

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA**  
**FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL**



**DEFLEXIÓN Y AGRIETAMIENTO EN VIGAS Y LOSAS**  
**UNIDIRECCIONALES DE CONCRETO ARMADO**

**TESIS**

**Para optar el Título Profesional de:**

**INGENIERO CIVIL**

**DAVID ELIAS ESPINOZA SANDOVAL**

**LIMA – PERU**

**2009**

**PARA**

Laura, mi esposa y compañera de toda la vida,  
por su apoyo y comprensión constante

**PARA**

Mis hijas Débora, Raquel y Séfora  
por su cariño y por colmar de felicidad  
cada momento de mi vida

## **AGRADECIMIENTO**

Agradezco a Jesucristo, mi Señor y Salvador, sin quién nada soy. Debo también un agradecimiento muy especial a mis queridos padres, Elías y Vilma, por su amor y aliento constante y, por el sacrificio que hicieron por darme una profesión. Agradezco, también, a mi asesor Ing. Jorge Gallardo.

Índice	iv	
Resumen	viii	
Lista de símbolos	x	
Lista de siglas	xv	
Lista de figuras	xvi	
Lista de tablas	xix	
Introducción	xx	
<b>Capítulo 1: Aspectos generales sobre la deflexión</b>	<b>1</b>	
1.1	Introducción	1
1.2	El problema de la deflexión	1
1.2.1	Problemas sensoriales	2
1.2.2	Problemas de serviciabilidad	2
1.2.3	Problemas en elementos no estructurales	2
1.2.4	Problemas en elementos estructurales	2
1.3	Factores que afectan la deflexión	3
1.3.1	Módulo de elasticidad del concreto	3
1.3.2	Módulo de rotura del concreto	6
1.3.3	Contracción	7
1.3.4	Flujo plástico	11
1.4	Comportamiento de vigas sujetas a cargas	16
1.4.1	Comportamiento bajo cargas de servicio de corto plazo	16
1.4.2	Comportamiento bajo cargas de largo plazo	18
1.4.2.1	Efecto de la contracción	19
1.4.2.2	Efecto del flujo plástico	20
<b>Capítulo 2 : Cálculo de deflexiones</b>	<b>22</b>	
2.1	Introducción	22

2.2	Cálculo de deflexiones de corto plazo o inmediatas	22
2.2.1	Cálculo de deflexiones por la teoría elástica	22
2.2.2	Rigidez efectiva por flexión	25
2.2.3	Método del reglamento ACI 318-05	27
2.2.4	Método del reglamento NTE E.060.89	31
2.2.5	Método de Yu y Winter	32
2.2.5.1	Método A	32
2.2.5.2	Método B	33
2.2.6	Método de Grossman	34
2.2.7	Método de Fikry y Thomas	35
2.2.8	Método de Bischoff	39
2.3	Cálculo de deflexiones a largo plazo o sostenidas	39
2.3.1	Método del reglamento ACI 318-05	39
2.3.2	Método del reglamento NTE E.060.89	43
2.3.3	Método de Yu y Winter	44
2.3.3.1	Método C	44
2.3.3.2	Método D	44
2.3.4	Método modificado del comité ACI 435	46
2.3.5	Cálculo de la deflexión por flujo plástico	46
2.3.6	Cálculo de la deflexión por contracción	47
<b>Capítulo 3: Control de la deflexión según reglamentos</b>		<b>48</b>
3.1	Introducción	48
3.2	Control de la deflexión según el reglamento ACI 318-05	49
3.2.1	Control de la deflexión en vigas	49
3.2.2	Control de la deflexión en losas	50
3.3	Control de la deflexión según el reglamento NTE E.060.89	52
3.3.1	Control de la deflexión en vigas	52
3.3.2	Control de la deflexión en losas	52
3.4	Método de Scanlon y Hak	53
3.5	Recomendaciones del ACI 435 (1978)	55
3.6	Método alternativo para el control de la deflexión en losas	56
3.7	Procedimiento general para el control de deflexiones	58

3.8	Programa de computadora para el cálculo y el control de la deflexión	94
<b>Capítulo 4 : Aspectos generales sobre el agrietamiento</b>		<b>95</b>
4.1	Introducción	95
4.2	El problema del agrietamiento	95
4.3	Factores que afectan el agrietamiento	97
4.3.1	Agrietamiento debido a cambios volumétricos	97
4.3.2	Agrietamiento debido a la acción de las cargas	98
4.4	Mecanismos del agrietamiento por flexión	98
4.4.1	Mecanismo clásico de agrietamiento	98
4.4.1.1	Miembros sujetos a tracción	98
4.4.1.2	Miembros sujetos a flexión	101
4.4.2	Mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos	102
4.4.2.1	Miembros sujetos a tracción	102
4.4.2.2	Miembros sujetos a flexión	105
<b>Capítulo 5 : Cálculo del ancho máximo de grieta</b>		<b>109</b>
5.1	Introducción	109
5.2	Cálculo mediante fórmulas experimentales	110
5.2.1	Método de Kaar y Mattock	110
5.2.2	Método de Kaar y Hognestad	110
5.2.3	Método de Gergely y Lutz	111
5.2.4	Método de Chowdhury y Loo	113
5.3	Cálculo mediante fórmulas analíticas	114
5.3.1	Método de Base, Read, Beeby y Taylor	114
5.3.2	Método de Broms	116
5.3.3	Método de Beeby	117
5.3.3.1	Primer patrón de agrietamiento	117
5.3.3.2	Segundo patrón de agrietamiento	118
5.3.4	Método de Frosch	120
5.4	Esfuerzo en el acero	125

<b>Capítulo 6 : Control del agrietamiento según reglamentos</b>	<b>143</b>	
6.1	Introducción	143
6.2	Control del agrietamiento según el reglamento ACI 318-95	144
6.3	Control del agrietamiento según el reglamento ACI 318-05	151
6.4	Control del agrietamiento según el reglamento NTE E.060.89	154
6.5	Ancho máximo permisible de grieta en estructuras de concreto	154
6.6	Programa de computadora para el cálculo y el control del agrietamiento	160
	Conclusiones	161
	Recomendaciones	164
	Apéndice A	165
	Apéndice B	169
	Apéndice C	172
	Apéndice D	176
	Apéndice E	181
	Bibliografía	202
	Referencias	203

# Resumen

---

La presente tesis estudia el problema de la deflexión y el agrietamiento en vigas y losas unidireccionales de concreto armado y las soluciones de control provistas por los reglamentos ACI 318-05, ACI 318-95 y NTE E.060.89 y, automatiza el control de la deflexión y el agrietamiento mediante los programas de computadora *Deflexión 1.0* y *Grieta 1.0*, respectivamente, desarrollados usando el lenguaje de programación Java

En cuanto a la deflexión se estudia el problema que presenta y los factores que lo afectan, métodos para el cálculo de la deflexión inmediata (métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter, Grossman, Fikry y Thomas y, Bischoff), métodos para el cálculo de la deflexión a largo plazo (métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter y del comité ACI 435) y las soluciones de control de la deflexión (métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89, método de Scanlon y Hak y, las recomendaciones del comité ACI 435). Para el control de la deflexión en losas macizas unidireccionales que soportan o están unidas a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes se proponen ecuaciones que permiten determinar el menor peralte total posible de la losa de forma tal que la deflexión incremental debido a la acción de las cargas sostenidas sea igual a la deflexión permisible  $l/480$ . Las ecuaciones propuestas y los estudios de Scanlon y Hak, muestran que los peraltes mínimos provistos por el reglamento ACI 318-05 son, por lo general, bastante conservadores. Mediante un estudio comparativo de los diversos métodos para el cálculo de deflexiones, se confirma que los métodos que toman en cuenta el efecto rigidizante de la tracción en la determinación del momento de inercia efectivo, son en general más precisos en el cálculo de la deflexión inmediata (dentro del  $\pm 20\%$  de margen de error, que es considerado, en general, satisfactorio) que el método de la norma NTE E.060.89 que no considera dicho efecto y que

presenta un margen de error mucho mayor. El mismo estudio muestra y confirma que los métodos de los reglamentos del ACI 318-05 y NTE E.060.89 no son satisfactorios para la predicción de la deflexión inmediata de vigas y losas ligeramente reforzadas ( $\rho < 1\%$ ). Se muestra, también, que la ecuación de Bischoff permite predecir la deflexión inmediata en forma satisfactoria para todo el rango de valores de  $\rho$ . En el caso de la predicción de la deflexión a largo plazo, todos los métodos, incluyendo el método de la NTE E.060.89, predicen la deflexión en forma satisfactoria con un margen de error dentro del  $\pm 20\%$ .

En cuanto al agrietamiento se estudia el problema que presenta y los factores que lo afectan, los mecanismos del agrietamiento por flexión (mecanismo clásico y mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos), métodos para el cálculo del ancho máximo de grieta (métodos de Kaar y Mattock, Kaar y Hognestad, Gergely y Lutz, Chowdhury y Loo, Base et. al, Broms, Beeby y Frosch) y las soluciones de control del agrietamiento (métodos de los reglamentos ACI 318-05, ACI 318-95 y NTE E.060.89). Para el cálculo del esfuerzo en el acero en secciones rectangulares simplemente reforzadas se propone la ecuación 5.29, deducida en el Apéndice B, que presenta una desviación de sólo  $\pm 1\%$  respecto de los resultados exactos.

# Lista de símbolos

---

$A_e$	=	Área efectiva del concreto en tracción
$A$	=	Área efectiva de concreto por varilla de refuerzo
$A_s$	=	Acero de refuerzo en tracción
$A'_s$	=	Acero de refuerzo en compresión
$a$	=	Distancia entre grietas
$a_{\min}$	=	Distancia mínima entre grietas
$a_{\max}$	=	Distancia máxima entre grietas
$a_{prom}$	=	Distancia promedio entre grietas
$b$	=	Ancho de una sección rectangular o ancha del ala de una sección T
$b_e$	=	Ancho de sección equivalente definido por la Ec.2.27
$b_w$	=	Ancho del ala de una sección T
$c$	=	Profundidad del eje neutro
$c_c$	=	Recubrimiento libre de concreto
$C_t$	=	Coefficiente de flujo plástico
$C_u$	=	Coefficiente de flujo plástico último
$d$	=	Distancia medida desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide el acero en tracción
$d'$	=	Distancia medida desde la fibra extrema en compresión hasta el centroide el acero en compresión
$d_b$	=	Diámetro de las varilla de acero de refuerzo en tracción
$d^*$	=	Distancia definida en la Fig. 5.10
$d_c$	=	Distancia definida en la Fig. 5.10
$d_s$	=	Distancia definida en la Fig. 5.10
$E_{ct}$	=	Módulo de elasticidad reducido
$E$	=	Módulo de elasticidad
$E_s$	=	Módulo de elasticidad del acero
$E_c$	=	Módulo de elasticidad del concreto
$f_s$	=	Esfuerzo en el acero
$f'_c$	=	Resistencia del concreto a los 28 días
$f_c$	=	Esfuerzo en el concreto al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción

$f_{ct}$	= Resistencia promedio a la tracción
$f_r$	= Módulo de rotura del concreto
$f$	= Esfuerzo por flexión a una distancia $y$ del eje neutro
$f_y$	= Límite de fluencia del acero
$f'_t$	= Resistencia a tracción del concreto
$F$	= Multiplicador del método D de Yu y Winter
$h$	= Peralte total de una viga
$h_1$	= Distancia desde el eje neutro al centroide del acero de refuerzo en tracción
$h_2$	= Distancia desde el eje neutro a la cara del fondo
$h_o$	= Altura inicial de las grietas
$I_e$	= Momento de inercia efectivo de una viga.
$I_{e1}$	= Momento de inercia efectivo del extremo izquierdo
$I_{e2}$	= Momento de inercia efectivo del extremo derecho
$I_{ec}$	= Momento de inercia efectivo de la sección central
$I_{ex}$	= Momento de inercia efectivo del extremo no continuo de una viga continua de tramo exterior
$I_g$	= Momento de inercia de la sección bruta
$I_{cr}$	= Momento de inercia de la sección agrietada
$I$	= Momento de inercia de una sección
$I_{cre}$	= Momento de inercia aproximado de la sección transformada agrietada
$K_e$	= Factor definido por la Ec. 2.21
$K_1, K_2$ y $K_3$	= Constantes que mide la probabilidad de que $n\%$ de las grietas excedan del ancho de grieta calculado (Ecs. 5.11 y 5.12)
$L_{ip}$	= Longitud del tramo de viga entre puntos de inflexión
$L_{cr}$	= Longitud del tramo de viga en la que ocurre agrietamiento
$l_n$	= Longitud de tramo libre
$l$	= Longitud de la viga tal como se define en la sección 8.7 del ACI 318-05
$M$	= Momento flector en una sección dada
$M_0$	= Momento flector máximo en el centro del tramo correspondiente a una viga simplemente apoyada
$M_1$	= Momento flector en el extremo izquierdo de un tramo continuo
$M_1$	Elemento de la Ec. 2.16
$M_2$	= Momento flector en el extremo derecho de un tramo continuo

$M_c$	=	Momento flector en el centro de un tramo continuo
$M_D$	=	Momento flector por carga muerta
$M_L$	=	Momento flector por carga viva
$M_{cr}$	=	Momento de agrietamiento
$M_a$		Momento flector máximo
$M_n$	=	Momento resistente o nominal de una sección de una viga
$n$	=	Relación modular
$n_{ct}$	=	Relación modular reducida
$N$	=	Número de varillas
$p$	=	Variable auxiliar para el cálculo de $c$
$q$	=	Variable auxiliar para el cálculo de $c$
$s$	=	Espaciamiento, centro a centro, entre las varillas de acero de refuerzo más cercanas a la superficie en tracción
$t$	=	Separación de grietas al nivel del acero de refuerzo
$t$	=	Espesor del recubrimiento del fondo en la ecuación 4.8
$t$	=	Tiempo
$t_s$	=	Distancia desde el lado de la viga al centro de la varilla de refuerzo más cercana
$t_b$	=	Distancia desde la fibra extrema en tracción al centro de la varilla de refuerzo más cercana
$t_r$	=	Recubrimiento libre de concreto medido desde la fibra extrema en tracción
$t_a$	=	Distancia desde el punto en que se mide el ancho de la grieta hasta la superficie de la varilla más cercana
$t_b$	=	Recubrimiento de concreto medido desde la fibra extrema en tracción hasta el centro de la varilla más cercana
$u$	=	Esfuerzo promedio de adherencia
$w$	=	Carga uniformemente distribuida o ancho de grieta, dependiendo del contexto
$w$	=	Ancho de grieta (Ec. 5.16)
$w_c$	=	Peso unitario del concreto
$w_{prom}$	=	Ancho promedio de grieta al nivel del acero de refuerzo
$w_{max}$	=	Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción o al nivel de la fibra extrema en tracción
$w_{max1}$		Ancho máximo de grieta ubicada debajo de una varilla (Ec. 5.11)
$w_{max2}$		Ancho máximo de grieta ubicada a cierta distancia de una varilla (Ec. 5.12)

$w_D$	=	Carga muerta
$w_{LA}$	=	Carga viva adicional
$w_S$	=	Carga sostenida total
$y$	=	Distancia medida desde el eje neutro
$\bar{y}$	=	Distancia desde el eje centroide hasta la fibra extrema en compresión
$y_t$	=	Distancia desde el eje centroide hasta la fibra extrema en tracción
$z$	=	Brazo de palanca ( $= d - c / 3$ )
$Z$	=	Factor para el control del agrietamiento
$\alpha$	=	Coficiente usado en la Ec. 2.25
$\alpha$	=	Coficiente usado en la Ec. 5.29
$\alpha'$	=	Coficiente definido por la Ec. 2.28
$\alpha_f$	=	Coficiente definido por la Ec. 2.29
$\beta$	=	Coficiente usado en el cálculo de $I_{cre}$ (Ec. 2.25)
$\beta$	=	Coficiente definido por la Ec. 5.18
$\beta$	=	Coficiente usado en la Ec. 5.29
$\Delta_L$	=	Deflexión inmediata por carga viva
$\Delta_D$	=	Deflexión inmediata por carga muerta
$\Delta_{D+L}$	=	Deflexión inmediata por carga muerta más carga viva
$\Delta_{LS}$	=	Deflexión adicional debida al flujo plástico y a la contracción del concreto por la acción de la carga sostenida
$\Delta_{sh+cp}$	=	Deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción del concreto
$\Delta_t$	=	Deflexión total
$\Delta_{inc}$	=	Deflexión incremental que se produce después de unir los elementos no estructurales
$(\Delta_{inc})_{per}$	=	Deflexión incremental permisible
$\Delta_i$	=	Deflexión inmediata
$\epsilon_{is}$	=	Deformación unitaria inmediata debida a la acción de las cargas sostenidas
$\epsilon_{sh}$	=	Deformación unitaria por contracción libre
$\epsilon_{shu}$	=	Deformación unitaria última por contracción libre
$\epsilon_{cp}$	=	Deformación unitaria por flujo plástico
$\epsilon_s$	=	Deformación unitaria del acero
$\epsilon_m$	=	Deformación longitudinal promedio del nivel donde se está midiendo el ancho de la grieta
$\epsilon_1$	=	Deformación unitaria definida en la Fig. 5.9

$\varepsilon_2$	=	Deformación unitaria definida en la Fig. 5.9
$\phi$	=	Factor de reducción de resistencia ó
$\phi$	=	Coefficiente empírico usado en la Ec. 2.23
$\gamma_{cs}$	=	Coefficiente de corrección usado en la Ec. 1.8
$\gamma_{cp}$	=	Coefficiente de corrección usado en la Ec. 1.11
$\kappa$	=	Coefficiente dependiente de las condiciones de soporte usado en las Ecs. 2.4 y 3.2
$\lambda$	=	Multiplicador del ACI para el cálculo de la deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción del concreto
$\lambda_t$	=	Valor de $\lambda$ para una duración $t$ de carga sostenida
$\lambda_\infty$	=	Valor de $\lambda$ para una duración infinita de carga sostenida
$\mu$	=	Factor de corrección para la Ec. 2.35
$\rho$	=	Cuantía de acero en tracción
$\rho'$	=	Cuantía de acero en compresión
$\rho_e$	=	Cuantía de acero en tracción equivalente definido por la Ec. 2.30
$\rho_b$	=	Cuantía balanceada de acero en tracción
$\rho_w$	=	Cuantía de acero en tracción
$\rho_e$	=	Razón definida como $\rho_e = A_s / A_e$ en la Ec. 4.5
$\xi$	=	Factor dependiente del tiempo dado en la tabla 2.2
$\psi_s$	=	Factor que define el tipo de espaciamiento entre grietas (Ec. 5.17)
$\Sigma o$	=	Suma de los perímetros de las varillas de acero de refuerzo

# Lista de siglas

ACI	American Concrete Institute
NTE	Norma Técnica de Edificación
CEB	Comité Euro-International du Béton
AS2600	Australian Standard 2600

# Lista de figuras

---

<b>Figura</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
Figura 1.1	Módulo de elasticidad del concreto	4
Figura 1.2	Curva contracción - tiempo	8
Figura 1.3	Curva deformación – tiempo	12
Figura 1.4	Recuperación del flujo plástico con respecto al tiempo	12
Figura 1.5	Distribución de esfuerzos y deformaciones en una viga sometida a flexión bajo cargas de servicio	16
Figura 1.6	Efecto de la contracción en una viga con refuerzo de tracción	19
Figura 1.7	Efecto del flujo plástico	21
Figura 2.1	Viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida	23
Figura 2.2	Tramo de viga continua sometida a momento flexionante	24
Figura 2.3	Efecto rigidizante de la tracción	25
Figura 2.4	Curva típica carga-deflexión	26
Figura 2.5	Variación de $I_e$ con la relación $M_a / M_{cr}$	28
Figura 2.6	Deflexión debida a la carga viva y la carga muerta	29
Figura 2.7	Definición de $L_{cr}$ y $L_{ip}$	37
Figura 2.8	Factores para las deflexiones a largo plazo	41
Figura 2.9	Factor $\lambda$ en función de $\rho$ y la duración de la carga	42
Figura 3.1	Relación $l_n$ versus $l_n / h$ (losa maciza de tramo exterior)	57
Figura 3.2	Relación $l_n$ versus $l_n / h$ (losa maciza de tramo interior)	58
Figura 3.3	Viga del ejemplo 3.3	64
Figura 3.4	Secciones transformadas de la viga del ejemplo 3.3	65
Figura 3.5	Viga del ejemplo 3.4	73
Figura 3.6	Secciones transformadas de la viga del ejemplo 3.4	74
Figura 3.7	Diagrama de momentos flectores para la viga del ejemplo 3.3	82
Figura 3.8	Losa sólida del ejemplo 3.8	87
Figura 4.1	Miembro en tracción según el mecanismo clásico de agrietamiento	100
Figura 4.2	Miembro en flexión según el mecanismo clásico de agrietamiento	102

Figura 4.3	Miembro en tracción según Broms	103
Figura 4.4	Miembro en flexión según Broms	104
Figura 4.5	Mecanismo de agrietamiento por tracción según Broms	105
Figura 4.6	Mecanismo de agrietamiento por flexión según Broms	108
Figura 5.1	Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Kaar y Hognestad	111
Figura 5.2	Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Gergely y Lutz	112
Figura 5.3	Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Chowdhury y Loo	114
Figura 5.4	Parámetros geométricos de relevancia que intervienen en el cálculo del ancho máximo de grieta en una viga según el método de Base y colaboradores	115
Figura 5.5	Parámetros geométricos de relevancia que intervienen en el cálculo del ancho máximo de grieta en una losa según el método de Base y colaboradores	116
Figura 5.6	Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Broms	117
Figura 5.7	Patrones de agrietamiento	120
Figura 5.8	Miembro agrietado por flexión	121
Figura 5.9	Gradiente de deformaciones	121
Figura 5.10	Definición de recubrimientos	122
Figura 5.11	Separación entre varillas para acero de grado 60	124
Figura 5.12	Cálculo de $f_s$ del equilibrio de la sección	126
Figura 5.13	Viga del ejemplo 5.1	127
Figura 5.14	Viga del ejemplo 5.2	136
Figura 5.15	Losa del ejemplo 5.3	141
Figura 6.1	Elementos para el uso del factor Z en vigas	145
Figura 6.2	Elementos para el uso del factor Z en losas	145
Figura 6.3	Curva de diseño para Z	146
Figura 6.4	Elementos geométricos usados por el ACI 318-05	151
Figura 6.5	Curva de diseño del ACI 318-05	152
Figura 6.6	Curva de diseño del ACI 318-05 vs Curva de diseño de Frosch	153
Figura 6.7	Sección de viga del ejemplo 6.1	156
Figura A.1	Sección T no agrietada: sección transversal y sección transformada	164
Figura A.2	Sección rectangular no agrietada: sección transversal y sección transformada	165
Figura A.3	Sección T doblemente reforzada agrietada: sección transversal y sección transformada	166
Figura A.4	Sección rectangular doblemente reforzada agrietada: sección transversal y sección transformada	167
Figura B.1	Curva $G$ versus $n\rho$ para $n\rho \leq 0.5$	169
Figura E.1	Deflexión inmediata medida $\Delta_{im}$ versus deflexión inmediata	

- calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método del reglamento ACI 318-05
- Figura E.2 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89
- Figura E.3 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Fikry y Thomas
- Figura E.4 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Grossman
- Figura E.5 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método B de Yu y Winter
- Figura E.6 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Bischoff
- Figura E.7 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método del reglamento ACI 318-05
- Figura E.8 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_m$ , en losas, según el método del reglamento NTE E.060.89
- Figura E.9 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método de Fikry y Thomas
- Figura E.10 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método de Grossman
- Figura E.11 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método B de Yu y Winter
- Figura E.12 Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método de Bischoff
- Figura E.13 Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento ACI 318-05
- Figura E.14 Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89
- Figura E.15 Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89
- Figura E.16 Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89

# Lista de tablas

<b>Tabla</b>	<b>Título</b>	<b>Pag.</b>
Tabla 2.1	Coefficientes $\alpha$ y $\beta$ para la ecuación 2.25	37
Tabla 2.2	Factor $\xi$	40
Tabla 2.3	Módulo de elasticidad modificado $E_{ct}$	45
Tabla 2.4	Valores de F ( multiplicadores del método D de Yu y Winter )	45
Tabla 2.5	Valores de $K_{sh}$	47
Tabla 3.1	Peralte mínimo de vigas para no verificar deflexiones	49
Tabla 3.2	Deflexiones máximas permisibles de vigas y losas	50
Tabla 3.3	Peralte mínimo de losas en una dirección para no verificar deflexiones	51
Tabla 3.4	Peralte mínimo de miembros utilizados en techos y pisos (ACI 435, 1978)	55
Tabla 3.5	Cuantías de acero en tracción recomendadas para miembros no preesforzados en una dirección para mantener la deflexión dentro de límites aceptables (ACI 435, 1978)	56
Tabla 5.1	Coefficientes $\alpha$ y $\beta$ para la ecuación 5.29	127
Tabla 6.1	Factor Z versus diámetro de las varillas de refuerzo	149
Tabla B.1	Coefficientes $\alpha$ y $\beta$ y para la ecuación 5.29	171
Tabla E.1	Detalles de las vigas analizadas	183
Tabla E.2	Detalles de las vigas analizadas	184
Tabla E.3	Detalles de las vigas analizadas	185
Tabla E.4	Momentos de inercia para las vigas analizadas	186
Tabla E.5	Deflexiones medidas para las vigas analizadas	187
Tabla E.6	Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las vigas simplemente apoyadas	188
Tabla E.7	Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las vigas continuas	189
Tabla E.8	Deflexión total calculada y comparación con datos de prueba para las vigas simplemente apoyadas	190
Tabla E.9	Deflexión total calculada y comparación con datos de prueba para las vigas continuas	191
Tabla E.10	Detalles de las losas analizadas	191
Tabla E.11	Detalles de las losas analizadas	192
Tabla E.12	Momentos de inercia para las losas analizadas	192
Tabla E.13	Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las losas analizadas	193

# Introducción

---

## Generalidades

Antes de la introducción del método de la resistencia última el método de diseño en uso era el método de los esfuerzos de trabajo. En el método de los esfuerzos de trabajo se consideraba una variación lineal para la relación esfuerzo-deformación lo que aseguraba que bajo las cargas de servicio los esfuerzos del acero y del concreto no excedían los esfuerzos permisibles de trabajo. Los esfuerzos permisibles se consideraban como fracciones fijas de la resistencia máxima, así para el concreto se tomaba el 45% de su resistencia a compresión y para el acero el 50% de su resistencia a la fluencia. El uso de estos materiales con esfuerzos admisibles conservadores conducían a secciones grandes que presentaban la suficiente rigidez como para que la deflexión no resultase un problema.

Con el advenimiento del método de la resistencia máxima y el uso creciente de aceros y concretos de alta resistencia se pueden obtener secciones con peraltes más pequeños en las que la deflexión si puede resultar un problema. De manera que debe considerarse que si solamente se proporcionan secciones de acuerdo a los requerimientos de resistencia máxima, hay el peligro de que aunque el factor de carga sea adecuado, el agrietamiento y las deflexiones por cargas de servicio sean excesivos. El agrietamiento puede ser excesivo si los esfuerzos en el acero son elevados o si las varillas están mal distribuidas. Las deflexiones pueden ser críticas si se utilizan secciones de poco peralte, las que son posibles en el diseño por resistencia máxima. En consecuencia para asegurar un diseño satisfactorio, se deben comprobar los anchos de las grietas y las deflexiones bajo cargas de servicio para asegurar que estén dentro de ciertos límites permisibles que aseguren la buena funcionalidad de la estructura.

Al respecto el Comité Europeo del Concreto ha introducido el concepto de estado límite para referirse a aquellas situaciones tales que, al ser rebasadas, colocan a la estructura fuera de servicio. Los estados límites pueden clasificarse en estados límites últimos y en estados límites de servicio. Los estados límites últimos corresponden a la máxima capacidad resistente de la estructura; y los estados límites de servicio corresponden a la máxima capacidad de servicio de la estructura. Los estados límites últimos se relacionan con la seguridad de la estructura y son independientes de la función que ésta cumpla. Los estados límites de servicio se relacionan con la funcionalidad, estética y durabilidad de la estructura y dependen de la función que esta deba cumplir. En estructuras de concreto armado los estados límites de servicio más importantes son la deflexión, el agrietamiento y las vibraciones. La deflexión y la vibración se estudian a nivel de estructura o elemento estructural mientras que el agrietamiento se estudia a nivel de sección. De manera que cuando se diseña un elemento de concreto armado debe efectuarse para estos dos estados límites para asegurar tanto resistencia como funcionalidad.

## **Objetivo**

El objetivo de la presente tesis es estudiar los métodos más usuales para controlar las deflexiones y el agrietamiento en vigas y losas unidireccionales de concreto armado según los reglamentos ACI 318-95, ACI 318-05 y NTE E-060-89 y, automatizar el control de la deflexión y el agrietamiento mediante programas de computadora.

## **Descripción de la tesis**

La presente tesis consta de seis capítulos que se detallan a continuación:

En el capítulo 1 se trata el problema de la deflexión en miembros de concreto armado y sus efectos en el aspecto sensorial de las personas, en los elementos estructurales y no estructurales interconectados y en la serviciabilidad de la estructura. Se revisan también, las propiedades del concreto que afectan la deflexión tales como la resistencia a la compresión, el módulo de elasticidad, el módulo de rotura, el flujo plástico

y la contracción. Finalmente, se culmina el capítulo revisando el comportamiento de vigas sujetas a cargas de corto y largo plazo.

En el capítulo 2 se revisan diversos métodos para el cálculo de deflexiones inmediatas y a largo plazo en vigas y losas unidireccionales de concreto armado. Para el cálculo de deflexiones inmediatas se revisan los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter, Fikry y Thomas, Grossman y Bischoff. Para el cálculo de deflexiones a largo plazo se revisan los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter y, el método modificado del ACI 435.

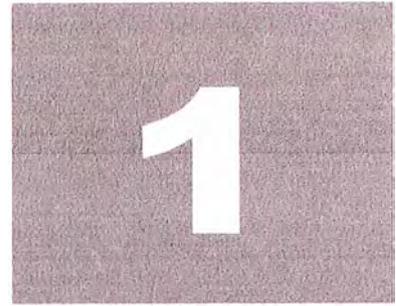
En el capítulo 3 se revisan métodos para el control de la deflexión. Los métodos revisados corresponden a los reglamentos ACI 318-05, NTE E.060.89 además del método de Scanlon y Hak y, las recomendaciones del comité ACI 435. Se dan ejemplos del control de la deflexión en vigas y losas unidireccionales de concreto armado y se presenta el programa *Deflexión 1.0* que permite controlar la deflexión según los reglamentos ACI 318-05 y NTE E060.89.

En el capítulo 4 se trata el problema del agrietamiento en miembros de concreto armado como consecuencia de los cambios volumétricos restringidos del concreto y por la acción de las cargas. Se revisan, además, los mecanismos que explican el fenómeno del agrietamiento por tracción y por flexión, como son, el mecanismo clásico del agrietamiento y el mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos.

En el capítulo 5 se revisan diversas fórmulas, empíricas y analíticas, para el cálculo del ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción y al nivel de la fibra extrema en tracción. Se dan, también, ejemplos del cálculo del ancho máximo de grietas.

En el capítulo 6 se revisan los métodos de control del agrietamiento de los reglamentos ACI 318-95, ACI 318-05 y NTE E.060.89. Se dan ejemplos del control del agrietamiento en vigas y losas unidireccionales de concreto

armado y se presenta el programa *Grieta 1.0* que permite controlar el agrietamiento según los reglamentos ACI 318-05 y NTE E060.89



# **Aspectos generales sobre la deflexión**

## **1.1 Introducción**

En este capítulo se verá el problema de la deflexión en miembros de concreto armado y sus efectos en el aspecto sensorial de las personas, en los elementos estructurales y no estructurales interconectados y, en la serviciabilidad de la estructura. Se verá, también, los factores que afectan la deflexión que son básicamente la propiedades del concreto. Finalmente se analizará el comportamiento de vigas sujetan a cargas de corto plazo o inmediatas y de largo plazo o sostenidas.

## **1.2 El problema de la deflexión**

Con el uso actual de concretos y aceros de alta resistencia, las secciones diseñadas usando el método de la resistencia máxima pueden tener peraltes más reducidos en los que se satisfacen las condiciones de resistencia y de seguridad pero que pueden no satisfacer las condiciones de servicio o de funcionalidad para la cual fueron diseñadas. Consecuentemente la predicción y el control de la deflexión y el agrietamiento se han convertido en una fase necesaria del diseño bajo cargas de servicio pues de lo contrario la estructura puede quedar inutilizada o limitada a usos diferentes para la cual fue proyectada debido a deflexiones excesivas.

El Comité 435 del ACI (1984) clasifica el problema de la deflexión bajo cuatro categorías generales que son las siguientes:

### **1.2.1 Problemas sensoriales**

En este punto se considera el efecto de las deflexiones sobre la persona humana. Bajo este encabezado se incluyen los efectos visuales, tales como las vigas colgadas o los voladizos inclinados, efectos táctiles, tales como las vibraciones debidas a los efectos dinámicos de la carga viva o vientos y efectos de audición, tales como el ruido de las vibraciones. Dado que aquí entra en juego el juicio y la apreciación personal es difícil fijar límites de las deflexiones en base a los problemas sensoriales.

### **1.2.2 Problemas de serviciabilidad**

Los problemas de serviciabilidad o de utilidad se refieren al uso a que está destinada la estructura. Bajo este encabezado se incluyen los efectos en superficies que deben drenar agua, tales como azoteas, efectos en pisos que deben permanecer planos, tales como los pisos de los gimnasios y efectos en miembros que soportan equipos sensibles, tales como equipos mecánicos.

### **1.2.3 Problemas en elementos no estructurales**

Los problemas en elementos no estructurales son causados por elementos estructurales, tales como las vigas y las losas, como consecuencia de las deflexiones excesivas de estas. Así las deflexiones excesivas de una losa de piso pueden provocar fisuras en los muros divisorios soportados por la losa. Por otro lado las deflexiones excesivas de una viga pueden dañar a los muros divisorios del piso inferior y si la viga está en contacto con el marco de una ventana, puede agrietar los cristales de la ventana. Además debe de considerarse que las deflexiones no deben impedir que elementos móviles, tales como puertas y ventanas, dejen de funcionar adecuadamente.

### **1.2.4 Problemas en elementos estructurales**

Las deflexiones que pueden perjudicar el comportamiento estructural

deben ser limitadas. Bajo este encabezado están las deflexiones que pueden causar inestabilidad de la estructura primaria, tales como arcos, cascarones y columnas largas, deflexiones que pueden producir incrementos de los esfuerzos internos y deflexiones que pueden producir efectos dinámicos que incrementan los esfuerzos, tales como las vibraciones resonantes debidas a las cargas móviles.

### **1.3 Factores que afectan la deflexión**

Un miembro de concreto armado puede verse afectado por dos tipos de deflexiones: deflexiones inmediatas o mecánicas y deflexiones sostenidas o no mecánicas. A las deflexiones inmediatas también se conoce como deflexiones de corto plazo, mientras que a las deflexiones sostenidas también se conoce como deflexiones de largo plazo. La deflexión total viene a ser la suma de las deflexiones inmediatas más las deflexiones sostenidas. Las deflexiones inmediatas se producen en el momento de la aplicación de las cargas, mientras que las deflexiones sostenidas se producen a lo largo del tiempo de vida del miembro de concreto.

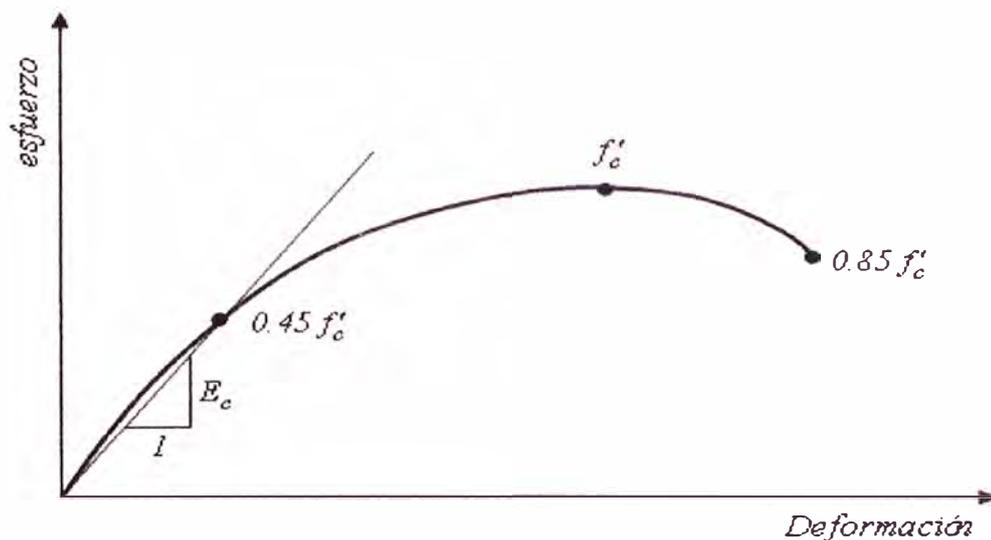
Los principales factores que afectan las deflexiones inmediatas de un miembro de concreto armado son la magnitud y distribución de la carga, el tramo considerado, las propiedades de la sección incluyendo los porcentajes de acero, las propiedades mecánicas del concreto (tales como la resistencia a la compresión, el módulo de elasticidad y el módulo de rotura), y la cantidad y extensión del agrietamiento. En el caso de las deflexiones sostenidas, estas se ven influenciadas principalmente por la contracción y el flujo plástico del concreto.

Las propiedades del concreto que tienen influencia directa en la deflexión son: el módulo de elasticidad, el módulo de rotura, el flujo plástico y la contracción. En lo que sigue de esta sección se detallan las propiedades mencionadas.

#### **1.3.1 Módulo de elasticidad del concreto**

El término módulo de elasticidad o módulo de Young del concreto puede aplicarse estrictamente a la parte lineal de la curva esfuerzo-deformación.

Sin embargo, en el caso del concreto ninguna parte de la curva esfuerzo-deformación es lineal. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias, basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tangente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformación y el módulo secante entre dos puntos de la misma. El módulo secante de elasticidad del concreto se define como la pendiente de la línea recta que une el origen con un esfuerzo dado (alrededor de  $0.45 f'_c$ ). Este valor, llamado simplemente *módulo de elasticidad del concreto*  $E_c$ , satisface la suposición práctica de que el concreto se comporta elásticamente para cargas de corta duración.



**Figura 1.1** Módulo de elasticidad del concreto

La propiedad más importante del concreto que afecta al módulo de elasticidad del concreto es la resistencia a la compresión. Se espera un incremento en el módulo de elasticidad con un incremento en la resistencia a la compresión. El valor del módulo secante de elasticidad para concretos de resistencia normal (resistencias a la compresión de hasta  $420 \text{ kg/cm}^2$ ) a los 28 días está alrededor de  $2.8 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ , mientras que para concretos de alta resistencia (resistencias a la compresión de hasta  $1400 \text{ kg/cm}^2$ ), han sido reportados valores en el rango de  $4.9 \times 10^5$  a  $5.6 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$ . Estos altos valores del módulo de elasticidad pueden

ser usados para reducir las deflexiones a corto y largo plazo de miembros en flexión, considerando que el coeficiente de flujo plástico es menor en concretos de alta resistencia.

El reglamento ACI 318-05 recomienda la siguiente ecuación para calcular el módulo de elasticidad de concretos con densidades comprendidas entre 1445 y 2325  $kg/m^3$  basado en el módulo de elasticidad secante intersecado a  $0.45 f'_c$ :

$$E_c = 0.14 w_c^{1.5} \sqrt{f'_c} \quad (1.1)$$

Para concreto de peso normal se recomienda la siguiente ecuación:

$$E_c = 15100 \sqrt{f'_c} \quad (1.2)$$

Donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto en  $kg/cm^2$ ,  $w_c$  es la densidad del concreto en  $kg/m^3$  y  $f'_c$  es la resistencia a la compresión del concreto en  $kg/cm^2$

Para concretos con resistencias de hasta 420  $kg/cm^2$  la ecuación 1.1 es razonablemente aplicable. Sin embargo, con el incremento de la resistencia del concreto, el valor de  $E_c$  puede incrementarse más rápido que el valor dado por la ecuación 1.1 de modo que puede subestimar el valor verdadero del módulo de elasticidad del concreto (Comité ACI 435-R95, 1995).

El comité ACI 363-R92 (1992) recomienda la siguiente ecuación para concretos de alta resistencia de densidad normal:

$$E_c = 10583 \sqrt{f'_c} + 70000 \quad (1.3)$$

La ecuación 1.3 es válida para  $210 kg/cm^2 < f'_c < 840 kg/cm^2$ .

El módulo de elasticidad del concreto depende también de otros factores distintos a la resistencia y a la densidad del concreto como son la calidad del concreto, la edad del concreto, el nivel de esfuerzos, la humedad, la temperatura y la duración de los esfuerzos aplicados.

Por otro lado, puede suponerse que el módulo de elasticidad en tracción es igual al de compresión.

### 1.3.2 Módulo de rotura del concreto

El módulo de rotura es la resistencia de tracción en flexión del concreto. Según el reglamento ACI 318-05, el módulo de rotura  $f_r$  puede calcularse con la siguiente ecuación empírica:

Para concreto de peso normal

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} \quad (1.4)$$

Para concreto ligero, debe aplicarse una de las siguientes modificaciones:

- Si se conoce la resistencia promedio a la tracción  $f_{ct}$ ,  $f_r$  debe modificarse sustituyendo  $\sqrt{f'_c}$  por  $1.8f_{ct}$ , pero el valor de  $1.8f_{ct}$  no debe exceder de  $\sqrt{f'_c}$ .
- Si no se conoce la resistencia promedio a la tracción  $f_{ct}$ ,  $f_r$  debe multiplicarse por 0.75 para concreto ligero en todos sus componentes y por 0.85 para concreto ligero con arena de peso normal. Se permite interpolar linealmente si se usa una sustitución parcial de la arena.

El comité ACI 363 (1997) recomienda la siguiente ecuación para concretos de alta resistencia de densidad normal:

$$f_r = 3.1\sqrt{f'_c} \quad (1.5)$$

Para  $f'_c$  en el rango de  $210 \text{ kg/cm}^2$  a  $840 \text{ kg/cm}^2$

### 1.3.3 Contracción

Se denomina contracción a los cambios de volumen que sufre el concreto independientemente de la aplicación de esfuerzos externos y en especial durante los primeros meses después del vaciado en los moldes.

Existen dos tipos básicos de contracción: contracción plástica y contracción por secado.

La *contracción plástica* (así llamada porque se produce antes del final del fraguado) ocurre durante las primeras horas después del vaciado del concreto en los moldes. Se produce cuando la humedad de la superficie de concreto expuesta al aire seco se evapora rápidamente antes de ser reemplazada por el agua exudada de las capas más bajas de los miembros de concreto. Como resultado se observa una notable contracción en los estratos en los que la pérdida de agua es grande, sin que el resto del concreto se vea particularmente afectado. A esta altura se desarrollan tracciones internas entre los estratos sometidos a la contracción. Si las tracciones son superiores a la resistencia a la tracción (reducida en la fase inicial), se pueden formar fisuras de hasta  $1 \text{ mm}$  de abertura. Los elementos horizontales, tales como las losas de piso, son los más afectados por la contracción plástica.

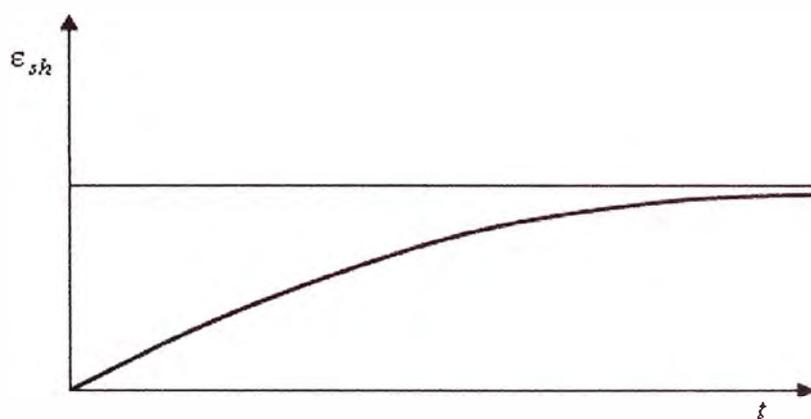
La *contracción por secado*, considerada como la verdadera contracción, ocurre después que el concreto ha alcanzado su fraguado final y es el resultado del lento secado del concreto. El valor final de la contracción por secado se sitúa generalmente entre  $0.3$  y  $0.7 \text{ mm/m}$ , dependiendo esencialmente de la relación agua-cemento.

El fenómeno opuesto a la contracción se denomina *esponjamiento* y ocurre cuando el concreto absorbe agua. La alternancia de condiciones secas y húmedas en el medio ambiente provocarán cambios alternados en el volumen de concreto: contracción y esponjamiento. Pero la contracción no

es un fenómeno del todo reversible. Por más que un elemento de concreto que se deje secar en el aire a una humedad relativa dada se sature después en agua por un tiempo prolongado, no toda la deformación por contracción se recuperará. Para los concretos ordinarios, la parte irreversible de la contracción está entre el 30% y el 60% de la contracción por secado, siendo más común el valor inferior.

Generalmente la contracción del concreto se produce con mayor intensidad durante el periodo inicial del fraguado y en el transcurso del primer año, en adelante va atenuándose poco a poco. En la figura 1.2 se muestra una curva que relaciona la deformación por contracción  $\varepsilon_{sh}$  y el tiempo  $t$ . Puede verse que el aumento de la deformación por contracción ocurre a una tasa decreciente llegando a ser casi asintótica con el tiempo. Por ejemplo, se ha encontrado que para los concretos estructurales normales expuestos a una humedad relativa de 50 y 70%:

- Del 14 al 34% de la contracción a los 20 años se produce en 2 semanas.
- Del 40 al 80% de la contracción a los 20 años se produce a los 3 meses.
- Del 66 al 85% de la contracción a los 20 años se produce en 1 año.



**Figura 1.2** Curva contracción - tiempo ( $\varepsilon_{sh}$  = deformación por contracción del concreto,  $t$  = tiempo)

De acuerdo con el comité ACI 209 (1997), para concretos curados en la

humedad, la deformación por contracción libre que ocurre después de una edad de 7 días a cualquier tiempo  $t$ , dado en días, viene dado por:

$$\varepsilon_{sh} = \left( \frac{t}{35 + t} \right) \varepsilon_{shu} \quad (1.6)$$

y para curado a vapor, la deformación por contracción libre que ocurre después de una edad de 3 días a cualquier tiempo  $t$  viene dado por:

$$\varepsilon_{sh} = \left( \frac{t}{55 + t} \right) \varepsilon_{shu} \quad (1.7)$$

donde  $\varepsilon_{shu}$  es la deformación por contracción libre última correspondiente a un tiempo infinito para el cual  $\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{shu}$ . La deformación por contracción libre última viene dada por:

$$\varepsilon_{shu} = 780 \times 10^{-6} \gamma_{cs} \quad (1.8)$$

donde  $\gamma_{cs}$  es un factor de corrección que es igual al producto de un número de multiplicadores que dependen de la humedad relativa, espesor mínimo del miembro, contenido de agregado fino, contenido de cemento y contenido de aire. El factor de corrección  $\gamma_{cs}$  es igual a 1 cuando se cumplen las siguientes condiciones normales: edad en que se carga = 3 días después del curado inicial a vapor y 7 días después del curado inicial en la humedad, humedad relativa ambiental = 40%, espesor mínimo del miembro = 15 cm, revenimiento del concreto = 7.5 cm, contenido de agregado fino = 50% y contenido de aire = 6%. En el Apéndice A se dan expresiones para los multiplicadores que intervienen en el factor  $\gamma_{cs}$  para condiciones distintas a la normal, de acuerdo al comité ACI 209.

Son varios los factores que influyen en la contracción por secado del concreto siendo los más importantes los siguientes:

a. *Agregados*. El agregado restringe la contracción de la pasta de

cemento puro y por lo tanto del concreto. Se ha encontrado al respecto que el contenido volumétrico del agregado tiene una influencia considerable en la contracción que se produce realmente en el concreto de manera que los concretos con alto contenido de agregado son menos vulnerables a la contracción. Por otra parte, el grado de restricción que presenta el agregado depende de sus propiedades elásticas, así los agregados con elevado módulo de elasticidad presentan mayor restricción a la contracción.

- b. *Relación agua-cemento.* Los concretos con alto contenido de agua (y alta relación agua-cemento) tienen una resistencia inferior y un menor módulo de elasticidad, y por tanto, tienen una mayor tendencia a la contracción
- c. *Tipo de cemento.* Los cementos de endurecimiento rápido y los de bajo calor de hidratación generan concretos con mayor contracción que otros tipos de cemento.
- d. *Aditivos.* Un acelerante tal como el cloruro de calcio, utilizado para acelerar el endurecimiento y fraguado del concreto, aumenta la contracción generalmente entre 10 y 50%. Las puzolanas pueden también aumentar la contracción por secado, mientras que los agentes inclusores de aire tienen poco efecto.
- e. *Tamaño del elemento de concreto.* El efecto del tamaño se puede tomar en cuenta indirectamente por la relación de la superficie de secado al volumen del miembro de concreto; así cuanto mayor es esta relación menor será la contracción. Sin embargo cuanto mayor sea el tamaño del miembro mayor será el tiempo que dure el proceso de contracción puesto que mayor será el tiempo necesario para que el secado alcance las regiones internas. Se ha observado que el secado llega a la profundidad de 7.5 cm en un mes, pero solamente a 60 cm en 10 años.
- f. *Condiciones ambientales.* La humedad relativa del medio ambiente afecta en gran escala la velocidad y la magnitud de la contracción, de manera que a menor humedad mayor será la contracción y mayor también la velocidad con que esta se produce. Por otro lado, la contracción se estabiliza a bajas temperaturas.

g. *Acero de refuerzo*. El concreto armado se contrae menos que el concreto simple, ya que las barras de refuerzo se oponen al acortamiento y lo disminuyen, tanto más cuanto mayor sea la cuantía de refuerzo. La contracción en el concreto armado es del orden del 80% de la contracción del concreto simple.

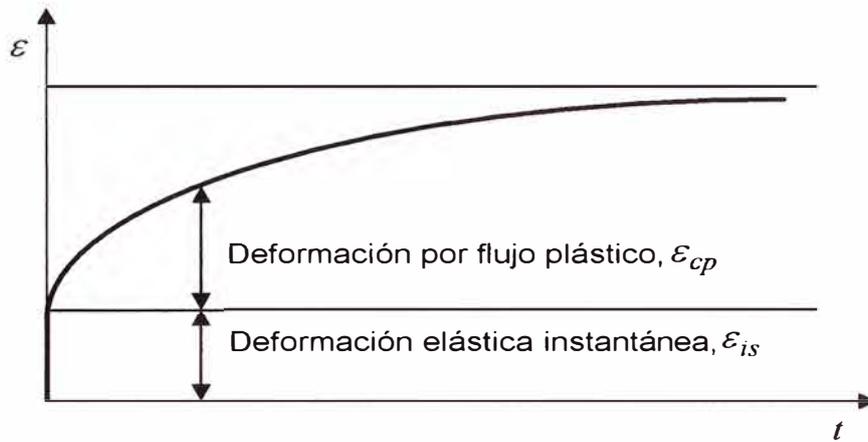
#### 1.3.4 Flujo plástico

Cuando el concreto se somete a cargas sostenidas, esto es a cargas que se mantienen en el miembro de concreto durante largos periodos de tiempo, sufre deformaciones inelásticas las cuales se incrementan gradualmente a una tasa decreciente durante el periodo de carga. A esta deformación se llama flujo plástico y se cree que es debido al reacomodo interno de las partículas, al flujo viscoso de la pasta de cemento y agua, al flujo cristalino de los agregados y al flujo de agua fuera del gel de cemento debido a cargas externas y de secado. La magnitud y la velocidad del flujo plástico para la mayoría de las estructuras de concreto están íntimamente relacionadas al régimen de secado. La deformación plástica final puede ser varias veces mayor que la deformación elástica inicial, y por lo tanto representa una parte importante de la deformación del concreto. Por lo general, el flujo plástico no afecta en forma adversa la resistencia de una estructura, aunque provoca una redistribución de esfuerzos en los miembros de concreto armado bajo cargas de servicio y conduce a un aumento en las deflexiones.

En la figura. 1.3 se muestra el incremento en la deformación por flujo plástico respecto al tiempo. Puede verse que el flujo plástico aumenta rápidamente durante el periodo inicial de carga y que va disminuyendo con el tiempo. Por ejemplo para la variación ordinaria de concretos para estructuras cargadas a edades de 28 y 90 días y almacenados con una humedad relativa de 50% se tiene que:

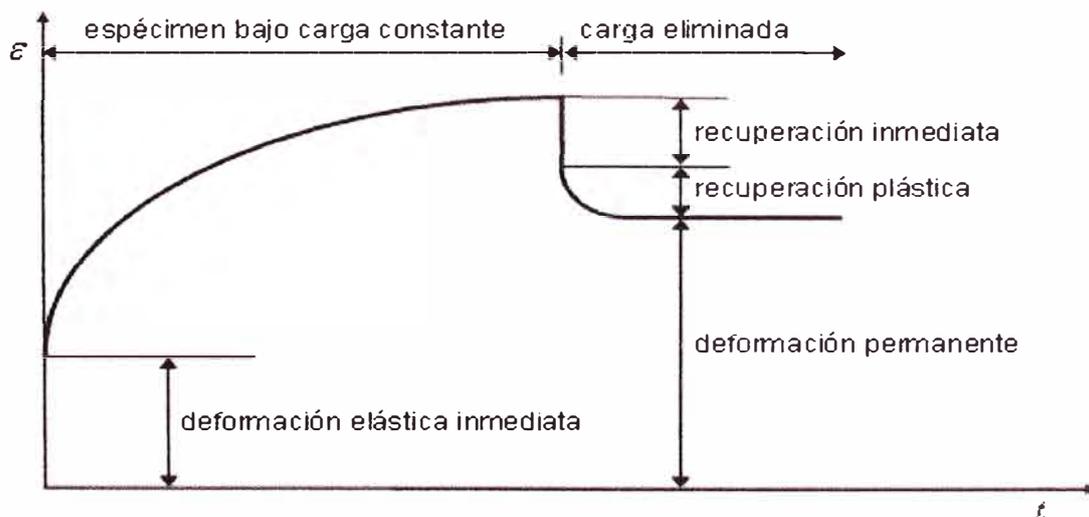
- Del 18 al 35% (promedio 26%) de las deformaciones plásticas a los 20 años ocurren a las dos semanas.
- Del 40 al 70% (promedio 55%) de las deformaciones plásticas a los 20 años ocurren a los tres meses.

- Del 64 al 83% (promedio 76%) de las deformaciones plásticas a los 20 años ocurren en 1 año.



**Figura 1.3** Curva deformación-tiempo

Como en el caso de la contracción, la deformación por flujo plástico no es del todo reversible. En la figura 1.4 puede verse que si se quita la carga sostenida después de un periodo de tiempo, se obtiene una recuperación elástica inmediata la cual es menor que la deformación elástica inicial, debida a que el módulo de elasticidad aumenta con la edad. A la recuperación elástica le sigue una disminución gradual de deformación, llamada recuperación por flujo plástico.



**Figura 1.4** Recuperación del flujo plástico con respecto al tiempo ( $\epsilon$  =deformación total y  $t$  =tiempo)

A la relación entre la deformación por flujo plástico  $\varepsilon_{cp}$  y la deformación elástica instantánea debido a la acción inmediata de las cargas sostenidas en el tiempo  $\varepsilon_{is}$ , se denomina *coeficiente de flujo plástico*  $C_t$ . Así:

$$C_t = \frac{\varepsilon_{cp}}{\varepsilon_{is}} \quad (1.9)$$

De acuerdo con el comité ACI 209 (1997), el coeficiente de flujo plástico a cualquier tiempo  $t$ , dado en días, viene dado por:

$$C_t = \left( \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \right) C_u \quad (1.10)$$

donde  $C_u$  es el coeficiente de flujo plástico último correspondiente a un tiempo infinito para el cual  $C_t = C_u$ . El coeficiente de flujo plástico último viene dado por:

$$C_u = 2.35 \gamma_{cp} \quad (1.11)$$

donde  $\gamma_{cp}$  es un factor de corrección que es igual al producto de un número de multiplicadores que dependen de la humedad relativa, espesor mínimo del miembro, revenimiento del concreto, contenido de agregado fino, contenido de aire y edad de la carga. El factor de corrección  $\gamma_{cp}$  es igual a 1 cuando se cumplen las mismas condiciones normales especificadas para el factor  $\gamma_{cs}$ . En el Apéndice A se dan expresiones para los multiplicadores que intervienen en el factor  $\gamma_{cp}$  para condiciones distintas a la normal, de acuerdo al comité ACI 209

Son varios los factores que influyen en el flujo plástico del concreto siendo los más importantes los siguientes:

- a. *Intensidad de los esfuerzos.* Experimentalmente se ha encontrado que la deformación por flujo plástico es proporcional a los esfuerzos

aplicados, siempre en cuando los niveles de esfuerzos no sean elevados. El máximo esfuerzo aplicado, después del cual cesa la proporcionalidad, puede variar entre  $0.2f'_c$  y  $0.5f'_c$ . Este cese de la proporcionalidad se asocia al microagrietamiento que aparece para esfuerzos alrededor de  $0.4f'_c$ . Sin embargo, dentro del rango de variación de los esfuerzos por cargas de servicio es suficientemente exacto asumir que hay proporcionalidad entre las deformaciones plásticas y los esfuerzos aplicados.

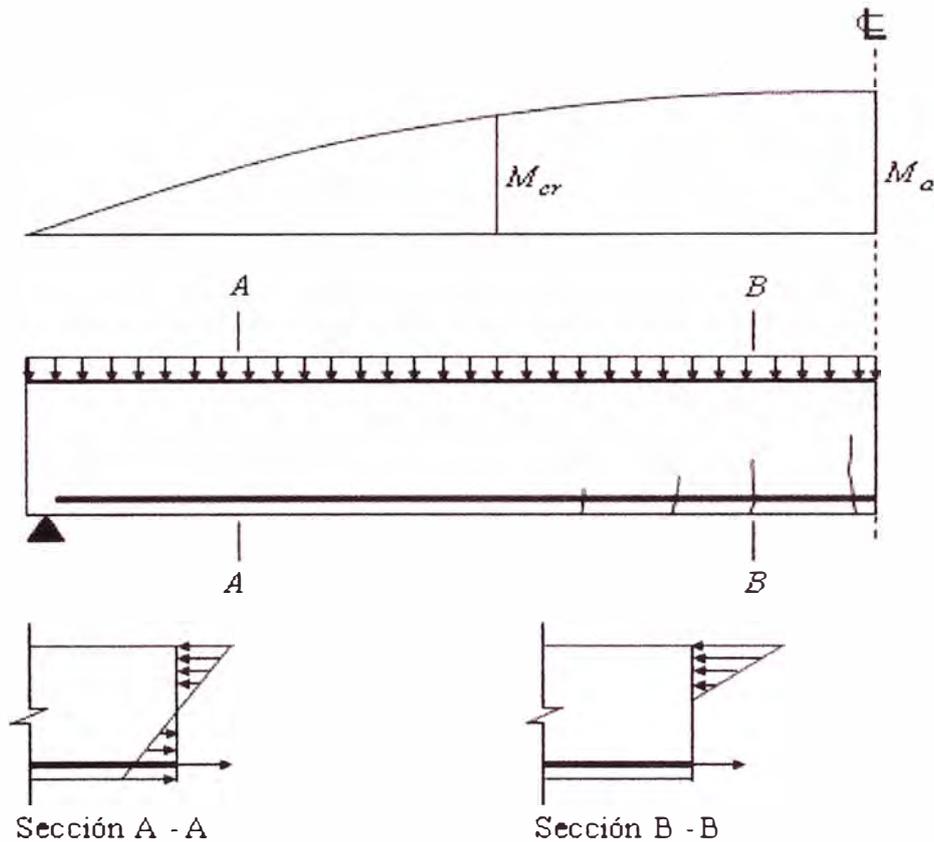
- b. *Edad en que se carga.* La edad en que el concreto se carga influye en las deformaciones plásticas ya que la edad influye en el grado de hidratación y en la adquisición de resistencia. Así la carga a una edad prematura provocará elevadas deformaciones plásticas mientras que al aumentar la edad en que se aplica la primera carga se producirá una señalada disminución por flujo plástico.
- c. *Agregado.* Al igual que en la contracción, el agregado restringe las deformaciones plásticas libres de la lechada de cemento y por ende del concreto. Así a mayor contenido volumétrico de agregados, menor será la deformación por flujo plástico. El grado de restricción que presenta el agregado está influenciado por el módulo de elasticidad del agregado, así los agregados con elevado módulo de elasticidad presentan mayor restricción al flujo plástico. Algunas pruebas han demostrado que la porosidad del agregado influye en las deformaciones plásticas pero, como los agregados con una gran porosidad generalmente tienen un bajo módulo de elasticidad, no es posible separar con facilidad la influencia de estos factores. Por ejemplo, usar agregado de arenisca puede producir deformaciones plásticas más de dos veces superiores que cuando se usa caliza como agregado.
- d. *Cemento.* La composición del cemento Pórtland influye en el flujo plástico. Los concretos hechos con cemento de bajo calor tienen un mayor flujo plástico que los concretos hechos con cementos normales y con alta resistencia inicial los cuales se aproximan a la máxima deformación plástica en alrededor de dos años, mientras que los concretos hechos con cemento de bajo calor llegan a la misma condición en cinco años. La finura del cemento afecta la adquisición de

- la resistencia en las primeras etapas y, por tanto, influye en las deformaciones plásticas pero no es un factor independiente.
- e. *Proporciones*. Las pruebas de varios investigadores han mostrado que el flujo plástico del concreto decrece cuando la relación agua-cemento y el volumen de la pasta de cemento decrecen. Además, ha sido mostrado que para una relación constante de agua-cemento, el flujo plástico aumenta cuando aumenta el volumen de la pasta de cemento. En términos generales, considerando las deformaciones plásticas en función de la relación agua-cemento y de la relación agregado cemento logramos un panorama general correcto de la influencia del proporcionamiento en las deformaciones plásticas.
  - f. *Tamaño*. Como en el caso de la contracción, el tamaño del miembro es un factor que influye en las deformaciones plásticas. Las deformaciones plásticas son menores en miembros grandes que en miembros pequeños debido a que los miembros grandes se secan más lentamente al tiempo que se produce un mayor grado de hidratación y un incremento en la resistencia, de manera que la respuesta a las deformaciones plásticas en las condiciones en que éstas se producen durante el secado será pequeña.
  - g. *Condiciones ambientales*. La humedad relativa es un factor importante. Estrictamente hablando, no es la humedad en sí lo que importa, sino el proceso de secado mientras el concreto está en proceso de deformación plástica. Al respecto, el régimen de secado está determinado entre otras cosas por la humedad y temperatura del aire. Las pruebas de muchos investigadores han mostrado que el régimen y la magnitud última de la deformación plástica se incrementan cuando la humedad del aire almacenado decrece. La temperatura durante el período de carga es también importante debido a su efecto significativo sobre las propiedades físicas del gel y el agua. El régimen de pérdida de humedad para una humedad relativa dada se incrementa con la temperatura del aire.

## 1.4 Comportamiento de vigas sujetas a cargas

### 1.4.1 Comportamiento bajo cargas de servicio de corto plazo

Una viga de concreto armado es un miembro diseñado para soportar cargas que actúan transversalmente a su eje, que originan diferentes configuraciones de esfuerzos y deformaciones internos a lo largo del tramo, tal como se ve en la figura 1.5.



**Figura 1.5** Distribución de esfuerzos y deformaciones en una viga sometida a flexión bajo cargas de servicio ( $M_{cr}$  = momento de agrietamiento y  $M_a$  = momento máximo por cargas de servicio).

Para el momento flexionante mostrado, la parte superior de la viga se encuentra sometida a compresión mientras que la parte inferior, a tracción. Entre la zona en compresión y la zona en tracción hay una superficie que no sufre deformaciones conocida como *superficie neutra*. La intersección de la superficie neutra con una sección transversal define el *eje neutro*. Una hipótesis de la teoría de la elasticidad es que *las secciones planas permanecen planas*. Esto da lugar a una variación lineal de

deformaciones con la distancia desde el eje neutro. Para esfuerzos menores a  $0.45f'_c$ , que es el caso de los esfuerzos bajo cargas de servicio, puede suponerse que el comportamiento de la viga es elástico.

Para calcular el esfuerzo por flexión en una sección de la viga puede usarse la ecuación de la flexión elástica:

$$f = \frac{My}{I} \quad (1.12)$$

Donde  $f$  es el esfuerzo por flexión a una distancia  $y$  del eje neutro,  $M$  es el momento flector externo en la sección,  $y$  es la distancia desde el eje neutro,  $I$  es el momento de inercia de la sección transversal.

En la región en que el momento flector externo es menor que el momento de agrietamiento  $M_{cr}$ , el concreto se encuentra libre de grietas. Una sección de esta región es la sección A-A. En esta sección el esfuerzo máximo de tracción en el concreto es menor que el la resistencia de tracción en flexión del concreto, conocido como módulo de rotura  $f_r$ . En este caso, toda la sección contribuye a resistir los esfuerzos de compresión y de tracción, por lo que, la rigidez en flexión de una sección no agrietada es  $E_c I_g$  donde  $E_c$  es el módulo de elasticidad del concreto e  $I_g$  es el momento de inercia de la sección bruta. El momento de agrietamiento  $M_{cr}$  se obtiene con la siguiente ecuación:

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \quad (1.13)$$

Donde  $y_t$  es la distancia del centroide a la fibra extrema en tracción. La ecuación 1.13 se obtiene de la ecuación 1.12 sustituyendo  $M$  por  $M_{cr}$ ,  $y$  por  $y_t$  e  $I$  por  $I_g$ .

Para cálculos más precisos puede tomarse como momento de inercia de la

sección no agrietada al momento de inercia de la sección transformada no agrietada  $I_{ut}$ . Según el comité ACI 435 (1984)  $I_{ut}$  puede ser hasta 30% mayor que  $I_g$ .

Toda la región en que el momento flector es mayor que el momento de agrietamiento, teóricamente, se encuentra agrietada. Pero, en la práctica, en esta región se presentan casos de secciones agrietadas (sección B-B) y no agrietadas. Las secciones en las que la grieta ha llegado al eje neutro se encuentran en el estado límite de agrietamiento, en el que la rigidez en flexión de la sección es  $E_c I_{cr}$  siendo  $I_{cr}$  el momento de inercia de la sección agrietada. En este estado el concreto en tracción deja de contribuir a la rigidez en flexión.

Bajo cargas de servicio la mayoría de las vigas se encuentran agrietadas. El grado de agrietamiento de una viga es variable a lo largo de su claro en correspondencia al nivel de esfuerzos de cada sección, de tal forma que las grietas son más anchas y profundas al centro del claro que en los extremos, donde las grietas son más estrechas.

Según el comité ACI 435 (1984) el uso de acero en compresión en una sección agrietada puede incrementar el momento de inercia  $I_{cr}$  hasta en un 15%.

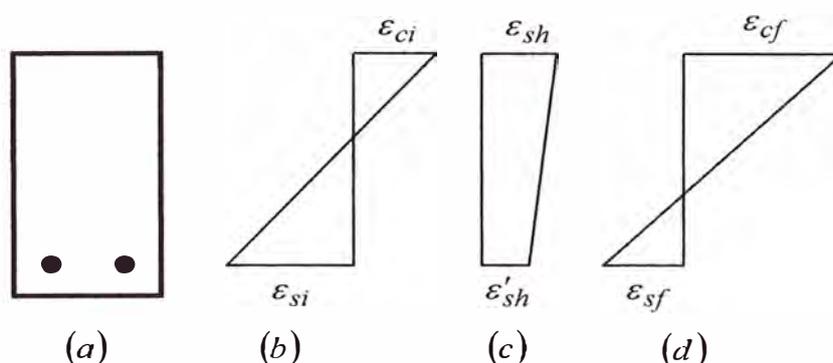
#### **1.4.2 Comportamiento bajo cargas de largo plazo**

Cuando una viga se somete a carga sostenida durante largos periodos de tiempo se producirán deflexiones adicionales las cuales pueden llegar a ser el doble o el triple de las deflexiones inmediatas o de corto plazo. La causa de esto es la formación de nuevas grietas, el aumento del ancho de las grietas existentes y fundamentalmente los efectos del flujo plástico y la contracción. La velocidad de deflexión adicional decrece conforme transcurre el tiempo. Se estima que aproximadamente el 90.5% de la deflexión de larga duración obtenida a los 20 años, ocurre durante los primeros 5 años de carga.

### 1.4.2.1 Efecto de la contracción

El efecto de la contracción en la deflexión de vigas de concreto armado depende del grado de restricción que se impone a la deformación por contracción libre que ocurre inevitablemente aún cuando el miembro se encuentre descargado. El grado de restricción está relacionado con la simetría o asimetría del refuerzo y, con la forma de la sección. En el caso de vigas reforzadas únicamente con acero en tracción (véase la figura 1.6), las fibras superiores se acortan libremente, mientras que las fibras al nivel del acero de refuerzo se acortan menos debido a la restricción que produce el refuerzo, de modo que  $\varepsilon'_{sh} < \varepsilon_{sh}$ .

Estas deformaciones desiguales a lo largo de la secciones de la viga, provocan curvaturas por contracción con el mismo signo que las producida por las cargas transversales y por lo tanto se producen incrementos en las deflexiones.



**Figura 1.6** Efecto de la contracción en una viga con refuerzo de tracción: (a) Sección transversal, (b) Deformación inicial, (c) Deformación por contracción, (d) Deformación total (deformación inicial + deformación por contracción)

Por otro lado, en el caso de vigas reforzadas con acero de tracción y de compresión, las fibras superiores ya no se acortan libremente debido a la restricción del acero de compresión, por lo que en este caso las curvaturas y las deflexiones son menores que cuando las vigas se refuerzan únicamente con acero de tracción. Si la sección es simétrica y con iguales porcentajes de refuerzo de tracción y compresión, la deformación por contracción es uniforme a lo largo de todas las secciones de la viga y, por

lo tanto, no existen curvaturas ni deflexiones debidas a la contracción, excepto las ocasionadas por las variaciones naturales en el concreto y en la colocación de las varillas.

Es evidente que se pueden reducir sustancialmente las deflexiones adicionales debidas a la contracción con la presencia de refuerzo de compresión ya que dicho refuerzo reduce la curvatura de contracción, proporcionando restricción a la contracción en la zona de compresión de la sección.

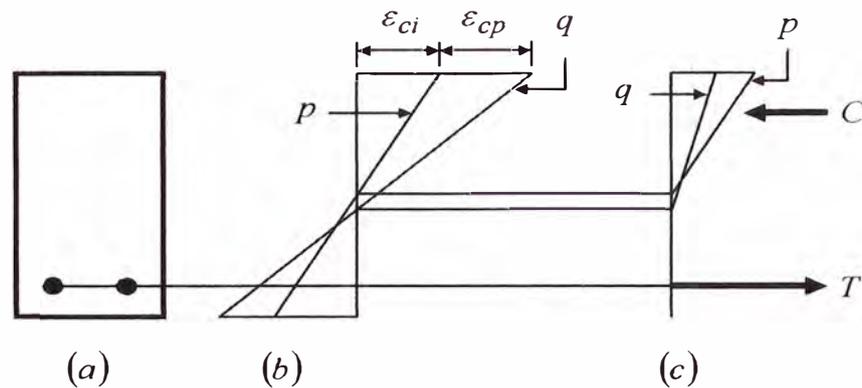
Las variables principales que influyen en las deflexiones producidas por la contracción son las mismas que las que influyen en la contracción del concreto simple agregándose a estas la relación entre el refuerzo de tracción y el refuerzo de compresión. Las deflexiones por contracción normalmente son del orden de 30% o menos de las deflexiones totales.

#### 1.4.2.2 Efecto del flujo plástico

En la figura 1.7 puede verse la distribución de deformaciones por efecto del flujo plástico del concreto. Las líneas  $p$  representan la distribución de deformaciones y esfuerzos inmediatamente después de la carga, mientras que las líneas  $q$  representan las distribuciones provocadas por la aplicación de la carga durante cierto tiempo, debido al flujo plástico.

Se puede observar que por efecto del flujo plástico, las deformaciones unitarias a compresión de la fibra extrema aumentan significativamente, mientras que los esfuerzos en el concreto disminuyen al aumentar la profundidad del eje neutro. En un miembro con refuerzo de compresión, además de la reducción de esfuerzo en el concreto provocado por el cambio de posición del eje neutro, existe otra disminución en el esfuerzo producida por la transferencia de esfuerzos del concreto al acero. En consecuencia, la reducción de esfuerzos en el concreto es mayor en los miembros con refuerzo en tracción y en compresión que en los miembros con refuerzo en tracción únicamente. El esfuerzo de tracción en el acero aumenta ligeramente, debido a que se reduce el brazo de palanca. La disminución del esfuerzo de compresión del concreto por efecto de la

transferencia de esfuerzos con el acero de compresión indica que el uso de acero de compresión reduce las deformaciones por flujo plástico al ser menores los esfuerzos de compresión del concreto. En un miembro de concreto armado el incremento en las deformaciones plásticas ocurren en un estado de esfuerzo variable, debido a los cambios que sufre la posición del eje neutro.



**Figura 1.7** Efecto del flujo plástico: (a) Sección transversal, (b) Deformaciones, (c) Esfuerzos

Las variables que influyen en las deflexiones por flujo plástico son las mismas que las que influyen en las deformaciones plásticas para el caso de concreto simple agregándose a estas la relación del refuerzo de compresión y la magnitud de los esfuerzos aplicados.



# 2

## Cálculo de deflexiones

---

### 2.1 Introducción

En este capítulo se revisan diversos métodos para el cálculo de deflexiones inmediatas y a largo plazo en vigas y losas unidireccionales de concreto armado. Para el cálculo de deflexiones inmediatas se revisan los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter, Fikry y Thomas, Grossman y Bischoff. Para el cálculo de deflexiones a largo plazo se revisan los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 además de los métodos de Yu y Winter y, el método modificado del ACI 435.

### 2.2 Cálculo de deflexiones de corto plazo o inmediatas

#### 2.2.1 Cálculo de deflexiones por la teoría elástica

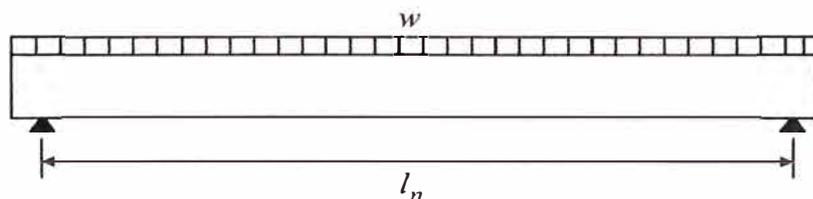
Para calcular las deflexiones inmediatas o de corto plazo de una viga de concreto armado pueden utilizarse las ecuaciones de la Resistencia de Materiales. Aún cuando dichas ecuaciones son aplicables a materiales homogéneos y elásticos puede aplicarse al concreto considerando que este se comporta elásticamente mientras que su esfuerzo máximo de compresión no sobrepase el valor de  $0.45f'_c$  y el esfuerzo de tracción en el acero sea menor que el límite de fluencia  $f_y$  que es el caso de la mayoría de las vigas en condiciones de servicio.

La deflexión utilizada en el diseño es la deflexión máxima de la viga que puede tomarse sin mucho error y a efectos de simplificación, como la deflexión producida en el centro del tramo aún cuando no exista simetría de cargas y condiciones de apoyo.

Para el caso de una viga simplemente apoyada, de sección uniforme, sujeta a una carga uniformemente distribuida a lo largo de todo su tramo como la mostrada en la figura 2.1, la deflexión inmediata  $\Delta_i$ , al centro del tramo, puede ser obtenida por la siguiente ecuación:

$$\Delta_i = \frac{5wl_n^4}{384EI} = \frac{5M_0l_n^2}{48EI} \quad (2.1)$$

donde  $w$  es la intensidad de la carga,  $l_n$  es la longitud del tramo libre,  $E$  es el módulo de elasticidad del material de la viga,  $I$  es el momento de inercia de la sección y  $M_0 = wl_n^2 / 8$  es el momento flector en el centro del tramo.



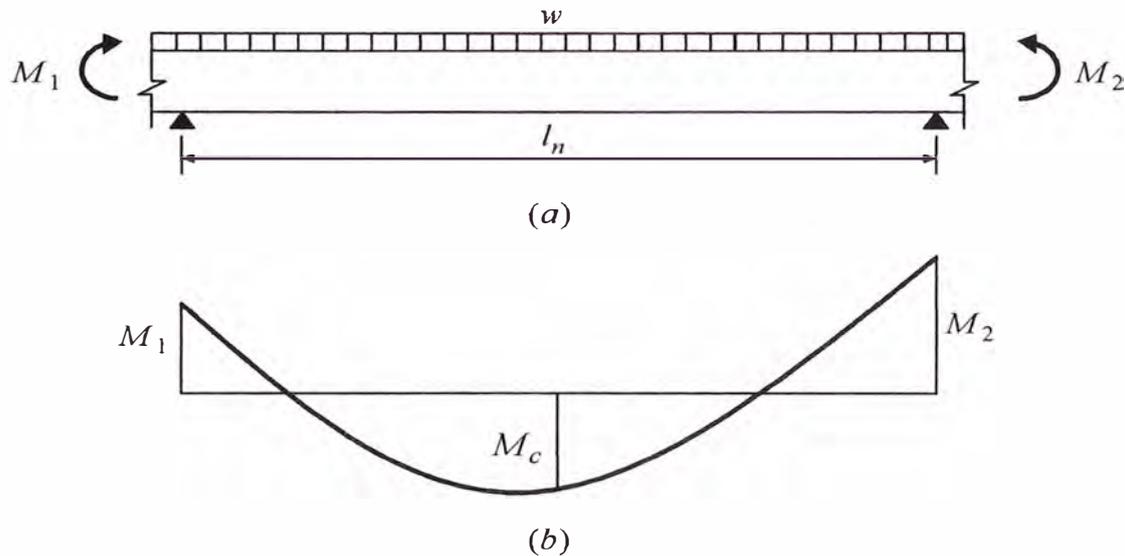
**Figura 2.1** Viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente distribuida

Para el caso de una viga continua de sección uniforme, sujeta a una carga uniformemente distribuida a lo largo de todo su tramo como la mostrada en la figura 2.2, la deflexión inmediata, al centro del tramo, puede ser obtenida mediante el principio de superposición con la siguiente ecuación:

$$\Delta_i = \frac{5M_0l_n^2}{48EI} - \frac{M_1l_n^2}{16EI} - \frac{M_2l_n^2}{16EI} \quad (2.2)$$

donde  $M_0$  es el momento flector en el centro del tramo correspondiente a

una viga simplemente apoyada con la misma carga y longitud que el tramo continuo,  $M_1$  es el momento flector en el extremo izquierdo y  $M_2$  es el momento flector en el extremo derecho.



**Figura 2.2** Tramo de viga continua sometida a momento flexionante (a) Tramo de viga, (b) Diagrama de momentos flectores

Mediante el principio de superposición, el momento flector en el centro del tramo continuo viene dado por:  $M_c = M_0 - (M_1 + M_2)/2$ . Despejando  $M_0$  y reemplazándolo en la ecuación 2.2, se obtiene la siguiente ecuación.

$$\Delta_i = \frac{5l_n^2}{48EI} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right) \quad (2.3)$$

La ecuación 2.3 puede ser aplicada a vigas simplemente apoyadas sustituyendo  $M_1$  y  $M_2$  por 0 con lo cuál la ecuación 2.3 se reduce a la ecuación 2.1.

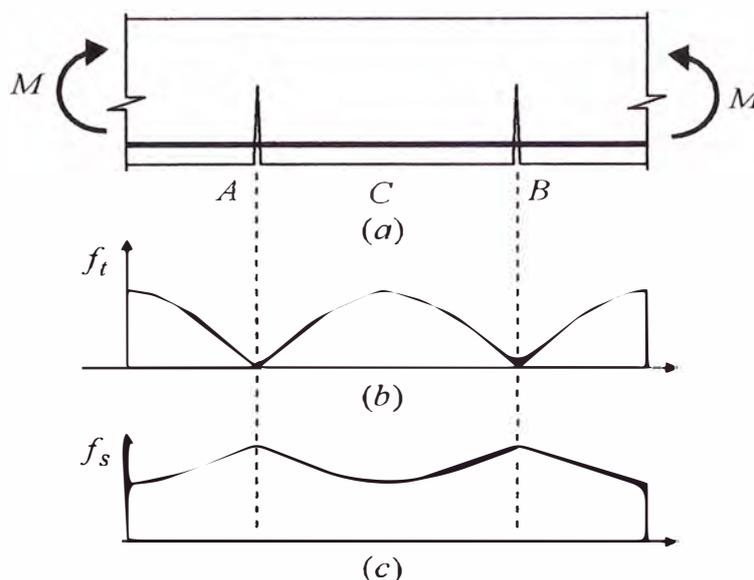
También puede usarse la siguiente ecuación 2.4 deducida por Branson para cargas uniformemente distribuidas:

$$\Delta_i = \kappa \frac{5}{48} \frac{M l_n^2}{EI} \quad (2.4)$$

donde  $M$  es el momento del apoyo para voladizos y el momento del centro del tramo para vigas simplemente apoyadas y continuas. Los valores de  $\kappa$  son  $12/5$  para voladizos,  $1$  para tramos simplemente apoyados, y  $1.20 - 0.20M_0 / M_c$  para tramos continuos, siendo  $M_0 = wl_n^2 / 8$  y  $M_c$  es el momento central.

### 2.2.2 Rigidez efectiva por flexión

Considere el segmento de viga de la figura 2.3 sometida a un momento flector constante  $M$ .

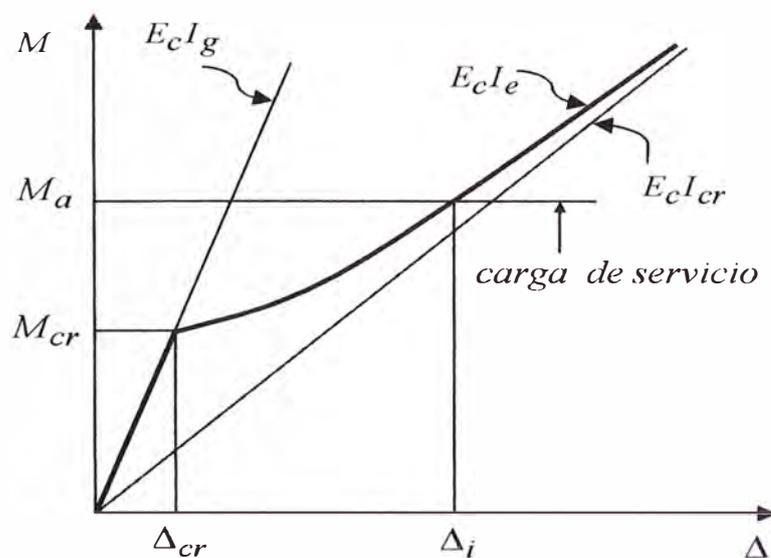


**Figura 2.3** Efecto rigidizante de la tracción: (a) Tramo de viga agrietada, (b) Esfuerzos de tracción en el concreto  $f_t$  y (c) Esfuerzos de tracción en el acero  $f_s$

Si  $M < M_{cr}$ , la viga se encuentra libre de grietas en toda su extensión por lo que la rigidez efectiva  $E_c I_e$  de la viga, en la que  $I_e$  es el momento de inercia efectivo, sería  $E_c I_g$ . Si  $M > M_{cr}$ , la viga se encontraría, teóricamente, agrietada en toda su extensión, por lo que la rigidez efectiva de la viga sería  $E_c I_{cr}$ . Pero, en la práctica existen segmentos de viga sin agrietar y grietas que no han llegado al eje neutro. En las secciones en las que las grietas han alcanzado el eje neutro (secciones A y B de la figura 2.3), el acero de refuerzo transmite toda la tracción. Sin embargo, en el concreto situado entre las grietas (sección C en la figura 2.3) o en las

secciones donde las grietas no han propagado profundamente en la viga, el concreto transmite cierto esfuerzo de tracción. Esta tracción transmitida al concreto hace que la rigidez a flexión entre las grietas sea mayor que en las grietas. A este efecto se conoce como el *efecto rigidizante de la tracción*. En consecuencia la rigidez real o efectiva de una viga  $E_c I_e$  se encuentra entre la rigidez de la viga correspondiente al estado en el se encuentra libre de grietas  $E_c I_g$  y la rigidez de la viga correspondiente al estado en que se encuentra completamente agrietada  $E_c I_{cr}$ . De manera que si  $M \leq M_{cr}$ ,  $I_e = E_c I_g$ ; pero cuando  $M > M_{cr}$ ,  $E_c I_{cr} < E_c I_e < E_c I_g$ .

En la figura 2.4 se muestra una curva típica carga-deflexión para la sección de máximo momento flector de una viga o losa de concreto armado sometida a cargas de servicio.



**Figura 2.4** Curva típica carga-deflexión

Se han propuesto diversos métodos para calcular el momento de inercia efectivo  $E_c I_e$ , teniendo en cuenta el efecto rigidizante de la tracción, que han sido adoptados por los códigos de diseño como se verá más adelante en este capítulo.

### 2.2.3 Método del reglamento ACI 318-05

El reglamento ACI 318-05 ha adoptado la ecuación empírica 2.5 propuesta por Branson (1963) para el cálculo del momento de inercia efectivo de una viga simplemente apoyada de sección constante en una forma que incluye el nivel de agrietamiento y el efecto rigidizante de la tracción:

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \quad (2.5)$$

En la que  $M_a$  es el momento flector máximo por cargas de servicio para el nivel de carga para el cual se calcula la deflexión,  $M_{cr}$  es el momento de agrietamiento,  $I_g$  es el momento de inercia de la sección bruta e  $I_{cr}$  es el momento de inercia de la sección agrietada.

El nivel de agrietamiento está incluido, en la ecuación 2.5, a través de la relación  $M_{cr}/M_a$ , mientras que el efecto rigidizante de la tracción está incluido por el hecho de que  $I_e$  se encuentra entre  $I_g$  e  $I_{cr}$ . La ecuación 2.5 es aplicable sólo en el caso en que  $M_a \geq M_{cr}$ , es decir cuando la viga se encuentra completamente agrietada. En caso que  $M_a < M_{cr}$ ,  $I_e = I_g$ . Para vigas severamente agrietadas, con  $M_a/M_{cr} > 3$ ,  $I_e \cong I_{cr}$ . La figura 2.5 muestra gráficamente la variación típica de  $I_e$  versus  $M_{cr}/M_a$  según la ecuación 2.5.

Para el caso de vigas continuas el reglamento ACI permite que el valor de  $I_e$  se tome como el promedio de los valores de  $I_e$ , obtenidos con la ecuación 2.5, correspondientes a las secciones críticas de máximo momento positivo y negativo. Así:

Para vigas continuas en ambos extremos:

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5I_{ec} \quad (2.6)$$

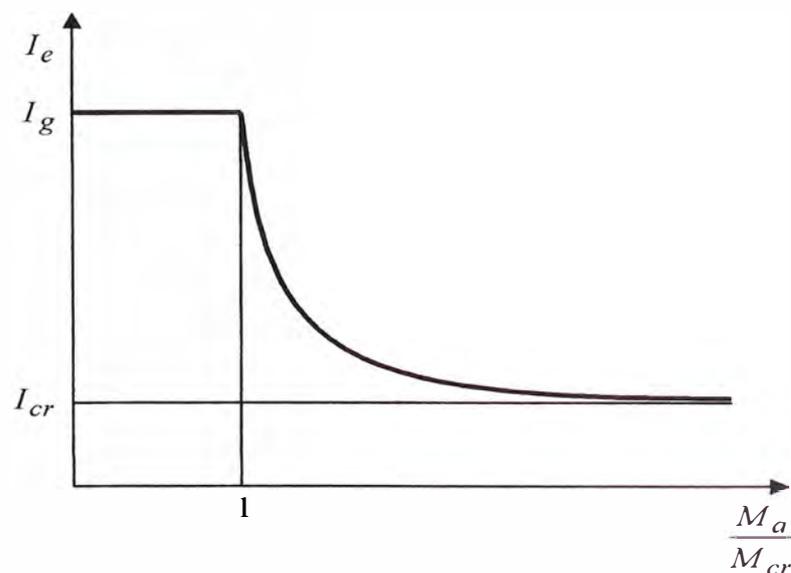
Para vigas continuas en un solo extremo:

$$I_e = 0.5(I_{ex} + I_{ec}) \quad (2.7)$$

Donde  $I_{e1}$  es el momento de inercia efectivo del extremo izquierdo,  $I_{ec}$  es el momento de inercia efectivo del centro,  $I_{e2}$  es el momento de inercia efectivo del extremo derecho e  $I_{ex}$  es el momento de inercia efectivo del extremo continuo para el caso de tramos continuos en un sólo extremo.

Para vigas en voladizo se toma  $I_e$  al correspondiente valor calculado, con la ecuación 2.5, para el apoyo del voladizo.

Según el comentario del código ACI 318-05, el uso de las propiedades en el centro de la luz para vigas continuas de sección constante, es considerado satisfactorio en cálculos aproximados, principalmente porque la rigidez al centro de la luz (incluyendo el efecto del agrietamiento) tiene efecto dominante sobre las deflexiones. De manera que, en el caso de vigas continuas, para cálculos aproximados, se permite tomar como  $I_e$  al correspondiente valor calculado, con la ecuación 2.5, para la sección central.



**Figura 2.5** Variación de  $I_e$  con la relación  $M_a / M_{cr}$

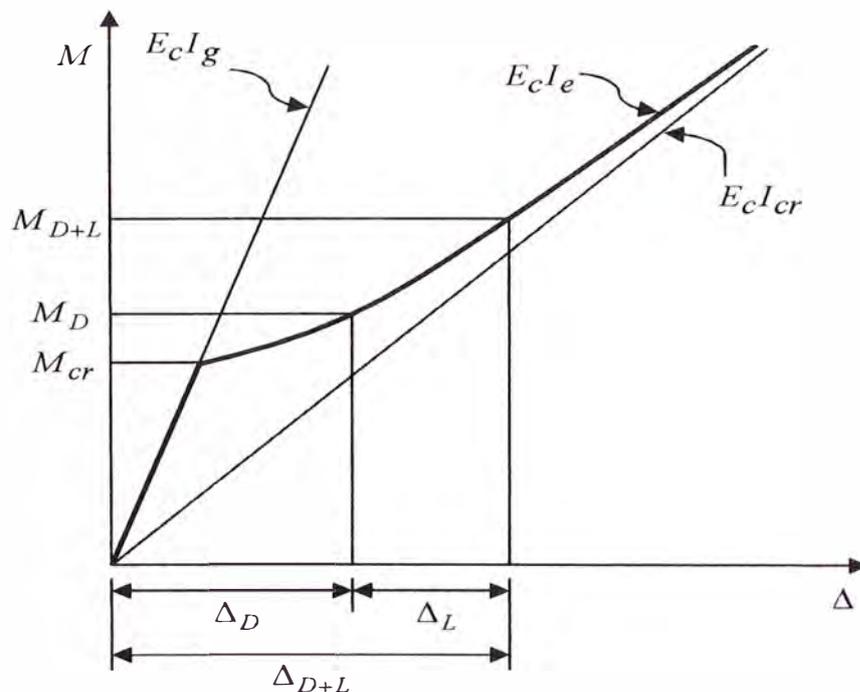
Según el comité 435 del ACI, en base a los estudios de Branson, puede obtenerse una mayor precisión en el cálculo de las deflexiones inmediatas de vigas continuas si se usa un promedio ponderado para el cálculo del momento de inercia efectivo según las siguientes ecuaciones:

- Para vigas continuas en ambos extremos:

$$I_e = 0.15(I_{e1} + I_{e2}) + 0.70 I_{ec} \quad (2.8)$$

- Para vigas continuas en un solo extremo:

$$I_e = 0.15 I_{ex} + 0.85 I_{ec} \quad (2.9)$$



**Figura 2.6** Deflexión debida a la carga viva y la carga muerta

Dado que la rigidez efectiva varía con el momento aplicado, el comportamiento carga-deflexión de una viga de concreto armado es no lineal, por lo tanto, no puede aplicarse el principio de superposición en el cálculo de deflexiones. Así, la deflexión producida por la carga viva únicamente  $\Delta_L$ , se obtiene como la diferencia entre la deflexión total debida a la acción conjunta de la carga muerta más la carga viva  $\Delta_{D+L}$  y

la deflexión debida únicamente a la carga muerta  $\Delta_D$  en la forma:

$$\Delta_L = \Delta_{D+L} - \Delta_D. \text{ Esto puede verse en la figura 2.6.}$$

Aún cuando la ecuación de Branson ha sido adoptada por varios códigos de diseño, en los últimos años se han efectuado serias observaciones a su naturaleza y a su exactitud. La principal observación es que dado que la ecuación de Branson esta basada únicamente en ensayos realizados sobre vigas sometidas a cargas uniformemente distribuidas, no toma en cuenta el tipo de carga en la determinación del momento de inercia efectivo. Al-Zaid et. al (1991) han mostrado que el momento de inercia efectivo depende del tipo de carga. Por ejemplo, ellos encontraron, en una de las pruebas, que el momento de inercia efectivo, obtenido experimentalmente, para una viga simplemente apoyada sometida a una carga concentrada central fue 20% mayor que el momento de inercia efectivo, obtenido experimentalmente, correspondiente a una viga similar sometida a una carga uniformemente distribuida. Las pruebas llevaron a la conclusión de que la ecuación de Branson subestima el valor de  $I_e$  (o sobrestima la deflexión) para combinaciones de cargas distintas a la uniformemente distribuida. Posteriores pruebas de Al-Shaikh y Al-Zaid (1993) mostraron que la magnitud del error de la ecuación de Branson, causada por el tipo de carga, es mayor en miembros de concreto fuertemente reforzados. Ghali (1993) ha mostrado que la ecuación de Branson subestima la deflexión considerablemente cuando la cuantía de acero  $\rho$  es pequeña, generalmente menor que 0.6%, y la relación  $M_a / M_{cr}$  es cercana a 1. Este error depende en gran parte de la forma del diagrama de momentos. Este problema ha sido reflejado en el reglamento australiano AS 3600 (2001) limitando el valor de  $I_e$  a un máximo de  $0.6I_g$  para vigas con una cuantía de acero menor que 0.5%. Bischoff (2007) ha hecho notar que la cuantía de acero  $\rho$  de las vigas consideradas por Branson para deducir su ecuación están en el rango de 1 a 3.2% y que los ensayos no incluyeron vigas con  $\rho < 1\%$ , que es el caso de losas y vigas ligeramente reforzadas. Consecuentemente la ecuación de Branson es adecuada para cuantías de acero moderadas a altas. A

estas observaciones hay que agregar que el cálculo del momento de inercia de la sección transformada agrietada  $I_{cr}$  puede resultar tedioso y complejo, especialmente en el caso de secciones T.

#### 2.2.4 Método del reglamento NTE E.060.89

En el reglamento NTE E.060.89 el momento de inercia efectivo  $I_e$  de una sección se obtiene de la siguiente forma:

Para  $M < M_{cr}$

$$I_e = I_g \quad (2.10)$$

Para  $M \geq M_{cr}$

$$I_e = I_{cr} \quad (2.11)$$

En la que  $M$  es el momento flector de la sección por cargas de servicio para el nivel de carga para el cual se calcula la deflexión,  $M_{cr}$  es el momento de agrietamiento,  $I_g$  es el momento de inercia de la sección bruta e  $I_{cr}$  es el momento de inercia de la sección agrietada.

Las ecuaciones 2.10 y 2.11 pueden resumirse de la siguiente manera:

$$I_e = k I_g + (1 - k) I_{cr} \quad (2.12)$$

Para valores de  $k$  dado por:

$$k = \begin{cases} 1 & , \text{si } M_{cr} / M > 1 \\ 0 & , \text{si } M_{cr} / M \leq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

Según el reglamento, el valor de  $I_e$  usado en el cálculo de deflexiones es el valor de  $I_e$ , calculado con la ecuación 2.10 ó 2.11, correspondiente a la

sección central para vigas simplemente apoyadas y a la sección en el apoyo para vigas en voladizo.

Para vigas continuas se toma como  $I_e$  al promedio calculado con las siguientes ecuaciones:

Para tramos continuos en ambos extremos:

$$I_e = (I_{e1} + I_{e2} + 2I_{ec}) / 4 \quad (2.14)$$

Para tramos continuos en un solo extremo:

$$I_e = (I_{ex} + 2I_{ec}) / 3 \quad (2.15)$$

Donde  $I_{e1}$  es el momento de inercia efectivo en el extremo izquierdo,  $I_{ec}$  es el momento de inercia efectivo del centro,  $I_{e2}$  es el momento de inercia efectivo del extremo derecho e  $I_{ex}$  es el momento de inercia efectivo del extremo continuo para el caso de tramos continuos en un sólo extremo.

El reglamento NTE E.060.89 no toma en cuenta el efecto rigidizante de la tracción, por lo que, subestima la rigidez efectiva de la viga y, por lo mismo, sobrestima la deflexión, especialmente en el caso de vigas con bajos niveles de agrietamiento.

### 2.2.5 Método de Yu y Winter

Yu y Winter (1960) han propuesto dos métodos (método A y método B) para el cálculo de deflexiones inmediatas, siendo el método B un refinamiento del método A. Estos métodos fueron verificados con los resultados de 90 ensayos de laboratorio encontrándose que brindan una exactitud de  $\pm 20\%$ .

#### 2.2.5.1 Método A

Para el caso de tramos simples se toma como  $I_e$  al momento de inercia de

la sección agrietada de la sección central  $I_{cr}$ .

Para el caso de tramos continuos se usa como  $I_e$  al promedio simple de los valores de  $I_{cr}$  de las secciones críticas de máximo momento positivo y negativo.

### 2.2.5.2 Método B

El uso de la sección transformada agrietada en el método A implica que el concreto en la zona de tracción no contribuye a la rigidez del miembro, es decir, el método A no toma en cuenta el efecto rigidizante de la tracción. En el método B, para tomar en cuenta este efecto, se multiplican las deflexiones inmediatas calculadas con el método A por un factor de corrección  $F_c$  dado por la siguiente ecuación:

$$F_c = 1 - b \frac{M_1}{M_a} \quad (2.16)$$

en la que  $M_1$  viene dada por la siguiente ecuación 2.17 en  $kg$ :

$$M_1 = 0.04(f'_c)^{2/3} h (h - c) \quad (2.17)$$

donde  $b$  es el ancho de la viga en la zona de tracción en  $cm$ ,  $M_a$  es el momento máximo bajo cargas de servicio en  $kg.cm$ ,  $h$  es la altura de la viga en  $cm$  y  $c$  es la profundidad del eje neutro en  $cm$ . En el caso de vigas T con tracción en el alma, se reemplaza  $b$  por  $b_w$ .

El método B puede aplicarse directamente al cálculo de la deflexión inmediata, con las fórmulas usuales de la resistencia de materiales, usando un momento de inercia efectivo  $I_e$  de la forma:

$$I_e = \frac{I_{cr}}{F_c} = \frac{I_{cr}}{1 - b \frac{M_1}{M_a}} \quad (2.18)$$

En forma similar al método A, para el caso de tramos continuos se usa como  $I_e$  al promedio simple de los valores de  $I_e$  de las secciones críticas de máximo momento positivo y negativo.

Comprobaciones con datos de prueba indicaron que el método B proporciona mejores resultados que el método A.

### 2.2.6 Método de Grossman

Grossman (1981) realizó un estudio paramétrico del momento de inercia efectivo calculado con la ecuación 2.5 en vigas y losas unidireccionales de concreto armado. El estudio asumió que la ecuación de Branson es exacta. De acuerdo con los resultados obtenidos, Grossman desarrolló las ecuaciones 2.19 y 2.20 que eliminan la necesidad de calcular el momento de inercia de la sección agrietada  $I_{cr}$ :

Para  $\frac{M_a}{M_{cr}} \leq 1.6$

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^2 I_g \leq I_g \quad (2.19)$$

Para  $1.6 < \frac{M_a}{M_{cr}} \leq 10$

$$I_e = 0.1 K_e \left( \frac{M_a}{M_{cr}} \right) I_g \leq I_g \quad (2.20)$$

Donde:

$$K_e = \frac{d}{0.9h} \left[ \frac{\sqrt{2323/w_c}}{0.4 + \left( \frac{1.4M_a}{\phi M_n} \right) \left( \frac{f_y}{7031} \right)} \right] \quad (2.21)$$

Pero,  $I_e$  calculado con las ecuaciones 2.19 ó 2.20 no debe ser menor que:

$$I_e = 0.35K_e I_g \quad (2.22)$$

Donde  $M_a$  es el momento máximo por cargas de servicio en  $kg.m$ ,  $f_y$  es la resistencia del acero a la fluencia en  $kg/cm^2$ ,  $d$  es el peralte efectivo en  $cm$ ,  $h$  es la altura en  $cm$ ,  $w_c$  es la densidad del concreto en  $kg/m^3$ ,  $M_n$  es el momento resistente o nominal en  $kg.m$  y  $\phi$  es el factor de reducción de resistencia.

El método de Grossman produce resultados dentro del 20% de los resultados obtenidos con la ecuación 2.5 de Branson.

### 2.2.7 Método de Fikry y Thomas

Fikry y Thomas (1998) propusieron un método para calcular el momento de inercia efectivo que considera los efectos del tipo e intensidad de la carga y la cuantía de acero de refuerzo. Adicionalmente el método elimina el cálculo de  $I_{cr}$  al integrar una aproximación de  $I_{cr}$  denominada  $I_{cre}$ . La ecuación propuesta para calcular el momento de inercia efectivo  $I_e$  es:

$$I_e = I_{cre} + (I_g - I_{cre}) e^{\phi} \quad (2.23)$$

Donde  $I_e$  es el momento de inercia efectivo,  $I_{cre}$  es el momento de inercia aproximado de la sección agrietada,  $I_g$  es el momento de inercia de la sección bruta y  $\phi$  es un coeficiente empírico dado por la siguiente ecuación.

$$\phi = \begin{cases} -(M_a / M_{cr})(L_{cr} / L_{ip})\rho & \text{Para } \rho > 1\% \\ -(M_a / M_{cr})(L_{cr} / L_{ip}) & \text{Para } \rho \leq 1\% \end{cases} \quad (2.24)$$

Donde  $M_a$  es el momento flector máximo por cargas de servicio,  $M_{cr}$  es el momento de agrietamiento,  $L_{ip}$  es la longitud del tramo entre puntos de inflexión,  $L_{cr}$  es la longitud del tramo en la que ocurre el agrietamiento y  $\rho$  es la cuantía de acero en tracción dado en porcentaje. Cuando  $M_a \leq M_{cr}$ , la longitud en la que ocurre el agrietamiento  $L_{cr}$  es igual a 0, con lo que el valor de  $\phi$  también es igual a 0. Sustituyendo  $\phi = 0$  en la ecuación 2.23 se obtiene  $I_e = I_g$ . Esto satisface la condición de que  $I_e \leq I_g$ . En las figuras 2.7 se muestran  $L_{cr}$  y  $L_{ip}$  para vigas simples y continuas.

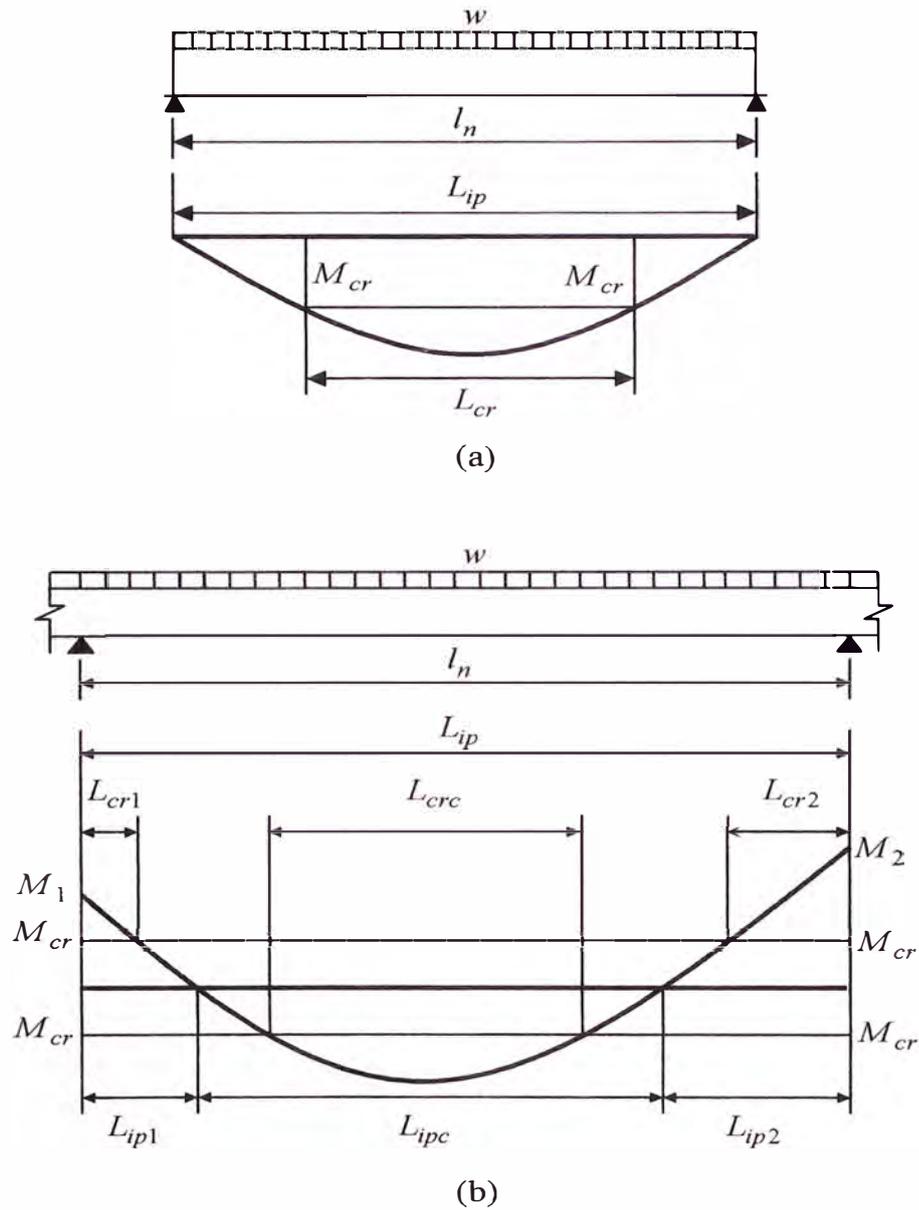
Para secciones rectangulares simplemente reforzadas la obtención de  $I_{cre}$  se efectúa con la siguiente ecuación:

$$I_{cre} = (\alpha + \beta n \rho) (b d^3 / 12) \quad (2.25)$$

Donde  $\alpha$  y  $\beta$  son coeficientes que se toman de la tabla 2.1,  $n$  es la relación modular,  $b$  es el ancho de la sección rectangular y  $d$  es el peralte efectivo de la sección rectangular. La ecuación 2.25 permite obtener  $I_{cr}$  para secciones rectangulares simplemente reforzadas con una desviación de  $\pm 6\%$ .

Para secciones rectangulares doblemente reforzadas o para secciones T simple o doblemente reforzadas, la obtención de  $I_{cre}$  requiere encontrar una sección rectangular equivalente simplemente reforzada de ancho equivalente  $b_e$  y porcentaje de refuerzo equivalente en tracción  $\rho_e$ , con lo que puede usarse la siguiente modificación de la ecuación 2.25:

$$I_{cre} = (\alpha + \beta n \rho_e) (b_e d^3 / 12) \quad (2.26)$$



**Figura 2.7** Definición de  $L_{cr}$  y  $L_{ip}$ : (a) Viga simplemente apoyada, (b) Viga continua

Para la obtención de  $\alpha$  y  $\beta$  se usa la tabla 2.1 sustituyendo  $n\rho$  por  $n\rho_e$ .

**Tabla 2.1** Coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  para la ecuación 2.25

$n\rho$	$\alpha$	$\beta$
$n\rho \leq 1.9\%$	0.003	0.095
$1.9\% < n\rho \leq 5\%$	0.05	0.07
$5\% < n\rho \leq 17\%$	0.16	0.05
$17\% < n\rho \leq 32\%$	0.50	0.03
$n\rho > 32\%$	0.80	0.02

Para la obtención de  $b_e$  y  $\rho_e$  para secciones T doblemente reforzadas, se usan las siguientes ecuaciones:

$$b_e = (\alpha' n \rho' (d/d') + \alpha_f (b/b_w - 1) + 1)b_w \quad (2.27)$$

$$\alpha' = 6 \times 10^{-4} + (d'/d)(1 - 2d'/d)^2 / 20 \quad (2.28)$$

$$\alpha_f = \min((1 + 8h_f/d)/3, 0.9) \quad (2.29)$$

$$\rho_e = \rho b_w / b_e \quad (2.30)$$

En la que  $\rho'$  es la cuantía de acero en compresión dado en porcentaje. Para secciones T simplemente reforzadas se sustituyen  $A'_s$  y  $\rho'$  por 0 con lo que la ecuación 2.27 se convierte en:  $b_e = (\alpha_f (b/b_w - 1) + 1)b_w$ .

Para la obtención de  $b_e$  y  $\rho_e$  para secciones rectangulares doblemente reforzadas se sustituye  $b_w$  por  $b$  en las ecuaciones 2.27 y 2.30:

$$b_e = (\alpha' n \rho' (d/d') + 1)b \quad (2.31)$$

$$\alpha' = 6 \times 10^{-4} + (d'/d)(1 - 2d'/d)^2 / 20 \quad (2.32)$$

$$\rho_e = \rho b / b_e \quad (2.33)$$

Para secciones rectangulares simplemente reforzadas se sustituyen  $A'_s$  y  $\rho'$  por 0 con lo que las ecuaciones 2.31 y 2.33 se convierten en:  $b_e = b$  y  $\rho_e = \rho$ .

El momento de inercia efectivo para tramos continuos puede ser tomado como el promedio de los momentos de inercia efectivos de las zonas de máximo momento positivo y negativo.

La ventaja del método es que toma en cuenta la intensidad de la carga

(reflejado por la relación  $M_a / M_{cr}$ ), el tipo de carga (reflejado por la relación  $L_{cr} / L_{ip}$ ), el tipo y magnitud del refuerzo (reflejado por el porcentaje de acero  $\rho$ ) y la resistencia del concreto (reflejado por  $M_{cr}$ ). Si bien es cierto, el método evita el cálculo de  $I_{cr}$ , la dificultad podría estar en el cálculo de  $L_{cr} / L_{ip}$ .

### 2.2.8 Método de Bischoff

Bischoff (2007) ha propuesto la ecuación 2.34 que produce mejores resultados que los de la ecuación de Branson para valores de  $\rho$  menores que 1%. Esto corrige el problema de la ecuación de Branson que tiende a subestimar la deflexión en losas y vigas con bajas cuantía de acero de refuerzo. La deflexión calculada con la ecuación de Branson para valores de  $\rho$  menores que 1%, puede ser 50% menor que la deflexión calculada con la ecuación de Bischoff. Para valores de  $\rho$  mayores que 1% las ecuaciones de Branson y de Bischoff producen resultados similares. De manera que la ecuación de Bischoff puede ser aplicada para todo el rango de valores de  $\rho$ .

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left[1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right]} \leq I_g \quad (2.34)$$

## 2.3 Cálculo de deflexiones a largo plazo o sostenidas

### 2.3.1 Método del reglamento ACI 318-05

Según el ACI 318-05 la deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción ante la aplicación de cargas sostenidas se calcula multiplicando la deflexión inmediata debida a las cargas sostenidas por un factor  $\lambda$  dado por la siguiente ecuación empírica:

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'} \quad (2.35)$$

Donde  $\rho'$  ( $= A'_s / bd$ ) es la cuantía de acero en compresión en el centro del tramo para vigas simplemente apoyadas y continuas, y en el empotramiento para vigas en voladizo;  $\xi$  es un factor dependiente del tiempo dado en la tabla 2.2. Para otros tiempos de duración de la carga, el valor de  $\xi$  puede obtenerse de la figura 2.8.

También puede calcularse el valor de  $\xi$  utilizando la siguiente ecuación que ajusta adecuadamente a los valores especificados por el reglamento ACI 318-05:

$$\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705 \quad (2.36)$$

La ecuación 2.39 es válida para  $0 < t \leq 60$ .

Si la deflexión inmediata debida a la carga sostenida es  $\Delta_i$ , la deflexión adicional dependiente del tiempo debida al flujo plástico y la contracción  $\Delta_{cp+sh}$  será:

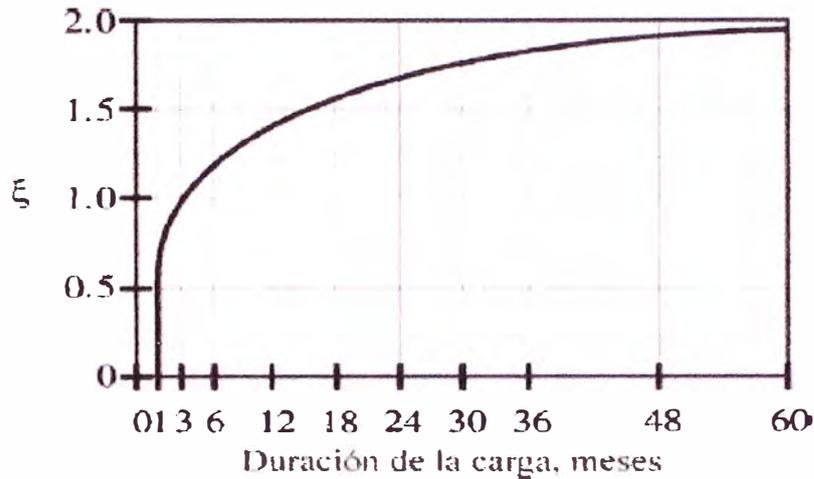
$$\Delta_{cp+sh} = \lambda \Delta_i \quad (2.37)$$

y la deflexión total a largo plazo  $\Delta_t$  será:

$$\Delta_t = \Delta_i + \Delta_{sh+cp} = (1 + \lambda) \Delta_i \quad (2.38)$$

**Tabla 2.2 - Factor  $\xi$**

Duración de la carga	$\xi$
3 meses	1.0
6 meses	1.2
12 meses	1.4
60 meses	2.0



**Figura 2.8** Factores para las deflexiones a largo plazo

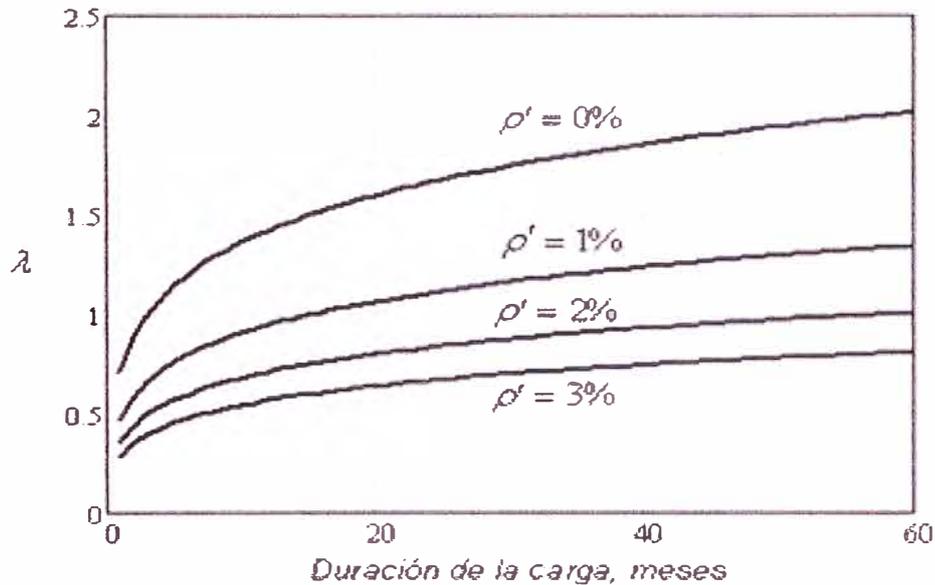
Para obtener una mayor precisión en el caso de vigas continuas se puede tomar un valor promedio de  $\lambda$  tomado entre los valores de  $\lambda$  correspondientes a las secciones críticas de máximo momento positivo y negativo de manera similar a como se calcula el momento de inercia efectivo  $I_e$ .

La cantidad  $1/(1 + 50 \rho')$  es un factor de reducción que es esencialmente una propiedad de la sección que refleja los efectos benéficos del refuerzo en compresión  $A'_s$  en la reducción de la deflexión de largo plazo, mientras que  $\xi$  es esencialmente una propiedad del material dependiente del flujo plástico y la contracción del concreto. La ecuación 2.35 se aplica por igual tanto al concreto normal como al concreto ligero.

Para mostrar la variación del factor  $\lambda$  con el tiempo para distintos valores de  $\rho'$  se preparó la figura 2.9. La gráfica muestra el decremento de la deflexión sostenida como consecuencia de un incremento en el valor de  $\rho'$ .

Puesto que no toda la carga viva está presente todo el tiempo, sólo se consideran como cargas sostenidas a una parte de la carga viva más la carga muerta permanente. El reglamento ACI 318-05 no especifica que parte de la carga viva debe considerarse como sostenida para el cálculo de

la deflexión a largo plazo. El reglamento australiano AS 3600 (2001) recomienda tomar 60% para oficinas y 100% para depósitos para el cálculo de la deflexión inmediata y, 25% para oficinas y 80% para depósitos para el cálculo de la deflexión a largo plazo.



**Figura 2.9** Factor  $\lambda$  en función de  $\rho$  y la duración de la carga

Investigaciones de Paulson et. al (1991) han mostrado que la ecuación 2.35 produce resultados mayores que los reales para concretos de alta resistencia. Esto se debe a que el flujo plástico en los concretos de alta resistencia es menor que en los concretos de resistencia normal. Para corregir este defecto de la ecuación 2.35 han propuesto la siguiente modificación, basado en 6 programas de prueba a largo plazo:

$$\lambda = \frac{\mu \xi}{1 + 50 \mu \rho'} \quad (2.39)$$

en la que:

$$\mu = 1.4 - f'_c / 700, \quad 0.4 \leq \mu \leq 1.0 \quad (2.40)$$

Estando  $f'_c$  en  $kg/cm^2$ . Con la ecuación 2.40, la ecuación 2.39 produce los mismos resultados que la ecuación 2.35 para valores de  $f'_c$  menores o

iguales que  $280 \text{ kg/cm}^2$ , y mejora mucho las predicciones para concretos de resistencias entre  $280 \text{ kg/cm}^2$  y  $840 \text{ kg/cm}^2$ .

Por otro lado, Sharif y Dilger (1998) han propuesto la ecuación 2.41, en base a las pruebas de laboratorio de otros investigadores, para obtener el valor de  $\mu$ .

$$\mu = 0.25 + 200 / f'_c \leq 1.0 \quad (2.41)$$

Para  $f'_c$  en  $\text{kg/cm}^2$ . Con la ecuación 2.41, la ecuación 2.39 produce los mismos resultados que la ecuación 2.35 para valores de  $f'_c$  menores o iguales que  $267 \text{ kg/cm}^2$ .

El factor de corrección  $\mu$  en el numerador refleja el efecto de la resistencia del concreto en la deflexión a largo plazo, y  $\mu$  en el denominador refleja la disminución de la influencia de  $\rho'$  con el incremento de la resistencia del concreto.

Al aplicar la ecuación 2.35 a losas se han encontrado divergencias sustanciales. Según esta ecuación, el máximo valor de  $\lambda$  es 2, que corresponde al caso en que no hay acero de compresión; con lo cuál, la máxima deflexión total a largo plazo (la deflexión inmediata más la deflexión adicional debida a la carga sostenida) es igual a 2. Sin embargo, Taylor y Heiman (1977) han reportado deflexiones totales a largo plazo de hasta 7.5 veces la deflexión inmediata para losas planas después de 2.3 años de carga.

### 2.3.2 Método del reglamento NTE E.060.89

El método del reglamento NTE E060.89 sigue el mismo procedimiento que el del reglamento ACI 318-05, es decir, el cálculo de la deflexión adicional debida al flujo plástico y a la contracción se calcula multiplicando la deflexión inmediata debida a las cargas sostenidas por el factor  $\lambda$  de la

ecuación 2.39.

### 2.3.3 Método de Yu y Winter

Para el cálculo de deflexiones de largo plazo, Yu y Winter desarrollaron empíricamente dos métodos de cálculo, sobre la base de 68 ensayos de laboratorio. Estos métodos son el método C y el método D. Comparaciones con datos de prueba indicaron que el método D proporciona mejores resultados que el método C.

#### 2.3.3.1 Método C

En este método, la deformación total, incluyendo la deflexión instantánea y la contribución del flujo plástico y la contracción, puede ser calculada mediante las fórmulas usuales de la Resistencia de Materiales usando un módulo de elasticidad reducido  $E_{cr}$  que depende de la resistencia del concreto, de la edad en la que se carga y la duración de la carga de acuerdo a la tabla 2.3.

#### 2.3.3.2 Método D

En este método, la deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción, se calcula multiplicando la deflexión instantánea obtenida con el método A por un factor  $F$  que depende del porcentaje de acero en compresión y de la duración de la carga aplicada. Este factor se obtuvo estadísticamente a partir de los resultados de 68 ensayos de laboratorio. En la tabla 2.4 se presentan los factores recomendados por Yu y Winter.

Así, si la deflexión inmediata obtenida con el método A es  $\Delta_i$ , la deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción del concreto será:

$$\Delta_{cp+sh} = F \Delta_i \quad (2.42)$$

y la deflexión total a largo plazo  $\Delta_t$  será:

$$\Delta_t = \Delta_i + \Delta_{sh+cp} = (1 + F) \Delta_i \quad (2.43)$$

**Tabla 2.3 - Módulo de elasticidad modificado  $E_{ct}$  ( $10^5 \text{ kg/cm}^2$ )**

$f'_c$ $\text{kg/cm}^2$	Edad en que se carga, días	Duración de la carga				
		30 días	90 días	1 año	3 años	5 años
140	7	0.409	0.305	0.204	0.166	0.158
	14	0.502	0.381	0.260	0.213	0.203
	28	0.608	0.471	0.328	0.170	0.258
175	7	0.419	0.310	0.207	0.167	0.159
	14	0.518	0.390	0.264	0.215	0.205
	28	0.631	0.484	0.334	0.275	0.262
210	7	0.427	0.315	0.208	0.169	0.160
	14	0.530	0.397	0.267	0.217	0.107
	28	0.649	0.495	0.339	0.278	0.265
280	7	0.438	0.321	0.211	0.170	0.162
	14	0.548	0.407	0.271	0.220	0.210
	28	0.676	0.510	0.346	0.283	0.269
350	7	0.446	0.325	0.213	0.172	0.163
	14	0.560	0.414	0.274	0.222	0.211
	28	0.695	0.522	0.351	0.286	0.272

**Tabla 2.4 - Valores de F (multiplicadores del método D de Yu y Winter)**

Duración de la carga, meses	F		
	$A's = 0$	$A's = A_s / 2$	$A's = A_s$
1	0.58	0.42	0.27
3	0.95	0.77	0.55
6	1.17	0.95	0.69
9	1.31	1.03	0.73
12	1.42	1.08	0.78
18	1.54	1.12	0.80
24	1.65	1.15	0.80
30	1.72	1.16	0.81
36	1.78	1.18	0.81
48	1.87	1.20	0.82
60	1.95	1.21	0.82

El factor  $F$  se toma para la sección central en el caso de vigas simplemente apoyadas y continuas, y en el empotramiento para voladizos. Para obtener una mayor precisión en el caso de vigas continuas se puede tomar un valor promedio de  $F$  tomado entre los valores de  $F$  correspondientes a las secciones críticas de máximo momento positivo y negativo de manera similar a como se calcula el momento de inercia efectivo  $I_e$ .

La deflexión adicional debida al flujo plástico y la contracción del concreto

también puede calcularse usando la deflexión inmediata calculada con el método B, mediante la siguiente ecuación:

$$\Delta_{sh+cp} = F (\Delta_i)_B \frac{I_e}{I_{cr}} \quad (2.44)$$

donde  $(\Delta_i)_B$  es la deflexión inmediata obtenida con el método B e  $I_e$  se calcula con la ecuación 2.18. Para el caso de vigas continuas,  $F$ ,  $I_e$  e  $I_{cr}$  se sustituyen por los correspondientes valores promedio.

### 2.3.4 Método modificado del comité ACI 435

### 2.3.5 Cálculo de la deflexión por flujo plástico

El comité ACI 435 (2003) recomienda la siguiente ecuación 2.44, de Branson, para el cálculo de la deflexión por flujo plástico:

$$\Delta_{cp} = \lambda_c \Delta_{sos} \quad (2.44)$$

Donde  $\Delta_{cp}$  es la deflexión por flujo plástico,  $\Delta_{sos}$  es la deflexión inmediata causada por las cargas sostenidas y  $\lambda_c$  es el factor de modificación por flujo plástico para condiciones no estándar.

El factor  $\lambda_c$  viene dado por la siguiente ecuación:

$$\lambda_c = \frac{0.85C_t}{1 + 50\rho'} \quad (2.45)$$

Donde el valor de  $C_t$  se calcula con la ecuación 1.10. El comité ACI 435 (2003) recomienda tomar un valor de  $C_u$  igual a 1.60 correspondiente a 70% de humedad relativa, 20 días de edad a la carga y 15 cm de espesor mínimo del miembro. Si el cálculo de la deflexión por flujo plástico se hace para un tiempo infinito,  $C_t = C_u$ .

### 2.3.6 Cálculo de la deflexión por contracción

El comité ACI 435 (2003) recomienda la siguiente ecuación 2.46, de Branson, para el cálculo de la deflexión por contracción:

$$\Delta_{sh} = K_{sh} \phi_{sh} l^2 \quad (2.46)$$

donde

$$\phi_{sh} = A_{sh} \frac{\varepsilon_{sh}}{h} \quad (2.47)$$

$$A_{sh} = \begin{cases} 0.7(\rho - \rho')^{1/3} \left( \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)^{1/2} & \rho - \rho' \leq 3.0\% \\ 1 & \rho - \rho' > 3.0\% \end{cases} \quad (2.48)$$

$K_{sh}$  se da en la siguiente tabla

**Tabla 2.5** Valores de  $K_{sh}$

Tipo de viga	$K_{sh}$
Voladizo	0.50
Tramo simplemente apoyado	0.13
Tramo con un extremo continuo (múltiples tramos)	0.09
Un extremo continuo (dos tramos)	0.08
Tramo con ambos extremos continuos	0.07

En la ecuación 2.48,  $\rho$  y  $\rho'$  se dan en porcentaje y se refieren a los valores en el soporte para vigas en voladizo y al centro del tramo para tramos simples y continuos.

El comité ACI 435 (2003) recomienda tomar un valor de  $\varepsilon_{shu}$  igual a  $400 \times 10^{-6}$  correspondiente a 70% de humedad relativa, 20 días de edad a la carga y 15 cm de espesor mínimo del miembro. Si el cálculo de la deflexión por contracción se hace para un tiempo infinito,  $\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{shu}$ .



# 3

## **Control de la deflexión según reglamentos**

---

### **3.1 Introducción**

Con la finalidad garantizar la serviciabilidad de las estructuras de concreto armado es necesario controlar las deflexiones de los principales elementos de la estructura. En este capítulo se verán los métodos de control de deflexiones de los reglamentos ACI 318-05 y NTE.E060.89. Ambos reglamentos llevan a cabo el control de la deflexión de dos formas: usando peraltes mínimos obtenidos como una fracción de la longitud del tramo y usando deflexiones máximas permisibles que limitan las deflexiones calculadas.

La mayor preocupación de los reglamentos son los elementos no estructurales que pueden dañarse debido a deflexiones excesivas. Se conocen como elementos no estructurales a aquellos que están unidos a los elementos estructurales (cimientos, columnas, vigas y pisos) y que no contribuyen a la resistencia y rigidez de la estructura principal y que pueden ser: arquitectónicos (cielos rasos, paneles, tabiques, ventanas, puertas, barandas, cerramientos, etc.), así como equipos (médicos, industriales, etc.), instalaciones mecánicas y sanitarias.

## 3.2 Control de la deflexión según el reglamento ACI 318-05

### 3.2.1 Control de la deflexión en vigas

Según el reglamento ACI 318-05 puede evitarse verificar las deflexiones en vigas que no soportan ni están unidas a muros divisorios u otro tipo de elemento susceptible de dañarse debido a deflexiones grandes siempre que los peraltes de las vigas sean mayores o iguales que los peraltes mínimos correspondientes de la tabla 3.1. Podrán utilizarse peraltes menores que los establecidos en la tabla 3.1 si se demuestra mediante cálculos de deflexiones que las deflexiones calculadas son menores o iguales que las deflexiones máximas permisibles correspondientes de la tabla 3.2. No se proveen peraltes mínimos para vigas que soportan o están unidas a elementos no estructurales implicando que, para estos casos, las deflexiones deben ser calculadas y comparadas con las deflexiones máximas permisibles de la tabla 3.2.

**Tabla 3.1** - Peraltes mínimos de vigas para no verificar deflexiones

Elemento	Peralte mínimo, h			
	Simplemente apoyado	Con un extremo Continuo	Con ambos extremos continuos	En voladizo
Vigas	Vigas que no soportan ni están unidas a particiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes.			
	$l/16$	$l/18.5$	$l/21$	$l/8$

$l$  es el la luz de la viga definida en la sección 8.7 del ACI 318 como la luz libre de la viga más la altura de la viga o la distancia centro a centro entre los apoyos.  $l_n$  es la luz libre de la viga.

Los peraltes mínimos de la tabla 3.3 son aplicables a vigas de concreto de peso normal ( $w_c = 2320 \text{ kg/m}^3$ ) y refuerzo de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ). Para otras condiciones los valores se deben modificar como sigue:

Para concreto liviano estructural de peso unitario  $w_c$  en el rango de 1500 a  $2000 \text{ kg/m}^3$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por:  $(1.65 - 0.0003 w_c)$ , pero no menor de 1.09.

Para  $f_y$  diferente de  $4200 \text{ kg/cm}^2$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por:  $(0.4 + 0.0014 f_y)$ .

**Tabla 3.2** - Deflexiones máximas permisibles de vigas y losas

Tipo de miembro	Deflexión a considerar	Deflexión límite
Techos planos que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes.	Deflexión inmediata producida por la carga viva.	$l/180^*$
Pisos que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.	Deflexión inmediata producida por la carga viva.	$l/360$
Techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.	La parte de la deflexión total que se presenta después de unir los elementos no estructurales: la suma de las deflexiones a largo plazo que producen todas las cargas permanentes (carga muerta mas cualquier porción sostenida de carga viva) y la deflexión inmediata que produzca cualquier carga viva adicional. †	$l/480^‡$
Techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no son susceptibles de dañarse con deflexiones grandes.		$l/240^§$

$l$  es el la luz de la viga definida en la sección 8.7 del ACI 318 como la luz libre de la viga más la altura de la viga o la distancia centro a centro entre los apoyos.  $l_n$  es la luz libre de la viga.

\* Este límite no tiene por objeto constituirse en un resguardo contra el empozamiento de aguas. Este último se debe verificar mediante cálculos de deflexiones adecuados, incluyendo las deflexiones debidas al agua estancada, y considerando los efectos a largo plazo de todas las cargas permanentes, la contraflecha, las tolerancias de construcción y la confiabilidad en las medidas tomadas para el drenaje.

† Las deflexiones a largo plazo deben determinarse de acuerdo con 9.5.2.5 ó 9.5.4.3, pero se pueden reducir en la cantidad de deflexión calculada que ocurra antes de unir los elementos no estructurales. Esta cantidad se determina basándose en datos de ingeniería aceptables correspondiente a las características tiempo-deflexión de elementos similares a los que se están considerando.

‡ Este límite se puede exceder si se toman medidas adecuadas para prevenir daños en elementos apoyados o unidos.

§ Pero no mayor que la tolerancia establecida para los elementos no estructurales. Este límite se puede exceder si se proporciona una contraflecha de modo que la deflexión total menos la contraflecha no exceda dicho límite.

### 3.2.2 Control de la deflexión en losas

Según el reglamento ACI 318-05 puede evitarse verificar las deflexiones en

losas unidireccionales que no soportan ni están unidas a muros divisorios u otro tipo de elemento susceptible de dañarse debido a deflexiones grandes siempre que los peraltes de las vigas sean mayores o iguales que los peraltes mínimos correspondientes de la tabla 3.3. Podrán utilizarse peraltes menores que los establecidos en la tabla 3.3 si se demuestra mediante cálculos de deflexiones que las deflexiones calculadas son menores o iguales que las deflexiones máximas permisibles correspondientes de la tabla 3.2. No se proveen espesores mínimos para losas que soportan o están unidas a elementos no estructurales implicando que, para estos casos, las deflexiones deben ser calculadas y comparadas con las deflexiones máximas permisibles de la tabla 3.2.

**Tabla 3.3** - Peraltes mínimos de losas en una dirección para no verificar deflexiones

Elemento	Peralte mínimo, h			
	Simplemente apoyado	Con un extremo continuo	Con ambos extremos continuos	En voladizo
	Losa que no soporten ni estén unidas a particiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes.			
Lozas macizas en una dirección	$l/20$	$l/24$	$l/28$	$l/10$
Losas nervadas en una dirección	$l/16$	$l/18.5$	$l/21$	$l/8$

$l$  es el la luz de la viga definida en la sección 8.7 del ACI 318 como la luz libre de la viga más la altura de la viga o la distancia centro a centro entre los apoyos.  $l_n$  es la luz libre de la viga.

Los peraltes mínimos de la tabla 3.3 son aplicables a losas unidireccionales de concreto de peso normal ( $w_c = 2320 \text{ kg/m}^3$ ) y refuerzo de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ). Para otras condiciones los valores se deben modificar como sigue:

Para concreto liviano estructural de peso unitario  $w_c$  en el rango de 1500 a  $2000 \text{ kg/m}^3$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por:  $(1.65 - 0.0003 w_c)$ , pero no menor de 1.09.

Para  $f_y$  diferente de  $4200 \text{ kg/cm}^2$ , los valores de la tabla deben multiplicarse por:  $(0.4 + 0.0014 f_y)$ .

La tabla 3.2 del ACI 318-05 especifica límites para las deflexiones calculadas debidas a la carga viva y la deflexión incremental que se produce después de la instalación de los elementos no estructurales. No se especifica ningún límite para la deflexión total. Sin embargo, en el supuesto que los elementos no estructurales serán instalados poco después de la construcción de la losa, el límite especificado para la deflexión incremental controla indirectamente la deflexión total. Debido a la incertidumbre en las propiedades de los materiales, la deflexión calculada debe interpretarse como una estimación de la deflexión promedio. Reconociendo la gran variabilidad de la deflexión, debe esperarse una cierta variación de la deflexión calculada respecto de la deflexión real. Si la deflexión calculada está cercana a la deflexión permisible, hay una alta probabilidad que la deflexión real excederá el límite permisible (ACI 435-R95, 2003)

### **3.3 Control de la deflexión según el reglamento NTE E.060.89**

#### **3.3.1 Control de la deflexión en vigas**

Según el reglamento NTE E.060.89 podrá dejar de verificarse las deflexiones en vigas que forman pórticos que cumplan con que:  $h \geq l/16$ . Si la viga se encuentra en voladizo, o sobre ella se apoyan elementos que puedan ser dañados por deflexiones excesivas, será necesario verificar las deflexiones, no siendo aplicable la excepción anterior. Las deflexiones máximas permisibles utilizadas en la verificación de deflexiones son las mismas que las de la tabla 3.2.

#### **3.3.2 Control de la deflexión en losas**

Según el reglamento NTE E.060.89 podrá dejar de verificarse las deflexiones en losas que cumplan con las siguientes condiciones de peralte mínimo:

- a. En losas aligeradas continuas conformadas por viguetas de 10 cm de ancho, bloques de ladrillo de 30 cm de ancho y losa superior de 5 cm, con sobrecargas menores a  $300 \text{ kg/m}^2$  y luces menores de 7.5 m,

podrá dejar de verificarse las deflexiones cuando se cumpla que:  
 $h \geq l/25$ .

- b. En losas macizas continuas con sobrecargas menores a  $300 \text{ kg/m}^2$  y luces menores de  $7.5 \text{ m}$ , podrá dejar de verificarse las deflexiones cuando se cumpla que:  $h \geq l/30$ .

Si la losa aligerada o losa maciza, se encuentra en voladizo, o sobre ella se apoyan elementos que puedan ser dañados por deflexiones excesivas, será necesario verificar las deflexiones, no siendo aplicable las excepciones anteriores. Las deflexiones máximas permisibles utilizadas en la verificación de deflexiones son las mismas que las de la tabla 3.2.

### 3.4 Método de Scanlon y Hak

Scanlon y Hak (2006), han propuesto un método iterativo que permite calcular el peralte mínimo de una viga o losa unidireccional, de manera que la deflexión incremental del miembro, que se produce después de unir los elementos no estructurales, no sobrepase una deflexión máxima permisible que puede elegirse de la tabla 3.2. Para ello utilizaron una historia de carga simplificada según la cual la deflexión incremental viene dada por la siguiente ecuación:

$$\Delta_{inc} = \frac{\kappa I_n^4}{384 E_c I_e} (w_{LA} + \lambda w_S) \quad (3.1)$$

Donde:

- $\Delta_{inc}$  = Deflexión incremental que se produce después de unir los elementos no estructurales
- $\kappa$  = Coeficiente dependiente de las condiciones de soporte  
 (= 5 para simplemente apoyado)  
 (= 2 para un extremo continuo)  
 (= 1.4 para ambos extremos continuos)  
 (= 48 para voladizo)

- $l_n$  = Longitud del tramo libre
- $E_c$  = Módulo de elasticidad del concreto
- $I_e$  = Momento de inercia efectivo correspondiente al total de la carga muerta más el total de la carga viva
- $\lambda$  = Multiplicador para la deflexión total (ecuación 3.35)
- $w_{LA}$  = Carga viva adicional (igual a la diferencia entre la carga viva y la carga viva sostenida)
- $w_S$  = Carga sostenida total (igual a la suma de la carga muerta por peso propio, más la carga muerta superpuesta y más la carga viva sostenida)

Expresando  $I_e$  como  $\alpha I_g$  donde  $I_g = bh^3/12$ , despejando  $l_n/h$  y reemplazando  $\Delta_{inc}/l_n$  por  $(\Delta_{inc})_{per}/l$  se obtiene:

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{(\Delta_{inc})_{per}}{l} \frac{32\alpha E_c b}{\kappa(\lambda w_S + w_{LA})} \right]^{1/3} \quad (3.2)$$

Mediante un estudio paramétrico se encontró que el valor  $\alpha = 0.52$  produce una buena correlación entre las deflexiones calculadas y las deflexiones permisibles. Reemplazando  $\alpha$  por 0.52 en la ecuación 3.2 se obtiene:

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{(\Delta_{inc})_{per}}{l} \frac{16.64 E_c b}{\kappa(\lambda w_S + w_{LA})} \right]^{1/3} \quad (3.3)$$

Donde:

- $(\Delta_{inc})_{per}$  = Deflexión incremental permisible que se produce después de unir los elementos no estructurales
- $l$  = Longitud del tramo como lo define la sección 8.7 del ACI 318
- $h$  = Peralte total de la viga o losa
- $b$  = Ancho de la viga o losa

La ecuación 3.3 puede ser utilizada para calcular el peralte total mínimo de una viga o losa unidireccional que satisfaga una deflexión permisible, como las de la tabla 3.2. En el caso de losas unidireccionales se toma para  $b$  un ancho unitario y para vigas T se toma como  $b$  al valor de  $b_w$ .

La ecuación 3.3 también puede usarse para verificar la deflexión por carga viva reemplazando  $\lambda$  por 0 y el término correspondiente a la carga viva adicional por la carga viva total. También puede usarse para dimensionar miembros. Después que los requisitos de refuerzo se hayan determinado, pueden calcularse las deflexiones y compararse con los límites especificados.

El método propuesto es relativamente sencillo de aplicar y considera explícitamente los principales factores que afectan a la deflexión, que son la razón  $l_n / h$ , módulo de elasticidad, agrietamiento, deflexión dependiente del tiempo y cargas aplicadas.

### 3.5 Recomendaciones del ACI 435 (1978)

Un método para minimizar la deflexión de un miembro de concreto sometido a flexión es usar una cuantía de acero en tracción relativamente pequeña. La tabla 3.4 presenta límites para el valor de  $\rho$  recomendadas por el comité ACI 435 (1978)

**Tabla 3.4** – Cuantías de acero en tracción recomendadas para miembros no preesforzados en una dirección para mantener la deflexión dentro de límites aceptables

Miembro	Sección transversal	Concreto de peso normal	Concreto de peso ligero
Miembros que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes	Rectangular	$\rho \leq 0.35\rho_b$	$\rho \leq 0.30\rho_b$
	T	$\rho_w \leq 0.35\rho_b$	$\rho_w \leq 0.35\rho_b$
Miembros que soportan o están unidos a elementos no estructurales susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes	Rectangular	$\rho \leq 0.25\rho_b$	$\rho \leq 0.20\rho_b$
	T	$\rho_w \leq 0.30\rho_b$	$\rho_w \leq 0.25\rho_b$

Las tablas 3.1 y 3.3 del ACI 318-05 son aplicables únicamente a vigas y losas que no soportan ni están unidas a particiones u otro tipo de elementos susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes. Las tablas 3.1 y 3.3 han sido modificadas por el ACI 435 (2003) y expandidas en la tabla 3.5 para incluir miembros que soportan o están unidos a elementos no estructurales que pueden dañarse por deflexiones grandes.

**Tabla 3.5** - Peraltes mínimos de miembros utilizados en techos y pisos (ACI 435, 1978)

Elemento	Peralte mínimo, h			
	Simplemente apoyado	Con un extremo continuo	Con ambos extremos continuos	En voladizo
	Miembros que no soportan ni están unidos a elementos no estructurales susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes			
Losas de techo	$l/22$	$l/28$	$l/35$	$l/9$
Losas de piso, vigas de azotea y losas nervadas de azotea	$l/18$	$l/23$	$l/28$	$l/7$
Vigas de piso o losas nervadas de piso	$l/14$	$l/18$	$l/21$	$l/5.5$
	Miembros que soportan o están unidos a elementos no estructurales susceptibles de dañarse debido a deflexiones grandes			
Losas de techo	$l/14$	$l/18$	$l/22$	$l/5.5$
Losas de piso, vigas de azotea y losas nervadas de azotea	$l/12$	$l/15$	$l/19$	$l/5$
Vigas de piso o losas nervadas de piso	$l/10$	$l/13$	$l/16$	$l/4$

### 3.6 Método alternativo para el control de la deflexión en losas

Para el control de la deflexión en losas macizas continuas pueden

aplicarse las ecuaciones 3.4 y 3.5, obtenidas en esta tesis mediante un estudio paramétrico (véase el Apéndice D) que permiten obtener el mayor valor posible de  $l_n/h$  (y por lo mismo el menor valor posible de  $h$ ) de losas que soportan o están unidas a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes, de forma que la deflexión incremental  $\Delta_{inc}$  sea igual a la deflexión permisible  $\Delta_{per} = l/480$ .

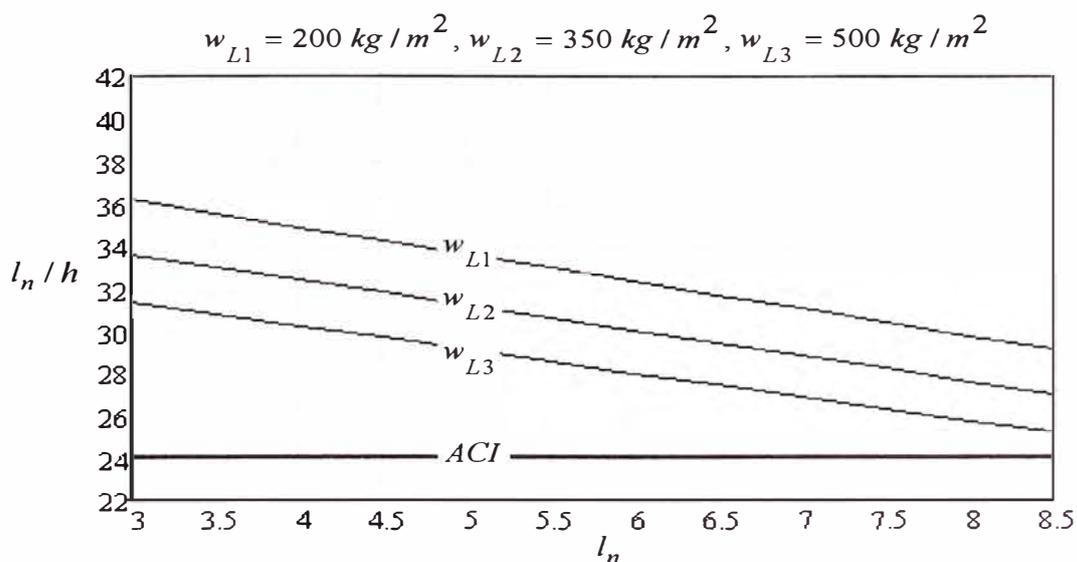
Para losa maciza de tramo interior:

$$\frac{l_n}{h} \leq \frac{30 + 0.00002(f'_c)^2 - l_n}{0.66 + 0.00043 w_L} \quad (3.4)$$

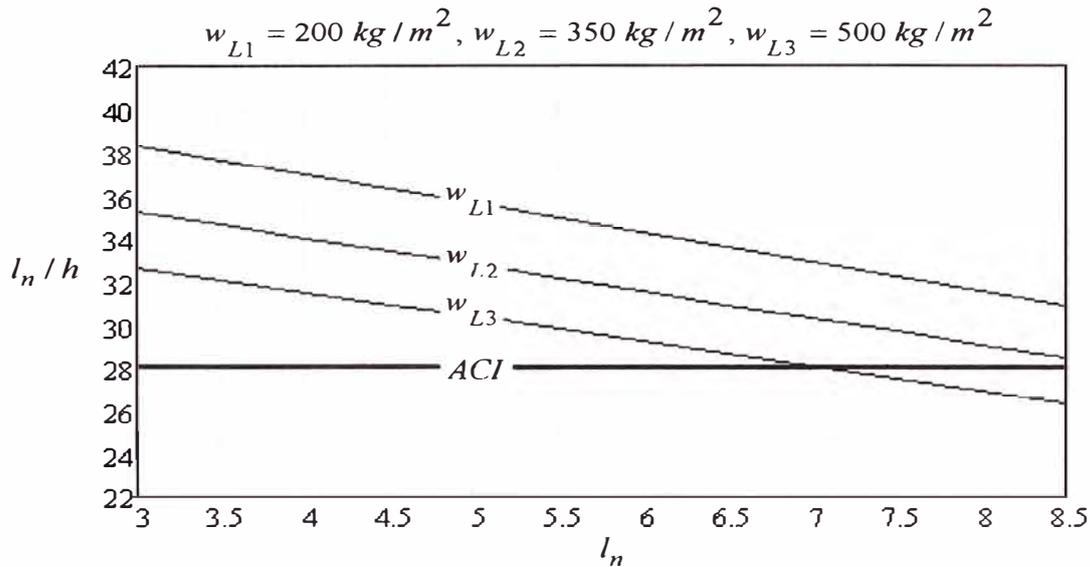
Para losa maciza de tramo exterior:

$$\frac{l_n}{h} \leq \frac{35 - 296310(f'_c)^{-2} - l_n}{0.70 + 0.00040 w_L} \quad (3.5)$$

donde  $f'_c$  es la resistencia a la compresión del concreto en  $kg/cm^2$ ,  $l_n$  es la longitud del tramo libre en  $m$  y  $w_L$  es la carga viva en  $kg/m^2$ . En las figuras 3.1 y 3.2 se grafican las ecuaciones 3.4 y 3.5 para  $f'_c = 280 kg/cm^2$ .



**Figura 3.1** Relación  $l_n$  versus  $l_n/h$  (losa maciza de tramo exterior)



**Figura 3.2** Relación  $l_n$  versus  $l_n/h$  (losa maciza de tramo interior)

Las ecuaciones 3.4 y 3.5 y, los estudios de Scanlon y Hak (2006) muestran que los peraltes mínimos provistos por el ACI son, en general, conservadores. Así, por ejemplo, para una losa de tramo exterior (que soporta elementos no estructurales) con  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$ , sobrecarga de  $200 \text{ kg/m}^2$ ,  $l_n = 7 \text{ m}$  el peralte mínimo provisto por la ecuación 3.5 es  $26 \text{ cm}$  mientras que el provisto por el ACI 318-05 es  $33 \text{ cm}$ .

### 3.7 Procedimiento general para el control de deflexiones

De acuerdo a los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89 las deflexiones que se necesitan calcular para ver si se cumplen los requerimientos de la tabla 3.2 dependen del tipo de interacción entre el techo o piso, de la que forman parte la viga o losa, con los elementos no estructurales. Según esto puede requerirse conocer la deflexión inmediata producida por la carga viva  $\Delta_L$  o la deflexión incremental  $\Delta_{inc}$  que se produce después de unir los elementos no estructurales.

El procedimiento a seguir para controlar las deflexiones es el siguiente:

1. Verificar si el peralte de la viga o losa es mayor o igual que el peralte mínimo correspondiente de la tabla 3.1 ó 3.2. En caso que el peralte no sea satisfactorio, continuar a partir del paso 2.
2. Calcular el momento de inercia de la sección bruta  $I_g$ , el momento de agrietamiento  $M_{cr}$  y el momento de inercia de la sección transformada agrietada  $I_{cr}$ .
3. Calcular el momento de inercia efectivo promedio por carga muerta  $(I_e)_D$ , por carga muerta más la carga viva sostenida  $(I_e)_{D+LS}$  y por carga muerta más el total de la carga viva  $(I_e)_{D+L}$ .
4. Calcular la deflexión inmediata por carga muerta  $\Delta_D$ , por carga muerta más la carga viva sostenida  $\Delta_{D+LS}$  y por carga muerta más el total de la carga viva  $\Delta_{D+L}$ .
5. Calcular las deflexiones por carga viva  $\Delta_L$  y por carga viva sostenida  $\Delta_{LS}$  en la forma:  $\Delta_L = \Delta_{D+L} - \Delta_D$  y  $\Delta_{LS} = \Delta_{D+LS} - \Delta_D$ .
6. Calcular la deflexión incremental que se produce después de unir los elementos no estructurales  $\Delta_{inc}$ , esto es, la suma de las deflexiones a largo plazo que producen todas las cargas permanentes (carga muerta mas cualquier porción sostenida de carga viva) y la deflexión inmediata que produzca cualquier carga viva adicional, usando la siguiente ecuación:

$$\Delta_{inc} = \lambda_{\infty} \Delta_D + \lambda_t \Delta_{LS} + \Delta_L \quad (3.6)$$

donde  $\lambda_{\infty}$  es el factor  $\lambda$  dado por la ecuación 3.35 para tiempo infinito (considerado como 5 años) y  $\lambda_t$  es el factor  $\lambda$  dado por la ecuación 2.35 para el tiempo  $t$  de duración de la carga sostenida. La deflexión incremental que puede afectar a los elementos no estructurales no incluye la deflexión debida a la carga muerta pues se asume que esta ocurre antes de la unión de los elementos no estructurales por lo que no tiene efecto sobre dichos elementos.

7. Comprobar los requerimientos de deflexión de la tabla 3.2 y limitar el uso de la estructura a los tipos o condiciones de carga particulares que

satisfaga, o aumentar el tamaño de la sección, especialmente el peralte.

### Ejemplo 3.1

Calcule el peralte mínimo del tramo exterior de una losa maciza continua para que cumpla con el requerimiento de deflexión máxima permisible  $l/480$  de la tabla 3.2 del ACI 318-05, usando la ecuación 3.3. Considere los siguientes datos:

- Longitud del tramo libre =  $6\text{ m}$
- Longitud centro a centro entre los apoyos =  $6.30\text{ m}$
- Carga viva =  $500\text{ kg/m}^2$
- Carga viva sostenida =  $200\text{ kg/m}^2$
- Carga muerta superpuesta =  $150\text{ kg/m}^2$
- Deflexión máxima permisible =  $l/480$
- Resistencia del concreto =  $210\text{ kg/cm}^2$

**Solución:-**

$$E_c = 15100\sqrt{f'_c}$$

$$E_c = 15100\sqrt{210} = 218819.8\text{ kg/cm}^2 = 218819.8 \times 10^4\text{ kg/m}^2$$

$$\frac{(\Delta_{inc})_{permisible}}{l} = \frac{1}{480}$$

Tomando un ancho de losa  $b$  igual a  $1\text{ m}$ , una densidad del concreto  $w_c$  igual a  $2400\text{ kg/m}^3$

$$w_{LA} = 500 - 200 = 300\text{ kg/m}^2$$

$$\lambda = 2.0 \text{ (para 5 años)}$$

$$\kappa = 2 \text{ (tramo continuo exterior)}$$

**Primera iteración,**  $h = l/24 = 6.30 \times 100 / 24 = 26.25\text{ cm} = 0.263\text{ m}$

$$\text{Peso propio de la losa} = 2400 \times 0.263 = 631.2 \text{ kg/m}^2$$

$$w_S = 631.2 + 150 + 200 = 981.2 \text{ kg/m}^2$$

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{1.16.64 \times 218819.8 \times 10^4 \times 1}{480 \times 2(2 \times 981.2 + 300)} \right]^{1/3} = 25.6$$

$$h = 6 \times 100 / 25.6 = 23.4 \text{ cm}$$

**Segunda iteración**,  $h = 23.4 \text{ cm} = 0.234 \text{ m}$

$$\text{peso propio de la losa} = 2400 \times 0.234 = 561.6 \text{ kg/m}^2$$

$$w_S = 561.6 + 150 + 200 = 911.6 \text{ kg/m}^2$$

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{1.16.64 \times 218819.8 \times 10^4 \times 1}{480 \times 2(2 \times 911.6 + 300)} \right]^{1/3} = 26.1$$

$$h = 6 \times 100 / 26.1 = 23.0 \text{ cm}$$

Por consiguiente, use:  $h = 23 \text{ cm}$ .

Según el ACI 318-05, para losas que no soporten ni estén unidas a particiones u otro tipo de elemento susceptible de dañarse debido a deflexiones grandes:  $h = l/24 = 630/24 = 26.3 \text{ cm}$  que es mayor que el valor obtenido de  $h = 23 \text{ cm}$ .

Según la ecuación propuesta 3.5:

$$\frac{l_n}{h} \leq \frac{35 - 296310(f'_c)^{-2} - l_n}{0.70 + 0.00040 w_L} = \frac{35 - 296310 \times 210^{-2} - 6}{0.70 + 0.00040 \times 500} = 24.8$$

Por lo tanto:  $h \geq 600 / 24.8 = 24 \text{ cm}$ , lo que muestra que el peralte mínimo provisto por el ACI es conservador.

### Ejemplo 3.2

Calcule el peralte mínimo de una viga continua en ambos extremos para que cumpla con el requerimiento de deflexión máxima permisible  $l/480$  de

la tabla 3.2 del ACI 318-05, usando la ecuación 3.3. Considere los siguientes datos:

- Longitud del tramo libre = 8.50 m
- Longitud centro a centro entre los apoyos = 9.00 m
- Espesor de la losa = 10 cm
- Ancho de la viga = 30 cm
- Ancho tributario = 5 m
- Carga muerta superpuesta = 75 kg/m<sup>2</sup>
- Carga viva = 750 kg/m<sup>2</sup>
- Carga viva sostenida = 300 kg/m<sup>2</sup>
- Deflexión máxima permisible = l/480
- Resistencia del concreto = 280 kg/cm<sup>2</sup>

### Solución

$$E_c = 15100\sqrt{f'_c}$$

$$E_c = 15100\sqrt{280} = 252671.3 \text{ kg/cm}^2 = 252671.3 \times 10^4 \text{ kg/m}^2$$

$$\frac{(\Delta_{inc})_{permisible}}{l} = \frac{1}{480}$$

$$w_{LA} = (750 - 300) \times 5 = 2250 \text{ kg/m}$$

$$\lambda = 2.0 \text{ (para 5 años)}$$

$$\kappa = 1.4 \text{ (ambos extremos continuos)}$$

**Primera iteración,**  $h = l/21 = 9.00 \times 100/21 = 43 \text{ cm} = 0.43 \text{ m}$

$$\text{peso propio de la losa} = 0.10 \times 2400 = 240 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{peso propio de la viga} = (0.43 - 0.10) \times 0.30 \times 2400 = 237.6 \text{ kg/m}$$

$$w_S = (240 + 300 + 75) \times 5 + 237.6 = 3312.6 \text{ kg/m}$$

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{1}{480} \frac{16.64 \times 252671.3 \times 10^4 \times 0.30}{1.4(2 \times 3312.6 + 2250)} \right]^{1/3} = 12.8$$

$$h = 8.50 \times 100 / 12.8 = 66.4 \text{ cm}$$

**Segunda iteración,**  $h = 66.4 \text{ cm} = 0.664 \text{ m}$

$$\text{peso propio de la losa} = 0.10 \times 2400 = 240 \text{ kg/m}^2$$

$$\text{peso propio de la viga} = (0.664 - 0.10) \times 0.30 \times 2400 = 406.1 \text{ kg/m}$$

$$w_S = (240 + 300 + 75) \times 5 + 406.1 = 3481.1 \text{ kg/m}$$

$$\frac{l_n}{h} = \left[ \frac{1}{480} \frac{16.64 \times 252671.3 \times 10^4 \times 0.30}{1.4(2 \times 3481.1 + 2250)} \right]^{1/3} = 12.7$$

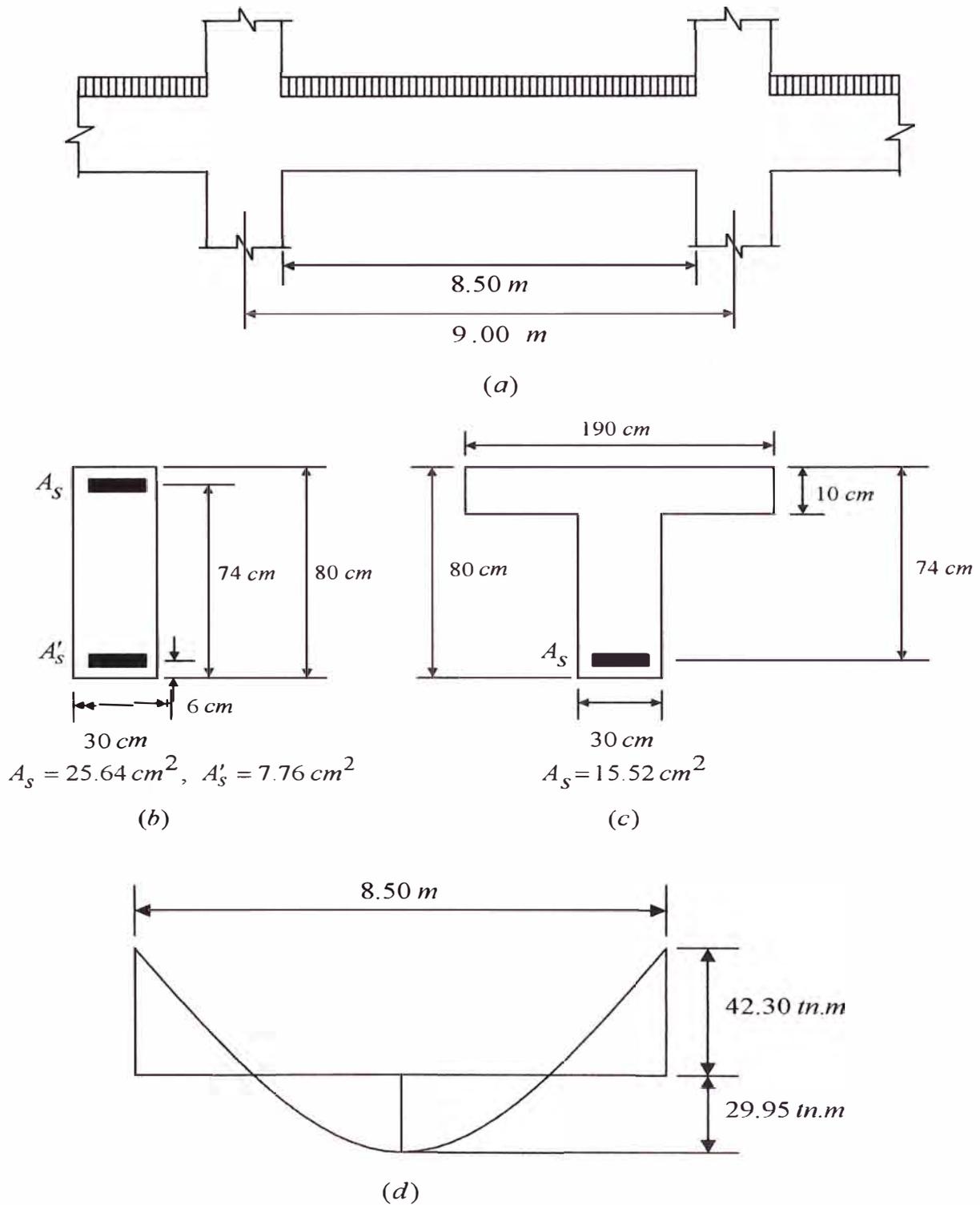
$$h = 8.50 \times 100 / 12.7 = 67.0 \text{ cm}$$

Por consiguiente, use:  $h = 67 \text{ cm}$

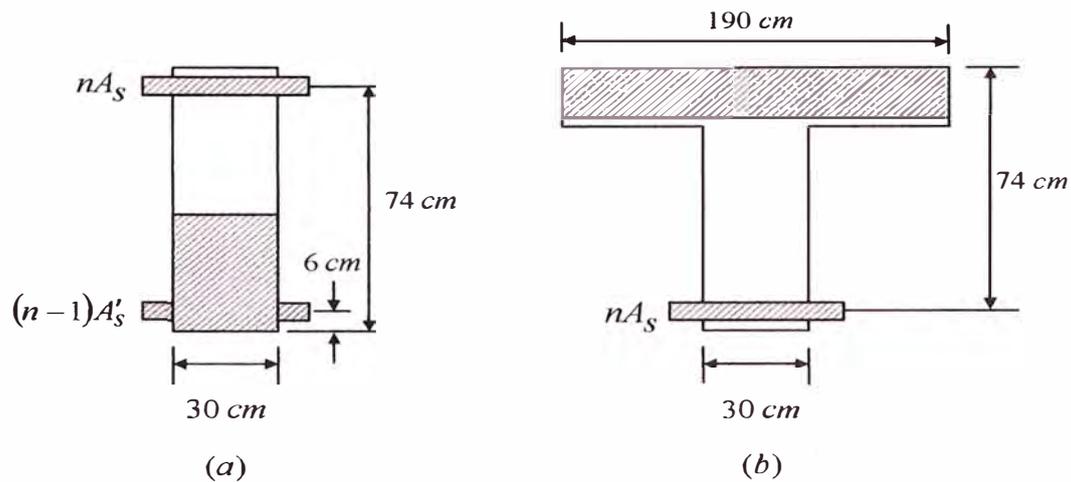
Según el ACI 318-05, para vigas que no soporten ni estén unidas a particiones u otro tipo de elemento susceptible de dañarse debido a deflexiones grandes:  $h = l / 21 = 900 / 21 = 43.0 \text{ cm}$ , que es mucho menor que el valor obtenido de  $h = 67 \text{ cm}$ .

### Ejemplo 3.3

La viga de la figura 3.3 esta proyectada para soportar una carga muerta de  $3 \text{ tn/m}$  y una carga viva de  $5 \text{ tn/m}$ . Considerar que sólo el 60% de la carga viva actúa en forma continua durante 36 meses. La resistencia del concreto es  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y la resistencia del acero a la fluencia es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . El recubrimiento al centro de las barras de acero es de  $6 \text{ cm}$ . La viga forma parte de un sistema de piso y su deflexión puede perjudicar a elementos no estructurales. Suponga que los elementos no estructurales se colocan inmediatamente después del desencofrado. Determinar si la viga satisface los requerimientos de deflexión de la tabla 3.2. Use el reglamento ACI 318-05.



**Figura 3.3** Viga del ejemplo 3.3: (a) Elevación, (b) Sección en los apoyos, (c) Sección en el centro y (d) Diagrama de momentos flectores por cargas de servicio



**Figura 3.4** Secciones transformadas de la viga del ejemplo 3.3: (a) Secciones en los apoyos, (b) Sección en el centro

## Solución

### Propiedades de los materiales

$$E_c = 15100\sqrt{f'_c} = 15100\sqrt{280} = 252671.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{252671.33} = 7.92$$

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} = 2\sqrt{280} = 33.47 \text{ kg/cm}^2$$

### Determinación de los momentos flectores por nivel de carga

#### Secciones izquierda y derecha

$$M_D = 3/8 \times 42.30 = 15.86 \text{ tn.m}$$

$$M_L = 5/8 \times 42.3 = 26.44 \text{ tn.m}$$

$$M_D + M_L = 42.30 \text{ tn.m}$$

$$M_D + 0.6 M_L = 31.72 \text{ tn.m}$$

#### Sección central

$$M_D = 3/8 \times 29.95 = 11.23 \text{ tn.m}$$

$$M_L = 5/8 \times 30.0 = 18.72 \text{ tn.m}$$

$$M_D + M_L = 29.95 \text{ tn.m}$$

$$M_D + 0.6 M_L = 22.46 \text{ tn.m}$$

### Determinación del momento de inercia de la sección bruta

Secciones izquierda y derecha (sección rectangular)

$$\bar{y} = \frac{h}{2} = \frac{80}{2} = 40 \text{ cm}$$

$$y_t = h - \bar{y} = 80 - 40 = 40 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \times 80^3}{12} = 1280000 \text{ cm}^4$$

Sección central (sección T)

$$\bar{y} = \frac{(b - b_w)h_f^2 / 2 + b_w h^2 / 2}{(b - b_w)h_f + b_w h} = \frac{(190 - 30) \times 10^2 / 2 + 30 \times 80^2 / 2}{(190 - 30) \times 10 + 30 \times 80} = 26 \text{ cm}$$

$$y_t = h - \bar{y} = 80 - 26 = 54 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh_f^3}{12} + bh_f \left( \bar{y} - \frac{hf}{2} \right)^2 + \frac{b_w (h - h_f)^3}{12} + b_w (h - h_f) \left( \bar{y} - \frac{h + h_f}{2} \right)^2$$

$$I_g = \frac{190 \times 10^3}{12} + 190 \times 10 \times \left( 26 - \frac{10}{2} \right)^2 + \frac{30 \times (80 - 10)^3}{12} + 30 \times (80 - 10) \times \left( 26 - \frac{80 + 10}{2} \right)^2$$

$$I_g = 2469333.33 \text{ cm}^4$$

### Determinación del momento de agrietamiento

Secciones izquierda y derecha

$$M_{cr} = \frac{I_g f_r}{y_t} = \frac{1280000.0 \times 33.47}{40} \times 10^{-5} = 10.71 \text{ tn.m}$$

### Sección central

$$M_{cr} = \frac{I_g f_n}{y_t} = \frac{2469333.33 \times 33.47}{54} \times 10^{-5} = 15.31 \text{ tn.m}$$

### Determinación del momento de inercia de la sección agrietada

#### Secciones izquierda y derecha

$$p = nA_s + (n-1)A'_s$$

$$p = 7.92 \times 25.64 + (7.92 - 1) \times 7.76 = 256.77$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d'$$

$$q = 7.92 \times 25.64 \times 74 + (7.92 - 1) \times 7.76 \times 6 = 15349.29$$

$$e = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{256.77^2 + 2 \times 30 \times 15349.29} - 256.77}{30} = 24.56 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d-c)^2 + (n-1)A'_s(c-d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{30 \times 24.56^3}{3} + 7.92 \times 25.64 \times (74 - 24.56)^2 + (7.92 - 1) \times 7.76 \times (24.56 - 6)^2 = 663006.13 \text{ cm}^4$$

#### Sección central

$$p = nA_s + (n-1)A'_s$$

$$p = 7.92 \times 15.52 + 0 = 122.92$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d'$$

$$q = 7.92 \times 15.52 \times 74 + 0 = 9095.96$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{122.92^2 + 2 \times 190 \times 9095.96} - 122.92}{190} = 9.16 \text{ cm}$$

Como  $c < hf$ , considerar como sección rectangular, entonces:

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d-c)^2 + (n-1)A'_s(c-d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{190 \times 9.16^3}{3} + 7.92 \times 15.52 \times (74 - 9.16)^2 + 0 = 565453.12 \text{ cm}^4$$

### **Determinación del momento de inercia efectivo por sección**

$$I_e = \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 I_g + \left[ 1 - \left( \frac{M_{cr}}{M_a} \right)^3 \right] I_{cr} \leq I_g$$

#### **Secciones izquierda y derecha**

$$(I_e)_D = \left( \frac{10.71}{15.86} \right)^3 \times 1280000 + \left[ 1 - \left( \frac{10.71}{15.86} \right)^3 \right] \times 663006.13$$

$$(I_e)_D = 853000.05 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = \left( \frac{10.71}{31.72} \right)^3 \times 1280000 + \left[ 1 - \left( \frac{10.71}{31.72} \right)^3 \right] \times 663006.13$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = 686755.37 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+L} = \left( \frac{10.71}{42.30} \right)^3 \times 1280000 + \left[ 1 - \left( \frac{10.71}{42.3} \right)^3 \right] \times 663006.13$$

$$(I_e)_{D+L} = 672342.66 \text{ cm}^4$$

#### **Sección central**

$$(I_e)_D = \left( \frac{15.31}{11.23} \right)^3 \times 2469333.33 + \left[ 1 - \left( \frac{15.31}{11.23} \right)^3 \right] \times 565453.12$$

$$(I_e)_D = 5389659.99 \text{ cm}^4 > 2469333.33 \rightarrow (I_e)_D = 2469333.33 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = \left( \frac{15.31}{22.46} \right)^3 \times 2469333.33 + \left[ 1 - \left( \frac{15.31}{22.46} \right)^3 \right] \times 565453.12$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = 1168478.98 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+L} = \left( \frac{15.31}{29.95} \right)^3 \times 2469333.33 + \left[ 1 - \left( \frac{15.31}{29.95} \right)^3 \right] \times 565453.12$$

$$(I_e)_{D+L} = 819769.72 \text{ cm}^4$$

### **Determinación del momento de inercia promedio para todo el tramo**

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5I_{ec}$$

$$(I_e)_D = 0.25x(853000.05 + 853000.05) + 0.5x2469333.33$$

$$(I_e)_D = 1661166.69 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = 0.25x(686755.37 + 686755.37) + 0.5x1168478.98$$

$$(I_e)_{D+0.60L} = 927617.18 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+L} = 0.25x(672342.66 + 672342.66) + 0.5x819769.72$$

$$(I_e)_{D+L} = 746056.19 \text{ cm}^4$$

### **Determinación de la deflexión a corto plazo o inmediata**

$$\Delta_i = \frac{5l_n^2}{48E_c I_e} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right)$$

$$\Delta_D = \frac{5x8.50^2}{48x252671.33x1661166.69} x \left( 11.23 - \frac{15.86 + 15.86}{10} \right) x 10^9$$

$$\Delta_D = 0.14 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+0.60L} = \frac{5x8.50^2}{48x252671.33x927617.18} x \left( 22.46 - \frac{31.72 + 31.72}{10} \right) x 10^9$$

$$\Delta_{D+0.60L} = 0.52 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{5x8.50^2}{48x252671.33x746056.19} x \left( 29.95 - \frac{42.30 + 42.30}{10} \right) x 10^9$$

$$\Delta_{D+L} = 0.86 \text{ cm}$$

$$\Delta_L = \Delta_{D+L} - \Delta_D = 0.86 - 0.14 = 0.72 \text{ cm}$$

$$\Delta_{LS} = \Delta_{D+0.60L} - \Delta_D = 0.52 - 0.14 = 0.38 \text{ cm}$$

### **Determinación de la deflexión incremental a largo plazo**

Para el centro del claro

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50\rho'}$$

$$\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705$$

$$\text{Para 36 meses: } \xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705 = 1.81$$

$$\text{Para 5 años: } \xi = 2.0$$

Dado que  $A'_s$  es 0,  $\rho' = 0$

$$\text{Para 36 meses: } \lambda_{36} = \frac{1.81}{1+0} = 1.81$$

$$\text{Para 5 años: } \lambda_{\infty} = \frac{2.0}{1+0} = 2.0$$

Luego la deflexión incremental a largo plazo es:

$$\Delta_{inc} = \Delta_L + \lambda_{\infty} \Delta_D + \lambda_t \Delta_{LS} = 0.72 + 2.0 \times 0.14 + 1.81 \times 0.38 = 1.68 \text{ cm}$$

#### Requerimientos de deflexión

$$\Delta_{inc} = 1.68 \text{ cm} < l/480 = 900/480 = 1.88 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por consiguiente la viga satisface los requerimientos de deflexión de la tabla 3.2.

#### Ejemplo 3.4

Calcule la deflexión incremental a largo plazo para la viga del ejemplo 3.1 usando el método modificado del ACI 435.

#### Solución

Para el centro del claro:

$$\rho' = 0$$

$$\rho = 100(\rho_w + \rho)/2 = 100 \times (15.52/(30 \times 74) + 15.52/(190 \times 74))/2 = 0.4\%$$

$$\rho - \rho' = 0.4 - 0 = 0.4\%, \quad \frac{\rho - \rho'}{\rho} = 1$$

Luego de un tiempo de 36 meses de carga :  $t = 36 \times 31 = 1116 \text{ días}$

$$(C_t)_{36 \text{ meses}} = \left( \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \right) C_u = \left( \frac{1116^{0.6}}{10 + 1116^{0.6}} \right) \times 1.60 = 1.39$$

$$(\lambda_c)_{36 \text{ meses}} = \frac{0.85 C_t}{1 + 50 \rho'} = \frac{0.85 \times 1.39}{1 + 0} = 1.18$$

$$(\varepsilon_{sh})_{36 \text{ meses}} = \left( \frac{t}{35+t} \right) \varepsilon_{shu} = \left( \frac{1116}{35+1116} \right) \times 400 \times 10^{-6} = 388 \times 10^{-6}$$

Luego de un tiempo infinito de carga:

$$(C_t)_{\infty \text{ meses}} = C_u = 1.60$$

$$(\lambda_c)_{\infty \text{ meses}} = \frac{0.85C_t}{1+50\rho'} = \frac{0.85 \times 1.60}{1+0} = 1.36$$

$$(\varepsilon_{sh})_{\infty \text{ meses}} = \varepsilon_{shu} = 400 \times 10^{-6}$$

**Deflexión adicional debida a la carga sostenida**

$$\Delta_{cp} = \lambda_c \Delta_{sos}$$

$$(\Delta_{cp})_{LS} \text{ 36 meses} = 1.18 \times 0.38 = 0.45 \text{ cm}$$

$$\text{Como } \rho - \rho' = 0.4 < 3.0\% \Rightarrow A_{sh} = 0.7(\rho - \rho')^{1/3} \left( \frac{\rho - \rho'}{\rho} \right)^{1/2}$$

$$A_{sh} = 0.7 \times 0.4^{1/3} \times 1 = 0.516$$

$$\phi_{sh} \text{ 36 meses} = A_{sh} \frac{\varepsilon_{sh}}{h} = 0.516 \times \frac{388 \times 10^{-6}}{80} = 2.50 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$$

$$K_{sh} = 0.07 \text{ (viga continua de tramo interior)}$$

$$(\Delta_{sh})_{36 \text{ meses}} = K_{sh} \phi_{sh} l^2 = 0.07 \times 2.50 \times 10^{-6} \times 900^2 = 0.14 \text{ cm}$$

$$(\Delta_{cp+sh})_{LS} \text{ 36 meses} = 0.45 + 0.14 = 0.59 \text{ cm}$$

**Deflexión adicional debida a la carga muerta**

$$\Delta_{cp} = \lambda_c \Delta_{sos}$$

$$(\Delta_{cp})_D \text{ } \infty \text{ meses} = 1.36 \times 0.14 = 0.19 \text{ cm}$$

$$A_{sh} = 0.516 \text{ (igual que para 36 meses)}$$

$$\phi_{sh} \text{ } \infty \text{ meses} = A_{sh} \frac{\varepsilon_{sh}}{h} = 0.516 \times \frac{400 \times 10^{-6}}{80} = 2.58 \times 10^{-6} \text{ cm}^{-1}$$

$$K_{sh} = 0.07 \text{ (viga continua de tramo interior)}$$

$$(\Delta_{sh})_{\infty \text{ meses}} = K_{sh} \phi_{sh} l^2 = 0.07 \times 2.58 \times 10^{-6} \times 900^2 = 0.14 \text{ cm}$$

$$(\Delta_{cp+sh})_{I,S} \infty \text{ meses} = 0.19 + 0.14 = 0.33 \text{ cm}$$

### Deflexión incremental

$$\Delta_{inc} = \Delta_L + (\Delta_{cp+sh})_D \infty \text{ meses} + (\Delta_{cp+sh})_{I,S} 36 \text{ meses}$$

$$\Delta_{inc} = 0.72 + 0.33 + 0.59 = 1.64 \text{ cm}$$

El valor obtenido usando el multiplicador  $\lambda$  fue 1.68 cm.

### Ejemplo 3.5

La viga de la figura 3.5 esta proyectada para soportar una carga muerta de 1.0 tn/m y una carga viva de 1.8 tn/m. Considerar que sólo el 50% de la carga viva actúa en forma continua durante 36 meses. La resistencia del concreto es  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y la resistencia del acero a la fluencia es  $f_y = 42000 \text{ kg/cm}^2$ . Calcule la deflexión máxima de la viga continua, determine que criterios de deflexión del reglamento satisface y las restricciones de uso que pueda tener. Suponga que los elementos no estructurales se colocan inmediatamente después del desencofrado. Use el reglamento NTE E.060.89.

### Solución

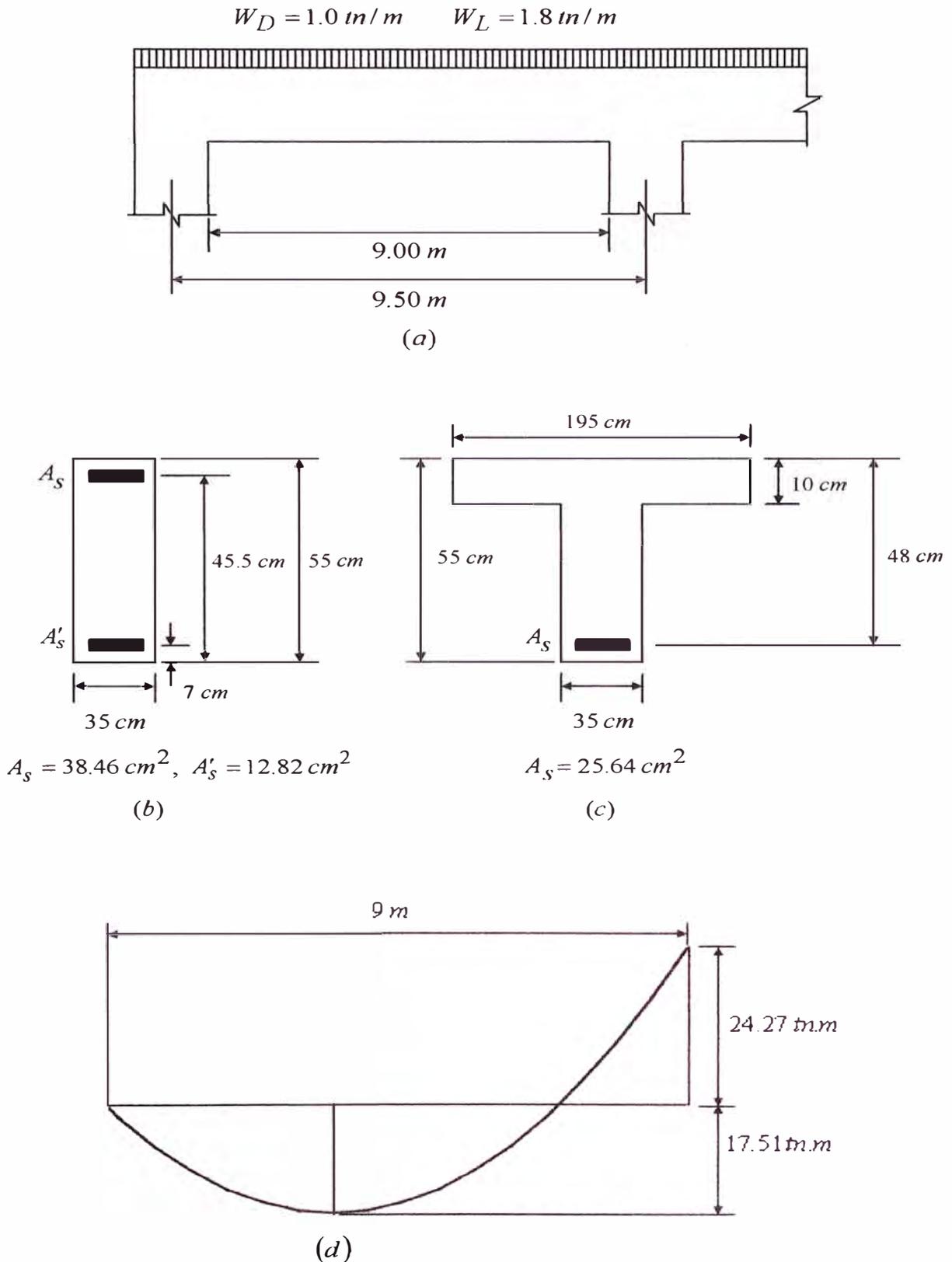
#### Propiedades de los materiales

$$E_c = 15000 \sqrt{f'_c} = 15000 \sqrt{280} = 250998 \text{ kg/cm}^2$$

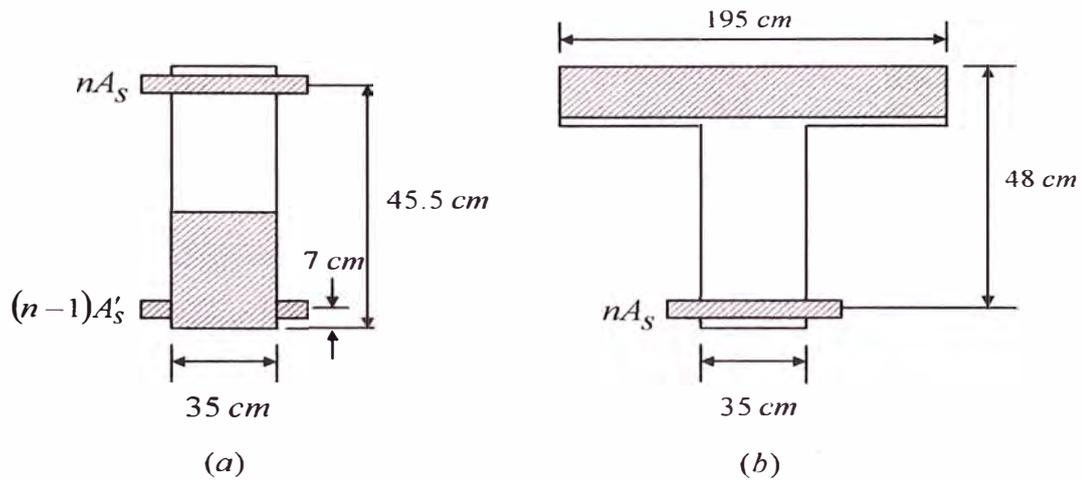
$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{250998} = 7.97$$

$$f_r = 2 \sqrt{f'_c} = 2 \sqrt{280} = 33.47 \text{ kg/cm}^2$$



**Figura 3.5** Viga del ejemplo 3.4: (a) Elevación, (b) Sección en los apoyos, (c) Sección en el centro y (d) Diagrama de momentos flectores por cargas de servicio



**Figura 3.6** Secciones transformadas de la viga del ejemplo 3.4: (a) Sección en el apoyo continuo, (b) Sección en el centro

### **Determinación de los momentos flectores por cada nivel de carga**

#### **Sección derecha**

$$M_D = 1.0 / 2.8 \times 24.27 = 8.67 \text{ tn.m}$$

$$M_L = 1.8 / 2.8 \times 24.27 = 15.60 \text{ tn.m}$$

$$M_D + M_L = 24.27 \text{ tn.m}$$

$$M_D + 0.5 M_L = 16.47 \text{ tn.m}$$

#### **Sección central**

$$M_D = 1.0 / 2.8 \times 17.51 = 6.25 \text{ tn.m}$$

$$M_L = 1.8 / 2.8 \times 17.51 = 11.26 \text{ tn.m}$$

$$M_D + M_L = 17.51 \text{ tn.m}$$

$$M_D + 0.5 M_L = 11.88 \text{ tn.m}$$

### **Determinación del momento de inercia de la sección bruta**

#### **Sección derecha**

$$\bar{y} = \frac{h}{2} = \frac{55}{2} = 27.5 \text{ cm}$$

$$y_t = h - \bar{y} = 55 - 27.5 = 27.5 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{35 \times 55^3}{12} = 485260.42 \text{ cm}^4$$

**Sección central**

$$\bar{y} = \frac{(b - b_w)h_f^2 / 2 + b_w h^2 / 2}{(b - b_w)h_f + b_w h} = \frac{(195 - 35) \times 10^2 / 2 + 35 \times 55^2 / 2}{(195 - 35) \times 10 + 35 \times 55} = 17.29 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = 17.29 \text{ cm}$$

$$y_t = h - \bar{y} = 55 - 17.28 = 37.71 \text{ cm}$$

$$y_b = 37.71 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh_f^3}{12} + bh_f \left( \bar{y} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \frac{b_w (h - h_f)^3}{12} + b_w (h - h_f) \left( \bar{y} - \frac{h + h_f}{2} \right)^2$$

$$I_g = \frac{195 \times 10^3}{12} + 195 \times 10 \times \left( 17.29 - \frac{10}{2} \right)^2 + \frac{35 \times (55 - 10)^3}{12} + 35 \times (55 - 10) \times \left( 17.29 - \frac{55 + 10}{2} \right)^2$$

$$I_g = 940934.20 \text{ cm}^4$$

**Determinación del momento de agrietamiento**

**Sección derecha**

$$M_{cr} = \frac{I_g f_r}{y_t} = \frac{485260.42 \times 33.47}{27.5} \times 10^{-5} = 5.91 \text{ tn.m}$$

**Sección central**

$$M_{cr} = \frac{I_g f_r}{y_t} = \frac{940934.20 \times 33.47}{37.71} \times 10^{-5} = 8.35 \text{ tn.m}$$

**Determinación del momento de inercia de la sección agrietada**

**Sección derecha**

$$p = nA_s + (n - 1)A'_s$$

$$p = 7.97 \times 38.46 + (7.97 - 1) \times 12.82 = 395.88$$

$$q = nA_s d + (n - 1)A'_s d'$$

$$q = 7.97 \times 38.46 \times 45.5 + (7.97 - 1) \times 12.82 \times 7 = 14572 - 43$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{395.88^2 + 2 \times 35 \times 14572.43} - 395.88}{35} = 19.68 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d - c)^2 + (n - 1)A'_s(c - d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{35 \times 19.68^3}{3} + 7.97 \times 38.46 \times (45.5 - 19.68)^2 + (7.97 - 1) \times 12.82 \times (19.68 - 7)^2 = 307643.96 \text{ cm}^4$$

### Sección central

$$p = nA_s + (n - 1)A'_s$$

$$p = 7.97 \times 25.64 + 0 = 204.35$$

$$q = nA_s d + (n - 1)A'_s d'$$

$$q = 7.97 \times 25.64 \times 48 + 0 = 9808.83$$

$$e = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{204.35^2 + 2 \times 195 \times 9808.84} - 204.35}{195} = 9.04 \text{ cm}$$

Como  $c < hf$ , considerar como sección rectangular, entonces:

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d - c)^2 + (n - 1)A'_s(c - d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{195 \times 9.04^3}{3} + 7.97 \times 25.64 \times (48 - 9.04)^2 + 0 = 358199.93 \text{ cm}^4$$

$$I_{cr} = 358199.93 \text{ cm}^4$$

### Determinación del momento de inercia efectivo por sección

#### Sección derecha

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_D = \frac{5.91}{8.67} = 0.68 \leq 1$ , entonces:  $I_e = I_{cr}$

Por lo tanto:  $(I_e)_D = 307643.96 \text{ cm}^4$

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_{D+0.50L} = \frac{5.91}{16.47} = 0.36 \leq 1$ , entonces:  $I_e = I_{cr}$

Por lo tanto:  $(I_e)_{D+0.50L} = 307643.96 \text{ cm}^4$

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_{D+L} = \frac{5.91}{24.27} = 0.24 \leq 1$ , entonces:  $I_e = I_{cr}$

Por lo tanto:  $(I_e)_{D+L} = 307643.96 \text{ cm}^4$

### Sección central

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_D = \frac{8.35}{6.25} = 1.34 > 1$ , entonces:  $I_e = I_g$

Por lo tanto:  $(I_e)_D = 940934.20 \text{ cm}^4$

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_{D+0.50L} = \frac{8.35}{11.88} = 0.70 \leq 1$ , entonces:  $I_e = I_{cr}$

Por lo tanto:  $(I_e)_{D+0.50L} = 358199.93 \text{ cm}^4$

Como  $\left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)_{D+L} = \frac{8.35}{17.51} = 0.48 \leq 1$ , entonces:  $I_e = I_{cr}$

Por lo tanto:  $(I_e)_{D+L} = 358199.93 \text{ cm}^4$

### Determinación del momento de inercia promedio para el tramo

$$I_e = (I_{ex} + 2I_{ec})/3$$

$$(I_e)_D = (307643.96 + 2 \times 940934.20)/3$$

$$(I_e)_D = 729837.45 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+0.50L} = (307643.96 + 2 \times 358199.93)/3$$

$$(I_e)_{D+0.50L} = 341347.94 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+L} = (307643.96 + 2 \times 358199.93)/3$$

$$(I_e)_{D+L} = 341347.94 \text{ cm}^4$$

**Determinación de la deflexión a corto plazo o inmediata**

$$\Delta_i = \frac{5l_n^2}{48E_c I_e} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right)$$

$$\Delta_D = \frac{5x9^2}{48x250998x729837.45} x \left( 6.25 - \frac{8.67 + 0}{10} \right) x 10^9 = 0.25 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+0.50L} = \frac{5x9^2}{48x250998x341347.94} x \left( 11.88 - \frac{16.47 + 0}{10} \right) x 10^9 = 1.00 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{5x9^2}{48x250998x341347.94} x \left( 17.51 - \frac{24.27 + 0}{10} \right) x 10^9 = 1.49 \text{ cm}$$

$$\Delta_L = \Delta_{D+L} - \Delta_D = 1.49 - 0.25 = 1.24 \text{ cm}$$

$$\Delta_{LS} = \Delta_{D+0.50L} - \Delta_D = 1.00 - 0.25 = 0.75 \text{ cm}$$

**Determinación de la deflexión incremental a largo plazo**

Para el centro del claro

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'}$$

$$\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705$$

Para 36 meses:  $\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705 = 1.81$

Para 5 años:  $\xi = 2.0$

Dado que  $A'_s$  es 0,  $\rho' = 0$

Para 36 meses:  $\lambda_{36} = \frac{1.81}{1+0} = 1.81$

Para 5 años:  $\lambda_{\infty} = \frac{2.0}{1+0} = 2.0$

Luego la deflexión incremental a largo plazo es:

$$\Delta_{inc} = \Delta_L + \lambda_{\infty} \Delta_D + \lambda_t \Delta_{LS}$$

$$\Delta_{inc} = 1.24 + 2.0x0.25 + 1.81x0.75 = 3.10 \text{ cm}$$

### *Requerimientos de deflexión*

$$\Delta_L = 1.24 \text{ cm} < l/180 = 950/180 = 5.27 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por lo tanto, la viga puede usarse en techos planos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_L = 1.24 \text{ cm} < l/360 = 950/360 = 2.64 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por tanto, la viga puede usarse en pisos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_{inc} = 3.10 \text{ cm} > l/480 = 950/480 = 1.98 \text{ cm} \quad \text{NO CUMPLE}$$

Por tanto, la viga no puede usarse en techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_{inc} = 3.10 \text{ cm} < l/240 = 950/240 = 3.96 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por tanto, la viga puede usarse en techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no son susceptibles de dañarse con deflexiones grandes.

### **Ejemplo 3.6**

Calcule la deflexión inmediata para el total de la carga de servicio para la viga del ejemplo 3.3 usando el método de Grossman.

### **Solución**

El momento resistente o nominal  $M_n$  puede ser calculado usando alguno de los varios programas existentes para el diseño de vigas como el programa *Beam Strength* utilizado en esta tesis.

### Secciones izquierda y derecha

Usando Beam Strength:  $M_n = 73.43 \text{ tn.m}$

$$K_e = \frac{d}{0.9h} \left[ \frac{\sqrt{2323/w_c}}{0.4 + \left( \frac{1.4M_a}{\phi M_n} \right) \left( \frac{f_y}{7031} \right)} \right]$$

$$K_e = \frac{74}{0.9 \times 80} \left[ \frac{\sqrt{2323/2400}}{0.4 + \left( \frac{1.4 \times 42.30}{0.9 \times 73.43} \right) \left( \frac{4200}{7031} \right)} \right] = 1.081$$

$$(I_e)_{\min} = 0.35 K_e I_g = 0.35 \times 1.081 \times 1280000 = 484288 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{\max} = I_g = 1280000 \text{ cm}^4$$

Como  $\frac{M_a}{M_{cr}} = \frac{42.30}{10.71} = 3.95 > 1.6$ , entonces:

$$I_e = 0.1 K_e \left( \frac{M_a}{M_{cr}} \right) I_g$$

$$I_e = 0.1 \times 1.081 \times \left( \frac{42.30}{10.71} \right) \times 1280000 = 546495.46 \text{ cm}^4$$

Como:  $(I_e)_{\min} < I_e < (I_e)_{\max} \rightarrow I_e = 546495.46 \text{ cm}^4$

### Sección central

Usando Beam Strength:  $M_n = 48.24 \text{ tn.m}$

$$K_e = \frac{d}{0.9h} \left[ \frac{\sqrt{2323/w_c}}{0.4 + \left( \frac{1.4M_a}{\phi M_n} \right) \left( \frac{f_y}{7031} \right)} \right]$$

$$K_e = \frac{74}{0.9 \times 80} \left[ \frac{\sqrt{2323/2400}}{0.4 + \left( \frac{1.4 \times 29.95}{0.9 \times 48.24} \right) \left( \frac{4200}{7031} \right)} \right] = 1.035$$

$$(I_e)_{\min} = 0.35K_e I_g = 0.35 \times 1.035 \times 2469333.33 = 894516.00 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{\max} = I_g = 2469333.33 \text{ cm}^4$$

Como  $\frac{M_a}{M_{cr}} = \frac{29.95}{15.31} = 1.96 > 1.6$ , entonces:

$$I_e = 0.1 K_e \left( \frac{M_a}{M_{cr}} \right) I_g$$

$$I_e = 0.1 \times 1.035 \times \left( \frac{29.95}{15.31} \right)^2 \times 2469333.33 = 499967.42 \text{ cm}^4$$

Como  $I_e < (I_e)_{\min} \rightarrow I_e = (I_e)_{\min} = 894516.00 \text{ cm}^4$

### **Cálculo del momento de inercia promedio para todo el tramo**

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5I_{ec}$$

$$(I_e)_D = 0.25 \times (546495.46 + 546495.46) + 0.5 \times 894516.00$$

$$(I_e)_D = 720505.73 \text{ cm}^4$$

El valor obtenido con el método de Branson es  $746056.19 \text{ cm}^4$  que resulta ser 3 % mayor que el valor obtenido con el método de Grossman.

### **Cálculo de la deflexión inmediata**

$$\Delta_i = \frac{5l_n^2}{48E_c I_e} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right)$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{5 \times 8.50^2}{48 \times 252671.33 \times 720505.73} \times \left( 29.95 - \frac{42.30 + 42.30}{10} \right) \times 10^9 = 0.88 \text{ cm}$$

La deflexión de  $0.88 \text{ cm}$  obtenida con el método de Grossman resultó ser sólo 2.3 % mayor que la deflexión de  $0.86 \text{ cm}$  obtenida con el método de Branson, lo cual resulta ser una diferencia despreciable. En otros casos la desviación podría ser mucho mayor.

### Ejemplo 3.7

Calcule la deflexión inmediata para el total de la carga de servicio para la viga del ejemplo 3.3 usando el método de Fikry y Thomas.

### Solución

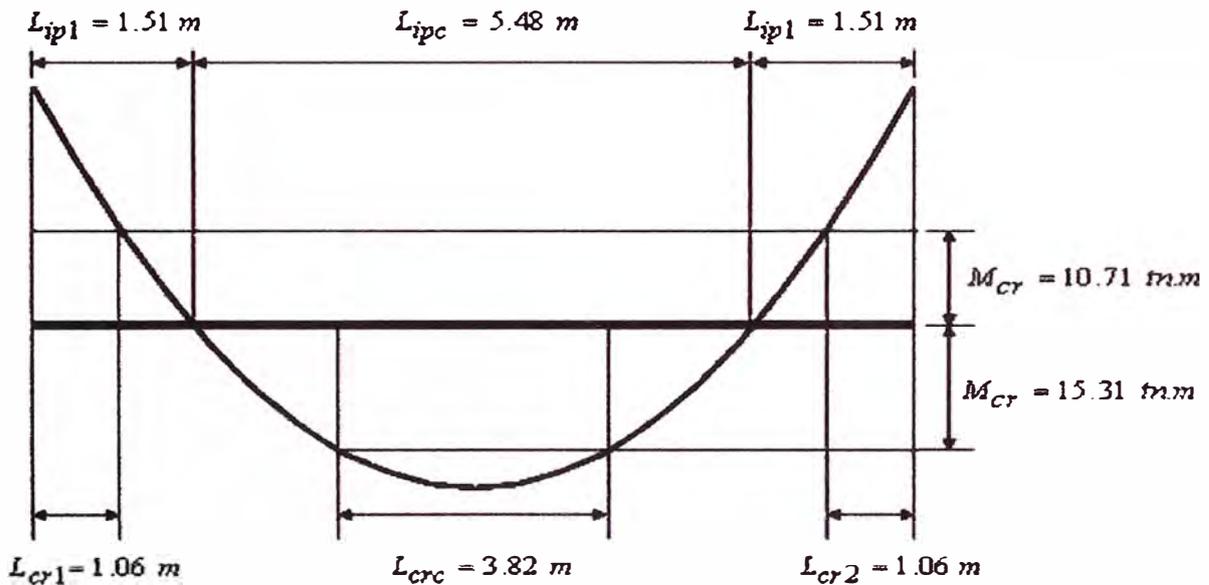


Figura 3.7 Diagrama de momentos flectores para la viga del ejemplo 3.3

### Secciones izquierda y derecha (secciones rectangulares)

$$\rho = 100A_s / (bd) = 100 \times 25.64 / (30 \times 74) = 1.1550$$

$$\rho' = 100A'_s / (bd) = 100 \times 7.76 / (30 \times 74) = 0.3495$$

$$\alpha' = 6 \times 10^{-4} + (d' / d)(1 - 2d' / d)^2 / 20$$

$$\alpha' = 6 \times 10^{-4} + (6 / 74)(1 - 2 \times 6 / 74)^2 / 20 = 0.0034$$

$$b_e = (\alpha' n \rho' (d / d') + 1) b$$

$$b_e = (0.0034 \times 7.92 \times 0.3495 \times (74 / 6) + 1) \times 30 = 33.48 \text{ cm}$$

$$\rho_e = \rho b / b_e = 1.1550 \times 30 / 33.48 = 1.0349$$

$$\phi = \begin{cases} -(M_a / M_{cr})(L_{cr} / L_{ip})\rho & \text{Para } \rho > 1\% \\ -(M_a / M_{cr})(L_{cr} / L_{ip}) & \text{Para } \rho \leq 1\% \end{cases}$$

Como  $\rho > 1\%$ , entonces:

$$\phi = -(M_a / M_{cr}) (L_{cr} / L_{ip}) \rho = -(42.3 / 10.71) x (1.06 / 1.51) x 1.1550 = -3.202$$

$$n\rho_e = 7.92 x 1.0349 = 8.196$$

De la tabla 3.1:  $\alpha = 0.16$  y  $\beta = 0.05$

$$I_{cre} = (\alpha + \beta n\rho_e) (b_e d^3 / 12)$$

$$I_{cre} = (0.16 + 0.05 x 7.92 x 1.0349) x (33.48 x 74^3 / 12) = 644224.68 \text{ cm}^4$$

$$I_g = bh^3 / 12 = 30 x 80^3 / 12 = 1280000 \text{ cm}^4$$

$$I_e = I_{cre} + (I_g - I_{cre}) e^{\phi}$$

$$I_e = 644224.68 + (1280000 - 644744.40) e^{-3.202} = 670088.50 \text{ cm}^4$$

### Sección central (sección T)

$$\rho = 100 A_s / (bd) = 100 x 15.52 / (30 x 74) = 0.6991$$

$$\rho' = 0$$

$$\alpha_f = \min((1 + 8h_f / d) / 3, 0.9) = \min((1 + 8 x 10 / 74) / 3, 0.9)$$

$$\alpha_f = 0.6937$$

Como  $\rho'$  es 0, entonces:

$$b_e = (\alpha' n \rho' (d / d') + \alpha_f (b / b_w - 1) + 1) b_w$$

Se reduce a:  $b_e = (\alpha_f (b / b_w - 1) + 1) b_w$

$$b_e = (0.6937 x (190 / 30 - 1) + 1) x 30 = 140.99$$

$$\phi = \begin{cases} -(M_a / M_{cr}) (L_{cr} / L_{ip}) \rho & \text{Para } \rho > 1\% \\ -(M_a / M_{cr}) (L_{cr} / L_{ip}) & \text{Para } \rho \leq 1\% \end{cases}$$

Como  $\rho \leq 1\%$ , entonces:

$$\phi = -(M_a / M_{cr}) (L_{cr} / L_{ip}) = -(30.0 / 15.31) x (3.82 / 5.48) = -1.366$$

$$\rho_e = \rho b_w / b_e = 0.6991 x 30 / 140.99 = 0.1488$$

$$n\rho_e = 7.92 x 0.1488 = 1.1785$$

De la tabla 3.1:  $\alpha = 0.003$  y  $\beta = 0.095$

$$I_{cre} = (\alpha + \beta n \rho_e) (b_e d^3 / 12)$$

$$I_{cre} = (0.003 + 0.095 \times 7.92 \times 0.1488) \times (140.99 \times 74^3 / 12) = 547315.94 \text{ cm}^4$$

$$I_g = 2469333.33 \text{ cm}^4 \text{ (calculado en el ejemplo 3.3)}$$

$$I_e = I_{cre} + (I_g - I_{cre}) e^{\phi}$$

$$I_e = 547315.94 + (2469333.33 - 547315.94) e^{-1.366} = 1037671.44 \text{ cm}^4$$

### **Momento de inercia efectivo promedio**

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5 I_{ec}$$

$$(I_e)_{D+L} = 0.25 \times (670088.50 + 670088.50) + 0.5 \times 1037671.44$$

$$(I_e)_{D+L} = 853879.97 \text{ cm}^4$$

### **Deflexión inmediata**

$$\Delta_i = \frac{5I_n^2}{48E_c I_e} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right)$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{5 \times 8.50^2}{48 \times 252671.33 \times 853879.97} \times \left( 29.95 - \frac{42.3 + 42.3}{10} \right) \times 10^9 = 0.75 \text{ cm}$$

La deflexión de 0.75 cm obtenida con el método de Firkry y Thomas resultó ser 13 % menor que la deflexión de 0.86 cm obtenida con la ecuación de Branson.

### **Ejemplo 3.8**

Calcule la deflexión inmediata para el total de la carga de servicio para la viga del ejemplo 3.3 usando la ecuación de Bischoff.

### **Solución**

Del ejemplo 3.3 se tienen los siguientes datos:

**Secciones izquierda/derecha**

$$M_D + M_L = 42.30 \text{ tn.m}$$

$$M_{cr} = 10.71 \text{ tn.m}$$

$$I_g = 1280000 \text{ cm}^4$$

$$I_{cr} = 663006.13 \text{ cm}^4$$

**Sección central**

$$M_D + M_L = 29.95 \text{ tn.m}$$

$$M_{cr} = 15.31 \text{ tn.m}$$

$$I_g = 2469333.33 \text{ cm}^4$$

$$I_{cr} = 565453.12 \text{ cm}^4$$

$$I_e = \frac{I_{cr}}{1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^2 \left[1 - \frac{I_{cr}}{I_g}\right]} \leq I_g$$

**Determinación de los momentos de inercia efectivos por sección**

*Secciones izquierda y derecha:*

$$(I_e)_{D+L} = \frac{663006.13}{1 - \left(\frac{10.71}{42.30}\right)^2 \left[1 - \frac{663006.13}{1280000}\right]} = 684146.78 \text{ cm}^4$$

*Sección central*

$$(I_e)_{D+L} = \frac{565453.12}{1 - \left(\frac{15.31}{29.95}\right)^2 \left[1 - \frac{565453.12}{2469333.33}\right]} = 708120.13 \text{ cm}^4$$

**Determinación del momento de inercia promedio para todo el tramo**

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5I_{ec}$$

$$(I_e)_{D+L} = 0.25x(684146.78 + 684146.78) + 0.5x708120.13$$

$$(I_e)_{D+L} = 696133.46 \text{ cm}^4$$

### **Determinación de la deflexión a corto plazo o inmediata**

$$\Delta_i = \frac{5l_n^2}{48E_c I_e} \left( M_c - \frac{M_1 + M_2}{10} \right)$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{5x8.50^2}{48x252671.33x696133.46} x \left( 29.95 - \frac{42.30 + 42.30}{10} \right) x 10^9$$

$$\Delta_{D+L} = 0.92 \text{ cm}$$

La deflexión de 0.92 cm obtenida con la ecuación de Bischoff resultó ser 7% mayor que la deflexión de 0.86 cm obtenida con la ecuación de Branson.

### **Ejemplo 3.9**

La losa sólida unidireccional mostrada en la figura 3.8 tiene un espesor de 20 cm y está apoyada en vigas. Además de su peso propio esta sujeta a una carga viva de 1000 kg/m<sup>2</sup> y a una carga muerta de 100 kg/m<sup>2</sup>. La resistencia del concreto es de 280 kg/cm<sup>2</sup> y la resistencia a la fluencia del acero es de 4200 kg/cm<sup>2</sup>. El recubrimiento libre es de 2 cm. El 45% de la carga viva se sostiene por un periodo de 24 meses. Determine que tipo de elementos podría soportar. No considerar el acero en compresión. Use el reglamento ACI 318-05 y los coeficientes de momentos que se indican.

### **Solución**

Las losas se analizan tomando una franja de 1 metro de ancho.

### **Requisitos de peralte mínimo**

$$h_{\text{minimo}} = \frac{l}{20} = \frac{6.00 + 0.40}{20} = 0.32 \text{ m} = 32 \text{ cm}$$

$$h_{real} = 20 \text{ cm} < 32 \text{ cm}$$

Por lo tanto deben verificarse las deflexiones.

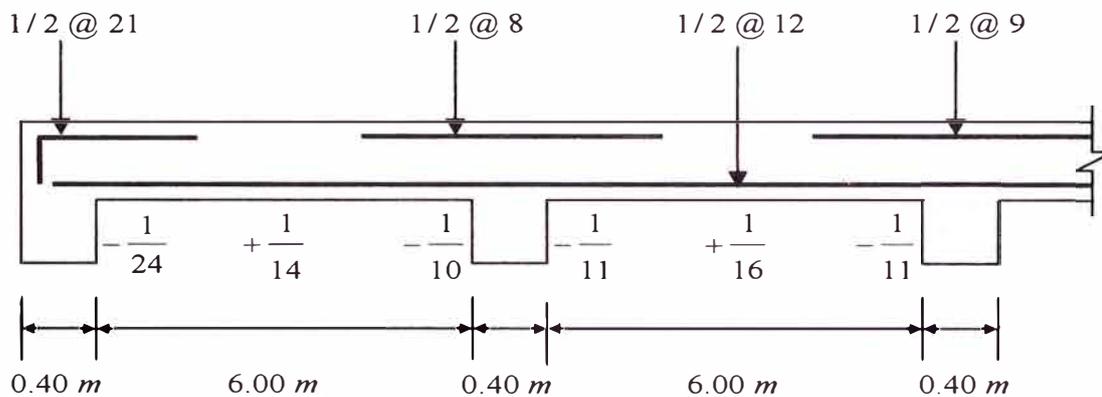
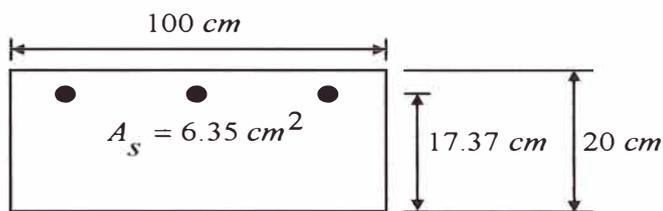
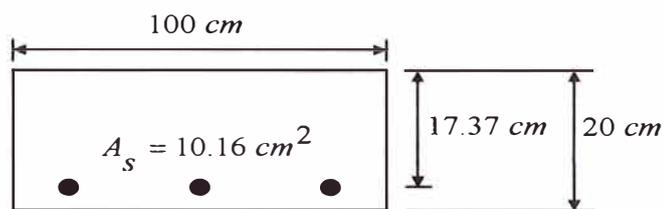


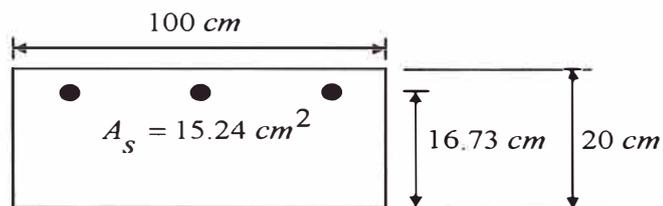
Figura 3.8 Losa sólida del ejemplo 3.8



sección en el extremo izquierdo



sección en el centro



sección en el extremo derecho

### **Propiedades de los materiales**

$$E_c = 15100\sqrt{f'_c} = 15100\sqrt{280} = 252671.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{252671.33} = 7.92$$

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} = 2\sqrt{280} = 33.47 \text{ kg/cm}^2$$

### **Cálculo de la carga muerta**

$$w_D = 100 + 2400 \times 0.20 = 580 \text{ kg/m}^2$$

### **Cálculo de las áreas de acero**

$$\text{Sección izquierda: } A_s = 1/2 @ 21 \text{ en } 1 \text{ m} = 6.35 \text{ cm}^2$$

$$\text{Sección central: } A_s = 1/2 @ 12 \text{ en } 1 \text{ m} = 15.24 \text{ cm}^2$$

$$\text{Sección derecha: } A_s = 1/2 @ 8 \text{ en } 1 \text{ m} = 10.16 \text{ cm}^2$$

### **Cálculo del peralte efectivo**

Dado que para todas las secciones se usa el mismo diámetro de acero de refuerzo, entonces el peralte efectivo es el mismo para todas las secciones.

$$d = h - \text{recubrimiento} - \text{diámetro} / 2 = 20 - 2 - 1.27 / 2 = 17.37 \text{ cm}$$

### **Cálculo de momentos flectores por carga de servicio**

*Sección izquierda*

$$M_D = \frac{580 \times 6^2}{24} = 870 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+0.45L} = \frac{(580 + 0.45 \times 1000) \times 6^2}{24} = 1545 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+L} = \frac{(580 + 1000)x6^2}{24} = 2370 \text{ kg.m}$$

**Sección central**

$$M_D = \frac{580x6^2}{14} = 1491.43 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+0.45L} = \frac{(580 + 0.45x1000)x6^2}{14} = 2648.57 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+L} = \frac{(580 + 1000)x6^2}{14} = 4062.86 \text{ kg.m}$$

**Sección derecha**

$$M_D = \frac{580x6^2}{10} = 2088 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+0.45L} = \frac{(580 + 0.45x1000)x6^2}{10} = 3708 \text{ kg.m}$$

$$M_{D+L} = \frac{(580 + 1000)x6^2}{10} = 5688 \text{ kg.m}$$

**Determinación del momento de inercia de la sección bruta**

$$\bar{y} = \frac{h}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ cm}$$

$$y_t = h - \bar{y} = 20 - 10 = 10 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} = \frac{100x20^3}{12} = 66666.67 \text{ cm}^4$$

Que es el mismo valor para todas las secciones.

**Determinación del momento de agrietamiento**

$$M_{cr} = \frac{I_g f_r}{y_t} = \frac{66666.67x33.47}{10} x10^{-2} = 2231.32 \text{ kg.m}$$

Que es el mismo valor para todas las secciones.

### **Determinación del momento de inercia de la sección agrietada**

Para sección rectangular simplemente reforzada  $A'_s = 0$  por lo que reemplazando  $p$  y  $q$  de las ecuaciones A.17 y A.18 en A.19 se obtiene:

$$c = \frac{nA_s}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2bd}{nA_s}} \right]$$

y la ecuación A.20 se convierte en:

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d-c)^2$$

#### **Sección izquierda**

$$c = \frac{7.92 \times 6.35}{100} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100 \times 17.37}{7.92 \times 6.35}} \right] = 3.71 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{100 \times 3.71^3}{3} + 7.92 \times 6.35 \times (17.37 - 3.71)^2 = 11086.43 \text{ cm}^4$$

#### **Sección central**

$$c = \frac{7.92 \times 10.16}{100} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100 \times 17.37}{7.92 \times 10.16}} \right] = 4.54 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{100 \times 4.54^3}{3} + 7.92 \times 10.16 \times (17.37 - 4.54)^2 = 16364.84 \text{ cm}^4$$

#### **Sección derecha**

$$c = \frac{7.92 \times 15.24}{100} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 100 \times 17.37}{7.92 \times 15.24}} \right] = 5.38 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{100 \times 5.38^3}{3} + 7.92 \times 15.24 \times (17.37 - 5.38)^2 = 22542.65 \text{ cm}^4$$

### **Determinación del momento de inercia efectivo por sección**

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \leq I_g$$

#### **Sección izquierda**

Como:  $M_{cr} > M_D = 870 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_D = I_g = 66666.67 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} > M_{D+0.45L} = 1545 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+0.45L} = I_g = 66666.67 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} \leq M_{D+L} = 2370 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+L} = \left(\frac{2231.32}{2370}\right)^3 \times 66666.67 + \left(1 - \left(\frac{2231.32}{2370}\right)^3\right) \times 11086.43$$

$$(I_e)_{D+L} = 57469.66 \text{ cm}^4$$

#### **Sección central**

Como:  $M_{cr} > M_D = 1491.3 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_D = I_g = 66666.67 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} < M_{D+0.45L} = 2648.57 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+L} = \left(\frac{2231.32}{2648.57}\right)^3 \times 66666.67 + \left(1 - \left(\frac{2231.32}{2648.57}\right)^3\right) \times 16364.84$$

$$(I_e)_{D+L} = 46441.87 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} < M_{D+L} = 4062.86 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+L} = \left(\frac{2231.32}{4062.86}\right)^3 \times 66666.67 + \left(1 - \left(\frac{2231.32}{4062.86}\right)^3\right) \times 16364.84$$

$$(I_e)_{D+L} = 24697.31 \text{ cm}^4$$

#### **Sección derecha**

Como:  $M_{cr} > M_D = 2088 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_D = I_g = 66666.67 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} < (M_a)_{D+0.45L} = 3708 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+0.45L} = \left(\frac{2231.32}{3708}\right)^3 \times 66666.67 + \left(1 - \left(\frac{2231.32}{3708}\right)^3\right) \times 22542.65$$

$$(I_e)_{D+0.45L} = 32157.48 \text{ cm}^4$$

Como:  $M_{cr} > M_{D+L} = 5688 \text{ kg.m}$ , entonces:

$$(I_e)_{D+L} = \left(\frac{2231.32}{5688}\right)^3 \times 66666.67 + \left(1 - \left(\frac{2231.32}{5688}\right)^3\right) \times 22542.65$$

$$(I_e)_{D+L} = 25206.32 \text{ cm}^4$$

### **Cálculo del momento de inercia promedio para todo el tramo**

$$I_e = 0.25(I_{e1} + I_{e2}) + 0.5I_{ec}$$

$$(I_e)_D = 0.25 \times (66666.67 + 66666.67) + 0.5 \times 66666.67$$

$$(I_e)_D = 66666.67 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+0.45L} = 0.25 \times (66666.67 + 32157.48) + 0.5 \times 46441.87$$

$$(I_e)_{D+0.45L} = 47926.97 \text{ cm}^4$$

$$(I_e)_{D+L} = 0.25 \times (57469.66 + 25206.32) + 0.5 \times 24697.31$$

$$(I_e)_{D+L} = 33017.65 \text{ cm}^4$$

### **Cálculo de las deflexiones inmediatas**

Considerando los coeficientes de momentos del ACI, la deflexión en el centro del tramo extremo de la losa se obtiene de la siguiente manera:

$$\Delta_i = \frac{5wl_n^4}{384EI} - \frac{M_1l_n^2}{16EI} - \frac{M_2l_n^2}{16EI} = \frac{5wl_n^4}{384EI} - \frac{wl_n^4}{384EI} - \frac{wl_n^4}{160EI} = \frac{1.6wl_n^4}{384EI}$$

$$\Delta_D = \frac{1.6wl_n^4}{384E_cI_e} = \frac{1.6 \times 580 \times 6^4 \times 10^6}{384 \times 252671.33 \times 66666.67} = 0.19 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+0.45L} = \frac{1.6 w l_n^4}{384 E_c I_e} = \frac{1.6 x (580 + 0.45 x 1000) x 6^4 x 10^6}{384 x 252671.33 x 47926.97} = 0.45 \text{ cm}$$

$$\Delta_{D+L} = \frac{2.29 w l_n^4}{384 E_c I_e} = \frac{1.6 x (580 + 1000) x 6^4 x 10^6}{384 x 252671.33 x 33017.65} = 1.02 \text{ cm}$$

$$\Delta_L = \Delta_{D+L} - \Delta_D = 1.02 - 0.19 = 0.83 \text{ cm}$$

$$\Delta_{LS} = \Delta_{D+0.45L} - \Delta_D = 0.45 - 0.19 = 0.26 \text{ cm}$$

### **Determinación de la deflexión incremental a largo plazo**

Para el centro del claro

$$\lambda = \frac{\xi}{1 + 50 \rho'}$$

$$\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705$$

Para 24 meses:  $\xi = 0.0194 [\ln(t)]^2 + 0.24 \ln(t) + 0.705 = 1.66$

Para 5 años:  $\xi = 2.0$

Dado que  $A'_s$  es 0,  $\rho' = 0$

Para 36 meses:  $\lambda_{24} = \frac{1.66}{1 + 0} = 1.66$

Para 5 años:  $\lambda_{\infty} = \frac{2.0}{1 + 0} = 2.0$

Luego la deflexión incremental a largo plazo es:

$$\Delta_{inc} = \Delta_L + \lambda_{\infty} \Delta_D + \lambda_t \Delta_{LS}$$

$$\Delta_{inc} = 0.83 + 2.0 x 0.19 + 1.66 x 0.26 = 1.64 \text{ cm}$$

### **Requerimientos de deflexión**

$$\Delta_L = 0.83 \text{ cm} < l/180 = 640/180 = 3.55 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por lo tanto, la viga puede usarse en techos planos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_L = 1.19 \text{ cm} < l/360 = 640/360 = 1.78 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por tanto, la viga puede usarse en pisos que no soportan ni están ligados a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_{inc} = 1.64 \text{ cm} > l/480 = 640/480 = 1.33 \text{ cm} \quad \text{NO CUMPLE}$$

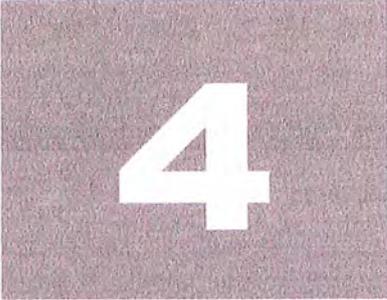
Por tanto, la viga no puede usarse en techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que se puedan dañar con deflexiones grandes.

$$\Delta_{inc} = 1.64 \text{ cm} < l/240 = 640/240 = 2.67 \text{ cm} \quad \text{CUMPLE}$$

Por tanto, la viga puede usarse en techos o pisos que soportan o están unidos a elementos no estructurales que no son susceptibles de dañarse con deflexiones grandes.

### **3.8 Programa de computadora para el cálculo y el control de la deflexión**

Para automatizar el cálculo y el control de la deflexión se ha desarrollado el programa de computadora *Deflexión 1.0* usando el lenguaje de programación Java. El código fuente del programa se encuentra en el CD adjunto a esta tesis. *Deflexión 1.0* permite controlar la deflexión usando los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E-060.89.



# **Aspectos generales sobre el agrietamiento**

---

## **4.1 Introducción**

En este capítulo se tratará el problema del agrietamiento en miembros de concreto armado como consecuencia de los cambios volumétricos restringidos del concreto y por la acción de las cargas. Se revisarán, además, los mecanismos que explican el fenómeno del agrietamiento por tracción y por flexión, como son, el mecanismo clásico del agrietamiento y el mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos.

## **4.2 El problema del agrietamiento**

El concreto es un material que tiende a agrietarse debido a su baja resistencia a la tracción. En el caso de miembros de concreto armado diseñados con esfuerzos bajos en el acero para cargas de servicio, puede esperarse que los miembros cumplan su función con agrietamiento limitado pues la variable primaria que influye en el ancho de las grietas es el esfuerzo en el acero. Sin embargo, con elevados esfuerzos en el acero por cargas de servicio, especialmente como resultado del uso de acero de alta resistencia, se debe esperar un agrietamiento mayor. De manera que, el control del agrietamiento en miembros flexionados puede ser tan importante como el control de la deflexión. El agrietamiento de la zona en tracción de una viga reforzada comienza con niveles de tracción muy bajos

en el acero de refuerzo, tan bajos como  $200 \text{ kg/cm}^2$  (ACI 224R-01, 2001).

Un agrietamiento excesivo en las estructuras de concreto no puede admitirse, porque, por una parte, abre paso hasta el acero a los agentes exteriores, más o menos agresivos, en perjuicio de la durabilidad al causar la corrosión del acero de refuerzo; y por otra parte puede perjudicar su aspecto estético de forma inaceptable.

Para controlar la corrosión diversos autores y reglamentos han sugerido anchos de grietas permisibles en función a las condiciones de exposición ambiental de los miembros de concreto. Pero el hecho es que en muchos casos no hay una correlación claramente definida entre el ancho superficial de las grietas y la extensión de la corrosión. Por ejemplo, Martin y Schiessel (citado por Bentur et. al, 1997) encontraron correlación entre el ancho superficial de las grietas y la extensión de la corrosión hasta 4 años de exposición, pero al cabo de 10 años de exposición no se observó ninguna correlación significativa. En el mismo sentido el comité ACI 224R-01 (2001) refiere dos puntos de vista controversiales en cuanto a la influencia de las grietas en la corrosión. Según el primer punto de vista “las grietas reducen la vida de servicio de las estructuras porque permiten que la carbonatación penetre más rápidamente y que los iones cloruro, la humedad y el oxígeno lleguen hasta el acero de refuerzo”. Pero de acuerdo al segundo punto de vista “aunque las grietas aceleran el inicio de la corrosión, la corrosión es localizada. Con el tiempo los cloruros y el agua penetran el hormigón no agrietado e inician una corrosión más generalizada. En consecuencia, luego de algunos años de servicio hay poca diferencia entre la cantidad de corrosión en el concreto agrietado y el no agrietado”. En general, la mejor forma de proteger el acero de refuerzo contra la corrosión es usar un concreto con baja permeabilidad y proveer un recubrimiento de concreto apropiado.

En cuanto al aspecto estético, el ancho máximo de una grieta que se pueda considerar que no afecta la estética de un miembro o que no cause alarma depende de la posición, longitud, altura, iluminación y textura

superficial de la grieta. Por otro lado, fijar límites aceptables en términos de la estética resulta difícil por los factores subjetivos que intervienen desde el punto de vista de los usuarios. El máximo ancho de grieta que no daña la apariencia de una estructura ni crea alarma pública probablemente esté dentro del rango de 0.25 a 0.38 mm, aunque pueden tolerarse anchos mayores de grietas. Desafortunadamente, las grietas de superficie a menudo son acentuadas por rayas de suciedad y material extraído desde la grieta.

### **4.3 Factores que afectan el agrietamiento**

Son diversos los factores que causan el agrietamiento del concreto, siendo los principales las deformaciones debidas a cambios volumétricos restringidos y los esfuerzos de tracción ocasionados por fuerzas de tracción, por momentos flexionantes y por fuerzas cortantes.

#### **4.3.1 Agrietamiento debido a cambios volumétricos**

Los cambios volumétricos se producen como consecuencia de los cambios de temperatura y por la contracción del concreto que producen deformaciones que al encontrarse restringidas generan esfuerzos de tracción que pueden producir agrietamiento. Las principales restricciones son las siguientes: los empotramientos, las superficies de contacto del concreto con el encofrado, la capa inferior de concreto respecto a la capa superficial, el acero de refuerzo, las columnas y los muros. El agrietamiento por contracción puede controlarse diseñando mezclas con una relación agua/cemento lo más baja posible y mediante la colocación de acero de refuerzo adecuadamente. El objetivo del acero de refuerzo no es impedir el agrietamiento, sino distribuir los esfuerzos de tracción a lo largo de las varillas de acero por efecto de la adherencia entre el acero y el concreto con lo que se producirán muchas grietas de ancho reducido en vez de pocas grietas anchas. El ACI 318-05 en la cláusula 7.12.2 establece el área mínima de acero de refuerzo y el espaciado de las varillas que puede utilizarse para controlar el agrietamiento por contracción y temperatura en losas estructurales.

### **4.3.2 Agrietamiento debido a la acción de las cargas**

Bajo la acción de cargas exteriores el concreto queda sometido a un estado de esfuerzos complejos que pueden ser esfuerzos de tracción, de compresión, de flexión, por cortante y por torsión; y cada uno de ellos entraña un tipo de agrietamiento diferente, pero de todos ellos el agrietamiento por flexión es el más conocido y estudiado. Las grietas por flexión pueden corresponder a flexión pura o combinada con esfuerzo cortante, según la importancia relativa de ambas sollicitaciones. Las grietas por flexión normalmente son perpendiculares al eje del miembro mientras que las grietas por cortante son diagonales. Las grietas por flexión se inician en el refuerzo, progresan verticalmente hacia arriba hasta alcanzar el eje neutro y se incurvan al final buscando el punto de aplicación de la carga y se detienen al alcanzar la cabeza de compresión. Estas grietas avisan con mucho tiempo. Por el contrario, las grietas debidas al esfuerzo cortante pueden comenzar en el alma, progresar hacia el refuerzo y llegar luego hasta la carga, dividiendo en dos partes la pieza. Este proceso puede ser muy rápido, e incluso instantáneo, dependiendo de la cuantía de acero transversal existente. De ahí su peligrosidad.

## **4.4 Mecanismos del agrietamiento por flexión**

Se han propuesto varios mecanismos de agrietamiento que sirven de base para calcular el ancho de grietas y su separación, en miembros de concreto armado. Los mecanismos difieren entre sí por las hipótesis hechas sobre la distribución de esfuerzos en el concreto, lo que depende a su vez de la forma como se transfieren los esfuerzos de adherencia del acero al concreto. A continuación se describen el mecanismo clásico de agrietamiento y el mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos.

### **4.4.1 Mecanismo clásico de agrietamiento**

#### **4.4.1.1 Miembros sujetos a tracción**

En este mecanismo el agrietamiento depende principalmente de la calidad de la adherencia entre el concreto y el acero. En la figura 4.1 se muestra un miembro de concreto armado sometido a tracción axial. Al aplicar la fuerza de tracción  $T$  aparecen las primeras grietas, denominadas grietas

primarias (A y C en la figura 4.1). Estas grietas aparecen en secciones, localizadas aleatoriamente, en las que el esfuerzo de tracción ha excedido la resistencia a tracción del concreto.

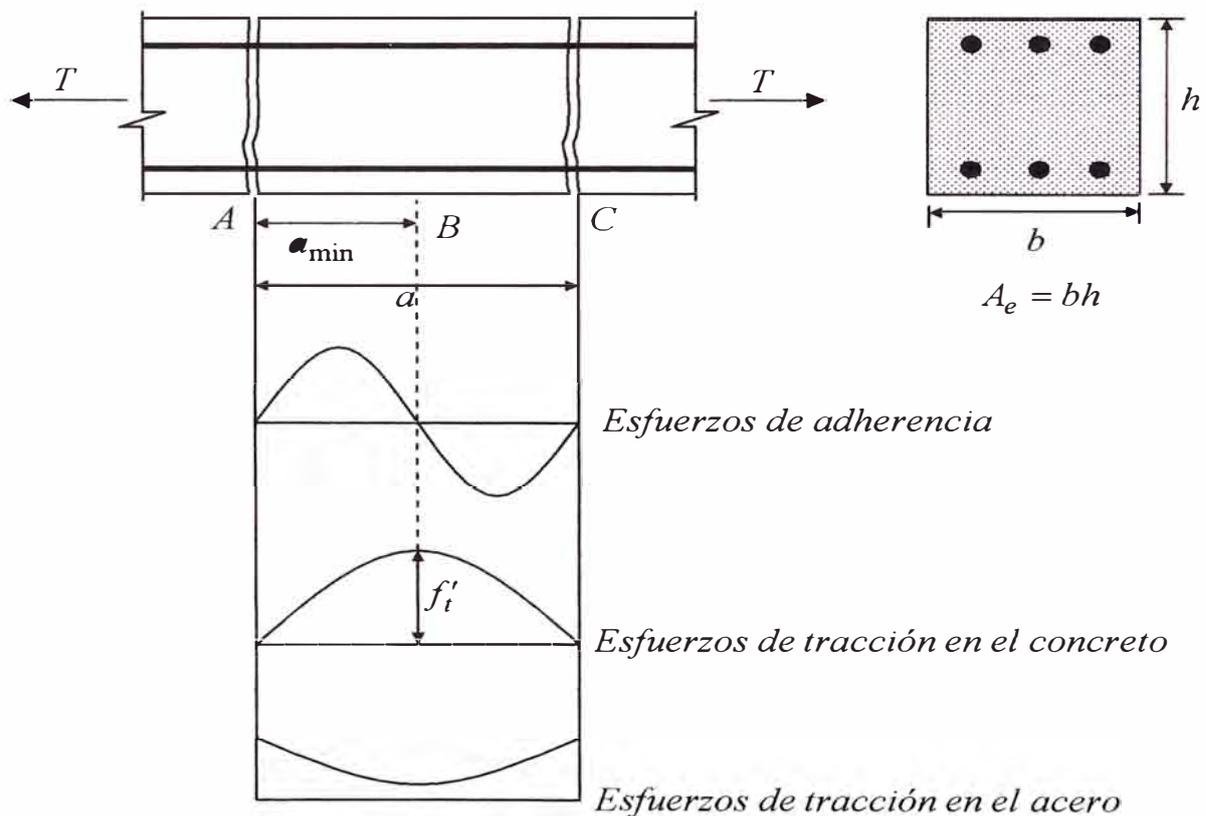
En las grietas el concreto no transmite ningún esfuerzo y es el acero de refuerzo el que transmite toda la carga externa. Sin embargo, en el tramo comprendido entre dos grietas cualesquiera hay tracción en el concreto, debido a la transferencia de esfuerzos de tracción del acero al concreto como consecuencia de los esfuerzos de adherencia. Si la fuerza de tracción, entre dos grietas, transferida del acero al concreto por efecto de los esfuerzos de adherencia es mayor o igual que la resistencia a tracción del concreto, se formará una nueva grieta (B en la figura 4.1a) entre las dos grietas existentes. Entre dos grietas podrá formarse una nueva grieta, pero el espaciamiento entre dos grietas sólo podrá reducirse hasta un espaciamiento mínimo determinado  $a_{\min}$ . Este espaciamiento mínimo  $a_{\min}$  es la longitud mínima en la que se puede transferir por adherencia del acero al concreto una fuerza de tracción suficientemente grande para alcanzar la resistencia a tracción del concreto y formar una grieta adicional entre dos grietas existentes. Por ejemplo, en la figura 4.1 se forman dos grietas primarias en las secciones A y C, que están a una distancia  $a$  entre sí. Para formarse una grieta adicional en B a la distancia  $a_{\min}$  de A, la adherencia entre el acero y el concreto a lo largo de la longitud AB debe transmitir suficiente tracción desde el acero al concreto para alcanzar la resistencia a tracción del concreto y agrietar el concreto en B.

Según esto, podrá formarse una nueva grieta en B, entre las grietas A y C, sólo si  $a \geq 2a_{\min}$ . Lo que significa que puede esperarse que el espaciado entre las grietas varíe entre  $a_{\min}$  y  $2a_{\min}$ , con un espaciado promedio  $a_{prom}$  dado por  $a_{prom} = 3/2 a_{\min}$ . En términos de  $a_{prom}$  los espaciados mínimo y máximo vienen dados por:  $a_{\min} = 2/3 a_{prom}$  y  $a_{\max} = 4/3 a_{prom}$ .

La fuerza de tracción requerida para agrietar el concreto viene dada por:

$$\text{Fuerza de tensión} = A_e f'_t \quad (4.1)$$

Donde  $A_e$  es el área efectiva del concreto en tracción y  $f'_t$  es la resistencia a tracción del concreto.



**Figura 4.1** Miembro en tracción según el mecanismo clásico de agrietamiento

La tracción transferida al concreto en la distancia mínima  $a_{\min}$  viene dada por:

$$\text{Tensión transferida} = a_{\min} u \sum o \quad (4.2)$$

Donde  $u$  el esfuerzo promedio de adherencia y  $\sum o$  es la suma de los perímetros de las varillas. Igualando las ecuaciones 4.1 y 4.2 y, despejando  $a_{\min}$  se tiene que:

$$a_{\min} = \frac{A_e f'_t}{u \sum o} \quad (4.3)$$

Para varillas del mismo diámetro  $\sum o = 4A_s / d_b$ , donde  $A_s$  es el área del acero y  $d_b$  es el diámetro de las varillas. También, sustituyendo  $\rho_e = A_s / A_e$  en la ecuación 4.3 se tiene

$$a_{\max} = 2 a_{\min} = \frac{f'_t d_b}{2 u \rho_e} \quad (4.4)$$

La elongación del acero entre dos grietas, menos la elongación del concreto, proporciona el ancho de la grieta. Ignorando la elongación del concreto por pequeña, el ancho máximo de la grieta viene dada por:

$$w_{\max} = \varepsilon_s a_{\max} = \frac{f_s}{E_s} a_{\max} = \frac{f_s f'_t d_b}{2 E_s u \rho_e} \quad (4.5)$$

Donde  $\varepsilon_s$  es la deformación unitaria del acero,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero y  $E_s$  el módulo de elasticidad del acero.

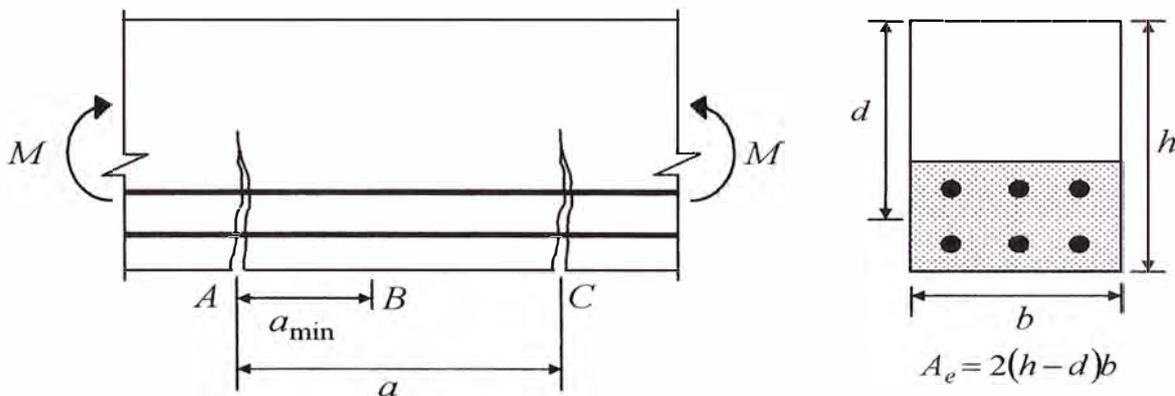
La deducción anterior comprende la suposición de que el esfuerzo de tracción en el concreto en la sección B de la figura 4.1 es uniforme y por lo tanto el área efectiva del concreto en tracción  $A_e$  es toda la sección transversal del miembro. Esta suposición es discutible, ya que la distribución real del esfuerzo de tracción puede ser altamente no uniforme. También se supone que la abertura de las grietas se debe al deslizamiento del concreto con relación al refuerzo, que el espaciado de las grietas está determinado por la fuerza que se puede transmitir desde el acero al concreto por adherencia, y que la grieta tiene lados paralelos (es decir, un ancho constante) en todo el espesor del miembro.

#### 4.4.1.2 Miembros sujetos a flexión

La ecuación 4.5 puede aplicarse a la flexión de una viga, como la viga de

la figura 4.2 considerando un área efectiva de concreto en tracción  $A_e$  que tenga el mismo ancho de la viga y el mismo centroide que el refuerzo de tracción. El valor de  $A_e$  es  $A_e = 2b(h-d)$ .

El mecanismo clásico de agrietamiento permite obtener una idea clara de la influencia de varias variables importantes. Sin embargo, la aplicación de la ecuación 4.5 conduce a resultados que no concuerdan satisfactoriamente con datos experimentales. Esto ha dado lugar a que varios investigadores planteen modificaciones de la ecuación 4.5 basadas en datos experimentales, como se verá en el próximo capítulo.



**Figura 4.2** Miembro en flexión según el mecanismo clásico del agrietamiento

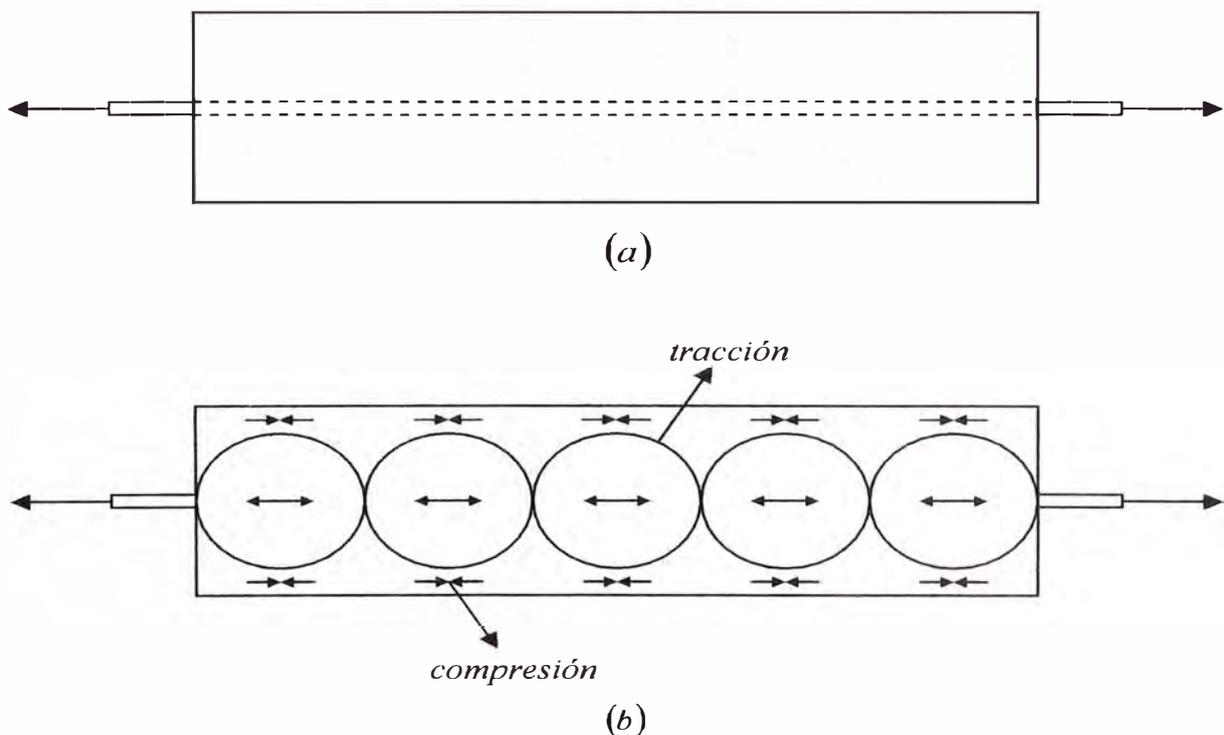
#### 4.4.2 Mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos

Este mecanismo fue planteado por Broms (1965) basado en la Teoría de la Elasticidad.

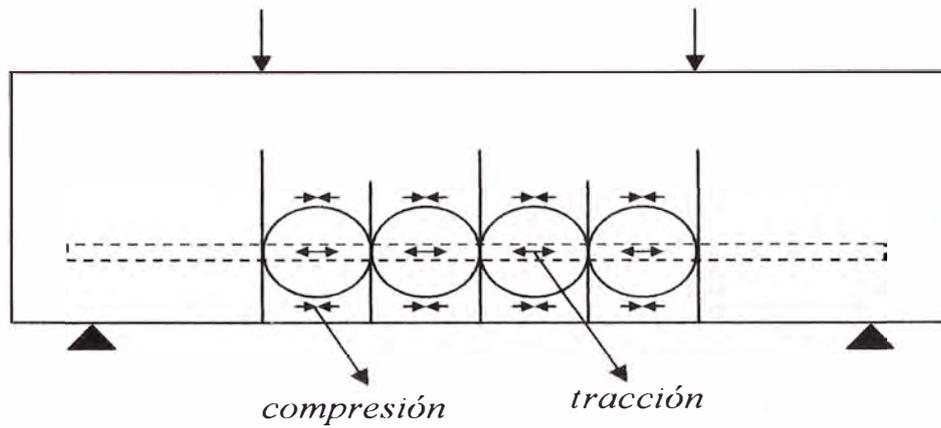
##### 4.4.2.1 Miembros sujetos a tracción

En la figura 4.3a se muestra un miembro en tracción. El espaciamiento mínimo resultante entre grietas puede ser pronosticado de la redistribución de esfuerzos que toma lugar cuando se forman grietas. Se ha encontrado que dentro de un círculo inscrito entre dos grietas adyacentes preexistentes, existen elevados esfuerzos de tracción, mientras que fuera de este círculo de tracción se presentan esfuerzos de compresión o pequeños esfuerzos de tracción (figura 4.3b). Basándose en este estado

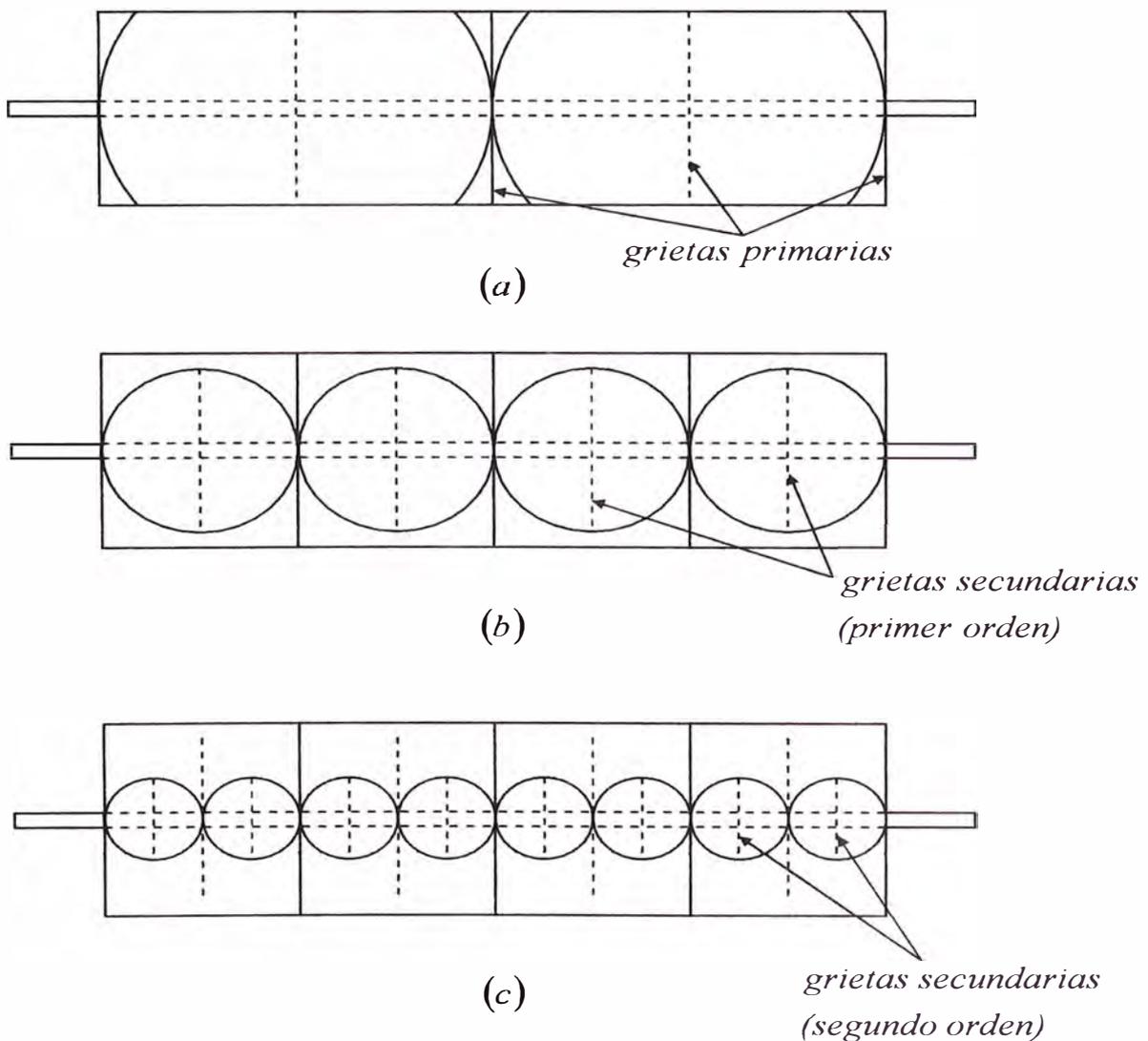
de esfuerzos, Broms ha propuesto un mecanismo según el cual las grietas se desarrollan únicamente dentro de los círculos de tracción cuando los esfuerzos máximos de tracción en el concreto exceden su resistencia a la tracción. Esta grieta formada se esparcirá lateralmente hasta que el esfuerzo de tracción promedio en la raíz de la grieta decrece hasta un valor menor que la resistencia a tracción del concreto. Esto parece ocurrir cuando el agrietamiento se aproxima a la periferia del correspondiente círculo inscrito. Si el diámetro del círculo inscrito es mayor o igual que el ancho total del miembro (figura 4.5a), la grieta atravesará el ancho total del miembro. Esta grieta se denomina grieta primaria. Si, por otro lado, el diámetro del círculo inscrito es menor que el ancho total del miembro (figura 4.5b), la grieta se extiende sólo sobre parte del ancho total del miembro no siendo visible en el exterior. Esta grieta se denomina grieta secundaria. Por lo tanto, cuando el agrietamiento prosigue, la longitud de las grietas subsecuentes decrecerán en proporción al espaciamiento de las grietas (figura 4.5c). El proceso de agrietamiento continúa hasta que la separación de las grietas es tal que la resistencia del concreto no puede desarrollarse por adherencia entre grietas consecutivas.



**Figura 4.3** Miembro en tracción según Broms



**Figura 4.4** Miembro en flexión según Broma



**Figura 4.5** Mecanismo de agrietamiento por tracción según Broma (a) grietas primarias, (b) grietas secundarias de primer orden, (c) grietas secundarias de segundo orden

Para el caso de miembros reforzados con varias varillas de acero, los círculos de tracción se construyen alrededor de cada varilla. Se ha encontrado en este caso que la longitud de las grietas depende del espaciamiento de las barras individuales y del espaciamiento de las grietas primarias.

#### **4.4.2.2 Miembros sujetos a flexión**

La formación de grietas de flexión afecta la distribución longitudinal en miembros sujetos a flexión. La distribución de esfuerzos en un miembro flexionado puede calcularse aproximadamente de la teoría de la elasticidad. Puede ser mostrado que altos esfuerzos de tracción estarán presentes dentro de un área circular localizada entre dos grietas adyacentes como se ilustra en la figura 4.4. Fuera de esta área circular, se presentan esfuerzos de compresión o pequeños esfuerzos de tracción. Los círculos de esfuerzo gobiernan la distribución de esfuerzos de la zona de tracción que ha sido redibujada en la figura 4.6a. Cuando un conjunto de grietas se forma aproximadamente a medio camino entre grietas primarias existentes, las nuevas grietas se extenderán lateralmente hasta llegar a la periferia de los círculos de tracción correspondientes donde la intensidad del esfuerzo axial promedio de tracción sea baja. Si el espaciamiento de las grietas primarias es menos que el doble de la distancia desde el nivel de refuerzo hasta el eje neutro, la longitud de las nuevas grietas será menos que la longitud de las grietas primarias por flexión existentes (las cuales se extienden hasta el eje neutro) y las nuevas grietas serán grietas de flexión secundarias. Las grietas de flexión secundarias (mostradas en la figura 4.6b) causarán una redistribución de esfuerzos en la vecindad inmediata del acero de refuerzo. Un nuevo conjunto de grietas, grietas secundarias por flexión de segundo orden, se desarrollarán cuando el esfuerzo máximo por tracción en el concreto excede la resistencia a tracción del concreto. Las longitudes de estas nuevas grietas serán gobernadas por los diámetros de los correspondientes círculos de esfuerzos (la distancia entre dos grietas adyacentes). Si el espaciamiento de las grietas adyacentes es menor que el doble espesor del recubrimiento del fondo del miembro flexionado, entonces los correspondientes círculos de esfuerzo y el nuevo conjunto de

grietas no llegarán a la cara del fondo del miembro como se muestra en la figura 4.6b.

Teóricamente, la separación de grietas al nivel del acero de refuerzo, según este mecanismo de agrietamiento, varía de  $t$  a  $2t$  con una separación promedio de  $1.5t$  donde  $t$  es el recubrimiento de concreto medido desde el eje longitudinal de la varilla. Pero, comprobaciones de laboratorio dieron una separación promedio de grietas de  $2t$ , en vez de la separación promedio teórica de  $1.5t$ . La discrepancia entre los espaciamientos de grietas medido y pronosticado puede ser atribuida a diferencias entre la distribución de esfuerzos asumido y la distribución real en la vecindad del acero de refuerzo. Así pues la separación promedio entre grietas  $a_{prom}$  es:

$$a_{prom} = 2t \quad (4.6)$$

Las ecuación 4.6 muestra que el espaciamiento entre grietas depende primariamente del espesor del recubrimiento de concreto y es independiente del porcentaje y tamaño del refuerzo, así también como de la resistencia a la tracción y a la compresión del concreto.

El ancho promedio de grieta, al nivel del refuerzo, de las grietas visibles en la superficie puede ser calculado asumiendo que la elongación (o contracción) del concreto entre dos grietas de tracción es pequeña en comparación a la elongación del acero de refuerzo y puede ser omitido. Bajo esta suposición se encuentra que el ancho promedio de las grietas  $w_{prom}$  viene dado por:

$$w_{prom} = a_{prom} \varepsilon_s = 2 t \varepsilon_s \quad (4.7)$$

Donde  $\varepsilon_s$  es la deformación unitaria promedio del acero de refuerzo. Esta relación es aplicable cuando la tracción nominal del acero está en el rango de 1400 a 2100  $kg/cm^2$  para recubrimientos de 3 a 7.5  $cm$  y cuando la

tracción nominal del acero excede de  $3500 \text{ kg/cm}^2$  para un recubrimiento de  $15 \text{ cm}$ .

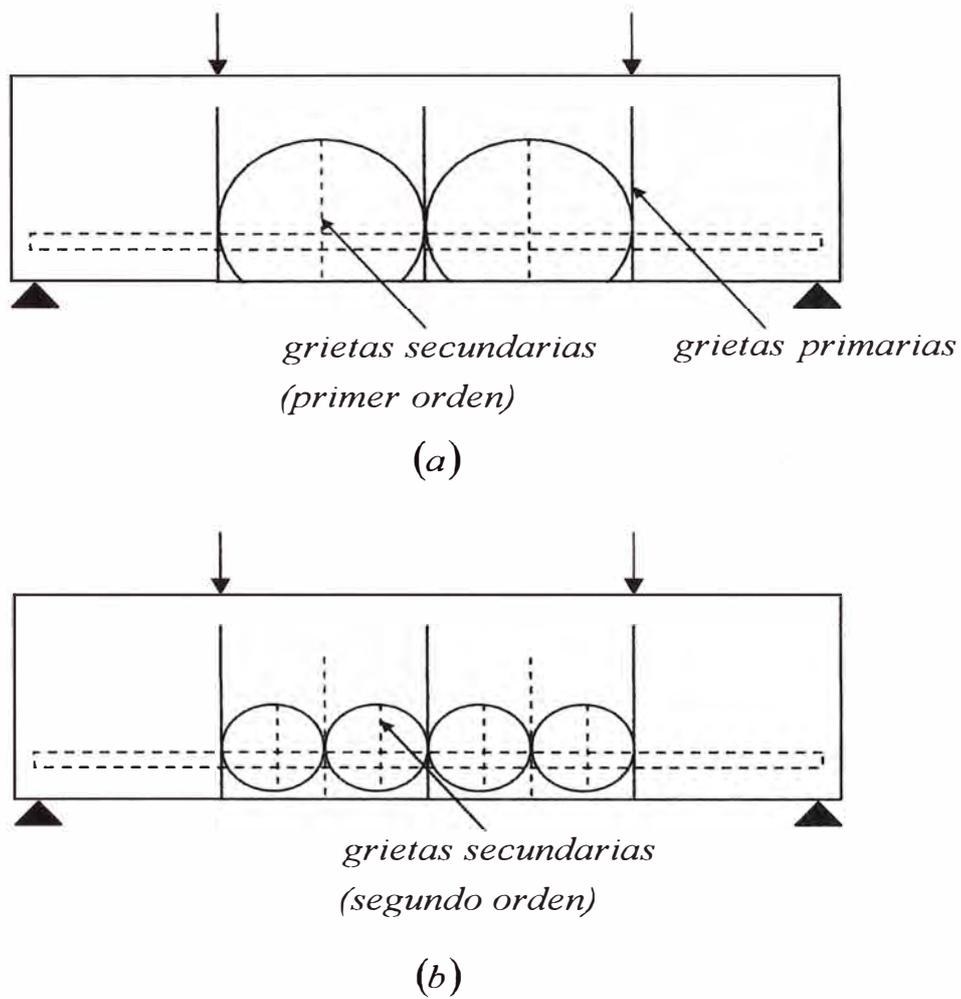
Broms encontró también, que al nivel del acero de refuerzo, la razón promedio entre el ancho máximo de grieta y el ancho promedio de grieta fue de 1.66 para miembros flexionados. Según esto, el ancho máximo de grieta al nivel del acero de refuerzo viene dado por:

$$w_{\max} = 1.66 w_{\text{prom}} = 3.32 t \varepsilon_s \quad (4.8)$$

La ecuaciones 4.7 y 4.8 indica que el ancho de grieta se incrementará linealmente con un incremento en el espesor del recubrimiento de concreto y con un incremento en la deformación unitaria del acero.

El ancho de grietas en la cara de tracción de un miembro flexionado puede ser mayor que el ancho de grietas al nivel del acero de refuerzo (dado por la ecuación 4.7). Bajo la hipótesis de que las secciones transversales permanecen planas, la elongación total en algún nivel particular será proporcional a la distancia desde el eje neutro. Si la distancia desde el eje neutro al nivel del acero de refuerzo y a la cara del fondo del miembro son  $h_1$  y  $h_2$ , respectivamente, entonces la elongación total en la cara del fondo será  $h_2/h_1$  veces la elongación total al nivel del acero de refuerzo. El espaciamiento entre grietas en la cara del fondo puede así ser calculado multiplicando el ancho de grietas dado por la ecuación 4.8 por la razón  $h_2/h_1$  y tomando el espesor  $t$  como el espesor del recubrimiento del fondo. Así, el ancho máximo de grieta en la superficie de la cara en tracción será:

$$w_{\max} = 3.32 t \varepsilon_s \frac{h_2}{h_1} \quad (4.9)$$



**Figura 4.6** Mecanismo de agrietamiento por flexión según Broms (a) grietas primarias y (b) grietas secundarias

# 5

## **Cálculo del ancho máximo de grieta**

### **5.1 Introducción**

Se han propuesto numerosas fórmulas empíricas y semi-empíricas para el cálculo del ancho máximo de grieta por flexión. Hay cerca de 60 fórmulas desarrolladas alrededor de todo el mundo. La siguiente es una lista referencial de algunos de los investigadores que han desarrollado fórmulas para el cálculo del ancho máximo de grieta: Saliger (1936), Rüschi y Rehm (1957), Watstein y Mathey (1959), Kaar y Mattock (1963), Kaar y Hognestad (1965), Broms (1965), Broms y Lutz (1965), Base, Read, Beeby y Taylor (1966), Ferry-Borges (1966), Gergely y Lutz (1968), Guschka (1971), Edwards y Picard (1972), Venkateswarlu y Gesund (1972), MC78, Beeby (1979), Martin, Schiel y Schwarzkopf (1980), CEB (1981), Windisch (1982), CEB (1984), Krips (1985), Noakowski (1985), ACI Comité 224 (1986, 1989), Janovic (1986), Schiel y Wolfel (1986), Oh y Kung (1987), Schiel (1989), Yannopoulos (1989), MC90, Balázs (1993), Wicke (1993) y König y Tue (1996), Frosch (1999), Chowdhury y Loo (2001).

Los resultados obtenidos con estas fórmulas dan sólo una idea del ancho de grieta real. La desviación de estas fórmulas es del orden de  $\pm 50\%$ ; pero, considerando la gran variabilidad del agrietamiento puede considerarse satisfactorio. Así pues, en el estado actual de conocimientos, no debe esperarse precisión cuantitativa de estas fórmulas, sino más bien

una información de tipo cualitativo, cuyo mayor valor reside en las orientaciones que suministra y que sirven de base al buen juicio del proyectista. De esta manera pueden evitarse graves errores en el diseño que podría ser el resultado de excesivos anchos de grietas.

## 5.2 Cálculo mediante fórmulas experimentales

### 5.2.1 Método de Kaar y Mattock

Basados en pruebas sobre 48 vigas, Kaar y Mattock (1963) de la Asociación de Cemento Portland desarrollaron la siguiente ecuación para calcular el ancho máximo de grieta al nivel del acero de refuerzo en tracción:

$$w_{\max} = 2.61 \sqrt[4]{A} f_s \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (5.1)$$

Donde  $A$  es el área efectiva de concreto que rodea a cada varilla ( $A = A_e / N$ , siendo  $N$  es el número de varillas) en  $\text{cm}^2$  y  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en tracción en  $\text{kg/cm}^2$ . Si las varillas de refuerzo en tracción tienen diferente diámetro,  $N$  se obtiene dividiendo el área total del acero en tracción entre el área de la varilla de mayor diámetro.

Las ecuación 5.1 es aplicable siempre que  $f_s$  sea menor que el esfuerzo de fluencia  $f_y$ , que el valor de  $A$  este comprendido entre 20 y  $320 \text{ cm}^2$ , y que las varillas de refuerzo sean corrugadas.

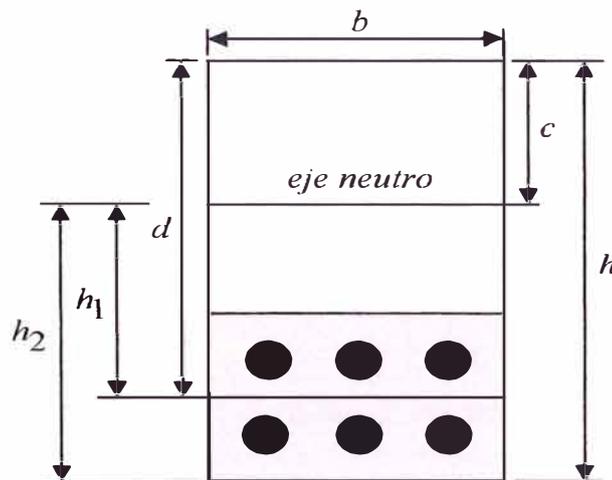
Se ha encontrado que las ecuaciones 5.1 presentan una desviación respecto de los resultados de prueba del orden de  $\pm 40\%$ .

### 5.2.2 Método de Kaar y Hognestad

Kaar y Hognestad (1965) modificaron la ecuación 5.1 y propusieron la ecuación 5.2 para obtener el ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción:

$$w_{\max} = 2.61 \sqrt[4]{A} f_s \frac{h_2}{h_1} \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (5.2)$$

Donde  $A$  es el área efectiva de concreto que rodea a cada varilla ( $A = A_e / N$ , siendo  $N$  es el número de varillas) en  $\text{cm}^2$ ,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en tracción en  $\text{kg}/\text{cm}^2$ ,  $h_1$  es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del refuerzo en tracción en  $\text{cm}$  y  $h_2$  es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema en tracción en  $\text{cm}$ . Si las varillas de refuerzo en tracción tienen diferente diámetro,  $N$  se obtiene dividiendo el área total del acero en tracción entre el área de la varilla de mayor diámetro.



**Figura 5.1** Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Kaar y Hognestad

### 5.2.3 Método de Gergely y Lutz

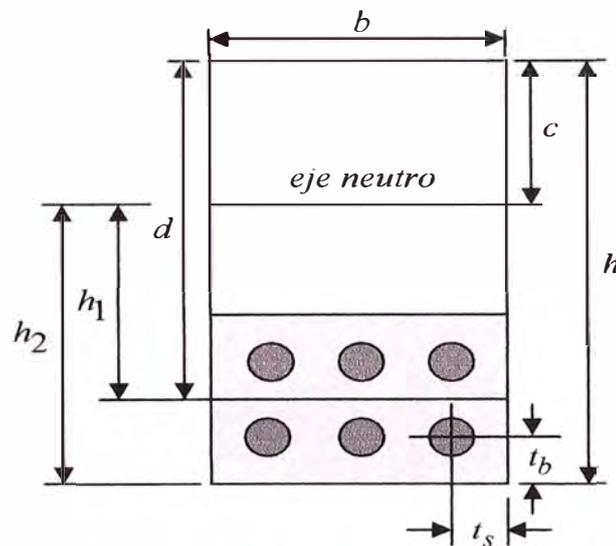
Gergely y Lutz (1968) sometieron a análisis estadístico los datos de prueba de Hognestad, Kaar y Mattock, Kaar y Hognestad, Clark, Rüsck y Rehm. Basado en este análisis estadístico propusieron las siguientes ecuaciones para determinar el ancho máximo de grieta:

Al nivel del centroide del acero en tracción:

$$w_{\max} = \frac{1.08 \sqrt[3]{t_s A}}{1 + \frac{2t_s}{3h_1}} f_s \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (5.3)$$

Al nivel de la fibra extrema en tracción:

$$w_{\max} = 1.08 \sqrt[3]{\frac{h_2}{b} A} \frac{h_2}{h_1} f_s \times 10^{-6} \text{ cm} \quad (5.4)$$



**Figura 5.2** Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Gergely y Lutz

Donde  $t_s$  es la distancia desde el lado de la viga al centro de la varilla más cercana en  $cm$ ,  $t_b$  es la distancia desde la fibra extrema en tracción al centro de la varilla más cercana,  $h_1$  es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del refuerzo en tracción en  $cm$ ,  $h_2$  es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema en tracción en  $cm$ ,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en tracción en  $kg/cm^2$  y  $A$  es el área efectiva de concreto que rodea a cada varilla ( $A = A_e / N$ , siendo  $N$  es el número de varillas). Si las varillas de refuerzo en tracción tienen diferente diámetro,  $N$  se obtiene dividiendo el área total del acero en

tracción entre el área de la varilla de mayor diámetro.

Pruebas de laboratorio han demostrado que las ecuaciones de Gergely-Lutz se aplican razonablemente a losas unidireccionales.

La ecuación 5.4 de Gergely y Lutz ha sido utilizada por el reglamento ACI 318 desde 1971 hasta 1995 para el control del agrietamiento como se verá en el siguiente capítulo.

#### 5.2.4 Método de Chowdhury y Loo

Basados en resultados de prueba de 18 vigas de concreto armado y 12 vigas de concreto parcialmente preesforzado, Chowdhury y Loo (2001) desarrollaron ecuaciones para predecir el ancho máximo de grieta, con una desviación de  $\pm 30\%$ , en términos del recubrimiento libre de concreto, el espaciamiento promedio de las barras de refuerzo, el diámetro promedio de las barras de refuerzo y la cuantía de acero de refuerzo de tracción.

Al nivel de la fibra extrema en tracción:

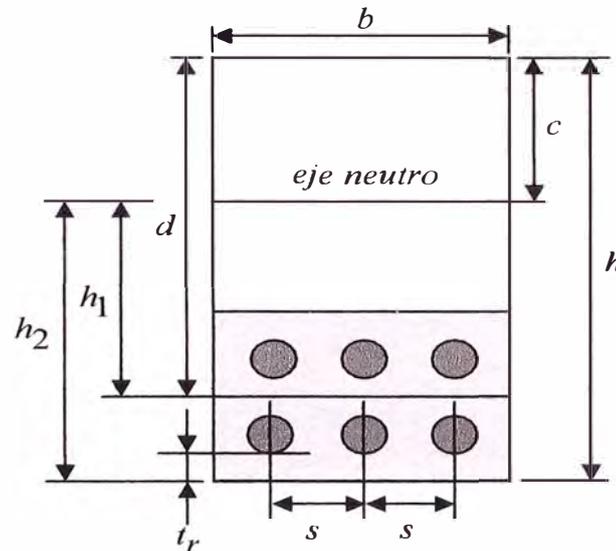
$$w_{\max} = 1.5 \frac{f_s}{E_s} [0.6(t_r - s) + 0.1(d_b / \rho)] \quad cm \quad (5.5)$$

Al nivel del centroide del acero en tracción:

$$w_{\max} = 1.5 \frac{f_s}{E_s} [0.6(t_r - s) + 0.1(d_b / \rho)] \frac{h_1}{h_2} \quad cm \quad (5.6)$$

Donde  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en tracción en  $kg/cm^2$ ,  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero en  $kg/cm^2$ ,  $t_r$  es el recubrimiento libre de concreto medido desde la fibra extrema en tracción en  $cm$ ,  $s$  es el espaciamiento promedio (centro a centro) entre varillas de acero en  $cm$ ,  $d_b$  es el diámetro promedio de las varillas de refuerzo en  $cm$ ,  $\rho$  es la cuantía de acero en tracción,  $h_1$  es la distancia

desde el eje neutro hasta el centroide del refuerzo en tracción en  $cm$  y  $h_2$  es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema en tracción en  $cm$ .



**Figura 5.3** Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Chowdhury y Loo

### 5.3 Cálculo mediante fórmulas analíticas

#### 5.3.1 Método de Base, Read, Beeby y Taylor

En una investigación realizada en la Asociación de Cemento y Concreto de Londres, Base y colaboradores (1966) propusieron las siguientes ecuaciones para el cálculo del ancho máximo de grieta para varillas corrugadas:

Al nivel del centroide del acero en tracción:

$$w_{max} = 3.3 t_a \frac{f_s}{E_s} \tag{5.7}$$

Al nivel de la fibra extrema en tracción:

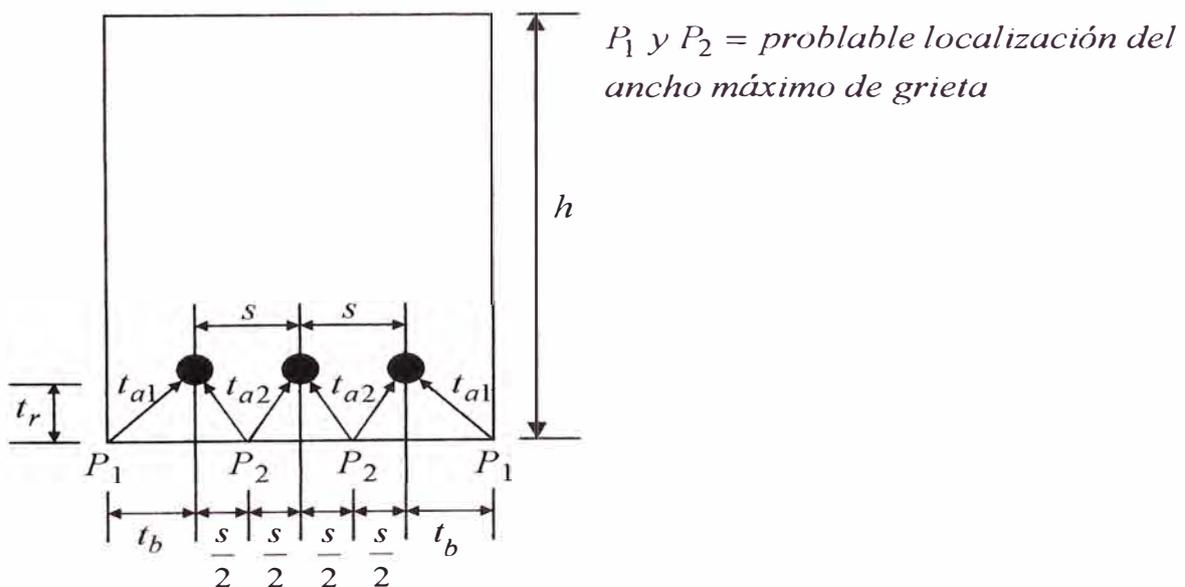
$$w_{max} = 3.3 t_a \frac{f_s}{E_s} \frac{h_2}{h_1} \tag{5.8}$$

Donde  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en

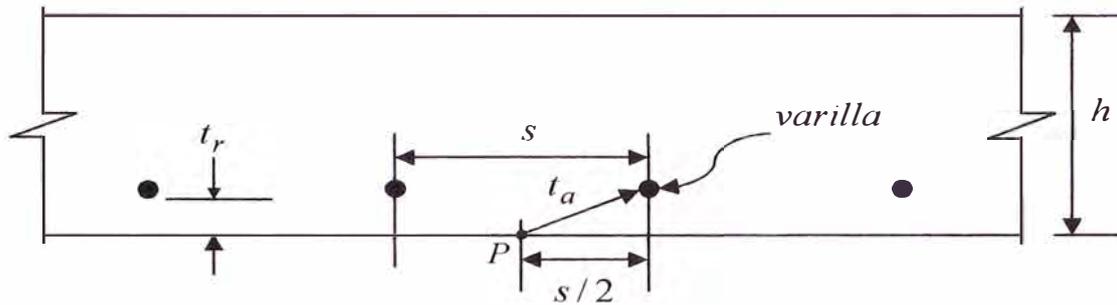
tracción,  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero,  $t_a$  es la distancia desde el punto en que se mide el ancho de la grieta hasta la superficie de la varilla más cercana (para el ancho máximo de grieta al nivel del acero en tracción,  $t_a$  se toma como el recubrimiento lateral libre),  $h_1$  es la distancia desde el eje neutro hasta el centroide del refuerzo en tracción y  $h_2$  es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema en tracción.

Para el caso de refuerzo con varillas lisas, se sustituye la constante 3.3 por 4, lo que muestra que en vigas reforzadas con varillas lisas, el ancho máximo de grieta es 20% mayor que el ancho máximo de grieta correspondiente a vigas reforzadas con varillas corrugadas.

El ancho máximo de grieta se presenta donde  $t_a$  es un máximo. Para el caso de la viga de la figura 5.4, los puntos en los cuales  $t_a$  puede ser un máximo son los puntos  $P_1$  y  $P_2$ . Así, para la viga de la figura 5.4 el valor de  $t_a$  a tomarse para determinar el ancho máximo de grieta será el mayor valor entre  $t_{a1}$  y  $t_{a2}$ . Para el caso de la losa de la figura 5.5, el punto para el cual  $t_a$  es un máximo es el punto  $P$ .



**Figura 5.4** Parámetros geométricos de relevancia que intervienen en el cálculo del ancho máximo de grieta en una viga según el método de Base y colaboradores



$P =$  probable localización del ancho máximo de grieta

**Figura 5.5** Parámetros geométricos de relevancia que intervienen en el cálculo del ancho máximo de grieta en una losa según el método de Base y colaboradores

### 5.3.2 Método de Broms

En una investigación realizada por Broms (1965) en la Universidad de Cornell bajo el auspicio del Consejo de Investigación del Concreto Reforzado propuso un mecanismo de agrietamiento basado en el estado interno de esfuerzos, que se vio en el capítulo anterior, como resultado del cual desarrolló las siguientes ecuaciones para el cálculo del ancho máximo de grieta:

Al nivel del centroide del acero en tracción:

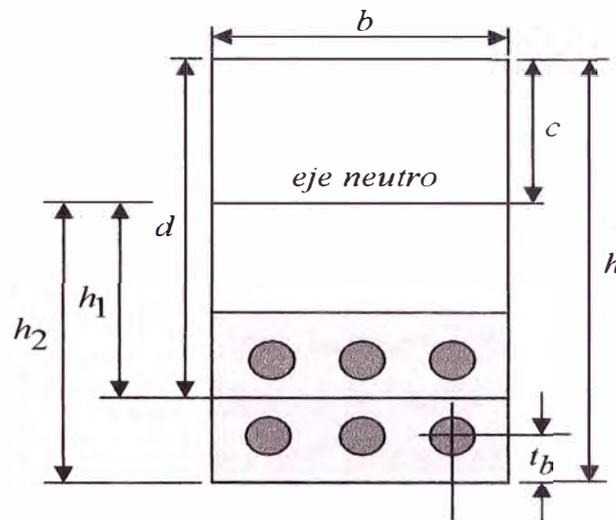
$$w_{max} = 3.32 t_b \frac{f_s}{E_s} \quad (5.9)$$

Al nivel de la fibra extrema en tracción:

$$w_{max} = 3.32 t_b \frac{f_s}{E_s} \frac{h_2}{h_1} \quad (5.10)$$

Donde  $f_s$  es el esfuerzo en el acero al nivel del centroide del acero en tracción,  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero,  $t_b$  es el recubrimiento de concreto medido desde la fibra extrema en tracción hasta el centro de la varilla más cercana,  $h_1$  es la distancia desde el eje neutro hasta el

centroide del refuerzo en tracción y  $h_2$  es la distancia desde el eje neutro hasta la fibra extrema en tracción.



**Figura 5.6** Elementos geométricos usados en las ecuaciones de Broms

### 5.3.3 Método de Beeby

Beeby (1971), mostró que el agrietamiento en la zona de tracción de un miembro sujeto a flexión se debe a la interacción de dos patrones básicos de agrietamiento, de los cuales uno es controlado por la altura inicial de la grietas y el otro es controlado por la disposición de, y la proximidad a, las varillas de refuerzo.

#### 5.3.3.1 Primer patrón de agrietamiento

El primer patrón de agrietamiento está controlado por la altura inicial  $h_o$  de las grietas, ubicadas a cierta distancia de una varilla, que penetran casi hasta el eje neutro. La altura inicial de estas grietas puede ser determinada usando la teoría de la elasticidad. Del principio de Saint-Venant, a una distancia  $h_o$  de la grieta inicial, los esfuerzos de tracción en el concreto no agrietado no se ven sustancialmente afectados. En consecuencia la siguiente grieta se formará a una distancia de la grieta inicial mayor o igual a  $h_o$ . Por lo tanto, el espaciamiento mínimo de grietas es  $h_o$  y el

espaciamiento máximo es  $2h_o$ , lo que da un espaciamiento promedio de  $1.5h_o$ . Los datos de prueba arrojaron un espaciamiento promedio igual a  $1.33h_o$ . Se encontró que el ancho y el espaciado de las grietas superficiales son directamente proporcionales a la altura inicial  $h_o$  de las grietas.

### 5.3.3.2 Segundo patrón de agrietamiento

En este patrón de agrietamiento Beeby asumió que no hay deslizamiento del acero en relación al concreto, por lo que, la grieta tiene ancho cero en el nivel de la varilla de refuerzo. Así, la altura efectiva de la grieta será igual a la altura del recubrimiento libre de la varilla  $t_r$ . Usando el principio de Saint Venant como en el caso del primer patrón de agrietamiento, el espaciamiento mínimo de grietas es  $t_r$  y el espaciamiento máximo es  $2t_r$ , lo que da un espaciamiento promedio de  $1.5t_r$ . Se encontró que el ancho y el espaciado de las grietas superficiales son directamente proporcionales al recubrimiento libre  $t_r$  de la varilla.

Beeby encontró que la hipótesis de que no hay deslizamiento del acero en relación al concreto se ve afectado por el hecho de que internamente ocurre deslizamiento cuando se usan varillas lisas, y que internamente ocurre agrietamiento cuando se usan varillas corrugadas.

Las ecuaciones propuestas por Beeby para obtener el ancho máximo de las grietas a un cierto nivel de profundidad son las siguientes:

- Ancho máximo de grieta ubicada debajo de una varilla:

$$w_{\max 1} = \left( K_1 t_r + K_2 \frac{A}{d_b} e^{-K_3(t_r/h_o)} \right) \varepsilon_m \quad (5.11)$$

- Ancho máximo de grieta ubicada a cierta distancia de una varilla:

$$w_{\max 2} = K_1 h_o \varepsilon_m \quad (5.12)$$

- Ancho máximo de grieta ubicada en posiciones intermedias:

$$w_{\max} = \frac{t_a w_{\max 1} w_{\max 2}}{t_r w_{\max 2} + (t_a - t_r) w_{\max 1}} \quad (5.13)$$

Donde  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  son constantes que mide la probabilidad de que  $n\%$  de las grietas excedan del ancho de grieta calculado,  $A$  es el área efectiva de concreto en tracción que rodea a la varilla,  $h_o$  es la altura inicial de la grieta,  $t_r$  es el recubrimiento libre de concreto,  $t_a$  es la distancia desde el punto de medición de la grieta a la superficie de la varilla más próxima,  $d_b$  es el diámetro de la varilla,  $\varepsilon_m$  es la deformación longitudinal promedio del nivel donde se está midiendo el ancho de la grieta.

Una probabilidad de excedencia de  $n\%$  significa que 1 de cada  $100/n$  grietas puede superar el ancho máximo de grieta calculado. Si, por ejemplo, la probabilidad de excedencia es 20% para  $w_{\max 1}$ , significa que 1 de cada 5 grietas pueden superar el ancho  $w_{\max 1}$ .

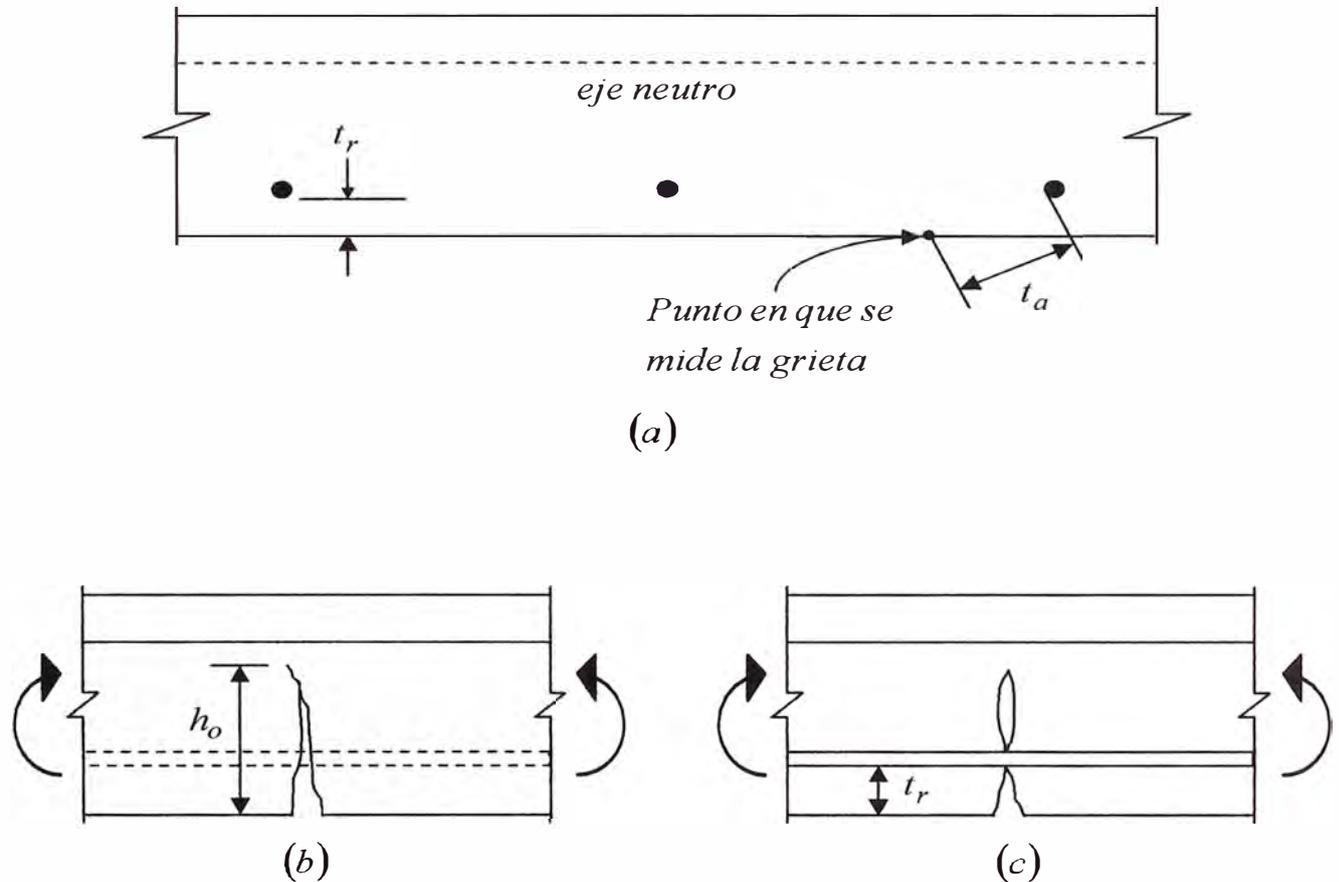
Dada la complejidad de las ecuaciones 5.11 y 5.12, Beeby simplificó las ecuaciones anteriores usando una probabilidad de excedencia del 20% con lo que obtuvo la siguiente ecuación para determinar el ancho de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción:

$$w_{\max} = \frac{3 t_a \varepsilon_m}{1 + 2(t_a - t_r)/(h - c)} \quad (5.14)$$

Siendo:

$$\varepsilon_m = \left( \varepsilon_s - 2.5 \frac{bh}{A_s} \times 10^{-6} \right) \frac{h - c}{d - c} \quad (5.15)$$

Donde  $h$  es el peralte total de la viga o losa,  $c$  es la profundidad del eje neutro,  $A_s$  es el área de acero en tracción y  $\varepsilon_s$  es la deformación unitaria del concreto al nivel del centroide del refuerzo en tracción.



**Figura 5.7** Patrones de agrietamiento (a) Sección transversal de una losa, (b) Grieta a una cierta distancia de una varilla, controlada por  $h_o$ , (c) Grieta en una varilla, controlada por  $t_r$ .

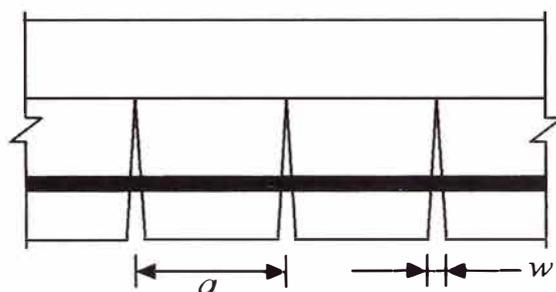
### 5.3.4 Método de Frosch

Frosch (1999) usó el mecanismo clásico de agrietamiento para determinar el ancho de grieta y, el mecanismo interno de esfuerzos propuesto por Broms, para determinar el espaciamiento entre grietas.

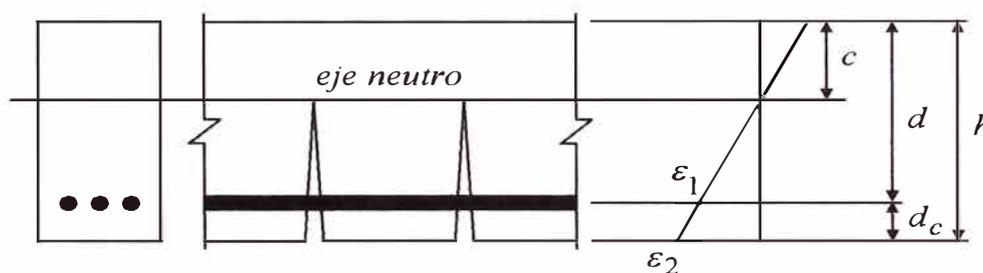
Según el mecanismo clásico, el ancho de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo puede ser calculado con la siguiente ecuación:

$$w = \varepsilon_s a \tag{5.16}$$

Donde  $w$  es el ancho de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo,  $\varepsilon_s$  es la deformación unitaria del acero ( $= f_s / E_s$ ),  $a$  es el espaciamiento de las grietas,  $f_s$  es el refuerzo en el acero y  $E_s$  es el módulo de elasticidad del acero.



**Figura 5.8** Miembro agrietado por flexión



**Figura 5.9** Gradiente de deformaciones

Por otro lado, en base a los estudios de Broms, el espaciamiento entre grietas puede ser calculado con la siguiente ecuación:

$$a = \psi_s d^* \tag{5.17}$$

Donde  $a$  es el espaciamiento entre grietas,  $d^*$  es el recubrimiento de control (tal como se indica en la figura 5.10) y  $\psi_s$  es un factor que define el tipo de espaciamiento (1.0 para el cálculo del espaciamiento mínimo, 1.5 para el cálculo del espaciamiento promedio y 2.0 para el cálculo del espaciamiento máximo).

### Ancho máximo de grieta al nivel del acero de refuerzo

Reemplazando la ecuación 5.17 en la ecuación 5.16 se obtiene la siguiente ecuación para calcular el ancho de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo:

$$w = \varepsilon_s \psi_s d^* \tag{5.16}$$

Para determinar el ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo se sustituye  $d^*$  por  $d_s$  ( $d_s$  se indica en la figura 5.10) y  $\psi_s$  por 2.0 con lo que se obtiene la siguiente ecuación:

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} d_s \tag{5.17}$$

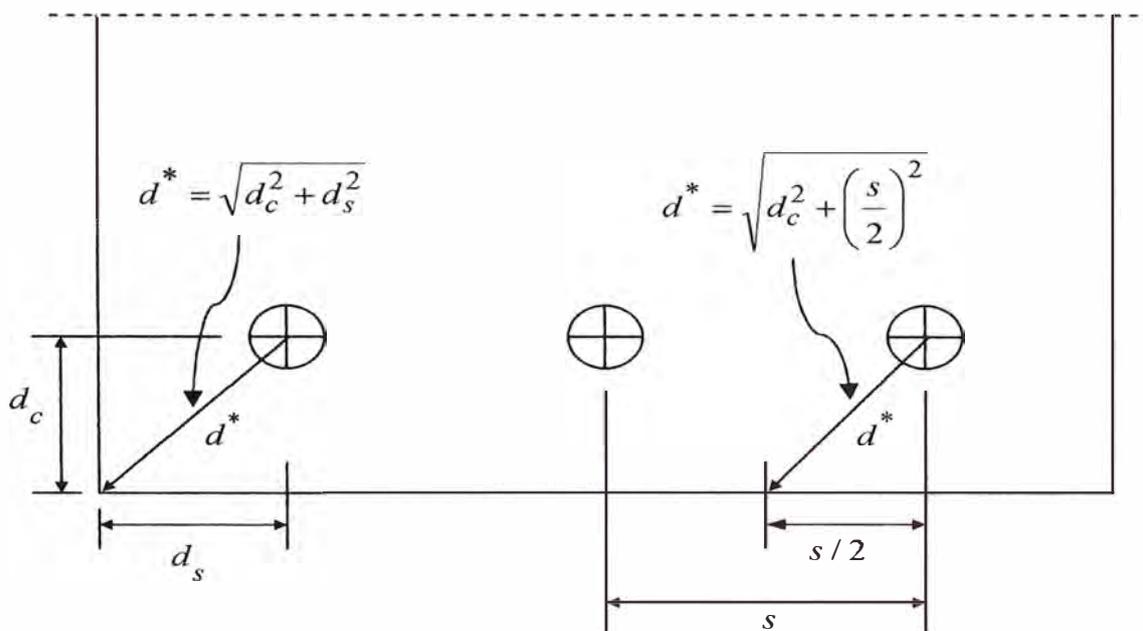


Figura 5.10 Definición de recubrimientos

### Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción

Para determinar el ancho de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción, es necesario tomar en cuenta el gradiente de deformaciones. El gradiente de deformaciones se muestra en la figura 5.9, que asume que las secciones planas permanecen planas después de la deformación. Según esto, para determinar el ancho de grieta en la fibra extrema en tracción hay

que multiplicar el ancho de grieta calculado con la ecuación 5.17 por el factor  $\beta$  dado por la siguiente ecuación:

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{h - c}{d - c} \quad (5.18)$$

Para calcular el ancho máximo de grieta en la fibra extrema en tracción se toma como  $d^*$  a la mayor distancia entre las distancias indicadas en la figura 5.10. Según esto:

$$d^* = \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}, \quad \text{si } \frac{s}{2} \geq d_s \quad (5.19)$$

$$d^* = \sqrt{d_c^2 + d_s^2}, \quad \text{si } \frac{s}{2} < d_s \quad (5.20)$$

Por lo general, el mayor valor de  $d^*$  viene dado por la ecuación 5.19.

Reemplazando la ecuación 5.19 en 5.17, sustituyendo  $\psi_s$  por 2.0 y tomando en cuenta el gradiente de deformaciones, se obtiene la siguiente ecuación para determinar el ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción:

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} \quad (5.21)$$

Frosch encontró que un valor apropiado de  $\beta$  puede ser obtenido mediante la ecuación:

$$\beta = 1.0 + 0.0315 d_c \quad \text{cm} \quad (5.22)$$

Donde  $d_c$  es el recubrimiento inferior, en *cm*, medido hasta el centro de la varilla más cercana.

Frosch aplicó las ecuaciones anteriores a los datos de prueba de Hognestad, Kaar y Mattock, Kaar y Hognestad, Clark y Sozen-Gamble encontrando que el modelo propuesto presenta una correlación razonable con los datos de prueba.

### Control del agrietamiento

El modelo de grieta propuesto ilustra claramente que el espaciamiento y el ancho entre grietas están en función de la distancia entre las varillas de acero de refuerzo. Por lo tanto, el control del agrietamiento puede lograrse limitando el espaciamiento entre las varillas de acero de refuerzo.

Basado en esto, la ecuación 5.21 puede ser expresada en la forma:

$$s = 2 \sqrt{\left( \frac{w_{\max} E_s}{2 f_s \beta} \right)^2 - d_c^2} \quad (5.23)$$

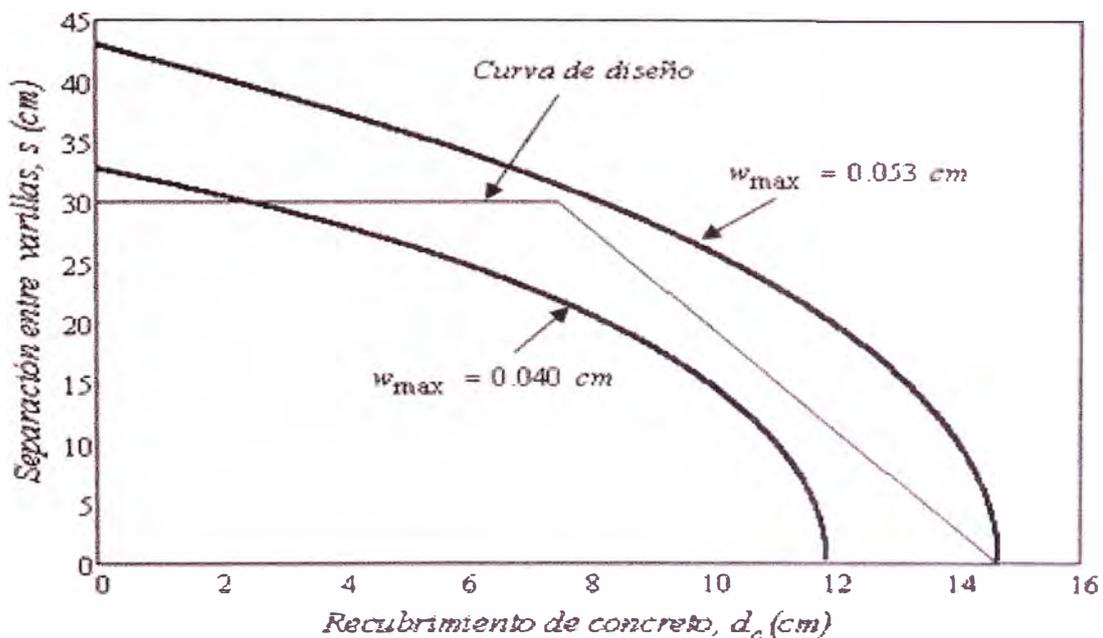


Figura 5.11 Separación entre varillas para acero de grado 60

Considerando que varias investigaciones han mostrado que no existe correlación entre corrosión y ancho de grieta, Frosch tomó como base

0.040 *cm* como ancho máximo de grieta, basado en las recomendaciones del reglamento ACI 318-95 para condiciones de exposición interior. También consideró un incremento razonable en el ancho de grieta de 0.013 *cm* (con lo que el límite superior es 0.053 *cm*) considerando la gran dispersión en el cálculo del ancho máximo de grieta y que el control del agrietamiento es primariamente una cuestión estética. Basado en estas consideraciones, se desarrolló el gráfico de la figura 5.11 para acero de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ) y  $f_s = 0.6f_y$ .

Para propósitos de diseño, Frosch desarrolló una curva simplificada de diseño. La curva de diseño considera una separación máxima de varillas de 30 *cm* en el rango de recubrimientos libres de concreto de 0 a 7.5 *cm*. Cuando el espesor del recubrimiento libre de concreto se incrementa para más de 7.5 *cm*, se produce un decremento en la separación máxima entre varillas. Para la mayoría de casos  $d_c < 7.5 \text{ cm}$ .

#### 5.4 Esfuerzo en el acero

El esfuerzo en el concreto al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción puede obtenerse aplicando la ecuación 2.5, de la teoría de la elasticidad, a la sección transformada agrietada en la forma:

$$f_c = \frac{M(d - c)}{I_{cr}} \quad (5.24)$$

De donde el esfuerzo de tracción en el acero al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción es:

$$f_s = n f_c = \frac{n M(d - c)}{I_{cr}} \quad (5.25)$$

Para el caso de secciones simplemente reforzadas puede usarse también la siguiente ecuación, deducida del equilibrio de la sección (véase la figura 5.12), que evita el cálculo de  $I_{cr}$ :

$$f_s = \frac{M}{A_s z} = \frac{M}{A_s (d - c/3)} \quad (5.26)$$

El valor de  $z$  puede calcularse también, en forma aproximada, tomando  $z = 7d/8 = 0.9d$  con lo que el valor de  $f_s$  puede calcularse en la forma:

$$f_s = \frac{M}{0.9d A_s} \quad (5.27)$$

Otra aproximación para el cálculo de  $f_s$  es la recomendación del ACI 318-05 según la cual:

$$f_s = 0.6 f_y \quad (5.28)$$

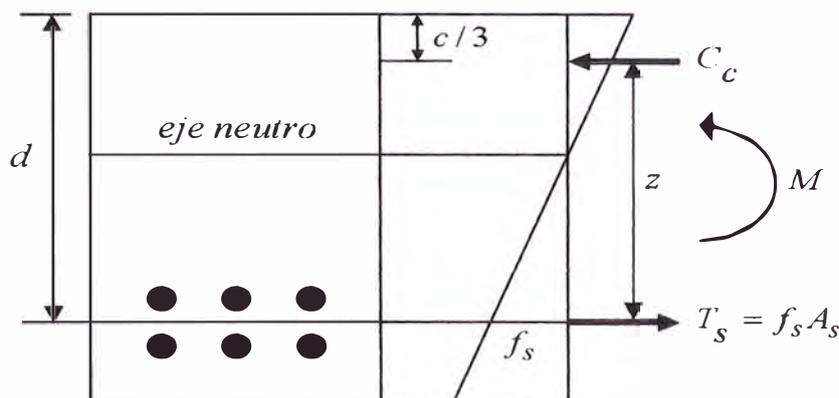


Figura 5.12 Cálculo de  $f_s$  del equilibrio de la sección

Mediante un estudio paramétrico se encontró, en esta tesis, que el esfuerzo en el acero de secciones rectangulares simplemente reforzadas puede obtenerse con una desviación de  $\pm 1\%$  respecto del valor exacto, mediante la siguiente ecuación:

$$f_s = \frac{nM}{bd^2 \alpha (n\rho)^\beta} \quad (5.29)$$

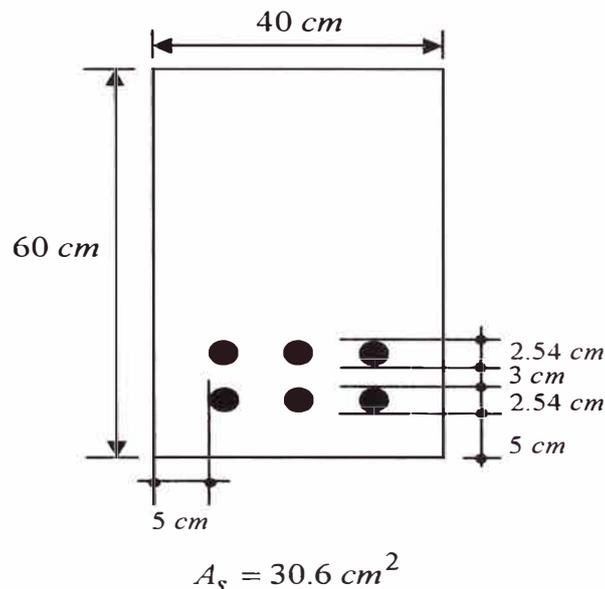
Siendo  $\rho$  la cuantía del acero en tracción. Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  se obtienen de la tabla 5.1. Para ver la deducción de la fórmula vea el apéndice B.

**Tabla 5.1** Coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  para la ecuación 5.29

$n\rho$	$\alpha$	$\beta$
$n\rho \leq 0.01$	0.908	0.988
$0.01 < n\rho \leq 0.07$	0.814	0.963
$n\rho > 0.07$	0.760	0.934

**Ejemplo 5.1**

Considere la viga de sección rectangular mostrada en la figura 5.13. Determinar el ancho máximo de grietas al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción y al nivel de la fibra extrema en tracción. La sección está reforzada con  $6 \phi 1''$  en el lado de la tracción (distribuido en dos capas) y está sometida a un momento por cargas de servicio igual a  $39 \text{ tn.m}$ . La resistencia del concreto es  $f'_c = 280 \text{ kg/cm}^2$  y la resistencia a la fluencia del acero es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ .



**Figura 5.13** Viga del ejemplo 5.1

**Solución:-**

### Propiedades de los materiales

$$E_c = 15100\sqrt{f'_c} = 15100x\sqrt{280} = 252671.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2x10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2x10^6}{252671.33} = 7.92$$

### Determinación del peralte efectivo $d'$ :

$$d' = 60 - (5 + 2.54 + 3/2) = 50.96 \text{ cm}$$

### Determinación de la profundidad del eje neutro

De las ecuaciones A.17, A.18 y A.19 del apéndice A:

$$p = nA_s + (n-1)A'_s = 7.92x30.6 + 0 = 242.35$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d' = 7.92x30.6x50.96 + 0 = 12350.26$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{242.35^2 + 2x40x12350.26} - 242.35}{40} = 19.52 \text{ cm}$$

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d-c)^2 + (n-1)A'_s(c-d')^2$$

$$I_{cr} = \frac{40x19.52^3}{3} + 7.92x30.6x(50.96 - 19.52)^2 + 0 = 338728.07 \text{ cm}^4$$

### Cálculo del esfuerzo en el acero

$$f_s = \frac{nM(d-c)}{I_{cr}} = \frac{7.92x39x10^5 x(50.96 - 19.52)}{338728.07} = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

Usando la fórmula 5.29 se tiene que:

$$f_s = \frac{nM}{bd^2\alpha(n\rho)^\beta}$$

$$n\rho = \frac{nA_s}{bd} = \frac{7.92 \times 30.6}{40 \times 50.96} = 0.119$$

De la tabla 5.1 los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son: 0.760 y 0.934 respectivamente.

Reemplazando se tiene:

$$f_s = \frac{7.92 \times 39 \times 10^5}{40 \times 50.96^2 \times 0.760 \times 0.119^{0.934}} = 2856.91 \text{ kg/cm}^2$$

En este caso el valor aproximado presentó una desviación de sólo  $-0.3\%$  respecto del valor exacto.

### Método de Kaar y Mattock

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción*

$$w_{\max} = 2.61 \sqrt[4]{A} f_s \times 10^{-6}$$

$$A_e = 2b(h - d) = 2 \times 40 \times (60 - 50.96) = 723.2 \text{ cm}^2$$

$$A = A_e / N = 723.2 / 6 = 120.53 \text{ cm}^2$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

$$w_{\max} = 2.61 \times \sqrt[4]{120.53 \times 2866.96} \times 10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.025 \text{ cm}$$

### Método de Kaar y Hognestad

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción*

$$w_{\max} = 2.61 \sqrt[4]{A} f_s \frac{h_2}{h_1} \times 10^{-6}$$

$$A_e = 2b(h - d) = 2 \times 40 \times (60 - 50.96) = 723.2 \text{ cm}^2$$

$$A = A_e / N = 723.2 / 6 = 120.53 \text{ cm}^2$$

$$h_1 = d - c = 50.96 - 19.52 = 31.44 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 60 - 19.52 = 40.48 \text{ cm}$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

$$w_{\max} = 2.61x\sqrt[4]{120.53x2866.96x\frac{40.48}{31.44}}x10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.032 \text{ cm}$$

### Método de Gergely y Lutz

$$A_e = 2b(h - d) = 2x40x(60 - 50.96) = 723.3 \text{ cm}^2$$

$$A = A_e / N = 723.3 / 6 = 120.53 \text{ cm}^2$$

$$t_b = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$t_s = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$h_1 = d - c = 50.96 - 19.52 = 31.44 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 60 - 19.52 = 40.48 \text{ cm}$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción*

$$w_{\max} = \frac{1.08 \sqrt[3]{t_s A}}{1 + \frac{2t_s}{3h_1}} f_s x 10^{-6} \text{ cm}$$

$$w_{\max} = \frac{1.08x\sqrt[3]{6.27x120.53}}{1 + \frac{2x6.27}{3x31.44}}x2866.96x10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.025 \text{ cm}$$

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción*

$$w_{\max} = 1.08 \sqrt[3]{t_b A} \frac{h_2}{h_1} f_s x 10^{-6} \text{ cm}$$

$$w_{\max} = 1.08 \sqrt[3]{6.27x120.53x\frac{40.48}{31.44}}x2866.96x10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.036 \text{ cm}$$

### Método de Chowdhury y Loo

$$t_r = 5 \text{ cm}$$

$$d_b = 2.54 \text{ cm}$$

$$s = \frac{40 - 2 \times 5 - 2.54}{2} = 13.73 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{30.6}{40 \times 50.96} = 0.0150$$

$$h_1 = d - c = 50.96 - 19.52 = 31.44 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 60 - 19.52 = 40.48 \text{ cm}$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción:*

$$w_{\max} = 1.5 \frac{f_s}{E_s} [0.6(t_r - s) + 0.1(d_b / \rho)] \frac{h_1}{h_2} \text{ cm}$$

$$w_{\max} = 1.5 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} [0.6 \times (5 - 13.73) + 0.1 \times (2.54 / 0.0150)] \times \frac{31.44}{40.48}$$

$$w_{\max} = 0.020 \text{ cm}$$

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción*

$$w_{\max} = 1.5 \frac{f_s}{E_s} [0.6(t_r - s) + 0.1(d_b / \rho)] \text{ cm}$$

$$w_{\max} = 1.5 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} [0.6 \times (5 - 13.73) + 0.1 \times (2.54 / 0.0150)]$$

$$w_{\max} = 0.025 \text{ cm}$$

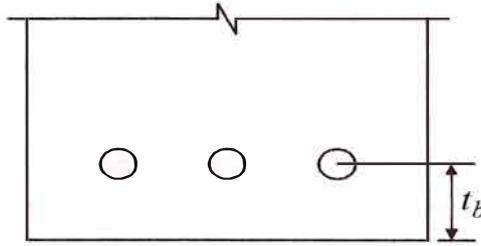
### **Método de Broms**

$$t_b = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

$$h_1 = d - c = 50.96 - 19.52 = 31.44 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 60 - 19.52 = 40.48 \text{ cm}$$



Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción

$$w_{max} = 3.32 t_b \frac{f_s}{E_s}$$

$$w_{max} = 3.32 \times 6.27 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} \text{ cm}$$

$$w_{max} = 0.030 \text{ cm}$$

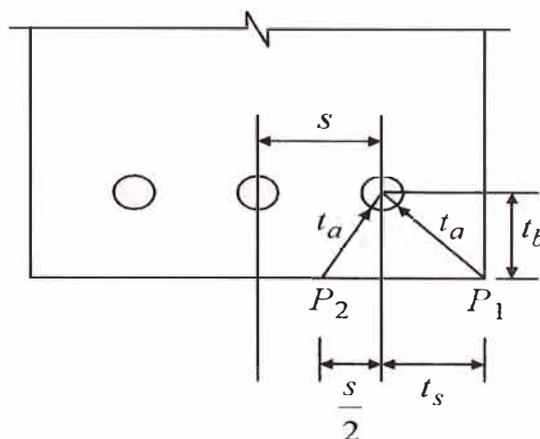
Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción

$$w_{max} = 3.32 t_b \frac{f_s}{E_s} \frac{h_2}{h_1}$$

$$w_{max} = 3.32 \times 6.27 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} \times \frac{40.48}{31.44}$$

$$w_{max} = 0.038 \text{ cm}$$

### Método de Base, Read, Beeby y Taylor



$$t_b = 5 + 2.54/2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$t_s = 5 + 2.54/2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$s = \frac{40 - 2 \times 5 - 2.54}{2} = 13.73 \text{ cm}$$

$$\frac{s}{2} = \frac{13.73}{2} = 6.87 \text{ cm}$$

$$h_1 = d - c = 50.96 - 19.52 = 31.44 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 60 - 19.52 = 40.48 \text{ cm}$$

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción:*

$$t_a = t_s - d_b / 2 = 6.27 - 2.54 / 2 = 5.00 \text{ cm}$$

$$w_{max} = 3.3 t_a \frac{f_s}{E_s}$$

$$w_{max} = 3.3 \times 5.00 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6}$$

$$w_{max} = 0.024 \text{ cm}$$

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción*

Los puntos probables donde  $t_a$  puede ser un máximo son  $P_1$  y  $P_2$ , pero como  $t_s < s/2$ , entonces tomamos el punto  $P_2$ . Según esto:

$$t_a = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t_b^2} - d_b / 2 = \sqrt{6.87^2 + 6.27^2} - 2.54 / 2 = 8.03 \text{ cm}$$

$$w_{max} = 3.3 t_a \frac{f_s}{E_s} \frac{h_2}{h_1}$$

$$w_{max} = 3.3 \times 8.03 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} \times \frac{40.48}{31.44}$$

$$w_{max} = 0.049 \text{ cm}$$

### **Método de Beeby**

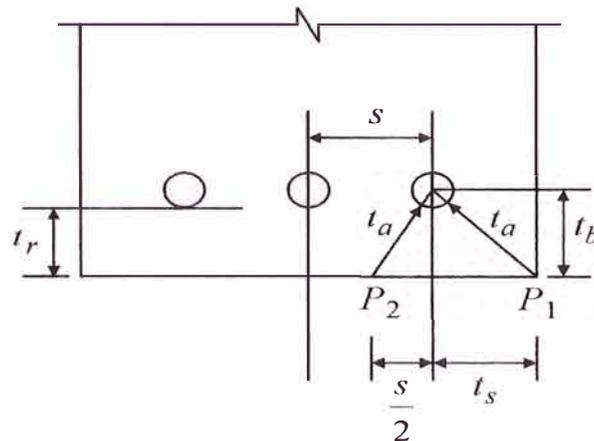
$$t_r = 5 \text{ cm}$$

$$t_b = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$t_s = 5 + 2.54/2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$s = \frac{40 - 2 \times 5 - 2.54}{2} = 13.73 \text{ cm}$$

$$\frac{s}{2} = \frac{13.73}{2} = 6.87 \text{ cm}$$



$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción

$$w_{\max} = \frac{3 t_a \varepsilon_m}{1 + 2(t_a - t_r)/(h - c)}$$

$$\varepsilon_m = \left( \varepsilon_s - 2.5 \frac{b h}{A_s} \times 10^{-6} \right) \frac{h - c}{d - c}$$

Los puntos probables donde  $t_a$  puede ser un máximo son  $P_1$  y  $P_2$ , pero como  $t_s < s/2$ , entonces tomamos el punto  $P_2$ . Según esto:

$$t_a = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + t_b^2} - d_b/2 = \sqrt{6.87^2 + 6.27^2} - 2.54/2 = 8.03 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_m = \left( \frac{2866.96}{2 \times 10^6} - 2.5 \times \frac{40 \times 60}{30.6} \times 10^{-6} \right) \frac{60 - 19.52}{50.96 - 19.52} = 0.00159$$

$$w_{\max} = \frac{3 \times 8.03 \times 0.00159}{1 + 2 \times (8.03 - 5)/(60 - 19.52)}$$

$$w_{\max} = 0.033 \text{ cm}$$

### Método de Frosch

$$f_s = 2866.96 \text{ kg/cm}^2$$

$$d_c = 5 + 2.54/2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$d_s = 5 + 2.54/2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$s = \frac{40 - 2 \times 5 - 2.54}{2} = 13.73 \text{ cm} \rightarrow \frac{s}{2} = \frac{13.73}{2} = 6.87 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{h - c}{d - c} = \frac{60 - 19.52}{50.96 - 19.52} = 1.288$$

Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} d_s$$

$$w_{\max} = 2 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} \times 6.27$$

$$w_{\max} = 0.018 \text{ cm}$$

Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción

Como  $s/2 > d_s$ :  $d^* = \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2} = \sqrt{6.27^2 + 6.87^2} = 9.30 \text{ cm}$

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta d^*$$

$$w_{\max} = 2 \times \frac{2866.96}{2 \times 10^6} \times 1.288 \times 9.30$$

$$w_{\max} = 0.034 \text{ cm}$$

### Resumen de resultados

Método	Ancho máximo de grieta ( cm )	
	Al nivel del centroide del acero en tracción	Al nivel de la fibra extrema en tracción
Kaar y Mattock	0.025	-----
Kaar y Hognestad	-----	0.032
Gergely y Lutz	0.025	0.036

Chowdhury y Loo	0.020	0.025
Broms	0.030	0.038
Base y colaboradores	0.024	0.049
Beeby	-----	0.033
Frosch	0.018	0.034

### Ejemplo 5.2

Dada la viga de la figura 5.14, determinar el ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo en tracción y al nivel de la fibra extrema en tracción usando los métodos de Gergely-Lutz y de Frosch. La sección está sometida a un momento por cargas de servicio de  $24 \text{ tn.m}$ . La resistencia del concreto es  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y la resistencia a la fluencia del acero es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . La viga esta reforzada en el lado de la tracción con  $3 \phi 1"$  en el lecho inferior y  $2 \phi 3/4"$  en el lecho superior.

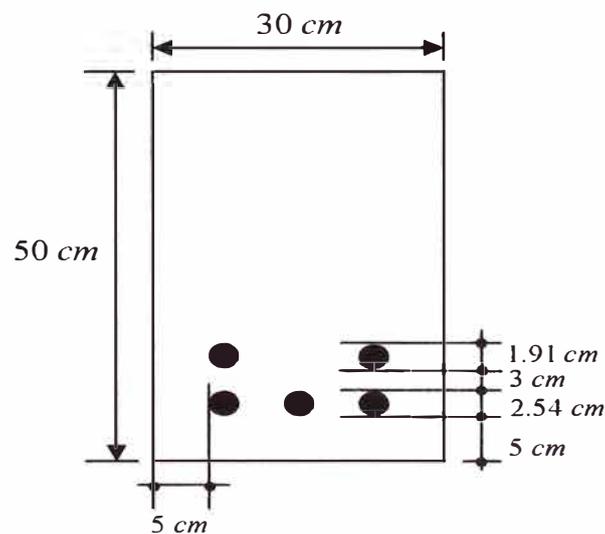


Figura 5.14 Viga del ejemplo 5.2

### Solución

#### Propiedades de los materiales

$$E_c = 15100 \sqrt{f'_c} = 15100 \sqrt{210} = 218819.79 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{218819.79} = 9.14$$

### Determinación del centroide del acero de refuerzo

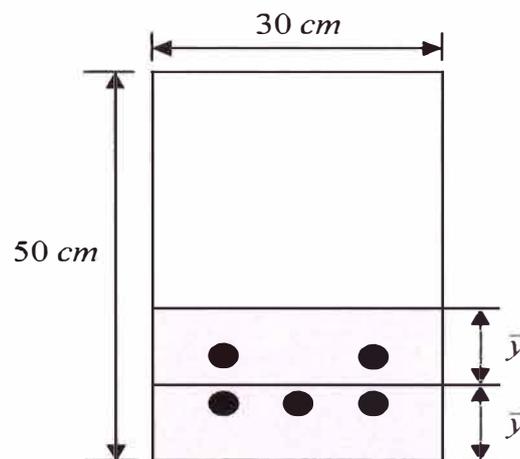
$$3 \phi 1" = 3 \times 5.10 = 15.30 \text{ cm}^2$$

$$2 \phi 3/4" = 2 \times 2.84 = 5.68 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 15.30 + 5.68 = 20.98 \text{ cm}^2$$

$$\bar{y} = \frac{15.30 \times (5 + 2.54/2) + 5.68 \times (5 + 2.54 + 3 + 1.91/2)}{20.98} = 7.68 \text{ cm}$$

$$d = 50 - \bar{y} = 50 - 7.68 = 42.32 \text{ cm}$$



### Determinación de la profundidad del eje neutro

De las ecuaciones A.17, A.18 y A.19 del apéndice A:

$$p = nA_s + (n-1)A'_s = 9.14 \times 20.98 + 0 = 191.76$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d' = 9.14 \times 20.98 \times 42.32 + 0 = 8115.16$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{191.76^2 + 2 \times 30 \times 8115.16} - 191.76}{30} = 17.73 \text{ cm}$$

### Determinación del esfuerzo en el acero

Usaremos la ecuación 5.23 para evitar calcular  $I_{cr}$

$$f_s = \frac{M}{A_s(d - c/3)} = \frac{24 \times 10^5}{20.98 \times (42.32 - 17.73/3)} = 3141.85 \text{ kg/cm}^2$$

Usando la fórmula 5.29 se tiene que:

$$f_s = \frac{nM}{bd^2 \alpha (n\rho)^\beta}$$

$$n\rho = \frac{nA_s}{bd} = \frac{9.14 \times 20.98}{30 \times 42.32} = 0.151$$

De la tabla 5.1 los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  son: 0.760 y 0.934, respectivamente. Reemplazando se tiene:

$$f_s = \frac{9.14 \times 24 \times 10^5}{30 \times 42.32^2 \times 0.760 \times 0.151^{0.934}} = 3140.27 \text{ kg/cm}^2$$

Usando:  $f_s = 0.60 f_y$  obtenemos:  $f_s = 0.60 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$ .

### Método de Gergely y Lutz

$$A_e = 2b(h - d) = 2 \times 30 \times (50 - 42.32) = 460.8 \text{ cm}^2$$

Como las varillas no son del mismo diámetro,  $N$  se obtiene dividiendo el área total del acero en tracción entre el área de la varilla de mayor

diámetro, según esto:  $N = \frac{20.98}{5.10} = 4.11$

$$A = A_e / N = 460.8 / 4.11 = 112.12 \text{ cm}^2$$

$$t_b = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$t_s = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$h_1 = d - c = 42.32 - 17.73 = 24.59 \text{ cm}$$

$$h_2 = h - c = 50 - 17.73 = 32.27 \text{ cm}$$

$$f_s = 3141.85 \text{ kg/cm}^2$$

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero en tracción*

$$w_{\max} = \frac{1.08 \sqrt[3]{t_s A}}{1 + \frac{2t_s}{3h_1}} f_s \times 10^{-6} \text{ cm}$$

$$w_{\max} = \frac{1.08 \times \sqrt[3]{6.27 \times 112.12}}{1 + \frac{2 \times 6.27}{3 \times 24.59}} \times 3141.85 \times 10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.026 \text{ cm}$$

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción:*

$$w_{\max} = 1.08 \sqrt[3]{\frac{h_2}{h_1} A} \frac{h_2}{h_1} f_s \times 10^{-6} \text{ cm}$$

$$w_{\max} = 1.08 \sqrt[3]{6.27 \times 112.12} \times \frac{32.27}{24.59} \times 3141.85 \times 10^{-6}$$

$$w_{\max} = 0.040 \text{ cm}$$

### **Método de Frosch**

$$f_s = 3141.85 \text{ kg/cm}^2$$

$$d_c = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$d_s = 5 + 2.54 / 2 = 6.27 \text{ cm}$$

$$s = \frac{30 - 2 \times 5 - 2.54}{2} = 8.73 \text{ cm}$$

$$\frac{s}{2} = \frac{8.73}{2} = 4.37 \text{ cm}$$

$$\beta = \frac{h - c}{d - c} = \frac{50 - 17.73}{42.32 - 17.73} = 1.312$$

*Ancho máximo de grieta al nivel del centroide del acero de refuerzo*

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} d_s$$

$$w_{\max} = 2x \frac{3141.85}{2x10^6} x 6.27$$

$$w_{\max} = 0.020 \text{ cm}$$

*Ancho máximo de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción*

Como  $d_s > s/2$ :  $d^* = \sqrt{d_c^2 + d_s^2} = \sqrt{6.27^2 + 6.27^2} = 8.87 \text{ cm}$

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta d^*$$

$$w_{\max} = 2x \frac{3141.85}{2x10^6} x 1.312 x 8.87$$

$$w_{\max} = 0.037 \text{ cm}$$

### Resumen de resultados

Método	Ancho máximo de grieta ( cm )	
	Al nivel del centroide del acero en tracción	Al nivel de la fibra extrema en tracción
Gergely y Lutz	0.026	0.040
Frosch	0.020	0.037

### Ejemplo 5.3

Determine el ancho máximo de grieta para la losa maciza del ejemplo 3.8 para la sección central del tramo exterior. Use el método de Frosch. El momento por cargas de servicio es  $4062.86 \text{ kg.m}$  para una franja de  $1 \text{ m}$  de ancho.

### Solución

$$A_s = 1/2 @ 12 = 1.27 \text{ cm}^2$$

El momento flector para una franja de 12 cm de ancho de losa es:

$$M = 4062.86 \times 12 / 100 = 487.54 \text{ kg.m}$$

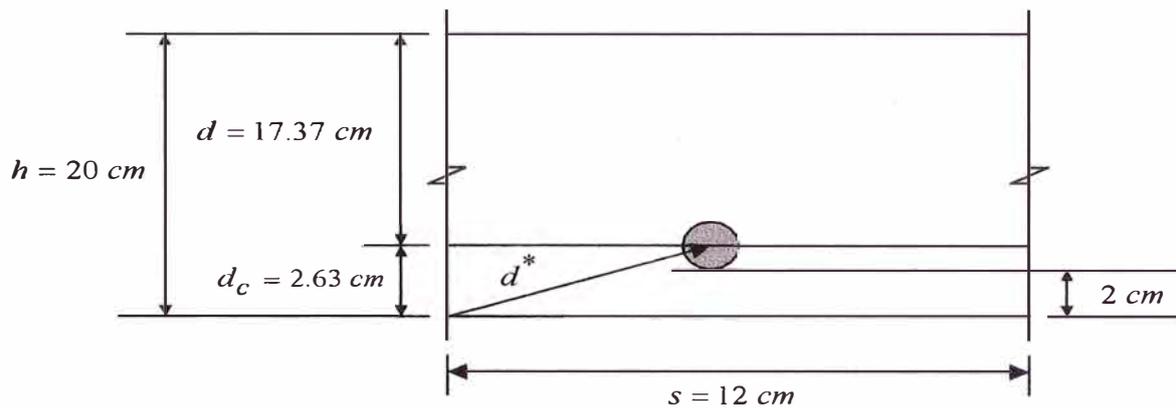


Figura 5.15 Losa del ejemplo 5.3

### Propiedades de los materiales

$$E_c = 15100 \sqrt{f'_c} = 15100 \times \sqrt{280} = 252671.33 \text{ kg/cm}^2$$

$$E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{252671.33} = 7.92$$

### Determinación de la profundidad del eje neutro

De las ecuaciones A.17, A.18 y A.19 del apéndice A:

$$p = nA_s + (n-1)A'_s = 7.92 \times 1.27 + 0 = 10.06$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d' = 7.92 \times 1.27 \times 17.37 + 0 = 174.71$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} = \frac{\sqrt{10.06^2 + 2 \times 12 \times 174.71} - 10.06}{12} = 4.62 \text{ cm}$$

### Determinación del esfuerzo en el acero

$$f_s = \frac{M}{A_s(d - c/3)} = \frac{487.54 \times 100}{1.27 \times (17.37 - 4.62/3)} = 2425.08 \text{ kg/cm}^2$$

Usando:  $f_s = 0.60 f_y$  obtenemos:  $f_s = 0.60 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$  que en este caso es una buena aproximación del valor exacto de  $f_s$ .

### Determinación del ancho máximo de grieta

$$w_{\max} = 2 \frac{f_s}{E_s} \beta \sqrt{d_c^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2}$$

$$\beta = \frac{h - c}{d - c} = \frac{20 - 4.62}{17.37 - 4.62} = 1.206$$

$$w_{\max} = 2 \times \frac{2425.08}{2 \times 10^6} \times 1.206 \times \sqrt{2.63^2 + \left(\frac{12}{2}\right)^2}$$

$$w_{\max} = 0.019 \text{ cm}$$



# **Control del agrietamiento según reglamentos**

---

## **6.1 Introducción**

El agrietamiento por flexión de las estructuras de concreto armado es inevitable y ante ello es necesario tomar medidas de diseño que eviten que el acero de refuerzo se corra y que el aspecto estético de la estructura se vea perjudicado. En este sentido es preferible tener muchas grietas finas, imperceptibles, que pocas grietas anchas y visibles. El ancho máximo de grieta que interesa para el control del agrietamiento es el ancho de grieta al nivel de la fibra extrema en tracción, es decir, el ancho de grieta en la superficie. El control del agrietamiento es particularmente importante cuando se utiliza acero de refuerzo con una resistencia a la fluencia superior a  $2800 \text{ kg/cm}^2$ .

Los reglamentos usan dos enfoques para el control del agrietamiento. El primer enfoque consiste en proveer fórmulas para calcular el ancho máximo de grieta al nivel de la superficie y anchos permisibles de grieta que dependen de las condiciones de exposición de la estructura al medio ambiente. Este es el enfoque seguido por el Eurocódigo EC2. El segundo enfoque no requiere calcular el ancho máximo de grieta sino que trata el problema de forma indirecta al proveer criterios para un adecuado detallado del acero de refuerzo. Este segundo enfoque es el seguido por

los reglamentos ACI 318-95, ACI 318-05 y NTE E060.89.

## 6.2 Control del agrietamiento según el reglamento ACI 318-95

Según el ACI 318-95, cuando el esfuerzo de fluencia del acero es superior a  $2800 \text{ kg/cm}^2$ , el acero de refuerzo en tracción de las secciones de máximo momento positivo y máximo momento negativo debe detallarse de tal manera que el factor  $Z$  dado por la siguiente ecuación:

$$Z = f_s \sqrt[3]{t_b A} \quad (6.1)$$

cumpla con las siguientes restricciones:

- Para vigas con condiciones de exposición interior

$$Z \leq 31300 \text{ kg/cm} \quad (6.2)$$

- Para vigas con condiciones de exposición exterior

$$Z \leq 25900 \text{ kg/cm} \quad (6.3)$$

Donde:

$t_b$  = Espesor del recubrimiento de concreto medido hasta el centro de la primera capa de acero de refuerzo en  $cm$

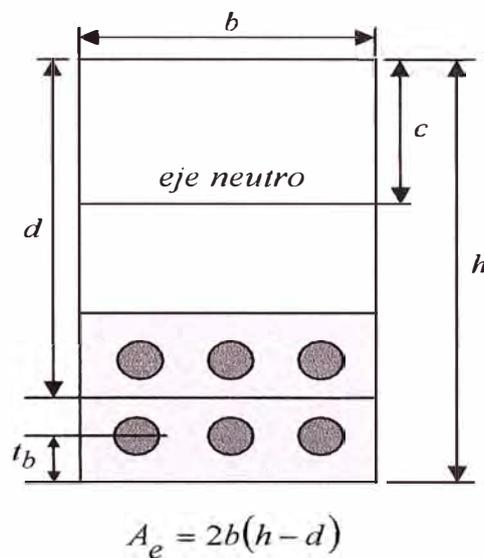
$f_s$  = Esfuerzo en el acero bajos cargas de servicio en  $kg/cm^2$  que puede aproximarse mediante  $0.6f_y$  si no se dispone de cálculos exactos.

$A$  = Área efectiva de concreto en tracción que rodea a cada varilla que se calcula en la forma:  $A = A_e / N$ , donde  $A_e$  es el área efectiva total de concreto en tracción y  $N$  es el número de varillas de acero en tracción. El área efectiva total de concreto en tracción  $A_e$  se calcula en la forma:

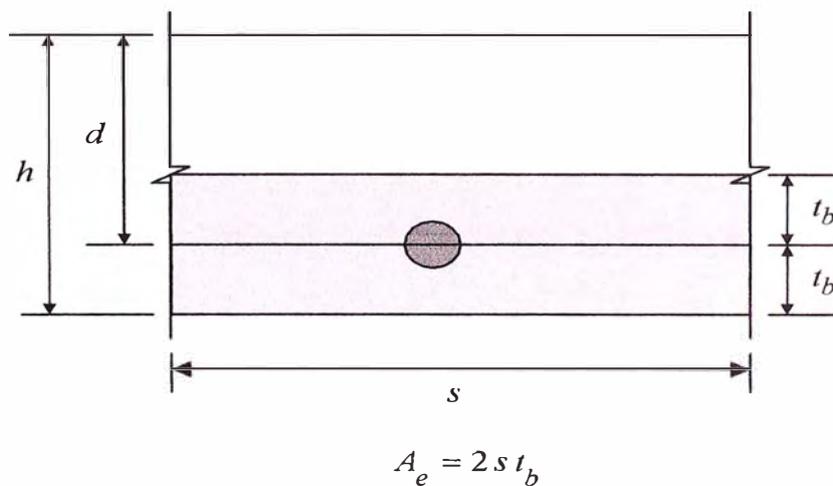
$A_e = 2b(h - d)$  y es el área de la zona rectangular de

concreto en tracción que rodea a todas las varillas de refuerzo y que tiene el mismo centroide que el centroide del refuerzo en tracción. Si las varillas son de diferente diámetro, el número de varillas  $N$  se calcula dividiendo el área total del acero en tracción entre el área de la varilla de mayor diámetro.

En las figuras 6.1 y 6.2 se muestran los elementos geométricos del factor Z para vigas y losas en los que el área sombreada es el área efectiva  $A_e$ .



**Figura 6.1** Elementos para el uso del factor Z en vigas



**Figura 6.2** Elementos para el uso del factor Z en losas

En la figura 6.3 se muestra un gráfico de  $Z$  en función de  $t_b A$  para acero de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ).

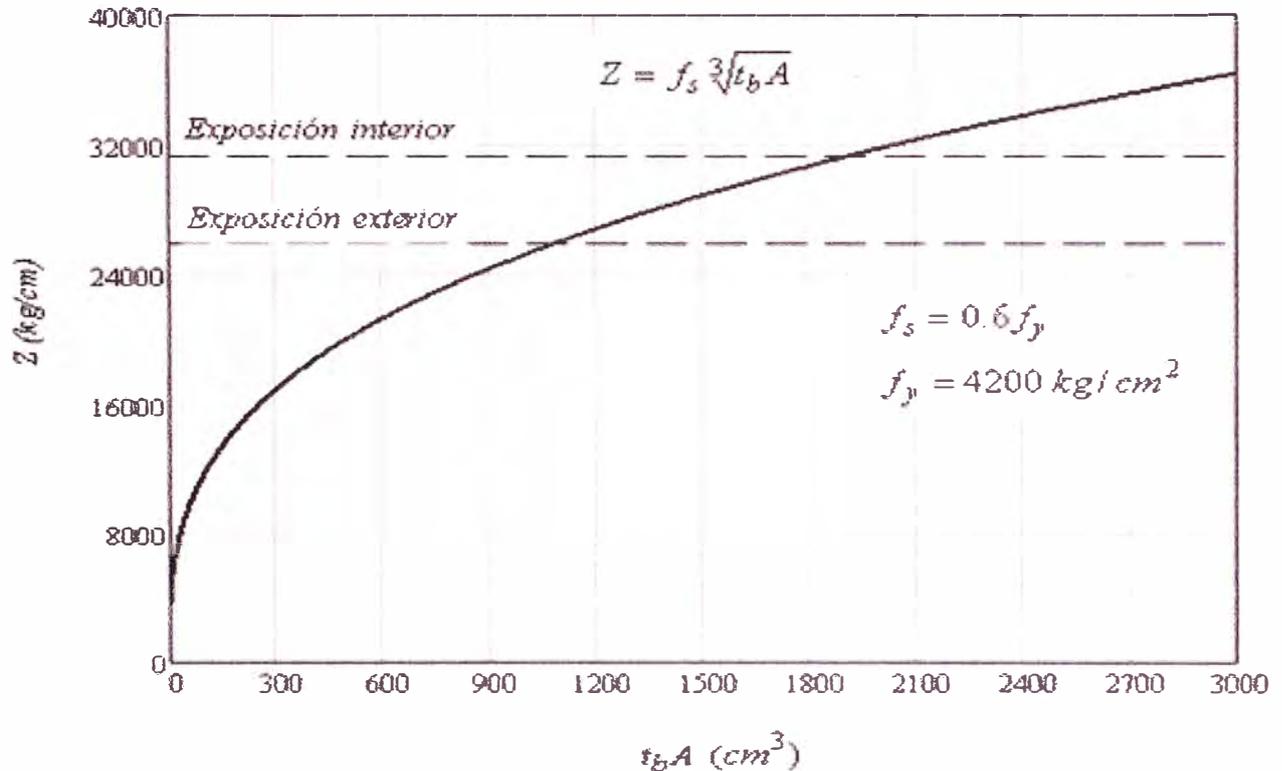


Figura 6.3 Curva de diseño para  $Z$

El presente método del ACI 318-95 está basado en la ecuación 5.4 de Gerlely y Lutz en la que se ha tomado una relación  $h_2 / h_1$  igual a 1.2 y se ha considerado un ancho máximo de grieta de 0.40 mm para condiciones de exposición interior y 0.33 mm para condiciones de exposición exterior. Usando el factor  $Z$ , la ecuación 5.4 de Gergely y Lutz toma la forma de la ecuación 6.4 de donde pueden deducirse las ecuaciones 6.2 y 6.3.

$$w_{\max} = 1.08 (h_2 / h_1) Z x 10^{-6} \text{ cm} \quad (6.4)$$

El comentario del ACI 318-95 indica que para el caso de losas unidireccionales,  $h_2 / h_1$  debe ser igual a 1.35 a cambio del valor 1.2 correspondiente a vigas. Esto significa que los límites de  $Z$  dados por las

ecuaciones 6.1 y 6.2 deben multiplicarse por el factor 1.2/1.35 para el caso de losas unidireccionales. Según esto, en el caso de losas unidireccionales, el acero de refuerzo debe detallarse de manera que cumpla con las siguientes condiciones:

- Para losas con condiciones de exposición interior

$$Z \leq 27900 \text{ kg/cm} \quad (6.5)$$

- Para losas con condiciones de exposición exterior

$$Z \leq 23100 \text{ kg/cm} \quad (6.6)$$

Siendo, en la práctica, el ancho máximo de grieta extremadamente variable, el reglamento ACI 318-95 adopta un procedimiento que permite cumplir satisfactoriamente con los requerimientos del ancho máximo de grieta sin necesidad de calcularlo.

La ecuación 5.4 de Gergely y Lutz y el factor  $Z$  dado por la ecuación 6.1 muestran que las variables principales que influyen en el agrietamiento por flexión son el esfuerzo en el acero, el espesor del recubrimiento de concreto, el área de concreto que rodea a cada varilla y el diámetro de las varillas. De todas ellas la variable de mayor importancia es el esfuerzo en el acero en la grieta. En cuanto al recubrimiento de concreto, el problema del factor  $Z$  es que promueve el uso de pequeños recubrimientos de concreto. Esto se debe a que según la fórmula de Gergely y Lutz, un incremento en el recubrimiento de concreto incrementará el ancho máximo de grieta y por lo tanto el factor  $Z$ . Pero, por otro lado, el incremento del recubrimiento de concreto es altamente deseable desde el punto de vista de la durabilidad y la protección del acero de refuerzo contra la corrosión. Estos dos aspectos parecen contradictorios, ante ello es conveniente proveer el recubrimiento de concreto necesario para controlar la durabilidad y adoptar otras medidas para controlar el ancho de las grietas tales como aumentar el peralte total del miembro flexionado, reducir el diámetro y el espaciamiento de las varillas de refuerzo y mantener en bajos

niveles el esfuerzo en el acero. Al respecto, Makhlouf y Malhas (1996) han demostrado que el problema radica en que la fórmula de Gergely y Lutz sobrestima el efecto del incremento del recubrimiento de concreto en el ancho máximo de grieta. Para ello Makhlouf y Malhas llevaron a cabo pruebas sobre 16 vigas de concreto armado y encontraron que al incrementar el recubrimiento de concreto de 3 a 6 *cm* se produjo un incremento del 16% en el ancho máximo de grieta superficial medido cuando la fórmula de Gergely y Lutz, usada por el reglamento ACI 318-95, predecía un incremento del 86%. Queda claro que el procedimiento del ACI 318-95 es muy sensitivo al incremento del recubrimiento de concreto. Además de esto, como ha reportado Frosch (1999), recubrimientos de concreto de hasta 6.5 *cm* han sido utilizados en los experimentos considerados por Gergely y Lutz en el desarrollo de la fórmula usada por el ACI. Como resultado, el método de control del agrietamiento del ACI 318-95, resulta dudoso en los casos en que el recubrimiento de concreto excede de 6.5 *cm*.

El recubrimiento libre de concreto máximo, considerando una sola capa de acero refuerzo en tracción, viene dado por la siguiente ecuación, obtenida de la ecuación 6.1:

$$(c_c)_{\text{máximo}} = \sqrt{\frac{N}{2b} \left( \frac{Z_{\text{limite}}}{f_s} \right)^3} - \frac{d_b}{2} \quad (6.7)$$

donde  $(c_c)_{\text{máximo}}$  es el recubrimiento libre de concreto máximo,  $Z_{\text{limite}}$  es el factor  $Z$  límite,  $f_s$  es el esfuerzo en el acero,  $b$  es el ancho de la sección,  $d_b$  es el diámetro de las varillas de acero de refuerzo y  $N$  es el número de varillas de refuerzo.

En cuanto al detallado de las varillas de refuerzo, si para un área dada de acero de refuerzo se emplean varillas de menor diámetro (y por lo tanto en mayor número) se reduce el factor  $Z$  y se obtiene un mejor control del

agrietamiento que si se usan varillas de mayor diámetro (y por lo tanto en menor número). Para demostrar esto se preparó la tabla 6.1 para el caso de una sección rectangular de 30 cm de ancho, 4 cm de recubrimiento libre de concreto, 19.20 cm<sup>2</sup> de área de acero de refuerzo y 4200 kg/cm<sup>2</sup> de límite de fluencia del acero. El recubrimiento máximo se obtuvo para un factor  $Z$  límite igual a 25900 kg/cm. Puede verse que el factor  $Z$  se redujo en alrededor del 40% al pasar de usar 2 varillas de 1-3/8" (3.49 cm) a 7 varillas de 3/4" (1.9 cm) de diámetro. Nótese que al aumentar el diámetro de las varillas (y por lo tanto el espaciamiento entre ellas), el recubrimiento libre máximo de concreto se reduce y el factor  $Z$  se incrementa.

**Tabla 6.1** Factor  $Z$  versus diámetro de las varillas de refuerzo

Diámetro	Nro. Varillas	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$Z$ (kg/cm)	$c_c$ máximo (cm)
1-3/8"	2	19.16	25117	4.3
5/8"	5	19.40	16405	8.7
3/4"	7	19.95	14979	10.3

Aplicando la ecuación 6.1 a la losa de la figura 6.2, en la que  $s$  es la separación centro a centro entre varillas y considerando  $f_s = 0.6f_y$ , se obtiene la siguiente ecuación:

$$s = \frac{1}{2t_b^2} \left( \frac{Z}{0.6f_y} \right)^3 \tag{6.8}$$

La ecuación 6.8 permite obtener la separación máxima entre varillas de acero de refuerzo (centro a centro entre varillas) en losas unidireccionales conociendo los valores de  $t_b$  y de  $Z$ .

Usando la ecuación 6.8 se han preparado las tablas 6.2 y 6.3 que permiten obtener la separación máxima (centro a centro) entre varillas de acero de refuerzo de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ) que permita satisfacer los requisitos del ACI para el control del agrietamiento.

**Tabla 6.2** Separación máxima entre varillas para controlar el agrietamiento en losas con exposición interior

Diámetro pulg	Exposición interior ( $Z = 27900 \text{ kg/cm}$ )						
	Recubrimiento libre ( $cm$ )						
	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1/2	*	*	*	40	32	26	21
5/8	*	*	*	37	30	24	20
3/4	*	*	43	34	28	23	19
7/8	*	*	40	32	26	22	18
1	*	*	37	30	24	20	17
1-1/8	*	44	35	28	23	19	16
1-1/4	*	41	32	26	22	18	16
1-3/8	*	38	30	25	21	17	15

Separación máxima expresada en centímetros. Una sola capa de armadura. Según el ACI 318-95, la separación no debe ser mayor que tres veces el espesor de la losa ni  $45 \text{ cm}$ . Los asteriscos indican valores calculados con la ecuación 6.7 que fueron mayores que  $45 \text{ cm}$

$$f_s = 0.6f_y, = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

**Tabla 6.3** Separación máxima entre varillas para controlar el agrietamiento en losas con exposición exterior

Diámetro pulg	Exposición exterior ( $Z = 23100 \text{ kg/cm}$ )						
	Recubrimiento libre ( $cm$ )						
	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
1/2	*	39	29	23	18	15	12
5/8	*	35	27	21	17	14	11
3/4	44	32	25	19	16	13	11
7/8	40	30	23	18	15	12	10
1	36	27	21	17	14	12	10
1-1/8	33	25	20	16	13	11	9
1-1/4	30	23	18	15	12	10	9
1-3/8	27	21	17	14	12	10	8

Separación máxima expresada en centímetros. Una sola capa de armadura. Según el ACI 318-95, la separación no debe ser mayor que tres veces el espesor de la losa ni  $45 \text{ cm}$ . Los asteriscos indican valores calculados con la ecuación 6.7 que fueron mayores que  $45 \text{ cm}$

$$f_s = 0.6f_y, = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

### 6.3 Control del agrietamiento según el reglamento ACI 318-05

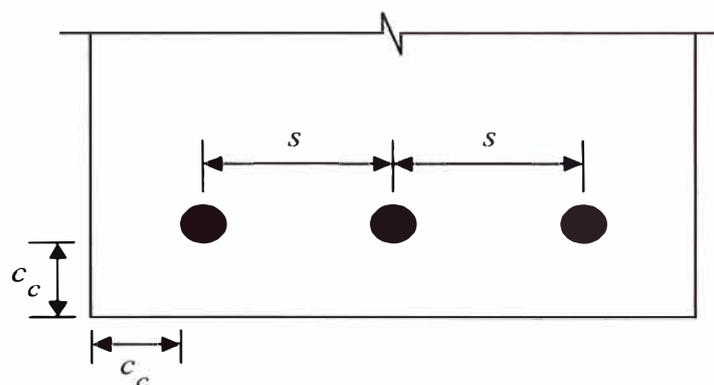
Según la sección 10.6.4 del ACI 318-05 el control del agrietamiento en vigas y losas unidireccionales se efectúa limitando la separación entre las varillas ubicadas más cerca de la cara en tracción a un valor máximo dado por la siguiente ecuación:

$$s = 38 \left( \frac{2800}{f_s} \right) - 2.5c_c \leq 300 \left( \frac{280}{f_s} \right) \quad (6.9)$$

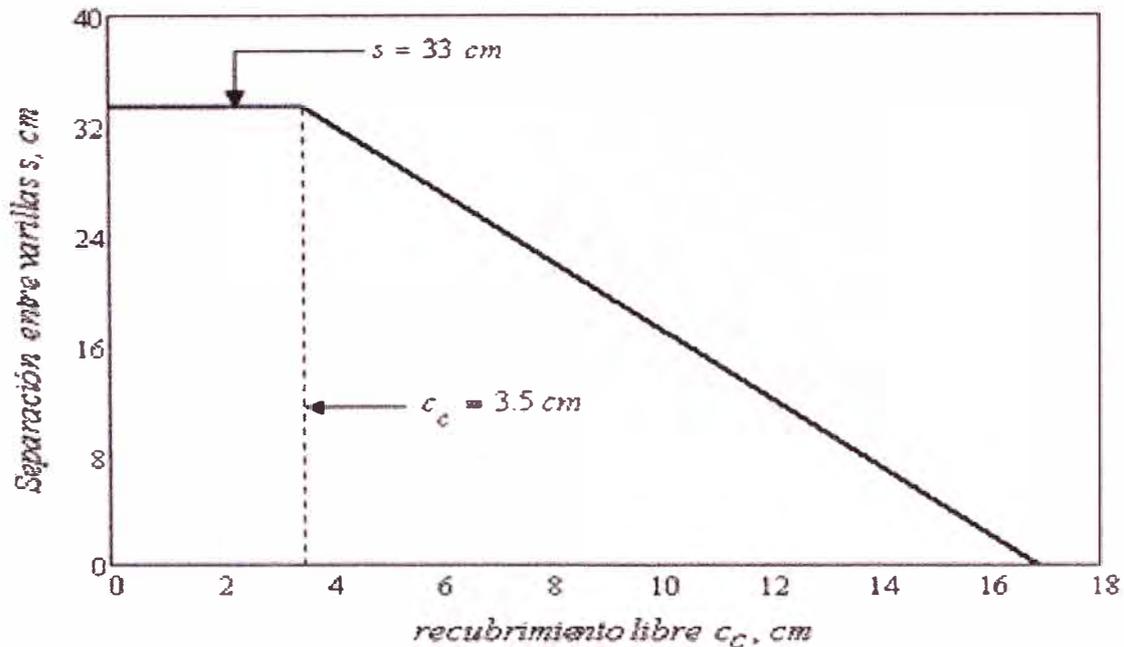
Donde:

- $s$  = Separación, centro a centro, entre las varillas mas cercanas a la cara en tracción, *cm*
- $f_s$  = Esfuerzo en el acero al nivel del centroide del refuerzo en tracción, *kg/cm<sup>2</sup>*. Puede tomarse como:  $f_s = 0.6f_y$  o calcularse usando el principio de la sección transformada.
- $c_c$  = Menor recubrimiento libre de concreto elegido entre el recubrimiento libre inferior y el recubrimiento libre lateral.

Si el refuerzo más cercano a la cara en tracción es una sola varilla, el valor de  $s$  a utilizar en la ecuación 6.9 es el ancho de la cara en tracción extrema. En la figura 6.4 se muestran los elementos geométricos utilizados por el ACI 318-05.



**Figura 6.4** Elementos geométricos usados por el ACI 318-05



**Figura 6.5** Curva de diseño del ACI 318-05

En la figura 6.5 se ha graficado la ecuación 6.9 para acero de grado 60 ( $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ ) considerando  $f_s = 0.6f_y$ . Puede verse que para recubrimientos libres menores o iguales que  $3.5 \text{ cm}$ , la separación máxima entre varillas es de  $33 \text{ cm}$ . Para recubrimientos libres mayores que  $3.5 \text{ cm}$ , la separación máxima entre varillas disminuye a valores menores que  $33 \text{ cm}$ .

En ediciones del reglamento anteriores a 1999 se usó el enfoque basado en la ecuación de Gergely y Lutz. En aquel entonces se daban disposiciones para la distribución del acero de refuerzo basadas en ecuaciones empíricas usando un ancho máximo de grieta. Pero, los estudios de Frosch mostraron las limitaciones y restricciones de la fórmula de Gergely y Lutz. En la edición del reglamento de 1999 se introdujo el enfoque de Frosch con lo que se pretende limitar el agrietamiento superficial a un ancho que es generalmente aceptable en la práctica pero que puede variar ampliamente dentro de una estructura dada. Para esto el reglamento ACI 318-02 estipula que la separación máxima entre las varillas de acero de refuerzo, ubicadas más cerca de la cara en tracción,

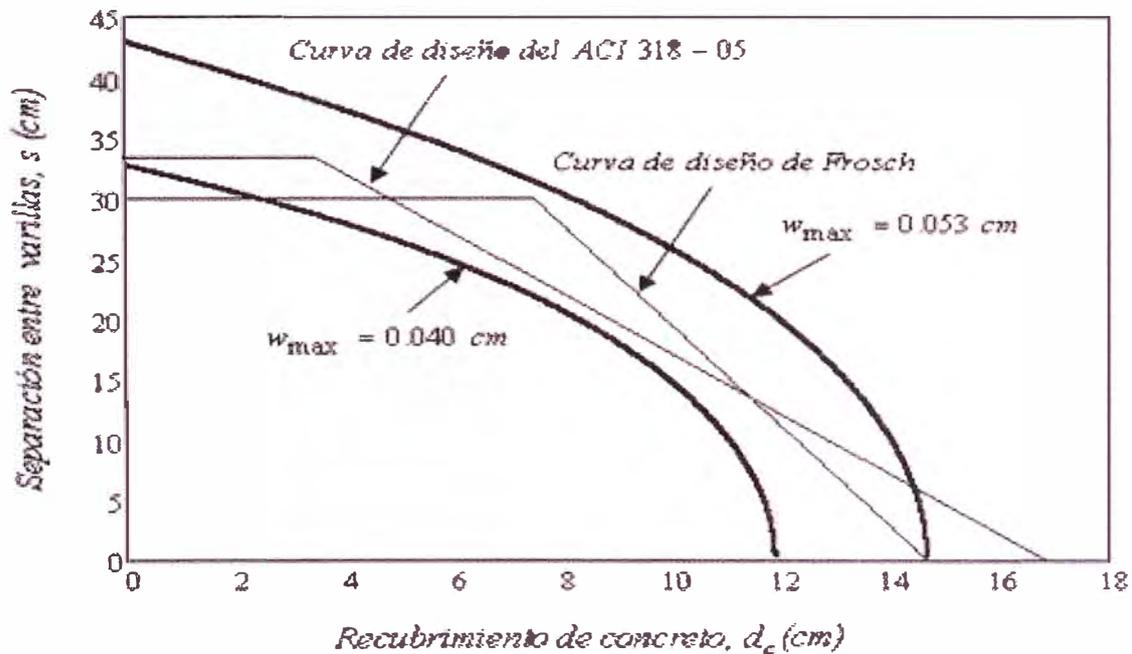
debe limitarse al valor dado por la siguiente ecuación:

$$s = \frac{95000}{f_s} - 2.5c_c \leq 300\left(\frac{250}{f_s}\right) \quad (6.10)$$

Donde  $s$ ,  $f_s$  y  $c_c$  tienen el mismo significado que en la ecuación 6.9.

La ecuación 6.10 fue modificada en la edición del reglamento ACI 318-05, a la forma dada por la ecuación 6.9, para tener en cuenta esfuerzos de servicio más altos que ocurren en el acero de refuerzo en flexión cuando se utilizan las combinaciones de carga introducidas en el reglamento del año 2002. Ambas ecuaciones, la 6.9 y la 6.10 están basadas en una ecuación similar propuesta por Frosch.

En la figura 6.6 se muestran las curvas de diseño de Frosch y del ACI 318-05 (ecuación 6.9). Puede verse que la curva de diseño del ACI es más conservadora que la curva de diseño propuesta por Frosch.



**Figura 6.6** Curva de diseño del ACI 318-05 vs Curva de diseño de Frosch

## 6.4 Control del agrietamiento según el reglamento NTE E.060.89

Según el reglamento NTE E.060.89 el control del agrietamiento se efectúa distribuyendo el acero de refuerzo por flexión adecuadamente en las zonas de tensiones máximas de un elemento, de modo tal que se obtenga un valor  $Z$  menor o igual a  $31000 \text{ kg/cm}$  para condiciones de exposición interior y menor o igual a  $26000 \text{ kg/cm}$  para condiciones de exposición exterior. El valor de  $Z$  se calcula mediante la ecuación:

$$Z = f_s \sqrt[3]{t_b A} \quad (6.11)$$

Donde  $f_s$ ,  $t_b$  y  $A$  tienen el mismo significado que para la ecuación 6.1 del ACI 318-95. Se especifica que el esfuerzo en el acero  $f_s$  puede estimarse mediante la expresión  $M / (0.9 d A_s)$  o suponerse igual a  $0.6 f_y$ .

El reglamento no hace diferencia entre viga y losa y no da ninguna sugerencia al respecto por lo que en lo que respecta al agrietamiento ambos tipos de miembros deben ser tratados por igual.

La propuesta de modificación al reglamento NTE E.060.89 considera  $26000 \text{ kg/cm}$  como valor único para controlar el agrietamiento en miembros en flexión.

El reglamento NTE E.060.89 adolece de los mismos problemas del reglamento ACI 318-95 dado que ambos reglamentos siguen el mismo enfoque.

## 6.5 Ancho máximo permisible de grieta en estructuras de concreto

En la tabla 6.3 se dan anchos máximos permisibles de grietas que dependen de las condiciones de exposición y del uso que se ha de dar a la estructura. Según el ACI 224R-01, la intención de estos valores de ancho de grieta razonable es simplemente servir de guía para dimensionar las

armaduras durante la etapa de diseño. Deben ser utilizadas como una guía de carácter general, junto con un sólido criterio profesional.

**Tabla 6.3** Anchos permisibles de grietas bajo cargas de servicio

Condición de exposición	Ancho máximo de grieta, mm
ACI 224R-01	
Aire seco o membrana protectora	0.41
Humedad, aire húmedo, suelo	0.30
Productos químicos descongelantes	0.18
Agua de mar y rocío de agua de mar, ciclos de humedecimiento y secado	0.15
Estructuras para retención de agua	0.10
ACI 318-95	
Interior	0.41
Exterior	0.33

### Ejemplo 6.1

La sección de viga de la figura 6.7 está sometida a un momento por cargas de servicio de  $24 \text{ tn.m}$ . La resistencia del concreto es  $f'_c = 210 \text{ kg/cm}^2$  y la resistencia a la fluencia del acero es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . La viga esta reforzada en el lado de la tracción con  $3 \phi 1''$  en el lecho inferior y  $2 \phi 3/4''$  en el lecho superior. Verificar si el detallado del acero de refuerzo satisface los criterios de control del agrietamiento del ACI 318-95 para condiciones de exposición interior y exterior.

### Solución

$$t_b = 5 + 2.54/2 = 6.27$$

$$\text{Lecho inferior : } 3 \phi 1'' = 3 \times 5.10 = 15.30 \text{ cm}^2$$

$$\text{Lecho superior : } 2 \phi 3/4'' = 2 \times 2.84 = 5.68 \text{ cm}^2$$

$$A_s = 15.30 + 5.68 = 20.98 \text{ cm}^2$$

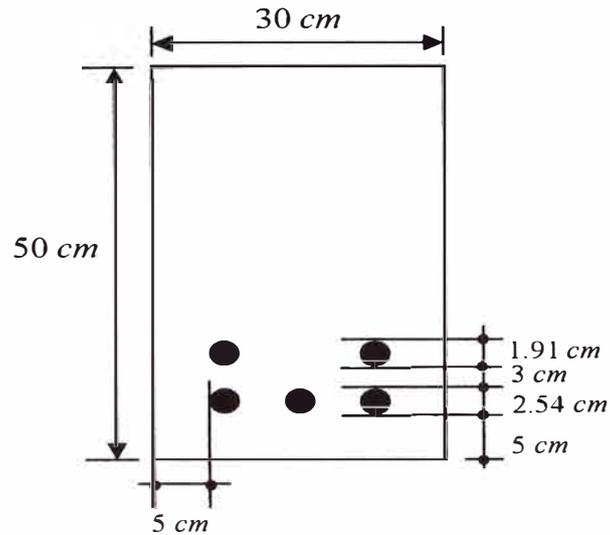


Figura 6.7 Sección de viga del ejemplo 6.1

$$\bar{y} = \frac{15.30x(5 + 2.54/2) + 5.68x(5 + 2.54 + 3 + 1.91/2)}{20.98} = 7.68 \text{ cm}$$

$$d = 50 - \bar{y} = 50 - 7.68 = 42.32 \text{ cm}$$

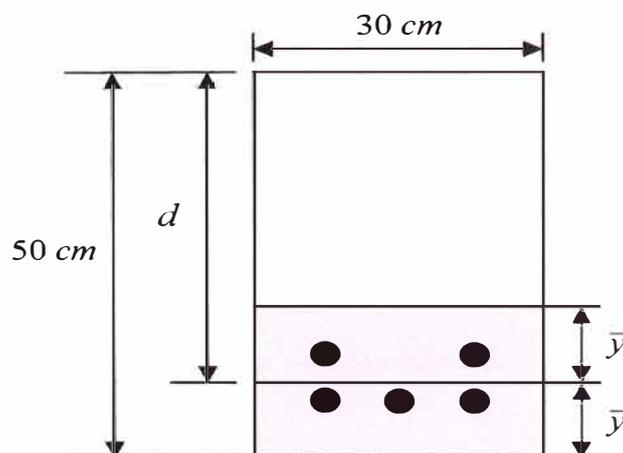
$$A_e = 2b(h - d) = 2 \times 30 \times (50 - 42.32) = 460.8 \text{ cm}^2$$

$$N = \frac{A_s}{\text{Area de la varilla de mayor diámetro}} = \frac{20.98}{5.10} = 4.11$$

$$A = \frac{A_e}{N} = \frac{460.8}{4.11} = 112.12 \text{ cm}^2$$

$$f_s = \frac{M}{0.9dA_s} = \frac{24 \times 10^5}{0.9 \times 42.32 \times 20.98} = 3003.43 \text{ kg/cm}^2$$

$$Z = f_s \sqrt[3]{t_b A} = 3003.43 \times \sqrt[3]{6.27 \times 112.12} = 26705.52 \text{ kg/cm}$$



Para condiciones de exposición interior

$$Z = 26705.52 \text{ kg/cm} \leq 31300 \text{ kg/cm} \text{ VERIFICA}$$

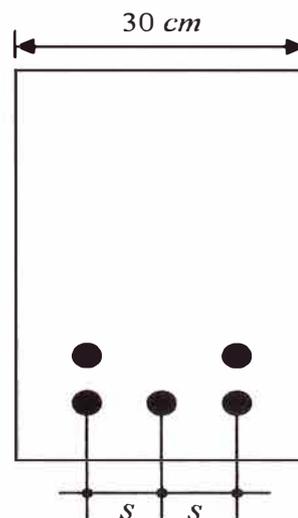
Para condiciones de exposición exterior

$$Z = 26705.52 \text{ kg/cm} > 25900 \text{ kg/cm} \text{ NO VERIFICA}$$

### Ejemplo 6.2

Determine si la sección de viga del ejemplo 6.1 satisface los requisitos de control del agrietamiento del reglamento ACI 318-05.

### Solución



Del ejemplo 6.1:  $A_s = 20.98 \text{ cm}^2$ ,  $d = 42.32 \text{ cm}$  y  $f_s = 3003.43 \text{ kg/cm}^2$

$c_c = 5 \text{ cm}$  (iguales recubrimientos lateral e inferior)

*Separación máxima permitida*

$$s = 38 \left( \frac{2800}{f_s} \right) - 2.5c_c \leq 300 \left( \frac{280}{f_s} \right)$$

$$s = 38 \left( \frac{2800}{3003.43} \right) - 2.5 \times 5 = 22.93 \text{ cm}$$

$$300\left(\frac{280}{f_s}\right) = 300\left(\frac{280}{3003.43}\right) = 27.97 \text{ cm} > 22.93 \text{ cm}$$

Entonces la separación máxima permitida es 22.93 cm

*Separación provista*

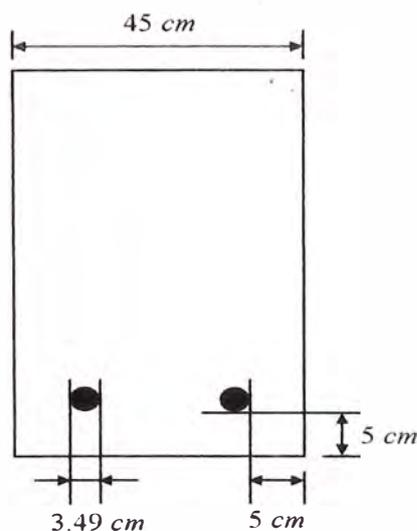
$$s = \frac{30 - 2x5 - 2.54}{2} = 8.73 \text{ cm} < 22.93 \text{ cm} \quad \text{VERIFICA}$$

### Ejemplo 6.3

Dada una sección rectangular de 40 cm de ancho que requiere un área de acero en tracción  $A_s = 20 \text{ cm}^2$ . La resistencia del acero a la fluencia es  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$ . El recubrimiento libre inferior y lateral medido hasta la superficie de las varillas de refuerzo es 5 cm. Determine si las siguientes selecciones de varillas de acero de refuerzo, dispuestas en una sola capa, satisfacen los criterios de control del agrietamiento del ACI 318-05: a).  $2 \phi 1 \frac{3}{8}$ " y b).  $4 \phi 1$ ".

### Solución

a) Para  $2 \phi 1 \frac{3}{8}$ "



$c_c = 5 \text{ cm}$  (iguales recubrimiento lateral y recubrimiento inferior)

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg / cm}^2$$

*Separación máxima permitida*

$$s = 38 \left( \frac{2800}{f_s} \right) - 2.5 c_c \leq 300 \left( \frac{280}{f_s} \right)$$

$$s = 38 \left( \frac{2800}{2520} \right) - 2.5 \times 5 = 29.72 \text{ cm}$$

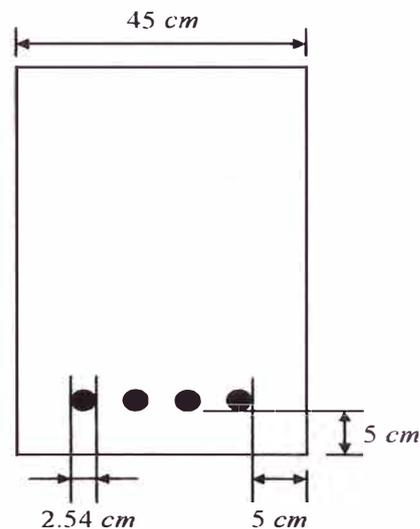
$$300 \left( \frac{280}{f_s} \right) = 300 \left( \frac{280}{2520} \right) = 33.33 \text{ cm} > 29.72 \text{ cm}$$

Luego la separación máxima permitida es  $29.72 \text{ cm}$

*Separación provista*

$$s = 45 - 2 \times (5 + 3.49 / 2) = 31.51 \text{ cm} > 29.72 \text{ cm} \text{ NO VERIFICA}$$

**b) Para  $4 \phi 1"$**



$c_c = 5 \text{ cm}$  (iguales recubrimiento lateral y recubrimiento inferior)

$$f_s = 0.6 f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg / cm}^2$$

### *Separación máxima permitida*

Del caso a:  $s = 29.7 \text{ cm}$

### *Separación provista*

$$s = \frac{45 - 2x(5 + 2.54/2)}{3} = 10.82 \text{ cm} < 29.7 \text{ cm} \text{ VERIFICA}$$

## **6.6 Programa de computadora para el cálculo y el control del agrietamiento**

Para automatizar el cálculo y el control del agrietamiento se ha desarrollado el programa de computadora *Grieta 1.0* usando el lenguaje de programación Java. El código fuente del programa se encuentra en el CD adjunto a esta tesis. *Grieta 1.0* permite controlar la deflexión usando los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E-060.89.

# Conclusiones

---

1. Las tablas E.6 y E.7 muestran que, para vigas severamente agrietadas con una relación  $M_a / M_{cr}$  en el orden de 2 a 4 y una cuantía de acero en tensión  $\rho > 1\%$ , los métodos del ACI 318-05, de Fikry y Thomas, de Yu y Winter (método B) y de Bischoff producen resultados similares en el cálculo de la deflexión inmediata con una precisión en el orden de  $\pm 20\%$  para vigas continuas y en el orden de  $\pm 30\%$  para vigas simplemente apoyadas. La mismas tablas muestran que el método de la NTE tiende a sobrestimar la deflexión como consecuencia de no tomar en cuenta el efecto rigidizante de la tracción con lo que la precisión del método esta en el orden de  $\pm 40\%$ , tanto para vigas simplemente apoyadas como para vigas continuas. A su vez, el método de Grossman es el más impreciso de todos, con una precisión en el orden de  $\pm 55\%$ , por lo que su uso debe limitarse a cálculos aproximados de la deflexión inmediata que permitan obtener una idea del nivel de deflexión alcanzado.
2. La tabla E.13 muestra que, para losas con bajos niveles de agrietamiento con  $M_a / M_{cr}$  cercano a 1 y cuantías de acero en tracción  $\rho < 1\%$  (que es típico de losas y vigas ligeramente reforzadas), el método de Bischoff predice la deflexión inmediata con mejor precisión (en el orden de  $\pm 40\%$ ) que los otros métodos. Así, el método del ACI puede subestimar la deflexión inmediata hasta en un 70% mientras que el método de la NTE E.060.89 puede sobrestimar la deflexión inmediata hasta en un 257%.
3. La ecuación de Branson, usada por el reglamento ACI 318-05, es aplicable a miembros de concreto armado con cuantías de acero de refuerzo moderadas a altas ( $\rho > 1\%$ ) y sometidas a cargas uniformemente distribuidas. Para cargas concentradas, subestima el

valor de  $I_e$  (o sobrestima la deflexión) (Al-Zaid et. Al, 1991) siendo mayor la magnitud del error en miembros fuertemente reforzados (Al-Shaikh y Al-Zaid, 1993).

4. Las tablas E.8 y E.9 muestra que los métodos del ACI 318-05, ACI 435 modificado, NTE E.060.89 y D de Yu y Winter predicen la deflexión total con una precisión en el orden de  $\pm 20\%$  para vigas continuas y en el orden de  $\pm 30\%$  para vigas simplemente apoyadas. Puede verse también que el método D de Yu y Winter es el más preciso de todos.
5. El multiplicador  $\lambda$ , usado por el reglamento ACI para calcular la deflexión adicional a largo plazo debido a las cargas sostenidas, puede subestimar, considerablemente, la deflexión sostenida de losas unidireccionales (Taylor y Herman, 1977).
6. Las ecuaciones 3.4 y 3.5 (propuestas en esta tesis) y los estudios de Scanlon y Hak (2006) muestran que los peraltes mínimos provistos por el ACI para losas macizas unidireccionales son conservadores lo cual se da en mayor grado cuanto mayor es la resistencia a la compresión del concreto y menor la sobrecarga viva.
7. El uso del factor Z en los métodos de los reglamentos ACI 318-95 y NTE E060.89 obliga al uso de pequeños recubrimientos de concreto. Esto se debe a que la fórmula de Gergely Lutz, en la que se basa el factor Z, sobrestima el efecto del recubrimiento de concreto en el cálculo del ancho máximo de grietas (Makhlouf y Malhas, 1996). Además, los experimentos en los que se basa la ecuación de Gergely y Lutz incluían recubrimientos de hasta  $6.5 \text{ cm}$ , por lo que el uso del factor Z resulta dudoso en los casos en que el recubrimiento de concreto exceda de  $6.5 \text{ cm}$  (Frosch, 1999).
8. Para un área de acero en tracción dada, los reglamentos ACI 318-95 y NTE E.060.89, promueven el uso de varillas de menor diámetro (y por lo tanto en mayor número y con una menor separación entre ellas). Esto reduce el factor Z (y por lo tanto el ancho máximo de grietas) y

permite un mejor control del agrietamiento. Por otro lado usar un mayor número de varillas (y por lo tanto de menor diámetro) permite incrementar el recubrimiento libre de concreto.

9. El reglamento ACI 318-05 pretende limitar el agrietamiento superficial a un ancho que es generalmente aceptable en la práctica (ancho máximo de grieta en el intervalo de  $0.040\text{ cm}$  a  $0.053\text{ cm}$ ) limitando la separación entre las varillas de refuerzo de la capa más cercana a la cara en tracción a valores mayores que los exigidos por el reglamento ACI 1995 y permitiendo el uso de mayores recubrimientos libres de concreto. Debe hacerse notar que el método del ACI 318-05 es válido para vigas y losas unidireccionales sometidas a condiciones normales de exposición. Para otros tipos de estructuras sometidas a entornos agresivos, como las estructuras sanitarias, podría ser más apropiado calcular los anchos máximos de grietas y limitarlos a anchos máximos permisibles adecuados.

# Recomendaciones

1. Se recomienda el uso de la ecuación de Bischoff para el cálculo de la deflexión inmediata considerando que predice la deflexión inmediata satisfactoriamente, independientemente del nivel de agrietamiento  $M_a / M_{cr}$  y de la cuantía de acero en tracción  $\rho$ .
2. Se recomienda el uso del método de Scanlon y Hak para el control de la deflexión en vigas y losas unidireccionales ya que considera explícitamente los principales factores que afectan a la deflexión, que son la razón  $l_n / h$ , condiciones de frontera, módulo de elasticidad, agrietamiento, deflexión dependiente del tiempo y cargas aplicadas.
3. Para el control de la deflexión en losas macizas unidireccionales que soportan o están unidas a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes se recomienda el uso de las ecuaciones 3.4 y 3.5, propuestas en esta tesis, que permiten determinar el menor peralte posible de la losa de forma tal que la deflexión incremental debido a la acción de las cargas sostenidas sea igual a la deflexión permisible  $l / 480$ .
4. Se recomienda el uso de la ecuación 6.29, propuesta en esta tesis, para el cálculo del esfuerzo en el acero en tracción, para secciones rectangulares simplemente reforzadas, considerando que presenta una desviación de sólo  $\pm 1\%$  respecto del valor exacto.

# Apéndice A

## Propiedades geométricas de la sección transversal

### A.1 Sección T no agrietada

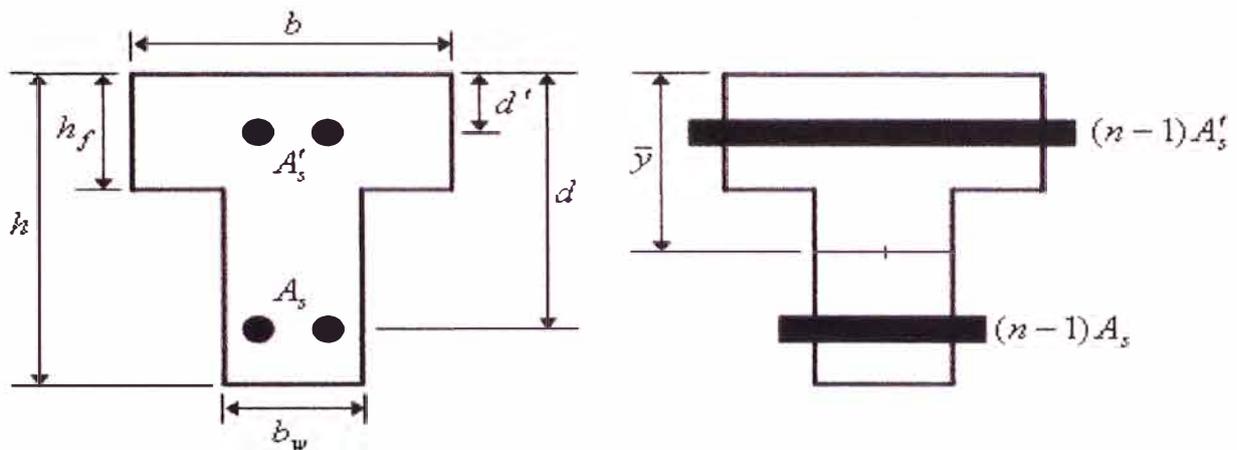


Figura A.1 Sección T no agrietada: sección transversal y sección transformada.

#### A.1.1 Para la sección transformada

$$\bar{y} = \frac{(b - b_w)h_f^2 / 2 + b_w h^2 / 2 + (n-1)(A_s d + A_s' d')}{(b - b_w)h_f + b_w h + (n-1)(A_s + A_s')} \quad (\text{A.1})$$

$$y_t = h - \bar{y} \quad (\text{A.2})$$

$$I_{ut} = \frac{b h_f^3}{12} + b h_f \left( \bar{y} - \frac{h_f}{2} \right)^2 + \frac{b_w (h - h_f)^3}{12} + b_w (h - h_f) \left( \bar{y} - \frac{h + h_f}{2} \right)^2 + A_s (d - \bar{y})^2 + A_s' (\bar{y} - d')^2 \quad (\text{A.3})$$

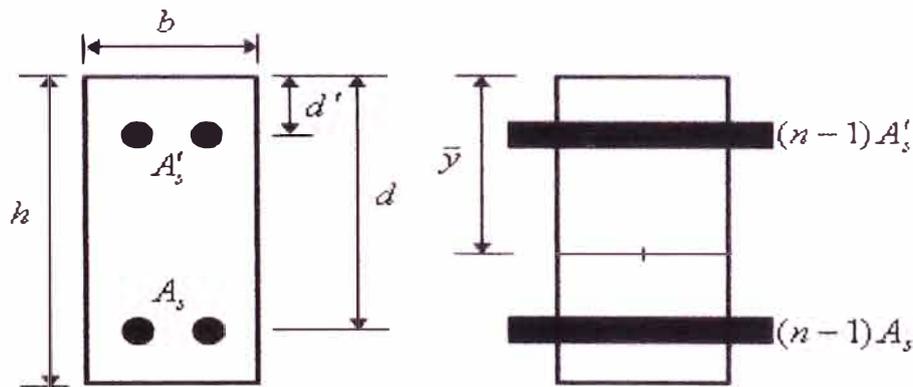
### A.1.2 Para la sección bruta

$$\bar{y} = \frac{(b - b_w)h_f^2 / 2 + b_w h^2 / 2}{(b - b_w)h_f + b_w h} \quad (\text{A.4})$$

$$y_t = h - \bar{y} \quad (\text{A.5})$$

$$I_g = \frac{bh_f^3}{12} + bh_f \left( \bar{y} - \frac{hf}{2} \right)^2 + \frac{b_w (h - h_f)^3}{12} + b_w (h - h_f) \left( \bar{y} - \frac{h + h_f}{2} \right)^2 \quad (\text{A.6})$$

### A.2 Sección rectangular no agrietada



**Figura A.2** Sección rectangular no agrietada: sección transversal y sección transformada

#### A.2.1 Para la sección transformada

$$\bar{y} = \frac{bh^2 / 2 + (n-1)(A_s d + A_s' d')}{bh + (n-1)(A_s + A_s')} \quad (\text{A.7})$$

$$y_t = h - \bar{y} \quad (\text{A.8})$$

$$I_{ut} = \frac{bh^3}{12} + bh \left( \bar{y} - \frac{h}{2} \right)^2 + (n-1)A_s (d - \bar{y})^2 + (n-1)A_s' (\bar{y} - d')^2 \quad (\text{A.9})$$

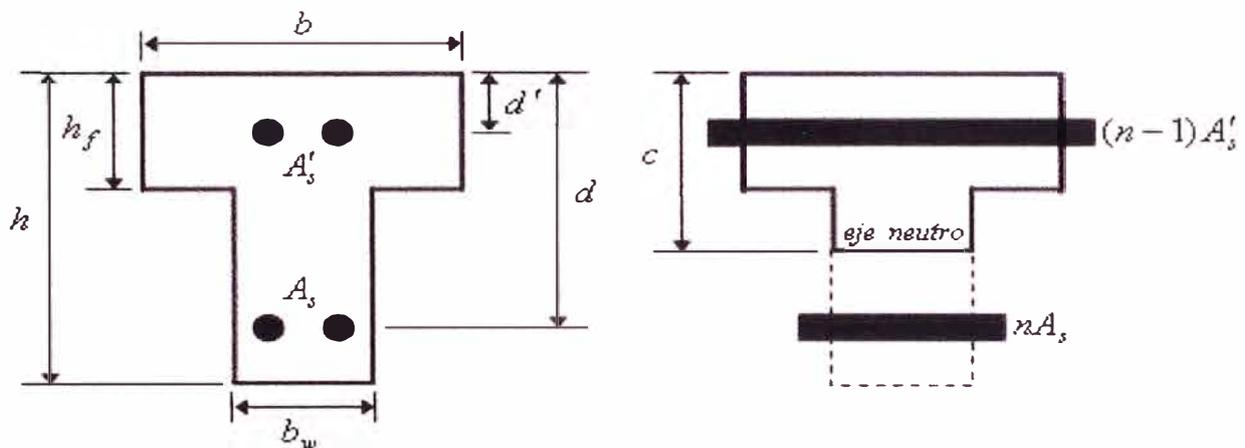
### A.2.2 Para la sección bruta

$$\bar{y} = \frac{h}{2} \quad (\text{A.10})$$

$$y_t = h - \bar{y} \quad (\text{A.11})$$

$$I_g = \frac{bh^3}{12} \quad (\text{A.12})$$

### A.3 Sección T agrietada



**Figura A.3** Sección T doblemente reforzada agrietada: sección transversal y sección transformada

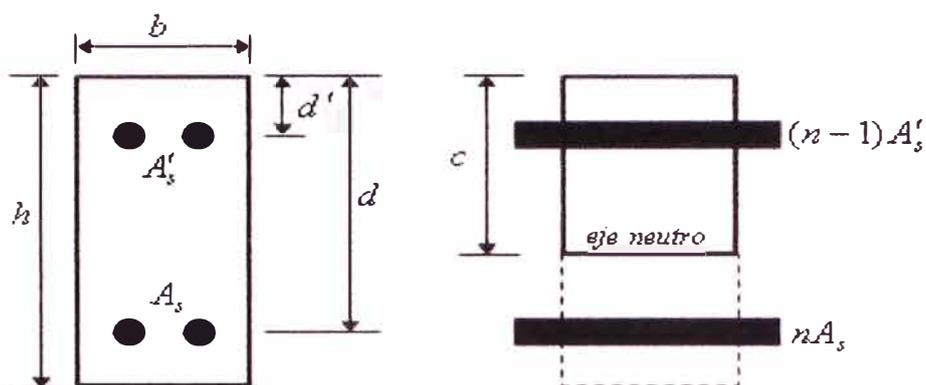
$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2b_w q} - p}{b_w} \quad (\text{A.13})$$

$$p = nA_s + (n-1)A'_s + (b - b_w)h_f \quad (\text{A.14})$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d' + \frac{(b - b_w)h_f^2}{2} \quad (\text{A.15})$$

$$I_{cr} = \frac{b_w (c - h_f)^3}{3} + \frac{bh_f^3}{12} + bh_f \left( c - \frac{h_f}{2} \right)^2 + nA_s (d - c)^2 + (n-1)A'_s (c - d')^2 \quad (\text{A.16})$$

#### A.4 Sección rectangular agrietada



**Figura A.4** Sección rectangular doblemente reforzada agrietada: sección transversal y sección transformada

$$p = nA_s + (n-1)A'_s \quad (\text{A.17})$$

$$q = nA_s d + (n-1)A'_s d' \quad (\text{A.18})$$

$$c = \frac{\sqrt{p^2 + 2bq} - p}{b} \quad (\text{A.19})$$

$$I_{cr} = \frac{bc^3}{3} + nA_s(d-c)^2 + (n-1)A'_s(c-d')^2 \quad (\text{A.20})$$

## Apéndice B

### Deducción de la ecuación 5.29

Reemplazando  $A_s = \rho bd$ ,  $A'_s = 0$  y  $c = kd$  en las ecuaciones A.17, A.18, A.19 y A.20 se obtiene:

$$k = n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{I_{cr}}{bd^3} = \frac{k^3}{3} + n\rho(1-k)^2 \quad (\text{B.2})$$

Denominando  $Q$  a  $\frac{I_{cr}}{bd^3}$ :

$$Q = \frac{I_{cr}}{bd^3} = \frac{k^3}{3} + n\rho(1-k)^2 \quad (\text{B.3})$$

y reemplazando  $k$  de la ecuación B.1 en la ecuación B.3 se tiene:

$$Q = \frac{1}{3} \left[ n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \right]^3 + n\rho \left( 1 - n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \right)^2 \quad (\text{B.4})$$

Reemplazando  $c = kd$  e  $I_{cr} = Fbd^3$  en la ecuación 6.25, se tiene que:

$$f_s = \frac{nM(d-c)}{I_{cr}} = \frac{nM(1-k)}{Fbd^2} = \frac{nM}{bd^2} \frac{1}{\frac{Q}{1-k}} = \frac{nM}{bd^2 G} \quad (\text{B.5})$$

En la que  $G$  viene dada por:

$$G = \frac{Q}{1-k} \quad (\text{B.6})$$

Reemplazando  $k$  y  $Q$  de las ecuaciones B.1 y B.4 en la ecuación B.6 se obtiene:

$$G = \frac{\frac{1}{3} \left[ n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right) \right]^3 + n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right)^2}{1 - n\rho \left( -1 + \sqrt{1 + \frac{2}{n\rho}} \right)} \quad (\text{B.7})$$

Mediante un programa de computadora se calcularon valores de  $G$  para valores de  $n\rho$  en el intervalo  $[0, 0.5]$  cada 0.0001 y se buscó una curva de ajuste mediante el programa LAB Fit 7.2 encontrándose que la ecuación B.8 se ajusta a los puntos calculados con una precisión de  $\pm 1\%$  para los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  dados en la tabla B.1.

$$G = \alpha(n\rho)^\beta \quad (\text{B.8})$$

En la figura B.1 se han planteado algunos de puntos de la curva.

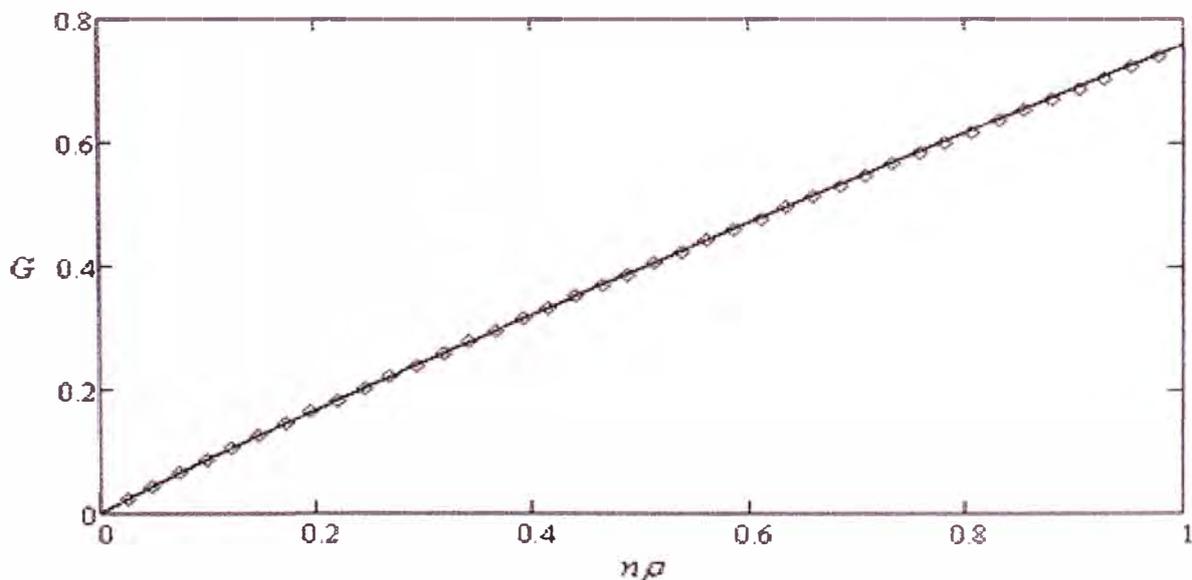


Figura B.1 Curva  $G$  versus  $n\rho$  para  $n\rho \leq 0.5$

Reemplazando  $G$  de la ecuación B.8 en la ecuación B.5 se obtiene la ecuación 5.29

$$f_s = \frac{nM}{bd^2 \alpha (n\rho)^\beta}$$

La ventaja de la ecuación 5.29 es que permite calcular el esfuerzo del acero en tracción para secciones rectangulares simplemente reforzadas en forma simple y precisa.

**Tabla B.1** Coeficientes  $\alpha$  y  $\beta$  para la ecuación 5.29

$n\rho$	$\alpha$	$\beta$
$n\rho \leq 0.01$	0.908	0.988
$0.01 < n\rho \leq 0.07$	0.814	0.963
$n\rho > 0.07$	0.760	0.934

# Apéndice C

## Multiplicadores $\gamma_{cp}$ y $\gamma_{cs}$ para calcular $C_u$ y $\varepsilon_{shu}$

### C.1 Multiplicadores $\gamma_{cp}$

Según el comité ACI 209 (1997) el coeficiente de flujo plástico último viene dado por:

$$C_u = 2.35\gamma_{cp} \quad (C.1)$$

donde:

$$\gamma_{cp} = K_h K_d K_{to} K_f K_s K_{ac} \quad (C.2)$$

siendo

$K_h$  = factor por humedad relativa

$K_d$  = factor por espesor mínimo del miembro

$K_{to}$  = factor por edad de la carga

$K_s$  = factor por revenimiento del concreto

$K_f$  = factor por contenido de finos

$K_{ac}$  = factor por contenido de aire

#### **Factor por humedad relativa**

$$K_h = \begin{cases} 1 & \text{para } H \leq 40\% \\ 1.27 - 0.0067H & \text{para } H > 40\% \end{cases} \quad (C.3)$$

Donde  $H$  es la humedad relativa en porcentaje.

**Factor por espesor mínimo del miembro**

$$K_d = 1.12 - 0.0079d \quad cm \quad (C.4)$$

Donde  $d$  es el espesor mínimo del miembro en  $cm$

**Factor por edad a la carga**

$$K_{to} = \begin{cases} 1.25t^{-0.118} & \text{Para curado húmedo} \\ 1.13t^{-0.095} & \text{Para curado a vapor} \end{cases} \quad (C.5)$$

Donde  $t$  es el tiempo en días en que se aplicó la carga por primera vez.

**Factor por revenimiento del concreto**

$$K_s = 0.82 + 0.026s \quad cm \quad (C.6)$$

Donde  $s$  es el revenimiento del concreto en  $cm$

**Factor por contenido de finos**

$$K_f = 0.88 + 0.0024F \quad (C.7)$$

Donde  $F$  es el contenido de finos en porcentaje.

**Factor por contenido de aire**

$$K_{ac} = \begin{cases} 1 & A \leq 6\% \\ 0.48 + 0.09A & A > 6\% \end{cases} \quad (C.8)$$

Donde  $A$  es el contenido de aire en porcentaje.

## C.2 Multiplicadores $\gamma_{cs}$

Según el comité ACI 209 (1997) la deformación por contracción libre última viene dada por:

$$\varepsilon_{shu} = 780 \times 10^{-6} \gamma_{cs} \quad (C.9)$$

donde:

$$\gamma_{cs} = K_h K_d K_f K_b K_{ac} \quad (C.10)$$

Todos los multiplicadores son los mismos que los definidos para  $\gamma_{cp}$  excepto  $K_b$ , que es un factor por cantidad de cemento.

### **Factor por humedad relativa**

$$K_h = \begin{cases} 1 & H \leq 40\% \\ 1.4 - 0.01H & 40 < H \leq 80 \\ 3.0 - 0.3H & 80 < H \leq 100 \end{cases} \quad (C.11)$$

Donde  $H$  es la humedad relativa en porcentaje.

### **Factor por espesor mínimo del miembro**

$$K_d = 1.193 - 0.0127d \quad cm \quad (C.12)$$

Donde  $d$  es el espesor mínimo del miembro en  $cm$

### **Factor por revenimiento del concreto**

$$K_s = 0.89 + 0.016s \quad cm \quad (C.13)$$

Donde  $s$  es el revenimiento del concreto en  $cm$

**Factor por contenido de finos**

$$K_f = \begin{cases} 0.3 + 0.014F & F \leq 50 \\ 0.9 + 0.002F & F > 50 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

Donde  $F$  es el contenido de finos en porcentaje.

**Factor por contenido de aire**

$$K_{ac} = 0.95 + 0.008A \quad (\text{C.8})$$

Donde  $A$  es el contenido de aire en porcentaje.

**Factor por cantidad de cemento**

$$K_b = 0.75 + 0.000214B \quad \text{kg/m}^3 \quad (\text{C.8})$$

Donde  $B$  es la cantidad de cemento en  $\text{kg/m}^3$

# Apéndice D

## Obtención de la ecuaciones 3.4 y 3.5

Para la obtención de la ecuaciones 3.4 y 3.5 se llevó a cabo un estudio paramétrico en losas macizas continuas de tramo interior y exterior variando  $f'_c$  de 210 a 420  $kg/cm^2$  cada 35  $kg/cm^2$ . Por cada valor de  $f'_c$  se analizaron tramos de losa con longitudes libres  $l_n$  de 3.0 a 8.5  $m$  cada 0.5  $m$ , sometidos, cada uno de ellos, a cargas vivas (sobrecargas)  $w_L$  de 100 a 750  $kg/m^2$  cada 50  $kg/m^2$ .

Los siguientes parámetros fueron considerados constantes:

- Resistencia del acero a la fluencia,  $f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
- Módulo de elasticidad del acero,  $E_s = 2 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
- Carga muerta superpuesta, 200  $kg/m^2$
- Porcentaje de carga viva sostenida, 50%
- Recubrimiento libre medido al centro del acero en tracción, 3  $cm$
- Multiplicador del ACI,  $\lambda_\infty = 2$  (para tiempo  $\infty$  de carga)

El estudio consistió en determinar, para cada losa, el mayor valor posible de  $l_n/h$  (y por lo mismo, el menor valor posible de  $h$ ) para el que la deflexión incremental  $\Delta_{inc}$  es igual a la deflexión permisible  $\Delta_{per} = l/480$  correspondiente a losas que soportan o están unidas a elementos no estructurales que se pueden dañar con deflexiones grandes, usando únicamente acero en tracción. Para efectos prácticos se consideró  $l_n \cong l$ .

La deflexión incremental se calculó mediante la ecuación D.1 obtenida en base a la ecuación 3.6:

$$\Delta_{inc} = \Delta_L + \lambda_{\infty} \Delta_{D+LS} \quad (D.1)$$

donde  $\Delta_L$  es la deflexión inmediata debida a la carga viva,  $\Delta_{D+LS}$  es la deflexión inmediata debida al total de la carga sostenida y  $\lambda_{\infty}$  es el multiplicador  $\lambda$  del ACI para tiempo infinito dado por la ecuación 2.35.

La deflexión inmediata se obtuvo con la siguiente ecuación (Scanlon y Choi, 1999):

$$\Delta = \kappa \frac{w l_n^4}{384 E_c I_e} \quad (D.2)$$

donde  $\kappa$  es 1.4 para tramos con ambos extremos continuos y 2 para tramos con un extremo continuo.

El momento de inercia efectivo  $I_e$  se calculo con la ecuación 2.34 de Bischoff por considerarse que brinda mejores resultados, en losas, que la ecuación de Branson. Para el diseño por resistencia, los momentos últimos fueron calculados usando los coeficientes de momentos del ACI.

El algoritmo utilizado fue el siguiente:

- Paso 1* : Inicializar  $h = l_n / 25$
- Paso 2* : Calcular el área de acero requerida para las secciones de máximo momento positivo y negativo
- Paso 3* : Si para alguna sección  $\rho > \rho_{\max}$ , incrementar el valor de  $h$  y repetir el paso 2 hasta que  $\rho \leq \rho_{\max}$  para todas las secciones
- Paso 4* : Calcular el momento de inercia efectivo  $I_e$  por cada nivel de carga
- Paso 5* : Calcular la deflexión inmediata por cada nivel de carga
- Paso 6* : Calcular la deflexión incremental  $\Delta_{inc}$

**Paso 7** : **SI**  $|\Delta_{inc} - \Delta_{per}| \leq 0.01$

Finalizar con el valor actual de  $h$

**SINO SI**  $\Delta_{inc} < \Delta_{per}$

Decrementar  $h$ , sólo si no hizo ningún incremento anterior, y repetir todo el procedimiento a partir del paso 2; en caso contrario, finalizar con el valor actual de  $h$

**SINO**

Incrementar el valor de  $h$  y repetir todo el procedimiento a partir del paso 2

El algoritmo anterior fue implementado en un programa de computadora de donde se obtuvieron 1176 valores de  $l_n/h$  por cada tipo de tramo de losa (tramo interior y tramo exterior) que fueron analizados mediante el programa LAB Fit, encontrándose que, para una resistencia  $f'_c$ , la siguiente curva se ajusta satisfactoriamente a los resultados obtenidos:

$$\frac{l_n}{h} = \frac{a + l_n}{b + c w_L} \quad (D.3)$$

donde  $a$  y  $b$  son constantes numéricas. En las tablas D.1 y D.2 se muestran los valores de  $a$  y  $b$  obtenidos mediante el programa LAB Fit para distintos valores de  $f'_c$ . Se encontró que la siguiente ecuación se ajusta satisfactoriamente a los datos exactos con una desviación estandar de  $\pm 3\%$  para cualquier valor de  $f'_c$ :

$$\frac{l_n}{h} = \frac{a(f'_c) + l_n}{\bar{b} + \bar{c} w_L} \quad (D.4)$$

Donde  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  son los valores promedio de  $b$  y  $c$  dados en las tablas D.1 y D.2 y,  $a(f'_c)$  viene dado por las siguientes ecuaciones:

Para losa maciza de tramo interior:

$$a = -0.00002(f'_c)^2 - 30 \quad (D.5)$$

Para losa maciza de tramo exterior:

$$a = 296310(f'_c)^{-2} - 35 \quad (D.6)$$

**Tabla D.1** Coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  para losa maciza de tramo interior

$f'_c$	$a$	$b$	$c$
210	-0.30496E+02	-0.69917E+00	-0.43140E-03
245	-0.30897E+02	-0.67737E+00	-0.43541E-03
280	-0.31162E+02	-0.65770E+00	-0.43421E-03
315	-0.31606E+02	-0.64727E+00	-0.43309E-03
350	-0.32102E+02	-0.64077E+00	-0.43201E-03
385	-0.32652E+02	-0.63749E+00	-0.43155E-03
420	-0.33322E+02	-0.63902E+00	-0.43162E-03
Promedio		-0.65697E+00	-0.43276E-03
Valor aproximado		-0.66	-0.00043

**Tabla D.2** Coeficientes  $a$ ,  $b$  y  $c$  para losa maciza de tramo exterior

$f'_c$	$a$	$b$	$c$
210	-0.28424E+02	-0.69247E+00	-0.35551E-03
245	-0.29852E+02	-0.70131E+00	-0.37812E-03
280	-0.31047E+02	-0.70574E+00	-0.39757E-03
315	-0.31984E+02	-0.70541E+00	-0.41251E-03
350	-0.32685E+02	-0.70132E+00	-0.42269E-03
385	-0.33095E+02	-0.69185E+00	-0.42822E-03
420	-0.33249E+02	-0.67819E+00	-0.42894E-03
Promedio		-0.69661E+00	-0.40333E-03
Valor aproximado		-0.70	-0.00040

Reemplazando D.5, D.6 y los promedios de  $b$  y  $c$  en la ecuación D.4 se obtienen las ecuaciones 3.4 y 3.5:

Para losa maciza de tramo interior:

$$\frac{l_n}{h} = \frac{30 + 0.00002(f'_c)^2 - l_n}{0.66 + 0.00043 w_L} \quad (3.4)$$

Para losa maciza de tramo exterior:

$$\frac{l_n}{h} = \frac{35 - 296310(f'_c)^{-2} - l_n}{0.70 + 0.00040 w_L} \quad (3.5)$$

Pruebas llevadas a cabo con las ecuaciones 3.4 y 3.5 mostraron que pueden ser aplicadas, con suficiente precisión, para cargas muertas superpuestas de 100 a 300  $kg/m^2$  y porcentajes de cargas vivas sostenidas de hasta 80%.

# Apéndice E

## Estudio comparativo de los diferentes métodos para el cálculo de deflexiones

En el presente apéndice se comparan deflexiones inmediatas calculadas con los métodos de los reglamentos ACI 318-05 y NTE E.060.89, y los métodos de Fikry y Thomas, B de Yu y Winter, Grossman y Bischoff con datos de prueba de Washa y Fluck (tomado de la referencia 7) para vigas simplemente apoyadas (sometidas a cargas uniformemente distribuidas) y continuas, de Yu y Winter para vigas T simplemente apoyadas (sometidas a cargas uniformemente distribuidas), y de Gilbert (tomado de las referencias 18, 19 y 23) para losas macizas simplemente apoyadas (sometidas a una carga concentrada central más el peso propio de la losa correspondiente). Se comparan, además, deflexiones totales calculadas con los métodos de los reglamentos ACI 318-05, ACI 435 modificado, NTE E.060.89, y el método D de Yu y Winter con datos de prueba de Washa y Fluck (tomado de la referencia 7) para vigas simplemente apoyadas y continuas (sometidas a cargas uniformemente distribuidas), y de Yu y Winter para vigas T simplemente apoyadas (sometidas a cargas uniformemente distribuidas). Todo el proceso se llevó a cabo mediante un programa de computadora.

El módulo de elasticidad del concreto  $E_c$ , el módulo de rotura  $f_r$  y el momento de agrietamiento  $M_{cr}$  se obtuvieron con las correspondientes ecuaciones del ACI 318-05 para las vigas de Washa y Fluck y, de Yu y Winter. Para las losas probadas por Gilbert se tomaron los valores de  $E_c$ ,  $M_{cr}$ ,  $M_a$  y  $f_r$  obtenidos experimentalmente.

Las tablas E.6 y E.7 muestran que los métodos del ACI 318-05, de Fikry y Thomas, de Yu y Winter (método B) y de Bischoff producen resultados

similares en el cálculo de la deflexión inmediata con una precisión en el orden de  $\pm 20\%$  para vigas continuas y en el orden  $\pm 30\%$  para vigas simplemente apoyadas. La mismas tablas muestran también que el método de la NTE tiende a sobrestimar la deflexión como consecuencia de no tomar en cuenta el efecto rigidizante de la tracción con lo que la precisión del método esta en el orden de  $\pm 40\%$ , tanto para vigas simplemente apoyadas como para vigas continuas. Puede verse también que el método de Grossman es el más impreciso de todos, con una precisión en el orden de  $\pm 55\%$ , por lo que su uso debe limitarse a cálculos aproximados de la deflexión inmediata que permitan obtener una idea del nivel de deflexión alcanzado. Debe considerarse que todas las vigas analizadas se encontraban severamente agrietadas con una relación  $M_a / M_{cr}$  en el orden de 2 a 4 y una cuantía de acero en tensión  $\rho > 1\%$ .

La tabla E.13 muestra que para losas con bajos niveles de agrietamiento,  $M_a / M_{cr}$  cercano a 1, y cuantías de acero en tracción  $\rho < 1\%$  los métodos del ACI 318-05 y de Grossman subestiman la deflexión inmediata hasta en 70%. En cambio los métodos de Fikry y Thomas, de la NTE E.060.89 y de Yu y Winter (método B) tienden a sobrestimar la deflexión inmediata considerablemente. Así, el método de la NTE E.060.89 sobrestima la deflexión inmediata hasta en 257%. Puede verse también, en la misma tabla, que el método de Bischoff es el más preciso de todos con una precisión en el orden de  $\pm 40\%$ .

Las tablas E.8 y E.9 muestran que los métodos del ACI 318-05, ACI 435 modificado, NTE E.060.89 y D de Yu y Winter predicen la deflexión total con una precisión en el orden de  $\pm 20\%$  para vigas continuas y en el orden de  $\pm 30\%$  para vigas simplemente apoyadas. Puede verse también que el método D de Yu y Winter es el más preciso de todos.

**Tabla E.1 – Detalles de las vigas analizadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Detalles de la sección									
		$b$ cm	$b_w$ cm	$h$ cm	$h_f$ cm	$A_s$ cm <sup>2</sup>	$\rho$ %	$A'_s$ cm <sup>2</sup>	$\rho'$ %	$d$ cm	$d'$ cm
Washa y Fluck	A1,A4	20.32	20.32	30.48	—	8.52	1.62	8.52	1.62	25.88	4.60
	B1,B4	15.24	15.24	20.32	—	4.00	1.67	4.00	1.67	15.72	4.60
	C1,C4	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	5.16	1.67	10.16	2.54
	D1,D4	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	5.16	1.67	10.16	2.54
Tramo simple de viga rectangular	E1,E4	30.48	30.48	7.62	—	2.84	1.59	2.84	1.59	5.87	1.75
	A2,A5	20.32	20.32	30.48	—	8.52	1.62	4.26	0.81	25.88	4.60
	B2,B5	15.24	15.24	20.32	—	4.00	1.67	2.00	0.83	15.72	4.60
	C2,C5	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	2.58	0.83	10.16	2.54
	D2,D5	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	2.58	0.83	10.16	2.54
	E2,E5	30.48	30.48	7.62	—	2.84	1.59	1.42	0.79	5.87	1.75
	A3,A6	20.32	20.32	30.48	—	8.52	1.62	0	0	25.88	0
	B3,B6	15.24	15.24	20.32	—	4.00	1.67	0	0	15.72	0
	C3,C6	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	0	0	10.16	0
	D3,D6	30.48	30.48	12.70	—	5.16	1.67	0	0	10.16	0
E3,E6	30.48	30.48	7.62	—	2.84	1.59	0	0	5.87	0	
Yu y Winter Tramo simple de viga T	A	30.48	15.24	30.48	6.35	4.00	1.01	0	0	25.88	0
	B	30.48	15.24	30.48	6.35	4.00	1.01	2.00	0.51	25.88	3.96
	C	30.48	15.24	30.48	6.35	4.00	1.01	4.00	1.01	25.88	3.96
	D	60.96	15.24	30.48	6.35	7.74	2.07	0	0	24.59	0
	E	30.48	15.24	30.48	6.35	4.00	1.05	0	0	24.92	0
	F	30.48	15.24	20.32	5.08	4.00	1.67	0	0	15.72	0
Washa y Fluck Dos tramos continuos de viga rectangular	X1,X4	15.24	15.24	20.32	—	4.00	1.67	4.00	1.67	15.72	4.60
	Y1,Y4	30.48	30.48	12.70	—	6.84	2.86	6.00	2.50	15.72	4.60
						5.16	1.67	5.16	1.67	10.16	2.54
	Z1,Z4	30.48	30.48	7.62	—	10.00	3.23	10.00	3.23	10.16	2.54
						2.84	1.59	2.84	1.59	5.87	1.75
	X2,X5	15.24	15.24	20.32	—	5.16	2.88	6.45	3.61	5.87	1.75
						4.00	1.67	2.00	0.83	15.72	4.60
						6.84	2.86	6.00	2.50	15.72	4.60
						5.16	1.67	2.58	0.83	10.16	2.54
						10.00	3.23	10.00	3.23	10.16	2.54
						2.84	1.59	1.42	0.79	5.87	1.75
	X3,X6	15.24	15.24	20.32	—	5.16	2.88	6.45	3.61	5.87	1.75
4.00						1.67	0	0	15.72	0	
Y3,Y6	30.48	30.48	12.70	—	6.84	2.86	6.00	2.50	15.72	4.60	
					5.16	1.67	0	0	10.16	0	
Z3,Z6	30.48	30.48	7.62	—	10.00	3.23	10.00	3.23	10.16	2.54	
					2.84	1.59	0	0	5.87	0	
						5.16	2.88	6.45	3.61	5.87	1.75

Para las vigas continuas, el número superior se refiere a la sección de momento máximo positivo y el número inferior a la sección de momento máximo negativo.

**Tabla E.2 – Detalles de las vigas analizadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Humedad relativa	Edad a la carga	Duración de la carga	$f'_c$	$f_y$
		%	días	meses	$kg/cm^2$	$kg/cm^2$
Washa y Fluck	A1,A4	50	14	30	254.1	3500
	B1,B4	50	14	30	211.4	3500
	C1,C4	50	14	30	205.8	3500
	D1,D4	50	14	30	225.4	3500
	E1,E4	50	14	30	209.3	3500
Tramo simple de viga rectangular	A2,A5	50	14	30	254.1	3500
	B2,B5	50	14	30	211.4	3500
	C2,C5	50	14	30	205.8	3500
	D2,D5	50	14	30	225.4	3500
	E2,E5	50	14	30	209.3	3500
	A3,A6	50	14	30	254.1	3500
	B3,B6	50	14	30	211.4	3500
	C3,C6	50	14	30	205.8	3500
	D3,D6	50	14	30	225.4	3500
	E3,E6	50	14	30	209.3	3500
Yu y Winter	A	40	30	6	257.6	5600
	B	40	29	6	271.6	5600
	C	40	29	6	247.1	5600
	D	40	31	6	257.6	5600
	E	40	29	6	298.2	5600
	F	40	34	6	298.2	5600
Washa y Fluck	X1,X4	60	14	30	226.1	3500
	Y1,Y4	60	14	30	235.2	3500
	Z1,Z4	60	14	30	231	3500
	X2,X5	60	14	30	226.1	3500
	Y2,Y5	60	14	30	235.2	3500
	Z2,Z5	60	14	30	231	3500
	X3,X6	60	14	30	226.1	3500
	Y3,Y6	60	14	30	235.2	3500
	Z3,Z6	60	14	30	231	3500

**Tabla E.3 – Detalles de las vigas analizadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Tramo $L$	$w$	$M_a$	$\frac{M_a}{M_{cr}}$	
		$m$	$tn / m$	$tn.m$		
Washa y Fluck  Tramo simple de viga rectangular	A1,A4	6.10	0.562	2.614	2.606	
	B1,B4	6.10	0.159	0.740	2.425	
	C1,C4	6.34	0.122	0.613	2.608	
	D1,D4	3.81	0.341	0.619	2.515	
	E1,E4	5.33	0.057	0.202	2.372	
	A2,A5	6.10	0.562	2.614	2.606	
	B2,B5	6.10	0.159	0.740	2.425	
	C2,C5	6.34	0.122	0.613	2.608	
	D2,D5	3.81	0.341	0.619	2.515	
	E2,E5	5.33	0.057	0.202	2.372	
	A3,A6	6.10	0.562	2.614	2.606	
	B3,B6	6.10	0.159	0.740	2.425	
	C3,C6	6.34	0.122	0.613	2.608	
	D3,D6	3.81	0.341	0.619	2.515	
E3,E6	5.33	0.057	0.202	2.372		
Yu y Winter  Tramo simple de viga T	A	6.10	0.655	3.047	3.429	
	B	6.10	0.656	3.051	3.344	
	C	6.10	0.653	3.037	3.490	
	D	6.10	1.196	5.563	5.473	
	E	4.27	1.253	2.856	2.987	
	F	6.10	0.387	1.800	4.222	
Washa y Fluck  Dos tramos continuos de viga rectangular	X1,X4	2 de 6.10	0.273	0.635	2.013	
	Y1,Y4	2 de 6.34	0.217	0.545	2.169	
	Z1,Z4	2 de 5.33	0.101	0.179	2.000	
	X2,X5	2 de 6.10	0.273	0.635	2.013	
	Y2,Y5	2 de 6.34	0.217	0.545	2.169	
	Z2,Z5	2 de 5.33	0.101	0.179	2.000	
	X3,X6	2 de 6.10	0.273	0.635	2.013	
	Y3,Y6	2 de 6.34	0.217	0.545	2.169	
	Z3,Z6	2 de 5.33	0.101	0.179	2.000	
					0.359	4.000
					0.359	4.000
					0.359	4.000
					0.359	4.000
					0.359	4.000

Para las vigas continuas, el número superior se refiere a la sección de momento máximo positivo y el número inferior a la sección de momento máximo negativo.

**Tabla E.4 – Momentos de inercia para las vigas analizadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	$I_e$ ACI $cm^4$	$I_e$ NTE $cm^4$	$I_e$ Fikry $cm^4$	$I_e$ Grossman $cm^4$	$I_e$ Yu-Winter $cm^4$	$I_e$ Bischoff $cm^4$
Washa y Fluck  Tramo simple de viga rectangular	A1,A4	27509	26285	26778	22343	28586	28158
	B1,B4	5021	4596	4938	4440	5017	5088
	C1,C4	2698	2548	2660	2254	2761	2755
	D1,D4	2634	2461	2583	2256	2680	2685
	E1,E4	512	462	505	461	506	516
	A2,A5	26789	25522	26042	22327	27699	27409
	B2,B5	4978	4549	4877	4441	4960	5041
	C2,C5	2654	2501	2613	2253	2706	2708
	D2,D5	2595	2420	2538	2255	2632	2644
	E2,E5	508	458	499	461	501	512
	A3,A6	25904	24583	25307	22191	26616	26484
	B3,B6	4924	4491	4816	4438	4890	4981
	C3,C6	2599	2444	2565	2241	2639	2650
	D3,D6	2548	2370	2493	2249	2572	2593
E3,E6	504	453	494	461	495	507	
Yu y Winter  Tramo simple de viga T	A	16001	15188	16754	14208	16145	16125
	B	15824	14942	16716	14148	15927	15922
	C	16384	15623	17154	14204	16592	16539
	D	26667	26444	26024	27812	27342	26966
	E	14477	13172	15668	13978	14174	14338
	F	4909	4781	4679	4690	5021	4967
Washa y Fluck  Dos tramos contínuos de viga rectangular	X1,X4	5240	4484	5037	4752	4996	5231
		6649	6586	6770	4961	6915	6745
		2694	2422	2607	2382	2678	2732
	Y1,Y4	3998	3983	4114	2838	4165	4033
		530	446	512	489	497	525
	Z1,Z4	702	695	726	517	731	712
		5204	4442	4980	4753	4943	5189
	X2,X5	6649	6586	6770	4961	6915	6745
		2659	2383	2564	2383	2631	2693
		3998	3983	4114	2838	4165	4033
	Z2,Z5	528	442	507	489	493	521
		702	695	726	517	731	712
	X3,X6	5158	4390	4923	4754	4878	5135
		6649	6586	6770	4961	6915	6745
	Y3,Y6	2617	2336	2521	2379	2573	2645
		3998	3983	4114	2838	4165	4033
524		438	502	489	488	517	
Z3,Z6	702	695	726	517	731	712	

Para las vigas contínuas, el número superior se refiere a la sección de momento máximo positivo y el número inferior a la sección de momento máximo negativo.

**Tabla E.5 – Deflexiones medidas para las vigas analizadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Duración de la carga meses	Deflexión inmediata cm	Deflexión total cm	Deflexión sostenida cm
Washa y Fluck  Tramo simple de viga rectangular	A1,A4	30	1.35	2.36	1.01
	B1,B4	30	2.34	5.11	2.77
	C1,C4	30	4.01	8.00	3.99
	D1,D4	30	1.19	2.77	1.58
	E1,E4	30	5.94	12.40	6.46
	A2,A5	30	1.57	3.23	1.66
	B2,B5	30	2.49	6.50	4.01
	C2,C5	30	4.34	10.06	5.72
	D2,D5	30	1.42	3.30	1.88
	E2,E5	30	5.59	12.88	7.29
	A3,A6	30	1.70	4.47	2.77
	B3,B6	30	2.64	8.64	6.00
	C3,C6	30	4.78	14.07	9.29
	D3,D6	30	1.78	4.85	3.07
E3,E6	30	6.30	18.49	12.19	
Yu y Winter  Tramo simple de viga T	A	6	3.40	6.73	3.33
	B	6	3.15	5.66	2.51
	C	6	3.02	5.69	2.67
	D	6	3.23	6.71	3.48
	E	6	1.30	2.92	1.62
	F	6	5.59	10.03	4.44
Washa y Fluck  Dos tramos continuos de viga rectangular	X1,X4	30	1.42	2.90	1.48
	Y1,Y4	30	2.26	4.60	2.34
	Z1,Z4	30	2.64	5.89	3.25
	X2,X5	30	1.45	3.23	1.78
	Y2,Y5	30	2.36	4.98	2.62
	Z2,Z5	30	2.87	6.78	3.91
	X3,X6	30	1.57	3.78	2.21
	Y3,Y6	30	2.54	5.99	3.45
	Z3,Z6	30	3.05	7.98	4.93

**Tabla E.6 – Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las vigas simplemente apoyadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Método ACI 318		Método NTE		Método Fikry		Método Grossman		Método B Yu-Winter		Método Bischoff	
		$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$	$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$	$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$	$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$	$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$	$\Delta_j$	$\frac{\Delta_j}{\Delta_{im}}$
		cm		cm		cm		cm		cm		cm	
Washa y Fluck	A1,A4	1.53	1.13	1.60	1.19	1.57	1.16	1.88	1.39	1.47	1.09	1.49	1.10
	B1,B4	2.60	1.11	2.84	1.21	2.64	1.13	2.94	1.26	2.60	1.11	2.57	1.10
	C1,C4	4.39	1.09	4.65	1.16	4.45	1.11	5.26	1.31	4.29	1.07	4.30	1.07
	D1,D4	1.57	1.32	1.68	1.41	1.60	1.34	1.83	1.54	1.54	1.29	1.54	1.29
Tramo simple de viga rectangular	E1,E4	5.36	0.90	5.93	1.00	5.43	0.91	5.95	1.00	5.42	0.91	5.31	0.89
	A2,A5	1.57	1.00	1.65	1.05	1.62	1.03	1.89	1.20	1.52	0.97	1.54	0.98
	B2,B5	2.62	1.05	2.87	1.15	2.68	1.08	2.94	1.18	2.63	1.06	2.59	1.04
	C2,C5	4.46	1.03	4.74	1.09	4.54	1.05	5.26	1.21	4.38	1.01	4.37	1.01
	D2,D5	1.59	1.12	1.71	1.20	1.63	1.15	1.83	1.29	1.57	1.11	1.56	1.10
	E2,E5	5.40	0.97	5.98	1.07	5.49	0.98	5.95	1.06	5.47	0.98	5.35	0.96
	A3,A6	1.63	0.96	1.71	1.01	1.66	0.98	1.90	1.12	1.58	0.93	1.59	0.94
	B3,B6	2.65	1.00	2.91	1.10	2.71	1.03	2.94	1.11	2.67	1.01	2.62	0.99
	C3,C6	4.56	0.95	4.85	1.01	4.62	0.97	5.29	1.11	4.49	0.94	4.47	0.94
	D3,D6	1.62	0.91	1.74	0.98	1.66	0.93	1.83	1.03	1.60	0.90	1.59	0.89
E3,E6	5.44	0.86	6.05	0.96	5.55	0.88	5.95	0.94	5.54	0.88	5.41	0.86	
Yu y Winter	A	3.05	0.90	3.21	0.94	2.91	0.86	3.43	1.01	3.02	0.89	3.02	0.89
	B	3.00	0.95	3.18	1.01	2.84	0.90	3.36	1.07	2.98	0.95	2.98	0.95
	C	3.03	1.00	3.17	1.05	2.89	0.96	3.49	1.16	2.99	0.99	3.00	0.99
Tramo simple de viga T	D	3.34	1.03	3.36	1.04	3.42	1.06	3.20	0.99	3.25	1.01	3.30	1.02
	E	1.44	1.11	1.58	1.22	1.33	1.02	1.49	1.15	1.47	1.13	1.45	1.12
	F	5.45	0.97	5.60	1.00	5.72	1.02	5.71	1.02	5.33	0.95	5.39	0.96
	Z3,Z6	3.13	1.03	3.66	1.20	3.13	1.03	3.82	1.25	3.15	1.03	3.12	1.02
Promedio		1.02		1.09		1.03		1.15		1.00		1.00	
Desviación		± 10%		± 11%		± 11%		± 15%		± 10%		± 10%	
Rango		0.86 – 1.32		0.94 – 1.41		0.86 – 1.34		0.94 – 1.54		0.88 – 1.29		0.86 – 1.29	

$\Delta_{im}$  : Deflexión inmediata medida

$\Delta_j$  : Deflexión inmediata calculada

**Tabla E.7 – Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las vigas continuas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Método ACI 318		Método NTE		Método Fikry		Método Grossman		Método B Yu-Winter		Método Bischoff	
		$\Delta_i$ <i>cm</i>	$\frac{\Delta_i}{\Delta_{im}}$										
Washa y Fluck	X1,X4	1.51	1.06	1.74	1.23	1.52	1.07	1.85	1.30	1.51	1.06	1.50	1.06
	Y1,Y4	2.45	1.08	2.78	1.23	2.44	1.08	3.14	1.39	2.39	1.06	2.42	1.07
Dos tramos continuos de viga rectangular	Z1,Z4	3.12	1.18	3.63	1.38	3.10	1.17	3.82	1.45	3.13	1.19	3.10	1.17
	X2,X5	1.52	1.05	1.75	1.21	1.53	1.06	1.85	1.28	1.52	1.05	1.51	1.04
	Y2,Y5	2.46	1.04	2.81	1.19	2.45	1.04	3.13	1.33	2.41	1.02	2.43	1.03
	Z2,Z5	3.12	1.09	3.65	1.27	3.11	1.08	3.82	1.33	3.14	1.09	3.11	1.08
	X3,X6	1.52	0.97	1.76	1.12	1.54	0.98	1.85	1.18	1.53	0.97	1.51	0.96
	Y3,Y6	2.47	0.97	2.84	1.12	2.47	0.97	3.14	1.24	2.43	0.96	2.45	0.96
	Z3,Z6	3.13	1.03	3.66	1.20	3.13	1.03	3.82	1.25	3.15	1.03	3.12	1.02
Promedio		1.05		1.22		1.05		1.31		1.05		1.04	
Desviación		± 6%		± 8%		± 6%		± 8%		± 7%		± 6%	
Rango		0.97 – 1.18		1.12 – 1.38		0.97 – 1.17		1.18 – 1.45		0.96 – 1.19		0.96 – 1.17	

$\Delta_{im}$  : Deflexión inmediata medida

$\Delta_i$  : Deflexión inmediata calculada

**Tabla E.8 – Deflexión total calculada y comparación con datos de prueba para las vigas simplemente apoyadas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Método ACI 318		Método NTE		Método D Yu-Winter		Método ACI 435	
		$\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_t$	$\frac{\Delta_t}{\Delta_{tm}}$
Washa y Fluck	A1,A4	3.01	1.28	3.14	1.33	2.89	1.22	2.77	1.17
	B1,B4	5.07	0.99	5.54	1.08	5.14	1.01	4.68	0.92
	C1,C4	8.57	1.07	9.08	1.14	8.41	1.05	7.90	0.99
	D1,D4	3.07	1.11	3.28	1.18	3.04	1.10	2.83	1.02
	E1,E4	10.58	0.85	11.70	0.94	10.74	0.87	9.74	0.79
Tramo simple de viga rectangular	A2,A5	3.52	1.09	3.70	1.15	3.56	1.10	3.70	1.15
	B2,B5	5.85	0.90	6.40	0.98	6.19	0.95	6.08	0.94
	C2,C5	9.96	0.99	10.58	1.05	10.24	1.02	10.38	1.03
	D2,D5	3.55	1.08	3.82	1.16	3.69	1.12	3.70	1.12
	E2,E5	12.15	0.94	13.45	1.04	12.92	1.00	12.57	0.98
	A3,A6	4.48	1.00	4.70	1.05	4.65	1.04	4.90	1.10
	B3,B6	7.28	0.84	7.99	0.92	7.91	0.92	7.88	0.91
	C3,C6	12.52	0.89	13.32	0.95	13.19	0.94	13.56	0.96
	D3,D6	4.45	0.92	4.78	0.99	4.72	0.97	4.83	1.00
	E3,E6	14.94	0.81	16.61	0.90	16.45	0.89	16.10	0.87
Yu y Winter	A	6.70	1.00	7.05	1.05	6.97	1.04	7.27	1.08
	B	5.87	1.04	6.22	1.10	6.19	1.09	6.32	1.12
	C	5.44	0.96	5.69	1.00	5.37	0.94	5.60	0.98
Tramo simple de viga T	D	7.34	1.09	7.38	1.10	7.29	1.09	8.01	1.19
	E	3.16	1.08	3.47	1.19	3.43	1.17	3.45	1.18
	F	11.98	1.19	12.30	1.23	12.15	1.21	12.88	1.28
Promedio		1.00		1.07		1.03		1.04	
Desviación		± 12%		± 11%		± 10%		± 12%	
Rango		0.81 – 1.28		0.90 – 1.33		0.87 – 1.22		0.87 – 1.28	

$\Delta_t$  : Deflexión total calculada

$\Delta_{tm}$  : Deflexión total medida

**Tabla E.9 – Deflexión total calculada y comparación con datos de prueba para las vigas continuas**

Referencia y descripción de la viga	Designación de la viga	Método ACI 318		Método NTE		Método D Yu-Winter		Método ACI 435	
		$\Delta_f$	$\frac{\Delta_f}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_f$	$\frac{\Delta_f}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_f$	$\frac{\Delta_f}{\Delta_{tm}}$	$\Delta_f$	$\frac{\Delta_f}{\Delta_{tm}}$
Washa y Fluck	X1,X4	2.80	0.97	3.28	1.13	3.00	1.03	2.61	0.90
	Y1,Y4	4.37	0.95	5.10	1.11	4.62	1.00	4.00	0.87
	Z1,Z4	5.49	0.93	6.61	1.12	5.75	0.98	5.06	0.88
Dos tramos continuos de viga rectangular	X2,X5	2.97	0.92	3.55	1.10	3.30	1.02	3.00	0.93
	Y2,Y5	4.59	0.92	5.51	1.11	5.11	1.03	4.68	0.94
	Z2,Z5	5.71	0.84	7.07	1.04	6.35	0.94	5.55	0.88
	X3,X6	3.15	0.83	3.93	1.04	3.78	1.00	3.48	0.92
	Y3,Y6	4.86	0.81	6.06	1.01	5.87	0.98	5.50	0.92
	Z3,Z6	6.00	0.75	7.65	0.96	7.32	0.92	6.60	0.87
Promedio		0.88		1.07		1.00		0.90	
Desviación		± 7%		± 6%		± 4%		± 3%	
Rango		0.81 – 0.97		0.96 – 1.13		0.92 – 1.03		0.87 – 0.94	

 $\Delta_f$  : Deflexión total calculada

 $\Delta_{tm}$  : Deflexión total medida

**Tabla E.10 – Detalles de las losas analizadas**

Referencia y descripción de la losa	Designación de la losa	Detalles de la sección									
		$b$	$b_w$	$h$	$h_f$	$A_s$	$\rho$	$A'_s$	$\rho'$	$d$	$d'$
		cm	cm	cm	cm	cm <sup>2</sup>	%	cm <sup>2</sup>	%	cm	cm
Gilbert	S1	85.00	85.00	11.00	—	1.41	0.18	0	0	9.20	0
	S2	85.00	85.00	11.00	—	2.27	0.29	0	0	9.10	0
	S3	85.00	85.00	11.00	—	3.54	0.46	0	0	9.00	0
	S8	85.00	85.00	11.00	—	3.39	0.45	0	0	8.90	0
Tramo simple de losa maciza	SS2	85.00	85.00	10.20	—	2.27	0.33	0	0	8.17	0
	SS3	85.00	85.00	10.66	—	3.54	0.49	0	0	8.59	0
	SS4	85.00	85.00	10.62	—	3.39	0.48	0	0	8.32	0
	Z1	85.00	85.00	10.00	—	1.41	0.20	0	0	8.20	0
	Z2	85.00	85.00	10.00	—	2.27	0.33	0	0	8.10	0
	Z3	85.00	85.00	10.00	—	3.54	0.52	0	0	8.00	0
	Z4	85.00	85.00	10.00	—	3.65	0.84	0	0	7.90	0

**Tabla E.11 – Detalles de las losas analizadas**

Referencia y descripción de la losa	Designación de la viga	$f'_c$	$f_y$	Tramo $L$	$M_a^*$	$M_{cr}^*$	$\frac{M_a}{M_{cr}}$	$E_c^*$	$f_r^*$
		$kg/cm^2$	$kg/cm^2$	$m$	$tn.m$	$tn.m$		$kg/cm^2$	$kg/cm^2$
Gilbert	S1	380	5100	3.50	0.725	0.604	1.2	268000	33.9
	S2	380	5100	3.50	0.733	0.611	1.2	268000	33.9
	S3	380	5100	3.50	0.743	0.619	1.2	268000	33.9
Tramo simple de losa maciza	S8	532	5100	3.50	0.903	0.753	1.2	307000	41.6
	SS2	388	5100	2.00	0.820	0.683	1.2	274700	44.2
	SS3	388	5100	2.00	0.906	0.755	1.2	274700	44.2
	SS4	388	5100	2.00	0.894	0.745	1.2	274700	44.2
	Z1	392	5100	2.00	0.637	0.531	1.2	273900	36.0
	Z2	392	5100	2.00	0.643	0.536	1.2	273900	36.0
	Z3	392	5100	2.00	0.651	0.543	1.2	273900	36.0
	Z4	494	5100	2.00	0.741	0.618	1.2	305000	40.4

\* Obtenido experimentalmente

**Tabla E.12 – Momentos de inercia para las losas analizadas**

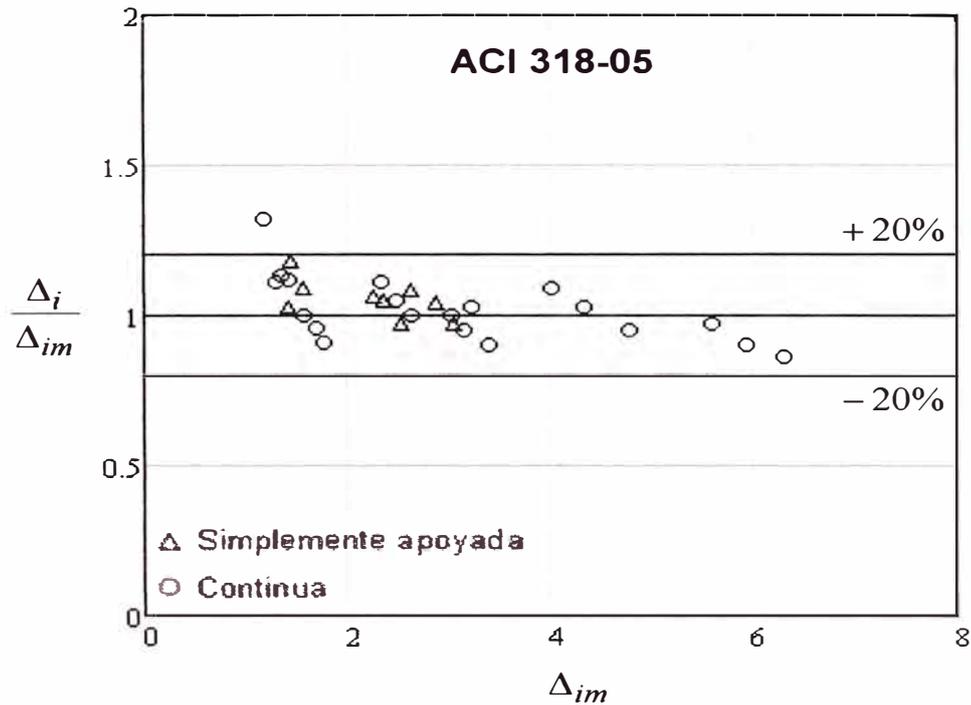
Referencia y descripción de la losa	Designación de la viga	$I_e$	$I_e$	$I_e$	$I_e$	$I_e$	$I_e$
		ACI $cm^4$	NTE $cm^4$	Fikry $cm^4$	Grossman $cm^4$	Yu-Winter $cm^4$	Bischoff $cm^4$
Gilbert	S1	5758	718	7850	6547	970	2003
	S2	5905	1067	7916	6547	1420	2777
	S3	6096	1520	7992	6547	1989	3641
Tramo simple de losa maciza	S8	5994	1276	7949	6547	1695	3195
	SS2	4699	829	6306	5220	1029	2170
	SS3	5533	1346	7267	5959	1650	3247
	SS4	5420	1211	7164	5892	1490	2993
	Z1	4332	552	5901	4919	736	1536
	Z2	4443	816	5948	4919	1071	2117
	Z3	4586	1156	6007	4919	1493	2760
	Z4	4544	1055	5989	4919	1378	2580

**Tabla E.13 – Deflexión inmediata calculada y comparación con datos de prueba para las losas analizadas**

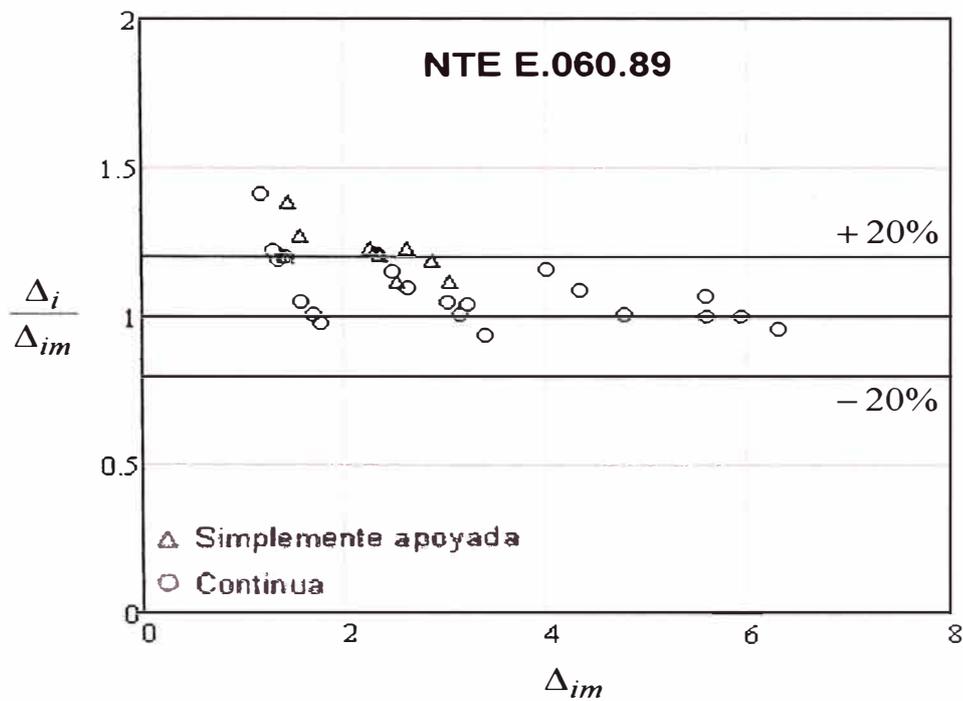
Referencia y descripción de la losa	Designación de la viga	$\Delta_{im}$ <i>cm</i>	Método ACI		Método NTE		Método Fikry		Método Grossman		Método B Yu- Winter		Método Bischoff	
			$\Delta_i$ <i>cm</i>	$\frac{\Delta_i}{\Delta_{im}}$										
Gilbert	S1	1.32	0.53	0.40	4.30	3.26	0.77	0.58	0.47	0.36	3.18	2.41	1.53	1.16
	S2	0.82	0.53	0.64	2.92	3.57	0.74	0.91	0.48	0.58	2.20	2.68	1.12	1.37
	S3	0.61	0.52	0.85	2.08	3.41	0.72	1.17	0.48	0.79	1.59	2.60	0.87	1.42
	S8	0.85	0.55	0.64	2.58	3.03	0.92	1.08	0.50	0.59	1.94	2.28	1.03	1.21
Tramo simple de losa maciza	SS2	0.51	0.22	0.43	1.24	2.43	1.11	2.18	0.20	0.39	1.00	1.96	0.47	0.93
	SS3	0.35	0.20	0.58	0.84	2.40	0.81	2.30	0.19	0.54	0.69	1.96	0.35	1.00
	SS4	0.38	0.21	0.54	0.92	2.43	0.88	2.31	0.19	0.50	0.75	1.97	0.37	0.98
	Z1	0.62	0.19	0.30	1.46	2.35	1.03	1.66	0.16	0.27	1.10	1.77	0.53	0.85
	Z2	0.32	0.18	0.57	1.00	3.11	0.79	2.47	0.17	0.52	0.76	2.37	0.38	1.20
	Z3	0.40	0.18	0.45	0.71	1.78	0.62	1.54	0.17	0.42	0.55	1.38	0.30	0.74
	Z4	0.35	0.18	0.53	0.79	2.27	0.72	2.07	0.17	0.49	0.61	1.74	0.33	0.93
	Promedio			0.54		2.73		1.66		0.50		2.10		1.07
Desviación			15%		57%		65%		14%		40%		22%	
Rango			0.30 – 0.85		1.78 – 3.57		0.58 – 2.47		0.27 – 0.79		1.38 – 2.68		0.74 – 1.42	

$\Delta_{im}$  : Deflexión inmediata medida

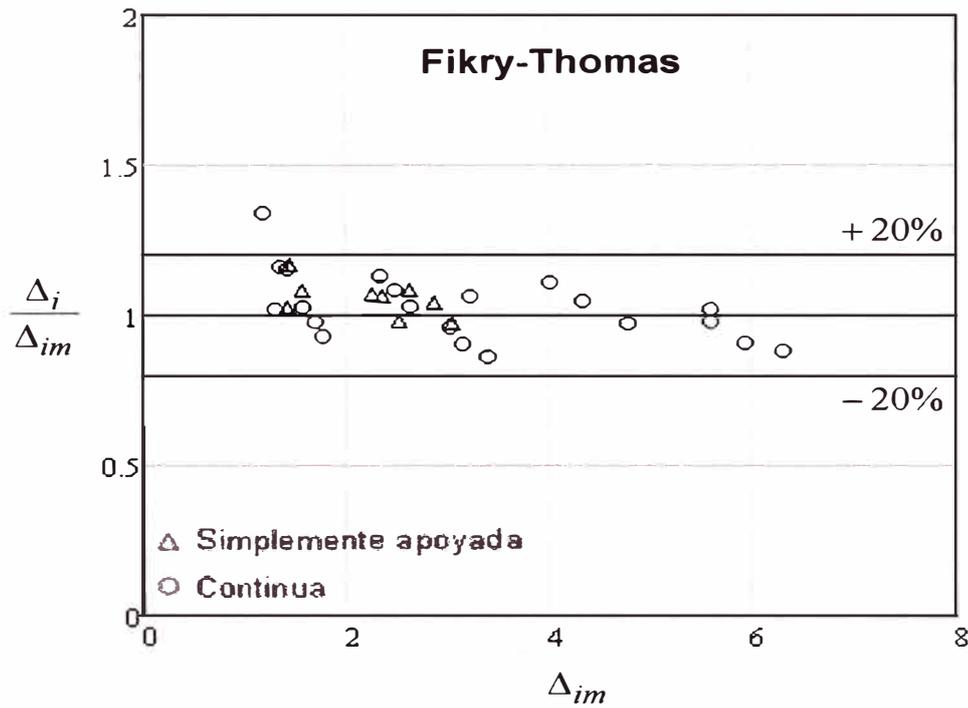
$\Delta_i$  : Deflexión inmediata calculada



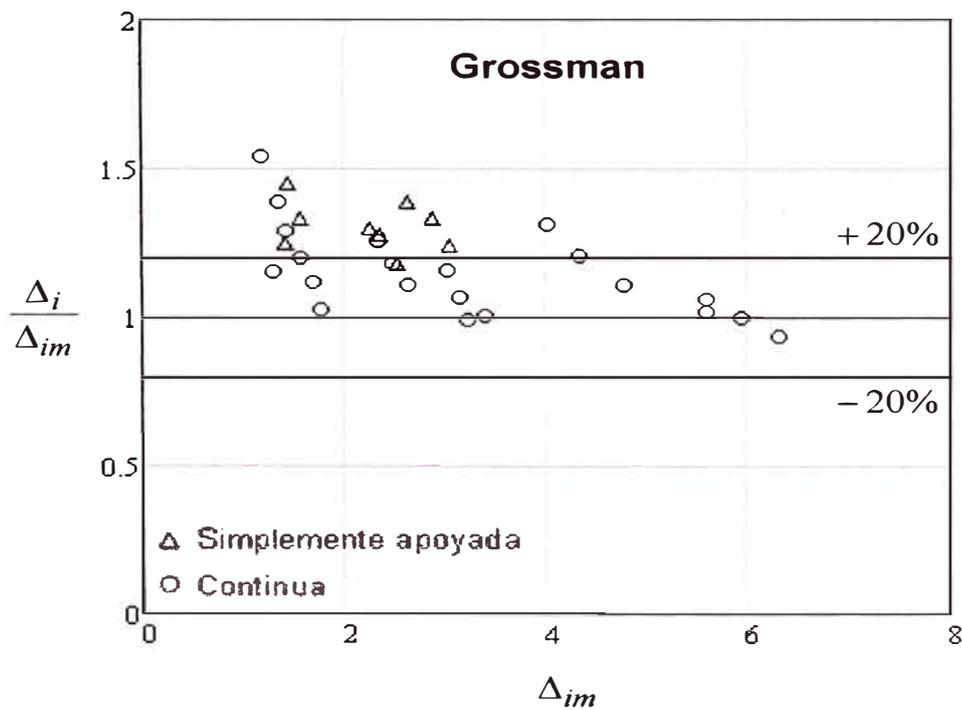
**Figura E.1** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método del reglamento ACI 318-05



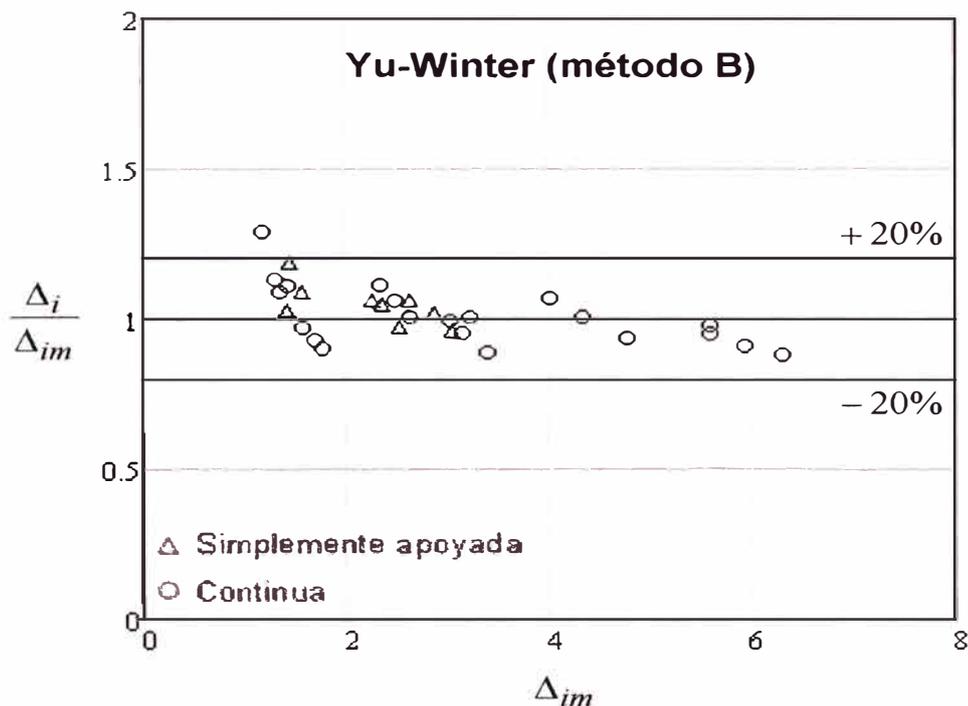
**Figura E.2** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89



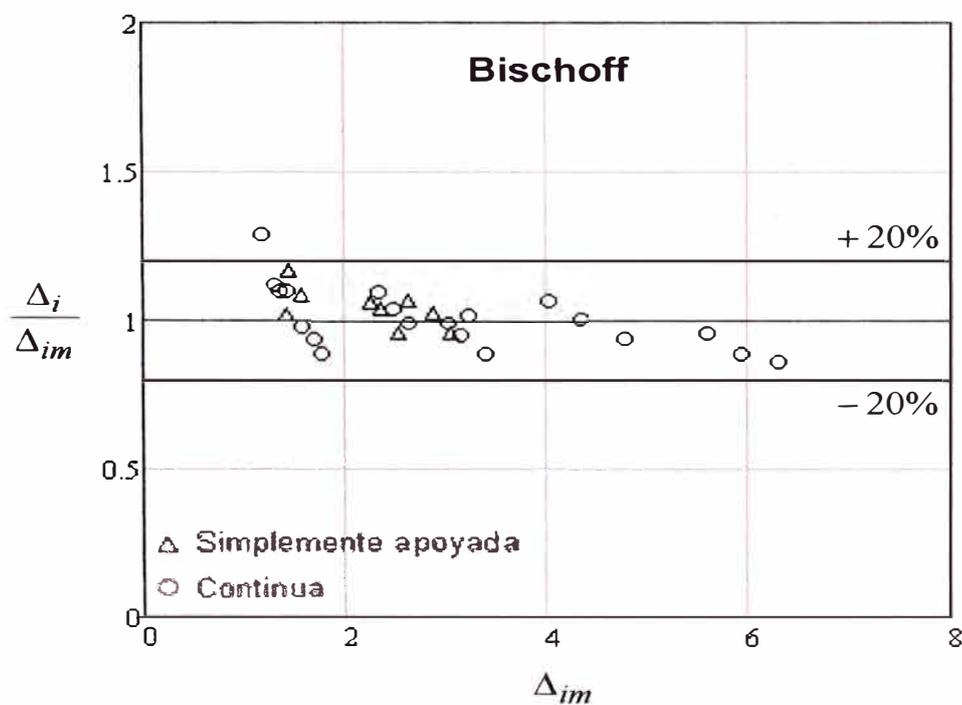
**Figura E.3** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Fikry y Thomas



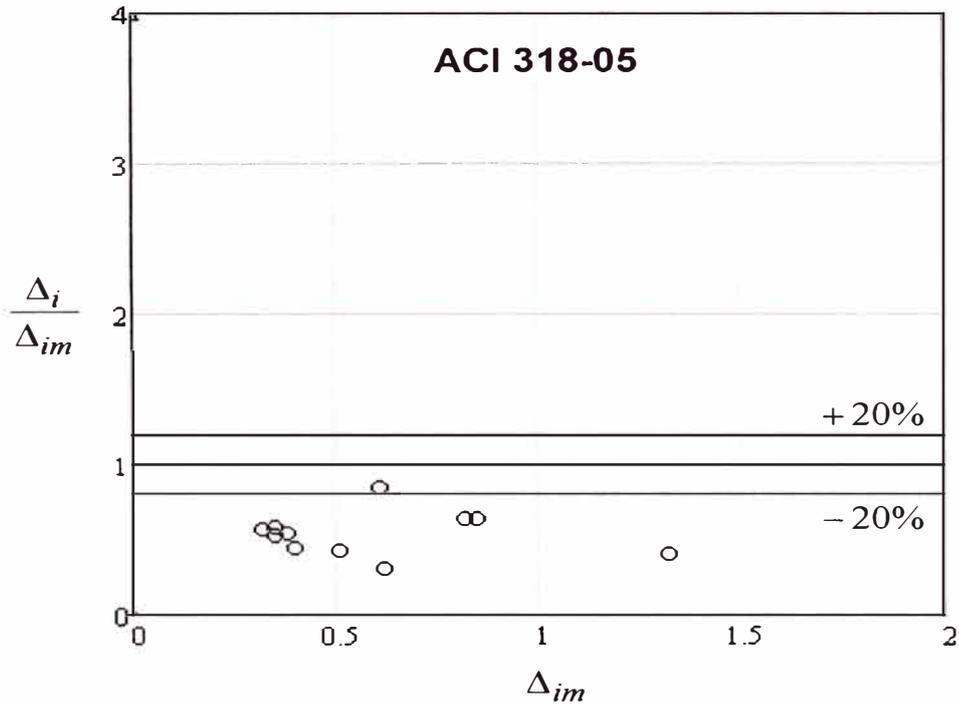
**Figura E.4** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Grossman



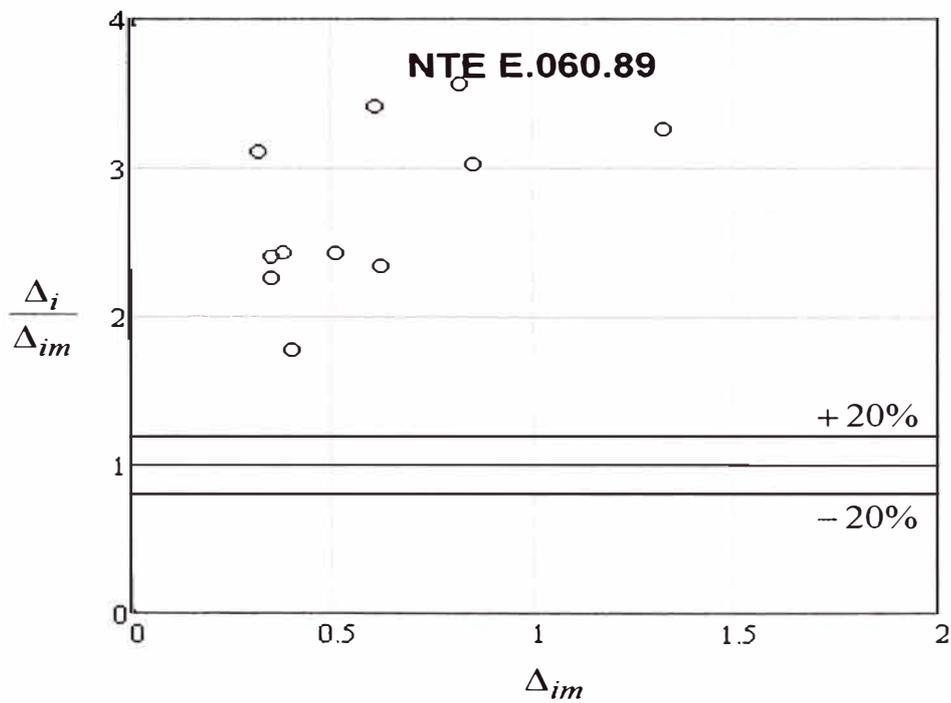
**Figura E.5** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método B de Yu y Winter



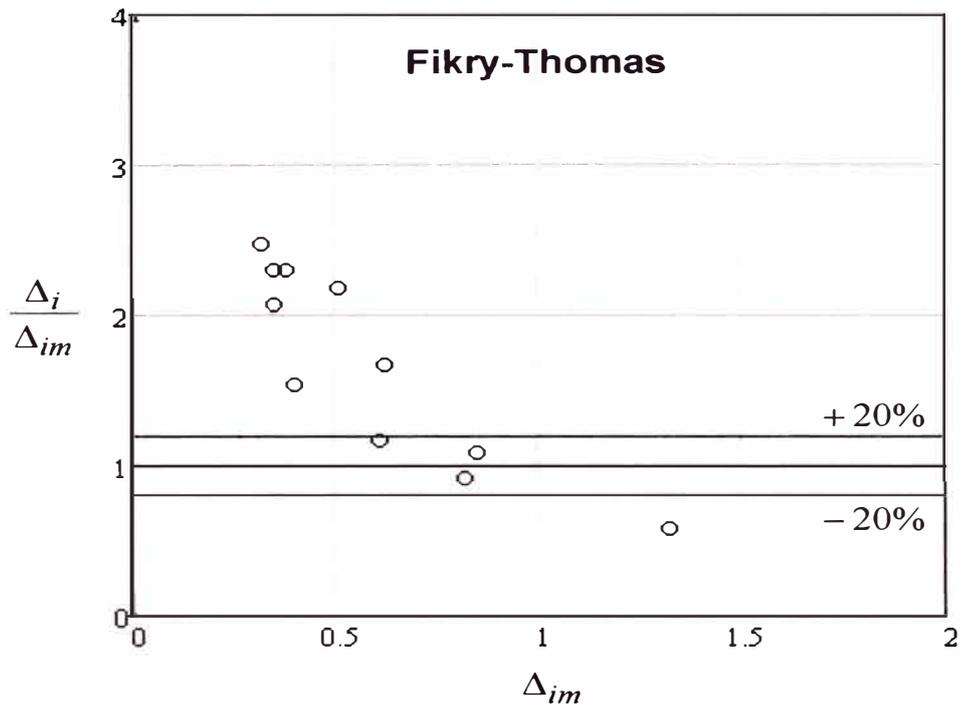
**Figura E.6** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en vigas, según el método de Bischoff



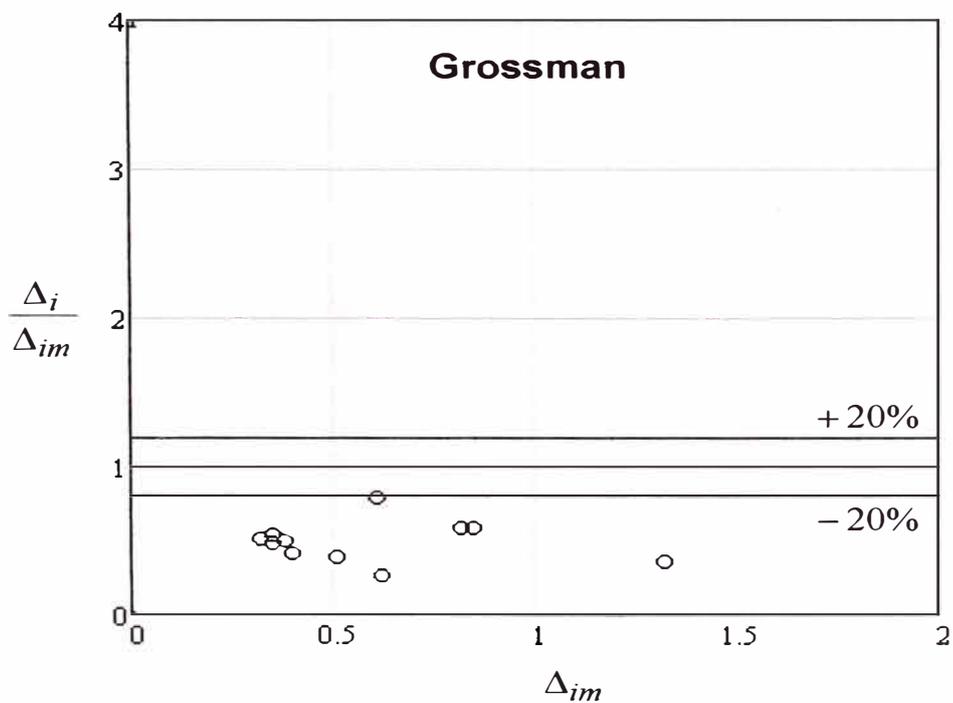
**Figura E.7** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_i$ , en losas, según el método del reglamento ACI 318-05



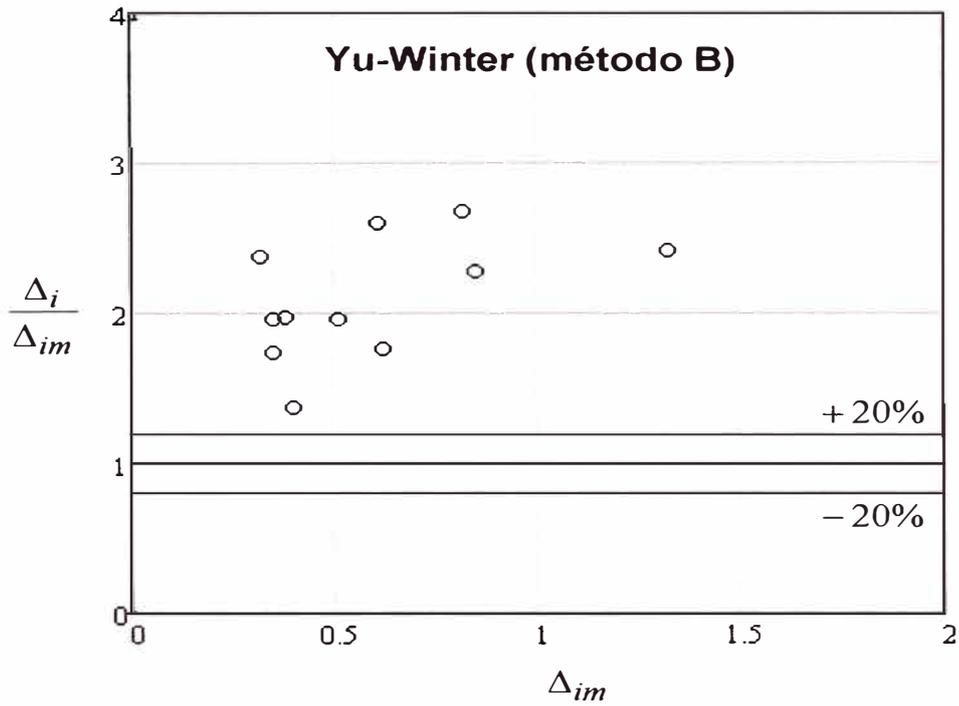
**Figura E.8** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_m$ , en losas, según el método del reglamento NTE E.060.89



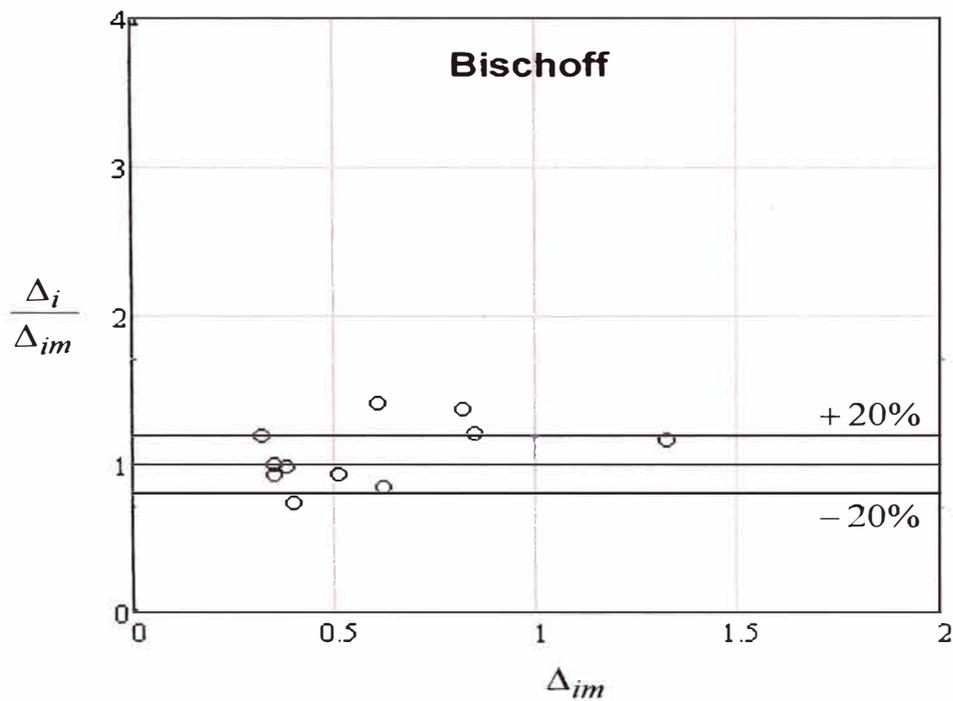
**Figura E.9** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_j$ , en losas, según el método de Fikry y Thomas



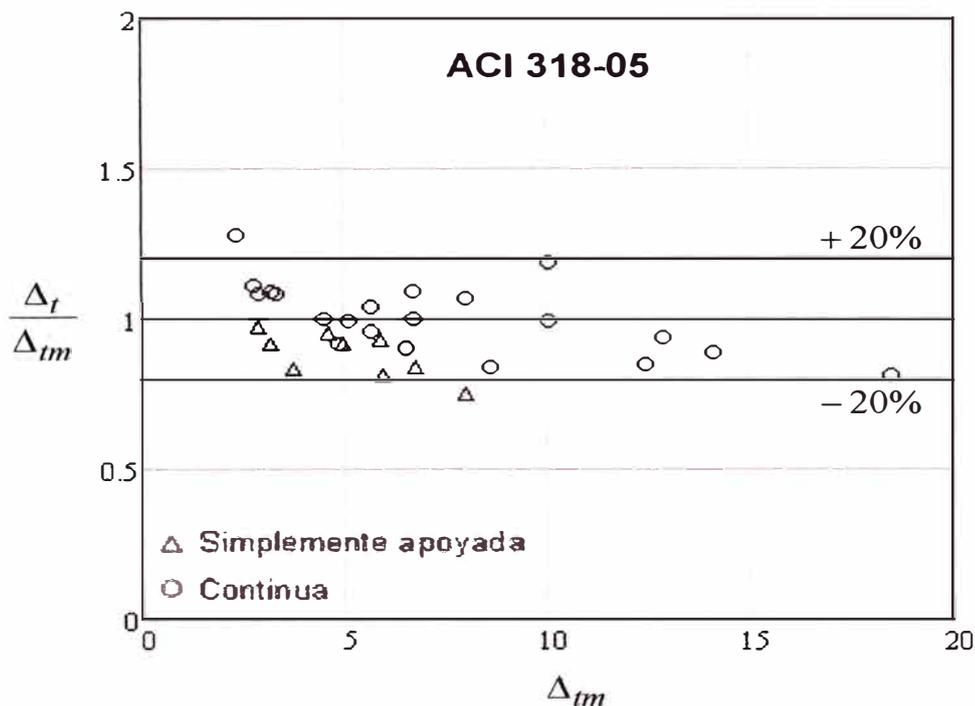
**Figura E.10** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_j$ , en losas, según el método de Grossman



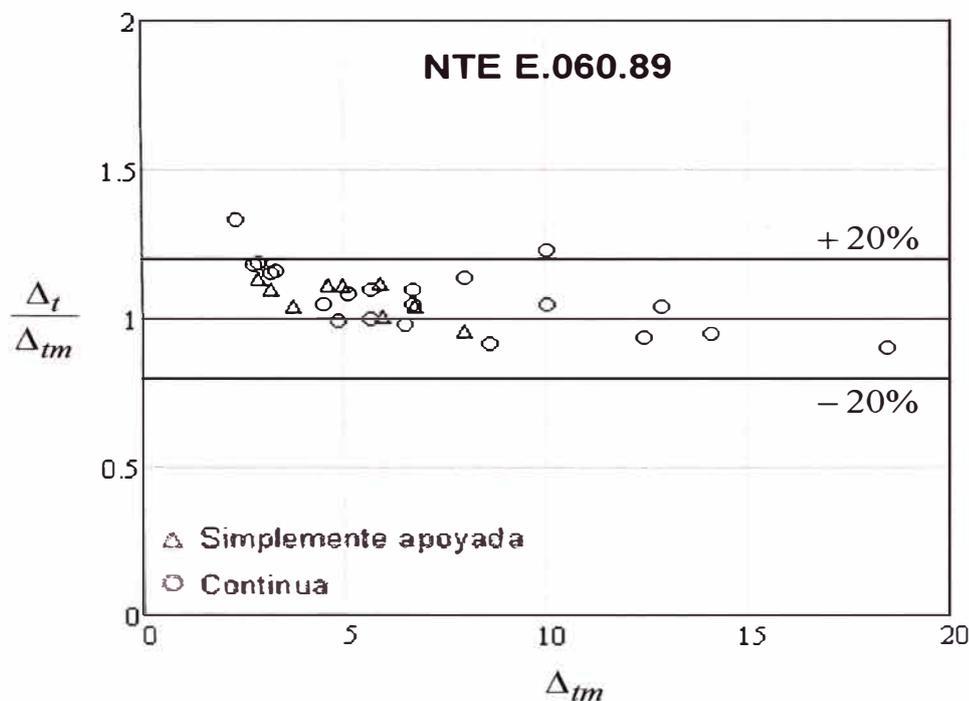
**Figura E.11** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_j$ , en losas, según el método B de Yu y Winter



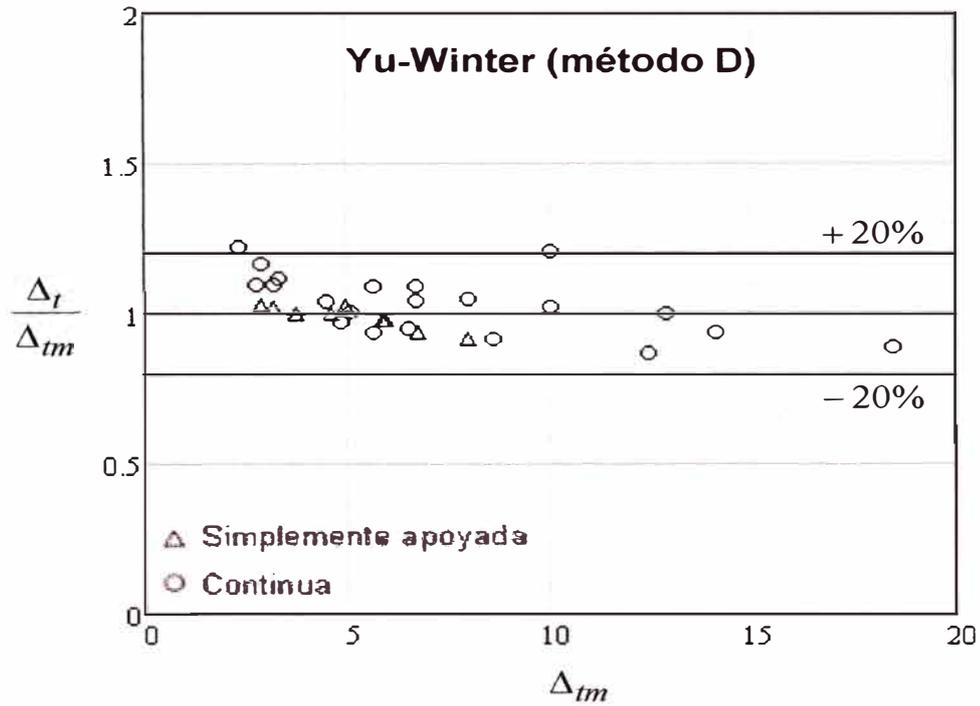
**Figura E.12** Deflexión inmediata medida  $\Delta_{im}$  versus deflexión inmediata calculada  $\Delta_j$ , en losas, según el método de Bischoff



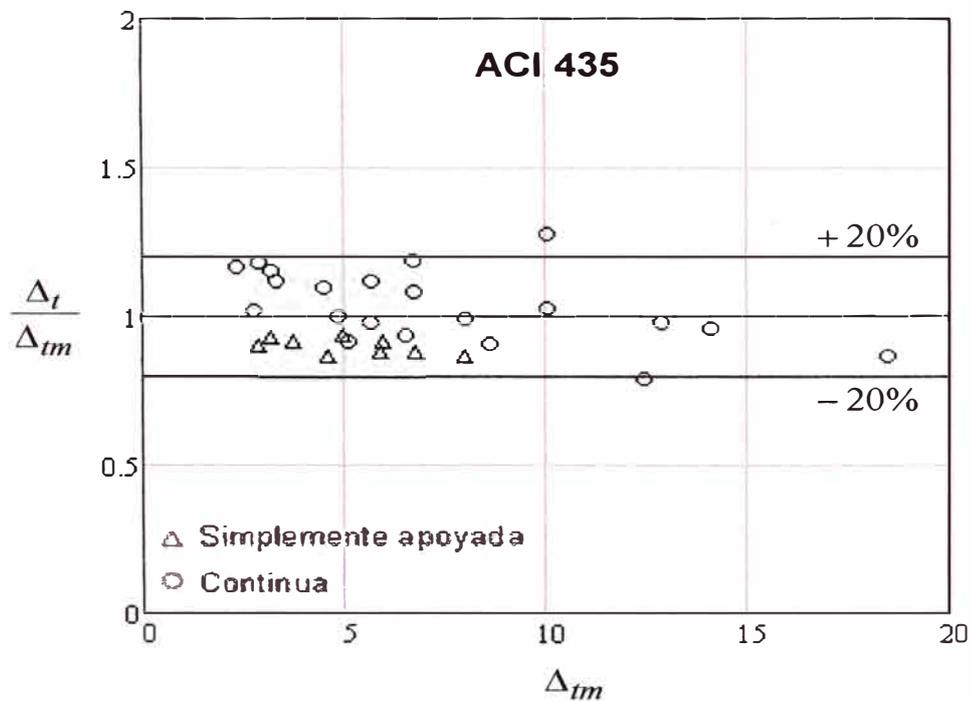
**Figura E.13** Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento ACI 318-05



**Figura E.14** Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del reglamento NTE E.060.89



**Figura E.15** Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método D de Yu y Winter



**Figura E.16** Deflexión total medida  $\Delta_{tm}$  versus deflexión total calculada  $\Delta_t$ , en vigas, según el método del ACI 435

# Bibliografía

---

1. Nawy, E. G., “Reinforced Concrete, A Fundamental Approach”, 5a. Edición, Prentice Hall Internacional Series, 2005.
2. Park, R. y Paulay, T., “Estructuras de Concreto Reforzado”, 1a. Edición, John Wiley & Sons, Inc, 1986.
3. Gonzales, C. O. y Robles, F. F., “Aspectos Fundamentales del Concreto Reforzado”, 4a. Edición, Limusa, 2005.
4. Nilson, H. A. y Darwin, D., “Diseño de Estructuras de Concreto”, McGraw-Hill Interamericana, S. A., 2001.
5. Unnikrishna, P. S., “Reinforced Concrete Design”, Tata McGraw-Hill, 2003
6. Cope, R. J. y Clark, L. A., “Concrete Slabs: Análisis y Design”, Taylor & Francis, 1990.
7. Fédération internationale du béton, “Structural Concrete: Textbook on Behaviour, Design and Performance : Updated Knowledge of the CEB/FIP Model Code 1990”, FIB, 1999.
8. Hoffman, E. S. y Gustafson, D. P. y Gouwens, A. J., “Structural Design Guide to the ACI Building Code”, Springer, 1998

# Referencias

---

1. Al-Zaid, R.Z., Al-Shaikh, A.H. y Abu-Hussein, M., "Effect of Loading Type on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams," ACI Structural Journal, V.88, No.2, Marzo-Abril 1991.
2. Al-Shaikh, A. H. and Al-Zaid, R. Z., "Effect of Reinforcement Ratio on the Effective Moment of Inertia of Reinforced Concrete Beams", ACI Structural Journal, V.88, No. 2, Marzo-Abril 1993.
3. Bentur, S., Diamond y N. S. Berke, "Steel Corrosion in Concrete", Editorial Taylor & Francis, 1997.
4. Broms, B. B., "Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Members", ACI Journals Proceeding, V.62, Octubre de 1965.
5. Bischoff, P. H. y Scanlon, A., "Effective Moment of Inertia for Calculating Deflections of Concrete Members Containing Steel Reinforcement and Fiber-Reinforced Polymer Reinforcement", ACI Structural Journal, V. 104, No.1, Enero-Febrero de 2007.
6. Comité ACI 435, "Allowable Deflections" (ACI 435.3R-68) (Reaprovado 1984), ACI Journal, Proceedings, V. 65, No. 6, Junio de 1968.
7. Comité ACI 435, "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members", ACI Journal, Proceedings, V. 63, No. 6, Junio de 1966.
8. Comité ACI 435, "Control of Deflection in Concrete Structures" (ACI 435-R95) (Reaprovado 2000) (Apéndice B adicionado 2003), ACI Manual of Concrete Practice, 2005.
9. Comité ACI 363, "State-of-the-Art Report on High-Strength Concrete" (ACI 363-R92) (Reaprovado 1997), ACI Manual of Concrete Practice, 2005.
10. Comité ACI 209, "Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures" (ACI 209R-R92) (Reaprovado en 1997), ACI Manual of Concrete Practice, 2005.
11. Comité ACI 224, "Control of Cracking in Concrete Structures" (ACI 224R-01), ACI Manual of Concrete Practice, 2005.
12. Comité BD-002 "Building Code of Australia" (AS 3600-2001), Standards Australia International, 2001.
13. Comité ACI 318, "Requisitos de Reglamento para Concreto Estructural", American Concrete Institute, Farmington Hills, 2005.
14. Norma Técnica E.060, Concreto Armado, ININVI 1989.
15. Fikry, A. M. y Thomas, C., "Development of a Model for the Effective Moment of Inertia of One-Way Reinforced Concrete Elements", ACI Structural Journal, V. 95, No. 4, Julio-Agosto 1998.

16. Frosch, R. J., "Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete", *ACI Structural Journal*, V. 96, No. 3, Mayo-Junio 1999, pp.437-442.
17. Ghali, A., "Deflection of Reinforced Concrete Members: A Critical Review", *ACI Structural Journal*, V. 90, No.4, Julio-Agosto de 1993.
18. Gilbert, R. I. y Smith, S. T., "Strain Localization and its Impact on the Ductility of Reinforced Concrete Slabs Containing Welded Wire Reinforcement", *Advances in Structural Engineering*, V. 9, No. 1, 2006.
19. Gilbert, R. I., "Tension Stiffening in Lightly Reinforced Concrete Slabs", *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Junio de 2007.
20. Grossman, J. S., "Simplified Computations for Effective Moment of Inertia  $I_e$  and Minimum Thickness to Avoid Deflection Computations", *ACI Journal, Proceedings*, V. 78, No. 6, Noviembre-Diciembre 1981.
21. Makhlof, H. M. y Malhas, F. A., "The Effect of Thick Concrete Cover on the Maximum Flexural Crack Width Under Service Load", *ACI Structural Journal*, V. 93, No. 3, Mayo-Junio 1996.
22. Paulson, K. A., Nilson A. H., y Hover, K. C., "Long-Term Deflection of High-Strength Concrete Beam", *ACI Materials Journal*, V. 88, Marzo de 1991.
23. Sakka, Z. I. y Gilbert, R. I., "Effect of Reinforcement Ductility on the Strength and Failure Modes of One-Way Reinforced Concrete Slabs", *UNICIV Report No. R-450*, Octubre de 2008, The University of New South Wales, Sydney 2052 Australia.
24. Sherif, A. G. y Dilger, W. H., "Critical review of CSA A23-3-94 deflection prediction for normal and high strength concrete beam", *Canadian Journal of Civil Engineering*, Junio 1998.
25. Scanlon, A. y Hak Lee, Y., "Unified Span-to-Depth Ratio Equation for Nonprestressed Concrete Beams and Slabs", *ACI Structural Journal*, V. 103, No. 1, Enero-Febrero de 2006.
26. Taylor, P. J. y Heiman, J. L., "Long-term Deflection of Reinforced Concrete Flat Slabs and Plates", *ACI Journal Proceeding*, V. 74, Noviembre de 1977.
27. Yu, W. W. y Winter, G., "Instantaneous and Long-Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads", *ACI Journal, Proceedings*, V. 57, No. 1, Julio 1960.