ANALISIS CRONOMETRICAMENTE INVARIANTE DE LA TEORIA UNITARIA DEL CAMPO NO-SIMETRICO

por:

MODESTO E. MONTOYA ZAVALETA

TESIS

Presentada ante la Escuela de Graduados de la
Universidad Nacional de Ingeniería
como requisito parcial para
optar el grado de Magister, Mención Física

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

LIMA - PERU
1974

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

ESCUELA DE GRADUADOS

******

ANALISIS CRONOMETRICAMENTE INVARIANTE DE LA TEORIA UNITARIA DEL CAMPO NO-SIMETRICO

TESIS DE MAGISTER EN CIENCIAS, MENCION EN FISICA

AUTOR : M O D E S T O E. M O N T O Y A Z A V A L E T A

APROBADO CON :

MIEMBROS DEL JURADO :

Presidente: Ing. César Sotillo Palomino M.Sc.
RECTOR DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA.

Prof. Carlos del Rio Cabrera, Ph. D.
DIRECTOR DE LA ESCUELA DE GRADUADOS

Prof. José del Prado Segura M.Sc.
DIRECTOR DE TESIS

Ing. Gerardo Ramos Cabredo Br. C.
PROFESOR DEL PROGRAMA DE MAGISTER

Ing. Holger Valqui Casas Dip. Br. M.
PROFESOR DEL PROGRAMA DE MAGISTER

Porf. Víctor Latorre Aguilar Ph. D.
PROFESOR DEL PROGRAMA DE MAGISTER

Lima .... 1974.

Registro: Libro de Actas N° Folio N°.... Año ....

CONTENIDO

Pág.

{1} Copia, resumen o demostración de información ya obtenida.

{2} Nueva interpretación o método.

{3} Trabajo netamente nuevo.

{4} Comentario.

{5} Referencias inéditas.

A. DESCOMPOSICION DEL ESPACIO TIEMPO

En la primera parte de este capítulo haremos un resumen del formalismo cronométricamente invariante (C.I.), que introdujo Z'elmanov en la Relatividad General (R.G.), Z'elmanov define cantidades y operadores C.I. con determinado significado físico (relacionados con propiedades del sistema de referencia respecto al sistema localmente geodésico).

El significado físico del formalismo C.I. se demuestra con mayor facilidad, como veremos en este capítulo, asumiendo una matriz que relaciona el formalismo C.I. con el formalismo 4-dimensional de la R.G. como si hubiera entre ellos una transformación caracterizado precisamente por dicha matriz. Usando lo anterior estudiaremos la relación entre los formalismos citados.

Este formalismo es una herramienta que nos permitirá hacer el análisis con elementos 3-dimensionales y C.I. características que tienen las ecuaciones clásicas que no es fácil analizarlas.

1. RESUMEN DEL FORMALISMO DE Z'ELMANOV.

Z'elmanov define la cantidad C.I. como aquellas que son invariantes bajo la transformación de la forma

$$x'^0 = x'^0(x^0, x^1, x^2, x^3) \qquad (1.1)$$

y covariantes respecto a las transformaciones de la forma

$$x'^m = x'^m(x^1, x^2, x^3) \tag{1.2}$$

La transformación (1.1) relaciona los "relojes" de dos sistemas de referencia. El hecho de tener cantidades invariantes bajo la transformación de la forma (1.1) significa, entonces, que no dependen de los relojes que se utilicen: serán los mismos para ambos sistemas.

La transformación (1.2) es netamente tridimencional especial. Esta transforma sólo las coordenadas tridimensionales, que habitualmente las llamamos espaciales diferenciándolas de la coordenada temporal, que en física clásica se considera independiente de las primeras. Tener cantidades covariantes bajo transformaciones del tipo (1.2), significa tener cantidades tensoriales espaciales en el sentido que nos da la física clásica no relativística.

Las cantidades C.I. son definidas por Z'elmanov a partir de cantidades covariantes respecto a las transformaciones generales

$$x'^\alpha = x'^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3) \{1\} \tag{1.3}$$

A partir del tensor 4-dimensional n veces contravariante y m veces covariante $Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}$ se puede definir los tensores:

$$^*Q^{i_1,\ldots,i_n} = \frac{Q^{i_1,\ldots,i_n}_{0,\ldots,0 \text{ m veces}}}{g_{00}^{m/2}} \tag{1.4}$$

{1} Utilizamos, en este trabajo las letras griegas para indicar índices con valores 0,1,2,3. Mientras que las letras latinas para indicar índices con valores 1,2,3.

que vienen a ser un tensor contravariante de orden n.{1}

De acuerdo a la fórmula (1.3), a partir del tensor métrico $g^{\alpha\beta}$, obtenemos el tensor métrico C.I. contravariante

$$h^{ik} = -g^{ik} \qquad (1.5$$

donde el signo negativo se ha tomado para obtener el determinante positivo.

El correspondiente tensor covariante h_{ik} será

$$h_{ik} = -g_{ik} + \frac{g_{i0}\,g_{0k}}{g_{00}} \qquad (1.6)$$

Usando la fórmula (1.4) se obtienen también escalares (si n=0) mediante la regla:

$$^{*}Q = \frac{Q_{0,\ldots,0 \text{ m veces}}}{g_{00}^{m/2}} \qquad (1.7)$$

Mediante (1.7) podemos, a partir del tensor

$$A_\alpha = \frac{1}{c} g_{\beta\alpha}\, dx^{\beta} \qquad (1.8)$$

definir el escalar

$$d\tau = \frac{1}{c\sqrt{g_{00}}}\, g_{0\beta}\, dx^{\beta} \qquad (1.9)$$

Sabemos que

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^{\alpha} dx^{\beta} \qquad (1.10)$$

pudiendo expresarse ésta en la forma

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - h_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (1.11)$$

Cabe notar que $d\tau$ y $dl^2 = h_{ik}\, dx^i dx^k$, son, efectivamente intervalos de tiempo y de longitud físicos (Ver [1]).

{1} Utilizaremos el signo * para identificar las cantidades C.I.

Puede demostrarse también (Apéndice III) que

$$g = -h\, g_{00} \tag{1.12}$$

donde g es el determinante de $g^{\alpha\beta}$ y h es el determinante de h^{ik}. Se define asimismo los operadores

$$\frac{\partial^*}{\partial t} = \frac{c}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{1.13a}$$

$$\frac{\partial^*}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{g_{i0}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{1.13b}$$

que resulta ser C.I.

Entre los operadores (1.13a) y (1.13b) existen las relaciones que definen a su vez cantidades C.I.

$$\frac{\partial^{*2}}{\partial x^i \partial t} - \frac{\partial^{*2}}{\partial t \partial x^i} = \frac{F_i}{c^2} \frac{\partial^*}{\partial t} \tag{1.14a}$$

$$\frac{\partial^{*2}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^{*2}}{\partial x^k \partial x^i} = \frac{2 A_{ik}}{c^2} \frac{\partial^*}{\partial t} \tag{1.14b}$$

Z'elmanov define también el tensor razón de deformación

$$D^{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^* h^{ik}}{\partial t} \tag{1.15}$$

A partir de la 4-conexión afín $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ puede definirse una co - nexión afín C.I. mediante la regla

$$\Delta^{i}_{kl} = \frac{1}{2} h^{in} \left(\frac{\partial^* h_{kn}}{\partial x^l} + \frac{\partial^* h_{nl}}{\partial x^k} - \frac{\partial^* h_{kl}}{\partial x^n} \right) \tag{1.16}$$

que nos permite obtener la derivada covariante C.I.

$$\begin{aligned} A^{i_1,\dots,i_n}_{k_1,\dots,k_m,\{j\}} &= \frac{\partial^*}{\partial x^j} A^{i_1,\dots,i_n}_{k_1,\dots,k_m} \\ &+ \sum_{l=2}^{n+1} A^{i_1,\dots,i_{l-1},h,i_{l+1},\dots,i_n}_{k_1,\dots,k_m} \Delta^{i_l}_{hj} \\ &- \sum_{l=2}^{m+1} A^{i_1,\dots,i_n}_{k_1,\dots,k_{l-1},h,k_{l+1},\dots,k_m} \Delta^{h}_{k_l j} \end{aligned} \tag{1.17}$$

Utilizando esta definición de derivada covariante se puede demostrar que (análogamente a lo que ocurre en el formalismo 4-dimensional) $h^{ik}{}_{;\{l\}}=0$ (también $h_{ik;\{l\}}=0$)

$$\frac{{}^{*}\partial h_{ik}}{\partial x^{l}} - h_{in}\Delta^{n}_{lk} - h_{nk}\Delta^{n}_{il} = 0 \tag{1.18}$$

donde $A^{i_1,\ldots,i_n}_{k_1,\ldots,k_m}$ es un tensor C.I. n veces contravariante y m veces covariante.

Puede demostrarse que las cantidades definidas en (1.14a) hasta (1.15), se relacionan con las cantidades 4-dimensionales mediante las fórmulas

$$F^{i} = -\frac{c^2\Gamma^{i}_{00}}{g_{00}} \tag{1.19a}$$

$$\frac{g^{in}\Gamma^{k}_{0n}}{\sqrt{g_{00}}} = -\frac{1}{c}\left(A^{ik}+D^{ik}\right) \tag{1.19b}$$

$$g^{\alpha i}g^{k\beta}\Gamma^{l}_{\alpha\beta} = h^{mi}h^{kn}\Delta^{l}_{mn} \tag{1.19c}$$

$$g^{ip}\Gamma^{k}_{0p} + g^{pk}\Gamma^{i}_{p0} = -\frac{2\sqrt{g_{00}}}{c}D^{ik} \tag{1.19d}$$

lo que nos permite expresar F^{i}, A^{ik}, D^{ik}, Δ^{k}_{ln} en función de las cantidades 4-dimensionales.

Para interpretar físicamente las cantidades C.I. Z'elmanov usa el sistema localmente geodésico (S.L.G.) cuyo origen está en el punto de coordenadas x^{α}_{M}, y velocidad C.I. del origen nula. Así las cantidades F^{i} forman el vector aceleración con signo opuesto del espacio de referencia, respecto al S.L.G. A^{ik} llega a ser el tensor velocidad angular del sistema de referencia respecto al sistema localmente geodésico. D^{ik} es el tensor razón de deformación del espacio de referencia respecto al S.L.G.

Puede demostrarse que

$$D = D^{j}_{j} = \frac{1}{2}\frac{\partial^{*}}{\partial t}\ln h \tag{1.20}$$

que viene a ser el cambio relativo de un elemento de volumen del espacio de referencia respecto al S.L.G. (ver demostración al final de este capítulo).

Se puede demostrar que las derivadas covariantes C.I. cruzadas no son iguales, resultando en cambio que si $^{*}\nabla_{ik}$ es el operador derivada covariante C.I. respecto a la coordenada x^k, y luego con respecto a la coordenada x^i, y Q_l es un tensor C.I. cualquiera

$$({}^{*}\nabla_{ik} - {}^{*}\nabla_{ki})\,Q_l = \frac{2A_{ik}}{c^2}\frac{\partial^{*}Q_l}{\partial t} + H_{lki}^{\cdot\cdot\cdot j}Q_j \tag{1.21}$$

donde

$$H_{lki}^{\cdot\cdot\cdot j} = \frac{\partial^{*}\Delta^{j}_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial^{*}\Delta^{j}_{kl}}{\partial x^i} + \Delta^{m}_{il}\Delta^{j}_{km} - \Delta^{m}_{kl}\Delta^{j}_{im} \tag{1.22}$$

es un tensor C.I.

A partir de $H_{lki}^{\cdot\cdot\cdot j}$ Z'elmanov define el tensor de curvatura 3-dimensional C_{lkij} mediante la fórmula

$$C_{lkij} = \frac{1}{4}(H_{lkij} - H_{jkil} + H_{klji} - H_{iljk}) \tag{1.23}$$

y, con este tensor se define

$$C_{lk} = C_{lkn}^{\cdot\cdot\cdot n} \;;\quad C = C^{k}_{k} \tag{1.24}$$

El espacio producto del campo gravitatorio se caracteriza por las cantidades 4-dimensionales $g^{\alpha\beta}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ en la R.G. Z'elmanov al introducir el formalismo C.I., logra caracterizar el campo gravitatorio por las cantidades C.I. $h^{ik}, F^i, A^{ik}, \Delta^i_{kl}, H_{jkl}^{\ i}$.

El tensor de curvaturas en R.G. puede escribirse como

$$R^{\rho}_{\alpha\beta\gamma} = \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta,\rho} - \Gamma^{\rho}_{\alpha\rho,\beta} - \Gamma^{\rho}_{\alpha n}\Gamma^{n}_{\gamma\beta} + \Gamma^{\rho}_{\alpha\beta}\Gamma^{\alpha}_{\rho\gamma} \qquad (1.25a)$$

a partir del cual se define el tensor de curvatura contraído

$$R_{\alpha\beta} = R^{\rho}_{\alpha\beta\rho} \qquad (1.25b)$$

y las ecuaciones del campo gravitatorio vienen a ser

$$g^{\mu\nu}{}_{,\gamma} + g^{\mu n}\Gamma^{\nu}_{\gamma n} + g^{n\nu}\Gamma^{\mu}_{n\gamma} = 0 \qquad (1.26)$$

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \varkappa T_{\mu\nu} + \lambda g_{\mu\nu} \qquad (1.27)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía impulso $\varkappa$, λ son las constantes gravitacional de Einstein y la cosmológica, respectivamente.

Las ecuaciones (1.26) y (1.27) pueden escribirse en formalismo C.I. utilizando la fórmula (1.4) y las cantidades físicas definidas por Z'elmanov, en la forma

$$\frac{{}^*\partial D}{\partial t} + D_{jl}D^{lj} + A_{jl}A^{lj} + {}^*\nabla_j F^j - \frac{F_j F^j}{c^2} = -\frac{\varkappa}{2}(\rho c^2 + U) + \lambda c^2 \qquad (1.28)$$

$${}^*\nabla_j (h^{ij}D - D^{ij} - A^{ij}) + \frac{2}{c^2} F_j A^{ij} = \varkappa J^i \qquad (1.29)$$

$$\begin{aligned} &\frac{{}^*\partial}{\partial t} D_{ik} - (D_{ij} + A_{ij})(D^j_k + A_k^{\ j}) + D D_{ik} - D_{ij}D^j_k \\ &+ 3 A_{ij}A_k^{\ j} + \tfrac{1}{2}({}^*\nabla_i F_k + {}^*\nabla_k F_i) - \tfrac{1}{c^2} F_i F_k - c^2 C_{ik} = \\ &\tfrac{\varkappa}{2}(\rho c^2 h_{ik} + 2U_{ik} - U h_{ik}) + \lambda c^2 h_{ik} \end{aligned} \qquad (1.30)$$

donde $T_{\alpha\beta}$ es la densidad de masa C.I.; ρ la densidad de flujo de masa que es igual a la densidad de momento (ρc^2 es la densidad de energía, $J^i c^2$ es la densidad de flujo de energía); U^{ik} es la densidad de flujo de momento, $U = U^j_j$; $\rho = \frac{T_{00}}{g_{00}}$; $cT^i{}_0 = J^i$, $c^2 T^{ik} = U^{ik}$.

La expresión (1.28) es un escalar C.I. La expresión (1.29) es un tensor C.I. de orden 1. La expresión (1.30) es un tensor C.I. de orden 2.

Ya que en las ecuaciones de Einstein C.I. figuran las cantidades C.I. que caracterizan al campo, podemos obtener conclusiones físicas cualitativas (válidas para cualquier campo gravitacional) sin necesidad de resolver el sistema de ecuaciones. En eso reside la importancia de un análisis C.I.

Además con este formalismo se logra descomponer el espacio - tiempo, denotando la diferencia entre ellos que aparecen disimulados en el formalismo 4-dimensional.

Como hemos visto en esta sección podemos, a partir de cantidades 4-dimensionales, definir cantidades C.I. que caracterizan al campo gravitatorio al descomponer el espacio y el tiempo en cualquier sistema de ecuaciones covariantes. O sea que tiene lugar

$$\begin{bmatrix} \text{Formalismo} \\ \text{4-dimensional} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \text{Formalismo C.I.} \end{bmatrix}$$

Sin embargo no sabemos si la relación inversa podría tener lugar. Más adelante desarrollaremos en método que muestra la relación inversa. Este método nos permitirá demostrar fácilmente el significado físico de las cantidades C.I.

Z'elmanov enuncia el siguiente teorema:

1A. TEOREMA: $F_m=0$, $A_{mn}=0$ es la condición necesaria y suficiente para la posibilidad de encontrar un sistema de coordenadas Σ' en el que se cumple $g'_{00}=0$, $g'_{n0}=0$ es decir, el espacio es holónomo.

La demostración de este teorema se da más tarde en el caso general de la teoría unitaria.

2. MATRIZ DE DESCOMPOSICION DEL ESPACIO TIEMPO.

La métrica 4-dimensional $g^{\alpha\beta}$ podemos escribirla como la matriz

$$g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \cdots & g_{03} \\ g_{10} & \cdot & \cdot \\ g_{20} & \cdot & \cdot \\ g_{30} & \cdot & g_{33} \end{vmatrix} \qquad (2.1)$$

donde $g_{00} \neq 0$.

Podemos descomponer las componentes temporales de las espaciales mediante operaciones elementales sobre la matriz (ver Apéndice IV) obteniendo la matriz equivalente

$$^{*}g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -h_{ik} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \qquad (2.2)$$

donde h_{ik} está dada por la fórmula (1.6).

Como vemos en el apéndice IV, para obtener h_{ik} de $g_{\alpha\beta}$ es necesario emplear $g_{0\alpha}$.

Si introducimos nuevas coordenadas (no holónomas) x_{*}^{0}, x_{*}^{n} definidas por

$$\delta x_{*}^{n} = dx^{n} \qquad (2.3)$$

$$\delta x_{*}^{0} = \frac{g_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} dx^{\alpha} \qquad (2.4)$$

entonces la forma (1.11) de expresar ds^2 podríamos interpretarlo como si fuera debido a una transformación de coordenadas, que nos permite descomponer el espacio tiempo, ya que

$$ds^2 = (\delta x^0_*)^2 - h_{mn}\,\delta x^m_*\,\delta x^n_* \tag{2.5}$$

Esta descomposición puede representarse mediante la matriz A^α_β:

$$dx^\alpha_* = A^\alpha_\beta\, dx^\beta \tag{2.6}$$

donde

$$A^\alpha{}_\beta = \begin{vmatrix} \sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ g_{10}/\sqrt{g_{00}} & 1 & 0 & 0 \\ g_{20}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 1 & 0 \\ g_{30}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.7}$$

Queda claro el caracter no holónomo de las nuevas coordenadas, puesto que

$$\frac{\partial A^\alpha{}_\beta}{\partial x^\gamma} \neq \frac{\partial A^\alpha{}_\gamma}{\partial x^\beta} \tag{2.8}$$

Podemos ver que

$$\| A^\alpha{}_\beta \| = \sqrt{g_{00}} \neq 0 \tag{2.9}$$

luego la matriz A^α_β tiene inversa, siendo esta

$$\bar{A}^{1\alpha}{}_\beta = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ -g_{10}/g_{00} & 1 & 0 & 0 \\ -g_{20}/g_{00} & 0 & 1 & 0 \\ -g_{30}/g_{00} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{2.10}$$

luego podemos realizar la transformación inversa, notando siempre que es necesario conocer para esto los elementos $g_{0\alpha}$.

3. TENSORES Y ESCALARES EN EL ESPACIO NO HOLONOMO DESCOMPUESTO.

Mediante la matriz A^α_β definida en (2.7), que se comporta como una matriz de transformación, a un espacio descompuesto , se pueden obtener las cantidades definidas por Z'elmanov y se explica en forma clara su significado físico de cada una de ellas.

En las siguientes secciones definiremos por este proceso las cantidades C.I.

Si tenemos el tensor 4-dimensional $Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m}$, podemos definir a partir de este tensor, las cantidades tensoriales

$$*Q^{i_1,\ldots,i_n}_{0,\ldots,0\ \text{m veces}} = Q^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}_{\beta_1,\ldots,\beta_m} A^{i_1}_{\alpha_1} \ldots A^{i_n}_{\alpha_n} \overset{-1}{A}{}^{\beta_1}_{0} \ldots \overset{-1}{A}{}^{\beta_m}_{0} \tag{3.1}$$

si tenemos en cuenta (2.7) vemos que:

$$*Q^{i_1,\ldots,i_n}_{\underset{\text{m veces}}{0,\ldots,0}} = \frac{Q^{i_1,\ldots,i_n}_{0,\ldots,0\ \text{m veces}}}{g_{00}^{m/2}} \tag{3.2}$$

coincidiendo, entonces, con cantidades definidas por Z'elmanov (ver fórmula (1.4)).

4. TENSOR METRICO EN EL ESPACIO NO HOLONOMO DESCOMPUESTO.

Mediante la matriz (2.7) podemos transformar el tensor métrico contravariante, obteniéndose

$$g_*^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & -h^{ik} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \tag{4.1}$$

donde h^{ik} está dado por (1.5), coincidiendo con las cantidades definidas por Z'elmanov.

Dado que la matriz de transformación tiene inversa (2.10) la relación entre ambos espacios está dado por los elementos $g_{0\alpha}$.

Vemos que los 4 elementos temporales del tensor métrico del espacio descompuesto son constantes mientras que los elementos 3-dimensionales (las 6 restantes) coinciden con el tensor métrico definido por Z'elmanov, notándose la relación que existe entre el formalismo C.I. y los elementos del espacio descompuesto en lo que respecta al tensor métrico.

5. OPERADORES DE DERIVACION PARCIAL EN EL ESPACIO NO HOLONOMO DESCOMPUESTO.

Usando la matriz (2.10), debido a la covariante de podemos definir

$$\frac{\partial^*}{\partial x^0} = A^{-1}{}^{\alpha}{}_{0}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}\,\frac{\partial}{\partial x^0} \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial^*}{\partial x^n} = A^{-1}{}^{\alpha}{}_{n}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} = \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{g_{n0}}{g_{00}}\,\frac{\partial}{\partial x^0} \tag{5.2}$$

operadores definidas por Z'elmanov en las ecuaciones (1.13a) y (1.13b), y que definen operadores C.I. implicadas con la derivada parcial con respecto a las coordenadas del espacio no holónomo considerado.

6. CONEXION AFIN EN EL ESPACIO NO HOLONOMO DESCOMPUESTO.

La matriz A^{α}_{β} juega, como hemos visto, el papel de la matriz de transformación al espacio no holónomo descompuesto. Podemos, entonces, transformar la conexión afín a este sistema mediante la fórmula

$$^*\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\delta}_{\eta\rho}\,A^{-1}{}^{\eta}{}_{\beta}\,A^{-1}{}^{\rho}{}_{\gamma}\,A^{\alpha}_{\delta} + \frac{\partial^*}{\partial x^{\beta}}\left(A^{-\eta}{}_{\gamma}\right)A^{\alpha}_{\eta} \tag{6.1}$$

que es la correspondiente a la relación que existe entre las conexiones afines de los sistemas:

$$'\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\sigma}_{\eta\rho} \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{\beta}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\sigma}} + \frac{\partial^2 x^{\eta}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}} \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \tag{6.2}$$

Usando la fórmula (6.1) se obtiene los elementos de la conexión afín $^{*}\Gamma$ siguientes

$$^{*}\Gamma^{0}_{00} = 0 \tag{6.3}$$

$$^{*}\Gamma^{0}_{0n} = \frac{h_{ik}\Gamma^{k}_{00}}{g_{00}} \tag{6.4}$$

$$^{*}\Gamma^{0}_{n0} = 0 \tag{6.5}$$

$$^{*}\Gamma^{i}_{k0} = \frac{\Gamma^{i}_{k0}}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0n}\Gamma^{n}_{0k}g_{0i}}{g_{00}^{3/2}} + \frac{g_{0i}g_{0k}g_{00,0}}{2g_{00}^{3/2}} \tag{6.6}$$

$$^{*}\Gamma^{i}_{0k} = \frac{\Gamma^{i}_{0k}}{\sqrt{g_{00}}} - \frac{g_{0k}\Gamma^{i}_{00}}{g_{00}^{3/2}} \tag{6.7}$$

$$^{*}\Gamma^{n}_{00} = \frac{\Gamma^{n}_{00}}{g_{00}} \tag{6.8}$$

$$h^{ir}h^{ks} {}^{*}\Gamma^{0}_{ik} = -\frac{g^{s\alpha}\Gamma^{r}_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \tag{6.9}$$

$$^{*}\Gamma^{i}_{kl} = \Gamma^{i}_{kl} - \frac{\Gamma^{i}_{0l}g_{k0}}{g_{00}} - \frac{\Gamma^{i}_{k0}g_{0l}}{g_{00}} + \frac{\Gamma^{i}_{00}g_{k0}g_{0l}}{g_{00}^{2}} \tag{6.10}$$

De (6.3) y (6.5) vemos que se han fijado 4 de las 64 componentes de la conexión afín al transformarlo al sistema no holónomo.

Por otra parte entre los elementos de la conexión afín existen las siguientes 21 relaciones

$$^{*}\Gamma^{i}_{00} = h^{ik} {}^{*}\Gamma^{0}_{0k} \tag{6.11}$$

$$h^{ir} h^{ks} \, {}^{*}\Gamma^{0}_{ik} = h^{ir} \, {}^{*}\Gamma^{s}_{0i} \qquad (6.12)$$

$$\Gamma^{i}_{\underset{v}{kl}} = 0 \qquad (6.13)$$

quedando 39 componentes de variables independientes, de las cuales 30 son C.I. (${}^{*}\Gamma^{i}_{kl}$ no lo son), que le corresponden a las cantidades definidas por Z'elmanov, mediante las relaciones que pueden escribirse como

$${}^{*}\Gamma^{i}_{00} = -\frac{F^{i}}{c^{2}} \qquad (6.14)$$

$$h^{ir} h^{ks} \, {}^{*}\Gamma^{0}_{ik} = (A^{rs} + D^{rs})/c \qquad (6.15)$$

$$h^{rk} \, {}^{*}\Gamma^{i}_{0k} + h^{ki} \, {}^{*}\Gamma^{r}_{k0} = -\frac{D^{ri}}{c} \qquad (6.16)$$

$${}^{*}\Gamma^{i}_{kl} = \Delta^{i}_{kl} \qquad (6.17)$$

Debe notarse que la relación entre Γ y ${}^{*}\Gamma$ lo da la matriz A^{α}_{β}; mientras que las cantidades ${}^{*}\Gamma$ variables y C.I. le corresponden a las C.I. definidos por Z'elmanov. Es importante notar que los elementos netamente 3-dimensionales de ${}^{*}\Gamma$ coinciden con la conexión afín 3-dimensional definida por Z'elmanov.

7. TENSOR DE CURVATURA EN EL ESPACIO NO HOLONOMO DESCOMPUESTO.

Dado el caracter tensorial del tensor de curvatura $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$, la tranformación al sistema descompuesto dada por la matriz A^{α}_{β} nos dará el tensor de curvatura ${}^{*}R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$. Sin embargo hay que notar que $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$ está relacionado con la conexión afín 4-dimensional Γ mediante la fórmula

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\rho} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\gamma}\Gamma^{\sigma}_{\beta\rho} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\beta\gamma} \tag{7.1}$$

Es de esperar, entonces, que el tensor de curvatura $^{*}R$ se exprese en función de $^{*}\Gamma$, y debido a la relación que existe entre $^{*}\Gamma$ y las cantidades C.I. $F^{i}, A^{ik}, D^{ik}, \Delta^{i}_{kl}$ se exprese en función de las cantidades C.I.

En efecto, los elementos de $^{*}R$ que forman un tensor 3-dimensional de orden 4 pueden escribirse en las siguientes fórmulas:

$$\begin{aligned} {}^{*}R^{rstj}_{\cdots} = & -h^{ir}h^{js}h^{kl}\left(\frac{\partial^{*}}{\partial x^{k}}\Delta^{j}_{il} - \frac{\partial^{*}}{\partial x^{l}}\Delta^{j}_{ik} - \Delta^{n}_{kl}\Delta^{j}_{ni} + \Delta^{n}_{il}\Delta^{j}_{nk}\right) \\ & + (A^{rj}+D^{rj})(A^{ts}+D^{ts})/c^{2} - 2A^{rt}(A^{sj}+D^{sj})/c^{2} \end{aligned} \tag{7.2}$$

Z'elmanov, por derivadas cruzadas, define en la fórmula (1.22) como $H_{lki}{}^{j}$ a las cantidades entre corchetes de (7.2). Pero lo que queremos remarcar, es que las cantidades C.I. a partir de $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$ se pueden escribir en función de los elementos C.I. $F^{n}, A^{mn}, D^{mn}, \Delta^{m}_{ik}$ y sus derivados, el hecho que Z'elmanov haya llamado $H_{lki}{}^{j}$ al tensor entre corchetes de (7.2) y lo relacione con el tensor de curvatura 3-dimensional, no significa que la relación entre los formalismos debe analizarse con $H_{lki}{}^{j}$ sino con los correspondientes $^{*}R$.

Los tensores de orden 3 derivados del tensor de curvatura 4-dimensional son

$${}^{*}R_{0}{}^{\cdot ikl}_{\cdots} = -\frac{h^{ml}}{c}(A^{ki}+D^{ki})_{;\{m\}} + \frac{h^{mk}}{c}(A^{li}+D^{li})_{;\{m\}} - \frac{F^{i}}{c^{3}}(A^{lk}+D^{lk}) + \frac{F^{i}}{c^{3}}(A^{kl}+D^{kl}) \tag{7.3}$$

$$
{}^{*}R^{ikl}_{\cdot\cdot\cdot\, 0} = h^{lm} h^{jk} \frac{\partial^{*}}{c\,\partial t} \Delta^{i}_{lj} - \frac{h^{lk}}{c} (A^{mi} + D^{mi})_{;\{l\}} + (A^{mi} + D^{mi}) F^{k}/c^{3} + (A^{ki} + D^{ki}) F^{m}/c^{3} \qquad (7.4)
$$

$$
{}^{*}R^{ikl}_{\cdot\cdot\cdot\, 0} = - R^{ik}_{\cdot\cdot\, 0}{}^{l} \qquad (7.5)
$$

$$
{}^{*}R^{i}{}_{0}{}^{kl} = \frac{h^{mi}}{c} (A^{kl} + D^{kl})_{;\{m\}} - \frac{h^{mk}}{c} (A^{li} + D^{li})_{;\{m\}} - F^{i}(A^{lk} + D^{lk}) + F^{i}(A^{kl} + D^{kl}) \qquad (7.6)
$$

$$
{}^{*}R^{i}{}_{0}{}^{kl} = - {}^{*}R^{i}{}_{0}{}^{lk} \qquad (7.7)
$$

Los tensores de orden 2 derivados del tensor de curvatura 4-dimensional son:

$$
{}^{*}R^{i}{}_{0}{}^{m}{}_{0} = - \frac{h^{ln}}{c^{2}} (F^{i})_{;\{l\}} + \frac{\partial^{*}}{c^{2}\partial t} (A^{mi} + D^{mi}) + 2 D^{m}_{n} (A^{ni} + D^{ni}) + A^{m}{}_{n} (A^{ni} + D^{ni}) \qquad (7.8)
$$

$$
{}^{*}R^{i}{}_{0}{}^{m}{}_{0} = - {}^{*}R^{i}{}_{00}{}^{m} \qquad (7.9)
$$

$$
{}^{*}R_{00}{}^{mi} = h^{im} h^{ki} \left[\frac{\partial^{*}}{\partial x^{k}} \Delta^{n}_{nl} - \frac{\partial^{*}}{\partial x^{l}} \Delta^{n}_{nk} \right] + 2 \frac{D A^{im}}{c^{2}} \qquad (7.10)
$$

$$
\begin{aligned}
{}^{*}R_{0}{}^{m}{}_{0}{}^{i} = & - \frac{h^{km} h^{li}}{c^{2}} (F^{m})_{;\{l\}} - \frac{\partial^{*}}{c^{2}\partial t} \left[(A^{in} + D^{in}) h_{nl} \right] h^{lm} \\
& + \frac{h_{ns}}{c^{2}} \left[(A^{ms} + D^{ms})(A^{in} + D^{in}) + (A^{nm} + D^{nm})(A^{si} + D^{si}) \right] \qquad (7.11)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{*}R_{0}{}^{m}{}_{0}{}^{i} = - R_{0}{}^{mi}{}_{0} \qquad (7.12)
$$

$$ {}^{*}R^{im}{}_{\cdot 00} = 0 \qquad (7.13) $$

Los tensores de orden 1 que se derivan del tensor de curvatura 4-dimensional son nulos es decir:

$$ {}^{*}R^{n}{}_{000} = {}^{*}R_{0}{}^{n}{}_{\cdot 00} = {}^{*}R_{00}{}^{n}{}_{0} = {}^{*}R_{000}{}^{n} = 0 \qquad (7.14) $$

Así pues, hemos obtenido todos los tensores C.I. que se derivan del tensor de curvatura 4-dimensional, notándose que están en función de las cantidades C.I. definidas por Z'elmanov como era de esperarse. Tengo que reiterar que a partir del tensor de orden 4 que se obtiene de $R^{\alpha}{}_{\beta\gamma\rho}$, resulta el tensor $H_{ijk}{}^{l}$ definido por Z'elmanov, haciéndonos recordar que si consideramos ${}^{*}\Gamma$ con sus tres índices 3-dimensionales resulta la conexión afín 3-dimensional, definido por Z'elmanov. Notándose de esa forma el importante papel que desempeña la matriz $A^{\alpha}{}_{\beta}$ en la definición de cantidades C.I.

8. SISTEMA LOCALMENTE GEODESICO.

Sean x^{α}_{M} las coordenadas del punto $\bar{M}$, arbitrario pero fijo respecto al sistema de referencia Σ. En este punto $\bar{M}$ podemos asumir un sistema localmente geodésico Σ', con velocidad C.I. nula, en el punto M, respecto al sistema Σ. De modo que la ley de transformación de coordenadas entre estos dos sistemas

$$ x'^{\alpha} = x^{\alpha} - x^{\alpha}_{M} + \frac{1}{2}\,(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_{M}\,(x^{\beta} - x^{\beta}_{M})(x^{\gamma} - x^{\gamma}_{M}) \qquad (8.1) $$

pudiendo notar que la condición de velocidad nula resulta de esta transformación :

$$\frac{d^*}{dt} = 0 \tag{8.2}$$

Cabe notar que la velocidad C.I. está definida en función del operador

$$\frac{d^*}{dt} = \frac{d}{d\gamma} \tag{8.3}$$

donde está dado por la fórmula (1.9). TAmbién es útil escribir las expresiones relacionadas con la transformación (8.1)

$$\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)_{\bar{M}} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{8.4}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}}\right)_{\bar{M}} = (\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_{\bar{M}} \tag{8.5}$$

$$\left(\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}}\right)_{\bar{M}} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{8.6}$$

$$\left(\frac{\partial^2 x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}\partial x'^{\gamma}}\right)_{\bar{M}} = -(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_{\bar{M}} \tag{8.7}$$

La condición de velocidad relativa entre los sistemas nos lleva a la ecuación relacionada con (1.9)

$$1 = c\sqrt{g_{00}}\,\frac{dx^0}{d\gamma} \tag{8.8}$$

9. TENSOR ACELERACION DEL SISTEMA DE REFERENCIA RESPECTO AL SISTEMA LOCALMENTE GEODESICO (F^m).

Teniendo en cuenta que el origen del S.L.G. se obtiene para el punto de coordenadas X^{λ}_{M} en el sistema Σ, vemos que la velocidad de Σ' con respecto a Σ en el punto $\bar{M}$ será de acuerdo a (8.1)

$$\left(\frac{d^{*}x^{m}}{dt}\right)_{M} = -\frac{1}{2}\left(\Gamma^{m}_{\beta\gamma}\right)_{M}\left[\frac{dx^{\beta}}{dt}\left(x^{\gamma}-x^{\gamma}_{M}\right)+\left(x^{\beta}-x^{\beta}_{M}\right)\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right] \qquad (9.1)$$

entonces la aceleración llega a ser, si tenemos en cuenta (8.2)

$$\left(\frac{d^{*2}}{dt^{2}}\right)_{M} = -\Gamma^{m}_{00}\left(\frac{dx^{0}}{dt}\right)^{2} \qquad (9.2)$$

que, recordando (8.8), logramos a obtener que la aceleración de Σ' respecto a Σ es

$$f^{m} = \frac{d^{*2}}{dt^{2}}x^{m} = F^{m} \qquad (9.3)$$

de modo que F^{m} viene a ser el tensor aceleración del sistema localmente geodésico con respecto al sistema de referencia.

Si tomamos el punto con el origen de Σ' fijo respecto a Σ la aceleración de este punto respecto a Σ' será

$$a^{m} = -\frac{\partial x'^{m}}{\partial x^{n}}F^{n} = -F^{m} \qquad (9.4)$$

En ese sentido F^{m} viene a ser la aceleración con signo opuesto de Σ respecto al Σ'.

10. TENSOR VELOCIDAD ANGULAR DEL SISTEMA DE REFERENCIA RESPECTO AL SISTEMA LOCALMENTE GEODESICO (A^{jk}).

En los tratados clásicos de la Mecánica, si $\bar{V}$ es la velocidad de una partícula , $\bar{w}$ su velocidad angular y $\bar{r}$ su posición. Bajo la restricción que $|\bar{r}|$ es constante, obtenemos que

$$\bar{V} = \bar{\omega}\times\bar{r} \qquad (10.1)$$

pudiendo mostrar que

$$\omega_x = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{1JK}\,W_{JK} \tag{10.2}$$

$$\omega_Y = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{2JK}\,W_{JK} \tag{10.3}$$

$$\omega_Z = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{3JK}\,W_{JK} \tag{10.4}$$

donde

$$W_{JK} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_K}{\partial x^J} - \frac{\partial V_J}{\partial x^K}\right) \tag{10.5}$$

Si consideramos cantidades y operadoras C.I. en las fórmulas desde (10-2) hasta (10.5) obtenemos

$$W_{JK} = \frac{1}{2}\left(\nabla^*_J V_K - \nabla^*_K V_J\right) = \frac{h_{LK}}{c}\nabla^*_J V^L - \frac{h_{LJ}}{c}\nabla^*_K V^L \tag{10.6}$$

A partir de (10.6), teniendo en cuenta (6.2) y (8.8) se obtiene

$$h^{Jm}h^{Kn}\,W_{JK} = \left(g^{mp}\,\Gamma^n_{0p} - g^{pn}\,\Gamma^m_{p0}\right)/c\sqrt{g_{00}} \tag{10.7}$$

Teniendo presente las relaciones (1.19b) y (8.8) se llega a

$$W'^{JK} = -h^{mJ}h^{Kn}\,W_{mn} = -\Lambda^{JK} \tag{10.8}$$

de modo que Λ^{JK} es el tensor velocidad angular, con signo opuesto, del sistema Σ' con respecto a Σ .

Ahora bien, si tomamos un punto del origen de Σ', fijo respecto de Σ la velocidad angular de este punto respecto a Σ' será

$$-\frac{\partial x'^J}{\partial x^m}\frac{\partial x'^K}{\partial x^n}\,W^{mn} = \Lambda^{JK} \tag{10.9}$$

En ese sentido A^{JK} viene a ser la velocidad angular de Σ respecto a Σ'.

11. TENSOR DE DEFORMACION DEL SISTEMA DE REFERENCIA RESPECTO AL SISTEMA LOCALMENTE GEODESICO (D^{mn}).

Clásicamente sabemos que un elemento de longitud está dado por

$$dl^2 = \bar{e}_J \cdot \bar{e}_K \; \delta x^J \delta x^K \tag{11.1}$$

de modo que la razón de deformación es definido considerando la razón del cambio de longitud por el cambio de los vectores unitarios $\bar{e}_i$ respecto a la coordenada temporal, lo que resulta ser, si suponemos que $\delta x^i = \text{const}$.

$$(\delta l) \frac{d}{dt}(\delta l) = d_{JK} \; \delta x^r \delta x^K \tag{11.2}$$

luego el cambio está expresado por d_{JK}, definiendose

$$d_{JK} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\bar{e}_J \cdot \bar{e}_K) \tag{11.3}$$

Ahora bien, el cambio (11-2) resulta de la variación de los vectores unitarios. Si reemplazamos en (11.2) las cantidades convencionales por los C.I. obtenemos

$$\delta l \frac{d^*}{dt}(\delta l) = \frac{1}{2} \frac{d^*}{dt}(h_{JK}) \; \delta x^J \delta x^K \tag{11.4}$$

Si consideramos que un elemento de longitud ligado al origen, está cambiando de posición respecto a Σ, la variación de se debe justamente a ese cambio. Recordando lo anterior y las relaciones (8.2) y (8.8) se transforma en

$$\delta l \frac{d^*(\delta l)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\partial^* h_{JK}}{\partial t} \delta x^J \delta x^K \qquad (11.5)$$

donde generalizando la definición (11.3) se obtiene que

$$d_{JK} = \frac{1}{2} \frac{\partial^*}{\partial t} h_{JK} \qquad (11.6)$$

viene a ser el tensor razón de deformación del sistema localmente geodésico respecto al sistema de referencia.

Podemos hacer la transformación al sistema Σ', resultando

$$d'_{JK} = \frac{\partial x^m}{\partial x^J} \frac{\partial x^n}{\partial x^K} d_{mn} \qquad (11.7)$$

que coincide con D_{ik} definido por Z'elmanov. En ese sentido D_{ik} viene a ser el tensor de razón de deformación del sistema Σ respecto al sistema localmente geodésico.

Si tenemos en cuenta que en un sistema de coordenadas, el elemento de volumen dado por el paralelepípedo formado por los vectores unitarios $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ resulta

$$V = \bar{e}_1 \cdot (\bar{e}_2 \times \bar{e}_3) = \begin{vmatrix} e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \\ e_{3x} & e_{3y} & e_{3z} \end{vmatrix} \qquad (11.7)$$

Si tenemos en cuenta la matriz

$$M_{JK} = \bar{e}_J \cdot \bar{e}_K \qquad (11.8)$$

la fórmula (11.7) se expresa como

$$V = \det(M_{JK}) \qquad (11.9)$$

definiendo la velocidad de deformación como

$$R = \frac{1}{2V}\frac{dV}{d\tau} \tag{11.10}$$

Si consideramos el formalismo C.I. en las fórmulas (11.7) y (11.9) se obtiene, si además tenemos en cuenta (8.2) y (8.8), que

$$R = \frac{1}{2h}\frac{\partial^* h}{\partial t} \tag{11.11}$$

o sea que R=D. D es el escalar C.I. velocidad de deformación del sistema de referencia respecto al S.L.G. definido por Z'elmanov.

Una aplicación del formalismo de Z'elmanov está desarrollado en el apéndice I.

B. LA TEORIA UNITARIA DE LOS TENSORES NO SIMETRICOS

La Relatividad General trata del campo gravitatorio caracterizado por el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, y la conexión afín $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ (ambos simétricos) así como por el tensor de curvatura $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$ definido por (1.25a). Estos elementos están sujetos a la relación (1.26) y a las ecuaciones de Einstein (1.27). En cierto sentido podríamos afirmar que (1.26) y (1.27) son las ecuaciones del campo gravitacional ($g_{\alpha\beta}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$) en Relatividad General.

Einstein creó la Teoría generalizando los elementos $g_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ sin la restricción de simetría, obtuvo para tales elementos ciertas ecuaciones análogas a (1.26) y (1.27) a partir de cierto principio variacional.

En este capítulo haremos en resumen de la teoría unitaria (T.U.) haciendo notar las cuestiones más importantes que surgen en éste.

En esta teoría, como en R.G. surge una conexión afín relacionada con el desplazamiento infinitesimal, pero en ésta, como hemos dicho, la conexión afín no es simétrica.

Mostraremos la diferencia del papel que desempeñan las cantidades g y Γ en R.G. y en la T.U.

Veremos, también, que aparecen nuevos tipos de invariancia.

12. LA CONEXION AFIN.

Sea A^α, un vector contravariante en un punto P de coordenadas x^α. Este vector si se considera en el punto de coordenadas $x^\alpha + dx^\alpha$, tendrá las componentes $A^\alpha + DA^\alpha$. De modo que la diferencia entre las componentes será D^α. Si DA^α es cero con respecto a un sistema de coordenadas, ésta debe ser cero en cualquier sistema de coordenadas, esto se cumple si DA^α tiene caracter tensorial.

Para que DA^α sea un tensor, suponiendolo de la forma

$$DA^\alpha = \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} + A^\eta \Gamma^\alpha_{\eta\rho}\right) dx^\rho = A^\alpha{}_{;\{-\rho\}}\, dx^\rho \qquad (12.1a)$$

se obtiene la ley de tarnsformación para el conjunto de valores Γ :

$$\Gamma'^\alpha_{\beta\gamma} = \Gamma^\eta_{\rho\delta} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\beta} \frac{\partial x^\delta}{\partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\eta} + \frac{\partial^2 x^\eta}{\partial x'^\beta \partial x'^\gamma} \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\eta} \qquad (12.2)$$

Debemos notar que en las relaciones (12.1a) el índice de Γ, que se contrae con A^α, es el 1°, característica que indicaremos con el guión antes del índice de derivación en el corchete de la fórmula (12.1a).

En la fórmula (12.1a) es evidente que $A^\alpha{}_{;\{-\rho\}}$ es un tensor, interpretada, por esto, como derivada covariante A^α, mientras que a DA^α se le denomina diferencial covariante.

Hay que notar, sin embargo, que podemos definir otro operador de caracter tensorial:

$$A^\alpha{}_{;\{\rho-\}} = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} + A^\eta \Gamma^\alpha_{\rho\eta} \qquad (12.1b)$$

donde el guión indica que A^η se contrajo con el 2° índice de Γ.

Cabe anotar que (12.1b) es un operador no utilizado en la Teoría Unitaria, sin embargo nosotros creemos que no se debe dejar de considerar.

Dado que la diferencial covariante, entendido como la variación de un vector por un desplazamiento infinitesimal, está expresado por (2.1a) definimos la derivada covariante de A^{α} respecto a la coordenada x^{ρ} como

$$A^{\alpha}{}_{;\rho} = A^{\alpha}{}_{;\{-\rho\}} \qquad (12.1c)$$

relegándose, de este modo, a $A^{\alpha}{}_{;\{\rho-\}}$ como una operación matemática, que podría servir para construir expresiones invariantes bajo transposición.

Considerando que la derivada covariante de un escalar es simplemente la derivada parcial de este escalar, y que la regla de derivación covariante de un producto de tensores de cualquier tipo, es igual a la regla habitual de derivación se obtiene

$$\{A^{\alpha}A_{\alpha}\}_{;\beta} = \left(\frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} + A^{\eta}\Gamma^{\alpha}_{\eta\beta}\right)A_{\alpha} + A^{\alpha}A_{\alpha;\beta} \qquad (12.1d)$$

de donde resulta que:

$$A_{\alpha;\beta} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - A_{\eta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\beta} \qquad (12.1e)$$

recordando como en la fórmula (12.1b), que existe una operación matemática de carácter tensorial, ésta es

$$A_{\alpha;\{\beta-\}} = \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - A_{\eta}\Gamma^{\eta}_{\beta\alpha} \qquad (12.1f)$$

que se podría usar para construir expresiones invariante bajo transposición.

Generalizando las definiciones (12.1e) y (12.1f) para un tensor mixto $A^{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m}_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}$ m veces contravariante y n veces covariante, definimos la derivada covariante de tal tensor mixto

$$A^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_{\beta_1,\dots,\beta_n\,;\,\rho} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} A^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_{\beta_1,\dots,\beta_n}$$

$$+\sum_{j=1}^{m} A^{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\gamma,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_m}_{\beta_1,\dots,\beta_n} \Gamma^{\alpha_j}_{\gamma\rho}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} A^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}_{\beta_1,\dots,\beta_{j-1},\gamma,\beta_{j+1},\dots,\beta_n} \Gamma^{\gamma}_{\alpha\gamma\rho} \qquad (12.1g)$$

Las propiedades de la conexión afín son las siguientes:

i) $\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta})$ también se transforma con la ley (12.2) luego es también una conexión afín.

ii) La parte simétrica de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ definida por

$$\Gamma^{\alpha}_{\underline{\beta\gamma}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\right) \qquad (12.3a)$$

es también, conexión afín.

La parte antisimétrica de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ definida por

$$\Gamma^{\alpha}_{\underset{\vee}{\beta\gamma}} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\right) \qquad (12.3b)$$

es un tensor.

iii) Si consideramos $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ como simétrico se obtiene la teoría gravitacional. Es de esperar entonces, que sin esta restricción obtengamos la generalización del campo, es decir el campo unitario.

13. TENSOR DE CURVATURA.

Usando una circunferencia infinitesimal $(\xi^{\alpha} = x^{\alpha} - x_0^{\alpha})$ con centro en el punto de coordenadas x_0^α, sobre el cual se des plaza un vector contravariante A^α se logra obtener

$$\oint \delta A^\alpha = [-\Gamma^\alpha_{\beta\eta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\rho\eta}\Gamma^\rho_{\beta\gamma}] \tag{13.1a}$$

donde

$$\delta A^\alpha = -A^\eta \Gamma^\alpha_{\eta\rho}\, dx^\rho$$

en la circunferencia.

Teniendo en cuenta que $\oint \xi^\gamma d\xi^\eta$ es una expresión antisimétrica obtenemos

$$\oint \delta A^\alpha = \frac{1}{2}[-\Gamma^\alpha_{\beta\eta,\gamma} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\eta} + \Gamma^\alpha_{\rho\eta}\Gamma^\rho_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha_{\rho\gamma}\Gamma^\rho_{\beta\eta}]A^\beta \oint \xi^\gamma d\xi^\eta \tag{13.1b}$$

Entonces si suponemos que $\oint \delta A^\alpha$ es un tensor la expresión en tre corchetes en (13.1b) debe ser un tensor, definiendo así el tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\rho}$:

$$R^\alpha_{\beta\gamma\rho} = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\rho} - \Gamma^\alpha_{\beta\rho,\gamma} - \Gamma^\alpha_{\eta\gamma}\Gamma^\eta_{\beta\rho} + \Gamma^\alpha_{\eta\rho}\Gamma^\eta_{\beta\gamma} \tag{13.2}$$

contrayendo con respecto a α y ρ se define el tensor de curva tura contraído $R_{\beta\gamma}$:

$$R_{\beta\gamma} = \Gamma^\eta_{\beta\gamma,\eta} - \Gamma^\eta_{\beta\eta,\gamma} - \Gamma^\eta_{\beta\rho}\Gamma^\rho_{\eta\gamma} + \Gamma^\eta_{\beta\gamma}\Gamma^\rho_{\rho\eta} \tag{13.3}$$

14. TRANSFORMACION λ.

El espacio 4-dimensional, de acuerdo a esta teoría, está caracterizado por la conexión afín (cuya restricción es la ley de transformación (12.2)), por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$, y por el tensor de curvatura $R^\alpha_{\beta\gamma\rho}$.

Si λ es una función arbitraria de coordenadas y $\lambda_{,\gamma}$, la derivada parcial de ésta con respecto a la coordenada x^{γ} ; podemos definir una nueva conexión afín mediante la fórmula.

$$ {}^{\lambda}\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\beta}\lambda_{,\gamma} \tag{14.1}$$

pudiendo comprobarse que

$$ R^{\eta}_{\alpha\beta\gamma}({}^{\lambda}\Gamma) = R^{\eta}_{\alpha\beta\gamma}(\Gamma) \tag{14.2}$$

$$ R_{\alpha\beta}({}^{\lambda}\Gamma) = R_{\alpha\beta}(\Gamma) \tag{14.3}$$

Las ecuaciones (14.2) y (14.3) aseguran que bajo una transformación de la forma (14.1) llamada transformación λ, el tensor de curvatura no cambia. Vemos que una familia de Γ tienen un mismo $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$, lo que indica que $R^{\alpha}_{\beta\gamma\rho}$ no se obtiene de un solo Γ .

15. INVARIANCIA DE TRANSPOSICION.

Uno de los problemas de la teoría unitaria es el hecho que si Γ es una conexión afín (cumple con la transformación (12.2), $\tilde{\Gamma}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ $(=\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta})$ también lo es. Esto significa que podemos tener dos formas de desplazamientos paralelos.

Otro de los problemas es el tensor $g_{\alpha\beta}$. Se puede ver que si A^{α} es un tensor, también lo son $g_{\alpha\eta}A^{\eta}$ y $g_{\eta\alpha}A^{\eta}$, es decir $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ es un tensor métrico. Vemos así que surgen dos formas de bajar índices y darán por lo tanto dos formas de producto escalar.

Por lo tanto podemos, exigiendo la invariancia del producto escalar de dos vectores en una traslación paralela, obtener la relación entre g y Γ

$$Z_{\alpha\beta\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\rho\beta}\Gamma^{\rho}_{\alpha\gamma} - g_{\alpha\rho}\Gamma^{\rho}_{\beta\gamma} = 0 \tag{15.1}$$

así como relaciones de otros tipos debido a las dos formas de definir desplazamiento infinitesimal, producto escalar y la forma de subir o bajar índices. Sin embargo escogemos la relación

$$W_{\alpha\beta,\gamma} = g_{\alpha\beta,\gamma} - g_{\alpha\eta}\Gamma^{\eta}_{\gamma\beta} - g_{\eta\beta}\Gamma^{\eta}_{\alpha\gamma} = 0 \tag{15.2}$$

por que cumple con la siguiente propiedad: Podemos cambiar $g_{\alpha\beta}$ por $\widetilde{g_{\alpha\beta}}$ y $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ por $\widetilde{\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}}$ y la ecuación (15.2) permanece invariante si luego de hacer los cambios anteriores permutamos α por β al final.

La propiedad con que cumple (15.2) se define como invariancia bajo transposición, cuyo significado físico está relacionado con el siguiente hecho:

El tensor $F^{\alpha\beta}$ que caracteriza el campo electromagnético en la teoría clásica tiene el siguiente comportamiento:

Si $F^{\alpha\beta}$ es la solución del sistema de ecuaciones del campo electromagnético

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = \frac{4\pi}{c} J^{\alpha} \tag{15.3a}$$

$$F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0 \tag{15.3b}$$

para una distribución de cargas: $\widetilde{F^{\alpha\beta}}$ es la solución del sistema de ecuaciones (15.3a) y (15.3b) si se cambian el signo de las cargas en la distribución anterior.

Veamos, entonces, si consideramos que A y B son cantidades con dos índices notoriamente apareados y que representan el campo unitario, debido a una distribución de materia y que la combinación de éstas nos da P que también representa el campo unitario, es decir

$$P^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta}(A, B) \tag{15.4a}$$

Si cambiamos A por $\widetilde{A}$ y B por $\widetilde{B}$, equivaldría a cambiar las cargas por sus opuestas. Por otra parte como P representa también el campo unitario, el cambio de cargas por sus opuestas equivale a cambiar P por $\widetilde{P}$, es decir que debería cumplirse que

$$\widetilde{P}^{\alpha\beta} = P^{\alpha\beta}(\widetilde{A}, \widetilde{B}) \tag{15.4b}$$

El significado físico de la invariancia bajo transposición en el hecho físico anterior sugiere el siguiente postulado: 15.A. Las ecuaciones del campo deben ser invariantes bajo transposición.

Vemos que R no es invariante bajo transposición si se expresa en función de Γ, luego, de acuerdo al postulado 15.A debemos expresarla de otra forma, para esto definimos las cantidades

$$U^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\lambda}_{\beta\lambda}\,\delta^{\alpha}_{\gamma} \tag{15.5a}$$

Se puede demostrar que $U^{\alpha}_{\beta\gamma}$ es una conexión afín.

De la fórmula (15.5a) se llega a

$$\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = U_{\beta\gamma}^{\alpha} - \frac{1}{3}\, U_{\beta\eta}^{\eta}\, \delta_{\gamma}^{\alpha} \tag{15.5b}$$

Expresando el tensor de curvatura en función de U resulta

$$S_{\alpha\beta} = U_{\alpha\beta,\rho}^{\rho} - U_{\alpha\rho}^{\eta} U_{\eta\beta}^{\rho} + \frac{1}{3} U_{\alpha\rho}^{\rho} U_{\eta\beta}^{\eta} \tag{15.6}$$

que es invariante bajo transposición.

La transformación λ para U se logra reemplazando Γ de (14.1) por U. Así se tiene

$${}^{\lambda}U_{\alpha\beta}^{\rho} = U_{\alpha\beta}^{\rho} + (\delta_{\alpha}^{\rho}\, \lambda_{,\beta} - \delta_{\beta}^{\rho}\, \lambda_{,\alpha}) \tag{15.7}$$

Puede comprobarse que

$$S_{\alpha\beta}({}^{\lambda}U) = S_{\alpha\beta}(U) \tag{15.8}$$

De tal manera que $S_{\alpha\beta}(U)$ cumple con la invariancia bajo transposición y la invariancia respecto a la transformación λ. Luego U debe ser el elemento más apropiado que representa al campo unitario.

El hecho interesante en la transformación (15.7) es que éste indica la creación de un campo antisimétrico (en lo que respecta a su representación) que no influye en la curvatura del espacio.

Si aceptamos que la parte antisimétrica de U depende del campo electromagnético (15.7) significa la creación de cierto campo electromagnético que no cambia la curvatura del espacio.

16. PRINCIPIO VARIACIONAL Y ECUACIONES DEL CAMPO.

Einsten introduce la densidad escalar

$$\mathcal{H} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta} S_{\alpha\beta} \tag{16.1}$$

donde $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ es una densidad tensorial que se transforma bajo la regla

$$\mathfrak{g}'^{\alpha\beta} = \frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\eta}} \frac{\partial x'^{\beta}}{\partial x^{\rho}} \mathfrak{g}^{\eta\rho} \left| \frac{\partial x^{\eta}}{\partial x'^{n}} \right| \tag{16.2}$$

Si definimos la integral volumétrica 4-dimensional

$$J = \int \mathcal{H} \, d\tau \tag{16.3}$$

dada las propiedades de $\mathcal{H}$ y $d\tau$, es evidente que J es invariante bajo la transformación λ , e invariante bajo la tansposición.

De modo que las ecuaciones derivadas por la variación de serán invariantes con respecto a la transformación de coordenadas, a la transformación λ , y (si usamos $\mathfrak{g}$ y $U^{\alpha}_{\beta\gamma}$) bajo transposición.

La variación de $\mathcal{H}$ con respecto a $\mathfrak{g}$ y U llega a expresarse como

$$\delta\mathcal{H} = S_{\alpha\beta}\, \delta\mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathcal{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}\, \delta U^{\gamma}_{\alpha\beta} + (\mathfrak{g}^{\alpha\beta}\, \delta U^{\rho}_{\alpha\beta})_{,\rho} \tag{16.4a}$$

donde

$$S_{\alpha\beta} = U^{\eta}_{\alpha\beta,\eta} - U^{\eta}_{\alpha\rho} U^{\rho}_{\eta\beta} + \frac{1}{3} U^{\eta}_{\alpha\eta} U^{\rho}_{\rho\beta} \tag{16.4b}$$

$$\mathcal{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}{}_{,\gamma} + \mathfrak{g}^{\rho\beta}\left(U^{\alpha}_{\rho\gamma} - \frac{1}{3} U^{\eta}_{\rho\eta}\, \delta^{\alpha}_{\gamma}\right) + \mathfrak{g}^{\alpha\rho}\left(U^{\beta}_{\gamma\rho} - \frac{1}{3} U^{\eta}_{\eta\rho}\, \delta^{\beta}_{\gamma}\right) \tag{16.4c}$$

Hay que notar que $\mathcal{R}$ no tiene relación con el tensor de curvatura.

Si usamos el principio variacional con respecto a la integral (16.3) resulta

$$\delta J = \int (S_{\alpha\beta}\, \delta \mathfrak{g}^{\alpha\beta} - \mathfrak{R}^{\alpha\beta}{}_{\rho}\, \delta U^{\rho}_{\alpha\beta})\, d\tau \tag{16.5}$$

De la igualdad (16.5) , teniendo en cuenta (16.4) y la variación independiente de $\mathfrak{g}^{\alpha\beta}$ y $U^{\alpha}_{\beta\gamma}$, obtenemos las ecuaciones del campo

$$S_{\alpha\beta} = 0 \tag{16.6a}$$

$$\mathfrak{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = 0 \tag{16.6b}$$

Cabe anotar que (16.6a) y (16.5b) son ecuaciones semejantes a (1.27) y (1.26) de la teoría de la R.G. respectivamente.

La invariancia de J bajo el cambio infinitesimal de coordenadas dada por

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \xi^{\alpha}{}_{,\beta} \quad ; \quad \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} - \xi^{\alpha}{}_{,\beta} \tag{16.7}$$

y usando el hecho que para este cambio se tiene

$$\delta \mathfrak{g}^{\alpha\beta} = (\mathfrak{g}'^{\alpha\beta} - \mathfrak{g}^{\alpha\beta}) = \mathfrak{g}^{\rho\beta} \xi^{\alpha}_{,\rho} + \mathfrak{g}^{\alpha\rho} \xi^{\beta}_{,\rho} - \mathfrak{g}^{\alpha\beta} \xi^{\rho}_{,\rho} + [-\mathfrak{g}^{\alpha\beta}_{,\rho} \xi^{\rho}] \tag{16.8a}$$

$$\delta U^{\alpha}_{\beta\gamma} = (U'^{\alpha}_{\beta\gamma} - U^{\alpha}_{\beta\gamma}) = U^{\rho}_{\beta\gamma} \xi^{\alpha}_{,\rho} - U^{\alpha}_{\rho\gamma} \xi^{\rho}_{,\beta} - U^{\alpha}_{\beta\rho} \xi^{\rho}_{,\gamma} + \xi^{\alpha}_{,\beta\gamma} + [-U^{\alpha}_{\beta\gamma,\rho} \xi^{\rho}] \tag{16.8b}$$

que son cambios de $\mathfrak{g}$ y $U^{\alpha}_{\beta\gamma}$ para el mismo punto, nos lleva a 4 identidades que corresponden a las identidades de Bianchi en R.G.

La invariancia de la integral J con respecto a la transformación infinitesimal λ nos lleva a una quinta identidad (Apéndice II)

$$\mathfrak{R}^{\alpha\beta}{}_{\beta,\alpha} = 0 \tag{16.9}$$

Por simple cómputo, de (16 4c) llegamos a

$$\mathfrak{R}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}{}_{\beta} = \mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}{}_{,\beta} \tag{16.10}$$

luego si se cumplen las ecuaciones del campo, de (16-10) se obtiene

$$\mathfrak{g}^{\underset{\vee}{\alpha\beta}}{}_{,\beta\alpha} = 0 \tag{16.11}$$

17. INTERPRETACION FISICA.

Einsten asigna un tensor g a la densidad tensorial $\mathfrak{g}$ de modo que

$$\mathfrak{g}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{-g} \tag{17.1}$$

donde g es el determinante de una métrica $g_{\alpha\beta}$ definida por la ecuación

$$g_{\alpha\eta}\, g^{\beta\eta} = \delta^{\beta}_{\alpha} \tag{17.2}$$

de manera que resulta

$$g^{\alpha\beta} = \mathfrak{g}^{\alpha\beta}/\sqrt{-g} \tag{17.3}$$

a partir de $g_{\alpha\beta}$ se construye

$$a_{\alpha\beta\gamma} = g_{\underset{\vee}{\alpha\beta},\gamma} + g_{\underset{\vee}{\beta\gamma},\alpha} + g_{\underset{\vee}{\gamma\alpha},\beta} \tag{17.4}$$

y a $\mathfrak{a}^{\eta} = \frac{1}{6}\eta^{\eta\alpha\beta\gamma}a_{\alpha\beta\gamma}$ la relaciona con la densidad de corriente. Puede verse que la divergencia de $\mathfrak{a}^{\eta}$ es nula.

La Ley de la Divergencia y la Ley de la Conservación de la Energía.- Si $S_{\alpha\beta}=0$ y $\mathfrak{R}^{\alpha\beta}{}_{\gamma}=0$, como $\mathcal{H}$ es invariante bajo una transformación del tipo (16.7), teniendo en cuenta (16.4) se obtiene

$$(g^{\alpha\rho}\, \delta U^{\lambda}_{\alpha\beta})_{,\rho} = 0 \qquad (17.5)$$

para cualquier transformación, usaremos la transformación (16 7) resultando, si consideramos ξ constante y arbitrario, las ecuaciones

$$K_{\gamma,\eta}^{\eta} = (g^{\alpha\beta}\, U^{\eta}_{\alpha\beta\gamma} \qquad (17.6)$$

que pueden interpretarse como la ley de conservación de la energía.

18. TENSOR METRICO NO SIMETRICO.

Si consideramos el tensor métrico $g_{\alpha\beta}$, el producto escalar de los vectores contravariantes de componentes A^{α} y B^{α} respectivamente, que denotaremos por $A \cdot B$, será

$$A \cdot B = A^{\alpha}\, g_{\alpha\beta}\, B^{\beta} \qquad (18.1)$$

entonces

$$B \cdot A = B^{\alpha}\, g_{\alpha\beta}\, A^{\beta} \qquad (18.2)$$

Las ecuaciones (18.1) y (18.2) pueden expresarse más fácil - mente si definimos la forma de bajar índices. Para hacer esto llamaremos $g^{\alpha\beta}$, a la matriz inversa y transpuesta de $g_{\alpha\beta}$. Es decir resolviendo la ecuación

$$g^{-1}{}_{\alpha\eta}\, g_{\eta\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \qquad (18.3)$$

que se logra si el determinante de $g_{\alpha\beta}$ es no nulo, definimos la cantidad $g^{\alpha\beta}$ como

$$g^{\eta\alpha} = g^{-1}{}_{\alpha\eta} \qquad (18.4)$$

Einsten define mediante (18.4) el tensor métrico contravariante. Se puede demostrar, entonces el siguiente teorema:

18-A. Si $g_{\alpha\beta}$ es un tensor de orden 2 covariante, la matriz $g^{-1}_{\beta\alpha}$ es un tensor de orden 2 contravariante. Ver demostración en el apéndice III.

Luego $g^{\alpha\eta}$ es un tensor y se cumple

$$g^{\eta\alpha} g_{\eta\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{18.5}$$

Sabemos que si g (determinante de $g^{\alpha\beta}$) es no nulo, existe inversa y es único, de modo que

$$g^{-1}_{\alpha\eta} g_{\eta\beta} = g^{-1}_{\eta\alpha} g_{\beta\eta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{18.6a}$$

es decir

$$g^{\eta\alpha} g_{\eta\beta} = g^{\alpha\eta} g_{\beta\eta} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{18.6b}$$

19. DEFINICION DE LA FORMA DE SUBIR Y BAJAR INDICES.

Si tenemos un tensor covariante, a partir de éste puede definirse dos tensores contravariantes:

$$A^{(\cdot\beta)} = g^{\eta\beta} A_{\eta} \tag{19.1a}$$

$$A^{(\beta\cdot)} = g^{\beta\eta} A_{\eta} \tag{19.1b}$$

donde $(\cdot\beta)$ indica que se usó el primer índice de $g^{\eta\nu}$ para la contración con el índice de A_η ; mientras que $(\beta\cdot)$ indica que se empleó el 2° para la contración con el índice de A_η . Sin embargo $A^{(\cdot\beta)}$ no es independiente de $A^{(\beta\cdot)}$; está relacionado mediante el tensor métrico, por la fórmula

$$A^{(\cdot\beta)} = g^{\nu\beta} g_{\gamma\nu} A^{(\gamma\cdot)} \qquad (19.2)$$

Una fórmula similar a (19.2) tiene lugar para tensores de orden mayor.

Así, podemos usar sólo una de las formas (19.1a) ó (19.1b) para subir índices. Escogemos la forma (19.1a) es decir definimos

$$A^{\beta} = g^{\eta\beta} A_{\eta} \qquad (19.3a)$$

Prescindimos del punto, puesto que hemos eliminado la duplicidad de la operación y no hay lugar a confusión.

Habiendo definido la forma de subir índices, automáticamente para conservar la biunicidad entre A^{α} y A_{α} se deriva la forma de bajar índices

$$A_{\alpha} = g_{\alpha\eta} A^{\eta} \qquad (19.3b)$$

Es decir, de (19 3a) y (19 3b) concluimos que se sube un índice usando el 1° índice de $g^{\alpha\beta}$ para la contracción, y se baja un índice usando el 2° índice de $g_{\alpha\beta}$ para la contracción.

Por ejemplo. Tenemos un tensor mixto $A^{\alpha_1,\dots,\alpha_n}_{\beta_1,\dots,\beta_m}$ n veces contravariante y m veces covariante, usando las definiciones (19.3a) y (19.3a) podemos bajar el j-ésimo índice contravariante y subir el k-ésimo índice covariante mediante la fórmula

$$A^{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\;\cdot\;,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n}{}_{\beta_1,\dots,\beta_{k-1},\;\cdot\;,\beta_{k+1},\dots,\beta_m}{}^{\beta}_{\alpha} = g_{\alpha\rho} g^{\sigma\beta} A^{\alpha_1,\dots,\alpha_{j-1},\rho,\alpha_{j+1},\dots,\alpha_n}{}_{\beta_1,\dots,\beta_{k-1},\sigma,\beta_{k+1},\dots,\beta_m} \qquad (19.4)$$

donde el punto indica el índice que se subió o bajó.

Cabe advertir, sin embargo, que usaremos la fórmula (19.1b) para construir cantidades invariantes bajo transposición en ciertos casos, en tales casos empleamos los signos $(\cdot\beta),(\beta\cdot)$ para especificar la operación usada. Por ejemplo si nos planteamos obtener un tensor contravariante a partir de un tensor covariante de 2°orden mediante una operación invariante bajo transposición operamos de la siguiente manera:

$$A^{(\cdot\alpha)(\beta\cdot)} = g^{\eta\alpha} g^{\beta\Gamma} A_{\eta\Gamma} \qquad (19.5a)$$

$$A^{(\alpha\cdot)(\cdot\beta)} = g^{\alpha\eta} g^{\Gamma\beta} A_{\Gamma\eta} \qquad (19.5b)$$

20. TRAYECTORIA DE UNA PARTICULA EN EL CAMPO UNITARIO.

Uno de los principales problemas que surgen en la T.U. es la trayectoria de una partícula.

El paso natural sería la generalización de la ecuación

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\eta\Gamma} \frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\Gamma}{ds} = 0 \qquad (20.1)$$

(ecuación de una partícula en el campo gravitatorio) y considerar ahora $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ no simétrico, sin embargo , en la ecuación (20 1) sólo interesa $\Gamma^\alpha_{\underline{\beta\gamma}}$, debido a la simetría de $dx^\alpha dx^\beta$. Es por esto que no se logra la ecuación de la partícula en el campo unitario por simple generalización de la ecuación (20 .1).

Queda así abierto el problema de plantear la ecuación de la trayectoria de una partícula en el campo unitario.

C. ANALISIS C.I. DE LA TEORIA UNITARIA DE LOS TENSORES NO SIMETRICOS.

En este capítulo estudiaremos la T.U. de Einstein mediante un formalismo semejante al creado por Z'elmanov para estudiar la R.G. desde el punto de vista C.I.

Semejantemente a lo que hizo Z'elmanov, construiremos cantidades y operadores C.I. en base a las cantidades 4-dimensionales de caracter no-simétricos. Trataremos de interpretar esas cantidades en base a términos clásicos.

Finalmente escribiremos las ecuaciones del campo unitario en base al formalismo creado y haremos notar los límites que se derivan de considerar las cantidades de caracter simétricos y obtendremos las ecuaciones del campo electromagnético sin cargas en forma vectorial.

21. TENSORES C.I. EN LA TEORIA UNITARIA.

(Descomposición Parcial Espacio-Tiempo)

Sea Q^{α} un tensor contravariante de 1° orden en el sistema de referencia Σ con coordenadas x^{α}. Similarmente a la fórmula (1.4) de la R.G. podemos definir el tensor tridimensional C.I. de 1° orden ${}^{*}Q^{m}$.

$$ {}^{*}Q^{m} = Q^{m} \qquad (21.1a)$$

y el escalar C.I. mediante la fórmula

$$ {}^{*}Q^{0} = \frac{g_{\alpha 0} Q^{\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (21.1b)$$

(21.1a) y (21.1b) se pueden considerar como la transformación de Q^{α} mediante una matriz C^{α}_{β}

$$^{*}Q^{\alpha} = C^{\alpha}{}_{\beta}\, Q^{\beta} \tag{21.2}$$

Las cantidades $^{*}Q^{\alpha}$ son tensores 4-dimensionales contravariantes en un espacio no holónomo parcialmente descompuesto (S.D.)[1]. Pero $^{*}Q^{a}$ es un tensor C.I. 3-dimensional contravariante y $^{*}Q^{0}$ es un escalar C.I. 3-dimensional.

La matriz $C^{\alpha}{}_{\beta}$ (21.2) tiene la forma

$$C^{\alpha}_{\beta} = \begin{vmatrix} \sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ g_{10}/\sqrt{g_{00}} & 1 & 0 & 0 \\ g_{20}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 1 & 0 \\ g_{30}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{21.3a}$$

donde el índice superior indica la columna y el índice inferior la fila.

La matriz C^{α}_{β} tiene su determinante ($\|C^{\alpha}_{\beta}\|$) diferente de cero si suponemos que [illegible], por lo tanto, en este caso, tiene inversa y es única, siendo ésta

$$C^{-1\alpha}_{\beta} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 0 \\ -g_{10}/\sqrt{g_{00}} & 1 & 0 & 0 \\ -g_{20}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 1 & 0 \\ -g_{30}/\sqrt{g_{00}} & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{21.3b}$$

cuya determinante ($\|C^{-1\alpha}{}_{\beta}\| = 1/\sqrt{g_{00}}$) es no nula.

{1} Por espacio no holónomo descompuesto entendemos al espacio donde $g_{00} = 1$, $g_{k0} =$ y los operadores de derivación parcial no son conmutativos.

Mediante la matriz (21.3b) podemos transformar los 4 tensores covariantes Q_α en tres tensores igualmente covariantes pero C.I. para este fin definimos

$$^*Q_\alpha = Q_\beta\, C^{\cdot\beta}_{\alpha} \tag{21.4}$$

Las cantidades $^*Q_\alpha$ son tensores 4-dimensionales covariantes en S.D. Sin embargo $^*Q^m$

$$^*Q_m = Q_m - Q_0 \frac{g_{0m}}{g_{00}} \tag{21.5a}$$

es un tensor C.I. 3-dimensional y

$$^*Q_0 = \frac{Q_0}{\sqrt{g_{00}}} \tag{21.5b}$$

es un escalar C.I. 3-dimensional.

Utilizando la convención (19.3a), (18.3b) y teniendo en cuenta las notaciones (19.1a) y (19.1b) podemos escribir

$$^*Q^0 = \frac{Q(\cdot 0)}{\sqrt{g_{00}}} \quad ; \quad ^*Q_0 = \frac{Q(0\cdot)}{\sqrt{g^{00}}}$$

Si no hubiésemos usado las fórmulas (19.3a) y (19.3b) para subir y bajar índices entonces habríamos tenido que considerar

$$^*Q_0 = \frac{Q(\cdot 0)}{\sqrt{g_{00}}} \quad ; \quad ^*Q^0 = \frac{Q(0\cdot)}{\sqrt{g_{00}}}$$

En la R.G. $^*Q_0$ (definido en (21.5b)) coincide con $^*Q^0$ (definido en (21.1a)).

Generalizando (21.2) y (21.4) podemos, a partir de un tensor mixto $Q^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{}_{\beta_1,\dots,\beta_n}$, definir tensores C.I. 3-dimensionales mediante la fórmula

$$*Q^{\alpha_1,\dots,\alpha_m}{}_{\beta_1,\dots,\beta_n} = C^{\alpha_1}_{\rho_1}\cdots C^{\alpha_m}_{\rho_m}\, C^{-1\,\delta_1}_{\beta_1}\cdots C^{\delta_n}_{\beta_n}\, Q^{\rho_1,\dots,\rho_m}{}_{\delta_1,\dots,\delta_n} \qquad (21.6)$$

22. TENSOR METRICO EN EL ESPACIO NO HOLONOMO PARCIALMENTE DESCOMPUESTO (S.D.)

Teniendo en cuenta la fórmula (21.6) aplicada al tensor métrico podemos obtener sus componentes en el espacio S.D. :

$$*g_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & -2T_1 & -2T_2 & -2T_3 \\ 0 & & & \\ 0 & & h_{JK} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \qquad (22.1)$$

donde hemos definido las cantidades C.I. mediante las fórmulas

$$T_m = \frac{g_{m0}}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (22.2a)$$

$$h_{JK} = -g_{JK} + \frac{g_{J0}\, g_{0K}}{g_{00}} \qquad (22.2b)$$

Asimismo podemos transformar $g^{\alpha\beta}$, resultando

$$*g^{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} 1 & -2h^{1m}T_m & -2h^{2m}T_m & -2h^{3m}T_m \\ 0 & & & \\ 0 & & -h^{JK} & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \qquad (22.3)$$

donde $h^{JK}(=-g^{JK})$, se vincula a h_{JK} mediante la relación

$$h^{nJ} h_{nK} = h^{Jn} h_{Kn} = \delta^J_K \qquad (22.4)$$

que es semejante a (10.6b) (para el formalismo de la T.U.).

Puede demostrarse (Apéndice IV)) que si g y h son los determinantes de $g^{\alpha\beta}$ y h_{JK} respectivamente, estos cumplen con la relación

$$g = -h\, g_{00} \,. \qquad (22.5)$$

Hay que notar en (22.1) y (22.3) el papel importante que juega Tm. Es el elemento de interacción que vincula el espacio 3-dimensional y el temporal, impidiendo su completa descomposición.

Una de las consecuencias del tensor T_m es el hecho que ${}^*Q^0 \neq {}^*Q_0$ donde ${}^*Q^0$ y ${}^*Q_0$ están dados por las fórmulas (21.1b) y (21.5b) relacionándose entre ellos mediante la fórmula

$${}^*Q_0 = {}^*Q^0 + g\, T_n Q^n \,. \qquad (22.6)$$

En la relación (22.6) hemos considerado las convenciones (19.3a) y (19.3b).

Podemos obtener también la relación entre ${}^*Q^m$ y ${}^*Q_m$

$${}^*Q^m = -h^{nm} Q_n \,. \qquad (22.6b)$$

Precisamente la relación (22.6b) muestra el carácter 3-dimensional del sistema S.D., y es una de las razones por la que escogimos la matriz de transformación de la forma (21.3a)

23. DEFINICIÓN DE SUBIR Y BAJAR INDICES DE UN TENSOR 3-DIMENSIONAL C.I.

Si tenemos un tensor 3-dimensional C.I. A_n en forma semejante a (19.1a) y (19.1b) tenemos dos operaciones para obtener tensores contravariantes:

$$A^{(\cdot n)} = h^{mn} A_m \qquad (23.1a)$$

$$A^{(n \cdot)} = h^{nm} A_m \;, \qquad (23.1b)$$

la convención de signos $(\cdot n)$ y $(n\cdot)$ es el mismo que se ha usado en (19.1a) y (19.1b).

A partir de la fórmula (22.4) se puede demostrar que $A^{(\cdot n)}$ y $A^{(n\cdot)}$ están relacionados por la ecuación

$$A^{(\cdot n)} = h^{mn} h_{rm} A^{(r\cdot)} \qquad (23.2)$$

que es similar a (19.2). De modo que sólo podemos usar una de las formas (23.1a) y (23.1b) para subir índices sin perder información. Escogemos por analogía con (19.3a) la forma

$$A^n = h^{mn} A_m \qquad (23.3a)$$

es decir usando el 1° índice de h^{mn} para contraer con el índice de A_n.

Automáticamente, por la biunivicidad entre A^n y A_m, queda la forma de bajar índices.

$$A_m = h_{mn} A^n \qquad (23.3b)$$

que es semejante a (19.3b). Nótese que se usa el segundo índice para contraer con el índice de A^n.

Si tenemos el tensor mixto m veces contravariante y n veces covariante $A^{r_1,\dots,r_m}{}_{s_1,\dots,s_n}$ podemos usar las fórmulas (23.3a) y

(23.3b) para bajar el j-ésimo índice y subir el k-ésimo índice contravariante mediante la fórmula.

$$A^{r_1,\dots,r_{j-1}\,\dot{}\,r_{j+1},\dots,r_m}{}_{p\;\;s_1,\dots,s_{k-1}\,\dot{}\,s_{k+1},\dots,s_n}^{\qquad\qquad\qquad\quad q} = h^{tq}|_{pv}\, A^{r_1,\dots,r_{j-1},v,r_{j+1},\dots,r_m}{}_{s_1,\dots,s_{k-1},t,s_{k+1},\dots,s_n} \qquad (23.4)$$

que es semejante a (19.4) y la convención de los puntos es la misma que es la usada por esa fórmula.

Hay que recordar, sin embargo, que en algunas oportunidades usaremos las operaciones (23.1a) y (23.1b) para construir elementos invariantes bajo transposición.

24. INTERVALOS TEMPORAL Y ESPACIAL Y OPERADORES DE DERIVACION EN EL ESPACIO S.D.

Partiendo del vector contravariante dx^α , usaremos la fórmula (21.2) y obtenemos

$$dx_*^m = dx^m \qquad (24.1a)$$

$$dx_*^0 = \frac{g_{\alpha 0}}{\sqrt{g_{00}}}\, dx^\alpha \qquad (24.1b)$$

Usando estas cantidades podemos expresar el intervalo 4-dimensional ($ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$) como

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - dl^2 - 2c\, d\tau\, T_m\, dx_*^m \qquad (24.2a)$$

donde se han tenido en cuenta las definiciones, semejantes a las de R.G.

$$d\tau = \frac{g_{\alpha 0}}{c\sqrt{g_{00}}}\, dx^\alpha \qquad (24.2b)$$

$$dl^2 = h_{sn}\, dx^s dx^n \tag{24.2c}$$

$d\tau$ difiere del elemento semejante en R.G. por el hecho que $T_n = g_{0n}/\sqrt{g_{00}}$ debido a la simetría de $dx^s dx^n$ es semejante al elemento de longitud de la R.G. difiriendo como en el caso de $d\tau$, debido a que $T_n \neq 0$.

Asimismo la relación (24.2a) se convierte en una igual (1.11) (es decir se logra la descomposición completa del espacio-tiempo)si $T_n = 0$.

La derivación parcial escrita como $\frac{\partial}{\partial x^n}$ es un tensor, de modo que podemos usar las fórmulas (21.5a) y (21.5b) y obtenemos la transformación

$$\frac{\partial^*}{\partial x^n} = \frac{\partial}{\partial x^n} - \frac{g_{0n}}{g_{00}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{24.3a}$$

$$\frac{\partial^*}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \frac{\partial}{\partial x^0} \tag{24.3b}$$

que son semejantes a (5.1) y (5.2) de la R.G. e iguales si $T_n = 0$. Definimos así, mediante (24.3a) y (24.3b) los operadores de derivación parcial C.I. en el espacio S.D.

Si hubiésemos escogido la otra forma de subir y bajar índices habríamos obtenido un operador de derivación parcial distinto a (24.3a), pero relacionado con él, puesto que las dos formas de subir o bajar índices no son independientes.

25. CONEXION AFIN EN EL ESPACIO S.D.

Antes de transformar la conexión afín Γ , del espacio unitario al espacio S.D. (por analogía con R.G., es decir los elementos clásicos, como veremos más tarde) la definición de 54 cantidades C.I. 27 de ellas con las cantidades tensoriales 3-dimensionales.

$$G^n = \frac{-c^2 \Gamma^n_{00}}{g_{00}} \tag{25.1a}$$

$$E^n = -c^2 g_{\alpha 0} \Gamma^{\alpha}_{\rho 0} g^{\rho n} / g_{00} \tag{25.1b}$$

$$(EA)^{mn} = c\, g^{\rho m} \Gamma^n_{\rho 0} / g_{00} \tag{25.1c}$$

$$(GA)^{mn} = -c\, g^{\rho m} \Gamma^n_{\rho 0} / g_{00} \tag{25.1d}$$

$$(TA)^{mn} = c(g_{\rho 0}\, g^{\alpha m} g^{\sigma n} \Gamma^{\rho}_{\alpha\sigma} - g^{\rho m} \Gamma^n_{\rho 0} / \ldots) / \sqrt{\ldots} \tag{25.1e}$$

Estos elementos definidos nos servirán más tarde como elementos semejantes a los términos clásicos.

Las otras 27 cantidades es C.I. forman la conexión afín 3-dimensional

$$\Delta^m_{kl} = \Gamma^m_{kl} - \frac{\Gamma^m_{k0} g_{0l}}{g_{00}} - \frac{\Gamma^m_{0l} g_{k0}}{g_{00}} + \frac{\Gamma^m_{00} g_{k0} g_{0l}}{g_{00}}) \tag{25.2 }$$

Se puede demostrar que la ley de transformación de Δ^m_{kl} para el cambio de coordenadas (1.2) está dado por la fórmula

$$\Delta'^{\,l}_{mn} = \Delta^{j}_{ik} \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^l}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 x^r}{\partial x'^m \partial x'^n} \frac{\partial x'^l}{\partial x^r} \qquad (25.3\ )$$

por eso la llamaremos conexión afín 3-dimensional.

Veremos ahora la transformación de Γ al espacio S.D. Partimos de la parte antisimétrica (definida por $\Gamma_{\alpha\cdot\beta}^{\cdot\gamma} \ldots$) que forma un tensor de 3° orden. Mediante la fórmula (21.6) podemos obtener la transformación de Γ , resultando las cantidades tensoriales C.I. 3-dimensionales

$$^{*}\Gamma_{m\cdot o}^{\cdot o} = E_n + T_n\,(EA)_m^{\ n} \qquad (25.4a)$$

$$^{*}\Gamma_{o\cdot m}^{\cdot o} = -\,^{*}\Gamma_{m\cdot o}^{\cdot o} \qquad (25.4b)$$

$$^{*}\Gamma_{k\cdot o}^{\cdot l} = -(EA)_{k}^{\cdot l} \qquad (25.4c)$$

$$^{*}\Gamma_{o\cdot k}^{\cdot l} = -\,^{*}\Gamma_{k\cdot o}^{\cdot l} \qquad (25.4d)$$

$$^{*}\Gamma_{k\cdot l}^{\cdot o} = I_{lk} + (EA)_{lk} \qquad (25.4e)$$

$$^{*}\Gamma_{k\cdot m}^{\cdot l} = \Delta_{\overset{\smile}{km}}^{l} \qquad (25.4f)$$

Ahora si tomamos en cuenta la parte simétrica de Γ ($\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} = \Gamma_{\overset{\smile}{\beta\gamma}}^{\alpha} + \ldots$) que es una conexión afín, y tenemos en cuenta la transformación para $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ (12.2), haciendo los reemplazos

$$\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \quad \text{por} \quad C^{\alpha}_{\beta} \qquad (25.5a)$$

$$\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\beta}} \qquad C^{-1\,\alpha}_{\ \ \beta} \tag{25.5b}$$

donde C está dada por (21.3a), resulta

$$^{*}\Gamma^{\alpha}_{\underline{\beta\gamma}} = \Gamma^{\omega}_{\underline{\delta\rho}}\, C^{-1\,\delta}_{\ \ \beta}\, C^{-1\,\rho}_{\ \ \gamma}\, C^{\alpha}_{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^{*2} x^{\eta}}{\partial x^{\beta}\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial^{*2} x^{\eta}}{\partial x^{\gamma}\partial x^{\beta}} \right) C^{\alpha}_{\eta} \tag{25.6}$$

De acuerdo a la fórmula (25.6) tenemos que la transformación al espacio S.D. de $\Gamma^{\gamma}_{\underline{\alpha\beta}}$ produce

$$^{*}\Gamma^{0}_{0\,0} = \frac{T_n\, G^n}{c^2} \tag{25.7a}$$

$$^{*}\Gamma^{n}_{00} = -\frac{G^n}{c^2} \tag{25.7b}$$

$$h^{rn}\, {}^{*}\Gamma^{m}_{\underline{0r}} = \frac{(G\Lambda)^{nm}}{c} \tag{25.7c}$$

$$h^{lr}\, {}^{*}\Gamma^{0}_{\underline{l0}} = -\frac{G^r}{2c^2} + \frac{T_n\,(G\Lambda)^{rn}}{2c^2} - \frac{E^r}{2c^2} \tag{25.7d}$$

$$h^{rm} h^{sn}\, {}^{*}\Gamma_{\underline{rs}} = I^{mn} + (G\Lambda)^{\underline{mn}} + (E\Lambda)^{\underline{mn}} + (E\Lambda)^{mn}/2 \tag{25.7e}$$

$$h^{rm} h^{sn}\, {}^{*}\Gamma^{l}_{\underline{rs}} = h^{rm} h^{sn}\, \Delta^{l}_{rs} \tag{25.7f}$$

En las fórmulas (25.7a), (25.7d) y (25.7e) se han usado las ecuaciones del campo (15.2) implicadas con los elementos.

Si a partir de las 16 cantidades $g_{\alpha\beta}$ se usa una transformación para obtener 12 cantidades que representan al tensor métrico, es decir, se han fijado 4 valores (en nuestro caso $g'_{00} = 1$, $g_{m0} = 0$) . Estos 4 valores conocidos nos proporcionan 16 relaciones para Γ obtenidas de reemplazar $'g_{\alpha 0,\beta} = 0$ en las ecuaciones del campo (15.2) es decir en el nuevo sistema sólo tendremos 48 (64-16) valores independientes para la conexión afín.

Nosotros hemos definido 54 cantidades relacionados con la conexión afín. Sin embargo podemos obtener 6 relaciones entre esas cantidades:

$$\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{n}\partial x^{0}} - \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{0}\partial x^{n}} = \frac{\mathbb{F}_n}{c^2}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{0}} \qquad (25.8a)$$

$$\frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{n}\partial x^{m}} - \frac{\partial^2 x^{i}}{\partial x^{m}\partial x^{n}} = \frac{2\,\mathbb{A}_{mn}}{c}\frac{\partial x^{i}}{\partial x^{0}} \qquad (25.8b)$$

donde

$$\mathbb{F}^{m} = G^{m} + E^{m} - \left[2(EA)^{mn} + (GA)^{mn}\right] c\, T_n \qquad (25.9a)$$

$$\mathbb{A}^{mn} = (EA)^{[mn]} + (GA)^{mn} + (EA)^{mn}/2 + I^{mn} \qquad (25.9b)$$

Vemos que $\mathbb{F}^{m}$ y $\mathbb{A}^{mn}$ se identifican en cada punto mediante procesos de derivación, lográndose 6 cantidades que a su vez sirven para tomar las 6 relaciones (25.9a) y (25.9b) entre los elementos C.I. pero $\mathbb{F}^{n}$ y $\mathbb{A}$ tienen valores conocidos en base a la matriz C., que se suponen conocida para crear el nuevo formalismo:

$$\mathbb{F}_{m} = \frac{c^2}{g_{00}}\left(g_{m0,0} - \frac{g_{00,m}}{2} - \frac{g_{m0}\, g_{00,0}}{2\, g_{00}}\right) \qquad (25.10a)$$

$\vdots$

$$\mathbb{A}_{mn} = \frac{c}{2\sqrt{g_{00}}}\left(g_{m0,n} - g_{n0,m} + \frac{g_{00,m}\,g_{n0} - g_{00,n}\,g_{m0}}{g_{00}} + \frac{g_{m0}\,g_{n0,0} - g_{n0}\,g_{m0,0}}{g_{00}}\right) \quad (25.10b)$$

Vemos pues, en las dos ecuaciones anteriores que $\mathbb{F}_m$ y $\mathbb{A}_{mn}$ están en función de $g_{\alpha 0}$ y $g_{\alpha 0,\beta}$ que pueden obtenerse de la matriz conocida.

(25.9a) y (25.9b) resulta de expresar $g_{\alpha\beta,n}$ en (25.10a) y (25.10b) en función de Γ y g usándo las ecuaciones del campo (15.2).

Hay que notar que $\mathbb{F}^m$ y $\mathbb{A}^{mn}$ por su definición (25.8a) y (25.8b) son semejantes a F^m y A^{mn} definidos por Z'elmanov (1.14a) y (1.14b) e interpretadas como aceleración con signo negativo y velocidad angular, respectivamente del sistema de referencia respecto a cierto sistema localmente geodésico.

$\mathbb{F}^m$ y $\mathbb{A}^{mn}$ coinciden con F^m y A^{mn} de Z'elmanov cuando $\Gamma_{\cdot\cdot} = 0$ y $\Gamma^{\gamma}_{\beta\gamma} = 0$.

26. ECUACIONES DEL CAMPO QUE RELACIONAN LA METRICA CON LA CONEXION AFIN.

Escribiremos las ecuaciones del campo que relacionan la métrica con la conexión afín (15.2) de manera C.I. Cabe esperar que estas ecuaciones den la relación entre h^{mn}, T^n de un lado (cantidades obtenidas de $g^{\alpha\beta}$) y Δ^m_{jk}, G^m, E^m, $(EA)^{mn}$, $(HA)^{mn}$ de otro lado (cantidades obtenidas de $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$):

$$\frac{\partial^* T_i}{\partial x^n} = -h_{is}\,\Gamma_n^s + \frac{T_i\,(GA)_i{}^n}{c} - \frac{T_i\,T_n\,G^n}{c^2} \tag{26.1a}$$

$$\frac{\partial^* T_k}{\partial x^j} = -\frac{1}{2}\left[(GA)_{jk} - (EA)_{jk}\right] + \frac{h_{nk}}{2}\left[(GA)_j{}^n + (EA)_j{}^n\right]$$

$$+ I_{kj} + (EA)_{kj}/2 + T_k\left[T_m (GA)_j{}^m - \dot{E}_j\right] + T_i\,\Delta_{jk}^i \tag{26.1b}$$

$$\frac{\partial^* h_{jk}}{\partial x^0} = \left[(GA)_{kj} - (EA)_{kj}\right] + h_{nk}\left[(GA)_j{}^n + (EA)_j{}^n\right] - 2T_j\,\dot{E}_k \tag{26.1c}$$

$$\frac{\partial^* h_{ik}}{\partial x^j} - \Delta_{jk}^n h_{in} - \Delta_{ij}^n h_{nk} = 2\left[(GA)_{ji} - (EA)_{ji}\right] T_k \tag{26.1d}$$

Las ecuaciones del campo (15.2) que tienen los elementos $g_{\alpha\beta}$ han sido usadas en las relaciones (25.7a), (25.7d) y (25.7e), de modo que dichas relaciones no son simplemente identidades, en realidad son las ecuaciones del campo empleados en elementos de la matriz C que se suponen conocidas.

Las 48 ecuaciones del campo (15.2) no usadas en las relaciones (25.7a), (25.7d) y (25.7e) son representadas en el sistema S.D. por el grupo de relaciones (26.1).

Es interesante notar que las ecuaciones (26.1c) es semejante a la relación que Z'elmanov deduce para $D^{mn}\ (= \frac{1}{2}\frac{\partial^*}{\partial t} h^{mn})$ (21.1c) se convierte en (1.19c) si $g_{\alpha\beta}$ y $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}$ son simétricos.

Además la ecuación (26.1d) es semejante a la relación obtenidas por Z'elmanov convirtiéndose en ésta si son simétricos.

27. DERIVADA COVARIANTE C.I. EN LA TEORIA UNITARIA.

Tenemos la derivada covariante de un tensor $Q^{\alpha}{}_{;\beta}$ dada por la fórmula (12.1c) y es un tensor. Empleando la transformación dada por la matriz (21.4) al tensor Q obtenemos[1]

$$ {}^{*}(Q^{j}{}_{;k}) = \frac{\partial^{*} Q^{j}}{\partial x^{k}} + Q^{n} \Delta^{j}_{nk} \qquad (27.1a) $$

Asumiendo que la derivada covariante de un escalar 3-dimensional es una derivada parcial C.I. y que para la derivación covariante del producto de dos tensores es igual que en R.G. es decir

$$ {}^{*}\nabla_{k}(A^{m} A_{m}) = A_{m}\, {}^{*}\nabla_{k}(A^{m}) + A^{m}\, {}^{*}\nabla_{k} A_{m} \qquad (27.2a) $$

$$ {}^{*}\nabla_{k}(A^{m} A_{m}) = \frac{\partial^{*}}{\partial x^{k}}(A^{m} A_{m}) \qquad (27.2b) $$

se llega a la definición de la derivada covariante de un tensor covariante C.I.

$$ {}^{*}\nabla_{k}({}^{*}Q_{m}) = \frac{\partial^{*}}{\partial x^{k}}{}^{*}Q_{m} - {}^{*}Q_{n} \Delta^{n}_{mk} \qquad (27.1b) $$

Podemos generalizar las definiciones (27.1a) y (27.1b) y definir la derivada covariante de un tensor C.I. m veces contravariante y n veces covariante mediante la fórmula

---

[1] El operador derivada covariante C.I. con respecto a la coordenada k, se indicará antecediendo al operando el signo $*k$ o precediendolo al signo ${}^{*}\nabla_{k}$.

$$
{}^{*}\nabla_l \, Q^{i_1,\ldots,i_m}{}_{k_1,\ldots,k_n} = \frac{\partial^*}{\partial x^l} Q^{i_1,\ldots,i_m}{}_{k_1,\ldots,k_n}
$$

$$
+ \sum_{j=1}^{m} \Lambda^{i_1,\ldots,i_{j-1},\,r,\,i_{j+1},\ldots,i_m}{}_{k_1,\ldots,k_n} \, \Delta^{i_j}_{rl}
$$

$$
- \sum_{j=1}^{n} \Lambda^{i_1,\ldots,i_m}{}_{k_1,\ldots,k_{j-1},r,k_{j+1},\ldots,k_n} \, \Delta^{r}_{k_j l} \qquad (27.3)
$$

Además del tensor (27.1a), siguiendo el método ya discutido para un tensor, podemos definir a partir de

$$
{}^{*}(Q^{m}{}_{;0}) = Q^{m}{}_{,0} \,/\, \sqrt{g_{00}} \qquad (27.4a)
$$

que puede expresarse también como

$$
{}^{*}(Q^{m}{}_{;0}) = \frac{\partial^* Q^m}{\partial x^0} + \frac{Q^n}{\sqrt{g_{00}}}\left(\Gamma^m_{n0} - \frac{g_{n0}\Gamma^0_{00}}{g_{00}}\right) + \frac{{}^{*}Q^0\,\Gamma^m_{00}}{g_{00}} \qquad (27.4b)
$$

Que puede ser llamada la derivada covariante temporal de un tensor, covariante porque es el resultado de la transforma - ción mediante la matriz $C^{\alpha}{}_{\beta}$ del tensor $Q^{\alpha}{}_{;\beta}$ (que es la de rivada covariante de Q^{α}).

Evidentemente $\frac{\partial^* Q^n}{\partial x^0}$ es un tensor 3-dimensional, pero es simple mente de una derivada temporal parcial de Q^n (no se ha obte nido de una derivada covariante como es el caso de ${}^{*}(Q^{m}{}_{;0})$. Clásicamente el caso es semejante a este, pero Z'elmanov no definió derivada temporal covariante.

28. RELACION ENTRE LA HOLONOMICIDAD DEL ESPACIO Y LAS CANTIDADES .

Z'elmanov relaciona la holonomicidad del espacio descompuesto es decir dx_*^0 , dx_*^n son diferenciales exactas con la posibilidad de poder encontrar un sistema Σ' tal que $g'_{00}=1$, g' [illegible] de modo que el intervalo 4-dimensional puede escribirse como (1.11).

En la teoría unitaria podemos enunciar el siguiente teorema, relacionado con la holonomicidad del espacio.

28-A. TEOREMA: La condición

$$\mathbb{F}^m = 0 \quad ; \quad \mathbb{A}^{mn} = 0 \tag{28.1}$$

en una región 4-dimensional γ , es necesaria y suficiente para la posibilidad de encontrar un sistema mediante una transformación de la forma

$$x'^0 = x'^0 (x^0, x^1, x^2, x^3) \tag{28.2}$$

mediante la cual se logra

$$g'_{00} = 1 \quad , \quad g'_{no} = 0 \quad , \quad g'_{0n} = -2T_n \tag{28.3}$$

en la región γ' (transformada de γ)

DEMOSTRACION:

i) Condición necesaria.- Si obtenemos una transformación de la forma (28.2) para los cuales se cumple (28.3), reemplazando estas en las definiciones (25.8a) y (25-8b) se logra eliminarlas, es decir se cumple (28.1) en γ . Debido al caracter tensorial de $\mathbb{F}^m$ y $\mathbb{A}^{mn}$, estos serán nulos en cualquier sistema.

ii) Condición suficiente. Si se cumple (28.1) entonces tenemos

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^m \partial x^n} - \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^n \partial x^m} = 0 \qquad (28.4)$$

$$\frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^n \partial x^0} - \frac{\partial^2 x'^\alpha}{\partial x^0 \partial x^m} = 0 \qquad (28.4b)$$

De (28.4a) y (28.4b) podemos decir que la matriz C^α_β dada la ecuación (21.3a) representa una transformación de coordenadas común a un espacio holónomo, es decir podemos considerar:

$$C^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} \qquad (28.5a)$$

$$C^{-1\alpha}_{\ \ \beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} \qquad (28.5b)$$

donde

$$\frac{\partial x^0}{\partial x'^\alpha} = -\frac{g_{0\alpha}}{g_{00}} \; ; \quad \frac{\partial x^0}{\partial x'^0} = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (28.6a)$$

$$\frac{\partial x^m}{\partial x'^\alpha} = \delta^m_\alpha \qquad (28.6b)$$

de modo que transformando el tensor métrico se obtiene (28.[illegible])
L.Q.Q.D.

La holonomicidad del espacio es idéntica a la definida por Z'elmanov (teorema 1A) cuando Tm=0.

29. TENSOR DE CURVATURA C.I. EN LA TEORIA UNITARIA.

Usando la definición de derivada covariante (26.9), podemos obtener las siguientes relaciones.

$$({}^{*}\nabla_{JK} - {}^{*}\nabla_{KJ})\, Q_{L} = \frac{2}{c} A_{JK} \frac{\partial^{*}}{\partial x^{s}} Q_{L} + 2\, {}^{*}\nabla_{n} Q_{L} \, \Delta_{[JK]} + H_{LKJ}{}^{n} Q_{n} \qquad (29.1)$$

donde se ha tenido en cuenta la definición

$$H_{LKJ}{}^{n} = \frac{\partial^{*}}{\partial x^{K}} \Delta_{LJ}^{n} - \frac{\partial^{*}}{\partial x^{J}} \Delta_{LK}^{n} - \Delta_{mJ}^{n} \Delta_{LK}^{n} + \Delta_{mK}^{n} \Delta_{LJ}^{m} \qquad (29.2)$$

semejante a (1.12) en la que se tiene $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ como simétrico.

$H_{LKJ}{}^{n}$ viene a jugar el papel de tensor de curvatura C.I. pudiendo definirse el tensor de curvatura contraido, como

$$H_{LK} = - H_{LKn}{}^{n} \qquad (29.5)$$

Cabe anotar que cuando $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha}$ son simétricos la expresión (29.1), coincide exactamente con la fórmula (1.21) de la teoría clásica (R.G.).

30. SISTEMA LOCALMENTE GEODESICO: CAMPO GRAVITACIONAL NULO.

De acuerdo a la teoría unitaria es lógico suponer que el campo gravitacional está relacionado con la parte simétrica de Γ, y el campo electromagnético con la parte antisimétrica de Γ. Si queremos identificar el campo electromagnético es conveniente, entonces, anular la parte simétrica de

Sin embargo podemos (mediante un cambio de coordenadas) anular en el punto M, la parte simétrica de Γ. En este sistema de coordenadas, al que llamaremos localmente geodésico (Σ') debemos tener, entonces, el campo electromagnético puro en el punto M. Al sistema de referencia original lo designamos por Σ.

Escogemos el sistema de coordenadas Σ' mediante la transformación a partir del sistema de referencia.

$$x'^{\mu} = x''^{\mu} - x'^{\mu}_{M} + \frac{1}{2} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} (x^{\alpha} - x^{\alpha}_{M})(x^{\beta} - x^{\beta}_{M}) \qquad (30.1)$$

donde x^{α}_{M} son las coordenadas en el sistema Σ del punto M arbitrario pero fijo; x^{α} son las coordenadas de un punto cualquiera en el sistema Σ, x'^{μ} son las coordenadas del mismo punto respecto a Σ'.

De la fórmula (30.1) se obtiene:

$$\left(\frac{\partial x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} \right)_{M} = \delta^{\alpha}_{\beta} \qquad (30.2)$$

$$\left(\frac{\partial^{2} x'^{\alpha}}{\partial x^{\beta} \partial x^{\gamma}} \right)_{M} = (\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma})_{M} \qquad (30.3)$$

En el sistema de coordenadas se puede obtener que

$$(\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma})_{M} = 0 \qquad (30.4)$$

como la parte antisimétrica de Γ es un tensor resulta imposible eliminarlo mediante un cambio de coordenadas.

31. IDENTIFICACION DE LOS ELEMENTOS CLASICOS EN LA TEORIA UNITARIA.

a) Intensidad de campo eléctrico y gravitacional.- Las cantidades F^m (definidas por (24.5a) en la R.G.) tienen el significado físico de intensidad de campo gravitacional; es de esperar que $\mathbb{F}^m$ (generalización de F^m) sea la intensidad (tipo intensidad de campo eléctrico) del campo unitario.

Para identificar los elementos los elementos extragravitacionales, usaremos la transformación al sistema Σ' (30.1) en el que se anula localmente el campo gravitacional. Debemos obtener, entonces, la intensidad del campo eléctrico más quizás algún otro término no clásico.

En efecto, $\mathbb{F}^m$ en el sistema Σ' (30.1) tiene la expresión (de (25.11a))

$$\mathbb{F}'^m = E^m - 2c T_n (E\Lambda)^{mn} \tag{31.1}$$

El segundo sumando de (31.1) tiene características de interacción entre el campo eléctrico y el campo magnético; (es por lo tanto un término no clásico) porque, como veremos más tarde, T_n toma el papel de un cierto potencial del cual se obtiene E_n en determinado límite, y de $(E\Lambda)^{mn}$ se obtiene el campo magnético.

Si la interacción entre el campo eléctrico y el magnético fuera nulo $\mathbb{F}'^m$ viene a ser la intensidad del campo eléctrico.

Si el campo electromagnético fuera nulo en algún sistema ($E^n = 0$; $(EA)^{mn} = 0$) obtendríamos en cualquier sistema:

$$\mathbb{F}^m = \mathbb{G}^m - c\,T_n\,(\mathbb{G}A)^{mn} \qquad (31.2)$$

Si pasamos al caso clásico ($T_n = 0$) vemos que $\mathbb{F}^m = \mathbb{G}^m$ o sea que podemos identificar a $\mathbb{G}^m$ como la intensidad del campo gravitacional. Notándose nuevamente que la interacción de T_n con el campo análogo gravitacional del campo magnético ($(\mathbb{G}A)^{mn}$) según lo que expresamos en el capítulo 25, produce una intensidad en el campo unitario del tipo $\mathbb{G}^m$.

En el caso general tenemos que la cantidad $\mathbb{F}^m$ puede expresarse como

$$\mathbb{F}^m = \mathbb{G}^m + E^m + c\,T_n\,[-2(EA)^{mn} - (\mathbb{G}A)^{mn}] \qquad (31.3)$$

y debería expresarse como la suma de la intensidad de campo gravitacional; E^m, intensidad de campo eléctrico; $-2c\,T_n\,(EA)^{mn}$ interacción de Tn con el campo magnético y $-c\,T_n(\mathbb{G}A)^{mn}$ interacción de Tn con el análogo gravitacional del campo magnético.

b) Campo magnético.- En la R.G. analizada mediante el formalismo C.I., las cantidades A_{mn} fueron interpretados como velocidad angular del sistema de referencia, respecto a un sistema localmente geodésico. Si se tratan de escribir las ecuaciones del campo gravitacional mediante el formalimso de Z'elmanov, de modo que tengan la forma parecida a las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético (ver Apéndi ce V, desarrollado por el Prof. J. del Prado) A_{mn} resulta ser la base para definir lo que sería el análogo gravitacional del campo magnético. Es de esperar que en la T.U. sea posible identificar una componente en la que esté incluído el campo magnético y su similar para el campo gravitacional. Para lograr el objetivo anterior nos ayudaremos de una de las aplicaciones del formalismo de Z'elmanov hecha por el Prof. J. del Prado. Para escribir las ecuaciones de Maxwell 3-dimensionalmente y C.I. para el campo electromagnético hace las siguientes definiciones:

$$E_m = \frac{F_{0m}}{\sqrt{g_{00}}} \quad , \quad E^m = \frac{g_{0\alpha} F^{m\alpha}}{\sqrt{g_{00}}} \qquad (31.3)$$

$$\eta_m = -\frac{1}{2} E_{mjk} F^{jk} \longrightarrow \eta^m = -\frac{1}{2} E^{mjk}\left[F_{jk} + \frac{F_{0j} g_{0k} + F_{k0} g_{0j}}{g_{00}}\right] \qquad (31.4)$$

donde E^m es el campo eléctrico, η_m es el campo magnético, F^{mn} es el tensor del campo electromagnético;

$$E_{mjk} = \sqrt{h}\, \varepsilon_{mjk} \quad ; \quad E^{mjk} = \frac{\varepsilon^{mjk}}{\sqrt{h}} \qquad (31.5)$$

donde ε_{mjk} es el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional.

Fijémonos en la segunda de las ecuaciones (31.3) y en las ecuaciones (25.7b) y (25.7c). Podemos decir que son semejantes si identificamos F^{mn} con $(EA)^{mn}$. Es decir $(EA)^{mn}$ vendría a ser el tensor electromagnético.

Por otra parte hay que notar que

$$g_{0\alpha}\left[-g^{n\alpha} c\, \Gamma^{m}_{n0}\right] = \frac{G^m}{c^2} \qquad (31.6)$$

de modo que similarmente, que (31.3) el término entre peréntesis, que nosotros definimos como $(GA)^{mn}$, viene a ser similar al tensor F^{ma}. Podemos, entonces, definir el campo que corresponde al campo magnético, en el electromagnetismo clásico:

$$\eta_m = -\frac{1}{2}\, \epsilon_{mjk} \left[(EA)^{jk} , (GA)^{jk} \right] \tag{31.7}$$

Notemos que las cantidades entre paréntesis son semejantes a A^{jk} (25.11b) de tal manera que el término nuevo I^{mn} puede interpretarse como el producto de la interacción de los campos existentes.

32. ECUACIONES DEL CAMPO UNITARIO EN EL FORMALISMO C.I.

Las ecuaciones del campo (16.6a) y (16.6b) bajo el postulado $(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0)$ podemos expresarla en función de las cantidades C.I. en la forma siguiente:

$$\frac{\partial^{*}}{\partial t} D + {}^{*}\nabla_k (G^k) + [(GA)_k{}^m - (EA)_k{}^m][(GA)_m{}^k - (EA)_m{}^k + \frac{2}{c} T_m G_n h^{kn}] - \frac{G^k G_k}{c^2}$$

$$= \left(-\frac{\partial^{*}}{\partial t} - D + \frac{T_n G^n}{c}\right)(T_m G^m)/c \cdot 2T_n{}^m [(GA)_m{}^n - (EA)_m{}^n] \tag{32.1}$$

$$h^{ki} \frac{\partial^{*}}{\partial x^k} D + \{ G_n h^{ni} h^{sk}/c^2 - G^k h^{si}/c^2 \cdot 2T_n h^{ni} [(GA)^{nr} - (EA)^{nr}] + A_{np}{}^{k} h^{nr} h^{ps}$$

$$- {}^{*}\nabla_k (h^{ri} h^{sr})_{np} \} \{ (GA)_{rs} - (EA)_{rs} \}$$

$$= \{ D \delta^i_m - (GA)_m{}^i - (EA)_m{}^i + 2T_m G^i + \frac{\partial^{*}}{\partial t} (\delta^i_m)_{np} \} \{ - T_n (EA)^{nm} \cdot E^m/c - 2T_n (EA)^{mn} \}$$

$$- T_n G^i G^n / c^3 \tag{32.2a}$$

$$h^{ki}\frac{\partial^{*}}{\partial x^{k}}D + \{{}^{*}\nabla_{k}(h^{pi}h^{qk})_{op} + h^{qi}G^{p}/c^{2} - h^{pi}G_{k}h^{qk}/c^{2} + T_{n}h^{qi}[(GA)^{np} + (EA)^{np}]$$

$$- h^{qi}[E^{p}/c^{2} + T_{l}(GA)^{pl}/c] + 2h^{pm}h^{qn}\Delta^{i}_{mn} - 2h^{ni}h^{qm}\Delta^{p}_{mn}$$

$$- h^{pm}h^{qn}T_{m}(EA)_{n}{}^{i}/c\}\{-(GA)_{pq} - (EA)_{pq}\}$$

$$+ \{D + \frac{\partial^{*}}{\partial t}\}\{E^{i}/c^{2} - T_{n}(GA)^{in}/c + 2T_{n}(EA)^{in}/c\}$$

$$= -2G^{l}(EA)_{l}{}^{i}/c - 2G^{i}T_{l}E^{l}/c^{3} - T^{l}(EA)_{l}{}^{i}/c + 2T_{l}(EA)^{in}/c\,.$$

$$+(EA)^{il}[(EA)_{l}{}^{r}T_{r} + 2E_{l}/c] - 2T_{p}G^{i}/c^{4}[E^{p}/c + (EA)^{pl}T_{l}] \qquad (32.2b)$$

Si definimos $(GE)^{in} = (GA)^{in}\ (EA)^{mn}$ para escribir las ecuaciones en forma más corta, se logra para la ecuación tensorial C.I. del campo unitario las siguientes dos ecuaciones:

$$\frac{\partial^{*}}{\partial t}(GE)^{jk} + h_{lm}[(GE)^{jl}(GE)^{km} + 3(GE)^{jl}(GE)^{km} - 3(GE)^{jl}(GE)^{km}]$$

$$-[h^{nk}\,{}^{*}\nabla_{n}G^{j} + h^{nj}\,{}^{*}\nabla_{n}G^{k}]/2 + G^{j}G^{k}/c^{2} + (GE)^{kj}(D - T_{n}G^{n})$$

$$- c^{2}H^{jk} + (h_{lm} + 2h_{lm})[(EA)^{kl}(EA)^{jm} + (EA)^{kl}(EA)^{mj}] = 0 \qquad (32.3a)$$

$$-c^2 H^{\tau\kappa}_{\vee} + (\delta^{\kappa}_{p}\delta^{\tau}_{q} - \delta^{\tau}_{p}\delta^{\kappa}_{q})\{[h^{mq}\nabla_m (h^{sp})_{op} + h^{sl}h^{mp}\Delta^{q}_{\underset{\vee}{ml}}$$

$$+ h^{mp}h^{nq}\Delta^{s}_{\underset{\vee}{mn}}]E_s/2c^2 - \frac{\partial^{\kappa}}{2c\partial t}h^{\tau q}I_s^{p} - \frac{\partial^{\tau}}{2c\partial t}J^{\gamma\iota}\} = 0 \qquad (32.3b)$$

Si tomamos el límite para la R.G. es decir consideramos las cantidades $g_{\alpha\beta}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ simétricos, cada una de las ecuaciones (32.1), (32.2a) y (32.2b) se convierten en las ecuaciones del campo gravitacional en forma C.I. (1.28) la primera y en (1.29) las dos últimas. La ecuación (32.3a) no tiene un límite exacto a (1.30) de la R.G. puesto que hemos usado H_{ik} en vez de C_{ik} como lo hace Z'elmanov hemos considerado H_{ik} porque es la obtenida en forma natural de las derivadas cruzadas (29.1).

En las ecuaciones del campo (32.1) - (32.3b) vemos el papel importante que le toca desempeñar a Tn, como un elemento nuevo; esto era de esperarse porque anteriormente T_n había surgido con características propias que nos indujeron a considerarlo como representante de un campo nuevo.

Si queremos obtener las ecuaciones vectoriales 3-dimensionales semejantes a las ecuaciones de Maxwell, usaremos las operaciones vectoriales definidas en el apéndice VI, en la que transforma la gradiente de un tensor de 2º orden en un rotacional de un vector. Así que la fórmula (VI-3) del Apéndice V, aplicado al campo magnético H que definimos anteriormente se escribe:

$$(\mathrm{rot}\ \bar{H})^{n} = {}^{\kappa}\nabla_{k}\,(GE)^{\underset{\vee}{kn}} + (GE)^{\underset{\vee}{kn}}\{\,T_{l}(GE)_{k}^{\;\,l} + (E_{k}) + 2T_{l}(EA)_{k}^{\;\,l} + \Delta_{\underset{\vee}{n}l}^{\;l}\} - (GE)^{ml}\Delta^{n}_{\underset{\vee}{ml}} \qquad (32.4)$$

Mediante la ecuación (32.4), podemos escribir las ecuaciones del campo unitario (32.2a) en la forma semejante a las ecuaciones de Maxwell 3-dimensionales.

Como caso particular de las ecuaciones del campo unitario, consideramos estos para el espacio con sólo campo eléctrico y campo magnético sin interacción entre ellos:

$$G^{n} = T_{m}\,(GA)^{nm} = 0 \qquad (32.5)$$

$$(GA)^{mn} = (EA)^{\underline{mn}} = J^{mn} = 0 \qquad (32.6)$$

$$\Delta^{m}_{\underset{\vee}{nl}} = 0 \qquad (32.6)$$

De modo que, considerando (32.5), (32.6) y (32.7) de la ecuación (32.1) se obtiene

$$(EA)_{\dot{m}}^{\;\;k}\,(EA)_{\dot{k}}^{\;\;m} = 0 \qquad (32.8)$$

Que tiene que ver con la ortogonalidad del campo electromagnético.

Las ecuaciones (32.2a) y (32.2b) se reducen a

$$(\mathrm{rot}\ \bar{H})^{n} = -\,{}^{\kappa}\nabla_{0}\,E^{n}/c^{2} \qquad (32.9)$$

que es una de las ecuaciones de Maxwell.

Y las ecuaciones (32.3b) se reducen a

$$(\mathrm{rot}\,E)_n = -{}^{*}\nabla_0 (B_n)/c + \varepsilon_{n3k} H^{3k}/2 \tag{32.10}$$

donde se tiene en cuenta la definición (VI.4) del Apéndice VI.

(32.9) y (32.10) son semejantes a las ecuaciones de Maxwell para el campo electromagnético en el vacío. Cabe anotar que utilizamos la ecuación (32.3b) por obtener una de las ecuaciones de Maxwell debido a su caracter antisimétrico.

33. CONCLUSIONES.

En este capítulo hemos definido un formalismo C.I. cuyos elementos son generalizaciones del formalismo de Z'elmanov unos, y elementos completamente nuevos otros.

A los elementos nuevos le atribuimos el significado físico, identificándolos con elementos de la física clásica usando para esto las ecuaciones que tienen estos últimos.

Aparece en este trabajo un elemento totalmente nuevo, este es T_n y que da lugar esencialmente al campo eléctrico y a la interacción entre los campos existentes clásicos la cual se suma pues al campo unitario.

Hemos obtenido finalmente las ecuaciones del campo unitario y considerado los límites de campo gravitacional solamente y campo electromagnético sólo.

APENDICE

I. APLICACION DEL FORMALISMO C.I. A UN SISTEMA ROTATORIO.

Sea S un sistema inercial de coordenadas cartesianas. Escogemos un sistema de coordenadas S' cuya transformación está dada por las ecuaciones

$$X' = X\cos(\omega t) - Y\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad (I.1a)$$

$$Y' = Y\cos(\omega t) + X\,\mathrm{sen}(\omega t) \qquad (I.1b)$$

$$z' = z \qquad (I.1c)$$

$$t' = t \qquad (I.1d)$$

Si consideramos el grupo de ecuaciones (I.1) como una transformación no relativística el sistema S" está relacionado al sistema S con los siguientes vectores físicos:

$$\bar{\omega}_{\bar{P}_0'S} = (0, 0, -\omega) \qquad (I.2a)$$

$$\bar{a}_{\bar{P}_0'S} = -\omega^2(x_0', y_0', 0) \qquad (I.2b)$$

$$\bar{V}_{\bar{P}_0'S} = \omega(y_0', -x_0', 0) \qquad (I.2c)$$

donde:

$\bar{P}_0'$ $(=(x_0', y_0', 0))$ es un punto fijo respecto a S'

$\bar{\omega}_{\bar{P}_0'S}$ es la velocidad angular respecto a S de $\bar{P}_0'$.

$\bar{a}_{\bar{P}_0'S}$ es la aceleración respecto a S de $\bar{P}_0'$.

$\bar{V}_{\bar{P}_0'S}$ es la velocidad respecto a S de $\bar{P}_0'$.

REFERENCIAS

(1) Landau-Lifshitz, The Classical Theory of fields, 2 ed. Oxford, Pergamon Press, 1962.

(2) Moller. C. The Theory of Relativity, Oxford, At the Clarendon Press, 1952.

(3) Willmore, An Introduction to Differential Geometry. Oxford, Clarendon Press, 1961.

(4) Jackson, John D., Classical Electrodynamics, New York, I. Willey 1965.

(5) Lichnerowicz, A. Elements of Tensor Calculus, London, Methuen Co., 1962.

(6) Einstein, Relativistic Theory of the non-symmetric Field. The Meaneang of Relativity. Princenton, 1955

(7) Papepetrou, Static Spherically Symmetric Solutions in the Unitary field theory, Royal Irish Academic, Volume 52, 1948.

(8) Abstracts of 5th International Conference on Gravitations and the theory of Relativity.