

Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Eléctrica y Electrónica



El Efecto Skin en la Performance de los Motores
de Inducción de Jaula de Ardilla

TESIS

Para Optar el Título Profesional de

INGENIERO ELECTRICISTA

ALINDOR MANUEL TERAN BAZAN

Promoción 1980 - 2

Lima - Perú

1988

EXTRACTO

El Efecto Skin definido como un fenómeno electromagnético de autoinducción, está presente en cualquier conductor que está recorrido por una corriente alterna; y que se le considera como un tipo de pérdidas de energía en dicho conductor con la característica de que en algunas máquinas eléctricas el Efecto Skin es indeseable, ya que perjudica a la eficiencia de la máquina y en otros casos es bastante útil, ya que mejora la performance de ciertos motores.

Existen diversos métodos de análisis del Efecto Skin; desde los más complejos hasta los más simplificados, donde se asumen algunos algoritmos para su simplificación. En el presente trabajo se presenta un análisis de una manera simplificada, sin que ello implique de que se está perdiendo exactitud en su evaluación.

En los primeros 2 capítulos del presente trabajo se presenta la teoría necesaria para comprender la forma como aparece y se desarrolla el Efecto Skin; llamado de otra manera Efecto Pelicular, concentración o desplazamiento de corrientes. Posteriormente se presenta un método para la evaluación cuantitativa del Efecto Skin para barras de cualquier geometría, bajo el método denominado "Profundidad de Penetración" y que se basa en las barras rectangulares, que es analizada en muchos textos.

Posteriormente en los capítulos que siguen, se trata

de dar una aplicación debida con casos prácticos de motores ya diseñados, para que de ésta manera podamos observar como va interviniendo el Efecto Skin en diferentes etapas. También se presenta un programa para calculadora HP-41CV en donde se hace intervenir al Efecto Skin en el cómputo de los parámetros y performance del motor.

Finalmente las figuras que se muestran en el apéndice ayudan bastante en tener una idea rápida de la forma como varia la intensidad del Efecto Skin ante sus variables dependientes.

CONTENIDO

LISTA DE SIMBOLOS	VIII
INTRODUCCION	3
1. FUNDAMENTO DEL EFECTO SKIN (E.S.)	5
1.1. El E.S. en Conductores Cilíndricos	5
1.2. El E.S. en Barras Rectangulares	7
2. ANALISIS DEL EFECTO SKIN (E.S.)	16
2.1. Análisis del E.S. en Conductores Cilíndricos	16
2.2. Análisis del E.S. en Barras Rectangulares	20
2.3. Análisis del E.S. en Barras de Cualquier Geometría	25
2.4. Análisis del E.S. en Ranuras Semicerradas	28
3. CALCULO DEL E.S. EN BARRAS DE GEOMETRIA ESPECIAL	33
3.1. Relaciones R_{ac}/R_{dc} de las Barras	33
3.1.1. Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras Trapezoidales	34
3.1.2. Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras Compuestas	37
3.1.3. Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras en T	41
3.2. Relaciones X_{ac}/X_{dc} de las Barras	44
3.2.1. Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras Compuestas	45
3.2.2. Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras Trapezoidales	48
3.2.3. Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras en T	<u>49</u>

4.	CIRCUITOS EQUIVALENTES USADOS PARA LOS MOTORES	51
4.1.	Circuito Equivalente para motores de 1 Jaula	51
4.2.	Circuito Equivalente para motores de 2 Jaulas	52
4.3.	Determinación de los parámetros del motor	
5.	COMPUTO DE LA PERFORMANCE DE LOS MOTORES DE INDUCCION CONSIDERANDO EL EFECTO SKIN	65
5.1.	Diagrama de Flujo del Programa "Cálculo de Parámetros"	66
5.2.	Diagrama de Flujo del Programa "Cómputo de la Performance"	67
5.3.	Aplicación del Programa a un motor de Barras Profundas	68
6.	COMPARACIONES DE LA PERFORMANCE DE LOS MOTORES DE INDUCCION	72
	CONCLUSIONES	76
	APENDICE A Curvas características del E.S.	82
	APENDICE B : Listado de los programas en una calculadora HP-41CV.	87
	BIBLIOGRAFIA	104

LISTA DE SIMBOLOS

A	=	Area de la barra
D	=	Diámetro del entrehierro
E	=	Intensidad de Campo Eléctrico, Voltaje
FS	=	Factor de Saturación
H	=	Intensidad de Campo Magnético
I	=	Corriente Eléctrica
J	=	Densidad de Corriente Eléctrica
K	=	Factor, constante
L	=	Longitud del núcleo del motor
N	=	Número de vueltas
R	=	Resistencia eléctrica de la barra
S	=	Número de ranuras, deslizamiento, sección total del bobinado
T	=	Temperatura (C)
V	=	Voltaje en la superficie de la placa o barra, Tensión del estator
W	=	Watts
X	=	Eje X, reactancia
Z	=	Impedancia de la barra, Número de conductores
a	=	Ancho de la ranura del rotor Ancho de la barra del rotor
d	=	Diámetro de los anillos de las jaulas
e	=	Fuerza contra-electromotriz
f	=	Frecuencia de la corriente (HZ)
f _{mm}	=	Fuerza magneto-motriz
g	=	Factor

h	=	Altura de la barra, radio del conductor
l	=	Longitud equivalente de las líneas de campo magnético, longitud de la barra
p	=	Número de polos
r	=	Resistencia eléctrica
td	=	Terminal y diferencial
β	=	Densidad de Campo Magnético
γ	=	Peso específico
Δ	=	Extremos de la barra, pérdidas
δ	=	Profundidad Skin respecto a la superficie
δu	=	Entrehierro y saturación
θ	=	Angulo del factor de potencia
λ	=	Permeancia
μ	=	Permeabilidad magnética
μ_0	=	Permeabilidad en el vacío
ρ_T	=	Resistividad a la temperatura T
∇	=	Conductancia del material
τ	=	Paso (en número de ranuras), Paso polar
\emptyset	=	Flujo magnético
φ	=	Relación Skin para las resistencias
Ψ	=	Relación Skin para las reactancias
ω	=	Frecuencia angular ($2\pi f$)
dx	=	Derivada respecto a x
dA	=	Diferencial de área de la barra
∂x	=	Derivada parcial respecto a x
\int_a^b	=	Integral desde a hasta b
$\nabla \times$	=	Operador vectorial rotacional

∇ .	=	Operador vectorial divergencia
∇^2	=	Operador vectorial laplaciano
Σ	=	Sumatoria

Sub o Super indices

a	-	Anillos de la jaula, acortamiento de paso
ac	=	Corriente alterna
arr	=	Arranque
b	=	Barra, bobina
c	=	Acortamiento de paso
C	=	Circulante debido al Efecto Skin
cb	=	Cabezas de bobina
cc	=	Corto circuito
d	=	Diferencial
de	=	Dientes del estator
dif	=	Diferencial
e	=	Jaula exterior, entrehierro
end	=	Cabezas de bobina
eq	=	Equivalente
f	=	Fase del bobinado
fe	=	Fierro magnético
h	=	Altura h sobre el eje X
h_1	=	Altura principal de la ranura
i	=	Jaula interior
mec	=	Mecánicas
n	=	Núcleo, neto
ne	=	Núcleo del estator

om	=	Pérdidas en el núcleo, magnetización
P	=	Principal
pr	=	Penetración para las resistencias
prom	=	Valor promedio
px	=	Penetración para las reactivancias
R	=	Resultante
r	=	Ranura, lleva impedancias del rotor al estator
t	=	Terminal
x	=	Magnitud x en el eje X
w	=	Bobinado
v	=	Vuelta de una bobina
z	=	Zig-zag
*	=	Considerando la saturación
'	=	Llevada del rotor al estator
-	=	Simboliza que es un vector
^	=	Simboliza el valor pico de un vector
1	=	Estator, jaula interior del rotor de 2 jaulas
2	=	Rotor, jaula exterior del rotor de 2 jaulas
0	=	Se refiere al origen del sistema de coordenadas

PROLOGO

El presente trabajo es el producto de mi dedicación a los usos de las máquinas eléctricas, del cual espero que contribuya hacia un acercamiento en el trato con mayor exactitud de las máquinas eléctricas rotativas. En el desarrollo del tema se demuestra el inmenso error que se comete al despreciar el Efecto Skin en la performance de los motores de Inducción de Jaula de Ardilla.

En el desarrollo del tema, primeramente se ha recordado algunos fundamentos de electromagnetismo, para luego analizar el Efecto Skin en conductores de diferentes formas, estableciendo de esta manera un método general para el trato de cualquier forma de barra y posteriormente se hace una aplicación con un motor de barras profundas, que es el motor donde el Efecto Skin juega el papel principal.

Es necesario hacer presente de que la medición experimental de las distribuciones de corrientes en las barras es casi imposible; ya sea por la falta de los equipos necesarios indispensables o por que junto con el Efecto Skin se presentan muchos fenómenos que alteran la observación del Efecto Skin por separado.

Deseo reconocer la idea de elegir este tema al Ing. Jorge Merino T., del Dpto. de Mantenimiento Eléctrico F. y R. de Centro Min Perú; a los valiosos artículos técnicos conseguidos a través del ITINTEC y a las acertadas sugerencias recibidas del Dr. James Bravo B.,

que todo en conjunto ha servido para culminación de mi trabajo de la manera que lo esperaba.

INTRODUCCION

Debido a que los motores eléctricos juegan un papel muy importante en la industrialización del país y dado a que ellos pueden poner en servicio a cualquier maquinaria, que a su vez sirve para realizar un determinado proceso dentro de un sistema industrial, es que he escogido desarrollar un tema relacionado con las máquinas eléctricas rotativas. Por lo tanto, haciendo un poco de analogía, al desarrollo de los motores eléctricos se los puede relacionar con el progreso industrial, que tanto necesita el país.

Es muy importante hacer el buen uso de estos motores eléctricos para que puedan cumplir con su cometido, de allí que mientras más conozcamos acerca de los motores eléctricos mejor los seleccionaremos, construiremos, usaremos y cuidaremos.

De allí que es necesario realizar diferentes análisis, ante toda la gama de fenómenos que se presentan internamente en los motores, dado a la complejidad de los campos electromagnéticos y sus consecuencias externas. Uno de los tantos fenómenos que se presentan en el arranque de los motores de inducción de Jaula de Ardilla, es el llamado Efecto Skin o Efecto Pelicular, al cual se le ha dado este nombre en razón de que cuando se presenta este efecto, la corriente eléctrica se desplaza hacia la periferia del conductor y a medida que disminuye este efecto, las corrientes se reparten uniformemente en toda

la sección del conductor.

El Efecto Skin es proporcional a la frecuencia de la corriente eléctrica y dado a que en el instante del arranque, en el rotor se presenta la misma frecuencia que tiene la red, en este instante el efecto es máximo pero a medida de que el rotor comienza a ganar la velocidad, la frecuencia del rotor comienza a disminuir, entonces el Efecto Skin también comienza a disminuir automáticamente para llegar a valores imperceptibles cuando el rotor ha alcanzado su velocidad nominal. Pero lo más interesante de este efecto, es que externamente se refleja con un incremento del torque de arranque del motor, el cual es muy útil para los propósitos escogidos y no afecta a las condiciones nominales, ya que en esta condición el Efecto Skin prácticamente desaparece.

El Efecto Skin en si es bastante complejo, ya que la distribución de corrientes dentro del conductor también lo es. De allí que para simplificar su análisis se asume que la impedancia del rotor es una función de la frecuencia.

En los próximos capítulos se observará que el Efecto Skin también depende de otros factores, los cuales se analizarán en su momento correspondiente.

1. FUNDAMENTO DEL EFECTO SKIN (E.S.)

En cualquier conductor por donde circula una corriente eléctrica de una frecuencia determinada, se engendra en su interior fuerzas contra electromotrices como producto de la inductancia interna del conductor, las cuales provocan la circulación de corrientes parásitas (circulantes), cuya intensidad es proporcional a la frecuencia de la corriente, conductancia y sección del conductor y en los caso de que éstas corrientes parásitas sean significantes entonces alterarán la distribución uniforme de la corriente principal a través de la sección del conductor, que inicialmente se supone que está repartida uniformemente. Como consecuencia de esta superposición de corrientes resulta de que la densidad de corriente a través del conductor es mayor en la periferia.

Es necesario individualizar el análisis del Efecto Skin (E.S.) para el caso de conductores cilindricos y las barras rectangulares tal como lo haremos a continuación.

1.1. El E.S. en Conductores Cilindricos

Una mejor explicación de la forma como se presenta el E.S. es observando la Fig. 1.1, en base a cual será nuestra explicación.

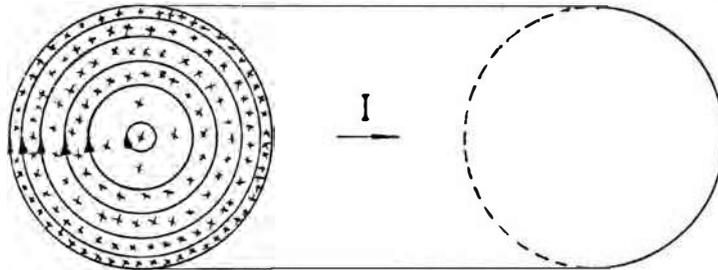


Fig. 1.1. Conductor cilíndrico transportando una Corriente alterna I , mostrando la distribución de esta (x) y las líneas del Campo Magnético (\odot)

La distribución uniforme de la corriente en la sección del conductor solamente se presenta en la corriente continua. A medida que aumenta la frecuencia de la corriente alterna, se hace más pronunciada la diferencia entre las densidades de corriente de las distintas zonas de una sección transversal. En un conductor de sección circular, generalmente aumenta la densidad de corriente del interior al exterior. Sin embargo en los conductores de radio suficientemente grande se puede presentar una densidad de corriente oscilante a lo largo del radio. Considerando diferentes filamentos longitudinales normales a la sección del conductor, los filamentos situados en la superficie no son alcanzados por el flujo interno y el número de los

enlaces de flujo de los filamentos cercanos a la superficie es menor que los del interior, de allí que en la superficie la fuerza contra electromotriz engendrada sea menor que en el interior; pero en cambio la corriente efectiva en el exterior será mayor que en el interior por esta misma razón.

A altas frecuencias y en conductores de gran radio el E.S. altera completamente los valores de resistencia y reactancia; pero como nosotros estamos centrados en el análisis a frecuencias industriales, no incidiremos en estos casos.

1.2. El E.S. en Barras Rectangulares

El flujo alterno en un circuito magnético también provoca una concentración superficial por efecto de autoinducción. El mayor flujo autoinductivo que rodea a los filamentos centrales de corriente, engendra fuerzas contra electromotrices más elevadas que se oponen al paso de la corriente misma.

Si examinamos el caso de una barra alojada en una ranura tal como en la fig. 1.2. podremos seguir mejor el desarrollo práctico del fenómeno en las máquinas eléctricas. Supongamos el conductor único, macizo, situado en la ranura de un rotor y recorrido por una corriente alterna de frecuencia f .

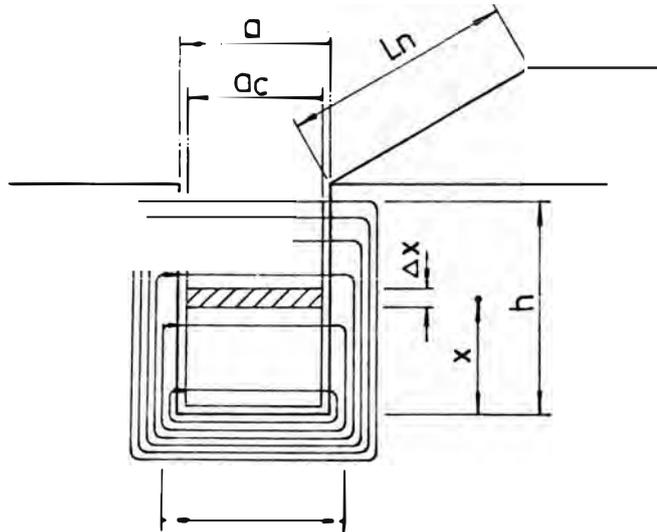


Fig. 1.2. Barra rectangular alojada en la ranura de un rotor, conduciendo una corriente alterna (x) y produciendo líneas de campo magnético (\square)

Suponiendo que la distribución de corriente en toda la sección de la barra fuese uniforme, entonces podríamos hacer la siguiente formulación, para poder observar como se va formando la distribución desigual de corrientes:

$$\hat{f}_{mm} = N\hat{I} = N\hat{J}A = \hat{H}l = \frac{\hat{\beta}}{u_0} - 1 \quad (1-1)$$

donde

$$\hat{\beta} = \frac{\hat{f}_{mm}}{1} u_0 \quad (1-2)$$

siendo $N = 1$ y reemplazando l por a según la fig.

$$\hat{f}_{mmx} = \hat{J} a_c X \quad (1-3)$$

$$\beta_x = \frac{\hat{J} a_c X}{a} u_o \quad (1-4)$$

$$\hat{\beta}_h = \frac{\hat{J} a_c h}{a} u_o \quad (1-5)$$

luego

$$\begin{aligned} \phi_x &= \int_x^h d\phi_x \\ &= \int_x^h \frac{\hat{J} a_c L_n u_o}{a} X dx \\ &= \beta_h \frac{L_n}{2} \left(h - \frac{X^2}{h} \right) \end{aligned} \quad (1-6)$$

$$\phi_h = 0 \quad (1-7)$$

$$\phi_o = \frac{L_n h}{2} \hat{\beta}_h \quad (1-8)$$

reemplazando (1-8) en (1-6), obtendremos:

$$\phi_x = \hat{\phi}_o \left(1 - \frac{X^2}{h^2} \right) \quad (1-9)$$

luego

$$e_x = w \frac{\hat{\phi}_x}{\sqrt{2}} = w \hat{\phi}_x \quad (1-10)$$

Para una mejor visualización de la formulación anterior, graficaremos en la fig. 1.3, las ecuaciones deducidas en función de la altura de la barra:

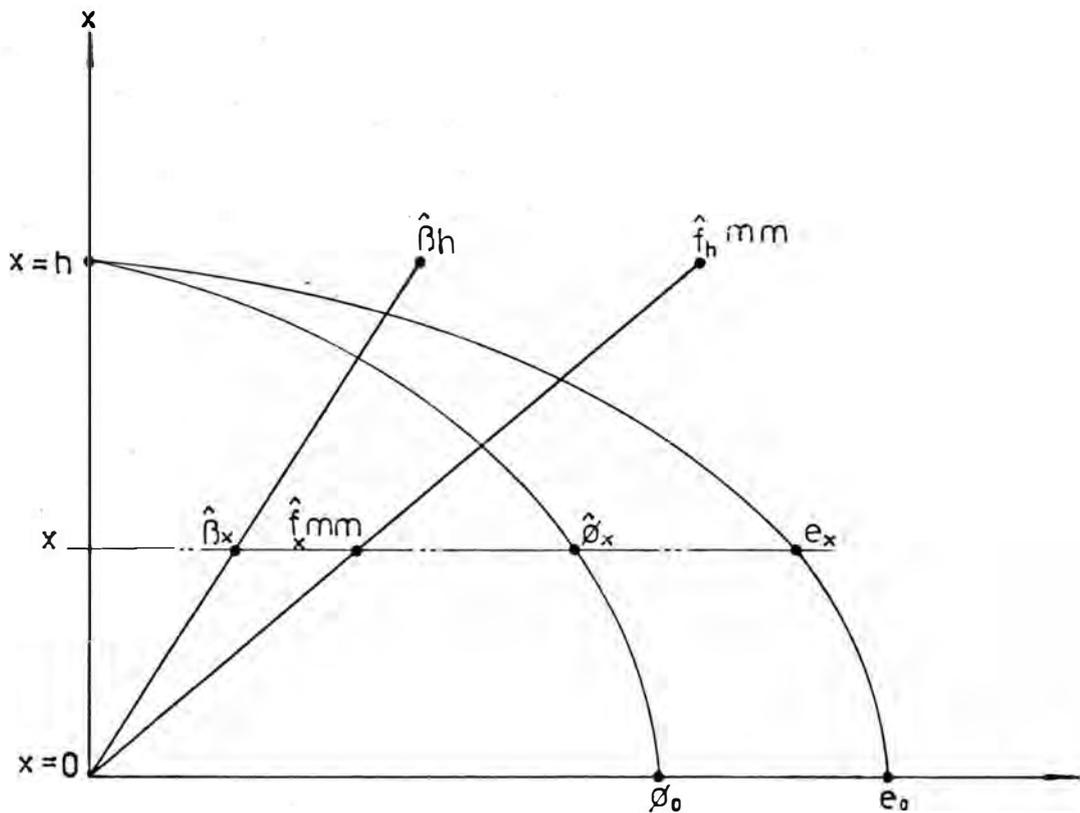


Fig. 1.3 Variación de la fmm, β , ϕ y e en función de la altura de la barra, correspondiente a la fig. 1.2

La tensión inducida e , que se distribuye a través de la barra producirá a su vez una circulación de corriente en un sentido, en la parte superior y en otro sentido, en la parte inferior. Esta corriente parásita afectará a la corriente principal, supuesta uniforme, provocando de esta manera una distribución desigual de la corriente efectiva en el interior de la barra. La fig. 1.4 ilustrará lo anteriormente dicho.

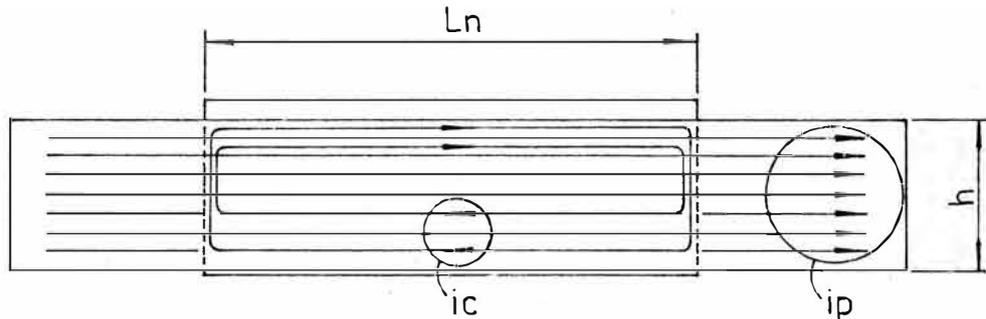


Fig. 1.4 Corte longitudinal de una barra rectangular alojada en una ranura. Donde i_p es la corriente principal, i_c es la corriente circulatoria y i_R es la corriente resultante.

reemplazando en la ec. (1-10), tendremos:

$$e_x = \frac{\omega L_n u_0}{2 a} i_p \left(h - \frac{x^2}{h} \right)$$

$$= K i_p \left(h - \frac{x^2}{h} \right) \quad (1-11)$$

Es necesario calcular el valor promedio de esta tensión inducida, para así delimitar el sentido de circulación de las corrientes parásitas (debidas al Efecto Skin).

$$e_{prom} = \frac{1}{h} \int_0^h e_x dx$$

$$= \frac{2}{3} K i_p h \quad (1-12)$$

La corriente circulante será cero, cuando se cumpla $e_{prom} = e_x$ luego, esta igualdad se cumple cuando:

$$X = \frac{h}{\sqrt{3}} \approx 0.58 h \quad (1-13)$$

luego

$$i_{C(x)} = \frac{e_x - e_{\text{prom}}}{r_{dx}} \quad (1-14)$$

$$r_{dx} = \frac{\rho}{a_c \cdot dx} \quad (1-15)$$

Reemplazando valores en la ecuación (1-14) tendremos:

$$i_{C(x)} = \frac{u_o \omega a_c}{2 \rho a} i_P \cdot \left(\frac{h}{3} - \frac{x^2}{h} \right) dx \quad (1-16)$$

Si graficamos las ec. (1-11) y (1-16), obtendremos las Figs. 1.5 y 1.6 respectivamente

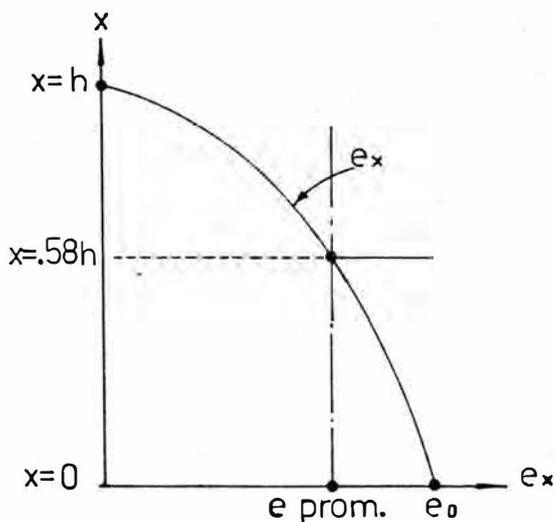


Fig. 1.5 Gráfico de e en función de la altura de la barra.

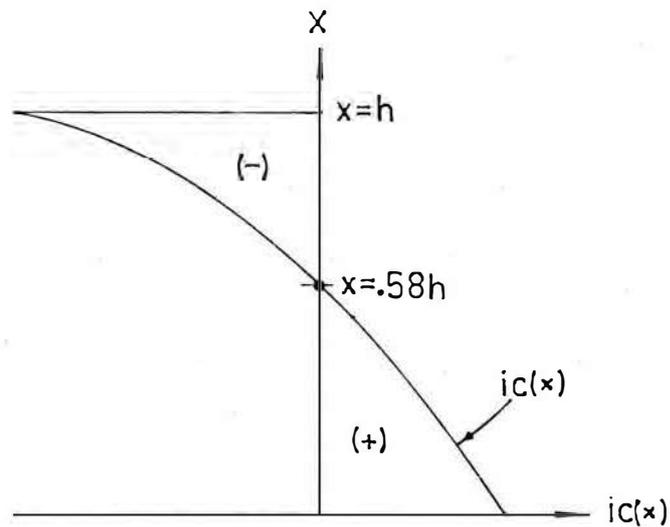


Fig. 1.6 Gráfico de las corrientes circulantes i_c en función de la altura de la barra

luego

$$i_R(x) = i_P(x) - i_C(x) \quad (1-17)$$

Los elementos de la barra de altura dx , además de presentar su resistencia r_{dx} , también presentan una reactancia apreciable, en virtud de lo cual las corrientes circulatorias retrasan en un ángulo ϑ , menor de 90° a la fuerza electromotriz de autoinducción e_x . Vectorialmente lo observaremos en la fig. 1.7

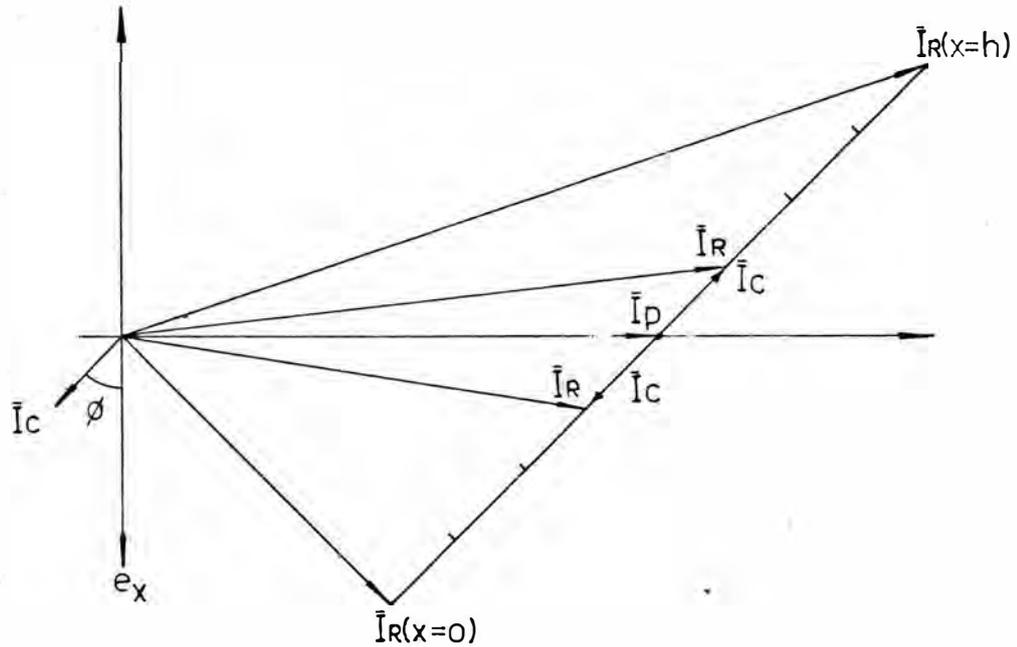


Fig. 1.7 Gráfico de las corrientes circulatorias \bar{I}_C , principal \bar{I}_P y resultante \bar{I}_R

Para cuantificar la corriente circulatoria total tendríamos que integrar la ec. (1-16) desde la base de la barra hasta la altura, donde la corriente circulatoria es nula.

entonces:

$$\begin{aligned}
 i_{C(\text{tot.})} &= \int_0^{h/\sqrt{3}} i_C(x) \, dx \\
 &= \frac{\omega u_0 a_c}{9\sqrt{3} \rho a} h^2 \cdot i_P \quad (1-18)
 \end{aligned}$$

Para buscar mayor exactitud, este análisis habría que proseguirlo por aproximaciones sucesivas, ya que se ha partido de la base de que la corriente principal i_P es uniforme en toda la sección de la barra, condición que se altera inmediatamente debido al Efecto Skin.

La distribución irregular de las densidades de

corriente en el interior de la barra, se traduce en un cierto aspecto, como un aumento de pérdidas por efecto Joule, computables numéricamente si se atribuye un incremento ficticio de la resistencia óhmica del conductor. Al mismo tiempo, la concentración de corriente provoca una disminución de la permeancia del circuito magnético de dispersión transversal de las ranuras y con ello un descenso de la reactancia de dispersión de la máquina.

2. ANALISIS DEL EFECTO SKIN

Nuestro análisis poco a poco lo vamos centrando al caso de los motores de inducción de Jaula de ardilla. En tal sentido iniciaremos nuestro análisis con los conductores, cilíndricos luego pasamos a las barras rectangulares y finalizaremos planteando un método general para cualquier forma de barra.

2.1. Análisis del E.S. en Conductores Cilíndricos

Con nuestro análisis buscamos mostrar como se han deducido las funciones que gobiernan el comportamiento del E.S.; y para el caso de los conductores cilíndricos ha sido necesario hacer uso de las funciones Bessel, las cuales no son tan simplificadas como lo deseáramos. Para nuestros planteamientos nos ayudaremos de la fig. 2.1.

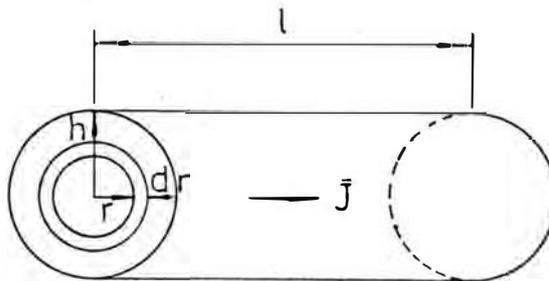


Fig. 2.1 Conductor cilíndrico de radio h , con una densidad de corriente J

De acuerdo con la ley de Ampere se tiene:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$$

Evaluando

$$H_r \cdot 2\pi r = I_r \quad (2-1)$$

Además

$$I_r = \int_0^r J_r \cdot 2\pi r \, dr \quad (2-2)$$

Reemplazando (2-2) en (2-1) y evaluando obtendremos

$$\frac{\partial H_r}{\partial r} + \frac{H_r}{r} = J_r \quad (2-3)$$

En un tramo del conductor, Δl , de espesor dr ; la caída de tensión será:

$$\Delta V = - \frac{d\phi}{dt}$$

Reemplazando

$$H_r = \frac{-j}{\omega \mu \sigma} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial r} \quad (2-4)$$

Reemplazando (2-4) en (2-3) y ordenando el planteamiento:

$$\frac{\partial^2 J_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial J_r}{\partial r} - \frac{j J_r}{\sigma \mu} = 0 \quad (2-5)$$

Todos los planteamientos se han reducido a resolver la ecuación (2-5); la cual haciendo uso de las funciones Bessel, tiene la siguiente solución:

$$J(k'r) = \frac{jIk'}{2\pi h} \frac{\text{ber } k'r + j \text{bei } k'r}{\text{ber}' k'h + j \text{bei}' k'h} \quad (2-6)$$

$$H(k'r) = \frac{I}{2\pi h} \frac{\text{ber}' k'r + j \text{bei}' k'r}{\text{ber}' k'h + j \text{bei}' k'h} \quad (2-7)$$

donde

$$K' = \sqrt{\sigma \omega \mu} \quad (2-8)$$

$$\text{ber } k'r = 1 - \frac{(k'r)^4}{2^2 \times 4^2} + \frac{(k'r)^8}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2} \dots \quad (2-9)$$

$$\text{bei } k'r = \frac{(k'r)^2}{2^2} - \frac{(k'r)^6}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \quad (2-10)$$

$$\text{ber}'k'r = \frac{-4 (k'r)^3}{2^2 \times 4^2} + \frac{8 (k'r)^7}{2^2 \times 4^2 \times 6^2 \times 8^2} - \dots \quad (2-11)$$

$$\text{bei}'kr = \frac{2 (k'r)}{2^2} - \frac{6(k'r)^5}{2^2 \times 4^2 \times 6^2} + \dots \quad (2-12)$$

Luego la impedancia por unidad de longitud del conductor será:

$$R_{ac} = \frac{k'}{2\pi h\sqrt{\epsilon}} \frac{\text{ber } k'h \cdot \text{beik}'h - \text{bei } k'h \cdot \text{ber}'k'h}{(\text{ber}'k'h)^2 + (\text{bei}'k'h)^2} \quad (2-13)$$

$$X_{ac} = \frac{k'}{2\pi h\sqrt{\epsilon}} \frac{\text{ber } k'h \cdot \text{ber}'k'h + \text{bei } k'h \cdot \text{bei}'k'h}{(\text{ber}'k'h)^2 + (\text{bei}'k'h)^2} \quad (2-14)$$

$$R_{dc} = \frac{1}{\pi h^2 \sqrt{\epsilon}} \quad (2-15)$$

$$X_{dc} = \frac{u_0}{8\pi} 2\pi f \quad (2-16)$$

Sin embargo basándose en las pérdidas óhmicas, se pueden obtener soluciones aproximadas simplificadas, para el caso de no usar las funciones Bessel. Estas son las siguientes:

$$\frac{R_{ac}}{\dots} \approx 1 + \frac{\epsilon^4}{48} \quad \text{/. } \epsilon \leq 2 \quad (2-17)$$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} \approx 0.25 + \frac{\xi}{2} \quad / . \xi > 2 \quad (2-18)$$

$$\xi = 0.002h\sqrt{\frac{f}{\rho_T}} \quad (2-19)$$

A continuación probaremos la exactitud de las ecuaciones aproximadas (2-17) y (2-18) con respecto a la tabla (4-7) de [1] correspondiente a conductores de cobre a 75 C, 60 HZ y sin considerar el efecto de proximidad:

- Conductor # 300 MCM

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.006 \quad \text{según [1]}$$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.006 \quad \text{según (2-17)}$$

$$\text{Error} = 0 \%$$

- Conductor # 1000 MCM

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.068 \quad \text{según [1]}$$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.0664 \quad \text{según (2-17)}$$

$$\text{Error} = 0.15 \%$$

- Conductor # 1520 mm

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.439 \quad \text{según [1]}$$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 1.4066 \quad \text{según (2-18)}$$

$$\text{Error} = 2.25 \%$$

2.2. Análisis del E.S. en Barras Rectangulares

Antes de entrar en el desarrollo propiamente dicho, analizaremos la presentación del E.S. en una placa ilimitada de espesor $2h$ y recorrida por una corriente alterna.

2.2.1. Placa plana ilimitada. - Sea una placa de material conductor a la corriente eléctrica y sometida a campos electromagnéticos, tal como lo muestra la fig. 2.2

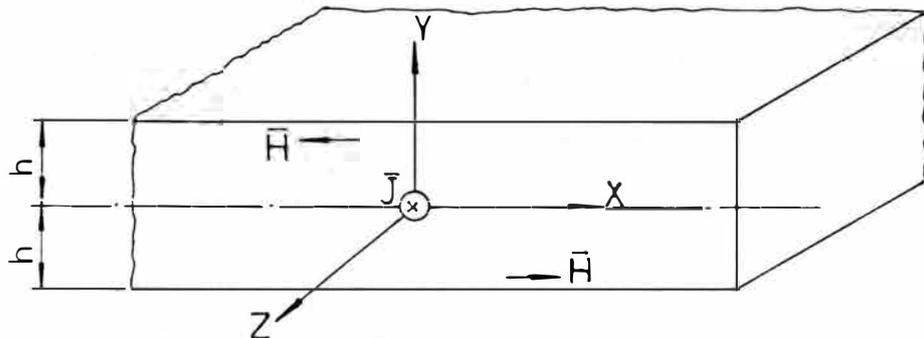


Fig. 2.2 Placa plana ilimitada sometida al paso de una corriente alterna.

Aprovechando la fig. 2.2 podemos realizar nuestros planteamientos tendientes a buscar las funciones que gobiernan el comportamiento del Efecto Skin en una placa plana. Esto es:

$$\nabla_x \bar{H} = \bar{J} = \nabla \bar{E} \quad (2-20)$$

$$\nabla_x \bar{E} = - \frac{\partial \bar{\beta}}{\partial t} = - u \frac{\partial \bar{H}}{\partial t} \quad (2-21)$$

Luego eliminando \bar{E} , \bar{H} , y $\bar{\beta}$ de las ecuaciones anteriores obtendremos:

$$\nabla_x \nabla_x \bar{J} = -\nabla u \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \quad (2-22)$$

Además debido a que $\nabla \cdot \bar{J} = 0$, la ec. (2-22) se convierte en

$$\nabla^2 \bar{J} = \nabla u \frac{\partial \bar{J}}{\partial t} \quad (2-23)$$

Pero dado a que \bar{J} solo varia a lo largo del eje Y, tal como se observa en la fig. 2.2 ; entonces la ec (2-23) se convierte en :

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = \nabla u \frac{\partial J}{\partial t} \quad (2-24)$$

pero

$$\bar{J} = \hat{J} e^{j\omega t}$$

$$\frac{\partial \bar{J}}{\partial t} = j\omega \bar{J} \quad (2-25)$$

Reemplazando (2-25) en (2-24) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial y^2} = j\omega \nabla u \bar{J} \quad (2-26)$$

Haciendo :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \nabla u}} \quad (2-27)$$

Entonces

$$\frac{d^2 J}{dy^2} = \frac{2j}{\delta^2} \cdot \bar{J} \quad (2-28)$$

Por lo tanto la ec. (2-28) es la ecuación principal que se debe de resolver para obtener así la función que tanto estamos buscando y dado a que es una ecuación típica, entonces su solución tiene una forma ya conocida y aplicando algunas condiciones de contorno se obtiene la siguiente solución:

$$\bar{J}(y) = \bar{J}_s \frac{\text{Cosh} \left(\frac{1+j}{\delta} y \right)}{\text{Cosh} \left(\frac{1+j}{\delta} h \right)} \quad (2-29)$$

Luego la corriente total en la placa por unidad de anchura será:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \int_{-h}^h \bar{J}(y) dy \\ &= \frac{2 \bar{J}_s \delta}{(1+j)} \text{Tgh} \left(\frac{1+j}{\delta} h \right) \end{aligned} \quad (2-30)$$

El voltaje aplicado a la placa se obtiene a partir del campo eléctrico en su superficie por unidad de longitud, en la dirección del eje X.

Luego

$$\bar{V} = \frac{\bar{J}_s}{\sigma} \quad (2-31)$$

$$\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}} = \frac{\bar{J}_s}{\sigma \bar{I}} \quad (2-32)$$

Reemplazando en (2-32)

$$\bar{Z} = \left(\frac{1 + j}{2\sqrt{\delta}} \right) \text{Coth} \left(\frac{1 + j}{\delta} \right) h \quad (2-33)$$

Desarrollando la ec. anterior:

$$\bar{Z} = \frac{1}{2\sqrt{\delta}} \frac{\sinh 2h/\delta + \sen 2h/\delta}{\cosh 2h/\delta - \cos 2h/\delta} + \frac{j}{2\sqrt{\delta}} \frac{\sinh 2h/\delta - \sen 2h/\delta}{\cosh 2h/\delta - \cos 2h/\delta} \quad (2-34)$$

Pero sabemos que por unidad de longitud y ancho:

$$R_{dc} = \frac{1}{\sqrt{2} h} \quad (2-35)$$

Entonces

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{h}{\delta} \frac{\sinh 2h/\delta + \sen 2h/\delta}{\cosh 2h/\delta - \cos 2h/\delta} = \varphi \quad (2-36)$$

2.2.2 Barra Rectangular en Ranura Abierta. - A partir de este momento, ya prácticamente estamos tratando al E.S. en los motores de inducción y este caso es la manera simplificada de una barra alojada en la ranura de un rotor, la cual tiene el mismo análisis desarrollado en la sección 2.2.1 a excepción de que en este caso se tiene que considerar el ancho de la ranura y el ancho de la barra, tal como se observa en la fig. (2.3)

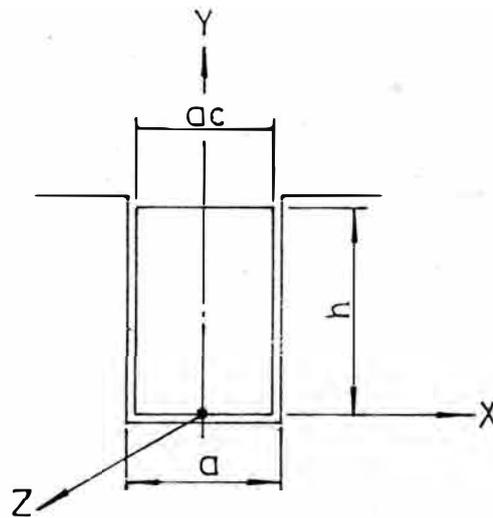


Fig. 2.3 Barra Rectangular alojada en la ranura de un rotor

En este caso el centro de nuestro sistema de coordenadas (x, y, z) se sitúa en el centro de la base de la barra y esto se debe a que el material magnético del rotor atrae a los líneas del campo magnético creadas por la circulación de corriente.

Luego la ec. (2-27) pasará a ser:

$$\frac{h}{\delta} = h \sqrt{\frac{\omega \nabla u a_c}{2 a}} = \xi \quad (2-37)$$

Por lo tanto la ec (2-36) la escribiremos de la siguiente manera:

$$\varphi = \xi \frac{\sinh 2\xi + \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} \quad (2-38)$$

De acuerdo con la definición general de inductancia en corriente continua, aplicado a la fig. (3-3) obtenemos:

$$X_{dc} = \omega u_0 \frac{h/3}{a} \quad (2-39)$$

Luego la reactancia por unidad de longitud aplicado a la ec. (2-34) para nuestro caso será:

$$X_{ac} = \frac{1}{\sqrt{\delta a_c}} \frac{\sinh 2\xi - \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} \quad (2-40)$$

Luego

$$\begin{aligned} \frac{X_{ac}}{X_{dc}} &= \frac{3}{2 \left(\frac{\omega \sqrt{u_0 a_c}}{2a} \right) \delta h} \frac{\sinh 2\xi - \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} \\ &= \frac{3}{2 \xi} \frac{\sinh 2\xi - \sin 2\xi}{\cosh 2\xi - \cos 2\xi} = \psi \quad (2-41) \end{aligned}$$

2.3 Análisis del E.S. en Barras de cualquier Geometría

Diferentes métodos pueden ser usados para el cálculo de la relación de impedancias de corriente alterna a corriente continua. En ciertos casos el vector Pointing puede ser aplicado y en los casos de conductores o barras de geometrías de interés especial se puede aplicar el método que se propone a continuación, que se basa en el concepto de la profundidad de penetración.

2.3.1 Profundidad Penetración Barras

Rectangulares. - Se define así, a la profundidad de la barra cuya magnitud varía en forma inversamente proporcional con la función "φ", definida con la ec. (2-36) y directamente proporcional con la función "ψ"

definida con la ec. (2-41). Gráficamente mostraremos a la profundidad de penetración para resistencias, h_{pr} , en la fig. 2.4

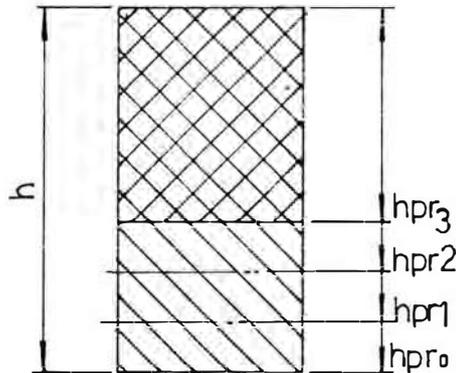


Fig. 2.4 Barra rectangular, donde se muestra la variación de la profundidad de penetración h_{pr}

Análiticamente se definen de la siguiente manera:

$$h_{pr} = \frac{h}{\psi} \quad (2-42)$$

$$h_{px} = h \cdot \psi \quad (2-43)$$

2.3.2 Relaciones R_{ac}/R_{dc} para barras de cualquier Geometría. - Con la profundidad de penetración independiente de la forma de la barra, el cómputo de la relación para barras de cualquier geometría se reduce a la determinación de la relación del área real de la barra y el área referida a la profundidad de penetración, h_{pr} . Con la fig. 2.5 mostraremos el caso de una barra ideal, con el propósito de explicar el campo de aplicación del método.

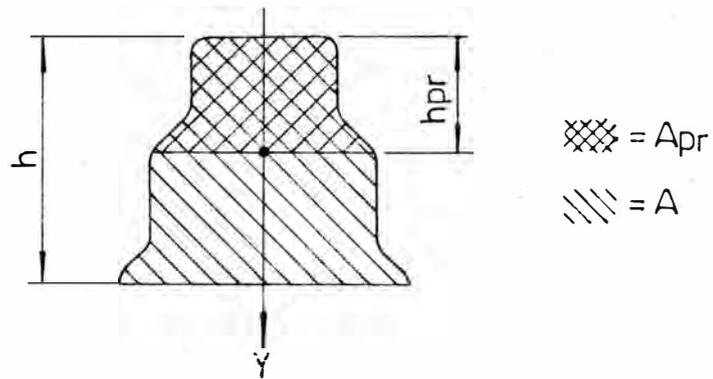


Fig. 2.5 Barra ideal donde se muestra el área referida a la profundidad de penetración, variable con la frecuencia

La relación de áreas, resulta de la premisa de que al paso de corriente alterna, la resistencia de la barra a la que se debe de referir es la correspondiente a la profundidad de penetración, A_{pr} , para mantener así una resistividad constante del material de la barra, con respecto a la corriente continua. Esto es:

$$\rho = R_{dc} \cdot A = R_{ac} \cdot A_{pr} \quad (2-44)$$

De donde

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{A}{A_{pr}} \quad (2-45)$$

$$A_{pr} = \int_0^{h_{pr}} dA \quad (2-46)$$

2.3.3 Relaciones X_{ac}/X_{dc} para barras cualquier Geometría. - De manera similar como se propuso la relación de las resistencias de corriente alterna a continua, la relación de reactancias se define como la relación de reactancias, correspondientes al área referida a la altura h_{px} con respecto al área total, tal

como mostraremos a continuación, con la ayuda de la fig.

2.6

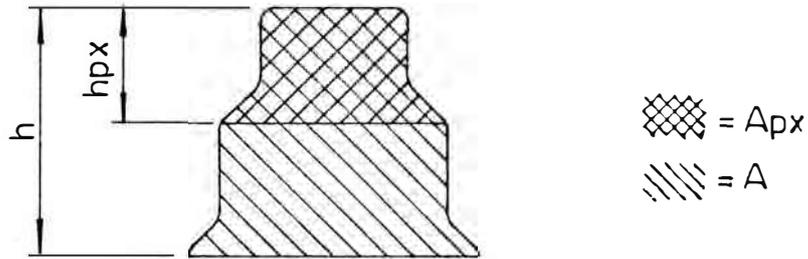


Fig. 2.6 Barra especial de sección A, con su área referida a la altura hpx de Apx, variable con la frecuencia

$$\frac{X_{ac}}{X_{dc}} = \frac{X(A_{px})}{X(A)} \quad (2-47)$$

Pero

$$X_f = \omega_n u_o \frac{Z_f^2}{S_f} \cdot \lambda \quad (2-48)$$

$$= K \cdot \lambda$$

Por lo tanto, la relación se convierte en

$$\frac{X_{ac}}{X_{dc}} = \frac{\lambda(A_{px})}{\lambda(A)} \quad (2-49)$$

2.4 análisis del E.S. en Ranuras Semi-cerradas. -

Anteriormente sólo habíamos considerado barras rectangulares alojadas en ranuras abiertas, fig. 2.7, en donde la relación de reactancias en corriente alterna a corriente continua está definida por la función

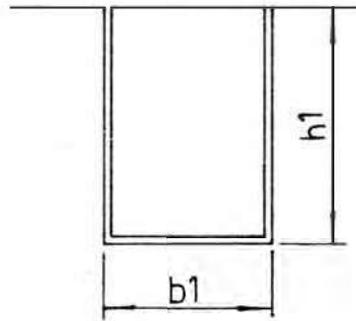


Fig.2.7 Barra rectangular alojada en una ranura abierta de la fig. 2.7

$$\lambda_{ac} = \frac{h_1}{3b_1} \psi \quad (2-50)$$

$$\frac{\chi_{ac}}{\chi_{dc}} = \frac{\lambda_{ac}}{\lambda_{dc}} = \psi \quad (2-51)$$

Pero cuando la ranura es semicerrada, entonces la altura de la barra h_1 , es menor que la altura total de la ranura. Por lo tanto la relación de reactancias no lo define la función ψ . En este caso la función ψ solamente afectará a los términos de la permeancia que contengan a la altura h_1 , manteniendose invariable con la frecuencia los demás términos.

Para ilustrar lo anteriormente dicho, mostraremos en la fig. 2.8 un tipo de ranura usada en la fabricación de motores.

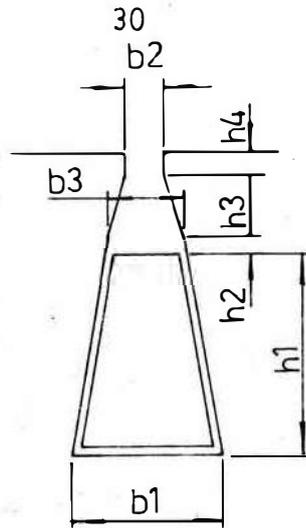


Fig. 2.8 Barra trapezoidal alojada en una ranura semicerrada.

De la fig. 2.8

$$\lambda_{ac} = \frac{h_1}{3 \left(\frac{b_1 + b_3}{2} \right)} \psi + \frac{h_2}{b_3} + \frac{h_3}{3 \left(\frac{b_2 + b_3}{2} \right)} + \frac{h_4}{b_2} \quad (2-52)$$

$$\lambda_{dc} = \frac{h_1}{3 \left(\frac{b_1 + b_3}{2} \right)} \quad (2-53)$$

En la ecuación (2-52) observaremos que la función sólo afecta a los términos que contienen h_1 .

Para el caso de las resistencias del rotor, la función solamente afectará a la parte de la barra que se encuentra dentro de la ranura del rotor, ya que en los extremos de la barra y los anillos de la jaula, el Efecto Skin disminuye considerablemente, a tal punto que se puede considerar despreciable el Efecto Skin en estas zonas.

En las ranuras semicerradas sucede que, mientras más

se tiende a cerrar a la ranura , entonces la corriente sufrirá un nuevo desplazamiento dependiendo de la forma del recorrido de las líneas de campo magnético, tal como se bosqueja en la fig. 2.9

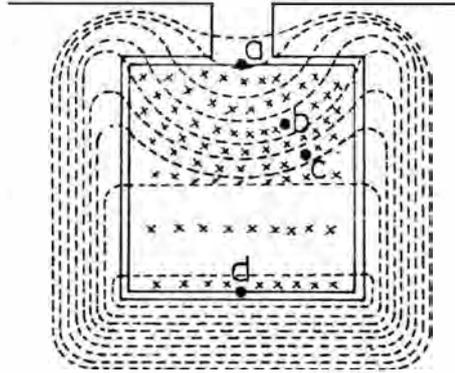


Fig. 2.9 Ranura semicerrada, mostrando las líneas de campo magnético (---) y la densidad de corriente (xxx)

De la misma manera que se graficó vectorialmente las corrientes circulatorias de la barra en la fig. 1.7, graficaremos en la fig 2.10 su diagrama vectorial, pero considerando el efecto por ser ranura semi-cerrada.

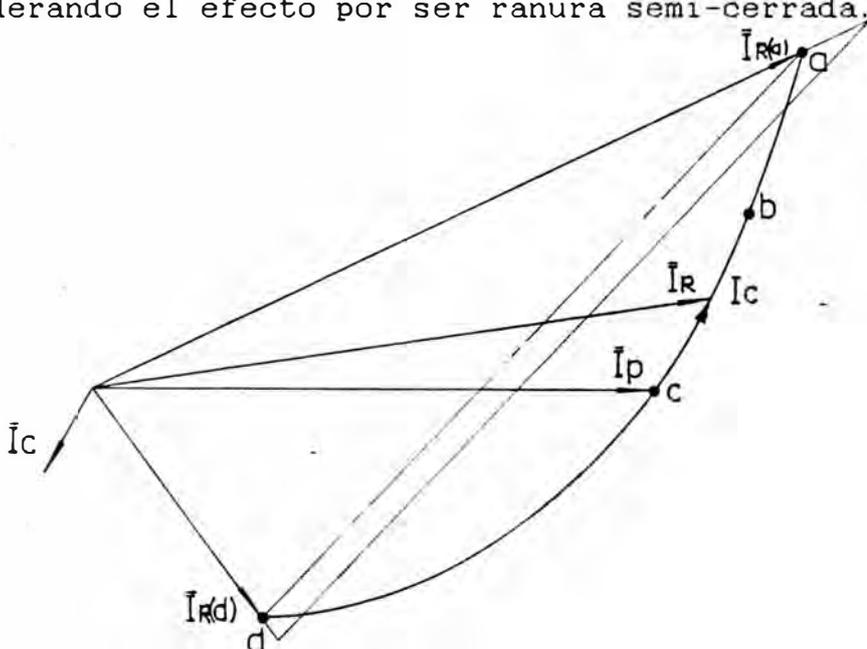


Fig. 2.10 Diagrama vectorial de las corrientes para una barra rectangular alojada en una ranura semicerrada.

Donde

$$I_R = I_P - I_C$$

3. CALCULO DEL E.S. EN BARRAS DE GEOMETRIA ESPECIAL

Se designan como barras de geometría especial, a los tipos de barras típicas para el análisis del E.S. y que en muchos casos son usadas en la fabricación de motores.

En dichas barras se acentúa más la presencia del Efecto Skin, que es usado con propósitos benéficos para la performance del motor.

Entre estos tipos de barras estarían las barras trapezoidales, barras en T y las barras compuestas, que mostramos en la fig. 3.1

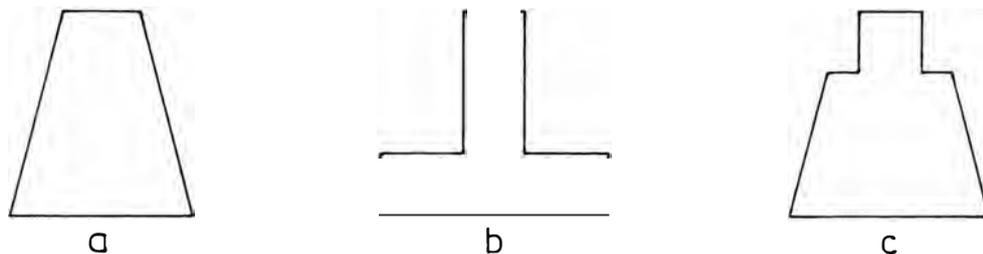


Fig. 3.1 Barras especiales para el análisis y cálculo del Efecto Skin (a,b,c)

De acuerdo al análisis realizado en el capítulo anterior, ahora haremos la formulación respectiva para los 3 tipos de barras especiales y al mismo tiempo su cálculo correspondiente.

3.1. Relaciones R_{ac}/R_{dc} de las Barras.— Será necesario que nos ayudemos de las figuras 3.2 para poder observar la relación entre las áreas de los 3 tipos de barras.

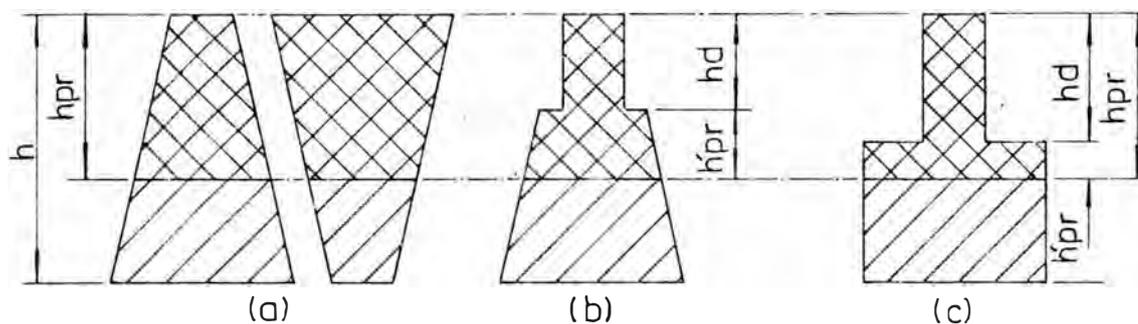


Fig. 3.2 Barras trapezoidales (a), compuesta (b) y en T (c), con sus respectivas áreas correspondientes a la profundidad de penetración (h_{pr})

Como se observa en la fig. 3.2, la profundidad de penetración h_{pr} , no depende de la forma de la barra, pues tan sólo depende de la altura total, h , de la barra. Por lo tanto, barras de una misma altura total, tendrán la misma profundidad de penetración, h_{pr} .

Las funciones " φ " y " ψ " están referidas a las barras rectangulares de una altura h , la profundidad de penetración también se ha referido para las barras rectangulares; y lo que va a diferenciar a las barras de cualquier forma será entonces, las áreas referidas a la profundidad de penetración solamente.

3.1.1 Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras Trapezoidales. - Nuestro cálculo estará basado en los planteamientos expuestos en la sección 2.3.2 y que aplicado a la fig. 2.3 resultará nuestra formulación de cálculo.

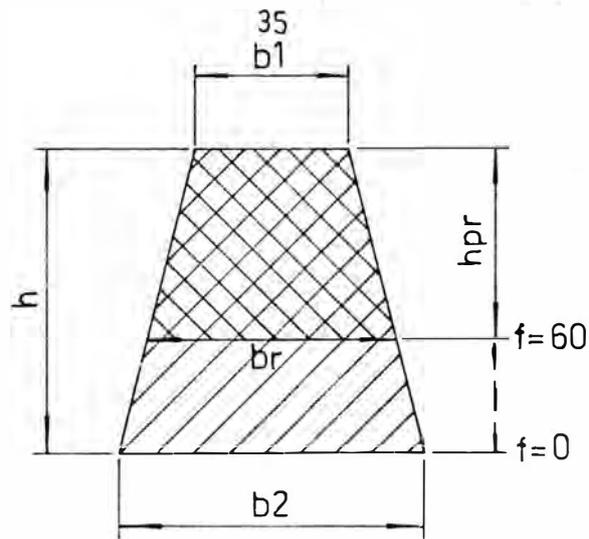


Fig. 3.3 Barra Trapezoidal

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{A}{A_{pr}} = \frac{\left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) h}{\left(\frac{b_1 + b_r}{2} \right) h_{pr}} \quad (3-1)$$

Donde

$$b_r = b_1 + \frac{h_{pr}}{h} (b_2 - b_1) \quad (3-2)$$

Reemplazando

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \varphi \frac{b_1 + b_2}{2b_1 + \left(\frac{b_2 - b_1}{\varphi} \right)} \quad (3-3)$$

• Ejem. 3.1. Realizaremos una evaluación cuantificada para una barra trapezoidal con las siguientes dimensiones

$$h = 1.4 \text{ " } = 0.356 \text{ m}$$

$$b_1 = 0.31 \text{ "}$$

$$b_2 = 0.62 \text{ "}$$

Calcularemos la variación de la resistencia, considerando que la barra es de cobre, a 75°C, con una resistividad

0.0217 Ω - mm²/m y asumiendo de que el ancho de la barra es el mismo que el de la ranura.

En la ec. (2-37)

$$\xi = 0.4796 \sqrt{f}$$

En la ec (3-3)

$$\frac{Rac}{Rdc} = \varphi(\xi) \frac{0.93}{0.62 + \frac{0.31}{\varphi(\xi)}}$$

Mostraremos a continuación una tabla, donde se muestra el cómputo de la ecuación anterior para diferentes frecuencias (f), con su correspondiente $\varphi(\xi)$ de la ec. (2-39)

Tabla 3.1

f (HZ)	Rac * Rdc	Rac Rdc	Error (%)
5	1.17	1.1506	1.66
15	2.05	2.0207	1.43
30	3.33	3.2962	1.02
45	4.25	4.1941	1.32
60	5.00	4.9200	1.60

Donde

$\frac{R_{ac}^*}{R_{dc}}$: Relaciones obtenidas usando las funciones Bessel y Hankel [2]

$\frac{R_{ac}}{R_{dc}}$: Relaciones obtenidas usando la ec. (3-3)

3.1.2. Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras Compuestas. - Antes de hacer la formulación del método de cálculo observemos la fig. 3.4

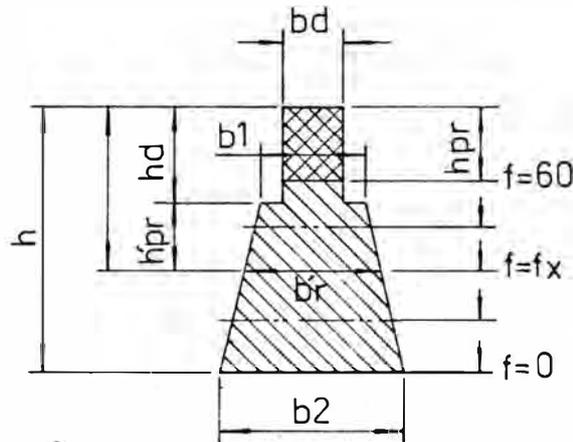


Fig. 3.4 Barra compuesta, mostrando todas sus dimensiones principales

Según la figura 3.4, la profundidad de penetración h_{pr} , es variable con la frecuencia; pudiendo en algunos casos ser menor que la altura h_d , de la parte rectangular de la barra y luego al bajar la frecuencia pasará a ser mayor que ésta. Por lo tanto al Efecto Skin lo analizaremos para los 2 casos que se pueden presentar en una barra compuesta.

-Para $h_{pr} \leq h_d$

$$\frac{Rac}{Rdc} = \frac{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)h_1 + b_d h_d}{b_d h_{pr}} \quad (3-4)$$

Remmp.

$$\frac{Rac}{Rdc} = \varphi(\varphi) \frac{(b_1 + b_2)h_1 + 2b_d h_d}{2b_d h} \quad (3-5)$$

-Para $h_{pr} > h_d$

$$\frac{Rac}{Rdc} = \frac{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)h_1 + b_d h_d}{\left(\frac{b_1 + b_r}{2}\right)h_{pr} + b_d h_d} \quad (3-6)$$

pero

$$h_{pr} = h_{pr} - h_d \quad (3-7)$$

$$b_r = b_1 + \frac{h_{pr}}{h_1} (b_2 - b_1) \quad (3-8)$$

Reemp.

$$\frac{Rac}{Rdc} = \frac{(b_1 + b_2)h_1 + 2b_d h_d}{\left[2b_1 + \left(\frac{h}{\varphi} - h_d\right)\left(\frac{b_2 - b_1}{h_1}\right)\right] \left(\frac{h}{\varphi} - h_d\right) + 2b_d h_d} \quad (3-9)$$

El método propuesto de la profundidad de penetración mostró que para barras trapezoidales el error en el cómputo (tabla 3.1), es bastante bajo y esto se debe a

que el ancho de la barra va cambiando gradualmente a lo largo de la altura de la barra para el caso de barras trapezoidales. Sin embargo si tratamos con barras compuestas, en las cuales a distintas alturas se observan cambios bruscos del ancho de la barra, por lo que es necesario contemplar este cambio brusco en las ecuaciones para barras con esta características. Ya que de lo contrario las ecuaciones anteriores (3-5) y (3-9) no tendrán buena exactitud.

Por lo tanto, para contemplar los cambios bruscos de la intensidad del campo producida por el cambio brusco del ancho de la barra se, utilizara el factor de corrección "K". Luego será necesario trabajar con la función φ corregida, o sea φ_c También el parámetro pasará a ser

$$\xi_c = \frac{\xi}{k} \quad (3-10)$$

$$k = .2 \left(\frac{b_1}{b_d} \right)^{-1.3} + .8 \quad (3-11)$$

Donde

$$\varphi_c = \varphi (\xi_c) \quad (3-12)$$

Corregiendo las ecuaciones (3-5) y (3-9) obtenemos

-Para $h_{pr} \approx h_d$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \varphi_c \frac{(b_1 + b_2)h_1 + 2b_d h_d}{2 b_d h} \quad (3-13)$$

-Para $h_{pr} > h_d$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{(b_1 + b_2) h_1 + 2 b_d h_d}{\left[2b_1 + \left(\frac{h}{\varphi_c} - h_d \right) \left(\frac{b_2 - b_1}{h_1} \right) \right] \left(\frac{h}{\varphi_c} - h_d \right) + 2b_d h_d} \quad (3-14)$$

Ejem. 3.2.- Sea una barra compuesta con las siguientes dimensiones:

$$h = 1.4 \text{ " } = 35.56 \text{ mm}$$

$$h_d = .5 \text{ "}$$

$$h_1 = .9 \text{ "}$$

$$b_d = .2 \text{ "}$$

$$b_1 = .4 \text{ "}$$

$$b_2 = .6 \text{ "}$$

Evaluaremos su comportamiento para las mismas condiciones del Ejem. 3.1.

Reemplazando valores tenemos:

$$\xi = .4796 \sqrt{f}$$

$$k = .2 \cdot (2) + .8 = .8812$$

$$\xi_c = .5443 \sqrt{f}$$

Primeramente averiguaremos el valor de h_{pr} para la frecuencia mayor, o sea para 60 HZ.

$$h_{pr} = \frac{h}{\varphi_c} = \frac{1.4 \text{ "}}{\varphi(4.2161)} = \frac{1.4 \text{ "}}{4.2166} = 0.3320 \text{ "}$$

Luego observamos que para 60 hz, $h_{pr} < h_d$ entonces el limite en que h_{pr} sea igual que h_d se cumplirá con la siguiente igualdad:

$$= \frac{h}{\varphi_c}$$

$$\varphi_c = \frac{h}{h_d} = \frac{1.4''}{0.5''} = 2.8$$

Se cumple dicho valor cuando la frecuencia es aproximadamente 27 HZ.

Por lo tanto, para computar valores de R_{ac}/R_{dc} tendremos que emplear la ec. (3-13) para frecuencias mayores de 27 hz y la ec (3-14) para frecuencias menores de 27 hz, tal como lo mostraremos en la tabla 3.2

Tabla 3.2

<u>f (HZ)</u>	<u>Rac/Rdc*</u>	<u>Rac/Rdc</u>	<u>Error (%)</u>
5	1.30	1.2864	1.04
15	3.01	3.0320	-0.73
30	5.70	5.8648	-2.89
45	7.55	7.1733	4.95
60	8.88	8.2685	6.85

Donde

R_{ac}/R_{dc}^* = Relaciones obtenidas usando las funciones Bessel y Hankel [2]

R_{ac}/R_{dc} = Relaciones obtenidas con las ec. (3-13) y (3-14)

3.1.3. Cálculo de las Relaciones R_{ac}/R_{dc} en Barras en T.-

Al igual que en los 2 casos anteriores, la formulación de las ecuaciones que gobiernan al Efecto Skin se deducen de los gráficos. Para el caso de las barras en T

observaremos la Fig. 3.5

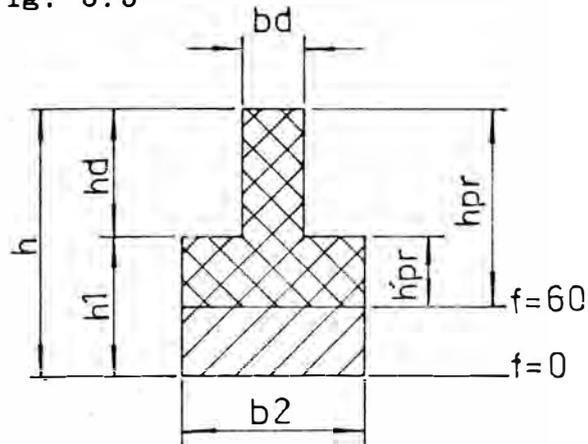


Fig. 3.5 Barra en T, mostrando todas sus dimensiones principales

De igual manera que en la sección 3.1.2., aquí también se pueden presentar 2 casos, con respecto a la profundidad de penetración

- Para $h_{pr} \leq h_d$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \varphi_c \frac{b_2 h_1 + b_d h_d}{b_d h} \quad (3-15)$$

- Para $h_{pr} > h_d$

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = \frac{b_2 h_1 + b_d h_d}{b_2 \left(\frac{h}{\varphi_c} - h_d \right) + b_d h_d} \quad (3-16)$$

Ejem. 3.3 Sea una barra en T, con las siguientes dimensiones:

$$h = .564" = 0.0143 \text{ m}$$

$$h_d = .282"$$

$$h_1 = .282"$$

$$b_d = .0625"$$

$$b_2 = .188''$$

Asumiendo que la barra es de cobre, a 100°C y que el ancho de la ranura se considera casi igual al ancho de barra, obtendremos:

$$\rho_{100^\circ} = 0.0232 \quad \Omega \text{ -mm}^2/\text{m}$$

En (2-38)

$$\begin{aligned} \xi &= 0.0143 \sqrt{\frac{2\pi f \times 4\pi \times 10^{-7}}{2 \times 0.0232 \times 10^{-6}}} \\ &= .1869 \sqrt{f} \end{aligned}$$

En (3-11)

$$K = .2 (3)^{-1.3} + .8 = .8479$$

Luego

$$\xi_c = 0.2204 \sqrt{f}$$

Veremos ahora en que caso estaremos, considerando la máxima frecuencia de 60 HZ:

$$h_{pr} = \frac{h}{\psi_c} = \frac{.564''}{1.5737} = .3584''$$

Por lo tanto :

$$h_{pr} > h_d$$

Como para 60 HZ la profundidad de penetración h_{pr} es mayor que h_d , entonces con mayor razón lo será para frecuencias menores de 60 HZ. Por lo tanto solamente se usará la ec. (3-16) para toda la gama de frecuencias presentes en el rotor del motor, en cuya frecuencia nominal se está considerando en 60 HZ.

En esta oportunidad computaremos las relaciones de las resistencias sólo para 60 HZ, ya que allí es donde se produce la mayor discrepancia en la exactitud de su cálculo.

En 60 HZ, usando la ec. (3-16):

$$\frac{R_{ac}}{R_{dc}} = 2.2087$$

En 60 HZ, con las funciones Bessel

$$\frac{R_{ac}^*}{R_{dc}} = 2.01$$

Error en 60 HZ

$$\text{Error \%} = -9.88$$

Para este ejemplo, en el cual el cambio brusco del ancho de la barra b_2/b_d fue de 3, el error fue del 9.88% para 60 HZ el cual disminuirá a medida que la frecuencia baja, en forma similar que la variación en la tabla 3.2.

3.2 Relaciones X_{ac}/X_{dc} de las Barras. - De la misma manera que se hizo en la sección 3.1, aquí también será necesario que nos ayudemos de los gráficos para realizar nuestros planteamientos. Por tal motivo observemos la fig. 3.6.

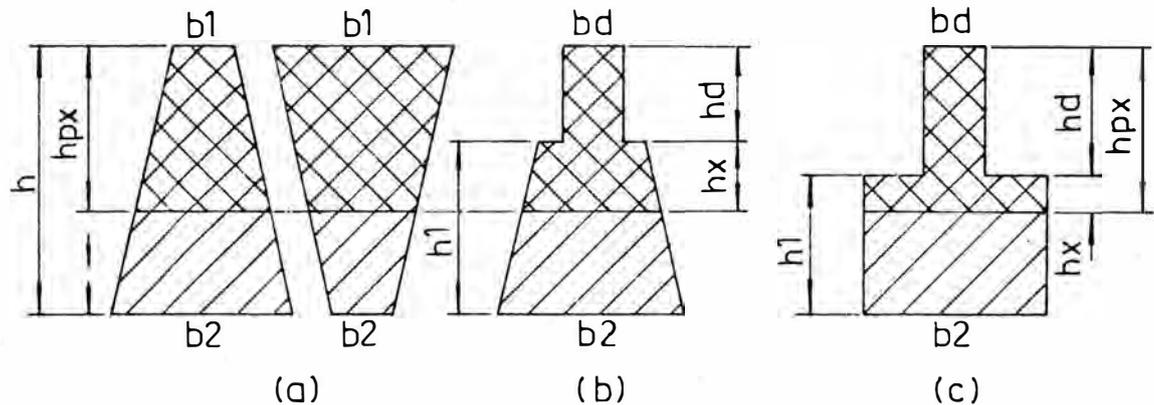


Fig. 3.6 Barras trapezoidales (a , compuesta (b) y en T (c) y sus respectivas áreas correspondientes a la profundidad de penetración h

La profundidad de penetración para reactancias está definida en la sección 2.2.1 y en ella se observa que ésta aumenta en la medida que la frecuencia desciende, siguiendo el comportamiento de la función .

3.2.1 Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras compuestas. - Para el cálculo tendremos como referencia a la fig. 3.6.b y de acuerdo a la ecuación general (2-51) tendremos:

$$\frac{X_{ac}}{X_{dc}} = \frac{\lambda(A_{px})}{\lambda(A)}$$

Análogamente como en el caso de la relación de resistencias, en este caso se presentarán 2 posibilidades en relación a la profundidad de penetración h_{px} :

- Para $h_{px} > h_d$

$$\lambda(A_{px}) = \left(\frac{A_x}{A_{px}} \right)^2 \frac{h_x}{3b_1} + \left(\frac{A_x}{A_{px}} \right)^2 \frac{h_d}{b_d} + \frac{A_x}{A_{px}} \frac{h_d^2}{2} +$$

$$\frac{b_d h_d}{A_{px}^2} - \frac{h_d^2}{3} \quad (3-17)$$

$$\lambda(A) = \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \frac{h_1}{3b_1} + \left(\frac{A_1}{A}\right)^2 \frac{h_d}{b_d} + \frac{A_1}{A^2} h_d^2 + \frac{b_d h_d}{A^2} - \frac{h_d^2}{3} \quad (3-18)$$

Donde

$$A_x = \left(\frac{b_1 + b_x}{2} \right) h_x \quad (3-19)$$

$$b_x = b_1 + \frac{h_x}{h_1} (b_2 - b_1) \quad (3-20)$$

$$h_x = h_{px} - h_d \quad (3-21)$$

$$h_{px} = \psi h$$

$$A_{px} = A_x + b_d h_d \quad (3-22)$$

$$A_1 = \left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right) h_1 \quad (3-23)$$

$$A = A_1 + b_d h_d \quad (3-24)$$

-Para $h_{px} \leq h_d$

$$(A_{px}) = \frac{h_{px}}{3b_d} \quad (3-25)$$

$$\lambda(A) = \text{Idem al caso anterior (3-18)}$$

Ejem 3.4 Sea la misma barra compuesta del ejemplo 3.2 y bajo las mismas condiciones de trabajo obtenemos.

$$\xi = .4796$$

$$k = .8812$$

$$\xi_c = .5443 \sqrt{f}$$

Averiguaremos el valor de h_{px} con respecto a h_d para la máxima frecuencia de 60 HZ.

$$\begin{aligned}\Psi &= \Psi(\xi_c) \\ &= 0.3556\end{aligned}$$

Luego para los 60 HZ se tendrá:

$$\begin{aligned}h_{px} &= 1.4'' \times .3556 \\ &= 0.4978''\end{aligned}$$

Se observa que para 60HZ, h_{px} es menor que h_d , entonces el limite para que h_{px} sea igual a h_d será cuando:

$$\begin{aligned}\Psi_c &= \frac{h_d}{h} \\ &= .3571\end{aligned}$$

Siendo este valor el correspondiente a 59.5HZ por lo tanto, para computar los valores de (X_{ac}/X_{dc}) tendremos que usar la ec. (3.25) para frecuencias mayores que 59.5 HZ y la ec. (3-17) para frecuencias menores de 59.5 HZ, tal como lo mostraremos en la tabla 3.3

Tabla 3.3

f (HZ)	X_{ac}/X_{dc}^*	X_{ac}/X_{dc}	Error(%)
	.975	.9652	1.01
15	.815	.7886	3.24
30	.583	.6008	-3.05
45	.451	.4473	0.82
60	.378	.3446	8.84

Donde

X_{ac}/X_{dc}^* Relaciones obtenidas usando las funciones Bessel y Hankel [2]

X_{ac}/X_{dc} Relaciones obtenidas usando las ec. (3-17) y (3-25)

3.2.2 Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras Trapezoidales. - Tomando como referenecia la fig. 3.6.a y de acuerdo a la ec. general (2-51):

$$\lambda(A_{px}) = \frac{hx}{3b_1} = \frac{hpx}{3b_1} \quad (3-26)$$

$$\lambda(A) = \frac{h_1}{3b_1} = \frac{h}{3b_1} \quad (3-27)$$

Entonces:

$$X_{ac}/X_{dc} = \psi_c = \psi \quad (3-28)$$

Ejem. 3.5 Sea la misma barra trapezoidal del ejemplo 3.1 y bajo las mismas condiciones de trabajo obtenemos:

$$\xi = .4796 \sqrt{f} = \xi_c$$

$$k = 1$$

El cómputo en este caso se hace solamente utilizando la ec. (3-28) para las relaciones de (X_{ac}/X_{dc}) de la tabla 3.4 que mostramos.

Tabla 3.4

f (HZ)	X_{ac}/X_{dc}^*	X_{ac}/X_{dc}	Error (%)
5	.960	.9686	-0.90
15	.796	.7954	0.09
30	.598	.5792	3.14
45	.480	.4675	2.60
60	.408	.4035	1.10

3.2.3 Cálculo de las Relaciones X_{ac}/X_{dc} en Barras en T

La referencia para este caso es la fig. 3.6.c y de acuerdo a las ecuaciones generales (3-17) y (3-18), pero teniendo en cuenta a las siguientes relaciones propias de las barras en T.

$$A_x = b_2 h_x \quad (3-29)$$

$$b_x = b_2 = b_1 \quad (3-30)$$

$$A_1 = b_2 h_1 \quad (3-31)$$

Para las barras en T, también se pueden presentar 2 casos con respecto a la profundidad de penetración y las ecuaciones (3-17), (3-18) y (3-25) son válidas también para las barras en T. Por lo tanto la metodología seguida en la sección 3.2.1 es válida para este caso.

Ejem. 3.6.- Sea la misma barra en T del ejemplo 3.3 y bajo las mismas condiciones de trabajo de dicho ejemplo tendremos

$$\xi = .1869 \sqrt{f}$$

$$\xi_c = .2204 \sqrt{f}$$

Veremos que el valor de h_{px} correspondiente a la máxima frecuencia de 60 HZ, que estamos tratando es:

$$h_{px} = \psi_c h$$

$$= 0.4733''$$

Según los datos de la barra se obtiene que, para 60 HZ, la altura de penetración h_{px} es mayor que h_d . Por lo tanto, solamente se empleará la ecuación (3-17) para toda la gama de frecuencias que estará sometida el rotor del

motor.

Para 60 HZ, empleando las funciones Bessel:

$$\frac{X_{ac} *}{X_{dc}} = 0.8635$$

Para 60HZ, usando las ecuaciones de la sección 3.2.1 obtenemos:

$$\frac{X_{ac}}{X_{dc}} = 0.8475$$

Error para 60 HZ

$$\text{Error} = 1.85 \%$$

4 CIRCUITOS EQUIVALENTES A USAR PARA LOS MOTORES DE INDUCCION

Debido a que prácticamente hemos definido el comportamiento general de la impedancia rotórica ante la variación de la frecuencia de dicha corriente de los motores de Inducción de Jaula de Ardilla debido al Efecto Skin, es que en esta oportunidad trataremos de involucrar esta característica en su circuito equivalente, al que lo representamos en su forma más clásica, la que se define en todos los textos de máquinas eléctricas.

Lo que hay que tener presente en este circuito equivalente, es que la impedancia rotórica contempla la variación de su magnitud y fase, la que está en función de la frecuencia de la corriente rotórica. Para el caso de la resistencia, solamente se aplicará la relación (R_{ac}/R_{dc}) a la parte de la barra que está dentro de la ranura, mas no a los extremos de las barras ni a los anillos de corto-circuito. Para el caso de la reactancia, solamente se aplicará la relación (X_{ac}/X_{dc}) a la parte de la permeancia de ranura que contiene al término "altura total de la barra", mas no a otras permeancias tales como la de los extremos de las barras, zig-zag, diferencial y otras mas.

Mostraremos los circuitos equivalentes para los motores de inducción de 1 y 2 jaulas, por ser los que usualmente se ven más en las instalaciones industriales.

4.1 Circuito Equivalente para motores de 1 Jaula

En la fig. 4.1 se muestra dicho circuito en la forma más conocida.

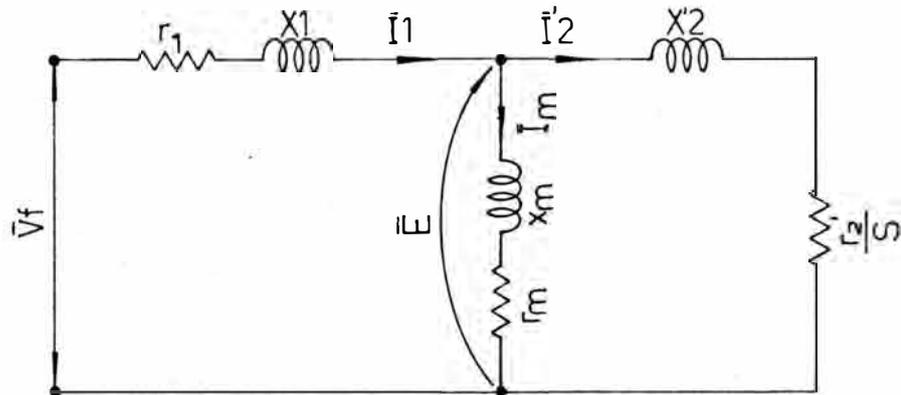


Fig. 4.1 Circuito Equivalente de un motor de Inducción de una Jaula

Considerando el Efecto Skin, la impedancia rotòrica se define de la siguiente manera:

$$r_2' = \Delta r_b' + r_b' \left(\frac{R_{ac}}{R_{dc}} \right) + r_a' \quad (4-1)$$

$$X_2' = X_{ld}' + \Delta X_r' + X_{m'}' \left(\frac{X_{ac}}{X_{dc}} \right) \quad (4-2)$$

4.2 Circuito Equivalente para motores de 2 Jaulas.-

En la fig. 4.2 se mostrará un circuito simplificado de los motores de doble jaula de ardilla.

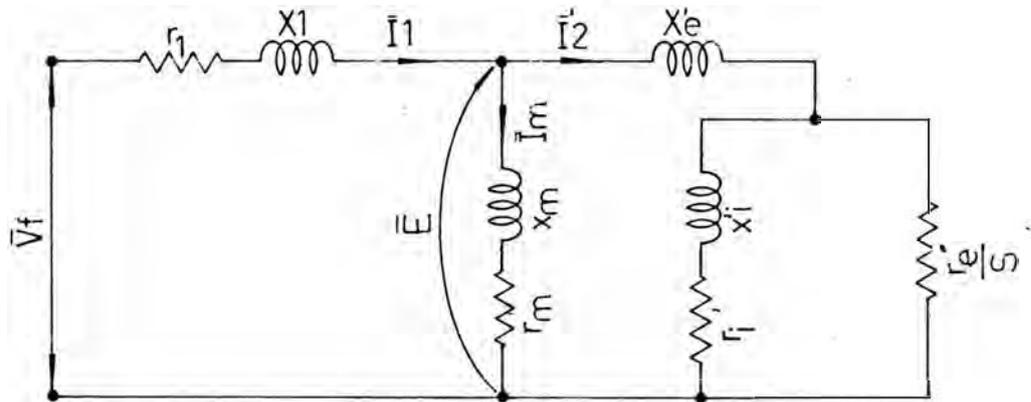


Fig. 4.2 Circuito Equivalente de un motor de Inducción de 2 Jaulas

Donde

$$Z_{eq} = \frac{R_{eq}}{S} + j X_{eq} \quad (4-3)$$

$$R_{eq} = r_e' \left[\frac{r_i' (r_i' + r_e') + (S x_i')^2}{(r_i' + r_e')^2 + (S x_i')^2} \right] \quad (4-4)$$

$$X_{eq} = x_e' + \left[\frac{r_e'^2 x_i'}{(r_i' + r_e')^2 + (S x_i')^2} \right] \quad (4-5)$$

Nota.- Las resistencias y reactancias de cada jaula son variables con la frecuencia de la corriente rotórica y su cómputo se realiza en forma idéntica al caso de 1 jaula, donde se usan las ec. (4-1) y (4-2).

Para poder observar en una forma más completa las repercusiones del E.S. en la performance de los motores de inducción de jaula, es necesario contar con los valores de los parámetros del motor en la forma más exacta posible. Por tal motivo en la sección 4.3 dedicaremos nuestra atención al cálculo de dichos parámetros en función de algunos datos disponibles y

dimensiones del motor, dado a que generalmente no se disponen de los parámetros del motor y así de esta manera no dejar de analizar el E.S. en la performance del motor por falta del conocimiento de dichos parámetros.

4.3 Determinación de los Parámetros del Motor. - Hay que tener muy presente que la determinación de los parámetros de un motor es una tarea que requiere un adecuado método y una precisión muy exigente, por lo que cuando se dice de que un parámetro tiene cierto valor, se refiere a que dicho valor es sólo para una condición determinada de deslizamiento del motor y circunstancia dada.

Por lo tanto, existe un número amplio de fenómenos que intervienen en el proceso de la puesta en marcha de un motor y que uno de ellos, al que lo estamos trantando, es el Efecto Skin. Luego será necesario hacer ciertas aclaraciones con respecto a cada parámetro en los circuitos equivalentes del motor.

4.3.1. Limitaciones del Circuito Equivalente. - La principal limitación que se presenta en el circuito equivalente es que los parámetros no permanecen constantes durante el periodo de arranque ya que ellos van variando por diferentes motivos, tales como la temperatura en diferentes partes de la máquina y otros fenómenos más.

A continuación haremos algunos comentarios acerca de cada parámetro del circuito equivalente del motor, teniendo como referencia a la fig. 4.1, aplicable a toda

la variedad de ranuras y en concepto para todo tipo de rotor.

-Para r_1 y r_2' , la saturación de los dientes altera el coeficiente de corrientes parásitas y consecuentemente la resistencia efectiva. La temperatura está sobre entendida de que hace variar a todos los parámetros.

-Para r_m , las pérdidas en el núcleo no son funciones simples del flujo del entrehierro y solamente en una condición establecida de fuerza electromotriz pueden las propias pérdidas reflejar a un valor de r_m .

-Para X_m , que fundamentalmente depende de la saturación del circuito magnético y varía de acuerdo al nivel de saturación del núcleo.

Se ha podido ver de que la causa principal de incertidumbre de los parámetros es la saturación magnética, entonces el flujo en el núcleo se limita ciertos valores para evitar mayores variaciones de los parámetros por causas de saturación magnética, pero en el diseño de máquinas se asume una permeabilidad infinita para luego aplicar factores de saturación.

-Los parámetros x_1 y x_2' son prácticamente constantes entre el funcionamiento en vacío y con sobrecarga del motor. A grandes deslizamientos las corrientes del estator y rotor saturan en algo la parte del hierro que es recorrido por el flujo de dispersión. Por lo tanto, a causa de la saturación los parámetros x_1 y x_2' descienden aproximadamente entre el 75% al 85% de su valor a

condiciones nominales de trabajo.

Con el ensayo de rotor bloqueado se consigue calcular la magnitud e la saturación; pero sólo es válida para un sólo punto de operación del motor. Como referencia se mostrará en la fig. 4.3 la forma como varían las reactancias por causas de la saturación

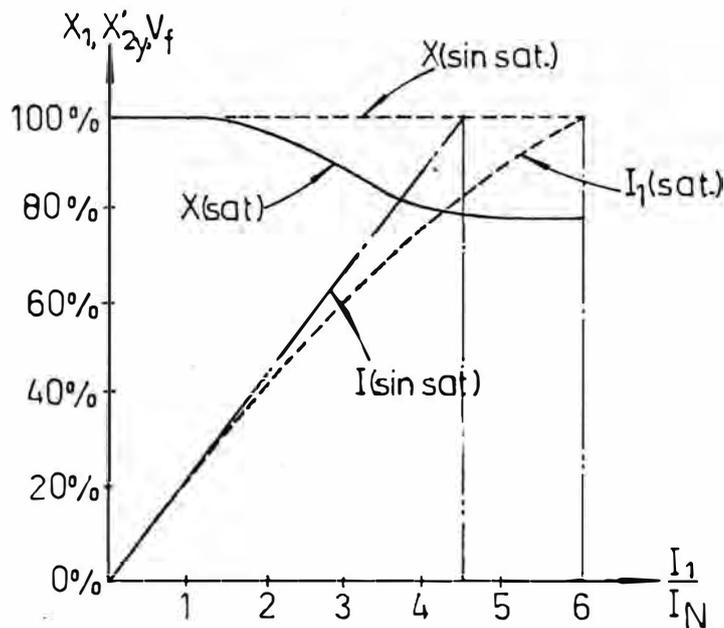


Fig. 4.3 Curva ilustrativa, que muestra la saturación de las reactancias x_1 y x'_2 .

Del ensayo a rotor bloqueado se extrae la magnitud de la saturación; pero es aplicable solamente para el arranque.

Luego

$$X^* = FS(S) \cdot X \quad (4-6)$$

$$FS(S=1) = \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta_{arr}}{\left(\frac{I_{arr}}{I_N}\right)^2 \left(\frac{V_{cc}}{V_N}\right)^2 - \cos^2 \theta_{arr}}} \quad (4-7)$$

$$X^*_{arr} = FS(S=1) \cdot X \quad (4-8)$$

4.3.2 Cálculo de Cada Parámetro. - Nuestro cálculo no será necesariamente el más recomendado, pero si nos ayudará en algo para averiguar los parámetros del motor. Tomaremos como referencia la fig. 4.4.

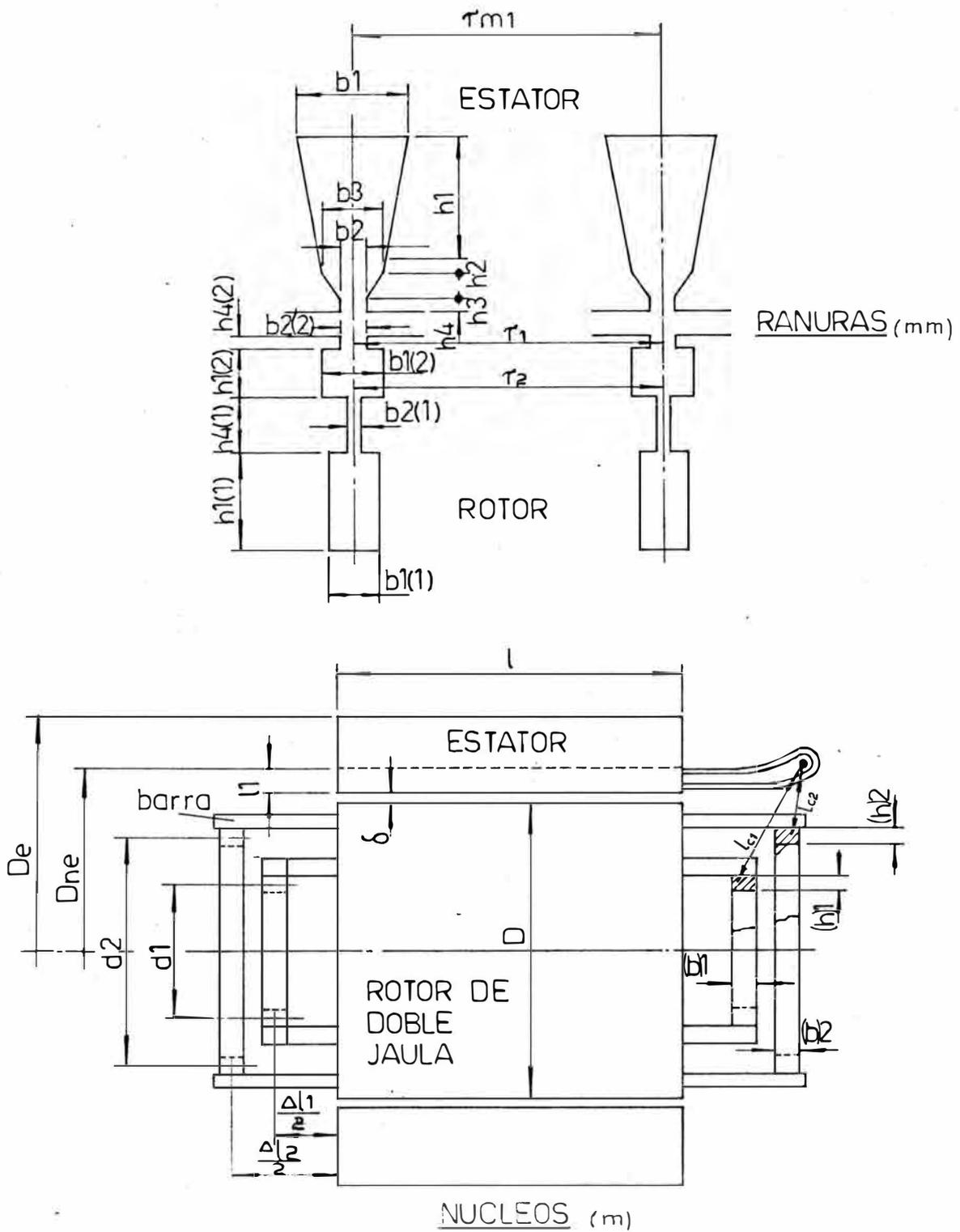


Fig. 4.4 Dimensiones Principales del motor

- Resistencia del Bobinado Estatórico. - Nuestros planteamientos se harán teniendo en cuenta de que no se conocen los valores de los parámetros del motor y que de alguna manera u otra deseamos averiguarlos a base de algunas relaciones, muchas de ellas empíricas.

$$r_f = \int \frac{l_v}{S_f} N_f \quad (4-9)$$

$$\rho_r = \rho_{20^\circ} \cdot [1 + \alpha (T-20)] \quad (4-10)$$

$$S_f \approx 0.04 \left[\frac{(b_1 + b_3) h_1 S_1}{N_f} \right] \quad (4-11)$$

$$N_f \approx \frac{p V_f}{.0837 K_{\omega r} \beta_e} \quad (4-12)$$

$$l_v \approx 2L + 12 \frac{D}{P} \quad (4-13)$$

$$K_{\omega r} = \frac{3p \operatorname{Sen} \left(\frac{\pi \tau_{b_1} p}{2S_1} \right)}{2 S_1 \operatorname{Sen} \left(\frac{\pi p}{2 S_1} \right)} \quad (4-14)$$

En la tabla 4.1 observamos algunas constantes de los materiales más usados en la fabricación de barras de rotores

Tabla 4.1 Resistividad en $\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$ y coeficiente térmico de resistividad en $^{\circ}\text{C}^{-1}$

Material	$\rho_{20^{\circ}}$	$\rho_{75^{\circ}}$	$\alpha_{20^{\circ}}$
Cobre	.01776	.0217	.0038
Aluminio Fundido	.0303	.0370	.0040
Bronce	.0390	.0453	.0029
Latón	.0640	.0744	.0030

Nota: De ser posible medir directamente este parámetro, ya no sería necesario realizar todo este procedimiento.

- Reactancia del Bobinado Estatórico. - Esta reactancia de dispersión es bastante compleja, pero plantearemos las relaciones más importantes para su cálculo.

$$X_1 \approx 947.5 \times 10^{-7} f_w L_n \frac{N_f^2}{S_1} (\lambda_{r1} + \lambda_{z1} + \lambda_{cb1}) + X_{d1} \quad (4-15)$$

$$\lambda_{r1} = \left(\frac{h_1}{3 \frac{b_1 + b_3}{2}} \right) \cdot Kc + \left(\frac{h_2}{b_3} + \frac{h_3}{\frac{b_2 + b_3}{2}} + \frac{h_4}{b_2} \right) \cdot Ka \quad (4-16)$$

$$\lambda_{z1} = \frac{\tau_2 \cdot (b_2 + (b_2)_1) + 2\delta}{12\delta} \cdot Ka \quad (4-17)$$

$$\lambda_{cb1} = \frac{S_1}{3p} \left(.47 \frac{6D}{pL} - .30 \frac{\tau_{b1} \tau_{m1}}{L} \right) \cdot Ka \quad (4-18)$$

$$X_{d1} = X_m \cdot [(9.5 \text{ Sen}(15.7\beta_1 - 14.5)) + 11.5] \cdot 10^{-4} \quad (4-19)$$

$$K_c = 0.6 \beta_1 + 0.4 \quad (4-20)$$

$$K_a = 0.7 \beta_1 + 0.3 \quad (4-21)$$

Donde

$$\beta_1 = \frac{p \tau_{b1}}{S_1} \quad (4-22)$$

$$\tau_2 = \frac{\pi D}{S_2} \quad (4-23)$$

$$\tau_{m1} = \frac{\pi}{S_1} \left(D + \frac{h_1}{1000} \right) \quad (4-24)$$

- Impedancia de Magnetización.- Debido a que se le puede representar en serie o paralelo tal como en la fig. 4.5 mostraremos las relaciones entre ellos:

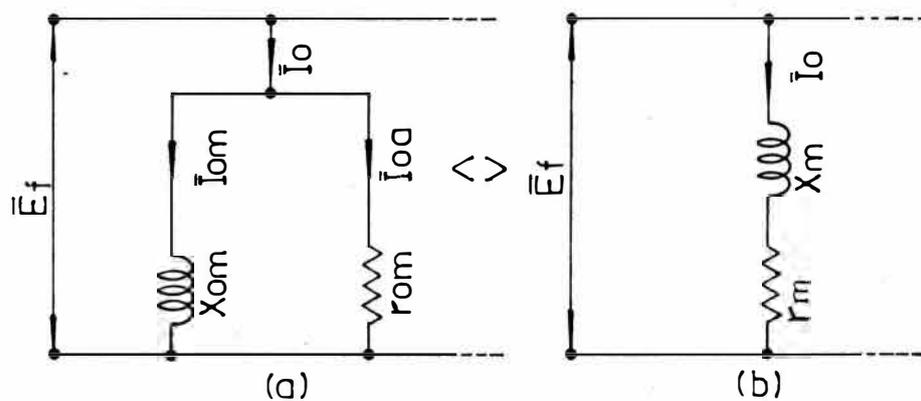


Fig. 4.5 Formas de representación de la impedancia de magnetización.

$$r_{om} = \frac{E_f}{I_{oa}} \quad (4-25)$$

$$X_{om} = \frac{E_f}{I_{om}} \quad (4-26)$$

$$I_{oa} = \frac{(\Delta P_{ne} + \Delta P_{de}) + \Delta P_{mec}}{3 E_f} \quad (4-27)$$

$$I_{om} = \frac{\sum H.l \cdot p/2}{1.17 N_{ft} K_{wt}} \quad (4-28)$$

$$\Delta P_{ne} = \left[\frac{\pi(D_e^2 - D_{ne}^2)}{4} L_n \right] \gamma_{fe} \cdot (W/kg)_{fe} \quad (4-29)$$

Para Laminaciones de 0.5 mm:

$$(W/kg)_{fe} = 10.7708 \beta_{ne}^{1.7113} \quad (4-30)$$

Para Laminaciones de 0.4 mm:

$$(W/kg)_{fe} = 7.6347 \beta_{ne}^{1.7189} \quad (4-31)$$

$$\Delta P_{de} = \left(\frac{\pi D - S_1 b_{m1}}{p} L_n \right) \cdot (W/Kg)_{fe} \cdot \gamma_{fe} \quad (4-32)$$

$$\sum H.l = \sum \left(\frac{\beta}{u} \cdot l_l \right) \quad (4-33)$$

Luego

$$r_m = \frac{r_{om} \cdot X_{om}^2}{r_{om}^2 \cdot X_{om}^2} \quad (4-34)$$

$$X_m = \frac{X_{om} \cdot r_{om}^2}{r_{om}^2 + X_{om}^2} \quad (4-35)$$

Una alternativa para un cálculo aproximado, sería de la siguiente manera:

$$X_m = 2.2 \times 10^{-5} \frac{f_n L D (N_{ft} \cdot K_{wt})^2}{K_{ju} \cdot \delta \cdot p^2} \quad (4-36)$$

Donde

$$K_{\mu} = \frac{\tau_{s1} \cdot \tau_{s2}}{(\tau_{s1} - k b_2)(\tau_{s2} - k (b_2)_1)} \quad (4-37)$$

$$k = .176 + .268 \ln(b_2 / \delta) \quad (4-38)$$

Tambièn

$$r_m : < 2\% , 10\% > X_m \quad (4-39)$$

- Resistencia del Rotor. - El desarrollo más completo de la ec. (4-1) estaría dado por la siguiente expresión:

$$r_2' = \left[\frac{f_r}{A_b} (\Delta l + L \left(\frac{R_{ac}}{R_{dc}} \right)) + \left(\frac{f_r}{A_o} - \frac{2\pi d}{S_2} \right) \cdot \frac{1}{4 \text{ Sen}^2(\pi p / 2S_2)} \right] K_r \quad (4-40)$$

$$\Delta l = l_b - L \quad (4-41)$$

$$K_r = 12 \left(\frac{N_{f1}^2 K_{w1}}{S_2} \right) \quad (4-42)$$

- Reactancia del Bobinado Rotórico. - Esta reactancia de dispersión es también muy compleja; por lo que mostraremos sólo algunas relaciones, que serían las más importantes para su cálculo.

$$X_2' \approx \left[78.96 \times 10^7 f_n L_n (\lambda_t + \lambda_d + \Delta \lambda_r + \lambda_m \left(\frac{X_{ac}}{X_{dc}} \right)) \right] K_r \quad (4-43)$$

$$\lambda_t = \frac{S_2 \tau}{3 p L_n} \text{Gend} \quad (4-44)$$

$$\lambda_d = \frac{S_2 \tau}{p \pi^2 K_{su} \delta} \text{Kdif} \quad (4-45)$$

$$\text{Gend} = [.8861 \left(-\frac{\tau}{l_c}\right)^{.1745}] [.114 \left(-\frac{l_c}{\epsilon} - 2\right)^{.4402}] \quad (4-46)$$

$$\text{K dif} = [.0001 e^{-.2203 \left(\frac{S_2}{p} - 30\right)}] + .0012 \quad (4-47)$$

$$\lambda_r = \Delta \lambda_r + \Delta \lambda_{ht} \quad (4-48)$$

$$\tau = \frac{\pi D}{p} \quad (4-49)$$

$$\epsilon = .223 [(b) + (h)] \quad (4-50)$$

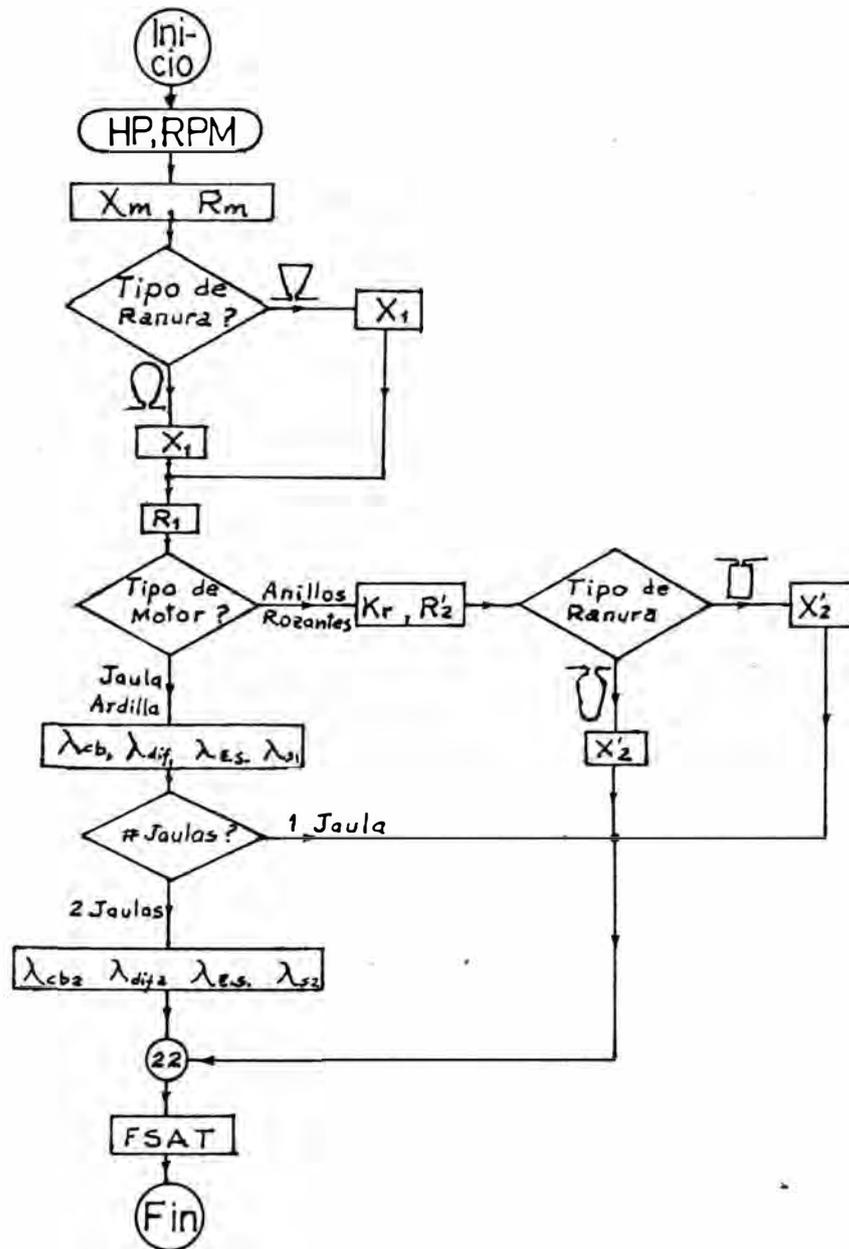
5 PERFORMANCE DE LOS MOTORES DE LOS MOTORES DE INDUCCION CONSIDERANDO EL EFECTO SKIN

Para culminar nuestro enfoque del Efecto Skin en los motores de inducción de Jaula de Ardilla trifásicos, ha sido necesario ver cómo afectan las variaciones de la impedancia rotórica en la performance de los motores. Para ello se han elaborado 3 programas en una calculadora, de los cuales el primero se encarga de asignar valores a todas las variables que se necesitarán para los 2 programas posteriores, el segundo calcula los parámetros del motor a usarse en el circuito equivalente y el tercer programa computa las curvas principales de la performance del motor, punto por punto considerando el E.S.

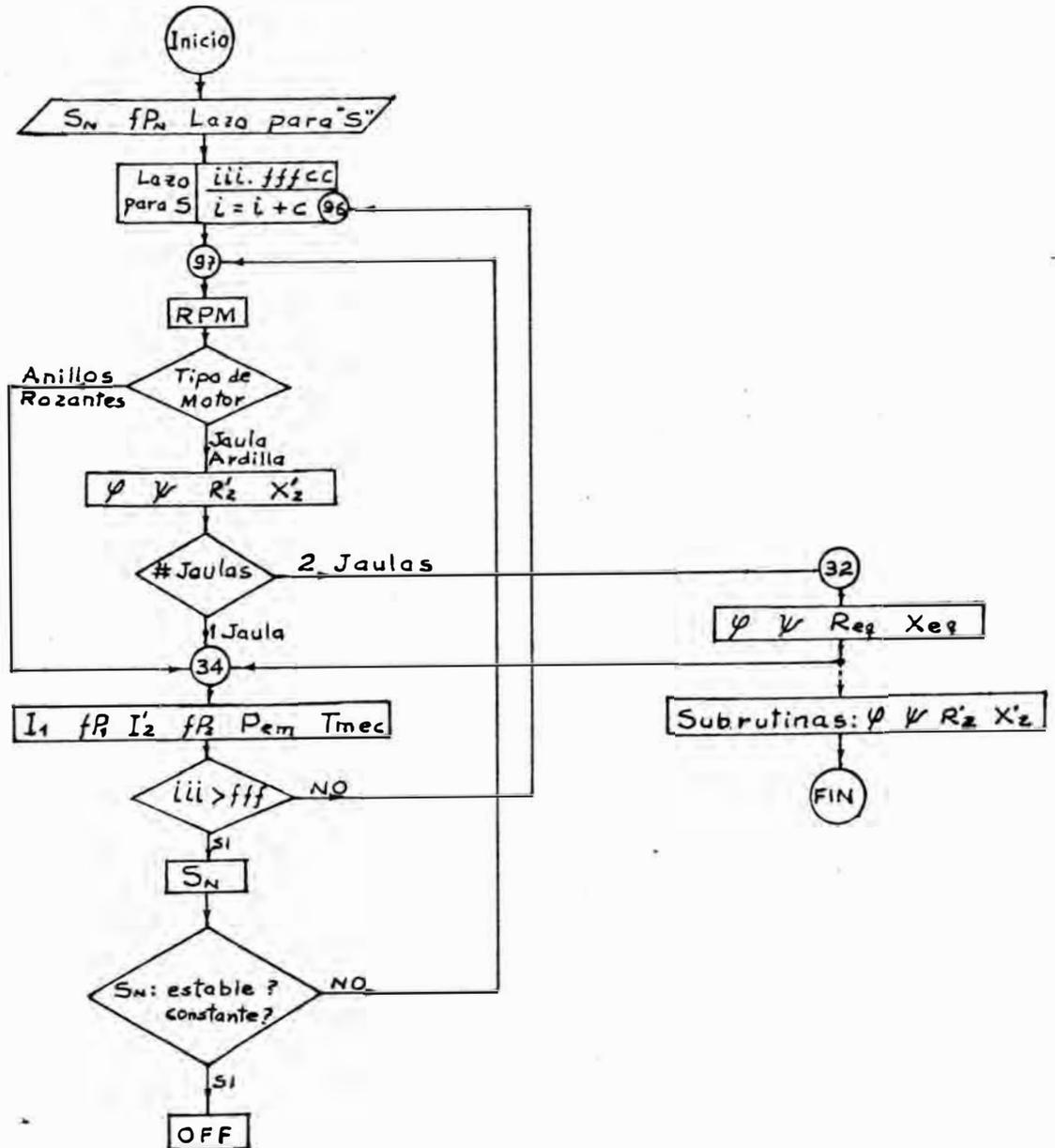
Se han escrito los programas en una calculadora HP-41CV, considerando que la capacidad de memoria de la misma ha sido suficiente para proporcionarnos 100 memorias para usarse como datos de entrada/salida y aproximadamente 1500 líneas de programación, incluyendo 18 líneas para funciones hiperbólicas.

Se hace presente de que los programas pueden ser mejorados u optimizados, pero siempre tendiendo al objetivo principal. Por tal motivo incluiremos diagramas de flujo y listado de la codificación de los programas de cálculo de parámetros y de performance.

5.1 Diagrama de Flujo del Programa de "Cálculo de Parámetros"



5.2 Diagrama de Flujo del Programa "Cómputo de la Performance"



Nota.- Este programa esta diseñado sólo para rotores con barra rectangulares.

5.3 Aplicación de los Programas a un motor de Barras Profundas

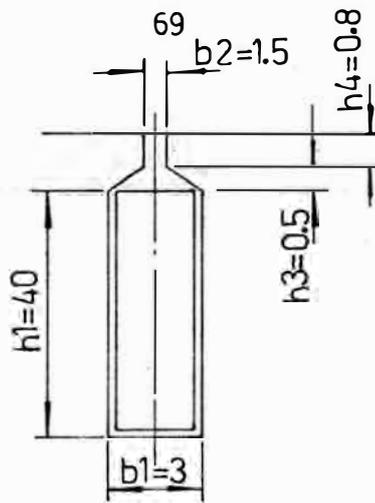
Con el presente ejemplo mostraremos como tiene influencia el E.S. en la performance de los motores. Para tal caso se ha escogido un motor de Barras Profundas, que es donde se pronuncia más el E.S., especialmente si el motor es de gran potencia.

Tomaremos como referencia al ejemplo 23.3 de la referencia [9], en donde ya se tienen calculados algunos parámetros, por lo tanto centraremos nuestra atención a la determinación de la performance, tanto considerando y sin considerar al E.S., para observar así la gran diferencia que existe entre los dos casos.

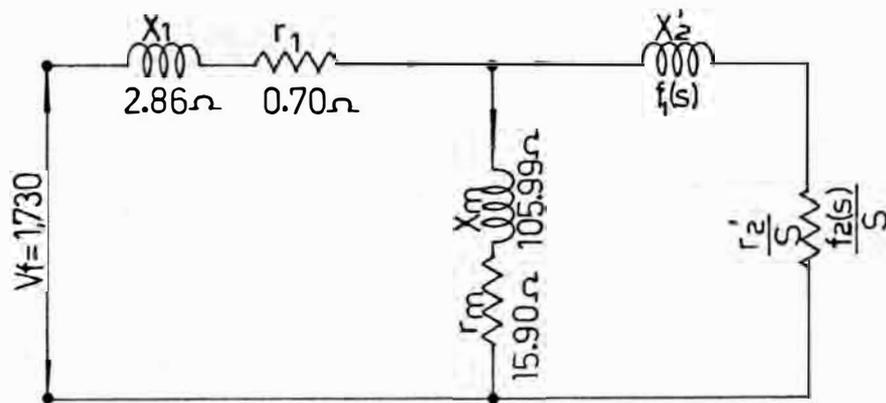
Ejemplo 5.1 Tomando como base al ejemplo 23.3 de la referencia [9], tenemos los sgts. datos del motor:

Potencia	- 335 HP
Tensión	= 3,000 V.
Conexión	= Estrella
Fases	= 3
Corriente	= 60 A.
Fact. de Pot.	= 0.89
Frecuencia	= 50 HZ
de polos	= 6
r_1	= 0.70 Ω
X_1	= 2.86 Ω
λ_{EDT}	= 2.84

Las dimensiones principales de la ranura rotórica son tal como se muestra en la sgte. Fig.



Luego el circuito equivalente a usarse para el cómputo de su performance estará mostrado en la sgte. figura:



El cómputo numérico de la performance de dicho motor, utilizando los programas de performance, se muestran en las Figs. 5.1 y 5.2 y allí se muestran el torque y la corriente estática del motor en función del deslizamiento del motor.

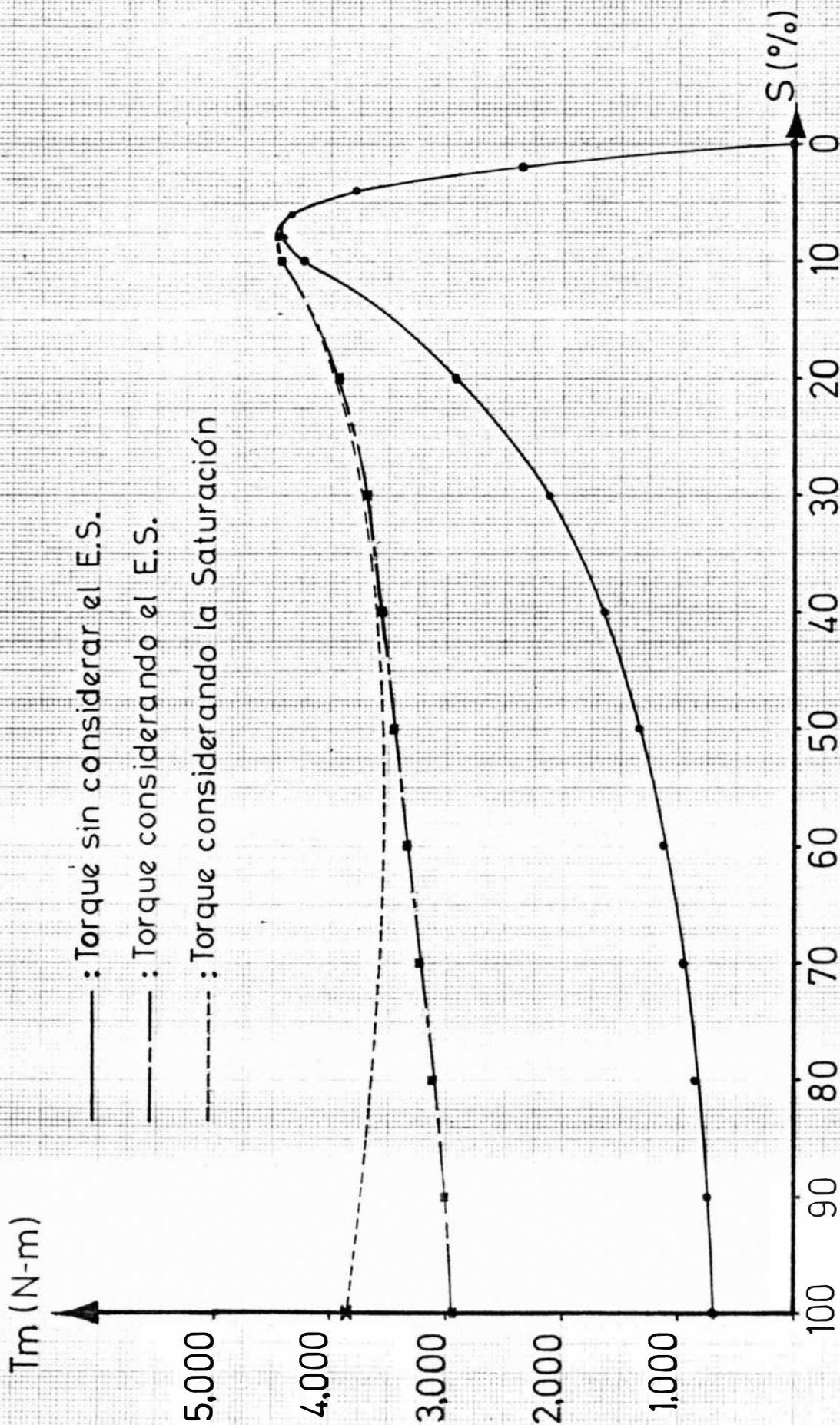


Fig.5.1.- Gráfico correspondiente al Ejm. 5.1; "TORQUES"

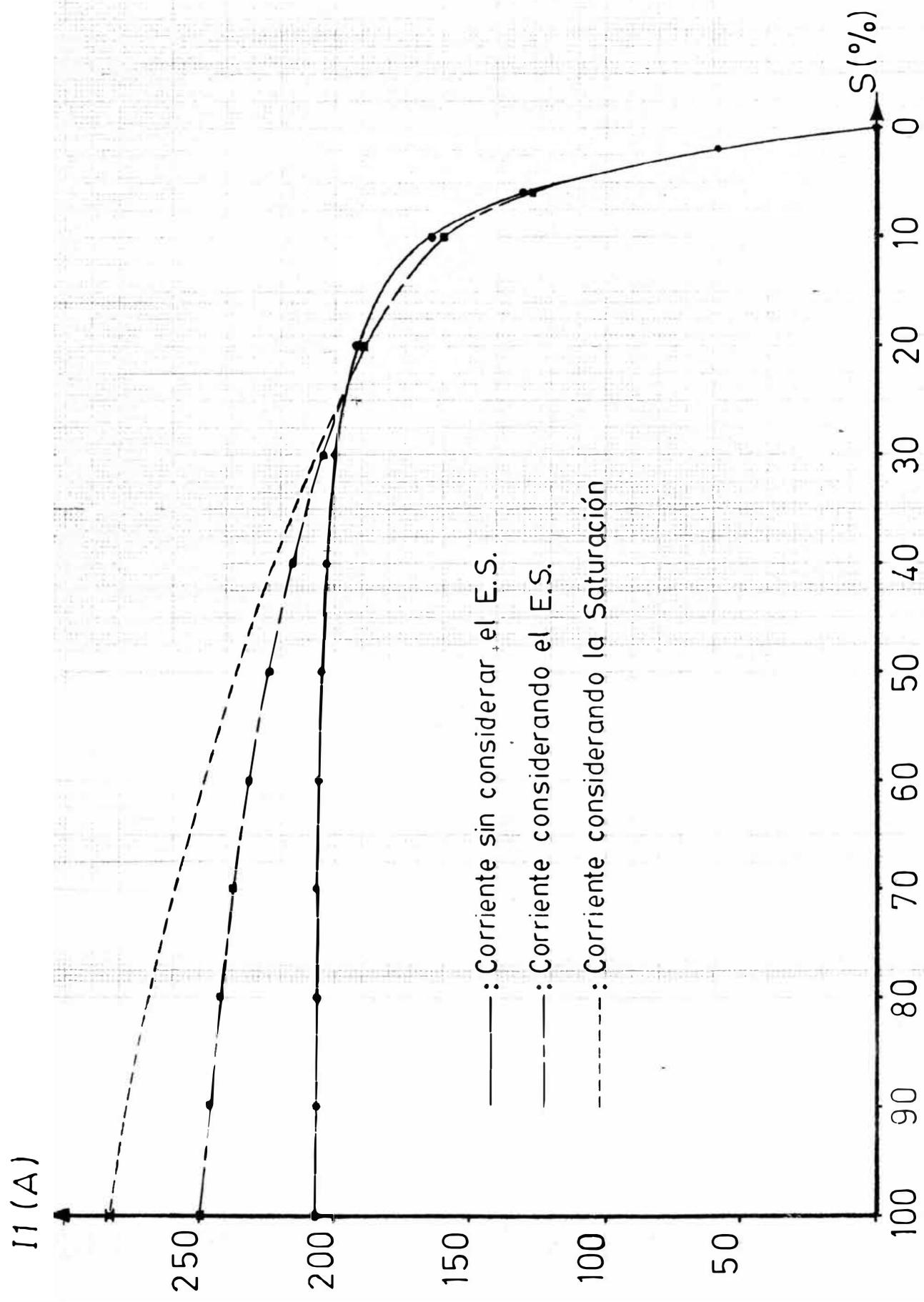


Fig. 5.2.- Gráfico correspondiente al Ejm. 5.1: "CORRIENTES"

6. COMPARACIONES DE LA PERFORMANCE DE LOS MOTORES DE INDUCCION

Variando la intensidad del E.S. en el diseño de los motores de inducción de Jaula de Ardilla, se podrían obtener curvas "Torque-Deslizamiento" parecidas a las curvas de los diseños normalizados A, B, C, D y F de las normas NEMA; aunque con ciertas limitaciones en lo que respecta a potencias de los motores. Una vez diseñado el rotor, sólo corresponderá a una de las curvas normalizadas y esto se consigue debido a que con el E.S. se regula la impedancia rotórica del motor y por consiguiente su torque.

El gran beneficio que se consigue con el E.S., es que cuando el motor arranca, la reactancia del rotor disminuye, que es conveniente, y la resistencia rotórica aumenta, que es mucho mejor, y en la medida de que el motor acelera esta impedancia se va normalizando; es decir que la resistencia rotórica disminuye hasta adquirir su valor nominal, de tal manera que no incrementará las pérdidas en el cobre en su funcionamiento bajo condiciones de trabajo y así no afectará a la eficiencia.

El E.S. es más pronunciado en los motores de barras profundas y a su vez es proporcional a la potencia del motor, en donde se puede alcanzar torques de arranque parecidos a los que se consiguen con los motores de rotor bobinado.

Para poder hacer comparaciones referente a las formas de ranuras rotóricas, al E.S. lo podríamos asociar con el flujo de dispersión de las ranuras del rotor y de esta manera poderlo encuadrar dentro de los diseños normalizados A, B, C, D y F. Por tal motivo ayudándonos de la fig. 6.1 y su tabla correspondiente 6.1, observaremos como varían las características del motor en la medida de que se controle el flujo de dispersión y el flujo útil.

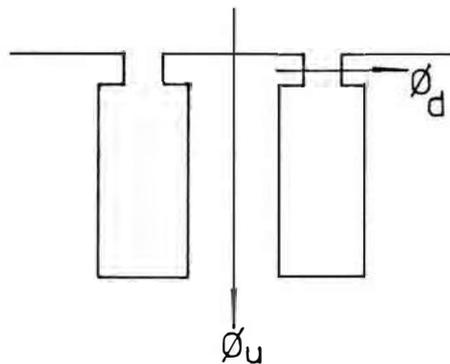


Fig. 6.1 Comparación de los motores de inducción en función del flujo útil (\varnothing_u) y del flujo de dispersión (\varnothing_d)

También mostraremos de la manera más simplificada una tabla de comparaciones de los diseños normalizados de los motores, teniendo en cuenta los flujos de campo magnético.

Tabla 6.1 Comparación simplificada de los motores de inducción.

Diseño NEMA	ϕ_d	ϕ_r	Barras Rotor	Tarr	Iarr
A	Bajo	Alto	Cobre	Alto	Alta
B	Alto	Medio	Cobre	Medio	Media
C	*Bajo **Alto	Medio	Bronce, L. Cobre	Alto	Baja
D	Bajo	Alto	Bronce, L., Al.	Alto	Media
Anillos	Medio	Alto	Cobre (Alam.)	Varia	Varia

Donde:

- * = Jaula de arranque del rotor
- ** = Jaula de trabajo del rotor
- L. = Latón
- Al. = Aluminio

También a manera de analogía con los motores de rotor bobinado, en los cuales con la ayuda de una resistencia externa se pueden variar las características del motor; con el control de la intensidad del E.S. se podría buscar la curva deseada que tendrá un motor de jaula de ardilla, aunque con la característica de que una vez diseñada la jaula, el motor tendrá una sola performance a diferencia del motor de rotor bobinado, con el que se pueden obtener muchísimas curvas de performance cuando se insertan impedancias externas al circuito rotórico.

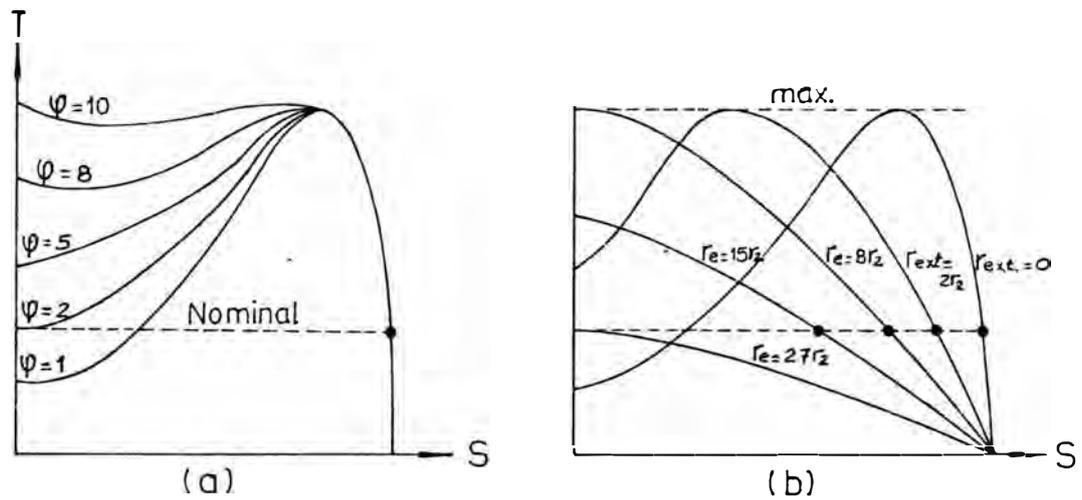


Fig. 6.2 Curvas para diferentes diseños usando el E.S. en un motor de jaula (a) y curvas de un motor de rotor bobinado con resistencias externas r_e (b)

En la Fig. 6.2 se muestran curvas solo referenciales, en las cuales la Fig. 6.2a corresponde a diferentes diseños de motor de jaula con suficiente tamaño como para conseguir aumentos de resistencia rotòrica del orden de 10 veces su valor nominal y en la Fig. 6.1b se muestran curvas para un motor ya diseñado en el cual se aplican resistencias externas hasta el orden de 27 veces el valor nominal de la resistencia rotòrica.

CONCLUSIONES

El E.S. que es perjudicial en muchas máquinas eléctricas, ya que son un tipo de pérdidas; en el caso de los motores de jaula de ardilla resulta ser beneficioso y lo que es más interesante aún es que durante el periodo de arranque se regula solo y hasta llega a desaparecer su intensidad en las condiciones de trabajo del motor.

El E.S. resulta ser proporcional a la altura de la barra rotórica, frecuencia de la corriente, conductancia de la barra y además se puede intensificar su magnitud con una elección adecuada de la forma de la barra.

Es necesario tener una idea de la magnitud del E.S. que se consigue variando la forma de la barra y para ello nos ayudaremos de la Fig. A, en donde se muestran cuatro formas de barra diferentes en su forma, pero con la característica de que todas tienen una altura total de 1.4" (35.56 mm). El cómputo de la magnitud del E.S. referente a la relación R_{ac}/R_{dc} se ha hecho considerando de que las cuatro barras son de cobre, que está a 75 C y es recorrido por una corriente eléctrica de 60 HZ. Observeremos por ta motivo a la Fig. A

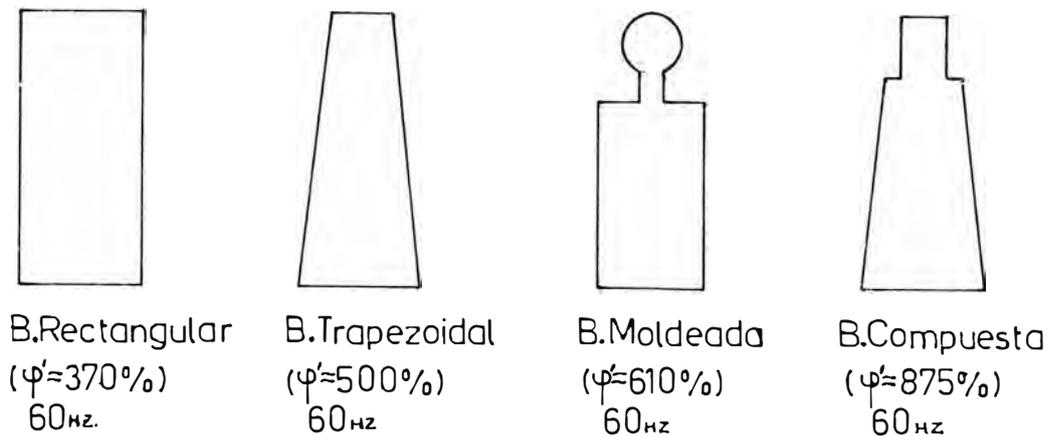


Fig. A. Comparación de la intensidad del E.S. ($\psi' = R_{ac}/R_{dc}$) para barras de la misma altura, pero diferente forma.

De la Fig. A. se desprende la conclusión de que las barras compuestas son las más ideales para conseguir un E.S. intenso. Para mayores detalles se puede observar la Fig. A1 del Apéndice A, en donde se muestra como va variando la intensidad del E.S. a medida en que va variando la frecuencia de la corriente.

También se han comparado barras de poca altura, vale decir correspondiente a motores de poca potencia en las que el E.S. es mínimo y se obtuvieron los siguientes resultados: la relación R_{ac}/R_{dc} es del 105% para barras rectangulares de cobre a 20°C , 60 HZ y una altura de 7.5 mm y también la relación R_{ac}/R_{dc} es del 105% para conductores cilíndricos de 13.1 mm de radio (800 MCM) bajo las mismas condiciones. Por lo tanto se concluye que para motores de rotor bobinado con alambres circulares el E.S. es prácticamente nulo, dado a que en la fabricación de estos motores no se llegan a usar conductores de sección circular de dichas dimensiones; aunque cuando se

usan conductores de sección rectangular se sentiría el E.S. sólo para los casos de motores de gran potencia.

El E.S. es sensible a la conductancia como se ha dicho anteriormente; por tal razón para un mismo material de las barras de los rotores se cumplirá: que mientras menor sea la temperatura de la barra, entonces mayor será la intensidad del E.S.. Del mismo modo se cumplirá que para barras de un material cuya conductancia sea relativamente alta, entonces el E.S. también será alto. Luego se desprende la conclusión de que habrá mayor E.S. en las barras de cobre, luego en las barras de aluminio, bronce y latón; que son los materiales más usados en la construcción de las barras para la jaula de ardilla de los rotores.

Para observar con mayor detalle como varia la intensidad del E.S. en las barras observemos como varia la resistencia y reactancia de dichas barras ante la variación de la altura de la barra y la frecuencia de la corriente en las Figs. A2, A3 y A4 del Apéndice A.

Es necesario notar de que la resistencia rotórica del motor varia proporcionalmente con el E.S. y que la reactancia rotórica varia inversamente, de allí que de la combinación de estos parámetros resulta la característica propia del motor.

Como resultado de un cálculo estimado en motores de mediana potencia, se obtuvo de que un motor de 845 HP cuyas barras tenían 45 mm de altura total pero de

geometría especial, en T, la relación R_{ac}/R_{dc} fue aproximadamente del 470 % y para un motor de barras profundas cuya altura fue de 40 mm la relación R_{ac}/R_{dc} fue aproximadamente del 410 %, correspondiéndole un torque de arranque del 418 % con respecto al torque de arranque sin considerar el E.S., lo cual muestra de que para motores de gran potencia el E.S. se intensifica muchísimo y entonces se cometería también un altísimo error si no se considera al E.S. en su análisis.

Luego de lo anteriormente mencionado se podría extraer la conclusión de que el E.S. en los motores de inducción de jaula de ardilla es directamente proporcional a la potencia del motor y para el caso de motores cuyas barras tengan una altura mayor de 7.5 mm sería casi necesario considerar el E.S. en su análisis de su performance. En la fig. A.5 del apéndice se muestran factores de conexión para un caso específico de un motor de barras profundas, en donde se observa en forma cuantitativa al E.S. durante el arranque; en lo que corresponde al torque y la corriente de arranque en función de la altura a elegir para la construcción de las barras de rotor.

Por todo lo anteriormente mencionado se muestra que los errores de cálculo al despreciar la presencia del E.S. en los motores es grande, pero hay que tener en cuenta de que el E.S. no es el único que se presenta durante el proceso de arranque de los motores; por tal razón es muy necesario establecer métodos de análisis de la performance en donde se considere la presencia de

otros efectos importantes tales como la saturación, temperatura, armónicos electromagnéticos y otros más.

Por tal motivo sería bastante útil que por lo menos se establezcan relaciones de los efectos de saturación y temperatura en función del deslizamiento y tiempo de arranque del motor y de esta manera acercarnos un poco más al comportamiento real del motor durante todo el proceso del arranque.

Es necesario hacer presente que el E.S. es demasiado complejo en la forma como se comporta en diferentes partes de las máquinas y el presente estudio se ha realizado tratando siempre de simplificar su análisis y aplicación a los casos prácticos. Por lo tanto el análisis del E.S. que se ha realizado en el presente trabajo se ha hecho siguiendo la metodología de la profundidad de penetración, haciendo uso de funciones hiperbólicas y relaciones geométricas, la que se apoya en computo del E.S. de barras rectangulares de resistividad constante. Pero ésta no es la única manera de enfoque; por lo tanto a parte de métodos tales como en los que se usan las funciones Bessel y Hankel, también se puede analizar haciendo uso de la analogía que se presenta con las líneas de transmisión de potencia y para tal caso se zonifica a la barra haciendo divisiones horizontales en ella; en donde el lado de envío de la energía eléctrica es la parte superior de la barra y el lado de recepción de la energía eléctrica sería la parte inferior de la

barra. Desde luego que mientras más divisiones se hagan en la barra entonces mayor será la exactitud del cálculo, aunque a la vez más complejo; pero con divisiones en las que las alturas parciales de las zonas sean de unos 5 mm como mínimo, ya se estaría haciendo un buen cálculo.

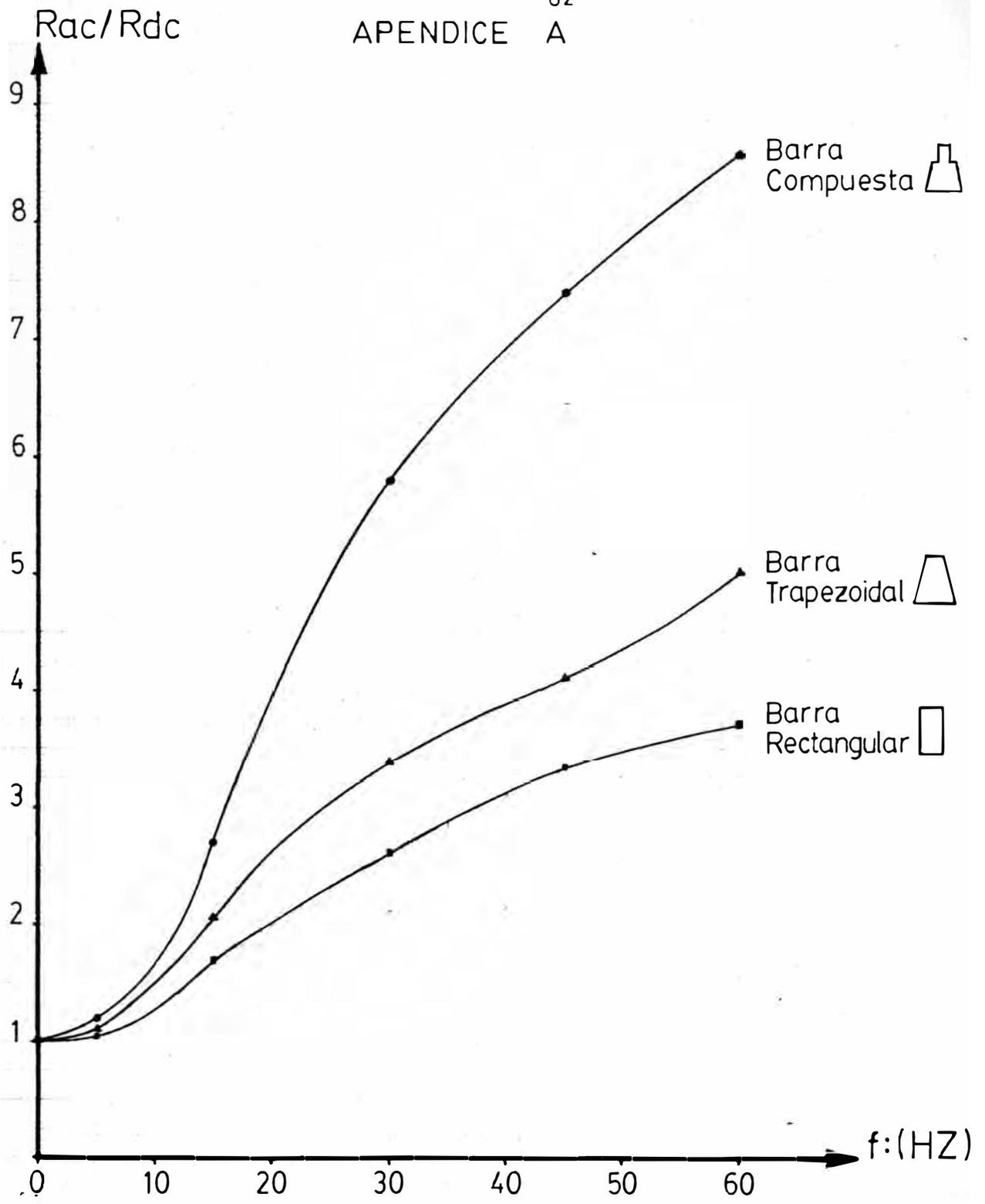


Fig. A1. Relaciones R_{ac}/R_{dc} por Efecto Skin en barras de Cobre, a 75°C y 1.4" de altura total.

BIBLIOGRAFIA

- [1] D. Fink & W. Beaty: "Standard Handbook for Electrical Engineers", Eleventh edition, Mac Graw Hill
- [2] M. Liwshitz - Garik: "Computation of Skin Effect in Bar of Squirrel-Cage Rotors", AIEE Transaction, Vol. 73, part IIIA, Apr. 1954
- [3] M. Liwshitz - Garik: "Computation of Skin Effect in Bar Squirrel-Cage Rotor,", AIEE Transaction, p 768-71, Aug. 1955
- [4] S. Swann & J. Salmon : "Effective resistance and reactance of rectangular conductor placed in semi-closed slot" Proc. IEE, 110, 1956 (1963)
- [5] P. Alger & Gray: "Double and Triple Squirrel Cages for Polyphase Induction Motors", AIEE, 1953, Vol. 72, p. 637-45
- [6] D. Babb & J. Williams: "Circuit análisis method for determination of A.C. impedance of machine conductors" AIEE 1951 Vol. 70, pt. I, p. 661-66
- [7] B. Chalmers & R. Dodgson: "Saturated leakage reactance of Cage induction motors", Proc. IEE, Vol. 116, p. 1395, 1969
- [8] R. Smith & J. Nichols: "Analysis of Deep Bars Induction Motor and Compresor lead during start - up", IEEE Transaction, Vol PAS-97, N-5 p.1696, 1978
- [9] M. Kostenko & L. Piotrovsky: "Electrical Machines", Vol. 2 English Translation, Mir Publishers 1977
- [10] M. Say "Alternating Current Machines", Reprinted by Halsted Press of John Wiley & Sons Inc. 1978
- [11] M. Liwshitz - Garik : "Máquinas de Corriente Alterna", Séptima impresión CECSA, 1976
- [12] P. Hammond "Electromagnetismo Aplicado", Editorial Labor S.A., 1976
- [13] W. Stevenson Jr. "Análisis de Sistemas Eléctricos de Potencia", Segunda Edición, Mac Graw Hill