UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Gradiente Generalizado

por

Joseph Wilmer Simpe Laura

Tesís para Optar el
Título Profesional de:
Licenciado en Matemática

Prof. William Carlos Echegaray Castillo
Asesor

Lima, Marzo de 2002.

Dedicatoria

Este trabajo está dedicado a mi Madre Recilia y a mi Padre Roberto, quienes gracias a su apoyo, paciencia y consideraciones, lo pude llavar a cabo.

También va dedicado a mis queridos hermanos Sharon, Carmen y Dante, de quienes siempre sentí su ayuda, a pesar de las circunstancias.

Agradecimiento

Quisiera agradecer por este Trabajo a mi Profesor Asesor Echegaray Castillo, William, quien gracias a sus conocimientos y experiencias en el tema, supo guiarme de manera adecuada hasta la conclusión del mismo.

También, aprovecho la ocasión para hacer llegar mi reconocimiento a todos los Profesores y Amigos de la Facultad de Ciencias que en algún momento consulte y me brindaron su apoyo para con mi trabajo. Les estoy muy agradecido.

Indice General

Resumen

Lo que se pretende establecer aquí, es que el estudio del Gradiente Generalizado sea dirigido para condiciones no diferenciables, para ésto, se hace un adecuado desarrollo del Gradiente Generalizado en sociedad con otras herramientas, obteniéndose así el propósito deseado.

Este estudio se desarrolla en general en un espacio de Banach, se muestra en dimensión finita y se presenta una Aplicación, ejemplos y gráficos ilustrativos para su mejor entendimiento.

Introducción

En el presente trabajo se desarrollará la Teoría y el Cálculo del Gradiente Generalizado.

A partir de la Derivada Direccional y del Gradiente, que son términos ya conocidos, se pretende generalizar los mismos bajo ciertas condiciones. Comenzando con el caso de una función Localmente Lipschitz de valor real definida en un espacio de Banach. Luego cuando la función es continuamente diferenciable el Gradiente Generalizado será la derivada, o cuando la función es convexa se le asociará al subdiferencial del análisis convexo.

Se establece una serie de Cálculos Básicos que serán importantes para el desarrollo de los siguientes Capítulos.

También se desarrollará una Teoría Geométrica Asociada de Conos Tangentes y Normales, y veremos la relación entre estos conceptos y su contraparte en el caso no diferenciable y en análisis convexo. Además trataremos una Definición Extendida del Gradiente Generalizado a partir de funciones Lipschitz o No Lipschitz.

Después veremos al Gradiente Generalizado y los Conceptos Geométricos Asociados, desarrollados en un espacio de dimensión finita.

Finalmente, ilustraremos el tema mediante una Aplicación en Optimización y no Diferenciabilidad (siendo el gradiente generalizado una alternativa para condiciones no diferenciables).

Capítulo 1

Conceptos Preliminares

Consideremos el Espacio de Banach X cuyos elementos x serán vectores o puntos, cuya norma se denotará por $\| x \|$, y cuya bola unitaria es denotada por B.

Se establecerá la Condición Lipschitz de una función f. Luego se define la Derivada Direccional Generalizada de f, dando lugar al Gradiente Generalizado de f. Es aquí donde presentan una relación directa, la Función Soporte. También veremos los casos de Derivadas y Subderivadas.

1.1 La Condición Lipschitz

Definición 1.1.1 *Sea $Y \subset X$ un subconjunto de X. Una función $f : Y \to \mathbb{R}$ se dice que satisface la condición Lipschitz (en Y), si para algún $K \geq 0$, se tiene*

$$| f(y) - f(z) | \leq K \| y - z \|$$

$\forall\, y, z \in Y$; ésta es referida como una condición Lipschitz de rango K.

Definición 1.1.2 *Se dice que f es Lipschitz (de rango K) próximo a x si, para algún $\varepsilon > 0$, f satisface la condición Lipschitz (de rango K) en el conjunto $x + \varepsilon B$ (es decir, dentro de una ε-vecindad de x).*

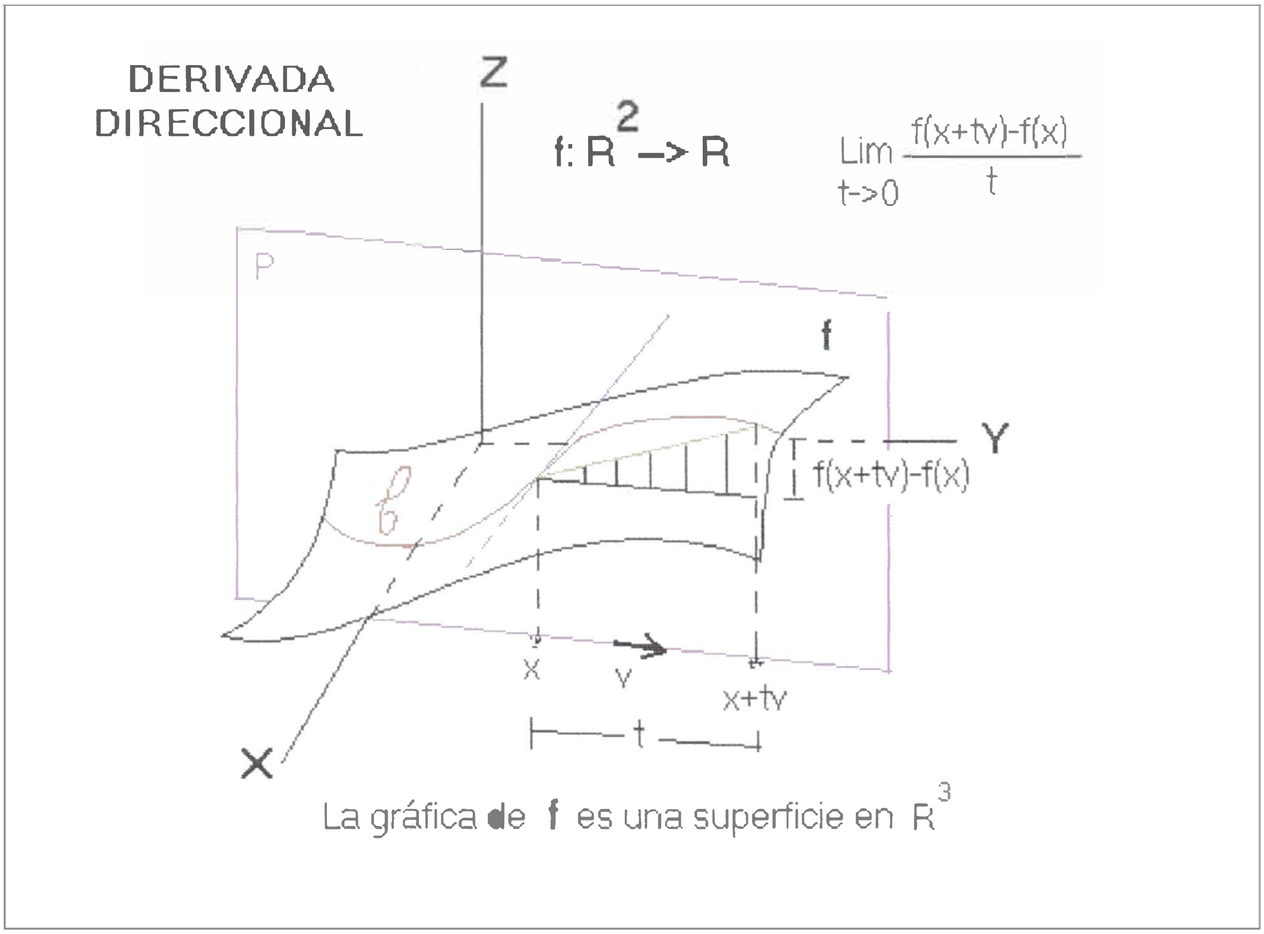
1.2 La Derivada Direccional Generalizada

Definición 1.2.1 *Sea f Lipschitz próximo a x, sea $v \in X$ cualquier otro vector. La Derivada Direccional Generalizada de f en x en la dirección v, denotada por $f^{\circ}(x; v)$, es definida de la siguiente manera:*

$$f^{\circ}(x; v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}$$

donde $y \in X$, $t > 0$.

A continuación mostraremos un esquema para $X = \mathbb{R}^2$.



La utilidad de f° es dada en las siguientes propiedades básicas.

Proposición 1.2.1 *Sea f Lipschitz de rango K próximo a x, entonces:*

(a) *La función $v \mapsto f^{\circ}(x; v)$ es finita, positivamente homogénea y subaditiva en X, y satisface $\mid f^{\circ}(x; v) \mid \leq K \parallel v \parallel$* $\qquad (\alpha)$

(b) *$f^o(x;v)$ es semicontinua superior con respecto de (x,v) y, con respecto de v es Lipschitz de rango K en X.*

(c) $f^o(x;-v) = (-f)^o(x;v)$.

Pruebas.-

(a) • Veamos que $f^o(x;v)$ es finito y que satisface la expresión (α).

De la condición Lipschitz $\mid f(z) - f(y) \mid\leq K \parallel z - y \parallel \quad \forall z, y \in X$.

Sea $z = y + tv \in X$ donde $t > 0$ y $v \in X$, reemplazando tenemos

$\Longrightarrow \mid f(y+tv) - f(y) \mid\leq K \parallel y + tv - y \parallel$

$\Longrightarrow \mid f(y+tv) - f(y) \mid\leq K \mid t \mid\parallel v \parallel$

$$\Longrightarrow -K \parallel v \parallel\leq \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq K \parallel v \parallel$$

$$\Longrightarrow -K \parallel v \parallel\leq \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq K \parallel v \parallel$$

$\Longrightarrow -K \parallel v \parallel\leq f^o(x;v) \leq K \parallel v \parallel$

$\Longrightarrow f^o(x;v)$ es finito respecto de v y $\mid f^o(x;v) \mid\leq K \parallel v \parallel$.

• Veamos que $f^o(x;v)$ es Positivamente Homogénea en X.

Es decir probaremos que $f^o(x;\lambda v) = \lambda f^o(x;v)\ \forall \lambda > 0$.

$$f^o(x;\lambda v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+t\lambda v) - f(y)}{t} = \lambda \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+t\lambda v) - f(y)}{\lambda t},$$

luego $t\lambda \downarrow 0$, sea $m = t\lambda$

$$\Longrightarrow f^o(x;\lambda v) = \lambda \limsup_{\substack{y\to x\\ m\downarrow 0}} \frac{f(y+mv) - f(y)}{m} = \lambda f^o(x;v)\ \forall \lambda > 0.$$

$\Longrightarrow f^o(x;v)$ es positiva homogénea en X.

• Veamos que $f^o(x;v)$ es Subaditividad en X.

Sabemos que

$$\frac{f(y+tv+tw) - f(y)}{t} = \frac{f(y+tv+tw) - f(y+tw)}{t} + \frac{f(y+tw) - f(y)}{t}$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \left(\frac{f(y+tv+tw) - f(y)}{t}\right) =$$

$$\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \left(\frac{f(y+tv+tw) - f(y+tw)}{t} + \frac{f(y+tw) - f(y)}{t}\right) \leq$$

$$\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \left(\frac{f(y+tv+tw) - f(y+tw)}{t}\right) + \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \left(\frac{f(y+tw) - f(y)}{t}\right)$$

$\Longrightarrow f^o(x;v+w) \leq f^o(x;v) + f^o(x;w)$.

(b) • <u>Veamos que $f^o(x;v)$ es semicontinua superior con respecto de (x,v).</u>

Sean $\{x_i\}$ y $\{v_i\}$ sucesiones arbitrarias tales que $x_i \to x$ y $v_i \to v$,

luego $\forall\, i$ por definición de límite superior

$$\exists \{y_i\} \subset X \text{ y } \exists \{t_i\} \subset \langle 0,+\infty\rangle \,/\, ||y_i - x_i|| + t_i < \frac{1}{i} \tag{θ}$$

Ahora considerando el mismo índice i,

luego sabemos que $f^o(x_i;v_i) = \limsup\limits_{\substack{y_i \to x_i \\ t_i \downarrow 0}} \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} \iff$

$\forall \varepsilon > 0,\ \forall m \in \mathbb{N},\ \exists\, i > m \,/\, f^o(x_i;v_i) - \varepsilon < \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i}$.

Elijo $\varepsilon = \dfrac{1}{i} \Longrightarrow f^o(x_i;v_i) - \dfrac{1}{i} < \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} =$

$\dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i}$,

podemos acotar el segundo sumando del último término

$\Longrightarrow | f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v) | \leq K \parallel y_i + t_i v_i - y_i - t_i v \parallel = K \mid t_i \mid \parallel v_i - v \parallel$

$\Longrightarrow \left| \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i} \right| \leq K \parallel v_i - v \parallel$

$\Longrightarrow f^o(x_i;v_i) - \dfrac{1}{i} < \dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i} \leq$

$\dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \left| \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i + t_i v)}{t_i} \right| \leq$

$\dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + K \parallel v_i - v \parallel$

$\Longrightarrow f^o(x_i;v_i) - \dfrac{1}{i} \leq \dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + K||v_i - v||$,

cuando $i \to \infty$, de (θ) se tiene que $y_i \to x_i \to x$, y $t_i \downarrow 0$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{i\to\infty} \left(f^o(x_i;v_i) - \dfrac{1}{i} \right) \leq \limsup\limits_{i\to\infty} \dfrac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} + \limsup\limits_{i\to\infty} K||v_i - v||$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{i\to\infty} f^o(x_i;v_i) \leq f^o(x;v)$

$\Longrightarrow f^o$ es semicontinua superior con respecto de (x,v).

• <u>Veamos que $f^o(x;v)$ es Lipschitz con respecto a v de rango K en X.</u>

Sean $u, w \in X$ y $t > 0$, además como f es Lipschitz

$\Longrightarrow | f(y + tu) - f(y + tw) | \leq K \parallel y + tu - y - tw \parallel$

$\Longrightarrow | f(y + tu) - f(y + tw) | \leq K \parallel u - w \parallel t$

$$\Longrightarrow -K \parallel u - w \parallel t \leq f(y + tu) - f(y + tw) \leq K \parallel u - w \parallel t \tag{ω}$$

tomando la segunda desigualdad de la expresión (ω), tenemos

$\Longrightarrow f(y + tu) - f(y) \leq f(y + tw) - f(y) + K \parallel u - w \parallel t$, dividiendo todo por t y tomando límite superior, tenemos

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tu)-f(y)}{t} \leq \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tw)-f(y)}{t} + K \parallel u-w \parallel$$

$$\Longrightarrow f^o(x;u) \leq f^o(x;w) + K \parallel u-w \parallel \qquad (\phi)$$

Ahora tomando la primera desigualdad de la expresión (ω) y procediendo de manera análoga a lo anterior, tenemos

$$\Longrightarrow -K \parallel u-w \parallel + f^o(x;w) \leq f^o(x;u) \qquad (\chi)$$

$$\Longrightarrow \text{De } (\phi) \text{ y } (\chi) \Longrightarrow \mid f^o(x;u) - f^o(x;w) \mid \leq K \parallel u-w \parallel$$

$\Longrightarrow f^o(x;v)$ es Lipschitz con respecto de v de rango K en X.

(c) Sabemos que

$$f^o(x;-v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+t(-v))-f(y)}{t} = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y-tv)-f(y)}{t},$$

sea $u = y - tv$, así

$$f^o(x;-v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(u)-f(u+tv)}{t} = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{(-f)(u+tv)-(-f)(u)}{t},$$

como $y = u + tv$, $y \to x$ y $t \downarrow 0$, $\Longrightarrow u \to x$, luego

$$f^o(x;-v) = \limsup_{\substack{u\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{(-f)(u+tv)-(-f)(u)}{t} = (-f)^o(x;v)$$

$$\Longrightarrow f^o(x;-v) = (-f)^o(x;v). \qquad \square$$

1.3 El Gradiente Generalizado

Según el Teorema de Hahn-Banach, toda funcional positivamente homogénea y subaditiva en X es mayor que alguna funcional lineal en X.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Hahn-Banach (Forma Analítica))

Sea X un espacio vectorial real,

Sea $p : X \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal que satisface:

- $p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall\, x, y \in X,\ \forall\, \lambda > 0$
- $p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\, x, y \in X.$

Sea $F \subset X$ un subespacio vectorial de X,

Sea $L : F \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $L(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in F$, *Entonces, existe una aplicación lineal* $\overline{L} : X \to \mathbb{R}$ *tal que*

- $\overline{L}(x) = L(x) \ \ \forall x \in F$

- $\overline{L}(x) \leq p(x) \ \ \forall x \in X.$

De lo establecido en la Proposición $1.2.1(a)$ y del Teorema 1.3.1 se tiene:

Sea X un espacio vectorial real,

Sea $f^o : X \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal que satisface:

- $f^o(x; \lambda v) = \lambda f^o(x; v) \ \ \forall v \in X, \forall \lambda > 0$

- $f^o(x; v + w) \leq f^o(x; v) + f^o(x; w) \ \ \forall v, w \in X.$

Sea $F \subset X$ un subespacio vectorial de X,

Sea $L : F \to \mathbb{R}$ una aplicación lineal tal que $L(v) \leq f^o(x; v) \ \forall v \in F$,

Entonces, existe una aplicación lineal $\zeta : X \to \mathbb{R}$ tal que

- $\zeta(v) = L(v) \ \ \forall v \in F$

- $\zeta(v) \leq f^o(x; v) \ \ \forall v \in X.$

Lo que nos concierne está en la última desigualdad

$\Longrightarrow \zeta(-v) \leq f^o(x; -v) \ \forall v \in X \Longrightarrow -\zeta(v) \leq f^o(x; -v) \Longrightarrow -f^o(x; -v) \leq \zeta(v)$

$\Longrightarrow -f^o(x; -v) \leq \zeta(v) \leq f^o(x; v)$

$\Longrightarrow (\, |\zeta(v)| \leq |f^o(x; v)| \ \vee \ |\zeta(v)| \leq | - f^o(x; -v)| = |f^o(x; -v)|\,)$

$\Longrightarrow (\, |\zeta(v)| \leq |f^o(x; v)| \ \vee \ |\zeta(-v)| = | - \zeta(v)| = |\zeta(v)| \leq |f^o(x; v)|\,),$

así de ambas alternativas y con la Proposición $1.2.1(a)$

$\Longrightarrow | \zeta(v) | \leq | f^o(x; v) | \leq K \parallel v \parallel \Longrightarrow | \zeta(v) | \leq K \parallel v \parallel \ \ \forall v \in X.$

$\Longrightarrow \zeta$ es acotada en $X \Longrightarrow \zeta$ es continua en $X \Longrightarrow \zeta \in X^*$,

donde X^* es el Espacio Dual de funcionales lineales y continuas en X, además se puede usar $\langle \zeta, v \rangle$ ó $\langle v, \zeta \rangle$ por $\zeta(v)$.

Consideremos la siguiente definición:

Definición 1.3.1 *El Gradiente Generalizado de* f *en* x*, denotado por* $\partial f(x) \subset X^*$*, es un subconjunto de* X^**, dado por*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* \,/\, f^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \ \ \forall v \in X\}.$$

Denotaremos por $\| \zeta \|_*$ *la Norma en* X^**:*

$$\| \zeta \|_* := \sup\{\langle \zeta, v\rangle : \forall v \in X, \| v \| \leq 1\},$$

y B_* *denota la bola unitaria abierta en* X^**.*

A continuación tenemos algunas propiedades básicas del Gradiente Generalizado.

Proposición 1.3.1 *Sea* f *Lipschitz de rango* K *próximo a* x*, entonces:*

(*a*) $\partial f(x) \subset X^*$ *es un subconjunto no vacío, convexo, débil* compacto de* X^* *y* $\| \zeta \|_* \leq K \;\; \forall \zeta \in \partial f(x)$.

(*b*) $\forall v \in X$*, se tiene* $f^o(x; v) = \max\{\langle \zeta, v\rangle : \zeta \in \partial f(x)\}$.

Pruebas.-

(*a*) • Veamos que $\partial f(x) \neq \emptyset$.

De la Definición 1.3.1 $\partial f(x) \subset X^*$, además $f^o(x; v) \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in X$,

haciendo $v = \overline{0} \in X$ se tiene $0 \geq \langle \zeta, \overline{0}\rangle = 0$,

es decir, existe al menos una funcional lineal y continua en X.

$\Longrightarrow \partial f(x) \neq \emptyset \subset X^*$.

• Veamos que $\partial f(x)$ es convexo en X^*.

Es decir $\lambda \partial f(x) + (1-\lambda)\partial f(x) \subset \partial f(x) \;\; \forall \lambda \in [0,1], \;\; \forall g, h \in \partial f(x)$.

Sea $\alpha \in \lambda \partial f(x) + (1-\lambda)\partial f(x) \Longrightarrow \alpha = \lambda g + (1-\lambda)h \,/\, g, h \in \partial f(x)$

$\Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle g, v\rangle \Longrightarrow \lambda f^o(x; v) \geq \lambda \langle g, v\rangle$ (1)

$\Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle h, v\rangle \Longrightarrow (1-\lambda) f^o(x; v) \geq (1-\lambda)\langle h, v\rangle$ (2)

$\Longrightarrow (1) + (2) \;\; f^o(x; v) \geq \lambda\langle g, v\rangle + (1-\lambda)\langle h, v\rangle = \langle \lambda g, v\rangle + \langle (1-\lambda)h, v\rangle$

$\Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \lambda g + (1-\lambda)h, v\rangle \Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \alpha, v\rangle \Longrightarrow \alpha \in \partial f(x)$.

$\Longrightarrow \partial f(x)$ es convexo en X^*.

• Veamos que $\| \zeta \|_* \leq K$.

Sabemos que: $| \zeta(v) | \leq | f^o(x; v) | \leq K \| v \| \;\; \forall v \in X, \zeta \in \partial f(x)$.

$\Longrightarrow | \zeta(v) | \leq K \;\; \forall v \in X, \| v \| \leq 1, \zeta \in \partial f(x)$

$\Longrightarrow -K \leq \langle \zeta, v\rangle \leq K \;\; \forall v \in X, \| v \| \leq 1, \zeta \in \partial f(x)$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, v\rangle\} \leq K \;\; \forall v \in X, \parallel v \parallel \leq 1$

$\Longrightarrow \parallel \zeta \parallel_* \leq K \;\; \forall \zeta \in \partial f(x).$

Finalmente demostraremos que

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* / f^o(x; v) \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in X\}$$

es compacto en la topología débil*.

Demostración.-

Para esta demostración veamos la prueba del siguiente Teorema:

Teorema 1.3.2 (Teorema de Banach Alaoglu)

Sea V un entorno de $\overline{0}$(cero) en un espacio vectorial X y sea

$$K = \{\Lambda \in X^* / \mid \Lambda(x) \mid \leq 1 \;\; \forall x \in V\}$$

entonces K es compacto en la topología débil.*

Prueba.- Para esta prueba usaremos el siguiente Teorema:

Teorema 1.3.3 *Sea V un entorno de $\overline{0}$(cero) en un espacio vectorial X, si $0 < r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < \ldots < r_n \to \infty$ cuando $n \to \infty$, entonces $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$*

Prueba.-

Sólo probaremos que $X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ pues la otra inclusión es evidente.

Sea $x \in X$, consideremos el conjunto de todos los $\alpha / \alpha x \in V$,

donde $\alpha \to \alpha x$ es una aplicación continua de escalares en X,

es claro que $0 \in \{\alpha / \alpha x \in V\}$ pues $\overline{0} \in V$,

$\Longrightarrow \dfrac{1}{r_n} \in \{\alpha / \alpha x \in V\} \; \forall n$ suficientemente grande

$\Longrightarrow \dfrac{1}{r_n} x \in V \Longrightarrow x \in r_n V \;\; \forall n$ suficientemente grande

$\Longrightarrow \forall x \in X, \;\; x \in r_n V$ para algunos $r_n > 0$

$\Longrightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} r_n V$ (Fin de la prueba del Teorema 1.3.3). $\square$

(Un entorno convexo $V \subset X$ será **Absorbente** si:

$\forall x \in X, \;\; x \in tV$ para algún $t = t(x) > 0$).

De la prueba anterior,

los entornos de $\overline{0}$(cero) son absorbentes con la sucesión creciente $\{r_i\} \, / \, r_i > 0$

$\Longrightarrow \exists\, \delta(x) < \infty \, / \, x \in \delta(x)V, \; \forall\, x \in X \Longrightarrow \dfrac{x}{\delta(x)} \in V$

$\Longrightarrow$ Del conjunto K $\left|\Lambda\left(\dfrac{x}{\delta(x)}\right)\right| \leq 1 \Longrightarrow \mid \Lambda(x) \mid \leq \delta(x) \;\; \forall x \in X, \;\; \Lambda \in K.$

El conjunto $D_x = \{\alpha \, / \, \mid \alpha \mid \leq \delta(x)\}$ será compacto en $\mathbb{R}$?

Veamos que D_x es Cerrado.

Como $\quad D_x = \{\alpha/0 \leq \mid \alpha \mid \leq \delta(x)\} = \{\alpha \, / \, \mid \alpha \mid \in [0, \delta(x)]\}$,

donde $\delta(x)$ es acotado por la absorbencia, $\mid \quad \mid$ (módulo de α) es una función continua y $[0, \delta(x)]$ es cerrado en $\mathbb{R}$

$\Longrightarrow D_x = \{\alpha \, / \, \mid \alpha \mid \in [0, \delta(x)]\} = \mid \quad \mid^{-1} ([0, \delta(x)])$ es cerrado en $\mathbb{R}$.

Como D_x es cerrado en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}$ es completo

$\Longrightarrow D_x$ es completo en $\mathbb{R}$.

$\Longrightarrow D_x$ es secuencialmente compacto en $\mathbb{R}$

(pues toda sucesión de D_x completa tiene una subsucesión que converge)

$\Longrightarrow D_x$ es compacto en $\mathbb{R}$.

Retomando la demostración del Teorema de Banach Alaoglu:

Sea τ la topología producto del producto cartesiano P de todos los conjuntos D_x en el que existe un factor $\forall\, x \in X$, es decir $\quad P = \prod_{x \in X} D_x$.

Como cada D_x es compacto $\Longrightarrow$ Por el Teorema de Tychonoff P es compacto.

Ahora consideremos los elementos de P como funciones lineales f definidas en X, tal que:

$$f : X \to D_x$$

$$x \;\mapsto f(x)$$

como $f(x) \in D_x \Longrightarrow \exists\, \delta(x) \, / \, \mid f(x) \mid \leq \delta(x) \;\; \forall\, x \in X$,

además:

$$\delta : X \to \mathbb{R}$$

$$x \;\mapsto \delta(x) > 0$$

Como $\quad K = \{\Lambda \in X^* \, / \, \mid \Lambda(x) \mid \leq 1 \;\; \forall\, x \in V\}$

Veamos que $K \subset X^* \cap P$.

Sea $\Lambda \in K \Longrightarrow \Lambda \in X^*/ \mid \Lambda(x) \mid \leq 1 \;\; \forall x \in V$,

como los entornos de $\overline{0}$ son absorbentes

$\Longrightarrow \exists\, \delta(x) > 0/ \mid \Lambda(x) \mid \leq \delta(x) \;\; \forall x \in X$

$\Longrightarrow \Lambda \in P \Longrightarrow \Lambda \in X^* \cap P \Longrightarrow K \subset X^* \cap P$.

Se dice que K hereda dos topologías:

Una de X^* (la topología débil* a la que se refiere las conclusiones del Teorema de Banach Alaoglu) y la otra τ procedente de P. A continuación veremos que:

- (a) Ambas topologías coinciden en K.
- (b) K es un subconjunto cerrado de P.

• Veamos (a):

Tomemos un $\Lambda_0 \in K$ fijo, ahora elejimos $x_i \in X$ para $1 \leq i \leq n$ y $\mu > 0$.

Se define ω_1 y ω_2 así:

$\omega_1 = \{\Lambda \in X^*/ \mid \Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$

$\omega_2 = \{f \in P/ \mid f(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$

donde n, x_i, μ tienen valores admisibles; el conjunto ω_1 constituye una base de la topología débil* de X^* en Λ_0 y el conjunto ω_2 constituye una base de la topología producto τ de P en Λ_0.

Probaremos que $\omega_1 \cap K = \omega_2 \cap K$.

$\omega_1 \cap K \subset \omega_2 \cap K$.

Sea $\Lambda \in \omega_1 \cap K \Longrightarrow \Lambda \in \omega_1 \Longrightarrow \Lambda \in X^*/ \mid \Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu$ para $1 \leq i \leq n$,

también $\Lambda \in K$, como $K \subset P \cap X^* \Longrightarrow \Lambda \in P$, luego

$\Lambda \in P/ \mid \Lambda(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu$ para $1 \leq i \leq n \Longrightarrow \Lambda \in \omega_2 \Longrightarrow \Lambda \in \omega_2 \cap K$.

$\omega_2 \cap K \subset \omega_1 \cap K$.

Sea $L \in \omega_2 \cap K \Longrightarrow L \in \omega_2 \Longrightarrow L \in P/ \mid L(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu$ para $1 \leq i \leq n$,

también $L \in K$, como $K \subset P \cap X^* \Longrightarrow L \in X^*$, luego

$L \in X^*/ \mid L(x_i) - \Lambda_0(x_i) \mid < \mu$ para $1 \leq i \leq n \Longrightarrow L \in \omega_1 \Longrightarrow L \in \omega_1 \cap K$.

$\Longrightarrow$ Ambas topologías coinciden en K.

• Veamos (b):

Sea $f_0 \in \overline{K} \Longrightarrow \forall U \in \tau, f_0 \in U : U \cap K \neq \emptyset$

Tomemos $x, y \in X$; α, β y ε escalares arbitrarios.

Sea $U = \{f \in P / \mid f - f_0 \mid < \varepsilon, en\ \ x, y, \alpha x + \beta y\}$ es un entorno de f_0 en τ,

como $f \in P \Longrightarrow \exists\, \delta(x) > 0 / \mid f(x) \mid \leq \delta(x)\ \ \forall x \in X$,

como f es lineal $\Longrightarrow \left| f\left(\dfrac{x}{\delta(x)}\right)\right| \leq 1\ \ \forall x \in X \Longrightarrow \mid f(x^1) \mid \leq 1\ \ \forall x^1 \in X$,

sea $x^1 = \dfrac{x}{||x||}$ / $\left| f\left(\dfrac{x}{||x||}\right)\right| \leq 1 \Longrightarrow |f(x)| \leq ||x||\ \forall x \in X$

$\Longrightarrow f$ es continua en X. Y como f también es lineal en $X \Longrightarrow f \in X^*$.

Así como $\mid f(x^1) \mid \leq 1\ \ \forall x^1 \in X \Longrightarrow \mid f(x) \mid \leq 1\ \ \forall x \in V$, y como $f \in X^*$

$\Longrightarrow f \in K$.

También sabemos que

$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) =$

$f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y) + \alpha f(x) - \alpha f_0(x) + \beta f(y) - \beta f_0(y) =$

$f_0(\alpha x + \beta y) - f(\alpha x + \beta y) + \alpha(f(x) - f_0(x)) + \beta(f(y) - f_0(y))$,

además del entorno U se tiene

$\mid (f - f_0)(x) \mid < \varepsilon \Longleftrightarrow \mid \alpha(f - f_0)(x) \mid < \mid \alpha \mid \varepsilon$,

$\mid (f - f_0)(y) \mid < \varepsilon \Longleftrightarrow \mid \alpha(f - f_0)(y) \mid < \mid \alpha \mid \varepsilon$ y

$\mid (f - f_0)(\alpha x + \beta y) \mid < \varepsilon$

$\Longrightarrow 0 \leq \mid f_0(\alpha x + \beta y) - \alpha f_0(x) - \beta f_0(y) \mid =$

$\mid (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) + \alpha(f - f_0)(x) + \beta(f - f_0)(y) \mid \leq$

$\mid (f_0 - f)(\alpha x + \beta y) \mid + \mid \alpha(f - f_0)(x) \mid + \mid \beta(f - f_0)(y) \mid < \mid \alpha \mid \varepsilon + \mid \beta \mid \varepsilon + \varepsilon$,

como $\varepsilon > 0$ es arbitrario $\Longrightarrow f_0(\alpha x + \beta y) = \alpha f_0(x) + \beta f_0(y)$.

$\Longrightarrow f_0$ es lineal en X.

Luego se tiene que $\forall x \in V,\ \exists f \in K /\ \mid f(x) - f_0(x) \mid < \varepsilon$,

además $\mid f(x) \mid < 1\ \ \forall x \in V$

$\Longrightarrow \mid f_0(x) \mid = \mid f(x) + f_0(x) - f(x) \mid \leq \mid f(x) \mid + \mid f_0(x) - f(x) \mid < 1 + \varepsilon$

$\Longrightarrow \mid f_0(x) \mid < 1 + \varepsilon\ \ \forall \varepsilon > 0 \qquad (I)$

Demostraremos que $\mid f_0(x) \mid \leq 1$.

Supongamos que $\mid f_0(x) \mid > 1$,

como (I) se cumple $\forall \varepsilon > 0$, tomaremos en particular $\varepsilon = \mid f_0(x) \mid -1 > 0$, luego reemplazando en (I) tenemos $\mid f_0(x) \mid < 1 + \mid f_0(x) \mid -1$. Contradicción.

$\Longrightarrow \mid f_0(x) \mid \leq 1 \ \forall x \in V$ (como V es absorbente, f_0 es continua) $\Longrightarrow f_0 \in K$

$\Longrightarrow K$ es cerrado en P.

$\Longrightarrow K = \{\Lambda \in X^* / \mid \Lambda(x) \mid \leq 1 \ \forall x \in V\}$ es compacto en la topología débil*.

(Fin de la prueba del Teorema 1.3.2). □

Ahora adaptaremos K al conjunto que nos piden demostrar que sea compacto en la topología débil*:

Sea $\Lambda = \zeta$ y $x = v \Longrightarrow K = \{\zeta \in X^* / \mid \zeta(v) \mid \leq 1 \ \forall v \in V\}$,

donde $\mid \zeta(v) \mid = \mid \langle \zeta, v \rangle \mid \leq \mid f^o(x; v) \mid \leq K \parallel v \parallel = K \parallel v - \overline{0} \parallel$.

Como V es un entorno de $\overline{0}$ y con una sucesión creciente $\Longrightarrow V$ es absorbente, es decir $\forall v \in X$ podemos asociarle el número $\mid f^o(x; v) \mid < \infty$,

como ζ es lineal en $X \Longrightarrow \left| \left\langle \zeta, \dfrac{v}{\mid f^o(x; v) \mid} \right\rangle \right| \leq 1$ con $f^o(x; v) \neq 0$

$\Longrightarrow K = \left\{ \zeta \in X^* / \left| \left\langle \zeta, \dfrac{v}{\mid f^o(x; v) \mid} \right\rangle \right| \leq 1 \ \forall v \in X \right\}$

$\Longrightarrow K = \{\zeta \in X^* / \mid \langle \zeta, v \rangle \mid \leq \mid f^o(x; v) \mid \ \forall v \in X\}$,

Si $f^o(x; v) = 0$ la expresión sigue siendo valida

$\Longrightarrow K = \{\zeta \in X^* / \mid f^o(x; v) \mid \geq \mid \langle \zeta, v \rangle \mid \ \forall v \in X\}$,

ahora de acuerdo al Teorema de Hahn Banach

$\Longrightarrow K = \{\zeta \in X^* / f^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \ \forall v \in X\} = \partial f(x)$

es compacto en la topología débil*.

(b) Se sabe que $\langle \zeta, v \rangle \leq f^o(x; v) \ \forall v \in X, \ \ \zeta \in \partial f(x)$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\} \leq f^o(x; v) \Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, v \rangle\} \in \langle -\infty, f^o(x; v)]$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\} = \max\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\} \leq f^o(x; v)$,

si tuvieramos la desigualdad estricta sería falso, pues el máximo de $\langle \zeta, v \rangle$, sería superado por algún $\langle \zeta^*, v \rangle$ que determina $f^o(x; v)$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\} = \max\{\langle \zeta, v \rangle : \zeta \in \partial f(x)\} = f^o(x; v)$. □

Ejemplo.-

Calcularemos el gradiente generalizado de la función $f(x) = |x|$ en $X = \mathbb{R}$, la cual es Lipschitz por la desigualdad triangular ($\mid f(x) - f(y) \mid = \mid \mid x \mid - \mid y \mid \mid \leq \mid x - y \mid$).

Si $\underline{x > 0}$

$$f^{\circ}(x;v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{|\, y + tv \,| - |\, y \,|}{t} = \begin{cases} v & si \;\; v \geq 0 \\ v & si \;\; v < 0 \wedge y + tv \geq 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow f^{o}(x;v) = v \Longrightarrow \partial f(x) = \{\zeta \,/\, v \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v\} \Longrightarrow \partial f(x) = \{1\}.$

Si $\underline{x < 0}$

$$f^{\circ}(x;v) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{|\, y + tv \,| - |\, y \,|}{t} = \begin{cases} -v & si \;\; v \geq 0 \wedge y + tv < 0 \\ -v & si \;\; v < 0 \end{cases}$$

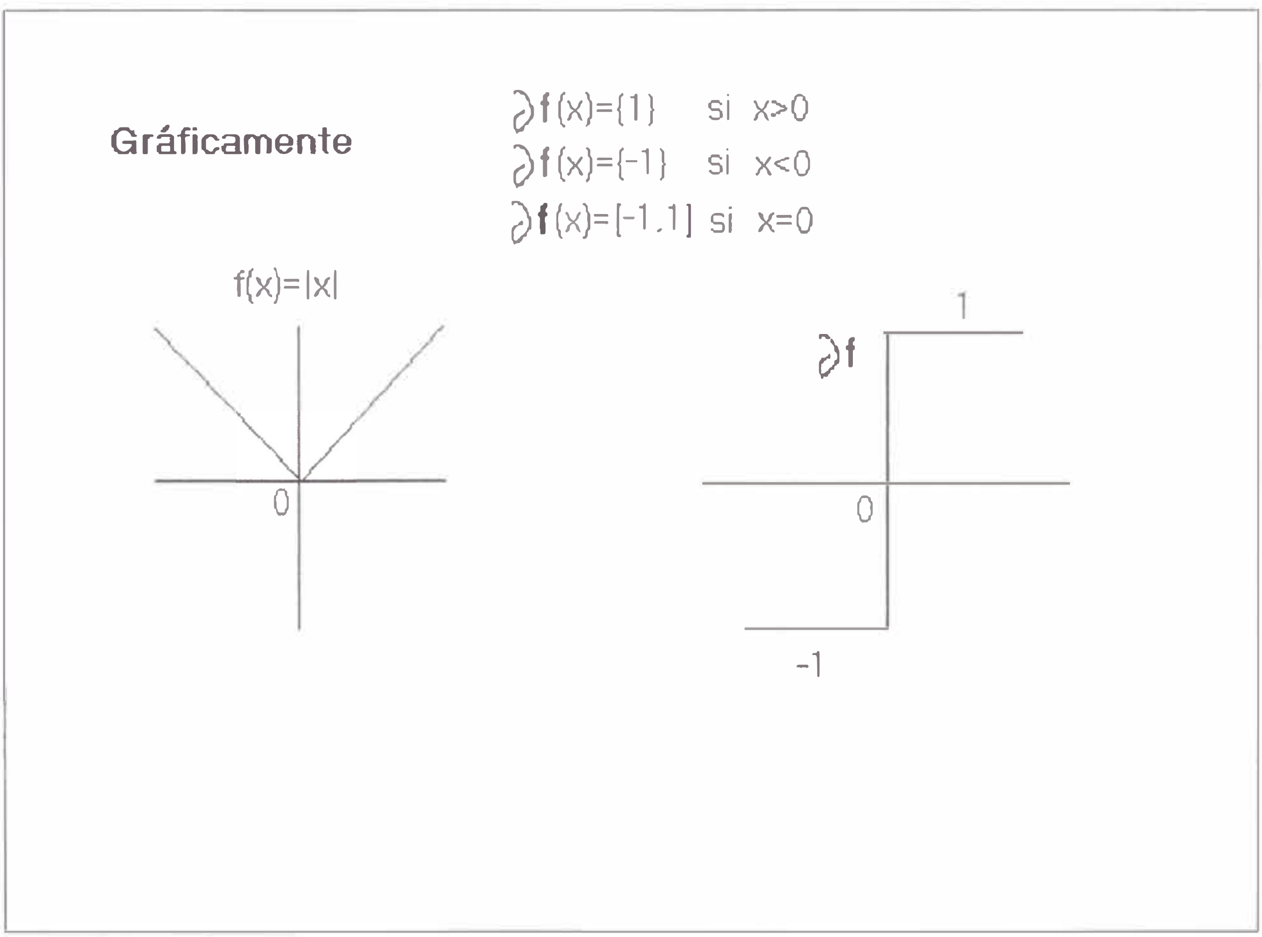
$\Longrightarrow f^{o}(x;v) = -v \Longrightarrow \partial f(x) = \{\zeta \,/\, (-v) \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v\} \Longrightarrow \partial f(x) = \{-1\}.$

Si $\underline{x = 0}$

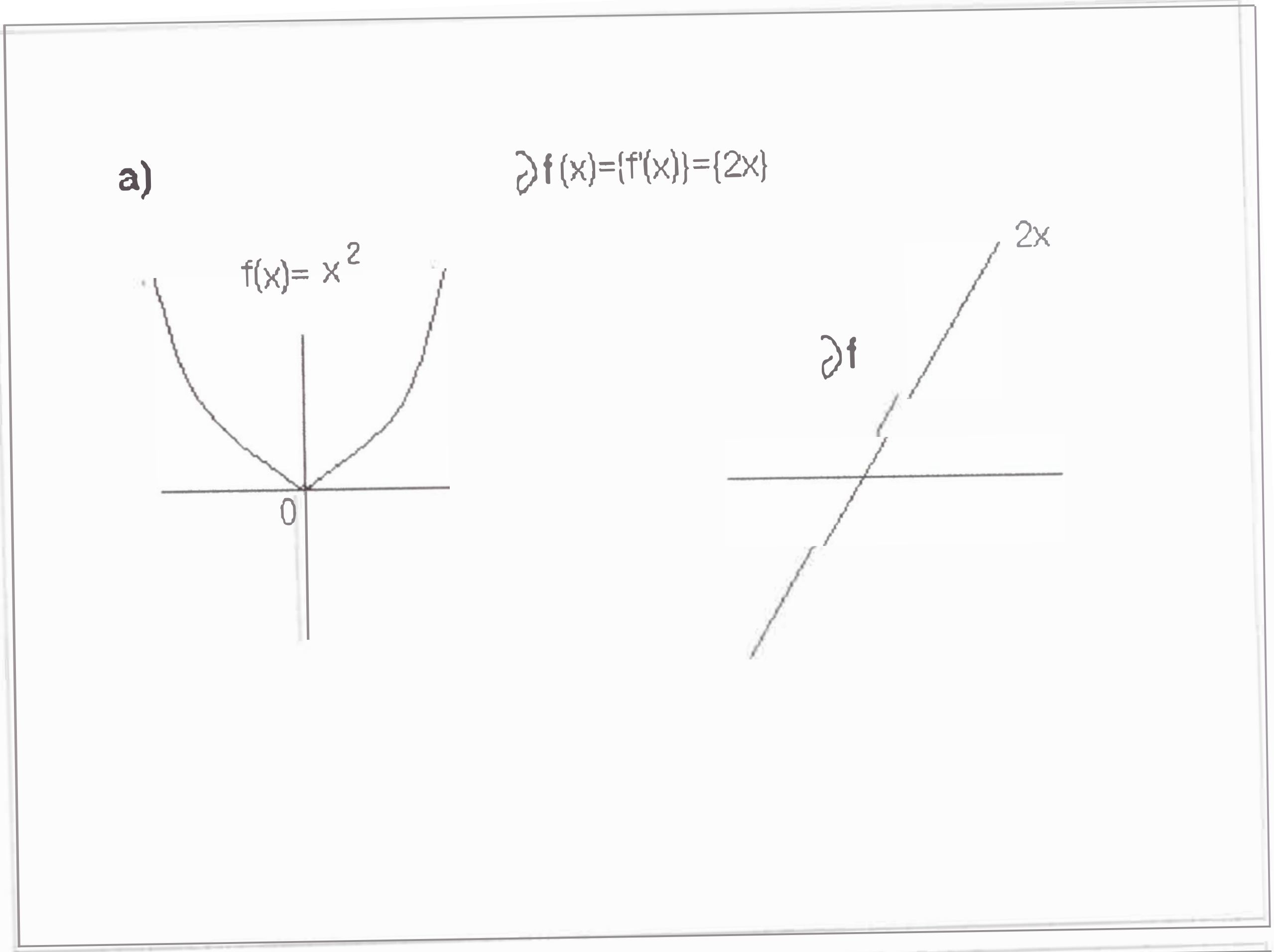
$$f^{o}(0;v) = \limsup_{\substack{y \to 0 \\ t \downarrow 0}} \frac{|\, y + tv \,| - |\, y \,|}{t} = \begin{cases} v & si \;\; v \geq 0 \\ -v & si \;\; v < 0 \end{cases}$$

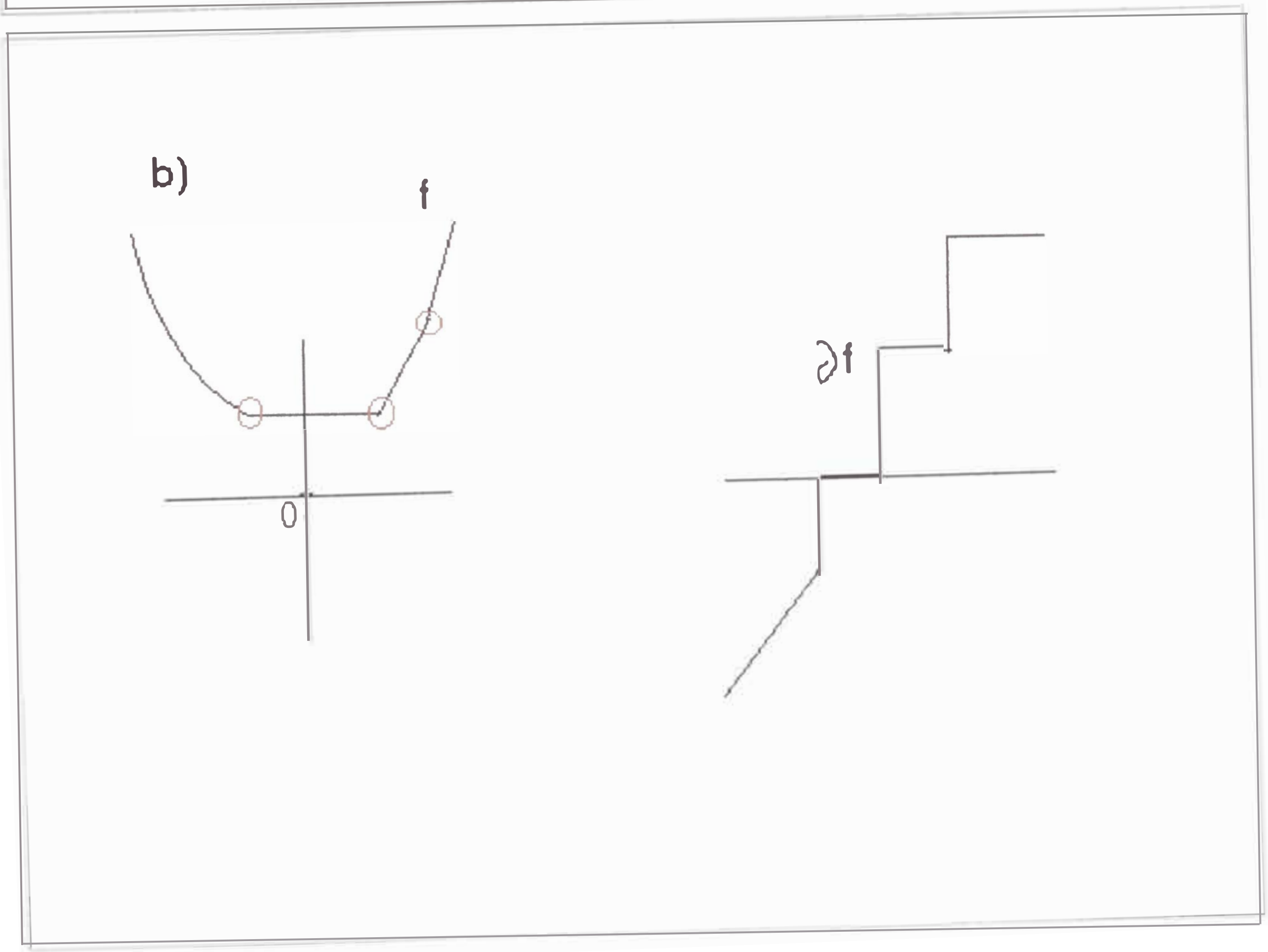
$\Longrightarrow f^{o}(0;v) = |v| \Longrightarrow \partial f(0) = \{\zeta \,/\, |v| \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v\}$

$\Longrightarrow \partial f(0) = [-1, 1].$



En otros dos casos tenemos:


a)
∂f(x)={f'(x)}={2x}
f(x)= x²
0
2x
∂f


b)
f
0
∂f

1.4 Funciones Soporte

Se nota claramente que la Proposición 1.3.1 es equivalente a conocer $\partial f(x)$ o la función $f^o(x;.)$, cada una es obtenida de la otra. Ahora caracterizaremos los conjuntos convexos cerrados por sus funciones soporte. Veamos dos definiciones:

Definición 1.4.1 *La función Soporte de un conjunto no vacío $C \subset X$, es la función $\sigma_C : X^* \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por:*

$$\sigma_C(\zeta) := \sup\{\langle \zeta, x\rangle : x \in C\}.$$

Definición 1.4.2 *Sea $\Sigma \subset X^*$ un subconjunto de X^*, su función Soporte es definida en X^{**}, si $X \subset X^{**}$ un subconjunto de X^{**}, entonces $\forall\, x \in X$ se tiene:*

$$\sigma_\Sigma(x) := \sup\{\langle \zeta, x\rangle : \zeta \in \Sigma\}.$$

Proposición 1.4.1 *Sean C, $D \subset X$ subconjuntos no vacíos, cerrados, convexos de X, y sean Σ, $\Delta \subset X^*$ subconjuntos no vacíos, débil*-cerrados, convexos de X^*, entonces:*

(a) $C \subset D \Longleftrightarrow \sigma_C(\zeta) \le \sigma_D(\zeta)\ \ \forall\, \zeta \in X^*$.

(b) $\Sigma \subset \Delta \Longleftrightarrow \sigma_\Sigma(x) \le \sigma_\Delta(x)\ \ \forall\, x \in X$.

Pruebas.-

(a) • Veamos que $\sigma_C(\zeta) \le \sigma_D(\zeta)\ \ \forall\, \zeta \in X^*$.

Sea $C \subset D$, luego se presentan dos casos:

1 : Si el $\sup\{\langle \zeta, x\rangle\}$ se da en $x \in C$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, x\rangle : x \in C\} = \sup\{\langle \zeta, x\rangle : x \in D\}$.

2 : Si el $\sup\{\langle \zeta, x\rangle\}$ se da en $x \in D - C$

$\Longrightarrow \sup\{\langle \zeta, x\rangle : x \in C\} < \sup\{\langle \zeta, x\rangle : x \in D\}$.

$\Longrightarrow \sigma_C(\zeta) \le \sigma_D(\zeta)\ \ \forall\, \zeta \in X^*$.

• Veamos que $C \subset D$.

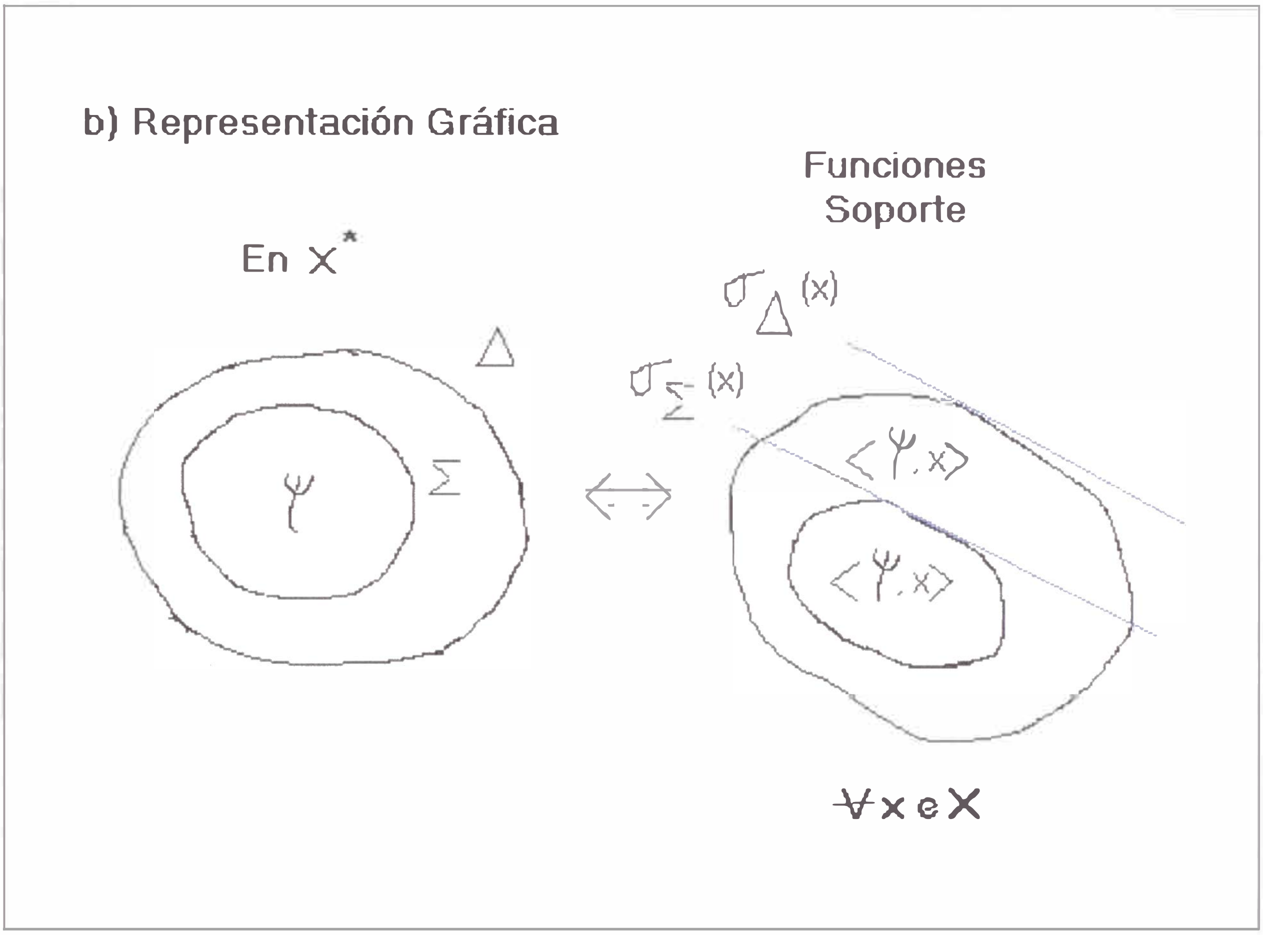
Como $\sigma_C(\zeta) \le \sigma_D(\zeta)\ \ \forall\, \zeta \in X^*$

$\Longrightarrow \sup\{\langle\zeta,x\rangle : x\in C\} \le \sup\{\langle\zeta,x\rangle : x\in D\}.$

Supongamos que $\exists\, y\in C\,/\,y\notin D$

$\Longrightarrow \langle\zeta,y\rangle \le \sup\{\langle\zeta,x\rangle : x\in C\} \le \sup\{\langle\zeta,x\rangle : x\in D\} < \langle\zeta,y\rangle$

$\Longrightarrow \langle\zeta,y\rangle < \langle\zeta,y\rangle$. Contradicción $\Longrightarrow C\subset D$.



(*b*) • Veamos que $\sigma_\Sigma(x)\le\sigma_\Delta(x)\ \forall x\in X$.

Sea $\Sigma\subset\Delta$, luego se presentan dos casos:

1 : Si el $\sup\{\langle\zeta,x\rangle\}$ se da en $\zeta\in\Sigma$

$\Longrightarrow \sup\{\langle\zeta,x\rangle : \zeta\in\Sigma\} = \sup\{\langle\zeta,x\rangle : \zeta\in\Delta\}.$

2 : Si el $\sup\{\langle\zeta,x\rangle\}$ se da en $\zeta\in\Delta-\Sigma$

$\Longrightarrow \sup\{\langle\zeta,x\rangle : \zeta\in\Sigma\} < \sup\{\langle\zeta,x\rangle : \zeta\in\Delta\}.$

$\Longrightarrow \sigma_\Sigma(x)\le\sigma_\Delta(x)\ \forall x\in X.$

• Veamos que $\Sigma\subset\Delta$.

Como $\sigma_\Sigma(x) \le \sigma_\Delta(x)\ \forall\, x \in X$

$\Longrightarrow \sup\{\langle\zeta, x\rangle : \zeta \in \Sigma\} \le \sup\{\langle\zeta, x\rangle : \zeta \in \Delta\}$.

Supongamos que $\exists\, \psi \in \Sigma \,/\, \psi \notin \Delta$

$\Longrightarrow \langle\psi, x\rangle \le \sup\{\langle\zeta, x\rangle : \zeta \in \Sigma\} \le \sup\{\langle\zeta, x\rangle : \zeta \in \Delta\} < \langle\psi, x\rangle$

$\Longrightarrow \langle\psi, x\rangle < \langle\psi, x\rangle$. Contradicción $\Longrightarrow \Sigma \subset \Delta$. $\square$

La siguiente primera afirmación nos dice que $f^o(x; .)$ es la función soporte del $\partial f(x)$.

Proposición 1.4.2 *Sea f Lipschitz de rango K próximo a x, entonces:*

(*a*) $\zeta \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f^o(x; v) \ge \langle\zeta, v\rangle\ \forall\, v \in X$.

(*b*) *Sean $\{x_i\}$ y $\{\zeta_i\}$ sucesiones en X y X^* respectivamente, tal que $\zeta_i \in \partial f(x_i)$. supongamos que $\{x_i\}$ converge hacia x, y ζ es un punto de acumulación de $\{\zeta_i\}$ en la topología débil*, entonces $\zeta \in \partial f(x)$ (Es decir ∂f es débil* cerrado).*

(*c*) *Si X es de dimensión finita, entonces ∂f es semicontinua superior en x.*

Pruebas.-

(*a*) Sea $\zeta \in \partial f(x) = \{\zeta \in X^* \,/\, f^o(x; v) \ge \langle\zeta, v\rangle\ \forall\, v \in X\} \Longleftrightarrow f^o(x; v) \ge \langle\zeta, v\rangle$.

(*b*) Sea $v \in X$,

como ζ es un punto de acumulación de $\{\zeta_i\}$ en la topología débil*

$\Longrightarrow \exists\, \{\zeta_{m_i}\} \subset \{\zeta_i\} \,/\, \zeta_{m_i} \to \zeta \Longrightarrow \langle\zeta_{m_i}, v\rangle \to \langle\zeta, v\rangle\ \forall\, v \in X$,

como $\zeta_i \in \partial f(x_i) \Longrightarrow f^o(x_i; v) \ge \langle\zeta_i, v\rangle$ $(*)$

como $x_i \to x \Longrightarrow \exists\, \{x_{m_i}\} \subset \{x_i\} \,/\, x_{m_i} \to x$,

como $(*)$ se cumple para cada sucesión $\{\zeta_i\}$ y $\{x_i\}$

$\Longrightarrow$ también se cumplirá para subsucesiones $\{\zeta_{m_i}\}$ y $\{x_{m_i}\}$ adecuadas de las sucesiones anteriores, respectivamente

$\Longrightarrow f^o(x_{m_i}; v) \ge \langle\zeta_{m_i}, v\rangle\ \forall\, v \in X$.

Y de acuerdo a la semicontinuidad superior de f^o (Proposición 1.2.1(*b*)) y la convergencia de la subsucesión $\{\zeta_{m_i}\}$

$\Longrightarrow f^o(x; v) \ge \langle\zeta, v\rangle\ \forall\, v \in X \Longrightarrow \zeta \in \partial f(x)$.

(*c*) La demostración de esta parte puede verse en [4]. $\square$

1.5 Derivadas y Subderivadas

El principal resultado en esta Sección es que ∂f se reduce a la derivada si f es continuamente diferenciable, y al subdiferencial del análisis convexo si f es convexo.

1.5.1 Derivada Clásica

Definición 1.5.1 *Sea $F : X \to Y$ una función de X hacia otro espacio de Banach Y. La Usual Derivada Direccional (unilateral) de F en x en la dirección v es*

$$F'(x;v) := \lim_{t \downarrow 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t}$$

cuando este límite existe.

Definición 1.5.2 *Se dice que F admite una derivada de Gâteaux en x, un elemento en el espacio $\pounds(X,Y)$ de funcionales lineales continuas de X hacia Y denotado por $DF(x)$, si $\exists\, F'(x;v)\ \forall v \in X$ y $F'(x;v) = \langle DF(x), v\rangle$.*
Ésto es equivalente a decir que el cociente de la diferencia converge $\forall v$, tal que

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{F(x+tv) - F(x)}{t} = \langle DF(x), v\rangle,$$

y que la convergencia es uniforme con respecto a v en conjuntos finitos (la cual siempre es verdadera).

Si la palabra "Finito" en la sentencia anterior es reemplazada por "Compacto", la derivada es conocida como Hadamard. La diferenciabilidad de Hadamard y Gâteaux coinciden si F es Lipschitz próximo a x.

1.5.2 Diferenciabilidad Estricta

Definición 1.5.3 *Se dice que F admite una Derivada Estricta en x, un elemento de $\pounds(X,Y)$ denotado por $D_sF(x)$, tal que $\forall v$, se tiene*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{F(y+tv) - F(y)}{t} = \langle D_sF(x), v\rangle,$$

y que la convergencia es uniforme con respecto a v en conjuntos compactos (la cual es verdadera, si F es Lipschitz próximo a x).

De la Definición anterior se nota que estamos en la derivada estricta tipo Hadamard, la cual coincide con la de Gâteaux si F es Lipschitz próximo a x.

Proposición 1.5.1 *Sea F una función en una vecindad de x hacia Y, y sea ζ un elemento de $\mathcal{L}(X,Y)$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *F es estrictamente diferenciable en x y $D_sF(x)=\zeta$*

(b) *F es Lipschitz próximo a x, y $\forall\, v\in X$ se tiene*

$$\lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\frac{F(y+tv)-F(y)}{t}=\langle\zeta,v\rangle.$$

Nota:

La demostración de esta Proposición puede verse en [4]. $\square$

Corolario 1.5.1 *Supongamos que F es continuamente diferenciable en x, entonces F es estrictamente diferenciable en x y Lipschitz próximo a x.*

Prueba.-

• Veamos que F es Lipschitz próximo a x.

Como $F:X\to Y$ es una función continuamente diferenciable en x

$\Longrightarrow$ F es diferenciable en x,

y como $F'(x)$ es acotada, pues $F'(x)$ es continua en x

$\Longrightarrow$ F es Lipschitz próximo a x.

• Veamos que F es estrictamente diferenciable en x.

Notamos que $\exists\, F'(x;v)=\lim\limits_{t\downarrow 0}\dfrac{F(x+tv)-F(x)}{t}=\lim\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\dfrac{F(y+tv)-F(y)}{t}$,

(esta última igualdad, pues F es continua en x)

$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}}\dfrac{F(y+tv)-F(y)}{t}=\langle DF(x),v\rangle\ \forall\, v\in X$; Y como F es Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow$ Por la Proposición 1.5.1 F es estrictamente diferenciable en x. $\square$

Ahora veremos la relación entre las derivadas definidas y el gradiente generalizado.

Proposición 1.5.2 *Sea f Lipschitz próximo a x y admite una derivada de Gâteaux $Df(x)$ (Hadamard o Estricta), entonces $Df(x)\in\partial f(x)$.*

Prueba.-

Se sabe que $f'(x;v) = \langle Df(x), v\rangle \ \forall v \in X$,

como $f'(x;v) \leq f^o(x;v) \Longrightarrow \langle Df(x), v\rangle \leq f^o(x;v) \Longrightarrow Df(x) \in \partial f(x)$.

(Se sigue de manera similar para los otros casos). □

Ejemplo.-

Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\dfrac{1}{x}\right) & si \ \ x \neq 0 \\ 0 & si \ \ x = 0 \end{cases}$$

Probaremos que f es Lipschitz próximo a 0, calcularemos $\partial f(0)$ y verificaremos que $Df(0) \in \partial f(0)$.

Veamos que f es Lipschitz próximo a 0.

como $f'(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} x sen\dfrac{1}{x} = 0 \Longrightarrow f$ es diferenciable en 0,

y además $f'(0)$ se nota que es acotada en una vecindad de 0

$\Longrightarrow f$ es Lipschitz próximo a 0.

Calculando $\partial f(0)$.

Como $f^o(0;v) = \limsup\limits_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f(y+tv) - f(y)}{t}$

$$\Longrightarrow f^o(0;v) = \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} \frac{(y+tv)^2 sen\left(\dfrac{1}{y+tv}\right) - y^2 sen\left(\dfrac{1}{y}\right)}{t},$$

aplicando el Teorema de L'hospital respecto de t, tenemos

$$\Longrightarrow f^o(0;v) = \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} 2v(y+tv) sen\left(\frac{1}{y+tv}\right) + (y+tv)^2 cos\left(\frac{1}{y+tv}\right)\frac{-v}{(y+tv)^2}$$

$$\Longrightarrow f^o(0;v) = \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} 2v(y+tv) sen\left(\frac{1}{y+tv}\right) + cos\left(\frac{1}{y+tv}\right)(-v),$$

ahora hacemos lo siguiente, sea

$g = 2v(y+tv) sen\left(\dfrac{1}{y+tv}\right)$ y $h = -v cos\left(\dfrac{1}{y+tv}\right)$,

por propiedad de límites se sabe que

$\limsup h + \liminf g \leq \limsup(h+g) \leq \limsup h + \limsup g$,

para nuestro caso $\liminf\limits_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} g = \limsup\limits_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} g = 0$, además $-1 \leq cos\left(\frac{1}{y+tv}\right) \leq 1 \wedge -1 \leq -cos\left(\frac{1}{y+tv}\right) \leq 1$, luego

Si $v \geq 0 \Longrightarrow \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} -vcos\left(\frac{1}{y+tv}\right) = v\limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} -cos\left(\frac{1}{y+tv}\right) = v,$ y

Si $v < 0 \Longrightarrow \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} -vcos\left(\frac{1}{y+tv}\right) = -v\limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}} cos\left(\frac{1}{y+tv}\right) = -v,$

luego por el Teorema del Sandwich

$$\Longrightarrow f^o(0;v) = \limsup_{\substack{y\to 0\\ t\downarrow 0}}(h+g) = \begin{cases} v & si\ \ v \geq 0 \\ -v & si\ \ v < 0 \end{cases} \Longrightarrow f^o(0;v) = |v|.$$

$\Longrightarrow \partial f(0) = \{\zeta \,/\, |v| \geq \zeta v \ \ \forall\, v\} \Longrightarrow \partial f(0) = [-1,1].$

<u>Calculando $Df(0)$.</u>

Como $\langle Df(x), v\rangle = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

$\Longrightarrow \langle Df(0), v\rangle = \lim_{t\downarrow 0} \frac{f(tv)-f(0)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} \frac{t^2v^2sen\left(\frac{1}{tv}\right)}{t} = \lim_{t\downarrow 0} tv^2sen\left(\frac{1}{tv}\right) = 0$

$\Longrightarrow \langle Df(0), v\rangle = 0 \ \ \forall v \in \mathbb{R} \Longrightarrow Df(0) = 0.$

$\Longrightarrow Df(0) = 0 \in [-1,1] = \partial f(0).$

Proposición 1.5.3 *Si f es estrictamente diferenciable en x, entonces f es Lipschitz próximo a x y $\partial f(x) = \{D_s f(x)\}$.*

Prueba.-

Como f es estrictamente diferenciable en x

$\Longrightarrow \exists\, \delta \in \mathcal{L}(X,Y) \,/\, D_s f(x) = \delta$

$\Longrightarrow$ Por la Proposición 1.5.1 f es Lipschitz próximo a x.

Además $\lim_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \langle \delta, v\rangle = \langle D_s f(x), v\rangle \ \ \forall v \in X$

$\Longrightarrow f^o(x;v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \langle \delta, v\rangle = \langle D_s f(x), v\rangle \ \ \forall\, v \in X$

$\Longrightarrow f^o(x;v) = \langle D_s f(x), v\rangle \ \ \forall v \in X \Longrightarrow \partial f(x) = \{D_s f(x)\}.$ □

Proposición 1.5.4 *Si f es Lipschitz próximo a x y $\partial f(x) = \{\zeta\}$, entonces f es estrictamente diferenciable en x y $D_s f(x) = \zeta$.*

<u>Primero veremos que $f^o(x;v) = \langle \zeta, v\rangle \ \ \forall v \in X$.</u>

Sabemos que $f^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle \ \ \forall v \in X$.

Si $f^o(x;v) > \langle \zeta, v\rangle \Longrightarrow \exists \beta \in \partial f(x) \,/\, \zeta \neq \beta$, lo cual es falso por la hipótesis.

$\Longrightarrow f^o(x;v) = \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in X$.

También tenemos que

$$\liminf_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = -\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} -\left(\frac{f(y+tv)-f(y)}{t}\right) = -\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y)-f(y+tv)}{t}$$

sea $z = y + tv$

$$\Longrightarrow -\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y)-f(y+tv)}{t} = -\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv-tv)-f(y+tv)}{t} =$$

$$-\limsup_{\substack{z\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(z-tv)-f(z)}{t} = -f^o(x;-v) = -\langle \zeta, -v\rangle = \langle \zeta, v\rangle$$

$$\Longrightarrow \liminf_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \langle \zeta, v\rangle = f^o(x;v) = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f(y+tv)-f(y)}{t} = \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in X$. Y como f es Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow$ Por la Proposición 1.5.1 f es estrictamente diferenciable en x y $D_s f(x) = \zeta$. □

Corolario 1.5.2 *Si f es Lipschitz próximo a x y X es de dimensión finita, entonces $\partial f(y)$ se reduce a un único elemento $\forall y \in x + \varepsilon B$, si y sólo si, f es continuamente diferenciable en $x + \varepsilon B$. Para algún $\varepsilon > 0$.*

Prueba.-

$|\Longleftarrow|$ Como f es continuamente diferenciable en $x + \varepsilon B$

$\Longrightarrow$ por el Corolario 1.5.1 f es estrictamente diferenciable en $x + \varepsilon B$

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.3 $\partial f(y) = \{D_s f(y)\} \;\; \forall y \in x + \varepsilon B$.

$|\Longrightarrow|$ La demostración de este sentido puede verse en [4]. □

Observación:

De acuerdo al primer sentido de la demostración,

como f es Lipschitz próximo a $x \Longrightarrow \partial f(y) = \{D_s f(y)\} = \{Df(y)\} \;\; \forall y \in x + \varepsilon B$,

también como X es de dimensión finita $\Longrightarrow Df(y) = \nabla f(y) \;\; \forall y \in x + \varepsilon B$.

$\Longrightarrow \partial f(x) = \{\nabla f(x)\}$, la Derivada.

Ejemplo.-

Sea $\phi : [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, \phi \in L^{\infty}[0,1]$, la cual define una función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de esta manera $f(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$. Calcular $\partial f(x)$.

Sabemos que:

$$L^{\infty}[0,1] = \{\phi : [0,1] \to \mathbb{R} \,/\, \phi\, es\, medible\, y\, \exists\, K \,/\, |\phi(t)| \leq K\, en\, casi\, todo\, punto\, de\, [0,1]\}$$

Veamos que f es Lipschitz en $[0,1]$.

$|f(x) - f(y)| = \left| \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt - \int_0^y \phi(t)dt \right| = \left| \int_y^x \phi(t)dt \right| \leq \int_y^x |\phi(t)|dt,$

y como $\phi \in L^{\infty}[0,1] \Longrightarrow \exists\, K > 0 \,/\, |\phi(t)| \leq K$ para casi todo $[0,1]$

$\Longrightarrow \displaystyle\int_y^x |\phi(t)|dt \leq \int_y^x K dt = K(x-y) \leq K|x-y|$

$\Longrightarrow \exists\, K > 0 \,/\, |f(x) - f(y)| \leq K|x-y| \;\; \forall\, x, y \in [0,1].$

$\Longrightarrow f$ es Lipschitz en $[0,1]$.

Como $f(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt \Longrightarrow f'(x) = \phi(x) = \phi(x)1$ para casi todo $x \in [0,1]$

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.2 $\phi(x) \in \partial f(x)$ para casi todo $x \in [0,1]$ (α)

También como f es Lipschitz en $[0,1] \Longrightarrow \partial f(x)$ esta bien definido $\forall x \in [0,1]$ (β)

Por otro lado $\exists\, K > 0 \,/\, |\phi(x)| \leq K$ para casi todo $x \in [0,1]$.

Es decir ϕ es continua por tramos, en esos puntos de discontinuidad que son finitos se entiende que si existen los límites laterales, ésto por (α), (β) y la Proposición 1.4.2

$\Longrightarrow \phi(x) \in \partial f(x) \;\; \forall x \in [0,1]$.

Sean $\phi^-(x)$ y $\phi^+(x)$ el ínfimo y supremo de $\phi(x)$ $\forall x \in [0,1]$,

como $\phi(x) \in \partial f(x) \subset \mathbb{R}$ y $\partial f(x)$ es cerrado en $\mathbb{R} \Longrightarrow \phi^-(x), \phi^+(x) \in \partial f(x)$,

además como $\partial f(x)$ es convexo y $\phi^-(x) \leq \phi^+(x) \Longrightarrow [\phi^-(x), \phi^+(x)] \subset \partial f(x)$ (1)

Se sabe que

$$f(y+t) - f(y) = \int_0^{y+t} \phi(s)ds - \int_0^y \phi(s)ds = \int_y^{y+t} \phi(s)ds$$

Veamos que $f^o(x;1) \leq \phi^+(x)$.

$$f^o(x;1) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+t) - f(y)}{t} = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{\displaystyle\int_y^{y+t} \phi(s)ds}{t},$$

aplicando el Teorema de L'hospital respecto de t se tiene

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\int_y^{y+t}\phi(s)ds}{t} = \limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\phi(y+t)}{1} \leq \phi^+(x) \Longrightarrow f^o(x;1) \leq \phi^+(x).$$

Sea $\zeta \in \partial f(x) \Longrightarrow f^o(x;1) \geq \langle \zeta, 1\rangle = \zeta \Longrightarrow \phi^+(x) \geq \zeta$ $\qquad (a)$

Veamos que $\phi^-(x) \leq f^o(x;1)$.

$$\phi^-(x) \leq \liminf_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\phi(y+t)}{1} = \liminf_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \frac{\int_y^{y+t}\phi(s)ds}{t} \leq f^o(x;1) \Longrightarrow \phi^-(x) \leq f^o(x;1),$$

aquí también se aplico el Teorema de L'hospital respecto de t,

luego como $f^o(x;1) \geq \zeta$ y $f^o(x;1) \geq \phi^-(x) \Longrightarrow \zeta \geq \phi^-(x)$ $\qquad (b)$

$\Longrightarrow$ de (a) y (b) $\phi^-(x) \leq \zeta \leq \phi^+(x) \Longrightarrow \zeta \in [\phi^-(x), \phi^+(x)]$.

$\Longrightarrow \partial f(x) \subset [\phi^-(x), \phi^+(x)]$ $\qquad (2)$

$\Longrightarrow$ de (1) y (2) $\partial f(x) = [\phi^-(x), \phi^+(x)]$.

1.5.3 Subdiferencial

Considerando las siguientes definiciones:

Definición 1.5.4 *Sea $U \subset X$ un subconjunto convexo de X. Como sabemos, una función $f : U \to \mathbb{R}$ se dice que es convexa, si $\forall\, x, y \in U$, $\forall\, \lambda \in [0,1]$ se tiene*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Definición 1.5.5 *Sea $U \subset X$ un subconjunto de X. Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función (convexa), el Subdiferencial de f en x es definido por el conjunto de $\zeta \in X^*$ que satisfacen*

$$f(y) - f(x) \geq \langle \zeta, y - x\rangle \;\; \forall\, y \in U.$$

Proposición 1.5.5 *Cuando f es convexa en U y Lipschitz próximo a x, entonces $\partial f(x)$ coincide con el subdiferencial en x en el sentido del análisis convexo, y $f^o(x;v)$ coincide con la derivada direccional $f'(x;v)$ $\forall\, v$.*

Pruebas.-

Para f convexa en U,

el subdiferencial de f en x es el conjunto de $\zeta \in X^* \,/\, f(x+w) - f(x) \geq \langle w, \zeta \rangle \ \forall\, w$,

sea $w = tv \,/\, t > 0 \Longrightarrow \dfrac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq \langle v, \zeta \rangle \ \forall\, v \Longrightarrow f'(x;v) \geq \langle v, \zeta \rangle \ \forall\, v$

$\Longrightarrow f'(x;v)$ será la función soporte del subdiferencial en x.

• Veamos que $f^o(x;v) = f'(x;v) \ \forall\, v$.

Nos falta probar que $f^o(x;v) \leq f'(x;v)$.

Sabemos que existe $\displaystyle\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|y-x\|<\varepsilon\delta} \sup_{0<t<\varepsilon} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \ \forall\, \delta > 0$.

De la definición de función convexa $t \mapsto \dfrac{f(y+tv) - f(y)}{t}$ es no decreciente

$$\Longrightarrow f^o(x;v) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sup_{\|y-x\|<\varepsilon\delta} \frac{f(y+\varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon} \qquad (*)$$

Como f es Lipschitz, para cualquier $y \in x + \varepsilon\delta B$, se tiene

$$\left| \frac{f(y+\varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \right| = \left| \frac{f(y+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon} - \frac{f(y) - f(x)}{\varepsilon} \right| \leq$$

$$\left| \frac{f(y+\varepsilon v) - f(x+\varepsilon v)}{\varepsilon} \right| + \left| \frac{f(y) - f(x)}{\varepsilon} \right| \leq M \frac{\|y+\varepsilon v - x - \varepsilon v\|}{\varepsilon} + K \frac{\|y-x\|}{\varepsilon},$$

consideremos $M \leq K$

$$\Longrightarrow M \frac{\|y-x\|}{\varepsilon} + K \frac{\|y-x\|}{\varepsilon} \leq K \frac{\|y-x\|}{\varepsilon} + K \frac{\|y-x\|}{\varepsilon} = \frac{2K\|y-x\|}{\varepsilon} \leq \frac{2K\varepsilon\delta}{\varepsilon}$$

$$\Longrightarrow \left| \frac{f(y+\varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon} - \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} \right| \leq 2K\delta$$

$$\Longrightarrow \frac{f(y+\varepsilon v) - f(y)}{\varepsilon} \leq \frac{f(x+\varepsilon v) - f(x)}{\varepsilon} + 2K\delta,$$

luego de $(*) \Longrightarrow f^o(x;v) \leq f'(x;v) + 2K\delta \ \forall\, \delta > 0 \Longrightarrow f^o(x;v) \leq f'(x;v) \ \forall\, v$

$\Longrightarrow f^o(x;v) = f'(x;v)$.

$\Longrightarrow \partial f(x)$ coincide con el subdiferencial en x en el sentido del análisis convexo. □

Ejemplo.-

Determinar el gradiente generalizado de la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \max\{x_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\}.$$

Veamos que f es Lipschitz próximo a $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Como $|x_i - y_i| \leq |x_i - y_i| \Longrightarrow x_i$ es Lipschitz $\forall\, i = 1, 2, ..., n$

$\Longrightarrow f$ también será Lipschitz próximo a $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Veamos que f es convexa.

Sean $(x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in [0, 1]$, así

$f(\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) + (1-\lambda)(y_1, y_2, ..., y_n)) =$

$\max\{\lambda x_i + (1-\lambda) y_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} \leq$

$\max\{\lambda x_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} + \max\{(1-\lambda)y_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} =$

$\lambda \max\{x_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} + (1-\lambda)\max\{y_i \,/\, i = 1, 2, ..., n\} =$

$\lambda f(x_1, x_2, ..., x_n) + (1-\lambda) f(y_1, y_2, ..., y_n) \Longrightarrow f$ es convexa.

Sea

$$I(x) = \{i \,/\, f_i(x) = f(x)\}$$

los índices en los cuales el máximo definido como f es obtenido.

Calcularemos $f'(x; v)$.

$f'(x; v) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{\max\limits_i\{x_i + tv_i\} - \max\limits_i\{x_i\}}{t}$

aplicando el Teorema de L'hospital respecto de t, se tiene

$\Longrightarrow f'(x; v) = \lim\limits_{t \downarrow 0} \max\limits_{i \in I(x)}\{v_i\} = \max\limits_{i \in I(x)} v_i,$

además como f es Lipschitz y convexa

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.5 $f^o(x; v) = f'(x; v)$.

$\Longrightarrow \partial f(x) = \left\{\zeta \in \mathbb{R}^n \,/\, \max\limits_{i \in I(x)} v_i \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in \mathbb{R}^n\right\}.$

Veamos la ley de formación del $\partial f(x)$.

Si $n = 1$ tenemos:

$\max\limits_{i \in I(x)} v_i = v^* \geq \langle \zeta, v\rangle \;\; \forall v \in \mathbb{R} \Longrightarrow v^* \geq \langle \zeta, v^*\rangle \Longrightarrow \zeta = 1.$

Si $n = 2$ tenemos:

$\max\limits_{i \in I(x)} v_i \geq \langle \zeta, v\rangle = \sum\limits_{i=1}^{2} \zeta_i v_i \quad$ donde $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2)$, $v = (v_1, v_2)$

Si $i = 1, 2 \in I(x)$.

Supongamos que $v_1 \geq v_2$ y $\zeta_1 \geq 0$

$\Longrightarrow \max\limits_{i \in I(x)} v_i = v_1 \geq \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 \geq \zeta_1 v_2 + \zeta_2 v_2 = (\zeta_1 + \zeta_2) v_2$

$\Longrightarrow v_1 \geq (\zeta_1 + \zeta_2) v_2$. Y $v_1 \geq v_2$

$\Longrightarrow$ tenemos dos casos:

- Si $v_2 \geq (\zeta_1 + \zeta_2) v_2 \;\; \forall v_2 \Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1$

- Si $(\zeta_1 + \zeta_2) v_2 \geq v_2 \;\; \forall v_2 \Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1$

$\Longrightarrow \zeta_1 + \zeta_2 = 1.$

Continuamos con $v_1 \geq v_2$

$\Longrightarrow \max\limits_{i \in I(x)} v_i = v_1 \geq \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 = \zeta_1 v_1 + v_2 - \zeta_1 v_2 \Longrightarrow v_1 - v_2 \geq \zeta_1(v_1 - v_2) \Longrightarrow 1 \geq \zeta_1,$

además

$v_1 \geq \zeta_1 v_1 + \zeta_2 v_2 = v_1 - \zeta_2 v_1 + \zeta_2 v_2 \Longrightarrow (v_1 - v_2)\zeta_2 \geq 0 \Longrightarrow \zeta_2 \geq 0 \Longrightarrow \zeta_2 \leq 1.$

$\Longrightarrow \zeta = (\zeta_1, \zeta_2) \,/\, \zeta_1 + \zeta_2 = 1,\ \zeta_i \geq 0$ donde $i = 1, 2 \in I(x)$,

además $\zeta_i = 0$ si $i \notin I(x)$.

Finalmente el resultado general será:

$$\partial f(x) = \left\{ (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n) \,/\, \zeta_i \geq 0, \sum_{i \in I(x)} \zeta_i = 1;\ \zeta_i = 0 \ \ si \ \ i \notin I(x) \right\}.$$

Capítulo 2

Cálculos Básicos

Procederemos a realizar una clasificación de fórmulas que faciliten el cálculo del ∂f cuando f es construido de simples funcionales. Estableceremos las Funciones Regulares para el caso no diferenciable. También veremos el Teorema del Valor Medio que será útil para otras demostraciones. Asumiremos que f es Lipschitz próximo a x.

2.1 Relaciones Fundamentales

Proposición 2.1.1 (Múltiplo Escalar)

$\forall s \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\partial(sf)(x) = s\partial f(x).$$

Prueba.-

Como f es Lipschitz próximo a $x \Longrightarrow sf$ es Lipschitz próximo a x.

• Cuando $s \geq 0$.

$(sf)^o(x;v) = \limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{(sf)(y+tv)-(sf)(y)}{t} = s\limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{(f)(y+tv)-(f)(y)}{t} = sf^o(x;v)$

$\Longrightarrow (sf)^o(x;v) = sf^o(x;v)$.

Veamos que $\partial(sf)(x) = s\partial f(x)$.

$\partial(sf)(x) \subset s\partial f(x)$.

Sea $\zeta \in \partial(sf)(x) \Longrightarrow (sf)^o(x;v) \geq \langle\zeta, v\rangle \Longrightarrow sf^o(x;v) \geq \langle\zeta, v\rangle$

$\Longrightarrow f^o(x;v) \geq \left\langle \dfrac{\zeta}{s}, v\right\rangle$ si $s \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{\zeta}{s} \in \partial f(x) \Longrightarrow \zeta \in s\partial f(x)$

$\Longrightarrow \partial(sf)(x) \subset s\partial f(x)$.

Si $s = 0$, también se cumple esta última inclusión.

<u>$s\partial f(x) \subset \partial(sf)(x)$.</u>

Sea $\zeta \in s\partial f(x) \Longrightarrow \zeta = s\phi \,/\, \phi \in \partial f(x) \Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \phi, v \rangle$

$\Longrightarrow sf^o(x; v) \geq \langle s\phi, v \rangle \Longrightarrow (sf)^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow \zeta \in \partial(sf)(x)$

$\Longrightarrow s\partial f(x) \subset \partial(sf)(x)$.

• <u>Cuando $s < 0$.</u>

<u>Veamos que $\partial(sf)(x) = s\partial f(x)$.</u>

<u>$\partial(sf)(x) \subset s\partial f(x)$.</u>

Sea $\zeta \in \partial(sf)(x) \Longrightarrow (sf)^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow (sf)^o(x; -v) \geq \langle \zeta, -v \rangle \;\; \forall v$

$\Longrightarrow (-sf)^o(x; v) \geq \langle \zeta, -v \rangle \Longrightarrow (-s)f^o(x; v) \geq \langle \zeta, -v \rangle$

$\Longrightarrow f^o(x; v) \geq \left\langle \dfrac{\zeta}{-s}, -v \right\rangle = \left\langle \dfrac{\zeta}{s}, v \right\rangle \Longrightarrow \dfrac{\zeta}{s} \in \partial f(x) \Longrightarrow \zeta \in s\partial f(x)$

$\Longrightarrow \partial(sf)(x) \subset s\partial f(x)$.

<u>$s\partial f(x) \subset \partial(sf)(x)$.</u>

Sea $\zeta \in s\partial f(x) \Longrightarrow \zeta = s\phi \,/\, \phi \in \partial f(x) \Longrightarrow f^o(x; v) \geq \langle \phi, v \rangle$

$\Longrightarrow f^o(x; -v) \geq \langle \phi, -v \rangle \;\; \forall v \Longrightarrow (-s)f^o(x; -v) \geq \langle -s\phi, -v \rangle = \langle s\phi, v \rangle$

$\Longrightarrow (-s)(-f)^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow (sf)^o(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow \zeta \in \partial(sf)(x)$

$\Longrightarrow s\partial f(x) \subset \partial(sf)(x)$. □

Proposición 2.1.2 (Extremo Local)

Si f posee un mínimo local o un máximo local en x, entonces $0 \in \partial f(x)$.

Prueba.-

Probaremos la Proposición cuando f posea un mínimo local en x,

es decir existe un entorno de $z \to x \,/\, f(z) \leq f(y) \;\; \forall y \in N(z) \cap Dom f$,

ahora sea $y = z + tv \,/\, t > 0 \Longrightarrow f(z + tv) - f(z) \geq 0 \Longrightarrow \dfrac{f(z + tv) - f(z)}{t} \geq 0$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{z \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{f(z + tv) - f(z)}{t} = f^o(x; v) \geq 0 = \langle 0, v \rangle \;\; \forall v \in X$

$\Longrightarrow 0 \in \partial f(x)$. (De forma análoga para el máximo local). □

Si f_i $(i = 1, 2, ..., n)$ familia finita de funciones, cada una Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow f = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i$ también es Lipschitz próximo a x.

Proposición 2.1.3 (Suma Finita)

$$\partial\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x).$$

Prueba.-

Lo probaremos por inducción matemática:

$\underline{n=1}$ $\partial f_1(x) \subset \partial f_1(x)$. Se cumple.

$\underline{n=2}$ $\partial(f_1+f_2)(x) \subset \sum_{i=1}^{2} \partial f_i(x)$.

Demostración:

Sea $\zeta \in \partial(f_1+f_2)(x) \Longrightarrow (f_1+f_2)^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle$,

además $(f_1+f_2)^o(x;v) = \limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{(f_1+f_2)(y+tv)-(f_1+f_2)(y)}{t} =$

$\limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \left(\dfrac{f_1(y+tv)-f_1(y)}{t} + \dfrac{f_2(y+tv)-f_2(y)}{t}\right) \leq$

$\limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f_1(y+tv)-f_1(y)}{t} + \limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f_2(y+tv)-f_2(y)}{t} = f_1^o(x;v) + f_2^o(x;v)$

$\Longrightarrow f_1^o(x;v) + f_2^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle$, luego ζ se puede escribir así

$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \,/\, f_1^o(x;v) \geq \langle \zeta_1, v\rangle \;\wedge\; f_2^o(x;v) \geq \langle \zeta_2, v\rangle$

$\Longrightarrow \zeta_1 \in \partial f_1(x) \wedge \zeta_2 \in \partial f_2(x) \Longrightarrow \zeta_1+\zeta_2 \in \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$

$\Longrightarrow \zeta \in \partial f_1(x) + \partial f_2(x) \Longrightarrow \zeta \in \sum_{i=1}^{2} \partial f_i(x)$. Probado.

Asumiremos que se cumple para

$\underline{n=m}$ $\partial\left(\sum_{i=1}^{m} f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{m} \partial f_i(x) \Longrightarrow \underline{n=m+1}$ $\partial\left(\sum_{i=1}^{m+1} f_i\right)(x) \subset \sum_{i=1}^{m+1} \partial f_i(x)$?

Sea $\zeta \in \partial\left(\sum_{i=1}^{m+1} f_i\right)(x) \Longrightarrow (f_1+f_2+\ldots+f_{m+1})^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle$,

de la aplicación para $n=2$ se tiene

$(f_1+f_2+\ldots+f_m)^o(x;v) + f_{m+1}^o(x;v) \geq (f_1+f_2+\ldots+f_{m+1})^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle$,

luego ζ se puede escribir así

$\zeta = \zeta_m + \zeta_{m+1} \,/\, (f_1+f_2+\ldots+f_m)^o(x;v) \geq \langle \zeta_m, v\rangle \;\wedge\; f_{m+1}^o(x;v) \geq \langle \zeta_{m+1}, v\rangle$,

así de la penúltima desigualdad y del caso $n=m$ se tiene $\zeta_m \in \sum_{i=1}^{m} \partial f_i(x)$, y de la última desigualdad se tiene $\zeta_{m+1} \in \partial f_{m+1}(x)$

$\Longrightarrow \zeta_m + \zeta_{m+1} \in \sum_{i=1}^{m} \partial f_i(x) + \partial f_{m+1}(x) \Longrightarrow \zeta \in \sum_{i=1}^{m+1} \partial f_i(x)$. Probado. □

Corolario 2.1.1 *En la Proposición 2.1.3 tenemos la igualdad si todas las funciones f_i son estrictamente diferenciables en x.*

Prueba.-

Tenemos que probar que $\sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x) \subset \partial \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right)(x)$.

Lo haremos para $n = 2$, luego se puede generalizar por inducción matemática, tal como se hizo en la prueba de la Proposición 2.1.3.

Sea $\zeta \in \partial f_1(x) + \partial f_2(x)$,

luego ζ se puede escribir así $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 \,/\, \zeta_1 \in \partial f_1(x) \wedge \zeta_2 \in \partial f_2(x)$

$\Longrightarrow f_1^o(x;v) \geq \langle \zeta_1, v \rangle \wedge f_2^o(x;v) \geq \langle \zeta_2, v \rangle$

$\Longrightarrow (f_1 + f_2)^o(x;v) \leq f_1^o(x;v) + f_2^o(x;v) = f_1'(x;v) + f_2'(x;v) =$

$(f_1 + f_2)'(x;v) \leq (f_1 + f_2)^o(x;v) \Longrightarrow f_1^o(x;v) + f_2^o(x;v) = (f_1 + f_2)^o(x;v)$.

$\Longrightarrow (f_1 + f_2)^o(x;v) \geq \langle \zeta_1 + \zeta_2, v \rangle = \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow \zeta \in \partial(f_1 + f_2)(x)$. □

Corolario 2.1.2 $\forall s_i \in \mathbb{R}$, *se tiene*

$$\partial \left(\sum_{i=1}^{n} s_i f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} s_i \partial f_i(x)$$

Tenemos la igualdad si todas las funciones f_i son estrictamente diferenciables en x.

Pruebas.-

• Veamos que se cumple esta última inclusión.

De la Proposición 2.1.3 $\Longrightarrow \partial \left(\sum_{i=1}^{n} f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} \partial f_i(x)$,

sea $f_i = s_i f_i \Longrightarrow \partial \left(\sum_{i=1}^{n} s_i f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} \partial (s_i f_i)(x)$,

de la Proposición 2.1.1 $\Longrightarrow \partial \left(\sum_{i=1}^{n} s_i f_i \right)(x) \subset \sum_{i=1}^{n} s_i \partial f_i(x)$.

• Veamos que se cumple la igualdad en esta última inclusión.

Cada $s_i f_i$ es estrictamente diferenciable en x. Y por el Corolario 2.1.1

$\Longrightarrow$ Se cumple la igualdad en esta última inclusión. □

Observación:

En la Proposición 2.1.3 tenemos la igualdad si cada función f_i es continuamente diferenciable en x.

Por el Corolario 1.5.1 $\Longrightarrow$ cada función f_i es estrictamente diferenciable en x, luego se procede como en la demostración del Corolario 2.1.1

$\Longrightarrow$ Se obtiene la igualdad en la Proposición 2.1.3. □

Además de la Proposición 1.5.3 $\Longrightarrow \partial f_i(x) = \{D_s f_i(x)\} = \{Df_i(x)\}$, la Derivada.

2.2 Regularidad de Funciones

En el cálculo de fórmulas del gradiente generalizado a veces encontramos inclusiones como la de la Proposición 2.1.3, podemos agregar hipótesis para llevar cada regla de inclusión a igualdad. Como en la Observación anterior, se nota que la condición continuamente diferenciable es fuerte, pues el gradiente generalizado es la derivada. Se desea una condición menos extrema, una función que cubra el caso no diferenciable, una condición útil es la siguiente:

Definición 2.2.1 *f es Regular en x si:*

i) Existe la derivada direccional usual unilateral $f'(x;v)$ $\forall\, v$.

ii) $\forall\, v$ $f'(x;v) = f^{\circ}(x;v)$.

Corolario 2.2.1 *Si cada f_i es regular en x, entonces tenemos la igualdad en la Proposición 2.1.3. También $\forall\, s_i \geq 0$ tenemos la igualdad en el Corolario 2.1.2.*

Pruebas.-

• <u>Veamos la igualdad en la Proposición 2.1.3.</u>

Lo haremos para $n = 2$, luego se puede generalizar por inducción matemática, tal como se hizo en la prueba de la Proposición 2.1.3.

Sean f_1 y f_2 regulares en $x \Longrightarrow f_1 + f_2$ será regular en x ?

$i)$ $(f_1 + f_2)'(x;v) = f_1'(x;v) + f_2'(x;v)$ existe.

ii) $\forall v,\ (f_1+f_{2)})'(x;v)=(f_1+f_2)^o(x;v)$?

Sabemos que

$(f_1+f_2)'(x;v)=f_1'(x;v)+f_2'(x;v)=f_1^o(x;v)+f_2^o(x;v)\geq(f_1+f_2)^o(x;v)$

$\Longrightarrow (f_1+f_2)'(x;v)\geq(f_1+f_2)^o(x;v)$

$\Longrightarrow (f_1+f_{2)})'(x;v)=(f_1+f_2)^o(x;v)\ \forall v.$

$\Longrightarrow f_1+f_2$ es regular en x.

Veamos que $\partial(f_1+f_2)(x)=\sum_{i=1}^{2}\partial f_i(x)$.

Nos falta probar que $\sum_{i=1}^{2}\partial f_i(x)\subset\partial(f_1+f_2)(x)$.

Sea $\zeta\in\partial f_1(x)+\partial f_2(x)$,

luego ζ se puede escribir así $\zeta=\zeta_1+\zeta_2\,/\,\zeta_1\in\partial f_1(x)\ \wedge\ \zeta_2\in\partial f_2(x)$

$\Longrightarrow f_1^o(x;v)\geq\langle\zeta_1,v\rangle\ \wedge\ f_2^o(x;v)\geq\langle\zeta_2,v\rangle$

$\Longrightarrow f_1'(x;v)\geq\langle\zeta_1,v\rangle\ \wedge\ f_2'(x;v)\geq\langle\zeta_2,v\rangle$

$\Longrightarrow f_1'(x;v)+f_2'(x;v)=(f_1+f_2)'(x;v)=(f_1+f_2)^o(x;v)\geq\langle\zeta,v\rangle$

$\Longrightarrow \zeta\in\partial(f_1+f_2)(x)$.

- Veamos la igualdad en el Corolario 2.1.2 $\forall s_i\geq 0$.

Lo haremos para $n=2$, luego se puede generalizar por inducción matemática, tal como se hizo en la prueba de la Proposición 2.1.3.

Sean f_1,f_2 regulares en x y $s_1,s_2\geq 0\Longrightarrow s_1f_1+s_2f_2$ será regular en x?

i) $(s_1f_1+s_2f_2)'(x;v)=s_1f_1'(x;v)+s_2f_2'(x;v)$ existe.

ii) $\forall v,\ (s_1f_1+s_2f_2)'(x;v)=(s_1f_1+s_2f_2)^o(x;v)$?

Sabemos que

$(s_1f_1+s_2f_2)'(x;v)=(s_1f_1)'(x;v)+(s_2f_2)'(x;v)=s_1f_1'(x;v)+s_2f_2'(x;v)=$

$s_1f_1^o(x;v)+s_2f_2^o(x;v)=(s_1f_1)^o(x;v)+(s_2f_2)^o(x;v)\geq(s_1f_1+s_2f_2)^o(x;v)$

$\Longrightarrow (s_1f_1+s_2f_2)'(x;v)\geq(s_1f_1+s_2f_2)^o(x;v)$

$\Longrightarrow (s_1f_1+s_2f_2)'(x;v)=(s_1f_1+s_2f_2)^o(x;v)\ \forall v.$

$\Longrightarrow s_1f_1+s_2f_2$ es regular en x.

Veamos que $\partial(s_1f_1+s_2f_2)(x)=\sum_{i=1}^{2}s_i\partial f_i(x)$.

Nos falta probar que $\sum_{i=1}^{2} s_i\, \partial f_i(x) \subset \partial(s_1 f_1 + s_2 f_2)(x)$.

Sea $\zeta \in s_1 \partial f_1(x) + s_2 \partial f_2(x)$,

luego ζ se puede escribir así $\zeta = s_1\zeta_1 + s_2\zeta_2 \,/\, \zeta_1 \in \partial f_1(x) \wedge \zeta_2 \in \partial f_2(x)$

$\Longrightarrow f_1^o(x;v) \geq \langle \zeta_1, v\rangle \wedge f_2^o(x;v) \geq \langle \zeta_2, v\rangle$

$\Longrightarrow f_1'(x;v) \geq \langle \zeta_1, v\rangle \wedge f_2'(x;v) \geq \langle \zeta_2, v\rangle$

$\Longrightarrow s_1\, f_1'(x;v) \geq \langle s_1\, \zeta_1, v\rangle \wedge s_2\, f_2'(x;v) \geq \langle s_2\, \zeta_2, v\rangle$

$\Longrightarrow (s_1\, f_1)'(x;v) \geq \langle s_1\, \zeta_1 v\rangle \wedge (s_2 f_2)'(x;v) \geq \langle s_2\zeta_2, v\rangle$

$\Longrightarrow (s_1\, f_1)'(x;v) + (s_2 f_2)'(x;v) = (s_1\, f_1 + s_2\, f_2)'(x;v) = (s_1\, f_1 + s_2 f_2)^o(x;v) \geq \langle \zeta, v\rangle$

$\Longrightarrow \zeta \in \partial(s_1\, f_1 + s_2 f_2)(x)$. $\square$

A continuación algunas observaciones de funciones regulares.

Proposición 2.2.1 *Sea f Lipschitz próximo x, entonces:*

(a) *Si f es estrictamente diferenciable en x, entonces f es regular en x.*

(b) *Si f es convexa, entonces f es regular en x.*

(c) *Una combinación lineal finita (de escalares no negativos) de funciones regulares en x es regular en x.*

(d) *Si f admite una derivada de Gâteaux $Df(x)$ y es regular en x, entonces $\partial f(x) = \{Df(x)\}$.*

Pruebas.-

(a) Como f es estrictamente diferenciable en x

$\Longrightarrow$ de la Proposición 1.5.3 $\partial f(x) = \{D_s f(x)\} \Longrightarrow f^o(x;v) = \langle D_s f(x), v\rangle$,

sabiendo que f es Lipschitz próximo a $x \Longrightarrow f$ es continua en x

$\Longrightarrow \langle D_s f(x), v\rangle = f'(x;v)$

$\Longrightarrow f^o(x;v) = f'(x;v)\ \forall\, v \Longrightarrow f$ es regular en x.

(b) Como f es convexa y Lipschitz próximo a x,

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.5 $f^o(x;v) = f'(x;v) \Longrightarrow f$ es regular en x.

(c) De acuerdo a la prueba del Corolario 2.2.1 en su segunda parte, sobre la igualdad en el Corolario 2.1.2, se estableció que para $n = 2$ la combinación lineal $s_1 f_1 + s_2 f_2$ es regular en x donde $s_1, s_2 \geq 0$, este resultado se puede generalizar por inducción matemática, obteniéndose así la prueba de este ítem.

(d) Como f es regular en $x \Longrightarrow f^o(x; v) = f'(x; v)$,
además $\exists\, Df(x)$ derivada de Gâteaux
$\Longrightarrow f^o(x; v) = f'(x; v) = \langle Df(x), v\rangle \ \forall\, v \in X \Longrightarrow \partial f(x) = \{Df(x)\}$. □

2.3 Teorema del Valor Medio

Dados $x, y \in X$, la notación $[x, y]$ significa el segmento de línea cerrado que contiene todos los puntos $tx + (1-t)y \ \forall\, t \in [0, 1]$, la notación $\langle x, y\rangle$ significa el segmento de línea abierto.

Teorema 2.3.1 (Lebourg)
Sean $x, y \in X$, y supongamos que f es Lipschitz en un conjunto abierto conteniendo el segmento de línea $[x, y]$, entonces existe un punto $u \in \langle x, y\rangle$ tal que

$$f(y) - f(x) \in \langle \partial f(u), y - x\rangle$$

Necesitamos establecer un Lema para la prueba de este Teorema.
Además $x_t = x + t(y - x)$.

Lema 2.3.1 *La función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(x_t)$ es Lipschitz en $\langle 0, 1\rangle$, y se tiene*

$$\partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y - x\rangle$$

Prueba.-
Veamos que $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ es Lipschitz en $\langle 0, 1\rangle$.
Tenemos que $g(t) = f(x_t) \wedge g(s) = f(x_s) \,/\, t, s \in \langle 0, 1\rangle$ con $x_t = x + t(y - x)$,
además como f es Lipschitz en un conjunto abierto, se tiene que
$|g(t) - g(s)| = |f(x_t) - f(x_s)| \leq K\|x_t - x_s\| = K\|x + t(y - x) - (x + s(y - x))\| =$

$K\|(t-s)(y-x)\| \leq M|t-s|$ pues $\|y-x\|$ es acotada

$\Longrightarrow \exists\, M > 0 \,/\, |g(t)-g(s)| \leq M|t-s| \;\; \forall\, t,s \in \langle 0,1\rangle$.

Además los conjuntos $\partial g(t)$ y $\langle \partial f(x_t), y-x\rangle$ son intervalos cerrados y convexos.

Veamos que $\max\{\partial g(t)v\} \leq \max\{\langle \partial f(x_t), y-x\rangle v\}$.

Sabemos que

$\max\{\partial g(t)v\} = \max\{\langle \zeta, v\rangle : \zeta \in \partial g(t)\} = g^{\circ}(t;v) = \limsup\limits_{\substack{r\to t\\ \lambda\downarrow 0}} \dfrac{g(r+\lambda v)-g(r)}{\lambda} =$

$\limsup\limits_{\substack{r\to t\\ \lambda\downarrow 0}} \dfrac{f(x+(r+\lambda v)(y-x))-f(x+r(y-x))}{\lambda} = \limsup\limits_{\substack{r\to t\\ \lambda\downarrow 0}} \dfrac{f(z+\lambda v(y-x))-f(z)}{\lambda}$,

donde $z = x + r(y-x)$;

Si $(r\to t) \Longrightarrow (z \to x + t(y-x) = x_t)$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{r\to t\\ \lambda\downarrow 0}} \dfrac{f(z+\lambda v(y-x))-f(z)}{\lambda} \leq \limsup\limits_{\substack{z\to x_t\\ \lambda\downarrow 0}} \dfrac{f(z+\lambda v(y-x))-f(z)}{\lambda} =$

$\max\{\langle \partial f(x_t), v(y-x)\rangle\} = \max\{\langle \partial f(x_t), y-x\rangle v\}$, pues $v \in [0,1]$

$\Longrightarrow \max\{\partial g(t)v\} \leq \max\{\langle \partial f(x_t), y-x\rangle v\}$.

$\Longrightarrow \partial g(t) \subset \langle \partial f(x_t), y-x\rangle$ (Fin de la prueba del Lema 2.3.1). □

Demostración del Teorema 2.3.1.

Consideremos la función θ en $[0,1]$ definida por

$$\theta(t) = f(x_t) + t(f(x)-f(y)).$$

Se nota que $\theta(0) = \theta(1) = f(x)$.

Si f es Lipschitz en $[x,y] \Longrightarrow f$ es continua en $[x,y]$,

además como $t \in [0,1]$ y $x_t = x + t(y-x)$

$\Longrightarrow (t=0 \Longleftrightarrow x_o = x) \wedge (t=1 \Longleftrightarrow x_1 = y) \Longrightarrow \theta$ es continua en $[0,1]$

$\Longrightarrow \exists\, t \in \langle 0,1\rangle$ en el cual θ alcanza un máximo o un mínimo local

$\Longrightarrow 0 \in \partial\theta(t)$ (ésto por la Proposición 2.1.2).

Así $0 \in \partial\theta(t) = \partial\{g(t) + t(f(x)-f(y))\} \subset \partial g(t) + \partial\{t(f(x)-f(y))\}$,

ésta por la Proposición 2.1.3. Por el Lema 2.3.1 y la Proposición 2.1.1 se tiene

$\Longrightarrow \partial g(t) + \partial\{t(f(x)-f(y))\} \subset \langle \partial f(x_t), y-x\rangle + (f(x)-f(y))\partial(t)$

$\Longrightarrow 0 \in \langle \partial f(x_t), y-x\rangle + (f(x)-f(y))\partial(I(t))$ (*)

además sabemos que $I^{\circ}(t;v) = \limsup\limits_{\substack{r\to t\\ p\downarrow 0}} \dfrac{I(r+pv)-I(r)}{p} = \limsup\limits_{\substack{r\to t\\ p\downarrow 0}} \dfrac{r+pv-r}{p} = v$

$\Longrightarrow v \geq \langle \zeta, v \rangle \ \forall v \Longrightarrow \zeta = 1 \Longrightarrow \partial(I(t)) = \{1\}$

$\Longrightarrow 0 \in \langle \partial f(x_t), y - x \rangle + (f(x) - f(y))\{1\}$ (ésto de $(*)$)

$\Longrightarrow \exists t \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ \exists u = x_t \in \langle x, y \rangle \ / \ f(y) - f(x) \in \langle \partial f(u), y - x \rangle.$ □

Ejemplo.-

Consideremos la función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida en un ejemplo de la Sección 1.5 del Capítulo 1, $f(x) = \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ donde $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \ / \ \phi \in L^\infty[0, 1]$,
aplicando el Teorema del Valor Medio al ∂f, probaremos que

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x, y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ |x - y| < \varepsilon \ \ \wedge \ \ \phi(x) - \varepsilon < \int_0^1 \phi(t)dt < \phi(y) + \varepsilon.$$

Como f es Lipschitz en un abierto que contiene a $[0, 1]$, aplico el Teorema 2.3.1

$\Longrightarrow \exists \, u \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ f(1) - f(0) \in \langle \partial f(u), 1 - 0 \rangle$

$$\Longrightarrow \int_0^1 \phi(t)dt \in \partial f(u) = [\phi^-(u), \phi^+(u)] \Longrightarrow \phi^-(u) \leq \int_0^1 \phi(t)dt \leq \phi^+(u) \qquad (\alpha)$$

Sabemos de las definiciones de $\phi^+(u)$ y $\phi^-(u)$ que

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ \phi^+(u) - \varepsilon < \phi(y) \leq \phi^+(u)$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ \phi^-(u) \leq \phi(x) < \phi^-(u) + \varepsilon,$

luego de (α) y de las dos expresiones anteriores tenemos

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x, y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ \phi(x) - \varepsilon < \displaystyle\int_0^1 \phi(t)dt < \phi(y) + \varepsilon.$

Nos falta probar que $\forall \, \varepsilon > 0 \ \exists \, x, y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ |x - y| < \varepsilon.$

Supongamos que $\exists \, \varepsilon > 0 \ \forall \, x, y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ |x - y| \geq \varepsilon.$

$\Longrightarrow \exists \, \varepsilon_1 > 0 \ / \ x = y = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow 0 \geq \varepsilon_1 > 0.$ Contradicción.

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \ x, y \in \langle 0, 1 \rangle \ / \ |x - y| < \varepsilon.$

Capítulo 3

Conceptos Geométricos Asociados

En este Capítulo definiremos una función Distancia d_C no diferenciable, sin embargo d_C será globalmente Lipschitz. Usaremos el gradiente generalizado de d_C para definir un nuevo concepto de Tangentes y Normales en un conjunto arbitrario C. Caracterizaremos estas Tangentes y Normales, y veremos que su estructura no depende de d_C. Probaremos que las nuevas Tangentes y Normales definidas, se reducen a conocer una de ellas en análisis convexo y en el caso no diferenciable. Finalmente indicaremos como estas ideas geométricas nos guiarán a una definición extendida del ∂f de una función f, la cual no necesariamente es Localmente Lipschitz, y posiblemente de valor extendido.

3.1 La Función Distancia

Definición 3.1.1 *Sea $C \subset X$ un subconjunto no vacío de X, y consideremos la función Distancia $d_C(.) : X \to \mathbb{R}$ definida por*

$$d_C(x) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\}.$$

Observación: Si C es cerrado $\Longrightarrow (x \in C \Longleftrightarrow d_C(x) = 0)$.

Prueba.-

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $x \in C = \overline{C} \Longrightarrow \exists\{x_n\} \subset C \,/\, x_n \to x$,

además sabemos que $0 \leq \inf\{\|x - c\| : c \in C\} \leq \|x - x_n\|$ y

$x_n \to x \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \geq N \Longrightarrow \|x - x_n\| < \varepsilon$, elegimos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, luego cuando n es suficientemente grande

$\Longrightarrow 0 \leq \inf\{\|x-c\| : c \in C\} \leq 0 \Longrightarrow d_C(x) = 0$.

$\underline{|\Longleftarrow|}$ Como $d_C(x) = 0 \Longrightarrow \inf\{\|x-c\| : c \in C\} = 0$,

así $\inf\limits_{c\in C} \|x-c\| = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\{x_n\} \subset C \,/\, ||x - x_n|| < \varepsilon + 0\ \forall n \in \mathbb{N}$,

elegimos $\varepsilon = \frac{1}{n}$, luego cuando n es suficientemente grande

$\Longrightarrow \exists\{x_n\} \subset C \,/\, x_n \to x \Longrightarrow x \in \overline{C}$, y como C es cerrado $\Longrightarrow x \in C$. $\square$

Proposición 3.1.1 *La función d_C satisface la condición global Lipschitz en X:*

$$|d_C(x) - d_C(y)| \leq ||x-y||.$$

Prueba.-

Sea $\varepsilon > 0$ dado,

$\Longrightarrow$ por definición $\exists c \in C \,/\, d_C(y) \geq ||y-c|| - \varepsilon$,

$\Longrightarrow d_C(x) \leq ||x-c|| = ||x-y+y-c|| \leq ||x-y|| + ||y-c||$

$\Longrightarrow d_C(x) \leq d_C(y) + ||x-y|| + \varepsilon$, podemos intercambiar x e y

$\Longrightarrow d_C(y) \leq d_C(x) + ||y-x|| + \varepsilon$, luego cuando $\varepsilon \to 0$ tenemos

$\Longrightarrow d_C(x) - d_C(y) \leq ||x-y|| \quad \wedge \quad -||x-y|| \leq d_C(x) - d_C(y)$

$\Longrightarrow |d_C(x) - d_C(y)| \leq ||x-y||$. $\square$

3.2 Tangentes

Definición 3.2.1 *Supongamos que $x \in C$. Un vector $v \in X$ es tangente hacia C en x si $d_C^o(x;v) = 0$. El conjunto de todas las tangentes hacia C en x es denotado por $T_C(x)$, es decir*

$$T_C(x) = \{v \in X \,/\, d_C^o(x;v) = 0\}.$$

<u>Propiedades de $T_C(x)$: Cono convexo cerrado en X.</u>

- Si $\lambda T_C(x) \subset T_C(x)\ \ \forall \lambda \geq 0 \Longrightarrow T_C(x)$ es un cono.

Sea $z \in \lambda T_C(x) \Longrightarrow z = \lambda z_1 \,/\, z_1 \in T_C(x) \Longrightarrow d_C^o(x; z_1) = 0\ \wedge\ \lambda \geq 0$

$\Longrightarrow \lambda d_C^o(x; z_1) = (\lambda d_C)^o(x; z_1) = d_C^o(x; \lambda z_1) = 0 \Longrightarrow \lambda z_1 \in T_C(x) \Longrightarrow z \in T_C(x)$

$\Longrightarrow T_C(x)$ es un cono en X.

- Si $\lambda T_C(x) + (1-\lambda)T_C(x) \subset T_C(x)\ \forall \lambda \in [0,1] \Longrightarrow T_C(x)$ es convexo.

Sea $z \in \lambda T_C(x) + (1-\lambda)T_C(x)$

$\Longrightarrow z = \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2 \,/\, v_1, v_2 \in T_C(x) \Longrightarrow d_C^o(x; v_1) = d_C^o(x; v_2) = 0$

$\Longrightarrow \lambda d_C^o(x; v_1) = 0 = (\lambda d_C)^o(x; v_1) = d_C^o(x; \lambda v_1) = 0$

$\Longrightarrow (1-\lambda) d_C^o(x; v_2) = 0 = ((1-\lambda)d_C)^o(x; v_2) = d_C^o(x; (1-\lambda)v_2) = 0$

$\Longrightarrow d_C^o(x; z) = d_C^o(x; \lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \le d_C^o(x; \lambda v_1) + d_C^o(x; (1-\lambda)v_2) = 0 + 0 = 0$

$\Longrightarrow d_C^o(x; z) \le 0$.

– Nos falta probar que $0 \le d_C^o(x; z)$.

Se sabe que $\limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(y+tz) - d_C(y)}{t} \le 0$, y sea $y + tz = s$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(s) - d_C(s-tz)}{t} \le 0 \Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{-(d_C(s-tz) - d_C(s))}{t} \le 0$

$\Longrightarrow -\liminf\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(s-tz) - d_C(s)}{t} \le 0 \Longrightarrow 0 \le \liminf\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(s-tz) - d_C(s)}{t} \le$
$\limsup\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(s-tz) - d_C(s)}{t} \Longrightarrow 0 \le \limsup\limits_{\substack{s \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(s-tz) - d_C(s)}{t}$,
volviendo a la variable original se tiene

$\Longrightarrow 0 \le \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(y) - d_C(y+tz)}{t} = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{(-d_C)(y+tz) - (-d_C)(y)}{t} = (-d_C)^o(x; z)$

$\Longrightarrow 0 \le (-d_C)^o(x; z) = d_C^o(x; -z) \Longrightarrow d_C^o(x; z) \le 0 \le d_C^o(x; -z)\ \forall z \in X$,

para $z = -z$ se tiene $\Longrightarrow d_C^o(x; -z) \underline{\le 0 \le} d_C^o(x; z)$

$\Longrightarrow d_C^o(x; z) = 0 \Longrightarrow z \in T_C(x) \Longrightarrow T_C(x)$ es convexo en X.

También sabemos que $\overline{0} \in T_C(x)$ pues $d_C^o(x; \overline{0}) = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(y + t\overline{0}) - d_C(y)}{t} = 0$.

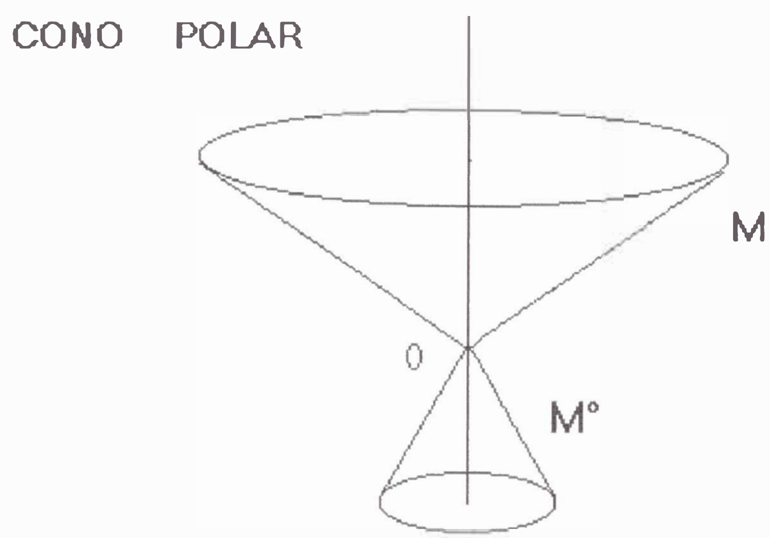
- Finalmente la prueba de que $T_C(x)$ es cerrado en X, puede verse en [8]. $\square$

3.3 Normales

Definición 3.3.1 *Sea M un cono convexo. El cono polar de M (llamado cono polar negativo) es el siguiente:*

$$M^o = \{s \in X^* \,/\, \langle s, v \rangle \le 0\ \ \forall v \in M\}.$$

A continuación mostraremos un esquema del Cono Polar.



M Cono Convexo
M° Cono Polar negativo de M

Definición 3.3.2 *El cono normal hacia C en x. es la Polaridad de $T_C(x)$:*

$$N_C(x) = \{\zeta \in X^* \,/\, \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)\}.$$

Ahora tenemos la caracterización de $N_C(x)$ en términos del gradiente generalizado:

Proposición 3.3.1

$$N_C(x) = cl\left\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)\right\},$$

donde cl denota la clausura débil.*

Prueba.-

$\underline{|\subset|}$ Sea $\zeta \in N_C(x) \Longrightarrow \zeta \in \{\zeta \in X^* \,/\, \langle \zeta, v \rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)\}$

$$\Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle \leq \lambda 0 \;\; \forall \lambda \geq 0, \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle \leq \lambda d_C^o(x; v) \;\; \forall \lambda \geq 0$$

$$\Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle \leq (\lambda d_C)^o(x; v) \Longrightarrow \zeta \in \partial(\lambda d_C)(x) \;\; \forall \lambda \geq 0$$

$$\Longrightarrow \zeta \in \lambda \partial d_C(x) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x) \subset cl\left\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)\right\} \Longrightarrow \zeta \in cl\left\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)\right\}.$$

$$\Longrightarrow N_C(x) \subset cl\left\{\bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial d_C(x)\right\}.$$

$\boxed{\supset}$ Sea $\zeta \in cl\left\{\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda\partial d_C(x)\right\} \Longrightarrow \exists\{\zeta_n\}\subset\left\{\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda\partial d_C(x)\right\} / \zeta_n \to \zeta$

$\Longrightarrow \zeta_n \in \left\{\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda\partial d_C(x)\right\} / \zeta_n \to \zeta \Longrightarrow \exists\,\lambda_n \geq 0 / \zeta_n \in \lambda_n\partial d_C(x) / \zeta_n \to \zeta$

$\Longrightarrow \lambda_n d_C^o(x;v) \geq \langle\zeta_n, v\rangle \;\; \forall v \in X$, en particular escogemos $v \in T_C(x)$

$\Longrightarrow d_C^o(x;v) = 0 \Longrightarrow \lambda_n 0 = 0 \geq \langle\zeta_n, v\rangle \Longrightarrow \langle\zeta_n, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)$

$\overset{\zeta_n\to\zeta}{\Longrightarrow} \langle\zeta, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x)$.

$\Longrightarrow cl\left\{\bigcup_{\lambda\geq 0}\lambda\partial d_C(x)\right\} \subset N_C(x)$. □

Observación:

Sabemos que $\partial d_C(x) = \{\zeta \in X^* / d_C^o(x;v) \geq \langle\zeta, v\rangle \;\; \forall v \in X\}$ es compacto débil*,

y como $T_C(x) = \{v \in X / d_C^o(x;v) = 0\}$

$\Longrightarrow \partial d_C(x)$ se reduce a $N_C(x)$, el cual es cerrado débil* por la Proposición 3.3.1.

También podemos decir que el cono polar hacia $T_C(x)$ es cerrado débil* (nos referimos a $N_C(x)$), cono convexo generado por $\partial d_C(x)$.

Propiedades de $N_C(x)$: Cono convexo en X^*.

- Si $\lambda N_C(x) \subset N_C(x) \;\; \forall\lambda \geq 0 \Longrightarrow N_C(x)$ es un cono.

Sea $\zeta \in \lambda N_C(x) \Longrightarrow \zeta = \lambda\zeta_1 / \zeta_1 \in N_C(x) \Longrightarrow \langle\zeta_1, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)$

$\Longrightarrow \langle\lambda\zeta_1, v\rangle \leq 0 \;\; \forall\lambda \geq 0, \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \langle\zeta, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x)$.

$\Longrightarrow N_C(x)$ es un cono en X^*.

- Si $\lambda N_C(x) + (1-\lambda)N_C(x) \subset N_C(x) \;\; \forall\lambda \in [0,1] \Longrightarrow N_C(x)$ es convexo.

Sea $\zeta \in \lambda N_C(x) + (1-\lambda)N_C(x)$

$\Longrightarrow \zeta = \lambda\zeta_1 + (1-\lambda)\zeta_2 / \zeta_1, \zeta_2 \in N_C(x) \Longrightarrow \langle\zeta_1, v\rangle \leq 0 \;\wedge\; \langle\zeta_2, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)$

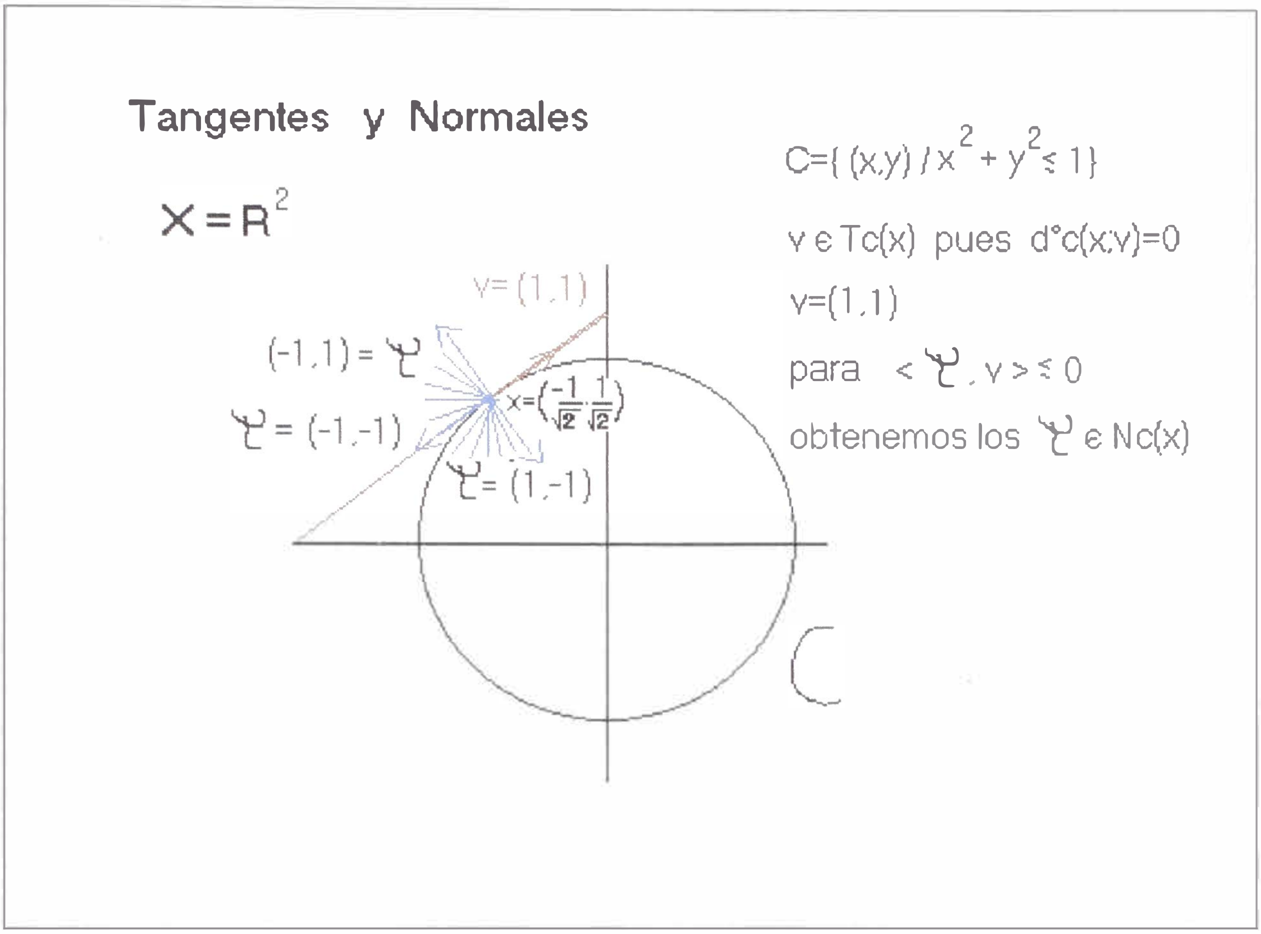
$\Longrightarrow \lambda\langle\zeta_1, v\rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle\lambda\zeta_1, v\rangle \leq 0$

$\Longrightarrow (1-\lambda)\langle\zeta_2, v\rangle \leq 0 \Longrightarrow \langle(1-\lambda)\zeta_2, v\rangle \leq 0$

$\Longrightarrow \langle\zeta, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x)$.

$\Longrightarrow N_C(x)$ es convexo en X^*. □

Aquí presentamos un ejemplo de tangentes y normales en $X = \mathbb{R}^2$.



A continuación se tienen algunos resultados con la función distancia.

Proposición 3.3.2 *Sea f Lipschitz de rango K en un conjunto S. Sea $x \in C \subset S$ y supongamos que f alcanza un mínimo sobre C en x. Entonces para cada $M \geq K$ la función $g(y) = f(y) + Md_C(y)$ alcanza un mínimo sobre S en x. Si $M > K$ y C es cerrado, entonces cualquier otro punto que minimiza g sobre S debe también permanecer en C.*

Pruebas.-

• Veamos la Primera Parte.

Tenemos que probar que $g(x) = \min\{g(y)\}$ $\forall y \in S$, $\forall M \geq K$, es decir,

$g(x) \leq g(y) \Longleftrightarrow f(x) + Md_C(x) \leq f(y) + Md_C(y) \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y) + Md_C(y)$.

Supongamos que se cumple lo contrario, es decir,

$\exists y \in S$, $\exists M \geq K \,/\, f(y) + Md_C(y) < f(x) - \varepsilon$ $\forall \varepsilon \in \langle 0, \delta \rangle$ para algún $\delta > 0$ adecuado,

podemos escoger $\varepsilon = M\varepsilon \Longrightarrow \exists y \in S$, $\exists M \geq K \,/\, f(y) + Md_C(y) < f(x) - M\varepsilon$ (1)

también $\exists c \in C \,/\, ||y - c|| \leq d_C(y) + \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0$ (en particular $\forall \varepsilon \in \langle 0, \delta \rangle$) (2)

ahora como f es Lipschitz de rango K en S

$\Longrightarrow f(c) - f(y) \leq |f(c) - f(y)| \leq K||y - c|| \leq M||y - c||$, y de (2)

$\Longrightarrow f(c) - f(y) \leq M(d_C(y) + \varepsilon) \Longrightarrow f(c) \leq f(y) + Md_C(y) + M\varepsilon$, y de (1)

$\Longrightarrow f(c) < f(x)$. Contradicción, pues x minimiza a f sobre C.

$\Longrightarrow g(x) = \min\{g(y)\}\ \forall y \in S,\ \forall M \geq K$.

• Veamos la Segunda Parte.

Sea $y \in S$ otro punto / minimiza a g sobre S.

$\Longrightarrow f(y) + Md_C(y) = f(x) = g(x)$

Si $M > K \Longrightarrow \dfrac{K+M}{2} \geq K$, aplicando la primera parte de la Proposición 3.3.2

$\Longrightarrow g(x) = f(x) \leq f(y) + \dfrac{K+M}{2} d_C(y)$

$\Longrightarrow f(y) + Md_C(y) = f(x) \leq f(y) + \dfrac{K+M}{2} d_C(y) \Longrightarrow 2M \leq K + M \Longrightarrow M \leq K$,

luego para evitar la contradicción $d_C(y) = 0$, y como C es cerrado $\Longrightarrow y \in C$. $\square$

Corolario 3.3.1 *Supongamos que f es Lipschitz próximo a x, y alcanza un mínimo sobre C en x, entonces* $0 \in \partial f(x) + N_C(x)$.

Prueba.-

Sea S una vecindad de x sobre la cual f es Lipschitz de rango K.

Sea $x \in C \subset S$ y si f alcanza un mínimo sobre C en x

$\Longrightarrow$ de acuerdo a la Proposición 3.3.2

como $K \geq K$ se tiene que x minimiza a $f(y) + Kd_C(y)$ sobre S,

luego por la Proposición 2.1.2, 2.1.3 y 2.1.1 se tiene

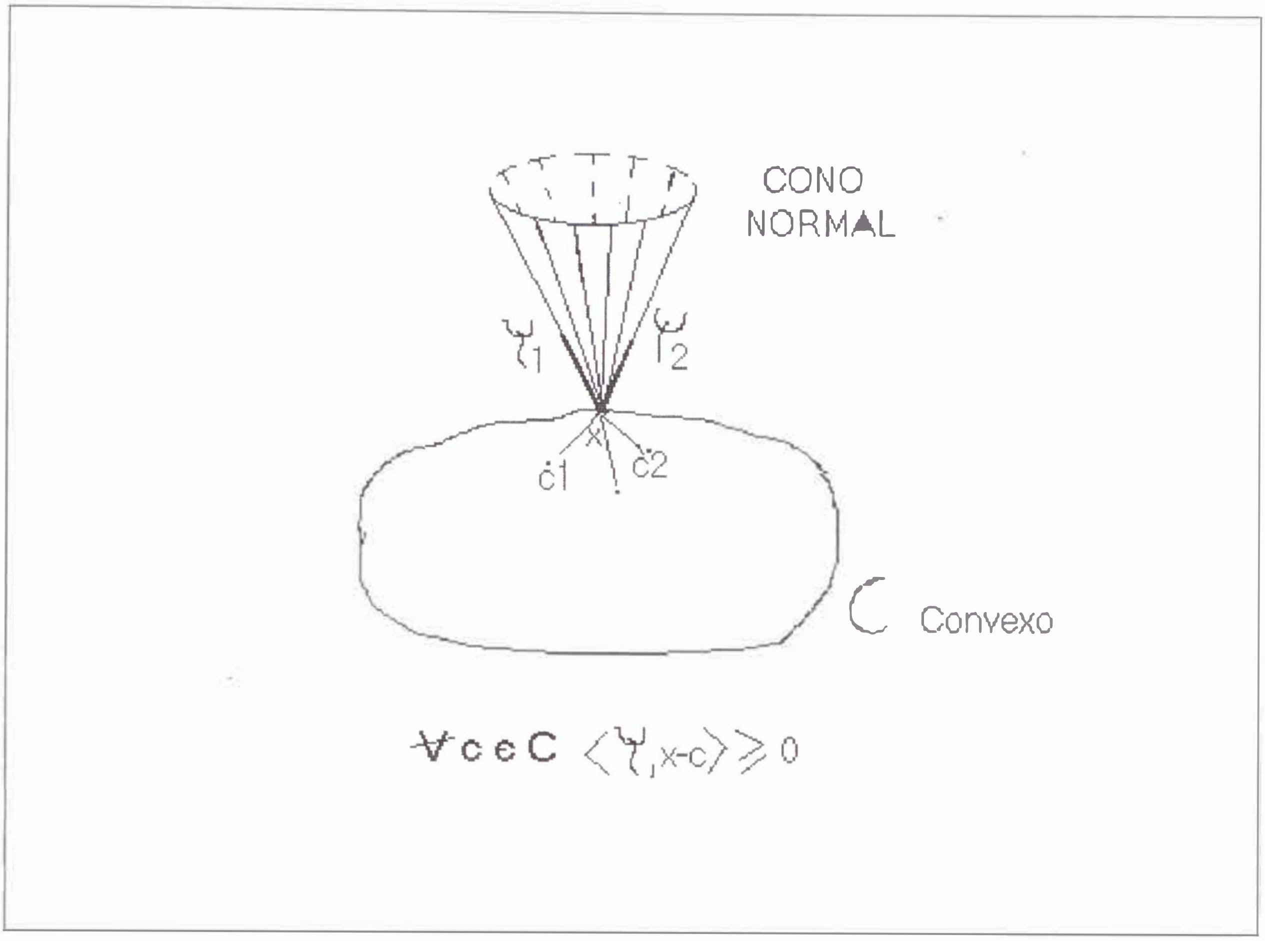
$\Longrightarrow 0 \in \partial(f + Kd_C)(x) \subset \partial f(x) + \partial(Kd_C)(x) = \partial f(x) + K\partial d_C(x)$,

y por la Proposición 3.3.1 $\Longrightarrow K\partial d_C(x) \subset N_C(x)$

$\Longrightarrow 0 \in \partial f(x) + N_C(x)$. $\square$

Definición 3.3.3 *Si C es convexo, se tiene un concepto bien definido de vector normal: $\zeta \in X^*$ se dice Normal hacia C en x, si $\langle \zeta, x - c \rangle \geq 0\ \forall c \in C$. (en el sentido del análisis convexo).*

Representación gráfica:



Proposición 3.3.3 *Si C es convexo, entonces $N_C(x)$ coincide con el cono de normales en el sentido del análisis convexo.*

Prueba.-

$\boxed{\Longleftarrow}$ Sea ζ normal hacia C en x en el sentido del análisis convexo

$\Longrightarrow \langle \zeta, x - c \rangle \geq 0 \ \forall c \in C$

$\Longrightarrow$ el punto $c = x$ minimiza la expresión $f(c) = \langle \zeta, x - c \rangle$ sobre C.

Veamos que f es Lipschitz sobre C.

$|f(e) - f(d)| = |\langle \zeta, x - e \rangle - \langle \zeta, x - d \rangle| = |\langle \zeta, d - e \rangle| \leq ||\zeta||||d - e|| \leq m||d - e||$

$\Longrightarrow f$ es Lipschitz sobre C

$\Longrightarrow$ Por el Corolario 3.3.1 $0 \in \partial f(x) + N_C(x)$ $\qquad (\alpha)$

Calculando $\partial f(x)$.

$f^o(x; v) = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{f(y + tv) - f(y)}{t} = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{\langle \zeta, x - y - tv \rangle - \langle \zeta, x - y \rangle}{t} =$

$\langle \zeta, -v \rangle \Longrightarrow f^o(x; v) = \langle \zeta, -v \rangle \ \forall v \in C \Longrightarrow \partial f(x) = \{-\zeta\}$

$\Longrightarrow$ de (α) $\ 0 \in \{-\zeta\} + N_C(x) \Longrightarrow -(-\zeta) \in N_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x)$.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Sea $\zeta \in N_C(x) \Longrightarrow \zeta \in X^* \,/\, \langle \zeta, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x)$

$\Longrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq 0 \wedge d_C^\circ(x; v) = 0 \;\; \forall v \in X \Longrightarrow d_C^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v\rangle \Longrightarrow \zeta \in \partial d_C(x)$.

Antes de continuar probaremos el siguiente Lema:

Lema 3.3.1 *$d_C(.)$ es convexo.*

Prueba.-

Veamos que $d_C(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda d_C(x) + (1-\lambda) d_C(y) \;\; \forall \lambda \in [0,1], \; \forall x, y \in X$:

En donde el conjunto convexo $C \subset X$ y $d_C(.) : X \to \mathbb{R}$,

luego $\forall \varepsilon > 0, \; \forall x, y \in X, \; \exists c_x, c_y \in C$ tal que

Si $d_C(x) = \inf\{\|x - c\| : c \in C\} \Longrightarrow \|c_x - x\| \leq d_C(x) + \varepsilon$,

Si $d_C(y) = \inf\{\|y - c\| : c \in C\} \Longrightarrow \|c_y - y\| \leq d_C(y) + \varepsilon$,

además $c = \lambda c_x + (1-\lambda)c_y \in C$, así se tiene que

$d_C(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \|\lambda x + (1-\lambda)y - c\| = \|\lambda x + (1-\lambda)y - (\lambda c_x + (1-\lambda)c_y)\| =$

$\|\lambda x - \lambda c_x + (1-\lambda)y - (1-\lambda)c_y\| \leq \lambda\|x - c_x\| + (1-\lambda)\|y - c_y\| \leq$

$\lambda(d_C(x) + \varepsilon) + (1-\lambda)(d_C(y) + \varepsilon) = \lambda d_C(x) + (1-\lambda)d_C(y) + \varepsilon \;\; \forall \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow$ cuando $\varepsilon \to 0$ $d_C(.)$ es convexo (Fin de la prueba del Lema 3.3.1). $\square$

Retomando la Prueba de la Proposición 3.3.3 se tiene que la función

$d_C(.) : X \to \mathbb{R}$ es convexa y Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.5 el $\partial d_C(x)$ coincide con el subdiferencial en x, en el sentido del análisis convexo, es decir el conjunto de vectores ζ, es el subgradiente de d_C en x, que satisface $d_C(y) - d_C(x) \geq \langle \zeta, y - x\rangle \;\; \forall y \in X$,

haciendo $y = c \in C \Longrightarrow 0 - d_C(x) \geq \langle \zeta, c - x\rangle \;\; \forall c \in C$

$\Longrightarrow 0 \geq -d_C(x) \geq \langle \zeta, c - x\rangle \;\; \forall c \in C \Longrightarrow \langle \zeta, c - x\rangle \leq 0 \;\; \forall c \in C$. $\square$

Corolario 3.3.2 *Si C es convexo, entonces $v \in T_C(x) \Longleftrightarrow d_C^\circ(x; v) = d_C'(x; v) = 0$.*

Prueba.-

Como C es convexo, se tiene que d_C es convexo $\Longrightarrow$ d_C es regular en x. (ésto por la Proposición 2.2.1(b)).

$\boxed{\Longrightarrow}$ Si $v \in T_C(x) \Longrightarrow d_C^\circ(x; v) = 0 = d_C'(x; v)$.

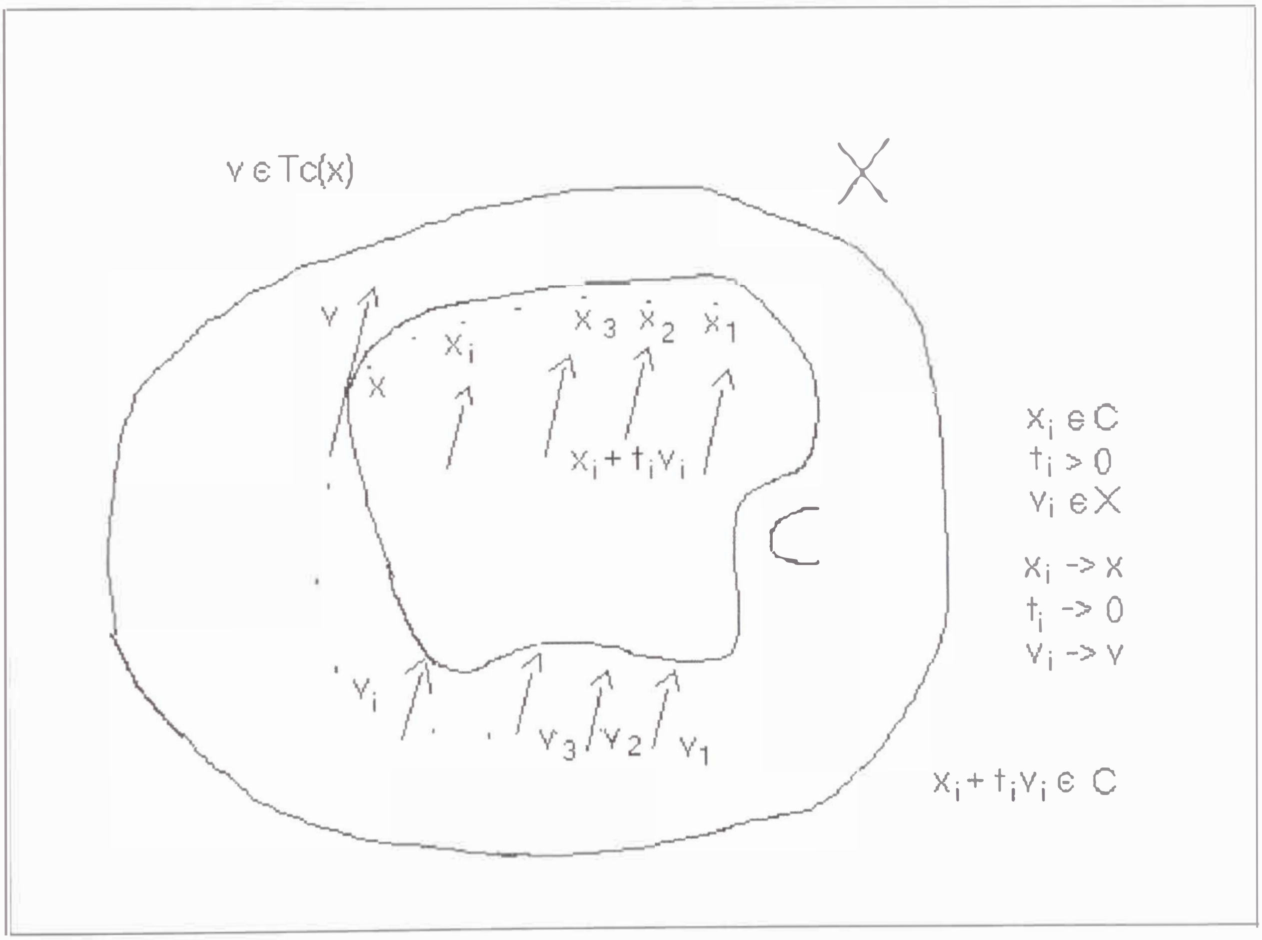
$\boxed{\Longleftarrow}$ Si $d_C^\circ(x; v) = 0 = d_C'(x; v) \Longrightarrow v \in T_C(x)$. $\square$

3.4 Caracterización Intrínseca de las Tangentes

Aquí veremos que el concepto de Tangentes, ya definido, es independiente de la norma usada en X.

Teorema 3.4.1 *Un elemento $v \in X$ es tangente hacia C en x si, y sólo si, para cada sucesión $\{x_i\} \subset C$ convergente hacia x y la sucesión $\{t_i\} \subset \langle 0, \infty\rangle$ decreciente hacia cero, existe una sucesión $\{v_i\} \subset X$ que converge hacia v tal que $x_i + t_i v_i \in C$ para cada i.*

Representación gráfica:



Prueba.-

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que $v \in T_C(x)$

Sean las sucesiones $\{x_i\} \subset C \,/\, x_i \to x$ y $\{t_i\} \,/\, t_i \downarrow 0$ cualesquiera.

Debemos hallar una sucesión $\{v_i\} \subset X \,/\, v_i \to v \wedge x_i + t_i v_i \in C \;\; \forall i$.

Como $v \in T_C(x) \Longrightarrow d_C^o(x; v) = 0$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{x_i\to x\\ t_i\downarrow 0}} \frac{d_C(x_i+t_iv)-d_C(x_i)}{t_i} = \lim_{i\to\infty} \frac{d_C(x_i+t_iv)-d_C(x_i)}{t_i} = 0,$$

como $x_i \in C \Longrightarrow d_C(x_i) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{d_C(x_i+t_iv)}{t_i} = 0$ (1)

Como $d_C(z) = \inf\{\|z-c\| : c \in C\}$

$\Longrightarrow \exists\, c_i \in C \,/\, \|z - c_i\| \le d_C(z) + \varepsilon,\ \forall \varepsilon > 0,\ z \in X,$

en particular $x_i + t_iv \in X$ y haciendo $\varepsilon = \dfrac{t_i}{i} > 0$

$\Longrightarrow \|x_i + t_iv - c_i\| \le d_C(x_i+t_iv) + \dfrac{t_i}{i}$ (2)

Sea $v_i = \dfrac{c_i - x_i}{t_i}$, luego dividiendo a (2) por t_i, se tiene

$\Longrightarrow \left\| v - \dfrac{(c_i - x_i)}{t_i} \right\| \le \dfrac{d_C(x_i+t_iv)}{t_i} + \dfrac{1}{i},$

así cuando $i \to \infty$ y de (1) se tiene

$\Longrightarrow 0 \le \lim\limits_{i\to\infty} \|v - v_i\| \le \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{d_C(x_i+t_iv)}{t_i} + 0 = 0 + 0 \Longrightarrow v_i \to v$

$\Longrightarrow \exists \{v_i\} \subset X \,/\, v_i \to v \ \wedge\ x_i + t_iv_i = c_i \in C\ \ \forall i.$

$|\Longleftarrow|$ Ahora elegiremos las sucesiones $\{y_i\} \,/\, y_i \to x$ y $\{t_i\} \,/\, t_i \downarrow 0$, así

$\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{d_C(y_i+t_iv)-d_C(y_i)}{t_i} = d_C^o(x;v)$ (3)

Tenemos que probar que $d_C^o(x;v) \le 0$, es decir $d_C^o(x;v) = 0$.

Como $d_C(y_i) = \inf\{\|y_i - c\| : c \in C\}$

$\Longrightarrow \exists \{c_i\} \subset C \,/\, \|c_i - y_i\| \le d_C(y_i) + \dfrac{t_i}{i}\ \ \forall i$ (4)

Veamos que $c_i \to x$.

Como $0 \le \|c_i - x\| = \|c_i - y_i + y_i - x\| \le \|c_i - y_i\| + \|y_i - x\|$

$\Longrightarrow$ de (4) $0 \le \|c_i - x\| \le d_C(y_i) + \dfrac{t_i}{i} + \|y_i - x\|$ $(*)$

se sabe que $0 \le \dfrac{t_i}{i} \le t_i \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{t_i}{i} = 0,$

también $\lim\limits_{y_i\to x} d_C(y_i) = d_C(x)$ pues d_C es continua y $x \in C$

$\Longrightarrow$ de $(*)$ $0 \le \lim\limits_{i\to\infty} \|c_i - x\| \le d_C(x) + 0 + 0 = 0 + 0 + 0 = 0 \Longrightarrow c_i \to x.$

$\Longrightarrow \exists \{v_i\} \,/\, v_i \to v \ \wedge\ c_i + t_iv_i \in C\ \ \forall i$ (ésto por hipótesis),

como d_C es Lipschitz

$\Longrightarrow d_C(y_i + t_iv) - d_C(c_i + t_iv_i) \le |d_C(y_i+t_iv) - d_C(c_i+t_iv_i)| \le \|y_i + t_iv - c_i - t_iv_i\|$

$\Longrightarrow d_C(y_i+t_iv) - d_C(c_i+t_iv_i) \le \|y_i - c_i\| + t_i\|v - v_i\|,$

como $c_i + t_iv_i \in C \Longrightarrow d_C(c_i + t_iv_i) = 0$

$\Longrightarrow d_C(y_i + t_iv) \le \|y_i - c_i\| + t_i\|v - v_i\|$ y de (4)

$$\Longrightarrow d_C(y_i + t_i v) \leq d_C(y_i) + \frac{t_i}{i} + t_i\|v - v_i\|$$
$$\Longrightarrow \frac{d_C(y_i + t_i v) - d_C(y_i)}{t_i} \leq \|v - v_i\| + \frac{1}{i}$$
$$\Longrightarrow d_C^o(x; v) \leq 0 \Longrightarrow d_C^o(x; v) = 0 \Longrightarrow v \in T_C(x). \qquad \square$$

3.5 Regularidad de Conjuntos

Se establece aquí la relación entre el concepto geométrico ya definido y las nociones en el caso no diferenciable, se requiere la regularidad de conjuntos, la cual utiliza la regularidad de funciones tratadas en el Capítulo 2.

Definición 3.5.1

Sea $K_C(x)$ el cono contingente de tangentes hacia un conjunto C en x. $(v \in X)$.
Un vector $v \in K_C(x)$ si, y sólo si, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge w \in v + \varepsilon B \,/\, x + tw \in C$ (donde w es un punto y necesariamente $x \in clC$).

Observación: $T_C(x) \subset K_C(x)$

Prueba.-

Sea $v \in T_C(x)$,

Del Teorema 3.4.1 $v \in T_C(x) \Longleftrightarrow$

$\forall \{x_i\} \subset C \,/\, x_i \to x \wedge \forall \{t_i\} \subset \langle 0, +\infty\rangle \,/\, t_i \downarrow 0, \; \exists \{v_i\} \subset X \,/\, v_i \to v \,/\, x_i + t_i v_i \subset C \;\; \forall i.$

$v_1 \in K_C(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge w \in v_1 + \varepsilon B \,/\, x + tw \in C.$

Sea $\varepsilon > 0$

$x_i \to x \Longrightarrow x_i \in x + \varepsilon B; \;\; t_i \downarrow 0 \Longrightarrow t_i \in t + \varepsilon B,$ para algún $t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge t \approx 0$ y

$v_i \to v \Longrightarrow v_i \in v + \varepsilon B$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge v_i \in v + \varepsilon B \,/\, x + \varepsilon u_1 + (t + \varepsilon u_2)(v_i) \in C \; \forall u_i \in B$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge v_i \in v + \varepsilon B \,/\, x + tv_i + \varepsilon(u_1 + u_2 v_i) \in C,$

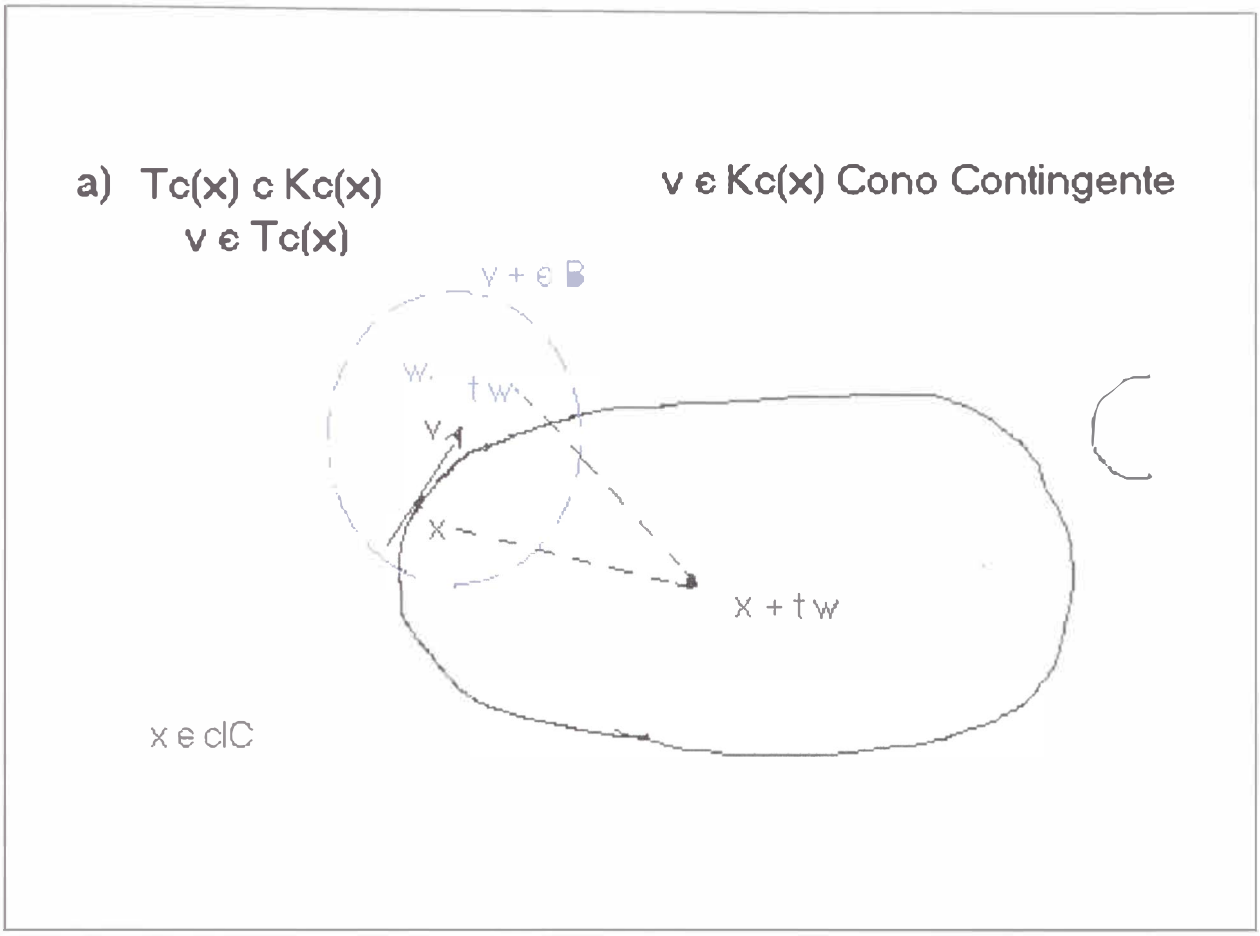
si $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow x + tv_i \in C$ o $x + tv_i \in clC,$

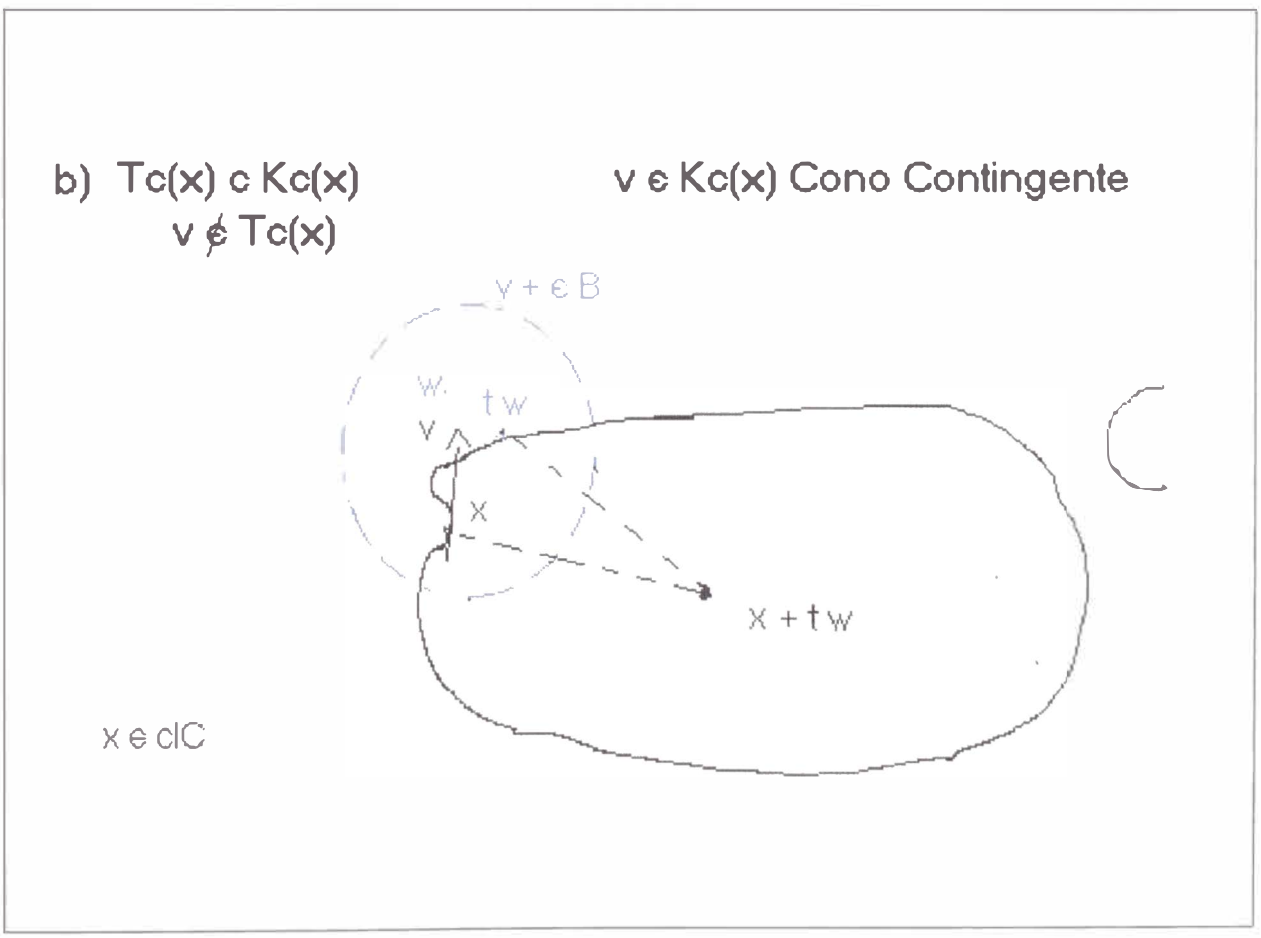
si $x + tv_i \in clC \Longrightarrow$ elegimos $t = \varepsilon_1 < \varepsilon \,/\, x + tv_i \in C$

$\Longrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge v_i \in v + \varepsilon B \,/\, x + tv_i \in C.$

$\Longrightarrow v \in K_C(x). \qquad \square$

Representación gráfica de la Contingencia: $a)$ Si $v \in T_C(x)$ y $b)$ Si $v \notin T_C(x)$.


a) Tc(x) c Kc(x)
v є Tc(x)
v є Kc(x) Cono Contingente
y + є B
w.
t w
v
x
x + t w
C
x є clC


b) Tc(x) c Kc(x)
v ∉ Tc(x)
v є Kc(x) Cono Contingente
y + є B
w.
t w
v
x
x + t w
C
x є clC

Definición 3.5.2 *El conjunto C es regular en x si $T_C(x) = K_C(x)$.*

Observación:

Si C es convexo $\Longrightarrow$ C es regular en x.

Prueba.-

Veamos que $K_C(x) \subset T_C(x)$.

Supongamos que $K_C(x) \not\subset T_C(x)$, es decir $\exists\, v \in K_C(x) \,/\, v \notin T_C(x)$,

como C es convexo, por el Corolario 3.3.2 tenemos

$v \in T_C(x) \Longleftrightarrow d_C^o(x; v) = d'_C(x; v) = 0,$

como $v \notin T_C(x) \Longleftrightarrow d_C^o(x; v) \neq 0 \Longleftrightarrow \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(y + tv) - d_C(y)}{t} \neq 0 \qquad (*)$

como $v \in K_C(x) \Longrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge w \in v + \varepsilon B \,/\, x + tw \in C$

$\Longrightarrow w = v + \varepsilon z$ para algún $z \in B \Longrightarrow x + t(v + \varepsilon z) \in C \Longrightarrow x + t\varepsilon z + tv \in C$,

sea $y = x + t\varepsilon z \Longrightarrow y + tv \in C \Longrightarrow d_C(y + tv) = 0$,

si $\varepsilon \to 0 \Longrightarrow t \to 0 \,/\,$ si $(y \in C \Longrightarrow d_C(y) = 0)$ o si $(y \in clC \Longrightarrow d_C(y) = 0)$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(y + tv) - d_C(y)}{t} = 0$, contradiciendo $(*)$.

$\Longrightarrow K_C(x) \subset T_C(x) \Longrightarrow C$ es regular en x. $\square$

Veamos ahora como T_C y N_C son obtenidos a partir de condiciones de regularidad.

Teorema 3.5.1 *Sea f Lipschitz próximo a x, ahora supongamos que $0 \notin \partial f(x)$. Si $C = \{y \in X \,/\, f(y) \leq f(x)\}$, entonces se tiene*

$$\{v \in X \,/\, f^o(x; v) \leq 0\} \subset T_C(x).$$

Además, si f es regular en x, entonces se tiene la igualdad en esta última inclusión, y también C es regular en x.

Pruebas.-

- Veamos que se cumple esta última inclusión.

Sea $v \in \{v \in X \,/\, f^o(x; v) \leq 0\} \Longrightarrow f^o(x; v) \leq 0$; Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario,

como $0 \notin \partial f(x) \Longrightarrow \exists\, u \in X \,/\, f^o(x; u) < 0 \Longrightarrow \varepsilon f^o(x; u) < 0 \Longrightarrow f^o(x; \varepsilon u) < 0$,

además $f^o(x; v + \varepsilon u) \leq f^o(x; v) + f^o(x; \varepsilon u) < 0 \Longrightarrow f^o(x; v + \varepsilon u) < 0$.

Así, es suficiente probar que cada v para el cual $f^o(x; v) < 0$ pertenecerá a $T_C(x)$.

De la definición de $f^o(x;v)$ se tiene

$$\exists\, \varepsilon > 0 \wedge \exists\, \delta > 0 \,/\, \forall\, y \;||x-y|| < \varepsilon \wedge t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \Longrightarrow f(y+tv) - f(y) \leq -\delta t \qquad (*)$$

Negando la definición, se tiene $f(y+tv) - f(y) > -\delta t \Longrightarrow \dfrac{f(y+tv)-f(y)}{t} > -\delta$

$\Longrightarrow f^o(x;v) > -\delta_1 \;\; \forall\, \delta_1 \in \langle 0, \delta\rangle \Longrightarrow 0 < f^o(x;v) < 0$ Contradicción. $\Longrightarrow$ Se cumple $(*)$.

Ahora sea $\{x_i\} \subset C \,/\, x_i \to x$ y sea $\{t_i\} \subset \langle 0, +\infty\rangle \,/\, t_i \downarrow 0$,

como $x_i \in C \Longrightarrow f(x_i) \leq f(x)$, y $\forall\, i$ se tiene de $(*)$ que

$f(x_i + t_i v) \leq f(x_i) - \delta t_i \leq f(x) - \delta t_i \leq f(x) \Longrightarrow f(x_i + t_i v) \leq f(x) \Longrightarrow x_i + t_i v \in C$

$\Longrightarrow$ de acuerdo al Teorema 3.4.1 $v \in T_C(x)$.

$\Longrightarrow \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\} \subset T_C(x)$.

• Veamos que se cumple la igualdad en esta última inclusión.

Tenemos que probar que $T_C(x) \subset \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\}$.

Sea $v \in T_C(x) \Longrightarrow d_C^o(x;v) = \limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{d_C(y+tv) - d_C(y)}{t} = 0$,

se nota que $x \in C$ pues $f(x) \leq f(x) \Longrightarrow d_C(x) = 0$, y como d_C es continua en X

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{d_C(y+tv) - d_C(y)}{t} = \limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{1}{t}\left(\limsup\limits_{y\to x}(d_C(y+tv) - d_C(y))\right) =$

$\limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{1}{t}\left(\lim\limits_{y\to x}(d_C(y+tv) - d_C(y))\right) = \limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{1}{t}(d_C(x+tv) - d_C(x)) = 0$

$\Longrightarrow \limsup\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{d_C(x+tv)}{t} = 0$, luego por la definición de límite superior se tiene

$\Longrightarrow \forall\, \varepsilon > 0,\, \exists\, N \in \mathbb{N} \,/\, \dfrac{d_C(x+t_i v)}{t_i} < 0 + \varepsilon \;\; \forall\, i \geq N$, para alguna sucesión $\{t_i\} \,/\, t_i \downarrow 0$

$$\Longrightarrow d_C(x + t_i v) < t_i \varepsilon \;\; \forall\, i \geq N \qquad (\alpha)$$

además $\exists\, x_i \in C \,/\, ||x + t_i v - x_i|| - \varepsilon \leq d_C(x + t_i v) \;\; \forall\, \varepsilon > 0$,

sea $\varepsilon = \varepsilon t_i \,/\, t_i > 0 \Longrightarrow ||x + t_i v - x_i|| - \varepsilon t_i \leq d_C(x + t_i v)$ y de (α) se tiene

$\Longrightarrow ||x + t_i v - x_i|| - \varepsilon t_i < \varepsilon t_i \Longrightarrow ||x + t_i v - x_i|| \leq 2\varepsilon t_i$,

como f es Lipschitz próximo a x (de rango K)

$\Longrightarrow f(x + t_i v) - f(x_i) \leq |f(x + t_i v) - f(x_i)| \leq K||x + t_i v - x_i|| \leq 2\varepsilon t_i K$

$$\Longrightarrow f(x + t_i v) \leq f(x_i) + 2K\varepsilon t_i \Longrightarrow \frac{f(x+t_i v) - f(x)}{t_i} \leq \frac{f(x_i) + 2K\varepsilon t_i - f(x)}{t_i} \qquad (\beta)$$

y como $f(x_i) \leq f(x) \Longrightarrow f(x_i) - f(x) \leq 0$,

luego de $(\beta) \Longrightarrow \dfrac{f(x+t_i v) - f(x)}{t_i} \leq 2K\varepsilon \;\; \forall\, \varepsilon > 0$

$\Longrightarrow \lim\limits_{t_i \downarrow 0} \dfrac{f(x + t_i v) - f(x)}{t_i} = f'(x;v) \leq 2K\varepsilon \;\; \forall\, \varepsilon > 0$,

cuando $\varepsilon \to 0$ y como f es regular en x

$\Longrightarrow f'(x;v) = f^o(x;v) \leq 0 \Longrightarrow v \in \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\}$.

$\Longrightarrow$ Se cumple la igualdad en esta última inclusión.

• Veamos que C es regular en x.

Tenemos que probar que $T_C(x) = K_C(x)$.

Ya sabemos que $\{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\} \subset T_C(x) \subset K_C(x)$.

Veamos que $K_C(x) \subset \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\}$.

Sea $v \in K_C(x) \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\,, \exists\, t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \wedge w \in v + \varepsilon B \,/\, x + tw \in C$

$\Longrightarrow w = v + \varepsilon z$ para algún $z \in B \Longrightarrow x + t(v + \varepsilon z) \in C \Longrightarrow x + t\varepsilon z + tv \in C$

$\Longrightarrow f(x + t\varepsilon z + tv) \leq f(x) \Longrightarrow f(x + t\varepsilon z + tv) - f(x) \leq 0$

$$\Longrightarrow \frac{f(x + t\varepsilon z + tv) - f(x)}{t} \leq 0 \Longrightarrow \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x + t\varepsilon z + tv) - f(x)}{t} = f'(x;v) \leq 0,$$

y como f es regular en $x \Longrightarrow v \in \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\}$.

$\Longrightarrow \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\} = K_C(x) = T_C(x)$

$\Longrightarrow C$ es regular en x. $\square$

Corolario 3.5.1

$$N_C(x) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial f(x).$$

Si f es regular en x, entonces se tiene la igualdad en esta última inclusión.

Pruebas.-

• Veamos que se cumple esta última inclusión.

Con las condiciones del Teorema 3.5.1 se tiene $M = \{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\} \subset T_C(x)$,

luego por la polaridad de ambos conjuntos $\Longrightarrow N_C(x) \subset M^o$.

Sabemos que el cono polar de M es $M^o = \{s \in X^* \,/\, \langle s, v\rangle \leq 0\ \forall v \in M\}$.

Como $f^o(x;v) \geq \zeta v \wedge f^o(x;v) \leq 0$

$$\Longrightarrow N_C(x) \subset \{\zeta \in X^* \,/\, \langle \zeta, v\rangle \leq 0\ \forall v \in M\} \subset \partial f(x) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial f(x).$$

$$\Longrightarrow N_C(x) \subset \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial f(x).$$

• Veamos que se cumple la igualdad en esta última inclusión.

Sea $\zeta \in \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda \partial f(x) \Longrightarrow \exists\, \lambda_s \geq 0 \,/\, \zeta \in \lambda_s \partial f(x) \Longrightarrow \exists\, \phi \in \partial f(x) \,/\, \zeta = \lambda_s \phi$,

además del Teorema 3.5.1, siendo f regular en x, tenemos $\{v \in X \,/\, f^o(x;v) \leq 0\} = T_C(x)$

$\Longrightarrow \langle \phi, v\rangle \leq f^o(x;v) < 0\ \ \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \langle \phi, v\rangle \leq 0\ \ \forall v \in T_C(x)$

$\Longrightarrow \langle \lambda_s \phi, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq 0 \;\; \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x)$.

$\Longrightarrow$ Se cumple la igualdad en esta última inclusión. $\square$

Ejemplo.-

Sea

$$C = \{y \in X \,:\, f_1(y) \leq 0,\; f_2(y) \leq 0, ..., \; f_n(y) \leq 0\}$$

y sea x tal que $f_i(x) = 0$ para $i = 1, 2, ..., n$. Entonces, si cada f_i es estrictamente diferenciable en x, probar que C es regular en x.

Prueba.-

Sea $f(y) = \max\{f_i(y) \,:\, i = 1, 2, ..., n\}$,

como cada f_i es estrictamente diferenciable en x

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.3 cada f_i es Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow$ f es Lipschitz próximo a x,

además de la Proposición 2.2.1(a) cada f_i es regular en $x \Longrightarrow f$ es regular en x.

También C se puede expresar así: $\quad C = \{y \,:\, f(y) \leq 0\}$

y además $f(x) = 0 \Longrightarrow C = \{y \in X \,:\, f(y) \leq f(x)\}$ y supongamos que $0 \notin \partial f(x)$,

así tenemos las hipótesis del Teorema 3.5.1, y además como f es regular en x

$\Longrightarrow$ C es regular en x.

3.6 Hipertangentes

Definición 3.6.1 *Un vector $v \in X$ se dice que es Hipertangente hacia C en $x \in C$ si, para algún $\varepsilon > 0$,*

$$y + tw \in C; \;\; \forall y \in (x + \varepsilon B) \cap C, \; w \in v + \varepsilon B, \; t \in \langle 0, \varepsilon\rangle.$$

Observación:

Se tiene que cada vector v hipertangente hacia C en x, pertenece a $T_C(x)$.

Prueba.-

Supongamos lo contrario, es decir $\exists$ v hipertangente hacia C en $x \,/\, v \notin T_C(x)$.

$$\Longrightarrow d_C^o(x; v) \neq 0 \Longrightarrow \limsup_{\substack{p \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{d_C(p + tv) - d_C(p)}{t} \neq 0 \qquad (*)$$

también $y + tw \in C$; $\forall y \in (x + \varepsilon B) \cap C$, $w \in v + \varepsilon B$, $t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$ para algún $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow y = x + \varepsilon z$ para algún $z \in B \wedge w = v + \varepsilon q$ para algún $q \in B$

$\Longrightarrow y + tw = x + \varepsilon z + t(v + \varepsilon q) \in C \ \forall t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$ para algún $\varepsilon > 0$

$\Longrightarrow y + tw = x + \varepsilon(z + qt) + tv \in C \ \forall t \in \langle 0, \varepsilon \rangle$ para algún $\varepsilon > 0$,

sea $p = x + \varepsilon_1(z + qt) \,/\, p \to x \ \forall \varepsilon_1 \in \langle 0, \varepsilon \rangle \wedge \forall t \in \langle 0, \varepsilon \rangle \wedge \ \varepsilon_1 << \varepsilon$,

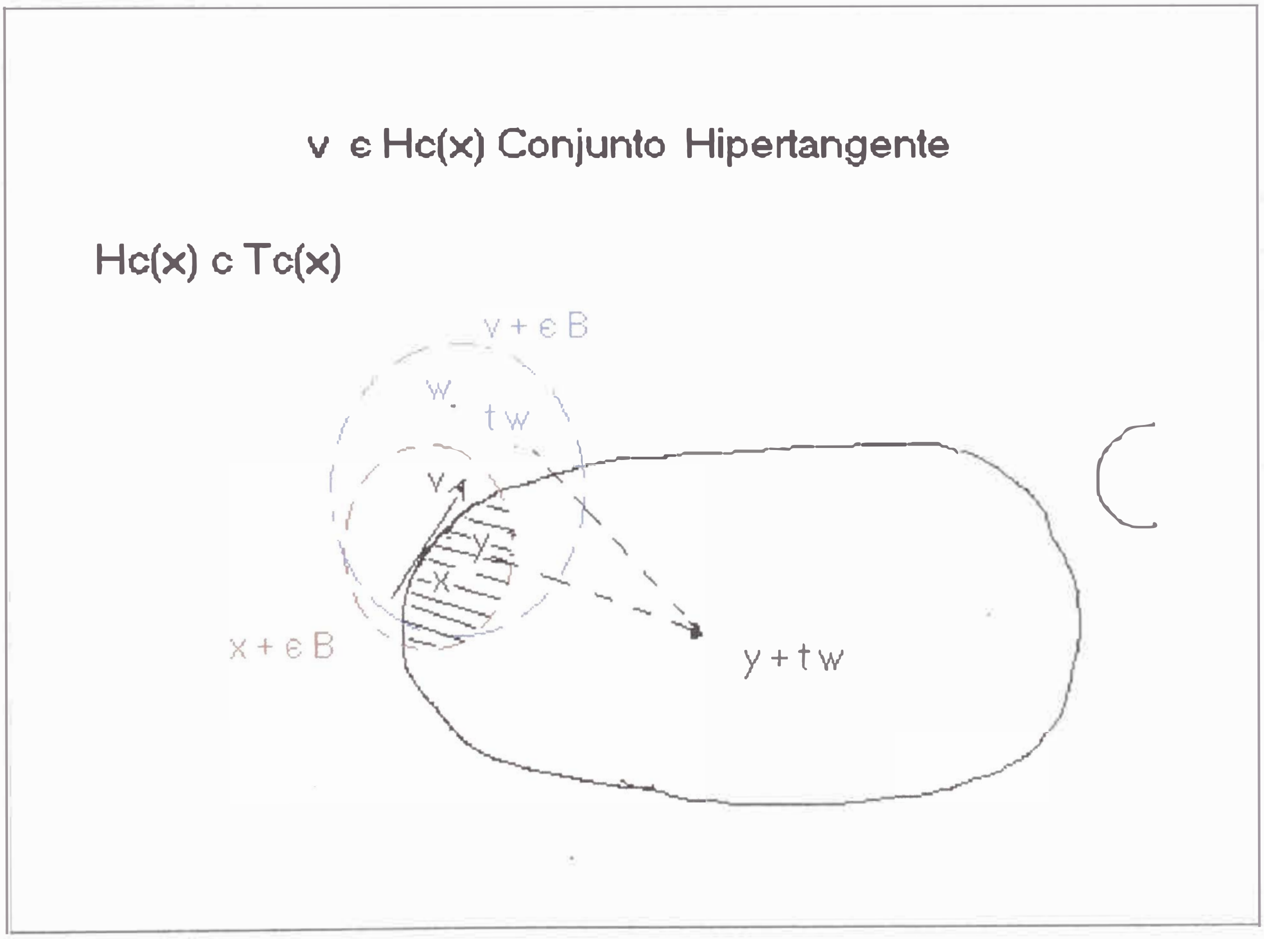
se nota que $d_C(p + tv) = 0$ ya que $p + tv \in C$, y si $t \downarrow 0$, tenemos dos casos:

si ($p \in C \Longrightarrow d_C(p) = 0$) o si ($p \in clC \Longrightarrow d_C(p) = 0$)

$\Longrightarrow \limsup\limits_{\substack{p \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{d_C(p + tv) - d_C(p)}{t} = 0$ contradiciendo $(*)$.

$\Longrightarrow$ Cada vector v hipertangente hacia C en x pertenece a $T_C(x)$. $\square$

Representación gráfica:



Teorema 3.6.1 (Rockafellar)

Supongamos que existe al menos un vector v hipertangente hacia C en x, entonces el conjunto de todas las hipertangentes hacia C en x coincide con el $int(T_C(x))$.

Prueba.-

Sea $H_C(x)$ el conjunto de todas las hipertangentes hacia C en x.

$$v \in H_C(x) \Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, y + tw \in C;\ \ \forall y \in (x + \varepsilon B) \cap C,\ w \in v + \varepsilon B,\ t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$$

Veamos que $H_C(x)$ es abierto en X.

$H_C(x)$ es abierto en X si, y sólo si $\forall v \in H_C(x)\ \exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, v + \varepsilon_1 B \subset H_C(x)$.

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, y + tw \in C;\ \ \forall y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\ \forall w \in v + \varepsilon_1 B,\ \forall t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$.

Sea $z \in v + \varepsilon_1 B$,

en particular para $w = z$ se tiene que

$\exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, y + tz \in C;\ \ \forall y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\ \forall z \in v + \varepsilon_1 B,\ \forall t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$,

más aún $\exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, y + tz \in C;\ \ \forall y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\ \forall z \in z + \varepsilon_1 B,\ \forall t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$

$\Longrightarrow z \in H_C(x) \Longrightarrow H_C(x)$ es un conjunto abierto en X.

Veamos que $\lambda v \in H_C(x)\ \forall \lambda > 0$. (a)

Supongamos lo contrario, es decir $\exists\, \lambda > 0 \,/\, \lambda v \notin H_C(x)$.

Como $v \in H_C(x) \Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, y + tw \in C;\ \ \forall y \in (x + \varepsilon B) \cap C,\ w \in v + \varepsilon B,\ t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, x + \varepsilon u_1 + t(v + \varepsilon u_2) \in C$ para algún $u_1 \in B$ y para algún $u_2 \in B$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, x + \varepsilon u_1 + tv + t\varepsilon u_2 \in C\ \ \forall t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$,

sea $t = t_1\lambda \,/\, t_1 \in \langle 0, \varepsilon\rangle$ y para algún $\lambda > 0$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \wedge \exists\, \lambda > 0 \,/\, x + \varepsilon u_1 + t_1\lambda v + t_1\lambda\varepsilon u_2 \in C\ \ \forall t_1 \in \langle 0, \varepsilon\rangle$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \wedge \exists\, \lambda > 0 \,/\, x + \varepsilon u_1 + t_1(\lambda v + (\lambda\varepsilon)u_2) \in C\ \ \forall t_1 \in \langle 0, \varepsilon\rangle$

$\Longrightarrow \exists\, \lambda > 0 \,/\, \lambda v \in H_C(x)$. Contradiciendo la suposición.

$\Longrightarrow$ Se cumple (a).

Además como $H_C(x) \subset T_C(x) \Longrightarrow H_C(x) \subset int(T_C(x))$ (b)

• Veamos que $int(T_C(x)) \subset H_C(x)$.

Sea $v \in int(T_C(x))$,

sea $s \in H_C(x) \Longrightarrow$ de (a) y (b) $\exists\, \lambda > 0 \,/\, v - \lambda s \in int(T_C(x)) \Longrightarrow v - \lambda s \in T_C(x)$,

también de $(a) \Longrightarrow \lambda s \in H_C(x)$.

Probaremos que $H_C(x) + T_C(x) \subset H_C(x)$. (1)

Así, sea $v = \lambda s + (v - \lambda s) \in H_C(x) + T_C(x) \Longrightarrow$ de (1) $v \in H_C(x) \Longrightarrow int(T_C(x)) \subset H_C(x)$.

Sea $v_1 \in H_C(x) \wedge v_2 \in T_C(x)$, debemos demostrar que $v_1 + v_2 \in H_C(x)$, es decir

$\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, y_1 + tw_1 \in C \;\; \forall\, y_1 \in (x + \varepsilon B) \cap C,\; w_1 \in v_1 + v_2 + \varepsilon B,\; t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$

$\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon > 0 \,/\, (x + \varepsilon B) \cap C + t(v_1 + v_2 + \varepsilon B) \subset C,\; \forall\, t \in \langle 0, \varepsilon\rangle. \qquad (2)$

como $v_1 \in H_C(x)$ se tiene que

$\exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, y + tw \in C \;\; \forall\, y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\; w \in v_1 + \varepsilon_1 B,\; t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$

$\Longleftrightarrow \exists\, \varepsilon_1 > 0 \,/\, (x + \varepsilon_1 B) \cap C + t(v_1 + \varepsilon_1 B) \subset C,\; \forall\, t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle. \qquad (3)$

ahora, ya que $v_2 \in T_C(x)$

$\Longrightarrow \exists\, \varepsilon_2 > 0 \,/\, (x + \varepsilon_2 B) \cap C + tv_2 \subset C + t\left(\frac{\varepsilon_1}{2}\right) B,\; \forall\, t \in \langle 0, \varepsilon_2\rangle. \qquad (4)$

ésta es una consecuencia de la Caracterización de T_C, dada por el Teorema 3.4.1.

Tenemos que demostrar (2).

Sea $\varepsilon < \min\left\{\varepsilon_2, \frac{\varepsilon_1}{2}, \frac{\varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1 + ||v_2||}\right\} \qquad (\alpha)$

diremos que (2) es valido para este ε.

Sea $v \in (x + \varepsilon B) \cap C + t(v_1 + v_2 + \varepsilon B)$, donde $y \in (x + \varepsilon B) \cap C$ y $t \in \langle 0, \varepsilon\rangle$

$\Longrightarrow v = y + t(v_1 + v_2 + \varepsilon u)$ para algún $y \in (x + \varepsilon B) \cap C$ y para algún $u \in B$,

como $\varepsilon \leq \varepsilon_2$ y de (4) se tiene $y + tv_2 - t\left(\frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) \in C$ para algún vector $w \,/\, ||w|| < 1$.

• Veamos que $y + t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) \in x + \varepsilon_1 B$.

Como $y \in (x + \varepsilon B) \cap C$ y $t \in \langle 0, \varepsilon\rangle \Longrightarrow ||y - x|| < \varepsilon$ y $t < \varepsilon$

$\Longrightarrow \left\|x - y - t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right)\right\| \leq ||x - y|| + \left\|t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right)\right\| \leq$

$||x - y|| + t\left(||v_2|| + \frac{\varepsilon_1}{2}||w||\right) < \varepsilon + \varepsilon\left(||v_2|| + \frac{\varepsilon_1}{2}\right) < \varepsilon + \varepsilon(||v_2|| + \varepsilon_1)$, luego de (α)

$\Longrightarrow \left\|x - y - t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right)\right\| \leq \varepsilon + \varepsilon(||v_2|| + \varepsilon_1) < \varepsilon_1.$

$\Longrightarrow y + t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,$

y con (3) $\Longrightarrow y + t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) + t(v_1 + \varepsilon_1 B) \subset C \qquad (5)$

Si tenemos que $v = y + t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) + tv_1 + t\left(\varepsilon u + \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right)$ y observamos que

$\left\|\varepsilon u + \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right\| \leq ||\varepsilon u|| + \left\|\frac{\varepsilon_1 w}{2}\right\| < \varepsilon + \frac{\varepsilon_1}{2} < \varepsilon_1$

$\Longrightarrow$ de (5) $v = y + t\left(v_2 - \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) + tv_1 + t\left(\varepsilon u + \frac{\varepsilon_1 w}{2}\right) \in C \Longrightarrow v \in C.$

$\Longrightarrow$ Queda probado (2) $\Longrightarrow v_1 + v_2 \in H_C(x) \Longrightarrow H_C(x) + T_C(x) \subset H_C(x)$

$\Longrightarrow$ Queda probado (1) $\Longrightarrow int(T_C(x)) \subset H_C(x).$ $\square$

Corolario 3.6.1 *Sea $x \in C$, y supongamos que existe una hipertangente hacia C en x, entonces N_C es cerrada en x, es decir, si $\zeta_i \in N_C(x_i)$ y $\zeta_i \to \zeta$ (débil*), $x_i \to x$, entonces se tiene $\zeta \in N_C(x)$.*

Prueba.-

Consideremos cualquier v hipertangente hacia C en x

$\Longrightarrow v \in T_C(y)\ \forall y \in C\,/\,y \to x$, (pues $T_C(x)$ es cerrado en X),

sea $\zeta_i \in N_C(x_i) \Longrightarrow \langle \zeta_i, v\rangle \leq 0\ \forall i$,

además, como $\zeta_i \to \zeta$ y $\langle\,,\,\rangle$ es continua $\Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty}\langle \zeta_i, v\rangle = \langle \zeta, v\rangle \leq 0$

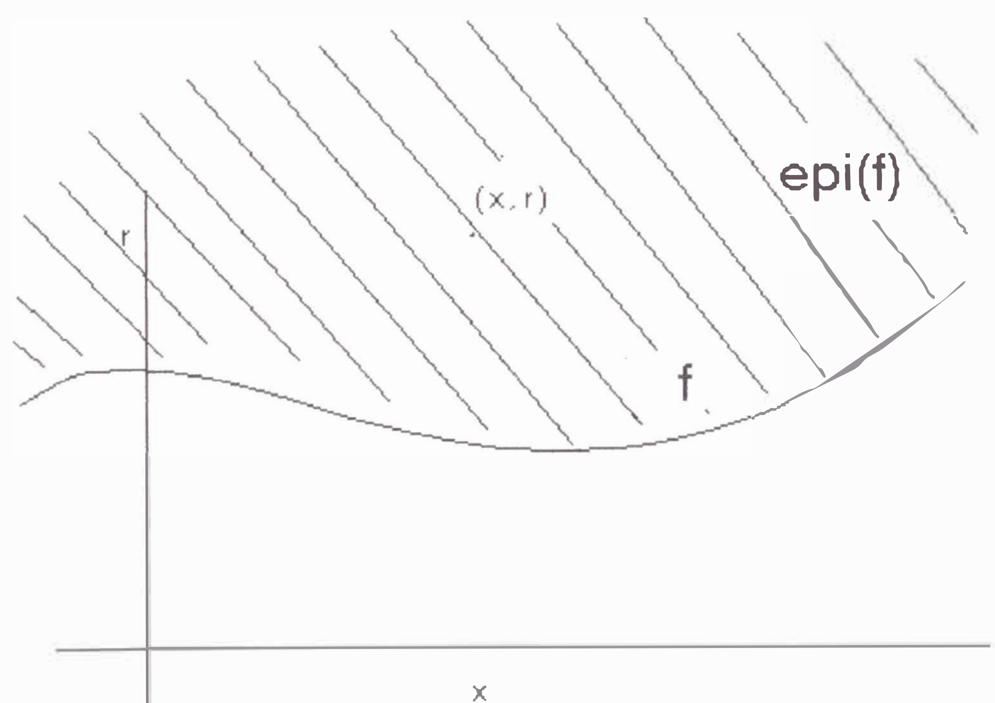
$\Longrightarrow$ por el Teorema 3.6.1 $\langle \zeta, v\rangle \leq 0\ \forall v \in int(T_C(x))$,

como $int(T_C(x)) \neq \emptyset$ y $T_C(x)$ es convexo, se tiene $\overline{int(T_C(x))} = T_C(x)$

$\Longrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq 0\ \forall v \in T_C(x) \Longrightarrow \zeta \in N_C(x) \Longrightarrow N_C$ es cerrado en x. $\square$

3.7 Epígrafos

Como ya hemos visto, la función distancia d_C es un nexo entre la teoría analítica del Gradiente Generalizado y la teoría Geométrica ya definida. Un vínculo diferente puede ser tratado a través de la noción de Epígrafo.



Interpretación gráfica del epígrafo de la función f

Definición 3.7.1 *El Epígrafo de una función $f : X \to \mathbb{R}$ es el siguiente subconjunto de $X x \mathbb{R}$:*

$$epi(f) := \{(x, r) \in X x \mathbb{R} \,/\, f(x) \leq r\}.$$

Se observa que $epi(f)$ captura toda la información por sobre la función f.

Veremos a continuación que la Tangencia es consistente con la Derivada Direccional Generalizada de f. También la Normal es consistente con el Gradiente Generalizado de f. Estas relaciones se obtienen gracias al $epi(f)$.

Teorema 3.7.1 *Sea f Lipschitz próximo a x, entonces*

(i) *El Epígrafo de $f^o(x;.)$ es $T_{epi(f)}(x, f(x))$, es decir $(v, r) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$ si, y sólo si $r \geq f^o(x; v)$.*

(ii) *f es regular en x si, y sólo si $epi(f)$ es regular en $(x, f(x))$.*

Pruebas.-

(i) $\underline{| \Longrightarrow |}$ Sea $(v, r) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$,

elegimos las sucesiones $\{y_i\} \,/\, y_i \to x$ y $\{t_i\} \,/\, t_i \downarrow 0$

$$\Longrightarrow \lim_{i \to \infty} \frac{f(y_i + t_i v) - f(y_i)}{t_i} = f^o(x; v) \tag{1}$$

como f es Lipschitz próximo a $x \Longrightarrow f$ es continua en x

$\Longrightarrow f(y_i) \to f(x) \Longrightarrow (y_i, f(y_i)) \to (x, f(x))$,

además como $f(y_i) \leq f(y_i) \Longrightarrow (y_i, f(y_i)) \in epi(f)$,

luego por la extensión del Teorema 3.4.1

$\Longrightarrow \exists\{(v_i, r_i)\} / (v_i, r_i) \to (v, r) \,/\, (y_i, f(y_i)) + t_i(v_i, r_i) \in epi(f)$

$\Longrightarrow (y_i + t_i v_i, f(y_i) + t_i r_i) \in epi(f)$

$\Longrightarrow f(y_i + t_i v_i) \leq f(y_i) + t_i r_i \Longrightarrow \dfrac{f(y_i + t_i v_i) - f(y_i)}{t_i} \leq r_i$

$\Longrightarrow f^o(x; v) \leq r$.

$\underline{| \Longleftarrow |}$ Sea $r \geq f^o(x; v) \Longrightarrow$ Probaremos que $(v, r) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$.

Es suficiente probar que $\forall\, v, \forall\, \delta > 0$ $(v, f^o(x; v) + \delta) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$.

Aplicaremos la extensión del Teorema 3.4.1.

Sea $\{(x_i, r_i)\} \subset epi(f) \,/\, (x_i, r_i) \to (x, f(x))$ y $\{t_i\} \,/\, t_i \downarrow 0$, así obtendremos la sucesión $\{(v_i, s_i)\} / (v_i, s_i) \to (v, f^o(x; v) + \delta)$, donde

$(x_i, r_i) + t_i(v_i, s_i) = (x_i + t_i v_i, r_i + t_i s_i) \in epi(f) \;\; \forall\, i$,

es decir $r_i + t_i s_i \geq f(x_i + t_i v_i)$ (2)

Se define $v_i = v$ y $s_i = \max\left\{ f^o(x; v) + \delta, \dfrac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i} \right\}$,

como $\limsup\limits_{i \to \infty} \dfrac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i} = f^o(x; v)$

$\Longrightarrow \forall\, \delta > 0,\; \cancel{\exists N \in \mathbb{N} /} \dfrac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i} < f^o(x; v) + \delta \;\; \forall\, i \geq N.$

Si $i \to \infty \Longrightarrow s_i \to f^o(x; v) + \delta$.

<u>Probaremos (2).</u>

Como $s_i \geq \dfrac{f(x_i + t_i v) - f(x_i)}{t_i} \Longrightarrow s_i t_i \geq f(x_i + t_i v) - f(x_i)$

$\Longrightarrow r_i + s_i t_i \geq r_i + f(x_i + t_i v) - f(x_i)$ y como $(x_i, r_i) \in epi(f) \Longrightarrow r_i \geq f(x_i)$

$\Longrightarrow r_i + s_i t_i \geq f(x_i + t_i v)$ (Fin de (2)). $\Longrightarrow (v, r) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$.

(ii) $\underline{|\Longrightarrow|}$ Sabemos que f es regular en x, y además $u = (v, r)$.

Sea $g : X\text{x}\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, r) = f(x) - r$

$\Longrightarrow epi(f) = \{(x, r) \in X x\mathbb{R} \,/\, f(x) \leq r\} = \{(x, r) \in X x\mathbb{R} \,/\, g(x, r) \leq 0\}$.

<u>Veamos que g es regular en $(x, f(x))$.</u>

• Veamos que g es Lipschitz próximo a $(x, f(x))$.

Como f es Lipschitz próximo a x

$\Longrightarrow |f(z) - f(y)| \leq K||z - y||$

$\Longrightarrow |f(z) - r - (f(y) - r)| \leq K||z - y||$

$\Longrightarrow |g(z, r) - g(y, r)| \leq K||(z - y, 0)|| = K||(z, r) - (y, r)||$

$\Longrightarrow g$ es Lipschitz próximo a $(x, f(x))$.

• Veamos que existe $g'(x, f(x))$.

$g'_x(x, r) = (f(x) - r)'_x = f'(x) \Longrightarrow g'_x((x, r); u) = f'(x; v) = f^o(x; v)$

$\Longrightarrow g'_x((x, r); u)$ existe.

$g'_r(x, r) = (f(x) - r)'_r = -1 \Longrightarrow g'_r((x, r); u) = -1$

$\Longrightarrow g'_r((x, r); u)$ existe.

• Veamos que $g'((x, f(x)); u) = g^o((x, f(x)); u)$.

$g^o_x((x, r); u) = \limsup\limits_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \dfrac{g(y + tv, r) - g(y, r)}{t} =$

$\limsup_{\substack{y\to x\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f(y+tv)-r-f(y)+r}{t} = f^o(x;v)$, y como $g'_x((x,r);u) = f^o(x;v)$

$\Longrightarrow g^o_x((x,r);u) = g'_x((x,r);u)$.

$g^o_r((x,r);u) = \limsup_{\substack{q\to r\\ t\downarrow 0}} \dfrac{g(x,q+tr)-g(x,q)}{t} =$

$\limsup_{\substack{q\to r\\ t\downarrow 0}} \dfrac{f(x)-q-tr-f(x)+q}{t} = -r$, hago en particular $r=1$;

y como $g'_r((x,r);u) = -1 \Longrightarrow g^o_r((x,r);u) = g'_r((x,r);u)$.

$\Longrightarrow g$ es regular en $(x, f(x))$.

Como g es Lipschitz próximo a $(x, f(x))$,

$\bar{0} \notin \partial g(x, f(x))$, pues $g^o((x,f(x));u) \geq \langle(\zeta,\phi),(v,r)\rangle$

$\Longrightarrow (g^o_x((x,r);u) = f^o(x;v) \geq \langle\zeta, v\rangle \,\forall v\in X) \wedge (g^o_r((x,r);u) = -r \geq \langle\phi, r\rangle \,\forall r\in\mathbb{R})$

$\Longrightarrow \partial g(x,f(x)) = \partial f(x) x \{-1\}$,

$C = epi(f) = \{(x,r)\in X x\mathbb{R} \,/\, f(x)\leq r\} = \{(x,r)\in X x\mathbb{R} \,/\, g(x,r)\leq 0\}$,

y además, como ya se demostró que g es regular en $(x, f(x))$

$\Longrightarrow$ por la extensión del Teorema 3.5.1 $epi(f)$ es regular en $(x, f(x))$.

(ii) $|\Longleftarrow|$ Esta prueba requiere el siguiente resultado.

Sea f'_+ la Derivada de Dini: $f'_+(x;v) = \liminf_{t\downarrow 0} \dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t}$

Lema 3.7.1 $K_{epi(f)}(x, f(x)) = epi(f'_+(x;.))$.

Prueba.-

La referencia para esta prueba puede apreciarse en [4]. □

Como $epi(f)$ es regular en $(x, f(x))$

$\Longrightarrow$ por la Definición 3.5.2 $T_{epi(f)}(x,f(x)) = K_{epi(f)}(x, f(x))$.

Por el Teorema 3.7.1(i) $epi(f^o(x;.)) = T_{epi(f)}(x, f(x))$.

Luego por las igualdades anteriores se tiene

$\Longrightarrow epi(f^o(x;.)) = epi(f'_+(x;.)) \Longrightarrow f^o(x;.) = f'_+(x;.)\ \forall v$

$\Longrightarrow f'_+(x;v) = \liminf_{t\downarrow 0} \dfrac{f(x+tv)-f(x)}{t} \leq f'(x;v) \Longrightarrow f'_+(x;v) \leq f'(x;v)$

$\Longrightarrow f^o(x;v) \leq f'(x;v)$ y como $f'(x;v) \leq f^o(x;v) \Longrightarrow f'(x;v) = f^o(x;v)$

$\Longrightarrow f$ es regular en x. □

Corolario 3.7.1 *Sea $\zeta \in X^*$ es tal que $\zeta \in \partial f(x)$ si, y sólo si $(\zeta, -1) \in N_{epi(f)}(x, f(x))$.*

Prueba.-

$\underline{| \Longrightarrow |}$ Si $\zeta \in \partial f(x) \Longleftrightarrow f^{\circ}(x;v) \geq \langle \zeta, v \rangle$.

Sea $(v,r) \in T_{epi(f)}(x, f(x)) \Longrightarrow r \geq f^{\circ}(x;v)$ (ésto por el Teorema 3.7.1(i))

$\Longrightarrow r \geq \langle \zeta, v \rangle \Longrightarrow 0 \geq \langle \zeta, v \rangle - r \Longrightarrow 0 \geq \langle (\zeta, -1), (v, r) \rangle$

$\Longrightarrow \langle (\zeta, -1), (v,r) \rangle \leq 0 \ \forall (v,r) \in T_{epi(f)}(x, f(x)) \Longrightarrow (\zeta, -1) \in N_{epi(f)}(x, f(x))$.

$\underline{| \Longleftarrow |}$ Si $(\zeta, -1) \in N_{epi(f)}(x, f(x))$.

$\Longrightarrow \langle (\zeta, -1), (v,r) \rangle \leq 0 \ \forall (v,r) \in T_{epi(f)}(x, f(x))$

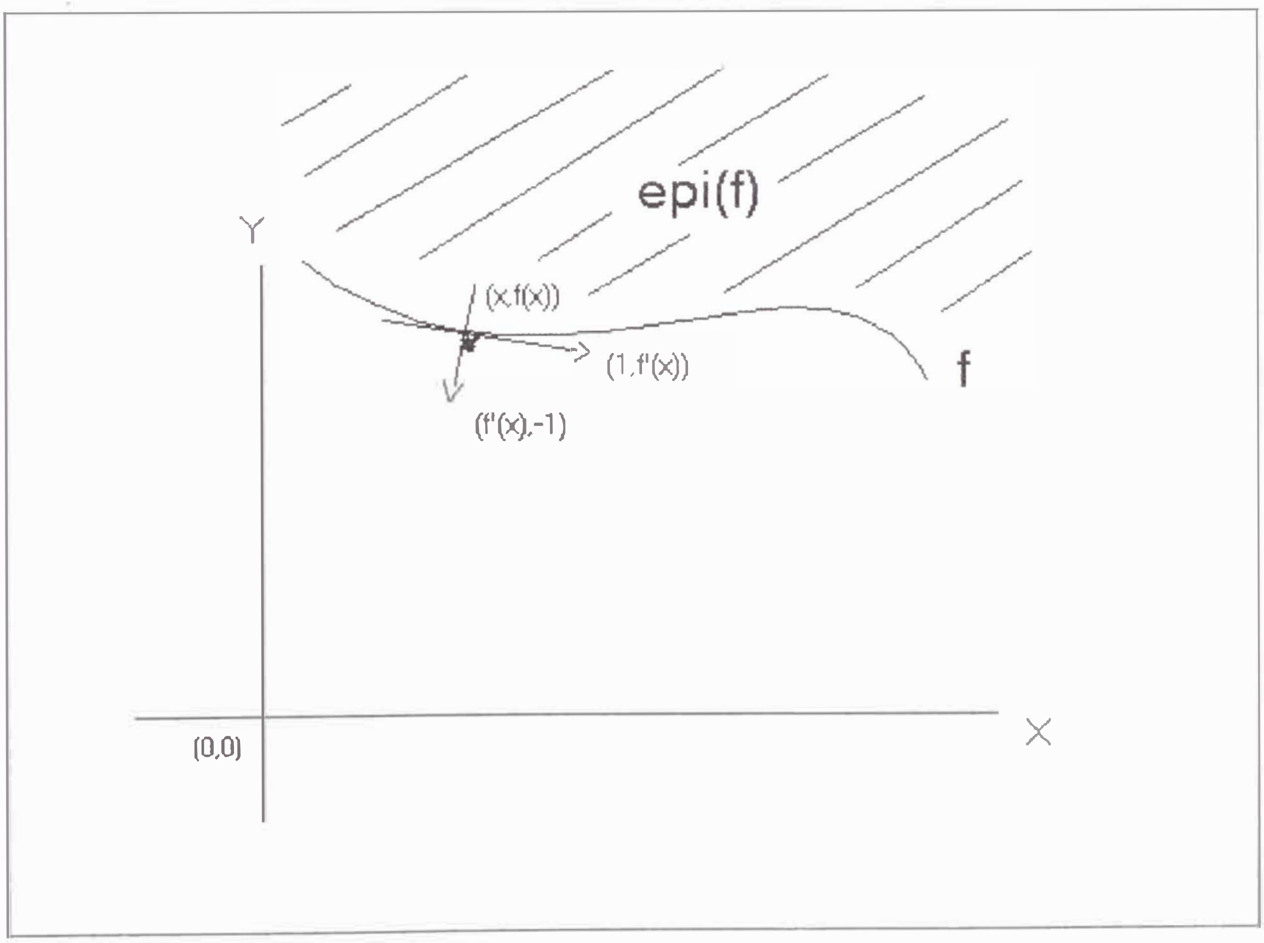
$\Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle - r \leq 0 \Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle \leq r$,

como $(v,r) \in T_{epi(f)}(x, f(x)) \Longrightarrow r \geq f^{\circ}(x;v)$ (ésto por el Teorema 3.7.1(i))

$\Longrightarrow \langle \zeta, v \rangle \leq r \ \wedge \ f^{\circ}(x;v) \leq r \Longrightarrow f^{\circ}(x;v) \geq \langle \zeta, v \rangle \ \forall v \Longrightarrow \zeta \in \partial f(x)$. $\square$

Observación:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable en $\mathbb{R}$, según el Corolario anterior, el vector $(f'(x), -1)$ es normal hacia el grafo de la función f en $(x, f(x))$. Gráficamente:



3.8 Una Extensión del Gradiente Generalizado con Funciones Lipschitz o No Lipschitz

Aquí se da una Definición para cualquier función f Lipschitz o No, del ∂f. El Corolario 3.7.1 garantiza que esta nueva definición es consistente para el caso Lipschitz. Es posible entonces definir el ∂f para el valor extendido de funciones f en X (es decir, tomando valores en $\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$), donde f es finito en x.

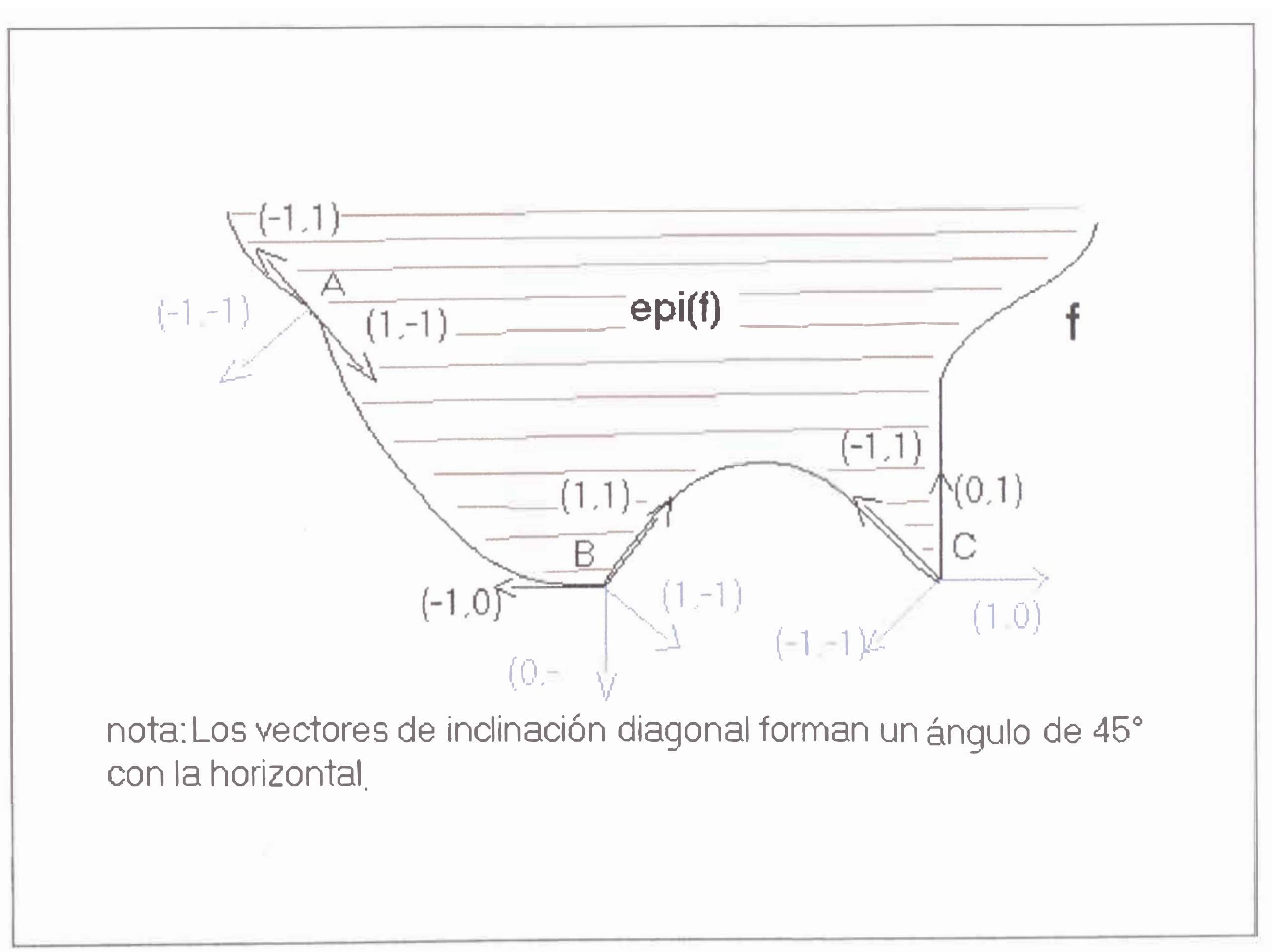
Definición 3.8.1 *Sea $f : X \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$ es finito en x. Se define*

$$\partial f(x) = \{\zeta \in X^* \,/\, (\zeta, -1) \in N_{epi(f)}(x, f(x))\}.$$

Observaciones:

El $\partial f(x) \subset X^*$ es un subconjunto débil* cerrado del X^*, el cual puede que no sea compacto, además puede que sea vacío (salvo que f sea Lipschitz).

Ejemplo.-



Si el gráfico anterior es interpretado como el epígrafo de una función f, entonces usando la Definición 3.8.1, calcular ∂f en los puntos indicados.

<u>En el punto A:</u>

Sabiendo que f es Lipschitz en A, $\partial f = \{-1\}$ y además f es continuamente diferenciable.

<u>En el punto B:</u>

Sabiendo que f es Lipschitz en B, y además se nota que ζ tiene un recorrido de valores, de $\zeta = 0$ hasta $\zeta = 1 \Longrightarrow \partial f = [0, 1]$.

<u>En el punto C:</u>

Aquí, f no es continua, es decir no es Lispchitz en C, pero sin embargo todavía se puede usar la definición anterior para el caso lateral izquierdo, así $\partial f = [-1, +\infty\rangle$, pues se tiene una pendiente vertical.

Capítulo 4

Cuando el Espacio es de Dimensión Finita

En este Capítulo veremos propiedades del Gradiente Generalizado, Normales y Tangentes, en un espacio de dimensión finita $X = \mathbb{R}^n$ (donde $(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^n$).

4.1 Caracterización para el Cálculo del Gradiente Generalizado

Teorema 4.1.1 *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función Lipschitz próximo a x, y supongamos que S es cualquier conjunto de Lebesgue de $m(S) = 0$ en $\mathbb{R}^n$, entonces*

$$\partial f(x) = co\{\lim \nabla f(x_i) \, : \, x_i \to x, \, x_i \notin S, \, x_i \notin \Omega_f\},$$

donde Ω_f denota el conjunto de puntos en el cual la función f no es diferenciable. (ésto por el Teorema de Rademacher).

(El significado de esta ecuación es la siguiente:
Consideremos cualquier sucesión $\{x_i\} \, / \, x_i \to x$, mientras esta sucesión evita tocar a S y Ω_f, y tal que la sucesión $\{\nabla f(x_i)\}$ es convergente; entonces la cápsula convexa de todos sus puntos límites es $\partial f(x)$).

Prueba.-

Consideremos la sucesión $\{x_i\} / x_i \to x$, además $x_i \notin S \cup \Omega_f$.

Veamos que $m(S \cup \Omega_f) = 0$.

Sabemos que $m(S) = 0$ y $S \cap \Omega_f \subset S \Longrightarrow m(S \cap \Omega_f) \leq m(S) \Longrightarrow m(S \cap \Omega_f) = 0$

y como $m(S \cup \Omega_f) = m(S) + m(\Omega_f) - m(S \cap \Omega_f) = 0 + m(\Omega_f) - 0 = m(\Omega_f)$,

se supone que el conjunto de puntos en el cual la función f no es diferenciable es un conjunto finito $\Longrightarrow m(\Omega_f) = 0 \Longrightarrow m(S \cup \Omega_f) = 0$.

Además como $\partial f(x_i)$ es acotado en $x_i \in \mathbb{R}^n$ (ésto por la Proposición 1.3.1(a)), y

$\nabla f(x_i) \in \partial f(x_i)$ $\forall i$ de acuerdo a la Proposición 1.5.2

$\Longrightarrow$ la sucesión $\{\nabla f(x_i)\}$ admite una subsucesión convergente por el Teorema de Bolzano Weierstrass. (admite al menos un punto límite)

$\Longrightarrow \lim\limits_{x_i \to x} \nabla f(x_i) \in \partial f(x)$, ésto por la Proposición 1.4.2(b)

$\Longrightarrow \{\lim \nabla f(x_i) \,:\, x_i \to x,\, x_i \notin S \cup \Omega_f\} \subset \partial f(x)$,

y como $\partial f(x)$ es convexo, se tiene

$$co\{\lim \nabla f(x_i) \,:\, x_i \to x,\, x_i \notin S \cup \Omega_f\} \subset \partial f(x).$$

Nos falta probar la otra inclusión, es decir

$$\partial f(x) \subset co\{\lim \nabla f(x_i) \,:\, x_i \to x,\, x_i \notin S \cup \Omega_f\},$$

ésta será equivalente a probar la relación entre sus respectivas funciones soporte:

$$f^o(x; v) \leq \limsup_{y \to x}\{\langle \nabla f(y), v\rangle \,:\, y \notin S \cup \Omega_f\},$$

es decir probaremos el siguiente Lema.

Lema 4.1.1 $\forall v \in \mathbb{R}^n - \{\overline{0}\}$, $\forall \varepsilon > 0$ *tenemos*

$$f^o(x; v) - \varepsilon \leq \limsup\{\langle \nabla f(y), v\rangle \,:\, y \to x,\, y \notin S \cup \Omega_f\}.$$

Prueba.-

Sea $\varepsilon > 0$.

Sea $\alpha = \limsup\{\langle \nabla f(y), v\rangle \,:\, y \to x,\, y \notin S \cup \Omega_f\}$

$\Longrightarrow \exists\, \delta > 0 / \langle \nabla f(y), v\rangle < \alpha + \varepsilon \;\; y \in x + \delta B,\, y \notin S \cup \Omega_f$,

elegimos $\delta \approx 0 / m(S \cup \Omega_f) = 0$ en $x + \delta B$.

Consideremos el segmento $L_y = \left\{ y + tv \,:\, 0 < t < \dfrac{\delta}{2||v||} \right\}$,
desde que $m(S \cup \Omega_f) = 0$ en $x + \delta B$, se tiene por el Teorema de Fubini que para casi todo $y \in x + \dfrac{\delta}{2}B$, el segmento L_y se encuentra con $S \cup \Omega_f$ en un conjunto de medida unidimensional cero.
Sea $y \in x + \dfrac{\delta}{2}B$ con la propiedad anterior y sea $t \in \left\langle 0, \dfrac{\delta}{2||v||} \right\rangle$

$$\Longrightarrow f(y+tv) - f(y) = \int_0^t \langle \nabla f(y+sv), v \rangle ds,$$

debido a que el dominio de f existe en casi todo L_y.
Cuando $||(y+sv) - x|| < \delta$ para $0 < s < t \Longrightarrow \langle \nabla f(y+sv), v \rangle \leq \alpha + \varepsilon$

$$\Longrightarrow f(y+tv) - f(y) = \int_0^t \langle \nabla f(y+sv), v \rangle ds \leq \int_0^t (\alpha + \varepsilon) ds = t(\alpha + \varepsilon),$$

será cierto $\forall\, y \in x + \dfrac{\delta}{2}B$, excepto en un conjunto de medida 0, y $\forall\, t \in \left\langle 0, \dfrac{\delta}{2||v||} \right\rangle$, y como f es continua en x, pues f es Lipschitz próximo a x

$$\Longrightarrow \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} \leq \alpha + \varepsilon \;\forall\, y, t \Longrightarrow \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y+tv) - f(y)}{t} = f^\circ(x; v) \leq \alpha + \varepsilon. \quad \square$$

Ejemplo.-

Usando el Teorema 4.1.1 calcularemos $\partial f(0,0)$, donde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está dado por

$$f(x,y) = \max\{\min\{x, -y\}, y - x\}.$$

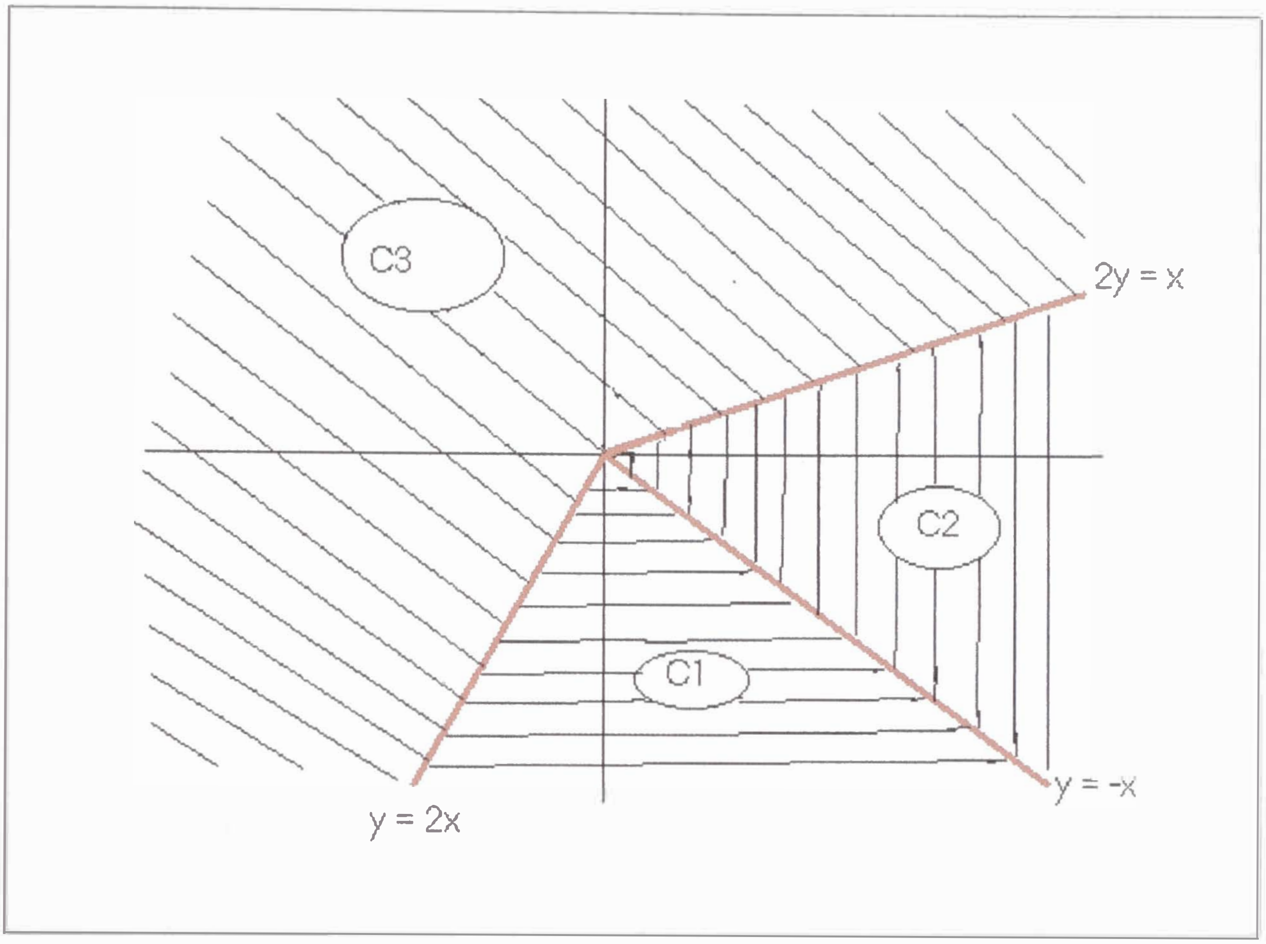
Definimos

$$C_1 = \{(x,y) \,/\, y \leq 2x \;\wedge\; y \leq -x\}$$

$$C_2 = \{(x,y) \,/\, y \leq x/2 \;\wedge\; y \geq -x\}$$

$$C_3 = \{(x,y) \,/\, y \geq 2x \;\vee\; y \geq x/2\}$$

donde $C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \mathbb{R}^2$, así gráficamente tenemos:



Luego

• $f(x,y) = \max\{\min\{x,-y\}, y-x\}$ en C_1, donde $y - x \leq x \wedge -y \geq x$

$\Longrightarrow f(x,y) = \max\{x, y-x\} = x$ en C_1.

• $f(x,y) = \max\{\min\{x,-y\}, y-x\}$ en C_2, donde $y - x \leq -y \wedge -y \leq x$

$\Longrightarrow f(x,y) = \max\{-y, y-x\} = -y$ en C_2.

• $f(x,y) = \max\{\min\{x,-y\}, y-x\}$ en C_3, donde $y - x \geq x \vee y - x \geq -y$

$\Longrightarrow f(x,y) = \max\{\min\{x,-y\}, y-x\} = y - x$ en C_3.

Así tenemos

$$f(x,y) = \begin{cases} x & para\ (x,y) \in C_1 \\ -y & para\ (x,y) \in C_2 \\ y-x & para\ (x,y) \in C_3. \end{cases}$$

Veamos que f es Lipschitz en C_1, C_2 y C_3 próximos a $(0,0)$.

• $f(x,y) = x$ *en* C_1

$|f(x,y) - f(z,y)| = |x - z| = ||(x-z,0)|| = ||(x-z, y-y)|| = ||(x,y)-(z,y)||$

$\Longrightarrow |f(x,y) - f(z,y)| \leq ||(x,y)-(z,y)|| \Longrightarrow f$ es Lipschitz en C_1 (próximo a $(0,0)$).

• $\underline{f(x,y) = -y \ \ en \ \ C_2}$

$|f(x,y) - f(x,z)| = |-y - (-z)| = ||(0, z-y)|| = ||(x-x, z-y)|| = ||(x,z) - (x,y)||$

$\Longrightarrow |f(x,y) - f(x,z)| \leq ||(x,y) - (x,z)|| \Longrightarrow f$ es Lipschitz en C_2 (próximo a $(0,0)$).

• $\underline{f(x,y) = y - x \ \ en \ \ C_3}$

Se sigue de manera análoga respecto a x, o respecto a y

$\Longrightarrow f$ es Lipschitz en C_3 (próximo a $(0,0)$).

Sea $S = Fr(C_1) \cup Fr(C_2) \cup Fr(C_3) \subset \mathbb{R}^2$, donde $m(S) = 0$.

Si $(x,y) \notin S \Longrightarrow f$ es diferenciable en (x,y) y existirá $\nabla f(x,y)$, así

$$f(x,y) = \begin{cases} x \quad en \ C_1 & \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 1, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = (1,0) \\ -y \quad en \ C_2 & \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -1 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = (0,-1) \\ y-x \quad en \ C_3 & \Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x} = -1, \ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \nabla f(x,y) = (-1,1) \end{cases}$$

$\Longrightarrow$ Por el Teorema 4.1.1 $\partial f(0,0) = co\{(1,0), (0,-1), (-1,1)\}$.

4.2 La Función Distancia Euclideana

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto no vacío arbitrario de $\mathbb{R}^n$. Usaremos el Teorema 4.1.1 para caracterizar el gradiente generalizado de la función d_C relativa a la usual norma Euclideana:

$$d_C(x) = \inf\{||x - c|| \ : \ c \in C\},$$

donde $||x - c|| = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - c_i|^2 \right)^{1/2}$ es la norma usual en $\mathbb{R}^n$.

Sabiendo que d_C es globalmente Lipschitz de acuerdo a la Proposición 3.1.1.

Proposición 4.2.1 *Si existe $\nabla d_C(x) \neq \bar{0}$. Entonces $x \notin clC$, además existirá un único punto cercano $c_o \in clC$ a x, y $\nabla d_C(x) = \dfrac{x - c_o}{||x - c_o||}$.*

Pruebas.-

• $\underline{\text{Veamos que } x \notin clC.}$

Supongamos que $x \in clC$

$\Longrightarrow \langle v, \nabla d_C(x) \rangle = \lim\limits_{t \downarrow 0} \dfrac{d_C(x + tv) - d_C(x)}{t} = D_v d_C(x) \ \forall v \in \mathbb{R}^n,$

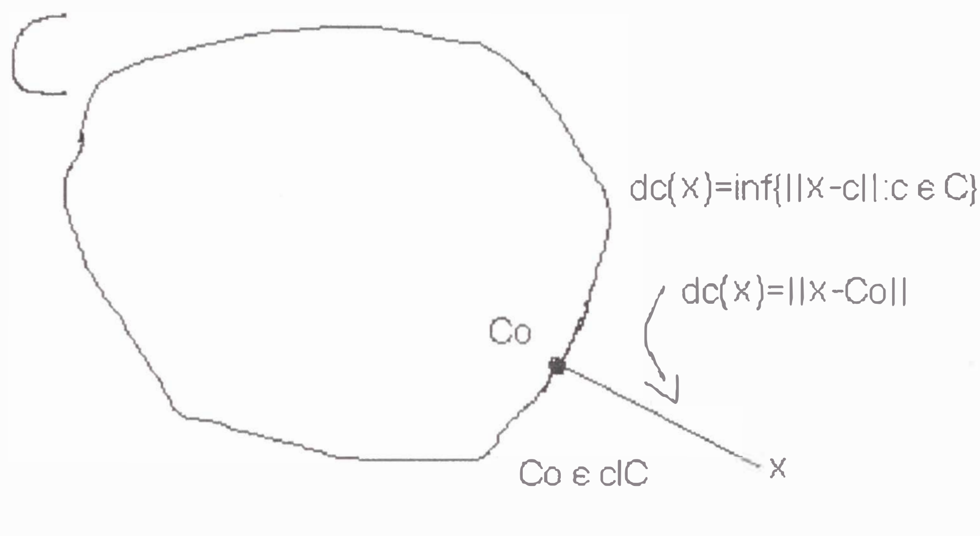
como $x \in clC \Longrightarrow d_C(x) = 0$

$\Longrightarrow \langle v, \nabla d_C(x)\rangle = \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{d_C(x+tv)}{t} \geq 0 \Longrightarrow \langle v, \nabla d_C(x)\rangle \geq 0 \ \forall\, v \in \mathbb{R}^n$,

en particular para $v = -\nabla d_C(x) \Longrightarrow -||\nabla d_C(x)||^2 \geq 0 \Longrightarrow \nabla d_C(x) = \overline{0}$,

obteniéndose una contradicción con la hipótesis $\Longrightarrow x \notin clC$.

Y admitimos al menos un punto cercano $c_o \in clC$ a $x \,/\, d_C(x) = ||x - c_o||$, así



• Veamos que $\nabla d_C(x) = \dfrac{x - c_o}{||x - c_o||}$.

Para $t \in \langle 0, 1\rangle$ el punto cercano en la clC a $x + t(c_o - x)$ es todavía c_o

$\Longrightarrow d_C(x + t(c_o - x)) = ||x + t(c_o - x) - c_o|| = ||x - tx + tc_o - c_o|| = ||(1-t)x - (1-t)c_o||$

$\Longrightarrow d_C(x + t(c_o - x)) = (1-t)||x - c_o||$

$\Longrightarrow \dfrac{d_C(x + t(c_o - x)) - d_C(x)}{t} = \dfrac{(1-t)||x - c_o|| - ||x - c_o||}{t} = \dfrac{||x - c_o||(-t)}{t}$

$\Longrightarrow \dfrac{d_C(x + t(c_o - x)) - d_C(x)}{t} = -||x - c_o||$

$\Longrightarrow \lim\limits_{t\downarrow 0} \dfrac{d_C(x + t(c_o - x)) - d_C(x)}{t} = -||x - c_o||$

$\Longrightarrow d'_C(x; (c_o - x)) = D_{c_o - x} d_C(x) = -||c_o - x|| = \langle \nabla d_C(x), (c_o - x)\rangle \qquad (\alpha)$

como d_C es globalmente Lipschitz $\Longrightarrow |d_C(y) - d_C(x)| \leq ||y - x||$, sea $y = x + tv \,/\, t > 0 \Longrightarrow \left|\dfrac{d_C(x+tv) - d_C(x)}{t}\right| \leq ||v|| \Longrightarrow |d'_C(x;v)| \leq ||v||$

$\Longrightarrow |\langle v, \nabla d_C(x)\rangle| \leq ||v|| \;\; \forall\, v \in \mathbb{R}^n$, en particular para $v = \nabla d_C(x)$

$\Longrightarrow ||\nabla d_C(x)||^2 \leq ||\nabla d_C(x)|| \Longrightarrow ||\nabla d_C(x)|| \leq 1.$

Y de (α) $\;-1 = \left\langle \nabla d_C(x), \dfrac{(c_o - x)}{||c_o - x||} \right\rangle \Longrightarrow \nabla d_C(x) = \dfrac{x - c_o}{||x - c_o||}.$

• Veamos que $c_o \in clC$ es el único punto cercano a x.

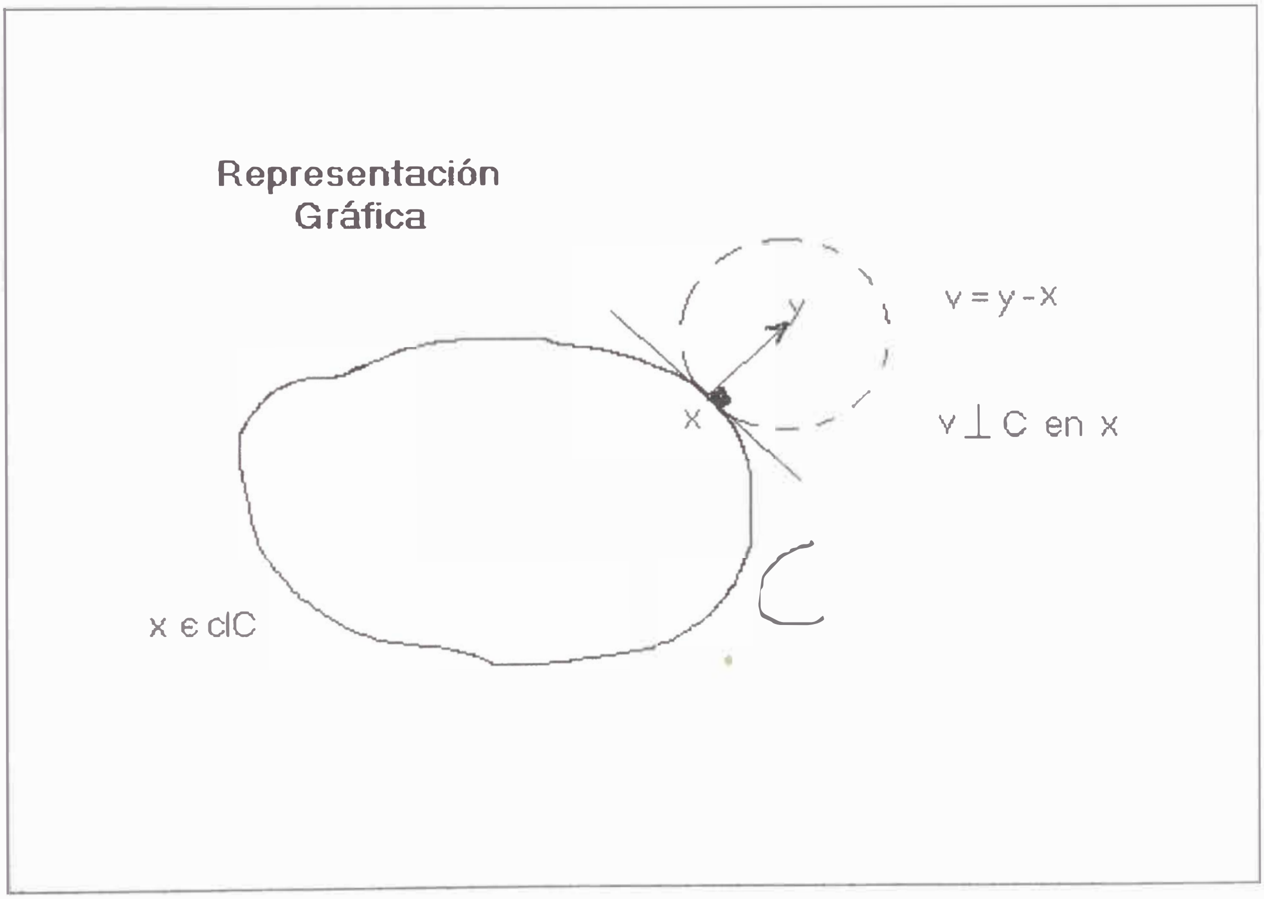
Supongamos que existe otro punto cercano a x

$\Longrightarrow \exists\, c_1 \neq c_o \,/\, c_1 \in clC \Longrightarrow d_C(x) = ||x - c_1||$

$\Longrightarrow \nabla d_C(x) = \dfrac{x - c_1}{||x - c_1||} \Longrightarrow \dfrac{x - c_1}{||x - c_1||} = \dfrac{x - c_o}{||x - c_o||} \Longrightarrow c_1 = c_o$

$\Longrightarrow c_o \in clC$ es el único punto cercano a x. $\square$

Definición 4.2.1 *Se define un vector no nulo v perpendicular hacia C en $x \in clC$ (en notación $v \perp C$ en x), si $v = y - x$, donde y tiene un único punto cercano $x \in clC$.*



Caracterizaremos el gradiente generalizado de la función d_C.

Teorema 4.2.1 *Sea $x \in clC$. Entonces*

$$\partial d_C(x) = co\left(\{\bar{0}\} \cup \left\{ v = \lim \frac{v_i}{||v_i||} \; : \; v_i \perp C \text{ en } x_i \to x,\; v_i \to \bar{0} \right\}\right).$$

Prueba.-

• Primero veremos que:

$$\partial d_C(x) \subset co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{v = \lim \frac{v_i}{||v_i||} : v_i \perp C \ en \ x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right)$$

Como d_C es Lipschitz próximo a x y supongamos que S es tal que $m(S) = 0$ en $\mathbb{R}^n$

$\Longrightarrow$ por el Teorema 4.1.1

$$\partial d_C(x) = co\{\lim \nabla d_C(z_i) : z_i \to x,\, z_i \notin S,\, z_i \notin \Omega_{d_C}\}$$

Como $x \in clC$, y además $\exists\, \nabla d_C(z_i) \neq \overline{0}$, pues $\overline{0} \notin \{v : v_i \perp C \ en \ x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\}$

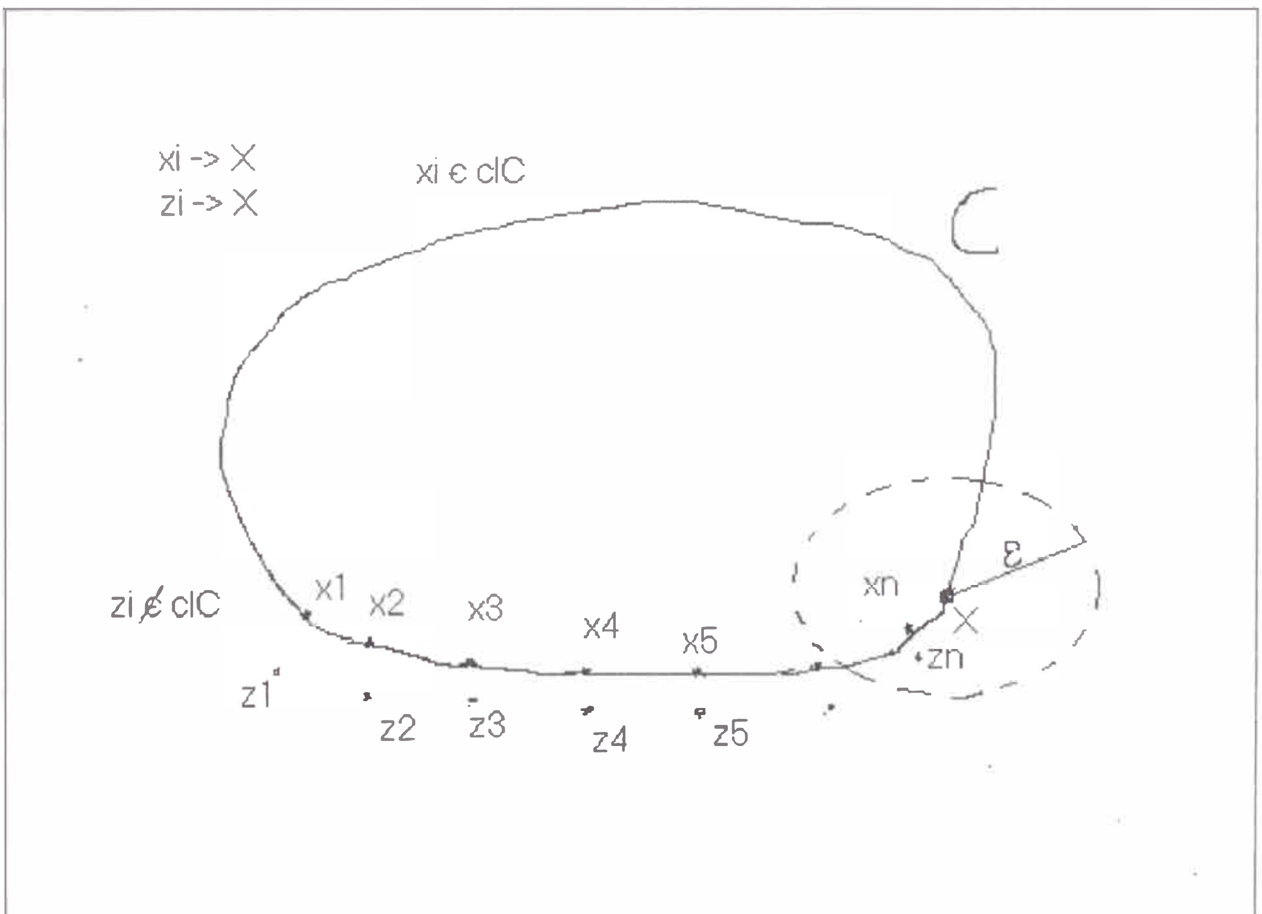
$\Longrightarrow$ de acuerdo a la Proposición 4.2.1, $z_i \notin clC$ y existe un único punto cercano $x \in clC$ hacia z_i $(z_i \to x)$, y $\nabla d_C(z_i) = \dfrac{z_i - x}{||z_i - x||}$.

Luego, sea $\alpha \in \partial d_C(x) \Longrightarrow \alpha \in co\{\lim \nabla d_C(z_i) : z_i \to x,\, z_i \notin S,\, z_i \notin \Omega_{d_C}\}$.

Debemos llegar a la cápsula convexa de $v = \lim \dfrac{v_i}{||v_i||}$, donde $v_i \perp C$ en $x_i \to x$, $v_i \to \overline{0}$.

Como $\alpha \in co\{\lim \nabla d_C(z_i) : z_i \to x,\, z_i \notin S,\, z_i \notin \Omega_{d_C}\}$

$\Longrightarrow$ los elementos que generan la cápsula son los límites de $\nabla d_C(z_i)$, podemos generar estos elementos, con otra sucesión $\{x_i\}$ / $x_i \in clC$, gráficamente:



(a partir de cierto i, $z_i - x_i \to \overline{0} \,/\, x_i \to x \wedge z_i \to x$)

$\Longrightarrow \alpha \in co\{\lim \nabla d_C(z_i) \,:\, z_i \to x_i,\, x_i \to x,\, x_i \notin S,\, x_i \notin \Omega_{d_C}\}$

$\Longrightarrow$ de acuerdo a la Proposición 4.2.1, existe un único punto cercano $x \in clC$ hacia z_i, y existe $x_i \in clC$ hacia z_i, además $\nabla d_C(z_i) = \dfrac{z_i - x_i}{||z_i - x_i||}$

$\Longrightarrow$ sea $v_i = z_i - x_i \,/\, v_i \to \overline{0}$ y $v_i \perp C$ en $x_i \in clC$ (ésto por la Definición 4.2.1), la cual que no se podría concluir con la sucesión $\{z_i\}$ pues $z_i \notin clC$

$\Longrightarrow \alpha \in co\left\{\lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}$

$$\Longrightarrow \partial d_C(x) \subset co\left\{\lim \frac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\} \qquad (*)$$

<u>Probaremos que $\overline{0} \in \partial d_C(x)$.</u>

Como $x \in clC \Longrightarrow d_C(x) = ||x - x|| = 0 \Longrightarrow d_C$ alcanza un mínimo en x

$\Longrightarrow$ Por la Proposición 2.1.2 $\overline{0} \in \partial d_C(x)$.

Luego, conjuntamente con $(*)$ se tiene

$\Longrightarrow \{\overline{0}\} \cup \partial d_C(x) \subset \{\overline{0}\} \cup co\left\{\lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}$

$\Longrightarrow \partial d_C(x) \subset co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{\lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right)$.

- <u>Ahora veremos que:</u>

$$co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{\lim \frac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right) \subset \partial d_C(x).$$

Primero probaremos que

$$A = \left\{\lim \frac{v_i}{||v_i||} \,:\, v_i \perp C \text{ } en \text{ } x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\} \subset \partial d_C(x)$$

Sea $v \in A \Longrightarrow v = \lim \dfrac{v_i}{||v_i||}$, donde $v_i \perp C$ en $x_i \to x$, $v_i \to \overline{0}$.

Ahora sea $v_i = y_i - x_i \,/\, y_i \notin clC$ y $x_i \in clC$,

como $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$ y además d_C es Lipschitz en $[x_i, y_i]$

$\Longrightarrow$ por el Teorema del Valor Medio (Teorema 2.3.1)

$\exists\, z_i^* \in \langle x_i, y_i\rangle \,/\, d_C(y_i) - d_C(x_i) \in \langle \partial d_C(z_i^*), y_i - x_i\rangle$,

donde $d_C(y_i) = ||y_i - x_i|| \wedge d_C(x_i) = 0 \,/\, x_i \in clC$

$\Longrightarrow ||y_i - x_i|| \in \langle \partial d_C(z_i^*), y_i - x_i\rangle \Longrightarrow 1 \in \left\langle \partial d_C(z_i^*), \dfrac{y_i - x_i}{||y_i - x_i||}\right\rangle$

$$\Longrightarrow \exists\, \zeta_i^* \in \partial d_C(z_i^*) \,/\, \left\langle \zeta_i^*, \frac{y_i - x_i}{||y_i - x_i||}\right\rangle = 1 \qquad (\theta)$$

como d_C es globalmente Lipschitz $\Longrightarrow |d_C(x) - d_C(y)| \leq ||x - y||$, sea $x = y + tv \,/\, t > 0 \Longrightarrow \left|\dfrac{d_C(y+tv) - d_C(y)}{t}\right| \leq ||v|| \Longrightarrow |d_C^o(x;v)| \leq ||v||$

$\Longrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq d_C^o(x;v) \leq |d_C^o(x;v)| \leq ||v|| \;\forall v \in \mathbb{R}^n \Longrightarrow \langle \zeta, v\rangle \leq ||v|| \;\forall v \in \mathbb{R}^n$,

en particular para $v = \zeta \Longrightarrow \langle \zeta, \zeta\rangle \leq ||\zeta|| \Longrightarrow ||\zeta||^2 \leq ||\zeta|| \Longrightarrow ||\zeta|| \leq 1$. Y de (θ)

$\Longrightarrow \zeta_i^* = \dfrac{y_i - x_i}{||y_i - x_i||} \in \partial d_C(z_i^*) \Longrightarrow \dfrac{v_i}{||v_i||} \in \partial d_C(z_i^*)$,

como $\exists\, z_i^* \in \langle x_i, y_i\rangle$, y cuando $i \to \infty \Longrightarrow z_i^* \to x \Longrightarrow \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{v_i}{||v_i||} = v \in \partial d_C(x)$,

ésto por la Proposición 1.4.2(c), pues ∂d_C es semicontinua superior en x.

$\Longrightarrow A \subset \partial d_C(x)$.

$\Longrightarrow \{\overline{0}\} \cup A \subset \{\overline{0}\} \cup \partial d_C(x)$, y como $\overline{0} \in \partial d_C(x)$ y además $\partial d_C(x)$ es convexo

$\Longrightarrow co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{\lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \;:\; v_i \bot C \;en\; x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right) \subset \partial d_C(x)$. □

4.3 Una Caracterización de Vectores Normales

Proposición 4.3.1 *Sea $x \in clC$. Entonces $N_C(x)$ es un cono convexo cerrado generado por el origen y el conjunto*

$$\left\{v = \lim \frac{v_i}{||v_i||} \;:\; v_i \bot C \;en\; x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}.$$

Prueba.-

De acuerdo a la Proposición 3.3.1 sabemos que $N_C(x)$ es un cono convexo cerrado generado por $\partial d_C(x)$. Además, por el Teorema 4.2.1 se tiene

$\partial d_C(x) = co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{v = \lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \;:\; v_i \bot C \;en\; x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right)$,

es decir $N_C(x)$ es un cono convexo cerrado generado por

$co\left(\{\overline{0}\} \cup \left\{v = \lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \;:\; v_i \bot C \;en\; x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}\right)$,

es decir $N_C(x)$ es un cono convexo cerrado generado por

$\{\overline{0}\} \cup \left\{v = \lim \dfrac{v_i}{||v_i||} \;:\; v_i \bot C \;en\; x_i \to x,\, v_i \to \overline{0}\right\}$. □

4.4 Interior del Cono Tangente

Teorema 4.4.1 *Sea $x \in C$ y $C \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Entonces $v \in int(T_C(x))$ si, y sólo si, existe $\varepsilon > 0$ tal que*

$$d_C(y + tw) \leq d_C(y);\;\; \forall\, y \in x + \varepsilon B,\; w \in v + \varepsilon B,\; t \in [0, \varepsilon\rangle.$$

Prueba.-

$\underline{|\Longleftarrow|}$ Supongamos que $\exists\, \varepsilon > 0 \,/\, d_C(y+tw) < d_C(y)\ \ \forall\, y \in x+\varepsilon B,\ w \in v+\varepsilon B,\ t \in [0,\varepsilon\rangle$.

Se demostrará que $\forall\, w \in v + \varepsilon B$, para algún $\varepsilon > 0$, se tiene $w \in T_C(x)$.

Además sabemos que $d_C(x) = ||x - c_o|| \,/\, c_o \in clC$.

De la caracterización de $T_C(x)$ dado por el Teorema 3.4.1, se tiene:

Sea $\{x_i\} \subset C \,/\, x_i \to x$ $(x_i \in C = clC)$, y sea $\{t_i\} \subset \langle 0, +\infty\rangle \,/\, t_i \downarrow 0$,

luego, aplicando ésto a la suposición, se tiene

$\Longrightarrow d_C(x_i + t_i w) \leq d_C(x_i) = 0\ \ \forall\, i$ suficientemente grande,

donde $x_i \in x + \varepsilon B$ y $t_i \in \langle 0, \varepsilon\rangle \subset \langle 0, +\infty\rangle$

$\Longrightarrow 0 \leq d_C(x_i + t_i w) \leq 0 \Longrightarrow d_C(x_i + t_i w) = 0 \Longrightarrow x_i + t_i w \in clC = C\ \ \forall\, i$,

donde existe w, una sucesión constante convergente a $w \Longrightarrow w \in T_C(x)$.

$\Longrightarrow v + \varepsilon B \subset T_C(x)$, y como $v + \varepsilon B$ es un conjunto abierto

$\Longrightarrow v + \varepsilon B \subset int(T_C(x)) \Longrightarrow v \in int(T_C(x))$.

$\underline{|\Longrightarrow|}$ Esta prueba puede verse en [4]. $\square$

Corolario 4.4.1 (Rockafellar)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$. Entonces el conjunto de hipertangentes hacia C en $x \in C$ coincide con $int(T_C(x))$.

Prueba.-

Como $x \in C$, donde C es cerrado en $\mathbb{R}^n$, tenemos por el Teorema 4.4.1 lo siguiente:

cuando $v \in int(T_C(x))$, tomando $y \in C$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que

$$d_C(y+tw) \leq d_C(y);\ \ \forall\, y \in x + \varepsilon_1 B,\ w \in v + \varepsilon_1 B,\ t \in [0, \varepsilon_1\rangle,$$

como $y \in C = clC$

$\Longrightarrow 0 < d_C(y+tw) < 0\ \ \forall\, y \in x + \varepsilon_1 B,\ y \in C,\ w \in v + \varepsilon_1 B,\ t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$

$\Longrightarrow d_C(y+tw) = 0\ \ \forall\, y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\ w \in v + \varepsilon_1 B,\ t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$

$\Longrightarrow y + tw \in clC = C\ \ \forall\, y \in (x + \varepsilon_1 B) \cap C,\ w \in v + \varepsilon_1 B,\ t \in \langle 0, \varepsilon_1\rangle$

$\Longrightarrow$ por la Definición 3.6.1 v es hipertangente hacia C en $x \in C$.

Y de acuerdo al Teorema 3.6.1

$\Longrightarrow$ El conjunto de hipertangentes hacia C en $x \in C$ coincide con $int(T_C(x))$. $\square$

Corolario 4.4.2 (Rockafellar)

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ *un subconjunto cerrado de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $x \in C$*, y además supongamos que* $int(T_C(x)) \neq \emptyset$*. Entonces* N_C *es cerrado en* x*, es decir*

$$x_i \to x,\ \zeta_i \in N_C(x_i),\ \zeta_i \to \zeta \Longrightarrow \zeta \in N_C(x).$$

Prueba.-

Como C es cerrado en $\mathbb{R}^n$ e $int(T_C(x)) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ por el Corolario 4.4.1 el conjunto de hipertangentes hacia C en $x \in C$ coincide con $int(T_C(x)) \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ de acuerdo al Corolario 3.6.1 N_C es cerrado en x. $\square$

Aplicación

Consideremos un ejemplo en Análisis no Diferenciable y Optimización, un ajuste de datos puntos.

Ejemplo.-

Supongamos que son dados el conjunto de datos puntos $(x_0, y_0), (x_1, y_1), ..., (x_N, y_N)$ en el plano $X - Y$ y considerando el problema de determinar la línea recta que mejor ajuste los datos. Para una recta dada $y = mx + b$ el error e_i en el i-esimo dato punto (x_i, y_i) es definido por los valores de la recta aproximante y los valores dados $|mx_i + b - y_i|$. Una aproximación lineal requiere que la inclinación m y el intercepto b minimicen la función $\sum_{i=0}^{N} e_i$ no diferenciable.

Específicamente, para $N+1$ datos puntos $(0,0), (1,1), ...(N-1, N-1)$ junto con $(N, 0)$, consideremos el problema de determinar la línea recta en el plano $X - Y$ que mejor ajuste estos datos.

De acuerdo a lo descrito inicialmente en el Ejemplo, el problema de conseguir la minimización se sigue de la función en $\mathbb{R}^2$:

$$f(\alpha, \beta) = |\alpha N + \beta| + \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha i + \beta - i|.$$

En donde la función $f_{c,k}(\alpha, \beta)$ es definida por $f_{c,k}(\alpha, \beta) = |\alpha c + \beta - k|$, ésta es la composición de g y F, donde $g(y) = |y|$, $F(\alpha, \beta) = \alpha c + \beta - k$.

Como la función f es no diferenciable, resolveremos este problema en base a lo previamente estudiado.

<u>Calculando $D_s F(\alpha, \beta)$.</u>

$$\langle D_s F(\alpha, \beta), v \rangle = \lim_{\substack{(\alpha', \beta') \to (\alpha, \beta) \\ t \downarrow 0}} \frac{F((\alpha', \beta') + t(v_1, v_2)) - F(\alpha', \beta')}{t} =$$

$$\lim_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{(\alpha'+tv_1)c+\beta'+tv_2-k-\alpha'c-\beta'+k}{t} = v_1c+v_2 = \langle (c,1),(v_1,v_2)\rangle$$

$\Longrightarrow D_sF(\alpha,\beta)=(c,1).$ $\Longrightarrow$ F es estricta mentediferencia ble en (α,β)

$\Longrightarrow$ por la Proposición 1.5.3 F es Lipschitz próximo a (α,β). Y como g es Lipschitz

$\Longrightarrow$ goF es Lipschitz próximo a (α,β).

$\Longrightarrow f_{c,k}(\alpha,\beta)=goF(\alpha,\beta)=|\alpha c+\beta-k|$ es Lipschitz próximo a (α,β),

luego se puede calcular $\partial f_{c,k}(\alpha,\beta)$.

Calculando $\partial f_{c,k}(\alpha,\beta)$.

• Si $\alpha c+\beta-k>0$.

$$f^o_{c,k}((\alpha,\beta);v) = \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|(\alpha'+tv_1)c+(\beta'+tv_2)-k|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|\alpha'c+\beta'-k+t(v_1c+v_2)|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{\alpha'c+\beta'-k+t(v_1c+v_2)-\alpha'c-\beta'+k}{t} = v_1c+v_2 = \langle (c,1),(v_1,v_2)\rangle$$

$\Longrightarrow \langle (c,1),(v_1,v_2)\rangle \geq \langle \zeta,v\rangle \;\; \forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \partial f_{c,k}(\alpha,\beta)=\{(c,1)\}$.

• Si $\alpha c+\beta-k<0$.

$$f^o_{c,k}((\alpha,\beta);v) = \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|(\alpha'+tv_1)c+(\beta'+tv_2)-k|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|\alpha'c+\beta'-k+t(v_1c+v_2)|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{-\alpha'c-\beta'+k-t(v_1c+v_2)+\alpha'c+\beta'-k}{t} = \langle (-c,-1),(v_1,v_2)\rangle$$

$\Longrightarrow \langle (-c,-1),(v_1,v_2)\rangle \geq \langle \zeta,v\rangle \;\; \forall v=(v_1,v_2)\in\mathbb{R}^2$

$\Longrightarrow \partial f_{c,k}(\alpha,\beta)=\{(-c,-1)\}$.

• Si $\alpha c+\beta-k=0$.

$$f^o_{c,k}((\alpha,\beta);v) = \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|(\alpha'+tv_1)c+(\beta'+tv_2)-k|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$$\Longrightarrow \limsup_{\substack{(\alpha',\beta')\to(\alpha,\beta)\\ t\downarrow 0}} \frac{|\alpha'c+\beta'-k+t(v_1c+v_2)|-|\alpha'c+\beta'-k|}{t} = |v_1c+v_2| \geq \langle \zeta,v\rangle$$

$\Longrightarrow \partial f_{c,k}(\alpha,\beta)=\{\lambda(c,1)\,/\,|\lambda|\leq 1\}$ (*)

Sabemos que $f(\alpha,\beta) = |\alpha N + \beta| + \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha i + \beta - i|$ y $f_{c,k}(\alpha,\beta) = |\alpha c + \beta - k|$.

Para $\alpha c + \beta - k = 0$ (el análisis se realiza en esta recta),

$\exists\,(\alpha,\beta)$ que minimiza f

$\Longrightarrow$ por la proposición 2.1.2 $\overline{0} \in \partial f(\alpha,\beta)$,

donde $f = \sum_{i=0}^{N} f_{i,k}$ (sumatoria sólo respecto a i; $k \in \mathbb{Z}_0^+$).

Además, por la proposición 2.1.3 $\partial\left(\sum_{i=0}^{N} f_{i,k}\right)(\alpha,\beta) \subset \sum_{i=0}^{N} \partial f_{i,k}(\alpha,\beta)$

$\Longrightarrow \overline{0} \in \sum_{i=0}^{N} \partial f_{i,k}(\alpha,\beta) = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i(i,1)$ ésto de $(*)$

$$\Longrightarrow \overline{0} = \lambda_N(N,1) + \sum_{i=0}^{N-1} \lambda_i(i,1) \tag{$**$}$$

• <u>Veamos que f es convexo.</u>

Es decir probaremos que $\forall\,(\alpha,\beta),(m,n) \in \mathbb{R}^2$, $\forall\,\lambda \in [0,1]$ se tiene

$$f(\lambda(\alpha,\beta) + (1-\lambda)(m,n)) \le \lambda f(\alpha,\beta) + (1-\lambda)f(m,n).$$

$f(\lambda(\alpha,\beta) + (1-\lambda)(m,n)) =$

$|(\lambda\alpha + (1-\lambda)m)N + \lambda\beta + (1-\lambda)n| + \sum_{i=1}^{N-1} |(\lambda\alpha + (1-\lambda)m)i + \lambda\beta + (1-\lambda)n - i| =$

$|\lambda\alpha N + \lambda\beta + (1-\lambda)mN + (1-\lambda)n| + \sum_{i=1}^{N-1} |\lambda\alpha i + \lambda\beta + (1-\lambda)mi + (1-\lambda)n + \lambda i - \lambda i - i| \le$

$\lambda|\alpha N + \beta| + (1-\lambda)|mN + n| + \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda|\alpha i + \beta - i| + (1-\lambda)|mi + n - i|) =$

$\lambda\left(|\alpha N + \beta| + \sum_{i=1}^{N-1} |\alpha i + \beta - i|\right) + (1-\lambda)\left(|mN + n| + \sum_{i=1}^{N-1} |mi + n - i|\right) =$

$\lambda f(\alpha,\beta) + (1-\lambda)f(m,n)$. $\Longrightarrow f$ es convexo.

Si $\overline{0} \in \partial f(\alpha,\beta)$ y como f es convexo

$\Longrightarrow f(r,s) - f(\alpha,\beta) \ge \langle \overline{0}, (r,s) - (\alpha,\beta) \rangle$ $\forall\,(r,s) \in U$ (subdiferencial del análisis convexo)

$\Longrightarrow f(r,s) \ge f(\alpha,\beta)$ $\forall\,(r,s) \in U \Longrightarrow f$ alcanza un mínimo local en (α,β).

(Donde U es el conjunto de pares de pendientes e interceptos).

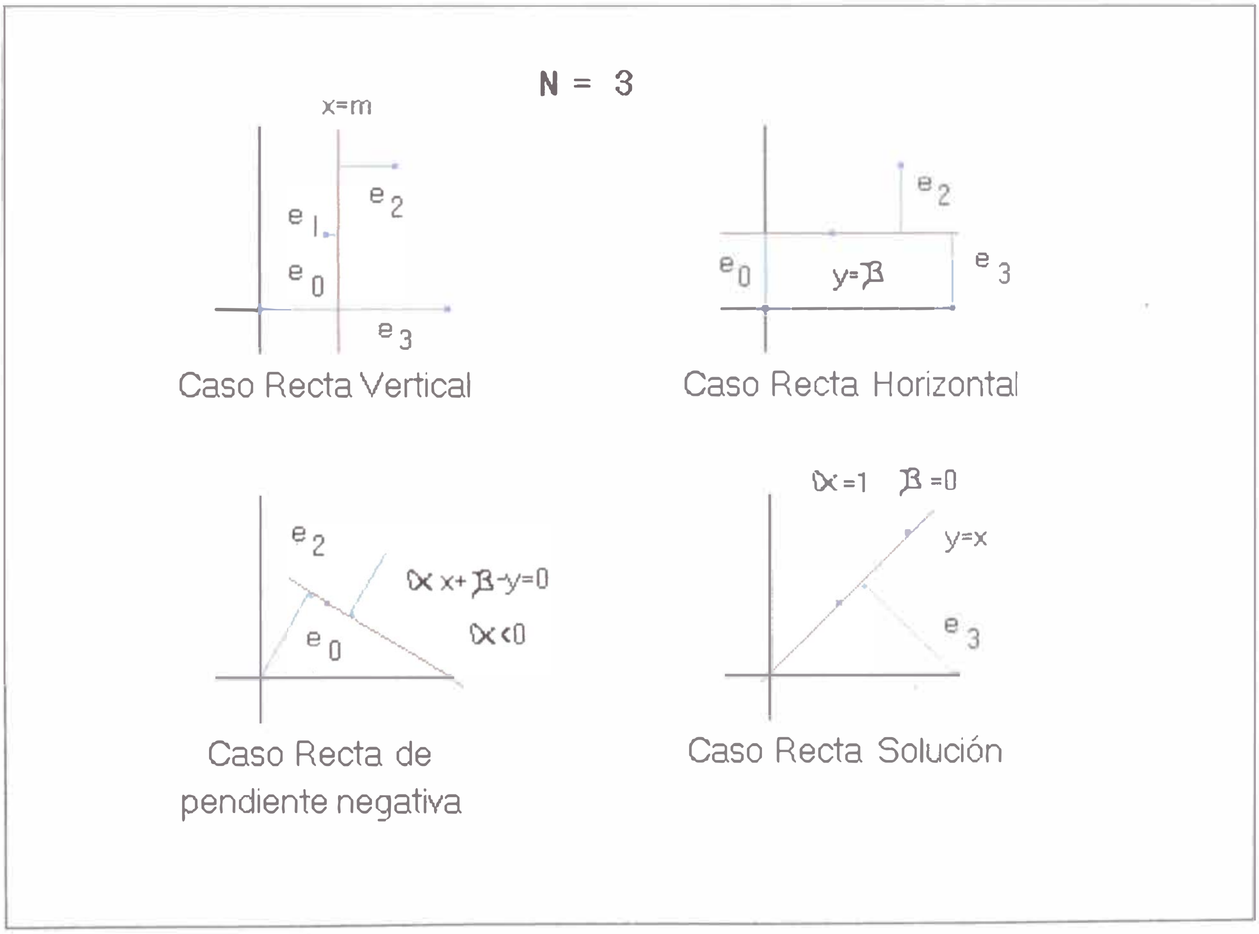
Según nuestros datos puntos, mediante un análisis el punto $(\alpha = 1, \beta = 0)$ minimiza f.

$\Longrightarrow k = c \Longrightarrow$ la recta $y = x$ es la solución del problema.

Como un ejemplo, para $N = 3$, se tiene que:

- Se descartan las rectas verticales, pues pasan por a los más un punto y producen un error grande.
- Se descartan las rectas horizontales, pues pasan por a lo más dos puntos y produce un error $= 3$.
- Se descartan las rectas de pendiente negativa, pues pasan por a lo más dos puntos y producen un error grande.
- Nos damos cuenta que la recta adecuada es $y = x$ pues pasa por tres puntos y además produce un error $= 3$ (el más óptimo), las otras rectas producen errores grandes y sólo pasan por a lo más un punto.

A continuación tenemos los gráficos ilustrativos:



Se nota que (**) es una condición necesaria para la recta $y = x$ ($\alpha = 1, \beta = 0$).

$\Longrightarrow \lambda_N = 1 \ \wedge \ |\lambda_i| \leq 1 \, (i = 0, ..., N-1)$

Si $N = 1$ tenemos $\lambda_1(1,1) + \lambda_0(0,1) = \overline{0}$, donde $\lambda_1 = 1 \Longrightarrow 1 = 0$,

así, no se satisface (**).

Si $N = 2$ tenemos $\lambda_2(2,1) + \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,1) = \overline{0}$, donde $\lambda_2 = 1 \Longrightarrow \lambda_1 = -2$,

así, no se satisface (**).

Lo verificaremos para $N = 3$:

$\Longrightarrow \overline{0} = \lambda_3(3,1) + \sum_{i=0}^{2} \lambda_i(i,1) = \lambda_3(3,1) + \lambda_0(0,1) + \lambda_1(1,1) + \lambda_2(2,1)$,

donde $\lambda_3 = 1 \Longrightarrow 0 = 3 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \ \wedge \ 0 = 1 + \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$;

para $\lambda_0 = 1, \lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -1$ se verifican estas dos últimas ecuaciones.

$\Longrightarrow \exists \, \lambda_i$s que satisfacen (**).

Si $N \geq 3 \Longrightarrow \exists \, \lambda_i$s que satisfacen (**).

La Aplicación se realizo en base a la optimización de $e_i = |mx_i + b - y_i|$, también se pudo realizar en base a otras variantes de e_i, pero ya no ilustrariamos nuestro tema.

Conclusiones

Algunos estudios en Análisis, que están envueltos sobre hipótesis de funciones continuamente diferenciables o diferenciables, pueden ser desarrollados también bajo condiciones no diferenciables, las cuales por ejemplo son utilizadas en la Optimización, tal y como ocurre en la Aplicación anterior.

El estudio del Gradiente Generalizado nos permite tener una alternativa de cálculo para con las funciones no diferenciables, pues sus distintas propiedades, cálculos básicos y asociaciones geométricas, nos da la posibilidad de afrontar problemas de optimización con estas alternativas.

En general podemos calcular el Gradiente Generalizado de una función. Cuando esta función es continuamente diferenciable su cálculo se simplifica, como se observa a lo largo de este trabajo en algunas observaciones. Por otro lado cuando se tiene una condición menos fuerte, (no diferenciable), ésta se calcula como se ha demostrado en sociedad con otras herramientas (Tangentes, Normales, Regularidad de Funciones y de Conjuntos, Epígrafos, etc), tal y como se describe en el Capítulo 3. Y cuando la función es convexa se le asocia al subdiferencial de análisis convexo.

Un importe resultado es que el Epígrafo de una función nos permite una relación directa entre las Normales, Tangentes, Gradiente Generalizado y la Derivada Direccional Generalizada, pues conociendo una de éstas, se pueden obtener las demás. Gracias al Epígrafo, se pudo establecer una extensión de la definición del Gradiente Generalizado.

Bibliografía

[1] Apostol Tom M., Análisis Matemático, Editorial Reverté, S.A., México, 1993.

[2] Apostol Tom M., Calculus, Editorial Reverté, S.A., México, 1997.

[3] Brézis Haim, Análisis Funcional. Teoría y Aplicaciones, Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] Clarke Frank H., Optimization and Nonsmooth Analysis, Editorial Board, USA, 1983.

[5] Chumpitaz Mauro Reyna, Teoría de la Medida, Lima, Perú, 1987.

[6] Fleitas Morales G., Margalef Roig J., Editorial Alhambra, S.A., Madrid, 1980.

[7] Haaser N., Lasalle J., Sullivan J., Análisis Matemático 2, Editorial Trillas, México, 1972.

[8] Lemaréchal Claude, Convex Analysis and Minimization Algorithms *I*, USA, 1993.

[9] Purcell Edwin J., Varberg Dale, Cálculo con Geometría Analítica, Programas Educativos S.A. de C.V., México D.F., 1993.

[10] Rockafellar R. Tyrrell, Convex Analysis, New Jersey, 1970.

[11] Rudin Walter, Análisis Funcional, Editorial Reverté, S.A., Barcelona, 1979.

[12] Takeuchi Yu, Sucesiones y Series, Editorial Limusa, México, 1980.