UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

Diferenciabilidad en Espacios Vectoriales Topológicos

por

Carlos Alberto Calderón Arévalo

Tesis presentada para la obtención del
título de licenciado en Matemática

Asesor: **Mg. William Carlos Echegaray Castillo**

Lima, Marzo del 2003

A mis padres Santiago y Consuelo
sin ellos no hubiera llegado hasta aquí
y a mi esposa Norma, incondicional amor
y mi motivo para continuar.

Agradecimientos

Me gustaría expresar mi gratitud a mi asesor Mg. William Echegaray por la sugerencia del tema que dió origen a este trabajo; a mis colegas y amigos Mg. Remigio Santos, Mg. Adalberto Rosales, Mg. Daniel Prolcón, Mg. Fernando Bazan y Dr.Wilfredo Sosa Sandoval, por sus útiles comentarios asi como por la proporción de papers y artículos que me fueron de mucha ayuda para concluir esta tesis.

En especial quiero agradecer a mi esposa, Norma por su paciencia y apoyo moral constante, sus sugerencias y comentarios fueron alimento anímico en cada momento de agobio.

Índice general

Introducción I

Agradecimientos II

Introducción VI

1. Preliminares 1

1.1. Generalidades en Espacios Vectoriales Topológicos 1
1.2. Seminormas y Convexidad Local . 4
1.3. Funciones Lineales entre E.V.T. . . 7
1.4. Teorema de Hahn-Banach . 7
1.5. Topología Débil y Topología Producto 8
1.5.1. Topología Débil . . . 8
1.5.2. Topología Producto 8
1.6. El Espacio $\mathcal{F}(X,Y)$ 10

2. Varias Definiciones de Diferenciabilidad en Espacios Vectoriales Topológicos 16

2.1. Propiedades generales de la derivada 16
2.1.1. Definición de derivada 16
2.2. Desarrollo Histórico del concepto de Derivada . . . 21
2.3. Relaciones entre varias definiciones de derivada . . 31
2.3.1. Lista de definiciones 32
2.3.2. Equivalencia de definiciones . . 37
2.3.3. Diagrama de relaciones 44
2.3.4. Demostración de las Implicaciones en General . . . 48
2.3.5. Demostración de las Implicaciones condicionadas 51
2.3.6. Contraejemplos 54

3. Propiedades Fundamentales 58

3.1. $\sigma-$derivadas . 58
3.2. Teoremas del Valor Medio . 76
3.3. Relaciones entre $\sigma-$diferenciabilidades . 84
3.4. Diferenciabilidad y Continuidad . . 87
3.5. Diferenciabilidad de Ordenes Superiores 91
3.6. Derivadas Parciales . . . 106

4. Teoremas de la Función Inversa **113**
4.1. Diferenciabilidad en el Espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ 113
4.1.1. Diferenciabilidad de la Función Composición 113
4.1.2. Diferenciabilidad de la Función Inversión . . 119
4.2. Diferenciabilidad de las Función Inversa 125
4.2.1. El Espacio de Funciones Completamente Acotadas: $L_p(X,Y)$. 131
4.2.2. C_p^σ funciones 137
4.2.3. Teoremas de la función inversa en E.V.T. . . 141
4.3. Teoremas de la Función Inversa en Espacios Normados . 149
4.3.1. Inmersiones y Sumersiones en Espacios de Banach . . 157

A. Redes **163**

B. Espacios Secuenciales **167**

Índice de figuras

1.1. Abierto sub-básico para la Topología Producto 9

2.1. Diagrama de Relaciones 46
2.2. La sucesión de funciones $(t^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$, $t \in [0,1]$ es creciente . . 54

3.1. Función con Gâteaux Derivada no lineal . . 60
3.2. Función $\mathcal{G}$ diferenciable pero no $\mathcal{F}$ diferenciable . 63
3.3. Función $\mathcal{G}$ diferenciable pero no $\mathcal{H}$ diferenciable 64
3.4. Gráfica de la función g y la existencia de la $\mathcal{G}$ derivada en $(0,0)$ 70
3.5. Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio Escalar 76

4.1. Teorema de la función implícita . . . 154
4.2. El Teorema de Imersión Local . . . 160
4.3. El Teorema de la Sumersión Local . 162

Introducción

A comienzos del siglo XX Hadamard se entregó a la tarea de crear una análisis no lineal en Espacios Infinitos Dimensionales Abstractos; llevaron a cabo esta tarea dos pupilos de Hadamard: Frechet y Gâteaux, introduciendo las derivadas que llevan sus nombres. Estas investigaciones desarrollaron rápidamente en la teoría de diferenciación en Espacios Normados, el cual fue esencialmente completado en la decada de 1940. Si X, Y son Espacios Normados, una función $f : X \to Y$ se dice que es *Frechet Diferenciable* en un punto x_0 cuando existe un $T \in \mathcal{L}(X; Y)$ tal que la función resto de f en x_0 definida como

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - T(h), \quad \forall h \in X$$

satisface la siguiente condición

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{r(h)}{\|h\|} = 0$$

Esta definición de diferenciabilidad es la base para el cálculo diferencial en Espacios Vectoriales Normados, sin embargo la teoría en Espacios Normados es aún limitada para muchas preguntas del análisis. Por ejemplo las derivadas variacionales son más naturalmente consideradas como derivadas de funciones entre Espacios Vectoriales Topológicos. Por esta razón el problema planteado por Hadamard retomó importancia, ahora tomando la forma de encontrar un cálculo diferencial en Espacios Vectoriales Topológicos (E.V.T.) arbitrarios. La solución a este problema no puede ser considerado como una transferencia trivial de argumentos de la teoría de Espacios Normados. Aún la definición de derivada de una función de un E.V.T a otro requiere aproximaciones que son nuevas en principio, por supuesto, cualquiera buena definición de diferenciabilidad debe coincidir con la de Frechet cuando los Espacios son Normados.

En el capítulo 1, se presentan resultados básicos e importantes que se verifican en E.V.T. reales, enfatizamos en la sección 1.6 en donde se define en el Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ la topología de convergencia uniforme sobre conjuntos de una cierta familia σ de subconjuntos de X, llamada $\sigma-$topología. La mayoría de las definiciones consideran que la derivada en un punto dado sea un elemento del Espacio de Funciones Lineales y Continuas $\mathcal{L}(X, Y)$ que bajo ciertas condiciones para la familia σ y el Espacio Y resulta ser un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff con la $\sigma-$topología (vea Teoremas 1.21 y 1.22).

En el capítulo 2, comenzamos con el esquema mediante el cual varias de las definiciones de diferenciabilidad son obtenidas. En la sección 2.1 se define un método de diferenciabilidad que sigue de la idea de aproximar una función dada por una función perteneciente a un cierto Espacio (generalmente es Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ de funciones lineales y continuas). Esa idea dió lugar a varias defenciones, entre ellas propuestas por Michal y Paxon(1936), Hyres(1937) Michal(1938), de Lamadrid(1955), Sebastião e Silva(1956), Ficher(1957), Marinescu(1957), Vainberg y Engel'son(1958), de Foglio(1960) , Balanzat(1960), Bastiani(1962), etc, todas estas definiciones son expuestas como originalmente las dieron sus autores en la sección 2.2 y posteriormente, generalizadas a Espacios Vectoriales Topológicos arbitrarios en la Tabla 2.1. Lo que es remarcable es que a pesar de las diferencias sustanciales que existen entre estas definiciones, casi todas ellas pueden ser reducidas a dos tipos, los cuales en el caso de Espacios Normados coinciden con dos puntos de un cierto expectro infinito de derivadas. Este espectro de derivadas fue introducido casi simultáneamente por de Lamadrid(1955) y algo menos general por Sebastião e Silva(1956) (definiciones 14 y 17 de la Tabla 2.1). Las relaciones entre estos métodos de diferenciabilidad se dan en el diagrama. 2.1.

El capítulo 3, desarrollamos un espectro de diferenciabilidad en términos de convergencia uniforme sobre una cietra familia de subconjuntos de X: la σ-diferenciabilidad (Definición 3.2) y verificamos todos los teoremas clásicos válidos para la diferenciación ordinaria. Aqui nos encontramos con dos primeras dificultades de la generalización de la Frechet diferenciabilidad a E.V.T. arbitrarios.

1. La $\sigma-$diferenciabilidad en un punto (en particular la Frechet diferenciabilidad) no necesariamente implica continuidad en dicho punto. (Teorema 3.14).

2. Para funciones de clase C^1 la regla de la cadena de primer orden puede no cumplirse (*la composición de funciones de clase C^1 no necesariamente es una función de clase C^1*)

Estos hechos son el origen de la teoría del cálculo con una estructura de límite, los cuales han sido investigados por Binz [5], Fisher [6], Keller [7] y otros. Los Espacios Vectoriales Pseudo-Topológicos que fueron introducidos por Marinescu [8] son también del mismo origen. Sobre estos Espacios que no son E.V.T. se puede construir una teoría de diferenciación en donde cada función diferenciable es continua y la regla de la cadena se verifica para todos los ordenes. Una nueva noción de diferenciabilidad denominada *diferenciabilidad equicontinua* puede evitar los dos problemas anteriores, más detalles se pueden encontrar en Yamamuro [1].

En el capítulo 4 comenzamos considerando la función composición de $\mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z)$ en $\mathcal{L}(X,Z)$ para E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff X, Y, y Z. (definición 4.1). Llegamos a probar que a pesar que la función composición no siempre es continua (Teorema 4.1) resulta que siempre es Frechet diferenciable en todo punto y cuando cada subconjunto acotado de $\mathcal{L}(Y,Z)$ es equicontinuo también resulta ser de clase C^∞ (Teorema 4.4). Luego investigamos la diferenciabilidad de la inversa de funciones diferenciables: *la más importante brecha entre el caso Normado y el caso no normado.* Llega a ser claro con algunos ejemplos que es imposible obtener una generalización satisfactoria de la versión para Espacios Normados usando cualquiera de las definiciones existentes de diferenciabilidad. En los Teoremas 4.14 y 4.15 se imponen que el Espacio X sea Secuencialmente Completo y condicionamos el teorema a funciones de clase C^1 respecto de una seminorma p en X (Subsección 4.2.2). Finalmente en la sección 4.3 enunciamos y demostramos varios teoremas relacionados con el teorema de la función inversa pero en Espacios Normados.

Capítulo 1

Preliminares

Dado que en el presente trabajo se consideran esencialmente Espacios Vectoriales Topológicos (E.V.T.), este primer capítulo presenta un resumen de algunos hechos importantes en estos Espacios, muchos de ellos sin demostración. Una presentación extensa de la teoría en E.V.T. se puede encontrar por ejemplo en [9, 12, 14, 15]

1.1. Generalidades en Espacios Vectoriales Topológicos

Definición 1.1 (Espacio Vectorial Topológico.) *Un Espacio Vectorial Topológico es un Espacio Vectorial con una Topología asociada que hace continuas a las operaciones del Espacio Vectorial. Es decir, dados X un Espacio Vectorial y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ una topología en X, decimos que $(X, \mathcal{T})$ es un E.V.T. cuando*

V1. *La función $(x,y) \in X \times X \mapsto x+y \in X$ es continua en $X \times X$*

V2. *La función $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times X \mapsto \lambda x \in X$ es continua en $\mathbb{K} \times X$*

Observe las condiciones (V1) y (V2) impuestas en la definición anterior, sin esas condiciones una topología cualquiera sobre un Espacio Vectorial X no lo convierte en un E.V.T.

> Ejemplo 1 Considere el Espacio Vectorial $\mathbb{R}$ y la Topología $\tau = \{< -a, a > / a > 0\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$. Esta topología no convierte a $\mathbb{R}$ en un E.V.T. porque no hace continuas a la suma, en efecto, consideremos $2 = 3 + (-1)$ y la vecindad $V =< -2{,}1, 2{,}1 >$ del 2, entonces para cualesquier $V_1 =< -a, a >$ y $V_2 =< -b, b >$ vecindades del -1 y 3 no se cumple que $V_1 + V_2 \subset V$ ya que $1 \in V_1$ y $3 \in V_2$ sin embargo $1 + 3 = 4 \notin V$

Para cada $a \in X$ y $\lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$ definimos las funciones $T_a : X \to X$ por $T_a(x) = a + x$ y $M_\lambda : X \to X$ por $M_\lambda(x) = \lambda x$ que claramente son homeomorfismos de X en X con inversas $(T_a)^{-1} = T_{-a}$ y $(M_\lambda)^{-1} = M_{\frac{1}{\lambda}}$. De esto podemos afirmar:

$$U \subset X \text{ es abierto } \Leftrightarrow a + U \subset X \text{ es abierto}, \forall a \in X$$
$$U \subset X \text{ es abierto } \Leftrightarrow \lambda U \subset X \text{ es abierto}, \forall \lambda \in \mathbb{K} - \{0\}$$

La continuidad de la multiplicación por escalares permite demostrar la siguiente propiedad:

$$\text{Si } U \subset X \text{ es abierto y } x \in U \text{ entonces } \exists t : 0 < t < 1 / x \in tU \tag{1.1}$$

en efecto, solo basta observar que el conjunto $\{\alpha \in \mathbb{K} / \alpha x \in U\} = \psi^{-1}(U)$ es abierto y contiene al 1, donde $\psi : \alpha \in \mathbb{K} \mapsto \alpha x \in X$

Por una base local en un E.V.T. $(X, \mathcal{T})$ entenderemos una familia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ de vecindades del cero tal que

$$\forall U \subset X, \text{ vecindad del cero en } X, \ \exists B \in \mathcal{B} \ / B \subset U$$

por la observación anterior la topología $\mathcal{T}$ de un E.V.T. queda completamente determinada por una base local. Una Topología Vectorial $\mathcal{T}$ en un mismo Espacio Vectorial puede tener dos bases locales, el siguiente teorema caracteriza las topologías por sus bases locales

Teorema 1.1 *Sea X un Espacio Vectorial al cual se le asocia dos Topologías Vectoriales $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ con bases locales $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ respectivamente. Se cumple que $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$ (i.e. las topologías son las mismas) si y solo si se verifica*

1. $\forall U \in \mathcal{B}_1, \ \exists V \in \mathcal{B}_2, / V \subset U$

2. $\forall V \in \mathcal{B}_2, \ \exists U \in \mathcal{B}_1, / U \subset V$

Más aún, podemos tener un Espacio Vectorial X y una topología $\mathcal{T}$ en X que no necesariamente es Vectorial (*i.e.* $\mathcal{T}$ es una topología en X que no necesariamente hace continuas a las operaciones de X), el siguiente teorema presenta condiciones necesarias y suficientes para que $\mathcal{T}$ sea una Topología Vectorial.

Teorema 1.2 (Caracterización de Topologías Vectoriales por Bases Locales) *Sea X un Espacio Vectorial y $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ una Topología en X. Se cumple que $\mathcal{T}$ es una Topología Vectorial sobre X si y solo si*

a). *$\mathcal{T}$ es invariante por traslaciones, es decir que para cualquier $x \in X$ se verifica*

$$U \subset X \text{ es abierto } \Leftrightarrow x + U \text{ es abierto}$$

b). *Existe una base $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ de vecindades del cero en X tal que*

  b1). *Cada miembro $B \in \mathcal{B}$ es equilibrado y absorbente*

  b2). $\forall B \in \mathcal{B}, \ \exists U \in \mathcal{B} / U + U \subset B$

Un teorema de separación [9, teorema 1.10] tiene las siguientes consecuencias importantes:

Teorema 1.3 *Sea X un E.V.T.*

a). *Para cualquier $\mathcal{B}$ una base local, se cumple que cada elemento de $\mathcal{B}$ contiene a la clausura de algún elemento de $\mathcal{B}$.*

b). *X es de Hausdorff si y solo si cada conjunto unitario es cerrado.*

c). *Todo subconjunto compacto de X es acotado.*

d). *Cuando X es de Hausdorff, todo subconjunto compacto también es cerrado.*

Cuando trabajamos con vecindades del cero en un E.V.T., en muchas ocasiones es deseable que estas vecindades tengan algunas características de las bolas en Espacios Normados. Algunas de estas caracteristicas se pueden conseguir, si definimos en un E.V.T. cualquiera X para $A \subset X$ lo siguiente.

A es **simétrico** cuando $A = -A$

A es **equilibrado** cuando $\alpha A \subset A$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leqslant 1$

A es **absorbente**, cuando $X \subset \bigcup_{t>0} tA$

A es **acotado**, cuando para cualquier vecindad $U_0 \subset X$ del cero en X, existe un $\delta > 0$ tal que $A \subset tU_0$, $\forall t > \delta$

Una vecindad cualquiera del cero, si bien es cierto que no necesariamente es simétrica ni equilibrada, si puede contener a una vecindad simétrica y equilibrada del cero. El siguiente teorema lo muestra

Teorema 1.4 *Sean X un E.V.T. y U una vecindad del cero en X, entonces*

a). *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad simétrica del cero U_0 tal que*

$$\overbrace{U_0 + U_0 + \cdots + U_0}^{n} \subset U$$

b). *Existe una vecindad simétrica y equilibrada del cero contenida en U.*

c). *Cuando además U es convexo, existe una vecindad simétrica, equilibrada y convexa del cero contenida en U.*

d). *U es absorbente.*

Es decir que cualquier vecindad [convexa] del cero en un E.V.T. contiene a una vecindad simétrica, equilibrada [y convexa] del cero, además del hecho de que cualquier vecindad ya es absorbente.

También existe otras formas de caracterizar a los conjuntos acotados.

Teorema 1.5 (Caracterización de conjuntos acotados) *Sea X un E.V.T. cualquiera, para un subconjunto $A \subset X$ son equivalentes*

1). $\forall V \subset X$, *vecindad del cero en X*, $\exists \delta > 0 \,/ |\lambda| \leqslant \delta \Rightarrow \lambda A \subset V$

2). $\forall V \subset X$, *vecindad del cero en X*, $\exists \delta > 0, \,/ \delta A \subset V$

3). $\forall V \subset X$, *vecindad del cero en X*, $\exists \delta > 0, \,/ \forall t > \delta, \quad A \subset tV$

4). $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ *y* $\forall (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{K}$ *con* $\lambda_n \to 0, \quad \lambda_n a_n \to 0$

La clausura e interior topológicos tienen las siguientes propiedades adicionales en un E.V.T.

Teorema 1.6 *Sea X un E.V.T. y $A, B \subset X$ subconjuntos de X, entonces se verifica:*

a). $\overline{A} = \bigcap\limits_{\substack{U \subset X \\ \text{vecindad del cero}}} (A+U)$

b). $\overline{A} + \overline{B} \subset \overline{A+B}$; $int(A) + int(B) \subset int(A+B)$

c). $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\overline{\alpha A} = \alpha \overline{A}$; $\forall \alpha \in \mathbb{K} - \{0\}$, $int(\alpha A) = \alpha int(A)$

d). *Si A es convexo, entonces $\overline{A}$ y $int(A)$ son convexos.*

e). *Si A es acotado entonces $\overline{A}$ y $int(A)$ son acotados.*

f). *Si A es equilibrado, entonces*

$$\begin{cases} \overline{A} & \textit{también es equilibrado} \\ int(A) & \textit{es equilibrado, cuando } 0 \in int(A) \end{cases}$$

1.2. Seminormas y Convexidad Local

Un E.V.T. será llamado **Localmente Convexo** cuando exista una base local cuyos miembros sean todos convexos. Es claro del Teorema 1.4 que todo E.V.T. Localmente Convexo tiene una base local convexa y equilibrada. Una **seminorma** en un E.V.T. es una función $p : X \to \mathbb{R}$ que verifica las siguientes condiciones

S1. $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$

S2. $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$, $\forall x \in X$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

Las seminormas están estrechamente relacionadas con los E.V.T. Localmente Convexos de dos maneras: En todo E.V.T. Localmente Convexo existen seminormas continuas y recíprocamente si se tiene una familia de seminormas en un E.V.T. cualquiera, se puede definir una Topología Vectorial sobre dicho espacio que lo convierta en un E.V.T. Localmente Convexo.

Para un Espacio Vectorial cualquiera X (sin ninguna topología asociada a él) y un subconjunto $A \subset X$ convexo y absorbente, definimos la funcional de Minkowsky asociado a A como la función $\mu_A : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu_A(x) = \inf\{t > 0 / x \in tA\}$$

cuando A es equilibrado se prueba que μ_A es una seminorma en X y cuando $0 \in int(A)$ esta seminorma es continua. Esto lo enunciamos en el siguiente teorema

Teorema 1.7 (Existencia de Seminormas en un Espacio Vectorial) *Sea X un Espacio Vectorial cualquiera. Para cada subconjunto $A \subset X$ convexo, equilibrado y absorbente de X se cumple*

a). *La funcional de Minkowsky $\mu_A : X \to \mathbb{R}$ es una seminorma en X*

b). *μ_A es continua cuando $0 \in int(A)$*

de aquí se deduce que en un E.V.T. Localmente Convexo (en donde existe una base local convexa, equilibrada y absorbente) siempre se puede definir una familia de seminormas continuas, con solo considerar las funcionales de Minkowsky de cada miembro de dicha base local

El siguiente teorema presenta la situación inversa.

Teorema 1.8 (Topología Generada por una Familia de Seminormas) *Sean X un Espacio Vectorial; $\mathcal{P}$ una familia de seminormas. Si para cada $p \in \mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$ definimos el conjunto*

$$U(p,\epsilon) = \{x \in X/p(x) < \epsilon\}$$

entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{\substack{p\in F\\ \epsilon\in\Lambda}} U(p,\epsilon)/F \subset \mathcal{P}, \Lambda \subset \mathbf{R}^+ \text{ finitos }\} \tag{1.2}$$

es una base local para una única topología τ y además verifica lo siguiente:

a). *(X,τ) es un E.V.T. Localmente Convexo*

b). *Cada seminorma $p \in \mathcal{P}$, es $\tau-$continua*

c). *τ es la más pequeña Topología Vectorial Localmente Convexa que hace continuas a todas las seminormas de $\mathcal{P}$.*

d). *$A \subset X$ es $\tau-$acotado $\Leftrightarrow$ toda seminorma $p \in \mathcal{P}$ es acotada en A (i.e. $p(A) \subset \mathbf{R}$ es acotada)*

e). *(X,τ) es de Hausdorff $\Leftrightarrow$ la familia de seminormas $\mathcal{P}$ separa puntos de X*

Para el E.V.T. (X,τ) Localmente Convexo podemos hallar $\mathcal{B} \subset \tau$ Base Local convexa y equilibrada, por el Teorema 1.7 aseguramos que la familia

$$\mathcal{P} = \{\mu_B/B \in \mathcal{B}\}$$

consta de seminormas continuas. Por otro lado el Teorema 1.8 afirma que esta familia genera a su vez una topología τ_1. Se cumple ambas topologías son las mismas, es decir que $\tau = \tau_1$

Resumimos los resultados anteriores en el siguiente teorema de caracterización de E.V.T. Localmente Convexos

Teorema 1.9 (Caraterización de E.V.T. Localmente Convexos) *Un Espacio Vectorial Topológico es Localmente Convexo (de Hausdorff) si y solo si su topología es determinada (en el sentido del Teorema 1.8) por una cierta familia de seminormas (que separa puntos) del Espacio.*

Este teorema afirma entonces que en un E.V.T. Localmente Convexo, su topología es generada por una cierta familia de seminormas. Se puede probar sin embargo que dicha topología también es generada por la familia de todas las seminormas continuas en el Espacio.

Teorema 1.10 *Sean (X,τ) un E.V.T. Localmente Convexo, entonces*

a). *La topología de X es generada por la familia de todas las seminormas continuas*

$$\mathcal{SC}(X) = \{p : X \to \mathbf{R}/p \text{ es seminorma } \tau - \text{continua en } X\}$$

b). *X es de Hausdorff* $\Leftrightarrow \forall x \in X$ *con* $x \neq 0$, $\exists p \in SC(X)/p(x) \neq 0$

Asi, cuando tengamos una vecindad del cero $U \subset X$ en un E.V.T. Localmente Convexo podremos hallar seminormas continuas $p_i : X \to \mathbb{R}$ y reales positivos $\epsilon_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{m} \left\{ x \in X/p_i(x) < \epsilon_i \right\} \subset U$$

Más aún en [9, pag. 35; cj. 8] se demuestra que si X es un E.V.T. Localmente Convexo, entonces se puede encontrar una familia de seminormas $\mathcal{P}$ que genera la topología de X de modo que la familia de conjuntos de la forma $\{x \in X/p(x) < \epsilon\}$ forman una base local.

Teorema 1.11 *Sean (X, τ) un E.V.T. Localmente Convexo, entonces existe una familia de seminormas $\mathcal{P}$ que genera la topología τ tal que si definimos para cada $p \in \mathcal{P}$ y $\epsilon > 0$ el conjunto*

$$U(p, \epsilon) = \{x \in X/p(x) < \epsilon\}$$

entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{U(p, \epsilon)/p \in \mathcal{P}, \ \epsilon > 0\}$$

es una base Local para τ.

Este teorema permite afirmar entonces que si U es una vecindad del cero en un E.V.T. Localmente Convexo X entonces podemos hallar una seminorma continua $p: X \to \mathbb{R}$ y un real positivo $\epsilon > 0$ tal que

$$\{x \in X/p(x) < \epsilon\} \subset U$$

También se pueden caracterizar a los conjuntos acotados en un E.V.T. Localmente Convexo X de la siguiente manera. Supongamos que $\mathcal{P} = \{p_i/i \in I\}$ sea una familia cualquiera de seminormas que genera la topología de X entonces de la parte (d) del Teorema 1.8 un conjunto $A \subset X$ será acotado si y solo si se verifica

$$\sup_{x \in A}\{p_i(x)\} < \infty, \quad \forall i \in I \tag{1.3}$$

Decimos que un E.V.T. X es **normable** cuando existe una norma definida en X que genere la misma topología de X. El siguiente teorema caracteriza a los Espacios Normables

Teorema 1.12 (Caracterización de Espacios Normables) *Un E.V.T. es normable si y solo si existe un vecindad del cero convexa y acotada*

El siguiente teorema simplifica el análisis en Espacios Vectoriales de Dimensión Finita

Teorema 1.13 (Teorema de Tychonoff) *En un Espacio Vectorial X de dimensión finita, existe una y solo una Topología Vectorial Localmente Convexa de Hausdorff compatible con las operaciones del Espacio. A esta topología se le llamará su* **Topología Natural**.

Más aún, se prueba que cualquier p y $\|.\|$ seminorma y norma respectivamente en un Espacio de dimensión finita X, existe una constante $\lambda > 0$ tal que

$$p(x) \leqslant \lambda\|x\|, \quad \forall x \in X \tag{1.4}$$

1.3. Funciones Lineales entre E.V.T.

Para una función lineal entre Espacios Normados, el concepto de continuidad es equivalente al de acotación; la situación es diferencnte en E.V.T. Una función lineal $f : X \to Y$ entre E.V.T. es llamada **acotada** cuando transforma conjuntos acotados de X en conjuntos acotados de Y.

Teorema 1.14 (Acotación y Continuidad) *Sean $f : X \to Y$ una función lineal entre los E. V.T. X, Y. Consideremos las siguientes afirmaciones*

a). *f es continua en X.*

b). *f es continua en algun punto x_0.*

c). *f es acotada.*

d). *Si $x_n \to 0$, entonces el conjunto $\{f(x_n)/n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ es acotado.*

e). *Si $x_n \to 0$, entonces $f(x_n) \to 0$*

Entonces se cumple

1. *(a) $\Leftrightarrow$ (b).*
2. *(b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (e)*

y cuando la topología de X es metrizable también se cumple

3. *(e) $\Rightarrow$ (a)*

En E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff la continuidad se puede expresar en términos de seminormas como lo muestra el siguiente teorema (ver [12, pag. 42])

Teorema 1.15 (Continuidad en E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff) *Sean $f: X \to Y$ función lineal entre E. V.T. Localmente Convexos de Hausdorff y $\mathcal{P}$ una familia de seminormas que generan la topología de X. Entonces f es continua si y solo si para cada seminorma continua $q \in SC(Y)$, existen $p \in \mathcal{P}$ y $\lambda > 0$ tal que*

$$q[f(x)] \leqslant \lambda p(x), \quad \forall x \in X$$

1.4. Teorema de Hahn-Banach

Presentamos el teorema de Hahn-Banach y algunos de sus corolarios, según lo que necesitamos en este trabajo. Una versión análitica del teorema de Hahn-Banach es la siguiente

Teorema 1.16 (Teorema de Hahn-Banach) *Sean X un Espacio Vectorial (no necesariamente real), $M \subset X$ un Subespacio Vectorial de X y $p : X \to \mathbb{R}$ una seminorma en X. Si $f : M \to \mathbb{K}$ es lineal tal que*

$$|f(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in M$$

Entonces existe una Funcional Lineal $F : X \to \mathbb{K}$ que verifica

1. $F\big|_M = f$ (i.e. F es una extensión de f)

2. $|F(x)| \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$

Las consecuencias en Espacios Normados son conocidas. Los siguientes resultados se cumplen en E.V.T.

Corolario 1.1 *Sean X un E.V.T Localmente Convexo de Hausdorff y $x_0 \in X$ con $x_0 \neq 0$, entonces existe una funcional lineal continua $f : X \to \mathbb{K}$ tal que $f(x_0) \neq 0$*

Corolario 1.2 *Sea X un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff, entonces el dual X^* separa puntos de X*

1.5. Topología Débil y Topología Producto

1.5.1. Topología Débil

Sea X un Espacio Vectorial cualquiera y $\mathcal{F} \subset X_a^*$ un Subespacio Vectorial, entonces la **Topología Débil** en X, que denotaremos por $\sigma(X, \mathcal{F})$, esta definida por cualquiera de las siguientes afirmaciones equivalentes

a). Es la más pequeña Topología Vectorial Localmente Convexa que hace continuas a todas las funciones $f \in \mathcal{F}$

b). Es la topología generada por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_f / f \in \mathcal{F}\}$ donde $p_f : X \to \mathbb{R}$ está definida como
$$p_f(x) = |f(x)|, \quad \forall x \in X$$

c). Es la topología generada por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_F / F \subset \mathcal{F} \text{ finito }\}$ donde $p_F : X \to \mathbb{R}$ está definida como
$$p_F(x) = \max_{f \in F} |f(x)|, \quad \forall x \in X$$

Cuando el Subespacio $\mathcal{F} \subset X_a^*$ separa puntos de X, la Topología débil $\sigma(X, \mathcal{F})$ resulta ser de Hausdorff.

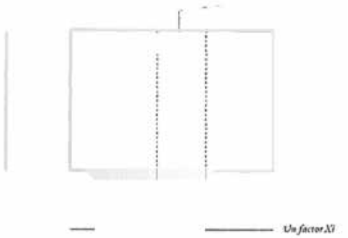
1.5.2. Topología Producto

Comencemos definiendo la Topología Producto en un producto general. Sean $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de Espacios Topológicos (no necesariamente Vectoriales) el producto general se define como
$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{\psi \colon I \to \bigcup_{i\in I} X_i / \psi(i) \in X_i, \ \forall i \in I\}$$
para cada índice $i \in I$ fijo la proyección $\pi_i \colon X \to X_i$ sobre el i-esimo factor se define como $\pi_i(\psi) = \psi(i)$, $\forall \psi \in X$. La **Topología Producto** en X es la más pequeña topología que hace continuas a todas las funciones proyecciones, es decir
$$\text{Topología Producto en } X = \bigcap_{\tau \in \mathcal{F}} \tau$$

donde $\mathcal{F} = \{\tau \in Top(X)/\pi_i$ es τ-continua en X, $\forall i \in I\}$. Una subbase para la Topología Producto estará dada por la familia

$$\Sigma = \{\pi_i^{-1}(V)/i \in I, V \subset X_i \text{ es abierto en } X_i\} =$$

los abiertos subbásicos de la Topología Producto son llamados cilindros. Esta idea se expone en el siguiente diagrama



Una base, se ... mbros de Σ.

Cuando los Espacios X_i son E.V.T. entonces el Producto $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la Topología Producto es también un E.V.T. (el Espacio de todas las funciones $\psi: I \to \cup_{i \in I} X_i$) que resulta ser Localmente Convexo cuando todos los Espacios X_i son Localmente Convexos. El siguiente teorema resume algunas propiedades que usaremos principalmente en los ejemplos

Teorema 1.17 *Sean $\{X_i\}_{i \in I}$ una familia de E.V.T. Localmente Convexos y $X = \prod_{i \in I} X_i$ con la Topología Producto, entonces se cumple*

a). *X es un E.V.T. Localmente Convexo*

b). *Si X_i es de Hausdorff, $\forall i \in I$, entonces X es de Hausdorff*

c). *Si para cada $i \in I$ y $q \in SC(X_i)$ definimos*

$$p_{q,i}(\psi) = q\big[\psi(i)\big], \quad \forall \psi \in X$$

entonces la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_{q,i}/i \in I,\ q \in SC(X_i)\}$ genera la Topología Producto en X

d). Las siguientes familias son Bases Locales para la Topología Producto

$$\mathcal{B} = \{\bigcap_{i \in F} U(i, q_i, \epsilon_i)/F \subset I \text{ finito },\ \forall i \in F,\ q_i \in SC(X_i),\ \epsilon_i > 0\}$$

donde $U(i, q_i, \epsilon_i) = \{\psi \in X / q[\psi(i)] < \epsilon_i\}$

$$B = \{\bigcap_{i\in F} U(i, V_i) / F \subset I \text{ finito }, \forall i \in F, V_i \subset X_i \text{ es una vecindad del cero en } X_i\}$$

donde $U(i, V_i) = \{\psi \in X / \psi(i) \in V_i\}$

c). *Un subconjunto* $A \subset X$ *es acotado si y solo si su proyección en cada* X_i *es acotado, es decir* $\forall i \in I$, $\pi_i(A) = \{\psi(i)/\psi \in A\} \subset X_i$ *es acotado*

Un caso particular de producto es aquel en el cual todos los Espacios X_i son idénticos, digamos que $X_i = Y$, $\forall i \in I$. En este caso el Espacio Producto no es otra cosa que el Espacio de todas las funciones de I en Y que suele denotarse por Y^I

$$X = \prod_{i\in I} Y = \{\psi : I \to Y / \psi \text{ es función }\}$$

y la Topología Producto es frecuentemente llamada **Topología de Convergencia puntual**, esto se justifica en el siguiente teorema

Teorema 1.18 *Sea el Espacio* $Y^I = \prod_{i\in I} Y$ *con la Topología Producto*

a). Si $f : \mathbb{R} \to Y^I$, *entonces*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to 0} f(t)(i) = 0, \quad \forall i \in I$$

b). *Si* $f : \mathbb{N} \to Y^I$ *(i.e. f es una sucesión en* Y^I*), entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \in Y^I \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(i) = f(i), \quad \forall i \in I$$

El teorema siguiente es otra caracterización de conjuntos acotados en E.V.T. Localmente Convexos

Teorema 1.19 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Un subconjunto* $A \subset X$ *de un E.V.T. Localmente Convexo es acotado si y solo si es* $\sigma(X, X^*)$*-acotado*

Dado que la topología débil $\sigma(X, X^*)$ es generada por la familia de seminormas de la forma $p_f(x) = |f(x)|$ donde $f \in X^*$, entonces de (1.3) resulta que

$$A \subset X \text{ es acotado } \Leftrightarrow \sup_{x\in A} |f(x)| < \infty, \quad \forall f \in X^* \tag{1.5}$$

1.6. El Espacio $\mathcal{F}(X, Y)$

Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto no vacio cualquiera e Y un E.V.T.. Definiremos una topología en el Espacio $\mathcal{F}(X,Y)$ de todas las funciones de X a Y. En realidad se definirá un espectro de topologías en base a una familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que sea dirigida (ver Definición A.2) por la inclusión de conjuntos, es decir que para cada $A, B \in \sigma$ exista un $C \in \sigma$ que contenga tanto a A como a B. El siguiente teorema define la topología (no necesariamente vectorial) en el Espacio $\mathcal{F}(X, Y)$

Teorema 1.20 (Topología en el Espacio $\mathcal{F}(X,Y)$) *Sean $X \neq \emptyset$ cualquier conjunto; Y un E.V.T. con base local $\mathcal{B}$ y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X tal que*

$$\forall A, B \in \sigma,\ \exists C \in \sigma \,/\, A \subset C,\ B \subset C$$

Si para cada $A \in \sigma$ y $V \in \mathcal{B}$ definimos el conjunto

$$\tilde{\mathcal{U}}(A,V) = \{f \in \mathcal{F}(X,Y)/f(A) \subset V\} \subset \mathcal{F}(X,Y)$$

entonces la familia

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \left\{\tilde{\mathcal{U}}(A,V)/A \in \sigma,\ V \in \mathcal{B}\right\}$$

es una Base de Vecindades del cero para una Topología invariante por traslaciones en $\mathcal{F}(X,Y)$

Demostración. Definimos la topología, que denotaremos por τ_σ, como aquella formada por $\emptyset$, $\mathcal{F}(X,Y)$ y los abiertos definidos como

$$\emptyset \neq \tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}(X,Y) \text{ es abierto } \Leftrightarrow \forall f \in \tilde{\mathcal{A}},\ \exists \tilde{\mathcal{U}}(A,V) \in \widetilde{\mathcal{B}} \,/\, f + \tilde{\mathcal{U}}(A,V) \subset \tilde{\mathcal{A}}$$

1ro. Mostremos en primer lugar que la familia

$$\tau_\sigma = \{\emptyset, \mathcal{F}(X,Y)\} \cup \{\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}(X,Y)/\tilde{\mathcal{A}} \text{ es abierto }\}$$

es una topología en $\mathcal{F}(X,Y)$. Sean $\tilde{\mathcal{A}}_1, \tilde{\mathcal{A}}_2$ abiertos, y consideremos $f \in \tilde{\mathcal{A}}_1 \cap \tilde{\mathcal{A}}_2$ cualquiera, por definición existen $\tilde{\mathcal{U}}(A_1, V_1)$, $\tilde{\mathcal{U}}(A_2, V_2) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tales que

$$f + \tilde{\mathcal{U}}(A_i, V_i) \subset \tilde{\mathcal{A}}_i, \quad i = 1, 2$$

por la condición impuesta sobre σ podemos hallar un $A \in \sigma$ tal que $A_1 \subset A$ y $A_2 \subset A$. Para demostrar que $\tilde{\mathcal{A}}_1 \cap \tilde{\mathcal{A}}_2$ es abierto, debemos mostrar que $f + \tilde{\mathcal{U}}(A,V) \subset \tilde{\mathcal{A}}_1 \cap \tilde{\mathcal{A}}_2$ donde $V \in \mathcal{B}$ es tal que $V \subset V_1 \cap V_2$, sea para esto $g \in \tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ cualquiera, luego $g \in \mathcal{F}(X,Y)$ es tal que $g(A) \subset V \subset V_1 \cap V_2$ entonces $g(A_i) \subset g(A) \subset V_1 \cap V_2 \subset V_i$, $(i = 1, 2)$, es decir $g \in \tilde{\mathcal{U}}(A_i, V_i)$ y en consecuencia $f + g \in \tilde{\mathcal{A}}_i$, $(i = 1, 2)$. Como $g \in \tilde{\mathcal{U}}(A, V)$ fue arbitrario concluimos que $f + \tilde{\mathcal{U}}(A,V) \subset \tilde{\mathcal{A}}_1 \cap \tilde{\mathcal{A}}_2$. Mostremos ahora que la unión arbitraria de abiertos es abierto, sea $\tilde{\mathcal{A}}_i$ abierto $\forall i \in I$ y consideremos $f \in \cup_{i \in I} \tilde{\mathcal{A}}_i$ cualquiera, entonces $f \in \tilde{\mathcal{A}}_i$, para algun i y por tanto existe $\tilde{\mathcal{U}}(A,V) \in \widetilde{\mathcal{B}}$ tal que $f + \tilde{\mathcal{U}}(A,V) \subset \tilde{\mathcal{A}}_i \subset \cup_{i \in I} \tilde{\mathcal{A}}_i$. Esto demuestra que la unión $\cup_{i \in I} \tilde{\mathcal{A}}_i$ es abierto.

2do. La topología τ_σ es invariante por traslaciones. Esto es claro de la misma definición de abiertos.

3ro. La familia $\widetilde{\mathcal{B}} \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}(X,Y))$ es una base de vecindades del cero para la topología τ_σ. Esto también es evidente. □

OBS. En el teorema la topología τ_σ no depende de la elección particular de la base local $\mathcal{B}$ de Y. Es decir, si tenemos $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ dos bases locales [equilibradas] de Y y τ_1, τ_2 las topologías respectivas en $\mathcal{F}(X,Y)$ definidas como en el teorema entonces $\tau_1 = \tau_2$. En efecto, los abiertos son definidos como

$$\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{F}(X,Y) \text{ es } \tau_i\text{-abierto } \Leftrightarrow \forall A \in \tilde{\mathcal{A}},\ \exists A \in \sigma, V_i \in \mathcal{B}_i/f + \tilde{\mathcal{U}}(A, V_i) \subset \tilde{\mathcal{A}}$$

Pero como $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases locales para la misma Topología Vectorial en Y entonces se verifica el Teorema 1.1. Asi, para cualquier $V_1 \in \mathcal{B}_1$ ($V_2 \in \mathcal{B}_2$) existe un $V_2 \in \mathcal{B}_2$ ($V_1 \in \mathcal{B}_1$) tal que

$V_2 \subset V_1$ $(V_1 \subset V_2)$ y en consecuencia para cualquier $\tilde{\mathcal{U}}(A,V_1) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1\left(\tilde{\mathcal{U}}(A,V_2) \in \widetilde{\mathcal{B}}_2\right)$ existe un $\tilde{\mathcal{U}}(A,V_2) \in \widetilde{\mathcal{B}}_2\left(\tilde{\mathcal{U}}(A,V_1) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1\right)$ tal que $\tilde{\mathcal{U}}(A,V_1) \subset \tilde{\mathcal{U}}(A,V_2)$, $\left(\tilde{\mathcal{U}}(A,V_2) \subset \tilde{\mathcal{U}}(A,V_1)\right)$. Esto es suficiente pata garantizar que ambas topologías son iguales.

Este teorema nos permite fundamentar la siguiente definición

Definición 1.2 (Topología de Convergencia Uniforme en $\mathcal{F}(X,Y)$) *Sean $X \neq \emptyset$ conjunto cualquiera, Y un E.V.T. con base local $\mathcal{B}$ y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X que verifica*

$$\forall A, B \in \sigma,\ \exists C \in \sigma / A \subset C, \quad B \subset C \tag{1.6}$$

*La topología definido en el teorema anterior será llamada **Topología de Convergencia Uniforme en subconjuntos de σ** (o brevemente $\sigma-$topología) y que denotaremos por τ_σ*

Ahora necesitamos imponer condiciones bajo las cuales la Topología de Convergencia Uniforme sea Vectorial, es decir que convierta a $\mathcal{F}(X,Y)$ en un E.V.T. Esto lo damos en el siguiente teorema.

Teorema 1.21 (τ_σ como Topología Vectorial) *Con las mismas condiciones de la Definición 1.2. Sea $G \subset \mathcal{F}(X,Y)$ un Subespacio Vectorial*

a). *G es un E.V.T. bajo la $\sigma-$topología si y solo si se cumple*

$$\forall f \in G,\ \forall A \in \sigma,\ f(A) \subset Y \text{ es acotado en } Y \tag{1.7}$$

b). *Si se cumple* (1.7) *y además Y es Localmente Convexo, entonces G es un E.V T. Localmente Convexo*

Demostración. Primeramente observemos que los abiertos de G son aquellos inducidos en G por la $\sigma-$topología de $\mathcal{F}(X,Y)$, por lo tanto son de la forma $G \cap \tilde{\mathcal{U}}$ donde $\tilde{\mathcal{U}}$ es un σ-abierto. En particular resulta que la familia de todos los subconjuntos

$$\tilde{\mathcal{U}}(A,V) \cap G = \{f \in G / f(A) \subset V\} \subset G$$

donde $A \in \sigma$ y $V \in \mathcal{B}$ (podemos considerar a $\mathcal{B}$ como una base local equilibrada para la topología de Y), forma una base de vecindades del cero en G para la topología inducida que denotaremos por $\mathcal{B}_G$. Teniendo en cuenta esto, en lo que sigue de la demostración escribiremos $\tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ para denotar al abierto (en G): $\{f \in G / f(A) \subset V\}$.

(a) ($\Rightarrow$) Sean $f \in G$, $A \in \sigma$ y $V \in \mathcal{B}$ cualesquiera, desde que G es un E.V.T. entonces cualquier vecindad del cero en G es absorbente y en particular para la vecindad $\tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ podemos hallar un $\delta > 0$ tal que $f \in \delta\tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ o equivalentemente $f(A) \subset \delta V$ demostrando que $f(A)$ es acotado en Y

($\Leftarrow$) Como la $\sigma-$topología ya es invariante por traslaciones, entonces será suficiente mostrar la condición (b) del Teorema 1.2. Sea $\tilde{\mathcal{U}}(A,V) \in \mathcal{B}_G$ cualquiera, donde $A \in \sigma$ y $V \in \mathcal{B}$ y mostremos que $\tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ es equilibrado y absorbente. Sean $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| \leqslant 1$ y $f \in \tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ cualquiera, desde que V es equilibrado tenemos que $(\alpha f)(A) = \alpha f(A) \subset \alpha V \subset V$ de donde $\alpha f \in \tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ demostrando que $\tilde{\mathcal{U}}(A,V)$ es equilibrado. Para mostrar que es absorbente usemos la hipótesis del teorema, sea $f \in G$ cualquiera, como $f(A)$ es acotado entonces podemos hallar un $\delta > 0$ tal que $f(A) \subset \delta V$ esto implica que $f \in \delta \widetilde{\mathcal{U}}(A, V)$ y por tanto $\widetilde{\mathcal{U}}(A, V)$ es absorbente. Finalmente para la condición (b2) sea $V^s \subset Y$ vecindad simétrica y equilibrada del cero en Y tal que $V^s + V^s \subset V$ entonces es claro que $\widetilde{\mathcal{U}}(A, V_0) + \widetilde{\mathcal{U}}(A, V_0) \subset \widetilde{\mathcal{U}}(A, V)$ donde $V_0 \in \mathcal{B}$ es tal que $V_0 \subset V^s$

(b) La condición (1.7) asegura que G es un E.V. T y como Y es Localmente Convexo podemos hallar una base local $\mathcal{B}$ convexa y equilibrada de modo que la familia $\mathcal{B}_G = \{\widetilde{\mathcal{U}}(A, V)/A \in \sigma,\ V \in \mathcal{B}\}$ resulta ser una base local para G. Mostremos que cada miembro de $\mathcal{B}_G$ es convexo, para ello sean $f, g \in \widetilde{\mathcal{U}}(A, V)$ y $\lambda \in < 0, 1 >$ tenemos

$$[\lambda f + (1 - \lambda)g](A) = \lambda f(A) + (1 - \lambda)g(A) \subset \lambda V + (1 - \lambda)V \subset V$$

la última desigualdad es por la convexidad de V. □

OBS. De la demostración anterior se deduce que si $A \in \sigma$ y $V \subset Y$ es una vecindad del cero en Y cualquiera entonces el conjunto

$$\widetilde{\mathcal{U}}(A, V) = \{f \in G/f(A) \subset V\}$$

es un $\sigma-$abierto en G que será equilibrado cuando V sea equilibrado, y convexo cuando V sea convexo.

Teorema 1.22 **(τ_σ como Topología de Hausdorff)** *Sean X un Espacio Topológico (no necesariamente Vectorial); Y un E.V.T. de Hausdorff y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos de X que satisface (1.6) y que además verifica $\bigcup_{S\in\sigma} S = X$ (i.e. la unión de miembros de σ es densa en X). Si un Subespacio Vectorial G satisface*

a). $\forall f \in G$, $\forall A \in \sigma$, $f(A) \subset Y$ es acotado.

b). $\forall f \in G$, f es continua en X

Entonces G es un E.V.T. de Hausdorff bajo la $\sigma-$topología.

Demostración. La condición (a) y el Teorema 1.21 garantizan que G es un E.V.T. Sea $f \in G$ con $f \neq 0$, entonces existe un $x_1 \in X$ tal que $f(x_1) \neq 0$ y como Y es de Hausdorff podemos hallar un abierto $V_1 \subset Y$ que no contenga al cero ($0 \notin V_1$) con $f(x_1) \in V_1$. Por hipótesis f es continua en x_1 por tanto existe un abierto $U_1 \subset X$ con $x_1 \in U_1$ tal que

$$x \in U_1 \Rightarrow f(x) \in V_1$$

Además como la unión $\bigcup_{S\in\sigma} S$ es densa en X entonces $U_1 \cap \bigcup_{S\in\sigma} S \neq \emptyset$ y por tanto existen $S_0 \in \sigma$ y $x_0 \in U_1 \cap S_0$, es decir hemos hallado un $x_0 \in S_0 \in \sigma$ tal que $f(x_0) \neq 0$. Sea $V_0 \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_0) \notin V_0$ (recuerde que Y es de Hausdorff). Esto demuestra que $\mathcal{U}(S_0, V_1)$ es una vecindad del cero en G que no contiene a f y por tanto G es de Hausdorff. □

Si suponemos que la unión de miembros de σ sea todo el espacio X, podemos omitir las hipotesis de continuidad para los elementos de G y prescindir de la topología en X.

Corolario 1.3 *Sean $X \neq \emptyset$ conjunto cualquiera, Y un E.V.T. de Hausdorff y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia como en la Definición 1.2 tal que $\bigcup_{S\in\sigma} S = X$. Si un Subespacio Vectorial G satisface*

$$\forall f \in G,\ \forall A \in \sigma,\ f(A) \subset Y \text{ es acotado}$$

Entonces G es un E.V.T. de Hausdorff con la $\sigma-$topología.

Demostración. La condición dada para G garantiza que sea un E.V.T., mostremos que es de Hausdorff. Sea $f \in G$ con $f \neq 0$ entonces existe un $x_0 \in X$ tal que $f(x_0) \neq 0$, además como $\bigcup_{S\in\sigma} S = X$ podemos hallar un $S_0 \in \sigma$ tal que $x_0 \in S_0$. Sea $V_0 \in \mathcal{B}$ tal que $f(x_0) \notin V_0$ entonces tenemos que $x_0 \in S_0 \in \sigma$ es tal que $f(x_0) \notin V_0$. Con esto es claro que la vecindad $\widetilde{\mathcal{U}}(S_0, V_0)$ es una vecindad del cero en G que no contiene a f demostrando que G es deHausdorff. □

Ahora si X es un E.V.T., σ es una familia de subconjuntos acotados que verifica (1.6) y G es un Subespacio Vectorial de funciones continuas, entonces las condiciones (a) y (b) del Teorema 1.22 se satisfacen. Asi obtenemos el siguiente corolario

Corolario 1.4 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y [Localmente Convexo] [de Hausdorff], $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos acotados de X que verifica (1.6) y además $\bigcup\limits_{S\in\sigma} S = X$, entonces cualquier Subespacio Vectorial $G \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es un E.V.T. [Localmente Convexo] [de Hausdorff] bajo la $\sigma-$topología.*

Demostración. Inmediata del Teorema 1.22. □

Teorema 1.23 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo cuya topología es generada por la familia de seminormas $\mathcal{P} = \{p_i / i \in I\}$; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos acotados de X que satisface (1.6) y además $\bigcup\limits_{S\in\sigma} S = X$ y $G \subset \mathcal{L}(X, Y)$ un Subespacio Vectorial. Entonces la familia de seminormas $\widetilde{\mathcal{P}} = \{p_{S,i} / S \in \sigma, i \in I\}$ donde cada $p_{S,i} : G \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$p_{S,i}(f) = \sup_{x\in S} p_i[f(x)], \quad \forall f \in G$$

genera la $\sigma-$topología de G

Demostración. El Teorema 1.8 afirma que la famlia $\mathcal{B}_1$ de intersecciones finitas de conjuntos de la forma $\{f \in G / p_{S,i}(f) < \epsilon\}$ donde $S \in \sigma$, $i \in I$ y $\epsilon > 0$ es una base local para la topología generada por $\widetilde{\mathcal{P}}$ que denotaremos por $\tilde{\tau}$. Ahora, la topología τ_σ tiene como base local a la familia de conjuntos de la forma $\{f \in G / f(S) \subset V\}$ donde $S \in \sigma$ y $V \subset Y$ es una vecindad del cero en Y. Para demostrar que ambas topologías son las mismas, debemos verificar las condiciones (1) y (2) del Teorema 1.1. Consideremos el abierto $\tilde{\tau}-$básico

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{j=1}^{m} \left\{ f \in G / p_{S_j, i_j}(f) < \epsilon_j \right\}$$

donde $S_j \in \sigma$, $i_j \in I$, $\epsilon_j > 0$, $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Si definimos el abierto $V = \bigcap_{j=1}^{m} \{y \in Y / p_{i_j}(y) < \epsilon_j\}$ y el conjunto $S \in \sigma$ tal que $S_j \subset S$, $j = 1, 2, \ldots, m$ entonces se comprueba que el $\tau_\sigma-$básico $\widetilde{\mathcal{U}}(S, V)$ está contenido en $\widetilde{\mathcal{V}}$. Recíprocamente, para el abierto $\tau_\sigma-$básico $\widetilde{\mathcal{U}}(S, V)$ donde $S \in \sigma$ y $V \subset Y$ es una vecindad del cero, podemos hallar seminormas $p_{i_j} \in \mathcal{P}$ y $\epsilon_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, m$ tales que $\bigcap_{j=1}^{m} \{y \in Y / p_{i_j}(y) < \epsilon_j\} \subset V$. Si definimos el abierto $\tilde{\tau}-$básico

$$\widetilde{\mathcal{V}} = \bigcap_{j=1}^{m} \left\{ f \in G / p_{S,i_j}(f) = \sup_{x\in S} p_{i_j}[f(x)] < \epsilon_j \right\}$$

entonces se comprueba que $\tilde{V} \subset \tilde{\mathcal{U}}(S, V)$ $\square$

Capítulo 2

Varias Definiciones de Diferenciabilidad en Espacios Vectoriales Topológicos

La generalización del concepto de derivada a Espacios Vectoriales Topológicos sigue de la idea de aproximar una función cualquiera en una vecindad de un punto por una función lineal. Un método general de aproximación sigue esta idea, aunque la función de aproximación no necesariamente sea lineal. Asi una función $f : X \to Y$ entre E.V.T. será diferenciable en un punto x cuando se puedan hallar funciones $T : X \to Y$ y $r : X \to Y$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X$$

La primera sección de este capítulo presenta un bosquejo de como se define una operación de diferenciación general para funciones definidas entre Espacios Vectoriales Topológicos e imponemos luego condiciones para que las propiedades de estos métodos no difieran mucho de las propiedades de la diferenciación ordinaria. En la sección 2.2 hacemos un resumen histórico del desarrollo del concepto de derivada, las definciones dadas alli son como originalmente las presentaron sus autores. Finalmente en la sección 2.3 comparamos las definiciones de la sección anterior, mostrando las equivalencias entre muchas de ellas y reduciendo el número de definiciones a unas pocas, mostrando mediante contraejemplos que estas definiciones resultantes no son equivalentes.

2.1. Propiedades generales de la derivada

2.1.1. Definición de derivada

Comencemos con la derivada de una función real de variable real f en un punto $x \in \mathbb{R}$. Esta derivada es un número A definido por

$$f(x+h) = f(x) + Ah + r(h)$$

donde

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

Desde que existe una correspondencia biunívoca entre los números reales y las funciones lineales de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, entonces para encontrar la derivada de una función real de variable real en un punto x se debe encontrar una función lineal $f'(x)$ tal que la diferencia $r(h) = f(x+h) - f(x) - f'(x)h$ sea una cantidad "infinitamente pequeña" respecto a h. Este punto de vista es la base de la generalización del concepto de derivada a funciones entre Espacios Vectoriales Topológicos (E.V.T) arbitrarios.

El problema de definir la derivada es una variante del problema de aproximar una función arbitraria por una función en una clase dada. Para definir la operación de diferenciación entre E.V.T. necesitamos lo siguiente

1. Para cada par X, Y de E.V.T. se debe indicar una clase $\mathcal{A}(X,Y)$ de funciones de aproximación (*i.e.* una clase para la cual las derivadas de una función arbitraria van a pertenecer).

   La elección más natural de $\mathcal{A}(X,Y)$ es tomar un subconjunto del conjunto de todas las funciones lineales de X a Y, por ejemplo, el conjunto $\mathcal{L}(X,Y)$ de todas las funciones lineales y continuas de X a Y, o el conjunto $\mathcal{B}(X,Y)$ de todas las funciones lineales y acotadas de X a Y

2. Para cada par X, Y de E.V.T. se debe indicar una clase $\mathcal{R}(X,Y)$ de funciones de X a Y las cuales son consideradas "infinitesimales con respecto a h"

Esto requiere entonces definir dos funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$ que asocia a cada par X, Y de E.V.T. las clases $\mathcal{A}(X,Y)$ y $\mathcal{R}(X,Y)$ ambos subconjuntos del Espacio $\mathcal{F}(X,Y)$

Definición 2.1 (Método de diferenciación, Diferenciabilidad Generalizada)

a). *Cuando están definidas las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$ decimos que se tiene un método $\mathcal{AR}$ de diferenciación.*

b). *Para cada par de E.V.T. X e Y, el conjunto $\mathcal{A}(X,Y)$ será llamado* ***conjunto de $\mathcal{AR}$-derivadas*** *y $\mathcal{R}(X,Y)$ el* ***conjunto de $\mathcal{R}$-funciones infinitesimales***

c). *Una función $f : X \to Y$ se dice que es* ***$\mathcal{AR}$-diferenciable*** *(o diferenciable por el método $\mathcal{AR}$)* ***en un punto $x \in X$ en sentido generalizado*** *si existen $T \in \mathcal{A}(X,Y)$ y $r \in \mathcal{R}(X,Y)$ tal que para cada $h \in X$ se cumple*

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h) \tag{2.1}$$

d). *La función $T \in \mathcal{A}(X,Y)$ es llamada la* ***$\mathcal{AR}$-derivada*** *de f* ***en x en sentido generalizado*** *y será denotada por $f'(x)$ (denotando la dependencia de x)*

OBSERVACIONES

1. La frase en "sentido generalizado" será omitida cuando no haya lugar a confusión.
2. Cada función $r \in \mathcal{R}(X,Y)$ debe satisfacer $r(0) = 0$, para cualesquier par X, Y de E.V.T.

Elecciones arbitrarias de $\mathcal{A}(X,Y)$ y $\mathcal{R}(X,Y)$ dan origen a diferentes definiciones de derivada de una función $f : X \to Y$. Las propiedades de estas derivadas pueden diferir sustancialmente de las de derivadas ordinarias. Es natural entonces exigir que un método de diferenciación debería tener las siguientes propiedades:

D1 1. Toda función lineal y continua debe ser diferenciable en todo punto y su derivada debe coincidir con la misma función.

2. Cualquier función constante debe ser diferenciable en todo punto con derivada cero.

3. La derivada de cualquier función debe ser lineal y continua

D2 Cuando $X = \mathbb{R}$ entonces una función $f : \mathbb{R} \to Y$ es diferenciable en $x \in \mathbb{R}$ si y solo si existe el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \tag{2.2}$$

y la función $f'(x) : \mathbb{R} \to Y$ debe estar definida por

$$f'(x)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \quad \forall h \in \mathbb{R} \tag{2.3}$$

D3 Una combinación lineal de dos funciones que son diferenciables en un punto es también diferenciable en aquel punto y su derivada es la misma combinación lineal de las derivadas de las dos funciones (*Linealidad de la diferenciación*).

D4 La composicion de funciones diferenciables es diferenciable, es decir si f y g son diferenciables en x_0 y $f(x_0)$ respectivamente entonces la composición $g \circ f$ resulta diferenciable en x_0 cumpliendose que $(g \circ f)'(x_0) = g'[f(x_0)] \circ f'(x_0)$ (*Teorema de diferenciación de funciones compuestas*).

Para que un método $\mathcal{AR}$ de diferenciación satisfaga estos requerimientos será suficiente que las funciones $\mathcal{A}$ y $\mathcal{R}$ satisfagan las siguientes propiedades

Proposición 2.1 (Propiedades que debe satisfacer un método $\mathcal{AR}$)

1). *Para cada par X, Y de E.V.T. se tiene que $\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$*

2). *Para cualquier E.V.T. Y se tiene que*

$$\mathcal{R}(\mathbb{R}, Y) = \{r : \mathbb{R} \to Y / r(0) = 0 \wedge \lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0\}$$

3). *Para cualesquier E.V.T. X, Y y Z, si $s \in \mathcal{R}(Y,Z)$, $r \in \mathcal{R}(X,Y)$, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$ entonces*

1. $R \circ r \in \mathcal{R}(X,Z)$
2. $s \circ (r + T) \in \mathcal{R}(X,Z)$

4). *Para cada par X, Y de E.V.T. el conjunto $\mathcal{R}(X,Y)$ (cuando no es vacio) debe ser un Subespacio Vectorial de $\mathcal{F}(X,Y)$. En particular $0 \in \mathcal{R}(X,Y)$ cuando $\mathcal{R}(X,Y) \neq \emptyset$.*

Demostración. Mostremos que con estas cuatro condiciones se satisfacen las propiedades (D1) – (D4). Veamos (D1): Si $f : X \to Y$ es lineal y continua (*i.e.* $f \in \mathcal{L}(X,Y)$) entonces por (1) y (4) podemos escoger $T = f$ y $r = 0$ que claramente verifican (2.1). Para la función constante $f(x) = k$, $\forall x \in X$ consideramos $T = r = 0$ y (1) garantiza que la $\mathcal{AR}$-derivada de cualquier función es lineal y continua. Para mostrar (D2) sea $f : \mathbb{R} \to Y$ una función que es $\mathcal{AR}$-diferenciable en x_0 entonces existe $r \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, Y)$ y una función lineal y continua $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ que podemos identificar de manera natural con un elemento $y_0 \in Y$ (por ejemplo $y_0 = T(1)$) de la siguiente forma

$$T(t) = ty_0, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego por (2.1) podemos escribir

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = y_0 + \frac{r(h)}{h}, \quad \forall h \in \mathbb{R}$$

Por (2) la existencia del límite (2.2) está garantizada (observe que solo necesitamos la inclusión de izquierda a derecha) y sería igual a y_0 y la función $T : \mathbb{R} \to Y$ estaría definida como

$$T(h) = hy_0 = h \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \forall h \in \mathbb{R}$$

cumpliendose asi (2.3). Recíprocamente, supongamos que se verifican (2.2) y (2.3) y denotemos por $y_0 \in Y$ el límite de (2.2), definamos la función $T : \mathbb{R} \to Y$ como $T(t) = ty_0$ que es lineal y continua y la función $r : \mathbb{R} \to Y$ como $r(t) = f(x+t) - f(x) - T(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Notemos que se verifica $r(0) = 0$ y además

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{f(x+t) - f(x)}{t} - y_0 \right\} = y_0 - y_0 = 0$$

luego por (2) resulta que $r \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, Y)$, esto demuestra que f es $\mathcal{AR}$diferenciable en x. Veamos ahora (D3), sean para ello $f_i : X \to Y$ ($i = 1, 2$) dos funciones $\mathcal{AR}$-diferenciables en $x_0 \in X$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces existen $r_i \in \mathcal{R}(X, Y)$ y $T_i = f_i'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ tal que en cada caso se verifica (2.1). Para cualquier $h \in X$

$$\begin{aligned}(\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0 + h) - (\alpha f_1 + \beta f_2)(x_0) &= \alpha\big[f_1(x_0 + h) - f_1(x_0)\big] + \beta\big[f_2(x_0 + h) - f_2(x_0)\big] \\ &= \alpha\big[T_1(h) + r_1(h)\big] + \beta\big[T_2(h) + r_2(h)\big] \\ &= (\alpha T_1 + \beta T_2)(h) + (\alpha r_1 + \beta r_2)(h)\end{aligned}$$

por (4) $\alpha r_1 + \beta r_2 \in \mathcal{R}(X, Y)$ demostrando que $\alpha f_1 + \beta f_2$ es $\mathcal{AR}$-diferenciable en x_0 con $\mathcal{AR}$-derivada dada por $\alpha T_1 + \beta T_2$. Finalmente para mostrar (D4) consideremos $f : X \to Y$ y $g : Y \to Z$ funciones $\mathcal{AR}$-diferenciables en $x_0 \in X$ e $y_0 = f(x_0) \in Y$ respectivamente, entonces existen $r \in \mathcal{R}(X, Y)$, $T = f'(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$, $s \in \mathcal{R}(Y, Z)$ y $R = g'(y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tales que para cualesquier $h \in X$ y $k \in Y$

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) - f(x_0) &= T(h) + r(h) \\ g(y_0 + k) - g(y_0) &= R(k) + s(k)\end{aligned}$$

De donde podemos escribir

$$\begin{aligned}g\big[f(x_0 + h)\big] - g\big[f(x_0)\big] &= g\big[y_0 + (f(x_0 + h) - f(x_0))\big] - g(y_0) \\ &= R\big[f(x_0 + h) - f(x_0)\big] + s\big[f(x_0 + h) - f(x_0)\big] \\ &= R\big[T(h) + r(h)\big] + s\big[T(h) + r(h)\big] \\ &= (R \circ T)(h) + (R \circ r)(h) + s \circ (r + T)(h)\end{aligned}$$

para cualquier $h \in X$. Por (3) y (4) resulta que $R \circ r + s \circ (r+T) \in \mathcal{R}(X,Y)$ y en consecuencia $g \circ f$ es $\mathcal{AR}$-diferenciable en x_0 con $\mathcal{AR}$-derivada dada por $R \circ T$ □

Definición 2.2 (Diferenciabilidad Regular y Casiregular)

a). *Un método de $\mathcal{AR}$-diferenciación es llamado regular cuando se satisfacen todas las condiciones (1) – (4) de la Proposición 2.1 y además para cualesquier E.V.T X, Y se cumple*

$$\mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{R}(X,Y) = \{0\} \tag{2.4}$$

b). *Un método es llamado casiregular cuando se satisfacen* (2.4), *las condiciones (1), (3) y (4) de la Proposición 2.1 y la inclusión*

$$\mathcal{R}(\mathbb{R},Y) \subset \left\{r : \mathbb{R} \to Y / r(0) = 0 \ \wedge \ \lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = 0\right\}$$

para cualquier E.V.T. Y.

c). *Diremos que una función $f : X \to Y$ es $\mathcal{R}$-diferenciable ($\mathcal{R}$-casidiferenciable) en un punto $x \in X$ cuando sea $\mathcal{AR}$ diferenciable en sentido generalizado y el método $\mathcal{AR}$ sea regular (casiregular).*

OBSERVACIONES

1. Es claro que un método regular es casiregular, es decir

$$\mathcal{AR} \text{ es un método regular} \Rightarrow \mathcal{AR} \text{ es un método casiregular}$$

Desde que para los métodos regulares y casiregulares se satisface la condición (1) de la Proposición 2.1 escribiremos simplemente

$$\mathcal{R}\text{-método de diferenciación}$$

2. (*Unicidad de la casi-derivada*) La casiderivada de una función cualquiera en un punto es única
En efecto, supongamos que para la función $f : X \to Y$ existan dos casiderivadas en un punto dado x_0, digamos T_1 y T_2, con funciones infinitesimales $r_1, r_2 \in \mathcal{R}(X,Y)$ entonces para cualquier $h \in X$ podemos escribir

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = T_1(h) + r_1(h) = T_2(h) + r_2(h)$$

de donde $T_1 - T_2 = r_2 - r_1 \in \mathcal{L}(X,Y) \cap \mathcal{R}(X,Y) = \{0\}$ resultando la unicidad.

3. Si $\mathcal{R}$ es un método casiregular de diferenciación entonces para cada par de E.V.T. X, Y se cumple que

$$\mathcal{R}(X,Y) = \{f : X \to Y / f \text{ es } \mathcal{R}\text{-diferenciable en } 0 \text{ con } f'(0) = 0 \text{ y } f(0) = 0\}$$

En efecto, la demostración es inmediata tomando en cuenta la Definición 2.1.

4. Dados dos métodos de diferenciación $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$, cualquiera de las siguientes expresiones

1. $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$ es más fuerte que $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$
2. $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$ es más débil que $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$
3. $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$-diferenciabilidad implica $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$-diferenciabilidad (lo que se escribe $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$)

quiere decir que

$$\mathcal{A}_1(X,Y) \subset \mathcal{A}_2(X,Y) \quad y \quad \mathcal{R}_1(X,Y) \subset \mathcal{R}_2(X,Y)$$

Es claro que $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$ es equivalente a decir que cada función que es $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$-diferenciable en un punto también es $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$-diferenciable en aquel punto.

5. Sean dos métodos de diferenciación $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$ tales que para cualesquier par de E.V.T X,Y existe un Subespacio Vectorial $\mathcal{M}(X,Y) \subset \mathcal{F}(X,Y)$ tal que

$$\mathcal{A}_i(X,Y) \subset \mathcal{M}(X,Y) \quad y \quad \mathcal{M}(X,Y) \cap \mathcal{R}_i(X,Y) = \{0\}$$

Si una función $f: X \to Y$ es diferenciable en un punto, bajo estás condiciones, por ambos métodos $\mathcal{A}_i\mathcal{R}_i$, $(i = 1,2)$ entonces sus $\mathcal{A}_1\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{A}_2\mathcal{R}_2$-derivadas en dicho punto deben coincidir. En particular cuando una función es diferenciable en un punto por dos metodos casiregulares, entonces ambas derivadas deben ser las mismas.

6. En un método regular de diferenciación, la derivada de una función de variable escalar (i.e. con dominio $\mathbb{R}$) debe coincidir con la derivada ordinaria. En cambio un método casi-regular una función de variable escalar que es diferenciable en el sentido ordinario puede no ser diferenciable según el método casi-regular.

2.2. Desarrollo Histórico del concepto de Derivada

En esta sección damos la historia del origen y desarrollo de varios métodos de diferenciación desde Volterra.

1. En 1887 Vito Volterra introdujo el concepto de derivada variacional. Este fue el comienzo del análisis en Espacios de dimensión infinita. Sin embargo hubo un largo camino entre esta audaz tentativa y la creación de un Cálculo Diferencial en Espacios "Abstractos". En realidad aun la definición actual de diferenciabilidad de una función real de varias variables no existia en aquel tiempo y la definición de la Derivada "total" de una función definida en un Espacio de dimensión finita a otro fue del todo carente; solo fueron consideradas derivadas parciales. Una función de n variables fue llamada diferenciable en un punto dado si sus primeras derivadas parciales de primer orden con respecto a cada argumento existían y eran continuas en alguna vecindad de dicho punto. Esta definición es inadecuada por las siguientes razones:

1. Su formulación es superficialmente no invariante bajo un cambio de coordenadas.
2. Se asume la existencia de derivadas no solo en el punto dado si no también en puntos vecinos.
3. Se asume el concepto de continuidad el cual no es relevante.

En particular no se reduce a la definición usual cuando $n = 1$. La derivada de Volterra fue, de hecho, una generalización del concepto de derivada parcial al caso de funcionales reales definidas en el Espacio C de funciones continuas en un intervalo compacto.

La definición de diferenciabilidad de una función, equivalente al concepto actual, fue propuesta solo en 1893 en un paper de Stolz y luego en 1905 en uno de Pierpont para el caso de Espacios de dimensión finita. Sin embargo fue solo cuando el paper de Young aparecio (1910) que todos se llegaron a convencer de la superioridad de la nueva definición:

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable en un punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de acuerdo a Stolz–Pierpont–Young si las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$ existen en este punto y además se cumple que

$$f(x_1 + h_1, x_2 + h_2, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \epsilon_i\right) h_i \qquad (2.5)$$

donde $\epsilon_i \to 0$ cuando $\|h\| = \max\{|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|\} \to 0$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Esta idea expresa escencialmente la idea de una aproximación lineal; la importancia de esta idea en problemas de análisis funcional no lineal fue luego repetidamente acentuada por Hadamard. La idea fue primero usada explícitamente en 1911 por Maurice Frechet, un estudiante de Hadamard. Él modificó la definición de Stolz–Pierpont–Young de manera ligera pero importante en principio. Él reemplazó el término restante en (2.5) (*i.e.* la suma $\epsilon_1 h_1 + \epsilon_2 h_2 + \cdots + \epsilon_n h_n$) por $\epsilon\|h\|$ donde $\epsilon \in \mathbb{R}$ tiende a cero cuando $\|h\| \to 0$, y $\|h\|$ es la distancia entre los puntos $x + h$ y x, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ dada por la fórmula $\|h\| = \max\{|h_1|, |h_2|, \ldots, |h_n|\}$ ó $\|h\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}$ ó $\|h\| = |h_1| + |h_2| + \cdots + |h_n|$ (todos los tres casos dan la misma definición de diferenciabilidad). Para Frechet este fue solo el primer paso para conducir la teoría en la que se embarcaría por treinta años, un modelo para la definición de la derivada de una funcional.

En 1937 él mismo escribió:

> C'est M. Volterra qui a eu le premier l'idée d'étendre le champ d'application du Calcul différentiel à l'Analyse fonctionnelle. [...] Toutefois M. Hadamad a signalé qu'il y aurait grand intérèt á généraliser les définitions de M. Volterra. [...] M. Hadamard a montré le chemin qui devait conduire vers des définitions satisfaisantes en proposant d'imposer à la différenticlle d'une fonctionnelle la condition d'être linéaire par rapport à la différentielle de l'argument"

Cuya traducción sería más o menos asi: "Volterra fue el primero en tener la idea de extender el dominio de funciones del cálculo diferencial al análisis funcional [...]. Hadamard observó que sería de gran interés generalizar la definición de Volterra [...]. Hadamard mostró la manera en que se podía llevar a cabo una definición satisfactoria, requiriendo que la diferencial de una funcional debería ser lineal con respecto al diferencial del argumento".

Sin embargo, esta condición fue insuficiente en si misma para la definición exacta del diferencial. Se dió una definición exacta en 1911; esta corresponde a la idea intuitiva de que la diferencial de una funcional debería dar una "simple [2]"aproximada" expresión para el incremento de la funcional. La palabra "simple"es dada con significado preciso por la condición de linealidad de Hadamard. La palabra "aproximada"significa que la diferencial es la parte principal del incremento de una funcional de este tipo, en el sentido que la diferencia $\Delta U - dU$ entre ellas debería ser infinitamente pequeña en relación al incremento del argumento de f.

Pero aun se tenía que dar un sentido más preciso a estas últimas palabras. En el mismo artículo de 1911, Frechet dió la siguiente definición de diferenciabilidad:

> La funcional U_A tiene un diferencial en el punto A_0 si existe una funcional $V_{\Delta A}$ que es lineal en el incremento ΔA, y difiere del incremento de la funcional U_A en A_0 por una cantidad que es infinitamente pequeña en comparación con la distancia entre los argumentos A_0 y $A_0 + \Delta A$

Sin embargo, esta definición es incorrecta. El hecho es que las funcionales son definidas en Espacios Métricos Lineales. Consideremos por ejemplo el Espacio Métrico Lineal (actualmente un Espacio de Frechet) obtenido de la recta real con la métrica definida por $\rho(x,y) = \sqrt{|x-y|}$. La función identidad $f : (\mathbb{R},\rho) \to (\mathbb{R},\rho)$ definida por $f(x) = x$ en este espacio tiene como derivada en cero cualquier número λ según la definición de Frechet dada arriba, desde que para tal λ

$$\frac{h-\lambda h}{\sqrt{|h|}} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \sqrt{|h|} \to 0$$

Frechet mismo dió como ejemplos solo métricas que son generadas por normas. En aquel tiempo, sin embargo, el concepto de norma no existía; y tuvieron que pasar 14 años antes de que Frechet llegara a su celebre definición de derivada en Espacios Normados.

Por esta época Gâteaux, otro estudiante de Hadamard, introdujo la siguiente definición de diferenciabilidad (para funcionales) la cual es adecuada para cualquier Espacio Lineal (1913)

> Una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ real-valuada definida en un espacio lineal X es Gâteaux-diferenciable en $x \in X$ si para cualquier $h \in X$ el límite
>
> $$\delta f(x,h) = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\mathbb{R}}} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$$
>
> existe (el cual es frecuentemente llamado "la diferencial de Gâteaux en x por el incremento h")

En otras palabras, la composición de la función lineal continua $t \in \mathbb{R} \mapsto x+th \in X$ de la recta real a X y la funcional f es diferenciable en 0 para cualquier $h \in X$. Asi la diferenciabilidad de Gâteaux en un punto es simplemente la diferenciabilidad a lo largo de todas las posibles lineas que pasan a través del punto. Evidentemente la diferencial de Gâteaux no necesariamente tiene que ser lineal en h, asi que no satisface el requerimiento de linealidad de Hadamard.

Después de algún tiempo varios matemáticos, incluyendo al mismo Gâteaux, encontraron condiciones que implicaban la linealidad de la diferencial de Gâteaux. Asi, en 1919 Daniell (el descubridor de la integral de Daniell) mostró que ésta linealidad se obtenía para funciones Lipschitzianas definidas en el Espacio de funciones continuas en intervalos compactos cuya derivada de Gâteaux existía localmente: Sea $f : C \to \mathbb{R}$ una funcional real definida en el Espacio de funciones continuas definidas en el intervalo $[a,b]$. Si f cumple la condición de Lipschitz

$$|f(x_1)-f(x_2)| \leqslant M \max_{a\leqslant\tau\leqslant b} |x_1(\tau)-x_2(\tau)|$$

y si la diferencial de Gâteaux $\delta f(x,h)$ existe para todos los $h \in C$ y para todos los x en alguna vecindad $\max_{a\leqslant\tau\leqslant b}|x(\tau)-x_0(\tau)|$ del punto $x_0 \in C$, entonces $\delta f(x,h)$ es una funcional lineal en h.

Finalmente, Paul Levy, otro estudiante de Hadamard, en su libro "Lecons d'analyse fonctiounelle"(1922) simplemente impuso la condición de linealidad de la derivada de Gâteaux con respecto al incremento:

> Una funcional f definida en un Espacio Lineal X es diferenciable en el sentido de Gâteaux-Levy en $x \in X$ si es Gâteaux diferenciable en este punto y la funcional $h \in\mapsto \delta f(x,h)$ es lineal (y continua).

Las definiciones de Gâteaux-Lévy y Gâteaux se mantuvieron sin cambio para funciones entre Espacios Vectoriales Topológicos. Aunque la clase de funciones que tienen derivadas Gâteaux-Lévy es bastante amplia, el teorema de diferenciación de funciones compuestas no se cumplía. Fréchet en 1937 consideró el siguiente ejemplo: Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ una función de la recta real al plano $\mathbb{R}^2$ dado (en coordenadas cartesianas) por $f(t) = (t, t^2)$ y sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } y = x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

la función f es Gâteaux-Lévy diferenciable en 0 con derivada $f'(0) : t \in \mathbb{R} \mapsto t(1, 0)$ y la función g resulta Gâteaux-Lévy diferenciable en $f(0) = (0, 0)$ con derivada 0 (la función constante cero); sin embargo la función compuesta $g \circ f$ resulta la identidad en $\mathbb{R}$ cuya derivada es 1 y no 0.

Asi, surgió el problema de encontrar definiciones menos generales para las cuales el teorema de diferenciación de la función compuesta sea válido. Frechet resolvió este problema definiendo la derivada de una función f entre Espacios Normados como sigue:

> Una función $f : X \to Y$ entre Espacios Normados X e Y es llamada Frechet diferenciable en $x \in X$ si existe una función lineal y continua $A : X \to Y$ tal que
>
> $$f(x + h) - f(x) = A(h) + r(h)$$
>
> donde
>
> $$\frac{\|r(h)\|}{\|h\|} \to 0 \quad \text{cuando} \quad \|h\| \to 0$$

Por aquella época sin embargo no estaba clara la noción de Espacios Normados. Frechet llamó a sus espacios "vectoriels abstraits distanciés". Los Espacios de Banach fueron introducidos por Stefan Banach en su disertación de 1920, con un punto de vista de la teoría no lineal, como él escribió posteriormente (1932)

> "Ces espaces [complex vector spaces] constituent le point de départ de la théorie des opérations linéaires complexes ed d'une class, encore plus vaste, des opérations analytiques, qui présentent une géneralisation des fonctions analytiques ordinaires (cf. p. ex. L. Fantappié, I. funzionali analitici, Citta di Castello 1930). Nous nous proposonsd'en exposer la théorie dans un autre volume"

En la segunda aparición de su libro en 1950 bajo el título "Les problèmes concrets d'analyse fonctionelle", Lévy dió una versión más complicada que su definición de 1922:

> Una funcional $f : X \to \mathbb{R}$ definida en un Espacio Métrico Lineal X es Lévy-diferenciable en un punto $x \in X$ si ésta funcional es diferenciable en x en el sentido de Gâteaux-Lévy y satisface la condición de Lipschitz en este punto, esto es, si existe una constante $M > 0$ tal que
>
> $$|f(x_1) - f(x_2)| < M\rho(x_1, x_2)$$
>
> para cualesquier x_1, x_2 en alguna vecindad de x (ρ es la métrica en X).

La diferenciación de Lévy es casiregular pero no es regular y aun para funciones reales de variable real no se reduce a la diferenciación ordinaria. Además la condición de Lipschitz no es invariante bajo cambios de la métrica que inducen la misma topología. El mismo Lévy escribió:

"Esta definición es, sin duda, injustificadamente complicada ... Lo mejor es contiuar con la primera definición de Frechet".

2. Por algún tiempo los Espacios Normados y la derivada de Frechet fueron de satisfacción para todos; pero a mediados de los treinta es cuando los matemáticos llegan a considerar Espacios Vectoriales Topológicos más generales que los Espacios Normados... el problema de generalizar el concepto de derivada otra vez atrajo la atención.

Por aquellos años, justo antes de la Segunda Guerra Mundial y en los primeros años de la guerra un número de artículos sobre esta interrogante aparecieron en Europa y en América. El trabajo Americano tuvo un caracter constructivo y en conección con una generalización de la idea de aproximación lineal debida a Stolz, Pierpont, Young y Frechet. En cambio en Europa se tuvo un caracter descriptivo; se basó en la idea de una caracterización axiomática de la derivada, esencialmente en el requerimiento de que el teorema sobre la diferenciación de funciones compuestas debería mantenerse. Examinemos en primer lugar esta segunda dirección.

En 1923 Hadamard publicó una corta nota: "Le problème de la differentielle said dans l'enseignement". Damos el extracto relevaute de ésta:

"Ya en 1904, en sus lecturas en el Paris Pedagogical Museum, Poincaré dijo que es tiempo de pensar en términos de derivadas y no de diferenciales. Me parece útil afirmar esto en la enseñanza y evitar las complicadas explicaciones que son dadas en conección con las tradiciones clásicas acerca del símbolo d.

$$dy = f'(x)dx \tag{2.6}$$

$$dz = pdx + qdy \tag{2.7}$$

¿qué es lo que significa la ecuación (2.6)?. Significa simplemente que si x (y en consecuencia $y = f(x)$) es una función de una variable arbitraria u, entonces cualquiera que sea la conección entre x y u se puede escribir (probado que la derivada x'_u existe)

$$\frac{dy}{du} = f'(x)\frac{dx}{du}$$

el cual es el teorema de la diferenciación de funciones compuestas ¿qué es lo que significa la ecuación (2.7)?. Significa que si x, y y asi $z = f(x, y)$ son expresadas como funciones de una variable arbitraria independiente u, entonces, cualquiera que sea la expresión se puede escribir

$$\frac{dz}{du} = \frac{dz}{dx}\frac{dx}{du} + \frac{dz}{dy}\frac{dy}{du} = p\frac{dx}{du} + q\frac{dy}{du}$$

estos son los únicos significados de las ecuaciones (2.6) y (2.7)".

Esta idea fue devuelta a la vida primero por Maurice Frechet. Después de 14 años Frechet dió una nueva definición de derivada (para funcionales en el Espacio de funciones de una variable real), he aqui su definición (1937)

"Decimos que una funcional $U[f]$ es diferenciable para $f = f_0$ en el sentido generalizado de Hadamard si existe una funcional $W[df, f_0]$ lineal en df tal que si la función $f(t, \lambda)$ es diferenciable con respecto a λ para $\lambda = 0$ y $f(t, 0) = f_0(t)$, entonces la función $U[f(t, \lambda)]$ de λ es diferenciable en λ para $\lambda = 0$ y para $\lambda = 0$

$$\frac{d}{d\lambda}U[f(t, \lambda)] = W\left[\frac{d}{d\lambda}, f_0\right]$$

o en la notación de variaciones

$$\delta U[f] = W[\delta f, f_0]\text{"}$$

Aqui se debe entender que la función $f(t,\lambda)$ es diferenciable con respecto a λ para cada t fijo y que $\left.\frac{\delta f(t,\lambda)}{\delta\lambda}\right|_{\lambda=0}$ como una función de t pertenece al Espacio de funciones en cuestión.

Frechet mostró que para Espacios de dimensión finita la derivada de Hadamard-Frechet (o derivada en el sentido generalizado de Hadamard) coincide con la derivada de Stolz-Pierpont-Young; y dió un ejemplo (construido anteriormente por Paul Lévy para otros propósitos) para mostrar que en Espacios Normados la diferenciabilidad en el sentido generalizado de Hadamard no implica, en general, diferenciabilidad en el sentido de Frechet. En particular la funcional $x \mapsto \max_{0\leqslant\tau\leqslant 1} |x(\tau)|$ definida en el Espacio $C(0,1)$ es Hadamard-Frechet diferenciable en cada punto $x \in C(0,1)$, toma su valor máximo en un solo punto del intervalo $[0,1]$, pero no es Frechet diferenciable en ningún punto.

Quedaba solo un paso adicional: liberar a la definición de Hadamard-Frechet de su "estructura" funcional. Este paso fue tomado por Michal al año siguiente (1938), quien extendió la noción de diferenciabilidad a Espacios Vectoriales Topológicos arbitrarios en la siguiente definición :

> Una función $f : X \to Y$ entre los Espacios Vectoriales Topológicos X, Y es llamada HM-diferenciable por Michal (llamaremos Hadamard-diferenciable) en un punto $x \in X$ si existe una función lineal y continua $A : X \to Y$ tal que, para cualquier función $\psi : \mathbb{R} \to X$ de la recta real a X que es diferenciable en todo punto de $\mathbb{R}$ con la condición de que $\psi(0) = x$, la composición $f \circ \psi$ es diferenciable en 0 y
>
> $$(f \circ \psi)'(0) = A\left[\psi'(0)\right]$$

Esta generalización difiere de la definición de Hadamard-Frechet por un cambio insignificante: Michal reemplaza la condición de diferenciabilidad de la función $\psi : \mathbb{R} \to X$ en 0 por la condición de diferenciabilidad en todo punto. Él no estudió la pregunta de si la definición modificada, la cual es formalmente más débil, es genuinamente más débil. De echo, las dos definiciones son equivalentes.

El paper de Michal (1938) no recibió atención por un considerable tiempo. Asi en 1942 Ky Fan y en 1949 Balanzat consideraron derivadas de Hadamard solo en Espacios de Frechet. Madame Long de Foglio en 1950 trabajó en la definición de Hadamrd en L-espacios (Espacios Lineales con una definición de convergencia). Solo en 1960 Balanzat introdujo nuevamente esta definición para funciones entre Espacios Vectoriales Topológicos.

3. Ahora consideremos la otra linea de trabajo, la Americana. Fue desarrollado por Michal, Paxon, Hyers, la Salle, Pinney (todos ellos del California Institute of Technology). Como se mostró en la sección 2.1 la definición de derivada, la cual está basada en la idea de aproximación lineal, se reduce a la definición de "pequeñez"; es decir definir para cada par de E.V.T. X, Y el conjunto $\mathcal{R}(X,Y)$ de funciones infinitesimales.

La primera definición de pequeñez de una función entre Espacios Vectoriales Topológicos fue propuesta por Michal y Paxon en 1936. Solo un año después Kolmogorov y Tikhonov introdujo la definición de un Espacio Vectorial Topológico.

> Sea u un sistema fundamental de vecindades del cero en un Espacio Vectorial Topológico X. La función $r : X \to X$ es infinitesimal en el sentido de Michal y Paxon si para cualquier $\epsilon > 0$ existe una vecindad del cero $U_\epsilon \in u$ tal que para

cualquier $h \in U_\epsilon$ existe una vecindad del cero $V_h \in u$ cumpliendo que

$$\epsilon h \in fr(V_h) \quad \text{y} \quad r(h) \in int(V_h)$$

donde fr e int representan la frontera y el interior.

Esta definición es adecuada solo para funciones de un Espacio Vectorial Topológico a si mismo. Ni Michal ni Paxon regresaron a esta definición después. Posiblemente porque la definición de diferenciación que ellos introdujeron no da un operador definido único. Para la unicidad es suficiente requerir que el sistema u tenga la siguiente propiedad: Si U_1 y U_2 son dos vecindades del cero en u, cada uno de ellos absorviendo al otro (*i.e.* tal que $\lambda_1 U_1 \subset U_2$, $\lambda_2 U_2 \subset U_1$, para algunos $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), entonces estas vecindades son homotéticas (*i.e.* $U_1 = \lambda U_2$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$).

Un año después (en el artículo de 1938 ya mencionado) Michal propuso una nueva definición de pequeñez:

> Una función $r : X \to Y$ entre los Espacios Vectoriales Topológicos X, Y es infinitesimal (digamos Michal-38 infinitesimal) si para cualquier $h \in X$ se cumple
>
> $$r(h) = \mu(h, h)$$
>
> donde $\mu : X \times X \to Y$ es una función del producto $X \times X$ a Y que tiene las siguientes propiedades
>
> 1. $\mu(0, h) = 0, \quad \forall h \in X$
> 2. $\mu(h_1, th_2) = t\mu(h_1, h_2)$, para todo $t \in \mathbb{R}$, $h_1, h_2 \in X$
> 3. La función μ es continua en el conjunto $\{0\} \times X$

Michal mostró que para Espacios Normados esta definición es más débil que la de Frechet. En 1940 Michal dió aun otra definición de pequeñez, esta vez para funciones de un Grupo Topológico Conmutativo a otro:

> Una función $r : X \to Y$ entre los Grupos Topológicos Conmutativos X, Y es infinitesimal (digamos Michal-40 infinitesimal) si para cualquier $h \in X$
>
> $$r(h) = \mu(h, h)$$
>
> donde $\mu : X \times X \to Y$ es una función del producto $X \times X$ a Y que tiene las siguientes propiedades
>
> 1. $\mu(0, h) = 0, \quad \forall h \in X$
> 2. $\mu(h_1, nh_2) = n\mu(h_1, h_2)$ para todo entero positivo n y para todos los $h_1, h_2 \in X$
> 3. Existe una vecindad U' del cero en X tal que para cualquier vecindad V del cero en Y existe una vecindad U del cero en X tal que $\mu(h_1, h_2) \in V$ siempre que $h_1 \in U$, $h_2 \in U'$

Para Espacios Normados la Michal-40 diferenciabilidad coincide con la diferenciabilidad de Frechet.

En 1941, en las lecturas de la Universidad de Stanford, Michal dió una formulación equivalente de la definición de pequeñez (de acuerdo a Michal-40) para Grupos Topológicos Conmutativos en términos de la misma función r

Una función $r : X \to Y$ entre los Grupos Topológicos Conmutativos X, Y es infinitesimal si existe una vecindad U' del cero en X tal que para cualquier vecindad del cero V en Y existe una vecindad U del cero en X tal que para cualquier número natural n se cumple la implicación

$$h \in U \quad \wedge nh \in U' \Rightarrow nr(h) \in V$$

Esta formulación equivalente fue publicada por Michal solo en 1947. Frechet, en 1948, llegó independientemente a esta reformulación de pequeñez de acuerdo a Michal-40.

Por el mismo año de 1941 una nueva definición de pequeñez para Espacios Vectoriales Topológicos Localmente Convexos fue propuesta por Hyres, quien fue el co-autor con Michal de un número de artículos dedicados a la construcción de una geometría diferencial infinita-dimensional sin coordenadas. La definición que dió es la siguiente:

Una función $r : X \to Y$ entre los E.V.T. Localmente Convexos X, Y es llamada infinitesimal (diremos Hyres infinitesimal) si para cualquier seminorma q en Y existe una seminorma p en X tal que para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se cumple la implicación

$$p(h) < \delta \Rightarrow q\big[r(h)\big] < \epsilon p(h)$$

Para Espacios Normados la derivada de Hyres es la misma que la derivada de Frechet. En su artículo de 1945, Hyres indica la relación entre sus definiciones y la de Michal. La Michal-38 diferenciabilidad es más débil que la Hyres diferenciabilidad; esta, a su vez, es más débil que la Michal-40 diferenciabilidad.

Por el mismo año, 1941, La Salle en su disertación introdujo un concepto de pequeñez para funciones de grupos con operadores que son elementos de un anillo normado. Él uso pseudonormas generalizadas.

En 1957 Fischer llevó la definición de Hyres a Grupos Topológicos (no necesariamente conmutativos) y en 1965 Reid hizo lo mismo para el caso particular de Grupos Conmutativos Localmente Convexos. También en 1957 una nueva definición de pequeñez para funciones entre Espacios Localmente Convexos fue propuesta por Marinescu en Rumania:

Una función $r : X \to Y$ entre los E.V.T. Localmente Convexos X, Y es llamada infinitesimal si para cualquier seminorma q en Y existe una seminorma p en X tal que

$$\frac{q[r(h)]}{p(h)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad h \to 0$$

Independiente y simultaneamente una definición equivalente fue dada por Sebastião e Silva en 1957; siete años después, en 1964, la misma definición fue dada nuevamente por Keller. En su mismo artículo Keller introdujo dos definiciones adicionales de pequeñez para funciones entre Espacios Localmente Convexos (todas esta definiciones fueron obtenidas por él de un esquema simple, comenzando de la definición de Hyres):

Una función $r : X \to Y$ entre los E.V.T. Localmente Convexos X, Y es infinitesimal si existe una seminorma p en X tal que para cualquier seminorma q en Y se cumple

$$q\big[r(h)\big] = \omega(h)p(h)$$

donde $\omega(h) \to 0$ cuando $p(h) \to 0$ (en una segunda definición cuando $h \to 0$)

La primera definición coincide con la definición Michal-40 (Keller solo demostró que esta diferenciabilidad es más fuerte que la de Michal-40). La segunda definición es nueva.

En 1962 Serge Lang en su libro "Introduction to differentiable manifolds" publicó la siguiente definición de diferenciabilidad.

> Una función $r : X \to Y$ entre los Espacios Vectoriales Topológicos X, Y es infinitesimal si para cualquier vecindad V del cero en Y existe una vecindad U del cero en X tal que
> $$r(tU) \subset o(t)V$$
> donde, como es usual, $o(t)$ significa que la función $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$

Para Espacios Localmente Convexos esta definición coincide con la de Hyres.

También en 1962 A. Bastiani (de la Universidad de Paris) en su disertación "Différentiabilité dans les espaces localement convexes Distructures" dió tres definiciones adicionales de la derivada. Dos de estas repiten las definiciones de Hyres y Marinescu casi literalmente; la tercera tiene una nueva forma

> Una función $r : X \to Y$ entre los Espacios Vectoriales Topológicos X, Y es infinitesimal si la función $(t, h) \in \mathbb{R} \times X \mapsto \frac{r(th)}{t} \in Y$ es continua en el conjunto $\{0\} \times X$ (se asume que $(0, h) \mapsto h$)

No es de sorprender que esta definición sea equivalente a la de Michal-38. Cabe mencionar que Bastiani menciona solo a Balanzat entre sus predecesores. El trabajo de los restantes autores parece haber sido desconocido por él.

4. En 1955 J. Gil de Lamadrid (de la Universidad de Michigan) en su disertación propuso una nueva aproximación de la definición de derivada, una aproximación por la cual un espectro completo de diferenciabilidad era definida en una sola definición, con la topología en el Espacio de Funciones de un Espacio Vectorial Topológico a otro sirviendo como un "parámetro".

Sea $\mathcal{F}(X, Y)$ el Espacio de todas las funciones de un Espacio Vectorial Topológico X a otro Y, y sea τ cualquier topología en $\mathcal{F}(X, Y)$ (no necesariamente lineal). Para la función $f : X \to Y$, un punto $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$ y $h \in X$ pongamos

$$f_t(h) = \frac{f(x + th) - f(x)}{t}$$

Notemos que para cada t, $f_t \in \mathcal{F}(X, Y)$ *i.e.* es una función de X a Y.

> La función f es llamada τ-diferenciable en x en el sentido de Lamadrid si existe una función (no necesariamente lineal) $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ tal que $f_t \to A$ cuando $t \to 0$ en la topología τ

Por ejemplo una función no lineal $f : X \to Y$ homogenea de primer grado es τ-diferenciable en 0 para cualquier topología τ en F, y su derivada es la misma función f que no es una función lineal de X a Y.

Aun en el caso de funciones de $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ la diferenciabilidad de Lamadrid no coincide, en general, con la diferenciabilidad ordinaria, como lo muestran los siguientes ejemplos:

Ejemplo 2 Sea f la función característica del intervalo $< 1,2 >$. La función f es diferenciable en 0 en el sentido ordinario, sin embargo no es τ-diferenciable en el sentido de Lamadrid en 0 cuando τ es la más fuerte topología en $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ para la cual la función canónica de $L(<-\infty,\infty>) \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es continua.

Ejemplo 3 Sea L'_2 el Espacio de todas las funciones de cuadrado localmente integrable real valuadas en $\mathbb{R}$, con la topología τ' definida por un sistema fundamental de vecindades del cero cada una de las cuales está definida como el subconjunto de todas las funciones f de L'_2 tal que

$$\int_{-a}^{a} f^2(t)dt < \epsilon$$

donde a y ϵ son números positivos. Sea τ la topología más fuerte en $F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ para la cual la inclusión canónica $L'_2 \to F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ es continua. Si f es la función característica del conjunto $S = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}, \frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right]$, entonces f es τ-diferenciable en 0 en el sentido de Lamadrid, pero no es diferenciable en 0 en el sentido ordinario.

de Lamadrid no investiga la relación entre su definición y las otras existentes. En 1959 él mencionó en un artículo que el problema de la relación entre su definición y la de Hyres permanecia abierto.

En 1956-1957 los matemáticos portugueses José Sebastião e Silva, desarrollando una idea de Campos Ferreira, construyeron una teoría de cantidades infinitesimales de diferentes ordenes y una teoría de diferenciación en conección con ella. Aparte de las defenciones ya mencionadas, las cuales coinciden con aquella propuesta por Marinescu, Sebastião e Silva introdujeron dos espectros de diferenciabilidad caracterizados por la elección de un sistema de subconjuntos acotados en X, digmos β. El primero lo definian asi:

> Decimos que una función $r : X \to Y$ es β-infinitesimal de acuerdo a Sebastião e Silva (en sentido angosto) si para cualquier conjunto $B \in \beta$, existe un conjunto acotado C en Y y un $\delta > 0$ tal que para cualesquier $|t| < \delta$, $h \in B$
>
> $$r(th) \in t\omega(t)C$$
>
> donde ω es una función real de variable real que cumple $\omega(t) \to 0$ cuando $t \to 0$.

y el segundo de la siguiente manera

> Una función $r : X \to Y$ es llamada β-infinitesimal de acuerdo a Sebastião e Silva (en sentido amplio) si para cualquier $B \in \beta$
>
> $$\frac{r(t,h)}{t} \to 0 \quad \text{cuando} \quad t \to 0$$
>
> uniformemente para los $h \in B$

Existe una dualidad entre las β_b-infinitesimalidad en el sentido angosto y la infinitesimalidad de Hyres (aqui estamos denotando como β_b al sistema de todos los subconjuntos acotados de X), correspondiente a la dualidad entre conjuntos acotados y conjuntos abiertos en un Espacio Vectorial Topológico.

En 1961 Sebastião e Silva llevó esta idea de dualidad a su conclusión lógica de considerar β-derivadas en el sentido angosto no solo en Espacios Vectoriales Topológicos sino también a Espacios con un concepto de acotación.

Notemos que la β-diferenciabilidad en el sentido angosto entre E.V.T. es algo patológica aún para el caso de funciones definidas en la recta real a E.V.T. metrizables, para las cuales no coincide con la diferenciabilidad ordinaria.

Asi, Sebastião e Silva, como de De Lamadrid, introdujeron un espectro completo (en realidad dos espectros) de diferenciabilidad. La relación entre estos espectros es clara; la Sebastião e Silva β-diferenciabilidad (en el sentido amplio) es la misma que la de Lamadrid τ-diferenciabilidad si τ es la topología de convergencia uniforme en conjuntos del sistema β (vea Teorema 2.3 más adelante). Asi, las definiciones de de Lamadrid y Sebastião e Silva se cruzan en la más importante clase de topologías del Espacio de funciones de X a Y -la clase de topologías (eventualmente vectoriales) de convergencia uniforme en algún sistema de conjuntos acotados-

En 1958 Vainberg y Engel'son introdujeron, de hecho, otro espectro de derivadas.

> Una función $f : X \to Y$ entre los E.V.T X, Y es llamada τ-diferenciable en el sentido de Vainberg-Engel'son en $x_0 \in X$ si para alguna vecindad U de x_0 la función f es Gâteaux-Lévy diferenciable y si ésta derivada es continua en x_0 como una función de X al Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ de funciones lineales y continuas de X a Y, topologizada con la topología τ.

Asi la forma de diferenciabilidad esta definida por la elección de una topología en el Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$.

La definición de Vainberg y Engel'son es una generalización de la primera definición de diferenciabilidad de una función de varias variables (aquella que se dió por medio de la existencia y continuidad de las derivadas parciales).

En 1964 Miroslav Sova (de Yugoslavia) independientemente llegó a la definición de β-diferenciabilidad de Sebastião e Silva. Ciertamente para poder deducir continuidad de la diferenciabilidad, como dijo Lévy, él introdujo una condición de Lipschitz en su definición; ya hemos mencionado los defectos de esta aproximación. El principal mérito de Sova es que desde el primer momento dirigió su atención a la importancia de la $\mathcal{H}$-diferenciabilidad (o diferenciabilidad respecto del sistema de todos los subconjuntos secuencialmente compactos). Sova mostró en 1966 que aún para Espacios Normados existen funciones reales que son $\mathcal{H}$-diferenciables en todo punto pero que sin embargo no son Frechet diferenciables.

Hasta el trabajo de Sova solo se discutía, esencialmente, la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad (diferenciabilidad respecto del sistema de todos los subconjuntos acotados); finalmente Sova observó el hecho remarcable de que la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad es equivalente a la Hadamard diferenciabilidad.

2.3. Relaciones entre varias definiciones de derivada

Primero presentamos una lista de unas 23 definiciones de derivadas, todas ellas en base a la definición de pequeñez (de acuerdo al punto de vista americano) como se desarrolló en la sección 2.1 y luego las relacionamos unas con otras. El caos aparente que se presenta cuando se tienen estas definiciones se va a reducir a unas cuantas definiciones.

2.3.1. Lista de definiciones

La siguiente tabla da una lista de todas las definciones de derivadas mencionadas en la sección 2.2. En algunos casos las definiciones dadas originalmente por los autores consideraban Espacios de Funciones reales o el campo de los números reales $\mathbb{R}$, las siguientes definiciones consideran funciones definidas en general en E.V.T.

E.V.T.	Espacio Vectorial Topológico.
E.L.C.	Espacio Vectorial Topológico Localmente Convexo.
E.N.	Espacio Normado.
$\mathcal{F}(X,Y)$	Espacio de todas las funciones de X a Y
$\mathcal{L}(X,Y)$	Espacio de todas las funciones Lineales y continuas de X a Y
$\mathcal{B}(X,Y)$	Espacio de todas las funciones Lineales y Acotadas de X a Y
$\mathcal{H}(X,Y)$	Espacio de todas las funciones homogeneas de primer grado de X a Y
$\mathcal{B}_X$	Base Local (del cero) en el Espacio Vectorial Topológico X
$\mathcal{U}_X$	Familia de todas las vecindades del cero en X
$\mathcal{U}_Y$	Familia de todas las vecindades del cero en Y
$\mathcal{SC}(X)$	Familia de todas las Seminormas Continuas en el E.V.T. Localmente Convexo X
$\mathcal{SC}(Y)$	Familia de todas las Seminormas Continuas en el E.V.T. Localmente Convexo Y
β	Una familia de subconjuntos acotados de X

Cuadro 2.1: Tabla de definiciones

Nro.	Autor y año	X	Y	$\mathcal{A}(X,Y)$
1	Stolz(1893), Pierpont(1905) y Young(1910)	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$r(h) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i(h) \cdot h$ donde $\epsilon_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim_{h \to 0} \epsilon_i(h) = 0$			
2	Frechet(1911): Stolz-Pierpont-Young-Frechet diferenciabilidad	$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \cdots + h_n^2}} = 0$ y $r(0) = 0$			
3	Gâteaux(1913): Gâteaux diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{H}(X,Y)$
	$\forall h \in X, \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$			
4	Lévy(1923) : Gâteaux-Lévy diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall h \in X, \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$			
5	Frechet(1925): Frechet diferenciabilidad	E.N	E.N	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\lim_{h \to 0} \frac{\Vert r(h) \Vert}{\Vert h \Vert} = 0$			
6 **	Michal y Paxon(1936)	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,X)$
	$\forall \epsilon > 0, \ \exists U \in \mathcal{B}_X \mid \forall h \in U, \exists V \in \mathcal{B}_X : \left(\epsilon h \notin V, \quad r(h) \in V\right)$			
7	Frechet(1937): Hadamard diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\left(\psi : \mathbb{R} \to X, \text{ con } \psi(0) = 0 \text{ tal que } \exists \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{\psi(t)}{t}\right) \Rightarrow \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$			
8	Michal(1938): Michal-38 diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$r(h) = \mu(h,h)$ donde $\mu : X \times X \to Y$ es tal que 1. $\mu(0,h) = 0, \quad \forall h \in X$ 2. $\mu(h_1, th_2) = t\mu(h_1,h_2), \quad \forall t \in \mathbb{R}, h_1, h_2 \in X$ 3. μ es continua en $\{0\} \times X$			
9	Michal(1938): Diferenciabilidad modificada de Hadamard	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\left(\psi : \mathbb{R} \to X \text{ tal que } \exists \lim_{\substack{t \to \tau \\ t \neq \tau}} \frac{\psi(t) - \psi(\tau)}{t - \tau}, \forall \tau\right) \Rightarrow \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$			
10	Michal(1940): Michal-40 diferenciabilidad	G.T.C.	G.T.C.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$r(h) = \mu(h,h)$ donde $\mu : X \times X \to Y$ es tal que 1. $\mu(0,h) = 0, \quad \forall h \in X$ 2. $\mu(h_1, nh_2) = n\mu(h_1,h_2), \quad \forall t \in \mathbb{N}, h_1, h_2 \in X$ 3. $\exists U' \in \mathcal{U}_X \mid \forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U \in \mathcal{U}_X : \left(h_1 \in U, h_2 \in U'\right) \Rightarrow \mu(h_1,h_2) \in V$			
11	Michal(1941), Frechet(1948): Michal-41 diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\exists U \in \mathcal{U}_X \mid \forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U' \in \mathcal{U}_X : \left(h \in U \wedge th \in U'\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$			

Nro.	Autor y año	X	Y	$\mathcal{A}(X,Y)$
12	Hyres(1941):Hyres-diferenciabilidad	E.L.C	E.L.C	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall q \in SC(Y),\ \exists p \in SC(X) \Big/ \lim\limits_{p(h)\to 0} \dfrac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$			
13 $\star$	Lévy(1951)	E.N.	$\mathbb{R}$	$\mathcal{L}(X,Y)$
	r Es Lipschitziana en alguna vecindad del cero y $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(th)}{t} = 0;\ \forall h \in X$			
14 $\star\star$	de Lamadrid(1955)	E.V.T	E.V.T.	$\mathcal{F}(X,Y)$
	$\lim\limits_{t\to 0} R(t) = 0$ en alguna topología τ de $\mathcal{F}(X,Y)$ donde $R : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(X,Y)$ se define como: $R(t)(h) = \begin{cases} \frac{r(th)}{t} & \text{cuando } t \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } t = 0 \end{cases}$			
15	Sebastião e Silva(1956): Sebastião e Silva Diferenciabilidad angosta	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{B}(X,Y)$
	$\forall B \in \beta,\ \exists C \subset Y$ acotado $/\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \left(h \in B,\ 0 < \lvert t\rvert < \delta\right) \Rightarrow \dfrac{r(th)}{t} \in \epsilon C$			
16	Sebastião e Silva(1956):β-diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{B}(X,Y)$
	$\forall B \in \beta,\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(th)}{t} = 0$, uniformemente respecto de $h \in B$			
17	Sebastião e Silva(1957): Sebastião e Silva-57 diferenciabilidad	E.L.C.	E.L.C.	
	$\forall q \in SC(Y),\ \exists p \in SC(X) : q[r(h)] = \omega(h)p(h)$ donde $\omega : X \to \mathbb{R}$ es tal que $\lim\limits_{p(h)\to 0} \omega(h) = 0$			
18	Marinescu(1957):Marinescu diferenciabilidad	E.L.C.	E.L.C.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall q \in SC(Y),\ \exists p \in SC(X) / \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$			
19 $\star$	Vainberg y Engel'son(1958)	E.V.T	E.V.T	$\mathcal{L}(X,Y)$
	La función $\phi : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ definida en alguna vecindad $U \subset X$ del cero por $\phi(x)(h) = \lim\limits_{\substack{t\to 0 \\ t\neq 0}} \dfrac{r(x+th) - r(x)}{t},\quad \forall h \in X,\ \forall x \in U$ es continua en $x_0 = 0$ en alguna topología τ de $\mathcal{L}(X,Y)$			
20	Bastiani(1962):Bastiani-diferenciabilidad	E.V.T	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \forall h_0 \in X,\ \exists U \in \mathcal{U}_X, \exists \delta > 0 : \left(h \in h_0 + U,\ 0 < \lvert t\rvert < \delta\right) \Rightarrow \dfrac{r(th)}{t} \in V$			
21	Lang(1962)	E.V.T	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \exists U \in \mathcal{U}_X : r(tU) \subset o(t)V$ donde $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es tal que $o(0) = 0$ y $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{o(t)}{t} = 0$			
22	Keller(1964): Keller I diferenciabilidad	E.L.C.	E.L.C.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\exists p \in SC(X) / \forall q \in SC(Y),\ \lim\limits_{p(h)\to 0} \dfrac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$			
23	Keller(1964): Keller II diferenciabilidad	E.L.C.	E.L.C.	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\exists p \in SC(X) :\ \forall q \in SC(Y),\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$			

Las definiciones marcadas con una estrella ($\star$) son casi-regulares pero no regulares, y los marcados con dos estrellas ($\star\star$) no son en general casi-regulares. Los siguientes ejemplos muestran estos casos particulares

La definición de de Lamadrid (definición[14]) incluye el siguiente caso particular. Para X, Y dos E.V.T. sea la familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ de subconjuntos de X que verifica (1.6), de modo que se le puede asociar al Espacio $\mathcal{F}(X, Y)$ la Topología de Convergencia Uniforme sobre subconjuntos de σ (o $\sigma-$topología) τ_σ. La diferenciabilidad de de Lamadrid con esta $\sigma-$topología es llamada diferenciabilidad con respecto al sistema σ o simplemente **$\sigma-$diferenciabilidad.** Damos entonces la siguiente definición

Cuadro 2.2:

nombre	X	Y	$\mathcal{A}(X,Y)$
$\sigma-$diferenciabilidad	E.V.T.	E.V.T.	$\mathcal{L}(X,Y)$
$\forall S \in \sigma,\ \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(th)}{t} = 0,$ uniformemente respecto de $h \in S$			

Los casos más importantes de $\sigma-$diferenciabilidad son aquellos en los que σ es

$\mathcal{G} = \{A \subset X / A$ es finito $\}$.

$\mathcal{H} = \{A \subset X / A$ es secuencialmente compacto $\}$.

$\mathcal{C} = \{A \subset X / A$ es compacto$\}$.

$\mathcal{F} = \{A \subset X / A$ es acotado$\}$.

$\{X\}$: El sistema cuyo único miembro es el mismo espacio X.

Todos estos sistemas satisfacen la condición (1.6).

Debemos remarcar aqui que la $\mathcal{H}$ -diferenciabilidad es particularmente conveniente porque casi todos los teoremas que son válidos para derivadas más fuertes también lo son para la $\mathcal{H}$ -derivada. Asi la $\mathcal{H}$ -diferenciabilidad ocupa un lugar especial entre los métodos de diferenciación casi-regulares. Los siguientes lemas ayudarán a demostrar el teorema que describe esta particularidad

Lema 2.1 *Para cada método casi-regular de diferenciación existe un método regular más débil, es decir*

$$\forall \mathcal{R} \text{ método casi-regular}, \exists \mathcal{R}' \text{ metodo regular } / \mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$$

Demostración. Definamos el conjunto $\mathcal{R}'(\mathbb{R}, X) = \{r\colon \mathbb{R} \to X / r(0) = 0 \wedge \lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = 0\}$ y también

$$\mathcal{R}_1(X,Y) = \{r : X \to Y / r = q \circ p \text{ donde } p \in \mathcal{R}(X,\mathbb{R}), q \in \mathcal{R}'(\mathbb{R}, Y)\}$$
$$\mathcal{R}'_1(X,Y) = \mathcal{R}(X,Y) + \mathcal{R}_1(X,Y)$$
$$\mathcal{R}_2(X,Y) = \{r : X \to Y / r = q \circ p \text{ donde } p \in \mathcal{R}(X,Z), q \in \mathcal{R}'_1(Z,Y)\}$$
$$\mathcal{R}'_2(X,Y) = \mathcal{R}(X,Y) + \mathcal{R}_2(X,Y)$$
$$\cdots\ \cdots$$
$$\mathcal{R}_n(X,Y) = \{r : X \to Y / r = q \circ p \text{ donde } p \in \mathcal{R}(X,Z), q \in \mathcal{R}'_{n-1}(Z,Y)\}$$
$$\mathcal{R}'_n(X,Y) = \mathcal{R}(X,Y) + \mathcal{R}_n(X,Y)$$

se cumple que

$$\mathcal{R}(X,Y) \subset \mathcal{R}'_1(X,Y) \subset \mathcal{R}'_2(X,Y) \subset \cdots \subset \mathcal{R}'_n(X,Y) \subset \cdots$$

si definimos

$$\mathcal{R}'(X,Y) = \bigcup_{n=1}^{n} \mathcal{R}'_n(X,Y)$$

entonces $\mathcal{R}'$ es el método de diferenciación regular requerido. □

Lema 2.2 *La $\mathcal{H}$-diferenciabilidad es más débil que cualquier método regular, es decir*

$$\forall \mathcal{R} \text{ método regular, } \left(\mathcal{R}\text{-diferenciabilidad} \Rightarrow \mathcal{H}\text{-diferenciabilidad}\right)$$

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ cualquier método regular de diferenciación y $f : X \to Y$ una función $\mathcal{R}$-diferenciable en $x \in X$, existen entonces $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r \in \mathcal{R}(X,Y)$ tales que

$$f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X$$

para probar que f es $\mathcal{H}$-diferenciable en x será suficiente mostrar que es Hadamard diferenciable en x (vea Teorema 2.6 más adelante), para ello debemos verificar que r es $\mathcal{H}$-infinitesimal; sea entonces la función $\psi : \mathbb{R} \to X$ con $\psi(0) = 0$ y tal que $\exists \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = x_0 \in X$, debemos mostrar que $\lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$. Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \to X$ por $\phi(t) = \psi(t) - tx_0$ entonces $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)}{t} = 0$ y $\phi(0) = 0$ y siendo $\mathcal{R}$ un método regular resulta que $\phi \in \mathcal{R}(X,Y)$. Si definimos la función lineal y continua $T : \mathbb{R} \to X$ por $T(t) = tx_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$ entonces por la Proposición 2.1,(3) tenemos que

$$r \circ (\phi + T) = r \circ \psi \in \mathcal{R}(\mathbb{R}, Y)$$

y por tanto $\lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$ como queríamos mostrar. □

Teorema 2.1 (El método casi-regular más débil) *La $\mathcal{H}$-diferenciabilidad es el método casi-regular de diferenciación más débil, es decir*

$$\forall \mathcal{R} \text{ método casi-regular, } \left(\mathcal{R}\text{-diferenciabilidad} \Rightarrow \mathcal{H}\text{-diferenciabilidad}\right)$$

Demostración. Inmediata de los dos lemas anteriores. □

Si bién es cierto que la $\mathcal{H}$-diferenciabilidad es el método casiregular más débil, el método de diferenciación casi-regular más fuerte es la $\{X\}$-diferenciabilidad como lo muestra el siguiente teorema

Teorema 2.2 (El método Casi-regular más fuerte) *La $\{X\}$ - diferenciabilidad es el método casi-regular más fuerte, para funciones definidas de un E.V.T. cualquiera a un E.V.T. de Hausdorff*

Demostración. Sea $\mathcal{R}$ un método casi-regular y $f : X \to Y$ una función $\{X\}$−diferenciable en $x \in X$ donde Y es de Hausdorff, entonces existen $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r : X \to Y$ tales que

1. $f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X$

2. $\forall V \subset Y$, vecindad del cero en $Y, \exists \delta > 0 : \left(h \in X \ \wedge \ 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(t)}{t} \in V\right)$ (2.8)

mostremos que $r \equiv 0$ (esto implica que f es $\mathcal{R}$- diferenciable en x), supongamos por contradicción que $r(h_0) \neq 0$, para algún $h_0 \in X$. Como Y es de Hausdorff podemos hallar una vecindad equilibrada del cero en $V_0 \subset Y$ tal que

$$r(h_0) \notin V_0 \tag{2.9}$$

y para tal vecindad $V_0 \subset Y$ existe un $\delta_0 > 0$ que verifica (2.8), escojamos $\delta = \text{mín}\{\delta_0, 1\}$ entonces cuando $0 < |t| < \delta$ y $h = \frac{h_0}{t}$ tendremos que

$$\frac{r(h_0)}{t} = \frac{r(t\frac{h_0}{t})}{t} \in V_0 \equiv r(h_0) \in tV_0 \subset \delta V_0 \subset V_0$$

lo que es una contradicción con (2.9) □

OBSERVACIÓN
En el teorema anterior se demostró que cualquier función infinitesimal es identicamente nula, cuando Y es de Hausdorff; esto implica que solo las funciones lineales y continuas son $\{X\}$−diferenciables. Es decir, si $f : X \to Y$ es lineal entonces se verifica

$$f \text{ es } \{X\} - \text{diferenciable en } x \in X \Leftrightarrow f \text{ es continua en } x$$

Teorema 2.3 (β−diferenciabilidad como caso particular) *Sean X, Y dos E.V.T. y $\beta \subset \mathcal{P}(X,Y)$ una familia de subconjuntos acotados de X que verifica* (1.6)*, entonces la β−diferenciabilidad (definición [16]) es un caso particular de la diferenciabilidad de de Lamadrid (definición [14]) considerando*

1. *La Topología de Convergencia Uniforme en subconjuntos de β.*
2. *$\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{B}(X,Y)$ el Espacio de todas las funciones Lineales y Acotadas de X a Y.*

Demostración. Inmediata de las definiciones. □

2.3.2. Equivalencia de definiciones

Teorema 2.4 (Bastiani y Michal 38 diferenciabilidad) *Cuando X es de Hausdorff, la Bastiani-diferenciabilidad (definición [20]) es equivalente a la Michal 38-diferenciabilidad (definición [8])*

Demostración. (definición [20] $\Rightarrow$ definición [8]). Sea $r : X \to Y$ función Bastiani infinitesimal, debemos hallar una función $\mu : X \times X \to Y$ que verifican las tres condiciones de la definición [8] y tal que $r(h) = \mu(h,h)$, $\forall h \in X$. Definamos la función $\mu : X \times X \to Y$ por

$$\mu(h_1, h_2) = \begin{cases} \dfrac{r(th_2)}{t}, & \text{cuando } h_1 \neq 0 \wedge h_1 = th_2 \text{ para algún } t \in \mathbb{R} - \{0\} \\ 0 & \text{cuando } h_1 = 0 \vee \forall t \in \mathbb{R} - \{0\},\ h_1 \neq th_2 \end{cases}$$

De esta definición sigue inmediatamente que para cualquier $h \in X$ se cumple $\mu(h,h) = r(h)$ y $\mu(0,h) = 0$ cumpliendose (1). Además para cualesquier $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ y $h_1, h_2 \in X$ tenemos varias posibilidades: 1ro. Cuando $h_1 \neq 0$ y $h_1 = \lambda t h_2$ para algún $\lambda \neq 0$, en este caso $\mu(h_1, th_2) = \frac{r(\lambda t h_2)}{\lambda}$ y $\mu(h_1, h_2) = \frac{r(\lambda t h_2)}{\lambda t}$ demostrando que $\mu(h_1, th_2) = t\mu(h_1, h_2)$. 2do. Cuando $h_1 = 0$ trivialmente resulta que $\mu(h_1, th_2) = 0 = t\mu(h_1, h_2)$. 3ro. Cuando $h_1 \neq \lambda t h_2$, $\forall \lambda \neq 0$, en este caso tenemos $\mu(h_1, th_2) = 0$ y además como para cualquier $s \neq 0$ resulta que $\frac{s}{t} \neq 0$ entonces $h_1 \neq (\frac{s}{t})th_2 = sh_2$ y asi $\mu(h_1, h_2) = 0$. En cualquier caso se llega a verificar (2). Probemos ahora la continuidad de la función μ en un punto arbitrario $(0, h_0) \in \{0\} \times X$, sea para ello $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero en Y, y denotemos por V^s la vecindad equilibrada del cero tal que $V^s \subset V$, debemos hallar dos vecindades $U_1 \subset X$ y $U_2 \subset X$ del cero y h_0 respectivamente tales que

$$h_1 \in U_1 \wedge h_2 \in U_2 \Rightarrow \mu(h_1, h_2) \in V$$

Por la definición [20] existen $U_0 \subset X$ vecindad de h_0 en X y $\delta > 0$ que podemos asumir $\delta < 1$ tal que

$$h \in U_0 \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V^s \tag{2.10}$$

consideremos separadamente dos casos:

1ro. Cuando $h_0 = 0$, pongamos $U_1 = \delta U_0$ y $U_2 = U_0$ y sean $h_1 \in U_1, h_2 \in U_2$. Si h_1 y h_2 son ambas diferentes de cero y $h_1 = \lambda h_2$ entonces $h_1 = t_1 h$ y $h_2 = t_2 h$ para algún $h \in U_0$ con $|t_1| < \delta$ y $|t_2| < 1$, asi tenemos

$$\mu(h_1, h_2) = \mu(t_1 h, t_2 h) = t_2 \mu(t_1, h) = t_2 \frac{r(t_1 h)}{t_1} \in t_2 V^s \subset V^s \subset V$$

en los restantes casos se tiene que $\mu(h_1, h_2) = 0 \in V$

2do. Cuando $h_0 \neq 0$, desde que X es de Hausdorff podemos hallar dos abiertos U' y U'' del cero y h_0 respectivamente tales que $U' \cap U'' = \emptyset$. Sin perder generalidad podemos asumir que $U_0 = U''$ y definamos $U_1 = \delta U_0$ y $U_2 = U_0$. Si $h_1 \in U_1$ y $h_2 \in U_2$ con $h_1 = th_2 \neq 0$ entonces $h_1 \in (tU_0) \cap \delta U'$ y desde que los conjuntos U_0 y U' son disjuntos, esto último es posible solo cuando $|t| < \delta$ y de aqui podemos escribir

$$\mu(h_1, h_2) = \mu(th, h) = \frac{r(th)}{t} \in V$$

es claro que en los restantes casos $\mu(h_1, h_2) = 0 \in V$. demostrando asi el teorema □

(definición [8] $\Rightarrow$ definición [20]) Sea $r : X \to Y$ función Michal 38 infinitesimal, luego existe una función $\mu : X \times X \to Y$ tal que $r(h) = \mu(h,h), \forall h \in X$ y que verifica las tres condiciones de la definición [8]. Mostremos que esta función r es también Bastiani infinitesimal, para ello sean $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $h_0 \in X$ cualquiera, debemos hallar $U_0 \subset X$ vecindad de h_0 en X y $\delta > 0$ tal que

$$h \in U_0 \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

Como μ es continua en $(0, h_0)$ con $\mu(0, h_0) = 0$ entonces existen vecindades $U_1 \subset X$ del cero y $U_2 \subset X$ de h_0 tal que

$$h_1 \in U_1 \wedge h_2 \in U_2 \Rightarrow \mu(h_1, h_2) \in V$$

La continuidad de la multiplicación por escalares en el punto $(0, h_0) \in \mathbb{R} \times X$ permite hallar una vecindad $U_0 \subset U_2$ de h_0 y un $\delta > 0$ tal que $tU_0 \subset U_1$ siempre que $|t| < \delta$. Asi cuando $0 < |t| < \delta$ y $h \in U_0$ tenemos que $th \in U_1$ y por tanto

$$\frac{r(th)}{t} = \frac{\mu(th, th)}{t} = \mu(th, h) \in V$$

como se quería demostrar. □

Teorema 2.5 (Gâteaux-Lévy y $\mathcal{G}$-diferenciabilidad) *La Gâteaux-Lévy diferenciabilidad (definición [4]) es equivalente a la $\mathcal{G}$-diferenciabilidad*

Demostración. (definición [4] $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$-diferenciabilidad). Sea $r : X \to Y$ una función Gâteaux-Lévy infinitesimal, entonces para cualquier $h \in X$ se cumple que $\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$. Mostremos que la función r también es $\mathcal{G}$ infinitesimal, para ello sean $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $S = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\} \in \mathcal{G}$, el límite anterior permite hallar para cada i un $\delta_i > 0$ tal que se cumple

$$0 < |t| < \delta_i \Rightarrow \frac{r(th_i)}{t} \in V$$

Si consideramos $\delta = \min_{1\leqslant i \leqslant m}\{\delta_i\}$ entonces para cualquier $t \in \mathbb{R}$ con $0 < |t| < \delta$ se cumple que $\frac{r(th)}{t} \in V$, demostrando que r es $\mathcal{G}$ infinitesimal.

($\mathcal{G}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ definición [4]) Sea $r : X \to Y$ función $\mathcal{G}$ infinitesimal, y $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $h \in X$ arbitrarios, entonces para el conjunto finito $S = \{h\}$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta$ implica $\frac{r(th)}{t} \in V$ demostrando esto que $\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$. □

Teorema 2.6 (Hadamard y $\mathcal{H}$ diferenciabilidad) *La Hadamard diferenciabilidad (definición [7]) es equivalente a la $\mathcal{H}$-diferenciabilidad*

Demostración. (definición [7] $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$-diferenciabilidad) Sea $r : X \to Y$ función Hadamard infinitesimal. Por contradicción supongamos que r no es $\mathcal{H}$ infinitesimal, es decir que existen $V_0 \subset Y$ vecindad del cero en Y y $K \in \mathcal{H}$ (*i.e* K es secuencialmente compacto) tales que

$$\forall \delta > 0,\ \exists h \in K,\ \exists t : 0 < |t| < \delta : \frac{r(th)}{t} \notin V_0$$

Asi podemos hallar sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y como $K \subset X$ es secuencialmente compacto podemos asumir que $h_n \to h$ y también que los términos de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son todos distintos, cumpliendose

$$\frac{r(t_n h_n)}{t_n} \notin V_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.11}$$

Definamos ahora la función $\psi : \mathbb{R} \to X$ por

$$\psi(t) = \begin{cases} t_n h_n & \text{cuando } t = t_n,\ n = 1, 2, \ldots \\ th & \text{en otro caso} \end{cases}$$

claramente $\psi(0) = 0$, mostremos que $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = h$, sea para ello $U_0 \subset X$ cualquier vecindad del cero en X, como $h_n \to h$ podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $h_n - h \in U_0$, $\forall n \geqslant n_0$. Pongamos $\delta_0 = \min\{|t_1|, |t_2|, \cdots, |t_{n_0}|\}$, entonces cuando $0 < |t| < \delta_0$ tenemos dos posibilidades: 1ro. $t \neq t_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\frac{\psi(t)}{t} = h$ de donde $\frac{\psi(t)}{t} - h = 0 \in U_0$. 2do. $t = t_{n_1}$ para algún $n_1 \in \mathbb{N}$ entonces $n_1 > n_0$ y por tanto $\frac{\psi(t)}{t} - h = h_{n_1} - h \in U_0$. En cualquier caso resulta que $\frac{\psi(t)}{t} - h \in U_0$ demostrando que $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = h$. Como r es Hadamard infinitesimal entonces $\lim_{t\to 0}\frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$ de donde $\lim_{n\to\infty}\frac{r[\psi(t_n)]}{t_n} = 0$ lo que es una contradicción con (2.11)

($\mathcal{H}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ definición [7]). Sea $r : X \to Y$ función $\mathcal{H}$ infinitesimal y supongamos que no es Hadamard infinitesimal, luego existe una función $\psi : \mathbb{R} \to X$ tal que el límite $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = x_0$ existe en X y además $\lim_{t\to 0}\frac{r[\psi(t)]}{t} \neq 0$, de esto último existe $V_0 \subset Y$ vecindad del cero en Y tal que

$$\forall \delta > 0,\ \exists t : 0 < |t| < \delta : \frac{r[\psi(t)]}{t} \notin V_0$$

de aquí podemos obtener una sucesión $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ que verifique

$$\frac{r[\psi(t_n)]}{t_n} \notin V_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.12}$$

definamos el conjunto $K = \{\frac{\psi(t_n)}{t_n}/n \in \mathbb{N}\}\bigcup\{x_0\}$ que es secuencialmente compacto (pues $\lim_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{t} = x_0$ implica que $\lim_{n\to\infty}\frac{\psi(t_n)}{t_n} = x_0$) y como r es $\mathcal{H}$ infinitesimal, existe un $\delta_0 > 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t : 0 < |t| < \delta_0, \quad \frac{t\frac{\psi(t_n)}{t_n}}{t} \in V_0$$

y dado que $t_n \to 0$ podemos hallar un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_1$ se tiene que $0 < |t_n| < \delta_0$ y por tanto

$$\forall n \geqslant n_1, \quad \frac{t_n\frac{\psi(t_n)}{t_n}}{t_n} = \frac{r[\psi(t_n)]}{t_n} \in V_0$$

lo que es una contradicción con (2.12). □

Teorema 2.7 (Hadamard y Diferenciabilidad Modificada de Hadamard) *La Hadamard-diferenciabilidad (definición [7]) es equivalente a la diferenciabilidad modificada de Hadamard (definición [9])*

Demostración. Ver [3, pag. 92] □

Teorema 2.8 (Marinescu y Sebastião e Silva diferenciabilidad) *Para E.V.T. Localmente Convexos la Sebastião e Silva-57 diferenciabilidad (definición [17]) es equivalente a la Marinescu diferenciabilidad (definición [18])*

Demostración. (definición [17] $\Rightarrow$ definición [18]). Sea $q : Y \to \mathbb{R}$ seminorma continua cualquiera, por hipótesis existen $p : X \to \mathbb{R}$ seminorma continua en X y $\omega : X \to \mathbb{R}$ con

y en consecuencia $\dfrac{r(th)}{\epsilon_0 t} \in V$ demostrando asi (c)

$(c \Rightarrow a)$ Sea $q \in SC(Y)$ cualquiera, y definamos la vecindad del cero $V = \{y \in Y/q(y) < 1\}$ entonces existe una vecindad $U \subset X$ del cero en X que verifica la hipótesis (c), para tal vecindad podemos hallar un $p \in SC(X)$ y $\lambda > 0$ tal que $\{x \in X/p(x) < \lambda\} \subset U$, mostremos que $\lim_{h\to 0} \frac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$, para ello sea $\epsilon_0 > 0$ cualquiera entonces existe un $U' \subset X$ vecindad del cero en X tal que para cualquier $h \in U$ y $th \in U'$ se cumple

$$\frac{r(th)}{t} \in \frac{\lambda\epsilon_0}{2}V \equiv \frac{r(th)}{t} < \frac{\lambda\epsilon_0}{2}$$

Ahora, si $h \in U'$ entonces $h = \{\frac{2}{\lambda}p(h)\}\{\frac{\lambda}{2}\frac{h}{p(h)}\} \in U'$ y además $\frac{\lambda}{2}\frac{h}{p(h)} \in U$ (pues $p\left[\frac{\lambda}{2}\frac{h}{p(h)}\right] = \frac{\lambda}{2} < \lambda$) y en consecuencia

$$q\left[\frac{r(h)}{\frac{2}{\lambda}p(h)}\right] = \frac{\lambda}{2}\frac{q[r(h)]}{p(h)} < \frac{\lambda}{2}\epsilon_0 \equiv \frac{q[r(h)]}{p(h)} < \epsilon_0$$

demostrando esto que $\lim_{h\to 0} \frac{q[r(h)]}{p(h)} = 0$ □

OBSERVACIÓN

Observe que la definición (c) tiene sentido aún para E.V.T. que no necesariamente son Localmente Convexos; ésta es la definición que usaremos en la tabla de definiciones que sigue.

Teorema 2.10 (Keller II y Michal 40 diferenciabilidad) *Para E.V.T. Localmente Convexos, la Keller II-diferenciabilidad (definición [23]) es equivalente a la Michal 40 -diferenciabilidad (definición [10])*

Demostración. La demostración es completamente análoga a la anterior (ver [3, pag. 93]) □

Lema 2.3 *Para E.V.T. Localmente Convexos, las cuatro definiciones siguientes de función infinitesimal son equivalentes:*

a). $\forall q \in SC(Y), \exists p \in SC(X) / \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : p(h) < \delta \Rightarrow q[r(h)] < \epsilon p(h)$
(Hyres infiniteimal)

b). $\forall q \in SC(Y), \exists p \in SC(X) / \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \left(p(h) < 1 \wedge 0 < |t| < \delta\right) \Rightarrow q\left[\frac{r(th)}{t}\right] < \epsilon$

c). $\forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U \in \mathcal{U}_X / r(tU) \subset o(t)V$ *donde* $o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es tal que* $\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$
(Lang infinitesimal)

d). $\forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U \in \mathcal{U}_X / \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : \left(h \in U \wedge 0 < |t| < \delta\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$

Demostración. $(a \Rightarrow b)$ Sea $h \in X$ y $t \in \mathbb{R}$ con $p(h) < 1$ y $0 < |t| < \delta$ entonces $p(th) = |t|p(h) < |t| < \delta$, luego por (a) tenemos que $q[r(th)] < \epsilon p(th) = |t|\epsilon p(h) < |t|\epsilon$ de donde $q\left[\frac{r(th)}{t}\right] < \epsilon$, demostrando asi (b)

$(b \Rightarrow c)$

$(c \Rightarrow d)$ Sea $V \subset Y$ vecindad del cero, y consideremos V_0 la vecindad equilibrada del cero en Y tal que $V_0 \subset V$, para tal V_0 podemos hallar una vecindad del cero $U \subset X$ que verifica (c). Sea $\epsilon > 0$ cualquiera, como $lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ podemos hallar un $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow \left|\frac{o(t)}{t}\right| < \epsilon$$

además si $h \in U$ y $0 < |t| < \delta_0$ entonces por (c): $r(th) \in o(t)V_0 \subset (t\epsilon)V_0$ (pues V_0 es equilibrado) y por tanto $\frac{r(th)}{t} \in \epsilon V_0 \subset \epsilon V$, demostrando (d).

$(d \Rightarrow a)$ Sea $q \in SC(Y)$ cualquiera, para la vecindad del cero $V = \{y \in Y/q(y) < 1\}$ por (d) existe una vecindad del cero $U \subset X$ y por tanto un $p \in SC(X)$ y $\lambda > 0$ tal que $\{x \in X/p(x) < \lambda\} \subset U$ y que verifica (d). Sea $\epsilon_0 > 0$ cualquiera, entonces para $\epsilon = \lambda\epsilon_0/2$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que

$$h \in U \wedge 0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V = \frac{\lambda\epsilon_0}{2}V$$

sea $h \in X$ con $p(h) < \frac{\lambda\delta_0}{2}$ entonces el vector $h' = \frac{\lambda}{2p(h)}h \in U$ y el número real $\frac{2p(h)}{\lambda} \in \mathbb{R}$ verifica $\left|\frac{2p(h)}{\lambda}\right| < \delta_0$, luego

$$\frac{r\left[\frac{2p(h)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2p(h)}h\right]}{\frac{2p(h)}{\lambda}\epsilon} = \frac{r(h)}{\epsilon_0 p(h)} \in V$$

y por tanto $\frac{q[r(h)]}{p(h)} < \epsilon_0$, demostrando (a). □

OBSERVACIÓN

Nuevamente la definición (d) tiene sentido para E.V.T. cualesquiera, no necesariamente Localmente Convexos.

Teorema 2.11 (Hyres y Lang diferenciabilidad) *Para E.V.T. Localmente Convexos, la Hyres diferenciabilidad (definición [12]) es equivalente a la Long diferenciabilidad (definición [21])*

Demostración. Inmediata del lema anterior. □

Teorema 2.12 (Equivalencia para la Keller I diferenciabilidad) *Para E.V.T. Localmente Convexos, las definiciones siguientes de función infinitesimal son equivalentes*

a). $\exists p \in SC(X)/\forall q \in SC(Y),\ \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : p(h) < \delta \Rightarrow q[r(h)] < \epsilon p(h)$ *(Keller I infiniteimal)*

b). $\exists U \in \mathcal{U}_X/\forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists\delta > 0 : (h \in U \wedge 0 < |t| < \delta) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$

Demostración. $(a \Rightarrow b)$ Por hipótesis existe $p \in SC(X)$ que verifica

$$\forall q \in SC(Y), \forall\epsilon > 0, \exists\delta > 0 : p(h) < \delta \Rightarrow q[r(h)] < \epsilon p(h) \tag{2.13}$$

Definamos la vecindad del cero $U = \{x \in X/p(x) < 1\}$ y sea $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero en Y, la convexidad local de Y permite hallar un $q_0 \in SC(Y)$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que $\{y \in Y/q(y) < \epsilon_0\} \subset V$. Por (2.13) existe un $\delta_0 > 0$ tal que

$$p(h) < \delta_0 \Rightarrow q[r(h)] < \epsilon_0 p(h) \tag{2.14}$$

Si $h \in U$ y $0 < |t| < \delta_0$ entonces $p(h) < 1$ y por tanto $p(th) = |t|p(h) < \delta_0 p(h) < \delta_0$ y por (2.14) resulta

$$q[r(th)] < \epsilon_0 p(th) = \epsilon_0 |t| p(h) < \epsilon_0 |t| \equiv q\left[\frac{r(th)}{t}\right] < \epsilon_0$$

de donde resulta que $\frac{r(th)}{t} \in V$

($b \Rightarrow a$) Por hipótesis existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que

$$\forall V \subset Y,\ \text{vecindad del cero}, \exists \delta > 0 : (h \in U \wedge 0 < |t| < \delta) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V \tag{2.15}$$

además existen $p \in SC(X)$ y $\lambda > 0$ tales que $\{x \in X/p(x) < \lambda\} \subset U$. Sean $q \in SC(Y)$ y $\epsilon > 0$ cualesquiera, y definamos $V = \{y \in Y/q(y) < \lambda\epsilon/2\}$, por (2.15) podemos hallar un $\delta_0 > 0$ tal que

$$h \in U \wedge 0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V \tag{2.16}$$

Sea $h \in X$ con $p(h) < \lambda\delta_0/2$ entonces $p\left[\frac{\lambda}{2p(h)}h\right] = \lambda/2 < \lambda$ y en consecuencia $\frac{\lambda}{2p(h)}h \in U$ y también $\left|\frac{2p(h)}{\lambda}\right| = \frac{2}{\lambda}p(h) < \delta_0$ y por (2.16) resulta

$$\frac{\lambda}{2p(h)} r(h) = \frac{r\left[\frac{2p(h)}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2p(h)} h\right]}{\frac{2p(h)}{\lambda}} \in V$$

y por tanto $q\left[\frac{\lambda}{2p(h)} r(h)\right] < \lambda\epsilon/2 \equiv q[r(h)] < \epsilon p(h)$ □

OBSERVACIÓN

La definición (b) tiene sentido para E.V.T. cualesquiera.

2.3.3. Diagrama de relaciones

En la subsección anterior se demostró que muchas de las definiciones dadas en la Tabla 2.1 son equivalentes así como también algunas de ellas son casos particualares de otras. Además se mostraron equivalencias entre las definiciones dadas por los autores, válidas para E.V.T. Localmente Convexos, y definiciones que tienen sentido en cualquier E.V.T. (Teoremas 2.9, 2.12y Lema 2.3).

Las definiciones [3], [6] y [13] no se consideran en lo que sigue por no ser métodos regulares de diferenciación. Las definiciones [4], [5], [7] y [9] son casos particulares de la σ−diferenciabilidad. Las definiciones [8] y [20] son equivalentes el método representativo lo llamamos Michal-Bastiani diferenciabilidad. La definición [11] la llamamos simplemente Michal-diferenciabilidad. Las definiciones [12] y [21] son equivalentes a (d) del Lema 2.3 el cual llmnaremos Hyres diferenciabilidad. La definición [14] se repite y a la [15] se le da el nombre de Sebastião e Silva β

diferenciabilidad, la definición [16] es un caso particular de la definición [14]. Las definiciones [17] y [18] son equivalentes a (c) del Teorema 2.9 el cual llamaremos Marinescu-Sebastião e Silva diferenciabilidad. La definición [19] se copia exactamente como esta y la definición [22] es equivalente a (b) del Teorema 2.12 el método es llamado Keller diferenciabilidad.

Asi podemos reducir la tabla anterior a las siguientes definiciones:

Nro.	Nombre	Símbolo	$\mathcal{A}(X,Y)$
1	De Lamadrid τ-diferenciabilidad	L_τ	$\mathcal{F}(X,Y)$
	$\lim\limits_{t\to 0} R(t) = 0$ en alguna topologia τ de $\mathcal{F}(X,Y)$ donde $R: \mathbb{R} \to \mathcal{F}(X,Y)$ se define como: $R(t)(h) = \begin{cases} \frac{r(th)}{t} & \text{cuando } t \neq 0 \\ 0 & \text{cuando } t = 0 \end{cases}$		
2	σ-diferenciabilidad	σ	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall S \in \sigma,\ \lim\limits_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$, uniformemente respecto de $h \in S$ $\equiv \forall S \in \sigma, \forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists \delta > 0 : h \in S \wedge 0 < \lvert t\rvert < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$		
3	Sebastião e Silva β- diferenciabilidad	S_β	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall B \in \beta,\ \exists C \subset Y$ acotado $/\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \left(h \in B\ \wedge\ 0 < \lvert t\rvert < \delta\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon C$		
4	Michal-Bastiani diferenciabilidad	MB	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall h_0 \in X,\ \lim\limits_{(t,h)\to(0,h_0)} \psi(t,h) = 0$, donde $\psi : \mathbb{R} \times X \to Y$ está definida como $\psi(t,h) = \begin{cases} \frac{r(th)}{t}, & \text{cuando } t \neq 0 \\ 0, & \text{cuando } t = 0 \end{cases}$ $\equiv \forall h_0 \in X, \forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \exists U \in \mathcal{U}_X, \exists \delta > 0 : \left(h \in h_0 + U,\ 0 < \lvert t\rvert < \delta\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$		
5	Marinescu-Sebastião e Silva diferenciabilidad	MS	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U \in \mathcal{U}_X / \forall \epsilon > 0, \exists U' \in \mathcal{U}_X : (h \in U \wedge th \in U') \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$		
6	Michal diferenciabilidad	M	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\exists U \in \mathcal{U}_X\ / \forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \exists U' \in \mathcal{U}_X : \left(h \in U \wedge th \in U'\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$		
7	Hyres diferenciabilidad	H	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\forall V \in \mathcal{U}_Y,\ \exists U \in \mathcal{U}_X / \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (h \in U \wedge 0 < \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$		
8	Keller diferenciabilidad	K	$\mathcal{L}(X,Y)$
	$\exists U \in \mathcal{U}_X / \lim\limits_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$ uniformemente respecto de $h \in U$ $\equiv \exists U \in \mathcal{U}_X / \forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists \delta > 0 : (h \in U \wedge 0 < \lvert t\rvert < \delta) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$		
9	Vainberg-Engel'son τ-diferenciabilidad	VE_τ	$\mathcal{L}(X,Y)$
	La función $\psi : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ definida en alguna vecindad $U \subset X$ del cero por $\psi(x)(h) = \lim\limits_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{r(x+th) - r(x)}{t}$ es continua en $x_0 = 0$ en alguna topología τ de $\mathcal{L}(X,Y)$		

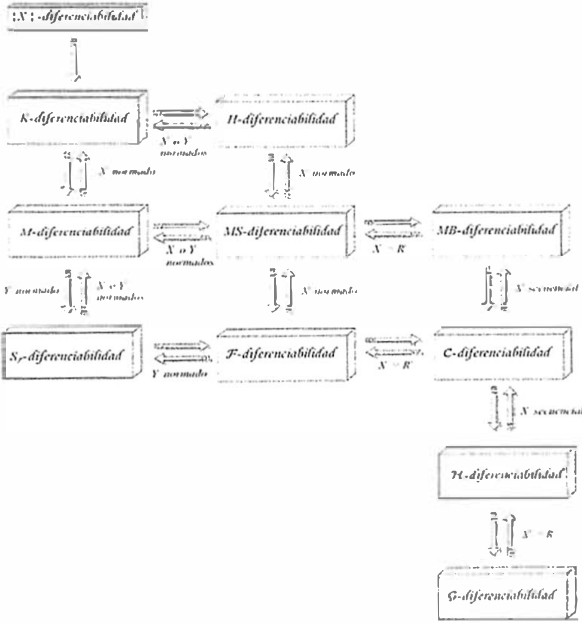
OBSERVACIONES

1. Todas las definiciones, a excepción de la primera, consideran que las derivadas sean Funciones Lineales y Continuas, esto es $\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

2. La definición [3] difiere de la definición [15] de la Tabla 2.1 en que se toma para $\mathcal{A}(X,Y)$ el Espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ de todas las funciones lineales y continuas y no el Espacio $\mathcal{B}(X,Y)$ de funciones lineales y acotadas.

Las relaciones entre los diferentes tipos de diferenciabilidad definidos en esta tabla son indicadas en el siguiente diagrama:

Figura 2.1: Diagrama de Relaciones



Los únicos métodos que no son regulares en el diagrama anterior son la $S_{\mathcal{F}}$ y $\mathcal{G}$ diferenciabilidad, todos los demás son métodos regulares de diferenciación.

Como ya se mostró, la $\sigma-$diferenciabilidad es un caso particular de la diferenciabilidad en el sentido de De Lamadrid (L_τ diferenciabilidad) eligiendo la topología τ_σ de Convergencia Uniforme sobre subconjuntos de la familia σ ($\sigma-$topología), resultando que la $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$ y $\{X\}$ diferenciabilidad son casos particulares del a L_τ diferenciabilidad. Sin embargo las K, H, M, MS y MB diferenciabilidades no pueden ser obtenidas de la L_τ diferenciabilidad para ninguna elección de la topología τ

Si en el Espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ consideramos la σ topología entonces la VE_{τ_σ} diferenciabilidad tiene la siguiente caracterización

Teorema 2.13 (Caracterización de la VE_{τ_σ} diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T.; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia de subconjuntos de X que verifica* (1.6) *y $x_0 \in X$ entonces una función $f : X \to Y$ es $VE_{\tau_\sigma}-$ diferenciable en x_0 si y solo si existe un abierto $U_0 \subset X$ con $x_0 \in U$ tal que*

a). *f es $\mathcal{G}$ diferenciable en U_0*

b). *La función $f'_\mathcal{G} : U_0 \to \mathcal{L}(X,Y)$ es τ_σ continua en 0*

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis existen $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r : X \to Y$ tales que

1. $f(x_0+h) = f(x_0) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X$
2. Existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que la función $\psi : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ definida como $\psi(x)h = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{r(x+th) - r(x)}{t}$ es $\tau_\sigma-$continua en x_0.

observemos que para cualesquier $x, h \in X$ y $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ se puede escribir

$$\frac{r(x+th) - r(x)}{t} = \frac{f(x_0+x+th) - f(x_0+x)}{t} - T(h) \tag{2.17}$$

si definimos el abierto $U_0 = x_0 + U$ entonces para $x \in U_0$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} &= T(h) + \lim_{t\to 0} \frac{r(x-x_0+th) - r()x - x_0}{t} \\ &= T(h) + \psi(x-x_0)(h) = \Big[T + \psi(x-x_0)\Big](h), \quad \forall h \in X\end{aligned}$$

esto demuestra que f es $\mathcal{G}$-diferenciable en la vecindad U_0 con $\mathcal{G}$-derivada dada por $f'_\mathcal{G}(x) = T + \psi(x - x_0)$, $\forall x \in U_0$ y como ψ es continua en x_0 entonces $f'_\mathcal{G}$ resulta continua en 0

($\Leftarrow$) Sabemos que existe un abierto $U_0 \subset X$ con $x_0 \in U_0$ que verifica (a) y (b), en consecuencia f es $\mathcal{G}$-diferenciable en x_0, esto implica la existencia de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r : X \to Y$ tales que

$$f(x_0+h) = f(x_0) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X$$

donde $\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$, mostremos que r es $VE_{\tau_\sigma}-$infinitesimal. Si definimos la vecindad del cero $U = U_0 - x_0$ entonces para cualquier $x \in U$ tenemos que $x + x_0 \in U_0$ y por (a) $f'_\mathcal{G}(x+x_0)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+x_0+th) - f(x+x_0)}{t}$, $\forall h \in X$, además por (2.17) (que también se verifica en este caso) obtenemos

$$\psi(x)(h) = \lim_{t\to 0} \frac{r(x+th) - r(x)}{t} = f'_\mathcal{G}(x_0+x)(h) - T(h), \quad \forall x \in U, \forall h \in X$$

es decir que la función $\psi : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ está definida por $\psi(x) = f'_{\mathcal{G}}(x_0 + x) + T$, $\forall x \in U$ y como por (b) la función $f'_{\mathcal{G}}$ es continua en 0 obtenemos que ψ es continua en x_0 $\square$

2.3.4. Demostración de las Implicaciones en General

En esta subsección demostraremos las implicaciones del diagrama anterior que se cumplen en cualquier E.V.T., es decir sin ninguna condición adicional.

1. *$\mathcal{H}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{G}$-diferenciabilidad*
Evidente desde que todo subconjunto finito es secuencialmente compacto, es decir $\mathcal{G} \subset \mathcal{H}$

2. *$\mathcal{C}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$-diferenciabilidad*
Aqui la demostración no es tan obvia desde que no existe relación alguna entre la compacidad y la compacidad secuencial en Espacios Vectoriales Topológicos generales. Sea $r : X \to Y$ función $\mathcal{C}$-infinitesimal y supongamos que no es $\mathcal{H}$-infinitesimal por tanto existen $V_0 \subset Y$ vecindad del cero en Y y $K \subset X$ conjunto secuencialmente compacto tal que

$$\forall \delta > 0, \exists h \in K,\ \exists t : 0 < |t| < \delta : \frac{r(th)}{t} \notin V_0$$

De aqui podemos obtener dos sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ que podemos suponer convergente a un $h \in X$ (ya que K es secuencialmente compacto) tal que se verifica

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{r(t_n h_n)}{t_n} \notin V_0 \tag{2.18}$$

Como $h_n \to h$ entonces el conjunto $\{h_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{h\}$ es compacto y dado que r es $\mathcal{C}$-infinitesimal podemos hallar un $\delta_0 > 0$ tal que $0 < |t| < \delta_0$ implique que $\frac{r(th_n)}{t} \in V_0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Finalmente la convergencia $t_n \to 0$ permite hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $0 < |t_n| < \delta_0$ y en consecuencia $\frac{r(t_n h_n)}{t_n} \in V_0$, $\forall n \geqslant n_0$ llegando a contradecir (2.18)

3. *$\mathcal{F}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$-diferenciabilidad*
Evidente desde que todo subconjunto compacto de un E.V.T. es también acotado, es decir $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$

4. *$S_{\mathcal{F}}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función $S_{\mathcal{F}}$-infinitesimal, y consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $B \subset X$ acotado (*i.e.* $B \in \mathcal{F}$). Como r es $S_{\mathcal{F}}$ infinitesimal entonces para $B \in \mathcal{F}$ podemos hallar un $C \subset Y$ acotado que verifica

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : (h \in B \wedge 0 < |t| < \delta) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon C$$

Como $C \subset Y$ es acotado, existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda C \subset V$ y para tal $\lambda > 0$ existe un $\delta_0 > 0$ tal que si $h \in B$ y $0 < |t| < \delta_0$ entonces $\frac{r(th)}{t} \in \lambda C \subset V$, demostrando que r es $\mathcal{F}$ infinitesimal.

5. *MB-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función MB infinitesimal y consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $K \subset X$ compacto (*i.e.* $K \in \mathcal{C}$), por definición de función MB infinitesimal se cumple

$$\forall x \in K,\ \exists U_x \subset X \text{ abierto con } x \in U_x,\ \exists \delta_x > 0 : \left(h \in U_x \wedge 0 < |t| < \delta_x\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

entonces la familia de abiertos $\{U_x / x \in K\}$ cubre a K, es decir $K \subset \bigcup_{x\in K} U_x$ y además

$$\forall x \in K, \exists \delta_x > 0 : \left(h \in U_x \wedge 0 < |t| < \delta_x \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V\right)$$

como K es compacto, podemos escoger un número finito de abiertos $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_n}$ tal que $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ y para cada i

$$h \in U_{x_i} \wedge 0 < |t| < \delta_i \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V \qquad (2.19)$$

Tomemos $\delta = \min\{\delta_i\}_{i=1}^{n}$ de modo que si $h \in K$ y $0 < |t| < \delta$ entonces $h \in U_{x_j}$ para algún j y por (2.19), $\frac{r(th)}{t} \in V$, demostrando así que r es $\mathcal{C}$ infinitesimal.

6. *MS-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función MS-infinitesimal y consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $B \subset X$ acotado (*i.e.* $B \in \mathcal{F}$), como r es MS-infinitesimal, para la vecindad V podemos hallar una vecindad del cero $U \subset X$ que verifica

$$\forall \epsilon > 0, \exists U' \subset X \text{ vecindad del cero } : \left(h \in U \wedge th \in U'\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V \qquad (2.20)$$

Además para el conjunto acotado B podemos hallar un $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subset U$ y para tal $\lambda > 0$ una vecindad $U_\lambda \subset X$ que verifica (2.20). Escojamos finalmente un $\delta > 0$ tal que $tB \subset U_\lambda$ siempre que $|t| \leqslant \delta$ (ver Teorema 1.5). Así, si tomamos $h \in B$ y $0 < |t| < \delta$ entonces $\lambda h \in U$ y $\frac{t}{\lambda}\lambda h = th \in U_\lambda$ y por (2.20) obtenemos

$$\cancel{\lambda}\frac{r(th)}{t} = \frac{r(\frac{t}{\lambda}\lambda h)}{\frac{t}{\lambda}} \in \lambda V \equiv \frac{r(th)}{t} \in V$$

demostrando que r es $\mathcal{F}$-infinitesimal

7. *MS-diferenciabilidad $\Rightarrow$ MB-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función $MS-$ infinitesimal y consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $h_0 \in X$ cualquiera, debemos hallar un $U_0 \subset X$ vecindad del cero en X y $\delta_0 > 0$ que verifiquen

$$h \in h_0 + U_0 \wedge 0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

como r es $MS-$ infinitesimal, para la vecindad V existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists U' \subset X \text{ vecindad del cero } : \left(h \in U \wedge th \in U'\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V \qquad (2.21)$$

Además la continuidad de la multiplicación por escalares $(t,x) \in \mathbb{R} \times X \mapsto tx \in X$ en $(0,h_0)$ permite hallar $\delta_1 > 0$ y $U_1 \subset U$ vecindad del cero en X tal que

$$|t| \leqslant \delta_1 \wedge x \in h_0 + U_1 \Rightarrow tx \in U \tag{2.22}$$

de (2.21) para $\epsilon = \delta_1$ podemos hallar una vecindad del cero $U_2 \subset U_1$ que verifique

$$h \in U \wedge th \in U_2 \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \delta_1 V \tag{2.23}$$

nuevamente de la continuidad de la multiplicación por escalares podemos hallar un $\delta_2 > 0$ y $U_3 \subset U_2$ vecindad del cero en X tal que

$$|t| \leqslant \delta_2 \wedge x \in h_0 + U_3 \Rightarrow tx \in U_2 \tag{2.24}$$

tomemos $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $U_0 = U_3$, asi, si $h \in h_0 + U_0$ y $0 < |t| < \delta_0$ entonces por (2.24), $\frac{t}{\delta_1}(\delta_1 h) = th \in U_2$ y por (2.22), $\delta_1 h \in U$ de donde por (2.23) obtenemos

$$\delta_1 \frac{r(th)}{t} = \frac{r(\frac{t}{\delta_1}\delta_1 h)}{\frac{t}{\delta_1}} \in \delta_1 V \equiv \frac{r(th)}{t} \in V$$

como se quería demostrar.

8. *M-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ *MS-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función $M-$ infinitesimal, por lo tanto existe una vecindad del cero $U_0 \subset X$ tal que

$$\forall V \in \mathcal{U}_Y, \exists U' \in \mathcal{U}_X : \left(h \in U_0 \wedge th \in U'\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

sea $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero en Y y $\epsilon > 0$ arbitrario entonces ϵV también es una vecindad del cero y por lo tanto existe una vecindad $U' \subset X$ tal que $h \in U_0$ y $th \in U'$ implica que $\frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$, demotrando que r es $MS-$infinitesimal.

9. *H-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ *MS-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ función $H-$infinitesimal y consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y entonces existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que para $\epsilon > 0$ arbitrario existe un $\delta > 0$ que verifica

$$h \in U \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V_0 \tag{2.25}$$

donde $V_0 \subset Y$ es la vecindad del cero equilibrada tal que $V_0 \subset V$. Escojamos $\alpha \in \mathbb{R}$ con $0 < \alpha < \delta$ y definamos la vecindad del cero $U' = \alpha U$, asi cuando $h \in U$ y $th \in U' = \alpha U$ entonces tenemos dos posibilidades: primero cuando $|t| < \alpha$, resulta inmediato de (2.25) que $\frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$. Si $|t| \geqslant \alpha$, en este caso tenemos $\frac{t}{\alpha} h \in U$ y como $\alpha < \delta$ entonces por (2.25) tenemos

$$\frac{r(th)}{t} = \frac{\alpha}{t} \cdot \frac{r(\alpha \frac{t}{\alpha} h)}{\alpha} \in \frac{\alpha}{t} \epsilon V_0 \subset \epsilon V_0$$

la penúltima inclusión es debido a que V_0 es equilibrado y $\left|\frac{\alpha}{t}\right| \leqslant 1$. En cualquier caso resulta que $\frac{r(th)}{t} \in \epsilon V$, demostrando que r es $MS-$infinitesimal.

10. *K-diferenciabilidad $\Rightarrow$ M-diferenciabilidad*
Esta demostración es totalmente análoga a la anterior

11. *K-diferenciabilidad $\Rightarrow$ H-diferenciabilidad*
Evidente de las definiciones.

12. *$\{X\}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ K-diferenciabilidad*
Evidente de las definiciones.

2.3.5. Demostración de las Implicaciones condicionadas

En el diagrama de la Figura 2.1 se muestran implicaciones que se cumplen para ciertos tipos de Espacios Vectoriales Topológicos, como Espacios Normados, Secuenciales o el espacio $\mathbb{R}^n$. En esta subsección demostraremos éstas implicaciones condicionadas.

En la siguiente tabla la penúltima columna da la proposición que será suficiente probar para que la implicación de la primera columna sea cierta. Asi por ejemplo para probar la proposición *$S_{\mathcal{F}}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ M-diferenciabilidad* cuando X es normado, será suficiente probar que *$\mathcal{F}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ K-diferenciabilidad* cuando X es normado. Cuando las dos últimas columnas están en blanco deberemos probar la proposición de la primera columna.

Para probar	Cuando	Será suficiente	Cuando
$\mathcal{G}$-dif. $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$-dif.	$X = \mathbb{R}$	$\mathcal{G}$-dif. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-dif.	$X = \mathbb{R}$
$\mathcal{H}$-dif. $\Rightarrow$ $\mathcal{C}$-dif.	X es secuencial	$\mathcal{H}$-dif. $\Rightarrow$ MB-dif.	X es secuencial
$\mathcal{C}$-dif. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-dif.	$X = \mathbb{R}^n$		
$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ $S_{\mathcal{F}}$-dif.	Y es normado		
$\mathcal{C}$-dif. $\Rightarrow$ MB-dif.	X es secuencial	$\mathcal{H}$-dif. $\Rightarrow$ MB-dif.	X es secuencial
$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ MS-dif.	X es normado	$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X es normado
$S_{\mathcal{F}}$-dif. $\Rightarrow$ M-dif.	X, Y normados	$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X es normado
M-dif. $\Rightarrow$ $S_{\mathcal{F}}$-dif.	Y es normado	$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ $S_{\mathcal{F}}$-dif.	Y es normado
MB-dif. $\Rightarrow$ MS-dif.	$X = \mathbb{R}^n$	$\mathcal{C}$-dif. $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-dif.	$X = \mathbb{R}^n$
MS-dif. $\Rightarrow$ M-dif.	X ó Y es normado	MS-dif. $\Rightarrow$ M-dif.	Y es normado
MS-dif. $\Rightarrow$ H-dif.	X es normado	$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X es normado
M-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X es normado	$\mathcal{F}$-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X es normado
H-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	X ó Y es normado	H-dif. $\Rightarrow$ K-dif.	Y es normado

1. Cuando $X = \mathbb{R}$: *$\mathcal{G}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-diferenciabilidad*
Sea $r : \mathbb{R} \to Y$ una función $\mathcal{G}$-infinitesimal, para mostrar que r también es $\mathcal{F}$-infinitesimal sean $V \subset Y$ vecindad del cero y $A \in \mathcal{F}$ (i.e. $A \subset \mathbb{R}$ es acotado), podemos hallar un $a > 0$ tal que $A \subset [-a, a]$, además como r es $\mathcal{G}$-infinitesimal existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(ta)}{t} \in V_0 \tag{2.26}$$

donde $V_0 \subset Y$ es la vecindad equilibrada del cero tal que $V_0 \subset V$. Asi tenemos que si $h \in A$ y

$0 < |t| < \delta$ entonces $|h| \leqslant a$ o equivalentemente $\left|\frac{h}{a}\right| \leqslant 1$ y por (2.26)

$$\frac{r(th)}{t} = \frac{r\left(\frac{th}{a}a\right)}{t\frac{h}{a}} \cdot \frac{h}{a} \in \frac{h}{a}V_0 \subset V_0 \subset V$$

la penultima inclusión es debido a que V_0 es equilibrado, demostrando esto que r es $\mathcal{F}$-infinitesimal.

Para mostrar la siguiente proposición necesitamos primero el siguiente lema

Lema 2.4 *Sean X, Y dos E.V.T. con X Secuencial; $f : X \to Y$ y $x_0 \in X$ con $f(x_0) = 0$. Si para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $x_n \to 0$ se cumple que $f(x_n) \to 0$ entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$

Demostración. Supongamos por contradicción que $\lim_{x\to x_0} f(x) \neq 0$, entonces existe una vecindad del cero $V_0 \subset Y$ tal que

$$\forall U_{x_0} \subset X, \text{ vecindad de } x_0, \exists x \in U_{x_0} : f(x) \notin V_0$$

denotemos por $A = X - f^{-1}(V_0)$ y notemos que $x \in A$ si y solo si $f(x) \notin V_0$, además que $A \neq \emptyset$ (basta tomar la vecindad $U_{x_0} = X$). Asi, notando que $x_0 \notin A$ (pues $f(x_0) = 0 \in V_0$) lo anterior se puede escribir como

$$\forall U_{x_0} \subset X, \text{ vecindad de } x_0, \exists x \in U_{x_0} \text{ con } x \neq x_0 : x \in A$$

esto quiere decir que x_0 es un punto de acumulación de A y como X es secuencial, existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $a_n \to x_0$ y por hipótesis resulta que $f(a_n) \to 0$. Pero $a_n \in A, \forall n \in \mathbb{N} \equiv f(a_n) \notin V_0, \forall n \in \mathbb{N}$ lo que es una contradicción. □

2. Cuando X es secuencial : *$\mathcal{H}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ MB-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ una función $\mathcal{H}$-infinitesimal y supongamos por contradicción que no es MB-infinitesimal, es decir que existe un $h_0 \in X$ tal que $\lim_{(t,h)\to(0,h_0)} \psi(t,h) \neq 0$ con la función ψ como en la definición de MB-diferenciabilidad. Como X es secuencial resulta que $\mathbb{R} \times X$ es secuencial (vea Teorema B.2 más adelante) y por el lema anterior existen sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $h_n \to h_0$ tales que

$$\psi(t_n h_n) \not\to 0 \tag{2.27}$$

pero como $r : X \to Y$ es $\mathcal{H}$-infinitesimal y el conjunto $K = \{h_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{h_0\}$ es secuencialmente compacto entonces $\frac{r(t_n h_n)}{t_n} \to 0$ lo que es una contradicción con (2.27)

3. Cuando Y es normado : *$\mathcal{F}$-diferenciabilidad $\Rightarrow$ $S_{\mathcal{F}}$-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ una función $\mathcal{F}$-infinitesimal, como Y es normado entones podemos escribir

$$\forall \epsilon > 0, \forall B \in \mathcal{F}, \exists \delta > 0 : h \in B \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{r(th)}{t}\right\| < \epsilon \tag{2.28}$$

mostremos que r es $S_{\mathcal{F}}$-infinitesimal, para ello sea $B \in \mathcal{F}$ cualquiera y definamos el conjunto acotado $C = \{y \in Y/\|y\| < 1\}$ de modo que para cualquier $\epsilon > 0$, por (2.28) existe un $\delta > 0$ tal que si $h \in B$ y $0 < |t| < \delta$ entonces

$$\left\|\frac{r(th)}{t}\right\| < \epsilon \equiv \left\|\frac{r(th)}{\epsilon t}\right\| < 1 \equiv \frac{r(th)}{t} \in \epsilon C$$

demostrando que r es $S_{\mathcal{F}}$-infinitesimal

4. Cuando X es normado: $\mathcal{F}$*-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ K*-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ una función $\mathcal{F}$-infinitesimal, para mostrar que r es K-infinitesimal definamos la vecindad del cero $U = \{x \in X/\|x\| < 1\}$ de modo que para cualquier vecindad del cero $V \subset Y$ y tomando como conjunto acotado $B = U$ en la definición de función $\mathcal{F}$-infinitesimal tenemos que existe un $\delta > 0$ tal que

$$h \in U \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

demostrando que r es K-infinitesimal

5. Cuando $X = \mathbb{R}^n$: C*-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$*-diferenciabilidad*
Sea $r : \mathbb{R}^n \to Y$ función C-infinitesimal, para mostrar que r es $\mathcal{F}$-infinitesimal sean $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $A \subset \mathbb{R}^n$ subconjunto acotado, podemos hallar un $M > 0$ tal que $A \subset K = \{x \in \mathbb{R}^n/\|x\| \leqslant M\}$. En $\mathbb{R}^n$ el conjunto K compacto y por definición de función C-infinitesimal existe un $\delta > 0$ tal que

$$h \in K \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V$$

desde que $A \subset K$ resulta inmediato que r es $\mathcal{F}$-infinitesimal

6. Cuando Y es normado: MS*-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ M*-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ una función MS-infinitesimal, como Y es normado entonces considerando en la definición la vecindad del cero $V_0 = \{y \in Y/\|y\| < 1\}$ tenemos que existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists U' \subset \text{ vecindad del cero } /h \in U \wedge th \in U' \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in \epsilon V_0 \tag{2.29}$$

pero $\frac{r(th)}{t} \in \epsilon V_0$ es equivalente a $\left\|\frac{r(th)}{t}\right\| < \epsilon$. Desde que toda vecindad del cero $V \subset Y$ contiene una bola de la forma $\{y \in Y/\|y\| < \lambda\}$ para algún $\lambda > 0$ entonces (2.29) implica que r es M-infinitesimal.

7. Cuando Y es normado: H*-diferenciabilidad* $\Rightarrow$ K*-diferenciabilidad*
Sea $r : X \to Y$ una función H-infinitesimal, como en el caso anterior para la vecindad del cero $V_0 = \{y \in Y/\|y\| < 1\}$ existe una vecindad del cero $U \subset X$ tal que

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0/h \in U \wedge 0 < |t| < \delta \Rightarrow \left\|\frac{r(th)}{t}\right\| < \epsilon$$

nuevamente toda vecindad del cero en Y contiene una bola de la forma $\{y \in Y/\|y\| < \lambda\}$ para algún $\lambda > 0$ por tanto lo anterior implica que r es K-infinitesimal.

2.3.6. Contraejemplos

En esta subsección damos una colección de ejemplos que muestran que ninguna de las definiciones de diferenciabilidad dadas en el Diagrama 2.1 son equivalentes.

Ejemplo 4 **($\mathcal{G}$-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ $\mathcal{H}$-diferenciabilidad)** El ejemplo 19 muestra una función que es $\mathcal{G}$-diferenciable en 0 con $\mathcal{G}$-derivada nula allí, pero sin embargo no es $\mathcal{H}$-diferenciable en dicho punto.

Ejemplo 5 **($\mathcal{H}$-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ $\mathcal{F}$-diferenciabilidad)** Denotemos el elemento $e_k = (\underbrace{0,0,\ldots,1}_{k},0,\ldots) \in l_2(\mathbb{N})$ y definamos la función $f: l_2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} t^{1+\frac{1}{k}}, & \text{si } x = te_k (t \in \mathbb{R}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces f no es $\mathcal{F}$-diferenciable en 0, en efecto, primero observemos que para cualquier $h \in l_2(\mathbb{N})$ se cumple $\lim_{t\to 0} \frac{f(th)}{t} = 0$, por lo tanto la $\mathcal{G}$-derivada en 0 existe y es idénticamente nula. Supongamos que f es $\mathcal{F}$-diferenciable en 0, con $\mathcal{F}$-derivada identicamente nula, entonces se debería tener $\lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{\|h\|} = 0$. Consideremos $\epsilon = 1/2$, existe por tanto un $\delta > 0$ tal que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \frac{|f(h)|}{\|h\|} < \frac{1}{2} \tag{2.30}$$

escogamos un $t_0 \in < 0, \delta >$; como $\lim_{n\to\infty} t_0^{\frac{1}{n}} = 1$ entonces podemos hallar un $n \in \mathbb{N}$ tal que $t_0^{\frac{1}{n}} > 1/2$

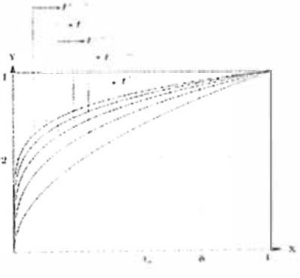


Figura 2.2: La sucesión de funciones $(t^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$, $t \in [0,1]$ es creciente

entonces para $h = t_0 e_n \in l_2(\mathbb{N})$ tenemos que $\|h\| = |t_0| < \delta$ y por (2.30)

$$\frac{|f(h)|}{\|h\|} = \frac{t_0^{1+\frac{1}{n}}}{|t_0|} = |t_0^{\frac{1}{n}}| < 1/2$$

lo que es una contradicción.

Sin embargo si es $\mathcal{H}$-diferenciable en 0

Ejemplo 6 (**H-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ M-diferenciabilidad**) Sea X el Espacio de todas las sucesiones de números reales $X = \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / \psi$ es función $\} = \prod_{\lambda \in \Gamma} \mathbb{R}$ (también denotado por $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) con la Topología del Producto de Tikhonov. La función $f: X \to X$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1^2, x_2^2, x_3^2, \ldots)$$

es H-diferenciable en 0, en efecto, primero observemos que $f(0) = 0$ y que

$$\frac{f(th) - f(0)}{t} = \frac{f(th)}{t} = (th_1^2, th_2^2, \ldots)$$

tiende para $0 \in X$ cuando $t \to 0$ y por tanto la Gâteaux derivada en cero debe ser idénticamente nula, esto quiere decir que si f es H-diferenciable en cero, entonces su H-derivada debe ser la función nula, para mostrar esto sea $V \subset X$ cualquier vecindad del cero en X, de aqui podemos hallar $n_i \in \mathbb{N}$ y $\epsilon_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, p)$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{p} \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / |\psi(n_i)| < \epsilon_i\} \subset V \tag{2.31}$$

definamos ahora el abierto básico $U = \bigcap_{i=1}^{p} \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / |\psi(n_i)| < \sqrt{\epsilon_i}\}$ y consideremos $\epsilon > 0$ arbitrario, debemos hallar un $\delta > 0$ que verifica (vea la Definición [7])

$$h \in U \ \wedge \ 0 < |t| < \delta \Rightarrow \frac{f(th)}{t} \in \epsilon V$$

escogamos $\delta = \min_{i=1,2,\ldots,p}\{\frac{\epsilon}{2}, \frac{\sqrt{\epsilon_i}}{2}\}$ de modo que si $h \in U$ y $0 < |t| < \delta$ tendremos $\forall i = 1, 2, \ldots, p$, $|h(n_i)| < \sqrt{\epsilon_i}$ y por tanto

$$\left|\frac{f(th)}{t}(n_i)\right| = |th^2(n_i)| < \epsilon\epsilon_i, \quad \forall i$$

y por (2.31) resulta que $\frac{f(th)}{t\epsilon} \in V \equiv \frac{f(th)}{t} \in \epsilon V$ demostrando que f es H-diferenciable en 0.

Sin embargo f no resulta ser M-diferenciable en 0, para ver esto supongamos por contradicción que lo sea, luego existe una vecindad del cero $U \subset X$ que contiene a un abierto básico de la forma

$$\{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / |\psi(n)| < \epsilon_1, \ \forall n \in I\} \subset U$$

donde $I \subset \mathbb{N}$ es finito. Para esta vecindad se cumple (vea la Definición [6]) que cualquiera que sea la vecindad del cero $V \subset X$ siempre podemos hallar otra vecindad del cero $U' \subset X$ tal que

$$h \in U \wedge th \in U' \Rightarrow \frac{f(th)}{t} \in V \tag{2.32}$$

sea $n_0 \notin I$ y definamos la vecindad del cero

$$V = \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / |\psi(n_0)| < \epsilon_1\}$$

por (2.32) existe una vecindad del cero (que podemos suponer un abierto básico) de la forma

$$U' = \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} / |\psi(n)| < \epsilon_3, \ \forall n \in J\}$$

donde $J \subset \mathbb{N}$ es finito. Para llegar a una contradicción escogamos $h \in X$ tal que $|h(n_0)| < \epsilon_1$, $\forall n \in I$, esto garantiza que $h \in U$, y $t = \min\{\frac{\epsilon_3}{h(n)} : h(n) \neq 0, \forall n \in J\}$, esto garantiza que $th \in U'$, y tal que $t > \frac{\epsilon_1}{h(n_0)^2}$. Por (2.32) tendríamos que $\frac{f(th)}{t} \in V \equiv |th(n_0)^2| < \epsilon_1$ lo que es una contradicción.

Ejemplo 7 **($\mathcal{F}$-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ $S_{\mathcal{F}}$-diferenciabilidad)** Sea X el Espacio del ejemplo anterior. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sean las funciones $\psi_{nj}: \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \to \mathbb{R}$, $(j \in \mathbb{N})$ tal que la función

$$t \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \mapsto (\psi_{n1}(t), \psi_{n2}(t), \dots) \in X$$

sea inyectiva (para ello será suficiente que cada una de las funciones ψ_{nj} sea inyectiva). Definamos ahora la función $f: \mathbb{R} \to X$ por

$$f(t) = (\underbrace{t^2, t^2, \dots, t^2}_{n}, \psi_{n1}(t), \psi_{n2}(t), \psi_{n3}(t), \dots), \quad \forall t \in \langle \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \quad (n \in \mathbb{N})$$

asi tenemos que

$$\text{para } n = 1: \quad f(t) = (t^2, \psi_{11}(t), \psi_{12}(t), \psi_{13}(t), \dots), \quad t \in \langle \frac{1}{2}, 1]$$

$$\text{para } n = 2: \quad f(t) = (t^2, t^2, \psi_{21}(t), \psi_{22}(t), \psi_{23}(t), \dots), \quad t \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2}]$$

$$\text{para } n = 3: \quad f(t) = (t^2, t^2, t^2, \psi_{31}(t), \psi_{32}(t), \psi_{33}(t), \dots), \quad t \in \langle \frac{1}{4}, \frac{1}{3}]$$

$$\dots$$

Esta función es $\mathcal{F}$-diferenciable en $t = 0$ con derivada identicamente nula, pero sin embargo no es $S_{\mathcal{F}}$-diferenciable en este punto.

Ejemplo 8 Aqui tenemos otro ejemplo (Keller, 1964) de función que es $\mathcal{F}$-diferenciable pero no $S_{\mathcal{F}}$-diferenciable. Sea el Espacio Normado de todas las sucesiones acotadas $X = \{\psi: \mathbb{N} \to \mathbb{R} \,/\, \psi \text{ es acotada}\} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la norma del supremo $\|\psi\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\psi(n)|$. Definamos la función $f: X \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ por

$$f(\psi) = \begin{cases} \frac{\psi(n)}{1 - n\psi(n)} & , \text{ si } 1 - n\psi(n) \neq 0 \\ 0 & , \text{ si } 1 - n\psi(n) = 0 \end{cases}$$

entonces f resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable en 0 pero no $S_{\mathcal{F}}$-diferenciable en ese punto.

Ejemplo 9 **($\mathcal{H}$-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ C-diferenciabilidad)** El ejemplo 23 muestra una función que es $\mathcal{H}$-diferenciable en 0 con $\mathcal{H}$-derivada nula alli, pero sin embargo no es C-diferenciable en dicho punto.

Ejemplo 10 **($\mathcal{F}$-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ MS-diferenciabilidad)** Sea el Espacio de todas lsa sucesiones de números reales $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ con la Topología del producto de Tikhonov. Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ definamos

$$h_{nk} = (\underbrace{1, 0, 0, \dots, 0, k}_{n}, 0, 0, \dots)$$

asi por ejemplo

$$\begin{array}{llll} h_{11} = (1, 1, 0, 0, \dots) & h_{12} = (1, 2, 0, 0, \dots) & h_{13} = (1, 3, 0, 0, \dots) & \cdots \\ h_{21} = (1, 0, 1, 0, 0, \dots) & h_{22} = (1, 0, 2, 0, 0, \dots) & h_{23} = (1, 0, 3, 0, 0, \dots) & \cdots \\ h_{31} = (1, 0, 0, 1, 0, 0, \dots) & h_{32} = (1, 0, 0, 2, 0, 0, \dots) & h_{33} = (1, 0, 0, 3, 0, 0, \dots) & \cdots \end{array}$$

definamos ahora la función $f: X \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n} t^{1+\frac{1}{k}} & , \text{ si } x = t h_{nk}, \quad (n, k \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

entonces f resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable pero no MS-diferenciable en 0.

Ejemplo 11 **(M-diferenciabilidad $\not\Rightarrow$ H-diferenciabilidad)** Sea $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y la función $f: X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1 \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k|}{1 + |x_k|}$$

Esta función es M-diferenciable en cualquier punto de X pero no es H-diferenciable en ningún punto.

Ejemplo 12 Este es otro ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y para cada $n, k \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_{nk} = (\underbrace{\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}}_{n}, k, k, k, \ldots)$$

La función $f: X \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{nk} & , \text{ si } x = x_{nk}, \quad (n, k \in \mathbb{N}) \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

resulta ser M-diferenciable, pero no H-diferenciable en 0

Capítulo 3

Propiedades Fundamentales

En el capítulo anterior se dieron varias definiciones de diferenciabilidad en base al concepto de diferenciabilidad generalizada; luego exigimos que dichos métodos satisfagan algunas propiedades básicas de diferenciabilidad, dando lugar a los métodos regulares y casi–regulares de diferenciación. Eneste capítulo estudiaremos con más detalle una de esas diferenciabilidades: la $\sigma-$diferenciabilidad.

Las definiciones son escencialmente las mismas que en el capítulo anterior con la diferencia que las funciones consideradas aqui estás definidas en subconjuntos abiertos $U \subset X$ de un E.V.T. en lugar de estar definidas en todo el Espacio X.

3.1. $\sigma-$derivadas

Definición 3.1 (Gâteaux-Diferenciabilidad) . *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto. Decimos que f es Gâteaux-diferenciable en $x \in U$, si y solo si existen una función homogenea $A : X \to Y$ y una función $r : X \to Y$ tales que:*

$$\begin{aligned} &1. \quad f(x+h) = f(x) + A(h) + r(h), \quad \forall h \in X \text{ con } x+h \in U \\ &2. \quad \forall h \in X, \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{t} = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Desde que la función $A : X \to Y$ es homogénea (y no necesariamente lineal) esta diferenciación no es casiregular. La siguiente proposición da definiciones equivalentes para la Gâteaux-diferenciabilidad:

Proposición 3.1 (Equivalencias para la Gâteaux diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto, entonces son equivalentes:*

1). *f es Gâteaux-diferenciable en x*

2). *Para todo $h \in X$ existe el límite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} \tag{3.2}$$

3). *Existe una función homogenea $A : X \to Y$ tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = A(h), \quad \forall h \in X \tag{3.3}$$

Demostración. En primer lugar observemos que si $U \subset X$ es abierto con $x \in U$ entonces $U - x$ es una vecindad del cero en X, y por tanto podemos hallar una vecindad equilibrada y absorbente del cero V tal que $V \subset U - x$. Asi para cualquier $h \in X$ existe un $\delta = \delta(h) > 0$ tal que $\delta h \in V$. Luego si $t \in < -\delta, \delta >$ y siendo V equilibrado, entonces

$$th = \frac{t}{\delta}(\delta h) \in \frac{t}{\delta} V \subset V \subset U - x$$

esto demuestra que para cualquier $h \in X$ existe un $\delta > 0$ tal que $\forall t \in < -\delta, \delta >$, $x + th \in U$.

(1) $\Rightarrow$ (2). Por definición existen las funciones $A, r : X \to Y$. Sea $h \in X$ cualquiera, luego existe un $\delta > 0$ tal que $\forall t \in < -\delta, \delta >$, $x + th \in U$, y por (3.1)

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{t} = \lim_{t \to 0} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - A(h) \right\} = 0$$

lo que implica que el límite $\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$ existe y es igual a $A(h)$

(2) $\Rightarrow$ (3). Definimos la función $A : X \to Y$ por el límite dado en (3.2), es decir $\forall h \in X$, $A(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+th)-f(x)}{t}$. Es fácil mostrar que la función A asi definida es homogenea.

(3) $\Rightarrow$ (1). La ~~función homogenea~~ $A : X \to Y$ existe por hipótesis; definimos la función $r : X \to Y$ como

$$r(h) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) - A(h) & x + h \in U \\ 0 & x + h \notin U \end{cases}$$

claramente esta función satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.1. □

OBSERVACIÓN.

La función homogenea $A : X \to Y$ en la definición anterior la denotaremos por f'_x y la llamaremos **Gâteaux-derivada** de f en x

Ejemplo 13 Sea X un E.V.T. y consideremos dos Topologías Vectoriales τ_1 y τ_2 sobre X con $\tau_2 \subset \tau_1$ (*i.e.* τ_1 es más fina que τ_2) entonces la función $f : (X, \tau_2) \to (X, \tau_1)$ definida por $f(x) = x$, $\forall x \in X$ resulta ser Gâteaux diferenciable en cada punto $x \in X$ con $f'_x(h) = h$, $\forall h \in X$. En este caso la Gâteaux derivada es Lineal pero no Continua en X.

Ejemplo 14 Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida en el plano Euclidiano $\mathbb{R}^2$ por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{x^2+y^2}, & \text{cuando } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{cuando } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

un cálculo directo mediante la definición permite hallar que la Gâteaux derivada de f en $(0,0)$ existe y está dada por

$$f'_{(0,0)}(h_1, h_2) = \begin{cases} \frac{h_2^3}{h_1^2+h_2^2}, & \text{cuando } (h_1,h_2) \neq (0,0) \\ 0, & \text{cuando } (h_1,h_2) = (0,0) \end{cases}$$

resultando ser una función homogenea continua pero no lineal.

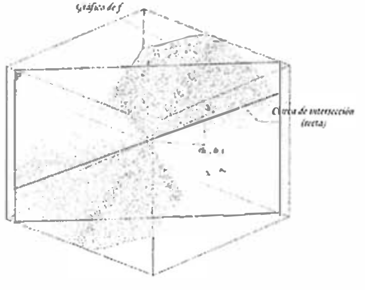


Figura 3.1: Función con Gâteaux Derivada no lineal

Para cualquier (h_1, h_2) la intersección de un plano vertical siguiendo la dirección (h_1, h_2) con la gráfica de f resulta ser una recta.

Ejemplo 15 Sea $\mu : \underbrace{X \times X \times \cdots X}_{n} \to Y$ una función multilineal y continua, y definamos la función $f : X \to Y$ por $f(x) = \mu(\underbrace{x, x, \ldots, x}_{n})$, $\forall x \in X$. Desde que para cualquier función n-lineal se verifica

$$\mu(b_1, b_2, \ldots, b_n) - \mu(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i - a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_n)$$

tenemos que para cualesquier $x, h \in X$

$$f(x + th) - f(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu(x + th, x + th, \ldots, x + th, th, x, x, \ldots, x)$$

de donde

$$f_x'(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = \sum_{i=1}^{n} \mu(x, x, \ldots, x, h, x, x, \ldots, x)$$

Como ya mencionamos anteriormente la Gâteaux-diferenciabilidad no es casiregular, sin embargo cumple las propiedades (D1), (D2) y (D3) de la página 18.

Proposición 3.2 *Sean X, Y dos E.V.T.*

D1). *1.* $f \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow f$ *es Gâteaux-diferenciable en* X *con* $f_x' = f$, $\forall x \in X$

2. $f : U \subset X \to Y$ *es constante en el abierto* $U \Rightarrow f$ *es Gâteaux-diferenciable en* U *con* $f_x' \equiv 0$, $\forall x \in U$

D2). $f : U \subset \mathbb{R} \to Y$ *es Gâteaux-diferenciable en* $x \in U \Leftrightarrow$ *existe el límite* $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

D3). *Si $f, g : U \subset X \to Y$ son Gâteaux-diferenciables en $x \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la función $\alpha f + \beta g$ también es Gâteaux-diferenciable en x con $\left(\alpha f + \beta g\right)'_x = \alpha f'_x + \beta g'_x$*

Demostración. La demostración es inmediata de la definición. □

Sin embargo la regla de la cadena, es decir la propiedad (D4) no siempre se cumple para esta diferenciación.

> **Ejemplo 16** Consideremos las funciones $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas como $f(t) = (t, t^2)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y
>
> $$g(x, y) = \begin{cases} x, & \text{cuando } x = y^2 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$
>
> Se observa que f y g son Gâteaux diferenciables en 0 y $f(0) = (0, 0)$ respectivamente con $f'_0(t) = (t, 0)$ y $g'_{(0,0)} \equiv 0$ aqui se tiene que la composición $g'_{(0,0)} \circ f'_0 = 0$, pero sin embargo la composición $g \circ f(t) = g(t, t^2) = t$ tiene como Gâteaux derivada a la identidad $(g \circ f)'_0(t) = t$.

Además no existe relación alguna entre la continuidad y la linealidad de la Gâteaux-derivada de una función. Es decir, si $f : U \subset X \to Y$ es Gâteaux-diferenciable en $x \in U$ entonces

a). Si $f'_x : X \to Y$ es continua, entonces no necesariamente es lineal

b). Si $f'_x : X \to Y$ es lineal, entonces no necesariamente es continua

> **Ejemplo 17** El ejemplo 14 muestra que la Gâteaux derivada $f'_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es continua pero no lineal.

> **Ejemplo 18** Cualquier función lineal $f : X \to Y$ entre dos E.V.T. X, Y que no sea continua es un ejemlo (el ejemplo 13 da una función de este tipo).

Definición 3.2 (σ−diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia de subconjuntos acotados de X que verifica (1.6) tal que $X \subset \bigcup_{A \in \sigma} A$. Decimos que f es σ−diferenciable en $x \in U$ si y solo si existen funciones $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $r : X \to Y$ tales que*

$$1. \quad f(x + h) = f(x) + T(h) + r(h), \quad \forall h \in X \text{ con } x + h \in U \tag{3.4}$$

$$2. \quad \forall S \in \sigma, \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(th)}{t} = 0 \text{ uniformemente respecto de } h \text{ en } S \tag{3.5}$$

OBSERVACIONES

1. La convergencia uniforme quiere decir que para cualquier vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall t : 0 < |t| < \delta, \ \forall h \in S, \quad \frac{r(th)}{t} \in V_0$$

2. Lascondiciones impuestas sobre la familia σ hacen del Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$ un E.V.T. con la σ−Topología que además es Localmente Convexo [de Hausdorff] cuando Y sea Localmente Convexo [de Hausdorff] (vea los Teoremas 1.21, 1.22 y Corolarios)

3. Si consideramos las familias $\sigma_1, \sigma_2 \subset \mathcal{P}(X)$ como en la definición 3.2 entonces la σ_1 diferenciabilidad es más fuerte que la σ_2 diferenciabilidad en cualquiera de los siguientes casos

   1. $\sigma_2 \subset \sigma_1$

2. σ_2 es cualquier sistema de subconjuntos de los conjuntos de σ_1, es decir que para cada $S \in \sigma_2$ existe un $S_0 \in \sigma_1$ tal que $S \subset S_0$

3. σ_2 está formado por por uniones finitas de conjuntos de σ_1, es decir para cada $S \in \sigma_2$ existen $S_1, S_2, \ldots, S_n \in \sigma_1$, $(n \in \mathbb{N})$ tales que $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n$

Para comprobar esto en cualquier caso será suficiente mostrar que $\mathcal{R}_1(X,Y) \subset \mathcal{R}_2(X,Y)$ donde

$$\mathcal{R}_i(X,Y) = \{r : X \to Y / \forall S \in \sigma_i, \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0 \text{ unif. resp. de } h \in S\}, \quad (i = 1,2)$$

Una forma equivalente de definir la $\sigma-$derivada nos lo da la siguiente proposición

Proposición 3.3 (Equivalencia para la $\sigma-$derivada) *Con las mismas condiciones de la Definición 3.2. La función f es $\sigma-$diferenciable en x si y solo si existe una función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$\forall S \in \sigma, \quad \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - T(h) \right\} = 0 \tag{3.6}$$

uniformemente respecto de h en S

Demostración. Primeramente observemos que siendo cada miembro $S \in \sigma$ un subconjunto acotado entonces para la vecindad del cero $U - x$ existe un $\delta > 0$ tal que $|t| < \delta \Rightarrow tS \subset U - x$ (vea Teorema 1.5), es decir que para cualquier $S \in \sigma$ existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \Rightarrow \forall h \in S, \quad x + th \in U$$

($\Rightarrow$) La definición asegura la existencia de $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r : X \to Y$. sea $S \in \sigma$ cualquiera, por lo anterior existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$ podemos escribir $r(th) = f(x+th) - f(x) - tT(h)$, $\forall h \in S$ y por (3.5)

$$\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - T(h) \right\} = 0$$

uniformemente respecto de h en S.

($\Leftarrow$). La función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ existe por hipótesis y verifica (3.6), definimos la función $r : X \to Y$ como

$$r(h) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) - T(h), & \text{si } x + h \in U \\ 0, & \text{si } x + h \notin U \end{cases}$$

es fácil comprobar que esta función satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.2. $\square$

La unicidad de la función $T : X \to Y$ en la definición anterior se comprueba fácilmente desde que por hipótesis la familia σ cubre a X. A esta función la denotaremos por $f'_\sigma(x)$ y la llamaremos **$\sigma-$derivada** de f en x.

Ejemplo 19 Sea $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+y^2}^3}{|y|} e^{-\frac{x^2+y^2}{|y|}}, & \text{cuando } y \neq 0 \\ 0, & \text{cuando } y = 0 \end{cases}$$

esta función tiene derivada direccional nula en el punto $(0,0)$ y en cualquier dirección (h_1, h_2), en efecto pues para $h_2 \neq 0$ la expresión

$$\frac{f(th_1, th_2)}{t} = \frac{1}{t}\left\{\frac{|t|^3\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3}{|t||h_2|}e^{-\frac{t^2(h_1^2+h_2^2)}{|t||h_2|}}\right\} = t\frac{\sqrt{h_1^2+h_2^2}^3}{|h_2|}e^{-|t|\frac{h_1^2+h_2^2}{|h_2|}}$$

tiende a cero cuando $t \to 0$(para $h_2 = 0$ es inmediato que $\lim_{t\to 0}\frac{f(th_1,th_2)}{t} = 0$), es decir f es $\mathcal{G}$-diferenciable en $(0,0)$ con $\mathcal{G}$-derivada $f'_{\mathcal{G}}(0,0) \equiv 0$. Sin embargo no es $\mathcal{F}$-diferenciable en $(0,0)$ pues la expresión

$$\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}^3}{|y|\sqrt{x^2+y^2}}e^{-\frac{x^2+y^2}{|y|}} = \frac{x^2+y^2}{|y|}e^{-\frac{x^2+y^2}{|y|}}$$

no tiene límite cuando $(x,y) \to (0,0)$, basta con aproximarse con valores positivos de y a lo largo de la circunferencia $x^2 + y^2 = 2y$.

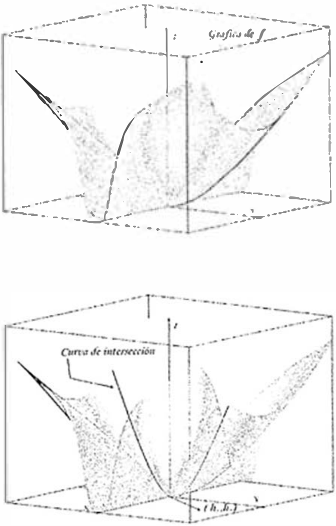


Figura 3.2: Función $\mathcal{G}$ diferenciable pero no $\mathcal{F}$ diferenciable

En la primera figura se muestra la gráfica de la función f, y en la segunda la misma gráfica y la curva de intersección con un plano vertical en la dirección (h_1, h_2)

Ejemplo 20 Sean X un Espacio de Hilbert Real y $A \in \mathcal{L}(X, X)$ cualquier operador autoadjunto continuo. Definamos la funcional $f: X \to \mathbf{R}$ por $f(x) = \frac{1}{2} < Ax, x >$, $\forall x \in X$, como para cualquier $x \in X$ se verifica

$$\begin{aligned} f(x+h) - f(x) &= \frac{1}{2}(< Ax + Ah, x + h > - < Ax, x >) \\ &= \frac{1}{2}(< Ax, h > + < Ah, x > + < Ah, h >) \\ &= < Ax, h > + \frac{1}{2} < Ah, h > \end{aligned}$$

entonces f resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable en cada punto $x \in X$ con $\mathcal{F}$-derivada dada por $f'_{\mathcal{F}}(x)(h) = < Ah, x >$, $\forall h \in X$

Ejemplo 21 Sea X un Espacio de Hilbert Real, la funcional $f: X \to \mathbf{R}$, definida por $f(x) = \|x\|$, $\forall x \in X$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en cualquier $x \in X - \{0\}$ con $\mathcal{F}$-derivada dada por $f'_{\mathcal{F}}(x)(h) = < \frac{x}{\|x\|}, h >$, $\forall h \in X$. En efecto, para $x \neq 0$ usamos el ejemplo anterior con $A = I$ y la regla de la cadena (Teorema 3.2). Cuando $x = 0$ tenemos que $\frac{f(th)}{t} = \frac{|t|\|h\|}{t}$ que no tiene límite cuando $t \to 0$ si h es diferente de cero.

Ejemplo 22 Sea la función $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{cuando } x^2 \leqslant |y| \quad \vee \quad y = 0 \\ 1, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces f no tiene $\mathcal{H}$-derivada en $(0, 0)$ (que es equivalente a la $\mathcal{F}$-derivada) ya que es discontinua allí; pero sin embargo la $\mathcal{G}$-derivada si existe y es identicamente nula en $(0, 0)$.

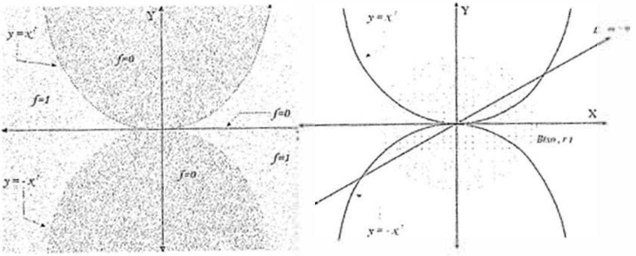


Figura 3.3: Función $\mathcal{G}$ diferenciable pero no $\mathcal{H}$ diferenciable

Desde que las rectas tangentes a la parábolas mostradas en el punto $(0,0)$ son horizontales (pendiente nula), para cualquier recta L que pase por el origen y de pendiente $m > 0$, se podrá tener una vecindad del cero $U_0 = B(x_0, r)$ tal que en $L \cap U_0$ la función en nula.

Ejemplo 23 Sean el Espacio $X = \{f : <0,1> \to \mathbb{R} / f$ es función $\}$ y K el conjunto de todas las funciones características de todos los conjuntos que son uniones de intervalos en $<0,1>$ con extremos racionales y que tienen medida mayor que $1/2$, entonces K es relativamente compacto en X pero no es relativa secuencialmente compacto en X. Denotamos por $K = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ y definamos la función $f : X \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \begin{cases} t^{1+\frac{1}{n}}, & \text{si } x = tx_n \ (n \in \mathbb{N}) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

La función f resulta ser $\mathcal{H}$-diferenciable en 0 pero no es $\mathcal{C}$-diferenciable en 0.

Dependiendo de la elección de la familia σ el método de diferenciación resultante puede ser casiregular o no; pero en general la $\sigma-$diferenciabilidad cumple las siguientes propiedades.

Proposición 3.4 *Con las mismas condiciones de la Definición 3.2.*

D1). *1.* $f \in \mathcal{L}(X,Y) \Rightarrow f$ *es σ-diferenciable en X con* $f'_\sigma(x) = f$, $\forall x \in X$

2. $f : U \subset X \to Y$ *es constante en el abierto* $U \Rightarrow f$ *es $\sigma-$diferenciable en U con* $f'_\sigma(x) \equiv 0$, $\forall x \in U$

D2). $f : U \subset \mathbb{R} \to Y$ *es $\sigma-$diferenciable en* $x \in U \Leftrightarrow$ *existe el límite* $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

D3). *Si* $f, g : U \subset X \to Y$ *son $\sigma-$diferenciables en* $x \in U \Rightarrow \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, *la función* $\alpha f + \beta g$ *también es $\sigma-$diferenciable en x con* $(\alpha f + \beta g)'_\sigma(x) = \alpha f'_\sigma(x) + \beta g'_\sigma(x)$

Demostración. (D1) Si $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ será suficiente considerar $T = f$ y $r \equiv 0$. Cuando f es constante en U se considera $T = r \equiv 0$. Mostremos (D2), supongamos primeramente que f es $\sigma-$diferenciable en $x \in U \subset \mathbb{R}$ entonces existen $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, Y)$ y $r : \mathbb{R} \to Y$ que verifican la Definición 3.2. Como la familia σ cubre a $\mathbb{R}$ entonces $1 \in S$, para algún $S \in \sigma$ y por (3.5) resulta que $\lim_{t\to 0} \frac{r(t)}{t} = 0$. Además por (3.4) podemos escribir

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \left\{T(1) + \frac{r(h)}{h}\right\} = T(1)$$

Recíprocamente, supongamos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lambda$, definamos la función lineal y continua $T : \mathbb{R} \to Y$ por $T(t) = \lambda t$ y la función $r : \mathbb{R} \to Y$ por

$$r(h) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) - T(h), & \text{si } x + h \in U \\ 0, & \text{si } x + h \notin U \end{cases}$$

fijemos un $S \in \sigma$ cualquiera, desde que S es acotado podemos hallar un $r_0 > 0$ tal que $\forall h \in S, |h| \leqslant r_0$. Claramente se satisface (3.4), para mostrar (3.5), sea $V_0 \subset Y$ cualquier vecindad equilibrada del cero en Y entonces existe un $\delta > 0$ tal que para $0 < |t| < \delta$ se cumple

$$\frac{f(x+t) - f(x)}{t} - \lambda = \frac{r(t)}{t} \in \frac{1}{r_0} V_0$$

luego si $0 < |t| < \frac{\delta}{r_0}$ y $h \in S$ entonces $0 < |th| < \delta$ y por lo tanto $\frac{r(th)}{th} \in \frac{1}{r_0}V_0 \equiv \frac{r(th)}{t} \in \frac{h}{r_0}V_0 \subset V_0$. Esto demuestra que f es $\sigma-$diferenciable en x. (D3) es una consecuencia inmediata de la definición. □

Paa funciones arbitrarias el papel del producto de funciones es representado mediante funciones multilineales. Los siguientes lemas ayudarán a demostrar el teorema que sigue

Lema 3.1 *Con las mismas condiciones de la Definición 3.2. Si la función f es σ-diferenciable en x_0 entonces*

$$\forall S \in \sigma, \quad \lim_{t\to 0} f(x_0 + th) = f(x_0) \text{ uniformemente respecto de } h \in S$$

Demostración. Por definición de σ-diferenciabilidad podemos hallar $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r\colon X \to Y$ que verifican (3.4) y (3.5). Sean $S \in \sigma$ y $V \subset Y$ vecindad del cero en Y cualesquiera y denotemos por V_0 la vecindad equilibrada del cero tal que $V_0 + V_0 \subset V$, como en la demostración de la Proposición 3.3 existe un $\delta_1 > 0$ tal que para cualesquier $h \in S$ y $0 < |t| < \delta_1$ se cumple que $x_0 + th \in U$, podemos escribir entonces

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = tT(h) + r(th), \quad \forall h \in S, \forall t : 0 < |t| < \delta_1$$

por (3.5) existe un $\delta_2 > 0$ (que podemos suponer menor que 1) tal que

$$0 < |t| < \delta_2 \wedge h \in S \Rightarrow r(th) \in tV_0 \subset \delta_2 V_0 \subset V_0$$

como T es continua y $S \subset X$ es acotado, entonces $T(S) \subset Y$ es acotado y por tanto (vea el Teorema 1.5) existe un $\delta_3 > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta_3 \Rightarrow tT(S) \subset V_0$$

si tomamos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3, 1\}$ entonces para $0 < |t| < \delta$ y $h \in S$ cualesquiera tenemos

$$f(x_0 + th) - f(x_0)tT(h) + r(th) \in V_0 + V_0 \subset V$$

demostrando el lema □

Lema 3.2 *Sean $f : U \subset X \to X_1$ y $g : U \subset X \to X_2$ definidas en el abierto U tales que $\lim_{t\to 0} f(th) = 0$ y $\lim_{t\to 0} g(th) = \lambda \in X_2$ uniformemente respecto de h en cada miembro de una familia $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ definida como en la Definición 3.2. Si $\mu : X_1 \times X_2 \to Y$ es una función bilineal y continua entonces*

$$\forall S \in \sigma, \quad \lim_{t\to 0} \mu\big(f(th), g(th)\big) = 0, \text{ uniformemente respecto de } h \in S$$

Demostración. Sean $S \in \sigma$ y $V \subset Y$ vecindad del cero en Y cualesquiera, como la función bilineal μ es continua en $(0, \lambda)$ con $\mu(0, \lambda) = 0$, podemos hallar vecindades del cero $U_1 \subset X_1$ y $U_2 \subset X_2$ tales que

$$x_1 \in U_1 \wedge x_2 \in \lambda + U_2 \Rightarrow \mu(x_1, x_2) \in V$$

por la hipótesis de convergencia uniforme para las funciones f y g existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta$ y $h \in S$ entonces $f(th) \in U_1$ y $g(th) - \lambda \in U_2$ y por lo anterior resulta que $\mu\big(f(th), g(th)\big) \in V$ demostrando el lema. □

Teorema 3.1 (Diferenciabilidad del producto) *Sean X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, X, Y E.V.T.; $\mu : X_1 \times X_2 \times \cdots X_n \to Y$ una función multilineal continua; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2 y para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ la función $f_i : U \subset X \to X_i$ $\sigma-$diferenciable en $x_0 \in U$ (donde U es abierto) entonces la función $\psi : U \subset X \to Y$ definida por*

$$\psi(x) = \mu(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)), \quad \forall x \in U$$

es $\sigma-$diferenciable en x_0, cumpliéndose además que

$$\psi'_\sigma(x_0)(h) = \sum_{i=1}^{n} \mu(f_1(x_0), \ldots, f_{i-1}(x_0), f'_i(x_0)(h), f_{i+1}(x_0), \ldots, f_n(x_0))$$

Demostración. Para evitar notaciones engorrosas demostraremos el teorema para $n = 2$. Primeramente notemos que la función $h \in X \mapsto \mu(f'_1(x_0)h, f_2(x_0)) + \mu(f_1(x_0), f'_2(x_0)h) \in Y$ es lineal y continua, denotemos a esta función por T, además desde que para cualquier función n-lineal se verifica la igualdad

$$\mu(b_1, b_2, \ldots, b_n) - \mu(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{i=1}^{n} \mu(b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}, b_i - a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1}, a_n) \quad (3.7)$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
&\frac{\psi(x_0 + th) - \psi(x_0)}{t} \\
&= \frac{\mu\Big(f_1(x_0 + th), f_2(x_0 + th)\Big) - \mu\Big(f_1(x_0), f_2(x_0)\Big)}{t} \\
&= \frac{1}{t}\Big\{\mu(f_1(x_0+th) - f_1(x_0), f_2(x_0)) + \mu(f_1(x_0+th), f_2(x_0 + th) - f_2(x_0))\Big\} \\
&= \mu\Big(\frac{f_1(x_0 + th) - f_1(x_0)}{t}, f_2(x_0)\Big) + \mu\Big(f_1(x_0 + th), \frac{f_2(x_0 + th) - f_2(x_0)}{t}\Big) \\
&= \mu\Big(\frac{f_1(x_0 + th) - f_1(x_0)}{t}, f_2(x_0)\Big) + \mu\Big(f_1(x_0 + th) - f_1(x_0), \frac{f_2(x_0 + th) - f_2(x_0)}{t}\Big) \\
&\quad + \mu\Big(f_1(x_0), \frac{f_2(x_0 + th) - f_2(x_0)}{t}\Big)
\end{aligned}$$

y por tanto

$$\begin{aligned}
\frac{\psi(x_0 + th) - \psi(x_0)}{t} - Th = {}& \mu\Big(\frac{f_1(x_0 + th) - f_1(x_0)}{t} - f'_1(x_0)(h), f_2(x_0)\Big) \\
&+ \mu\Big(f_1(x_0), \frac{f_2(x_0 + th) - f_2(x_0)}{t} - f'_2(x_0)(h)\Big) \\
&+ \mu\Big(f_1(x_0 + th) - f_1(x_0), \frac{f_2(x_0 + th) - f_2(x_0)}{t}\Big)
\end{aligned}$$

la continuidad de μ y los dos lemas anteriores demuestran que $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(x_0+th)-\psi(x_0)}{t} - Th = 0$ uniformemente respecto de h en cada miembro de σ □

La regla de la cadena se verifica dependiendo de la familia σ. Sean X, Y, Z tres E.V.T. y $\sigma_1 \subset \mathcal{P}(X), \sigma_2 \subset \mathcal{P}(Y)$ familias de subconjuntos acotados como en la Definición 3.2. Supongamos que ambas familias son del mismo tipo (por ejemplo $\sigma_1 = \mathcal{H}_X$ y $\sigma_2 = \mathcal{H}_Y$ familias de todos los subconjuntos secuencialmente compactos en X e Y respectivamente). Este tipo de diferenciabilidad se dice que tiene la **propiedad de composición** cuando para las funciones $f : U \subset X \to Y$ función σ_1-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ (donde U es abierto) y $g : V \subset Y \to Z$ función σ_2-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ (donde V es abierto con $f(U) \subset V$) resulta que la función composición $g \circ f : U \subset X \to Z$ es σ_1-diferenciable en x_0 donde además se cumple

$$(g \circ f)'_{\sigma_1}(x_0) = g'_{\sigma_2}(y_0) \circ f'_{\sigma_1}(x_0)$$

Teorema 3.2 (Diferenciabilidad de la composición – Regla de la cadena) .

a). *La $\mathcal{F}$-diferenciabilidad tiene la propiedad de composición.*

b). *La $\mathcal{H}$-diferenciabilidad tiene la propiedad de composición.*

c). *La $\mathcal{G}$-diferenciabilidad no tiene la propiedad de composición.*

Demostración. Las demostraciones de (a) y (b) son totalmente análogas, así que solo mostramos (b). Tenemos las funciones $f : U \subset X \to Y$, $\mathcal{H}_X$-diferenciable en $x_0 \in U$ y $g : V \subset Y \to Z$, $\mathcal{H}_Y$-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ donde U y V son abiertos con $f(U) \subset V$. Denotemos $f'_{\mathcal{H}_X}(x_0) = T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y $g'_{\mathcal{H}_Y}(y_0) = R \in \mathcal{L}(Y, Z)$, y observemos que se puede escribir

$$\begin{aligned}
g \circ f(x_0 + h) &- g \circ f(x_0) \\
&= g\Big(f(x_0) + [f(x_0 + h) - f(x_0)]\Big) - g(f(x_0)) \\
&= g\Big(f(x_0) + [f(x_0 + h) - f(x_0)]\Big) - g(f(x_0)) + R[f(x_0 + h) - f(x_0)] \\
&\quad - R[f(x_0 + h) - f(x_0)] + R \circ T(h) - R \circ T(h) \\
&= R \circ T(h) + R[f(x_0 + h) - f(x_0) - Th] \\
&\quad + \Big\{g\Big(y_0 + [f(x_0 + h) - f(x_0)]\Big) - g(y_0)\Big\} - R[f(x_0 + h) - f(x_0)]
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Por contradicción supongamos que $R \circ T \in \mathcal{L}(X, Z)$ no sea la $\mathcal{H}_X$-derivada de $g \circ f$ en x_0, entonces existen $A \in \mathcal{H}_X$ ((i.e.) $A \subset X$ secuencialmente compacto), $W \subset Z$ vecindad del cero en Z y sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{g \circ f(x_0 + t_n h_n) - g \circ f(x_0)}{t_n} - R \circ T(h_n) \notin W$$

que por (3.8) podemos escribir

$$R\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\Big) + \frac{g\Big(y_0 + t_n \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\Big) - g(y_0)}{t_n} - R\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\Big) \notin W$$

si denotamos $y_n = \frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n}$ entonces tendremos que

$$R(y_n - T(h_n)) + \frac{g(y_0 + t_n y_n) - g(y_0)}{t_n} - R(y_n) \nrightarrow 0 \tag{3.9}$$

Como $A \subset X$ es secuencialmente compacto y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ podemos suponer que $h_n \to h \in A$ resultando que el conjunto $\{h_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{h\}$ es secuencialmente compacto en X y siendo f función $\mathcal{H}_X$-diferenciable en x_0 entonces para cualquier vecindad $V \subset Y$ del cero en Y podemos escribir (recuerde que $t_n \to 0$ y por tanto para cualquier $\delta > 0$ podemos hallar un $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |t_n| < \delta$, $\forall n \geqslant N_0$)

$$y_n - T(h_n) = \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n) \in V, \quad \forall n \geqslant \text{algun } n_0$$

es decir $y_n - T(h_n) \to 0$ y siendo $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$ entonces

$$R(y_n - T(h_n)) \to 0 \tag{3.10}$$

Además $y_n = Th_n + (y_n - T(h_n))$ y como los conjuntos $\{T(h_n)/n \in \mathbb{N}\} \cup \{Th\} \subset Y$ y $\{y_n - T(h_n)/n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ son secuencialmente compactos (el primero porque $\{h_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{h\}$ es secuencialmente compacto y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ y el segundo porque $y_n - T(h_n) \to 0$) resulta que $\{y_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{Th\}$ es secuencialmente compacto y siendo g función $\mathcal{H}_Y$-diferenciable en y_0 tendremos que

$$\frac{g(y_0 + t_n y_n) - g(y_0)}{t_n} - R(y_n) \to 0 \tag{3.11}$$

(3.10) y (3.11) conjuntamente llevan a una contradicción con (3.9), por consiguiente $g \circ f$ es $\mathcal{H}_X$-diferenciable en x_0 con $(g \circ f)'_{\mathcal{H}_X}(x_0) = g'_{\mathcal{H}_Y}(y_0) \circ f'_{\mathcal{H}_X}(x_0)$

(c) En el ejemplo 16, las funciones f, g y $g \circ f$ son $\mathcal{G}$-diferenciables, en 0, $f(0) = (0, 0)$ y 0 respectivamente, sin embargo no se verifica la igualdad $(g \circ f)'_{\mathcal{G}}(0) = g'_{\mathcal{G}}[f(0)] \circ f'_{\mathcal{G}}(0)$

□

OBSERVACIÓN

La composición $g \circ f$ de una función $\mathcal{F}$-diferenciable f en x y una función $\mathcal{G}$-diferenciable g en $f(x)$ puede no ser diferenciable de ningún tipo.

Ejemplo 24 Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ y $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidas por $f(t) = (t\cos(t), t\sin(t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\arctan^2(\frac{y}{x})} & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

La función f es $\mathcal{F}$-diferenciable en $t = 0$ y g es $\mathcal{G}$-diferenciable en $(0, 0)$ pero la composición $g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ no es diferenciable (más aún no es continua) en $t = 0$

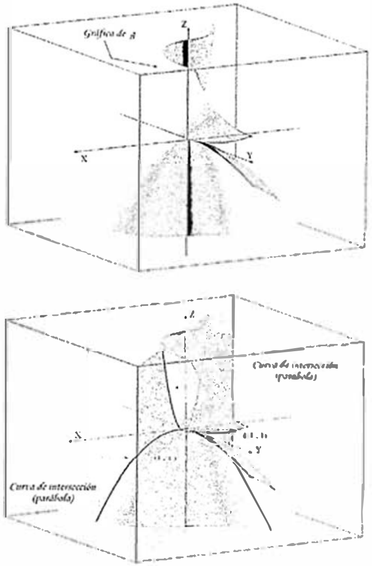


Figura 3.4: Gráfica de la función g y la existencia de la $\mathcal{G}$ derivada en $(0,0)$

En la primera figura se muestra la gráfica de $\mathcal{G}$ y en la segunda las curvas de intersección con planos verticales en las direcciones $(1,1)$ y $(-1,1)$

Para demostrar el siguiente teorema recordemos los siguientes lemas.

Lema 3.3 *Sean X, Y dos E.V.T donde X es Normado y $f : U \subset X \to Y$ definida en una vecindad U del cero en X se cumple:*

a). $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0, \quad \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U - \{0\}$, con $x_n \to 0$

b). $\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$ con $x_n \to 0, \quad f(x_n) \to 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = 0$

Demostración (a.) Sea la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U - \{0\}$ con $x_n \to 0$ y consideremos $0 \in V_0 \subset Y$ una vecindad del arbitraria del cero en Y, como por hipótesis $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ entonces podemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$\forall x \in U, \text{ con } 0 < \|x\| < \delta, \quad f(x) \in V_0$$

Además sabiendo que $x_n \to 0$ podemos asegurar la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 < \|x_n\| < \delta$$

de donde podemos decir $\forall n \geqslant n_0$, $f(x_n) \in V_0$ y esto demuestra $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$

(b.) Por contradicción supongamos que $\lim_{x\to 0} f(x) \neq 0$, esto quiere decir que podemos hallar una vecindad $0 \in V_0 \subset Y$ del cero en Y tal que

$$\forall \delta > 0, \exists x \in U : 0 < \|x\| < \delta \wedge f(x) \notin V_0$$

Asi podemos hallar una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U - \{0\}$ con $x_n \to 0$ y de modo que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(x_n) \notin V_0$$

y esto es una contradicción con la hipótesis, pues según ésta se debe verificar que $f(x_n) \to 0$ □

Lema 3.4 *Sea X un E.V.T. cualquiera y $f : \mathbb{R} \to X$ tal que existe el límite* $\lim_{t\to 0} f(t)$, *entonces* $\lim_{t\to 0} t f(t) = 0$

Demostración. Denotemos por $\lim_{t\to 0} f(t) = x_0 \in X$ y sea $V_0 \subset X$ cualquier vecindad del cero en X y V^s la vecindad equilibrada del cero con $V^s \subset V_0$ entonces existe un $\delta_1 > 0$ tal que $x_0 \in \frac{1}{\delta_1}V^s$. Para la vecindad del cero $\frac{1}{\delta_1}V^s - x_0$ existe un $\delta_2 > 0$ de modo que $0 < |t| < \delta_2$ implica

$$f(t) - x_0 \in \frac{1}{\delta_1}V^s - x_0 \equiv f(t) \in \frac{1}{\delta_1}V^s$$

Sea $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ y $0 < |t| < \delta$ entonces $tf(t) \in \frac{t}{\delta_1}V^s \subset V^s \subset V_0$, la penúltima inclusión es debido a que V^s es equilibrada. Esto demuestra que $\lim_{t\to 0} tf(t) = 0$ □

El siguiente teorema resume algunas equivalencias demostradas en el capítulo anterior.

Teorema 3.3 (Equivalencias para la $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto. Entonces se cumple:*

1). *f es $\mathcal{G}$-diferenciable en x si y solo si existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$\forall h \in X, \quad \lim_{t\to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t} = T(h) \tag{3.12}$$

2). *f es $\mathcal{H}$-diferenciable en x si y solo si existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para cualquier función $\phi : X \to U$ que verifique*

   a). $\phi(0) = x$

   b). $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t} = \phi'(0)$ *existe en X*

se cumple que

$$T(\phi'(0)) = \lim_{t\to 0} \frac{f[\phi(t)] - f[\phi(0)]}{t} \tag{3.13}$$

3). *Cuando X es un Espacio Vectorial Normado. f es $\mathcal{F}$-diferenciable en x si y solo si existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - T(h)}{\|h\|} = 0 \tag{3.14}$$

Demostración

(1) Esto fue demostrado en Teorema 2.5 del capítulo anterior.

(2)($\Rightarrow$) Por el Teorema 2.6 la $\mathcal{H}$-diferenciabilidad es equivalente a la Hadamard diferenciabilidad, por tanto existen $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $r : X \to Y$ tales que se verifica

$$1. \quad f(x+h) = f(x) + T(h) + r(h), \quad \forall h : x+h \in U \tag{3.15}$$

$$2. \quad \left(\psi : \mathbb{R} \to X \text{ con } \psi(0) = 0 \text{ y } \exists \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t}\right) \Rightarrow \lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0 \tag{3.16}$$

Sea $\phi : X \to U$ cualquier función que verifique (a) y (b) de la hipótesis y definamos la función $\psi : \mathbb{R} \to X$ por $\psi(t) = \phi(t) - x$, entonces $\psi(0) = \phi(0) - x = 0$ y además $\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)-x}{t} = \phi'(0)$. Por (3.16) resulta que $\lim_{t\to 0} \frac{r[\phi(t)-x]}{t} = 0$ y por (3.15) podemos escribir

$$0 = \lim_{t\to 0} \left\{ \frac{f[\phi(t)] - f(x)}{t} - T\left(\frac{\phi(t) - x}{t}\right)\right\} = \lim_{t\to 0} \frac{f[\phi(t)] - f[\phi(0)]}{t} - T[\phi'(0)]$$

verificándose (3.13)

($\Leftarrow$) Nuevamente será suficiente probar que f es Hadamard diferenciable en x. Por hipótesis existe una función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.13), definamos la función $r : \mathbb{R} \to X$ por

$$r(h) = \begin{cases} f(x+h) - f(x) - T(h), & \text{si } x+h \in U \\ 0, & \text{si } x+h \notin U \end{cases}$$

Sea ahora $\psi : \mathbb{R} \to X$ con $\psi(0) = 0$ tal que $\exists \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t}$ debemos mostrar que

$$\lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$$

por el lema anterior resulta que $\lim_{t\to 0} \psi(t) = 0$ y por tanto podemos hallar un $\delta_1 > 0$ tal que $\psi(t) \in U - x$ siempre que $|t| < \delta_1$. Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \to U$ por

$$\phi(t) = \begin{cases} \psi(t) + x, & \text{cuando } t \in < \delta_1, \delta_1 > \\ x, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que claramente verifica $\phi(0) = x$ y $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t} = \phi'(0)$, es decir se satisfacen las hipóetsis (a) y (b) y en consecuencia se cumple

$$T[\phi'(0)] = \lim_{t\to 0} \frac{f[\phi(t)] - f[\phi(0)]}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f[\psi(t) + x] - f(x)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)] + T[\psi(t)]}{t}$$

de donde resulta

$$T[\phi'(0)] = \lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} + T\left[\lim_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{t}\right] = T[\phi'(0)]$$

ypor tanto obtenemos $\lim_{t\to 0} \frac{r[\psi(t)]}{t} = 0$

(3)($\Rightarrow$) Por hipótesis existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.6) con la familia $\sigma = \mathcal{F}$. Sea la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X - \{0\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x + h_n \in U$ y además $h_n \to 0$ según el lema anterior debemos mostrar

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+h_n) - f(x) - T(h_n)}{\|h_n\|} = 0$$

para ello definamos los reales $\kappa_n = \|h_n\|$, $\forall n$ de donde resulta que el conjunto $B = \{\frac{h_n}{\kappa_n} / n \in \mathbb{N}\}$ es acotado en X (*i.e.* es un miembro de $\mathcal{F}$) y por tanto el límite (3.6) es uniforme respecto de h en B, o equivalentemente para cualquier vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t : 0 < |t| < \delta, \quad \frac{f(x + t\frac{h_n}{\kappa_n}) - f(x)}{t} - T(\frac{h_n}{\kappa_n}) \in V_0$$

Además como $\kappa_n \to 0$ podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\forall n \geqslant n_0, \quad 0 < \kappa_n < \delta$$

de estos dos últimos resultados podemos decir que para tal n_0 se verifica

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{f(x + \kappa_n \frac{h_n}{\kappa_n}) - f(x)}{\kappa_n} - T(\frac{h_n}{\kappa_n}) = \frac{f(x + h_n) - f(x) - T(h_n)}{\|h_n\|} \in V_0$$

como queriamos demostrar.

($\Leftarrow$) Por contradicción, supongamos que f no es $\mathcal{F}$-diferenciable en x, luego para la función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.14) existen $S \in \mathcal{F}$ (*i.e.* un subconjunto acotado de X) y una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tales que

$$\forall \delta > 0,\ \exists h \in S,\ \exists t : 0 < |t| < \delta \Big/ \frac{f(x+th) - f(x)}{t} - T(h) \notin V_0 \tag{3.17}$$

Notemos que los $h \in S$ anteriores son no nulos, pues de lo contrario tendríamos que $-T(0) = 0 \notin V_0$. Asi podemos hallar dos sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S - \{0\}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ (que podemos suponer de términos todos positivos o bién todos negativos [1] digamos que todos son negativos), tales que

i. $(h_n)_n \subset X$ es una sucesión acotada con $h_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii. $t_n \to 0$ donde además $t_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

iii. $\frac{f(x+t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h_n) \notin V_0$, $\quad \forall n \in \mathbb{N}$

[1] en realidad sería una subsucesión de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Si definimos $y_n = t_n h_n$ entonces la sucesión $(y_n)_n \subset X - \{0\}$ es tal que $y_n \to 0$ (ya que por (*i*) la sucesión $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada) y por hipótesis

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+y_n) - f(x) - T(y_n)}{\|y_n\|} = \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(x+t_n h_n) - f(x)}{-t_n\|h_n\|} + \frac{T(h_n)}{\|h_n\|} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{\|h_n\|} \right\} \left\{ -\frac{f(x+t_n h_n) - f(x)}{t_n} + T(h_n) \right\} \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x+t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h_n) = 0$$

lo que contradice (iii.) □

Tenemos las siguientes equivalencias para la diferenciabilidad de Hadamard.

Teorema 3.4 (Equivalencias de la Diferenciabilidad de Hadamard) *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto y $x \in X$, entonces son equivalentes:*

1). *f es Hadamard-diferenciable en x*

2). *Existe una función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para cualquier función $\phi : \mathbb{R} \to U$ que verifique*

   1. $\phi(0) = x$

   2. $\lim_{t\to 0} \frac{\phi(t)-\phi(0)}{t} = \phi'(0)$ *existe en X*

   entonces

$$T[\phi'(0)] = \lim_{t\to 0} \frac{f[\phi(t)] - f[\phi(0)]}{t}$$

3). *f es $\mathcal{H}$-diferenciable en x*

4). *Existe una función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que para cualesquier par de sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $h_n \to h$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ se cumple*

$$T(h) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x+t_n h_n) - f(x)}{t_n} \tag{3.18}$$

5). *Cuando la Topologia de X es metrizable. Existe una función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$T(h) = \lim_{\substack{t\to 0 \\ u\to h}} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t}, \quad \forall h \in X \tag{3.19}$$

Demostración. ($1 \Leftrightarrow 2 \Leftrightarrow 3$) Demostrado en el Teorema 3.3.

($3 \Rightarrow 4$). Por hipótesis existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.6) con la familia $\sigma = \mathcal{H}$. Definamos el conjunto $K = \{h_n / n \in \mathbb{N}\} \cup \{h\}$ que claramente es secuencialmente compacto. Si $V_0 \subset Y$ es una vecindad cualquiera del cero en Y y V_0^s la vecindad simétrica del cero tal que $V_0^s + V_0^s \subset V_0$ entonces, por la Proposición 3.3 existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall t : 0 < |t| < \delta,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \frac{f(x+th_n) - f(x)}{t} - T(h_n) \in V_0^s$$

pero como T es continua, $h_n \to h$ y $t_n \to 0$ entonces podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $0 < |t_n| < \delta$ y $T(h_n) - T(h) \in V_0^*$. Esto permite escribir

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h) \in V_0^* + V_0^* \subset V_0$$

demostrando el límite (3.18).

(4 $\Rightarrow$ 3). Por contradicción supongamos que f no es $\mathcal{H}$-diferenciable en x, análogamente a la demostración del Teorema 3.3,(3) para la función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.18) podemos hallar sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X - \{0\}$ con $h_n \to h$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h_n) \notin V_0$$

pero por hipótesis para algún $n_0 \in \mathbb{N}$ se debe cumplir

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h) \in V_0$$

y nuevamente por la continuidad de T podemos reemplazar $T(h)$ por $T(h_n)$ llegando a una contradicción.

Cuando la topología de X es metrizable mostremos que (4 $\Leftrightarrow$ 5)

(4 $\Rightarrow$ 5). Por contradicción, supongamos que para $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.18) existe algún $h \in X$ tal que no verifique (3.19), es decir existe una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tal que

$$\forall \delta > 0, \forall \eta > 0, \ \exists t : 0 < |t| < \delta, \ \exists u \in B(h,\eta) \Big/ \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - T(h) \notin V_0$$

de aquí podemos hallar dos sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con $h_n \to h$ tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f(x + t_n u_n) - f(x)}{t_n} - T(h_n) \notin V_0$$

la continuidad de T permite reemplazar $T(h_n)$ por $T(h)$ llegando a una contradicción con(3.18)

(5 $\Rightarrow$ 4). Por contradicción, supongamos que para $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que verifica (3.19), existen sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $h_n \to h$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ tales que el límite (3.18) no se da, es decir existe una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tal que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \exists m \geqslant n, \quad \frac{f(x + t_m h_m) - f(x)}{t} - T(h) \notin V_0 \tag{3.20}$$

pero por hipótesis existen δ y η positivos tales que

$$\forall t : 0 < |t| < \delta, \ \forall u \in B(h,\eta), \quad \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} - T(h) \in V_0$$

Como $h_n \to h$ y $t_n \to 0$ entonces podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $h_n \in B(h,\eta)$ y $0 < |t_n| < \delta$ y por tanto

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{f(x + t_n h_n) - f(x)}{t_n} - T(h) \notin V_0$$

lo que contradice a (3.20). $\square$

3.2. Teoremas del Valor Medio

Existen varias versiones del teorema del valor medio, comencemos por la versión escalar. En lo que sigue si $B \subset Y$ es un subconjunto de un E.V.T. Y entonces denotaremos por $\overline{Co}(B)$ a la clausura de la cápsula convexa de B, es decir

$$\overline{Co}(B) = \overline{Co(B)}$$

Teorema 3.5 (Teorema del Valor Medio Escalar) *Sea Y un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff; $f : [a,b] \to Y$ función continua en $[a,b]$ y $\mathcal{N} \subset [a,b]$ un subconjunto contable. Si f es $\mathcal{F}$-diferenciable en $[a,b] - \mathcal{N}$ entonces*

a). *Para cualquier $\psi \in Y^*$ existe un $\theta \in <0,1>$ tal que*

$$\psi[f(b) - f(a)] = (b-a)\psi[f'(a + \theta(b-a))]$$

b). $f(b) - f(a) \in (b-a)\overline{Co}(B)$ *donde* $B = \{f'_{\mathcal{F}}(\zeta)/\zeta \in [a,b] - \mathcal{N}\} \subset Y$

Demostración. La demostración la omitimos aqui y se puede encontrar en [2, pag. 217] □

Ejemplo 25 Comencemos dando una interpretación geométrica de este teorema. Sea la función f: $[0,1] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (t^2, t^3)$, $\forall t \in [0,1]$ que es $\mathcal{F}$-diferenciable en cada punto del intervalo $[0,1]$ con derivada $f'_{\mathcal{F}}(\zeta) = (2\zeta, 3\zeta^2)$. El teorema afirma que

$$(1,1) = f(1) - f(0) \in \overline{Co}\{(2\zeta, 3\zeta^2)/\zeta \in [0,1]\}$$

esto se representa geométricamente en la siguiente figura.

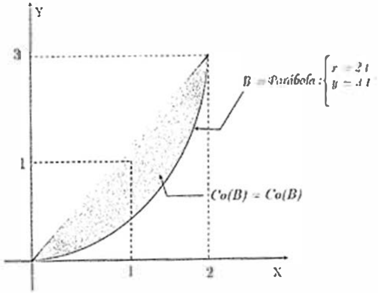


Figura 3.5: Interpretación geométrica del Teorema del Valor Medio Escalar

OBSERVACIONES

1. Si El Espacio Y no es Localmente Convexo, entonces la conclusión del teorema anterior no es necesariamente cierta

Ejemplo 26 Para este ejemplo consideremos $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un Espacio de Medida con $\mu(E) < \infty$ y denotemos el subespacio de funciones $\mathcal{A}$-medibles por $M(E, \mathbb{R})$

$$M(E,\mathbb{R}) = \{f: E \to \mathbb{R} / f \text{ es función } \mathcal{A} - \text{medible}\} \subset \mathcal{F}(E,\mathbb{R})$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos el conjunto $U_n \subset M(E, \mathbb{R})$ como

$$U_n = \left\{ f \in M(E,\mathbb{R}) / \mu\{x \in E : |f(x)| < \frac{1}{n}\} < \frac{1}{n} \right\}$$

Admitiremos ciertas las siguientes afirmaciones (consultar [14, pp. 21] y [16, pp. 55])

1. La familia $\mathcal{B} = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para una Topología Vectorial en el Espacio $M(E, \mathbb{R})$ llamada *Topología de Convergencia en Medida*
2. Una sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M(E, \mathbb{R})$ converge a cero respecto de la Topología de Convergencia en Medida si y solo si para cualquier $r > 0$ se cumple que $\mu\{x \in E / |f_n(x)| > r\} \xrightarrow{n\to\infty} 0$
3. Cuando $E = [0,1]$ (o también $[a,b]$) y μ es la medida de Lebesgue en $[0,1]$ entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ la cápsula convexa de U_n coincide con todo el Espacio $M([0,1], \mathbb{R})$, es decir
$$\mathrm{Co}(U_n) = M([0,1],\mathbb{R}), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
4. Las únicas funcionales lineales y continuas en $M([0,1], \mathbb{R})$ son las idenicamente nulas.
5. $M([0,1], \mathbb{R})$ no es Localmente Convexo.

Sea $X = M([0,1], \mathbb{R})$ con la Topología de Convergencia en Medida, para cada $\tau \in [0,1]$ definamos la función $\xi_\tau : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\xi_\tau(t) = \begin{cases} 1 & , \text{ si } t < \tau \\ 0 & , \text{ si } t \geqslant \tau \end{cases}$$

Consideremos ahora la función $f: [0,1] \to X$ definida como $f(\tau) = \xi_\tau$, $\forall \tau \in [0,1]$. Esta función es $\mathcal{F}$-diferenciable en $< 0,1 >$ con derivada identicamente nula, en efecto, sea $\tau_0 \in < 0,1 >$ cualquiera, entonces

$$\begin{aligned}
[f(\tau_0 + h) - f(\tau_0)](t) &= \xi_{\tau_0+h}(t) - \xi_{\tau_0}(t) \\
&= \begin{cases} 0 & , t < \tau_0 \vee t \geqslant \tau_0 + h \\ 1 & , \tau_0 \leqslant t < \tau_0 + h \end{cases} \qquad \text{cuando } h > 0 \\
&= \begin{cases} 0 & , t < \tau_0 + h \vee t \geqslant \tau_0 \\ -1 & , \tau_0 + h \leqslant t < \tau_0 \end{cases} \qquad \text{cuando } h < 0
\end{aligned}$$

Mostremos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(\tau_0+h)-f(\tau_0)}{h} = 0$, para ello sea $U \subset X$ cualquier vecindad del cero entonces podemos hallar un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_n = \{f \in M([0,1],\mathbb{R}) / m\{t \in [0,1] : |f(t)| > \frac{1}{n}\} < \frac{1}{n}\} \subset U$$

escogamos $h > 0$ suficientemente pequeño de modo que $h < \frac{1}{n} < \frac{1}{h}$ entonces el conjunto $\left\{t \in [0,1] / \left| \frac{f(\tau_0+h)(t)-f(\tau_0)(t)}{h} \right| > \frac{1}{n} \right\} = [\tau_0, \tau_0 + h >$ tiene medida h que es menor que $\frac{1}{n}$, es decir tenemos que $\frac{f(\tau_0+h)-f(\tau_0)}{h} \in U_n \subset U$ y por tanto se verifica el límite lateral derecho $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(\tau_0+h)-f(\tau_0)}{h} = 0$. Para el límite lateral izquierdo el proceso es análogo. La fución f resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable en 0, pero sin embargo $f(1) - f(0) = \xi_1 - \xi_0 \neq 0$

Ejemplo 27 Sea $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un Espacio de Medida, y para $p > 0$ el Espacio de las funciones reales definidas en E tales que $|f|^p$ es μ-integrable, es decir

$$L^p(E, \mu) = \{f : E \to \mathbb{R} / \int_E |f|^p d\mu < \infty\}$$

cuando $0 < p < 1$ la función $f \in L^p(E, \mu) \mapsto \|f\| = \left\{ \int_E |f|^p d\mu \right\}^{\frac{1}{p}} \in \mathbb{R}$ ya no es más una seminorma, por lo tanto no puede tratarse a $L^p(E, \mu)$ como un Espacio Normado como se hacía en el caso $p > 1$. Las demostraciones de las siguientes afirmaciones se pueden encontrar en [16, pp. 55] y [9, pp. 33]

1. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos el conjunto

$$U_n = \{f \in L^p(E, \mu) / \|f\| < \frac{1}{n}\}$$

entonces la familia $\mathcal{B} = \{U_n / n \in \mathbb{N}\}$ es una base local para una Topología Vectorial en el Espacio $L^p(E, \mu)$

2. El Espacio $L^p(E, \mu)$ es Localmente Conexo sii el conjunto de valores que toma la medida μ es finito.
3. Cuando $E = \mathbb{R}$ y $\mu = m$ es la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$ entonces las únicas funcionales lineales y continuas en $L^p(\mathbb{R}, m)$ son las identicamente nulas
4. El Espacio $L^p(\mathbb{R}, m)$ no es Localmente Convexo

Sea el Espacio $X = L^{1/2}(\mathbb{R}, m)$ con la Topología descrita en el apartado (1) anterior y definamos la función $f : \mathbb{R} \to X$ por

$$f(t)(\tau) = \begin{cases} 1 & , \text{si } 0 \leqslant \tau \leqslant t \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases}$$

(cuando $t < 0$ se entenderá que $f(t) \equiv 0$). Mostremos que f es $\mathcal{F}$-diferenciable en $\mathbb{R}$ con derivada identicamente nula, en efecto, sea $t_0 \in \mathbb{R}$ cualquiera y supongamos que $t_0 > 0$ (los demas casos son totalmente análogos), entonces

$$[f(t_0 + h) - f(t_0)](\tau) = \begin{cases} 1 & , t_0 < \tau \leqslant t_0 + h \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{cuando } h > 0$$

$$= \begin{cases} -1 & , t_0 + h < \tau \leqslant t_0 \\ 0 & , \text{en otro caso} \end{cases} \qquad \text{cuando } h < 0$$

para mostrar que $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = 0$ sea $U \subset X$ cualquier vecindad del cero, entonces podemos hallar un $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$U_n = \{f \in X / \int_{\mathbb{R}} |f|^{1/2} < (\frac{1}{n})^{1/2}\} \subset U$$

escogamos $h > 0$ tal que $h < \frac{1}{n}$ de modo que tenemos

$$\int_{\mathbb{R}} \left| \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h} \right|^{1/2} = (\frac{1}{h})^{1/2} h = h^{1/2} < (\frac{1}{n})^{1/2}$$

esdecir tenemos que $\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} \in U_n \subset U$, verificando el límite lateral derecho $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = 0$. Para el límite lateral izquierdo el proceso es análogo, y por tanto la función f resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable en 0, pero sin embargo $f(1) - f(0) \notin \overline{Co}\{f'(t)/0 \leqslant t \leqslant 1\}$ desde que $f(1) - f(0)$ no es identicamente nula.

2. En la conclusión (b) no se puede, en general, reemplazar $\overline{Co}(B)$ por B y ni siquiera por $Co(B)$.

Ejemplo 28 La función $f\colon [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(t) = (\cos(t), \mathrm{sen}(t))$, $\forall t \in [0,\pi]$ satisface la condición del Teorema 3.5 pero $f(\pi) - f(0) \notin \overline{B}$ donde $B = \{f'(t)/t \in [0,\pi]\}$

Ejemplo 29 Sea la sucesión $(a_k)_{k \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ en el Espacio $l_2(\mathbb{N})$ donde cada término está dado por $a_k = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k}, 0, 0, \ldots)$, $(k = 0,1,2,\ldots)$, esta sucesión converge al elemento $a = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \ldots)$. Para cada k sea $t_k = 1 - \frac{1}{2^k}$ y definamos la función $f\colon \mathbb{R} \to l_2(\mathbb{N})$ por

$$f(t) = \begin{cases} a_k + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}(a_{k+1} - a_k) & , \text{ si } t \in [t_k, t_{k+1}) \\ a & , \text{ si } t = 1 \end{cases}$$

Esta funcióa también satisface las condiciones del Teorema 3.5 pero $f(1) - f(0) \notin \mathrm{Co}\{f'(t)/t \in [0,1],\ t \neq t_k\ (k = 0,1,2,3,\ldots)\}$

Para la versión vectorial del teorema del valor medio necesitaremos siguiente lema

Lema 3.5 *Sean X un E. V. T. Localmente Convexo de Hausdorff; $f : [0,1] \subset \mathbb{R} \to X$ función cualquiera y $x_0 \in X$. Si para cada $\psi \in X^*$ existe un $\theta \in <0,1>$ tal que*

$$\psi(x_0) = \psi[f(\theta)]$$

entonces para cualquier seminorma continua $p \in SC(X)$ existe un $\theta \in <0,1>$ tal que

$$p(x_0) \leqslant p[f(\theta)]$$

Demostración. Sea $p \in SC(X)$ cualquiera, definamos el subespacio $M = \mathrm{Span}\{x_0\} = \{\lambda x_0 / \lambda \in \mathbb{R}\} \subset X$ y la funcional lineal y continua $\phi\colon M \to \mathbb{R}$ por $\phi(\lambda x_0) = \lambda p(x_0)$ que claramente verifica $|\phi(\lambda x_0)| = |\lambda p(x_0)| = |\lambda| p(x_0) = p(\lambda x_0)$, es decir

$$|\phi(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in M$$

Por el teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.16) podemos extender ϕ a una funcional lineal $\psi : X \to \mathbb{R}$ definida en X que también verifica

$$|\psi(x)| \leqslant p(x), \quad \forall x \in X$$

y por tanto resulta ser continua (ver Teorema 1.15 y 1.4). Por hipótesis para tal $\psi \in X^*$ existe un $\theta \in <0,1>$ de modo que se cumple

$$p(x_0) = \phi(x_0) = \psi(x_0) = \psi[f(\theta)] \leqslant p[f(\theta)]$$

como se quería demostrar □

Teorema 3.6 (Teorema del Valor Medio Vectorial) *Sean X, Y dos E. V. T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función Gâteaux diferenciable en el intervalo $[x, x+h] \subset U$ donde U es abierto y $x, x+h \in U$, entonces* a). *Para cualquier* $\psi \in Y^*$ *existe un* $\theta \in < 0,1 >$ *tal que*

$$\psi[f(x+h) - f(x)] = \psi[f'_{x+\theta h}(h)]$$

b). *Para cualquier seminorma continua* $q \in SC(Y)$ *existe un* $\theta \in < 0,1 >$ *tal que*

$$q[f(x+h) - f(x)] \leqslant q[f'_{x+\theta h}(h)]$$

c). $f(x+h) - f(x) \in \overline{Co}\{f'_y(h)/y \in [x, x+h]\}$

d). *Cuando* X, Y *son normados y* f *es* $\mathcal{F}$*-diferenciable en* U, *entonces*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \|h\| \sup_{y\in[x,x+h]} \|f_{\mathcal{F}}{}'(y)\|$$

Demostración. (a). Definamos la función $s : [0,1] \subset \mathbb{R} \to Y$ como $s(t) = f(x+th)$, $\forall t \in [0,1]$. Como f es Gâteaux diferenciable en $[x, x+h]$ entonces también lo será en $x+t_0h$ donde $t_0 \in [0,1]$ y por tanto existe $f'_{x+t_0h} : X \to Y$. Mostremos que s es $\mathcal{F}$-diferenciable en t_0 con $s'_{\mathcal{F}}(t_0) = f'_{x+t_0h}(h)$ (en realidad estamos identificando a la funcional lineal $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto \lambda f'_{x+t_0h}(h) \in Y$ con el vector $f'_{x+t_0h}(h) \in Y$ como la $\mathcal{F}$-derivada de s). Tenemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0} \frac{s(t_0+\lambda) - s(t_0) - \lambda f'_{x+t_0h}(h)}{\lambda} &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f[x+(t_0+\lambda)h] - f(x+t_0h) - \lambda f'_{x+t_0h}(h)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{f[(x+t_0h)+\lambda h] - f(x+t_0h)}{\lambda} - f'_{x+t_0h}(h) \\
&= 0
\end{aligned}$$

la última igualdad es debido a que f es Gâteaux diferenciable en $x+t_0h$. Esto quiere decir que s es $\mathcal{F}$-diferenciable en t_0 (ver Teorema 3.3,(3)) con $\mathcal{F}$-derivada $s'_{\mathcal{F}}(t_0) = f'_{x+t_0h}(h)$. Por el Teorema 3.5,(a), para cualquier $\psi \in Y^*$ existe un $\theta \in < 0,1 >$ tal que

$$\psi\big[f(x+h) - f(x)\big] = \psi\big[s(1) - s(0)\big] = \psi\big[s'_{\mathcal{F}}(\theta)\big] = \psi\big[f'_{x+\theta h}(h)\big]$$

(b). Directo del lema anterior.

(c). Para la función s definida en (a) aplicamos el Teorema 3.5,(b) y obtenemos

$$\begin{aligned}
f(x+h) - f(x) = s(1) - s(0) &\in \overline{Co}\{s'_{\mathcal{F}}(\zeta)/\zeta \in [0,1]\} \\
&= \overline{Co}\{f'_{x+\zeta h}(h)/\zeta \in [0,1]\} \\
&= \overline{Co}\{f'_y(h)/y \in [x, x+h]\}
\end{aligned}$$

(d). En (b) consideramos q como la norma de Y y dado que la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad de f en U implica que $f'_x(h) = f'_{\mathcal{F}}(x)(h)$, $\forall x \in U$, $\forall h \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(x)\| &\leqslant \|f'_{x+\theta h}(h)\| = \|f'_{\mathcal{F}}(x+\theta h)(h)\| \\
&\leqslant \|h\|\|f'_{\mathcal{F}}(x+\theta h)\| \\
&\leqslant \|h\| \sup_{y\in[x,x+h]} \|f'_{\mathcal{F}}(y)\|
\end{aligned}$$

la penultima desigualdad es la de Schwart en Espacios Normados $\square$

OBSERVACIÓN

El teorema anterior admite generalizaciones obvias para el caso en el que la Gâteaux derivada exista en cada punto del intervalo $[x, x+h]$ excepto posiblemente en un subconjunto contable

Los siguientes teoremas son aplicaciones del teorema del valor medio.

Teorema 3.7 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff y $f : U \subset X \to Y$ función Gâteaux diferenciable en el abierto y convexo U. Entonces*

a). $f'_x(h) = 0,\ \forall (x,h) \in U \times X \Leftrightarrow f$ *es constante en U*

b). *Cuando $U = X$ y además f es continua en 0 con $f(0) = 0$, entonces*

$$f'_x \text{ es independiente de } x \ (\text{i.e.}\exists T : X \to Y \text{ homogenea } / \forall x \in X,\ f'_x = T)$$
$$\Leftrightarrow f \in \mathcal{L}(X,Y)$$

Demostración. (a). ($\Rightarrow$) Sean $x_1, x_2 \in U$ arbitrarios, como U es convexo entonces por el Teorema 3.6.(a) para $\psi \in Y^*$ cualquiera podemos hallar un $c \in < x_1, x_2 >$ tal que

$$\psi\big[\,f(x_2) - f(x_1)\big] = \psi\big[\,f'_c(x_2 - x_1)\big] = \psi(0) = 0$$

como ψ fue elegido arbitrariamente y Y es Localmente Convexo (de Hausdorff) concluimos que $f(x_2) = f(x_1)$(vea el Corolario 1.1), demostrando que f es constante en U

($\Leftarrow$) Directo.

(b). ($\Rightarrow$) Mostremos que f es lineal, sean para ello $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios, por el Teorema 3.6,(a) para cualquier $\psi \in Y^*$ existe un $\theta \in < 0, 1 >$ tal que

$$\psi\big[f(x_1 + x_2) - f(x_1)\big] = \psi\big[\,f'_{x_1+\theta x_2}(x_2)\big] = \psi\big[T(x_2)\big]$$

de aqui obtenemos que $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + T(x_2),\ \forall x_1, x_2 \in X$ y en particular para $x_1 = 0$ tenemos que $f(x_2) = f(0) + T(x_2) = T(x_2)$, es decir que $f = T$ y por tanto es lineal (recuerde que T ya es homogenea) y por ser continua en 0 también será continua en X.

($\Leftarrow$) Directo. $\square$

OBSERVACIÓN

Con las mismas condiciones del teorema anterior, si la función f tiene $\mathcal{G}$-derivada nula en cada punto del conjunto U entonces debe ser constante en U

Teorema 3.8 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff y $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U. Si*

1. *f es $\mathcal{G}$-diferenciable en U*

2. *Para algún conjunto convexo $A \subset U$, $f'_{\mathcal{G}}(A) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es un conjunto acotado en $\mathcal{L}(X,Y)$*

entonces para cualquier $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $B \subset X$ conjunto acotado en X existe un $\zeta \in <0,1]$ tal que

$$\forall x, y \in A,\ x - y \in \zeta B \Rightarrow f(x) - f(y) \in V$$

Demostración. Como Y es Localmente Convexo, entonces para la vecindad del cero V existen $q \in SC(Y)$ y $\epsilon > 0$ tales que $V_0 = \{y \in Y/q(y) < \epsilon\} \subset V$. Por hipótesis el conjunto $f'_{\mathcal{G}}(A) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es acotado y por tanto para la vecindad $\tilde{\mathcal{U}} = \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(B) \subset V_0\}$ existe un $\delta > 0$ tal que $\frac{1}{\delta} f'_{\mathcal{G}}(A) \subset \tilde{\mathcal{U}}$ o equivalentemente

$$\forall a \in A, \quad f'_{\mathcal{G}}(a)(B) \subset \delta V_0 \tag{3.21}$$

además por el Teorema 3.6.(b) existe un $\theta \in <0,1>$ tal que

$$q\big[f(x) - f(y)\big] \leqslant q\Big[f'_{\mathcal{G}}(y + \theta(x-y))(x-y)\Big] \tag{3.22}$$

Consideremos $\zeta = \frac{1}{\delta}\text{mín}\{\delta, 1\}$, de modo que si $x, y \in A$ y $x - y \in \zeta B$ entonces por (3.21)

$$f'_{\mathcal{G}}(y + \theta(x-y))(\frac{x-y}{\zeta}) \in \delta V_0 \equiv q\Big[f'_{\mathcal{G}}(y + \theta(x-y))(\frac{x-y}{\zeta\delta})\Big] < \epsilon$$

por (3.22) y teniendo en cuenta que $\zeta\delta < 1$ obtenemos que $q\big[f(x) - f(y)\big] < \epsilon$ es decir $f(x) - f(y) \in V_0 \subset V$ como se quería mostrar □

Corolario 3.1 *Sean X, Y normados y $f : U \subset X \to Y$ función definida en la bola abierta $U = \{x \in X/\|x\| < r\}$ $(r > 0)$. Si*

1. *f es $\mathcal{G}$-diferenciable en U*
2. *Para algún conjunto convexo $A \subset U$, $f'_{\mathcal{G}}(A) \subset \mathcal{L}(X,Y)$ es un conjunto acotado en $\mathcal{L}(X,Y)$*

entonces f es uniformemente continua en A

Demostración. Consecuencia directa del teorema anterior. □

Teorema 3.9 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y $x_0 \in U$. Si*

1. *f es $\mathcal{F}$-diferenciable en $U - \{x_0\}$*
2. *Existe un $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ tal que $\lim_{x \to x_0} f'_{\mathcal{F}}(x) = T$*

entonces f es $\mathcal{F}$-diferenciable en x_0 cumpliendose además que $f'_{\mathcal{F}}(x_0) = T$

Demostración. Sean las sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ acotada. Para aplicar el Teorema 3.6 primeramente observemos que para la vecindad del cero $U - \{x_0\}$ existe una vecindad equilibrada $V \subset X$ del cero en X tal que $V \subset U - \{x_0\}$. Además como $t_n h_n \to 0$ entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $t_n h_n \in V$, luego si $0 \leqslant t \leqslant 1$ entonces por ser V equilibrado, tenemos que $tV \subset V$ y por tanto $tt_n h_n \in V$, $\forall n \geqslant n_0$. Es decir, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leqslant t \leqslant 1 \Rightarrow x_0 + tt_n h_n \in U, \quad \forall n \geqslant n_0$$

Sea ahora $q \in SC(Y)$ arbitraria, por el Teorema 3.6,(b) existe un $\theta_n \in <0,1>$ (θ_n depende de n y q) tal que

$$\begin{aligned} q\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right] &\leqslant q\left[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta_n t_n h_n)(h_n) - T(h_n)\right] \\ &\leqslant p_{q,B}\left[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta_n t_n h_n) - T\right] \end{aligned}$$

donde $B = \{h_n / n \in \mathbb{N}\} \subset X$ (que es un subconjunto acotado de X). Por la continuidad de la seminorma $p_{q,B} : \mathcal{L}(X,Y) \to \mathbb{R}$ (recuerde que $\mathcal{L}(X,Y)$ se considera con la Topología de Convergencia Uniforme sobre Acotados de X) y por la hipótesis (2), el límite del miembro derecho tiende a cero cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$\lim_{n\to\infty} q\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right] = 0 \tag{3.23}$$

Si suponemos que T no es la $\mathcal{F}$-derivada de f en x_0 entonces existen sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ acotada y una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tales que

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n) \notin V_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.24}$$

Como Y es Localmente Convexo, para la vecindad $V_0 \subset Y$ podemos hallar una seminorma continua $q_0 : Y \to \mathbb{R}$ y un real positivo $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\{y \in Y / q_0(y) < \epsilon_0\} \subset V_0 \tag{3.25}$$

de (3.23), existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces

$$q_0\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right] < \epsilon_0$$

y por (3.25) resulta que

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n) \in V_0, \quad \forall n \geqslant n_0$$

que es una contradicción con (3.24) □

3.3. Relaciones entre σ−diferenciabilidades

En el Diagrama 2.1 se muestran las relaciones entre la $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ y $\mathcal{F}$ diferenciabilidad; si bien es cierto alli se dan condiciones suficientes (generalmente sobre el espacio X) para que una diferenciabilidad implique otra, estas no son las únicas. En esta sección damos algunas condiciones suficientes, no sobre el Espacio X, pero si sobre la misma función $f : X \to Y$

Cualquier función definida entre E.V.T. que es σ−diferenciable en algún punto también es Gâteaux-diferenciable en dicho punto. Comencemos dando condiciones para que el recíproco también sea cierto. En el siguiente teorema la continuidad separada de la Gâteaux diferenciabilidad implica la $\mathcal{G}$-diferenciabilidad.

Teorema 3.10 (Gâteaux y $\mathcal{G}$− diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff y $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U con $x_0 \in U$. Si*

1. *f es Gâteaux diferenciable en U*
2. *Para cada $h \in X$, la función $x \in U \mapsto f'_x(h) \in Y$ es continua en x_0*
3. *$f'_{x_0} : X \to Y$ es continua en $0 \in X$*

entonces f es $\mathcal{G}$-diferenciable en x_0 con $f'_{\mathcal{G}}(x_0) = f'_{x_0}$

Demostración. Por el Teorema 3.3.(1) debemos mostrar que la Gâteaux-derivada $f'_{x_0} : X \to Y$ es lineal y continua en X y para ello será suficiente mostrar que es lineal (pues la continuidad en todo el espacio X sigue de la condición (3)). Dado que f'_{x_0} ya es homogenea. solo mostraremos que es aditiva. Sean entonces $x_1, x_2 \in X$ arbitrarios, por definición tenemos

$$\begin{aligned} f'_{x_0}(x_1 + x_2) - f'_{x_0}(x_1) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big(x_0 + t(x_1 + x_2)\big) - f(x_0)}{t} - \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tx_1) - f(x_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f\big((x_0 + tx_1) + tx_2\big) - f(x_0 + tx_1)}{t} \end{aligned} \tag{3.26}$$

Por el Teorema 3.6.(b), para cualquier $\psi \in Y^*$ y $t \in \mathbb{R}$ en una vecindad del cero suficientemente pequeña existe un $\theta = \theta(t) \in< 0, 1 >$ tal que

$$\psi\Big(f(x_0 + tx_1 + tx_2) - f(x_0 + tx_1)\Big) = \psi\Big(f'_{x_0+tx_1+\theta tx_2}(tx_2)\Big) \tag{3.27}$$

como $\psi : X \to \mathbb{R}$ es lineal y continua entonces de (3.26) y (3.27)

$$\begin{aligned} \psi\Big(f'_{x_0}(x_1 + x_2)\Big) &= \lim_{t\to 0} \frac{\psi\Big(f(x_0 + tx_1 + tx_2) - f(x_0 + tx_1)\Big)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\psi\Big(f'_{x_0+tx_1+\theta tx_2}(tx_2)\Big) = \lim_{t\to 0} \psi\Big(f'_{x_0+tx_1+\theta tx_2}(x_2)\Big) \\ &= \psi\Big(\lim_{t\to 0} f'_{x_0+tx_1+\theta tx_2}(x_2)\Big) = \psi(f'_{x_0}(x_2)) \end{aligned}$$

la última igualdad es por la continuidad en la condición (2) (observe además que para cualquier t, $\theta(t) \in< 0, 1 >$ y por tanto $\lim_{t\to 0} \theta(t)t = 0$). Es decir tenemos que para cualquier $\psi \in Y^*$

se cumple que $\psi\Big(f'_{x_0}(x_1+x_2) - f'_{x_0}(x_1)\Big) = \psi(f'_{x_0}(x_2))$ y en consecuencia [2] $f'_{x_0}(x_1+x_2) = f'_{x_0}(x_1) + f'_{x_0}(x_2)$, como se quería mostrar. $\square$

La continuidad respecto de ambas variables, por supuesto implica una conclusión más fuerte.

Teorema 3.11 (Gâteaux y $\mathcal{H}-$ diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto $U \subset X$ con $x_0 \in U$. Si*

1. *f es Gâteaux diferenciable en U*

2. *La función $(x, h) \in U \times X \mapsto f'_x(h) \in Y$ es continua en (x_0, h), $\forall h \in X$*

entonces f es $\mathcal{H}$ -diferenciable en x_0 con $f'_{\mathcal{H}}(x_0) = f'_{x_0}$

Demostración. Las condiciones (1) y (2) garantizan que f es $\mathcal{G}$-diferenciable en x_0 (Teorema 3.10) y por tanto la Gâteaux-derivada de f en x_0 es lineal y continua, es decir $f'_{x_0} \in \mathcal{L}(X, Y)$. Supongamos por contradicción que f no es $\mathcal{H}$-diferenciable en x_0, luego para la función f'_{x_0} existen $S \subset \mathcal{H}$ y una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tales que

$$\forall\delta > 0,\ \exists h \in S,\ \exists t : 0 < |t| < \delta \Big/ \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} - f'_{x_0}(h) \notin V_0$$

claramente los $h \in S$ son no nulos, pues de lo contrario $0 \notin V_0$. Asi podemos hallar dos sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S - \{0\}$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y como S es secuencialmente compacto, podemos suponer que $h_n \to h$. De esta forma se cumple

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{x_0}(h_n) \notin V_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.28}$$

Para cualquier seminorma continua $q : Y \to \mathbb{R}$ y cada $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.6,(b) (vea la demostración del Teorema 3.9 para garantizar que $[x_0, x_0 + t_n h_n] \subset U$, para n suficientemente grande) existe un $\theta_n \in <0, 1>$ tal que

$$q\Big[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - f'_{x_0}(t_n h_n)}{t_n}\Big] \leqslant q\big[f'_{x_0+\theta_n t_n h_n}(h_n) - f'_{x_0}(h_n)\big]$$

por la continuidad de la seminorma q y la condición (2) tenemos que el límite del miembro derecho tiende para cero cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$q\Big[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{x_0}(h_n)\Big] \to 0 \tag{3.29}$$

mostremos que esto lleva a una contradicción con (3.28). Para simplificar denotemos por $y_n = \frac{f(x_0+t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{x_0}(h_n)$. Como Y es Localmente Convexo, para la vecindad del cero $V_0 \subset Y$ existe un $p_0 \in SC(Y)$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que

$$\{y \in Y / p_0(y) < \epsilon_0\} \subset V_0$$

[2]como una consecuencia del teorema de Hahn-Banach en E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff. Corolario 1.1

de (3.29) existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $p_0(y_n) < \epsilon_0$. Esto demuestra que

$$\forall n \geqslant n_0,\ y_n = \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{x_0}(h_n) \in V_0$$

lo que es una contradicción con (3.28) □

Teorema 3.12 ($\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}-$ diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U con $x_0 \in U$. Si*

1. *f es $\mathcal{G}$-diferenciable en U*

2. *La función $f'_{\mathcal{G}} : U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ es continua en x_0*

entonces f es $\mathcal{F}$-diferenciable en x_0 con $f'_{\mathcal{F}}(x_0) = f'_{\mathcal{G}}(x_0)$

Demostración. La demostración es parecida a la del Teorema 3.9. Sean entonces las sucesiones $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ acotada, sabemos que se puede hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0$ se cumple que $[x_0, x_0 + t_n h_n] \subset U$. Sea $q \in SC(Y)$ cualquiera, entonces por el Teorema 3.6,(b) existe un $\theta_n \in <0, 1>$ tal que

$$\begin{aligned} q\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{\mathcal{G}}(x_0)(h_n)\right] &\leqslant q\left[f'_{\mathcal{G}}(x_0 + \theta_n t_n h_n)(h_n) - f'_{\mathcal{G}}(x_0)(h_n)\right] \\ &\leqslant p_{q,B}\left[f'_{\mathcal{G}}(x_0 + \theta_n t_n h_n) - f'_{\mathcal{G}}(x_0)\right] \end{aligned}$$

donde $B = \{h_n / n \in \mathbb{N}\}$. Por la continuidad de la seminorma $p_{q,B} : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{R}$ y la hipótesis (2), resulta que el límite del miembro derecho tiende a cero cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$\lim_{n \to \infty} q\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'_{\mathcal{G}}(x_0)(h_n)\right] = 0$$

Si suponemos que $f'_{\mathcal{G}}(x_0)$ no es la $\mathcal{F}$-derivada de f en x_0 llegaríamos a una contradición (revisar la demostración del Teorema 3.9) □

Teorema 3.13 ($\mathcal{G}$ y $\mathcal{H}-$ diferenciabilidad) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U con $x_0 \in U$. Si*

1. *f es $\mathcal{G}$-diferenciable en x_0*

2. *f es Lipschitziana en U, es decir que para cualquier $q \in SC(Y)$, existe un $p \in SC(X)$ tal que*
$$q[f(x) - f(y)] \leqslant p(x - y), \quad \forall x, y \in U$$

entonces f es $\mathcal{H}$-diferenciable en x_0 con $f'_{\mathcal{H}}(x_0) = f'_{\mathcal{G}}(x_0)$

Demostración. Supongamos por contradicción que f no es $\mathcal{H}$-diferenciable en x_0, como en el Teorema 3.11 existen $S \in \mathcal{H}$, una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y y sucesiones $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S-\{0\}$ con $h_n \to h$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}-\{0\}$ con $t_n \to 0$ tales que

$$\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - T(h_n) \notin V_0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.30}$$

donde hemos denotado $T = f'_G(x_0)$. Para cualquier seminorma continua $q : Y \to \mathbb{R}$, por la condición de Lipschitzianidad existe una seminorma continua $p : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$q\big[f(x)-f(y)\big] \leqslant p(x-y), \quad \forall x, y \in U$$

Además se puede escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\\
&= \frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0+t_nh)+f(x_0+t_nh)-f(x_0)}{t_n} - T(h)+T(h)-T(h_n)\\
&= \left\{\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0+t_nh)}{t_n}\right\} + \left\{\frac{f(x_0+t_nh)-f(x_0)}{t_n} - T(h)\right\} - \Big\{T(h_n)-T(h)\Big\}
\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta la condición de Lipschitzianidad resulta

$$\begin{aligned}
q\left[\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right] \leqslant p(h_n-h) + q\left[\frac{f(x_0+t_nh)-f(x_0)}{t_n} - T(h)\right]\\
+ q\Big[T(h_n-h)\Big]
\end{aligned}$$

por la continuidad de las seminormas p y q el límite del miembro de la derecha es cero cuando $n \to \infty$ y por tanto

$$q\left[\frac{f(x_0+t_nh_n)-f(x_0)}{t_n} - T(h_n)\right] \to 0$$

lo que es una contradicción con (3.30) (ver demostración del Teorema 3.11) . □

3.4. Diferenciabilidad y Continuidad

Los siguientes ejemplos muestran que no siempre la diferenciabilidad implica continuidad

Ejemplo 30 Sea X un Espacio de Hilbert con su Topología Débil $\sigma(X, X^*)$. La función $f(x) = \|x\|^2$, $\forall x \in X$ resulta ser $\mathcal{F}$-diferenciable en todo punto de X(pues un conjunto $A \subset X$ es débilmente acotado si y solo si es fuertemente acotado según el Teorema 1.19) sin embargo no es continua (vea [17, pp. 37] en donde se muestra que el conjunto $\{x \in X / \|x\| < 1\}$ nunca es abierto en la topología débil $\sigma(X, X^*)$)

Ejemplo 31 La función composición (Definición 4.1) comp: $\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z) \to \mathcal{L}(X, Z)$ donde todos los Espacios son Localmente Convexos de Hausdorff y Y no es normable es $\mathcal{F}$-diferenciable en todo punto (Teorema 4.3) pero no es continua (Teorema 4.1)

Ejemplo 32 Sigue de las definiciones de K-,H-,M-, MS- y MB- diferenciabilidad que una función diferenciable en cualquiera de estos sentidos en un punto es continua en ese punto.

Sin embargo la relación entre σ−diferenciabilidad y continuidad tiene algunas peculiaridades. El siguiente teorema aclara esta relación

Teorema 3.14 (σ−diferenciabilidad y continuidad) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y de Hausdorff; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ una familia definida como en la Definición 3.2 que contiene a todas las sucesiones convergentes. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a). *Toda función σ−diferenciable en un punto x_0, es continua en x_0*

b). *X es Secuencial*

Demostración. ($a \Rightarrow b$)Por contradicción supongamos que X no es secuencial, entonces existe un subconjunto $A \subset X$ y un punto de acumulación $x_0 \in A'$ tal que ninguna sucesión de elementos de A converge a x_0, es decir

$$\forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A, \; a_n \nrightarrow x_0 \tag{3.31}$$

Definamos la función $f : X \to Y$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ y_0 & x \in A \end{cases}$$

donde $y_0 \in Y$ es cualquier elemento diferente de cero. Mostremos que f no es continua en x_0. En efecto, primeramente notemos que $x_0 \notin A$ (pues de lo contrario la sucesión constante convergiría a x_0) y por lo tanto $f(x_0) = 0$. Como $y_0 \neq 0$ y Y es de Hausdorff, podemos hallar una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y de modo que $y_0 \notin V_0$. Si $U(x_0) \subset X$ es una vecindad cualquiera de x_0 entonces existe un $a \in A$ con $a \neq x_0$ y $a \in U(x_0)$, por lo tanto $f(a) = y_0 \notin V_0$. Esto demuestra que f no es continua en x_0

Mostremos ahora que f es σ-diferenciable en x_0, y como $\sigma \subset \mathcal{F}$ será suficiente mostrar que f es $\mathcal{F}$-diferenciable en x_0. Por contradicción supongamos que para la función $T \equiv 0$ existe un subconjunto acotado $S \subset X$ tal que (3.6) no se verifica, es decir existe una vecindad $V_0 \subset Y$ del cero en Y tal que

$$\forall \delta > 0, \; \exists t : 0 < |t| < \delta, \; \exists h \in S / \frac{f(x + th) - f(x)}{t} \notin V_0$$

de donde podemos obtener sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n) \subset X$ acotada tales que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} \notin V_0 \tag{3.32}$$

desde que $x_0 + t_n h_n \to x_0$ entonces el conjunto $\{x_0 + t_n h_n / n \in \mathbb{N}\} \subset X$ solo puede contener un número finito de puntos de A (pues si tuviera infinitos se podría obtener una subsucesión $x_0 + t_{n_k} h_{n_k}$ que converga a x_0 contradiciendo a (3.31)) por lo tanto existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_0$, $x_0 + t_n h_n \notin A$ y en consecuencia

$$\forall n \geqslant n_0, \quad \frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} = 0 \in V_0$$

lo que contradice a (3.32)

($b \Rightarrow a$) Por contradicción supongamos que existe una función $f : U \subset X \to Y$ que es $\sigma-$diferenciable en x_0 pero que no es continua en x_0, entonces (Teorema A.3) existe una red $\phi : D \to X$ que converge a x_0 tal que la red $f \circ \phi$ no converge a $f(x_0)$, es decir existe un abierto $V \subset X$ con $f(x_0) \in V$ tal que

$$\forall a \in D, \exists b \succ a : f \circ \phi(b) \notin V$$

esto permite definir la función $\alpha : D \to D$ como $\alpha(a) =$ un elemento en D tal que $\alpha(a) \succ a$, $\forall a \in D$. La composición $\psi = \phi \circ \alpha$ será entonces una subred de ϕ (ver Definición A.4) que verifica además

$$\forall a \in D, \ f \circ \psi(a) \notin V \tag{3.33}$$

Definamos el conjunto $A = \{\psi(d)/d \in D\}$, mostremos que $x_0 \in A'$, sea $U \subset X$ abierto con $x_0 \in U$, como $\psi \to x_0$ entonces existe un $a_0 \in D$ tal que

$$\forall b \succ a_0, \psi(b) \in U$$

además desde que $f \circ \psi \nrightarrow f(x_0)$ entonces

$$\forall a \in D, \exists b \succ a, \ / \ \psi(b) \neq x_0$$

(de lo contrario existiria un $a_1 \in D$ de modo que $\psi(b) = x_0, \forall b \succ a_1$ y por tanto $f \circ \psi(b) = f(x_0)$, $\forall b \succ a_1$ implicando esto que $f \circ \psi \to f(x_0)$), en particular para $a = a_0$, existe un $b_0 \succ a_0$ tal que $\psi(b_0) \neq x_0$ y además $\psi(b_0) \in U \cap A$, esto demuestra que $x_0 \in A'$. Como X es secuencial podemos hallar una sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ tal que $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$, además siendo f función $\sigma-$ diferenciable en x_0 tenemos que

$$f(x) = f(x_0) + f'_\sigma(x_0)(x - x_0) + r(x - x_0), \ \forall x \in U$$
$$\forall S \in \sigma, \ \lim_{t \to 0+} \frac{r(th)}{t} = 0, \text{ unif. en } h \in S \tag{3.34}$$

de la convergencia $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0$ podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_0, x_n \in U$ y por tanto

$$f(x_n) = f(x_0) + f'_\sigma(x_0)(x_n - x_0) + r(x_n - x_0), \ \forall n \geqslant n_0 \tag{3.35}$$

Definamos la sucesión $y_n = x_n - x_0$ que claramente converge a cero. Por el Teorema B.1 existe una subsucesión $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tal que $n_k \, y_{n_k} \xrightarrow{k \to \infty} 0$. Mostremos que $r(y_{n_k}) \xrightarrow{k \to \infty} 0$, sea para ello $W \subset Y$ una vecindad del cero en Y, y consideremos la vecindad equilibrada del cero $W_0 \subset W$. De (3.34) para $S = \{y_{n_k}/k \in \mathbb{N}\} \in \sigma$ existe un $\delta > 0$ (que podemos considerar menor que 1) tal que

$$\forall t \in < 0, \delta >, \ \forall k \in \mathbb{N}, \ \frac{r(t \, n_k \, y_{n_k})}{t} \in W_0$$

como $n_k \xrightarrow{k \to \infty} \infty$, entonces para algún $k_0 \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\forall k \geqslant k_0, \ 1/n_k \in < 0, \delta >$$

luego para cualquier $k \geqslant k_0$ tenemos

$$r(\frac{1}{n_k} n_k y_{n_k}) = r(y_{n_k}) \in \frac{1}{n_k} W_0 \subset W_0 \subset W$$

la penúltima inclusión es porque W_0 es equilibrada. Esto demuestra que $r(y_{n_k})$ converge a cero. Finalmente de (3.35) obtenemos que $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(x_0)$ lo que es una contradicción con (3.33). ∎

Es conocida la relación entre la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad y continuidad en Espacios Normados: *una función $\mathcal{F}$-diferenciable en un punto es continua en dicho punto.* Esto es una consecuencia del teorema anterior, desde que todo Espacio Normado es Secuencial y toda sucesión convergente es acotada. Sin embargo en E.V.T. generales, esta relación no es tan simple.

Ejemplo 33 Si X es un E.V.T. Metrizable, entonces toda función que es $\mathcal{H}$-diferenciable en punto es también continua en dicho punto.

Ejemplo 34 Sea X la suma directa topológica de una familia numerable de Espacios de Hilbert $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ y tal que al menos uno de ellos, por ejemplo X_1 es infinito dimensional. Los elementos de X son todas las sucesiones posibles (x_k) de elementos del Espacio X_k, $(x_k \in X_k;\ k = 1,2,3,\ldots)$ tales que solo un número finito de elementos de cada sucesión son no nulos. Para el elemento $x = (x_k) \in X$ escribamos

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^2}$$

aqui para cada $x \in X$ la sumatoria contiene solo un número finito de elementos no nulos y $\|\cdot\|_k$ representa la norma en el Espacio X_k. Se también $(\hat{e}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal numerable en X_1 y para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $c_n = (\hat{e}_n, 0, 0, 0, \ldots)$. Además para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos $\bar{a}_n \in X_n$ tal que

$$0 < \|\bar{a}_n\|_n < \frac{1}{3n^2} \qquad a = (\underbrace{0, 0, \ldots,}_{n} \bar{a}_n, 0, 0, \ldots)$$

y pongamos

$$x_{nk} = \{\frac{c_n}{k} + \frac{a_k}{n} / k, n \in \mathbb{N}\}$$

y

$$h_{nk}(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x - x_{nk}\|^2 - \frac{1}{3k^2}}} & , \text{ si } \|x - x_{nk}\| < \frac{1}{3k^2} \\ 0 & , \text{ si } \|x - x_{nk}\| \geqslant \frac{1}{3k^2} \end{cases}$$

entonces la función $f = \sum_{n,k} h_{nk}$ tiene una discontinuidad en $x = 0$ peroes $\mathcal{F}^{\infty}$-diferenciable en todo el Espacio X (vea la Definición 3.3) y sus derivadas son continuas en la Topología de Convergencia Uniforme sobre los conjuntos acotados.

Es posible definir diferenciabilidades que impliquen continuidad, por ejemplo la K, H, M, MS y MB diferenciabilidades implican continuidad. Mostremos esto en el siguiente teorema

Teorema 3.15 (**K, H, M, MS y MB-diferenciabilidades y continuidad**) *Si una función es diferenciable por cualquiera de los métodos K, H, M, MS o MB de diferenciación en un punto dado, entonces es continua en dicho punto*

Demostración. Demostremos esto para la K-diferenciabilidad. Sea $f \colon U \subset X \to Y$ una función K-diferenciable en el punto $x_0 \in U$, esto quiere decir que existen $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, r :

$X \to Y$ y una vecindad del cero $U' \subset X$ tales que $f(x_0+h) = f(x_0) + T(h) + r(h)$, $\forall h \in X$ con $x_0 + h \in U$ y $\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t} = 0$ uniformemente respecto de $h \in U'$ esto último se escribe como

$$\forall V \subset Y \text{ vecindad del cero }, \exists \delta > 0 : \left(h \in U' \wedge 0 < |t| < \delta\right) \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V \tag{3.36}$$

para la continuidad de f en x_0 será suficiente probar que $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$, para ello sea $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero en Y y V^s la vecindad equilibrada del cero tal que $V^s \subset V$, por (3.36) podemos hallar un $\delta_0 : 0 < \delta_0 < 1$ que verifica

$$h \in U' \wedge 0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow \frac{r(th)}{t} \in V^s \tag{3.37}$$

definamos ahora la vecindad del cero $U_0 = \frac{\delta_0}{2}U'$ de modo que si $h \in U_0$ entonces $\frac{2}{\delta_0}h \in U'$ y por (3.37) tenemos

$$r(h) = \frac{\delta_0}{2}\left\{\frac{r\left(\frac{\delta_0}{2}\frac{2}{\delta_0}h\right)}{\frac{\delta_0}{2}}\right\} \in \frac{\delta_0}{2}V^s \subset V^s \subset V$$

demostrando que $\lim_{h\to 0} r(h) = 0$ □

En E.V.T. generales, aun cuando se tenga diferenciabilidad de todos los órdenes (vea las definiciones en el capítulo siguiente) en alguna vecindad de un punto dado (o cuando la función derivada en alguna vecindad del punto sea continua) no existe garantía de que la función sea continua en dicho punto. El ejemplo 34 muestra claramente esta situación.

3.5. Diferenciabilidad de Ordenes Superiores

Definiremos las derivadas de orden superior de la siguiente manera

Definición 3.3 **(σ-diferenciabilidad de orden $n \in \mathbb{N}$)** *Sean X, Y dos E.V.T., $f : U \subset X \to Y$ definida en el abierto U y $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2. Decimos que*

a). *f es 2-veces σ-diferenciable en x_0, que escribiremos como f es σ^2-diferenciable en x_0, cuando f es σ-diferenciable en U y la función*

$$f'_\sigma : U \subset X \to \mathcal{L}(X,Y)$$

es σ-diferenciable en x_0. A esta σ-derivada se le denotará por

$$f^{(2)}_\sigma(x_0) = \left(f'_\sigma\right)'_\sigma(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$$

y diremos que es la σ^2-derivada de f en x_0

b). *f es 3-veces σ-diferenciable en x_0, que escribiremos como f es σ^3-diferenciable en x_0, cuando f es σ^2-diferenciable en U y la función*

$$f^{(2)}_\sigma : U \subset X \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$$

es $\sigma-$diferenciable en x_0. A esta σ-derivada se le denotará por

$$f_\sigma^{(3)}(x_0) = \left(f_\sigma^{(2)}\right)'_\sigma(x_0) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)))$$

y diremos que es la σ^3-derivada de f en x_0

c). *f es n-veces σ-diferenciable en x_0, que escribiremos como f es σ^n-diferenciable en x_0, cuando f es $\sigma^{n-1}-$diferenciable en U y la función*

$$f_\sigma^{n-1} : U \subset X \to \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X, Y)\ldots))}_{n-1}$$

es $\sigma-$diferenciable en x_0. A esta σ-derivada se le denotará por

$$f_\sigma^{(n)}(x_0) = \left(f_\sigma^{(n-1)}\right)'_\sigma(x_0) \in \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X, Y)\ldots))}_{n}$$

Cuando la función f es σ^n-diferenciable en el punto x_0 (resp. en U) para todo $n \in \mathbb{N}$ diremos que es σ^∞-diferenciable en x_0 (resp. en U)

En lo sucesivo, para simplificar la notación, para cada $n \in \mathbb{N}$ escribiremos

$$\mathcal{L}^n(X, Y) = \underbrace{\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X, Y)\ldots))}_{n}$$

de modo que $f_\sigma^{(n)}(x_0) \in \mathcal{L}^n(X, Y)$ o equivalentemente $f_\sigma^{(n)}(x_0) : X \to \mathcal{L}^{n-1}(X, Y)$. Cabe mencionar que este Espacio es diferente del Espacio $\mathcal{L}(X^n, Y)$ de todas las Funciones Multilineales Continuas de $\underbrace{X \times X \times \cdots \times X}_{n}$ en Y.

Cuando f es σ-diferenciable en x_0, la función $f_\sigma^{(1)}(x_0) : X \to Y$ se puede expresar como

$$f_\sigma^{(1)}(x_0)(h) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \tag{3.38}$$

uniformemente respecto de h en cada miembro de σ

Cuando f es σ^2-diferenciable en x_0, la función $f_\sigma^{(2)}(x_0) : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ se puede expresar como

$$f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_1)(h_2) = \lim_{t \to 0} \frac{f_\sigma^{(1)}(x_0 + th_1)(h_2) - f_\sigma^{(1)}(x_0)(h_2)}{t} \tag{3.39}$$

uniformemente respecto de h_1 y h_2 en cada miembro de σ.

En efecto, pues por definición podemos escribir $f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_1) = \lim_{t\to 0} \frac{f_\sigma^{(1)}(x_0+th_1) - f_\sigma^{(1)}(x_0)}{t}$ siendo el límite uniforme respecto de h_1 en cada miembro de σ queriendo decir esto que para cualesquier $S \in \sigma$ y $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, Y)$ existe un $\delta > 0$ tal que siempre que $0 < |t| < \delta$ y $h_1 \in S$ se verifica

$$\frac{f_\sigma^{(1)}(x_0 + th_1) - f_\sigma^{(1)}(x_0)}{t} - f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_1) \in \tilde{\mathcal{V}} \tag{3.40}$$

Para demostrar (3.39), sean $V \subset Y$ y $S \in \sigma$ cualesquiera, como el conjunto $\tilde{V} = \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(S) \subset V\}$ es una vecindad del cero en $\mathcal{L}(X,Y)$, por (3.40) existe un $\delta > 0$ de modo que si $0 < |t| < \delta$ y h_1 , $h_2 \in S$ entonces

$$\frac{f_\sigma^{(1)}(x_0 + th_1)(h_2) - f_\sigma^{(1)}(x_0)(h_2)}{t} - f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_1)(h_2) \in V$$

Cuando f es σ^3-diferenciable en x_0, la función $f_\sigma^{(3)}(x_0) : X \to \mathcal{L}^2(X,Y)$ se puede expresar como

$$f_\sigma^{(3)}(x_0)(h_1)(h_2)(h_3) = \lim_{t\to 0} \frac{f_\sigma^{(2)}(x_0 + th_1)(h_2)(h_3) - f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_2)(h_3)}{t} \tag{3.41}$$

uniformemente respecto de h_1, h_2 y h_3 en cada miembro de σ

Para demostrar esto consideremos $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $S \in \sigma$ cualesquiera y definamos las vecindades del cero

$$\begin{aligned} \tilde{V} &= \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(S) \subset V\} \text{ y} \\ \tilde{\tilde{V}} &= \{\widehat{T} \in \mathcal{L}^2(X,Y)/\widehat{T}(S) \subset \tilde{V}\} \\ &= \{\widehat{T} \in \mathcal{L}^2(X,Y)/\forall h_1, h_2 \in S, \ \widehat{T}(h_1)(h_2) \in V\} \end{aligned}$$

como por definición el límite $f_\sigma^{(3)}(x_0)(h_1) = \lim_{t\to 0} \frac{f_\sigma^{(2)}(x_0+th_1)-f_\sigma^{(2)}(x_0)}{t}$ es uniforme respecto de h_1 en cada miembro de σ entonces para la vecindad $\tilde{\tilde{V}} \subset \mathcal{L}^2(X,Y)$ definida arriba podemos hallar un $\delta > 0$ de modo que para $0 < |t| < \delta$ y $h_1, h_2, h_3 \in S$ se cumpla

$$\frac{f_\sigma^{(2)}(x_0 + th_1)(h_2)(h_3) - f_\sigma^{(2)}(x_0)(h_2)(h_3)}{t} - f_\sigma^{(3)}(x_0)(h_1)(h_2)(h_3) \in V$$

Por inducción se llega a probar el siguiente teorema

Teorema 3.16 (La n−ésima derivada como Límite Uniforme) *Con las mismas condiciones de la Definición 3.3. Si f es σ^n−diferenciable en $x_0 (n \in \mathbb{N})$ entonces*

$$\begin{aligned} &f_\sigma^{(n)}(x_0)(h_1)(h_2)\cdots(h_n) = \\ &\lim_{t\to 0} \frac{f_\sigma^{(n-1)}(x_0 + th_1)(h_2)(h_3)\cdots(h_n) - f_\sigma^{(n-1)}(x_0)(h_2)(h_3)\cdots(h_n)}{t} \end{aligned}$$

uniformemente respecto de $h_1, h_2, \ldots, h_n$ en cada miembro de σ

Ejemplo 35 Toda función lineal y continua $f \in \mathcal{L}(X,Y)$ es σ^∞-diferenciable en X y sus σ-derivadas de orden $n \geqslant 2$ son todas nulas

Ejemplo 36 Toda función constante definida en un conjunto abierto U es σ^∞-diferenciable en U con σ-derivadas de todos los ordenes identicamente nulas.

Ejemplo 37 Cualquier función ψ: $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n \to Y$ n-lineal y continua es $\mathcal{F}^\infty$-diferenciable en cada punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X$ y sus $\mathcal{F}$-derivadas de orden mayor o igual a $n+1$ son identicamente nulas. (ver la proposición siguiente para el caso trilineal)

Ejemplo 38 Si $T \in \mathcal{L}^2(X,Y)$, definamos la función $\psi: X \to Y$ por $\psi(x) = T(x^2)$ y la función bilineal y continua $\mu: X\times X \to Y$ por $\mu(x_1, x_2) = Tx_1x_2$ entonces se puede expresar $\psi(x) = \mu(x,x)$ y del Teorema 3.1 resulta que ψ es σ-diferenciable con

$$\psi'_\sigma(x)(h) = Thx + Txh$$

además se observa que $\psi'_\sigma: X \to \mathcal{L}(X,Y)$ es lineal entonces $\psi^{(2)}_\sigma(x) = \psi'_\sigma$, $\forall x \in X$. De aqui podemos deducir que

$$\psi'_\sigma(0) = 0; \quad \psi^{(2)}_\sigma(0)(h^2) = 2Th^2$$

Si $T \in \mathcal{L}^3(X,Y)$, definamos la función $\psi: X \to Y$ por $\psi(x) = Tx^3$ y la función trilineal y continua $\mu: X\times X\times X \to Y$ por $\mu(x_1, x_2, x_3) = Tx_1x_2x_3$, entonces podemos expresar $\psi(x) = \mu(x,x,x)$ y nuevamente el Teorema 3.1 nos dice que ψ es σ-diferenciable en X con

$$\psi'_\sigma(x)(h) = Thx^2 + Txhx + Tx^2h$$

Si definimos ahora la función $S \in \mathcal{L}^2(X, \mathcal{L}(X,Y)) = \mathcal{L}^3(X,Y)$ por $Sx_1x_2x_3 = Tx_1x_2x_3 + Tx_1x_3x_2 + Tx_3x_1x_2$ entonces $\psi'_\sigma(x)h = Sx^2h$ es decir $\psi'_\sigma(x) = Sx^2$ y por el caso anterior $\psi^{(2)}_\sigma(x)h_1 = Sh_1x + Sxh_1$ de donde

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}_\sigma(x)h_1h_2 &= Sh_1xh_2 + Sxh_1h_2 \\ &= Th_1xh_2 + Th_1h_2x + Th_2h_1x + Txh_1h_2 + Txh_2h_1 + Th_2xh_1\end{aligned}$$

y también $\psi^{(3)}_\sigma(x) = \psi^{(2)}_\sigma$, $\forall x \in X$. De aqui se deduce que

$$\psi'_\sigma(0) = 0; \quad \psi^{(2)}_\sigma(0) = 0; \quad \psi^{(3)}_\sigma(0)(h^3) = 3!Th^3$$

En general, cuando $T \in \mathcal{L}^n(X,Y)$ y definimos la función $\psi: X \to Y$ por $\psi(x) = Tx^3$ entonces ψ es σ^∞-diferenciable en X cumpliendose que

$$\psi^{(k)}_\sigma(0) = 0, \forall k \neq n \quad \text{y} \quad \psi^{(n)}_\sigma(0)(h^n) = n!Th^n$$

Proposición 3.5 (Derivadas superiores de una función trilineal) *Sean $X_i\,(i = 1,2,3)$ y Y E.V.T. Cualquier función $\psi: X = X_1\times X_2\times X_3 \to Y$ tri-lineal y continua es $\mathcal{F}^\infty$-diferenciable en X y además se cumple*

a). *La función $\psi'_\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3): X \to Y$ está definida por*

$$\psi'_\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3)(u_1,u_2,u_3) = \psi(u_1,x_2,x_3) + \psi(x_1,u_2,x_3) + \psi(x_1,x_2,u_3) \tag{3.42}$$

b). *La función $\psi^{(2)}_\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3): X \to \mathcal{L}(X,Y)$ está definida por*

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}_\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3)(u_1,u_2,u_3)(v_1,v_2,v_3) =&\psi(v_1,u_2,x_3) + \psi(v_1,x_2,u_3)+ \\ &\psi(u_1,v_2,x_3) + \psi(x_1,v_2,u_3)+ \\ &\psi(u_1,x_2,v_3) + \psi(x_1,u_2,v_3)\end{aligned} \tag{3.43}$$

c). *Para $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 3$ se cumple*

$$\psi^{(n)}_\mathcal{F}(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases}\psi^{(2)}_\mathcal{F} & , \text{cuando } n = 3 \\ 0 & , \text{cuando } n \geqslant 4\end{cases} \tag{3.44}$$

Demostración. (a) Por la continuidad y trilinealidad de ψ, la función $(u_1, u_2, u_3) \in X \mapsto \psi(u_1, x_2, x_3) + \psi(x_1, u_2, x_3) + \psi(x_1, x_2, u_3) \in Y$ es lineal y continua, es decir la función anterior resulta ser un elemento del Espacio $\mathcal{L}(X, Y)$, denotemosla por T y mostremos que esta función es la $\mathcal{F}$-derivada de ψ. Para simplificar la notación convengamos en escribir $\psi(x_1, x_2, x_3) = \psi(x_i)$; por la trilinealidad de ψ se muestra que

$$\frac{\psi(x_i + tu_i) - \psi(x_i)}{t} - T(u_i) = t\Big[\psi(x_1, u_2, u_3) + \psi(u_1, x_2, u_3) + \psi(u_1, u_2, x_3)\Big] + t^2\psi(u_1, u_2, u_3)$$

Sean ahora $V \subset Y$ vecindad del cero en Y y $S_i \subset X_i$ subconjunto acotado de X_i, $(i = 1, 2, 3)$, como toda función continua es acotada cada una de las funciones

$$\begin{aligned}
\psi_{2,3} &: (u_2, u_3) \in X_2 \times X_3 \mapsto \psi(x_1, u_2, u_3) \in Y \\
\psi_{1,3} &: (u_1, u_3) \in X_1 \times X_3 \mapsto \psi(u_1, x_2, u_3) \in Y \\
\psi_{1,2} &: (u_1, u_2) \in X_1 \times X_2 \mapsto \psi(u_1, u_2, x_3) \in Y
\end{aligned}$$

es acotada y en consecuencia los conjuntos $\psi_{2,3}(S_2 \times S_3)$, $\psi_{1,3}(S_1 \times S_3)$, $\psi_{1,2}(S_1 \times S_2)$ y $\psi(S_1 \times S_2 \times S_3)$ son acotados en Y, esto permite hallar un $0 < \delta < 1$ tal que si $0 < |t| < \delta$ y $(u_1, u_2, u_3) \in S_1 \times S_2 \times S_3$ entonces

$$\begin{aligned}
t\psi_{2,3}(u_2, u_3) &= t\psi(x_1, u_2, u_3) \in V^s \\
t\psi_{1,3}(u_1, u_3) &= t\psi(u_1, x_2, u_3) \in V^s \\
t\psi_{1,2}(u_1, u_2) &= t\psi(u_1, u_2, x_3) \in V^s \\
t^2\psi(u_1, u_2, u_3) &\in tV^s \subset V^s
\end{aligned}$$

donde V^s es la vecindad equilibrada del cero en Y tal que $V^s + V^s + V^s + V^s \subset V$, demostrando que $\frac{\psi(x_i + tu_i) - \psi(x_i)}{t} - T(u_i)$ converge a cero uniformemente respecto de (u_1, u_2, u_3) en cada subconjunto acotado de $X_1 \times X_2 \times X_3$.

(b) Definamos las funciones bilineales y continuas

$$\begin{aligned}
f_1 &: X_2 \times X_3 \to \mathcal{L}(X, Y) \text{ por } f_1(\zeta_2, \zeta_3)(u_i) = \psi(u_1, \zeta_2, \zeta_3) \\
f_2 &: X_1 \times X_3 \to \mathcal{L}(X, Y) \text{ por } f_2(\zeta_1, \zeta_3)(u_i) = \psi(\zeta_1, u_2, \zeta_3) \\
f_3 &: X_1 \times X_2 \to \mathcal{L}(X, Y) \text{ por } f_3(\zeta_1, \zeta_1)(u_i) = \psi(\zeta_1, \zeta_2, u_3)
\end{aligned}$$

y de aqui las funciones $\psi_i : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ definidas por $\psi_i = f_i \circ \pi_i$, $(i = 1, 2, 3)$ donde las funciones π_i son las proyecciones

$$\begin{aligned}
\pi_1 &: X \to X_2 \times X_3 \text{ definida por } \pi_1(\zeta_i) = (\zeta_2, \zeta_3) \\
\pi_2 &: X \to X_1 \times X_3 \text{ definida por } \pi_2(\zeta_i) = (\zeta_1, \zeta_3) \\
\pi_3 &: X \to X_1 \times X_2 \text{ definida por } \pi_3(\zeta_i) = (\zeta_1, \zeta_2)
\end{aligned}$$

las derivadas de las funciones ψ_i se expresan por

$$\begin{aligned}
\psi_1'(x_i)(u_i) &= \big[f_1'(x_2, x_3) \circ \pi_1\big](u_i) = f_1'(x_2, x_3)(u_2, u_3) = f_1(u_2, x_3) + f_1(x_2, u_3) \\
\psi_2'(x_i)(u_i) &= \big[f_2'(x_1, x_3) \circ \pi_2\big](u_i) = f_2'(x_1, x_3)(u_1, u_3) = f_2(u_1, x_3) + f_2(x_1, u_3) \\
\psi_3'(x_i)(u_i) &= \big[f_3'(x_1, x_2) \circ \pi_3\big](u_i) = f_3'(x_1, x_2)(u_1, u_2) = f_3(u_1, x_2) + f_3(x_1, u_2)
\end{aligned}$$

es claro entonces que $\psi'_{\mathcal{F}} = \psi_1 + \psi_2 + \psi_3$ y por tanto $\psi^{(2)}_{\mathcal{F}} = \psi'_1 + \psi'_2 + \psi'_3$ verificando (3.43)

(c) Se comprueba que la función $\psi^{(2)}_{\mathcal{F}} : X \to \mathcal{L}^2(X,Y)$ es lineal y continua y por tanto (3.44) es evidentemente cierto □

Para demostrar el siguiente teorema necesitaremos el lema:

Lema 3.6 *Sean X,Y dos E.V.T.;$f : U \subset X \to Y$ donde U es abierto y $x_0 \in U$.*

a). *Si f es $\mathcal{H}$-diferenciable en $x_0 \in U$ entonces para cualesquier $\psi \in Y^*$ y $h_1, h_2, \dots, h_n \in X$, la función real de n variables definida localmente por*

$$\Theta(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \psi\left[f(x_0 + \zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2 + \cdots + \zeta_n h_n)\right] \tag{3.45}$$

es diferenciable en $(0,0,\dots,0) \in \mathbb{R}^n$ y además se cumple

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_i}(0,0,\dots,0) = \psi\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0)h_i\right], \quad \forall i = 1,2,\dots,n \tag{3.46}$$

b). *Cuando f es $\mathcal{H}$-diferenciable en U la función definida en (3.45) es diferenciable en una vecindad del cero en $\mathbb{R}^n$ y además se cumple*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_i}(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) = \psi\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0 + \zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2 + \cdots + \zeta_n h_n)h_i\right], \quad \forall i = 1,2,\dots,n$$

Demostración. (a). Para $n = 1$ la función Θ de variable real estará definida por $\Theta(\zeta) = \psi[f(x_0 + \zeta h)]$ y para mostrar su diferenciabilidad en el $\zeta = 0$ tenemos el límite

$$\begin{aligned}
\frac{d\Theta}{d\zeta}(\zeta) &= \lim_{\zeta \to 0} \frac{\psi[f(x_0 + \zeta h)] - \psi[f(x_0)]}{\zeta} \\
&= \psi\left[\lim_{\zeta \to 0} \frac{f(x_0 + \zeta h) - f(x_0)}{\zeta}\right] \\
&= \psi\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0)h\right]
\end{aligned}$$

Para $n \geqslant 2$ será suficiente mostrar que la función

$$\frac{\Theta(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) - \Theta(0,0,\dots,0) - \sum_{i=1}^n \zeta_i \psi\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0)h_i\right]}{\|(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\|}$$

tiende a cero cuando $(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \to (0,0,\dots,0)$, donde $\|(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n)\| = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \cdots + \zeta_n^2}$. Pero observemos que la función anterior se puede expresar como

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\|(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\|}\left\{\psi\left[f(x_0 + \zeta_1 h_1 \cdots + \zeta_n h_n)\right] - \psi\left[f(x_0)\right] - \sum_{i=1}^n \zeta_i \psi\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0)h_i\right]\right\} \\
&= \psi\left\{\frac{f\left(x_0 + \|(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\|\left[\frac{\zeta_1 h_1 + \cdots + \zeta_n h_n}{\|(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\|}\right]\right) - f(x_0)}{\|(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\|} - f'_{\mathcal{H}}(x_0)\left(\frac{\zeta_1 h_1 + \cdots + \zeta_n h_n}{\|(\zeta_1, \dots, \zeta_n)\|}\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.47}$$

Como f es $\mathcal{H}$-diferenciable en $x_0 \in U$ y el conjunto

$$K = \left\{ \frac{\zeta_1 h_1 + \cdots + \zeta_n h_n}{\|(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)\|} \Big/ (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n - \{0\} \text{ con } |\zeta_i| \leqslant 1, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

es secuencialmente compacto entonces (3.47) tiende a cero cuando $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \to 0$ (recuerde que ψ es lineal y continua) y por tanto la función Θ es diferenciable en $(0, 0, \ldots, 0)$ cumpliendose además (3.46)

(b).Fijemos un punto $(\zeta_1^0, \zeta_2^0, \ldots, \zeta_n^0)$ en una vecindad del cero y definamos la función Ψ como

$$\begin{aligned}\Psi(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) &= \Theta(\zeta_1 + \zeta_1^0, \ldots, \zeta_n + \zeta_n^0) \\ &= \psi\big[f(\underbrace{x_0 + \zeta_1^0 h_1 + \cdots + \zeta_n^0 h_n}_{\bar{x}_0}) + (\zeta_1 h_1 + \cdots + \zeta_n h_n)\big]\end{aligned}$$

por el caso anterior resulta que Ψ es diferenciable en $(0, 0, \ldots, 0)$ (para una vecindad pequeña del cero, el punto $\bar{x}_0$ estará en U) cumpliendose

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta_i}(0, 0, \ldots, 0) = \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_i}(\zeta_1^0, \ldots, \zeta_n^0) = \psi\big[f'_{\mathcal{H}}(x_0 + \zeta_1^0 h_1 + \zeta_2^0 h_2 + \cdots + \zeta_n^0 h_n) h_i\big]$$

como se quería demostrar □

Adoptaremos la siguiente notación

$$f_\sigma^{(n)}(x_0)(x_1)(x_2)\cdots(x_n) = f_\sigma^{(n)}(x_0)(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Teorema 3.17 (Simetría de la $\mathcal{H}^n$-derivada) *Sean X, Y dos E.V.T con Y Localmente Convexo de Hausdorff. Si la función $f : U \subset X \to Y$ definida en el abierto U es $\mathcal{H}^n$-diferenciable en el punto $x_0 \in U$, entonces $f_{\mathcal{H}}^n(x_0) \in \mathcal{L}^n(X, Y)$ es simétrica, es decir que verifica*

$$f_{\mathcal{H}}^{(n)}(x_0)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{\mathcal{H}}^{(n)}(x_0)(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)})$$

para cualquier permutación $\pi : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$

Demostración. Para $n = 1$ no hay nada que probar, veamos para $n = 2$. Sea $\psi \in Y^*$ cualquiera y fijemos $h_1, h_2 \in X$ arbitrarios, definamos ahora la función real de 2 variables Θ como

$$\Theta(\zeta_1, \zeta_2) = \psi\big[f(x_0 + \zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2)\big]$$

que por el lema anterior es diferenciable en una vecindad del cero $(0, 0)$ con

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_i}(\zeta_1, \zeta_2) = \psi\big[f'_{\mathcal{H}}(x_0 + \zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2) h_i\big], \quad i = 1, 2$$

además la función $f'_{\mathcal{H}} : U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ es $\mathcal{H}$-diferenciable en x_0, para aplicar el lema anterior nuevamente, observemos que las funciones $\tilde{\psi}_i : \mathcal{L}(X, Y) \to \mathbb{R}$ definidas por $\tilde{\psi}_i(T) =$

$\psi(Th_i)$, $(i = 1,2)$ son lineales y continuas en $\mathcal{L}(X,Y)$, en efecto, la linealidad es inmediata y para la continuidad sea $I \subset \mathbb{R}$ abierto cualquiera entonces

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}_i^{-1}(I) &= \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/\psi(Th_i) \in I\}\\ &= \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/Th_i \in \psi^{-1}(I)\}\\ &= \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(\{h_i\}) \subset \psi^{-1}(I)\}\end{aligned}$$

y como $\{h_i\} \subset X$ es acotado y $\psi^{-1}(I) \subset Y$ es abierto en Y resulta que $\tilde{\psi}_i^{-1}(I)$ es abierto en $\mathcal{L}(X,Y)$, demostrando que $\tilde{\psi}_i$ es continua, es decir $\tilde{\psi}_i \in \mathcal{L}^*(X,Y)$. Asi tendremos que

$$\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_i}(\zeta_1,\zeta_2) = \tilde{\psi}_i\left[f'_{\mathcal{H}}(x_0 + \zeta_1 h_1 + \zeta_2 h_2)\right], \quad i = 1,2$$

Por el lema anterior con $\mathcal{L}(X,Y)$, $f'_{\mathcal{H}}$ y $\tilde{\psi}_i$ en lugar de Y, f y ψ respectivamente las funciones $\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_i}$ resultan ser diferenciables en $(0,0)$ y además

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_1}\right)(0,0) &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_1^2}(0,0) = \tilde{\psi}_1\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)h_1\right] = \psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_1)(h_1)\right]\\ \frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_1}\right)(0,0) &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_2\partial\zeta_1}(0,0) = \tilde{\psi}_1\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)h_2\right] = \psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_2)(h_1)\right]\\ \frac{\partial}{\partial\zeta_1}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_2}\right)(0,0) &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2}(0,0) = \tilde{\psi}_2\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)h_1\right] = \psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_1)(h_2)\right]\\ \frac{\partial}{\partial\zeta_2}\left(\frac{\partial\Theta}{\partial\zeta_2}\right)(0,0) &= \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_2^2}(0,0) = \tilde{\psi}_2\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)h_2\right] = \psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_2)(h_2)\right]\end{aligned}$$

Por el teorema de Young sabemos que las derivadas parciales mixtas de orden 2 de Θ son iguales $\frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_2\partial\zeta_1}(0,0) = \frac{\partial^2\Theta}{\partial\zeta_1\partial\zeta_2}(0,0)$ en consecuencia $\psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_2)(h_1)\right] = \psi\left[f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_1)(h_2)\right]$ y como Y es Localmente Convexo y $\psi \in Y^*$ es arbitrario entonces $f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_2)(h_1) = f_{\mathcal{H}}^{(2)}(x_0)(h_1)(h_2)$. Para el caso general $(n \in \mathbb{N})$ la prueba es por inducción □

Teorema 3.18 (Regla de la cadena de orden n) *Sean X, Y, Z tres E.V.T; $f : U \subset X \to Y$ función $\mathcal{F}^n$-diferenciable (resp. $\mathcal{H}^n$-diferenciable) en $x_0 \in U$ y $g : V \subset Y \to Z$ función $\mathcal{F}^n$-diferenciable (resp. $\mathcal{H}^n$-diferenciable) en $f(x_0)$ donde U y V son abiertos con $f(U) \subset V$. Entonces la composición $g \circ f$ es $\mathcal{F}^n$-diferenciable (resp. $\mathcal{H}^n$-diferenciable) en x_0 cumpliendose además*

$$(g \circ f)_{\sigma}^{(n)}(x_0)(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n}\sum\Big\{g_{\sigma}^{(k)}(f(x_0))\big[f_{\sigma}^{(j_1)}(x_0)(x_{1j_1}, x_{2j_1}, \ldots, x_{j_1 j_1}),$$
$$f_{\sigma}^{(j_2)}(x_0)(x_{1j_2}, x_{2j_2}, \ldots, x_{j_2 j_2}), \ldots, f_{\sigma}^{(j_k)}(x_0)(x_{1j_k}, x_{2j_k}, \ldots, x_{j_k j_k})\big]\Big\}$$

donde la segunda sumatoria es tomada sobre todas las particiones del conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ en k conjuntos

$$\{x_{1j_1}, x_{2j_1}, \ldots, x_{j_1 j_1}\}, \{x_{1j_2}, x_{2j_2}, \ldots, x_{j_2 j_2}\}, \ldots, \{x_{1j_k}, x_{2j_k}, \ldots, x_{j_k j_k}\}$$

tales que

$$j_1 + j_2 + \cdots + j_k = n$$

y de manera que los índices de cada conjunto están en orden creciente, es decir

$$\begin{matrix} 1j_1 < 2j_1 < \cdots < j_1 j_1 \\ 1j_2 < 2j_2 < \cdots < j_2 j_2 \\ \vdots \\ 1j_k < 2j_k < \cdots < j_k j_k \end{matrix} \qquad y \quad 1j_1 < 1j_2 < \cdots < 1j_k$$

Demostración. Antes de pasar a la demostración veamos como se puede expresar la segunda sumatoria para algunos valores de n y k (pondremos $y_0 = f(x_0)$ y evitaremos el subíndice σ)

Cuando $n = 2$

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad g^{(1)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_2)\right] \\ k = 2: &\quad g^{(2)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(1)}(x_0)(x_2)\right] \end{aligned}$$

Cuando $n = 3$

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad g^{(1)}(y_0)\left[f^{(3)}(x_0)(x_1, x_2, x_3)\right] \\ k = 2: &\quad \begin{cases} g^{(2)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(2)}(x_0)(x_2, x_3)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_1, x_2), f^{(1)}(x_3)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(2)}(y_0)(x_1, x_3), f^{(1)}(x_2)\right] \end{cases} \\ k = 3: &\quad g^{(3)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_1), f^{(1)}(x_2), f^{(1)}(x_3)\right] \end{aligned}$$

Cuando $n = 4$

$$\begin{aligned} k = 1: &\quad g^{(1)}(y_0)\left[f^{(4)}(x_0)(x_1, x_2, x_3, x_4)\right] \\ k = 2: &\quad \begin{cases} g^{(2)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(3)}(x_0)(x_2, x_3, x_4)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_2), f^{(2)}(x_0)(x_3, x_4)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_3), f^{(2)}(x_0)(x_2, x_4)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_4), f^{(2)}(x_0)(x_2, x_3)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(3)}(x_1, x_2, x_3), f^{(1)}(x_4)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(3)}(x_1, x_2, x_4), f^{(1)}(x_3)\right] + \\ g^{(2)}(y_0)\left[f^{(3)}(x_1, x_3, x_4), f^{(1)}(x_2)\right] \end{cases} \\ k = 3: &\quad \begin{cases} g^{(3)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(1)}(x_0)(x_2), f^{(2)}(x_0)(x_3, x_4)\right] + \\ g^{(3)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(2)}(x_0)(x_2, x_3), f^{(1)}(x_0)(x_4)\right] + \\ g^{(3)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(2)}(x_0)(x_2, x_4), f^{(1)}(x_0)(x_3)\right] + \\ g^{(3)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_2), f^{(1)}(x_0)(x_3), f^{(1)}(x_0)(x_4)\right] + \\ g^{(3)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_3), f^{(1)}(x_0)(x_2), f^{(1)}(x_0)(x_4)\right] + \\ g^{(3)}(y_0)\left[f^{(2)}(x_0)(x_1, x_4), f^{(1)}(x_0)(x_2), f^{(1)}(x_0)(x_3)\right] \end{cases} \\ k = 4: &\quad g^{(4)}(y_0)\left[f^{(1)}(x_0)(x_1), f^{(1)}(x_0)(x_2), f^{(1)}(x_0)(x_3), f^{(1)}(x_0)(x_4)\right] \end{aligned}$$

El caso $n = 1$ ya ha sido probado en el Teorema 3.2. El caso general se prueba por inducción sobre n, para evitar notaciones engorrosas solo verificaremos el caso $n = 2$ y $\sigma = \mathcal{F}$. Consideremos la función $T : X \to \mathcal{L}(X, Y)$ definida por

$$T(x,y) = g^{(1)} f((x_0)) \left[f^{(2)}(x_0)(x,y)\right] + g^{(2)}(f(x_0)) \left[f^{(1)}(x_0)(x), f^{(2)}(x_0)(y)\right], \quad \forall x, y \in X$$

y mostremos que T es la $\mathcal{F}^2$-derivada de f en x_0 (en lo que sigue evitaremos escribir $\mathcal{F}$ como subíndice). Sean $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ sucesión acotada en X, se puede escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{(g\circ f)'(x_0 + t_n h_n) - (g\circ f)'(x_0)}{t_n} - \left[g^{(2)}[f(x_0)]\Big(f'(x_0)(h_n)\Big)\right]\circ f'(x_0) \\
&\quad - g'[f(x_0)]\circ\left[f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&= \frac{g'[f(x_0 + t_n h_n)]\circ f'(x_0 + t_n h_n) - g'[f(x_0)]\circ f'(x_0)}{t_n} \\
&\quad - \left[g^{(2)}[f(x_0)]\Big(f'(x_0)(h_n)\Big)\right]\circ f'(x_0) - g'[f(x_0)]\circ\left[f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&= \left[g^{(2)}[f(x_0)]\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'(x_0)(h_n)\Big)\right]\circ f'(x_0) \\
&\quad + \left[\frac{g'[f(x_0 + t_n h_n)] - g'[f(x_0)]}{t_n} - g^{(2)}[f(x_0)]\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\Big)\right]\circ f'(x_0) \\
&\quad + g'[f(x_0)]\circ\left[\frac{f'(x_0 + t_n h_n) - f'(x_0)}{t_n} - f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&\quad + t_n\Bigg\{\left[g^{(2)}[f(x_0)]\Big(f'(x_0)(h_n)\Big)\right]\circ\left[\frac{f'(x_0 + t_n h_n) - f'(x_0)}{t_n} - f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&\quad + \left[g^{(2)}[f(x_0)]\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - f'(x_0)(h_n)\Big)\right]\circ\left[\frac{f'(x_0 + t_n h_n) - f'(x_0)}{t_n}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&\quad + \left[\frac{g'[f(x_0 + t_n h_n)] - g'[f(x_0)]}{t_n} - g^{(2)}[f(x_0)]\Big(\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\Big)\right]\circ \\
&\qquad\qquad \left[\frac{f'(x_0 + t_n h_n) - f'(x_0)}{t_n} - f^{(2)}(x_0)(h_n)\right] \\
&\quad - \left[\frac{g'[f(x_0 + t_n h_n)] - g'[f(x_0)]}{t_n}\right]\circ f^{(2)}(x_0)(h_n)\Bigg\}
\end{aligned}$$

Por la continuidad separada de la función composición (vea la Proposición 4.1 más adelante) cada miembro del primer grupo converge a cero cuando $n \to \infty$. Cada miembro del segundo grupo es una sucesión acotada en $\mathcal{L}(X, Z)$ (la función composición es acotada aunque no necesariamente continua, vea el Teorema 4.2) y por tanto al multiplicarlos por t_n, también convergen a cero. Esto demuestra el teorema. $\square$

Definición 3.4 (Función de clase C_σ^n) *Con las mismas condiciones de la Definición 3.2 y para $n \in \mathbb{N}$. Decimos que f es de clase C_σ^n en un punto $x_0 \in U$, que denotaremos por $f \in C_\sigma^n(x_0)$, cuando cumple las siguientes condiciones*

1. *f es σ^n-diferenciable en U*

2. *La función $f_\sigma^{(n)} : U \subset X \to \mathcal{L}^n(X,Y)$ es continua en x_0*

Cuando f es de clase C_σ^n es cada punto del conjunto U escribiremos $f \in C_\sigma^n(U)$

Más adelante se demuestra que la función composición comp: $\mathcal{L}(X,Y)\times\mathcal{L}(Y,Z) \to \mathcal{L}(X,Z)$ (vea la Definición 4.1 más adelante) es acotada pero en general no es continua (Teorema 4.1): esto causa algunos incovenientes cuando se quiere generalizar la regla de la cadena de orden n a E.V.T. arbitrarios. Por ejemplo, a diferencia de lo que ocurre en Espacios Normados,

> *La composición de funciones de clase $C_{\mathcal{F}}^1$ (resp. $C_{\mathcal{H}}^1$) no necesariamente es una función de clase $C_{\mathcal{F}}^1$ (resp. $C_{\mathcal{H}}^1$)*

es decir si tenemos las funciones $f : U \subset X \to Y$ de clase $C_{\mathcal{F}}^1(U)$ y $g : V \subset Y \to Z$ de clase $C_{\mathcal{F}}^1(V)$ donde U y V son abiertos con $f(U) \subset V$ entonces del Teorema 3.18 $g \circ f$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en U cumpliendose que $(g \circ f)'_{\mathcal{F}}(x) = g'_{\mathcal{F}}(f(x)) \circ f'_{\mathcal{F}}(x)$, $\forall x \in U$ o expresado en términos de funciones

$$(g \circ f)'_{\mathcal{F}} = \text{comp} \circ \mu$$

donde la función $\mu : U \subset X \to \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z)$ está definida por $\mu = (f'_{\mathcal{F}}, g'_{\mathcal{F}} \circ f)$. En principio no tenemos la seguridad de que f sea continua (vea el Teorema 3.14) y aun asi lo fuera tampoco hay garantía de que la función composición sea continua, en consecuencia no necesariamente $(g \circ f)'_{\mathcal{F}}$ será continua.

El siguiente teorema da la expresión para la derivada de ordenes superiores del producto de funciones.

Teorema 3.19 (Diferenciabilidad de orden superior del producto) *Sean X_1, X_2, X, Y E.V.T.; $\mu : X_1 \times X_2 \to Y$ función bilineal continua; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2; y para cada $i = 1,2$ la función $f_i : U \subset X \to X_i$ que es σ^n-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ (donde U es abierto). Entonces la función $\psi : U \subset X \to Y$ definida por*

$$\psi(x) = \mu(f_1(x), f_2(x)), \quad \forall x \in U$$

es σ^n-diferenciable en x_0 cumpliéndose además que

$$\begin{aligned}\psi_\sigma^{(n)}&(x_0)(h_1, h_2, \dots, h_n) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{\pi} \mu\Big(f_1^{(i)}(x_0)(h_{\pi(1)} h_{\pi(2)}, \dots, h_{\pi(i)}),\ f_2^{(n-i)}(x_0)(h_{\pi(i+1)}, h_{\pi(i+2)}, \dots, h_{\pi(n)})\Big)\end{aligned}$$

donde la segunda sumatoria se considera sobre todas las permutaciones π del conjunto $S_n = \{1, 2, \dots, n\}$ tales que

$$\pi(1) < \pi(2) < \cdots < \pi(i) \quad y \quad \pi(i+1) < \pi(i+2) < \cdots < \pi(n)$$

Demostración. Antes de pasar a la demostración veamos como podemos expresar la doble sumatoria para algunos valores de n, tengamos en cuenta que $f^{(0)} = f$.

Cuando $n = 1$ tenemos solamente $1! = 1$ permutación posible a saber $\pi(1) = 1$

$$\begin{aligned} i = 0: &\quad \mu\big(f_1(x_0), f_2^{(1)}(x_0)h\big) \\ i = 1: &\quad \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h), f_2(x_0)\big) \end{aligned}$$

Cuando $n = 2$ tenemos $2! = 2$ permutaciones posibles $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} i = 0: &\quad \mu\big(f_1(x_0), f_2^{(2)}(x_0)(h_1, h_2)\big) \\ i = 1: &\quad \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h_1), f_2^{(1)}(x_0)(h_2)\big) + \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h_2), f_2^{(1)}(x_0)(h_1)\big) \\ i = 2: &\quad \mu\big(f_1^{(2)}(x_0)(h_1, h_2), f_2(x_0)\big) \end{aligned}$$

Cuando $n = 3$ tenemos $3! = 6$ permutaciones posibles $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 3\end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{smallmatrix}\right)$; $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 2\end{smallmatrix}\right)$ y $\left(\begin{smallmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{smallmatrix}\right)$

$$\begin{aligned} i = 0: &\quad \mu\big(f_1(x_0), f_2^{(3)}(x_0)(h_1, h_2, h_3)\big) \\ i = 1: &\quad \begin{cases} \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h_1), f_2^{(2)}(x_0)(h_2, h_3)\big) + \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h_2), f_2^{(2)}(x_0)(h_1, h_3)\big) + \\ \mu\big(f_1^{(1)}(x_0)(h_3), f_2^{(2)}(x_0)(h_1, h_2)\big) \end{cases} \\ i = 2: &\quad \begin{cases} \mu\big(f_1^{(2)}(x_0)(h_1, h_2), f_2^{(1)}(x_0)(h_3)\big) + \mu\big(f_1^{(2)}(x_0)(h_1, h_3), f_2^{(1)}(x_0)(h_2)\big) + \\ \mu\big(f_1^{(2)}(x_0)(h_2, h_3), f_2^{(1)}(x_0)(h_1)\big) \end{cases} \\ i = 3: &\quad \mu\big(f_3(x_0)_1(h_1, h_2, h_3), f_2(x_0)\big) \end{aligned}$$

y asi en adelante

Veamos la demostración del teorema, por el Teorema 3.1 sabemos que la función ψ es diferenciable en U cumpliéndose que $\psi'_\sigma : U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ está definida por

$$\psi'_\sigma(x)(h) = \mu\big(f_1(x), f_2'(x)h\big) + \mu\big(f_1'(x)h, f_2(x)\big)$$

definamos las funciones bilineales y continuas

$$\begin{aligned} \mu_{0,1} &: X_1 \times \mathcal{L}(X, X_2) \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{por} \quad \mu_{0,1}(x_1, T_2)h = \mu(x_1, T_2 h) \\ \mu_{1,0} &: \mathcal{L}(X, X_1) \times X_2 \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{por} \quad \mu_{1,0}(T_1, x_2)h = \mu(T_1 h, x_2) \end{aligned}$$

y de aqui las funciones

$$\begin{aligned} \psi_{0,1} &: U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{por} \quad \psi_{0,1}(x) = \mu_{0,1}\big(f_1(x), f_2'(x)\big) \\ \psi_{1,0} &: U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y) \quad \text{por} \quad \psi_{1,0}(x) = \mu_{1,0}\big(f_1'(x), f_2(x)\big) \end{aligned}$$

cada una de estas funciones es diferenciable en U según el Teorema 3.1 con derivadas dadas por

$$\begin{aligned} \psi_{0,1}'(x)(h_1, h_2) &= \mu_{0,1}\big(f_1'(x)h_1, f_2'(x)\big)h_2 + \mu_{0,1}\big(f_1(x), f_2^{(2)}(x)h_1\big)h_2 \\ &= \mu\big(f_1'(x)h_1, f_2'(x)h_2\big) + \mu\big(f_1(x), f_2^{(2)}(x)h_1h_2\big) \\ \psi_{1,0}'(x)(h_1, h_2) &= \mu_{1,0}\big(f_1^{(2)}(x)h_1, f_2(x)\big)h_2 + \mu_{1,0}\big(f_1'(x), f_2'(x)h_1\big)h_2 \\ &= \mu\big(f_1^{(2)}(x)h_1h_2, f_2(x)\big) + \mu\big(f_1'(x)h_2, f_2'(x)h_1\big) \end{aligned}$$

es claro que se puede escribir $\psi' = \psi_{0,1} + \psi_{1,0}$ resultando que

$$\begin{aligned}\psi^{(2)}(x)(h_1,h_2) =& \mu\left(f_1(x), f_2^{(2)}(x)h_1h_2\right) + \mu\left(f_1'(x)h_1, f_2'(x)h_2\right) + \\ & \mu\left(f_1'(x)h_2, f_2'(x)h_1\right) + \mu\left(f_1^{(2)}(x)h_1h_2, f_2(x)\right)\end{aligned}$$

Para la derivada de orden 3 definamos las funciones bilineales y continuas

$$\begin{array}{lll}\mu_{0,2} : X_1 \times \mathcal{L}^2(X,X_2) \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \mu_{0,2}(x_1,T_2)(h_1,h_2) = \mu(x_1,T_2h_1h_2) \\ \mu_{1,1}^1 : \mathcal{L}(X,X_1) \times \mathcal{L}(X,X_2) \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \mu_{1,1}^1(T_1,T_2)(h_1,h_2) = \mu(T_1h_1,T_2h_2) \\ \mu_{1,1}^2 : \mathcal{L}(X,X_1) \times \mathcal{L}(X,X_2) \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \mu_{1,1}^2(T_1,T_2)(h_1,h_2) = \mu(T_1h_2,T_2h_1) \\ \mu_{2,0} : \mathcal{L}^2(X,X_1) \times X_2 \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \mu_{2,0}(T_1,x_2)(h_1,h_2) = \mu(T_1h_1h_2,x_2)\end{array}$$

y de aqui las funciones

$$\begin{array}{lll}\psi_{0,2} : U \subset X \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \psi_{0,2}(x) = \mu_{0,2}\left(f_1(x), f_2^{(2)}(x)\right) \\ \psi_{1,1}^1 : U \subset X \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \psi_{1,1}^1(x) = \mu_{1,1}^1\left(f_1'(x), f_2'(x)\right) \\ \psi_{1,1}^2 : U \subset X \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \psi_{1,1}^2(x) = \mu_{1,1}^2\left(f_1'(x), f_2'(x)\right) \\ \psi_{2,0} : U \subset X \to \mathcal{L}^2(X,Y) & \text{por} & \psi_{2,0}(x) = \mu_{2,0}\left(f_1^{(2)}(x), f_2(x)\right)\end{array}$$

resultando claro que podemos escribir $\psi^{(2)} = \psi_{0,2} + \psi_{1,1}^1 + \psi_{1,1}^2 + \psi_{2,0}$, cada una de estas funciones es diferenciable en U y y de aqui se obtiene la expresión para $\psi^{(3)}(x)$, el proceso continua inductivamente □

Presentamos ahora dos versiones del teorema de Taylor. Si una función f es σ^n-diferenciable en un punto x_0 sabemos que la n-esima derivada $f_\sigma^{(n)}(x_0) \in \mathcal{L}^n(X,Y)$ aceptaremos la siguiente notación

$$f_\sigma^{(n)}(x_0)(x,x,\ldots,x) = f_\sigma^{(n)}(x_0)(x^n)$$

Lema 3.7 *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2 y $r : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y σ^n-diferenciable en un punto $x_0 \in U$. Si*

$$r(x_0) = 0, r_\sigma^{(1)}(x_0)(h) = 0, r_\sigma^{(2)}(x_0)(h^2) = 0, \cdots, r_\sigma^{(n)}(x_0)(h^n) = 0, \ \forall h \in X$$

entonces

$$\forall S \in \sigma, \quad \lim_{t \to 0} \frac{r(x_0 + th)}{t^n} = 0 \text{ uniformemente respecto de } h \in S$$

Demostración. En esta demostración evitaremos escribir el subíndice σ para denotar a la σ-derivada. Usaremos inducción sobre n. Para $n = 1$ tenemos la función $r : U \subset X \to Y$, σ-diferenciable en x_0 con $r(x_0) = 0$ y $r'(x_0)h = 0$, $\forall h \in X$ de donde $r'(x_0) = 0$ y por (3.6) la conclusión del teorema es inmediata. Supongamos que el teorema es válido para un cierto $n > 1$ es decir que para cualquier función $g : U \subset X \to Y$ entre E.V.T. X, Y con Y Localmente Convexo de Hausdorff que sea σ^n-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ (U abierto) tal que

$$g(x_0) = 0, g^{(1)}(x_0)(h) = 0, g^{(2)}(x_0)(h^2) = 0, \cdots, g^{(n)}(x_0)(h^n) = 0, \ \forall h \in X \tag{3.48}$$

se cumple

$$\forall S \in \sigma, \quad \lim_{t \to 0} \frac{g(x_0 + th)}{t^n} = 0 \text{ uniformemente respecto de } h \in S$$

Consideremos la función $r : U \subset X \to Y$ función σ^{n+1}-diferenciable en un punto $x_0 \in U$ con $r^{(k)}(x_0)(h^k) = 0$, $\forall h \in X$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$ y sea $S \in \sigma$ cualquiera. Definamos la función $g = r' : U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ que claramente verifica (3.48) y en consecuencia

$$\lim_{t \to 0} \frac{r'(x_0 + th)}{t^n} = 0 \text{ uniformemente respecto de } h \in S \tag{3.49}$$

para mostrar que $\lim_{t \to 0} \frac{r(x_0 + th)}{t^{n+1}} = 0$ uniformemente respecto de $h \in S$, sea $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero en Y, ~~entonces~~ existe un $q \in SC(Y)$ y $\epsilon > 0$ tales que $\{y \in Y / q(y) < \epsilon\} \subset V$. Por (3.49) podemos hallar un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \wedge h_1, h_2 \in S \Rightarrow q\Big[\frac{r'(x_0 + th_1)(h_2)}{t^n}\Big] < \epsilon \tag{3.50}$$

si tomamos $0 < |t| < \delta$ y $h \in S$ cualesquiera, entonces por el Teorema 3.6(b) existe un $\theta \in < 0, 1 >$ tal que

$$q\big[r(x_0 + th) - r(x_0)\big] = q\big[r(x_0 + th)\big] \leqslant q\big[r'(x_0 + t\theta h)(th)\big]$$

de donde resulta

$$q\Big[\frac{r(x_0 + th)}{t^{n+1}}\Big] \leqslant q\Big[\frac{r'(x_0 + t\theta h)(h)}{t^n}\Big] < \epsilon$$

la última desigualdad es por (3.50); esto a su vez implica que $\frac{r(x_0 + th)}{t^{n+1}} \in V$ demostrando que el teorema también se verifica para $n + 1$ $\square$

Lema 3.8 *Sean X, Y dos E.V.T. con X normado y $f : X \to Y$, entonces para cualquier $n \in \mathbb{N}$ las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a). $\lim_{t \to 0} \frac{f(th)}{|t|^n} = 0$ *uniformemente respecto de h en cada miembro de $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$*

b). $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{\|h\|^n} = 0$

Demostración (a $\Rightarrow$ b). Sea $V \subset Y$ cualquier vecindad del cero, y consideremos el conjunto acotado $A = \{x \in X / \|x\| \leqslant 1\}$ entonces por hipótesis existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \wedge h \in A \Rightarrow \frac{f(th)}{|t|^n} \in V$$

asi para cualquier $h \in X$ con $0 < \|h\| < \delta$ y notando que $\frac{1}{\|h\|} h \in A$ tenemos que

$$\frac{f(h)}{\|h\|^n} = \frac{f\big(\|h\| \frac{h}{\|h\|}\big)}{\|h\|^n} \in V$$

demostrando el límite en (b)

(b $\Rightarrow$ a). Sean $V \subset Y$ vecindad (equilibrada) del cero y $A \subset X$ acotado cualesquiera, desde que X es normado podemos hallar un $\lambda > 0$ tal que $\|h\| < \lambda$, $\forall h \in A$. Por hipótesis, existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < \|h\| < \delta \Rightarrow \frac{f(h)}{\|h\|^n} \in \frac{1}{\lambda^n}V$$

luego, si $0 < |t| < \frac{\delta}{\lambda}$ y $h \in A$ tenemos que $0 < \|th\| = |t|\|h\| < \delta$ y en consecuencia

$$\frac{f(th)}{|t|^n\|h\|^n} \in \frac{1}{\lambda^n}V$$

de donde resulta que $\frac{f(th)}{|t|^n} \in \frac{\|h\|^n}{\lambda^n}V \subset V$ demostrando el límite en (a). □

Teorema 3.20 (Teorema de Taylor con resto infinitesimal) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2 y $f : U \subset X \to Y$ función σ^n-diferenciable en $x_0 \in U$ (U abierto). Para cualesquier $h \in X$ con $x_0 + h \in U$ se cumple*

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_\sigma^{(k)}(x_0)(h^k) + r(h)$$

donde la función $r : X \to Y$ verifica

a). $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{r(th)}{t^n} = 0$ *uniformemente respecto de h en cada miembro de σ*

b). *Cuando X es normado y $\sigma = \mathcal{F}$ tendremos que* $\lim\limits_{\|h\| \to 0} \dfrac{r(h)}{\|h\|^n} = 0$

Demostración. Definamos la función $r : U - x_0 \subset X \to Y$ por

$$r(h) = f(x_0 + h) - \left\{ f(x_0) + f^{(1)}(x_0)h + \frac{1}{2!}f^{(2)}(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f^{(3)}(x_0)h^3 + \cdots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)h^n \right\}$$

(a) Sabemos que cada una de las funciones $\psi_k : X \to Y$ definidas por $\psi_k(h) = f^{(k)}(x_0)h^k$ son infinitamente diferenciables en todo punto $h \in X$ (vea ejemplo 38) cumpliendose además que

1. Las derivadas de orden i para $i = 0, 1, 2, \ldots, k-1$ en el origen son nulas
2. La derivada de orden k en el origen verifica $\psi_k^{(k)}(0)h^k = k! f^{(k)}(x_0)h^k$, $\forall h \in X$
3. Las derivadas de orden mayor que k son nulas

luego la función r resulta ser σ^n-diferenciable en 0 con

$$r(0) = 0, r^{(1)}(0)h = 0, r^{(2)}(0)h^2 = 0, \ldots, r^{(n)}(0)h^n = 0, \quad \forall h \in X$$

por el Lema 3.7 concluimos.

(b) Consecuencia inmediata del Lema 3.8 □

Teorema 3.21 (Teorema de Taylor con resto de Lagrange) *Sean X, Y dos E.V.T. con Y Localmente Convexo de Hausdorff; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2 y $f : U \subset X \to Y$ función σ^{n+1}-diferenciable en el abierto U. Para cualesquier $x_0 \in U$ y $h \in X$ con $[x_0, x_0 + h] \subset U$ se cumple*

a). *Para cualquier $q \in SC(Y)$, existe un $\theta \in <0,1>$ tal que*

$$q\Big[f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_\sigma^{(k)}(x_0)(h^k)\Big] \leqslant \frac{1}{(n+1)!} q\Big[f_\sigma^{(n+1)}(x_0+\theta h)(h^{n+1})\Big]$$

b). *Si X, Y son Normados y $\sigma = \mathcal{F}$ tendremos que*

$$\|f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(h^k)\| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}\|h\|^{n+1} \sup_{z\in[x_0,x_0+h]} \|f^{(n+1)}(z)\|$$

Demostración. (a). Sea $\psi \in Y^*$ cualquiera, y definamos la función real de variable real $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}$ por

$$\alpha(t) = \psi\big[f(x_0 + th)\big]$$

desde que f es σ^{n+1}-diferenciable en U, entonces α será $n+1$-veces diferenciable en $[0,1]$ cumpliendose

$$\alpha^{(k)}(t) = \psi\big[f_\sigma^{(k)}(x_0 + th)(h^k)\big], \quad \forall k = 0, 1, 2, \ldots, n+1$$

Por el teorema de Taylor uni-dimensional para α, existe un $\lambda \in <0,1>$ (que depende de ψ) tal que

$$\alpha(1) = \alpha(0) + \alpha'(0) + \frac{\alpha^2(0)}{2!} + \frac{\alpha^3(0)}{3!} + \cdots + \frac{\alpha^n(0)}{n!} + \frac{\alpha^{n+1}(\lambda)}{(n+1)!}$$

o equivalentemente

$$\psi\Big[f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_\sigma^{(k)}(x_0)(h^k)\Big] = \psi\Big[\frac{f_\sigma^{(n+1)}(x_0+\lambda h)(h^{n+1})}{(n+1)!}\Big]$$

para cualquier $\psi \in Y^*$. Por el Lema 3.5 tenemos que para $q \in SC(Y)$ existe un $\theta \in <0,1>$ tal que

$$q\Big[f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f_\sigma^{(k)}(x_0)(h^k)\Big] \leqslant \frac{1}{(n+1)!} q\big[f_\sigma^{(n+1)}(x_0+\theta h)(h^{n+1})\big]$$

(b). Directo de (a) considerando q como la norma de Y. □

3.6. Derivadas Parciales

Definición 3.5 (Derivadas Parciales) *Sean X, Y, Z tres E.V.T.; $f : U \times V \subset X \times Y \to Z$ función definida en el abierto $U \times V$ donde $U \subset X$ y $V \subset Y$ son abiertos; $\sigma_1 \subset \mathcal{P}(X)$ y $\sigma_2 \subset \mathcal{P}(Y)$ familias definidas como en la Definición 3.2 y $\sigma = \{S_1 \times S_2 / S_1 \in \sigma_1, S_2 \in \sigma_2\} \subset \mathcal{P}(X \times Y)$.*

a). *Decimos que f es $\sigma-$parcialmente diferenciable en $(x_0, y_0) \in U \times V$ respecto a la primera variable cuando la función*

$$x \in U \subset X \mapsto f(x, y_0) \in Z$$

es σ_1-diferenciable en x_0. A esta σ_1-derivada la denotaremos por $\partial_1 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X, Z)$

b). *Decimos que f es $\sigma-$parcialmente diferenciable en $(x_0, y_0) \in U \times V$ respecto a la segunda variable cuando la función*

$$y \in V \subset Y \mapsto f(x_0, y) \in Z$$

es σ_2-diferenciable en y_0. A esta σ_2-derivada la denotaremos por $\partial_2 f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(Y, Z)$

Lema 3.9 *Sean X, Y, Z tres E.V.T. y $T : X \times Y \to Z$ lineal y continua, entonces existen $u \in \mathcal{L}(X, Z)$ y $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tales que*

$$T(x, y) = u(x) + v(y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Demostración. Definimos las funciones $u(x) = T(x, 0)$, $\forall x \in X$ y $v(y) = T(0, y)$, $\forall y \in Y$. Es fácil mostrar que u y v son las que verifican el lema. □

Teorema 3.22 (Derivadas y derivadas parciales) *Con las mismas condiciones de la Definición 3.5. Si f es $\sigma-$diferenciable en $(x_0, y_0) \in U \times V$ entonces*

a). *La derivadas parciales $\partial_1 f(x_0, y_0)$ y $\partial_2 f(x_0, y_0)$ existen*

b). *Además se cumple*

$$f'_\sigma(x_0, y_0)(x, y) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y) \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Demostración. Desde que $f'_\sigma(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ entonces el lema anterior asegura la existencia de funciones $u \in \mathcal{L}(X, Z)$ y $v \in \mathcal{L}(Y, Z)$ tales que $f'_\sigma(x_0, y_0)(x, y) = u(x) + v(y)$, $\forall x \in X$, $y \in Y$. Mostremos que $\partial_1 f(x_0, y_0) = u$ y $\partial_2 f(x_0, y_0) = v$. Para la primera derivada parcial, sean $W \subset Z$ vecindad del cero en Z y $S_1 \in \sigma_1$ cualesquiera, como f es $\sigma-$diferenciable en $(x_0, y_0) \in U \times V$ entonces para la vecindad W y el conjunto $S = S_1 \times S_0 \in \sigma$, donde $S_0 \in \sigma_2$ es tal que $0 \in S_0$ (tal S_0 existe desde que $Y \subset \cup_{B \in \sigma_2} B$), existe un $\delta > 0$ tal que para cualesquier t con $0 < |t| < \delta$ y $(h_1, h_2) \in S_1 \times S_0$ se verifica

$$\frac{f\big((x_0, y_0) + t(h_1, h_2)\big) - f(x_0, y_0)}{t} - f'_\sigma(x_0, y_0)(h_1, h_2) \in W$$

de donde obtenemos que para $0 < |t| < \delta$ y $h \in S_1$ cualesquiera

$$\frac{f(x_0 + th, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} - u(h) \in W$$

demostrando esto que $\partial_1 f(x_0, y_0) = u$. Análogamente se prueba que $\partial_2 f(x_0, y_0) = v$ □

El recíproco de este teorema es en general falso, aún en Espacios Bidimensionales. Sin embargo si asumimos funciones de clase C^1 entonces tenemos la siguiente relación:

Teorema 3.23 (Caracterización de las funciones de clase C^1_σ) *Con las mismas condiciones de la Definición 3.5*

a). *Si f es de clase C^1_σ en $U \times V$, entonces las funciones derivadas parciales $\partial_1 f : U \times V \to \mathcal{L}(X, Z)$ y $\partial_2 f : U \times V \to \mathcal{L}(Y, Z)$ son continuas*

b). *Si además Z es Localmente Convexo de Hausdorff entonces el recíproco de (a) también es cierto.*

Demostración. (a) Tenemos que $f \in C^1_\sigma(U \times V)$, el Teorema 3.22 garantiza que la función $\partial_1 f : U \times V \to \mathcal{L}(X, Z)$ existe, para mostrar que es continua sean $(x_0, y_0) \in U \times V$, $W \subset Z$ vecindad del cero en Z y $A \subset X$ subconjunto acotado de X, de esta forma el conjunto $\widetilde{W} = \{T \in \mathcal{L}(X, Z)/T(A) \subset W\}$ es una vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, Z)$. Como la función $f'_\sigma : U \times V \to \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ es continua en (x_0, y_0) entonces para la vecindad del cero $\widehat{W} = \{\widehat{T} \in \mathcal{L}(X \times Y, Z)/\widehat{T}(A \times \{0\}) \subset W\}$ existen vecindades del cero $U_0 \subset X$ y $V_0 \subset Y$ tales que

$$(x, y) - (x_0, y_0) \in U_0 \times V_0 \Rightarrow f'_\sigma(x, y) - f'_\sigma(x_0, y_0) \in \widehat{W}$$

pero por las equivalencias siguientes

$$\begin{aligned} f'_\sigma(x, y) - f'_\sigma(x_0, y_0) \in \widehat{W} &\equiv \left(f'_\sigma(x, y) - f'_\sigma(x_0, y_0)\right)(A \times \{0\}) \subset W \\ &\equiv \forall a \in A,\ f'_\sigma(x, y)(a, 0) - f'_\sigma(x_0, y_0)(a, 0) \in W \\ &\equiv \forall a \in A,\ \partial_1 f(x, y)(a) - \partial_1(x_0, y_0)(a) \in W \\ &\equiv \left(\partial_1 f(x, y) - \partial_1(x_0, y_0)\right)(A) \subset W \end{aligned}$$

podemos escribir

$$(x, y) - (x_0, y_0) \in U_0 \times V_0 \Rightarrow \partial_1 f(x, y) - \partial_1(x_0, y_0) \in \widetilde{W}$$

demostrando esto que $\partial_1 f$ es continua en (x_0, y_0). De manera análoga se prueba la continuidad de $\partial_2 f$

(b) Mostremos primeramente que f es σ−diferenciable en un punto arbitrario $(x_0, y_0) \in U \times V$, sean para ello $W \subset Z$ vecindad del cero en Z y $S_1 \times S_2 \in \sigma$ (es decir $S_1 \in \sigma_1$ y $S_2 \in \sigma_2$). Siendo Z es Localmente Convexo de Hausdorff, para la vecindad W podemos hallar un $q \in SC(Z)$ y $\epsilon > 0$ tales que $\{z \in Z/q(z) < \epsilon\} \subset W$ y como $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ son continuas existen vecindades del cero $U_0 \subset U - x_0$ y $V_0 \subset V - x_0$ tales que si $(h_1, h_2) \in U_0 \times V_0$ entonces

$$\left.\begin{aligned} \left(\partial_1 f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \partial_1 f(x_0, y_0)\right)(S_1) \subset W_0 \\ \left(\partial_2 f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - \partial_2 f(x_0, y_0)\right)(S_2) \subset W_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.51}$$

donde $W_0 = \{z \in Z/q(z) < \frac{\epsilon}{2}\}$. Para la vecindad $U_0 \subset X$ y siendo $S_1 \in \sigma_1$ acotado podemos hallar un δ_1 tal que si $0 < |t| < \delta_1$ entonces $th \in U_0$, $\forall h \in S_1$ (ver la demostración de la Proposición 3.3) y análogamente hallar un $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < |t| < \delta_2$ entonces $th \in V_0$, $\forall h \in S_2$, luego para $\delta_0 = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ se cumple

$$0 < |t| < \delta_0 \Rightarrow (th_1, th_2) \in U_0 \times V_0, \quad \forall (h_1, h_2) \in S_1 \times S_2 \tag{3.52}$$

Asi, si $0 < |t| < \delta_0$ y $(h_1, h_2) \in S_1 \times S_2$ son cualesquiera entonces

$$\begin{aligned}
&\frac{f\Big((x_0, y_0) + t(h_1, h_2)\Big) - f(x_0, y_0)}{t} - \partial_1 f(x_0, y_0)(h_1) - \partial_2 f(x_0, y_0)(h_2) \\
&= \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t} - \partial_1 f(x_0, y_0)(h_1) - \partial_2 f(x_0, y_0)(h_2) \\
&- \frac{f(x_0, y_0 + th_2)}{t} + \frac{f(x_0, y_0 + th_2)}{t} \\
&= \left\{ \frac{f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0 + th_2)}{t} - \partial_1 f(x_0, y_0)(h_1) \right\} \\
&+ \left\{ \frac{f(x_0, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0)}{t} - \partial_2 f(x_0, y_0)(h_2) \right\}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

por el teorema del valor medio (Teorema 3.6,(b)) existe un $\theta \in < 0, 1 >$ tal que

$$\begin{aligned}
&q\Big[f(x_0 + th_1, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0 + th_2) - t\partial_1 f(x_0, y_0)(h_1)\Big] \\
&\qquad \leqslant q\Big[\partial_1 f(x_0 + t\theta_1 h_1, y_0 + th_2)(th_1) - t\partial_1 f(x_0, y_0)(h_1)\Big] \\
&q\Big[f(x_0, y_0 + th_2) - f(x_0, y_0) - t\partial_2 f(x_0, y_0)(h_2)\Big] \\
&\qquad \leqslant q\Big[\partial_2 f(x_0, y_0 + t\theta_2 h_2)(th_2) - t\partial_2 f(x_0, y_0)(h_2)\Big]
\end{aligned}$$

y por (3.51) y (3.53) resulta

$$\begin{aligned}
&q\left[\frac{f\Big((x_0, y_0) + t(h_1, h_2)\Big) - f(x_0, y_0)}{t} - \partial_1 f(x_0, y_0)(h_1) - \partial_2 f(x_0, y_0)(h_2)\right] \\
&\leqslant q\Big[\partial_1 f(x_0 + t\theta_1 h_1, y_0 + th_2)(h_1) - \partial_1 f(x_0, y_0)(h_1)\Big] \\
&+ q\Big[\partial_2 f(x_0, y_0 + t\theta_2 h_2)(h_2) - \partial_2 f(x_0, y_0)(h_2)\Big] \\
&< \epsilon/2 + \epsilon/2 \\
&= \epsilon
\end{aligned}$$

Demostrando que f es σ-diferenciable en $(x_0, y_0) \in U \times V$ donde además se cumple $f'_\sigma(x_0, y_0)(x, y) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y)$, $\forall (x, y) \in X \times Y$. La continuidad de la función $f'_\sigma : U \times V \to \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ resulta de esta última igualdad y de la continuidad de las funciones $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ □

Lema 3.10 *Sean X, Y, Z tres E.V.T.; $f : U \times V \subset X \times Y \to Z$ función definida en el abierto $U \times V$ y $(x_0, y_0) \in U \times V$. Para cualesquier $\psi \in Z^*$ y $(h_1, h_2) \in X \times Y$ definimos la función real de dos variables localmente en una vecindad del cero por*

$$\Theta(\zeta_1, \zeta_2) = \psi\big[f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)\big] \tag{3.54}$$

a). *Si f es $\mathcal{G}$-parcialmente diferenciable en (x_0, y_0) respecto a su primera (resp. segunda) variable, entonces la función Θ es parcialmente diferenciable en $(0,0)$ respecto a su primera (resp. segunda) variable y además se cumple*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}(0,0) = \psi\big[\partial_1 f(x_0, y_0)(h_1)\big] \left(\text{resp. } \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2}(0,0) = \psi\big[\partial_2 f(x_0, y_0)(h_2)\big]\right) \tag{3.55}$$

b). *Cuando f es $\mathcal{G}$-parcialmente diferenciable en $U \times V$ respecto a su primera (resp. segunda) variable, la función Θ es parcialmente diferenciable en una vecindad del cero de $\mathbf{R}^2$ y además se cumple*

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2) = \psi\big[\partial_1 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)(h_1)\big] \tag{3.56}$$

$$\left(\text{resp. } \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) = \psi\big[\partial_2 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)(h_2)\big]\right)$$

c). *Si f es $\mathcal{H}$-diferenciable en (x_0, y_0), entonces Θ es diferenciable en $(0,0) \in \mathbf{R}^2$ y sus derivadas parciales estan dadas como en (3.55)*

d). *Si f es $\mathcal{H}$-diferenciable en $U \times V$, entonces Θ es diferenciable en una vecindad del cero y allí sus derivadas parciales están dadas como en (3.56)*

Demostración. (a) y (b) los probaremos para la $\mathcal{G}$-derivada parcial respecto de la primera variable.

(a) Por hipótesis la función $x \in U \subset X \mapsto f(x, y_0) \in Z$ es $\mathcal{G}$ x-diferenciable en $x_0 \in U$ y por tanto se debe verificar el límite

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \partial_1 f(x_0, y_0)(h), \quad \forall h \in X$$

y por tanto tenemos el límite

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\Theta(t,0) - \Theta(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\psi\big[f(x_0 + th_1, y_0)\big] - \psi\big[f(x_0, y_0)\big]}{t}$$

$$= \psi\Big[\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + th_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}\Big] = \psi\big[\partial_1 f(x_0, y_0)(h_1)\big]$$

(b) Fijemos un punto (ζ_1^0, ζ_2^0) en una vecindad del cero y definamos la función $\tilde{\chi}$ como

$$\tilde{\chi}(\zeta_1, \zeta_2) = \Theta(\zeta_1^0 + \zeta_1, \zeta_2^0 + \zeta_2) = \psi\big[f(\underbrace{x_0 + \zeta_1^0 h_1}_{\tilde{x}_0} + \zeta_1 h_1, \underbrace{y_0 + \zeta_2^0 h_2}_{\tilde{y}_0} + \zeta_2 h_2)\big]$$

que por el caso anterior resulta

$$\frac{\partial \tilde{\chi}}{\partial \zeta_1}(0,0) = \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}(\zeta_1^0, \zeta_2^0) = \psi\big[\partial_1 f(x_0 + \zeta_1^0 h_1, y_0 + \zeta_2^0 h_2)(h_1)\big]$$

como se quería demostrar.

(c) Este y el siguiente item se demuestran análogamente al Lema 3.6. Para mostrar la diferenciabilidad de Θ en $(0,0)$ será suficiente verificar que la expresión

$$\frac{\Theta(\zeta_1,\zeta_2)-\Theta(0,0)-\zeta_1\psi[\partial_1 f(x_0,y_0)(h_1)]-\zeta_2\psi[\partial_2 f(x_0,y_0)(h_2)]}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|}$$

$$=\frac{\psi[f(x_0+\zeta_1 h_1,y_0+\zeta_2 h_2)]-\psi[f(x_0,y_0)]-\zeta_1\psi[\partial_1 f(x_0,y_0)(h_1)]-\zeta_2\psi[\partial_2 f(x_0,y_0)(h_2)]}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|}$$

$$=\psi\left\{\frac{f(x_0+\zeta_1 h_1,y_0+\zeta_2 h_2)-f(x_0,y_0)}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|}-f'_{\mathcal{H}}(x_0,y_0)\Big(\frac{\zeta_1}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|}h_1,\frac{\zeta_2}{\|(\zeta_1,\zeta_2)\|}h_2\Big)\right\}$$

tiende a cero cuando $\|(\zeta_1,\zeta_2)\|\to 0$ y esto es cierto desde que f es $\mathcal{H}$-diferenciable y el conjunto

$$K=\left\{(\frac{r}{\sqrt{r^2+s^2}}h_1,\frac{s}{\sqrt{r^2+s^2}}h_2)/(r,s)\in\mathbb{R}^2-\{0\}\text{ con }|r|,|s|\leqslant 1\right\}$$

es secuencialmente compacto en $X\times Y$ $\square$

El teorema que sigue presenta condiciones suficientes para la conmutatividad de las derivadas parciales, sin embargo antes de enunciarlo y demostrarlo observemos como se entiende esta conmutatividad. Sea una función $f: U\times V\to Z$, que es $\sigma-$parcialmente diferenciable en todo punto de $U\times V$ respecto a su primera variable, es decir que existe la función

$$\partial_1 f: U\times V\to\mathcal{L}(X,Z)$$

y supongamos que a su vez esta función es $\sigma-$parcialmente diferenciable en un punto (x_0,y_0) respecto de su primera y segunda variable, es decir que existen

$$\partial_1\partial_1 f(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(X,Z))$$
$$\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(Y,\mathcal{L}(X,Z))$$

De manera similar si f es $\sigma-$parcialmente diferenciable en $U\times V$ respecto a su segunda variable tenemos la función

$$\partial_2 f: U\times V\to\mathcal{L}(Y,Z)$$

y las derivadas parciales de esta función serían

$$\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(X,\mathcal{L}(Y,Z))$$
$$\partial_2\partial_2 f(x_0,y_0)\in\mathcal{L}(Y,\mathcal{L}(Y,Z))$$

Las derivadas parciales mixtas anteriores no pueden ser iguales, ya que como funciones están definidas en diferentes dominios, sin embargo podemos hablar de igualdad en el siguiente sentido

$$\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)=\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)\iff$$
$$\partial_1\partial_2 f(x_0,y_0)(x)(y)=\partial_2\partial_1 f(x_0,y_0)(y)(x),\quad\forall(x,y)\in X\times Y$$

Teorema 3.24 (Young-Schwartz) *Sean X,Y,Z tres E.V.T. con Z Localmente Convexo de Hausdorff y $f: U\times V\subset X\times Y\to Z$ función $\mathcal{H}$-parcialmente diferenciable en el abierto $U\times V$ respecto a su primera y segunda variables, es decir las funciones $\partial_1 f: U\times V\to\mathcal{L}(X,Z)$ y $\partial_2 f: U\times V\to\mathcal{L}(Y,Z)$ existen* a). *Si las funciones $\partial_1 f$ y $\partial_2 f$ son $\mathcal{H}$-diferenciables en (x_0, y_0), entonces*

$$\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0) = \partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0) \tag{3.57}$$

b). *Si la función $\partial_1 \partial_2 f : U_0 \times V_0 \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Z))$ existe y es continua en una vecindad $U_0 \times V_0$ del punto (x_0, y_0) entonces $\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)$ existe y también se verifica* (3.57)

Demostración. (a) Sean $\psi \in Z^*$, $h_1 \in X$ y $h_2 \in Y$ cualesquiera y definamos la función Θ como en (3.54). Por el Lema 3.10,(b) existen las funciones $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}$ definidas en una vecindad del cero de $\mathbb{R}^2$ por

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}(\zeta_1, \zeta_2) &= \psi\big[\partial_1 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)(h_1)\big] = \tilde{\psi}_1\big[\partial_1 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)\big] \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) &= \psi\big[\partial_2 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)(h_2)\big] = \tilde{\psi}_2\big[\partial_2 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)\big] \end{aligned} \tag{3.58}$$

donde las funciones $\tilde{\psi}_1 : \mathcal{L}(X, Z) \to \mathbb{R}$ y $\tilde{\psi}_2 : \mathcal{L}(Y, Z) \to \mathbb{R}$ están definidas como

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1(T) &= \psi\big[T(h_1)\big], \quad \forall T \in \mathcal{L}(X, Z) \quad \text{y} \\ \tilde{\psi}_2(R) &= \psi\big[R(h_2)\big], \quad \forall R \in \mathcal{L}(Y, Z) \end{aligned}$$

Es fácil verificar que ambas funcionales son lineales y continuas y nuevamente por el Lema 3.10,(c) resulta que l lasfunciones $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2}$ son diferenciables en (0,0) (*i.e* la función Θ es dos veces diferenciable en $(0,0)$) y por el teorema de Schwartz clásico resulta $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_1}(0,0) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}(0,0)$, en consecuencia

$$\psi\big[\partial_2 \partial_1 f(x_0, y_0)(h_2)(h_1)\big] = \psi\big[\partial_1 \partial_2 f(x_0, y_0)(h_1)(h_2)\big]$$

como ψ fue arbitrario, concluimos.

(b) Sabemos que para la función Θ definida como en el caso anterior existen las funciones $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_1}$ y $\frac{\partial \Theta}{\partial \zeta_2}$ definidas como en (3.58). Además como la función $\partial_2 f$ es $\mathcal{H}$-parcialmente diferenciable en la vecindad $U_0 \times V_0$ de (x_0, y_0) respecto a su primera variable entonces existe la función $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}$ definida en una vecindad del cero de $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}(\zeta_1, \zeta_2) = \tilde{\psi}_2\big[\partial_1 \partial_2 f(x_0 + \zeta_1 h_1, y_0 + \zeta_2 h_2)(h_2)\big]$$

finalmente la continuidad de $\partial_1 \partial_2 f$ en $U_0 \times V_0$ implica la continuidad de $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}$ en una vecindad del cero de $\mathbb{R}^2$ y por el teorema de Young clásico resulta la igualdad de las derivadas parciales mixtas $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_2 \partial \zeta_1}(0,0) = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \zeta_1 \partial \zeta_2}(0,0)$ y en consecuencia se verifica (3.57) $\square$

Capítulo 4

Teoremas de la Función Inversa

En el análisis clásico los teoremas de diferenciación de funciones inversas y funciones implícitas juegan un papel muy importante dentro del cálculo diferencial. Éstos teoremas pueden ser generalizados sin ninguna dificultad a funciones definidas entre Espacios de Banach, como veremos se obtienen satisfactorios y útiles resultados. Sin embargo, si el Espacio es en general un E.V.T. o aún un Espacio no Normado Metrizable, la generalización de estos teoremas no es más posible.

Todo los E.V.T. en esta sección serán considerados Localmente Convexos de Hausdorff.

4.1. Diferenciabilidad en el Espacio $\mathcal{L}(X,Y)$

En esta sección consideraremos la diferenciabilidad de la función composición (Definición 4.1) y de la función inversión (Definición 4.3)

4.1.1. Diferenciabilidad de la Función Composición

Para los E.V.T. X, Y Localmente Convexos de Hausdorff, el Espacio de funciones $\mathcal{L}(X,Y)$ será consierado como un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff con la Topología de Convergencia Uniforme sobre la familia de todos los subconjuntos acotados de X.

Definición 4.1 (Función composición) *Definimos la función composición* comp : $\mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z) \to \mathcal{L}(X,Z)$ *como*

$$\operatorname{comp}(T,R) = R \circ T, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X,Y),\ \forall R \in \mathcal{L}(Y,Z)$$

Antes de estudiar la diferenciabilidad de la función comp, estudiemos su continuidad. La primera observación que resulta de la definición es la bilinealidad y la continuidad en cada una de sus variables. Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 4.1 (Linealidad y continuidad separada de la composición) *La función composición es bilineal y separadamente continua.*

Demostración. Si para cada $T_0 \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $R_0 \in \mathcal{L}(Y,Z)$ definimos las funciones

$$R \in \mathcal{L}(Y,Z) \mapsto \operatorname{comp}(T_0,R) = R \circ T_0 \in \mathcal{L}(X,Z)$$
$$T \in \mathcal{L}(X,Y) \mapsto \operatorname{comp}(T,R_0) = R_0 \circ T \in \mathcal{L}(X,Z)$$

entonces es evidente que ambas funciones son lineales. Verifiquemos también que son continuas, veamoslo para la primera función. Sea $\widetilde{W} \subset \mathcal{L}(X, Z)$ una vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, Z)$, entonces podemos hallar $A \subset X$ acotado y $W \subset Z$ vecindad del cero en Z de modo que

$$\{S \in \mathcal{L}(X, Z)/S(A) \subset W\} \subset \widetilde{W} \tag{4.1}$$

Como $T_0 : X \to Y$ es continua y A es acotado, entonces el conjunto $B = T_0(A) \subset Y$ también es acotado. Mostremos que la imagen del conjunto $\widetilde{V} = \{R \in \mathcal{L}(Y, Z)/R(B) \subset W\}$ (que es una vecindad del cero en $\mathcal{L}(Y, Z)$) vía la función en estudio está contenida en $\widetilde{W}$. Sea $R \in \mathcal{L}(Y, Z)$ con $R(B) \subset \widetilde{W}$ entonces $R \circ T_0(A) = R[T_0(A)] = R(B) \subset \widetilde{W}$ y por tanto la inclusión (4.1) muestra que $R \circ T_0 \in \widetilde{W}$. esto demuestra la continuidad en cero. La continuidad en todo el espacio $\mathcal{L}(Y, Z)$ resulta de la linealidad. □

Los siguientes lemas ayudarán a dar condiciones necesarias y suficientes para la continuidad de la función composición. Para cada $x_0 \in X$ definimos la función $\psi_{x_0} : \mathcal{L}(X, Y) \to Y$ por

$$\psi_{x_0}(T) = Tx_0, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Lema 4.1 *Para cada $x_0 \in X$ con $x_0 \neq 0$, la función ψ_{x_0} es continua y abierta.*

Demostración. Mostremos primeramente la continuidad. Como ψ_{x_0} es claramente lineal será suficiente mostrar que es continua en el cero, sea para ello $V \subset Y$ una vecindad del cero en Y cualquiera entonces el conjunto

$$\psi_{x_0}^{-1}(V) = \{T \in \mathcal{L}(X, Y)/Tx_0 \in V\} \subset \mathcal{L}(X, Y)$$

es una vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, Y)$ y en consecuencia ψ_{x_0} es continua. Mostremos ahora que ψ_{x_0} es abierto, sea $\widetilde{U} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ una vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, Y)$ debemos hallar un $V \subset Y$ vecindad del cero en Y tal que $V \subset \psi_{x_0}(\widetilde{U})$ [1]. Sabemos que existen $A \subset X$ acotado y $V \subset Y$ vecindad convexa y equilibrada del cero en Y tal que

$$\{T \in \mathcal{L}(X, Y)/T(A) \subset V\} \subset \widetilde{U}$$

Como $x_0 \neq 0$ podemos hallar un $V_1 \subset X$ vecindad convexa y equilibrada del cero en X tal que $x_0 \notin \overline{V_1}$ (recuerde que X es de Hausdorff y por tanto existen dos vecindades disjuntas, V_1 del cero y V_2 de x_0. Si suponemos que $x_0 \in \overline{V_1}$ por definición de punto de clausura llegaríamos a una contradicción). Además A es acotado y por tanto existe un $\lambda > 0$ tal que $\frac{1}{\lambda}A \subset V_1 \subset \overline{V_1}$ de donde $A \subset \lambda\overline{V_1}$ y en consecuencia la siguiente inclusión es verdadera

$$\psi_{x_0}(\{T \in \mathcal{L}(X, Y)/T(\lambda\overline{V_1}) \subset V\}) \subset \psi_{x_0}(\{T \in \mathcal{L}(X, Y)/T(A) \subset V\}) \subset \psi_{x_0}(\widetilde{U})$$

por lo tanto será suficiente probar que V está contenido en el primer conjunto anterior. Sea $y \in V$ cualquiera, como $\lambda\overline{V_1}$ es cerrado, convexo y equilibrado y además $x_0 \notin \lambda\overline{V_1}$ (pues si

[1] cuando una función $f : X \to Y$ entre los E.V.T. X e Y es lineal, entonces se verifica [9, pag. 44]

f es abierta $\Leftrightarrow \forall U \subset X$ vecindad del cero en X, $\exists V \subset Y$, vecindad del cero en $Y / V \subset f(U)$

suponemos lo contrario la convexidad de $\overline{V_1}$ asegura que $(1-\lambda)0+\lambda\frac{x_0}{\lambda} = x_0 \in \overline{V_1}$ lo que es una contradicción), el teorema de Hahn-Banach [9, pag. 59] permite hallar un $f \in X^*$ tal que $|f(\lambda\overline{V_1})| \leqslant 1$ y $f(x_0)=1$. Definamos la función $g: \mathbb{R} \to Y$ por $g(t) = ty$, $\forall t \in \mathbb{R}$ y pongamos la composición $T = g \circ f \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se cumple

$$T(\lambda\overline{V_1}) = g[f(\lambda\overline{V_1})] \subset [-1,1]\{y\} \subset [-1,1]V \subset V$$

la última inclusión se debe a que V es equilibrado y además

$$\psi_{x_0}(T) = T(x_0) = g[f(x_0)] = g(1) = y$$

Esto demuestra el lema. $\square$

Lema 4.2 *Existen $x_0 \in X$ con $x_0 \neq 0$ y $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ vecindad convexa y equilibrada del cero en $\mathcal{L}(X,Y)$ tal que*

$$\psi_{x_0}(\tilde{\mathcal{U}}) \neq Y$$

Demostración. Sean $V \subset Y$ cualquier vecindad convexa y equilibrada del cero en Y con $V \neq Y$ y $A \subset X$ cualquier subconjunto acotado de X y consideremos $x_0 \in A$ con $x_0 \neq 0$. El conjunto $\tilde{\mathcal{U}} = \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(A) \subset V\}$ es una vecindad convexa y equilibrada del cero en $\mathcal{L}(X,Y)$ y además

$$\psi_{x_0}(\tilde{\mathcal{U}}) = \{Tx_0/T \in \mathcal{L}(X,Y), T(A) \subset V\} \subset V \subsetneq Y$$

$\square$

Lema 4.3 *Sea $f: X \times Y \to Z$ función bilineal y separadamente continua, entonces*

$$f \text{ es continua en } X \times Y \Leftrightarrow f \text{ es continua en } (0,0)$$

Demostración. ($\Rightarrow$) Evidente

($\Leftarrow$) Sea $(x_0,y_0) \in X \times Y$ cualquiera y $W_0 \subset Z$ abierto con $f(x_0,y_0) \in W_0$ entonces $W = W_0 - f(x_0,y_0) \subset Z$ es una vecindad del cero en Z, denotemos por W^s la vecindad del cero simétrica tal que $W^s + W^s + W^s \subset W$. Por la continuidad de f en $(0,0)$ podemos hallar $U_1 \subset X$, $V_1 \subset Y$ vecindades del cero en X e Y respectivamente tales que

$$(u,v) \in U_1 \times V_1 \Rightarrow f(u,v) \in W^s$$

La continuidad separada de f permite hallar vecindades $U_2 \subset X$ y $V_2 \subset Y$ del cero en X e Y respectivamente tal que

$$v \in V_2 \Rightarrow f(x_0,v) \in W^s$$
$$u \in U_2 \Rightarrow f(u,y_0) \in W^s$$

si definimos $U = U_1 \cap U_2$ y $V = V_1 \cap V_2$ se cumple que $f[(x_0+U)\times(y_0+V)] \subset W_0$, en efecto, si $u \in U$ y $v \in V$, de las relaciones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} f(x_0+u,y_0+v) &= f(x_0,y_0) + f(u,v) + f(x_0,v) + f(u,y_0) \\ &\in f(x_0,y_0) + W^s + W^s + W^s \\ &\subset f(x_0,y_0) + W = W_0 \end{aligned}$$

y como (x_0, y_0) fue elegido arbitrariamente, se concluye la continuidad en $X \times Y$ $\square$

Teorema 4.1 (Continuidad de la composición)

a). *Si* Y *es normado, entonces la función* comp *es continua.*

b). *Si la función* comp *es continua, entonces* Y *es normable.*

Demostración. (a). Como la función comp es bilineal y separadamente continua, por el Lema 4.3 será suficiente mostrar que es continua en $(0,0)$. Para una vecindad $\widetilde{\mathcal{W}} \in \mathcal{L}(X,Z)$ del cero en $\mathcal{L}(X,Z)$ cualquiera podemos hallar $A \subset X$ acotado y $W \subset Z$ vecindad del cero en Z tal que

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{S \in \mathcal{L}(X,Z)/S(A) \subset W\} \subset \widetilde{\mathcal{W}}$$

definamos el conjunto $V = \{y \in Y/\|y\| < 1\}$ que es una vecindad convexa, equilibrada y acotada del cero en Y y definamos también las vecindades del cero

$$\widetilde{\mathcal{U}}_1 = \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T(A) \subset V\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$
$$\widetilde{\mathcal{U}}_2 = \{R \in \mathcal{L}(Y,Z)/R(V) \subset W\} \subset \mathcal{L}(Y,Z)$$

mostremos que $\text{comp}(\widetilde{\mathcal{U}}_1 \times \widetilde{\mathcal{U}}_2) \subset \widetilde{\mathcal{B}}$ lo que demostraría la continuidad. Sea $T \in \widetilde{\mathcal{U}}_1$ $R \in \widetilde{\mathcal{U}}_2$, entonces

$$\text{comp}(T,R)(A) = R \circ T(A) = R[T(A)] \subset R(V) \subset W$$

demostrando que $\text{comp}(T,R) \in \widetilde{\mathcal{B}}$

(b). Para mostrar que Y es normable debemos hallar una vecindad del cero en Y que sea convexa y acotada (Teorema 1.12). Por el Lema 4.2 sabemos que existe un $x_0 \in X$ y una vecindad $\widetilde{\mathcal{W}} \subset \mathcal{L}(X,Z)$ del cero en $\mathcal{L}(X,Z)$ de modo que

$$\phi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{W}}) \subsetneq Z \tag{4.2}$$

donde la función $\phi_{x_0} : \mathcal{L}(X,Z) \to Z$ está definida por $\phi_{x_0}(S) = Sx_0$. Como por hipótesis la función comp es continua entonces existen vecindades convexas y equilibradas $\widetilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ y $\widetilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{L}(Y,Z)$ del cero de modo que

$$\text{comp}(\widetilde{\mathcal{U}} \times \widetilde{\mathcal{V}}) \subset \widetilde{\mathcal{W}} \tag{4.3}$$

definamos ahora la función $\psi_{x_0} : \mathcal{L}(X,Y) \to Y$ por $\psi(T) = Tx_0$ que por el Lema 4.1 es abierta y por tanto el conjunto $\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}}) \subset Y$ es una vecindad del cero en Y que es además convexa (pues $\widetilde{\mathcal{U}}$ es convexa y ψ_{x_0} es lineal). Mostremos que este conjunto $\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}})$ es acotado. Supongamos lo contrario, entonces existe un $f \in Y^*$ tal que $f[\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}})] = \mathbb{R}$. (en efecto, pues (1.5) permite afirmar que

$$A \subset Y \text{ es acotado} \Leftrightarrow \forall f \in Y^*, \ \sup\{|f(y)|/y \in A\} < \infty$$

Luego A no será acotado cuando exista algún $f \in Y^*$ tal que $\sup\{|f(y)|/y \in A\} = \infty$ y dado que todo Espacio Vectorial es conexo, pues es Conexo por caminos, [10, def. 5.1 y teo. 5.3], entonces por el teorema del valor intermedio [10, teo. 2.1] concluimos que $f(A) = \mathbb{R}$) Consideremos $z_0 \in Z$ con $z_0 \neq 0$ arbitrario y definamos la función $g : \mathbb{R} \to Z$ por $g(t) = tz_0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, entonces

$g \circ f \in \mathcal{L}(Y, Z)$ y como toda vecindad del cero en $\mathcal{L}(Y, Z)$ es absorbente, existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda(g \circ f) \in \widetilde{\mathcal{V}}$. Asi tenemos que

$$\begin{aligned}
\{tz_0/t \in \mathbb{R}\} &= \lambda\{tz_0/t \in \mathbb{R}\} = \lambda g(\mathbb{R}) \\
&= \lambda g[f(\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}}))] = \lambda(g \circ f)[\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}})] \\
&= \bigcup_{T \in \widetilde{\mathcal{U}}} \lambda(g \circ f)(Tx_0) = \bigcup_{T \in \widetilde{\mathcal{U}}} [\lambda(g \circ f)] \circ T(x_0) \\
&\subset \bigcup_{S \in \widetilde{\mathcal{V}}} S(x_0) = \phi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{W}}) && \text{por (4.3)} \\
&\subsetneq Z && \text{por (4.2)}
\end{aligned}$$

desde que $z_0 \in Z$ fue arbitrario, esto es una contradicción y por tanto $\psi_{x_0}(\widetilde{\mathcal{U}})$ es acotado y por ello Y es normable. □

Teorema 4.2 (Acotación de la Composición) *La función* comp *es acotada, es decir si* $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{L}(X, Y)$ *y* $\widetilde{\mathcal{B}}_2 \subset \mathcal{L}(Y, Z)$ *son subconjuntos acotados entonces*

$$\mathrm{comp}(\widetilde{\mathcal{B}}_1, \widetilde{\mathcal{B}}_2) = \widetilde{\mathcal{B}}_2 \circ \widetilde{\mathcal{B}}_1 = \{R \circ T/T \in \widetilde{\mathcal{B}}_1, R \in \widetilde{\mathcal{B}}_2\}$$

es acotado en $\mathcal{L}(X, Z)$

De esta forma la función composición no siempre es continua y por lo tanto no puede ser diferenciable por cualquier método que implique continuidad, como por ejemplo la K, H, M, MS y MB diferenciabilidades. Sin embargo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3 ($\mathcal{F}$-Diferenciabilidad de la Composición) *La función* comp *es* $\mathcal{F}$*-diferenciable en todo punto* $(T_0, R_0) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ *y además se cumple*

$$\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}(T_0, R_0)(T, R) = R_0 \circ T + R \circ T_0 \tag{4.4}$$

Demostración. Para $(T_0, R_0) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ fijo, la función $(T, R) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z) \mapsto R_0 \circ T + R \circ T_0 \in \mathcal{L}(X, Z)$ es claramente lineal, y desde que la función comp es separadamente continua (Proposición 4.1) entonces la función anterior resulta continua, es decir dicha función es un elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z), \mathcal{L}(X, Z))$. Mostremos que ésta es la $\mathcal{F}$-derivada de la función composición en (T_0, R_0). Para cualquier $(T, R) \in \mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ tenemos

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{comp}[(T_0, R_0) + t(T, R)] - \mathrm{comp}(T_0, R_0)}{t} - (R_0 \circ T + R \circ T_0) = \\
\frac{(R_0 + tR) \circ (T_0 + tT) - R_0 \circ T_0 - t(R_0 \circ T) - t(R \circ T_0)}{t} = \\
t(R \circ T)
\end{gathered}$$

para cualesquier $\widetilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{L}(X, Y)$ y $\widetilde{\mathcal{B}}_2 \subset \mathcal{L}(Y, Z)$ subconjuntos acotados (todos los acotados en $\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ son productos cartesianos de subconjuntos acotados en cada espacio) mostremos que

$$\lim_{t \to 0} t(R \circ T) = 0, \text{ uniformemente respecto de } (T, R) \in \widetilde{\mathcal{B}}_1 \times \widetilde{\mathcal{B}}_2 \tag{4.5}$$

Sea $\widetilde{W} \in \mathcal{L}(X,Z)$ vecindad equilibrada del cero en $\mathcal{L}(X,Z)$, como el conjunto $\widetilde{B}_2 \circ \widetilde{B}_1 = \{R \circ T / T \in \widetilde{B}_1, R \in \widetilde{B}_2\}$ es acotado en $\mathcal{L}(X,Z)$ entonces existe un $\delta > 0$ tal que

$$0 < |t| < \delta \Rightarrow t(\widetilde{B}_2 \circ \widetilde{B}_1) \subset \widetilde{W}$$

luego para todo $t \in \mathbb{R}$ con $0 < |t| < \delta$ y $(T,R) \in \widetilde{B}_1 \times \widetilde{B}_2$ tendremos que $t(R \circ T) \in \widetilde{W}$, demostrando asi (4.5) $\square$

Teorema 4.4 (Continuidad de la $\mathcal{F}$-derivada de la Composición) *Si cada subconjunto acotado de $\mathcal{L}(Y,Z)$ es equicontinuo entonces la función $\mathcal{F}$-derivada*

$$\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}} : \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z) \to \mathcal{L}(\mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z), \mathcal{L}(X,Z))$$

definida en (4.4) *es lineal y continua y en consecuencia de clase $C^{\infty}_{\mathcal{F}}$ y además se verifica*

$$\mathrm{comp}^{(2)}_{\mathcal{F}}(T_0,R_0) = \mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}, \quad \forall (T_0,R_0) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z)$$
$$\mathrm{comp}^{(n)}_{\mathcal{F}}(T_0,R_0) = 0, \quad \forall (T_0,R_0) \in \mathcal{L}(X,Y) \times \mathcal{L}(Y,Z),\ \forall n \geqslant 3,$$

Demostración. Para simplificar denotemos $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(X,Y)$, $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(Y,Z)$ y $\mathcal{L}_3 = \mathcal{L}(X,Z)$. Claramente la función $\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}$ es lineal, por lo tanto será suficiente probar la continuidad en $(0,0)$. Sea $\widehat{W} \subset \mathcal{L}(\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ una vecindad del cero, que podemos suponer de la forma

$$\widehat{W} = \{F \in \mathcal{L}(\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3) / F(\widetilde{B}_1 \times \widetilde{B}_2) \subset \widetilde{W}\}$$

donde $\widetilde{B}_1 \subset \mathcal{L}_1, \widetilde{B}_2 \subset \mathcal{L}_2$ son subconjuntos acotados y $\widetilde{W} \subset \mathcal{L}_3$ es una vecindad del cero en $\mathcal{L}_3$ de la forma

$$\widetilde{W} = \{S \in \mathcal{L}_3 / S(A) \subset W\}$$

siendo $A \subset X$ acotado y $W \subset Z$ vecindad del cero en Z. Debemos hallar vecindades del cero $\widetilde{U} \subset \mathcal{L}_1$ y $\widetilde{V} \subset \mathcal{L}_2$ tales que

$$\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}(\widetilde{U} \times \widetilde{V}) \subset \widehat{W}$$

o equivalentemente para cualquier $T \in \widetilde{U}$ y $R \in \widetilde{V}$

$$\begin{aligned}\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}(T,R) \in \widehat{W} &\equiv \mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}(T,R)(\widetilde{B}_1 \times \widetilde{B}_2) \subset \widetilde{W} \\ &\equiv \forall M \in \widetilde{B}_1, \forall N \in \widetilde{B}_2,\ \mathrm{comp}'_{\mathcal{F}}(T,R)(M,N) = R \circ M + N \circ T \in \widetilde{W}\end{aligned}$$

es decir tales vecindades $\widetilde{U}$ y $\widetilde{V}$ deben verificar para cualesquier $T \in \widetilde{U}, R \in \widetilde{V}, M \in \widetilde{B}_1$ y $N \in \widetilde{B}_2$ lo siguiente

$$(R \circ M + N \circ T)(A) \subset W \tag{4.6}$$

Denotemos por $W^s \subset Z$ la vecindad simétrica del cero en Z tal que $W^s + W^s \subset W$. Como $\widetilde{B}_2 \subset \mathcal{L}_2$ es acotado, por hipótesis resulta que es equicontinuo y por tanto existe $V \subset Y$ vecindad del cero en Y tal que

$$\forall R \in \widetilde{B}_2, \quad R(V) \subset W^s$$

Definamos ahora el conjunto $B = \bigcup_{T\in\tilde{\mathcal{B}}_1} T(A) \subset Y$ y mostremos que es acotado, en efecto pues si $V \subset Y$ es cualquier vecindad del cero en Y, como $\tilde{\mathcal{B}}_1 \subset \mathcal{L}_1$ es acotado, entonces para la vecindad del cero $\{T \in \mathcal{L}_1/T(A) \subset V\} \subset \mathcal{L}_1$ existe un $\delta > 0$ tal que $\delta\tilde{\mathcal{B}}_1 \subset \{T \in \mathcal{L}_1/T(A) \subset V\}$ y por tanto $\forall T \in \tilde{\mathcal{B}}_1, \delta T(A) \subset V$, esto implica que $\delta B = \delta \bigcup_{T\in\tilde{\mathcal{B}}_1} T(A) \subset B$ demostrando que B es acotado. Sean ahora las vecindades del cero

$$\begin{aligned}\tilde{\mathcal{U}} &= \{T \in \mathcal{L}_1/T(A) \subset V\}\\ \tilde{\mathcal{V}} &= \{R \in \mathcal{L}_2/R(A) \subset W^s\}\end{aligned}$$

entonces para $T \in \tilde{\mathcal{U}}$, $R \in \tilde{\mathcal{V}}$, $M \in \tilde{\mathcal{B}}_1$ y $N \in \tilde{\mathcal{B}}_2$ cualesquiera tenemos

$$\begin{aligned}(R \circ M + N \circ T)(A) &= R[M(A)] + N[T(A)]\\ &\subset R(B) + N(V)\\ &\subset W^s + W^s \subset W\end{aligned}$$

demostrando (4.6). De esta forma la función $\mathrm{comp}'_{\mathcal{F}} : \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}(\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3)$ es lineal y continua y por tanto diferenciable, cumpliéndose la primera igualdad. A su vez ésta igualdad significa que $\mathrm{comp}^{(2)}_{\mathcal{F}}(T_0, R_0)$ es constante y en consecuencia es de clase $C^{\infty}_{\mathcal{F}}$ y todas sus derivadas son nulas. □

4.1.3. Diferenciabilidad de la Función Inversión

Para el siguiente definición entenderemos por isomorfismo entre Espacios Vectoriales Topológicos a una función lineal biyectiva entre dichos espacios que sea además un homeomorfismo. Es decir [15, pp. 13]

Definición 4.2 (Isomorfismo entre E.V.T.) *Dados X, Y dos E.V.T. decimos que una función $T : X \to Y$ es un **isomorfismo** entre X e Y si y solo si*

1. $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ *(i.e. T lineal y continua)*
2. $\exists T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ *(i.e. T es inversible con inversa lineal y continua)*

El conjunto de todos los isomorfismos entre X e Y será denotado por $\mathrm{Isom}(X,Y)$, es decir

$$\mathrm{Isom}(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y)/T \text{ es un isomorfismo entre } X \text{ e } Y\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$

Definición 4.3 (Función Inversión) *Definimos la **función inversión** $\mathrm{inv} : \mathrm{Isom}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}(Y,X)$ como*

$$\mathrm{inv}(T) = T^{-1}, \quad \forall T \in \mathrm{Isom}(X,Y)$$

OBSERVACIÓN

Es claro que para cualquier $T \in \mathrm{Isom}(X,Y)$ resulta que $\mathrm{inv}(T) \in \mathrm{Isom}(Y,X)$. Más aún cuando los Espacios X e Y son de Banach la función inversión es una biyección entre los conjuntos abiertos (ver el

Lema 4.4 más adelante) Isom(X, Y) y Isom(Y, X)

Restringimos nuestro análisis al caso de Espacios Normados. Para el siguiente teorema recordemos que para el Espacio de Banach X, si $T \in \mathcal{L}(X, X)$ es tal que $\|T\| < 1$ entonces el operador $(I - T)$ es invertible con $(I - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Colocando $-T$ en lugar de T resulta que $(I + T)$ también es invertible con $(I + T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n T^n = I - T + T^2 - T^3 + \cdots$ y de aqui se puede escribir

$$(I + T)^{-1} - (I - T) = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n T^n$$

siempre que $T \in \mathcal{L}(X, X)$ con $\|T\| < 1$. Además dado que $\sum_{n=2}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|} - 1 - \|T\| = \frac{\|T\|^2}{1-\|T\|}$ entonces

$$\|(I + T)^{-1} - (I - T)\| = \left\|\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n T^n\right\| \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \|T\|^n = \frac{\|T\|^2}{1 - \|T\|} \tag{4.7}$$

Antes de enunciar el siguiente teorema mostremos los siguientes lemas

Lema 4.4 *Sean X, Y Espacios Normados con Y de Banach, entonces el subconjunto Isom$(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y)$ es abierto*

Dmostración. Sea $T_0 \in$ Isom(X, Y) cualquiera, mostremos que la bola $B = \{T \in \mathcal{L}(X, Y) / \|T - T_0\| < \delta_0\}$ donde $\delta_0 = \frac{1}{\|T_0^{-1}\|}$ está contenida en Isom(X, Y). Si $T \in B$ entonces $\|T - T_0\| < \delta_0 = \frac{1}{\|T_0^{-1}\|} \equiv \|T - T_0\| \|T_0^{-1}\| < 1$ y por lo tanto $\|(T - T_0)T_0^{-1}\| \leqslant \|T - T_0\| \|T_0^{-1}\| < 1$, el comentario anterior permite afirmar que $S = I_Y + (T - T_0)T_0^{-1} : Y \to Y$ es inversible y siendo Y de Banach resulta que $S \in$ Isom(Y, Y). Por otro lado notemos que podemos escribir $T = T_0 + (T - T_0) = [I_Y + (T - T_0)T_0^{-1}]T_0 = ST_0$ y en consecuencia $T \in$ Isom(X, Y) Esto demuestra que $B \subset$ Isom(X, Y) □

Lema 4.5 *Si X, Y, Z son Espacios Normados, entonces toda función bilineal y continua $\psi : X \times Y \to Z$ es $\mathcal{F}^n$-diferenciable en cada punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ y además se cumple*

a). *La función $\psi'_{\mathcal{F}}(x_0, y_0) : X \times Y \to Z$ está definida por*

$$\psi'_{\mathcal{F}}(x_0, y_0)(x, y) = \psi(x, y_0) + \psi(x_0, y), \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

b). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant 2$ se cumple*

$$\psi_{\mathcal{F}}^{(n)}(x_0, y_0) = \begin{cases} \psi'_{\mathcal{F}}, & \text{cuando } n = 2 \\ 0, & \text{cuando } n \geqslant 3 \end{cases}$$

Demostración. (a). Por la continuidad de la función bilineal ψ podemos hallar una constante $M > 0$ tal que

$$\|\psi(x, y)\| \leqslant M\|x\| \|y\|, \quad \forall (x, y) \in X \times Y$$

Para el punto $(x_0, y_0) \in X \times Y$ fijo, la función $(x, y) \in X \times Y \mapsto \psi(x, y_0) + \psi(x_0, y) \in Z$ es claramente lineal y además continua pues para $(x, y) \in X \times Y$ cualesquiera

$$\begin{aligned}
\|\psi(x, y_0) + \psi(x_0, y)\| &\leqslant \|\psi(x, y_0)\| + \|\psi(x_0, y)\| \\
&\leqslant M\|x\|\|y_0\| + M\|x_0\|\|y\| \\
&\leqslant (M\|y_0\| + M\|x_0\|)(\|x\| + \|y\|) \\
&= (M\|y_0\| + M\|x_0\|)\|(x, y)\|
\end{aligned}$$

es decir la función anterior resulta ser un elemento del espacio $\mathcal{L}(X \times Y, Z)$. Mostremos que esta función es la $\mathcal{F}$-derivada de ψ y para esto, por el Teorema 3.3,(4), solo tenemos que verificar el límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{\psi((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) - \psi(x_0, y_0) - \psi(h_1, y_0) - \psi(x_0, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} \\
&= \lim_{(h_1, h_2) \to (0,0)} \frac{\psi(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Pero esto es inmediato ya que para cualquier $(h_1, h_2) \in X \times Y - \{(0,0)\}$ se verifica

$$0 \leqslant \frac{\|\psi(h_1, h_2)\|}{\|(h_1, h_2)\|} \leqslant \frac{M\|h_1\|\|h_2\|}{\|h_1\| + \|h_2\|} \leqslant M\|h_2\|$$

(b). Por lo anterior sabemos que la función $\psi'_{\mathcal{F}} : X \times Y \to \mathcal{L}(X \times Y, Z)$ está definida por

$$\psi'_{\mathcal{F}}(u, v)(x, y) = \psi(x, v) + \psi(u, y), \quad \forall (u, v), (x, y) \in X \times Y$$

Se puede verificar sin dificultad que que esta función es lineal, pero además es continua ya que para $(u, v) \in X \times Y$ cualquiera tenemos

$$\begin{aligned}
\|\psi'_{\mathcal{F}}(u, v)\| &= \sup_{(x,y) \neq (0,0)} \frac{\|\psi'_{\mathcal{F}}(u, v)(x, y)\|}{\|(x, y)\|} = \sup_{(x,y) \neq (0,0)} \frac{\|\psi(x, v) + \psi(u, y)\|}{\|(x, y)\|} \\
&\leqslant M \sup_{(x,y) \neq (0,0)} \left\{ \frac{\|x\|\|v\| + \|u\|\|y\|}{\|x\| + \|y\|} \right\} \\
&= M \sup_{(x,y) \neq (0,0)} \left\{ \frac{\|x\|}{\|x\| + \|y\|}\|v\| + \frac{\|y\|}{\|x\| + \|y\|}\|u\| \right\} \\
&\leqslant M\{\|v\| + \|u\|\} = M\|(u, v)\|
\end{aligned}$$

por tanto la función $\psi'_{\mathcal{F}}$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en (x_0, y_0) con

$$\psi^{(2)}_{\mathcal{F}}(x_0, y_0) = \{\psi'_{\mathcal{F}}\}'_{\mathcal{F}}(x_0, y_0) = \psi'_{\mathcal{F}}$$

esta última igualdad significa que la función $\psi^{(2)}_{\mathcal{F}} : X \times Y \to \mathcal{L}(X \times Y, \mathcal{L}(X \times Y, Z))$ es constante y en consecuencia todas sus derivadas son nulas. □

Lema 4.6 *Sean X, Y Espacios Normados y $f : U \subset X \to Y$ función $\mathcal{F}^n$-diferenciable en el abierto U, entonces la función $\psi = (f, f) : U \subset X \to Y \times Y$ definida por*

$$\psi(x) = (f(x).f(x)), \quad \forall x \in U$$

es $\mathcal{F}^n$-diferenciable en U cumpliendose además que

$$\psi^{(n)}(x) = \left(f^{(n)}(x), f^{(n)}(x)\right), \quad \forall x \in U$$

Demostración. La función $g : Y \to Y \times Y$ definida por $g(y) = (y, y)$, $\forall y \in Y$ es lineal y continua y por tanto $\mathcal{F}$-diferenciable en Y con $g'_{\mathcal{F}}(y) = g$, $\forall y \in Y$. Además se observa que la función ψ se puede expresar como la composición $\psi = g \circ f$ y por la regla de la cadena resulta $\mathcal{F}$-diferenciable en U con

$$\psi'_{\mathcal{F}}(x) = g'_{\mathcal{F}}[f(x)] \circ f'_{\mathcal{F}}(x) = g \circ f'_{\mathcal{F}}(x) = \left(f'_{\mathcal{F}}(x), f'_{\mathcal{F}}(x)\right), \quad \forall x \in U$$

Nuevamente se observa que la función $\psi'_{\mathcal{F}}$ tiene la forma $\psi'_{\mathcal{F}} = g \circ f'_{\mathcal{F}}$ donde en este caso la función $g : \mathcal{L}(X \times Y) \to \mathcal{L}(X \times Y) \times \mathcal{L}(X \times Y)$ está definida por $g(T) = (T, T)$, $\forall T \in \mathcal{L}(X \times Y)$ y también es lineal y continua, nuevamente de la regla de la cadena resulta

$$\psi^{(2)}_{\mathcal{F}}(x) = g'_{\mathcal{F}}(f'_{\mathcal{F}}(x)) \circ f^{(2)}_{\mathcal{F}}(x) = g \circ f^{(2)}_{\mathcal{F}}(x) = \left(f^{(2)}_{\mathcal{F}}(x), f^{(2)}_{\mathcal{F}}(x)\right)$$

un proceso inductivo demuestra el lema. □

En el teorema siguiente evitaremos escribir el símbolo $\circ$ para denotar la composición de funciones, de modo que $T \circ R$ se escribirá símplemente TR

Teorema 4.5 **($\mathcal{F}$-diferenciabilidad de la Inversión)** *Sean X, Y dos Espacios de Banach, entonces la función inversión $\operatorname{inv} : \operatorname{Isom}(X, Y) \subset \mathcal{L}(X, Y) \to \mathcal{L}(Y, X)$ es $\mathcal{F}^n$-diferenciable ($n \in \mathbb{N}$) en cada punto $T_0 \in \operatorname{Isom}(X, Y)$, cumpliendose además que*

$$\operatorname{inv}^{(n)}(T_0)(T_1, T_2, \ldots, T_n) = (-1)^n \sum_{\pi} T_0^{-1} T_{\pi(1)} T_0^{-1} T_{\pi(2)} \cdots T_0^{-1} T_{\pi(n)} T_0^{-1}$$

donde la sumatoria se considera sobre todas las permutaciones del conjunto $S_n = \{1, 2, \ldots, n\}$

Demostración. Antes de comenzar con la demostración veamos como se puede expresar la sumatoria anterior para algunos valores de n.

Cuando $n = 1$ tenemos solamente $1! = 1$ permutación posible a saber $\pi(1) = 1$

$$- T_0^{-1} T T_0^{-1}$$

Cuando $n = 2$ tenemos $2! = 2$ permutaciones posibles $\binom{1\,2}{1\,2}$ y $\binom{1\,2}{2\,1}$

$$T_0^{-1} T_1 T_0^{-1} T_2 T_0^{-1} + T_0^{-1} T_2 T_0^{-1} T_1 T_0^{-1}$$

Cuando $n = 3$ tenemos $3! = 6$ permutaciones posibles $\binom{1\,2\,3}{1\,2\,3}$; $\binom{1\,2\,3}{1\,3\,2}$; $\binom{1\,2\,3}{2\,1\,3}$; $\binom{1\,2\,3}{2\,3\,1}$; $\binom{1\,2\,3}{3\,1\,2}$ y $\binom{1\,2\,3}{3\,2\,1}$

$$\begin{aligned}-1\Big[&T_0^{-1}T_1T_0^{-1}T_2T_0^{-1}T_3T_0^{-1} + T_0^{-1}T_1T_0^{-1}T_3T_0^{-1}T_2T_0^{-1} + T_0^{-1}T_2T_0^{-1}T_1T_0^{-1}T_3T_0^{-1}\\ &T_0^{-1}T_2T_0^{-1}T_3T_0^{-1}T_1T_0^{-1} + T_0^{-1}T_3T_0^{-1}T_1T_0^{-1}T_2T_0^{-1} + T_0^{-1}T_3T_0^{-1}T_2T_0^{-1}T_1T_0^{-1}\Big]\end{aligned}$$

y asi sucesivamente.

Comencemos probando el teorema para $n = 1$. Para $T_0 \in \text{Isom}(X,Y)$ fijo, la función $T \in \mathcal{L}(X,Y) \mapsto -T_0^{-1}TT_0^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ es claramente lineal y continua (pues se cumple $\|T_0^{-1}TT_0^{-1}\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\,\|T\|\,\|T_0^{-1}\| = \|T_0^{-1}\|^2\,\|T\|$, $\forall T \in \text{Isom}(X,Y)$), es decir es un elemento del espacio $\mathcal{L}\big(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X)\big)$. Mostremos que esta función es la $\mathcal{F}$-derivada de la función inversión en T_0 y para ello solo tenemos que verificar el límite

$$\begin{aligned}
&\lim_{T\to T_0} \frac{\text{inv}(T) - \text{inv}(T_0) + T_0^{-1}(T - T_0)T_0^{-1}}{\|T - T_0\|}\\
&= \lim_{T\to T_0} \frac{T^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}(T - T_0)T_0^{-1}}{\|T - T_0\|}\\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Como para $T \in \text{Isom}(X,Y)$ cualquiera se cumple $T = T_0[I_X + (T_0^{-1}T - I_X)]$ (donde $I_X : X \to X$ denota la función identidad en X) entonces podemos escribir

$$\begin{aligned}
&T^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}(T - T_0)T_0^{-1}\\
&\quad = \big[I_X + (T_0^{-1}T - I_X)\big]^{-1}(T_0^{-1}) - I_X(T_0^{-1}) + (T_0^{-1}T - I_X)(T_0^{-1})\\
&\quad = \Big\{\big[I_X + (T_0^{-1}T - I_X)\big]^{-1} - I_X + (T_0^{-1}T - I_X)\Big\}(T_0^{-1})
\end{aligned}$$

Para verificar el límite (4.8) sea $\epsilon > 0$ cualquiera, podemos escoger $\delta = 1/\|T_0^{-1}\| > 0$ de modo que si $\|T - T_0\| < \delta = 1/\|T_0^{-1}\|$ entonces $\|T_0^{-1}T - I_X\| = \|T_0^{-1}(T - T_0)\| \leqslant \|T_0^{-1}\|\,\|T - T_0\| < 1$ y por (4.7) tenemos

$$\Big\|\big[I_X + (T_0^{-1}T - I_X)\big]^{-1} - I_X + (T_0^{-1}T - I_X)\Big\| \leqslant \frac{\|T_0^{-1}T - I_X\|^2}{1 - \|T_0^{-1}T - I_X\|}$$

Es decir que para cualquier $T \in \text{Isom}(X,Y)$ con $\|T - T_0\| < \delta$ se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\|T^{-1} - T_0^{-1} + T_0^{-1}(T - T_0)T_0^{-1}\|}{\|T - T_0\|} &\leqslant \frac{\|T_0^{-1}T - I_X\|^2}{1 - \|T_0^{-1}T - I_X\|}\cdot\frac{\|T_0^{-1}\|}{\|T - T_0\|}\\
&\leqslant \frac{\|T_0^{-1}\|^2\,\|T - T_0\|^2}{1 - \|T_0^{-1}T - I_X\|}\cdot\frac{\|T_0^{-1}\|}{\|T - T_0\|}\\
&= \|T_0^{-1}\|^3\left\{\frac{\|T - T_0\|}{1 - \|T_0^{-1}T - I_X\|}\right\}
\end{aligned}$$

Como la función composición es separadamente continua, entonces $T_0^{-1}(T - T_0) \to 0$ cuando $T \to T_0$ y por tanto el miembro derecho anterior tiende a cero cuando $T \to T_0$ verificando (4.8). Mostremos ahora la $\mathcal{F}^n$-diferenciabilidad de la función inversión, acabamos de mostrar que la función $\text{inv}^{(1)} : \text{Isom}(X,Y) \subset \mathcal{L}(X,Y) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X)\big)$ está definida por

$$\text{inv}^{(1)}(\varphi)(\psi) = -\varphi^{-1}\psi\varphi^{-1}, \quad \forall\varphi \in \text{Isom}(X,Y), \forall\psi \in \mathcal{L}(X,Y)$$

definamos ahora la función $\alpha_2 : \mathcal{L}(Y,X) \times \mathcal{L}(Y,X) \to \mathcal{L}\big(\mathcal{L}(X,Y), \mathcal{L}(Y,X)\big)$ por

$$\alpha_2(\chi_1,\chi_2)(\psi) = -\chi_1\psi\chi_2, \quad \forall\chi_1,\chi_2 \in \mathcal{L}(Y,X),\ \forall\psi \in \mathcal{L}(X,Y)$$

que claramente es bilineal y además continua pues

$$\|\alpha_2(\chi_1,\chi_2)\| = \sup_{\psi\neq 0}\frac{\|\alpha_2(\chi_1,\chi_2)(\psi)\|}{\|\psi\|} = \sup_{\psi\neq 0}\frac{\|-\chi_1\psi\chi_2\|}{\|\psi\|} \leqslant \|\chi_1\|\|\chi_2\|, \quad \forall \chi_1,\chi_2 \in \mathcal{L}(Y,X)$$

Además notemos que la función $\mathrm{inv}^{(1)}$ se puede expresar como la composición

$$\mathrm{inv}^{(1)} = \alpha_2 \circ (\mathrm{inv},\mathrm{inv})$$

Por inducción sobre n, ya se probó que la función inversión es $\mathcal{F}^1$-diferenciable en $\mathrm{Isom}(X,Y)$, supongamos ahora que también es $\mathcal{F}^k$-diferenciable en $\mathrm{Isom}(X,Y)$, por los Lemas 4.5, 4.6 y el Teorema 3.18 podemos afirmar que la función $\mathrm{inv}^{(1)}$ es $\mathcal{F}^k$-diferenciable en $\mathrm{Isom}(X,Y)$ y por tanto la función inversión inv será $\mathcal{F}^{k+1}$-diferenciable en $\mathrm{Isom}(X,Y)$.

La composición anterior y el Teorema 3.18 permiten dar expresiones para las derivadas de la función inversión de ordenes mayores, asi tenemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}^{(2)}(\varphi)(\psi_1) &= \alpha_2'(\mathrm{inv}(\varphi),\mathrm{inv}(\varphi))\Big(\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1),\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1)\Big)\\
&= \alpha_2'(\varphi^{-1},\varphi^{-1})(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1})\\
&= \alpha_2(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},\varphi^{-1}) + \alpha_2(\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1})
\end{aligned}$$

de donde

$$\mathrm{inv}^{(2)}(\varphi)(\psi_1,\psi_2) = \varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1} + \varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}$$

Para la derivada de orden 3 definamos las funciones $\alpha_{3_{1,2}},\alpha_{3_{2,1}} : \mathcal{L}(Y,X)\times\mathcal{L}(Y,X)\times\mathcal{L}(Y,X) \to \mathcal{L}^2\big(\mathcal{L}(X,Y),\mathcal{L}(Y,X)\big)$ por

$$\begin{aligned}
\alpha_{3_{1,2}}(\chi_1,\chi_2\chi_3)(\psi_1,\psi_2) &= \chi_1\psi_1\chi_2,\psi_2\chi_3\\
\alpha_{3_{2,1}}(\chi_1,\chi_2\chi_3)(\psi_1,\psi_2) &= \chi_1\psi_2\chi_2,\psi_1\chi_3
\end{aligned}$$

Para $\chi_1,\chi_2\chi_3 \in \mathcal{L}(Y,X)$ y $\psi_1,\psi_2 \in \mathcal{L}(X,Y)$. Análogamente al caso anterior éstas funciones son trilineales y continuas con $\|\alpha_{3_{1,2}}\|,\|\alpha_{3_{2,1}}\| \leqslant \|\chi_1\|\|\chi_2\|\|\chi_3\|$, $\forall \chi_1,\chi_2,\chi_3 \in \mathcal{L}(Y,X)$. Además la función $\mathrm{inv}^{(2)}$ se puede expresar como

$$\mathrm{inv}^{(2)} = \alpha_{3_{1,2}} \circ (\mathrm{inv},\mathrm{inv},\mathrm{inv}) + \alpha_{3_{2,1}} \circ (\mathrm{inv},\mathrm{inv},\mathrm{inv})$$

tenemos entonces

$$\begin{aligned}
\mathrm{inv}^{(3)}(\varphi)(\psi_1) =&\alpha_{3_{1,2}}'(\mathrm{inv}(\varphi),\mathrm{inv}(\varphi),\mathrm{inv}(\varphi))\Big(\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1),\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1),\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1)\Big)+\\
&\alpha_{3_{2,1}}'(\mathrm{inv}(\varphi),\mathrm{inv}(\varphi),\mathrm{inv}(\varphi))\Big(\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1),\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1),\mathrm{inv}'(\varphi)(\psi_1)\Big)\\
=&\alpha_{3_{1,2}}'(\varphi^{-1},\varphi^{-1},\varphi^{-1})(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1})+\\
&\alpha_{3_{2,1}}'(\varphi^{-1},\varphi^{-1},\varphi^{-1})(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1})\\
=&\alpha_{3_{1,2}}(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},\varphi^{-1},\varphi^{-1}) + \alpha_{3_{1,2}}(\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},\varphi^{-1})+\\
&\alpha_{3_{1,2}}(\varphi^{-1},\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}) + \alpha_{3_{2,1}}(-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},\varphi^{-1},\varphi^{-1})+\\
&\alpha_{3_{2,1}}(\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1},\varphi^{-1}) + \alpha_{3_{2,1}}(\varphi^{-1},\varphi^{-1},-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1})
\end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned}\mathrm{inv}^{(3)}(\varphi)(\psi_1,\psi_2,\psi_3) = &-\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1} - \varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1}\\ &-\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1} - \varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\\ &-\varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1} - \varphi^{-1}\psi_3\varphi^{-1}\psi_2\varphi^{-1}\psi_1\varphi^{-1}\end{aligned}$$

y asi en adelante. □

4.2. Diferenciabilidad de la Función Inversa

En Espacios de Banach los siguientes teoremas son bién conocidos. (Estos teoremas se demostraran en la sección siguiente).

1. (Teorema 4.16). Sea f una función de un Espacio Normado X a un Espacio normado Y inyectiva en una vecindad de un punto x_0 y diferenciable en x_0 (se entiende $\mathcal{F}$-diferenciable) tal que la función inversa f^{-1} sea continua en $f(x_0)$. Además supongamos que $f'(x_0)$ es un homeomorfismo lineal entre los Espacios X e Y entonces la función inversa f^{-1} es diferenciable en $f(x_0)$ cumpliendose que

$$(f^{-1})'[f(x_0)] = (f'(x_0))^{-1}$$

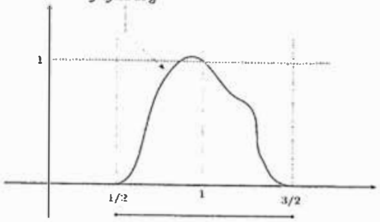
2. (Teorema 4.18). Sea f una función entre los Espacios de Banach X, Y continuamente diferenciable en alguna vecindad de un punto x_0 tal que $f'(x_0)$ es un homeomorfismo lineal entre los Espacios X e Y, entonces existen abiertos U y V con $x_0 \in U$ y $f(x_0) \in V$ tales que f es un difeomorfismo de clase C^1 entre U y V (i.e. f es una biyección entre U y V y f^{-1} es continuamente diferneiable en V) cumpliendose además que

$$(f^{-1})'[f(x)] = (f'(x))^{-1}, \quad \forall x \in U$$

Sin embargo en E.V.T. generales estos teoremas pueden no cumplirse. Los siguiente ejemplos muestran que estos teoremas no se cumplen en E.V.T. Metrizables (no normables), y aún cuando tengamos Espacios Normados los teoremas fallan cuando la diferenciabilidad de Frechet ($\mathcal{F}$-diferenciabilidad) es cambiada por la diferenciabilidad compacta ($\mathcal{H}$-diferenciabilidad)

Ejemplo 30 Sean $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ el Espacio de todas las sucesiones de números reales con la Topología Producto y una función g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ infinitamente diferenciable con soporte $\{t \in \mathbb{R} / g(t) \neq 0\} = [\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ y pongamos $g(1) = 1$. Una tal función se representa en la figura siguiente.

Gráfica de g



Soporte de $g = [1/2, 3/2]$

Definamos la función $f \colon X \to X$ por

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 - g(x_1), x_2 - g(x_2), x_3 - g(x_3), \ldots)$$

esta función satisface todas las condiciones de arriba (Teorema 4.18) en $x_0 = 0$.

1ro. $f \in C^1_{\mathcal{F}}(X)$. En efecto, mostremos que f es $\mathcal{F}$-diferenciable en cualquier $\psi_0 \in X$ con derivada $f'_{\mathcal{F}}(\psi_0) : \psi \in X \mapsto \psi - \psi \cdot (g' \circ \psi_0) \in X$ para ello notemos que

$$\frac{f(\psi_0 + t\psi) - f(\psi_0)}{t} = \psi - \frac{g \circ [\psi_0 + t\psi] - g \circ \psi_0}{t}$$

y de aquí

$$\frac{f(\psi_0 + t\psi) - f(\psi_0)}{t} - \psi + \psi \cdot (g' \circ \psi_0) = \psi \cdot (g' \circ \psi_0) - \frac{g \circ [\psi_0 + t\psi] - g \circ \psi_0}{t}$$

esta expresión tiende a $0 \in X$ cuando $t \to 0$ (vea Teorema 1.18) y por tanto f resulta ser Gâteaux-diferenciable en ψ_0 con Gâteaux derivada dada por la función $\psi \in X \mapsto \psi - \psi \cdot (g' \circ \psi_0) \in X$. Se puede verificar que esta función además de ser lineal es continua en X (considere un abierto subbásico en X de la forma $\{\psi \in X / |\psi(n_0)| < \epsilon\}$ donde $n_0 \in \mathbb{N}$ y $\epsilon > 0$ y muestre que su imagen inversa es abierto en X) y en consecuencia debe ser la $\mathcal{G}$-derivada de f en ψ_0. Además la función $f'_{\mathcal{G}} : X \to \mathcal{L}(X, X)$ definida por $f'_{\mathcal{G}}(\psi_0)(\psi) = \psi - \psi \cdot (g' \circ \psi_0)$ es continua en ψ_0, esto junto con el Teorema 3.12 garantizarán que f es de clase $C^1_{\mathcal{F}}(X)$.

2do. $f'_{\mathcal{F}}(0) \equiv I_X$ y por tanto es lineal continua con inversa también lineal y continua (*i.e.* es un isomorfismo)

Sin embargo la función f no es inyectiva pues para cualquier vecindad del cero $U = \{\psi \in X / |\psi(n_0)| < \epsilon_0\}$, existe un $\psi \in X$ que podemos definir por

$$\psi(n) = 1, \quad \forall n \neq n_0 \quad \wedge \quad \psi(n_0) = 0$$

de modo que $\psi \in U$ con $\psi \neq 0$ y tal que $f(\psi) = f(0) = 0$ (recuerde que $g(0) = 0$ y $g(1) = 1$)

Ejemplo 40 Sean X el Espacio del ejemplo anterior y las sucesiones $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ y $(y_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en X tales que

1. Ambas sucesiones convergen al cero en X
2. Para cualquier sucesión $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ de números reales
   a) La sucesión $(\lambda_k x_k)_k$ converge a cero o es acotada
   b) La sucesión $(\lambda_k y_k)_k$ converge a cero

Tales sucesiones ciertamente existen, por ejemplo se pueden considerar

$$x_k = (2^{-2^k}, 2^{-2^{k-1}}, 2^{-2^{k-2}}, \ldots, 2^{-1}, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$
$$y_k = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0, 1}_{k}, 0, 0, \ldots)$$

Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ definamos

$$x_k^n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)x_n, \quad \text{y} \quad y_k^n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)y_k$$

asi que en particular $x_k^1 = x_k$ y $y_k^1 = y_k$. Definamos ahora la función $f: X \to X$ por

$$f(x) = \begin{cases} x_k^{n-1} & , \text{ si } \quad x = x_k^n \quad (k = 1,2,3,\ldots,\ n = 2,3,4,\ldots) \\ y_k & , \text{ si } \quad x = x_k \quad (k = 1,2,3,\ldots) \\ y_k^{n+1} & , \text{ si } \quad x = y_k^n \quad (k = 1,2,3,\ldots,\ n = 1,2,3,\ldots) \\ x & , \text{ si } \quad x \notin \{x_k^n\} \cup \{y_k^n\} \end{cases}$$

La función f satisface las condiciones del Teorema 4.16 para $x_0 = 0$ pero la función f^{-1} no es $\mathcal{F}$-diferenciable en $f(0) = 0$

Ejemplo 41 Sean X cualquier Espacio de Hilbert infinito dimensional, $\{e_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ un sistema ortonormal de vectores en X y $\{\lambda_K\}_{k\in\mathbb{N}} \subset < o, \infty >$ con $\lambda_k \to 0$ Para cada $k \in \mathbb{N}$ pongamos $x_k = \lambda_k e_k$ y definamos $\psi_k: X \to X$ por

$$\psi_k(x) = \begin{cases} \lambda_k e_k \psi\left(\frac{\|x - x_k\|}{5\lambda_k}\right) & , \text{ si } \|x - x_k\| < \frac{\lambda_k}{3} \\ 0 & , \text{ si } \|x - x_k\| \geqslant \frac{\lambda_k}{3} \end{cases}$$

donde $\psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función infinitamente diferenciable con soporte en $[-1, 1]$ y tal que $\sup|\psi(t)| = \psi(0) = 1$. Cada una de las funciones ψ_k es $\mathcal{F}$-diferenciable. Definamos ahora la función $f: X \to X$ por

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(x)$$

La función $f: X \to X$ es $\mathcal{H}^\infty$-diferenciable en todo X y $f'_{\mathcal{H}}(0)$ es la función identidad, sin embargo la función f no es inyectiva en ninguna vecindad del cero.

Ejemplo 42 Sea X el Espacio del ejemplo anterior y las sucesiones $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de reales positivos tales que

1. Ambas sucesiones convergen a cero en $\mathbb{R}$
2. $\mu_k < \lambda_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda_k}{\mu_k} = \infty$

para cada $n, k \in \mathbb{N}$ definamos

$$\lambda_k^n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)\lambda_n \quad \text{y} \quad \mu_k^n = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^{-1} \mu_k$$

La función $f : X \to X$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_k^{n-1} e_k & , \text{ si } \quad x = \lambda_k^n e_k \quad (n = 2, 3, 4, \ldots, \ k = 1, 2, 3, \ldots) \\ \mu_k e_k & , \text{ si } \quad x = \lambda_k e_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \\ \mu_k^{n+1} e_k & , \text{ si } \quad x = \mu_k^n e_k \quad (n = 1, 2, 3, ldots, \ k = 1, 2, 3, \ldots) \\ x & , \text{ si } \quad x \notin \{\lambda_k^n e_k\} \cup \{\mu_k^n e_k\} \end{cases}$$

es biyectiva y la función inversa f^{-1} es continua en 0. Además f es $\mathcal{H}$-diferenciable en 0 cuya derivada $f'_{\mathcal{H}}(0)$ es la función identidad, sin embargo la función f^{-1} no es $\mathcal{H}$-diferenciable en $f(0) = 0$.

Asi, en adición al hecho de que *"diferenciabilidad no necesariamente implica continuidad"* y que *"la función composición no siempre es continua"* aqui tenemos una tercera diferencia entre el caso normado y no-normado. Para obtener una versión de los teoremas de la función inversa a E.V.T. generales necesitaremos la siguiente definición.

Definición 4.4 (Función (σ_1, σ_2)-preservante) *Sean X, Y dos E.V.T.; $f : U \subset X \to Y$; $\sigma_1 \subset \mathcal{P}(X)$ y $\sigma_2 \subset \mathcal{P}(Y)$ dos familias de subconjuntos definidas como en la Definición 3.2. Decimos que f es (σ_1, σ_2)-preservante en $x_0 \in int(U)$ si para cualesquier $A \in \sigma_1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$, existe un $B \in \sigma_2$ tal que*

$$\frac{f(x_0 + t_n a_n) - f(x_0)}{t_n} \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

OBSERVACIÓN

De la definición anterior resulta inmediato que si f es lineal entonces f es (σ_1, σ_2)-preservante en x_0 si y solo si para cualesquier $A \in \sigma_1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$, existe un $B \in \sigma_2$ tal que

$$f(a_n) \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Si además $0 \in int(U)$ entonces lo anterior nos dice que la función lineal $f : U \subset X \to Y$ es (σ_1, σ_2)-preservante en un punto cualquiera $x_0 \in int(U)$ si y solo lo es en 0. Decimos en este caso simplemente qu f es (σ_1, σ_2)-preservante

Teorema 4.6 *Con las mismas hipótesis de la Definición 4.4. Si además se verifica*

1. $\forall B \in \sigma_2$, $\forall K \subset Y$ *secuencialmente compacto*, $B + K \in \sigma_2$
2. f *es* σ_1*-diferenciable en* $x_0 \in U$

entonces

$$f \text{ es } (\sigma_1, \sigma_2)\text{-preservante en } x_0 \Leftrightarrow f'_{\sigma_1}(x_0) \text{ es } (\sigma_1, \sigma_2)\text{-preservante}$$

Demostración.($\Rightarrow$) Sean $A \in \sigma_1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}-\{0\}$ con $t_n \to 0$ cualesquiera, como f es (σ_1,σ_2)-preservante en x_0, podemos hallar un $B \in \sigma_2$ tal que

$$\frac{f(x_0+t_na_n)-f(x_0)}{t_n} =$$

$$f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n) + \left\{\frac{f(x_0+t_na_n)-f(x_0)}{t_n} - f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n)\right\} \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (4.9)$$

Si denotamos por $r_n = \frac{f(x_0+t_na_n)-f(x_0)}{t_n} - f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n)$ entonces la σ_1-diferenciabilidad de f en x_0 implica que $r_n \to 0$. Definamos el conjunto $K = -\{r_n/n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ que claramente es secuencialmente compacto y por tanto $B+K \in \sigma_2$. De (4.9) tenemos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$

$$f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n) \in B+K \in \sigma_2$$

demostrando que $f'_{\sigma_1}(x_0)$ es (σ_1,σ_2)-preservante en 0

($\Leftarrow$). Nuevamente sean $A \in \sigma_1$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}-\{0\}$ con $t_n \to 0$ cualesquiera. Como $f'_{\sigma_1}(x_0)$ es (σ_1,σ_2)-preservante, podemos hallar un $B \in \sigma_2$ tal que $f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n) \in B$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Si definimos $K = \{r_n/n \in \mathbb{N}\} \subset Y$ tendremos

$$\frac{f(x_0+t_na_n)-f(x_0)}{t_n} = f'_{\sigma_1}(x_0)(a_n) + r_n \in B+K \in \sigma_2, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

demostrando que f es (σ_1,σ_2)-preservante en x_0 □

Lema 4.7 *Con las mismas hipótesis de la Definición 4.4. Si además*

1. $f : U \subset X \to Y$ *es inyectiva y* (σ_1,σ_2)*-preservante en* $x_0 \in int(U)$
2. $f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ *es* σ_2*-diferenciable en* $y_0 = f(x_0) \in int(f(U))$
3. $(f^{-1})'_{\sigma_2}(y_0) : Y \to X$ *es un isomorfismo*

entonces

a). f *es* σ_1*-diferenciable en* x_0

b). $f'_{\sigma_1}(x_0) = \left\{(f^{-1})'_{\sigma_2}(y_0)\right\}^{-1}$

Demostración. (a). Primeramente denotemos por $g = f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ que es σ_2-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$, $S = g'_{\sigma_2}(y_0) : Y \to X$ que es un isomorfismo y $T = S^{-1} : X \to Y$ que es lineal y continua. Observemos que para cualquier $h \in X$ con $x_0 + h \in U$ se cumple

$$\begin{aligned}
&f(x_0+h) - f(x_0) - Th \\
&\quad = f(x_0+h) - f(x_0) - \Big\{T(x_0+h) - T(x_0)\Big\} \\
&\quad = f(x_0+h) - f(x_0) - \Big\{T[g(f(x_0+h))] - T[g(f(x_0))]\Big\} \\
&\quad = f(x_0+h) - f(x_0) - T\Big\{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))\Big\} \\
&\quad = T\Big\{S[f(x_0+h) - f(x_0)] - \{g(f(x_0+h)) - g(f(x_0))\}\Big\} \\
&\quad = T\Big\{S[f(x_0+h) - f(x_0)] - \{g(y_0 + f(x_0+h) - f(x_0)) - g(y_0)\}\Big\}
\end{aligned}$$

Supongamos por contradicción que $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ no sea la σ_1-derivada de f en x_0, entonces existen $A \in \sigma_1$, una vecindad $V \subset Y$ del cero en Y y sucesiones $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tales que

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} - T(h_n) \notin V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y por lo anterior resulta que

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0) - T(t_n h_n)}{t_n}$$
$$= T\left\{S\left[\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right] - \frac{g\left[y_0 + t_n \frac{f(x_0+t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}\right] - g(y_0)}{t_n}\right\}$$
$$\notin V, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.10}$$

además por hipótesis f es (σ_1, σ_2)-preservante en x_0, luego existe un $B \in \sigma_2$ tal que

$$\frac{f(x_0 + t_n h_n) - f(x_0)}{t_n} \in B, \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{4.11}$$

Si denotamos por $y_n = \frac{f(x_0+t_n h_n) - f(x_0)}{t_n}$ entonces por (4.11) $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y por (4.10) se puede escribir

$$T\left\{Sy_n - \frac{g(y_0 + t_n y_n) - g(y_0)}{t_n}\right\} \notin V, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

o equivalentemente

$$Sy_n - \frac{g(y_0 + t_n y_n) - g(y_0)}{t_n} \notin S(V), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que es una contradicción con el echo de que g sea σ_2-diferenciable en y_0, por consiguiente f es σ_1-diferenciable en x_0 con $f'_{\sigma_1}(x_0) = T = S^{-1}$ como se quería demostrar. □

Teorema 4.7 (Condiciones suficientes para la diferenciabilidad de la inversa) *Con las mismas hipótesis de la Definición 4.4. Si además*

1. $f : U \subset X \to Y$ *es inyectiva y* σ_1*-diferenciable en* $x_0 \in int(U)$
2. $f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ *es* (σ_2, σ_1)*-preservante en* $y_0 = f(x_0) \in int(f(U))$
3. $f'_{\sigma_1}(x_0) : X \to Y$ *es un isomorfismo*

entonces

a). f^{-1} *es* σ_2*-diferenciable en* y_0

b). $\{f^{-1}\}'_{\sigma_2}(y_0) = \left\{f'_{\sigma_1}(x_0)\right\}^{-1}$

Demostración. Denotemos por

1. $g = f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ que es inyectiva y (σ_2, σ_1)-preservante en $y_0 = f(x_0) \in int[f(U)]$

2. $g^{-1} = f : U \subset X \to Y$ que es σ_1-diferenciable en $x_0 = g(y_0) \in int(U)$

3. $(g^{-1})'_{\sigma_1}(x_0) = f'_{\sigma_1}(x_0) : X \to Y$ que es un isomorfismo.

cumpliendose asi todas las condiciones del Lema 4.7, por tanto concluimos que $g = f^{-1}$ es σ_2-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ y además

$$\{f^{-1}\}'_{\sigma_2}(y_0) = g'_{\sigma_2}(y_0) = \{(g^{-1})'_{\sigma_1}(x_0)\}^{-1} = \{f'_{\sigma_1}(x_0)\}^{-1}$$

□

Cuando los espacios involucrados son normados, la condición sobre f^{-1} puede ser simplificada como se demostrará en la sección siguiente (Teorema 4.16).

4.2.1. El Espacio de Funciones Completamente Acotadas: $L_p(X,Y)$

Como preparación para una versión del teorema de la función inversa en E.V.T., esta subsección desarrolla el estudio de las funciones lineales $T : U \subset X \to Y$ completamente acotadas respecto de una seminorma continua en el Espacio X o también llamadas funciones lineales p-acotadas (haciendo referencia explícita a la seminorma p).

Definición 4.5 (Funciones p-acotadas o Completamente Acotadas) *Sean X, Y dos E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff y $p \in SC(X)$.*

a). *Decimos que la función $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ es p-acotada (o Completamente Acotada) en X, si para cualquier $q \in SC(Y)$ existe un $\lambda = \lambda(q) > 0$ tal que*

$$q[Tx] \leqslant \lambda p(x), \quad \forall x \in X$$

b). *El conjunto de todas las funciones $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ que son p-acotadas es un Subespacio Vectorial de $\mathcal{L}(X,Y)$ que denotaremos por $\mathcal{L}_p(X,Y)$, es decir*

$$\mathcal{L}_p(X,Y) = \{T \in \mathcal{L}(X,Y) / T \text{ es } p\text{-acotada en } X\}$$

y por tanto podemos escribir

$$\begin{gathered} T \in \mathcal{L}_p(X,Y) \Leftrightarrow \\ \forall q \in SC(Y), \ \exists \lambda = \lambda(q) > 0 \, / \, q[Tx] \leqslant \lambda p(x), \quad \forall x \in X \end{gathered} \tag{4.12}$$

OBSERVACIONES

1. Por el teorema de Hahn-Banach existe un $\psi \in X^*$ tal que $\psi \neq 0$ y $|\psi(x)| \leqslant p(x)$, $\forall x \in X$, entonces para cualesquier $q \in SC(Y)$ y $x_0 \in X$ se cumple

$$q[(x_0 \otimes \psi)(x)] \leqslant q(x_0) \cdot p(x), \quad \forall x \in X$$

lo que muestra que $x_0 \otimes \psi \in \mathcal{L}_p(X,Y)$. Es decir el Espacio $\mathcal{L}_p(X,Y)$ es no trivial.

2. Cuando los Espacios involucrados X e Y son normados, el espacio $\mathcal{L}_p(X,Y)$ coincide con el espacio $\mathcal{L}(X,Y)$ cuando la seminorma $p : X \to \mathbb{R}$ es la norma de X. Para mostrar esto primeramente observemos que para cualquier seminorma continua $q : Y \to \mathbb{R}$ existe un $\delta = \delta(q) > 0$ tal que

$$\|y\| < \delta \Rightarrow q(y) < 1$$

Si consideramos $y \in Y$ arbitrario con $\|y\| \neq 0$ entonces $q\left[\frac{\delta}{2\|y\|}y\right] = \frac{\delta}{2\|y\|}q(y) < 1$ y por tanto $q(y) < \frac{2}{\delta}\|y\|$ y como para $y = 0$ la desigualdad anterior se convierte en una igualdad concluimos que existe un $M = M(q) > 0$ tal que

$$\forall y \in Y, \quad q(y) \leqslant M\|y\| \tag{4.13}$$

Mostremos ahora que $\mathcal{L}(X,Y) \subset \mathcal{L}_{\|\cdot\|}(X,Y)$, sean para ello $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $q \in SC(Y)$ arbitrarios, por (4.13) existe un $M = M(q) > 0$ tal que

$$q(Tx) \leqslant M\|Tx\|, \quad \forall x \in X \tag{4.14}$$

Pero como $T : X \to Y$ es continua entonces existe un $M_1 = M(T) > 0$ tal que

$$\|Tx\| \leqslant M_1\|x\|, \quad \forall x \in X$$

De las dos relaciones anteriores concluimos que para $\lambda = MM_1$ (que depende de T y q) se cumple

$$q[Tx] \leqslant M\|Tx\| \leqslant MM_1\|x\| = \lambda\|x\|, \quad \forall x \in X$$

Esto demuestra que

$$\mathcal{L}(X,Y) = \mathcal{L}_{\|\cdot\|}(X,Y)$$

Con las mismas condiciones de la definición anterior, si $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $q \in SC(Y)$ por (4.12) se deduce que el conjunto de números reales $\left\{\frac{q(Tx)}{p(x)} / x \in X \text{ con } p(x) \neq 0\right\} \subset \mathbb{R}$ está acotado superiormente y por tanto tiene un supremo que denotaremos por $\widehat{q}(T)$. Es decir escribiremos

$$\widehat{q}(T) = \sup_{\substack{x \in X \\ p(x) \neq 0}} \frac{q(Tx)}{p(x)} \in \mathbb{R} \tag{4.15}$$

3. De la ecuación (4.14) para $x \in X$ con $x \neq 0$ cualquera se cumple $\frac{q[Tx]}{\|x\|} \leqslant M\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ y en consecuencia $\widehat{q}(T) = \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{q[Tx]}{\|x\|} \leqslant M \sup_{\|x\| \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = M\|T\|$. Es decir que para $q \in SC(Y)$ cualquiera, existe un $M = M(q) > 0$ tal que

$$\widehat{q}(T) \leqslant M\|T\|, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X,Y) \tag{4.16}$$

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de $\widehat{q}(T)$

Proposición 4.2 (Propiedades de $\widehat{q}(T)$) *Con las mismas condiciones de la Definición 4.5, se verifica*

a). *Si $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $\forall q \in SC(Y)$, $q(T) = 0$, entonces $T = 0$*

b). *Para cualesquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $q \in SC(Y)$ se cumple*

$$\widehat{q}(\lambda T) = |\lambda|\widehat{q}(T)$$

c). *Para cualesquier $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $q \in SC(Y)$ se cumple*

$$\widehat{q}(T_1 + T_2) \leqslant \widehat{q}(T_1) + \widehat{q}(T_2)$$

d). *Para cualesquier $x \in X$, $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $q \in SC(Y)$ se cumple*

$$q(Tx) \leqslant \widehat{q}(T) \cdot p(x)$$

Demostración. (a) Para $q \in SC(Y)$ cualquiera tenemos que (4.15) y la hipótesis implican que $\forall x \in X$ con $p(x) \neq 0$, $q(Tx) = 0$. Por otro lado $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y por tanto podemos hallar un $\lambda > 0$ de modo que $q(Tx) \leqslant \lambda p(x)$, $\forall x \in X$, asi cuando $p(x) = 0$ resulta que $q(Tx) = 0$. Es decir que podemos escribir $\forall q \in SC(Y)$, $\forall x \in X$, $q(Tx) = 0$ y como Y es de Hausdorff entonces [2] $Tx = 0$, $\forall x \in X$ de donde concluimos que $T = 0$

(b). Directo de la definición pues

$$\widehat{q}(\lambda T) = \sup_{\substack{x\in X \\ p(x)\neq 0}} \frac{q(\lambda Tx)}{p(x)} = \sup_{\substack{x\in X \\ p(x)\neq 0}} |\lambda|\frac{q(Tx)}{p(x)} = |\lambda| \sup_{\substack{x\in X \\ p(x)\neq 0}} \frac{q(Tx)}{p(x)}$$

(c). Consecuencia inmediata de $q(T_1x + T_2x) \leqslant q(T_1x) + q(T_2x)$, $\forall x \in X$

(d). De la definición, para cualquier $x \in X$ con $p(x) \neq 0$ tenemos que $\frac{q(Tx)}{p(x)} \leqslant \widehat{q}(T)$, de donde $q(Tx) \leqslant \widehat{q}(T) \cdot p(x)$. y como en (4.12) para $p(x) = 0$ resulta que $q(Tx) = 0$, entonces la igualdad se cumple para todo $x \in X$ □

Teorema 4.8 *Sean X, Y, Z E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff y $p \in SC(X)$. Si $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$ entonces $R \circ T \in \mathcal{L}_p(X,Z)$*

Demostración. Sea $q \in SC(Z)$ cualquiera, como $R \in \mathcal{L}(Y,Z)$ entonces (Teorema 1.15) para la seminorma $q \in SC(Z)$ podemos hallar $p_0 \in SC(Y)$ y $\alpha > 0$ de modo que

$$q(Ry) \leqslant \alpha p_0(y), \quad \forall y \in Y$$

Además $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ y por tanto existe un $\lambda > 0$ tal que

$$p_0(Tx) \leqslant \lambda p(x), \quad \forall x \in X, \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Si consideramos $x \in X$ arbitrario entonces

$$q[R(Tx)] \leqslant \alpha p_0(Tx) \leqslant \alpha\, \lambda\, p(x)$$

es decir $q[(R \circ T)(x)] \leqslant (\alpha\, \lambda)p(x)$, $\forall x \in X$, lo cual implica que $R \circ T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ □

Teorema 4.9 *Con las mismas condiciones de la Definición 4.5. Si para algún $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$ (i.e. el espacio $\mathcal{L}_p(X,Y)$ contiene un elemento invertible de $\mathcal{L}(X,Y)$) entonces X e Y son normables*

[2] Recordemos que todo E.V.T. Localmente Convexo X es generado por la familia de todas las seminormas continuas $SC(X)$ (ver Teorema 1.10). Por tanto si X es de Hausdorff, dicha familia separa puntos de X

Demostración. Tenemos que $T \in \mathcal{L}_p(X,Y)$ es tal que existe $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, entonces por el Teorema 4.8 la composición $T^{-1} \circ T = I_X$ es un elemento de $\mathcal{L}_p(X,X)$, es decir que para cualquier seminorma $q \in SC(X)$ existe un $\lambda = \lambda(q) > 0$ tal que

$$q(x) \leqslant \lambda p(x), \quad \forall x \in X \tag{4.17}$$

Mostremos primeramente que p es una norma en X, para ello sea $x \in X$ con $p(x) = 0$ y mostremos que $x = 0$. De (4.17) para cualquier seminorma $q \in SC(X)$ resulta que $q(x) = 0$ y como X es de Hausdorff obtenemos que $x = 0$, como se quería. Como consecuencia inmediata tenemos que $p \circ T^{-1}$ es una norma en Y □

El siguiente lema nos ayudará a demostrar el teorema que sigue

Lema 4.8 *Sea X un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff y la doble sucesión $(x_{n,m})_{(n,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$. Si para todo $q \in SC(X)$ se cumple que $q(x_{n,m}) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ entonces $x_{n,m} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$*

Demostración. Sea $U \subset X$ una vecindad del cero en X entonces existen $q \in SC(X)$ y $\epsilon > 0$ tales que $\{x \in X / q(x) < \epsilon\} \subset U$ pero como $q(x_{n,m}) \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ entoces existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow q(x_{n,m}) < \epsilon$$

luego para cualesquier $n, m > n_0$ tenemos que $x_{n,m} \in U$ demostrando que $x_{n,m} \xrightarrow{n,m\to\infty} 0$ □

Teorema 4.10 *Sean X un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff y Secuencialmente Completo, $T \in \mathcal{L}_p(X,X)$ con $\widehat{p}(T) < 1$, entonces*

a). *$I - T$ es un isomorfismo en X, es decir*

$$\exists (I-T)^{-1} \in \mathcal{L}(X,X)$$

b). *La serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge a $(I-T)^{-1}$ en $\mathcal{L}(X,X)$, es decir*

$$\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (I-T)^{-1} \text{ en } \mathcal{L}(X,X)$$

c). *Para cualquier seminorma $q \in SC(X)$ y $B \subset X$ subconjunto acotado se verifico*

$$\sup_{x\in B} q\left[(I-T)^{-1}x\right] \leqslant \sup_{x\in B} q(x) + \frac{\widehat{q}(T)}{1-\widehat{p}(T)} \sup_{x\in B} p(x)$$

Demostración. Como $T \in \mathcal{L}_p(X,X)$ entonces para cualquier $x \in X$ tenemos que $p(Tx) \leqslant \widehat{p}(T) \cdot p(x)$, además

$$p(T^2x) = p[T(Tx)] \leqslant \widehat{p}(T)p(Tx) \leqslant \{\widehat{p}(T)\}^2 p(x)$$
$$p(T^3x) = p[T(T^2x)] \leqslant \widehat{p}(T)p(T^2x) \leqslant \{\widehat{p}(T)\}^3 p(x)$$

y en general se prueba por inducción que para cualesquier $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ se cumple

$$p(T^n x) \leqslant \{\widehat{p}(T)\}^n \cdot p(x) \tag{4.18}$$

Los siguientes pasos ayudarán a demostrar el teorema

PASO 1. Para cada $x \in X$, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ es convergente en X
En efecto, sea $q \in SC(X)$ arbitrario, desde que $T \in \mathcal{L}_p(X, X)$ y por (4.18) podemos escribir

$$\begin{aligned} q(T^n x) &= q[T(T^{n-1}x)] \leqslant \widehat{q}(T)p(T^{n-1}x) \\ &\leqslant \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{n-1}p(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2 \end{aligned}$$

de donde para $n \geqslant m$ naturales cualesquiera

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{k=m}^{n} T^k x\right) &= q(T^m x + T^{m+1}x + \cdots + T^n x) \\ &\leqslant q(T^m x) + q(T^{m+1}x) + \cdots + q(T^n x) \\ &\leqslant \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{m-1}p(x) + \cdots + \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{n-1}p(x) \\ &\leqslant \widehat{q}(T)\sum_{k=m}^{n}\{\widehat{p}(T)\}^{k-1} \cdot p(x) \end{aligned}$$

Como por hipótesis $\widehat{p}(T) < 1$ entonces $\sum_{k=m}^{n}\{\widehat{p}(T)\}^{k-1} \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$ implicando esto que $q\left(\sum_{k=m}^{n} T^k x\right) \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$. Siendo $q \in SC(X)$ arbitraria, por el Lema 4.8 obtenemos $\sum_{k=m}^{n} T^k x \xrightarrow{m,n\to\infty} 0$, esto quiere decir que la sucesión $\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauhy en X y como X es secuencialmente compacto, concluimos que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n x$ es convergente en X

Lo anterior permite definir una función $R : X \to X$ como

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n x, \quad \forall x in X$$

PASO 2. $R \in \mathcal{L}(X, X)$, es decir $R : X \to X$ es lineal y continua
En efecto, la linealidad es clara, mostremos que es continua, para ello sea $q \in SC(X)$ cualquiera, como $\sum_{k=0}^{n} T^k x \xrightarrow{n\to\infty} Rx$ entonces $q\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right) \xrightarrow{n\to\infty} q(Rx)$. Pero por el paso 1. para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera

$$\begin{aligned} q\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right) &\leqslant \sum_{k=0}^{n} q(T^k x) \\ &\leqslant q(x) + q(Tx) + q(T^2 x) + \cdots + q(t^n x) \\ &\leqslant q(x) + \widehat{q}(T)p(x) + \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}p(x) + \cdots + \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{n-1}p(x) \\ &\leqslant q(x) + \widehat{q}(T)\sum_{k=0}^{n-1}\{\widehat{p}(T)\}^k p(x) \end{aligned}$$

tomando límites cuando $n \to \infty$ obtenemos

$$q(Rx) \leqslant q(x) + \left\{\widehat{q}(T)\sum_{n=0}^{\infty}\{\widehat{p}(T)\}^n\right\}p(x), \quad \forall x \in X$$

Como la función del miembro derecho anterior $q + \{\widehat{q}(T) \sum_{n=0}^{\infty} \{\widehat{p}(T)\}^n\} p$ también es una seminorma continua en X entonces (ver [15, pp. 74]) R es continua

PASO 3. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge a R en el espacio $\mathcal{L}(X, X)$
En efecto, recordemos que el espacio $\mathcal{L}(X, X)$ se considera con la topología de convergencia uniforme sobre acotados. Debemos mostrar que para cualesquier $B \subset X$ acotado, $q \in SC(X)$ y $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geqslant n_0$ entonces

$$\sum_{k=0}^{n} T^k - R \in \left\{ S \in \mathcal{L}(X, X) / \sup_{x \in B} [q(Sx)] < \epsilon \right\}$$

(Esto será suficiente pues toda vecindad del cero en $\mathcal{L}(X, X)$ contiene a una intersección finita de conjuntos de la forma anterior). Para cualesquier $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$ tenemos que $Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x = \sum_{k=n+1}^{\infty} T^k x = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} T^k x$, de donde

$$\begin{aligned} q\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right) &= \lim_{m \to \infty} q\left(\sum_{k=n+1}^{m} T^k x\right) \\ &\leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} q(T^k x) \\ &\leqslant \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{k-1} p(x) \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre los x en B [3]

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B} q\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right) &\leqslant \widehat{q}(T) \sup_{x \in B} p(x) \lim_{m \to \infty} \sum_{k=n+1}^{m} \{\widehat{p}(T)\}^{k-1} \\ &= \widehat{q}(T) \sup_{x \in B} p(x) \sum_{k=n+1}^{\infty} \{\widehat{p}(T)\}^{k-1} \end{aligned}$$

pero como la serie del miembro derecho tiende para cero cuando $n \to \infty$ entonces
$\lim_{n \to \infty} \sup_{x \in B} q(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x) = 0$ que por definición de límite nos permite hllar un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para cualquier $n \geqslant n_0$ tendremos

$$\sup_{x \in B} q\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right) < \epsilon$$

como queríamos mostrar

PASO 4. $R = (I - T)^{-1}$, esto mostraría que $I - T$ es un isomorfismo en X

[3] Recordemos que en un E.V.T. Localmente Convexo una condición necesaria y suficiente para que un subconjunto sea acotado es que toda seminorma continua sea acotada sobre dicho conjunto (vea (1.3) en el capítulo [1])

Para esto será suficiente mostrar que $(I-T)\circ R = I$ y $R\circ(I-T) = I$. Mostremos la primera igualdad, la segunda es totalmente análoga. Sea $q \in SC(X)$ cualquiera, como $I-T \in \mathcal{L}(X,X)$ entonces existen un $\lambda > 0$ y $q_i \in SC(X)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tales que

$$q[(I-T)x] \leqslant \lambda \max\{q_i(x)\}_{i=1}^{m}, \quad \forall x \in X$$

luego para cualquier $x \in X$ fijo

$$\begin{aligned} q[(I-T)(Rx-x)] &= q\left\{\left[(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k x - x\right] + (I-T)\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right)\right\} \\ &\leqslant q\left[(I-T)\sum_{k=0}^{n} T^k x - x\right] + q\left[(I-T)\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right)\right] \\ &\leqslant q(T^{n+1}x) + \lambda q_j\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right) \\ &\leqslant \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^n p(x) + \lambda q_j\left(Rx - \sum_{k=0}^{n} T^k x\right) \end{aligned}$$

para algún j. El miembro de la derecha tiende a cero cuando $n \to \infty$ y por tanto $q\big[(I-T)(Rx - x)\big] = 0$, siendo $q \in SC(X)$ arbitrario, esto implica que $(I-T)(Rx-x) = 0 \equiv (I-T)\circ R(x) = x$, $\forall x \in X$ y por tanto $(I - T\circ R = 0)$

PASO 5. Mostremos la desigualdad dada en (c). Sabemos que $Rx = \sum_{n=0}^{\infty} T^n x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} T$ y por tanto para $q \in SC(X)$ y $B \subset X$ subconjunto acotado tenemos

$$\begin{aligned} q(Rx) &= \lim_{n\to\infty} q\left(\sum_{k=0}^{n} T^k x\right) \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} q(T^k x) \\ &\leqslant q(x) + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \widehat{q}(T)\{\widehat{p}(T)\}^{k-1} p(x) \\ &= q(x) + \widehat{q}(T)p(x)\sum_{n=0}^{\infty}\{\widehat{p}(T)\}^n \\ &= q(x) + \widehat{q}(T)p(x)\frac{1}{1-\widehat{p}(T)}, \quad \forall x \in X \end{aligned}$$

y tomando supremo sobre los x en B

$$\sup_{x\in B} q\big[(I-T)^{-1}x\big] \leqslant \sup_{x\in B} q(x) + \frac{\widehat{q}(T)}{1-\widehat{p}(T)} \sup_{x\in B} p(x)$$

□

4.2.2. C_p^o funciones

Para obtener una generalización apropiada del teorema de la función inversa, definiremos las funciones de clase C^1 respecto de una seminorma continua en X. Esta definición generaliza el concepto de funciones de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ cuando los espacios involucrados son normados y se considera la norma de X.

Definición 4.6 (Función de Clase C^σ_p) *Sean X, Y dos E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U; $\sigma \subset \mathcal{P}(X)$ familia definida como en la Definición 3.2 y $p \in SC(X)$. Decimos que f es de clase C^σ_p en $x_0 \in U$, que denotaremos por $f \in C^\sigma_p(x_0)$, cuando cumple las siguientes condiciones*

C1. *f es σ-diferenciable en U*

C2. *Para cualquier $\epsilon > 0$ y $q \in SC(Y)$ existe un $\delta > 0$ tal que*

> *1.* $p(x) \leqslant \delta \Rightarrow x_0 + x \in U$
>
> *2.* $p(x) \leqslant \delta \Rightarrow f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0) \in \mathcal{L}_p(X, Y)$ y $\widehat{q}[f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)] \leqslant \epsilon$
>
> *3.* $\sup\limits_{p(x) \leqslant \delta} \widehat{q}_1 [f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)] < \infty, \quad \forall q_1 \in SC(Y)$

Cuando f es de clase C^σ_p en cada punto del conjunto U lo denotaremos por $f \in C^\sigma_p(U)$

OBSERVACIONES

1. Cuando $f : X \to Y$ es lineal y continua, entonces $f'_\sigma(x) = f$, $\forall x \in X$ y por tanto las dos condiciones de la definición anterior se satisfacen trivialmente. Es decir

$$f \in \mathcal{L}(X, Y) \Rightarrow f \in C^\sigma_p(X), \quad \forall p \in SC(X)$$

2. Cuando los Espacios X e Y son normados, esta definición coincide con la de diferenciabilidad continua en el sentido usual, considerando $\sigma = \mathcal{F}$ y p como la norma de X. Es decir

$$f \in C^{\mathcal{F}}_{\|\cdot\|}(x_0) \Leftrightarrow f \in C^1_{\mathcal{F}}(x_0)$$

Veamos la condición suficiente. La condición (C1) asegura que la función $f'_{\mathcal{F}} : U \subset X \to \mathcal{L}(X, Y)$ existe, solo quedaría mostrar que es continua en x_0. Sea entonces $\epsilon > 0$ cualquiera, de la condición (C2) y considerando a q como la norma en Y sabemos que existe un $\delta > 0$ tal que si $\|x\| < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \|f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)\| &= \sup_{\|h\| \neq 0} \frac{\|[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)](h)\|}{\|h\|} \\ &= \widehat{q}[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)] \\ &\leqslant \epsilon \end{aligned}$$

demostrando que $f'_{\mathcal{F}}$ es continua en x_0. Para la condición necesaria solo tenemos que mostrar (C2). Sean $\epsilon > 0$ y $q \in SC(Y)$ culesquiera, recordemos que (OBS 2. y OBS 3. de la Definición 4.5) cuando X, Y son normados entonces $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}_{\|\cdot\|}(X, Y)$ y además para $q \in SC(Y)$ podemos hallar un $\delta_q > 0$ tal que

$$\widehat{q}(T) \leqslant \delta_q \|T\|, \quad \forall T \in \mathcal{L}(X, Y)$$

Además por hipótesis la función $f'_{\mathcal{F}}$ es continua en x_0 y por tanto existe un $\delta > 0$ (que depende de x_0, q y ϵ) tal que si $\|x\| < \delta$ entonces

$$\widehat{q}[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)] \leqslant \delta_q \|f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)\| < \delta_q (\frac{\epsilon}{\delta_q}) = \epsilon$$

cumpliendose asi C2(2) y se puede considerar δ_q suficientemente pequeño de modo que también se cumpla C2(1). Para mostrar C2(3) sea $q_1 \in SC(Y)$ cualquiera y $\delta_1 > 0$ tal que $\widehat{q_1}(T) \leqslant \delta_1\|T\|$, $\forall T \in \mathcal{L}(X,Y)$ como antes, si $\|x\| \leqslant \delta$ entonces

$$\widehat{q_1}\left[f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)\right] \leqslant \delta_1\|f'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)\| \leqslant \delta_1(\frac{\epsilon}{\delta_q})$$

y por tanto el supremo en C2(3) debe ser finito.

Teorema 4.11 *Con las mismas condiciones de la Definición 4.6. Si* $f \in C^{\sigma}_p(x_0)$, *entonces* f *es continua en* x_0

Demostración. Sea $\psi : D \to X$ una red cualquiera en X con $\psi \to x_0$, mostremos que $f \circ \psi \to f(x_0)$ Como $f \in C^{\sigma}_p(x_0)$ entonces para $q \in SC(Y)$ erbitrario, existe un $\delta_0 > 0$ que verifica 1,2 y 3 de la condición (C2) (con $\epsilon = 1$). Además dado que $p : X \to \mathbf{R}$ es continua y X es Localmente Convexo, podemos hallar una vecindad convexa $U_1 \subset X$ de cero en X tal que

$$x \in U_1 \Rightarrow p(x) \leqslant \delta_0$$

También $\psi \to x_0$ y por tanto existe un $a_0 \in D$ tal que para $b \succ a_0$ se tiene $\psi(b) \in x_0 + U_1 \equiv \psi(b) - x_0 \in U_1$ y dado que U_1 es una vecindad convexa del cero podemos afirmar que $\theta\left[\psi(b) - x_0\right] \subset U_1$, $\forall\theta \in [0,1]$ y por la relación anterior concluimos que

$$\forall b \succ a_0, \quad \forall\theta \in [0,1], \quad p\left[\theta(\psi(b) - x_0)\right] \leqslant \delta_0$$

luego de (C2.2)cuando $b \succ a_0$ tenemos

$$\bar{q}\left[f'_{\sigma}(x_0 + \theta(\psi(b) - x_0)) - f'_{\sigma}(x_0)\right] \leqslant 1 \tag{4.19}$$

Además por el teorema del Valor Medio

$$\begin{aligned}
&q\{f[\psi(b)] - f(x_0)\}\\
&\qquad = q\{f[x_0 + (\psi(b) - x_0)] - f(x_0)\}\\
&\qquad \leqslant q\{f'_{\sigma}[x_0 + \theta(\psi(b) - x_0)](\psi(b) - x_0)\} && \text{por Teo. 3.6,(b)}\\
&\qquad \leqslant q\{f'_{\sigma}[x_0 + \theta(\psi(b) - x_0)](\psi(b) - x_0) - f'_{\sigma}(x_0)(\psi(b) - x_0)\}\\
&\qquad\quad + q\{f'_{\sigma}(x_0)(\psi(b) - x_0)\}\\
&\qquad \leqslant \bar{q}\{f'_{\sigma}[x_0 + \theta(\psi(b) - x_0)]\} \cdot p(\psi(b) - x_0)\\
&\qquad\quad + q\{f'_{\sigma}(x_0)(\psi(b) - x_0)\} && \text{por Prop. 4.2,(d)}\\
&\qquad \leqslant p(\psi(b) - x_0) + q\{f'_{\sigma}(x_0)(\psi(b) - x_0)\} && \text{por (4.19)}
\end{aligned}$$

para cualquier $b \succ a_0$ y como $\psi \to x_0$ la continuidad de las seminormas p y q hacen que el miembro derecho tienda a cero y por tanto $q\{f[\psi(b)] - f(x_0)\} \to 0$ o equivalentemente para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $a \in D$ tal que

$$\forall b \succ a, \quad q\{f[\psi(b)] - f(x_0)\} < \epsilon \tag{4.20}$$

Dado que $q \in SC(Y)$ fue arbitrario entonces (4.19) va a implicar que $f \circ \psi \to f(x_0)$, en efecto se $V \subset Y$ vecindad de $f(x_0)$ en Y, sabemos que existen $q_0 \in SC(Y)$ y $\epsilon_0 > 0$ tales que

$$\{y \in Y / q_0(y) < \epsilon_0\} \subset V - f(x_0)$$

por (4.20) existe un $a_0 \in D$ tal que si tomamos $b \succ a_0$ entonces

$$q_0\{f[\psi(b)] - f(x_0)\} < \epsilon_0$$

y en consecuencia

$$f[\psi(b)] - f(x_0) \in V - f(x_0) \equiv f[\psi(b)] \in V$$

demostrando que $f \circ \psi \to f(x_0)$ □

Teorema 4.12 *Con las mismas condiciones de la Definición 4.6. Si $f \in C_p^\sigma(x_0)$ entonces para cualquier $T \in \mathcal{L}(Y, X)$ se cumple que $T \circ f \in C_p^\sigma(x_0)$*

Demostración. Como f es $\sigma-$diferenciable en cada $x \in U$ entonces la continuidad y linealidad de $T : Y \to X$ asi como la igualdad

$$\frac{T \circ f(x+th) - T \circ f(x)}{t} - T \circ f'_\sigma(x)(h) = T\left\{\frac{f(x+th) - f(x)}{t} - f'_\sigma(x)(h)\right\}$$

implican que $T \circ f : U \subset X \to X$ también es $\sigma-$diferenciable en $x \in U$ con $(T \circ f)'_\sigma(x) = T \circ f'_\sigma(x)$, cumpliendose asi la condición (C1). Para verificar (C2) consideremos $\epsilon > 0$ y $q \in SC(X)$ cualesquiera, es claro que $q \circ T : Y \to \mathbb{R}$ es una seminorma continua en Y es decir que $q \circ T \in SC(Y)$, luego existe un $\delta > 0$ que verifica

$$p(x) \leqslant \delta \Rightarrow x_0 + x \in U \tag{4.21}$$

$$p(x) \leqslant \delta \Rightarrow f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0) \in \mathcal{L}_p(X, Y) \text{ y } \widehat{q \circ T}\{f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)\} \leqslant \epsilon \tag{4.22}$$

$$\sup_{p(x) \leqslant \delta} \widehat{q}_1[f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)] < \infty, \quad \forall q_1 \in SC(Y) \tag{4.23}$$

Si $p(x) \leqslant \delta$ entonces el Teorema 4.8 y (4.22) aseguran que

$$\begin{aligned}
(T \circ f)'_\sigma(x_0 + x) - (T \circ f)'_\sigma(x_0) &= T \circ f'_\sigma(x_0 + x) - T \circ f'_\sigma(x_0) \\
&= T \circ [f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)] \\
&\in \mathcal{L}_p(X, X)
\end{aligned}$$

y además de (4.22) también

$$\begin{aligned}
\widehat{q}[(T \circ f)'_\sigma(x_0 + x) - (T \circ f)'_\sigma(x_0)] &= \widehat{q}\{T \circ [f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)]\} \\
&= \sup_{p(h) \neq 0} \frac{q\{T \circ [f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)](h)\}}{p(h)} \\
&= \sup_{p(h) \neq 0} \frac{(q \circ T)\{[f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)](h)\}}{p(h)} \\
&= (\widehat{q \circ T})[f'_\sigma(x_0 + x) - f'_\sigma(x_0)] \\
&\leqslant \epsilon
\end{aligned}$$

Finalmente para $q_0 \in SC(X)$ cualquiera, como $q_0 \circ T \in SC(Y)$ entonces de (4.23)

$$\begin{aligned}\sup_{p(x)\leqslant\delta} \widehat{q_0}\left[(T\circ f)'_\sigma(x_0+x) - (T\circ f)'_\sigma(x_0)\right] &= \sup_{p(x)\leqslant\delta} \widehat{q_0}\left\{T\circ\left[f'_\sigma(x_0+x) - f'_\sigma(x_0)\right]\right\} \\ &= \sup_{p(x)\leqslant\delta} (\widehat{q_0\circ T})\left[f'_\sigma(x_0+x) - f'_\sigma(x_0)\right] \\ &\leqslant \epsilon\end{aligned}$$

Todo esto demuestra que $T\circ f \in \mathcal{C}^\sigma_p(x_0)$ □

4.2.3. Teoremas de la función inversa en E.V.T.

Los teoremas de la subsección anterior, servirán para dar versiones de los teoremas de la función inversa en E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff, que generalizan las versiones correspondientes en Espacios de Banach.

Lema 4.9 *Sean X un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff y $g : U \subset X \to X$ tal que*

1. *g es un homeomorfismo entre los abiertos $U \subset X$ y $g(U) \subset X$*
2. *$g \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}}_p(x_0)$*
3. *$g'_{\mathcal{F}}(x_0) = I_X : X \to X$ es la identidad en X*

Entonces $g^{-1} : g(U) \subset X \to X$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en $y_0 = g(x_0)$ con $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y_0) = I_X$

Demostración. Según el Teorema 4.7 solo necesitamos mostrar que la función $g^{-1} : g(U) \subset X \to X$ es $(\mathcal{F},\mathcal{F})$-preservante en $y_0 = g(x_0)$, para ello sean $B \subset X$ acotado, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ y mostremos que la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ con término general

$$x_n = \frac{g^{-1}(y_0 + t_n b_n) - g^{-1}(y_0)}{t_n}$$

es acotada. Si definimos la función $h : U \subset X \to X$ por $h(x) = x - g(x)$, $\forall x \in U$ entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} x_n &= x_n + b_n - \frac{(y_0 + t_n b_n) - y_0}{t_n} \\ &= x_n + b_n - \frac{g\left[x_0 + t_n \dfrac{g^{-1}(y_0 + t_n b_n) - g^{-1}(y_0)}{t_n}\right] - g(x_0)}{t_n} \\ &= x_n + b_n - \frac{g(x_0 + t_n x_n) - g(x_0)}{t_n} \\ &= b_n + \frac{t_n x_n - g(x_0 + t_n x_n) + g(x_0)}{t_n} \\ &= b_n + \frac{[(x_0 + t_n x_n) - g(x_0 + t_n x_n)] - [x_0 - g(x_0)]}{t_n} \\ &= b_n + \frac{h(x_0 + t_n x_n) - h(x_0)}{t_n} \end{aligned} \tag{4.24}$$

como $g \in C_p^{\mathcal{F}}(x_0)$ entonces podemos hallar un $\delta > 0$ de modo que si $p(x) \leqslant \delta$ entonces

1. $x_0 + x \in U$
2. $g'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - g'_{\mathcal{F}}(x_0) = g'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - Ix \in \mathcal{L}_p(X, X)$ lo que implica $h'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) \in \mathcal{L}_p(X, X)$ y además $\widehat{p}[h'_{\mathcal{F}}(x_0 + x)] \leqslant 1/2$ (4.25)
3. $\sup\limits_{p(x) \leqslant \delta} \widehat{q}[h'_{\mathcal{F}}(x_0 + x)] < \infty, \quad \forall q \in SC(X)$ (4.26)

Desde que $t_n b_n \to 0$ y g^{-1} es continua en $y_0 = g(x_0)$ entonces $g^{-1}(y_0 + t_n b_n) - g^{-1}(y_0) \to 0$ y por tanto $t_n x_n \to 0$ lo que a su vez implica que $p(t_n x_n) \to 0$, luego podemos hallar un $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geqslant n_1$, $p(t_n x_n) \leqslant \delta$. Asi para cualquier $n \geqslant n_1$ se cumple

$$\begin{aligned} p(x_n) &\leqslant p(b_n) + p\left[\frac{h(x_0 + t_n x_n) - h(x_0)}{t_n}\right] && \text{por (4.24)} \\ &\leqslant p(b_n) + p\left[h'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta_n t_n x_n)(x_n)\right] && \text{por Teo. 3.6,(b)} \\ &\leqslant p(b_n) + \frac{1}{2}p(x_n) && \text{por (4.25) y la Prop. 4.2,(d)} \end{aligned}$$

de donde obtenemos que

$$\forall n \geqslant n_1, \quad p(x_n) \leqslant 2p(b_n) \tag{4.27}$$

De manera análoga para cualquier $q \in SC(X)$ existe un $n_2 \in \mathbb{N}$, que podemos considerar mayor que n_1, tal que para $n \geqslant n_2$ se cumple que $q(t_n x_n) \leqslant \delta$ y también

$$\begin{aligned} q(x_n) &\leqslant q(b_n) + q\left[\frac{h(x_0 + t_n x_n) - h(x_0)}{t_n}\right] && \text{por (4.24)} \\ &\leqslant q(b_n) + q\left[h'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta_n t_n x_n)(x_n)\right] && \text{por Teo. 3.6,(b)} \\ &\leqslant q(b_n) + Mp(x_n) && \text{por (4.26) y la Prop. 4.2,(d)} \\ &\leqslant q(b_n) + 2Mp(b_n) && \text{por (4.27)} \end{aligned}$$

donde $M = \sup_{p(x) \leqslant \delta} \widehat{q}[h'_{\mathcal{F}}(x_0 + x)]$. Como $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada resulta que el miembro derecho está acotado y por tanto $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también será acotada. (ver Teorema 1.8) □

Teorema 4.13 (Condiciones suficientes para la diferenciabilidad de la inversa) *Sean X, Y dos E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff y $f : U \subset X \to Y$ tal que*

1. *f es un homeomorfismo entre los abiertos $U \subset X$ y $f(U) \subset Y$*
2. *$f \in C_p^{\mathcal{F}}(x_0)$*
3. *$f'_{\mathcal{F}}(x_0)X \to Y$ es un isomorfismo entre los Espacios X e Y*

Entonces $f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$ con

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y_0) = \{f'_{\mathcal{F}}(x_0)\}^{-1}$$

Demostración. Definimos la función $g = h \circ f : U \subset X \to X$ donde $h = \{f'_{\mathcal{F}}(x_0)\}^{-1} : Y \to X$ que también es un isomorfismo entre Y y X. Por el Teorema 4.12 la función $g \in C_p^{\mathcal{F}}(x_0)$ cumpliendose además que $g'_{\mathcal{F}}(x_0) = h \circ f'_{\mathcal{F}}(x_0) = I_X$ y por tanto cumple todas las hipótesis del lema anterior, asi podemos afirmar que $g^{-1} = f^{-1} \circ h^{-1} : h[f(U)] \subset X \to X$ es $\mathcal{F}$-diferenciable en $g(x_0) = h(y_0)$ con $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[h(y_0)] = I_X$ y como la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad cumple la propiedad de composición resulta

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y_0) = \{g^{-1} \circ h\}'_{\mathcal{F}}(y_0) = \{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[h(y_0)] \circ h = I_X \circ h = h = \{f'_{\mathcal{F}}(x_0)\}^{-1}$$

como se quería mostrar. □

Lema 4.10 *Sean X un E.V.T. Localmente Convexo de Hausdorff y Secuencialmente Completo y $g : U \subset X \to X$ tal que*

1. *g es un homeomorfismo entre los abiertos $U \subset X$ y $g(U) \subset Y$*
2. *$g \in C_p^{\mathcal{F}}(U)$*
3. *Para todo $x \in U$, $g'_{\mathcal{F}}(x) : X \to X$ es un isomorfismo*

Si para algún $x_0 \in U$ se tiene que $g'_{\mathcal{F}}(x_0) = I_X$ entonces $g^{-1} : g(U) \subset X \to X$ es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en $y_0 = g(x_0)$

Demostración. Del Teorema 4.13 se deduce que g^{-1} es $\mathcal{F}$-diferenciable en $g(U)$ con $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[g(x)] = \{g'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1}$, $\forall x \in U$, debemos mostrar que la función $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}} : g(U) \subset X \to \mathcal{L}(X,X)$ es continua en el punto $y_0 = g(x_0)$, para ello sea $\psi : D \to X$ una red en X con $\psi(D) \subset g(U)$ y $\psi \to y_0$ (i.e. convergente a y_0) y mostremos que la red $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}} \circ \psi$ converge a $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y_0) = \{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[g(x_0)] = \{g'_{\mathcal{F}}(x_0)\}^{-1} = I_X$, es decir

$$\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}} \circ \psi \to I_X$$

Definamos la red $\phi = g^{-1} \circ \psi - g^{-1}(y_0) = g^{-1} \circ \psi - x_0 : D \to X$ que claramente verifica $x_0 + \phi = g^{-1} \circ \psi$ y notemos que para cualquier $b \in D$ se cumple

$$\begin{aligned}\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}} \circ \psi(b) &= \{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[\psi(b)] = \{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[g(x)] \quad \text{para algún } x \in U \text{ con } g(x) = \psi(b) \\ &= \{g'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1} = \{g'_{\mathcal{F}}[g^{-1}(g(x))]\}^{-1} \\ &= \{g'_{\mathcal{F}}[g^{-1} \circ \psi(b)]\}^{-1} = \{g'_{\mathcal{F}} \circ (x_0 + \phi)(b)\}^{-1}\end{aligned}$$

luego para demostrar el lema será suficiente probar que la red

$$b \in D \mapsto \{g'_{\mathcal{F}} \circ (x_0 + \phi)(b)\}^{-1} \in \mathcal{L}(X,X)$$

converge a I_X. Como $g \in C_p^{\mathcal{F}}(x_0)$ entonces existe un $\delta_0 > 0$ tal que para $p(x) \leqslant \delta_0$ se cumple

$$\widehat{p}[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - g'_{\mathcal{F}}(x_0)] = \widehat{p}[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + x) - I_X] < 1$$

pero siendo g^{-1} continua en y_0 y como $\psi \to y_0$ entonces $x_0 + \phi = g^{-1} \circ \psi \to g^{-1}(y_0) = x_0$ es decir $\phi \to 0$, la continuidad de la seminorma $p : X \to \mathbb{R}$ permite afirmar que $p \circ \phi \to 0$ y por tanto podemos hallar un $a_1 \in D$ tal que $b \succ a_1$ implica $p[\phi(b)] < \delta_0$. ASi

$$\forall b \succ a_1, \quad \widehat{p}\left[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b)) - I_X\right] < 1$$

Por el Teorema 4.10,(b) se cumple que

$$\begin{aligned}
\left\{g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^{-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^n \\
&= I_X + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^n
\end{aligned}$$

de donde para cualquier $z \in X$

$$\begin{aligned}
\left[\left\{g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^{-1} - I_X\right](z) &= \left\{g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^{-1}(z) - z \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^n(z)
\end{aligned}$$

Siguiendo la demostración del Teorema 4.10 (paso 5 de dicha demostración) tenemos que para cualquier $q \in SC(X)$

$$\begin{aligned}
&q\left[\left\{g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^{-1}(z) - z\right] \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} q\left[\left\{I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^k(z)\right] \\
&\quad\leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \widehat{q}\left[I_x - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]\left\{\widehat{p}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]\right\}^{k-1} p(z) \\
&\quad= \widehat{q}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]p(z) \sum_{k=1}^{\infty} \left\{\widehat{p}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]\right\}^{k-1} \\
&\quad= \frac{\widehat{q}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]}{1 - \widehat{p}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right]} p(z)
\end{aligned}$$

mostremos que el miembro de la derecha tiende a cero, en efecto, como $g \in C_p^{\mathcal{F}}(x_0)$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$p(x) \leqslant \delta \Rightarrow \widehat{q}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + x)\right] < \epsilon$$

pero como $p \circ \phi \to 0$ podemos hallar un $a_0 \in D$ tal que

$$b \succ a_0 \Rightarrow p[\phi(b)] < \delta$$

de estos dos resultados concluimos que cuando $b \succ a_0$ se cumple que $\widehat{q}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right] < \epsilon$ demostrando que $\widehat{q}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}} \circ (x_0 + \phi)\right] \to 0$ y análogamente $\widehat{p}\left[I_X - g'_{\mathcal{F}} \circ (x_0 + \phi)\right] \to 0$. ASi podemos afirmar que para cualquier $q \in SC(X)$ y $B \subset X$ acotado

$$\sup_{z\in B} q\left[\left\{g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \phi(b))\right\}^{-1} z - z\right] \to 0 \tag{4.28}$$

Dado que $q \in SC(X)$ fue arbitrario, esto último va a implicar que $\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1} \to I_X$ en efecto, sean $U_0 \subset X$ vecindad del cero en X y $B \subset X$ acotado, sabemos que existen $p_i \in SC(X)$ y $\epsilon_i > 0$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$ tales que

$$\bigcap_{i=1}^{m} \{x \in X / p_i(x) < \epsilon_i\} \subset U_0$$

por otro lado para cada ϵ_i en (4.28) existen $a_i \in D$ tal que al tomar $a_0 \in D$ con $a_0 \succ a_i$, $\forall i = 1, 2, \ldots, m$ entonces $b \succ a_0$ implica que

$$p_i\Big[\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1}z - z\Big] \leqslant \sup_{z\in B} p_i\Big[\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1}z - z\Big] < \epsilon_i,$$
$$\forall z \in B, \quad \forall i = 1, 2, \ldots, m$$

en consecuencia

$$\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1}z - z \in U_0, \quad \forall z \in B \equiv \Big(\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1} - I_X\Big)(B) \subset U_0$$

siempre que $b \succ a_0$, demostrando que $\{g'_{\mathcal{F}}(x_0+\phi(b))\}^{-1} \to I_X$ □

Teorema 4.14 (Teorema de la Función Inversa) *Sean X, Y dos E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff con X secuencialmente Completo y $f : U \subset X \to Y$ tal que*

1. *f es un homeomorfismo entre los abiertos $U \subset X$ y $f(U) \subset Y$*
2. *$f \in C_p^{\mathcal{F}}(U)$*
3. *Para cada $x \in U$, $f'_{\mathcal{F}}(x) : X \to Y$ es un isomorfismo entre X e Y*

entonces $f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en $f(U)$ donde además se cumple que

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{f'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1}, \quad \forall y = f(x) \in f(U)$$

Demostración. El Teorema 4.13 garantiza que f^{-1} es $\mathcal{F}$-diferenciable en $f(U)$ y además se verifica $\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[f(x)] = \{f'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1}$, $\forall x \in U$. Sea $y_0 = f(x_0) \in f(U)$ cualquiera y mostremos que la función $\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}} : f(U) \subset Y \to \mathcal{L}(Y, X)$ es continua en y_0. Definamos la función $g = h \circ f : U \subset X \to X$ donde $h = \{f'_{\mathcal{F}}(x_0)\}^{-1} : Y \to X$ que claramente es un isomorfismo entre Y y X. Se comprueba fácilmente que g satisface las hipótesis del Lema 4.10 y asi podemos afirmar que $\{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}} : g(U) \subset X \to \mathcal{L}(X, X)$ es continua en $g(x_0) = h[f(x_0)] = h(y_0)$, pero como la $\mathcal{F}$-diferenciabilidad cumple la propiedad de composición y para cualquier $y \in f(U)$ se cumple

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{g^{-1} \circ h\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{g^{-1}\}'_{\mathcal{F}}[h(y)] \circ h$$

concluimos que $\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}$ es continua en y_0. □

Teorema 4.15 (Forma Local del Teorema de la Función Inversa) *Sean X, Y dos E.V.T. Localmente Convexos de Hausdorff con X Secuencialmente Completo, $f : U \subset X \to Y$ definida en el abierto U con $x_0 \in U$ tal que*

1. $f \in C_p^{\mathcal{F}}(U)$

2. $f'_{\mathcal{F}}(x_0) : X \to Y$ *es un isomorfismo entre los Espacios* X *e* Y

entonces

a). f *es un homeomorfismo local entre dos abiertos* $U_0 \subset U$ *y* V_0*, donde* $x_0 \in U_0$

b). f^{-1} *es de clase* $C^1_{\mathcal{F}}$ *en* $f(U_0) = V_0$ *donde además se cumple*

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{f'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1}, \quad \forall y = f(x) \in f(U_0)$$

Demostración. Como en los Teoremas 4.13 y 4.14 podemos asumir que $X = Y$ y $f'_{\mathcal{F}}(x_0) = I_X$, más aún sin perder generalidad podemos considerar que $x_0 = 0$ con $f(0) = 0$ (el caso general se obtiene definiendo la función $g(x) = f(x + x_0) + f(x_0))$. Como $f \in C_p^{\mathcal{F}}(0)$ entonces existe un $\delta_0 > 0$ tal que

1. $p(x) \leqslant \delta_0 \Rightarrow x \in U$ (4.29)
2. $p(x) \leqslant \delta_0 \Rightarrow \widehat{p}[I_X - f'_{\mathcal{F}}(x)] \leqslant 1/2$ (4.30)
3. $\sup\limits_{p(x) \leqslant \delta_0} \widehat{q}[I_X - f'_{\mathcal{F}}(x)] = \lambda_q < \infty, \quad \forall q \in SC(X)$ (4.31)

definamos la función $g : U \subset X \to X$ y el conjunto abierto (que resulta además ser convexo, absorbente y equilibrado) $V \subset X$ como

$$g(x) = x - f(x), \quad \forall x \in U \qquad\qquad V = \{x \in X / p(x) < \frac{1}{2}\delta_0\}$$

desde que p es continua sabemos que $\overline{V} = \{x \in X / p(x) \leqslant \frac{1}{2}\delta_0\}$ y por (4.29) claramente se cumple que $\overline{V} \subset \frac{1}{2}U$. Además para cualesquier $x, y \in 2\overline{V}$ y $\theta \in [0, 1]$ y teniendo en cuenta que $\overline{V}$ es convexo, tenemos que $\frac{x}{2} + \theta(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}) \in \overline{V}$ por tanto

$$\frac{1}{2}p(x + \theta(x - y)) \leqslant \frac{\delta_0}{2} \equiv p(x + \theta(x - y)) \leqslant \delta_0$$

y asi podemos escribir

$$\begin{aligned} p[g(x) - g(y)] &\leqslant p[g'_{\mathcal{F}}(y + \theta(x - y))(x - y)] && \text{Teo. 3.6,(b)} \\ &= p\Big[\{I_X - f'_{\mathcal{F}}(y + \theta(x - y))\}(x - y)\Big] \\ &\leqslant \widehat{p}\Big[I_X - f'_{\mathcal{F}}(y + \theta(x - y))\Big]p(x - y) && \text{Prop. 4.2,(d)} \\ &\leqslant \frac{1}{2}p(x - y) && \text{por (4.30)} \end{aligned}$$

y de aqui

$$\begin{aligned} p(x - y) &= p[(g(x) + g(y)) - (g(y) + f(y))] \\ &\leqslant p[f(x) - f(y)] + p[g(x) - g(y)] \\ &\leqslant p[f(x) - f(y)] + \frac{1}{2}p(x - y) \end{aligned}$$

es decir tenemos que para cualesquier $x, y \in 2\overline{V}$ se cumple

$$p[g(x) - g(y)] \leqslant \frac{1}{2}p(x - y) \qquad \text{y} \tag{4.32}$$
$$p(x - y) \leqslant 2p\big[f(x) - f(y)\big] \tag{4.33}$$

Análogamente para cualquier $q \in SC(X)$ y $x, y \in 2\overline{V}$

$$\begin{aligned} q\big[g(x) - g(y)\big] &\leqslant \widehat{q}\Big[I_X - f'_{\mathcal{F}}\left(y + \theta(x - y)\right)\Big]p(x - y) \\ &\leqslant \lambda_q p(x - y) \end{aligned} \tag{4.34}$$

la segunda desigualdad resulta de (4.31). y tambien

$$\begin{aligned} q(x - y) &= q\big[\big(g(x) + f(x)\big) - \big(g(y) + f(y)\big)\big] \\ &\leqslant q\big[f(x) - f(y)\big] + q\big[g(x) - g(y)\big] \\ &\leqslant q\big[f(x) - f(y)\big] + \lambda_q p(x - y) && \text{por (4.31)} \\ &\leqslant q\big[f(x) - f(y)\big] + 2\lambda_q p\big[f(x) - f(y)\big] && \text{por (4.33)} \end{aligned}$$

es decir que para cualquier $q \in SC(X)$ existe un $\lambda_q > 0$ tal que

$$q(x - y) \leqslant q\big[f(x) - f(y)\big] + 2\lambda_q p\big[f(x) - f(y)\big], \quad \forall x, y \in 2\overline{V} \tag{4.35}$$

Los siguientes paso ayudarán a demostrar el teorema

PASO 1. Para cualquier $y \in \overline{V} \subset \overline{V} + \overline{V} = 2\overline{V}$ (pues $\overline{V}$ es convexo y contiene al cero) existe un único $x \in 2\overline{V}$ tal que $y = f(x)$
En efecto, para demostrar esto definamos la función $h : 2\overline{V} \subset U \to X$ por

$$h(x) = y + g(x), \quad \forall x \in 2\overline{V}$$

primeramente observemos que h mapea $2\overline{V}$ en si mismo (*i.e.* $h(2\overline{V}) \subset 2\overline{V}$) pues si $x \in 2\overline{V}$ entonces por (4.32)

$$p[h(x)] = p[y + g(x)] \leqslant p(y) + p[g(x)] \leqslant p(y) + \frac{1}{2}p(x) \leqslant \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_0 = \delta_0$$

demostrando que $h(x) \in 2\overline{V}$. Pongamos $y_1 = h(y) \in 2\overline{V}$ usando nuevamente la relación (4.32) obtenemos

$$p(y_1 - y) = p[h(y) - y] = p[g(y)] \leqslant \frac{1}{2}p(y) \leqslant \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\delta_0\Big] = \frac{1}{2^2}\delta_0$$

para $y_2 = h(y_1) \in 2\overline{V}$

$$p(y_2 - y_1) = p[h(y_1) - y_1] = p[h(y_1) - h(y)] = p[g(y_1) - g(y)] \leqslant \frac{1}{2}p(y_1 - y) \leqslant \frac{1}{2^3}\delta_0$$

para $y_3 = h(y_2) \in 2\overline{V}$

$$p(y_3 - y_2) = p[h(y_2) - h(y_1)] = p[g(y_2) - g(y_1)] \leqslant \frac{1}{2}p(y_2 - y_1) \leqslant \frac{1}{2^4}\delta_0$$

Continuando con este proceso encontramos que para $y_0 = y$ y $y_n = h(y_{n-1})$ resulta

$$p(y_n - y_{n-1}) \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\delta_0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y en consecuencia para $n > m$ naturales cualesquiera tenemos

$$\begin{aligned} p(y_n - y_m) &\leqslant p(y_n + y_{n-1}) + p(y_{n-1} + y_{n-2}) + \cdots + p(y_{m+1} - y_m) \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}}\delta_0 + \frac{1}{2^n}\delta_0 + \cdots + \frac{1}{2^{m+2}}\delta_0 \\ &= \Big\{ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{m+1} \frac{1}{2^k} \Big\}\delta_0 \end{aligned}$$

Análogamente para cualquier $q \in SC(X)$ y $n > m$ por (4.34) tenemos

$$q(y_n - y_m) = q[g(y_{n-1}) - g(y_{m-1})] \leqslant \lambda_q p[y_{n-1} - y_{m-1}] \leqslant \lambda_q \delta_0 \Big\{ \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} - \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{2^k} \Big\}$$

esto demuestra que la sucesión $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset 2\overline{V} \subset U$ es de Cauchy [4] en el Espacio Secuencialmente Completo X y asi converge a un punto $x \in 2\overline{V}$ y como f es continua en U (vea el Teorema 4.11) resulta que $f(y_n) \to f(x)$. Además observemos que $f(y_n) \to y$ (pues para cualquier $V_0 \subset X$ vecindad del cero existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n - y_{n+1} \in V_0$, $\forall n > n_0$, pero $y_{n+1} = h(y_n) = y + g(y_n) = y + y_n - f(y_n)$ de donde $y_n - y_{n+1} = f(y_n) - y \in V_0$, $\forall n \geqslant n_0$) y por tanto $y = f(x)$. La unicidad de x resulta inmediata de (4.35)

PASO 2. f es un homeomorfismo entre los abiertos $U_0 = f^{-1}(V) \cap 2V \subset U$ y V
En efecto, pues si $y \in V$ entonces por el paso anterior existe un único $x \in 2\overline{V}$ tal que $y = f(x)$, pero de (4.33) tenemos que

$$p(x) \leqslant 2p[f(x)] = 2p(y) < 2(\frac{1}{2}\delta_0) = \delta_0$$

es decir $x \in 2V$. Esto demuestra que $f : U_0 \subset X \to V$ es una biyección continua (ya que f es continua en U). Mostremos que f^{-1} es continua en cualquier punto $y_0 = f(x_0) \in V$, sea $q \in SC(X)$ cualquiera, por (4.35) resulta

$$\begin{aligned} q[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] &= q(x - x_0) \leqslant q[f(x) - f(x_0)] + 2\lambda_q p[f(x) - f(x_0)] \\ &= q(y - y_0) + 2\lambda_q p(y - y_0) \end{aligned}$$

la continuidad de p y q hacen que el miembro de la derecha tienda a cero cuando $y \to y_0$ por tanto $q[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] \to 0$ cuando $y \to y_0$ y siendo q arbitrario concluimos que $f^{-1}(y) \to f^{-1}(y_0)$ cuando $y \to y_0$ demostrando que f^{-1} es continua en y_0

PASO 3. $f^{-1} : V \to U_0$ es continuamente diferenciable en $f(U_0) = V$
En efecto, por el Teorema 4.14 tenemos que mostrar que se satisfacen las condiciones siguientes

[4] En un E.V.T. Localmente Convexo X una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ es de Cauchy si y solo si para cualquier $q \in SC(X)$, la sucesión $(q(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy

1ro. $\forall x \in U_0$, $f'_{\mathcal{F}}(x) : X \to X$ es un isomorfismo

2do. $f \in C_p^{\mathcal{F}}(U_0)$

Para la primera condición, si $x \in U_0$ es cualquiera entonces $p(\frac{x}{2}) < \frac{1}{2}\delta_0$ de donde $p(x) < \delta_0$ y por (4.30), $\widehat{p}[I_X - f'_{\mathcal{F}}(x)] \leqslant 1/2 < 1$. Del Teorema 4.10 se deduce que $f'_{\mathcal{F}}(x)$ es un isomorfismo. Para la segunda condición será suficiente mostrar que para cualquier $x_0 \in U_0$ existe un $\delta > 0$ tal que $p(x) \leqslant \delta$ implica $x_0 + x \in U_0$. Como $x_0 \in 2V$ y $f(x_0) \in V$ entonces podemos elegir un $\delta > 0$ tal que

$$\delta < \min\left\{\delta_0 - p(x_0), \frac{2}{3}\left(\frac{\delta_0}{2} - p[f(x_0)]\right)\right\}$$

de modo que si $p(x) \leqslant \delta$ entonces para cualquier $\theta \in <0,1>$, $p(x_0 + \theta x) \leqslant p(x_0) + \theta p(x) \leqslant p(x_0) + \delta < \delta_0$ y esto a su vez implica por (4.30) que

$$\widehat{p}[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta x)] \leqslant 1/2, \quad \theta \in <0,1>$$

Aplicando el Teorema del Valor Medio obtenemos

$$\begin{aligned}
p[f(x_0 + x)] &= p\big[(x_0 + x) - f(x_0 + x) - (x_0 - f(x_0)) - x - f(x_0)\big] \\
&\leqslant p[g(x_0 + x) - g(x_0)] + p(x) + p[f(x_0)] \\
&\leqslant p[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta x)(x)] + \delta + p[f(x_0)] \\
&\leqslant \widehat{p}[g'_{\mathcal{F}}(x_0 + \theta x)]p(x) + \delta + p[f(x_0)] \\
&\leqslant \frac{1}{2}p(x) + \delta + p[f(x_0)] \\
&\leqslant \frac{3}{2}\delta + p[f(x_0)] \\
&< \frac{\delta_0}{2}
\end{aligned}$$

lo que implica $f(x_0 + x) \in V$ o equivalentemente $x_0 + x \in f^{-1}(V)$. Por el Teorema 4.14 concluimos que f^{-1} es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en $f(U_0) = V$ □

4.3. Teoremas de la Función Inversa en Espacios Normados

Cuando los Espacios involucrados son normados algunas condiciones se pueden simplificar. Una de las primeras simplificaciones es la siguiente: si $T \in \mathcal{L}(X;Y)$ donde X, Y son de Banach, entonces es suficiente que T sea biyectiva para garantizar que la inversa también sea lineal y continua, es decir $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$, convirtiéndolo automáticamente en un isomorfismo entre Espacios de Banach

Teorema 4.16 (Condiciones suficientes para la diferenciabilidad de la inversa) *Sean X, Y Espacios Normados y $f : U \subset X \to Y$ tales que*

1. *f es inyectiva y $\mathcal{F}$-diferenciable en $x_0 \in int(U)$*
2. *$f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ es continua en $y_0 = f(x_0) \in int[f(U)]$*

3. *$f'(x_0) : X \to Y$ es un isomorfismo (i.e. $f'(x_0) \in \mathcal{L}(X,Y)$ es biyectiva con inversa lineal y continua)*

entonces

a). *f^{-1} es $\mathcal{F}$-diferenciable en $y_0 = f(x_0)$*

b). $\{f^{-1}\}'(y_0) = \{f'(x_0)\}^{-1}$

Demostración. Como $\{f'(x_0)\}^{-1} : Y \to X$ es lineal y continua entre espacios normados, existe un $\lambda > 0$ tal que

$$\|f'(x_0)(x)\| \geqslant \lambda\|x\|, \quad \forall x \in X \tag{4.36}$$

además como f es $\mathcal{F}$-diferenciable en $x_0 \in int(U)$ entonces del límite (3.14) existe un $\delta > 0$ tal que

$$\forall h \in X, \quad \|h\| < \delta \Rightarrow \|f(x_0 + h) - f(x_0) - f'(x_0)(h)\| \leqslant (\lambda/2)\|h\| \tag{4.37}$$

dado que f^{-1} es continua en $y_0 = f(x_0)$ podemos hallar un $\beta > 0$ tal que

$$\forall k \in Y, \quad \|k\| < \beta \Rightarrow \|f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\| < \delta \tag{4.38}$$

Si consideramos ahora $k \in Y$ con $\|k\| < \beta$ tendremos de (4.37) y (4.38) que

$$\begin{aligned}
\|f\{x_0 + (f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0))\} - f(x_0) - f'(x_0)\left[f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\right]\| \\
= \|k - f'(x_0)\left[f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\right]\| \\
< (\lambda/2)\|f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\|
\end{aligned}$$

lo que implica que

$$\|f'(x_0)\left[f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\right]\| - \|k\| < (\lambda/2)\|f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\|$$

pero de (4.36)

$$\|f'(x_0)\left[f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\right]\| \geqslant \lambda\|f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\|$$

de estas dos últimas desigualdades obtenemos que

$$\forall k \in Y \text{ con } \|k\| < \beta, \quad (\lambda/2)\|f^{-1}(y_0 + k) - f^{-1}(y_0)\| \leqslant \|k\| \tag{4.39}$$

Esta desigualdad permite demostrar que la función f^{-1} es $(\mathcal{B}(Y), \mathcal{B}(X))$-preservante en y_0, en efecto pues si $B \in \mathcal{B}(Y)$ (*i.e.* $B \subset Y$ subconjunto acotado de Y), $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ y $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} - \{0\}$ con $t_n \to 0$ entonces $t_n b_n \to 0$ y por lo tanto podemos hallar un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $\forall n \geqslant n_0$, $\|t_n b_n\| < \beta$. En (4.39) obtenemos

$$(\lambda/2)\left\|\frac{f^{-1}(y_0 + t_n b_n) - f^{-1}(y_0)}{t_n}\right\| \leqslant \|b_n\| \leqslant N, \quad \forall n \geqslant n_0$$

donde $N > 0$ es una cota para la sucesión acotada $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$. Esto muestra que si definimos el conjunto $A = \{x \in X / \|x\| < N\} \in \mathcal{B}(X)$ entonces

$$\frac{f^{-1}(y_0 + t_n b_b) - f^{-1}(y_0)}{t_n} \in (2/\lambda)A, \quad \forall n \geqslant n_0$$

La conclusión sigue del Teorema 4.7. $\square$

El siguiente teorema es la versión $\mathcal{C}^n$ del teorema anterior.

Teorema 4.17 (Teorema de la Función Inversa) *Sean X, Y Espacios de Banach y $f : U \subset X \to Y$ tal que*

1. *f es un homeomorfismo entre los abiertos $U \subset X$ y $f(U) \subset Y$*

2. *$f \in C^n_{\mathcal{F}}(U)$*

3. *Para cada $x \in U$, $f'_{\mathcal{F}}(x) : X \to Y$ es biyectiva*

entonces $f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ en $f(U)$

Demostración. Usamos inducción sobre n. Para $n = 1$ por el Teorema 4.16 la función f^{-1} es $\mathcal{F}$-diferenciable en $f(U)$ y además para cualquier $y \in f(U)$ se cumple

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{f'_{\mathcal{F}}(f^{-1}(y))\}^{-1} = (\mathrm{inv} \circ f'_{\mathcal{F}} \circ f^{-1})(y)$$

como todas las funciones involucradas son continuas resulta que $\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}$ es continua en $f(U)$ y por tanto $f^{-1} \in C^1_{\mathcal{F}}(f(U))$. Supongamos ahora que el teorema es cierto para $n = k$, veamos que también es cierto para $n = k + 1$, sea entonces $f : U \subset X \to Y$ homeomorfismo entre los abiertos U y $f(U)$ de clase $C^{k+1}_{\mathcal{F}}$ en U tal que para cada $x \in U$, $f'_{\mathcal{F}}(x) \in \mathrm{Isom}(X, Y)$. Como estamos en Espacios Normados resulta que $f \in C^k_{\mathcal{F}}(U)$ y por hipótesis de inducción tenemos que f^{-1} es de clase $C^k_{\mathcal{F}}$ en $f(U)$. De la ecuación anterior la derivada $k+1$ de la función $\mathrm{inv} \circ f'_{\mathcal{F}} \circ f^{-1}$ contiene composiciones de $\mathrm{inv}^{(k)}_{\mathcal{F}}$, $(f'_{\mathcal{F}})^{(k)}_{\mathcal{F}}$ y $(f^{-1})^{(k)}_{\mathcal{F}}$ las cuales son todas funciones continuas y por tanto

$$(f^{-1})^{(k+1)}_{\mathcal{F}} = \{(f^{-1})'_{\mathcal{F}}\}^{(k)}_{\mathcal{F}}$$

es continua o equivalentemente f^{-1} es de clase $C^{k+1}_{\mathcal{F}}$ en $f(U)$ □

Para enunciar la forma local del teorema de la función inversa usaremos la siguiente terminología

Definición 4.7 (Difeomorfismo) *Sean X, Y dos Espacios Normados. Una función $f : U \subset X \to V \subset Y$ es un $C^n_{\mathcal{F}}$-difeomorfismo entre los abiertos U y V cuando*

D1. *f es una biyección entre U y V*

D2. *f es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ en U*

D3. *f^{-1} es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ en V*

Teorema 4.18 (Forma Local del Teorema de la Función Inversa) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y $x_0 \in U$ tal que*

1. *$f \in C^n_{\mathcal{F}}(U)$*

2. *$f'_{\mathcal{F}}(x_0) : X \to Y$ es biyectiva*

Entonces

a). *f es un $C^n_{\mathcal{F}}$-difeomorfismo entre dos abiertos $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset Y$ donde $x_0 \in U_0$ y $y_0 \in V_0$*

b). *La derivada de la función inversa está dada por*

$$\{f^{-1}\}'_{\mathcal{F}}(y) = \{f'_{\mathcal{F}}(x)\}^{-1}, \quad \forall y = f(x) \in V_0 = f(U_0)$$

Demostración. Consideremos a p como la norma en X, además siendo f de clase $C^n_{\mathcal{F}}(U)$, la observación (2) de la Definción 4.6 garantiza que $f \in C^{\mathcal{F}}_{\|\cdot\|}(U)$ cumpliendose asi todas las hipótesis del Teorema 4.15 y por lo tanto f resulta un homeomorfismo entre dos abiertos $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset Y$ y por el Teorema 4.17 (recuerde que en la demostración del Teorema 4.15 se probó que $\forall x \in U_0$, $f'_{\mathcal{F}}(x_0) \in \mathrm{Isom}(X,Y)$) concluimos que f^{-1} es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ en $f(U_0) = V_0$ ■

Cuando los Espacios X,Y son en general E.V.T. Localmente Convexos, es imposible obtener una generalización del teorema anterior. El siguiente ejemplo muestra que aún en Espacios Metrizables Separables y Completos existen funciones de clase C^∞ cuya derivada en un punto es invertible, sin embargo no es inyectiva

Ejemplo 43 Sea $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Sea la función $f: X \to X$ definida por

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_1 - x_1^2, x_2 - x_2^2, x_3 - x_3^2, \ldots)$$

f es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en X, en efecto, para $\psi_0 \in X$ cualquiera tenemos

$$\frac{f(\psi_0 + t\psi) - f(\psi_0)}{t} = \psi - 2\psi_0\psi - t\psi^2$$

esta expresión tiende a $0 \in X$ cuando $t \to 0$ (recuerde que la convergencia en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ es la convergencia puntual, vea Teorema 1.18).Probemos entonces que la función T: $X \to X$ definida por

$$T(\psi) = \psi - 2\psi_0\psi$$

es la $\mathcal{F}$-derivada de f en el punto ψ_0. Claramente esta función es lineal y continua, garantizando que es la $\mathcal{G}$-derivada de f en ψ_0. Mostremos que la función $f'_{\mathcal{G}}: X \to \mathcal{L}(X,X)$ definida por $f'_{\mathcal{G}}(\zeta_1)(\zeta_2) = \zeta_2 - 2\zeta_1\zeta_2$ es continua en $\psi_0 \in X$ (ésto y el Teorema 3.12 garantizarían que f es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en X). Sea entonces $A \subset X$ acotado (i.e. $\forall n \in \mathbb{N}$, $\pi_n(A) = \{\psi(n)/\psi \in A\}$ es acotado) y $U = \{\psi \in X/|\psi(n)| < \epsilon\}$ ($n \in \mathbb{N}, \epsilon > 0$ fijos) y definamos la vecindad del cero $\widetilde{\mathcal{V}} = \{T \in \mathcal{L}(X,X)/T(A) \subset U\}$ en $\mathcal{L}(X,X)$. Notemos que

$$[f'_G(\psi) - f'_G(\psi_0)](\psi) = \psi - 2\psi_0\psi - \psi + 2\psi_0\psi = 2(\psi_0 - \psi)\psi$$

y por tanto

$$f'_G(\psi) - f'_G(\psi_0) \in \widetilde{\mathcal{V}} \Leftrightarrow \forall\psi \in A,\ 2(\psi_0 - \psi)\psi \in U \Leftrightarrow \forall\psi \in A,\ |\psi(n) - \psi_0(n)||\psi(n)| < \frac{\epsilon}{2}$$

si definimos $U_0 \subset X$ por $U_0 = \{\phi \in X/|\phi(n)| < \frac{\epsilon}{2c_n}\}$ donde $c_n > 0$ es tal que $|\phi(n)| < c_n$, $\forall\phi \in A$ entonces se cumplen las implicaciones

$$\psi - \psi_0 \in U_0 \Rightarrow |\psi(n) - \psi_0(n)| < \frac{\epsilon}{2c_n} \Rightarrow |\psi(n) - \psi_0(n)||\psi(n)| \leqslant \frac{\epsilon}{2c_n}|\psi(n)| < \frac{\epsilon}{2}$$

esto demuestra que f'_G es continua en $\psi_0 \in X$ arbitrario. Además $f'_{\mathcal{F}}(0) = I_X \in \mathcal{L}(X,X)$, sin embargo no existe ninguna vecindad del cero en la cual f sea inyectiva. Por ejemplo considere $x_n = (\delta_{n,k})_{k\in\mathbb{N}}$, entonces $x_n \to 0$ y $f(x_n) = 0$

En el estudio de variedades y subvariedades, el siguiente teorema es de vital importancia.

Teorema 4.19 (Teorema de la Función Implícita) *Sean X, Y, Z tres Espacios de Banach; $f : U \times V \subset X \times Y \to Z$ función definida en el abierto $U \times V$ tal que*

1. $f \in C^n_{\mathcal{F}}(U \times V)$

2. *Existe un* $(x_0, y_0) \in U \times V$ *tal que* $\partial_2 f(x_0, y_0) : Y \to Z$ *es una biyección*

Si denotamos $\alpha = f(x_0, y_0)$, *entonces existe una única función* $\psi : U_0 \subset X \to V_0 \subset Y$ *definida entre los abiertos* U_0 *y* V_0 *con* $x_0 \in U_0 \subset U$, $y_0 \in V_0 \subset V$ *tal que*

a). $\psi(x_0) = y_0$

b). $\forall x \in U_0,\ f(x, \psi(x)) = \alpha$

c). $\psi \in C^n_{\mathcal{F}}(U_0)$ *donde además se cumple*

$$\psi'_{\mathcal{F}}(x) = -\left\{\partial_2 f(x, \psi(x))\right\}^{-1} \circ \left\{\partial_1 f(x, \psi(x))\right\}, \quad \forall x \in U_0$$

Demostración. Definamos la función $g : U \times V \subset X \times Y \to X \times Z$ por

$$g(x, y) = (x, f(x, y)), \quad \forall (x, y) \in U \times V$$

por el Lema 4.6 esta función es de clase $C^n_{\mathcal{F}}(U \times V)$ con

$$g'_{\mathcal{F}}(x, y)(u, v) = (u, \partial_1 f(x, y)u + \partial_2 f(x, y)v), \quad \forall (x, y) \in U \times V,\ \forall (u, v) \in X \times Y$$

además es fácil verificar que $g'_{\mathcal{F}}(x_0, y_0)$ es biyectiva y por el Teorema 4.18 existen abiertos $U' \subset X$, $V_0 \subset Y$ con $(x_0, y_0) \in U' \times V_0$ y $g(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0)) = (x_0, \alpha) \in g(U' \times V_0)$ tal que g es un difeomorfismo de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ entre los abiertos $U' \times V_0$ y $g(U' \times V_0) = U_0 \times W_1 \subset X \times Z$. Definamos ahora la función $\psi : U_0 \subset X \to Y$ por

$$\psi(x) = \pi_2 \circ g^{-1}(x, \alpha), \quad \forall x \in U_0$$

donde π_2 es la segunda proyección definida como $\pi_2(x, y) = y$, $\forall (x, y) \in X \times Y$. Veamos que ψ es la función buscada, en primer lugar desde que $g(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0, y_0) = (x_0, \alpha))$ entonces $\psi(x_0) = \pi_2[g^{-1}(x_0, \alpha)] = \pi_2(x_0, y_0) = y_0$ verificando (a). Para comprobar (b) sea $x \in U_0$ cualquiera, entonces

$$g^{-1}(x, \alpha) = (u, v) \Leftrightarrow (x, \alpha) = g(u, v) = (u, f(u, v)) \Leftrightarrow x = u \wedge \alpha = f(u, v)$$

luego

$$f(x, \psi(x)) = f\left(x, \pi_2[g^{-1}(x, \alpha)]\right) = f(x, \pi_2(u, v)) = f(x, v) = \alpha$$

La parte (c) resulta de la regla de la cadena y derivando la composición $f(x, \psi(x)) = \alpha$ obtenemos para cualesquier $h \in X$ y $x \in U_0$

$$0 = f'_{\mathcal{F}}(x, \psi(x))\left[h, \psi'_{\mathcal{F}}(x)h\right] = \partial_1 f(x, \psi(x))h + \partial_2 f(x, \psi(x))\left[\psi'_{\mathcal{F}}(x)h\right]$$

de donde

$$\partial_1 f(x, \psi(x)) = -\partial_2 f(x, \psi(x)) \circ \psi'_{\mathcal{F}}(x)$$

□

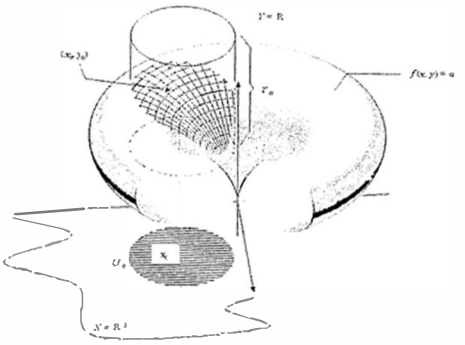


Figura 4.1: Teorema de la función implícita

La idea intuitiva para $X = \mathbb{R}^2$ y $Y = \mathbb{R}$, está dada en la figura 4.1. La ecuación $f(x, y) = a$ representa la superficie de nivel a de la función f. La condición $\partial_y f(x_0, y_0)$ es un isomorfismo quiere decir que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ y geométricamente significa que el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0) no es vertical. Con estas condiciones existen vecindades $U_0 \subset \mathbb{R}^2$ y $V_0 \subset \mathbb{R}$ tal que el conjunto $f^{-1}(a) \cap U_0 \times V_0$ es la gráfica de una cierta función $\psi : U_0 \to V_0$

Cuando los Espacios involucrados son de Banach existen algunos teoremas adicionales relacionados con el Teorema 4.18. Los siguientes se refieren al caso en el que $f'_{\mathcal{F}}(x_0)$ ya no es una biyección, sino inyectiva o sobreyectiva.

Teorema 4.20 (Teorema de Inyectividad Local) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y $x_0 \in U$ tal que*

1. $f \in C^1_{\mathcal{F}}(x_0)$
2. $f'_{\mathcal{F}}(x_0) : X \to Y$ *es inyectiva con inversa continua (no necesariamente sobreyectiva)*

Entonces existe $U_0 \subset U$ vecindad de x_0 en X tal que

a). *f es inyectiva en U_0*

b). *$f^{-1} : f(U) \subset Y \to X$ es continua en $f(U)$*

c). *$f(U)$ no necesariamente es abierto*

Demostración. Como $f'_{\mathcal{F}}(x_0)$ es inyectiva con inversa lineal y continua entonces existe un $\alpha > 0$ tal que

$$\|f'_{\mathcal{F}}(x_0)x\| \geqslant \alpha\|x\|, \quad \forall x \in X \tag{4.40}$$

Además como f es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en x_0 entonces la función $\psi : U \subset X \to Y$ definida por

$$\psi(x) = f(x) - f(x_0) - f'_{\mathcal{F}}(x_0)(x - x_0), \quad \forall x \in U$$

también es de clase $C^1_{\mathcal{F}}$ en x_0 y por tanto la función derivada $\psi'_{\mathcal{F}} = f'_{\mathcal{F}} - f'_{\mathcal{F}}(x_0)$ es continua en x_0, luego por definición de continuidad podemos hallar un $\beta > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < \beta \Rightarrow \|\psi'_{\mathcal{F}}(x) - \psi'_{\mathcal{F}}(x_0)\| = \|\psi'_{\mathcal{F}}(x)\| < \frac{\alpha}{2}$$

definamos el conjunto abierto $U_0 = B(x_0, \beta) = \{x \in X / \|x - x_0\| < \beta\}$ y por el teorema del valor medio, para $x_1, x_2 \in U_0$ cualesquiera tenemos

$$\|\psi(x_2) - \psi(x_1)\| \leqslant \|x_2 - x_1\| \sup_{c \in <x_1, x_2>} \|\psi'_{\mathcal{F}}(c)\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|x_2 - x_1\| \tag{4.41}$$

luego para $x_1, x_2 \in U_0$ cualesquiera podemos escribir

$$\begin{aligned}
\|f(x_1) - f(x_2)\| &= \Big\| \{\psi(x_1) + f(x_0) + f'_{\mathcal{F}}(x_0)(x_1 - x_0)\} \\
&\quad - \{\psi(x_2) + f(x_0) + f'_{\mathcal{F}}(x_0)(x_2 - x_0)\} \Big\| \\
&= \{\psi(x_1) - \psi(x_2) + f'_{\mathcal{F}}(x_0)(x_1 - x_2)\} \\
&\geqslant \|f'_{\mathcal{F}}(x_0)(x_1 - x_2)\| - \|\psi(x_1) - \psi(x_2)\| \\
&\geqslant \alpha\|x_1 - x_2\| - \frac{\alpha}{2}\|x_1 - x_2\| && \text{por (4.40) y (4.41)} \\
&= \frac{\alpha}{2}\|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

de donde concluimos que f es inyectiva y la función inversa f^{-1} es continua en $f(U_0)$

Para el caso (c) será suficiente considerar el caso en el que la función f es lineal. □

Teorema 4.21 (Teorema de Sobreyectividad Local) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ definida en el abierto U y $x_0 \in U$ tal que*

1. $f \in C^1_{\mathcal{F}}(x_0)$
2. $f'_{\mathcal{F}}(x_0) : X \to Y$ *es sobreyectiva (no necesariamente inyectiva)*

Entonces existen $V_0 \subset Y$ vecindad de $f(x_0)$ en Y y $U_0 \subset U$ vecindad de x_0 en X tal que $V_0 \subset f(U_0)$

Demostración. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ y $f(0) = 0$ (el caso general se obtiene definiendo la función $g(x) = f(x_0 + x) - f(x_0)$). Denotemos por $T = f'_{\mathcal{F}}(x_0) : X \to Y$ que al ser sobreyectiva podemos hallar un $\alpha > 0$ tal que

$$\forall y \in Y, \ \exists x \in X / \alpha\|x\| \leqslant \|y\| \text{ con } y = Tx \tag{4.42}$$

además como en la demostración del Teorema 4.20 podemos hallar un $\beta > 0$ tal que para $x_1, x_2 \in U_0 = B(0,\beta)$ cualquiera se cumple

$$\|f(x_1) - f(x_2) - T(x_1 - x_2)\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|x_2 - x_1\| \tag{4.43}$$

Definamos el conjunto abierto $V_0 = \{y \in Y / \|y\| < \frac{\alpha\beta}{4}\}$ y mostremos que $V_0 \subset f(U_0)$, sea para ello $y \in V_0$ cualquiera, por (4.42) existe un $x_1 \in X$ tal que $\alpha\|x_1\| \leqslant \|y\|$ con $y = Tx_1$, de donde

$$\|x_1\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y\| < \frac{\beta}{4} < \beta$$

es decir $x_1 \in U_0$. Aplicando repetidamente la relación (4.42) tenemos que

Para $y_1 = y - f(x_1) \in Y$ existe un $x_2' \in X$ tal que $\alpha\|x_2'\| \leqslant \|y_1\|$ donde $y_1 = Tx_2'$, pongamos $x_2 = x_2' + x_1$ entonces $y_1 = T(x_2 - x_1) = y - f(x_1)$ y además

$$\cdot \|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y_1\| = \frac{1}{\alpha}\|y - f(x_1)\| = \frac{1}{\alpha}\|T(x_1) - f(x_1)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_1\| \leqslant \frac{1}{2\alpha}\|y\|$$

$$\cdot \|x_2\| \leqslant \|x_2 - x_1\| + \|x_1\| \leqslant \frac{1}{2\alpha}\|y\| + \frac{1}{\alpha}\|y\| = \{\frac{1}{2} + 1\}\frac{\|y\|}{\alpha} < \frac{3\beta}{8} < \beta$$

es decir $x_2 \in U_0$. Para $y_2 = y_1 + f(x_1) - f(x_2)$ existe un $x_3' \in X$ tal que $\alpha\|x_3'\| \leqslant \|y_2\|$ donde $y_2 = Tx_3'$, pongamos $x_3 = x_3' + x_2$ entonces $y_2 = T(x_3 - x_2) = y - f(x_2)$ y además

$$\cdot \|x_3 - x_2\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y_2\| = \frac{1}{\alpha}\|T(x_2 - x_1) + f(x_1) - f(x_2)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\| \leqslant \frac{1}{2^2\alpha}\|y\|$$

$$\cdot \|x_3\| \leqslant \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| + \|x_1\| \leqslant \{\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\}\frac{\|y\|}{\alpha} < \{1 - \frac{1}{2^3}\}\frac{\beta}{2} < \beta$$

es decir $x_3 \in U_0$. Para $y_3 = y_2 + f(x_2) - f(x_3)$ existe un $x_4' \in X$ tal que $\alpha\|x_4'\| \leqslant \|y_3\|$ donde $y_3 = Tx_4'$, pongamos $x_4 = x_4' + x_3$ entonces $y_3 = T(x_4 - x_3) = y - f(x_3)$ y además

$$\cdot \|x_4 - x_3\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|y_3\| = \frac{1}{\alpha}\|T(x_3 - x_2) + f(x_2) - f(x_3)\| \leqslant \frac{1}{2}\|x_3 - x_2\| \leqslant \frac{1}{2^3\alpha}\|y\|$$

$$\cdot \|x_4\| \leqslant \|x_4 - x_3\| + \|x_3 - x_2\| + \|x_2 - x_1\| + \|x_1\| \leqslant \{\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} + 1\}\frac{\|y\|}{\alpha}$$
$$< \{1 - \frac{1}{2^4}\}\frac{\beta}{2} < \beta$$

es decir $x_4 \in U_0$. Procediendo inductivamente encontramos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U_0$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que para cada n se verifica

$$y_n = T(x_n - x_{n-1}) = y - f(x_n)$$
$$\|x_n - x_{n-1}\| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}\alpha}\|y\|$$
$$\|x_n\| < \{1 - \frac{1}{2^n}\}\frac{\beta}{2}$$

la segunda de estas relaciones muestra que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y por tanto existe un $x_0 \in X$ tal que $x_n \to x_0$, además

$$\|x_0\| = \|\lim_{n\to\infty} x_n\| = \lim_{n\to\infty}\|x_n\| \leqslant \frac{\beta}{2} < \beta$$

es decir $x_0 \in U_0$. Para finalizar la demostración mostremos que $y = f(x_0)$, de la relación $y_n = T(x_n - x_{n-1})$ resulta que $y_n \to 0$ y de la relación $y_n = y - f(x_n)$ obtenemos que $y_n \to y - f(x_0)$ y por tanto $y = f(x_0)$ $\square$

Corolario 4.1 (Teorema del Mapeo Abierto) *Sean X, Y Espacios de Banach y $f : U \subset X \to Y$ definida en el abierto U tal que*

1. $f \in C^1_{\mathcal{F}}(U)$
2. *Para cada $x \in U$, $f'_{\mathcal{F}}(x) : X \to Y$ es sobreyectiva*

Entonces $f(U) \subset Y$ es abierto

Demostración. Sea $y_0 \in f(U)$ cualquiera entonces existe un $x_0 \in U$ tal que $y_0 = f(x_0)$, por el teorema anterior existen vecindades $U_0 \subset U$ y $V_0 \subset Y$ de x_0 y y_0 respectivamente tales que $V_0 \subset f(U_0) \subset f(U)$ demostrando asi que $f(U)$ es abierto $\square$

4.3.1. Imersiones y Sumersiones en Espacios de Banach

Sean X, Y Espacios Normados de dimensión finita (y por tanto de Banach) y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Sabemos que $T(X) \subset Y$ es un Subespacio Vectorial de Y que resulta ser de dimensión finita y por tanto cerrado en Y que además acepta un complementario cerrado, es decir

$$\text{Existe un Subespacio cerrado } N \subset Y \text{ tal que } Y = T(X) \oplus N$$

Análogamente $\mathrm{Ker}(T) \subset X$ es un subepacio cerrado de X que admite un complementario cerrado

$$\text{Existe un Subespacio cerrado } M \subset X \text{ tal que } X = \mathrm{Ker}(T) \oplus M$$

Sin embargo cuando los Espacios de Banach son de dimensión infinita, las afirmaciones anteriores son en general falsas. En el primer caso nos interesan las funciones *inyectivas* y en el segundo las *sobreyectivas.*

Para el ejemplo que sigue necesitamos la siguiente proposición

Proposición 4.3 *Sean X, Y dos Espacios de Banach y denotemos sus topologías (aquellas inducidas por sus respectivas normas) por τ_X y τ_Y. Sea también $f : X \to Y$ una función lineal e inyectiva, entonces se cumple que la topología τ_X es igual a la topología inducida de Y por f si y solo si f es (τ_X, τ_Y)-continua y $f(X) \subset Y$ es τ_Y-cerrado*

Demostración. Recordemos que la Topología Vectorial inducida de Y por f es aquella Topología Localmente Convexa de Hausdorff que tiene por base local a la familia

$$\mathcal{B} = \{f^{-1}(V)/V \subset Y \text{ es } \tau_Y\text{-veciudad del cero en } Y\}$$

en realidad es un caso particular de la topología proyectiva y por tanto es la más pequeña Topología que hace continua a la función f (para detalles consultar [15, pp. 51]), denotemos a esta topología por τ_f

($\Rightarrow$) Como $\tau_f = \tau_X$ y por la forma que tienen los elementos de la base $\mathcal{B}$ es inmediato que f es (τ_X, τ_Y)-continua en X. Además la función $f^{-1}\colon \big(f(X), \tau_Y|_{f(X)}\big) \to \big(X, \tau_X\big)$ es continua desde que para cualquier vecindad básica del cero en X de la forma $f^{-1}(V)$ donde $V \subset Y$ es τ_Y-vecindad del cero en Y podemos escribir

$$(f^{-1})^{-1}(f^{-1}(V)) = \{y \in f(X)/f^{-1}(y) \in f^{-1}(V)\} = V \cap f(X)$$

es decir la función $f\colon \big(X, \tau_X\big) \to \big(f(X), \tau_Y|_{f(X)}\big)$ es lineal, continua, biyectiva con inversa continua, es decir que es un isomorfismo topológico y como X es de Banach resulta que $f(X)$ también es de Banach y en consecuencia cerrado en Y

($\Leftarrow$) Como $f(X) \subset Y$ es τ_Y-cerrado entonces $f\colon \big(X, \tau_X\big) \to \big(f(X), \tau_Y|_{f(X)}\big)$ es una función lineal continua y biyectiva entre Espacios de Banach, el teorema del mapeo inverso de Banach garantiza que la función inversa $f^{-1}\colon \big(f(X), \tau_Y|_{f(X)}\big) \to \big(X, \tau_X\big)$ es continua (y por supuesto lineal). Mostremos que $\tau_X = \tau_f$, y para ello será suficiente mostrar que $\tau_X \subset \tau_f$ (dado que τ_f es más pequeña que cualquier topología que hace continua a f), sea entonces $U \subset X$ una τ_X-vecindad del cero en X, $f(U) \cap f(X) \subset f(X)$ es una $\tau_Y|_{f(X)}$-vecindad del cero en $f(X)$ y por tanto $f(U) = V$ es τ_Y-vecindad del cero en Y de donde podemos escribir $U = f^{-1}(V) \in \mathcal{B} \subset \tau_f$ ∎

Ejemplo 44 En este ejemplo supongamos que Y y $X \subset Y$ son Espacios de Banach y nuevamente denotemos a la Topología de Y por τ_Y (claro que en este caso X resulta ser τ_Y-cerrado. Sea también τ_X una topología en X más fina que la inducida por τ_Y, es decir $\tau_Y|_X \subset \tau_X$, entonces la función inclusion $i\colon X \hookrightarrow Y$ es lineal,

) la función inclusión $i\colon X \hookrightarrow Y$ que es lineal, inyectiva y continua. La topología inducida de Y por i coincide con la topología inducida por la norma de Y en el subespacio X, por lo tanto si consideramos en X una norma diferente a la norma de Y de modo que X resulte de Banach entonces de la proposición anterior $i(X) = X$ no es cerrado

Ejemplo 45 Si S es cerrado pero no tiene complementario cerrado, (esto es cierto si X es de Banach tal que ningun producto interno induce la norma de X), entonces para la función inclusión definida en el ejemplo anterior su rango $T(S) = S$ es un Subespacio cerrado que no admite un subespacio complementario cerrado.

Ejemplo 46 Con las mismas hipótesis sobre S del ejemplo anteiror, tenemos que la función proyección $T \in \mathcal{L}(X, X/S)$ definida por $T(x) = x + S$ claramente es sobreyectiva con nucleo $\mathrm{Ker}(T) = S$ cerrado pero que no admite subespacio complementario cerrado.

Definición 4.8 (Imersiones en Espacios de Banach) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función diferenciable en el abierto U y $x_0 \in U$*

a). *f es una **imersión** en x_0 cuando $f'_{\mathcal{F}}(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ es inyectiva.*

b). *f es una **imersión débil** en x_0 cuando es una imersión en x_0 y $f'_{\mathcal{F}}(x_0)(X) \subset Y$ es un Subespacio cerrado de Y*

c). *f es una **imersión fuerte** en x_0 cuando es una imersión débil en x_0 y además $f'_{\mathcal{F}}(x_0) \subset Y$ admite un Subespacio Complementario cerrado en Y.*

La función f es una imersión (imersión débil o fuerte) en U cuando lo sea en cada punto de U.

Teorema 4.22 (Forma Local de las Imersiones) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y $x_0 \in U$ tal que*

1. $f \in C^n_{\mathcal{F}}(U)$
2. *f es una imersión fuerte en x_0*

Si denotamos por $f'_{\mathcal{F}}(x_0)(X) = Y_1 \subset Y$ y $Y_2 \subset Y$ los Subespacios Cerrados de Y tal que $Y = Y_1 \oplus Y_2$, entonces existen $U_0 \subset U \subset X$, $V_0 \subset Y_2$ y $W_0 \subset Y$ vecindades de x_0, 0 y $f(x_0)$ respectivamente y un $C^n_{\mathcal{F}}$-difeomorfismo $\psi : W_0 \to U_0 \times V_0$ tal que

$$(\psi \circ f)(x) = (x, 0), \quad \forall x \in U_0$$

Demostración. Definamos la función $g : U \times Y_2 \subset X \times Y_2 \to Y = Y_1 \oplus Y_2$ por

$$g(u, v) = f(u) + v, \quad \forall (u, v) \in U \times Y_2$$

y notemos que $g = f \circ I_1 + I_2$ donde I_1 y I_2 son las funciones lineales y continuas definidas como $I_1(u, v) = u$ y $I_2(u, v) = v$, $\forall (u, v) \in U \times Y_2$, resultando que g es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ en el abierto $U \times Y_2$. cumpliendose además que $g'_{\mathcal{F}}(x_0, 0) : X \times Y_2 \to Y$ está definida como

$$g'_{\mathcal{F}}(x_0, 0)(u, v) = f'_{\mathcal{F}}(x_0)(u) + v = T(u) + v, \quad \forall (u, v) \in U \times Y_2$$

Claramente $g'_{\mathcal{F}}(x_0, 0)$ es continua y desde que T es inyectiva entonces $g'_{\mathcal{F}}(x_0, 0)$ es también inyectiva, y además sobreyectiva ya que $Y_1 = T(X)$. Asi $g'_{\mathcal{F}}(x_0, 0)$ es un isomorfismo y por el Teorema 4.18 existen abiertos $U_0 \subset U \subset X$, $V_0 \subset Y_2$ y $W_0 \subset Y$ donde $x_0 \in U_0$, $0 \in V_0$ y $f(x_0) \in W_0$ tal que la función $\phi = g_{|U_0 \times V_0} : U_0 \times V_0 \to W_0$ es un difeomorfismo de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ entre los abiertos $U_0 \times V_0 \subset X \times Y_2$ y $W_0 \subset Y$. El difeomorfismo $\psi = \phi - 1 : W_0 \to U_0 \times V_0$ verifica

$$(\psi \circ f)(x) = \psi[f(x)] = \psi[f(x) + 0] = \psi[g(x, 0)] = \psi[\phi(x, 0)] = (x, 0)$$

para cualquier $x \in U_0$ □

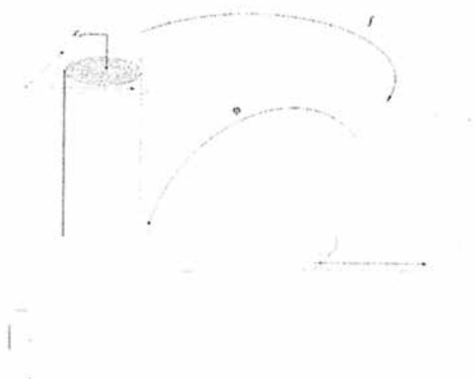


Figura 4.2: El Teorema de Imersión Local

La idea intuitiva para $X = Y_1 = \mathbb{R}^2$ y $Y_2 = \mathbb{R}$ ($dim(X) = dim(Y_1) = 2$, $dim(Y) = 3$), está dada en la figura 4.2. La función ψ "aplana" la imagen de f, esta idea es correcta, pues el rango de f es una superficie 2-dimensional, asi que debería ser posible aplanarla en una pieza $\subset \mathbb{R}^2$. Note que para funciones lineales inyectivas de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ el rango es de dimensión 2 asi que este resultado expresa, en cierto sentido, una generalización del caso lineal.

Definición 4.9 (Sumersiones en Espacios de Banach) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función diferenciable en el abierto U y $x_0 \in U$*

a). *f es una **sumersión** en x_0 cuando $f'_{\mathcal{F}}(x_0) \in \mathcal{L}(X, Y)$ es sobreyectiva.*

b). *f es una **sumersión fuerte** en x_0 cuando es una sumersión en x_0 y además $\mathrm{Ker}\big(f'_{\mathcal{F}}(x_0)\big) \subset X$ admite un Subespacio Complementario cerrado en X.*

La función f es una sumersión (sumersión fuerte) en U cuando lo sea en cada punto de U.

Teorema 4.23 (Forma Local de las Sumersiones) *Sean X, Y dos Espacios de Banach; $f : U \subset X \to Y$ función definida en el abierto U y $x_0 \in U$ tal que*

1. *$f \in C^n_{\mathcal{F}}(U)$*
2. *f es una sumersión fuerte en x_0*

Si denotamos por $\mathrm{Ker}(T) = X_1 \subset X$ y $X_2 \subset X$ los Subespacios cerrados de X tal que $X = X_1 \oplus X_2$, entonces existen $U_0 \subset U \subset X$, $V_0 \subset X_1$ y $W_0 \subset Y$ vecindades de $x_0 = x_1^0 + x_2^0$, x_1^0 y $f(x_0)$ respectivamete y un $C^n_{\mathcal{F}}$-difeomorfismo $\psi : V_0 \times W_0 \to U_0$ tal que

$$(f \circ \psi)(v, w) = w, \quad \forall (v, w) \in V_0 \times W_0$$

Demostración. Desde que $T : X = X_1 \oplus X_2 \to Y$ es sobreyectiva y $X_1 = \mathrm{Ker}(T) = \{x \in X / Tx = 0\}$ entonces $T\big|_{X_2} : X_2 \to Y$ es un Isomorfismo entre los Espacios de Banach X_2 e Y. Definamos la función $g : U \subset X \to X = X_1 \oplus X_2 \to X_1 \times Y$ por

$$g(x) = \big(x_1, f(x)\big), \quad \forall x = x_1 + x_2 \in U$$

y notemos que $g = (h, f)$ donde h es la función lineal y continua definida como $h(x) = x_1$, $\forall x = x_1 + x_2 \in U$ resultando que g es de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ es $U \subset X$ cumpliendose además que $g'_{\mathcal{F}}(x_0) : X = X_1 \oplus X_2 \to X_1 \times Y$ está definida como

$$g'_{\mathcal{F}}(x_0)(u) = \big(u_1, f'_{\mathcal{F}}(x_0)(u)\big) = (u_1, Tu), \quad \forall u = u_1 + u_2 \in U \subset X_1 \oplus X_2$$

Claramente $g'_{\mathcal{F}}(x_0)$ es continua, además inyectiva pues si $u = u_1 + u_2 \in X$ es tal que $g'_{\mathcal{F}}(x_0)(u) = 0$ entonces $u_1 = 0$ y $T(u_2) = 0$ implicando esto que $u_2 \in \mathrm{Ker}(T) = X_1$ y en consecuencia $u_2 = 0$, además es sobreyectiva ya que para cualquier $(u_1, y) \in X_1 \times Y$ será suficiente considerar $u = u_1 + u_2$ donde $u_2 = \{T\big|_{X_2}\}^{-1}(y)$. Asi $g'_{\mathcal{F}}(x_0)$ es un Isomorfismo y por el Teorema 4.18 existen abiertos $U_0 \subset U \subset X$ $V_0 \subset X_1$ y $W_0 \subset Y$ donde $x_0 = x_1^0 + x_2^0 \in U_0$, $x_1^0 \in V_0$ y $f(x_0) \in W_0$ tal que la función $\phi = g\big|_{U_0} : U_0 \to V_0 \times W_0$ es un difeomorfismo de clase $C^n_{\mathcal{F}}$ entre los abiertos $U_0 \subset X$ y $V_0 \times W_0 \subset X_1 \times Y$. El difeomorfismo $\psi = \phi^{-1} : V_0 \times W_0 \to U_0$ verifica el teorema, pues para $(v, w) \in V_0 \times W_0$ cualquiera tenemos

$$\psi(v, w) = u = u_1 + u_2 \Leftrightarrow (v, w) = \phi(u) = g(u) = \big(u_1, f(u)\big) \Leftrightarrow v = u_1; w = f(u)$$

luego para cualquier $(v, w) \in V_0 \times W_0$ se verifica

$$(f \circ \psi)(v, w) = f\big[\psi(v, w)\big] = f(u) = w$$

□

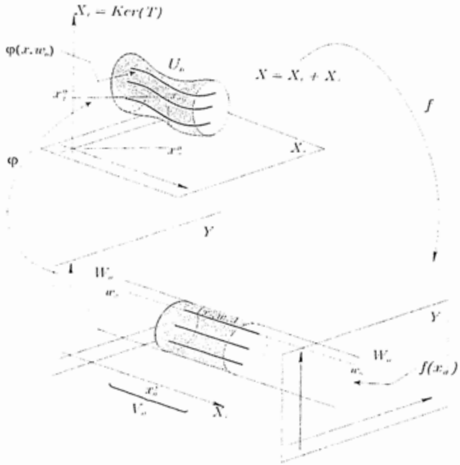


Figura 4.3: El Teorema de la Sumersión Local