

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS**

**Sección de Posgrado y Segunda Especialización
Profesional**



Tesis para Optar el Grado Académico de
Maestro en Ciencias con mención
en Matemática Aplicada

**“Índices de Singularidades de Foliaciones
Holomorfas sobre Superfices Complejas”**

Presentada por:

Liliana Puchuri Medina

**LIMA - PERÚ
2005**

Éste trabajo se lo dedico a mis padres Víctor y Nelly, a mis hermanas Nancy y Diana, y a mi familia.

Agradecimientos

Agradezco a mi asesor Percy Fernández por toda la paciencia que tuvo conmigo, y todos los consejos para poder concluir la tesis y a mis amigos del IMCA, que estuvieron siempre pendientes en mi avance.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Fibrados Vectoriales	5
1.2. Las Secciones de un Fibrado	7
1.3. Referencial de un fibrado	9
1.4. Fibrados Asociados a Divisores	10
1.5. Operaciones con fibrados vectoriales	13
1.5.1. Subfibrados Vectoriales	13
1.6. Cohomología de Čech	14
1.7. Conexiones	19
1.8. Curvatura	21
1.8.1. Clases de Chern de Fibrados Lineales	23
1.8.2. Propiedades	23
1.8.3. Cálculo de la Clase de Chern de un Fibrado Lineal	25
1.9. Foliaciones Holomorfas	26
1.10. Fibrados normal y tangente a una foliación	26
2. Residuos	28
3. Número de Milnor	37
3.1. Número de intersección en superficies	38
3.2. Explosión en un punto	41
4. Índice de Baum-Bott	44
5. Índice de Camacho - Sad	51
6. Índice de Gomez-Seade-Verjovski	61
6.1. Explosión en un punto	61
6.2. Singularidades casi Liovillean	94
Referencias	99

Introducción

Nuestro objetivo es describir detalladamente los temas necesarios para motivar a los estudiantes que deseen conocer este campo de la matemática, Dinámica Compleja, y sea utilizado como un libro texto, en el trabajo se menciona todas las referencias necesarias, utilizadas para su entendimiento.

En el presente trabajo desarrollamos la teoría de índices sobre foliaciones holomorfas con el fin de dar condiciones necesarias para determinar la existencia de una separatriz compacta de una foliación holomorfa singular de dimensión 1, en una variedad compleja de dimensión 2. La dimensión aquí será importante pues trabajaremos con singularidades aisladas y definiremos en ellos ciertos índices que nos ayudarán a estudiar localmente la foliación y la topología de la separatriz .

Nuestra atención está centrada en las singularidades de la foliación, pues el teorema de la vecindad tubular nos da una descripción local de las hojas alrededor de los puntos regulares. Una de las diferencias más importantes entre la dinámica compleja y la real, es que si tenemos una foliación compleja y una singularidad fijada, siempre pasa una curva analítica invariante a través de la singularidad, la cual es llamada *separatriz* (Teorema de Camacho Sad), pero la existencia de esta curva no se da necesariamente en el caso real, como lo podemos apreciar en la foliación inducida por la 1-forma diferenciable $2xdx + 2ydy$, vemos que el caso real las hojas son círculos de radio $r > 0$, $r \in \mathbb{R}$ y no existe una separatriz en el origen. Como sabemos desde nuestro curso de ecuaciones diferenciales ordinarias, describir el comportamiento de las órbitas (ello determina una foliación) en una vecindad de la singularidad es complicada dependiendo de la forma dada, es así que se busca un nuevo ambiente donde el estudio sea más fácil, esto se consigue abriendo las direcciones mediante explosiones en un punto la cual hace que reemplazemos una variedad por otra y que podamos ir de una hacia la otra. Veremos que con un número finito de tales explosiones las singularidades de las formas inducidas son más fáciles de trabajar.

Este trabajo posee 6 capítulos, las cuales pasamos a describir.

En el Capítulo 1, presentamos los preliminares como son Fibrados Vectoriales y sus propiedades, divisores, cohomología de Čech, clases de Chern, y foliaciones holomorfas de dimensión 1.

En el Capítulo 2, estudiamos la teoría de los residuos, la cual es una generalización

del caso unidimensional que se desarrolla en el curso de una variable compleja, es decir se expresa como una integral de una forma ω definida sobre una curva, también tenemos el teorema de Cauchy para varias variables, donde se define una forma ω_{BM} , llamada la forma de Bochner-Martinelli. Debemos destacar que mediante la integración de la forma

$$\omega = \frac{J(f)dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_1(z) \cdots f_n(z)},$$

donde $f = (f_1, \dots, f_n)$ es una función holomorfa y $J(f)$ es el Jacobiano de f sobre una hipersuperficie, obtenemos el índice topológico, es decir, el índice de Poincaré-Hopf. Así, vemos que la teoría de residuos vincula la topología diferencial y el análisis complejo.

En el Capítulo 3, pasamos del análisis complejo al álgebra definiendo el índice de Milnor, el cual está relacionado con el índice topológico. Aquí se establece el teorema de parametrización de Puiseux, que junto a un teorema debido a Milnor, nos dice que el germen de una curva analítica irreducible plana en el origen intercepta transversalmente a una esfera, centrada en el origen de \mathbb{C}^2 y de radio suficientemente pequeño, y la curva intercepción obtenida es difeomorfa a un círculo; este resultado será importante pues utilizaremos las componentes irreducibles de la separatriz para definir índices por medio de residuos y que serán expresadas como integrales sobre estas curvas de ciertas formas. Definimos el número de intersección entre divisores lineales, la cual es una generalización de la teoría de intersección, visto en topología diferencial. Por último definimos la explosión en un punto para calcular la autointersección del *divisor excepcional*.

En el Capítulo 4, definimos el índice de Baum-Bott (*BB*), y demostramos el célebre teorema de Baum-Bott que nos dice que la autointersección del fibrado normal de la foliación coincide con suma de los índices de Baum-Bott.

En el Capítulo 5, definimos el índice de Camacho Sad ($CS(\mathcal{F}, S, p)$) en una singularidad de la foliación \mathcal{F} y de la separatriz que pasa por p . Para ello probamos que existe una descomposición de la forma ω (la cual define la foliación $\mathcal{F} : \omega = 0$ en una vecindad de una singularidad), donde interviene la ecuación local de la separatriz reducida $S : \{f = 0\}$, a partir de la descomposición. El índice de Camacho Sad ($CS(\mathcal{F}, S, p)$) en una singularidad, se expresa como la integral de una forma que depende de la descomposición dada, sobre la intersección de la separatriz con una esfera de radio pequeño, que como vimos en el Capítulo 3, es una curva real analítica. Probamos que tal índice está bien definido, es decir que independe de la descomposición, además que independe del cambio de coordenadas. Definimos el índice de Camacho Sad $CS(\mathcal{F}, S)$ de una curva analítica compacta invariante por la foliación, como la suma de las índices de Camacho Sad, en las singularidades que se encuentran en la curva. Luego probamos que este índice coincide con la autointersección de la curva S , es decir

$$CS(\mathcal{F}, S) = S \cdot S,$$

finalmente damos algunos ejemplos de foliaciones para los cuales calculamos su índice de Camacho-Sad.

En el Capítulo 6, volvemos a ver la explosión de un punto, pero ahora sobre una superficie compleja arbitraria M . Así tenemos una nueva variedad compleja la cual denotamos por \widetilde{M} y luego inducimos en \widetilde{M} una foliación $\pi^*\mathcal{F}$ y definimos la *explosión dicrítica y no dicrítica*. Luego definimos el índice de variación ($Var(\mathcal{F}, S, p)$), y el índice de Gomez-Seade-Verjosvski ($GSV(\mathcal{F}, S, p)$) en un punto como una generalización al índice de Poincaré-Hopf para curvas singulares. A continuación se estudian las relaciones que existen entre los índices $CS(\mathcal{F}, S)$, $Var(\mathcal{F}, S)$ y $GVS(\mathcal{F}, S)$.

Luego, probaremos el teorema de Seidenberg, el cual nos dice que luego de un número finito de explosiones obtenemos sólo singularidades *reducidas*, por ello entenderemos singularidades *sillas nodos* y *simples*, la composición de tales explosiones será llamada resolución de la foliación. Enunciamos los teoremas de las formas normales de Poincaré y Siegel. Una separatriz es llamada no-dicrítica si existe una sucesión de explosiones que induce una curva (incluido el divisor) que posee sólo cruzamientos normales y el divisor que intercepta la separatriz es invariante por la foliación. En el caso que la separatriz sea no-dicrítica probamos el teorema de Brunella el cual muestra que el índice de $GSV(\mathcal{F}, S)$ es siempre no negativa y la igualdad se da si la foliación es una curva generalizada (es decir que en la resolución no hay singularidades sillas nodos). Una consecuencia importante de esta teoría es el teorema de Carnicer la cual relaciona el grado de la foliación sobre el plano proyectivo con el grado de las curvas invariantes (Problema de Poincaré). Por último definimos las singularidades *liovillianas* para relacionar el índice de Baum Bott con los demás índices y mediante ello probamos el resultado principal de trabajo:

Teorema. Sea v un campo vectorial holomorfo en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que 0 es cero aislado de v , y supongamos que v es una curva generalizada no dicrítica. Sea S la unión de todas las separatrices de v en p . Entonces:

$$\begin{aligned} BB(v, 0) &= CS(v, S, 0) \\ GSV(v, S, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Fibrados Vectoriales

En la siguiente definición K denotará el cuerpo real \mathbb{R} o complejo \mathbb{C} .

Definición 1.1. Un K -fibrado vectorial de rango n sobre una variedad M , es un conjunto E , junto con una aplicación $\pi : E \longrightarrow M$ tal que

1. Para todo $p \in M$, $\pi^{-1}(p)$ es un espacio K -vectorial de $\dim_K \pi^{-1}(p) = n$, llamado *fibra* del fibrado π en punto p y denotado por E_p .
2. Existen $V_j \subseteq M$ abiertos y $F_j : V_j \times K^n \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$ biyecciones con
 - ii) $M = \bigcup_{j \in J} V_j$
 - ii) $\pi \circ F_j = \pi_1$ (π_1 es la proyección $\pi_1(x, v) = x$)
 - iii) Dado $p \in V_j$, $F_j : \{p\} \times K^n \rightarrow \pi^{-1}(p)$ es un isomorfismo K -lineal.
 - iv) Si denotamos por $V_{jk} = V_j \cap V_k$ los $F_k^{-1}F_j : V_{jk} \times K^n \longrightarrow V_{jk} \times K^n$ son homeomorfismos, llamados *trivializaciones*.

Observación 1.1. En V_{jk} los $F_k^{-1}F_j$ son de la forma $F_k^{-1}F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p) \cdot v)$ y en esta intersección están definidas las aplicaciones

$$f_{kj} : V_{jk} \longrightarrow GL(n)$$

satisfaciendo las condiciones de *cociclo*:

$$\begin{cases} f_{jj} = I, & \text{en } V_j \\ f_{jk} \cdot f_{kj} = I, & \text{en } V_{jk} \\ f_{jk} \cdot f_{kh} \cdot f_{hj} = I, & \text{en } V_{jkh} \end{cases} \quad (1.1)$$

donde I es la matriz identidad. La familia $\{f_{kj}\}$ es llamada *cociclo* y las relaciones (1.1) son llamadas *condiciones de cociclo*. Verifiquemos la segunda propiedad, análogamente puede verificarse las otras. En V_{jk} se tiene:

$$\begin{aligned} (F_j^{-1}F_k)F_k^{-1}F_j(p, v) &= F_j^{-1}F_k(p, f_{kj}(p) \cdot v) \\ (p, v) &= (p, f_{jk} \cdot f_{kj} \cdot v) \end{aligned}$$

Un K -fibrado es topológico, diferenciable, C^k u holomorfo según los f_{jk} ó $F_j^{-1}F_k$ tengan estas propiedades para todo j, k . Las condiciones de cociclo determinan el fibrado, ellas permiten reconstruirlos y los objetos definidos sobre los fibrados localmente se expresan en base a ellas. Estos comentarios se harán evidentes conforme demos ejemplos y probemos algunas propiedades. Mas antes, será conveniente decir cuando dos fibrados son isomorfos esto es esencial pues los fibrados serán indistinguibles desde este punto de vista.

Definición 1.2. Sean $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ fibrados vectoriales. Una aplicación continua $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ es un *morfismo* de fibrados vectoriales si:

1. $\varphi|_{\pi_1^{-1}(p)} : \pi_1^{-1}(p) \rightarrow \pi_2^{-1}(p)$ es una transformación lineal.
2. El diagrama

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\varphi} & E_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ M & \xrightarrow{Id_M} & M \end{array}$$

conmuta.

Si existe otro morfismo de fibrados ψ tal que $\psi\varphi = Id_{E_1}$ y $\varphi\psi = Id_{E_2}$ entonces φ será llamado *isomorfismo* de los fibrados π_1 y π_2 .

Relaciones fundamentales de morfismos: Si φ es un morfismo de los fibrados $\pi_1 : E_1 \rightarrow M$ y $\pi_2 : E_2 \rightarrow M$ cuyas trivializaciones son $F_j : V_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_1^{-1}(V_j)$ y $G_j : V_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi_2^{-1}(V_j)$ respectivamente. Entonces $\varphi_j = G_j^{-1}\varphi F_j$ es de la forma $\varphi_j(x, v) = (x, a_j(x)v)$ donde $a_j : V_j \rightarrow L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ($a_j : V_j \rightarrow GL(n)$ si φ es un isomorfismo). Luego, para otro índice i tenemos $\varphi_i = G_i^{-1}\varphi F_i$. Así, en la intersección V_{ij} tenemos la siguiente relación

$$G_i\varphi_i F_i^{-1} = G_j\varphi_j F_j^{-1}$$

que equivale a la relación $\varphi_i F_i^{-1} F_j = G_i^{-1} G_j \varphi_j$ en V_{ij} . Luego aplicado a (x, v) tenemos

$$(x, a_i f_{ij}(x)v) = \varphi_i F_i^{-1} F_j(x, v) = G_i^{-1} G_j \varphi_j(x, v) = (x, g_{ij} a_j(x)v)$$

De esto tenemos la *relación fundamental* que determina un morfismo de fibrado.

$$a_i f_{ij} = g_{ij} a_j, \quad \text{en } V_{ij}. \tag{1.2}$$

Recíprocamente, dada funciones $a_j : V_j \rightarrow GL(n)$ tales que $a_i f_{ij} = g_{ij} a_j$ en V_{ij} , podemos construir un isomorfismo de fibrados $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ como

$$\varphi|_{V_j} = G_j \varphi_j F_j^{-1}, \quad \text{donde } \varphi_j(p, v) = (p, a_j(p).v)$$

y está bien definida puesto que en V_{ij} tenemos la identidad $F_i^{-1} \varphi_i G_i = F_j^{-1} \varphi_j G_j$, ya que

$$\varphi_i F_i F_j^{-1}(x, v) = (x, a_i f_{ij}(x)v) = (x, g_{ij} a_j(x)v) = G_i G_j^{-1} \varphi_j(x, v).$$

Proposición 1.1. Sea M una variedad, con $M = \bigcup_{j \in J} V_j$ un cubrimiento por abiertos de M . Sean $f_{jk} : V_{jk} \xrightarrow{C^0} GL(n, \mathbb{R})$ aplicaciones que satisfacen las condiciones de cociclo (1.1). Entonces existe un fibrado $\pi : E \rightarrow M$ cuyas trivializaciones son

$$F_j : V_j \times \mathbb{R}^m \rightarrow \pi^{-1}(V_j)$$

tales que

$$F_k^{-1} F_j(p, v) = (p, f_{kj}(p) \cdot v).$$

Además, este fibrado es único salvo isomorfismos.

Prueba: *Existencia:* Consideremos

$$\tilde{E} = \bigcup_j \{j\} \times V_j \times \mathbb{R}^m$$

y la relación definida como

$$(j, p, v) \sim (k, q, w) \iff p = q \text{ y } f_{kj}(p) \cdot v = w.$$

Esta relación es de equivalencia gracias a que los f_{ij} , satisfacen las condiciones de cociclo. Si consideramos el cociente $E = \tilde{E} / \sim$ tenemos el fibrado definido por

$$\begin{aligned} \pi : E &\longrightarrow M \\ [j, p, v] &\longmapsto p. \end{aligned}$$

Unicidad a menos de isomorfismo: esto quiere decir que dos fibrados con los mismos cociclos son isomorfos. Para verificar esto basta tomar $a_i : V_i \rightarrow GL(n)$, siendo $a_i(p)$ la matriz identidad de orden $n \times n$, para todo i . Luego, tenemos $a_i f_{ij} = f_{ij} a_j$, que es justamente la relación (1.2) y a partir de ella se puede construir el isomorfismo. \square

Ejemplo 1.1 (Fibrado Trivial). Sea M una variedad, el *fibrado trivial* es $\pi : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M$ $\pi(p, v) = p$. Observe que $Id : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(M)$ es la trivialización. De la definición de fibrado, todo fibrado vectorial es localmente trivial.

Ejemplo 1.2 (Fibrado Tangente). Sea M una variedad y el fibrado tangente es definido por $TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M$ luego la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ es un fibrado vectorial.

1.2. Las Secciones de un Fibrado

Definición 1.3. Una *sección* de un fibrado $\pi : E \rightarrow M$, es una función $s : U \rightarrow E$ tal que $\pi \circ s = Id_M$ i.e. el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{s} & E \\ & \searrow Id & \downarrow \pi \\ & & M \end{array}$$

conmuta. El espacio de las secciones será denotado por $\Gamma(M, E)$.

Relaciones fundamentales de secciones: Sea $s : M \longrightarrow E$ una sección, y $F_j : V_j \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \pi^{-1}(V_j)$ una trivialización del fibrado $\pi : E \longrightarrow M$. La sección s en V_j es de la forma $F_j^{-1}s(p) = (p, s_j(p))$ donde $s_j : V_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Luego en V_{jk}

$$(p, s_k(p)) = F_k^{-1}s(p) = F_k^{-1}F_j(p, s_j(p)) = (p, f_{kj}s_j(p))$$

y de ahí tenemos la *relación fundamental* que determina una sección

$$s_k = f_{kj}s_j \quad \text{en } V_{jk}. \quad (1.3)$$

Recíprocamente, si existen funciones $s_j : V_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tales que $s_k = f_{kj}s_j$ en V_{jk} , podemos construir una sección $s : M \longrightarrow E$ definiendo

$$s|_{V_j} = F_j(p, s_j(p))$$

y está bien definida, puesto que en $V_{jk} : F_j(p, s_j(p)) = F_k(p, s_k(p))$, ya que

$$F_k^{-1}F_j(p, s_j(p)) = (p, f_{kj}s_j(p)) = (p, s_k(p))$$

Ejemplo 1.3 (El Fibrado Tautológico \mathbb{L}^*). Sea \mathbb{P}^n el espacio proyectivo de dimensión n , queremos que

$$\begin{array}{ccc} \pi_1 : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^n = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim \\ p & \longmapsto & [p] \end{array}$$

sea un fibrado lineal, el problema es que la preimagen de un punto por esta aplicación es una recta sin su origen y así no es un fibrado lineal. Para remediar este problema consideremos el fibrado trivial $\pi : \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ y también

$$\mathbb{L}^* = \{([w], z) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{C}^n : \exists t \in \mathbb{C}, z = tw\}$$

Veamos que $\pi = \pi|_{\mathbb{L}^*}$ es un fibrado, para ello definamos sus trivializaciones

$$\begin{array}{ccc} F_j : U_j \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \pi^{-1}(U_j) \\ ([w], t) & \longmapsto & \left([w], \frac{t}{w_j}w \right) \end{array}$$

donde $U_j = \{[x_0 : \dots : x_n] : x_j \neq 0\}$, luego

$$\begin{array}{ccccc} F_k^{-1}F_j : V_{jk} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{F_j} & \pi^{-1}(V_{jk}) & \xrightarrow{F_k^{-1}} & V_{jk} \times \mathbb{C} \\ ([w], t) & \longmapsto & \left([w], \frac{t}{w_j}w \right) & \longmapsto & \left([w], t \frac{w_k}{w_j} \right) \\ f_{kj} : U_{kj} & \longrightarrow & GL(\mathbb{C}; 1) = \mathbb{C}^* \\ [w_0 : \dots : w_n] & \longmapsto & \frac{w_k}{w_j} \end{array}$$

Este fibrado es llamado *tautológico*.

Ejemplo 1.4 (El dual del Fibrado Tautológico \mathbb{L}_∞). Consideremos la hipersuperficie

$$\mathbb{L}_\infty = \{[w_0 : \cdots : w_n] : w_0 = 0\}$$

del espacio proyectivo, la cual es definida localmente como $\mathbb{L}_\infty|_{U_j} : \frac{w_0}{w_j} = 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n$.

Esto es, los puntos de $\mathbb{L}_\infty|_{U_j}$ son ceros de $g_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ definidas como $g_j([w]) = \frac{w_0}{w_j}$, es decir

$$\mathbb{L}_\infty|_{U_j} : g_j = 0 \quad \text{en } U_j.$$

En los abiertos U_{jk} ellos están relacionados de la siguiente manera

$$g_k = \frac{w_0}{w_k} = \frac{w_j}{w_k} \frac{w_0}{w_j} = g_{kj} \cdot g_j$$

Notemos que $g_{jk} = f_{kj}^{-1}$, donde los f_{kj} son los cociclos del fibrado tautológico.

1.3. Referencial de un fibrado

Definición 1.4. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un \mathbb{C} -fibrado vectorial de rango n . Un *referencial* del fibrado es un juego de secciones $s_1, \dots, s_n : M \rightarrow E$ tal que para cada $p \in M$, $(s_1(p), \dots, s_n(p))$ es una base de la fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$.

Localmente siempre podemos conseguir referenciales, para esto consideremos una trivialización $F_j : U_j \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ en U_j . Sean

$$s_\alpha^j : p \mapsto F_j(p, e_\alpha)$$

donde $\alpha = 1, \dots, n$. Como (e_1, \dots, e_n) es base de \mathbb{C}^n sigue que (s_1^j, \dots, s_n^j) va a ser un referencial en U_j . En el abierto U_{jk} tenemos dos referenciales (s_1^j, \dots, s_n^j) y (s_1^k, \dots, s_n^k) entonces existe una matriz de orden $n \times n$ inversible $(f_{\alpha\beta}^{jk})$ definida en U_{jk} tal que

$$s_\alpha^j = \sum_\beta f_{\alpha\beta}^{jk} s_\beta^k.$$

esto es,

$$\begin{pmatrix} s_1^j \\ \vdots \\ s_n^j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}^{jk} & \cdots & f_{1n}^{jk} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1}^{jk} & \cdots & f_{nn}^{jk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1^k \\ \vdots \\ s_n^k \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Veamos quien es esta matriz. Para esto aprovecharemos esta relación y la linealidad de F_j sobre cada fibra

$$\begin{aligned} s_1^j &= f_{11}^{jk} s_1^k + \cdots + f_{1n}^{jk} s_n^k \\ F_j(p, e_1) &= f_{11}^{jk}(p) F_k(p, e_1) + \cdots + f_{1n}^{jk}(p) F_k(p, e_n) \\ F_j(p, e_1) &= F_k(p, f_{11}^{jk}(p) e_1 + \cdots + f_{1n}^{jk}(p) e_n) \end{aligned}$$

donde $p \in U_{jk}$, entonces

$$(p, f_{kj}(p)e_1) = F_k^{-1}F_j(p, e_1) = (p, f_{11}^{jk}(p)e_1 + \cdots + f_{1n}^{jk}(p)e_n).$$

Así, llegamos a la conclusión que la matriz correspondiente a f_{kj} es justamente la matriz $(f_{\alpha\beta}^{jk})$. Al identificar la transformación lineal con su matriz tenemos

$$f_{kj} = (f_{\alpha\beta}^{jk})$$

En el caso particular que E es un fibrado lineal (1.4) es

$$s_1^j = f_{kj}s_1^k \tag{1.5}$$

Ejemplo 1.5. Sea M una variedad, en un abierto coordenado U tenemos que dx_1, \dots, dx_n es un refencial de TM^* , $dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ de $\wedge^n(TM^*)$ y $\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}$ de TM .

1.4. Fibrados Asociados a Divisores

Definición 1.5. Sea M una variedad compleja y $V \subseteq M$, diremos que V es un *conjunto analítico* de codimensión 1, si para cada $p \in M$ existe un U_p vecindad de p en M y $f_p \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que $V|_{U_p} : f_p = 0$

Ejemplo 1.6. En la variedad $M = \mathbb{C}^2$ el conjunto $V = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : xy = 0\}$ es analítico, pues, para cualquier $p \in \mathbb{C}^2$ podemos tomar $U_p = \mathbb{C}^2$ y $F_p(x, y) = xy$. Pero además observe, que para $p = (x, 0)$ con $x \neq 0$ podemos escoger el abierto $U_p = (\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{C}$ y $f_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$, $f_p(x, y) = y$, de manera que:

$$V|_{U_p} : f_p = 0$$

Así, para cada $g \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que $g|_{(U_p \cap V)} \equiv 0$ se tiene que existe $h \in \mathcal{O}(U_p)$ tal que $g = hf_p$ en U_p . Esta propiedad, claro, no la tiene F_p , nosotros estaremos interesados en este tipo de función f_p que pasamos a definir a continuación.

Definición 1.6. Una *función definidora* de V en el punto p , es una función $f_p : U_p \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa en U_p tal que $\forall g_p \in \mathcal{O}(U_p)$, $g_p|_{U_p \cap V} = 0$, existe $h_p \in \mathcal{O}(U_p)$, tal que $g_p = h_p f_p$.

La existencia de este tipo de funciones está garantizada (ver [16], pag. (129)).

Entonces tenemos un cubrimiento $V \subset \bigcup_{j \in J} U_j$ y una familia de funciones definidoras $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ de este conjunto analíticos, tales que:

- i) $\exists \{U_j\}_{j \in J}$ cubrimiento de V tales que $V|_{U_j} : f_j = 0$, $f_j \in \mathcal{O}(U_j)$.
- ii) $\exists f_{jk} \in \mathcal{O}^*(U_{jk})$ tal que $f_j = f_{jk} \cdot f_k$

Notemos que $f_{jk} : U_{jk} \rightarrow \mathbb{C}^* = GL(\mathbb{C}, 1)$ cumplen las condiciones de cociclo, introduciendo $U_* = M - V$ y $f_* = 1$ con $J^* = J \cup \{*\}$, tenemos que $\{U_j\}_{j \in J^*}$ es un cubrimiento abierto de M y los mapas $f_{jk}^* = f_j/f_k$ definidos en U_{jk} , para $j, k \in J^*$ cumplen las condiciones de cociclo.

Denotamos por $[V]$ al fibrado definido por $\{f_{jk}^*\}$.

Definición 1.7. Un *Divisor* en una variedad compleja M , es una suma formal finita

$$D = \sum n_j V_j$$

donde $n_j \in \mathbb{Z}$ y V_j son conjuntos analíticos irreducibles de codimensión 1, esto es, son elementos del grupo libre generado por los conjuntos analíticos irreducibles de codimensión 1, $\text{Div}(M)$. El divisor D es llamado *efectivo* si $n_j \geq 0$, para todo j .

Veremos que esencialmente este grupo está identificado con los fibrados lineales. Para asociarle un fibrado lineal a un divisor $D = \sum n_j V_j$, consideremos su *sopORTE* como el conjunto

$$|D| = \bigcup_{n_j \neq 0} V_j$$

Así podemos considerar las funciones que definen el cociclo de D :

- i) Si $p \in |D|$ existe $k = k(p) \in \mathbb{N}$ tal que $p \in \bigcup_{i=1}^k V_{j_i}$, si U_{j_i} son abiertos donde $V_{j_i}|_{U_{j_i}} : f_{j_i} = 0$, tomemos

$$f_p = \prod_{i=1}^k (f_{j_i})^{n_{j_i}}, \text{ definido en } U_p = \bigcap_{i=1}^k U_{j_i}$$

- ii) Si $p \notin |D|$, tomemos

$$f_p = 1_{U_p^*} \text{ donde } U_p^* = M - |D|$$

Con $J = |D| \cup \{*\}$ para $j, k \in J$ definimos

$$f_{jk} = f_j / f_k \text{ en } U_{jk} \tag{1.6}$$

las cuales cumplen las condiciones de cociclo y por tanto definen un fibrado lineal, la cual será denotado por $[D]$.

Observación 1.2. Sea M una variedad compleja, $p \in M$ y \mathcal{M}_p el cuerpo cociente de \mathcal{O}_p , una *función meromorfa* sobre M , es un mapa

$$\begin{aligned} f : M &\longrightarrow \mathcal{M} = \bigcup_{p \in M} \mathcal{M}_p \\ p &\longmapsto f_p \in \mathcal{M}_p \end{aligned}$$

esto es, $\forall p \in M \exists g_p, h_p \in \mathcal{O}_p$ no idénticamente nula tal que $f_p = g_p/h_p$.

En otras palabras, f una función meromorfa es una familia $\{f_i\}$ tal que existe un cubrimiento $M = \bigcup_{i \in I} V_i$ y una colección funciones holomorfas $g_i, h_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$ relativamente primos tal que $f_i = \frac{g_i}{h_i}$.

Sea $f : M \longrightarrow \mathcal{M}$ meromorfa y V un conjunto analítico. Dado $p \in V$, definimos el orden de f en p , $\text{ord}_{V,p} f$ como el mayor entero $n \in \mathbb{Z}$ tal que

$$f_p = h_p \tilde{f}_p^n$$

donde f_p es el germen de f en p , h_p es una unidad y \tilde{f}_p es el germen de la función definidora de V en p .

Definimos el divisor de f , como

$$(f) = \sum \text{ord}_V f \cdot V$$

Podemos dividir este divisor en dos divisores $(f)_0 = \sum_{\text{ord}_V f \geq 0} \text{ord}_V f \cdot V$ el *divisor de ceros* y $(f)_\infty = \sum_{\text{ord}_V f \leq 0} -\text{ord}_V f \cdot V$ el *divisor de polos*. Así tenemos

$$(f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

Observación 1.3. En el caso que $D = n_1 S^1 + \dots + n_k S_k$, entonces $[D] = [S_1]^{\otimes n_1} \otimes [S_2]^{\otimes n_2} \dots [S_k]^{\otimes n_k}$.

Proposición 1.2. Sea D un divisor tal que D es el divisor de una función meromorfa entonces D es el fibrado trivial.

Prueba: Supongamos que $D = n_1 S^1 + \dots + n_k S_k = (m)$, donde m es una función meromorfa. Sea $\{U_i\}_{i \in A}$ una cobertura de M , tal que $S_k|_{U_i} : f_{k,i} = 0$, para $k = 1, \dots, n$, ahora como en U_{ij}

$$f_{k,i} = f_{k,ij} f_{k,j}$$

entonces por la observación 1.3, $[(m)]$ es inducido por el cociclo $\varphi_{ij} = f_{1,ij}^{n_1} \dots f_{k,ij}^{n_k} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, entonces

$$\prod_{k=1}^k f_{k,i}^{n_k} = \varphi_{ij} \prod_{k=1}^k f_{k,j}^{n_k}$$

luego $\frac{\prod_{k=1}^k f_{k,i}^{n_k}}{m|_{U_i}} = \varphi_{ij} \frac{\prod_{k=1}^k f_{k,j}^{n_k}}{m|_{U_j}}$ y como $\frac{\prod_{k=1}^k f_{k,j}^{n_k}}{m|_{U_j}} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$, de (1.2) tenemos que $[D]$ es el fibrado trivial. \square

Definición 1.8. Una *sección meromorfa* de un fibrado L es una aplicación $s : M \dashrightarrow L$ ¹ tal que para toda carta trivializadora $F_j : V_j \times \mathbb{C} \rightarrow L$ de L entonces $s|_{V_j}(p) = F_j(p, s_j(p))$ con $s_j : V_j \rightarrow \mathbb{C}$ meromorfa.

Observación 1.4. Como $s_i = g_{ij} s_j$ en V_{ij} , dado un conjunto analítico irreducible V tenemos, $\text{ord}_V s_j = \text{ord}_V s_i$. Luego, no existe ambigüedad en definir el orden $\text{ord}_V s$ de s en $V_i \cap V$ como $\text{ord}_V s_i$, cualquiera que sea i . Así, definimos el divisor de la sección meromorfa como:

$$(s) = \sum_V \text{ord}_V s \cdot V,$$

la suma esta variando sobre todos los conjuntos irreducibles de M (compacta). Por construcción $[(s)]$ y L son isomorfos, y es efectivo si s es una sección holomorfa (pues, $\text{ord}_V s_i \geq 0$). Recíprocamente, si existe un divisor D tal que $L \equiv [D]$ entonces por la construcción hecha después de la Definición 1.7 existen abiertos V_i y funciones meromorfas $s_j : V_j \dashrightarrow \mathbb{C}$ tal que $D|_{V_j} : s_j = 0$ y satisfacen la relación $s_i = g_{ij} s_j$ en V_{ij} . De (1.3) tenemos que esta relación determina una sección meromorfa de L en M .

¹Indicamos por la flecha punteada para indicar que esta función no esta definida en todo M

1.5. Operaciones con fibrados vectoriales

Sean $\pi_1 : E \rightarrow M$ y $\pi_2 : F \rightarrow M$ dos fibrados vectoriales y sean

$$f_{jk} : U_{jk} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$$

$$g_{jk} : U_{jk} \rightarrow GL(m, \mathbb{R})$$

Los cociclos de E y F respectivamente.

1. $E \oplus F$, suma de fibrados:

Buscamos construir un fibrado cuyas fibras sean $\pi_1^{-1}(p) \oplus \pi_2^{-1}(p)$, definamos

$$h_{jk} = f_{jk} \oplus g_{jk} : \begin{array}{ccc} U_{jk} & \longrightarrow & GL(n+m, \mathbb{R}) \\ p & \longmapsto & f_{jk}(p) \oplus g_{jk}(p) \end{array}$$

donde $f_{jk}(p) \oplus g_{jk}(p)$ tiene por matriz

$$\begin{bmatrix} f_{jk} & 0 \\ 0 & g_{jk} \end{bmatrix}$$

así satisfacen las condiciones de cociclo.

Para ello consideramos las aplicaciones $E \oplus F$ como el fibrado vectorial definido por $\{h_{jk}\}$.

2. $E \otimes F$, producto tensorial de fibrados

Buscamos construir un fibrado cuyas fibras sean $\pi_1^{-1}(p) \otimes \pi_2^{-1}(p)$, definamos

$$h_{jk} = f_{jk} \otimes g_{jk} : \begin{array}{ccc} U_{jk} & \longrightarrow & GL(nm, \mathbb{R}) \\ p & \longmapsto & f_{jk}(p) \otimes g_{jk}(p) \end{array}$$

ellos forman un cociclo, el fibrado determinado por $\{h_{jk}\}$ es denotado por $E \otimes F$.

3. f^*E , imagen recíproca de fibrados

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado y $f : N \rightarrow M$ una aplicación C^∞ entre las variedades N y M .

El fibrado $f^* : f^*(E) \rightarrow N$ es definido como sigue

$$f^*(E) = \{(p, v) \in N \times E / f(p) = \pi(v)\}$$

los cociclos de $f^*(E)$, son:

$$f^*g_{ij} = g_{ij} \circ f$$

donde $g_{ij} : U_{ij} \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ son los cociclos.

1.5.1. Subfibrados Vectoriales

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango m .

Definición 1.9. Un *subfibrado* F de E es una subvariedad tal que $\pi|_F : F \rightarrow M$ es un fibrado de rango $n \leq m$ donde sus fibras $(\pi|_F)^{-1}(p)$ son subespacios vectoriales de $\pi^{-1}(p)$.

Sean

$$\begin{aligned} F_k^{-1}F_j &: U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow & U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^m \\ & (p, v) &\longmapsto & (p, f_{jk}(p) \cdot v) \\ G_k^{-1}G_j &: U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow & U_j \cap U_k \times \mathbb{R}^n \\ & (p, v) &\longmapsto & (p, g_{jk}(p) \cdot v) \end{aligned}$$

las trivializaciones de E y F respectivamente. Matrizialmente

$$f_{jk} = \begin{bmatrix} h_{jk} & l_{jk} \\ 0 & g_{jk} \end{bmatrix}$$

Los mapas $\{h_{jk}\} : U_{jk} \longrightarrow GL(m - n, \mathbb{R})$ definen al fibrado cociente E/F .

1.6. Cohomología de Čech

Definición 1.10. Sea X un espacio topológico y \mathcal{I} un sistema de conjuntos abiertos en X . Un *prehaz de grupos abelianos* en X es un par (\mathcal{F}, ρ) consistiendo de:

1. Una familia $\mathcal{F} = (\mathcal{F}(U))_{U \in \mathcal{I}}$ de grupos abelianos.
2. Una familia $\rho = (\rho_{V,U})_{U, V \in \mathcal{I}, V \subset U}$ de homomorfismos de grupos

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V), \text{ donde } V \text{ es abierto en } U.$$

con las siguientes propiedades:

- a) $\rho_{U,U} = Id_{\mathcal{F}(U)}$ para todo $U \in \mathcal{I}$.
- b) $\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}$ para todo $W \subset V \subset U$.

Ejemplo 1.7. Sea X un espacio topológico. Para todo conjunto U abierto en X , sea $\mathcal{C}(U) = \{f : U \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ es continua}\}$. Para $V \subset U$, sea $\rho_{V,U} : \mathcal{C}(U) \rightarrow \mathcal{C}(V)$ el mapeo de restricción usual. Entonces (\mathcal{C}, ρ) es un prehaz de espacios vectoriales sobre X .

Observación 1.5. 1. Denotaremos \mathcal{F} por la dupla (\mathcal{F}, ρ) .

2. Los homomorfismos de $\rho_{V,U}$ son llamados *homomorfismos de restricción*. Si $f \in \mathcal{F}(U)$ escribiremos $\rho_{V,U}(f) = f|_V$
3. Análogamente podemos definir prehaces de espacios vectoriales, anillos, etc.

Definición 1.11. Un prehaz \mathcal{F} sobre un espacio topológico X es llamado *haz*, si para todo conjunto abierto $U \subset X$ y toda familia de conjuntos abiertos $U_i \subset U, i \in I$, tal que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, satisfacen los axiomas del haz:

1. Si $f, g \in \mathcal{F}(U)$ son elementos tal que $f|_{U_i} = g|_{U_i}$ para todo $i \in I$, entonces $f = g$.

2. Dados $f_i \in \mathcal{F}(U_i), i \in I$, tal que

$$f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}, \text{ para todo } i, j \in I$$

entonces existe $f \in \mathcal{F}(U)$, tal que $f|_{U_i} = f_i$, para todo $i \in I$.

Ejemplo 1.8. Sea $X = M$ una variedad C^∞

1. $C^\infty : C^\infty(U) = \{ \text{funciones } C^\infty \text{ en } U \}$
2. $\mathbf{a}^p : \mathbf{a}^p(U) = \{ p\text{-formas } C^\infty \text{ en } U \}$
3. $\mathcal{Z}^p : \mathcal{Z}^p(U) = \{ p\text{-formas d-cerradas } C^\infty \text{ en } U \}$

Sea $X = M$ una variedad compleja

1. $\mathcal{O} : \mathcal{O}(U) = \{ \text{funciones holomorfas en } U \}$
2. $\mathbf{a}^{p,q} : \mathbf{a}^{p,q}(U) = \{ (p,q)\text{-formas } C^\infty \text{ en } U \}$
3. $\mathcal{Z}^{p,q} : \mathcal{Z}^{p,q}(U) = \{ (p,q)\text{-formas } \bar{\partial}\text{-cerradas de clase } C^\infty \text{ en } U \}$

Estos grupos son haces junto con los homomorfismos de restricción. Enfatizamos que $\mathcal{Z}^{p,0}(U)$ es el núcleo de $\bar{\partial} : \mathbf{a}^{p,0} \rightarrow \mathbf{a}^{p,1}$ es el espacio de las formas holomorfas.

Observación 1.6. Otra forma equivalente de definir un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X , es que consiste de un espacio topológico $\partial S'$ y de un homeomorfismo local $\pi : \partial S' \rightarrow X$, satisfaciendo:

1. Para todo $p \in X$, $\pi^{-1}(p)$ es un grupo abeliano.
2. Las operaciones grupo son continuas en la topología de $\partial S'$, es decir que la función $(x_1, x_2) \in D \mapsto x_1 - x_2 \in \partial S'$ es continua, donde

$$D = \{ (x_1, x_2) \in \mathcal{F} \times \mathcal{F} : \pi(x_1) = \pi(x_2) \},$$

con la topología inducida por la topología producto en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$

Definición 1.12. 1. Sea $\mathcal{F} = (\mathcal{F}, \pi, X)$, un haz de grupos abelianos sobre un espacio topológico X que admite una cobertura localmente finita $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$. Una *partición de la unidad* para \mathcal{F} subordinada a la cobertura \mathcal{U} , es una familia de homomorfismos de haces $\{\xi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}\}_{i \in I}$ satisfaciendo:

- (i) $\xi_i(\mathcal{F}_p) \equiv 0$, para todo $p \in X \setminus U_i$; donde $\pi^{-1}(p) = \mathcal{F}_p$.
 - (ii) $\sum_{i \in I} \xi_i(x) = x$, para todo $x \in \mathcal{F}$
2. Diremos que \mathcal{F} es un *haz fino* si admite una partición de la unidad subordinada a toda cobertura localmente finita.

Ejemplo 1.9. Si M es una variedad compleja holomorfa y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ una cobertura localmente finita, entonces sabemos que existe una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} , es decir, existe una familia $\{\xi_i : M \rightarrow [0, 1]\}_{i \in I}$ de funciones C^∞ , tal que $\text{sop}(\xi_i) \subset U_i$, para todo $i \in I$ y $\sum_{i \in I} \xi_i(p) = 1$, para todo $p \in M$. Sea \mathcal{a}^p el haz de p -formas C^∞ , entonces una partición de la unidad subordinada a \mathcal{U} , induce una partición de la unidad para \mathcal{a} , multiplicando a cada fibra \mathcal{a}_p , por ξ_p .

Proposición 1.3. Si \mathcal{F} es un haz fino sobre un espacio topológico paracompacto X entonces $H^p(X, \mathcal{F}) = 0$ para todo $q > 0$.

Para una demostración de esta proposición vea la referencia [10], pag. (54).

Definición 1.13. Sea X un espacio topológico y \mathcal{F} un haz de grupos abelianos sobre X y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X tal que $\bigcup_{i \in I} U_i = X$. Sea $q \in \mathbb{N}$, definimos el p -ésimo grupo de cocadena de \mathcal{F} con respecto a \mathcal{U} , como:

$$C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \prod_{(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}} \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p})$$

Los elementos de $C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ son llamados p -cocadenas, así una p -cocadena es una familia

$$(f_{i_0, \dots, i_p})_{i_0, \dots, i_p} \text{ tal que } f_{i_0, \dots, i_p} \in \mathcal{F}(U_{i_0} \cap U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p})$$

para todo $(i_0, \dots, i_p) \in I^{p+1}$

Definimos el operador coborde δ_p

$$\begin{aligned} \delta_p : C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) &\rightarrow C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \\ (f_{i_0, \dots, i_p}) &\mapsto \delta_p((f_{i_0, \dots, i_p})) = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \rho_k(f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}) \end{aligned}$$

donde $\rho_k = \rho_{U_{i_0, \dots, i_{p+1}}, U_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}}$

Ejemplo 1.10.

1. Si $p = 0$ entonces para $(f_i)_{i \in I} \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tenemos $\delta((f_i)_{i \in I}) = (g_{ij})_{i, j \in I}$, donde

$$g_{ij} = f_j - f_i$$

en $U_i \cap U_j$.

2. Para $p = 1$ y $(f_{i,j})_{i,j \in I} \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ tenemos $\delta((f_{i,j})_{i,j \in I}) = (g_{ijk})_{i,j,k \in I}$, donde

$$g_{ijk} = f_{jk} - f_{ik} + f_{ij} \text{ en } U_i \cap U_j \cap U_k.$$

Lema 1.1.

$$\delta_{p+1} \circ \delta_p = 0, \text{ para todo } p \geq 0.$$

Prueba: Sea $(f_{i_0, \dots, i_p}) \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, entonces

$$\delta_p(f_{i_0, \dots, i_p}) = (g_{i_0, \dots, i_{p+1}}) \in C^{p+1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}),$$

donde

$$g_{i_0, \dots, i_{p+1}} = \sum_{k=0}^{p+1} (-1)^k \rho_k(f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+1}}),$$

pero $\delta_{p+1}(g_{i_0, \dots, i_{p+1}}) = (h_{i_0, \dots, i_{p+2}}) \in C^{p+2}(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ donde

$$h_{i_0, \dots, i_{p+2}} = \sum_{l=0}^{p+2} (-1)^l \rho_l(g_{i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_{p+2}}).$$

Ahora, como

$$g_{i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_{p+2}} = \sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \rho_k(f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_{p+2}}) + \sum_{k=l+1}^{q+2} (-1)^{k+1} \rho_k(g_{i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+2}}).$$

Entonces

$$\begin{aligned} h_{i_0, \dots, i_{p+2}} &= \sum_{l=0}^{p+2} (-1)^l \rho_l \left(\sum_{k=0}^{l-1} (-1)^k \rho_k(f_{i_0, \dots, \hat{i}_k, \dots, \hat{i}_l, \dots, i_{p+2}}) \right) \\ &+ \sum_{l=0}^{p+2} (-1)^l \rho_l \left(\sum_{k=l+1}^{q+2} (-1)^{k+1} \rho_k(g_{i_0, \dots, \hat{i}_l, \dots, \hat{i}_k, \dots, i_{p+2}}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (1.7)$$

puesto que la primera suma es igual a la segunda con el signo opuesto. \square

Luego por el lema anterior tenemos un complejo de cocadenas $\{C^p(\mathcal{U}, S), \mathcal{F}\}$, así podemos asociarle sus módulos de cohomología $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, que serán denominados los módulos de cohomología de Čech del cubrimiento \mathcal{U} .

Definición 1.14.

$$Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \{f \in C^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) : \delta_p f = 0\}$$

$$B^0(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = 0$$

$$B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \delta_p C^{p-1}(\mathcal{U}, \mathcal{F}), p \geq 1$$

Definimos los p -módulos de Cohomología de Čech del cubrimiento abierto \mathcal{U} de M como:

$$H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{B^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}.$$

Vemos que los grupos $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ dependen del cubrimiento \mathcal{U} , para tener grupos de cohomología que dependan solamente de X y \mathcal{F} , uno tiene que usar cubrimientos finos y luego tomar el límite dirigido, como veremos a continuación:

Definición 1.15. Un cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ es llamado *más fino* que $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$, denotado por $\mathcal{U} > \mathcal{V}$, si dado cualquier V_k , existe $i \in I$ tal que $V_k \subseteq U_i$.

Así existe un mapeo $\tau : K \rightarrow I$ tal que

$$V_k \subset U_{\tau(k)} \text{ para todo } k \in K$$

y el mapeo:

$$\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}} : Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

de la siguiente manera. Para $(f_{i_0, \dots, i_p}) \in Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ sea

$$\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}((f_{i_0, \dots, i_p})) = (g_{i_0, \dots, i_p}),$$

donde $g_{i_0, \dots, i_p} = f_{\tau(i_0), \dots, \tau(i_p)}$. Estos mapeos inducen un homomorfismo de los grupos de cohomología $H^p(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}; \mathcal{F})$, el cual también lo denotaremos por $\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}$.

Lema 1.2. El mapeo

$$\tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} : H^p(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \rightarrow H^p(\mathcal{V}; \mathcal{F})$$

es independiente del mapeo de refinamiento $\tau : K \rightarrow I$.

Prueba: Supongamos que exista otro mapeo $\tilde{\tau} : K \rightarrow I$ tal que

$$V_k \subset U_{\tilde{\tau}(k)} \text{ para todo } k \in K$$

y el mapeo:

$$\tilde{\tau}_{\mathcal{B}, \mathcal{U}} : Z^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) \rightarrow Z^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$$

Si $p = 0$, por el ejemplo 1.10, tenemos que $g_{ij} = f_i - f_j = 0$ para todo i, j , luego podemos definir una sección global f definido en X , luego $H^0(\mathcal{U}; \mathcal{F}) \cong \mathcal{F}(X) \cong H^0(\mathcal{V}; \mathcal{F})$, entonces $\tilde{\tau}_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}$ y $\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}$ coinciden en el mapeo identidad. Ahora supongamos que $p > 1$, sea $g \in H^p(\mathcal{V}, \mathcal{F})$, y (g_{i_0, \dots, i_p}) un representante. Consideremos $\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}(g)$ y $\tilde{\tau}_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}(g) \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, representados por los cociclos (f_{i_0, \dots, i_p}) y $(\tilde{f}_{i_0, \dots, i_p})$, donde

$$(f_{i_0, \dots, i_p}) = \rho_{U_{\tau(i_0), \dots, \tau(i_p)}, U_{i_0, \dots, i_p}}(g_{\tau(i_0), \dots, \tau(i_p)})$$

$$(\tilde{f}_{i_0, \dots, i_p}) = \rho_{U_{\tilde{\tau}(i_0), \dots, \tilde{\tau}(i_p)}, U_{i_0, \dots, i_p}}(g_{\tilde{\tau}(i_0), \dots, \tilde{\tau}(i_p)}),$$

ahora si

$$h_{i_0, \dots, i_{p-1}} = \sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k \rho_k(g_{\tau(i_0), \dots, \tau(i_k), \tilde{\tau}(i_k), \dots, \tilde{\tau}(i_{p-1})})$$

donde $\rho_k = \rho_{U_{\tau(i_0), \dots, \tau(i_k), \tilde{\tau}(i_k), \dots, \tilde{\tau}(i_{p-1})}, U_{i_0, \dots, i_k, i_k, \dots, i_{p-1}}}$, entonces

$$(f_{i_0, \dots, i_p} - \tilde{f}_{i_0, \dots, i_p}) = \delta_{p-1}(h_{i_0, \dots, i_{p-1}})$$

Por lo tanto $(f_{i_0, \dots, i_p} - \tilde{f}_{i_0, \dots, i_p})$ es cohomólogo a cero. \square

Sean tres cubrimientos $\mathcal{B} = \{B_k\}_{k \in K}$, $\mathcal{V} = \{V_k\}_{k \in K}$ y $\mathcal{U} = \{U_k\}_{k \in K}$ tales que $\mathcal{B} < \mathcal{V} < \mathcal{U}$, entonces

$$\tau_{\mathcal{B}, \mathcal{V}} \circ \tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{B}, \mathcal{U}}.$$

Así uno puede definir la relación de equivalencia \sim sobre la unión disjunta de los $H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$, donde \mathcal{U} recorre todas las coberturas abiertas de X . Diremos que dos clases de cohomología $\xi \in H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ y $\eta \in H^p(\mathcal{U}', \mathcal{F})$ son equivalentes, denotamos $\xi \sim \eta$, si existe un cubrimiento abierto \mathcal{V} con $\mathcal{V} < \mathcal{U}$ y $\mathcal{V} < \mathcal{U}'$ tal que $\tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}}(\xi) = \tau_{\mathcal{V}, \mathcal{U}'}(\eta)$. Definimos *el primer grupo de cohomología* de X con coeficientes en la hoja \mathcal{F} como:

$$H^p(X, \mathcal{F}) = \overline{\lim}_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F}) = \frac{\bigsqcup_{\mathcal{U}} H^p(\mathcal{U}, \mathcal{F})}{\sim}.$$

1.7. Conexiones

Para un fibrado $\pi : E \rightarrow M$, denotemos por $\Gamma^\infty(U, E)$ al espacio de secciones C^∞ de E sobre M , variedad holomorfa. Para $U \subseteq M$ abierto consideremos

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^0(U) &= C^\infty(U, \mathbb{C}) \\ \mathfrak{a}^p(U) &= \Gamma^\infty(U, \wedge^p(TM^c)^*), \quad p \geq 1. \end{aligned}$$

Notemos que los $\mathfrak{a}^p(U)$ son $\mathfrak{a}^0(U)$ -módulos y además los $\mathfrak{a}^p(U)$ están formados por las p formas complejas en U .

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un \mathbb{C} -fibrado de rango n sobre una variedad holomorfa, definimos

$$\begin{aligned} \mathfrak{a}^0(U, E) &= \Gamma^\infty(U, E) \\ \mathfrak{a}^p(U, E) &= \Gamma^\infty(U, \wedge^p(TM^c)^* \otimes E), \quad p \geq 1 \end{aligned}$$

también todos son $\mathfrak{a}^0(U)$ -módulos.

Definición 1.16 (Conexión). Una *conexión* del fibrado $\pi : E \rightarrow M$ es una transformación \mathbb{C} lineal

$$\nabla : \mathfrak{a}^0(U, E) \rightarrow \mathfrak{a}^1(U, E) = \Gamma^\infty(U, (TM^c)^* \otimes E)$$

tal que para $f \in \mathfrak{a}^0(M)$ y $s \in \mathfrak{a}^1(M, E)$.

$$\nabla(f s) = df \otimes s + f \nabla s.$$

Esto es, satisface la regla de Leibniz.

Proposición 1.4. Sea $U \subseteq M$ abierto y $s_1, s_2 \in \mathfrak{a}^0(U)$ luego

$$s_1|_U = s_2|_U \implies \nabla s_1|_U = \nabla s_2|_U.$$

Prueba: Sea $s \in \mathfrak{a}^0(U)$ tal que $s|_U = 0$ sea $x \in U$, tomemos V vecindad abierta de x relativamente compacta en U ($\bar{V} \subseteq U$ compacto) y tomemos $\rho : M \xrightarrow{C^\infty} [0, \infty)$ tal que $\rho|_{\bar{V}} = 1$ y $\text{sop } \rho \subseteq U$, así $s\rho = 0$. Luego

$$0 = \nabla(\rho s) = d\rho \otimes s + \rho \nabla s,$$

de ahí, $\nabla s|_V = 0$ y esto se puede hacer para todo punto de U , por lo tanto $\nabla s|_U = 0$. \square

Lema 1.3. *Dada una variedad siempre tenemos conexiones.*

Prueba: Sea (s_1^j, \dots, s_n^j) un referencial en U_j de $\pi : E \rightarrow M$ definimos

$$\nabla^j : \mathfrak{a}^0(U_j, E) \rightarrow \mathfrak{a}^1(U_j, E)$$

de modo que $\nabla^j s_\alpha^j = 0$. Así, para $f \in \mathfrak{a}^0(M)$ definimos $\nabla^j f s_\alpha^j = df \otimes s_\alpha^j$, entonces tenemos que ∇^j es una conexión en U_j .

$$\nabla^j(f_1 s_1^j + \dots + f_n s_n^j) = df_1 \otimes s_1^j + \dots + df_n \otimes s_n^j.$$

Ahora, sea $\rho^j : M \rightarrow \mathbb{R}$ una partición de la unidad subordinada a $\{U_j\}$ definimos la conexión

$$\nabla = \sum \rho^j \nabla^j$$

\square

La Matriz de la Conexión ∇

Dado (s_1^j, \dots, s_n^j) un referencial en U_j , podemos escribir

$$\nabla s_\alpha^j = \sum \theta_{\alpha\beta}^j \otimes s_\beta^j.$$

La matriz de ∇ en U_j es por definición $\theta^j = (\theta_{\alpha\beta}^j)$. Veamos como se relacionan las matrices en los abiertos U_{jk}

$$\begin{aligned} \sum_{\delta} \theta_{\alpha\delta}^j \otimes s_\delta^j &= \nabla s_\alpha^j = \nabla \left(\sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} \otimes s_\beta^k \right) \\ &= \sum_{\beta} (df_{\alpha\beta}^{jk} \otimes s_\beta^k + f_{\alpha\beta}^{jk} \nabla s_\beta^k) \\ &= \sum_{\beta} df_{\alpha\beta}^{jk} \otimes s_\beta^k + \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} \sum_{\gamma} \theta_{\beta\gamma}^j \otimes s_\gamma^k \\ &= \sum_{\beta} df_{\alpha\beta}^{jk} \otimes \sum_{\delta} f_{\beta\delta}^{kj} s_\delta^j + \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} \sum_{\gamma} \theta_{\beta\gamma}^j \otimes \sum_{\delta} f_{\gamma\delta}^{kj} s_\delta^j \\ &= \sum_{\delta} \left(\sum_{\beta} df_{\alpha\beta}^{kj} f_{\beta\delta}^{jk} + \sum_{\beta\gamma} f_{\alpha\beta}^{kj} \theta_{\beta\gamma}^j f_{\gamma\delta}^{jk} \right) \otimes s_\delta^j \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\begin{aligned}\theta^j &= df_{jk} \cdot f_{kj} + f_{jk} \cdot \theta^k f_{kj} \\ &= df_{jk} \cdot f_{jk}^{-1} + f_{jk} \cdot \theta^k f_{jk}^{-1}\end{aligned}$$

En el caso de que el fibrado sea lineal

$$\theta^j = d \ln f_{jk} + \theta^k \quad (1.8)$$

1.8. Curvatura

Extendamos ∇ a $\mathfrak{a}^1(M, E)$ esto es $\nabla : \mathfrak{a}^1(M, E) \longrightarrow \mathfrak{a}^2(M, E)$ de manera que sea \mathbb{C} lineal y verifique la regla de Leibniz

$$\nabla(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s - \omega \wedge \nabla s.$$

Definición 1.17 (Curvatura). Definimos la *Curvatura* de la conexión ∇ como

$$K_\nabla = \nabla \nabla : \mathfrak{a}^0(M, E) \longrightarrow \mathfrak{a}^2(M, E).$$

Teorema 1.1. K_∇ es $\mathfrak{a}^0(M)$ lineal. Esto es, para $s \in \mathfrak{a}^1(M, E)$ y $f \in \mathfrak{a}^0(M, E)$

$$K_\nabla(f s) = f K_\nabla s.$$

Para poder probar este resultado necesitamos:

Lema 1.4. Para $f \in \mathfrak{a}^0(M)$ y $\omega \otimes s \in \mathfrak{a}^1(M, E)$ se cumple

$$\nabla(f\omega \otimes s) = df \wedge (\omega \otimes s) + f \nabla(\omega \otimes s).$$

En particular $\nabla(f \nabla s) = df \wedge \nabla s + f K_\nabla s$.

Prueba:

$$\begin{aligned}\nabla(f\omega \otimes s) &= d(f\omega) \otimes s - f\omega \wedge \nabla s \\ &= \underline{f d\omega} \otimes s + (df \wedge \omega) \otimes s - \underline{f\omega \wedge \nabla s} \\ &= df \wedge (\omega \otimes s) + \underline{f \nabla(\omega \otimes s)}.\end{aligned}$$

□

Continuemos con la demostración del teorema. Como $\nabla s = \sum \tilde{\omega}_i \otimes \tilde{s}_i$ sigue que

$$\nabla(f \nabla s) = \sum df \wedge (\tilde{\omega}_i \otimes \tilde{s}_i) + f \nabla(\tilde{\omega} \otimes \tilde{s}) = df \wedge \nabla s + f \nabla \nabla s.$$

De esta identidad tenemos

$$\nabla \nabla(f s) = \nabla(df \otimes s + f \nabla s) = -df \wedge \nabla s + \nabla(f \nabla s) = f K_\nabla s.$$

Esto es, $K_\nabla(f s) = f K_\nabla s$ como queríamos demostrar.

Teorema 1.2. *La curvatura depende únicamente del valor de la sección puntualmente, esto es, para $x \in M$ y secciones $s, s' \in \mathcal{A}^0(M, E)$ con $s(x) = s'(x)$ se tiene*

$$K_{\nabla}s(x) = K_{\nabla}s'(x).$$

Prueba: Para $x \in U_j$ consideremos (s_1^j, \dots, s_n^j) referencial de E en U_j , luego podemos expresar $s - s'$ en términos de este tipo de referencial,

$$s - s' = \sum_{\alpha} f_{\alpha} s_{\alpha}^j \text{ en } U_j.$$

De la hipótesis, $f_1(x) = \dots = f_n(x) = 0$. Ahora, de la $\mathcal{A}^0(M)$ -linealidad en U_j

$$K_{\nabla}(s - s') = \sum_{\alpha} f_{\alpha} K_{\nabla}s_{\alpha}^j.$$

Así, $K_{\nabla}s(x) = K_{\nabla}s'(x)$. □

La Matriz de K_{∇}

Denotemos por $K^j = (K_{\alpha\beta}^j) \in M(n, \mathcal{A}^2(M))$, matrices de orden n sobre las 2-formas. Hallemos la matriz de K en el referencial (s_1^j, \dots, s_n^j) de $\pi : E \rightarrow M$ en U_j

$$\begin{aligned} K_{\nabla}s_{\alpha}^j &= \nabla\nabla s_{\alpha}^j = \nabla \left(\sum_{\beta} \theta_{\alpha\beta}^j \otimes s_{\beta}^j \right) \\ &= \sum_{\beta} (d\theta_{\alpha\beta}^j \otimes s_{\beta}^j - \theta_{\alpha\beta}^j \wedge \nabla s_{\beta}^j) \\ &= \sum_{\beta} d\theta_{\alpha\beta}^j \otimes s_{\beta}^j - \sum_{\beta} \theta_{\alpha\beta}^j \wedge \sum_{\gamma} \theta_{\beta\gamma}^j \otimes s_{\gamma}^j \\ &= \sum_{\gamma} (d\theta_{\alpha\gamma}^j - \sum_{\beta} \theta_{\alpha\beta}^j \wedge \theta_{\beta\gamma}^j) \otimes s_{\gamma}^j. \end{aligned}$$

Matricialmente

$$\Theta^j = d\theta^j - \theta^j \wedge \theta^j. \tag{1.9}$$

Veamos que sucede en U_{jk} :

$$\begin{aligned} \sum_{\delta} K_{\alpha\beta}^j \otimes s_{\delta}^j &= K_{\nabla}(s_{\alpha}^j) = K_{\nabla} \left(\sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} s_{\beta}^k \right) = \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} K_{\nabla}s_{\beta}^k \\ &= \sum_{\beta} f_{\alpha\beta}^{jk} \sum_{\gamma} K_{\beta\gamma}^k \otimes s_{\gamma}^k = \sum_{\beta\gamma} f_{\alpha\beta}^{jk} K_{\beta\gamma}^k \otimes s_{\gamma}^k \\ &= \sum_{\beta\gamma} f_{\alpha\beta}^{jk} K_{\beta\gamma}^k \otimes \sum_{\delta} f_{\gamma\delta}^{kj} s_{\delta}^k = \sum_{\delta} \left(\sum_{\beta\gamma} f_{\alpha\beta}^{jk} K_{\beta\gamma}^k f_{\gamma\delta}^{kj} \right) \otimes s_{\delta}^k. \end{aligned}$$

Por tanto en U_{jk}

$$\Theta^j = f_{jk}\Theta^k f_{kj} = f_{jk}\Theta^k f_{jk}^{-1}. \quad (1.10)$$

Cuando E es un fibrado lineal entonces por (1.10) tenemos

$$\Theta^j = \Theta^i.$$

entonces podemos definir globalmente una 2-forma cerrada Θ , llamada *forma de curvatura de E* .

Teorema 1.3. Sea M una variedad compleja compacta de dimensión n y D un conjunto analítico de codimensión 1. Si ψ una $(2n - 2)$ forma C^∞ entonces

$$\int_M \left(\frac{1}{2\pi i} K\right) \wedge \psi = \int_D \psi. \quad (1.11)$$

Una demostración de este teorema puede ser hallado en [17], pag. (44).

1.8.1. Clases de Chern de Fibrados Lineales

Sea M un variedad compleja compacta de dimensión n . La sucesión exacta de haces:

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{O} \xrightarrow{\exp} \mathcal{O}^* \rightarrow 0$$

donde dado un abierto $U \subset M$, asocia

$$f \in \mathcal{O}(U) \rightarrow \exp(2\pi i f) \in \mathcal{O}^*(U),$$

induce el mapeo borde en cohomología:

$$\delta : H^1(M, \mathcal{O}^*) \rightarrow H^2(M, \mathbb{Z})$$

El espacio de los fibrados lineales holomorfos denotados por $Pic(M)$ puede ser identificado con $H^1(M, \mathcal{O}^*)$ (vea [11] pag. (133)).

Definición 1.18. Sea E un fibrado lineal $E \in Pic(M) \simeq H^1(M, \mathcal{O}^*)$, definimos la *primera clase de Chern* del fibrado E como $\delta(E)$ y lo denotaremos por $c_1(E)$.

1.8.2. Propiedades

1. $c_1(E \wedge E') = c_1(E) + c_1(E')$
2. $c_1(E^*) = -c_1(E)$
3. Ahora si $f : M \rightarrow N$ un mapeo holomorfo entre variedades complejas, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^1(M, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(M, \mathbb{Z}) \\ \downarrow f^* & & \downarrow f^* \\ H^1(N, \mathcal{O}^*) & \xrightarrow{\delta} & H^2(N, \mathbb{Z}) \end{array} \quad (1.12)$$

conmuta, y así tenemos que:

$$c_1(f^*L) = f^*c_1(L) \quad (1.13)$$

Teorema 1.4. Para cualquier fibrado lineal con forma de curvatura K , entonces

$$c_1(E) = \left[\frac{1}{2\pi i} \Theta \right] \in H_{DR}^2(M)$$

Prueba: Sea g_{ij} el cociclo definido por el fibrado E y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de M , tal que $U_{ij} = U_i \cap U_j$ es simplemente conexo. Sea en U_{ij}

$$h_{ij} = \frac{1}{2\pi i} \log(g_{ij})$$

así

$$\delta(h_{ijk}) = z_{ijk} = h_{ij} + h_{jk} - h_{ik} = \frac{1}{2\pi i} (\log g_{ij} + \log g_{jk} - \log g_{ik}) \in Z^2(\mathcal{U}, \mathbb{Z})$$

entonces z_{ijk} es un cociclo que representa $c_1(E)$.

Ahora escogemos una conexión ∇ en E y sea la matriz de ∇ en U_j es $\theta^j = (\theta_{\alpha\beta}^j)$, entonces por (1.8) tenemos que:

$$\theta^i - \theta^j = -d(\log g_{ij}) \quad (1.14)$$

y la matriz de curvatura de la 2- forma global Θ satisface localmente:

$$K^i = d\theta_i - \theta_i \wedge \theta_i = d\theta_i \quad (1.15)$$

Luego como en la prueba de Teorema de De Rham, tenemos dos isomorfismo, el primero

$$\frac{Z^2(M)}{d(\mathcal{A}^1(M))} \rightarrow H^1(M, Z^1)$$

surge de la sucesión exacta:

$$0 \rightarrow Z^1 \rightarrow \mathcal{A}^1 \rightarrow Z^2 \rightarrow 0.$$

De este diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} & & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & \xrightarrow{d} & d(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1)) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow d_0 & & & & \\ 0 & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, Z^1) & \longrightarrow & C^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) & & \end{array}$$

por (1.14) tenemos

$$\begin{aligned} (K^i) \in d(C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1)) & \mapsto (\theta^i) \in C^0(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1) \\ & \mapsto (\theta^j - \theta^i) \in C^1(\mathcal{U}, \mathcal{A}^1). \end{aligned} \quad (1.16)$$

El segundo isomorfismo:

$$H^1(M, Z^1) \rightarrow H^2(M, \mathbb{C})$$

es inducido por la sucesión:

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow C^\infty \xrightarrow{d} Z^1 \rightarrow 0.$$

Teniendo en cuenta el diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & C^1(\mathcal{U}, C^\infty) & \xrightarrow{d} & d(C^1(\mathcal{U}, C^\infty)) & \longrightarrow 0 \\
& & & \downarrow d_1 & & & \\
0 & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, \mathbb{C}) & \longrightarrow & C^2(\mathcal{U}, C^\infty) & &
\end{array}$$

de (1.14) tenemos

$$\begin{aligned}
(\theta^i - \theta^j) \in C^1(\mathcal{U}, \mathbb{Z}^1) & \mapsto (-\log g_{ij}) \in C^1(\mathcal{U}, C^\infty) \\
& \mapsto (\log g_{jk} - \log g_{ik} + \log g_{ij}) \in C^2(\mathcal{U}, \mathbb{C})
\end{aligned} \tag{1.17}$$

Luego de (1.16) y (1.17) se sigue el resultado. \square

1.8.3. Cálculo de la Clase de Chern de un Fibrado Lineal

Sea $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado holomorfo lineal holomorfo con trivializaciones $F_j : U_j \times \mathbb{C} \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ y $s^j : U_j \rightarrow \pi^{-1}(U_j)$ definido por $s^j(p) = F_j(p, 1)$ un referencial de E en U_j . Sobre U_{jk} tenemos de la relación (1.5)

$$s^j = g_{kj} s^k,$$

donde g_{kj} es el cociclo del fibrado. Como en el Lema 1.3 definimos una conexión en U_j por $\nabla^j(s^j) = 0$ y extendemos la conexión considerando $\zeta_j : U_j \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}$, $\sum_j \zeta_j = 1$ partición de la unidad subordinado a $\{U_j\}$

$$\nabla = \sum_j \zeta_j \nabla^j,$$

$$\nabla|_{U_k} = \sum_j \zeta_j \nabla^j|_{U_k}$$

y

$$\begin{aligned}
\nabla^j|_{U_k}(s^k) &= \nabla^j|_{U_k}(g_{jk}s^j) = dg_{jk} \otimes s^j \\
&= dg_{jk} \otimes g_{kj}s^k = \frac{dg_{jk}}{g_{jk}} \otimes s^k.
\end{aligned}$$

Luego, las matrices de conexión y de curvatura de ∇ en U_k , son dados por

$$\theta^k = \sum_j \zeta_j d \log g_{jk}.$$

$$K^k = d\theta^k + \theta^k \wedge \theta^k = d\theta^k = \sum_j d(\zeta_j d \log g_{jk}).$$

respectivamente. Luego del Teorema 1.4 anterior:

$$c_1(E)|_{U_k} = \frac{i}{2\pi} K^k = \frac{1}{2\pi i} \sum_j d(\zeta_j d \log g_{jk}). \tag{1.18}$$

1.9. Foliaciones Holomorfas

Sea M una superficie compleja y $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j \in J}$ un cubrimiento por abiertos de M . Consideremos en cada U_j un campo vectorial holomorfo v_j con ceros aislados tal que en $U_{ij} = U_i \cap U_j$, los campos vectoriales v_i y v_j , coinciden bajo multiplicación por una función holomorfa no nula, es decir:

$$v_i = g_{ij}v_j,$$

donde $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(M)$. Ahora, definimos la siguiente relación de equivalencia en el conjunto $\{(\mathcal{U}, \{v_j\}_{j \in J})\}$ como: $(\mathcal{U}, \{v_j\}_{j \in J}) \sim (\mathcal{V}, \{v'_i\}_{i \in I})$ si v_j y v'_i coinciden en $U_j \cap V_i$, bajo multiplicación de una función holomorfa no nula.

Definición 1.19. Una foliación \mathcal{F} de dimensión 1, es el conjunto de las clases de equivalencia $\{[(\mathcal{U}, \{v_j\}_{j \in J})]\}$.

Definición 1.20. El conjunto singular $\text{Sing } \mathcal{F}$ de \mathcal{F} , es el conjunto discreto de X definido por:

$$\text{Sing } \mathcal{F}|_{U_j} = \text{ceros de } v_j, \quad j \in I.$$

Observe que las funciones $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_i \cap U_j)$ forma un grupo multiplicativo y así da una clase de cohomología en $H^1(X, \mathcal{O}(X))$, esto es un fibrado lineal.

1.10. Fibrados normal y tangente a una foliación

Sea M una superficie compleja y \mathcal{F} una foliación holomorfa de dimensión 1 en M determinada por el cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ de M y en la intersección $U_{ij} \neq \emptyset$, existe $f_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ tal que

$$v_i = f_{ij}v_j \tag{1.19}$$

La foliación \mathcal{F} es inducida en U_i por las órbitas del campo v_i (las cuales son superficies de Riemann inmersas), mediante la relación (1.19) tenemos que estas órbitas se prolongan en otros abiertos que intercepten U_i .

Definición 1.21. El fibrado que induce el cociclo (f_{ij}) es llamado *el fibrado cotangente a \mathcal{F}* y es denotado por $T_{\mathcal{F}}^*$. Su dual $T_{\mathcal{F}} = (T_{\mathcal{F}}^*)^*$ es llamado *fibrado tangente a \mathcal{F}* .

Proposición 1.5. \mathcal{F} es una foliación no singular si y sólo si $T_{\mathcal{F}}$ es un subfibrado de TM .

Una demostración detallada de este resultado se encuentra en [17] pag. 105.

Análogamente podemos determinar una foliación holomorfa \mathcal{G} en una superficie M mediante un cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ abierto de M y 1-formas ω_i definido en U_i tal que en la intersección U_{ij} existe $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ con

$$\omega_i = g_{ij}\omega_j \tag{1.20}$$

La foliación \mathcal{G} en U_i esta formada por las superficies de Riemann (en general inmersas) cuyas tangentes coinciden con $\text{Ker } \omega_i$. La relación (1.20) nos dice que estas superficies de Riemann se prolongan a otros abiertos que interceptan a U_i .

Definición 1.22. El fibrado que induce el cociclo (g_{ij}) es llamado *el fibrado normal a \mathcal{F}* y es denotado por $N_{\mathcal{F}}$. Su dual $N_{\mathcal{F}}^* = (T_{\mathcal{F}})^*$ es llamado *el fibrado conormal a \mathcal{F}* .

Proposición 1.6. \mathcal{F} es una foliación no singular si y sólo si $N_{\mathcal{F}}^*$ es un subfibrado de T^*M .

En [17] pag. 105 se encuentra una demostración de esta proposición.

Capítulo 2

Residuos

En todo este capítulo estudiaremos la teoría de Residuos, tal como lo utilizaremos en los siguientes capítulos. Comenzamos con algunos resultados del análisis complejo en una variable los cuales pueden ser extendidos a varias variables, para ello daremos primero algunas notaciones y definiciones:

$$d = \partial + \bar{\partial}$$
$$d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$$

Consideremos la forma en \mathbb{C}^n ,

$$\omega_0 = \frac{1}{\pi} dd^c \ln |z|^2 = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\varphi_0}{|z|^2} - \frac{d|z|^2 \wedge d^c |z|^2}{|z|^4} \right)$$

donde

$$\varphi_0 = \frac{i}{2} \sum_{i=1}^n dz_i \wedge d\bar{z}_i = dd^c |z|^2$$

mediante esta forma construimos la $2n - 1$ -forma en \mathbb{C}^n :

$$\sigma_0 = \frac{1}{\pi} d^c \ln |z|^2 \wedge \omega_0^{n-1}. \quad (2.1)$$

Observación Si $n = 1$ entonces tenemos que $\sigma_0 = \frac{d\theta}{2\pi}$, donde $z = re^{i\theta}$, luego si tomamos un camino cerrado $\gamma \in \mathbb{C} - \{0\}$, vemos que $\int_{\gamma} \sigma_0$ coincide con el Índice de un camino cerrado relativo al punto $z = 0$, definido en una variable. Para generalizar este hecho a varias variables damos la siguiente definición:

Definición 2.1. Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}^n - \{0\}$ una hipersuperficie real cerrada sin borde, que no contiene al origen $z = 0$. Como $H_{2n-1}(\mathbb{C}^n - \{0\}, \mathbb{Z}) = 0$, existe un entero $k \in \mathbb{Z}$ tal que γ es homólogo a kS^{2n-1} . El número k es llamado *Índice de la hipersuperficie γ relativo a $z = 0$* y denotada por $\text{ind}_0 \gamma$.

Teorema 2.1. El índice de un ciclo $(2n - 1)$ -dimensional $\gamma \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ relativo al punto $z = 0$, está dado por la integral:

$$\text{ind}_0 \gamma = \int_{\gamma} \sigma_0. \quad (2.2)$$

Para los detalles de este resultado vea [16], pag. (111).

Dada las coordenadas $z = (z_1, \dots, z_n)$ de \mathbb{C}^n consideremos la $(n, 0)$ -forma $dz = dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$ y la $(0, n-1)$ -forma $d\bar{z}[i] = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{i-1} \wedge d\bar{z}_{i+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$. La $(n, n-1)$ -forma dado por:

$$\omega_{BM}(\xi - z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{i=1}^n \frac{(-1)^{i-1}(\bar{\xi}_i - \bar{z})}{|\xi - z|^{2n}} d\bar{\xi}[i] \wedge d\xi \quad (2.3)$$

es llamado la *Forma de Bochner-Martinelli*. La importancia de esta forma es dado en el siguiente teorema:

Teorema 2.2 (Fórmula de Bochner-Martinelli). Sea $D \subseteq \mathbb{C}^n$ un dominio acotado y $f \in \mathcal{O}(D) \cap C(\bar{D})$, entonces tenemos la representación integral:

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\xi) \omega_{BM}(\xi - z)$$

para todo $z \in D$.

Este teorema se encuentra en [16], pag. (137).

Cuando $n = 1$ la forma de Bochner-Martinelli se reduce a:

$$\omega_{BM}(\xi - z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\bar{\xi} - \bar{z}}{|\xi - z|^2} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

así vemos que en este caso la Fórmula de Bochner-Martinelli coincide con la Fórmula de la Integral de Cauchy en una variable.

A continuación trataremos de generalizar el siguiente teorema de una variable compleja:

Teorema 2.3. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un dominio y f una función analítica en D , con ceros aislados. Si γ es una curva que no pasa por los ceros de f , entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

determina el número total de ceros contando multiplicidades en la región acotada de γ .

Sea $\gamma \subseteq \mathbb{C}^n - \{0\}$ un ciclo y $k \in \mathbb{Z}$ tal que γ es homólogo a $k\partial U$, donde $U = \{z : |z| \leq 1\}$ entonces del Teorema 2.2

$$\int_{k\partial U} \omega_{BM} = k \int_{\partial U} \omega_{BM} = k. \quad (2.4)$$

Observación 2.1. Recordemos que un conjunto analítico S en un dominio $D \subset \mathbb{C}^n$, $\partial D \cap S \neq \emptyset$, ó consiste de un número finito de puntos [16] pag. (155).

Así, tenemos el siguiente teorema [16] pag. (286).

Teorema 2.4. Si $f : D \rightarrow \mathbb{C}^n$ es una aplicación holomorfa, y $G \subseteq D$ un dominio con frontera Jordan diferenciable γ que no contiene ceros de f . Entonces el índice de $f(\gamma)$ relativo al punto 0 es igual al número de ceros de f en el dominio G (contando sus multiplicidades).

Sea $U = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| \leq \epsilon\}$ y $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{O}(\bar{U})$ tal que si $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, $f^{-1}(0) \cap U = 0$ y $g \in \mathcal{O}(\bar{U})$. Consideremos:

$$\begin{aligned} D_i &= \{z : f_i(z) = 0\} \\ D &= D_1 + \dots + D_n, \\ U_i &= U - D_i \\ U^* &= U - \{0\} = \bigcup_{i=1}^n U_i \end{aligned}$$

Definición 2.2. Con las notaciones de arriba definimos la n -forma meromorfa :

$$\omega = \frac{g(z)dz_1 \wedge dz_2 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1(z) \dots f_n(z)}.$$

Dado $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$ una n -upla de números reales positivos suficientemente pequeño, consideremos el n -ciclo:

$$\Gamma_\epsilon = \{z : |f_i(z)| = \epsilon_i, i = 1, \dots, n\}$$

orientado por:

$$d(\arg f_1) \wedge d(\arg f_2) \wedge \dots \wedge d(\arg f_n) \geq 0.$$

Entonces el *Residuo de ω en 0*, es definido por la integral:

$$Res_{\{0\}}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma_\epsilon} \omega \tag{2.5}$$

Observaciones

1. El residuo $Res_{\{0\}}\omega$ está bien definida, esto es, no depende de ϵ . Para ello observe que ω es una $n - 1$ forma holomorfa en $U - D$ entonces $\omega \in H^0(U - D, \Omega^n)$, luego por el Teorema de Stokes no depende de ϵ .

Por esta razón denotaremos Γ_ϵ simplemente por Γ .

2. Sea $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$, y $Jf(0) \neq 0$, entonces:

$$Res_{\{0\}}\omega = \frac{g(0)}{Jf(0)}.$$

En efecto, sea $w = f(z)$ y $K(w) = \frac{dw_1}{w_1} \wedge \frac{dw_2}{w_2} \wedge \dots \wedge \frac{dw_n}{w_n}$, entonces:

$$\omega = f^*\left(\frac{g(f^{-1}(w))K(w)}{Jf(f^{-1}(w))}\right)$$

así

$$Res_{\{0\}}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{|w_i|=\epsilon} \frac{g(f^{-1}(w))K(w)}{Jf(f^{-1}(w))}.$$

Luego por la Fórmula de Cauchy generalizado (ver [16], pag. (18)) se tiene el resultado.

3. Sea $I(f)$ el ideal generado por los f_i en el anillo de las funciones holomorfas en una vecindad de 0. Entonces si $g \in I(f)$ tenemos $Res_{\{0\}}\omega = 0$. En efecto, como el residuo es lineal es suficiente considerar el caso $g = hf_1$ entonces:

$$\omega = \frac{h(z)dz_1 \wedge dz_2 \wedge \cdots \wedge dz_n}{f_2(z) \cdots f_n(z)}.$$

Sea $V = U - (D_2 \cup \cdots \cup D_n)$ y

$$\Gamma_1 = \{z \in \mathbb{C}^n : |f_j(z)| = \epsilon \ \forall j \neq 1, |f_1(z)| \leq \epsilon\}$$

entonces $\Gamma_1 \subset V$ y $\partial\Gamma_1 = \pm\Gamma$, ($\Gamma = \Gamma_\epsilon$), luego por el Teorema de Stokes

$$\int_{\Gamma} \omega = \pm \int_{\Gamma_1} d\omega = 0.$$

Podemos considerar ω como un elemento de $H^{n-1}(U^*, \Omega^n)$ de la siguiente manera: Sea $\mathcal{U} = (U_i)_{i=1 \dots n}$ cubrimiento de U^* , entonces definamos:

$$\omega_{i_0, i_1, \dots, i_n} = \begin{cases} 0, & \text{si } i_k = i_l, l \neq k \\ \text{sgn}(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})\omega, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

donde $\text{sgn}(i_0, i_1, \dots, i_n)$ representa el signo de la permutación (i_0, i_1, \dots, i_n) . Así $\omega \in C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0})$ y se verifica fácilmente que $\delta\omega = 0$, luego $\omega \in H^{n-1}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0})$, donde $\mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}$ es el haz de las n -formas (luego cerradas). Por el isomorfismo de Dolbeault (ver [17], pag. (71)) tenemos

$$\begin{array}{ccc} H^{n-1}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \cong & H_{\bar{\partial}}^{n,n-1}(U^*) \\ w & \mapsto & \eta_w \end{array}$$

w asocia un elemento η_w en $H_{\bar{\partial}}^{n,n-1}(U^*)$. El siguiente teorema nos dice como se relacionan ω y η_w .

Teorema 2.5.

$$Res_{\{0\}}\omega = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \omega = \int_{S^{2n-1}} \eta_w$$

Prueba: La sucesión exacta corta:

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0} \xrightarrow{i} \mathcal{A}^{n,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1} \rightarrow 0 \quad (2.6)$$

induce el siguiente bicomplejo:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \xrightarrow{i} & C^0(\mathcal{U}, \mathbf{a}^{n,0}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C^0(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1}) \longrightarrow 0 & (2.7) \\
& & \downarrow \delta_0 & & \downarrow \delta_0 & & \downarrow \delta_0 & \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
& & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} & \\
0 & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \xrightarrow{i} & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathbf{a}^{n,0}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1}) \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \delta_{n-1} & & \downarrow \delta_{n-1} & & \downarrow \delta_{n-1} & \\
0 & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathbf{a}^{n,0}) & \longrightarrow & C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1}) \longrightarrow 0 \\
& & \omega_{n-1} & & \omega_{n-1} & & &
\end{array}$$

Como $\omega_{n-1} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \omega \in H^{n-1}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0})$ y $\delta\omega_{n-1} = 0$, entonces del diagrama (2.7) existe $\xi_{n-2} = (\xi_{n-2,I}) \in C^{n-2}(U^*, \mathbf{a}^{n,0})$, donde $I = (i_1, \dots, i_{n-1})$, tal que

$$\delta_{n-1}(\xi_{n-2}) = \omega_{n-1}$$

luego

$$\bar{\partial}(\xi_{n-2}) = \omega_{n-2},$$

donde $\omega_{n-2} = (\omega_{n-2,I}) \in C^{n-2}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1})$.

Definimos Γ_I de la siguiente manera:

$$\Gamma_I = \{z : |f_i(z)| = \epsilon, i \in I, |f_j(z)| \leq \epsilon, j \notin I\}$$

y con orientación:

$$d(\arg f_{i_1}) \wedge d(\arg f_{i_2}) \wedge \dots \wedge d(\arg f_{i_p}) \wedge \left(\bigwedge_{j \notin I} \frac{i}{2} df_j \wedge \overline{df_j} \right) \geq 0,$$

donde $I = \{i_1 < \dots < i_p\}$. Luego el borde orientado de Γ_I es

$$\partial\Gamma_I = \sum_{j \notin I} (-1)^{(j, I \cup \{j\})} \Gamma_{I \cup \{j\}},$$

donde $(j, I \cup \{j\})$ es la posición de j en $I \cup \{j\}$ ordenado en la manera usual. Entonces:

$$\begin{aligned}
\sum_{\#I=n-1} \int_{\Gamma_I} \omega_{n-2,I} &= \sum_{\#I=n-1} \int_{\Gamma_I} \bar{\partial}(\xi_{n-2,I}) = \sum_{\#I=n-1} \int_{\Gamma_I} d\xi_{n-2,I} = \sum_{\#I=n-1} \int_{\partial\Gamma_I} \xi_{n-2,I} \\
&= \sum_{\#I=n-1} \left(\sum_{j \notin I} \int_{\Gamma_I} (-1)^{(j, I \cup \{j\})} \xi_{n-2,I} \right) = \sum_{\#J=n} \int_{\Gamma_J} (-1)^{(j, I \cup \{j\})} \xi_{n-2, J - \{j\}} \\
&= \int_{\Gamma} \omega_{n-1}
\end{aligned}$$

donde $\xi_{n-2} = \{\xi_{n-2,I}\}$, $\xi_{n-2,I} \in \mathbf{a}^{n,0}(U_I)$ y $U_I = \bigcap_{i \in I} U_i$. Luego

$$\sum_{\#I=n-1} \int_{\Gamma_I} \omega_{n-2,I} = \int_{\Gamma} \omega_{n-1} \quad (2.8)$$

A continuación trabajemos con $\omega_{n-2} \in C^{n-2}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1})$, así tomemos como en (2.6) la sucesión exacta corta y parte del bicomplejo generada por esta sucesión

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,1} & \xrightarrow{i} & \mathbf{a}_{\bar{\partial}}^{n,1} & \xrightarrow{\bar{\partial}} & \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,2} \rightarrow 0 \\ & & & & & & \\ 0 & \longrightarrow & C^{n-3}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \xrightarrow{i} & C^{n-3}(\mathcal{U}, \mathbf{a}^{n,1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & C^{n-3}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,2}) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} & & \downarrow \delta_{n-2} \\ 0 & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,0}) & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathbf{a}^{n,1}) & \longrightarrow & C^{n-2}(\mathcal{U}, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,2}) \longrightarrow 0 \\ & & \omega_{n-2} & & \omega_{n-2} & & \omega_{n-3} \end{array} \quad (2.9)$$

Así, por el mismo procedimiento que la primera parte encontramos un elemento $\xi_{n-3} = (\xi_{n-3,I}) \in C^{n-3}(U^*, \mathbf{a}^{n,0})$, donde $\#I = n - 2$ tal que :

$$\begin{aligned} \delta_{n-2}(\xi_{n-3}) &= \omega_{n-2} \\ \bar{\partial}(\xi_{n-3}) &= \omega_{n-3}, \end{aligned}$$

donde $\omega_{n-3} = (\omega_{n-3,I}) \in C^{n-3}(U^*, \mathcal{Z}_{\bar{\partial}}^{n,2})$ y

$$\sum_{\#I=n-2} \int_{\Gamma_I} \omega_{n-3,I} = \sum_{\#I=n-1} \int_{\Gamma} \omega_{n-2,I}$$

Procediendo de manera análoga $n - 1$ veces encontramos un elemento $\omega_0 = (\omega_{0,I}) \in C^0(U^*, \mathbf{a}_{\bar{\partial}}^{n,n-1})$ con $\#I = 1$ y tenemos la relación:

$$\int_{S^{2n-1}} \eta_{\omega} = \int_{\partial\Gamma_0} \eta_{\omega} = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \eta_{\omega} = \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \omega_{0,i} = \sum_{\#I=1} \int_{\Gamma_I} \omega_{0,I} = \int_{\Gamma} \omega_{n-1} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_{\Gamma} \omega$$

donde $\omega_{0,i} = \eta_{\omega}$, en U_i , $\Gamma_0 = \{z : |f_j(z)| \leq \epsilon, j = 1, \dots, n\}$ el cual tiene borde orientado $\partial\Gamma_0 = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$ que es homotópico a S^{2n-1} . \square

A partir de la demostración anterior podemos hallar explícitamente la forma η_{ω} .

Ejemplo 2.1. Primero consideremos el caso $n = 2$, esto es;

$$\omega = \frac{g(z)}{f_1(z)f_2(z)} dz_1 \wedge dz_2$$

Por simplicidad nosotros trabajaremos con ω en vez de $\frac{1}{(2\pi i)^2} \omega$. Consideremos $D_i = \{z : f_i(z) = 0\}$, $i = 1, 2$, $U_i = U - D_i$, donde U es una pequeña vecindad del origen. Ahora, si consideramos la siguiente partición de la unidad:

$$\rho_i = \frac{|f_i|^2}{|f_1|^2 + |f_2|^2}, \quad i = 1, 2$$

$$\omega = \rho_1\omega + \rho_2\omega \text{ en } U_1 \cap U_2$$

Luego si definimos $\xi_1 = -\rho_1\omega \in \mathbf{a}^{n,0}(U_1)$, $\xi_0 = \rho_2\omega \in \mathbf{a}^{n,0}(U_2)$ entonces: $\delta(\xi) = (\xi_2|_{U_2} - \xi_1|_{U_1}) = \omega$, como en la demostración del Teorema 2.5 entonces

$$\eta_\omega = \pm \bar{\partial}\rho_i\omega = \pm \bar{\partial}\rho_i \wedge \omega, \text{ en } U_i$$

En el caso general: Nuevamente por simplicidad trabajaremos con ω en vez de $\frac{1}{(2\pi i)^2}\omega$ como efectivamente se hace en la demostración del Teorema anterior. Consideremos la partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\{U_i\}$ de U^* y los abiertos $U_{\{i\}^0} = U - (D_1 \cup \dots \cup \widehat{D_i} \cup \dots \cup D_n)$

$$\rho_i = \frac{|f_i|^2}{|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2}$$

entonces:

$$\begin{aligned} \xi_{\{i\}^0} &= \pm \rho_i\omega \in \mathbf{a}^{n,0}(U_{\{i\}^0}), \\ \omega_{\{i\}^0} &= \pm \bar{\partial}\rho_i\omega \in \mathcal{Z}^{n,1}(U_{\{i\}^0}) \end{aligned}$$

Prosiguiendo para $j \neq i$ tenemos

$$\rho_j\omega_{\{i\}^0} \in \mathbf{a}^{n,1}(U_{\{i,j\}^0}),$$

donde $U_{\{i,j\}^0} = U - (D_1 \cup \dots \cup \widehat{D_i} \cup \dots \cup \widehat{D_j} \cup \dots \cup D_n)$. Así, podemos definir

$$\begin{aligned} \xi_{\{i,j\}^0} &= \pm(\rho_i\omega_{\{j\}^0} - \rho_j\omega_{\{i\}^0}) \in \mathbf{a}^{n,0}(U_{\{i,j\}^0}), \\ \omega_{\{i,j\}^0} &= \pm 2\bar{\partial}\rho_i \wedge \bar{\partial}\rho_j \wedge \omega \in \mathcal{Z}^{n,2}(U_{\{i,j\}^0}) \end{aligned}$$

Procediendo de esta manera $n - 1$ veces tenemos que :

$$\begin{aligned} \eta_\omega &= (n-1)!(-1)^{i-1}\bar{\partial}\rho_i \wedge \dots \wedge \bar{\partial}\rho_{i-1} \wedge \bar{\partial}\rho_{i+1} \wedge \dots \wedge \bar{\partial}\rho_n \wedge \omega \in \mathbf{a}^{n,n-1}(U_i) \\ &= (n-1)!(-1)^{i-1} \bigwedge_{j \neq i} \bar{\partial}\rho_j \wedge \omega. \end{aligned}$$

Si $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $\|f\| = \sum_i |f_i|^2$ tenemos

$$\bar{\partial}\rho_i = \frac{f_i d\bar{f}_i}{\|f\|^2} - \frac{f_i^2 \sum_j f_j d\bar{f}_j}{\|f\|^4}$$

Luego

$$\bigwedge_{j \neq i} \bar{\partial}\rho_j = \frac{f_1 \cdots f_n (-1)^i \left(\sum_k (-1)^k \bar{f}_k \bigwedge_{j \neq k} d\bar{f}_j \right)}{\|f\|^{2n}}$$

Entonces volviendo a considerar el factor $\frac{1}{(2\pi i)^n}$ tenemos

$$\eta_\omega = \frac{((n-1)!(-1)^{i-1} f_1 \cdots f_n (-1)^i (\sum_k (-1)^k \bar{f}_k \bigwedge_{j \neq k} d\bar{f}_j) \wedge \omega}{(2\pi i)^n \|f\|^{2n}} = gF^* \omega_{BM}, \quad (2.10)$$

donde: $F(z) = (z + f(z), z)$ y ω_{BM} es el núcleo de Bochner-Martinelli.

Definición 2.3. El número local de intersección es definido como:

$$(D_1, D_2, \dots, D_n)_{\{0\}} = \text{Res}_{\{0\}} \omega(f_1, \dots, f_n),$$

donde

$$\omega(f_1, \dots, f_n) = \frac{df_1}{f_1} \wedge \frac{df_2}{f_2} \wedge \dots \wedge \frac{df_n}{f_n} = \frac{J(f) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n}$$

y D_i son los divisores de f_i .

Teorema 2.6 (Ley de Transformación). Supongamos que $f = (f_1, \dots, f_n)$ y $g = (g_1, \dots, g_n)$ son mapeos holomorfos $f, g : \bar{U} \rightarrow \mathbb{C}^n$ con $f^{-1}(0) = \{0\} = g^{-1}(0)$. Supongamos además que

$$g(z) = \sum_j a_{ij}(z) f_j(z).$$

Si $A(z) = (a_{ij}(z))$ entonces para $h \in \mathcal{O}(\bar{U})$ tenemos:

$$\text{Res}_{\{0\}} \left(\frac{h dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{f_1 \cdots f_n} \right) = \text{Res}_{\{0\}} \left(\frac{h \det A dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n}{g_1 \cdots g_n} \right).$$

Para la demostración de este teorema vea [11], pag. (657).

Propiedades

1. El número de intersección es lineal en cada divisor D_i , es decir

$$(D_1, D_2, \dots, D_i + D_j, \dots, D_n)_{\{0\}} = (D_1, D_2, \dots, D_i, \dots, D_n)_{\{0\}} + (D_1, D_2, \dots, D_j, \dots, D_n)_{\{0\}}$$

Supongamos que $D_1 = D'_1 + D''_1$, correspondiente a $f_1 = f'_1 f''_1$, claramente

$$\omega(f_1, f_2, \dots, f_n) = \omega(f'_1, f_2, \dots, f_n) + \omega(f''_1, f_2, \dots, f_n)$$

Consideremos el cubrimiento $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$, $U_i = U - D_i$, de $U^* = U - \{0\}$. Si denotamos por $U'_1 = U - D'_1$ y $U''_1 = U - D''_1$ tenemos que tanto $\mathcal{U}' = \{U'_1, U_2, \dots, U_n\}$ como $\mathcal{U}'' = \{U''_1, U_2, \dots, U_n\}$ son cubrimientos de U^* . Sean

$$\omega'(U_1, \dots, U_n), \omega'(U'_1, \dots, U_n) \text{ y } \omega''(U''_1, \dots, U_n)$$

los representantes de $\omega(f_1, \dots, f_n)$, $\omega(f'_1, f_2, \dots, f_n)$ y $\omega(f''_1, f_2, \dots, f_n)$ en $C^{n-1}(\mathcal{U}, \mathbb{Z}^{n,0})$, $C^{n-1}(\mathcal{U}', \mathbb{Z}^{n,0})$ y $C^{n-1}(\mathcal{U}'', \mathbb{Z}^{n,0})$ respectivamente. Entonces :

$$\omega_{n-1}(U_1, \dots, U_n) = \omega'_{n-1}(U'_1, \dots, U_n) + \omega''_{n-1}(U''_1, \dots, U_n)$$

aplicando el isomorfismo de Dolbeault obtenemos:

$$\eta_\omega = \eta_{\omega'} + \eta_{\omega''}$$

como elementos de $H_{\bar{\partial}}^{n,n-1}(U^*)$, es decir que:

$$\eta_\omega = \eta_{\omega'} + \eta_{\omega''} + \bar{\partial}(\xi)$$

el resultado se sigue integrando la ecuación anterior sobre S^{2n-1} .

2. El número local de Intersección coincide con el grado topológico $\deg(f)$ de f . En efecto, consideremos las siguientes variedades:

$$\Pi_\epsilon = \{w : |w| = \epsilon\}$$

$$\Gamma_\epsilon = \{z : |f_i(z)| = \epsilon\}.$$

Entonces $f : \Gamma_\epsilon \rightarrow \Pi_\epsilon$ es sobreyectiva entre superficies compactas. De (2.10) tenemos

$$\begin{aligned} \eta_{\omega(f_1, \dots, f_n)} &= \frac{(n-1)!(-1)^{i-1} f_1 \cdots f_n (-1)^i (\sum_k (-1)^k \bar{f}_k \wedge_{j \neq k} \overline{df_j}) \wedge \omega(f_1, \dots, f_n)}{(2\pi i)^n \|f\|^{2n}} \\ &= f^* \beta \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{(n-1)!(-1)^{i-1} w_1 \cdots w_n (-1)^i (\sum_k (-1)^k \bar{w}_k \wedge_{j \neq k} \overline{dw_j}) \wedge \omega(w_1, \dots, w_n)}{(2\pi i)^n \|w\|^{2n}} \\ &= \omega_{BM}(w) \end{aligned}$$

Como β es un generador de $H_{dR}^{2n-1}(S^{2n-1})$, por definición de grado

$$\deg(f) \int_{\Pi_\epsilon} \beta = \int_{\Gamma_\epsilon} f^* \beta = \int_{\Gamma_\epsilon} \eta_{\omega(f_1, \dots, f_n)} = \text{Res}_{\omega_{\{0\}}}(f_1, \dots, f_n) = (D_1, D_2, \dots, D_n)_{\{0\}}.$$

La tercera igualdad de izquierda a derecha es consecuencia del Teorema 2.5 y la primera igualdad de (2.4).

3. $(D_1, D_2, \dots, D_n)_{\{0\}}$ es un entero y depende solamente del ideal $I(f) = (f_1, \dots, f_n)$. La independencia del anillo es consecuencia del Teorema 2.6 y es un número entero por la Propiedad 2.

La segunda observación nos dice que hay una estrecha relación de la teoría analítica de Residuos con la Geometría diferencial y esto lo obtenemos solamente considerando el caso $g = J(f)$ en la Definición 2.2. A continuación definiremos varios índices variando g y considerando una variedad M compleja de dimensión 2, los cuales nos ayudaran a dar mayor información topológica de la variedad. Comenzaremos a ver el número de intersección para dimensión 2.

Capítulo 3

Número de Milnor

Definición 3.1. Sea $f : (\mathbb{C}^n, p) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$, germen de mapeo holomorfo, tal que $f^{-1}(0) = \{p\}$. El *índice de Poincaré-Hopf* de f en p , denotado por $\mathcal{I}_p(f)$, es el grado del mapeo diferenciable:

$$\frac{f}{|f|} : S_\epsilon^{2n-1}(p) \rightarrow S_1^{2n-1},$$

donde $S_\epsilon^{2n-1}(p) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - p| = \epsilon\}$ y S_1^{2n-1} es la esfera unitaria centrada en el origen.

Proposición 3.1. $\mathcal{I}_p(f)$ es el número de puntos del conjunto $f^{-1}(z_0) \cap B_\epsilon(p)$, donde z_0 es un valor regular de f suficientemente cercano a cero.

Una demostración de esta propiedad puede ser hallada en [18], pag. (38).

Sea M una variedad compleja de dimensión n y v un campo holomorfo en una vecindad de $p \in \mathbb{C}^n$, con singularidad aislada p , dado en coordenadas por $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$. Puesto que v tiene singularidad aislada el \mathbb{C} -espacio vectorial $\frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle}$ tiene dimensión finita ([18], pag. (58)).

Definición 3.2. Definimos $\mu(v, p)$, el *número de Milnor* del campo v en p como

$$\mu(v, p) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle}.$$

Teorema 3.1. Sea $v = (f, g)$ entonces

$$\mu(v, p) = \mathcal{I}_p(v).$$

Para la demostración de otros detalles de este teorema vea [18], pag. (61)

Teorema 3.2 (Parametrización de Puiseux). Si S es un germen de curva irreducible en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$, distinta de los ejes coordenados, con ecuación reducida $f = 0$, entonces existe un germen de aplicación holomorfa

$$\begin{aligned} \theta : (\mathbb{C}, 0) &\rightarrow (\mathbb{C}^2, (0, 0)) \\ z &\mapsto (z^m, z^n u(t)) \end{aligned}$$

donde u es holomorfa con $u(0) \neq 0$ y $m_p(f) = \min(m, n)$ la multiplicidad de f en $(0, 0)$ y la imagen de θ es la curva S . Además, existe un disco $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ tal que $\theta : \mathbb{D} \rightarrow \theta(\mathbb{D})$ es un homeomorfismo y $\theta|_{\mathbb{D} - \{0\}}$ es un encaje holomorfo.

Para la prueba ver [9], pag. (30).

Corolario 3.1. Sea $v = (f, g)$ con las notaciones de arriba tenemos que $\mu(v, p)$, es la multiplicidad de $g \circ \theta(z)$ en $z = 0$.

Prueba: Por la densidad de los valores regulares tenemos que los elementos de la forma $(0, c) \in \mathbb{C}^2$ para $|c|$ suficientemente pequeño es valor regular de v . Tomando un valor regular para v de la forma $w_0 = (0, c)$ próximo del origen, el número de soluciones de la ecuación $v(z) = w_0$ en una bola de radio suficientemente pequeño es por un lado $\mu(v, p)$ (Teorema 3.1) y por otro lado es la multiplicidad de $g \circ \alpha(\theta)$ en $z = 0$. □

Lema 3.1. Sea S un conjunto algebraico real o complejo y x_0 un punto simple de S ó un punto aislado del conjunto singular $Sing(S)$ de S . Entonces para $\epsilon_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que para todo $\epsilon < \epsilon_0$, la esfera S_ϵ centrado en x_0 intercepta a S en un conjunto analítico.

Para la prueba ver [14], pag. (17). Por el Lema 3.1 para ϵ suficientemente pequeño S y S_ϵ^3 son transversales, luego $S \cap S_\epsilon^3$ es una curva cerrada real analítica, la cual denotaremos por ∂S_ϵ , cuando no existe la posibilidad de confusión, simplemente lo denotaremos por ∂S .

Lema 3.2. Sean $S_1 = \{f_1 = 0\}$ y $S_2 = \{f_2 = 0\}$ separatrices sin componentes en común y $v = (f_1, f_2)$. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{df_1}{f_1} = \mathcal{I}_p(v).$$

Prueba: Sea $\theta : \mathbb{D} \rightarrow S_2$ una parametrización de Puiseux de la componente irreducible de S_2 , luego $f_2(\theta(z)) = 0$. Como $\theta^{-1}(S_2 \cap S_\epsilon^3)$ es una curva simple cerrada en $\mathbb{D} - \{0\}$ y, por lo tanto homotópica a la curva e^{it} , $t \in [0, 2\pi]$. Así,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\theta(e^{it})} \frac{df_1 \circ \theta(t)}{f_1 \circ \theta(t)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{df_1}{f_1}$$

coincide con la multiplicidad de $f_1 \circ \theta(z)$, la cual por el Colorario 3.1 es igual a $\mu(v, p)$. □

3.1. Número de intersección en superficies

Definición 3.3. Sea $S \subset M$ una curva compleja (conjunto analítico) compacta y L un fibrado en rectas holomorfo, definimos el *número de intersección* entre S y L por:

$$S.L = \int_M c_1([S]) \wedge c_1(L) \tag{3.1}$$

El número de intersección induce una forma bilineal

$$Div(M) \times Pic(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

En efecto, sea D un divisor, entonces

$$D = \sum_{i=1}^n n_i V_i$$

donde V_j , son conjuntos analíticos irreductibles, luego

$$D.L = \sum_{i=1}^n \int_M n_i c_1([V_i]) \wedge c_1(L) \quad (3.2)$$

Observación 3.1. Dados dos divisores

$$D_1 = \sum_{j=1}^n n_j V_j \quad D_2 = \sum_{i=1}^n m_i U_i$$

tenemos

$$D_1.D_2 := D_1.[D_2] = D_2.[D_1]$$

En efecto: Sean D_1 y D_2 curvas complejas compactas

$$D_1.[D_2] = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \int_M m_j n_i c_1([V_i]) \wedge c_1([V_j]) = D_2.[D_1]$$

Una consecuencia de esta observación es que el número de intersección

$$Div(M) \times Div(M) \rightarrow \mathbb{Z}$$

es bilineal simétrica.

Ahora por el Teorema 1.3, $c_1[D]$ es el dual de Poincaré del ciclo definido por D , es decir

$$\int_M c_1([S]) \wedge \psi = \int_S \psi$$

para toda 1-forma cerrada $\psi \in \mathcal{C}^\infty(M)$. Luego en (3.2) tenemos que:

$$S.L = \int_M c_1([S]) \wedge c_1(L) = \int_S c_1(L).$$

Sea v un campo de vectores holomorfa en X con singularidad aislada p . Tomando un sistema de coordenadas podemos suponer que en $p = (0, 0)$ y $v = (f, g)$. Sea $\theta(z)$ una parametrización de Puiseux para $f^{-1}(0)$.

Proposición 3.2. Sean $S_1 = \{f = 0\}$ y $S_2 = \{g = 0\}$ dos conjuntos analíticos compactas sin componentes en común. Entonces:

$$S_1.S_2 = \sum_{p \in S_1 \cap S_2} \mu(v, p)$$

donde $v = (f, g)$.

Prueba: Sea $\{U_i\}_{i \in I}$ una cobertura localmente finita de M tal que en $U_i \cap S_2 = \{f_i = 0\}$ y $\{\rho_i\}_{i \in I}$ una partici3n de la unidad subordinada a esta cobertura. Ahora $[S_2]$ es definido por el cociclo (f_{ij}) donde $f_{ij} = \frac{f_i}{f_j}$ si $U_{ij} \neq \emptyset$. Como S_1 y S_2 no tienen componentes en com3n, $S_1 \cap S_2 = \{p_1, \dots, p_k\}$ y que para cada $j = 1, \dots, k$, existe un 3nico abierto U_{i_j} tal que $p_j \in U_{i_j}$ y $U_{i_j} \cap U_{i_k} = \emptyset$ si $i \neq k$. De (1.18), tenemos que:

$$\begin{aligned}
c_1(S_2)|_{U_{i_j}} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_k d(\rho_k d \log f_{i_j k}) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_k d(\rho_k d(\log f_{i_j} - \log f_k)) \\
&= -\frac{1}{2\pi i} d(\rho_k d(\log f_{i_j})) - \frac{1}{2\pi i} \sum_{k \neq i_j} d(\rho_k d(\log f_k)) \tag{3.3}
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
\int_{S_1 \cap U_{i_j}} c_1(S_2)|_{U_{i_j}} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cap U_{i_j}} -d(\rho_{i_j} d(\log f_{i_j})) - \sum_{k \neq i_j} d(\rho_k d(\log f_k)) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cap U_{i_j}} -d(\rho_{i_j} d(\log f_{i_j})) - \frac{1}{2\pi i} \int_{S_1 \cap U_{i_j}} d\left(\sum_{k \neq i_j} \rho_k d(\log f_k)\right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1(p_j, \epsilon)} d \log f_{i_j} \tag{3.4}
\end{aligned}$$

donde $S_1(p_j, \epsilon) = S_1 \cap B(p_j, \epsilon)$ tal que $\rho_{i_j} = 1$ en $\overline{B(p_j, \epsilon)} \subset U_{i_j}$ (recuerde que existe un 3nico U_{i_j} tal que $p_j \in U_{i_j}$). El resultado se sigue del Lema 3.2. \square

3.2. Explosión en un punto

Una explosión de \mathbb{C}^2 en $0 \in \mathbb{C}^2$ que es un subconjunto de $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}P(1)$ dado por

$$\mathbb{C}_0^2 = \{(p, [p]) : p \in \mathbb{C}^2, p \neq 0\} \cup (\{0\} \times \mathbb{C}P(1))$$

donde $[p] = \{q \in \mathbb{C}^2 - \{0\} : \exists t \in \mathbb{C}^* \text{ donde } q = tp\}$. El espacio $\mathbb{C}P(1)$ es una variedad compleja de dimensión compleja 1, con el siguiente atlas $((\varphi_1, U_1), (\varphi_2, U_2))$ donde $U_1 = \{[z_1 : z_2] : z_1 \neq 0\}$, $U_2 = \{[z_1 : z_2] : z_2 \neq 0\}$

$$\varphi_1 : U_1 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi_1([z_1 : z_2]) = \frac{z_2}{z_1}$$

$$\varphi_2 : U_2 \rightarrow \mathbb{C}$$

$$\varphi_2([z_1 : z_2]) = \frac{z_1}{z_2}$$

Veamos que \mathbb{C}_0^2 es una superficie compleja de dimensión 2. Para ello consideremos la aplicación

$$\pi : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}P(1)$$

$$\begin{cases} \pi(p, [p]) = [p] \\ \pi(0, [p]) = [p] \end{cases}$$

definimos el atlas $(\pi_0^{-1}(V_1), \psi_1), (\pi_0^{-1}(V_2), \psi_2)$, donde $V_1 = \mathbb{C}P(1) - \{[z_1 : 0]\}$, $V_2 = \mathbb{C}P(1) - \{[0 : z_2]\}$ y

$$\psi_1 : \pi_0^{-1}(V_1) \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{cases} \psi_1((z_1, z_2), [z_1 : z_2]) = (z_1, \frac{z_2}{z_1}) \\ \psi_1((0, 0), [z_1 : z_2]) = (0, \varphi_1([z_1 : z_2])) \end{cases}$$

$$\psi_2 : \pi_0^{-1}(V_2) \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{cases} \psi_2((z_1, z_2), [z_1 : z_2]) = (z_1, \frac{z_1}{z_2}) \\ \psi_2((0, 0), [z_1 : z_2]) = (0, \varphi_2([z_1 : z_2])) \end{cases}$$

En $\pi_0^{-1}(V_1) \cap \pi_0^{-1}(V_2)$ tenemos $\psi_2 \circ \psi_1^{-1}(z_1, z_2) = (\frac{1}{z_1}, z_1 z_2)$. Así, \mathbb{C}_0^2 es una variedad compleja de dimensión compleja 2.

Ahora consideremos

$$\pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$\begin{cases} \pi_0(p, 0_p) = p \\ \pi_0(0, 0_p) = 0 \end{cases}$$

Definición 3.4. Diremos que $(\mathbb{C}_0^2, \mathbb{C}^2, \pi_0)$ es una *explosión* en el punto $p \in M$ en este caso $\pi_0^{-1}(0)$ es llamado *divisor excepcional*.

Los puntos de la explosión en 0 pueden ser representados como en la Figura 3.1

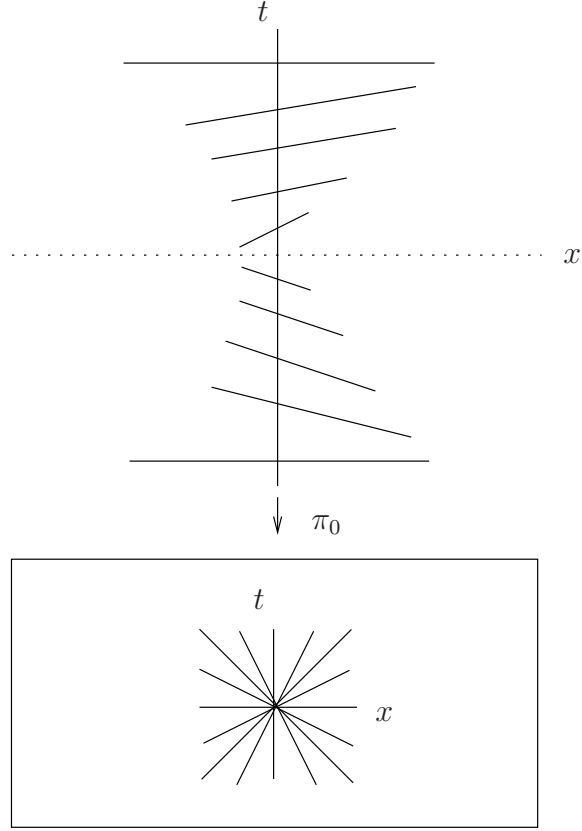


Figura 3.1: Explosión en un punto

Proposición 3.3. *El numero de autointersección de $\mathbb{P} = \pi_0^{-1}(0)$ en \mathbb{C}_0^2 es $\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = -1$*

Prueba: $\mathbb{P}|_{U_1} : f_1 = x = 0$, $\mathbb{P}|_{U_2} : f_2 = y = 0$ (vea Figura 3.2).

En U_{12} tenemos $f_{12} = \frac{f_1}{f_2} = \frac{x}{y} = \frac{1}{t}$ y $f_{21} = t = \frac{1}{s}$. Sea $\zeta_1 : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$, partición de la unidad subordinada a $\{U_1, U_2\}$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2\pi i c_1[\mathbb{P}]|_{U_1} &= d(\zeta_1 d \frac{f_{11}}{f_{11}} + \zeta_2 d \frac{f_{12}}{f_{12}}) = d(\zeta_2 \frac{df_{12}}{f_{12}}) = d(\zeta_2 (d \log \frac{1}{t})) \\ 2\pi i c_1[\mathbb{P}]|_{U_2} &= d(\zeta_1 d \frac{f_{21}}{f_{21}} + \zeta_2 d \frac{f_{22}}{f_{22}}) = d(\zeta_1 \frac{df_{21}}{f_{21}}) = d(\zeta_1 (d \log \frac{1}{s})). \end{aligned}$$

Para integrar sólo necesitamos un abierto U_1 ($\mathbb{P} - \{\infty\} = U_1$)

$$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = \int_{\mathbb{P}} c_1[\mathbb{P}] = \int_{U_1} c_1[\mathbb{P}]|_{U_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{U_1} d(\zeta_2 d \log \frac{1}{t}) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{U_1} d(\zeta_2 (\frac{dt}{t})) \quad (3.5)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_2 - \partial V_1} \zeta_2 \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_2} \frac{dt}{t} = -1. \quad (3.6)$$

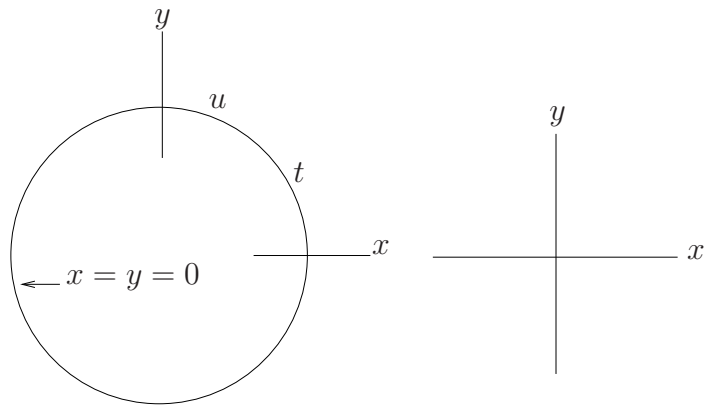


Figura 1.2

Figura 3.2: Coordenadas de \mathbb{C}_0^2 y \mathbb{C}^2

donde

$$\zeta_2 = \begin{cases} 1 & \overline{V}_2 \ni t = \infty \\ 0 & \overline{V}_1 \ni t = 0 \end{cases}$$

□

Capítulo 4

Índice de Baum-Bott

El *índice de Baum-Bott*, nos da importantes resultados, como calcular el número de autointersección del Fibrado Normal de una foliación \mathcal{F} .

Sea \mathcal{F} una foliación sobre una superficie M , denotemos por $Sing(\mathcal{F})$ al conjunto de las singularidades de la foliación y por $N_{\mathcal{F}}$, al fibrado normal.

Cuando $p \in M - Sing(\mathcal{F})$, entonces por un cambio de coordenadas la foliación \mathcal{F} es localmente dada por la 1-forma $\omega = f(x, y)dx$, donde $f \in \mathcal{O}^*(p)$ (esto es consecuencia del Teorema de la Vecindad Tubular), así tenemos que

$$d\omega = \beta \wedge \omega, \text{ donde } \beta = \frac{df}{f} \text{ es una 1-forma holomorfa.} \quad (4.1)$$

En realidad la foliación en este caso sólo es determinado por $\omega = dx$, ya que la función f es no nula.

Si $p \in Sing(\mathcal{F})$, consideremos que la foliación está definida en una vecindad U de p , por $\omega = 0$, donde $\omega = b(x, y)dy - a(x, y)dx$, diferenciando tenemos:

$$d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} \right) dx \wedge dy$$

donde vemos que:

$$d\omega = \beta \wedge \omega, \text{ donde } \beta = \frac{a_x(x, y) + b_y(x, y)}{|a(x, y)|^2 + |b(x, y)|^2} (\bar{b}(x, y)dx + \bar{a}(x, y)dy) \quad (4.2)$$

es una 1-forma diferenciable en $U - \{0\}$ donde U es una vecindad de 0. Sea $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que, $\rho|_{V_1} = 0$ y $\rho|_{U-V} = 1$ donde $0 \in V_1 \subset V \subset U$. Luego, si ponemos

$$\beta = \rho \frac{a_x(x, y) + b_y(x, y)}{|a(x, y)|^2 + |b(x, y)|^2} (\bar{b}(x, y)dx + \bar{a}(x, y)dy)$$

es una (1,0)-forma diferenciable en U , tal que $d\omega = \beta \wedge \omega$, fuera de una vecindad de p .

Repetiendo el mismo argumento podemos encontrar un cubrimiento localmente finito $\{U_j\}_{j \in I}$ de M y una familia de funciones $\rho_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^∞ , con las siguientes propiedades:

i) Si $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, entonces $U_i \cap U_j$ es simplemente conexo, para la prueba vea ver [7], pag. (77).

ii) Sobre cada $U_i \cap U_j$, tenemos

$$\omega_i = g_{ij}\omega_j, \quad (4.3)$$

donde $\{g_{ij}\}$ es el cociclo que define $N_{\mathcal{F}}$.

iii) Podemos encontrar vecindades relativamente compactas $\tilde{V}_j \subset\subset V_j \subset\subset U_j$, tal que $\rho_j|_{\tilde{V}_j} = 0$, $\rho_j|_{U_j - V_j} = 1$; $V_j \cap U_i = \emptyset$ para todo $i \neq j$ y 1-formas holomorfas ω_j , $(1,0)$ -formas β_j :

$$d\omega_j = \beta_j \wedge \omega_j \quad \text{en } U_j - V_j. \quad (4.4)$$

En particular tenemos

$$d\omega_j = \beta_j \wedge \omega_j \quad \text{en } U_i \cap U_j \quad (4.5)$$

Vemos que en $U_i \cap U_j$, ω_j es regular, luego $\omega_j \in \Gamma(U_i \cap U_j, N_{\mathcal{F}}^*)$.

Lema 4.1 (Lema de la división). Sea $\omega = adx + bdy$ una 1-forma holomorfa y

$$\alpha = \alpha_1 dx \wedge d\bar{x} + \alpha_2 dy \wedge d\bar{y} + \alpha_3 d\bar{x} \wedge d\bar{y} + \alpha_4 dx \wedge d\bar{y} + \alpha_5 d\bar{x} \wedge dy + \alpha_6 dx \wedge dy$$

una 2-forma diferenciable tal que $\omega \wedge \alpha = 0$ entonces existe 1-forma diferenciable fuera del origen β , tal que

$$\alpha = \omega \wedge \beta$$

Prueba: Sea

$$\beta = \beta_1 dx + \beta_2 d\bar{x} + \beta_3 dy + \beta_4 d\bar{y},$$

entonces

$$\omega \wedge \beta = a\beta_2 dx \wedge d\bar{x} + b\beta_4 dy \wedge d\bar{y} + a\beta_4 dx \wedge d\bar{y} - b\beta_2 d\bar{x} \wedge dy + (a\beta_3 - b\beta_1) dx \wedge dy \quad (4.6)$$

Ahora como $\omega \wedge \alpha = 0$

$$\omega \wedge \alpha = (a\alpha_2 - b\alpha_4) dx \wedge dy \wedge d\bar{y} + (a\alpha_5 + b\alpha_1) dx \wedge d\bar{x} \wedge dy + a\alpha_3 dx \wedge d\bar{x} \wedge d\bar{y} + b\alpha_3 dx \wedge d\bar{y} \wedge d\bar{y}$$

tenemos que

$$a\alpha_2 = b\alpha_4, \quad a\alpha_5 = -b\alpha_1 \quad \text{y} \quad a\alpha_3 = b\alpha_3 = 0 \quad (4.7)$$

Si

$$\begin{aligned}\beta_1 &= -\frac{\alpha_6 \bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \\ \beta_2 &= \frac{\alpha_6 \bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} \\ \beta_3 &= \frac{\alpha_1 \bar{b} - \alpha_5 \bar{a}}{|a|^2 + |b|^2} \\ \beta_4 &= \frac{\alpha_2 \bar{b} + \alpha_4 \bar{a}}{|a|^2 + |b|^2}\end{aligned}$$

entonces utilizando (4.6) en (4.7) tenemos $\alpha_3 = 0$ y que $\alpha = \omega \wedge \beta$. \square

Lema 4.2 (Segundo lema de la división). Sea $\omega = adx + bdy$ una 1-forma holomorfa y

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_2 d\bar{x} + \alpha_3 d\bar{y} + \alpha_4 dy$$

una 1-forma diferenciable tal que $\omega \wedge \alpha = 0$ entonces existe 1-función diferenciable fuera del origen β , tal que

$$\alpha = g\omega$$

Prueba: Como $\omega \wedge \alpha = 0$

$$\omega \wedge \alpha = a\alpha_2 dx \wedge d\bar{x} + a\alpha_3 dx \wedge d\bar{y} + (a\alpha_4 - b\alpha_1) dx \wedge dy + bdy \wedge \alpha_2 d\bar{x} \wedge dy + b\alpha_3 dy \wedge d\bar{y}$$

tenemos que

$$a\alpha_2 = a\alpha_3 = b\alpha_2 = b\alpha_3 = 0 \quad (4.8)$$

$$a\alpha_4 = b\alpha_1 \quad (4.9)$$

Como existe una vecindad U de p , tal que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ en $U - \{p\}$ de (4.8) tenemos que $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ en $U - \{p\}$, pero como α_2 y α_3 son funciones continuas entonces $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$ en U y

$$\alpha = \alpha_1 dx + \alpha_4 dy$$

Ahora si definimos

$$g = \frac{\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b}}{|a|^2 + |b|^2}$$

por (4.9)

$$g\omega = \left(\frac{\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b}}{|a|^2 + |b|^2} \right) (adx + bdy) = \alpha_1 dx + \alpha_2 dy$$

\square

Lema 4.3. Con las notaciones de arriba tenemos que existen funciones $(1, 0)$ - formas γ_j de clase C^∞ tal que en $U_i \cap U_j$:

$$1) \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} = \beta_i - \beta_j + \gamma_i - \gamma_j,$$

$$2) \gamma_j \wedge \omega_j = 0.$$

En particular :

$$c_1(N_{\mathcal{F}})|_{U_i} = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_j + \gamma_j). \quad (4.10)$$

Prueba:

1) Diferenciando (4.3) y teniendo en cuenta (4.4) conseguimos

$$d\omega_i = dg_{ij} \wedge \omega_j + g_{ij} d\omega_j = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} \wedge \omega_i + \beta_j \wedge \omega_i = \left(\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j\right) \wedge \omega_i = \beta_i \wedge \omega_i$$

así tenemos :

$$\left(\frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j - \beta_i\right) \wedge \omega_i = 0, \quad U_i \cap U_j. \quad (4.11)$$

Sea $h_{ij} = \frac{dg_{ij}}{g_{ij}} + \beta_j - \beta_i$, entonces h_{ij} se anula en \mathcal{F} y como ω_i es regular en $U_i \cap U_j$, tenemos que $(h_{ij}) \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, N\mathcal{F}^*)$ (esto es consecuencia de (4.9)). Como el haz de secciones C^∞ de $N\mathcal{F}^*$ es fino, tenemos que $H^1(X, N\mathcal{F}^*) = 0$ y $h_{ij} = \delta(\gamma)_{ij} = \gamma_i - \gamma_j$, donde $(\gamma)_i \in C^0(\mathcal{U}, N\mathcal{F}^*)$.

2) De 1) tenemos $(\gamma)_i \in C^0(\mathcal{U}, N\mathcal{F}^*)$, es decir, los γ_i son tangentes a la foliación \mathcal{F} entonces $\gamma_j \wedge \omega_j = 0$. De 1) tenemos que $\theta^i - \theta^j = d(\log g_{ij})$, donde $\theta^i = \beta_i + \gamma_i$ y por (1.8) y (1.9) (ó el Teorema 1.4) tenemos el resultado.

□

Definición 4.1. Sea \mathcal{F} una foliación sobre una superficie M , y $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, entonces definimos el *índice de Baum-Bott en p* como :

$$BB(\mathcal{F}, p) = \text{Res}_{(0,0)} \left(\frac{(a_x(x, y) + b_y(x, y))^2}{a(x, y)b(x, y)} dx \wedge dy \right) \quad (4.12)$$

Observación: Vemos que el índice de Baum-Bott es el residuo de la forma:

$$\omega = \frac{g dx \wedge dy}{f_1 f_2} = \frac{(a_x(x, y) + b_y(x, y))^2}{a(x, y)b(x, y)} dx \wedge dy$$

Lema 4.4. Sea \mathcal{F} una foliación sobre una superficie M , $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ y

$$\beta = \frac{a_x(x, y) + b_y(x, y)}{|a(x, y)|^2 + |b(x, y)|^2} (\bar{b}(x, y) dx - \bar{a}(x, y) dy)$$

Entonces :

$$BB(\mathcal{F}, p) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{S_1^3} \beta \wedge d\beta$$

donde S_1^3 es la 3-esfera alrededor de p .

Prueba: Recordemos del Teorema 2.5., que

$$BB(\mathcal{F}, p) = \int_{S^3} \eta_\omega \quad (4.13)$$

y por el Ejemplo 2.1

$$\eta_\omega = \bar{\partial}\rho_1 \wedge \omega$$

$$\text{donde } \rho_1 = \frac{|a|^2}{|a|^2 + |b|^2}$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{x}} = \frac{1}{(|a|^2 + |b|^2)^2} (a|b|^2\bar{a}_{\bar{x}} - b|a|^2\bar{b}_{\bar{x}})$$

$$\frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{y}} = \frac{1}{(|a|^2 + |b|^2)^2} (a|b|^2\bar{a}_{\bar{y}} - b|a|^2\bar{b}_{\bar{y}})$$

Luego

$$\begin{aligned} \eta_\omega &= \left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{x}} + \frac{\partial\rho_1}{\partial\bar{y}} \right) \wedge \omega \\ &= \frac{1}{(|a|^2 + |b|^2)^2} (a\bar{b}\bar{a}_{\bar{x}} - b\bar{a}\bar{b}_{\bar{x}}) \frac{[a_x(x, y) + b_y(x, y)]^2}{a(x, y)b(x, y)} d\bar{x} \wedge dx \wedge dy \\ &\quad + \frac{1}{(|a|^2 + |b|^2)^2} (a\bar{b}\bar{a}_{\bar{y}} - b\bar{a}\bar{b}_{\bar{y}}) \frac{[a_x(x, y) + b_y(x, y)]^2}{a(x, y)b(x, y)} d\bar{y} \wedge dx \wedge dy \end{aligned} \quad (4.14)$$

Si $a_1 = \frac{a_x + b_y}{|a|^2 + |b|^2} \bar{a}$ y $b_1 = \frac{a_x + b_y}{|a|^2 + |b|^2} \bar{b}$, entonces en (7.9)

$$\begin{aligned} \eta_\omega &= \left(b \frac{a_1}{\partial\bar{x}} - a \frac{b_1}{\partial\bar{x}} \right) d\bar{x} \wedge dx \wedge dy + \left(b \frac{a_1}{\partial\bar{y}} - a \frac{b_1}{\partial\bar{y}} \right) d\bar{y} \wedge dx \wedge dy \\ &= (a_1 dx + b_1 dy) \wedge \left(\frac{a_1}{\partial\bar{x}} d\bar{x} \wedge dx + \frac{a_1}{\partial\bar{y}} d\bar{y} \wedge dx + \frac{b_1}{\partial\bar{x}} d\bar{x} \wedge dy + \frac{b_1}{\partial\bar{y}} d\bar{y} \wedge dy \right) \\ &= \beta \wedge d\beta \end{aligned}$$

Luego el resultado se sigue inmediatamente. \square

Teorema 4.1. Sea \mathcal{F} una foliación sobre una superficie compacta M . Entonces:

$$N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} BB(\mathcal{F}, p) \quad (4.15)$$

Prueba: Observe que la suma está bien dada puesto que la superficie es compacta. Sea $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, \dots, p_n\}$, ahora por definición :

$$N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} = \int_M c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge c_1[N_{\mathcal{F}}]$$

Por el Lema 4.3 tenemos que:

$$c_1(N_{\mathcal{F}})|_{U_j} = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_j + \gamma_j)$$

$$N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} = \sum_{j \in A} \int_{U_j} c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge c_1[N_{\mathcal{F}}] + \sum_{j=1}^n \int_{V_j} c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge c_1[N_{\mathcal{F}}], \quad (4.16)$$

donde $A = \{j : d\omega_j = \beta_j \wedge \omega_j, \text{ donde } \beta_j \text{ es holomorfa}\}$. La primera suma de (4.16) es cero. En efecto; para ello por el Lema 4.1 es suficiente probar que $c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge \omega_j = 0$ (pues en este caso existe 1-forma diferenciable α fuera del origen, tal que $c_1[N_{\mathcal{F}}] = \alpha \wedge \omega_j$), ahora:

$$c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge \omega_j = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge \omega_j,$$

Como $j \in A$ se tiene que \mathcal{F} no tiene singularidades en U_j luego $\omega_j = dx$. Del Lema 4.3 $\gamma_j \wedge \omega_j = 0$, entonces $d(\gamma_j) \wedge \omega_j + \gamma_j ddx = 0$ y el otro término es cero, puesto que β_j es holomorfa, digamos $\beta_j = \beta_1 dx + \beta_2 dy$, donde β_1 y β_2 son holomorfas y $d\beta_j \wedge \omega_j = (d\beta_1 \wedge dx + d\beta_2 \wedge dy) \wedge dx = \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial x} dx \wedge dy \right) \wedge dx = 0$. Luego en (4.16):

$$N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} = \sum_{j=1}^n \int_{V_j} c_1[N_{\mathcal{F}}] \wedge c_1[N_{\mathcal{F}}] = \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^n \int_{V_j} d(\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j).$$

Luego

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^n \int_{\partial V_j} (\beta_j + \gamma_j) \wedge d(\beta_j + \gamma_j) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^n \int_{\partial V_j} (\beta_j \wedge d\beta_j + \beta_j \wedge d\gamma_j + \gamma_j \wedge d\beta_j + \gamma_j \wedge d\gamma_j) \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^n \int_{\partial V_j} \beta_j \wedge d\beta_j + d(\beta_j \wedge d\gamma_j) + \gamma_j \wedge d\gamma_j. \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \sum_{j=1}^n \int_{\partial V_j} \beta_j \wedge d\beta_j \end{aligned} \quad (4.17)$$

Puesto que por Stokes la integral de $d(\beta_j \wedge d\gamma_j)$ sobre $\partial V_j \equiv S^3$ es cero y $\gamma_j \wedge d\gamma_j = 0$ ya que de $\omega_j \wedge \gamma_j = 0$ tenemos que existe una función diferenciable g fuera del origen tal que $\gamma_j = g\omega_j$ y de ahí $\gamma_j \wedge d\gamma_j = \gamma_j \wedge (dg \wedge \omega_j + g d\omega_j) = \gamma_j \wedge g d\omega_j = \gamma_j \wedge \beta_j \wedge \omega_j = 0$. Así, por el Lema 4.4, tenemos que:

$$N_{\mathcal{F}} \cdot N_{\mathcal{F}} = \sum_{i=1}^n BB(\mathcal{F}, p_i).$$

□

En el teorema anterior tenemos que la suma índices de Baum-Bott en los puntos singulares es $c_1^2(N_{\mathcal{F}})$ sobre una variedad compacta. Ahora existe una generalización de este índice en el caso que X , no es necesariamente compacta. Para ello consideremos un dominio relativamente compacto Y tal que ∂Y es regular, $\partial Y \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Supongamos que $N_{\mathcal{F}}$ es holomórficamente trivial en una vecindad de ∂Y . Esto implica que existe una 1-forma holomorfa β en una vecindad de ∂Y , tal que $d\omega = \beta \wedge \omega$.

Así definimos :

$$BB(\mathcal{F}, \partial Y) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial Y} \beta \wedge d\beta \quad (4.18)$$

Y con las notaciones dadas anteriormente tenemos un resultado análogo al Teorema 4.1.

Teorema 4.2.

$$BB(\mathcal{F}, \partial Y) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap Y} BB(\mathcal{F}, p) - c_1^2(N_{\mathcal{F}/Y})$$

Prueba: Por definición de número de intersección

$$N_{\mathcal{F}}.N_{\mathcal{F}} = \int_X c_1(N_{\mathcal{F}}) \wedge c_1(N_{\mathcal{F}})$$

por 4.3

$$c_1(N_{\mathcal{F}})|_{U_j} = \frac{1}{2\pi i} d(\beta_j + \gamma_j)$$

Procediendo como en la demostración del Teorema 4.1 tenemos que:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{F}}^2 &= \int_{X-\bar{Y}} c_1(N_{\mathcal{F}}) \wedge c_1(N_{\mathcal{F}}) + \int_{\partial Y} c_1(N_{\mathcal{F}}) \\ &= \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap Y} BB(\mathcal{F}, p) + BB(\mathcal{F}, \partial Y). \end{aligned}$$

□

Capítulo 5

Índice de Camacho - Sad

Sea \mathcal{F} una foliación singular de dimensión 1 en una superficie holomorfa M y sea p una singularidad de \mathcal{F} . Sabemos que \mathcal{F} puede ser representado en una vecindad U de p , por una ecuación $\omega = 0$, donde ω es 1-forma holomorfa en U . Tomando $\varphi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$, un sistema de coordenadas en U tal que $\varphi(p) = 0$, induce en \mathbb{C}^2 la 1-forma holomorfa $(\varphi^{-1})^*\omega$ puede ser expresado como:

$$(\varphi^{-1})^*\omega = adx + bdy$$

donde a y b son funciones holomorfas en $\varphi(U)$ y $a(p) = b(p) = 0$. El campo holomorfo X dual a ω , esto es, $\omega(X) = 0$, está dado en las coordenadas de (x, y) por:

$$\varphi^*X = b\frac{\partial}{\partial x} - a\frac{\partial}{\partial y}$$

Definición 5.1. Una curva analítica S pasando por p es llamado *separatriz* de \mathcal{F} en p si $S - \{p\}$ es \mathcal{F} -invariante, es decir, si $S \setminus \{p\}$ es una unión finita de hojas de \mathcal{F} .

El *Teorema de Camacho Sad* garantiza que toda foliación holomorfa en una superficie admite separatriz.

Lema 5.1. Un conjunto analítico $S = \{f = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} si, y sólo si existe una 2-forma holomorfa θ tal que $df \wedge \omega = f\theta$.

Prueba: Primero trataremos el caso que f es irreducible y luego el caso general:

Caso 1: f es irreducible. En efecto, supongamos que $S = \{f = 0\}$ es una separatriz. Para todo $p \in S$ con $p \neq q$ tenemos

$$T_qS = \{(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2 : \frac{\partial f}{\partial x}(q)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(q)v_2 = 0\} \quad (5.1)$$

Por la \mathcal{F} -invariancia de $S - \{p\}$ se tiene que para todo $q \in S - \{p\}$ se tiene que $(-b(q), a(q)) \in T_qS$, entonces por (5.1)

$$-\frac{\partial f}{\partial x}b + \frac{\partial f}{\partial y}a = 0 \text{ en } S - \{p\}. \quad (5.2)$$

Por otro lado tenemos el producto exterior

$$df \wedge \omega = \left(b \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy = h dx \wedge dy, \quad (5.3)$$

donde $h = b \frac{\partial f}{\partial x} - a \frac{\partial f}{\partial y}$ es evidentemente una función holomorfa. Así, de (5.2) y (5.3) tenemos $df \wedge \omega = h dx \wedge dy = 0$ en $S - \{p\}$ (que por analiticidad esta identidad se extiende a S). Como f es irreducible existe una función holomorfa k en una vecindad de p (Ver [18], pag. (58)) tal que $h = f.k$. De (5.3) para concluir la demostración de la necesidad basta tomar $\theta = k dx \wedge dy$.

Recíprocamente si $df \wedge \omega = f.g_1 dx \wedge dy$, entonces $df \wedge \omega = 0$ sobre S , entonces por (5.3) y (5.2) se tiene $(-b, a) \in T_q S$ para todo $q \in S - \{p\}$, así $f = 0$ es invariante por la foliación fuera de p . Debemos observar que para la demostración de la suficiencia no hemos utilizado la irreducibilidad de f así esta parte es válido para f arbitrario.

Caso 2: f es arbitrario. En efecto, por lo dicho anteriormente sólo resta mostrar la necesidad. Para ello descomponemos f en sus factores irreducibles, digamos, $f = f_1 \dots, f_n$ (pueden repetirse algunos f_i). Ahora, obsérvese por definición de separatriz que f es separatriz si cada f_i lo es. Entonces por el *Caso 1* para cada f_i existe una 2-forma θ_i tal que $df_i \wedge \omega = f_i \theta_i$. Entonces

$$df \wedge \omega = \left(\sum_i f_1 \dots \hat{f}_i \dots f_n df_i \right) \wedge \omega = f(\theta_1 + \dots + \theta_n).$$

□

Definición 5.2. Sea $f \in \mathcal{O}_n$ no nulo, ni una unidad. Diremos que f es *reducida*, si en la descomposición de componentes irreducibles $f = f_1^{m_1} \dots f_n^{m_n}$, tenemos que $m_i = 1$ para todo i .

Lema 5.2. (Teorema de Preparación de Weierstrass) Sea f una función holomorfa definida en un abierto U de \mathbb{C}^2 , tal que $y = 0$, es de orden m de $f(0, y)$, entonces existe un $V \subset U$ abierto y funciones holomorfas u y h tales que:

1. $f(x, y) = u(x, y)h(x, y)$, para todo $(x, y) \in V$ y u no tiene ceros en U .
2. $h(x, y) = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \dots + b_m(x, y)$ y $b_i(0) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Para la prueba vea ver [9], pag. (16).

Observación 5.1. En el caso que $S = \{f = 0\} \neq \{x = 0\}$, donde f es una función holomorfa irreducible de multiplicidad m , tenemos que $(f, \frac{\partial f}{\partial x}) = 1$, En efecto, como $y = 0$ es de orden m de $f(0, y)$, por el Teorema de Weierstrass tenemos que $f = uh$ y $(h, f) = 1$. Ahora como f es irreducible, h es irreducible puesto que $u(0) \neq 0$, así

$$h(x, y) = y^m + b_1(x)y^{m-1} + \dots + b_m(x, y)$$

es irreducible de grado m , así, $(h, \frac{\partial h}{\partial y}) = 1$, ya que $\frac{\partial h}{\partial y}$ tiene grado menor que m y es irreducible. Luego como $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} f + u \frac{\partial h}{\partial y}$ se tiene que $(f, \frac{\partial f}{\partial x}) = 1$.

La siguiente proposición nos da una manera de saber cuando S es una separatriz de \mathcal{F} , que será de gran importancia para poder definir el índice de Camacho-Sad y posteriormente el índice de Seade-Gomez-Verjovski.

Proposición 5.1. Una curva analítica $S = \{f = 0\}$ con f reducida es una separatriz de \mathcal{F} si y sólo si existen gérmenes de funciones holomorfas g, h , una 1-forma holomorfa α que satisfacen la descomposición

$$g\omega = hdf + f\alpha \quad (5.4)$$

tal que $(h, f) = 1, (g, f) = 1$.

Prueba: La suficiencia es inmediata, sólo resta probar la necesidad. Supongamos que $f = f_1 f_2 \cdots f_n$ (donde cada f_i es irreducible) sin pérdida de generalidad podemos suponer que $f_1 = x, f_2 = y$. Veamos que existe un cambio de coordenadas tal que la componentes irreducibles de f no sean los ejes coordenados. En efecto como $f = xy f_3 \cdots f_n$, donde los f_k son irreducibles, tenemos que el primer polinomio homogéneo de no nulo de f_k es de la forma $P_{m_k} = \prod_{i=1}^{k_i} (a_i x + b_i y)^{m_i}$. Sea

$$T : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

una transformación lineal, entonces

$$P_{m_k} \circ T(x, y) = \prod_{i=1}^{k_i} (a_i(ax + by) + b_i(cx + dy))^{m_i} = \prod_{i=1}^{k_i} (x(aa_i + cb_i) + y(ba_i + db_i))^{m_i}$$

Luego podemos encontrar constantes a, b, c, d , tales que $ad - bc \neq 0$ y $P_{m_k} \circ T(x, y)$ no tenga como componentes ninguno de los ejes coordenados para todo $i = 1 \cdots n$, así $f \circ T$ es el cambio de coordenadas, luego podemos suponer que $f = 0 \cap (\neq (\{x = 0\} \cup \{y = 0\})) = \emptyset$.

Afirmamos que $(\frac{\partial f}{\partial x}, f) = 1$ y $(\frac{\partial f}{\partial y}, f) = 1$, de lo contrario existe $f_i, i \in \{1 \cdots n\}$ componente de f , tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = f_i g_1$, luego

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f_i}{\partial x} + f_i A \quad (5.5)$$

donde $(A, f_i) = 1$. Sea $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ una parametrización de f_i , entonces de (5.5) tenemos que f_i divide a $\frac{\partial f_i}{\partial x}$, el cual contradice la Observación 5.1. Análogamente tenemos que $(\frac{\partial f}{\partial x}, f) = 1$.

Como $w = adx + bdy$, entonces por Lema 5.1 se tiene $df \wedge \omega = f g_1 dx \wedge dy$. Así

$$\frac{\partial f}{\partial y} w = \frac{\partial f}{\partial y} adx + \frac{\partial f}{\partial y} bdy = \frac{\partial f}{\partial y} bdx + f g_1 dx + \frac{\partial f}{\partial y} bdy = bdf + f g_1 dx \quad (5.6)$$

En este caso si $g = \frac{\partial f}{\partial y}$, $h = b$ y $\alpha = g_1 dx$, obtenemos (5.4). Ahora $(h, f) = 1$, pues caso contrario existe f_i , $i \in \{1 \cdots n\}$ componente de f , tal que f_i divide h , así en 5.6 tendríamos que

$$\frac{\partial f}{\partial y} a = 0, \text{ en } S_i - \{p\}.$$

pero esto contradice el hecho que $(a, b) = 1$ y $(f, \frac{\partial f}{\partial y}) = 1$. □

A continuación consideremos una separatriz S de la foliación \mathcal{F} y la descomposición dada en (5.3).

Definición 5.3. Sea \mathcal{F} una foliación y S una separatriz \mathcal{F} , el índice de Camacho-Sad de \mathcal{F} con respecto a S en p está dado por:

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha}{h}.$$

Debemos enfatizar que $\partial S = S \cap S_\epsilon^3$. Luego, si $S = \{f_1^{n_1} \cdots f_r^{n_r} = 0\}$ donde los f_i son irreducibles y $\tilde{S} = \{f_1 \cdots f_r = 0\}$ se tiene $\partial S = \partial \tilde{S}$. Así, $CS(\mathcal{F}, S, p) = CS(\mathcal{F}, \tilde{S}, p)$ ¹.

Observación 5.2. El índice de Camacho-Sad, está bien definido. Para ello veremos que este índice es independiente de todos los elementos involucrados en su definición

1. La integral está bien definida puesto que $(h, f) = 1$.
2. No depende de la 1-forma holomorfa $\omega = adx + bdy$ que define la foliación \mathcal{F} . En efecto, supongamos que existe otra 1-forma holomorfa $\omega_1 = a_1 dx + b_1 dy$ tal que $\omega_1 = 0$ define la foliación \mathcal{F} , entonces $\omega \wedge \omega_1 = 0$ y $ab_1 = ba_1$. Como $(a, b) = 1$ y $(a_1, b_1) = 1$, entonces $a_1 = pa$ y $b_1 = qb$, de ahí que $pab = a_1 b = b_1 a = bqa$ luego $ab(p - q) = 0$ entonces como \mathcal{O}_2 es un dominio de integridad tenemos que $p = q$, y como a y b son coprimos se tiene $p(0) \neq 0$. Luego, existe una función holomorfa $k_1 = p = q$ que no se anula en ningún punto de U tal que $\omega_1 = k_1 \omega$, de (5.4), tenemos que:

$$g\omega_1 = k_1(hdf + f\alpha) = k_1 hdf + k_1 f\alpha$$

es una descomposición de ω_1 y claramente $CS(\mathcal{F}, S, p)$ es el mismo.

3. No depende de la expresión de la función irreducible f que define $S = \{f = 0\}$. En efecto, si consideramos que $S = \{f_1 = 0\}$ entonces

$$f = kf_1,$$

donde $k(0) \neq 0$, luego en (5.4) $g\omega = h(kdf_1 + f_1 dk) + kf_1 \alpha = hkdf_1 + f_1(hdk + k\alpha)$. Así,

$$\frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{hdk + k\alpha}{hk} = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dk}{k} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha}{h} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha}{h}$$

¹Esta definición no coincide con la definición dado por Lins-Neto en [13], él define el índice de CS primero para separatrices irreducible (que coincide con nuestra definición) y luego define el índice de CS para separatrices arbitraria como la suma los índices de las componentes irreducible, con esta definición la Proposición 5.2 no sería verdad.

puesto que k es una función holomorfa que no posee ceros en U .

4. No depende de la descomposición dada en (5.4). En efecto, dadas dos descomposiciones asociadas a ω y a f :

$$\begin{aligned} g\omega &= hdf + f\alpha, \\ g_1\omega &= h_1df + f\alpha_1. \end{aligned}$$

Entonces tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{df}{f} &= \frac{g\omega}{fh} - \frac{\alpha}{h} = \frac{g_1\omega}{fh_1} - \frac{\alpha_1}{h_1} \\ \frac{\alpha}{h} - \frac{\alpha_1}{h_1} &= \frac{(h_1g - hg_1)}{fhh_1}\omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

Luego

$$f(\alpha h_1 - \alpha_1 h) = (h_1g - hg_1)\omega$$

de $(a, b) = 1$ y $(b, f) = 1$, $h_1g - hg_1 = fk$, con k holomorfa, reemplazando esto en (5.7) obtenemos

$$\frac{\alpha}{h} - \frac{\alpha_1}{h_1} = \frac{k}{hh_1}\omega.$$

De la \mathcal{F} -invariancia de S se tiene $\frac{\alpha}{h} - \frac{\alpha_1}{h_1} = 0$ en S , por lo que

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha}{h} = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha_1}{h_1}.$$

5. No depende de ∂S . En efecto, sean $\partial S_1 = S \cap S_{e_1}^3$ la curva analítica real y consideremos la variedad con borde R contenido en S cuyo borde es precisamente $\partial S - \partial S_1$. Como $\frac{\eta}{h}$ es holomorfa en R , luego $\frac{\eta}{h}$ es cerrada en R y por Teorema de Stokes

$$\int_{\partial S} \frac{\eta}{h} - \int_{\partial S_1} \frac{\eta}{h} = \int_{\partial R} \frac{\eta}{h} = \int_R d\left(\frac{\eta}{h}\right) = 0.$$

Observación 5.3. El índice de Camacho-Sad puede ser calculado fácilmente si S es una curva regular de una superficie M , invariante por \mathcal{F} . En efecto, como S es una subvariedad existen coordenadas (x, y) tal que $S = \{(x, y) : y = 0\}$ y $\omega = adx + bdy = yqdx + bdy$, donde q holomorfa en una vecindad de 0. Luego en la descomposición (5.4) $f = y$, $k = 1$, $\alpha = qdx$ y $h = bdx$, esto es, $\omega = hdy + y\alpha$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} CS(F, S, p) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma(S)} \frac{q(x, 0)dx}{b(x, 0)} \\ &= \frac{1}{2\pi i} Res_{x=0} \left(\frac{-q(x, 0)}{b(x, 0)} \right) \\ &= Res_{x=0} \left(\frac{\partial \left(\frac{-yq}{b} \right)}{\partial y} \right)_{(x, 0)} \\ &= Res_{x=0} \left(\frac{\partial \left(\frac{-a}{b} \right)}{\partial y} \right)_{(x, 0)}. \end{aligned}$$

Proposición 5.2. Sean S_1, S_2 separatrices de \mathcal{F} en p , sin componentes en común y $S = S_1 \cup S_2$. Entonces :

$$CS(F, S, p) = CS(F, S_1, p) + CS(F, S_2, p) + 2\mu(v, p)$$

donde $v = (f, g)$ con $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ ecuaciones reducidas de S_1 y S_2 .

Prueba: Por hipótesis tenemos que $f = f_1 f_2$ con $(f_1, f_2) = 1$, donde $S = \{f = 0\}$, $S_1 = \{f_1 = 0\}$ y $S_2 = \{f_2 = 0\}$. Consideremos las descomposiciones:

$$k_1 \omega = h_1 df_1 + f_1 \alpha_1 \quad (5.8)$$

$$k_2 \omega = h_2 df_2 + f_2 \alpha_2 \quad (5.9)$$

Observemos que podemos escoger $h_0 = h_1 = h_2$ independiente de $i = 1, 2$ (vea la prueba de la Proposición 5.1). Multiplicando (5.8) por $(f_2 h_2)$ y (5.9) por $(f_1 h_1)$ y sumando tenemos:

$$\begin{aligned} (f_2 h_2 k_1 + f_1 h_1 k_2) \omega &= h_1 h_2 (f_2 df_1 + f_1 df_2) + f_1 f_2 (h_2 \alpha_1 + h_1 \alpha_2) \\ (f_2 h_2 k_1 + f_1 h_1 k_2) \omega &= h_1 h_2 (df) + f (h_2 \alpha_1 + h_1 \alpha_2) \\ gf &= hdf + f\alpha \end{aligned}$$

donde $g = f_2 h_2 k_1 + f_1 h_1 k_2$, $h = h_1 h_2 = h_0^2$ y $\alpha = h_2 \alpha_1 + h_1 \alpha_2$ y $(h, f) = 1$, entonces tenemos una descomposición para f , luego por definición:

$$\begin{aligned} CS(F, S, p) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{h_2 \alpha_1 + h_1 \alpha_2}{h_1 h_2} \\ &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{\alpha_1}{h_1} + \frac{\alpha_2}{h_2} \right) \\ &= CS(F, S_1, p) + CS(F, S_2, p) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{\alpha_1}{h_1} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{\alpha_2}{h_2} \quad (5.10) \end{aligned}$$

Pero :

$$\frac{\alpha_1}{h_1} = \frac{k_1}{h_1 f_1} \omega - \frac{df_1}{f_1}.$$

Integrando sobre ∂S_2 tenemos :

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{\alpha_1}{h_1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \left(\frac{df_1}{f_1} - \frac{k_1}{h_1 f_1} \omega \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{df_1}{f_1},$$

la segunda igualdad es consecuencia de \mathcal{F} -invariancia de S ya que $\omega|_{S_2} = 0$. Así, en (5.10)

$$CS(F, S, p) = CS(F, S_1, p) + CS(F, S_2, p) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_2} \frac{df_1}{f_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{df_2}{f_2}$$

El resultado se sigue del Lema 3.2. □

Definición 5.4. Sea S una curva compacta de una superficie M , tal que $S - \text{Sing}(\mathcal{F})$ es unión hojas de \mathcal{F} . Así definimos:

$$CS(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in \text{Sing}(\mathcal{F})} CS(\mathcal{F}, S, p)$$

Observación 5.4. Dado un cubrimiento localmente finito $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de una variedad. Fijado uno de los abiertos U_{i_0} , tenemos que existen sólo finitos $\{U_i\} \in \mathcal{U}$ tal que $U_i \cap U_{i_0} \neq \emptyset$. Sea V_{i_0} un abierto relativamente compacto en U_{i_0} , esto es, \bar{V}_{i_0} es compacto y $\bar{V}_{i_0} \subset U_{i_0}$. Al cambiar U_{i_j} por $\tilde{U}_{i_j} = U_{i_j} - V_{i_0}$, $j = 1, \dots, r$ en \mathcal{U} aun obtenemos un cubrimiento localmente finito $\tilde{\mathcal{U}}$. Dado una partición de la unidad $\{\rho_i\}_{i \in I}$ subordinada a $\tilde{\mathcal{U}}$ tenemos que

$$\rho_{i_0}|_{\bar{V}_{i_0}} \equiv 1$$

puesto que $V_{i_0} \cap U_i = \emptyset$ para todo $i \neq i_0$.

Teorema 5.1. Sea $S \subset M$ una curva compacta invariante por \mathcal{F} , entonces:

$$CS(S, \mathcal{F}) = S \cdot S$$

Prueba: Sea $\text{Sing}(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y tomemos una cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de M localmente finita, tal que si $i \in I - \{1, \dots, n\}$, podemos considerar $df_i = \omega = 0$, donde f_i es una función holomorfa en U_i y en el caso $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ existe un único abierto $U_{i_k} \ni p_k$, tal que $U_{i_k} \cap U_{i_j} = \emptyset$, si $j \neq k$, donde se tenga la descomposición: $\omega_{i_k} = df_{i_k} + f_{i_k} \eta_{i_k}$. Así, para todo $i \in I$ encontramos una descomposición:

$$k_i \omega_i = df_i + f_i \eta_i \text{ donde } \eta_i = 0, \text{ si } i \in I - \{1, \dots, n\}. \quad (5.11)$$

Ahora si $U_{ij} \neq \emptyset$, existe φ_{ij} y f_{ij} tal que:

$$w_j = \varphi_{ji} w_i \quad (5.12)$$

$$f_i = f_{ij} f_j \quad (5.13)$$

donde φ_{ij} definen el fibrado $N_{\mathcal{F}}$ y f_{ij} el fibrado $[S]$. Tomemos una cobertura $\{\rho_i\}_{i \in I}$, una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Ahora, por (1.18) tenemos:

$$c_1([S])|_{U_i \cap S} = \frac{-1}{2\pi i} \sum_j d(\rho_j d(\log f_{ji})) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_j d\rho_j \wedge d(\log f_{ji}) \quad (5.14)$$

Luego, para calcular la primera clase de Chern del fibrado $[S]$, procedamos a calcular $d(\log(f_{ji}))$, para ello sabemos que en U_i , $k_i \omega_i = h_i df_i + f_i \eta_i$, restringiendo esta identidad a $S|_{U_i} : f_i = 0$ tenemos

$$k_i \omega_i = h_i df_i, \text{ en } U_i \cap S \quad (5.15)$$

Diferenciando (5.11) y utilizando (5.15) logramos

$$dk_i \wedge \omega_i + k_i d\omega_i = dh_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i = (dh_i - \eta_i) \wedge df_i = (dh_i - \eta_i) \wedge \frac{k_i}{h_i} \omega_i.$$

Entonces

$$d\omega_i = \left(\frac{dh_i}{h_i} - \frac{dk_i}{k_i} - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_i = \left(d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_i.$$

Análogamente

$$d\omega_j = \left(d \left(\log \frac{h_j}{k_j} \right) - \frac{\eta_j}{h_j} \right) \wedge \omega_j \quad \text{en } U_j \cap S. \quad (5.16)$$

Por la condición de cociclo de los f_{ij} , tenemos: $df_i = df_{ij}f_j + f_{ij}df_j$, luego en $U_{ij} \cap S$, tenemos

$$df_i = f_{ij}df_j$$

de esta identidad y (5.15) tenemos

$$k_i \omega_i = h_i df_i = h_i \frac{df_j}{f_{ji}}. \quad (5.17)$$

Si reemplazamos (5.15) para el índice j en (5.17) conseguimos:

$$\begin{aligned} k_i \omega_i &= \frac{h_i k_j \omega_j}{f_{ji} h_j} = \frac{h_i k_j (\varphi_{ij} \omega_i)}{f_{ji} h_j} \\ k_i &= \frac{h_i k_j \varphi_{ji}}{f_{ji} h_j} \\ \frac{h_j}{k_j} &= \frac{h_i}{k_i} f_{ij} \varphi_{ji} \end{aligned} \quad (5.18)$$

Así diferenciando (5.12) y reemplazando (5.16):

$$\begin{aligned} d\omega_j &= \left(d\varphi_{ji} \wedge \omega_i + \varphi_{ji} \left(d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \right) \wedge \omega_i \\ &= d\varphi_{ji} \wedge \varphi_{ij} \omega_j + \varphi_{ji} \left(d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_i \\ &= \left(d(\log \varphi_{ji}) + d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_j = \left(d \left(\log \frac{h_j}{k_j} \right) - \frac{\eta_j}{h_j} \right) \wedge \omega_j \end{aligned}$$

Luego en $U_j \cap U_i$:

$$d(\log \varphi_{ji}) = \frac{\eta_i}{h_i} - \frac{\eta_j}{h_j} + d \left(\log \frac{h_j}{k_j} \right) - d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) \quad (5.19)$$

Si en (5.18) tomamos logaritmo, diferenciamos y reemplazamos en (5.19), obtenemos

$$d(\log f_{ij}) = -d(\log \varphi_{ji}) + d \left(\log \frac{h_j}{k_j} \right) - d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) = \frac{\eta_j}{h_j} - \frac{\eta_i}{h_i} \quad (5.20)$$

Así, en (5.14) para cada $k = 1, \dots, n$, tenemos :

$$c_1([S])|_{U_{i_k} \cap S} = \frac{-1}{2\pi i} \sum_j d\rho_j \wedge d(\log f_{j i_k}) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_j d\rho_j \wedge \left(\frac{\eta_j}{h_j} - \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \right).$$

pues $\eta_j = 0$, si $U_{i_k j} \neq \emptyset$ con $i_k \neq j$. Por esta misma razón tenemos que para todo $i \neq I - \{1, \dots, k\}$ tenemos

$$c_1([S])|_{S - (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k})} = 0.$$

Así, tenemos localizado el problema

$$\int_S c_1([S]) = \sum_{j=1}^k \int_{U_{i_j} \cap S} c_1([S])|_{U_{i_j} \cap S}.$$

Por la Observación 5.4 podemos tomar abiertos $V_k \subset U_{i_j}$, $j \in \{1 \dots k\}$, tal que $\rho_{i_k}|_{\bar{V}_k} \equiv 1$. Así,

$$\begin{aligned} \int_{U_{i_k} \cap S} c_1([S]) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{U_{i_k} \cap S} d\rho_{i_k} \wedge \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(U_{i_k} - V_k) \cap S} d\rho_{i_k} \wedge \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(U_{i_k} - V_k) \cap S} d \left(\rho_{i_k} \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_k \cap S} \rho_{i_k} \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V_k \cap S} \frac{\eta_{i_k}}{h_{i_k}} \\ &= CS(\mathcal{F}, S, p_k). \end{aligned}$$

□

Ejemplos

1. La foliación \mathcal{F} inducida en una vecindad de $(0, 0)$ por la 1-forma

$$\omega(x, y) = x(\lambda_1 + yf(x, y))dy - y(\lambda_2 + xg(x, y))dx.$$

admite como separatrices a $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$, sin componentes en común, entonces de la Proposición 5.2 tenemos

$$CS(\mathcal{F}, S_1 \cup S_2, 0) = CS(\mathcal{F}, S_1, 0) + CS(\mathcal{F}, S_2, 0) + 2\mu(v, 0),$$

donde $v(x, y) = (x, y)$ (se sigue inmediatamente que $\mu(v, 0) = 1$). Para la forma ω tenemos la siguiente descomposición $\omega = hdx + x\eta$, donde $h = -y(\lambda_2 + xg)$, $\eta = (\lambda_1 + yf)dy$ asociada a S_1 . Entonces por definición

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{(\lambda_1 + yf)dy}{-y(\lambda_2 + xg)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{dy}{y} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_1} \frac{f}{\lambda_2} dy.$$

como $\partial S_1 = \{(0, y) : |y| = 1\}$

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\lambda_1 i e^{i\theta} d\theta}{\lambda_2 e^{i\theta}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}.$$

Análogamente se prueba que :

$$CS(\mathcal{F}, S_1, 0) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Por lo tanto

$$CS(\mathcal{F}, S_1 \cup S_2, 0) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} + 2.$$

2. Supongamos ahora que la foliación es determinado por la 1-forma $\omega = x^{p+1}dy + (y(1 + \lambda x^p) + f)dx$, donde $p \geq 1$ y f es holomorfa con multiplicidad por lo menos $p + 2$. Claramente $S = \{x = 0\}$ es una separatriz y la descomposición de ω asociada a S :

$$\omega = hdx + x\eta,$$

donde $h = y(1 + \lambda x^p) + f$ y $\eta = x^p dy$, entonces

$$CS(\mathcal{F}, S, 0) = \frac{-1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{x^p dy}{y(1 + \lambda x^p) + f} = 0.$$

Capítulo 6

Índice de Gomez-Seade-Verjovski

6.1. Explosión en un punto

Sean X e Y dos espacios topológicos. A fin de considerar dos copias disjuntas de X e Y consideramos la *unión disjunta*,

$$X \uplus Y = \{(x, 0), (1, y) : x \in X, y \in Y\}.$$

Definiremos en $X \uplus Y$ la siguiente topología, U es abierto en $X \uplus Y$ si, y sólo si, $i_0^{-1}(U)$ es abierto en X y es $i_1^{-1}(U)$ abierto en Y , donde

$$\begin{array}{ccc} i_0 : X & \rightarrow & X \times \{0\} \\ x & \rightarrow & (x, 0) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} i_1 : Y & \rightarrow & \{1\} \times Y \\ y & \rightarrow & (1, y) \end{array}$$

Dados $A \subset X$ y una función $f : A \rightarrow Y$, definamos la relación de equivalencia \sim en $X \uplus Y$ como sigue:

1. $(x, 0) \sim (y, 0)$ si $f(x) = f(y)$ ó $x = y$.
2. $(x, 0) \sim (y, 1)$ si $y = f(x)$
3. $(1, x) \sim (y, 0)$ si $x = f(y)$
4. $(1, x) \sim (1, y)$ si $x = y$.

El espacio topológico cociente de $X \uplus Y$ por la relación de equivalencia \sim se denota por $X \cup_f Y$.

Recordemos que en la Sección 3.2, definimos la explosión en $p \in \mathbb{C}^2$, ahora daremos una definición más general.

Sea M una variedad compleja de dimensión 2 y $p \in M$. Sea $\psi : U \rightarrow \mathbb{C}^2$ una carta holomorfa en p , tal que $\psi(p) = (0, 0) = 0$. Sea además

$$\pi_0 : \mathbb{C}_0^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$$

una explosión en $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ y $\tilde{U} = \pi_0^{-1}(\psi(U)) \subseteq \mathbb{C}_0^2$. Evidentemente la aplicación $f = \pi_0^{-1} \circ \psi : M - \{p\} \rightarrow \tilde{U} - \{\pi_0^{-1}(0)\}$ es un biholomorfismo.

Definición 6.1. Sea $\widetilde{M} = (M - \{p\}) \cup_f \widetilde{U}$ y la proyección canónica $\rho : (M - \{p\}) \uplus \widetilde{U} \rightarrow (M - \{p\}) \cup_f \widetilde{U}$

$$\pi = \pi_p : \widetilde{M} \rightarrow M$$

$$\pi_p([z]) = \begin{cases} z & , \text{ si } [(z,0)] \in \rho(M - \{p\}) \\ \psi^{-1} \circ \pi_0(z) & , \text{ si } [(1,z)] \in \rho(\widetilde{U}). \end{cases}$$

Diremos que $(\widetilde{M}, M, \pi_p)$ es una *explosión* en el punto $p \in M$.

Observación 6.1. \widetilde{M} es una variedad compleja de dimensión 2. Para ello consideraremos $A = U - \{p\}$ e identificaremos $(x, 0) = x$, $(1, y) = y$.

1. \widetilde{M} es un espacio topológico de Hausdorff, en efecto sea $[x] \neq [y]$ donde $x, y \in (M - \{p\}) \uplus \widetilde{U}$

i) Si $x \in (M - \{p\})$, entonces como f es inyectivo tenemos que

$$[x] = \begin{cases} \{x\} & , \text{ si } x \notin A \\ \{f(x), x\} & , \text{ si } x \in A \end{cases} \quad (6.1)$$

i.1) Si $y \in (M - \{p\})$, como M es un espacio topológico de Hausdorff existen vecindades disjuntas V_x y V_y de x e y respectivamente. Entonces por (6.1) tenemos que $\rho^{-1}\rho(V_z) = V_z \cup f(V_z \cap A)$, donde $z = x, y$ la cual implica que $\rho(V_x)$ y $\rho(V_y)$ son abiertos en $(M - \{p\}) \uplus \widetilde{U}$ y, como f es inyectivo $\rho(V_x) \cap \rho(V_y) = \emptyset$.

i.2) Si $y \in \widetilde{U}$, como $[x] \neq [y]$ entonces $y \neq f(x)$ luego podemos tomar vecindades V_x y V_y de x e y respectivamente tal que $f(V_x \cap A) \cap V_y = \emptyset$ de (6.1) tenemos $\rho^{-1}\rho(V_x) = V_x \cup f(V_x \cap A)$ y $\rho^{-1}\rho(V_y) = f^{-1}(V_y) \cup V_y$. Así, $\rho(V_x)$ y $\rho(V_y)$ son abiertos y disjuntos.

ii) Si $x \in \widetilde{U}$

$$[x] = \begin{cases} \{f^{-1}(x), x\} & , \text{ si } x \notin \widetilde{U} - \pi_0^{-1}(p) \\ \{x\} & , \text{ si } x \in \pi_0^{-1}(p) \end{cases} \quad (6.2)$$

donde $f^{-1}(x)$ consta de un sólo elemento puesto que f es inyectiva.

i.1) Si $y \in (M - \{p\})$, como $[x] \neq [y]$ se tiene $x \neq f(y)$ luego podemos tomar vecindades V_x y V_y de x e y respectivamente tal que $f(V_y \cap A) \cap V_x = \emptyset$ entonces de (6.2) se tiene $\rho^{-1}\rho(V_y) = V_y \cup f(V_y \cap A)$ y $\rho^{-1}\rho(V_x) = f^{-1}(V_x) \cup V_x$. Así, $\rho(V_x)$ y $\rho(V_y)$ son abiertos y disjuntos.

i.2) Si $y \in \widetilde{U}$, entonces como \widetilde{U} es un espacio topológico de Hausdorff nuevamente por (6.2), existen vecindades V_x y V_y de x e y respectivamente disjuntas, tales que $\rho^{-1}(\rho(V_z)) = f^{-1}(V_z) \cup V_z$, donde $z = x, y$ entonces $\rho(V_x)$ y $\rho(V_y)$ son abierto y disjuntos.

2. La proyección canónica $\rho : (M - \{p\}) \uplus \widetilde{U} \rightarrow (M - \{p\}) \cup_f \widetilde{U}$ es un homeomorfismo local, esto se sigue inmediatamente por (6.1) y (6.2).

3. Sea $x \in (M - \{p\}) \uplus \tilde{U}$, entonces por 2) existe una vecindad V_x de x tal que $\rho|_{V_x} : V_x \rightarrow M - \{p\} \cup_f \tilde{U}$ es un homeomorfismo sobre su imagen entonces, disminuyendo V_x si es necesario tomemos la carta (V_x, ϕ_x) (puesto que $(M - \{p\}) \uplus \tilde{U}$, es una variedad). Luego,

$$\mathcal{A} = \{(\rho(V_x), \rho^{-1} \circ \phi_x)\}_{x \in M - \{p\} \uplus \tilde{U}}$$

es un atlas. En efecto, sean $(\rho(V_x^1), \rho^{-1} \circ \phi_x^1)$ y $(\rho(V_x^2), \rho^{-1} \circ \phi_x^2) \in \mathcal{A}$, donde V_x^1 y V_x^2 , son vecindades de x y $V_x^1 \cap V_x^2 \neq \emptyset$, como

$$(\rho^{-1} \circ \phi_x^1)^{-1} \circ (\rho^{-1} \circ \phi_x^2) = (\phi_x^1)^{-1} \circ \phi_x^2.$$

es holomorfo, por lo tanto (\tilde{M}, \mathcal{A}) es una variedad compleja.

Observación 6.2.

- i) $\pi : \tilde{M} - \pi^{-1}(p) \rightarrow M - \{p\}$ es un biholomorfismo.
- ii) $\pi^{-1}(p) \simeq \mathbb{C}P(1)$, el cual es llamado *divisor excepcional*.

De estos dos ítem se tiene que el efecto de hacer una explosión consiste en substituir el punto p por una línea proyectiva.

Sea \mathcal{F} una foliación de dimensión 1 en una superficie compleja M de dimensión 2 y $p \in M$. Consideremos la explosión en p , $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ y $P = \pi^{-1}(p)$. Como $\pi : \tilde{M} - P \rightarrow M - \{p\}$ es un biholomorfismo, entonces la foliación $\mathcal{F}|_{M - \{p\}}$ en $M - \{p\}$, puede ser llevada a una foliación en $\tilde{M} - P$, por medio del pullback de π , que será denotado por $\tilde{\mathcal{F}}$.

A continuación veremos como la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ puede ser extendida a todo \tilde{M} , esta extensión es denotada por $\pi^*\mathcal{F}$ y llamada la *transformada estricta* de \mathcal{F} . Para determinar esta foliación es suficiente trabajar en $\tilde{U} = \pi_0^{-1}(U)$, ya que en el complemento tenemos la misma foliación. Ahora como \tilde{U} puede ser recubierto por dos sistemas de coordenadas $(\tilde{\phi}_1, \tilde{U}_1), (\tilde{\phi}_2, \tilde{U}_2)$, veamos como es el pullback de $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$ en estas coordenadas (x, y) con $p = (0, 0)$.

Primero en las coordenadas (x, t) de \tilde{U}_1 tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(x, t) &= a(x, tx)dx + b(x, tx)(tdx + xdt) \\ &= (a(x, tx) + tb(x, tx))dx + xb(x, tx)dt. \end{aligned} \quad (6.3)$$

En las coordenadas (u, y) de \tilde{U}_2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(u, y) &= a(uy, u)(ydu + udy) + b(uy, y)dy \\ &= ya(uy, y)du + (ua(uy, y) + b(uy, y))dy. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Supongamos que el desarrollo de Taylor de a y b son:

$$a = a_m + \cdots + a_j + \cdots, \quad b = b_m + \cdots + b_j \cdots$$

donde $a_m \neq 0$ ó $b_m \neq 0$ y tanto los a_j como los b_j son polinomios homogéneos de grado j , el número $m = m_p(\mathcal{F})$ es llamado multiplicidad algebraica de \mathcal{F} . Consideremos el polinomio

$$P_{m+1}(x, y) = xa_m(x, y) + yb_m(x, y) \quad (6.5)$$

llamado *cono tangente* de la foliación \mathcal{F} .

Definición 6.2. Diremos que p es una *explosión dicrítica* (de \mathcal{F} en el punto p) si $P_{m+1}(x, y) = 0$ y una *explosión no-dicrítica* si $P_{m+1}(x, y) \neq 0$.

Supongamos que p es una explosión dicrítica entonces de (6.3) tenemos que:

$$\begin{aligned} \pi^*\omega(x, t) &= (a_m(x, tx) + tb_m(x, tx)) + (a_{m+1}(x, tx) + tb_{m+1}(x, tx) + \dots)dx + xb(x, tx)dt \\ &= (a_{m+1}(x, tx) + tb_{m+1}(x, tx) + \dots)dx + xb(x, tx)dt \\ &= x^{m+1}[(a_{m+1}(1, t) + tb_{m+1}(1, t) + xA(x, t))dx + (b_m(1, t) + xB(x, t))dt] \end{aligned}$$

define la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ en $\tilde{U}_1 = \{(x, t), x \neq 0\}$, multiplicamos por $1/x^{m+1}$ y obtenemos una forma holomorfa:

$$\tilde{\omega}_1(x, t) = (a_{m+1}(1, t) + tb_{m+1}(1, t) + tA_1(x, t))dx + (b_m(1, t) + xB_1(x, t))dt \quad (6.6)$$

donde A_1 y B_1 son funciones holomorfas en p . Esta forma define $\pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (x, t) . Del mismo modo en las coordenadas (u, y) de \tilde{U}_2 tenemos una fórmula dada por:

$$\tilde{\omega}_2(u, y) = (ua_{m+1}(u, 1) + b_{m+1}(u, 1) + yA_2(u, y))dy + (b_m(u, 1) + yB_2(u, y))du \quad (6.7)$$

que define la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ en las coordenadas (u, y) . Y como en $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$

$$\tilde{\omega}_1 = t^{m+1}\tilde{\omega}_2$$

tenemos que las dos formas definen la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ en el caso dicrítico definida en \tilde{M} .

Observaciones 6.1.

- 1) Como $b_m(1, t)$ no es nulo, puesto que $P_{m+1} \neq 0$, tenemos que $\pi^{-1}(p)$ no es invariante por $\pi^*\mathcal{F}$.
- 2) La singularidades de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$, en las coordenadas (x, t) están determinadas por los puntos en P que satisfacen:

$$\begin{cases} b_m(1, t) = 0 \\ a_{m+1}(1, t) + tb_{m+1}(1, t) = 0 \end{cases}$$

y en las coordenadas (u, y)

$$\begin{cases} b_m(u, 1) = 0 \\ ua_{m+1}(u, 1) + b_{m+1}(u, 1) = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto el conjunto de singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ es finito.

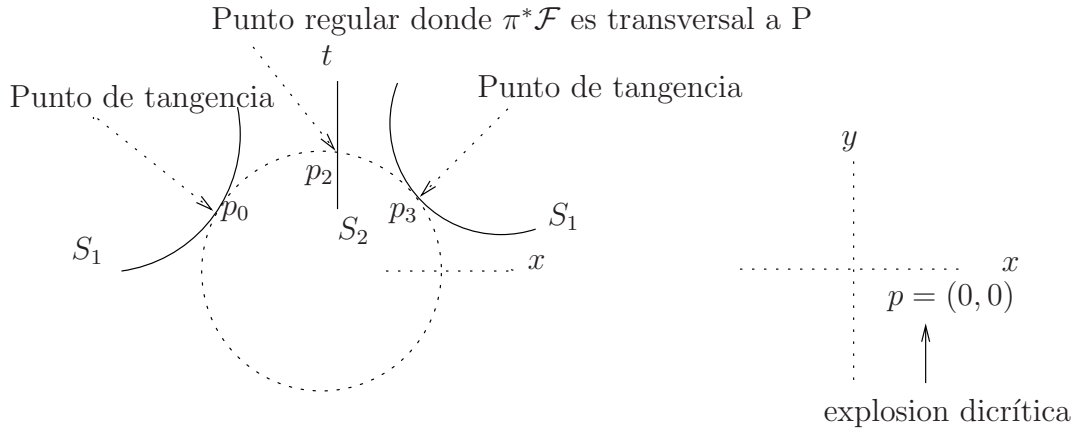


Figura 6.1: Explosión dicrítica

- 3) Si tomamos un punto regular $p \in P$ de $\pi^*\mathcal{F}$, ella es transversal a P , excepto cuando $b_m(1, t) = 0$ o $b_m(u, 1) = 0$. En este caso P es tangente a $\pi^*\mathcal{F}$ en p .

En el caso que p es una explosión no-dicrítica

$$\tilde{\omega}_1(x, t) = (a_m(1, t) + tb_m(1, t) + xA(x, t))dx + x(b_m(1, t) + xB(x, t))dt \quad (6.8)$$

$$\tilde{\omega}_2(u, y) = (ua_m(u, 1) + b_m(u, 1) + yA_2(u, y))dy + y(b_m(u, 1) + yB_2(u, y))du \quad (6.9)$$

y en la intercepción $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$ esas formas están relacionados por

$$\tilde{\omega}_1 = t^m \tilde{\omega}_2$$

Así, tenemos estas formas definen la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ en el caso no-dicrítico.

Observaciones 6.2.

- 1) Las singularidades de la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ en este caso están determinadas por los puntos en $\pi^{-1}(p)$ que satisfacen:

$$a_m(1, t) + tb_m(1, t) = 0 \quad (6.10)$$

$$ua_m(u, 1) + b_m(u, 1) = 0 \quad (6.11)$$

en las coordenadas (x, t) y (u, y) respectivamente, luego las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ son finitas.

- 2) De (6.8) y (6.9), vemos que $x = 0$ y $y = 0$ son invariantes por $\pi^*\mathcal{F}$, es decir, que $\pi^{-1}(p)$ es invariante por la foliación $\pi^*\mathcal{F}$.

Definición 6.3. Sea \mathcal{F} una foliación en una superficie M definida en una vecindad de $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ por una un forma ω y sea $\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ una explosión en p . Entonces definimos $l = l_p(\mathcal{F})$ como el *orden de anulamiento* de la forma $\pi^*\omega$ a lo largo del divisor excepcional $\pi^{-1}(p)$, esto es

$$l = l_p(\mathcal{F}) = \begin{cases} m_p(\mathcal{F}), & \text{si } p \text{ es no-dicrítica} \\ m_p(\mathcal{F}) + 1, & \text{si } p \text{ es dicrítica} \end{cases}$$

Evidentemente, este número depende solo de la foliación y no de la forma que la define.

Proposición 6.1. Sean \mathcal{F} una foliación en una superficie M , $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ una explosión en p y $P = \pi^{-1}(0)$. Entonces

$$N_{\pi^*\mathcal{F}}^* = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes [P]^{\otimes l}.$$

Prueba: La foliación \mathcal{F} está dada por un cubrimiento $M = \cup_i U_i$, formas diferenciales holomorfas ω_i en U_i , que definen localmente la foliación, esto es, $\mathcal{F}|_{U_i} : \omega_i = 0$, y funciones holomorfas no nulas g_{ij} en U_{ij} tal que $\omega_i = g_{ij}\omega_j$ en U_{ij} . Por la Observación 5.4 podemos considerar un cubrimiento $M = \cup_i U_i$ tal existe i_0 y una vecindad abierta V_{i_0} del punto p tal que $\overline{V}_{i_0} \subset U_{i_0}$ y $\overline{V}_{i_0} \cap U_i = \emptyset$ para todo $i \neq i_0$, esto es, dentro de todos los U_i solo hay uno U_{i_0} que contiene al punto p . Simplifiquemos la notación indicando $\omega = \omega_{i_0}$ y $U = U_{i_0}$. Supongamos que en U exista un sistema de coordenadas (x, y) tal que $\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$. Dado la explosión $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ en p tenemos las 1-formas holomorfas:

$$\tilde{\omega}(x, t) = [a(1, t) + tb(1, t)]dx + xb(1, t)dt \quad \text{en } \tilde{U}_1$$

$$\tilde{\omega}(u, y) = [a(u, 1) + ub(u, 1)]dy + yb(u, y)du \quad \text{en } \tilde{U}_2$$

que definen la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ en $M - \pi^{-1}(p)$. En la intersección $\tilde{U}_1 \cap \tilde{U}_2$

$$\tilde{\omega}(x, t) = \frac{1}{x^l} \pi^*(\omega(x, y)) = \frac{1}{x^l} \pi^*(g_{i_0 i_0} \omega(x, y)) = \frac{y^l}{x^l} (g_{i_0 i_0} \circ \pi) \tilde{\omega}(u, y),$$

donde $l = m_p(\mathcal{F}) + 1$ ó $l = m_p(\mathcal{F})$ en caso p sea una explosión dicrítica o no-dicrítica respectivamente. Como $\frac{y^l}{x^l}$ es el cociclo de P $g_{i_0, i_0} \circ \pi$ es el cociclo del fibrado $\pi^* N_{\mathcal{F}}$ tenemos el resultado. \square

Corolario 6.1.

$$l = N_{\pi^*\mathcal{F}}.P.$$

Prueba: Como $N_{\pi^*\mathcal{F}}^* = \pi^*(N_{\mathcal{F}}) \otimes [P]^{\otimes l}$ entonces por (1.8.2)

$$\begin{aligned} N_{\pi^*\mathcal{F}}.P &= \int_P c_1(N_{\pi^*\mathcal{F}}) = - \int_P c_1(N_{\pi^*\mathcal{F}}^*) \\ &= - \int_P c_1(\pi^*(N_{\mathcal{F}})) - \int_P c_1([P]^{\otimes l}) \\ &= - \int_P \pi^* c_1(N_{\mathcal{F}}) - l \int_P c_1([P]) \\ &= - \int_{\pi(P)} c_1(N_{\mathcal{F}}) - l \int_P c_1([P]) \\ &= l \end{aligned} \tag{6.12}$$

$$\tag{6.13}$$

Puesto que $\pi(P) = 0$ y $P.P = -1$.

\square

Sea $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ y ω una 1-forma holomorfa que induce \mathcal{F} en una vecindad U de p , tal que p es una singularidad aislada en U . Ahora si $q \in U - \{p\}$ entonces como en (4.1) existe una vecindad de q y una 1-forma holomorfa α tal que:

$$d\omega = \alpha \wedge \omega.$$

Si α' es otra forma holomorfa tal que $d\omega = \alpha' \wedge \omega$, entonces α y α' coinciden sobre las hojas de \mathcal{F} , puesto que

$$(\alpha - \alpha') \wedge \omega = 0.$$

y por Lema 4.1 existe una función diferenciable g definida fuera de p tal que $\alpha - \alpha' = g\omega$, esto es, $\alpha = \alpha'$ en S . Ahora si S es una separatriz en p y sea la curva $\partial S = S \cap S_\epsilon^3$, donde ϵ es suficientemente pequeño, podemos definir el siguiente índice

Definición 6.4. El *índice de variación* de \mathcal{F} con respecto a S en p es dado por:

$$\text{Var}(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \alpha.$$

Si $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$

$$\text{Var}(\mathcal{F}, S, p) = 0.$$

Observación 6.3. El índice $\text{Var}(\mathcal{F}, S, p)$ no depende de la ecuación local de \mathcal{F} , es decir de ω , de f que define S y de ϵ .

1. No depende de la 1-forma holomorfa $\omega = adx + bdy$ que define la foliación \mathcal{F} . En efecto, si existe otra 1-forma holomorfa $\omega_1 = a_1dx + b_1dy$ tal que $\omega_1 = 0$ define la foliación \mathcal{F} , entonces de la misma manera que se probó en el índice de Camacho-Sad, tenemos que existe una función holomorfa k_1 que no se anula en ningún punto de U tal que $\omega_1 = k_1\omega$.

Entonces:

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= dk_1 \wedge \omega + k_1 d\omega \\ &= dk_1 \wedge \omega + k_1 \alpha \wedge \omega \\ &= \left(\frac{dk_1}{k_1} + \alpha \right) \wedge \omega_1. \end{aligned} \tag{6.14}$$

Como $k_1(0) \neq 0$ tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dk_1}{k_1} + \alpha \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \alpha.$$

Así, $\text{Var}(\mathcal{F}, S, p)$. no depende de ω .

2. No depende de ϵ . Simplemente aplicar el Teorema de Stokes.

A diferencia del índice de Camacho-Sad, $\text{Var}(\mathcal{F}, S, p)$ es aditiva por la siguiente proposición.

Proposición 6.2. Sea S_1 y S_2 dos separatrices en p , sin componentes en común y $S = S_1 \cup S_2$, entonces:

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = Var(\mathcal{F}, S_1, p) + Var(\mathcal{F}, S_2, p)$$

Prueba: El resultado se sigue de la definición. \square

Definición 6.5. Sea $S \subset M$ una curva compacta \mathcal{F} -invariante, definimos la variación de \mathcal{F} sobre S como

$$Var(\mathcal{F}, S) = \sum_{p \in S \cap Sing(\mathcal{F})} Var(\mathcal{F}, S, p).$$

Proposición 6.3. Si S es una curva compacta invariante por la foliación \mathcal{F} , entonces

$$Var(\mathcal{F}, S) = -c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot S$$

Prueba: Sea $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ y tomemos una cobertura $\{U_i\}_{i \in I}$ de M localmente finita, tal que si $i \in I - \{1, \dots, n\}$, $\omega = df_i$, donde f_i es una función holomorfa en U_i que define $S|_{U_i}$. Sean U_{i_k} abiertos conteniendo p_k , tal que $U_{i_k} \cap U_{i_j} = \emptyset$, si $j \neq k$ y se tiene la descomposición: $k_i \omega_i = df_i + f_i \eta_i$. Así para todo $i \in I$ encontramos una descomposición:

$$k_i \omega_i = h_i df_i + f_i \eta_i, \text{ donde } \eta_i = 0, \text{ si } i \in I - \{i_1, \dots, i_n\} \quad (6.15)$$

Ahora si $U_{ij} = U_j \cap U_i \neq \emptyset$, existen funciones holomorfas φ_{ij} y f_{ij} no nulas en ningún punto de U_{ij} tal que:

$$\omega_j = \varphi_{ji} \omega_i \quad (6.16)$$

$$f_i = f_{ij} f_j \quad (6.17)$$

donde φ_{ij} define el fibrado $N_{\mathcal{F}}$ y f_{ij} define el fibrado $[S]$. Tomemos una cobertura $\{\rho_i\}_{i \in I}$, una partición de la unidad subordinada a $\{U_i\}_{i \in I}$. Ahora por (1.18), tenemos:

$$c_1([N_{\mathcal{F}}^*])|_{U_i \cap S} = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d(\rho_{\gamma} d(\log \varphi_{\gamma i})) = \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d\rho_{\gamma} \wedge d(\log \varphi_{\gamma i}) \quad (6.18)$$

Procedamos a calcular $d(\log \varphi_{ji})$, para ello sabemos que en U_i , se tiene la descomposición $k_i \omega_i = h_i df_i + f_i \eta_i$, diferenciando esta igualdad tenemos:

$$dk_i \wedge \omega_i + k_i d\omega_i = dh_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i + f_i d\eta_i. \quad (6.19)$$

Restringiendo (6.15) a $U_i \cap S$ conseguimos

$$k_i \omega_i = h_i df_i \quad (6.20)$$

Ahora restringiendo (6.19) y reemplazando (6.20) en la restricción obtenida tenemos

$$dk_i \wedge \omega_i + k_i d\omega_i = dh_i \wedge df_i + df_i \wedge \eta_i = (dh_i - \eta_i) \wedge df_i = (dh_i - \eta_i) \wedge \frac{k_i}{h_i} \omega_i.$$

Entonces:

$$d\omega_i = \left(\frac{dh_i}{h_i} - \frac{dk_i}{k_i} - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_i = \left(d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i} \right) \wedge \omega_i. \quad (6.21)$$

Así, tenemos que en $U_i \cap S$

$$\nu_i = d \left(\log \frac{h_i}{k_i} \right) - \frac{\eta_i}{h_i}$$

Luego de (5.19) en $U_i \cap U_j \cap S$ se tiene

$$d(\log \varphi_{ij}) = \nu_j - \nu_i.$$

Reemplazando esto en (6.18) para $k = 1, \dots, n$, logramos

$$\begin{aligned} c_1([N_{\mathcal{F}}^*])|_{U_{i_k} \cap S} &= \frac{-1}{2\pi i} \sum_{\gamma} d(\rho_{\gamma}) \wedge (\nu_{i_k} - \nu_{\gamma}) \\ &= \frac{-1}{2\pi i} d(\rho_{i_k}) \wedge \nu_{i_k}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Recordemos que por la Observación 5.4 existen vecindades abiertas relativamente compactas $V_k \subset U_{i_k}$ del punto p_{i_k} tal que $\rho_{i_k}|_{\bar{V}_k} \equiv 1$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_{U_{i_k} \cap S} c_1([N_{\mathcal{F}}^*]) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{U_{i_k} \cap S} d\rho_{i_k} \wedge \nu_{i_k} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{(U_{i_k} - V_k) \cap S} d\rho_{i_k} \wedge \nu_{i_k} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{V_k \cap S} d(\rho_{i_k} \nu_{i_k}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial(V_k \cap S)} \nu_{i_k} = -Var(\mathcal{F}, S, p_k) \end{aligned}$$

Ahora, como

$$\int_S c_1([N_{\mathcal{F}}^*]) = \sum_{i=1}^n \int_{U_{i_k} \cap S} c_1([N_{\mathcal{F}}^*])$$

por lo tanto $Var(\mathcal{F}, S) = -c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot S$. □

Existe otro índice que relaciona los índices definidos anteriormente. Con la finalidad de determinar este índice consideremos $p \in Sing(\mathcal{F})$, $S = \{f = 0\}$ la ecuación reducida de una separatriz de \mathcal{F} en p y $\omega = 0$ una ecuación local de \mathcal{F} . Utilizando nuevamente la Proposición (5.1), para obtener la descomposición $g\omega = hdf + f\alpha$.

Definición 6.6. El *índice Gomez-Seade-Verjovski (GSV)* de \mathcal{F} en p con respecto a S en p , como:

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \right),$$

donde $\partial S = S \cap S_{\epsilon}^3$, con ϵ es suficientemente pequeño.

En la definición a pesar que no hacemos ninguna hipótesis sobre S en la definición de GSV utilizamos la ecuación reducida de S como en la definición del índice de Camacho-Sad. Como $(h, f) = 1$ y $(g, h) = 0$ tenemos que en S , h y g no son idénticamente nulos. Así, sobre ∂S existen $\frac{dh}{h}$ y $\frac{dg}{g}$.

Observación 6.4. El índice GSV no depende de la ecuación local de \mathcal{F} , es decir de ω , de f que define S , de la descomposición tomada y de ϵ . Veamos:

1. No depende de la 1-forma holomorfa $\omega = adx + bdy$ que define la foliación \mathcal{F} . En efecto, supongamos que existe otra 1-forma holomorfa $\omega_1 = a_1dx + b_1dy$ tal que $\omega_1 = 0$ define la foliación \mathcal{F} , entonces de la misma manera como se probó en el índice de Camacho-Sad, tenemos que existe una función holomorfa k_1 que no se anula en ningún punto de U tal que $\omega_1 = k_1\omega$. Utilizando la descomposición $g\omega = hdf + f\alpha$ tenemos que:

$$g\omega_1 = k_1(hdf + f\alpha) = k_1hdf + k_1f\alpha$$

es una descomposición de ω_1 , así:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(k_1h)}{k_1h} - \frac{dg}{g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dk_1}{k_1} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \right)$$

Puesto que k_1 es no nula y holomorfa $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dk_1}{k_1}$ es cero.

2. No depende de la expresión de la función irreducible f que define $S = \{f = 0\}$. En efecto, si consideramos que $S = \{f_1 = 0\}$ entonces existe una función holomorfa no nula k tal que

$$f = kf_1 \text{ donde } k(p) \neq 0,$$

luego utilizando nuevamente la descomposición de la Proposición 5.1

$$g\omega = h(kdf_1 + f_1dk) + kf_1\alpha = hkd f_1 + f_1(hdk + k\alpha)$$

así

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(kh)}{kh} - \frac{dg}{g} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dk}{k} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g} \right)$$

puesto que k es una función holomorfa que no posee en una vecindad de p .

3. No depende de la descomposición dada en la Proposición 5.1. En efecto, consideremos dos descomposiciones asociadas a ω y a f :

$$g\omega = hdf + f\alpha$$

$$g_1\omega = h_1df + f\alpha_1$$

Entonces $\omega = \frac{h}{g}df + \frac{f}{g}\alpha$ y $\omega = \frac{h_1}{g_1}df + \frac{f}{g_1}\alpha$, diferenciando estas expresiones tenemos

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge \left(\frac{g}{h}\right)\omega + d\left(\frac{f}{g}\right) \wedge \eta$$

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) \wedge \omega - \left(\frac{\eta}{h}\right) \wedge \omega = \left(d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \left(\frac{\eta}{h}\right)\right) \wedge \omega.$$

Así por la Definición 6.4, tenemos que $\beta = d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \left(\frac{\eta}{h}\right)$

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h}.$$

Análogamente

$$d\omega = \left(d\left(\frac{h_1}{g_1}\right) \left(\frac{g_1}{h_1}\right) - \left(\frac{\eta_1}{h_1}\right)\right) \wedge \omega.$$

y

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h_1}{g_1}\right) \left(\frac{g_1}{h_1}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta_1}{h_1}.$$

luego

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h_1}{g_1}\right) \left(\frac{g_1}{h_1}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta_1}{h_1}$$

Pero como $CS(\mathcal{F}, S, p)$ no depende de la descomposición

$$CS(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta_1}{h_1}$$

Así

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh_1}{h_1} - \frac{dg_1}{g_1}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha}{h} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\alpha_1}{h_1} &= 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh_1}{h_1} - \frac{dg_1}{g_1}\right) - CS(\mathcal{F}, S, p) + CS(\mathcal{F}, S, p) &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh}{h} - \frac{dg}{g}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dh_1}{h_1} - \frac{dg_1}{g_1}\right)$$

4. No depende de ϵ , resulta del Teorema de Stokes.

Proposición 6.4.

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = GSV(\mathcal{F}, S, p) + CS(\mathcal{F}, S, p)$$

Prueba: Como $g\omega = hdf + f\eta$, tenemos que:

$$\omega = \frac{h}{g}df + \frac{f}{g}\eta \quad (6.23)$$

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge df + d\left(\frac{f}{g}\right) \wedge \eta + \left(\frac{f}{g}\right) d\eta. \quad (6.24)$$

Ya que en S tenemos $f = 0$ entonces $g\omega = hdf$. Luego de (6.24)

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \wedge \left(\frac{g}{h}\right)\omega + d\left(\frac{f}{g}\right) \wedge \eta$$

$$d\omega = d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) \wedge \omega - \left(\frac{\eta}{h}\right) \wedge \omega.$$

Así, $\beta = \left(d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \frac{\eta}{h}\right)$ es como en la Definición 6.4. Por lo tanto

$$Var(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \beta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} d\left(\frac{h}{g}\right) \left(\frac{g}{h}\right) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{\eta}{h} = GSV(\mathcal{F}, S, p) + CS(\mathcal{F}, S, p).$$

□

Proposición 6.5. $GSV(\mathcal{F}, S) = -c_1(N_{\mathcal{F}}^*) \cdot S - S \cdot S$.

Prueba: Se sigue inmediatamente de la Proposición 6.3 y la Proposición 6.4. □

Observación 6.5. Sea p una explosión no-dicrítica de \mathcal{F} y $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ una explosión centrada en el punto p entonces $S = P = \pi^{-1}(p)$ es una separatriz de $\pi^*\mathcal{F}$. La representación local de π en las coordenadas (x, t) es $\pi(x, t) = (x, xt) = (x, y)$ y en las coordenadas (u, y) es $\pi(u, y) = (uy, y) = (x, y)$. Así, la foliación $\pi^*\omega$ es definida por la forma

$$\widetilde{\omega}_1(x, t) = (a_m(1, t) + tb_m(1, t) + xA(x, t))dx + x(b_m(1, t) + xB(x, t))dt$$

la cual es una descomposición de $\widetilde{\omega}_1$ respecto a $S = \{x = 0\}$, por lo tanto $GSV(\pi^*(\mathcal{F}), P, p_i)$ es la multiplicidad de t_i ($p_i = (0, t_i)$) como raíz de $a_m(1, t) + tb_m(1, t)$. Análogamente, en las coordenadas (u, y) la foliación $\pi^*\mathcal{F}$ es definida por

$$\widetilde{\omega}_2(u, y) = (ua_m(u, 1) + b_m(u, 1) + yA_2(u, y))dy + y(b_m(u, 1) + yB_2(u, y))du$$

y $GSV(\pi^*(\mathcal{F}), P, q_i)$ es la multiplicidad de u_i ($q_i = (u_i, 0)$) como raíz del polinomio $ua_m(u, 1) + b_m(u, 1)$. Por lo tanto $GSV(\pi^*(\mathcal{F}), P)$ es el número total de singularidades de $\pi^*(\mathcal{F})$ (contados como su multiplicidad).

Proposición 6.6. Sea S_1 y S_2 dos separatrices en p , sin componentes en común y $S = S_1 \cup S_2$, entonces:

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = GSV(\mathcal{F}, S_1, p) + GSV(\mathcal{F}, S_2, p) - 2\mu(v, p),$$

donde $v = (f, g)$ con $\{f = 0\}$ y $\{g = 0\}$ las ecuaciones reducidas de S_1 y S_2 .

Prueba: Por la Proposición 6.4, Proposición 5.2 y la Proposición 6.2 tenemos:

$$\begin{aligned}
GSV(\mathcal{F}, S, p) &= Var(\mathcal{F}, S, p) - CS(\mathcal{F}, S, p) \\
&= Var(\mathcal{F}, S_1, p) + Var(\mathcal{F}, S_2, p) - CS(\mathcal{F}, S_1, p) - CS(\mathcal{F}, S_2, p) - 2\mu(v, p) \\
&= GSV(\mathcal{F}, S_1, p) + GSV(\mathcal{F}, S_2, p) - 2\mu(v, p).
\end{aligned}$$

□

Sea $S = \{f = 0\}$ una separatriz en $p \in M$ de la foliación \mathcal{F} . Sea (x, y) coordenadas alrededor de p tal que $p = (0, 0)$ es estas coordenadas. Sea

$$f(x, y) = \sum_{k=m}^{\infty} f_k(x, y),$$

el desarrollo de Taylor de f en estas coordenadas, donde los son f_k polinomio homogéneo de grado k . El número

$$m_p(S_1) = m = \min\{k : f_k \equiv 0\}.$$

es llamado *multiplicidad* de S en p . Sea $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$ la explosión centrada en el punto p , las representaciones locales de π son $\pi(x, t) = (x, tx) = (x, y)$ y $\pi(u, y) = (yu, y) = (x, y)$. Así las ecuaciones de $\pi^{-1}(S)$ en las coordenadas (x, t) y (u, y) son:

$$\widetilde{f}(x, tx) = x^m \sum_{k=1}^{\infty} f_k(1, t) \tag{6.25}$$

$$\widetilde{f}(uy, y) = y^m \sum_{k=1}^m f_k(u, 1) \tag{6.26}$$

esto es $\pi^{-1}(S) = P \cup \pi^*(S)$, donde $P = \pi^{-1}(p)$ y $\pi^*S = \overline{\pi^{-1}(S - \{p\})}$ es llamado la *transformada estricta* de S . Así podemos observar:

1. $\pi^*S \cap \pi^{-1}(p) = \{t : f_m(1, t) = 0\}$ en las coordenadas (x, t) y posiblemente $(u, y) = (0, 0)$, si $f_m(0, 1) = 0$.
2. Si S es lisa π^*S y $\pi^{-1}(p)$ son transversales.
3. Si \widetilde{S} es una curva analítica distinta de $\pi^{-1}(p) = P$, pasando por $q \in P$, entonces $\pi(\widetilde{S})$ es una curva holomorfa analítica pasando por p , puesto que π es una aplicación propia (Teorema de la Aplicación Propia, [12], pag. 162).

Supongamos que S es irreducible, denotemos por $m = m_p(S)$ y $l = m_p(\mathcal{F}) + 1$ ó $l = m_p(\mathcal{F})$ en caso p sea una explosión dicrítica o no-dicrítica respectivamente. Entonces:

$$\pi^*\omega = x^l \widetilde{\omega}$$

$$\pi^*f = x^m \widetilde{f}$$

donde $\tilde{S} = \pi^*(S) = \{\tilde{f} = 0\}$ es una separatriz de $\pi^*\mathcal{F}$. Consideremos una descomposición asociada a ω y a f y $q \in \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F})$

$$g\omega = hdf + f\alpha, \quad (6.27)$$

ahora veamos las relaciones de los diferentes índices en M y \tilde{M} .

1. En (6.27) aplicando pullback tenemos:

$$\begin{aligned} (g \circ \pi)\pi^*\omega &= (h \circ \pi)\pi^*df_1 + (f \circ \pi)\pi^*\alpha \\ &= (h \circ \pi)mx^{m-1}dx\tilde{f} + (h \circ \pi)x^m d\tilde{f} + (f \circ \pi)\pi^*\alpha \\ g_0\tilde{\omega} &= h_0d\tilde{f} + \tilde{f}\alpha_0 \end{aligned} \quad (6.28)$$

es una descomposición asociada a $\pi^*\mathcal{F}$ y a \tilde{f} donde $g_0 = (g \circ \pi)x^l$, $h = (h \circ \pi)x^m$ y $\alpha_0 = (h \circ \pi)mx^{m-1}dx + x^m\pi^*\alpha$. Luego por definición :

$$\begin{aligned} CS(\pi^*F, \tilde{S}, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{S}} \frac{\alpha_o}{h_o} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{S}} \frac{\pi^*\alpha}{\pi^*h} + m \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dx}{x} \\ CS(\pi^*F, \tilde{S}, q) &= CS(\mathcal{F}, \tilde{S}, p) + m(\pi^*S \cdot P)_q = CS(\mathcal{F}, \tilde{S}, p) + m^2 \end{aligned} \quad (6.29)$$

2.

$$\begin{aligned} GSV(\pi^*F, \tilde{S}, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{S}} \frac{(g \circ \pi) x^l}{(h \circ \pi) x^m} d\left(\frac{hx^m}{gx^l}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{S}} \frac{\tilde{g} \circ \pi}{\tilde{g} \circ \pi} d\left(\frac{\tilde{k}}{\tilde{g}}\right) + (m-l) \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dx}{x} \\ GSV(\pi^*F, \tilde{S}, q) &= GSV(\mathcal{F}, \tilde{S}, p) + m(m-l) \end{aligned} \quad (6.30)$$

3. Supongamos que

$$d\omega = \beta \wedge \omega$$

entonces

$$\begin{aligned} \pi^*(d\omega) &= \pi^*(\beta) \wedge \pi^*\omega \\ d(\pi^*\omega) &= \pi^*(\beta) \wedge x^l\tilde{\omega} \\ d(x^l\tilde{\omega}) &= \pi^*(\beta) \wedge x^l\tilde{\omega} \end{aligned} \quad (6.31)$$

Entonces:

$$d\tilde{\omega} = \left(\pi^*\beta - \frac{d(x^l)}{x^l}\right) \wedge \tilde{\omega}$$

entonces:

$$\begin{aligned} Var(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}, q) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\tilde{S}} \left(\pi^*\beta - \frac{d(x^l)}{x^l}\right) \\ Var(q, \mathcal{F}, \tilde{S}, q) &= Var(\mathcal{F}, S, p) - lm \end{aligned} \quad (6.32)$$

Recordemos que si S es una separatriz lisa en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, entonces en coordenadas locales (x, y) , podemos considerar $p = (0, 0)$ y $S = \{y = 0\}$ y la foliación \mathcal{F} es inducida por la 1-forma holomorfa:

$$\omega(x, y) = yf(x, y)dx + g(x, y)dy \quad (6.33)$$

donde $g(0, 0) = 0$ y $g(x, 0) \not\equiv 0$.

Definición 6.7 (Multiplicidad a lo largo de una separatriz). Sea S una separatriz lisa en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Entonces la *multiplicidad* de \mathcal{F} en p a lo largo de la separatriz S , denotada por $m_p(\mathcal{F}, S)$ es la multiplicidad de $g(x, 0)$ en $x = 0$ (donde $g(x, y)$ es la función dada en (6.33)).

Observación 6.6. Comparando la descomposición dada Proposición 5.1 con (6.33) tenemos que $g = 1$ en (5.4). Luego de (6.33) tenemos:

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}, S, p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{dg}{g} \\ &= I(\{g(x, y) = 0\}, S = \{y = 0\}) \\ &= \text{ord}_{x=0}(g(x, 0)) \\ &= m_p(\mathcal{F}, S) \end{aligned}$$

Proposición 6.7. Con las notaciones de arriba y π una explosión en p y $q = \pi^*S \cap S$, entonces

$$m_q(\pi^*\mathcal{F}, \pi^*S) = \begin{cases} m_p(\mathcal{F}, S) - (m_p(\mathcal{F}) - 1) & , \text{ si } p \text{ es no-dicrítica} \\ m_p(\mathcal{F}, S) - m_p(\mathcal{F}) & , \text{ si } p \text{ es dicrítica} \end{cases}$$

Prueba: Se sigue inmediatamente de la Observación 6.6 y de (6.30). \square

Sea π una sucesión finita de explosiones en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, $\pi_1 : M_1 \rightarrow M$ la primera explosión de la sucesión y denotemos por $P_1^{(1)} = \pi^{-1}(p)$, $D_1 = P_1^{(1)}$ y $\mathcal{F}_1 = \pi^*\mathcal{F}$. Ahora, inductivamente, dada una explosión $\pi_n : M_n \rightarrow M_{n-1}$ en $p_n \in D_{n-1} \subset D_n$, definimos:

$$\begin{cases} P_n^{(n)} &= \pi_n^{-1}(p_{n-1}) \\ P_k^{(n)} &= \pi_n^{-1}P_k^{(n-1)} \quad \text{si } k = 1, \dots, n-1 \end{cases},$$

donde $p_0 = p$ y $M_0 = M$ y ponemos $D_n = P_1^{(n)} \cup \dots \cup P_n^{(n)}$, $\mathcal{F}_n = \pi^*\mathcal{F}_{n-1}$.

Definición 6.8. Definimos a cada recta proyectiva un peso ρ , haciendo $\rho(P_1^{(1)}) = 1$ y si $n > 1$,

$$\begin{cases} \rho(P_j^{(n)}) &= \rho(P_n^{(n-1)}), \text{ si } 1 \leq j < n, \\ \rho(P_n^{(n)}) &= \sum_{p_{n-1} \in P_k^{(n-1)}} \rho(P_k^{(n-1)}) \end{cases}$$

Proposición 6.8. Si $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es una explosión no-dicrítica, entonces:

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = \sum_{q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_n)} \rho(P_j^{(n)}) m_q^*(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)})$$

donde

$$m_q^*(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) = \begin{cases} m_q(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) - 1 & , \text{ si } q \text{ es una esquina} \\ m_q(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) & , \text{ si } q \text{ no es una esquina} \end{cases}$$

Ver [17] pag. 147.

Definición 6.9. Decimos que p es una *singularidad reducida* de \mathcal{F} , si alguna de las siguientes situaciones ocurre:

1. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$ (*Singularidad simple*)
2. $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 = 0$ ó $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ (*Silla nodo*)

Veremos a continuación mostraremos que por medio de un número finito de explosiones podemos llegar a singularidades reducidas.

Supongamos que $m_p(\mathcal{F}) = 1$, por la Forma Canónica de Jordan, la matriz asociada a la parte lineal es una de las siguientes:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; & (2) \quad & \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}^*; \\ (3) \quad & \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{C}^*; & (4) \quad & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6.34}$$

Analicemos las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$.

1. Si en (2) tenemos que $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ la parte lineal de ω en (2), está dada por: $\omega_1 = \lambda y dx - \lambda x dy$, y por (6.5), $P_2(x, y) = x(\lambda y) - y(\lambda x) = 0$, entonces $(0, 0)$ es una explosión dicrítica. Por (6.6)

$$\tilde{w}_1(x, t) = (a_2(1, t) + t b_2(1, t) + x A_1(x, t)) dx + (b_1(1, t) + x B_1(x, t)) dt$$

luego $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) = \emptyset$, puesto que $b_1(1, t) = -\lambda \neq 0$, en las coordenadas (x, t) .

Análogamente, por (6.7)

$$\tilde{w}_2(u, y) = (u a_2(u, 1) + b_2(u, 1) + y A_2(u, y)) dy + (a_1(u, 1) + y B_2(u, y)) du.$$

Nuevamente $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) = \emptyset$, puesto que $a_1(u, 1) = \lambda \neq 0$, en las coordenadas (u, y) .

Por lo tanto, $\pi^*\mathcal{F}$ es una foliación no singular.

2. La parte lineal de ω en (2): $\lambda_2 y dx - \lambda_1 x dy$, donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$. En este caso como $P_2(x, y) = (\lambda_2 - \lambda_1)xy \neq 0$, $(0, 0)$ es una explosión no-dicrítica. Entonces por (6.8)

$$\tilde{w}_1(x, t) = (t(\lambda_2 - \lambda_1) + xA(x, t))dx + (-x\lambda_1 + xB(x, t))dt$$

luego $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$ en las coordenadas (x, t) y los autovalores de la parte lineal son λ_1 y $(\lambda_2 - \lambda_1)$. Análogamente, por (6.9)

$$\tilde{w}_2(u, y) = (u(\lambda_1 - \lambda_2) + yA_2(u, y))dy + (\lambda_2 y + yB_2(u, y))du$$

luego $\text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) = \{(0, 0)\}$ en las coordenadas (u, y) y los autovalores de la parte lineal son $(\lambda_1 - \lambda_2)$ y λ_2 . De aquí tenemos que:

- a) Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Q}^+$ entonces la singularidad está reducida
- b) Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{Q}^+ - \left(\mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}\right)$ entonces después de realizar un número finito de explosiones obtenemos que $\lambda_1 = \lambda_2$, así estamos en el caso 1.) (explosión dicrítica) que hemos analizado, por lo tanto una explosión más produce una foliación regular ó $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Q}^+$.
- c) Si $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \in \mathbb{N} \cup \frac{1}{\mathbb{N}}$, realizando un número finito de explosiones obtenemos una singularidad radial (y por lo tanto dicrítica) luego una explosión mas hace la foliación regular. También puede suceder que después un número finito de explosiones obtengamos una singularidad del tipo (3) y una explosión adicional produce una silla nodo.

3. La forma $\omega = (\lambda y + A(x, y))dx - (\lambda x + y + B(x, y))dy$, con parte lineal (3).

Realizamos una explosión y tenemos en las coordenadas (x, t) :

$$\tilde{w}(x, t) = (t^2 - t\tilde{B}(x, xt) + \tilde{A}(x, xt))dx - (\lambda x + xt + x\tilde{B}(x, xt))dt$$

donde $\tilde{A}(x, t) = \frac{A(x, t)}{x}$ y $\tilde{B}(x, t) = \frac{B(x, t)}{x}$. Además, si $A(x, t) = a_{1,1}xy + a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + \dots$, tenemos que la parte lineal de \tilde{w} es $a_{2,0}x dx - \lambda x dt$. En las coordenadas (u, y)

$$\tilde{w}(u, y) = (-1 + u\tilde{A}(uy, y) - \tilde{B}(uy, y))dy + (\lambda y + \tilde{A}(uy, y))du,$$

donde $\tilde{A}(u, y) = \frac{A(u, y)}{y}$ y $\tilde{B}(u, y) = \frac{B(u, y)}{y}$. Por lo tanto $\pi^*(\mathcal{F})$ posee una única singularidad de tipo silla nodo (1).

Para el caso nilpotente (4) necesitaremos los siguientes resultados:

Teorema 6.1. Si p es una singularidad de la foliación \mathcal{F} , entonces tenemos

$$\mu_p(\mathcal{F}) = l^2 - (l + 1) + \sum_{c \in \pi^{-1}(0)} \mu_c(\pi^*(\mathcal{F})),$$

donde $l = m_p(\mathcal{F})$ y $l = m_p(\mathcal{F}) + 1$ en el caso que p sea no-dicrítico y dicrítico respectivamente.

Una demostración detallada de este Teorema se encuentra en [3] pag. 31-32, y una demostración directa se encuentra en [2] pag. 26.

Observación 6.7. Del Teorema 6.1, tenemos que si p es no-dicrítico y $m_p(\mathcal{F}) \geq 2$ (ó dicrítico y $m_p(\mathcal{F}) \geq 1$), entonces para todo $c \in \pi^{-1}(0)$

$$m_c(\pi^*(\mathcal{F})) < \mu_c(\pi^*(\mathcal{F})) < \mu_p(\mathcal{F})$$

para la primera desigualdad vea [9], pag. 54.

Lema 6.1. Sea $\omega = adx + bdy$ un germen de 1-forma holomorfa no-dicrítico. Si en un punto $c \in \pi_1^{-1}(0)$, la multiplicidad del cono tangente $P_{\nu+1}$ en c es 1, entonces la parte lineal $\tilde{\omega}$ ($\tilde{\omega}$ define la foliación en una vecindad de $\pi_1^{-1}(0)$) tiene un autovalor no nulo correspondiente al autoespacio tangente al divisor.

Prueba: Supongamos $c = [\frac{\partial}{\partial x}]$ y sea ν la multiplicidad de ω entonces el cono tangente es de la forma

$$P_{\nu+1}(x, y) = xa_\nu + yb_\nu = y \prod_{j=1}^k (\alpha_j x + \beta_j y)^{r_j}$$

donde $\alpha = \prod_{j=1}^k \alpha_j^{r_j} \neq 0$ (caso contrario la multiplicidad de $P_{\nu+1}$ en c no sería 1) es un valor propio de $\tilde{\omega}_c = (P_{\nu+1}(1, t) + xA(x, t))dx + xB(x, t)dt$. \square

4. La forma está dado por

$$A(x, y)dx + (y + B(x, y))dy,$$

donde A y B son funciones holomorfas de grado mayor o igual a dos. Vemos que en este caso la parte lineal está dada por:

$$ydy,$$

y el cono tangente está dado por el polinomio

$$P_2(x, y) = y^2 \neq 0, \tag{6.35}$$

luego $p = (0, 0)$ es una explosión no-dicrítica, (en este caso diremos que $(0, 0) \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, es una singularidad nilpotente). Realizando una explosión en el punto p , tenemos nuevas coordenadas (x, t) y (u, y) , con $y = xt$ y $x = uy$. Como sabemos por (6.10) y (6.11), las singularidades de $\pi^*(\mathcal{F})$, están dadas por:

$$\begin{aligned} P_2(1, t) &= 0 = t^2, \\ P_2(u, 1) &= 0 = 1, \end{aligned}$$

luego existe una única singularidad $q = (0, 0)$, en las coordenadas (x, t) , como podemos en la Figura 6.2.

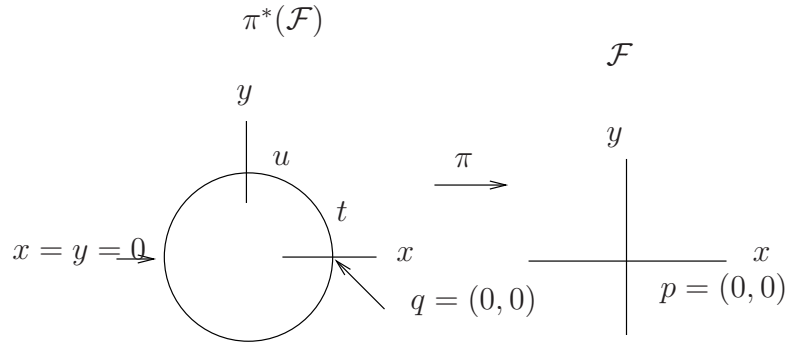


Figura 6.2: Primera explosión

La forma que define la foliación $\pi^*(\mathcal{F})$, en las coordenadas (x, t) , está dada por:

$$\tilde{w}(x, t) = (t^2 + xA_1(x, t))dx + (xt + x^2B_1(x, t))dt, \quad (6.36)$$

donde

$$B_1(x, t) = \frac{B(x, tx)}{x^2}$$

$$A_1(x, t) = \frac{A(x, tx) + tB(x, tx)}{x^2} = a_{2,0} + px + qt + A_2(x, t),$$

siendo la multiplicidad de A_2 es mayor ó igual a dos, puesto que si $B(x, y) = b_{2,0}x^2 + b_{0,2}y^2 + b_{1,1}xy + B_3(x, y)$ y $A(x, y) = a_{2,0}x^2 + a_{0,2}y^2 + a_{1,1}xy + a_{3,0}x^3 + A_3(x, y)$ donde B_3 y A_3 son funciones holomorfas de multiplicidad mayor o igual a 3, entonces: $A_1(x, t) = a_{2,0} + a_{3,0}x + (a_{1,1} + b_{2,0})t + B_2(x, t)$, donde $B_2(x, t)$ es una función holomorfa de multiplicidad mayor o igual a 2. Entonces en (6.36) tenemos;

$$\tilde{w}(x, t) = (t^2 + x(a_{2,0} + (a_{1,1} + b_{2,0})t + a_{3,0}x + B_2(x, t)))dx + (xt + x^2B_1(x, t))dt \quad (6.37)$$

donde

- i) $a_{2,0} \neq 0$, en este caso en (6.37) tenemos que $q = (0, 0)$ es una singularidad nilpotente y su cono tangente es

$$P_2(x, t) = a_{2,0}x^2$$

entonces realizando una nueva explosión $x = wt$ y $t = vx$, las singularidades de la forma que induce la foliación están dadas por:

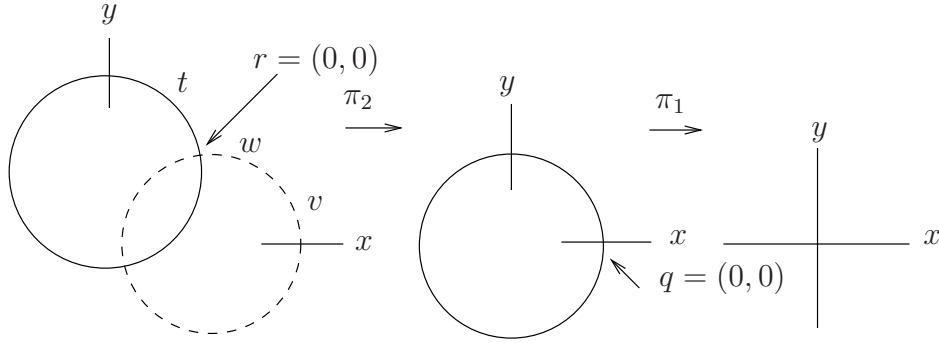
$$P_2(1, v) = 0 = 1,$$

$$P_2(w, 1) = 0 = w^2,$$

entonces existe una única singularidad $r = (0, 0)$, en las coordenadas (w, t) , como lo podemos apreciar en el siguiente gráfico:

La forma que induce la foliación en las coordenadas (w, t) está dada por:

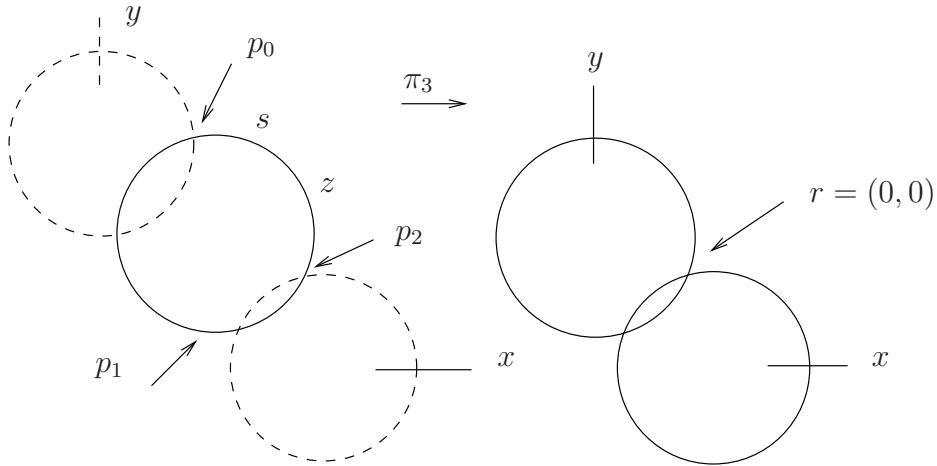
$$\tilde{w}(w, t) = (t^2 + a_{2,0}wt + B_2(w, t))dw + (2wt + w^2a_{2,0} + A_2(w, t))dt \quad (6.38)$$



donde A_2 y B_2 son funciones holomorfas de multiplicidad mayor o igual a 3. Puesto que no hay parte lineal en (6.38) entonces su cono tangente es

$$P_3(w, t) = tw(-3t + 2b_{2,0}w).$$

Luego, del Lema 6.1 que todas sus singularidades después de una explosión tendrán un autovalor no nulo y así recaen en uno de los tres casos anteriores.



ii) $a_{2,0} = 0$ en este caso tenemos en (6.37):

$$\tilde{w}(x, t) = (t^2 + (a_{1,1} + b_{2,0})xt + a_{3,0}x^2 + B_2(x, t))dx + (xt + x^2 B_1(x, t))dt$$

y el cono tangente en este caso es

$$P_2(x, t) = x(2t^2 + (a_{1,1} + 2b_{2,0})xt + a_{3,0}x^2) = 2x(t - c_1x)(t - c_2x)$$

$$\text{donde } c_1, c_2 = \frac{-\left(\frac{a_{1,1}+2b_{2,0}}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\left(\frac{a_{1,1}+2b_{2,0}}{2}\right)^2 - 4a_{3,0}\right)}}{2}.$$

Ahora veamos los siguientes casos respecto a las raíces del cono tangente

- 1) Si $c_1 \neq c_2$, del Lema 6.1 tenemos que todas sus singularidades después de una explosión tendrán un autovalor no nulo y así recaen en uno de los tres casos anteriores.

- 2) Si $c_1 = c_2 = c \neq 0$, entonces realizando una nueva explosión $x = wt$ y $t = sx$, las singularidades de la forma que induce la foliación están dadas por:

$$P_2(1, s) = 0 = (2s^2 + (a_{1,1} + 2b_{2,0})s + a_{3,0}) = (t - c)^2, \quad (6.39)$$

$$P_2(w, 1) = 0 = w(1 - cw)^2 \quad (6.40)$$

Luego vemos que es suficiente trabajar con las coordenadas (x, s) puesto que de (6.40) y el Lema 6.1 se tiene que $(w, t) = (0, 0)$ es singularidad simple. Así, una nueva explosión induce una singularidad simple y otra singularidad $(x, s) = (\frac{1}{c}, 0) = (0, c)$.

La forma inducida por la explosión $x = ts$ que define la foliación en las coordenadas (x, s) está dada por:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(x, s) &= (2s^2 + (a_{1,1} + 2b_{2,0})s + a_{3,0}) + \frac{B_2(w, t)}{x} + s(B_1(x, sx) - b_{2,0})dx + \\ &\quad (xs + xB_1(x, sx))ds \\ &= (P_2(1, s) + \frac{B_2(w, t)}{x} + s(B_1(x, sx) - b_{2,0})dx + (xs + xB_1(x, sx))ds \end{aligned}$$

Para inducir esta foliación con singularidad en $(0, 0)$, realizamos una traslación $\tilde{s} = s - c$, entonces la forma queda expresada como:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(x, \tilde{s}) &= (2\tilde{s}^2 + (\tilde{s} + c)(B_1(x, (\tilde{s} + c)x) - b_{2,0}))dx + \\ &\quad (x(\tilde{s} + c) + xB_1(x, \tilde{s} + c))ds \\ &= (2\tilde{s}^2 + x\tilde{B}_1(x, \tilde{s}))dx + ((c + b_{2,0})x + x\tilde{s} + x^2\tilde{B}_2(x, \tilde{s}))dt \end{aligned}$$

Así vemos que si $c + b_{2,0} \neq 0$, tenemos que c es una singularidad silla nodo, caso contrario $\tilde{\omega}(x, \tilde{s})$ es del tipo de la ecuación (6.38) y como la multiplicidad es 2 del Teorema 6.1 tenemos que el número de Milnor es estrictamente menor.

- 3) Si $c_1 = c_2 = c = 0$, en este caso el cono tangente está dado por $P_2(x, t) = 2xt^2$, así si realizamos una nueva explosión $x = wt$ y $t = sx$, las singularidades de la forma que induce la foliación están dadas por:

$$P_2(1, s) = 0 = 2s^2$$

$$P_2(w, 1) = 0 = 2w$$

luego por el Lema 6.1 tenemos que en las coordenadas (w, t) , después de una explosión tendrán un autovalor no nulo. En cuanto a las coordenadas (x, s) , tenemos que la foliación está dada por:

$$\tilde{\omega}(x, s) = (2s^2 + A_2(x, s))dx + (xs + xB_2(x, sx))$$

donde A_2 y B_2 , son funciones holomorfas que tienen multiplicidad mayor o igual a 2. Así nuevamente tenemos que $\tilde{\omega}$ es del tipo de la ecuación (6.38).

Siguiendo este proceso las obtendremos singularidades simples o tienen multiplicidad 2 con número de Milnor estrictamente menor que el anterior. Entonces en aquellos puntos realizamos nuevas explosiones y, siendo la multiplicidad de la foliación menor que el número de Milnor (Observación 6.7), luego de un número finito de explosiones la multiplicidad y el número de Milnor serán 1 ó 0. Por lo tanto ya no son singularidades nilpotentes, así estamos en algunos de los casos (1) (2) (3).

Del análisis de los 4 casos y el Teorema 6.1 hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 6.2 (Seindenberg). Sea \mathcal{F} una foliación en una superficie y $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Entonces existe una sucesión finita de explosiones $\pi = (\pi_n \circ \pi_{n-1} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, donde π_1 es una explosión en p y π_i es una explosión en un punto de $(\pi_{i-1} \circ \pi_{i-2} \circ \cdots \circ \pi_1)^{-1}(p)$, tal que todas las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ sobre $\pi^{-1}(p)$ son reducidas.

Este teorema será de suma importancia pues en el caso que las singularidades sean reducidas podemos describir como son estas singularidades a partir de sus formas normales como veremos a continuación.

En el estudio de las ecuaciones diferenciales complejas, juega un papel importante ciertos conjuntos llamados Dominio de Siegel y Dominio de Poincaré, pues, mediante ellos podemos clasificar los campos mediante una conjugación holomorfa a su parte lineal.

Definición 6.10. Los conjuntos de plano complejo \mathbb{C}^2

$$P_2 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{R}^- \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 : \lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0 \text{ y } \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in \mathbb{R}^- \right\}$$

son llamados *Dominio de Poincaré* y *Dominio de Siegel* respectivamente.

Teorema 6.3 (Forma Normal de Poincaré). Sean $(\lambda_1, \lambda_2) \in P_2$ tal que

$$\omega = (\lambda_1 x + a_0 y + A_1(x, y))dx + (\lambda_2 y + a_1 x + A_2(x, y))dy$$

y $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \notin \mathbb{Z}$ ó $\lambda_1 = \lambda_2$ con la parte lineal de ω diagonalizable, entonces existe un bi-holomorfismo local Φ en una vecindad de p y una vecindad de $(0, 0)$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$ donde

$$\tilde{\omega} = \lambda_1 x dy - \lambda_2 y dx \tag{6.41}$$

Para la prueba ver [15], pag. (75) ó [5], pag. (46)

Teorema 6.4 (Forma Normal de Siegel). Si $(\lambda_1, \lambda_2) \in D_2$. Entonces existe un biholomorfismo local Φ en una vecindad de p y una vecindad de $(0, 0)$ tal que $\omega = \Phi^*\tilde{\omega}$ donde

$$\tilde{\omega} = (\lambda_1 x + xyf(x, y))dy - (\lambda_2 y + xyg(x, y))dx \tag{6.42}$$

donde f y g son funciones holomorfas.

Para la prueba ver [5], pag. (54)

Definición 6.11 (Resolución de una foliación \mathcal{F}). Sea $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, una sucesión de explosiones π iniciada en el punto p , tal que todas las singularidades son simples, es llamada una *resolución* de \mathcal{F} en p .

Ejemplo 6.1. Consideremos la foliación cuyas hojas son las curvas de nivel de $f = x^3 - y^2$, es decir, la foliación es inducida por $df = 3x^2dx - 2ydy$. Vemos que $p = (0, 0)$ es una singularidad nilpotente, ahora si realizamos una explosión en p , tenemos que en las coordenadas (x, t) , $q_0 = (0, 0)$ es la única singularidad y la forma está dada por:

$$\tilde{\omega}(x, t) = (3x - 2t^2)dx - 2xt dt.$$

Realizando una nueva explosión en q , tenemos que si $t = vx$ y $x = wt$, entonces las formas están dadas por:

$$\begin{aligned} (3 - 2v^2x - 2xv^2)dx - 2x^2v dv \\ (3wt - 2t^2)dw + (3w^2 - 4wt)dt; \end{aligned}$$

respectivamente, luego $r = (0, 0)$ es nuevamente la única singularidad y se encuentra en las coordenadas (w, t) . Haciendo otra explosión en $r = (0, 0)$, tenemos que si $w = st$ y $t = zw$, entonces:

$$(-2t + 3ts)ds + (6s^2 - 6s)dt \tag{6.43}$$

$$(6z - 6z^2)dw + (3u - 4wz)dz \tag{6.44}$$

Luego en las coordenadas (t, s) , las singularidades son $p_0 = (0, 0)$ y $p_1 = (0, 1)$ y en las coordenadas (w, z) , las singularidades son $p_2 = (0, 0)$ y $p_1 = (1, 0)$. Observe que tales singularidades son simples, luego tenemos que si consideramos la sucesión de explosiones $\pi = \pi_3 \circ \pi_2 \circ \pi_1$ es una resolución para \mathcal{F} . (vea la Figura 6.3).

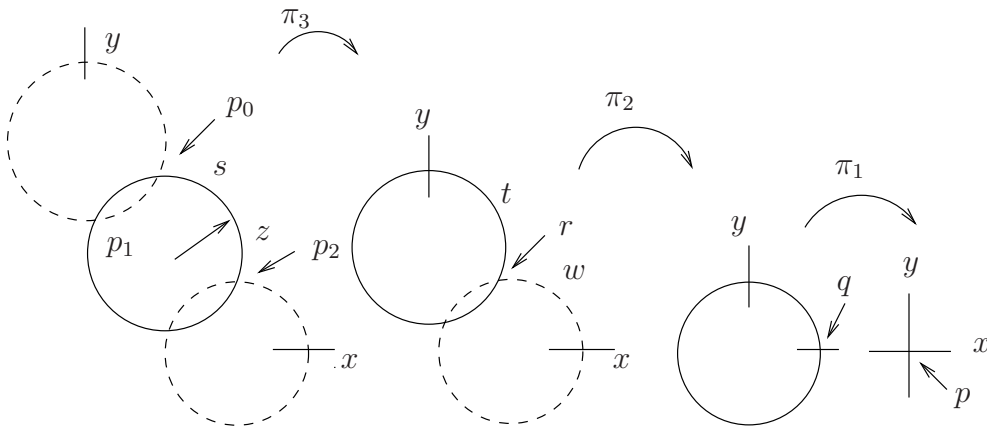


Figura 6.3: Resolución de la foliación df

A continuación introduciremos la noción de curvas generalizada. Esta noción fue introducida por Camacho, Lins Neto y Sad en [4].

Definición 6.12. Diremos que una foliación es \mathcal{F} es una *curva generalizada* en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ si no existen sillanudos en la resolución de \mathcal{F} en p .

Como se puede apreciar en el Ejemplo 6.1 la foliación inducida por la 1-forma $df = 0$, donde $f = x^3 - y^2$, es una curva generalizada. Debemos observar a partir de este ejemplo que la resolución de singularidades de la foliación es la misma que la resolución de singularidades de la curva de ecuación $f = 0$ (esto según la Definición 6.14).

Definición 6.13. Una separatriz S en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, es *no-dicrítica*, si existe una sucesión de explosiones π talque:

1. $\pi^{-1}(S)$ tiene cruzamientos normales,
2. $\pi^{-1}(p)$ es invariante por $\pi^*\mathcal{F}$,

El ítem 2 nos dice que las transformadas estrictas de S no pasan por las componentes dicríticas de \mathcal{F} que puedan aparecer en el proceso de resolución de \mathcal{F} .

Definición 6.14. Sea $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, una *desingularización para el conjunto de Separatrices de \mathcal{F} en p* , es una sucesión de explosiones de \mathcal{F} en p , talque:

- i) Las separatrices de $\pi^*\mathcal{F}$ por $D = \pi^{-1}(p)$ son todas lisas y disjuntas;
- ii) ninguna de tales separatrices pasa por una esquina de D ;
- iii) todas las separatrices son transversales a D .

Si además de ello todas las singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ son reducidas, decimos que π es una *desingularización para \mathcal{F} en p* .

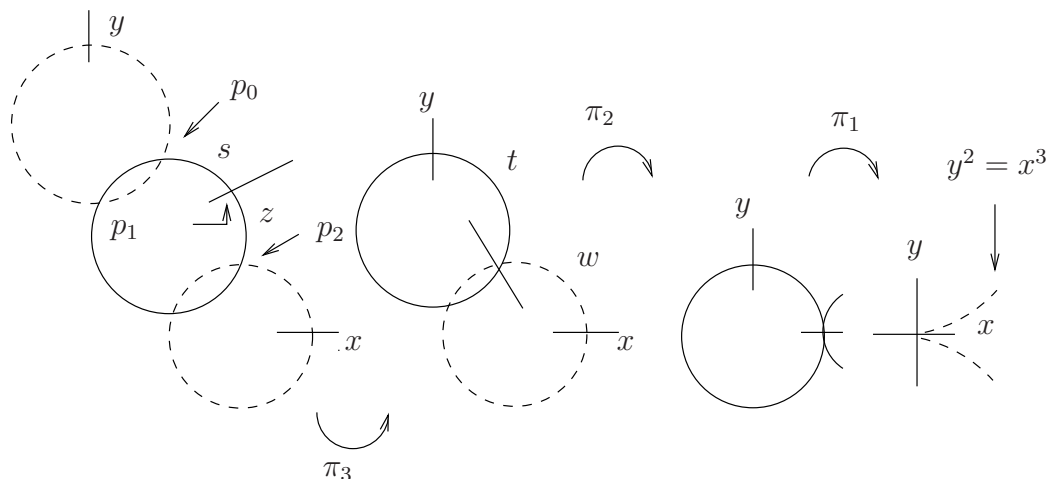


Figura 6.4: Desingularización para la separatriz $S = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^3 - y^2 = 0\}$

Definición 6.15. Una foliación \mathcal{F} en una superficie compleja M es dicrítica en un punto $p \in M$ si, \mathcal{F} admite infinitas separatrices pasando por el punto p . Caso contrario la foliación es llamado no-dicrítica.

Observación 6.8. Esta definición no coincide con la definición de explosión dicrítica. En efecto, consideremos

$$w(x, y) = 2ydx - xdy$$

En $p = (0, 0)$ el cono tangente es $P_2(x, y) = xy$, luego por definición, p es una explosión no-dicrítica. Sin embargo, tenemos que $\{(x, cx^2) : c \in \mathbb{R}\}$ son las separatrices que pasan por p , entonces existe un número infinito de separatrices, luego \mathcal{F} es una foliación dicrítica.

Teorema 6.5. Suponga que \mathcal{F} es una curva generalizada en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, no-dicrítica. Entonces \mathcal{F} y su conjunto de separatrices son desingularizados por el mismo número de explosiones.

Prueba: La necesidad es inmediata por definición, así es suficiente probar, que si el conjunto de separatrices es desingularizado implica que la foliación también lo está, así debemos probar que todas las explosión es de $\pi^*\mathcal{F}$ son reducidas y vemos que esto se verifica fácilmente por los siguientes lemas.

Lema 6.2. Sea p una explosión curva generalizada de \mathcal{F} con parte lineal:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

donde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Q}^+$, entonces existe un número infinito de separatrices es p .

Prueba: Vemos que $(\lambda_1, \lambda_2) \in P_2$. Consideremos dos casos:

1. Supongamos que $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ó $\lambda_2/\lambda_1 \notin \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, entonces del Teorema 6.3 podemos suponer que $\omega = \lambda_1xdy - \lambda_2ydx$. Sea $\lambda_2/\lambda_1 = p/q$, donde $(p, q) = 1$, así la función meromorfa:

$$f(x, y) = x^p/y^q,$$

satisface $df \wedge \omega = 0$, por lo tanto todas las curvas $x^p - cy^q = 0$, $c \in \mathbb{C}$, son separatrices en p .

2. En el caso que $\lambda_1/\lambda_2 \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$ ó $\lambda_2/\lambda_1 \in \mathbb{Z}^+ - \{1\}$, tenemos por Observación 2c(ver (6.34).), que tras un número finito de explosiones aparece un autovalor nulo (silla nodo) ó una singularidad radial y, así infinitas separatrices, luego si proyectamos estas separatrices obtenemos infinitas separatrices de \mathcal{F} en p . El primer caso no se puede dar puesto que \mathcal{F} es una curva generalizada en p . \square

Lema 6.3. Supongamos que $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ admita solamente dos separatrices transversales. Entonces si \mathcal{F} es una curva generalizada en p , entonces p es reducida.

Prueba: Veamos que $m_p(\mathcal{F}) = 1$, en efecto, si ese no fuera el caso, sea π la resolución de \mathcal{F} . Como la foliación tiene sólo dos separatrices entonces $D = \pi^{-1}(p)$ es $\pi^*\mathcal{F}$ -invariante. Sean S_1 y S_2 las dos separatrices transversales en p , entonces $\pi^*S_1 \cap D = \{p_1\}$ y $\pi^*S_2 \cap D = \{p_2\}$ que están en líneas proyectivas P_1 y P_2 respectivamente. Como todas las singularidades

en D son reducidas por hipótesis sólo posee singularidades simples, así $m_{p_i}(\pi^*\mathcal{F}, P_i) = GSV(\pi^*\mathcal{F}, P_i, p_i) = 1$, (ver (6.34).) . Si $q \in \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F}) - \{p_1, p_2\}$ que no es una esquina, entonces es simple luego existe una separatriz transversal a D , lo cual es una contradicción por hipótesis. Por lo tanto no existe mas singularidades de $\pi^*\mathcal{F}$ en D que p_1 y p_2 y las esquinas. Luego por la Proposición 6.8, tenemos que:

$$\begin{aligned} m_p(\mathcal{F}) + 1 &= \sum_{q \in \text{Sing}(\mathcal{F}_n)} \rho(P_j^{(n)}) m_q^*(\mathcal{F}_n, P_j^{(n)}) \\ &= \rho(P_1) m_{p_1}(\pi^*\mathcal{F}, P_1) + \rho(P_2) m_{p_2}(\pi^*\mathcal{F}, P_2) \\ &= 2 \end{aligned} \tag{6.45}$$

donde $\rho(P_1) = \rho(P_2) = 1$, por lo tanto $m_p(\mathcal{F}) = 1$.

Luego, la matriz correspondiente a la parte lineal de p es uno de los tipos (1), (2), (3) ó (4) dadas en (6.34). Como \mathcal{F} es una curva generalizada, p no puede ser del tipo (1), pues en este caso p es una singularidad silla nodo. Si p es del tipo (3) tenemos que una primera explosión π_1 en p origina una única singularidad, la cual es una silla nodo, pero esto contradice el hecho de que la foliación es una curva generalizada.

Si p es del tipo (4), por la descripción dada en 4) (ver (6.34)), sabemos que luego una explosión de p sólo aparece una única singularidad, pero esto no puede ser pues los transformados estrictos de las separatrices transversales determinarán 2 singularidades distintas. Por último si p es del tipo (2), se tiene que $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \notin \mathbb{Q}^+$, pues en caso contrario por el lema anterior, \mathcal{F} tendría un número infinito de separatrices. \square

Lema 6.4. Sea $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ y \mathcal{F} una curva generalizada, tal que si S_1 es una separatriz lisa en p , entonces existe otra separatriz S_2 en p .

Prueba: Por inducción sobre n número mínimo de explosiones en p para resolver \mathcal{F} . Supongamos que $n = 0$, así p es reducida y como \mathcal{F} es una curva generalizada p es simple y claramente el resultado se sigue. Ahora, si suponemos que necesitamos $n > 0$ explosiones en p para resolver \mathcal{F} y que el resultado es válido para toda singularidad que necesite $n - 1$ explosiones en su resolución. Realicemos una primera explosión π_1 en p y como S es una separatriz lisa entonces $\pi_1^*S \cap P = p_0 \in \text{Sing}(\pi_1^*(\mathcal{F}))$, donde $P = \pi_1^{-1}(p)$. Afirmamos que existe otra singularidad en $\pi_1^*\mathcal{F}$, en efecto, si p_0 es la única singularidad, tenemos que P y π_1^*S son las únicas separatrices y son transversales, entonces por el Lema 6.3, tenemos que p_0 es reducida y $m_{p_0}(\pi_1^*(\mathcal{F}), P) = 1$, como

$$m_p(\mathcal{F}) + 1 = m_{p_0}(\pi_1^*(\mathcal{F}), P),$$

entonces $m_p(\mathcal{F}) = 0$, lo cual es una contradicción, pues $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Luego sea $p_1 \in \text{Sing}(\mathcal{F}) - \{p_0\}$, por hipótesis de inducción como $\pi_1^{-1}(p)$ es una separatriz es p_1 , existe otra separatriz S_1 , así $\pi(S_1)$, es la separatriz buscada. \square

(Fin de la prueba de Teorema 6.5) En efecto si $p \in \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F})$, está en una de las esquinas, entonces por hipótesis las dos rectas proyectivas pasando por p son las dos únicas

separatrices transversales en p (esto es consecuencia del ítem 2 de la definición 6.14) y por el Lema 6.3 p sería reducida. Ahora si $p \in \text{Sing}(\pi^*\mathcal{F})$ y no es una esquina como no puede existir una única separatriz por el Lema 6.4 y sólo existen dos por hipótesis, luego p es reducida. \square

Observación 6.9. Veamos que la hipótesis de ser \mathcal{F} curva generalizada es necesaria para la demostración del teorema. En efecto, consideremos la foliación \mathcal{F} inducida por:

$$\omega = (2y + x^2)dx - xdy$$

El cono tangente asociado a esta forma está dado por:

$$P_2(x, y) = xy,$$

ahora si realizamos la primera explosión $\pi_0 : y = xt, x = uy$, tenemos que las singularidades de la forma que induce la foliación están dadas por el cono tangente:

$$\begin{aligned} P_2(1, t) &= t = 0, \\ P_2(u, 1) &= u = 0, \end{aligned}$$

entonces existen dos singularidades $p_0 = (0, 0)$, en las coordenadas (x, t) , y $(p_1) = (0, 0)$ en las coordenadas (u, y) ; las formas en las coordenadas (x, t) y (u, y) están dadas por:

$$\tilde{w}(x, t) = (t + x)dx - xdt \tag{6.46}$$

$$\tilde{w}(u, y) = (u + u^3y)dy + (2y + u^2y^2)du \tag{6.47}$$

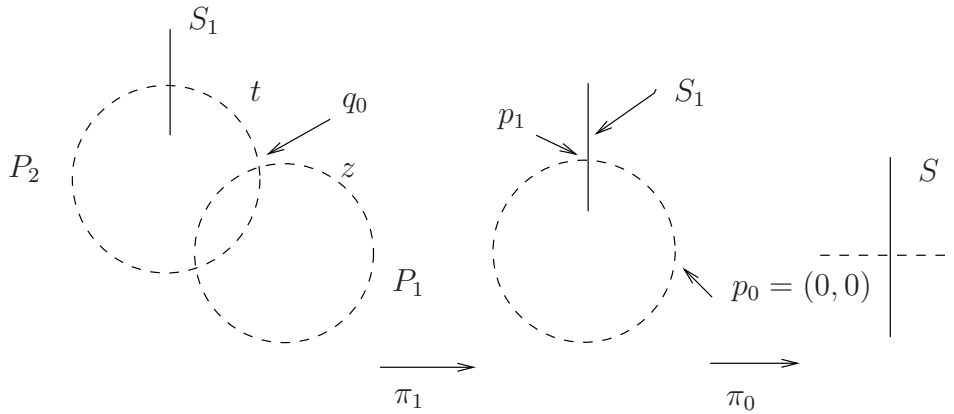
Luego vemos en (6.47) que p_1 es una singularidad simple, así en p_1 existe una separatriz S_1 transversal al divisor y en (6.46) p_0 posee dos autovalores iguales a 1, luego no es simple, por lo tanto para obtener una resolución de \mathcal{F} , realizamos una nueva explosión en p_0 , $\pi_1 : t = sx, x = zt$, así en (6.46) tenemos que el cono tangente está dada por:

$$P_2(x, t) = x^2$$

y como las singularidades en las coordenadas (x, s) y (z, t) están dadas por $P_2(z, 1) = z^2 = 0$ y $P_2(1, s) = 1 = 0$, vemos que existe una única singularidad $q_0 = (0, 0)$ en las coordenadas (z, t) y la foliación está dada por:

$$\tilde{w}(z, t) = z^2dt + (t + zt)dz$$

así vemos que q_0 es una silla nodo, la cual posee $P_2 = \{z = 0\}$ y $P_3 = \{s = 0\}$ como únicas separatrices, luego en q_0 no existe una separatriz transversal, como lo podemos ver en la siguiente figura.



Por lo tanto tenemos una única separatriz $S = \{x = 0\}$ de la foliación \mathcal{F} . Luego tenemos que π_0 es una desingularización para S que difiere de la desingularización para \mathcal{F} , que como vimos es $\pi_1 \circ \pi_0$.

Sea $f = 0$ una ecuación local para S (f no necesariamente irreducible), es decir, $f = f_1^{n_1} \dots f_k^{n_k}$, donde $S_1 = \{f_1 = 0\}, \dots, S_k = \{f_k = 0\}$ son las componentes irreducibles de S . Definimos la foliación \mathcal{G}_f , la cual es inducida por la 1-forma holomorfa

$$df = \sum_{i=1}^k n_i f_1 f_2 \dots \widehat{f_i} \dots f_k df_i$$

Lema 6.5. Si S es lisa entonces \mathcal{G}_f es no singular en p . Si S tiene cruzamientos normales en p , entonces \mathcal{G}_f es linealizable en p .

Prueba: Primero supongamos que S es lisa, luego por un cambio de coordenadas podemos suponer que

$$p = (0, 0), \quad S : \{y = 0\} \text{ y } f = y^{n_1},$$

así, la foliación \mathcal{G}_f es inducida por dy , por lo tanto \mathcal{G}_f es no singular. Ahora, si consideramos que \mathcal{G}_f tiene cruzamiento normal en p , por un cambio de coordenadas, podemos suponer que

$$f = x^{n_1} y^{n_2} \text{ y } S = S_1 \cup S_2, \text{ donde } S_1 = \{x = 0\} \text{ y } S_2 = \{y = 0\},$$

así la foliación \mathcal{G}_f es inducida por la 1-forma $n_1 y dx + n_2 x dy$, luego es linealizable en p por definición. \square

Lema 6.6. Supongamos que $S : \{f = 0\}$ es una separatriz no-dicrítica y $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Entonces las multiplicidades de las foliaciones \mathcal{F} y \mathcal{G}_f en p , están relacionadas por:

- $m_p(\mathcal{F}) \geq m_p(\mathcal{G}_f)$
- $GSV(\mathcal{F}, S_i, p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_i, p)$, donde S_i es una unión de componentes irreducibles de S e invariantes por \mathcal{F} y \mathcal{G}_f .

Prueba: Como S es una separatriz no-dicrítica tenemos que existe una sucesión de explosiones tal que $\pi^{-1}(S)$, sólo posee cruzamientos normales y $\pi^{-1}(S)$ es invariante por $\pi^*\mathcal{F}$. Sea n el menor número de explosiones con la que se obtienen tales propiedades, de $\pi^{-1}(S)$. Supongamos que $n = 0$, entonces no necesitamos hacer ninguna explosión para que S posea cruzamientos normales y $S = S_1 \cup S_2$. Ocurre una de las siguientes posibilidades:

- i) $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) - \text{Sing}(S)$, entonces S tiene una sola componente, es decir $S = S_i$ es lisa. En este caso p no es singularidad de \mathcal{G}_f , entonces por definición tenemos que $GSV(\mathcal{G}_f, S_i, p) = 0$ y $m_p(\mathcal{G}_f) = 0$, y como S es lisa $GSV(\mathcal{F}, S_i, p) \geq 0$ y $m_p(\mathcal{G}_f) \geq 0$, así vemos que en este caso *a)* y *b)* se cumplen.
- ii) $p \in \text{Sing}(S)$. Como S tiene cruzamientos normales por el Lema (6.5), tenemos que \mathcal{G}_f es linealizable, es decir la forma asociada es de la forma $n_1xdy + n_2ydx$ y podemos suponer que $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$, puesto que el Índice de Gomez-Mont-Verjovski no depende del cambio de coordenadas, así

$$1 = m_p(\mathcal{G}_f) \leq m_p(\mathcal{F}) \text{ (pues } p \text{ es una singularidad de } \mathcal{F})$$

Ahora por hipótesis, si $S' = S_1$, consiste de una sola componente entonces $GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = 1$. Pero como S' es lisa podemos suponer que $\omega = dx + x$, luego $GSV(\mathcal{F}, S_1, p)$ es el número de ceros de q es el interior de $|y| = 1$, luego como $p = (0, 0)$ es una singularidad tenemos que

$$GSV(\mathcal{F}, S_1, p) \geq 1 = GS(\mathcal{G}_f, S', p),$$

análogamente

$$GSV(\mathcal{F}, S_2, p) \geq 1,$$

por lo tanto

$$GSV(\mathcal{F}, S', p) = GS(\mathcal{G}_f, S_1, p) \geq 1 = GS(\mathcal{G}_f, S', p).$$

Si $S' = S_1 \cup S_2$, entonces

$$GS(\mathcal{G}_f, S', p) = GS(\mathcal{G}_f, S_1, p) + GS(\mathcal{G}_f, S_2, p) - 2(S_1 \circ S_2)_p = 1 + 1 - 2 = 0$$

y

$$GS(\mathcal{F}, S', p) = GS(\mathcal{F}, S_1, p) + GS(\mathcal{F}, S_2, p) - 2(S_1 \circ S_2)_p \geq 1 + 1 - 2 \geq 0,$$

entonces en ambos casos

$$GS(\mathcal{F}, S', p) \geq GS(\mathcal{G}_f, S', p).$$

Ahora supongamos que se cumple *a)* y *b)*, y que si hacemos $n - 1$ explosiones $\pi^{-1}(S)$ sólo tiene cruzamientos normales donde S es la separatriz de una foliación dada. (*Hipótesis de Inducción*).

Sea $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$, una explosión π en p , Si denotamos $\tilde{S} = \pi^*S$, $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$ y $\tilde{\mathcal{G}} = \pi^*\mathcal{G}$ entonces tenemos:

- i) D es invariante por $\tilde{\mathcal{F}}$;
- ii) D es invariante por $\tilde{\mathcal{G}}_f$;
- iii) $Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f) \subseteq Sing(\tilde{\mathcal{F}})$;
- iv) Si $q \in Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f)$ entonces $Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f)$ es dada localmente por hojas de nivel de $\tilde{f} = f \circ \pi$.

Ahora aplicamos la hipótesis de inducción a la foliación $\tilde{\mathcal{F}}$ a la separatriz D y $q \in Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f) \cap D$ tenemos que:

$$GSV(\tilde{\mathcal{F}}, D, q) \geq GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, D, q). \quad (6.48)$$

Claramente la desigualdad es dada si $q \in D \cap Sing(\tilde{\mathcal{F}})$, puesto que D es lisa (el caso $n = 0$). Como q es no-dicrítica, por el Corolario 6.1, tenemos que, así: $c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}).P = m_q(\mathcal{F})$

$$\sum_{q \in Sing(\tilde{\mathcal{F}}) \cap D} GSV(\tilde{\mathcal{F}}, D, p) = c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}).D - D.D = m_q(\mathcal{F}) + 1$$

$$\sum_{q \in Sing(\tilde{\mathcal{G}}_f) \cap D} GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, D, p) = c_1(N_{\tilde{\mathcal{G}}_f}).D - D.D = m_q(\mathcal{G}_f) + 1$$

Así por (6.48), tenemos que:

$$m_q(\mathcal{F}) \geq m_q(\mathcal{G}_f)$$

y la propiedad a) es satisfecha.

Ahora recordemos que:

$$GSV(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_i, q_i) = GSV(\mathcal{F}, S_i, p) + m_i(m_i - m_p(\mathcal{F})) \quad (6.49)$$

$$GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, \tilde{S}_i, q_i) = GSV(\mathcal{G}_f, S_i, p) + m_i(m_i - m_p(\mathcal{G}_f)) \quad (6.50)$$

donde m_i es la multiplicidad de S_i en p . Por hipótesis de inducción ($n=0$, caso cruzamiento normal), tenemos que:

$$GSV(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{S}_i, q_i) \geq GSV(\tilde{\mathcal{G}}_f, \tilde{S}_i, q_i)$$

Entonces de (6.49) y (6.50) tenemos que:

$$GSV(\mathcal{F}, S_i, p) + m_i(m_i - m_p(\mathcal{F})) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_i, p) + m_i(m_i - m_p(\mathcal{G}_f))$$

Pero $m_q(\mathcal{F}) \geq m_q(\mathcal{G}_f)$, entonces

$$GSV(\mathcal{F}, S_i, p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_i, p).$$

□

Lema 6.7. Con las notaciones dadas arriba, tenemos que se cumple

$$GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = (S' \cdot S'')_p,$$

donde S' es una unión de componentes irreducibles de S y S'' consta de las componentes irreducibles que no están en S'

Prueba: Sabemos que \mathcal{G}_f es definida en una vecindad de p por

$$\omega = \sum_{i=1}^k n_i f_1 f_2 \dots \widehat{f}_i \dots f_k df_i \quad (6.51)$$

donde $f = f_1^{n_1} \dots f_{k_0}^{n_{k_0}} \dots f_k^{n_k}$ y $S = \{f = 0\}$. Supongamos por una permutación que que $S' = S_1 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{k_0}$, $k_0 \leq k$, entonces por la Proposición 6.6 aplicado iteradas veces conseguimos

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{G}_f, S', p) &= GSV(\mathcal{G}_f, S_1 \cup S_1 \cup \dots \cup S_{k_0}, p) \\ &= GSV(\mathcal{G}_f, S_1, p) + GSV(\mathcal{G}_f, S_2 \cup \dots \cup S_{k_0}, p) - 2(S_1, S_2 \cup \dots \cup S_{k_0}) \\ &= \sum_{j=1}^{k_0} GSV(\mathcal{G}_f, S_j, p) - 2 \sum_{j=1}^{k_0-1} (S_j, S_{j+1} \cup S_{j+2} \cup \dots \cup S_{k_0}) \end{aligned} \quad (6.52)$$

Reescribiendo (6.54) como

$$\omega = n_j f_1 \dots \widehat{f}_j \dots f_k df_j + f_j \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k n_i f_1 \dots \widehat{f}_j \dots \widehat{f}_i \dots f_k df_i$$

obtenemos una descomposición de S_j , entonces por definición del índice GSV tenemos

$$GSV(\mathcal{G}_f, S_j, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S_j} \frac{n_j d(f_1 \dots \widehat{f}_j \dots f_k)}{n_j f_1 \dots \widehat{f}_j \dots f_k} = (S_j, S_1 \cup \dots \cup \widehat{S}_j \dots S_k)$$

Sumando estos de 1 a k_0 lograremos

$$\sum_{j=1}^{k_0} GSV(\mathcal{G}_f, S_j, p) = 2 \sum_{j=1}^{k_0-1} (S_j, S_{j+1} \cup S_{j+2} \cup \dots \cup S_{k_0}) + \sum_{j=1}^{k_0} (S_j, S_{k_0+1} \cup S_{j+2} \cup \dots \cup S_k)$$

Por lo tanto reemplazando esto en (6.52) obtendremos

$$GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = \sum_{j=1}^{k_0} (S_j, S_{k_0+1} \cup S_{j+2} \cup \dots \cup S_k) = S' \cdot S''$$

□

A partir de los lemas hemos probado el siguiente resultado.

Teorema 6.6 (Brunella). Si S es una separatriz no dicrítica, entonces:

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) \geq 0$$

Prueba: Descomponemos en $S = S_1 \cup S_2$ y denotemos por S' y S'' las partes reducidas de S_1 y S_2 respectivamente. Entonces de la Proposición 6.6 tenemos

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = GSV(\mathcal{F}, S_1, p) + GSV(\mathcal{F}, S_2, p) - 2(S', S'').$$

Utilizando el Lema 6.7 conseguimos

$$GSV(\mathcal{F}, S_1, p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_1, p) := GSV(\mathcal{G}_f, S', p) = (S', S'')$$

y

$$GSV(\mathcal{F}, S_2, p) \geq GSV(\mathcal{G}_f, S_2, p) := GSV(\mathcal{G}_f, S'', p) = (S', S'').$$

Luego

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) \geq 0.$$

□

Corolario 6.2. Si S es la unión de un número finito de separatrices en $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, donde p es una curva generalizada, entonces:

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0.$$

Prueba: Por el Teorema 6.5 tenemos que $\tilde{\mathcal{F}}$ y $\tilde{\mathcal{G}}_f$ tienen el mismo número de singularidades por lo tanto las desigualdades en la demostración del Lema 6.6 se tornan igualdades y por lo tanto $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$. □

Ejemplo 6.2. Consideremos la foliación \mathcal{F} definida por la forma

$$\omega = 2ydx - 3xdy.$$

Luego $S : \{f = x^2 - y^3 = 0\}$ es una separatriz de \mathcal{F} en $p = (0, 0)$, donde $(0, 0) \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, es más $x^2 - cy^3 = 0$, $c \in \mathbb{R}$ son separatrices de \mathcal{F} , luego \mathcal{F} es una separatriz no-dicrítica. Ahora por la demostración de la Proposición 5.1, obtenemos una descomposición de ω asociado a \mathcal{F} en p

$$g\omega = hdf + f\alpha$$

$g = -3y^2$, $h = -3x$ y $\alpha = 6dx$, entonces:

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \left(\frac{dx}{x} - \frac{6ydy}{3y^2} \right) = -1.$$

Entonces $GSV(\mathcal{F}, S, p) < 0$. Por lo tanto S es una separatriz no dicrítica.

Entonces vemos resultado del Teorema de Brunella es falso para singularidades dicríticas.

Definición 6.16. Sea \mathcal{F} una foliación y un sistema de coordenadas afines tales que \mathcal{F} sea inducido por: $\omega = adx + bdy = 0$. El grado de una foliación \mathcal{F} en \mathbb{P}^2 , es el número de puntos $p \in L$, donde L es una recta en \mathbb{C}^2 no invariante \mathcal{F} , tales que $\omega(p) = 0$ ó la hoja de \mathcal{F} que pasa por p es tangente a L .

Observación 6.10. Para ver que la definición anterior está bien definida, ver [13] pag. 10.

Una consecuencia importante de la Teorema 6.6 es una solución al *Problema de Poincaré*. Para ello consideremos una 1-forma

$$\omega = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

polinomial en \mathbb{C}^2 , es decir

$$a(x, y) = \sum_{i=1}^d a_i(x, y) \quad y \quad b(x, y) = \sum_{i=1}^d b_i(x, y)$$

donde a_i y b_i , son polinomios homogéneos de grado i , con $a_d \neq 0$ ó $b_d \neq 0$. Denotemos por \mathcal{F}_ω la foliación en \mathbb{P}^2 , inducida por ω . El plano proyectivo \mathbb{P}^2 es descrito por 3 sistemas de coordenadas (x, y) , (u, v) y (s, t) las cuales están relacionadas de las manera:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{u}, \quad y = \frac{1}{t} \\ y &= \frac{v}{u}, \quad x = \frac{s}{t} \end{aligned}$$

En las coordenadas (u, v) , la forma ω puede escribirse:

$$\frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^d \left(\frac{-a_i(1, v) - vb_i(1, v)}{u^i} du + u \frac{b_i(1, v)}{u^i} dv \right).$$

De aquí podemos observar que L_∞ es el conjunto de polos.

1. Si $a_d(1, v) + vb_d(1, v) = 0$, esta forma tiene polo de orden $d + 1$,
2. Si $a_d(1, v) + vb_d(1, v) \neq 0$, esta forma tiene polo de orden $d + 2$.

De la Observación 1.4 y Definición 1.22 tenemos $N_{\mathcal{F}}^* \equiv ((\omega)_0 - (\omega)_\infty) \equiv -(d + 1)L_\infty$, entonces:

$$N_{\mathcal{F}} = \begin{cases} (d + 1)L_\infty & , \quad \text{si } xa_d + yb_d = 0, \\ (d + 2)L_\infty & , \quad \text{si } xa_d + yb_d \neq 0, \end{cases} \quad (6.53)$$

Observación 6.11. El grado de la foliación \mathcal{F} , en este caso es $d - 1$ si $xa_d + yb_d = 0$ o d en caso contrario.

El problema de Poincaré fue tratado por Cerveu-Lins Neto por primera vez con técnicas modernas en [8]. Posteriormente este problema fue resuelto por Carnicer en [6] utilizando el resultado de Cerveau-Lins Neto. La prueba de este Teorema es debido a Brunella.

Proposición 6.9 (Carnicer). Sea \mathcal{F} foliación sobre \mathbb{P}^2 con todas sus singularidades no-dicríticas y $S : F([x : y : z]) = 0$ una curva algebraica \mathcal{F} -invariante de grado d . Si el grado de \mathcal{F} es m entonces:

$$m + 2 \geq d.$$

Prueba: Por la Proposición 6.5, tenemos que:

$$N_{\mathcal{F}} \cdot S = GSV(\mathcal{F}, S) + S \cdot S. \quad (6.54)$$

Sea $g = \frac{F}{(ax + by + cz)^d}$, entonces

$$(g) + [L_1^d] = [F],$$

donde $L_1 : ax + by + cz$, por lo tanto de la Proposición 1.2 $[S] \equiv [L_1]^{\otimes d}$. Por (6.53) $N_{\mathcal{F}} = [L_2]^{\otimes m+2}$, luego de (6.54) tenemos

$$d(m + 2)L_1.L_2 = d^2 + GSV(\mathcal{F}, S),$$

pero como $GSV(\mathcal{F}, S) \geq 0$, tenemos el resultado. \square

6.2. Singularidades casi Liovillean

Definición 6.17. Diremos que $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es *casi Liovilliana*, si existe una forma cerrada meromorfa γ_0 y una forma holomorfa γ_1 en una vecindad de p , tal que:

$$d\omega = (\gamma_0 + \gamma_1) \wedge \omega \quad (6.55)$$

Si $\gamma_1 = 0$, diremos que p es *Liovilleana*.

Observación 6.12. El divisor polar de $\gamma = \gamma_0 + \gamma_1$, es invariante por \mathcal{F} . En efecto, sea $q \in (\gamma)_{\infty} - \{p\}$, entonces por un cambio de coordenadas podemos suponer que $\omega = adz$, $a \in \mathcal{O}^*$, $\gamma_1 = pdz + qdw$, con p y q holomorfas y $\gamma_0 = bdz + cdw$, con b y c meromorfas, ahora como γ_0 es cerrada $d\gamma_0 = 0$, entonces $b_w = c_z$ y como $d\omega = \gamma \wedge \omega$, tenemos que

$$c = \frac{1}{a} \frac{\partial a}{\partial w} - q,$$

entonces c es holomorfa, luego c_z es holomorfa y b_w es holomorfa. Ahora como b_w es holomorfa y

$$b(z, w) = \int \frac{\partial b}{\partial w}(z, w) dw$$

entonces $b(z, w)$ es holomorfo en ω , entonces $b(z, w) = \frac{b_1(z, w)}{h(z)}$. Luego vemos que los ceros de $h(z)$ que son polos de b son invariantes por \mathcal{F} y como $(\gamma_0)_{\infty} = (\gamma)_{\infty}$, tenemos que el divisor polar es invariante por \mathcal{F} .

Proposición 6.10. Si $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ es simple casi Liouvilliana, entonces:

$$BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^n \text{Res}(\gamma_0, S_j) \cdot \text{Var}(\mathcal{F}, S_j, p).$$

Prueba: Sea U vecindad de p , tal que $w = 0$ defina la foliación regular \mathcal{F} fuera de p , luego existe $\epsilon > 0$, una vecindad $V \subset U$ de $\partial S = S \cap S_\epsilon^3$ y una 1-forma holomorfa γ' sobre V , tal que

$$d\omega = \gamma' \wedge \omega \quad (6.56)$$

ya que $(S \cap S_\epsilon^3) \cap \text{Sing}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Ahora tomemos $\rho \in C_c^\infty(V)$, tal que es 1 sobre una vecindad $U \subset V$ y por el Lema 4.4

$$BB(\mathcal{F}, p) = \int_{S^3} \beta \wedge d\beta$$

donde β , es un 1-forma diferenciable tal que $d\omega = \beta \wedge \omega$. Como $(\rho\gamma' + (1-\rho)\gamma) \wedge \omega = d\omega$, entonces

$$(\rho\gamma' + (1-\rho)\gamma - \beta) \wedge \omega = 0$$

y por el Lema de División de De Rham existe $g \in C^\infty(V)$, tal que

$$\beta = (\rho\gamma' + (1-\rho)\gamma) + g\omega, \text{ donde } \gamma = \gamma_0 + \gamma_1$$

Así

$$\int_{S^3} \beta \wedge d\beta = \int_{S^3 \cap V} d(\gamma_0 \wedge \gamma) = \int_{\partial(S^3 \cap V)} \gamma_0 \wedge \gamma \quad (6.57)$$

Como cada S_j , $1 \leq j \leq n$ es una curva irreducible de \mathcal{F} fuera de p , por un cambio de coordenadas holomorfas (z, w) , en una vecindad de cada ∂S_j , podemos encontrar una vecindad V_j , tal que $S_j = \{w = 0\}$, $V_j \cap S^3 = \{|w| < \epsilon, |z| = 1\}$ y $V = \bigcup_{j=1}^n V_j$. Entonces tenemos que en V_j

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \lambda_j \frac{dw}{w} + \gamma_{0j} \\ \gamma' &= adz + bdw \end{aligned}$$

donde $\lambda_j = \text{Res}(\gamma_0, S_j)$ y γ_{0j} es 1-forma holomorfa y a, b funciones holomorfas, entonces:

$$\begin{aligned} \int_{S^3} \beta \wedge d\beta &= \sum_{j=1}^n \int_{\partial(S^3 \cap V_j)} \gamma_0 \wedge \gamma = \sum_{j=1}^n \int_{|w|=\epsilon, |z|=\epsilon} \lambda_j \frac{dw}{w} \wedge adz \\ &= 2\pi i \lambda_j \sum_{j=1}^n \int_{|z|=\epsilon} a(z, 0) dz = 2\pi i \lambda_j \sum_{j=1}^n \int_{\partial S_j} \gamma' \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j \text{Var}(\mathcal{F}, S_j, p) \end{aligned}$$

□

Observación 6.13. Supongamos que la foliación \mathcal{F} tiene como separatriz en p , $S = S_1 \cup S_2$, donde $S_1 = \{x = 0\}$, $S_2 = \{y = 0\}$, entonces :

$$BB(\mathcal{F}, p) = Var(\mathcal{F}, S_1, p) + Var(\mathcal{F}, S_2, p).$$

Ejemplos

1. Supongamos que $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$ son hojas de la foliación \mathcal{F} , entonces la foliación inducida en una vecindad de $(0, 0)$ está dada por:

$$\omega(x, y) = x(\lambda_1 + yf(x, y))dy - y(\lambda_2 + xg(x, y))dx, \quad (\lambda_1, \lambda_2 \neq 0)$$

y α y β números complejos tal que:

$$\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Entonces si $\gamma_0 = \alpha \frac{dx}{x} + \beta \frac{dy}{y}$, existe γ_1 , holomorfo tal que:

$$dw = (\gamma_0 + \gamma_1) \wedge w$$

Como $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$ entonces:

$$Var(\mathcal{F}, S_1, p) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$Var(\mathcal{F}, S_2, p) = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

y por la Proposición 6.10

$$BB(\mathcal{F}, p) = \alpha \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) + \beta \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

2. Si la forma es de la forma $w = x^{p+1}dy + (y(1 + \lambda x^p) + f)dx$, donde $p \geq 1$, $\lambda \neq 0$ y f es holomorfa con multiplicidad por lo menos $p + 2$. Claramente $S = \{x = 0\}$ es una separatriz y la descomposición de w asociada a $\{x = 0\}$ es:

$$w = hdx + x\eta, \quad \text{donde } h = y(1 + \lambda x^p) + f \text{ y } \eta = x^p dy,$$

entonces

$$d\omega = \gamma \wedge \omega, \quad \text{con } \omega = (p + 1) \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}.$$

Si $S_1 = \{x = 0\}$ y $S_2 = \{y = 0\}$, entonces:

- a) $CS(\mathcal{F}, S_1, p) = 0.$
- b) $CS(\mathcal{F}, S_1, p) = \lambda.$
- c) $GSV(\mathcal{F}, S_1, p) = 1.$

- d) $GSV(\mathcal{F}, S_2, p) = p + 1$.
e) $BB(\mathcal{F}, p) = 2p + 2 + \lambda$.

Proposición 6.11. Si S es una separatriz no dicrítica con la propiedad que $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$, entonces:

$$BB(\mathcal{F}, p) = CS(\mathcal{F}, S, p).$$

Prueba: Sea ω 1-forma holomorfa que define \mathcal{F} en una vecindad de p . Ahora como S es una separatriz no-dicrítica existe una sucesión de explosiones tal que $\pi : \widetilde{M} \rightarrow M$, es la desingularización en p , entonces $\pi^{-1}(S)$ sólo tiene cruzamientos normales y $\pi^{-1}(p) = D = \bigcup_{j=1}^n D_j$, es un conjunto invariante por $\widetilde{\mathcal{F}} = \pi^*(\mathcal{F})$. Si $\widetilde{w} = \pi^*w$ es una 1-forma que se anula sobre D_j de orden m_j , entonces por la Observación 6.6,

$$c_1(N_{\widetilde{\mathcal{F}}}) = \sum_{j=1}^n m_j [D_j] \quad (6.58)$$

Si llamamos $\widetilde{U} = \pi^{-1}(U)$, entonces por cambio de variables $BB(\mathcal{F}, p) = BB(\widetilde{\mathcal{F}}, \partial\widetilde{U})$ y por el Teorema 4.2, tenemos que:

$$BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^k BB(\widetilde{\mathcal{F}}, p_j) - c_1^2(N_{\widetilde{\mathcal{F}}}) \quad (6.59)$$

Sea $Sing(\mathcal{F}) = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$, tal que p_i no está en una esquina si $i \in \{1, 2, \dots, m\} = A$.

1. Sea p_i , tal que $i \in A$, entonces si S_i^1 es la componente que se encuentra en algún D_i y S_i^2 la separatriz transversa. Entonces por la Observación 6.13

$$BB(\widetilde{\mathcal{F}}, p_i) = Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^1) + Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^2), \quad 1 \leq j \leq m \quad (6.60)$$

2. Si p_i es una esquina consideremos S_j^0 la unión de los dos D_i que lo contienen, entonces por la propiedad aditiva del índice de variación tenemos que:

$$BB(\widetilde{\mathcal{F}}, p_i) = Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^0, p_i), \quad m + 1 \leq j \leq k \quad (6.61)$$

Ahora como D es una curva compacta invariante por $\widetilde{\mathcal{F}}$, y por ser p una explosión no-dicrítica entonces por la Proposición 6.3:

$$\sum_{i=1}^m Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^1, p_i) + \sum_{i=m+1}^k Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^0, p_i) = c_1(N_{\widetilde{\mathcal{F}}}).D \quad (6.62)$$

Sumando (6.60) y (6.61) y reemplazando (6.62) en (6.59), obtenemos:

$$BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^m Var(\widetilde{\mathcal{F}}, S_i^2, p_i) + c_1(N_{\widetilde{\mathcal{F}}}).D - c_1^2(N_{\widetilde{\mathcal{F}}}) \quad (6.63)$$

Sea $S = \bigcup_{i=1}^m \pi(S_i^2)$, entonces por (6.28) tenemos

$$\text{Var}(\pi^* \mathcal{F}, S_i^2, p_i) = \text{Var}(\mathcal{F}, \pi(S_i^2), p) - m_i$$

ahora, si $k_i, i = 1, \dots, n$, es el número de singularidades de $\pi^* \mathcal{F}$ sobre D_i diferentes de las esquinas, obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \text{Var}(\tilde{\mathcal{F}}, S_i^2, p_i) &= \sum_{i=1}^n \text{Var}(\tilde{\mathcal{F}}, \pi(S_i^2), p_i) - k_i m_i \\ &= \text{Var}(\mathcal{F}, S, p) - \sum_{i=1}^n k_i m_i \end{aligned} \quad (6.64)$$

así en (6.63)

$$BB(\mathcal{F}, p) = \sum_{j=1}^m \text{Var}(\mathcal{F}, S, p) - \sum_{i=1}^n k_i m_i + c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot D - c_1^2(N_{\tilde{\mathcal{F}}}). \quad (6.65)$$

Por la Observación 6.5, si c_i es el número de esquinas de D_i

$$k_i + c_i = c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot D_i - D_i^2 = k_i + D_k \cdot D - D_i \cdot D_i - D_i^2,$$

entonces

$$k_i = c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) \cdot D_i - D \cdot D_i = (c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) - D) \cdot D_i$$

así $\sum_{i=1}^n k_i m_i = (c_1(N_{\tilde{\mathcal{F}}}) - D) \cdot \sum_{i=1}^n m_i D_i$, la cual si reemplazamos en (6.65), tenemos el resultado. \square

Por el Corolario 6.2 y la Proposición 6.11, tenemos el teorema principal del trabajo:

Teorema 6.7. Sea v un campo vectorial holomorfo en una vecindad de $0 \in \mathbb{C}^2$, tal que 0 es cero aislado de v , y supongamos que v es una curva generalizada no-dicrítica. Sea S la unión de todas las separatrices de v en p . Entonces:

$$\begin{aligned} BB(v, 0) &= CS(v, S, 0) \\ GSV(v, S, 0) &= 0 \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] M. Brunella *Some Remarks on indices of holomorphic vector field*, Publicacoes Mathematicae Vol. 41, 527-541 (1997).
- [2] M. Brunella *Birrational geometry of foliations* First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [3] C. Camacho *Holomorphic Dynamical Systems*, Summer School on Dynamical Systems, ICTP, 1988.
- [4] C. Camacho, A. Lins Neto y P. Sad, *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, *J. Differential Geometry*, *J. Differential Geometry* 20 1984.
- [5] C. Camacho y P. Sad, *Puntos singulares de ecuaciones diferenciales analíticas*, 16 Coloquio Brasileiro de Matematica, IMPA, Rio de Janeiro, 1987.
- [6] M. Carnicer: *The Poincaré Problem in the nondicritical case*. *Annals of Mathematics*. 140 (1994) 289-294.
- [7] M. do Carmo: *Geometría Riemannianna*. Proyecto Euclides, Río de Janeiro, IMPA, 1988.
- [8] D. Cerveau A. Lins Neto: *Holomorphic Foliations in $\mathbb{C}\mathbb{P}(2)$ having an invariant algebraic curves* *Annales de l'Institut Fourier*, tome 41, n°4 (1991), p. 883-903.
- [9] P. Fernandez y A. Hefez, *Topología de las Singularidades de Curvas Analíticas Irreducibles Planas*, Publicaciones de la UFF. 1998.
- [10] R. Gunning, *Introduction to Function of Several Variables (Vol. III), Homological Theory*, Princeton, New Jersey, 1990.
- [11] P. Griffiths y J. Harris, *Principles of algebraic geometry*, John Wiley y Sons, New York, 1978
- [12] R. Gunning and H. Rossi *Analytic Functions of Several Complex Variables* Prentice-Hall Englewood Cliffs, NJ. 1965.
- [13] A. Lins-Neto *Algebraic solution of polynomial differential equations and foliation in dimension two* *LNM* 1345 pag. 192-232, 1988.

- [14] Jhon Milnor, *Singular Point of complex hypersurfaces*, Princeton, New Jersey, 1968.
- [15] S. Ramirez, *Tópicos de la Teoría Cualitativa de ecuaciones diferenciales complejas*, Tesis de Licenciatura, 2001, UNMS.
- [16] B.V. Shabat, *Introduction to Complex Analysis (Parte II), Function of Several Variables*, AMS, 1992.
- [17] M.G. Soares, *Índices de Campos Holomorfos y Aplicaciones, 23 Coloquio Brasileiro de Matematica*, IMPA, Rio de Janeiro, 2001
- [18] M.G. Soares, *Lectures on Point Residues, Monografías del IMCA*, IMCA, Lima, 2002.