Universidad Nacional de Ingeniería

Facultad de Ciencias

Punto fijo de Kakutani y existencia de equilibrio de una economía de intercambio puro

Tesis para Optar el Título de

LICENCIADO EN MATEMATICA

Nildo Sinche Chocca

Asesora: Dra. Yboon García

Febrero de 2013

Índice general

Introducción

La idea de equilibrio conlleva implícita una situación en la que las fuerzas que operan sobre el mercado se compensen de manera que los agentes que intervienen no tienen incentivos para desviarse de las desiciones que los han conducido a esta situación. En los años cincuenta Arrow, Debreu y Mckenzie independientemente al principio y en colaboración mas tarde utilizaron el enfoque del teorema de punto fijo para demostrar la existencia de un equilibrio económico. El objetivo de este trabajo es establecer la existencia del equilibrio en una economía de intercambio puro a partir de resultados clásicos como el Teorema del Máximo y el Teorema de Punto Fijo de Kakutani.

En el primer capítulo recordamos los elemento necesarios del análisis convexo. En el segundo capítulo introducimos la teoría de correspondencias que es bastante útil en el análisis de problemas económicos, terminamos este capítulo estableciendo el Teorema del Máximo. El tercer capítulo tiene por objetivo la prueba del Teorema de Punto Fijo de Kakutani, en el contexto de espacio vectorial topológico, esto se logra estableciendo el Teorema de KKM cuya prueba se da a travez del Lema de Sperner. En el último capítulo damos la noción de una economía de intercambio puro, establecemos las condiciones para que una relación de preferencias sea representado por una función de utilidad continua, estudiamos el modelo de economía abstracta y probamos el teorema de equilibrio social para esta economía, por último estudiamos el equilibrio de una economía de intercambio puro.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Elementos del Análisis Convexo

En esta sección estableceremos resultados básicos del análisis convexo referentes a conjuntos convexos, funciones convexas y funciones cuasiconvexas, que serán necesarios para resultados posteriores.

En esta sección (X, τ) denotará un espacio vectorial topológico real (Apéndice), si no hay lugar a confusión escribiremos simplemente X.

Definición 1.1.1. *Un conjunto C en X es llamado convexo si para cualquier x, y en C y $\alpha \in [0,1]$, se tiene $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$; es llamado afín si para cualquier x, y en C y $\alpha \in \mathbb{R}$, se tiene $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$*

Definición 1.1.2. *Un conjunto finito $\{x_i\}_{i\in F}$ es llamado affinmente independiente si el conjunto $\{x_i - x_{i_o}\}_{i\in F\setminus i_o}$ es linealmente independiente para todo $i_o \in F$ fijo.*

Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, se denomina cápsula convexa y se denota por $conv\{x_1, ..., x_n\}$ al menor conjunto convexo que contiene a $\{x_1, ..., x_n\}$.

Dado $n \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{1, ..., n\}$ será denotado por $[n]$.

Proposición 1.1.1. *Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, se tiene*

$$conv\{x_1, ..., x_n\} = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \geq 0 \ \forall \ i \in [n] \Big\}$$

Prueba. Definimos $E := \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ , \ \lambda_i \geq 0 \ \forall \ i \in [n] \right\}$, es facil ver que E es un conjunto convexo que contiene a $\{x_1, ..., x_n\}$. Sea F un conjunto convexo que contiene a $\{x_1, ..., x_n\}$. Como $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in F$, para todo $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ y $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, se tiene que $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = (\lambda_1 + \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2} x_2) + \lambda_3 x_3$ pertenece a F, donde $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$ y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0$. Prosiguiendo de esta manera si $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i x_i \in F$ para todo $\lambda_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i = 1$, se tiene que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = (\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j)(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i x_i}{\sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j}) + \lambda_n x_n$ pertenece a F, donde $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y $\lambda_i > 0$. Luego E es un subconjunto de F.
Por lo tanto E es el menor conjunto convexo que contiene a $\{x_1, ..., x_n\}$, es decir $conv\{x_1, ..., x_2\} = E$. □

Proposición 1.1.2. *Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, se tiene que el conjunto $conv\{x_1, ..., x_n\}$ es compacto en X.*

Prueba. Definimos $f(\bar{\lambda}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, donde $\bar{\lambda} = (\lambda_1, .., \lambda_n)$. Como la operación adición es continua, entonces f es continua. Luego de $f(\Lambda) = conv\{x_1, ..., x_n\}$ concluimos que $conv\{x_1, ..., x_n\}$ es compacto, ya que $\Lambda = \{\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}$ es compacto en $\mathbb{R}^n$. □

Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, se denomina cápsula afín y se denota por $Aff\{x_1, ..., x_n\}$ al menor conjunto afín que contiene a $\{x_1, ..., x_n\}$.

Proposición 1.1.3. *Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, el conjunto $L = Aff\{x_1, ..., x_n\} - x_i$ es un subespacio de X, donde i es algún elemento de $[n]$*

Prueba. Dados $x \in L$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. De $x = a - x_i$, $\lambda x = \lambda a + (1 - \lambda)x_i - x_i$ y $\lambda a + (1 - \lambda)x_i \in Aff\{x_1, ..., x_n\}$ se tiene que $\lambda x \in L$.
Sean $x = a - x_i$ y $y = b - x_i$, donde $a, b \in Aff\{x_1, ..., x_n\}$; como $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \in Aff\{x_1, ..., x_n\}$ y $\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2} + \frac{b}{2} - x_i$, se tiene que $\frac{x+y}{2} \in L$; de la primera parte $x + y \in L$.
Por lo tanto, L es un subespacio vectorial.

□

El subespacio L es llamado subespacio paralelo a $Aff\{x_1, ..., x_n\}$ y si L tiene dimensión m, entonces se dice que el conjunto $Aff\{x_1, ..., x_n\}$ es de dimensión m.

Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$, denotamos por $span\{x_1, ..., x_n\}$ al subespacio generado por $\{x_1, ..., x_n\}$ en X.

Proposición 1.1.4. *Sea $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ un conjunto finito de $\mathbb{R}^m$, los siguientes enunciados son equivalentes*

1.) El conjunto $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es affinmente independiente.

2.) Si $r_0, r_1, ..., r_n \in \mathbb{R}$ son tales que $\sum_{i=0}^{n} r_i x_i = 0$ y $\sum_{i=0}^{n} r_i = 0$. Entonces $r_i = 0$ para todo i.

3.) $Aff\{x_0, ..., x_n\}$ tiene dimensión n.

Prueba. *Veamos que* 1.) *implica* 2.) Sea $\sum_{i=0}^{n} r_i x_i = 0$, $\sum_{i=0}^{n} r_i = 0$. Como $\{x_i - x_0\}_{i \in [n]}$ es linealmente indepiendente y $\sum_{i=1}^{n} r_i(x_i - x_0) = 0$ entonces $r_i = 0$, para todo $i \in [n]$; también es claro que $r_0 = 0$. Por lo tanto $r_i = 0$ para todo $0 \leq i \leq n$.
Veamos que 2.) *implica* 3.) Dado $0 \leq i \leq n$ fijo, se puede probar fácilmente que $\{x_0 - x_i, .., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, .., x_n - x_i\}$ es linealmente independiente y además

$$span\{x_0 - x_i, .., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, .., x_n - x_i\} = Aff\{x_0, ..., x_n\} - x_i.$$

Luego, $Aff\{x_0, ..., x_n\}$ tiene dimensión n.
Veamos que 3.) *implica* 1.) Dado $0 \leq i \leq n$ fijo, de

$$span\{x_0 - x_i, .., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, .., x_n - x_i\} = Aff\{x_0, ..., x_n\} - x_i.$$

se tiene que $span\{x_0 - x_i, .., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, .., x_n - x_i\}$ tiene dimensión n, luego $\{x_0 - x_i, .., x_{i-1} - x_i, x_{i+1} - x_i, .., x_n - x_i\}$ es linealmente independiente. Por lo tanto, el conjunto $\{x_0, x_1, ..., x_n\}$ es affinmente independiente. $\square$

Definición 1.1.3. *Sea $C \subset X$ convexo. Una función $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice convexa si*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

para todo $x, y \in K$ *y todo* $\lambda \in [0,1]$.

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el conjunto de nivel de f en λ es definido como

$$S_\lambda(f) = \{x \in C \ : \ f(x) \leq \lambda\}$$

Tambien, definimos $\widehat{S_\lambda}(f) = \{x \in C \ : \ f(x) < \lambda\}$, que es llamado conjunto de nivel estricto de f en λ.

Una generalización del concepto de función convexa es la siguiente: $f: \ C \longrightarrow \mathbb{R}$ es *cuasiconvexa* si

$$S_\lambda(f) = \{x \in C \ : \ f(x) \leq \lambda\}$$

es convexo para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. La función f es llamada *cuasiconcava* si $-f$ es cuasiconvexa.

Proposición 1.1.5. *Sea* $C \subset X$ *convexo,* $f: \ C \longrightarrow \mathbb{R}$ *es cuasiconvexa si y sólo si* $\widehat{S_\lambda}(f)$ *es convexa, para todo* $\lambda \in \mathbb{R}$

Prueba. ($\rightarrow$) Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, el resultado se sigue de $\widehat{S_\lambda}(f) = \bigcup\limits_{\lambda > \alpha} S_\alpha(f)$.
($\leftarrow$) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$, el resultado se sigue de $S_\lambda(f) = \bigcap\limits_{\alpha > \lambda} \widehat{S}_\alpha(f)$. □

La función $f: \ C \longrightarrow \mathbb{R}$ es llamada *semicontinua inferior* (s.c.i.) con respecto a τ en C si los conjuntos

$$S_\lambda(f) = \{x \in C \ : \ f(x) \leq \lambda\}$$

son cerrados, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. La función f es llamado *semicontinua superior* (s.c.s.) con respecto a τ en C si $-f$ es semicontinua inferior.

Proposición 1.1.6. *Sea* X *un e.v.t. ,* $C \subset X$ *y* $f: \ C \longrightarrow \mathbb{R}$ *, entonces* f *es continua si y sólo si* f *es s.c.i. y s.c.s.*

Prueba. ($\rightarrow$) Es inmediato.
($\leftarrow$)Se sigue de la igualdad $f^{-1}(]\alpha, \beta[) = f^{-1}(]-\infty, \beta[) \cap f^{-1}(]\alpha, +\infty[)$ que se verifica para todo intervalo abierto $]\alpha, \beta[$. □

Proposición 1.1.7. *Sea C un subconjunto de un e.v.t. X y $\{ f_i : C \rightarrow \mathbb{R} \}_{i\in I}$ una familia arbitraria de funciones semicontinua inferior, entonces la función $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, dada por*

$$f(x) = \sup_{i\in I}\{f_i(x)\}$$

si está bien definida es semicontinua inferior

Prueba. El resultado se sigue inmediatamente de la igualdad

$$S_\lambda(f) = \bigcap_{i\in I} S_\lambda(f_i)$$

que se verifica, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. □

1.1.1. Interior algebraico

Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, se definen las siguientes notaciones.

$$[x, y] = \{\alpha x + (1 - \alpha)y \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

$$]x, y[= \{\alpha x + (1 - \alpha)y \ : \ \alpha \in \mathbb{R}, \ 0 < \alpha < 1\}$$

Los conjuntos $[x, y[$, $]x, y]$ se definen de manera similar.

Definición 1.1.4. *Sean S y T dos subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. El interior algebraico de S relativo a T es el conjunto*

$$Cor_T(S) = \{x \in S \ : \ \forall \, y \in T\backslash\{x\}, \exists z \in]x, y] \ tal \ que \ [x, z] \subset S\}$$

El interior algebraico de S es el conjunto $Cor_{\mathbb{R}^n}(S)$ y se denotará como $CorS$; el interior algebraico relativo de S es el conjunto $Cor_{Aff(S)}(S)$ y se denota por $icrS$.

Observación Sea $\{x_i\}_{i\in F}$ un conjunto affinmente independiente, como

$$Aff(conv(\{x_i\}_{i\in F})) = \left\{ \sum_{i\in F} r_i x_i \ : \ \sum_{i\in F} r_i = 1 \right\}$$

se tiene que $icrconv(\{x_i\}_{i\in F}) = \left\{ \sum_{i\in F} \alpha_i x_i \ : \ \sum_{i\in F} \alpha_i = 1; \alpha_i > 0 \; \forall \, i \in F \right\}$

Teorema 1.1.1. *Un conjunto convexo no vacío de* $\mathbb{R}^n$ *tiene interior algebraico relativo no vacío.*

Prueba. Sea C no vacío y convexo. Escojamos un subconjunto finito affinmente independiente $\{x_i\}_{i\in F}$ de C que contenga la más alta cardinalidad. Dado $x \in C$ entonces el conjunto $\{x, x_i\}_{i\in F}$ no es affinmente independiente. De la Proposición 1.1.4 podemos asumir, sin pérdida de generalidad, que existen $\{r_i\}_{i\in F}$ tal que $(-1)x + \sum_{i\in F} r_i x_i = 0$ y $-1 + \sum_{i\in F} r_i = 0$. De esta manera $x \in Aff(\{x_i\}_{i\in F})$ y de

$$conv(\{x_i\}_{i\in F}) \subset C \subset Aff(\{x_i\}_{i\in F}),$$

concluimos que $Aff(C) = Aff(\{x_i\}_{i\in F}) = Aff(conv(\{x_i\}_{i\in F}))$. Esto muestra que $icrconv(\{x_i\}_{i\in F}) \subset icr(C)$. Por lo tanto, de la observación anterior, $icr(C) \neq \emptyset$. $\square$

Capítulo 2

Teorema del Máximo

Dado un conjunto compacto no vacío F_x y una función continua $f_x : F_x \to \mathbb{R}$ sabemos que el problema de optimización $P_x : \max_{y \in F_x} f_x(y)$ tiene solución, una pregunta natural es: Como cambia el valor óptimo de P_x cuando hacemos variar el parámetro x ?. En este capítulo estableceremos un resultado que responde a esta pregunta denominado Teorema del Máximo.

2.1. Correspondencias

Dados X, Y dos conjuntos no vacíos. Una correspondencia T de X a Y es una función de X al conjunto potencia de Y, en este caso usaremos la siguiente notación $T : X \twoheadrightarrow Y$. El conjunto $Gr(T) = \{(x, y) \in X \times Y \ : \ y \in T(x)\}$ se denomina gráfico de T.

Definición 2.1.1. *Sea una correspondencia T de X a Y y $E \subset Y$. La inversa superior de E bajo T, denotada por $T^+(E)$, es definida como*

$$T^+(E) = \{x \in X \ : \ T(x) \subset E\}.$$

La inversa inferior de E bajo T, denotada por $T^-(E)$, es definida como

$$T^-(E) = \{x \in X \ : \ T(x) \cap E \neq \emptyset\}$$

Lema 2.1.1. *Sea X, Y espacios métricos y T una correspondencia de X a Y. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes*

1. *Para cada conjunto abierto G de Y, la inversa superior $T^+(G)$ es abierto en X.*

2. *Para cada conjunto cerrado C de Y, la inversa inferior $T^-(C)$ es cerrado en X.*

3. *Para toda sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_k \longrightarrow \bar{x}$ y para cualquier vecindad G de $T(\bar{x})$ en Y, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(x_k) \subset G$ para todo $k \geq k_0$*

Prueba. 1. $\to$ 2. Se sigue de la igualdad $T^-(C) = X \setminus \{T^+(Y \setminus C)\}$, que se verifica para todo conjunto C de Y.
2. $\to$ 3. Sea $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \to \bar{x}$ y un conjunto abierto $G \subset Y$ tal que $T(\bar{x}) \subset G$, se tiene $T(\bar{x}) \cap (Y \setminus G) = \emptyset$. Luego, $\bar{x}$ pertenece al conjunto abierto $X \setminus T^-(Y \setminus G)$; de esta manera $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_k \in X \setminus T^-(Y \setminus G)$, para todo $k \geq k_0$; es decir $T(x_k) \subset G$ para todo $k \geq k_0$.
2. $\to$ 3. Sea G un conjunto abierto. Si $T^+(G)$ no es un conjunto abierto, existe $\bar{x} \in T^+(G)$ y $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $x_k \to \bar{x}$ y $T(x_k) \nsubseteq G$, lo que contradice 3.. Por lo tanto, $T^+(G)$ es abierto.

$\square$

Si cualquiera de las tres condiciones del Lema se satisfacen, entonces la correspondencia T es llamado *semicontinua superiormente* (*s.c.s.*) en X.
La correspondencia T es semicontinua superiormente en $\bar{x}$ si para cada vecindad G de $T(\bar{x})$ existe una vecindad U de $\bar{x}$ tal que $T(z) \subset G$, para todo $z \in U$. No es difícil mostrar que T es semicontinua superiormente en X si solo si es semicontinua superiormente en cada elemento $\bar{x}$ de X.

Ejemplo 2.1.1. *La correspondencia $T : [0,2] \twoheadrightarrow [0,2]$ cuya gráfica se presenta en la Figura 2.1 es semicontinua superiormente en todo punto de $[0,2]$ excepto en 1.*

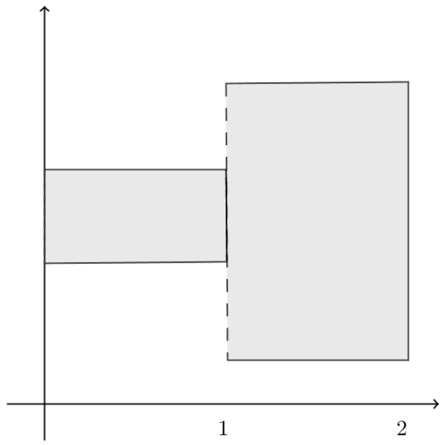

Figura 2.1: No es semicontinua superiormente en 1

Lema 2.1.2. *Sea X, Y espacios métricos y T una correspondencia de X a Y. Entonces las siguientes tres condiciones son equivalentes*

1. *Para cada conjunto abierto G de Y, la inversa inferior $T^{-}(G)$ es abierto en X.*

2. *Para cada conjunto cerrado C de Y, la inversa superior $T^{+}(C)$ es cerrado en X.*

3. *Dado una sucesión $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_k \longrightarrow \bar{x}$ y un conjunto abierto G de Y tal que $T(\bar{x}) \cap G \neq \emptyset$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T(x_k) \cap G \neq \emptyset$ para todo $k \geq k_0$*

Prueba. La prueba es completamente similar al del Lema 2.1.1. □

Si cualquiera de las tres condiciones del Lema 2.1.2 se satisfacen, entonces la correspondencia T es llamada *semicontinua inferiormente* (*s.c.i.*) en X.
La correspondencia T es semicontinua inferiormente en $\bar{x}$ si para cada abierto G con $T(\bar{x}) \cap G \neq \emptyset$ existe una vecindad U de $\bar{x}$ tal que $T(z) \cap G \neq \emptyset$, para todo $z \in U$. No es difícil mostrar que T es semicontinua inferiormente en X si solo si es semicontinua inferiormente en cada elemento $\bar{x}$ de X.
Se dice que la correspondencia T es con valores no vacíos (con valores cerrados) si $T(x)$ es diferente al vacío (es cerrado), para todo $x \in X$.

Proposición 2.1.1. *Sean* X, Y *dos espacios métricos y una correspondencia* $T: X \twoheadrightarrow Y$ *con valores no vacíos. Entonces* T *es semicontinua inferiormente en* x *si solo si para cualquier* $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *con* $x_k \to x$ *y cualquier* $y \in T(x)$*, existe* $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ *tal que* $y_k \to y$ *y* $y_k \in T(x_k)$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$*.*

Prueba. Supongamos que T es semicontinua inferiormente en x y sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $x_n \to x$ y cualquier $y \in T(x)$. Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$ del Lema 2.1.2 (parte 3.), existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que $T(x_n) \cap B_{\frac{1}{k}}(y) \neq \emptyset$, para todo $n \geq n_k$. Consideremos: $n_1 < n_2 <, \ldots <, .., .$ Definimos una sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente manera: Si $n < n_1$ tomamos $y_n \in T(x_n)$, si $n_1 \leq n < n_2$ tomamos $y_n \in T(x_n) \cap B_1(y)$, si $n_2 \leq n < n_3$ tomamos $y_n \in T(x_n) \cap B_{\frac{1}{2}}(y)$, prosiguiendo de esta manera es claro que $y_n \to y$ y $y_n \in T(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
Dado $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $x_k \to x$ y un conjunto abierto G tal que $T(x) \cap G \neq \emptyset$, sea $y \in T(x) \cap G$ entonces existe $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset Y$ tal que $y_k \to y$ y $y_k \in T(x_k)$, para cada k. Por otro lado, existe k_0 tal que $y_k \in G$ para todo $k \geq k_0$. De esta manera $T(x_k) \cap G \neq \emptyset$, para todo $k \geq k_0$. Por lo tanto, T es semicontinua inferiormente.

$\square$

Ejemplo 2.1.2. *La correspondencia* $T: [0,1] \twoheadrightarrow [0,1]$ *cuya gráfica se presenta en la Figura 2.2 es semicontinua inferiormente en todo punto excepto en* $\frac{1}{2}$*.*

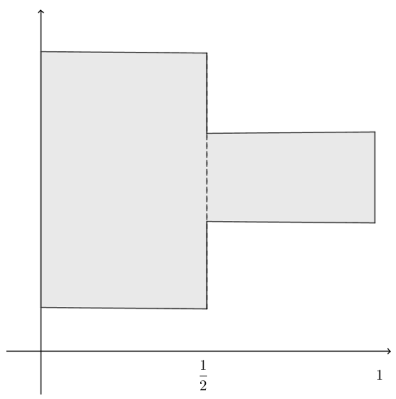

Figura 2.2: No es semicontinua inferiormente en $\frac{1}{2}$

Definición 2.1.2. *Dados tres espacios métricos* X, Y, Z *y dos correspondencias* $T_1 : X \twoheadrightarrow Y$ *y* $T_2 : Y \twoheadrightarrow Z$*, la correspondencia compuesta* $T_2 \circ T_1 : X \twoheadrightarrow Z$ *es definida por* $T_2 \circ T_1(x) = \cup_{y \in T_1(x)} T_2(y)$.

Proposición 2.1.2. *Dados tres espacios métricos* X, Y, Z *y dos correspondencias* $T_1 : X \twoheadrightarrow Y$ *y* $T_2 : Y \twoheadrightarrow Z$*. Si* T_1 *y* T_2 *son semicontinuas inferiormente (superiormente),entonces la correspondencia* $T_2 \circ T_1$ *es semicontinua inferiormente (superiormente).*

Prueba. Sean T_1 y T_2 semicontinuas inferiormente. Sea un conjunto abierto $G \subset Z$ y dado $x \in (T_2 \circ T_1)^-(G)$ tenemos que $(\cup_{y \in T_1(x)} T_2(y)) \cap G \neq \emptyset$, luego existe $y \in T_1(x)$ tal que $y \in T_2^-(G)$; como $T_2^-(G)$ es abierto tomemos una vecindad V_y de y tal que $V_y \subset T_2^-(G)$ y consideremos el conjunto abierto $T_1^-(V_y)$. No es difícil ver que $x \in T_1^-(V_y)$ y $T_1^-(V_y) \subset (T_2 \circ T_1)^-(G)$, lo cual muestra que $(T_2 \circ T_1)^-(G)$ es abierto. Por lo tanto, $T_2 \circ T_1$ es semicontinua inferiormente.
Una prueba similar muestra que si T_1 y T_2 son semicontinuas superiormente, entonces $T_2 \circ T_1$ es semicontinua superiormente. $\square$

Definición 2.1.3. *Se dice que una correspondencia* T *es continua si es semicontinua superior e inferiormente a la vez.*

Una función $f : X \to Y$ puede ser considerado como una correspondencia T cuyos valores son los conjuntos unitarios $T(x) = \{f(x)\}$, en este caso no es difícil observar que los conceptos: Continuidad de f, semicontinuidad superior de T y semicontinuidad inferior de T son equivalentes.

2.1.1. Teorema del Máximo

Sean X, Y espacios métricos. Una correspondencia T de X a Y es llamada cerrada si el gráfico $Gr(T)$ es cerrado en $X \times Y$.

Teorema 2.1.1. *Sean* X*,* Y *espacios métricos y* T *una correspondencia de* X *a* Y*. Si* T *s.c.s. con valores cerrados, entonces* T *es cerrado.*

Prueba. Sea (x, y) un punto arbitrario en el complemento de $Gr(T)$, es decir $y \notin T(x)$. Como $T(x)$ es cerrado existen conjuntos abiertos V_1 y V_2 tales que $y \in V_1$, $T(x) \subset V_2$ y $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Desde que T es *s.c.s.*, $T^+(V_2)$ es una vecindad de x; luego $T^+(V_2) \times V_1$ es una vecindad de (x, y) en el complemento de $Gr(T)$. Lo que muestra que $Gr(T)$ es cerrado. $\square$

Lema 2.1.3. *Sean X, Y dos espacios métricos y T_1, T_2 dos correspondencias de X a Y. Si T_1 es cerrado y T_2 es s.c.s. con valores compactos, entonces la correspondencia T definida como $T(x) = T_1(x) \cap T_2(x)$ es s.c.s. en X.*

Prueba. Sea $x \in X$ y cualquier G abierto tal que $T(x) \subset G$. Si $T_2(x) \subset G$ no hay nada que probar. Supongamos que exista $y \in T_2(x) \setminus G$, entonces (x, y) no pertenece al conjunto cerrado $Gr(T_1)$. Luego, existe una vecindad $N_y(x)$ de x y una vecindad $V(y)$ de y tal que $[N_y(x) \times V(y)] \cap Gr(T_1) = \emptyset$, de donde $T_1(z) \cap V(y) = \emptyset$ para todo $z \in N_y(x)$. Como $T_2(x) \setminus G$ es compacto y $T_2(x) \setminus G \subset \bigcup_{y \in T_2(x) \setminus G} V(y)$, existen $\{y_1, ...y_2\}$ tal que

$$T_2(x) \setminus G \subset \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i).$$

Sea $V = \bigcup_{i=1}^{n} V(y_i)$ y $N'(x) = N_{y_1}(x) \cap .... \cap N_{y_n}(x)$; $N'(x)$ es una vecindad de x y verifica $T_1(z) \cap V = \emptyset$ para todo $z \in N'(x)$. Desde que $G \cup V$ es una vecindad de $T_2(x)$, existe una vecindad $N''(x)$ de x tal que $T_2(z) \subset G \cup V$ para todo $z \in N''(x)$. Luego $T_1(z) \cap V = \emptyset$ y $T_2(z) \subset G \cup V$ para todo $z \in N'(x) \cap N''(x)$. Por lo tanto $T(z) \subset G$, para todo $z \in N'(x) \cap N''(x)$. De esta manera T es semicontinua superiormente. $\square$

Teorema 2.1.2. *Sean X un espacio métrico , Y un espacio métrico compacto y T una correspondencia de X a Y. Si T es cerrado, entonces T es s.c.s. de valores cerrados.*

Prueba. T tiene valores cerrados desde que T es cerrado. Definiendo $T_2 : X \twoheadrightarrow Y$ como $T_2(x) = Y$, vemos que T_2 es *s.c.s.* y de valores compactos. La igualdad $T(x) = T(x) \cap T_2(x)$ junto con el Lema 2.1.3 nos asegura que T es *s.c.s.* $\square$

Teorema 2.1.3. *(Teorema del Máximo) Sean X, Y espacios métricos, $f : X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $T : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia de valores compactos, s.c.s. y s.c.i. en X. Entonces*

(1) La función $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$, definida como $\varphi(x) = \max\limits_{y \in T(x)} f(x,y)$ es continua en X.

(2) La correspondencia $\phi : X \twoheadrightarrow Y$ definida por $\phi(x) = \Big\{ y \in T(x) \ : \ f(x,y) = \varphi(x) \Big\}$ es s.c.s. en X.

Prueba. (2) Del Lema 2.1.3 y la igualdad $\phi(x) = \phi(x) \cap T(x)$, basta probar que ϕ es cerrada. Supongamos que ϕ no es cerrada, entonces existe una sucesión $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Gr(\phi)$ que converge a $(\bar{x}, \bar{y})$, pero $(\bar{x}, \bar{y}) \notin Gr(\phi)$. De $Gr(\phi) \subset Gr(T)$ y del Teorema 2.1.1 tenemos $(\bar{x}, \bar{y}) \in Gr(T)$, de esta manera existe $y^* \in T(\bar{x})$ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) < f(\bar{x}, y^*)$. De la continuidad de f existe una vecindad U de $\bar{x}$, una vecindad de V de y^* y un número positivo ϵ tal que $f(\bar{x}, \bar{y}) + \epsilon < f(x,y)$ para todo $(x,y) \in U \times V$.

Por otro lado, como T es *s.c.i.* existe $k_0 \in \mathbb{N}$, tal que $T(x_k) \cap V \neq \emptyset$ para todo $k \geq k_0$. Tomando $y_k^* \in T(x_k) \cap V$ para todo $k \geq k_0$, tenemos $(x_k, y_k^*) \in Gr(T) \cap U \times V$ para k suficientemente grande, luego

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + \epsilon < f(x_k, y_k^*) \leq f(x_k, y_k)$$

para k suficientemente grande. Cuando $k \to \infty$ obtenemos $\epsilon \leq 0$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, ϕ es cerrada.

(1) Definimos $T_1 : X \twoheadrightarrow X \times \phi(X)$ por $T_1(x) = x \times \phi(x)$ y $T_2 : X \times \phi(X) \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ por $T_2(x,y) = \{f(x,y)\}$. No es difícil mostrar que T_1 y T_2 son semicontinuas superiormente y además $T_2 \circ T_1(x) = \varphi(x)$, de la Proposición 2.1.2 φ es semicontinua superiormente, lo cual es suficiente para garantizar la continuidad de φ.

$\square$

Capítulo 3

Teorema de Kakutani

En este capítulo se establece el Teorema de Punto Fijo de Kakutani, la prueba sigue una técnica clásica: primero establecemos el Lema de Sperner, luego usamos este resultado para probar el Teorema de KKM, finalmente usamos este teorema, junto con otros resultados, para probar el Teorema de Kakutani. En todo este capítulo X denotará un espacio vectorial topológico (e.v.t.), salvo se diga lo contrario.

3.1. Lema de Sperner

En esta sección se verá al detalle el Lema de Sperner del cual desprenderemos el teorema de KKM en la siguiente sección. Antes veamos algunas definiciones.

Definición 3.1.1. *Un n-simplex estandar Λ^n es la cápsula convexa de los vectores unitarios de $\mathbb{R}^{n+1}$, es decir $\Lambda^n = conv\{e_0, e_1, .., e_n\}$*

De manera similar un n-simplex S es al cápsula convexa de $n+1$ puntos de $\mathbb{R}^{n+1}$ afinmente independientes ; es decir $S = conv\{x_0, x_1, .., x_n\}$, donde $Aff\{x_0, x_1, .., x_n\}$ tiene dimensión n.

Los puntos x_i son llamados vértices de S y estos serán denotados por S_0, es decir $S_0 = \{x_0, ..., x_n\}$. El k-simplex $conv\{x_{i_0}, ..., x_{i_k}\}$ es llamado k-cara de S. Vea la Figura 3.1 El soporte de un punto $y \in S$ denotado por $\delta(y)$ es definido como la menor cara de

S que contiene a y. Si $y = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x_i$ tenemos $\delta(y) = conv\{x_i \in S_0 \ : \ \lambda_i > 0\}$.

Definición 3.1.2. *Dado un n-simplex $S = conv\{x_0, x_1, .., x_n\}$ una subdivisión de S es una colección finita de n-simplex $\xi = \{\sigma \ : \ \sigma \ \text{ es n-simplex}\}$ tal que:*

a) $S = \bigcup_{\sigma \in \xi} \sigma$.

b) Para todo $\sigma, \rho \in \xi$ se tiene que si $\sigma \cap \rho \neq \emptyset$ entonces $\sigma \cap \rho$ es una cara común de σ y ρ.

Denotaremos por ξ_0 al conjunto de vértices de ξ, esto es

$$\xi_0 = \{x \in S \ : \ x \in \sigma_0, \ \sigma \in \xi\}.$$

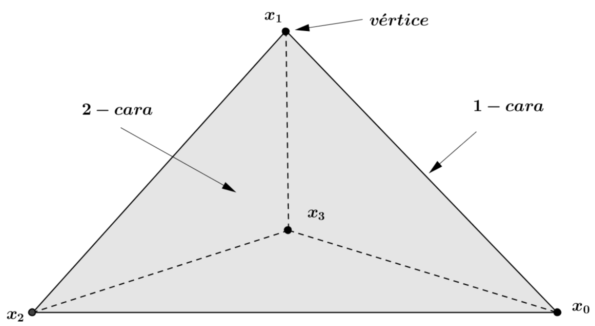

Figura 3.1: 3-simplex

Ejemplo 3.1.1. *Para el Λ^n n-simplex estandar, una m-subdivisión equilátera ξ_m es el conjunto de todos n-simplex cuyos vértices son de la forma:*

$$x = (\frac{k_0}{m}, ..., \frac{k_n}{m})$$

donde, $0 \leq k_i \leq m$, $k_i \in \mathbb{N}$ y $\sum_{i=0}^{n} k_i = m$. Vea la Figura 3.2.

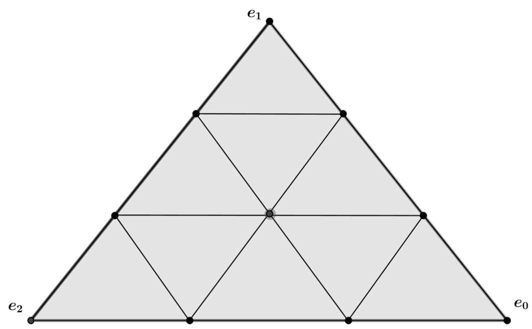

Figura 3.2: 3-subdivisión equilátera de Λ^2

Observación: Todos los $n-$simplex de esta subdivisión tienen diámetro $\frac{\sqrt{2}}{m}$.

Lema 3.1.1. *(Lema de Sperner) Sea* (S, ξ) *un n-simplex con una subdivisión y una función (Numeración de Sperner)* $\lambda : \ \xi_0 \ \longrightarrow \ S_0$ *tal que* $\forall \ p \ \in \xi_0, \ \ \lambda(p) \in \delta(p)_0$. *Entonces existe un número impar de n-simplex* σ *en* ξ *tal que* $\lambda(\sigma_0) = S_0$.

En la Figura 3.3 se ilustra la Numeración de Sperner para un $3-$simplex, podemos apreciar que en este caso existen tres elementos de ξ que satisfacen $\lambda(\sigma_0) = S_0$.

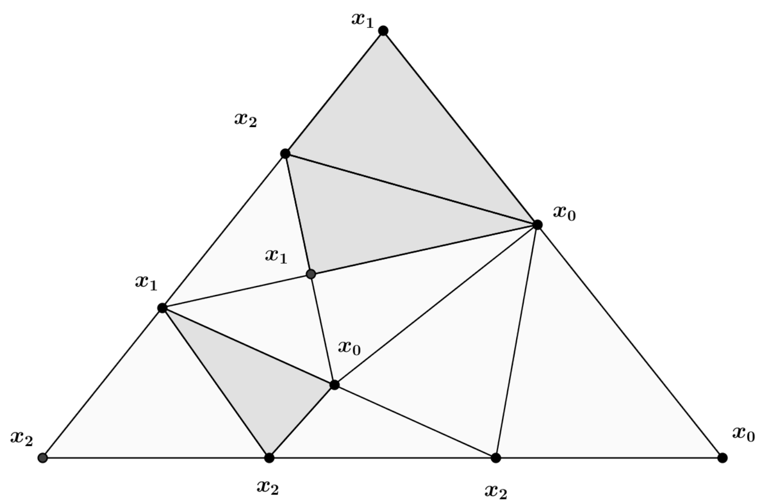

Figura 3.3: Numeración de Sperner

Prueba. La prueba se dará por inducción sobre n

1) Si $n = 0$, es obvio.

2) Supongamos que el resultado es válido para cualquier $(n-1)-$simplex con una subdivisión y cualquier función λ verificando la hipótesis del lema.

   Sea (S, ξ) un n-simplex con una subdivisión y una función verificando las condiciones del lema. En adelante cada $\sigma \in \xi$ se denominará pieza, una $(n-1)-$cara de S se llamará borde y una $(n-1)-$cara F de un σ en ξ se denominará puerta si $\lambda(F_0) = \{x_0, ..., x_{n-1}\}$. Sea N definido por:

$$N = \sum_{i=1}^{p} n_i$$

   donde n_i es el número de puertas de la pieza i y p es el número total de piezas de ξ. El valor de N se puede calcular de dos maneras:

   i) Como cualquier σ en ξ tiene a lo más dos puertas entonces si η es el número de piezas de una solo puerta y γ es el número de piezas de dos puertas se tiene:

$$N = 2\gamma + \eta \tag{3.1}$$

   ii) Observemos que una puerta en el borde de S es puerta de una sola pieza, sea α el número de tales puertas. Además una puerta en el interior de S es puerta de exactamante dos piezas, sea β el número de tales puertas. Luego tenemos

$$N = \alpha + 2\beta \tag{3.2}$$

   Notemos que η representa el número de piezas σ en ξ tal que $\lambda(\sigma_0) = S_0$

   Veamos que representa α:

   Si $S' = conv\{x_0, ..., x_{n-1}\}$ vemos que $\xi' = \{\sigma \cap S' \ : \ \sigma \in \xi\}$ es una subdivisión de S'. Sea $\lambda' = \lambda_{|\xi'_0}$ si $p \in \xi'_0$ se tiene $p \in S'$, de donde $\lambda'(p) \in \delta(p)_0 = \delta'(p)_0$. Luego (S', ξ') es un $(n-1)-$simplex con una subdivisión y λ' es una función que cumple con la condición del lema.

Por otro lado, sea F en el borde de S como F está en un $(n-1)-$cara de S y $\lambda(F_0) = \{x_0, ..., x_{n-1}\}$ entonces $F \subset conv\{x_0, ...x_{n-1}\} = S'$. De esta manera una puerta F en el borde de S es un elemento de ξ' tal que $\lambda'(F_0) = S'_0$. Luego α representa la cantidad de $\sigma' \in \xi'$ tal que $\lambda'(\sigma'_0) = S'_0$.

Así, por hipótesis de inducción sobre (S', ξ') y λ', α es impar.

De las Ecuaciones 3.1 y 3.2 vemos que η y α tienen la misma paridad, de esta manera se tiene que η es impar.

Por lo tanto existe un número impar de $\sigma \in \xi$ tal que $\lambda(\sigma_0) = S_0$. $\square$

Vea que el Lema de Sperner garantiza que existe al menos un σ de ξ tal que $\lambda(\sigma_0) = S_0$, recurriremos a esta observación para demostrar el Lema de KKM en la siguiente sección.

3.2. Teorema de KKM

El teorema de KKM en su forma general, se deriva del siguiente lema.

Lema 3.2.1. *(Lema de KKM) Dados $S = conv\{e_1, ..., e_n\}$ (S es $(n-1)-$simplex estandar) y los conjuntos $\{A_i\}_{i=1}^n$, $A_i \subset S$ tales que:*

a) Cada A_i es cerrado.

b) Para todo $J \subset [n]$, $conv\{e_j \ : \ j \in J\} \subset \bigcup_{j \in J} A_j$

Entonces $\bigcap\limits_{i \in [n]} A_i$ es diferente al vacío.

Prueba. Sea ξ_m la m-subdivisión equilátera de S. Dado $p \in S$ tenemos

$$p \in \delta(p) = conv\{e_{i_1}, ...e_{i_k}\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_{i_j}$$

entonces $p \in A_{i_j}$ para algún i_j, luego podemos definir una aplicación: $\lambda : (\xi_m)_0 \longrightarrow S_0$ como $\lambda(p) = e_{i_j}$ cuando $p \in A_{i_j}$, es claro que $\lambda(p) \in (\delta(p))_0$.

Del Lema de Sperner, existe $\sigma_m \in \xi_m$ tal que $\lambda((\sigma_m)_0) = \{e_1, ..., e_n\}$. Luego para cada $i \in [n]$ existe $p_i^m \in (\sigma_m)_0$ tal que $\lambda(p_i^m) = e_i$. Dicho de otra manera, para todo $i \in [n]$ existe $p_i^m \in (\sigma_m)_0$ con $p_i^m \in A_i$. De esta manera para $i \in [n]$ existe una sucesión $(p_i^m)_{m\in\mathbb{N}}$ en A_i tal que

$$\|p_i^m - p_j^m\| \leq \frac{\sqrt{2}}{m} \tag{3.3}$$

para todo $i, j \in [n]$.

Como S es compacto y A_i cerrado podemos suponer que esta sucesión converge a un $p_i \in A_i$. De la Ecuación 3.3 tenemos $p_1 = ... = p_n = p$, de donde $\bigcap\limits_{i\in[n]} A_i$ es diferente al vacío. $\square$

Definición 3.2.1. *Sea C un conjunto convexo en un e.v.t. X y $D \subset C$ no vacío.*

1. *Una familia de conjuntos $\{A_x\}_{x\in D}$ con $A_x \subset C$, se dice que es KKM si para todo conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset D$ se verifica $conv\{x_1, ..., x_n\} \subset \bigcup_{i\in[n]} A_{x_i}$*

2. *La función $\varphi : D \times C \to \mathbb{R}$ se llama KKM si para todo conjunto finito $\{x_1, ..., x_n\} \subset D$ y para todo $x \in conv\{x_1, ..., x_n\}$ existe $i \in [n]$ tal que $\varphi(x_i, x) \geq 0$.*

Teorema 3.2.1. *(Teorema de KKM) Sea C un conjunto convexo cerrado en un e.v.t. X y $D \subset C$ no vacío*

a) Si $\{A_x\}_{x\in D}$ es una familia KKM de conjuntos cerrados de C donde uno de ellos es compacto, entonces $\bigcap_{x\in D} A_x$ es diferente del vacío.

b) Si $\varphi : D \times C \longrightarrow \mathbb{R}$ es KKM , $\varphi(x, *)$ es s.c.s. y existe $\bar{x} \in D$ tal que $A_{\bar{x}} = \{y \in C \ : \ \varphi(\bar{x}, y) \geq 0\}$ es compacto. Entonces existe $\bar{y} \in C$ tal que $\varphi(x, \bar{y}) \geq 0$, para todo $x \in D$.

Prueba. a) Si suponemos que $\bigcap_{x\in D} A_x$ es vacío podemos encontrar una subfamilia finita con intersección vacía, luego basta ver que toda intersección finita es no vacía. Dado $\{x_1, ..., x_n\} \subset D$ y $S = conv\{e_1, ..., e_n\}$ definimos la función

$f: \ S \ \to \ C$ por $f(\lambda) = \sum \lambda_i x_i$, donde $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$. Claramente el conjunto $A_i = f^{-1}(A_{x_i})$ es cerrado, para todo $i \in [n]$.
Por otro lado, de $f(conv\{e_j \ : \ j \in J\}) = conv\{x_j \ : \ j \in J\} \subset \bigcup_{j\in J} A_{x_j}$, tenemos

$$conv\{e_j \ : \ j \in J\} \subset f^{-1}(\bigcup_{j\in J} A_{x_j}) = \bigcup_{j\in J} A_j,$$

de donde $conv\{e_j \ : \ j \in J\} \subset \bigcup_{j\in J} A_j$ para todo $J \subset [n]$.
Del Lema 3.2.1, el conjunto $\bigcap_{j\in[n]} A_j = \bigcap_{j\in[n]} f^{-1}(A_{x_j})$ es diferente al vacío y además $\bigcap_{j\in[n]} f^{-1}(A_{x_j}) = f^{-1}(\bigcap_{j\in[n]} A_{x_j})$, concluimos que $\bigcap_{j\in[n]} A_{x_j} \neq \emptyset$. Por lo tanto, cualquier intersección finita es diferente al vacío.

b) Resulta de la parte $a)$ considerando la familia $\{A_x\}_{x\in D}$, donde $A_x = \{y \in C \ : \varphi(x,y) \geq 0\}$.

□

3.3. Teorema de Kakutani

En este sección demostraremos el Teorema Fan-Browder y el Teorema de Kakutani al detalle.
La definición de semicontinuidad superior de una correspondencia en el contexto de espacio vectorial topológico es:

Definición 3.3.1. *Sean X e Y dos espacios topológicos . Una correspondencia $T: \ X \ \twoheadrightarrow \ Y$ se dice que es semicontinua superiormente (s.c.s.) en $x \in X$ si para todo vecindad W de $T(x)$ en Y existe una vecindad V de x en X tal que $T(z) \subset W$, para todo $z \in V$. Se dice que T es semicontinua superiormente en X si es semicontinua superiormente en todo punto de X.*

Definición 3.3.2. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio vectorial. Se dice que una correspondencia $\varphi: \ X \ \twoheadrightarrow \ Y$ es abierta-convexa, si para todo $y \in Y$ el conjunto $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X \ : \ y \in \varphi(x)\}$ es abierto en X y para todo $x \in X$ el conjunto $\varphi(x)$ es convexo en Y.*

Ejemplo 3.3.1. *La correspondencia* $\varphi: \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}$ *definida como*

$$\varphi(x) =]x, x+1[\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

es abierta-convexa.

Definición 3.3.3. *Sea X un espacio topológico e Y un espacio vectorial topológico. Se dice que una correspondencia $\varphi: X \twoheadrightarrow Y$ es casi-abierta-convexa (cac) si para toda vecindad $\mathscr{U}$ de $Gr(\varphi)$ en $X \times Y$ y todo subconjunto paracompacto A de X existe una correspondencia $\varphi': A \twoheadrightarrow Y$ abiera-convexa tal que $Gr(\varphi_{|A}) \subset Gr(\varphi') \subset \mathscr{U}$.*

Definición 3.3.4. *Sea X un espacio topológico y una correspondencia $\varphi: X \twoheadrightarrow X$, se dice que $x^* \in X$ es punto fijo de φ si $x^* \in \varphi(x^*)$.*

Teorema 3.3.1 (Fan-Browder)**.** *Sea X un conjunto compacto y convexo de un e.v.t. y $\varphi: X \twoheadrightarrow X$ una correspondencia abierta-convexa. Entonces, existe $x^* \in X$ tal que $\varphi(x^*) = \emptyset$ o $x^* \in \varphi(x^*)$.*

Prueba. Supongamos que $\varphi(x) \neq \emptyset$ para todo $x \in X$. Entonces, la familia $\{\varphi^{-1}(y)\}_{y\in X}$ es un cubrimiento abierto de X, luego existen $\{y_i\}_{i\in[n]}$ en X tal que $X = \bigcup\limits_{i\in[n]} \varphi^{-1}(y_i)$. Definimos $A_{y_i} = X \backslash \varphi^{-1}(y_i)$ para todo $i \in [n]$. Estos conjuntos son compactos con intersección vacía, de esta manera la familia $\{A_{y_i}\}_{i\in[n]}$ no puede ser KKM. Luego, existe $J \subset [n]$ y $x^* \in conv\{y_j \ : \ j \in J\}$ tal que $x^* \notin A_j$ para todo $j \in J$, lo que implica $x^* \in \varphi(x^*)$. □

Teorema 3.3.2 (Desigualdad de minimax de Ky Fan)**.** *Sea X un conjunto compacto convexo en un e.v.t. y una función $f: X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:*

(1) La función $f(*, y)$ es s.c.i. para todo $y \in X$.

(2) La función $f(x, *)$ es cuasicóncavo para todo $x \in X$.

(3) $f(x, x) \leq 0$ para todo $x \in X$.

Entonces, existe $x^* \in X$ tal que $\sup_{y\in X} f(x^*, y) \leq 0$

Prueba. Dado $x \in X$, definimos $\varphi(x) = \{y \in X \ : \ f(x,y) > 0\}$. De las condiciones sobre f tenemos que φ es una correspondencia abierta-convexa sin punto fijo, del Teorema anterior existe $x^* \in X$ tal que $\varphi(x^*)$ es vacío, es decir $\sup_{y\in X} f(x^*,y) \leq 0$. $\square$

Teorema 3.3.3. *Sea X un espacio paracompacto, Y un e.v.t. y $\varphi : X \twoheadrightarrow Y$ una correspondencia s.c.s. con valores convexos y compactos. Entonces, para toda vecindad $\mathscr{U}$ de $Gr(\varphi)$ en $X \times Y$ existe una correspondencia $\varphi' : X \twoheadrightarrow Y$ abierta-convexa tal que $Gr(\varphi) \subset Gr(\varphi') \subset \mathscr{U}$. En particular, φ es cac.*

Prueba. Dado $\mathscr{U}$ vecindad de $Gr(\varphi)$, sea $x \in X$ se tiene que $\{x\} \times \varphi(x) \subset \mathscr{U}$. Entonces existen U_x y V_x vecindades de x y $\varphi(x)$ respectivamente tales que $U_x \times V_x \subset \mathscr{U}$. Desde que $\varphi(x)$ es convexo y compacto podemos tomar V_x convexo, además como φ es s.c.s. el conjunto U_x puede elegirse de tal forma que $\varphi(U_x) \subset V_x$.
Como la familia $\{U_x\}_{x\in X}$ es un cubrimiento de X, existe un cubrimiento cerrado localmente finito $\{W_x\}_{x\in X}$ tal que $W_x \subset U_x$.
Por otro lado, sea el conjunto finito $Z(x) = \{z \in X \ : \ x \in W_z\}$ definimos la correspondencia: $\varphi' : X \twoheadrightarrow Y$ por $\varphi'(x) = \bigcap\limits_{z\in Z(x)} V_z$. Veamos lo que φ' satisface.

(a) Es claro que $\varphi'(x)$ es convexo y abierto, para todo $x \in X$.

(b) La correspondencia φ' es abierta. En efecto:
Dado $y \in Y$, sea $x \in (\varphi')^{-1}(y)$ como $\bigcup\limits_{z\notin Z(x)} W_z$ es cerrado (ya que la familia $\{W_z\}$ es localmente finito) y $x \notin \bigcup\limits_{z\notin Z(x)} W_z$, existe U'_x vecindad de x tal que $U'_x \cap W_z = \emptyset$, para todo $z \notin Z(x)$. De esta manera si $x' \in U'_x$ tenemos que $Z(x') \subset Z(x)$, de donde $\bigcap\limits_{z\in Z(x)} V_z \subset \bigcap\limits_{z\in Z(x')} V_z$ que es equivalente a $\varphi'(x) \subset \varphi'(x')$.
Luego, $x' \in (\varphi')^{-1}(y)$. Por lo tanto $(\varphi')^{-1}(y)$ es abierto.

(c) Se tiene $Gr(\varphi) \subset Gr(\varphi')$. En efecto, sea $(x,y) \in Gr(\varphi)$ y $z \in Z(x)$ tenemos que $y \in V_z$, para todo $z \in Z(x)$, lo cual implica $Gr(\varphi) \subset Gr(\varphi')$.

(d) Se tiene $Gr(\varphi') \subset \mathscr{U}$. En efecto, sea $(x,y) \in Gr(\varphi')$ y $z \in Z(x)$ tenemos que $y \in \varphi'(x) \subset V_z$, de donde $(x,y) \in U_z \times V_z \subset \mathscr{U}$.

De los items anteriores se tiene que φ' es la multifunción deseada. Por lo tanto φ es cac. $\square$

Un resultado similar al Teorema 3.3.1 para correspondencias cac es el siguiente.

Teorema 3.3.4. *Sea X compacto y convexo en un e.v.t. y $\varphi : X \twoheadrightarrow X$ cac. Entonces existe $x^* \in X$ tal que $\varphi(x^*) = \emptyset$ o $x^* \in \varphi(x^*)$*

Prueba. Supongamos que para todo $x \in X$ se tenga $x \notin \varphi(x)$. Sea el conjunto $\Delta = \{(x,x)/x \in X\}$, tenemos que $Gr(\varphi) \subset \Delta^C = X \times X \backslash \Delta$. Luego, como φ es cac, existe $\varphi' : X \twoheadrightarrow X$ abierta-convexa tal que

$$Gr(\varphi) \subset Gr(\varphi') \subset \Delta^C$$

de aquí y del Teorema 3.3.1 existe $x^* \in X$ tal que $\varphi'(x^*) = \emptyset$, de donde $\varphi(x^*) = \emptyset$. $\square$

Veamos el Teorema de Kakutani cuya prueba es un resultado inmediato de los teoremas precedentes.

Teorema 3.3.5 (Kakutani-Fan-Glicksberg)**.** *Sea X compacto y convexo en un e.v.t. y $\varphi : X \twoheadrightarrow X$ s.c.s. con valores convexos, compactos y no vacíos. Entonces φ tiene un punto fijo.*

Capítulo 4

Equilibrio Competitivo de una Economía de Intercambio Puro

En este capítulo se estudia el modelo de la economía de intercambio puro y la existencia de equilibrio competitivo para esta economía.

4.1. Economía de Intercambio Puro

En el modelo de una economía de intercambio puro con l tipos de artículos y m consumidores el $i-$ésimo consumidor es caracterizado por $(X_i, \preceq_i, w_i)$, donde:

1. El conjunto X_i es un subconjunto de $\mathbb{R}^l$ y es el conjunto de canastas con el cual puede sobrevivir el consumidor i.

2. $\preceq_i$ denominada *relación de preferencias* es una relación binaria en X_i que satisface:

    a) Dado $x, y \in X_i$ se tiene $x \preceq_i y$ ó $y \preceq_i x$, en este caso se dice que $\preceq_i$ es completa.

    b) Para cualquier x, y y z en X_i tal que $x \preceq_i y$ y $y \preceq_i z$ se tiene $x \preceq_i z$, en este caso se dice que $\preceq_i$ es transitiva.

3. $w_i \in \mathbb{R}^l$ representa la dotación inicial del consumidor i.

Dada una relación de preferencias $\preceq_i$, definimos la relación de *indiferencia* $\sim_i$ y la relación de *preferencia estricta* $\prec_i$ como: Dados $x, y \in X_i$,

$$x \sim_i y \Leftrightarrow [x \preceq_i y \wedge x \preceq_i y]$$

$$x \prec_i y \Leftrightarrow [x \preceq_i y \wedge x \not\succ_i y]$$

Una relación de preferencias $\preceq_i$ en X_i es llamada *cerrada* si para cualquier $x \in X_i$ los conjuntos $L_{\preceq_i}(x) := \{y \in X_i \ : \ y \preceq_i x\}$, $U_{\preceq_i}(x) := \{y \in X_i \ : \ x \preceq_i y\}$ son cerrados en X_i; es llamada *débilmente convexa* si para cualquier $x \in X_i$ el conjunto $U_{\preceq_i}(x)$ es convexo. Dado $S \subset X_i$, decimos que $x \in S$ es un elemento *mínimo* (*máximo*) de S si $x \preceq_i y$ ($y \preceq_i x$), para todo $y \in S$. Decimos que la relación de preferencias $\preceq_i$ es *monóntona* si para cualquier $x, y \in X_i$ tal que $x < y$ (es decir,$x_j \leq y_j$ para todo $j = 1, ..., l$ y $x \neq y$) implica $x \prec_i y$.

Definición 4.1.1. *Una función* $u_i : \ X_i \ \longrightarrow \ \mathbb{R}$ *representa a la relación de preferencias* $\preceq_i$ *si para cualquier* $x, y \in X_i$

$$x \preceq_i y \Leftrightarrow u_i(x) \leq u_i(y)$$

En este caso la función u_i *es llamada función de utilidad.*

El siguiente teorema muestra en que condiciones una relación de preferencias admite una función de utilidad continua.

Teorema 4.1.1. *Sea* X_i *el conjunto de consumo del consumidor* i*, cuya relación de preferencias es* $\preceq_i$*. Asumiendo que* X_i *es conexo en* $\mathbb{R}^l$*, entonces existe una función continua que representa* $\preceq_i$ *si sólo si* $\preceq_i$ *es cerrada.*

Prueba. Para simplificar la notación omitiremos el subíndice i, es decir X_i será denotado por X y $\preceq_i$ por $\preceq$. Por otro lado, definimos $] \leftarrow, x[:= \{y \in X \ : \ y \prec x\}$ $]x, y[:= \{z \in X \ x \prec z \prec y\}$. Supongamos que $\preceq$ es cerrada y D un subconjunto denso numerable de X, es decir $X \subset \overline{D}$. Construiremos una función de utilidad continua en

X en cuatro etapas. En la parte $a)$ probamos un resultado previo para D, en la parte $b)$ definimos una función de utilidad en D, en la parte $c)$ extendemos la definición a todo el conjunto X y por último, en la parte $c)$, probamos la continuidad de esta función.

a. Afirmación 1: Si $x, y \in X$ son tales que $x \prec y$, entonces existe $z \in D$ tal que $x \prec z \prec y$.

Prueba: Supongamos que para todo $z \in D$ se tiene que $z \preceq x$ ó $y \preceq z$, entonces $\overline{D} \subset L_{\preceq}(x) \cup U_{\preceq}(y)$, luego $X = L_{\preceq}(x) \cup U_{\preceq}(y)$; lo cual es falso por que X es conexo y no puede ser unión de dos conjuntos cerrados no vacíos. Por lo tanto, la afirmación es válida.

b. Definamos una función de utilidad u' en D. Sean $a, b \in D$ tal que $a < b$. Si x_0 es un elemento mínimo de D, definimos $u'(x_0) = a$. Si y_0 es un elemento máximo de D, definimos $u'(y_0) = b$. Sea $D' = \{x \in D \ : \ x \not\sim x_0 \wedge x \not\sim y_0\}$

Afirmación 2: D' no tiene elemento mínimo ni máximo.

Prueba: Supongamos que existe $z \in D'$ tal que $z \preceq x$, para todo $x \in D'$. Observemos que z no es un elemento mínimo de D, entonces existe $y \in D$ tal que $y \prec z$, de la Afirmación 1. existe $x \in D$ $y \prec x \prec z$, luego $x \in D'$ y $x \prec z$. Por lo tanto, la afirmación es válida.

Definimos una función de utilidad de D' al conjunto $Q' = \mathbb{Q} \cap]a, b[$, consideremos $D' = \{x_1, x_2, ...,\}$ y $Q' = \{r_1, r_2 ...,\}$. Sea x_1, definimos $u'(x_1) = r^{q_1} := r_1$. Tomamos x_2, tenemos tres posibilidades:

1 Si $x_2 \sim x_1$, definimos $u'(x_2) = r^{q_2} := r_1$.

2 Si $x_2 \prec x_1$ consideremos el intervalo $]a, r^{q_1}[$ y escojemos el primer racional r^{q_2}, de acuerdo a la numeración, que pertenece a $]a, r^{q_1}[$ y definimos $u'(x_2) = r^{q_2}$.

3 Si $x_1 \prec x_2$ consideremos el intervalo $]r^{q_1}, b[$ y escojemos el primer racional r^{q_2}, de acuerdo a la numeración, que pertenece a $]r^{q_1}, b[$ y definimos $u'(x_2) = r^{q_2}$.

Prosiguiendo de esta manera sea x_p, el conjunto D' es dividido en los siguientes conjuntos: La clases de indiferencia de $x_1, x_2, ..., x_{p-1}$, en intervalos de la forma

$]\leftarrow, x_{p_1}[,]x_{p_m}, x_{p_{m+1}}[, ...,]x_{p_r}, \rightarrow[$, donde $x_{p_m} \prec x_{p_n}$ cuando $m < n$.
Tenemos dos casos:

1 Si $x_p \sim x_j$ para algún $j < p$, definimos $u'(x_p) = r^{q_p} := r^{q_j}$.

2 Si x_p pertenece a uno de los intervalos digamos $]x_{p_m}, x_{p_{m+1}}[$ consideremos el intervalo $]u'(x_{p_m}), u'(x_{p_m+1})[$ y escojemos el primer racional r^{q_p}, de acuerdo a la numeración, que pertenece a este intervalo y definimos $u'(x_p) = r^{q_p}$.

Es claro que u' es una función de utilidad. Además, de acuerdo a la construcción de u', se puede observar que se toma cualquier elemento de Q', es decir $u'(D') = Q'$.

c. Extensión de la función u' a X. Sea $x \in X$, definimos $D_x = \{y \in D \ : \ y \preceq x\}$ $D^x = \{y \in D \ : \ x \preceq y\}$. Dado $x \in X$, definimos u de la siguiente manera:

1 Si x es un elemento mínimo, definimos $u(x) = a$.

2 Si x es un elemento máximo, definimos $u(x) = b$.

3 Si x no es un elemento mínimo ni máximo, definimos $u(x) = \sup u'(D_x) = \inf u'(D^x)$

Afirmación: u está bien definida.

Prueba Si x no es máximo ni mínimo, existen $y, z \in X$ tales que $z \prec x \prec y$, de la Afirmación 1 existen $x_z, x_y \in D$ tales que $z \prec x_z \prec x \prec x_y \prec y$, luego $D_x \neq \emptyset$ y $D^x \neq \emptyset$.

Dado $y \in D_x$ se tiene que $u'(y) \leq u'(z)$, para todo $z \in D^x$; luego $u'(y) \leq \inf u'(D^x)$, de donde $\sup u'(D_x) \leq \inf u'(D^x)$. Supongamos que $\sup u'(D_x) < \inf u'(D^x)$, entonces cualquier racional que se encuentre entre estos valores no pertenece a $u'(D')$, lo cual es falso ya que $u'(D') = Q'$. Por lo tanto $\sup u'(D_x) = \inf u'(D^x)$ y la función u está bien definida.

Observemos que si $x \in D$, entonces $u(x) = u'(x)$; de esta manera u extiende a u' y se verifica $Q' \subset u(X) \subset [a, b]$.

d. Para ver la continuidad de u es suficiente probar que $u^{-1}(]-\infty, c])$ y $u^{-1}([c, +\infty[)$ son cerrados , cuando $c \in]a, b[$. De la igualdad

$$u^{-1}(]-\infty, c]) = \bigcap_{r \in Q', c \leq r} u^{-1}(]-\infty, r])$$

basta ver que $u^{-1}(]-\infty, r])$ es cerrado.

Dado $r \in Q'$ consideremos $z \in X$ tal que $u(z) = r$, entonces $u^{-1}(]-\infty, r]) = L_{\preceq}(z)$, el cual es cerrado. Luego $u^{-1}(]-\infty, c])$ es cerrado, de manera similar se puede mostrar que $u^{-1}([c, +\infty[)$ es cerrado, en consecuencia u es continua.

$\square$

Una economía de intercambio puro es caracterizado por $\mathscr{E} = \{X_i, \preceq_i, w_i\}_{i=1}^m$, el equilibrio competitivo de esta economía se da cuando cada consumidor i observa el vector precio $p \in \mathbb{R}^l_+ \setminus \{0\}$ ($\mathbb{R}^l_+ := \{x \in \mathbb{R}^l \ : x_j \geq 0, j = 1, ..., l\}$) en el mercado, luego determina su conjunto presupuestario

$$\gamma_i(p, p.w_i) = \{x \in X_i \ : \ p.x \leq p.w_i\}$$

y dentro de esta restricción él escoge individualmente la canasta de artículos que le genera mayor satisfacción. Sea $L := \{1, 2, ..l\}$, como el $p.x$ es homogéneo podemos restringir el vector precio al conjunto $\{p \in \mathbb{R}^l_+ \ : \ \sum_{h=1}^l p_h = 1\}$ denotado por Δ^L.

El equilibrio competitivo de una economía de intercambio puro $\mathscr{E}$ es un par $((x_i^*)_{i=1}^m, p^*)$ de elementos de $\prod_{i \in m} X_i$ y Δ^L que:

1. Para cada $i \in [m]$, x_i^* es un elemento maximal de $\{x \in X_i \ : \ p^*.x \leq p^*.w_i\}$ con respecto a $\preceq_i$, es decir $x_i^* \succeq \xi$ para todo $\xi \in \{x \in X_i \ : \ p^*.x \leq p^*.w_i\}$.

2. $\sum_{i=1}^m x_i^* \leq \sum_{i=1}^m w_i$.

Este es un concepto de solución basado en un comportamiento no cooperativo de los consumidores sobre el mecanismo de mercado.

4.2. Economía Abstracta

El teorema de existencia de equilibrio social sirve como una herramienta matemática para probar la existencia de equilibrios para una clase amplia de modelos económicos en donde el comportamiento no cooperativo de los agentes es postulado, en esta sección estableceremos este resultado.
Una *economía abstracta* es una lista $\{X_j, F_j, u_j\}_{j\in[n]}$, donde:

1. $X_j \subset \mathbb{R}^l$, es el denominado conjunto de estrategias de j.
2. F_j es una correspondencia de $X = \prod_{i\in[n]} X_i$ a X_j.
3. u_j es una función de $Gr(F_j)$ a $\mathbb{R}$, denominada función de utilidad.

Un *equilibrio social* de una economía abstracta $\{X_j, F_j, u_j\}_{j\in[n]}$ es una n-upla de estrategias $x^* := (x_1^*, \ldots, x_n^*) \in X$ tal que, para todo $j \in [n]$.

1. $x_j^* \in F_j(x^*)$.
2. $u_j(x^*, x_j^*) \geq u_j(x^*, \xi)$ para todo $\xi \in F_j(x^*)$.

La condición (1) nos dice que x_j^* es factible, y la condición (2) nos dice que el jugador j no puede encontrar una estrategia factible para causar un nivel de utilidad más alto que el nivel actual $u_j(x^*, x_j^*)$.

Teorema 4.2.1 (Teorema de Equilibrio Social). *Sea $\{X_j, F_j, u_j\}_{j\in[n]}$ una economía abstracta. Asumiendo para todo $j \in [n]$ que*

1. *El conjunto X_j es no vacío, convexo y compacto.*
2. *La correspondencia F_j es continua en X y $F_j(x)$ es no vacío, cerrado y convexo para todo $x \in X$.*
3. *La función u_j es continua en $Gr(F_j)$ y $u_j(x, \cdot)$ es cuasicóncava en $F_j(x)$ para cualquier $x \in X$.*

Entonces, existe un equilibrio social de la economía abstracta.

Prueba. Dado $j \in [n]$ y $x \in X$, sea la correspondencia definida por

$$\Phi_j(x) = \left\{ y \in F_j(x) \ : \ u_j(x, y) = \max_{\xi \in F_j(x)} u_j(x, \xi) \right\}$$

No es difícil ver que Φ_j satisface todas las condiciones del Teorema del Máximo, de esta manera Φ_j, es s.c.s.

Para cada $x \in X, \Phi_j(x)$ es claramente no vacío y cerrado. Para mostrar que $\Phi_j(x)$ es convexo elegimos cualquier $a, b \in \Phi_j(x)$, cualquier $t \in [0, 1]$, y definimos $z := (1 - t)a + tb$. La convexidad de $F_j(x)$ implica $z \in F_j(x)$. De la cuasiconcavidad de $u_j(x, \cdot)$ se tiene

$$u_j(x, z) \geq \min[u_j(x, a), u_j(x, b)]$$

de dónde $z \in \Phi_j(x)$. Por lo tanto, $\Phi_j(x)$ es convexo.

Definimos la correspondencia $\Phi : X \to X$, como $\Phi(x) := \Phi_1(x) \times \cdots \times \Phi_n(x)$, Φ satisface todas las condiciones del Teorema del Punto Fijo de Kakutani, por lo que existe $x^* \in \Phi(x^*)$. De donde $x^* = (x_1^*, ..., x_n^*)$ es tal que $x_j^* \in F_j(x^*)$ y $u_j(x^*, x_j^*) \geq u_j(x^*, \xi)$ para todo $\xi \in F_j(x^*)$, es decir x^* es un equilibrio social de la economía $\{X_j, F_j, u_j\}_{j \in [n]}$ $\square$

4.3. Equilibrio Competitivo de la Economía de Intercambio Puro

El propósito de esta sección es mostrar la existencia de un equilibrio competitivo en una economía de intercambio puro $\{X_i, \preceq_i, w_i\}_{i=1}^m$.

Para cada consumidor i sea $\gamma_i : \Delta^L \times \mathbb{R} \twoheadrightarrow X_i$ su correspondencia de conjunto presupuestario: $\gamma_i(p, w_i) := \{x \in X_i \ : \ p \cdot x \leq w_i\}$.

Lema 4.3.1. *Sea X_i el conjunto de consumo del consumidor i y sea $(p, w_i) \in \Delta_L \times \mathbb{R}$ un precio-riqueza. Asumiendo que X_i es subconjunto convexo y compacto de $\mathbb{R}^l$ y que $\min\{p \cdot x \ : \ x \in X_i\} < w_i$. Entonces γ_i es s.c.s. y s.c.i. en (p, w_i).*

Prueba. Para simplificar la notación omitiremos el subíndice i, es decir X denotará a X_i, w denotará a w_i y γ denotará a γ_i.

Para mostrar que γ es semicontinua superiormente, del Teorema 2.1.2, basta mostrar que es cerrada. Sea una sucesión $((p_k, w_k), x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en $Gr(\gamma)$ tal que $((p_k, w_k), x_k) \to ((p, w), x)$, entonces $p_k \cdot x_k \leq w_k$, cuando $k \to +\infty$ obtenemos: $p \cdot x \leq w$, luego $((p, w), x) \in Gr(\gamma)$. Por lo tanto, γ es semicontinua superiormente.
Para demostrar que γ es semicontinua inferiormente en (p, w) consideremos una sucesión $(p_n, w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\Delta^L \times \mathbb{R}$ tal que $(p_n, w_n) \to (p, w)$ y $x \in \gamma(p, w)$.
Tenemos dos posibilidades

a. Si $p\cdot x < w$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $x \in \gamma(p_n, w_n)$, para todo $n \geq k$. Luego, definimos $x_n = x$ para todo $n \geq k$, de la Proposición 2.1.1 γ es semicontinua inferiormente en (p, w).

b. Si $p \cdot x = w$, de $\min\{p \cdot x \ : \ x \in X\} < w$ existe $x' \in X$ tal que $p \cdot x' < w$, luego existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $p_n \cdot x' < w_n$ y $p_n \cdot x' < p_n \cdot x$, para todo $n \geq k_1$, por otro lado existe $a_n \in \mathbb{R}^l$ tal que $p_n \cdot a_n = w_n$ y los puntos $\{x', x, a_n\}$ pertenecen a la misma recta. Definimos

$$x_n = \begin{cases} a_n & si\ a_n \in [x', x] \\ \\ x & si\ x \in [x', a_n] \end{cases}$$

No es difícil mostrar que $x_n \in \gamma(p_n, w_n)$ para n suficientemente grande y $x_n \to x$, de la Proposición 2.1.1 γ es semicontinua inferiormente en (p, w).

$\square$

Teorema 4.3.1. *Sea* $\mathscr{E} := \{X_i, \preceq_i, w_i\}_{i=1}^m$ *una economía de intercambio puro. Asumiendo para todo* i, *que* X_i *es un subconjunto no vacío, convexo y compacto de* $\mathbb{R}^l$, *que* $\preceq_i$ *es completa, transitiva, cerrada, débilmente convexa, y que* $\min\{p\cdot x | x \in X_i\} < p\cdot\omega_i$ *para cada* $p \in \Delta^L$. *Entonces, existe un equilibrio competitivo de* $\mathscr{E}$.

Prueba. Primero, construyamos una economía abstracta a partir de $\mathscr{E}$. Sea $n = m+1$. Para $i \in [m]$, definimos al conjunto consumo X_i como el conjunto de estrategias, sea también $X_n := \Delta^L$. Por el Teorema 4.1.1, la relación $\preceq_i$ se representa por una función de utilidad continua $v_i : X_i \to \mathbb{R}$. Recordemos que la convexidad débil de $\preceq_i$ es equivalente a la cuasiconcavidad de v_i. Dado $((x_i)_i, p) \in \prod_{j\in[n]} X_j$, definimos

$$F_j((x_i)_i, p) := \gamma_j(p, p \cdot \omega_j)$$

para cada $j \in [m]$ y $F_n((x_i)_i, p) := \Delta^L$; también definimos

$$u_j(((x_i)_i, p), \xi_j) := v_j(\xi_j)$$

para cada $j \in [m]$ y $u_n(((x_i)_i, p), \xi_n) := \xi_n \cdot \sum_{i=1}^m (x_i - \omega_i)$. Por el Teorema 4.1.1 y el Lema 4.3.1, la economía abstracta $\{X_j, F_j, u_j\}_{j\in[n]}$ satisface todas las hipótesis del Teorema 4.2.1 y por lo tanto tiene un equilibrio social

$$((x_i^*), p^*) \in \prod_{i=1}^m X_i \times \Delta^L.$$

Es directo ver, a partir de la condición de equilibrio social, que x_i^* es un elemento maximal de $\gamma_i(p^*, p^* w_i)$ con respecto a $\preceq_i$, para todo $i \in [m]$. Es también claro que $p^* \cdot \sum_{i=1}^m (x_i^* - w_i) \leq 0$. Así como $u_n(((x_i^*)_i, p^*), p) \leq u_n(((x_i^*)_i, p^*), p^*)$, para todo $p \in \Delta^L$, concluimos que $p \cdot \sum_{i=1}^m (x_i^* - w_i) \leq 0$ para todo $p \in \Delta^L$. En particular, la desigualdad es verdadera para

$$p = (\underbrace{0, \ldots, 1}_{h}, \ldots, 0),$$

luego $\sum_{i=1}^m (x_{ih}^* - \omega_{ih}) \leq 0$ es verdadero, para todo $h \in L$. De esta manera $\sum_{i=1}^m x_i^* \leq \sum_{i=1}^m \omega_i$. Por lo tanto, $((x_i^*), p^*)$ es un equilibrio competitivo de $\mathscr{E}$. $\square$

Un modelo en miniatura, una economía compuesta por dos consumidores y dos tipos de bienes, permite realizar una aproximación a los conceptos tratados, relacionados a la existencia de equilibrio, mediante el análisis gráfico de la caja de Edgeworth.
Sea una economía compuesta por dos consumidores, $i = 1, 2$ y dos tipos de bienes. Supongamos $w_i >> 0$ (es decir, cada consumidor posee cantidades estríctamente positivas de ambas mercancías), por simplicidad, supongamos también que

$$X_1 = X_2 = \{x \in \mathbb{R}_+ : x \leq c, w_1 + w_2 << c\}$$

y que las preferencias de cada consumidor son cerradas, débilmente convexas y monótonas. El equilibrio competitivo $((x_1^*, x_2^*), p^*)$ de esta economía se puede ilustrar en *La caja de Edgeworth* Figura 4.1. Este diagrama es un rectángulo cuyas dimensiones vienen dadas por w_1+w_2. La cantidad total del bien 1, $w_{11}+w_{21}$, la medimos verticalmente y la cantidad total del bien 2,$w_{12} + w_{22}$, horizontalmente. De esta forma cada punto dentro de la caja nos proporciona cuatro coordenadas que corresponden a una posible distribución de la cantidad total disponible de ambos bienes entre los dos consumidores, como ilustra la Figura 4.1. Identificaremos la esquina inferior izquierda con el origen de coordenadas del conjunto de consumo del consumidor 1, y la esquina superior derecha con el origen de coordenadas del conjunto de consumo del consumidor 2.

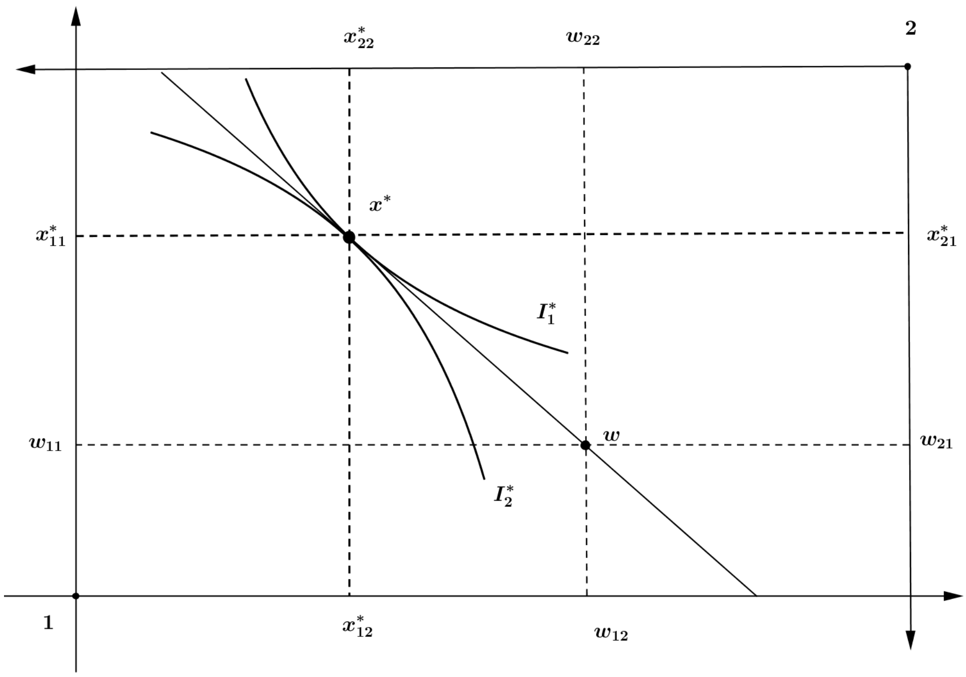

Figura 4.1: Diagrama de la caja de Edgeworth y el equilibrio competitivo

El equilibrio competitivo $((x_i^*), p^*)$ es caracterizado por las siguientes propiedades.

1. La curva de indiferencia $I_i^* = \{x \in X_i \ : x \sim x_i^*\}$ pasa por x_i^*, $i = 1, 2$ y I_1^*, I_2^*

son tangentes en x^*

2. La recta tangente pasa por w y tiene pendiente $-\frac{p_2^*}{p_1^*}$.

Apéndice A

Espacio Vectorial Topológico Real

A.1. Espacio Vectorial Real

Un Espacio Vectorial Real es un conjunto X provisto de dos aplicaciones $+: \; X \times X \longrightarrow X$ y $.: \; \mathbb{R} \times X \longrightarrow X$ llamados operación adición y multiplicación escalar respectivamente, donde la adicion verifica

(i) $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo $x, y, z \in X$.

(ii) $x + y = y + x$ para todo $x, y \in X$

(iii) Existe un elemento $0 \in X$ tal que $x + 0 = x$ para todo $x \in X$.

(iv) Para cada $x \in X$ existe un elemento $-x \in X$ tal que $x + (-x) = 0$.

Similarmente la operación multiplicación escalar verifica:

(v) $\lambda(\alpha x) = (\lambda\alpha)x$ para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

(vi) $1.x = x$ para todo $x \in X$.

Estas operaciones estan relacionadas mediante las siguientes leyes distributivas:

(vii) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x, y \in X$.

(viii) $(\lambda + \alpha)x = \lambda x + \alpha x$ para todo $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$ y todo $x \in X$.

Una aplicación $T: X \longrightarrow Y$, donde X Y son espacios vectoriales, se denomina aplicación lineal o transformacion lineal si satisface

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

para todo $x, y \in X$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Cuando T es biyectiva se dice que T es un isomorfismo de X a Y.
Un subconjunto M de un espacio vectorial X se llama subespacio vectorial si ella misma es un espacio vectorial cuando se restringe las operaciones de X a M.

A.2. Espacios Topológicos

Un espacio topológico es un par (X, τ) donde X es un conjunto y τ es una colección de subconjuntos de X satisfaciendo las siguientes condiciones:

1) X y $\emptyset$ pertenecen a la colección τ

2) Si $A_\lambda \in \tau$ para todo $\lambda \in I$, donde I es un conjunto arbitrario, entonces $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda \in \tau$

3) Si $A_1, .., A_n \in \tau$ entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$

Los elementos de τ se llaman abiertos de X. Un conjunto F en X se llama cerrado si su complemento es un conjunto abierto.
Sea $x \in X$, una vecindad de x es un abierto V que contiene a x.

Dado K conjunto de X. Un cubrimiento abierto de K es una colección $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de conjuntos abiertos de X tales que $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$. Si I es finito se dice que $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ es un cubrimiento finito. Un subcubrimiento de $K \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$ es un subconjunto de la colección $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ que cubre K. Diremos que K es compacto si todo cubrimiento abierto admite un subcubrimiento finito.
La prueba de las siguientes proposiciones se puede encontrar en [4].

Proposición A.2.1. *Todo subconjunto cerrado $F \subset K$ de un conpacto K, en un espacio topológico X, es compacto.*

Un subconjunto $\beta \subset \tau$ se llama base del espacio topológico (X, τ) si todo abierto es unión de elementos de β.
Sea $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación de espacios topológicos, diremos que f es continua si la imagen inversa $f^{-1}(B)$ de todo abierto $B \subset Y$ es abierto en X.
Si f es continua y biyectiva tal que f^{-1} es continua entonces f se denomina homeomorfismo.

Proposición A.2.2. *Sean X , Y dos espacios topológicos y $f : X \longrightarrow Y$ una aplicación continua. Si K es compacto en X entonces la imagen $f(K)$ es compacto en Y.*

Un espacio topológico X se llama espacio de $Hausdorff$ si dados dos puntos arbitrarios $x \neq y$ en X existen vecindades U y V de x e y respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$.

Proposición A.2.3. *Todo conjunto compacto en un espacio de $Hausdorff$ es cerrado.*

Un conjunto X puede tener dos o mas topologias asociadas. Sean τ y τ' dos topologias del mismo conjunto X, diremos que τ es mas fina que τ' si $\tau' \subset \tau$.

A.2.1. Topología Producto

Dados $X_1, ..., X_n$ espacios topológicos y el conjunto $X = X_1 \times ... \times X_n$. La topología producto en X es la topología que tiene por base la colección

$$\beta = \{A \;/\; A = A_1 \times ... \times A_n,\ A_i \textit{ abierto en } X_i\}$$

Un abierto en la topología producto es entonces una reunión de abiertos elementales $A = A_1 \times ... \times A_n$.

Proposición A.2.4. *La topología producto en $X = X_1 \times ... \times X_n$ tiene las siguientes propiedades:*

a) Las proyecciones $P_i : \ X \ \longrightarrow \ X_i$ *son continuas y abiertas.*

b) Dado un espacio topológico Z. La aplicación $f : \ Z \ \longrightarrow \ X \ \ , f(z) = (f_1(z), ..., f_n(z))$ *es continua si y sólo si cada $f_i = P_i o f$ es continua.*

A.3. Espacio Vectorial Topológico Real

Un espacio vectorial topológico Real (e.v.t) es un espacio vectorial X provisto de una topología de $Hausdorff$ τ en el cual las aplicaciones $+ : \ X \times X \ \longrightarrow \ X$ y $. : \ \mathbb{R} \times X \ \longrightarrow \ X$ son continuas, donde en los conjuntos $X \times X$, $\mathbb{R} \times X$ se considera la topología producto.

Teorema A.3.1. *(A. Tychonoff)*
Cada subespacio M, de dimension finita n, de un espacio vectorial topológico X es topológicamente isomorfo al espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, dicho de otra forma existe $\varphi : \ \mathbb{R}^n \ \longrightarrow \ M$ *que es isomorfismo y homeomorfismo.*

La prueba se puede encontrar en [4].

A.4. El Espacio $\mathbb{R}^n$

El Espacio $\mathbb{R}^n$ con la suma de vectores y la multiplicación por escalar tiene estructura de espacio vectorial topológico, espacio normado, espacio métrico. etc.

Bibliografía

[1] Tatsuro Ichiishi, *Game Theory For Economic Analysis*, Academic Press, Inc., London 1983.

[2] Marc Lassonde, *Minimax and Fixed Points*, CIMPA School, IMCA, 2004.

[3] Gerard Debreu, *Theory of Value an Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Cowles Foundation for Research in Economics at Yale University, 1971

[4] James Dugundji *Topology*, Allin and Bacon, Inc., Boston, 1966.

[5] J. Dugundji and A. Granas, *Fixed point theory*, vol. I, 1982.

[6] R. Tyrrell Rockafellar, *Convex Analysis, Princeton*, New Jersey, 1980.

[7] Yboon García Ramos, *El Lema de Ky Fan y Algunas Aplicaciones*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional de Ingeniería, 2001.