

Universidad Nacional de Ingeniería
PROGRAMA ACADÉMICO DE INGENIERIA CIVIL



**“ REDES DE FLUJO EN
MEDIOS POROSOS ”**

T E S I S

**PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:
INGENIERO CIVIL**

JESUS ORESTES RAMOS SALAZAR

LIMA *PERU* 1,982

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA

PROGRAMA ACADEMICO DE INGENIERIA CIVIL

TESIS DE GRADO

ALUMNO : Ramos Salazar, Jesús Orestes.
CODIGO : 740219 G.
ASESOR : Dr. Luis Reyes Carrasco.
TEMA : "Redes de Flujo en Medios Porosos".
OBJETIVO : Realizar un Estudio Teórico-Experimental de las Redes de Flujo, en un medio Poroso (Modelo ; - Presa de Tierra); Utilizando la Transformación de Christoffel-Schwarz y sus Aplicaciones en Ingeniería Civil.

CONTENIDO :

I N T R O D U C C I O N

PARTE A .- ESTUDIO TEORICO

- CAPITULO I .- PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS.-
- 1.1.- Conceptos Sobre Campos de Velocidades y Flujos.
 - 1.2.- Flujo Bidimensional, Permanente, Incompresible e Irrotacional.
 - 1.3.- Función Corriente (ψ) .
 - 1.4.- Función Potencial (ϕ) .
 - 1.5.- Ecuación de Laplace y Métodos de Solución.

CAPITULO II .- VARIABLE COMPLEJA APLICADOS AL FLUJO DE FLUIDO.-

- 2.1.- El Potencial Complejo.
- 2.2.- Representación Geométrica de $W = f(Z)$.
- 2.3.- Solución Fundamental del Flujo en Dos Dimensiones.

CAPITULO III.- APLICACION O TRANSFORMACION CONFORME.-

- 3.1.- Conceptos Básicos.
- 3.2.- Transformaciones Generales.

CAPITULO IV .- TRANSFORMACION DE CHRISTOFFEL-SCHWARZ.-

- 4.1.- Definición.
- 4.2.- Principales Aplicaciones Sobre el Semicírculo Superior

CAPITULO V .- ESTUDIO DE LA FILTRACION EN UNA PRESA DE TIERRA CON BASE IMPERMEABLE.-

- 5.1.- Ley de Darcy.
- 5.2.- Coeficiente de Permeabilidad y Métodos de Determinación.
- 5.3.- Condiciones Hidráulicas de Borde.
- 5.4.- Métodos de Solución Para el Cálculo de Filtración en Una Presa con Base Impermeable.

CAPITULO VI .- APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE CHRISTOFFEL-SCHWARZ EN UNA PRESA DE TIERRA CON BASE IMPERMEABLE.-

- 6.1.- Conceptos y Cálculos Preliminares.
- 6.2.- Cálculos de la Función Corriente (ψ) y Potencial (ϕ).
- 6.3.- Cálculo de Velocidades.
- 6.4.- Cálculo de Presiones.

PARTE B - IO XPERI TAL**CAPITULO VII .- EQUIPO DE LABORATORIO.-**

- 7.1.- Permeámetro de Darcy.
- 7.2.- Modelo de una Presa de Tierra.

CAPITULO VIII.- COMPARACION DE LOS RESULTADOS HALLADOS TEORICAMENTE.-

8.1.- Cuadro Comparativo en Relación al Capítulo VI.

PARTE C .- APLICACIONES EN INGENIERIA CIVIL

C O N C L U S I O N E S



BIBLIOGRAFIA.-

- 1.- "Mecánica de Fluido "..... Reyes Carrasco, Luis.
- 2.- "La Mecánica de los Flúidos" Shames, Irving.
- 3.- "Hidromecánica"..... Becerril.
- 4.- "Variable Compleja"..... Murray R. Spiegel.
- 5.- "Mecánica de Suelos Aplicada"..... Terzagui - Peck.
- 6.- "Mecánica de Suelos"..... Tschebotarioff, Gregory.
- 7.- "Introducción a la Mecánica de Suelos y Cimentacion s"..... Sowers & Sowers.
- 8.- "Ground Water And Seepage"..... M. E. Harr.
- 9.- "Obras Hidráulicas"..... Villaseñor Contreras, Jesús.
- 10.- "Permeametre Type Darcy"..... Sociéte Grenobbise D'Etudes - et D'Applications Hydrauliques (Sogreah).

R E D E S D E F L U J O

=====

E N M E D I O S P O R O S O S

=====

I N D I C E

INTRODUCCION	10
--------------	----

PARTE A : ESTUDIO TEORICO

CAPITULO I : PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

1.1 .-	Conceptos sobre campos de velocidades y flujos	13
1.2 .-	Flujo bidimensional, permanente, incompresible e irrotacional	18
1.3 .	Función Corriente (ψ)	20
1.4 .	Función Potencial (ϕ)	21
1.5 .	Ecuación de Laplace y métodos de solución	23

CAPITULO II : VARIABLE COMPLEJA APLICADOS AL FLUJO DE FLUIDOS

2.1 .	El potencial complejo	27
2.2 .	Representación geométrica de $\omega = f(z)$	28
2.3 .-	Fundamentos de la solución del flujo en dos dimensiones	31

CAPITULO III : APLICACION O TRANSFORMACION CONFORME

3.1 .	Conceptos básicos	34
3.2 .-	Transformaciones generales	36

CAPITULO IV : TRANSFORMACION DE CHRISTOFFEL - SCHWARZ

4.1 .-	Definición	39
4.2 .	Principales aplicaciones sobre el semicírculo superior	51

<u>CAPITULO V : ESTUDIO DE LA FILTRACION EN UNA PRESA DE TIERRA CON BASE IMPERMEABLE</u>	
5.1 .-	Ley de Darcy 54
5.2 .	Coeficiente de Permeabilidad y Métodos de determinación 58
5.3 .-	Condiciones hidráulicas de - borde 67
5.4 .	Métodos de solución para el cálculo de filtración en una presa con base impermeable 77

<u>CAPITULO VI : APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE CHRISTOFFEL - SCHWARZ EN UNA PRESA CON BASE IMPERMEABLE</u>	
6.1 .	Concepto y cálculos preliminares 89
6.2 .	Cálculo de la Función Corriente (ψ) y Potencial (ϕ) 91
6.3 .	Cálculo de las características de filtración de una presa 100

PARTE B : ESTUDIO EXPERIMENTAL

<u>CAPITULO VII : EQUIPO DE LABORATORIO</u>	
7.1 .	Permeámetro de Darcy 128
7.2 .-	Modelo de una presa de tierra 133

<u>CAPITULO VIII: COMPARACION DE RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES</u>	
8.1 .	Resultados de los ensayos granulométricos, límites de consistencia y descripción de las muestras tomadas 134
8.2 .	Tabulación del coeficiente de permeabilidad en laboratorio (k) 146

8.3 .-	Comparación de las caracterís <u>ticas</u> de filtración en una presa de base impermeable teo <u>rico</u> - experimental 148
--------	---	-----------

PARTE C : APLICACIONES EN INGENIERIA CIVIL

<u>CAPITULO IX</u> :	<u>APLICACION DE LA TRANSFORMACION DE</u> <u>CHRISTOFFEL - SCHWARZ EN INGENIERIA</u> <u>CIVIL</u> 164
CONCLUSIONES	171
BIBLIOGRAFIA	174
APENDICE A	175

I N T R O D U C C I O N

El origen de esta tesis surgió de la inquietud que tuve en las aulas universitarias, sobre las Redes de Flujo en medios porosos y que fue capitalizada y orientada al máximo gracias a mí Asesor el Dr. Luis Reyes Carrasco señalando un método de aplicabilidad el cual es utilizando la Transformación de CHRISTOFFEL - SCHWARZ, para el cálculo de esta red, y la obtención de sus características.

Es así, que se dividió este estudio en tres grandes partes; la Primera un Estudio Teórico donde se estudia los Principios fundamentales de la Mecánica de los Fluidos, la aplicación de la variable compleja aplicada al flujo de fluidos, los conceptos básicos de la Aplicación o transformación conforme, definición y demostración de la Transformación de CHRISTOFFEL - SCHWARZ; seguidamente la propiedades físico - mecánicas de una presa de tierra con base impermeable para culminar con la aplicación de la transformación de CHRISTOFFEL - SCHWARZ a esta presa, capítulo en el cual hallaremos fórmulas, gráficos para hallar las características principales de filtración de una presa.

En la Segunda Parte se hace un Estudio Experimental describiendo los equipos utilizados, el resultado de los ensayos realizados tanto en lo referente a la descrip -

ción de las muestras como al modelo propiamente dicho realizados en laboratorio; para finalizar con una comparación de resultados teóricos y experimentales observando el porcentaje de veracidad que tiene uno y otro respectivamente.

En la Tercera Parte, se tiene las Aplicaciones en Ingeniería Civil que además del modelo ya realizado, que es una de las principales y prácticas, se realiza algunos ejemplos teóricos de aplicación nombrando también otros que se pudiesen realizar dejando la parte experimental para que pudiese ejecutarse a posteriori.

P A R T E A
=====

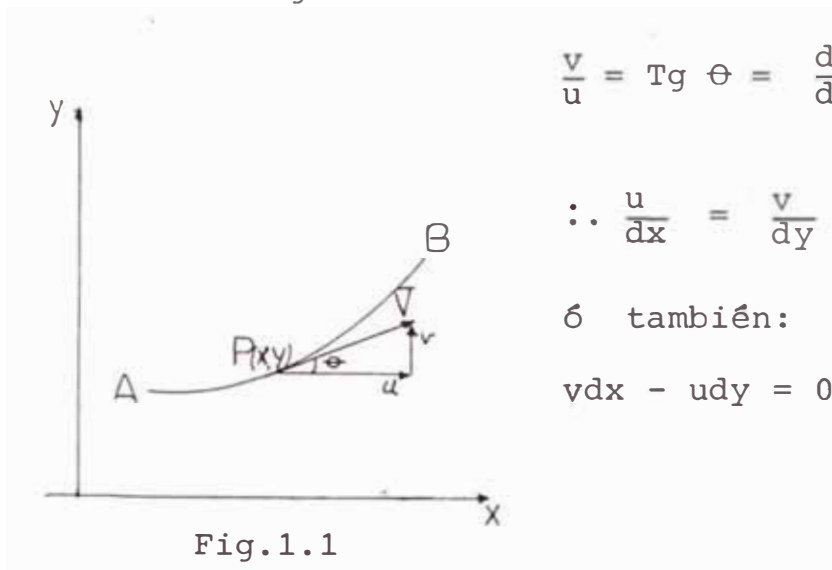
E S T U D I O T E O R I C O
=====

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE LA MECANICA DE FLUIDOS

1.1 Conceptos Sobre Campos de Velocidades y Flujos.-

Los conceptos más importantes y fundamentales sobre Campo de Velocidades y Flujo, son los siguientes:

1.- Línea de Corriente.- Es la línea tangente en todos sus puntos al vector velocidad. Así se tendrá en la Fig. 1.1.



2.- Tubo de Corriente.- Está conformado por todas las líneas de corriente que se apoyan sobre una superficie cerrada.

3.- Trayectoria.- Viene a ser el lugar geométrico de las posiciones de una partícula en el transcurso del tiempo.

4.- Línea de Emisión.- Se define como el lugar, en un determinado instante t, de las partículas fluídas que han pasado por un punto en un instante cualquiera.

5.- Circulación del Vector Velocidad a lo Largo de una Curva AB .-

La circulación del vector velocidad vendrá dada por:

$$\sigma_{\widehat{AB}} = \int_{\widehat{AB}} \nabla \cdot d\mathbf{I} = \int_{\widehat{AB}} udx + vdy + wdz$$

que dependerá de la posición de los puntos A y B; así como de la forma del trayecto \widehat{AB} .

6.- Teorema de Stokes o del Rotacional.- En general se enuncia así:

"La circulación de un campo vectorial \mathbf{F} alrededor de una línea cerrada es igual al flujo de su rotacional a través de una superficie S limitada por una curva o línea, cuando el sentido de la circulación es positivo con respecto al flujo"

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{L} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{s}$$

Siendo L la línea cerrada que limita la superficie S .

$$\oint = \text{Condición de circuito cerrado.}$$

Siendo el campo vectorial \mathbf{V} (Vector Velocidad) el Teorema de Stokes se puede enunciar:

"La circulación del vector velocidad a lo largo de una curva cerrada C es igual al flujo rotacional de este vector, osea, al doble del flujo del vector torbellino, a través de una superficie abierta limitada por la curva C" (Fig. 1.2).

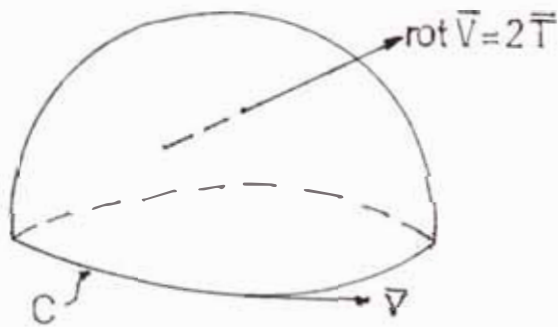


Fig. 1.2

Así se tendrá:

$$\nabla \times \bar{v} = 2 \bar{T}$$

Si: $\nabla \times \bar{v} = 0$ el

Campo Vectorial

\bar{v} se llamará

irrotacional.

$\nabla \times \bar{v} \neq 0$ el campo vectorial \bar{v} es Rotacional o de vórtice.

7.- Campo Potencial.- Para el caso de un fluido se llama POTENCIAL DE VELOCIDADES. Si el campo de velocidades es tal que la circulación sólo depende de la posición de A y B y no del camino seguido, entonces se dice que el campo deriva de un potencial ϕ . Los flujos que satisfacen esta propiedad se denominan Flujos Irrotacionales debido a que en todo punto su vector torbellino es nulo.

Así se tiene:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\text{En forma vectorial : } \bar{V} = \nabla \phi = \text{grad } \phi$$

Propiedades.-

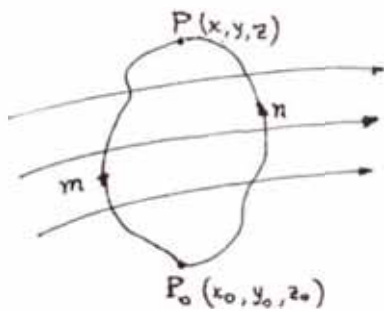
a) Son irrotacionales o conservativos :

$$\nabla \times \bar{V} = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

b) La circulación alrededor de una línea cerrada - es nula. Por el Teorema de Stokes se tendrá:

$$\sigma = \oint_L \bar{V} \cdot d\bar{L} = \int_S (\nabla \times \bar{V}) \cdot d\bar{S} = 0$$

c) La circulación entre dos puntos no depende de - la línea que los une, sino de la posición de - los puntos.



$$\sigma = \int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L} + \int_P^{P_0} \bar{V} \cdot d\bar{L} = 0 \quad (1)$$

debido que Pn P₀m es una línea cerrada.

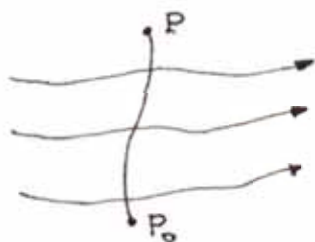
De (1) :

$$\int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L} = - \int_P^{P_0} \bar{V} \cdot d\bar{L} = \int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L}$$

$$\therefore \int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L} = \int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L}$$

lo que demuestra que la circulación entre P y P₀ es la misma siguiendo cualquier camino.

d) La circulación entre dos puntos es igual a la - caída de potencial entre ellos.



$$\sigma = \int_{P_0}^P \bar{V} \cdot d\bar{L} = \int \bar{V} \phi \cdot d\bar{L}$$

$$\text{Siendo } \nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \bar{k}$$

$$d\bar{L} = dx \bar{i} + dy \bar{j} + dz \bar{k}$$

$$\nabla \phi \cdot d\bar{L} = d\phi$$

$$\therefore \sigma = \int_P^{P_0} d\phi = \phi_{P_0} - \phi_P$$

8.- Flujos Permanentes.- Son los flujos en los que el campo de velocidades, la presión y la masa-volumétrica son independientes del tiempo; por lo tanto u, v, w son solo función de x, y, z .

9.- Ecuación de Continuidad.- Esta ecuación es importante porque expresa el Principio de Conservación de masa enunciada de la siguiente manera: "El aumento de masa, en un tiempo t , del fluido contenido en un volumen dado, será igual a la suma de las masas del fluido que ingresan a este volumen, disminuídas por las que salen:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = \sum \rho q_v$$

Siendo $\sum q_v \rho$ los gastos máxicos de las fuentes y sumideros que puedan existir (Fuente : - punto en el espacio del cual emerge un fluido y Sumidero viene a ser una fuente negativa).

a) Para un movimiento permanente $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho w)}{\partial z} = \sum \rho q_v$$

b) Para movimiento permanente de fluido incompresible ($\rho = \text{cte}$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sum q_v$$

c) Para un movimiento conservativo ($\sum \rho q_v = 0$)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (\nabla \bar{v} = 0)$$

1.2 Flujo Bidimensional, Permanente, Incompresible e Irrotacional.-

Debido a que todas las ciencias de la Ingeniería - constituyen una relación entre la realidad física y las necesarias simplificaciones exigidas para su estudio matemático, es que se estudiará un flujo - idealizado que sea asequible al tratamiento matemático y que al mismo tiempo sea útil para la comparación de ciertos flujos reales. Debido, asimismo a que muchos problemas importantes de flujo de fluidos, hidrodinámica o aerodinámica se realizan utilizando los métodos matemáticos de variable compleja, tal como en nuestro caso, es que se realizan estas hipótesis o suposiciones básicas.

1.- El Flujo del Fluido es Bidimensional.- El modelo del flujo básico y las características del movimiento del fluido en un plano son esencialmente las mismas en todo plano paralelo.

./.

Esto nos permite poner nuestra atención no más que a un plano simple el cual tomaremos igual al plano Z. Las figuras construídas en este plano se interpretan como secciones transversales de cilindros correspondientes infinitos perpendiculares al plano. Efectivamente, un cilindro infinito no es más que un modelo matemático de un cilindro físico el cual es tan largo que los efectos lejanos se pueden despreciar razonablemente.

- 2.- El Fluído es Incompresible.- La densidad y el peso específico se toman como constantes.
- 3.- Irrotacionalidad.- Esto implica un fluído no viscoso, cuyas partículas se están moviendo inicialmente sin rotación ($\nabla \times V = 0$). Si no hay viscosidad, las fuerzas de presión sobre la superficie son perpendiculares a ésta. Un fluído que es no viscoso e incompresible se llama frecuentemente "fluído ideal". Se debe observar que tal fluído es solamente un modelo matemático de un fluído real, en el cual ciertamente, tales efectos, se supondrá son insignificantes.
- 4.- Flujo Permanente.- Implica que todas las propiedades y características del flujo son independientes del tiempo

1.3 Función Corriente (ψ)

La función $\psi(x,y)$ es llamada FUNCION CORRIENTE y está definida: en los flujos bidimensionales, incompresibles, irrotacionales y permanentes, como:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (3)$$

A lo largo de una línea de corriente; reemplazando (3) en (2) se obtiene:

$$- \frac{\partial \psi}{\partial x} dx - \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

$$\therefore d\psi = 0 \implies \psi = \text{cte}$$

Así observamos que el valor de la Función Corriente es constante a lo largo de una línea de corriente e indica la cota de la línea de corriente.

Una de las importantes propiedades físicas de la función corriente es que el caudal por unidad de longitud q (normal al plano de flujo) entre dos líneas de corriente ψ_2 y ψ_1 está dado por la diferencia de sus cotas.

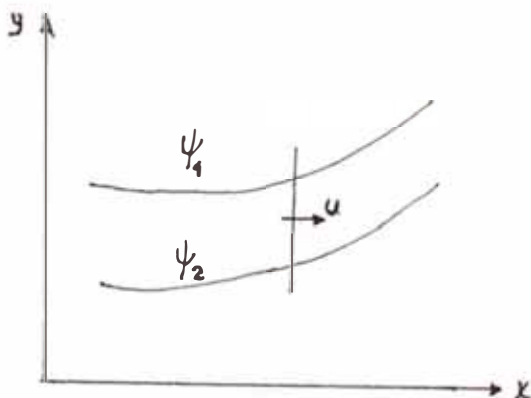


Fig. 1.3

En la Fig. 1.3 se tiene:

$$q = \int_{\psi_2}^{\psi_1} u dy = \int_{\psi_2}^{\psi_1} \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = \int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi$$

$$q = \psi_1 - \psi_2$$

La faja situada entre dos líneas de corriente se llama CANAL DE FLUJO o de FILTRACION.

Asímismo, la función de corriente cumple con la Ecuación de Laplace, que la estudiaremos en el Capítulo I, 1.5.

1.4 Función Potencial (ϕ)

La función ϕ (x,y) es llamada FUNCION POTENCIAL y está definida, en las mismas condiciones que la función corriente, como:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \qquad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \qquad (4)$$

El significado físico lo obtenemos diferenciando a lo largo de la curva $\phi = \text{cte}$:

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0 \qquad (5)$$

Reemplazando (4) en (5) :

$$u dx + v dy = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{u}{v} \qquad (6)$$

Las curvas ϕ (x,y) = C, siendo C una serie de constantes, son llamadas Líneas Equipotenciales.

Observando la ecuación (1) y (6) tenemos que las líneas de corriente y las líneas equipotenciales forman un grupo de curvas llamado RED DE FLUJO que viene a ser una red ortogonal de curvas.

La relación existente entre la función corriente y

./.

La función potencial viene dada de igualar las ecuaciones (3) y (4) respectivamente.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \implies \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (7)$$

$$v = - \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \implies \frac{\partial \phi}{\partial y} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) se denominan la Ecuación de CAUCHY - RIEMANN.

Estas mismas ecuaciones se pueden deducir también a partir del potencial complejo (ω) - (Capítulo II-2.1).

La faja situada entre dos líneas equipotenciales se denomina CAMPO DE FLUJO.

La función potencial cumple también con la Ecuación de Laplace (Ver Capítulo I - 1.5).

NOTA 1 : Debemos de hacer notar la existencia de la velocidad Potencial definida como:

$$\phi = - k \left(\frac{P}{\delta'} + y \right) + C = - kh + C \quad (9)$$

donde : k = Coeficiente de permeabilidad proveniente de la Ley de Darcy.

C = Constante arbitraria.

h = Carga total.

La existencia de esta velocidad potencial, implica que el flujo es irrotacional y es una función escalar derivada con respecto a la dirección de la velocidad del fluido, de donde se obtiene:

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = - K \frac{\partial h}{\partial x} \quad (10)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = - K \frac{\partial h}{\partial y} \quad (11)$$

NOTA 2 : La región de flujo de las líneas de corriente y equipotenciales es única, así considerando la siguiente diferencial:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

y reemplazando por las ecuaciones de Cauchy - Riemann (7) y (8), obtendremos:

$$\psi = \int \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dy - \frac{\partial \phi}{\partial y} dx \right)$$

y

$$\phi = \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} dx - \frac{\partial \psi}{\partial x} dy \right)$$

Es decir, si determinamos una de las funciones conociendo la condición de frontera o contorno la otra se hallará directamente.

1.5 Ecuación de Laplace y Métodos de Solución.-

Ecuación de Laplace:

En forma general la Ecuación de Laplace viene dada reemplazando en la Ecuación de Continuidad los valores de la ecuación (4):

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

En el plano vendrá dada por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (12)$$

El flujo irrotacional de un fluido incompresible, - satisface a la Ecuación de Laplace ($\nabla^2 \phi = 0$); - siendo por lo tanto la función ϕ armónica. Con -

./.

respecto a esto podemos afirmar que toda función armónica que satisface la Ecuación de Laplace puede ser considerada como un potencial de velocidades correspondiente a un fluido perfecto incompresible.

Similarmente podemos escribir:

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

Por lo que podemos aseverar que la función ψ cumple también con la Ecuación de Laplace ($\nabla^2 \psi = 0$). Asimismo, podemos decir que si una función cumple con la Ecuación de Continuidad y con la de Cauchy-Riemann, también cumplirá con la Ecuación de Laplace.

Una ecuación importante en el estudio de medios porosos y especialmente en presas es la deducida seguidamente, proveniente de reemplazar la ecuación (10) y (11) en (12) :

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (14)$$

La solución de esta ecuación observamos que tiene la variación de la carga de presión y la dirección del flujo para todos los puntos que se encuentran debajo de la Línea de Filtración, que la estudiaremos posteriormente; así los resultados son usualmente ploteados en forma de contorno de igual altu

ra o carga piezométrica (líneas equipotenciales). Asimismo, la familia de líneas de flujo o líneas de corriente también satisfacen la ecuación de Laplace, tal como lo hemos visto en la ecuación (13), en la cual la velocidad potencial la sustituimos por carga de presión y siendo las fronteras la línea de filtración y el estrato horizontal impermeable de la presa.

Métodos de Solución de la Ecuación de Laplace en el Plano.-

En este punto enunciaremos de una manera general los métodos que se utilizan frecuentemente:

- a) Métodos Gráficos.- Uno de los métodos más conocidos es el de PRASIL en el cual ϕ y ψ forman una red ortogonal de curvas cuyas intersecciones pueden asimilarse a cuadrados curvilíneos en los cuales es posible inscribir circunferencias cuyos radios son inversamente proporcionales a las velocidades.
- b) Utilización de Funciones Analíticas.- En este caso se usa la función $f(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ en la que la parte real corresponde a la función potencial y la imaginaria a la función corriente.
- c) Aplicación de la Transformación Conforme.- La cual se aplica a una solución conocida, la cual

./.

proporcionará una nueva solución.

- d) Uso de Analogías.- Se utiliza generalmente el de la cubeta eléctrica denominada Método de la Analogía Reoeléctrica que sirve para estudiar flujos alrededor de obstáculos.
- e) Linearización de la Ecuación de Laplace.- Se trata de combinar linealmente soluciones conocidas a la Ecuación de Laplace.

C A P I T U L O I I

VARIABLE COMPLEJA APLICADOS AL FLUJO DE FLUIDOS

2.1 Potencial Complejo.-

Una combinación de las funciones ϕ y ψ forman lo que se llama el POTENCIAL COMPLEJO (ω) y se definen por:

$$\omega = \phi + i \psi \quad (1)$$

La demostración de esta función se debe a que -- siendo la función ϕ armónica, es decir, satisface la Ecuación de Laplace ($\nabla^2 \phi = 0$) se deduce que debe existir una función armónica conjugada ψ , tal que:

$$f(z) = \omega(z) = \phi(x,y) + i \psi(x,y)$$

que es analítica y que caracteriza el flujo potencial complejo. Se dice que una función es analítica cuando cumple con las Ecuaciones de Cauchy - Riemann.

Si diferenciamos con respecto a z la ecuación (1) tendremos:

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\therefore \frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial \phi}{\partial x} - i \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$\frac{d\omega}{dz} = u - iv = W \quad (2)$$

./.

La transformación de la región del flujo del plano Z al plano W se llama VELOCIDAD HODOGRAFA.

La utilización del Sistema Hodógrafo (W) es importante ya que la libre superficie y el límite de la superficie de filtración que no se conocen inicialmente en el plano Z quedan completamente definidos en el plano hodógrafo; refiriéndonos esto siempre a una presa. Cuando estudiemos las condiciones de borde haremos mención al método que se utiliza teniendo en cuenta el plano W .

2.2 Representación Geométrica de $\omega = f(z)$.-

La mayoría de los métodos analíticos para la solución de problemas de agua subterránea en dos dimensiones está dada por la determinación de una función que transforma un problema de un dominio geométrico conociendo una de las soluciones o funciones.

Así se tendrá que $\omega = \phi + i\psi$ es una función analítica de $z = x + iy$ por lo tanto tenemos un número complejo $x + iy$ situado en un punto M , por ejemplo, en el plano Z . Por lo cual mediante una función o transformación del punto M lo pasamos a un punto N en el plano ω (Fig. 2.1).

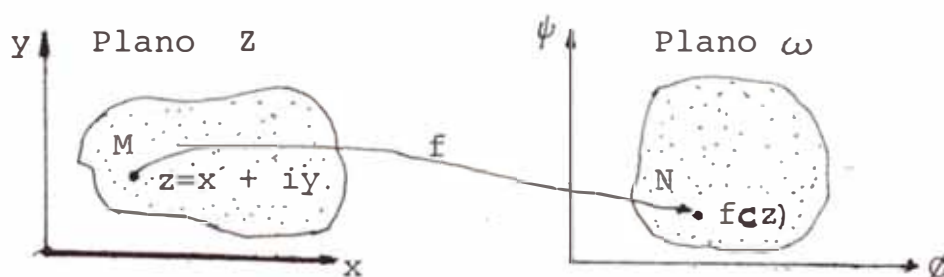


Fig. 2.1

Lo dicho anteriormente lo analizaremos mediante dos ejemplos sencillos:

Ejemplo 1.- Determinar un punto en el plano ω que corresponde al punto $z = 3 + 2i$ en el plano Z suponiendo que la función $\omega = z^2$.

Siendo $\omega = z^2$ tendremos que:

$$\omega = \phi + i\psi = (x + iy)^2 = x^2 + 2i xy - y^2$$

Igualando términos obtenemos:

$$\phi = x^2 - y^2 ; \quad \psi = 2xy$$

Sustituyendo en estos valores el punto $z = 3 + 2i$ tendremos:

$$\phi = 5 ; \quad \psi = 12 \Rightarrow \omega = 5 + 12i$$

tal como se muestra en la Fig. 2.2 :

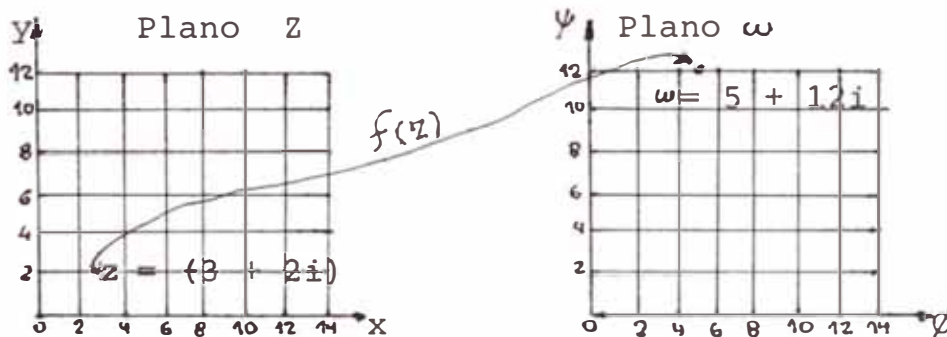


Fig. 2.2.

Ejemplo 2.- Dada la función $z = \omega^2$ localizar en el plano Z el área correspondiente formado por las líneas $\psi = 1/2$; $\psi = 1$; $\phi = 1/2$; $\phi = 1$; éstas localizadas en el plano ω .

Tenemos que:

$$x + iy = (\phi + i\psi)^2 = \phi^2 + 2i\phi\psi - \psi^2$$

./. .

de donde: $x = \varnothing^2 - \psi^2$

$$y = 2\varnothing\psi$$

Consideremos el plano Z de líneas paralelas al eje ψ (Plano ω), entonces $\varnothing = C_1$ y las ecuaciones paramétricas serán:

$$x = C_1^2 - \psi^2$$

$$y = 2C_1\psi$$

Obteniéndose : $x = C_1^2 - \frac{y^2}{4C_1^2}$

que definirá una familia de parábolas simétricas - al eje x con foco en el origen del plano Z y - abierto hacia la izquierda.

Asímismo, para líneas paralelas al eje \varnothing , entonces $\psi = C_2$, se tiene:

$$x = \frac{y^2}{4C_2^2} - C_2^2$$

que representa una familia de parábolas con foco - para $\varnothing = C_1$ abiertas hacia la derecha.

En la siguiente figura se representa lo analizado, siendo el área pedido en ambos casos la achurada - (Fig. 2.3)

./.

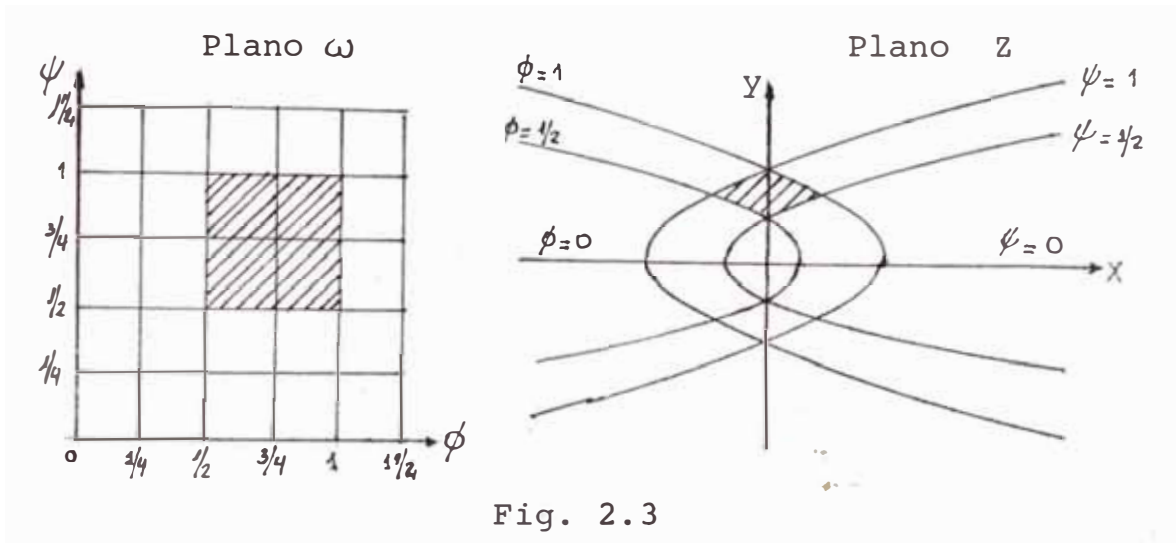


Fig. 2.3

NOTA.- Suponiendo que ψ , en el caso anterior, se considera como una función corriente y ϕ como la correspondiente velocidad potencial la función $z = \omega^2$ transforma un modelo de flujo uniforme del plano ω en un modelo de flujo con focos de parábola en el plano Z .

Este es uno de los principios de la Solución de KOZENY para la filtración en una presa de tierra de base impermeable.

2.3 Fundamentos de la Solución del Flujo en Dos Dimensiones.-

Los fundamentos en que se basan la solución de los problemas del flujo en dos dimensiones los enumeraremos y explicaremos brevemente, debido a que éstos ya han sido definidos o que posteriormente se definirá más ampliamente.

a) La Ecuación de Laplace cuya solución se realiza conociendo las condiciones de borde

$$(\nabla^2 \phi = 0; \nabla^2 \psi = 0)$$

b) La Aplicación o Transformación Conforme.- Es una transformación que tiene la propiedad de tener igual ángulo tanto en magnitud y sentido

al pasar de un plano Z a un plano ω . Utilizándose ésta para la solución de la Ecuación de Laplace.

Así se tendrá por combinación de (a) y (b) que dado $\omega = \phi + i \psi = f(z)$ (potencial-complejo) y satisfaciendo tanto la parte real como imaginaria la Ecuación de Laplace en una determinada región R del plano Z se tiene:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

y suponiendo que hay una función analítica $z = F(\xi)$ con $\xi = m + in$ en el que puntos de la curva C se encuentran dentro de la curva C_1 (Fig. 2.4)

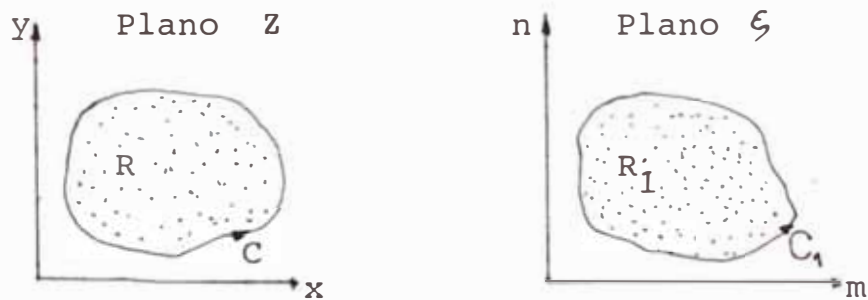


Fig. 2.4

Por lo tanto la función $\omega = f[F(\xi)]$ es una función analítica de otra función analítica y aplicando la Ecuación de Laplace se tiene:

./.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial n^2} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial m^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = 0$$

Con esto, si se conoce las condiciones en el Plano se podrá trasladar al Plano Z transformando asimismo las condiciones de borde. Es decir, si se conoce la solución en la región R_1 puede trasladarse a la región R (problema original) mediante la transformación inversa.

C A P I T U L O I I I

APLICACION O TRANSFORMACION CONFORME

3.1 Conceptos Básicos.-

En general, dado un conjunto de ecuaciones de transformación:

$$u = u(x,y) \qquad v = v(x,y) \qquad (1)$$

define una transformación o aplicación la cual establece una correspondencia entre los puntos del plano xy , y el plano uv . Si a cada punto del plano uv le corresponde uno y sólo uno del plano xy , y recíprocamente, se dice que hay una aplicación o Transformación Biunívoca.

Así, si un conjunto de puntos del plano xy (curva o región) se aplica en un conjunto de puntos en el plano uv (curva o región) y recíprocamente, los conjuntos correspondientes de puntos en los dos planos se llaman Imágenes uno del otro.

Aplicación o Transformación Conforme.- Supóngase que por medio de la transformación (1) el punto (x, y) del plano xy se aplica en el punto (u, v) del plano uv (Fig. 3.1) mientras que curvas C_1 y C_2 (que se intersectan en (x_0, y_0)) se aplican respectivamente en curvas C_1' y C_2' (que se intersectan en (u_0, v_0)). Entonces si la transformación es tal que el ángulo en (x_0, y_0) entre C_1 y C_2 es igual al ángulo en (u_0, v_0) entre C_1' y C_2' tanto en magnitud como en

./.

sentido, la transformación o aplicación se llama -
CONFORME en (x_0, y_0) .

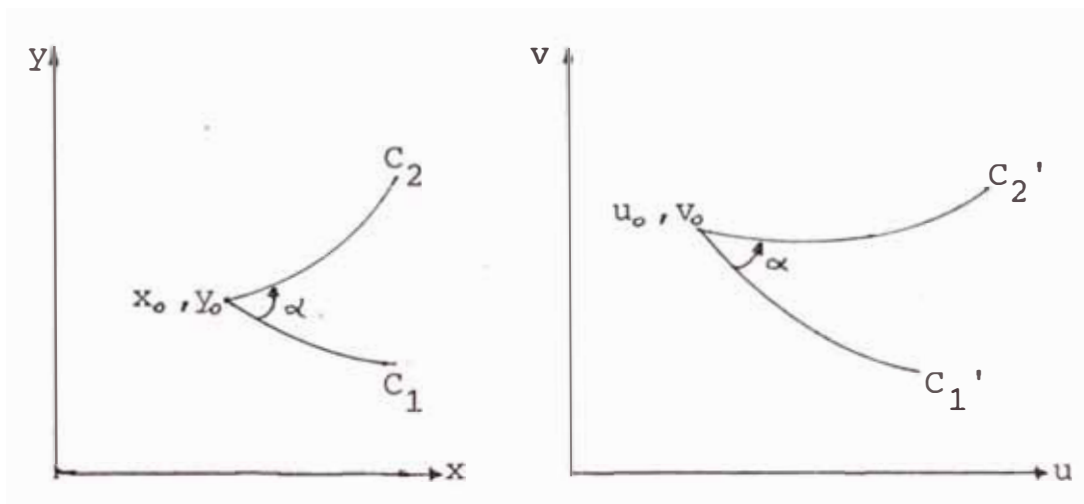


Fig. 3.1

Una aplicación que conserva las magnitudes de los -
ángulos, pero no así necesariamente el sentido se -
llama Isogonal.

TEOREMA.- Si $f(z)$ es analítica y $f'(z) \neq 0$ en una -
región R , entonces la aplicación $\omega = f(z)$ es con--
forme en todos los puntos de R .

Para las aplicaciones conformes, figuras pequeñas -
en la vecindad de un punto z_0 en el plano z se apli-
carán en figuras pequeñas semejantes en el plano ω
y se aumentan (o reducen) por una cantidad dada -
aproximadamente por $|f'(z_0)|^2$; Factor de aumento
de Area o Factor de Aumento.

Distancias cortas en el plano z en la vecindad z_0 -
se aumentan (o reducen) en el plano ω por una canti-
dad dada aproximadamente por $|f'(z_0)|$: Factor de -
Aumento Lineal.

./.

3.2 Transformaciones Generales.-

En las siguientes transformaciones se considerarán:

α, β : Constantes complejas dadas.

a, θ : Constantes reales.

1.- Traslación : $\omega = z + \beta$

Mediante ésta transformación, figuras en el plano z se desplazan o trasladan en la dirección del vector β .

2.- Rotación : $\omega = e^{i\theta} z$

Por esta transformación figuras en el plano z - rotan un ángulo θ . Si $\theta > 0$ la rotación es en sentido positivo y si $\theta < 0$ será negativa.

3.- Dilatación o Contracción : $\omega = \alpha z$

Debido a esta transformación figuras en el plano z se dilatan o contraen en la dirección z si $a > 1$ (ó $0 < a < 1$); considerándose las contracciones como un caso especial de dilatación.

4.- Transformaciones Sucesivas.- Si $\omega = f_1(t)$ aplica la región R_t del plano t en la región R_ω del plano ω , mientras que $t = f_2(z)$ aplica la región R_z del plano z en la región R_t entonces se obtiene:

$$f_1 [f_2(z)] \text{ aplicado } R_z \text{ a } R_\omega$$

Las funciones f_1 y f_2 definen transformaciones sucesivas de un plano a otro, las cuales son equivalentes a una única transformación.

./.

5.- Transformación Lineal : $\omega = \alpha z + \beta$

Es una transformación obtenida mediante transformaciones sucesivas de una combinación de las transformaciones de traslación, rotación y dilatación. Así podemos escribir:

$$\omega = t + \beta; \quad t = e^{i\theta} \tau; \quad \tau = az$$

y donde $\alpha = ae^{i\theta}$

6.- Inversión o Función Recíproca : $\omega = 1/z$

7.- Transformación Bilineal o Racional :

Está dada por :
$$\omega = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta : \text{Constantes Complejas.}$$

Esta transformación proviene de la combinación de la transformación de traslación, rotación, dilatación e inversión. Asimismo, tiene la propiedad de que círculos en el plano z se aplican en círculos en el plano ω , donde entre los círculos incluimos los de radio infinito (líneas rectas).

8.- Aplicación de un Semiplano sobre un círculo: -

Sea z_0 cualquier punto P en el semiplano superior del plano z denotado por R ; entonces la transformación:

$$\omega = e^{i\theta} \left(\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \right)$$

./.

Aplica este semiplano superior de una manera biunívoca sobre el interior R' del círculo unidad $|\omega| = 1$ y recíprocamente cada punto del eje x se aplica sobre la frontera del círculo (Fig. 3.2).

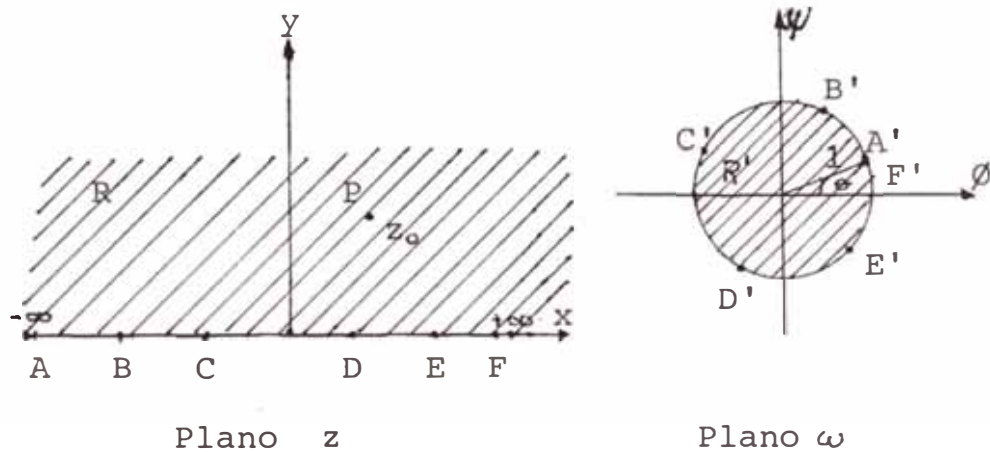


Fig. 3.2

La constante ϑ se puede determinar conociendo la imágen, sobre el círculo, de un punto particular del eje x . Se puede observar que los puntos A, B, C , etc. del plano z le corresponden A', B', C' , etc. en el plano ω . Cuando los puntos z se mueven sobre el eje real de R desde $-\infty$ (punto A) hasta $+\infty$ (punto F); los puntos ω se moverán en sentido positivo a lo largo del círculo unidad desde A' á A' .

TRANSFORMACION DE CHRISTOFFEL - SCHWARZ

Consideremos un polígono situado en el plano z con vértices A_1, A_2, \dots, A_n ; la transformación en el semiplano superior del plano ξ ($\xi = r + is$), - donde a_1, a_2, \dots, a_n son puntos sobre el eje - real de este plano correspondientes a los vértices A_1, A_2, \dots, A_n respectivamente (Fig.4.2), viene - dado por:

$$z = M \int \frac{d\xi}{(\xi - a_1)^{1-A_1/\pi} (\xi - a_2)^{1-A_2/\pi} \dots (\xi - a_n)^{1-A_n/\pi}} + N \quad (1)$$

donde M y N son constantes complejas; A_1, A_2, \dots, A_n ángulos interiores en radianes del polígono y a_1, a_2, \dots, a_n puntos en el eje real de ξ correspondientes a A_1, A_2, \dots, A_n respectivamente.

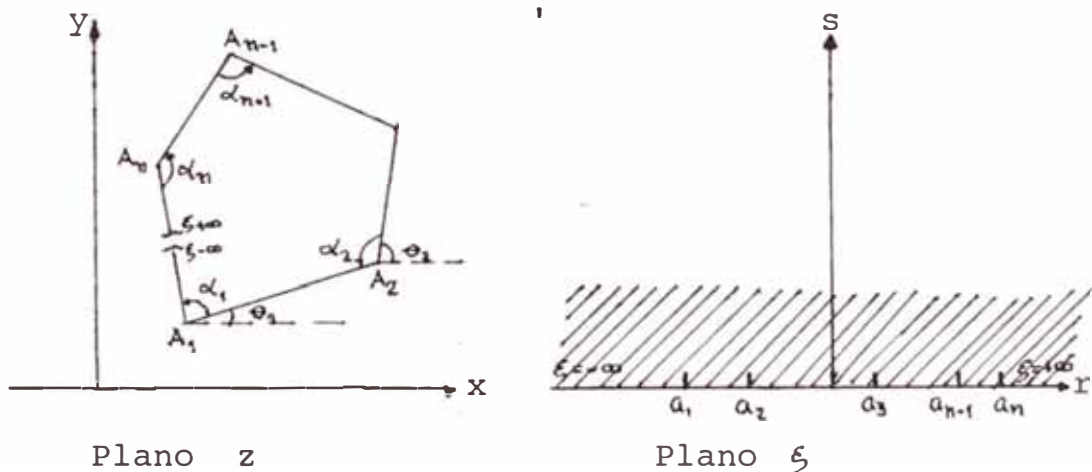


Fig. 4.2

La ecuación (1) puede venir dada también:

./.

$$z = M \int \frac{d\xi}{(\xi - a_1)^{1 - \alpha_1/\pi} (\xi - a_2)^{1 - \alpha_2/\pi} \dots (\xi - a_n)^{1 - \alpha_n/\pi}} + N \quad (2)$$

$$\text{ó } z = M \int (\xi - a_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (\xi - a_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (\xi - a_n)^{\alpha_n/\pi - 1} d\xi + N \quad (3)$$

Seguidamente demostraremos la validéz de la Transformación de Christoffel - Schwarz hallando la relación que tienen los lados del polígono del plano z con el plano ξ para ello multiplicaremos por π los ángulos interiores del polígono que representarán las magnitudes de éstos ángulos.

Comenzaremos analizando el segmento A_1A_2 , el cual se encuentra en el plano ξ en el eje real representado por $a_1 a_2$; además debemos de considerar el cambio de la diferencia $\xi - a_2, \dots, \xi - a_n$ por $a_2 - \xi, \dots, a_n - \xi$ y reemplazando por ello la constante M por una desconocida M_1 . Asimismo, cambiando la integral indefinida dada en (3) a integral definida por medio de los límites a_1 y ξ se obtiene:

$$z = M_1 \int_{a_1}^{\xi} (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - \xi)^{\alpha_2 - 1} \dots (a_n - \xi)^{\alpha_n - 1} d\xi + z_1 \quad (4)$$

donde z_1 es la coordenada compleja del vértice A_1 del polígono.

Reemplacemos la función de la integral dada en (4) por una función $\sigma_1(\xi)$:

./.

$$\sigma_1(\xi) = (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} (a_2 - \xi)^{\alpha_2 - 1} \dots (a_n - \xi)^{\alpha_n - 1}$$

$$\therefore dz = M_1 \sigma_1(\xi) d\xi$$

Asumamos que el segmento A_1A_2 hace un ángulo θ_1 con el eje de la abscisa (Fig. 4.2 - Plano z) :

$$M_1 = \rho e^{i\theta_1} \quad (5)$$

Siendo ρ una constante positiva y obteniéndose así:

$$z = \rho e^{i\theta_1} \int_{a_1}^{\xi} \sigma_1(\xi) d\xi + z_1 \quad \text{ó} \quad dz = \rho e^{i\theta_1} \sigma_1(\xi) d\xi$$

Si $\sigma_1(\xi) > 0$ a lo largo de A_1A_2 entonces dz corresponde a un segmento rectilíneo que se hace un ángulo θ_1 con el eje de la abscisa.

Siguiendo el camino del eje real del plano ξ llegamos al punto A_2 en donde $\xi = a_2$ y $z = z_2$ siendo z_2 la coordenada del vértice A_2 y reemplazando (5) en (4) e introduciendo la función $\sigma(\xi)$:

$$z_2 = \rho e^{i\theta_1} \int_{a_1}^{a_2} \sigma_1(\xi) d\xi + z_1 \quad (6)$$

designando, ahora, la longitud A_1A_2 del polígono - por l_{12} :

$z_2 - z_1 = l_{12} e^{i\theta_1}$ y dividiendo la ecuación (6) - entre $e^{i\theta_1}$ se tiene:

$$l_{12} = \rho \int_{a_1}^{a_2} \sigma_1(\xi) d\xi \quad (7)$$

Siendo posible la determinación de ρ suponiendo los parámetros a_1, a_2, \dots, a_n conocidos.

Analicemos el segmento A_2A_3 . Para ello debemos anotar que en el plano ξ nosotros estudiamos el punto alrededor de $\xi = a_2$ a lo largo de un semicírculo en el sentido de las agujas del reloj (Fig. 4.3) :

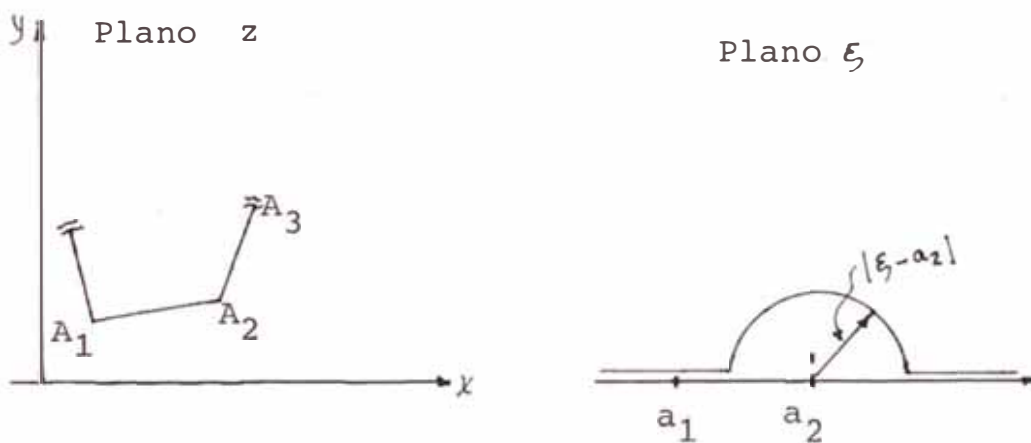


Fig. 4.3

El valor $a_2 - \xi$ lo hacemos negativo y suponiendo - que se tiene $\arg(a_2 - \xi) = 0$ para $\xi < a_2$; el $\arg(a_2 - \xi)$ decrece de π a 0, es decir, $(-\pi)$ alrededor de $\xi = a_2$. Luego el segmento A_2A_3 podemos escribir:

$$a_2 - \xi = e^{-\pi i} |a_2 - \xi| = (\xi - a_2) e^{-\pi i}$$

El factor $(a_2 - \xi)^{\alpha_2 - 1}$ lo hallaremos de la siguiente manera :

$$(\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1} e^{-\pi i (\alpha_2 - 1)} = (\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1} e^{(\pi - \pi \alpha_2) i}$$

donde el ángulo $\pi - \pi \alpha_2$ es el ángulo dado por el vector $\overline{A_1 A_2}$ suponiendo esté dentro de la posición del vector $\overline{A_2 A_3}$.

Asímismo, observando la Fig. 4.2 el plano z , podemos escribir:

$$\theta_1 + \pi - \pi \alpha_2 = \theta_2$$

Además:

$$(\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} (\xi - a_2)^{\alpha_2 - 1} (a_3 - \xi)^{\alpha_3 - 1} \dots (a_n - \xi)^{\alpha_n - 1} = \sigma_2(\xi)$$

$$z = \rho e^{i\theta_2} \int_{a_1}^{a_2} \sigma_1(\xi) d\xi + \rho e^{i\theta_1} \int_{a_2}^{\xi} \sigma_1(\xi) d\xi + z_1$$

y reemplazando en ésta, la ecuación (6) :

$$z = z_2 - z_1 + \rho e^{i\theta_1} e^{(\pi - \pi \alpha_2) i} \int_{a_2}^{\xi} \sigma_2(\xi) d\xi + z_1$$

$$\therefore z = z_2 + \rho e^{\theta_2 i} \int_{a_2}^{\xi} \sigma_2(\xi) d\xi \quad (8)$$

Para $\sigma_2(\xi)$ asumimos valores positivos a lo largo de $A_2 A_3$.

Llamando l_{23} a la longitud del segmento $A_2 A_3$ del -

./.

polígono y haciendo $z = z_3$ y $\xi = a_3$ para el límite superior de la integral (8) obtenemos:

$$z_3 - z_2 = \rho e^{i\theta_2} \int_{a_2}^{a_3} \sigma_2(\xi) d\xi$$

pero siendo $z_3 - z_2 = l_{23} e^{i\theta_2}$ tendremos:

$$l_{23} = \rho \int_{a_2}^{a_3} \sigma_2(\xi) d\xi \quad (9)$$

Utilizando el mismo procedimiento podemos obtener ecuaciones análogas a (7) y (9) para los demás lados del polígono, excepto para los dos últimos lados $A_{n-1} A_n$ y $A_n A_1$ debido a que puede tenerse los vértices A_1 y A_{n-1} y los ángulos $\pi\alpha_1$ y $\pi\alpha_{n-1}$ respectivamente, la posición del vértice A_n completamente determinado, pero no se dan nuevas relaciones para hallar las ecuaciones que aplican a los lados $A_{n-1} A_n$ y $A_n A_1$. En consecuencia el último lado hallado, con el procedimiento anterior es:

$$l_{n-2', n-1} = \rho \int_{a_{n-2}}^{a_{n-1}} \sigma_{n-2}(\xi) d\xi$$

$$\text{donde: } \sigma_{n-2}(\xi) = (\xi - a_1)^{\alpha_1 - 1} \dots (\xi - a_{n-2})^{\alpha_{n-2} - 1} \\ (a_{n-1} - \xi)^{\alpha_{n-1} - 1} (a_n - \xi)^{\alpha_{n-1}}$$

Por lo tanto las ecuaciones de los lados tendrán $n-2$ ecuaciones para $n+1$ parámetros: $\rho, a_1, a_2, \dots, a_n$; en consecuencia, tres de éstos parámetros se escogerán arbitrariamente. Es conveniente escoger un punto, por ejemplo a_n , en el infinito en cuyo caso el último factor de la fórmula (4) desaparecerá y otros puntos tal como a_1, a_2 serán arbitrariamente escogidos.

Otro de los procedimientos para establecer la validez de la Transformación de Christoffel - Schwarz, es demostrar que la aplicación obtenida de :

$$\frac{dz}{d\xi} = M (\xi - a_1)^{\alpha_1/\pi - 1} (\xi - a_2)^{\alpha_2/\pi - 1} \dots (\xi - a_n)^{\alpha_n/\pi - 1} \quad (10)$$

Se aplica al polígono del plano z en el eje real (Fig. 4.4) :

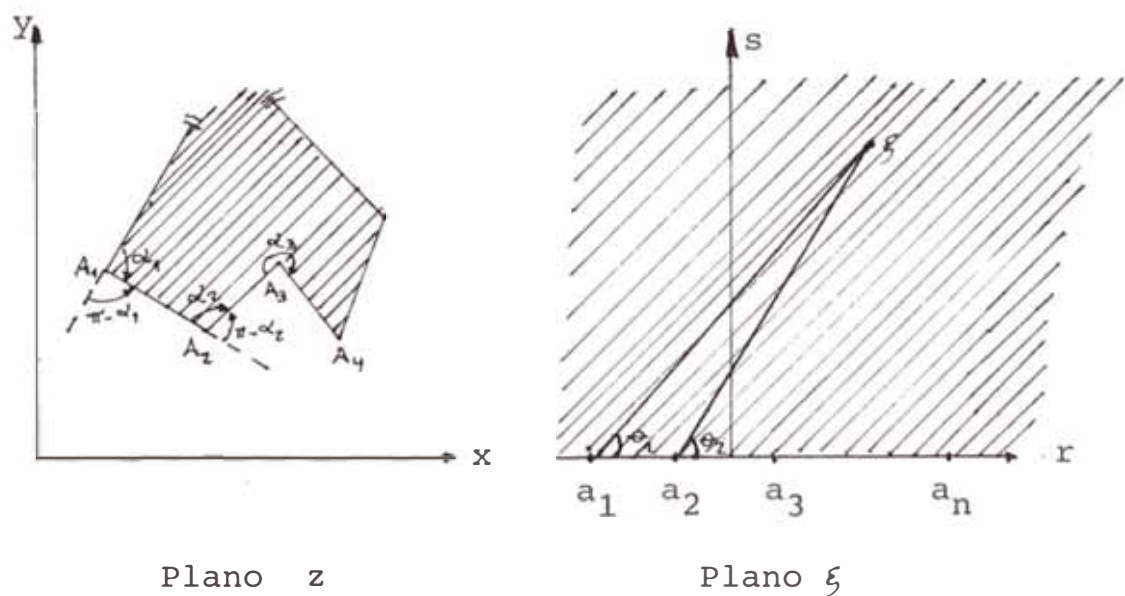


Fig. 4.4

De (10) :

$$\arg dz = \arg d\xi + \arg M + \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1 \right) \arg (\xi - a_1) + \left(\frac{\alpha_2}{\pi} - 1 \right) \arg (\xi - a_2) + \dots + \left(\frac{\alpha_n}{\pi} - 1 \right) \arg (\xi - a_n) \quad (11)$$

Cuando ξ se mueve a lo largo del eje real desde la izquierda hacia a_1 se supone que z se mueve a lo largo de un lado del polígono hacia A_1 . Cuando ξ pasa de la izquierda de a_1 a la derecha de éste:

$\theta_1 = \arg (\xi - a_1)$ cambia de π a 0 mientras que todos los otros términos en (11) permanecen constantes.

Por ello:

$\arg dz$ decrece en $\left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1 \right) \arg (\xi - a_1) = \left(\frac{\alpha_1}{\pi} - 1 \right) \pi = \alpha_1 - \pi$ ó crece en $\pi - \alpha_1$ (creciendo en dirección positiva).

Así se deduce de lo anterior que la dirección de A_1 gira el ángulo $\pi - \alpha_1$ por lo que z se mueve a lo largo de A_1A_2 del polígono.

Cuando ξ se mueve a través de a_2 : $\theta_1 = \arg(\xi - a_1)$ y $\theta_2 = \arg(\xi - a_2)$ cambia de π a 0 mientras todos los otros términos permanecen constantes; es por ello que otro giro de un ángulo $\pi - \alpha_2$ se realiza en el plano z .

./.

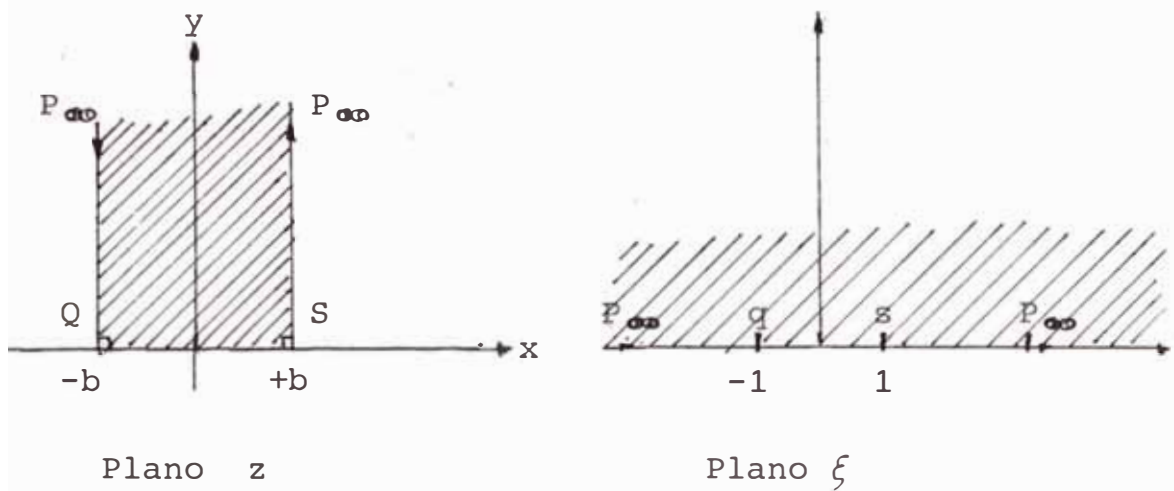


Fig. 4.5

Sean $P_{\infty}QSP_{\infty}$ los puntos que se aplican en $P_{\infty}qsP_{\infty}$ respectivamente podemos considerar PQSP como un caso límite de un polígono (triángulo) con dos vértices en Q y S, y el tercer vértice P en el infinito.

Por la Transformación de Christoffel - Schwarz - -

$$[\angle_s Q = S = \pi/2] :$$

$$\frac{dz}{d\xi} = M (\xi + 1)^{\pi/2/\pi - 1} (\xi - 1)^{\pi/2/\pi - 1} = \frac{M}{\sqrt{\xi^2 - 1}} = \frac{M_1}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$z = M_1 \int \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2}} + N = M_1 \text{ arc Sen } \xi + N$$

Aplicando las condiciones dadas :

$$\text{Para } \xi = 1, z = b \Rightarrow b = M_1 \text{ arc Sen } (1) + N = M_1 \frac{\pi}{2} + N$$

$$\text{Para } \xi = -1, z = -b \Rightarrow -b = M_1 \text{ arc Sen } (-1) + N = -M_1 \frac{\pi}{2} + N$$

./.

Resolviendo estas ecuaciones: $N = 0$ y $M_1 = \frac{2b}{\pi}$

$$\therefore z = \frac{2b}{\pi} \text{ arc Sen } \xi \quad \text{ó} \quad \xi = \text{Sen } \frac{\pi z}{2b}$$

Ejemplo 2.- Hallar la función la cual aplica cada una de las regiones indicadas en el Plano z sobre el semi plano superior del Plano ξ (Fig. 4.6):

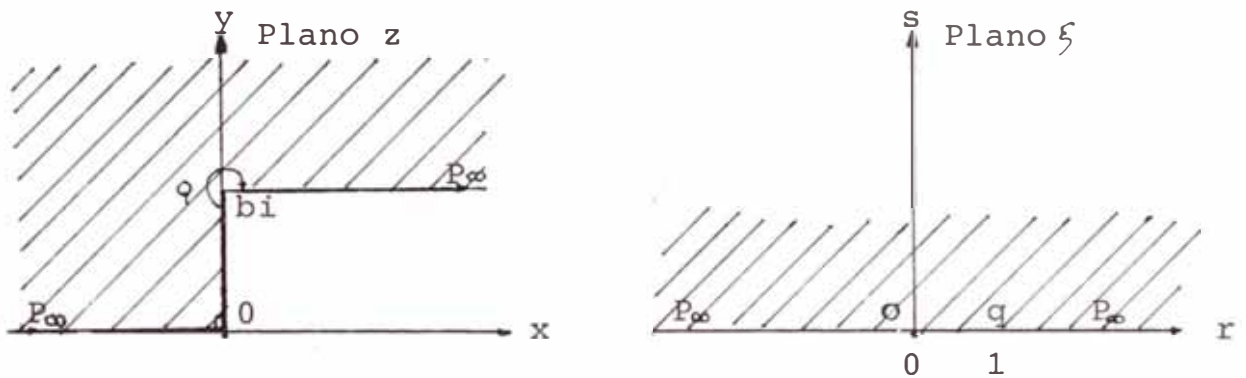


Fig. 4.6

Sean los puntos P_∞ OQP_∞ que se aplican en P_∞ oqP_∞ - respectivamente los ángulos interiores de O y Q son $\pi/2$ y $3\pi/2$ respectivamente; por lo que tendremos:

$$\frac{dz}{d\xi} = M (\xi - 0)^{\pi/2/\pi - 1} (\xi - 1)^{3\pi/2/\pi - 1} = M \left(\frac{\xi - 1}{\xi} \right)^{1/2} = M_1 \left(\frac{1 - \xi}{\xi} \right)^{1/2}$$

$$z = M_1 \int \sqrt{\frac{1 - \xi}{\xi}} d\xi$$

Haciendo $\xi = \text{Sen}^2 \theta$ obtenemos :

$$z = 2M_1 \int \cos^2 \theta d\theta = M_1 \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = M_1 \left(\theta + \frac{1}{2} \text{Sen} 2\theta \right) + N$$

$$= M_1 (\theta + \text{Sen} \theta \text{Cos} \theta) + N = M_1 \left(\text{arc Sen } \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi (1 - \xi)} \right) + N$$

./.

$$\therefore z = M_1 \left(\text{arc Sen } \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi(1-\xi)} \right) + N$$

Para $\xi = 0, z = 0 \Rightarrow N = 0$

$$\xi = 1, z = bi \Rightarrow bi = M_1 \frac{\pi}{2} \Rightarrow M_1 = \frac{2bi}{\pi}$$

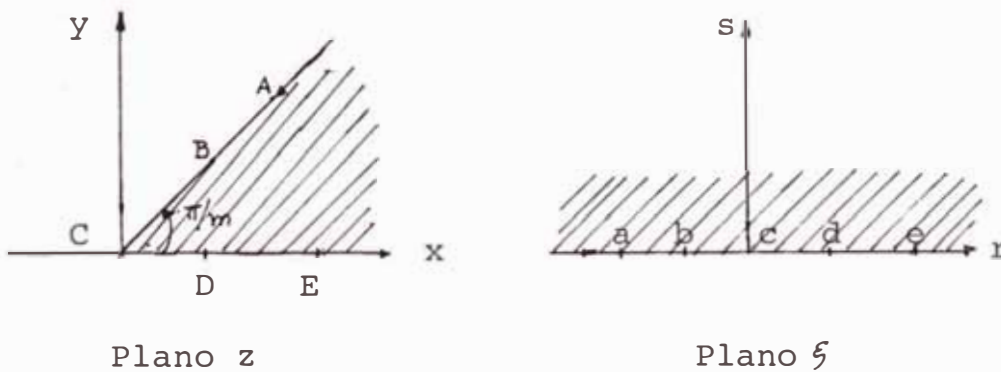
Por lo tanto la transformación buscada es:

$$z = \frac{2bi}{\pi} \left(\text{arc Sen } \sqrt{\xi} + \sqrt{\xi(1-\xi)} \right)$$

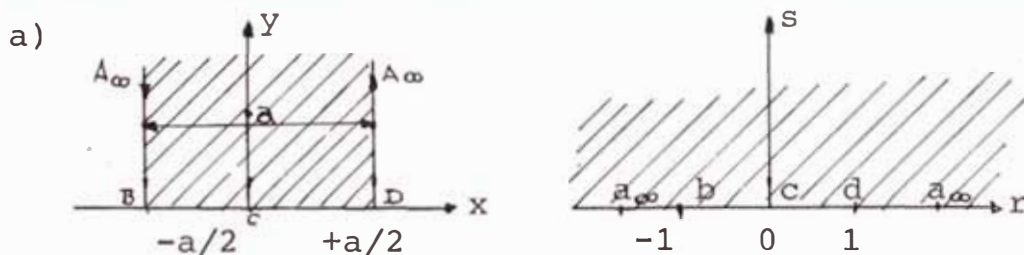
4.2. PRINCIPALES APLICACIONES SOBRE EL SEMI-CIRCULO SUPERIOR

Las aplicaciones que se darán a continuación han sido halladas siguiendo el procedimiento de los ejemplos anteriormente explicados:

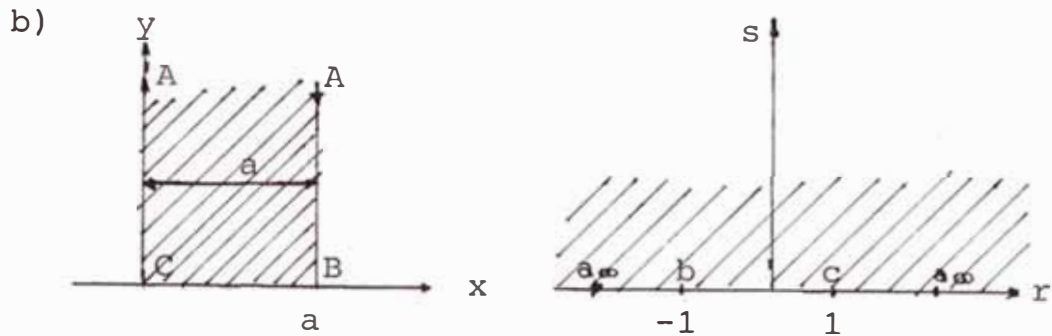
I Sector Infinito de Angulo π/m $\xi = z^m; m \geq 1/2$



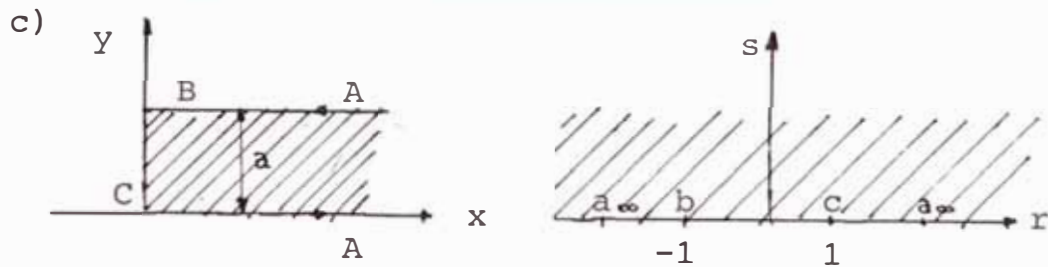
II Banda Semi-Infinita de Ancho a $\xi = \text{Sen } \frac{\pi z}{a}$



$$\xi = \cos \frac{\pi z}{a}$$

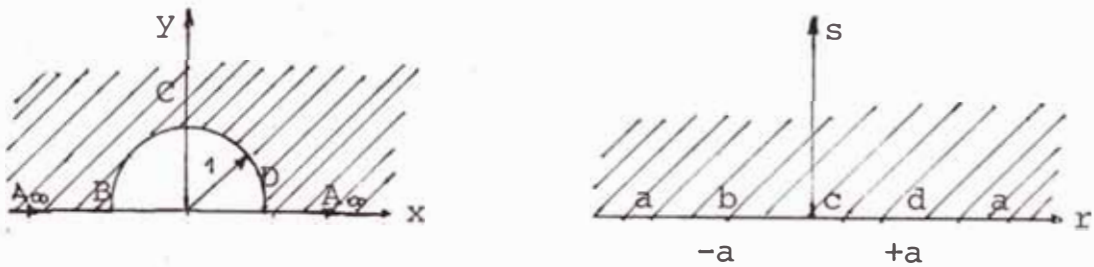


$$\xi = \cosh \frac{\pi z}{a}$$



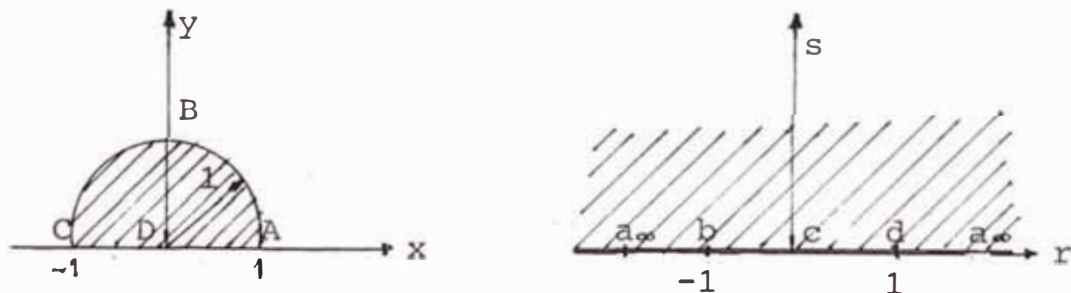
III Semiplano sin un Semicírculo

$$\xi = \frac{a}{z} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$



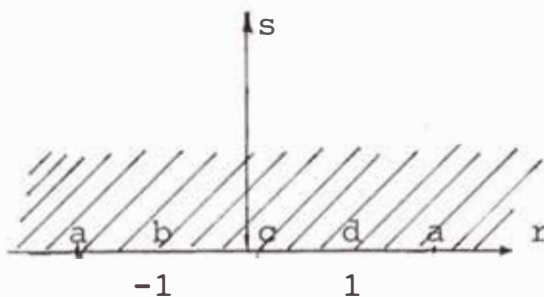
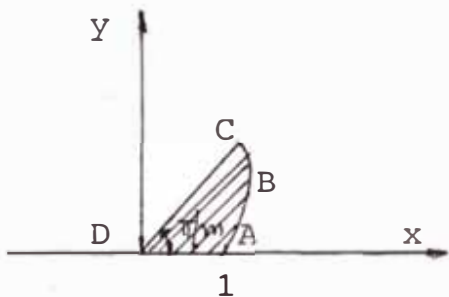
IV Semicírculo

$$\xi = \left(\frac{1+z}{1-z} \right)^2$$



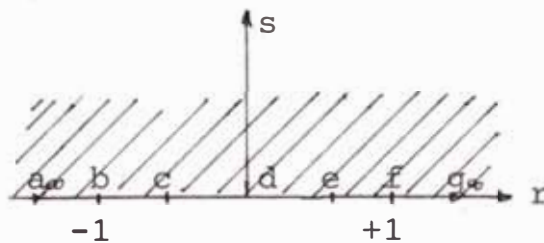
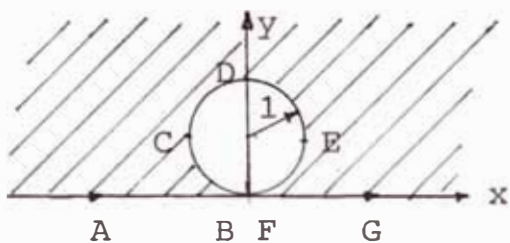
V Sector de un Círculo

$$\xi = \left(\frac{1 + z^m}{1 - z^m} \right)^2 ; m \geq 1/2$$



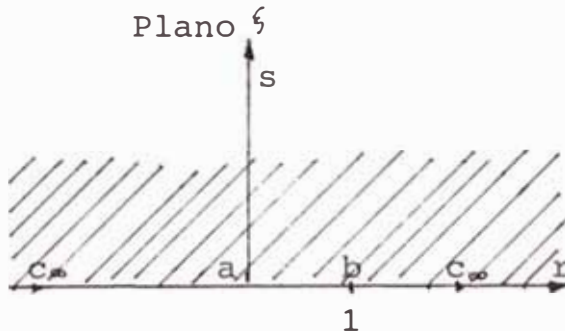
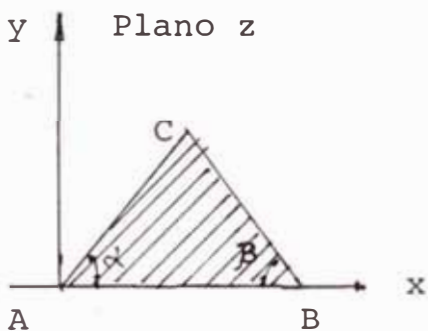
VI Semiplano sin un Círculo

$$\xi = \text{Coth} (\pi/z)$$



VII Interior de un Triángulo

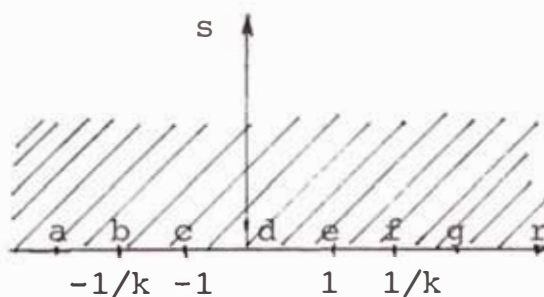
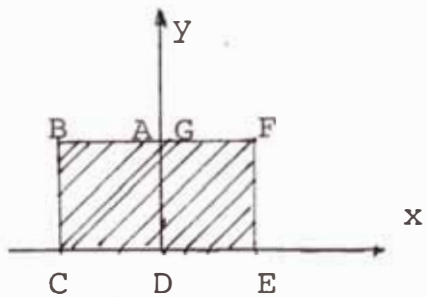
$$z = \int_0^\xi t^{\alpha/\pi - 1} (1-t)^{\beta/\pi - 1} dt$$



VIII Interior de un Rectángulo

$$z = \int_0^\xi \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} ;$$

$$0 < k < 1$$



C A P I T U L O V

ESTUDIO DE LA FILTRACION EN UNA PRESA DE TIERRA CON BASE IMPERMEABLE

Debido a que en los Capítulos I al IV se ha hecho un estudio de las propiedades de los fluídos, más importantes, y del estudio matemático que se va a utilizar posteriormente en el Capítulo VI, es por ello que seguidamente analizaremos las propiedades físico-mecánicas de una presa tal como también el cálculo para hallar la permeabilidad, la filtración, etc.

5.1 Ley de Darcy.-

El agua al circular a través de un medio permeable, (siendo un material o medio permeable cuando contiene vacíos continuos, existiendo éstos en todos los suelos), las partículas de ésta recorren curvas que se denominan Líneas de Filtración ó Líneas de corriente.

Por el estudio de Mecánica de Fluídos para un flujo uniforme, no viscoso, fluído incompresible; la Ecuación de Bernoulli está dada por:

$$\frac{P}{\gamma_w} + z + \frac{V^2}{2g} = \text{cte} = h \quad (1)$$

donde : P = presión (Kg/m².)

γ_w = peso específico (Kg/m³.)

V = velocidad de filtración (m/seg.)

g = gravedad (m/seg.².)

h = altura total (m).

Demostraremos que la suma de la altura de presión P/γ_w , la elevación z y la velocidad total $v^2/2g$ en un punto dentro de la región del flujo es una constante.

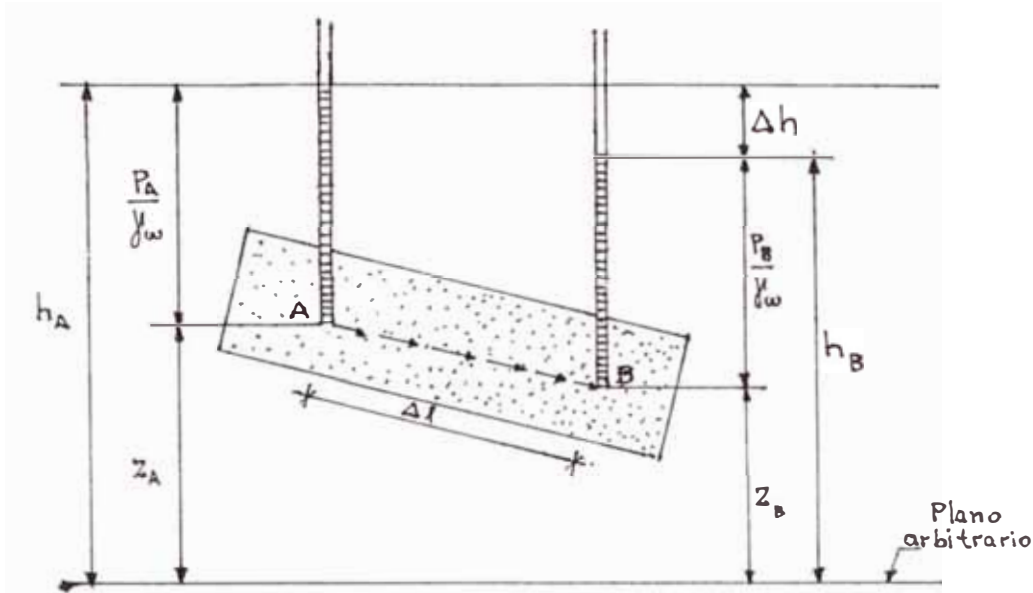


Fig. 5.1

Se debe de tener en cuenta que hay una pérdida de energía debido a la resistencia que ofrecen individualmente los poros del material, es por ello, - en la Fig. 5.1 podemos aplicar Bernoulli, así:

$$\frac{P_A}{\gamma_w} + z_A + \frac{v_A^2}{2g} = \frac{P_B}{\gamma_w} + z_B + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta h \quad (2)$$

donde Δh representa la pérdida total de altura ó energía del fluido en una distancia Δl . Así:

$$i = - \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta l} = - \frac{dh}{dl} \quad (3)$$

./.

Siendo i el gradiente hidráulico.

Asímismo, la energía cinética ($V^2/2g$) es muy pequeña entre los puntos A y B pudiéndose considerar como despreciable ya que si la velocidad total es muy grande con respecto a la velocidad de filtración entre A y B entonces el término $V^2/2g$ será muy pequeño por lo que se le considera despreciable.

Obteniendo en (2) :

$$\frac{P_A}{\gamma_w} + z_A = \frac{P_B}{\gamma_w} + z_B + \Delta h$$

$$\Delta h = \left(\frac{P_A}{\gamma_w} - \frac{P_B}{\gamma_w} \right) + (z_A - z_B) \quad (4)$$

Por lo tanto la altura total en un punto se podrá escribir simplemente como :

$$h = \frac{P}{\gamma_w} + z$$

Es así como en el año 1856 Henry Darcy publica una simple relación basada en la experimentación:

$$v = ki \quad \Rightarrow \quad \therefore v = -k \frac{dh}{dl}$$

que se le denominó LEY DE DARCY donde demuestra una dependencia entre el gradiente hidráulica (i) y la velocidad de descarga (v) que es la cantidad de agua que circula en la unidad de tiempo a través de una superficie unitaria perpendicular a las

./.

líneas de filtración y llamándole K , al coeficiente de proporcionalidad, coeficiente de permeabilidad teniendo las dimensiones de la velocidad.

Darcy estudió el flujo del agua en los suelos utilizando un aparato similar al que se muestra a continuación:

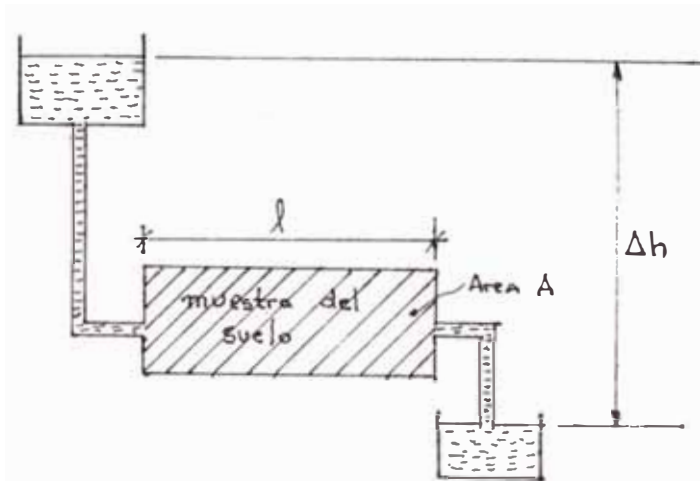


Fig. 5.2

Colocó una muestra de longitud l y área transversal A en un tubo que se ajustaba a la muestra y que tenía los extremos abiertos conectándose a cada extremo del tubo un depósito de agua. Denominándose la diferencia Δh entre los niveles de agua de ambos depósitos PERDIDA DE CARGA. Experimentalmente Darcy encontró que el gasto de agua q (cm^3/seg) era directamente proporcional al área A y a la relación $\Delta h/l$ que la denominó Gradiente Hidráulica designada por i . Por lo tanto:

$$q = kiA$$

./.

Siendo k el constante de proporcionalidad anteriormente explicado que se le denominó Coeficiente de Permeabilidad ó simplemente permeabilidad.

Esta fórmula es correcta siempre que el flujo sea laminar y es aplicable a todos los suelos más finos que las gravas y siempre que $i < 5$.

5.2 Coeficiente de Permeabilidad y Métodos de Determinación.-

Coeficiente de Permeabilidad.- Es una constante, - que tiene las dimensiones de velocidad, que expresa la facilidad con que el agua atraviesa el suelo. Generalmente se expresa en cm/seg, pié/mm y en -- suelos muy impermeables mt/día ó pié/día.

Introduciendo la permeabilidad física k_0 que es una constante empírica que depende de las características estructurales del medio y es independiente de las propiedades del fluido, MUSKAT relacionó ésta con el coeficiente de permeabilidad :

$$k = \frac{k_0}{\mu} \gamma_w$$

donde : k - Coeficiente de permeabilidad (cm/seg)

k_0 - Constante empírica (cm^2)

μ - Viscosidad del agua ($\text{gr-seg}/\text{cm}^2$)

γ_w - Peso específico.

Físicamente, si consideramos así el coeficiente de permeabilidad debemos tener en cuenta: la magnitud

./.

del coeficiente de permeabilidad depende de la viscosidad del agua y del tamaño, forma y área de los conductos a través de los cuales fluye el agua.

Se debe tener en cuenta que la viscosidad es una función de la temperatura, es decir, cuanto más alta es la temperatura menor es la viscosidad y más alta la permeabilidad. Generalmente la permeabilidad es referente a 20°C. Así, a 0°C será el 56% del valor a 20°C, a 40°C será el 150% del valor a 20°C.

En cuanto se refiere a los factores que determinan el tamaño y forma de los conductos es poco específica por lo que no se ha encontrado una expresión matemática para ellos.

En Ingeniería Civil, la utilización del Coeficiente de Permeabilidad es simplemente k para hallar la velocidad de descarga (v) ó

Sea : $v = ki$ (Ley de Darcy).

Cuyos métodos de determinación los explicaremos seguidamente.

Métodos de Determinación.-

Los métodos que se utilizan para la determinación del coeficiente de permeabilidad podemos agruparlos en dos:

I.- Métodos Directos :

Entre los métodos directos mencionaremos los -

./.

siguientes:

1) Los determinados en Laboratorio.- Los cuales se pueden realizar mediante dos procedimientos según el equipo que se puede utilizar:

a) Permeámetro de Carga Constante.- Se utiliza para suelos muy permeables y principalmente para arenas y gravas.

El esquema de este aparato se observa - en la Fig. 5.3 :

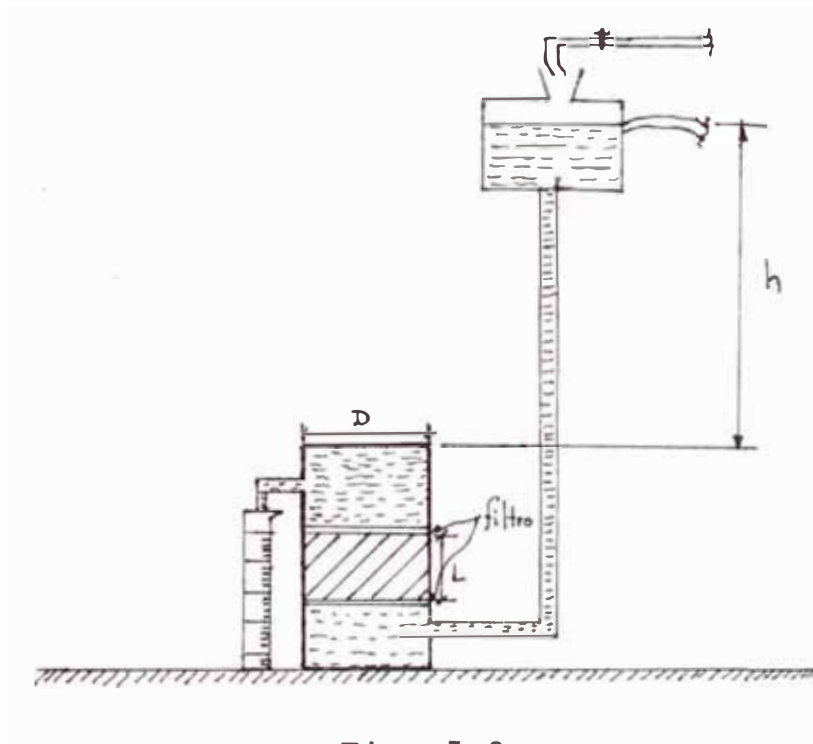


Fig. 5.3

Se hace circular el agua a través de la muestra y lo que pasa se recoge en una probeta y se toma el tiempo en que demora un determinado volumen, de tal mane-

./.

ra que el coeficiente de permeabilidad se pueda calcular :

$$k = \frac{\text{Vol} \times L}{A \times h \times t} \text{ cm/seg}$$

donde: A = Area de la sección transversal de la muestra (cm²)

h = Carga hidráulica (cm)

Vol = Volumen de agua (cm³)

L = Altura del molde (cm)

t = Tiempo transcurrido para un volumen Vol. (seg)

b) Permeámetro de Carga Variable.- Su utilización se hace en suelo menos permeable que el anterior.

Un esquema de este permeámetro se ve en la Fig. 5.4 :

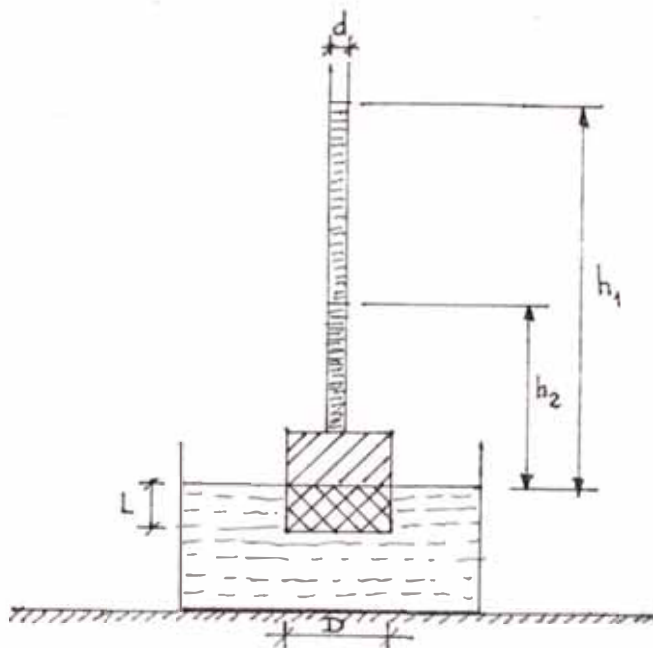


Fig. 5.4

Aplicándose para este tipo de determinación la siguiente fórmula :

$$k = 2.3 \frac{L \times a}{A \times t} \log \frac{h_1}{h_2} \quad \text{ó} \quad k = 2.3 \frac{d^2}{D^2} \frac{L}{t} \log \frac{h_1}{h_2}$$

donde: L = Altura de la muestra sumergida.

a = Area de la sección del tubo de carga.

A = Area de la sección de la muestra.

t = Tiempo de h_1 a h_2 .

h_1 = Carga hidráulica al inicio de la prueba.

h_2 = Carga hidráulica al final de la prueba.

2) Los determinados en el campo mediante pozos de bombeo.

II.- Métodos Indirectos :

Son los que se realizan a través de ensayos granulométricos, pruebas de consolidación, etc.

Así podemos tener los siguientes:

1) Fórmula de Hazen.- Es la fórmula relacionada con el ensayo granulométrico.

$$\text{Para arenas limpias} \Rightarrow k = C (D_{10})^2.$$

donde: D_{10} = Diámetro efectivo (mm) hallado de la curva granulométrica

./.

C - Constante que varía entre 41 y 146.

Si tomamos en cuenta la corrección por temperatura tendremos :

$$k = C (0.7 + 0.3t) (D_{10})^2.$$

2) Fórmula de Schlichter.- Es la fórmula relacionada con la porosidad del suelo y está dada por:

$$k = 771 \frac{D_{10}^2}{C} (0.7 + 0.3t)$$

donde: C es un valor relacionado con la porosidad del suelo.

n	0.26	0.38	0.46
C	84.3	24.1	12.8

D_{10} : Diámetro efectivo (mm).

n : Porosidad.

t : Temperatura del ambiente.

3) Fórmula de Terzaghi.- Terzaghi dió la fórmula siguiente:

$$k = C_1 D_{10}^2 (0.7 + 0.3t)$$

$$\text{Siendo : } C_1 = C_0 \left(\frac{n - 0.13}{\sqrt[3]{1 - n}} \right)^2$$

C_o depende del material, teniendo la siguiente tabla aproximada :

Material	Arena de granos redondeados	Arena de granos angulosos	Arena con limos
C _o	800	460	< 400

n = Porosidad del suelo.

A continuación daremos dos tablas importantes, una de valores relativos de permeabilidad según Terzaghi-Peck y otra de permeabilidad y condiciones de drenaje de los suelos según Casagrande-Fadum, incluyendo en ésta los métodos de determinación del coeficiente de permeabilidad :

TABLA I

Valores Relativos de Permeabilidad
(Según TERZAGHI-Peck)

Permeabilidad	k (cm/seg)	Suelo Típico
Muy permeable	$> 10^{-1}$	Grava Gruesa
Moderadamente permeable	$10^{-1} - 10^{-3}$	Arena, Arena-fina.
Poco Permeable	$10^{-3} - 10^{-5}$	Arena limosa-Arena sucia.
Muy poco permeable	$10^{-5} - 10^{-7}$	Limo-Arenisca fina
Impermeable	$< 10^{-7}$	Arcilla.

En la mayoría de los suelos la permeabilidad depende de la dirección en que se produce el movimiento del agua. El valor de k en dirección paralela a los planos de estratificación es generalmente de 2 á 30 veces mayor que en la dirección normal a dichos planos debido a que las capas del suelo son relativamente de baja permeabilidad.

5.3 Condiciones Hidráulicas de Borde.-

Para el estudio de las condiciones de borde asumiremos la presa como la mostrada en la Fig. 5.5 por ser ella la que sirvió a KOZENY para estudiar los problemas de filtración en una presa de tierra con una superficie libre parabólica y con una base impermeable y un dren; obviando Kozeny el problema de entrada o transición en el punto B que lo analizó CASAGRANDE - tal como veremos posteriormente.

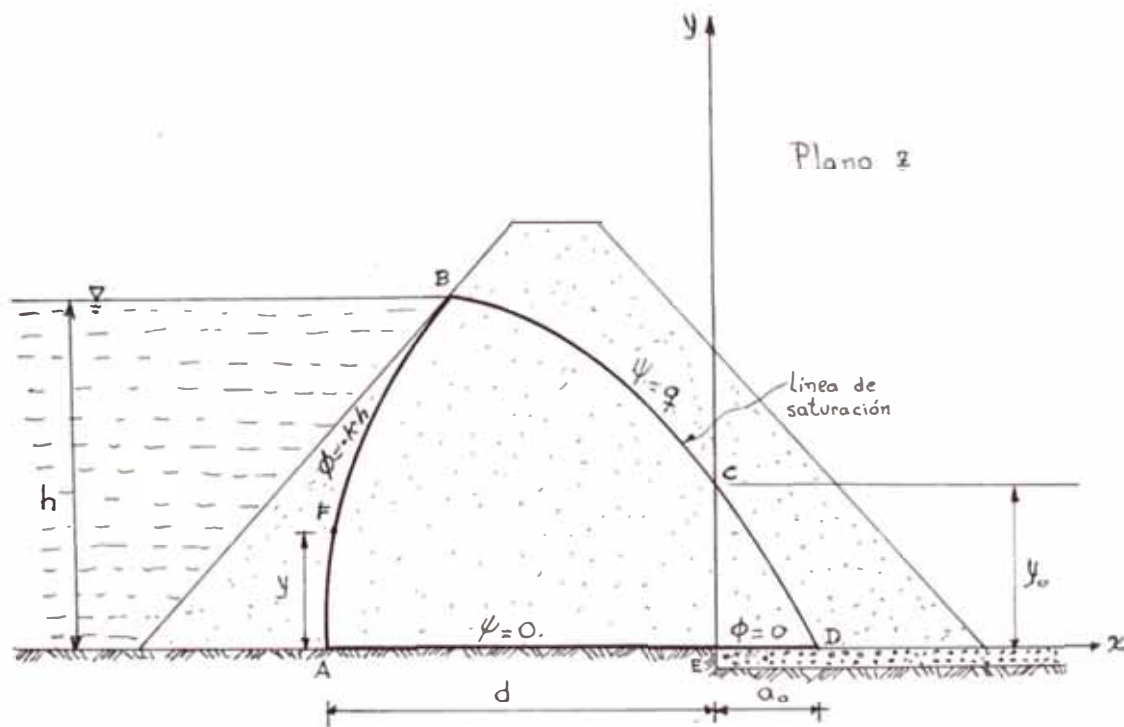


Fig. 5.5

Por tener la base impermeable y el dren respectivo - se tiene que: $\psi_{AE} = 0$ y $\phi_{ED} = 0$ respectivamente; siendo el objeto del dren el control de filtración - de la presa.

./.

Ahora, por una de las propiedades físicas de la función corriente que dice que entre dos líneas de corriente, tal como ψ_{BD} y ψ_{AE} , el caudal por unidad de longitud es igual a q (Cap.I, 1.3), se obtiene :

$$q = \psi_{BD} - \psi_{AE} \Rightarrow \psi_{BD} = q$$

Asímismo, considerando un punto F sobre AB se tiene que la presión de agua es :

$$P = \gamma_{\omega} (h - y) \Rightarrow h = \frac{P}{\gamma_{\omega}} + y$$

$$y \quad \phi = -k \left(\frac{P}{\gamma_{\omega}} + y \right) + C$$

$$\text{Por lo tanto : } \phi_{AB} = -kh + C$$

Siendo C una constante arbitraria y asumiendo $C = 0$ se tiene :

$$\phi_{AB} = -kh$$

En resumen, las condiciones de borde (campo de flujo) de la presa en estudio serán :

$$\psi_{BD} = q \quad ; \quad \phi_{AB} = -kh$$

$$\psi_{AE} = 0 \quad ; \quad \phi_{DE} = 0$$

Kozeny para hallar la ecuación de la línea de saturación, de la filtración a través de la presa se basó en la relación que debe existir entre el plano z y el plano ω que proviene de la función $z = C \omega^2$ en donde C es una constante.

./.

La región de flujo en el plano ω está dada por $\phi = 0$, $\psi = 0$, $\phi = -kh$ y $\psi = q$, tal como se muestra en la Fig. 5.6.

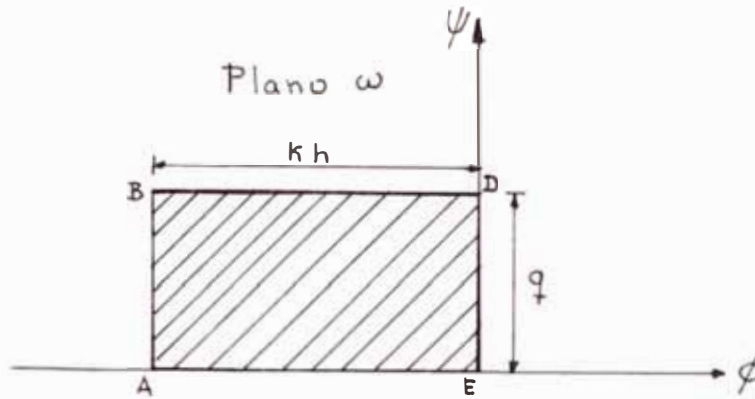


Fig. 5.6

Haciendo operaciones :

$$x + iy = C (\phi + i\psi)^2 = C (\phi^2 + 2i\psi\phi - \psi^2)$$

igualando términos : $x = C (\phi^2 - \psi^2)$; $y = 2C\psi\phi$

reemplazando en estas ecuaciones por los valores de ϕ y ψ hallados anteriormente a lo largo de la superficie libre ($\phi = -ky$; $\psi = q$) :

$$x = C (k^2y^2 - q^2) \tag{5}$$

$$y = - 2Ckyq \tag{6}$$

de (6) : $C = - \frac{1}{2kq}$ (7)

La ecuación de la línea de saturación o libre superficie llamada PARABOLA BASICA DE KOZENY está dada reemplazando (7) en (5) :

$$x = \frac{-ky^2}{2q} + \frac{q}{2k} \tag{8}$$

./.

Para $x = 0$ en (8), llamando a la intersección del eje y con la superficie y_0 , la cantidad de filtración por unidad de longitud de la presa es :

$$q = ky_0 \quad (9)$$

Para hallar la ecuación de la parábola reemplazamos (9) en (8) :

$$x = -\frac{y^2}{2y_0} + \frac{y_0}{2} \quad \text{ó} \quad y^2 - y_0^2 + 2y_0x = 0$$

resolviendo para y_0 : $y_0 = x \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ (10)

En (10): para $x = -d$; $y = h$: $y_0 = \sqrt{d^2 + h^2} - d$ (11)

Para hallar la distancia focal de la parábola (a_0), suponemos $y = 0$ en la ecuación (8) : $a_0 = \frac{y_0}{2}$.

La solución gráfica para hallar y_0 (ecuación (11)) - podemos realizarla de la siguiente manera = prolongamos la línea de la superficie libre del agua, con un radio igual a la recta que une B con E (radio BE con centro en B) intersectamos dicha prolongación y midiendo la distancia que hay desde este último punto al eje y habremos hallado y_0 (Fig. 5.7) :

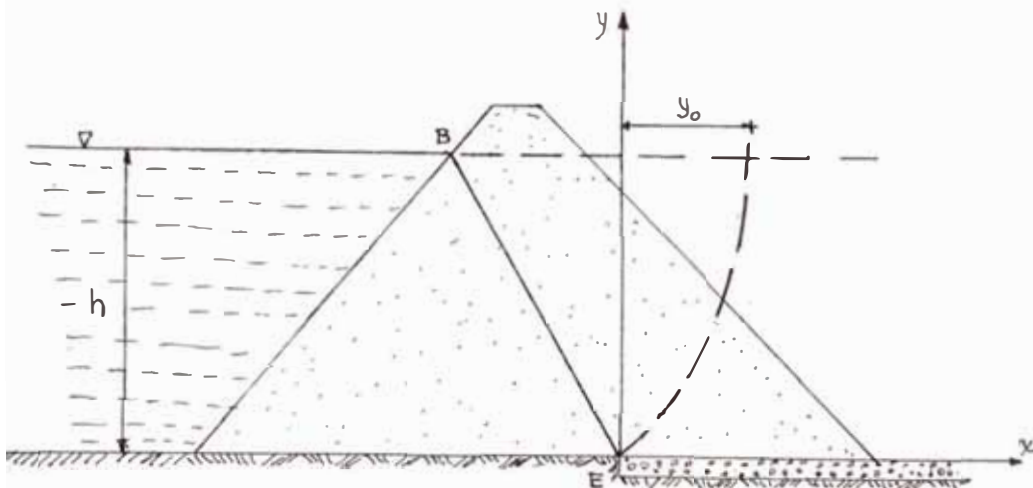


Fig. 5.7

./.

Casagrande amplía la solución de Kozeny incluyendo - las presas de tierra con un dren trapezoidal aguas - abajo (Fig. 5.8).

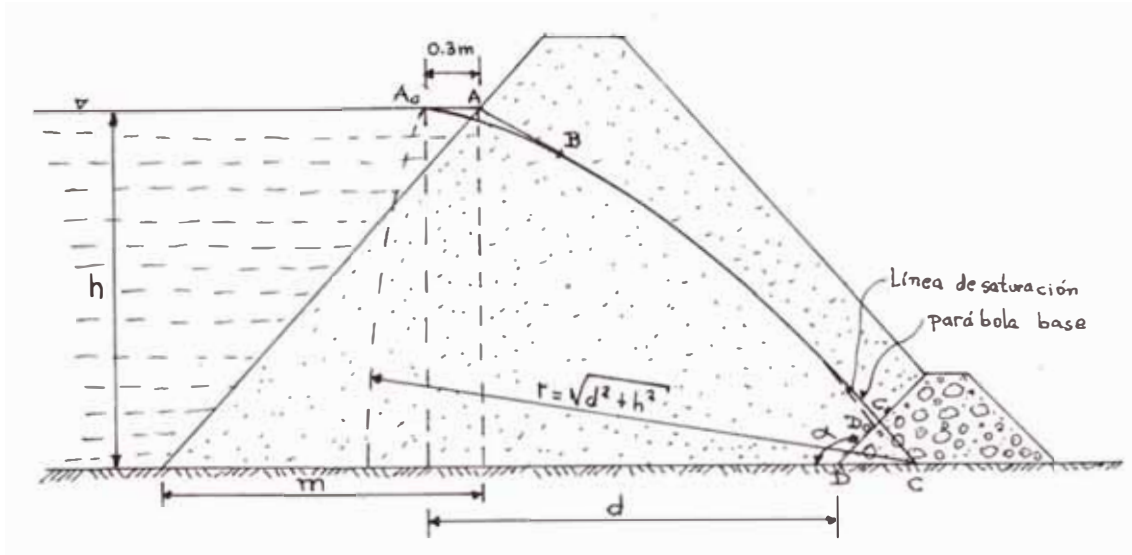


Fig. 5.8

donde los puntos en la Fig.5.8 representan lo siguiente:

- : Punto donde la parábola superficie del agua.
- D : Foco de la parábola base que pasa por los puntos A_0 , C_0 y C .
- m : Porción horizontal de la porción mojada del talud aguas arriba.
- α : Angulo interno formado por la cara de descarga del parámetro aguas abajo y el dren trapezoidal.
- h : Carga de agua que origina la filtración.
- d : Distancia de A_0C horizontalmente.

./.

Asímismo, se debe tener en cuenta que la línea de saturación es una parábola con ciertas desviaciones originadas a condiciones locales de entrada y salida (transiciones entre la línea real de saturación y la parábola base). Así, en la transición de entrada el punto A_0 está localizado a $0.3m$ de A debido a la desviación que se produce en la parábola de Kozeny a consecuencia del talud aguas arriba. La condición de entrada se ajusta también a que el arco AB es normal al talud aguas arriba y tangente a la superficie libre parabólica.

Analizaremos mediante la Fig. 5.9 las condiciones locales de salida de la presa mostrada en la Fig. 5.8:

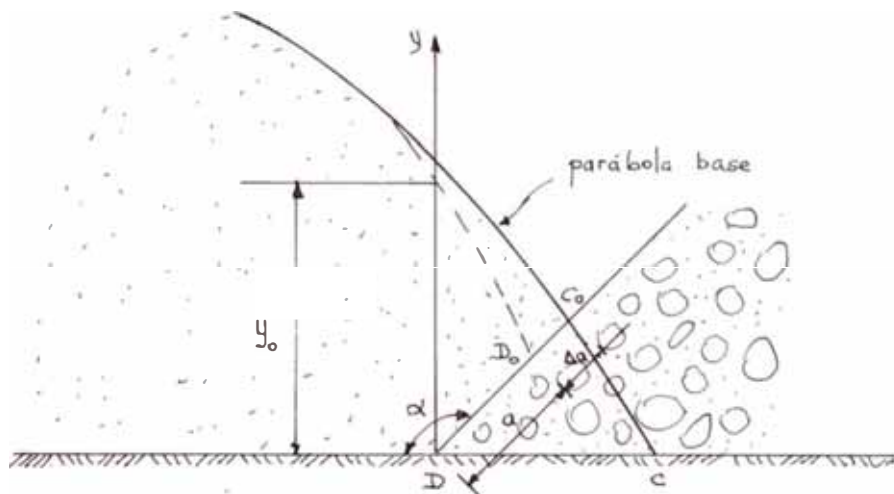


Fig. 5.9

Casagrande halló el radio de la parábola haciendo la distancia entre C_0 y D_0 como Δa estando el punto C_0 sobre la parábola base y el punto E_0 sobre la línea de filtración, calculando el radio :

./.

$$R = \frac{\Delta a}{a + \Delta a}$$

el cual lo ploteó como una función de α ; esto debido a que lo halló utilizando la ecuación polar de una parábola, que lo graficó así (Fig. 5.10) :

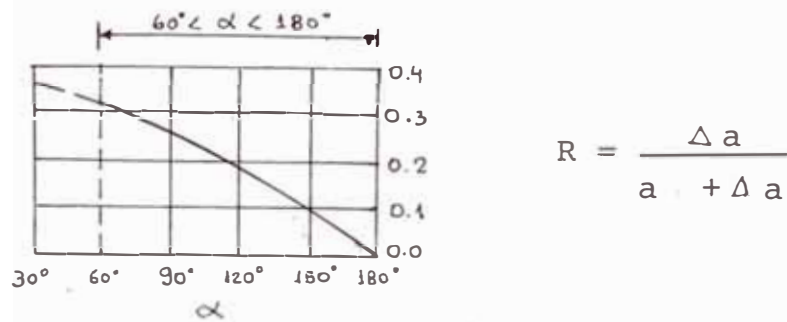


Fig. 5.10

De aquí halló, una ecuación del gasto de filtración que se utiliza entre $30^\circ < \alpha < 180^\circ$; debido a que la longitud media del recorrido de filtración y el área de la sección transversal del gasto de filtración tienen muy poca variación, reemplazando la ecuación (11) en (9) :

$$q = k (\sqrt{h^2 + d^2} - d)$$

Casagrande demostró también que la distancia Δa varía con α llegando a ser cero cuando $\alpha = 180^\circ$.

A continuación, como información podemos hallar las condiciones de borde en el plano hodógrafo (u,v) partiendo del concepto de velocidad hodográfica dada

./.

en el Cap.II - 2.1, así se tendrá :

a) Contorno Impermeable.- En el contorno impermeable el vector velocidad está en la dirección de éste y siendo α el ángulo formado entre el borde y el eje x obteniéndose :

$$\frac{v}{u} = \operatorname{tg} \alpha$$

que representa una línea recta en el plano uv , - pasando continuamente del origen en la dirección paralela al borde impermeable.

b) Contorno de la Presa.- El borde de la presa es - una línea equipotencial $\phi = \text{constante}$; por lo - tanto el vector velocidad es perpendicular al - borde. Si suponemos que la ecuación de borde es la línea recta : $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$, en el plano hodó- grafo la imagen del borde viene dada por $\frac{v}{u} = -\operatorname{ctg} \alpha$ pasando por el origen del plano uv y es normal a este contorno.

c) Superficie Libre.- A lo largo de la superficie - libre $\phi + ky = \text{cte}$, si diferenciamos esta expresi- ón con respecto a ds (longitud de la superfi- cie libre) y a su vez multiplicamos por $\partial \phi / \partial s$ se obtiene :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)^2 + k \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{dy}{ds} = 0$$

pero $\frac{\partial \phi}{\partial s}$ es la magnitud de la velocidad vector,-

./.

entonces :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial s}\right)^2 = u^2 + v^2 \quad ; \quad \frac{\partial \phi}{\partial s} \frac{dy}{ds} = v$$

$$\therefore u^2 + v^2 + kv = 0 \quad (12)$$

La ecuación (12) representa un círculo que tiene como origen $(0, -k/2)$; radio $k/2$ (Fig. 5.11) :

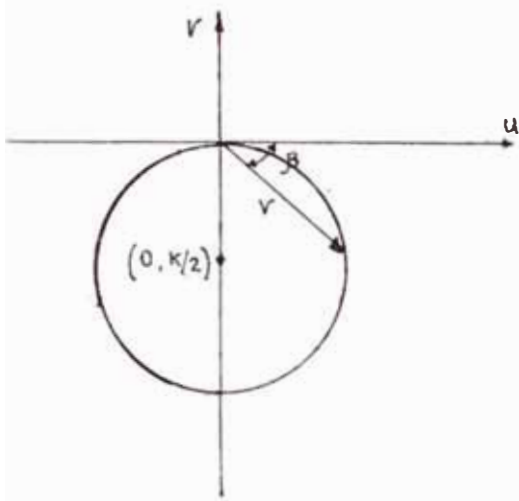


Fig. 5.11

El vector velocidad a lo largo de la superficie libre puede obtenerse por una simple construcción gráfica (Fig.5.11) donde β es el ángulo formado por la tangente a la superficie libre y la horizontal.

- d) Superficie de Filtración.- A lo largo de la superficie de filtración que en este caso $\phi + ky = \text{cte}$; diferenciando esta expresión con respecto a n , la longitud a lo largo de la superficie, se obtiene :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} + k \frac{dy}{dn} = 0$$

y siendo α el ángulo que hace la superficie de filtración con el eje x y sabiendo que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = u \cos \alpha + v \sin \alpha \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial n} = \sin \alpha$$

./.

obtenemos : $u\cos\alpha + v\sin\alpha + k\sin\alpha = 0$

$$\text{ó} \quad v = -u\cot\alpha - k$$

Ahora, suponiendo que la superficie de filtración es una línea recta ($\alpha = \text{cte}$) en el plano uv ; es representada como una línea recta normal a la superficie pasando por el punto $(0, -k)$ representando la imagen de la superficie libre.

5.4 Métodos de Solución para el Cálculo de Filtración en una Presa con Base Impermeable.-

Para el estudio de los métodos de solución para el cálculo de filtración en una presa con base impermeable consideraremos los siguientes métodos teniendo en cuenta la presa utilizada respectivamente por cada autor.

1.- Solución de DUPUIT.- Dupuit aplica que la descarga por unidad de ancho en la sección vertical de la presa está dada por :

$$q = - ky \frac{dy}{dx} \quad (13)$$

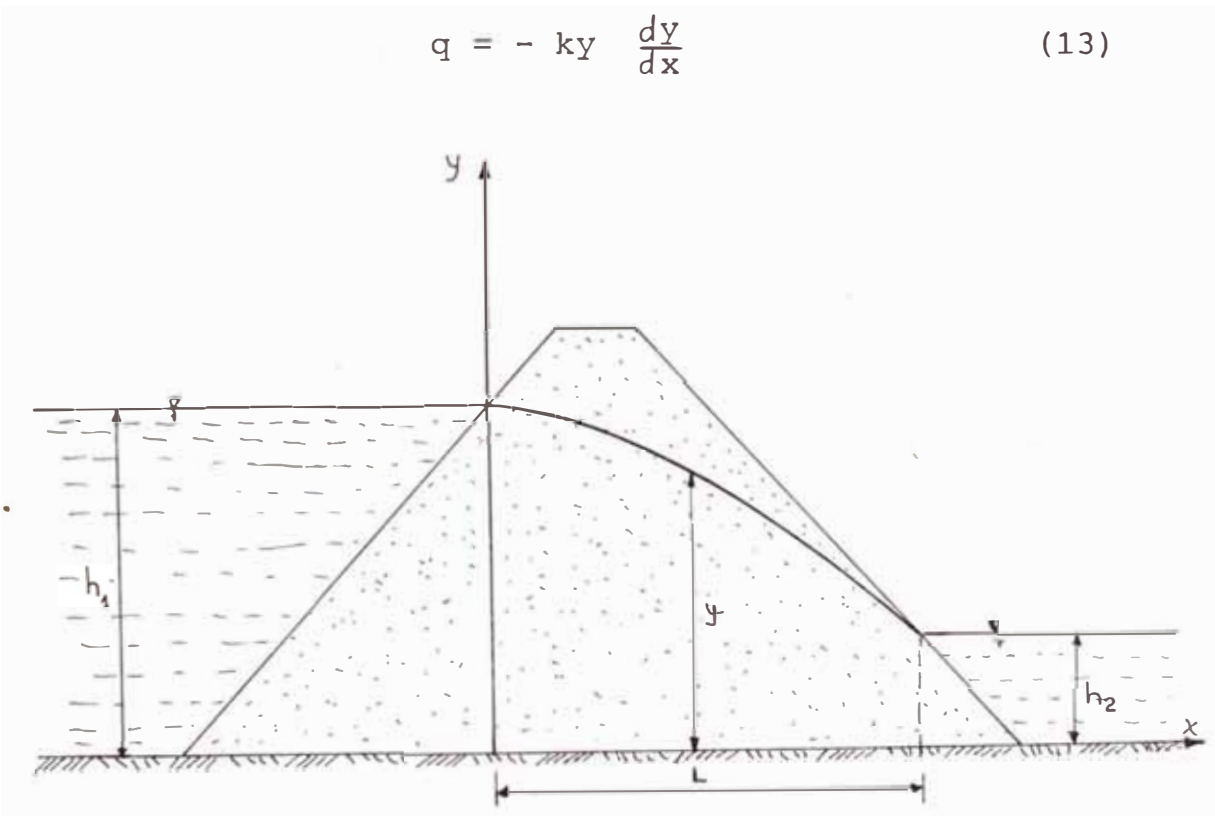


Fig. 5.12

Integrando y sustituyendo en (13) las condiciones de borde o contorno dados en la Fig. 5.12 :

./.

Para $x = 0$, $y = h_1$; para $x = L$, $y = h_2$
de donde obtendremos la fórmula de Dupuit :

$$q = k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2L} \quad (14)$$

Esta ecuación (14) nos indica que la superficie libre es parabólica denominándose comúnmente PARABOLA DE DUPUIT. Debemos de tener en cuenta que en esta fórmula no se toma en cuenta la entrada de la línea de filtración o el desarrollo de la superficie libre.

2.- Solución de SCHAFFERNAK y VAN ITERSON.-

Es el primer método de aproximación que considera el desarrollo de la superficie de filtración que fue propuesta en 1916 por Schaffernak y Van Iterson (Fig. 5.13).

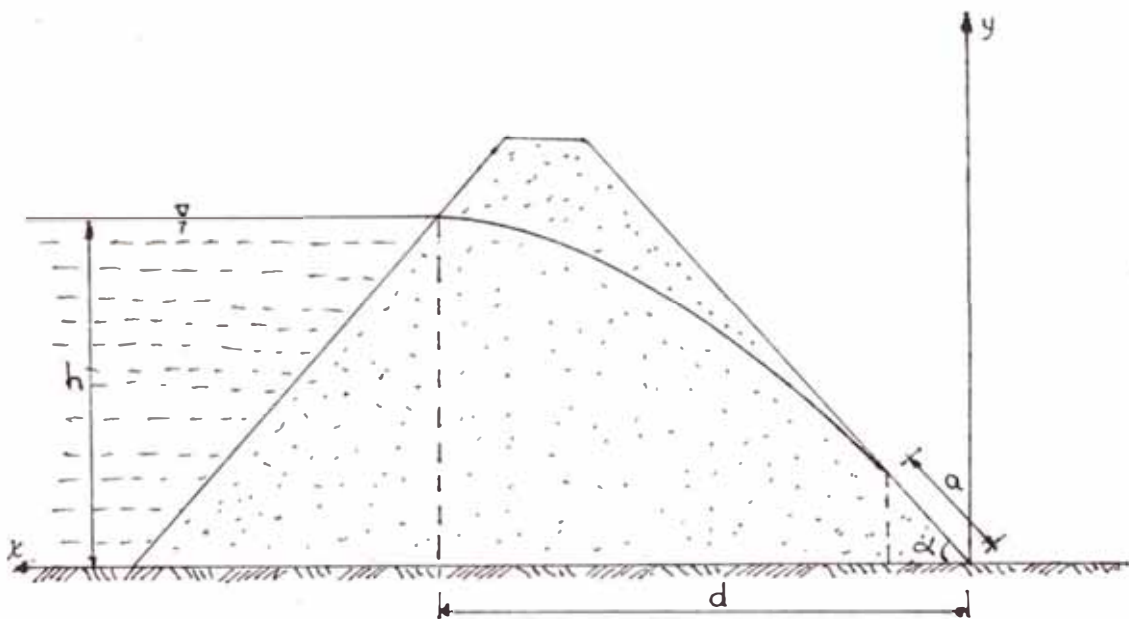


Fig. 5.13

Aplicando al Δ_{ACB} se obtiene para la descarga por unidad de ancho :

$$q = ky \frac{dy}{dx} = k a \text{Sen} \alpha \text{Tg} \alpha$$

$$\int_{a \text{Sen} \alpha}^h y \, dy = a \text{Sen} \alpha \text{Tg} \alpha \int_{a \text{Cos} \alpha}^d dx$$

de donde :

$$a = \frac{d}{\text{Cos} \alpha} - \sqrt{\frac{d^2}{\text{Cos}^2 \alpha} - \frac{h^2}{\text{Sen}^2 \alpha}} \quad (15)$$

Esta ecuación (15) se puede hallar también - gráficamente, de la siguiente manera (Fig. - 5.14) :

- Conociendo el punto de entrada (d,h) el cual es proyectado verticalmente y horizontalmente encontrándose con el talud aguas-abajo en los puntos 1 y 2 respectivamente.
- Se dibuja un semicírculo con centro en el talud aguas abajo, teniendo como diámetro-el punto 1 y C.
- El punto 3 es localizado teniendo como centro a C, radio 2-C.
- Finalmente, un arco de radio 1-3 con el punto 1 como centro localizaremos el punto B sobre el talud aguas abajo. Por lo tanto la distancia del punto C á B será "a".

./.

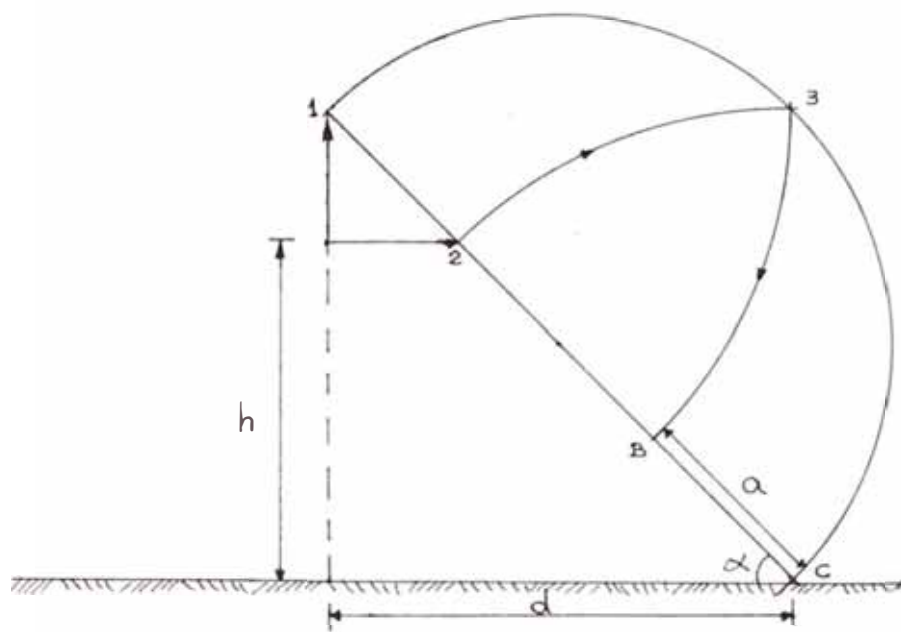


Fig. 5.14

La Solución de Dupuit considera que la parábola de la superficie libre, para este caso, es tangente al talud aguas abajo.

Para la condición de entrada, en el talud - aguas arriba, Casagrande recomienda que el punto D_o (Fig. 5.15), en lugar del punto D, sea el punto de entrada de la Línea de Saturación. La condición de entrada es obtenida trazando el arco DF normal al talud aguas arriba y tangente a la superficie libre de parabólica (parábola base).

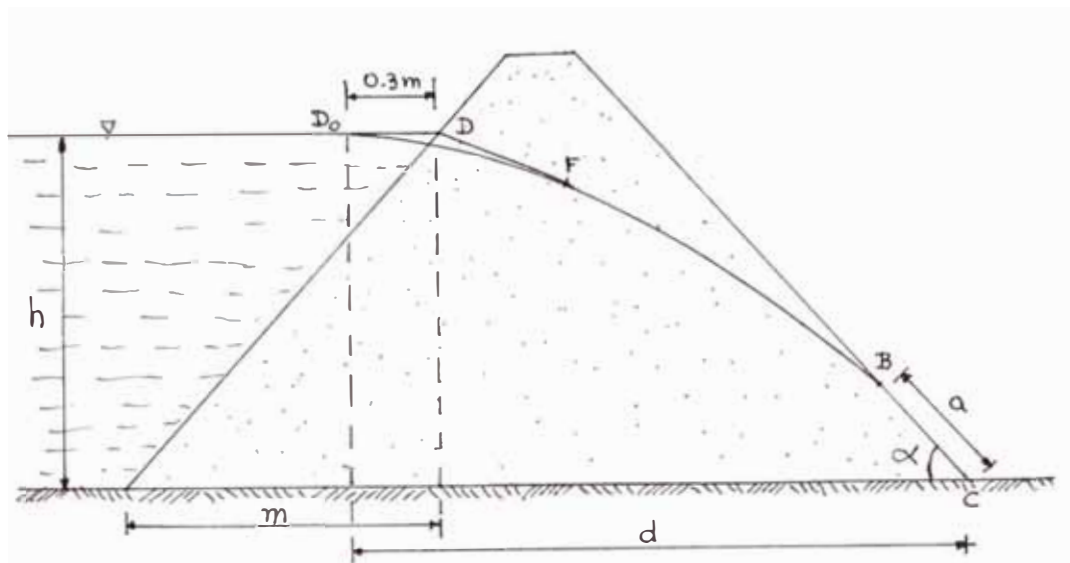


Fig. 5.15

3.- Solución de CASAGRANDE.-

A excepción de Dupuit que asume que la gradiente hidráulica es igual al gradiente $\frac{dy}{dx}$ de la Superficie Libre, Casagrande analiza el problema como Schaffernak y Van Iterson con el gradiente hidráulico igual a $\frac{dy}{ds}$ donde s es uniforme a lo largo de la superficie libre (Fig. 5.16). Por lo tanto :

$$q = -k y \frac{dy}{ds} \quad (16)$$

./.

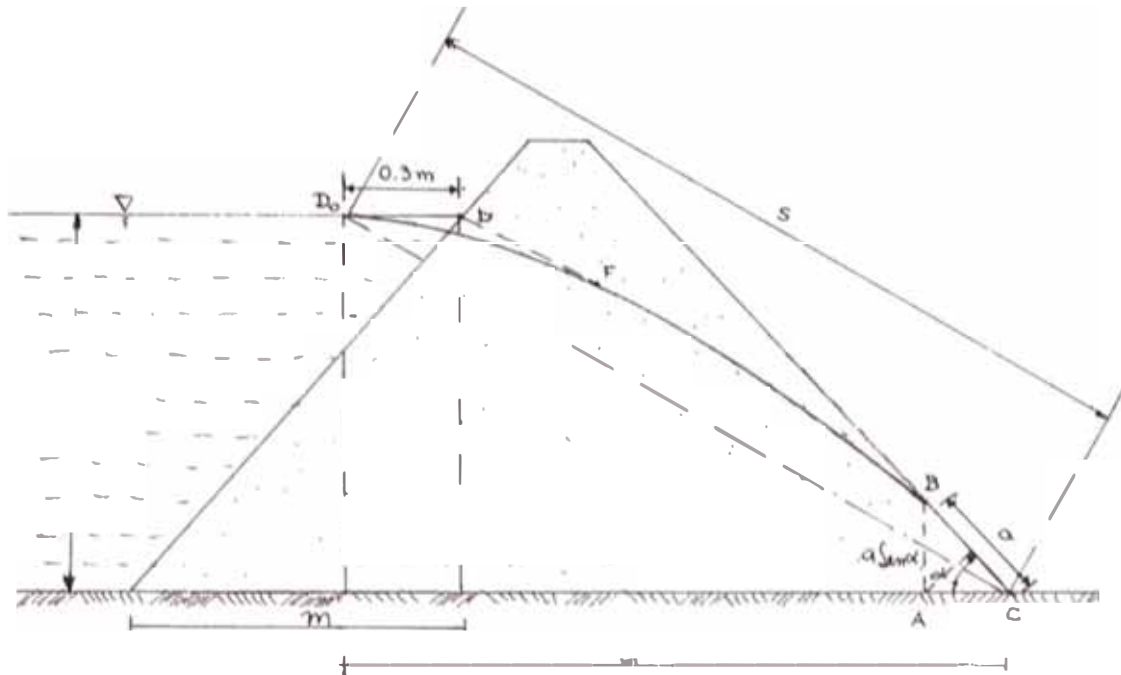


Fig. 5.16

Aplicamos (16) a AB (Fig. 5.16) para obtener la cantidad de filtración :

$$q = k a \text{Sen}^2 \alpha \quad (17)$$

ahora, para hallar el valor de "a" igualamos las ecuaciones (16) y (17) :

$$- \int_h^{a \text{Sen} \alpha} y \, dy = a \text{Sen}^2 \alpha \int_0^{s-a} ds \quad (18)$$

resolviendo la ecuación (18) y siendo s la longitud de la línea de saturación, se obtiene :

./.

$$a = s - \sqrt{s^2 - \frac{h^2}{\text{Sen}^2 \alpha}} \quad (19)$$

la distancia s en esta ecuación (19) se diferencia muy poco de la línea recta CD_0 . - que se puede utilizar como primera aproximación.

En el caso que se necesite una aproxima- - ción más exacta de s se considerará $s = a + BD_0$; $s = a + BD + 0.3m$; etc.; pero sinó es necesario será suficiente con la prime- - ra aproximación : $s = \sqrt{h^2 + d^2}$ y reempla- - zando este valor en la ecuación (19) se - tiene :

$$a = \sqrt{d^2 + h^2} - \sqrt{d^2 - h^2 \text{Ctg}^2 \alpha} \quad (20)$$

Casagrande recomienda una solución gráfica (Fig. 5.17) para la ecuación (20) (similar a la de Dupuit) :

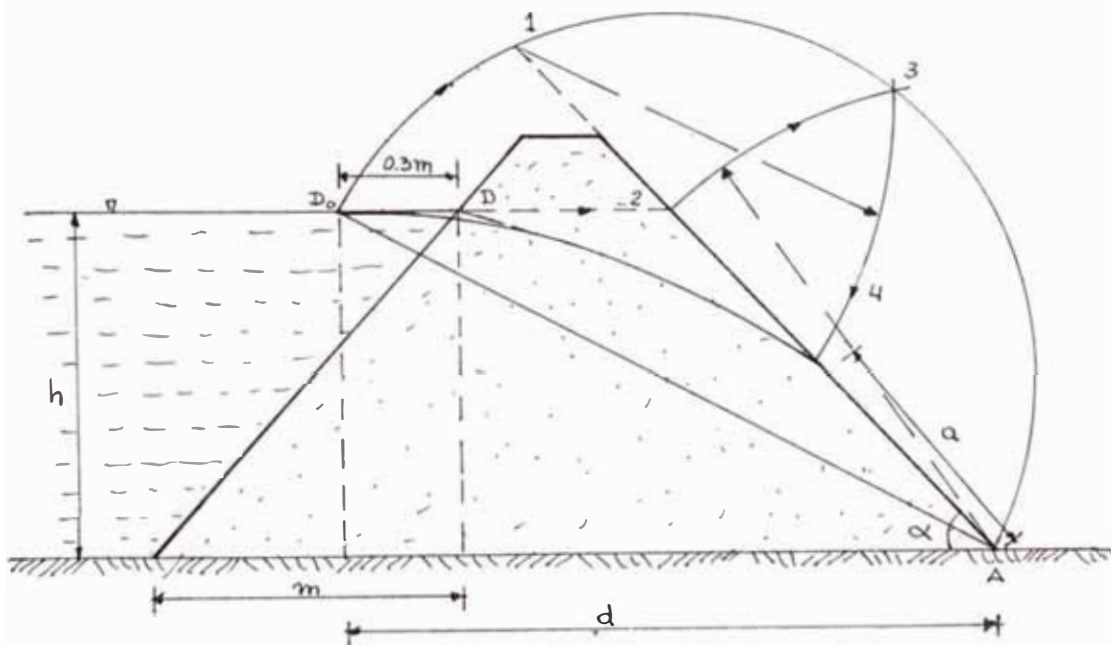
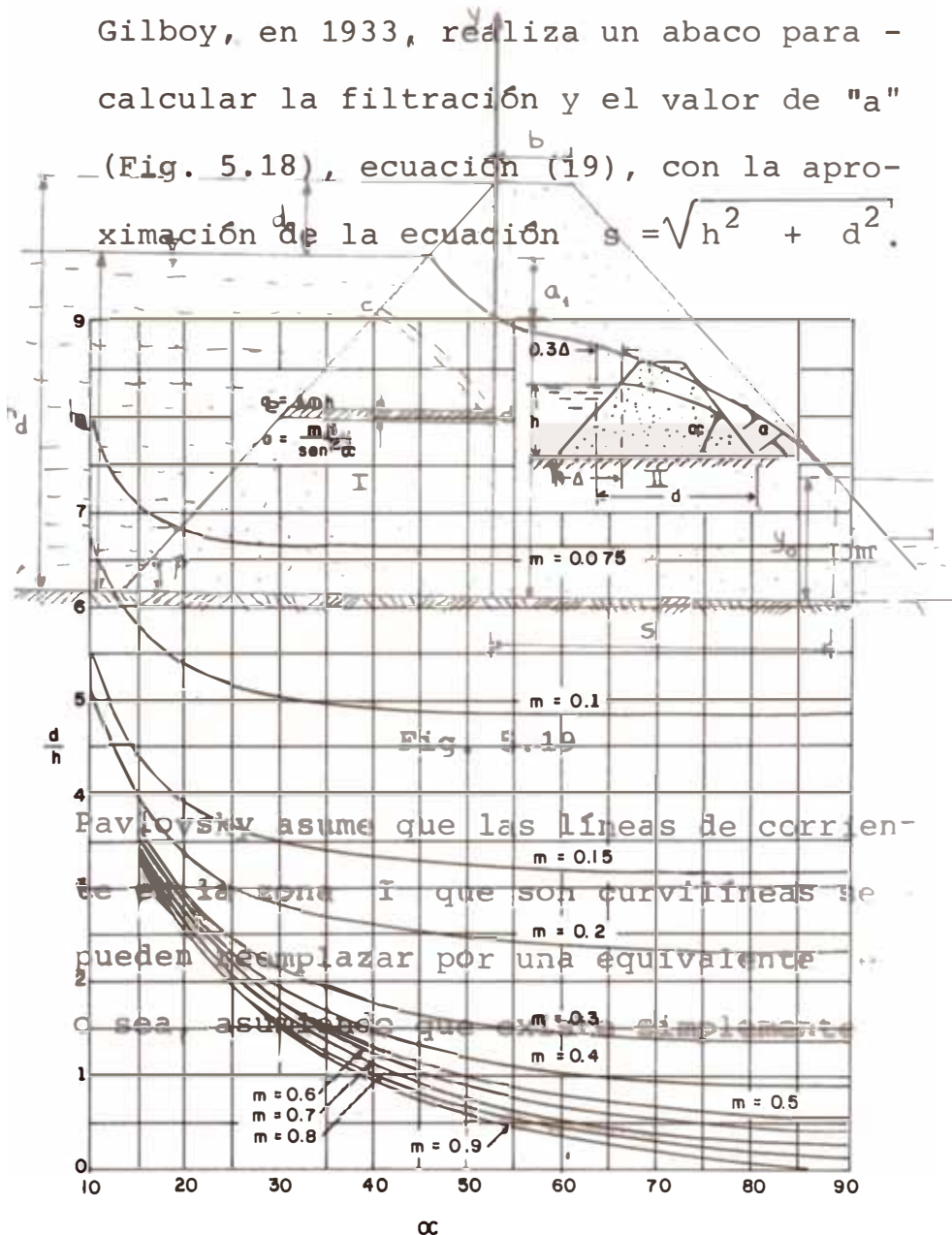


Fig. 5.17

./.

- Con diámetro AD, se traza un semicírculo.
- 4.- Solución de PAVLOVSKY.-
 Se proyecta el nivel de agua hasta el punto 2 y con radio igual a A-2 se interseca el círculo hallado anteriormente por el talud aguas arriba (punto 3).
 Se proyecta el talud aguas abajo hasta línea vertical desde el punto 1 sobre el semicírculo D.3A y de la superficie libre y la sección con radio igual a 1-3 se halla el punto 4. Midiendo la intersección del punto 4 abajo (Fig. 5.19).
 con el talud aguas abajo y el punto A hallamos hallado el valor de "a".



4.- Solución de PAVLOVSKY,-

Pavlovsky considera la presa dividida en tres zonas. La sección I está comprendida por el talud aguas arriba y el eje y , la sección central II por el eje y y la línea vertical desde el punto de descarga de la superficie libre y la sección III por esta línea vertical y el talud aguas abajo (Fig. 5.19).

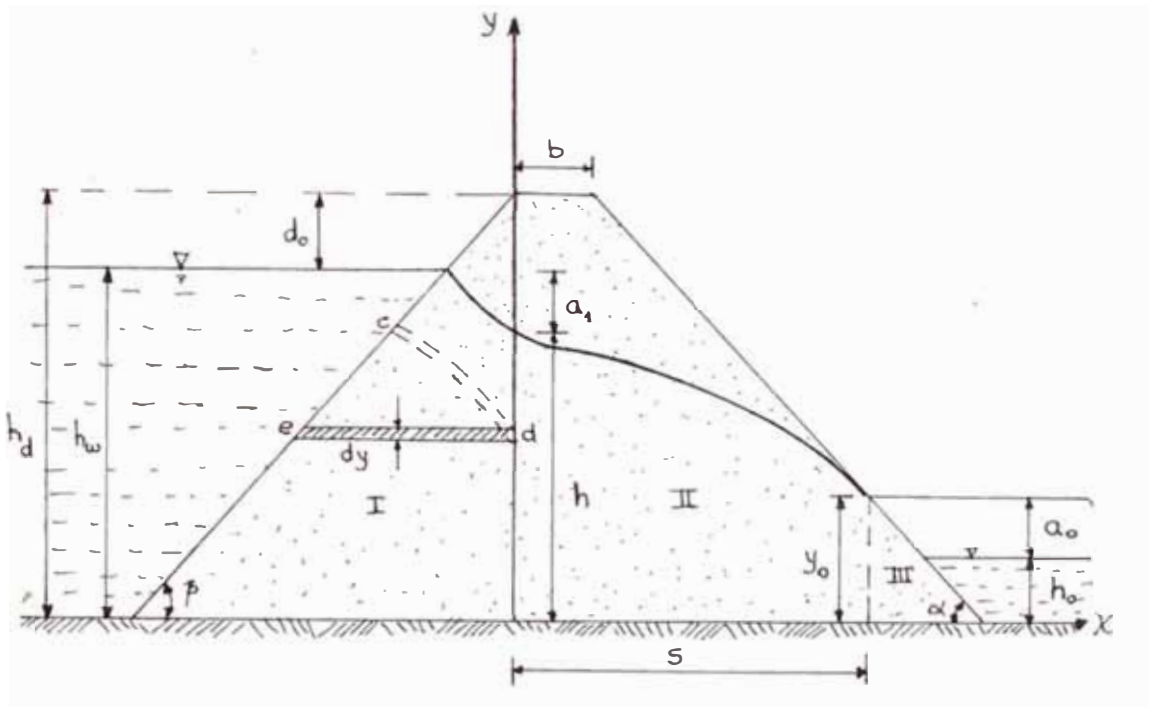


Fig. 5.19

Pavlovsky asume que las líneas de corriente en la zona I que son curvilíneas se pueden reemplazar por una equivalente ed , o sea, asumiendo que existe simplemente ./. .

flujo horizontal en esta zona. Por lo tanto, la descarga a través de la elemental-faja está dada por :

$$dq = k \frac{a_1}{m (h_d - y)} dy$$

donde : $m = \text{Ctg } \beta$

$$\frac{a_1}{m (h_d - y)} = \text{gradiente hidráulico.}$$

estableciendo los límites de integración - obtenemos :

$$q = k \frac{a_1}{m} \int_0^h \frac{dy}{h_d - y}$$

$$q = k \frac{a_1}{m} \left[- \ln(h_d - y) \right]_0^h = k \frac{a_1}{m} \ln \frac{h_d}{h_d - h}$$

Por lo tanto la cantidad de filtración en la zona I es :

$$q = k \frac{h_\omega - h}{m} \ln \frac{h_d}{h_d - h} \quad (21)$$

Para la zona II , Pavlovsky utiliza la fórmula de Dupuit (ecuación (14)) :

$$q = k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2L}$$

./.

Aplicando esta ecuación a la zona II se tiene la cantidad de filtración :

$$q = k \frac{h^2 - (a_o + h_o)^2}{2s} \quad (22)$$

Para la zona III existirán dos condiciones, las cuales dependerán de que se presente agua o no en el extremo de la presa (en el talud aguas abajo). Así :

a) Si $h_o = 0$ se obtiene :

$$\int_0^q dq = k \int_0^{a_o} \frac{1}{m_1} dy \Rightarrow q = k \frac{a_o}{m_1} \quad (23)$$

Siendo $m_1 = \text{Ctg } \alpha$

b) Si $h_o > 0$:

$$q = k \left[\int_{h_o}^{Y_o} \frac{dy}{m_1} + \int_0^{h_o} \frac{Y_o - h_o}{m_1 (Y_o - Y)} dy \right]$$

$$q = k \frac{a_o}{m_1} \left(1 + \ln \frac{a_o + h_o}{a_o} \right)$$

Teniendo las ecuaciones (21), (22), (23); tres ecuaciones para cuatro incógnitas: h , a_o , s , q ; propuso una nueva ecuación partiendo de la Geometría de la Fig. 5.19 :

$$s = b + \text{Ctg } \alpha \left[h_d - (a_o + h_o) \right]$$

$$\text{ó } s = b + m_1 \left[h_d - (a_o + h_o) \right] \quad (24)$$

./.

de las cuales si asumimos que $h_o = 0$, relacionando las ecuaciones (22) y (24), (21) y (23) encontraremos las siguientes relaciones :

$$a_o = \frac{b}{m_1} + h_d - \sqrt{\left(\frac{b}{m_1} + h_d\right)^2 - h^2} \quad (25)$$

$$y \quad \frac{a_o m}{m_1} = (h \omega - h) \ln \frac{h_d}{h_d - h} \quad (26)$$

respectivamente.

Estas dos ecuaciones relacionan a_o y h .

Asumiendo valores de h en (25) y (26) y ploteándolos en un gráfico h vrs. a_o hallaremos el valor probable de h y reemplazando en (25) ó (26) hallamos a_o y seguidamente s y q .

Así tendremos en la Fig. 6.1 lo siguiente:

- a) El campo de flujo está representado por la región ABCD
- b) Las condiciones de frontera de esta región son - las líneas de corriente (AB y CD) y las equipotenciales (AD y BC).
- c) El valor de las líneas de corriente son:
 - A lo largo de AB $\Rightarrow \psi = 0$
 - A lo largo de CD $\Rightarrow \psi = \eta$
- d) Para hallar el valor de las líneas equipotenciales partimos de la relación que existe entre la velocidad potencial y la presión

$$\phi = -k \left(\frac{P}{\gamma g} + y \right) + C$$

por condiciones experimentales $C = k \frac{h_1 + h_2}{2} + k \frac{P_0}{\gamma g}$

$$\therefore \phi = -k \left(\frac{P - P_0}{\gamma g} + y \right) + k \frac{h_1 + h_2}{2}$$

siendo P_0 la presión atmosférica y $\frac{P - P_0}{\gamma g} + y = h_1$

entonces se obtiene la velocidad potencial en el borde de la cabezera o aguas arriba de la presa:

$$\phi = - \frac{kH}{2}$$

y a lo largo del borde del pie o aguas abajo de la presa:

$$\phi = + \frac{kH}{2}$$

siendo para ambos casos $H = h_1 - h_2$

6.2 Cálculo de la Función Corriente (ψ) y Potencial (ϕ)

Del ítem 6.1 podemos deducir que la región del potencial complejo ω está representado por el siguiente sistema (Fig. 6.2):

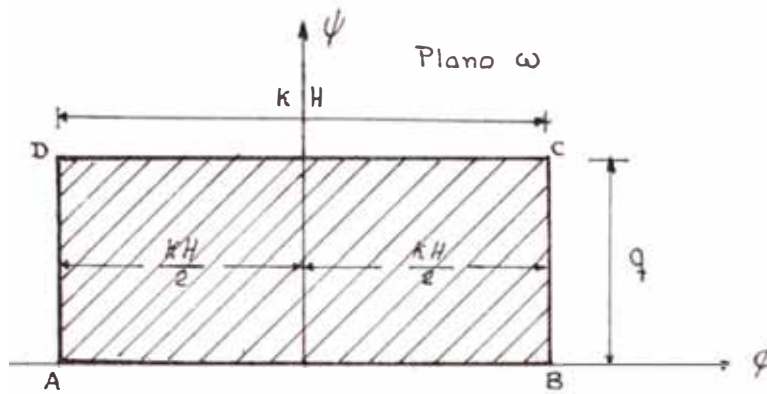


Fig. 6.2

y para la aplicación de la transformación de CHRISTOFFEL - SCHWARZ introducimos la variable auxiliar compleja ξ , llamada generalmente Variable Paramétrica, que se encuentra en el semicírculo superior que relacionará la variable con las dos regiones: La región de la función z y la región de la función ω con la finalidad de obtener todos los elementos de flujo. En nuestro caso tendremos el siguiente plano paramétrico (Fig. 6.3) :

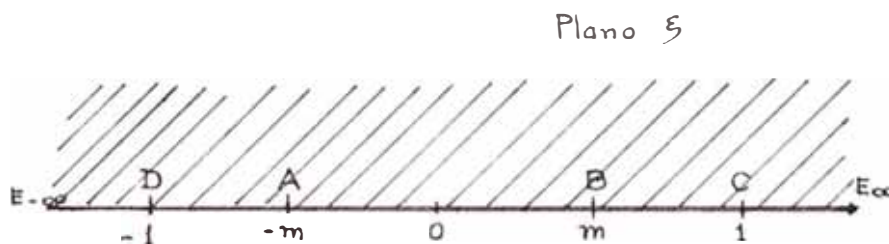


Fig. 6.3

Aplicando la transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ con ángulos interiores en el plano ω igual a $\pi/2$ se obtiene :

$$\omega = M \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{(1-\xi)^{1-\pi/2/\pi} (1+\xi)^{1-\pi/2/\pi} (m-\xi)^{1-\pi/2/\pi} (m+\xi)^{1-\pi/2/\pi}} + N$$

$$\omega = M \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(m^2-\xi^2)}} + N \quad (1)$$

Para el cálculo de las constantes complejas M y N se tiene :

- a) Punto de simetría : $\omega = iq$ para $\xi = 0$
 en (1) se obtiene $N = iq$
- b) Punto C : $\omega = \frac{kH}{2} + iq$ para $\xi = 1$

en (1) :

$$\frac{kH}{2} + iq = M \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{(1-\xi^2)(m^2-\xi^2)}} + iq \quad (2)$$

NOTA 1 .- Generalmente como consecuencia de la transformación de CHRISTOFFEL - SCHWARZ se presentan integrales de la forma :

$$\int_{\mathbb{R}} \left[X \sqrt{P(x)} \right] dx$$

donde $R(x)$ es una función racional de X y $P(x)$ es un polinomio en X . Así, suponiendo que $P(x)$ es de tercer o cuarto grado en X y la integral no se puede expresar por una sola función elemental dicha ecuación es llamada INTEGRAL ELIPTICA.

La solución de las integrales elípticas de primer orden, -
cuya forma es la siguiente:

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} \quad (3)$$

m : módulo de la integral

fué introducida por LEGENDRE en 18 25, constituyendo el fun
damento de la teoría de Integrales Elípticas y asociadas a
las funciones elípticas, y se efectúa de la siguiente mane
ra:

$$\text{Hacemos } x = \text{Sen } \phi \quad \phi = \text{Sen}^{-1}x$$

siendo ϕ : Amplitud de la integral

de donde se obtiene:

$$F(m, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \text{Sen}^2 \phi}}$$

siendo : $F(m, \phi)$ = Notación de LEGENDRE

En esta tesis particularmente trabajaremos con la Integral
Elíptica completa de primer orden de la forma :

$$K = F(m, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \text{Sen}^2 \phi}} = F(m, \text{arc-Sen } 1) \quad (4)$$

para que una integral elíptica sea completa $\phi = \pi/2$

En el Apendice A se presenta una Tabla de las Integrales

Elípticas completas de primer orden,

Ejemplo :- Hallar la siguiente integral :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-0.25x^2)}} = F(0.5, \pi/2) = K$$

$x = \text{Sen } \phi \Rightarrow \phi = \pi/2$; integral elíptica completa de primer orden con $m = 0.5$

Del Apéndice A con $m^2 = 0.25$; $K = 1.686$

Se deberá tener en cuenta en éstos tipos de integrales dos casos:

I , - (a) Cuando $m > 1$

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$$

$$x = y/m , \quad y = \text{Sen } \psi$$

$$\frac{1}{m} \int_0^{y/m} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2/m^2)(1-y^2)}}$$

(b) Cuando $m < 1$

$$F(m, \phi) = \frac{1}{m} F\left(\frac{1}{m}, \psi\right)$$

$$\text{donde } \text{Sen } \psi = m \text{Sen } \phi$$

II .- Amplitud igual a $1/m$ ($m < 1$)

$$\int_0^{1/m} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} + \int_1^{1/m} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$$

$$= K + \int_1^{1/m} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$$

Llamándole módulo complementario (m') : $m'^2 = 1-m^2$

$$\therefore \int_0^{1/m} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = K + iK'$$

donde K' es la integral elíptica completa de primer orden con módulo complementario m' .

Debiéndose de tener en cuenta también la siguiente relación :

$$K'(m) = K(m')$$

Continuando con el proceso para hallar las líneas de corriente y equipotencial en el plano ω en función de ξ obtenemos de la ecuación (2) el valor de :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-\xi^2)(m^2-\xi^2)}}$$

y relacionándolo con la ecuación (4) tenemos :

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - m^2 \text{Sen}^2 \varphi}} \quad (5)$$

reemplazando (5) en (2) se obtiene :

$$M = \frac{kH}{2K} \quad (6)$$

de (6) en (1), obviando el valor de N dado que en el plano paramétrico ξ solo se tiene el eje de las abscisas, obtenemos :

$$\omega = \frac{kH}{2K} \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{(1 - \xi^2)(m^2 - \xi^2)}} \quad (7)$$

Siendo ésta una integral de forma canónica para su solución hacemos $\xi = mt$:

$$\omega = \frac{kH}{2K} \int_0^{\xi/m} \frac{m dt}{\sqrt{(1 - m^2 t^2)(m^2 - m^2 t^2)}} \quad (8)$$

$$\omega = \frac{kH}{2K} \int_0^{\xi/m} \frac{dt}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - m^2 t^2)}}$$

Hacemos $\xi = \sigma$ a lo largo del eje real del plano ξ para $|\sigma| < m$. Así para el segmento comprendido $m < \sigma < 1$ la ecuación (8) podemos escribir de la siguiente manera :

$$\omega = \frac{kH}{2K} \left[\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}} + \int_1^{\xi/m} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m^2t^2)}} \right] \quad (9)$$

Aplicando el concepto de integral elíptica de Legendre y multiplicando y dividiendo el segundo miembro por i la ecuación (9) se deduce :

$$\omega = \frac{kH}{2K} \left[K + i \int_1^{\xi/m} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-m^2t^2)}} \right]$$

$$\omega = \frac{kH}{2} + \frac{kHi}{2K} \int_1^{\xi/m} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-m^2t^2)}} \quad (10)$$

Calcularemos la función :

$$L(\sigma) = \int_1^{\xi/m} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-m^2t^2)}}$$

Por Legendre sabemos que $m'^2 = 1-m^2$ siendo m' = módulo complementario. Así mismo tenemos que:

$$L(\sigma) = K' - \int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{m'}} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-m'^2t^2)}} \quad (11)$$

y siendo $K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1-m'^2 \text{Sen}^2 \phi}}$ según la Nota -
 ción de Legendre.

y teniendo en cuenta la Nota 1 podemos escribir (11) como:

$$L(\sigma) = K' - F(m', \text{arc Sen } \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'}) \quad (12)$$

(11), (12) en (10) para $m < \sigma < 1$ hallaremos la Ecua-
 ción General:

$$\omega(\sigma) = \frac{kH}{2} + \frac{kHi}{2K} \left[K' - F(m', \text{arc Sen } \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'}) \right] \quad (13)$$

Nota 2 .- Los valores de m, m', K, K' se dan en el APENDICE
 A

En particular para $\sigma = 1$ la ecuación (13) la igualamos a

$\frac{kH}{2} + qi$ y obtenemos :

$$q = \frac{kHK'}{2K} \quad (14)$$

reemplazando la ecuación (14) en (13) para $m < \sigma < 1$ se
 tiene:

$$\omega(\sigma) = \frac{kH}{2} + iq \left[\frac{1 - F(m', \text{arc Sen } \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'})}{K'} \right] \quad (15)$$

en forma similar para el intervalo $-1 < \sigma < -m$ se obtiene:

$$\omega(\sigma) = -\frac{kH}{2} + iq \left[1 - \frac{F(m', \text{arcSen} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'})}{K'} \right] \quad (16)$$

en las ecuaciones (15) y (16) se hace $\lambda = \text{arcSen} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'}$ o $\frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'} = \text{Sen} \lambda$ y se halla en forma general :

$$\omega(\sigma) = \pm \frac{kH}{2} + iq \left[1 - \frac{F(m', \lambda)}{K'} \right] \quad (17)$$

Para intervalos $m \leq \sigma \leq 1$; $-1 \leq \sigma \leq -m$ siendo

$\sigma = \text{Re}(\xi)$ se obtiene :

$$\omega = \varnothing + i\psi = \pm \frac{kH}{2} + iq \left[1 - \frac{F(m', \lambda)}{K'} \right]$$

Por lo tanto:

$$\varnothing = \pm \frac{kH}{2} \quad (18)$$

$$\psi = q \left[\frac{1 - F(m', \lambda)}{K'} \right] \quad (19)$$

siendo $\lambda = \text{arcSen} \frac{\sqrt{1-\sigma^2}}{m'}$

6.3 Cálculo de las características de filtración de una Presa .-

Para ello obtenemos la relación del plano z y el plano ω es decir, $z(\omega)$; para ello nosotros tomamos parábola de Kozeny (la Fig. 5.5), y la relación $z = C \omega^2$ y su respectiva deducción hallando la siguiente fórmula:

$$z = - \frac{1}{2kq} \left[\frac{K(h_1 + h_2)}{2} - \omega \right]^2$$

en esta fórmula se debe de tener en cuenta que debido a que las líneas de corriente son simétricas al eje de ordenado en el plano ω se hace una constante $H_0 = \frac{h_1 + h_2}{2}$

para una simplificación de cálculos.

Para hallar la relación anteriormente mencionada tomamos una de las funciones auxiliares utilizadas por Nume rov para este tipo de cálculos :

$$z(\omega) = X + iY = z(\omega) + \frac{1}{2kq} \left[\frac{k(h_1 + h_2)}{2} - \omega \right]^2 \quad (20)$$

A continuación estudiamos la naturaleza de la función sobre el contorno de la región de flujo ABCD

a) A lo largo de AB donde $\psi = 0$, $y = 0 \Rightarrow Y = 0$ (21)

b) A lo largo de BC obtendremos la siguiente ecuación así :

De la Fig. 6.1 : $T_g \beta \pi = \frac{Y}{x-l}$

de donde $(X-l) \text{ Sen } \beta \pi = Y \text{ Cos } \beta \pi$

$$X \text{ Sen } \beta \pi - Y \text{ Cos } \beta \pi = l \text{ Sen } \beta \pi \quad (22)$$

asimismo, $\phi = \frac{1}{2} KH$

Igualando y resolviendo las ecuaciones (20) y (22) obtenemos :

$$\begin{aligned} X \text{ Sen } \beta \pi - Y \text{ Cos } \beta \pi &= \text{Sen } \beta \pi \left[l + \frac{K h_2^2}{2q} - \frac{1}{2Kq} \psi^2 \right] + \text{Cos } \beta \pi \left(\frac{h_2 \psi}{q} \right) \\ &= l \text{ Sen } \beta \pi + \frac{K h_2^2}{2q} \text{ Sen } \beta \pi + \frac{h_2}{q} \psi \text{ Cos } \beta \pi - \frac{1}{2Kq} \psi^2 \text{ Sen } \beta \pi \end{aligned}$$

$$X \text{ Sen } \beta \pi - Y \text{ Cos } \beta \pi = \left[l - \frac{K h_2^2}{2q} \right] \text{ Sen } \beta \pi + \frac{h_2 \text{ Cos } \beta \pi}{q} \psi - \frac{\text{Sen } \beta \pi}{2Kq} \psi^2 \quad (23)$$

c) A lo largo de CD donde $\phi = \frac{k(h_1 + h_2)}{2} = Ky$

$$y \quad \psi = q \quad \Rightarrow \quad Y = 0 \quad (24)$$

d) A lo largo de DA observando la Fig. 6.1:

$$\text{Tg } \alpha \pi = \frac{Y}{X} \quad \text{entonces} \quad X \text{ Sen } \alpha \pi - Y \text{ Cos } \alpha \pi = 0$$

y también se tiene $\phi = -\frac{kH}{2}$

Similarmente a la ecuación (23) se obtiene :

$$X \text{ Sen } \alpha \pi - Y \text{ Cos } \alpha \pi = \frac{K h_1^2}{2q} \text{ Sen } \alpha \pi + \frac{h_1 \text{ Cos } \alpha \pi}{q} \psi - \frac{\text{Sen } \alpha \pi}{2Kq} \psi^2 \quad (25)$$

Observando las ecuaciones (21), (23), (24), (25) se nota que a lo largo de los lados del rectángulo en el plano la función analítica $Z = X + i Y$ es desconocida pero se expresa como $aX + b Y = C$ donde a y b son constantes y C es una función de contorno o de borde. Por lo tanto el problema, ahora, es resolver la función Z dentro del rectángulo ω , para ello utilizaremos el llamado "Problema de HILBERT - REIMANN".

Entonces reemplazando (19) en (23) y (25) nosotros obtendremos la siguiente simplificación :

a) Para $-1 < \sigma < -m$

$$\begin{aligned}
 X \operatorname{Sen} \alpha \pi - Y \operatorname{Cos} \alpha \pi &= \frac{kh_1^2}{2q} \operatorname{Sen} \alpha \pi + \\
 &+ \frac{h_1}{q} \operatorname{Cos} \alpha \pi \left[q \left(1 - \frac{F(m', \lambda)}{K'} \right) \right] - \frac{\operatorname{Sen} \alpha \pi}{2 Kq} q^2 \left[1 - \frac{F(m', \lambda)}{K'} \right]^2 \\
 &= \frac{kh_1^2}{2q} \operatorname{Sen} \alpha \pi + h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi \frac{F(m', \lambda)}{K'} - \\
 &- \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2 k} \left[1 - \frac{2F(m', \lambda)}{K'} + \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2} \right] \\
 &= \frac{kh_1^2}{2q} \operatorname{Sen} \alpha \pi + h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi \frac{F(m', \lambda)}{K'} - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2k} + \\
 &+ \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{k} \frac{F(m', \lambda)}{K'} - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2k} \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2}
 \end{aligned}$$

Agrupando términos :

$$= \left(\frac{kh_1^2}{2q} \operatorname{Sen} \alpha \pi + h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2k} \right) -$$

$$- \left(h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{k} \right) \frac{F(m', \lambda)}{K'} - \left(\frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2k} \right) \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2}$$

$$\text{Haciendo : } a_0 = \frac{kh_1^2}{2q} \operatorname{Sen} \alpha \pi + h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2k}$$

$$a_1 = h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{k}$$

$$a_2 = \frac{q \operatorname{Sen} \alpha \pi}{2K}$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} (26)$$

$$X \operatorname{Sen} \alpha \pi - Y \operatorname{Cos} \alpha \pi = a_0 - a_1 \frac{F(m', \lambda)}{K'} - a_2 \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2} = P_1 \quad (27)$$

b) Para $m < \sigma < 1$

$$X \operatorname{Sen} \beta \pi - Y \operatorname{Cos} \beta \pi = l \operatorname{Sen} \beta \pi + \frac{kh_2^2}{2q} \operatorname{Sen} \beta \pi - h_2 \operatorname{Cos} \beta \pi \left(\frac{\psi}{q} \right) -$$

$$- \frac{\operatorname{Sen} \beta \pi}{2kq} \psi^2$$

$$= l \operatorname{Sen} \beta \pi + \frac{kh_2^2}{2q} \operatorname{Sen} \beta \pi + h_2 \operatorname{Cos} \beta \pi \left[1 - \frac{F(m', \lambda)}{K'} \right] -$$

$$- \frac{\operatorname{Sen} \beta \pi}{2kq} q \left[1 - 2 \frac{F(m', \lambda)}{K'} + \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2} \right]$$

Agrupando términos :

$$= \left[l \operatorname{Sen} \beta \pi + \frac{kh_2^2}{2q} \operatorname{Sen} \beta \pi + h_2 \operatorname{Cos} \beta \pi - \frac{q}{2K} \operatorname{Sen} \beta \pi \right] +$$

$$+ \left[\frac{q \operatorname{Sen} \beta \pi}{k} - h_2 \operatorname{Cos} \beta \pi \right] \frac{F(m', \lambda)}{K'} - \left(\frac{q \operatorname{Sen} \beta \pi}{2k} \right) \cdot$$

$$\frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Haciendo : } b_0 &= l \text{ Sen } \beta \pi + h_2 \text{ Cos } \beta \pi + \frac{kh_2^2}{2q} \text{ Sen } \beta \pi - \frac{q \text{ Sen } \beta \pi}{2k} \\ b_1 &= h_2 \text{ Cos } \beta \pi - \frac{q \text{ Sen } \beta \pi}{k} \\ b_2 &= \frac{q \text{ Sen } \beta \pi}{2k} \end{aligned} \right\} (28)$$

Obtendremos :

$$X \text{ Sen } \beta \pi - Y \text{ Cos } \beta \pi = b_0 - b_1 \frac{F(m', \lambda)}{K'} - b_2 \frac{F^2(m', \lambda)}{K'^2} = r \quad (29)$$

$$c) \text{ Para } |\sigma| < m \quad \text{y} \quad |\sigma| > 1 \quad : \quad Y = 0 \quad (30)$$

Introducimos para la resolución del problema una función dada por Numerov :

$$T(\xi) = i (m - \xi)^\beta (m - \xi)^{1-\alpha} (1 - \xi)^{1-\beta} (1 + \xi)^\alpha \quad (31)$$

examinando esta función observamos que produce valores imaginarios para valores reales de ξ $[\sigma = \text{Re}(\xi)]$ en el intervalo $-m < \sigma < m$ ($m \leq 1$).

Además el argumento es de $\pi/2$ para $0 < \sigma < m$

Así, para diferentes segmentos del eje real tendremos las siguientes expresiones de $T(\xi)$:

$$\left. \begin{aligned} a) \text{ Para } |\sigma| < m \quad : \\ T(\sigma) &= i (m - \sigma)^\beta (m + \sigma)^{1-\alpha} (1 - \sigma)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha \\ b) \text{ Para } |m < \sigma < 1 \quad : \\ T(\sigma) &= (\sigma - m)^\beta (m + \sigma)^{1-\alpha} (1 - \sigma)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha e^{\pi i (1/2 - \beta)} \\ c) \text{ Para } -1 < \sigma < -m \quad : \\ T(\sigma) &= (m - \sigma)^\beta (-m - \sigma)^{1-\alpha} (1 - \sigma)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha e^{\pi i (3/2 - \alpha)} \end{aligned} \right\} (32)$$

d) Para $-\infty < \sigma < -1$:

$$T(\sigma) = -i(m - \sigma)^\beta (-m - \sigma)^{1-\alpha} (1 - \sigma)^{1-\beta} (-1 - \sigma)^\alpha$$

e) Para $1 < \sigma < \infty$:

$$T(\sigma) = -i(\sigma - m)^\beta (m + \sigma)^{1-\alpha} (\sigma - 1)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha$$

(32)

siendo $\operatorname{Re} [e^{\pi i (1/2 - \alpha)} Z] = X \operatorname{Sen} \alpha \pi - Y \operatorname{Cos} \alpha \pi$

El producto $T(\xi) Z(\xi)$ es puramente imaginario para $|\sigma| < m$ y $|\sigma| > 1$ y la parte real es cero en estos intervalos.

En los intervalos $m < \sigma < 1$ y $-1 < \sigma < -m$, la parte real de la función $T(\sigma) Z(\sigma)$ es conocida por las ecuaciones (21), (23), (24), (25), (31) y (32).

Seguidamente analizaremos la naturaleza del producto $T(\xi) Z(\xi)$ en la vecindad de $\xi = \infty$. Como $Z(\xi)$ es una función analítica limitada en el semi-plano ξ , para su desarrollo podemos aplicar la Serie de Laurent de la forma:

$$Z(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{\xi^n} \quad (33)$$

donde: para $|\sigma| > 1$ la parte imaginaria de Z es cero ($Y = 0$) y por propiedad de la función $Z(\xi)$ dada por el Principio de Simetría de Schwarz obtenemos unos valores conjugados en puntos conjugados ξ y $\bar{\xi}$. La constante C_n es real.

Para la función $T(\xi)$ en la vecindad del infinito de la ecuación (31) y (32) obtenemos :

$$T(\xi) = -i \xi^2 \left(1 - \frac{m}{\xi}\right)^\beta \left(1 + \frac{m}{\xi}\right)^{1-\alpha} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)^{1-\beta} \left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^\alpha$$

$$T(\xi) = -i \xi^2 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\xi^n}\right) \tag{34}$$

donde los coeficientes d_n son reales. De las ecuaciones (33) y (34) en la vecindad de ∞ se tiene :

$$T(\xi) Z(\xi) = -i \xi^2 \left(1 + \frac{d_1}{\xi} + \frac{d_2}{\xi^2} + \dots\right) \left(C_0 + \frac{C_1}{\xi} + \frac{C_2}{\xi^2} + \dots\right)$$

$$T(\xi) Z(\xi) = -i C_0 \xi^2 - i(C_1 + C_0 d_1) \xi - i(C_0 + C_1 d_1 + C_0 d_2) + \dots \tag{35}$$

Así, la nueva función :

$$W(\xi) = T(\xi) Z(\xi) + i C_0 \xi^2 + i(C_1 + C_0 d_1) \xi \tag{36}$$

es limitado por ξ y es una función finita por lo que es conveniente utilizarlo como una función auxiliar. En resumen, es analítica en el semi-plano completo (incluyendo $\xi = \infty$) y continua sobre el eje real. En intervalos donde $Y = 0$ la nueva función tiene la propiedad que la parte real desaparece.

La nueva función de únicos valores y continuos sobre el eje real, pero teniendo las siguientes restricciones:

$$f(\sigma) = \text{Re } W(\sigma) = \begin{cases} r(\sigma) \mathcal{J}_1(\sigma) & m < \sigma < 1 \\ -p(\sigma) \mathcal{J}_2(\sigma) & -1 < \sigma < -m \\ 0 & |\sigma| < m \text{ y } |\sigma| > 1 \end{cases} \quad (37)$$

donde p y r se dan en las ecuaciones (27) y (29) respectivamente y

$$\mathcal{J}_1(\sigma) = (\sigma - m)^\beta (m + \sigma)^{1-\beta} (1 - \sigma)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha$$

$$\mathcal{J}_2(\sigma) = (m - \sigma)^\beta (-m - \sigma)^{1-\alpha} (1 - \sigma)^{1-\beta} (1 + \sigma)^\alpha$$

Por lo tanto el problema se reduce a la solución del llamado Problema de DIRICHLET para el Semi-plano, es decir, se considera la combinación lineal de dos funciones X e Y y solamente se necesita la parte real de W pudiendo escribir lo siguiente :

$$W(\xi) = -\frac{i}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t - \xi} + iC \quad (38)$$

Siendo C una constante real arbitraria.

Seguidamente reemplazamos la ecuación (31) en (36) y la igualamos con la ecuación (38) y dicha ecuación la dividimos entre i y obtenemos :

$$(C_0 d_1 + C_1) \xi + C_0 \xi^2 + (m - \xi)^\beta (m + \xi)^{1-\alpha} (1 - \xi)^{1-\beta} (1 + \xi)^\alpha \\ \cdot z(\xi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t - \xi} + C \quad (39)$$

Para hallar las constantes C_0 , C_1 , d y C reemplazando en la ecuación (39) los valores de $\xi = \pm m$ y $\xi = \pm 1$

a) Para $\xi = m$ en (39) :

$$(C_0 d_1 + C_1) m + C_0 m^2 = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{t - m} + C \quad (40)$$

Restando (40) de (39) y dividiendo entre $m - \xi$ se obtiene :

$$C_0 d_1 + C_1 + C_0 (m + \xi) - (m - \xi)^{\beta - 1} (m + \xi)^{1 - \alpha} (1 - \xi)^{1 - \beta} \\ \cdot (1 + \xi)^{\alpha} z(\xi) = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(t - m)(t - \xi)} \quad (41)$$

b) Para $\xi = -m$ obtendremos una similar expresión a (41) utilizando el mismo procedimiento y ésta misma ecuación:

$$C_0 - (m - \xi)^{\beta - 1} (m + \xi)^{-\alpha} (1 - \xi)^{1 - \beta} (1 + \xi)^{\alpha} z(\xi) = \\ = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(t - m)(t + m)(t - \xi)} \quad (42)$$

c) Para $\xi = 1$ y realizando el mismo proceso :

$$(m - \xi)^{\beta - 1} (m + \xi)^{-\alpha} (1 - \xi)^{-\beta} (1 + \xi)^{\alpha} z(\xi) = \\ = - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(t^2 - m^2)(t - 1)(t - \xi)} \quad (43)$$

d) Para $\xi = -1$ se obtiene de (43) :

$$\int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(m^2 - t^2)(1 - t^2)} = 0 \quad (44)$$

Restando (44) de (43) y resolviendo para hallar $Z(\xi)$ obtendremos una expresión dada en forma simétrica :

$$Z(\xi) = -\frac{1}{\pi} (m-\xi)^{1-\beta} (m+\xi)^{\alpha} (1-\xi)^{\beta} (1+\xi)^{1-\alpha} \cdot \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(m^2-t^2)(1-t^2)(t-\xi)} \quad (45)$$

Reemplazando (45) en (20) para hallar Z :

$$Z(\xi) = -\frac{1}{2kq} \left[k \frac{h_1 + h_2}{2} - \omega \right]^2 - \frac{T_1(\xi)}{\pi} \cdot \int_{-1}^1 \frac{f(t) dt}{(m^2-t^2)(1-t^2)(t-\xi)} \quad (46)$$

siendo $T_1(\xi) = (m-\xi)^{1-\beta} (m+\xi)^{\alpha} (1-\xi)^{\beta} (1+\xi)^{1-\alpha}$

La ecuación (46) es llamada La Función Característica de Flujo.

En este momento habremos hallado la solución completa de las características de filtración de una presa: q dada en la ecuación (14), ϕ y ψ dadas en las ecuaciones (18) y (19) respectivamente, el módulo m que se determine de (44) y la función característica de flujo (46); pero el resultado de estas ecuaciones no pueden aplicarse directamente en Ingeniería por lo que plantearemos algunas restricciones o

condiciones que generalmente se utiliza para este tipo de cálculos :

- a) El valor de g/kH es muy pequeño; despreciable
- b) El módulo m tiende a 1 y $m' \approx 0$
- c) El valor de $F(m', \lambda) \approx \lambda$

Aplicando estas condiciones se reducirá la ecuación (44) - a una forma compatible para lo cual reemplazaremos la ecuación (27) y (29) y (37) en (44) obteniendo:

$$\int_{-1}^{-m} \left(a_0 - \frac{a_1}{K'} F - \frac{a_2}{K'^2} F^2 \right) \frac{\mathcal{J}_2(t) dt}{(t^2 - m^2)(1 - t^2)} - \int_m^1 \left(b_0 - \frac{b_1}{K'} F - \frac{b_2}{K'^2} F^2 \right) \frac{\mathcal{J}_1(t) dt}{(t^2 - m^2)(1 - t^2)} = 0 \quad (47)$$

donde $F = F(m', \lambda) = F(m', \text{arcSen} \frac{\sqrt{1 - \sigma^2}}{m'})$,

\mathcal{J}_1 y \mathcal{J}_2 son definidas en la ecuación (37).

La ecuación (47) podemos hallar en la misma forma del proceso anteriormente seguido, designando los siguientes integrales:

$$P_0 = \int_{-1}^{-m} \frac{\mathcal{J}_2(t) dt}{(t^2 - m^2)(1 - t^2)}$$

$$= \int_{-1}^{-m} (m-t)^{\beta-1} (-m-t)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} (1+t)^{\alpha-1} dt$$

reemplazando t por $-t$ escribiremos P_0 de la siguiente forma :

$$P_0 = \int_m^1 \phi(t) dt$$

donde $\phi(t) = (m+t)^{\beta-1} (t-m)^{-\alpha} (1+t)^{-\beta} (1-t)^{\alpha-1}$

Asimismo :

$$P_1 = \int_{-1}^{-m} \frac{f_2(t) F dt}{(t^2-m^2)(1-t^2)} = \int_m^1 \phi(t) F dt$$

$$P_2 = \int_{-1}^{-m} \frac{f_2(t) F^2 dt}{(t^2-m^2)(1-t^2)} = \int_m^1 \phi(t) F^2 dt$$

e introducimos tres integrales análogas :

$$P'_0 = \int_m^1 \phi_1(t) dt$$

$$P'_1 = \int_m^1 \phi_1(t) F dt$$

$$P'_2 = \int_m^1 \phi_1(t) F^2 dt$$

siendo $\phi_1(t) = (t-m)^{\beta-1} (t+m)^{-\alpha} (1-t)^{-\beta} (1+t)^{\alpha-1}$

Por lo tanto la ecuación (47) es de la siguiente forma:

$$a_0 P_0 - \frac{a_1}{K'} P_1 - \frac{a_2}{K'^2} P_2 - b_0 P'_0 + \frac{b_1}{K'} P'_1 - \frac{b_2}{K'^2} P'_2 = 0 \quad (48)$$

Las integrales P_n y P'_n podemos simplificarla asumiendo :

$$F(\vartheta, m') \approx \vartheta \quad ; \quad m \approx 1$$

Así, haciendo la deducción para la integral P_0 tendremos:

$$\begin{aligned} (m+t)^{\beta-1} &= (1+t)^{\beta-1} \left[1 + \frac{m-1}{1+t} \right]^{\beta-1} = (1+t)^{\beta-1} + (\beta-1)(m-1)(1+t)^{\beta-2} + \dots \\ &\approx (1+t)^{\beta-1} \end{aligned} \tag{45}$$

Asimismo :

$$(1+t)^{-1} (t-m)^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \approx \frac{1}{2} (1-m)^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1}$$

$$\text{y } (1+t)^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{t-1}{2} \right)^{-1} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t-1}{2} + \dots \right) \approx \frac{1}{2}$$

entonces :

$$P_0 \approx \frac{1}{2} \int_m^1 (t-m)^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} dt$$

haciendo el siguiente artificio : $1-t = (1-m) X$

Convertimos la integral en una FUNCION BETA (Γ) :

$$\begin{aligned} P_0 &\approx \frac{1}{2} \int_0^1 X^{\alpha-1} (1-X)^{-\alpha} dx = \frac{1}{2} B(\alpha, 1-\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} \\ &\approx \frac{\pi}{2 \operatorname{Sen} \alpha \pi} \end{aligned}$$

Similarmente podemos hacer la siguiente aproximación :

$$P_0' \approx \frac{\pi}{2 \operatorname{Sen} \beta \pi}$$

Para hallar la integral P_1 utilizamos el mismo procedimiento que para P_0 :

Haciendo $F(m', \text{arcSen} \frac{\sqrt{1-t^2}}{m'}) \approx \text{arcSen} \frac{\sqrt{1-t^2}}{m'}$

$$P_1 \approx \frac{1}{2} \int_m^1 (t-m)^{-\alpha} (1-t)^{\alpha-1} \text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{m'} dt$$

reemplazando : $\text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{m'} = \frac{\pi}{2} \tau$

$$t = \sqrt{1 - m'^2 \text{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} m'^2 \text{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2}$$

$$dt \approx - \frac{\pi}{2} m'^2 \text{Sen} \frac{\pi \tau}{2} \text{Cos} \frac{\pi \tau}{2} d\tau$$

$$1-t \approx \frac{1}{2} m'^2 \text{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2}$$

$$t-m \approx (1-m) \left[1 - \frac{1}{2} (1+m) \text{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2} \right] \approx (1-m) \text{Cos}^2 \frac{\pi \tau}{2}$$

reemplazando estos valores para hallar P_1 :

$$P_1 \approx \frac{\pi^2}{4} \int_0^1 \tau \text{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{\pi^2}{4} f_1(\alpha)$$

Utilizando el mismo procedimiento hallaremos P_2 :

$$P_2 \approx \frac{\pi^3}{8} \int_0^1 \tau^2 \text{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{\pi^3}{8} f_3(\alpha)$$

Asimismo :

$$P_1' \approx \frac{1}{2} \int_m^1 (t-m)^{\beta-1} (1-t)^{-\beta} \text{Sen}^{-1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{m'} dt =$$

$$= \frac{\pi^3}{4} \int_0^1 \tau \operatorname{Ctg}^{2\beta-1} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{\pi^3}{4} f_1(1-\beta)$$

$$P_2' \approx \frac{\pi^3}{8} \int_0^1 \tau^2 \operatorname{Ctg}^{2\beta-1} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{\pi^3}{4} f_3(1-\beta)$$

Observamos que la ecuación (48) contiene K' que para $m' \approx 0$ podemos tener $K' \approx \pi/2$.

Reemplazando en (48) las expresiones halladas de $P_0, P_1,$

P_2, \dots , y las constantes $a_0, a_1, \dots, b_0, b_1, \dots$,

dadas en la ecuación (26) y (28) obtendremos :

$$\frac{a_0}{\operatorname{Sen} \alpha \pi} - \frac{b_0}{\operatorname{Sen} \beta \pi} - a_1 f_1(\alpha) + b_1 f_1(1-\beta) - 2a_2 f_3(\alpha) +$$

$$+ 2b_2 f_3(1-\beta) = 0$$

$$h_1 \operatorname{Ctg} \alpha \pi - h_2 \operatorname{Ctg} \beta \pi + \frac{kh_1^2}{2q} - \frac{2k_2^2}{2q} - \rho - \frac{(h_1 \operatorname{Cos} \alpha \pi - \frac{q}{k} \operatorname{Sen} \alpha \pi)}{k}$$

$$+ f_1(\alpha) + (h_2 \operatorname{Cos} \beta \pi - \frac{q}{k} \operatorname{Sen} \beta \pi) f_1(1-\beta) - \frac{q}{k} \operatorname{Sen} \alpha \pi f_3(\alpha) +$$

$$+ \frac{q}{k} \operatorname{Sen} \beta \pi f_3(1-\beta) = 0$$

Haciendo la aproximación de esta ecuación para ρ :

$$\rho \approx k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2q} + h_1 \left[\operatorname{Ctg} \alpha \pi - \operatorname{Cos} \alpha \pi f_1(\alpha) \right] +$$

$$+ h_2 \left[-\operatorname{Ctg} \beta \pi + \operatorname{Cos} \beta \pi f_1(1-\beta) \right] -$$

$$- \frac{q}{k} \left[- \operatorname{Sen} \alpha \pi f_1(\alpha) + \operatorname{Sen} \beta \pi f_1(1-\beta) + \operatorname{Sen} \alpha \pi f_3(\alpha) - \right. \\ \left. - \operatorname{Sen} \beta \pi f_3(1-\beta) \right]$$

Si reemplazamos :

$$f_2(\alpha) = f_1(\alpha) - f_3(\alpha) = \int_0^1 t(1 - \frac{1}{2}t) \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi t}{2} dt$$

en la ecuación anterior obtenemos :

$$l \approx k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2q} + h_1 \left[\operatorname{Ctg} \alpha \pi - \operatorname{Cos} \alpha \pi f_1(\alpha) \right] -$$

$$- h_2 \left[\operatorname{Ctg} \beta \pi - \operatorname{Cos} \beta \pi f_1(1-\beta) \right] -$$

$$- \frac{q}{k} \left[- \operatorname{Sen} \alpha \pi f_2(\alpha) + \operatorname{Sen} \beta \pi f_2(1-\beta) \right]$$

Usando la propiedad de funciones $f_1(1-\beta)$ y $f_2(1-\beta)$

se obtiene para $t = 1 - \tau$ en la ecuación respectiva:

$$f_1(1-\beta) = \int_0^1 t \operatorname{Ctg}^{2\beta-1} \frac{\pi t}{2} dt$$

y tendremos :

$$f_1(1-\beta) = \int_0^1 \operatorname{Ctg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} d\tau - \int_0^1 \tau \operatorname{Ctg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{Sen} \beta \pi} - f_1(\beta)$$

Similarmente :

$$f_2(1-\beta) = \int_0^1 (1-\tau) \left(\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2} \right) \operatorname{Ctg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2 \operatorname{Sen} \beta \pi} - \frac{1}{2} f_3 (\beta)$$

$$f_3 (1-\beta) = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-\tau)^2 \operatorname{Ctg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{1}{2 \operatorname{Sen} \beta \pi} -$$

$$- f_1(\beta) + f_3(\beta)$$

Reemplazando estas expresiones obtenidas en la fórmula de obtenemos :

$$\begin{aligned} l \approx k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2q} + h_1 \left[\operatorname{Ctg} \alpha \pi - f_1(\alpha) \operatorname{Cos} \alpha \pi \right] - \\ - h_2 f_1(\beta) \operatorname{Cos} \beta \pi - \frac{q}{k} \left[\frac{1}{2} - f_2(\alpha) \operatorname{Sen} \alpha \pi - \right. \\ \left. - f_3(\beta) \operatorname{Sen} \beta \pi \right] \end{aligned} \quad (50)$$

De esta ecuación conociendo los valores del coeficiente de permeabilidad (k), de la longitud (l), los ángulos α y β : y las funciones respectivas f_1 , f_2 , y f_3 (que se grafican en la Fig. 6.4 de acuerdo a las ecuaciones dadas para hallar P_0 , P_1 , P_2) se podrá hallar q .

En este gráfico hicimos varias a f_1, f_2, f_3 de acuerdo a los siguientes valores de α y β dados según experiencia (Shankin, Numerov): para $f_1 \Rightarrow 9^\circ \leq \alpha, \beta \leq 81^\circ$

$$f_2, f_3 \Rightarrow 9^\circ \leq \alpha, \beta \leq 45^\circ$$

Ejemplo .- Hallar el valor de q para una presa rectangular con dren horizontal.

Solución.- Para el caso de una presa rectangular con dren horizontal se tendrá los siguientes valores :

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 0, \quad h_1 = H, \quad h_2 = 0.$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (50) se obtiene:

$$l \approx \frac{kH^2}{2q} - \frac{q}{k} \left[\frac{1}{2} - f_2(\alpha) \right]$$

Como el gráfico anterior no se puede aplicar debido a que

$\alpha = 90^\circ, \quad \beta = 0^\circ$ aplicaremos la fórmula respectiva de $f_2(\alpha)$:

$$f_2(1/2) = \int_0^1 \tau \left(1 - \frac{\tau}{2}\right) \text{Ctg}^{1-1/2} \times 2 \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{1}{3}$$

entonces
$$l \approx \frac{k H^2}{2q} - \frac{q}{6 k}$$

Por lo tanto
$$q = \frac{k H^2}{l + \sqrt{l^2 + \frac{1}{3} H^2}}$$

ECUACION DE LA SUPERFICIE LIBRE O LINEA DE SATURACION

Para obtener la ecuación de la línea de Saturación reemplazaremos en la ecuación (46) el respectivo valor de ω :

$$\omega = \phi + iq = \frac{1}{2} k (h_1 + h_2) - ky + iq$$

Así tenemos :

$$x = -\frac{ky^2}{2q} + \frac{q}{2k} + \frac{1}{\pi} (m - \sigma)^{1-\beta} (-m - \sigma)^\alpha (1 - \sigma)^\beta (-1 - \sigma)^{1-\alpha}$$

$$\left\{ \int_{-1}^{-m} \frac{(a_0 - \frac{a_1}{K'} F - \frac{a_2}{K'^2} F^2) dt}{(m - t)^{1-\beta} (-m - t)^\alpha (1 - t)^\beta (1 + t)^{1-\alpha} (t - \sigma)} \right.$$

$$\left. - \int_1^m \frac{(b_0 - \frac{b_1}{K'} F - \frac{b_2}{K'^2} F^2) dt}{(t - m)^{1-\beta} (m + t)^\alpha (1 - t)^\beta (1 + t)^{1-\alpha} (t - \sigma)} \right\} \quad (51)$$

Estudiando la parte izquierda de la línea de saturación limitado por $-\infty < \sigma < -1$ (entre D y E en la Fig. 6.1) asimismo, se puede hacer la siguiente simplificación:

$$m \approx 1, \quad K' \approx \pi/2 \text{ y}$$

$$F(m', \lambda) \approx \lambda, \text{ obteniéndose :}$$

$$x \approx \frac{ky^2}{2q} + \frac{q}{2K} + \frac{1}{\pi} (1 - \sigma) (-m - \sigma)^\alpha (-1 - \sigma)^{1-\alpha}$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-1}^{-m} \frac{\left(a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2 \right) dt}{(-m-t)^\alpha (1+t)^{1-\alpha} (t-\sigma)} \\ & - \frac{1}{2} \int_m^1 \frac{\left(b_0 - \frac{2b_1}{\pi} F - \frac{4b_2}{\pi^2} F^2 \right) dt}{(t-m)^{1-\beta} (1-t)^\beta (1-\sigma)} \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

La diferencia $t - \sigma$ en la segunda integral es reemplazada por $1 - \sigma$ debido a un estudio de series :

$$\frac{1}{t - \sigma} = \frac{1}{1 - \sigma} \left(1 - \frac{t - 1}{1 - \sigma} + \dots \right)$$

para $m \approx 1$, $1 < \sigma < m$, $1 - \sigma > 2$

por lo tanto se tendrá : $\frac{1}{t - \sigma} \approx \frac{1}{1 - \sigma}$

haciendo la simplificación correspondiente :

$$\int_{-1}^{-m} \frac{a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2}{(-m-t)^\alpha (1+t)^{1-\alpha}} dt \approx \int_m^1 \frac{b_0 - \frac{2b_1}{\pi} F - \frac{4b_2}{\pi^2} F^2}{(t-m)^{1-\beta} (1-t)^\beta} dt \quad (53)$$

Multiplicando ambas partes por $\frac{1}{\pi} (-t - \sigma)^\alpha (-1 - \sigma)^{1-\alpha}$

y sabiendo que $\frac{1 - \sigma}{t - \sigma} - 1 = \frac{1 - t}{t - \sigma}$

Ahora, restando (52) - (53) y cambiando de signo la primera integral donde $t \approx -1$ porque $1 - t \approx 2$ obteniéndose :

$$X = - \frac{Ky^2}{2q} + \frac{q}{2K} + \frac{1}{\pi} (-m - \sigma)^\alpha (-1 - \sigma)^{1-\alpha}.$$

$$\int_{-1}^{-m} \frac{a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2}{(-m-t)^\alpha (1+t)^{1-\alpha} (t-\sigma)} dt$$

Introduciendo una nueva variable de integración por medio de la sustitución :

$$t = \frac{-\sigma - m + (1-m)\sigma \operatorname{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2}}{-\sigma - m - (1-m)\operatorname{Sen}^2 \frac{\pi \tau}{2}} \quad (54)$$

obtenemos :

$$X \approx -\frac{Ky^2}{2q} + \frac{q}{2k} + \int_0^1 \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} \left(a_0 - \frac{2a_1}{\pi} F - \frac{4a_2}{\pi^2} F^2 \right) d\tau$$

Hacemos :

$$F \approx \operatorname{Sen}^{-1} \sqrt{\frac{1-t^2}{1-m^2}} \approx \operatorname{Sen}^{-1} \sqrt{\frac{1+t}{1-m}} \quad (55)$$

Como $\frac{1-t}{1-m} \approx \frac{2}{2} = 1$ reemplazaremos :

$$\operatorname{Sen}^{-1} \approx \text{por } \operatorname{tg}^{-1} \frac{\mathcal{X}}{\sqrt{1-\mathcal{X}^2}} \text{ teniéndose:}$$

$$F \approx \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{-1-\sigma}{-m-\sigma}} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right)$$

De la ecuación (8) se tiene :

$$\xi = m \operatorname{sn} \frac{2K\omega}{kH} \quad *$$

y para $-\infty < \sigma < -1$:

$$\sigma = m \operatorname{sn} \frac{2K}{kH} (\phi + iq)$$

*

Nota 3 .- Definición de Funciones Elípticas :
 FUNCION JACOBIANO

Considerando la función:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{Sen}^{-1} x$$

$$x = \text{Sen } u \quad \text{cuando } u \text{ es compleja}$$

Observando la integral podemos ver que es una especie de forma de la integral elíptica de primer orden con $m = 0$.

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-m^2 \text{Sen}^2 \phi}}$$

donde $x = \text{Sen } \phi$ y haciendo :

$$\phi = \text{am } u \quad (\text{amplitud de } u)$$

$$x = \text{Sen } \phi = \text{Sen } (\text{am } u) = \text{sn } u$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Entonces } x = \text{Sen } \phi &= \text{sn } u \\ \sqrt{1-x^2} &= \text{Cos } \phi = \text{cn } u \\ \sqrt{1-m^2x^2} &= \Delta \phi = \text{dn } u \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{FUNCIONES ELIPTICAS} \\ \text{JACOBIANAS} \end{array}$$

Estas funciones son importantes para la solución de los problemas de hidráulica referentes a medios porosos.

Basandonos en la ecuación (14) :

$$\sigma = m \text{ Sn} \left[\frac{K'}{q} (\phi + iq), m \right] = m \text{ Sn} \left(\frac{K' \phi}{q} + iK', m \right)$$

para la parte izquierda de la superficie libre y considerando que y está muy cerca de h_1 tenemos :

$$\frac{\phi}{q} = \frac{k(h_1 + h_2)}{2q} - \frac{ky}{q} = \frac{k(h_1 - y)}{q} - \frac{kH}{2q} = \frac{k(h_1 - y)}{q} - \frac{K}{K'}$$

Utilizando las fórmulas deducidas de la NOTA 3 se tiene:

$$m \operatorname{Sn} (x + iK', m) = \frac{1}{\operatorname{Sn} (x, m)}$$

$$\operatorname{Sn} (x - K, m) = -\frac{\operatorname{cn}(x, m)}{\operatorname{dn}(x, m)}$$

obtenemos :

$$\sigma = \frac{1}{\operatorname{Sn} \left(\frac{K'\phi}{q}, m \right)} = -\frac{\operatorname{dn} \left[K' \frac{k(h_1 - y)}{q}, m \right]}{\operatorname{Cn} \left[K' \frac{k(h_1 - y)}{q}, m \right]} \quad (56)$$

en la ecuación (54) :

$$u = \sqrt{\frac{-1 - \sigma}{-m - \sigma}} \approx \sqrt{\frac{\sigma^2 - 1}{\sigma^2 - m^2}}$$

en esta aproximación para $m \approx 1$: $\frac{\sigma + 1}{\sigma + m} \approx 1$

Así, en (56) :

$$u = \sqrt{\frac{\operatorname{dn}^2 x - \operatorname{Cn}^2 x}{\operatorname{dn}^2 x - m^2 \operatorname{Cn}^2 x}} = \operatorname{Sn} \left[K' \frac{k(h_1 - y)}{q}, m \right] \approx \operatorname{Tgh} \frac{\pi k(h_1 - y)}{2q} \quad (57)$$

En (57) se tiene :

$$F \approx \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{1-\sigma}{-m-\sigma}} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right) \approx \operatorname{tg}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\sigma^2-1}{\sigma^2-m^2}} \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right)$$

$$= \operatorname{tg}^{-1} \left(u \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right)$$

Con los valores de a_0 (ecuación (26)) y el valor de

$$\int_0^1 \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} d\tau = \frac{1}{\operatorname{Sen} \alpha \pi} \quad (0 < \alpha < 1/2)$$

obtenemos la siguiente ecuación para la línea de saturación:

$$X = \frac{k(h_1^2 - Y^2)}{2q} + h_1 \operatorname{Ctg} \alpha \pi - \frac{2a_1}{\pi} \int_0^1 F \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} d\tau -$$

$$- \frac{4a_2}{\pi^2} \int_0^1 F^2 \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} d\tau$$

Los valores de a_1 y a_2 se dan en la ecuación (26) e introduciendo las siguientes notaciones :

$$F_1(u, \alpha) = \frac{2 \operatorname{Cos} \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(u \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right) d\tau$$

$$F_2(u, \alpha) = \frac{2 \operatorname{Cos} \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \operatorname{Ctg}^{1-2\alpha} \frac{\pi \tau}{2} \operatorname{tg}^{-1} \left(u \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right) \cdot$$

$$\cdot \left[1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \left(u \operatorname{tg} \frac{\pi \tau}{2} \right) \right] d\tau$$

Por lo tanto la ecuación de la línea de saturación (parte izquierda) será :

$$\begin{aligned}
 x \approx & \frac{k(h_1^2 - y^2)}{2q} + h_1 \left[\text{Ctg } \alpha \pi - F_1 \left(\text{tgh } \frac{k \pi (h_1 - y)}{2q}, \alpha \right) \right] + \\
 & + \frac{q}{k} \text{tg } \alpha \pi F_2 \left(\text{tgh } \frac{k \pi (h_1 - y)}{2q}, \alpha \right) \quad (58)
 \end{aligned}$$

Similarmente la ecuación de la línea de saturación (parte derecha) es :

$$\begin{aligned}
 x \approx & 1 + \frac{k(h_2^2 - y^2)}{2q} + h_2 F_3 \left[\text{tgh } \frac{k \pi (y - h_2)}{2q}, \beta \right] + \\
 & + \frac{q}{k} F_4 \left[\text{tgh } \frac{k \pi (y - h_2)}{2q}, \beta \right] \quad (59)
 \end{aligned}$$

donde:

$$F_3(u, \beta) = \frac{2 \text{Cos } \beta \pi}{\pi} \int_0^1 \text{tg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} \text{Ctg}^{-1} \left(\text{utg } \frac{\pi \tau}{2} \right) d\tau$$

$$F_4(u, \beta) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi^2} \text{Sen } \beta \pi \int_0^1 \text{tg}^{1-2\beta} \frac{\pi \tau}{2} \left[\text{Ctg}^{-1} \left(\text{utg } \frac{\pi \tau}{2} \right) \right]^2 d\tau$$

Las funciones $F_1(u, \alpha)$, $F_2(u, \alpha)$ se grafica en la Fig. 6.5 para diferentes valores de α .

Las funciones $F_3(u, \beta)$, $F_4(u, \beta)$ se grafican en la Fig.6.6 para diferentes valores de β .

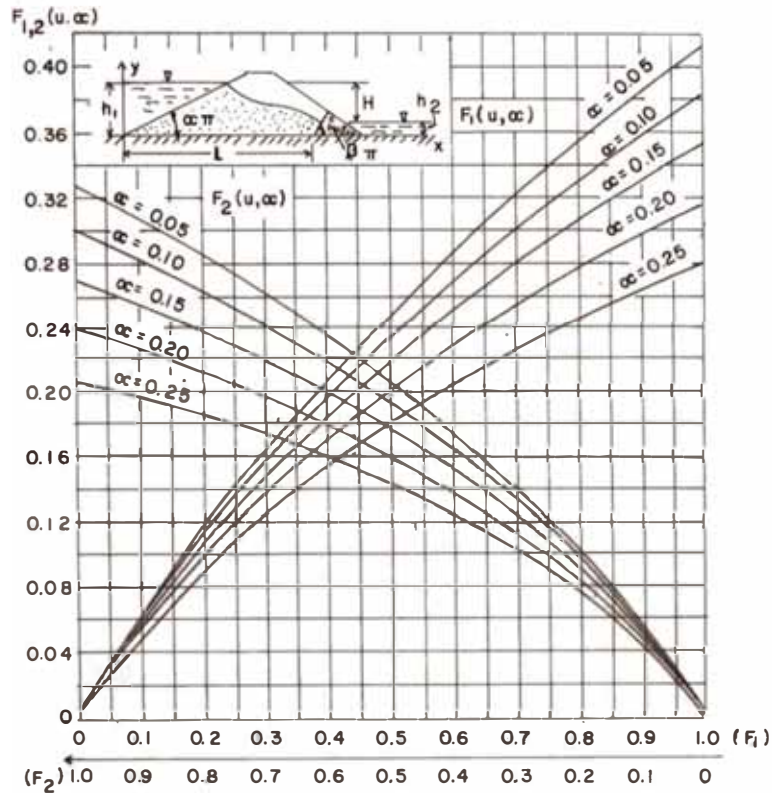


Fig. 6.5

GRAFICO PARA EL CALCULO DE $F_1(u, \alpha)$, $F_2(u, \alpha)$

ESTUDIO EXPERIMENTAL

GRAFICO PARA EL CALCULO DE $F_3(u, \beta)$, $F_4(u, \beta)$

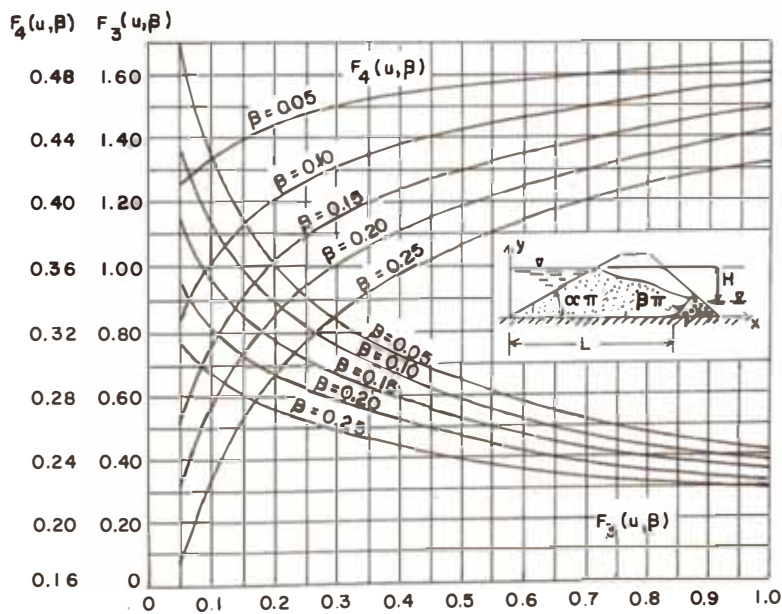


Fig. 6.6

A R T E B
=====

E S T U D I O E X P E R I M E N T A
=====

C A P I T U L O V I I

EQUIPO DE LABORATORIO

El equipo de Laboratorio utilizado en este estudio expe
rimental es el Permeámetro tipo Darcy y el equipo en el
cual se coloca el modelo de la presa de tierra que nos
servirán para hallar el coeficiente de permeabilidad y
las líneas de corriente - equipotenciales (red de flujo)
en el modelo respectivamente.

7.1.- Permeámetro de Darcy.-

El Permeámetro de Darcy o Tipo Darcy como se le -
llama es el auxiliar indispensable para trabajar
en el modelo porque nos permite determinar el coe
ficiente de permeabilidad k de un material según
la siguiente fórmula:

$$v = k \frac{dh}{dl} \quad (1)$$

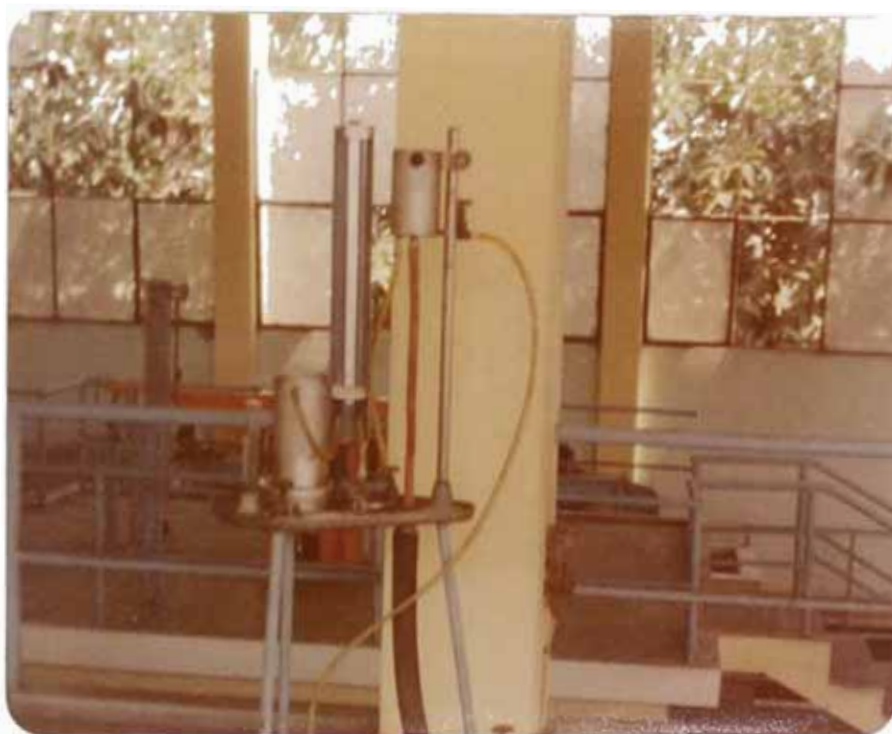
donde v es la velocidad de filtración o de de--
rrame en el material a través de una sección S y
 dh/dl es el gradiente hidráulico.

En la Fig. 7.1 se hace un esquema del Permeámetro
tipo Darcy realizado según los planos SOGREAH ya
que posteriormente insertaremos fotografías para
observar el que se utiliza en el Laboratorio Na--
cional de Hidráulica (Fotog. 1, Fotog. 2).

./.



Fótoqr. 1.- El Permeámetro tipo Darcy tal como se encontró en el Laboratorio Nacional de Hidráulica.



Fótoqr. 2.- Permeámetro tipo Darcy que se utilizó para hallar el coeficiente de permeabilidad en el cual se observa el equipo tal como se uso en la parte experimental.

PERMEAMETRO TIPO DARCY

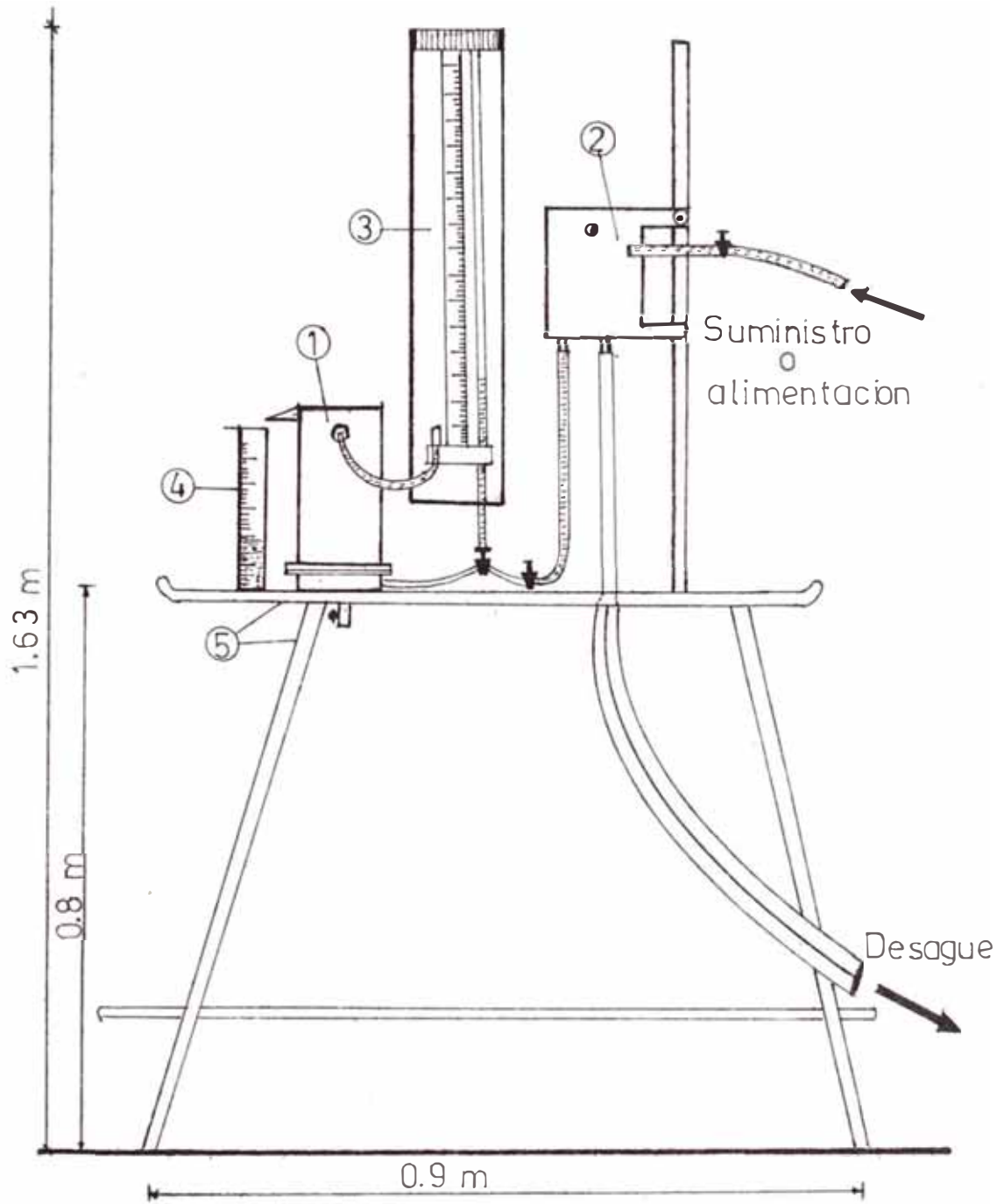


Fig. 7.1

Observando la Fig. 7.1 y basado en el Principio de Darcy notamos que está esencialmente constituido por:

./.

- ① . Una barca de ensayo cilíndrico, vertical, destinada a contener los materiales que deseamos medir la permeabilidad. Tiene de sección - - útil 100 cm^2 . y altura útil 20 cm.. La disposición interior de la barca está provista para que el derrame se elimine completamente y correctamente a través de toda la sección - - útil del material en ensayo y que la carga intrínseca del aparato sean sensiblemente nulas en comparación con el caudal de infiltración.
 - ② . Reserva de alimentación a carga constante; peroregular de 0 a 50 cm. permitiendo la alimentación a caudal constante de la barca de ensayo. Esa reserva es la misma que alimenta a - partir de una adición de agua propia del laboratorio.
 - ③ . Tubos piezométricos que por un aparejamiento de medidas permitirán la determinación de la carga total sobre los materiales.
 - ④ . Probeta donde por el método volumétrico se medirá el caudal de infiltración en un determinado tiempo t.
 - ⑤ . Tabla-soporte especialmente adaptada.
- Los elementos metálicos esenciales del aparato están hechos de acero inoxidable, cromados.

Procedimiento.- El procedimiento que se usa es el

./.

siguiente (utilizando la Fig. 7.1):

Se abre el suministro o alimentación de agua para que pase hasta la barca (2) en la que se encuentran dos tuberías en su parte inferior una de las cuales alimenta a la barca (1) y la otra cuando se produce el rebose para desaguar, osea, para mantener el caudal constante. El material en la barca (1) está provisto de filtro de papel y de una piedra porosa en ambos extremos, en el cual al llegar el agua de (2) comienza a pasar hasta que rebose; éste rebose pasa a una probeta (graduada en cm^3 .) en el que en un determinado tiempo t se habrá hallado el caudal de infiltración.

Asimismo, al producirse el rebose en la barca (1) por otra tubería pasa el agua hacia el tubo piezométrico donde se medirá la carga ΔH (cms.) y con estos valores podremos hallar el coeficiente k por el siguiente cálculo:

$$\text{De (1) : } k = v \frac{\Delta l}{\Delta H} ; \text{ pero } v = \frac{Q}{S}$$

$$\text{De donde: } k = \frac{Q}{S} \frac{\Delta l}{\Delta H} \quad (2)$$

Por construcción :

$S = 100 \text{ cm}^2$ y Δl si tuviese sólo los filtros de papel sería igual a 20 cm.; pero como también utilizamos la piedra porosa, $l = 1.2 \text{ cm.}$ para las dos piedras, $\Delta l = 18.8 \text{ cm.}$ y reemplazando

./.

Valores en (2) obtenemos:

$$K = \frac{18.8}{100} \frac{Q}{\Delta H} \quad \text{ó sea} \quad K = 0.188 \frac{Q}{\Delta H} \quad (3)$$

donde Q está expresado en $\text{cm}^3/\text{seg.}$ y ΔH (carga - medida en los tubos piezométricos) en cms.

7.2 MODELO DE UNA PRESA DE TIERRA

La presa de tierra (arena) se construye en una cubeta de $0.96 \times 0.23 \times 0.45 \text{ m}^3$ con caras frontal y posterior de vidrio, tiene un soporte metálico de base 1.35 m. y de altura 1.12 m.; asimismo para el trazado de las líneas de corriente se llena un recipiente de fluoresceína que se utiliza como colorante el cual circula a travez de tuberías en cuyo extremo se tiene agujas hipodérmicas que se colocan en el paramento aguas arriba de la presa, éste equipo se encuentra sobre un soporte de madera. Todo esto podemos observarlo en las Fótogr. 5 al 10 como también el abastecimiento de agua y desague.

El material utilizado en la presa es arena, que se describen en el Capitulo VIII-8-1, de tres sitios diferentes: Santa Eulalia, La Molina y San Juan.

El filtro utilizado es confitillo de diámetro no mayor de $1/4"$. Se hizo una compactación manual en capas de 5 cm.

CAPITULO VIII

COMPARACION DE RESULTADOS TEORICOS Y EXPERIMENTALES

En este capítulo se encontrarán los resultados de los ensayos granulométricos y propiedades de las muestras tomadas; así como también el cálculo del coeficiente de permeabilidad y teniendo por último un item muy importante el cual es la comparación de los resultados teóricos y experimentales que nos podrán ayudar a determinar el porcentaje de veracidad de las fórmulas halladas empleando la Transformación de Christoffel - Schwarz con la parte de laboratorio.

8.1 Resultado de los Ensayos Granulométricos, Límites de Consistencia y Descripción de las Muestras .

El resultado de los Ensayos Granulométricos y de los Límites de Consistencia de las muestras tomadas se hallan en las hojas adjuntas, teniendo como características principales:

a) Muestra de Santa Eulalia

$$D_{60} = 0.215 \text{ mm.}$$

$$D_{30} = 0.163 \text{ mm.}$$

$$D_{10} = 0.075 \text{ mm. (diámetro efectivo)}$$

$$\text{Coeficiente de uniformidad : } C_u = 2.87$$

$$\text{Coeficiente de curvatura : } C_c = 1.65$$

b) Muestra de La Molina

$$D_{60} = 0.260 \text{ mm.}$$

$$D_{30} = 0.193 \text{ mm.}$$

$$D_{10} = 0.090 \text{ mm.}$$

$$\text{Coeficiente de uniformidad : Cu} = 2.89$$

$$\text{Coeficiente de Curvatura : Cc} = 1.59$$

c) Muestra de San Juan

$$D_{60} = 0.201 \text{ mm.}$$

$$D_{30} = 0.160 \text{ mm.}$$

$$D_{10} = 0.064 \text{ mm.}$$

$$\text{Coeficiente de uniformidad : Cu} = 3.14$$

$$\text{Coeficiente de curvatura : Cc} = 1.99$$

Descripción de las Muestras .- Para describir las muestras tomaremos como base los sistemas de clasificación - siguientes:

1).- Sistema de Clasificación AASHO (Asociación Americana de Caminos Oficiales del Estado).

En este sistema obtenemos:

a) Muestra de Santa Eulalia y San Juan

Es un A-2-4 (0), es decir, son del tipo gravas, - arenas limosas y arcillosas con un comportamiento de excelente a bueno como terreno de fundación.

b) Muestra de la Molina:

Es un A-3 (0), es decir, arena fina con un comportamiento de excelente a bueno como terreno de fundación.

2).- Sistema de Clasificación SUCS (Sistema Unificado de Clasificación de Suelos).

Las muestras de Santa Eulalia, La Molina, San Juan pertenecen al grupo SP-SM cuya descripción según este sistema es la siguiente: Arenas mal graduadas, -- Arena con grava con poco o nada de finos con mezcla de arena limosa, mezcla de arena y limos.

Predominio de un tamaño o un tipo de tamaño con ausencia de algunos tamaños intermedios (limos inorgánicos, polvo de roca, limos arenosos o arcillosos).

De nula a ligera resistencia en estado seco, de tenacidad nula y de dilatancia de rápida a lenta.

8.2.- TABULACION DEL COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD (k)

EN LABORATORIO **

* MUESTRA	VOLUMEN (Vol Cm3)	TIEMPO (t seg)	CAUDAL Q = Vol/t.	ΔH (cms)	$\frac{Q}{\Delta H} \text{Cm}^2 / \text{Seg.}$	$K = 0.188 \frac{Q}{\Delta H} \text{Cm} / \text{Seg}$
M-1	100	27	3,70	38	0.0974	1.831×10^{-2}
M-2	100	46	2.17	22.5	0.0964	1.812×10^{-2}
M-3	100	34.6	2.89	30	0.0963	1.810×10^{-2}

* M-1 : Muestra de Santa Eulalia

M-2 : Muestra de la Molina

M-3 : Muestra de San Juan

** FÓtogr. 3 y 4



Fótogr. 3 y 4.- Se indica el volumen de agua que ha pasado a través del suelo (con la probe-ta de 100 cm³), y el tiempo que se demo-stra para hallar el caudal de filtración.

8.3 COMPARACION DE LAS CARACTERISTICAS DE FILTRACION EN UNA PRESA DE BASE IMPERMEABLE EXPERIMENTALES Y TEORICAS

Se tomará la muestra de Santa Eulalia como la representativa de las tres muestras tomadas para esta comparación debido a que en laboratorio la diferencia entre éstas es mínima pudiéndose considerar despreciable en -- cuanto se refiere a las características que se van a -- comparar; pero para justificar esto se ha realizado los graficos respectivos donde se observa esta mínima diferencia principalmente en la línea de saturación porque en cuanto se refiere a las líneas de corriente practicamente son iguales; lo mismo se puede afirmar del caudal de filtración esto debido a la relativa diferencia del coeficiente de permeabilidad entre las tres muestras -- (item 8-2)

I .- PRESA CON FILTRO TRAPEZOIDAL (Fotog. 5 y 6, Fig.8.1,2)

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO *		% de Variación - (Teórica/exp)
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Líneas de Corriente					
Línea 1	10.0	8.20	9.77	8.20	- 2.30
	15.7	5.00	15.94	5.00	+ 1.53
	20.5	0	20.69	0	+ 0.93
Línea 2	15.0	12.80	15.26	12.80	+ 1.73
	22.0	10.00	22.64	10.00	+ 2.90
	38.5	0	38.70	0	+ 0.52

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO *		% de Variación (Teorico/ exp.)
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Línea 3	23.2	19.8	23.60	19.80	+ 1.72
	25.0	18.6	25.42	18.60	+ 1.68
	30.0	14.5	30.22	14.50	+ 0.73
	35.0	11.2	34.76	11.20	- 0.99
	40.0	8.9	40.62	8.90	+ 1.55
	45.0	7.0	45.14	7.00	+ 0.31
	50.0	5.0	50.24	5.00	+ 0.48
	55.0	4.0	55.83	4.00	+ 1.51
	60.0	3.5	61.10	3.50	+ 1.83
	65.0	2.5	66.20	2.50	+ 1.85
	70.0	2.0	71.40	2.00	+ 2.00
Línea 4	29.2	24.8	29.56	24.80	+ 1.23
	35.0	20.5	35.94	20.50	+ 2.68
	40.0	16.5	39.86	16.50	- 0.35
	45.0	13.5	44.77	13.50	- 0.51
	50.0	11.5	50.42	11.50	+ 0.84
	55.0	10.0	55.80	10.00	+ 1.45
	60.0	8.5	61.05	8.50	+ 1.75
	65.0	6.0	66.20	6.00	+ 1.85
		71.0	4.0	71.96	4.00

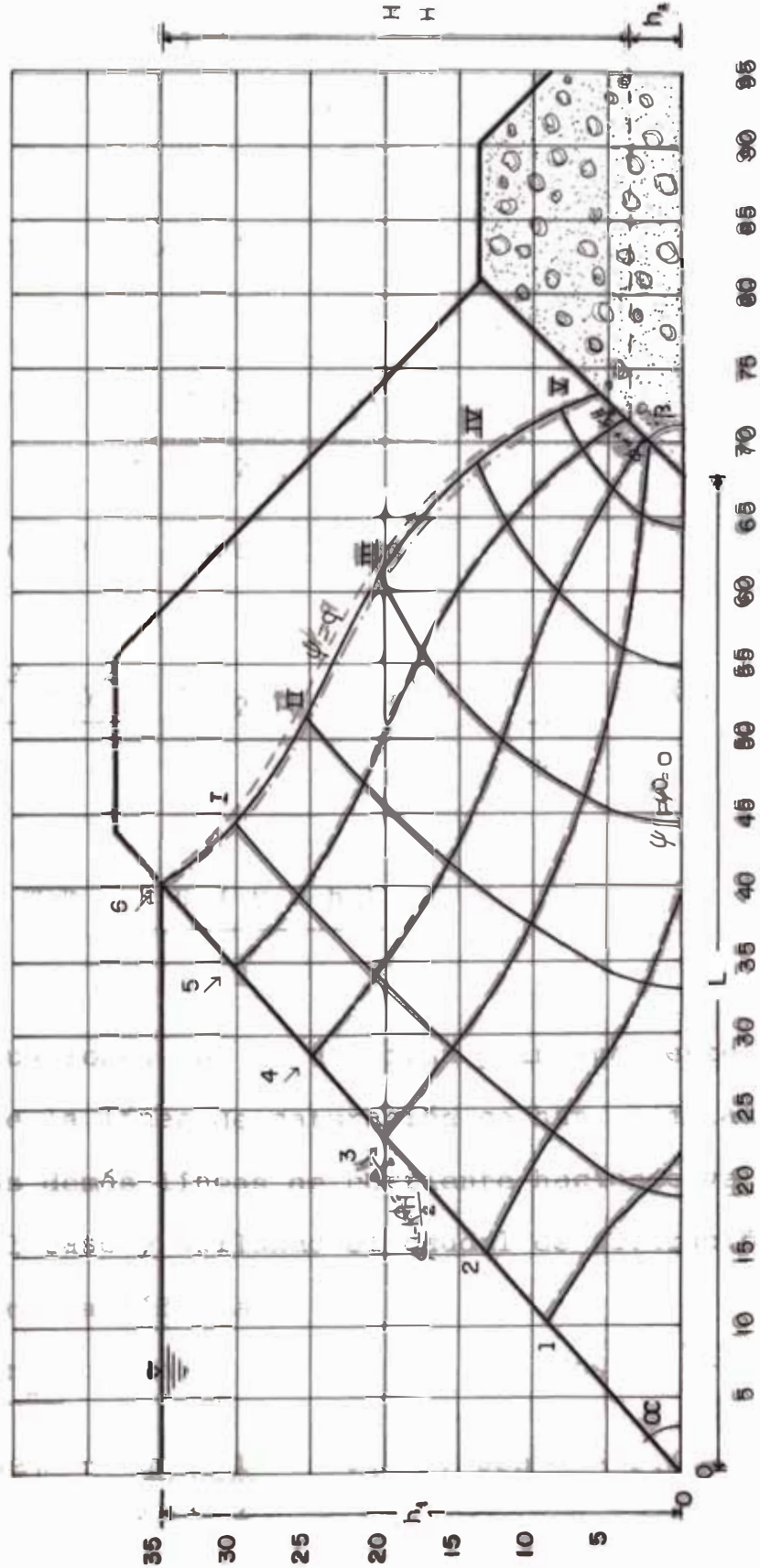
./.

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO *		% de Variación (Teorico/ Exp.)
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Línea 5	35.0	29.8	35.52	29.80	+ 1.49
	41.0	25.0	41.38	25.00	+ 0.93
	45.0	22.5	44.58	22.50	- 0.93
	50.0	20.0	51.03	20.00	+ 2.06
	55.0	18.0	56.22	18.00	+ 2.22
	61.0	15.1	62.09	15.10	+ 1.79
	65.0	12.0	66.44	12.00	+ 2.21
	70.0	7.0	71.29	7.00	+ 1.84
	72.5	4.5	75.14	4.50	+ 3.64
Línea 6	40.0	34.0	40.53	35.0	+ 1.32
Línea de	46.0	31.0	46.57	31.0	+ 1.24
Saturación	50.0	28.0	50.39	28.0	+ 0.78
	55.0	24.50	55.65	24.50	+ 1.18
	60.0	21.5	59.44	21.50	- 0.93
	61.5	20.0	61.52	20.00	+ 0.03
	65.0	17.0	65.71	17.00	+ 0.32
	67.0	15.0	67.25	15.00	+ 0.37
	70.0	11.5	70.26	11.50	+ 0.37
	73.0	6.0	72.81	6.00	- 0.26

* Se ha calculado el valor de X teniendo en cuenta las siguientes fórmulas halladas anteriormente (Capítulo VI-3)

PRESA CON FILTRO TRAPEZOIDAL

DATOS $h_1 = 35$ m $h_2 = 5$ m $L = 67$ m
 $k = 6.631 \times 10^{-2}$ cm/seg. (MUESTRA STA. EULALIA) $k = 1.831 \times 10^{-2}$ cm/seg
 $k = 1.812 \times 10^{-2}$ cm/seg. (MUESTRA STA. BULALMA) $k = 1.812 \times 10^{-2}$ cm/seg
 $\alpha = 40^\circ = 0.22 \pi$ $\beta = 45^\circ = 0.25 \pi$



ESCALA 1/50

Fig. 8.19. 8.2

a) Para la parte izquierda o aguas arriba :

$$X \approx k \frac{(h_1^2 - y^2)}{2q} + h_1 \left[\text{Ctg} \alpha \pi - F_1(u, \alpha) \right] +$$

$$+ \frac{q}{k} \text{Tg} \alpha \pi F_2(u, \alpha)$$

Siendo : $u = \text{Tgh} \frac{K \pi (h_1 - y)}{2 q}$

b) Para la parte derecha o aguas a bajo :

$$X \approx l + \frac{k (h_2^2 - y^2)}{2 q} + h_2 F_3(u, \beta) + \frac{q}{k} F_4(u, \beta)$$

Siendo : $u = \text{Tgh} \frac{k \pi (y - h_2)}{2 q}$

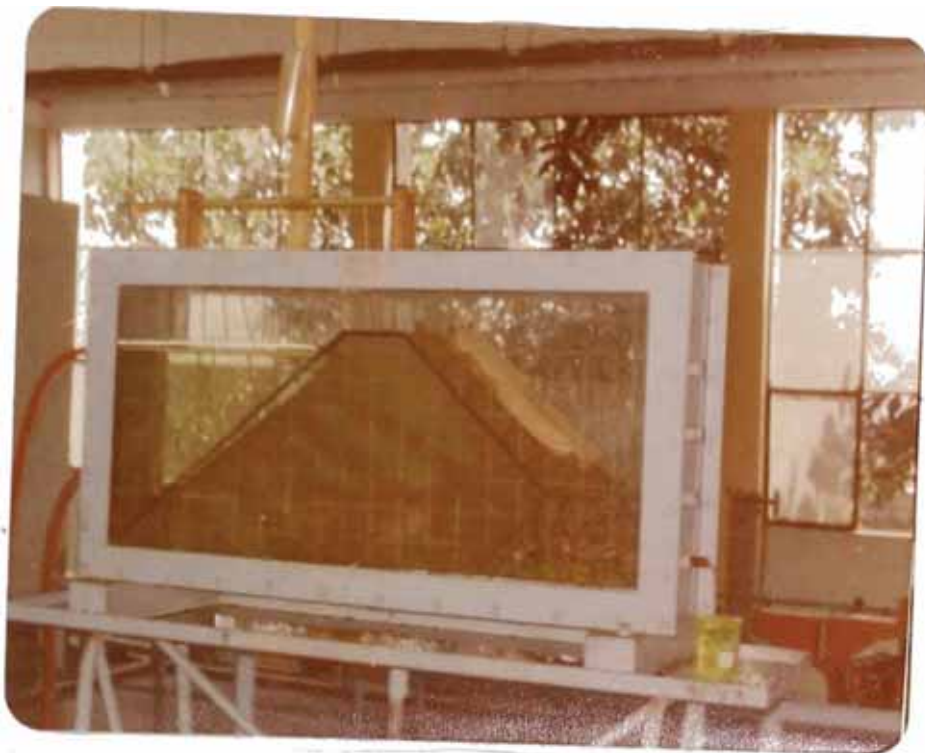
Siendo estas ecuaciones que se utilizan principalmente para el cálculo de la línea de saturación se han asimilado también para las demás líneas de corriente haciendo va -- rias h según el caso y hallando el caudal de filtración -- pra cada caso con la fórmula:

$$l \approx k \frac{(h_1^2 - h_2^2)}{2 q} + h_1 \left[\text{Ctg} \alpha \pi - f_1(\alpha) \text{Cos} \alpha \pi \right] -$$

$$- h_2 f_1(\beta) \text{Cos} \beta \pi - \frac{q}{k} \left[-\frac{1}{2} - f_2(\alpha) \text{Sen} \alpha \pi - f_3(\beta) \text{Sen} \beta \pi \right]$$

Fótopgra. 5.-

Presas con filtro trapezoidal; se observa como sube el agua hasta la altura - prevista (h) línea blanca horizontal.



Fótopgr. 6.- Presas con filtro trapezoidal; se ve las líneas de corriente (de color verde) y el caudal de filtración, que se medira en la probeta de la derecha en un tiempo t.

Los valores de $F_1(u, \alpha)$, $F_2(u, \alpha)$, $F_3(u, \beta)$, $F_4(u, \beta)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$, $f_3(\beta)$ se hallan de los gráficos respectivos.

CAUDAL DE FILTRACION ($q_{exp.}$)			
Nº de Medi <u>das</u>	Vol (cm ³)	t (seg)	q (cm ³ /seg/cm)
1	250	9.6	26.04
2	250	9.5	26.31
3	250	9.6	26.04
4	250	9.6	26.04
5	250	9.5	26.31
$q_{Exp} = 26.15$		$q_{Teorico} = 27.40$	
			% de Varia <u>ción</u>
			4.78

II .- PRESA CON FILTRO HORIZONTAL (Fotog. 7, 8, 9, 10, y Fig. 8.3 y 8.4)

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO *		% DE VARIA <u>ción</u> . Teorico/Exp
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Líneas de - Corriente					
Línea 1	11.5	9.8	11.67	9.80	+ 1.47
	15.0	5.0	15.50	5.00	+ 3.33
	19.8	0	19.20	0	- 3.03

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO **		% DE VARIACION TEORICO/EXP
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Línea 2	19.0	16.0	19.07	16.00	+ 0.37
	25.0	10.3	24.43	10.30	- 2.28
	30.0	6.0	29.20	6.00	- 2.66
	35.0	3.0	34.36	3.00	- 1.82
	40.0	1.0	39.91	1.00	- 0.23
Línea 3	23.5	20.0	23.83	20.00	+ 1.40
	25.0	18.0	25.68	18.00	+ 2.72
	30.0	12.5	31.19	12.50	+ 3.97
	35.0	8.5	34.41	8.50	- 1.68
	40.0	6.0	39.99	6.00	- 0.03
	45.0	4.5	44.83	4.50	- 0.38
	50.0	4.0	49.72	4.00	- 0.56
Línea 4	29.0	25.0	29.79	25.00	+ 2.72
	30.0	24.5	30.42	24.50	+ 1.40
	35.0	18.5	34.91	18.50	- 0.26
	45.0	10.0	44.62	10.00	- 0.84
	50.0	7.3	49.14	7.30	- 1.72
	55.0	4.5	54.30	4.50	- 1.27
Línea 5	35.0	30.0	35.75	30.00	+ 2.14
	40.0	24.8	41.19	24.80	+ 2.97
	45.0	19.3	45.48	19.30	+ 1.07
	50.0	14.0	50.36	14.00	+ 0.72
	55.0	8.0	54.76	8.00	- 0.44
	57.0	5.0	55.72	5.00	- 2.24

DESCRIPCION	EXPERIMENTAL		TEORICO **		% DE VARIACION TEORICO/EXP
	X (m)	Y (m)	X (m)	Y (m)	
Línea 6	41.3	35.0	41.71	35.00	+ 0.99
Línea de - Saturación	45.0	32.0	44.60	32.00	- 0.88
	47.0	30.0	46.69	30.00	- 0.66
	50.0	27.0	49.32	27.00	- 1.36
	51.5	25.0	51.28	25.00	- 0.43
	55.0	20.0	56.00	20.00	+ 1.82
	58.0	15.0	57.41	15.00	- 1.02
	60.0	12.0	59.10	12.00	- 1.50
	60.5	10.0	59.80	10.00	- 1.16
	62.0	5.0	61.16	5.00	- 1.35

** Para hallar el valor de X se ha empleado la siguiente -
formula deducida en el capítulo VI-3 :

$$X \approx k \frac{(H^2 - y^2)}{2q} + H \left[\text{ctg} \alpha \pi - F_1(u, \alpha) \right] + \frac{q}{k} \text{Tg} \alpha \pi F_2(u, \alpha)$$

Siendo $u = \text{Tgh} \frac{k \pi (H - y)}{2q}$

y calculando el caudal de filtración de:

$$l \approx k \frac{H^2}{2q} + H \left[\text{ctg} \alpha \pi - f_1(\alpha) \text{Cos} \alpha \pi \right] - \frac{q}{k} \left[\frac{1}{2} - f_2(\alpha) \text{Sen} \alpha \pi \right]$$

e igualmente se ha hecho variar H y q en las ecuaciones anteriores para hallarse aproximadamente las otras líneas de -
corriente en X.

Los valores de $F_1(u, \alpha)$, $F_2(u, \alpha)$, $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ se hallan de los gráficos respectivos

CAUDAL DE FILTRACION			
Nº DE MEDIDAS	VOL. (cm ³)	t (seg)	q (cm ³ /seg/cm)
1	250	7.1	35.21
2	250	7.0	35.71
3	250	7.0	35.71
4	250	7.0	35.71
5	250	7.0	35.71
q exp. = 35.71		q teorico = 37.16	% de Variación Teorico/Exp.
			4.06

NOTAS :

- 1.- Para mayor facilidad en la aplicación de las fórmulas hemos tomado los valores de y como conocidos para hallar x
- 2.- No se ha comparado los valores de las líneas equipotenciales debido a que no se han tomado experimentalmente debido a las limitaciones del equipo, trazándolos de tal manera que formen una red octogonal; pero teóricamente se puede hallar con las fórmulas deducida en el Capítulo VI.



Fótoqr. 7.- Presa con filtro horizontal; el agua comienza a subir hasta el límite fijado.



Fótoqr. 8.- Se observa el llenado de la fluoresceína una vez llegada el agua a la altura h para el trazado de las líneas de corriente.



Fótoqr. 9.- Se continua llenando fluoresceína en el recipiente, pudiéndose ver que ya se van dibujando las líneas de corriente.



Fótoqr. 10.- Se han formado totalmente las líneas de corriente y se toman los puntos respectivos - de éstas para compararlos con la fase teórica.

P A R T E

APLICACIONES EN INGENIERIA CIVIL

Estudiamos este caso por ser general para este tipo de estructuras, es decir, porque si se tiene b_1, b_2, d, s se tiene el caso de la figura 9.1, pero si $s = d = 0$ se tiene un caso particular igualmente práctico.

La Fig. 9.1 del plano z pasamos al plano ξ tomando por conveniencia los puntos A, C, E, G, sobre los puntos $\xi = -\infty, -1, +1, +\infty$ respectivamente (Fig. 9.2) y los puntos B, F y D sobre $\xi = -l_1, l_2, m$.

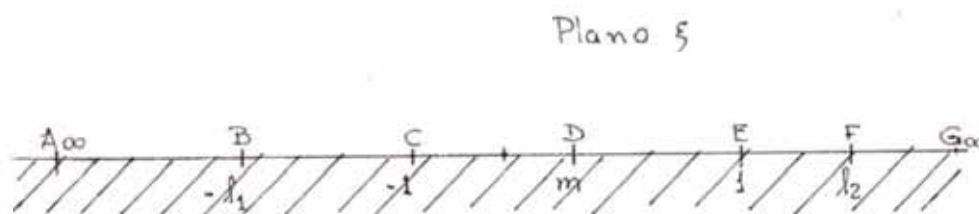


Fig. 9.2

Aplicando la Transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ relacionando el plano z con ξ :

$$z = M \int \frac{d\xi}{(\xi - 1)^{1 - \pi/2/\pi} (\xi + 1)^{1 - \pi/2/\pi} (\xi - m)} + N$$

$$z = M \int \frac{d\xi}{(\xi - 1)^{1/2} (\xi + 1)^{1/2} (\xi - m)^{-1}} + N$$

$$z = M \int \frac{(\xi - m) d\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} + N$$

$$z = M \sqrt{\xi^2 - 1} - Mm \operatorname{Cosh}^{-1} \xi + N \quad (1)$$

Sabiendo que $\operatorname{Cosh}^{-1} \xi = \ln (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})$

Para hallar las constantes M, N y m se analizará así :

Punto E : $z = id$; $\xi = 1$
 en la ecuación (1) : $N = id$

Punto C : $z = 0$; $\xi = -1$
 en (1) : $Mm = \frac{d}{\pi}$

Punto D : $z = i (d + s)$; $\xi = m \leq 1$

$$\frac{s \pi}{d} = \frac{\sqrt{1-m^2}}{m} - \operatorname{Cos}^{-1} m$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (1) :

$$z = \frac{d}{\pi m} \sqrt{\xi^2 - 1} - \frac{d}{\pi} \operatorname{Cosh}^{-1} \xi + id \quad (2)$$

Observando la Fig. 9.1 también podemos graficar dichos -
 contornos en el plano ω ; (Fig. 9.3) :

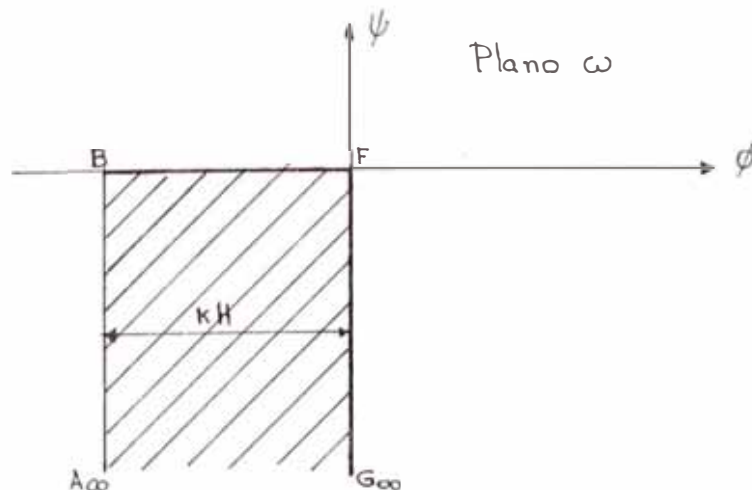


Fig. 9.3

Relacionando el plano ω y ξ se obtiene:

$$\omega = M_1 \int \frac{d\xi}{(\xi + l_1)^{1/2} (\xi - l_2)^{1/2}} + N_1$$

$$\omega = i M_1 \text{Sen}^{-1} \frac{2\xi + l_1 - l_2}{l_1 + l_2} + N_1$$

$$\omega = M_2 \text{Sen}^{-1} \frac{\xi + \lambda_1}{\lambda} + N_1 \quad (3)$$

Siendo $\lambda_1 = \frac{l_1 - l_2}{2}$; $M_2 = i M_1$

$$\lambda = \frac{l_1 + l_2}{2}$$

Analizando similarmente que en el caso anterior:

Punto F : $\omega = 0$; $\xi = l_2$

$$0 = M_2 \frac{\pi}{2} + N_1 \Rightarrow N_1 = -M_2 \frac{\pi}{2}$$

Punto B : $\xi = -l_1$; $\omega = -kH$

$$-kH = -M_2 \frac{\pi}{2} - M_2 \frac{\pi}{2}$$

$$kH = M_2 \pi \Rightarrow M_2 = \frac{kH}{\pi}$$

En la ecuación (3) :

$$\omega = \frac{kH}{\pi} \text{Sen}^{-1} \frac{\xi + \lambda_1}{\lambda} - \frac{kH}{2}$$

$$\text{Sen} \left(\omega + \frac{kH}{2} \right) \frac{\pi}{kH} = \frac{\xi + \lambda_1}{\lambda}$$

Simplificando:

$$\xi = \lambda \text{Cos} \frac{\pi\omega}{kH} - \lambda_1 \quad (4)$$

Sustituyendo (4) en (2) se obtiene la ecuación general - que relaciona z con ω :

$$z = \frac{d}{\pi m} \left[\left(\lambda \text{Cos} \frac{\pi\omega}{kH} - \lambda_1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \frac{d}{\pi} \text{Cos h}^{-1} \left(\left(\lambda \text{Cos} \frac{\pi\omega}{kH} - \lambda_1 \right) + id \right) \quad (5)$$

En particular para $\psi = 0$ a lo largo del contorno de la estructura le corresponde un punto a lo largo de este con torno y el potencial en este punto es:

$$z = \frac{d}{\pi m} \left[\left(\lambda \text{Cos} \frac{\varnothing \pi}{kH} - \lambda_1 \right)^2 - 1 \right]^{1/2} - \frac{d}{\pi} \text{Cosh}^{-1} \left(\left(\lambda \text{Cos} \frac{\pi\varnothing}{kH} - \lambda_1 \right) + id \right)$$

Para el cálculo de las presiones escribiremos primero la - distribución de presiones:

$$\phi = -k \left(\frac{P}{\gamma_w} - y \right) + C \quad (5)$$

Para $y = 0$; $\phi = -kH$; $P/\gamma_w = h_1$

$$C = -k (h - h_1)$$

Ahora, considerando la ecuación (4) a lo largo del contorno impermeable ($\psi = 0$):

$$\phi = - \frac{kH}{\pi} \cos^{-1} \frac{\xi + \lambda_1}{\lambda} \quad \text{para} \quad 0 \leq \cos^{-1} \frac{\xi + \lambda_1}{\lambda} \leq \pi$$

De (5) :
$$P = \gamma_w \left[\frac{\phi}{k} + y - H + h_1 \right]$$

y reemplazando en esta ecuación el valor de ϕ simplificado hallamos la ecuación general de presiones:

$$P = \gamma_w \left[\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\xi + h_1}{\lambda} + y - H + h_1 \right]$$

Es así como podemos utilizar la Transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ para hallar presiones; así en particular:

Presión en C :
$$P_C = \gamma_w \left(\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\lambda_1 - 1}{\lambda} - H + h_1 \right)$$

Presión en D :
$$P_D = \gamma_w \left(\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\lambda_1 + m}{\lambda} + s + h_2 \right)$$

Presión en E :
$$P_E = \gamma_w \left(\frac{H}{\pi} \cos^{-1} \frac{\lambda_1 + 1}{\lambda} + h_2 \right)$$

* Además de este tipo de aplicaciones podemos también rea
lizar en cualquier tipo de tablaestacas (horizontales,-
inclinadas) utilizando el mismo procedimiento.

C O N C L U S I O N E S

- 1.- La Transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ es de suma importancia en los problemas de filtración debido a que el campo de flujo en la región o plano Z es representada por un polígono y es esta transformación que nos relaciona con un plano paramétrico ξ como también lo hace con el plano ω lo cual nos simplifica la solución de estos tipos de problemas.
- 2.- Para los cálculos se ha relacionado a Kozeny y la transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ obviando el problema de entrada analizado por Casagrande para mayor facilidad en los cálculos.
- 3.- En la parte experimental se tomaron tres muestras de arena de Santa Eulalia, La Molina y San Juan (realizándose de cada una un estudio granulométrico, límites de consistencia y descripción) que por tener prácticamente el mismo coeficiente de permeabilidad y habiendo obtenido cercanas líneas de corriente y caudal de filtración es que se tomó para el estudio comparativo la muestra de Santa Eulalia y siendo ésta de procedencia un río el estudio se hace de un carácter más práctico.
- 4.- Para hallar el coeficiente de permeabilidad se empleó el Permeámetro Tipo Darcy (el cual no se utilizaba hace 6 o 7 años) el cual nos dio valores en el rango según Tabla de Casagrande - Fadum por lo que se hace de

gran utilidad para hallar este valor tan importante; -
recomendandose por lo tanto su utilización más frecuen
te

- 5.- La Transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ nos permite -
llegar a ecuaciones que nos aproximan valores para po-
der graficar las condiciones de borde como también la
red de flujo de una presa ya sea con filtro trapezoi -
dal u horizontal.
- 6.- El porcentaje de variación de las líneas de corriente-
Teórico/experimental utilizando la Transformación de-
CHRISTOFFEL-SCHWARZ es de + 5% este porcentaje pode -
mos considerarlo óptimo si tenemos en cuenta que Terzu
gui-Peck y Sowers & Sowers dan un porcentaje de varia-
ción de + 5% y en cuanto se refiere al caudal de fil-
tración ellos dan un porcentaje de + 5 al 10% y se ha
obtenido + 5% por lo que esta transformación se puede-
considerar de gran uso para calcular la línea de co --
rriente, equipotenciales y por ende la red de flujo.
- 7.- No se ha podido hallar la variación de porcentaje teó-
rico/experimental de las líneas equipotenciales debido
a que experimentalmente no se ha realizado, debido a -
la limitación del equipo de laboratorio pero se calcu-
lan teóricamente según las fórmulas respectivas.
- 8.- Se debe hacer notar que la variación producida en las
líneas de corriente, ya sea en un valor positivo o ne-
gativo, se puede deber a que al discurrir la fluores -

ceña hay puntos donde se dispersa ésta y que al tomar las coordenadas, para su compración teórica, no se está tomando exactamente las correctas.

- 9.- En cuanto se refiere al modelo en sí se empleó para la observación de las líneas de corriente fluoresceína, - la cual se debe administrar continuamente; se compactó cada $h = 4$ cms. y para el filtro se utilizó confitillo.
- 10.- La aplicación de la transformación de CHRISTOFFEL-SCHWARZ, además del tipo de presas con filtro trapezoidal y horizontal, en Ingeniería Civil es en el estudio del cálculo de presiones de un dentellón con su tablaes taca en el pie (forma general) y demás formas particulares; como también para el cálculo de cualquier tipo de tablestacas (horizontal o inclinadas) debiéndose -- realizar un estudio experimental para hallar el porcentaje de variación ya que en esta Tesis solamente se hace el cálculo teórico.

B I B L I O G R A F I A

- 1.- "MECANICA DE FLUIDOS" REYES CARRASCO, Luis
- 2.- "LA MECANICA DE LOS FLUIDOS" SHAMES, Irving
- 3.- "HIDROMECANICA" BECERRIL
- 4.- "VARIABLE COMPLEJA" MURRAY R. SPIEGEL
- 5.- "COMPLEX VARIABLES AND APPLICATIONS" CHURCHILL, R.V.
- 6.- "MECANICA DE SUELOS APLICADA" TERZAGUI - PECK
- 7.- "MECANICA DE SUELOS" TSCHEBOTARIOFF, Gregory
- 8.- "INTRODUCCION A LA MECANICA DE SUELOS Y CIMENTACIONES" SOWERS & SOWERS
- 9.- "MECANICA DE SUELOS FLUJO DE AGUA EN SUELOS. TOMO III" JUAREZ BADILLO, Eulalio
RICO RODRIGUEZ, Alfonso
- 10.- "GROUND WATER AND SEEPAGE" HARR, M.E.
- 11.- "OBRAS HIDRAULICAS" VILLASEÑOR CONTRERAS, Jesús
- 12.- "PERMEAMETRE TYPE DARCY" SOCIETE GRENOBBISE
D'ETUDES ET D'APPLICA-
TIONS HYDRAULIQUES
(SOGREAH).