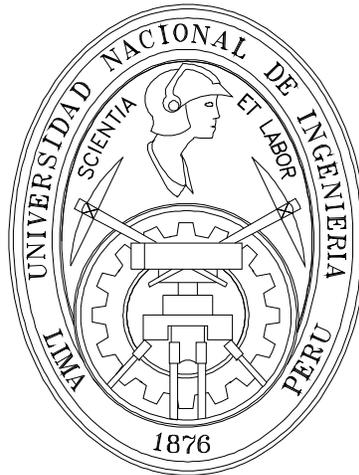


**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE FISICA**



**TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE LICENCIADO
EN FISICA**

TITULADA:

EFEECTO TUNEL EN SUPERCONDUCTORES

PRESENTADO POR:

LUDWIN MISAELE LEON HILARIO

LIMA-PERÚ

2006

INDICE

| | |
|---|----|
| 1. Superconductividad | 3 |
| 1.1 Fenomenología..... | 3 |
| 2. Teorias de Superconductividad | 4 |
| 2.1 Modelo de London..... | 4 |
| 2.2 Modelo de Ginzburg-Landau..... | 6 |
| 2.3 Teoría Microscópica..... | 9 |
| 2.3.1 Pares de Electrones..... | 9 |
| 2.3.2 Teoría BCS..... | 9 |
| 2.3.3 Estados Excitados, Transformación canónica de Bogoliubov..... | 13 |
| 2.3.4 Temperaturas Finitas..... | 18 |
| 2.3.5 Determinación de T_c | 18 |
| 2.3.6 Dependencia en Temperatura del Gap..... | 19 |
| 2.3.7 Densidad de Estados..... | 20 |
| 3.Efecto Tunel | 22 |
| 3.1 Solución Numérica de la Ecuación de Schrodinger..... | 24 |
| 4. Efecto Túnel en Superconductores | 29 |
| 4.1 Introducción..... | 29 |
| 4.2 Efecto Túnel entre Superconductores..... | 31 |
| 5. Conclusiones | 42 |
| 6. Apéndice A | 43 |
| 7. Apéndice B | 45 |
| 8. Apéndice C | 46 |
| 9. Apéndice D | 47 |
| 10. Referencias | 48 |

1. SUPERCONDUCTIVIDAD

El fenómeno de superconductividad fue descubierta por K.Onnes en 1911, cuando redujo la temperatura de mercurio sólido debajo de 4.3 K y encontró que su resistencia eléctrica desaparecía. Este hecho es uno de los grandes descubrimientos en la física del siglo veinte, no solo por nuestro cambio en la concepción de las propiedades eléctricas de los materiales sino tambien porque un fenómeno mecánico cuántico fundamental es observado a escala macroscópica y solo puede ser explicado dentro del marco de la mecánica cuántica.

En 1957 la teoría BCS fue creada y permanece válida hasta ahora como una descripción de la superconductividad para superconductores tipo I (metales y aleaciones metálicas). En estos tiempos nuevos materiales han mostrado propiedades superconductoras incluyendo materiales orgánicos, donde la teoría BCS es insuficiente para dar una explicación correcta . Además, se han descubierto materiales cerámicos superconductores a 110 K.

1.1. FENOMENOLOGÍA

Las características que poseen los materiales superconductores son los siguientes:

Resistividad Cero:

Una de las características mas sorprendentes de los superconductores es la casi no existencia de resistividad debajo de cierta temperatura crítica T_c . De hecho corrientes en circuitos superconductores han permanecido por meses o años desde que se puso por primera vez la corriente[1].

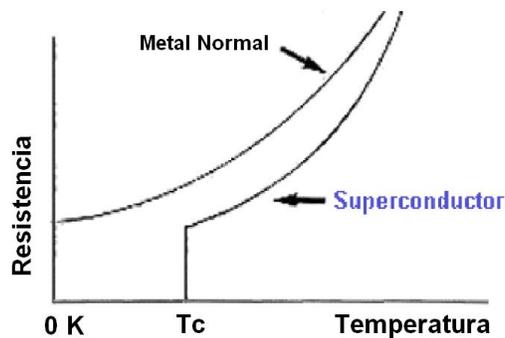


Figura 1: Resistencia versus temperatura

Efecto Meissner:

Esto fue descubierto en 1933 por Meissner y Ochsenfel en la cual un superconductor actuaba como un perfecto diamagneto, que expelía el flujo magnético aplicado sobre él. De hecho se puede calcular la profundidad a la cual el flujo magnético puede penetrar dentro del material. Para metales simples que están sometidos a campos magnéticos, menores que el campo magnético crítico H_c (campo magnético que destruyen la superconductividad), esta profundidad de penetración es del orden de 500 Å.

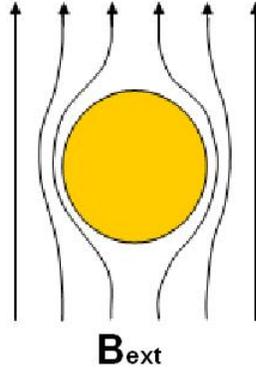


Figura 2: Distorsión de las líneas de campo magnético

Efecto Isotopico:

La temperatura crítica de un superconductor es propiedad de la masa de los iones de la red. Según la teoría BCS la temperatura crítica de un superconductor es inversamente proporcional a la masa de los iones positivos de la red.

2. TEORIAS DE SUPERCONDUCTIVIDAD

2.1. MODELO DE LONDON

Las propiedades electromagnéticas que presentan los superconductores, fueron muy bien descritas por primera vez, por los hermanos London en 1935, con las dos ecuaciones que gobiernan el campo eléctrico y magnético; y complementan las ecuaciones de Maxwell:

$$E = \frac{\partial}{\partial t}(\Lambda J_s) \quad (1)$$

y

$$h = -c\nabla \times (\Lambda J_s) \quad (2)$$

donde

$$\Lambda = \frac{4\pi\lambda_L^2}{c^2} = \frac{m}{n_s e^2}$$

es un parametro fenomenológico, y n_s es la densidad de electrones superconductores.

La primera de esas dos ecuaciones describe la conductividad perfecta, la segunda ecuación, combinando con la ecuación de Maxwell

$$\nabla \times h = \frac{4\pi J}{c}$$

lleva a la ecuación

$$\nabla^2 h = \frac{4\pi J}{\lambda^2} \quad (3)$$

Esto implica, que un campo magnético puede penetrar dentro del material superconductor solo una distancia λ_L que decae exponencialmente, es decir el efecto Meissner. Así, el parametro λ_L , es definido operacionalmente como una longitud de penetración.

2.2. MODELO DE GINZBURG-LANDAU

Esta es una teoría fenomenológica, en la cual se plantea que el estado superconductor de una material esta caracterizado por una parámetro de orden complejo $\psi(r)$ (en magnetismo el parametro de orden que caracteriza a un ferromagneto es la magnetización M).

El postulado básico de esta teoría es que si ψ varía muy poco en el espacio, la densidad de energía libre f de un superconductor en un campo magnético h , puede ser expandido de la siguiente forma

$$f_s = f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}A)\psi|^2 + \frac{h^2}{8\pi}, \quad \text{con} \quad h = \nabla \times A \quad (4)$$

donde f_n es la densidad de energía libre normal, α y β son parametros fenomenológicos; e^* , m^* son la carga y masa de los electrones superconductores respectivamente ($m^* = 2m, e^* = 2e$). Entonces la energía libre es

$$F_s = \int d^3r \left\{ f_n + \alpha|\psi|^2 + \frac{\beta}{2}|\psi|^4 + \frac{1}{2m^*}|(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}A)\psi|^2 + \frac{(\nabla \times A)^2}{8\pi} \right\} \quad (5)$$

Si variamos la energía libre, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta F_s = & \int d^3r \left\{ \delta\psi^* \left[\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{m^*}(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}A)^2\psi \right] + C.C \right\} \\ & + \int d^3r \delta A \cdot \left\{ \frac{1}{4\pi}(\nabla \times h) - \frac{e^*}{m^*c} \left[\psi^*(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}A)\psi + C.C \right] \right\} \end{aligned}$$

En el segundo término notar que $\frac{1}{4\pi}(\nabla \times h)$ es la densidad de corriente J/c de la ecuación de Maxwell. por ello al minimizar la energía libre, $\delta F_s = 0$, obtenemos las dos ecuaciones no lineales de Ginzburg-Landau

$$\alpha\psi + \beta|\psi|^2\psi + \frac{1}{m^*}(-i\hbar\nabla - \frac{e^*}{c}A)^2\psi = 0 \quad (6)$$

$$\frac{e^*\hbar}{im^*}(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*) - \frac{e^{*2}}{m^*c}\psi^*\psi A = J \quad (7)$$

Ahora si suponemos que

$$\psi(r) = |\psi(r)|e^{i\varphi(r)} \quad (8)$$

entonces la ecuación (7) se transforma en

$$J = \frac{2e}{m}|\psi|^2(\hbar\nabla\varphi - \frac{e}{c}A) \quad (9)$$

utilizando el gauge de London, $\nabla\varphi = 0$, obtenemos

$$J = -\frac{2e^2}{mc}|\psi|^2 A \quad (10)$$

la cual es el análogo calculado por London a partir de condiciones electromagnéticas (ver ecuación (3)), entonces obtenemos la denominada *longitud de penetración*

$$\lambda^2 = \frac{mc^2}{4\pi e^2 |\psi|^2} \quad (11)$$

siendo $|\psi|^2$ la densidad de electrones superconductores.

Otra longitud característica que se introduce en esta teoría es la denominada *longitud de coherencia*, la cual se deriva de la ecuación (6); para ello consideremos dicha ecuación cuando no hay campos magnéticos y en una dimensión

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0$$

y definiendo las variables reducidas

$$\begin{aligned} \xi^2 &= \frac{\hbar^2}{2m^*|\alpha|} \\ \psi &= \psi_0 f \end{aligned} \quad (12)$$

Donde ξ tiene unidades de longitud. Entonces la ecuación anterior se transforma en

$$-\xi^2 \frac{d^2 f}{dx^2} + \alpha\psi + \beta\psi^3 = 0$$

La unidad natural de longitud para la variación de ψ (o f) la llamamos longitud de coherencia ξ , la cual caracteriza el rango sobre la cual $\psi(r)$ puede variar sin incrementar excesivamente su energía, y según la teoría microscópica esta longitud vendría a ser la distancia máxima hasta la cual los pares de electrones están correlacionados para producir par de Cooper.

El cociente de estas dos longitudes características define el parámetro κ , denominado parámetro de Ginzburg Landau

$$\kappa = \frac{\lambda}{\xi} \quad (13)$$

para superconductores típicos $\lambda \approx 500\text{\AA}$ y $\xi \approx 3000\text{\AA}$ así que $\kappa \ll 1$. Entonces qué sucede si κ es mayor que uno, es decir, $\xi < \lambda$ contrario a los casos clásicos, a estos tipos de superconductores Abrikosov los denominó superconductores tipo II, él mostró que el exacto

punto de quiebre es en $\kappa = 1/\sqrt{2}$. Para materiales con $\kappa > 1/\sqrt{2}$ encontró que en lugar de que la superconductividad se destruya para una transición de primer orden, es decir cuando $H = H_c$, se producía un aumento continuo en la penetración del campo, comenzando en un campo crítico H_{c1} y llegando a un segundo campo crítico H_{c2} . El estado entre H_{c1} y H_{c2} se denomina estado mixto o Estado Vórtice, en este estado el flujo de campo magnético penetra no en regiones laminares sino en arreglos de tubos de flujo, llevando cada uno un quantum de flujo $\Phi_0 = hc/2e$. En cada celda del arreglo hay un vórtice de supercorriente concentrando el flujo hacia el centro, como en la Fig(3).

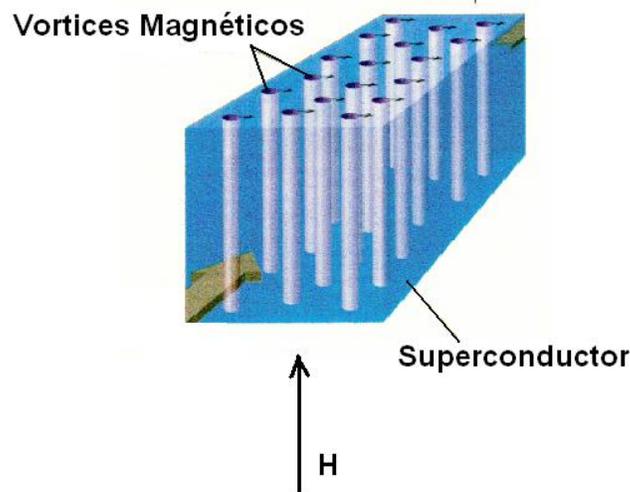


Figura 3: Vórtices Magnéticos

Por ello las ventajas de este modelo son:

A diferencia del modelo de London, este formalismo es capaz de tratar dos características que van más allá del alcance de la teoría de London, como son la variación espacial de la densidad de electrones superconductores, n (o $|\psi|^2$) y los efectos lineales en campos suficientemente fuertes al cambiar n .

Pero el mayor triunfo de esta teoría fue de dar cuenta del denominado estado intermedio o mixto de un superconductor, en la cual coexisten regiones normales y superconductoras en la presencia de un campo magnético cercano a H_c .

2.3. TEORIA MICROSCOPICA

2.3.1. Pares de Electrones

Los electrones en un sólido pueden interactuar vía la deformación de la red cristalina (fonones), de la teoría de interacción electrón-fonón se puede expresar dicha interacción de la siguiente manera [1]:

$$H_{el-el} = \sum_{q,k,k'} W_{kq} a_{k'}^\dagger a_{k'+q} a_{k-q}^\dagger a_k \quad (14)$$

a_k son los operadores de aniquilación de un electrón con momentum k .
y el elemento de matriz de interacción electrón-fonón, viene dado por:

$$W_{kq} = \frac{g_q^2 \hbar \omega_q}{(\epsilon_k - \epsilon_{k+q})^2 - \hbar^2 \omega_q^2} \quad (15)$$

donde ϵ_k es la energía de un electrón con momentum k y ω_q es la frecuencia del fonón. W_{kq} es en general positivo pero, para una región pequeña alrededor de la energía de Fermi con $|\epsilon_k - \epsilon_{k+q}| < \hbar \omega_q$, es negativo, es decir surgirá una interacción atractiva entre los electrones mediados por fonones.

2.3.2. Teoría BCS

Como acabamos de ver, el acople electrón-fonón produce una interacción efectiva que puede ser atractiva. La idea de formación de pares de electrones se vuelve posible debido a este mecanismo. La teoría de Bardeen, Cooper y Schrieffer (BCS) construye un estado fundamental en la cual todos los electrones forman pares ligados, tal estado fundamental planteado es de la forma

$$|\phi\rangle = \prod_k (u_k + v_k a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger) |0\rangle \quad (16)$$

con

$$u_k^2 + v_k^2 = 1$$

Esta condición asegura que el vector de onda este normalizado, y $|v_k|^2$ y $|u_k|^2$ son las probabilidades de ocupación y no ocupación respectivamente de los pares de electrones con vectores de onda k , y $-k$.

Ahora, para hallar los valores apropiados de los coeficientes u_k y v_k , planteamos el Hamiltoniano de interacción de pares

$$H = \sum_{k,\alpha} \epsilon_k a_{k,\alpha}^\dagger a_{k,\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{k,l} a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \quad \text{con } V_{k,l} = V_{l,k} \quad (17)$$

y debemos minimizar la energía del sistema, relativo al nivel de Fermi, $H' = H - E_F N$, donde E_F es la energía de Fermi y $N = a^\dagger a$, es el operador de número, así que hacemos

$$\delta \langle \phi | H' | \phi \rangle = 0 \quad (18)$$

El término de la energía cinética está dado por

$$T = \sum_{k,\alpha} \xi_k a_{k,\alpha}^\dagger a_{k,\alpha} \quad (19)$$

donde $\xi_k = \epsilon_k - E_F$ es la energía de una sola partícula relativa al nivel de Fermi. Entonces utilizando el vector de onda (16) y las reglas de conmutación de los operadores a_k^\dagger y a_k , obtenemos (ver apéndice A)

$$\langle \phi | T | \phi \rangle = 2 \sum_k v_k^2 \xi_k \quad (20)$$

y similarmente para el término de la energía potencial

$$V = \frac{1}{2} \sum_{k,l} V_{k,l} a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \quad (21)$$

obtenemos

$$\langle \phi | V | \phi \rangle = \sum_{k,l} V_{k,l} u_k v_k u_l v_l \quad (22)$$

Combinando los dos términos, obtenemos una forma simplificada de la energía del sistema

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = 2 \sum_k v_k^2 \xi_k + \sum_{k,l} V_{k,l} u_k v_k u_l v_l \quad (23)$$

Ahora minimizamos esto para encontrar la energía del sistema. Esta minimización se puede realizar más fácilmente, teniendo en cuenta el hecho de que $u_k^2 + v_k^2 = 1$, eligiendo

$$u_k = \sin \theta_k, \quad v_k = \cos \theta_k$$

Entonces la ecuación (23) se transforma en

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = 2 \sum_k \xi_k \cos^2 \theta_k + \frac{1}{4} \sum_{k,l} V_{k,l} \sin(2\theta_k) \sin(2\theta_l) \quad (24)$$

Minimizando

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta_{k'}} = -2\xi_{k'} \sin(2\theta_{k'}) + \sum_l V_{k',l} \cos(2\theta_k) \sin(2\theta_l)$$

o más simplemente

$$\tan(2\theta_k) = \sum_l \frac{V_{k,l} \sin(2\theta_l)}{2\xi_k} \quad (25)$$

Ahora definimos

$$\Delta_k \equiv - \sum_l V_{k,l} u_l v_l, \quad E_k \equiv \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \quad (26)$$

(Estas cantidades luego adquirirán significado físico como el gap de energía y la energía de excitación de las cuasipartículas, respectivamente). Entonces (25) se transforma en

$$\tan(2\theta_k) = -\frac{\Delta_k}{\xi_k} \quad (27)$$

Así que

$$2u_k v_k = \sin 2\theta_k = \frac{\Delta_k}{E_k} \quad (28)$$

y

$$v_k^2 - u_k^2 = \cos 2\theta_k = -\frac{\xi_k}{E_k} \quad (29)$$

Ahora reemplazando (28) en (26), llegamos a una ecuación autoconsistente para Δ_k

$$\Delta_k = -\frac{1}{2} \sum_l V_{k,l} \frac{\Delta_l}{(\xi_l^2 + \Delta_l^2)^{1/2}} \quad (30)$$

Para una interacción general esta ecuación tiene que ser resuelta numéricamente, la aproximación usual en la teoría BCS es que $V_{k,l}$ es propiamente constante en una capa estrecha de energía cerca a la superficie de Fermi, donde el grosor de la capa es ω_D (frecuencia de Debye), y no hay interacción fuera de esta capa. Así la aproximación de los elementos de matriz de la atracción electrón-electrón es adoptado como

$$V_{k,l} = \begin{cases} -V & ; \quad |\xi_k|, |\xi_l| < \hbar\omega_D \\ 0 & ; \quad |\xi_k|, |\xi_l| > \hbar\omega_D \end{cases} \quad (31)$$

Donde V es simplemente una constante, entonces vemos que Δ_k satisface también

$$\Delta_k = \begin{cases} \Delta & ; \quad |\xi_k| < \hbar\omega_D \\ 0 & ; \quad |\xi_k| > \hbar\omega_D \end{cases} \quad (32)$$

Entonces usando esto y reemplazando la suma por una integral, (30) se transforma en (ver apéndice C)

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} = \ln \left[\frac{\hbar\omega_D + \sqrt{(\hbar\omega_D)^2 + \Delta^2}}{\Delta} \right] \approx \ln \frac{2\hbar\omega_D}{\Delta} \quad (33)$$

Estamos asumiendo que $\hbar\omega_D \ll E_F$, así que la densidad de estados, $N(\xi_l)$ es reemplazado por su valor en el nivel de Fermi, $N(0)$. Entonces (33) se transforma en

$$\Delta = 2\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (34)$$

Habiendo encontrado Δ , podemos calcular simplemente los coeficientes u_k y v_k la cual especifican la función de onda BCS óptima. Las cuales están dadas de la siguiente forma

$$\begin{aligned} v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\xi_k}{(\xi_k^2 + \Delta^2)^{1/2}}\right] \\ u_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right) \end{aligned} \quad (35)$$

También notamos de (17) que

$$\langle a_k^\dagger a_k \rangle = v_k^2 \quad (36)$$

La cual representa el número de ocupación de los fermiones originales en el nuevo estado fundamental. De hecho, si $\Delta = 0$, entonces tenemos

$$v_k^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{|\xi_k|}\right) = \Theta[\epsilon(k) - E_F]$$

como esperamos para fermiones libres.

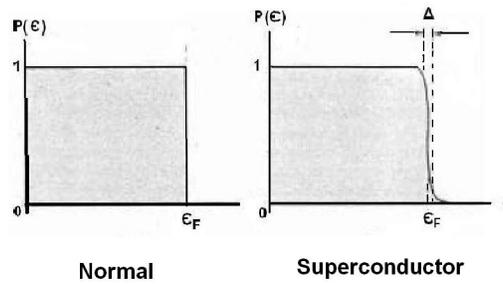


Figura 4: Probabilidad de ocupación electrónica

Para el estado superconductor con $\Delta \neq 0$, un gap se abre deformando la superficie de Fermi, tal que la función de distribución de momentum muestra una suave disminución alrededor de la energía de Fermi.

Entonces vemos que Δ es la energía característica que determina el rango de los valores k implicados en formar los pares de Cooper.

Con $|\phi\rangle$ determinado, ahora calculemos la energía del estado fundamental, para ello combinado las expresiones anteriores obtenemos(ver apéndice D)

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = 2 \sum_{k < k_F} \xi_k + \frac{\Delta^2}{V} - \frac{N(0)\Delta^2}{2} \quad (37)$$

El primer término es la energía cinética, el segundo término es la energía que surge del potencial de interacción y el tercer término es la diferencia de energía entre el estado fundamental ϕ y el estado normal ϕ_N , este, es diferente con relación a un gas de Fermi. Esta energía del estado condensado es más pequeña en la cantidad $\frac{N(0)\Delta^2}{2}$.

Entonces vemos que la creación de pares de Cooper en un gas de Fermi crea una condensación. Este estado condensado tiene mas baja energía que la energía de Fermi. Así, ahora hay un gap de energía creado por encima del estado de energía condensado, diferenciando el estado superconductor del estado normal.

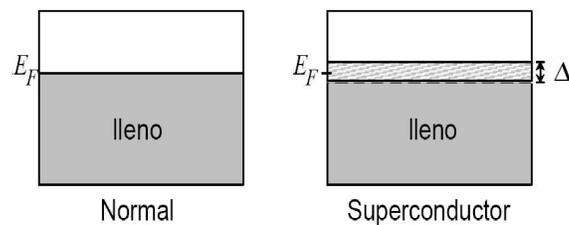


Figura 5: Bandas de energía en un metal y en superconductor

2.3.3. Estados Excitados, Transformación Canónica de Bogoliubov

El método variacional usado en el tratamiento original de BCS, el cual acabamos de ver, es un aproximación directa para calcular la energía de condensación del estado fundamental superconductor, relativo al estado normal, pero no es tan útil cuando tratamos con estados excitados, a $T > 0$, por ello ahora usaremos un método mas sofisticado, introducido por Bogoliubov.

Partamos del Hamiltoniano reducido o Hamiltoniano de interacción de pares

$$H = \sum_{k,\alpha} \epsilon_k a_{k,\alpha}^\dagger a_{k,\alpha} + \sum_{k,l} V_{k,l} a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \quad (38)$$

Para poder desacoplar el producto de operadores del término de interacción, es util poder colocar los productos de operadores como

$$\begin{aligned} a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger &= \langle a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle + (a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger - \langle a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle) \\ a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} &= \langle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \rangle + (a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} - \langle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \rangle) \end{aligned}$$

estos productos pueden ser visto como un *campo medio* (primer termino en la descomposición) y fluctuaciones alrededor de ellos. Y como se tiene un gran número de partículas, las fluctuaciones de los valores medios deberan ser pequeños, por ello en la aproximación de campo medio [2], el producto de operadores queda de la siguiente manera

$$a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \approx a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \langle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \rangle + \langle a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} - \langle a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle \langle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \rangle$$

Y definiendo la cantidad

$$\Delta_k = - \sum_l V_{k,l} \langle a_{-l,\downarrow} a_{l,\uparrow} \rangle \quad (39)$$

El hamiltoniano se transforma en

$$\tilde{H} = \sum_{k\alpha} \xi_k a_{k\alpha}^\dagger a_{k\alpha} - \sum_k (\Delta_k a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger + \Delta_k^* a_{-k,\downarrow} a_{k,\uparrow}) + \sum_k \Delta_k \langle a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-k,\downarrow}^\dagger \rangle \quad (40)$$

Ahora veamos las ecuaciones de movimiento de los operadores a^\dagger y a (ver apendice B)

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_k, a_{k,\uparrow}^\dagger] &= \xi_k a_{k,\uparrow}^\dagger - \Delta_k^* a_{-k,\downarrow} \\ [\tilde{H}_k, a_{-k,\downarrow}] &= -\xi_k a_{-k,\downarrow} - \Delta_k a_{k,\uparrow}^\dagger \end{aligned} \quad (41)$$

Entonces, para poder diagonalizar dicho Hamiltoniano buscaremos una transformación adecuada γ_k tal que

$$\begin{aligned} [\tilde{H}_k, \gamma_{k\alpha}^\dagger] &= E_k \gamma_{k\alpha}^\dagger \\ [\tilde{H}_k, \gamma_{k\alpha}] &= -E_k \gamma_{k\alpha} \end{aligned} \quad (42)$$

Esto se cumple si el Hamiltoniano puede ser escrito en forma diagonal

$$\tilde{H} = \sum_{k\alpha} E_k \gamma_{k\alpha}^\dagger \gamma_{k\alpha} + cte \quad (43)$$

Por ello tal transformación apropiada fue dada por Bogoliubov, la cual tiene la forma

$$\begin{aligned} \gamma_{k\uparrow}^\dagger &= u_k^* a_{k\uparrow}^\dagger - v_k^* a_{-k\downarrow} \\ \gamma_{-k\downarrow}^\dagger &= u_k^* a_{-k\downarrow}^\dagger + v_k^* a_{k\uparrow} \end{aligned} \quad (44)$$

donde γ_k son los nuevos operadores fermiónicos y los coeficientes numéricos u_k y v_k satisfacen: $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$.

Reemplazando (44) en (42) y usando (41) obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta_k \\ -\Delta_k & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k \\ -v_k \end{pmatrix} = E_k \begin{pmatrix} u_k \\ -v_k \end{pmatrix}$$

la cual tiene solución con $E_k > 0$

$$E_k = \sqrt{\xi_k^2 + \Delta_k^2} \quad (45)$$

y tambien

$$\begin{aligned} v_k &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k}\right) \\ u_k &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k}\right) \end{aligned} \quad (46)$$

la cual esta de acuerdo con (35) del metodo variacional.

Además podemos ver ahora que el estado fundamental superconductor representa el estado vacío de las cuasipartículas, es decir

$$\gamma_{p\uparrow}|\phi\rangle = 0; \quad \gamma_{-p\downarrow}|\phi\rangle = 0$$

efectivamente

$$\begin{aligned}
\gamma_{p\uparrow}|\phi\rangle &= (u_p a_{p\uparrow} - v_p a_{-p\downarrow}^\dagger) \prod_k (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= (u_p^2 a_{p\uparrow} + u_p v_p a_{p\uparrow} a_{p\uparrow}^\dagger a_{-p\downarrow}^\dagger - v_p u_p a_{-p\downarrow}^\dagger - v_p^2 a_{-p\downarrow}^\dagger a_{p\uparrow}^\dagger a_{-p\downarrow}^\dagger) \prod_{k \neq p} (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{47}$$

El primer término actuando sobre el vacío da cero, el segundo término aplicando las reglas de conmutación, de los operadores a , se cancela con el tercer término y por último el cuarto término es cero porque no puede haber dos operadores de creación de un mismo estado.

Análogamente se obtiene

$$\gamma_{-p\downarrow}|\phi\rangle = 0$$

Es decir en este estado no hay cuasipartículas (excitaciones), todos los electrones están ligados formando pares de Cooper.

Ahora para crear una excitación debemos hacer actuar el operador de creación de una cuasipartícula sobre el vacío de estas, es decir sobre el estado fundamental.

$$\begin{aligned}
\gamma_{p\uparrow}^\dagger|\phi\rangle &= (u_p^* a_{p\uparrow}^\dagger - v_p^* a_{-p\downarrow}) \prod_k (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= (|u_p|^2 a_{p\uparrow}^\dagger + u_p^* v_p a_{p\uparrow}^\dagger a_{p\uparrow}^\dagger a_{-p\downarrow}^\dagger - v_p^* u_p a_{-p\downarrow} - |v_p|^2 a_{-p\downarrow} a_{p\uparrow}^\dagger a_{-p\downarrow}^\dagger) \prod_{k \neq p} (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= a_{p\uparrow}^\dagger \prod_{k \neq p} (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle
\end{aligned}$$

análogamente

$$\gamma_{-p\downarrow}^\dagger|\phi\rangle = a_{-p\downarrow}^\dagger \prod_{k \neq p} (u_k + v_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger) |0\rangle$$

Con u_k y v_k hallados las cuales diagonalizan el hamiltoniano (38), los términos que quedan se reducen en

$$\tilde{H} = \langle \phi | \tilde{H} | \phi \rangle + \sum_{k\alpha} E_k \gamma_{k\alpha}^\dagger \gamma_{k\alpha} \tag{48}$$

El primer término es una constante, la cual difiere de la correspondiente suma del estado normal a $T=0$ ($E_k = \xi_k$, $\Delta_k = 0$) en la energía de condensación, encontrado anteriormente. El segundo término da el incremento de energía encima del estado fundamental en términos del operador de número $\gamma_k^\dagger \gamma_k$ para los fermiones γ_k .

Por ello los γ_k describen a las cuasipartículas de excitación del sistema, las cuales usualmente son llamados *Bogoliubones*. Las energías de esas excitaciones son justamente

$$E_k = (\xi_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2} \quad (49)$$

Así, como habíamos anticipado, Δ_k juega el rol de *gap de energía* o energía mínima de excitación, ya que aún en la superficie de Fermi, donde $\xi_k = 0$, $E_k = \Delta_k$. Además, ahora la notación E_k recibe su justificación, como la energía de una excitación elemental de momento k .

En el superconductor las excitaciones del tipo $\gamma_{k\uparrow}^\dagger$ y $\gamma_{-k\downarrow}^\dagger$ son creados siempre juntos, y los estados excitados simples del superconductor son de la forma $\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{-k'\downarrow}^\dagger |\phi\rangle$, en términos de los operadores electrónicos el estado excitado $\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{-k'\downarrow}^\dagger |\phi\rangle$ es

$$\gamma_{k\uparrow}^\dagger \gamma_{-k'\downarrow}^\dagger |\phi\rangle = a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k'\downarrow}^\dagger \prod_{k'' \neq k, k'} (u_{k''} + v_{k''} a_{k'', \uparrow}^\dagger a_{-k'', \downarrow}^\dagger) |0\rangle \quad (50)$$

es decir los estados $k \uparrow, -k' \downarrow$ son ocupados, los estados $-k \downarrow, k' \uparrow$ son desocupados y todos los otros pares son ocupados como en el estado fundamental.

Como la cantidad mínima de energía que cuesta crear una excitación es Δ , y como las excitaciones siempre son creados de a dos, entonces el sistema tendrá un gap de energía de 2Δ .

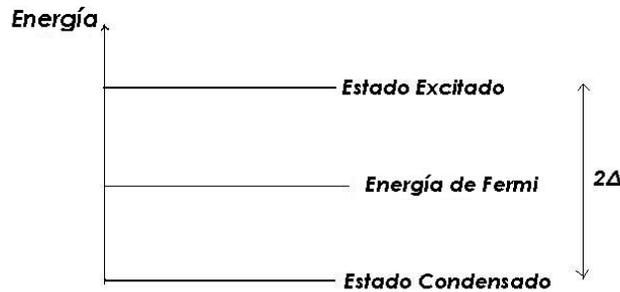


Figura 6: Niveles de energía

Colocando Δ_k en función de los operadores γ_k

$$\Delta_k = - \sum_l V_{k,l} \langle a_{-l\downarrow} a_{l\uparrow} \rangle = - \sum_l V_{k,l} u_l^* v_l \langle 1 - \gamma_{-l\downarrow}^\dagger \gamma_{-l\downarrow} - \gamma_{l\uparrow}^\dagger \gamma_{l\uparrow} \rangle \quad (51)$$

A $T=0$, cuando no hay cuasipartícula, esto se reduce a (26), así que obtendremos el mismo resultado (34) para $\Delta(0)$ en términos de $\hbar\omega_D$ y $N(0)V$ calculado por el método variacional. Por todo lo anteriormente expresado, vemos la conveniencia de usar el método de Bogoiubov para la superconductividad a $T > 0$.

2.3.4. Temperaturas Finitas

Como hemos visto E_k es la energía de excitación de una cuasipartícula. La probabilidad de su excitación en equilibrio térmico es la función de Fermi usual

$$f(E_k) = (e^{\beta E_k} + 1)^{-1} \quad (52)$$

donde $\beta = 1/kT$. Así,

$$\langle 1 - \gamma_{-l\downarrow}^\dagger \gamma_{-l\downarrow} - \gamma_{l\uparrow}^\dagger \gamma_{l\uparrow} \rangle = 1 - 2f(E_k) \quad (53)$$

Así que en general (51) se transforma en

$$\Delta_k = - \sum_l V_{k,l} u_l^* v_l [1 - 2f(E_k)] = - \sum_l V_{k,l} \frac{\Delta_l}{2E_l} \tanh \frac{\beta E_l}{2} \quad (54)$$

Haciendo la aproximación BCS que $V_{kl} = -V$, tenemos $\Delta_k = \Delta_l = \Delta$ y la condición auto-consistente se convierte

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2} \sum_k \frac{\tanh \beta E_k / 2}{E_k} \quad (55)$$

Donde, como usual, $E_k = (\xi_k^2 + \Delta_k^2)^{1/2}$. La ecuación (55) determina la dependencia en temperatura del gap de energía $\Delta(T)$.

2.3.5. Determinación de T_c

La temperatura crítica T_c es la temperatura en la cual $\Delta(T) \rightarrow 0$. En este caso, $E_k \rightarrow |\xi_k|$, y el espectro de excitación se vuelve el mismo que el del estado normal. Así, T_c es encontrado reemplazando E_k con $|\xi_k|$ en (55) y resolviendo. Luego cambiando la suma por una integral, tomando la ventaja de la simetría de $|\xi_k|$ alrededor del nivel de Fermi, y cambiando a variables sin dimensiones de integración, esta condición se convierte

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\beta \hbar \omega_D / 2} \frac{\tanh x}{x} dx \quad (56)$$

esta integral puede ser evaluada, obteniendose

$$kT_c = \beta^{-1} = 1,13\hbar\omega_D e^{-1/N(0)V} \quad (57)$$

comparando esto con (34), vemos que

$$\frac{\Delta(0)}{kT_c} = \frac{2}{1,13} = 1,764 \quad (58)$$

Asi que el gap a $T = 0$ es comparable en energía, efectivamente a kT_c . El factor numérico 1.76 ha sido probado en muchos experimentos, encontrandose ser razonable con lo obtenido.

2.3.6. Dependencia en Temperatura del gap

a partir de (55) o su integral equivalente

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\tanh \frac{1}{2}\beta(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} d\xi, \quad \beta = 1/kT \quad (59)$$

$\Delta(T)$ puede ser calculado numéricamente. Para superconductores con acople débil, en la cual $\hbar\omega_D/kT_c \gg 1$, $\Delta(T)/\Delta(0)$ es una función de T/T_c la cual decese monótonamente de uno ($T = 0$) a cero en T_c como se muestra en la figura. Para temperaturas diferentes a $T = T_c$,

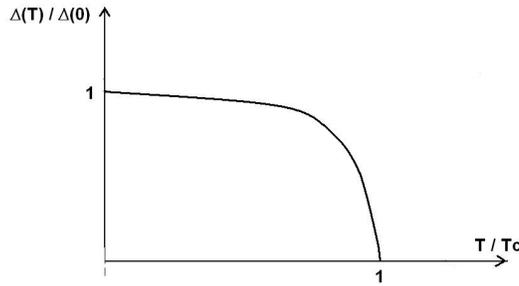


Figura 7: Gap en función de la temperatura

la curva se puede aproximar por la expresión: $\Delta(T)/\Delta(0) = \tanh(T_c/T \cdot \Delta(T)/\Delta(0))$, así cerca a $T = 0$ la tangente hiperbólica es muy cercano a la unidad e independiente de T . Físicamente hablando, Δ es casi constante hasta que un número significativo de cuasipartículas son excitados térmicamente. De otro lado, cerca de T_c , $\Delta(T)$ cae a cero con una tangente vertical, aproximadamente como

$$\frac{\Delta(T)}{\Delta(0)} \approx 1,74\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2} \quad T \approx T_c \quad (60)$$

2.3.7. Densidad de Estados

Ahora que hemos visto que las excitaciones de cuasipartículas pueden ser descrita simplemente como fermiones creados por γ_k , las cuales estan una correspondencia uno a uno con los a_k del metal normal, entonces el número de estados de cuasipartículas excitadas $\gamma_{k,\uparrow}$ con energías entre E y $E + \delta E$ es el mismo que el número de estados de partículas normales de un espin con energías entre las correspondientes ξ y $\xi + \delta \xi$. Por ello la densidad de estados de cuasipartículas $N_s(E)$ esta dado por

$$N_s(E)dE = N_n(\xi)d\xi$$

pero como estamos interesados solo en energías ξ de pocos milielectronvoltios respecto de la energía de Fermi, entonces podemos tomar $N_n(\xi) = N(0)$, una constante. Esto lleva directamente a un resultado simple

$$N_s(E) = N(0) \frac{d\xi}{dE} = N(0) \begin{cases} \frac{E}{(E^2 - \Delta^2)^{1/2}} & , \quad (E > E_F + \Delta) \\ 0 & , \quad (E_F < E_F + \Delta) \end{cases} \quad (61)$$

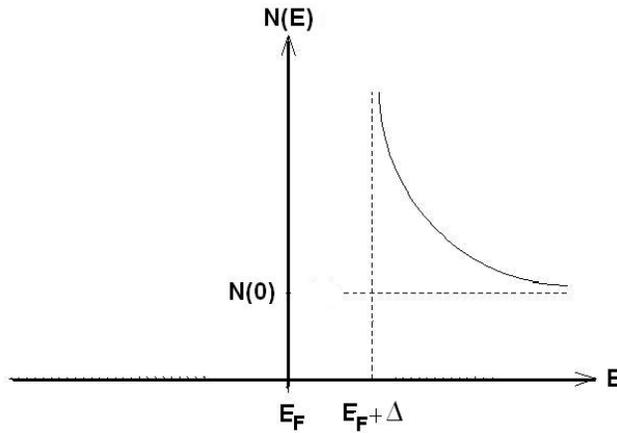


Figura 8: Densidad de estados a $T=0K$

Cuando la temperatura es aumentada por encima de $T = 0K$, los fonones excitados térmicamente se vuelven disponibles para dispersar los pares de electrones. Los fonones con energía comparables a dos veces el gap de energía (2Δ) dispersaran electrones de un par de Cooper a estados encima del gap, los electrones del par ya no tendran momentos iguales y opuestos, asi que su potencial de interacción se volverá despreciable y el par de

Cooper es destruido. Por supuesto a bajas temperaturas, la densidad de fonones con esta energía es pequeña, por otro lado cerca de T_c fonones con energía del orden del gap de energía son abundantes, y los pares destruidos aumentaran considerablemente.

La figura siguiente muestra la densidad de estados de las cuasipartículas $N(E)$ a $T > 0$. Encima del gap de energía, los electrones están frecuentemente referidos a electrones normales o cuasipartículas, debajo del gap de energía los electrones están apareados, esos electrones son llamados electrones superconductores. A $T = 0$ todos los electrones son superconductores, mientras que para $T \geq T_c$ todos ellos son normales. Para temperaturas intermedias, el sistema es una mezcla de electrones superconductores y normales.

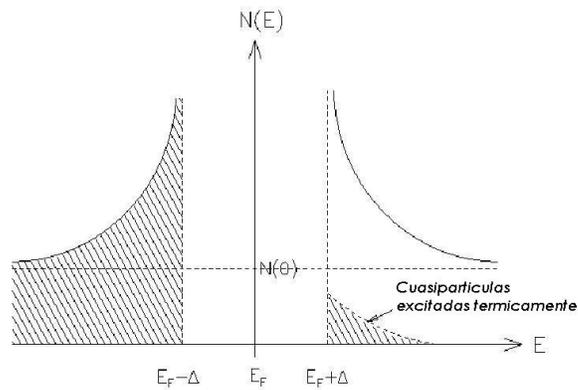


Figura 9: Densidad de estados a $T > 0$

3. EFECTO TUNEL

En mecánica clásica una partícula que es confinada a la parte interior de un potencial no puede penetrar la barrera del potencial donde esta confinada. Sin embargo, la situación es diferente en mecánica cuántica, la función de onda correspondiente a cada estado propio de la partícula puede penetrar la barrera de potencial, esto significa que hay una probabilidad de que la partícula se encuentre fuera de la barrera. Esto es un sorprendente hecho que no se podía imaginar dentro del marco de la mecánica clásica. Este extraño fenómeno es llamado *efecto tunel*.

Veamos un caso simple de efecto tunel, supongamos una barrera de potencial con ancho a y altura V_0 , como se muestra en la figura

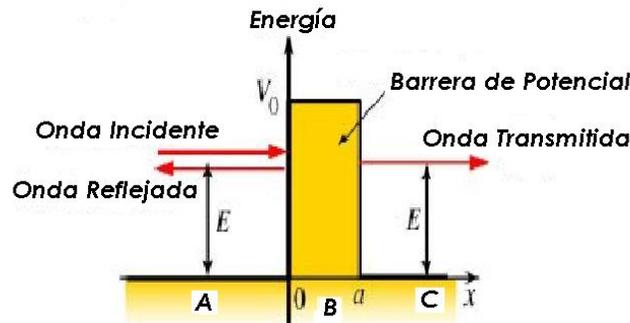


Figura 10: Barrera de potencial

Supongamos que una partícula incidente viene de la lado izquierdo con una energía E , menor que el valor de V_0 y choca con la barrera de potencial en la región A, una parte de la onda incidente asociada a la partícula es reflejada, que se llamara onda reflejada y la otra parte penetrara la barrera hacia la región C, la que se llamara onda transmitida.

La función de onda de la partícula es de la forma

$$\Psi(x, t) = \psi(x)e^{-iEt} \quad (62)$$

La ecuación de Schrödinger que obedece la parte espacial es

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi = E\psi$$

En la región A y C el movimiento es de una partícula libre, porque no hay potencial, en esas regiones la ecuación de Schrödinger se convierte en

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + k^2\psi = 0, \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

En la región A, la función de onda total será una superposición de onda incidente y onda reflejada, es decir

$$\psi_A = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$

donde A y B , son constantes apropiadas.

En la región C, habrá solamente onda transmitida

$$\psi_C = Ce^{ikx}$$

igual con C una constante apropiada.

En la región B, donde hay una barrera de potencial $V(x) = V_0 (> E)$ la ecuación de Schrödinger es

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} - \tau^2\psi = 0, \quad \tau = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$\psi_B = Fe^{i\tau x} + Ge^{-i\tau x}$$

F, G constantes.

Así la forma de la función de onda en las tres regiones, A, B y C se conocen. Ahora para obtener las constantes, debemos utilizar el hecho de que la función de onda debe ser continua en cada punto del espacio. Entonces de dichas condiciones obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} A + B &= F + G \\ ik(A - B) &= (F - G) \\ Ce^{ika} &= Fe^{\tau a} + Ge^{-\tau a} \\ ikCe^{ika} &= \tau Fe^{\tau a} - \tau Ge^{-\tau a} \end{aligned}$$

eliminando F y G de esas cuatro ecuaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{B}{A} &= \frac{(1 + (k/\tau)^2)(e^{\tau a} - e^{-\tau a})}{(1 + ik/\tau)^2 e^{-\tau a} - (1 - ik/\tau)^2 e^{\tau a}} \\ \frac{C}{A} &= \frac{(4ik/\tau)e^{-ika}}{(1 + ik/\tau)^2 e^{-\tau a} - (1 - ik/\tau)^2 e^{\tau a}} \end{aligned}$$

La cantidad $|A|^2$ denota la intensidad de la onda incidente, $|B|^2$ de la onda reflejada y $|C|^2$ de la onda transmitida. Entonces obtenemos los coeficientes de reflexión, R, y el coeficiente de transmisión, T.

$$\begin{aligned} R &= \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{4E(V_0 - E)}{V_0^2 \sinh^2 \tau a}\right]^{-1} \\ T &= \frac{|C|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{V_0^2 \sinh^2 \tau a}{4E(V_0 - E)}\right]^{-1} \end{aligned} \tag{63}$$

De estas ecuaciones se obtiene

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} + \frac{|C|^2}{|A|^2} = 1, \quad |B|^2 + |C|^2 = |A|^2$$

lo que significa que la corriente de probabilidad se conserva.

3.1. Solución Numérica de la Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo

Ahora veamos como es la evolución en el tiempo del efecto tunel, para ello resolvamos la ecuación de Schroödinger dependiente del tiempo, la cual en este caso sera hallado numéricamente.

Algoritmo:

Buscamos una solución numérica de la ecuación de Schrödinger en una dimensión, dando la función de onda inicial $\psi(x, 0)$. El propagador del sistema es $\exp(-iHt)$ donde $H = -\partial^2/\partial x^2 + V(x)$ es el operador Hamiltoniano, en unidades naturales ($\hbar = 1, m = 1/2$) y la energía potencial $V(x)$ va a ser tomado independiente del tiempo. La función de onda obedece la relación $\psi(x, t + \Delta) = \exp(-iH\Delta)\psi(x, t)$; es esta relación la que va a ser discretizada en espacio y tiempo.

Uitlizaremos el método de Crank-Nicholson⁷, la cual remplaza el propagador del sistema por la forma de Cayley de la siguiente manera

$$\exp(-iH\Delta) = \frac{1 - iH\Delta/2}{1 + iH\Delta/2} + O(\Delta^3)$$

El cual es exacto a segundo orden en el paso de tiempo Δ . Como en el caso del propagador exacto, este reemplazo tiene la virtud de conservar la norma.

Entonces la aproximación de Crank-Nicholson al problema de evolución es

$$[1 + iH\Delta/2]\psi(x, t + \Delta) \approx [1 - iH\Delta/2]\psi(x, t)$$

En terminos de una nueva función $y(x, t) \equiv \psi(x, t + \Delta) + \psi(x, t + \Delta)\psi(x, t)$ y usando la definición de H, se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + [V(x) - i\frac{2}{\Delta}]y(x, t) = i\frac{4}{\Delta}\psi(x, t)$$

donde $\psi(x, t)$ es conocido (del paso previo) y $y(x, t)$ sera hallado de esta ecuación, y utilizando la discretización en la aproximación de Numerov[7] se obtienen las soluciones.

En este caso vamos a usar como onda inicial $\psi(x, 0)$ un paquete Gaussiano

$$\psi(x, 0) = \exp(ikx) \exp(-[x - x_0]^2/2\sigma^2)$$

donde σ determina el ancho del paquete centrado en x_0 .

Por ejemplo veamos la evolución del paquete de onda con los siguientes parametros:

$$\sigma = 1,6\text{\AA}, \quad x_0 = -40\text{\AA}, \quad x_2 = 40\text{\AA}, \quad k = 5,1\text{ev}, \quad V_0 = 110\text{ev}$$

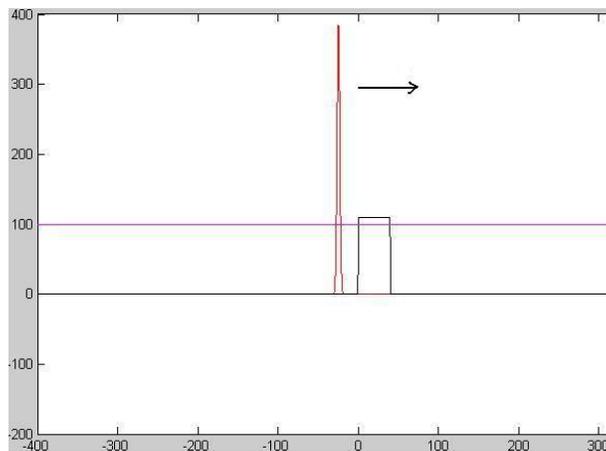


Figura 11: Paquete de Onda en t=0s

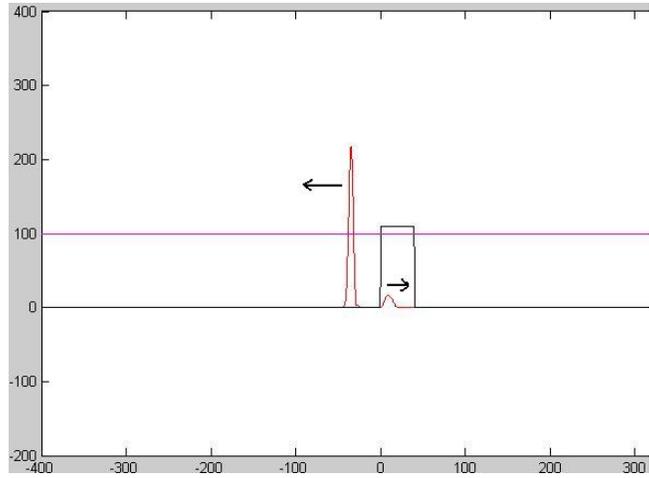


Figura 12: Paquete de Onda en $t=20s$

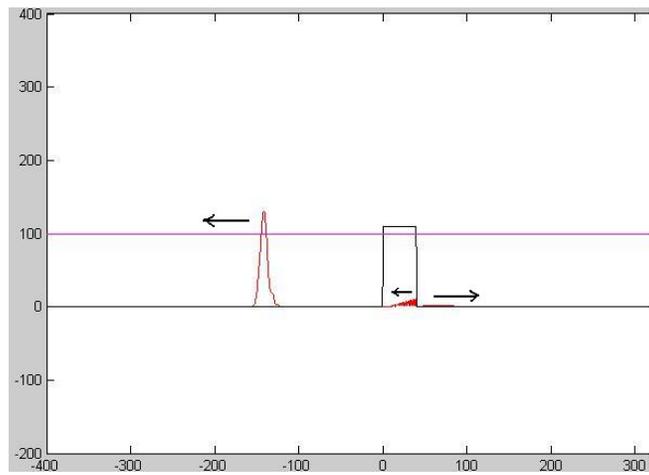


Figura 13: Paquete de Onda en $t=100s$

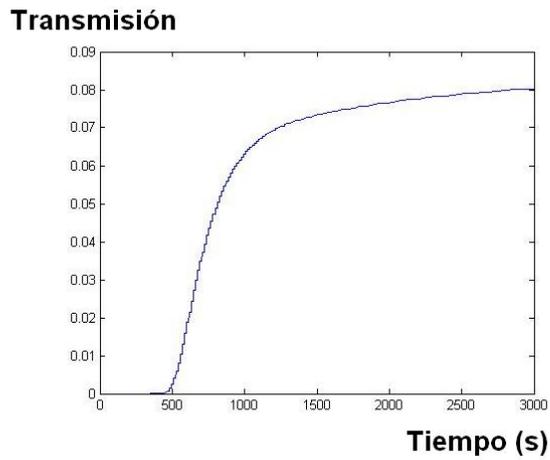


Figura 14: Porcentaje de transmisión, para este caso el 8 por ciento del paquete incidente es transmitido

Ahora veamos como varia la transmisión conforme variamos el ancho de la barrera de potencial, con los siguientes valores de parametros:

$$\sigma = 1,6\text{\AA}, x_0 = -40\text{\AA}, k = 37\text{ev}, V_0 = 60\text{ev}$$

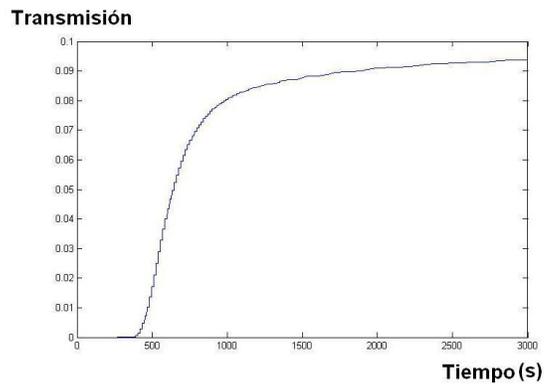


Figura 15: Transmisión con un ancho de barrera, $x_2 = 20\text{\AA}$, con porcentaje de transmisión de 9 por ciento

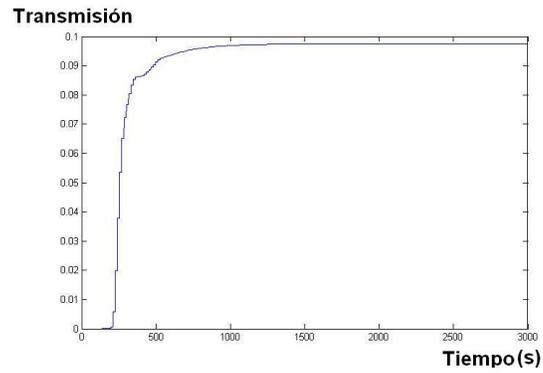


Figura 16: Transmisión con un ancho de barrera, $x_2 = 5 \text{ \AA}$, con porcentaje de transmisión de 10 por ciento

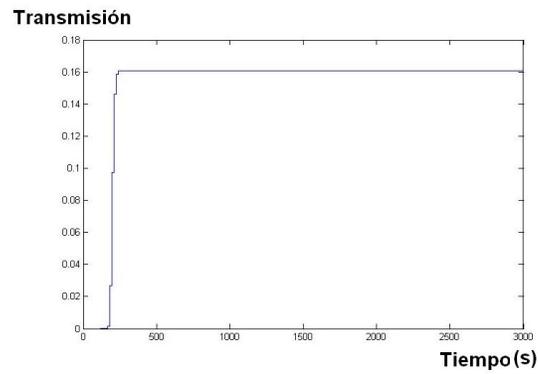


Figura 17: Transmisión con un ancho de barrera, $x_2 = 1 \text{ \AA}$, En este caso el porcentaje de transmisión de 16 por ciento. Por lo tanto vemos que mientras mas delgada es la barrera, manteniendo el potencial constante, hay mayor probabilidad de que se transmitan mas partículas

4. EFECTO TUNEL EN SUPERCONDUCTORES

4.1. Introducción

Para comprender cualitativamente el efecto túnel de electrones entre dos metales es suficiente con utilizar un diagrama de los niveles de energía. Un metal normal a temperatura T con un potencial químico μ puede ser modelado como un continuo de niveles con una población dada por distribución de Fermi $f_{T\mu}(E)$. Un metal superconductor puede ser descrito como un nivel fundamental (que tomaremos como el 0 de energía) en el cual se encuentran los pares de Cooper y un continuo de niveles, separado del condensado por un gap Δ , en el cual están las cuasipartículas excitadas con una distribución dada por la función de Fermi.

Supongamos que tenemos un metal normal y un superconductor a $0K$, y que es posible controlar el potencial químico del metal normal manteniendo una diferencia de potencial V con una fuente externa. Tal es la situación mostrada en la Fig.18. A la izquierda se ve que cuando el nivel de Fermi está por debajo del gap no se produce túnel de electrones. A la derecha se muestra el caso en el que el nivel de Fermi está sobre el gap; en este caso es posible que se transfieran electrones al superconductor, generándose entonces una corriente. A temperaturas finitas hay una corriente pequeña para cualquier voltaje aplicado. Esta corriente aumenta en forma abrupta cuando el potencial químico supera el gap. La condición necesaria para que exista una corriente a $0K$ es $eV > \Delta$.

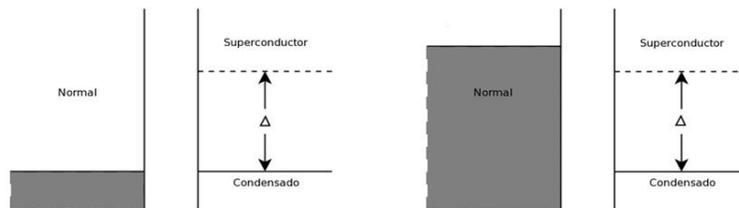


Figura 18: Niveles de energía para un superconductor y un metal normal

Utilizando este modelo es posible comprender la utilidad del efecto túnel en la determinación experimental de la densidad de estados. Giaever⁸ utilizó esta técnica para confirmar

experimentalmente la densidad de estados y el comportamiento en temperatura del gap de energías predichos por la teoría de Bardeen, Schrieffer y Cooper. Para esto supuso que la probabilidad de transición en los dos materiales es igual. La única característica en la que diferirían los materiales en esta aproximación sería en la densidad de estados. De esta manera es posible determinar la densidad de estados de la curva $I-V$ medida. Esta característica fue confirmada por Cohen, Falicov y Phillips⁹.

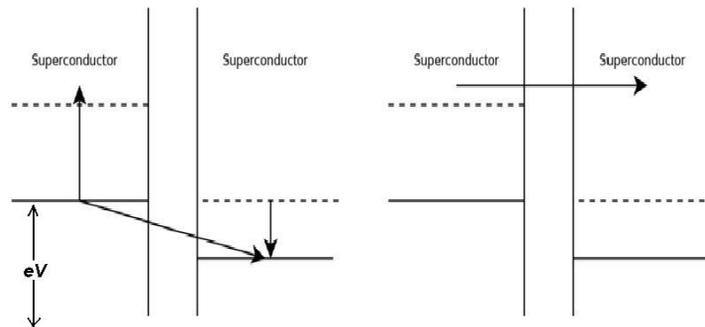


Figura 19: Procesos entre superconductores a temperatura finita

Podemos, por otro lado, considerar el efecto túnel entre superconductores. En la Fig. 19 se muestran dos casos de túnel de cuasipartículas. Estos casos solo pueden ocurrir a temperaturas finitas. En el primero caso ocurre una ruptura de un par en uno de los superconductores; de los electrones que quedan uno es transferido al superconductor de la derecha, donde se recombina con otro electrón para formar un par. La condición necesaria para que ocurra este proceso es que el electrón restante pueda ser excitado sobre el gap del superconductor de la izquierda, o sea $eV + \Delta_D > \Delta_I$. En el segundo caso una cuasipartícula pasa de un estado excitado del superconductor a un estado excitado del otro, esto ocurre cuando el gap del primer superconductor se encuentra sobre el gap del otro ($eV + \Delta_I > \Delta_D$). Por otro lado, tenemos un proceso como el de la Fig. 20, que puede ocurrir a $0K$: La destrucción de un par en el superconductor de la izquierda, seguido por una transferencia de un electrón a los niveles excitados de la derecha. La condición necesaria para que ocurra este proceso es que la energía que pierde el electrón transferido sea suficiente para excitar el electrón restante sobre el gap: $eV - \Delta_D > \Delta_I$.

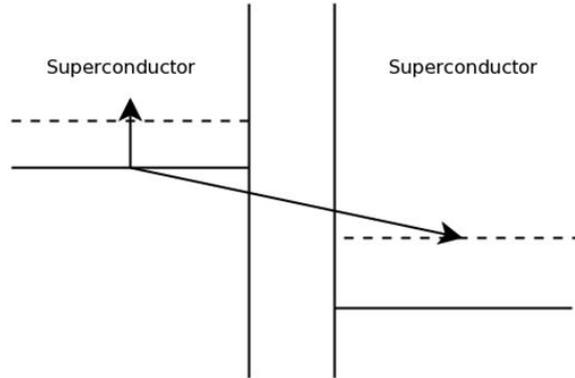


Figura 20: Efecto túnel entre superconductores

Es de esperar entonces, a un nivel cualitativo, que la curva I-V, que está dada por contribuciones de todos estos procesos, presente variaciones significativas a medida que los distintos procesos se hacen posibles.

Por ultimo, tenemos la transferencia de pares entre superconductores a $V=0$. Tal como mostró Josephson³, la probabilidad de que ocurra este tipo de procesos no es despreciable. Por el contrario, el ritmo de transferencia de pares es del mismo orden de magnitud que el de transferencia de electrones.

4.2. Efecto túnel entre superconductores - Corriente por túnel de cuasipartículas y de pares de Cooper

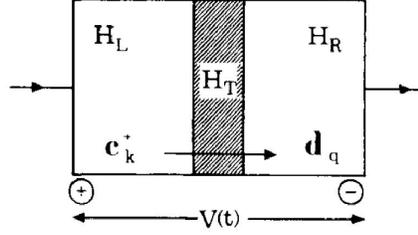
Para considerar el efecto túnel entre dos materiales superconductores se puede utilizar un Hamiltoniano[9]:

$$H = H_D + H_I + H_T$$

Donde H_D y H_I son los hamiltonianos de los superconductores derecho e izquierdo y H_T es el Hamiltoniano de acoplamiento

$$H_T = \sum_{\sigma k q} (T_{kq} c_{k\sigma}^+ d_{q\sigma} + T_{kq}^* d_{q\sigma}^+ c_{k\sigma})$$

que transfiere un electrón del metal derecho al izquierdo y viceversa. $c_{k\sigma}$ y $d_{k\sigma}$ son los operadores de destrucción de electrones en los metales de la izquierda y la derecha. La probabilidad de transmisión de un electrón va a ser proporcional al modulo cuadrado del elemento de matriz T correspondiente.



Supongamos que hay un voltaje aplicado al superconductor de la izquierda. Esta situación puede ser descrita suponiendo una energía adicional para los electrones del lado izquierdo, entonces para ello utilizamos un Hamiltoniano dependiente del tiempo

$$H_I(V) = H_I(0) + eV(t)N_I$$

Llamemos $\hat{c}_{k\sigma}(t)$ al operador de aniquilación de electrones en el metal izquierdo cuando $V \neq 0$. La evolución de este operador, en la representación de Heisenberg, esta dada por la expresión usual

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{c}_{k\sigma}(t) = [\hat{c}_{k\sigma}(t), H_I(V)] = [\hat{c}_{k\sigma}(t), H_I(0)] + eV[\hat{c}_{k\sigma}(t), N_I] = [\hat{c}_{k\sigma}(t), H_I(0)] + eV\hat{c}_{k\sigma}(t) \quad (64)$$

La solución de esta ecuación es

$$\begin{aligned} \hat{c}_{k\sigma}(t) &= e^{\frac{i\varphi(t)}{2}} c_{k\sigma}(t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{2e}{\hbar} V(t) \end{aligned} \quad (65)$$

Para calcular la corriente en los superconductores usamos

$$I(V) = e\langle \dot{N}_D \rangle = -e\langle \dot{N}_I \rangle \quad (66)$$

Donde a partir de ahora, $\hat{}$ significa que el operador esta considerado con $V \neq 0$.

Entonces teniendo en cuenta que H_D conmuta con N_D

$$\begin{aligned}\dot{N}_D &= \frac{i}{\hbar}[\hat{H}, N_D] = \frac{i}{\hbar}[\hat{H}_T, N_D] = \frac{i}{\hbar} \sum_{kq\sigma, q'\sigma'} [T_{kq'} \hat{c}_{k\sigma}^+ d_{q'\sigma'} + T_{kq'}^* d_{q'\sigma'}^+ \hat{c}_{k\sigma}, d_{q\sigma}^+ d_{q\sigma}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{kq\sigma} [T_{kq}^* d_{q\sigma}^+ \hat{c}_{k\sigma} - T_{kq} \hat{c}_{k\sigma}^+ d_{q\sigma}]\end{aligned}$$

Queda entonces

$$\begin{aligned}I(V) &= \frac{ie}{\hbar} \sum_{kq\sigma} \langle [T_{kq}^* d_{q\sigma}^+ \hat{c}_{k\sigma} - T_{kq} \hat{c}_{k\sigma}^+ d_{q\sigma}] \rangle = \frac{ie}{\hbar} \sum_{kq\sigma} [T_{kq}^* \langle d_{q\sigma}^+ \hat{c}_{k\sigma} \rangle - T_{kq} \langle \hat{c}_{k\sigma}^+ d_{q\sigma} \rangle] = \\ &= \frac{2e}{\hbar} \text{Im} \left(\sum_{kq\sigma} T_{kq} \langle \hat{c}_{k\sigma}^+ d_{q\sigma} \rangle \right)\end{aligned}\quad (67)$$

Ambegaokar y Baratoff⁵ evaluaron esta expresión a primer orden en H_T usando la teoría de respuesta lineal[4]. Usando la representación de interacción, con la evolución de los autoestados determinados por la perturbación H_T tenemos, a primer orden:

$$\begin{aligned}I &= \frac{2e}{\hbar} \text{Re} \left[\sum_{kq\sigma, k'q'\sigma'} T_{kq} \int_{-\infty}^t e^{\eta\tau} (T_{k'q'} \langle [\hat{c}_{k\sigma}^+(t) d_{q\sigma}(t), \hat{c}_{k'\sigma'}^+(\tau) d_{q'\sigma'}(\tau)] \rangle_0 + \right. \\ &\quad \left. + T_{k'q'}^* \langle [\hat{c}_{k\sigma}^+(t) d_{q\sigma}(t), d_{q'\sigma'}^+(\tau) c_{k'\sigma'}(\tau)] \rangle_0 \right] d\tau\end{aligned}\quad (68)$$

Donde $\langle \rangle_0$ es el valor medio; usando el Hamiltoniano sin perturbar $H_0 = H_I(V) + H_D$.

Esta expresión se puede describir utilizando la ecuación (65) para obtener la dependencia de $\hat{c}_{k\sigma}(t)$ con $V(t)$ y $c_{k\sigma}(t)$. De esta forma se obtiene la expresión

$$I = \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot e^{\eta\tau} \{ e^{-\frac{i}{2}[\varphi(t)-\varphi(\tau)]} S(t-\tau) + e^{-\frac{i}{2}[\varphi(t)+\varphi(\tau)]} R(t-\tau) \}\quad (69)$$

Donde las dos funciones $S(t-\tau)$ y $R(t-\tau)$ son definidos como:

$$\begin{aligned}S(t-\tau) &= -2i \frac{e}{\hbar^2} \theta(t-\tau) \sum_{kq\sigma, k'q'\sigma'} T_{kq} T_{k'q'}^* \{ \langle c_{k\sigma}^+(t) c_{k'\sigma'}(\tau) \rangle_0 \langle d_{k\sigma}(t) d_{q'\sigma'}^+(\tau) \rangle_0 \\ &\quad - \langle d_{q'\sigma'}^+(\tau) d_{q\sigma}(t) \rangle_0 \langle c_{k'\sigma'}(\tau) c_{k\sigma}^+(t) \rangle_0 \} \\ R(t-\tau) &= -2i \frac{e}{\hbar^2} \theta(t-\tau) \sum_{kq\sigma, k'q'\sigma'} T_{kq} T_{k'q'}^* \{ \langle c_{k\sigma}^+(t) c_{k'\sigma'}(\tau) \rangle_0 \langle d_{q'\sigma'}(\tau) d_{q\sigma}(t) \rangle_0 \\ &\quad - \langle c_{k'\sigma'}^+(\tau) c_{k\sigma}^+(t) \rangle_0 \langle d_{q\sigma}(t) d_{q'\sigma'}(\tau) \rangle_0 \}\end{aligned}\quad (70)$$

Si suponemos que los superconductores son homogéneos e infinitos, solamente conservamos los términos $k = k', q = q'$ de $S(t)$ y $k = -k', q = -q', \sigma = -\sigma'$ de $R(t)$, quedando la

expresión

$$\begin{aligned}
S(t - \tau) &= -\frac{2ie}{\hbar^2}\theta(t - \tau) \sum_{k,q} |T_{kq}|^2 \{ \langle G^<(k, \tau - t)G^>(q, t - \tau) - G^<(q, t - \tau)G^>(k, \tau - t) \rangle \\
R(t - \tau) &= \frac{4ie}{\hbar^2}\theta(t - \tau) \sum_{k,q} |T_{kq}|^2 \{ \langle \tilde{F}^>(k, t - \tau)F^<(q, \tau - t) - \tilde{F}^<(q, t - \tau)F^>(k, \tau - t) \rangle \} \quad (71)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
G^>(k, \tau - t) &= -i\langle c_k(\tau)c_k^+(t) \rangle \\
G^<(k, \tau - t) &= i\langle c_k^+(\tau)c_k(t) \rangle \\
G^>(q, t - \tau) &= -i\langle d_q(t)d_q^+(\tau) \rangle \\
G^<(q, t - \tau) &= i\langle d_q^+(\tau)d_q(t) \rangle \\
\tilde{F}^>(k, t - \tau) &= \langle c_{k\uparrow}^+(t)c_{-k\downarrow}^+(\tau) \rangle \\
\tilde{F}^<(k, t - \tau) &= \langle c_{-k\downarrow}^+(\tau)c_{k\uparrow}^+(t) \rangle \\
F^>(q, \tau - t) &= i\langle d_{-q\downarrow}(\tau)d_{q\uparrow}(t) \rangle \\
F^<(q, \tau - t) &= i\langle d_{q\uparrow}(t)d_{q\downarrow}(\tau) \rangle \quad (72)
\end{aligned}$$

son funciones de *Green*⁶.

Para obtener una expresión mas explicita es útil escribir la corriente como una integral en frecuencia. Para esto utilizamos la descomposición espectral

$$e^{-\frac{i\varphi(t)}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{2\pi} W(w) \cdot e^{-iwt} \quad (73)$$

y hacemos los cambios de variable

$$\begin{aligned}
t' &= t - \tau \\
R'(t) &= e^{i(\varphi_I - \varphi_D)t} R(t) \quad (74)
\end{aligned}$$

obteniendo una expresión para la corriente

$$I(t) = Im_{\eta \rightarrow 0} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' [W(w)W^*(w')e^{-i(w-w')t} \bar{S}(i\eta - w') + e^{-i\Delta\varphi} W(w)W(w')e^{-i(w+w')t} \bar{R}'(i\eta + w')] \right\} \quad (75)$$

donde ahora $\bar{S}(w)$ y $\bar{R}'(w)$ son las transformadas de Fourier de $S(t)$ y $R'(t)$ y $\Delta\varphi = \varphi_I - \varphi_D$ es la diferencia de fases en los superconductores.

Asumamos que los coeficientes en la expansión (73) son reales, esta condición es satisfecha en el caso de interés físico que vamos a ver. Entonces la expresión anterior estara dada por

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' W(w)W(w') \{ [I_{cp}(w') \cos(w - w')t - I_{cp1}(w') \sin(w - w')t] + [I_{J2}(w') \cos(\Delta\varphi + (w + w')t) + I_{J1}(w') \sin(\Delta\varphi + (w + w')t)] \} \quad (76)$$

donde hemos definido

$$\begin{aligned} I_{cp}(w) &= Im_{\eta \rightarrow 0} S(i\eta - w) \\ I_{cp1}(w) &= Re_{\eta \rightarrow 0} S(i\eta - w) \\ I_{J2}(w) &= Im_{\eta \rightarrow 0} R'(i\eta + w) \\ I_{J1}(w) &= -Re_{\eta \rightarrow 0} R'(i\eta + w) \end{aligned}$$

Consideremos el caso particular, estudiado por *Josephson*³, $V(t) = V_0 = \text{constante}$. En este caso:

$$e^{(i/2)\varphi(t)} = e^{(i/2)w_f t}$$

donde $w_f = (2e/\hbar)V_0$. De (70) se puede ver que los coeficientes de Fourier son ahora

$$W(w) = W^*(w) = \delta(w - w_f/2)$$

Por lo tanto las expresiones para la corriente (75) y (76) se simplifican notablemente

$$I(t) = Im \left\{ S\left(i\eta - \frac{w_f}{2}\right) + e^{-i(\Delta\varphi + w_f/2)t} R'\left(i\eta + \frac{w_f}{2}\right) \right\} \quad (77)$$

y

$$I(t, V_0, T) = I_{cp}(V_0, T) + I_{J1}(V_0, T) \sin\left(\Delta\varphi + \frac{2eV_0}{\hbar}t\right) + I_{J2}(V_0, T) \cos\left(\Delta\varphi + \frac{2eV_0}{\hbar}t\right) \quad (78)$$

En esta expresión se observan un término constante I_{cp} correspondiente al efecto túnel de cuasipartículas, y dos términos dependientes del tiempo, correspondientes al efecto Josephson.

Barone y Paterno⁶ obtuvieron expresiones para los distintos coeficientes I_{cp} e I_J despreciando la dependencia en energía de las matrices de transición T_{kq} .

$$I_{cp} = -\frac{\hbar}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot n_I(w) n_D(w) [f(w) - f(w - \frac{w_f}{2})] \quad (79)$$

$$I_{J1} = -\frac{\hbar}{\pi e R_N} P \int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' \frac{p_I(w) p_D(w')}{w - w' - w_f/2} [f(w') - f(w)] \quad (80)$$

$$I_{J2} = \frac{\hbar}{eR_N} \int_{-\infty}^{\infty} dw \cdot p_I(w) p_D(w - w_f/2) [f(w - w_f/2) - f(w)] \quad (81)$$

con

$$R_N = \frac{\hbar^3}{4\pi e^2 N_D(0) N_I(0) \langle |T|^2 \rangle}$$

$n_{I/D}(w)$ es la densidad de estados de las cuasipartículas, $p_{I/D}(w)$ la densidad de estados de los pares de Cooper y $f(w) = (1 + e^{\beta w})^{-1}$.

Como podemos ver, de la expresiones (79) y (81), para $V = 0$ los términos I_{cp} y I_{J2} desaparecen, quedando una corriente finita asociada al término I_{J1} sin φ , la cual describe el túnel coherente de pares de electrones (Efecto Josephson). Las corrientes de Josephson ocurren debido a que no es necesario fijar el número de electrones en cada superconductor, solo es necesario determinar el número total de electrones. Esto permite que cuando se aplica una corriente pequeña las fases se ajustan de manera tal que no se produzca caída de potencial en la interfase.

Evaluación de los términos en el modelo BCS

En la aproximación BCS

$$n(w) = \frac{|w|}{\sqrt{w^2 - \Delta^2}} \Theta(|w| - |\Delta|)$$

$$p(w) = \frac{\Delta}{\sqrt{w^2 - \Delta^2}} \text{sgn}(w) \Theta(|w| - |\Delta|)$$

con $\Theta(x)$ la función escalón (= 0 para $x < 0$).

Para $T = 0$, la distribución de Fermi es la función escalón y la expresión para los diversos términos de corriente quedan expresados en función de integrales que pueden ser calculadas numéricamente.

En la Fig.21 se grafica la corriente de cuasipartículas a $T = 0$ en función de V . La corriente de cuasipartículas es nula hasta que el voltaje es dos veces el gap, tal como se desprende del análisis cualitativo de la introducción. Para voltajes mayores la corriente sigue aproximadamente una ley de Ohm ($\frac{dI}{dV} = cte$).

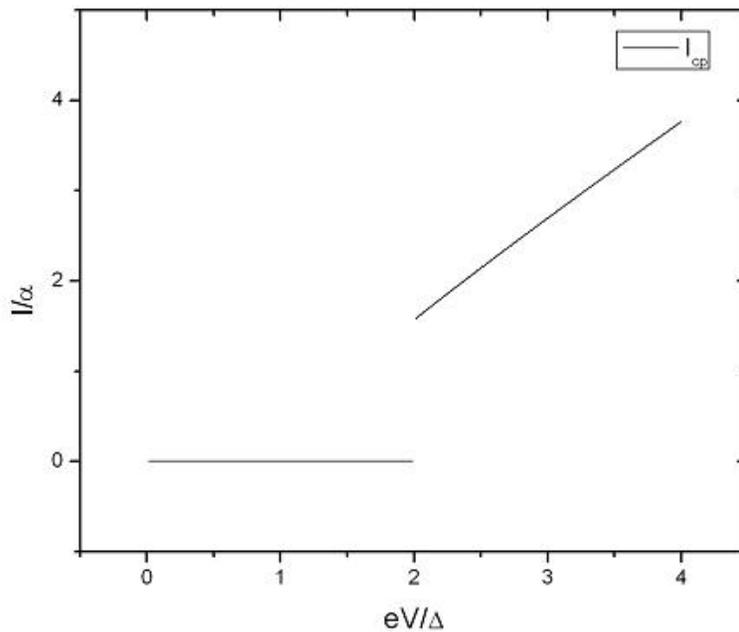


Figura 21: Intensidad de la corriente de cuasipartículas entre superconductores a $T=0$ en unidades $\alpha = \frac{\hbar\Delta}{eR_N}$. La corriente es nula cuando el voltaje es menor que 2Δ

En la Fig.22 se puede ver la amplitud de los términos oscilatorios de la corriente. Los términos oscilatorios pueden ser escritos de la forma

$$I(V, T, t) = A(V, T) \sin\left(\frac{2eV}{\hbar}t + \alpha(V, T)\right) \quad (82)$$

con α una fase que depende del voltaje y la temperatura y que se hace $\Delta\varphi$ cuando $V = 0$ y $A(V, T) = \sqrt{J_{J1}^2 + J_{J2}^2}$. Cuando el voltaje es igual al 2Δ existe una divergencia en la intensidad de las corrientes, relacionada con la divergencia de la densidad en estados en el gap.

En la Fig.22 se grafica la magnitud $A(V, 0)$. Comparando esta figura y la Fig.21 se observa que para $eV < 2\Delta$ solo sobrevive el término Josephson.

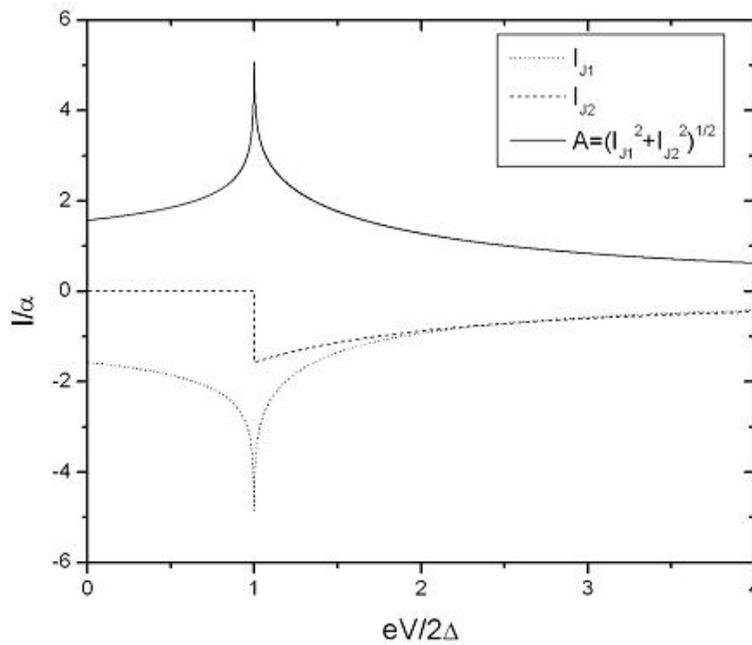


Figura 22: Amplitud de los términos oscilatorios en la corriente entre superconductores a $T = 0$ en unidades $\alpha = \frac{\hbar\Delta}{eR_N}$. A $V = 0$ existe una corriente no nula

Para $T > 0$ se pueden calcular numéricamente los distintos términos de corriente. En la Fig.23 se grafica la corriente de cuasipartículas en función del voltaje para distintas temperaturas, donde $t = kT/\Delta(T)$. La principal característica del comportamiento es la aparición

de una corriente finita para voltajes menores que el gap y la atenuación del salto de corriente. En el limite $t \rightarrow \infty$ (correspondiente a temperatura crítica, o sea $\Delta \rightarrow 0$) el salto en la corriente desaparece.

En la Fig.24 se muestra la dependencia en temperatura del término Josephson I_{J2} . A temperaturas finitas el tamaño del gap se reduce y aparece una corriente no nula para voltajes menores a 2Δ . La corriente a $V = 0$ debida a este término es nula independientemente de la temperatura.

En la Fig.25 se graficó la amplitud del término I_{J1} de la corriente Josephson para distintas temperaturas. La amplitud de la corriente a $V = 0$ disminuye a medida que aumenta la temperatura y la divergencia en $V = 2\Delta$ se atenúa. Vemos entonces que al aumentar la temperatura disminuye la relevancia de los términos de corriente alterna, siendo mas importante la corriente de cuasipartículas.

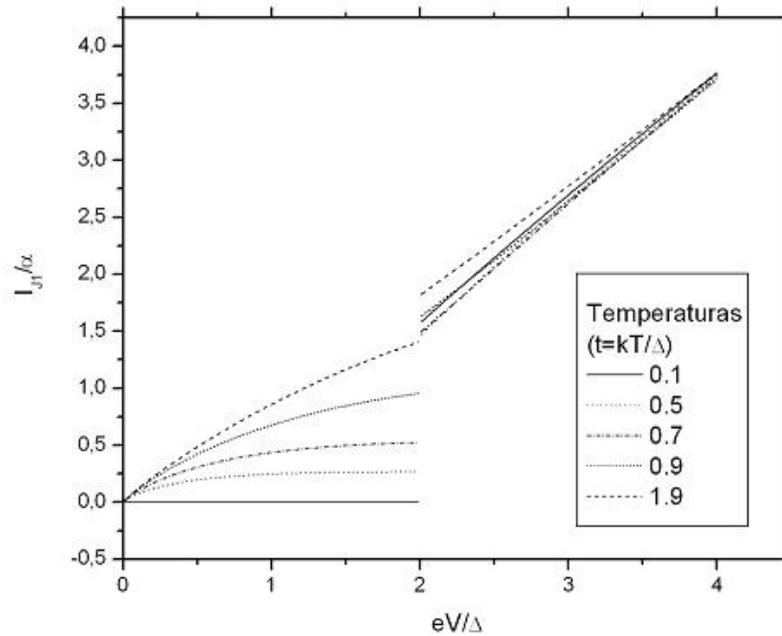


Figura 23: Corriente de cuasipartículas a $T > 0$ en unidades $\alpha = \frac{\hbar\Delta}{eR_N}$. A $V = 0$ la corriente es siempre nula. Cuando $t \rightarrow \infty$ (correspondiente a $T = T_c$) el salto en corriente desaparece.

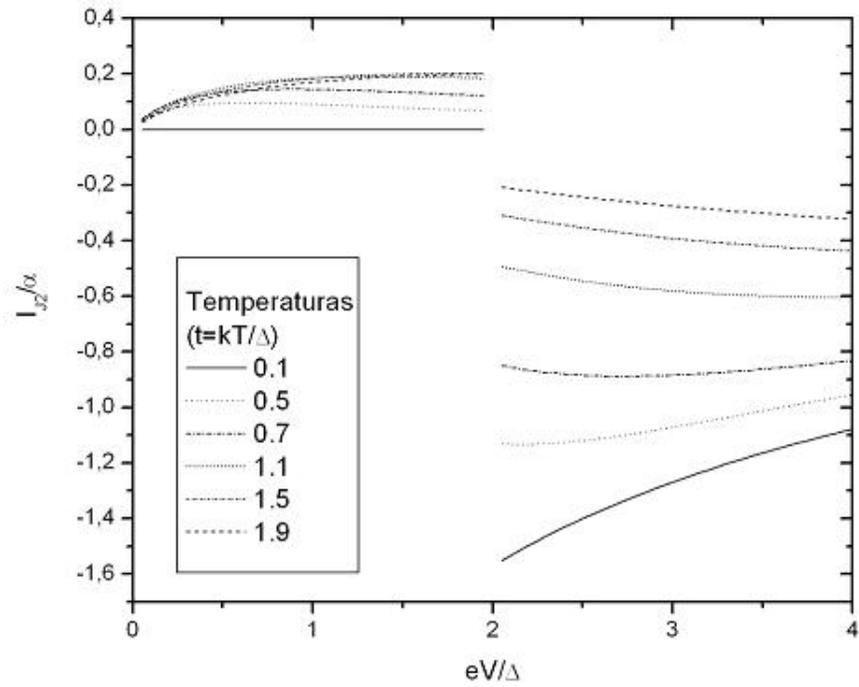


Figura 24: Amplitud del término I_{J2} de la corriente Josephson a $T > 0$ en unidades $\alpha = \frac{\hbar\Delta}{eR_N}$. A $V = 0$ la corriente es siempre nula. Cuando $t \rightarrow \infty$ ($T = T_c$) el salto en la amplitud se hace nulo.

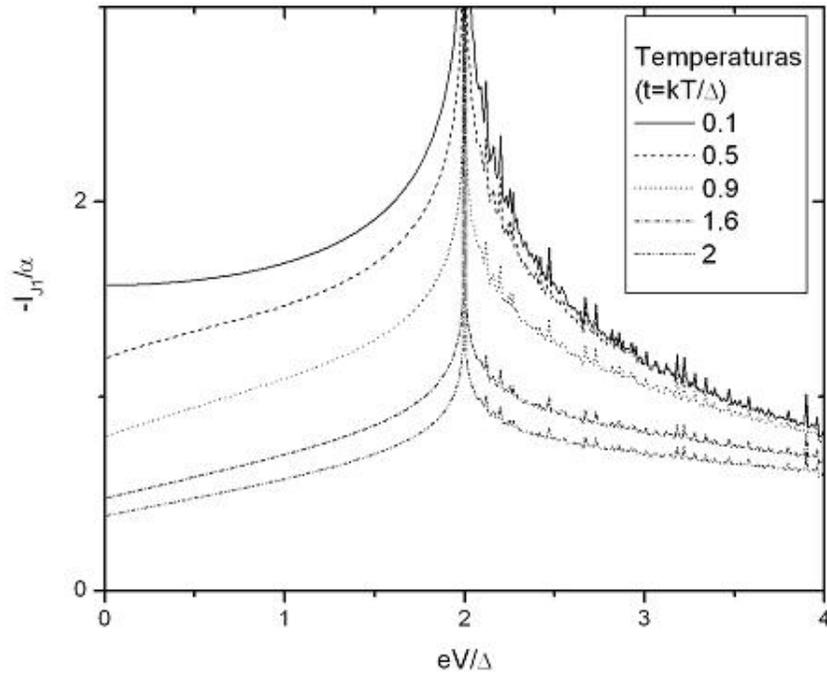


Figura 25: Amplitud del término I_{J1} de la corriente Josephson a $T > 0$ en unidades $\alpha = \frac{\hbar\Delta}{eR_N}$. Para $V = 0$ existe una corriente alterna no nula que disminuye al aumentar la temperatura.

5. CONCLUSIONES

Hemos podido ver en el efecto túnel que mientras mas delgada es la barrera, manteniendo el potencial constante, hay mayor probabilidad de que se transmitan más partículas.

En el efecto túnel de metales normales, la aplicación de una diferencia de potencial eleva el nivel de Fermi de uno de los metales con respecto al otro, esto hace que los electrones atraviesen la barrera aislante, tal corriente de túnel en juntas de metales normales ha sido observado y obedece la ley de Ohm [4]. Sin embargo cuando uno de los metales es un superconductor, por debajo de su temperatura crítica, T_c , no hay corriente hasta que el potencial llegue a un valor umbral, $eV = 2\Delta$.

Tambien podemos ver que el efecto túnel entre superconductores no solo esta dado por la transferencia de electrones de un metal a otro, sino tambien, por transferencia de pares de Cooper; incluso cuando la diferencia de potencial es cero, $V = 0$, hay un término diferente de cero asociado a un túnel coherente de pares de electrones, tal como habia sido observado por primera vez por B. Josephson [3].

6. Apéndice A

Aplicando el operador T sobre el estado fundamental $|\phi\rangle$:

$$\begin{aligned} T|\phi\rangle &= \sum_k \xi_k \prod_q (a_{k,\uparrow}^\dagger a_{k,\uparrow} + a_{k,\downarrow}^\dagger a_{k,\downarrow}) (u_q + v_q a_{q,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger) |0\rangle \\ &= \sum_k \xi_k \prod_q \left[u_q (a_{k,\uparrow}^\dagger a_{k,\uparrow} + a_{k,\downarrow}^\dagger a_{k,\downarrow}) |0\rangle + v_q (a_{k,\uparrow}^\dagger \underbrace{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger}_{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger} a_{-q,\downarrow}^\dagger + a_{k,\downarrow}^\dagger \underbrace{a_{k,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger}_{a_{k,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger} a_{-q,\downarrow}^\dagger) |0\rangle \right] \end{aligned}$$

Utilizando la relación de anticonmutación de los operadores a_k

$$\{a_{k\sigma}, a_{k'\sigma'}^\dagger\} = \delta_{k,k'} \delta_{\sigma,\sigma'} \quad (83)$$

donde:

$$\{a_{k\sigma}, a_{k'\sigma'}^\dagger\} \equiv a_{k\sigma} a_{k'\sigma'}^\dagger + a_{k'\sigma'}^\dagger a_{k\sigma} \quad (84)$$

Ademas teniendo en cuenta

$$a_{k\sigma} |0\rangle \equiv 0 \quad (85)$$

Entonces

$$\begin{aligned} T|\phi\rangle &= \sum_k \xi_k \prod_q v_q \left[a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger \delta_{qk} - a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger \underbrace{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger}_{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger} - a_{k,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger \underbrace{a_{k,\downarrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger}_{a_{k,\downarrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger} \right] |0\rangle \\ &= \sum_k \xi_k \prod_q v_q \left[a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger \delta_{qk} - a_{k,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger \delta_{k,-q} \right] |0\rangle \\ &= \prod_q \xi_q v_q \left[a_{q,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger - a_{-q,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger \right] |0\rangle \quad (86) \end{aligned}$$

Ahora tomando la conjugada del estado $|\phi\rangle$

$$\langle\phi| = \langle 0| \prod_k (u_k + v_k a_{k,\uparrow} a_{-k,\downarrow}) \quad (87)$$

Aplicando sobre el vector de estado anterior $T|\phi\rangle$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\langle\phi|T|\phi\rangle &= \langle 0| \prod_q \prod_k \xi_q v_q (u_k + v_k a_{k,\uparrow} a_{-k,\downarrow}) (a_{q,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger - a_{-q,\downarrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= \langle 0| \prod_q \prod_k \xi_q v_q v_k (a_{-k,\downarrow} \underbrace{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger}_{a_{-q,\downarrow}^\dagger} - a_{-k,\downarrow} \underbrace{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger}_{a_{q,\uparrow}^\dagger}) |0\rangle \\
&= \langle 0| \prod_q \prod_k \xi_q v_q v_k (\underbrace{a_{-k,\downarrow} a_{q,\uparrow}^\dagger}_{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{-q,\downarrow}^\dagger} + \underbrace{a_{-k,\downarrow} a_{-q,\downarrow}^\dagger}_{\delta_{qk}} + \underbrace{a_{-k,\downarrow} a_{-q,\downarrow}^\dagger}_{a_{-k,\downarrow} a_{-q,\downarrow}^\dagger} a_{k,\uparrow} a_{q,\uparrow}^\dagger) |0\rangle \\
&= \langle 0| \prod_q \prod_k \xi_q v_q v_k (\delta_{qk} \delta_{kq} + \delta_{kq} \underbrace{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger}_{a_{k,\uparrow}^\dagger a_{q,\uparrow}^\dagger}) |0\rangle \\
&= \langle 0| \prod_q \prod_k \xi_q v_q v_k \delta_{qk} \delta_{kq} |0\rangle \\
&= \langle 0| \prod_k \xi_k v_k^2 |0\rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\langle\phi|T|\phi\rangle = \sum_k \xi_k v_k^2 \tag{88}$$

7. Apéndice B

Hallando

$$\begin{aligned}
[\tilde{H}_k, a_{k\uparrow}^\dagger] &= \tilde{H}_k a_{k\uparrow}^\dagger - a_{k\uparrow}^\dagger \tilde{H}_k \\
&= \xi_k (a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow} a_{k\uparrow}^\dagger + a_{k\downarrow}^\dagger a_{k\downarrow} a_{k\uparrow}^\dagger) - \Delta_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger a_{k\uparrow}^\dagger - \Delta_k^* a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} a_{k\uparrow}^\dagger \\
&\quad - \xi_k (a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow} + a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\downarrow}^\dagger a_{k\downarrow}) + \Delta_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow}^\dagger + \Delta_k^* a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} \\
&= \xi_k (a_{k\uparrow}^\dagger \underbrace{a_{k\uparrow} a_{k\uparrow}^\dagger}_{1} - a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow}) - \Delta_k^* (a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow} a_{k\uparrow}^\dagger + \underbrace{a_{k\uparrow}^\dagger a_{-k\downarrow} a_{k\uparrow}}_{1}) \\
&= \xi_k a_{k\uparrow}^\dagger - \xi_k a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow}^\dagger a_{k\uparrow} - \Delta_k^* a_{-k\downarrow}
\end{aligned}$$

Pero por el principio de Pauli, no puede haber dos electrones ocupando el mismo estado, por ello el segundo término es cero. Entonces obtenemos:

$$[\tilde{H}_k, a_{k\uparrow}^\dagger] = \xi_k a_{k\uparrow}^\dagger - \Delta_k^* a_{-k\downarrow} \quad (89)$$

Análogamente obtenemos:

$$[\tilde{H}_k, a_{-k\downarrow}] = -\xi_k a_{k\downarrow} - \Delta_k a_{k\uparrow}^\dagger \quad (90)$$

8. Apéndice C

La ecuación (30) con las aproximaciones (31) y (32) realizadas se transforma en

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{2} \sum_l \frac{1}{(\xi_l^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (91)$$

Para pasar del caso discreto al continuo, debemos cambiar la suma por una integral, es decir

$$\sum_k F(k) \Delta k = \int F(k) dk$$

En nuestro caso

$$\sum_l \frac{\Delta l}{(\xi_l^2 + \Delta^2)^{1/2}} = \int \frac{dl}{(\xi_l^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (92)$$

pero como

$$d\xi = \xi' dl$$

Obtenemos

$$\sum_l \frac{\Delta l}{(\xi_l^2 + \Delta^2)^{1/2}} = \int \frac{d\xi}{\xi'(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (93)$$

Además, la densidad de estados, esta definido como

$$N(\xi) = \frac{dl}{d\xi} = 1/\xi' \quad (94)$$

Entonces la ecuación (90) tiene la forma

$$\frac{1}{N(\xi)V} = \frac{1}{2} \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (95)$$

y usando la simetría de los valores $\pm\xi$, se obtiene

$$\frac{1}{N(0)V} = \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\xi}{(\xi^2 + \Delta^2)^{1/2}} \quad (96)$$

9. Apéndice D

Sea la ecuación (23)

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = 2 \sum_k v_k^2 \xi_k + \sum_{k,l} V_{k,l} u_k v_k u_l v_l \quad (97)$$

Reemplazando las siguientes expresiones conocidas, en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} \Delta_k &= - \sum_l V_{k,l} u_l v_l \\ 2u_k v_k &= \frac{\Delta_k}{E_k} \\ v_k^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_k}{E_k} \right) \end{aligned}$$

Obtenemos

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = \sum_k \xi_k \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right) - \sum_k \frac{\Delta_k^2}{2E_k} \quad (98)$$

con $\Delta_k = \Delta$

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = \sum_k \xi_k \left(1 + \frac{\xi_k}{E_k} \right) - \frac{\Delta^2}{V} \quad (99)$$

Ahora pasando al caso continuo (ver Apéndice C), obtenemos

$$\langle \phi | H' | \phi \rangle = 2 \sum_{k < k_F} \xi_k + \frac{\Delta^2}{V} - \frac{N(0)\Delta^2}{2} \quad (100)$$

Referencias

- [1] M.Tinkham, Introduction to superconductivity
- [2] G.Rickayzen, Theory of superconductivity
- [3] B.D.Josephson, Physics Letters 1,251(1962)
- [4] R.D.Parks, Superconductivity v1
- [5] V.Ambegaokar,A.Baratoff, Phys.Rev Letters 10,486(1963)
- [6] A.Barone,G.Paternó, Physics and Applications of the Josephson Effect
- [7] Curt A.Moyer, Numerov extension for Schrödinger equation in one dimension
- [8] I.Giaver,Phys.Rev.Letters 5,147,464 (1960)
- [9] M.H.Cohen, L.M.Falicov y J.C Phillips,Phys.Rev.Letters 8,316 (1962)