

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA FACULTAD DE CIENCIAS



TESIS

“CONVERGENCIA DE ÁRBOLES ALEATORIOS EN LA MÉTRICA DE GROMOV-HAUSDORFF”

PARA OBTENER EL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA APLICADA

ELABORADA POR:

ENRIQUE IDAEL CHÁVEZ SARMIENTO

ASESOR:

Dr. JOHEL VICTORINO BELTRÁN RAMÍREZ

LIMA-PERÚ
2018

*A mis padres,
Consuelo e Idael.*

ÍNDICE DE CONTENIDOS

Índice de contenidos	IV
Resumen	VI
Abstract	VII
Introducción	1
1 Árboles aleatorios	3
1.1 Definiciones	3
1.2 Árboles y trayectos de Lukasiewicz	4
1.3 Procesos de Galton-Watson y árboles	12
1.4 Resultados de convergencia	18
1.5 Árboles Galton-Watson con descendencia fijada	27
1.6 Convergencia de funciones de contorno	29
2 Árboles reales	32
2.1 Árboles reales	32
2.1.1 Codificación de árboles reales	33
2.2 El Árbol Aleatorio Continuo	38
3 Conclusiones	40
Apéndices	41

A	Miscelánea de probabilidades	42
A.1	Topología de Skorohod	43
A.2	Movimiento Browniano	47
B	Métrica de Gromov-Hausdorff	53
	Referencias Bibliográficas	55

Resumen

El presente trabajo estudiamos ciertos árboles aleatorios finitos. Además probamos su convergencia, bajo un escalamiento y condicionamiento adecuados, a un objeto aleatorio continuo llamado Árbol Aleatorio Continuo (AAC). Más precisamente, en la primera parte del trabajo introducimos la noción de árbol enraizado ordenado finito, el tipo de árbol que da lugar a los árboles aleatorios de nuestro estudio. Asociamos a estos árboles dos funciones, la función de altura y la función de contorno. Los principales resultados de esta primera parte son teoremas de convergencia de estas funciones a objetos conocidos en probabilidad asociados al browniano. Finalmente, en la segunda parte de este trabajo, usamos la excursión browniana como una versión continua de la función de contorno, estudiada previamente, para definir el AAC. Concluimos mostrando que el AAC puede ser obtenido como el límite de árboles aleatorios finitos.

Frases y palabras clave: Árbol aleatorio, función de contorno, función altura, árbol aleatorio continuo.

Abstract

In this work we study some finite random trees. Also, we prove their convergence, under certain conditions, to a random object called Continuous Random Tree (AAC). More specifically, in the first part we introduce the notion of finite ordered rooted tree, the kind of tree that produces the random trees we study. We associate two functions to these trees, the height function and the contour function. The main results of this part are some convergence theorems of these functions to well known probabilistic objects, related to the Brownian motion. Finally, in the second part of this work, we use the Brownian excursion to define the AAC. We conclude showing that the AAC can be obtained as the limit of finite random trees.

Keywords: Random tree, contour function, high function, continuous random tree.

INTRODUCCIÓN

El resultado más importante de este trabajo es el Teorema 2.2.1 donde mostramos que el Árbol Aleatorio Continuo (AAC) es el límite en distribución de árboles aleatorios finitos, con un escalamiento adecuado.

El AAC es un objeto introducido por Aldous a principios de la década del 90 del siglo pasado, en [1] y [2] él define el AAC y muestra el resultado principal de este trabajo, aunque por un método diferente al que aquí exponemos. Este resultado es similar al Teorema de invarianza de Donsker A.2.1, donde el movimiento browniano aparece como un límite en distribución de paseos aleatorios, escalados adecuadamente. Es decir, nuestro objeto de estudio que tiene naturaleza continua, es obtenido como límite de procesos discretos. Como pasa con el movimiento Browniano, desde que fue introducido, el AAC ha aparecido naturalmente en muchos fenómenos y es parte de constante investigación, como puede verse en [6], [8], [5], [4] o más recientemente en [13], donde Panagiotou et al. obtienen el AAC como límite de cierta familia de grafos conexos.

El presente trabajo está basado en el aporte de Le Gall [11] y lo hemos organizado como sigue: En el primer capítulo comenzamos estudiando árboles finitos con un vértice distinguido llamado raíz. En la sección 1.2 logramos asociar biunívocamente a cada uno de estos árboles un paseo sobre \mathbb{Z} . Posteriormente en la sección 1.3 estudiamos árboles aleatorios y nos valemos de los resultados obtenidos en la sección 1.2 para que, asociando a cada árbol aleatorio un paseo aleatorio sobre \mathbb{Z} , consigamos obtener algunos resultados de convergencia en distribución que relacionan la función altura H del árbol aleatorio, definida en esa sección, con el browniano reflejado. En

concreto, probamos en el teorema 1.4.1 que establece la siguiente convergencia

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} \left(\frac{2}{\sigma} \gamma, t \geq 0 \right),$$

donde γ es un proceso browniano reflejado. A continuación, en la sección 1.5, conseguimos probar, en el teorema 1.5.1, un resultado análogo al antes mencionado restringiéndonos a árboles condicionados a tener cierta cantidad de vértices. Al final del capítulo mostramos que los resultados de convergencia, obtenidos en términos de la función altura de un árbol aleatorio, pueden ser re-interpretados como resultados de convergencia, en términos de la función de contorno asociada a un árbol aleatorio. Esto nos es de utilidad para mostrar el teorema 2.2.1 del segundo capítulo.

Finalmente en el segundo capítulo estudiamos árboles reales e introducimos la noción de Árbol Aleatorio Continuo (AAC). Conseguimos asociar a cada función no negativa de soporte compacto y definida sobre $[0, +\infty)$ un AAC y gracias a esto, asociando a cada árbol enraizado con el árbol real que genera su función de contorno logramos probar el teorema 2.2.1, que básicamente indica que con escalamiento adecuado un árbol aleatorio, de distribución uniforme, de n vértices converge al AAC.

1

Árboles aleatorios

1.1 Definiciones

Estamos interesados en estudiar árboles enraizados (finitos). Para definirlos formalmente, introducimos el conjunto

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathbb{N}^n,$$

donde $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ es el conjunto de los números naturales, conviniendo que $\mathbb{N}^0 = \{\emptyset\}$.

1.1.1 Notación. 1. Si $u = (u^1, u^2, \dots, u^n) \in \mathbb{N}^n$ y $v = (v^1, v^2, \dots, v^m) \in \mathbb{N}^m$, denotaremos por $uv \in \mathbb{N}^{n+m}$ a la *concatenación* de u y v

$$uv := (u^1, u^2, \dots, u^n, v^1, v^2, \dots, v^m);$$

convenimos además en que $\emptyset u = u\emptyset = u$ para todo $u \in \mathcal{U}$.

2. La proyección $\pi : \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\} \rightarrow \mathcal{U}$ definida por $\pi(u) = \emptyset$, para todo $u \in \mathbb{N}$ y $\pi(u^1, u^2, \dots, u^n) = (u^1, u^2, \dots, u^{n-1})$ para todo $(u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{N}^n$, recupera al *padre* de cada elemento de $\mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$.
3. Para $u, v \in \mathcal{U}$ será usual escribir $u \leq v$ o $u < v$, según sea el caso, para referirnos a la relación de *orden lexicográfica* entre u y v .

1.1.1 Definición (Árbol enraizado). Un *árbol enraizado (finito) ordenado* \mathbf{t} es un subconjunto finito de \mathcal{U} tal que

1. La raíz pertenece al árbol, es decir, $\emptyset \in \mathbf{t}$.
2. Si $u \in \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$, entonces $\pi(u) \in \mathbf{t}$.

3. Para todo $u \in \mathbf{t}$ existe un entero $k_u(\mathbf{t}) \geq 0$ tal que, para todo $j \in \mathbb{N}$, $uj \in \mathbf{t}$ si, y sólo si, $j \leq k_u(\mathbf{t})$.

Podemos interpretar al número $k_u(\mathbf{t})$ como el *número de hijos* de u en \mathbf{t} .

1.1.2 Notación. 1. Denotaremos por \mathbf{A} al conjunto de todos los árboles enraizados ordenados. Además entenderemos al cardinal de \mathbf{t} , $\#\mathbf{t}$, como el total de la *prole* de \mathbf{t} . También, en adelante, será usual que cuando digamos *árbol* nos refiramos a un árbol enraizado (finito) ordenado, a menos que se indique lo contrario. Finalmente, para u y v en un árbol, usaremos la notación $v \prec u$ (v es ancestro de u), para indicar que existe $w \in \mathcal{U} \setminus \{\emptyset\}$ tal que $v = uw$, esto define lo que llamaremos *orden genealógico*.

2. Dado un árbol $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$, para cada vértice $u \in \mathbf{t}$, denotaremos por $\mathbf{t}_{(u)}$ al árbol

$$\mathbf{t}_{(u)} := \{v \in \mathcal{U} : uv \in \mathbf{t}\} \in \mathbf{A}.$$

Además, para cualquier $w \in \mathcal{U}$ y $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ denotaremos por $w\mathbf{t}$ al conjunto

$$w\mathbf{t} := \{wv : v \in \mathbf{t}\} \subset \mathcal{U}.$$

Observe que si $v \in \mathbf{t}$, entonces $v\mathbf{t}_{(v)}$ representa a toda la descendencia de v en \mathbf{t} junto con v . En particular, $v\mathbf{t}_{(v)} \subset \mathbf{t}$.

1.2 Árboles y trayectos de Lukasiewicz

En esta sección estableceremos una biyección entre árboles y trayectorias especiales sobre \mathbb{Z} llamados trayectos de Lukasiewicz. Usando esta correspondencia, veremos que los árboles aleatorios de Galton-Watson que introduciremos en la siguiente sección inducen paseos aleatorios sobre \mathbb{Z} . Esta observación es clave para el estudio del comportamiento asintótico de los árboles de Galton-Watson.

Durante esta sección, enumeramos los elementos de cada árbol usando el orden lexicográfico: para cada $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ escribimos

$$\mathbf{t} = \{u_0, u_1, \dots, u_{\#\mathbf{t}-1}\},$$

de modo que $\emptyset = u_0 < u_1 < \dots < u_{\#\mathbf{t}-1}$.

Fijemos un árbol \mathbf{t} de p elementos

$$\mathbf{t} = \{u_0, u_1, \dots, u_{p-1}\},$$

y consideremos el vector formado por el número de hijos de cada vértice de \mathbf{t} listados en el orden lexicográfico:

$$\Phi(\mathbf{t}) := (k_{u_0}(\mathbf{t}), k_{u_1}(\mathbf{t}), \dots, k_{u_{p-1}}(\mathbf{t})). \quad (1.1)$$

Si $p = 1$ entonces necesariamente $\mathbf{t} = \{\emptyset\}$ y en ese caso $\Phi(\mathbf{t}) = (0)$. Supongamos ahora que $p \geq 2$. Observe que

$$\pi^{-1}\{v\} \cap \mathbf{t}, \quad v \in \mathbf{t},$$

es una partición de $\mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}$, es decir, es una familia de subconjuntos disjuntos dos a dos tales que

$$\bigcup_{v \in \mathbf{t}} (\pi^{-1}\{v\} \cap \mathbf{t}) = \mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}.$$

Además, la cardinalidad de cada subconjunto de la partición es

$$\#(\pi^{-1}\{v\} \cap \mathbf{t}) = k_v(\mathbf{t}), \quad \forall v \in \mathbf{t}.$$

Concluimos así la relación

$$k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \dots + k_{u_{p-1}}(\mathbf{t}) = \#(\mathbf{t} \setminus \{\emptyset\}) = p - 1. \quad (1.2)$$

Para $i \in \{0, 1, \dots, p-2\}$ observe que

$$\{u_1, \dots, u_{i+1}\} \subseteq \pi^{-1}\{u_0, u_1, \dots, u_i\}.$$

Tomando cardinalidad a ambos conjuntos concluimos que

$$i + 1 \leq k_{u_0}(\mathbf{t}) + k_{u_1}(\mathbf{t}) + \dots + k_{u_i}(\mathbf{t}), \quad \forall 0 \leq i < p - 1. \quad (1.3)$$

Inspirados en las relaciones (1.2) y (1.3) introducimos la siguiente definición.

1.2.1 Definición. El conjunto \mathcal{S} es el conjunto de todas las secuencias finitas de enteros no negativos $m = (m_1, m_2, \dots, m_p)$ que satisfacen

1. $m_1 + m_2 + \cdots + m_i \geq i$, para todo $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$;
2. $m_1 + m_2 + \cdots + m_p = p-1$.

Observe que si $m = (m_1, m_2, \dots, m_p) \in \mathcal{S}$ entonces necesariamente se tiene

$$m_p = 0 \quad \text{y} \quad m_1 + m_2 + \dots + m_{p-1} = p-1.$$

En particular, si $p = 1$ entonces $m = (0)$ y si $p = 2$ entonces $m = (1, 0)$. Observe además que si $p > 1$, la primera condición implica que $m_1 > 0$. Usaremos estas observaciones en la prueba de la Proposición 1.2.1.

Consideremos la aplicación $\mathbf{t} \mapsto \Phi(\mathbf{t})$ definida en (1.1). Las relaciones (1.2) y (1.3) prueban que para todo $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ tenemos $\Phi(\mathbf{t}) \in \mathcal{S}$. Mostraremos a continuación que $\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{S}$ es de hecho una aplicación sobreyectiva.

Proposición 1.2.1. *Para todo $m = (m_1, m_2, \dots, m_p) \in \mathcal{S}$ existe un árbol $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ de modo que $\Phi(\mathbf{t}) = m$.*

Demostración. Procederemos por inducción sobre p . Si $p = 1$, basta tomar $\mathbf{t} = \{\emptyset\}$ y si $p = 2$ basta tomar $\mathbf{t} = \{\emptyset, 1\}$. Supongamos que la afirmación es válida para $p = k \geq 2$ y fijemos un vector

$$m = (m_1, m_2, \dots, m_{k+1}) \in \mathcal{S}$$

arbitrario. Ubicamos el índice

$$i_0 = \min\{i : m_i = 0\},$$

que siempre existe porque $m_{k+1} = 0$. Además, siendo $p > 1$ necesariamente $i_0 \geq 2$. Definimos ahora el vector

$$\tilde{m} = (\tilde{m}_1, \tilde{m}_2, \dots, \tilde{m}_k)$$

como el vector que se obtiene a partir de m , borrando la componente i_0 -ésima y restando una unidad a la componente $(i_0 - 1)$ -ésima. Más precisamente: $\tilde{m}_{i_0-1} = m_{i_0-1} - 1$, $\tilde{m}_i = m_i$ para $1 \leq i \leq i_0 - 2$ y $\tilde{m}_j = m_{j+1}$ para $i_0 \leq j \leq k$. Observe que si $i_0 = 2$ entonces $\tilde{m} = (m_1 - 1, m_3, m_4, \dots, m_{k+1})$ y si $i_0 = k + 1$ entonces $\tilde{m} = (m_1, m_2, \dots, m_{k-1}, m_k - 1)$. Afirmamos ahora que $\tilde{m} \in \mathcal{S}$. En efecto,

la primera condición es satisfecha para $i \leq i_0 - 2$, porque m y \tilde{m} coinciden en las primeras $i_0 - 2$ coordenadas. Para $i_0 - 1 \leq i \leq k - 1$ tenemos

$$\begin{aligned} i &\leq (m_1 + m_2 + \cdots + m_{i+1}) - 1 \\ &= \tilde{m}_1 + \cdots + \tilde{m}_i. \end{aligned}$$

Eso prueba que \tilde{m} satisface la primera condición en la definición de \mathcal{S} . Finalmente

$$\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2 + \cdots + \tilde{m}_k = m_1 + m_2 + \cdots + m_{k+1} - 1 = k - 1,$$

que concluye la prueba de que $\tilde{m} \in \mathcal{S}$. Luego, por hipótesis de inducción, existe

$$\tilde{\mathbf{t}} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{k-1}\} \in \mathbf{A}$$

de modo que $\Phi(\tilde{\mathbf{t}}) = \tilde{m}$.

Ahora, modificaremos el árbol $\tilde{\mathbf{t}}$ para encontrar el árbol \mathbf{t} tal que $\Phi(\mathbf{t}) = m$. Observe que los primeros $i_0 - 1$ vértices de $\tilde{\mathbf{t}}$ son necesariamente

$$v_0 = \emptyset, \quad v_1 = (1), \quad v_2 = (1, 1), \quad \dots, \quad v_{i_0-2} = \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{(i_0-2) \text{ veces}}.$$

Si $i_0 = 2$ esta afirmación se reduce a la identidad trivial: $v_{i_0-2} = v_0 = \emptyset$. Si $i_0 > 2$ la afirmación es consecuencia de que

$$k_{v_{i-1}}(\tilde{\mathbf{t}}) = \tilde{m}_i = m_i > 0, \quad \forall 1 \leq i \leq i_0 - 2.$$

Denotemos

$$\hat{u} := \underbrace{(1, 1, \dots, 1)}_{(i_0-1) \text{ veces}}.$$

Si $k_{v_{i_0-2}}(\tilde{\mathbf{t}}) = 0$ (y en ese caso necesariamente $i_0 > 2$) entonces

$$v_0 < v_1 < \cdots < v_{i_0-2} < \hat{u} < v_{i_0-1} < \cdots < v_{k-1}.$$

Más aún, es fácil verificar que si agregamos \hat{u} a $\tilde{\mathbf{t}}$ obtenemos todavía un árbol

$$\mathbf{t} := \tilde{\mathbf{t}} \cup \{\hat{u}\} = \{v_0, v_1, \dots, v_{i_0-2}, \hat{u}, v_{i_0-1}, \dots, v_{k-1}\} \in \mathbf{A}$$

que además verifica $\Phi(\mathbf{t}) = m$. Eso termina la prueba en el caso que v_{i_0-2} no tenga hijos en $\tilde{\mathbf{t}}$. Supongamos ahora que $k_{v_{i_0-2}}(\tilde{\mathbf{t}}) > 0$ y llamemos $r \in \mathbb{N}$ al índice tal que

$$\{w \in \tilde{\mathbf{t}} : v_{i_0-2} \prec w\} = \{v_{i_0-1}, v_{i_0}, \dots, v_r\},$$

es decir $\{v_{i_0-1}, v_{i_0}, \dots, v_r\}$ es la descendencia de v_{i_0-2} . Observe que cada vértice v_j en $\{v_{i_0-1}, v_{i_0}, \dots, v_r\}$ debe ser de la forma

$$v_j = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(i_0-2) \text{ veces}}, a_j, \dots).$$

Ahora, por cada $v_j \in \{v_{i_0-1}, v_{i_0}, \dots, v_r\}$ definimos

$$\hat{v}_j = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_{(i_0-2) \text{ veces}}, a_j + 1, \dots), \quad i_0 - 1 \leq j \leq r,$$

de modo que si cambiamos cada v_j en $\tilde{\mathbf{t}}$ por \hat{v}_j aún se conserva el orden lexicográfico

$$v_0 < v_1 < \dots < v_{i_0-2} < \hat{v}_{i_0-1} < \dots < \hat{v}_r < v_{r+1} < \dots < v_{k-1}.$$

Si ahora adicionamos a ese conjunto de vértices el vértice \hat{u} , es fácil verificar que obtenemos un árbol

$$\mathbf{t} = \{v_0, v_1, \dots, v_{i_0-2}, \hat{u}, \hat{v}_{i_0-1}, \dots, \hat{v}_r, v_{r+1}, \dots, v_{k-1}\} \in \mathbf{A}$$

que además satisface $\Phi(\mathbf{t}) = m$. Eso concluye la prueba. \square

1.2.2 Definición. Un *trayecto de Lukasiewicz* es una secuencia (x_0, x_1, \dots, x_p) de números enteros que satisfacen las siguientes propiedades

1. $x_0 = 0$ y $x_p = -1$.
2. $x_n \geq 0$ para todo $0 \leq n \leq p-1$.
3. $x_i - x_{i-1} \geq -1$ para todo $1 \leq i \leq p$.

1.2.1 Observación.

1. Si $(m_1, m_2, \dots, m_p) \in \mathcal{S}$, haciendo $x_0 = 0$ y

$$x_n = \sum_{i=1}^n (m_i - 1), \quad 1 \leq n \leq p, \quad (1.4)$$

de la definición de \mathcal{S} se sigue que (x_0, x_1, \dots, x_p) es un trayecto de Lukasiewicz.

2. Recíprocamente, dado un trayecto de Lukasiewicz (x_0, x_1, \dots, x_p) , si hacemos

$$m_n = x_n - x_{n-1} + 1, \quad 1 \leq n \leq p,$$

podemos verificar que (m_1, m_2, \dots, m_p) pertenece a \mathcal{S} .

Hemos probado así que (1.4) define una biyección entre el conjunto \mathcal{S} y el conjunto de trayectos de Lukasiewicz. En particular, gracias a la Proposición 1.2.1, podemos ahora afirmar que para cada árbol $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ existe un único trayecto de Lukasiewicz asociado. Llamaremos a este trayecto, *trayecto de Lukasiewicz de \mathbf{t}* .

En lo que resta de la sección veremos cómo conseguimos recuperar información de un árbol a través de su trayecto de Lukasiewicz asociado. Esta información será recuperada a través de la función altura del árbol, que definimos a continuación.

1.2.3 Definición. Sea $\mathbf{t} = \{u_0 = \emptyset, u_1, u_2, \dots, u_{\#\mathbf{t}-1}\}$ un árbol enraizado donde los vértices han sido listados en el orden lexicográfico. Definimos la *función altura* asociada a \mathbf{t} , $h : \{0, 1, \dots, \#\mathbf{t} - 1\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots\}$ como

$$h_{\mathbf{t}}(j) = |u_j|, \quad 0 \leq j \leq \#\mathbf{t} - 1,$$

donde $|u| = n$ siempre que $u \in \mathbb{N}^n$.

La siguiente proposición nos muestra la relación que existe entre la función altura de un árbol y su trayecto de Lukasiewicz.

Proposición 1.2.2. *Sea \mathbf{t} un árbol enraizado. Vale la siguiente relación entre $h_{\mathbf{t}}$ y $(x_0, x_1, \dots, x_{\#\mathbf{t}})$, el trayecto de Lukasiewicz de \mathbf{t} :*

$$h_{\mathbf{t}}(n) = \#\{j \in \{0, 1, \dots, n-1\} : x_j = \inf_{j \leq \ell \leq n} x_{\ell}\},$$

para todo $n \in \{1, \dots, \#\mathbf{t} - 1\}$.

Demostración. Por la definición de función altura es claro que

$$h_{\mathbf{t}}(n) = \#\{j \in \{0, 1, \dots, n-1\} : u_j \prec u_n\}.$$

Luego, para probar la proposición es suficiente mostrar que

$$u_j \prec u_n \Leftrightarrow x_j = \inf_{j \leq \ell \leq n} x_\ell, \quad (1.5)$$

para todo $0 \leq j < n \leq \#\mathbf{t} - 1$. Con esta finalidad, fijemos cualquier $j \in \{0, 1, \dots, \#\mathbf{t} - 1\}$ y consideremos el árbol

$$\mathbf{t}_{(u_j)} := \{v \in \mathcal{U} : u_j v \in \mathbf{t}\} \in \mathbf{A}.$$

Es claro que, para cada $n > j$, tenemos

$$u_j \prec u_n \Leftrightarrow j < n < j + \#\mathbf{t}_{(u_j)}. \quad (1.6)$$

Por otro lado, si $x_0^j, x_1^j, \dots, x_{\#\mathbf{t}_{(u_j)}}^j$ es el trayecto de Lukasiewicz de $\mathbf{t}_{(u_j)}$ es fácil verificar la relación

$$x_{j+r} = x_j + x_r^j, \quad \text{para todo } r \in \{0, 1, \dots, \#\mathbf{t}_{(u_j)}\}.$$

Luego, de las propiedades de un trayecto de Lukasiewicz se deduce que

$$\begin{aligned} x_{j+\#\mathbf{t}_{(u_j)}} - x_j &= x_{\#\mathbf{t}_{(u_j)}}^j = -1 \quad \text{y} \\ x_{j+r} - x_j &= x_r^j \geq 0, \quad \forall r \in \{0, 1, \dots, \#\mathbf{t}_{(u_j)} - 1\}. \end{aligned}$$

En particular, tenemos que

$$x_{j+\#\mathbf{t}_{(u_j)}} < x_j \quad \text{y} \quad x_{j+r} \geq x_j, \quad \text{para todo } r \in \{0, 1, \dots, \#\mathbf{t}_{(u_j)} - 1\}. \quad (1.7)$$

De (1.7) deducimos que, para cada j tenemos

$$j < n < j + \#\mathbf{t}_{(u_j)} \Leftrightarrow x_j = \inf_{j \leq \ell \leq n} x_\ell. \quad (1.8)$$

Finalmente, (1.5) se sigue de (1.6) y (1.8). \square

Recordemos la aplicación $\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{S}$ definida en (1.1). En la Proposición 1.2.1 probamos que esta aplicación es sobreyectiva. A continuación, usando las trayectorias de Lukasiewicz y la función altura probamos que, de hecho, Φ es una biyección.

Proposición 1.2.3. *La función $\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{S}$ es inyectiva.*

Demostración. Debemos probar que, dados dos árboles

$$\mathbf{s} = \{u_0, u_1, u_2, \dots, u_{\#\mathbf{s}-1}\} \quad \text{y} \quad \mathbf{t} = \{v_0, v_1, v_2, \dots, v_{\#\mathbf{t}-1}\},$$

tales que $\Phi(\mathbf{t}) = \Phi(\mathbf{s})$, es decir

$$\#\mathbf{s} = \#\mathbf{t} =: p \quad \text{y} \quad k_{u_i}(\mathbf{s}) = k_{v_i}(\mathbf{t}), \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, p-1\}, \quad (1.9)$$

necesariamente $\mathbf{s} = \mathbf{t}$. Probaremos la afirmación por inducción sobre p . Si $p = 1$ se tiene que $\mathbf{s} = \{\emptyset\} = \mathbf{t}$ y si $p = 2$ tenemos que $\mathbf{s} = \{\emptyset, 1\} = \mathbf{t}$. Supongamos ahora que la afirmación es válida para $p = m$. Sean \mathbf{s} y \mathbf{t} árboles que satisfacen (1.9) con $p = m + 1$. En particular, \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen la misma trayectoria de Lukasiewicz

$$x_0, x_1, \dots, x_{m+1}.$$

Gracias a la Proposición 1.2.2 tenemos que

$$h_{\mathbf{s}}(n) = \#\{i \in \{0, 1, \dots, n-1\} : x_i = \inf_{i \leq \ell \leq n} x_\ell\} = h_{\mathbf{t}}(n), \quad (1.10)$$

para todo $n = 1, \dots, m$, es decir, las funciones altura coinciden:

$$h_{\mathbf{s}} \equiv h_{\mathbf{t}}. \quad (1.11)$$

Probaremos ahora que (1.11) implica que $\mathbf{s} = \mathbf{t}$. Sean j_1 y j_2 los índices tales que $\pi(u_{j_1}) = u_m$ y $\pi(v_{j_2}) = v_m$. Observe que

$$j_1 = \text{máx}\{i : h_{\mathbf{s}}(i) = h_{\mathbf{s}}(j_1)\} \quad \text{y} \quad j_2 = \text{máx}\{i : h_{\mathbf{t}}(i) = h_{\mathbf{t}}(j_2)\}. \quad (1.12)$$

Denotemos $h := h_{\mathbf{s}}(m) = h_{\mathbf{t}}(m)$. Ya que $h_{\mathbf{s}}(j_1) = h_{\mathbf{t}}(j_2) = h - 1$, podemos concluir de (1.12) que

$$j_1 = \text{máx}\{i : h_{\mathbf{s}}(i) = h\} = \text{máx}\{i : h_{\mathbf{t}}(i) = h\} = j_2.$$

Denotemos $\hat{j} := j_1 = j_2$. Consideremos ahora los árboles $\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{s} \setminus \{u_m\}$ y $\tilde{\mathbf{t}} = \mathbf{t} \setminus \{v_m\}$. Se verifica fácilmente que

$$k_{u_i}(\tilde{\mathbf{s}}) = k_{u_i}(\mathbf{s}) \quad \text{para todo } i \neq \hat{j} \quad \text{y} \quad k_{u_{\hat{j}}}(\tilde{\mathbf{s}}) = k_{u_{\hat{j}}}(\mathbf{s}) - 1$$

$$k_{v_i}(\tilde{\mathbf{t}}) = k_{v_i}(\mathbf{t}) \quad \text{para todo } i \neq \hat{j} \quad \text{y} \quad k_{v_{\hat{j}}}(\tilde{\mathbf{t}}) = k_{v_{\hat{j}}}(\mathbf{t}) - 1,$$

lo que implica que $\tilde{\mathbf{s}}$ y $\tilde{\mathbf{t}}$ son dos árboles de m elementos tales que $\Phi(\tilde{\mathbf{s}}) = \Phi(\tilde{\mathbf{t}})$. Entonces, por hipótesis de inducción, $\tilde{\mathbf{s}} = \tilde{\mathbf{t}}$. En particular $u_{\hat{j}} = v_{\hat{j}}$, de donde se sigue que

$$u_m = u_{\hat{j}}k_{u_{\hat{j}}}(\mathbf{s}) = v_{\hat{j}}k_{v_{\hat{j}}}(\mathbf{t}) = v_m. \quad (1.13)$$

De ahí concluimos que $\mathbf{s} = \tilde{\mathbf{s}} \cup \{u_m\} = \tilde{\mathbf{t}} \cup \{v_m\} = \mathbf{t}$. \square

Recordemos que (1.4) define una biyección entre \mathcal{S} y el conjunto de trayectos de Lukasiewicz. De la proposición anterior se sigue entonces que la aplicación que asigna a cada árbol su trayecto de Lukasiewicz define una biyección entre \mathbf{A} y el conjunto de trayectos de Lukasiewicz.

1.3 Procesos de Galton-Watson y árboles

En esta sección introduciremos la noción de árbol de Galton-Watson. Esta noción define un modo particular de sortear un elemento en \mathbf{A} . La distribución de este sorteo es determinada por una medida de probabilidad μ sobre

$$\mathbb{Z}_{\geq 0} := \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Gracias a la biyección que establecimos en la sección anterior entre \mathbf{A} y el conjunto de trayectos de Lukasiewicz, este sorteo induce un sorteo de un trayecto sobre \mathbb{Z} . En el Corolario 1.3.1 damos una descripción de la distribución de este sorteo usando la ley de un paseo aleatorio $(S_n, n \geq 0)$ sobre \mathbb{Z} .

De ahora en adelante, asumimos que μ es una medida de probabilidad en $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ de media menor o igual a 1, es decir

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k) \leq 1.$$

Asumimos además que μ es no trivial, es decir que $\mu(1) < 1$. Consideremos una colección de variables aleatorias i.i.d.

$$\{K_u, u \in \mathcal{U}\},$$

con distribución común μ . Definimos ahora θ , como el siguiente subconjunto (aleatorio) de \mathcal{U} :

$$\theta := \{u = u^1 \dots u^n \in \mathcal{U} : u^j \leq K_{u^1 \dots u^{j-1}}, \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Por la misma construcción, es claro que las tres condiciones que definen a un árbol enraizado son satisfechas por θ . Sin embargo, para concluir que $\theta \in \mathbf{A}$ es necesario que θ sea finito. Probaremos a continuación que θ resulta en efecto finito con probabilidad uno.

El proceso $(Z_n)_{n \geq 0}$ definido como

$$Z_n := \#(\theta \cap \mathbb{N}^n), \quad n \geq 0,$$

es llamado proceso de Galton-Watson con distribución de número de hijos μ . También es llamado proceso de Galton-Watson cualquier otro proceso con la misma ley que $(Z_n)_{n \geq 0}$. No es difícil verificar que, para todo $n \geq 1$,

$$P[Z_{n+1} = \ell | Z_1, Z_2, \dots, Z_n] = P[Z_{n+1} = \ell | Z_n], \quad \forall \ell \geq 0, \quad (1.14)$$

es decir $(Z_n)_{n \geq 0}$ satisface la propiedad de Markov. También se verifica que

$$P[Z_0 = 1] = 1 \quad \text{y} \quad P[Z_n = \ell', Z_{n+1} = \ell] = P[Z_n = \ell'] P\left[\sum_{u=1}^{\ell'} K_u = \ell\right], \quad \forall \ell', \ell \geq 0, \quad (1.15)$$

para todo $n \geq 0$, es decir, la distribución condicional de la variable Z_{n+1} dado que $\{Z_n = m\}$ coincide con la ley de la variable $\sum_{u=1}^m K_u$. Las propiedades (1.14) y (1.15) determinan únicamente la ley de un proceso de Galton-Watson.

Proposición 1.3.1. *Si $(Z_n)_{n \geq 0}$ es un proceso de Galton-Watson entonces*

$$P[Z_n = 0 \text{ para todo } n \text{ suficientemente grande}] = 1. \quad (1.16)$$

Demostración. Consideremos el proceso $(Z'_n, n \geq 0)$ definido como

$$Z'_n := \frac{Z_n}{(m_\mu)^n}, \quad n \geq 0,$$

donde $m_\mu := \sum_{k=0}^{\infty} k\mu(k)$ es la media de hijos de acuerdo a la distribución μ . De (1.14) y (1.15) es fácil concluir que $(Z'_n, n \geq 0)$ resulta una martingala con respecto a la filtración generada por él mismo. Luego, $E[Z'_n] = E[Z_0] = 1$ para todo $n \geq 1$ y por lo tanto

$$E[Z_n] = (m_\mu)^n, \quad \forall n \geq 1.$$

En el caso que $m_\mu < 1$ tendríamos

$$E\left[\sum_{n \geq 0} Z_n\right] = \sum_{n \geq 0} E[Z_n] = \sum_{n \geq 0} (m_\mu)^n < \infty. \quad (1.17)$$

Esto implica que

$$P\left[\sum_{n \geq 0} Z_n < \infty\right] = 1,$$

y que por lo tanto (1.16) estaría verificado.

En el caso que $m_\mu = 1$ tendremos que $(Z_n)_{n \geq 0}$ resulta una martingala. Ya que $E[Z_n] = 1, \forall n \geq 1$, podemos aplicar el teorema de convergencia para martingalas (ver por ejemplo [14, Theorem 4.1, Chapter V]) para concluir que

$$P[\text{la sucesión } (Z_n)_{n \geq 1} \text{ converge}] = 1. \quad (1.18)$$

Siendo (Z_n) una sucesión de números enteros, hemos probado así que, con probabilidad uno, (Z_n) debe ser constante a partir de un cierto término. Sin embargo, para todo $k \geq 1$ tenemos

$$P(Z_n = \ell, \text{ para todo } n \geq k) = 0, \quad (1.19)$$

siempre que ℓ sea distinto de cero. Las estimativas (1.18) y (1.19) implican entonces que, con probabilidad uno, (Z_n) debe ser igual a cero a partir de un cierto término. Eso termina la prueba. \square

De (1.16) concluimos que $P(\theta \text{ es finito}) = 1$. Hemos probado así que, siempre que $m_\mu \leq 1$,

$$P(\theta \in \mathbf{A}) = 1.$$

El conjunto θ define entonces un punto aleatorio en \mathbf{A} . Notemos que para el árbol aleatorio θ tendremos

$$k_u(\theta) = K_u, \quad \forall u \in \theta.$$

1.3.1 Definición. Cualquier variable aleatoria tomando valores en \mathbf{A} con la misma distribución de θ será llamada μ -árbol de Galton-Watson. La ley inducida por un μ -árbol de Galton-Watson en \mathbf{A} será denotada por Π_μ .

Acerca de la ley Π_μ , no es difícil verificar que cada árbol $\mathbf{t} \in \mathbf{A}$ tiene como probabilidad

$$\Pi_\mu(\{\mathbf{t}\}) = \prod_{u \in \mathbf{t}} \mu(k_u(\mathbf{t})) . \quad (1.20)$$

En efecto, como

$$\{\theta = \mathbf{t}\} = \bigcap_{u \in \mathbf{t}} \{K_u = k_u(\mathbf{t})\} ,$$

por la independencia de las variables K_u concluimos que

$$\Pi_\mu(\{\mathbf{t}\}) = P(\theta = \mathbf{t}) = \prod_{u \in \mathbf{t}} P(K_u = k_u(\mathbf{t})) = \prod_{u \in \mathbf{t}} \mu(k_u(\mathbf{t})) .$$

Usando (1.20) y un cálculo elemental es simple verificar las propiedades de la ley Π_μ que enunciaremos en la Proposición 1.3.2 abajo. Recordemos que dado un árbol \mathbf{t} y $1 \leq j \leq k_\emptyset(\mathbf{t})$ denotamos por $\mathbf{t}_{(j)}$ el árbol

$$\mathbf{t}_{(j)} = \{u \in \mathcal{U} : ju \in \mathbf{t}\} \in \mathbf{A} .$$

Proposición 1.3.2. *Para Π_μ se cumple lo siguiente.*

1. $\Pi_\mu(k_\emptyset = j) = \mu(j)$, para todo $j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.
2. Para todo $j \geq 1$ con $\mu(j) > 0$, bajo la probabilidad condicional $\Pi_\mu(\cdot | k_\emptyset = j)$, los árboles $\mathbf{t}_{(1)}, \dots, \mathbf{t}_{(j)}$ son i.i.d. con distribución común Π_μ .

Recordemos la aplicación $\Phi : \mathbf{A} \rightarrow \mathcal{S}$ definida en (1.1). En la siguiente proposición damos una descripción de la ley de $\Phi(\theta)$ para un μ -árbol de Galton-Watson θ .

Proposición 1.3.3. *Sea θ un μ -árbol de Galton-Watson. Entonces*

$$\Phi(\theta) \stackrel{(D)}{=} (M_1, M_2, \dots, M_T) ,$$

donde las variables aleatorias M_1, M_2, \dots son independientes con distribución μ y

$$T = \inf\{n \geq 1 : M_1 + M_2 + \dots + M_n < n\} .$$

Demostración. Sean $U_0 = \emptyset, U_1, \dots, U_{\#\theta-1}$ los elementos de θ en el orden lexicográfico, entonces

$$\Phi(\theta) = (K_{U_0}, K_{U_1}, \dots, K_{U_{\#\theta-1}}) . \quad (1.21)$$

Sabemos que $K_{U_0} + \dots + K_{U_n} \geq n + 1$ para todo $n \leq \#\theta - 2$ y además $K_{U_0} + \dots + K_{U_{\#\theta-1}} = \#\theta - 1$. Entonces, definiendo

$$U_n = U_{\#\theta-1} \mathbf{1}, \quad \text{para } n \geq \#\theta,$$

donde

$$\mathbf{1} = \underbrace{1 \dots 1}_{(n - \#\theta + 1) \text{ veces}},$$

tendremos una sucesión $(K_{U_n})_{n \geq 0}$ para la cual

$$\#\theta = \inf\{n \geq 1 : K_{U_0} + K_{U_1} + \dots + K_{U_{n-1}} < n\}.$$

La proposición quedará entonces probada, haciendo $M_n := K_{U_{n-1}}$, $n \geq 1$, luego de demostrar que $(K_{U_n})_{n \geq 0}$ son variables independientes.

Fijemos $u \in \mathcal{U}$ arbitrario. Definamos el árbol aleatorio

$$\theta^u := \theta \cap \{v \in \mathcal{U} : v \leq u\}.$$

Es claro de la construcción de θ que θ^u es $\sigma(K_v, v < u)$ -medible. Escribamos los elementos de θ^u en orden lexicográfico como:

$$\theta^u = \{V_1, V_2, \dots, V_{\#\theta^u-1}\}.$$

Para cada $n \geq 1$ tenemos la siguiente igualdad de eventos

$$\{U_n = u, \#\theta > n\} = \{V_n = u, \#\theta^u = n + 1\}.$$

El evento del lado derecho sólo depende de θ^u . Ya que θ^u es $\sigma(K_v, v < u)$ -medible concluimos que

$$\{U_n = u, \#\theta > n\} \in \sigma(K_v, v < u). \quad (1.22)$$

Fijemos ahora $n \geq 1$ y $1 \leq k \leq n$. Sobre el evento $\{U_n = u, \#\theta = k\}$ tenemos $\theta^u = \theta$. Por lo tanto

$$\{U_n = u, \#\theta = k\} = \{\#\theta^u = k, V_{k-1} \mathbf{1} = u, K_{V_{k-1}} = 0\}, \quad (1.23)$$

donde

$$\mathbf{1} = \underbrace{1 \dots 1}_{n - k + 1 \text{ veces}}.$$

Observemos que el evento del lado derecho en (1.23) sólo depende del árbol θ^u . Por lo tanto, ambos eventos en (1.23) pertenecen al σ -álgebra $\sigma(K_v, v < u)$. Hemos probado así que

$$\{U_n = u, \#\theta = k\} \in \sigma(K_v, v < u), \quad \forall 1 \leq k \leq n. \quad (1.24)$$

Ya que $n \geq 1$ fue arbitrario, de (1.22) y (1.23) concluimos que

$$\{U_n = u\} \in \sigma(K_v, v < u), \quad \forall n \geq 1. \quad (1.25)$$

Fijemos $n \geq 1$ arbitrario y n funciones no negativas

$$g_\ell : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow [0, \infty), \quad 1 \leq \ell \leq n.$$

Tenemos que

$$E \left[\prod_{\ell=1}^n g_\ell(K_{U_\ell}) \right] = \sum_{(u_1, \dots, u_n)} E \left[1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^n g_\ell(K_{u_\ell}) \right], \quad (1.26)$$

donde la suma es tomada sobre todas las n -uplas $(u_1, \dots, u_n) \in \mathcal{U}^n$ tales que $u_1 < u_2 < \dots < u_n$.

Ya que

$$1_{\{U_1=u_1, \dots, U_{n-1}=u_{n-1}\}} \prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{u_\ell})$$

es claramente $\sigma(K_v, v < u_n)$ -medible y, por (1.25), la variable $1_{\{U_n=u_n\}}$ es $\sigma(K_v, v < u_n)$ -medible, entonces las variables

$$1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{u_\ell}) \quad \text{y} \quad g_n(K_{u_n})$$

resultan independientes (recuerde que $(K_u)_{u \in \mathcal{U}}$ son independientes). Por lo tanto,

$$E \left[1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^n g_\ell(K_{u_\ell}) \right] = E \left[1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{u_\ell}) \right] E[g_n(K_{u_n})].$$

Colocando esta última igualdad en (1.26) tenemos

$$E \left[\prod_{\ell=1}^n g_\ell(K_{U_\ell}) \right] = \sum_{(u_1, \dots, u_n)} E \left[1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{u_\ell}) \right] E[g_n(K_{u_n})]. \quad (1.27)$$

Además, notemos que $E[g_n(K_{u_n})] = \int g_n d\mu$ no depende de u_n . Luego, haciendo $g_n \equiv 1$ en la anterior igualdad resulta

$$E \left[\prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{U_\ell}) \right] = \sum_{(u_1, \dots, u_n)} E \left[1_{\{U_1=u_1, \dots, U_n=u_n\}} \prod_{\ell=1}^{n-1} g_\ell(K_{u_\ell}) \right]. \quad (1.28)$$

De (1.27) y (1.28) se deduce que

$$E \left[\prod_{\ell=1}^{n-1} g_{\ell}(K_{U_{\ell}}) \right] = E \left[\prod_{\ell=1}^{n-1} g_{\ell}(K_{U_{\ell}}) \right] E[g_n(K_{u_n})].$$

Entonces el resultado se sigue por inducción. \square

Como consecuencia tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.3.1. *Sea $(S_n)_{n \geq 0}$ un paseo aleatorio en \mathbb{Z} con valor inicial S_0 y distribución de salto $\nu(k) = \mu(k+1)$ para todo $k \geq -1$. Si*

$$T = \inf\{n \geq 1 : S_n = -1\}.$$

Entonces el trayecto Lukasiewicz de un árbol μ -Galton-Watson θ tiene la misma distribución que (S_0, S_1, \dots, S_T) . En particular, $\#\theta$ y T tienen la misma distribución.

1.4 Resultados de convergencia

En esta sección fijamos μ de varianza finita σ^2 tal que $\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(k) = 1$. Además, en adelante usamos la notación fijada en el apéndice A.1.

1.4.1 Definición. Sean $\theta_1, \theta_2, \dots$ una secuencia de árboles μ -Galton-Watson independientes, que llamaremos *bosque*, y $(h_{\theta_i}(n), 0 \leq n \leq \#\theta_i - 1)$, $i = 1, 2, \dots$ las funciones altura de cada θ_i . Definimos el *proceso altura* $(H_n, n \geq 0)$ del bosque por

$$H_n := h_{\theta_i}(n - (\#\theta_1 + \dots + \#\theta_{i-1})),$$

si $\#\theta_1 + \dots + \#\theta_{i-1} \leq n < \#\theta_1 + \dots + \#\theta_i$.

El objetivo de esta sección es probar que, bajo un escalamiento adecuado, el proceso altura de un bosque esencialmente converge en distribución al *browniano reflejado* $(|B_t|, t \geq 0)$ (cf. Definición A.2.3).

Primero probamos algunos resultados sobre la función altura. Como consecuencia de la Proposición 1.2.2 y el Corolario 1.3.1 se sigue la siguiente proposición

Proposición 1.4.1. *Sea*

$$\tilde{H}_n = \#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : S_k = \inf_{k \leq j \leq n} S_j\}, \quad \forall n \geq 0, \quad (1.29)$$

donde $(S_n, n \geq 0)$ es un paseo aleatorio con la distribución descrita en el Corolario 1.3.1. Entonces los procesos $(H_n, n \geq 0)$ y $(\tilde{H}_n, n \geq 0)$ tienen la misma distribución.

1.4.1 Observación. En virtud de la Proposición 1.4.1, en adelante confundiremos H_n con \tilde{H}_n .

Ahora establecemos parte de la notación que usaremos en lo que queda de la sección. Sea $S = (S_n, n \geq 0)$ como en la Proposición 1.4.1, denotamos

$$M_n := \sup_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad I_n := \inf_{0 \leq k \leq n} S_k, \quad \forall n \geq 0.$$

Además, para todo $n \geq 0$, introducimos el paseo aleatorio *tiempo de reversa* \widehat{S}^n definido por

$$\widehat{S}_k^n := S_n - S_{(n-k)^+}.$$

Entonces, definiendo

$$\Phi_n(\omega) := \#\{k \in \{1, \dots, n\} : \omega_k = \sup_{0 \leq j \leq k} \omega_j\}, \quad \forall n \geq 1,$$

para cualquier $\omega = (\omega_0, \omega_1, \dots)$, resulta que

$$\Phi_n(\widehat{S}^n) = \#\{k \in \{0, 1, \dots, n-1\} : S_k = \inf_{k \leq j \leq n} S_j\}.$$

Luego $H_n = \Phi_n(\widehat{S}^n)$. Además definimos la sucesión de tiempos de parada T_j , $j = 0, 1, \dots$ por $T_0 = 0$ y

$$T_j := \inf\{n > T_{j-1} : S_n = M_n\}, \quad \text{para todo } j \geq 1.$$

Finalmente, previo al principal resultado de la sección probamos algunos lemas que nos serán de utilidad.

Lema 1.4.1. *Los tiempos de parada T_j , $j \geq 0$, son finitos casi ciertamente y las variables aleatorias $S_{T_j} - S_{T_{j-1}}$, $j = 1, 2, \dots$ son independientes e idénticamente distribuidas, con distribución*

$$P[S_{T_1} = k] = v([k, \infty)), \quad k \geq 0.$$

Demostración. Gracias a la Observación A.0.1, con las notaciones ahí usadas, si hacemos $\sigma = T_{j-1}$ par algún $j \in \mathbb{N}$, existe una función $G : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$ tal que $S_{T_j} - S_{T_{j-1}} = G(S^\sigma)$. Luego como S^σ y S tienen la misma distribución, $S_{T_j} - S_{T_{j-1}} \sim G(S)$, para cualquier $j \in \mathbb{N}$. Por tanto las variables $S_{T_j} - S_{T_{j-1}}$ son idénticamente distribuidas. Además, de la independencia entre $S^{T_{j-1}}$ y $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$, y la igualdad $S_{T_j} - S_{T_{j-1}} = G(S^{T_{j-1}})$, se deduce que $S_{T_j} - S_{T_{j-1}}$ es independiente de $\mathcal{F}_{T_{j-1}}$ para todo $j \geq 1$. Entonces tomando f_1, f_2, \dots, f_k funciones medibles acotadas y haciendo $X_j = S_{T_j} - S_{T_{j-1}}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, un argumento inductivo muestra que

$$E[f_1(X_1)f_2(X_2) \dots f_k(X_k)] = E[f_1(X_1)] \dots E[f_k(X_k)].$$

Luego, como k fue arbitrario, deducimos que las variables $S_{T_j} - S_{T_{j-1}}$, $j \in \mathbb{N}$, son independientes. Debido a que $(S_n, n \geq 0)$ es un paseo aleatorio recurrente, $R_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ es finito casi ciertamente. Luego, en virtud de la desigualdad $T_1 \leq R_0$, se deduce que T_1 también es finito casi ciertamente. Como $T_j - T_{j-1}$ tiene la misma distribución de T_1 , concluimos que todos los tiempos de parada T_j son finitos casi ciertamente.

Además, debido a que $(S_n, n \geq 0)$ tiene medida estacionaria constante, para cualquier $i \in \mathbb{Z}$ tenemos que

$$E\left[\sum_{n=0}^{R_0-1} 1_{\{S_n=i\}}\right] = c,$$

donde c es constante. Si hacemos $i = 0$, de la definición de R_0 se deduce que

$$\begin{aligned} c &= E\left[\sum_{n=0}^{R_0-1} 1_{\{S_n=0\}}\right] = E[1_{\{S_0=0\}}] = P[S_0 = 0] = 1. \\ \Rightarrow E\left[\sum_{n=0}^{R_0-1} 1_{\{S_n=i\}}\right] &= 1, \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Por tanto, como S asume valores estrictamente positivos en el intervalo $[T_1, R_0[$, se deduce que $E[1_{\{S_n=i\}}] = 0$ para $i \leq 0$, así

$$E\left[\sum_{n=0}^{T_1-1} 1_{\{S_n=i\}}\right] = 1, \quad \forall i \leq 0.$$

Luego para toda función $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_+$, gracias a que para $n < T_1$ se tiene que $g(S_n) = \sum_{i=0}^{-\infty} g(i) 1_{\{S_n=i\}}$, deducimos la igualdad

$$E\left[\sum_{n=0}^{T_1-1} g(S_n)\right] = \sum_{i=0}^{-\infty} g(i). \tag{1.30}$$

Entonces, como $\{k < T_1\} \cap \{S_{k+1} \geq 0\} = \{T_1 = k + 1\}$, se sigue que

$$E[f(S_{T_1})] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(S_{k+1})1_{\{T_1=k+1\}}\right] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} 1_{\{k < T_1\}}f(S_{k+1})1_{\{S_{k+1} \geq 0\}}\right].$$

Luego por el teorema de Fubini

$$E[f(S_{T_1})] = \sum_{k=0}^{\infty} E\left[1_{\{k < T_1\}}f(S_{k+1})1_{\{S_{k+1} \geq 0\}}\right].$$

Y como por la propiedad de Markov, para cualquier $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ medible, se cumple la igualdad

$$E[g(S_{k+1})] = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} v(j)g(S_k + j)\right],$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} E[f(S_{T_1})] &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[\sum_{j=0}^{\infty} v(j)1_{\{k < T_1\}}f(S_k + j)1_{\{S_k + j \geq 0\}}\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E\left[1_{\{k < T_1\}}\sum_{j=0}^{\infty} v(j)f(S_k + j)1_{\{S_k + j \geq 0\}}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} v(j)E\left[\sum_{k=0}^{T_1-1} f(S_k + j)1_{\{S_k + j \geq 0\}}\right]. \end{aligned}$$

De este modo, gracias a (1.30), se sigue que

$$\begin{aligned} E[f(S_{T_1})] &= \sum_{j=0}^{\infty} v(j)\sum_{i=0}^{-\infty} f(i + j)1_{\{i + j \geq 0\}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} f(m)\sum_{j=m}^{\infty} v(j), \end{aligned}$$

de donde, finalmente, se concluye haciendo $f(x) = 1_{\{x=k\}}$. □

1.4.2 Observación. Notemos que

$$E[S_{T_1}] = \sum_{k=0}^{\infty} kv([k, \infty)) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j(j+1)}{2}v(j) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Previo al siguiente lema denotamos

$$K_n := \Phi_n(S) = \#\{k \in \{1, \dots, n\} : S_k = M_k\}.$$

Lema 1.4.2. *Se satisface la siguiente convergencia en probabilidad*

$$\frac{H_n}{S_n - I_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} \frac{2}{\sigma^2}.$$

Demostración. Por la definición de K_n tenemos que

$$M_n = \sum_{T_k \leq n} (S_{T_k} - S_{T_{k-1}}) = \sum_{k=1}^{K_n} (S_{T_k} - S_{T_{k-1}}). \quad (1.31)$$

Además gracias al Lema 1.4.1 las variables $S_{T_k} - S_{T_{k-1}}$ son i.i.d. Como vimos, tienen media $\sigma^2/2$. Entonces, por la ley de los grandes números

$$\frac{M_n}{K_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(a.s)} E[S_{T_1}] = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Por otro lado, como S y \widehat{S}^n tienen la misma distribución, el par

$$(M_n, K_n) = \left(\sup_{0 \leq k \leq n} S_k, \Phi_n(S) \right),$$

tiene la misma distribución de

$$\left(\sup_{0 \leq k \leq n} \widehat{S}_k^n, \Phi_n(\widehat{S}^n) \right) = (S_n - I_n, H_n).$$

Por tanto, de la anterior convergencia,

$$\frac{S_n - I_n}{H_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} E[S_{T_1}] = \frac{\sigma^2}{2}.$$

□

En lo que sigue asumiremos que μ tiene *momento exponencial finito*, esto quiere decir que existe $\lambda > 0$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k} \mu(k) < \infty.$$

1.4.3 Observación. Gracias al Lema 1.4.2, si μ tiene momento exponencial finito, la ley de S_{T_1} también lo tiene, pues por el Lema 1.4.1

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} e^{\lambda k} P[S_{T_1} = k] &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{\lambda k} \mu(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{j-1} e^{\lambda k} \mu(j) \\ &< \frac{1}{e^{\lambda} - 1} \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda j} \mu(j) < \infty. \end{aligned}$$

Con esto en mente, desarrollamos los siguientes lemas.

Lema 1.4.3. *Sea Y_1, Y_2, \dots una sucesión de variables aleatorias reales i.i.d. Si existe un número $\lambda > 0$ tal que $E[\exp(\lambda|Y_1|)] < \infty$, y que $E[Y_1] = 0$, entonces para cada $\alpha > 0$ podemos elegir N suficientemente grande tal que para todo $n \geq N$ y $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$,*

$$P[|Y_1 + Y_2 + \dots + Y_\ell| > n^{\frac{1}{2} + \alpha}] \leq \frac{1}{\exp(n^{\alpha/2})}.$$

Demostración. De la condición $E[\exp(\lambda|Y_1|)] < \infty$ se desprende

$$E[\exp(\lambda Y_1)] = 1 + \frac{1}{2} \text{var}(Y_1) \lambda^2 + o(\lambda^2),$$

luego podemos encontrar una constante C tal que para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeño,

$$E[\exp(\lambda Y_1)] \leq e^{C\lambda^2}.$$

Se sigue, por la desigualdad de Chebyshev, que para $\lambda > 0$ suficientemente pequeño

$$\begin{aligned} P[Y^1 + \dots + Y_\ell > n^{\frac{1}{2} + \alpha}] &= P[\exp(\lambda(Y^1 + \dots + Y_\ell)) > \exp(\lambda n^{\frac{1}{2} + \alpha})] \\ &\leq \frac{E[\exp(\lambda(Y^1 + \dots + Y_\ell))]}{\exp(\lambda n^{\frac{1}{2} + \alpha})} \\ &\leq \exp(-\lambda n^{\frac{1}{2} + \alpha} + Cn\lambda^2). \end{aligned}$$

Finalmente, si tomamos $\lambda = n^{-\frac{1}{2}}$ con n suficientemente grande tal que

$$C \leq \exp(n^\alpha - n^{\alpha/2}),$$

y repetimos todo este razonamiento para $-Y_i$ en lugar de Y_i , $i = 1, 2, \dots$, conseguimos el resultado deseado. \square

Lema 1.4.4. *Sea $\varepsilon \in (0, \frac{1}{4})$. Existen $\varepsilon' > 0$ y un entero $N \geq 1$ tal que, para todo $n \geq N$ y $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$,*

$$P\left[\left|M_\ell - \frac{\sigma^2}{2} K_\ell\right| > n^{\frac{1}{4} + \varepsilon}\right] < \frac{1}{\exp(n^{\varepsilon'})}.$$

Demostración. Si en el Lema 1.4.3 tomamos $\alpha \in (0, \varepsilon/2)$ y hacemos $m_n = \lfloor n^{\frac{1}{2} + \alpha} \rfloor$, para todo $\ell \in \{0, 1, \dots, n\}$, resulta

$$P\left[\left|M_\ell - \frac{\sigma^2}{2} K_\ell\right| > n^{\frac{1}{4} + \varepsilon}\right] \leq P[K_\ell > m_n] + P\left[\left|M_\ell - \frac{\sigma^2}{2} K_\ell\right| > n^{\frac{1}{4} + \varepsilon}; K_\ell \leq m_n\right]. \quad (1.32)$$

Gracias a (1.31)

$$\begin{aligned}
 & P\left[\left|M_\ell - \frac{\sigma^2}{2}K_\ell\right| > n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}, K_\ell \leq m_n\right] \\
 & \leq P\left[\sup_{0 \leq k \leq m_n} \left|\sum_{j=1}^k ((S_{T_j} - S_{T_{j-1}}) - \frac{\sigma^2}{2})\right| > n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}\right] \\
 & \leq P\left[\sup_{0 \leq k \leq m_n} \left|\sum_{j=1}^k ((S_{T_j} - S_{T_{j-1}}) - \frac{\sigma^2}{2})\right| > m_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\right] \\
 & \leq m_n \exp(-m_n^{\varepsilon/2}),
 \end{aligned}$$

donde, en la última desigualdad que vale para n suficientemente grande, usamos el Lema 1.4.3; mientras que para lograr la penúltima desigualdad usamos que $m_n \leq n^{1/2+\alpha}$ y $\varepsilon \in (0, 1/4)$ implican que

$$m_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \leq n^{(\frac{1}{2}+\alpha)(\frac{1}{2}+\varepsilon)} \leq n^{\frac{1}{4}+\varepsilon(\frac{\varepsilon}{2}+\frac{3}{4})} \leq n^{\frac{1}{4}+\varepsilon}.$$

Para acotar el primer sumando en el lado derecho de (1.32) notemos que

$$P[K_\ell > M_n] \leq P[K_n > m_n] \leq P[S_{T_{m_n}} \leq M_n],$$

donde en la última desigualdad es debido a que cuando $K_n > m_n$, T_{m_n} no supera a n , en consecuencia $S_{T_{m_n}} \leq M_n$. Luego

$$P[K_\ell > M_n] \leq P[S_{T_{m_n}} \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}] + P[M_n > n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}].$$

Entonces, aplicando el Lema 1.4.3, obtenemos que para n suficientemente grande

$$P[S_{T_{m_n}} \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}] \leq n \sup_{1 \leq \ell \leq n} P[S_\ell > n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}] \leq \frac{n}{\exp(n^{\frac{\alpha}{4}})}.$$

Además como

$$P[S_{T_{m_n}} \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}}] = P\left[S_{T_{m_n}} - \frac{\sigma^2}{2}m_n \leq n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sigma^2}{2}m_n\right],$$

y

$$S_{T_{m_n}} - \frac{\sigma^2}{2}m_n = \sum_{k=1}^{m_n} \left(S_{T_k} - S_{T_{k-1}} - \frac{\sigma^2}{2}\right),$$

debido a que $-m_n < -n^{1/2+\alpha}$ hace que podamos elegir n suficientemente grande para que

$$n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} - \frac{\sigma^2}{2}m_n < \left(1 - \frac{\sigma^2}{2}n^{\frac{\alpha}{2}}\right)n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}} < -n^{\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}},$$

estamos en condiciones de aplicar el Lema 1.4.3 como sigue

$$\begin{aligned}
 P[S_{T_{m_n}} \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}] &= P\left[\sum_{k=1}^{m_n} \left(S_{T_k} - S_{T_{k-1}} - \frac{\sigma^2}{2}\right) \leq n^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}} - \frac{\sigma^2}{2}m_n\right] \\
 &\leq P\left[\sum_{k=1}^{m_n} \left(S_{T_k} - S_{T_{k-1}} - \frac{\sigma^2}{2}\right) < -n^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}\right] \\
 &\leq P\left[\left|\sum_{k=1}^{m_n} \left(S_{T_k} - S_{T_{k-1}} - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right| > n^{\frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}}\right] \\
 &\leq \frac{1}{\exp(n^{\frac{\alpha}{4}})},
 \end{aligned}$$

lo que, junto con las anteriores cotas obtenidas, completa la prueba. \square

Finalmente estamos en condiciones de probar el principal resultado de esta sección

Teorema 1.4.1. *Sea $\theta_1, \theta_2, \dots$ una secuencia de árboles μ -Galton-Watson independientes y sea $(H_n, n \geq 0)$ su proceso altura asociado. Entonces*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor pt \rfloor}, t \geq 0\right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} \left(\frac{2}{\sigma}\gamma, t \geq 0\right),$$

donde γ es un proceso browniano reflejado.

Demostración. Si $S = (S_n, n \geq 0)$ es como en la Proposición 1.4.1, como v tiene varianza finita σ^2 , del Teorema de invarianza de Donsker A.2.1 se sigue que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}S_{\lfloor pt \rfloor}, t \geq 0\right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} (\sigma B_t, t \geq 0), \tag{1.33}$$

donde B_t es el browniano estándar.

Por otro lado, si en el Lema 1.4.4 tomamos $\varepsilon = 1/8$, debido a que (M_n, K_n) tiene la misa distribución que $(S_n - I_n, H_n)$, existe $\varepsilon' > 0$ tal que para todo n suficientemente grande y $\ell \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$P\left[\left|S_\ell - I_\ell - \frac{\sigma^2}{2}H_\ell\right| > n^{\frac{3}{8}}\right] < \exp(-n^{\varepsilon'}).$$

Luego

$$P\left[\sup_{0 \leq \ell \leq n} \left|S_\ell - I_\ell - \frac{\sigma^2}{2}H_\ell\right| > n^{\frac{3}{8}}\right] < n \exp(-n^{\varepsilon'}),$$

de donde, fijando $A > 1$ entero, deducimos que para todo p suficientemente grande

$$P \left[\sup_{0 \leq t \leq A} \left| S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{\sigma^2}{2} H_{\lfloor pt \rfloor} \right| > (Ap)^{\frac{3}{8}} \right] < Ap \exp(-(Ap)^{\varepsilon'}). \quad (1.34)$$

Entonces, como $\varepsilon' > 0$ implica que $\sum_{p \geq 1} p \exp(-(Ap)^{\varepsilon'}) < \infty$, se deduce que

$$\sum_{p \geq 1} P \left[\left\| S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{\sigma^2}{2} H_{\lfloor pt \rfloor} \right\|_A > (Ap)^{\frac{3}{8}} \right] < \infty.$$

Entonces por el lema de Borel-Cantelli

$$P \left[\limsup_p \left[\left\| \frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} \right\|_A > A^{\frac{3}{8}} p^{-\frac{1}{8}} \right] \right] = 0,$$

esto implica que en un conjunto de probabilidad total para cada punto del conjunto existe un p suficientemente grande tal que

$$\left\| \frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} \right\|_A \leq A^{\frac{3}{8}} p^{-\frac{1}{8}},$$

de donde se deduce que

$$\left\| \frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} \right\|_A \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{\text{c.c.}} 0,$$

para todo $A \in \mathbb{N}$. Luego $\frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0$ uniformemente en compactos. Así, gracias a la Observación A.1.2, tenemos que en la topología de Skorohod

$$\frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{} 0, \quad \text{c.c.} \quad (1.35)$$

Por otro lado, de (1.33) se desprende

$$\frac{1}{\sqrt{p}} (S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}, t \geq 0) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} (\sigma(B_t - \inf_{0 \leq s \leq t} B_s), t \geq 0).$$

Combinando esto con (1.35) y teniendo presente la Observación A.2.2, que evidencia que los procesos $(B_t - \inf_{0 \leq s \leq t} B_s, t \geq 0)$ y $(\gamma_t, t \geq 0)$ tienen la misma distribución, se obtiene el resultado deseado. \square

1.5 Árboles Galton-Watson con descendencia fijada

Para $p \geq 1$ denotaremos por $\theta^{(p)}$ a un árbol μ -Galton-Watson condicionado a tener $\#\theta = p$, es decir, la distribución de $\theta^{(p)}$ es $\Pi_\mu(\cdot | \#\cdot = p)$. Además denotaremos por $(H_k^{(p)})_{0 \leq k \leq p}$ al proceso altura de $\theta^{(p)}$, conviniendo en que $H_p^{(p)} = 0$.

Comenzamos enunciado el siguiente resultado técnico probado en [9].

Lema 1.5.1. *La distribución del proceso $(\frac{1}{\sigma\sqrt{p}}S_{\lfloor pt \rfloor}, 0 \leq t \leq 1)$ bajo la probabilidad condicionada $P(\cdot | T_1 = p)$ converge, cuando p tiende a infinito, a la ley de la excursión browniana normalizada.*

Teorema 1.5.1. *Tenemos que*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor}^{(p)}, 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} \left(\frac{2}{\sigma} \mathbf{e}_t, 0 \leq t \leq 1 \right),$$

donde $(\mathbf{e}_t)_{0 \leq t \leq 1}$ es la excursión browniana normalizada.

Demostración. Fijado $p \in \mathbb{N}$, consideremos un trayecto de Lukasiewicz x_0, x_1, \dots, x_p de una sucesión de árboles generado por (a_1, \dots, a_p) , es decir $x_k = \sum_{j=1}^k a_j$ para todo $k = 1, 2, \dots, p$, tal que $x_p = -1$. Eligiendo

$$j_0 = \min \left\{ j : x_j = \min_{0 \leq i \leq p} \{x_i\} \right\},$$

y considerando el trayecto de Lukasiewicz y_0, y_1, \dots, y_p generado por la p -upla

$$(a_{j_0+1}, a_{j_0+2}, \dots, a_p, a_1, \dots, a_{j_0}),$$

tenemos que $p = \min \{j : y_j = -1\}$. Es fácil ver que j_0 es el único índice con ésta propiedad de entre todos los p trayectos de Lukasiewicz que generan las p -uplas $(a_{j+1}, \dots, a_p, a_1, \dots, a_j)$, $j = 1, 2, \dots, p$.

Sea T_1 el número de vértices del primer árbol en la secuencia de árboles μ -Galton-Watson independientes,

$$T_1 = \inf \{n \geq 1 : H_n = 0\} = \inf \{n \geq 0 : S_n = -1\}.$$

Lo que vimos al inicio de la demostración muestra que para todo $p \in \mathbb{N}$,

$$P[T_1 = p] = \frac{1}{p} P[S_p = -1].$$

Gracias a [7, Theorem 3.5.3]

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \sqrt{p} P[S_p = -1] = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}}.$$

Esto junto con lo que acabamos de mostrar implican que

$$P[T_1 = p] \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi p^3}}. \quad (1.36)$$

Por otro lado, en la ecuación (1.34) haciendo $A = 1$, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que para p suficientemente grande

$$P\left[\left\|\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}}\right)\right\|_1 > p^{-\frac{1}{8}}\right] < \exp(-p^\varepsilon).$$

Combinando esto con (1.36) y haciendo

$$A_p := \left\{ \left\|\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{S_{\lfloor pt \rfloor} - I_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}}\right)\right\|_1 > p^{-\frac{1}{8}} \right\},$$

tenemos que para p suficientemente grande

$$\begin{aligned} P[A_p | T_1 = p] &= \frac{P[A_p \cap \{T_1 = p\}]}{P[T_1 = p]} \leq \frac{P[A_p]}{P[T_1 = p]} \\ &< \frac{\sigma \sqrt{2\pi p^3}}{\exp(p^\varepsilon)} < \frac{1}{\exp(p^{\varepsilon'})}, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon' < \varepsilon$. Entonces como $I_n = 0$ cuando $0 \leq n < T_1$,

$$P\left[\left\|\frac{2}{\sigma^2} \left(\frac{S_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}} - \frac{H_{\lfloor pt \rfloor}}{\sqrt{p}}\right)\right\|_1 > p^{-\frac{1}{8}} \mid T_1 = p\right] < \frac{1}{\exp(p^{\varepsilon'})},$$

para p suficientemente grande. Finalmente como $(H_k^{(p)}, 0 \leq k \leq p)$ tiene la misma distribución que $(H_k, 0 \leq k \leq p)$ bajo $P[\cdot | T_1 = p]$, gracias al Lema 1.5.1, procediendo como en el final del Teorema 1.4.1, concluimos que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor}^{(p)}, 0 \leq t \leq 1\right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sigma} \mathbf{e}_t, 0 \leq t \leq 1\right),$$

como queríamos. □

1.6 Convergencia de funciones de contorno

En esta sección veremos cómo traducir algunos resultados de convergencia, que en principio están expresados en términos de la función altura de un conjunto de árboles, a resultados de convergencia en términos de la función de contorno de estos árboles.

1.6.1 Definición (Función de contorno). Sean \mathbf{t} un árbol enraizado y $\zeta(\mathbf{t}) = 2(\#\mathbf{t} - 1)$. Considerando a \mathbf{t} inmerso en \mathbb{R}^2 , suponiendo que sus aristas tienen longitud uno y que una partícula recorre el “borde” del árbol como se muestra en la figura 1.1 a una velocidad constante de una arista por unidad de tiempo, definimos la *función de contorno* de \mathbf{t} , $C : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, por $C_s := C(s)$ igual a la distancia, en el árbol, entre la partícula a tiempo s y la raíz de \mathbf{t} para todo $s \in [0, \zeta(\mathbf{t})]$, y $C_s = 0$ para todo $s \geq \zeta(\mathbf{t})$.

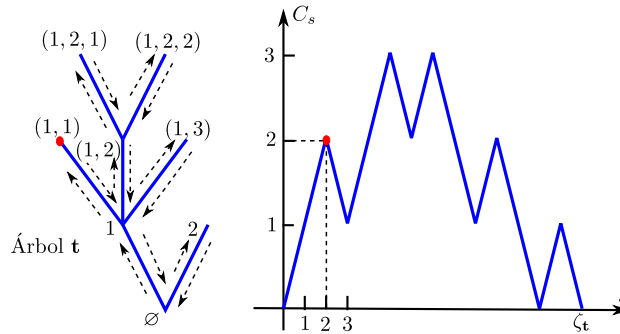


Figura 1.1: Función de contorno del árbol \mathbf{t} .

1.6.1 Observación. La anterior definición se extiende naturalmente a árboles μ -Galton-Watson.

1.6.2 Definición. Si $\theta_1, \theta_2, \dots$ es una sucesión de árboles independientes μ -Galton-Watson, definimos su *función de contorno* por la concatenación de las respectivas funciones de contorno $(C_t(\theta_i), 0 \leq t \leq \zeta(\theta_i) + 1)$, $i = 1, 2, \dots$

1.6.1 Notación. Dada una sucesión de árboles como en la anterior definición, denotaremos $J_n := 2n - H_n + I_n$, para todo $n \geq 0$.

1.6.2 Observación. Notemos que

$$J_{n+1} - J_n = (1 + H_{n+1} - H_n) + (1 + I_{n+1} - I_n) > 0,$$

Además se tiene que $J_n \geq n$.

Por otro lado, $[J_n, J_{n+1}]$ es el intervalo en el que la función de contorno pasa del individuo n al individuo $n + 1$.

Entonces, si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1, \dots\}$ está definida por $\varphi(t) = n$ cuando $t \in [J_n, J_{n+1})$, se sigue para todo entero $m \geq 1$

$$\|C_t - H_{\varphi(t)}\|_m \leq \|C_t - H_{\varphi(t)}\|_{J_m} \leq 1 + \sup_{n \leq m} |H_{n+1} - H_n|. \quad (1.37)$$

similarmente, se tiene que

$$\left\| \varphi(t) - \frac{t}{2} \right\|_m \leq \left\| \varphi(t) - \frac{t}{2} \right\|_{J_m} \leq \frac{1}{2} \sup_{n \leq m} H_n + \frac{1}{2} |J_m| + 1. \quad (1.38)$$

Teorema 1.6.1. *Tenemos que*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}} C_{2pt}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} \left(\frac{2}{\sigma} |B_t|, t \geq 0 \right), \quad (1.39)$$

donde B es el browniano estándar.

Demostración. Para todo $m \geq 0$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{p}} C_{2pt} - \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\varphi(2pt)} \right\|_m \leq \frac{1}{\sqrt{p}} + \frac{1}{\sqrt{p}} \|H_{\lfloor pt \rfloor + 1} - H_{\lfloor pt \rfloor}\|_{2m} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(P)} 0, \quad (1.40)$$

gracias al Teorema 1.4.1. Además, de (1.33)

$$\frac{1}{\sqrt{p}} I_{mp} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} \sigma \inf_{y \leq m} B_t. \quad (1.41)$$

Entonces usando (1.38)

$$2 \left\| \frac{\varphi(2pt)}{p} - t \right\|_m \leq \frac{1}{p} \sup_{k \leq 2mp} H_k + \frac{1}{p} |I_{2mp}| + \frac{1}{p} \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(P)} 0. \quad (1.42)$$

Por otro lado, para todo $m \geq 0$, $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} & P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\varphi(2pt)} \right\|_m > \varepsilon \right) \\ &= P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\varphi(2pt)} \right\|_m > \varepsilon, \left\| \frac{\varphi(2pt)}{p} - t \right\|_m \leq \delta \right) \\ &\quad + P\left(\left\| \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}} H_{\varphi(2pt)} \right\|_m > \varepsilon, \left\| \frac{\varphi(2pt)}{p} - t \right\|_m > \delta \right), \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$\begin{aligned} P\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}}H_{\varphi(2pt)}\right\|_m > \varepsilon\right) \\ \leq P\left(\omega_\delta^m\left(\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor p \cdot \rfloor}\right) > \varepsilon\right) + P\left(\left\|\frac{\varphi(2pt)}{p} - t\right\|_m > \delta\right). \end{aligned} \quad (1.43)$$

Entonces, tomando límite superior sobre $p \in \mathbb{N}$, gracias a (1.42), a la Proposición A.1.2 y al Teorema 1.4.1, de (1.43) se sigue que

$$\limsup_p P\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}}H_{\varphi(2pt)}\right\|_m > \varepsilon\right) \leq P\left(\omega_\delta^m\left(\frac{2}{\sigma}|B|\right) > \frac{\varepsilon}{2}\right);$$

de donde, en vista que las trayectorias del browniano reflejado son continuas, tomando límite cuando $\delta \rightarrow 0$ se concluye que

$$P\left(\left\|\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor pt \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}}H_{\varphi(2pt)}\right\|_m > \varepsilon\right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \quad (1.44)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Finalmente, tomando en cuenta (1.40) y que (1.44) implica que

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor p \cdot \rfloor} - \frac{1}{\sqrt{p}}H_{\varphi(2p \cdot)}\right\|_m \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

gracias a la Proposición A.1.1 concluimos que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{p}}C_{2pt, t} \geq 0\right) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\sigma}|B_t|, t \geq 0\right).$$

□

2

Árboles reales

En este capítulo estudiamos un nuevo objeto, que llamaremos árbol real, que al final del capítulo podrá ser obtenido como el límite, en cierto sentido, de los árboles aleatorios que fueron estudiados en el capítulo anterior.

Para dar sentido a la idea de convergencia que estudiaremos, la noción de proximidad entre espacios métricos que usaremos será la dada por la métrica de Gromov-Hausdorff revisada brevemente en el apéndice B.

2.1 Árboles reales

Ahora estudiaremos a los árboles reales.

2.1.1 Definición. Un espacio métrico compacto (\mathcal{T}, d) es un *árbol real* si para cualquier $a, b \in \mathcal{T}$ se verifican las siguientes propiedades.

1. Existe una única isometría $f_{a,b} : [0, d(a, b)] \rightarrow \mathcal{T}$ tal que $f_{a,b}(0) = a$ y $f_{a,b}(d(a, b)) = b$.
2. Si $q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ es una función continua e inyectiva tal que $q(0) = a$ y $q(1) = b$, se verifica que

$$q([0, 1]) = f_{a,b}([0, d(a, b)]) .$$

2.1.2 Definición. Un *árbol real enraizado* es un árbol real (\mathcal{T}, d) en el que se ha distinguido un punto $\rho = \rho(\mathcal{T})$, que llamaremos *vértice*.

En lo que sigue todos los árboles reales que consideraremos serán enraizados. Consideremos entonces un árbol (\mathcal{T}, d) (con raíz $\rho = \rho(\mathcal{T})$).

2.1.1 Notación. Denotamos por $\llbracket a, b \rrbracket$ al rango de la aplicación $f_{a,b}$ de la Definición 2.1.1. De ésta manera podemos definir un orden parcial, análogo al caso discreto, haciendo $a \preceq b$ cuando $a \in \llbracket \rho, b \rrbracket$. Podemos interpretar esto pensando que a es un ancestro de b .

De la definición de árbol real se deduce que para cualesquiera $a, b \in \mathcal{T}$ existe un único $c \in \mathcal{T}$ tal que $\llbracket \rho, a \rrbracket \cap \llbracket \rho, b \rrbracket = \llbracket \rho, c \rrbracket$. Escribiremos $a \wedge b := c$ y diremos que $a \wedge b$ es el ancestro común más reciente de a y b .

2.1.3 Definición. La *multiplicidad del vértice* $a \in \mathcal{T}$ es el número de componentes conexas de $\mathcal{T} \setminus \{a\}$ y a los vértices de $\mathcal{T} \setminus \{\rho\}$ cuya multiplicidad sea uno los llamamos *hojas*.

2.1.1 Codificación de árboles reales

A continuación estudiamos un método para generar árboles reales que nos será de mucha utilidad cuando asociemos a un árbol enraizado un árbol real, vía su función de contorno.

Consideremos una función $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ de soporte compacto tal que $g(0) = 0$. Para todo $s, t \geq 0$ sean

$$m_g(s, t) = \inf_{r \in [s \wedge t, s \vee t]} g(r) \quad \text{y} \quad d_g(s, t) = g(s) + g(t) - 2m_g(s, t).$$

Es claro que $d_g(s, t) = d_g(t, s)$, además es fácil verificar que se cumple la desigualdad triangular

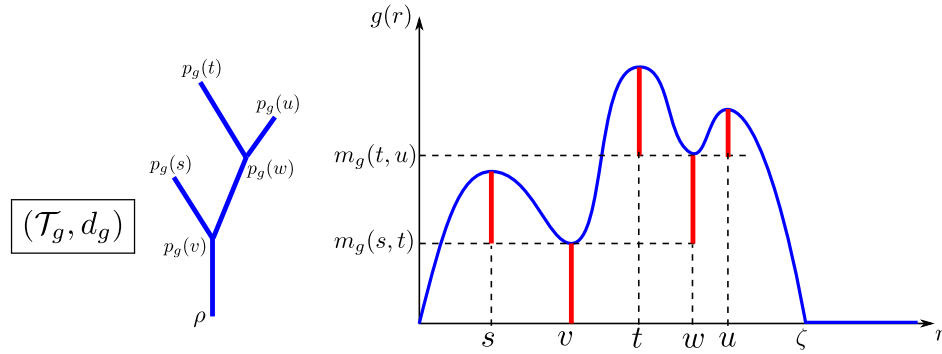
$$d_g(s, u) \leq d_g(s, t) + d_g(t, u), \quad \forall s, t, u \geq 0.$$

Definimos la relación de equivalencia en $[0, +\infty)$ por $s \sim t$ siempre que $d_g(s, t) = 0$ y denotamos al espacio cociente por $\mathcal{T}_g := [0, +\infty) / \sim$. Abusando de la notación denotaremos por d_g a la función en \mathcal{T}_g inducida por d_g . Esta función es una métrica en \mathcal{T}_g .

2.1.2 Notación. Denotaremos por $p_g : [0, +\infty[\rightarrow \mathcal{T}_g$ a la proyección canónica que define la anterior relación de equivalencia.

Si $\rho = p_g(0)$ y $\zeta > 0$ es el supremo del soporte de g , entonces $p_g(t) = \rho$ para todo $t \geq \zeta$. En particular $\mathcal{T}_g([0, \zeta])$ es compacto. Podemos ver en la figura 2.1 una interpretación de (\mathcal{T}_g, d_g) como subconjunto de \mathbb{R}^2 a partir de la función g mostrada.

Tomando en cuenta esto tenemos el siguiente teorema.


 Figura 2.1: (\mathcal{T}_g, d_g) generado a partir de g .

Teorema 2.1.1. *El espacio métrico (\mathcal{T}_g, d_g) es un árbol real enraizado con raíz $\rho = p_g(0)$.*

La prueba del anterior teorema se basa en el siguiente lema.

Lema 2.1.1. *Sea ζ el supremo del soporte de g y para cualquier $r \geq 0$, sea \bar{r} el representante de r , módulo ζ , en $[0, \zeta]$. Para cualquier $s_0 \in [0, \zeta]$, la función $g' : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$g'(s) = g(s_0) + g(\overline{s_0 + s}) - 2m_g(s_0, \overline{s_0 + s}), \quad \text{para todo } s \in [0, \zeta], \quad (2.1)$$

y $g'(s) = 0$ para todo $s > \zeta$, es continua, de soporte compacto y verifica que $g'(0) = 0$. La distancia del árbol $\mathcal{T}_{g'}$ cumple la igualdad

$$d_{g'}(s, t) = d_g(\overline{s_0 + s}, \overline{s_0 + t}); \quad (2.2)$$

además existe una única isometría R de $\mathcal{T}_{g'}$ en \mathcal{T}_g que verifica

$$R(p_{g'}(s)) = p_g(\overline{s_0 + s}), \quad (2.3)$$

para todo $s \in [0, \zeta]$.

Demostración. Gracias a las propiedades de g , notemos que g' verifica las condiciones necesarias para considerar $\mathcal{T}_{g'}$. Entonces debemos verificar la condición (2.2).

Si $s, t \in [0, \zeta - s_0]$, tenemos dos posibilidades. Si $m_g(s_0 + s, s_0 + t) \geq m_g(s_0, s_0 + s)$, entonces

$$m_g(s_0, s_0 + r) = m_g(s_0, s_0 + s) = m_g(s_0, s_0 + t), \quad \forall r \in [s, t],$$

de donde se sigue que

$$m_{g'}(s, t) = g(s_0) + m_g(s_0 + s, s_0 + t) - 2m_g(s_0, s_0 + s).$$

Luego

$$\begin{aligned} d_{g'}(s, t) &= g'(s) + g'(t) - 2m_{g'}(s, t) \\ &= g(s_0 + s) - 2m_g(s_0, s_0 + s) + g(s_0 + t) - 2m_g(s_0, s_0 + t) \\ &\quad - 2(m_g(s_0 + s, s_0 + t) - 2m_g(s_0, s_0 + s)) \\ &= g(s_0 + s) + g(s_0 + t) - 2m_g(s_0 + s, s_0 + t) \\ &= d_g(s_0 + s, s_0 + t). \end{aligned}$$

Si $m_g(s_0 + s, s_0 + t) < m_g(s_0, s_0 + s)$, entonces el ínfimo de la definición de $m_{g'}(s, t)$ es alcanzado en

$$r_1 = \inf\{r \in [s, t] : g(s_0 + r) = m_g(s_0, s_0 + r)\},$$

ya que si $r \in [r_1, t]$ tenemos que

$$g(s_0 + r) - 2m_g(s_0, s_0 + r) \geq -m_g(s_0, s_0 + r) \geq -m_g(s_0, s_0 + r_1),$$

Así tenemos que

$$m_{g'}(s, t) = g(s_0) - m_g(s_0, s_0 + s),$$

y

$$\begin{aligned} d_{g'}(s, t) &= g(s_0 + s) - 2m_g(s_0, s_0 + s) + g(s_0 + t) \\ &\quad - 2m_g(s_0, s_0 + t) + 2m_g(s_0, s_0 + s) \\ &= d_g(s_0 + s, s_0 + t). \end{aligned}$$

Los demás casos se tratan de forma similar. Luego, por (2.2), si $s, t \in [0, \zeta]$ son tales que $d_{g'}(s, t) = 0$, tenemos que $d_g(\overline{s_0 + s}, \overline{s_0 + t}) = 0$. Luego $p_g(\overline{s_0 + s}) = p_g(\overline{s_0 + t})$. También $\mathcal{T}_{g'} = p_{g'}([0, \zeta])$, y podemos definir R de manera única por la relación (2.3). \square

2.1.1 Observación.

1. En las condiciones del Teorema 2.1.1, para $\sigma, \sigma' \in \mathcal{T}_g$, escribiremos $\sigma \preceq \sigma'$ siempre que $d_g(\sigma, \sigma') = d_g(\rho, \sigma') - d_g(\rho, \sigma)$. Entonces, si $\sigma = p_g(s)$ y $\sigma' = p_g(t)$, tenemos que $\sigma \preceq \sigma'$ si y solo si $m_g(s, t) = g(s)$. Ésta relación define un orden parcial en \mathcal{T}_g .
2. Para $\sigma_0, \sigma \in \mathcal{T}_g$, hacemos

$$\llbracket \sigma_0, \sigma \rrbracket = \{ \sigma' \in \mathcal{T}_g : d_g(\sigma_0, \sigma') + d_g(\sigma', \sigma) \}.$$

Si $\sigma = p_g(s)$ y $\sigma' = p_g(t)$, no es difícil mostrar que $\llbracket \rho, \sigma \rrbracket \cap \llbracket \rho, \sigma' \rrbracket = \llbracket \rho, \gamma \rrbracket$, donde $\gamma = p_g(r)$, para algún r en el que g alcanza su mínimo, entre s y t . Escribiremos entonces $\gamma = \sigma \wedge \sigma'$.

3. Denotemos $\mathcal{T}_g[\sigma] := \{ \sigma' \in \mathcal{T}_g : \sigma \preceq \sigma' \}$. Si $\mathcal{T}_g[\sigma]$ tiene más de un elemento y además $\sigma \neq \rho$, entonces $\mathcal{T}_g \setminus \mathcal{T}_g[\sigma]$ y $\mathcal{T}_g[\sigma] \setminus \{ \sigma \}$ son no vacíos y disjuntos. Además si $\sigma' \in \mathcal{T}_g[\sigma] \setminus \{ \sigma \}$, gracias a la definición de d_g , tenemos que todo $\sigma'' \in \mathcal{T}_g$ tal que $d_g(\sigma', \sigma'') < d_g(\sigma', \sigma)$, pertenece a $\mathcal{T}_g[\sigma]$, luego $\mathcal{T}_g[\sigma] \setminus \{ \sigma \}$ es abierto y por motivos similares $\mathcal{T}_g \setminus \mathcal{T}_g[\sigma]$ también en abierto.

Prueba del Teorema 2.1.1. Mostremos primero la propiedad 1 de la Definición 2.1.1. Fijados $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{T}_g$ debemos probar la existencia del mapeo f_{σ_1, σ_2} . Usando el Lema 2.1.1 con s_0 tal que $p_g(s_0) = \sigma_1$, podemos asumir que $\sigma_1 = \rho$. Entonces fijado $\sigma \in \mathcal{T}_g$ tenemos que mostrar que existe una única isometría $f = f_{\rho, \sigma} : [0, d_g(\rho, \sigma)] \rightarrow \mathcal{T}_g$ tal que $f(0) = \rho$ y $f(d_g(\rho, \sigma)) = \sigma$.

Sea $s \in p_g^{-1}(\{ \sigma \})$, entonces $g(s) = d_g(\rho, \sigma)$. Para todo $a \in [0, d_g(\rho, \sigma)]$ hacemos

$$v(a) = \inf \{ r \in [0, s] : m_g(r, s) = a \}.$$

Entonces $g(v(a)) = a$, pues por construcción $g(v(a)) \geq a$ y si $g(v(a)) > a$, la continuidad de g nos permite encontrar un $r' < v(a)$ tal que $m_g(r', v(a)) > a$, lo que implica que $m_g(r', s) = a$, que no puede ser. Definimos entonces f como $f(a) = p_g(v(a))$.

Claramente $v(0) = 0$ y por tanto $f(0) = \rho$. Además gracias a que $m_g(v(g(s)), s) = g(s)$ y $g(v(g(s))) = g(s)$, se tiene la igualdad $p_g(v(g(s))) = p_g(s)$ que implica

$$f(d_g(\rho, \sigma)) = p_g(v(d_g(\rho, \sigma))) = p_g(v(g(s))) = p_g(s) = \sigma.$$

Además si $a, b \in [0, d_g(\rho, \sigma)]$ con $a \geq b$, es claro que $m_g(v(a), v(b)) = a$, luego

$$d_g(f(a), f(b)) = g(v(a)) + g(v(b)) - 2a = b - a.$$

Supongamos ahora que \tilde{f} es una función que cumple las propiedades de f . Si $a \in [0, d_q(\rho, \sigma)]$ tenemos que

$$d_g(\tilde{f}(a), \sigma) = d_g(\rho, \sigma) - a = d_g(\rho, \sigma) - d_g(\rho, \tilde{f}(a)),$$

luego $\tilde{f}(a) \preceq \sigma$. Si t es tal que $p_g(t) = \tilde{f}(a)$, se deduce

$$g(t) = d_g(\rho, p_g(t)) = d_g(\tilde{f}(0), \tilde{f}(a)) = a,$$

además, desde que $\tilde{f}(a) \preceq \sigma$, tenemos que $g(t) = m_g(t, s)$. Por otro lado, también tenemos que $a = g(v(a)) = m_g(v(a), s)$ de donde se desprende

$$a = g(t) = g(v(a)) = m_g(v(a), t) \Rightarrow d_g(t, v(a)) = 0,$$

y por tanto $\tilde{f}(a) = p_g(t) = p_g(v(a)) = f(a)$, lo que prueba la primera propiedad.

Para mostrar la segunda propiedad fijemos una función $q : [0, 1] \rightarrow \mathcal{T}$ continua e inyectiva. Debemos mostrar que $q([0, 1]) = f_{q(0), q(1)}([0, d_g(q(0), q(1))])$. Nuevamente por el Lema 2.1.1 podemos asumir que $q(0) = \rho$. Sea $\sigma = q(1)$. Entonces debemos demostrar que $\llbracket \rho, \sigma \rrbracket = f_{\rho, \sigma}([0, d_g(\rho, \sigma)]) = q([0, 1])$.

Supongamos que existe $\eta \in \llbracket \rho, \sigma \rrbracket \setminus q([0, 1])$. Entonces el conjunto $q([0, 1])$ está contenido en la unión disjunta de los abiertos $\mathcal{T}_g \setminus \mathcal{T}_g[\eta]$ y $\mathcal{T}_g[\eta] \setminus \{\eta\}$. Además $q(0) = \rho \in \mathcal{T}_g \setminus \mathcal{T}_g[\eta]$ y $q(1) = \sigma \in \mathcal{T}_g[\eta] \setminus \{\eta\}$, lo cual es absurdo, pues $q([0, 1])$ es conexo. Por tanto $\llbracket \rho, \sigma \rrbracket \subset q([0, 1])$.

Recíprocamente, supongamos que exista $a \in (0, 1)$ tal que $\eta = q(a) \notin \llbracket \rho, \sigma \rrbracket$. Entonces, si hacemos $\gamma = \sigma \wedge \eta$ tenemos que $\gamma \in \llbracket \rho, \eta \rrbracket \cap \llbracket \eta, \sigma \rrbracket$. Gracias a la inclusión que probamos antes tenemos que $\gamma \in q([0, a])$ y también $\gamma \in q([a, 1])$. Como q es inyectiva, la única posibilidad es que $\gamma = q(a) = \eta$ lo cual es absurdo pues $\eta \notin \llbracket \rho, \sigma \rrbracket$. Por tanto $\llbracket \rho, \sigma \rrbracket \subset q([0, 1])$. \square

2.1.3 Notación. Dada una función g en las condiciones del teorema anterior, será usual llamar a \mathcal{T}_g , el árbol codificado por g .

Lema 2.1.2. Si $g, g'; [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ son dos funciones continuas con soporte compacto, tales que $g(0) = g'(0) = 0$, entonces

$$d_{GH}(\mathcal{T}_g, \mathcal{T}_{g'}) \leq 2 \|g - g'\| ,$$

donde $\|\cdot\|$ representa a la norma uniforme.

Demostración. Usaremos el Teorema B.0.1 para conseguir la desigualdad buscada. Con este fin definimos la correspondencia \mathcal{R} entre \mathcal{T}_g y $\mathcal{T}_{g'}$ por

$$\mathcal{R} = \{(\sigma, \sigma') : \sigma = p_g(t) \text{ y } \sigma' = p_{g'}(t) \text{ para algún } t \geq 0\} .$$

Entonces, si $(\sigma, \sigma'), (\nu, \nu') \in \mathcal{R}$, existen $s, t \geq 0$ tales que $p_g(s) = \rho$, $p_{g'}(s) = \rho'$ y $p_g(t) = \nu$, $p_{g'}(t) = \nu'$. Luego, como

$$\begin{aligned} d_g(\sigma, \nu) &= g(s) + g(t) - 2m_g(s, t) \quad \text{y} \\ d_{g'}(\sigma', \nu') &= g'(s) + g'(t) - 2m_{g'}(s, t) , \end{aligned}$$

deducimos que

$$|d_g(\sigma, \nu) - d_{g'}(\sigma', \nu')| \leq 4 \|g - g'\| .$$

Por tanto $\text{dis}(\mathcal{R}) \leq 4\|g - g'\|$ y gracias al Teorema B.0.1 se sigue el resultado buscado. \square

2.2 El Árbol Aleatorio Continuo

Recordemos que $\mathbf{e} = (\mathbf{e}_t, 0 \leq t \leq 1)$ es la excursión browniana normalizada. En esta sección convenimos en que $\mathbf{e}_t = 0$ si $t > 1$.

2.2.1 Definición. El *Árbol Aleatorio Continuo (AAC)* es el árbol aleatorio $\mathcal{T}_{\mathbf{e}}$ codificado por la excursión browniana normalizada.

A continuación empleamos los resultados anteriores para analizar la convergencia de árboles enraizados cuando su número de vértices se va incrementando.

2.2.1 Notación.

1. Denotamos por \mathbf{A}_n al subconjunto de \mathbf{A} formado por todos los árboles enraizados de n vértices.
2. Si \mathcal{T} es un árbol real y $\lambda > 0$, denotamos por $\lambda \mathcal{T}$ al mismo árbol real (visto como conjunto), pero con todas sus distancias multiplicadas por el factor λ .

Para cada árbol \mathbf{t} , si $(C_t, t \geq 0)$ es su función de contorno, convendrá identificar al árbol con \mathcal{T}_C , el árbol real codificado por su función de contorno.

Teorema 2.2.1. *Para todo $n \geq 1$, sea $\mathcal{T}_{(n)}$ el árbol aleatorio distribuido uniformemente sobre \mathbf{A}_n . Entonces $(2n)^{-1/2} \mathcal{T}_{(n)}$ converge en distribución al AAC, \mathcal{T}_e .*

Demostración. Sea θ el árbol μ -Galton-Watson con probabilidad de nacimiento $\mu(k) = 2^{-(k+1)}$, y para todo $n \in \mathbb{N}$ sea θ_n el árbol con la distribución de θ condicionada a que cada árbol tenga n vértices. Notemos que si dos arboles \mathbf{s} y \mathbf{t} tienen n vértices

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{s}) &= \prod_{u \in \mathbf{s}} \mu(k_u(\mathbf{s})) = \prod_{u \in \mathbf{s}} 2^{-(k_u(\mathbf{s})+1)} = 2^{-2n+1} \\ &= \prod_{u \in \mathbf{t}} 2^{-(k_u(\mathbf{t})+1)} = \prod_{u \in \mathbf{t}} \mu(k_u(\mathbf{t})) = \Pi(\mathbf{t}), \end{aligned}$$

donde la tercera y la cuarta igualdad se dan debido a que

$$\sum_{u \in \mathbf{s}} k_u(\mathbf{s}) = n - 1 = \sum_{u \in \mathbf{t}} k_u(\mathbf{t}).$$

Luego θ_n y \mathcal{T}_n tienen la misma distribución.

Por otro lado, si $(C_t^n, t \geq 0)$ son las funciones de contorno de θ_n y hacemos

$$\tilde{C}_t = \frac{1}{\sqrt{2n}} C_{2nt}^n, \quad t \geq 0,$$

gracias a los teoremas 1.5.1 y 1.6.1, resulta que

$$(\tilde{C}_t^n, t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(D)} (\mathbf{e}_t, t \geq 0).$$

También, debido a que θ_n tiene la misma distribución de $\mathcal{T}_{(n)}$, el árbol codificado por \tilde{C}^n , $\mathcal{T}_{\tilde{C}^n}$, tiene la misma distribución que $(2n)^{-1/2} \mathcal{T}_{(n)}$. Por tanto la convergencia deseada se sigue del Lema 2.1.2. □

3

Conclusiones

Como vimos en el primer capítulo, las funciones de altura y contorno asociadas a los árboles de Galton-Watson, bajo escalamientos y condicionamientos adecuados, convergen. Más concretamente, como muestran los teoremas 1.4.1 y 1.6.1, las secuencias de procesos $(\frac{1}{\sqrt{p}}H_{\lfloor pt \rfloor})_t$ y $(\frac{1}{\sqrt{p}}C_{2pt})_t$ convergen en distribución, esencialmente, al browniano reflejado cuando $p \rightarrow \infty$. Similarmente, condicionando al tener una descendencia fija, en el Teorema 1.5.1 muestra que el proceso de altura converge, también en distribución, a la excursión browniana normalizada.

Finalmente, como probamos en el Teorema 2.2.1 el Árbol Aleatorio Continuo es el límite, en distribución, de árboles aleatorios finitos. Más aún, gracias al teorema de representación de Skorohod cambiando el espacio de definición del AAC y los árboles aleatorios finitos, podemos suponer que esta convergencia es puntual. En este sentido podemos decir que el AAC puede ser aproximado puntualmente por árboles aleatorios finitos. Interpretaciones análogas, usando el teorema de representación de Skorohod, pueden darse a los resultados probados en el primer capítulo.

Apéndices

A

Miscelánea de probabilidades

En esta sección revisamos brevemente algunos resultados y conceptos básicos de probabilidad que usamos en el trabajo. Comenzamos con la siguiente observación

A.0.1 Observación.

1. Supongamos que $(\theta_n)_{n \geq 1}$ es una sucesión de variables aleatorias i.i.d. tales que $S_n = \theta_1 + \dots + \theta_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ ($S_0 = 0$). Sean $\ell \in \mathbb{N}$ y σ un tiempo de parada, finito casi ciertamente, asociado a la filtración $(\mathcal{F}_n)_n$ determinada por $(S_n, n \geq 0)$. Definimos $\theta^\ell = (\theta_n^\ell)_n$ y $\theta^\sigma = (\theta_n^\sigma)_n$ por $\theta_n^\ell = \theta_{\ell+n}$ y $\theta_n^\sigma = \theta_{\sigma+n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Tenemos que para todo $\ell \in \mathbb{N}$, θ^ℓ es independiente de \mathcal{F}_ℓ y además θ^ℓ tiene la misma distribución de θ . Además para cualquier función medible y acotada $F : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}$ se verifican las igualdades

$$\begin{aligned} E[F(\theta^\sigma)] &= \sum_{\ell \geq 1} E[F(\theta^\sigma)1_{\{\sigma=\ell\}}] = \sum_{\ell \geq 1} E[F(\theta^\ell)1_{\{\sigma=\ell\}}] \\ &= \sum_{\ell \geq 1} E[F(\theta^\ell)]E[1_{\{\sigma=\ell\}}] = \sum_{\ell \geq 1} E[F(\theta)]E[1_{\{\sigma=\ell\}}] = E[F(\theta)], \end{aligned}$$

donde en la primera igualdad hemos usado el teorema de convergencia dominada, en la tercera igualdad hemos usado que θ^ℓ es independiente de \mathcal{F}_ℓ y en la cuarta hemos usado que θ y θ^ℓ tienen la misma distribución. Entonces θ^σ y θ tienen la misma distribución. Además si $A \subset \mathbb{Z}$ y $B \in \mathcal{F}_\sigma$ se cumple que

$$\begin{aligned} P(\theta^\sigma \in A, B) &= \sum_{\ell \geq 1} P(\theta^\ell \in A, B \cap \{\sigma = \ell\}) \\ &= P(\theta \in A) \sum_{\ell \geq 1} P(B \cap \{\sigma = \ell\}) = P(\theta^\sigma \in A)P(B), \end{aligned}$$

es decir, θ^σ y \mathcal{F}_σ son independientes.

2. Como consecuencia de lo anterior, si S^σ está definido por $S_n^\sigma = S_{\sigma+n} - S_\sigma$ para todo $n \geq 0$, deducimos que $S_0^\sigma = 0$ y $S_n^\sigma = \theta_1^\sigma + \dots + \theta_n^\sigma$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces por la observación anterior S^σ tiene la misma distribución que S y es independiente de \mathcal{F}_σ .

A.1 Topología de Skorohod

A continuación definimos la topología de Skorohod que nos proporciona ideas análogas a las de la convergencia en el espacio de funciones continuas con la métrica uniforme. En este caso trabajamos con el espacios de funciones, en general, no continuas del siguiente tipo

A.1.1 Definición. Diremos que una función $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : [a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$) es *cadlag* si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. Para todo $t \in (a, b]$ (resp. $t \in (a, +\infty)$), $f(t+) := \lim_{s \downarrow t} f(s)$ existe y $f(t+) = f(t)$.
2. Para todo $t \in (a, b]$ (resp. $t \in [a, +\infty)$), $f(t-) := \lim_{s \uparrow t} f(s)$ existe.

A.1.1 Notación. Los espacios $D = D[0, 1]$, $D_t = D[0, t]$ y $D_\infty = D[0, +\infty)$ representarán al conjunto de funciones reales cadlag con dominios en $[0, 1]$, $[0, t]$ y $[0, +\infty)$ respectivamente.

A.1.2 Definición. Dados $x, y \in D$ definimos $d : D \times D \rightarrow [0, +\infty)$ como el ínfimo de los $\varepsilon > 0$ tales que existe una función $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ biyectiva estrictamente creciente que satisface

$$\sup_t |\lambda t - t| = \sup_t |t - \lambda^{-1}t| < \varepsilon, \quad y$$

$$\sup_t |x(t) - y(\lambda t)| = \sup_t |x|.$$

En adelante Λ representará el conjunto de funciones $\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ biyectivas estrictamente crecientes e $I \in \Lambda$ denotará a la función identidad. Entonces la definición anterior puede resumirse en

$$d(x, y) := \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_1 \vee \|x - y\lambda\|_1 \},$$

donde $\|\cdot\|_1$ representa a la norma uniforme. Resulta que d define una métrica en D [3, Pág. 124].

A.1.3 Definición. La topología inducida por d es la *topología de Skorohod* en D .

Es importante apuntar que el espacio D puede ser dotado de una métrica equivalente a d bajo la cual D es separable y completo. Ahora definiremos la topología de Skorohod en el espacio D_∞ .

A.1.2 Notación. En D_t , denotaremos por d_t, Λ_t a las nociones análogas que acabamos de introducir en $D = D_1$.

Podemos notar además que si x es un elemento de D_∞ o si x es un elemento de D_u , con $t < u$, entonces x puede ser visto como un elemento de D_t restringiendo su dominio de definición. Con esta identificación, los resultados en D_t cobran sentido incluso si se evalúan en elementos de un conjunto mayor, haciendo las respectivas restricciones.

Como paso previo a definir métricas que induzcan la topología de Skorohod en D_∞ , para cada $m \in \mathbb{N}$ definimos g_m por

$$g_m(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq m-1 \\ m-t & \text{si } m-1 \leq t \leq m \\ 0 & \text{si } t \geq m. \end{cases}$$

Y para cada $x \in D_\infty$, denotamos por $x^m \in D_\infty$ al producto $g_m x$.

A.1.4 Definición. Definimos $d_\infty : D_\infty \times D_\infty \rightarrow [0, +\infty)$ por

$$d_\infty(x, y) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1 \wedge d_m(x^m, y^m)}{2^m}.$$

A.1.1 Observación.

1. No es difícil ver d_∞ es una métrica. A la topología inducida por d_∞ en D_∞ se denomina *topología de Skorohod* en D_∞ . Y como ocurría en D , existe una métrica equivalente a d_∞ , bajo la cual D_∞ es un espacio separable y completo.
2. Si en la anterior definición, cambiamos $d_m(x^m, y^m)$ por

$$\|x - y\|_m := \sup_{t \leq m} |x(t) - y(t)|, \quad \forall m \geq 1,$$

conseguimos la métrica d_s de convergencia uniforme en compactos.

3. Supongamos que en D para la sucesión $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ existe $x \in D$ tal que $\|x_p - x\|_1 \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. Si en la Definición A.1.2 hacemos $\lambda = I$ resulta que

$$d(x^p, x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} \{ \|\lambda - I\|_1 \vee \|x^p - x\lambda\|_1 \} \leq \|x^p - x\|_1,$$

de donde se sigue que $d(x^p, x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. Es decir, si $x^p \rightarrow x$ en la métrica uniforme, entonces $x^p \rightarrow x$ en la topología de Skorohod.

4. Análogamente, supongamos que en D_∞ tenemos la convergencia $d_s(x^p, x) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$. Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ se dan las convergencias

$$\|x^p - x\|_m \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0.$$

Luego, haciendo $\lambda = I_m$, la identidad en $[0, m]$, conseguimos las desigualdades

$$\begin{aligned} d_m((x^p)^m, x^m) &= \inf_{\lambda \in \Lambda_m} \{ \|\lambda - I\|_m \vee \|x^p - x\lambda\|_m \} \leq \|(x^p)^m - x^m\|_m \\ &= \|g_m(x^p - x)\|_m \leq \|g_m\|_m \cdot \|x^p - x\|_m = \|x^p - x\|_m, \end{aligned}$$

para todo m natural. Esto implica que $d_\infty(x^p, x) \leq d_s(x^p, x)$ para todo $p \geq 1$ de donde, igual que en el caso anterior, podemos deducir que la convergencia uniforme en compactos implica convergencia en la topología de Skorohod en el espacio D_∞ .

Proposición A.1.1. Sean X^p, Y^p , $p \in \mathbb{N}$ y X variables aleatorias con valores en D_∞ . Si para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|X^p - Y^p\|_m \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$ y $X^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} X$, entonces $Y^p \xrightarrow{p \rightarrow \infty} X$.

Demostración. Gracias a que $\|X^p - Y^p\|_m \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0$, tenemos

$$\frac{\|X^p - Y^p\|_m \wedge 1}{2^m} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \quad \forall m \geq 1.$$

Entonces por el teorema de convergencia dominada

$$E \left[\frac{\|X^p - Y^p\|_m \wedge 1}{2^m} \right] \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0, \quad \forall m \geq 1,$$

de donde, en vista de que $\sum \frac{1}{2^m}$ es acotada y cada una de las esperanzas anteriores está acotada por $\frac{1}{2^m}$, por el teorema de convergencia dominada obtenemos que

$$E[d_s(X^p, Y^p)] = \sum_{m=1}^{\infty} E \left[\frac{\|X^p - Y^p\|_m \wedge 1}{2^m} \right] \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0,$$

es decir, $d_s(X^p, Y^p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{L^1} 0$. En particular $d_s(X^p, Y^p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(P)} 0$. Luego, dada cualquier subsucesión $d_s(X^{p_n}, Y^{p_n})$, como $d_s(X^{p_n}, Y^{p_n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} 0$, existe una subsucesión de esta, tal que $d_s(X^{p_{n_k}}, Y^{p_{n_k}}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(c.c.)} 0$. Y se deduce, gracias a la Observación A.1.2, que $d_\infty(X^{p_{n_k}}, Y^{p_{n_k}}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(c.c.)} 0$. Así hemos conseguido que toda subsucesión $(d_\infty(X^{p_n}, Y^{p_n}))_{n \in \mathbb{N}}$, tiene a su vez una subsucesión $(d_\infty(X^{p_{n_k}}, Y^{p_{n_k}}))_{k \in \mathbb{N}}$ que converge a 0 en distribución. Por tanto $d_\infty(X^p, Y^p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} 0$, de donde se concluye [3, Theorem 3.1] que $Y^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} X$. \square

A.1.2 Observación. Análogamente a la proposición anterior, si en D tenemos las convergencias $\|X^p - Y^p\|_1 \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(P)} 0$ y $X^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} X$, se deduce que $Y^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} X$. En efecto, considerando la subsucesión $(d(X^{p_n}, Y^{p_n}))_n$, gracias a que $\|X^{p_n} - Y^{p_n}\|_1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(P)} 0$, existe una subsucesión $(d(X^{p_{n_k}}, Y^{p_{n_k}}))_k$ para la que $\|X^{p_{n_k}} - Y^{p_{n_k}}\|_1 \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{(c.c.)} 0$. Luego, en virtud de la Observación A.1.2, $d(X^{p_{n_k}}, Y^{p_{n_k}}) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{c.c.} 0$. De esto se sigue que $d(X^p, Y^p) \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} 0$. Y, nuevamente gracias a [3, Theorem 3.1], concluimos que $Y^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} X$.

Previa a la siguiente proposición, apuntamos que para una función x en D_∞ , dados $\delta > 0$ y $m > 0$, denotamos por $\omega_\delta^m(x)$ a la distorsión de parámetro δ de x en D_m . Es decir,

$$\omega_\delta^m(x) := \sup\{|x(t) - x(s)| : |t - s| \leq \delta \wedge s, t \leq m\}.$$

Proposición A.1.2. Sean, para cada p natural, X^p un proceso con trayectorias en D_∞ tal que $X^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(D)} X$, donde X es un proceso de trayectorias continuas. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$

$$\limsup_p (\omega_\delta^m(X^p) > \varepsilon) \leq P(\omega_\delta^m(X) > \frac{\varepsilon}{2}).$$

Demostración. Por el teorema de representación de Skorohod podemos elegir \tilde{X}^p , para cada $p \in \mathbb{N}$ y \tilde{X} , con las mismas distribuciones de X^p , $p \in \mathbb{N}$, y X , respectivamente, tales que

$$\tilde{X}^p \xrightarrow[p \rightarrow \infty]{(c.c.)} \tilde{X}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} P(\omega_\delta^m(X^p) > \varepsilon) &\leq P(\omega_\delta^m(\tilde{X}) + 2\|\tilde{X}^p - \tilde{X}\|_m > \varepsilon) \\ &\leq P(\omega_\delta^m(\tilde{X}) + 2\|\tilde{X}^p - \tilde{X}\|_m > \varepsilon, \|\tilde{X}^p - \tilde{X}\|_m \leq \frac{\varepsilon}{4}) + P(\|\tilde{X}^p - \tilde{X}\|_m > \frac{\varepsilon}{4}), \end{aligned}$$

de donde deducimos

$$P(\omega_\delta^m(X^p) > \varepsilon) \leq P(\omega_\delta^m(\tilde{X}) > \frac{\varepsilon}{2}) + P(\|\tilde{X}^p - \tilde{X}\|_m > \frac{\varepsilon}{4}).$$

Tomando límite superior en p obtenemos

$$\limsup_p (P(\omega_\delta^m(X^p) > \varepsilon)) \leq P(\omega_\delta^m(\tilde{X}) > \frac{\varepsilon}{2}) = P(\omega_\delta^m(X) > \frac{\varepsilon}{2}),$$

como se quería. □

A.2 Movimiento Browniano

A.2.1 Definición. Un *movimiento browniano* unidimensional de valores reales es un proceso continuo, adaptado $B = (B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$, definido en algún espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) que cumple las siguientes propiedades

1. $B_0 = 0$ casi ciertamente.
2. Si $0 \leq s < t$, entonces $B_t - B_s$ es independiente de \mathcal{F}_s .
3. Si $t \geq 0$ y $s > 0$

$$P\{B_{t+s} - B_t \in A\} = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(\frac{-x^2}{2s}\right) dx;$$

es decir, $B_{t+s} - B_t$ tiene distribución normal con media cero y varianza s .

Del Teorema A.2.1 se deduce que el movimiento browniano existe. Además, si la filtración $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ no es mencionada explícitamente se asume que ésta es la filtración que define el proceso.

A.2.1 Observación. Es importante notar que si $B = (B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es un browniano, entonces el proceso $-B = (-B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ satisface las condiciones de la anterior definición y tiene la misma distribución que B .

A.2.2 Definición (Propiedad de Markov). Diremos que el proceso adaptado $(X_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ satisface la propiedad de Markov si para toda función g medible y limitada se cumple que

$$E[g(X_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = E[g(X_{t+s}) | X_t],$$

para todo $s \geq 0$.

Proposición A.2.1. Si $B = (B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es un browniano, entonces para todo $s \geq 0$ el proceso definido por $B_t^{(s)} = B_{s+t} - B_s$ es un movimiento browniano independiente de \mathcal{F}_s .

Demostración. Ver [12, Proposition 2.5] □

Teorema A.2.1 (Teorema de Donsker). Sean ξ_1, ξ_2, \dots en (Ω, \mathcal{F}, P) variables aleatorias i.i.d. con media 0 y varianza σ^2 , y $X^n(\omega) \in D_\infty$ definida por

$$X_t^n(\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega),$$

para todo $\omega \in \Omega$. Entonces $X^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(D)} B$.

Para ver una prueba del teorema ver [3, Theorem 14.1].

A.2.3 Definición. El *browniano reflejado* es un proceso que tiene la misma distribución de $(|B_t|, t \geq 0)$, donde $(B_t, t \geq 0)$ es el movimiento browniano estándar.

Proposición A.2.2. El *browniano reflejado* es un proceso de Markov tal que $E[g(|B_t|) | |B_{t+s}|] = \tilde{g}(|B_t|)$, para todo $s > 0$, donde para $x \geq 0$

$$\tilde{g}(x) = \int_0^\infty g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \left[\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2s}\right) + \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2s}\right) \right] dy.$$

Demostración. Tenemos que para g y ϕ funciones medibles y acotadas

$$\begin{aligned} E[g(|B_{t+s}|)\phi(|B_t|)] &= E[E[g(|B_{t+s}|)\phi(|B_t|) | B_t]] \\ &= E[\tilde{g}(|B_t|)\phi(|B_t|)], \end{aligned} \tag{A.1}$$

donde $\tilde{g}(x) = E[g(|B_{t+s}|) | B_t = x] = E[g(|B_s + x|)]$. Notemos que

$$\tilde{g}(-x) = E[g(|B_s - x|)] = E[g(|-B_s - x|)] = E[g(|B_s + x|)] = \tilde{g}(x),$$

donde la segunda igualdad fue obtenida gracias a la Observación A.2.1. Entonces en (A.1) tenemos que

$$E[g(|B_{t+s}|)\phi(|B_t|)] = E[\tilde{g}(|B_t|)\phi(|B_t|)],$$

es decir, el browniano reflejado es un proceso de Markov. Más aún, si $x \geq 0$

$$\begin{aligned} \tilde{g}(x) &= \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy \\ &= \int_0^\infty g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy + \int_{-\infty}^0 g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy \\ &= \int_0^\infty g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2s}\right) dy + \int_0^\infty g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2s}\right) dy, \end{aligned}$$

que concluye la prueba. \square

Lema A.2.1. Si $(B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es un movimiento browniano y $(M_t, t \geq 0)$ está definido por

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s,$$

tenemos que la función de densidad del par (B_t, M_t) está definida por

$$D(w, m) = \frac{2(2m-w)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2m-w)^2}{2t}\right\} 1_{\{w \leq m\}} 1_{\{0 \leq m\}}.$$

Demostración. Ver [10, Theorem 3.12.4]. \square

Proposición A.2.3. Sea $(B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ un movimiento browniano. Si $(M_t, t \geq 0)$ es definido por

$$M_t = \max_{0 \leq s \leq t} B_s,$$

el proceso definido por $Y_t = M_t - B_t$, para todo $t \geq 0$, es un proceso de Markov que tiene la misma distribución que el browniano reflejado.

Demostración. Supongamos primero que

$$f = 1_{]-\infty, a] \times]-\infty, b]}, \quad b \geq a, b \geq 0, \quad (\text{A.2})$$

tenemos que para $s > 0$ y $t \geq 0$

$$\begin{aligned} E[f(B_{t+s}, M_{t+s}) | \mathcal{F}_t] &= P\left[B_{t+s} \leq a, M_t \leq b, \max_{0 \leq u \leq s} B_{t+u} \leq b \mid \mathcal{F}_t\right] \\ &= 1_{\{M_t \leq b\}} P\left[B_{t+s} \leq a, \max_{0 \leq u \leq s} B_{t+u} \leq b \mid B_t\right] \\ &= g(B_t, M_t), \end{aligned}$$

donde en la segunda igualdad usamos la propiedad de Markov. Hemos probado así que

$$E[f(B_{t+s}, M_{t+s}) | \mathcal{F}_t] = E[f(B_{t+s}, M_{t+s}) | B_t, M_t], \quad (\text{A.3})$$

para toda función del tipo (A.2). La igualdad (A.3) puede extenderse a funciones simples y luego a funciones medibles limitadas. Es decir, el proceso $((B_t, M_t), \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ es Markov. Entonces, fijados $s, t \geq 0$, haciendo $f(x, y) = 1_{\Gamma}(y - x)$ en la igualdad (A.3) resulta que

$$P[Y_{t+s} \in \Gamma | \mathcal{F}_t] = P[Y_{t+s} \in \Gamma | B_t, M_t], \quad \Gamma \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Veamos que, fijada H continua y limitada, es posible obtener φ tal que

$$E[H(Y_{t+s})G(B_t, M_t)] = E[\varphi(Y_t)G(B_t, M_t)]. \quad (\text{A.4})$$

Para esto notemos que si $\xi := \max_{0 \leq r \leq s} B_{t+r} - B_t$ y $\tilde{H}(w, m) := H(m - w)$ podemos escribir el lado izquierdo de (A.4) como

$$E[H(Y_{t+s})G(B_t, M_t)] = E[\tilde{H}(B_{t+s}, M_{t+s})G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi > M_t\}}] \quad (\text{A.5})$$

$$+ E[\tilde{H}(B_{t+s}, M_{t+s})G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi \leq M_t\}}]. \quad (\text{A.6})$$

Observamos que si $B_t + \xi > M_t$, entonces $M_{t+s} = B_t + \xi$. Luego si $\eta := B_{t+s} - B_t$, la ecuación (A.5) puede desarrollarse como sigue

$$\begin{aligned} E[\tilde{H}(B_{t+s}, M_{t+s})G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi > M_t\}}] &= E[\tilde{H}(B_t + \eta, B_t + \xi)G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi > M_t\}}] \\ &= \int dw dm D(w, m)G(w, m)E[H(\xi - \eta)1_{\{\xi > m - w\}}] = E[\varphi_1(M_t - B_t)G(B_t, M_t)], \end{aligned}$$

donde $\varphi_1(y) = E[H(\xi - \eta)1_{\{\xi > y\}}]$ y la segunda igualdad es gracias a que (η, ξ) es independiente de (B_t, M_t) . Esto último ocurre gracias a que $B_{t'}$ es independiente de $B_{t+s'} - B_t$ para $t' \leq t$ y $s' \leq s$, y a la acción de la función $\gamma \mapsto (\gamma(r), \max_{r' \in [0, r]} \gamma(r'))$, aplicada a cualquier $\gamma: [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ continua.

Además, en ecuación (A.6) si $B_t + \xi \leq M_t$, se tiene que $M_{t+s} = M_t$. Luego

$$\begin{aligned} E[\tilde{H}(B_{t+s}, M_{t+s})G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi \leq M_t\}}] &= E[\tilde{H}(B_t + \eta, M_t)G(B_t, M_t)1_{\{B_t + \xi \leq M_t\}}] \\ &= \int dw dm D(w, m)G(w, m)E[H(m - w - \eta)1_{\{\xi \leq m - w\}}] \\ &= E[\varphi_2(M_t - B_t)G(B_t, M_t)], \end{aligned}$$

donde $\varphi_2(y) = E[H(y - \eta)1_{\{\xi \leq y\}}]$ y la segunda igualdad nuevamente es gracias a que (η, ξ) es independiente de (B_t, M_t) .

Por tanto $E[H(Y_{t+s})G(B_t, M_t)] = E[\varphi(Y_t)G(B_t, M_t)]$ y en particular obtenemos que

$$E[H(Y_{t+s})|B_t, M_t] = \varphi(Y_t) = E[H(Y_{t+s})|Y_t],$$

es decir, Y_t es un proceso de Márkov, donde $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. Y más precisamente, para $y \geq 0$ se tiene que

$$\begin{aligned} \varphi(y) &= E[H(\xi - \eta)1_{\{\xi > y\}}] + E[H(y - \eta)1_{\{\xi \leq y\}}] \\ &= \iint H(m - w)1_{\{m > y\}}D(w, m)dw dm + \iint H(y - w)1_{\{m \leq y\}}D(w, m)dw dm \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} H(x)1_{\{x+w > y\}}D(w, x+w)dw dx + \int_{\mathbb{R}^2} H(x)1_{\{0 \leq x\}}1_{\{m \leq y\}}D(y-x, m)dx dm \\ &= \int_{\mathbb{R}} H(x) \left\{ \int_{y-x}^{\infty} D(w, x+w)dw + \int_{-\infty}^y D(y-x, m)1_{\{0 \leq x\}}dm \right\} dx, \end{aligned}$$

donde

$$D(w, m) = \frac{2(2m-w)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left\{-\frac{(2m-w)^2}{2t}\right\} 1_{\{w \leq m\}} 1_{\{0 \leq m\}}.$$

Entonces como $y \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{y-x}^{\infty} D(w, x+w)dw &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{y-x}^{\infty} (2x+w) \exp\left(-\frac{(2x+w)^2}{2t}\right) 1_{\{0 \leq x\}} 1_{\{0 \leq x+w\}} dw \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} 1_{\{0 \leq x\}} \int_{y-x}^{\infty} (2x+w) \exp\left(-\frac{(2x+w)^2}{2t}\right) dw \\ &= \frac{-2t}{\sqrt{2\pi t^3}} 1_{\{0 \leq x\}} \exp\left(-\frac{(w+2x)^2}{2t}\right) \Big|_{y-x}^{\infty} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right) 1_{\{0 \leq x\}}, \end{aligned}$$

y por otro lado

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^y D(y-x, m) 1_{\{0 \leq x\}} dm \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{-\infty}^y (2m+x-y) \exp\left(-\frac{(2m+x-y)^2}{2t}\right) 1_{\{y-x \leq m\}} 1_{\{0 \leq m\}} 1_{\{0 \leq x\}} dm \\
 &= \frac{2}{\sqrt{2\pi t^3}} \int_{\max\{0, y-x\}}^y (2m+x-y) \exp\left(-\frac{(2m+x-y)^2}{2t}\right) 1_{\{0 \leq x\}} dm \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} 1_{\{0 \leq x\}} \exp\left(-\frac{(2m+x-y)^2}{2t}\right) \Big|_{\max\{0, y-x\}}^y \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{2\pi t}} 1_{\{0 \leq x\}} \left[\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \right].
 \end{aligned}$$

De donde se deduce que para $y \geq 0$

$$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}} H(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left[\exp\left(-\frac{(x+y)^2}{2t}\right) + \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) \right] 1_{\{0 \leq x\}} dx.$$

□

A.2.2 Observación. Supongamos la notación establecida en la Proposición A.2.3. Como $(B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ tiene la misma distribución que $(-B_t, \mathcal{F}_t, t \geq 0)$ si

$$I_t = I_t(B) = \min_{0 \leq s \leq t} B_s,$$

ocurre que $I_t(-B) = -M_t$. Luego el proceso definido por $Z_t = B_t - I_t$ tiene la misma distribución que el definido por $-B_t - I_t(-B) = M_t - B_t = Y_t$. Por tanto, de la Proposición A.2.3 se sigue que el proceso definido por $Z_t = B_t - I_t$ también es un proceso de Markov con la misma distribución que el browniano reflejado.

B

Métrica de Gromov-Hausdorff

En adelante, para un subconjunto S de un espacio métrico, denotaremos por $U_r(S)$ al conjunto de puntos x tales que $d(x, S) < r$, es decir $U_r(S) = \bigcup_{y \in S} B_r(y)$.

B.0.1 Definición (Métrica de Hausdorff). Sean A y B subconjuntos de un espacio métrico. La *distancia de Hausdorff* entre A y B , denotada por $d_H(A, B)$, es definida por

$$d_H(A, B) = \inf_{r>0} \{r : A \subset U_r(B) \text{ y } B \subset U_r(A)\}.$$

B.0.2 Definición (Métrica de Gromov-Hausdorff). Sean X e Y espacios métricos. La *distancia de Gromov-Hausdorff* entre X e Y , denotada por $d_{GH}(X, Y)$, es definida por

$$d_{GH}(X, Y) = \inf_{Z, r>0} \{r : d_H(X', Y') < r \text{ donde } X', Y' \subset Z$$

son isométricos a X e Y respectivamente}.

B.0.3 Definición. Sean X e Y dos conjuntos. Una *correspondencia* entre X e Y es un conjunto $\mathfrak{R} \subset X \times Y$ tal que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ de modo que $(x, y) \in \mathfrak{R}$ y recíprocamente, para todo $y \in Y$ existe un elemento $x \in X$ tal que $(x, y) \in \mathfrak{R}$.

B.0.4 Definición (Distorsión). Sea \mathfrak{R} una correspondencia entre los espacios métricos X e Y . La *distorsión* de \mathfrak{R} es definida por

$$\text{dis } \mathfrak{R} = \sup \{|d_X(x, x') - d_Y(y, y')| : (x, y), (x', y') \in \mathfrak{R}\}, \quad (\text{B.1})$$

donde d_X y d_Y son las métricas de X e Y respectivamente.

Teorema B.0.1. Para cualesquiera espacios métricos X e Y , se verifica la igualdad

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2} \inf_{\mathfrak{R}} (\text{dis } \mathfrak{R}), \quad (\text{B.2})$$

donde el ínfimo es tomado sobre todas las correspondencias \mathfrak{R} entre X e Y .

Demostración. Supongamos que para cualquier $r > d_{GH}(X, Y)$, existe una correspondencia \mathfrak{R} con $\text{dis}\mathfrak{R} < 2r$. Entonces podemos asumir que X e Y son subespacios de un espacio métrico Z tal que $d_H(X, Y) < r$ en Z . Definimos

$$\mathfrak{R} = \{(x, y) : x \in X, y \in Y, d(x, y) < r\},$$

donde d es la métrica de Z . Debido a que $d_H(X, Y) < r$, se sigue que \mathfrak{R} es una correspondencia. Luego, como gracias a la desigualdad triangular tenemos que si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ y $(x', y') \in \mathfrak{R}$, entonces

$$|d(x, x') - d(y, y')| \leq d(x, x') + d(y, y') < 2r,$$

se deduce que $\text{dis}\mathfrak{R} < 2r$.

Recíprocamente, supongamos que $d_{GH}(X, Y) \leq \frac{1}{2} \text{dis}\mathfrak{R}$ para toda correspondencia \mathfrak{R} . Sea $\text{dis}\mathfrak{R} = 2r$. Será suficiente mostrar que existe una semi-métrica d en la unión disjunta $X \cup Y$ tal que $d|_X = d_X$, $d|_Y = d_Y$ y $d_H(X, Y) \leq r$ en $(X \cup Y, d)$. Con este fin, para $x \in X$ e $y \in Y$ definimos

$$d(x, y) = \inf\{d_X(x, x') + r + d_Y(y', y) : (x, x') \in \mathfrak{R}\}.$$

Entonces d satisface la desigualdad triangular, de donde se sigue que $d_H(X, Y) \leq r$. □

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALDOUS, D. The Continuum Random Tree. I. *Ann. Probab.* 19 (Jan. 1991), 1–28.
- [2] ALDOUS, D. The Continuum Random Tree. III. *Ann. Probab.* 21 (Jan. 1993), 248–289.
- [3] BILLINGSLEY, P. *Convergence of Probability Measures*, 2 ed. Wiley-Interscience, The University of Chicago, 1999.
- [4] BROUTIN, N., AND MARCKERT, J.-F. Asymptotics of trees with a prescribed degree sequence and applications. *Random Structures Algorithms* 44 (2014), 290–316.
- [5] CROYDON, D. Convergence of simple random walks on random discrete trees to brownian motion on the continuum random tree. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* 44 (2008), 987–1019.
- [6] DERBEZ, E., AND SLADE, G. The scaling limit of lattice trees in high dimensions. *Comm. Math. Phys.* 193 (1998), 69–104.
- [7] DURRETT, R. *Probability: Theory and Examples*, 4 ed. Cambridge University Press, 2010.
- [8] GITTENBERGER, B. On the contour of random trees. *SIAM J. Discrete Math.* 12 (1999), 434–458.
- [9] KAIGH, W. D. An Invariance Principle for Random Walk Conditioned by a Late Return to Zero. *Ann. Probab.* 4 (Feb. 1976), 115–121.
- [10] KOLOKOLTSOV, V. N. *Markov Processes, Semigroups and Generators*, 1 ed., vol. 38 of *De Gruyter Studies in Mathematics*. De Gruyter, 2011.

-
- [11] LE GALL, J.-F. Random trees and applications. *Probab. Surveys* 2 (Nov. 2005), 245–311.
- [12] LE GALL, J.-F. *Brownian Motion, Martingales, and Stochastic Calculus*, 1 ed., vol. 274 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer International Publishing, 2016.
- [13] PANAGIOTOU, K., STUFLER, B., AND WELLER, K. Scaling limits of random graphs from subcritical classes. *Ann. Probab.* 44 (2016), 3291–3334.
- [14] ÇINLAR, E. *Probability and Stochastics*, 1 ed., vol. 261 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag New York, 2011.