

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA



Ecuaciones en diferencias y el Modelo de Solow

por

Juan Alberto Socualaya Acosta

Tesis para Optar
al Título Profesional de
LICENCIADO en MATEMATICA

Prof. William Carlos Echeagaray Castillo

Asesor

UNI, diciembre del 2010.

Resumen

En el capítulo 1 hacemos una breve introducción, motivando el estudio de las ecuaciones en diferencias mediante un ejemplo y con un uso básico de dichas ecuaciones.

En el capítulo 2 se estudia las ecuaciones en diferencia comenzando con ecuaciones en diferencia de primer orden de dimensión uno, luego los sistemas lineales de primer orden multidimensional, y luego se dedica unas líneas a sistemas no lineales, no profundizando en este último tópico, por no ser necesario para el desarrollo de los siguientes capítulos que son la base de este trabajo.

En el capítulo 3 estudiamos el modelo de Solow, el cual es básico en la macroeconomía; en dicho modelo se hace uso de las ecuaciones en diferencia, donde observamos a la variable tiempo, como una variable discreta.

En el capítulo 4 analizaremos una extensión del modelo de Solow, dado en el capítulo 3. Este modelo resulta de extender el anterior modelo agregando unas variables a la función de producción.

Finalmente en el capítulo 5 vamos a dar las conclusiones de este trabajo.

Índice general

1. Introducción	1
2. Ecuaciones en diferencias	6
2.1. Introducción	6
2.2. Sistemas de primer orden de dimensión uno	8
2.2.1. Sistema lineales	8
2.2.1.1. Caracterización de la solución	9
2.2.1.2. Existencia del equilibrio de estado estacionario	10
2.2.1.3. Unicidad del equilibrio de estado estacionario .	11
2.2.1.4. Estabilidad de equilibrios de estado estacionario .	11
2.2.2. Sistemas no lineales	19
2.2.2.1. Existencia, unicidad y multiplicidad de equilibrios de estado estacionario	20
2.2.2.2. Linealización y estabilidad local de equilibrios de estado estacionario	20
2.2.2.3. Estabilidad global	22
2.3. Solución de sistemas lineales de primer orden multidimensional	23
2.3.1. Caracterización de la solución	24
2.3.2. Existencia y unicidad de equilibrios de estado estacionario	25
2.4. Caracterización de sistemas lineales de primer orden multidimensional	36
2.4.1. Autovalores reales distintos	37

2.4.1.1.	Caracterización de la solución	37
2.4.1.2.	Diagramas de fase del caso de dimensión dos .	39
2.4.2.	Autovalores reales repetidos	43
2.4.2.1.	Caracterización de la solución	43
2.4.2.2.	Diagramas de fase del caso de dimensión dos .	46
2.4.3.	Pares distintos de autovalores complejos	49
2.4.3.1.	Caracterización de la solución .	49
2.4.3.2.	Diagramas de fase del caso de dimensión dos .	52
2.4.4.	Pares repetidos de autovalores complejos	54
2.4.5.	Caso general	55
2.5.	Sistemas no lineales de primer orden multidimensional	56
2.5.1.	Análisis local	58
2.5.1.1.	Linealización	58
3.	El modelo de crecimiento de Solow	60
3.1.	El entorno económico del modelo básico de Solow	60
3.2.	El modelo de Solow en tiempo discreto	65
3.2.1.	Equilibrio sin crecimiento poblacional y progreso tecnológico	66
3.3.	Dinámica de transición en el modelo de Solow en tiempo discreto	71
3.4.	El modelo de Solow en tiempo continuo	72
3.5.	Dinámica de transición en el modelo de Solow en tiempo continuo	74
3.6.	Modelo de Solow con progreso tecnológico	77
3.7.	El modelo de crecimiento de Solow con progreso tecnológico en tiempo continuo	79
4.	El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans	82
4.1.	Supuestos	82
4.2.	El comportamiento de hogares y firmas	83
4.3.	Problema de maximización del hogar	84
4.4.	La dinámica de una economía	85
4.4.1.	Dinámica de c .	87
4.4.2.	Dinámica de k .	88

4.4.3. El diagrama de fase .	89
4.4.4. El valor inicial de c	91
4.4.5. La senda silla . . .	92
5. Conclusiones	93
Bibliografía	95



Introducción

Aquellos problemas en los que alguna de las variables adopta solamente un conjunto discreto de valores dan lugar, en muchos casos, a modelos matemáticos en los que intervienen ecuaciones en diferencias. Por ejemplo en economía, tal variable discreta suele ser el tiempo. Los valores de importantes magnitudes económicas (renta, ahorro, consumo, etc.) son susceptibles de determinación en intervalos de tiempo uniformemente espaciados; los datos suelen acumularse por meses, trimestres, años. A cada cantidad corresponde una fecha representativa del periodo para el que la cantidad se ha calculado; así, podemos referirnos a la renta nacional del periodo inicial ($t = 0$), a la del periodo siguiente ($t = 1$), a la del periodo 2, etc. El economista, a través del análisis en periodos estudia el comportamiento de la renta nacional y demás variables económicas por medio de un conjunto discreto de valores. Un importante instrumento para este tipo de análisis es la ecuación en diferencias.

Como uno de los tantos usos de las ecuaciones en diferencias, consideremos el estudio de la renta nacional y a su variación, respecto al tiempo. La renta nacional, en un periodo dado, se compone de:

- 1) gastos de consumo (compras de bienes de consumo)
- 2) inversiones privadas inducidas (compras de equipo capital, es decir, maquinaria usada para incrementar la producción) y
- 3) gastos públicos.

Si denominamos R_t a la renta nacional, C_t a los gastos de consumo, I_t a la inversión privada y G_t a los gastos públicos, indicando con t el periodo al que dichas variables están referidas, que supondremos anual, para mayor facilidad, tendremos:

$$R_t = C_t + I_t + G_t, \quad (1.1)$$

además supondremos las siguientes relaciones entre las variables

- (a) El consumo de cualquier periodo es proporcional a la renta nacional del periodo anterior.
- (b) La inversión privada inducida en un periodo cualquiera es proporcional al incremento de consumo que ha tenido lugar en dicho periodo con relación al periodo precedente.
- (c) Los gastos públicos son cuantitativamente iguales en todos los periodos.

Vamos a analizar la renta nacional sujeta a tales condiciones. Para ello, establecemos los supuestos en forma matemática y trataremos de hallar una ecuación en la que intervenga sólo la renta nacional en función del tiempo.

La constante positiva de proporcionalidad establecida en (a) se denomina *propensión marginal al consumo*. Si la designamos por α , la relación (a) se podrá representar en la forma

$$C_t = \alpha R_{t-1},$$

donde se destaca el hecho que las variables están referidas a periodos de tiempo consecutivos.

La constante positiva de proporcionalidad que se establece en (b) se denomina *coeficiente de aceleración o relación*, y la designamos con β , con lo que la relación (b) puede escribirse de la siguiente manera

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}).$$

Observación 1.1. Si el consumo decrece, la diferencia $C_t - C_{t-1}$ será negativa y, por lo tanto, tendremos $I_t < 0$. Esto puede interpretarse por el hecho de no dedicar a la inversión cantidades que normalmente se hubieran dedicado a la formación de bienes capital, como sería, el caso de no reemplazar maquinaria depreciada.

Por último, el supuesto (c), donde el gasto público es contante podemos escribirlo como

$$G_t = 1,$$

eligiendo la unidad de forma que el gasto sea igual a uno.

Para obtener una ecuación en la que aparezca sólo la renta nacional, reemplazamos en la Ecuación (1.1) y tenemos

$$\begin{aligned} R_t &= \alpha R_{t-1} + \beta(C_t - C_{t-1}) + 1 \\ &= \alpha R_{t-1} + \beta(\alpha R_{t-1} - \alpha R_{t-2}) + 1, \end{aligned}$$

y simplificando obtenemos la ecuación en diferencias finita de la renta nacional

$$R_t = (1 + \beta)R_{t-1} - \alpha\beta R_{t-2} + 1. \quad (1.2)$$

Esta Ecuación, que relaciona la renta nacional de un periodo con los dos periodos anteriores, contiene dos parámetros: la propensión marginal al consumo α y el coeficiente de aceleración β .

Suponiendo que los valores iniciales de la renta son $R_1 = 2$, $R_2 = 3$ y que los valores de las constantes son: $\alpha = 0,5$, $\beta = 1$, la Ecuación (1.2) se convierte en

$$R_t = R_{t-1} - 0,5R_{t-2} + 1.$$

Haciendo $t = 3$ y considerando los valores dados, obtenemos

$$R_3 = R_2 - 0,5R_1 + 1 = 3 - 0,5(2) + 1 = 3.$$

Análogamente calculando R_4, R_5, \dots obtenemos los valores de la renta nacional, que se resumen en la primera columna del Cuadro 1.1.

t	R_t	R_t
	$\alpha = 0,5, \beta = 1$	$\alpha = 0,8, \beta = 2$
1	2,00	2,00
2	3,00	3,00
3	3,00	5,00
4	2,50	8,20
5	2,00	12,68
6	1,75	18,31
7	1,75	24,66
8	1,87	30,89
9	1,99	35,68
10	2,05	37,21
11	2,05	33,22
12	2,03	21,19

Cuadro 1.1: Valores de R_t según la Ecuación (1.2), siendo $R_1 = 2, R_2 = 3$.

Cuando consideramos el caso en que $\alpha = 0,8, \beta = 2$, tenemos que la Ecuación (1.2) toma la forma

$$R_t = 2,4R_{t-1} - 1,6R_{t-2} + 1$$

y, con los mismos valores iniciales de R_1 y R_2 , obtenemos los valores de la segunda columna del Cuadro 1.1.

Analizando ambos casos, observamos que la renta nacional presenta unas oscilaciones, siendo éstas mayores en la segunda columna. Pero estos 12 valores no basta para afirmar que el

comportamiento de la renta seguirá oscilando en el futuro. Para conocer el comportamiento de R_t debemos analizar la Ecuación (1.2), usando técnicas matemáticas que nos permitan determinarlo, estableciendo además cuáles son los valores que debe tomar α y β para que la renta ofrezca dicho comportamiento. Este análisis nos permitirá, demostrar que cuando $\alpha = 0,5$ y $\beta = 1$, siendo R_1 o R_2 distinto de 2, que R_t oscila y tiende hacia 2, mientras que para $\alpha = 0,8$ y $\beta = 2$, la renta presenta oscilaciones cada vez mayores a medida que aumenta el tiempo. También es posible hallar valores de α y β para los cuales la renta no oscila.

Con este ejemplo tenemos los siguientes hechos:

- 1) las ecuaciones en diferencias pueden surgir al describir matemáticamente cierto tipo de problemas de la economía y,
- 2) son necesarias las técnicas matemáticas a fin de resolver importantes cuestiones relativas a las variables analizadas.

En este trabajo vamos estudiar las ecuaciones en diferencias para después aplicar en el estudio de dos modelos en macroeconomía.



Ecuaciones en diferencias

En este capítulo analizaremos las ecuaciones en diferencias finitas. Analizaremos lo que se entiende por ecuaciones en diferencias, los sistemas de primer orden de dimensión uno tanto el caso lineal como el no lineal, luego extenderemos el estudio al caso de sistemas lineales de primer orden multidimensional y caracterizaremos su solución, por último veremos la linealización de sistemas no lineales de primer orden multidimensional.

2.1. Introducción

Las ecuaciones en diferencia usualmente describen fenómenos que varían con el tiempo. Por ejemplo si cierta población tiene generaciones discretas, el tamaño de la $(n + 1)$ -ésima generación $x(n + 1)$ es una función de la n -ésima generación $x(n)$. Esta relación se puede

expresar como la *ecuación en diferencia*

$$x(n + 1) = f(x(n)). \quad (2.1)$$

Otra forma de ver este problema es de la siguiente manera. Comencemos de un punto x_0 y generamos la sucesión

$$x_0, f(x_0), f(f(x_0)), f(f(f(x_0))), \dots$$

Si adoptamos la notación $f^2(x_0) = f(f(x_0))$, $f^3(x_0) = f(f(f(x_0)))$, etc. $f(x_0)$ es llamado el primer iterado de x_0 , $f^n(x_0)$ es llamado el n -ésimo iterado de x_0 . El conjunto de todos los iterados positivos $\{f^n(x_0) : n \geq 0\}$ donde $f^0(x_0) = x_0$, es llamado la *órbita positiva* de x_0 . Este ejemplo iterativo es un ejemplo de un *sistema dinámico discreto*. Poniendo $x(n) = f^n(x_0)$, tenemos

$$x(n + 1) = f^{n+1}(x_0) = f(f^n(x_0)) = f(x_n),$$

Y de esa manera recuperamos la Ecuación (2.1). Después de esto podemos decir que las ecuaciones en diferencias y los sistemas dinámicos discretos representan la misma situación.

Si la función f en la Ecuación (2.1) se reemplaza por una función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, obtenemos

$$x(n + 1) = g(n, x(n)). \quad (2.2)$$

Definición 2.1. La Ecuación (2.2) es llamada *ecuación en diferencia no autónoma*. Mientras que la Ecuación (2.1) es llamada *ecuación en diferencia autónoma*

A partir de ahora vamos a denotar a $x(n)$ por x_n .

Ejemplo 2.1.

Las siguientes ecuaciones en diferencias son lineales en el orden indicado

$$y_{t+2} + 5y_{t+1} - 7y_t = 2t \quad (\text{orden } 2)$$

$$y_{t+2} + 5y_{t+1} = 2t \quad (\text{orden } 1)$$

$$y_{t+2} - 7y_t = 2t \quad (\text{orden } 2)$$

$$4^t y_{t+3} - 3^t y_{t+2} + 2^t y_{t+1} - y_t = 1 \quad (\text{orden } 3)$$

Únicamente las tres primeras ecuaciones son ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes. \square

Ahora analizaremos las ecuaciones o sistemas de primer orden en dimensión uno, donde veremos los teoremas de existencia y unicidad y después extenderemos el análisis a ecuaciones o sistemas multidimensionales.

2.2. Sistemas de primer orden de dimensión uno

En esta sección vamos a analizar la evolución de una variable de estado en una dimensión. Vamos a caracterizar la trayectoria de la variable de estado, en relación a su equilibrio de estado estacionario, examinando la estabilidad local y global.

La primera parte de esta sección caracteriza los factores que determinan la existencia, unicidad y la estabilidad de un equilibrio de estado estacionario, en sistemas autónomos lineales de primer orden de dimensión uno. La segunda parte examina la trayectoria de sistemas no lineales basado en la caracterización de sistemas linealizados en la proximidad de un equilibrio de estado estacionario.

2.2.1. Sistema lineales

Consideremos una ecuación en diferencias lineal autónomo de primer orden de dimensión uno donde la evolución de la variable de estado y_t , sobre el tiempo está dado por

$$y_{t+1} = ay_t + b, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde el valor de la variable de estado $y_t \in \mathbb{R}$, los parámetros a, b son números reales constantes, además $y_0 \in \mathbb{R}$ es dado.

Este sistema describe la evolución de una variable de estado de dimensión uno, y_{t+1} , cuyos valores dependen linealmente de su valor en el periodo previo, y_t .

2.2.1.1. Caracterización de la solución

Una solución a la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$ es una *trayectoria* (o una *senda*) de la variable de estado, la cual denotaremos por $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$, que satisface la ley de movimiento en cualquier t .

Hay varios métodos para encontrar una solución, en particular el método intuitivo de iteraciones genera un patrón que se puede generalizar, esto es, dado $y_0 = y(0)$, la ecuación $y_{t+1} = ay_t + b$ implica que $y_1 = y(1)$, es

$$y_1 = ay_0 + b.$$

Dado y_1 , el valor $y_2 = y(2)$, se determina como

$$y_2 = ay_1 + b = a(y_0 + b) + b = a^2y_0 + ab + b.$$

Análogamente tenemos

$$\begin{aligned} y_3 &= ay_2 + b = a(a^2y_0 + ab + b) + b = a^3y_0 + a^2b + ab + b \\ &\vdots \\ y_t &= a^t y_0 + a^{t-1}b + a^{t-2}b + \dots + ab + b. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para $t = 1, 2, \dots$, tenemos

$$y_t = a^t y_0 + b \sum_{i=0}^{t-1} a^i.$$

Como

$$\sum_{i=0}^{t-1} a^i = \begin{cases} \frac{1-a^t}{1-a}, & \text{si } a \neq 1, \\ t, & \text{si } a = 1, \end{cases}$$

tenemos

$$y_t = \begin{cases} a^t y_0 + b \frac{1-a^t}{1-a}, & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + bt, & \text{si } a = 1; \end{cases}$$

es decir,

$$y_t = \begin{cases} \left(y_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^t + \frac{b}{1-a}, & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + bt, & \text{si } a = 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Así, cuando tenemos una condición inicial y_0 , la trayectoria de la variable de estado se determina de manera única.

2.2.1.2. Existencia del equilibrio de estado estacionario

El equilibrio de estado estacionario nos da un punto de referencia para un análisis cualitativo del comportamiento de un sistema dinámico. Un *equilibrio de estado estacionario* es un valor de la variable de estado y_t que es invariante bajo la ley de movimiento, dictado por el sistema dinámico.

Definición 2.2. Un *equilibrio de estado estacionario* $\bar{y} \in \mathbb{R}$, de la ecuación en diferencia $y_{t+1} = ay_t + b$, es un valor que cumple

$$y = ay + b.$$

Si la variable de estado está en un equilibrio de estado estacionario, permanecerá así en la ausencia de cualquier perturbación del sistema dinámico debido a cambios en los parámetros a, b o perturbaciones directas en los valores de las variables de estado, es decir, si $y_t = \bar{y}$, entonces $y_s = \bar{y}$, para todo $s > t$.

Tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.1. Un equilibrio de estado estacionario de la ecuación en diferencia

$$y_{t+1} = ay_t + b$$

existe si

$$\{a \neq 1\} \text{ o } \{a = 1 \text{ y } b = 0\}.$$

Demostración: De la Definición 2.2, tenemos que cuando $a \neq 1$, existe un único equilibrio de estado estacionario

$$\bar{y} = \frac{b}{1 - a}$$

para la ecuación en diferencia $y_{t+1} = ay_t + b$.

Si $a = 1$ y $b = 0$, entonces $y_{t+1} = y_t$ para todo t , en particular $y_t = y_{t-1} = y_{t-2} = \dots = y_0$ y el sistema está en un equilibrio de estado estacionario donde $\bar{y} = y_0$.

Si $a = 1$ y $b \neq 0$, no existe un equilibrio de estado estacionario y la variable de estado crece indefinidamente (si $b > 0$) o decrece indefinidamente (si $b < 0$).

Luego tenemos que

$$y = \begin{cases} \frac{b}{1-a}, & \text{si } a \neq 1, \\ y_0, & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0. \end{cases} \quad \square$$

Observación 2.1. La solución se puede expresar en términos del valor inicial, y_0 y de su equilibrio de estado de equilibrio \bar{y} , es decir,

$$y_t = \begin{cases} (y_0 - \bar{y})a^t + \bar{y}, & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + bt, & \text{si } a = 1. \end{cases}$$

2.2.1.3. Unicidad del equilibrio de estado estacionario

Proposición 2.2. Un equilibrio de estado estacionario de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$ es único si y sólo si $a \neq 1$.

2.2.1.4. Estabilidad de equilibrios de estado estacionario

A continuación vamos a ver que cuando un equilibrio de estado estacionario es atractivo o repulsivo para determinados valores iniciales, pudiendo facilitar el estudio de propiedades locales o incluso globales ayudándonos en el análisis de perturbaciones que ocurren en una vecindad de un equilibrio de estado estacionario.

Definición 2.3. Un equilibrio de estado estacionario y de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$ es:

- *globalmente estable*, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R},$$

- *localmente estable*, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = y, \quad \forall y_0 \in \mathbb{R} \text{ tal que } |y_0 - \bar{y}| < \varepsilon \text{ para algún } \varepsilon > 0.$$

Observación 2.2. La estabilidad global de un equilibrio de estado estacionario necesita la unicidad global del equilibrio, pues si hay más de uno, ninguno puede ser globalmente estable.

Proposición 2.3. Un equilibrio de estado estacionario de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$ es globalmente estable sólo si el equilibrio de estado estacionario es único.

La estabilidad local de un equilibrio de estado estacionario necesita la unicidad local del equilibrio de estado estacionario. Si el sistema está caracterizado por un continuo de equilibrios, ninguno de estos es localmente estable.

La estabilidad de un equilibrio de estado estacionario se puede obtener examinando las propiedades del sistema cuando $t \rightarrow \infty$. Esto es

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \begin{cases} (y_0 - \bar{y}) \lim_{t \rightarrow \infty} a^t + \bar{y}, & \text{si } a \neq 1, \\ y_0 + b \lim_{t \rightarrow \infty} t, & \text{si } a = 1; \end{cases}$$

de donde obtenemos lo siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |y_t| = \begin{cases} |\bar{y}|, & \text{si } (|a| < 1) \text{ o } (|a| > 1 \text{ y } y_0 = \bar{y}), \\ |y_0|, & \text{si } a = 1 \text{ y } b = 0, \\ \left\{ \begin{array}{l} |y_0| \text{ cuando } t = 0, 2, 4, \dots \\ |b - y_0| \text{ cuando } t = 1, 3, 5, \dots \end{array} \right\}, & \text{si } a = -1, \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observamos que $|y_t|$ está determinado por los valores de $|a|$ y $|b|$. En particular, se puede clasificar cualitativamente al sistema dinámico de cinco maneras:

1) **Equilibrio de estado estacionario globalmente estable único** ($|a| < 1$). Si el coeficiente $|a| < 1$, entonces el sistema es globalmente estable convergiendo al equilibrio de estado estacionario $\bar{y} = b/(1 - a)$, sin considerar la condición inicial y_0 .

Si $0 < a < 1$, tenemos el diagrama de fase mostrado en la Figura 2.1 donde la evolución del estado variable está caracterizado por la convergencia monótona a \bar{y} sin considerar y_0 .

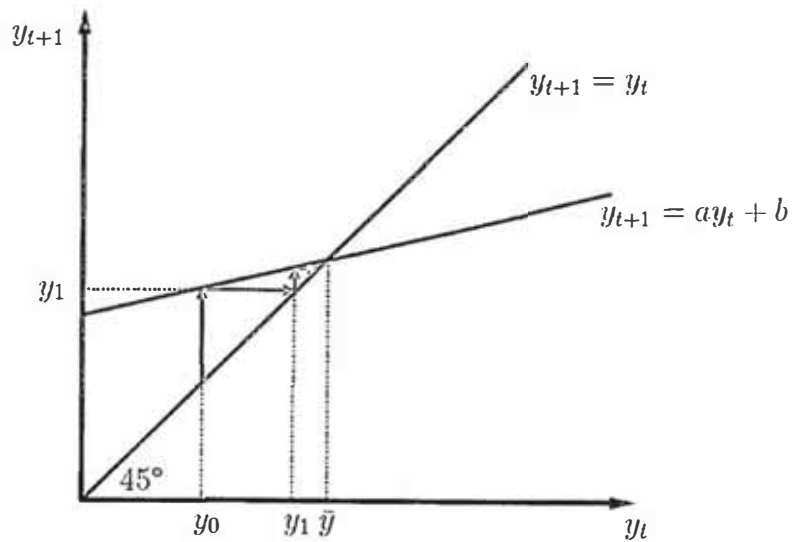


Figura 2.1: Equilibrio de estado estacionario globalmente estable único ($0 < a < 1$).

Si $-1 < a < 0$, la convergencia a \bar{y} es oscilatoria. El diagrama de fase se muestra en la Figura 2.2.

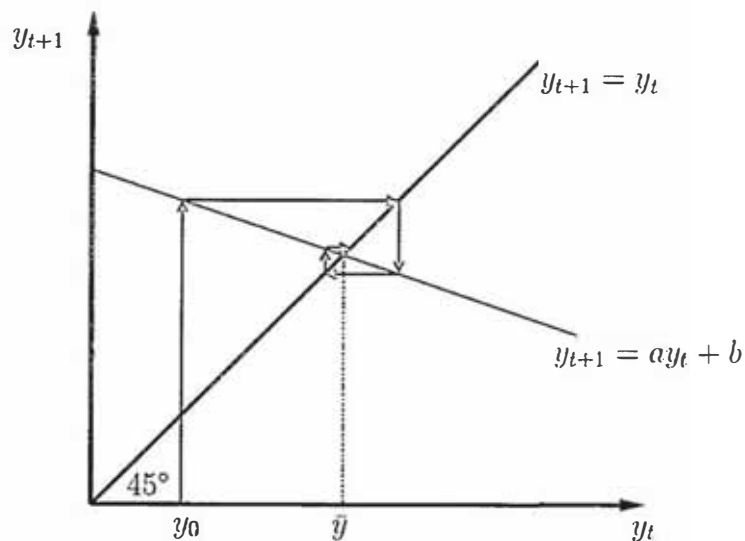


Figura 2.2: Equilibrio de estado estacionario estable globalmente único ($-1 < a < 0$).

2) Continuo de Equilibrios de estados estacionarios inestables ($a = 1, b = 0$). Si $a = 1$ y $b = 0$, tenemos el diagrama de fase que se muestra en la Figura 2.3.

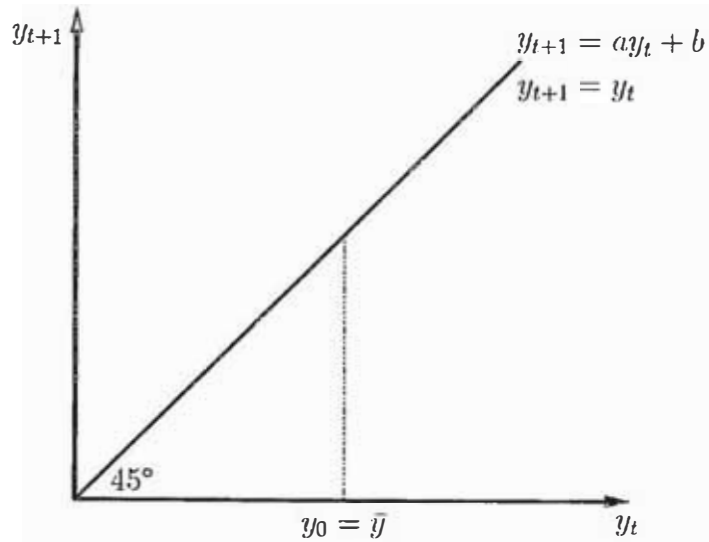


Figura 2.3: Continuo de equilibrios de estado estacionario inestables.

3) No existencia de un equilibrio de estado estacionario ($a = 1, b \neq 0$). Si $a = 1$ y $b \neq 0$, el sistema no tiene equilibrio de estado estacionario y las variables de estado divergen a $+\infty$ o a $-\infty$. Este caso se muestra en la Figura 2.4.

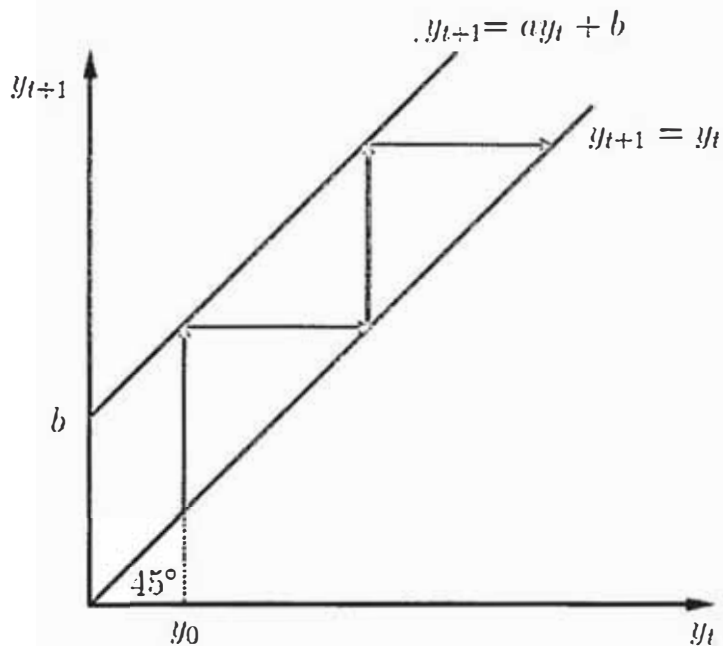


Figura 2.4: No existencia de equilibrios de estado estacionario.

4) **Ciclo de dos periodos ($a = -1$).** Si $a = -1$, tenemos el diagrama de fase dado por la Figura 2.5, donde tenemos un continuo de ciclos de dos periodos inestables y un único equilibrio de estado estacionario $\bar{y} = b/2$, que es inestable.

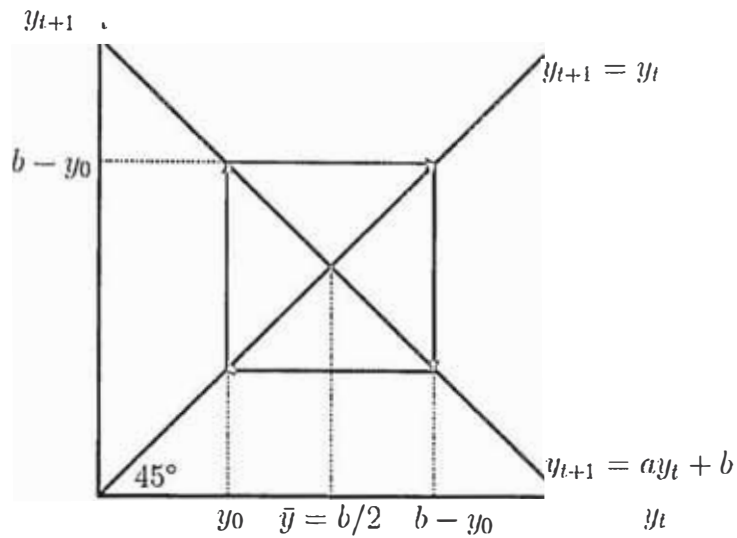


Figura 2.5: Ciclo de dos periodos inestables ($a = -1$).

5) **Equilibrio de estado estacionario único inestable ($|a| > 1$).** Si $|a| > 1$ el sistema cuyos estados de fase están dados por las Figuras 2.6 y 2.7 es inestable. Si $a > 1$, la variable de estado y_t diverge de manera monótona. Si $a < -1$, la variable de estado y_t diverge en oscilaciones.

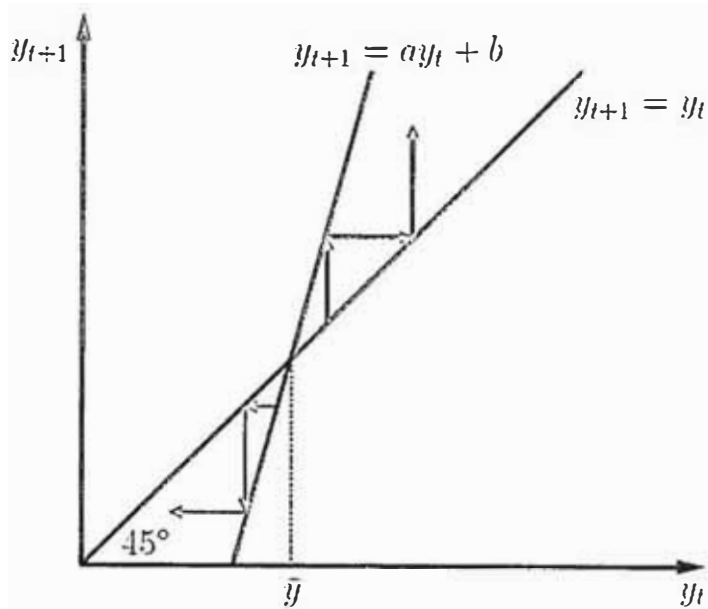


Figura 2.6: Equilibrio de estado estacionario inestable ($a > 1$).

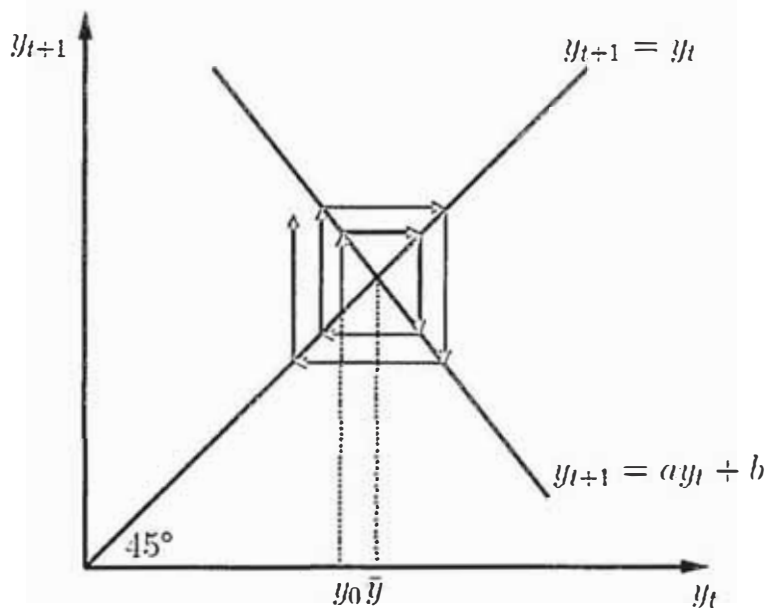


Figura 2.7: Equilibrio de estado estacionario inestable ($a < -1$).

Los cinco casos anteriores se pueden resumir en la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Un equilibrio de estado estacionario de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = ay_t + b$ es globalmente estable si y sólo si $|a| < 1$.

Corolario. Si $y_0 \in \mathbb{R}$, entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \bar{y}, \quad |a| < 1,$$

donde

- a) la convergencia es monótona si y sólo si $a \in [0, 1)$,
- b) la convergencia es oscilatoria si y sólo si $a \in (-1, 0)$.

Ejemplo 2.2.

Veamos el estudio del crecimiento de la renta nacional en una economía en desarrollo utilizando un modelo clásico.

La renta nacional se compone de consumo e inversión. Vamos a considerar las variaciones de estas cantidades a medida que transcurre el tiempo y la renta nacional, consumo e inversión denotada respectivamente por R, C e I .

Tenemos que

$$R_t = C_t + I_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

Los gastos de consumo se relacionan con la renta nacional a través de la función consumo, que supondremos lineal, es decir toma la forma

$$C_t = c + mR_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde c y m son constantes. La constante m se denomina propensión marginal al consumo; estas constantes cumplen:

$$c \geq 0, \quad 0 < m < 1.$$

La restricción que $m \in (0, 1)$ implica que cualquier incremento en la renta se convierte en parte en incremento en el consumo.

Supongamos que la renta no se consume totalmente y que parte de la renta se destina a la inversión. Cuando esta parte se haya invertido efectivamente habrá dado lugar a un incremento de la capacidad del sistema (por lo tanto de la renta nacional) por lo que, si se quiere

mantener el pleno empleo, los gastos de inversión deberán aumentar. Y este aumento en la inversión originará un aumento en la capacidad y así se incrementará la inversión.

Intentaremos determinar que tipo de crecimiento de la inversión es necesario para mantener el pleno empleo y describiremos el crecimiento de la renta nacional y de la inversión a través del tiempo.

Veamos primero en qué forma el nivel de inversión influye sobre la renta nacional. Para ello supondremos que existe una constante r , que se denomina factor de crecimiento y se cumple

$$\Delta R_t = R_{t+1} - R_t = rI_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

es decir, el aumento de una unidad de inversión es igual a r , debido a esto vamos a suponer que $r > 0$.

Luego tenemos

$$\begin{aligned} R_{t+1} - R_t &= rI_t \\ &= r(R_t - C_t) \\ &= rR_t - r(c + mR_t). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$R_{t+1} = [1 + r(1 - m)]R_t - rc, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

que es una ecuación en diferencias de primer orden con coeficientes constantes que satisface la función de renta nacional.

Para hallar la ecuación correspondiente a los gastos de inversión, tenemos

$$\begin{aligned} I_{t+1} - I_t &= (R_{t+1} - C_{t+1}) - (R_t - C_t) \\ &= (R_{t+1} - R_t) - (C_{t+1} - C_t) \\ &= rI_t - m(R_{t+1} - R_t) \\ &= rI_t - mrI_t. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$I_{t+1} = [1 + r(1 - m)]I_t, \quad t = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Como $r(1 - m) > 0$, tenemos que I es una función creciente. La solución a la Ecuación (2.5) es

$$I_t = [1 + r(1 - m)]^t I_0, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde I_0 es dado y la sucesión $\{I_t\}$ diverge a $+\infty$.

Para resolver la Ecuación (2.4) hacemos $a = 1 + r(1 - m)$ y $b = -rc$, por lo que

$$R^* = \frac{b}{1 - a} = \frac{c}{1 - m}$$

La solución, para R_0 dado, es

$$R_t = [1 + r(1 - m)]^t (R_0 - R^*) + R^*, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

por lo que si $R_0 > R^*$, la sucesión $\{R_t\}$ diverge a $+\infty$. □

2.2.2. Sistemas no lineales

Analicemos la evolución de una variable de estado en sistema dinámico discreto no lineal de primer orden de dimensión uno basándonos en una aproximación lineal en la vecindad de un equilibrio de estado estacionario. Para eso consideremos la ecuación en diferencias no lineal

$$y_{t+1} = f(y_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable y tenemos de dato el valor inicial de la variable de estado, y_0 .

Una solución a la ecuación en diferencia $y_{t+1} = f(y_t)$, es una trayectoria de la variable de estado $\{y_t\}_{t=0}^{\infty}$ que satisface la ecuación para todo t . Usando el método de iteraciones la trayectoria se puede escribir como

$$\begin{aligned} y_1 &= f(y_0) \\ y_2 &= f(y_1) = f(f(y_0)) = f^2(y_0) \end{aligned}$$

$$y_t = f^t(y_0).$$

2.2.2.1. Existencia, unicidad y multiplicidad de equilibrios de estado estacionario

Definición 2.4. Un *equilibrio de estado estacionario* $\bar{y} \in \mathbb{R}$ de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = f(y_t)$ es tal que

$$\bar{y} = f(\bar{y}).$$

Así como las ecuaciones lineales, las ecuaciones no lineales se pueden caracterizar por la presencia de un equilibrio de estado estacionario, convergencia al equilibrio de estado estacionario, etc.

2.2.2.2. Linealización y estabilidad local de equilibrios de estado estacionario

La evolución de un sistema no lineal en la proximidad de equilibrio de estado estacionario se puede analizar basándonos en la aproximación lineal.

Consideremos la expansión de Taylor de $y_{t+1} = f(y_t)$ alrededor del equilibrio de estado estacionario \bar{y} , esto es,

$$y_{t+1} = f(y_t) = f(\bar{y}) + f'(\bar{y})(y_t - \bar{y}) + R_n,$$

donde R_n es el residuo.

Luego tenemos que el sistema linealizado alrededor del equilibrio de estado estacionario es

$$\begin{aligned} y_{t+1} &= f(\bar{y}) + f'(\bar{y})(y_t - \bar{y}) \\ &= f'(\bar{y})y_t + f(\bar{y}) - f'(\bar{y})\bar{y} \\ &= ay_t + b, \end{aligned}$$

donde $a = f'(\bar{y})$ y $b = f(\bar{y}) - f'(\bar{y})\bar{y}$ son constantes dadas.

Aplicando los resultados para sistemas lineales tenemos que el sistema linealizado es estable si $|a| = |f'(y)| < 1$, pero esto es sólo un análisis local de la ecuación en diferencias no lineal. Con estas observaciones tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.5. El equilibrio de estado estacionario y del sistema dinámico $y_{t+1} = f(y_t)$ es localmente estable si y sólo si

$$\left| \frac{dy_{t+1}}{dy_t} \Big|_{\bar{y}} \right| < 1.$$

Ejemplo 2.3.

Consideremos un sistema con multiples estados de equilibrios de estado estacionario $\{y_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3\}$ tales que y_1, y_2 son localmente estables, mientras que \bar{y}_2 es inestable, esto es,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \begin{cases} \bar{y}_1, & \text{si } y_0 \in (0, \bar{y}_2), \\ \bar{y}_2, & \text{si } y_0 = \bar{y}_2, \\ \bar{y}_3, & \text{si } y_0 \in (\bar{y}_2, \infty). \end{cases}$$

Consideremos un diagrama de fase asociado a este sistema como el mostrado en la Figura 2.8.

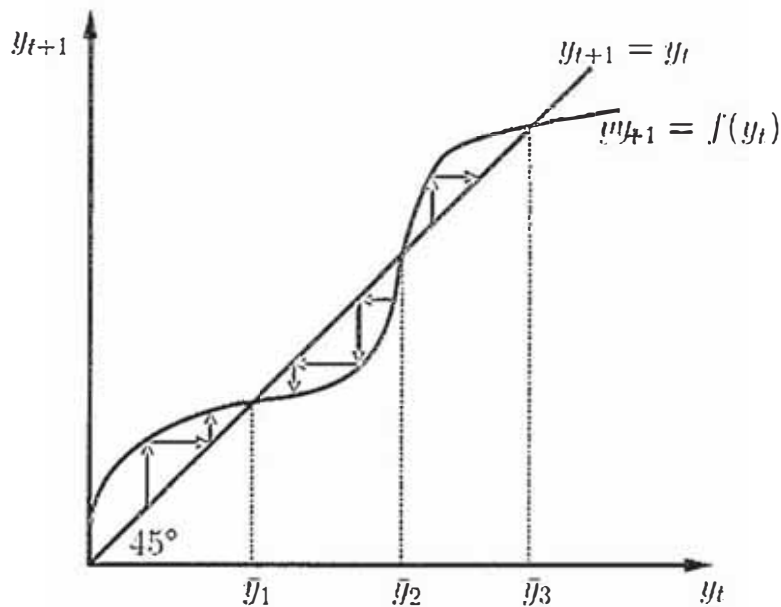


Figura 2.8: Sistema no lineal de primer orden de dimensión uno con varios equilibrios de estado estacionario.

Como $f'(y_1) < 1$ y $f'(y_3) < 1$, tenemos que y_1, y_3 son equilibrios de estado estacionario localmente estables, mientras que $f'(y_2) > 1$, implica que y_2 es un equilibrio de estado estacionario inestable. \square

Observación 2.3. En caso de tener $f'(y) = 1$ no se puede analizar el sistema no lineal en la proximidad de \bar{y} .

2.2.2.3. Estabilidad global

El Teorema de la Contracción nos da condiciones suficientes para la existencia de un único equilibrio de estado estacionario y su estabilidad global. Para eso veamos antes la siguiente definición.

Definición 2.5. La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una *contracción* si existe $\beta \in (0, 1)$ tal que

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq \beta|x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2.1 (Teorema de la Contracción). Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una contracción, entonces

- f tiene un único equilibrio de estado estacionario, es decir, existe un único $\bar{x} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

- Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ y para $\beta \in (0, 1)$, tenemos

$$|f^n(x_0) - \bar{x}| \leq \beta^n|x_0 - \bar{x}|, \forall n = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $f^n(x_0)$ es la n -ésima iteración de f sobre x_0 .

Demostración: Ver [6], página 127 o [7], página 50. ■

Corolario. Un equilibrio de estado estacionario de la ecuación en diferencias $y_{t+1} = f(y_t)$ existe, es único y globalmente estable si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una contracción, es decir,

$$\frac{|f(y_{t+1}) - f(y_t)|}{|y_{t+1} - y_t|} < 1, \forall t = 0, 1, 2, \dots,$$

o en caso que f sea diferenciable, se cumpla que

$$|f'(y_t)| < 1, \forall y_t \in \mathbb{R}.$$

Demostración: Basta observar que $|f'(y_t)| = |a| < 1$ y aplicando la Proposición 2.4 obtenemos la afirmación del corolario. ■

2.3. Solución de sistemas lineales de primer orden multidimensional

Aunque los sistemas dinámicos lineales no necesariamente gobiernan la evolución de la mayoría de los fenómenos dinámicos en el universo, sirven como una importante referencia para el análisis de las propiedades cualitativas de sistemas no lineales, proporcionándonos la caracterización de la aproximación lineal de sistemas no lineales en una vecindad de equilibrios de estado estacionarios.

La caracterización de la trayectoria temporal de un sistema multidimensional de variables de estado interdependientes está basado en la construcción de una transformación que convierte el sistema en un nuevo sistema dinámico de

- variables de estado independientes cuya evolución se puede derivar basándonos en el análisis del caso unidimensional, o
- variables de estado dependientes parcialmente cuya evolución están determinadas basadas en propiedades de la matriz de Jordan.

Consideremos un sistema de ecuaciones en diferencia lineal autónoma de primer orden donde los valores iniciales del vector de variables de estado, $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$, es dado.

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \\ \vdots \\ x_{nt+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

La evolución del vector de variables de estado x_t está gobernado, por el sistema lineal

$$x_{t+1} = Ax_t + B, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

donde el vector de variables de estado x_t es un vector real de dimensión n , $x_t \in \mathbb{R}$, A es una matriz de dimensión $n \times n$ de coeficientes constantes $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para $i, j = 1, 2, \dots, n$ y B es un vector independiente del tiempo de dimensión n con elementos $b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

El sistema está definido como un sistema lineal autónomo de primer orden de dimensión n de ecuaciones en diferencia que describe la evolución de un vector de variables de estado x_t cuyos valores dependen de forma lineal y autónoma de los valores de vectores en el periodo previo.

2.3.1. Caracterización de la solución

Una solución a un sistema lineal multidimensional, $x_{t+1} = Ax_t + B$, es una trayectoria $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$ del vector de variables de estado x_t que satisface esta relación lineal en cualquier t .

Análogamente al caso de dimensión uno, el método de iteraciones generan un patrón que constituye una regla para encontrar una solución general. Dado el valor del vector de variables de estado en $x_0 = x(0)$, el sistema dinámico $x_{t+1} = Ax_t + B$ implica que el valor del vector de variables de estado en subsecuentes periodos de tiempo es:

$$\begin{aligned} x_1 &= Ax_0 + B \\ x_2 &= Ax_1 + B = A^2x_0 + AB + B \\ x_3 &= Ax_2 + B = A^3x_0 + A^2B + AB + B \\ &\vdots \\ x_t &= A^tx_0 + A^{t-1}B + A^{t-2}B + \dots + AB + B. \end{aligned}$$

Luego el valor del vector de variables de estado en el periodo t es

$$x_t = A^tx_0 + \sum_{i=0}^{t-1} A^iB. \quad (2.6)$$

A comparación del caso de dimensión uno, en este caso tenemos una serie geométrica de matrices, que para su análisis necesitamos algunos resultados

Lema 2.1. La suma de una serie geométrica de matrices, $\sum_{i=0}^{t-1} A^i$, cuyo factor es la matriz A , es

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i = [I - A^t][I - A]^{-1}, \text{ si } |I - A| \neq 0.$$

Demostración :

$$\sum_{i=0}^{t-1} A^i[I - A] = I + A + A^2 + \dots + A^{t-1} - [A + A^2 + A^3 + \dots + A^t] = I - A^t$$

multiplicando ambos lados por $[I - A]^{-1}$ (que existe pues $|I - A|^{-1} \neq 0$) obtenemos el resultado del Lema. □

Usando el resultado del Lema 2.1 tenemos la solución a la Ecuación (2.6)

$$x_t = A^t[x_0 - [I - A]^{-1}B] + [I - A]^{-1}B \text{ si } |I - A| \neq 0, \quad (2.7)$$

En analogía al caso de dimensión uno, los aspectos cualitativos del sistema dinámico están determinados por los parámetros de la matriz A .

2.3.2. Existencia y unicidad de equilibrios de estado estacionario

Las propiedades cualitativas del sistema dinámico se puede determinar examinando la evolución del vector de variables de estado en relación a los equilibrios de estados (puntos fijos) del sistema.

Definición 2.6. Un *equilibrio de estado estacionario* de un sistema lineal de ecuaciones en diferencia $x_{t+1} = Ax_t + B$ es un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\bar{x} = A\bar{x} + B.$$

Análogamente al análisis del sistema unidimensional, existe un equilibrio de estado estacionario

$$\bar{x} = (I - A)^{-1}B, \text{ si } |I - A| \neq 0. \quad (2.8)$$

Proposición 2.6. Un equilibrio de estado estacionario del sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$ es único si y sólo si

$$|I - A| \neq 0.$$

Reemplazando la relación (2.8) en la Ecuación (2.7), la solución al sistema es

$$x_t = A^t(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}. \quad (2.9)$$

En general A no es una matriz diagonal, por lo que necesitamos un método de solución, este método transforma un sistema de variables de estado interdependientes x_t en un nuevo

sistema de variables de estado y_t mediante una transformación independiente del tiempo Q , es decir, se construye una matriz no singular $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$, basado en los autovectores de la matriz A , tal que

$$x_t = Qy_t + \bar{x}, \quad (2.10)$$

y la evolución del vector de variables de estado y_t , es

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

donde $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es diagonal (o diagonal por bloques), Luego

$$y_t = D^t y_0.$$

Reemplazando en la Ecuación (2.10), tenemos,

$$y_0 = Q^{-1}(x_0 - \bar{x})$$

y

$$x_t = QD^t y_0 + \bar{x} = QD^t Q^{-1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x},$$

donde Q es una matriz invariante en el tiempo y D^t es la matriz elevado a la t -ésima potencia. Analizando tenemos que x_t se aproxima a su nivel de estado estacionario \bar{x} , si la matriz $QD^t Q^{-1}$ se anule (pero como Q y Q^{-1} son independientes del tiempo, es equivalente a que D^t se anule).

Si la matriz D es diagonal, entonces D^t es diagonal, y x_t se aproxima a su nivel de estado estacionario x , si todos los elementos de la diagonal son menores que 1 en valor absoluto.

A continuación veamos dos ejemplos donde se hace uso del caso unidimensional en el primer ejemplo y en el segundo ejemplo se construye la matriz Q para poder resolverlo.

Ejemplo 2.4.

Consideremos la ecuación $x_{t+1} = Ax_t$, tal que

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix},$$

con condiciones iniciales $x_0 = [x_{10}, x_{20}]$.

Como A es una matriz diagonal, la evolución de cada variable de estado es independiente de la otra, esto es, x_{1t+1} sólo depende de x_{1t} , y x_{2t+1} sólo depende de x_{2t} . Usando la relación (2.9) tenemos la solución $x_t = A^t x_0$, es decir

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t & 0 \\ 0 & 0,5^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix},$$

o de manera más directa,

$$\begin{aligned} x_{1t} &= 2^t x_{10} \\ x_{2t} &= 0,5^t x_{20}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el equilibrio de estado estacionario es

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0).$$

Para la primera variable de estado tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_{1t} = \begin{cases} -\infty, & \text{si } x_{10} < 0, \\ \bar{x}_1 = 0 & \text{si } x_{10} = 0, \\ \infty & \text{si } x_{10} > 0. \end{cases}$$

Para la segunda variable de estado tenemos

- Si $x_{20} > 0$, el valor de x_{2t} se aproxima a cero de manera monótona del cuadrante positivo de x_{2t} ,
- Si $x_{20} < 0$, el valor de x_{2t} se aproxima a cero de manera monótona del cuadrante negativo de x_{2t} .

Luego tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{si } x_{10} < 0, \\ \bar{x} = (0, 0) & \text{si } x_{10} = 0, \\ (\infty, 0) & \text{si } x_{10} > 0. \end{cases}$$

En la Figura 2.9 vemos que el equilibrio de estado estacionario $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$ es un punto silla. □

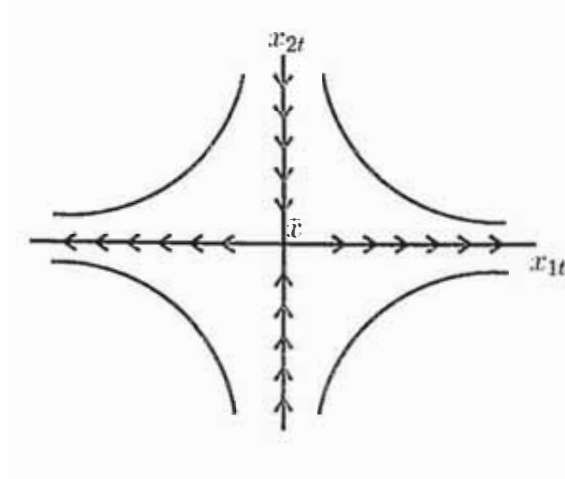


Figura 2.9: Equilibrio de estado estacionario para el Ejemplo 2.4.

Ejemplo 2.5.

Consideremos la siguiente ecuación en diferencias

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = Ax,$$

con condición inicial $x_0 = [x_{10}, x_{20}]$.

El equilibrio de estado estacionario es $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = (0, 0)$. Vamos a resolver convirtiendo este sistema en un nuevo sistema de coordenadas tal que x_{1t} y x_{2t} son interdependientes basándonos en los autovectores de la matriz A .

Para obtener los autovalores de la matriz A , resolvemos la ecuación

$$|A - \lambda I| = 0,$$

es decir

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

luego el polinomio característico es

$$c(\lambda) = \lambda^2 - \frac{5}{2}\lambda + 1 = 0,$$

de donde obtenemos los autovalores $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1}{2}$.

Si f_1, f_2 son los autovectores de la matriz A asociados a los autovalores λ_1, λ_2 respectivamente, entonces los valores de estos autovectores se obtienen resolviendo:

$$\begin{aligned} [A - \lambda I]f_1 &= 0 & \text{cuando } f_1 &\neq 0, \\ [A - \lambda I]f_2 &= 0 & \text{cuando } f_2 &\neq 0, \end{aligned}$$

donde $f_i = [f_{i1}, f_{i2}]'$ para $i = 1, 2$. Luego el autovector asociado al autovalor $\lambda_1 = 2$ está determinado por la solución al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} -1 & 0,5 \\ 1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

mientras que el autovector asociado al autovalor $\lambda_2 = 0,5$ está determinado por la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{22} \\ f_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Así el primer autovector está determinado por la ecuación

$$f_{12} = 2f_{11},$$

mientras el segundo autovector está dado por la ecuación

$$f_{22} = -f_{21}.$$

Es decir, los autovectores f_1 y f_2 son

$$f_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Como f_1 y f_2 son linealmente independientes, entonces generan \mathbb{R}^2 . Es decir si $x_t \in \mathbb{R}^2$, existe $y_t = (y_{1t}, y_{2t}) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$x_t = f_1 y_{1t} + f_2 y_{2t}$$

o

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix}.$$

Es decir existe una matriz Q tal que

$$x_t = Qy_t.$$

Como f_1 y f_2 son linealmente independientes, la matriz Q es no singular, por lo tanto existe Q^{-1} , así tenemos

$$y_t = Q^{-1}x_t,$$

es decir,

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \frac{1}{3}(x_{1t} + x_{2t}), \\ y_{2t} &= \frac{1}{3}(2x_{1t} - x_{2t}). \end{aligned}$$

Así tenemos

$$\begin{aligned} y_{1t} = 0 &\Leftrightarrow x_{2t} = -x_{1t}, \\ y_{2t} = 0 &\Leftrightarrow x_{2t} = 2x_{1t}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

En la Figura (2.10) mostramos los ejes del nuevo sistema de coordenadas (y_{1t}, y_{2t}) generadas respectivamente por los autovectores f_1 y f_2 Tenemos

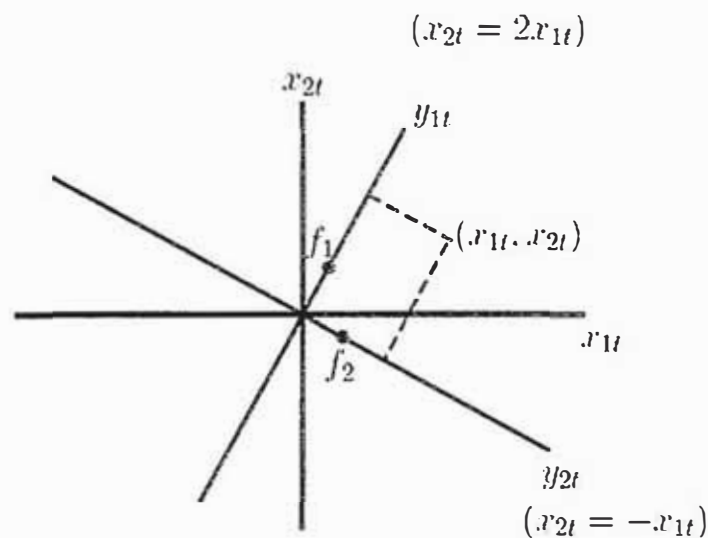


Figura 2.10: Sistema de coordenadas (y_{1t}, y_{2t}) .

$$y_{t+1} = Q^{-1}x_{t+1}.$$

Luego

$$y_{t+1} = Q^{-1}Ax_t;$$

o en términos del nuevo sistema de coordenadas

$$y_{t+1} = Q^{-1}AQy_t.$$

Si definimos $D = Q^{-1}AQ$, entonces

$$D = Q^{-1}AQ = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 1 & 1,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}.$$

La evolución del vector de las nuevas variables de estado y_t , está dado por

$$y_{t+1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix} y_t,$$

que mediante iteraciones nos da

$$y_t = D^t y_0,$$

es decir,

$$\begin{aligned} y_{1t} &= 2^t y_{10} \\ y_{2t} &= 0,5^t y_{20} \end{aligned} \tag{2.12}$$

con $y_0 = Q^{-1}x_0$. Y el equilibrio de estado estacionario del sistema $y_{t+1} = Dy_t$ es un vector $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{y} = D\bar{y}$. Por lo tanto en el nuevo sistema tenemos

$$\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2)' = (0, 0)'$$

Como

$$|I - D| = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{vmatrix} = -0,5 \neq 0,$$

entonces el equilibrio de estado estacionario $\bar{y} = (0, 0)$ es único. Analizando como en el Ejemplo 2.4 tenemos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = \begin{cases} (-\infty, 0), & \text{si } y_{10} < 0, \\ (0, 0), & \text{si } y_{10} = 0, \\ (\infty, 0) & \text{si } y_{10} > 0, \end{cases}$$

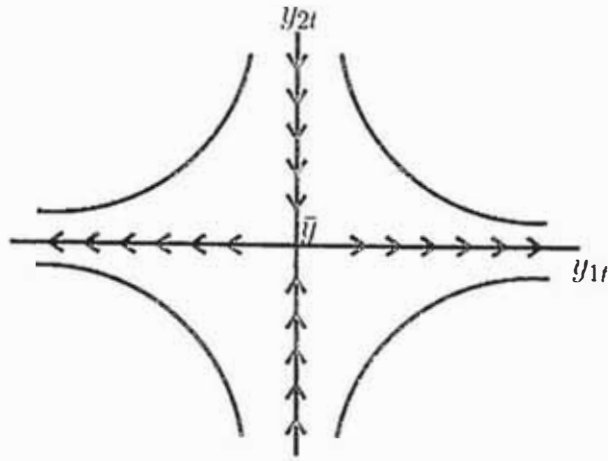


Figura 2.11: La evolución de y_t .

lo cual se puede observar en la Figura 2.11.

Como $x_t = Qy_t$, entonces

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix},$$

y usando las Ecuaciones (2.12), tenemos

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^t y_{10} \\ 0,5^t y_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^t y_{10} + 0,5^t y_{20} \\ 2^{t+1} y_{10} - 0,5^t y_{20} \end{bmatrix}$$

con $y_0 = Q^{-1}x_0$. Luego, usando la Ecuación (2.11) nos queda

$$\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{bmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix};$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} y_{10} &= \frac{1}{3}(x_{10} + x_{20}) \\ y_{20} &= \frac{1}{3}(2x_{10} - x_{20}). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2^t}{3}(x_{10} + x_{20}) + \frac{0,5^t}{3}(2x_{10} - x_{20}) \\ \frac{2^{t+1}}{3}(x_{10} + x_{20}) - \frac{0,5^t}{3}(2x_{10} - x_{20}) \end{bmatrix}.$$

El diagrama de fase del sistema original se obtiene colocando el diagrama de fase que describe la evolución de y_t , relativo al nuevo sistema de coordenadas (y_1, y_2) , en el plano (x_1, x_2) como se muestra en la Figura 2.12 □

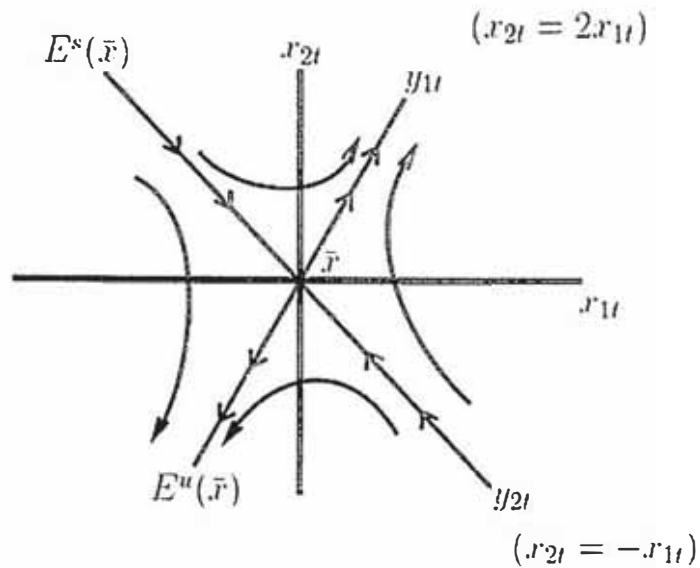


Figura 2.12: La evolución de y_t

Lema 2.2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Entonces existe una matriz $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que

$$A = VDV^{-1},$$

y la matriz D es la forma canónica de Jordan que corresponde a la matriz A , es decir,

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_h & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & D_m \end{bmatrix}$$

- para cada autovalor λ_h real distinto de la matriz A ,

$$D_h = \lambda_h$$

- para autovalores reales repetidos λ de la matriz A ,

$$D_h = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

- Para un par distinto de autovalores complejos $\{\mu_h, \bar{\mu}_h\}$, de la matriz A , donde $\mu_h = \alpha_h + \beta_h i$ y $\bar{\mu}_h = \alpha_h - \beta_h i$,

$$D_h = \begin{bmatrix} \alpha_h & -\beta_h \\ \beta_h & \alpha_h \end{bmatrix}$$

- Para pares de autovalores complejos repetidos $\{\mu, \bar{\mu}\}$ de la matriz A , donde $\mu_h = \alpha_h + \beta_h i$ y $\bar{\mu}_h = \alpha_h - \beta_h i$,

$$D_h = \begin{bmatrix} \alpha_h & -\beta_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_h & \alpha_h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha_h & -\beta_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta_h & \alpha_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Demostración: Ver [5], capítulo 6. ■

Un sistema dinámico no homogéneo se puede transformar en sistema dinámico homogéneo trasladando el origen del eje del sistema no homogéneo a su equilibrio de estado estacionario.

Proposición 2.7. Un sistema no homogéneo de ecuaciones en diferencia lineal de primer orden

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

se puede transformar en un sistema homogéneo de ecuaciones en diferencia lineal de primer orden

$$z_{t+1} = Az_t,$$

donde $z_t = x_t - \bar{x}$ es una variable de estado que caracteriza la evolución de la desviación de x_t de su valor de estado estacionario $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$.

Demostración: Sea $z_t = x_t - \bar{x}$, entonces

$$z_{t+1} = x_{t+1} - \bar{x}.$$

Como $x_{t+1} = Ax_t + B$, tenemos

$$\begin{aligned} z_{t+1} &= Ax_t + B - \bar{x} \\ &= A(z_t + \bar{x}) + B - \bar{x} \\ &= Az_t - [I - A]\bar{x} + B, \end{aligned}$$

pero $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$, por lo tanto

$$z_{t+1} = Az_t$$

Proposición 2.8. La evolución del vector de variables de estado x_t en un sistema de ecuaciones en diferencia lineal de primer orden no homogéneo

$$x_{t+1} = Ax_t + B$$

está dado por

$$x_t = QD^tQ^{-1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}$$

donde D es una matriz en la forma canónica de Jordan que corresponde a la matriz A , el vector x_0 es la condición inicial del sistema, y $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es el equilibrio de estado estacionario del sistema.

Demostración: Sea $z_t = x_t - \bar{x}$. Por la Proposición 2.7, tenemos que

$$z_{t+1} = Az_t.$$

Por el Lema 2.2 existe una matriz Q no singular tal que $A = QDQ^{-1}$ donde D es la matriz de Jordan, luego

$$z_{t+1} = QDQ^{-1}z_t. \tag{2.13}$$

Sea $y_t = Q^{-1}z_t$, reemplazando en la Ecuación (2.13), después de multiplicar por Q^{-1} se tiene

$$y_{t+1} = Dy_t;$$

y usando el método de iteraciones

$$y_t = D^t y_0,$$

donde $y_0 = Q^{-1}z_0$ y $z_0 = x_0 - \bar{x}$, luego

$$y_t = D^t Q^{-1}(x_0 - \bar{x}).$$

Además, como $Q^{-1}z_t = y_t$, entonces $z_t = Qy_t$, por lo tanto $z_t = x_t - \bar{x} = Qy_t$. Luego obtenemos

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

por lo tanto

$$x_t = QD^t Q^{-1}(x_0 - \bar{x}) + \bar{x}. \quad \blacksquare$$

2.4. Caracterización de sistemas lineales de primer orden multidimensional

El esquema cualitativo de un sistema lineal multidimensional $x_{t+1} = Ax_t + B$, depende de los coeficientes de la matriz A , esto es, si la matriz A tiene autovalores reales distintos, repetidos, autovalores complejos distintos o repetidos.

Consideremos el sistema lineal multidimensional

$$x_{t+1} = Ax_t + B, \quad t = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.14)$$

donde $x_t \in \mathbb{R}^n$, la matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ independiente del tiempo y $B \in \mathbb{R}^n$.

A continuación veamos los distintos casos

2.4.1. Autovalores reales distintos

2.4.1.1. Caracterización de la solución

Supongamos que la matriz A en la Ecuación (2.14) tiene n autovalores reales distintos $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Supongamos además que $|I - A| \neq 0$. Por el Lema 2.2 existe una transformación del vector x_t en un sistema dinámico de variables de estado independientes y_t ; en particular existe una matriz Q , cuyas columnas son los autovectores de la matriz A ; sean $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ estos autovectores, luego tenemos

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

donde $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es el equilibrio de estado estacionario del sistema. Además

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

donde D es una matriz diagonal cuyos elementos en la diagonal son los autovalores de la matriz A ,

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Por el método de iteraciones $y_t = D^t y_0$, tenemos

$$\begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \\ \vdots \\ y_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1^t & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix}$$

por lo tanto la evolución de cada elemento de las variables de estado y_{it} está gobernado por

$$y_{it} = \lambda_i^t y_{i0}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Como el vector de variables de estado x_t , puede ser expresado como una función de y_t , esto es, $x_t = Qy_t + \bar{x}$, tenemos

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^t y_{10} \\ \lambda_2^t y_{20} \\ \vdots \\ \lambda_n^t y_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$x_{it} = \sum_{j=1}^n Q_{ij} y_{j0} \lambda_j^t + \bar{x}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

donde

$$\begin{bmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_{10} - \bar{x}_1 \\ x_{20} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{n0} - \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Luego tenemos el siguiente teorema

Teorema 2.2. Consideremos el sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$, donde $x_t \in \mathbb{R}$ y x_0 es dado. Si $[I - A] \neq 0$ y A tiene n autovalores reales distintos $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$. Entonces

a) El equilibrio de estado estacionario $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es globalmente estable si y sólo si

$$|\lambda_j| < 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n.$$

b) $\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}$ si y sólo si para todo $j = 1, 2, \dots, n$

$$\{|\lambda_j| < 1 \text{ o } y_{j0} = 0\},$$

donde $y_0 = Q^{-1}(x_0 - \bar{x})$, y $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es no singular cuyas columnas son los autovectores $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$, de la matriz A

Demostración: Ver [3], página 62. ■

2.4.1.2. Diagramas de fase del caso de dimensión dos

A continuación veamos varios tipos de diagramas de fase que caracterizan la evolución de y_t en el caso de dimensión dos, cuando el sistema original está caracterizado por una matriz de coeficientes A que tiene autovalores reales distintos. En particular

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

donde D es una matriz diagonal con elementos en la diagonal, λ_1, λ_2 .

Los diagramas de fase están gobernados por autovalores reales distintos, dependiendo del signo de los autovalores, sus valores absolutos relativos a la unidad, y su magnitudes entre ellas.

1) Autovalores positivos

Si ambos autovalores son positivos, entonces la evolución de los dos variables de estado es monótono. El sistema converge a su equilibrio de estado estacionario o diverge dependiendo si los autovalores son mayores o menores que uno.

- a) Nodo estable: $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$. El equilibrio de estado estacionario $y = (y_1, y_2) = (0, 0)$ es globalmente estable. Es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_{1t}, y_{2t}) = (0, 0)$, para $(y_{10}, y_{20}) \in \mathbb{R}^2$. En el Figura 2.13 tenemos el caso cuando $\lambda_2 < \lambda_1$ por lo que la convergencia de y_{2t} a 0 es más rápido que la convergencia de y_{1t} a 0.

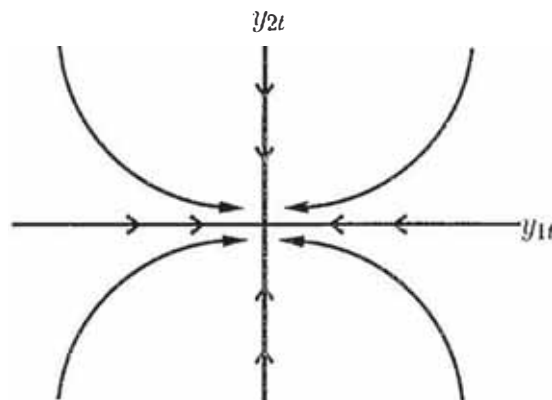


Figura 2.13: Nodo estable: $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$.

- b) Silla: $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$. Es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{2t} = 0, \forall y_{20} \in \mathbb{R}$, mientras que $\lim_{t \rightarrow \infty} y_{1t} = 0$ si y sólo si $y_{10} = 0$. Como ejemplo tenemos el diagrama de fase dado por la Figura 2.14.

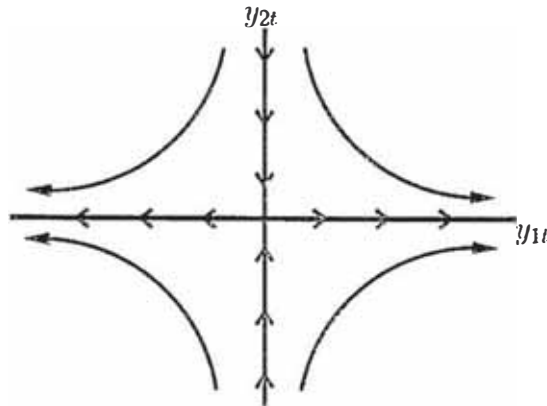


Figura 2.14: Silla: $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$.

- c) Foco: $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$. El equilibrio de estado estacionario es globalmente estable, es decir $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_{1t}, y_{2t}) = (0, 0), \forall (y_{10}, y_{20}) \in \mathbb{R}^2$. La Figura 2.15 muestra que la convergencia al equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$ es monótona y que la rapidez de convergencia es la misma para cada variable de estado, además que su trayectoria es lineal.

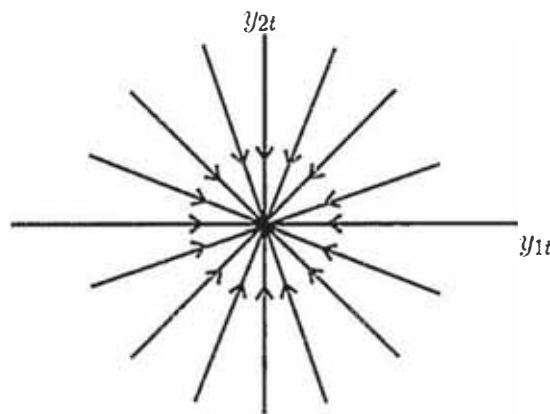


Figura 2.15: Foco: $0 < \lambda_1 = \lambda_2 < 1$.

- d) Fuente: $1 < \lambda_1 < \lambda_2$. El equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$ es inestable. Es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} (y_{1t}, y_{2t}) = (\pm\infty, \pm\infty), \forall (y_{10}, y_{20}) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. En la Figura 2.16

tenemos el caso cuando $\lambda_2 > \lambda_1$ (y_{2t} diverge más rápido que y_{1t}).

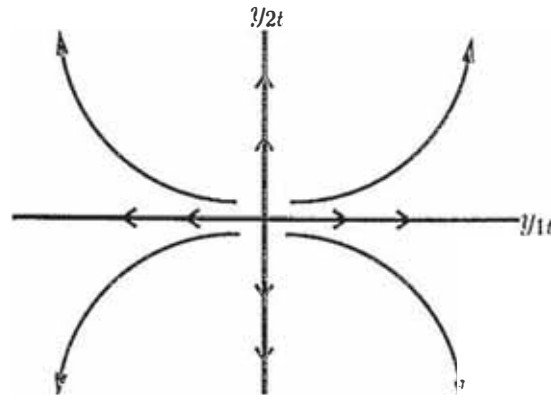


Figura 2.16: Fuente: $1 < \lambda_1 < \lambda_2$.

2) Autovalores negativos

Si uno de los autovalores es positivo y el otro es negativo, entonces la variable asociada con el autovalor positivo converge o diverge de manera monótona, mientras que la variable asociada con el autovalor negativo está caracterizado por convergencia oscilatoria o divergencia. Si ambos autovalores son negativos, las variables de estado oscilan entre valores negativos y positivos. En ambos casos el sistema puede converger a su nivel de estado estacionario o diverger dependiendo si los valores absolutos de los autovalores son mayores o menores que uno.

- a) Nudo estable (convergencia oscilatoria de una variable de estado): $-1 < \lambda_i < 0 < \lambda_j < 1$ cuando $i, j = 1, 2$. Como el valor absoluto de ambos autovalores es menor que uno, el sistema converge globalmente a su equilibrio de estado estacionario $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (0, 0)$. La Figura 2.17 muestra el caso donde y_{1t} converge de manera monótona, mientras que y_{2t} converge en oscilaciones, alrededor del eje y_{1t} .
- b) Nudo estable (convergencia oscilatoria de ambas variables de estado): $-1 < \lambda_i < \lambda_j < 0$ cuando $i, j = 1, 2$. El equilibrio de estado estacionario es globalmente estable. La Figura 2.18 muestra este caso.
- c) Silla (convergencia oscilatoria y divergencia): $\{\lambda_i < -1 < \lambda_j < 0\}$, $\{\lambda_i < -1 \text{ y } 0 < \lambda_j < 1\}$, o $\{\lambda_i > 1 \text{ y } -1 < \lambda_j < 0\}$ cuando $i, j = 1, 2$. si ambos

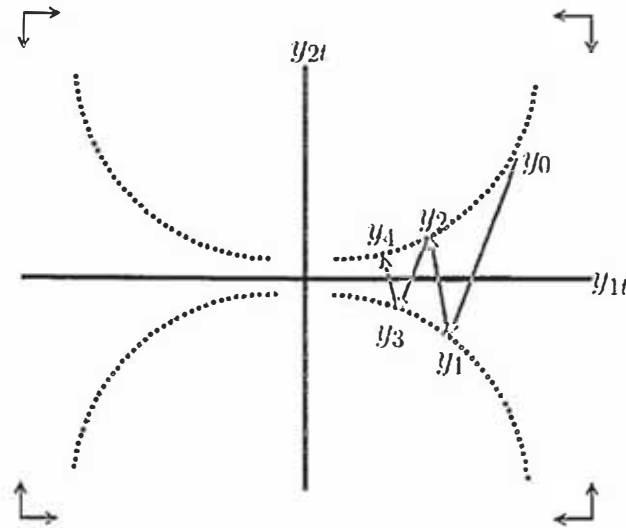


Figura 2.17: Nodo estable (convergencia oscilatoria de una variable de estado): $-1 < \lambda_2 < 0 < \lambda_1 < 1$.

autovalores son negativos, una variable converge de manera oscilatoria, mientras que la otra diverge de manera oscilatoria. Si una es negativa y la otra positiva, una variable converge de manera monótona y la otra diverge de manera oscilatoria. En la Figura 2.19 muestra el caso donde $\lambda_1 > 1$ y $-1 < \lambda_2 < 0$; la convergencia a su equilibrio de estado estacionario ocurre en oscilaciones a lo largo del eje vertical y diverge en oscilaciones a lo largo de $y_{1t} \setminus \{0\}$.

- d) Foco (Convergencia oscilatoria): $-1 < \lambda_1 = \lambda_2 < 0$. El equilibrio de estado estacionario es globalmente estable. La convergencia de ambas variables de estado es oscilatoria.
- e) Fuente (Divergencia oscilatoria): $\{\lambda_i < \lambda_j < -1\}$ o $\{\lambda_i < -1$ y $\lambda_j > 1\}$ cuando $i, j = 1, 2$. El equilibrio de estado estacionario es inestable; la divergencia de autovalores negativos es oscilatoria, mientras la divergencia de autovalores positivos es monótona.

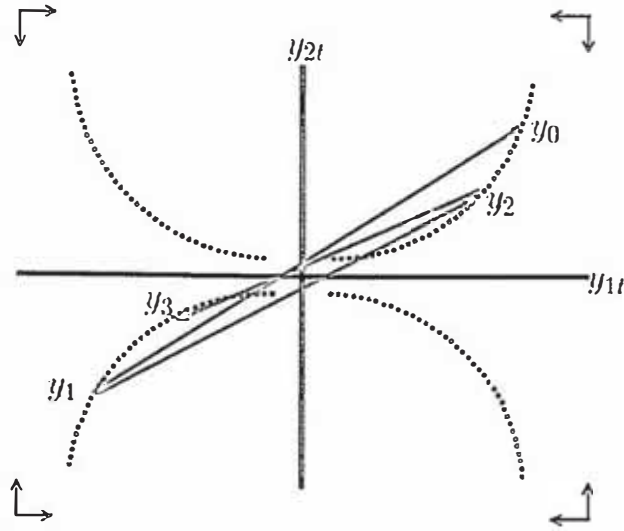


Figura 2.18: Nodo estable (convergencia oscilatoria de ambas variables de estado): $-1 < \lambda_1 < \lambda_2 < 0$.

2.4.2. Autovalores reales repetidos

2.4.2.1. Caracterización de la solución

Consideremos el sistema

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

donde la matriz A , tiene n autovalores reales repetidos λ . Además supondremos que $|I - A| \neq 0$.

Existe una transformación invariante del vector x_t en un sistema dinámico de variables y_t , cuya evolución se puede analizar usando las propiedades de la matriz de Jordan. En particular existe una matriz Q no singular tal que

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

donde $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es el equilibrio de estado estacionario del sistema. Además

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

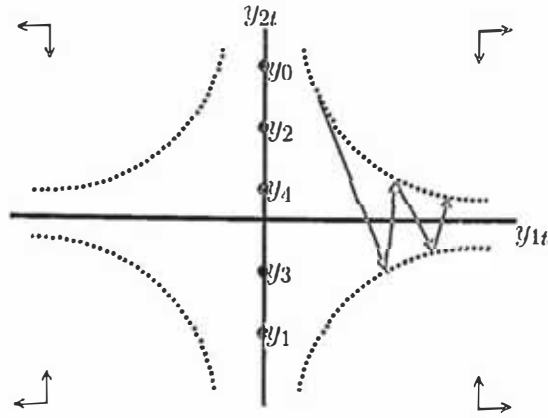


Figura 2.19: Silla (convergencia oscilatoria y divergencia): $-1 < \lambda_2 < 0$ y $\lambda_1 > 1$.

donde

$$D = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

La evolución de la primera nueva variable de estado y_{1t} es independiente de todas las otras variables de estado, excepto la primera, la evolución de la segunda variable de estado depende de la evolución de la primera y la segunda variable de estado, la evolución de la tercera variable de estado depende sólo de la segunda y la tercera, y así sucesivamente.

Por lo tanto la evolución del vector y_t está dado por

$$y_t = D^t y_0,$$

donde para $t > n$,

$$D^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t\lambda^{t-1} & \lambda^t & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{t(t-1)\lambda^{t-2}}{2!} & t\lambda^{t-1} & \lambda^t & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \frac{t(t-1)(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!} & \ddots & \ddots & t\lambda^{t-1} & \lambda^t \end{bmatrix}$$

Por lo tanto tenemos que el valor de y_t cuando $t > n$ es

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \lambda^t y_{10} \\ y_{2t} &= t\lambda^{t-1}y_{10} + \lambda^t y_{20} \\ y_{3t} &= \frac{t(t-1)\lambda^{t-2}}{2!}y_{10} + t\lambda^{t-1}y_{20} + \lambda^t y_{30} \\ &\vdots \\ y_{nt} &= \frac{t(t-1)(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!}y_{10} + \cdots + \lambda^t y_{n0}. \end{aligned}$$

Luego para todo $i = 1, 2, \dots, n$ se tiene

$$y_{it} = \sum_{k=0}^{i-1} \binom{t}{k} \lambda^{t-k} y_{i-k,0}.$$

Como el vector x_t se puede expresar como una función de y_t , es decir, $x_t = Qy_t + \bar{x}$, tenemos que la evolución del vector x_t es

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda^t y_{10} \\ t\lambda^{t-1}y_{10} + \lambda^t y_{20} \\ \vdots \\ \frac{t(t-1)\cdots(t-n+2)\lambda^{t-n+1}}{(n-1)!}y_{10} + \lambda^t y_{n0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto para todo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$x_{it} = \sum_{m=0}^{n-1} \binom{t}{m} \lambda^{t-m} K_{i,m+1} + \bar{x}_i, \quad (2.15)$$

donde $K_{i,m+1}$ son constantes iguales al producto de la i -ésima fila de Q y las condiciones iniciales $(y_{10}, y_{20}, \dots, y_{n0})$. Por lo tanto la evolución del vector x_t está gobernado por el valor del autovalor repetido λ y las condiciones iniciales. Estos resultados nos llevan al siguiente teorema.

Teorema 2.3. Consideremos el sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$, donde $x_t \in \mathbb{R}^n$ y x_0 es dado. Suponiendo que $[I - A] \neq 0$ y A tiene n autovalores reales repetidos λ . Entonces el equilibrio de estado estacionario, $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$, es globalmente estable si y sólo si $|\lambda| < 1$.

Demostración: La doble implicación se obtiene de manera directa analizando la igualdad (2.15). ■

Observación 2.4. Si $|\lambda| > 1$ el sistema no converge a su equilibrio de estado estacionario a menos que comience en su punto de equilibrio.

2.4.2.2. Diagramas de fase del caso de dimensión dos

La evolución del vector de las nuevas variables de estado y_t , está dado por

$$\begin{bmatrix} y_{1t+1} \\ y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix}.$$

Y siguiendo el método de iteraciones

$$y_t = D^t y_0,$$

donde

$$D^t = \begin{bmatrix} \lambda^t & 0 \\ t\lambda^{t-1} & \lambda^t \end{bmatrix};$$

por lo tanto la trayectoria de las dos variables de estado está dado por

$$\begin{aligned} y_{1t} &= \lambda^t y_{10} \\ y_{2t} &= t\lambda^{t-1} y_{10} + \lambda^t y_{20}. \end{aligned}$$

Luego tenemos

$$\begin{aligned} y_{1t+1} &= \lambda y_{1t} \\ y_{2t+1} &= \lambda y_{2t}. \end{aligned}$$

Por lo tanto el cambio en el valor de cada uno de las nuevas variables de estado del periodo t al periodo $t + 1$, $\Delta y_{it}, i = 1, 2$ es

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= y_{1t+1} - y_{1t} = -(1 - \lambda)y_{1t} \\ \Delta y_{2t} &= y_{2t+1} - y_{2t} = y_{1t} - (1 - \lambda)y_{2t}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \Delta y_{1t} &= 0 \leftrightarrow \{y_{1t} = 0 \text{ ó } \lambda = 1\} \\ \Delta y_{2t} &= 0 \leftrightarrow \{(y_{2t} = \frac{y_{1t}}{1-\lambda} \text{ y } \lambda \neq 1) \text{ o } (y_{1t} = 0 \text{ y } \lambda = 1)\}. \end{aligned}$$

Los diagramas de fase del sistema dinámico dependen si el valor absoluto del autovalor es mayor o menor que 1.

1) Autovalores positivos

a) Nodo estable impropio: $\lambda \in (0, 1)$. El equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$ es globalmente estable, pero, aunque el autovalor es positivo, la convergencia a su equilibrio de estado estacionario no es monótona. En las Figuras 2.20 y 2.21, tenemos que si $y_{2t} < 0$ y $y_{1t} > 0$, entonces y_{2t} crece de manera monótona a través del cuadrante positivo y alcanza su punto más alto cuando $\Delta y_{2t} = 0$, después decrece de manera monótona y converge a su equilibrio de estado estacionario $y = 0$.

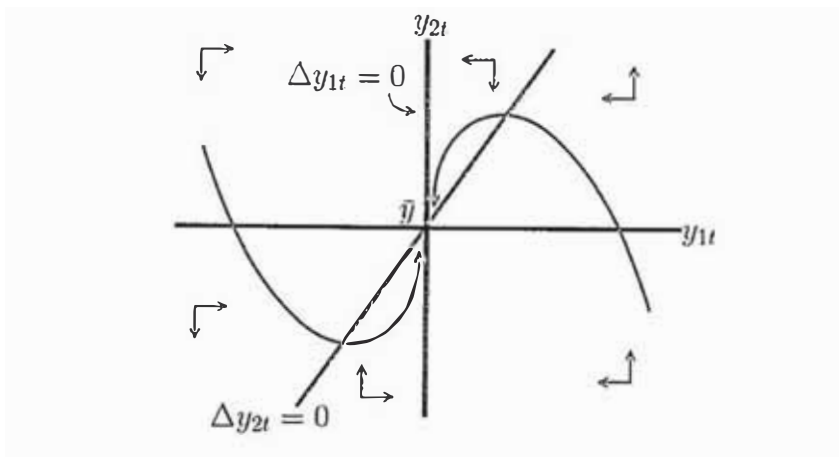


Figura 2.20: Nodo estable impropio: $\lambda \in (0, 1)$.

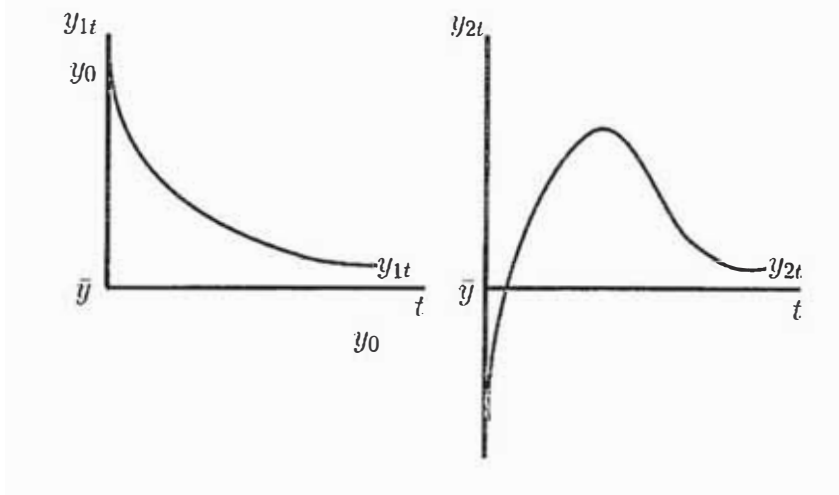


Figura 2.21: Evolución monótona de y_{1t} y evolución no monótona de y_{2t} , $\lambda \in (0, 1)$.

- b) Fuente impropia: $\lambda \in (1, \infty)$. El equilibrio de estado estacionario es globalmente inestable; aunque el autovalor es positivo, la divergencia no se da de manera monótona. En la Figura 2.22, el lugar geométrico $\Delta y_{1t} = 0$ coincide con el eje y_{2t} , mientras que el lugar geométrico $\Delta y_{2t} = 0$ es una línea con pendiente negativa $1/(1 - \lambda)$; si $y_{2t} < 0$ y $y_{1t} > 0$, entonces y_{2t} decrece de manera monótona y comienza a aumentar cuando cruza el lugar $\Delta y_{2t} = 0$.

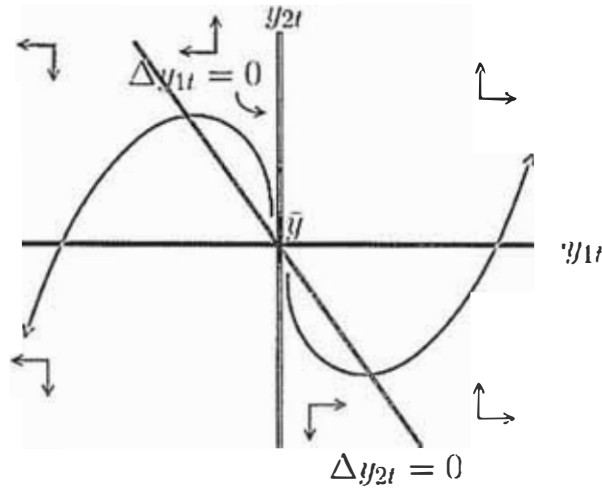


Figura 2.22: Fuente impropia: $\lambda \in (1, \infty)$.

2) Autovalores negativos

- a) Nodo estable impropio (convergencia oscilatoria): $\lambda \in (-1, 0)$. El sistema converge a su equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$. Dependiendo de las condiciones iniciales, el sistema oscila entre los cuadrantes *IV* y *II* o entre los cuadrantes *I* y *III*.
- b) Fuente impropia (Divergencia oscilatoria): $\lambda \in (-\infty, -1)$. El sistema diverge a $+\infty$ o $-\infty$. Dependiendo de las condiciones iniciales del sistema, el sistema oscila entre los cuadrantes *IV* y *II* o entre los cuadrantes *I* y *III*.

3) Autovalor de módulo uno

En este caso el sistema se caracteriza por un continuo de equilibrios inestables.

- a) Continuo de equilibrios de estado estacionario inestables: $\lambda = 1$. Podemos ver un ejemplo en la Figura 2.23.

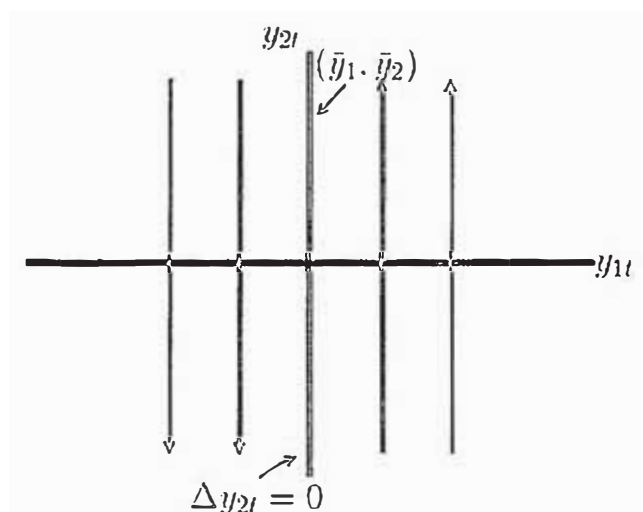


Figura 2.23: Continuo de equilibrios de estado estacionario inestables: $\lambda = 1$.

2.4.3. Pares distintos de autovalores complejos

2.4.3.1. Caracterización de la solución

Consideremos el sistema

$$x_{t+1} = Ax_t + B.$$

Supongamos que la matriz A tiene n de autovalores complejos distintos

$$\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{n/2}, \bar{\mu}_{n/2}\},$$

donde

$$\mu_j = \alpha_j + \beta_j i,$$

$$\bar{\mu}_j = \alpha_j - \beta_j i.$$

Además supondremos que $|I - A| \neq 0$.

Existe una transformación del vector x_t al vector y_t de variables de estado independiente, cuya evolución se puede analizar basándonos en las propiedades de la matriz en la forma

canónica de Jordan. En particular, existe una matriz no singular Q tal que

$$x_t = Qy_t + \bar{x},$$

donde $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es el equilibrio de estado estacionario del sistema, además

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\beta_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \beta_1 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 & -\beta_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{n/2} & -\beta_{n/2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \beta_{n/2} & \alpha_{n/2} \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, cada par de variables de estado $\{y_{2j-1,t}, y_{2j,t}\}$ evoluciona de manera independiente de los otros pares. En particular, para todo $j = 1, 2, \dots, n/2$,

$$\begin{bmatrix} y_{2j-1,t+1} \\ y_{2j,t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2j-1,t} \\ y_{2j,t} \end{bmatrix}.$$

Por el método de iteraciones, la trayectoria de evolución de cada para de variables de estado $\{y_{2j-1,t}, y_{2j,t}\}_0^\infty, j = 1, 2, \dots, n/2$ satisface la ecuación

$$\begin{bmatrix} y_{2j-1,t} \\ y_{2j,t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} y_{2j-1,0} \\ y_{2j,0} \end{bmatrix}.$$

La evolución de cada par de variables de estado se puede expresar en términos de las coordenadas polares (α_j, β_j) , por lo que la estabilidad del sistema dinámico dependen de los valores de α_j, β_j .

Consideremos la representación geométrica de los autovalores $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i, \bar{\mu}_j = \alpha_j - \beta_j i$, en el plano cartesiano tal como se muestra en la Figura 2.24. Sea $r_j = \sqrt{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)}$ el módulo

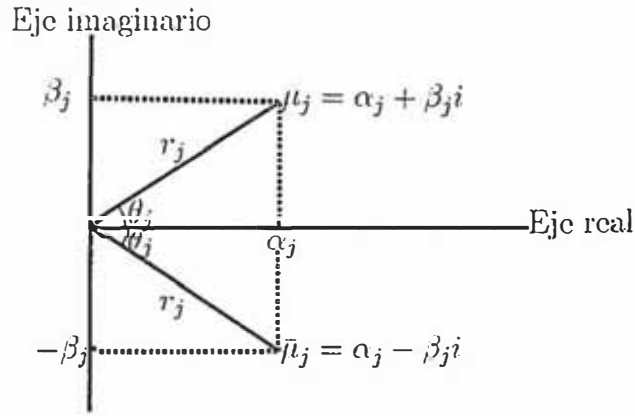


Figura 2.24: El espacio cartesiano complejo.

del j -ésimo autovalor. Luego tenemos que

$$\begin{aligned}\alpha_j &= r_j \cos \theta_j \\ \beta_j &= r_j \operatorname{sen} \theta_j,\end{aligned}$$

luego

$$\begin{bmatrix} \alpha_j & -\beta_j \\ \beta_j & \alpha_j \end{bmatrix} = r_j \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\operatorname{sen} \theta_j \\ \operatorname{sen} \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la evolución de cada par $\{y_{2j-1,t}, y_{2j,t}\}$ se puede determinar mediante propiedades trigonométricas.

Lema 2.3.

$$\left\{ r_j \begin{bmatrix} \cos \theta_j & -\operatorname{sen} \theta_j \\ \operatorname{sen} \theta_j & \cos \theta_j \end{bmatrix} \right\}^t = r_j^t \begin{bmatrix} \cos t\theta_j & -\operatorname{sen} t\theta_j \\ \operatorname{sen} t\theta_j & \cos t\theta_j \end{bmatrix}.$$

Demostración: Ver [3], página 80. ■

Por el Lema 2.3 tenemos

$$\begin{bmatrix} y_{2j-1,t} \\ y_{2j,t} \end{bmatrix} = r_j^t \begin{bmatrix} \cos t\theta_j & -\operatorname{sen} t\theta_j \\ \operatorname{sen} t\theta_j & \cos t\theta_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{2j-1,0} \\ y_{2j,0} \end{bmatrix}.$$

Como el vector x_t se puede expresar como una función de y_t , tenemos que la evolución de x_t

es

$$\begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & \cdots & Q_{1n} \\ Q_{21} & Q_{22} & \cdots & Q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n1} & Q_{n2} & \cdots & Q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1^t (\cos t\theta_1 y_{10} - \operatorname{sen} t\theta_1 y_{20}) \\ r_1^t (\operatorname{sen} t\theta_1 y_{10} + \cos t\theta_1 y_{20}) \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto la evolución de cada variable $x_{it}, i = 1, 2, \dots, n$, está dado por

$$x_{it} = \sum_j r_j^t (K_{ij} \cos t\theta_j + \tilde{K}_{ij} \operatorname{sen} t\theta_j) + \bar{x}_i$$

donde $K_{ij} = Q_{i,2j-1}y_{2j-1,0} + Q_{i,2j}y_{2j,0}$ y $\tilde{K}_{ij} = Q_{i,2j}y_{2j-1,0} - Q_{i,2j-1}y_{2j,0}$, para todo $j = 1, 2, \dots, n/2$.

Teorema 2.4. Consideremos el sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$, donde $x_t \in \mathbb{R}^n$. Además supongamos que se cumple $|I - A| \neq 0$ y que A tiene $n/2$ pares de autovalores complejos distintos $\{\mu_1, \bar{\mu}_1, \mu_2, \bar{\mu}_2, \dots, \mu_{n/2}, \bar{\mu}_{n/2}\}$, donde $\mu_j = \alpha_j + \beta_j i, \bar{\mu}_j = \alpha_j - \beta_j i$ para $j = 1, 2, \dots, n/2$. Entonces el equilibrio de estado estacionario del sistema dinámico \bar{x} es globalmente estable si y sólo si el módulo de cada autovalor de la matriz A es menor que 1, es decir,

$$r_j = \sqrt{(\alpha_j^2 + \beta_j^2)} < 1, \text{ para todo } j = 1, 2, \dots, n/2.$$

Demostración: Ver [3], página 81. ■

2.4.3.2. Diagramas de fase del caso de dimensión dos

La evolución del vector y_t esta dado por

$$\begin{bmatrix} y_{1t+1} \\ y_{2t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1t} \\ y_{2t} \end{bmatrix}.$$

El desarrollo asintótico del sistema dinámico se puede determinar por el módulo r y los valores de α y β .

1) **Orbita periódica:** $r = 1$

- a) **Orbita periódica en sentido anti-horario:** $\beta > 0$. Podemos ver un ejemplo en la Figura 2.25.

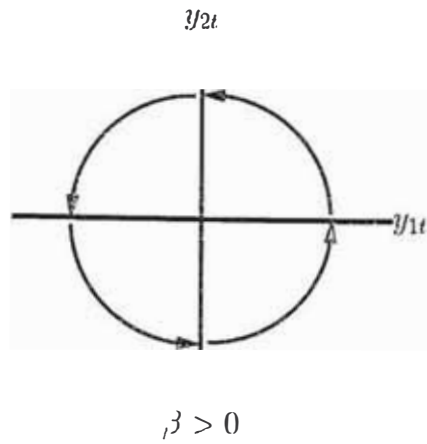


Figura 2.25: Orbita periódica en sentido anti-horario: $\beta > 0$.

b) Orbita periódica en sentido horario: $\beta < 0$. Como ejemplo tenemos la Figura 2.26.

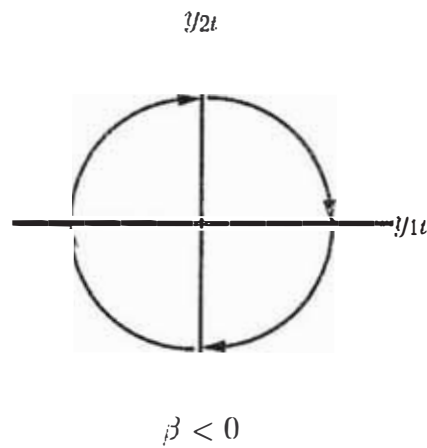


Figura 2.26: Orbita periódica en sentido horario: $\beta < 0$.

2) **Pozo espiral:** $r < 1$

La Figura 2.27 muestra este caso, donde la convergencia es hacia su equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$. Si $\beta > 0$ el movimiento es antihorario, mientras que si $\beta < 0$ el movimiento es horario.

3) **Fuente espiral:** $r > 1$

Mostramos este caso en la Figura 2.28, donde la divergencia se da del equilibrio de estado estacionario $(0, 0)$ en sentido antihorario cuando $\beta > 0$ o sentido horario cuando

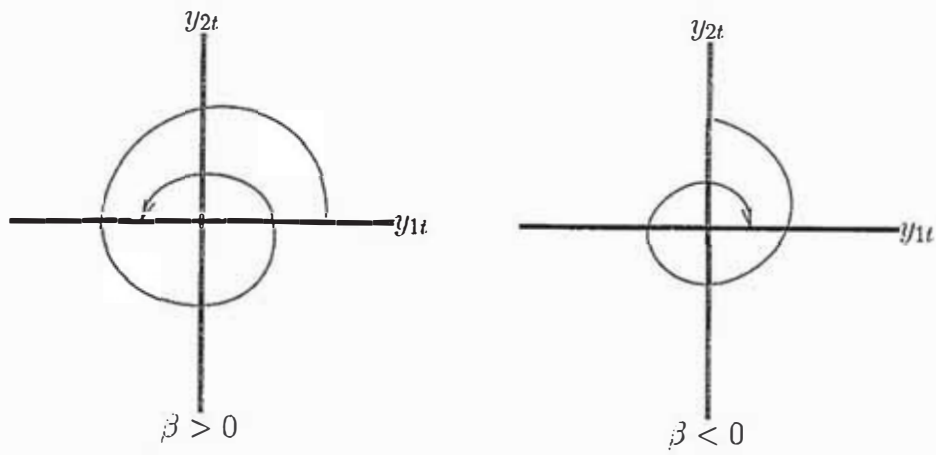


Figura 2.27: Pozo espiral: $r < 1$.

$\beta < 0$.

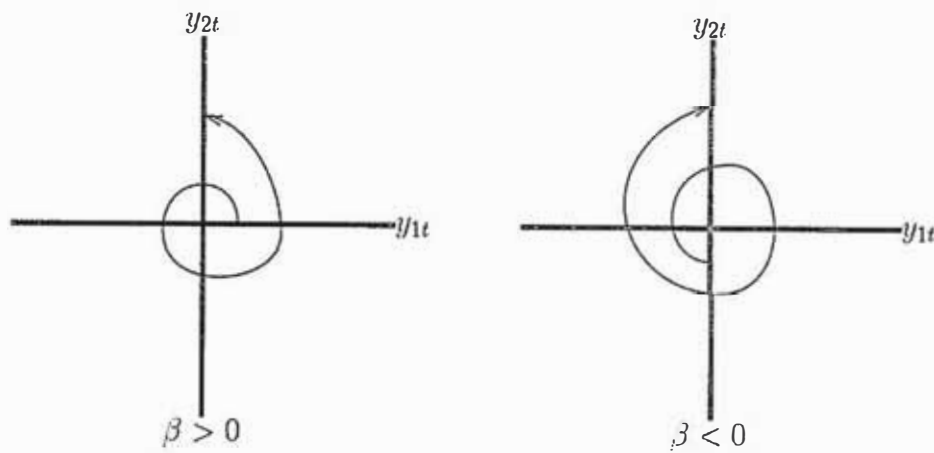


Figura 2.28: Fuente espiral: $r > 1$.

2.4.4. Pares repetidos de autovalores complejos

Consideremos el sistema

$$x_{t+1} = Ax_t + B.$$

Haciendo un análisis como en el caso de pares de autovalores complejos distintos tenemos

$$y_{t+1} = Dy_t,$$

donde

$$D = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha & -\beta & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \beta & \alpha & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \alpha & -\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto

$$y_t = D^t y_0.$$

Así, para $j = 1, 2, \dots, n/2$, tenemos

$$y_{2j-1,t} = \sum_{k=0}^{j-1} r^{t-k} \binom{t}{k} (\cos(t-k)\theta y_{2(j-k)-1,0} - \sin(t-k)\theta y_{2(j-k),0}),$$

$$y_{2j,t} = \sum_{k=0}^{j-1} r^{t-k} \binom{t}{k} (\sin(t-k)\theta y_{2(j-k)-1,0} + \cos(t-k)\theta y_{2(j-k),0}).$$

Como $x_t = Qy_t + \bar{x}$, la evolución de cada $x_{it}, i = 1, 2, \dots, n$, está dado por

$$x_{it} = \sum_{m=0}^{(n/2)-1} r^{t-m} \binom{t}{m} (K_{im} \cos(t-m)\theta + \tilde{K}_{im} \sin(t-m)\theta) + \bar{x}_i$$

donde K_{im} y \tilde{K}_{im} son constantes.

Teorema 2.5. Consideremos el sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$, donde $x_t \in \mathbb{R}^n$. Supongamos que $|I - A| \neq 0$ y que A tiene $n/2$ pares de autovalores complejos repetidos $\{\mu, \bar{\mu}, \dots, \mu, \bar{\mu}\}$, donde $\mu = \alpha + \beta i, \bar{\mu} = \alpha - \beta i$. Entonces el equilibrio de estado estacionario $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es globalmente estable si y sólo si $r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} = 1$

Demostración: Ver [3], página 86. ■

2.4.5. Caso general

Los casos anteriores se pueden generalizar en uno solo, para eso se hace uso del siguiente lema.

Corolario. Consideremos el sistema $x_{t+1} = Ax_t + B$, donde $x_t \in \mathbb{R}^n$, y supongamos que $|I - A| \neq 0$. Entonces, el equilibrio de estado estacionario $\bar{x} = [I - A]^{-1}B$ es globalmente de manera asintótica si y sólo si el módulo de cada autovalor de la matriz A es menor que 1.

En el caso de dimensión 2 (Figura 2.29), un equilibrio de estado estacionario de un sistema lineal de dimensión 2 es globalmente estable de manera asintótica si los autovalores de la matriz A se encuentran en el interior del disco unitario.

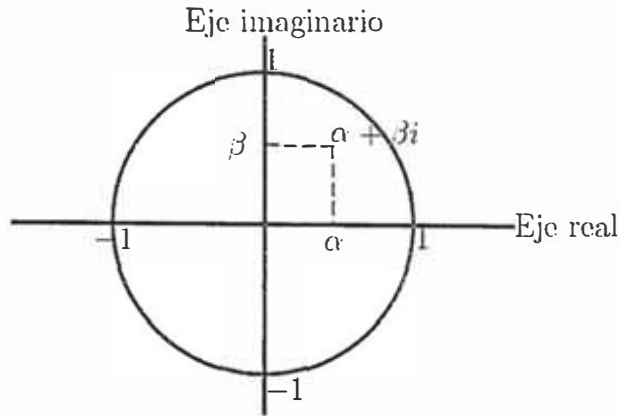


Figura 2.29: Condiciones necesarias y suficientes para estabilidad asintótica global de un sistema lineal: autovalores en el interior del disco unitario.

2.5. Sistemas no lineales de primer orden multidimensional

Vamos a utilizar el análisis de sistemas lineales de primer orden multidimensionales para caracterizar la trayectoria de sistemas no lineales mediante la linealización en la proximidad de un equilibrio de estado estacionario, y la revisión de las propiedades locales y globales de estos sistemas basados en el Teorema de la Variedad Estable.

Consideremos el sistema de ecuaciones en diferencia de primer orden no lineal autónomo, donde la evolución del vector de variables de estado, x_t , está gobernado por el sistema no lineal

$$x_{t+1} = \phi(x_t), \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

donde $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Es decir,

$$\begin{aligned} x_{1t+1} &= \phi^1(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}) \\ x_{2t+1} &= \phi^2(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}) \\ &\vdots \\ x_{nt+1} &= \phi^n(x_{1t}, x_{2t}, \dots, x_{nt}), \end{aligned}$$

donde $\phi^i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$ es una función continuamente diferenciable, y el valor $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0})$ está dado.

Una solución de la ecuación en diferencia $x_{t+1} = \phi(x_t)$ es una trayectoria del vector de variables de estado $\{x_t\}_{t=0}^{\infty}$, que satisface esta ley de movimiento para cualquier t . Los equilibrios de estado estacionario nos dan importantes puntos de referencia para la caracterización de sistemas dinámicos no lineales.

Definición 2.7. Un *equilibrio de estado estacionario* del sistema no lineal de ecuaciones en diferencia $x_{t+1} = \phi(x_t)$ es un vector $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\bar{x} = \phi(\bar{x}).$$

La caracterización del desarrollo cualitativo de este sistema dinámico no lineal requiere su aproximación lineal en la vecindad de su equilibrio de estado estacionario \bar{x} . En particular, el análisis de estabilidad de los equilibrios de estados estacionarios del sistema determinan cuando un equilibrio de estado estacionario es atractivo o repulsivo para todos o por lo menos un conjunto de condiciones iniciales.

Definición 2.8. Un equilibrio de estado estacionario \bar{x} del sistema no lineal $x_{t+1} = \phi(x_t)$ es:

- *globalmente estable*, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

- *localmente estable*, si

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } \lim_{t \rightarrow \infty} x_t = \bar{x}, \quad \forall x_0 \in B_\varepsilon(\bar{x}),$$

donde $B_\varepsilon(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i - \bar{x}_i| < \varepsilon \forall i = 1, 2, 3, \dots, n\}$.

Estabilidad global de un equilibrio de estado estacionario necesita unicidad global del equilibrio de estado estacionario. Por lo tanto, si existe más de un equilibrio de estado estacionario, ninguno de los puntos de equilibrio pueden ser estable globalmente, pues si los sistemas están en un equilibrio de estado estacionario, nunca se alcanzarán otros equilibrios de estado estacionario.

Estabilidad local de un equilibrio de estado estacionario necesita unicidad local del equilibrio de estado estacionario. Es decir, requiere la ausencia de cualquier punto adicional en una vecindad cerrada del estado estacionario del cual no hay escape.

2.5.1. Análisis local

2.5.1.1. Linealización

Supongamos que el sistema dinámico tiene un equilibrio de estado estacionario \bar{x} . Es decir, existe $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\bar{x} = \phi(\bar{x})$. La función $x_{t+1} = \phi(x_t)$ se puede aproximar alrededor del valor de estado estacionario \bar{x} . En particular, si ϕ es una función diferenciable, tenemos la aproximación de Taylor

$$x_{it+1} = \phi^i(x_t) = \phi^i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i(\bar{x})}{\partial x_{jt}} (x_{jt} - \bar{x}_j) + R_n,$$

donde R_n es un residuo. Luego tenemos que la ecuación linealizada alrededor del estado estacionario \bar{x} , está definido por

$$x_{it+1} = \frac{\partial \phi^i(\bar{x})}{\partial x_{1t}} x_{1t} + \frac{\partial \phi^i(\bar{x})}{\partial x_{2t}} x_{2t} + \dots + \frac{\partial \phi^i(\bar{x})}{\partial x_{nt}} x_{nt} + \phi^i(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^i(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j.$$

Por lo tanto el sistema linealizado es

$$\begin{bmatrix} x_{1t+1} \\ x_{2t+1} \\ \vdots \\ x_{nt+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \\ \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1t} \\ x_{2t} \\ \vdots \\ x_{nt} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi^1(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \\ \phi^2(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \\ \vdots \\ \phi^n(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \end{bmatrix}.$$

Es decir, el sistema no lineal se aproxima localmente alrededor del equilibrio de estado estacionario por un sistema lineal,

$$x_{t+1} = Ax_t + B,$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \\ \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{1t}} & \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{2t}} & \dots & \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{nt}} \end{bmatrix} = D\phi(x),$$

es la matriz Jacobiana de $\phi(x_t)$ evaluado en \bar{x} , y

$$B = \begin{bmatrix} \phi^1(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^1(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \\ \phi^2(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^2(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \\ \vdots \\ \phi^n(\bar{x}) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi^n(\bar{x})}{\partial x_{jt}} \bar{x}_j \end{bmatrix}$$

es un vector columna constante.

El desarrollo local del sistema dinámico no lineal en la vecindad del equilibrio de estado estacionario x se puede determinar usando la base del sistema lineal que aproxima el no lineal en la vecindad de su equilibrio de estado estacionario. Luego tenemos que los autovalores de la matriz Jacobiana $D\phi(x)$ determinan el desarrollo local del sistema no lineal de acuerdo a los resultados dados en los Teoremas 2.2, 2.3 y Corolario 2.4.5.

3

El modelo de crecimiento de Solow

3.1. El entorno económico del modelo básico de Solow

Para estudiar el modelo básico de Solow vamos a considerar una economía cerrada, además que la economía está “corriendo” hacia un horizonte infinito ($t = 0, 1, 2, \dots$).

También asumiremos que todos los hogares son idénticos, por lo que la economía admite un *hogar representativo* y que los hogares guardan una fracción exógena $s \in (0, 1)$ de su ingreso disponible.

Además supondremos que todas las firmas en esta economía tienen acceso a la misma función de producción para la mercancía final, o que la economía admite una *firma representativa*.

La función de producción agregada para el único bien final es escrito como

$$Y(t) = F(K(t), L(t), A(t)) \quad (3.1)$$

donde:

- $Y(t)$ es la cantidad total de producción para el bien final en el tiempo t .
- $K(t)$ es el capital, por lo general medido en términos del valor de las máquinas.
- $L(t)$ es el trabajo total, que puede ser medido en diversas formas (horas de trabajo, número de empleados, etc.).
- $A(t)$ es la tecnología en el tiempo t , esta variable no tiene unidad natural, es simplemente una variable que modifica la función de producción. Podemos pensar que $A(t)$ incorpora los efectos de la organización de producción y de mercados sobre la eficiencia con que los factores de producción son usados.

Definición 3.1. Sea $l \in \mathbb{N}$. La función $g : \mathbb{R}^{l+2} \rightarrow \mathbb{R}$ es *homogénea de grado m* en $x, y \in \mathbb{R}$ si

$$g(\lambda x, \lambda y, z) = \lambda^m g(x, y, z) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}_+ \text{ y } z \in \mathbb{R}_+.$$

Teorema 3.1. Supongamos que $g : \mathbb{R}^{l+2} \rightarrow \mathbb{R}$ es diferenciable en $x, y \in \mathbb{R}$, con derivadas parciales denotadas por g_x, g_y y es homogénea de grado m en x e y . Entonces

$$mg(x, y, z) = g_x(x, y, z)x + g_y(x, y, z)y \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \text{ y } z \in \mathbb{R}^l.$$

Además $g_x(x, y, z), g_y(x, y, z)$ son homogéneas de grado $m - 1$ en x e y .

Demostración: Ver [1], página 29. ■

Vamos a imponer los siguientes supuestos estándar sobre la función de producción agregada.

Supuesto 1

F satisface continuidad, diferenciabilidad, positividad, producto marginal decreciente y retorno constante a escala, es decir, la función de producción $F : \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{R}_+$ cumple que es dos veces diferenciable en K y L y satisface

$$\begin{aligned} F_K(K, L, A) &= \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial K} > 0, & F_L(K, L, A) &= \frac{\partial F(K, L, A)}{\partial L} > 0, \\ F_{KK}(K, L, A) &= \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial K^2} < 0, & F_{LL}(K, L, A) &= \frac{\partial^2 F(K, L, A)}{\partial L^2} < 0. \end{aligned}$$

Además, F cumple la propiedad de retorno constante a escala en K y L (esto es, F es linealmente homogéneo en K y L).

Observación 3.1. Existen funciones de producción que no son diferenciables e incluso que no son continuas.

El Supuesto 1 también nos dice que los productos marginales son positivos (el nivel de producción crece con la cantidad de insumos). Además este Supuesto requiere que los productos marginales del capital y trabajo sean decrecientes ($F_{KK} < 0, F_{LL} < 0$), por lo que más capital, manteniéndose todo constante, aumenta la producción poco a poco, aplicándose lo mismo al trabajo.

Asumiremos que todos los bienes y mercados de factores son competitivos (los factores de producción son posesiones de los hogares). En particular supondremos que los hogares poseen todo el trabajo que ofertan inelásticamente.

La condición de compensación del mercado de trabajo se puede expresar como

$$L(t) = \bar{L}(t) \text{ para todo } t, \quad (3.2)$$

donde, $L(t)$ denota la demanda de trabajo (y también el nivel de empleo). En particular si denotamos el precio de alquiler de trabajo o el índice salarial en el tiempo t por $w(t)$ entonces la igualdad (3.2) toma la forma

$$L(t) \leq \bar{L}(t), w(t) \geq 0 \text{ y } (L(t) - \bar{L}(t))w(t) = 0. \quad (3.3)$$

Las relaciones (3.3) nos dice que la condición de compensación del mercado de trabajo no pasa a sueldo negativo.

Observación 3.2.

1. La condición dada por (3.3) no vamos a usar, pues, el Supuesto 1 y el mercado de trabajo competitivo asegura que los sueldos sean estrictamente positivos.
2. Los hogares son dueños del capital de la economía y lo alquilan a las firmas.

Denotaremos al precio de renta del capital en el tiempo t por $R(t)$.

El mercado de capital requiere que la demanda de capital de las firmas sea igual a la oferta de capital de los hogares:

$$K(t) = \bar{K}(t),$$

donde, $\bar{K}(t)$ es la oferta de capital de los hogares y $K(t)$ es la demanda de capital de las firmas. Tomaremos el capital inicial de los hogares, $K(0) = 0$ como dado.

El siguiente supuesto es que el capital se deprecia, porque las máquinas usadas en la producción pierden valor por uso. Asumiremos que esta depreciación toma una forma exponencial. El capital se deprecia (exponencialmente) al índice $\delta \in (0, 1)$, es decir si usamos una unidad de capital en este periodo, sólo $1 - \delta$ queda para el siguiente periodo. Luego el índice de interés mostrado por los hogares es:

$$r(t) = R(t) - \delta.$$

Es decir, una unidad de bien final puede ser consumido o usado como capital y rentado a las firmas y por esto el hogar recibe $R(t)$ unidades de bien en el siguiente periodo como precio de alquiler por sus ahorros pero pierde δ unidades de tenencia de capital, pues una fracción δ de capital se deprecia con el tiempo.

El objetivo de la firma es maximizar la ganancia. Dado el supuesto que existe una función de producción agregada, es suficiente considerar el problema de una firma representativa.

Para un nivel de tecnología $A(t)$, y para $R(t), w(t)$ dados, el problema de maximización de ganancia de la firma representativa en el tiempo t se puede representar como:

$$\max_{\substack{K \geq 0 \\ L \geq 0}} F(K, L, A(t)) - R(t)K - w(t)L. \quad (3.4)$$

Observación 3.3. Como F tiene la propiedad de retorno constante a escala, el problema de maximización (3.4) no tiene una solución bien definida, esto se debe a que en un mundo con retorno constante a escala, el tamaño de cada firma individual no está determinado, sólo están determinados los agregados.

Un equilibrio competitivo requiere que todas las firmas maximicen ganancias y la oferta se iguale a la demanda. En particular la demanda para el trabajo y capital debe ser iguales a la oferta de estos factores en todo t . Esta observación implica que la firma representativa no tuviera ganancias, pues de otra forma, arrendaría cantidades arbitrariamente grandes de capital y trabajo excediendo la oferta, que están fijas. También implica que la demanda total de trabajo L , debe ser igual a la oferta disponible de trabajo $L(t)$. Análogamente, la demanda total de capital K , debería ser igual a la oferta total $K(t)$. Si esto no es el caso y tuviéramos $L < L(t)$, entonces habría un exceso de oferta de trabajo y los salarios serían iguales a cero. Pero esto no es consistente con la maximización de la firma por el Supuesto 1, entonces la firma representativa desearía arrendar una cantidad arbitrariamente grande de trabajo, excediendo la oferta. Este argumento, combinado con el hecho que F es diferenciable implica que dada la oferta de capital $K(t)$ y trabajo $L(t)$ en el tiempo t , los precios de los factores deben satisfacer las siguientes condiciones igualando los precios de los factores a los productos marginales

$$w(t) = F_L(K(t), L(t), A(t)), \quad (3.5)$$

$$R(t) = F_K(K(t), L(t), A(t)). \quad (3.6)$$

Proposición 3.1. Suponiendo que se cumple el Supuesto 1. Entonces en el equilibrio del modelo de crecimiento de Solow, las firmas no hacen ganancia. y en particular

$$Y(t) = w(t)L(t) + R(t)K(t).$$

En adición al Supuesto 1, las siguientes condiciones se imponen en el análisis de crecimiento económico y equilibrio macroeconómico.

Supuesto 2 (*Condiciones de Inada*)

F satisface las condiciones de Inada

$$\begin{aligned} \lim_{K \rightarrow 0} F_K(K, L, A) = \infty \quad & y \quad \lim_{K \rightarrow \infty} F_K(K, L, A) = 0 \quad \forall L > 0, \forall A \\ \lim_{L \rightarrow 0} F_L(K, L, A) = \infty \quad & y \quad \lim_{L \rightarrow \infty} F_L(K, L, A) = 0 \quad \forall K > 0, \forall A. \end{aligned}$$

Además, $F(0, L, A) = 0$ para todo L y A (el capital es un insumo esencial).

Estas condiciones implican que las primeras unidades de capital y trabajo sean altamente productivas y cuando el capital o trabajo sean suficientemente abundantes, sus productos marginales son cercanos a cero.

3.2. El modelo de Solow en tiempo discreto

Recordemos que K se deprecia exponencialmente a la tasa δ , luego la ley de movimiento del capital está dado por

$$K(t+1) = (1 - \delta)K(t) + I(t), \quad (3.7)$$

donde $I(t)$ es la inversión en el tiempo t .

La cantidad total del bien final en la economía debe ser consumida o invertida, así tenemos

$$Y(t) = C(t) + I(t), \quad (3.8)$$

donde $C(t)$ es el consumo.

Usando las relaciones (3.1),(3.7) y (3.8), cualquier asignación dinámica factible en esta economía debe satisfacer

$$K(t+1) \leq F(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t) - C(t), \quad t = 0, 1, \dots$$

Como la economía es cerrada (no hay gastos del gobierno), la inversión agregada es igual al ahorro

$$S(t) = I(t) = Y(t) - C(t).$$

El supuesto que los hogares ahorran una fracción constante $s \in (0, 1)$ de su ingreso, se expresa como

$$S(t) = sY(t),$$

lo cual implica que consumen la fracción $1 - s$ restante de su ingreso y así

$$C(t) = (1 - s)Y(t). \quad (3.9)$$

Luego tenemos

$$K(t + 1) = (1 - \delta)K(t) + S(t) = (1 - \delta)K(t) + sY(t).$$

Igualando la oferta y la demanda y usando las relaciones (3.1) y (3.7), tenemos la ley fundamental de movimiento del modelo de crecimiento de Solow

$$K(t + 1) = sF(K(t), L(t), A(t)) + (1 - \delta)K(t). \quad (3.10)$$

Los hogares no optimizan cuando afecta sus ahorros o decisiones de consumo. Sin embargo las firmas maximizan sus ganancias y la oferta se iguale a la demanda.

Definición 3.2. En el modelo básico de Solow para una sucesión dada de $\{L(t), A(t)\}_{t=0}^{\infty}$ y un capital inicial $K(0)$, una *senda de equilibrio* es una sucesión de capitales, niveles de producción, niveles de consumo, salarios y tasas de renta $\{K(t), Y(t), C(t), w(t), R(t)\}_{t=0}^{\infty}$ tal que $K(t)$ satisface (3.10), $Y(t)$ está dado por (3.1), $C(t)$ está dado por (3.9), y $w(t), R(t)$ están dados por (3.5) y (3.6) respectivamente.

Un equilibrio está definido como una senda entera de asignaciones y precios. Un equilibrio económico no se refiere a un objeto estático, se refiere a una senda entera de desarrollo de una economía.

3.2.1. Equilibrio sin crecimiento poblacional y progreso tecnológico

Para analizar un equilibrio sin crecimiento poblacional y progreso tecnológico empezaremos con los siguientes supuestos:

1. No hay crecimiento poblacional, es decir, la población total es constante a un nivel $L > 0$. Además como la oferta de trabajo de los hogares es inelástico, implica que $L(t) = L$.
2. No hay progreso tecnológico, es decir $A(t) = A$.

Definimos la razón capital-trabajo de una economía como

$$k(t) = \frac{K(t)}{L}.$$

Usando el supuesto de retorno constante a escala, la producción per cápita, $y(t) = Y(t)/L$, se expresa como

$$\begin{aligned} y(t) &= F\left(\frac{K(t)}{L}, 1, A\right) \\ &= f(k(t)), \end{aligned}$$

esto es, con retorno constante a escala, la producción per cápita es una función de la razón capital-trabajo. Como A es constante, podemos hacer $A = 1$. El producto marginal y el precio de renta del capital está dado por $f'(k)$. Entonces por el Teorema 3.1, el producto marginal de trabajo y el índice salarial están dados por:

$$\begin{aligned} R(t) &= f'(k(t)) > 0 \\ w(t) &= f(k(t)) - k(t)f'(k(t)) > 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ejemplo 3.1 (La función de producción Cobb-Douglas).

La función de producción Cobb-Douglas se escribe como

$$\begin{aligned} Y(t) &= F(K(t), L(t), A(t)) \\ &= AK^\alpha(t)L^{1-\alpha}(t), \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Esta función satisface los Supuestos 1 y 2. Dividiendo por $L(t)$, la función de producción per cápita se escribe como

$$y(t) = Ak^\alpha(t),$$

donde $y(t)$ denota la producción por producción y $k(t)$ es la razón capital-trabajo. Luego, usando las relaciones (3.11), tenemos

$$R(t) = \frac{\partial(Ak^\alpha(t))}{\partial k(t)} = \alpha Ak^{\alpha-1}(t),$$

que en términos de la función original nos da

$$R(t) = \alpha AK^{\alpha-1}(t)L^{1-\alpha}(t).$$

Análogamente

$$\begin{aligned} w(t) &= Ak(t) - \alpha Ak^{-(1-\alpha)}(t)(k(t)) \\ &= (1 - \alpha)AK^{\alpha}(t)L^{-\alpha}(t). \end{aligned}$$

□

La representación per cápita de la función de producción agregada nos permite dividir ambos lados de la relación (3.10) entre L para obtener la ecuación en diferencias de la evolución de la razón capital-trabajo

$$k(t+1) = sf(k(t)) + (1 - \delta)k(t). \quad (3.12)$$

Definición 3.3. Un *equilibrio de estado estacionario sin progreso tecnológico y crecimiento poblacional* es una senda de equilibrio en que $k(t) = k^*$ para todo t .

En un equilibrio de estado estacionario, la razón capital-trabajo permanece constante. Como no hay crecimiento poblacional, implica que el nivel del capital también permanece constante.

Matemáticamente, un equilibrio de estado estacionario corresponde a un punto estacionario del equilibrio de la ecuación en diferencias (3.12).

Gráficamente observamos que en la Figura 3.1 se satisface la igualdad

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s}. \quad (3.13)$$

Proposición 3.2. Consideremos el modelo básico de crecimiento de Solow y suponiendo que se cumplen los Supuestos 1 y 2. Entonces existe un equilibrio de estado estacionario único donde la razón capital-trabajo $k^* \in (0, \infty)$ satisface

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta}{s},$$

la producción per cápita está dado por

$$y^* = f(k^*),$$

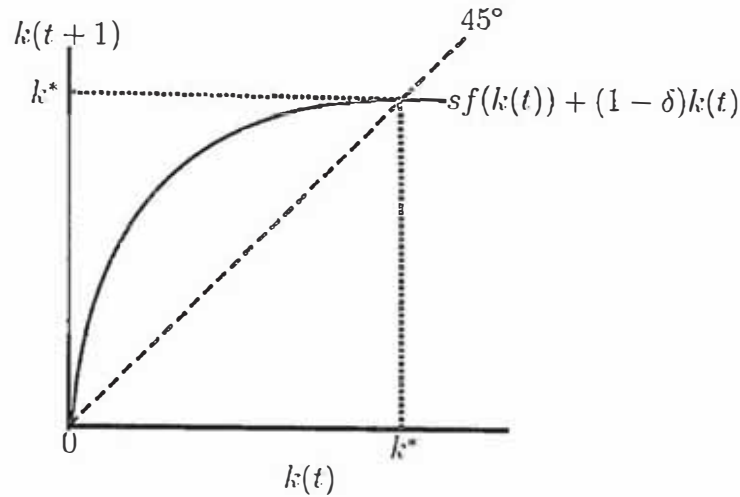


Figura 3.1: Determinación de la razón capital-trabajo de estado estacionario en el modelo de Solow sin crecimiento poblacional y cambio tecnológico.

y el consumo per cápita está dado por

$$c^* = (1 - s)f(k^*).$$

Demostración: La proposición nos dice que cualquier k^* que satisface (3.13) es un estado estacionario.

Para probar la existencia, notemos del supuesto 2 y de la regla de l'Hospital que,

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(k)}{k} = \infty \quad \text{y} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{f(k)}{k} = 0.$$

Además $f(k)/k$ es continuo por el supuesto 1, luego por el Teorema del Valor Intermedio existe k^* tal que se satisface la igualdad (3.13).

Para ver la unicidad, derivemos $f(k)/k$ con respecto a k , obteniendo

$$\frac{\partial(f(k)/k)}{\partial k} = \frac{f'(k)k - f(k)}{k^2} = -\frac{w}{k^2} < 0,$$

donde la última desigualdad se obtiene de las relaciones (3.11). Como $f(k)/k$ es estrictamente decreciente, existe un único valor k^* que satisface la igualdad (3.13), de donde se sigue las ecuaciones de la proposición. ■

Las ciudades con altos índices de ahorro y mejores tecnologías tendrán grandes “razones” capital-trabajo y serán más ricos. Las ciudades con mayor depreciación tecnológica tendrán menor razón capital-trabajo y serán más pobres.

La misma estática comparativa con respecto a A y δ se puede aplicar a c^* . Existe un único índice de ahorro s_{gold} que maximiza el nivel de estado estacionario de consumo. Para ver esto, tenemos

$$\begin{aligned} c^*(s) &= (1-s)f(k^*(s)) \\ &= f(k^*(s)) - \delta k^*(s), \end{aligned}$$

pues en estado estacionario, $sf(k) = \delta k$. Luego diferenciando respecto a s (usando el Teorema de la Función Implícita), obtenemos

$$\frac{\partial c^*(s)}{\partial s} = \left(f'(k^*(s)) - \delta \right) \frac{\partial k^*}{\partial s}.$$

Definimos la regla dorada del índice de ahorro s_{gold} tal que

$$\frac{\partial c^*}{\partial s}(s_{\text{gold}}) = 0,$$

el correspondiente capital en la regla dorada de estado estacionario es definido como k_{gold} .

Proposición 3.3. En el modelo de crecimiento de Solow básico el más alto nivel de consumo de estado estacionario es alcanzado por s_{gold} , con el correspondiente nivel de capital de estado estacionario k_{gold} tal que

$$f'(k_{\text{gold}}) = \delta$$

Demostración : Ver [1], página 42. ■

La Figura 3.2 muestra lo que nos dice la Proposición 3.3.

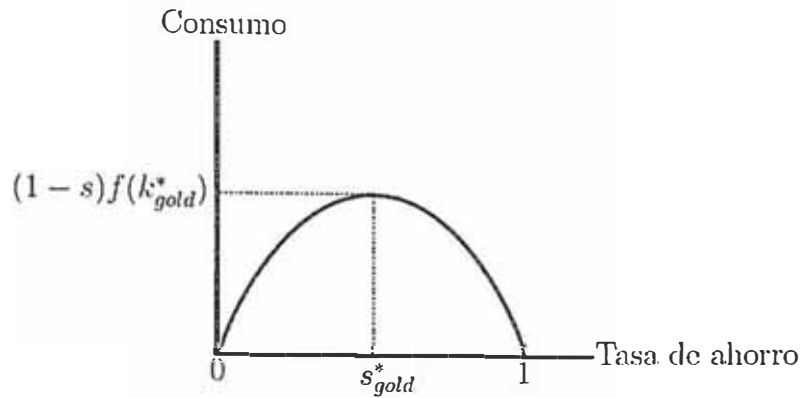


Figura 3.2: El nivel de la regla dorada que maximiza el consumo de estado estacionario.

3.3. Dinámica de transición en el modelo de Solow en tiempo discreto

Recordemos que una senda de equilibrio no se refiere sólo al estado estacionario, también a la cantidad de capital, producción, consumo y precio de factores. Recordar también que la cantidad total de capital en el comienzo de la economía $K(0) = 0$, es tomado como variable de estado, y la oferta de trabajo, L es fijo.

Proposición 3.4. Supongamos que se cumplen los Supuestos 1 y 2. Entonces el equilibrio de estado estacionario del modelo de crecimiento de Solow descrito por la ecuación en diferencias (3.12) es globalmente estable, y comenzando de cualquier $k(0) > 0$, $k(t)$ converge monotonamente a k^* .

Demostración: Ver [1], página 45. ■

La Proposición 3.4 se puede graficar en la Figura 3.3

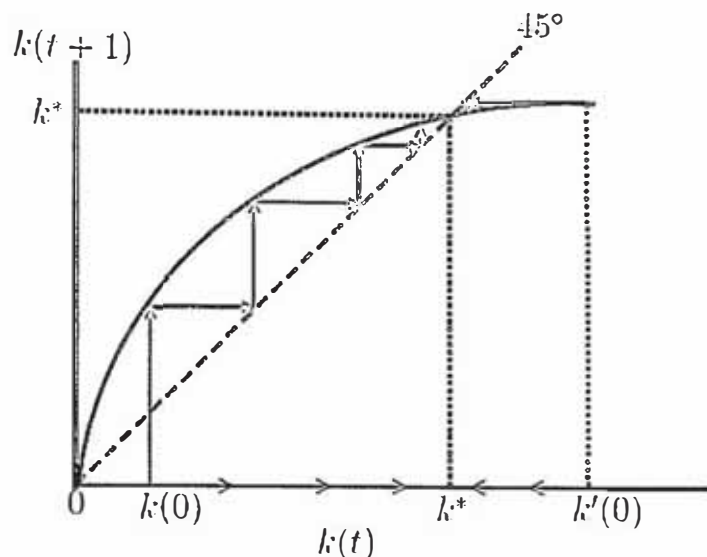


Figura 3.3: Dinámica de transición en el modelo de Solow básico.

Cuando la economía comienza con poco capital relativo a su oferta de trabajo, la razón capital-trabajo aumenta. Así el producto marginal del capital decaerá debido al retorno disminuido de capital y el índice salarial aumentará. Recíprocamente, si la economía comienza con mucho capital, el capital disminuirá, y en el proceso el índice salarial disminuirá y el índice de retorno de capital aumentará. En consecuencia, el modelo básico de Solow (sin progreso tecnológico) sólo puede generar crecimiento económico a lo largo de la senda de transición al estado estacionario (comenzando con $k(0) < k^*$), sin embargo este crecimiento no es sostenido, pues conforme pasa el tiempo se vuelve más lento.

3.4. El modelo de Solow en tiempo continuo

Tenemos

$$x(t + 1) - x(t) = g(x(t));$$

luego, haciendo la aproximación

$$x(t + \Delta t) - x(t) \approx \Delta t g(x(t)),$$

para cualquier $\Delta t \in [0, 1]$. De donde obtenemos

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \dot{x}(t) \approx g(x(t)).$$

Los ahorros están dados por

$$S(t) = sY(t).$$

Asumiremos que la fuerza de trabajo $L(t)$ crece proporcionalmente, es decir,

$$L(t) = e^{nt}L(0). \quad (3.14)$$

No olvidemos que no consideramos progreso tecnológico.

Recordemos que

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)},$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} &= \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - \frac{\dot{L}(t)}{L(t)} \\ &= \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - n, \end{aligned}$$

usando de la relación (3.14) el hecho que $\dot{L}(t)/L(t) = n$.

Luego la ley de movimiento del capital está dado por

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), L(t), A(t)) - \delta K(t).$$

Usando la definición de $k(t)$ y las propiedades de retorno constante a escala de la función de producción, tenemos la ley fundamental del movimiento del modelo de Solow en tiempo continuo

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = s \frac{f(k(t))}{k(t)} - (n + \delta) \quad (3.15)$$

Definición 3.4. En el modelo básico de Solow en tiempo continuo con crecimiento poblacional a la tasa n , sin progreso tecnológico y con capital inicial $K(0)$, una *senda de equilibrio* está dado por sendas (sucesiones) de capitales, trabajo, niveles de producción, niveles de consumo, salarios, y tasas de renta $\{K(t), L(t), Y(t), C(t), w(t), R(t); t \geq 0\}$ tal que $L(t)$ satisface (3.14), $k(t) = K(t)/L(t)$ satisface (3.15), $Y(t)$ está dado por (3.1), $C(t)$ está dado por (3.9), y $w(t)$ y $R(t)$ son dados por (3.5) y (3.6), respectivamente.

El equilibrio de la Ecuación (3.15) tiene un único estado estacionario en k^* , que es dado por una ligera modificación de (3.13) al incorporar crecimiento poblacional,

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{n + \delta}{s}$$

Gráficamente tenemos en la Figura 3.4.

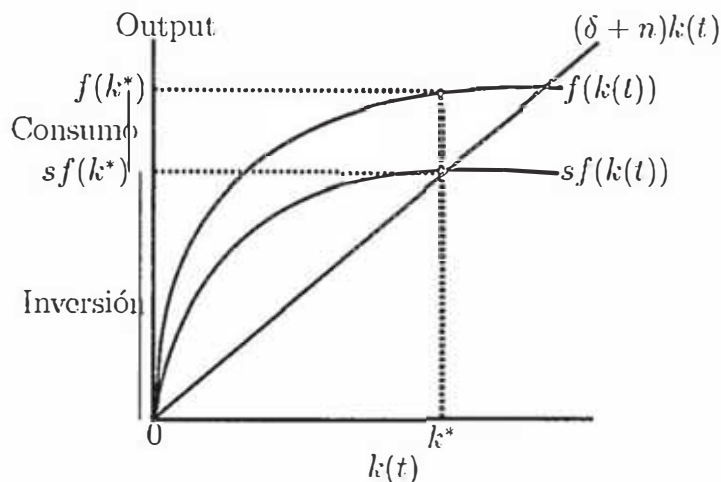


Figura 3.4: Inversión y consumo en el equilibrio de estado estacionario con crecimiento de población.

La cantidad de inversión, $sf(k)$, es usado para rellenar la razón capital-trabajo, pero ahora hay dos razones para esto, el capital se deprecia exponencialmente a la tasa δ , y con esto, el capital debe aumentar cuando la población crece para mantener la razón capital-trabajo a un nivel constante.

3.5. Dinámica de transición en el modelo de Solow en tiempo continuo

Proposición 3.5. Suponiendo que se cumplen los Supuestos 1 y 2. Entonces el modelo de crecimiento de Solow básico en tiempo continuo con crecimiento poblacional constante y sin cambio tecnológico es asintóticamente estable globalmente y comenzando de cualquier $k(0) > 0$, tenemos que $k(t)$ converge monotonamente a k^* .



La Figura 3.5 gráfica la Proposición 3.5.

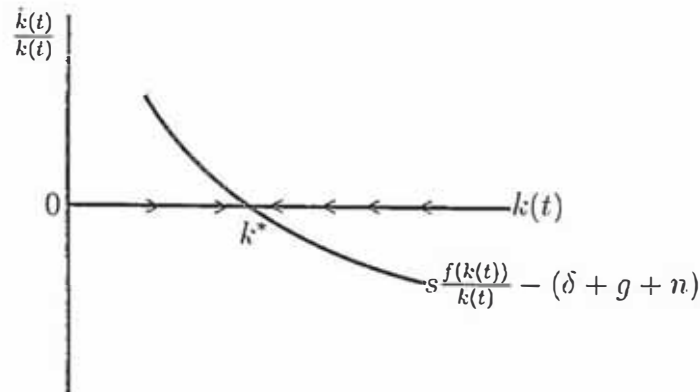


Figura 3.5: Dinámica de la razón capital-trabajo en el modelo básico de Solow.

Ejemplo 3.2 (Dinámica con la función de producción Cobb-Douglas).

Tenemos

$$F(K, L, A) = AK^\alpha L^{1-\alpha}, \text{ con } 0 < \alpha < 1.$$

Esta función tiene elasticidad de sustitución entre capital y trabajo igual a 1.

Para una función de producción homotética $F(K, L)$, la elasticidad de sustitución está definido por

$$\sigma = - \left[\frac{\partial \log(F_K/F_L)}{\partial \log(K/L)} \right]^{-1},$$

donde F_K y F_L denotan los productos marginales de capital y trabajo. La función F es homotética cuando F_K/F_L es función de K/L . Para la función de producción Cobb-Douglas tenemos

$$\frac{F_K}{F_L} = \frac{\alpha L}{(1 - \alpha)K}.$$

Por lo tanto $\sigma = 1$.

Esto implica que las porciones de los factores en equilibrio serán constantes a pesar de la

razón capital-trabajo. En particular, la porción de capital del ingreso nacional es

$$\begin{aligned}\alpha_K(t) &= \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} = \frac{F_K(K(t), L(t))K(t)}{Y(t)} \\ &= \frac{\alpha AK^{\alpha-1}(t)L^{1-\alpha}(t)K(t)}{AK^{\alpha}(t)L^{1-\alpha}(t)} = \alpha\end{aligned}$$

Análogamente, la porción de trabajo es $\alpha_L(t) = 1 - \alpha$. Así, con una elasticidad de sustitución igual a 1, cuando el capital crece su producto marginal decrece proporcionalmente, dejando la porción de capital constante.

Recordemos que con la tecnología Cobb-Douglas, la función de producción per cápita toma la forma

$$f(k) = Ak^{\alpha},$$

entonces el estado estacionario está dado por

$$\begin{aligned}\frac{k^*}{k^*} &= \frac{n + \delta}{s} \\ A(k^*)^{\alpha-1} &= \frac{n + \delta}{s}\end{aligned}$$

es decir,

$$k^* = \left(\frac{sA}{n + \delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Luego k^* es creciente en s y A y decreciente en n y δ . Adicionalmente k^* es creciente en α .

Luego obtenemos

$$\dot{k}(t) = sAk^{\alpha}(t) - (n + \delta)k(t),$$

con condición inicial $k(0) > 0$. Para resolverlo, consideremos $x(t) = k^{1-\alpha}(t)$ entonces

$$\dot{x}(t) = (1 - \alpha)sA - (1 - \alpha)(n + \delta)x(t),$$

cuya solución es

$$x(t) = \frac{sA}{n + \delta} + \left[x(0) - \frac{sA}{n + \delta} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t}$$

y en términos de $k(t)$

$$k(t) = \left[\frac{sA}{n + \delta} + \left[k^{1-\alpha}(0) - \frac{sA}{n + \delta} \right] e^{-(1-\alpha)(n+\delta)t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Esta solución ilustra el hecho de que empezando de cualquier $k(0)$, tenemos que el equilibrio

$$k(t) \rightarrow k^* = \left(\frac{sA}{n+\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \quad \square$$

3.6. Modelo de Solow con progreso tecnológico

Los tipos de modelos pueden ser:

- 1) $F(K(t), L(t), A(t)) = A(t)F(K(t), L(t))$ (Hicks-neutral).
- 2) $F(K(t), L(t), A(t)) = F(A(t)K(t), L(t))$ (Solow-neutral).
- 3) $F(K(t), L(t), A(t)) = F(K(t), A(t)L(t))$ (Harrod-neutral).

Las porciones de capital y trabajo en el ingreso nacional son

$$\alpha_K(t) = \frac{R(t)K(t)}{Y(t)} \text{ y } \alpha_L = \frac{w(t)L(t)}{Y(t)}.$$

Por el Supuesto 1 y el Teorema 3.1, tenemos que $\alpha_K + \alpha_L = 1$.

Teorema 3.2 (Teorema de Uzawa). Consideremos un modelo de crecimiento con función de producción agregada

$$Y(t) = \tilde{F}(K(t), L(t), \tilde{A}(t)),$$

donde $\tilde{F} : \mathbb{R}_+^2 \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ (donde \mathcal{A} es un subconjunto arbitrario de \mathbb{R}^l) y $\tilde{A} \in \mathcal{A}$ representa tecnología en el tiempo t . Suponiendo que F tiene la propiedad de retorno constante a escala en K y L .

La restricción de recursos agregada es

$$\dot{K}(t) = Y(t) - C(t) - \delta K(t).$$

Suponiendo que existe un índice de crecimiento constante de población, $L(t) = e^{nt}L(0)$, y que existe $T < \infty$ tal que para todo $t > T$, $\dot{Y}(t)/Y(t) = g_Y$, $\dot{K}(t)/K(t) = g_K > 0$ y $\dot{C}(t)/C(t) = g_C > 0$. Entonces

- 1) $g_Y = g_K = g_C$ y
- 2) para todo $t \geq T$ existe una función $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ homogénea de grado 1 en sus dos argumentos tal que la función de producción agregada se puede representar como

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t)),$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}_+$ y

$$\frac{A(t)}{A(t)} = g = g_Y - n.$$

Demostración :

Parte 1

Para $t \geq T$ tenemos,

$$\begin{aligned} Y(t) &= e^{g_Y(t-T)} Y(T) \\ K(t) &= e^{g_K(t-T)} K(T) \\ L(t) &= e^{n(t-T)} L(T). \end{aligned}$$

Como $K(t) = g_K K(t)$, la restricción de recursos agregada en t implica

$$(g_K + \delta)K(t) = Y(t) - C(t),$$

lo cual dividiendo por $e^{g_K(t-T)}$, obtenemos

$$(g_K + \delta)K(T) = e^{(g_Y - g_K)(t-T)} Y(T) - e^{(g_C - g_K)(t-T)} C(T), \forall t \geq T.$$

Y diferenciando respecto a t , tenemos

$$(g_Y - g_K)e^{(g_Y - g_K)(t-T)} Y(T) - (g_C - g_K)e^{(g_C - g_K)(t-T)} C(T) = 0, \forall t \geq T$$

Esta ecuación se cumple para todo t si cualquiera de las siguientes 4 condiciones es verdadera

- a) $g_Y = g_K = g_C$,
- b) $g_Y = g_C$ y $Y(T) = C(T)$,
- c) $g_Y = g_K$ y $C(T) = 0$,
- d) $g_C = g_K$ y $Y(T) = 0$.

Las posibilidades b), c) y d) llevan a una contradicción. Por lo tanto tenemos $g_Y = g_K = g_C$.

Parte 2

Para cualquier $t > T$, la función de producción agregada en el tiempo T se escribe como

$$e^{-g_Y(t-T)} Y(t) = \tilde{F}(e^{-g_K(t-T)} K(t), e^{-n(t-T)} L(t), \tilde{A}(T))$$

multiplicando por $e^{g_Y(t-T)}$ y usando la propiedad de retorno constante a escala de \tilde{F} tenemos

$$Y(t) = \tilde{F}(K(t), e^{(t-T)(g_Y-n)}L(t), \tilde{A}(T))$$

lo cual es verdadero para todo $t > T$ y como \tilde{F} es homogéneo de grado 1 en K y L , existe $F : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+$ homogéneo de grado 1 tal que

$$Y(t) = F(K(t), e^{(g_Y-n)t}L(t)),$$

es decir,

$$Y(t) = F(K(t), A(t), L(t)),$$

con $\dot{A}(t)/A(t) = g_Y - n$.

3.7. El modelo de crecimiento de Solow con progreso tecnológico en tiempo continuo

El Teorema 3.2 implica que cuando la economía está experimentando crecimiento sostenido, la función de producción tiene representación de la forma

$$Y(t) = F(K(t), A(t)L(t));$$

además en el análisis macroeconómico se asume

$$\frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g > 0.$$

Usaremos la ecuación

$$\dot{K}(t) = sF(K(t), A(t)L(t)) - \delta K(t). \quad (3.16)$$

Analizando en términos de una variable normalizada. Como las unidades de eficiencia de trabajo son dados por $A(t)L(t)$ y F tiene la propiedad de retorno constante a escala en sus dos argumentos, definimos $k(t)$ como la razón capital-trabajo efectiva (capital dividido por unidades eficientes de trabajo), es decir

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)}. \quad (3.17)$$

Diferenciando respecto a t

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{\dot{K}(t)}{K(t)} - g - n. \quad (3.18)$$

La cantidad de producción por unidad de labor efectiva se escribe

$$\begin{aligned} Y(t) &= \frac{Y(t)}{A(t)L(t)} = F\left(\frac{K(t)}{A(t)L(t)}, 1\right) \\ &= f(k(t)). \end{aligned}$$

El ingreso per cápita es $y(t) = Y(t)/L(t)$, luego

$$\begin{aligned} Y(t) &= A(t)\hat{Y}(t) \\ &= A(t)f(k(t)), \end{aligned}$$

sustituyendo $K(t)$ de la Ecuación (3.16) en la Ecuación (3.18) tenemos

$$\frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = \frac{sf(k(t))}{k(t)} - (\delta + g + n).$$

La diferencia con el modelo sin progreso tecnológico (Ecuación (3.15)) es la presencia de g que refleja el hecho que k no es más grande que la razón capital-trabajo, pero sí con la razón capital-trabajo efectiva. Así para que k permanezca constante en el estado estacionario, la razón capital-trabajo necesita crecer a la razón g .

Luego tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3.6. Consideremos el modelo de crecimiento básico de Solow en tiempo continuo con progreso tecnológico Harrod-Neutral a la tasa g y crecimiento poblacional a la tasa n . Supongamos que se cumplen los Supuestos 1 y 2, y definimos la razón capital-trabajo efectivo como en la Ecuación (3.17). Entonces existe un único equilibrio de estado estacionario donde la razón capital-trabajo efectiva es igual a $k^* \in (0, \infty)$ dado por

$$\frac{f(k^*)}{k^*} = \frac{\delta + g + n}{s}.$$

La producción per cápita y consumo crecen a la tasa g .

Demostración: Ver [1], página 66. ■

La Figura 3.6 nos muestra este hecho.

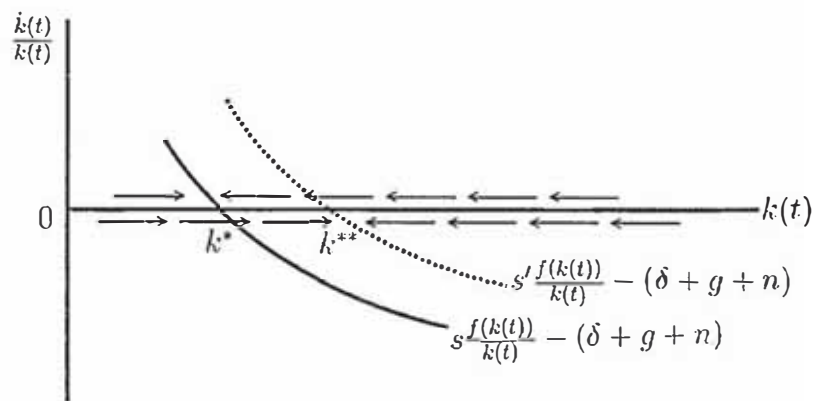


Figura 3.6: Dinámica siguiendo un crecimiento en la tasa de ahorro de s a s' .



El modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

4.1. Supuestos

Los supuestos sobre las firmas es que existen un número grande de firmas idénticas. Cada una de estas firmas tienen función de producción

$$Y = F(K, AL),$$

que satisfacen las mismas hipótesis que el Capítulo 3. Las firmas contratan trabajadores y rentan capital en mercados de factores competitivos, y venden su producción en un mercado de producción competitivo. Para las firmas la tecnología A es dado. Además A crece exógenamente a la tasa g .

Observación 4.1. Además la función de producción satisface el Teorema de Uzawa, por lo

tanto tiene una representación Harrod-neutral.

Los supuestos sobre los hogares es que existen un número grande de hogares idénticos. El tamaño de cada hogar crece a la tasa n . Cada miembro del hogar oferta una unidad de trabajo en todo $t = 0, 1, 2, \dots$. El capital inicial de los hogares es $K(0)/H$, donde $K(0)$ es la cantidad inicial de capital en la economía y H es el número de hogares. Asumiremos también que no existe depreciación.

La función de utilidad del hogar toma la forma

$$U = \int_0^{\infty} e^{-\rho t} u(c(t)) \frac{L(t)}{H} dt, \quad (4.1)$$

donde:

- $c(t)$ es el consumo de cada miembro del hogar en t ,
- $u(\cdot)$ es la función de utilidad instantánea, que da la utilidad de cada miembro,
- $L(t)$ es la población total de la economía, por lo que, $L(t)/H$ es la utilidad instantánea total del hogar en t ,
- ρ es la tasa de descuento.

4.2. El comportamiento de hogares y firmas

En cada t las firmas emplean la cantidad de trabajo y capital. pagan sus productos marginales y venden la producción resultante. Como la función tiene retorno constante y la economía es competitiva, las firmas tienen cero de ganancias.

El producto marginal $\partial F(K, AL)/\partial K$ es $f'(k)$, donde $f(\cdot)$ es la función de producción per cápita. Como los mercados son competitivos, los capitales ganan su producto marginal; y como no hay depreciación, la tasa real de retorno sobre el capital es igual a sus ganancias por unidad de tiempo. Así la tasa de interés real en t es

$$r(t) = f'(k(t)).$$

El producto marginal de trabajo efectivo es $\partial F(K, AL)/\partial(AL)$. Es decir, en términos de $f(\cdot)$, es $f(k) - kf'(k)$. Así el salario real por unidad de trabajo efectivo es

$$w(t) = f(k(t)) - k(t)f'(k(t)).$$

Como el producto marginal de trabajo es $A\partial F(K, AL)/\partial(AL)$, el ingreso por trabajo de un trabajador en t es $A(t)w(t)$.

4.3. Problema de maximización del hogar

El hogar representativo toma las sendas de r y w como dados. Su restricción presupuestaría nos dice que el valor presente de su consumo no puede exceder su riqueza inicial más el valor presente de su ingreso por trabajo. Para escribir formalmente la restricción presupuestaría, necesitamos considerar el hecho que r puede variar con el tiempo. Para eso definamos

$$R(t) = \int_0^t r(\tau) d\tau.$$

Luego tenemos que una unidad del bien producido invertido en $t = 0$ nos da $e^{R(t)}$ unidades del bien en t ; equivalentemente, el valor de una unidad de producción en t en términos de producción en 0 es $e^{-R(t)}$.

Como el hogar tiene $L(t)/H$ miembros, su ingreso laboral en t es igual a $A(t)w(t)L(t)/H$, y sus gastos por consumo es $C(t)L(t)/H$. Por lo tanto la restricción presupuestaria es

$$\int_0^\infty e^{-R(t)} C(t) \frac{L(t)}{H} dt \leq \frac{K(0)}{H} + \int_0^\infty e^{-R(t)} A(t)w(t) \frac{L(t)}{H} dt. \quad (4.2)$$

Expresemos la restricción presupuestaría en términos de consumo e ingreso laboral por unidad de trabajo efectivo, para eso definamos $c(t)$ como el consumo por unidad de trabajo efectivo. El consumo total del hogar $C(t)L(t)/H$ es igual al consumo por unidad de trabajo efectivo $c(t)$ por la cantidad del hogar de trabajo efectivo $A(t)L(t)/H$. Análogamente el capital inicial que hay es $k(0)$ veces $A(0)L(0)/H$. Luego la Ecuación (4.2) se transforma en

$$\int_0^\infty e^{-R(t)} c(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt \leq k(0) \frac{A(0)L(0)}{H} + \int_0^\infty e^{-R(t)} w(t) \frac{A(t)L(t)}{H} dt. \quad (4.3)$$

Además como $A(t)L(t) = A(0)L(0)e^{(n+g)t}$ tenemos que

$$\int_0^{\infty} e^{-R(t)} c(t) e^{(n+g)t} dt \leq k(0) + \int_0^{\infty} e^{-R(t)} w(t) e^{(n+g)t} dt. \quad (4.4)$$

De la Ecuación (4.3) se tiene

$$\frac{k(0)}{H} + \int_0^{\infty} e^{-R(t)} (w(t) - c(t)) A(t) \frac{L(t)}{H} dt \geq 0, \quad (4.5)$$

lo cual es equivalente a

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{k(0)}{H} + \int_0^s e^{-R(t)} (w(t) - c(t)) A(t) \frac{L(t)}{H} dt \geq 0.$$

Si hacemos

$$\frac{K(s)}{H} = e^{R(s)} \frac{K(0)}{H} + \int_0^s e^{R(s)-R(t)} (w(t) - c(t)) A(t) \frac{L(t)}{H} dt,$$

entonces la Ecuación (4.5) se convierte en

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-R(s)} \frac{K(s)}{H} \geq 0.$$

Como $K(s)$ es proporcional a $k(s)e^{(n+g)s}$, tenemos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} e^{-R(s)} e^{(n+g)s} k(s) \geq 0.$$

El problema del hogar es elegir la senda de $c(t)$ para maximizar la utilidad sujeto a la restricción presupuestaria. Como la utilidad marginal de consumo es siempre positiva, el hogar satisface su restricción presupuestaria en la igualdad.

4.4. La dinámica de una economía

A continuación analicemos una economía donde la función de utilidad instantánea está dada por

$$u(c(t)) = \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \theta > 0, \rho - n - (1-\theta)g > 0. \quad (4.6)$$

Esta función es llamada “utilidad de aversión al riesgo relativo constante”.

Observación 4.2. Vale la pena mencionar tres características de la función de utilidad (4.6):

1) $C^{1-\theta}$ es creciente si $\theta < 1$ y decreciente si $\theta > 1$.

2) Si $\theta \rightarrow 1$, entonces la función de utilidad instantánea se simplifica a $\ln c$, esto es, si restamos $1/(1-c)$ de la Ecuación (4.6) (lo cual no afecta el desarrollo, pues se cambia la utilidad por una constante) y tomamos

$$\lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{(C(t))^{1-\theta} - 1}{1-\theta},$$

el cual usando la regla de L'Hospital nos da $\ln c$.

3) El supuesto $\rho - n - (1-\theta)g > 0$, nos asegura que la utilidad no diverge.

Ahora vamos a escribir la función de utilidad del hogar, y la función de utilidad instantánea dada por la Ecuación (4.6) en términos del consumo por unidad de trabajo efectivo. Es decir

$$\begin{aligned} C(t)^{1-\theta} &= (A(t)c(t))^{1-\theta} \\ &= \frac{(A(0)e^{gt})^{1-\theta} c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \\ &= A(0)^{1-\theta} e^{(1-\theta)gt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde usamos el hecho que el consumo por trabajador $C(t)$ es igual a $A(t)c(t)$.

Sustituyendo la Ecuación (4.7) en la Ecuación (4.1) y usando el hecho que $L(t) = L(0)e^{nt}$, tenemos

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \frac{C(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \frac{L(t)}{H} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \left[A(0)^{1-\theta} e^{(1-\theta)gt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} \right] \frac{L(0)e^{nt}}{H} dt \\ &= A(0)^{1-\theta} \frac{L(0)}{H} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} e^{(1-\theta)gt} e^{nt} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt \\ &= B \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt, \end{aligned} \quad (4.8)$$

donde $B = A(0)^{1-\theta}/H$ y $\beta = \rho - n - (1-\theta)g$ que es mayor que cero por condición de la Ecuación (4.6).

Luego usando la función objetivo (4.8) y la restricción presupuestaria (4.4), tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = B \int_0^{\infty} e^{-\beta t} \frac{c(t)^{1-\theta}}{1-\theta} dt + \lambda [k(0) + \int_0^{\infty} e^{-R(t)} e^{(n+g)t} w(t) dt - \int_0^{\infty} e^{R(t)} e^{(n+g)t} c(t) dt].$$

La primera condición para $c(t)$ es

$$B e^{-\beta t} c(t)^{-\theta} = \lambda e^{-R(t)} e^{(n+g)t},$$

tomando logaritmo, nos queda

$$\ln B - \beta t - \theta \ln c(t) = \ln \lambda - R(t) + (n+g)t,$$

y derivando tenemos

$$\begin{aligned} -\beta - \theta \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= -\frac{dR(t)}{dt} + (n+g) \\ &= -r(t) + (n+g), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\dot{c}(t)}{c(t)} &= \frac{r(t) - n - g - \beta}{\theta} \\ &= \frac{r(t) - \rho - \theta g}{\theta}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Como $C(t)$ es igual a $c(t)A(t)$, la tasa de crecimiento de C es igual a la tasa de crecimiento de c más la tasa de crecimiento de A . Es decir, la Ecuación (4.9) implica que el consumo por trabajador está creciendo a la tasa $r(t) - \rho/\theta$. Intuitivamente, la Ecuación (4.9) nos dice como c debe comportarse en el tiempo dado $c(0)$.

La manera más conveniente de describir el desarrollo de la economía es en términos de la evolución de c y k .

4.4.1. Dinámica de c

Como todos los hogares son lo mismo, la Ecuación (4.9) describe la evolución de c no como un único hogar, sino de la economía como un todo. Como $r(t) = f'(k(t))$, tenemos

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{f'(k(t)) - \rho - \theta g}{\theta}. \tag{4.10}$$

Luego tenemos que \dot{c} es cero cuando $f'(k(t)) = \rho + \theta g$. Sea k^* tal que $f'(k^*) = \rho + \theta g$, entonces cuando $k > k^*$, se tiene que $f'(k) < \rho + \theta g$ y \dot{c} es negativo; cuando $k < k^*$, tenemos que \dot{c} es positivo. Esto puede ser observado en la Figura 4.1.

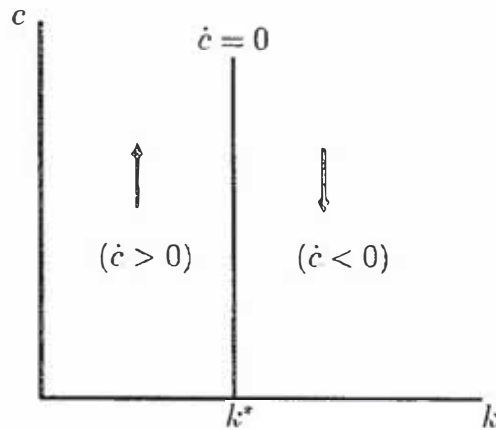


Figura 4.1: Dinámica de c .

4.4.2. Dinámica de k

Como en el modelo de Solow, k es igual a la inversión actual menos la inversión de equilibrio. Como estamos suponiendo que no hay depreciación, la inversión de equilibrio es $(n + g)k$, además la inversión actual es la producción menos el consumo, esto es, $f(k) - c$, es decir,

$$\dot{k}(t) = f(k(t)) - c(t) - (n + g)k(t). \quad (4.11)$$

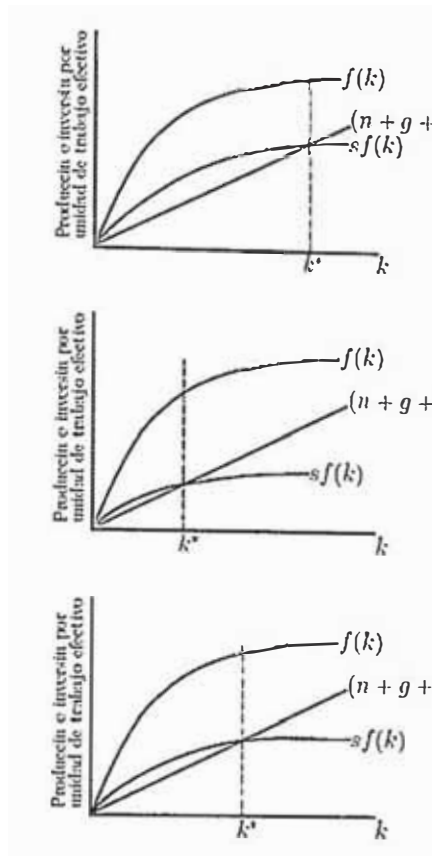


Figura 4.2: Producción, inversión y consumo de la senda de desarrollo.

Para un k dado, el nivel de c que implica que $\dot{k} = 0$ está dado por $f(k) - (n + g)k$. En la Figura 4.2 vemos que \dot{k} es cero cuando el consumo es igual a la diferencia entre la producción actual y las líneas de inversión de equilibrio. Este valor de c es creciente en k hasta $f'(k) = n + g$ y entonces decrece. Cuando c excede el nivel que corresponde a $\dot{k} = 0$, k decrece; cuando c es menor que este nivel, k aumenta. Para k suficientemente grande, la inversión de equilibrio excede a la producción total, por lo que \dot{k} es negativo para todos los valores positivos de c ; todo esto se puede visualizar en la Figura 4.3.

4.4.3. El diagrama de fase

La Figura 4.4 combina las Figuras 4.1 y 4.3. Las flechas muestran el movimiento de c y k , además en el punto E no hay movimiento pues $\dot{c} = \dot{k} = 0$.

Observación 4.3. En la Figura 4.4, k^* se encuentra a la izquierda del punto donde $\dot{k} = 0$ (la cima de la curva en la Figura 4.4). Esto se cumple, pues k^* está definido

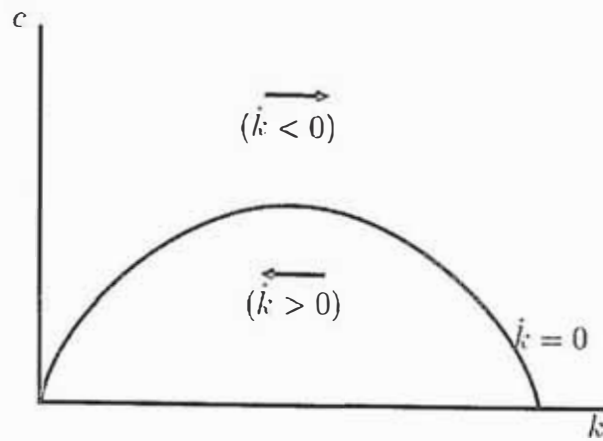


Figura 4.3: Dinámica de k .

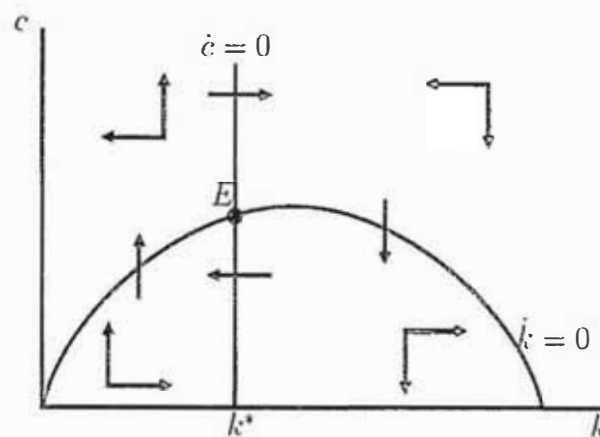


Figura 4.4: Dinámica de c y k .

mediante

$$f'(k^*) = \rho + \theta g,$$

y cuando $\dot{k} = 0$, se cumple que

$$f'(k_{gold}) = n + g.$$

Como $f''(k) < 0$, tenemos que $k^* < k_{gold}$ si y sólo si $\rho + \theta g > n + g$; es decir,

$$\rho - n - (1 - \theta)g > 0,$$

lo cual es una hipótesis en nuestro planteamiento. Por lo tanto k^* está a la izquierda de k_{gold} .

4.4.4. El valor inicial de c

Dado los valores iniciales de k y c , tenemos como evoluciona k y c , como el valor inicial de k es dado, falta determinar el valor inicial de c . Este hecho está abordado en la Figura 4.5. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $k(0) < k^*$. La Figura 4.5 muestra la senda

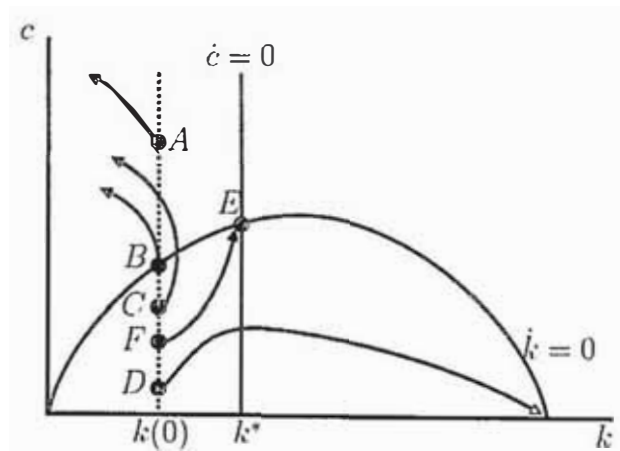


Figura 4.5: Desarrollo de c y k para varios valores iniciales de c .

de c y k para varios niveles iniciales de c .

- Si $c(0)$ se encuentra arriba de la curva $\dot{k} = 0$, por ejemplo el punto A , tenemos que \dot{c} es positivo y \dot{k} es negativo, por lo que la economía se mueve hacia la parte superior izquierda en la Figura 4.5.
- Si $c(0)$ es tal que $\dot{k} = 0$, por ejemplo el punto B , la economía se mueve hacia arriba, obteniéndose que \dot{c} es positivo y \dot{k} es negativo; como en el caso anterior, la economía se mueve hacia la parte superior izquierda en la Figura 4.5.
- Si la economía comienza ligeramente debajo de la curva $\dot{k} = 0$, el punto C en la Figura 4.5, \dot{k} es positivo pero cercano a cero, \dot{c} es positivo y en este caso la economía se mueve hacia arriba y ligeramente a la derecha; cuando cruza la curva $\dot{k} = 0$, tenemos que \dot{k} se vuelve negativo y la economía está sobre una senda que aumenta c y decrece k .
- Si la economía comienza con un consumo inicial muy bajo, como el punto D en la Figura 4.5. Como \dot{c} es proporcional a c (por la relación (4.10)), cuando c es pequeño, \dot{c} es pequeño, entonces c permanece pequeño, por lo que con el pasar del tiempo la

economía cruza la línea $\dot{c} = 0$, después de esto \dot{c} se vuelve negativo y k permanece positivo, haciendo que la economía se mueva a la parte inferior derecha de la Figura 4.5.

- Como \dot{c} y \dot{k} son funciones continuas de c y k , existe un punto crítico (el punto F en la Figura 4.5) entre los puntos C y D tal que en ese nivel inicial c , la economía converge al punto estable E .

Observación 4.4. Las economías que tienen las sendas anteriores satisfacen las Ecuaciones (4.10) y (4.11), pero las sendas de las economías que estudiamos se restringen, pues los hogares deben satisfacer su restricción presupuestaria o que el stock de capital de la economía no puede ser negativa. Si la economía comienza en algún punto arriba del punto F , k se vuelve negativa (para que se siga satisfaciendo las Ecuaciones (4.10) y (4.11)), pero como esto no se cumple, todas estas sendas son eliminadas.

4.4.5. La senda silla

Para cualquier nivel inicial positivo de k , existe un único nivel inicial de c que es consistente con la optimización intertemporal de los hogares, la dinámica del stock de capital, la restricción presupuestaria del hogar y el requisito que k no puede ser negativa; la función c inicial como función de k es conocida como la *senda silla*, la cual es mostrada en la Figura 4.6.

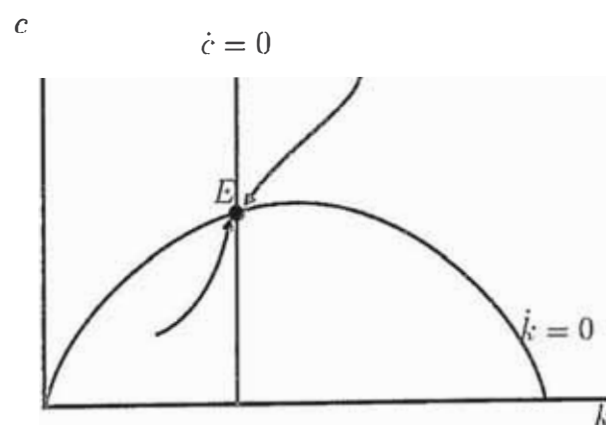


Figura 4.6: La senda silla.

5

Conclusiones

Las conclusiones del presente trabajo son las siguientes:

- Las ecuaciones en diferencias son una herramienta importante en la economía, pues a través del modelo de Solow nos permite estudiar el movimiento de la economía a través de los días.
- El modelo de Solow es un modelo básico en la macroeconomía, con el cual se comienza el estudio de una cantidad considerable de individuos y como las variables económicas, capital, trabajo y tecnología interactúan.
- Mediante la teoría cualitativa de las ecuaciones en diferencia se puede estudiar estabilidad de la función de producción, en la cual intervienen las variables económicas.
- Agregando una variable al modelo de Solow, obtenemos otro modelo, el modelo de

Ramsey-Cass-Koopmans, con un poco más de dificultad que el anterior, el cual nos ayuda a mejorar nuestro acercamiento a lo que sucede en la realidad.

Bibliografía

- [1] Acemoglu D., *Introduction to Modern Economic Growth*. Princeton University Press, 2009.
- [2] Elaydi S., *An Introduction to Difference Equations*. Springer, 2005.
- [3] Galor O., *Discrete Dynamical Systems*. Springer, 2007.
- [4] Goldberg S., *Introduction to Difference Equations. With illustrative examples from Economics, Psychology and Sociology*. John Wiley & Sons, Inc., 1958.
- [5] Hirsch, M. W.; Smale, S. y Devaney, R. L., *Differential Equations, Dynamical Systems, And An Introduction To Chaos*. Academic Press, 2004.
- [6] Lang, S., *Real Analysis*. Addison-Wesley Publishing Company, 1983.
- [7] Stokey, N. L.; Lucas, R. E. Jr. *Recursive Methods in Economic Dynamics*. Harvard University Press, 1989.