UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
FACULTAD DE CIENCIAS

SECCIÓN DE POST-GRADO Y 2da ESPECIALIZACIÓN PROFESIONAL

TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS, MENCIÓN:
MATEMÁTICA APLICADA

TITULADA:

DINÁMICA DE OPERADORES HIPERBÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

PRESENTADO POR:
Mamani-Apaza, Guillermo

LIMA-PERU
1998

TABLA DE CONTENIDO

TÍTULO....................i
DEDICATORIA....................ii
AGRADECIMIENTO....................iii
TABLA DE CONTENIDO....................iv
RESUMEN....................v
INTRODUCCIÓN....................vi

CAPITULO I: Operadores Lineales sobre Espacios de Banach

I.1 Preliminares....................3
I.2 El Espectro de un Operador Lineal Complejo....................11
I.3 Descomposición Espectral....................16
I.4 Espectro de un Operador Lineal Real....................23

CAPÍTULO II: Operadores Hiperbólicos

II.1 Operadores Lineales Hiperbólicos en Espacios de Banach....................30

CAPÍTULO III: Aplicaciones de Lipschitz

III.1 Aplicaciones de Lipschitz....................37
III.2 El Teorema de la Aplicación Fija....................47

TABLA DE CONTENIDO

CAPÍTULO IV: Estructura Local de los Puntos Fijos Hiperbólicos para Difeomorfismos en Espacios de Banach

IV.1 Preliminares..49

IV.2 El Teorema de Grobman-Hartman para Difeomorfismos en Espacios de Banach..52

IV.3 Estabilidad Local de Puntos Fijos Hiperbólicos..............................61

IV.4. Ejemplo de Sternberg..70

ANEXO..74

BIBLIOGRAFIA..75

RESUMEN

El presente trabajo, generaliza el teorema de la conjugación local (Grobman-Hartman) y su estabilidad local en los puntos fijos hiperbólicos, es decir; que el teorema de la conjugación local es válida cuando se trabaja en espacios vectoriales de dimensión infinita (espacios de Banach). Ademas si h es la conjugación local entre dos operadores, h llega a ser solo un homeomorfismo (contraejemplo de Sternberg). Para obtener los resultados mencionados, se utilizan argumentos del análisis funcional.

INTRODUCCIÓN

En el estudio de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales, se tiene desarrollada toda una teoría cuando se trabaja sobre un espacio vectorial de dimensión finita. Dentro de ello está el Teorema que garantiza la conjugación local demostrado por Grobman y Hartman respondiendo a una pregunta formulada por Peixoto[1]. Lo que pretendemos es probar la validez del Teorema Grobman-Hartman cuando se trabaja sobre un espacio vectorial de dimensión infinita y su estabilidad local en puntos fijos hiperbólicos.

En los capítulos I y II se desarrolla la teoría de operadores lineales en espacios de Banach. No todos los operadores que vamos a utilizar son lineales o están definidos en espacios de Banach es por ello que en capítulo III estudiamos aplicaciones de Lipschitz definidos sobre espacios métricos

Para describir lo que se desarrolla en el último capítulo, consideremos algunos comentarios desarrollados en el capítulo I y II: Sea E un espacio de Banach definido sobre $\mathbb{R}$ y $T: E \longrightarrow E$ un homeomorfismo lineal. La complexificación de E es el espacio vectorial $E \times E = E_c$ definido sobre $\mathbb{C}$ con una suma usual y un producto

$$(\alpha + i\beta)\,(x,y) = (\alpha x - \beta y, \alpha y + \beta x)$$

La complexificación de T es la aplicación $T_c : E_c \longrightarrow E_c$ definida por

$$T_c(x,y) = (T(x), T(y))$$

El espectro de T_c es llamado espectro complejo de T. Diremos que un operador $T : E \longrightarrow E$ es hiperbólico si su espectro complejo no intesecta al círculo unitario $S^1 \subseteq \mathbb{C}$. Observamos que si $E = \mathbb{R}^n$ entonces el espectro del operador

[1] Para un estudio detallado del teorema de Grobman y Hartman y la pregunta que formuló, vease: Sotomayor, Jorge [15], Palis, J. [13].

de $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es el conjunto de las raíces (complejas) del polinomio característico de T.

Los resultados principales que pretendemos demostrar en el capítulo IV, son:

a) Sea $(E, \|.\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f: U \rightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Denotemos por $L = Df(0) \in Hip(E)$. Entonces f es localmente conjugado a L es decir: $\exists h \in Hom(E)$ / $h o Df(0) = f o h$ en $B_r(0) \subseteq E$

b) Con la misma hipótesis de (a) se tiene que: $\exists\, r > 0$ y $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $g \in B_\varepsilon(f) \subseteq C^1(U,E)$. Entonces g es localmente conjugado a f. Además si h es la conjugación entre f y g, entonces $h(0) \in B_r(0) \subseteq E$ y $h(0)$ es punto fijo hiperbólico de g

Se concluye que h es solo un homeomorfismo y no siempre llega a ser diferenciable, para ello se presenta el contraejemplo de Sternberg.

CAPÍTULO I

OPERADORES LINEALES SOBRE ESPACIOS DE BANACH

I.1 PRELIMINARES

Sean $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach sobre el campo K (real o complejo). Denotemos por L(E,F) al conjunto de todas las aplicaciones lineales y continuas de E en F, es decir:

$$L(E,F) = \{T:E \longrightarrow F \;/\; T \text{ es lineal y continua}\}$$

Podemos dotar a L(E,F) de una estructura de espacio de Banach. Para esto, definimos la suma y el producto por un escalar como:

$$\begin{aligned} + : L(E,F) \times L(E,F) &\longrightarrow L(E,F) \\ (T_1,T_2) &\longrightarrow T_1+T_2 \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \bullet : K \times L(E,F) &\longrightarrow L(E,F) \\ (\lambda,T) &\longrightarrow \lambda T \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} T_1 + T_2 : E &\longrightarrow F \\ x &\longrightarrow (T_1+T_2)(x) = T_1(x)+T_2(x) \end{aligned} \quad \text{y} \quad \begin{aligned} \lambda T : E &\longrightarrow F \\ \lambda &\longrightarrow (\lambda T)(x) = \lambda T(x) \end{aligned}$$

De ésta manera $(L(E,F),+,K,\bullet)$ es un K-espacio vectorial. Podemos definir la norma de un elemento $T \in L(E,F)$ como:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : L(E,F) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ T &\longrightarrow \|T\| = \sup\left\{ \|Tx\|_F : x \in E \wedge \|x\|_E = 1 \right\} \end{aligned}$$

Es fácil probar que $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach[2] . Si E=F denotaremos L(E) en vez de L(E,E).

Denotaremos por GL(E) al conjunto de todos los $L \in L(E)$ biyectivas:

$$GL(E) = \{L \in L(E) \;/\; L \text{ es biyectivo}\}$$

[2] Una prueba de que $(L(E,F), \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, está en el texto de Mauro C. R. [10]

Obsérvese que, como L es continua, lineal y biyectiva; por el Teorema de la aplicación abierta, $L^{-1} \in L(E)$.

PROPOSICIÓN I.1.1 Se cumplen las siguientes propiedades:

i) $L_1, L_2 \in GL(E) \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in GL(E)$.

ii) $L \in GL(E)$ y $\lambda \in K \Rightarrow \lambda L \in GL(E)$.

Prueba:

i) como $L_1, L_2 \in GL(E) \Rightarrow L_1, L_2 \in L(E) \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in L(E)$. Resta probar que $L_1 \circ L_2$ es biyectivo. Consideremos $L_2^{-1} \circ L_1^{-1}$; observamos que:

$$(L_1 \circ L_2) \circ (L_2^{-1} \circ L_1^{-1}) = L_1 \circ (L_2 \circ L_2^{-1}) \circ L_1^{-1} = L_1 \circ L_1^{-1} = I$$

$$(L_2^{-1} \circ L_1^{-1}) \circ (L_1 \circ L_2) = L_2^{-1} \circ (L_1^{-1} \circ L_1) \circ L_2 = L_2^{-1} \circ L_2 = I$$

por tanto $L_1 \circ L_2$ es biyectivo y $(L_1 \circ L_2)^{-1} = L_2^{-1} \circ L_1^{-1}$

$$\therefore\ L_1 \circ L_2 \in GL(E)$$

ii) $L \in GL(E) \Rightarrow L \in L(E) \Rightarrow \lambda L \in L(E)$. Resta probar que λL es invertible.

$$(\lambda L) \circ (\frac{1}{\lambda} L^{-1}) = \lambda \frac{1}{\lambda} (L \circ L^{-1}) = I$$

$$(\frac{1}{\lambda} L^{-1}) \circ (\lambda L) = \frac{1}{\lambda} \lambda (L^{-1} \circ L) = I$$

Luego λL es biyectiva y $(\lambda L)^{-1} = \frac{1}{\lambda} L^{-1}$, y por lo tanto $\lambda L \in GL(E)$ ■

Designaremos por I a la identidad en $L(E)$, es decir:

$$I : E \longrightarrow E$$
$$x \longrightarrow I(x) = x$$

Obviamente $\| I \| = 1$.

El siguiente Teorema, será muy importante, pues él nos servirá para invertir operadores de la forma $I + T$ ó $I - T$.

TEOREMA I.1.2. Sea $T \in L(E)$ tal que $\| T \| < 1$. Se cumple:

i) $I - T \in GL(E)$, $(I-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k \quad \wedge \quad \| (I-T)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| T \|}$

ii) $I + T \in GL(E)$, $(I+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k T^k \quad \wedge \quad \| (I+T)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| T \|}$.

Prueba:

i) Consideremos la sucesión de sumas parciales $\{S_n\} \subseteq L(E)$, definida por: $S_n = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$. Probaremos que $\{S_n\}$ es una sucesión de Cauchy en L(E).

Obsérvese que para n, m $\in Z^+$ (n > m), tenemos:

$$\| S_n - S_m \| = \left\| \sum_{k=0}^{n} T^k - \sum_{k=0}^{m} T^k \right\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{n} T^k \right\| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| T^k \| \leq \sum_{k=m+1}^{n} \| T \|^k$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \| T \|^k - \sum_{k=0}^{m} \| T \|^k , \ (n > m)$$

$$\Rightarrow \| S_n - S_m \| = \left| \sum_{k=0}^{n} \| T \|^k - \sum_{k=0}^{m} \| T \|^k \right| \quad ; \quad \forall n, m \in Z^+ \qquad (1)$$

Consideremos $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \| T \|^k$. Como $\| T \| < 1$ entonces $\{ \sigma_n \}$ es una sucesión de sumas parciales en $\mathbb{R}$ y ademas

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{k=0}^{\infty} \| T \|^k = \frac{1}{1 - \| T \|}$$

En particular $\{ \sigma_n \}$ es de Cauchy, luego

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+ / \ n, m \geq N \Rightarrow |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon . \qquad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que:

$$\forall \ \varepsilon > 0, \exists N \in Z^+ / \ n, m \geq N \Rightarrow \| S_n - S_m \| < \varepsilon$$

Luego $\{S_n\}$ es de Cauchy y como L(E) es de Banach, $\exists S \in L(E)$ tal que

$$\sum_{k=0}^{\infty} T^k = \lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (3)$$

Probaremos que $(I - T)^{-1} = S$. Para ello observemos que:

$$(I - T) \circ S_n = (I - T) \circ \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - T^{k+1} = I - T^{n+1}, \quad \forall n \geq 0 \qquad (4)$$

$$S_n \circ (I - T) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} T^k \right) \circ (I - T) = \sum_{k=0}^{\infty} T^k - T^{k+1} = I - T^{n+1}, \quad \forall n \geq 0 \qquad (5)$$

Nuevamente, como $\| T \| < 1$; $\lim_{n\to\infty} \| T^n \| \leq \lim_{n\to\infty} \| T \|^n - 0$. Por lo tanto $T^n \longrightarrow 0$, luego tomando límite a (4), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} (I - T) \circ S_n = \lim_{n\to\infty} \left(I - T^{n+1} \right)$$

y por (3), se tiene

$$(I - T) \circ S = I$$

luego tomando límite a (5), se tiene:

$$\lim_{n\to\infty} S_n \circ (I - T) = \lim_{n\to\infty} \left(I - T^{n+1}\right)$$

y por (3), se tiene

$$S \circ (I - T) = I$$

Entonces

$$S \circ (I - T) = (I - T) \circ S,$$

$$\therefore\ S = (I - T)^{-1}$$

Luego

$$(I - T)^{-1} \in L(E) \Rightarrow (I - T) \in GL(L) \ \text{ y } \ (I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k$$

por último: si $S_n \xrightarrow{n\to\infty} S \ \Rightarrow\ \|S_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|S\|$ y como

$$S_n = \left\| \sum_{k=0}^{n} T^k \right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|T\|^k = \sigma_n \ , \quad \forall n \geq 0.$$

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{1 - \|T\|} \ ,$$

$$\therefore\ \left\|(I - T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}$$

ii) Como $\|-T\| = \|T\| < 1$, por la parte (i)

$$\left(I - (-T)\right) = I + T \in GL(E) \ , \ \left(I - (-T)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-T)^k \ ,$$

entonces

$$\left\|(I - (-T))^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|-T\|} \ \Rightarrow\ \left\|(I + T)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|} \quad \blacksquare$$

Ahora generalizaremos el Teorema I.1.2.

COROLARIO. Sea $T \in L(E)$ y $L \in L(E)$ tal que $\| T \| < \| L^{-1} \|^{-1}$. Entonces

i) $L - T \in GL(E)$, $(L-T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} \circ T^k$ y $\| (L-T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$

ii) $L + T \in GL(E)$, $(L+T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^{-(k+1)} \circ T^k$ y $\| (L+T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$

Prueba:

i) Podemos expresar $L - T = L \circ (I - L^{-1} \circ T)$, como $L \in GL(E)$, $\Rightarrow$ $L^{-1} \in L(E)$ y como $T \in GL(E) \Rightarrow L^{-1} \circ T \in L(E)$ y

$$\| L^{-1} \circ T \| \leq \| L^{-1} \| \, \| T \| < \| L^{-1} \| \, \| L^{-1} \|^{-1} = 1$$

con estas condiciones podemos usar el Teorema I.1.2-(i). En efecto

$$(I - L^{-1} \circ T) \in GL(E) \, , \, (I - L^{-1} \circ T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (L^{-1} \circ T)^k \, , \text{ y}$$

$$\| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \| \leq \frac{1}{1 - \| L^{-1} \circ T \|}$$

como $L \in GL(E)$, $\Rightarrow$ $L \circ (I - L^{-1} \circ T) \in GL(E)$ $\Rightarrow$ $L - T \in GL(E)$. Luego:

$$(L-T)^{-1} = [L \circ (I - L^{-1} \circ T)]^{-1} = (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (L^{-1} T)^k \circ L^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} T^k$$

$$\| (L-T)^{-1} \| \leq \| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \| \, \| L^{-1} \| \leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \circ T \|} \qquad (1)$$

por otro lado tenemos

$$\frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \circ T \|} \leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \| \, \| T \|} = \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|} \qquad (2)$$

de (1) y (2), se tiene

$$\| (L-T)^{-1} \| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$$

ii) Como $\| -T \| = \| T \| < \| L^{-1} \|^{-1}$ por lo anterior tenemos $L - (-T) = L + T \in GL(E)$

$$(L+T)^{-1} = [L - (-T)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} L^{-(k+1)} \circ (-T)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k L^{-(k+1)} \circ T^k$$

$$\| (L+T)^{-1} \| \leq \| (L - (-T))^{-1} \| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| -T \|} \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|} \qquad \blacksquare$$

TEOREMA I.1.3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach . GL(E) es un subconjunto abierto de L(E).

Prueba: Sea $L_0 \in GL(E)$ (fijo arbitrario) . Por demostrar que:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \ / \ B_\varepsilon(L_o) \subseteq GL(E)$$

En efecto. Sea $L \in B_\varepsilon(L_o)$, con $\varepsilon = \| L_o^{-1} \|^{-1}$ entonces $\| (L - L_0)^{-1} \| < \varepsilon = \| L_o^{-1} \|^{-1}$

entonces $L_o + (L - L_o) = L \in GL(E)$

$$\therefore \ B_\varepsilon(L_o) \subseteq GL(E), \text{ con } \varepsilon = \| L_o^{-1} \|^{-1}.$$

Luego, GL(E) es abierto en L(E) ■

TEOREMA I.1.4 Sea $(E , \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. La aplicación

$$\Psi : GL(E) \longrightarrow GL(E)$$
$$L \longrightarrow \Psi(L) = L^{-1} \text{ es continua.}$$

Prueba: Sea $L_0 \in GL(E)$ (fijo arbitrario). Por demostrar que:

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0 \ / \ \| L - L_0 \| < \delta \ \Rightarrow \ \| \Psi(L) - \Psi(L_o) \| = \| L^{-1} - L_o^{-1} \| < \varepsilon$$

obsérvese que

$$L^{-1} - L_o^{-1} = (L^{-1} \circ L_o - I) \circ L_o^{-1} = L^{-1} \circ (L_o - L) \circ L_o^{-1}$$

Entonces

$$\| L^{-1} - L_o^{-1} \| \leq \| L^{-1} \| \, \| L_o - L \| \, \| L_o^{-1} \| \qquad (1)$$

Luego, acotaremos $\| L^{-1} \|$ por una constante que dependa de L_0.

Si $\| L - L_o \| < \dfrac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2} \Rightarrow \| L - L_o \| < \| L_o^{-1} \|^{-1} \Rightarrow L_o + (L - L_o) = L \in GL(E)$

y

$$\| L^{-1} \| = \| [L_o + (L - L_o)]^{-1} \| \leq \frac{1}{\| L_o^{-1} \| - \| L - L_o \|} \qquad (2)$$

como

$$\| L - L_o \| < \frac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2} \Rightarrow \| L_o^{-1} \|^{-1} - \frac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2} \leq \| L_o^{-1} \|^{-1} - \| L - L_o \|$$

entonces

$$\frac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2} < \| L_o^{-1} \|^{-1} - \| L - L_o \| \Rightarrow \frac{1}{\| L_o^{-1} \|^{-1} - \| L - L_o \|} < 2 \| L_o^{-1} \| \qquad (3)$$

De (2) y (3) tenemos

$$\| L^{-1} \| < 2 \| L_0^{-1} \|, \text{ siempre que: } \| L - L_o \| < \frac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2} \qquad (4)$$

Para $\varepsilon > 0$ tomamos $\delta = \text{mín}\left\{ \frac{\| L_o^{-1} \|^{-1}}{2}, \frac{\| L_o^{-1} \|^{-2}}{2} \varepsilon \right\}$ y considerando (1) y (4) tenemos

$$\| L - L_0 \| < \delta \Rightarrow \| L^{-1} - L_o^{-1} \| \leq \| L^{-1} \| \| L_o - L \| \| L_o^{-1} \| < 2 \| L_o^{-1} \|^2 \| L_o - L \|$$

$$< 2 \| L_o^{-1} \|^2 \frac{\| L_o^{-1} \|^{-2}}{2} \varepsilon = \varepsilon$$

entonces, Ψ es continua en L_0 $\forall$ $L_0 \in GL(E)$. Por lo tanto Ψ es continua en GL(E) ∎

Los Teoremas de inversión que se han presentado, son válidos solo cuando trabajamos en un mismo espacio E. A continuación presentaremos un Teorema que generaliza nuestros resultados cuando trabajamos con operadores que actúan entre dos espacios de Banach distintos.

TEOREMA I.1.5 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(F, \|\cdot\|_F)$ dos espacios de Banach. Sea $L \in L(E,F)$ tal que L es biyectiva y $L^{-1} \in L(E,F)$. Sea $T \in L(E,F)$ tal que $\| T \| < \| L^{-1} \|^{-1}$. Entonces:

i) $L - T$ es invertible, $(L-T)^{-1} \in L(F,E)$ y $\| (L-T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$

ii) $L + T$ es invertible, $(L+T)^{-1} \in L(F,E)$ y $\| (L+T)^{-1} \| \leq \dfrac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$.

Prueba:

i) Observe que $L - T = L \circ (I - L^{-1} \circ T)$ con $L^{-1} \circ T \in L(E)$. Luego $L - T$ será invertible $\Leftrightarrow$ L y $I - L^{-1} \circ T$ lo son. Como

$$\| L^{-1} \circ T \| \leq \| L^{-1} \| \, \| T \| < \| L^{-1} \| \, \| L^{-1} \|^{-1} = 1$$

Por el Teorema I.1.2-(i) tenemos que

$$(I - L^{-1} \circ T) \in GL(E) \;\Rightarrow\; (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \in L(E)$$

Además

$$\left\| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{1 - \| L^{-1} \circ T \|} \qquad (1)$$

Por hipótesis $L^{-1} \in L(F,E) \;\Rightarrow\; (I - L^{-1} \circ T) \circ L^{-1} \in L(F,E)$

$$(L - T) \circ \left[(I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} \right] = L \circ (I - L^{-1} \circ T) \circ (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} = L \circ L^{-1} = I$$

$$\left[(I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} \right] \circ (L - T) = (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} \circ L \circ (I - L^{-1} \circ T)$$

$$= (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ (I - L^{-1} \circ T) = I$$

$\therefore$ $L - T$ es invertible y $(L - T)^{-1} = (I - L^{-1} \circ T) \circ L^{-1} \in L(F,E)$

por (1)

$$\left\| (L - T)^{-1} \right\| \leq \left\| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \circ L^{-1} \right\| \leq \left\| (I - L^{-1} \circ T)^{-1} \right\| \, \| L^{-1} \| \leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \circ T \|}$$

$$\leq \frac{\| L^{-1} \|}{1 - \| L^{-1} \| \, \| T \|} = \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$$

$$\therefore \; \left\| (L - T)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|}$$

ii) Como $\| -T \| = \| T \| = \| L^{-1} \|^{-1}$, por (i) tenemos: $L - (-T) = L + T$ es invertible

$$(L + T)^{-1} = [L - (-T)]^{-1} \in L(F,E)$$

$$\left\| (L + T)^{-1} \right\| \leq \left\| (L - (-T))^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| -T \|} \leq \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - \| T \|} \qquad ■$$

I.2 EL ESPECTRO DE UN OPERADOR LINEAL COMPLEJO

DEFINICIÓN I.2.1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{C}$-espacios de Banach y $T \in L(E)$. El RESOLVENTE de T, denotado por $\rho(T)$, es el conjunto de los números complejos λ tales que $\lambda I - T \in GL(E)$.

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} / \lambda I - T \in GL(E)\}$$

EL ESPECTRO de T denotado por $\Sigma(T)$ es el complemento de $\rho(T)$ en $\mathbb{C}$.

$$\Sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$$

Nos proponemos demostrar que $\Sigma(T)$ es compacto y no vacío para todo $T \in L(E)$.

PROPOSICIÓN I.2.1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T \in L(E)$. Entonces $\rho(T)$ es abierto en $\mathbb{C}$.

Prueba: Sea $\lambda_0 \in \rho(T)$ fijo arbitrario. Por demostrar que:

$$\exists\ \varepsilon > 0 \ / \ B_\varepsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T)$$

Obsérvese que $\lambda I - T = \lambda I - \lambda_0 I + \lambda_0 I - T$. Queremos que $\lambda I - T \in GL(E)$. Por el Corolario al Teorema I.1.2, esto se consigue tomando

$$\| \lambda I - \lambda_0 I \| < \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$$

Considero $B_\varepsilon(\lambda_0)$ con $\varepsilon = \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$. Luego, sea $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$ entonces

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon = \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$$

$$\Rightarrow \| (\lambda - \lambda_0) I \| < \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1} \Rightarrow (\lambda - \lambda_0) I + (\lambda_0 I - T) = \lambda I - T \in GL(E)$$

$$\Rightarrow \lambda \in \rho(T) \Rightarrow B_\varepsilon(\lambda_0) \subseteq \rho(T), \text{ con } \varepsilon = \left\| (\lambda_0 I - T)^{-1} \right\|^{-1}$$

$$\therefore \ \rho(T) \text{ es abierto en } \mathbb{C}$$ ◘

PROPOSICIÓN I.2.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T \in L(E)$. Se cumple:

i) $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$

ii) $(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k$ (serie de Neumann)

iii) $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|T\|}$

Prueba:

i) como $|\lambda| > \|T\| \Rightarrow \|T\| < |\lambda| = \|(\lambda I)^{-1}\|^{-1} \Rightarrow \lambda I - T \in GL(E) \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$

$$\therefore \ |\lambda| > \|T\| \Rightarrow \lambda \in \rho(T)$$

ii) Por el Corolario al Teorema I.1.2

$$(\lambda I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda I)^{-(k+1)} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k$$

iii) $\|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \dfrac{1}{\|(\lambda I)^{-1}\|^{-1} - \|T\|} \leq \dfrac{1}{|\lambda| - \|T\|}$, pues $|\lambda| = \|(\lambda I)^{-1}\|^{-1}$

$$\therefore \ \|(\lambda I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|T\|}$$ ∎

COROLARIO I.1.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $T \in L(E)$. Entonces $\Sigma(T)$ es compacto en $\mathbb{C}$.

Prueba: Como $\rho(T)$ es abierto entonces $\Sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ es cerrado. Además, por la Proposición anterior, se tiene: $\mathbb{C} \setminus \overline{B_{\|T\|}(0)} \subseteq \rho(T)$. Entonces $\Sigma(T) \subseteq \overline{B_{\|T\|}(0)}$ entonces $\Sigma(T)$ es acotado, por lo tanto $\Sigma(T)$ es compacto en $\mathbb{C}$. ∎

Para probar que $\Sigma(T) \neq \phi$, necesitamos un resultado previo.

TEOREMA I.2.3 (Liouville). Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo y $g: \mathbb{C} \longrightarrow E$ función analítica.

i) $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} g(\lambda) = 0 \Rightarrow g$ es acotada.

ii) g es acotada $\Rightarrow g$ es una constante

Prueba:

i) Por hipótesis, $\exists M>0 \,/\, |\lambda| > M \Rightarrow \| g(\lambda) \| < 1,\ \varepsilon = 1$

Considero $\overline{B_M(0)}$ compacto, como g es analítica, se deduce que g es continua y por lo tanto

$$\exists \lambda_o \in \overline{B_M(0)} \,/\, \| g(\lambda) \| \leq \| g(\lambda_o) \| , \quad \forall \lambda \in \overline{B_M(0)}$$

Sea $k = \max \left\{ 1 , \| g(\lambda_o) \| \right\}$

$$\text{Si } \lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{B_M(0)} \Rightarrow \| g(\lambda) \| < 1 \leq k$$

$$\text{Si } \lambda \in \overline{B_M(0)} \Rightarrow \| g(\lambda) \| \leq \| g(\lambda_o) \| \leq k$$

En cualquier caso $\| g(\lambda) \| \leq k \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$, entonces g es acotado.

ii) Como g es analítica en $\mathbb{C}$ entonces $g(\lambda) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} e_k \lambda^k$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, donde $e_k \in E$. Sea $\varphi \in L(E, \mathbb{C})$, entonces

$$\varphi(g(\lambda)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(e_k \lambda^k) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(e_k) \lambda^k$$

con $\varphi(e_k) \in \mathbb{C}$, $\forall k$ entonces $\varphi \circ g$ es analítica en $\mathbb{C}$. (1)

Como g está acotada, tenemos

$$| \varphi \circ g(\lambda) | \leq \| \varphi \| \| g(\lambda) \| \leq \| \varphi \| M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$\Rightarrow \varphi \circ g$ es acotada. (2)

Luego, de (1) y (2) tenemos que

$\varphi \circ g: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es constante (por el Teorema de Liouville en C - ver anexo)

$\forall \varphi \in L(E, \mathbb{C})$,

Ahora supongamos que g no es constante, entonces

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \,/\, g(\lambda_1) \neq g(\lambda_2) \Rightarrow g(\lambda_1) - g(\lambda_2) \neq 0$$

Por el Teorema de Hahn-Banach (ver anexo).

$$\exists\, \widetilde{\varphi} \in L(E,\mathbb{C}) \,/\, \widetilde{\varphi}\left(g(\lambda_1)-g(\lambda_2)\right) = \left\| g(\lambda_1)-g(\lambda_2) \right\|$$

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}\left(g(\lambda_1)\right)-\widetilde{\varphi}\left(g(\lambda_2)\right) \neq 0 \;\Rightarrow\; (\widetilde{\varphi}\circ g)(\lambda_1) \neq (\widetilde{\varphi}\circ g)(\lambda_2)$$

$$\Rightarrow \widetilde{\varphi}\circ g \text{ no es constante } (\Rightarrow \mid \Leftarrow),$$

Por tanto g es constante ∎

Definamos:

$$R_T : \rho(T) \longrightarrow GL(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1}$$

PROPOSICIÓN I.2.4 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach en $\mathbb{C}$. Sea $T \in L(E)$ y

$\lambda_0 \in \rho(T)$. Si $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$, con $\varepsilon = \left\| R_T(\lambda_0) \right\|^{-1}$.

Entonces

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{-1} (\lambda-\lambda_0)^{-1} R_T(\lambda_0)^{k+1}$$

Prueba: En la demostración de la Proposición I.2.1 vimos que si $\lambda \in B_\varepsilon(\lambda_0)$, con $\varepsilon = \left\| R_T(\lambda_0) \right\|^{-1}$ entonces $\lambda I - T \in GL(E)$. Luego, por el Corolario al Teorema I.1.2 se tiene:

$$R_T(\lambda) = (\lambda I - T)^{-1} = \left((\lambda-\lambda_0)I + (\lambda_0 I - T)\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{-k} (\lambda_0 I - T)^{-(k+1)} \left((\lambda-\lambda_0)I\right)^{-1}$$

entonces

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{-k} (\lambda-\lambda_0)^{k} R_T(\lambda_0)^{-1}$$ ∎

TEOREMA I.2.5 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach en $\mathbb{C}$, y $T \in L(E)$. Entonces

$$\Sigma(T) \neq \phi$$

Prueba: Procediendo por contradicción. Supongamos que:

$$\Sigma(T) = \phi$$

entonces $\rho(T) = \mathbb{C}$, tenemos entonces la aplicación

$$R_T : \mathbb{C} \longrightarrow L(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_T(\lambda)$$

está definida en los complejos. Por la proposición anterior se tiene que R_T es analítica, y usando la serie de Neumann

$$R_T(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)^{-(k+1)} T^k \quad \text{y}$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} R_T(\lambda) = \lim_{|\lambda|\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} T^k = \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{|\lambda|\to\infty} \left(\lambda^{-(k+1)}\right) T^k = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{|\lambda|\to\infty} R_T(\lambda) = 0$$

Luego, por el Teorema I.2.3 (Liouville), $R_T(\lambda)$ es constante.

$$\Rightarrow R_T(0) = R_T(1) \quad \Rightarrow \quad 0I - T = 1I - T \quad \Rightarrow \quad 0 = 1 \quad (\Rightarrow \mid \Leftarrow)$$

$$\therefore \Sigma(T) \neq \phi$$ ∎

DEFINICION I.2.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach en $\mathbb{C}$, y sea $T \in L(E)$ el **radio espectral** de T, denotado por $r(T)$, se define como

$$r(T) = \text{máx}\{ |\lambda| \,/\, \lambda \in \Sigma(T) \}$$

Fórmula de Cauchy-Hadamard:

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\| T^n \|} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\| T^n \|} \quad , \quad \forall \; T \in L(E)$$

PROPOSICIÓN I.2.6 (Ecuación de la resolvente). Sea $T \in L(E)$ donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach complejo. Sea $\lambda, \mu \in \rho(T)$, se cumple

$$R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\mu - \lambda) R_T(\lambda) \circ R_T(\mu).$$

Prueba:

$$\begin{aligned} R_T(\lambda) - R_T(\mu) &= (\lambda I - T)^{-1} - (\mu I - T)^{-1} \\ &= (\lambda I - T)^{-1} \circ [I - (\lambda I - T) \circ (\mu I - T)^{-1}] \\ &= (\lambda I - T)^{-1} \circ [(\mu I - T) - (\lambda I - T)] \circ (\mu I - T)^{-1} \\ &= R_T(\lambda) \circ (\mu - \lambda) I \circ R_T(\mu) \\ &= (\mu - \lambda) R_T(\lambda) \circ R_T(\mu) \end{aligned}$$

$$\therefore R_T(\lambda) - R_T(\mu) = (\mu - \lambda) R_T(\lambda) \circ R_T(\mu).$$ ∎

PROPOSICIÓN I.2.7 Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach complejo, $T \in L(E)$, se cumple:

$$R_T(\lambda) \circ T = T \circ R_T(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \rho(T)$$

Prueba: Usando la serie de Newman

$$R_T(\lambda) \circ T = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)^{-(k+1)} T^k \right) \circ T = \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)^{-(k+1)} T^{k+1} = T \circ \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda)^{-(k+1)} T^k = T \circ R_T(\lambda)$$

$$\therefore R_T(\lambda) \circ T = T \circ R_T(\lambda) \quad , \quad \lambda \in \rho(T).$$ ■

I.3 DESCOMPOSICIÓN ESPECTRAL

Antes de enunciar y demostrar el Teorema conocido como la "**descomposición espectral**" necesitamos un resultado previo sobre los llamados "**operadores de proyección**"

LEMA I.3.1 Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach y $P \in L(E)$ un operador tal que $P^2 = P$. Entonces $N(P)$ e $Im(P)$ son subespacios cerrados de E y $E = N(P) \oplus Im(P)$.

Prueba: Recordemos que

$$N(P) = \{x \in E \,/\, Px = 0\} \text{ e}$$

$$Im(P) = \{y \in E \,/\, \exists x \in E, Px = y\},$$

entonces $Px = Py \Rightarrow Py = y$. Recíprocamente: $y = Py \Rightarrow y \in Im(P) \Rightarrow Im(P) = \{x \in E \,/\, Px = x\}$. Demostraremos que $N(P)$ y $Im(P)$ son cerrados

En efecto, sea $x \in \overline{N(P)}$ entonces

$$\exists \{x_n\} \subseteq N(P) \,/\, x_n \longrightarrow x \Rightarrow Px_n \longrightarrow Px \Rightarrow 0 \longrightarrow Px \Rightarrow x=0 \Rightarrow x \in N(P)$$

$\therefore$ $N(P)$ es cerrado.

$x \in \overline{Im(P)} \Rightarrow \exists \{x_n\} \subseteq Im(P) \,/\, x_n \longrightarrow x \Rightarrow Px_n \longrightarrow Px \Rightarrow x_n \longrightarrow Px$, por unicidad del límite: $Px = x \Rightarrow x \in Im(P)$

$\therefore$ $Im(P)$ es cerrado.

Ahora probaremos que $E = N(P) \oplus Im(P)$. En efecto, sea $x \in E$ entonces

$$x = (x - Px) + Px \Rightarrow P(x - Px) = Px - P^2x = Px - Px = 0 \text{. Luego}$$

$$x - Px \in N(P) \text{ y } P(Px) = P^2x = Px \Rightarrow Px \in Im(P).$$

Luego, $x \in N(P) + Im(P) \Rightarrow E \subseteq N(P) + Im(P)$ y como $N(P) + Im(P) \subseteq E$

$$\Rightarrow E = N(P) + Im(P) \tag{1}$$

$x \in N(P) \cap Im(P) \Rightarrow x \in N(P) \wedge x \in Im(P) \Rightarrow Px=0 \wedge Px=x \Rightarrow x=0,$

$$\therefore N(P) \cap Im(P) = \{0\} \tag{2}$$

Luego de (1) y (2) tenemos

$$E = N(P) \oplus Im(P).$$

■

TEOREMA I.3.2 (Descomposición espectral) Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach complejo y $T \in L(E)$ tal que $\Sigma(T) = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, en donde $\Sigma_1 \subseteq B_1(0)$ y $\Sigma_2 = \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Entonces, existe una descomposición de E en subespacios cerrados E_1, E_2 tal que

i) $E = E_1 \oplus E_2$.

ii) $T_1 = T|_{E_1} \in L(E_1) \wedge T_2 = T|_{E_2} \in L(E_2)$

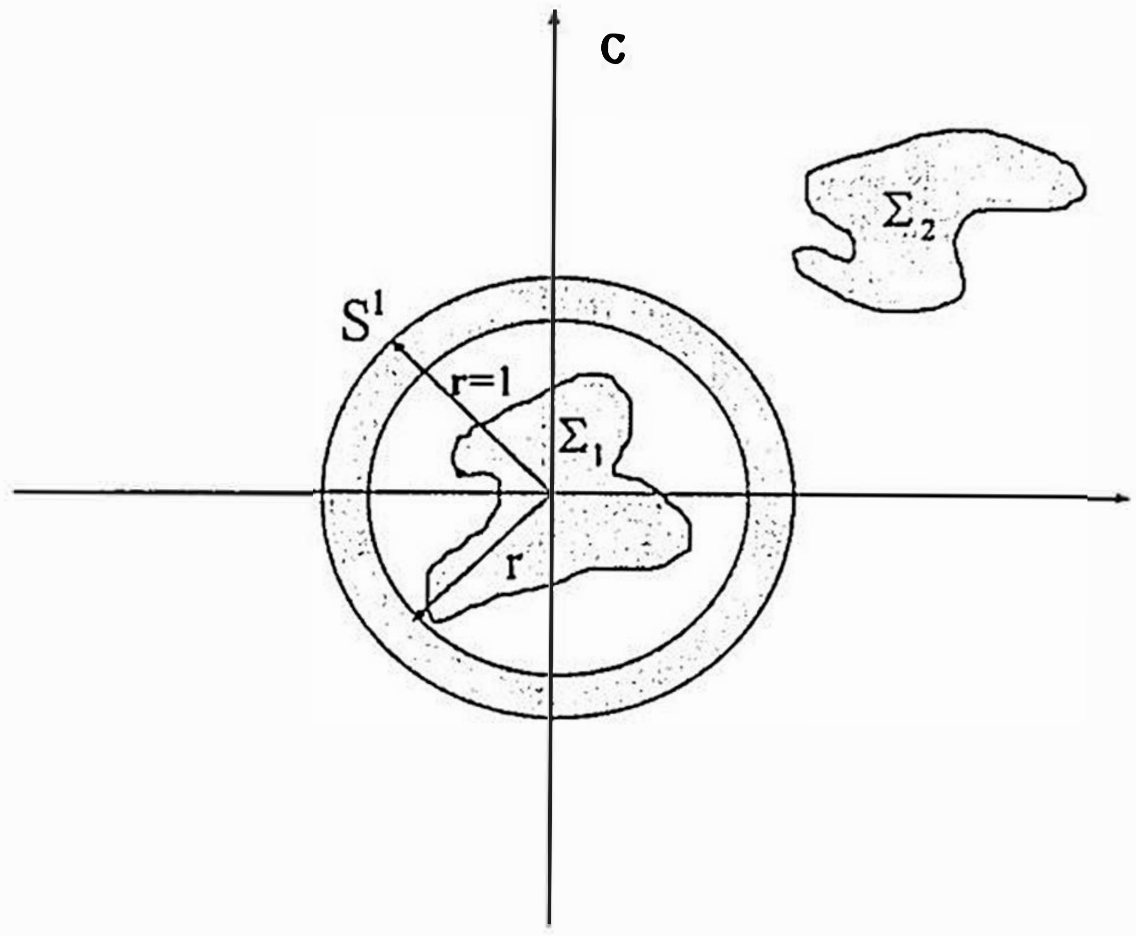
iii) $\Sigma(T_1) = \Sigma_1 \wedge \Sigma(T_2) = \Sigma_2$

Prueba: La idea es construir un operador $P \in L(E)$ que satisfaga la hipótesis del Lema I.2.8, de ésta manera se cumplirá la parte (i), las otras dos condiciones se deducirán de la forma del operador P.

Obsérvese que por hipótesis se tiene $\Sigma(T) \cap S^1 = \phi$ entonces $S^1 \subseteq \rho(T)$,luego si $|\lambda| = 1 \Rightarrow \exists R_T(\lambda)$. Defino entonces:

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda) d\lambda$$

Como $R_T(\lambda) \in L(E)$, $\forall \lambda \in S^1$ entonces P es lineal.



Ahora probemos que P es acotado

$$\| P \| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda \right\| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \| R_T(\lambda) \| d\lambda \qquad (1)$$

como

$$R_T : S^1 \longrightarrow L(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_T(\lambda)$$

es analítica, entonces es continua y desde que S^1 es compacto

$$\exists\, \lambda_0 \,/\, \| R_T(\lambda) \| \leq \| R_T(\lambda_0) \| \;, \quad \forall\, \lambda \in S^1$$

remplazando este resultado en (1). Tenemos

$$\| P \| \leq \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \| R_T(\lambda_0) \| d\lambda = \frac{1}{2\pi} \| R_T(\lambda_0) \| \int_{|\lambda|=1} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \| R_T(\lambda_0) \| 2\pi = \| R_T(\lambda_0) \|$$

Entonces como P es acotado entonces P es continua, por tanto $P \in L(E)$. Como $\Sigma_1 = \Sigma(T) \cap \overline{B_1(0)}$ es cerrado, compacto y está contenido $\Sigma(T)$, entonces Σ_1 es compacto; se tiene que S^1 es compacto, entonces $d(\Sigma_1, S^1) > 0$, luego, $\exists\; r > 0$ tal que el anillo

$$A(r,1) = \{ z \in \mathbb{C} \,/\, r \leq \| z \| < 1 \} \subseteq \rho(T) \;,$$

De ésta manera, como $R_T(\lambda)$ es analítica $\forall\, \lambda \in \rho(T)$, podemos definir indistintamente

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu$$

Probaremos que P es una proyección:

$$P \circ P = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)d\lambda \right) \circ \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu \right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\left(\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)d\mu\right)d\lambda = \frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\left(\int_{|\mu|=r} R_T(\lambda)\circ R_T(\mu)d\mu\right)d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2}\left[\int_{|\lambda|=1}\left(\int_{|\mu|=r}\left(\tfrac{d\mu}{\mu-\lambda}\right)\right)R_T(\lambda)d\lambda - \int_{|\mu|=r}\left(\int_{|\lambda|=1}\left(\tfrac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)d\mu\right)R_T(\mu)d\lambda\right] \qquad (2)$$

Como $|\lambda| = 1 > r$, λ es un punto exterior al círculo de radio r centrado en cero. Luego el número de vueltas de dicho círculo alrededor de λ es cero (ver anexo), es decir

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r}\left(\frac{d\mu}{\mu-\lambda}\right) = 0 \qquad (3)$$

Por otro lado μ, es un punto interior a S^1, luego el número de vueltas de S^1 alrededor de μ es 1, es decir[3]

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\left(\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right) = 1 \qquad (4)$$

Remplazando (3) y (4) en (2)

$$P \circ P = \frac{1}{(2\pi i)^2}\left[0 + \int_{|\mu|=r} R_T(\mu)\, d\mu\right] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\mu|=r} R_T(\mu)\, d\mu = P$$

$\therefore$ P es una proyección

Por el Lema I.2.8, tenemos $E = N(P) \oplus Im(P)$ con $N(P)$ e $Im(P)$ subespacios cerrados de E. Obsérvese ademas que:

$$P \circ T = \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\, d\lambda\right)\circ T = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\circ T\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} T\circ R_T(\lambda)\, d\lambda$$

$$= T\circ\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} R_T(\lambda)\, d\lambda\right) = T\circ P \quad ,$$

$$\therefore\ P\circ T = T \circ P.$$

Con ésta propiedad probaremos que

$$T|_{N(P)} \in L(N(P)) \quad \wedge \quad T|_{Im(P)} \in L(Im(P))$$

En efecto

$$x \in N(P) \Rightarrow P(T(x)) = P\circ T(x) = T\circ P(x) = T(P(x)) = T(0) = 0 \Rightarrow T(x) \in N(P)$$

$$x \in Im(P) \Rightarrow P(T(x)) = P\circ T(x) = T\circ P(x) = T(P(x)) = T(x) \Rightarrow T(x) \in Im(P)$$

Resta probar (iii), para ello definimos:

$$H = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1} \frac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\, d\lambda\ , \text{ en donde } \mu \notin S^1$$

[3] Usamos aquí el teorema de Cauchy para una integral cerrada. Vease M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makarenko - [9]

Se tiene que:

$$H\circ\left(\mu I-T\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{R_T(\lambda)\circ(\mu I-T)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\,. \tag{5}$$

$$\frac{R_T(\lambda)\circ\left(\mu I-T\right)}{\mu-\lambda}=\frac{(\lambda I-T)^{-1}\circ\left(\mu I-\lambda I+\lambda I-T\right)}{\mu-\lambda}=-(\lambda I-T)^{-1}+\left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I$$

$$=-R_T(\lambda)+\left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I$$

Reemplazamos este resultado en (5)

$$H\circ\left(\mu I-T\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\left(-R_T(\lambda)+\left(\tfrac{1}{\mu-\lambda}\right)\circ I\right)d\lambda$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}R_T(\lambda)d\lambda+\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)\circ I \tag{6}$$

Luego, para

$$\left(\mu I-T\right)\circ H=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{(\mu I-T)\circ R_T(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\lambda \tag{7}$$

en forma similar a lo anterior se llega a:

$$\left(\mu I-T\right)\circ H=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}R_T(\lambda)d\lambda+\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{d\lambda}{\mu-\lambda}\right)\circ I \tag{8}$$

De (6) y de (8) se tiene $H\circ\left(\mu I-T\right)=\left(\mu I-T\right)\circ H$. Luego

$$H\circ\left(\mu I-T\right)=\left(\mu I-T\right)\circ H=\begin{cases}I-P & ,\quad \text{si } |\mu|<1\\ -P & ,\quad \text{si } |\mu|>1\end{cases} \tag{9}$$

Además

$$H\circ P=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right)\circ\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r}R_T(\alpha)\,d\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\int_{|\alpha|=r}R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)d\alpha\right)d\lambda \tag{10}$$

se tiene

$$R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)=\frac{R_T(\lambda)-R_T(\alpha)}{\lambda-\alpha}=\frac{-\left(R_T(\alpha)-R_T(\lambda)\right)}{-(\alpha-\lambda)}=R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)$$

$$\therefore\; R_T(\lambda)\circ R_T(\alpha)=R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)$$

Reemplazando en (10)

$$H\circ P=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_{|\lambda|=1}\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\int_{|\alpha|=r}R_T(\alpha)\circ R_T(\lambda)\,d\alpha\right)d\lambda$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\alpha|=r}R_T(\alpha)\,d\alpha\right)\circ\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\lambda|=1}\frac{R_T(\lambda)}{\mu-\lambda}\,d\lambda\right)=P\circ H$$

$$\therefore\ H \circ P = P \circ H$$

Luego

$$x \in N(P) \Rightarrow P(H(x)) = P \circ H(x) = H \circ P(x) = H(P(x)) = H(0) = 0 \Rightarrow H(x) \in N(P)$$

$$x \in Im(P) \Rightarrow P(H(x)) = P \circ H(x) = H \circ P(x) = H(P(x)) = H(x) \Rightarrow H(x) \in Im(P)$$

De esta manera

$$H|_{N(P)} \in L(N(P)) \ \wedge \ H|_{Im(P)} \in L(Im(P))$$

Luego por lo anterior y por (9)

$$x \in N(P) \Rightarrow H \circ (\mu I - T)(x) = (\mu I - T) \circ H(x) = (I - P)(x) = I(x) - P(x) = I(x),$$

si $|\mu| < 1$, $H|_{N(P)} \in L(N(P))$ es la inversa de $(\mu I - T)|_{N(P)} \in L(N(P))$

$$\mu I - T \in GL(N(P)) \Rightarrow \mu \in \rho(T_1) \ \text{con} \ T_1 = T|_{N(P)}$$

$$\Rightarrow \Sigma(T_1) \subseteq C \setminus \overline{B_1(0)}$$

si $|\mu| > 1$, $x \in Im(P) \Rightarrow H \circ (\mu I - T)(x) = (\mu I - T) \circ H(x) = -P(x) = -x$

$$\Rightarrow H|_{Im(P)} \in L(Im(P)) \text{ es la inversa de } (\mu I - T)|_{Im(P)} \in L(Im(P))$$

$$\mu I - T \in GL(Im(P)) \Rightarrow \mu \in \rho(T_2) \ \text{con} \ T_2 = T|_{Im(P)}$$

$$\Rightarrow \Sigma(T_1) \subseteq B_1(0)$$

Se ha denotado $T_1 = T|_{N(P)}$ y $T_2 = T|_{Im(P)}$, ahora también denotemos a $E_1 = Im(P)$ y $E_2 = N(P)$, luego tendríamos que: $E = E_1 \oplus E_2$ y $T_1 \in L(E_1)$, $T_2 \in (E_2)$. Luego, como $\Sigma(T_2) \subseteq C \setminus \overline{B_1(0)} \Rightarrow \Sigma(T_1) \subseteq B_1(0)$ con T_1 y T_2 ya definidos.

Por último, como

$$\rho(T) = \rho(T_1) \cap \rho(T_2) \Rightarrow \Sigma(T) = \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)$$

tenemos

$$\Sigma_1 = \Sigma(T) \cap B_1(0) = [\Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)] \cap B_1(0)$$

$$= [\Sigma(T_1) \cap B_1(0)] \cup [\Sigma(T_2) \cap B_1(0)] = \Sigma(T_1) \cup \phi = \Sigma(T_1)$$

$$\Sigma_2 = \Sigma(T) \cap (C \setminus \overline{B_1(0)}) = [\Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)] \cap (C \setminus \overline{B_1(0)})$$

$$= [\Sigma(T_1) \cap (C \setminus \overline{B_1(0)})] \cup [\Sigma(T_2) \cap (C \setminus \overline{B_1(0)})]$$

$$= \phi \cup \Sigma(T_2) = \Sigma(T_2) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA I.3.3 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo y sea $T \in L(E)$ tal que $\Sigma(T) \subseteq B_1(0)$. Entonces existe una norma $\|\cdot\|$ equivalente a $\|\cdot\|$ y existe $a \in]0, 1[$ tal que:

$$\| Tx \|_1 \leq a \| x \|_1 \quad , \quad \forall x \in E$$

Prueba: Sabemos que $r(T) = \max\{ |\lambda| \,/\, \lambda \in \Sigma(T) \}$, y como $\Sigma(T) \subseteq B_1(0)$ entonces $r(T) < 1 \Rightarrow \exists\, a \in \mathbf{R} / 0 \leq r(T) < a < 1$. Sabemos que:

$$r(T) = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\| T^n \|} \quad \Rightarrow \quad \exists N \in \mathbf{N} / \sqrt[N]{\| T^N \|} < a \quad \Rightarrow \quad a^{-N} \| T^N \| < 1$$

Luego;

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(a^{-N} \| T^N \| \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-Nk} \| T^N \|^k$$

Afirmación: $\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k \| < \infty$

En efecto, por el algoritmo de Euclides $k = jN+i$, $0 \leq i \leq N-1$, se tiene que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k \| = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a^{-(jN+i)} \| T^{jN+i} \| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a^{-jN-i} \| T^N \|^j \, \| T \|^i$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} \left(a^{-i} \| T \|^i \right) a^{-jN} \| T^N \|^j$$

Considerando $C = \max_{0 \leq i \leq N-1} \left\{ a^{-i} \| T \|^i \right\}$ entonces

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k \| \leq C \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{N-1} a^{-jN} \| T^N \|^j = CN \sum_{j=0}^{\infty} a^{-jN} \| T^N \|^j < \infty$$

$$\therefore \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k \| < \infty$$

Luego, defino:

$$\|\cdot\|_1 : E \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$\lambda \longrightarrow \| x \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \|$$

Afirmo que $\|\cdot\|_1$ es una norma. En efecto

i) $\| x \|_1 \geq a^{-0} \| T^0 x \| = \| x \| \geq 0 \Rightarrow \| x \|_1 \geq 0$, $\forall x \in E$

ii) $\| x \|_1 = 0 \Leftrightarrow a^{-0} \| T^0 x \| \leq \| x \|_1 = 0 \Leftrightarrow \| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $\forall x \in E$

iii) $\| \lambda x \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k(\lambda x) \| = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} |\lambda| \| T^k x \| = |\lambda| \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \| = |\lambda| \| x \|_1$,

$$\therefore \| \lambda x \|_1 = |\lambda| \| x \|_1 \ , \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in E$$

iv) $\| x + y \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k(x+y) \| \le \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \left(\| T^k x \| + \| T^k y \| \right)$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \| + \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k y \| = \| x \|_1 + \| y \|_1$$

$$\therefore \| x + y \|_1 \le \| x \|_1 + \| y \|_1 \ , \ \forall x, y \in E$$

Para probar la equivalencia entre $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|$ observe que ya demostramos $\| x \| \le \| x \|_1$, $\forall x \in E$. Por otro lado:

$$\| x \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \| \le \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k \| \| x \| = M \| x \|$$

$$\therefore \| x \| \le \| x \|_1 \le M \| x \| \ , \ \forall x \in E$$

Por último

$$\| Tx \|_1 = \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k(Tx) \| \le \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} a^{-1} a \| T^{k+1} x \| = a \sum_{k=0}^{\infty} a^{-(k+1)} \| T^{k+1} x \|$$

$$\le a \sum_{k=1}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \| \le a \sum_{k=0}^{\infty} a^{-k} \| T^k x \| = a \| x \|_1 \ , \ \forall x \in E$$

$$\therefore \| Tx \|_1 \le a \| x \|_1 \ , \ \forall x \in E, \quad a \in]0,1[$$ ■

I.4. EL ESPECTRO DE UN OPERADOR LINEAL REAL

En la sección anterior se ha trabajado con operadores lineales continuos definidos en un espacio de Banach complejo y se halló resultados interesantes; ahora queremos que estos resultados obtenidos también sean válidos cuando se trabaja con operadores lineales continuos definidos en espacios de Banach reales. Para ello seguiremos el siguiente esquema; dado un espacio de Banach real le asociamos un espacio de Banach complejo y dado un operador lineal y continuo definido en el espacio de Banach real, le asociaremos un operador lineal y continuo definido en un espacio de Banach complejo construido anteriormente. Estas construcciones serán hechas de tal manera que la norma del nuevo operador, así como su resolvente, coincida con la norma y la resolvente antiguo.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, le asociamos un $\mathbb{C}$-espacio de Banach construido de la misma forma como $\mathbb{C}$ se construye a partir de $\mathbb{R}$.

DEFINICIÓN I.4.1 Sea E un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, el **complexificado** de E denotado por Ec , es el conjunto

$$E_c = \left\{ x + iy \ / \ x, y \in E \right\}$$

en donde $x + iy = x' + iy' \Leftrightarrow x = x' \wedge y = y'$

A continuación dotaremos a Ec de una estructura de $\mathbb{C}$-espacio vectorial

TEOREMA I.4.1 En Ec definimos las operaciones de suma y producto por un escalar:

$$+ : E_c \times E_c \longrightarrow E_c$$

$$\left(x + iy, x' + iy'\right) \longrightarrow \left(x + iy\right) + \left(x' + iy'\right) = (x + x') + i(y + y')$$

$$\bullet : \mathbb{C} \times E_c \longrightarrow E_c$$

$$\left(\alpha + i\beta, x + iy\right) \longrightarrow \left(\alpha + i\beta\right)\left(x + iy\right) = \left(\alpha x - \beta y\right) + i\left(\alpha y + \beta x\right)$$

Entonces $(E_c, +, \mathbb{C}, \bullet)$ es un espacio vectorial

TEOREMA I.4.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach real, entonces $(E_c, \|\cdot\|_C)$ es también un espacio de Banach, en donde:

$$\left\| (x + iy) \right\|_C = \max \left\{ \| x \|, \|y\| \right\}$$

Prueba: Primero demostraremos que $\|\cdot\|_C$ es una norma en $\mathbb{C}$.

N1) $\| z \|_C \geq 0$. En efecto, como $z = x + iy$, entonces

$$\| z \|_C = \left\| (x + iy) \right\|_C = \max \left\{ \| x \|, \|y\| \right\} \geq \| x \| \ \wedge \ \|y\|,$$

se tiene

$$\| x \| \geq 0 \quad \wedge \quad \| y \| \geq 0$$

$$\therefore \ \| z \|_C \geq 0 \ \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$$

N2) $\| z \|_C = 0 \Leftrightarrow z = \theta$. En efecto, como $z = x + iy$, $x,y \in E$, $z \in Ec$

$$\Rightarrow \| (x+iy) \|_C = \max \{ \| x \| , \| y \| \} = 0 \geq \| x \| \ \wedge \ \| y \| \Leftrightarrow \| x \| = 0 \ \wedge \ \| y \| = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \wedge \ y = 0 \Leftrightarrow z = 0 + i0 = \theta \Leftrightarrow z = \theta$$

N3) $\| \lambda z \|_C = | \lambda | \, \| z \|_C \quad \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$

$$| \lambda | \, \| z \|_C = | \lambda | \max \{ \| x \| , \| y \| \} = \max \{ | \lambda | \, \| x \| , | \lambda | \, \| y \| \}$$

$$= \max \{ \| \lambda x \| , \| \lambda y \| \} = \| \lambda x + i \lambda y \|_C$$

$$= \| \lambda (x+iy) \|_C = \| \lambda z \|_C \quad , \ \forall z \in Ec \ , \ x,y \in E$$

N4) $\| z + z' \|_C \leq \| z \|_C + \| z' \|_C \ , \ \forall z,z' \in Ec$

$$\| z+z' \|_C \leq \| (x+iy)+(x'+iy') \|_C = \| (x+x')+i(y+y') \|_C$$

$$= \max \{ \| (x+x') \| , \| (y+y') \| \} \tag{1}$$

$$\| (x+x') \| \leq \max \{ \| x \| , \| y \| \} + \max \{ \| x' \| , \| y' \| \} = \| z \|_C + \| z' \|_C$$

$$\| (y+y') \| \leq \max \{ \| x \| , \| y \| \} + \max \{ \| x' \| , \| y' \| \} = \| z \|_C + \| z' \|_C$$

$$\Rightarrow \max \{ \| (x+x') \| , \| (y+y') \| \} \leq \| z \|_C + \| z' \|_C \ ,$$

y reemplazando en (1):

$$\| z + z' \|_C \leq \| z \|_C + \| z' \|_C \quad , \ \forall z,z' \in Ec$$

Luego ($E_c, \|\cdot\|_C$) es un espacio vectorial normado.

Sea $\{z_n\} \subseteq E_c$ una sucesión de Cauchy en Ec , $z_n = x_n + iy_n$, con $x_n, y_n \in E$, $\forall n \in \mathbf{N}$. Probaremos que $\{x_n\} \subseteq E_c$, $\{y_n\} \subseteq Ec$ son de Cauchy. En efecto; sea

$$\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{Z}^+ / \ n,m \geq N \Rightarrow \| z_n - z_m \|_C \leq \varepsilon$$

$$\| z_n - z_m \|_C = \| (x_n + iy_n) - (x_m + iy_m) \|_C = \| (x_n - x_m) - i(y_n - y_m) \|_C$$

$$= \max\left\{ \|x_n - x_m\|, \|y_n - y_m\| \right\} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \exists N \in \mathbf{Z}^+ / \; n,m \geq N \;\Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon \;\wedge\; \|y_n - y_m\| < \varepsilon$$

por lo tanto $\{x_n\} \subseteq E_c$, $\{y_n\} \subseteq E_c$ son de Cauchy. Como $(E, \|.\|)$ es de Banach entonces

$$\exists x,y \in E \,/\, x_n \longrightarrow x \;\wedge\; y_n \longrightarrow y$$

Resta probar que: $z_n \longrightarrow z$, con $z = x + iy$. En efecto

$$\forall\, \varepsilon>0, \exists N_1 \in \mathbf{Z}^+/n \geq N_1 \;\Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$$

$$\exists N_2 \in \mathbf{Z}^+/m \geq N_2 \;\Rightarrow \|y_n - y\| < \varepsilon$$

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$

Si $n \geq N \;\Rightarrow\; \|x_n - x\| < \varepsilon \;\wedge\; \|y_n - y\| < \varepsilon \;\Rightarrow\; \max\left\{ \|x_n - x\|, \|y_n - y\| \right\} < \varepsilon$

$$\Rightarrow \left\| (x_n - x) + i(y_n - y) \right\|_c \Rightarrow \left\| (x_n + iy_n) - (x - iy) \right\|_c \;\Rightarrow\; \|z_n - z\|_c < \varepsilon$$

$$\exists z \in E_c \,/\, z_n \longrightarrow z \;\Rightarrow\; (E_c, \|.\|_c) \text{ es de Banach}$$ ■

Como $(E_c, \|\cdot\|_c)$ es un espacio de Banach, podemos considerar $L(E_c)$ el espacio de aplicaciones continuas y lineales en E_c.

A continuación asociaremos a cada $T \in L(E)$, un operador $T_c \in L(E_c)$

TEOREMA I.4.3 Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach real y $(E_c, \|\cdot\|_c)$ su complijificado. Sea $T \in L(E)$, definimos T_c por

$$\begin{aligned} T_c : E_c &\longrightarrow E_c \\ (x + iy) &\longrightarrow T_c(x+iy) = Tx + iTy \end{aligned}$$

Entonces $T_c \in L(E_c)$ y $\|T_c\| = \|T\|$

Prueba:

Primero probaremos que T_c es lineal

$$Tc(z + z') = Tc[(x + iy) + (x' + iy')] = Tc[(x + x') + (y+y')]$$
$$= T(x + x') + iT(y +y') = (Tx + Tx') + i(Ty +T y')$$
$$= (Tx + iTy) + (Tx' + iTy') = Tc(x + iy) + Tc(x' + iy')$$
$$= Tc(z) + Tc(z') \ , \quad \forall z,z' \in Ec$$

$$Tc(\lambda z) = Tc[(\alpha + i\beta)(x + iy)] = Tc[(\alpha x - \beta y) + i(\alpha y + \beta x)]$$
$$= T(\alpha x - \beta y) + iT(\alpha y + \beta x) = \alpha Tx - \beta Ty)+i\alpha Ty + i\beta Tx)$$
$$= (\alpha + i\beta)(Tx + iTy) = \lambda Tc(z) \ , \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} , \ z \in Ec$$

$$\therefore \ Tc \text{ es lineal}$$

Ahora probaremos la continuidad:

$$\| Tc(z) \|_{E_C} = \| Tc(x+iy) \|_{E_C} = \| Tx+iTy \|_{E_C} = \max \{ \| Tx \| , \| Ty \| \} \qquad (1)$$

como $\| Tx \| \leq \| T \| \| x \| \ \wedge \ \| Ty \| \leq \| T \| \| y \|$, entonces

$$\max \{ \| Tx \| , \| Ty \| \} \leq \max \{ \| T \| \| x \| , \| T \| \| y \| \} = \| T \| \max \{ \| x \| , \| y \| \}$$
$$\| T \| \| x+iy \|_{E_C} = \| T \| \| z \|_{E_C} ,$$

luego en (1)

$$\| Tc(z) \|_{E_C} \leq \| T \| \| z \|_{E_C} , \ , \quad \forall z \in Ec$$

$$\therefore \ Tc \in L(Ec) \ \text{ y } \ \| Tc \| \leq \| T \| \qquad (2)$$

Finalmente, sea $x \in E$ entonces $x + i0 \in Ec$, luego

$$\| Tx \| = \max \{ \| Tx \| , \| T0 \| \} = \| Tx + iT0 \|_{E_C} = \| Tc(x+i0) \|_{E_C}$$
$$\leq \| Tc \| \| x + i0 \|_{E_C} = \| Tc \| \max \{ \| x \| , \| 0 \| \} = \| Tc \| \| x \|$$
$$\therefore \ \| Tx \| \leq \| Tc \| \| x \| \ , \quad \forall x \in E \ \Rightarrow \ \| T \| \leq \| Tc \|$$

por lo tanto, de (2) y del resultado anterior se tiene $\| Tc \| = \| T \|$ ■

De esta manera, dado $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach real y $T \in L(E)$, podemos asociar $Tc \in L(Ec)$; tenemos de este modo una aplicación de $L(E)$ a $L(Ec)$

TEOREMA I.4.4 Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach real, definimos $\mathcal{C}$ como:

$$\begin{aligned}\mathcal{C} : L(E) &\longrightarrow L(Ec)\\ T &\longrightarrow \mathcal{C}(T) = Tc\end{aligned}$$

La aplicación $\mathcal{C}$ satisface los siguientes propiedades:

i) $\mathcal{C}(T + T') = \mathcal{C}(T) + \mathcal{C}(T')$, $\forall T, T' \in L(E)$

ii) $\mathcal{C}(\alpha T) = \alpha\ \mathcal{C}(T)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall T \in L(E)$

iii) $\mathcal{C}(T \circ T') = \mathcal{C}(T) \circ \mathcal{C}(T')$, $\forall T, T' \in L(E)$

iv) $\| \mathcal{C}(T) \| = \| T \|$, $\forall T \in L(E)$

Prueba:

i) Sean $T, T' \in L(E)$

$$\begin{aligned}\mathcal{C}(T+T')(z) &= \mathcal{C}(T + T')(x + iy) = (T + T')(x) + i(T + T')(y)\\ &= (Tx + T'x) + i(Ty + T'y) = (Tx + iTy) + (T'x + iT'y)\\ &= \mathcal{C}(T)(x + iy) + \mathcal{C}(T')(x + iy) = \mathcal{C}(T)(x + iy) + \mathcal{C}(T')(x + iy)\\ &= [\mathcal{C}(T) + \mathcal{C}(T')](x + iy)\\ &= [\mathcal{C}(T) + \mathcal{C}(T')](z) \ , \ \forall z \in Ec\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{C}(T + T') = \mathcal{C}(T) + \mathcal{C}(T')$, $\forall T, T' \in L(E)$

ii) $\mathcal{C}(\alpha T)(z) = \mathcal{C}(\alpha T)(x + iy) = (\alpha T)(x) + i(\alpha T)(y) = \alpha T(x) + i\alpha T(y)$

$$= (\alpha + i0)(Tx + iTy) = \alpha\, \mathcal{C}(T)(x + iy) = [\alpha\, \mathcal{C}(T)](z) \ , \ \forall z \in Ec$$

$\therefore\ \mathcal{C}(\alpha T) = \alpha\, \mathcal{C}(T)$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall T \in L(E)$

iii) $\mathcal{C}(T \circ T')(z) = \mathcal{C}(T \circ T')(x + iy) = (T \circ T')(x) + i(T \circ T')(y)$

$$\begin{aligned}&= T(T'x) + iT(T'y) = \mathcal{C}(T)(T'x + iT'y) = \mathcal{C}(T)[\mathcal{C}(T')(x + iy)]\\ &= \mathcal{C}(T) \circ \mathcal{C}(T')(z) \ , \ \forall z \in Ec\end{aligned}$$

$\therefore\ \mathcal{C}(T \circ T') = \mathcal{C}(T) \circ \mathcal{C}(T')$, $\forall T, T' \in L(E)$

iv) $\| \mathcal{C}(T) \| = \| Tc \| = \| T \|$, $\forall T \in L(E)$

DEFINICION I.4.2 Sea $(E, \|.\|)$ espacio de Banach real y $T \in L(E)$. Definimos EL RESOLVENTE de T, denotado $\rho(T)$ como el resolvente de T_c:

$$\rho(T) = \rho(T_c)$$

De ésta manera, hemos logrado nuestro objetivo. Como $T_c \in L(E_c)$, siendo $(E_c, \|\cdot\|_c)$ un espacio de Banach, todos los resultados obtenidos en la sección anterior son válidos para $T \in L(E)$ por medio de la Definición I.4.2. De ahora en adelante, no haremos distinción entre espacios de Banach reales y complejos.

CAPÍTULO II

OPERADORES HIPERBÓLICOS

II.1 OPERADORES LINEALES HIPERBÓLICOS EN ESPACIOS DE BANACH

DEFINICIÓN II.1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $T \in L(E)$.

$$T \text{ es } \textbf{hiperbólico} \Leftrightarrow \Sigma(T) \cap S^1 = \phi$$

Notación: Denotaremos a Hip(E) al conjunto de los operadores hiperbólicos en $(E, \|\cdot\|)$

$$\text{Hip}(E) = \{T \in GL(E) \,/\, T \text{ es hiperbólico}\}$$

El siguiente Teorema es el principal de ésta sección, lo cual nos dice que todo operador lineal hiperbólico descompone al espacio de Banach donde está definido en dos subespacios cerrados e invariantes el cual es una contracción si lo restringimos a uno de ellos y una dilatación si lo restringimos al otro.

Enunciemos los Teoremas que garantizan la validez de lo mencionado

TEOREMA II.1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in \text{Hip}(E)$. Entonces, existen dos subespacios cerrados E_u y E_s, una norma $\|\cdot\|_*$ equivalente a la norma inicial $\|\cdot\|$ y una constante $a \in]\,0\,,\,1\,[$, tal que

i) $E = E_u \oplus E_s$.

ii) $L_u = L|_{E_u} \in L(E_u)$ y $\|L_u^{-1}x_u\|_u \leq a\|x_u\|_u$, $\forall x_u \in E_u$

$L_s = L|_{E_s} \in L(E_s)$ y $\|L_s x_s\|_s \leq a\|x_s\|_s$, $\forall x_s \in E_s$

iii) $\|x\|_* = \max\{\|x_u\|, \|x_s\|\}$, $x = x_u + x_s, x_s \in E_s, x_u \in E_u$

Prueba: Como $L \in Hip(E). \Rightarrow \Sigma(L) \cap S^1 = \phi$, denotemos

$$\Sigma_s = \Sigma(L) \cap B_1(0) \quad , \quad \Sigma_u = \Sigma(L) \cap \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$$

Entonces por el Teorema de la descomposición espectral, existen subespacios cerrados E_u y E_s de E tal que

$$E = E_u \oplus Es \ , \ L_u = L|_{E_u} \in L(E_u) \ , \ L_s = L|_{E_s} \in L(E_s) \ \text{y}$$

$$\Sigma_u = \Sigma(L_u) \ \text{ y } \ \Sigma_s = \Sigma(L_s)$$

Como $\Sigma(L_u) \subseteq B_1(0)$, por el Teorema I.3.3 existe una $\|\cdot\|_1$ norma en E_u equivalente a la norma $\|\cdot\|$ restringida a E_s, y existe a_s, $0 < a_s < 1$ tal que

$$\| L_s x_s \|_s \leq a \| x_s \|_s \quad , \quad \forall x_s \in E_s$$

Como $\Sigma(L_u) \subseteq \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$ entonces $\Sigma(L_u^{-1}) \subseteq B_1(0)$ y nuevamente por el Teorema I..3.3 $\exists \ \|\cdot\|_u$ norma en E_u equivalente a la norma $\|\cdot\|$ restringida a E_u y existe a_u, $0 < a_u < 1$, tal que

$$\| L_u^{-1} x_u \|_u \leq a \| x_u \|_u \quad , \quad \forall x_u \in E_u$$

Si tomamos $a = \max\{a_u, a_s\} \Rightarrow 0 < a < 1$ lo cual satisface la parte (ii) del Teorema.

Resta probar que $\| x \|_* = \max \left\{ \| x_u \| , \| x_s \| \right\}$ es una norma equivalente a $\|\cdot\|$.

En efecto; sabemos que:

$$c_1 \| x_u \| \leq \| x_u \|_u \leq c_2 \| x_u \| \quad , \quad \forall x_u \in E_u \ , \ c_1, c_2 > 0$$

$$c_3 \| x_s \| \leq \| x_s \|_s \leq c_4 \| x_s \| \quad , \quad \forall x_s \in E_s \ , \ c_3, c_4 > 0$$

Sea $x \in E$ entonces $x = x_u + x_s$, tenemos que

$$\| x \| = \| x_u + x_s \| \leq \| x_u \| + \| x_s \| \leq \tfrac{1}{c_1} \| x_u \|_u + \tfrac{1}{c_3} \| x_s \|_s$$

$$\leq \tfrac{1}{c_1} \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\} + \tfrac{1}{c_3} \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\}$$

$$\leq \left(\tfrac{1}{c_1} + \tfrac{1}{c_3} \right) \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\} = K_1 \| x \|.$$

$$\therefore \ \| x \| \leq \| x \|. \ , \ \forall x \in E$$

Para probar la otra desigualdad, recordemos que $E_s = Im(P)$, $E_u = N(P)$, $x = x_u + x_s$, $x_u = x - Px \ \wedge \ x_s = Px$, entonces

$$\| x_u \| = \| x - Px \| \leq \| x \| + \| Px \| \leq \| x \| + \| P \| \| x \| = (1 - \| P \|) \| x \|$$

entonces

$$\|x_u\| \leq (1-\|P\|)\|x\|$$

$$\|x_s\| = \|Px\| \leq \|P\|\|x\| \Rightarrow \|x_s\| \leq \|P\|\|x\| \quad , \quad \forall x \in E$$

Luego; sea $K_2 = \max\{ c_2(1+\|P\|) , c_4\|P\| \}$

$$\|x_u\|_u \leq c_2 \|x_u\| \leq c_2(1-\|P\|)\|x\| \leq K_2 \|x\|$$

$$\|x_s\|_s \leq c_4 \|x_s\| \leq c_4 \|P\|\|x\| \leq K_2 \|x\|$$

$$\Rightarrow \max\left\{ \|x_u\|_u , \|x_s\|_s \right\} \leq K_1 \|x\|$$

$$\Rightarrow \|x\|_* \leq \|x\| \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\therefore \|x\|_* \text{ es equiavalente a } \|x\| \qquad \blacksquare$$

Es evidente que los subespacios invariantes depende del operador $L \in Hip(E)$; es decir $E = E_u(L) \oplus E_s(L)$. Luego a $E_u = E_u(L)$ le llamamos **espacio inestable**, $E_s = E_s(L)$ **espacio estable** y $\|x\|_*$ le llamamos la **norma adaptada** al operador $L \in Hip(E)$, de ahora en adelante ésta será la norma considerada en E.

PROPOSICIÓN II.1.2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Se cumple:

i) $E_u = E_u(L) = \{x \in E \,/\, L^{-n}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$

ii) $E_s = E_s(L) = \{x \in E \,/\, L^{n}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$

Prueba:

i) $x \in E_u \Rightarrow \left\| L_u x_u \right\| \leq \left\| L_u^{-1} x_u \right\|_u \leq \alpha^n \|x\|_u , \quad \forall n \geq 0$ con $0 < \alpha < 1$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \left\| L^{-n}x \right\| \leq \lim_{n\to\infty} \alpha^n \|x\|_u = 0$$

$$\Rightarrow L^{-n}x \longrightarrow 0 \ , \text{ si } n \to \infty$$

Por otro lado, sea $x \in E \,/\, \lim_{n\to\infty} \|L^{-n}x\| = 0$, sea $x = x_u + x_s, x_u \in E_u, x_s \in E_s$

$$L^{-n}x = L_u^{-n}x_u + L_s^{-n}x_s \Rightarrow 0 \leq \left\| L_s^{-n}x_s \right\|_s \leq \left\| L^{-n}x \right\|_u \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left\| L_s^{-n}x_s \right\|_s = 0.$$

Además

$$\|x_s\| = \left\| L_s^n (L_s^{-n}x_s)^{\cdot} \right\|_s \leq \alpha^n \left\| L_s^{-n}x_s \right\|_s \quad , \quad \forall n \geq 0$$

$$\Rightarrow\ a^{-n}\|x_s\|_s \le \|L_s^{-n}x_s\|_s \ ,\quad \forall n\ge 0\ ,\ \text{con } a^{-1}>0$$

$$\Rightarrow\ 0\le \lim_{n\to\infty} a^{-n}\|x_s\|_s \le \lim_{n\to\infty} \|L_s^{-n}x_s\|_s = 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a^{n}\|x_s\|_s = 0 \Rightarrow \|x_s\|_s = 0 \Rightarrow x_s = 0 \Rightarrow x\in E_u$$

$$\therefore\ E_u = E_u(L) = \{x\in E \ /\ L^{-n}x \xrightarrow{n\to\infty} 0\}$$

ii) $x\in E_s \Rightarrow\ \|L^n x_u\| \le \|L_s^n x_s\|_s \le a^n\|x_s\|_s \ ,\quad \forall n\ge 0$ con $0<a<1$

$$\Rightarrow\ 0\le \lim_{n\to\infty} \|L^{-n}x\| \le \lim_{n\to\infty} a^n\|x_s\|_s = 0 \ \Rightarrow\ L^n x \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Recíprocamente: Sea $x\in E\ /\ L^n x\xrightarrow{n\to\infty} 0$; tomemos

$x = x_u + x_s$, con $x_u\in E_u, x_s\in E_s$

$$L^n x = L_s^n x_s + L_u^n x_u \Rightarrow 0\le \|L_u^n x_u\|_u \le \|L^n x\| \ ,\quad \forall n\ge 0$$

$$\Rightarrow\ 0\le \lim_{n\to\infty}\|L_u^n x_u\|_u \le \lim_{n\to\infty}\|L^n x\| = 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\|L_u^n x_u\|_u = 0 .$$

Ademas

$$\|x_u\|_u = \|L_u^{-n}(L_u^n x_u)\|_u \le a^n\|L_u^n x_u\|_u$$

$$\Rightarrow\ a^{-n}\|x_u\|_u \le \|L_u^n x_u\|_u \ ,\quad \forall n\ge 0\ ,\ \text{con } a^{-1}>1$$

$$\Rightarrow\ 0\le \lim_{n\to\infty} a^{-n}\|x_u\|_u \le \lim_{n\to\infty}\|L_u^n x_u\|_u \le 0$$

$$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} a^{-n}\|x_u\|_u = 0 \ \Rightarrow\ \|x_u\|_u = 0 \ \Rightarrow\ x_u = 0 \ \Rightarrow\ x\in E_s$$

$$\therefore\ E_s = E_s(L) = \{x\in E\ /\ L^n x\xrightarrow{n\to\infty} 0\} \qquad \blacksquare$$

COROLARIO. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L\in \mathrm{Hip}(E)$. Entonces $L^{-1}\in \mathrm{Hip}(E)$ y $E_u(L^{-1}) = E_s(L)$, $E_s(L^{-1}) = E_u(L)$

PROPOSICIÓN II.1.3 Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, entonces Hip(E) es un subconjunto abierto de L(E)

Prueba: Sea $L_o\in \mathrm{Hip}(E)$, por demostrar que:

$$\exists\ \varepsilon>0\ /\ B_\varepsilon(L_o)\subseteq \mathrm{Hip}(E).$$

Como $L_o \in Hip(E)$, entonces

$$\Sigma(L_o) \cap S^1 = \phi \Rightarrow S^1 \subseteq \rho(L_o)$$

Definimos la función

$$R_{Lo} : S^1 \longrightarrow GL(E)$$
$$\lambda \longrightarrow R_{Lo}(\lambda) = (\lambda I - L_o)^{-1}$$

Sabemos que R_{Lo} es analítica y por tanto continua y como S^1 es compacto, se tiene:

$$\exists \lambda_o \in S^1 / \| R_{L_o}(\lambda) \| \leq \| R_{L_o}(\lambda_o) \| \ , \ \forall \lambda \in S^1$$

$$\Rightarrow \| R_{L_o}(\lambda_o) \|^{-1} \leq \| R_{L_o}(\lambda) \|^{-1} \ , \ \forall \lambda \in S^1$$

Sea $L \in B_\varepsilon(L_o)$, con $\varepsilon = \| R_{L_o}(\lambda_o) \|^{-1}$

$$\Rightarrow \| L - L_o \| < \varepsilon = \| R_{L_o}(\lambda_o) \|^{-1} \leq \| R_{L_o}(\lambda) \|^{-1} = \| (\lambda I - L)^{-1} \|^{-1}$$
$$\forall \lambda \in S^1 \Rightarrow (\lambda I - L_o) - (L_o - L) = \lambda I - L \in GL(E) \ ; \ \forall \lambda \in S^1$$

$$\Rightarrow S^1 \subseteq \rho(L) \Rightarrow \Sigma(L) \cap S^1 = \phi \Rightarrow L \in Hip(E)$$

$$\Rightarrow B_\varepsilon(L_o) \subseteq Hip(E) \ , \text{con } \varepsilon = \| R_{L_o}(\lambda_o) \|^{-1} \ , \ \forall L_o \in Hip(E)$$

por lo tanto Hip(E) es abierto en L(E) ∎

PROPOSICIÓN II.1.4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach de dimensión finita. Entonces Hip(E) es denso en L(E)

Prueba: Sea $L \in GL(E)$ y $\varepsilon > 0$ por demostrar que:

$$\exists L_o \in Hip(E) \ / \ \| L - L_o \| < \varepsilon$$

Supongamos que $\dim(E) = n < \infty$ y denotemos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ los autovalores de L ordenados de tal manera que los m primeros valores no están en S^1 y los restantes n-m lo están, es decir:

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\} \cap S^1 = \phi \quad y \quad \{\lambda_{m+1}, \lambda_{m+2}, \ldots, \lambda_n\} \subseteq S^1$$

(si $m = n \Rightarrow L$ es hiperbólico y no hay nada que probar), es por ello que consideramos $m < n$. Además $0 \notin \Sigma(L)$ pues $L^{-1} \in GL(E)$.

Sean $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j$, $1 \leq j \leq n$ y consideremos:

$$\delta_1 = \min_{1\le j\le n}\left\{ 1-\left|\lambda_j\right| \right\} \quad , \quad \delta_2 = \min_{m+1\le j\le n}\left\{ \left|\alpha_j\right| / \alpha_j \neq 0 \right\}$$

Tenemos que δ_1,δ_2 son mayores que cero. Sea $0<\mu<\min\{\delta_1,\delta_2,\varepsilon\}$ y consideremos el operador $L_0 = L+\mu I$. Primeramente obsérvese que:

$$\lambda \in \rho(L) \Leftrightarrow \lambda I - L \in GL(E) \Leftrightarrow (\lambda+\mu I)-(L+\mu I) \in GL(E) \Leftrightarrow \lambda+\mu \in \rho(L+\mu I)$$

Luego $\lambda \in \Sigma(L) \Leftrightarrow \lambda+\mu \in \Sigma(L+\mu I)$. De ésta manera:

$$\Sigma(L_0) = \left\{ \lambda_j+\mu \right\}_{1\le j\le n} = \left\{ (\alpha_j+\mu)+\beta_j \right\}_{1\le j\le n}$$

Afirmo que $\Sigma(L_0)\cap S^1 = \phi$. En efecto: Si $1\le j\le n$ entonces

$$\mu < \left| 1-\left|\lambda_j\right| \right| \Rightarrow \mu < 1-\left|\lambda_j\right| < 1 \quad \vee \quad 1-\left|\lambda_j\right| < -\mu$$

entonces

$$\mu+\left|\lambda_j\right| < 1 \quad \vee \quad \left|\lambda_j\right|-\mu > 1 \tag{1}$$

Si se cumple la primera condición de (1)

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2 = (\alpha_j+\mu)^2+\beta_j^2 = \alpha_j^2+2\alpha_j\mu+\mu^2+\beta_j^2 = \left|\lambda_j\right|^2+2\alpha_j\mu+\mu^2$$

$$\le \left|\lambda_j\right|^2+2\left|\alpha_j\right|\mu+\mu^2 \le \left|\lambda_j\right|^2+2\left|\lambda_j\right|\mu+\mu^2 = \left(\left|\lambda_j\right|+\mu\right)^2 > 1$$

$$\Rightarrow \lambda_j+\mu \notin S^1$$

Si se cumple la segunda condición de (1)

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2 = \left|\lambda_j\right|^2+2\alpha_j\mu+\mu^2 \le \left|\lambda_j\right|^2-2\left|\alpha_j\right|\mu+\mu^2 \le \left|\lambda_j\right|^2-2\left|\lambda_j\right|\mu+\mu^2$$

$$= \left(\left|\lambda_j\right|-\mu\right)^2 < 1$$

$$\Rightarrow \lambda_j+\mu \notin S^1$$

$$\therefore \lambda_j+\mu \notin S^1 \quad , \quad 1\le j\le m$$

Si $m+1\le j\le n$ entonces $\mu<\left|\alpha_j\right|$

$$\Rightarrow \mu<\alpha_j \quad \vee \quad \alpha_j<-\mu \tag{2}$$

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2 = (\alpha_j+\mu)^2+\beta_j^2 = \alpha_j^2+2\alpha_j\mu+\mu^2+\beta_j^2 = 1+2\alpha_j\mu+\mu^2$$

Si se cumple la primera afirmación de (2):

$$\left|\lambda_j+\mu\right|^2 = 1+2\alpha_j\mu+\mu^2 > 1+2\mu^2+\mu^2 > 1+3\mu^2 > 1$$

$$\Rightarrow \lambda_j + \mu \notin S^1$$

Si se cumple la segunda de (2):

$$\left| \lambda_j + \mu \right|^2 = 1 + 2\alpha_j\mu + \mu^2 < 1 - 2\mu^2 + \mu^2 = 1 - \mu^2 < 1$$

$$\Rightarrow \lambda_j + \mu \notin S^1$$

$$\therefore \lambda_j + \mu \notin S^1 \quad , \ m+1 \leq j \leq n$$

De ésta manera queda demostrada la afirmación. Por lo tanto L_0 es hiperbólico. Ademas

$$\| L - L_0 \| = \| \mu I \| = \mu < \varepsilon$$

$\therefore$ Hip(E) es denso en GL(E) ∎

CAPÍTULO III

APLICACIONES DE LIPSCHITZ

III.1 APLICACIONES DE LIPSCHITZ

No todos los operadores que consideraremos posteriormente, están definidos en espacios de Banach., es por eso que necesitamos estudiar operadores no necesariamente lineales definidos en los llamados espacios métricos y debemos ser capaces de invertir esos operadores

DEFINICIÓN III.1.1. Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos y $f:X \longrightarrow Y$. Decimos que f es de **Lipschitz** sí y sólo si

$$\exists K \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \; d_y(f(x),f(x')) \leq K\, d_x(x,x') \quad , \quad \forall\, x,x' \in X$$

Denotaremos por $\mathcal{L}ip(X,Y)$ al conjunto de todas las aplicaciones de Lipschitz de X a Y:

$$\mathcal{L}ip(X,Y) = \{\ f : X \longrightarrow Y \ /\ f \text{ es Lipschitz } \}$$

Observaciones:

1) Si $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(E, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados y $f : X \longrightarrow Y$, decimos que f es de Lipschitz sí y sólo sí

$$\| f(x) - f(x') \|_F \leq K \, \| x - x' \|_E \quad , \quad \forall\, x,x' \in E$$

2) La mínima de las constantes K que cumplen con la Definición III.1.1, se le llama **constante de Lipschitz** de f y la denotaremos $\mathcal{L}ip(f)$

3) Cuando $X = Y$ denotamos $\mathcal{L}ip(X,X) \equiv \mathcal{L}ip(X)$

TEOREMA III.1.1. Sean (X,d_x) y (Y,d_y) dos espacios métricos. Se cumple:

$$\mathcal{Lip}(X,Y) \subseteq c(X,Y)$$

Prueba: Sea $f \in \mathcal{Lip}(X,Y) \Rightarrow d_x(f(x),f(x')) \leq \mathcal{Lip}(f)\, d_x(x,x')$, $\forall x,x' \in X$.

Sea $x_0 \in X \wedge \varepsilon > 0$; si consideramos $\delta = \mathcal{Lip}(f)^{-1}\varepsilon$, se tiene:

$$d_x(x,x') < \varepsilon \Rightarrow d_x(f(x),f(x')) \leq \mathcal{Lip}(f)\, d_x(x,x') < \mathcal{Lip}(f)\, \mathcal{Lip}(f)^{-1}\varepsilon = \varepsilon$$

Luego f es continua en x_0 $\forall x_0 \in X$

$$\therefore \mathcal{Lip}(X,Y) \subseteq c(X,Y) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA III.1.2 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(E, \|\cdot\|_F)$ espacios normados. Se cumple:

$$L(E,F) \subseteq \mathcal{Lip}(E,F) \wedge \mathcal{Lip}(f) = \|f\| \quad \forall f \in L(E,F)$$

Prueba: Sea $f \in L(E,F)$ y considero $x,x' \in E$

$$\|f(x) - f(x')\|_F = \|f(x - x')\|_F \leq \|f\|\,\|x - x'\|_E \;;\; \forall x,x' \in E \;,\; \Rightarrow f \in L(E,F)$$

$$\therefore L(E,F) \subseteq \mathcal{Lip}(E,F)$$

Además $\mathcal{Lip}(f) \leq \|f\|$. Para probar la otra desigualdad recordemos que

$$\|f\| = \inf\{c > 0 \;/\; \|fx\|_F \leq c\|x\|_E\} \;;\; \forall x \in E$$

$$\|f(x)\|_F = \|f(x) - f(0)\|_F \leq \mathcal{Lip}(f)\|x\|_E$$

$$\Rightarrow \|f\| \leq \mathcal{Lip}(f)$$

$$\therefore \mathcal{Lip}(f) = \|f\| \;,\; \forall f \in L(E,F) \qquad \blacksquare$$

TEOREMA III.1.3 Sean (X,d_x) , (Y,d_y) y (Z,d_Z) espacios métricos, $f \in \mathcal{Lip}(X,Y)$, $g \in \mathcal{Lip}(Y,Z)$. Entonces $g \circ f \in \mathcal{L}_{ip}(X,Z)$ y $\mathcal{Lip}(g \circ f) \leq \mathcal{Lip}(g)\, \mathcal{Lip}(f)$

Prueba: Sean $x, x' \in X$

$$d_z(g \circ f(x), g \circ f(x')) = d_z(g\,(f(x)), g\,(f(x'))) \leq \mathcal{L}ip(g)\, d_y(f(x), f(x'))$$

$$\leq \mathcal{L}ip(g)\ \mathcal{L}ip(f)\, d_x(x, x')$$

$$\therefore\ g \circ f \in \mathcal{L}ip(X,Z).\ \wedge\ \mathcal{L}ip(g \circ f) \leq \mathcal{L}ip(g)\ \mathcal{L}_{ip}(f) \qquad \blacksquare$$

COROLARIO Sea (X, d_x) espacio métrico y $f \in \mathcal{L}ip(X)$. Entonces $f^n \in \mathcal{L}ip(X)$. y $\mathcal{L}ip(f^n) \leq \mathcal{L}ip(f)^n \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+$

La demostración de este Corolario es una aplicación directa del Teorema anterior

TEOREMA III.1.4. Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(E, \|\cdot\|_F)$ son espacios normados $f, g \in \mathcal{L}ip(E,F)$. Entonces:

i) $f + g \in \mathcal{L}ip(E,F)$ y $\mathcal{L}ip(f + g) \leq \mathcal{L}_{ip}(f) + \mathcal{L}_{ip}(g)$

ii) $\mathcal{L}ip(f) - \mathcal{L}ip(g) \leq \mathcal{L}ip(f - g)$

Prueba: Sean $x, x' \in X$

i) $$\| (f+g)(x) - (f+g)(x') \|_F = \| f(x) + g(x) - f(x') - g(x') \|_F$$

$$\leq \| f(x) - f(x') \|_F + \| g(x) - g(x') \|_F$$

$$\leq \mathcal{L}ip(f) \| x - x' \|_E + \mathcal{L}ip(g) \| x - x' \|_E$$

$$\leq [\ \mathcal{L}ip(f) + \mathcal{L}ip(g)] \| x - x' \|_E$$

$$\Rightarrow\quad f + g \in \mathcal{L}ip(E,F)\ \text{ y }\ \mathcal{L}ip(f + g) \leq \mathcal{L}ip(f) + \mathcal{L}ip(g)$$

ii) $$\mathcal{L}ip(f) = \mathcal{L}ip(f - g + g) \leq \mathcal{L}ip(f - g) + \mathcal{L}ip(g)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}ip(f) - \mathcal{L}ip(g) \leq \mathcal{L}ip(f - g) \qquad \blacksquare$$

Las funciones Lipschizianas cuya constante es menor que 1, se las llaman **contracciones**. Las contracciones son importantes porque ellas tienen un único punto fijo atractor cuando están definidos en un espacio métrico completo

TEOREMA III.1.5 Sea (X,d) un espacio métrico completo , $f \in \mathcal{L}ip(X)$, tal que $\mathcal{L}ip(f) < 1$. Entonces $\exists!\, x_o \in X$ tal que:

i) $f(x_0) = x_0$,(x_0 es punto fijo)

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} f^n(x_0) = x_0$; $\forall x \in X$ (x_0 es atractor)

Prueba:

Existencia: Sea $x \in X$, si $f(x) = x$ no hay nada que probar. Luego, supongamos

$$f(x) \neq x \;\Rightarrow\; d(f(x),x) > 0$$

Afirmación: $\{f^n(x)\}_{n\in Z^+}$ es una sucesión de Cauchy en X. En efecto; obsérvese que para $n,m \in \mathbf{N}$, $n > m$ tenemos:

$$d(f^n(x),f^m(x)) \le d(f^n(x),f^{n-1}(x)) + d(f^{n-1}(x),f^{n-2}(x)) + \ldots + d(f^{m+1}(x),f^m(x))$$

$$= \sum_{j=0}^{n-m-1} d(f^{m+j+1}(x),f^{m+j}(x)) \le \sum_{j=0}^{n-m-1} \mathcal{L}ip(f^{m+j})\, d(f(x),x)$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-m-1} \mathcal{L}ip(f^m)\,\mathcal{L}ip(f^j)\, d(f(x),x) \le \mathcal{L}ip(f^m)\, d(f(x),x) \sum_{j=0}^{n-m-1} \mathcal{L}ip(f^j)$$

$$\le \mathcal{L}ip(f^m)\, d(f(x),x) \sum_{j=0}^{\infty} \mathcal{L}ip(f^j) = \frac{\mathcal{L}ip(f)^m}{1-\mathcal{L}ip(f)}\, d(f(x),x)$$

Como:

$$\frac{\mathcal{L}ip(f)^m}{1-\mathcal{L}ip(f)}\, d(f(x),x) < \varepsilon \Leftrightarrow m\, \ln(\mathcal{L}ip(f)) + \ln(d(f(x),x)) - \ln(1-\mathcal{L}ip(f)) < \ln(\varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow\; m\, \ln(\mathcal{L}ip(f)) < \ln(\varepsilon) + \ln(1-\mathcal{L}ip(f)) - \ln(d(f(x),x))$$

$$\Leftrightarrow m > \frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-\mathcal{L}ip(f)) - \ln(d(f(x),x))}{\ln(\mathcal{L}ip(f))}$$

Basta tomar $N \in \mathbf{Z}^+$, tal que

$$N > \frac{\ln(\varepsilon) + \ln(1-\mathcal{L}ip(f)) - \ln(d(f(x),x))}{\ln(\mathcal{L}ip(f))} \quad ,$$

luego si n,m≥N tenemos que $d\left(f^n(x),f^m(x)\right)<\varepsilon$ entonces $\left\{f^n(x)\right\}_{n\in Z^+}$ es Cauchy y desde que (X,d) es completo $\exists\, x_o \in X$ / $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_0$; en X y $f\in \mathcal{L}ip(X)$ entonces $f\in c(X)$, luego $f^{n+1}(x)\longrightarrow x_0$ en X y por unicidad del límite: $f(x_0)=x_0$, lo cual prueba la existencia del punto fijo.

Unicidad: Supóngase que $\exists\ x' \in X$ / $f(x') = x'$; se tiene

$$d\left(x',x_o\right)=d\left(f(x'),f(x_o)\right)\leq \mathcal{L}ip(f)\, d\left(x',x_o\right)\ ,$$

$$\Rightarrow \left[1-\mathcal{L}ip(f)\right] d\left(x',x_o\right)\leq 0$$

$$\Rightarrow\ d\left(x',x_o\right)\leq 0\ \Rightarrow\ d\left(x',x_o\right)=0\ \Rightarrow x'=x_0$$

Prueba de que es atractor: Tomemos $x\in X$ y construimos $x_0=x_0(x)$ tal que $f^n(x)\longrightarrow x_0$. Sea $x'\neq x$ y supongamos que $f^n(x')\longrightarrow x'_0$

$$\begin{aligned} d\left(x',x_o\right) &= d\left(x_o,f^n(x)\right)+d\left(f^n(x),f^n(x')\right)+d\left(f^n(x'),x'_o\right)\\ &\leq d\left(x_o,f^n(x)\right)+\mathcal{L}ip(f)^n d\left(x',x_o\right)+d\left(f^n(x'),x'_o\right)\\ &\Rightarrow 0\leq d\left(x',x_o\right)\leq 0\Rightarrow d\left(x',x_o\right)=0\Rightarrow x'=x_o \end{aligned}$$

■

El siguiente resultado, generaliza el Corolario al Teorema I.1.2 para operadores de L(E) a $\mathcal{L}ip(E)$

TEOREMA III.1.6 (La función inversa de Lipschitz) Sea $(E,\|\cdot\|)$ un espacio de Banach, $\varphi\in\mathcal{L}ip(E)$ y $L\in GL(E)$ tal que $\mathcal{L}ip(\varphi)<\|L^{-1}\|^{-1}$. Entonces $L+\varphi$ es invertible, $(L+\varphi)^{-1}\in\mathcal{L}ip(E)$ y

$$\mathcal{L}ip\left((L+\varphi)^{-1}\right)\leq\frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1}-\mathcal{L}ip(\varphi)}$$

Prueba: Primeramente observe que $x_0=x_0(x)$ tal que

$$\begin{aligned} \left\|(L+\varphi)(x_1)-(L+\varphi)(x_2)\right\| &= \left\|Lx_1+\varphi(x_1)-Lx_2-\varphi(x_2)\right\|\\ &= \left\|L(x_1-x_2)+(\varphi(x_1)-\varphi(x_2))\right\|\\ &\geq \left\|L(x_1-x_2)\right\|-\left\|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)\right\| \qquad (1) \end{aligned}$$

Como:

$$\| x_1 - x_2 \| = \| L^{-1}L(x_1 - x_2) \| \leq \| L^{-1} \| \, \| L(x_1 - x_2) \| \Rightarrow \| L^{-1} \|^{-1} \| x_1 - x_2 \| \leq \| L(x_1 - x_2) \|$$

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq Lip(\varphi) \, \| x_1 - x_2 \| \quad \Rightarrow -\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \geq -Lip(\varphi) \, \| x_1 - x_2 \|$$

Reemplazando éstos dos últimos resultados en (1):

$$\| (L + \varphi)(x_1) - (L + \varphi)(x_2) \| \geq \left[\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi) \right] \| x_1 - x_2 \| \quad , \ \forall \, x_1, x_2 \in E \qquad (2)$$

Afirmo que $L + \varphi$ es inyectiva: En efecto, supóngase que

$$(L + \varphi)(x_1) = (L + \varphi)(x_2)$$

$$0 = \| (L + \varphi)(x_1) - (L + \varphi)(x_2) \| \geq \left[\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\varphi) \right] \| x_1 - x_2 \|$$

$$\Rightarrow \| x_1 - x_2 \| \leq 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Por lo tanto $L + \varphi$ es inyectiva

Afirmo que $L + \varphi$ es sobreyectiva: En efecto, sea $y \in E$, por demostrar que:

$$\exists \, x \in E \, / \, (L + \varphi)(x) = y$$

Como motivación para la elección del "x", obsérvese que si $\varphi \equiv 0$ entonces $x = L^{-1}y$. Como $\varphi \in Lip(E)$ entonces es de esperarse que $x = L^{-1}y + \omega$, con $\omega \in E$

$$(L + \varphi) \circ (L^{-1}y + \omega) = y \iff L \circ (L^{-1}y + \omega) + \varphi(L^{-1}y + \omega) = y$$

$$\iff y + L\omega + \varphi(L^{-1}y + \omega) = y \iff L(\omega) = -\varphi(L^{-1}y + \omega)$$

$$\iff \omega = -L^{-1} \circ \varphi(L^{-1}y + \omega)$$

Esto nos lleva a definir:

$$T_y : E \longrightarrow E$$
$$\omega \longrightarrow T_y(\omega) = -L^{-1} \circ \varphi(L^{-1}y + \omega)$$

$$\| T_y(\omega_1) - T_y(\omega_2) \| = \| -L^{-1} \circ \varphi(L^{-1}y + \omega_1) + L^{-1} \circ \varphi(L^{-1}y + \omega_2) \|$$
$$\leq \| L^{-1} \| \, \| \varphi(L^{-1}y + \omega_1) - \varphi(L^{-1}y + \omega_2) \|$$
$$\leq \| L^{-1} \| \, Lip(\varphi) \, \| L^{-1}y + \omega_1 - L^{-1}y - \omega_2 \|$$
$$< \| L^{-1} \| \, \| L^{-1} \|^{-1} \| \omega_1 - \omega_2 \| = \| \omega_1 - \omega_2 \|$$

por lo tanto $Lip(T) < 1$ y como E es de Banach, $\exists \, \omega_o \in E \, / \, T(\omega_o) = \omega_o$. Con este resultado probamos la sobreyectividad

Resta por probar que $(L+\varphi)^{-1}$ es Lipschitz. Para ello $y_1, y_2 \in E$, de (2):

$$\|y_1 - y_2\| = \left\| (L+\varphi) \circ (L+\varphi)^{-1}(y_1) - (L+\varphi) \circ (L+\varphi)^{-1}(y_2) \right\|$$

$$= \left\| (L+\varphi)\left((L+\varphi)^{-1}(y_1)\right) - (L+\varphi)\left((L+\varphi)^{-1}(y_2)\right) \right\|$$

$$\geq \left[\|L^{-1}\|^{-1} - \mathit{Lip}(\varphi)\right] \left\| (L+\varphi)^{-1}(y_1) - (L+\varphi)^{-1}(y_2) \right\|$$

$$\Rightarrow \left\| (L+\varphi)^{-1}(y_1) - (L+\varphi)^{-1}(y_2) \right\| \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \mathit{Lip}(\varphi)} \|y_1 - y_2\| \quad , \forall\, y_1, y_2 \in E$$

$$\therefore \quad (L+\varphi)^{-1} \in \mathit{Lip}(E) \ \wedge \ \mathit{Lip}\left((L+\varphi)^{-1}\right) \leq \frac{1}{\|L^{-1}\|^{-1} - \mathit{Lip}(\varphi)} \qquad \blacksquare$$

A a continuación nos proponemos obtener una generalización del Teorema I.1.5 pasando de L(E,F) a *Lip*(E,F)

TEOREMA III.1.7 Sea $(E, \|\cdot\|_E)$ y $(E, \|\cdot\|_F)$ espacios de Banach. Sea $T \in \mathit{Lip}(E,F)$ tal que T es biyectivo y $T^{-1} \in \mathit{Lip}(E,F)$. Sea $f \in \mathit{Lip}(E,F)$ tal que $\mathit{Lip}(f) < \mathit{Lip}(T^{-1})$. Entonces $T - f$ es invertible, $(T-f)^{-1} \in \mathit{Lip}(F,E)$ y

$$\mathit{Lip}\left((T-f)^{-1}\right) \leq \frac{1}{\mathit{Lip}(T^{-1})^{-1} - \mathit{Lip}(f)}$$

Prueba: Primeramente, obsérvese que $T - f = T \circ \left(I - T^{-1} \circ f\right)$., luego T-f será invertible si T y $\left(I - T^{-1} \circ f\right)$ los son. Como $T^{-1} \in \mathit{Lip}(E,F)$. y $f \in \mathit{Lip}(E,F)$ entonces $T^{-1} \circ f \in \mathit{Lip}(E)$ y

$$\mathit{Lip}\left(T^{-1} \circ f\right) \leq \mathit{Lip}\left(T^{-1}\right)\mathit{Lip}(f) < \mathit{Lip}\left(T^{-1}\right)\mathit{Lip}\left(T^{-1}\right)^{-1} < 1$$

luego por el Teorema anterior, $I - T^{-1} \circ f$ es invertible $\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \in \mathit{Lip}(E)$ y

$$\mathit{Lip}\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right] \leq \frac{1}{1 - \mathit{Lip}\left(T^{-1} \circ f\right)} \leq \frac{1}{1 - \mathit{Lip}\left(T^{-1}\right)\mathit{Lip}(f)}$$

Como $I-T^{-1}\circ f$ es invertible y T es invertible entonces $T\circ\left(I-T^{-1}\circ f\right)^{-1}=T-f$ es invertible, luego $(T-f)^{-1}=\left(I-T^{-1}\circ f\right)^{-1}\circ T^{-1}$. Además como $\left(I-T^{-1}\circ f\right)^{-1}\in Lip(E)$ y $T^{-1}\in Lip(F,E)$, entonces

$$\left(I-T^{-1}\circ f\right)^{-1}\circ T^{-1}=(T-f)^{-1}\in Lip(F,E).$$

Por último:

$$Lip\left((T-f)^{-1}\right)\leq Lip\left(\left(I-T^{-1}\circ f\right)^{-1}\right)Lip(T^{-1})\leq\frac{1}{Lip(T^{-1})^{-1}-Lip(f)}\qquad\blacksquare$$

Hasta el momento, los operadores estudiados están definidos en todo el espacio, más adelante, usaremos operadores que están definidos solo en un abierto del espacio y precisaremos de dos Teoremas análogos a los estudiados hasta aquí para poder invertirlos. Tales Teoremas son:

TEOREMA III.1.8 Sea $(E,\|\cdot\|)$ espacio de Banach y denotamos por $E(r)$ la bola cerrada de E de radio r y centro 0 , es decir:

$$E(r)=\{x\in E/\|x\|\leq r\}$$

i) Sea $I-f$ es invertible sobre su imagen $U=[I-f][E(r)]$

ii) $(I-f)^{-1}\in Lip(U,E(r))$ y $Lip\left[(I-f)^{-1}\right]\leq\dfrac{1}{1-Lip(f)}$

iii) Si $f(0)=0$, entonces $E(r')\subseteq U$ donde $r'=r\,[1-Lip(f)]$

Prueba:. Primeramente, obsérvese que:

$$\begin{aligned}\|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\| &= \|x_1-f(x_1)-x_2+f(x_2)\|\\ &\geq\|x_1-x_2\|-\|f(x_1)-f(x_2)\|\\ &\geq\|x_1-x_2\|-Lip(f)\,\|x_1-x_2\|\end{aligned}$$

$$\Rightarrow\|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\|\geq(1-Lip(f))\,\|x_1-x_2\|\quad\forall\,x_1,x_2\in E(r)\qquad(1)$$

i) Supóngase $(I-f)(x_1)=(I-f)(x_2)$, luego , por (1)

$$0=\|(I-f)(x_1)-(I-f)(x_2)\|\geq(1-Lip(f))\,\|x_1-x_2\|$$

$$\Rightarrow\|x_1-x_2\|=0\ \Rightarrow\ x_1=x_2$$

entonces $(I-f)$ es inyectiva, entonces $(I-f)$ es invertible sobre su imagen $[I-f][E(r)]$

ii) Sea $y_1, y_2 \in U$, nuevamente por (1)

$$\| y_1 - y_2 \| = \| (I-f)\circ(I-f)^{-1}(y_1) - (I-f)\circ(I-f)^{-1}(y_2) \|$$

$$= \| (I-f)\left((I-f)^{-1}(y_1)\right) - (I-f)\left((I-f)^{-1}(y_2)\right) \|$$

$$\geq \left(1 - Lip(f)\right) \| (I-f)^{-1}(y_1) - (I-f)^{-1}(y_2) \|$$

$$\Rightarrow \| (I-f)^{-1}(y_1) - (I-f)^{-1}(y_2) \| = \frac{1}{1 - Lip(f)} \| y_1 - y_2 \| \ , \ \forall\, y_1, y_2 \in U$$

$$\therefore \ (I-f)^{-1} \in Lip(E(r),E) \ \ y \ \ Lip\left[(I-f)^{-1}\right] \leq \frac{1}{1 - Lip(f)}$$

iii) Como $f(0)=0$ entonces $0 \in U$, de ésta manera U contiene un disco cerrado alrededor del 0. Sea $y \in E(r')$ con $r' = r\,[1-Lip(f)]$. Por demostrar que:

$$\exists \in E \,/\, (I-f)(x) = y$$

Obsérvese que $f \equiv 0$ entonces el "x" buscado es "y", ésto motiva a buscar "x" de la forma "$y+\omega$", en el caso $f \neq 0$ entonces se tendría:

$$(I-f)(y+\omega) = y \Leftrightarrow y + \omega - f(y+\omega) = y \Leftrightarrow f(y+\omega) = \omega$$

Como ω debe ser tal que $y + \omega \in E(r)$, tenemos:

$$\| y+\omega \| \leq \| y \| + \| \omega \| \leq r' + \| \omega \| \leq r \Leftrightarrow \| \omega \| \leq r - r' = r - r\,[1-Lip(f)] = rLip(f)$$

Tomemos $\delta = \min\{r\,Lip(f)\ ,\ r'\}$. Defino:

$$T_y : E(\delta) \longrightarrow E(\delta)$$
$$\omega \longrightarrow T_y(\omega) = f(y+\omega)$$

$$\| T_y(\omega_1) - T_y(\omega_2) \| \leq \| f(y+\omega_1) - f(y+\omega_2) \| \leq Lip(f)\, \| y + \omega_1 - y - \omega_2 \|$$

$$\therefore\ T_y \in Lip(E(\delta)) \ \wedge \ Lip(T_y) < 1, \Rightarrow \exists\, \omega_o \in E(\delta) \subseteq E(r) \,/\, T(\omega_o) = \omega_o$$

$$\Rightarrow f(y+\omega_o) = y + \omega_o \Rightarrow y + \omega_o - f(y+\omega_o) = y \Rightarrow (I-f)(y+\omega_o) = y$$

Además

$$\| y+\omega_o \| \leq \| y \| + \| \omega_o \| \leq r' + \delta \leq r' - rLip(f) = r\,[1-Lip(f)] + rLip(f) = r$$

$$\therefore \exists x = y + \omega_o \in E(r) \,/\, (I-f)(x) = y \ \ \Rightarrow y \in [I-f][E(r)]$$

$$\therefore \ E(r') \subseteq U\ ,\ r' = r\,[1-Lip(f)]$$ ∎

COROLARIO. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, $T \in GL(E)$ y $f \in Lip(E(r),E)$ tal que $Lip(f) < \|T^{-1}\|^{-1}$. Entonces

i) Sea $T-f$ es invertible sobre su imagen $U = [I-f][E(r)]$

ii) $(T-f)^{-1} \in Lip(U,E(r))$ y $Lip\left[(I-f)^{-1}\right] \leq \dfrac{1}{1-Lip(f)}$

iii) Si $f(0) = 0$. Entonces $E(r^{l}) \subseteq U$ donde $r^{l} = r\left[\|T^{-1}\|^{-1} - Lip(f)\right]$

Prueba: Primeramente, obsérvese que $T-f = T \circ \left(I - T^{-1} \circ f\right)$., luego $T-f$ será invertible si $\left(I - T^{-1} \circ f\right)$ lo es, como $f \in Lip(E(r),E)$ y $T^{-1} \in GL(E)$ entonces $T^{-1} \circ f \in Lip(E(r),E)$ y

$$Lip\left(T^{-1} \circ f\right) \leq Lip\left(T^{-1}\right) Lip(f) < \|T^{-1}\| \, \|T^{-1}\|^{-1} = 1$$

luego por el Teorema anterior: $I - T^{-1} \circ f$ es invertible sobre su imagen $\tilde{U} = [I-f][E(r)]$, luego, $\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \in Lip(\tilde{U}, E(r))$ y

$$Lip\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right] \leq \frac{1}{1 - Lip\left(T^{-1} \circ f\right)} \leq \frac{1}{1 - \|T^{-1}\| Lip(f)}$$

Luego $T-f$ es invertible sobre su imagen, y como $(T-f)^{-1} = \left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \circ T^{-1}$

$$[T-f][E(r)] = T\left[\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}[E(r)]\right] = T[\tilde{U}] = U$$

$$I - T^{-1} \circ f \in Lip(\tilde{U}, E(r)) \quad \wedge \quad T^{-1} \in Lip(U, \tilde{U})$$

$$\Rightarrow \left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1} \circ T^{-1} \in Lip(U, E(r)) \text{ y}$$

$$Lip\left((T-f)^{-1}\right) \leq Lip\left(\left(I - T^{-1} \circ f\right)^{-1}\right) Lip(T^{-1}) \leq \frac{\|T^{-1}\|}{1 - \|T^{-1}\| Lip(f)} = \frac{1}{\|T^{-1}\|^{-1} - Lip(f)}$$

Por último: $f(0) = 0$ entonces $E(\tilde{r}) \subseteq \tilde{U}$, donde $\tilde{r} = r\,[1 - Lip(f)]$

$$\Rightarrow T[E(\tilde{r})] \subseteq T[\tilde{U}] = T \circ \left(I - T^{-1} \circ f\right)[E(r)] = U = [T-f][E(r)]$$

Afirmo que $E(r^{l}) \subseteq T[E(\tilde{r})]$. En efecto; $y \in E(r^{l})$, entonces

$$\|T^{-1}y\| \leq \|T^{-1}\| \, \|y\| \leq \|T^{-1}\| \, r^{l} \leq \|T^{-1}\| \, r\left(\|T^{-1}\|^{-1} - Lip(f)\right)$$

$$= r\left(\|T^{-1}\|^{-1} - \|T^{-1}\| \, Lip(f)\right) \leq r\left(1 - Lip(T^{-1} \circ f)\right) = \tilde{r}$$

$\Rightarrow x \in E(\tilde{r}) \;/\; y = Tx \;\Rightarrow\; y \in T[E(\tilde{r})]$. Por tanto $E(r^{l}) \subseteq T[E(\tilde{r})]$. ∎

III.2.EL TEOREMA DE LA APLICACIÓN FIJA

TEOREMA III.2.1 Sean (X,d_x) un espacio métrico completo y (X,d_y) un espacio métrico. Sea

$$f : X\times Y \longrightarrow X$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y)$$

Definimos: $f_y : X \longrightarrow X$, $x \longrightarrow f_y(x) = f(x,y)$ $\wedge$ $f_x : Y \longrightarrow X$, $y \longrightarrow f_x(y) = f(x,y)$

Supóngase que se cumple:

i) $f_y \in Lip(X) \;\wedge\; Lip(f_y) \leq K < 1 \;;\; \forall y \in Y$

ii) $f_x \in C(Y,X) \;;\; \forall x \in X$

Entonces si denotamos x_y el único punto fijo de f_y ($y \in Y$), la aplicación:

$$\varphi : Y \longrightarrow X$$
$$y \longrightarrow \varphi(y) = x_y$$

llamado **aplicación fija** de f , es continua y satisface

$$d_x(\varphi(y),\varphi(y')) \leq \frac{1}{1-k} d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right) \quad , \quad \forall\, y,y' \in Y$$

Prueba:. Sean $y,y' \in Y$:

$$d_x(\varphi(y),\varphi(y')) = d_x\left(x_y,x_{y'}\right) = d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_{y'})\right)$$
$$\leq d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right) + d_x\left(f_{y'}(x_y),f_{y'}(x_{y'})\right)$$
$$\leq d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right) + Lip(f_{y'})d_x\left(x_y,x_{y'}\right)$$
$$\leq d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right) + K\, d_x(\varphi(y),\varphi(y'))$$
$$\Rightarrow \quad (1-K)\, d_x(\varphi(y),\varphi(y')) \leq d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right)$$
$$\therefore \quad d_x(\varphi(y),\varphi(y')) \leq \frac{1}{1-k} d_x\left(f_y(x_y),f_{y'}(x_y)\right) \quad \forall\, y,y' \in Y$$

Para probar la continuidad de φ, sea $y_0 \in Y$ (fijo arbitrario); como $f_{x_{y_0}} \in C(Y,X)$, entonces , dado

$$\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 / d_y(y,y_o) \Rightarrow d_x\left(f_{x_{y_0}}(y_o),f_{x_{y_0}}(y)\right) < (1-k)\,\varepsilon$$

Luego; por la desigualdad probada anteriormente:

$$d_x(\varphi(y),\varphi(y_o)) \leq \frac{1}{1-k} d_x\left(f_{y_o}(x_{y_o}), f_y(x_{y_o})\right)$$

$$= \frac{1}{1-k} d_x\left(f_{x_{y_o}}(y_o), f_{x_{y_o}}(y)\right) < \frac{(1-K)\,\varepsilon}{1-K} = \varepsilon$$

entonces φ es continua en y_0 $\forall y_0 \in Y$. Por lo tanto $\varphi \in C(Y,X)$ ■

CAPÍTULO IV

ESTRUCTURA LOCAL DE LOS PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS PARA DIFEOMORFISMOS EN ESPACIOS DE BANACH

IV.1 PRELIMINARES

DEFINICIÓN IV.1.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach, U una vecindad de $0 \in E$ y $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo sobre su imagen. Decimos que 0 es un punto fijo hiperbólico de f sí y sólo sí

i) $f(0) = 0$

ii) $Df(0) \in Hip(E)$

Recordemos que si $L \in Hip(E)$, entonces, existen dos subespacios cerrados de E , E_u y E_s, y normas $\|\cdot\|_u$, $\|\cdot\|_s$ en E_u y E_s respectivamente tal que

i) $E = E_u \oplus E_s$

ii) $L_u = L|_{E_u} \in L(E_u)$ y $L_s = L|_{E_s} \in L(E_s)$

iii) $\| L_u^{-1} x_u \|_u \leq \alpha \| x_u \|_u$, $\forall x_u \in E_u$ y $\| L_s x_s \|_s \leq \alpha \| x_s \|_s$, $\forall x_s \in E_s$

iv) La norma $\| x \|_* = \max \left\{ \| x_u \|_u , \| x_s \|_s \right\}$, $x = x_u + x_s$, $x_s \in E_s, x_u \in E_u$ es equivalente a la inicial $\| x \|$ en E.

Recordemos también que si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(E, \|\cdot\|_F)$ son dos espacios de Banach entonces el espacio de funciones continuas y acotadas de E a F, denotado por $c_b(E,F)$ es también un espacio de Banach, es decir:

$$c_b(E,F) = \{ f : E \longrightarrow E \ / \ f \text{ es continua y acotada} \}$$

con las operaciones usuales de suma de funciones y producto por un escalar, es un espacio vectorial y si definimos:

$$\| f \|_{E,F} = \sup_{x \in E} \| f(x) \|_F$$

entonces $(C_b(E,F), \|\cdot\|_{E,F})$ es un espacio de Banach. Si $E=F$ denotaremos $C_b(E) \equiv C_b(E,F)$. Ahora probaremos que **la descomposición de E en E_u y E_s, induce una descomposición en $C_b(E)$** en donde consideramos $\|\cdot\|_* = \|\cdot\|$ la norma de E que satisface (iv).

Primeramente, definimos las proyecciones canónicas Π_u , Π_s

$$\begin{aligned} \Pi_u : E &\longrightarrow E_u & \qquad \Pi_s : E &\longrightarrow E_s \\ x &\longrightarrow \Pi_u(x) = x_u & x &\longrightarrow \Pi_s(x) = x_s \end{aligned}$$

Obviamente $\Pi_u \in L(E,E_u)$, $\Pi_s \in L(E,E_s)$, $\|\Pi_u\| \leq 1$ y $\|\Pi_s\| \leq 1$

Sea $f \in C_b(E)$, definimos $f_u = \Pi_u \circ f$ y $f_s = \Pi_s \circ f$, es decir:

$$\begin{aligned} f_u: E &\longrightarrow E_u & \qquad f_s: E &\longrightarrow E_s \\ x &\longrightarrow f_u(x) = \Pi_u(f(x)) & x &\longrightarrow f_s(x) = \Pi_s(f(x)) \end{aligned}$$

Como $\Pi_u \in L(E,E_u) \subseteq C_b(E,E_u)$ y $\Pi_s \in L(E,E_s) \subseteq C_b(E,E_s)$ entonces $f_u \in C_b(E,E_u)$ y $f_s \in C_b(E,E_s)$

Afirmación: $f = f_u + f_s$. En efecto, sea $x \in E$

$$\Rightarrow f(x) \in E = E_u \oplus E_s \Rightarrow f(x) = \Pi_u(f(x)) + \Pi_s(f(x))$$

$$\Rightarrow f(x) = \left(\Pi_u \circ f\right)(x) + \left(\Pi_s \circ f\right)(x) = \left(\Pi_u \circ f + \Pi_s \circ f\right)(x) \ , \ \forall x \in E$$

$$\Rightarrow f = f_u + f_s \ , \ \forall f \in C_b(E) ,$$

lo que prueba la afirmación.

Además $f \in C_b(E,E_u) \cap C_b(E,E_s) \Rightarrow f \in C_b(E,E_u)$ y $f \in C_b(E,E_s)$; luego, para $x \in E$, $f(x) \in E_u$ y $f(x) \in E_s \Rightarrow$, $f(x) \in E_u \cap E_s = \{0\} \Rightarrow f(x) = 0, \forall x \in E$ $\Rightarrow f \equiv 0$. De ésta manera, hemos probado que:

$$C_b(E) = C_b(E,E_u) \oplus C_b(E,E_s)$$

Sabemos que $(C_b(E), \|\cdot\|_{E,E})$, $(C_b(E,E_u), \|\cdot\|_{E,E_u})$ y $(C_b(E,E_s), \|\cdot\|_{E,E_s})$ son espacios de Banach. A continuación veremos la relación que existe entre $\|\cdot\|_{E,E}$, $\|\cdot\|_{E,E_u}$ y $\|\cdot\|_{E,E_s}$

Afirmación: $\| f \|_{E,E} = \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\}$, $\forall f \in C_b(E)$

En efecto, para $x \in E$ tenemos:

$$\| f(x) \| = \max\left\{ \| \Pi_u(f(x)) \|_u , \| \Pi_s(f(x)) \|_s \right\}$$

$$\Rightarrow \| f(x) \| \geq \| f_u(x) \|_u \text{ y } \| f(x) \| \geq \| f_s(x) \|_s \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in E} \| f(x) \| \geq \sup_{x\in E} \| f_u(x) \|_u \text{ y } \sup_{x\in E} \| f(x) \| \geq \sup_{x\in E} \| f_s(x) \|_s$$

$$\Rightarrow \| f_u \|_{E,E_u} \leq \| f \|_{E,E} \text{ y } \| f_s \|_{E,E_s} \leq \| f \|_{E,E}$$

$$\therefore \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \leq \| f \|_{E,E} \qquad (1)$$

Recíprocamente:

$$\| f_u(x) \|_u \leq \| f_u \|_{E,E_u} \leq \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\| f_s(x) \|_s \leq \| f_s \|_{E,E_s} \leq \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \max\left\{ \| f_u(x) \|_u , \| f_s(x) \|_s \right\} \leq \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \| f(x) \| \leq \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall x \in E$$

$$\Rightarrow \| f \|_{E,E} = \sup_{x\in E} \| f(x) \| \leq \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall x \in E \qquad (2)$$

de (1) y (2) se tiene:

$$\| f \|_{E,E} = \max\left\{ \| f_u \|_{E,E_u} , \| f_s \|_{E,E_s} \right\} \quad , \quad \forall f \in c_b(E)$$

Considérese ahora $T \in L(c_b(E))$ tal que

$T_u = T|_{cb(E,E_u)} \in L(c_b(E,E_u))$ y $T_s = T|_{cb(E,E_s)} \in L(c_b(E,E_s))$,

$f \in c_b(E)$ entonces $T(f) \in c_b(E)$, luego $T(f) = [T(f)]_u + [T(f)]_s$ donde

$[T(f)]_u \in c_b(E,E_u)$ y $[T(f)]_s \in c_b(E,E_s)$. Pero:

$$[T(f)]_u = \Pi_u \circ (T(f)) = \Pi_u \circ (T(f_u + f_s)) = \Pi_u \circ (T_u(f_u) + T_s(f_s)) = T_u(f_u)$$

$$[T(f)]_s = \Pi_s \circ (T(f)) = \Pi_s \circ (T(f_u + f_s)) = \Pi_s \circ (T_u(f_u) + T_s(f_s)) = T_s(f_s)$$

Luego;

$$\| T(f) \|_{E,E} = \max\left\{ \| T_u(f_u) \|_{E,E_u} , \| T_s(f_s) \|_{E,E_s} \right\}$$

Afirmo que: $\| T \| = \max\left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\}$. En efecto:

$$\| T_u(f_u) \|_{E,E_u} \le \| T_u \| \, \| f_u \|_{E,E_u} \le \| T_u \| \, \| f \|_{E,E} \le \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \| f \|_{E,E}$$

$$\| T_s(f_s) \|_{E,E_s} \le \| T_s \| \, \| f_s \|_{E,E_s} \le \| T_s \| \, \| f \|_{E,E} \le \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \| f \|_{E,E}$$

$$\Rightarrow \max \left\{ \| T_u(f_u) \|_{E,E_u} , \| T_s(f_s) \|_{E,E_s} \right\} \le \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \| f \|_{E,E}$$

$$\Rightarrow \| T(f) \|_{E,E} \le \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \| f \|_{E,E} \quad , \quad \forall \; f \in C_b(E)$$

$$\therefore \quad \| T \| \le \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \tag{1}$$

Recíprocamente:

$$\| T_u(f_u) \|_{E,E_u} \le \| T(f) \|_{E,E_u} = \| T(f_u) \|_{E,E_u} \le \| T \| \, \| f_u \|_{E,E_u} \quad , \quad \forall \; f_u \in C_b(E,E_u)$$

$$\Rightarrow \| T_u \| \le \| T \|$$

$$\| T_s(f_s) \|_{E,E_s} \le \| T(f) \|_{E,E_s} = \| T(f_s) \|_{E,E_s} \le \| T \| \, \| f_s \|_{E,E_s} \quad , \quad \forall \; f_s \in C_b(E,E_s)$$

$$\Rightarrow \| T_s \| \le \| T \|$$

$$\therefore \quad \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\} \le \| T \| \tag{2}$$

de (1) y (2) tenemos:

$$\| T \| = \max \left\{ \| T_u \| , \| T_s \| \right\}$$

IV.2 EL TEOREMA DE GROBMAN-HARTMAN PARA DIFEOMORFISMOS EN ESPACIOS DE BANACH

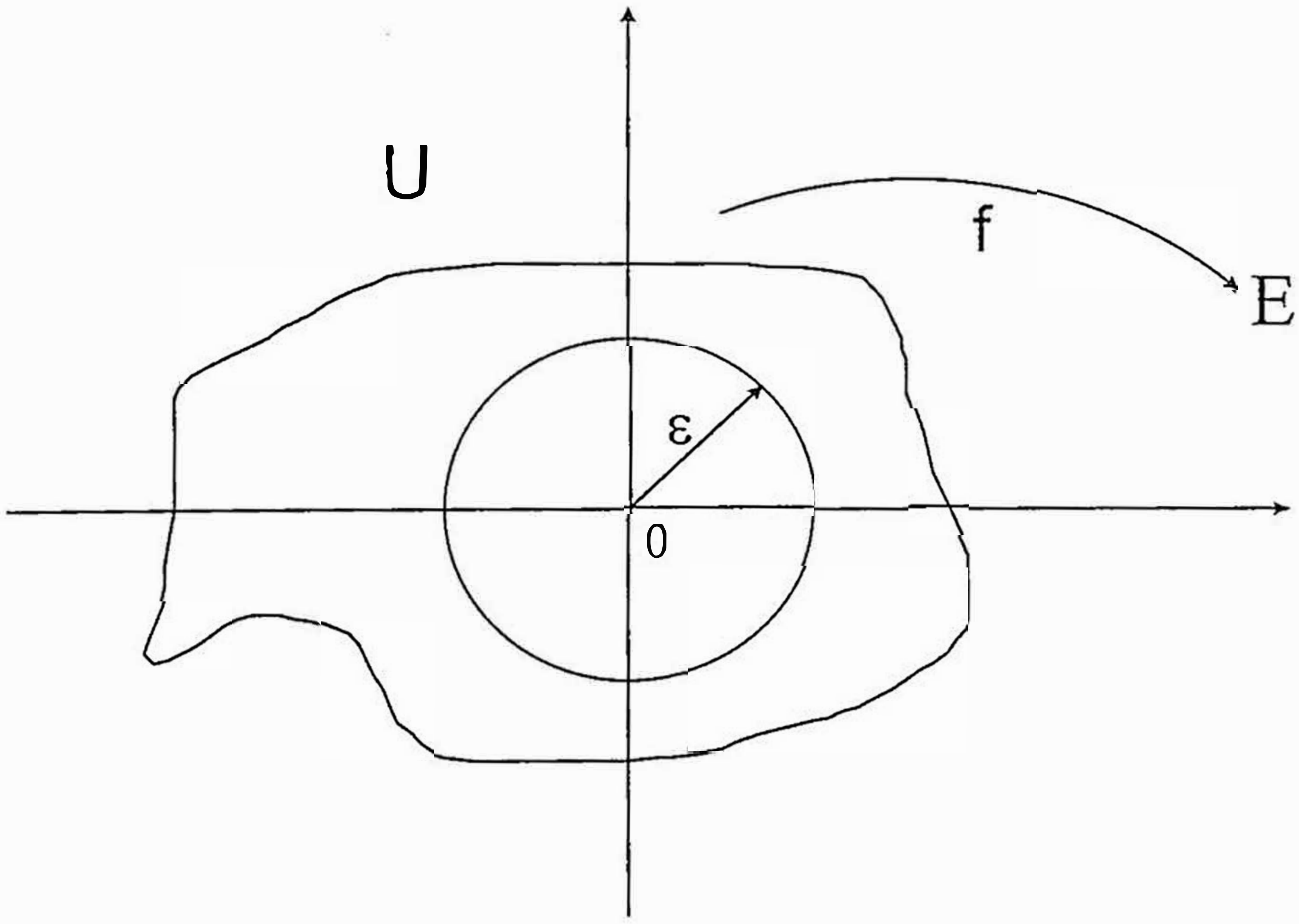
Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de U sobre su imagen, en donde $(E , \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, U es un abierto de E y $0 \in U$. Lo que se desea es demostrar que, si 0 es punto fijo hiperbólico de f, entonces f es localmente conjugado a Df(0); es decir $\exists \, h \in Hom(E) \; / \; h \circ Df(0) = f \circ h$ en una vecindad del $0 \in E$. Para conseguir lo que nos proponemos, es necesario desarrollar algunos resultados previos.

LEMA IV.2.1. Sea $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach, U es un abierto de E y $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ de clase C^1 sobre su imagen tal que $f(0) = 0$ y denotemos por $L = Df(0) \in L(E,E)$. Entonces $\forall\, \varepsilon > 0$; $\exists\, r(\varepsilon) = r > 0$ y $\exists\, \varphi \in C_b(E) \cap \mathcal{L}ip(E)$ / $f = L + \varphi$ en $B_r(0) \subseteq E$.

Prueba:. Primeramente, defino:

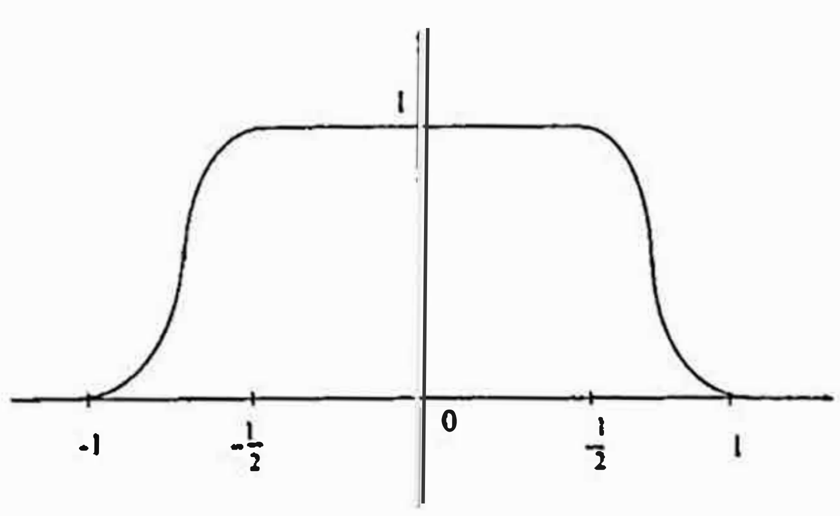
$$\begin{aligned} \Phi : U &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow \Phi(x) = f(x) - L(x) \end{aligned}$$

Obsérvese que: $\Phi(0) = f(0) - L(0) = 0$ entonces $D\Phi = Df - L$, luego $D\Phi(0) = D f(0) - L = 0$



Se desea extender continuamente Φ a todo E de tal manera que su extensión sea continua, acotada y Lipschitziana cuya constante de Lipschitz sea menor que ε . Par ello considero $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ de clase C^∞, definida por:

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = \begin{cases} 1 \ , & |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0 \ , & |t| \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$



tal que $\| \alpha'(t) | \leq k$

Como f es de clase C^1, $\Rightarrow$ Φ es de clase C^1, luego; $D\Phi$ es continua en 0, entonces dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\| x \| \leq \delta \;\Rightarrow\; \| D\Phi(x) \| < \frac{\varepsilon}{k+1}$$

en donde $\delta > 0$ es tomando suficientemente pequeño tal que $\overline{B_\delta(0)} \subseteq U$.

Defino:

$$\varphi : E \longrightarrow E$$

$$x \longrightarrow \varphi(x) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{\delta}\right)\Phi(x), & \text{si } x \in U \\ 0 \quad , & \text{si } x \in E - U \end{cases}$$

Obsérvese que si $\| x \| \geq \delta \Rightarrow \dfrac{\| x \|}{\delta} \geq 1 \Rightarrow \varphi(x) = \alpha\left(\frac{\|x\|}{\delta}\right)\Phi(x) = 0$ por lo tanto φ es continua.

Para probar que es acotada en E, es suficiente probar que es acotada en $B_\delta(0)$, ya que afuera vale 0. Sea $x \in B_\delta(0)$, se tiene:

$$\| \varphi(x) \| = \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x\|}{\delta}\right)\Phi(x) \right\| = \left| \alpha\left(\tfrac{\|x\|}{\delta}\right) \right| \| \Phi(x) \| \leq \| \Phi(x) \| = \| \Phi(x) - \Phi(0) \|$$

$$\leq \left(\sup_{x \in B_\delta(0)} \| D\Phi(x) \| \right) \| x \| \leq \frac{\varepsilon}{k+1}\delta$$

$$\therefore \; \| \varphi(x) \| \leq \frac{\varepsilon}{k+1}\delta \quad , \quad \forall\, x \in B_\delta(0) \tag{1}$$

Luego, concluimos que $\varphi \in C_b(E)$

Para probar la Lipschitzianidad, sea $x_1, x_2 \in E$, tenemos:

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| = \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right)\Phi(x_2) \right\|$$

$$\leq \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right)\Phi(x_1) \right\| + \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right)\Phi(x_2) \right\|$$

$$= \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right| \| \Phi(x_1) \| + \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right| \| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \| \tag{2}$$

Caso 1: Si $x_1, x_2 \in B_\delta(0)$, $\exists\, t^*$ entre $\frac{\|x_1\|}{\delta}$ y $\frac{\|x_2\|}{\delta}$ tal que:

$$\left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right| \leq \left| \alpha'(t^*) \right| \left| \tfrac{\|x_1\|}{\delta} - \tfrac{\|x_2\|}{\delta} \right| \leq \frac{k}{\delta} \| x_1 - x_2 \| \tag{3}$$

$$\| \Phi(x_1) \| = \| \Phi(x_1) - \Phi(0) \| \leq \left(\sup_{x \in B_\delta(0)} \| D\Phi(x) \| \right) \| x_1 \| \leq \frac{\varepsilon}{k+1}\delta \tag{4}$$

$$\| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \| \leq \left(\sup_{x \in B_\delta(0)} \| D\Phi(x) \| \right) \| x_1 - x_2 \| \leq \frac{\varepsilon}{k+1} \| x_1 - x_2 \| \qquad (5)$$

Reemplazando (3),(4) y (5) en (2), tenemos

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq \frac{k}{\delta} \| x_1 - x_2 \| \frac{\varepsilon}{k+1} \delta + \frac{\varepsilon}{k+1} \| x_1 - x_2 \| = \varepsilon \| x_1 - x_2 \| ,$$

$\forall\ x_1, x_2 \in B_\delta(0)$

Caso 2. Si $x_1 \in B_\delta(0) \ \wedge \ x_2 \notin B_\delta(0)$:

i) Si $x_2 \in U$, teniendo en cuenta que $\alpha\left(\frac{\|x_2\|}{\delta}\right) = 0$ en (2) y por (3) y (4), se tiene: $\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq \frac{k}{\delta} \| x_1 - x_2 \| \frac{\varepsilon}{k+1} \delta = \frac{k}{k+1} \varepsilon \| x_1 - x_2 \| < \varepsilon \| x_1 - x_2 \|$

ii) Si $x_2 \notin U$, entonces:

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| = \| \varphi(x_1) \| = \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right) \right| \| \Phi(x_1) \|$$

$$= \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{\delta}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{\delta}\right) \right| \| \Phi(x_1) \|$$

y por (3) y (4), se tiene:

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq \frac{k}{\delta} \| x_1 - x_2 \| \frac{\varepsilon}{k+1} \delta = \frac{k}{k+1} \varepsilon \| x_1 - x_2 \| < \varepsilon \| x_1 - x_2 \|$$

Caso 3. Si $x_1, x_2 \notin B_\delta(0)$

$$\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| = 0 < \varepsilon \| x_1 - x_2 \|$$

En cualquier caso $\| \varphi(x_1) - \varphi(x_2) \| \leq \varepsilon \| x_1 - x_2 \| \Rightarrow \varphi \in \mathit{Lip}(E)$ y $\mathit{Lip}(\varphi) < \varepsilon$.

Por último, si $\| x \| \leq \frac{\delta}{2} \Rightarrow \alpha\left(\frac{\|x\|}{\delta}\right) = 1$; luego $\varphi(x) = \Phi(x) = f(x) - L(x)$, entonces tomando $r = \frac{\delta}{2}$ se cumple: $f = L + \varphi$ en $B_r(0) \subseteq E$. ∎

LEMA IV.2.2. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $L \in Hip(E)$. Si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, entonces $\forall\ \varphi, \psi \in C_b(E) \cap \mathit{Lip}(E)$ con $\mathit{Lip}(\varphi), \mathit{Lip}(\psi) < \varepsilon$ la ecuación funcional: $(L + \varphi) \circ (I + \omega) = (I + \omega) \circ (L + \psi)$ tiene una única solución en $C_b(E)$.

Prueba:. Primeramente, obsérvese que:

$$(L + \varphi) \circ (I + \omega) = (I + \omega) \circ (L + \psi)$$

$$\Leftrightarrow L + L\circ\omega + \varphi\circ(I+\omega) = L + \psi + \omega\circ(L+\psi)$$

$$\Leftrightarrow L\circ\omega - \omega\circ(L+\psi) = \psi - \varphi\circ(I+\omega)$$

$$\Leftrightarrow \omega - L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi) = L^{-1}\circ(\psi - \varphi\circ(I+\omega))$$

$$\Leftrightarrow (I - \mathcal{L})\omega = L^{-1}\circ(\psi - \varphi\circ(I+\omega))$$

en donde $\mathcal{L}(\omega) = L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi)$

Si $(I-\mathcal{L})$ fuera invertible entonces

$$\omega = (I-\mathcal{L})^{-1}\circ L^{-1}\circ(\psi - \varphi\circ(I+\omega));$$

sea $T(\omega) = (I-\mathcal{L})^{-1}\circ L^{-1}\circ(\psi - \varphi\circ(I+\omega))$

Suponiendo que T es una contracción, el único punto fijo de T sería nuestra solución de la ecuación funcional dada .

i) $\vdash$ $(I-\mathcal{L})$ **es invertible**. En efecto: Para $\omega \in C_b(E)$, $\mathcal{L}(\omega) = L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi)$ (en realidad $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\psi$ con $\psi \in C_b(E)\cap Lip(E)$). Obsérvese que $L \in Hip(E) \Rightarrow L, L^{-1} \in L(E) \subseteq C_b(E)$; como $\psi \in C_b(E)$ $\Rightarrow$ $L+\psi \in C_b(E)$ $\Rightarrow \omega\circ(L+\psi) \in C_b(E) \Rightarrow L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi) \in C_b(E)$

Luego;

$$\begin{aligned} \mathcal{L} : C_b(E) &\longrightarrow C_b(E) \\ \omega &\longrightarrow \mathcal{L}(\omega) = L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1\omega_1 + c_2\omega_2) &= L^{-1}\circ(c_1\omega_1 + c_2\omega_2)\circ(L+\psi) \\ &= L^{-1}\circ\left(c_1\omega_1\circ(L+\psi) + c_2\omega_2\circ(L+\psi)\right) \\ &= c_1L^{-1}\circ\omega_1(L+\psi) + c_2L^{-1}\circ\omega_2\circ(L+\psi) \quad , \end{aligned}$$

$\forall\, c_1, c_2 \in K; \forall\, \omega_1, \omega_2 \in C_b(E)$

$$\therefore\ \mathcal{L} \in L(C_b(E))$$

Además :

$$\omega \in C_b(E,E_u) \Rightarrow \omega\circ(L+\psi) \in C_b(E,E_u) \Rightarrow L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi) \in C_b(E,E_u)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(\omega) \in C_b(E_u)$$

$$\omega \in C_b(E,E_s) \Rightarrow \omega\circ(L+\psi) \in C_b(E,E_s) \Rightarrow L^{-1}\circ\omega\circ(L+\psi) \in C_b(E,E_s)$$
$$\Rightarrow \mathcal{L}(\omega) \in C_b(E_s)$$

Luego:

$$L_u = L|_{cb(E,E_u)} \in L(C_b(E,E_u)) \text{ y } L_s = L|_{cb(E,E_s)} \in L(C_b(E,E_s)),$$

$\vdash I_u - L_u$ y $I_s - L_s$ son invertibles. En efecto, sea $\omega \in C_b(E,E_u)$

$$\Rightarrow \| L_u(\omega)(x) \|_{E,E_u} = \| L^{-1} \circ \omega \circ (L+\psi)(x) \|_u \le a \| \omega(L(x)+\psi(x)) \|_u \le a \| \omega \|_{E,E_u}$$

$$\| L_u(\omega) \|_{E,E_u} = \sup_{x\in E} \| L_u(\omega)(x) \| \le a \| \omega \|_{E,E_u} \ , \ \forall \omega \in C_b(E,E_s)$$

$$\Rightarrow \| L_u \| \le a < 1 \Rightarrow I_u - L_u \in C_b(E,E_u) \text{ y } \| (I_u - L_u)^{-1} \| \le \frac{1}{1-a}$$

Lamentablemente, el mismo procedimiento no funciona para L_s pues no podemos acotar L_s^{-1} de una manera conocida, sin embargo emplearemos otro método:

Defino:

$$L_s^{\bullet} : C_b(E,E_s) \longrightarrow C_b(E,E_s)$$
$$\omega \longrightarrow L_s^{\bullet}(\omega) = L_s \circ \omega \circ (L+\psi)^{-1}$$

Si tomamos $Lip(\varphi) \le \| L^{-1} \|^{-1} \Rightarrow L+\psi$ es invertible, $(L+\psi)^{-1} \in Lip(E)$ y

$$Lip\left[(L+\psi)^{-1}\right] \le \frac{1}{\| L^{-1} \|^{-1} - Lip(\psi)}$$

Luego; $L_s^{\bullet}$ está bien definido y se verifica con facilidad que $L_s^{\bullet} = L_s^{-1}$, como $I_s - L_s = L_s \circ (L_s^{-1} - I_s)$, luego $I_s - L_s$ será invertible si $L_s^{-1} - I_s$ lo es:

$$\| L_s^{-1}(\omega)(x) \|_s = \| L_s \circ \omega \circ (L+\psi)^{-1}(x) \|_s$$

$$\le a \left\| \omega\left((L(x)+\psi(x))^{-1}\right) \right\|_s \le a \| \omega \|_{E,E_s} \ , \ \forall x \in E$$

entonces

$$\| L_s^{-1}(\omega) \|_{E,E_s} = \sup_{x\in E} \| L_s^{-1}(\omega)(x) \|_s \le a \| \omega \|_{E,E_s} \quad \forall \omega \in C_b(E,E_s)$$

entonces $\| L_s^{-1} \| \le a < 1$ entonces $I_s - L_s^{-1}$ es invertible,

$$(I_s - L_s^{-1})^{-1} \in Lip(C_b(E,E_s)) \text{ y } Lip\left[(I_u - L_u)^{-1}\right] \le \frac{1}{1-a}$$

Luego $I_s - L_s$ es invertible, $(I_s - L_s)^{-1} \in Lip(C_b(E,E_s))$ y además

$$Lip\left[(I_s - L_s)^{-1}\right] = Lip\left[(L_s^{-1} - I_s)^{-1} \circ L_s^{-1}\right]$$

$$\le Lip\left[(L_s^{-1} - I_s)^{-1}\right] Lip\left(L_s^{-1}\right) \le \frac{\| L_s^{-1} \|}{1-a} \le \frac{a}{1-a}$$

entonces

$$\|(I_s - L_s)^{-1}\| \leq \frac{a}{1-a}$$

Afirmación: $(I-L)^{-1} = (I_u - L_u)^{-1} + (I_s - L_s)^{-1}$. En efecto:

$$\begin{aligned}(I-L)\circ\left[(I_u - L_u)^{-1} + (I_s - L_s)^{-1}\right] &= (I-L)\circ(I_u - L_u)^{-1} + (I-L)\circ(I_s - L_s)^{-1}\\ &= (I_u - L_u)\circ(I_u - L_u)^{-1} + (I_s - L_s)\circ(I_s - L_s)^{-1}\\ &= I_u + I_s = I\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left[(I_u - L_u)^{-1} + (I_s - L_s)^{-1}\right]\circ(I-L) &= (I_u - L_u)^{-1}\circ(I-L) + (I_s - L_s)^{-1}\circ(I-L)\\ &= (I_u - L_u)^{-1}\circ(I_u - L_u) + (I_s - L_s)^{-1}\circ(I_s - L_s)\\ &= I_u + I_s = I\end{aligned}$$

Lo cual prueba la afirmación.

En conclusión, (I−L) es invertible, $(I-L)^{-1} \in Lip(C_b(E))$ y

$$\begin{aligned}\|(I-L)^{-1}\| &= \max\left\{\|(I_u - L_u)^{-1}\|, \|(I_s - L_s)^{-1}\|\right\}\\ &\leq \max\left\{\frac{1}{1-a}, \frac{a}{1-a}\right\} = \frac{1}{1-a}\end{aligned}$$

Esto se cumple, siempre que $Lip(\psi) \leq \|L^{-1}\|^{-1}$

ii) $\vdash$ T es contractiva. En efecto, para $\omega \in C_b(E)$, definimos

$$(I-L)^{-1}\circ L^{-1}\circ\big(\psi - \varphi\circ(I+\omega)\big) = T(\omega)$$

(En realidad $T = T(\psi, \varphi)$ con $\psi, \varphi \in Lip(E)$

Observe que:

$$\varphi\circ(I+\omega) \in C_b(E), \Rightarrow \psi - \varphi\circ(I+\omega) \in C_b(E)$$

$$\Rightarrow (I-L)^{-1}\circ L^{-1}\circ\big(\psi - \varphi\circ(I+\omega)\big) = T(\omega) \in C_b(E)$$

Luego:

$$\begin{aligned}T : C_b(E) &\longrightarrow C_b(E)\\ \omega &\longrightarrow T(\omega) = (I-L)^{-1}\circ L^{-1}\circ\big(\psi - \varphi\circ(I+\omega)\big)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\| T(\omega_1) - T(\omega_2) \|_{E,E} &= \left\| (I-L)^{-1} \circ L^{-1} \circ \left(\psi - \varphi \circ (I+\omega_1)\right) - (I-L)^{-1} \circ L^{-1} \circ \left(\psi - \varphi \circ (I+\omega_2)\right) \right\|_{E,E} \\ &= \left\| (I-L)^{-1} \circ L^{-1} \circ \left(\psi - \varphi \circ (I+\omega_1) - \psi - \varphi \circ (I+\omega_2)\right) \right\|_{E,E} \\ &\leq \left\| (I-L)^{-1} \right\| \left\| L^{-1} \right\| \left\| \varphi \circ (I+\omega_1) - \varphi \circ (I+\omega_2) \right\|_{E,E} \\ &\leq \frac{\| L^{-1} \|}{1-\alpha} Lip(\varphi) \left\| \omega_1 - \omega_2 \right\|_{E,E}\end{aligned}$$

Si tomamos $Lip(\varphi) < (1\text{-}\alpha) \| L^{-1} \|^{-1}$, se tiene que $T \in Lip(C_b(E))$ y $Lip(T) < 1$ y como $C_b(E)$ es de Banach, entonces

$$\exists!\, \omega_o \in C_b(E) \,/\, T(\omega_o) = \omega_o$$

el cual es solución única de la ecuación funcional dada. Luego es suficiente tomar

$$\varepsilon \leq \min \left\{ \| L^{-1} \|^{-1},\ (1-\alpha) \| L^{-1} \|^{-1} \right\} = (1-\alpha) \| L^{-1} \|^{-1} \qquad \blacksquare$$

COROLARIO Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L \in \mathrm{Hip}(E)$, si $0 < \varepsilon < (1-\alpha) \| L^{-1} \|^{-1}$. Entonces $(L+\varphi)$ y $(L+\psi)$ son conjugados, $\forall\, \varphi, \psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ tales que $Lip(\varphi), Lip(\psi) < \varepsilon$

Prueba: Por el Lema anterior, la ecuación funcional:

$$(L+\varphi) \circ (I+\omega_o) = (I+\omega_o) \circ (L+\psi)$$

tiene única solución $\omega_o \in C_b(E)$, También la ecuación funcional:

$$(L+\varphi) \circ (I+\tilde{\omega}_o) = (I+\tilde{\omega}_o) \circ (L+\psi)$$

tiene única solución $\tilde{\omega}_o \in C_b(E)$

$$(I+\omega_o) \circ (I+\tilde{\omega}_o) \circ (L+\varphi) = (I+\omega_o) \circ (L+\psi) \circ (I+\tilde{\omega}_o) = (L+\varphi) \circ (I+\omega_o) \circ (I+\tilde{\omega}_o)$$

$$(I+\tilde{\omega}_o) \circ (I+\omega_o) \circ (L+\psi) = (I+\tilde{\omega}_o) \circ (L+\varphi) \circ (I+\omega_o) = (L+\psi) \circ (I+\tilde{\omega}_o) \circ (I+\omega_o)$$

observe que:

$$(I+\omega_o) \circ (I+\tilde{\omega}_o) = I + (\tilde{\omega}_o + \omega_o + \tilde{\omega}_o \omega_o)$$

$$(I+\tilde{\omega}_o) \circ (I+\omega_o) = I + (\omega_o + \tilde{\omega}_o + \omega_o \tilde{\omega}_o)$$

y como $\omega_o, \tilde{\omega}_o \in C_b(E) \Rightarrow \tilde{\omega}_o + \omega_o + \tilde{\omega}_o \omega_o \wedge \omega_o + \tilde{\omega}_o + \omega_o \tilde{\omega}_o \in C_b(E)$. Ademas es evidente que

$$(I+0)\circ(L+\varphi)=(L+\varphi)\circ(I+0) \quad y$$

$$(I+0)\circ(L+\psi)=(L+\psi)\circ(I+0)$$

por unicidad de la solución del tipo $I+\omega$ con $\omega \in C_b(E)$ de las ecuaciones funcionales anteriores, tenemos:

$$(I+\omega_0)\circ(I+\tilde{\omega}_0)=I=(I+\tilde{\omega}_0)\circ(I+\omega_0)$$

luego $(I+\omega_0)^{-1}=(I+\tilde{\omega}_0)\in C_b(E)$, luego haciendo $h=I+\omega_0$ entonces $h\in Hom(E)$ y $(L+\varphi)\circ h=h\circ(L+\psi)$

$$\therefore\ L+\varphi \ \text{ y } \ L+\psi \ \text{ son conjugadas}$$ ∎

Enseguida enunciaremos y demostraremos el Teorema de Grobman y Hartman para difeomorfismos en espacios de Banach

TEOREMA IV.2.3. Sea $(E,\|\cdot\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0\in U$. Sea $f: U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Denotemos por $L=Df(0)\in Hip(E)$. Entonces f es localmente conjugado a L es decir: $\exists\, h\in Hom(E)\,/\, h\circ Df(0)=f\circ h$ en $B_r(0)\subseteq E$[4]

Prueba: Sea $\varepsilon\leq(1-\alpha)\|L^{-1}\|^{-1}$, por el Lema IV.2.1; existe $r>0$ y $\exists\,\varphi\in C_b(E)\cap \mathcal{L}ip(E)$ con $\mathcal{L}ip(\varphi)<\varepsilon$ tal que $f=L+\varphi$ en $B_r(0)\subseteq E$. Haciendo $\psi=0\in C_b(E)\cap\mathcal{L}ip(E)$ entonces $\mathcal{L}ip(\psi)=0<\varepsilon\leq(1-\alpha)\|L^{-1}\|^{-1}$, luego por el corolario anterior, $L+\varphi$ y L son conjugadas, entonces

$\exists\, h\in Hom(E)\,/\, L\circ h=h\circ(L+\varphi)$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "L+\varphi"] \arrow[d, "h"'] & E \arrow[d, "h"] \\ E \arrow[r, "L"'] & E \end{tikzcd}$$

Luego, si $x\in B_r(0)$, se tiene:

$$L\circ h(x)=h\circ(L+\varphi)(x)=h\circ f(x)$$

$$\therefore\ L \text{ y } f \text{ son conjugados en } B_r(0)$$ ∎

[4] Este teorema fue demostrado por Grobman y Hartman cuando se trabaja en un espacio vectorial de dimensión finita. Vease Sotomayor, J. [17]

Afirmación: $h(0)=0$. En efecto, como $L\circ h = h\circ f$ en $B_r(0)$, se tiene que:

$$L\circ h(0) = h\circ f(0) = h(0) \Rightarrow L(h(0)) = h(0)$$

Si denotamos $h(0) = x_u + x_s$; $x_u \in E_u, x_s \in E_s$, tenemos:

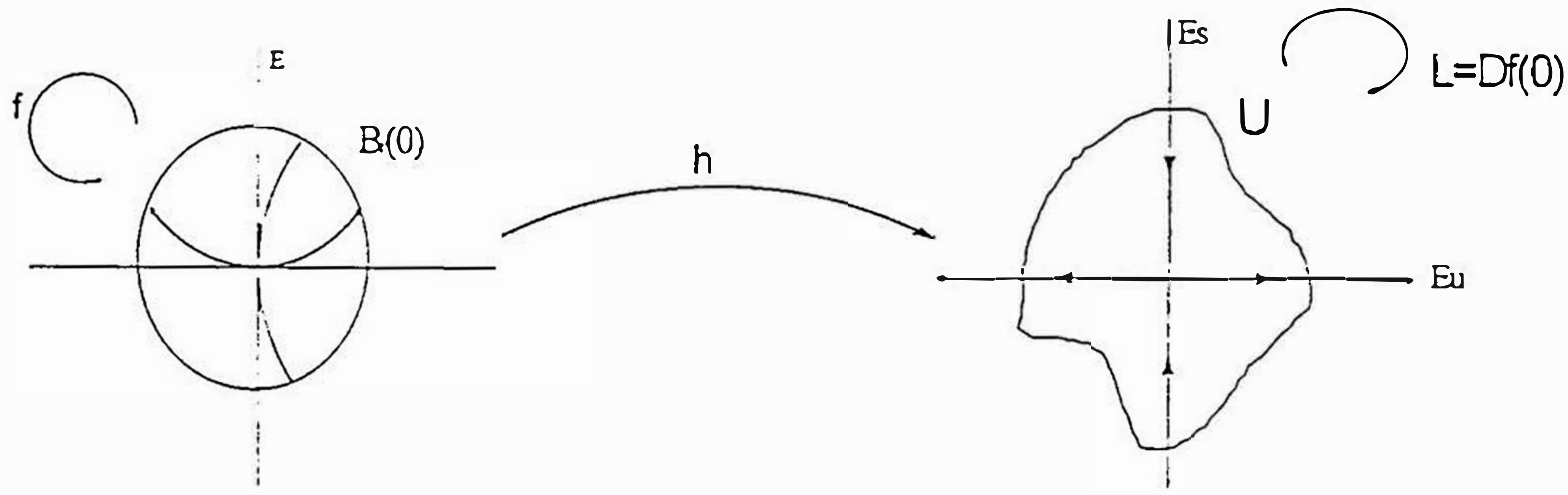
$$L(x_u + x_s) = x_u + x_s \Rightarrow L_u x_u + L_s x_s = x_u + x_s \Rightarrow L_u x_u = x_u \ \text{y}\ L_s x_s = x_s$$

$$\|x_s\|_s \leq \|L_s x_s\|_s \leq a\,\|x_s\|_s \Rightarrow (1-a)\,\|x_s\|_s \leq 0 \Rightarrow \|x_s\|_s = 0 \Rightarrow x_s = 0$$

$$\|x_u\|_u \leq \|L_u x_u\|_u \leq a\,\|x_u\|_u \Rightarrow (1-a)\,\|x_u\|_u \leq 0 \Rightarrow \|x_u\|_u = 0 \Rightarrow x_u = 0$$

Por lo tanto $h(0) = 0+0$ lo cual prueba la afirmación

Una representación gráfica de la conjugación local, la vemos en el siguiente diagrama:



IV.3 ESTABILIDAD DE PUNTOS FIJOS HIPERBÓLICOS

A continuación probaremos un resultado importante de los puntos fijos hiperbólicos a saber que si una función $g:U \longrightarrow E$ está "**suficientemente cerca**" de $f:U \longrightarrow E$ de tal modo que cumpla con las condiciones del Teorema de Grobman-Hartman, entonces se tendrá que g es localmente conjugado a f y que g tiene un punto fijo hiperbólico "**cercano**" a 0. Antes de probar tal resultado, necesitamos llenar algunos detalles como: ¿qué significa g suficientemente cerca de f ?, y otros adicionales.

Sea $g : U \longrightarrow E$ donde $(E, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach; decimos que g es diferenciable en U sí y sólo sí $\forall\, x \in E$, $\exists\, L \in L(E,E)$ tal que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{\|g(x+\delta) - g(x) - L\delta\|}{\|\delta\|} = 0$$

en tal caso denotaremos $L = Dg(x)$. Tenemos entonces:

$$\begin{aligned} Dg : U &\longrightarrow L(E) \\ x &\longrightarrow Dg(x). \end{aligned}$$

Si Dg es continua en U , osea, $Dg \in C(U,L(E))$, diremos que g es una función de clase C^1 en U. al conjunto de todas las funciones que son una vez continuamente diferenciable en U , es decir:

$$C^1(U,E) = \{g : U \longrightarrow E \;/\; g \text{ es diferenciable en } U \text{ y } Dg \in C(U,L(E))\}$$

Es posible dotar a $C^1(U,E)$ de una estructura de espacio de Banach siempre que g y Dg sean acotadas en U. En efecto, si g y Dg son acotadas, se tiene que

$$\| g(x) \| \le k_1 \;\text{ y }\; \| Dg(x) \| \le k_2 \;,\quad \forall\, x \in U$$

con k_1, k_2 constantes reales positivas que dependen de g. Luego existen

$$\sup_{x\in U} \| g(x) \| = \| g \|_{U,E} \;\text{ y }\; \sup_{x\in U} \| Dg(x) \| = \| Dg \|_{U,L(E)}$$

Denotamos por $\| g \|_1$ al máximo de éstos supremos. De ésta manera, si denotamos por $C_b^1(U,E)$ al conjunto:

$$C_b^1(U,E) = \{g \in C^1(U,E) \;/\; g \text{ y } Dg \text{ son acotados en } U\}$$

tenemos que:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_1 : C_b^1(U,E) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ g &\longrightarrow \| g \|_1 = \max\left\{ \sup_{x\in U} \| g(x) \| \,,\, \sup_{x\in U} \| Dg(x) \| \right\} \end{aligned}$$

es una norma sobre $C_b^1(U,E)$. Además $(C_b^1(U,E), \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach. Luego "g suficientemente cerca de f" significará que $g,f \in C_b^1(U,E)$ entonces $\| g-f \| < \varepsilon$ es decir:

$$\| g(x) - f(x) \| < \varepsilon \quad \text{y} \quad \| Dg(x) - Df(x) \| < \varepsilon \;,\quad \forall\, x \in U$$

Por otro lado, recordemos que en la prueba del Lema VI.2.2 empleamos que si $\varphi, \psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ con $Lip(\varphi)$, $Lip(\psi) < (1-\alpha)\| L^{-1}\|^{-1}$ entonces: T es una contracción de $C_b(E)$ en el mismo punto y su único punto fijo ω, satisface

$$(L+\varphi) \circ (I+\omega) = (I+\omega) \circ (L+\psi)$$

$$(I+\omega)\in \mathrm{Hom}(E)$$

Denotemos

$$Y=\{\varphi \in C_b(E)\cap Lip(E) \,/\, Lip(\varphi) < (1-\alpha)\,\|L^{-1}\|^{-1}\}$$

con $L \in \mathrm{Hip}(E)$, entonces podemos definir

$$\begin{aligned} d : Y\times Y &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\psi,\varphi) &\longrightarrow d(\psi,\varphi)=\|\psi-\varphi\|_{E,E}\end{aligned}$$

luego (Y,d) es un espacio métrico. Además:

$$\begin{aligned} T : C_b(E)\times Y\times Y &\longrightarrow C_b(E)\\ (\omega,\psi,\varphi) &\longrightarrow T(\omega,\psi,\varphi)=\left(I-L_\varphi\right)^{-1}\circ L^{-1}\circ\left(\psi-\varphi\circ(I+\omega)\right)\end{aligned}$$

es una contracción $\forall\ \varphi,\psi \in Y$.

Si fijamos $\varphi\in Y$, tendríamos

$$\begin{aligned} T : C_b(E)\times Y &\longrightarrow C_b(E)\\ (\omega,\psi) &\longrightarrow T(\omega,\psi)\end{aligned}$$

y T_ψ es una contracción. Denotemos por $\omega_\psi \in C_b(E)$ el único punto fijo de T_ψ, entonces la aplicación fija

$$\begin{aligned} \theta : Y &\longrightarrow C_b(E)\\ \psi &\longrightarrow \theta(\psi)=\omega_\psi\end{aligned}$$

está bien definida. El siguiente Lema prueba la continuidad de θ.

LEMA IV.3.1 La aplicación fija θ es continua en Y

Prueba: De acuerdo al Teorema III.2.1 es suficiente probar que

$$T_\omega \in C(Y,C_b(E)) \quad \forall\ \omega \in C_b(E)$$

Para $\psi_1,\psi_2\in Y$, se tiene que:

$$\begin{aligned}\|T_\omega(\psi_1)-T_\omega(\psi_2)\|_{E,E} &= \|T_{\psi_1}(\omega)-T_{\psi_2}(\omega)\|_{E,E}\\
&\le \left\|(I-L)^{-1}\circ L^{-1}\circ\left(\psi_1-\varphi\circ(I+\omega)\right)-(I-L)^{-1}\circ L^{-1}\circ\left(\psi_2-\varphi\circ(I+\omega)\right)\right\|_{E,E}\\
&\le \|(I-L)^{-1}\|\,\|L^{-1}\|\,\|\psi_1-\varphi\circ(I+\omega)-\psi_2+\varphi\circ(I+\omega)\|_{E,E}\\
&\le |(I-L)^{-1}|\,\|L^{-1}|\,|\psi_1-\psi_2\|_{E,E}\ ;\ \forall\ \psi_1,\psi_2\in Y\end{aligned}$$

Por tanto $T_\omega \in Lip(Y,C_b(E))$ entonces $T_\omega \in C(Y,C_b(E)), \forall\omega \in C_b(E)$ □

Estamos listos para enunciar y demostrar el Teorema de estabilidad local de puntos fijos hiperbólicos.

TEOREMA VI.3.2 Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo de clase C^1 sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Entonces $\exists\, r > 0$ y $\exists\, \varepsilon > 0$ tal que $g \in B_\varepsilon(f) \subseteq C^1(U,E)$ y se cumple que g es localmente conjugado a f. Ademas si h es la conjugación entre f y g, $h(0) \in B_r(0) \subseteq E$ y $h(0)$ es punto fijo hiperbólico de g

Prueba: Denotemos $L_o = Df(0) \in Hip(E)$. Como Hip(E) es abierto en L(E);

$\exists\, \delta_1 > 0 / \| L - L_o \| < \delta_1 \Rightarrow L \in Hip(E)$ (1)

Sea $0 < \varepsilon < (1-a) \| L_o^{-1} \|^{-1}$, entonces $\exists\, r_1 > 0$ y $\exists\, \varphi \in C_b(E) \cap Lip(E)$. con

$Lip(\varphi) < \frac{\varepsilon_o}{2}$ tal que $f = L_o + \varphi$ en $B_{r_1}(0) \subseteq E$ (2)

Además como f es de clase C^1 entonces Df es continua en U , en particular es continua en cero, entonces

$$\exists\, r_2 > 0 / \| x \| < r_2 \Rightarrow \| Df(x) - L_o \| < \frac{\delta_1}{2} \quad (3)$$

Sea $g \in C^1(U,E)$, si $\| g - f \|_1$ es suficientemente pequeño probaremos que existe $\exists\, r > 0$ tal que $g = f + \psi$ es localmente conjugado a f en $B_r(0) \subseteq E$ con $\psi \in C_b(E) \cap Lip(E)$ y $Lip(\psi) < \frac{\varepsilon_o}{2}$. Si r=min{$r_1$,$r_2$}, por (2) se tiene que

$$g = L_o + \varphi + \psi \quad \text{en} \quad B_r(0) \subseteq E$$

También se observa que $Lip(\varphi + \psi) \leq Lip(\varphi) + Lip(\psi) < \frac{\varepsilon_o}{2} + \frac{\varepsilon_o}{2} = \varepsilon_o$, luego por el Corolario al Lema VI.2.2 se tiene que $L_o + \varphi + \psi$ y $L_o + \varphi$ son conjugados por $h_\psi \in Hom(E)$ de la forma $h_\psi = I + \omega_\psi$ con $\omega_\psi \in C_b(E)$

Por otro lado se tiene:

$$\begin{aligned} \theta : Y &\longrightarrow C_b(E) \\ \psi &\longrightarrow \theta(\psi) = \omega_\psi \end{aligned}$$

es continua. Como $L_o+\varphi$ y $L_o+\varphi$ es conjugado por $h_0=I+0$ entonces $\theta(0)=\omega_0=0$. Luego

$$\exists\, \delta_2>0 / \| \psi \|_{E,E}<\delta_2 \;\Rightarrow\; \| \theta(\psi)-\theta(0) \|_{E,E}<\frac{r}{2} \;\Rightarrow\; \| \theta(\psi) \|_{E,E}<\frac{r}{2} \qquad (4)$$

Sea $r=\min\left\{ r_1 , r_2 \right\}$ donde r_1, r_2 son dados por (2) y (3) respectivamente.

Consideremos $\| g-f \|_1<\varepsilon<\min\left\{ \frac{r}{k+r}\frac{\varepsilon_o}{2}, \delta_2, \frac{\delta_1}{2} \right\}$ en donde $k=\max\limits_{t\in R} | \alpha'(t) |$ con

$$\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

$$t \longrightarrow \alpha(t)=\begin{cases} 1 , & |t|\leq \frac{1}{2} \\ 0 , & |t|\geq 1 \end{cases} \quad \text{de clase } C^\infty$$

Obsérvese que $r, \varepsilon_o, \delta_1$ y δ_2 dependen solamente de L_0 (ver: 1,2,3 y 4)

Ahora probaremos que $g=f+\psi$ en donde ψ tiene las condiciones requeridas. Para ello defino:

$$\Phi : U \longrightarrow E$$

$$x \longrightarrow \Phi(x)=g(x)-f(x)$$

Extenderemos Φ a ψ definida en todo E, de la siguiente manera: Defino

$$\psi : E \longrightarrow E$$

$$x \longrightarrow \psi(x)=\begin{cases} \alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\Phi(x) , & \text{si } x\in U \\ 0 , & \text{si } x\in E-U \end{cases}$$

$\vdash \psi$ es continua. En efecto: si $\| x \| \geq r \Rightarrow \dfrac{\| x \|}{r}\geq 1 \Rightarrow \psi(x)=\alpha\left(\frac{\|x\|}{r}\right)\Phi(x)=0$

$\vdash \psi$ es acotada. Para probar que ψ es acotada en E, basta probar que ψ es acotada en $B_r(0)$, puesto que fuera de ella es 0. En efecto:

$$\| \psi(x) \| = \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x\|}{r}\right)\Phi(x) \right\| = \left| \alpha\left(\tfrac{\|x\|}{r}\right) \right| \| \Phi(x) \| \leq \| \Phi(x) \| = \| g(x)-f(x) \|$$

$$\leq \sup_{x\in B_r(0)} \| g(x)-f(x) \| \leq \| g-f \|_1 < \varepsilon$$

$$\therefore\; \psi \in C_b(E)$$

Ademas:

$$\sup_{x\in E} \| \psi(x) \| \leq \varepsilon \;\Rightarrow\; \| \psi \|_{E,E}<\delta_2 \qquad (5)$$

$\vdash \psi$ es Lipschitziana: En efecto, para probar que ψ es Lipschitziana, consideremos tres casos.

i) $x_1, x_2 \in B_r(0)$

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| = \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right)\Phi(x_2) \right\|$$

$$\leq \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right)\Phi(x_1) \right\| + \left\| \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right)\Phi(x_1) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right)\Phi(x_2) \right\|$$

$$= \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right) \right| \| \Phi(x_1) \| + \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right) \right| \| \Phi(x_1) - \Phi(x_2) \|$$

$$\leq \left| \alpha^{1}(t^{*}) \right| \left| \tfrac{\|x_1\|}{r} - \tfrac{\|x_2\|}{r} \right| \left(\sup_{x \in B_r(0)} \| g(x) - f(x) \| \right) + \left(\sup_{x \in B_r(0)} \| D\Phi(x) \| \right) \| x_1 - x_2 \|$$

$$\leq \frac{k}{r} \| x_1 - x_2 \| \| g - f \|_1 + \| g - f \|_1 \| x_1 - x_2 \|$$

$$\leq \left(\frac{k}{r} + 1 \right) \| g - f \|_1 \| x_1 - x_2 \| = \frac{k+r}{r} \| g - f \|_1 \| x_1 - x_2 \|$$

$$< \frac{k+r}{r} \frac{r}{k+r} \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \| = \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \|$$

ii) Si $x_1 \in B_r(0)$ y $x_2 \notin B_r(0)$:

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| = \| \psi(x_1) \| = \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right) \right| \| \Phi(x_1) \| = \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right) - 0 \right| \| \Phi(x_1) \|$$

$$= \left| \alpha\left(\tfrac{\|x_1\|}{r}\right) - \alpha\left(\tfrac{\|x_2\|}{r}\right) \right| \| \Phi(x_1) \|$$

$$\leq \left| \alpha^{1}(t^{*}) \right| \left| \tfrac{\|x_1\|}{r} - \tfrac{\|x_2\|}{r} \right| \left(\sup_{x \in B_r(0)} \| g(x) - f(x) \| \right)$$

$$< \frac{k}{r} \frac{r}{k+r} \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \| < \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \|$$

iii) Si $x_1, x_2 \notin B_r(0)$

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| = 0 < \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \|$$

$$\therefore \; \| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| < \frac{\varepsilon_o}{2} \| x_1 - x_2 \| \;, \quad \forall\, x_1, x_2 \in E$$

De aquí

$$\psi \in C_b(E) \cap \mathit{Lip}(E) \text{ y } \mathit{Lip}(\psi) < \frac{\varepsilon_o}{2}. \tag{6}$$

Además si $x \in B_{\frac{r}{2}}(0)$

$$\Rightarrow \psi(x) = g(x) - f(x) \Rightarrow g = f + \psi \text{ en } B_{\frac{r}{2}}(0)$$

Como $\frac{r}{2} < r \le r_1$ por (2) se tiene: $g = L_o + \varphi + \psi$ en $B_{\frac{r}{2}}(0)$. Y como

$Lip(\psi) < \frac{\varepsilon_o}{2}$ y $Lip(\varphi+\psi) \le Lip(\varphi) + Lip(\psi) < \frac{\varepsilon_o}{2} + \frac{\varepsilon_o}{2} = \varepsilon_o < (1-a)\,\| L_o^{-1} \|^{-1}$

Entonces $L_o + \varphi + \psi$ y $L_o + \varphi$ son conjugados por $h_\psi \in$ Hom(E) de la forma $h_\psi = I + \omega_\psi$ con $\omega_\psi \in C_b(E)$. Luego por (5) $\|\psi\|_{E,E} < \delta_2$ y como $h_\psi(0) = \omega_\psi(0)$, entonces por (4) se tiene:

$$\| h_\psi(0) \|_{E,E} = \| \omega_\psi(0) \|_{E,E} \le \| \omega_\psi \|_{E,E} = \| \theta(\psi) \|_{E,E} < \frac{r}{2}$$

por lo tanto $\| h_\psi(0) \|_{E,E} \le \| \omega_\psi \|_{E,E} < \frac{r}{2}$, entonces $h_\psi(0) \in B_{\frac{r}{2}}(0)$ y por lo tanto

$$h_\psi \circ (L_o + \varphi) = (L_o + \varphi + \psi) \circ h_\psi \Rightarrow h_\psi(f(0)) = g\,(h_\psi(0))$$

entonces $g\,(h_\psi(0)) = h_\psi(0) \Rightarrow h_\psi(0)$ es punto fijo de g

Además, tomando $\| g - f \| < \frac{\delta_1}{2}$ y de (3) tenemos

$$\| Dg\,(h_\psi(0)) - L_o \| \le \| Dg\,(h_\psi(0)) - Df(h_\psi(0)) \| + \| Df(h_\psi(0)) - L_o \|$$

$$\le \sup_{x \in B_{\frac{r}{2}}(0)} \| Dg(x) - Df(x) \| + \frac{\delta_1}{2}$$

$$\le \| g - f \|_1 + \frac{\delta_1}{2} < \frac{\delta_1}{2} + \frac{\delta_1}{2} = \delta_1$$

por (1): $Dg\,(h_\psi(0)) \in$ Hip(E), por tanto $h_\psi(0)$ es punto fijo hiperbólico de g.

$\square$

COROLARIO VI.3.3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach, U es un abierto de E tal que $0 \in U$. Sea $f : U \longrightarrow E$ un difeomorfismo sobre su imagen y 0 es punto fijo hiperbólico de f. Entonces existen $r, r' > 0$ tal que la aplicación

$$\xi : B_{r'}(f) \longrightarrow B_r(0)$$
$$g \longrightarrow \xi(g) = h(0)$$

donde $h(0)$ es el punto fijo hiperbólico de g en $B_r(0)$; es continua de clase C^1.

Prueba: Consideremos $B_\varepsilon(f) \subseteq C_b^1(U,E)$ y $B_{\frac{r}{2}}(0) \subseteq E$ las vecindades de f y 0, respectivamente, obtenidos en el Teorema anterior. Definamos la función:

$$F : B_\varepsilon(f) \times B_{\frac{r}{2}}(0) \longrightarrow E$$
$$(g,x) \longrightarrow F(g,x) = x - g(x)$$

Obsérvese que: $F(f,0) = 0 - f(0) = 0$

Además:

$$F(g,x+h) - F(g,x) = x + h - g(x+h) - x + g(x) = h - [g(x+h) - g(x)]$$

Considerando:

$$L : E \longrightarrow E$$
$$h \longrightarrow L(h) = h - Dg(x)(h)$$

$$\frac{\| F(g,x+h) - F(g,x) - L(h) \|}{\| h \|} = \frac{\| h - [g(x+h) - g(x)] - h + Dg(x)(h) \|}{\| h \|}$$

$$= \frac{\| g(x+h) - g(x) - Dg(x)(h) \|}{\| h \|}$$

entonces $D_2F(g,x) = I_d - Dg(x)$

Luego: $D_2F(g,0) = I_d - Dg(0) = I_d - L_o \in GL(E)$, pues $L_0 \in Hip(E)$ por el Teorema de la función implícita en espacios de Banach: Existen $r, r^l > 0$ y $\xi : B_{r^l}(f) \longrightarrow B_r(0)$ de clase C^1 tal que

$$F(g,\xi(g)) = 0 \quad , \quad \forall g \in B_{r^l}(f)$$

$$\Rightarrow \xi(g) - g(\xi(g)) = 0 \quad , \quad \forall g \in B_{r^l}(f) \Rightarrow g(\xi(g)) = \xi(g) \quad , \quad \forall g \in B_{r^l}(f)$$

Luego $\xi(g)$ es punto fijo de g en $B_r(0) \subseteq B_{\frac{r_0}{2}}(0) \Rightarrow \xi(g) = h(0)$, por lo tanto

$$\xi : B_{r^l}(f) \longrightarrow B_r(0)$$
$$g \longrightarrow \xi(g) = h(0)$$

es continua de clase C^1 ∎

PROPOSICIÓN VI.3.4. Sea $(E, \|\cdot\|)$ espacio de Banach y $L_0 \in Hip(E)$. Entonces $\exists\ \delta > 0$ tal que $L \in B_\delta(L_o)$, entonces L es localmente conjugado a L_0

Prueba. Primero observemos que $L = L_o + (L - L_o)$. Si encontramos $\psi \in C_b(E) \cap \mathit{Lip}(E)$ tal que $\mathit{Lip}(\psi) < \varepsilon < (1-\alpha) \| L_o^{-1} \|^{-1}$ y $\psi = L - L_o$ locamente, la Proposición quedaría probada. Para ello defino:

$$\begin{aligned} \psi : E &\longrightarrow E \\ x &\longrightarrow \psi(x) = \alpha(\| x \|)(L - L_o)(x) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,1] \\ t &\longrightarrow \alpha(t) = \begin{cases} 1 , & |t| \le \frac{1}{2} \\ 0 , & |t| \ge 1 \end{cases} \quad \text{de clase } C^\infty \end{aligned}$$

Se verifica que ψ es continua

Como $x \in E \setminus B_1(0) \Rightarrow \| x \| \ge 1 \Rightarrow \alpha(\| x \|) = 0 \Rightarrow \psi(x) = 0$. Para probar que ψ es acotada en E, es suficientemente probar que ψ es acotada en $B_1(0) \subseteq E$

$$\| \psi(x) \| = \| \alpha(\| x \|)(L - L_o)(x) \| \le \| (L - L_o)(x) \| \le \| L - L_o \| \, \| x \| \le \| L - L_o \|$$

Además: Si $x_1, x_2 \in B_1(0)$

$$\begin{aligned} \| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| &= \left\| \alpha(\|x_1\|)(L - L_o)(x_1) - \alpha(\| x_2 \|)(L - L_o)(x_2) \right\| \\ &\le \left\| \alpha(\| x_1 \|)(L - L_o)(x_1) - \alpha(\| x_2 \|)(L - L_o)(x_1) \right\| \\ &\qquad + \left\| \alpha(\| x_2 \|)(L - L_o)(x_1) - \alpha(\| x_2 \|)(L - L_o)(x_2) \right\| \\ &\le \left| \alpha(\| x_1 \|) - \alpha(\| x_2 \|) \right| \, \| (L - L_o)(x_1) \| \\ &\qquad + \left| \alpha(\| x_2 \|) \right| \, \| (L - L_o)(x_1) - (L - L_o)(x_2) \| \\ &\le |\alpha'(t)| \, \big| \| x_1 \| - \| x_2 \| \big| \, \| L - L_o \| \, \| x_1 \| + \| L - L_o \| \, \| x_1 - x_2 \| \\ &\le k \, \| x_1 - x_2 \| \, \| L - L_o \| + \| L - L_o \| \, \| x_1 - x_2 \| \\ &\le (k+1) \, \| x_1 - x_2 \| \, \| L - L_o \| \end{aligned}$$

Si $x_1 \in B_1(0)$ y $x_2 \notin B_1(0)$

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| = \| \psi(x_1) \| \le \| L - L_o \| < (k+1) \, \| L - L_o \|$$

Si $x_1, x_2 \in E \setminus B_1(0)$

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| = 0 < (k+1) \, \| L - L_o \|$$

Luego, si $\| L - L_o \| < \dfrac{\varepsilon}{k+1}$ donde $\varepsilon < (1-\alpha) \, | L_o^{\cdot}$, tenemos que

$$\| \psi(x_1) - \psi(x_2) \| < \frac{\varepsilon}{k+1} \| x_1 - x_2 \|$$

$$\Rightarrow \psi \in C_b(E) \cap Lip(E) \quad y \quad Lip(\psi) < \frac{\varepsilon}{k+1} < \varepsilon$$

entonces L_0 y $L_0 + \psi$ son conjugados.

Si $x \in B_{\frac{r}{2}}(0)$ $\| x \| \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha(\| x \|) = 1 \Rightarrow \psi(x) = (L - L_0)(x)$. Luego

$$\exists h \in Hom(E) \,/\, L_0 \circ h = h \circ (L_0 + \psi) \Rightarrow L_0 \circ h = h \circ L \quad \text{en} \quad B_{\frac{r}{2}}(0)$$

por lo tanto L y L_0 son localmente conjugadas si $\| L - L_0 \| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{k+1}$ ∎

Ahora probaremos que la conjugación dada por el Teorema de Grobman-Hartman, es un homeomorfismo y no siempre llega a ser diferenciable. Pero es posible conseguir que h sea diferenciable, si los autovalores de $Df(0) \in Hip(E)$ cumplen ciertas relaciones de resonancia.

IV.4 EJEMPLO DE STERNBERG

Sea

$$f : R^2 \longrightarrow R^2$$
$$(x,y) \longrightarrow f(x,y) = (ax\,,\, by + x^2)$$

donde $0 < a < b < 1$ y $b = a^2$ (resonancia). Se verifica que $f \in C^\infty(R)$ y $f(0,0) = (0,0)$.-

Afirmación: $(0,0)$ es punto fijo hiperbólico de f. En efecto:

$$Df(x,y) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 2x & b \end{bmatrix} \Rightarrow L_0 = Df(0,0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

Luego; hallemos $\Sigma(L_0)$:

$$\lambda I - L_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - a & 0 \\ 0 & \lambda - b \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \det(\lambda I - L_0) = (\lambda - a)(\lambda - b) \Rightarrow \det(\lambda I - L_0) = 0 \Leftrightarrow \lambda = a$ y $\lambda - b$

$\Rightarrow \Sigma(L_0) = \{a, b\} \Rightarrow \Sigma(L_0) \cap S^1 = \phi$, por lo tanto L_0 es hiperbólico, lo cual prueba la afirmación.

Probaremos que: $\nexists h \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}^2) / f \circ h = h \circ L_0$ en $B_r(0)$

En efecto; suponiendo que

$$\exists\, h \in \text{Diff}^2(\mathbb{R}^2) / f \circ h = h \circ L_0 \qquad \text{(Hip. Aux.)}$$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longrightarrow h(x,y) = (x + g_1(x,y), y + g_2(x,y)) \end{aligned}$$

donde g_1, g_2 son de clase C^2 en $\mathbb{R}$.

Sabemos que $h(0,0) = (0,0) \Rightarrow g_1(0,0) = 0$ y $g_2(0,0) = 0$

Ademas:

$$Dh(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & 1 + \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix}(x,y)$$

Como $f \circ h = h \circ L_0$ en $B_r(0,0)$

$$\Rightarrow Df(h(x,y))Dh(x,y) = Dh(L_0(x,y))DL_0(x,y) \quad , \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

$$\Rightarrow Df(h(0,0))Dh(0,0) = Dh(0,0)DL_0$$

$$\Rightarrow Df(0,0)Dh(0,0) = Dh(0,0)L_0$$

$$\Rightarrow L_0 Dh(0,0) = Dh(0,0)L_0$$

Podemos suponer $Dh(0,0) = I$, entonces

$$\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g_1}{\partial y}(0,0) = \frac{\partial g_2}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial g_2}{\partial y}(0,0) = 0$$

Tenemos también, para $(x,y) \in B_r(0,0)$, se cumple: $f(h(x,y)) = h(L_0(x,y))$

entonces

$$f(x + g_1(x,y), y + g_2(x,y)) = h(ax, by)$$

$$\left[ax + ag_1(x,y), by + bg_2(x,y) + (x + g_1(x,y))^2\right] = \left[ax + g_1(ax,by), by + g_2(ax,by)\right]$$

$$\begin{cases} ag_1(x,y) = g_1(ax,by) \\ bg_2(x,y) + (x + g_1(x,y))^2 = g_2(ax,by) \end{cases} \qquad (1)$$

Observemos primeramente que $(x,y) \in B_r(0,0)$ entonces $(a^n x, b^n y) \in B_r(0,0)$ pues $0 < a < b < 1$. Calculemos $g_1(a^n x, b^n y)$.

De la primera ecuación de (1), obtenemos:

$$g_1(a^2 x, b^2 y) = g_1(a(ax), b(by)) = ag_1(ax,by) = a^2 g_1(x,y)$$

Supóngase: $g_1(a^{n-1}x, b^{n-1}y) = a^{n-1}g_1(x,y)$ (Hip. Ind.)

$$g_1(a^n x, b^n y) = g_1\left(a(a^{n-1}x), b(b^{n-1}y)\right) = ag_1(a^{n-1}x, b^{n-1}y) = a^n g_1(ax, by)$$

$$\therefore g_1(a^n x, b^n y) = a^n g_1(ax, by) \quad , \quad \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

Como g_1 es de clase C^2, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g_1(a^n x, b^n y)\right] = a^n \frac{\partial}{\partial x} g_1(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y)a^n = a^n \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x}\cancel{(x,y) =} \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y) \quad , \forall n \in \mathbf{Z}^+ , \ \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = \lim_{n\to\infty} \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(\lim_{n\to\infty} a^n x \ , \ \lim_{n\to\infty} b^n y) = \frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

Además:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[g_1(a^n x, b^n y)\right] = a^n \frac{\partial}{\partial y} g_1(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y)b^n = a^n \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) = a^n \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y) \quad , \forall n \in \mathbf{Z}^+ , \ \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = \lim_{n\to\infty}\left[a^n \frac{\partial g_1}{\partial x}(a^n x, b^n y)\right] = \left(\lim_{n\to\infty} a^n\right)\frac{\partial g_1}{\partial x}(0,0) = 0$$

$$\therefore \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) = 0 \quad , \quad \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

Luego; como las derivadas parciales de g_1 son nulas (0) con dominio $B_r(0,0)$ el cual es conexo, entonces $g_1(x,y) = C$ (C = constante) y desde que $g_1(0,0) = 0$, entonces

$$g_1 \equiv 0 \text{ en } B_r(0,0).$$

Reemplazando este resultado en las segunda ecuación de (1), se obtiene:

$$g_2(ax, by) = bg_2(x,y) + x^2 \quad , \quad \forall (x,y) \in B_r(0,0)$$

$$g_2(a^2x, b^2y) = g_2\left(a(ax), b(by)\right) = a^2x^2 + bg_2(ax, by)$$

$$= a^2x^2 + bx^2 + b^2g_2(x,y) = 2bx^2 + b^2g_2(x,y)$$

Supóngase: $g_2(a^{n-1}x,b^{n-1}y) = (n-1)b^{n-2}x^2 + b^{n-1}g_2(x,y)$ (Hip. Ind.)

$$g_2(a^n x,b^n y) = g_2\left(a(a^{n-1}x),b(b^{n-1}y)\right) = a^{2n-2}x^2 + bg_2(a^{n-1}x,b^{n-1}y)$$

$$= b^{n-1}x^2 + (n-1)b^{n-1}x^2 + b^n g_2(x,y)$$

$$\Rightarrow g_2(a^n x,b^n y) = nb^{n-1}x^2 + b^n g_2(x,y) \quad , \quad \forall n \in \mathbf{Z}^+ , \ \forall(x,y) \in B_r(0,0)$$

Como g_2 es de clase C^2, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[g_2(a^n x,b^n y)\right] = 2nb^{n-1}x + b^n \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow a^{2n}\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a^n x,b^n y) = 2nb^{n-1} + b^n \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\Rightarrow b^n\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a^n x,b^n y) = 2nb^{n-1} + b^n \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a^n x,b^n y) = \frac{2n}{b} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\Rightarrow a^n\frac{\partial g_2}{\partial x}(a^n x,b^n y) = 2nb^{n-1}x + b^n \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a^n x,b^n y) = \frac{2n}{b} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y) \quad , \ \forall n \in \mathbf{Z}^+ , \ \forall(x,y) \in B_r(0,0)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(a^n x,b^n y) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{b} + \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(x,y) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n}{b} = +\infty$$

$$\frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(0,0) - \frac{\partial^2 g_2}{\partial x^2}(0,0) = 0 = +\infty \quad (\Rightarrow \mid \Leftarrow)$$

por lo tanto $\nexists\, h \in \mathrm{Diff}^2(\mathbb{R}^2) / f \circ h = h \circ L_0$ en $B_r(0,0)$. ∎

BIBLIOGRAFÍA

1. Dieuodonné, J. *Fundamentos de Análisis Moderno*. Editorial Reverté, S.A. 1979
2. Gutierrez, C. - Sotomayor, J. *Lines of Curvature and Umbilical Points on Surfaces*. 18° Colóquio Brasilero de Matemática, 1991.
3. Hirsch, M., Pugh and Shub, M. *Invariant Manifolds*. Edición: Lecture not Mathematics. No 583, Springer-Verlag,1976.
4. Hirsch, M.W. y Pugh, C.C. *Stable manifolds and hiperbolic sets.*
5. Irwin, M. *On Stable Manifold Theorem.* Review: Bulletin London Mathematics Soc., 1970
6. Jorge Billeke. *Seminario de Sistemas Dinámicos*, Universidad Santiago de Chile 1989
7. Kreyszig, Erwin. *Introductory Functional Analysis with applications.* Editorial: John Wiley y Sons, 1978.
8. Lages, E.L. *Análisis Geométrico*, 7° Colóquio Brasilero de Matemática.
9. M.L. Krasnov, A.I. Kiselev, G.I. Makérenko. *Funciones de variable compleja, Cálculo Operacional, Teoría de la Estabilidad.* Editorial MIR Moscú, 1981
10. Mauro Chumpitaz R. *Análisis Funcional I* . W.H. Editores S.C.R.L.
11. Nitecki, Z. *Differentiable Dynamics*. The M.I.T., 1971
12. Palis, F.- Takens, F. *Homoclinic Bifurcationes and - Hiperbolic Dinamics.* Edición Springer-Verlag, 1980.
13. Palis, J. *On the local structure of hiperbolic points in Banach Spaces.* Anais da Academia Brasilera de Ciencias (1968 Vol. 4to n° 3)

14. Palis, J. - de Mello, W. *Geometric Theory of Dynamical Systems.* Edición: Springer-Verlag, 1980.

15. Palis Jacob JR. *Seminario de Sistemas Dinámicos*, Rio de Janairo, abril de 1971

16. Shub, M. *Global Stability of Dynamical Systems*. Edición Springer-Verlag, 1993.

17. Sotomayor, J. *Licoes de Ecuacoes Diferenciais Ordinárias.* Proyecto Euclides, 1989

18. Rocha, J. *Sistemas Dinámicos*. Una breve introducãu . Colóquio de Sistemas Dinámicos Santiago de Chile, 1991.