

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA



Tesis para optar el Título Profesional de

Licenciado en Física

**Representación “clásica” de las soluciones de la
ecuación de Schrödinger**

Presentada por:

Genaro Pablo ZAMUDIO CHAUCA

Asesor:

Holger G. VALQUI CASAS

Lima, Perú

2010

Índice general

Índice general	III
Índice de figuras	v
Resumen	1
1. Introducción	3
1.1. Interpretación probabilística de la función de onda. Función de onda inicial	6
1.2. Valores medios de algunos operadores cuánticos en términos de R y S	8
1.2.1. Operador de posición	9
1.2.2. Operador de momentum	10
1.2.3. Operador de energía	11
1.2.4. Operador de momentum angular	12
1.3. Interpretación sugerida para esta representación de la dinámica cuántica	13
2. Partícula libre	16
2.1. Partícula libre unidimensional	16
2.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S .	17
2.1.2. Representación gráfica de R y S .	21
2.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	21
2.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$. .	26
2.2. Partícula libre tridimensional	31
2.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S .	31
2.2.2. Representación gráfica de R y S .	36
2.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	36
2.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$. .	43

3. Oscilador armónico	52
3.1. Oscilador armónico unidimensional	52
3.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S	53
3.1.2. Representación gráfica de R y S .	58
3.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	58
3.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$. .	62
3.2. Oscilador armónico bidimensional	67
3.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S	68
3.2.2. Representación gráfica de R y S .	71
3.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	72
3.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$. .	80
4. Tiro de proyectil	90
4.1. Tiro de proyectil unidimensional	90
4.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S	91
4.1.2. Representación gráfica de R y S .	97
4.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	97
4.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$. .	101
4.2. Tiro de proyectil tridimensional	106
4.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S .	107
4.2.2. Representación gráfica de R y S .	112
4.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$.	113
4.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$	120
Conclusiones	129
Apéndice A. Sobre el movimiento de las partículas y el movimiento de los frentes de onda del campo S	130
Bibliografía	133

Índice de figuras

Introducción	3
1.1. Esquema de la región donde se realiza el proceso físico	9
1.2. Frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ y rastros clásicos .	15
Partícula libre unidimensional	16
2.1. Campo $S_0(t, x)$	22
2.2. Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$	23
2.3. Campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$.	23
2.4. Trayectorias para $\hbar = 0$	24
2.5. Curvas de nivel de $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$.	24
2.6. Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	25
2.7. Movimiento de $R_0^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	26
2.8. Campo $S(t, x)$	27
2.9. Densidad de probabilidad $R^2(t, x)$	27
2.10. Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$.	2
2.11. Trayectorias para $\hbar \neq 0$	28
2.12. Curvas de nivel de $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	29
2.13. Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	29
2.14. Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	30
2.15. Comparación de las trayectorias clásica y cuántica	30
Partícula libre tridimensional	31
2.16. Movimiento de un frente de onda de $S_0(t, x)$	37
2.17. Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$	37
2.18. Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$	3
2.19. Campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$	39
2.20. Trayectorias para $\hbar = 0$	40
2.21. Rastros para $\hbar = 0$	40
2.22. Frentes de onda de $S_0(t, x)$ y rastros para $\hbar = 0$	41
2.23. Densidad $R_0^2(t, x)$ y campo $\nabla S_0(t, x)$	41

2.24. Densidad $R_0^2(t, x)$ y rastros para $\hbar = 0$	42
2.25. Densidad $R_0^2(t, x)$ y frentes de onda de $S_0(t, x)$	42
2.26. Movimiento de un frente de onda de $S(t, x)$. .	43
2.27. Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$.	44
2.28. Densidad de probabilidad $R^2(t, x)$	45
2.29. Campo de momentum $\nabla S(t, x)$	46
2.30. Trayectorias para $\hbar \neq 0$	47
2.31. Rastros para $\hbar \neq 0$	47
2.32. Frentes de onda de $S(t, x)$ y rastros para $\hbar \neq 0$.	48
2.33. Densidad $R^2(t, x)$ y rastros para $\hbar \neq 0$	48
2.34. Densidad $R^2(t, x)$ y campo $\nabla S(t, x)$	49
2.35. Densidad $R^2(t, x)$ y frentes de onda de $S(t, x)$.	50
2.36. Comparación de las trayectorias clásica y cuántica .	51
2.37. Comparación de los rastros clásico y cuántico	51
Oscilador armónico unidimensional	52
3.1. Campo $S_0(t, x)$	58
3.2. Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$	59
3.3. Campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$.	60
3.4. Trayectorias para $\hbar = 0$	60
3.5. Curvas de nivel de $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$.	61
3.6. Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	61
3.7. Movimiento de $R_0^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	62
3.8. Campo $S(t, x)$	63
3.9. Densidad de probabilidad $R^2(t, x)$	63
3.10. Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$.	64
3.11. Trayectorias para $\hbar \neq 0$	65
3.12. Curvas de nivel de $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	65
3.13. Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	66
3.14. Movimiento de $R^2(t, x)$	66
3.15. Comparación de las trayectorias clásicas y cuánticas .	67
Oscilador armónico bidimensional	67
3.16. Movimiento de un frente de onda del campo $S_0(t, x, y)$	73
3.17. Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$	75
3.18. Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$	75
3.19. Campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$	76
3.20. Rastros para $\hbar = 0$	77
3.21. Frentes de onda de $S_0(t, x, y)$ y rastros para $\hbar = 0$. . .	77
3.22. Densidad $R_0^2(t, x, y)$ y campo $S_0(t, x, y)$	78
3.23. Densidad $R_0^2(t, x, y)$ y frentes de onda de $S_0(t, x, y)$	79
3.24. Densidad $R_0^2(t, x, y)$ y rastros para $\hbar = 0$	0
3.25. Movimiento de un frente de onda del campo $S(t, x, y)$	81
3.26. Densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$	84
3.27. Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$	4
3.28. Campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$	5
3.29. Rastros para $\hbar \neq 0$	86

3.30. Frentes de onda del campo $S(t, x, y)$ y rastros para $\hbar \neq 0$	86
3.31. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y el campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$	87
3.32. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los frentes de onda del campo $S(t, x, y)$	88
3.33. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los rastros que dejan las partículas	89
3.34. Comparación de los rastros clásicos y cuánticos	89
Tiro de proyectil unidimensional	90
4.1. Campo $S_0(t, x)$	97
4.2. Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$	98
4.3. Campo de mometum $\partial_x S_0(t, x)$	99
4.4. Trayectorias para $\hbar = 0$	99
4.5. Curvas de nivel de $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	100
4.6. Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	100
4.7. Movimiento de $R_0^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$	101
4.8. Campo $S(t, x)$	102
4.9. Densidad de probabilidad $R^2(t, x)$	103
4.10. Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$	103
4.11. Trayectorias para $\hbar \neq 0$	104
4.12. Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	104
4.13. Curvas de nivel de $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	105
4.14. Movimiento de $R^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$	105
4.15. Comparación de las trayectorias clásica y cuántica	106
Tiro de proyectil tridimensional	106
4.16. Movimiento de un frente de onda del campo $S_0(t, x)$	113
4.17. Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar = 0$	115
4.18. Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ en el espacio de posiciones	115
4.19. Campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$	116
4.20. Trayectorias para $\hbar = 0$	116
4.21. Rastros para $\hbar = 0$	117
4.22. Rastros para $\hbar = 0$	117
4.23. Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$	118
4.24. Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$	119
4.25. Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y rastros de partícula para $\hbar = 0$	120
4.26. Movimiento de un frente de onda del campo $S(t, x)$	121
4.27. Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$	122
4.28. Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ en el espacio de posición	123
4.29. Campo de momentum $\nabla S(t, x)$	123
4.30. Trayectorias para $\hbar \neq 0$	124
4.31. Rastros para $\hbar \neq 0$	124
4.32. Rastros para $\hbar \neq 0$	125

4.33. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ y rastros de partícula para $\hbar \neq 0$ 125

4.34. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ y el campo de momentum $\nabla S(t, x)$ 126

4.35. Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ y los frentes de onda del campo $S(t, x)$ 127

4.36. Comparación de las trayectorias clásica y cuántica 128

4.37. Comparación de los rastros clásico y cuántico 128

Apéndice A **130**

A.1. Frente de onda de $S(t, x)$ y campo $\nabla S(t, x)$ 131

A.2. Frente de onda de $S(t, x)$ y velocidad de una partícula 131

A.3. Frentes de onda de $S(t, x)$ y trayectoria de una partícula 132

Resumen

En este trabajo se intenta dar algunas características de la dinámica clásica a la dinámica cuántica no relativista. Como es sabido la dinámica cuántica no relativista está regida por la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(t, \bar{x}) + V(t, \bar{x})\Psi(t, \bar{x}) + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi(t, \bar{x}) = 0$$

Escribiendo la función de onda en la forma:

$$\Psi(t, \bar{x}) = R(t, \bar{x}) \exp\left\{\frac{iS(t, \bar{x})}{\hbar}\right\}$$

transformamos esta ecuación en el sistema de dos ecuaciones:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2m}R\nabla^2S + \frac{1}{m}\nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R &= 0 \\ \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R} &= 0\end{aligned}$$

En este sistema de ecuaciones, la primera corresponde a la ecuación de conservación de la densidad de probabilidad cuántica escrita en términos de $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$; mientras que la segunda ecuación es propiamente la ecuación de Hamilton-Jacobi, pero con un término adicional de perturbación, y que convenientemente llamaremos ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada. Aprovechando esta similitud, y utilizando herramientas del formalismo de Hamilton-Jacobi podemos representar “clásicamente” las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

A lo largo de este trabajo consideraremos a \hbar como un parámetro, y las soluciones para los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ serán determinadas analíticamente. Aquí construiremos funciones de onda, las que dependerán del parámetro \hbar , con la propiedad de anular el término de perturbación en la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada cuando se asigna el valor $\hbar = 0$. De este modo se logra llevar “continuamente” las soluciones de la ecuación de Schrödinger a un caso clásico.

La ecuación de Schrödinger determina la evolución del sistema físico a partir de la función de onda inicial. Para representar partículas usaremos, por conveniencia en el cálculo y como es usual en mecánica cuántica, funciones de onda inicial del tipo de paquetes gaussianos. Para obtener analíticamente la función de onda en cualquier instante a partir de función de onda inicial utilizaremos el método del propagador de Feynman, también por conveniencia en el cálculo.

Una vez obtenida la función de onda en cualquier instante despejaremos los campos $R(t, \mathbf{x})$ y $S(t, \mathbf{x})$. El campo $R(t, \mathbf{x})$ está directamente relacionado con la densidad de probabilidad cuántica por medio de la expresión $\|\Psi(t, \mathbf{x})\|^2 = R^2(t, \mathbf{x})$; de modo que este campo no agrega más información de la que brinda la propia función de onda. Sin embargo debemos mencionar que en este trabajo esta densidad de probabilidad cuántica será llevada “continuamente” al caso clásico por medio del parámetro \hbar .

Para el campo $S(t, \mathbf{x})$ **analizaremos sus frentes de onda y construiremos trayectorias para partículas**, de la misma manera como se procede con el campo $S_0(t, \mathbf{x})$ solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Así el campo $S(t, \mathbf{x})$ permite asociar trayectorias y frentes de onda al movimiento de la densidad de probabilidad cuántica, información que no brinda la presentación usual de la dinámica cuántica. También pasaremos de $S(t, \mathbf{x})$ a $S_0(t, \mathbf{x})$ “continuamente” por medio del parámetro \hbar . Como ejemplo en donde desarrollaremos esta representación sugerida presentaremos los casos de la partícula libre, el oscilador armónico y el tiro de proyectil.

CAPITULO 1

Introducción

En el estado actual del conocimiento, el triunfo de la teoría cuántica, basado en sus explicaciones y predicciones de ciertos fenómenos físicos, demuestra que el mundo microscópico no es el mundo macroscópico visto a una menor escala. Por tal motivo nuestra intuición física, desarrollada a partir de nuestra interacción con los objetos del mundo macroscópico, no es de mucha utilidad para el estudio de los sistemas microscópicos.

En la búsqueda de un mejor entendimiento del mundo microscópico, siempre ha estado presente el tratar de relacionar los resultados de la mecánica cuántica con los de la mecánica clásica. Tal vez el primer resultado importante en esta dirección fue dado por Ehrenfest¹, y hoy es conocido como el teorema de Ehrenfest.

En este trabajo transformaremos la ecuación de Schrödinger, realizando un cambio en la función de onda, así obtendremos una ecuación similar a la ecuación de Hamilton-Jacobi. Aprovechando esta similitud, utilizaremos las herramientas del formalismo de Hamilton-Jacobi para representar e interpretar de forma alternativa las soluciones de la ecuación de Schrödinger.

La función de onda $\Psi(t, \bar{x})$ ⁱⁱ que describe el estado dinámico de un sistema físico evoluciona en el tiempo obedeciendo la ecuación de Schrödinger:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(t, \bar{x}) + V(t, \bar{x})\Psi(t, \bar{x}) + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi(t, \bar{x}) = 0$$

Debemos notar que Ψ es una función compleja. Realicemos el cambio:

$$\Psi(t, \bar{x}) = R(t, \bar{x}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}S(t, \bar{x})\right\} \quad (1.1)$$

¹P. Ehrenfest, *Zeitschr. f. Physik* 45, 455-457 (1927)

ⁱⁱEl significado físico de la variable x presente en la función onda queda esclarecido en la interpretación probabilística de la función de onda.

donde $R(t, \mathbf{x})$ y $S(t, \mathbf{x})$ son funciones reales. Esta separación es conocida como la forma polar de la función de onda y aparece por primera vez en la literatura en la referencia [1]. La función $\Psi(t, \mathbf{x})$ al ser una función compleja es difícil de representar gráficamente, en cambio las funciones $R(t, \mathbf{x})$ y $S(t, \mathbf{x})$ al ser funciones reales pueden ser representadas gráficamente sin mucha dificultad.

Ahora introduciremos el cambio (1.1) en la ecuación de Schrödinger, para esto calculamos las siguientes derivadas:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Psi &= \left[\nabla^2 R - \frac{1}{\hbar^2} R(\nabla S)^2 + \frac{i}{\hbar} R \nabla^2 S + \frac{2i}{\hbar} \nabla R \cdot \nabla S \right] \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \\ \partial_t \Psi &= \left[\partial_t R + \frac{i}{\hbar} R \partial_t S \right] \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}\end{aligned}$$

Al reemplazar estas derivadas en la ecuación de Schrödinger obtenemos:

$$\begin{aligned}-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\nabla^2 R - \frac{1}{\hbar^2} R(\nabla S)^2 + \frac{i}{\hbar} R \nabla^2 S + \frac{2i}{\hbar} \nabla R \cdot \nabla S \right] \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \\ + V R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} + \frac{\hbar}{i} \left[\partial_t R + \frac{i}{\hbar} R \partial_t S \right] \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} = 0\end{aligned}$$

Como $\exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \neq 0$ para cualquier valor de (t, \mathbf{x}) , entonces obtenemos la ecuación compleja:

$$R \left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V + \partial_t S \right] - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R - i\hbar \left[\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R \right] = 0$$

De esta ecuación compleja se deducen las siguientes ecuaciones reales:

$$\boxed{\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0} \quad (1.2)$$

$$\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R = 0 \quad (1.3)$$

Estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación de Schrödinger. En este trabajo consideraremos \hbar como un parámetro real. Nótese que las ecuaciones (1.2) y (1.3) son inalterables ante un cambio de \hbar por $-\hbar$, luego sus soluciones $R(t, \mathbf{x})$ y $S(t, \mathbf{x})$ también permanecerán inalterables ante este cambio como se podrá notar concretamente en los ejemplos presentados en los siguientes capítulos. Por esto es suficiente considerar el parámetro \hbar positivo o cero. Asimismo debemos notar que los campos $R(t, \mathbf{x})$ y $S(t, \mathbf{x})$ dependen paramétricamente de \hbar .

La ecuación (1.2), que convenientemente llamaremos ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada, difiere de la ecuación de Hamilton-Jacobi por la adición del término que aquí llamaremos "potencial ficticio" $V_f(t, \mathbf{x})$:

$$V_f(t, \mathbf{x}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R(t, \mathbf{x})}{R(t, \mathbf{x})} \quad (1.4)$$

Como consecuencia de que $R(t, \mathbf{x})$ depende del parámetro \hbar , el "potencial ficticio" también depende del parámetro \hbar .

Aquí construiremos funciones de onda con la propiedad de anular V_f cuando se asigna el valor $\hbar = 0$, con el objeto de poder pasar de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada a la ecuación de Hamilton-Jacobi al cambiar el parámetro \hbar . **Así cuando hacemos $\hbar = 0$ el campo $S(t, \bar{x})$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, de esta manera los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$, que en principio describen la dinámica cuántica, pasan “continuamente” a un caso clásico.**

Ahora mostraremos que la ecuación (1.3) es una ecuación de conservación. Multiplicando (1.3) por $2R$:

$$\frac{1}{m}R^2\nabla^2S + \frac{2}{m}R\nabla R \cdot \nabla S + 2R\partial_t R = 0$$

luego acomodando adecuadamente los términos, y utilizando propiedades del operador ∇ , tenemos:

$$R^2\nabla \cdot \left(\frac{\nabla S}{m} \right) + (\nabla R^2) \cdot \frac{\nabla S}{m} + \partial_t R^2 = 0$$

$$\boxed{\nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) + \partial_t R^2 = 0} \quad (1.5)$$

obteniendo así la ecuación de conservación. A continuación veremos que esta ecuación de conservación obtenida a partir de (1.3) es la conocida ecuación de conservación de la densidad probabilidad de la mecánica cuántica. Para esto recordemos que la densidad de probabilidad ρ y la densidad de corriente de probabilidad \bar{J} en la mecánica cuántica están definidas por:

$$\rho = \Psi^* \Psi$$

$$\bar{J} = \frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*)$$

De (1.1) es fácil notar que $\rho(t, \bar{x}) = R^2(t, \bar{x})$. Ahora para la densidad de corriente de probabilidad, también de (1.1) obtenemos:

$$\nabla \Psi = \left(\nabla R + \frac{i}{\hbar} R \nabla S \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S(t, \bar{x}) \right\} \implies \Psi^* \nabla \Psi = R \nabla R + \frac{i}{\hbar} R^2 \nabla S$$

$$\nabla \Psi^* = \left(\nabla R - \frac{i}{\hbar} R \nabla S \right) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} S(t, \bar{x}) \right\} \implies \Psi \nabla \Psi^* = R \nabla R - \frac{i}{\hbar} R^2 \nabla S$$

luego:

$$\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^* = \frac{2i}{\hbar} R^2 \nabla S$$

$$\frac{\hbar}{2mi} (\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*) = R^2 \frac{\nabla S}{m}$$

Así tenemos que:

$$\bar{J}(t, \bar{x}) = R^2(t, \bar{x}) \frac{\nabla S(t, \bar{x})}{m}$$

Esto termina de verificar que (1.5) es la ecuación de conservación de la densidad de probabilidad cuántica escrita en términos de $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$.

Como ya señalamos, los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ dependen del parámetro \hbar , por lo tanto la densidad de probabilidad $\rho(t, \bar{x})$ y la densidad de corriente de probabilidad $\bar{J}(t, \bar{x})$

también dependen del parámetro \hbar . Además debemos notar que la ecuación de conservación de la probabilidad escrita en la forma (1.5) es válida para cualquier valor del parámetro \hbar , en particular para $\hbar = 0$, lo que lleva la conservación de la probabilidad cuántica a un caso clásico.

1.1. Interpretación probabilística de la función de onda. Función de onda inicial

En la interpretación probabilística de la función de onda tenemos que esta representa equivalentementeⁱⁱⁱ:

- i) A una partícula en un número muy grande de experimentos realizados sucesivamente bajo las mismas condiciones (“casi” la misma posición inicial, “casi” la misma velocidad o momentum inicial y sometida al mismo campo de fuerza). Debido a que experimentalmente es imposible preparar a la partícula exactamente con los mismos posición y momentum, de modo que es inevitable tener una distribución de valores para estas cantidades. Esto es independiente del modelo cuántico o del clásico.
- ii) A muchas partículas, que no interactúan entre sí, en un único experimento. Entonces para el conjunto de partículas tendremos distribuciones de posiciones y momentums.

Normalizando estas distribuciones de posición y momentum, obtenidas en cualquiera de los dos casos, se les interpreta como (densidades de) probabilidad para la posición y el momentum. En la dinámica cuántica, la densidad de probabilidad de posición en cualquier instante está dada por $\|\Psi(t, x)\|^2$, y la densidad de probabilidad de momentum (en el espacio de momentum) en cualquier instante está dada por $\|\Phi(t, p)\|^2$, donde $\Phi(t, p)$ es la transformada de Fourier de $\Psi(t, x)$.

En cualquiera de los dos casos, ya sea una partícula en muchos experimentos o muchas partículas en un solo experimento, las densidades de probabilidad iniciales $\|\Psi(0, x)\|^2$ y $\|\Phi(0, \bar{p})\|^2$ son preparadas por el experimentador.

Dentro del modelo matemático ambas densidades quedan determinadas a partir de la elección de la función de onda inicial $\Psi(0, x)$; esta función de onda inicial puede ser elegida casi libremente, salvo algunas restricciones que vienen de su interpretación física tales como continuidad, diferenciabilidad, valores medio reales y la condición de normalización:

$$\int_W \|\Psi(t, x)\|^2 d^n x = 1$$

donde $W \subset \mathbb{R}^n$ es la región del espacio donde se lleva a cabo el proceso físico.

En este trabajo analizaremos la dinámica de partículas que desarrollan su movimiento en 1, 2 ó 3 dimensiones ($n = 1, 2$ ó 3), sometidas a potenciales que no dependen del tiempo

ⁱⁱⁱLa equivalencia entre los items i) y ii) es una forma de expresar el principio ergódico

1.1. Interpretación probabilística de la función de onda. Función de onda inicial 7

y la región donde se desarrolla el proceso físico es todo el espacio \mathbb{R}^n . Para los problemas que presentaremos utilizaremos como funciones de onda iniciales a paquetes de onda, esto es debido a que:

- Las funciones de onda monocromáticas o monoenergéticas^{iv} son entelequias matemáticas auxiliares y, por si solas, no tienen significado físico. Además, si bien estas funciones de onda monocromáticas sirven para construir soluciones generales de la ecuación de Schrödinger; no son útiles para la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada, pues esta es una ecuación no lineal.
- La ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada considera las interacciones de partículas físicas y sus consecuencias, que cuánticamente son representadas por paquetes de onda.

Como es usual, para representar partículas usaremos como funciones de onda inicial a paquetes de ondas gaussianos de la forma^v:

$$\Psi(0, \bar{x}) = B \exp \left\{ -a\bar{x}^2 + \frac{i\bar{b} \cdot \bar{x}}{\hbar} \right\} \quad (1.6)$$

donde a y $B \in \mathbb{R}^+$, $\bar{b} \in \mathbb{R}^n$. Ahora pasaremos a detallar algunas características de esta función de onda inicial.

Calculando la densidad de probabilidad de posición para la función de onda inicial (1.6), obtenemos:

$$\|\Psi(0, \bar{x})\|^2 = B^2 \exp \{ -2a\bar{x}^2 \}$$

Verificamos así que la densidad de probabilidad inicial de posición es una gaussiana centrada en el origen de \mathbb{R}^n . De la condición de normalización obtenemos el valor de la constante B :

$$\int_{\mathbb{R}^n} B^2 \exp \{ -2a\bar{x}^2 \} d^n x = 1 \implies B = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{n/4}$$

Para hallar la densidad de probabilidad inicial de momentum, hallamos la transformada de Fourier de (1.6):

$$\begin{aligned} \Phi(0, \bar{p}) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi(0, \bar{x}) \exp \left\{ -\frac{i\bar{p} \cdot \bar{x}}{\hbar} \right\} d^n x \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} B \exp \left\{ -a\bar{x}^2 + \frac{i\bar{b} \cdot \bar{x}}{\hbar} \right\} \exp \left\{ -\frac{i\bar{p} \cdot \bar{x}}{\hbar} \right\} d^n x \\ &= \frac{B}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ -a\bar{x}^2 + \frac{i(\bar{b} - \bar{p}) \cdot \bar{x}}{\hbar} \right\} d^n x \end{aligned}$$

^{iv}Para potenciales independientes del tiempo $V(\bar{x})$, se obtienen ondas monocromáticas de la forma $\psi_n(t, \bar{x}) = \phi_n(\bar{x}) \exp \frac{iE_n t}{\hbar}$, donde $\hat{H}\psi_n = E_n\phi_n$. Matemáticamente estas funciones de onda monocromáticas dan el espectro de energías posibles del sistema físico, las cuales se pueden obtener al realizar una medición de la energía del sistema.

^vLa parte imaginaria del exponente es necesaria para garantizar que los valores medios sean reales

$$\begin{aligned}\Phi(0, \bar{p}) &= \frac{B \exp\left\{-\frac{(\bar{b}-\bar{p})^2}{4a\hbar^2}\right\}}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{-a\left[\bar{x} - \frac{i(\bar{b}-\bar{p})}{2a\hbar^2}\right]^2\right\} d^n x \\ &= \frac{B \exp\left\{-\frac{(\bar{b}-\bar{p})^2}{4a\hbar^2}\right\}}{(2\pi\hbar)^{n/2}} \times \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2}\end{aligned}$$

así obtenemos:

$$\Phi(0, \bar{p}) = \frac{B}{(2a\hbar)^{n/2}} \exp\left\{-\frac{(\bar{b}-\bar{p})^2}{4a\hbar^2}\right\}$$

Calculando la densidad de probabilidad de momentum para la función de onda inicial (1.6), obtenemos:

$$\|\Phi(0, \bar{p})\|^2 = \frac{B^2}{(2a\hbar)^n} \exp\left\{-\frac{(\bar{b}-\bar{p})^2}{2a\hbar^2}\right\}$$

Verificamos así que la densidad de probabilidad inicial de momentum es una gaussiana centrada en el punto \bar{b} del espacio de momentums.

Ahora vamos a calcular el valor medio de los operadores \widehat{X} y \widehat{P} para la función de onda inicial (1.6). Para el operador \widehat{X} tenemos:

$$\langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_0} = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{x} \|\Psi(0, \bar{x})\|^2 d^n x = B^2 \int_{\mathbb{R}^n} \bar{x} \exp\{-2a\bar{x}^2\} d^n x$$

Pero $\int_{\mathbb{R}^n} \bar{x} \exp\{-2a\bar{x}^2\} d^n x = \bar{0}$, luego:

$$\langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_0} = \bar{0}$$

Para el operador \widehat{P} tenemos:

$$\begin{aligned}\langle \widehat{P} \rangle_{\Psi_0} &= \int_{\mathbb{R}^n} \Psi^*(0, \bar{x}) \frac{\hbar}{i} \nabla \Psi(0, \bar{x}) d^n x = \int_{\mathbb{R}^n} B^2 \left(-\frac{2a\hbar\bar{x}}{i} + \bar{b}\right) \exp\{-2a\bar{x}^2\} d^n x \\ &= 2aB^2 i \hbar \langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_0} + \bar{b} \int_{\mathbb{R}^n} B^2 \exp\{-2a\bar{x}^2\} d^n x\end{aligned}$$

como $\langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_0} = \bar{0}$ y $\int_{\mathbb{R}^n} B^2 \exp\{-2a\bar{x}^2\} d^n x = 1$, obtenemos:

$$\langle \widehat{P} \rangle_{\Psi_0} = \bar{b}$$

Como los valores medios iniciales $\langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_0}$ y $\langle \widehat{P} \rangle_{\Psi_0}$ son números reales, queda asegurado que estamos trabajando con una buena función de onda inicial.

1.2. Valores medios de algunos operadores cuánticos en términos de R y S

Ahora calcularemos los valores medios de algunos operadores cuánticos, para ello realizaremos el cambio $\Psi = R \exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ en las expresiones conocidas para calcular dichos

valores medios. En esta sección nuevamente consideraremos que el proceso físico se realiza en cierta región W del espacio. En dicha región W se debe satisfacer la condición de normalización:

$$\int_W R^2(t, \bar{x}) d^n x = 1$$

Dada la interpretación de densidad de probabilidad de la función R^2 y de densidad de corriente de probabilidad de la función $R^2 \frac{\nabla S}{m}$, entonces ambas densidades deben ser nulas fuera de la región donde se realiza el proceso físico; esto se logra imponiendo condiciones de contorno únicamente sobre el campo R . La condición requerida para el campo R es la siguiente:

- $R(t, \bar{x}) = 0$ para $\bar{x} \notin W$ y todo t . Esta condición garantiza que la función de onda, y por lo tanto la densidad de probabilidad de posición, sea nula fuera de la región W . Además debido a la continuidad de R , esta condición también debe ser válida sobre el contorno ∂W de la región W , garantizando así que en el contorno ∂W la densidad de corriente de probabilidad también es nula^{vi}.

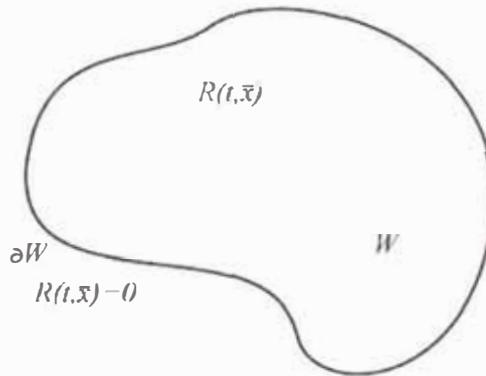


Figura 1.1 – Esquema de la región donde se realiza el proceso físico, donde se está considerando que en ∂W los campos se anulan.

Ahora pasaremos a calcular el valor medio de algunos operadores cuánticos.

1.2.1. Operador de posición

El valor medio del operador de posición está definido en términos de Ψ por:

$$\langle \widehat{X} \rangle_\Psi = \int_W \Psi^* \bar{x} \Psi d^n x = \int_W \bar{x} \Psi^* \Psi d^n x$$

Reemplazando $\Psi = R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}$, tenemos que el valor medio del operador \widehat{X} se puede escribir:

$$\boxed{\langle \widehat{X} \rangle_\Psi = \int_W \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^n x} \tag{1.7}$$

Esta expresión confirma la interpretación de $R^2(t, \bar{x})$ como densidad de probabilidad de posición.

^{vi}Usualmente la región donde se realiza el proceso físico es todo el espacio, de modo que esta condición se traduciría en $R(t, \bar{x}) = 0$ para \bar{x} muy alejados de la zona donde se lleva a cabo el proceso físico.

1.2.2. Operador de momentum

El valor medio del operador de momentum está definido en términos de Ψ por:

$$\langle \hat{P} \rangle_\Psi = \int_W \Psi^* \hat{P} \Psi d^n x$$

donde $\hat{P} = \frac{\hbar}{i} \nabla$. Si realizamos el cambio $\Psi = R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}$ podemos notar:

$$\begin{aligned} \hat{P} \Psi &= \frac{\hbar}{i} \nabla \left(R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \right) \\ &= \left(R \nabla S + \frac{\hbar}{i} \nabla R \right) \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_\Psi &= \int_W R \exp \left\{ -\frac{iS}{\hbar} \right\} \left(R \nabla S + \frac{\hbar}{i} \nabla R \right) \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} d^n x \\ &= \int_W R^2 \nabla S d^n x + \frac{\hbar}{i} \int_W R \nabla R d^n x \\ &= \int_W R^2 \nabla S d^n x + \frac{\hbar}{i} \int_W \nabla \left(\frac{R^2}{2} \right) d^n x \end{aligned}$$

Por otro lado, como una consecuencia del teorema de la divergencia, obtenemos:

$$\int_W \nabla \left(\frac{R^2}{2} \right) d^n x = \int_{\partial W} \frac{R^2}{2} d\bar{a}$$

además de la condición de contorno sobre R tenemos que $\int_{\partial W} \frac{R^2}{2} d\bar{a} = \bar{0}$, así el valor medio de \hat{P} se puede escribir:

$$\boxed{\langle \hat{P} \rangle_\Psi = \int_W R^2 \nabla S d^n x} \tag{1.8}$$

En esta expresión, el campo matemático $\nabla S(t, \bar{x})$ se interpretado como el campo de momentum para las partículas. Es decir, si en un instante dado t_0 colocamos una partícula en una determinada posición \bar{x}_0 esta adquiere el momentum $\nabla S(t_0, \bar{x}_0)$. De este modo para las partículas el producto $R^2(t, \bar{x}) \nabla S(t, \bar{x})$ es la densidad de momentum en el espacio de coordenadas. En la mecánica cuántica usual, es conocida la expresión para el valor medio del operador de momentum en términos de la densidad de probabilidad de momentum en el espacio de momentum. Así tenemos dos expresiones, con sus respectivas interpretaciones físicas, para el valor medio del operador de momentum; en ciertos casos podría ser conveniente trabajar con ambas interpretaciones.

En mecánica clásica, si $S_0(t, \bar{x})$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces $\nabla S_0(t, \bar{x})$ es el campo de momentum para las partículas. Así notamos que $\nabla S(t, \bar{x})$ y $\nabla S_0(t, \bar{x})$ se comportan similarmente. En mecánica clásica el campo $\nabla S_0(t, \bar{x})$ permite hallar la trayectoria que va a seguir la partícula.

1.2.3. Operador de energía

El valor medio del operador de energía está definido en términos de Ψ por:

$$\langle \widehat{H} \rangle_\Psi = \int_W \Psi^* \widehat{H} \Psi d^n x$$

donde $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \widehat{V}$, y \widehat{V} es el operador de energía potencial. Si realizamos el cambio $\Psi = R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}$, tenemos:

$$\widehat{H} \Psi = \left[\frac{1}{2m} R (\nabla S)^2 + V R - \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R - \frac{\hbar i}{2m} R \nabla^2 S - \frac{\hbar i}{m} \nabla R \cdot \nabla S \right] \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \Psi^* \widehat{H} \Psi &= \frac{1}{2m} R^2 (\nabla S)^2 + V R^2 - \frac{\hbar^2}{2m} R \nabla^2 R - \frac{\hbar i}{2m} R^2 \nabla^2 S - \frac{\hbar i}{m} R \nabla R \cdot \nabla S \\ &= R^2 \left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] - \frac{\hbar i}{2m} [\nabla \cdot (R^2 \nabla S)] \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{H} \rangle_\Psi &= \int_W \left\{ R^2 \left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] - \frac{\hbar i}{2m} [\nabla \cdot (R^2 \nabla S)] \right\} d^n x \\ &= \int_W R^2 \left[\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + V - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \right] d^n x - \frac{\hbar i}{2m} \int_W [\nabla \cdot (R^2 \nabla S)] d^n x \end{aligned}$$

Utilizando la ecuación de Hamilton-Jacobi perturbada (1.2) cambiamos la primera integral, así obtenemos:

$$\langle \widehat{H} \rangle_\Psi = \int_W R^2 (-\partial_t S) d^n x - \frac{\hbar i}{2m} \int_W [\nabla \cdot (R^2 \nabla S)] d^n x$$

Por otro lado, para la segunda integral, del teorema de la divergencia obtenemos:

$$\int_W \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) d^n x = \int_{\partial W} R^2 \frac{\nabla S}{m} \cdot d\vec{a}$$

y de las condiciones de contorno sobre R tenemos que $\int_{\partial W} R^2 \frac{\nabla S}{m} \cdot d\vec{a} = 0$, con esto el valor medio del operador \widehat{H} se puede escribir:

$$\boxed{\langle \widehat{H} \rangle = \int_W R^2 (-\partial_t S) d^n x} \tag{1.9}$$

En esta expresión el campo matemático $-\partial_t S(t, \vec{x})$ se interpreta como el campo de energía para las partículas. Es decir, si en un instante dado t_0 colocamos una partícula en una determinada posición \vec{x}_0 esta adquiere la energía $-\partial_t S(t_0, \vec{x}_0)$. De modo que el producto $R^2(t, \vec{x})(-\partial_t S(t, \vec{x}))$ es la densidad de energía en el espacio de coordenadas. En mecánica clásica, si $S_0(t, \vec{x})$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, entonces $-\partial_t S_0(t, \vec{x})$ es el campo de energía para las partículas. Así notamos que $-\partial_t S(t, \vec{x})$ y $-\partial_t S_0(t, \vec{x})$ se comportan similarmente.

1.2.4. Operador de momentum angular

El valor medio del operador de momentum angular está definido en términos de Ψ por^{vii}:

$$\langle \hat{L} \rangle_{\Psi} = \int_W \Psi^* \hat{L} \Psi d^3x$$

donde $\hat{L} = \bar{x} \times \frac{\hbar}{i} \nabla$. Si realizamos el cambio $\Psi = R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\}$, podemos notar que:

$$\begin{aligned} \hat{L} \Psi &= \bar{x} \times \frac{\hbar}{i} \nabla \left(R \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \right) \\ &= \left(R \bar{x} \times \nabla S + \frac{\hbar}{i} \bar{x} \times \nabla R \right) \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \langle \hat{L} \rangle_{\Psi} &= \int_W R \exp \left\{ \frac{-iS}{\hbar} \right\} \left(R \bar{x} \times \nabla S + \frac{\hbar}{i} \bar{x} \times \nabla R \right) \exp \left\{ \frac{iS}{\hbar} \right\} d^3x \\ &= \int_W R^2 (\bar{x} \times \nabla S) d^3x + \frac{\hbar}{i} \int_W \bar{x} \times (R \nabla R) d^3x \\ &= \int_W R^2 (\bar{x} \times \nabla S) d^3x + \frac{\hbar}{2i} \int_W \bar{x} \times \nabla R^2 d^3x \end{aligned}$$

Hasta aquí este valor medio tiene un término imaginario, el cual es nulo como veremos a continuación. Para este propósito escribiremos una integral del tipo $\int_W \bar{x} \times \nabla f d^3x$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_W \bar{x} \times \nabla f d^3x &= \int_W \left\{ \sum_{i,j} x_i \partial_j f \bar{e}_i \times \bar{e}_j \right\} d^3x \\ &= \int_W \left\{ \sum_{i,j} [\partial_j (x_i f) - \delta_{ij} f] \bar{e}_i \times \bar{e}_j \right\} d^3x \\ &= \int_W \left\{ \sum_{i,j} \partial_j (x_i f) \bar{e}_i \times \bar{e}_j \right\} d^3x - \int_W \left\{ \sum_{i,j} \delta_{ij} f \bar{e}_i \times \bar{e}_j \right\} d^3x \\ &= \sum_{i,j} \bar{e}_i \times \int_W \partial_j (x_i f) \bar{e}_j d^3x \\ &= \sum_i \bar{e}_i \times \int_W \nabla (x_i f) d^3x \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de de la divergencia, obtenemos:

$$\int_W \nabla (x_i f) d^3x = \int_{\partial W} x_i f d\bar{a}$$

entonces:

$$\int_W \bar{x} \times \nabla f d^3x = \sum_i \bar{e}_i \times \int_{\partial W} x_i f d\bar{a}$$

^{vii} En esta subsección consideramos que el movimiento del sistema físico se realiza en $W \subset \mathbb{R}^3$

Luego, aplicando este resultado al término imaginario en la expresión de $\langle L \rangle$ tenemos:

$$\int_W \mathbf{x} \times \nabla R^2 d^3x = \sum_i e_i \times \int_{\partial W} x_i R^2 d^3x$$

y de la condición de contorno de R tenemos que $\int_W \mathbf{x} \times \nabla R^2 d^3x = 0$, así el valor medio de L se puede escribir:

$$\langle \hat{L} \rangle_\Psi = \int_V R^2 (\bar{\mathbf{x}} \times \nabla S) d^n x \quad (1.10)$$

Esta expresión ratifica la interpretación de ∇S como campo de momentum para la partícula, así $\mathbf{x} \times \nabla S$ es el campo de momentum angular y $R^2 [\mathbf{x} \times \nabla S]$ es la densidad de momentum angular.

1.3. Interpretación sugerida para esta representación de la dinámica cuántica

Los resultados obtenidos en la sección anterior muestran un comportamiento similar entre el campo $S(t, \mathbf{x})$, solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada, y el campo $S_0(t, \mathbf{x})$, solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. En este contexto, el campo $\nabla S(t, \mathbf{x})$ se comporta como el campo de momentum para la partícula.

La ecuación de conservación (1.5) es una expresión casi directa de la conservación de la cantidad de partículas, teniendo presente que nuestro sistema físico no posee fuentes que generen partículas ni vertederos que atrapen partículas. Así, la ecuación de conservación (1.5) es también consistente con la interpretación de $\frac{\nabla S(t, \bar{\mathbf{x}})}{m}$ como el campo de velocidades de las partículas, y por lo tanto consistente con la interpretación de $\nabla S(t, \mathbf{x})$ como campo de momentum para las partículas, que rige el movimiento de ellas y por lo tanto la evolución la densidad de probabilidad $R^2(t, \mathbf{x})$.

La dinámica cuántica trata de la evolución de la densidad de probabilidad de posición de una partícula (o equivalentemente de muchas partículas como mencionamos en la sección 1.1). La dinámica cuántica usualmente viene dada por la ecuación de Schrödinger, esta ecuación da la evolución la función de onda y de allí directamente la evolución de densidad de probabilidad.

Como ya mencionamos, si realizamos el cambio $\Psi = R \exp\left\{\frac{iS}{\hbar}\right\}$ en la ecuación de Schrödinger, ahora la dinámica cuántica es gobernada por las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Perturbada (1.2) y de conservación de la probabilidad (1.5), que a continuación listamos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + V + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} &= 0 \\ \partial_t R^2 + \nabla \cdot \left(R^2 \frac{\nabla S}{m} \right) &= 0 \end{aligned}$$

De acuerdo con estas ecuaciones, y para explicar la evolución de la densidad de probabilidad tomaremos la siguiente interpretación^{viii}: Consideraremos que la ecuación de

^{viii}Esta interpretación esta basada en la interpretación presentada en la referencia [2]

Hamilton-Jacobi-Perturbada (1.2) es “realmente” una ecuación del tipo de Hamilton-Jacobi^x, en el sentido en que da la dinámica del sistema físico al cual describe de acuerdo con el formalismo de Hamilton-Jacobi.

De este modo, el campo $\nabla S(t, x)$ sería “realmente” el campo de momentum para las partículas. Así $\nabla S(t, x)$ permite hallar trayectorias $\xi(t)$ para las partículas, las que llamaremos trayectorias cuánticas, las cuales son soluciones de la ecuación:

$$\dot{\xi} = \frac{\nabla S(t, \bar{\xi})}{m} \quad (1.11)$$

Estas trayectorias son otra manera de visualizar la evolución de la densidad de probabilidad, pues dado que la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ es una expresión de la distribución espacial de las partículas y estas deben seguir las trayectorias soluciones de (1.11).

Aquí construiremos funciones de onda para las cuales el “potencial ficticio” (1.4) se anule cuando elijamos $\hbar = 0$. Señalaremos con un subíndice 0 en los campos R y S cuando hallamos elegido $\hbar = 0$. Entonces haciendo $\hbar = 0$ en las ecuaciones de la dinámica obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2m} (\nabla S_0)^2 + V + \partial_t S_0 &= 0 \\ \partial_t R_0^2 + \nabla \cdot \left(R_0^2 \frac{\nabla S_0}{m} \right) &= 0 \end{aligned}$$

De aquí notamos que $S_0(t, x)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi; de este modo las soluciones de la ecuación de Schrödinger pasan a un caso clásico. Así tenemos una densidad de probabilidad de posición clásica $R_0^2(t, x)$, cuya evolución está dada por el campo de momentum clásico $\nabla S_0(t, x)$.

Al igual que en el caso cuántico, las trayectorias clásicas $\xi_0(t)$ soluciones de la ecuación:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{\nabla S_0(t, \bar{\xi}_0)}{m} \quad (1.12)$$

dan una presentación alternativa de la evolución de la densidad de probabilidad clásica $R_0^2(t, x)$, en el mismo sentido que para el caso de $R^2(t, x)$, ya mencionado líneas arriba.

En el formalismo de Hamilton-Jacobi, los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ son ortogonales al rastro de las partículas en cada instante, como se muestra en la figura 1.2^x. Así estos frentes de onda de $S_0(t, x)$ también presentan otra característica de la evolución de la densidad de probabilidad clásica $R_0^2(t, x)$.

Para la interpretación de la dinámica cuántica presentada aquí, también podemos utilizar esta herramienta del formalismo de Hamilton-Jacobi. De este modo, los frentes de onda del campo $S(t, x)$ son ortogonales al rastro “cuántico” de las partículas. Así los frentes de onda del campo $S(t, x)$ dan otra característica de la evolución de la densidad de probabilidad cuántica $R^2(t, x)$.

En los siguientes capítulos presentaremos sistemas físicos en los cuales aplicaremos la interpretación presentada aquí para explicar la dinámica de los mismos. Para hallar

^xNo olvidar que la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada, para $\hbar = 0$ pasa a ser la ecuación de Hamilton-Jacobi

^xVer Apéndice A

los campos $S(t, x)$ y $R(t, x)$ no resolveremos directamente las ecuaciones (1.2) y (1.3)^{x1}, sino a partir de la función de onda inicial y utilizando el método del propagador de Feynman obtendremos la función de onda en cualquier instante posterior. De esta función de onda despejaremos las funciones $S(t, \bar{x})$ y $R(t, x)$ de acuerdo con (1.1). Utilizamos aquí el método del propagador de Feynman sólo por conveniencia operativa. El objetivo de este trabajo no es calcular los propagadores en sí, sino utilizarlos para calcular la función de onda; estos propagadores se pueden encontrar, entre otros libros, en la referencia [3].

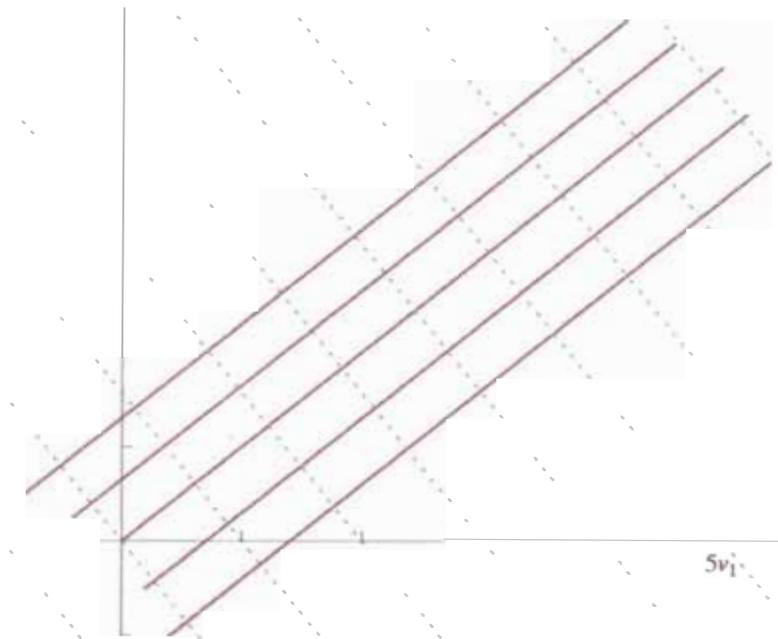


Figura 1.2 – Frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ y rastros clásicos para la partícula libre en 2 dimensiones. Las líneas rojas son los rastros de las partículas, las líneas grises son los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$.

^{x1}Si bien hemos desarrollado nuestra interpretación tomando a la ecuación de conservación (1.5) como parte central; al momento de verificar la validez de las soluciones, y para evitar cálculos más engorrosos de lo necesario, utilizaremos la ecuación (1.3). No hay que olvidar que las ecuaciones (1.3) y (1.5) son equivalentes.

CAPITULO 2

Partícula libre

En este capítulo desarrollaremos la interpretación sugerida en el capítulo anterior para el caso de la partícula libre, trataremos tanto el problema unidimensional como el tridimensional por que ellos permitirán notar diferentes aspectos. El objetivo principal es hallar analíticamente los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$, y explicar el comportamiento del sistema utilizando estos campos. Así es conveniente la presentación de numerosas gráficas para cumplir con tal objetivo.

2.1. Partícula libre unidimensional

La ecuación de Schrödinger para este problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \Psi + \frac{\hbar}{i} \partial_t \Psi = 0$$

Como ya mencionamos, para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda esta dada por:

$$\Psi(t, x) = \int K(t, x, 0, x_0) \Psi(0, x_0) dx_0$$

donde $K(t, x, 0, x_0)$ es el propagador de Feynman del problema. El propagador para la partícula libre unidimensional es:

$$K(t, x, 0, x_0) = \left(\frac{m}{2\pi i \hbar t} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{m}{2i \hbar t} (x - x_0)^2 \right\}$$

Definiendo $A^2 = \frac{m}{2i \hbar t}$, escribimos el propagador en la forma:

$$K(t, x, 0, x_0) = \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2 (x - x_0)^2 \right\}$$

2.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, x) = B \exp \left\{ -ax^2 + \frac{ibx}{\hbar} \right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{1/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_0} = 0$ y $\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_0} = b$.

Aplicando el método del propagador, calculamos la función de onda en cualquier instante posterior:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2(x - x_0)^2 \right\} \times B \exp \left\{ -ax_0^2 + i\frac{bx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \\ \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2(x - x_0)^2 - ax_0^2 + i\frac{bx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

En el exponente:

$$\begin{aligned} -A^2(x - x_0)^2 - ax_0^2 + \frac{ibx}{\hbar} &= -A^2x_0^2 + 2A^2xx_0 - A^2x^2 - ax_0^2 + i\frac{bx_0}{\hbar} \\ &= -A^2x^2 - (A^2 + a)x_0^2 + \left(2A^2x + i\frac{b}{\hbar} \right) x_0 \\ &= -A^2x^2 - A^2 \left(1 + \frac{a}{A^2} \right) x_0^2 + 2A^2 \left(x + \frac{ib}{2\hbar A^2} \right) x_0 \end{aligned}$$

definiendo $N^2 = 1 + a/A^2 = 1 + i\alpha t$, donde $\alpha = 2a\hbar/m$; y $M = x + ib/2\hbar A^2 = x - bt/m$, obtenemos:

$$\begin{aligned} -A^2(x - x_0)^2 - ax_0^2 + \frac{ibx}{\hbar} &= -A^2x^2 - A^2N^2x_0^2 + 2A^2Mx_0 \\ &= -A^2x^2 - A^2 \left[N^2x_0^2 - 2 \left(\frac{M}{N} \right) (Nx_0) + \frac{M^2}{N^2} \right] + \frac{A^2M^2}{N^2} \\ &= A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) - A^2 \left(Nx_0 - \frac{M}{N} \right)^2 \\ &= A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) - A^2N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Luego al reemplazar esta expresión equivalente del exponente en (2.1), tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) - A^2N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\ &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\ &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) \right\} \times \frac{\pi^{1/2}}{AN} \\ &= \frac{B}{N} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \right) \right\} \end{aligned}$$

Finalmente al reemplazar A , N y M en la expresión anterior obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{(1 + i\alpha t)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{(x - \frac{bt}{m})^2}{1 + i\alpha t} - x^2 \right] \right\} \quad (2.2)$$

Ahora para escribir esta función de onda en la forma (1.1) y obtener $R(t, x)$ y $S(t, x)$, debemos separar el exponente de la función exponencial en sus partes real e imaginaria, así como escribir el denominador $(1 + i\alpha t)^{1/2}$ en su forma polar. Entonces, manipulando el exponente:

$$\begin{aligned} & \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{(x - \frac{bt}{m})^2}{1 + i\alpha t} - x^2 \right] \\ &= -\frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(x - \frac{bt}{m})^2(1 - i\alpha t)}{1 + \alpha^2 t^2} - x^2 \right] \\ &= -\frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(x - \frac{bt}{m})^2}{1 + \alpha^2 t^2} - x^2 - \frac{i\alpha t}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] \\ &= -\frac{m\alpha}{2\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 - \frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(x - \frac{bt}{m})^2}{1 + \alpha^2 t^2} - x^2 \right] \\ &= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 - \frac{im}{2\hbar t(1 + \alpha^2 t^2)} \left[x^2 - \frac{2bxt}{m} + \frac{b^2 t^2}{m^2} - x^2 - \alpha^2 t^2 x^2 \right] \\ &= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{i}{\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left[bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right] \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $(1 + i\alpha t)^{1/2} = (1 + \alpha^2 t^2)^{1/4} \exp \left\{ \frac{i}{2} \arctan(\alpha t) \right\}$. Luego al reemplazar estos resultados en (2.2), obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left(bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right) - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \right] \right\}$$

De aquí identificamos los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$:

$$S(t, x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right] - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \quad (2.3)$$

$$R(t, x) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \quad (2.4)$$

donde $\alpha = 2a\hbar/m$; $B = (2a/\pi)^{1/4}$. Dado que α depende de \hbar , aquí notamos que $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora verificaremos que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ obtenidos satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para esto calculamos las siguientes derivadas (y para simplificar, escribimos $Q = 1 + \alpha^2 t^2$):

$$\begin{aligned}\partial_x R &= -\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right) R \\ \partial_t R &= \left[-\frac{2a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{2ab}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \right] R \\ \partial_x^2 R &= \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] R \\ \partial_x S &= \frac{1}{Q} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right) \\ \partial_t S &= -\frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right] + \frac{1}{Q} \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - \frac{b^2}{2m} \right) - \frac{a\hbar^2}{mQ} \\ \partial_x^2 S &= \frac{4a^2 \hbar^2 t}{mQ}\end{aligned}$$

Luego en la ecuación (1.2) tenemos:

$$\begin{aligned}& \frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} \\ &= \frac{1}{2mQ^2} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right)^2 - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right) \\ & \quad + \frac{1}{Q} \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - \frac{b^2}{2m} \right) - \frac{a\hbar^2}{mQ} - \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right)^2 - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m} \left(bx - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t x^2}{m} \right) \right. \\ & \quad \left. - 2a^2 \hbar^2 \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{b^2}{2} + \frac{8a^4 \hbar^4 t^2 x^2}{m^2} + \frac{4a^2 \hbar^2 t b x}{m} - \frac{8a^2 \hbar^2 t b x}{m} + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2 b^2}{m^2} - \frac{16a^4 \hbar^4 t^2 x^2}{m^2} \right. \\ & \quad \left. - 2a^2 \hbar^2 x^2 + \frac{4a^2 \hbar^2 t b x}{m} - \frac{2a^2 \hbar^2 t^2 b^2}{m^2} \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) - 2a^2 \hbar^2 x^2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} \right) \\ &= \frac{1}{mQ} \left(\frac{b^2}{2} - 2a^2 \hbar^2 x^2 \right) + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} \right) = 0\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.2).

Ahora, para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R \\
 &= \frac{R}{2m} \left(\frac{4a^2 \hbar^2 t}{mQ} \right) + \frac{1}{m} \left[-\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right) R \right] \left[\frac{1}{Q} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right) \right] \\
 &+ \left[-\frac{2a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{2ab}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \right] R \\
 &= \frac{2aR}{mQ^2} \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 - \left(x - \frac{bt}{m} \right) \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right) \right\} + \frac{2abR}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \\
 &= \frac{2aR}{mQ^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(x - \frac{bt}{m} \right) - b - \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right\} + \frac{2abR}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \\
 &= -\frac{2aR}{mQ^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right) b \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + \frac{2abR}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \\
 &= -\frac{2abR}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) + \frac{2abR}{mQ} \left(x - \frac{bt}{m} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R = 0$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.3). Entonces tenemos una solución del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3). Ahora verificaremos que los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest. El valor medio de \hat{X} , de acuerdo con (1.7) es¹:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x B^2}{Q^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(x - \frac{bt}{m} \right) \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{bt}{m} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx \right] \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z \exp \left\{ -\frac{2az^2}{Q} \right\} dz + \frac{bt}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx \right] \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \times \frac{bt}{m} \left(\frac{\pi Q}{2a} \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

y reemplazando el valor de B , obtenemos:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \frac{bt}{m} \quad (2.5)$$

Ahora, el valor medio \hat{P} , de acuerdo con (1.8) es:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \partial_x S(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \frac{1}{Q} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right) dx \\
 &= \frac{1}{Q} \left[b \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx + \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx \right]
 \end{aligned}$$

¹Aquí para simplificar, seguimos utilizando Q que ya fue definido líneas arriba.

De la condición de normalización tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx = 1$ y del cálculo del valor medio de \hat{X} tenemos $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} = \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx = \frac{bt}{m}$, luego:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} &= \frac{1}{Q} \left[b + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2 b}{m^2} \right] \\ &= \frac{b}{Q} \left[1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right] \end{aligned}$$

reemplazando $Q = 1 + \alpha^2 t^2 = 1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}$ tenemos:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} = b \quad (2.6)$$

De (2.5) y (2.6) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}$ se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento, para cualquier valor de \hbar .

2.1.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el “potencial ficticio” es:

$$V_f(t, x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2a}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} - \frac{4a^2}{(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2})^2} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right]$$

Podemos notar que $V_f(t, x)$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, x)$ pasa a ser solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (2.3) y (2.4) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso de la partícula libre unidimensional.**

2.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (2.3) y (2.4) en $\hbar = 0$ tenemos¹¹:

$$S_0(t, x) = bx - \frac{b^2 t}{2m} \quad (2.7)$$

$$R_0(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{1/4} \exp \left\{ -a \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \quad (2.8)$$

La figura 2.1 muestra la gráfica del campo $S_0(t, x)$, este campo es propiamente una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

¹¹En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

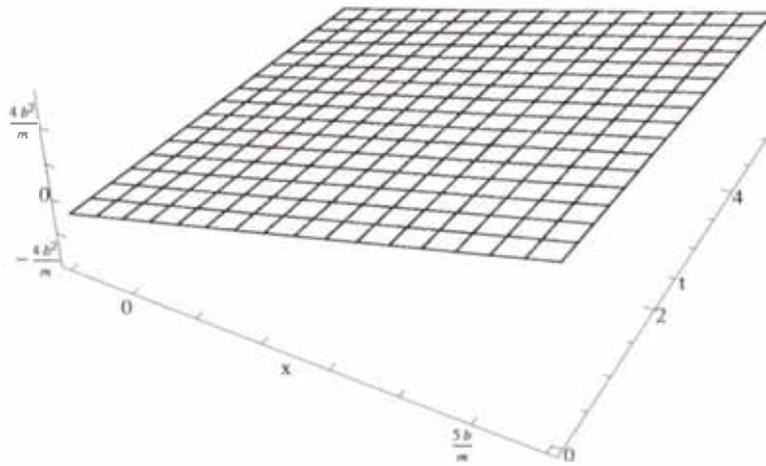


Figura 2.1 – Campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 2.8.

De (2.8) la densidad de probabilidad es:

$$R_0^2(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \exp \left\{ -2a \left(x - \frac{bt}{m}\right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R_0^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuyo valor máximo es $R_{0\text{max}}^2 = (2a/\pi)^{1/2}$, y notesé que dicha cantidad no cambia con el tiempo. Este valor máximo se alcanza en el punto $x_{0\text{max}} = \frac{bt}{m}$, y de acuerdo con (2.5), este punto $x_{0\text{max}}$ tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$.

Otro parámetro importante en las gaussianas es el ancho de la campana y una medida de este ancho es la desviación media cuadrática. Para $R_0^2(t, x)$, la desviación media cuadrática es $\delta_0 = (2a)^{-1/2}$, y notesé que esta no cambia con el tiempo. Por lo tanto concluimos que la curva de densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ avanza sin deformarse. La figura 2.2 muestra el movimiento de $R_0^2(t, x)$.

De (2.7), el campo de momentum es:

$$\partial_x S_0(t, x) = b$$

La figura 2.3 muestra la gráfica del campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$. Si colocamos partículas en el campo de momentum $\partial_x S_0$, obtenemos sus trayectorias resolviendo la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{b}{m}$$

Estas trayectorias son de la forma $\xi_0(t) = \frac{bt}{m} + x_0$, donde x_0 es la posición inicial de la partícula. La figura 2.4 muestra algunas de estas trayectorias, para diferentes posiciones iniciales.

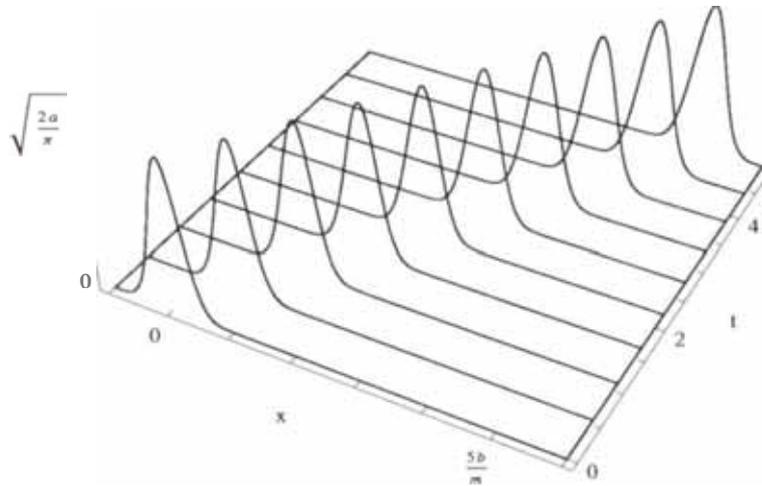


Figura 2.2 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$: Puede observarse que la curva de densidad de probabilidad avanza sin deformarse. Recordando que esta densidad de probabilidad representa a muchas partículas que no interactúan entre sí, podemos decir que estas partículas avanzan como una estructura rígida. Comparar con la figura 2.9

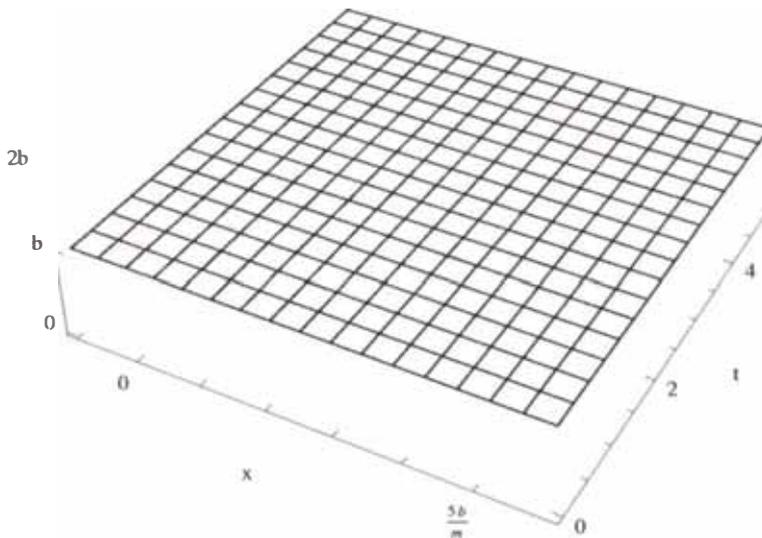


Figura 2.3 – Campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$: Este es un campo constante y uniforme, y permite hallar las trayectorias clásicas que siguen las partículas. Comparar con la figura 2.10

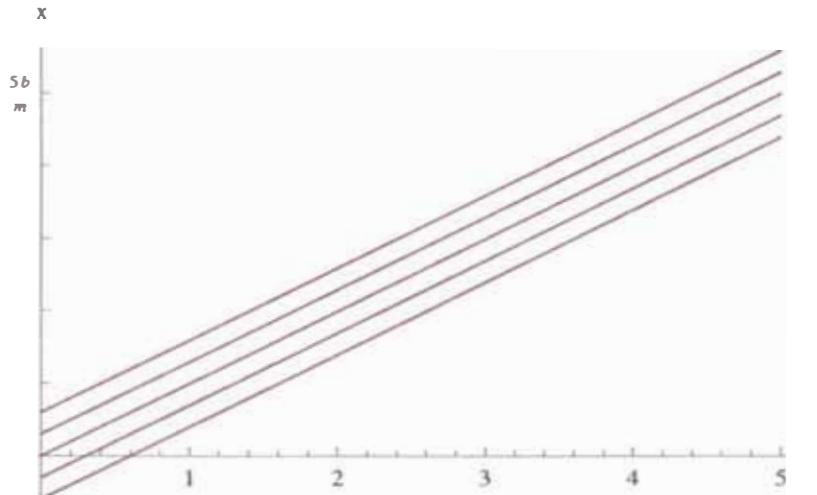


Figura 2.4 – Trayectorias para $\hbar = 0$: Claramente estas trayectorias corresponden a trayectorias de partícula libre clásica, como era de esperarse, pues $S_0(t, x)$ es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Comparar con la figura 2.11

En el caso de la partícula libre unidimensional no se puede hacer uso de los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ para el estudio del movimiento de las partículas, sin embargo se pueden hacer otros tipos de gráficas como las presentadas en las figuras 2.5 y 2.6. Presentamos estas gráficas con el objeto de compararlas con las que corresponden al caso cuántico.

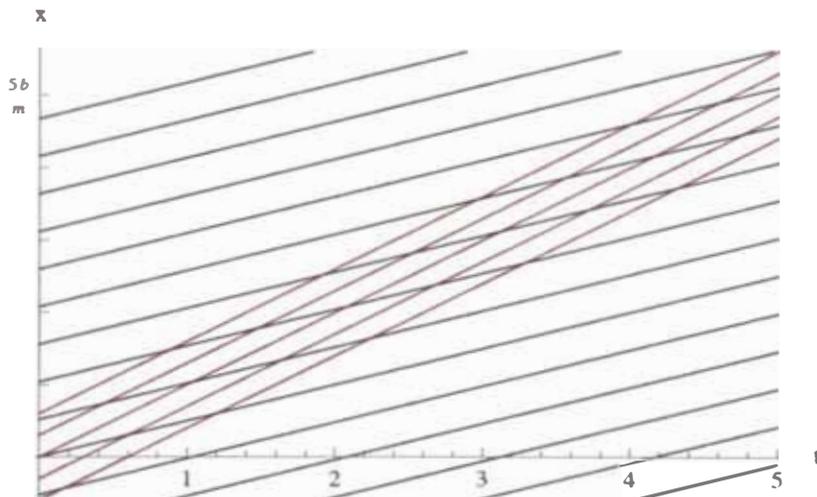


Figura 2.5 – Curvas de nivel del campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 2.12

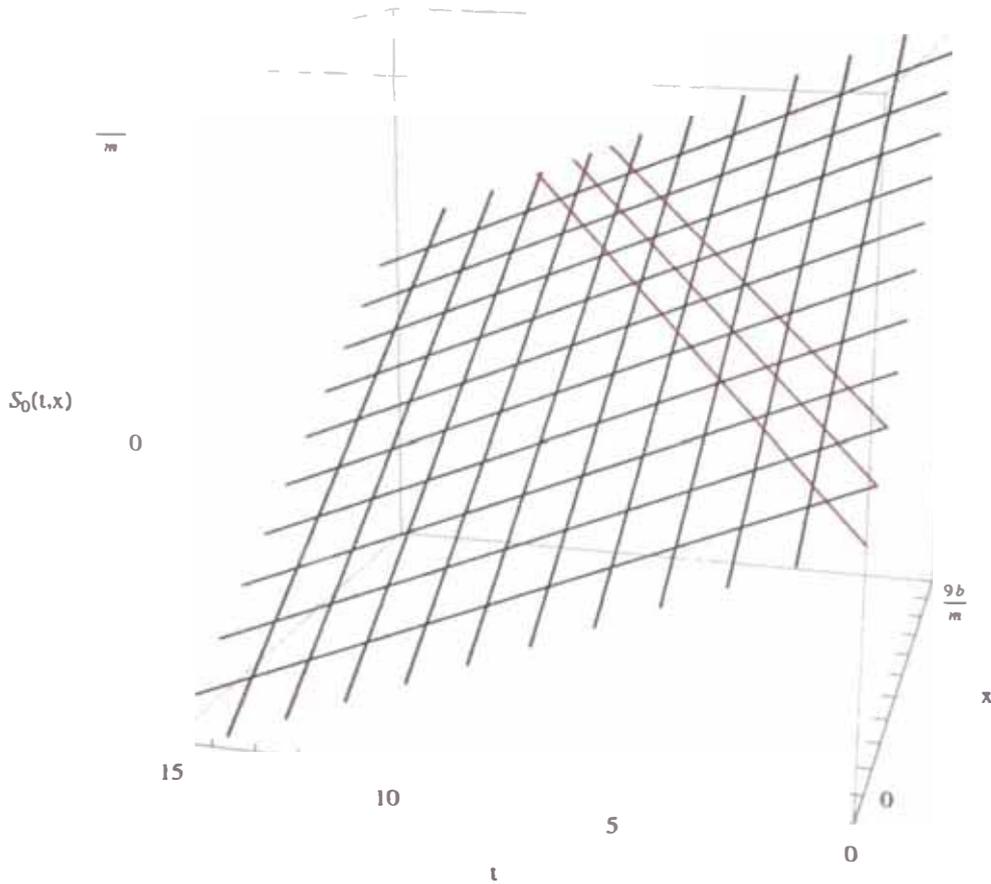


Figura 2.6 Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$: Sobre la superficie $S_0(t, x)$ se han “pintado” las trayectorias de tres partículas. Comparar con la figura 2.13

El movimiento rígido de la densidad de probabilidad presentado en la figura 2.1 puede ser explicado utilizando las trayectorias $\xi_0(t)$. Recordemos que la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ es en realidad una distribución de posición de partículas normalizada, de modo que si colocamos “marcas” en la gráfica de $R_0^2(t, x)$ estas deben moverse como partículas, describiendo trayectorias del tipo $\xi_0(t)$. La figura 2.7 muestra la gráfica de $R_0^2(t, x)$ juntamente con la trayectoria de tres marcas (partículas marcadas) hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

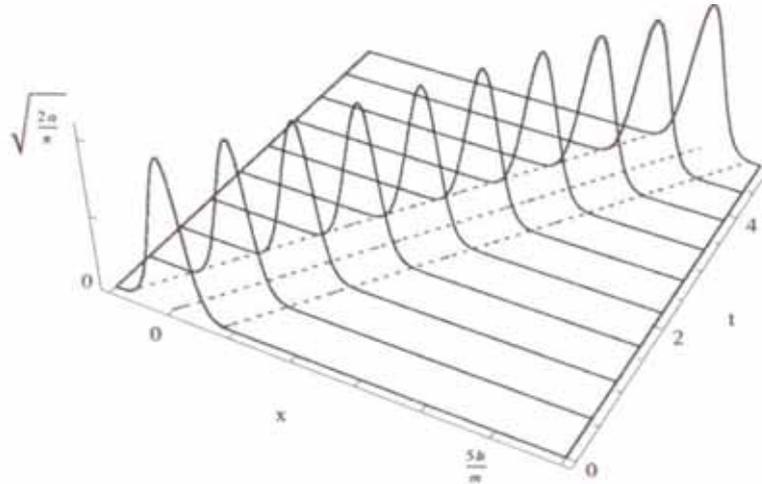


Figura 2.7 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y tres trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 2.14

2.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (2.3) y (2.4) para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$S(t, x) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2}} \left[bx - \frac{b^2t}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2tx^2}{m} \right] - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) \quad (2.9)$$

$$R(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2})} \right]^{1/4} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2}} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \quad (2.10)$$

La figura 2.8 muestra la grafica del campo $S(t, x)$. De (2.10), la densidad de probabilidad es:

$$R^2(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2})} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{2a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2}} \left(x - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuya valor máximo es $R_{\max}^2 = \left[2a/\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2}) \right]^{1/2}$; y como podemos notar este valor va disminuyendo al pasar el tiempo. Este valor máximo se alcanza en el punto $x_{\max} = \frac{bt}{m}$, y de acuerdo con (2.5), este punto x_{\max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle X \rangle_{\Psi_t}$. Además debemos notar que x_{\max} (punto de máximo de $R^2(t, x)$) y $x_{0\max}$ (punto de máximo de $R_0^2(t, x)$) coinciden. Para $R^2(t, x)$, la desviación media cuadrática es $\delta = \left[(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2})/2a \right]^{1/2}$; y como podemos notar, esta desviación aumenta al pasar el tiempo. Por lo tanto concluimos que la curva de densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ avanza dispersándose. La figura 2.9 muestra el movimiento de $R^2(t, x)$.

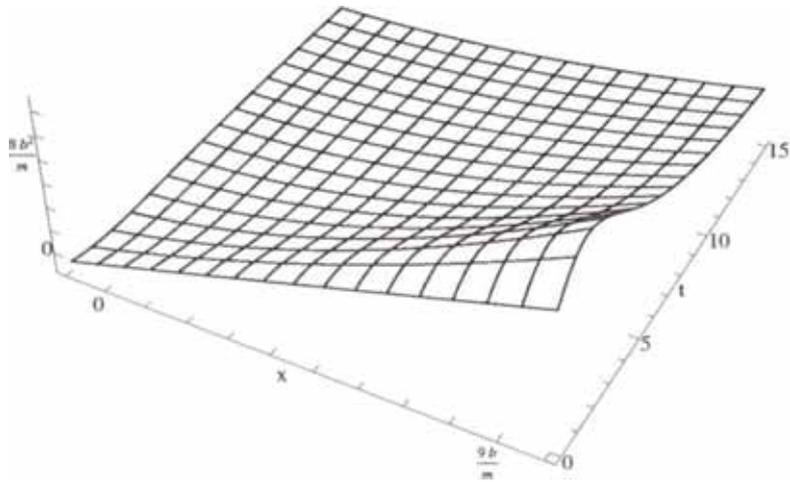


Figura 2.8 – Campo $S(t, x)$. Comparar con la figura 2.1.

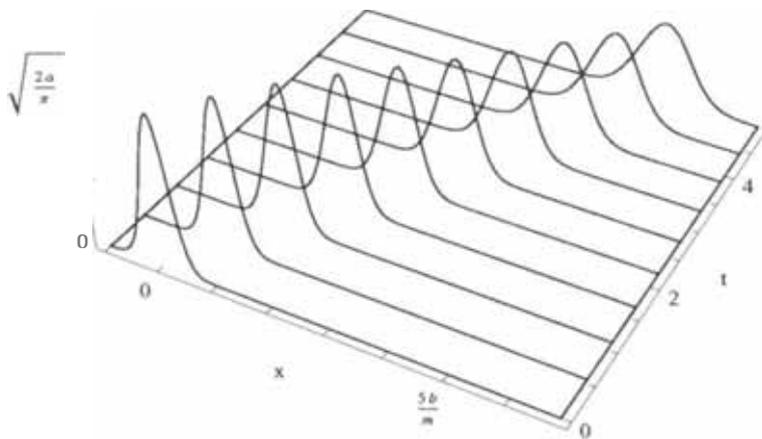


Figura 2.9 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$: Puede observarse que la curva de densidad de probabilidad avanza dispersándose. Comparar con la figura 2.2

De (2.9), el campo de momentum es:

$$\partial_x S = \frac{1}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} \right)$$

En la figura 2.10 presentamos la gráfica del campo de momentum $\partial_x S(t, x)$.

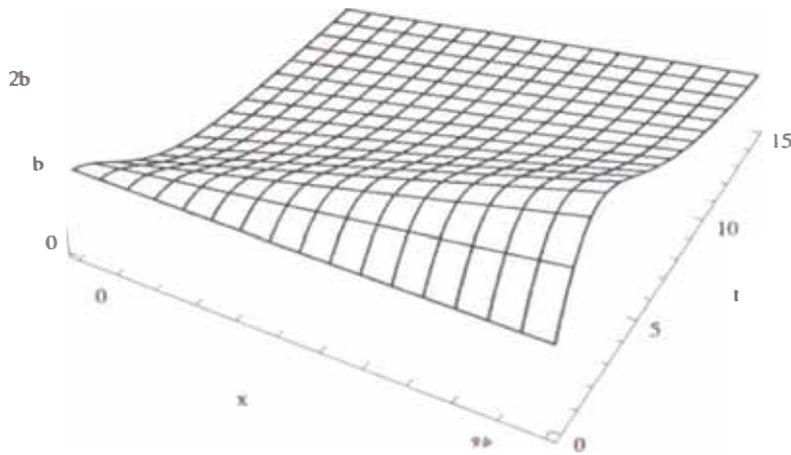


Figura 2.10 Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$. Comparar con la figura 2.3.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\partial_x S$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.12); que para este caso es:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{m \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right)} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t \xi}{m} \right)$$

Resolvemos esta ecuación numericamente y presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 2.11 muestra algunas de estas trayectorias, aquí notamos como estas se van “dispersando”.

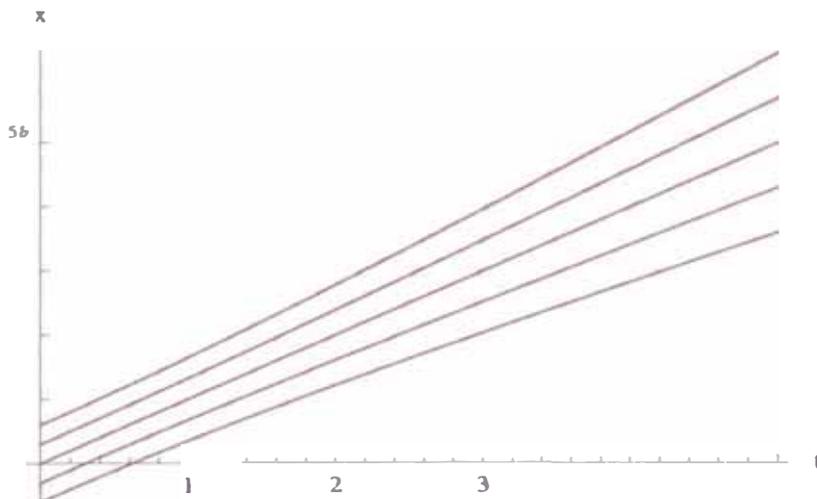


Figura 2.11 – Trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.4

En las figuras 2.12 y 2.13 presentamos una comparación gráfica del comportamiento del campo $S(t, x)$ y de las trayectorias que él determina.

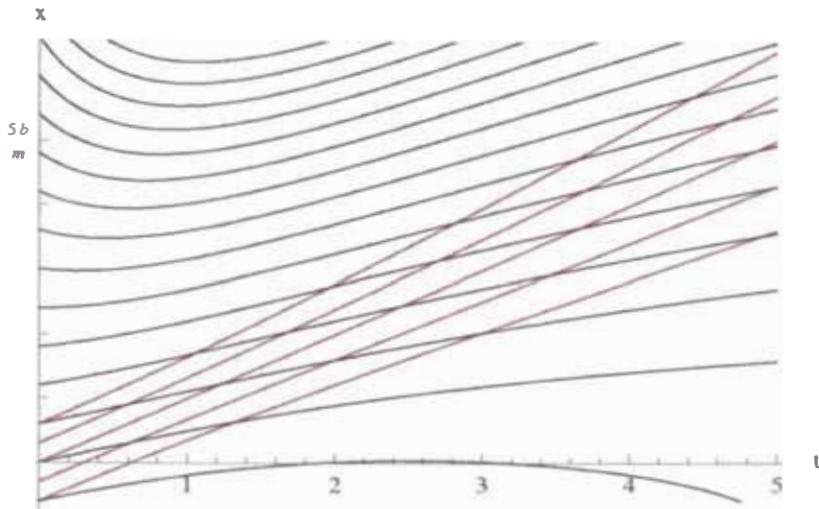


Figura 2.12 Curvas de nivel del campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.5.

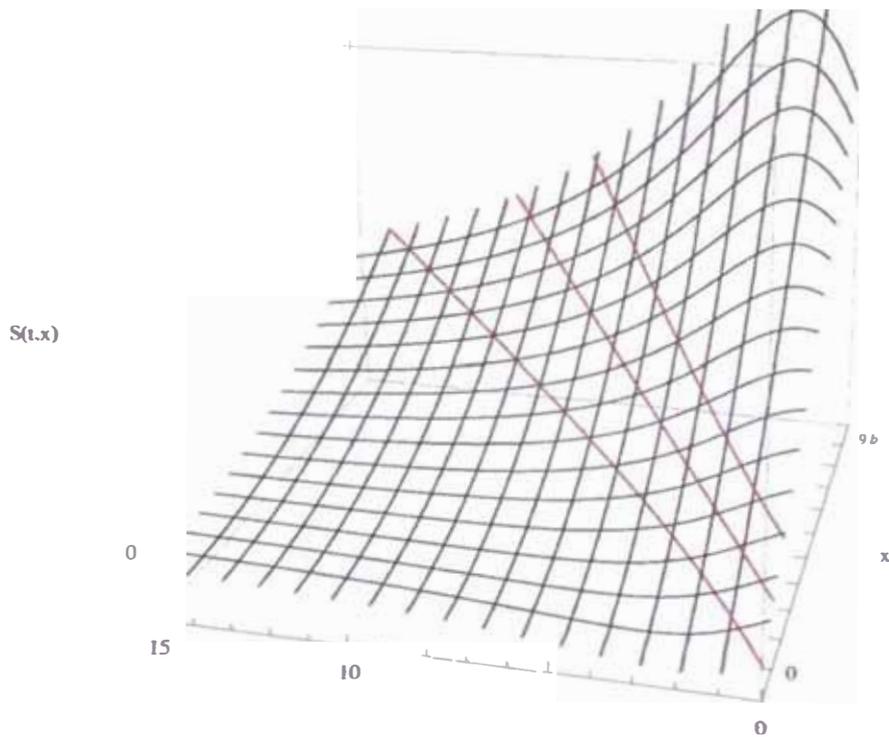


Figura 2.13 Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$: Sobre la superficie $S(t, x)$ se han “pintado” las trayectorias de tres partículas. Comparar con la figura 2.6.

El movimiento de la densidad de probabilidad presentado en la figura 2.9 puede ser explicado utilizando las trayectorias $\xi(t)$ presentadas en la figura 2.11. Recordemos que la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ es en realidad una distribución de posición de partículas

normalizada, de modo que si colocamos “marcas” en la gráfica de $R^2(t, x)$ estas deben moverse como partículas, describiendo trayectorias del tipo $\xi(t)$. La figura 2.14 muestra la gráfica de $R^2(t, x)$ conjuntamente con la trayectoria de tres marcas (partículas marcadas) hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

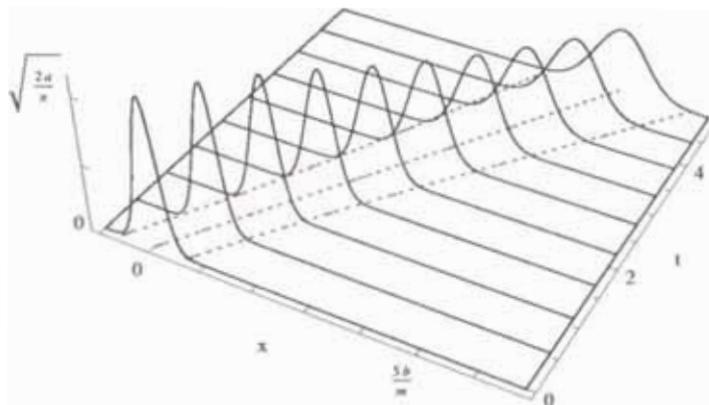


Figura 2.14 Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y tres trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.7.

Para finalizar esta sección, la figura 2.15 muestra las trayectorias clásica y cuántica de cinco partículas con distintas posiciones iniciales, y para cada partícula ambas trayectorias (clásica o cuántica) tienen las mismas posiciones iniciales.

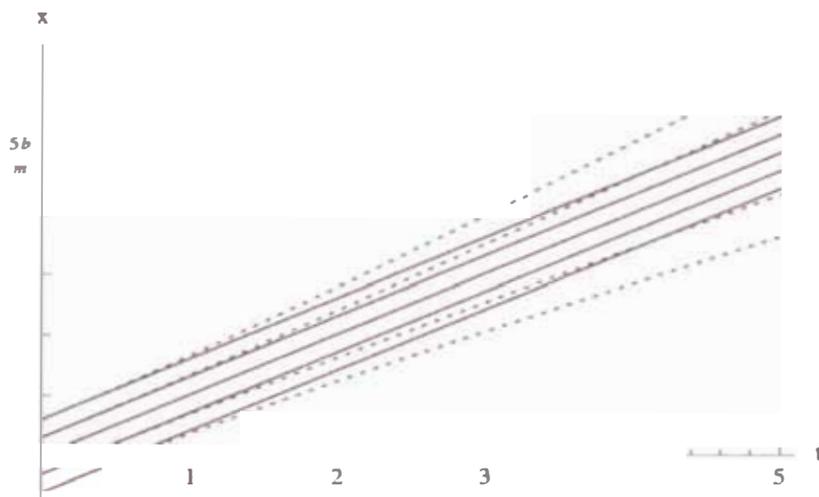


Figura 2.15 – Comparación de las trayectorias clásicas (líneas rojas) y cuánticas (líneas azules punteadas) de cinco partículas.

2.2. Partícula libre tridimensional

La ecuación de Schrodinger para este caso es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi = 0$$

Para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda es:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \int K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)\Psi(0, \bar{x}_0)d^3x_0$$

donde $K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)$ es el propagador de Feynman del problema. El propagador para la partícula libre tridimensional es:

$$K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}(\bar{x} - \bar{x}_0)^2\right\}$$

Si definimos: $A^2 = \frac{m}{2i\hbar t}$, escribimos el propagador:

$$K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) = \frac{A^3}{\pi^{3/2}} \exp\left\{-A^2(\bar{x} - \bar{x}_0)^2\right\}$$

2.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, \bar{x}) = B \exp\left\{-a\bar{x}^2 + \frac{i\bar{b}\cdot\bar{x}}{\hbar}\right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{3/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales de los operadores $\langle\hat{X}\rangle_{\Psi_0} = \bar{0}$ y $\langle\hat{P}\rangle_{\Psi_0} = \bar{b}$.

Aplicando el método del propagador obtenemos la función de onda en cualquier instante posterior:

$$\begin{aligned}\Psi(t, \bar{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{A^3}{\pi^{3/2}} \exp\left\{-A^2(\bar{x} - \bar{x}_0)^2\right\} \times B \exp\left\{-a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar}\right\} d^3x_0 \\ \Psi(t, \bar{x}) &= \frac{A^3 B}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{-A^2(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar}\right\} d^3x_0\end{aligned}\quad (2.11)$$

En el exponente:

$$\begin{aligned}-A^2(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} &= -A^2\bar{x}_0^2 + 2A^2\bar{x}\cdot\bar{x}_0 - A^2\bar{x}^2 - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \\ &= -A^2\bar{x}^2 - (A^2 + a)\bar{x}_0^2 + \left(2A^2\bar{x} + i\frac{\bar{b}}{\hbar}\right)\cdot\bar{x}_0 \\ &= -A^2\bar{x}^2 - A^2\left(1 + \frac{a}{A^2}\right)\bar{x}_0^2 + 2A^2\left(\bar{x} + \frac{i\bar{b}}{2\hbar A^2}\right)\cdot\bar{x}_0\end{aligned}$$

definiendo $N^2 = 1 + a/A^2 = 1 + i\alpha t$, donde $\alpha = 2a\hbar/m$; y $\bar{M} = \bar{x} + i\bar{b}/2\hbar A^2 = \bar{x} - \bar{b}t/m$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
 -A^2(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} &= -A^2\bar{x}^2 - A^2N^2\bar{x}_0^2 + 2A^2\bar{M}\cdot\bar{x}_0 \\
 &= -A^2\bar{x}^2 - A^2\left[N^2\bar{x}_0^2 - 2\left(\frac{\bar{M}}{N}\right)\cdot(N\bar{x}_0) + \frac{\bar{M}^2}{N^2}\right] + \frac{A^2\bar{M}^2}{N^2} \\
 &= A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right) - A^2\left(N\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N}\right)^2 \\
 &= A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right) - A^2N^2\left(\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2}\right)^2
 \end{aligned}$$

Luego al reemplazar esta expresión equivalente del exponente en (2.11), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, \bar{x}) &= \frac{A^3B}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right) - A^2N^2\left(\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2}\right)^2\right\} d^3x_0 \\
 &= \frac{A^3B}{\pi^{3/2}} \exp\left\{A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right)\right\} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{-A^2N^2\left(\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2}\right)^2\right\} d^3x_0 \\
 &= \frac{A^3B}{\pi^{3/2}} \exp\left\{A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right)\right\} \times \frac{\pi^{3/2}}{A^3N^3} \\
 &= \frac{B}{N^3} \exp\left\{A^2\left(\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2\right)\right\}
 \end{aligned}$$

Finalmente al reemplazar A , N y \bar{M} en la expresión anterior obtenemos:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \frac{B}{(1 + i\alpha t)^{3/2}} \exp\left\{\frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2}{1 + i\alpha t} - \bar{x}^2\right]\right\} \quad (2.12)$$

Ahora para escribir la función de onda en la forma (1.1) y obtener $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$, debemos separar el exponente de la función exponencial en sus partes real e imaginaria, así como escribir el denominador $(1 + i\alpha t)^{3/2}$ en su forma polar. Entonces, en el exponente:

$$\begin{aligned}
 &\frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2}{1 + i\alpha t} - \bar{x}^2\right] \\
 &= -\frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2(1 - i\alpha t)}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2\right] \\
 &= -\frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2 - \frac{i\alpha t}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2\right] \\
 &= -\frac{m\alpha}{2\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2 - \frac{im}{2\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2\right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m})^2}{1 + i\alpha t} - \bar{x}^2 \right] \\
&= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 - \frac{im}{2\hbar t(1 + \alpha^2 t^2)} \left[x^2 - \frac{2\bar{b}\bar{x}t}{m} + \frac{\bar{b}^2 t^2}{m^2} - \bar{x}^2 - \alpha^2 t^2 \bar{x}^2 \right] \\
&= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 + \frac{i}{\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right]
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $(1 + i\alpha t)^{3/2} = (1 + \alpha^2 t^2)^{3/4} \exp\left\{\frac{3i}{2} \arctan(\alpha t)\right\}$. Luego al reemplazar estos resultados en (2.12), obtenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi(t, \bar{x}) &= \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2\right\} \times \\
&\quad \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right) - \frac{3\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \right]\right\}
\end{aligned}$$

De aquí identificamos los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$:

$$\boxed{S(t, \bar{x}) = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan(\alpha t)} \quad (2.13)$$

$$\boxed{R(t, \bar{x}) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2\right\}} \quad (2.14)$$

donde $\alpha = 2a\hbar/m$; $B = (2a/\pi)^{3/4}$. Dado que α depende de \hbar , aquí notamos que $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora verifiquemos que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para estos calculamos las derivadas (y para simplificar escribimos $Q = 1 + \alpha^2 t^2$):

$$\begin{aligned}
\nabla R &= -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) R \\
\partial_t R &= \left[-\frac{6a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 + \frac{2a\bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \right] R \\
\nabla^2 R &= \left[-\frac{6a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 \right] R \\
\nabla S &= \frac{1}{Q} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right) \\
\partial_t S &= -\frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right] + \frac{1}{Q} \left(\frac{2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2}{m} - \frac{\bar{b}^2}{2m} \right) - \frac{3a\hbar^2}{mQ} \\
\nabla^2 S &= \frac{12a^2 \hbar^2 t}{mQ}
\end{aligned}$$

Luego en la ecuación (1.2):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \\
&= \frac{1}{2mQ^2} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right)^2 - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(\bar{b} \bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right) \\
&+ \frac{1}{Q} \left(\frac{2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2}{m} - \frac{\bar{b}^2}{2m} \right) - \frac{3a \hbar^2}{mQ} - \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{6a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{1}{2} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right)^2 - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\bar{b} \bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right) \right. \\
&\quad \left. - 2a^2 \hbar^2 \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{\bar{b}^2}{2} + \frac{8a^4 \hbar^4 t^2 \bar{x}^2}{m^2} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{b} \bar{x}}{m} - \frac{8a^2 \hbar^2 t \bar{b} \bar{x}}{m} + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2 \bar{b}^2}{m^2} - \frac{16a^4 \hbar^4 t^2 \bar{x}^2}{m^2} \right. \\
&\quad \left. - 2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{b} \bar{x}}{m} - \frac{2a^2 \hbar^2 t^2 \bar{b}^2}{m^2} \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{\bar{b}^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) - 2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right\} + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} \right) \\
&= \frac{1}{mQ} \left(\frac{\bar{b}^2}{2} - 2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 \right) + \frac{1}{mQ} \left(2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ satisfacen la ecuación (1.2). Ahora para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R \\
&= \frac{R}{2m} \left(\frac{12a^2 \hbar^2 t}{mQ} \right) + \frac{1}{m} \left[-\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) R \right] \cdot \left[\frac{1}{Q} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right) \right] \\
&\quad + \left[-\frac{6a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 + \frac{2a \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \right] R \\
&= \frac{2aR}{mQ^2} \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right)^2 - \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \cdot \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right) \right\} + \frac{2aR \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \\
&= \frac{2aR}{mQ^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) - \bar{b} - \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right\} + \frac{2aR \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \\
&= -\frac{2aR \bar{b}}{mQ^2} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + \frac{2aR \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) \\
&= -\frac{2aR \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) + \frac{2aR \bar{b}}{mQ} \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} \right) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.3). Entonces hemos obtenido una solución del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3) para el caso de la partícula libre tridimensional. Ahora verificaremos que los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest. El valor medio de \hat{X} , de acuerdo con (1.7) es^{III}:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\bar{x} B^2}{Q^{3/2}} \exp\left\{-\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2\right\} d^3x \\ &= \frac{B^2}{Q^{3/2}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right) \exp\left\{-\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2\right\} d^3x + \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\bar{b}t}{m} \exp\left\{-\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2\right\} d^3x \right] \\ &= \frac{B^2}{Q^{3/2}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \bar{z} \exp\left\{-\frac{2a\bar{z}^2}{Q}\right\} d^3z + \frac{\bar{b}t}{m} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left\{-\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2\right\} d^3x \right] \\ &= \frac{B^2}{Q^{3/2}} \times \frac{\bar{b}t}{m} \left(\frac{\pi Q}{2a}\right)^{3/2} \end{aligned}$$

reemplazando el valor de B , obtenemos:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \frac{\bar{b}t}{m} \quad (2.15)$$

Ahora, el valor medio \hat{P} , de acuerdo con (1.8) es:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) \nabla S(t, \bar{x}) d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) \frac{1}{Q} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right) d^3x \\ &= \frac{1}{Q} \left[\bar{b} \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) d^3x + \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3x \right] \end{aligned}$$

y de la condición de normalización tenemos que $\int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) d^3x = 1$ y del cálculo del valor medio de \hat{X} tenemos que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3x = \frac{\bar{b}t}{m}$, luego:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \frac{1}{Q} \left[\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2 \bar{b}}{m^2} \right] \\ &= \frac{\bar{b}}{Q} \left[1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right] \end{aligned}$$

reemplazando: $Q = 1 + \alpha^2 t^2 = 1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}$, tenemos:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = \bar{b} \quad (2.16)$$

De (2.15) y (2.16) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$ se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento, para cualquier valor del parámetro \hbar .

^{III} Aquí seguimos utilizando Q que ya fue definido líneas arriba.

2.2.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el “potencial ficticio” es:

$$V_f(t, \bar{x}) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6a}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} - \frac{4a^2}{\left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}\right)^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2 \right]$$

Podemos notar que $V_f(t, \bar{x})$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, \bar{x})$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (2.13) y (2.14) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y cuando $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso de la partícula libre tridimensional.**

2.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (2.13) y (2.14) en $\hbar = 0$ tenemos^{iv}:

$$S_0(t, \bar{x}) = \bar{b} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} \quad (2.17)$$

$$R_0(t, \bar{x}) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{3/4} \exp \left\{ -a \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2 \right\} \quad (2.18)$$

Para el campo $S_0(t, \bar{x})$, analizaremos sus frentes de onda, pues ellos son perpendiculares en cada instante a los rastros que dejan las partículas. Para $S_0(t, \bar{x})$, los frentes de onda en el instante t_0 son:

$$\bar{b} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t_0}{2m} = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda, y como podemos notar estos frentes de onda son planos con vector normal igual a \bar{b} . La figura 2.16 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo $S_0(t, \bar{x})$ ^v.

De (2.18), la densidad de probabilidad es:

$$R_0^2(t, \bar{x}) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{3/2} \exp \left\{ -2a \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m}\right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R_0^2(t, \bar{x})$ es una gaussiana (vista como función de \bar{x}), cuyo valor máximo es $R_{0\max}^2 = (2a/\pi)^{3/2}$, y notese que esta cantidad no cambia con el tiempo. Este valor máximo se alcanza en el punto $\bar{x}_{0\max} = \bar{b}t/m$, y de acuerdo con (2.15), este punto $\bar{x}_{0\max}$ tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \bar{X} \rangle_{\Psi_t}$. La desviación media cuadrática para $R_0^2(t, \bar{x})$ es $\delta_0 = (2a)^{-1/2}$, y esta desviación no cambia con el tiempo. Por lo tanto concluimos que la superficie de densidad de probabilidad $R_0^2(t, \bar{x})$ avanza sin deformarse. Las figuras 2.17 y 2.18 muestran el movimiento de $R_0^2(t, \bar{x})$.

^{iv}En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

^vCon el objetivo de visualizar mejor el comportamiento de los campos, en las figuras que presentamos en esta subsección, eliminaremos una dimensión espacial

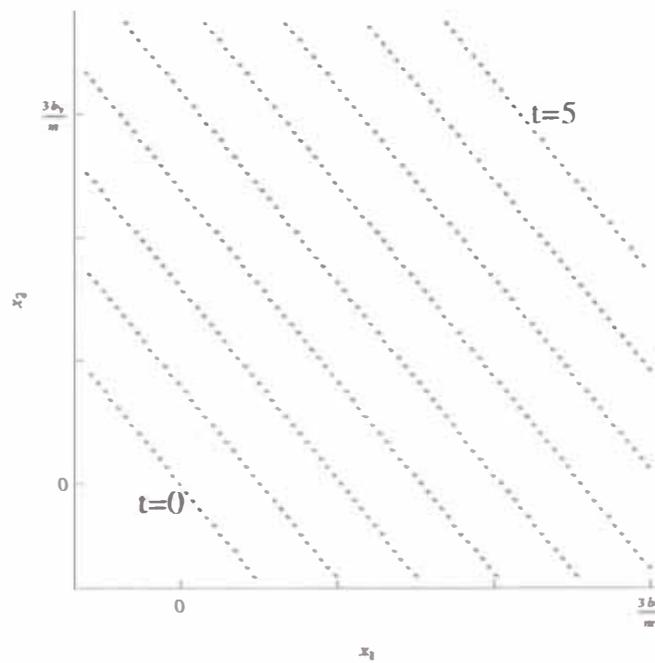


Figura 2.16 – Movimiento de un frente de onda del campo $S_0(t, \bar{x})$. Comparar con la figura 2.26.

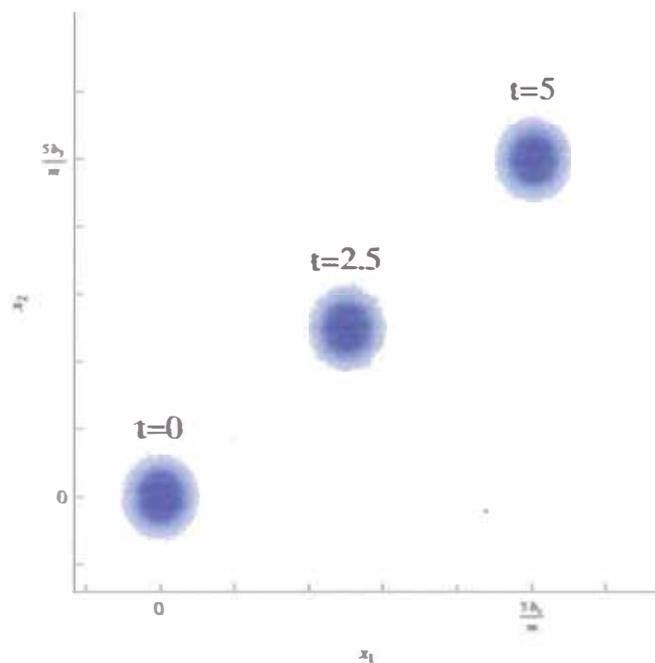


Figura 2.17 – Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \bar{x})$ en el espacio de coordenadas. Comparar con la figura 2.27

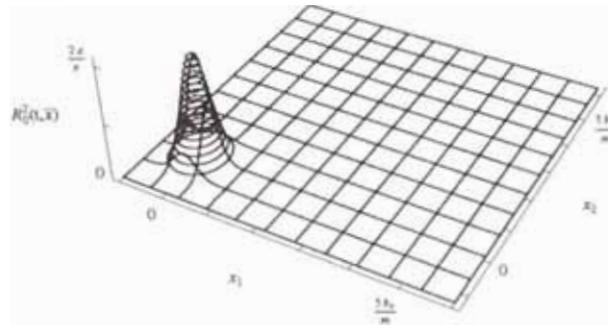
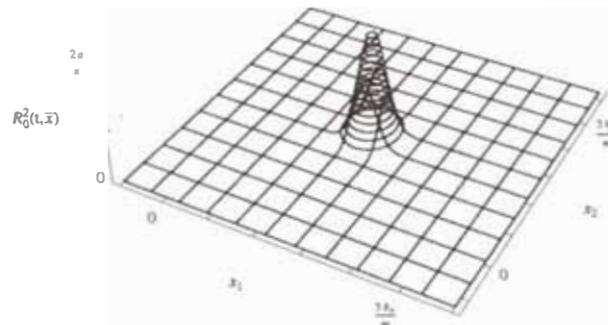
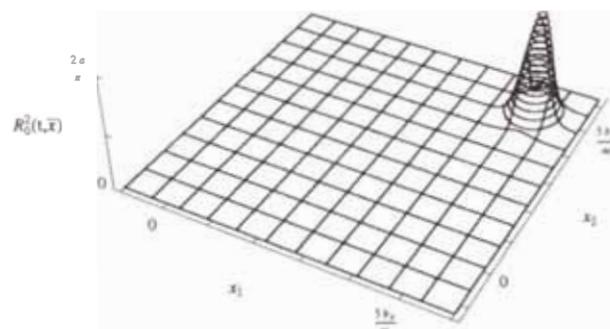
$t=0$

 $t=2.5$

 $t=5$


Figura 2.18 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar = 0$: Puede observarse que la superficie de densidad de probabilidad avanza sin deformarse. Recordando que esta densidad de probabilidad representa a muchas partículas, podemos decir que estas partículas avanzan como una estructura rígida. Comparar con la figura 2.28

De (2.17), el campo de momentum es:

$$\nabla S_0(t, x) = b$$

La figura 2.19 muestra este campo de momentum.

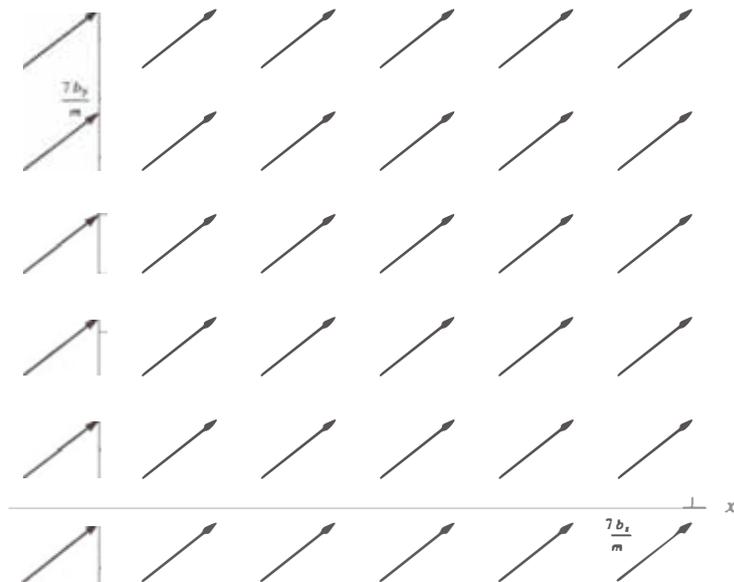


Figura 2.19 – Campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$: Este es un campo constante y uniforme, y permite hallar las trayectorias clásicas que seguirán las partículas. Comparar con la figura 2.29.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.13), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{b}{m}$$

Estas trayectorias son de la forma $\xi(t) = \frac{bt}{m} + x_0$, donde x_0 es la posición inicial de la partícula. La figura 2.20 muestra algunas de estas trayectorias, para distintas posiciones iniciales. La figura 2.21 muestra algunos rastros que dejan las partículas. La figura 2.22 muestra los rastros dejados por algunas partículas y los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$.

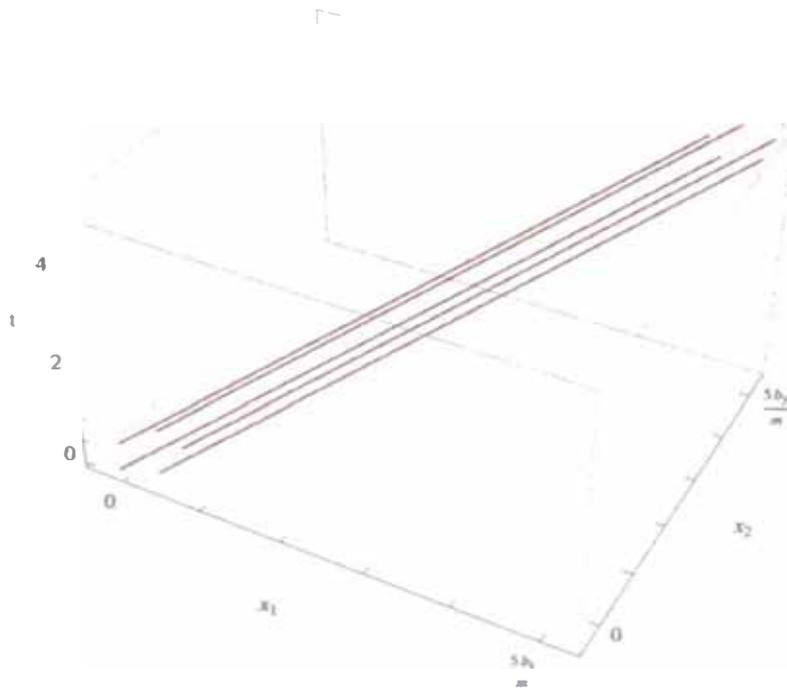


Figura 2.20 – Trayectorias para $\hbar = 0$: Claramente estas trayectorias corresponden a trayectorias de partículas libres clásicas, como era de esperarse pues $S_0(t, x)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Comparar con la figura 2.30

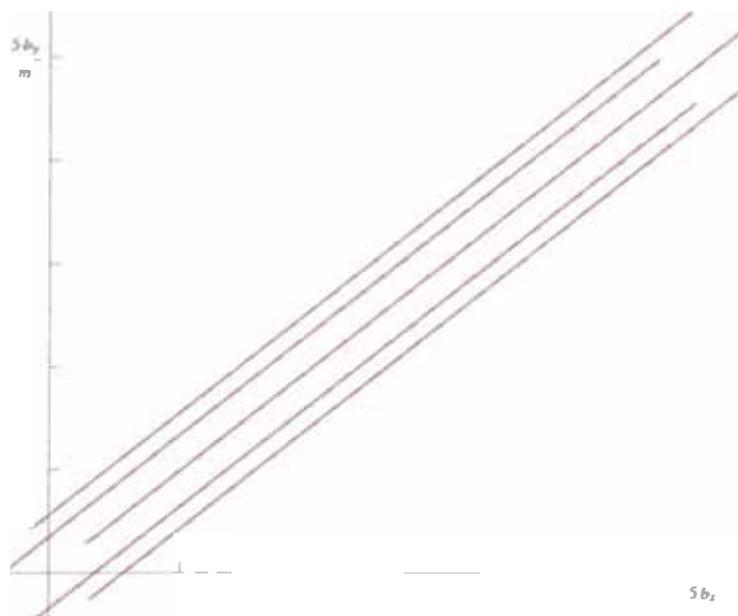


Figura 2.21 – Rastros para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 2.31

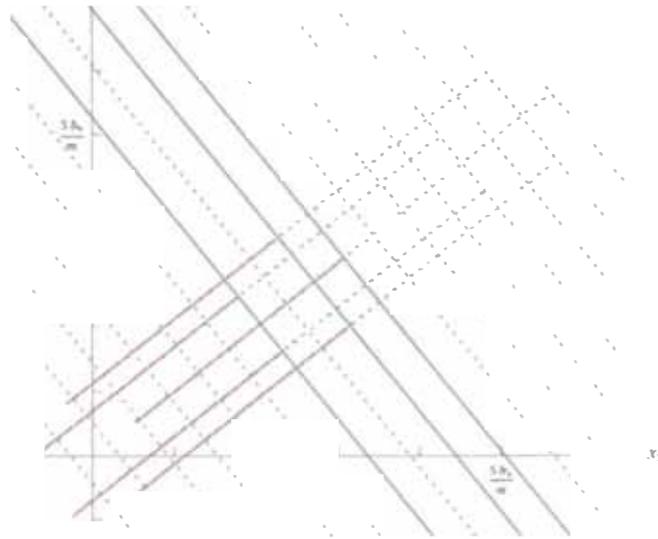


Figura 2.22 Frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ y rastros para $\hbar = 0$: Aquí podemos notar que los rastros son perpendiculares a los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 2.32.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ presentado en las figuras 2.17 y 2.18 puede ser explicado utilizando los rastros de $\xi_0(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$. La figura 2.23 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$. La figura 2.24 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ los rastros que dejan las partículas. La figura 2.25 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$.

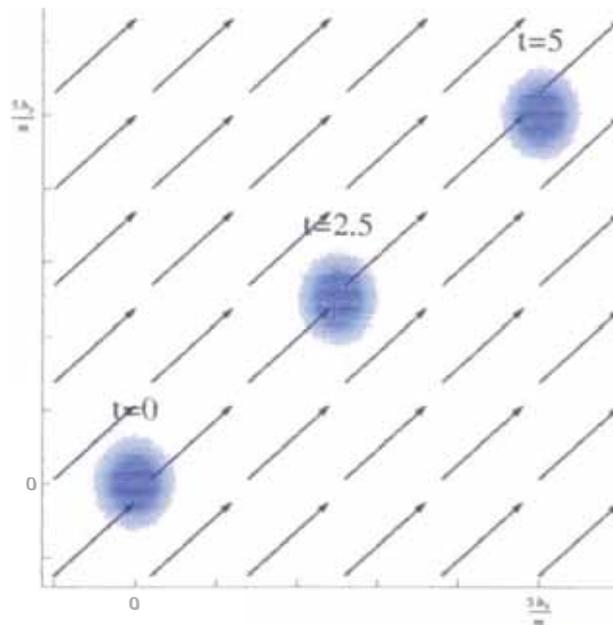


Figura 2.23 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$. Comparar con la figura 2.34.

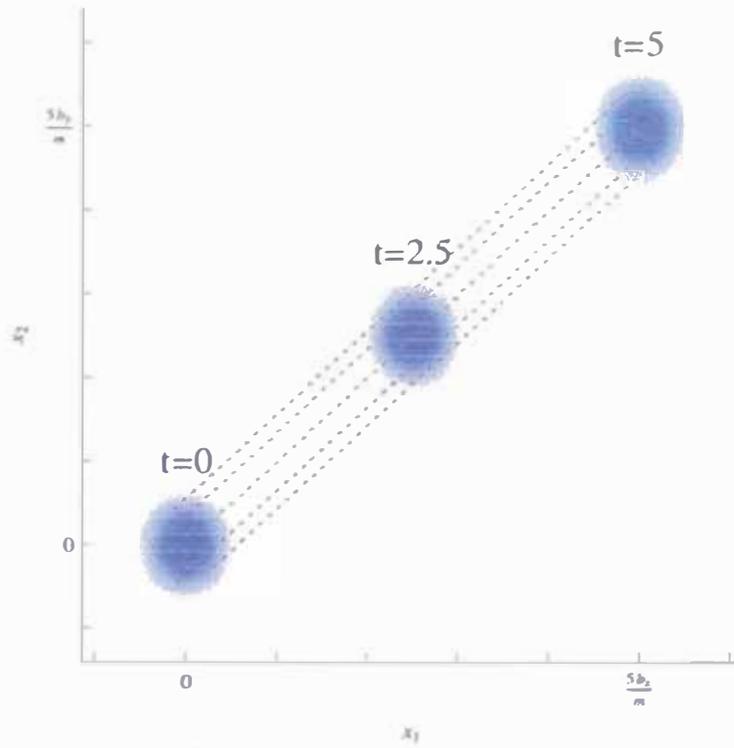


Figura 2.24 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \vec{x})$ y rastros de partícula para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 2.33.

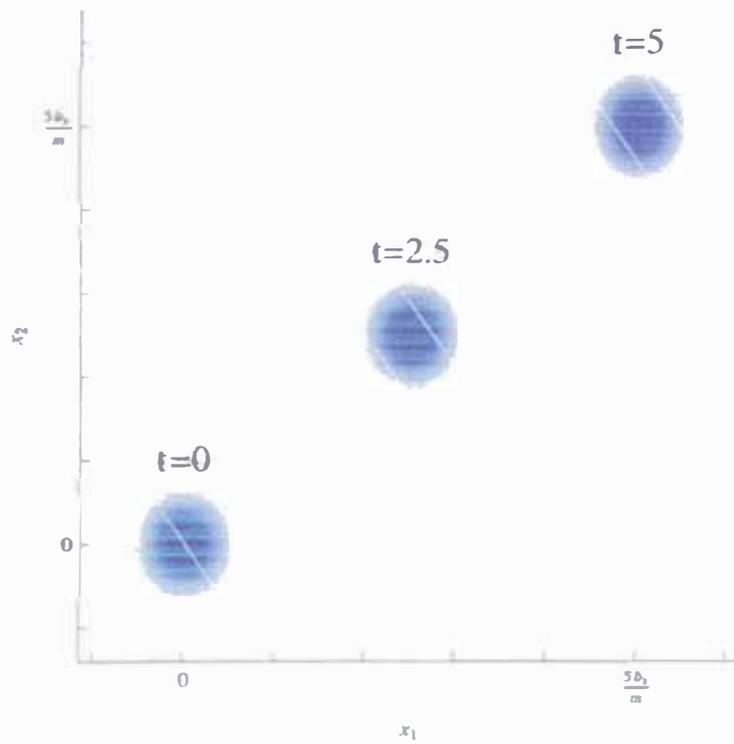


Figura 2.25 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \vec{x})$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, \vec{x})$. Comparar con la figura 2.35.

2.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (2.13) y (2.14) para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$S(t, \bar{x}) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) \quad (2.19)$$

$$R(t, \bar{x}) = \left[\frac{2a}{\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})} \right]^{3/4} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b} t}{m} \right)^2 \right\} \quad (2.20)$$

Para el campo $S(t, \bar{x})$, analizaremos sus frentes de onda, pues ellos son perpendiculares en cada instante a los rastros que dejan las partículas. Para $S(t, \bar{x})$, los frentes de onda en el instante t_0 son:

$$\frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2 t \bar{x}^2}{m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda; y para $t_0 = 0$ estos frentes de onda son planos con vector normal igual a \bar{b} . Mientras que para $t_0 > 0$ los frentes de onda toman la forma:

$$\left(\bar{x} + \frac{m\bar{b}}{4a^2\hbar^2 t} \right)^2 = \frac{m(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})}{2a^2\hbar^2 t} \left[c + \frac{3\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) + \frac{m\bar{b}^2}{8a^2\hbar^2 t} \right]$$

Así podemos notar que los frentes de onda, para $t_0 > 0$, son esferas cuyos radios y centros cambian con el tiempo. La figura 2.26 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo $S(t, \bar{x})$.

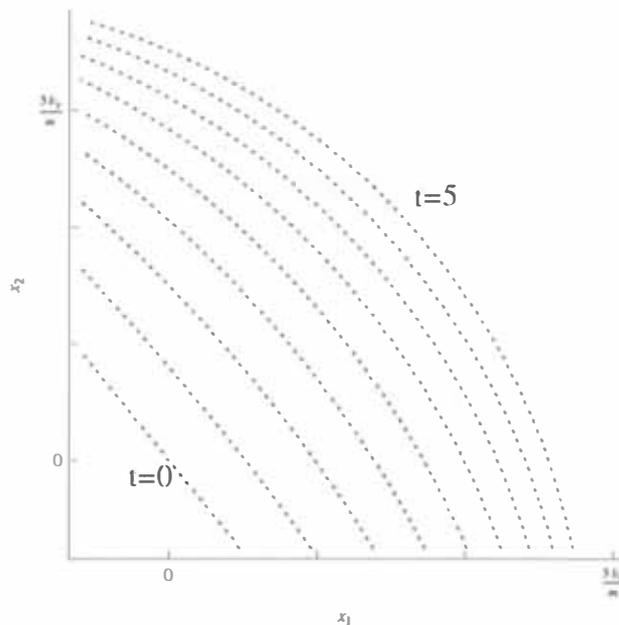


Figura 2.26 – Movimiento de un frente de onda del campo $S(t, \bar{x})$.

De (2.20), la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$ es:

$$R^2(t, \bar{x}) = \left[\frac{2a}{\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{2a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{x} - \frac{\hbar^2 t}{m} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R^2(t, \bar{x})$ es una gaussiana (como función de \bar{x}), cuyo valor máximo es $R_{max}^2 = \left(2a/\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}) \right)^{3/2}$, valor que disminuye con al pasar el tiempo. Este valor máximo de $R^2(t, \bar{x})$ se alcanza en el punto $\bar{x}_{max} = \frac{\hbar^2 t}{m}$; y de acuerdo con (2.15), este punto $\bar{x}_{max} = \frac{\hbar^2 t}{m}$ sigue la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}$. Además debemos notar que $\bar{x}_{max} = \frac{\hbar^2 t}{m}$ (punto de máximo de $R^2(t, \bar{x})$) y $\bar{x}_{0max} = \frac{\hbar^2 t}{m}$ (punto de máximo de $R_0^2(t, \bar{x})$) coinciden. La desviación media cuadrática para esta gaussiana $R^2(t, \bar{x})$ es $\delta = \left((1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})/2a \right)^{1/2}$, y podemos notar que esta desviación aumenta al pasar el tiempo. Por lo tanto concluimos que la superficie de densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ avanza dispersándose. Las figuras 2.27 y 2.28 muestran el movimiento de $R^2(t, \bar{x})$.

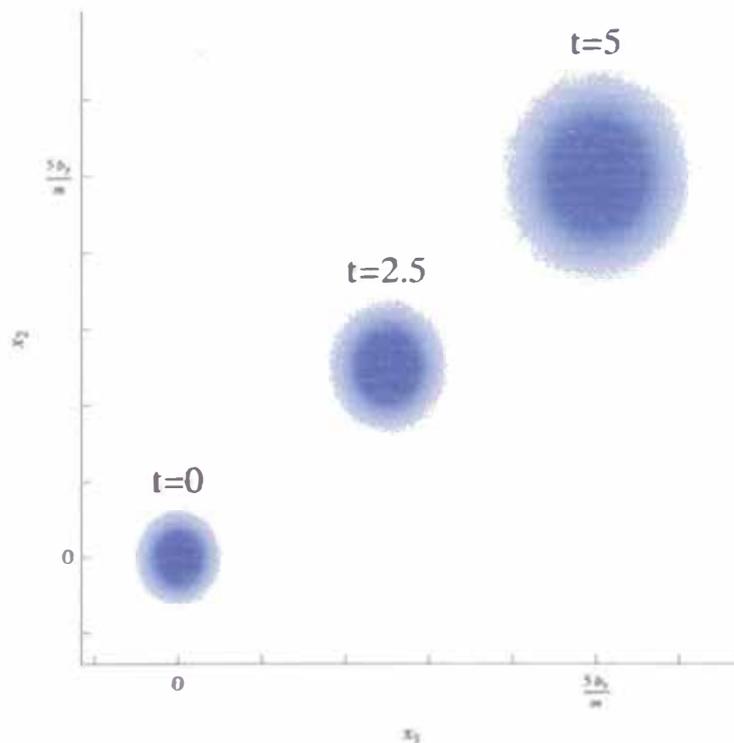


Figura 2.27 – Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ en el espacio de coordenadas. Comparar con la figura 2.17.

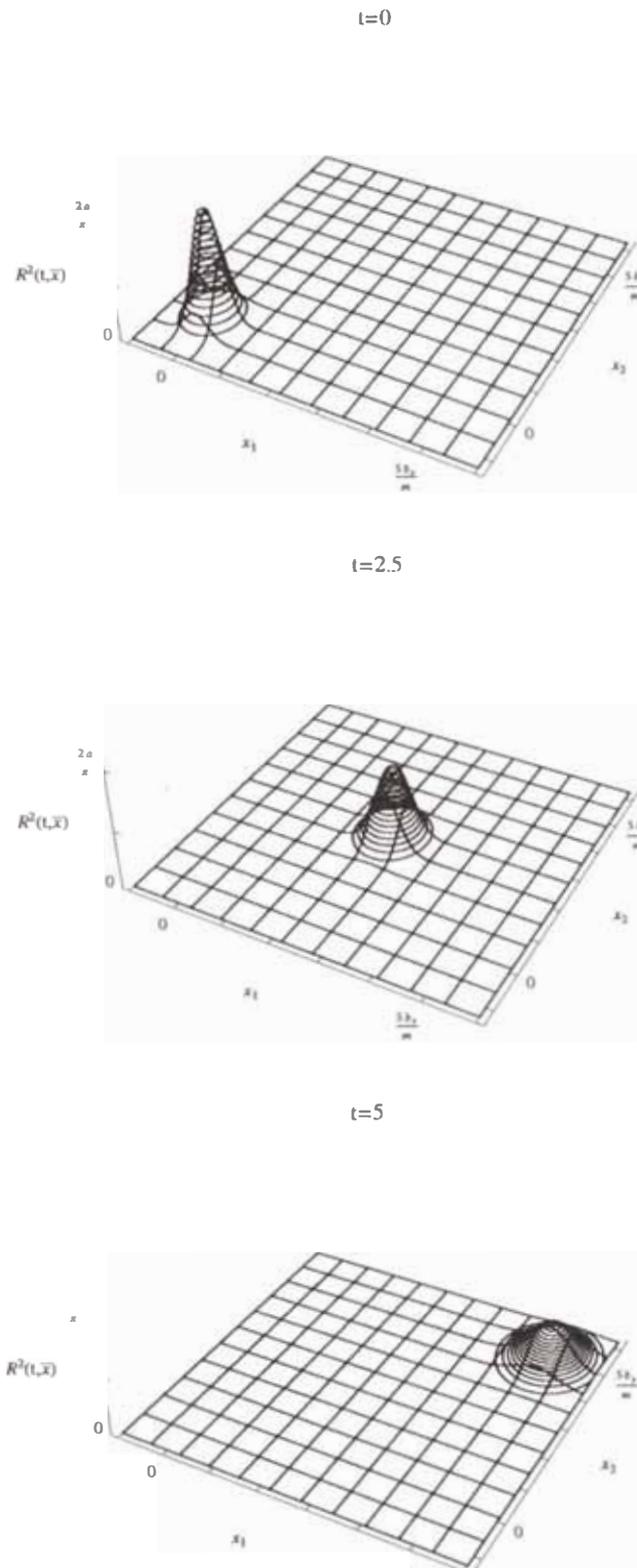


Figura 2.28 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$: Puede observarse que la superficie de densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ avanza dispersándose. Comparar con la figura 2.18

De (2.19), el campo de momentums es:

$$\nabla S(t, \bar{x}) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \bar{x}}{m} \right)$$

La figura 2.29 muestra este campo de momentum.

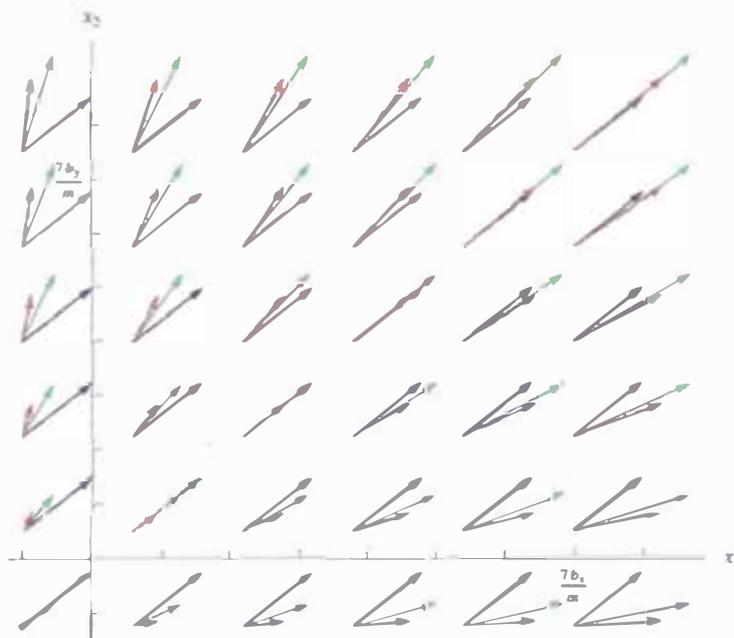


Figura 2.29 – Campo de momentum $\nabla S(t, \bar{x})$: Las flechas negras corresponden al campo de momentum en $t = 0$, las flechas verdes corresponden al campo de momentum en $t = 2,5$, y las flechas rojas corresponden al campo de momentum en $t = 5$. Comparar con la figura 2.19.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentums $\nabla S(t, \bar{x})$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{b} + \frac{4a^2 \hbar^2 t \xi}{m} \right)$$

Resolvemos esta ecuación numéricamente y las presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 2.30 muestra algunas de estas trayectorias, la figura 2.31 se muestra algunos rastros que dejan las partículas; en estas gráficas notamos como las partículas se van dispersando. La figura 2.32 muestra los rastros que dejan las partículas y los frentes de onda en un instante particular.

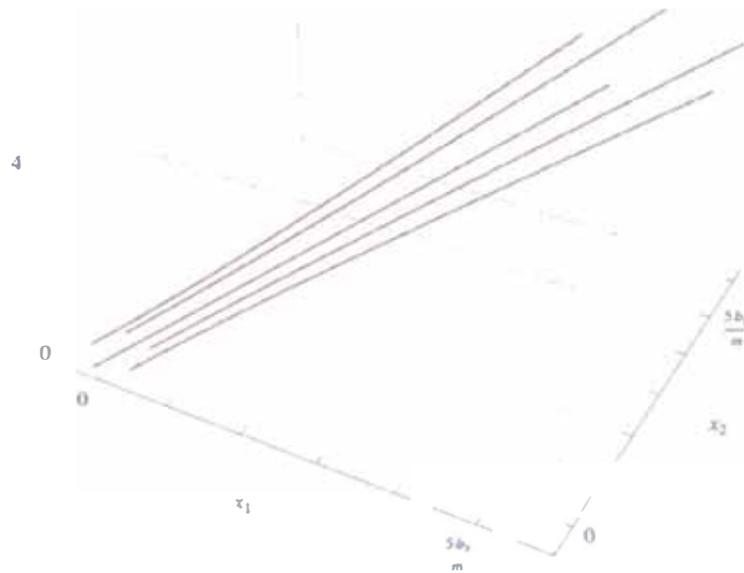


Figura 2.30 Trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.20.

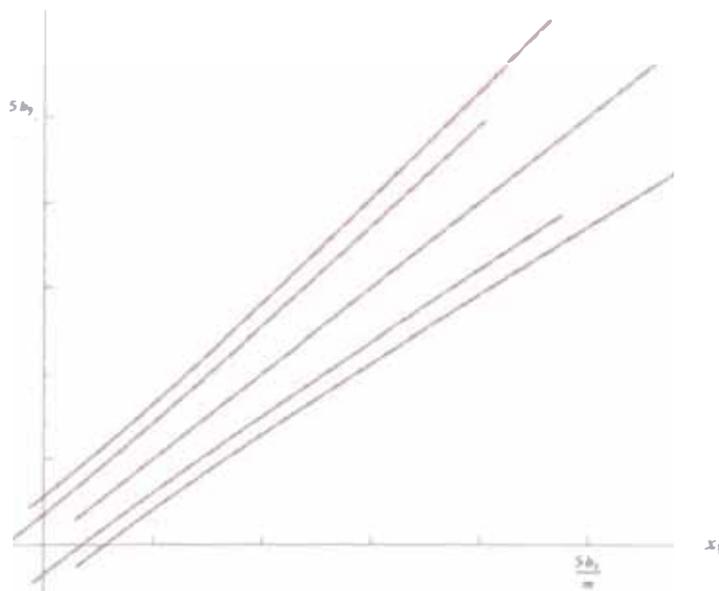


Figura 2.31 - Rastros para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.21

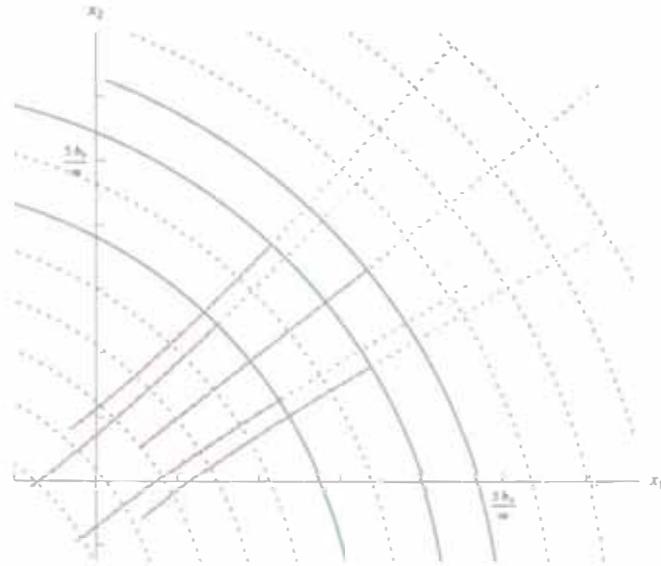


Figura 2.32 – Frentes de onda del campo $S(t, \vec{x})$ y rastros para $\hbar \neq 0$: Aquí podemos notar que los rastros son perpendiculares a los frentes de onda del campo $S(t, \vec{x})$. Comparar con la figura 2.22.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ presentado en las figuras 2.27 y 2.28 puede ser explicado utilizando los rastros de $\xi(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $S(t, \vec{x})$. La figura 2.33 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ y los rastros que dejan las partículas. La figura 2.34 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ y el campo de momentum $S(t, \vec{x})$. La figura 2.35 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ y los frentes de onda del campo $S(t, \vec{x})$.

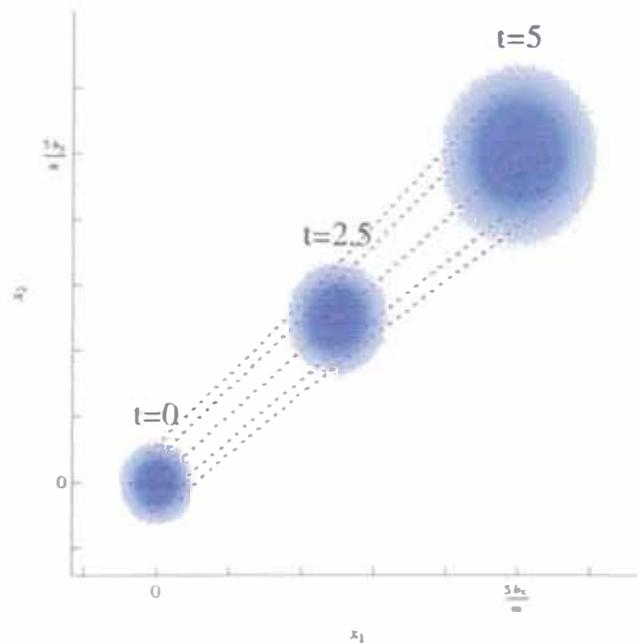


Figura 2.33 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ y rastros de partícula para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 2.24.

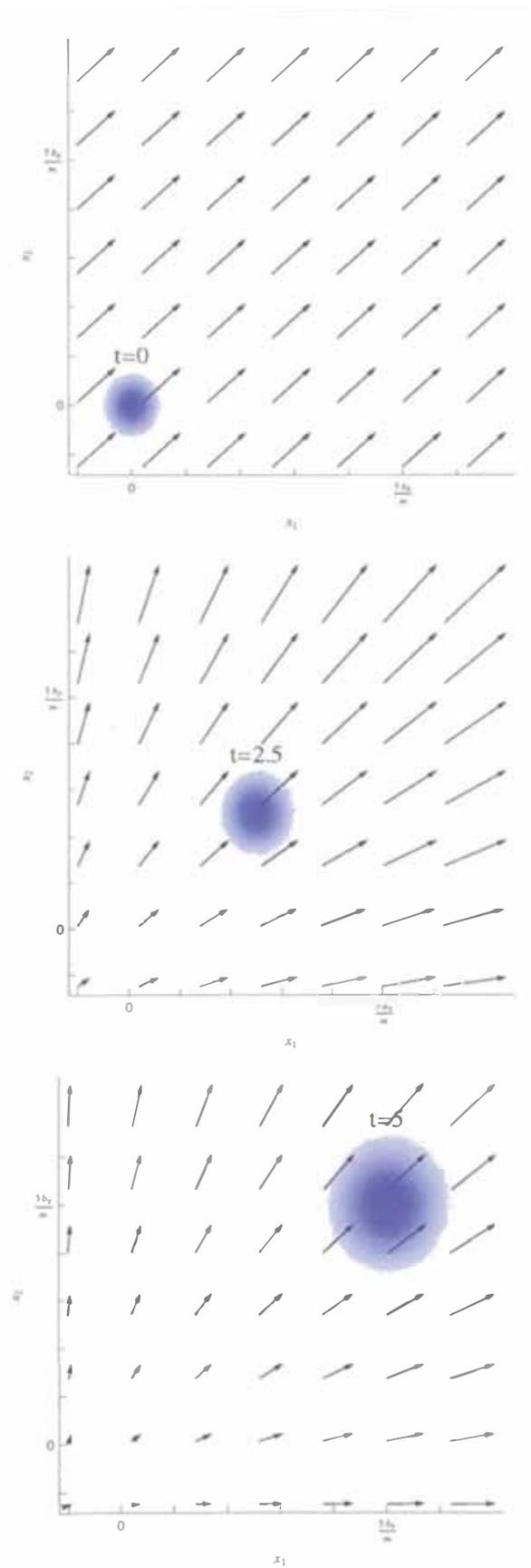


Figura 2.34 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ y campo de momentum $\nabla S(t, x)$. Comparar con la figura 2.23.

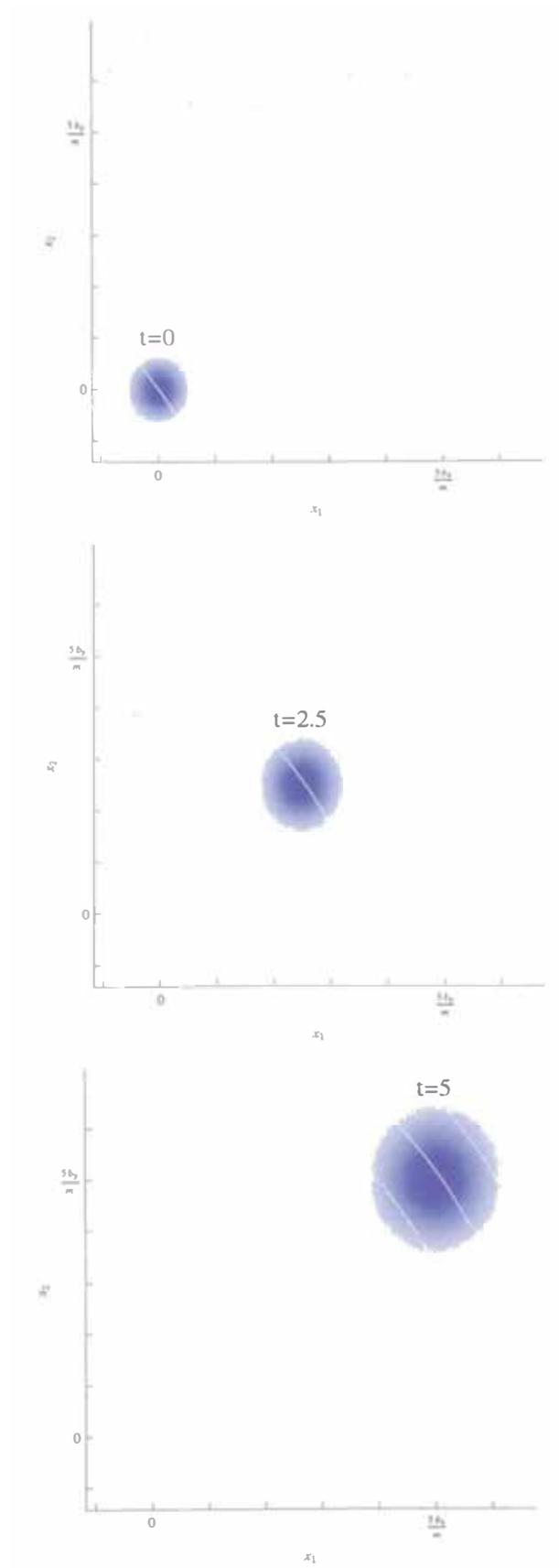


Figura 2.35 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ y los frentes de onda de $S(t, x)$. Comparar con la figura 2.25.

Para finalizar esta sección, la figura 2.36 muestra las trayectorias clásica y cuántica de cinco partículas con distintas posiciones iniciales, y para cada partícula ambas trayectorias (clásica o cuántica) tienen la misma posición inicial. Así mismo la figura 2.37 muestra los rastros clásicos y cuánticos para las mismas partículas.

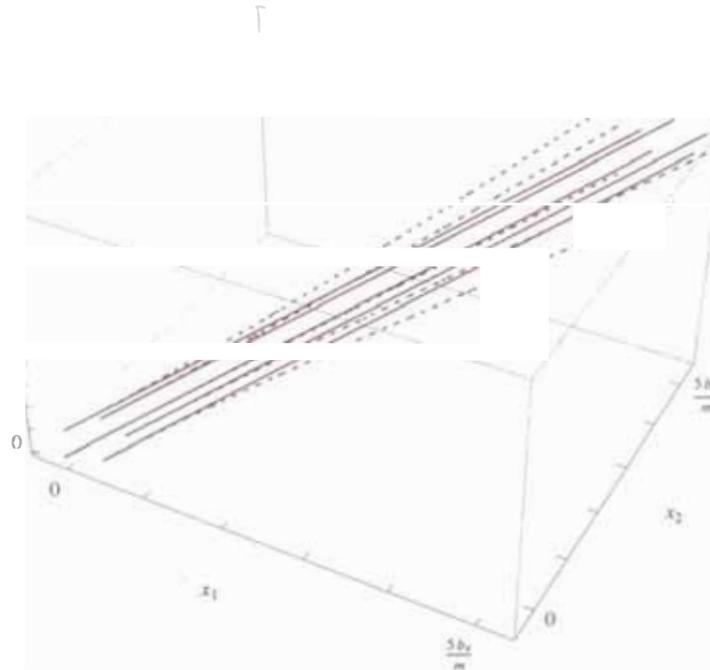


Figura 2.36 Comparación de las trayectorias clásica (líneas rojas) y cuántica (líneas azules punteadas) de cinco partículas.

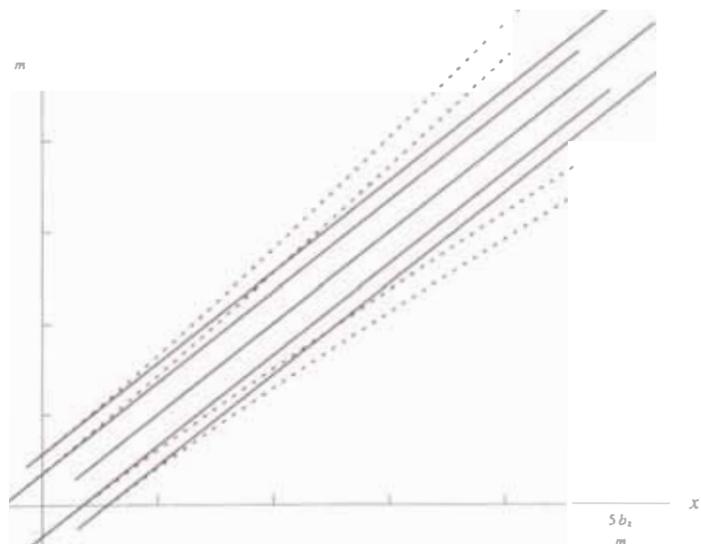


Figura 2.37 – Comparación de los rastros clásico (líneas rojas) y cuántico (líneas azules punteadas) de cinco partículas.

CAPÍTULO 3

Oscilador armónico

En este capítulo desarrollaremos la interpretación sugerida en el capítulo 1, para el caso del oscilador armónico, trataremos tanto el problema unidimensional como el bidimensional por que ellos permitirán notar diferentes aspectos. Nuevamente el objetivo principal es hallar analíticamente los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$, y explicar el comportamiento del sistema utilizando estos campos. Así es conveniente la presentación de numerosas gráficas.

3.1. Oscilador armónico unidimensional

La ecuación de Schrödinger para este problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi = 0$$

Como ya mencionamos, para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda esta dada por:

$$\Psi(t, x) = \int K(t, x, 0, x_0)\Psi(0, x_0)dx_0$$

donde $K(t, x, 0, x_0)$ es el propagador de Feynman del problema. El propagador para el oscilador armónico unidimensional es:

$$K(t, x, 0, x_0) = \left(\frac{m\omega}{2\pi i\hbar \sin \omega t}\right)^{1/2} \exp\left\{\left(-\frac{m\omega}{2i\hbar \sin \omega t}\right) [(x^2 + x_0^2) \cos \omega t - 2x_0x]\right\}$$

Definiendo $A^2 = \frac{m\omega}{2i\hbar \sin \omega t}$, escribimos el propagador en la forma:

$$K(t, x, 0, x_0) = \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp\left\{-A^2 [(x^2 + x_0^2) \cos \omega t - 2x_0x]\right\}$$

3.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, x) = B \exp \left\{ -ax^2 + \frac{ibx}{\hbar} \right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{1/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_0} = 0$ y $\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_0} = b$.

Aplicando el método del propagador, calculamos la función de onda en cualquier instante posterior:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos wt - 2x_0x \right] \right\} \times B \exp \left\{ -ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \\ \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos wt - 2x_0x \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

En el exponente:

$$\begin{aligned} & -A^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos wt - 2x_0x \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos wt - 2x_0x + \frac{ax_0^2}{A^2} - \frac{ibx_0}{\hbar A^2} \right] \\ &= -A^2 x^2 \cos wt - A^2 \left[\left(\cos wt + \frac{a}{A^2} \right) x_0^2 - 2 \left(x + \frac{ib}{2\hbar A^2} \right) x_0 \right] \end{aligned}$$

definiendo $N^2 = \cos wt + a/A^2 = \cos wt + i\alpha \sin wt$ donde $\alpha = 2a\hbar/mw$ y $M = x + ib/2\hbar A^2 = x - \beta \sin wt$ donde $\beta = b/mw$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & -A^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos wt - 2x_0x \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 x^2 \cos wt - A^2 \left(N^2 x_0^2 - 2Mx_0 \right) \\ &= -A^2 x^2 \cos wt - A^2 \left[N^2 x_0^2 - 2 \left(\frac{M}{N} \right) Nx_0 + \frac{M^2}{N^2} \right] + \frac{A^2 M^2}{N^2} \\ &= A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) - A^2 \left(Nx_0 - \frac{M}{N} \right)^2 \\ &= A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) - A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Luego al reemplazar esta expresión equivalente del exponente en (3.1), tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) - A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\ &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\ &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) \right\} \times \frac{\pi^{1/2}}{AN} \end{aligned}$$

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{N} \exp \left\{ A^2 \left(\frac{M^2}{N^2} - x^2 \cos wt \right) \right\}$$

Finalmente al reemplazar A , N y M en la expresion anterior obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{(\cos wt + i\alpha \sin wt)^{1/2}} \exp \left\{ \frac{mw}{2i\hbar \sin wt} \left[\frac{(x - \beta \sin wt)^2}{\cos wt + i\alpha \sin wt} - x^2 \cos wt \right] \right\} \quad (3.2)$$

Ahora para escribir esta función de onda en la forma (1.1) y obtener los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$, debemos separar el exponente de la función exponencial en sus partes real e imaginaria, así como escribir el denominador $(\cos wt + i\alpha \sin wt)^{1/2}$ en su forma polar. Entonces manipulando el exponente:

$$\begin{aligned} & \frac{mw}{2i\hbar \sin wt} \left[\frac{(x - \beta \sin wt)^2}{\cos wt + i\alpha \sin wt} - x^2 \cos wt \right] \\ &= \frac{mw}{2i\hbar \sin wt} \left[\frac{(x - \beta \sin wt)^2 (\cos wt - i\alpha \sin wt)}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} - x^2 \cos wt \right] \\ &= \frac{mw}{2i\hbar \sin wt} \left\{ -\frac{i\alpha \sin wt (x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} + \cos wt \left[\frac{(x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} - x^2 \right] \right\} \\ &= -\frac{m\omega\alpha(x - \beta \sin wt)}{2\hbar(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} + \frac{mw \cos wt}{2i\hbar \sin wt(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} \left[x^2 - 2\beta x \sin wt \right. \\ & \quad \left. + \beta^2 \sin^2 wt - x^2 \cos^2 wt - \alpha^2 x^2 \sin^2 wt \right] \\ &= -\frac{a(x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} + \frac{mw \cos wt}{2i\hbar \sin wt(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} \left[(1 - \alpha^2)x^2 \sin^2 wt \right. \\ & \quad \left. - 2\beta x \sin wt + \beta^2 \sin^2 wt \right] \\ &= -\frac{a(x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} + \frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{mw \cos wt [(1 - \alpha^2)x^2 \sin wt + 2\beta x - \beta^2 \sin wt]}{2(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} \right\} \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que:

$$(\cos wt + i\alpha \sin wt)^{1/2} = (\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)^{1/4} \exp \left\{ \frac{i \arctan(\alpha \tan wt)}{2} \right\}$$

Luego al reemplazar estos resultados en (3.2), obtenemos:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \frac{B}{(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} \right\} \times \\ & \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{mw \cos wt [(1 - \alpha^2)x^2 \sin wt + 2\beta x - \beta^2 \sin wt]}{2(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha \tan wt) \right] \right\} \end{aligned}$$

De aquí identificamos los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$:

$$S(t, x) = \frac{mw \cos wt [(1 - \alpha^2)x^2 \sin wt + 2\beta x - \beta^2 \sin wt]}{2(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha \tan wt) \quad (3.3)$$

$$R(t, x) = \frac{B}{(\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(x - \beta \sin wt)^2}{\cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt} \right\} \quad (3.4)$$

donde $\alpha = 2a\hbar/mw$; $\beta = b/mw$ y $B = (2a/\pi)^{1/4}$. Dado que α depende de \hbar , aquí notamos que $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora verifiquemos que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ obtenidos satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para estos calculamos las siguientes derivadas (y para simplificar, escribimos: $Q = \cos^2 wt + \alpha^2 \sin^2 wt = 1 + (\alpha^2 - 1) \sin^2 wt = \alpha^2 - (\alpha^2 - 1) \cos^2 wt$):

$$\begin{aligned} \partial_x R &= -\frac{2a(x - \beta \sin wt)}{Q} R \\ \partial_t R &= \left[-\frac{w(\alpha^2 - 1) \sin wt \cos wt}{2Q} + \frac{2aw\beta \cos wt(x - \beta \sin wt)}{Q} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2aw(\alpha^2 - 1) \sin wt \cos wt(x - \beta \sin wt)^2}{Q^2} \right] R \\ \partial_x^2 R &= \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{m^2 w^2 \alpha^2 (x - \beta \sin wt)^2}{\hbar^2 Q^2} \right] R \\ \partial_x S &= \frac{mw \cos wt [(\alpha^2 - 1)x \sin wt + \beta]}{Q} \\ \partial_t S &= \frac{mw^2(\alpha^2 - 1) \cos^2 wt(x - \beta \sin wt)^2}{Q^2} + \frac{mw^2(x - \beta \sin wt)^2}{2Q} \\ &\quad - \frac{mw^2 \cos^2 wt [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2]}{2Q} - \frac{mw^2 x^2}{2} - \frac{a\hbar^2}{mQ} \\ \partial_x^2 S &= \frac{mw(\alpha^2 - 1) \sin wt \cos wt}{Q} \end{aligned}$$

Luego en la ecuación de Hamilton-Jacobi perturbada (1.2):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + \frac{mw^2 x^2}{2} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} \\ &= \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q^2} [(\alpha^2 - 1)x \sin wt + \beta]^2 + \frac{mw^2 x^2}{2} + \frac{mw^2}{2Q} (x - \beta \sin wt)^2 \\ &\quad - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] - \frac{mw^2 x^2}{2} - \frac{a\hbar^2}{mQ} \\ &\quad + \frac{mw^2(\alpha^2 - 1) \cos^2 wt}{Q^2} (x - \beta \sin wt)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{m^2 w^2 \alpha^2}{\hbar^2 Q^2} (x - \beta \sin wt)^2 \right] \\ &= \frac{mw^2}{2Q^2} \left\{ \cos^2 wt [(\alpha^2 - 1)x \sin wt + \beta]^2 + 2(\alpha^2 - 1) \cos^2 wt (x - \beta \sin wt)^2 \right. \\ &\quad \left. - \alpha^2 (x - \beta \sin wt)^2 \right\} + \frac{mw^2}{2Q} (x - \beta \sin wt)^2 - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] \\ &= \frac{mw^2}{2Q^2} \left\{ \cos^2 wt [(\alpha^2 - 1)x \sin wt + \beta]^2 + (\alpha^2 - 1) \cos^2 wt (x - \beta \sin wt)^2 \right. \\ &\quad \left. + [(\alpha^2 - 1) \cos^2 wt - \alpha^2] (x - \beta \sin wt)^2 \right\} + \frac{mw^2}{2Q} (x - \beta \sin wt)^2 \\ &\quad - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + \frac{mw^2 x^2}{2} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} \\
&= \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q^2} \left\{ [(\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt + \beta]^2 + (\alpha^2 - 1)(x - \beta \operatorname{sen} wt)^2 \right\} \\
&\quad - \frac{mw^2}{2Q} (x - \beta \operatorname{sen} wt)^2 + \frac{mw^2}{2Q} (x - \beta \operatorname{sen} wt)^2 - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] \\
&= \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q^2} \left\{ (\alpha^2 - 1)^2 x^2 \operatorname{sen}^2 wt + 2(\alpha^2 - 1)\beta x \operatorname{sen} wt + \beta^2 + (\alpha^2 - 1)x^2 \right. \\
&\quad \left. - 2(\alpha^2 - 1)\beta x \operatorname{sen} wt + (\alpha^2 - 1)\beta^2 \operatorname{sen}^2 wt \right\} - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] \\
&= \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q^2} \left\{ (\alpha^2 - 1)x^2 [1 + (\alpha^2 - 1)\operatorname{sen}^2 wt] + \beta^2 [1 + (\alpha^2 - 1)\operatorname{sen}^2 wt] \right\} \\
&\quad - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] \\
&= \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] - \frac{mw^2 \cos^2 wt}{2Q} [(\alpha^2 - 1)x^2 + \beta^2] = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + \frac{mw^2 x^2}{2} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen las ecuación (1.2). Ahora, para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R \\
&= \frac{R}{2m} \left[\frac{mw(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} wt \cos wt}{Q} \right] \\
&\quad + \frac{R}{m} \left[-\frac{2a(x - \beta \operatorname{sen} wt)}{Q} \right] \left\{ \frac{mw \cos wt [(\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt + \beta]}{Q} \right\} \\
&\quad + \left[-\frac{w(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} wt \cos wt}{2Q} + \frac{2aw\beta \cos wt (x - \beta \operatorname{sen} wt)}{Q} \right. \\
&\quad \left. + \frac{2aw(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} wt \cos wt (x - \beta \operatorname{sen} wt)^2}{Q^2} \right] R \\
&= \frac{mw^2}{2Q^2} \left\{ (\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} wt (x - \beta \operatorname{sen} wt)^2 - (x - \beta \operatorname{sen} wt) [(\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt + \beta] \right\} \\
&\quad + \frac{2aw\beta R \cos wt}{Q} (x - \beta \operatorname{sen} wt) \\
&= \frac{2awR \cos wt}{Q^2} (x - \beta \operatorname{sen} wt) \left[(\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt - (\alpha^2 - 1)\beta \operatorname{sen}^2 wt \right. \\
&\quad \left. - (\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt - \beta \right] + \frac{2aw\beta R \cos wt}{Q} (x - \beta \operatorname{sen} wt) \\
&= \frac{2aw\beta R \cos wt}{Q^2} (x - \beta \operatorname{sen} wt) \left[-\frac{1 + (\alpha^2 - 1) \operatorname{sen}^2 wt}{Q} + 1 \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen las ecuación (1.3). Entonces tenemos una solución del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3). Ahora verificaremos que

los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest. El valor medio de \hat{X} de acuerdo con (1.7) es¹:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x B^2}{Q^{1/2}} \exp\left\{-\frac{2a}{Q}(x - \beta \operatorname{sen} wt)^2\right\} dx \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (x - \beta \operatorname{sen} wt) \exp\left\{-\frac{2a}{Q}(x - \beta \operatorname{sen} wt)^2\right\} dx \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-\infty}^{\infty} \beta \operatorname{sen} wt \exp\left\{-\frac{2a}{Q}(x - \beta \operatorname{sen} wt)^2\right\} dx \right] \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left\{-\frac{2az^2}{Q}\right\} dz + \beta \operatorname{sen} wt \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2a}{Q}(x - \beta \operatorname{sen} wt)^2\right\} dx \right] \\
 &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \times \beta \operatorname{sen} wt \left(\frac{Q\pi}{2a}\right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

y reemplazando el valor de B , obtenemos:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} = \beta \operatorname{sen} wt \quad (3.5)$$

Ahora, el valor medio de \hat{P} , de acuerdo con (1.8) es:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \partial_x S(t, x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \frac{mw \cos wt}{Q} [(\alpha^2 - 1)x \operatorname{sen} wt + \beta] dx \\
 &= \frac{mw \cos wt}{Q} \left[(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen} wt \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx + \beta \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx \right]
 \end{aligned}$$

y de la condición de normalización tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx = 1$ y del cálculo del valor medio de \hat{X} tenemos $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} = \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx = \beta \operatorname{sen} wt$, luego:

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} &= \frac{mw \cos wt}{Q} [(\alpha^2 - 1)\beta \operatorname{sen}^2 wt + \beta] \\
 &= \frac{mw\beta \cos wt}{Q} [(\alpha^2 - 1) \operatorname{sen}^2 wt + 1]
 \end{aligned}$$

reemplazando el valor de $Q = (\alpha^2 - 1) \operatorname{sen}^2 wt + 1$ y β obtenemos:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} = b \cos wt \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}$ se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento, para cualquier valor de \hbar .

¹Aquí para simplificar, seguimos utilizando Q que ya fue definido líneas arriba.

3.1.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el “potencial ficticio” es:

$$V_f(t, x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2a}{\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt} - \frac{4a^2 \left(x - \frac{b \sin wt}{mw}\right)^2}{\left(\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt\right)^2} \right]$$

Podemos notar que $V_f(t, x)$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, x)$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (3.3) y (3.4) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso del oscilador armónico unidimensional.**

3.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (3.3) y (3.4) en $\hbar = 0$ tenemos¹¹:

$$S_0(t, x) = \frac{1}{2 \cos wt} \left(2bx - mw x^2 \sin wt - \frac{b^2 \sin wt}{mw} \right) \quad (3.7)$$

$$R_0(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi \cos^2 wt} \right)^{1/4} \exp \left\{ -\frac{a}{\cos^2 wt} \left(x - \frac{b \sin wt}{mw} \right)^2 \right\} \quad (3.8)$$

La figura 3.1 muestra la grafica del campo $S_0(t, x)$, este campo es propiamente una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, resaltando que esta solución es no separable y además no esta definida en los instantes $t = (2n + 1)\pi/2w$ con $n \in \mathbb{Z}$.

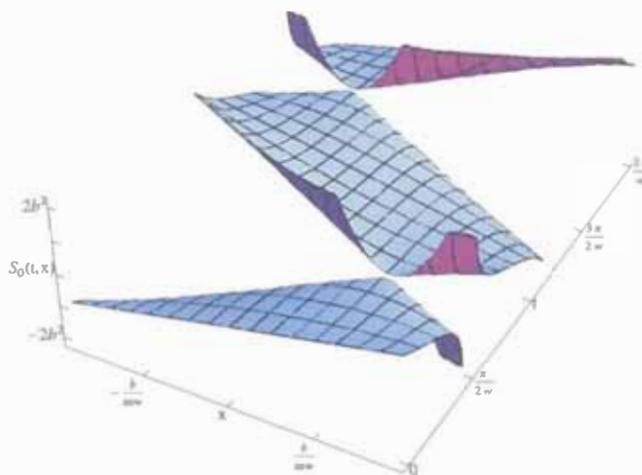


Figura 3.1 – Campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 3.8.

¹¹En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

De (3.8) la densidad de probabilidad es:

$$R_0^2(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi \cos^2 wt} \right)^{1/2} \exp \left\{ -\frac{2a}{\cos^2 wt} \left(x - \frac{b \operatorname{sen} wt}{mw} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R_0^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuyo valor máximo es $R_{0max}^2 = (2a/\pi \cos^2 wt)^{1/2}$. Este valor máximo es una función del tiempo y posee singularidades para valores de $t = (2n + 1)\pi/2w$ con $n \in \mathbb{Z}$, y para estos valores $R_{0max}^2 \rightarrow \infty$. El valor máximo de $R_0^2(t, x)$ se alcanza en el punto $x_{0max} = b \operatorname{sen} wt/mw$, y de acuerdo con (3.5), este punto x_{0max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$.

Para $R_0^2(t, x)$ la desviación media cuadrática es $\delta = (\cos^2 wt/2a)^{1/2}$ y esta es nula para los valores de $t = (2n + 1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{Z}$, que son los mismos instantes de tiempo donde $R_0^2(t, x)$ tiene singularidades. Así notamos que estas singularidades corresponden a puntos donde las partículas se acumulan. La figura 3.2 muestra el movimiento de $R_0^2(t, x)$.

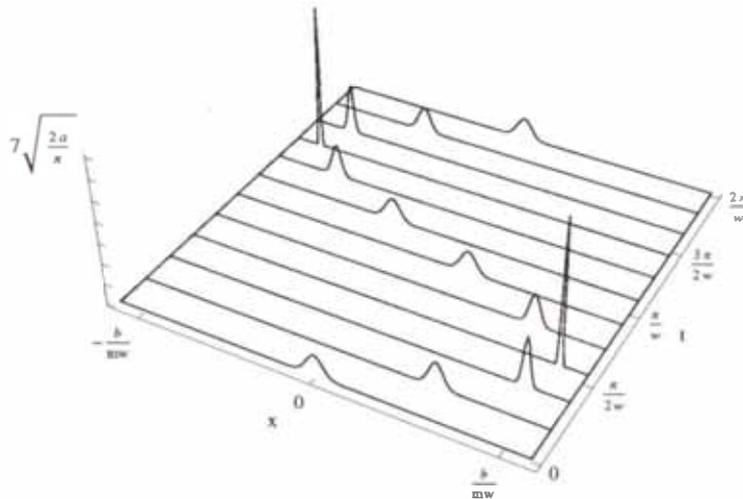


Figura 3.2 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$. Comparar con la figura 3.9.

De (3.7), el campo de momentums para $\hbar = 0$ es:

$$\partial_x S_0(t, x) = \frac{b - mw x \operatorname{sen} wt}{\cos wt}$$

Al igual que para $R_0^2(t, x)$, este campo de momentum tiene singularidades en los puntos $t = (2n + 1)\pi/2$ con $n \in \mathbb{Z}$. La figura 3.3 muestra la gráfica del del campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$.

Si colocamos partículas en el campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{b - mw \xi_0 \operatorname{sen} wt}{m \cos wt}$$

Estas trayectorias son de la forma $\xi_0(t) = b \text{sen } wt/mw + x_0 \cos wt$, donde x_0 es la posición inicial de la partícula. La figura 3.4 muestra algunas de estas trayectorias. La figura 3.5 se presenta una comparación gráfica del comportamiento de las líneas de nivel del campo $S_0(t, x)$ y de las trayectorias que él determina.

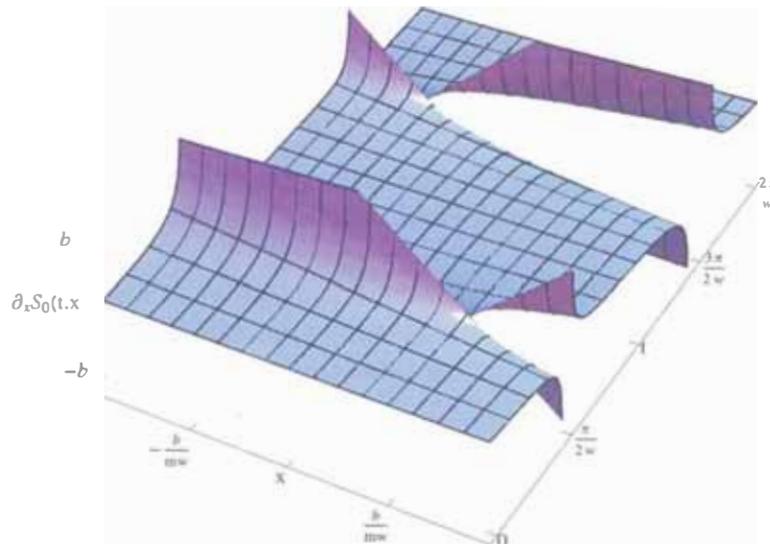


Figura 3.3 Campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$. Comparar con la figura 3.10.

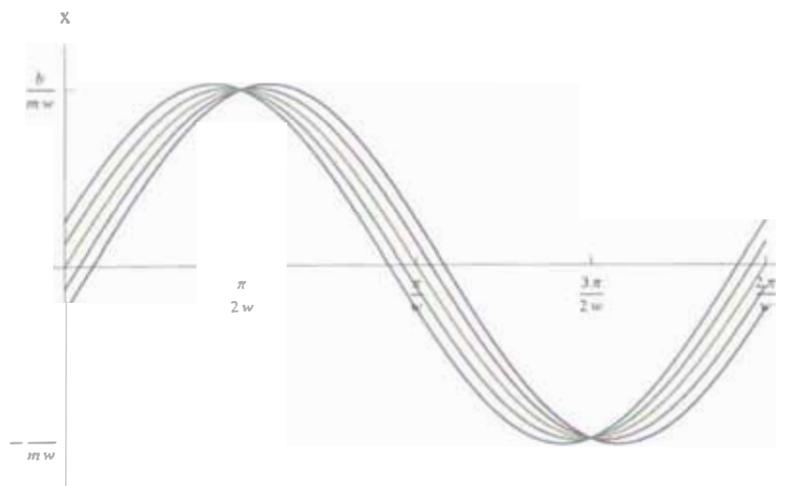


Figura 3.4 – Trayectorias para $\hbar = 0$: Estas trayectorias corresponde a trayectorias de oscilador armónico clásico, como era de esperarse pues $S_0(t, x)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Aquí también se puede notar como las trayectorias se “estrangulan”. Comparar con la figura 3.11.

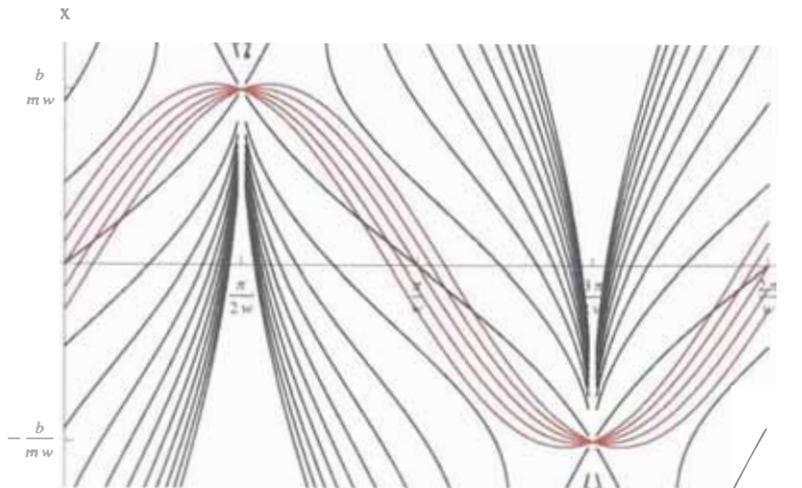


Figura 3.5 – Curvas de nivel del campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 3.12

La figura 3.6 muestra gráficamente la relación que existe entre las singularidades del campo $S_0(t, x)$ y las trayectorias que él determina, aquí se puede notar como las trayectorias se “estrangulan” en las singularidades del campo $S_0(t, x)$.

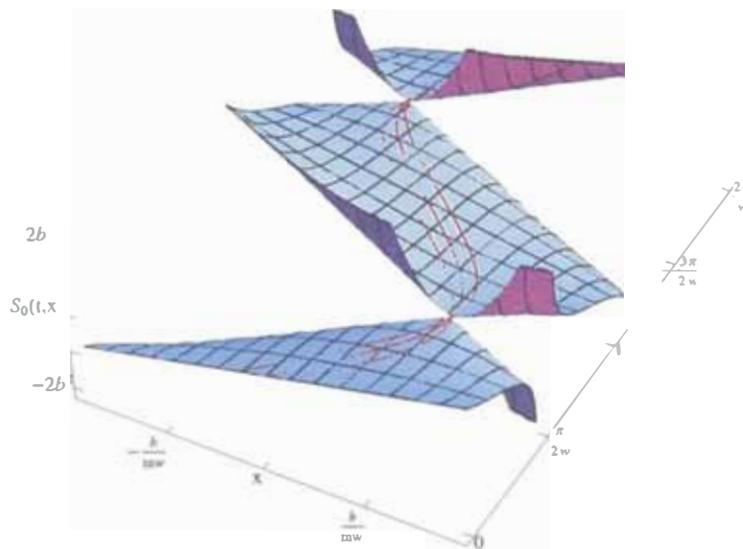


Figura 3.6 – Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$: Sobre la superficie $S_0(t, x)$ se han “pintado” las trayectorias de tres partículas. Comparar con la figura 3.13.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ presentado en la figura 3.1 puede ser explicado con las trayectorias $\xi_0(t)$. Recordemos que la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ es en realidad una distribución de posición de partículas normalizada, de modo que si colocamos “marcas” en la grafica de $R_0^2(t, x)$ estas deben moverse como partículas, describiendo trayectorias del tipo $\xi_0(t)$. La figura 3.7 muestra la grafica de $R_0^2(t, x)$ juntamente con la trayectoria de tres marcas (partículas marcadas) hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

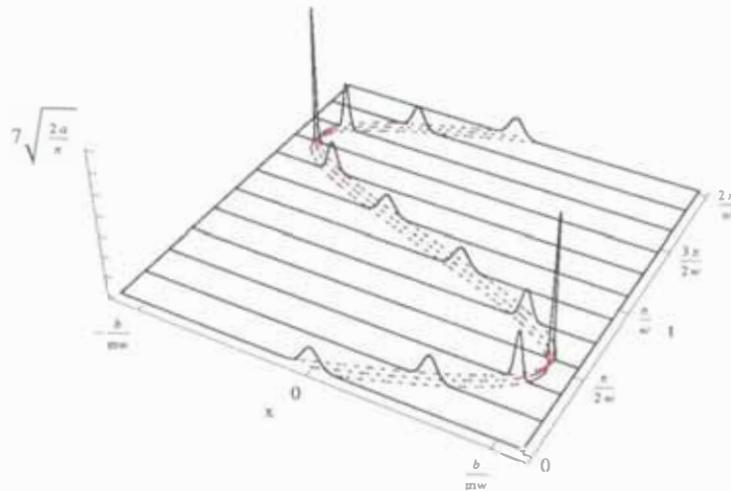


Figura 3.7 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y tres trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 3.14.

3.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (3.3) y (3.4) para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$S(t, x) = \frac{mw \cos wt \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} - 1 \right) x^2 \sin wt + \frac{2bx}{mw} - \frac{b^2 \sin wt}{m^2 w^2} \right]}{2 \left(\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt \right)} - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar \tan wt}{mw} \right) \quad (3.9)$$

$$R(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi \left(\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt \right)} \right]^{1/4} \times \exp \left\{ - \frac{a}{\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt} \left(x - \frac{b \sin wt}{mw} \right)^2 \right\} \quad (3.10)$$

La figura 3.8 muestra la grafica del campo $S(t, x)$. De (3.10), la densidad de probabilidad es:

$$R^2(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi \left(\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt \right)} \right]^{1/2} \times \exp \left\{ - \frac{2a}{\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt} \left(x - \frac{b \sin wt}{mw} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuyo valor máximo es $R_{max}^2 = \left[2a/\pi \left(\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt \right) \right]^{1/2}$. Este valor máximo es una función del tiempo, y a diferencia de lo que sucede en el caso clásico no posee singularidades. El valor máximo se alcanza en el punto $x_{max} = b \sin wt / mw$, y de acuerdo con (3.5), este punto

x_{max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}$. Además debemos de notar que x_{max} (punto de máximo de $R^2(t, x)$) y x_{0max} (punto de máximo de $R_0^2(t, x)$) coinciden. Para $R^2(t, x)$, la desviación media cuadrática es $\delta = \left(\cos^2 \omega t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 \omega^2} \sin^2 \omega t / 2a \right)^{1/2}$. Esta desviación, a diferencia de la desviación clásica δ_0 , no se anula para algún t , es decir no existen puntos donde se acumulan las partículas. La figura 3.9 muestra el movimiento de $R^2(t, x)$.

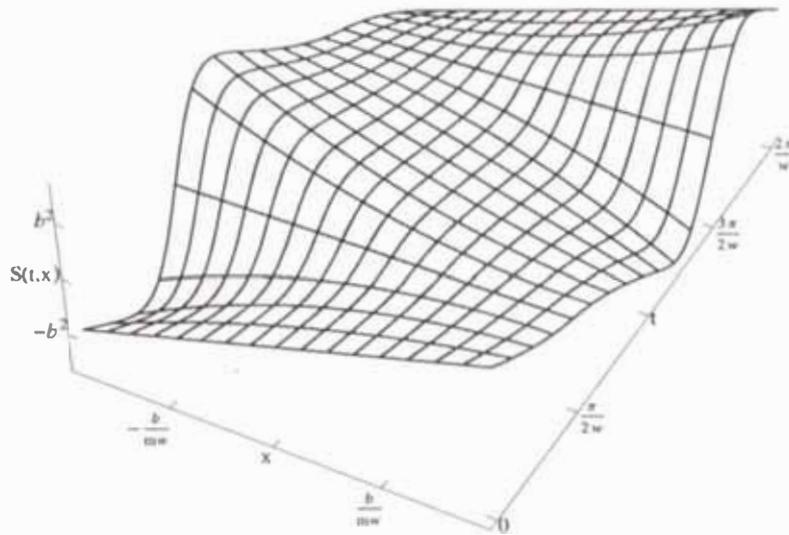


Figura 3.8 – Campo $S(t, x)$. Notesé que este campo está definido sobre todo el espacio $x - t$, a diferencia del campo $S_0(t, x)$ Comparar con la figura 3.1.

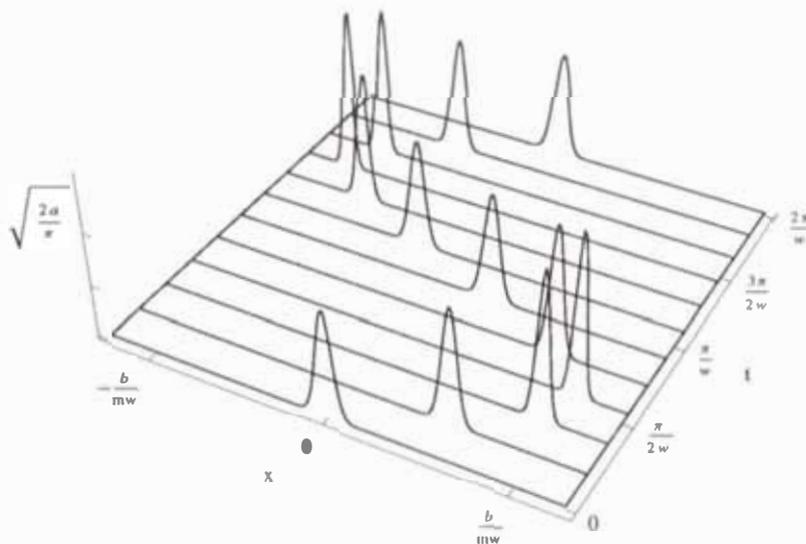


Figura 3.9 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$. Comparar con la figura 3.2.

De (3.9), el campo de momentum es:

$$\partial_x S(t, x) = \frac{mw \cos wt \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} - 1 \right) x \sin wt + \frac{b}{mw} \right]}{\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt}$$

Este campo de momentum no posee singularidades, a diferencia de lo que sucede en el caso clásico. En la figura 3.10 presentamos la gráfica del campo de momentum $\partial_x S(t, x)$.

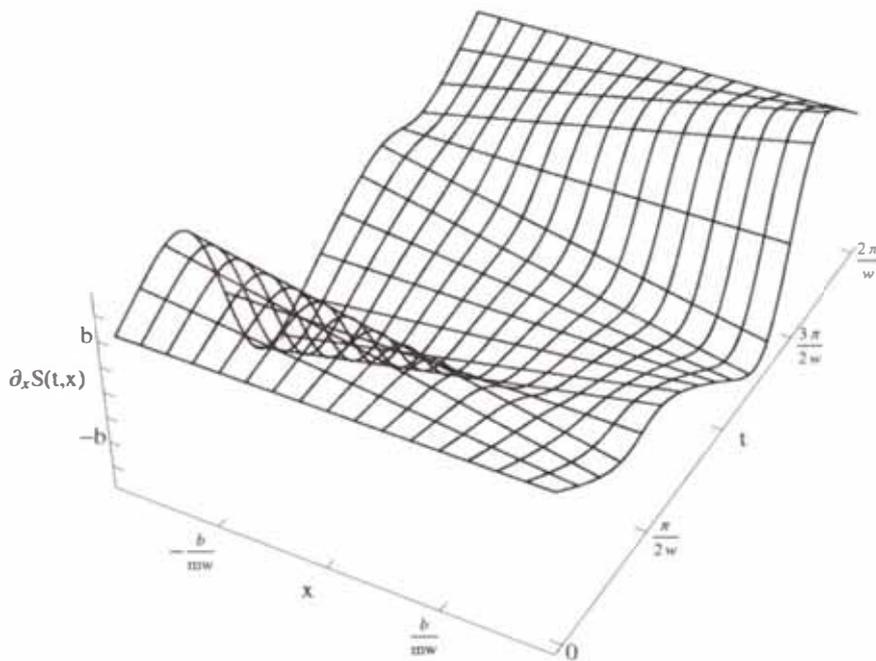


Figura 3.10 – Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$. Comparar con la figura 3.3.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\partial_x S(t, x)$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.11), que para este caso es:

$$\dot{\xi} = \frac{w \cos wt \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} - 1 \right) \xi \sin wt + \frac{b}{mw} \right]}{\cos^2 wt + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w^2} \sin^2 wt}$$

Resolvemos esta ecuación numéricamente y presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 3.11 muestra algunas de estas trayectorias. En las figuras 3.12 y 3.13 presentamos una comparación gráfica del comportamiento del campo $S(t, x)$ y de las trayectorias que él determina.

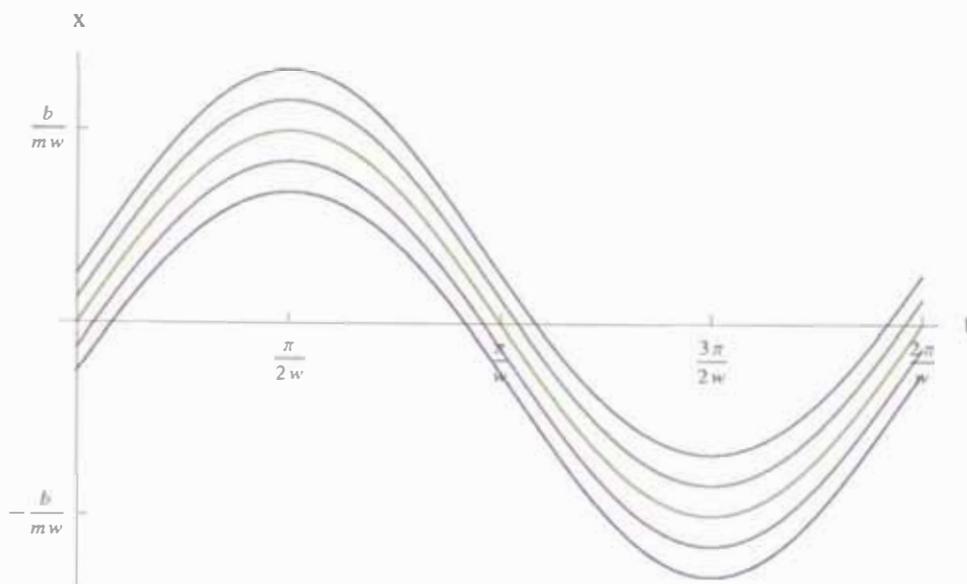


Figura 3.11 - Trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 3.4.

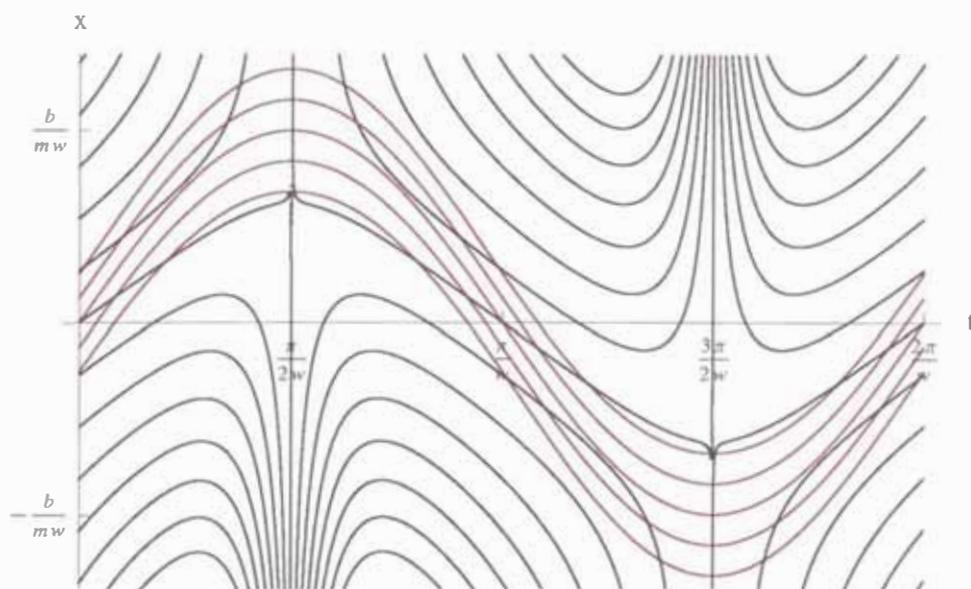


Figura 3.12 - Curvas de nivel del campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 3.5

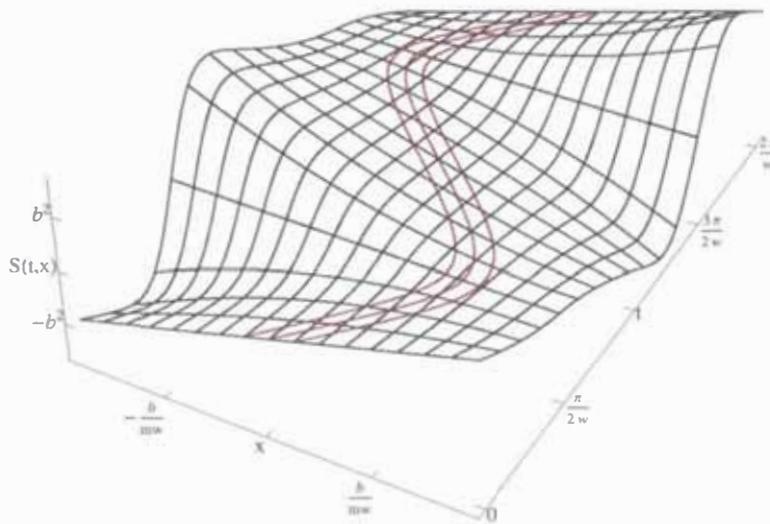


Figura 3.13 – Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$: Sobre la superficie $S(t, x)$ se han “pintado” las trayectorias de tres partículas. Comparar con la figura 3.6.

El movimiento de la densidad probabilidad $R^2(t, x)$ presentado en la figura 3.9 puede ser explicado utilizando las trayectorias $\xi(t)$ presentadas en la figura 3.11. Recordemos que la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ es en realidad una distribución normalizada de partículas, de modo que si colocamos “marcas” en la grafica de $R^2(t, x)$ estas deben de moverse como partículas y describir trayectorias $\xi(t)$. La figura 3.14 muestra la gráfica de $R^2(t, x)$ conjuntamente con la trayectoria de tres marcas (partículas marcadas) hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

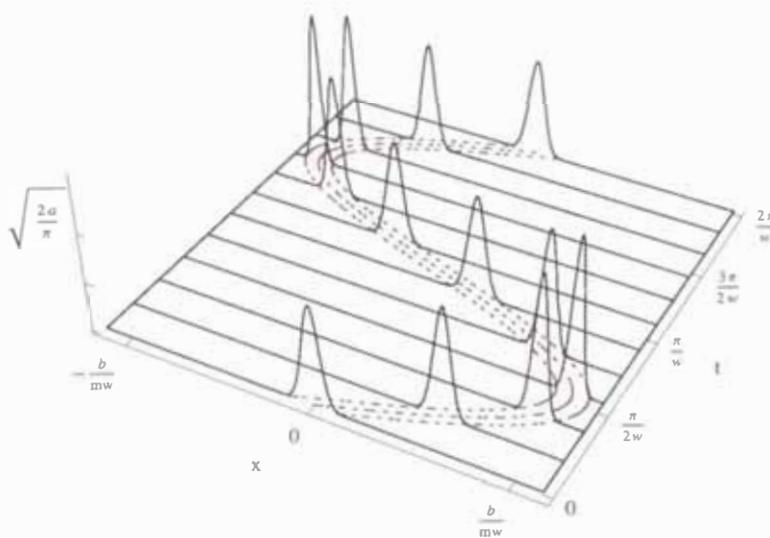


Figura 3.14 – Movimiento de la densidad de probabilidad de $R^2(t, x)$ y tres trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 3.7.

Para finalizar esta sección, la figura 3.15 muestra las trayectorias clásica y cuántica de cinco partículas con distintas posiciones iniciales, y para cada partícula ambas trayectorias (clásica o cuántica) tienen las mismas posiciones iniciales.

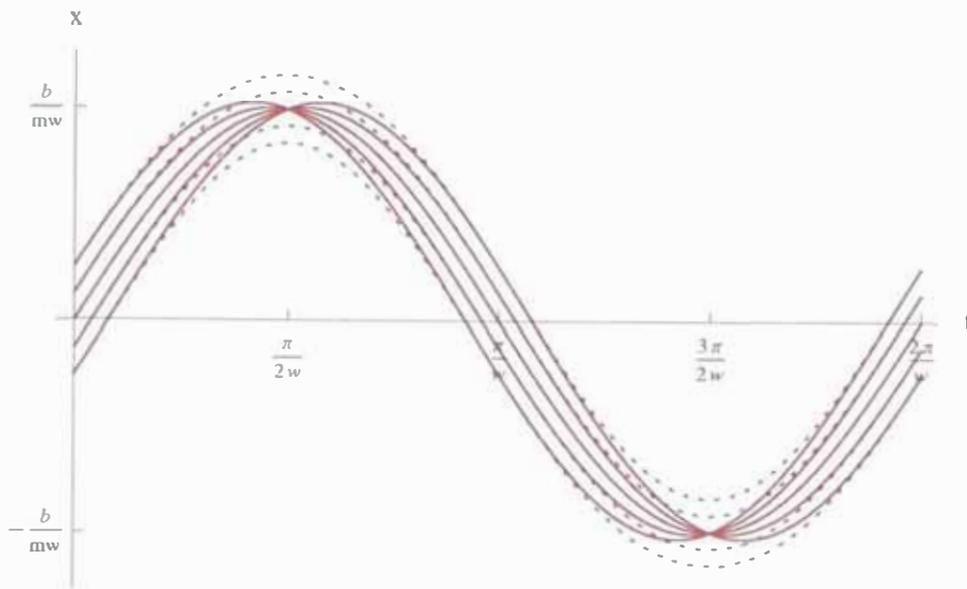


Figura 3.15 – Comparación de las trayectorias clásicas (líneas rojas) y cuánticas (líneas punteadas azules) de cinco partículas.

3.2. Oscilador armónico bidimensional

La ecuación de Schrödinger para este problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + \frac{m\omega_x^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_y^2 y^2}{2} + \frac{\hbar}{i} \partial_t \Psi = 0$$

Para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda esta dada por:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \int K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) \Psi(0, \bar{x}_0) d^2 x_0$$

donde $K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)$ es el propagador de Feynman del problema. Para este problema, el propagador $K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)$ se separa de la siguiente manera:

$$K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) = K_x(t, x, 0, x_0) K_y(t, y, 0, y_0)$$

donde:

$$K_x(t, x, 0, x_0) = \frac{A_x}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A_x^2 \left[(x^2 + x_0^2) \cos \omega_x t - 2x_0 x \right] \right\}$$

$$K_y(t, y, 0, y_0) = \frac{A_y}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A_y^2 \left[(y^2 + y_0^2) \cos \omega_y t - 2y_0 y \right] \right\}$$

y $A_x^2 = m\omega_x / 2i\hbar \sin \omega_x t$, $A_y^2 = m\omega_y / 2i\hbar \sin \omega_y t$. Debemos notar que K_x y K_y son propagadores de tipo oscilador armónico unidimensional y están asociados a la ecuación de Schrödinger del oscilador armónico unidimensional.

3.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, \bar{x}) = B^2 \exp \left\{ -a\bar{x}^2 + \frac{i\bar{b}\cdot\bar{x}}{\hbar} \right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{1/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_0} = 0$ y $\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_0} = \bar{b}$.

Debemos notar que la función de onda inicial, al igual que el propagador, es separable, es decir:

$$\begin{aligned} \Psi(0, \bar{x}_0) &= B^2 \exp \left\{ -a\bar{x}_0^2 + \frac{i\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \right\} \\ &= B \exp \left\{ -ax_0^2 + \frac{ib_x x_0}{\hbar} \right\} \times B \exp \left\{ -ay_0^2 + \frac{ib_y y_0}{\hbar} \right\} \end{aligned}$$

y definiendo:

$$\psi_x(0, x_0) = B \exp \left\{ -ax_0^2 + \frac{ib_x x_0}{\hbar} \right\}$$

$$\psi_y(0, y_0) = B \exp \left\{ -ay_0^2 + \frac{ib_y y_0}{\hbar} \right\}$$

obtenemos:

$$\Psi(0, \bar{x}_0) = \psi_x(0, x_0)\psi_y(0, y_0)$$

Luego, en el cálculo de la función de onda:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \bar{x}) &= \int K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) \Psi(0, \bar{x}_0) d^2 x_0 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} K_x(t, x, 0, x_0) \psi_x(0, x_0) dx_0 \times \int_{-\infty}^{\infty} K_y(t, y, 0, y_0) \psi_y(0, y_0) dy_0 \\ &= \psi_x(t, x) \psi_y(t, y) \end{aligned}$$

donde $\psi_x(t, x)$ y $\psi_y(t, y)$ son funciones de onda de oscilador armónico unidimensional. Este resultado indica que la función de onda de este problema se separa como el producto de dos funciones de onda de oscilador armónico unidimensional. El cálculo de estas de funciones de onda unidimensionales fue hecho en la sección anterior, de modo que aquí resumiremos brevemente los resultados más importantes.

Para ψ_x : Tenemos:

$$\begin{aligned} \psi_x(t, x) &= \frac{B}{(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(x - \beta_x \sin w_x t)^2}{\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t} \right\} \times \\ &\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{m w_x \cos w_x t [(\alpha_x^2 - 1)x^2 \sin w_x t + 2\beta_x x - \beta_x^2 \sin w_x t]}{2(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_x \tan w_x t) \right] \right\} \end{aligned}$$

Si escribimos ψ_x en la forma $\psi_x(t, x) = R_1(t, x) \exp \{iS_1(t, x)/\hbar\}$, identificamos R_1 y S_1 :

$$S_1(t, x) = \frac{mw_x \cos w_x t [(\alpha_x^2 - 1)x^2 \sin w_x t + 2\beta_x x - \beta_x^2 \sin w_x t]}{2(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_x \tan w_x t)$$

$$R_1(t, x) = \frac{B}{(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(x - \beta_x \sin w_x t)^2}{\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t} \right\}$$

donde $\alpha_x = 2a\hbar/mw_x$; y $\beta_x = b_x/mw_x$. Estas funciones satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{1}{2m}(\partial_x^2 S_1)^2 + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \partial_t S_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R_1}{R_1} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{1}{2m} R_1 \partial_x^2 S_1 + \frac{1}{m} \partial_x R_1 \partial_x S_1 + \partial_t R_1 = 0 \quad (3.12)$$

Para ψ_y : Tenemos:

$$\psi_y(t, y) = \frac{B}{(\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(y - \beta_y \sin w_y t)^2}{\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t} \right\} \times$$

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{mw_y \cos w_y t [(\alpha_y^2 - 1)y^2 \sin w_y t + 2\beta_y y - \beta_y^2 \sin w_y t]}{2(\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_y \tan w_y t) \right] \right\}$$

Si escribimos ψ_y en la forma $\psi_y(t, y) = R_2(t, y) \exp \left\{ \frac{iS_2(t, y)}{\hbar} \right\}$, identificamos R_2 y S_2 :

$$S_2(t, y) = \frac{mw_y \cos w_y t [(\alpha_y^2 - 1)y^2 \sin w_y t + 2\beta_y y - \beta_y^2 \sin w_y t]}{2(\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)} - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_y \tan w_y t)$$

$$R_2(t, y) = \frac{B}{(\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a(y - \beta_y \sin w_y t)^2}{\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t} \right\}$$

donde $\alpha_y = 2a\hbar/mw_y$; y $\beta_y = b_y/mw_y$. Estas funciones satisfacen las ecuaciones:

$$\frac{1}{2m}(\partial_y^2 S_2)^2 + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_y^2 R_2}{R_2} = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{2m} R_2 \partial_y^2 S_2 + \frac{1}{m} \partial_y R_2 \partial_y S_2 + \partial_t R_2 = 0 \quad (3.14)$$

Ahora debemos escribir Ψ en la forma (1.1). Como $\Psi(t, x, y) = \psi_x(t, x)\psi_y(t, y)$; $\psi_x = R_1 \exp \{iS_1/\hbar\}$, y $\psi_y = R_2 \exp \{iS_2/\hbar\}$ tenemos que:

$$\Psi(t, x, y) = R_1(t, x)R_2(t, y) \exp \left\{ \frac{i(S_1(t, x) + S_2(t, y))}{\hbar} \right\}$$

Así podemos notar que $R(t, x, y) = R_1(t, x)R_2(t, y)$ y $S(t, x, y) = S_1(t, x) + S_2(t, y)$, entonces:

$$S(t, x, y) = \frac{mw_x \cos w_x t [(\alpha_x^2 - 1)x^2 \sin w_x t + 2\beta_x x - \beta_x^2 \sin w_x t]}{2(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)}$$

$$+ \frac{mw_y \cos w_y t [(\alpha_y^2 - 1)y^2 \sin w_y t + 2\beta_y y - \beta_y^2 \sin w_y t]}{2(\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)}$$

$$- \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_x \tan w_x t) - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha_y \tan w_y t) \quad (3.15)$$

$$R(t, x, y) = \frac{B^2}{(\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t)^{1/4} (\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t)^{1/4}} \times \exp \left\{ -\frac{a(x - \beta_x \sin w_x t)^2}{\cos^2 w_x t + \alpha_x^2 \sin^2 w_x t} - \frac{a(y - \beta_y \sin w_y t)^2}{\cos^2 w_y t + \alpha_y^2 \sin^2 w_y t} \right\} \quad (3.16)$$

donde $\alpha_x = 2a\hbar/mw_x$, $\alpha_y = 2a\hbar/mw_y$, $B = (2a/\pi)^{1/4}$, $\beta_x = b_x/mw_x$ y $\beta_y = b_y/mw_y$. Dado que α_x y α_y depende de \hbar , aquí notamos que $R(t, x, y)$ y $S(t, x, y)$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora debemos probar que los campos R y S satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3); para esto debemos calcularlos las derivadas^{III}:

$$\begin{aligned} \nabla S &= \partial_x S_1 \bar{e}_1 + \partial_y S_2 \bar{e}_2 \\ \partial_t S &= \partial_t S_1 + \partial_t S_2 \\ \nabla^2 S &= \partial_x^2 S_1 + \partial_y^2 S_2 \\ \nabla R &= R_2 \partial_x R_1 \bar{e}_1 + R_1 \partial_y R_2 \bar{e}_2 \\ \partial_t R &= R_2 \partial_t R_1 + R_1 \partial_t R_2 \\ \nabla^2 R &= R_2 \partial_x^2 R_1 + R_1 \partial_y^2 R_2 \end{aligned}$$

Luego en la ecuación (1.2):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_x S_1 \bar{e}_1 + \partial_y S_2 \bar{e}_2)^2 + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S_1 + \partial_t S_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{(R_2 \partial_x^2 R_1 + R_1 \partial_y^2 R_2)}{R_1 R_2} \\ &= \frac{1}{2m} [(\partial_x S_1)^2 + (\partial_y S_2)^2] + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S_1 + \partial_t S_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial_x^2 R_1}{R_1} + \frac{\partial_y^2 R_2}{R_2} \right] \\ &= \frac{1}{2m} (\partial_x S_1)^2 + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \partial_t S_1 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R_1}{R_1} + \frac{1}{2m} (\partial_y S_2)^2 + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S_2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_y^2 R_2}{R_2} \end{aligned}$$

como S_1 y R_1 satisfacen (3.11), y S_2 y R_2 satisfacen (3.13); obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{2m} (\nabla S)^2 + \frac{mw_x^2 x^2}{2} + \frac{mw_y^2 y^2}{2} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x, y)$ y $S(t, x, y)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.2). Ahora para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \nabla S + \partial_t R \\ &= \frac{1}{2m} R_1 R_2 (\partial_x^2 S_1 + \partial_y^2 S_2) + \frac{1}{m} (R_2 \partial_x R_1 \bar{e}_1 + R_1 \partial_y R_2 \bar{e}_2) \cdot (\partial_x S_1 \bar{e}_1 + \partial_y S_2 \bar{e}_2) \\ &\quad + R_2 \partial_t R_1 + R_1 \partial_t R_2 \\ &= R_2 \left[\frac{1}{2m} R_1 \partial_x^2 S_1 + \frac{1}{m} \partial_x R_1 \partial_x S_1 + \partial_t R_1 \right] + R_1 \left[\frac{1}{2m} R_2 \partial_y^2 S_2 + \frac{1}{m} \partial_y R_2 \partial_y S_2 + \partial_t R_2 \right] \end{aligned}$$

como S_1 y R_1 satisfacen (3.12), y S_2 y R_2 satisfacen (3.14); obtenemos finalmente:

$$\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \nabla S + \partial_t R = 0$$

^{III}Los vectores $\{\bar{e}_i\}_{i=1,2}$ son la base canónica de \mathbb{R}^2

Así queda demostrado que los campos $R(t, x, y)$ y $S(t, x, y)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.3). Entonces tenemos una solución del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3) para el caso del oscilador armónico bidimensional. Ahora verificaremos que los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest. El valor medio de \hat{X} de acuerdo con (1.8) es:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^2x$$

utilizando la descomposición $R(t, x, y) = R_1(t, x)R_2(t, y)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^2} x R_1^2(t, x) R_2^2(t, y) dx dy \bar{e}_1 + \int_{\mathbb{R}^2} y R_1^2(t, x) R_2^2(t, y) dx dy \bar{e}_2 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_2^2(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} x R_1^2(t, x) dx \bar{e}_1 + \int_{-\infty}^{\infty} R_1^2(t, x) dx \int_{-\infty}^{\infty} y R_2^2(t, y) dy \bar{e}_2 \end{aligned}$$

Pero, de la condición de normalización tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R_1^2 dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} R_2^2 dy = 1$; y del cálculo del valor medio de \hat{X} para el caso del oscilador armónico unidimensional tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} x R_1^2 dx = \beta_x \sin w_x t$ y $\int_{-\infty}^{\infty} y R_2^2 dy = \beta_y \sin w_y t$, luego:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \beta_x \sin w_x t \bar{e}_1 + \beta_y \sin w_y t \bar{e}_2 \quad (3.17)$$

Ahora, el valor medio de \hat{P} , de acuerdo con (1.9) es:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = \int_{\mathbb{R}^2} R^2(t, \bar{x}) \nabla S(t, \bar{x}) d^2x$$

utilizando la descomposición $R(t, x, y) = R_1(t, x)R_2(t, y)$ y $S(t, x, y) = S_1(t, x) + S_2(t, y)$ tenemos:

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^2} R_1^2(t, x) R_2^2(t, y) (\partial_x S_1(t, x) \bar{e}_1 + \partial_y S_2(t, y) \bar{e}_2) d^2x \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R_2^2(t, y) dy \int_{-\infty}^{\infty} R_1^2(t, x) \partial_x S_1(t, x) dx \bar{e}_1 + \int_{-\infty}^{\infty} R_1^2(t, x) dx \int_{-\infty}^{\infty} R_2^2(t, y) \partial_y S_2(t, y) dy \bar{e}_2 \end{aligned}$$

Pero, de la condición de normalización tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R_1^2 dx = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} R_2^2 dy = 1$; y del cálculo del valor medio de \hat{P} para el caso del oscilador armónico unidimensional tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R_1^2(t, x) \partial_x S_1(t, x) dx = b_x \cos w_x t$ y $\int_{-\infty}^{\infty} R_2^2(t, y) \partial_y S_2(t, y) dy = b_y \cos w_y t$, luego:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = b_x \cos w_x t \bar{e}_1 + b_y \cos w_y t \bar{e}_2 \quad (3.18)$$

De (3.17) y (3.18) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$ se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento, para cualquier valor del parámetro \hbar .

3.2.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el "potencial ficticio" es:

$$V_f(t, x, y) = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{2a}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t} + \frac{2a}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t} - \frac{4a^2 (x - \frac{b_x \sin w_x t}{m w_x})^2}{(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t)^2} - \frac{4a^2 (y - \frac{b_y \sin w_y t}{m w_y})^2}{(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t)^2} \right\}$$

Podemos notar que $V_f(t, x, y)$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, x, y)$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (3.15) y (3.16) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y cuando $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso del oscilador armónico bidimensional.**

3.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (3.15) y (3.16) en $\hbar = 0$ tenemos^{iv}:

$$S_0(t, x, y) = \frac{1}{2 \cos w_x t} \left(2b_x x - m w_x x^2 \sin w_x t - \frac{b_x^2 \sin w_x t}{m w_x} \right) + \frac{1}{2 \cos w_y t} \left(2b_y y - m w_y y^2 \sin w_y t - \frac{b_y^2 \sin w_y t}{m w_y} \right) \quad (3.19)$$

$$R_0(t, x, y) = \left(\frac{(2a/\pi)^2}{\cos^2 w_x t \cos^2 w_y t} \right)^{1/4} \times \exp \left\{ -\frac{a}{\cos^2 w_x t} \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{m w_x} \right)^2 - \frac{a}{\cos^2 w_y t} \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{m w_y} \right)^2 \right\} \quad (3.20)$$

Para el campo $S_0(t, x, y)$ analizaremos sus frentes de onda pues ellos son perpendiculares a los rastros que dejan las partículas. Para el campo $S_0(t, x, y)$, los frentes de onda en el instante t_0 son:

$$\frac{1}{2 \cos w_x t_0} \left(2b_x x - m w_x x^2 \sin w_x t_0 - \frac{b_x^2 \sin w_x t_0}{m w_x} \right) + \frac{1}{2 \cos w_y t_0} \left(2b_y y - m w_y y^2 \sin w_y t_0 - \frac{b_y^2 \sin w_y t_0}{m w_y} \right) = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda, y para $t_0 = 0$ estos frentes de onda son planos con vector normal igual a $\vec{b} = (b_x, b_y)$. Mientras que para $t_0 \neq 0$ los frentes de onda toman la forma:

$$\frac{m w_x \tan w_x t_0}{2} \left(x - \frac{b_x \csc w_x t_0}{m w_x} \right)^2 + \frac{m w_y \tan w_y t_0}{2} \left(y - \frac{b_y \csc w_y t_0}{m w_y} \right)^2 = \frac{b_x^2 \cot w_x t_0}{2 m w_x} + \frac{b_y^2 \cot w_y t_0}{2 m w_y} - c$$

Estos frentes de onda pueden ser círculos, elipses o hipérbolas, dependiendo del valor que se elijan para los parámetros b_x, b_y, w_x, w_y y t_0 . La figura 3.16 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo $S_0(t, x, y)$ ^v.

^{iv}En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

^vComo referencia, hemos elegido $\frac{2\pi}{w_x} = 3,307s$ y $\frac{2\pi}{w_y} = 2,417s$

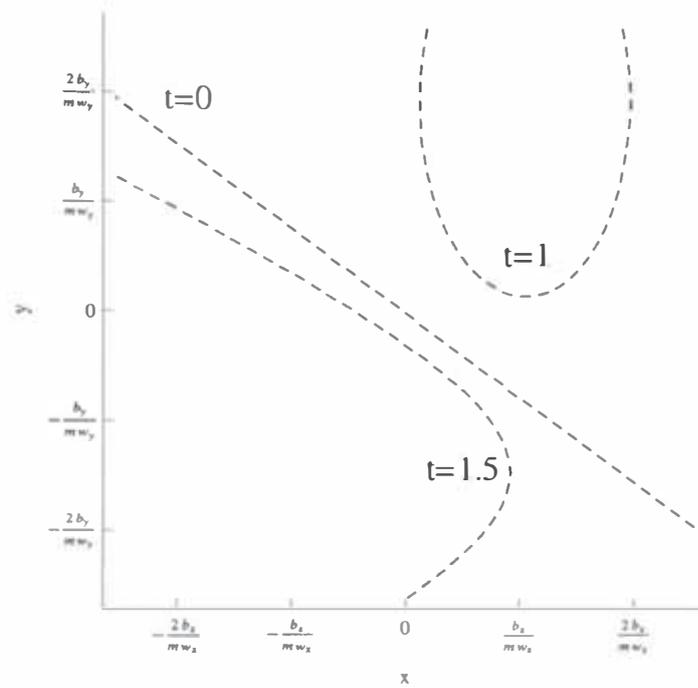


Figura 3.16 – Movimiento de un frente de onda del campo $S_0(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.25.

De (3.20), la densidad de probabilidad es:

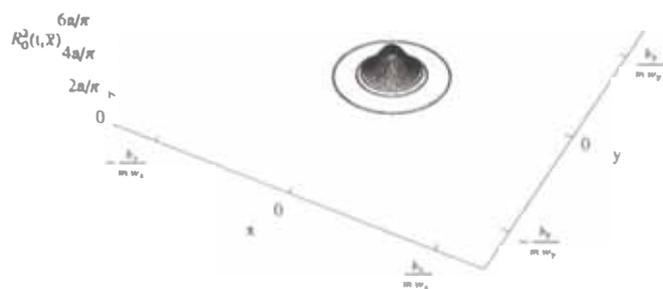
$$R_0^2(t, x, y) = \frac{2a/\pi}{(\cos^2 w_x t \cos^2 w_y t)^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{2a}{\cos^2 w_x t} \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{mw_x} \right)^2 - \frac{2a}{\cos^2 w_y t} \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{mw_y} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que R_0^2 es una gaussiana (vista como función de (x, y)), con curvas de nivel dadas por las elipses:

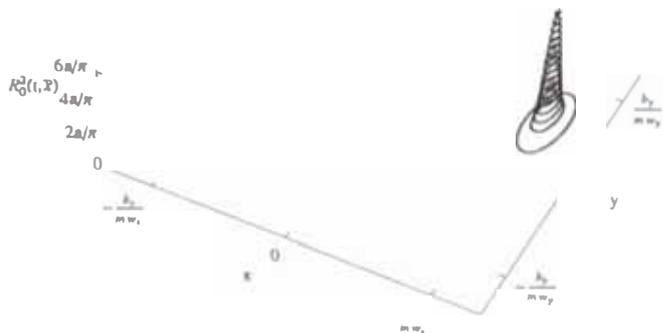
$$\frac{2a}{\cos^2 w_x t} \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{mw_x} \right)^2 + \frac{2a}{\cos^2 w_y t} \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{mw_y} \right)^2 = d$$

El valor máximo de esta gaussiana es $R_{0max}^2 = 2a/\pi(\cos^2 w_x t \cos^2 w_y t)^{1/2}$, cantidad que cambia con el tiempo, y tiene singularidades en los puntos $t = (2n + 1)\pi/2w_x$ ó $t = (2n + 1)\pi/2w_y$ con $n \in \mathbb{Z}$; y para estos valores $R_{0max}^2 \rightarrow \infty$. El valor máximo de $R_0^2(t, x, y)$ se alcanza en el punto $\bar{x}_{0max} = b_x \sin w_x t / mw_x \bar{e}_1 + b_y \sin w_y t / mw_y \bar{e}_2$, y de acuerdo con (3.17), este punto \bar{x}_{0max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$. La densidad $R_0^2(t, x, y)$ tiene dos desviaciones medias cuadráticas, una correspondiente al eje X de valor igual a $\delta_{0x} = (\cos^2 w_x t / 2a)^{1/2}$ con la propiedad de anularse en los instantes $t = (2n + 1)\pi/2w_x$ con $n \in \mathbb{Z}$; y otra desviación correspondiente al eje Y de valor igual a $\delta_{0y} = (\cos^2 w_y t / 2a)^{1/2}$ con la propiedad de anularse en los instantes $t = (2n + 1)\pi/2w_y$ con $n \in \mathbb{Z}$. Como podemos notar las desviaciones se anulan en los puntos donde la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ presenta singularidades; estas singularidades corresponden a puntos donde las partículas se acumulan. Las figura 3.17 y 3.18 muestran el movimiento de $R_0^2(t, x, y)$.

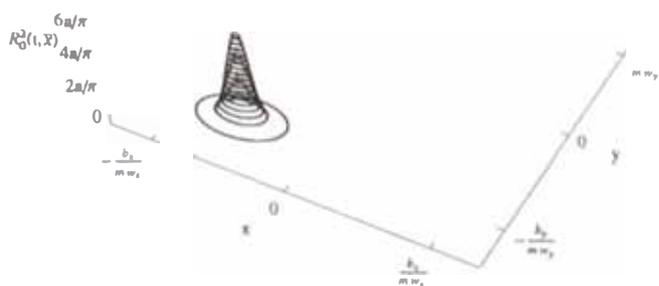
$t=0$



$t=1$



$t=2$



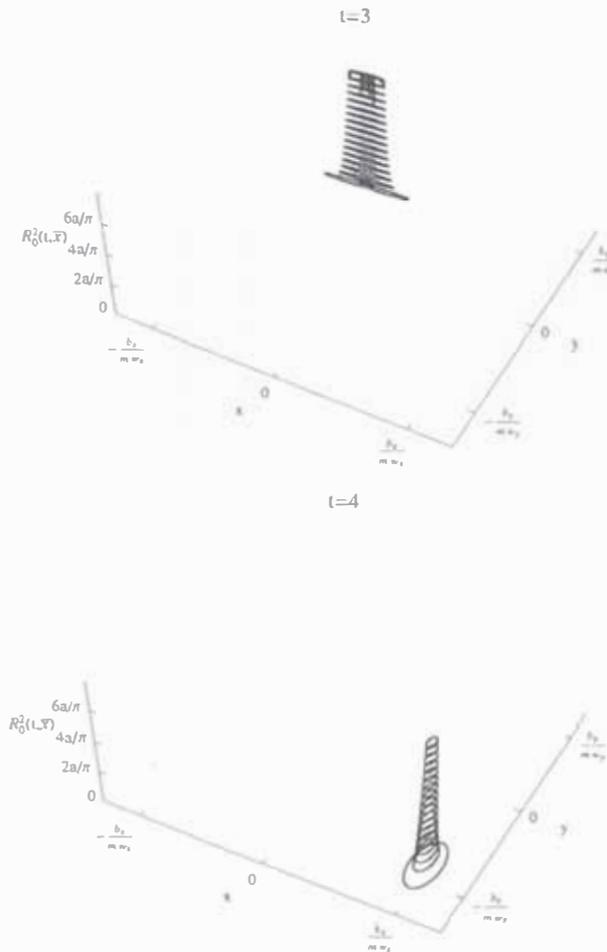


Figura 3.17 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 3.26.

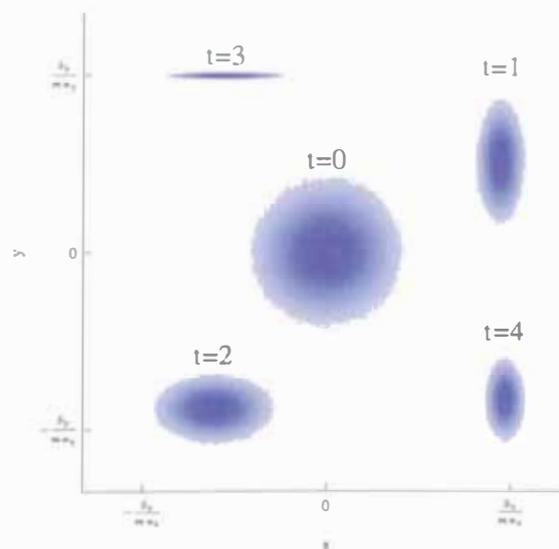


Figura 3.18 – Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ en el espacio de coordenadas. Comparar con la figura 3.27.

De (3.19), el campo de momentum es:

$$\nabla S_0(t, x, y) = \frac{b_x - mw_x x \text{ sen } w_x t}{\cos w_x t} \bar{e}_1 + \frac{b_y - mw_y y \text{ sen } w_y t}{\cos w_y t} \bar{e}_2$$

Al igual que la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$, este campo de momentum tiene singularidades en los puntos $t = (2n + 1)\pi/2w_x$ ó $t = (2n + 1)\pi/2w_y$ con $n \in \mathbb{Z}$. La figura 3.19 muestra este campo de momentum.

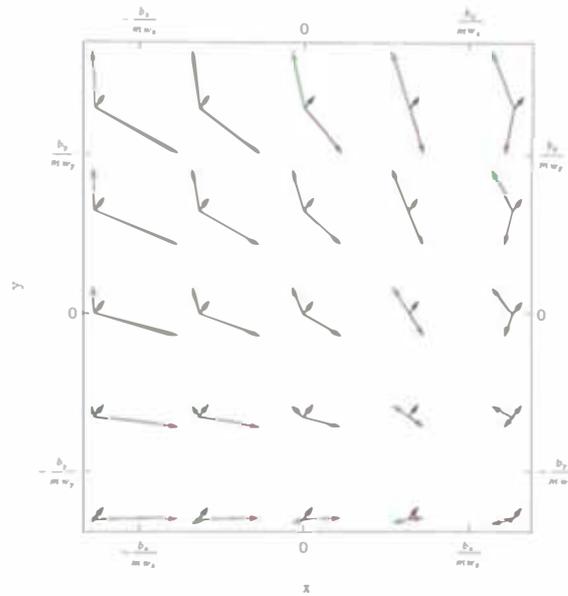


Figura 3.19 – Campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$: Las flechas negras corresponden al campo de momentum en $t = 0s$, las flechas verdes corresponden al campo de momentum en $t = 2s$; y las flechas rojas corresponden al campo de momentum en $t = 4s$. Comparar con la figura 3.28.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$, obtenemos sus trayectorias $\bar{\xi}_0(t)$ utilizando la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\bar{\xi}}_0 = \frac{b_x - mw_x \xi_{0x} \text{ sen } w_x t}{\cos w_x t} \bar{e}_1 + \frac{b_y - mw_y \xi_{0y} \text{ sen } w_y t}{\cos w_y t} \bar{e}_2$$

Estas trayectorias son de la forma:

$$\bar{\xi}_0(t) = \left(\frac{b_x \text{ sen } w_x t}{mw_x} + x_0 \cos w_x t \right) \bar{e}_1 + \left(\frac{b_y \text{ sen } w_y t}{mw_y} + y_0 \cos w_y t \right) \bar{e}_2$$

donde (x_0, y_0) es la posición inicial de la partícula. La figura 3.20 muestra algunos de los rastros que dejan las partículas. La figura 3.21 muestra los rastros que dejan algunas partículas y los frentes de onda del campo $\nabla S_0(t, x, y)$.

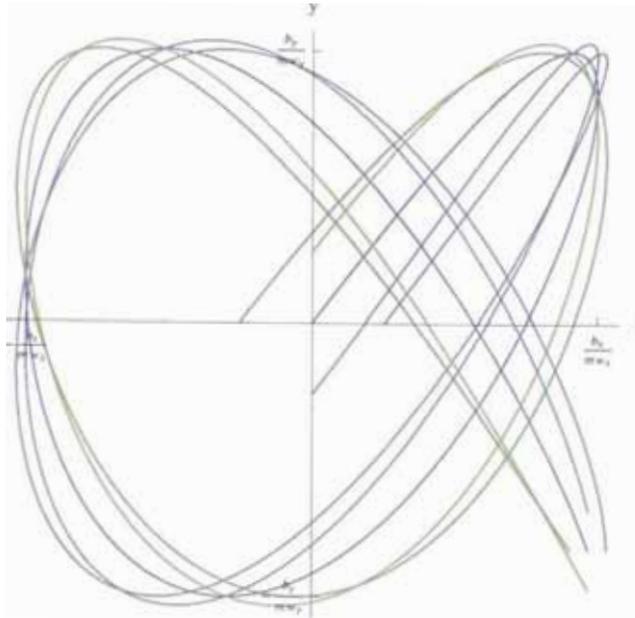


Figura 3.20 – Rastros para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 3.29.

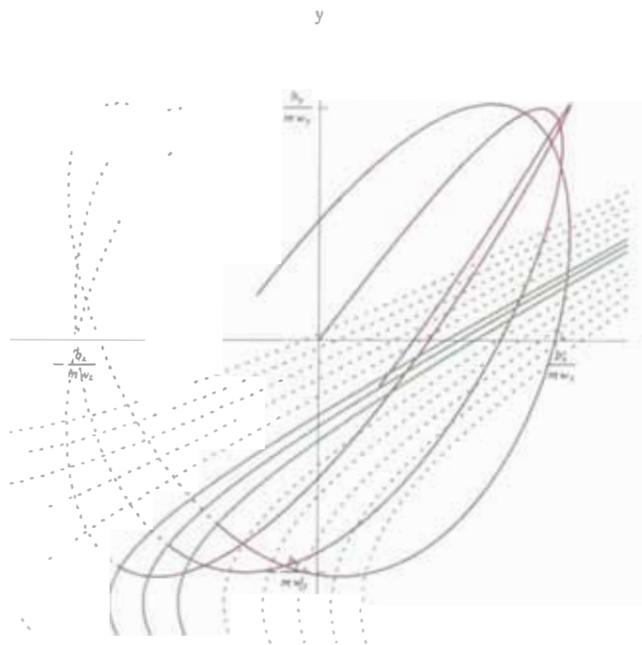


Figura 3.21 – Frentes de onda del campo $S_0(t, x, y)$ y rastros para $\hbar = 0$: Aquí podemos notar que los rastros son perpendiculares a los frentes de onda del campo $S_0(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.30.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ presentado en las figuras 3.17 y 3.18 puede ser explicado utilizando los rastros de $\xi_0(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$. La figura 3.22 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ sobre el espacio de posiciones y el campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$. La figura 3.23 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, x, y)$. La figura 3.24 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ y los rastros que dejan las partículas.

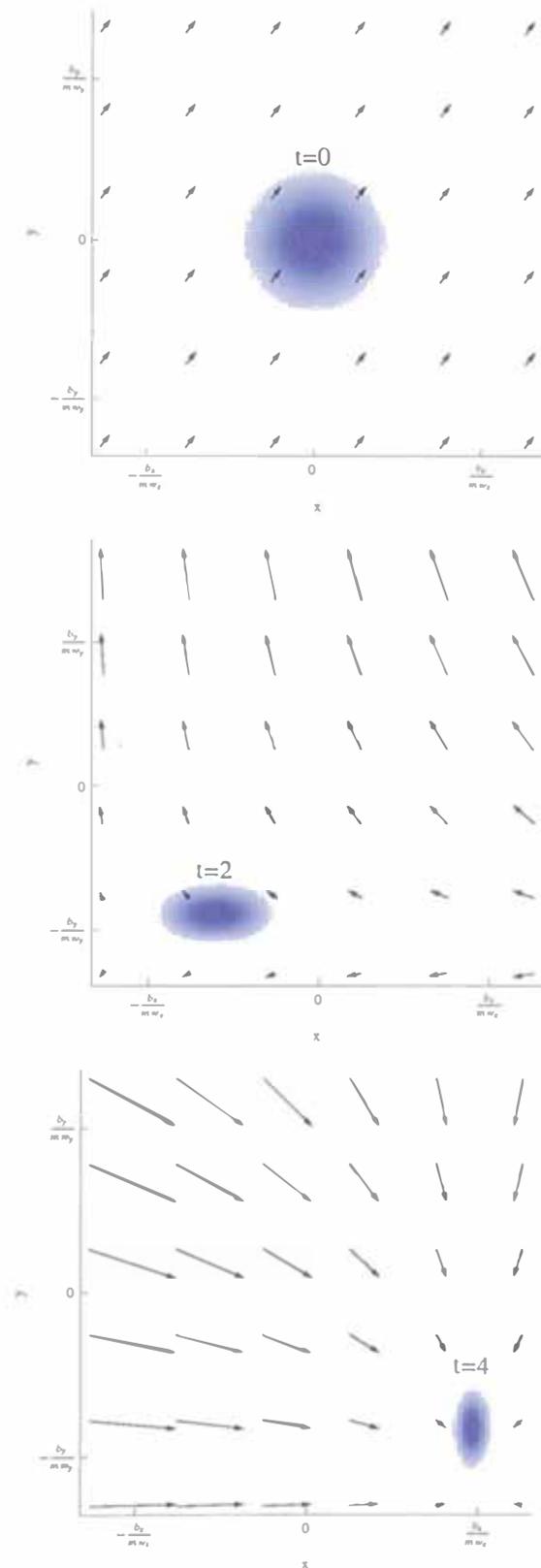


Figura 3.22 – Densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ y campo de momentum $\nabla S_0(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.32.

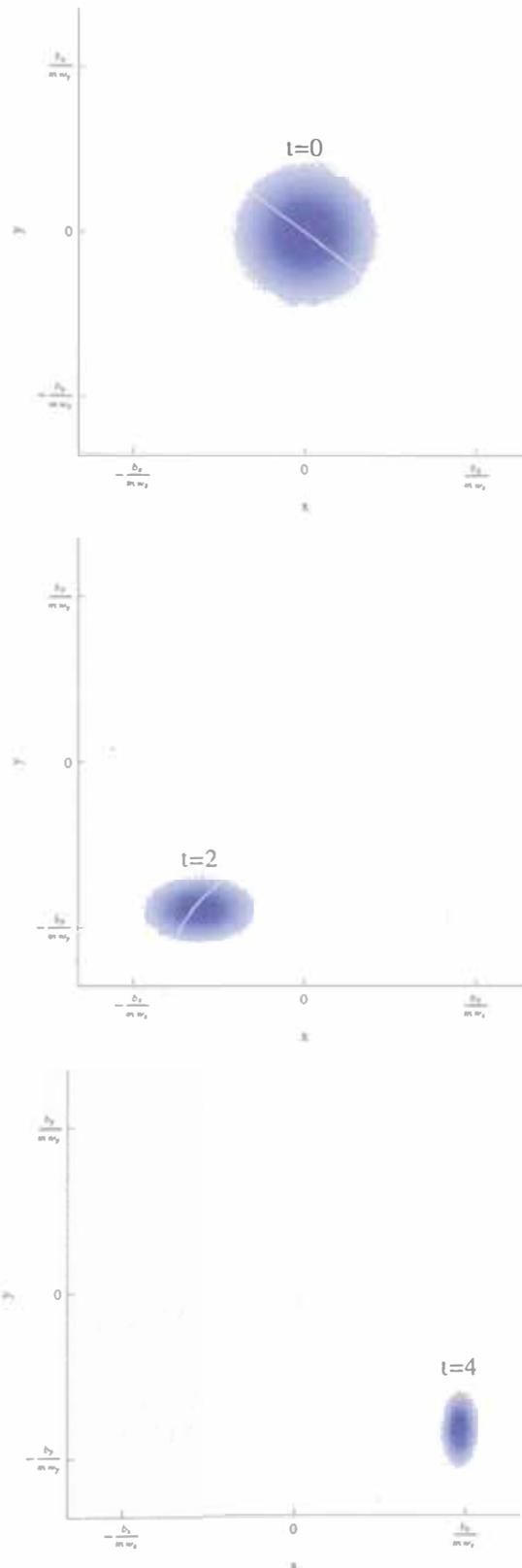


Figura 3.23 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.33.

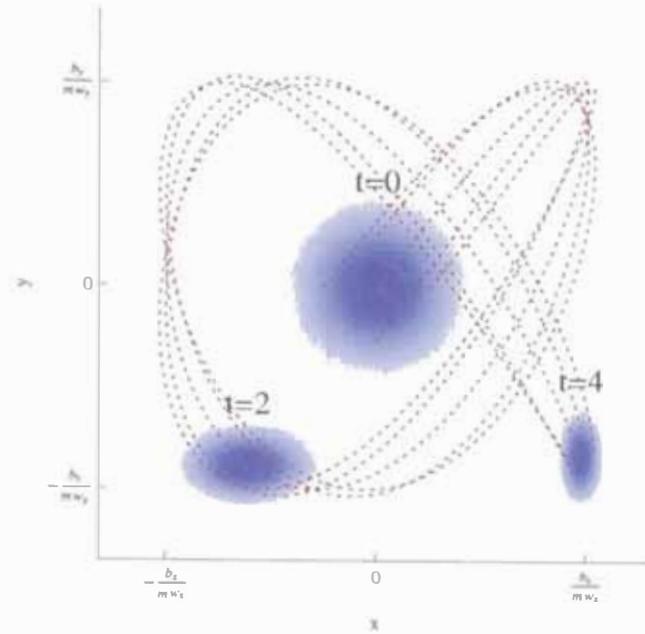


Figura 3.24 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x, y)$ y rastros de partícula para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 3.31.

3.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (3.15) y (3.16), para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$\begin{aligned}
 S(t, x, y) = & \frac{mw_x \cos w_x t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} - 1 \right) x^2 \sin w_x t + \frac{2b_x x}{mw_x} - \frac{b_x^2 \sin w_x t}{m^2 w_x^2} \right]}{2 \left(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t \right)} \\
 & + \frac{mw_y \cos w_y t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} - 1 \right) y^2 \sin w_y t + \frac{2b_y y}{mw_y} - \frac{b_y^2 \sin w_y t}{m^2 w_y^2} \right]}{2 \left(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t \right)} \\
 & - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar \tan w_x t}{mw_x} \right) - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar \tan w_y t}{mw_y} \right)
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 R(t, x, y) = & \frac{(2a/\pi)^{1/2}}{\left(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t \right)^{1/4} \left(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t \right)^{1/4}} \times \\
 & \exp \left\{ - \frac{a \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{mw_x} \right)^2}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t} - \frac{a \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{mw_y} \right)^2}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t} \right\}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

Para el campo $S(t, x, y)$ analizaremos sus frentes de onda pues ellos son perpendiculares a los rastros que dejan las partículas. Para el campo $S(t, x, y)$, los frentes de onda en el

instante t_0 son:

$$\begin{aligned} & \frac{mw_x \cos w_x t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} - 1 \right) x^2 \sin w_x t + \frac{2b_x x}{mw_x} - \frac{b_x^2 \sin w_x t}{m^2 w_x^2} \right]}{2(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t)} \\ & + \frac{mw_y \cos w_y t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} - 1 \right) y^2 \sin w_y t + \frac{2b_y y}{mw_y} - \frac{b_y^2 \sin w_y t}{m^2 w_y^2} \right]}{2(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t)} \\ & - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar \tan w_x t}{mw_x} \right) - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar \tan w_y t}{mw_y} \right) = c \end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda; y para $t_0 = 0$ estos frentes de onda son planos con vector normal igual a $\bar{b} = (b_x, b_y)$. Mientras que para $t_0 > 0$ los frentes de onda toman la forma:

$$\begin{aligned} & \frac{mw_x \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \right) \tan w_x t_0}{2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \tan^2 w_x t_0 \right)} \left(x - \frac{b_x \csc w_x t_0}{mw_x \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \right)} \right)^2 \\ & + \frac{mw_y \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \right) \tan w_y t_0}{2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \tan^2 w_y t_0 \right)} \left(y - \frac{b_y \csc w_y t_0}{mw_y \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \right)} \right)^2 \\ & = \frac{b_x^2 \cot w_x t_0}{2mw_x \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \right)} + \frac{b_y^2 \cot w_y t_0}{2mw_y \left(1 - \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \right)} - c \end{aligned}$$

Estos frentes de onda pueden ser círculos, elipses o hipérbolas, dependiendo del valor que se elijan para los parámetros b_x, b_y, w_x, w_y y t_0 . La figura 3.25 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo $S(t, x, y)$.

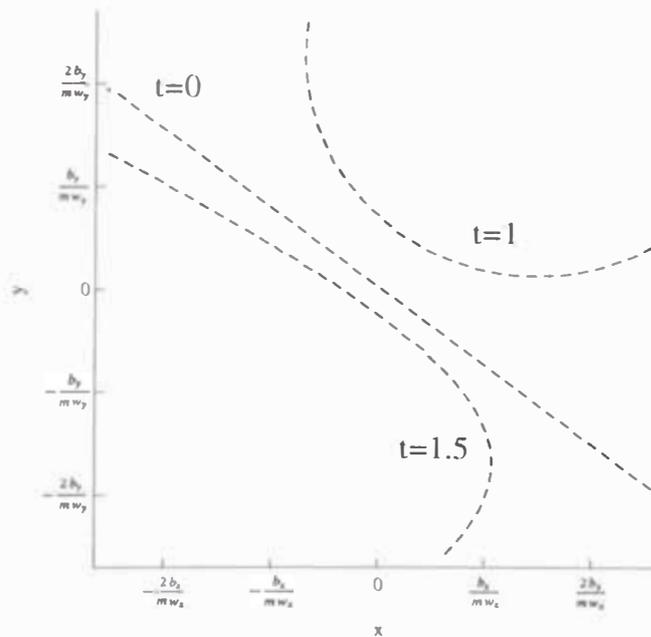


Figura 3.25 – Movimiento de un frente de onda del campo $S(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.16.

De (3.22), la densidad de probabilidad es:

$$R^2(t, x, y) = \frac{2a/\pi}{\left(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t\right)^{1/2} \left(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t\right)^{1/2}} \times \exp \left\{ -\frac{2a \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{m w_x}\right)^2}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t} - \frac{2a \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{m w_y}\right)^2}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t} \right\}$$

Debemos notar que R^2 es una gaussiana (vista como función de (x, y)), con curvas de nivel dadas por las elipses:

$$\frac{2a \left(x - \frac{b_x \sin w_x t}{m w_x}\right)^2}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t} + \frac{2a \left(y - \frac{b_y \sin w_y t}{m w_y}\right)^2}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t} = d$$

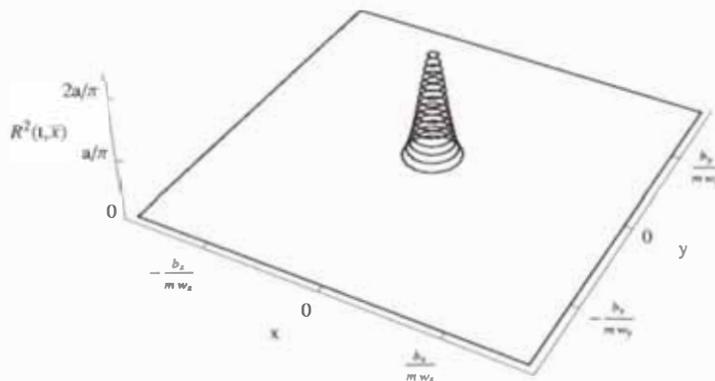
El valor máximo de esta gaussiana es:

$$R_{max}^2 = \frac{2a/\pi}{\left(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t\right)^{1/2} \left(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t\right)^{1/2}}$$

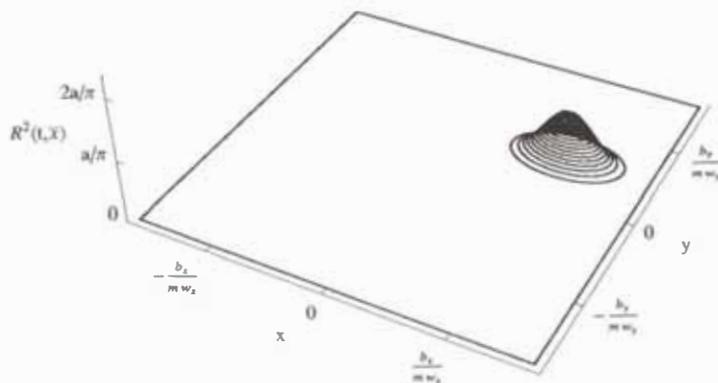
Este valor máximo cambia con el tiempo, y no presenta singularidades como el correspondiente en el caso clásico. El valor máximo de $R^2(t, x, y)$ se alcanza en el punto $\bar{x}_{max} = b_x \sin w_x t / m w_x \bar{e}_1 + b_y \sin w_y t / m w_y \bar{e}_2$, y de acuerdo con (3.17), este punto \bar{x}_{max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t}$.

La densidad $R^2(t, x, y)$ tiene dos desviaciones medias cuadráticas, una correspondiente al eje X de valor igual a $\delta_x = \left[(\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t) / 2a \right]^{1/2}$; y otra desviación correspondiente al eje Y de valor igual a $\delta_y = \left[(\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t) / 2a \right]^{1/2}$; y estas desviaciones no se anulan como las correspondientes al caso clásico, por lo tanto aquí no existen puntos donde las partículas se acumulen. Las figuras 3.26 y 3.27 muestran el movimiento de $R^2(t, x, y)$.

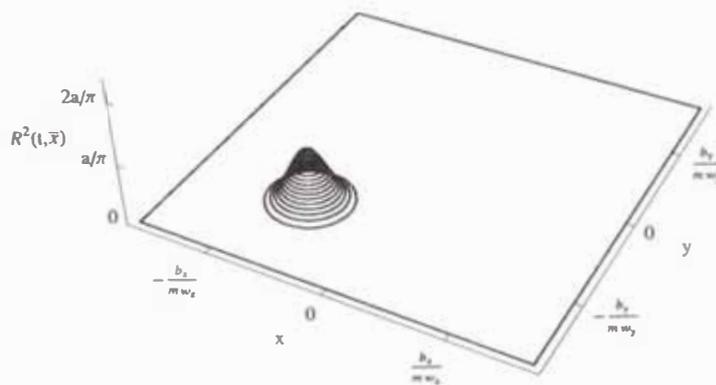
$t=0$



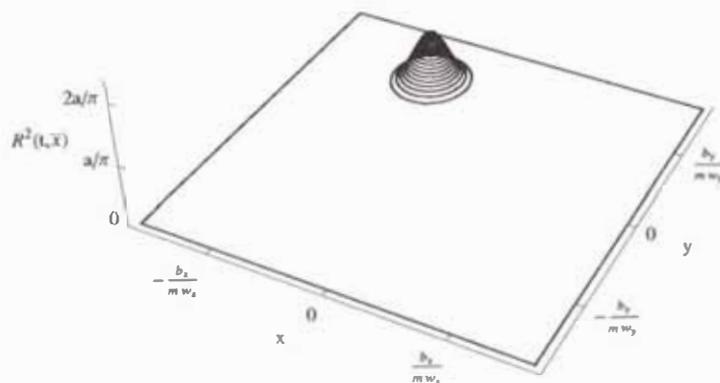
$t=1$



$t=2$



$t=3$



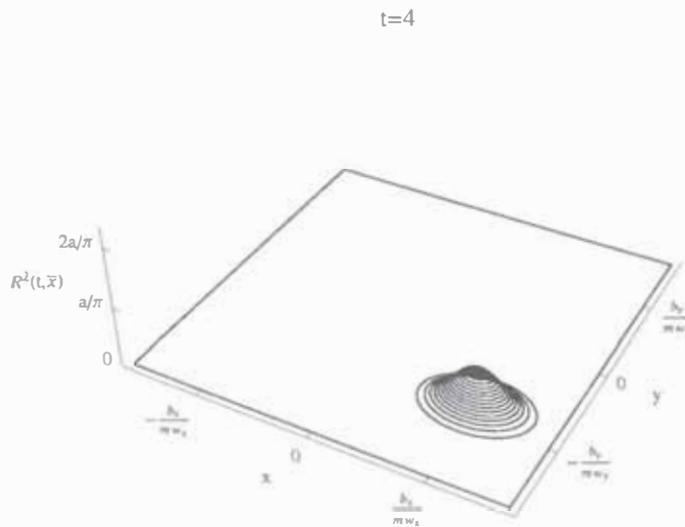


Figura 3.26 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 3.17.

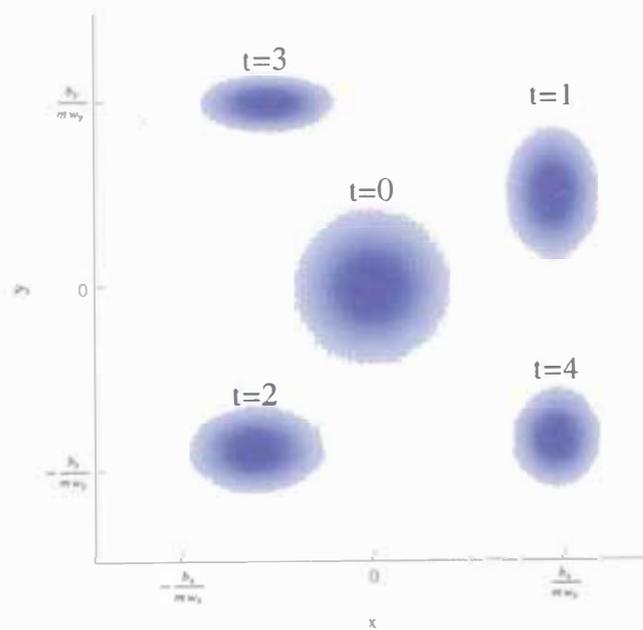


Figura 3.27 – Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ en el espacio de coordenadas. Comparar con la figura 3.18.

De (3.21), el campo de momentum es:

$$\nabla S(t, x, y) = \frac{mw_x \cos w_x t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} - 1 \right) x \sin w_x t + \frac{b_x}{mw_x} \right]}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t} \bar{e}_1 + \frac{mw_y \cos w_y t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} - 1 \right) y \sin w_y t + \frac{b_y}{mw_y} \right]}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t} \bar{e}_2$$

La figura 3.28 muestra este campo de momentum.

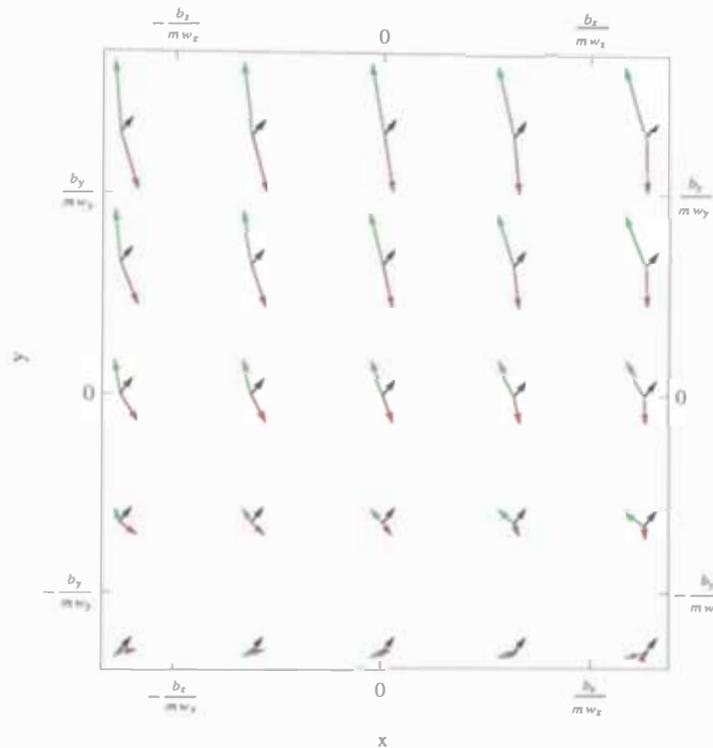


Figura 3.28 – Campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$: Las flechas negras corresponden al campo de momentum en $t = 0$, las flechas verdes corresponden al campo de momentum en $t = 2$, y flechas rojas corresponden al campo de momentum en $t = 5$. Comparar con la figura 3.19.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$, obtenemos sus trayectorias $\bar{\xi}(t) = \xi_x(t)\bar{e}_1 + \xi_y(t)\bar{e}_2$ utilizando la ec. (1.11), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_x = \frac{m w_x \cos w_x t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} - 1 \right) \xi_x \sin w_x t + \frac{b_x}{m w_x} \right]}{\cos^2 w_x t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_x^2} \sin^2 w_x t}$$

$$\dot{\xi}_y = \frac{m w_y \cos w_y t \left[\left(\frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} - 1 \right) \xi_y \sin w_y t + \frac{b_y}{m w_y} \right]}{\cos^2 w_y t + \frac{4a^2 \hbar^2}{m^2 w_y^2} \sin^2 w_y t}$$

Resolvemos esta ecuación numericamente y presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 3.29 muestra algunos de los rastros que dejan las partículas. La figura 3.30 muestra los rastros que dejan las partículas y los frentes de onda del campo $\nabla S(t, x, y)$ en un instante particular.

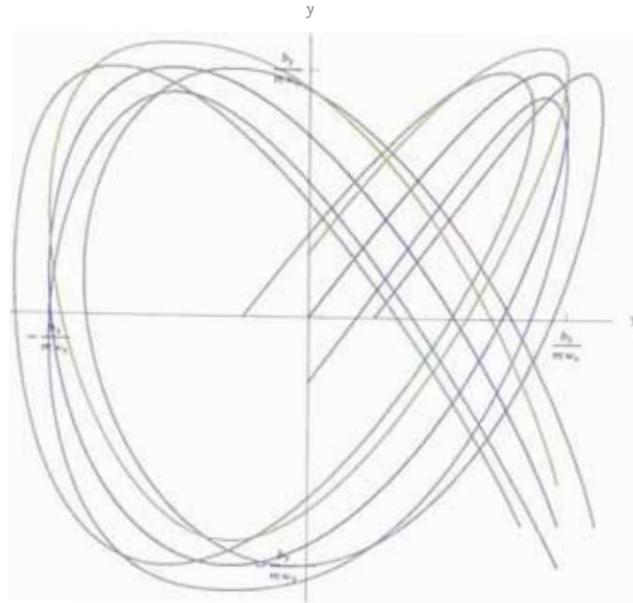


Figura 3.29 Rastros para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 3.20.

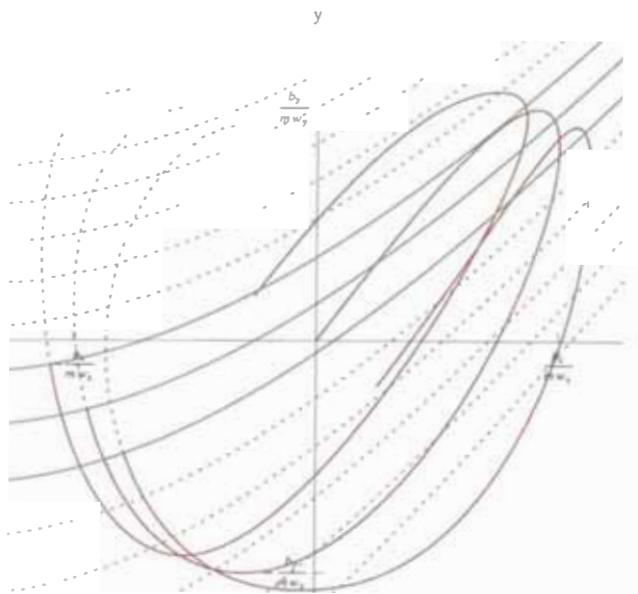


Figura 3.30 Frentes de onda del campo $S(t, x, y)$ y rastros para $\hbar \neq 0$: Aquí podemos notar que los rastros son perpendiculares a los frentes de onda del campo $S(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.21.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ presentado en las figuras 3.26 y 3.27 puede ser explicado utilizando los rastros $\xi(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $S(t, x, y)$. La figura 3.31 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y el campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$. La figura 3.32 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los frentes de onda del campo $S(t, x, y)$. La figura 3.33 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los rastros que dejan las partículas.

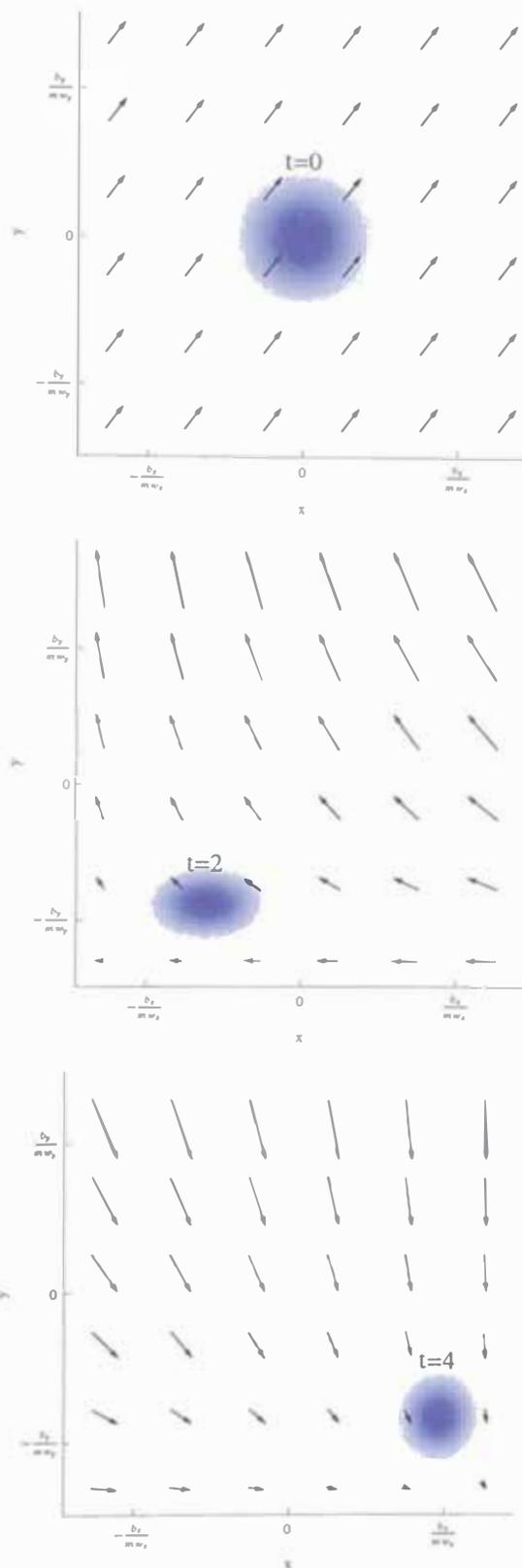


Figura 3.31 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y el campo de momentum $\nabla S(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.23.

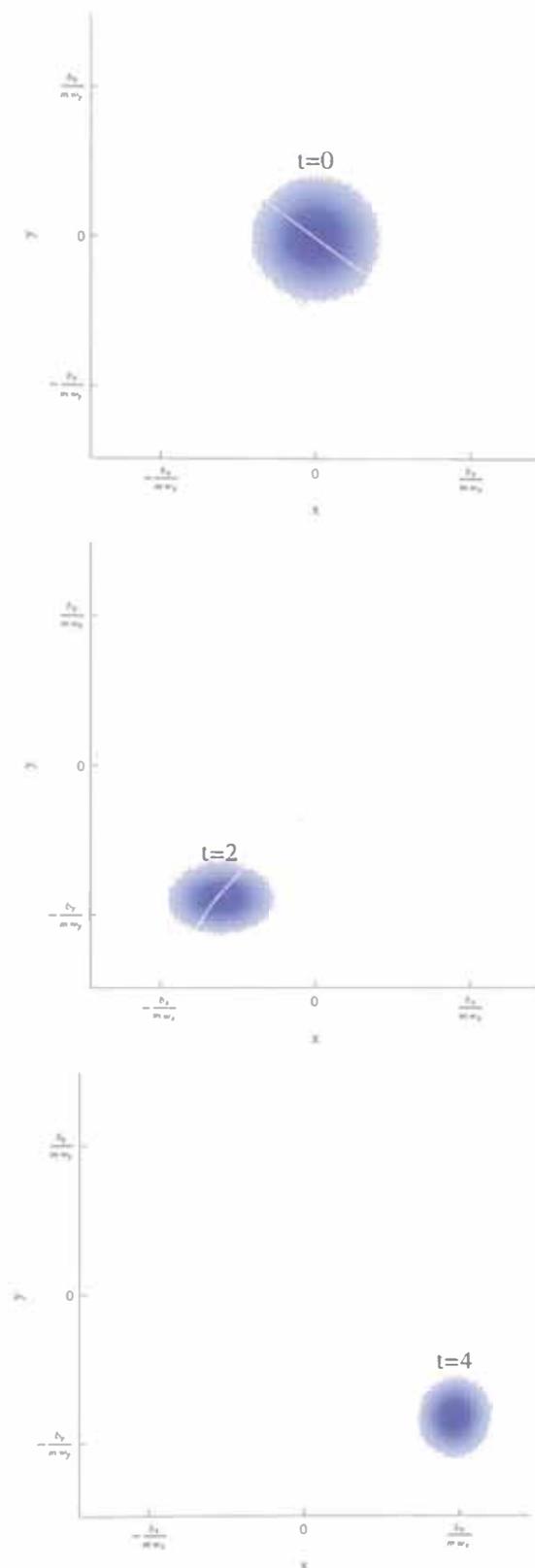


Figura 3.32 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los frentes de onda del campo $S(t, x, y)$. Comparar con la figura 3.24.

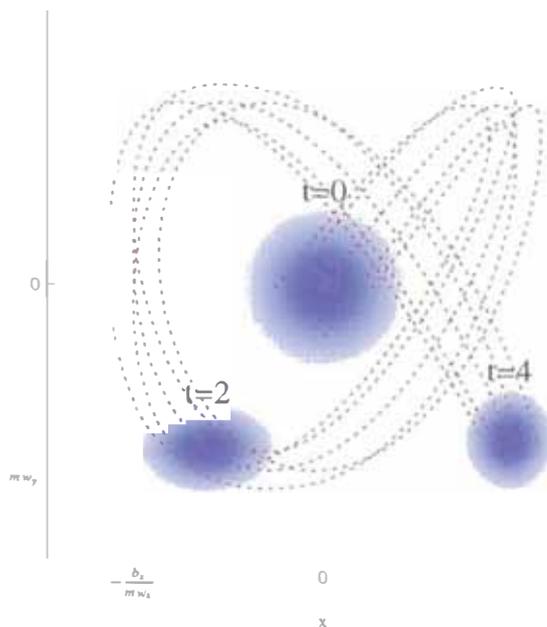


Figura 3.33 Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x, y)$ y los rastros que dejan las partículas. Comparar con la figura 3.22.

Para finalizar esta sección, la figura 3.34 muestra los rastros clásicos y cuánticos de cinco partículas con distintas posiciones iniciales. Para una partícula, ambas trayectorias (clásica o cuántica) tienen la misma posición inicial.

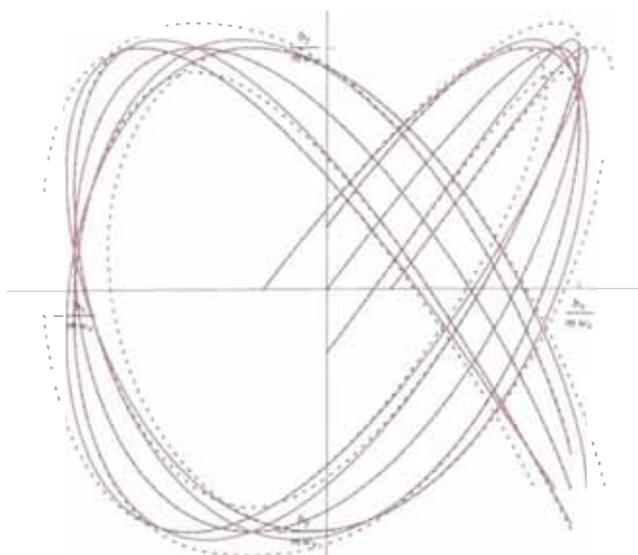


Figura 3.34 Comparación de los rastros clásicos (líneas rojas) y cuánticos (líneas punteadas azules) de cinco partículas.

CAPITULO 4

Tiro de proyectil

En este capitulo desarrollaremos la interpretacion sugerida en el capitulo 1, para el caso del tiro de proyectil, trataremos tanto el problema unidimensional como el tridimensional por que ellos permitirán notar diferentes aspectos. Nuevamente el objetivo principal es hallar analíticamente los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$, y explicar el comportamiento del sistema utilizando estos campos. Así es conveniente la presentación de numerosas gráficas.

4.1. Tiro de proyectil unidimensional

La ecuación de Schrödinger para este problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2\Psi + mgx + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi = 0$$

Como ya mencionamos, para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda esta dada por:

$$\Psi(t, x) = \int K(t, x, 0, x_0)\Psi(0, x_0)dx_0$$

donde $K(t, x, 0, x_0)$ es el propagador de Feynman del problema. El propagador para el tiro de proyectil unidimensional es:

$$K(t, x, 0, x_0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}\left[(x-x_0)^2 - g(x+x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12}\right]\right\}$$

Definiendo $A^2 = \frac{m}{2i\hbar t}$, escribimos el propagador en la forma:

$$K(t, x, 0, x_0) = \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp\left\{-A^2\left[(x-x_0)^2 - g(x+x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12}\right]\right\}$$

4.1.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, x) = B \exp \left\{ -ax^2 + \frac{ibx}{\hbar} \right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{1/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_0} = 0$ y $\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_0} = b$.

Aplicando el método del propagador, calculamos la función de onda en cualquier instante posterior:

$$\begin{aligned} \Psi(t, x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2 \left[(x - x_0)^2 - g(x + x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right] \right\} \\ &\quad \times B \exp \left\{ -ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \\ \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2 \left[(x - x_0)^2 - g(x + x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \right\} dx_0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

En el exponente:

$$\begin{aligned} &-A^2 \left[(x - x_0)^2 - g(x + x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left(x^2 - 2xx_0 + x_0^2 - gxt^2 - gx_0t^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) - A^2 \left[x_0^2 - 2 \left(x + \frac{gt^2}{2} \right) x_0 \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) - A^2 \left[\left(1 + \frac{a}{A^2} \right) x_0^2 - 2 \left(x + \frac{gt^2}{2} + \frac{ib}{2\hbar A^2} \right) x_0 \right] \end{aligned}$$

definiendo $N^2 = 1 + a/A^2 = 1 + i\alpha t$, donde $\alpha = 2a\hbar/m$; y $M = x + gt^2/2 + ib/2\hbar A^2 = x + gt^2/2 - bt/m$, obtenemos:

$$\begin{aligned} &-A^2 \left[(x - x_0)^2 - g(x + x_0)t^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right] - ax_0^2 + \frac{ibx_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) - A^2 (N^2 x_0^2 - 2Mx_0) \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) - A^2 \left[N^2 x_0^2 - 2 \left(\frac{M}{N} \right) (Nx_0) + \frac{M^2}{N^2} - \frac{M^2}{N^2} \right] \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) - A^2 \left(Nx_0 - \frac{M}{N} \right)^2 \\ &= -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) - A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \end{aligned}$$

Luego al reemplazar esta expresión equivalente del exponente en (4.1), tenemos:

$$\begin{aligned}
 \Psi(t, x) &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) - A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\
 &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) \right\} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -A^2 N^2 \left(x_0 - \frac{M}{N^2} \right)^2 \right\} dx_0 \\
 &= \frac{AB}{\pi^{1/2}} \exp \left\{ -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) \right\} \times \frac{\pi^{1/2}}{AN} \\
 &= \frac{B}{N} \exp \left\{ -A^2 \left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{M^2}{N^2} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

Finalmente al reemplazar A , N y M en la expresión anterior obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{(1 + i\alpha t)^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{m}{2i\hbar t} \left[x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{\left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2}{1 + i\alpha t} \right] \right\} \quad (4.2)$$

Ahora para escribir la función de onda en la forma (1.1) y obtener $R(t, x)$ y $S(t, x)$, debemos separar el exponente de la función exponencial en sus partes real e imaginaria, así como escribir el denominador $(1 + i\alpha t)^{1/2}$ en su forma polar. Entonces, manipulando el exponente:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{m}{2i\hbar t} \left[x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{\left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2}{1 + i\alpha t} \right] \\
 &= \frac{mi}{2\hbar t} \left[x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{\left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 (1 - i\alpha t)}{1 + \alpha^2 t^2} \right] \\
 &= \frac{mi}{2\hbar t} \left[x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} - \frac{\left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2}{1 + \alpha^2 t^2} + \frac{i\alpha t \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2}{1 + \alpha^2 t^2} \right] \\
 &= -\frac{m\alpha}{2\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{mi}{2\hbar t(1 + \alpha^2 t^2)} \left[\left(x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} \right) (1 + \alpha^2 t^2) \right. \\
 & \quad \left. - \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] \\
 &= -\frac{m\alpha}{2\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{mi}{2\hbar t(1 + \alpha^2 t^2)} \left[x^2 - gxt^2 - \frac{g^2 t^4}{12} + \alpha^2 x^2 t^2 \right. \\
 & \quad \left. - g\alpha^2 t^4 - \frac{g^2 \alpha^2 t^6}{12} - x^2 - \frac{g^2 t^4}{4} - \frac{b^2 t^2}{m^2} - gxt^2 + \frac{2bxt}{m} + \frac{gbt^3}{m} \right] \\
 &= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 + \frac{i}{\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left[bx + \left(\frac{2\alpha^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t \right. \\
 & \quad \left. + \frac{gbt^2}{2} - \left(\frac{mg^2}{6} + \frac{2\alpha^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{\alpha^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right]
 \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $(1 + i\alpha t)^{1/2} = (1 + \alpha^2 t^2)^{1/4} \exp\left\{\frac{i}{2} \arctan(\alpha t)\right\}$. Luego al reemplazar estos resultados en (4.2), obtenemos:

$$\Psi(t, x) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right. \\ \left. \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[bx + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t + \frac{gbt^2}{2} \right. \right. \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. - \left(\frac{mg^2}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \right] \right\} \right\}$$

De aquí identificamos los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$:

$$S(t, x) = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[bx + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t + \frac{gbt^2}{2} \right. \\ \left. - \left(\frac{mg^2}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] - \frac{\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \quad (4.3)$$

$$R(t, x) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{1/4}} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \quad (4.4)$$

donde $\alpha = 2a\hbar/m$; $B = (2a/\pi)^{1/4}$. Dado que α depende de \hbar , aquí notamos que $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora verificaremos que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ obtenidos satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para esto calculamos las siguientes derivadas (y para simplificar, escribimos $Q = 1 + \alpha^2 t^2$):

$$\partial_x R = -\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) R \\ \partial_t R = \left[-\frac{2a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 - \frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left(gt - \frac{b}{m} \right) \right] R \\ \partial_x^2 R = \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] R \\ \partial_x S = \frac{1}{Q} \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t - \frac{2a^2 \hbar^2 gt^3}{m} \right] \\ \partial_t S = -mgx - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[bx + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t + \frac{gbt^2}{2} - \left(\frac{mg}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 \right. \\ \left. - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] + \frac{1}{Q} \left[\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - \frac{b^2}{2m} + gbt - \left(\frac{mg^2}{2} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^2 - \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6m} \right] - \frac{a\hbar^2}{mQ} \\ \partial_x^2 S = \frac{4a^2 \hbar^2 t}{mQ}$$

Luego en la ecuación (1.2) tenemos:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + V + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t - \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right]^2 + mgx - mgx \\
&\quad - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[bx + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t + \frac{gt^2}{2} - \left(\frac{mg}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] \\
&\quad + \frac{1}{Q} \left[\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - \frac{b^2}{2m} + gbt - \left(\frac{mg^2}{2} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^2 - \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6m} \right] - \frac{a\hbar^2}{mQ} \\
&\quad - \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{2a}{Q} + \frac{4a^2}{Q^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t - \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right]^2 - \frac{8a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[bx + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx \right) t \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{b^2 t}{2m} + \frac{gt^2}{2} - \left(\frac{mg}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] - 2a^2 \hbar^2 \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \\
&\quad + \frac{1}{Q} \left[\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - \frac{b^2}{2m} + gbt - \left(\frac{mg^2}{2} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^2 - \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6m} \right] \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{b^2}{2} + \left(\frac{8a^4 \hbar^4 x^2}{m^2} + \frac{m^2 g^2}{2} - 4a^2 \hbar^2 gx \right) t^2 + \frac{2a^4 \hbar^4 g^2 t^5}{m^2} + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 bx}{m} - mgb \right) t \right. \\
&\quad \left. - \frac{2a^2 \hbar^2 gbt^3}{m} - \left(\frac{8a^4 \hbar^4 gx}{m^2} - 2a^2 \hbar^2 g^2 \right) t^4 - \frac{8a^2 \hbar^2 bxt}{m} - \frac{8a^2 \hbar^2}{m} \left(\frac{2a^2 \hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{4a^2 \hbar^2 gbt^3}{m} + \frac{8a^2 \hbar^2}{m} \left(\frac{mg^2}{6} + \frac{2a^2 \hbar^2 gx}{m} \right) t^4 + \frac{4a^4 \hbar^4 g^2 t^6}{3m^2} - 2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{2} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2a^2 \hbar^2 b^2 t^2}{m^2} - 2a^2 \hbar^2 gxt^2 + \frac{4a^2 \hbar^2 bxt}{m} + \frac{2a^2 \hbar^2 gbt^3}{m} \right\} + \frac{1}{mQ} \left[2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} + mgbt \right. \\
&\quad \left. - \frac{m^2 g^2 t^2}{2} - 2a^2 \hbar^2 gxt^2 - \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6} \right] \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left[-2a^2 \hbar^2 x^2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + \frac{b^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) - mgbt \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{m^2 g^2 t^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + 2a^2 \hbar^2 gxt^2 \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right] \\
&\quad + \frac{1}{mQ} \left[2a^2 \hbar^2 x^2 - \frac{b^2}{2} + mgbt - \frac{m^2 g^2 t^2}{2} - 2a^2 \hbar^2 gxt^2 - \frac{5a^2 \hbar^2 g^2 t^4}{6} \right] = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} (\partial_x S)^2 + V + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial_x^2 R}{R} = 0}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.2).

Ahora para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R \\
&= \frac{R}{2m} \left(\frac{4a^2 \hbar^2 t}{mQ} \right) + \frac{1}{m} \left[-\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) R \right] \left\{ \frac{1}{Q} \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t - \frac{2a^2 \hbar^2 gt^3}{m} \right] \right\} \\
&+ \left[-\frac{2a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 - \frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left(gt - \frac{b}{m} \right) \right] R \\
&= \frac{2aR}{mQ^2} \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 - \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t - \frac{2a^2 \hbar^2 gt^3}{m} \right] \right\} \\
&- \frac{2aR}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left(gt - \frac{b}{m} \right) \\
&= \frac{2aR}{mQ^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) - b - \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t + \frac{2a^2 \hbar^2 gt^3}{m} \right\} \\
&- \frac{2aR}{mQ} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) (mgt - b) \\
&= \frac{2aR}{mQ^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \left[-b \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) + mgt \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right] \\
&- \frac{2aR}{mQ} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) (mgt - b) \\
&= \frac{2aR}{mQ} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) (mgt - b) - \frac{2aR}{mQ} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) (mgt - b) = 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{2m} R \partial_x^2 S + \frac{1}{m} \partial_x R \partial_x S + \partial_t R}$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.3). Entonces tenemos una solución del sistema de ecuaciones (1.2) y (1.3) en el caso del tiro de proyectil unidimensional. Ahora verificaremos que los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest.

El valor medio de \hat{X} , de acuerdo con (1.7) es¹:

$$\begin{aligned}
\langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x B^2}{Q^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \\
&= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right) \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} dx \right]
\end{aligned}$$

¹Aquí para simplificar la escritura, seguimos utilizando Q , que ya fue definido líneas arriba.

$$\begin{aligned}\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} z \exp\left\{-\frac{2az^2}{Q}\right\} dx - \left(\frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2a}{Q} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m}\right)^2\right\} dx \right] \\ &= \frac{B^2}{Q^{1/2}} \times \left(\frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2}\right) \left(\frac{\pi Q}{2a}\right)^{1/2}\end{aligned}$$

y reemplazando el valor de B , obtenemos:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2} \quad (4.5)$$

Ahora, el valor medio de \hat{P} , de acuerdo con (1.8) es:

$$\begin{aligned}\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \partial_x S(t, x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) \frac{1}{Q} \left(b + \frac{4a^2 \hbar^2 t x}{m} - mgt - \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right) dx \\ &= \frac{1}{Q} \left[b \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx + \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx - mgt \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx \right]\end{aligned}$$

de la condición de normalización tenemos que $\int_{-\infty}^{\infty} R^2(t, x) dx = 1$, además del cálculo del valor medio de \hat{X} tenemos $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \int_{-\infty}^{\infty} x R^2(t, x) dx = \frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2}$, luego:

$$\begin{aligned}\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \frac{1}{Q} \left[b + \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2} \right) - mgt - \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right] \\ &= \frac{1}{Q} \left[b + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2 b}{m^2} - mgt - \frac{4a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right] \\ &= \frac{1}{Q} \left[b \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) - mgt \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right] \\ &= \frac{b - mgt}{Q} \left[1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right]\end{aligned}$$

reemplazando $Q = 1 + \alpha^2 t^2 = 1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}$, obtenemos:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = b - mgt \quad (4.6)$$

De (4.5) y (4.6) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$ se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento para cualquier valor de \hbar .

4.1.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el “potencial ficticio” es:

$$V_f(t, x) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{2a}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} - \frac{4a^2}{\left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}\right)^2} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m}\right)^2 \right]$$

Podemos notar que $V_f(t, x)$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, x)$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi, cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (4.3) y (4.4) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso del tiro de proyectil unidimensional.**

4.1.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (4.3) y (4.4) en $\hbar = 0$ tenemos¹¹

$$S_0(t, x) = bx - \left(mgx + \frac{b^2}{2m}\right)t + \frac{gbt^2}{2} - \frac{mg^2t^3}{6} \quad (4.7)$$

$$R_0(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/4} \exp \left\{ -a \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m}\right)^2 \right\} \quad (4.8)$$

La figura 4.1 muestra la gráfica del campo $S_0(t, x)$, este campo es propiamente una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

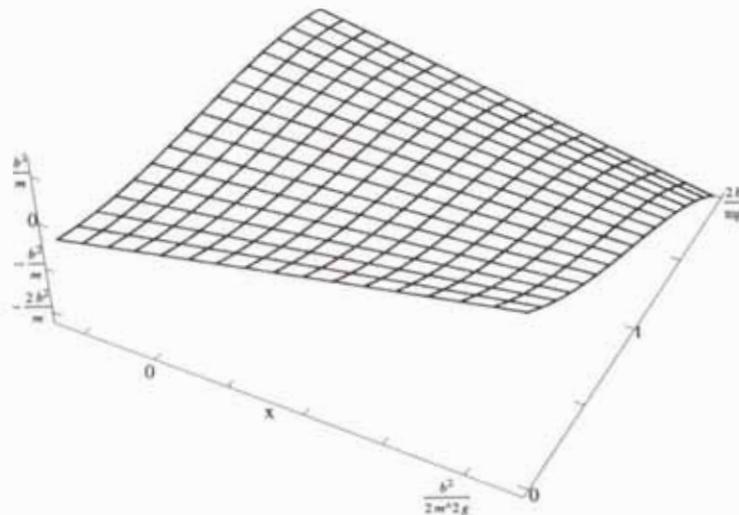


Figura 4.1 – Campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 4.8.

¹¹En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

De (4.8) la densidad de probabilidad es:

$$R_0^2(t, x) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{1/2} \exp \left\{ -2a \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R_0^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuyo valor máximo es $R_{0max}^2 = (2a/\pi)^{1/2}$, valor que no cambia con el tiempo. El valor máximo se alcanza en el punto $x_{0max} = -\frac{gt^2}{2} + \frac{bt}{m}$, y de acuerdo con (4.5), este punto x_{0max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle X \rangle_{\Psi_t}$.

Otro parámetro importante en las gaussianas es el ancho de la campana, y una medida de este ancho es la desviación media cuadrática. Para $R_0^2(t, x)$, la desviación media cuadrática es $\delta_0 = (2a)^{1/2}$, y esta desviación no cambia con el tiempo. Por lo tanto concluimos que la curva de densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ avanza sin deformarse. La figura 4.2 muestra el movimiento de $R_0^2(t, x)$.

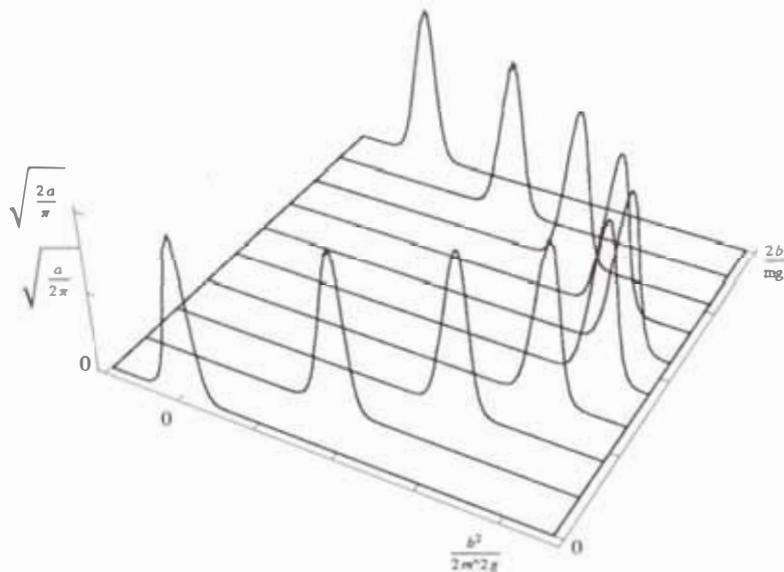


Figura 4.2 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$: Puede observarse que la curva de densidad de probabilidad avanza sin deformarse. Recordando que esta densidad de probabilidad representa a muchas partículas, podemos decir que estas partículas avanzan como una estructura rígida. Comparar con la figura 4.9.

De (4.7), el campo de momentum es:

$$\partial_x S_0(t, x) = b - mgt$$

La figura 4.3 muestra la gráfica del campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$. Si colocamos partículas en el campo de momentum $\partial_x S_0(t, x)$, obtenemos sus trayectorias resolviendo la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{b}{m} - gt$$

Estas trayectorias son de la forma $\xi_0(t) = \frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2} + x_0$, donde x_0 es la posición inicial de la partícula. La figura 4.4 muestra algunas de estas trayectorias.

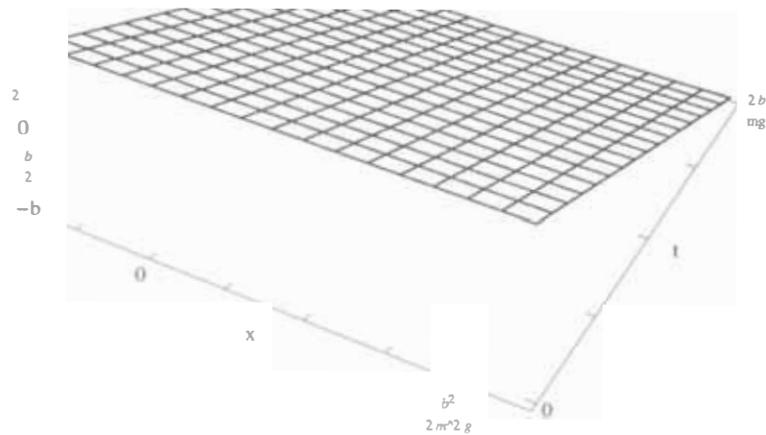


Figura 4.3 Campo de mometum $\partial_x S_0(t, x)$. Comparar con la figura 4.10

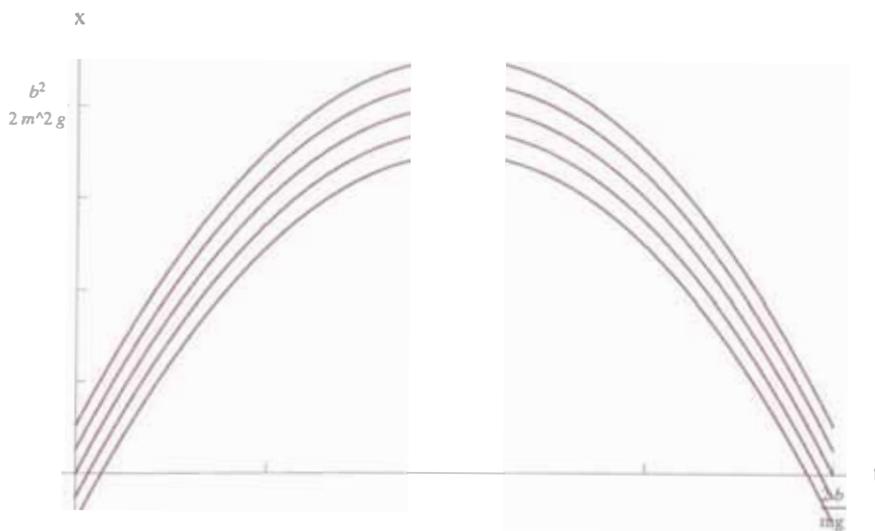


Figura 4.4 – Trayectorias para $\hbar = 0$: Claramente estas trayectorias corresponden a partículas en un movimiento vertical, como era de esperarse pues $S_0(t, x)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Comparar con la figura 4.11.

Si bien en el tiro de proyectil unidimensional no se pueden hacer gráficas de los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$ para analizar el movimiento de las partículas, sin embargo se pueden hacer otros tipos de gráficas como las presentadas en las figuras 4.5 y 4.6.

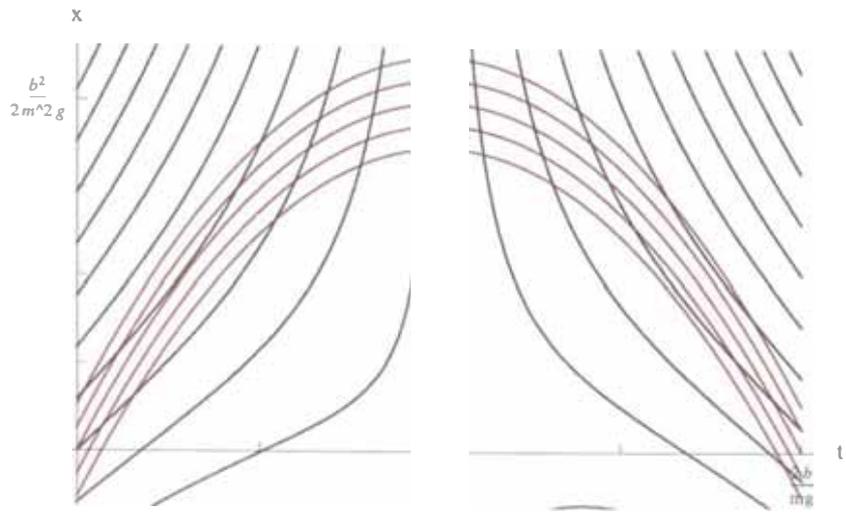


Figura 4.5 Curvas de nivel de $S_0(t, x)$ y trayectorias para $h = 0$. Comparar con la figura 4.12.

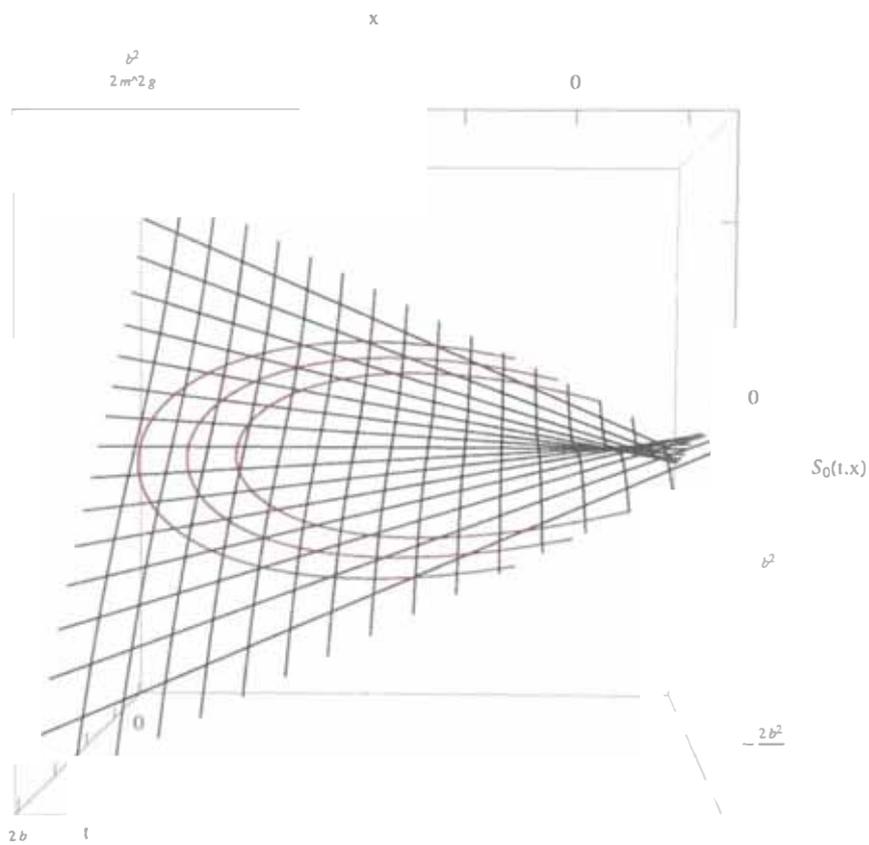


Figura 4.6 – Campo $S_0(t, x)$ y trayectorias para $h = 0$. Comparar con la figura 4.13.

El movimiento rígido de la densidad de probabilidad representado en la figura 4.1 puede ser explicado utilizando las trayectorias $\xi_0(t)$. Recordemos que la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ es en realidad una distribución de posición de partículas normalizada, de modo que si colocamos “marcas” en la gráfica de $R_0^2(t, x)$ estas deben moverse como partículas y describir trayectorias del tipo $\xi_0(t)$. La figura 4.7 muestra la gráfica de $R_0^2(t, x)$ juntamente con las trayectorias de tres marcas hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

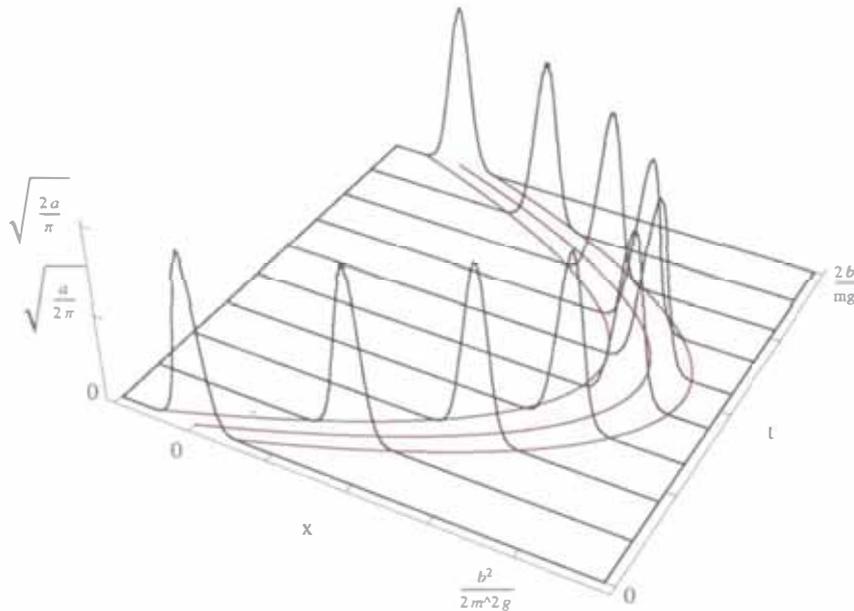


Figura 4.7 – Movimiento de $R_0^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 4.14.

4.1.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (4.3) y (4.4) para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$S(t, x) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[bx + \left(\frac{2a^2\hbar^2 x^2}{m} - mgx - \frac{b^2}{2m} \right) t + \frac{gbt^2}{2} - \left(\frac{mg^2}{6} + \frac{2a^2\hbar^2 gx}{m} \right) t^3 - \frac{a^2\hbar^2 g^2 t^5}{6m} \right] - \frac{\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) \quad (4.9)$$

$$R(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right)} \right]^{1/4} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\} \quad (4.10)$$

La figura 4.8 muestra la gráfica del campo $S(t, x)$.

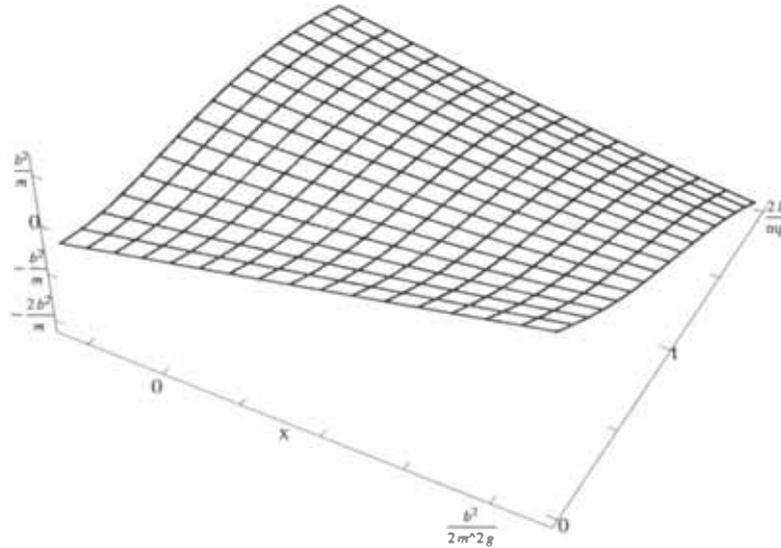


Figura 4.8 – Gráfica del campo $S(t, x)$. Comparar con la figura 4.1.

De (4.10), la densidad de probabilidad es:

$$R^2(t, x) = \left[\frac{2a}{\pi \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}\right)} \right]^{1/2} \exp \left\{ -\frac{2a}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \left(x + \frac{gt^2}{2} - \frac{bt}{m} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R^2(t, x)$ es una gaussiana (vista como función de x), cuyo valor máximo es $R_{max}^2 = \left[2a / \pi \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}\right) \right]^{1/2}$; y como podemos notar este valor máximo va disminuyendo al pasar el tiempo. El valor máximo se alcanza en el punto $x_{max} = \frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2}$, y de acuerdo con (4.5), este punto x_{max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$. Además debemos notar que x_{max} (punto de máximo de $R^2(t, x)$) y x_{0max} (punto de máximo de $R_0^2(t, x)$) coinciden.

Para $R^2(t, x)$, la desviación media cuadrática es $\delta = \left[2a / \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}\right) \right]^{-1/2}$; y como podemos notar, esta desviación aumenta al pasar el tiempo. Por lo tanto concluimos que la curva de densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ avanza dispersándose. La figura 4.9 muestra el movimiento de $R^2(t, x)$.

De (4.9), el campo de momentum es:

$$\partial_x S(t, x) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2}} \left[b + \left(\frac{4a^2 \hbar^2 x}{m} - mg \right) t + \frac{2a^2 \hbar^2 g t^3}{m} \right]$$

En la figura 4.10 presentamos la gráfica del campo de momentum $\partial_x S(t, x)$.

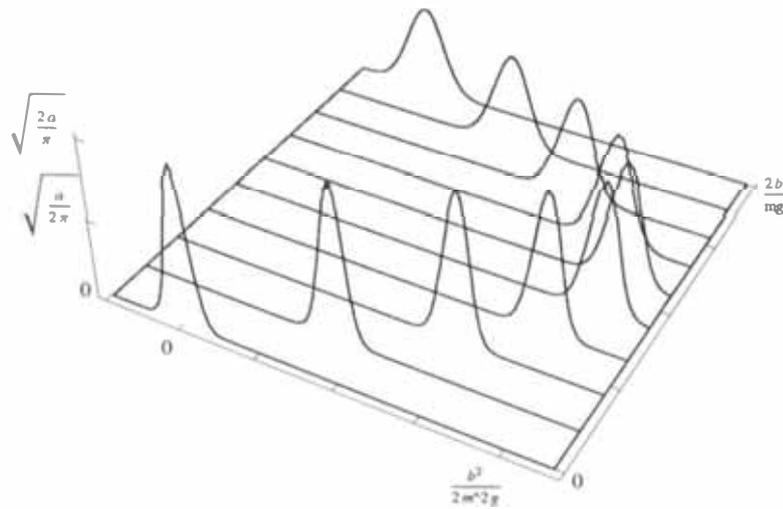


Figura 4.9 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$: Puede observarse que la curva de densidad de probabilidad avanza deformandose, a diferencia de la correspondiente curva en el caso clásico. Comparar con la figura 4.2.

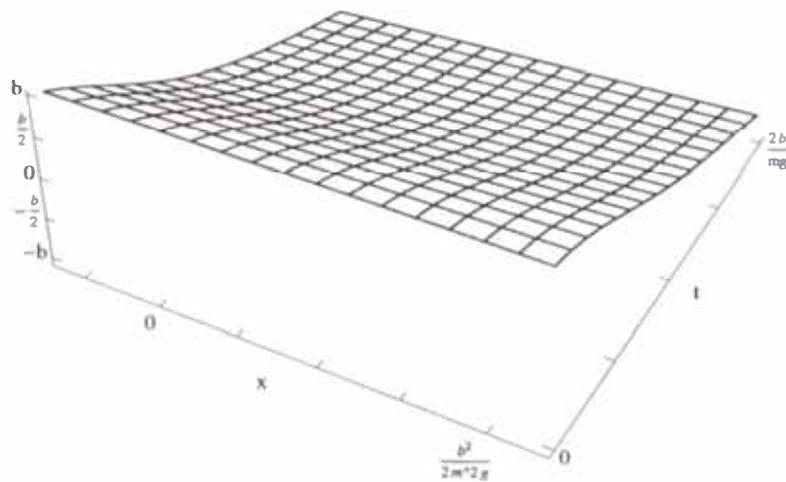


Figura 4.10 – Campo de momentum $\partial_x S(t, x)$. Comparar con la figura 4.3.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\partial_x S(t, x)$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.12); que para este caso es:

$$\dot{\xi} = \frac{1}{1 + \frac{4a^2 h^2 t^2}{m^2}} \left[\frac{b}{m} + \left(\frac{4a^2 h^2 \xi}{m^2} - g \right) t + \frac{2a^2 h^2 g t^3}{m^2} \right]$$

Resolvemos esta ecuación numéricamente y presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 4.11 muestra algunas de estas trayectorias. En las figuras 4.12 y 4.13 presentamos

una comparación gráfica del comportamiento del campo $S(t, x)$ y las trayectorias que él determina.

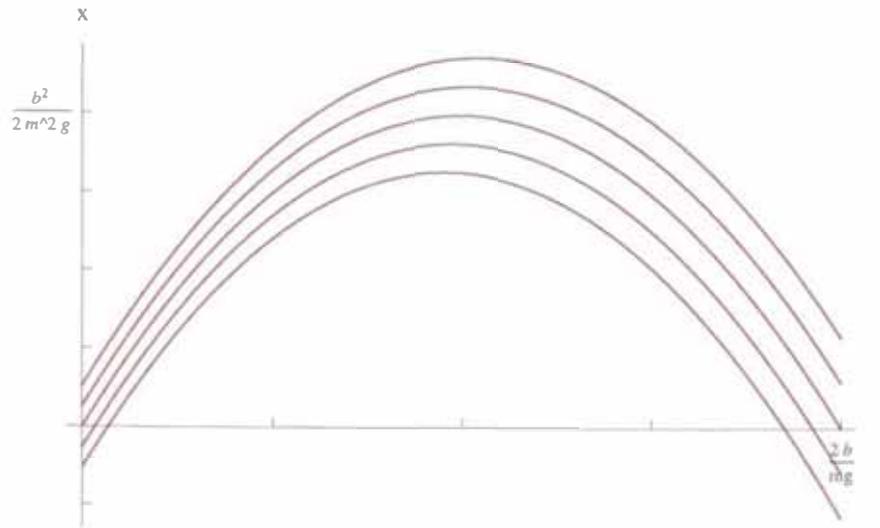


Figura 4.11 – Trayectorias para $h \neq 0$. Comparar con la figura 4.4.

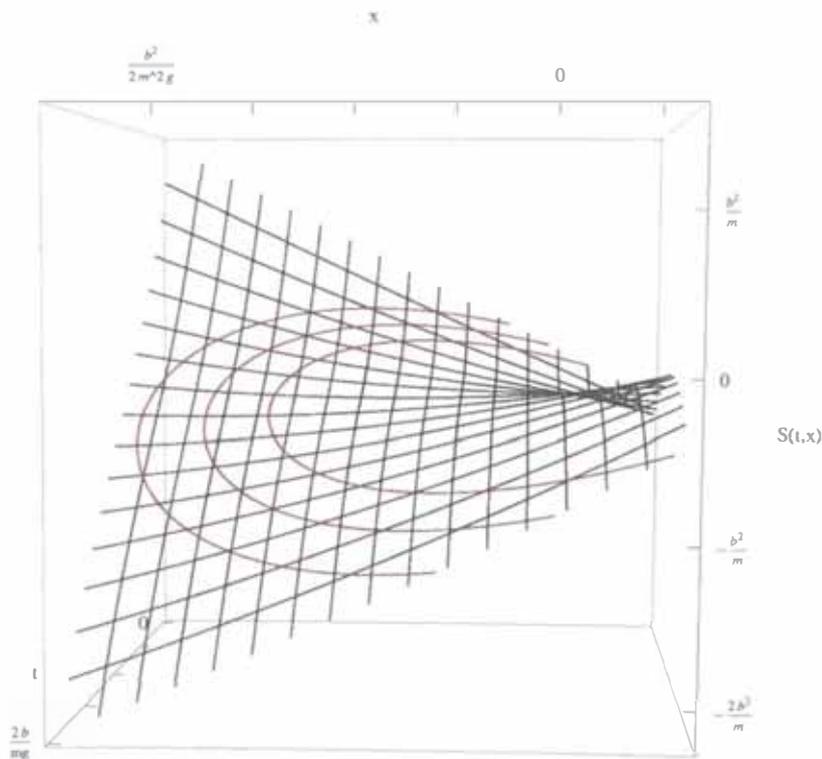


Figura 4.12 – Campo $S(t, x)$ y trayectorias para $h \neq 0$. Comparar con la figura 4.6.

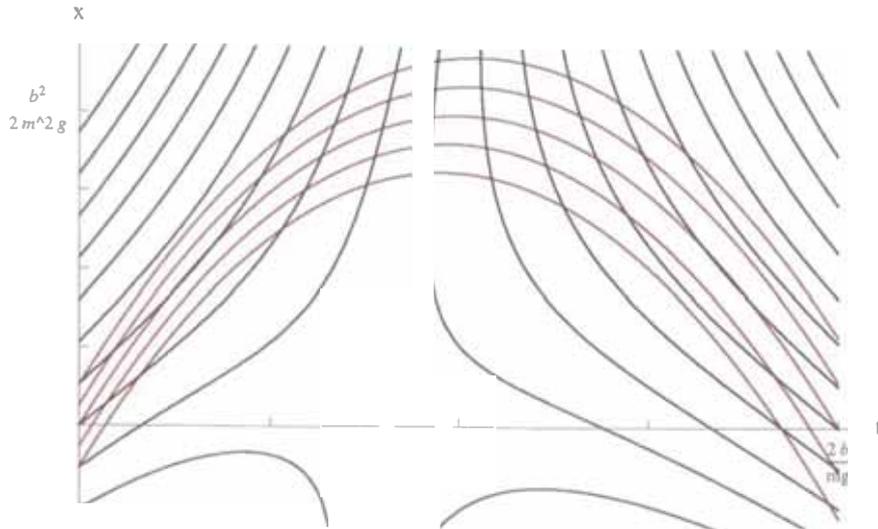


Figura 4.13 Curvas de nivel de $S(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.5.

El movimiento de la densidad de probabilidad presentado en la figura 4.9 puede ser explicado utilizando las trayectorias $\xi(t)$ presentadas en la figura 4.11. Recordemos que la densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ es en realidad una distribución de posición de partículas normalizada, de modo que si colocamos “marcas” en la gráfica de $R^2(t, x)$ estas deben moverse como partículas y describir trayectorias $\xi(t)$. La figura 4.14 muestra la gráfica de $R^2(t, x)$ juntamente con la trayectorias de 3 marcas hechas en los extremos y el centro de la gaussiana.

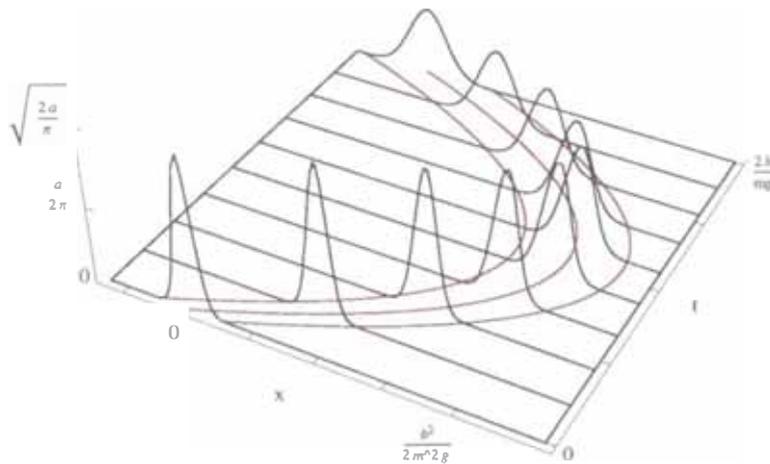


Figura 4.14 Movimiento de $R^2(t, x)$ y trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.7.

Para finalizar esta sección, la figura 4.15 muestra las trayectorias clásica y cuántica de cinco partículas con distintas posiciones iniciales, y para cada partícula ambas trayectorias

(clásica o cuántica) tienen las mismas posiciones iniciales.

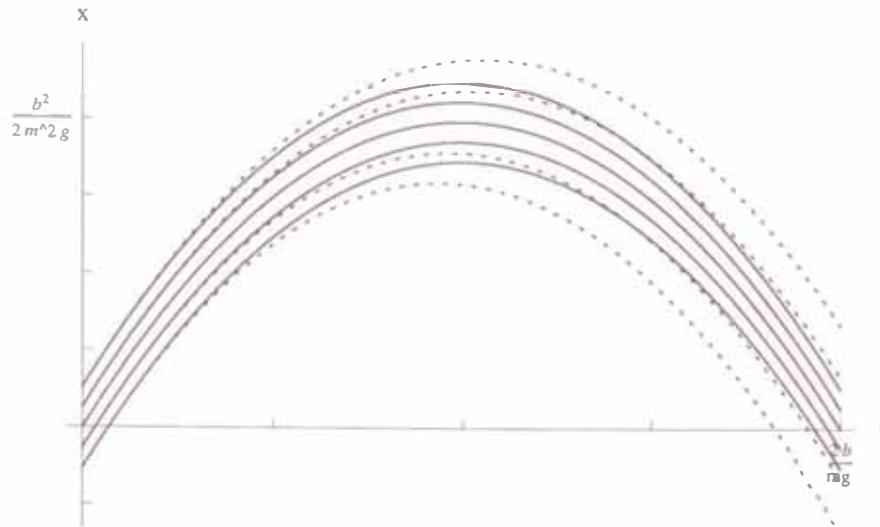


Figura 4.15 – Comparación de las trayectorias clásica (líneas rojas) y cuántica (líneas punteadas azules) de cinco partículas.

4.2. Tiro de proyectil tridimensional

La ecuación de Schrödinger para este problema es:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi - m\bar{g}\cdot\bar{x} + \frac{\hbar}{i}\partial_t\Psi = 0$$

donde $\bar{g} = -g\bar{e}_3$. Para calcular la función de onda utilizaremos el procedimiento dado por Feynman, es decir la función de onda esta dada por:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \int K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)\Psi(0, \bar{x}_0)d^3x_0$$

donde $K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0)$ es el propagador de Feynman del problema. El propagador para el tiro de proyectil tridimensional es:

$$K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) = \left(\frac{m}{2\pi i\hbar t}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar t}\left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12}\right]\right\}$$

Si definiendo $A^2 = \frac{m}{2i\hbar t}$, escribimos el propagador en la forma:

$$K(t, \bar{x}, 0, \bar{x}_0) = \frac{A^3}{\pi^{3/2}} \exp\left\{-A^2\left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12}\right]\right\}$$

4.2.1. Cálculo de la función de onda y obtención de R y S

De acuerdo con lo argumentado en la sección 1.1, la función de onda inicial es:

$$\Psi(0, \bar{x}) = B \exp \left\{ -a\bar{x}^2 + \frac{i\bar{b}\cdot\bar{x}}{\hbar} \right\}$$

donde $B = (2a/\pi)^{3/4}$. También en la sección 1.1 se demostró que para esta función de onda inicial se tienen los valores medios iniciales $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_0} = \bar{0}$ y $\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_0} = \bar{b}$.

Aplicando el método del propagador obtenemos la función de onda en cualquier instante posterior:

$$\begin{aligned} \Psi(t, \bar{x}) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{A^3}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ -A^2 \left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \right\} B \exp \left\{ -a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \right\} d^3x_0 \\ \Psi(t, \bar{x}) &= \frac{A^3 B}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -A^2 \left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \right\} d^3x_0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

En el exponente:

$$\begin{aligned} & -A^2 \left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left[\bar{x}_0^2 - 2\bar{x}\cdot\bar{x}_0 + \bar{x}^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left[\bar{x}^2 + \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 \left[\bar{x}_0^2 + (\bar{g}t^2 - 2\bar{x})\cdot\bar{x}_0 \right] - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left[\bar{x}^2 + \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 \left[\left(1 + \frac{a}{A^2}\right) \bar{x}_0^2 - 2 \left(\bar{x} + \frac{i\bar{b}}{2\hbar A^2} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \cdot \bar{x}_0 \right] \end{aligned}$$

definiendo $N^2 = 1 + a/A^2 = 1 + i\alpha t$, donde $\alpha = 2a\hbar/m$; y $\bar{M} = \bar{x} + i\bar{b}/2\hbar A^2 - \bar{g}t^2/2 = \bar{x} - \bar{b}t/m - \bar{g}t^2/2$, obtenemos:

$$\begin{aligned} & -A^2 \left[(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + \bar{g}\cdot(\bar{x} + \bar{x}_0)t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - a\bar{x}_0^2 + i\frac{\bar{b}\cdot\bar{x}_0}{\hbar} \\ &= -A^2 \left[\bar{x}^2 + \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 \left[N^2 \bar{x}_0^2 - 2\bar{M}\cdot\bar{x}_0 \right] \\ &= -A^2 \left[\bar{x}^2 + \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 \left[N^2 \bar{x}_0^2 - 2\bar{M}\cdot\bar{x}_0 + \frac{\bar{M}^2}{N^2} \right] + \frac{A^2 \bar{M}^2}{N^2} \\ &= A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 \left[N\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N} \right]^2 \\ &= A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g}\cdot\bar{x}t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 N^2 \left[\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2} \right]^2 \end{aligned}$$

Luego al reemplazar esta expresión equivalente del exponente en (4.11), tenemos:

$$\begin{aligned}
\Psi(t, \bar{x}) &= \frac{A^3 B}{\pi^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] - A^2 N^2 \left[\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2} \right]^2 \right\} d^3 x_0 \\
&= \frac{A^3 B}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \right\} \times \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -A^2 N^2 \left[\bar{x}_0 - \frac{\bar{M}}{N^2} \right]^2 \right\} d^3 x_0 \\
&= \frac{A^3 B}{\pi^{3/2}} \exp \left\{ A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \right\} \times \frac{\pi^{3/2}}{A^3 N^3} \\
&= \frac{B}{N^3} \exp \left\{ A^2 \left[\frac{\bar{M}^2}{N^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \right\}
\end{aligned}$$

Finalmente al reemplazando A , \bar{M} y N en la expresión anterior obtenemos:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \frac{B}{(1 + i\alpha t)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{1 + i\alpha t} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \right\} \quad (4.12)$$

Ahora para escribir la función de onda en la forma (1.1) y obtener $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$, debemos de separar el exponente de la función exponencial en sus partes real e imaginaria, así como escribir el denominador $(1 + i\alpha t)^{3/2}$ en su forma polar. Entonces, en el exponente:

$$\begin{aligned}
&\frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{1 + i\alpha t} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \\
&= \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 (1 - i\alpha t)}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \\
&= \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} - \frac{i\alpha t \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{1 + \alpha^2 t^2} \right] \\
&= -\frac{m\alpha \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{2\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} + \frac{m}{2i\hbar t} \left[\frac{\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2}{1 + \alpha^2 t^2} - \bar{x}^2 - \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 + \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right] \\
&= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 + \frac{m}{2i\hbar t(1 + \alpha^2 t^2)} \left[\left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right. \\
&\quad \left. - (1 + \alpha^2 t^2) \left(\bar{x}^2 + \bar{g} \cdot \bar{x} t^2 - \frac{\bar{g}^2 t^4}{12} \right) \right] \\
&= -\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 + \frac{i}{\hbar(1 + \alpha^2 t^2)} \left[\bar{b} \cdot \bar{x} + \left(m\bar{g} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2 \hbar^2 \bar{x}^2}{m} \right) t \right. \\
&\quad \left. - \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} + \left(\frac{2a^2 \hbar^2 \bar{g} \cdot \bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^3 - \frac{a^2 \hbar^2 \bar{g}^2 t^5}{6m} \right]
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $(1 + i\alpha t)^{3/2} = (1 + \alpha^2 t^2) \exp\left\{\frac{3i}{2} \arctan(\alpha t)\right\}$. Luego al reemplazar estos resultados en (4.8), obtenemos:

$$\Psi(t, \bar{x}) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right)^2\right\} \times \\ \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left\{ \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[\bar{b}\bar{x} + \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m}\right)t - \frac{\bar{g}\bar{b}t^2}{2} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6}\right)t^3 - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2t^5}{6m} \right] - \frac{3i}{2} \arctan(\alpha t) \right\}\right\}$$

De aquí identificamos los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$:

$$S(t, \bar{x}) = \frac{1}{1 + \alpha^2 t^2} \left[\bar{b}\bar{x} + \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m}\right)t - \frac{\bar{g}\bar{b}t^2}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6}\right)t^3 - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2t^5}{6m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan(\alpha t) \quad (4.13)$$

$$R(t, \bar{x}) = \frac{B}{(1 + \alpha^2 t^2)^{3/4}} \exp\left\{-\frac{a}{1 + \alpha^2 t^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right)^2\right\} \quad (4.14)$$

donde $\alpha = 2a\hbar/m$; $B = (2a/\pi)^{3/4}$. Dado que α depende de \hbar , aquí podemos notar que $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ efectivamente dependen de \hbar .

Ahora verifiquemos que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ satisfacen las ecuaciones (1.2) y (1.3). Para esto calculemos las siguientes derivadas (y para simplificar escribimos $Q = 1 + \alpha^2 t^2$, entonces:

$$\nabla R = -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right) R \\ \partial_t R = \left[-\frac{6a^2\hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3\hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right)^2 + \frac{2a}{Q} \left(\frac{\bar{b}}{m} + \bar{g}t\right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right) \right] R \\ \nabla^2 R = \left[-\frac{6a}{Q} + \frac{4a}{Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2}\right)^2 \right] R \\ \nabla S = \frac{1}{Q} \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{x}}{m}\right)t + \frac{2a^2\hbar^2 t^3 \bar{g}}{m} \right] \\ \partial_t S = m\bar{g}\bar{x} - \frac{8a^2\hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[\bar{b}\bar{x} + \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m}\right)t + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6}\right)t^3 \right. \\ \left. - \frac{\bar{g}\bar{b}t^2}{2} - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2t^5}{6m} \right] + \frac{1}{Q} \left[\frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m} - \frac{\bar{b}^2}{2m} - \bar{g}\bar{b}t + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{2}\right)t^2 \right. \\ \left. - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2t^4}{6m} \right] - \frac{3a\hbar^2}{mQ} \\ \nabla^2 S = \frac{12a^2\hbar^2 t}{mQ}$$

Luego en la ecuación de Hamilton-Jacobi perturbada (1.2):

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2m}(\nabla S)^2 - m\bar{g}\bar{x} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} \\
&= \frac{1}{2mQ^2} \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2\hbar^2 t^3 \bar{g}}{m} \right]^2 - m\bar{g}\bar{x} + m\bar{g}\bar{x} - \frac{8a^2\hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left[\bar{b}\bar{x} \right. \\
&+ \left. \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m} \right) t + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^3 - \frac{\bar{g}\bar{b}t^2}{2} - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^5}{6m} \right] \\
&+ \frac{1}{Q} \left[\frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m} - \frac{\bar{b}^2}{2m} - \bar{g}\bar{b}t + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{2} \right) t^2 - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6m} \right] \\
&- \frac{3a\hbar^2}{mQ} - \frac{\hbar^2}{2m} \left[-\frac{6a}{Q} + \frac{4a}{Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{1}{2} \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2\hbar^2 t^3 \bar{g}}{m} \right]^2 - \frac{8a^2\hbar^2 t}{m} \left[\bar{b}\bar{x} - \frac{\bar{g}\bar{b}t^2}{2} - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^5}{6m} \right. \right. \\
&+ \left. \left. \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m} \right) t + \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^3 \right] - 2a^2\hbar^2 \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} \\
&+ \frac{1}{mQ} \left\{ 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} - m\bar{g}\bar{b}t + \left(2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x} - \frac{m^2\bar{g}^2}{2} \right) t^2 - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \right\} \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{\bar{b}^2}{2} + \left(m^2\bar{g}^2 + \frac{16a^4\hbar^4\bar{x}^2}{m^2} + 8a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x} \right) \frac{t^2}{2} + \frac{2a^4\hbar^4\bar{g}^2 t^6}{m^2} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{b}t^3}{m} \right. \\
&+ \left(m\bar{g}\bar{b} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{b}\bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2\hbar^2}{m} \left(m\bar{g}^2 + \frac{4a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} \right) t^4 - \frac{8a^2\hbar^2\bar{b}\bar{x}t}{m} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{g}\bar{b}t^3}{m} \\
&- \frac{8a^2\hbar^2}{m} \left(m\bar{g}\bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2\bar{x}^2}{m} \right) t^2 - \frac{8a^2\hbar^2}{m} \left(\frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^4 + \frac{4a^4\hbar^4\bar{g}^2 t^6}{3m^2} \\
&\left. - 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 - \frac{2a^2\hbar^2\bar{b}^2 t^2}{m^2} - \frac{a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{2} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{b}\bar{x}t}{m} + 2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}t^2 - \frac{2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{b}t^3}{m} \right\} \\
&+ \frac{1}{mQ} \left\{ 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} - m\bar{g}\bar{b}t + \left(2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x} - \frac{m^2\bar{g}^2}{2} \right) t^2 - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \right\} \\
&= \frac{1}{mQ^2} \left\{ \frac{\bar{b}^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) + m\bar{g}\bar{b}t \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) - 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right. \\
&+ \frac{m^2\bar{g}^2 t^2}{2} \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) - 2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}t^2 \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) + \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right) \left. \right\} \\
&+ \frac{1}{mQ} \left\{ 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} - m\bar{g}\bar{b}t + 2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}t^2 - \frac{m^2\bar{g}^2 t^2}{2} - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \right\} \\
&= \frac{1}{mQ} \left\{ \frac{\bar{b}^2}{2} + m\bar{g}\bar{b}t - 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 + \frac{m^2\bar{g}^2 t^2}{2} - 2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}t^2 + \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \right\} \\
&+ \frac{1}{mQ} \left\{ 2a^2\hbar^2\bar{x}^2 - \frac{\bar{b}^2}{2} - m\bar{g}\bar{b}t + 2a^2\hbar^2\bar{g}\bar{x}t^2 - \frac{m^2\bar{g}^2 t^2}{2} - \frac{5a^2\hbar^2\bar{g}^2 t^4}{6} \right\} = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2m}(\nabla S)^2 - m\bar{g}\cdot\bar{x} + \partial_t S - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\nabla^2 R}{R} = 0$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ satisfacen la ecuación (1.2). Ahora para la ecuación (1.3):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R \\ &= \frac{R}{2m} \left(\frac{12a^2 \hbar^2 t}{mQ} \right) + \frac{1}{m} \left[-\frac{2aR}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \right] \cdot \left[\frac{1}{Q} \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2 \hbar^2 \bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2 \hbar^2 t^3 \bar{g}}{m} \right] \right] \\ &+ \left[-\frac{6a^2 \hbar^2 t}{m^2 Q} + \frac{8a^3 \hbar^2 t}{m^2 Q^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 + \frac{2a}{Q} \left(\frac{\bar{b}}{m} + \bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \right] R \\ &= \frac{2aR}{mQ^2} \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 - \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \cdot \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2 \hbar^2 \bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2 \hbar^2 t^3 \bar{g}}{m} \right] \right\} \\ &+ \frac{2aR}{mQ} \left(\bar{b} + m\bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \\ &= \frac{2aR}{mQ^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \cdot \left\{ \frac{4a^2 \hbar^2 t}{m} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) - \bar{b} - m\bar{g}t - \frac{4a^2 \hbar^2 \bar{x} t}{m} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2a^2 \hbar^2 \bar{g} t^3}{m} \right\} + \frac{2aR}{mQ} \left(\bar{b} + m\bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \\ &= \frac{2aR}{mQ^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \cdot \left\{ -\bar{b} \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) - m\bar{g}t \left(1 + \frac{4a^2 \hbar^2 t^2}{m^2} \right) \right\} \\ &\quad + \frac{2aR}{mQ} \left(\bar{b} + m\bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \\ &= -\frac{2aR}{mQ} \left(\bar{b} + m\bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) + \frac{2aR}{mQ} \left(\bar{b} + m\bar{g}t \right) \cdot \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2m} R \nabla^2 S + \frac{1}{m} \nabla R \cdot \nabla S + \partial_t R = 0$$

Así queda demostrado que los campos $R(t, \bar{x})$ y $S(t, \bar{x})$ efectivamente satisfacen la ecuación (1.3). Ahora verificaremos que los valores medios de los operadores \hat{X} y \hat{P} se comportan clásicamente de acuerdo con el teorema de Ehrenfest. El valor medio de \hat{X} , de acuerdo con (1.7) es^{III}:

$$\begin{aligned} \langle \hat{X} \rangle_{\psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3 x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\bar{x} B^2}{Q^{3/2}} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} d^3 x \\ &= \frac{B^2}{Q} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} d^3 x \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} d^3 x \right] \end{aligned}$$

^{III}Aquí seguimos utilizando Q ya definiendo líneas arriba.

$$\begin{aligned}\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} &= \frac{B^2}{Q^{3/2}} \left[\int_{\mathbb{R}^3} \bar{z} \exp \left\{ -\frac{2a\bar{z}^2}{Q} \right\} d^3z + \left(\frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \int_{\mathbb{R}^3} \exp \left\{ -\frac{2a}{Q} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} d^3x \right] \\ &= \frac{B^2}{Q^{3/2}} \times \left(\frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \left(\frac{\pi Q}{2a} \right)^{3/2}\end{aligned}$$

reemplazando el valor de B , obtenemos:

$$\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2} \quad (4.15)$$

Ahora, el valor medio de \hat{P} , de acuerdo con (1.8) es:

$$\begin{aligned}\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) \nabla S(t, \bar{x}) d^3x \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) \frac{1}{Q} \left[\bar{b} + \left(m\bar{g} + \frac{4a^2\hbar^2\bar{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2\hbar^2\bar{g}t^3}{m} \right] d^3x \\ &= \frac{1}{Q} \left[\left(\bar{b} + m\bar{g}t + \frac{2a^2\hbar^2\bar{g}t^3}{m} \right) \int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) d^3x + \frac{4a^2\hbar^2t}{m} \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3x \right]\end{aligned}$$

De la condición de normalización tenemos que $\int_{\mathbb{R}^3} R^2(t, \bar{x}) d^3x = 1$, y del cálculo del valor medio de \hat{X} tenemos que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t} = \int_{\mathbb{R}^3} \bar{x} R^2(t, \bar{x}) d^3x = \frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2}$, luego:

$$\begin{aligned}\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} &= \frac{1}{Q} \left[\left(\bar{b} + m\bar{g}t + \frac{2a^2\hbar^2\bar{g}t^3}{m} \right) + \frac{4a^2\hbar^2t}{m} \left(\frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{Q} \left[\bar{b} \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2} \right) + m\bar{g}t \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2t^2}{m^2} \right) \right]\end{aligned}$$

reemplazando $Q = 1 + \alpha^2 t^2 = 1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}$, tenemos:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = \bar{b} + m\bar{g}t \quad (4.16)$$

De (4.15) y (4.16) podemos notar que se satisface el teorema de Ehrenfest:

$$\langle \hat{P} \rangle_{\Psi_t} = m \frac{d\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}}{dt}$$

Concluimos entonces que $\langle \hat{X} \rangle_{\Psi_t}$, se mueve de acuerdo con la ecuación clásica de movimiento, para cualquier valor de \hbar .

4.2.2. Representación gráfica de R y S

Para la solución hallada en la sección anterior, tenemos que el “potencial ficticio” es:

$$V_f(t, \bar{x}) = \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{6a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} - \frac{4a}{\left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right)^2} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right]$$

Podemos notar que $V_f(t, \bar{x})$ es nulo cuando $\hbar = 0$, lo que significa que el campo $S(t, \bar{x})$ pasa a ser una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi cuando es evaluado en $\hbar = 0$. Analizaremos las soluciones halladas (4.13) y (4.14) de este problema en dos casos, cuando $\hbar = 0$ (caso clásico) y cuando $\hbar \neq 0$ (caso cuántico). **Todas las gráficas presentadas en esta subsección corresponden al caso del de proyectil tridimensional.**

4.2.2.1. Caso clásico $\hbar = 0$

Evaluando (4.13) y (4.14) en $\hbar = 0$ tenemos^{iv}:

$$S_0(t, \bar{x}) = \bar{b} \cdot \bar{x} + \left(m\bar{g} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} \right) t - \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} - \frac{m\bar{g}^2 t^3}{6} \tag{4.17}$$

$$R_0(t, \bar{x}) = \left(\frac{2a}{\pi} \right)^{3/4} \exp \left\{ -a \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} \tag{4.18}$$

Para el campo $S_0(t, \bar{x})$, analizaremos sus frentes de onda, pues ellos son perpendiculares en cada instante a los rastros que dejan las partículas. Para $S_0(t, \bar{x})$, los frentes de onda en el instante t_0 son:

$$\begin{aligned} \bar{b} \cdot \bar{x} + \left(m\bar{g} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} \right) t - \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} - \frac{m\bar{g}^2 t^3}{6} &= c \\ (\bar{b} + m\bar{g}t) \cdot \bar{x} &= c + \frac{\bar{b}^2 t}{2m} + \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} + \frac{m\bar{g}^2 t^3}{6} \end{aligned}$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda, y como podemos notar estos frentes de onda son planos con vector normal igual a $\bar{b} + m\bar{g}t$. La figura 4.16 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo $S_0(t, \bar{x})$ ^v.

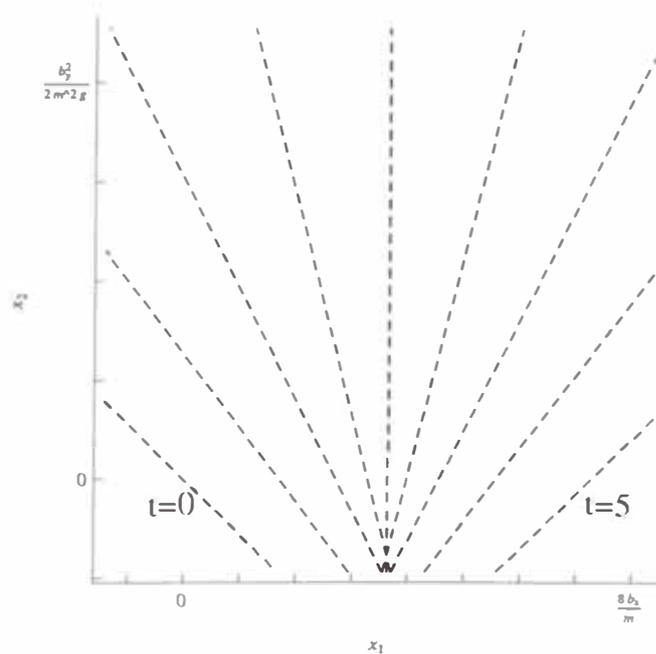


Figura 4.16 – Movimiento de un frente de onda del campo $S_0(t, \bar{x})$. Comparar con la figura 4.26.

^{iv}En esta subsección indicaremos con un subíndice 0 a los campos $R(t, x)$ y $S(t, x)$ cuando son evaluados en $\hbar = 0$.

^vCon el objetivo de visualizar mejor el comportamiento de los campos, en las figuras que presentamos en esta subsección, eliminaremos una dimensión espacial.

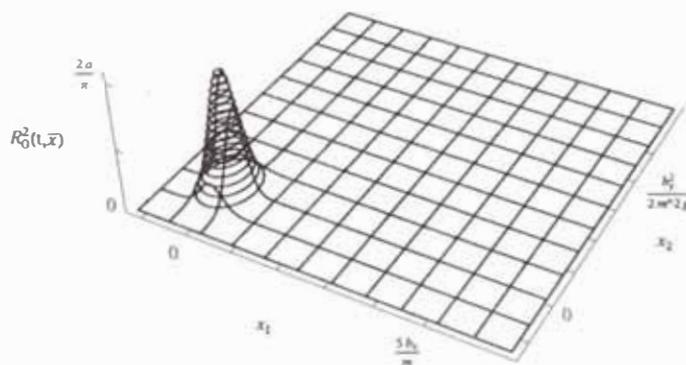
De (4.18), la densidad de probabilidad es:

$$R_0^2(t, \bar{x}) = \left(\frac{2a}{\pi}\right)^{3/2} \exp \left\{ -2a \left(\bar{x} - \frac{bt}{m} - \frac{gt^2}{2} \right)^2 \right\}$$

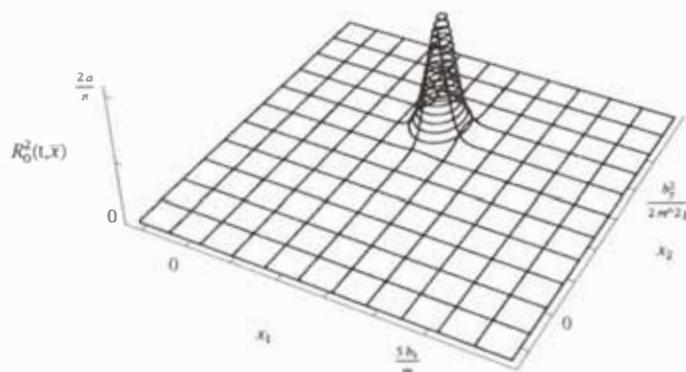
Debemos notar que $R_0^2(t, \bar{x})$ es una gaussiana (vista como función de \bar{x}), cuyo valor máximo es $R_{0max}^2 = (2a/\pi)^{3/2}$, valor que no cambia con el tiempo. Este valor máximo se alcanza en el punto $\bar{x}_{0max} = \frac{bt}{m} + \frac{gt^2}{2}$, y de acuerdo con (4.11), este punto \bar{x}_{0max} tiene la misma trayectoria que el valor medio $\langle X \rangle_{\Psi_t}$.

Para R_{0max}^2 , la desviación media cuadrática es $\delta_0 = (2a)^{1/2}$, y esta desviación no cambia con el tiempo. Por lo tanto concluimos que la superficie de densidad de probabilidad $R_0^2(t, \bar{x})$ avanza sin deformarse. Las figuras 4.17 y 4.18 muestra el movimiento de $R_0^2(t, \bar{x})$.

t=0



t=2.5



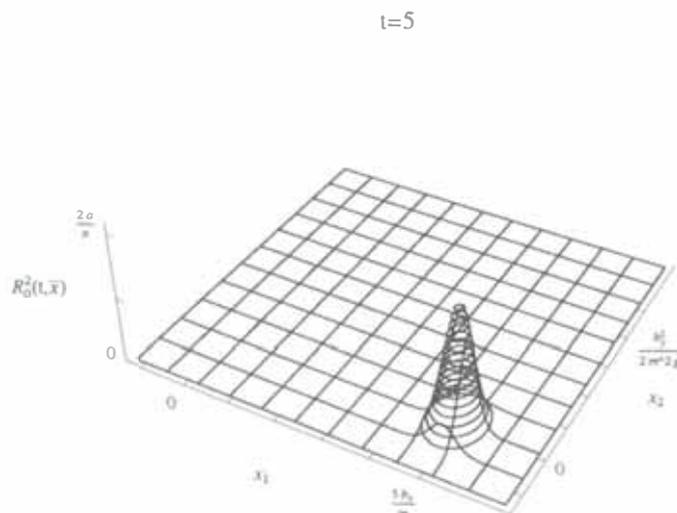


Figura 4.17 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar = 0$: Puede observarse que la superficie de densidad de probabilidad avanza sin deformarse. Recordadndo que esta densidad de probabilidad representa a muchas partículas, podemos decir que estas partículas avanzan como una estructura rígida. Comparar con la figura 4.28.

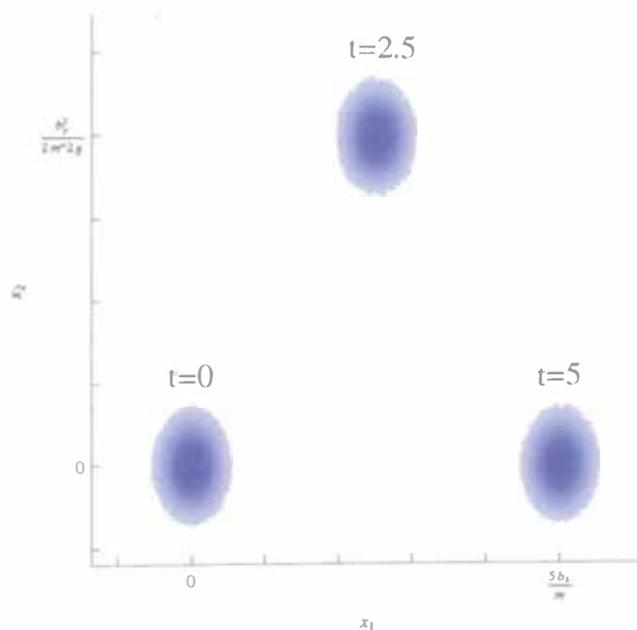


Figura 4.18 – Proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \vec{x})$ en el espacio de posiciones. Comparar con la figura 4.27.

De (4.17), campo de momentum es:

$$\nabla S_0(t, \vec{x}) = \vec{b} + m\vec{g}t$$

La figura 4.19 muestra este campo de momentum.

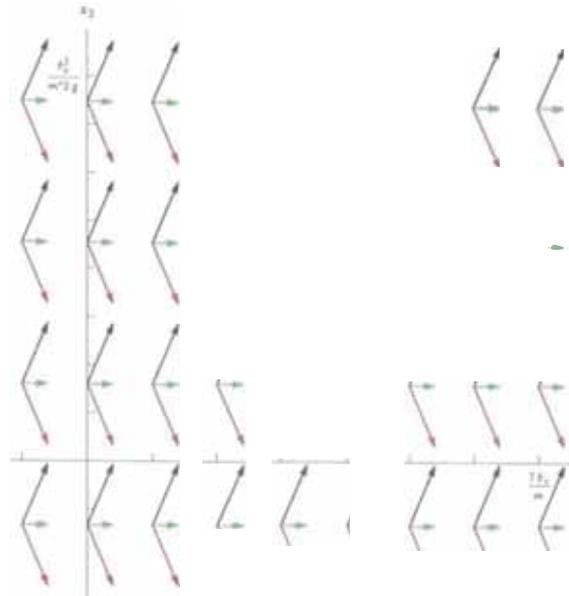


Figura 4.19 Campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$: Las flechas negras corresponden al campo de momentum en $t = 0$, las flechas verdes corresponden al campo de momentum en $t = 2,5$, y las flechas rojas corresponden al campo de momentum en $t = 5$. Comparar con la figura 4.29.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.13), que para este caso es:

$$\dot{\xi}_0 = \frac{b}{m} + gt$$

Estas trayectorias son de la forma $\xi_0(t) = \frac{bt}{m} + \frac{gt^2}{2} + x_0$, donde x_0 es la posición inicial de la partícula. La figura 4.20 muestra algunas de estas trayectorias. La figura 4.21 muestra algunos de los rastros que dejan las partículas. La figura 4.22 muestra los rastros dejados por algunas partículas y los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$.

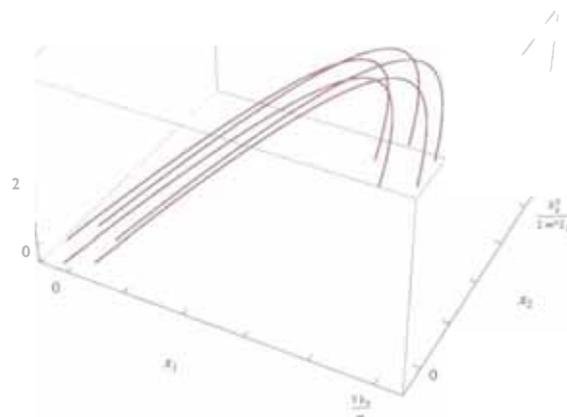


Figura 4.20 Trayectorias para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 4.30.

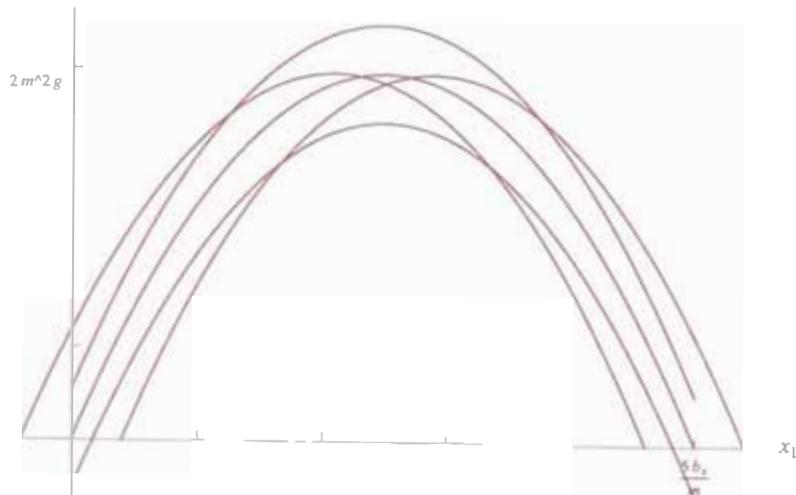


Figura 4.21 – Rastros para $h = 0$: Claramente estos rastros corresponden a rastros de partículas en un movimiento parabólico, como era de esperarse pues $S_0(t, x)$ es una solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Comparar con la figura 4.31.

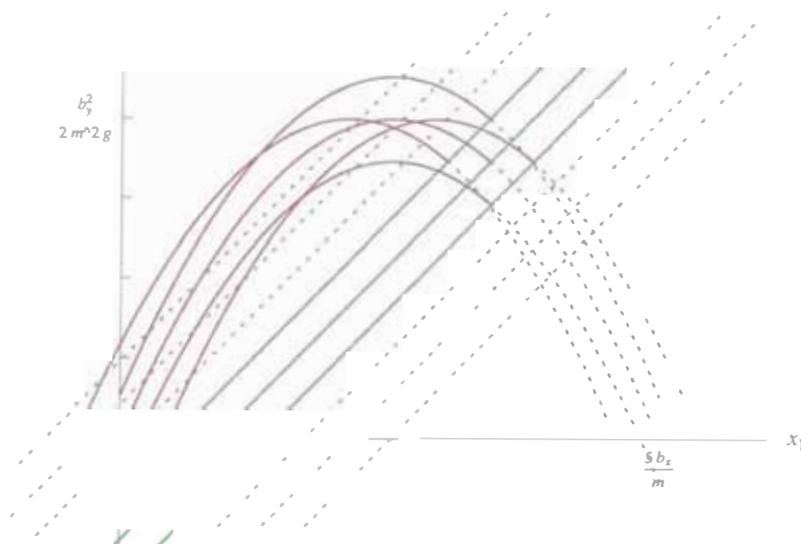


Figura 4.22 Rastros para $h = 0$: Aquí podemos notar que los rastros son perpendiculares a los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 4.32.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ presentado en las figuras 4.17 y 4.18 puede ser explicado utilizando los rastros de $\xi_0(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$. La figura 4.23 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y el campo de momentum $\nabla S_0(t, x)$. Las figuras 4.24 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y los frentes onda del campo $S_0(t, x)$. La figura 4.25 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y los rastros que dejan las partículas.

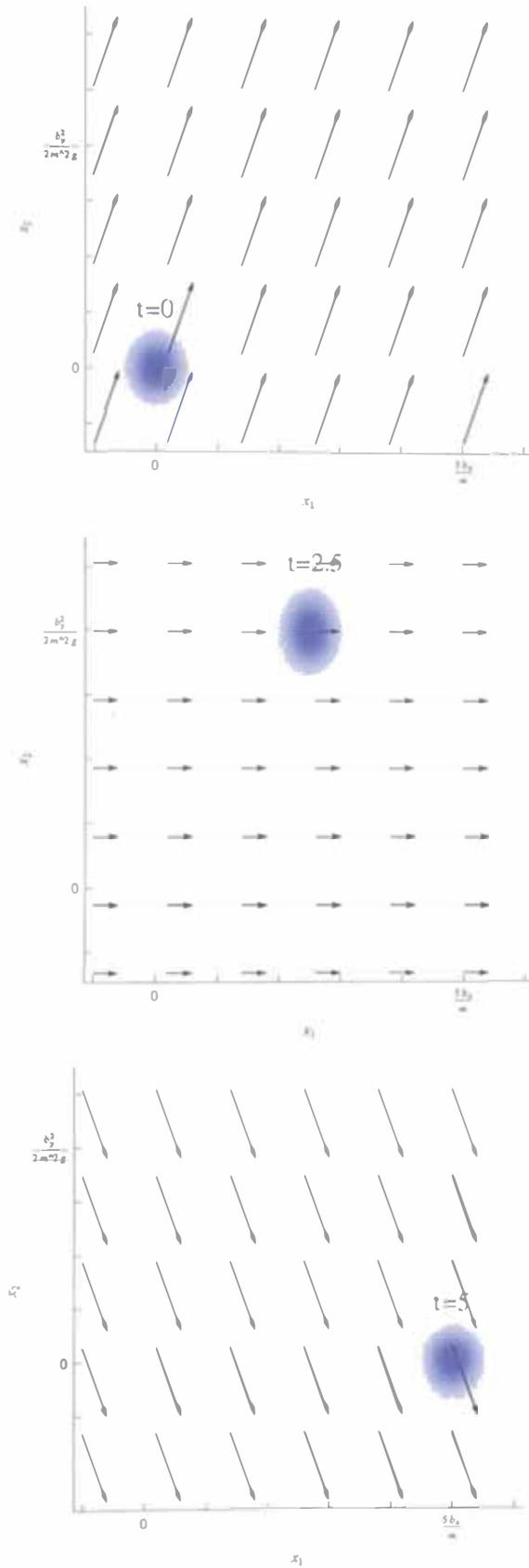


Figura 4.23 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \vec{x})$ y el campo de momentum $\nabla S_0(t, \vec{x})$. Comparar con la figura 4.33.

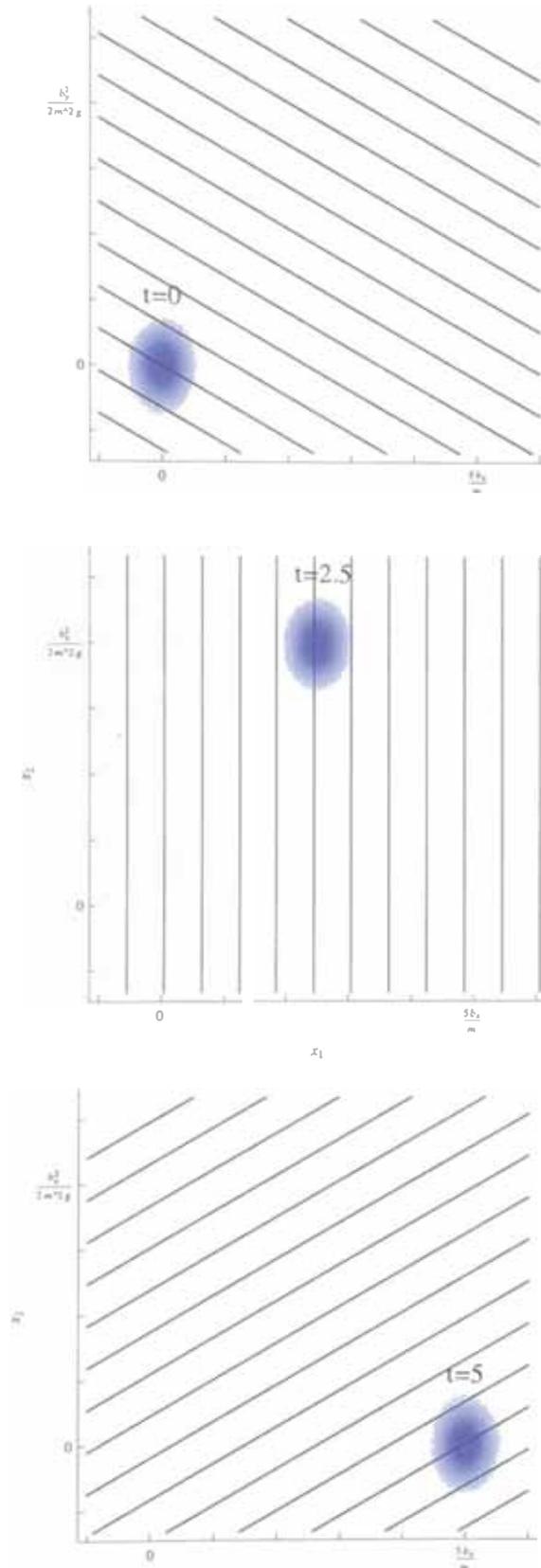


Figura 4.24 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, x)$ y los frentes de onda del campo $S_0(t, x)$. Comparar con la figura 4.34.

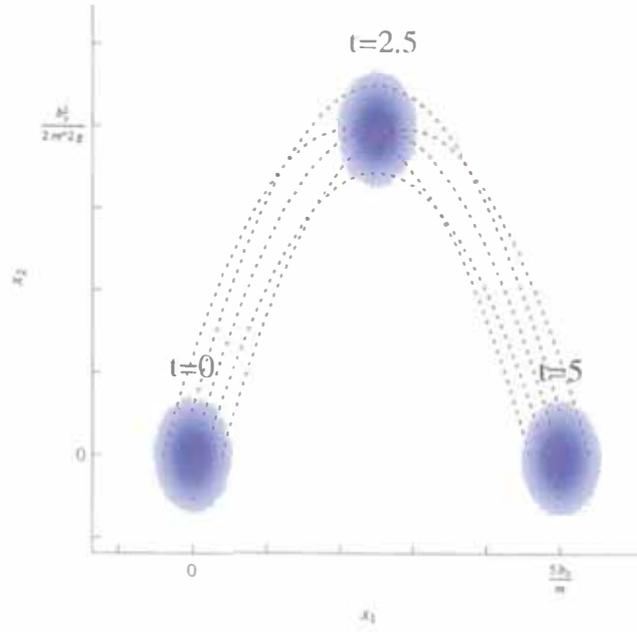


Figura 4.25 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R_0^2(t, \bar{x})$ y rastros de partícula para $\hbar = 0$. Comparar con la figura 4.35.

4.2.2.2. Caso cuántico $\hbar \neq 0$

De (4.13) y (4.14), para $\hbar \neq 0$ tenemos:

$$S(t, \bar{x}) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[\bar{b} \cdot \bar{x} + \left(m\bar{g} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2 \bar{x}^2}{m} \right) t - \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\hbar^2 \bar{g} \cdot \bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^3 - \frac{a^2\hbar^2 \bar{g}^2 t^5}{6m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) \quad (4.19)$$

$$R(t, \bar{x}) = \left[\frac{2a}{\pi \left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2} \right)} \right]^{3/4} \exp \left\{ -\frac{a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\} \quad (4.20)$$

Para el campo $S(t, \bar{x})$, analizaremos sus frentes de onda, pues ellos son perpendiculares en cada instante a los rastros que dejan las partículas. Para $S(t, \bar{x})$, los frentes de onda en el instante t_0 son:

$$\frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[\bar{b} \cdot \bar{x} + \left(m\bar{g} \cdot \bar{x} - \frac{\bar{b}^2}{2m} + \frac{2a^2\hbar^2 \bar{x}^2}{m} \right) t - \frac{\bar{g} \cdot \bar{b} t^2}{2} \right. \\ \left. + \left(\frac{2a^2\hbar^2 \bar{g} \cdot \bar{x}}{m} - \frac{m\bar{g}^2}{6} \right) t^3 - \frac{a^2\hbar^2 \bar{g}^2 t^5}{6m} \right] - \frac{3\hbar}{2} \arctan \left(\frac{2a\hbar t}{m} \right) = c$$

donde $c \in \mathbb{R}$. Cada valor de c determina un frente de onda; y para $t_0 = 0$ estos frentes de onda son planos con vector normal igual a \bar{b} . Mientras que para $t_0 > 0$ los frentes de onda

toman la forma:

$$\left(\bar{x} + \frac{m\bar{b}}{4a^2\hbar^2 t} + \frac{m^2\bar{g}}{4a^2\hbar^2} + \frac{\bar{g}t^2}{2}\right)^2 = \frac{m(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})}{2a^2\hbar^2 t} \left\{ c + \frac{3\hbar}{2} \arctan\left(\frac{2a\hbar t}{m}\right) + \frac{m^2\bar{g}\cdot\bar{b}}{4a^2\hbar^2} + \frac{m\bar{b}^2}{8a^2\hbar^2 t} + \frac{m^3\bar{g}^2 t}{8a^2\hbar^2} + \frac{m\bar{g}^2 t^3}{6} \right\}$$

Así podemos notar que los frentes de onda, para $t_0 > 0$, son esferas cuyos centros y radios cambian con el tiempo. La figura 4.26 muestra el movimiento del frente de onda $c = 0$ del campo

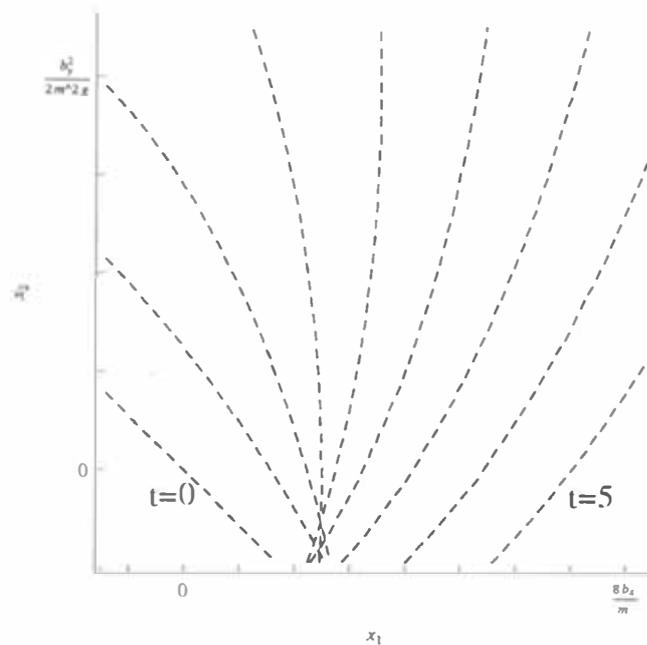


Figura 4.26 – Movimiento de un frente de onda del campo $S(t, \bar{x})$. Comparar con la figura 4.16.

De (4.20) la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$ es:

$$R^2(t, \bar{x}) = \left[\frac{2a}{\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})} \right]^{3/2} \exp \left\{ -\frac{2a}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left(\bar{x} - \frac{\bar{b}t}{m} - \frac{\bar{g}t^2}{2} \right)^2 \right\}$$

Debemos notar que $R^2(t, \bar{x})$ es una gaussiana (vista como función de \bar{x}), cuyo valor máximo es $R_{max}^2 = \left(2a/\pi(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})\right)^{3/2}$, valor que disminuye con el tiempo. Este valor máximo de $R^2(t, \bar{x})$ se alcanza en el punto $\bar{x}_{max} = \frac{\bar{b}t}{m} + \frac{\bar{g}t^2}{2}$; y de acuerdo con (4.11), este punto \bar{x}_{max} sigue la misma trayectoria que el valor medio $\langle \widehat{X} \rangle_{\Psi_t}$. Además debemos notar que \bar{x}_{max} (punto de máximo de $R^2(t, \bar{x})$) y \bar{x}_{0max} (punto de máximo de $R_0^2(t, \bar{x})$) coinciden.

La desviación media cuadrática para $R^2(t, \bar{x})$ es $\delta = \left((1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2})/2a\right)^{1/2}$, y podemos notar que esta desviación aumenta al pasar el tiempo. Por lo tanto concluimos que la superficie de densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ avanza dispersándose. Las figuras 4.27 y 4.28 muestra el movimiento de $R^2(t, \bar{x})$.

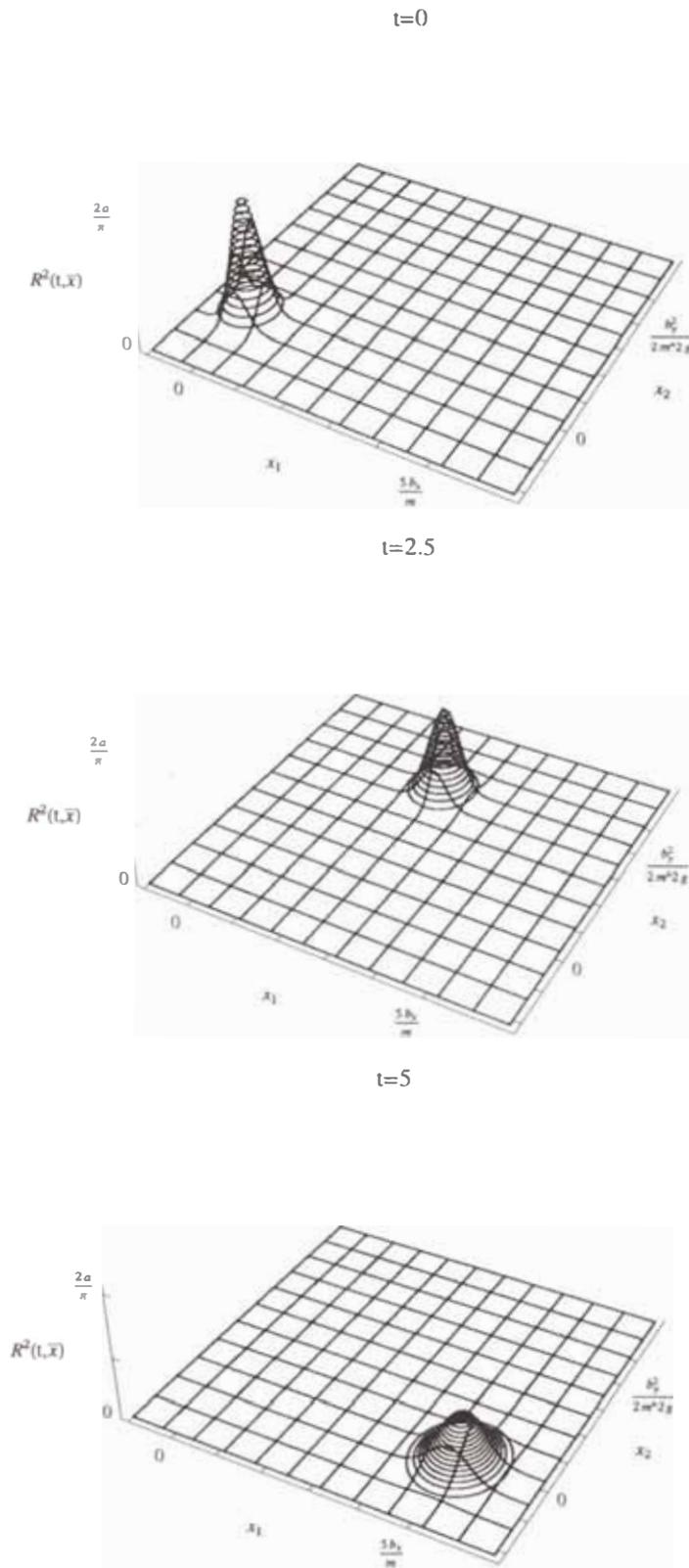


Figura 4.27 – Movimiento de la densidad de probabilidad para $\hbar \neq 0$: Puede observarse que la superficie de densidad de probabilidad $R^2(t, x)$ avanza deformándose, a diferencia de la correspondiente en el caso clásico. Comparar con la figura 4.17.

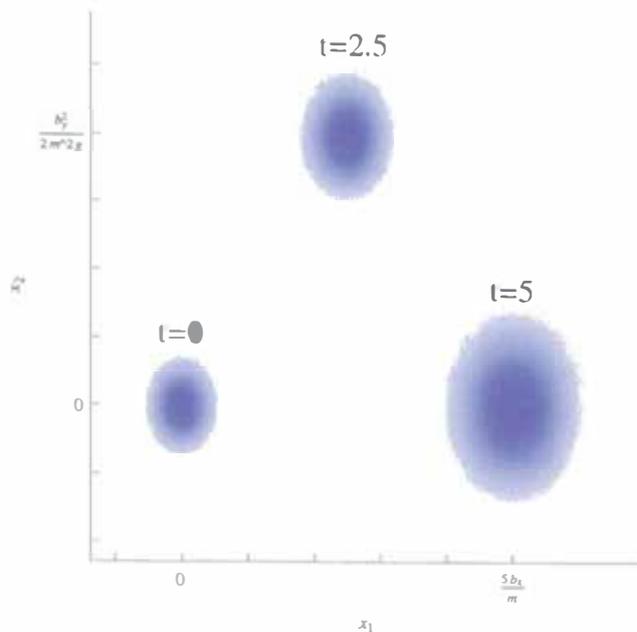


Figura 4.28 – Proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ en el espacio de posición. Comparar con la figura 4.18.

De (4.19), el campo de momentum es:

$$\nabla S(t, \vec{x}) = \frac{1}{1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}} \left[\vec{b} + \left(m\vec{g} + \frac{4a^2\hbar^2\vec{x}}{m} \right) t + \frac{2a^2\hbar^2\vec{g}t^3}{m} \right]$$

La figura 4.29 muestra este campo de momentum.

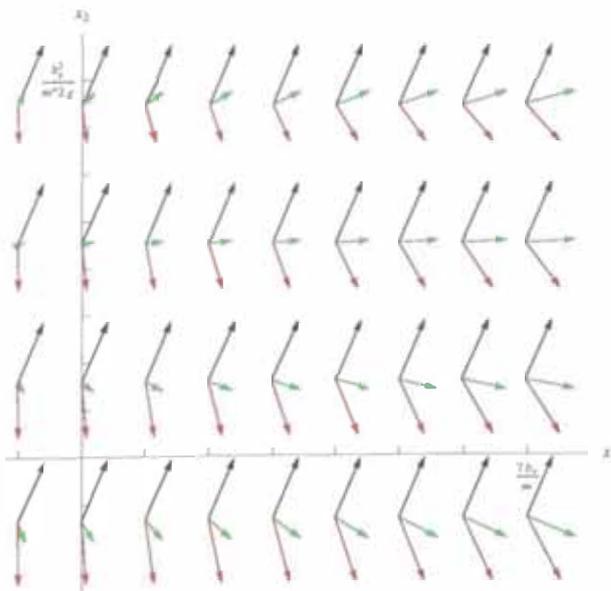


Figura 4.29 – Campo de momentum $\nabla S(t, \vec{x})$: Las flechas negras corresponden al campo de momentum en $t = 0$, las flechas verdes corresponden al campo de momentum en $t = 2,5$, y las flechas rojas corresponden al campo de momentum en $t = 5$. Comparar con la figura 4.19.

Si colocamos algunas partículas en el campo de momentum $\nabla S(t, \vec{x})$, obtenemos sus trayectorias utilizando la ecuación (1.12), que para este caso es:

$$\dot{\vec{\xi}} = \frac{1}{m\left(1 + \frac{4a^2\hbar^2 t^2}{m^2}\right)} \left[\vec{b} + \left(m\vec{g} + \frac{4a^2\hbar^2\vec{\xi}}{m}\right)t + \frac{2a^2\hbar^2\vec{g}t^3}{m} \right]$$

Resolvemos esta ecuación numéricamente y presentamos estas trayectorias gráficamente. La figura 4.30 muestra algunas de estas trayectorias. La figura 4.31 se muestra algunos rastros que dejan las partículas. La figura 4.32 muestra los rastros que dejan las partículas y los frentes de onda del campo $S(t, \vec{x})$ en un instante particular.

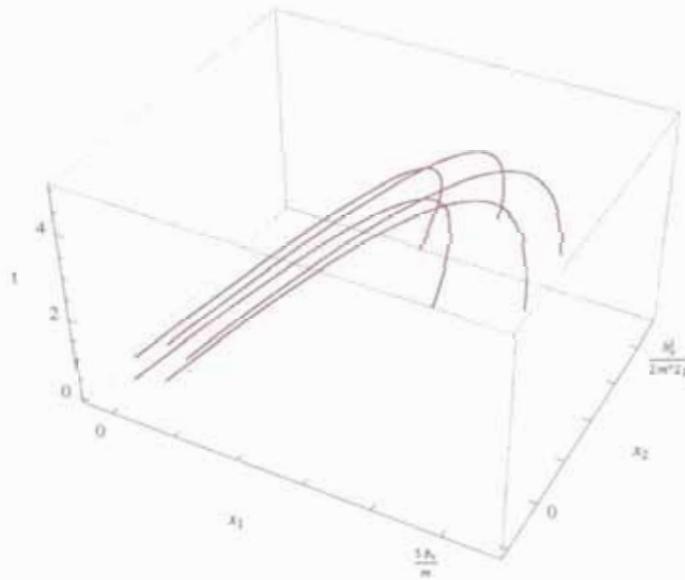


Figura 4.30 – Trayectorias para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.20.

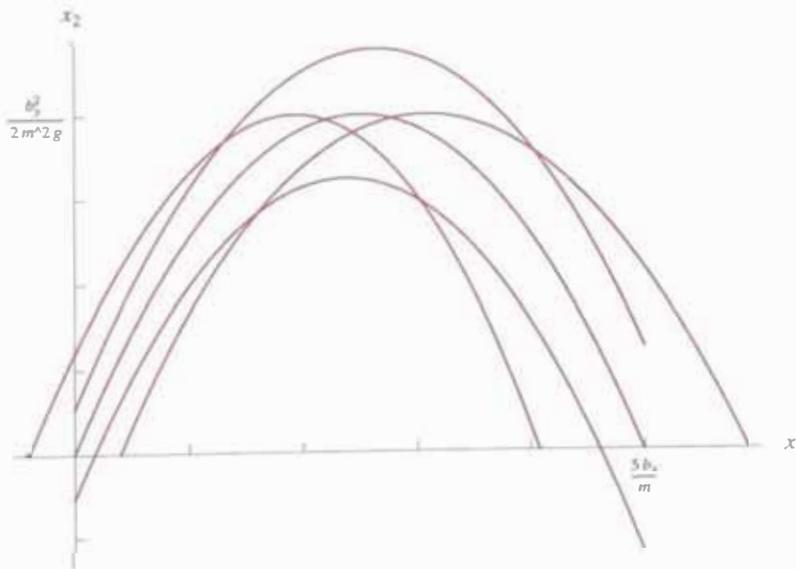


Figura 4.31 – Rastros para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.21.

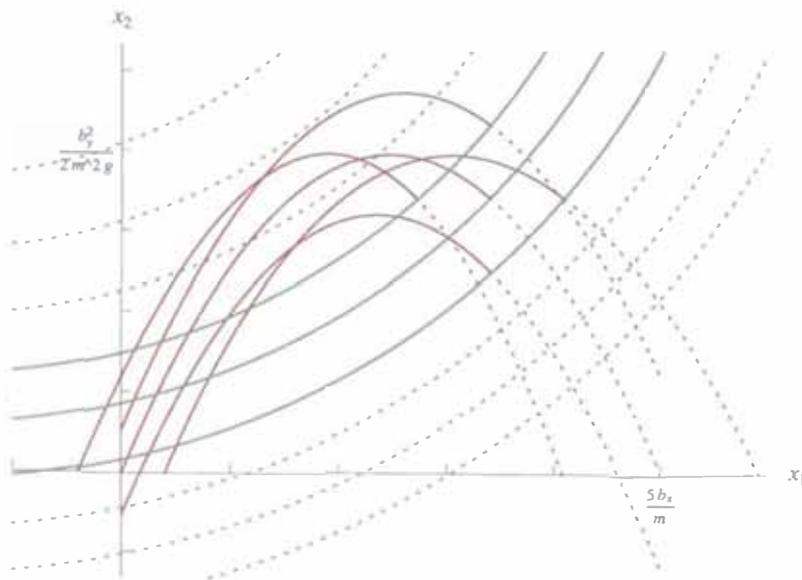


Figura 4.32 – Rastros para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.22.

El movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ presentado en las figuras 4.27 y 4.28 puede ser explicado utilizando los rastros de $\xi(t)$ que dejan las partículas, o el campo de momentum $\nabla S(t, \bar{x})$. La figura 4.33 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ y los rastros que dejan las partículas. La figura 4.34 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ y el campo de momentum $\nabla S(t, \bar{x})$. La figura 4.35 muestra la proyección de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ y los frentes de onda del campo $S(t, \bar{x})$.

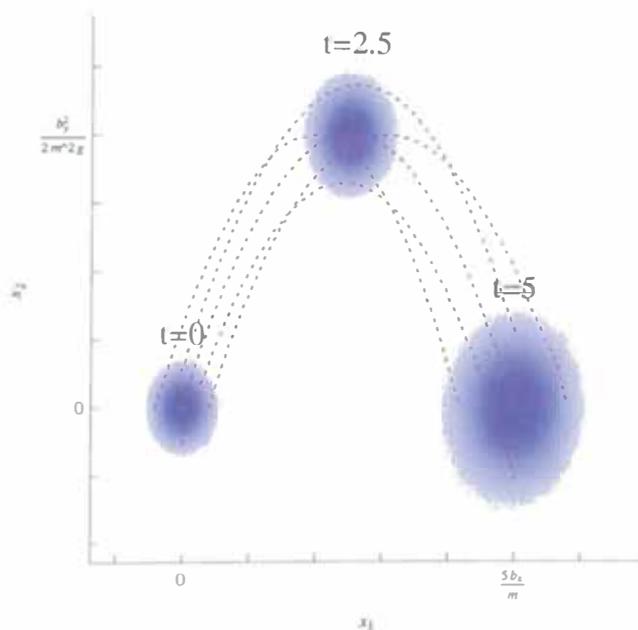


Figura 4.33 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ y rastros de partícula para $\hbar \neq 0$. Comparar con la figura 4.23.

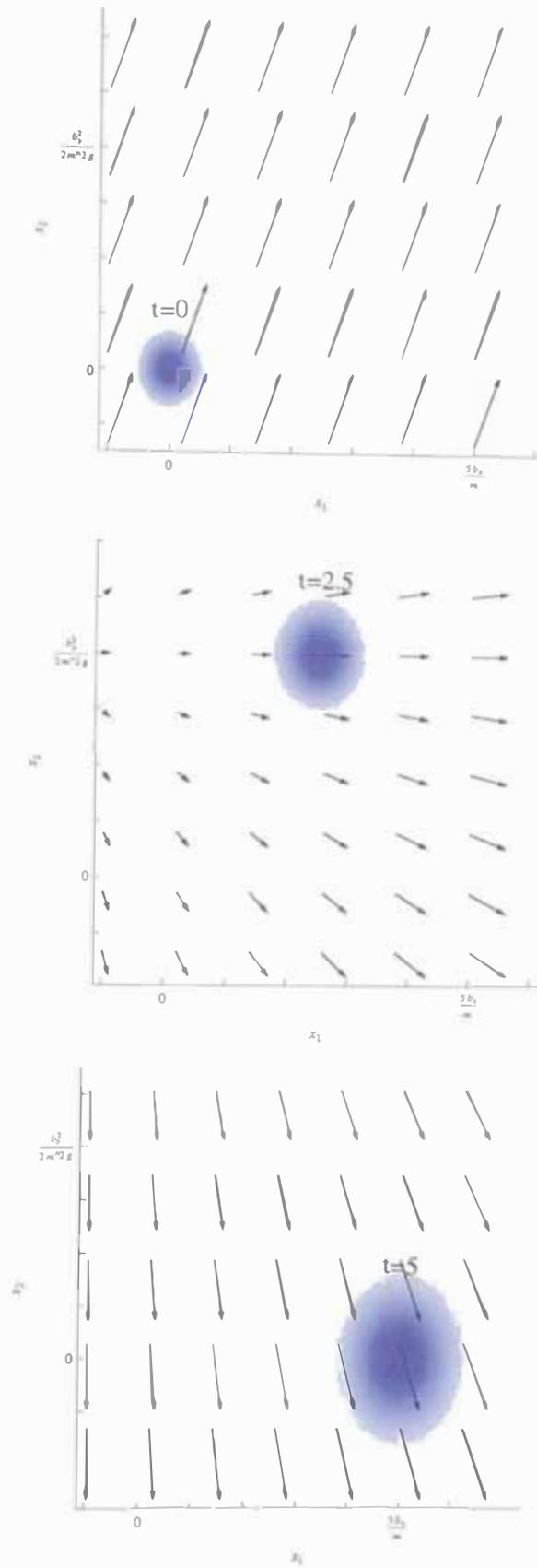


Figura 4.34 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \vec{x})$ y el campo de momentum $\nabla S(t, \vec{x})$. Comparar con la figura 4.24.

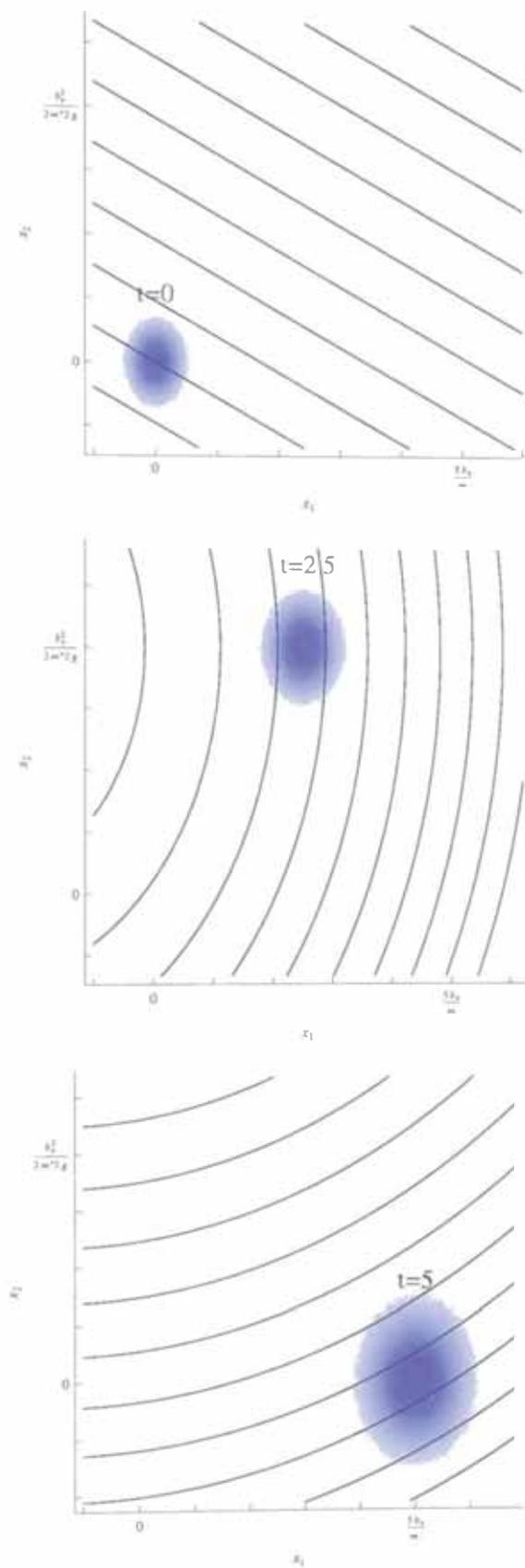


Figura 4.35 – Movimiento de la densidad de probabilidad $R^2(t, \bar{x})$ y los frentes de onda del campo $S(t, \bar{x})$. Comparar con la figura 4.25

Para finalizar esta sección, la figura 4.36 muestra las trayectorias clásica y cuántica de cinco partículas con distintas posiciones iniciales, y para partícula ambas trayectorias (clásica o cuántica) tienen la misma posición inicial. Así mismo la figura 4.37 muestra los rastros clásicos y cuánticos para las mismas partículas.

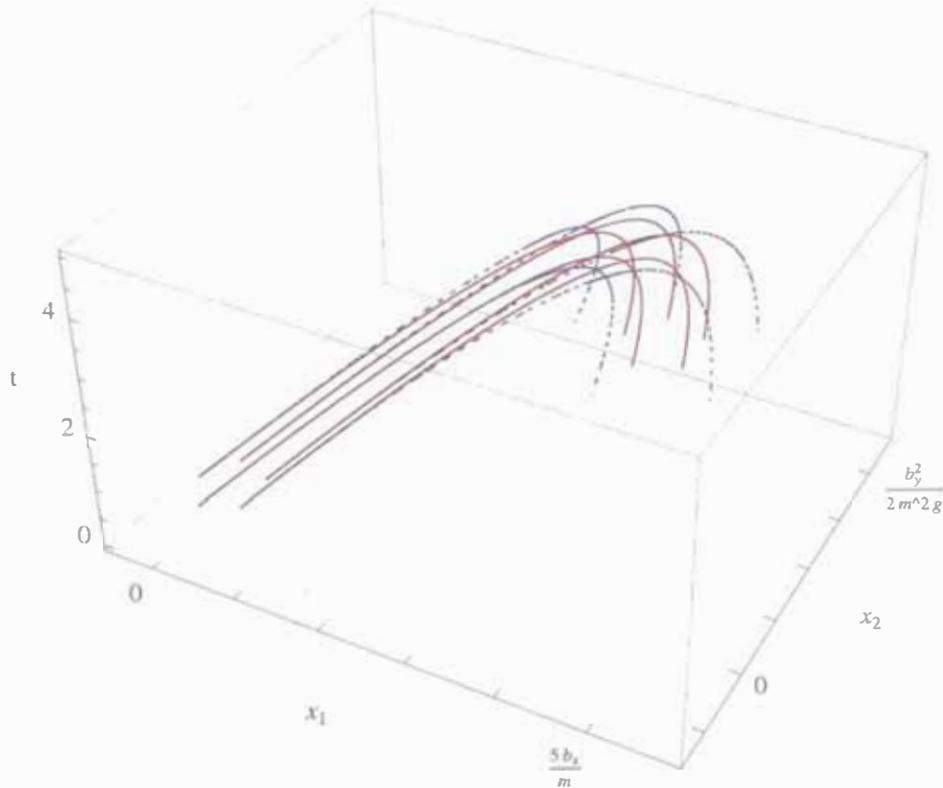


Figura 4.36 – Comparación de las trayectorias clásica (líneas rojas) y cuántica (líneas punteadas azules) de cinco partículas.

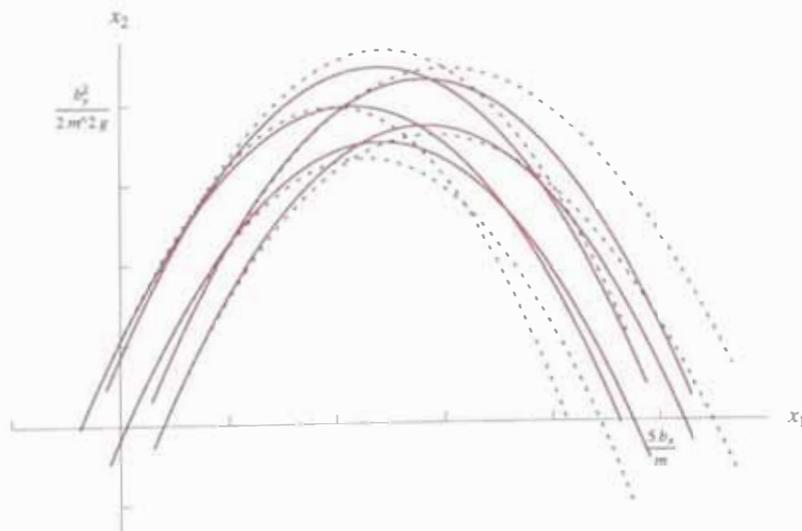


Figura 4.37 – Comparación de los rastros clásico (líneas rojas) y cuántico (líneas punteadas azules) de cinco partículas.

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado una representación alternativa de algunas soluciones de la ecuación de Schrödinger, obtenida a partir de una expresión diferente de la función de onda, que nos ha permitido hacer un paralelo con la descripción de la dinámica clásica dada por la ecuación de Hamilton-Jacobi.

Así hemos podido asociar trayectorias y frentes de onda a la evolución de la densidad de probabilidad cuántica, obtenidos estos a partir del campo $S(t, \mathbf{x})$ solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Perturbada, tan igual como se hace en la dinámica clásica con la solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi.

También hemos constatado que el efecto del parámetro \hbar depende del problema a tratar, y no siempre implica la dispersión de las trayectorias al pasar el tiempo, como se ha demostrado con los ejemplos presentados aquí. Adicionalmente, se ha encontrado una solución no separable para la ecuación de Hamilton-Jacobi en el caso del oscilador armónico [ver (3.7)], distinta de la que comunmente se presenta en los textos de mecánica clásica.

Bibliografía

- [1] E. Madelung, *Quantentheorie in hydrodynamischer form*, Zeitschrift fur Physik 40, 322-326 (1927)
- [2] D. Bohm, *A Suggested Interpretation of Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables I and II*, Physical Review 85, 166-193 (1952)
- [3] W. Dittrich y M. Reuter, *Classical and Quantum Dynamics: From Classical Paths to Paths Integrals*, Springer-Verlag, 3era edición (2001)
- [4] H. Valqui, *Apuntes de Mecánica Clásica II* (2006)