= x_4 - 4x_3 \\ f_3(\vec{x}) &= -10(x_1 - 5) \\ f_4(\vec{x}) &= -10(x_2 + 2) \end{aligned}$$

Con la ecuación (5.1.f), se puede linealizar el sistema de ecuaciones $\dot{x}_i = f_i(\vec{x})$, alrededor del punto \vec{x}_0 el cual es un punto de reposo.

5.3. ESTABILIDAD DEL MOVIMIENTO DE LA PARTICULA CARGADA EN EL CAMPO MAGNETICO DE UNA ESFERA IMANADA.

Para aplicar (5.1.e) al sistema de ecuaciones (3.5.a) y (3.5.b) (página 17), se hace primero el cambio de variables:

$$x_1 = \rho_R, \quad x_2 = z_R, \quad x_3 = \dot{\rho}_R, \quad x_4 = \dot{z}_R.$$

Entonces el sistema de ecuaciones de segundo orden se transforma en otro sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\dot{x}_1 = x_3 \tag{5.2.a}$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \tag{5.2.b}$$

$$\dot{x}_3 = x_1 \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{v}{x_1^2} + \frac{\alpha(x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right) \tag{5.2.c}$$

$$\dot{x}_4 = x_1 \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \left(-\frac{3\alpha x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right) \tag{5.2.d}$$

Si se reemplazan las derivadas \dot{x}_i de las ecuaciones (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d) por:

$$\dot{x}_1 = f_1(\vec{x}), \quad \dot{x}_2 = f_2(\vec{x}), \quad \dot{x}_3 = f_3(\vec{x}), \quad \dot{x}_4 = f_4(\vec{x}).$$

Se reescribe el conjunto de ecuaciones (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d) como:

$$f_1 = x_3, \tag{5.2.e}$$

$$f_2 = x_4, \tag{5.2.f}$$

$$f_3 = x_1 \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \left(\frac{v}{x_1^2} + \frac{\alpha(x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right), \tag{5.2.g}$$

$$f_4 = x_1 \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \left(-\frac{3\alpha x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right). \tag{5.2.h}$$

No todas las variables x_i aparecen explícitamente en las ecuaciones (5.2.e, 5.2.f, 5.2.g, 5.2.h), y se comprueba que:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial f_1}{\partial x_4} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_3} = \frac{\partial f_3}{\partial x_4} = \frac{\partial f_4}{\partial x_3} = \frac{\partial f_4}{\partial x_4} = 0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_3} = \frac{\partial f_2}{\partial x_4} = 1.$$

A continuación se calcula las otras derivadas parciales:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3}{\partial x_1} = & \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \left(-\frac{2v}{x_1^2} + \frac{3\alpha x_1^2 (2x_1^2 - 3x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{7/2}} \right) \\ & - \left(\frac{v}{x_1^2} + \frac{\alpha(x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right)^2, \end{aligned} \tag{5.3.a}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_3}{\partial x_2} &= \frac{3\alpha x_1 x_2 (4x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{7/2}} \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \\ &+ \frac{3\alpha x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \left(\frac{v}{x_1^2} + \frac{\alpha(x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right),\end{aligned}\quad (5.3.b)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_1} &= \frac{3\alpha x_1 x_2 (4x_1^2 - x_2^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{7/2}} \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \\ &+ \frac{3\alpha x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \left(\frac{v}{x_1^2} + \frac{\alpha(x_2^2 - 2x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right),\end{aligned}\quad (5.3.c)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_4}{\partial x_2} &= \frac{3\alpha x_1^2 (4x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^{7/2}} \left(\frac{v}{x_1^2} - \frac{\alpha}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}} \right) \\ &- \left(\frac{3\alpha x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{5/2}} \right)^2.\end{aligned}\quad (5.3.d)$$

Para encontrar el punto de reposo \bar{x}_0 , en el cual las funciones f_i se anulan, se igualan a cero los segundos miembros de la ecuaciones (5.3.a, 5.3.b, 5.3.c, 5.3.d). Es obvio que las raíces de la ecuación algebraica $f_i(\bar{x}_0)=0$. que son físicamente de interés en este trabajo son:

$$x_{10} = \frac{2\alpha}{v} \quad \text{ó} \quad x_{10} = \frac{\alpha}{v},$$

y:

$$x_{20} = x_{30} = x_{40} = 0,$$

entonces hay dos posibles trayectorias circulares que están en el plano XY, obtenidas al calcular los puntos de reposo del sistema de ecuaciones diferenciales (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d).

Se analizará solo el punto de reposo: $\bar{x}_0 = \left(\frac{2\alpha}{v}, 0, 0, 0 \right)$,

el otro punto de reposo no se analizará porque se demostró que esa trayectoria es imposible (ver página 27).

Al calcular la matriz jacobiana se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2\sigma & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3\sigma & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

con:
$$\sigma = \frac{v^6}{64\alpha^4}.$$

El sistema de ecuaciones (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d) para puntos cercanos al punto de reposo se reduce a:

$$\dot{x}_1 = x_3 \quad (5.4.a)$$

$$\dot{x}_2 = x_4 \quad (5.4.b)$$

$$\dot{x}_3 = 2\sigma \left[x_1 - \frac{2\alpha}{v} \right] \quad (5.4.c)$$

$$\dot{x}_4 = -3\sigma x_2 \quad (5.4.d)$$

El sistema original de ecuaciones de movimiento (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d) se ha linealizado al sistema (5.4.a, 5.4.b, 5.4.c, 5.4.d).

Estas nuevas ecuaciones son fáciles de resolver. Si se reemplaza (5.4.a) y (5.4.b) en (5.4.c) y (5.4.d) respectivamente, se obtiene el sistema de dos ecuaciones diferenciales:

$$\ddot{x}_1 = 2\sigma \left(x_1 - \frac{2\alpha}{v} \right) \quad (5.4.e)$$

$$\ddot{x}_2 = -3\sigma x_2 \quad (5.4.f)$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1(t) = \frac{2\alpha}{v} + A_1 e^{\sqrt{2\sigma}t} + A_2 e^{-\sqrt{2\sigma}t},$$

$$x_2(t) = B \operatorname{sen}(\sqrt{3\sigma}t + \psi).$$

Recordando que: $x_1 = \rho_R, \quad x_2 = z_R.$

Entonces:

$$\rho_R(t) = \frac{2\alpha}{v} + A_1 e^{\sqrt{2\sigma}t} + A_2 e^{-\sqrt{2\sigma}t},$$

$$z_R(t) = B \text{sen}(\sqrt{3\sigma}t + \psi).$$

Se deduce de esta solución que a medida que avanza el tiempo t , la partícula se aleja del origen, pero su movimiento está limitado por dos planos $z = B, z = -B$.

5.4. APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE ESTABILIDAD SEGÚN LYAPUNOV.

La estabilidad de la solución al sistema de ecuaciones (5.4.a, 5.4.b, 5.4.c, 5.4.d) se puede deducir si se hallan los valores propios " λ " de la matriz jacobiana.

Sea \mathbf{A} la matriz jacobiana calculada para $\vec{x}_0 = (\frac{2\alpha}{v}, 0, 0, 0)'$,

para encontrar los valores propios hay que igualar a cero el determinante de la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$, es decir:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ 2\sigma & 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & -3\sigma & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Al resolver la ecuación anterior, se obtienen los autovalores:

$$\lambda_1 = \sqrt{2\sigma}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2\sigma}, \quad \lambda_3 = \sqrt{3\sigma}i, \quad \lambda_4 = -\sqrt{3\sigma}i.$$

De acuerdo al criterio de Lyapunov (vea el Anexo D, página 70), si se obtiene al menos un valor con parte real positiva, todas las soluciones alrededor del punto de reposo son inestables.

CAPITULO VI. ANALISIS NUMERICO.

6.1. INTRODUCCION.

En este capítulo se mostrarán los gráficos de la solución numérica de las ecuaciones (3.3.j - 3.3.k) y (3.5.a - 3.5.b). Estas ecuaciones se resolvieron con el método de Rugen-Kutta de orden 4. Para aplicar este método se utilizó el programa MATLAB versión 7.0.

Se consideró el parámetro α igual a $20\pi/s$ (a menos que se indique lo contrario).

6.2. ORBITAS EN EL PLANO XY.

Primero se mostrará órbitas circulares inestables al resolver numéricamente las ecuaciones diferenciales (3.3.j - 3.3.k) (página 14). Para ello se ajustan los datos iniciales a la condición (4.6.b) (página 26), con el objetivo de encontrar posibles movimientos circulares.

Las figuras 7 y 8 muestran los resultados para dos condiciones iniciales diferentes. Las órbitas circulares se observan en las figuras 7.b y 8.b. En las figuras 7.a y 8.a se confirma que tanto la coordenada polar ρ_R como la velocidad $\dot{\phi}$ son aproximadamente constantes e iguales a las condiciones iniciales dadas (el valor de la coordenada polar ρ_R se escoge arbitrariamente y el valor de la velocidad $\dot{\phi}$ se ajusta con la ecuación (4.6.b)).

Las figuras 9 y 10 muestran como afecta el movimiento cuando se perturba los valores iniciales (reduciendo su magnitud en 0,05%) que cumplen la relación (4.6.b).

En las figuras 9.b y 10.b, se observa que las trayectorias ya no son circulares sino que hacen rizados.

En las figuras 9.a y 10.a se puede notar que tanto ρ_R y $\dot{\phi}$ no son constantes. La coordenada polar ρ_R se mantiene acotada entre un valor mínimo y un valor máximo (este último coincide con el valor $\rho_R(0)$), como ya se presumía del análisis hecho en el capítulo 4, con respecto a la energía potencial efectiva. La coordenada ρ_R y la velocidad $\dot{\phi}$ parecen comportarse como funciones periódicas.

En las figuras 9.a y 10.a se puede notar que el momento generalizado $p_{\phi}^* = p_{\phi}/mR^2$ se mantiene prácticamente constante, lo cual concuerda con la definición de v (vea página 16). Luego, los cálculos numéricos son consistentes con lo predicho en el capítulo cuatro.

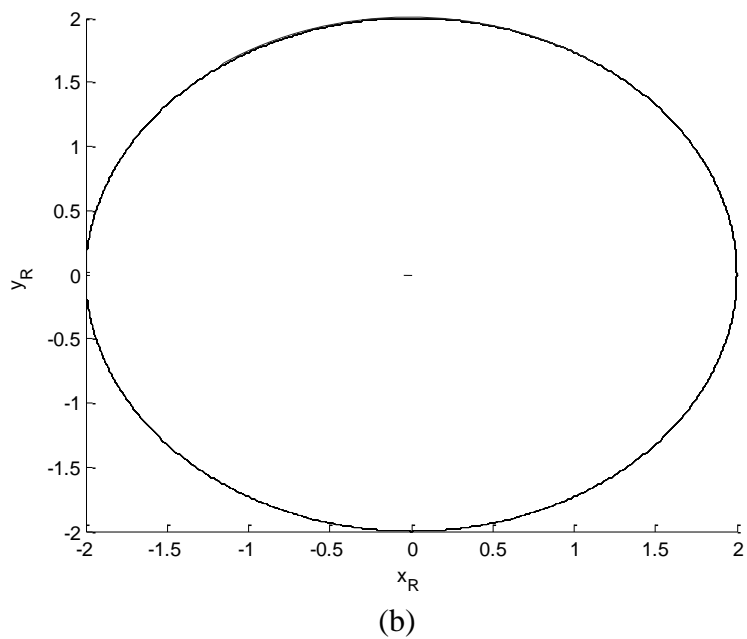
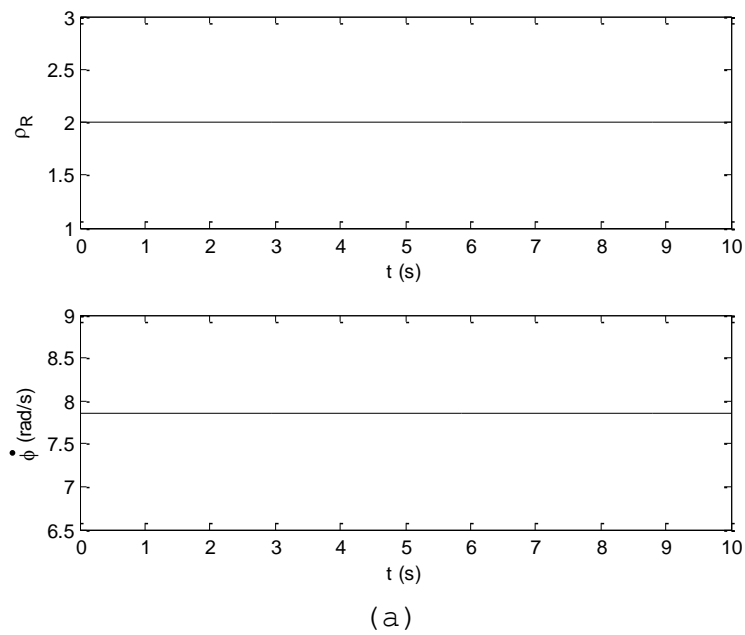
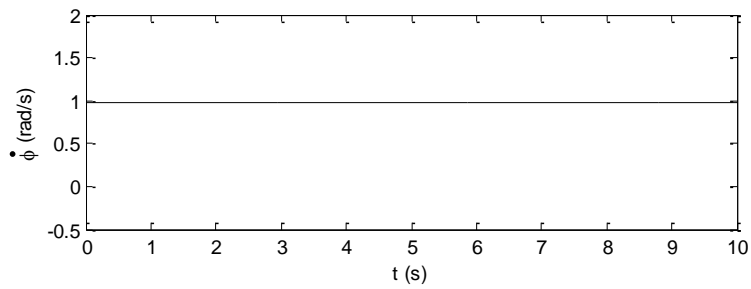
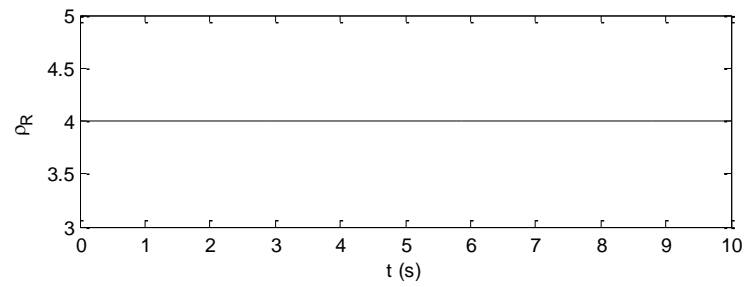
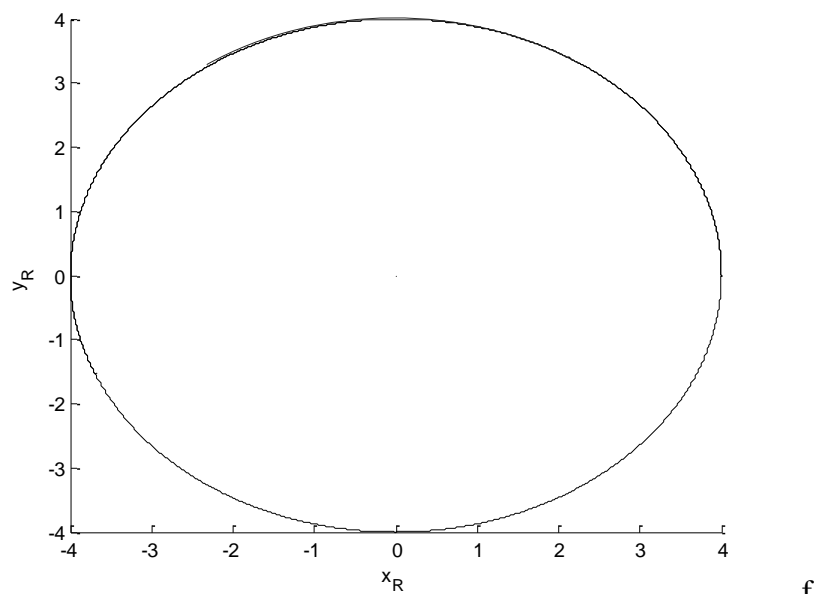


Figura 7. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R y velocidad $\dot{\phi}$ en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2$, $\dot{\phi} = 2,5\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\Phi = 0$.



(a)



(b)

Figura 8. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R y velocidad $\dot{\phi}$ en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 4$, $\dot{\phi} = 5\pi/16$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$.

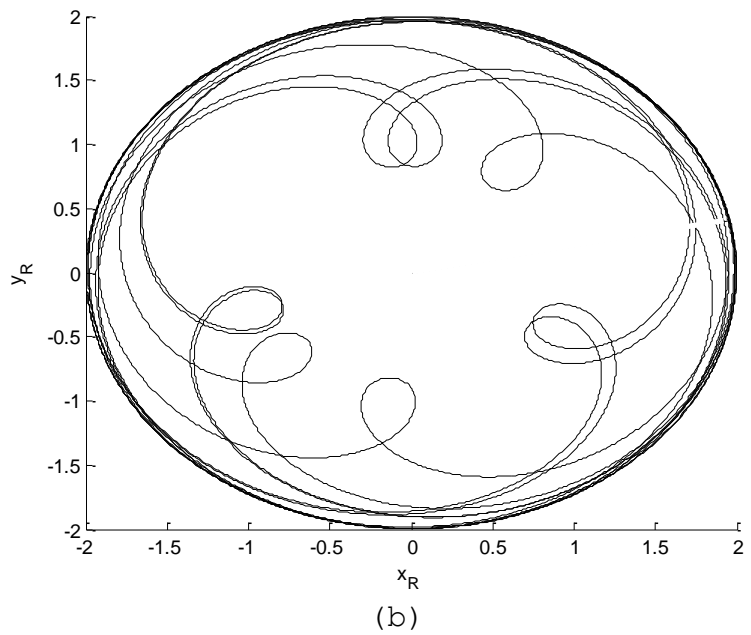
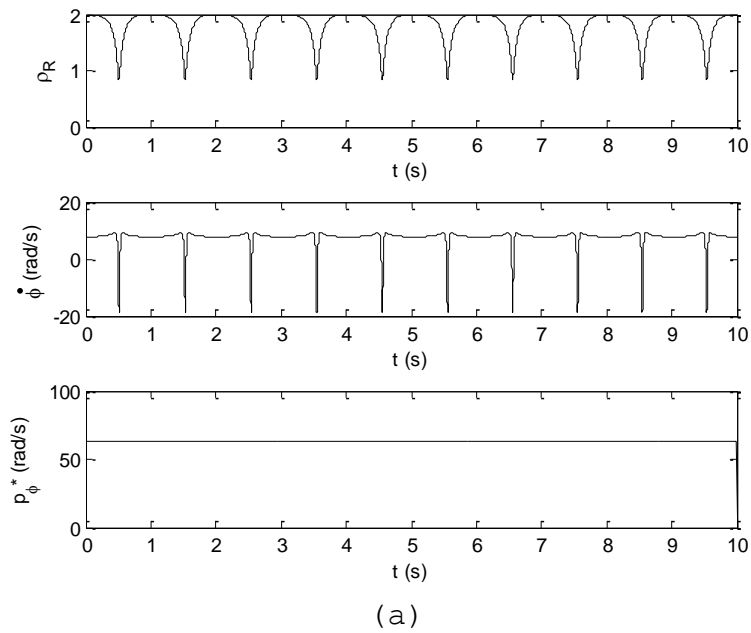


Figura 9. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_ϕ^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 1,999$, $\dot{\phi} = 2,499\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\Phi = 0$.

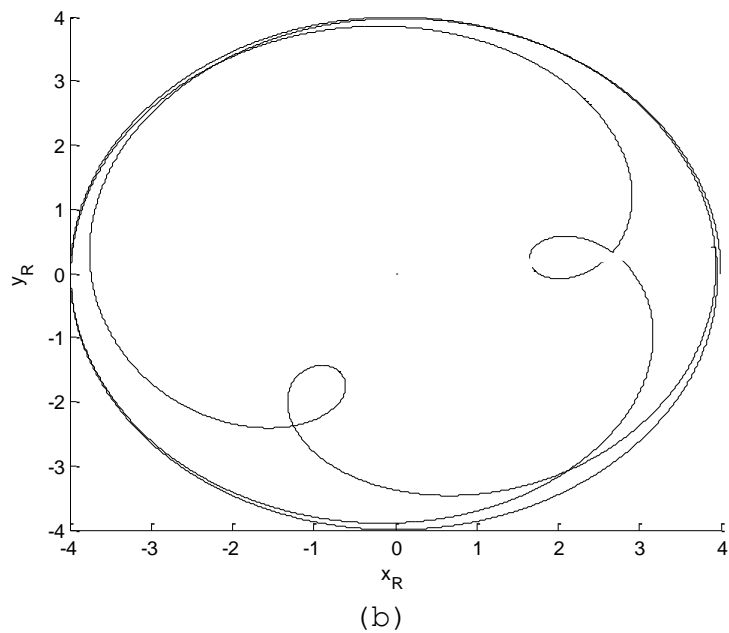
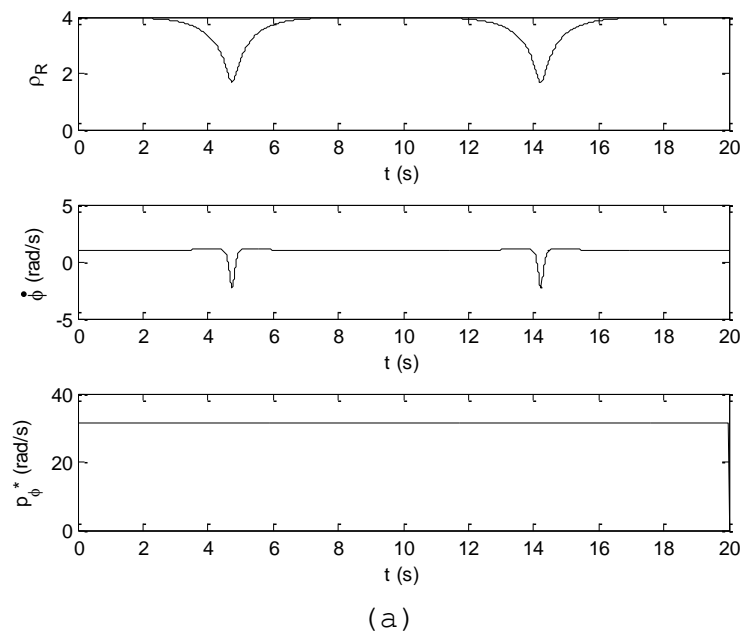


Figura 10. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 3,998$, $\dot{\phi} = 0,312\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\Phi = 0$.

Marion ("Dinámica Clásica", 1998) menciona que si la variable perturbada es "s" y la perturbación es "σ", se cumple que $\sigma/s \ll 1$.

Las figuras 11 y 12 muestran como afecta el movimiento cuando se perturba los valores iniciales (incrementando la magnitud de la coordenada polar ρ_R y de la velocidad $\dot{\phi}$ en 0,05%) que cumplen la relación (4.6.b).

En las figuras 11.b y 12.b, se observa que inicialmente la partícula describe un arco de circunferencia y luego tiende a moverse en una recta, lo cual confirma que las órbitas circulares son inestables.

En las figuras 11.a y 12.a se observa que la coordenada polar ρ_R al inicio se mantiene casi constante e igual a su valor inicial, luego aumenta indefinidamente, es decir se aleja cada vez más de su valor original. Esto concuerda con el escenario b, segundo caso del análisis de la figura 6 (vea página 24). Por otro lado, se observa que la velocidad $\dot{\phi}$ decae hasta hacerse casi cero, es decir, la velocidad mantiene su dirección. También puede notarse que el momento generalizado p_{ϕ}^* se mantiene prácticamente constante.

Las figuras 13 y 14 muestran dos ejemplos del análisis hecho en el apartado 4.4 (página 28). En la figura 13, tomando como condición inicial $\rho_R(0) = 1$, la serie de Taylor se expande alrededor de $\alpha/v = 0,995$. En la figura 14, tomando como condición inicial $\rho_R(0) = 2$, la serie de Taylor se expande alrededor de $\alpha/v = 1,99$. La condición inicial $\phi(0)$ se halla mediante la ecuación (3.4.c) (página 17).

Observando las figuras 13.a y 14.a, la coordenada polar ρ_R se comporta como una función senoidal de acuerdo a la solución dada en la página 30. La velocidad $\dot{\phi}$ parece comportarse como una función periódica, como ya se presumía. Nuevamente se nota que el momento generalizado p_{ϕ}^* se mantiene prácticamente constante.

En las figuras 13.b y 14.b, se observa las trayectorias del movimiento de la partícula. Puede notarse que el movimiento está restringido en una región anular. Esto concuerda con el escenario b, primer caso del análisis de la figura 6. Los radios máximo y mínimo del anillo coinciden aproximadamente respectivamente con $\rho_R(0)$ y $2\alpha/v - \rho_R(0)$, que son los valores máximo y mínimo de $\rho_R(t)$ predichos por la solución dada en la página 30.

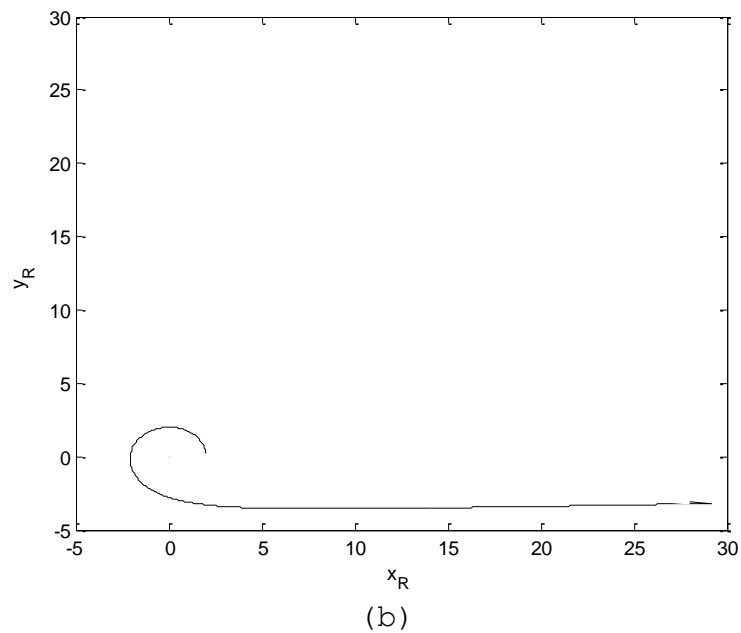
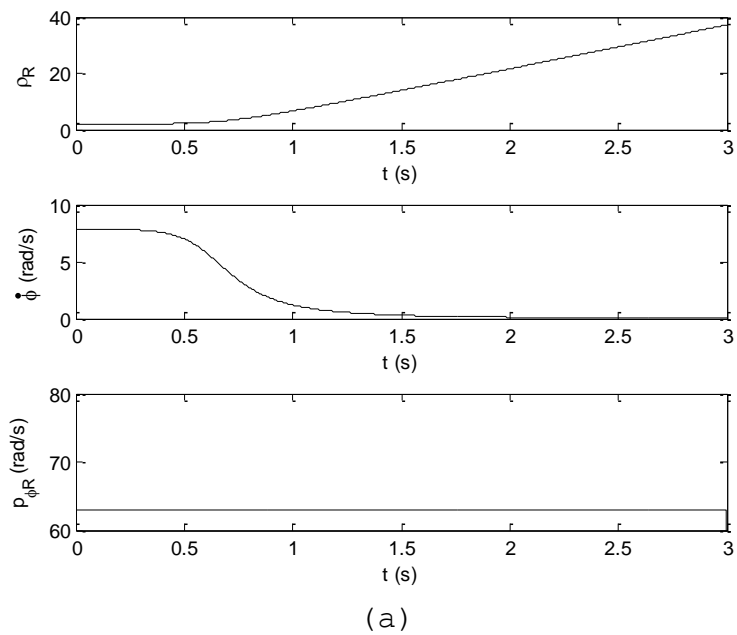


Figura 11. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2,001$, $\dot{\phi} = 2,501\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$.

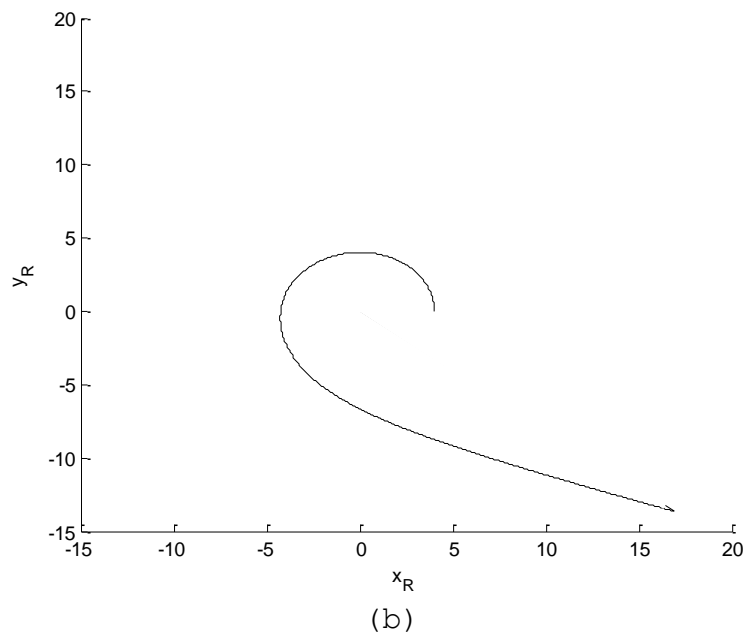
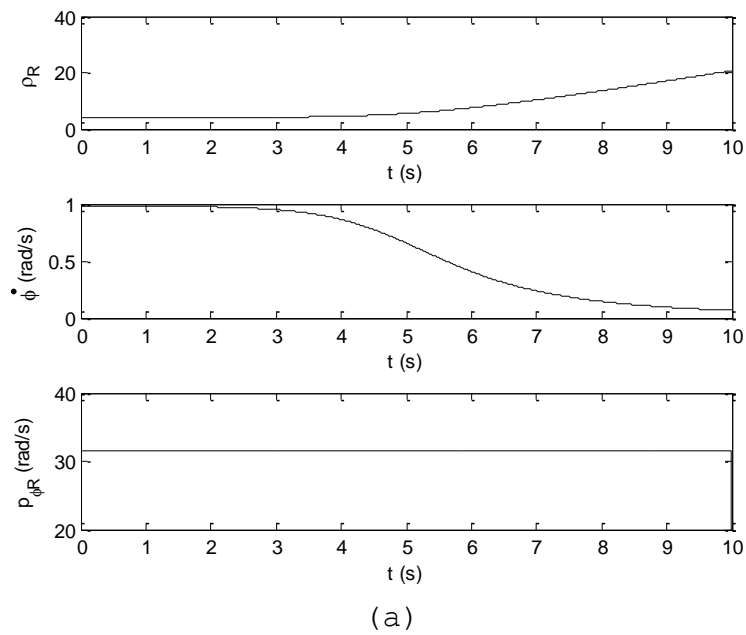


Figura 12. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 4,002$, $\dot{\phi} = 0,313\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$.

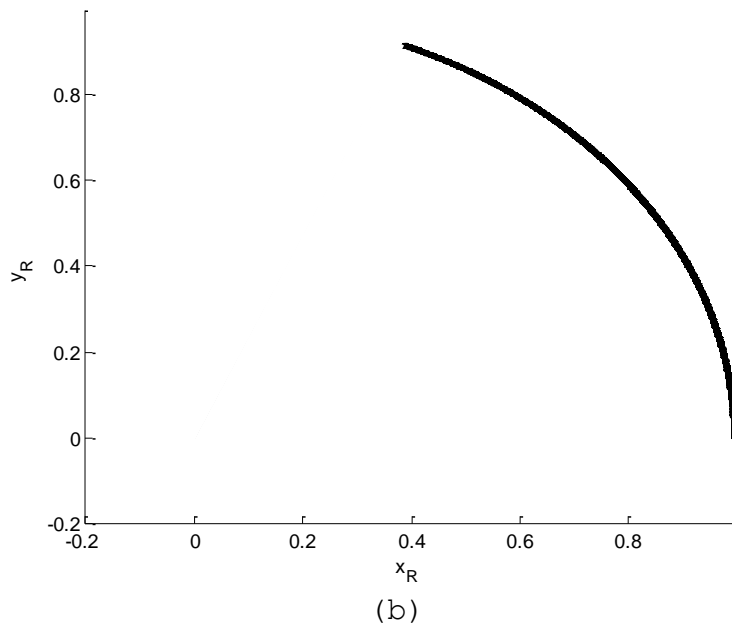
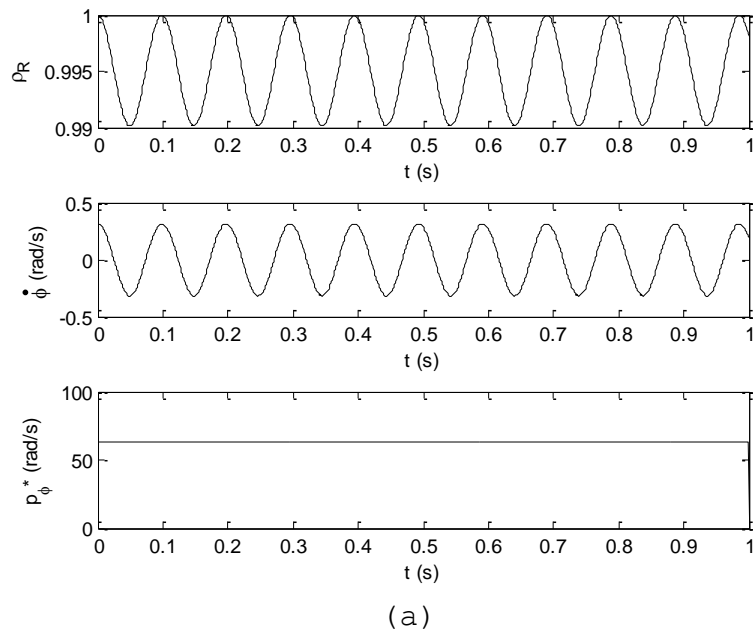


Figura 13. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 1$, $\dot{\phi} = 0,1\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$. El programa corrió hasta 500 s para dibujar la trayectoria. Se consideró que el potencial $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ obtenido en la página 8, sigue siendo válido en la frontera.

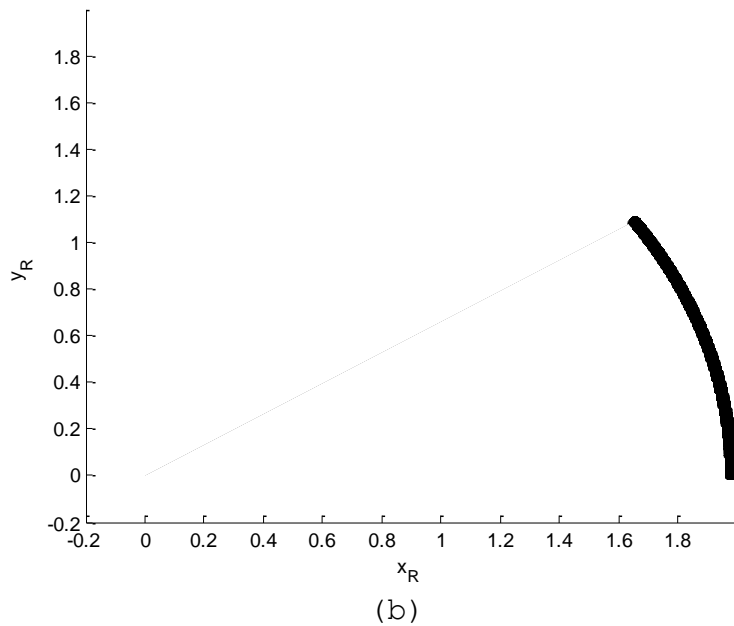
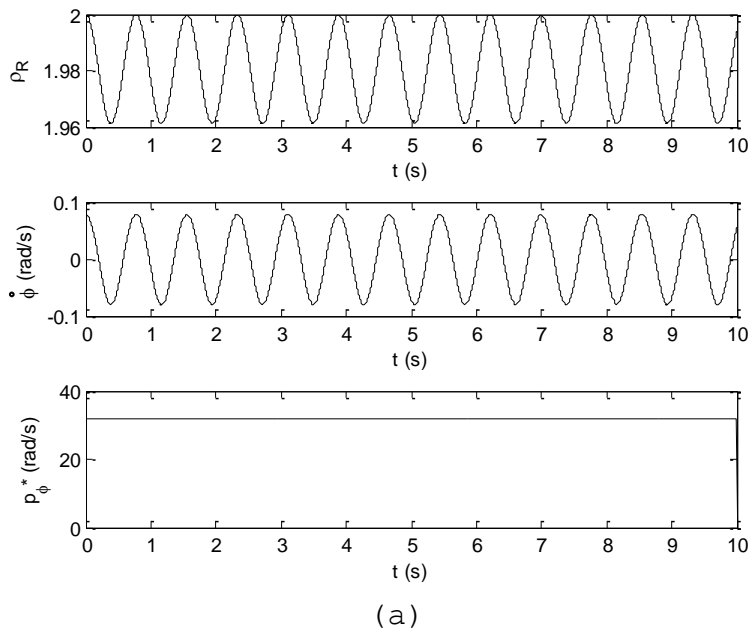


Figura 14. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2$, $\dot{\phi} = 0,025\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$, El programa corrió hasta 500 s para dibujar la trayectoria.

Caso Partícula con Carga Negativa.

Las figuras 15, 16 y 17, muestran tres ejemplos en los cuales se considera que la partícula tiene carga negativa. En los tres casos se consideró que $\alpha = -20\pi/s$, y que la velocidad inicial $\dot{\phi}(0)$ era negativa.

Al comparar las figuras 15.a. y 7.a. se observa que las respectivas gráficas de la coordenada polar ρ_R frente al tiempo son prácticamente iguales. El anterior comentario se repite al comparar las figuras 16.a y 9.a, así como las figuras 17.a y 13.a.

Con respecto a las gráficas de la velocidad angular $\dot{\phi}$ frente al tiempo, se observa en las figuras 15.a. y 7.a, que esta velocidad se mantiene aproximadamente constante; negativa en el primer caso y positiva en el segundo caso. En las figuras 16.a. y 9.a. se observa un comportamiento periódico de dicha velocidad. Aparentemente hay un desfase de π entre ambas gráficas. Lo mismo puede decirse al comparar las gráficas 17.a y 13.a.

El momento generalizado p_{ϕ}^* se mantiene casi constante tanto en la figura 16.a como en la figura 9.a; negativo en el primer caso y positivo en el segundo caso. La escena se repite al comparar las figuras 17.a y 13.a.

Al comparar la trayectoria del movimiento en las figuras 15.b. y 7.b, éstas son idénticas puesto que las órbitas son circunferencias. El gráfico 16.b, es muy similar al ya mostrado en la figura 9.b. Si se giraran los ejes Y 180° en la figura 16.b, se repetiría la figura 9.b. Puede hacerse el mismo comentario al comparar las figuras 17.b y 13.b. De la relación entre coordenadas cartesianas (x,y) , y coordenadas polares (ρ, ϕ) :

$$\begin{aligned}x_R &= \rho_R \cos \phi \\y_R &= \rho_R \sin \phi\end{aligned}$$

Al cambiar $(-\phi)$ por ϕ en la anterior relación, se encuentra que por propiedades trigonométricas:

$$\begin{aligned}x_R &= \rho_R \cos(-\phi) = \rho_R \cos \phi \\y_R &= \rho_R \sin(-\phi) = -\rho_R \sin \phi\end{aligned}$$

Esta puede ser la razón por la que las figuras 16.b y 17.b, la coordenada y_R parece estar invertida con respecto a las figuras 9.b y 13.b, mientras que la coordenada x_R parece ser la misma al comparar las mismas figuras.

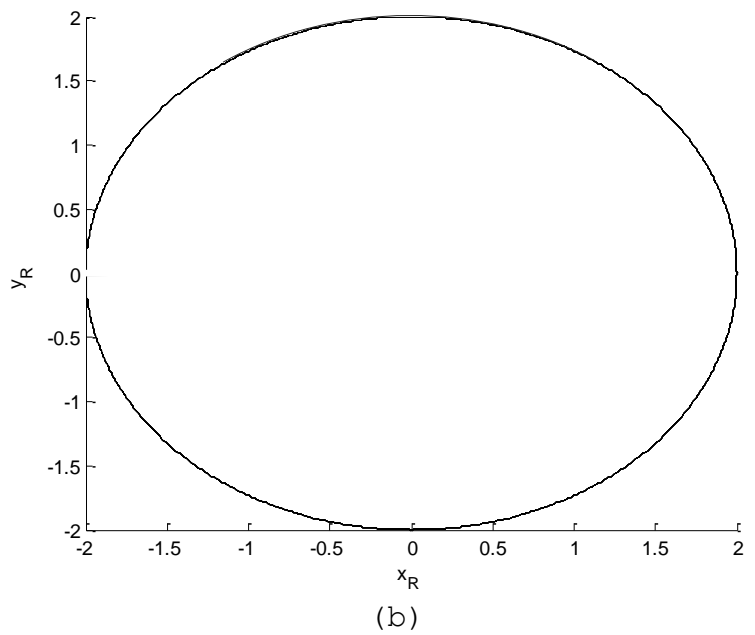
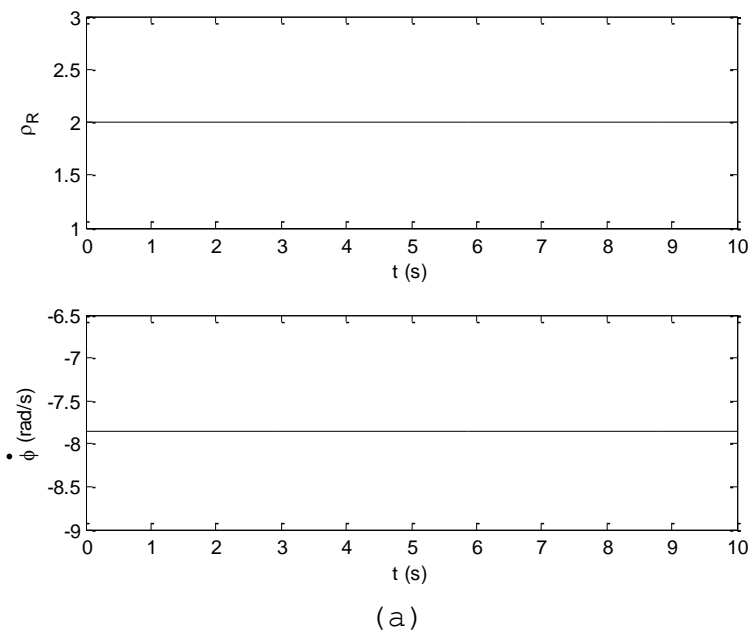


Figura 15. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R y velocidad $\dot{\phi}$ en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2$, $\dot{\phi} = -2,5\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\Phi = 0$.

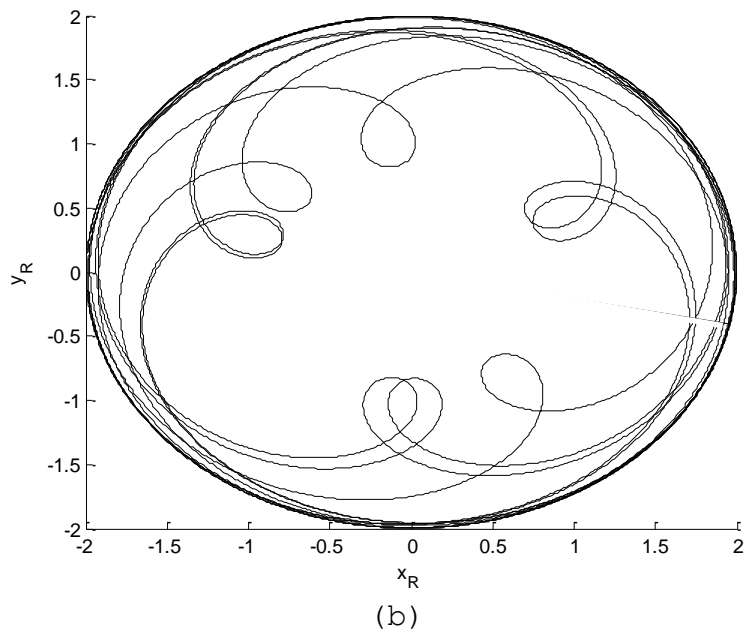
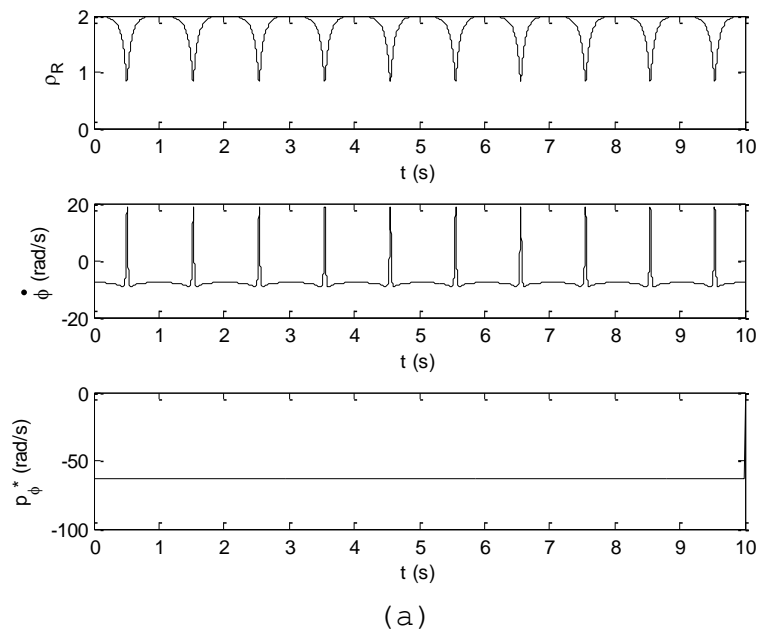


Figura 16. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 1,999$, $\dot{\phi} = -2,499\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\Phi = 0$.

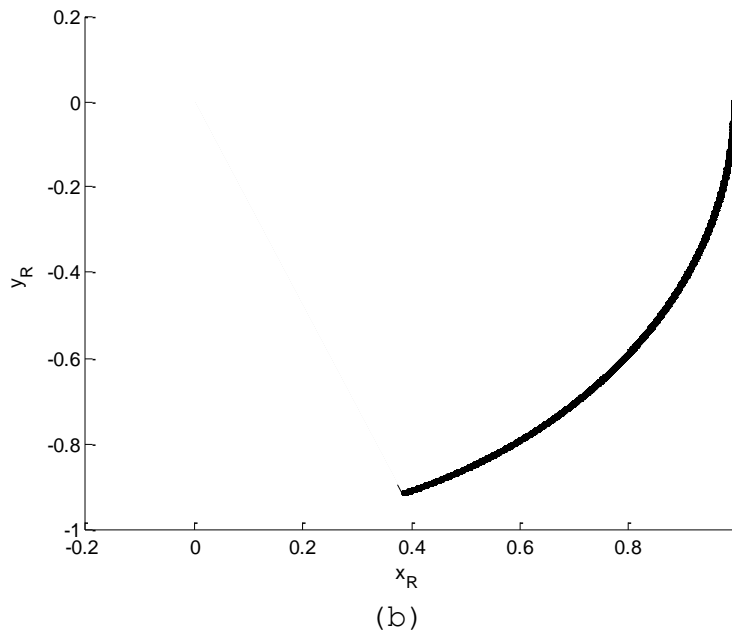
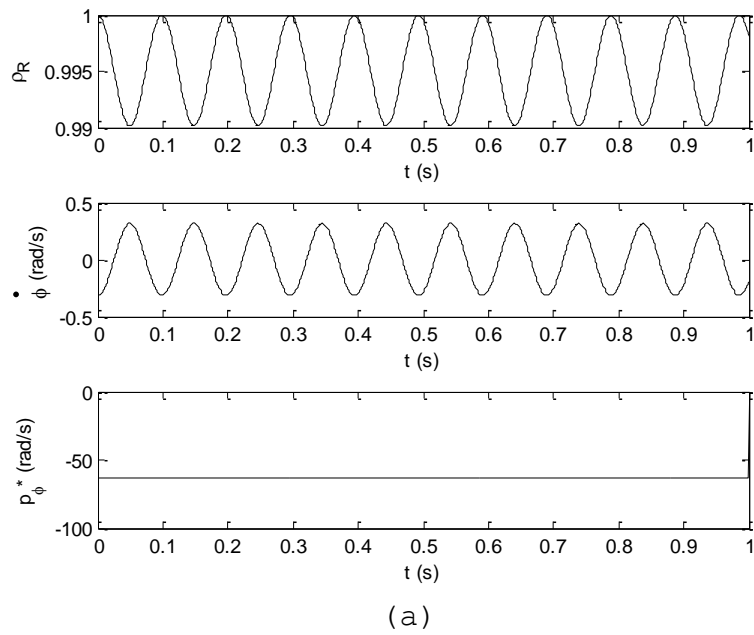


Figura 17. Gráfico a. Coordenada polar ρ_R , velocidad $\dot{\phi}$ y momento generalizado p_{ϕ}^* en función del tiempo. Gráfico b. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 1$, $\dot{\phi} = -0,1\pi$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$, El programa corrió hasta 500 s para dibujar la trayectoria.

Análisis Numérico de Estabilidad de Soluciones que No son Puntos de Reposo.

También se puede representar el movimiento en el espacio de fases $\dot{\rho}_R$ vs ρ_R . Esto se muestra en las figuras 18.a y 19.a. Las figuras se realizaron corriendo el programa hasta 20 s. Si el tiempo se aumentaba a 50 s, no se observaba cambios en las figuras. Es decir, las órbitas en el espacio de fases toman la forma del atractor prácticamente sin que transcurra tiempo observable desde que empieza el movimiento. No se observan transitorios, por lo tanto son movimientos que pasan de frente al estado estacionario.

A continuación se mostrará un análisis adicional del movimiento. Para ello, primero se observa las figuras 18.b y 19.b. Se puede notar los valores iniciales de ρ_R y $\dot{\phi}$ difieren muy poco entre sí. En las figuras 18.b y 19.b, no es perceptible la diferencia en ρ_R . Sin embargo, al observar las trayectorias en las figuras 18.c y 19.c, se puede notar una diferencia clara entre ellas (observe la intersección de la trayectoria con la recta $x_R = 1$).

Para visualizar más claramente la diferencia en la coordenada ρ_R , se calcula $\log(\Delta\rho_R)$, y se grafica en función del tiempo, como se observa en la figura 20. Se nota que el logaritmo decimal de la diferencia en la coordenada polar ρ_R se mantiene en promedio entre -2 y 0. Hay una ligera tendencia al aumento al inicio, luego los valores parecen mantenerse en un rango casi constante, pero como hay pequeños valores positivos de $\log(\Delta\rho_R)$, se puede interpretar este resultado como lo siguiente: que la solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias correspondientes a las condiciones iniciales mencionadas en las páginas 55 y 56 son estables. Para $t \leq 20$ s, la técnica de graficar el logaritmo de la diferencia de la magnitud física hallada al resolver una ecuación diferencial ordinaria de movimiento para ciertas condiciones iniciales perturbadas se realiza cuando se quiere introducir el concepto de caos (ver "Mecánica Clásica", Taylor, 2013, páginas 523-528).

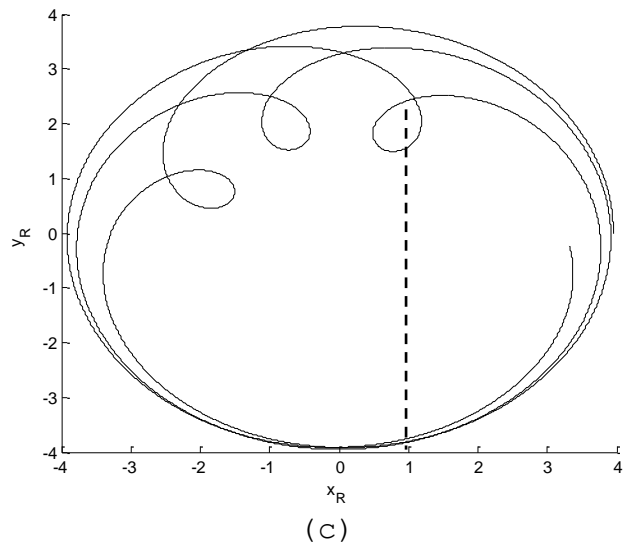
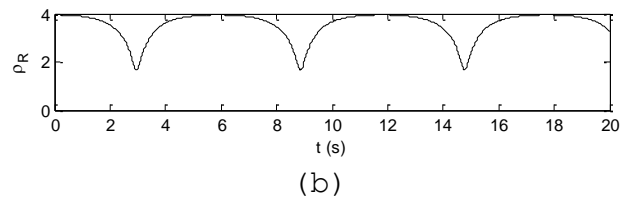
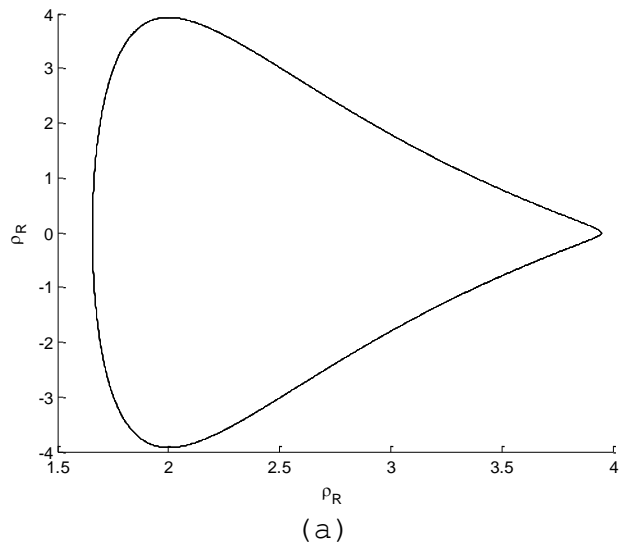


Figura 18. Gráfico 18.a Espacio de fases. Gráfico 18.b. Coordenada polar ρ_R , en función del tiempo. Gráfico 18.c. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 3,95$, $\dot{\phi} = 19,5\pi/(3,95)^3$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$.

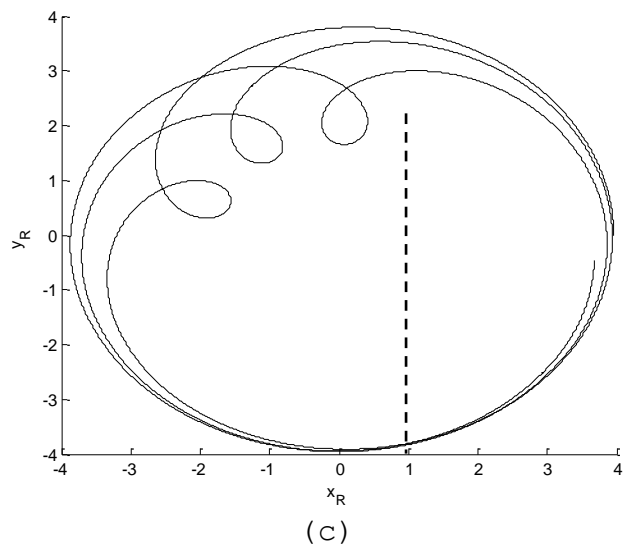
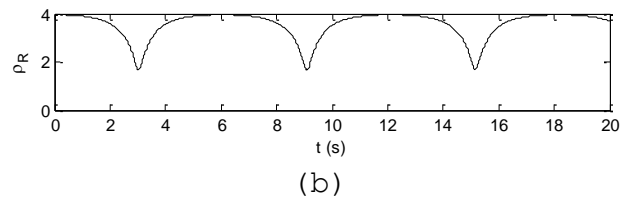
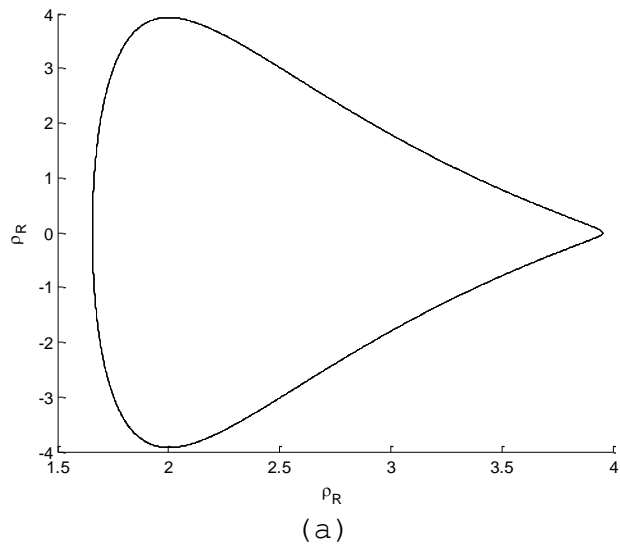


Figura 19. Espacio de fases. Gráfico 19.b. Coordenada polar ρ_R , en función del tiempo. Gráfico 19.c. Trayectoria del movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de la esfera. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 3,955$, $\dot{\phi} = 19,55\pi/(3,955)^3$ rad/s, $\dot{\rho}_R = 0$, $\phi = 0$.

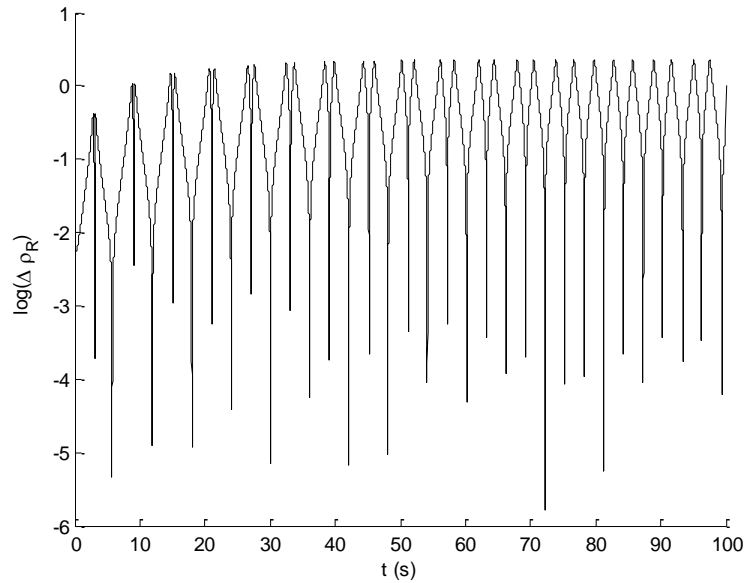


Figura 20. $\log(\Delta\rho_R)$ vs tiempo, cambiando las condiciones iniciales de $\rho_R = 3,95$ y $\dot{\phi} = 19,5\pi/(3,95)^3$ rad/s; a $\rho_R = 3,955$ y $\dot{\phi} = 19,55\pi/(3,955)^3$ rad/s.

6.3. ORBITAS EN EL ESPACIO.

Primero se considerará movimientos tridimensionales cercanos a órbitas circulares. Para ello se ajustan los datos iniciales que se aproximen a la relación (4.6.b).

Para comprobar la teoría de la linealización de las ecuaciones de movimiento, se muestran dos ejemplos de movimiento tridimensional en las figuras 21 y 22. En ambas figuras se observa que la coordenada cilíndrica ρ_R , se mantiene inicialmente constante y luego aumenta casi linealmente. La coordenada cilíndrica z_R oscila al inicio alrededor del valor $z_R = 0$, después disminuye linealmente en la figura 21 y aumenta linealmente en la figura 22. Si se revisa la página 39, la solución encontrada para $z_R(t)$ mediante la aproximación lineal para puntos cercanos al punto de reposo, coincide con el gráfico z_R vs t , para $t < 10$ s.

Otros ejemplos de movimientos interesantes en el espacio se observa en las figuras 23 y 24. En la figura 23, la coordenada ρ_R se mantiene en su valor inicial de 4 hasta los 70 s, aproximadamente, luego aumenta rápidamente; en cambio la coordenada z_R muestra un comportamiento muy parecido al sinusoidal. En la figura 24, tanto ρ_R como z_R oscilan con una amplitud tan baja que no se observa la

diferencia en la escala del eje vertical. Esta última simulación representa una trayectoria casi circular y un movimiento próximo al plano XY.

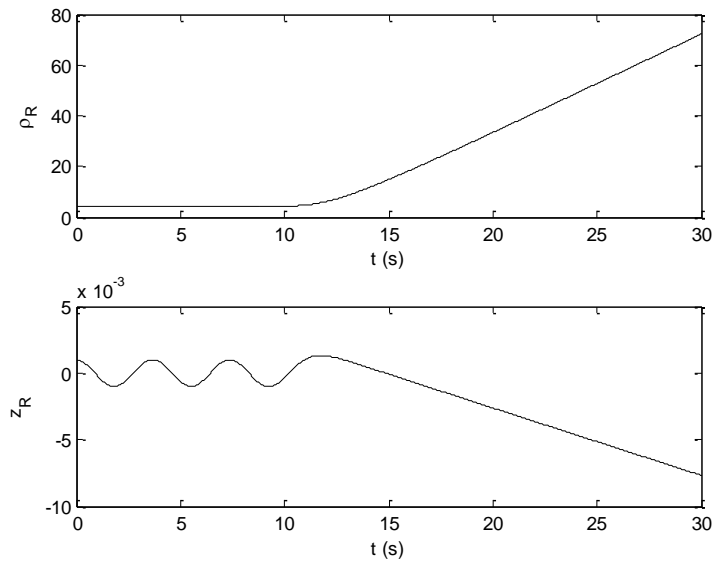


Figura 21. Coordenada cilíndrica ρ_R y Coordenada cilíndrica z_R en función del tiempo. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 4$, $z_R = 0,001$, $\dot{\rho}_R = 0$, $\dot{z}_R = 0$. $v = 10\pi/s$.

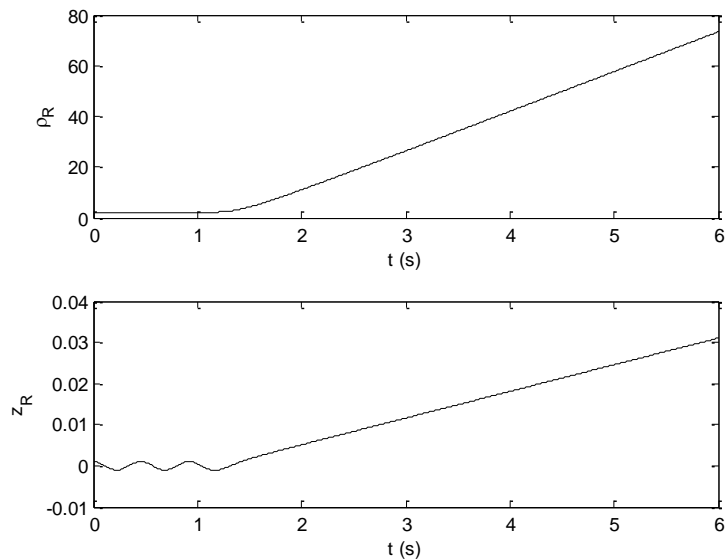


Figura 22. Coordenada cilíndrica ρ_R y Coordenada cilíndrica z_R en función del tiempo. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2$, $z_R = 0,001$, $\dot{\rho}_R = 0$, $\dot{z}_R = 0$. $v = 20\pi/s$.

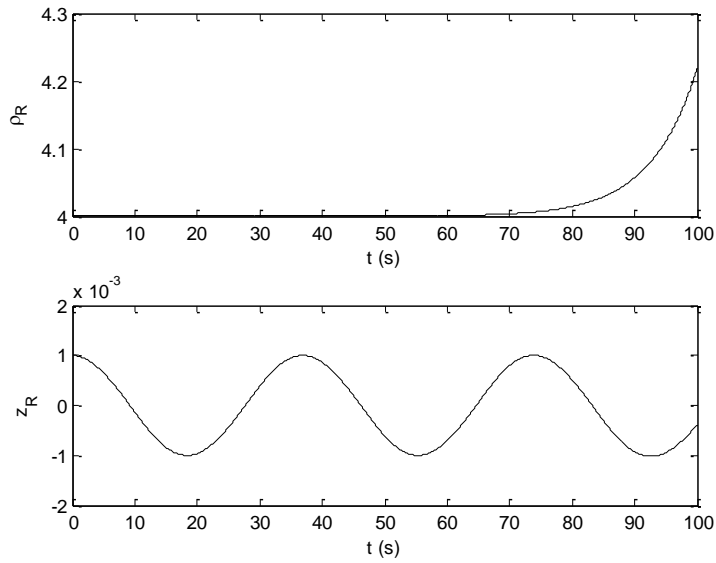


Figura 23. Coordenada cilíndrica ρ_R y Coordenada cilíndrica z_R en función del tiempo. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 4$, $z_R = 0,001$, $\dot{\rho}_R = 0$, $\dot{z}_R = 0$. $\alpha = 2\pi/s$, $\nu = \pi/s$.

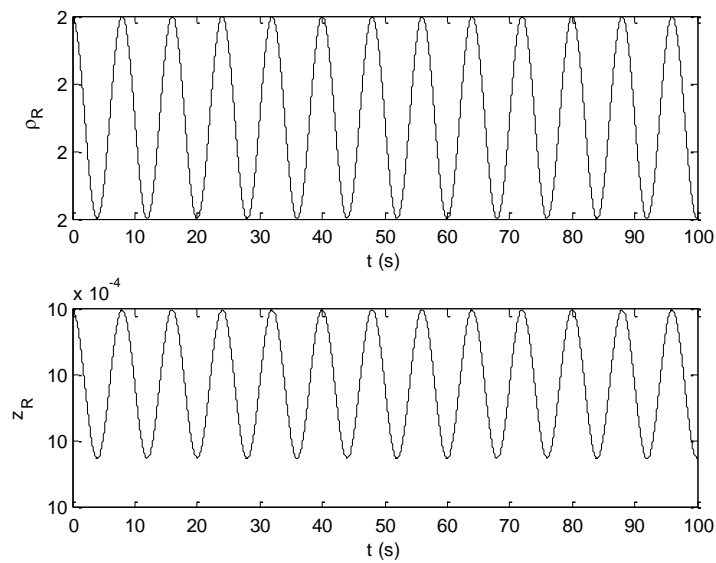


Figura 24. Coordenada cilíndrica ρ_R y Coordenada cilíndrica z_R en función del tiempo. Las condiciones iniciales fueron $\rho_R = 2$, $z_R = 0,001$, $\dot{\rho}_R = 0$, $\dot{z}_R = 0$. $\alpha = 2\pi/s$, $\nu = \pi/s$.

CONCLUSIONES.

a. Se deduce del análisis de la función de energía potencial efectiva que es posible que ocurran trayectorias circulares. Los posibles radios de órbita están en la proporción de 1 a 2, según el gráfico de energía potencial.

b. La solución numérica de las ecuaciones diferenciales comprueba la anterior conclusión, es decir que es posible que bajo condiciones adecuadas, el movimiento de la partícula cargada en el campo magnético de una esfera uniformemente magnetizada puede ser una órbita circular, por ejemplo como se observa en las figuras 7 y 8.

c. Las órbitas circulares posibles son inestables como se comprueba en las simulaciones mostradas en las figuras 11 y 12.

d. El momento generalizado p_ϕ se mantiene constante, como se comprueba en las figuras 9-14, 16 y 17.

e. Para movimientos bidimensionales, la partícula puede moverse en trayectorias que estén dentro de una región anular "estrecha", como puede verse en las figuras 13 y 14.

f. La solución de las ecuaciones diferenciales ordinarias (5.2.a, 5.2.b, 5.2.c, 5.2.d) es inestable en el punto de reposo:

$$\rho_R = \frac{2\alpha}{\nu}, \quad z_R = 0, \quad \dot{\rho}_R = 0, \quad \dot{z}_R = 0$$

g. La simulación obtenida en la figura 24 se puede aplicar al movimiento de partículas en la ionósfera.

h. La trayectoria circular de radio mínimo es imposible, pero es posible que ocurran trayectorias próximas a la circunferencia de radio mínimo, como se observa en las figuras 13.b y 14.b.

i. El estudio de este trabajo es válido tanto para cargas positivas como negativas, como se observa en las figuras 15, 16 y 17.

RECOMENDACIONES .

- a. Resolver de manera general los casos en el plano que no sean trayectorias circulares.
- b. Resolver las ecuaciones de movimiento para el caso tridimensional.
- c. Considerar el estudio cuando existe un campo eléctrico externo oscilante en el tiempo.
- d. Analizar el movimiento de la partícula considerando la dinámica de Hamilton.
- e. Aplicar la teoría de estabilidad a cualquier trayectoria, incluida una trayectoria que pase por los polos.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS.

- A. Talledo, "Teoría Electromagnética", Editorial "CIENCIAS" S.R. Ltda., ISBN 978-612-4072-51-2, 2013.
- F.J. Milford, J.R. Reitz. "Fundamentos de la Teoría Electromagnética". Editor Addison-Wesley Iberoamericana.
- M. Alonso, E.J. Finn, "Física", Vol. I, Mecánica, FONDO EDUCATIVO INTERAMERICANO S.A., ISBN 85-16-03698-7. 1986.
- H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, "Classical Mechanics", Addison Wesley, ISBN-10-0201657023, 2000.
- S. Thorton, J.B. Marion, "Classical Dynamics of Particles and Systems", Thomson Brooks/Cole, ISBN 0-534-40896-6, 2003.
- J. R. Taylos. "Mecánica Clásica". Editorial REVERTÉ S:A., , ISBN 978-84-291-4312-6, 2013.
- E.A. Coddinton, N. Levinson. "Theory of Ordinal Differential Equations". Mc Graw-Hill, New York, ISBN 9780070115422, 1955.
- A Kiseliov, M. Krasnov, G. Makarenko, "Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias"- Editorial Mir, 4ta Edición, ISBN 8480410159, 1984.
- Hwei P. Hsu, "Análisis Vectorial", Addison Wesley S.A., ISBN 0-201-02943-X 9 10-CRS-99 98 97 96, 1987.
- L. Jiménez L, "Estructura de Orbitas Periódicas en el Problema de StÖmer: Periodo 3". Revista Mexicana de Física 37, No 4 (1991), 611-628.
- J. B. Marion, "Dinámica Clásica de las Partículas y Sistemas", Editorial REVERTÈ S.A., ISBN 84-29194094-8, 1998.

ANEXO A.

DEMOSTRACION DE LA ECUACION A.1.

En el capítulo 2, se utilizó la relación (A.1) (página 7):

$$\iiint_V \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{4\pi R^3 \mathbf{r}}{3r^3}. \quad (\text{A.1})$$

Para la demostración hay que considerar que el campo eléctrico en un punto \mathbf{r} , producido por un cuerpo cargado con densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$, está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (\text{A.2})$$

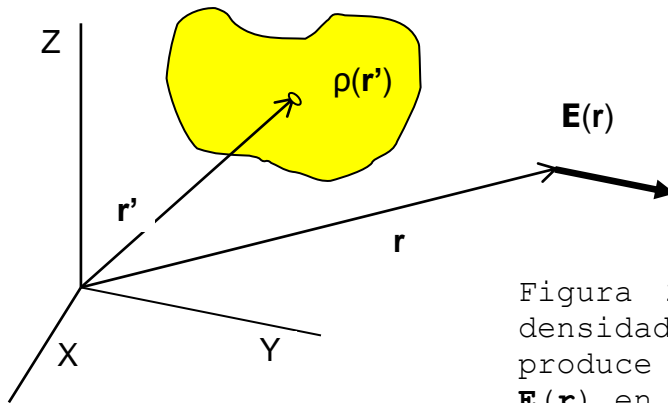


Figura 25. Cuerpo con una densidad de carga $\rho(\mathbf{r}')$ produce un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en el punto \mathbf{r} .

En el caso de un cuerpo esférico de radio R y carga total Q , con densidad de carga de simetría esférica $\rho(\vec{r}) = \rho(r)$, el campo eléctrico en el punto \mathbf{r} , está dado por:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (\text{A.3})$$

donde \mathbf{r} se mide desde el centro de la esfera.

Para este caso particular, las ecuaciones (A.2) y (A.3) deben ser iguales:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV' = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (\text{A.4.1})$$

Considerando una distribución uniforme de carga $\rho(\vec{r})=\rho_0$:

$$\rho_0 = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}. \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.5) en (A.4.1) y simplificando se obtiene:

$$\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \iiint_V \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} dV' = Q \frac{\vec{r}}{r^3}. \quad (\text{A.4.2})$$

Despejando la integral de (A.4.2), se obtiene la ecuación (A.1).

ANEXO B.

DEMOSTRACION DE LA ECUACION (2.4.d).

En el capítulo 2, aparece una integral en la ecuación (2.4.b) (página 6) la cual no se demostró su solución:

$$\mathbf{B}_2(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{M}(\mathbf{r}') \left[\nabla \cdot \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right] dV' \quad (2.4.b)$$

Para la solución hay que considerar una carga puntual Q colocada en la posición \mathbf{r}' . Esta carga Q produce un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ dado por la relación:

$$\bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}')}{|\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'|^3}. \quad (B.1)$$

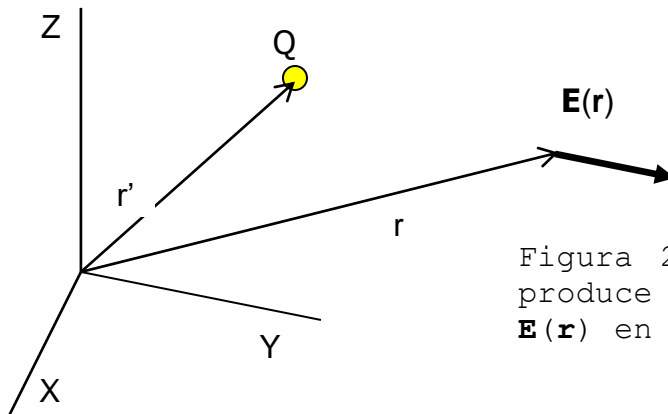


Figura 26. Carga puntual Q produce un campo eléctrico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ en el punto \mathbf{r} .

Este campo $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ tiene la propiedad que:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{E}} = \frac{\rho(\bar{\mathbf{r}}')}{\epsilon_0}, \quad (B.2)$$

donde $\rho(\mathbf{r}')$ es la densidad de carga y puede expresarse en función de la carga Q y la distribución delta δ :

$$\rho(\bar{\mathbf{r}}') = Q\delta(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}'). \quad (B.3)$$

Usando las relaciones (B.1) y (B.3) en (B.2), se consigue:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = \frac{1}{\epsilon_0} Q \delta(\vec{r}-\vec{r}'). \quad (B.4.1)$$

Simplificando la ecuación (B.4.1) se obtiene:

$$\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right) = \delta(\vec{r}-\vec{r}'). \quad (B.4.2)$$

Luego la expresión para el campo magnético $\mathbf{B}_2(\mathbf{r})$ será:

$$\begin{aligned} \vec{B}_2(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') \left[\vec{\nabla} \cdot \frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') 4\pi \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV' \\ &= \mu_0 \iiint_V \vec{M}(\vec{r}') \delta(\vec{r}-\vec{r}') dV' = \mu_0 \vec{M}(\vec{r}), \end{aligned} \quad (B.5)$$

es decir: $\vec{B}_2 = \mu_0 \vec{M}(\vec{r})$

ANEXO C.

ANALISIS DEL GRAFICO DE ENERGIA POTENCIAL EFECTIVA.

En la figura 5 (página 23) se mencionó que la gráfica de energía potencial efectiva V_{pef}^* es siempre positiva. Se demostrará esta propiedad recordando que:

$$V_{pef}^* = \frac{1}{2\rho_R^2} \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2, \quad (4.3b)$$

Se puede notar que V_{pef}^* es la multiplicación de dos funciones reales positivas:

$$\frac{1}{2\rho_R^2} \quad \text{y} \quad \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2.$$

Por lo tanto V_{pef}^* es una función real positiva para todo ρ_R .

En la gráfica 5, también puede notarse que para valores pequeños de ρ_R V_{pef}^* se hace muy grande. Cuando ρ_R tiende a cero, se cumple que:

$$\frac{1}{2\rho_R^2}, \quad \text{y} \quad \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2 \text{ tienden ambos al infinito.}$$

Entonces, V_{pef}^* tiende al infinito cuando ρ_R tiende a cero.

Por último, en la misma gráfica 5, se observa que para valores grandes de ρ_R , V_{pef}^* se hace muy pequeño, es decir que cuando ρ_R tiende al infinito, es obvio que:

$$\frac{1}{2\rho_R^2}, \quad \text{tiende a cero, y} \quad \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2 \text{ tiende a } v^2.$$

Entonces, V_{pef}^* tiende a cero cuando ρ_R tiende al infinito.

En el capítulo 4 se mencionó que los valores de la coordenada polar ρ_R , que cumplen la ecuación (4.5) coincidían con los mismos valores en los cuales la función V_{pef}^* se hacía mínima y máxima. Esto puede verificarse derivando dos veces V_{pef}^* con respecto a ρ_R , consiguiendo:

$$\frac{d^2V_{pef}^*}{d\rho_R^2} = \frac{1}{\rho_R^6} \left[\alpha^2 - 6\alpha\rho_R \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right) + 3\rho_R^2 \left(v - \frac{\alpha}{\rho_R} \right)^2 \right].$$

Evaluando en los valores de ρ_R del mínimo o máximo de V_{pef}^* , se encuentra que:

$$\left. \frac{d^2V_{pef}^*}{d\rho_R^2} \right|_{\rho_R = \frac{\alpha}{v}} = \frac{v^6}{\alpha^4} > 0,$$

y:

$$\left. \frac{d^2V_{pef}^*}{d\rho_R^2} \right|_{\rho_R = \frac{2\alpha}{v}} = -\frac{v^6}{32\alpha^4} < 0.$$

Es decir, en general si $\rho_R = \alpha/v$, hay un mínimo, si $\rho_R = 2\alpha/v$, hay un máximo. Además $V_{pef}^*(\text{mínimo}) = 0$.

Se recuerda que un valor positivo de la segunda derivada significa que en ese punto, la curva de V_{pef}^* es cóncava hacia arriba, y por lo tanto es un mínimo. Un valor negativo de la segunda derivada significa que en ese punto, la curva de V_{pef}^* es cóncava hacia abajo, y por lo tanto es un máximo.

Caso de Partícula con Carga Negativa.

En la mayor parte del estudio en este trabajo, se ha considerado que la partícula tiene carga positiva, pero hay también existe la posibilidad de que la carga sea negativa. A continuación se analizará esta opción. Hay dos casos diferenciados.

Caso I. La partícula tiene carga negativa, y el momento generalizado es positivo. En tal caso, se obtiene la figura 27. En dicha gráfica se observa que la función de energía potencial efectiva V_{pef}^* no tiene mínimos ni máximos. La partícula no describirá movimientos acotados, tenderá a alejarse de la esfera magnética.

Caso II. La partícula tiene carga negativa, y el momento generalizado es negativo. En tal caso, se obtiene la figura 28. En dicha gráfica se observa que la función de energía potencial efectiva V_{pef}^* tiene un mínimo y un máximo, similar a la figura 5. Es posible encontrar condiciones en que la partícula describa movimientos acotados. Los valores de la coordenada polar ρ_R donde la función de energía

potencial efectiva toma sus valores mínimo o máximo son los mismos encontrados en el capítulo 4 (página 26).

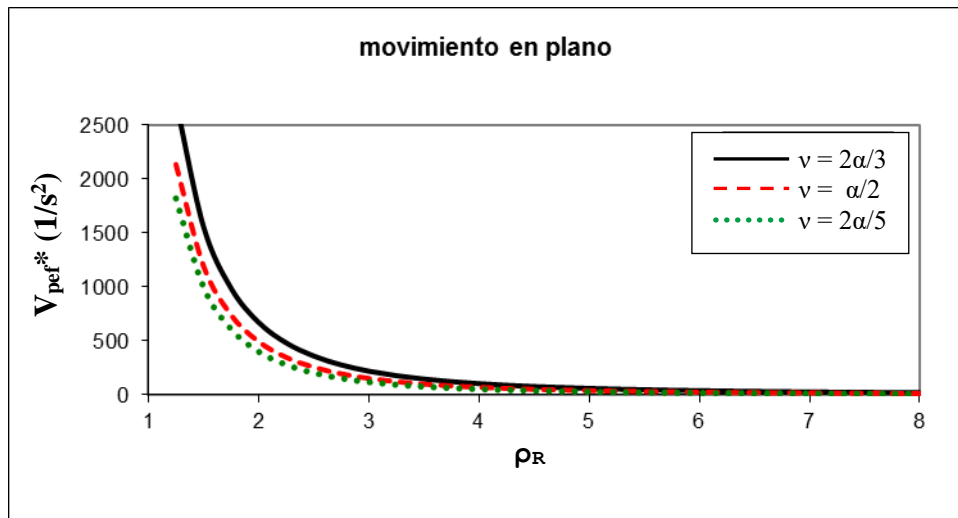


Figura 27. "Energía potencial efectiva" V_{pef}^* en función de la coordenada polar ρ_R ; con $v = -2\alpha/3$, $-\alpha/2$ y $-2\alpha/5$, donde $\alpha = -20\pi/s$.

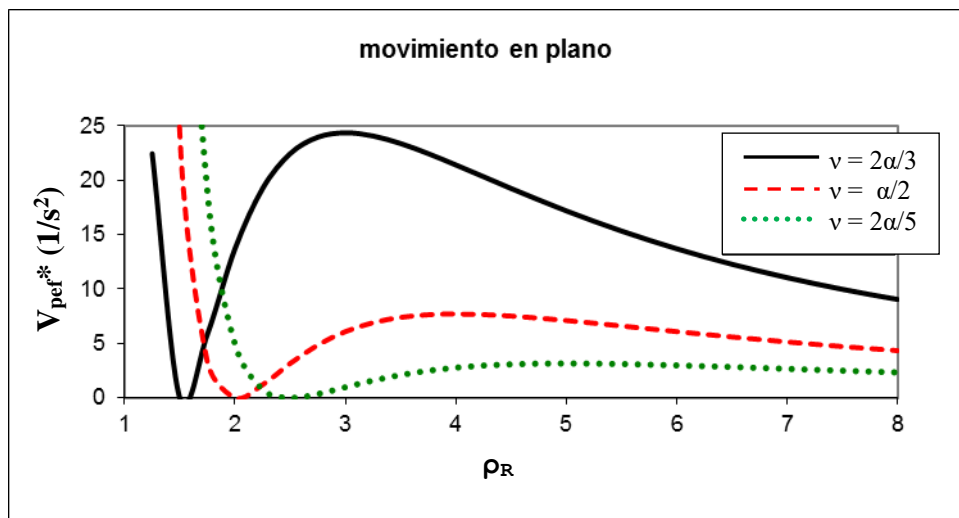


Figura 28. "Energía potencial efectiva" V_{pef}^* en función de la coordenada polar ρ_R ; con $v = 2\alpha/3$, $\alpha/2$ y $2\alpha/5$, donde $\alpha = -20\pi/s$.

ANEXO D.

TEORIA DE ESTABILIDAD.

Los conceptos de estabilidad e inestabilidad están presentes en la vida cotidiana. Es de uso común decir: el franco suizo es estable, el peso mexicano es inestable, un químico dice que una reacción se ha estabilizado, un físico diría que el movimiento de una partícula es estable, etc.

En matemáticas, la teoría de estabilidad estudia la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales, es decir, examina como difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales.

Debido a que toda ecuación diferencial puede reducirse a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden equivalente, el estudio de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales de cualquier orden puede reducirse al estudio de estabilidad de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Consideremos un sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\dot{x}_i = f_i(t, \vec{x})$$

Si la variable independiente t no aparece explícitamente en las ecuaciones el sistema, es decir, el sistema es de la forma:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}),$$

se dice que el sistema de ecuaciones es autónomo.

Supongamos que $(\vec{x}_0) = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, es tal que: $f_i(\vec{x}_0) = 0$, entonces la solución constante de la forma: $x_i(t) = x_{i0}$, es solución del sistema $\dot{x}_i = f_i(\vec{x})$,

Se denomina a tales puntos, puntos de reposo o de equilibrio a este tipo de soluciones, que son independientes de t .

Una solución $x_i(t)$ de un sistema autónomo $\dot{x}_i = f_i(\vec{x})$, definida para todo $t \geq t_0$ se dice que es estable si para todo $\varepsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que si $x_i^*(t)$ es otra solución que cumple la condición

$$\|x_i(t_0) - x_i^*(t_0)\| < \delta,$$

entonces $x_i(t)$ está definida para todo $t \geq t_0$ y se verifica que

$$\|x_i(t) - x_i^*(t)\| < \varepsilon,$$

para todo $t \geq t_0$.

Si además se verifica que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i(t) - x_i^*(t)\| = 0,$$

la solución $x_i(t)$ se dirá asintóticamente estable. La solución se dirá inestable si no es estable.

Esto significa que la solución $x_i(t)$ de un sistema autónomo $\dot{x}_i = f_i(\bar{x})$, es estable si toda las soluciones $x_i^*(t)$ que comienzan cerca de $x_i(t_0)$ permanecen cerca de $x_i(t)$ para todo $t \geq t_0$.

La solución es inestable si existe al menos una solución $x_i^*(t)$ que comienza cerca de $x_i(t_0)$, pero no permanece cerca de $x_i(t)$ para todo $t \geq t_0$.

La solución es asintóticamente estable si es estable y si toda solución $x_i^*(t)$ que comienza suficientemente cerca de $x_i^*(t_0)$ se aproxima a $x_i(t)$ cuando t tiende a $+\infty$.

La estabilidad en el sentido de Lyapunov de un punto de equilibrio significa que las soluciones que empiezan "suficientemente cerca" de un punto de equilibrio permanecen "suficientemente cerca" para siempre.

A continuación se expone un criterio para determinar la estabilidad en sistemas lineales.

Si un sistema es lineal, es decir, si existe una matriz $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de forma que:

$$\dot{X} = AX,$$

donde:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Sea $\dot{X} = AX$ un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de primer orden de coeficientes constantes, y sea el polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I),$$

donde I es la matriz identidad.

En este trabajo interesan los casos:

i. Si todas las raíces de $p(\lambda) = 0$ tienen parte real negativa, todas las soluciones del sistema $\dot{X} = AX$ son asintóticamente estables.

ii. Si al menos una de las raíces de $p(\lambda) = 0$ tiene parte real positiva, todas las soluciones del sistema $\dot{X} = AX$ son inestables.

ANEXO E.

ESPACIO DE FASES PARA UN MOVIMIENTO AMORTIGUADO.

Algunas veces el comportamiento de los sistemas, tales como los conformados por masa-muelle, se entienden mejor mediante la representación gráfica de la velocidad frente a la posición $v(x)$, que la representación gráfica de la posición frente al tiempo $x(t)$.

El sistema de coordenadas $x-v$ se llama espacio de fases (o de estados). Una trayectoria en este sistema proporciona otra perspectiva del problema, y en ocasiones es más valiosa que la trayectoria $x(t)$ en el espacio de tiempo.

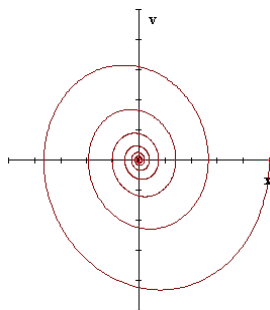


Figura 29: Trayectoria de un sistema masa-muelle en un espacio de fase con el atractor en $(0,0)$. Parámetros: $k = 1$ N/m, $m = 1$ kg, c (constante de amortiguamiento) = 0.2 kgs⁻¹, $x_0 = 1$, $v_0=0$, -1 m/s $\leq x \leq 1$ m/s, -1 m $\leq y \leq 1$ m.

En la figura 29 se muestra una traza de la trayectoria de un objeto en un sistema masa-muelle, representado en el espacio de fase. Se consideran como condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $v_0 = 0$. La trayectoria espiral en el espacio de fase muestra como el sistema pierde energía por encontrarse rodeado de aire, el cual ofrece una resistencia. Para un sistema *masa-muelle*, el punto $(0,0)$ es un *atractor estable*. Independientemente de las condiciones iniciales, cada instante de oscilación del sistema será últimamente dibujado en el mismo punto del espacio de fase, $(0,0)$

Un atractor de un sistema de ecuaciones diferenciales es un conjunto cerrado y acotado hacia el cual se aproxima cuando el tiempo tiende al infinito, la órbita de las soluciones en el espacio de fases. En el ejemplo anterior $(0;0)$ se dice que es un atractor.

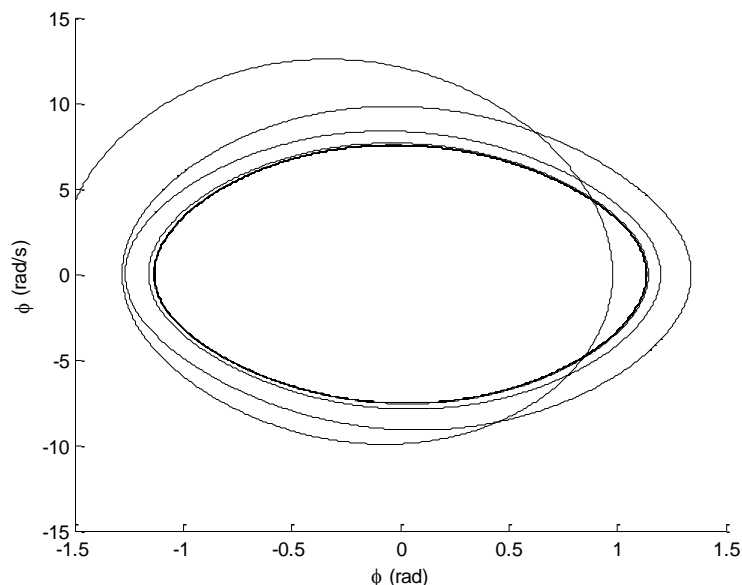


Figura 30. Órbita en el espacio de estados para un péndulo amortiguado y forzado con parámetro de perturbación $\gamma = 0,6$. Se consideró como frecuencia de la fuerza oscilante $\omega_e = 2\pi$ rad/s, frecuencia natural $\omega_o = 3\pi$ rad/s, y constante de amortiguamiento $\beta = 3\pi/4$ rad/s. Ejemplo tomado del libro "Mecánica Clásica", de J.R. Taylor.

Como ejemplo se observa la figura 30. El espacio de estados es el plano bidimensional con coordenadas ϕ y $\dot{\phi}$; la órbita en el espacio de estados es el camino trazado por el punto $[\phi(t)$ y $\dot{\phi}(t)]$ a medida que pasa el tiempo.

La órbita hace una espiral hacia adentro y se aproxima rápidamente al atractor que aparece como una elipse en el espacio estado.

ANEXO F.

SENSIBILIDAD A LAS CONDICIONES INICIALES.

Una característica útil de un sistema caótico es de carácter local, definida sobre un intervalo infinitesimal de la trayectoria. Se trata de la separación exponencial de las órbitas, responsable de la sensibilidad a las condiciones iniciales.

Considere dos condiciones iniciales, $x_a(0)$ y $x_b(0)$, que difieren en una cantidad pequeña $\delta x(0)$, es decir: $x_b(0) = x_a(0) + \delta x(0)$. Al pasar el tiempo t , cada una da lugar a órbitas $x_a(t)$ y $x_b(t) = x_a(t) + \delta x(t)$. Si el sistema es caótico, entonces la separación entre las dos órbitas crece exponencialmente:

$$|\delta x(t)| = |\delta x(0)| \exp(\Lambda t) \quad (G.1)$$

En la práctica, al intentar representar la dependencia temporal de una función como G.1, el factor exponencial hace que $\delta x(t)$ decaiga tan rápido que no se observa claramente en una gráfica lineal $\delta x(t)$ frente a t .

La solución es hacer una representación gráfica en escala logarítmica, es decir, se representa el logaritmo de $\delta x(t)$ frente a t .

Como ejemplo en la figura 30 se muestra el gráfico de logaritmo decimal de $\Delta\phi(t)$ frente a t . para un péndulo amortiguado y forzado. $\phi(t)$ representa a la solución, el ángulo descrito por el péndulo.

En dicha figura se observa que $\Delta\phi$ comienza desde 0,0001 ha aumentado en 14 s, casi cuatro órdenes de magnitud. Los máximos crecen casi linealmente, hasta $t = 14$ s, lo que implica que $\Delta\phi(t)$ crece exponencialmente. En cualquier movimiento caótico, $\Delta\phi(t)$ crece exponencialmente durante un rato al menos. El caos exhibe sensibilidad extrema a las condiciones iniciales.

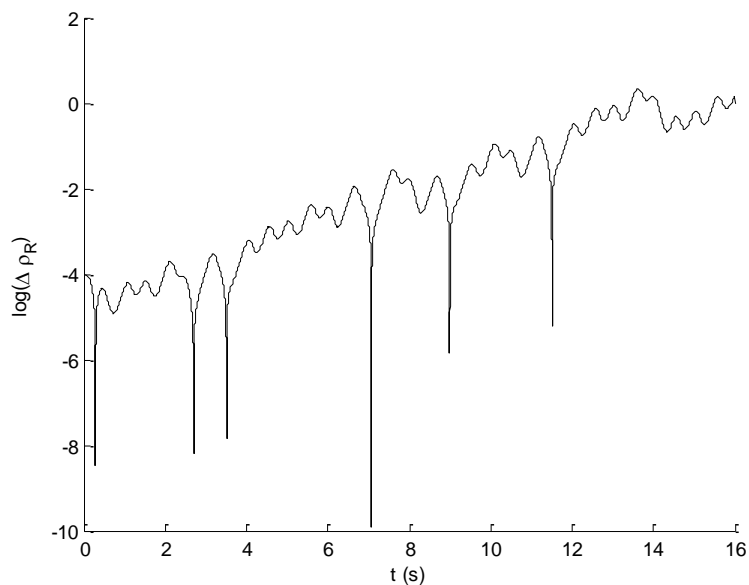


Figura 31. Separación $\Delta\Phi(t)$ de dos péndulos idénticos, ambos con parámetro de perturbación $\gamma = 1,105$ y con una separación inicial de $\Delta\Phi(0) = 0,0001$ radianes. Se consideró como frecuencia de la fuerza oscilante $\omega_e = 2\pi$ rad/s, frecuencia natural $\omega_o = 3\pi$ rad/s, y constante de amortiguamiento $\beta = 3\pi/4$ rad/s. Ejemplo tomado del libro "Mecánica Clásica", de J.R. Taylor.