

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMÁTICA



TESIS PARA OPTAR EL TITULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO en MATEMATICA
TITULADA

**Análisis de Viabilidad en la extracción de
Recursos Renovables**

PRESENTADA POR:

Luis Ernesto Flores Luyo

ASESOR:

Dr. Eladio Ocaña Anaya

Lima - Perú

2009

RESUMEN

El objetivo de esta tesis es determinar el núcleo de viabilidad para un problema de control en tiempo discreto asociado a modelos de gestión en recurso forestal distribuidos por clases de edades. La dinámica asociada a este modelo será del tipo lineal, $x(t+1) = Ax_k + bh(t)$ ($t \in \mathbb{N}$) con $x(0)$ dado, donde la matriz A será considerada matriz del tipo Leslie.

Nos centraremos básicamente (para comprender mejor el comportamiento de este problema) cuando la función h es constante (no dependiendo de t) y mostraremos en este caso, que la existencia de este núcleo de viabilidad está estrechamente relacionada con la existencia (factible) del punto fijo (que bajo ciertas condiciones este es único) de la función (para h fijo) $x \rightarrow Ax + bh$ sobre \mathbb{R}_γ^n .

También introduciremos el concepto de **conjuntos deseables**, **núcleo de viabilidad hasta el tiempo finito k** , etc, y estudiaremos la relación existente entre estos conjuntos con el punto fijo antes mencionado.

Además, para un sistema asociado a una matriz de evolución de orden 3, hallaremos en forma gráfica el núcleo de viabilidad asociado, mediante el proceso computacional de coloreo. En efecto, dado k finito, se dice que un punto inicial tomado aleatoriamente en el conjunto admisible está en el núcleo de viabilidad hasta el tiempo k , y será pintado de **color verde**, si este punto hasta su k -ésima iteración permanecen siempre en el conjunto admisible. En caso contrario, este punto inicial admisible será pintado de **color rojo**. Luego, comparando las regiones coloreadas para diferentes k 's, podemos obtener el núcleo de viabilidad deseado.

En la última parte daremos ejemplos particulares en la que calculamos el núcleo de viabilidad.

Contenido

Contenido	iv
Introducción	1
1 Modelo de Leslie	5
1.1 Matrices de Leslie	8
2 Formulación del Problema	9
2.1 Conjuntos deseables y el núcleo de viabilidad .	10
2.2 Iterando los conjuntos $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})$	13
3 Deteminación del Núcleo de Viabilidad	15
3.1 Conjunto invariante	16
3.2 Matriz de Markov	17
3.3 Matriz de Markov positiva	18
3.4 Matriz primitiva	23
3.5 Resultados principales	28
4 Implementación Numérica para Determinar el Núcleo de Viabilidad:	
Ejemplos Particulares	35
4.1 Ejemplo sin extracción	36
4.2 Ejemplo con extracción $h = 1$	38
4.3 Ejemplo con extracción $h = 2$	39
4.4 Programación hecho para Matlab 7.5	41
4.5 Núcleos de Viabilidad hasta el tiempo k y Núcleos de Viabilidad	43
Bibliografía	49

Introducción

Una de las mayores amenazas para la vida del hombre en la Tierra es la deforestación. Los bosques ayudan a mantener el equilibrio ecológico y la biodiversidad, limitan la erosión en las cuencas hidrográficas e influyen en las variaciones del tiempo y en el clima. Asimismo, abastecen a las comunidades rurales de diversos productos, como la madera, alimentos, combustible, forrajes, fibras o fertilizantes orgánicos.

En esta tesis proponemos un mecanismo, como primera aproximación, de como mantener por siempre en una configuración deseable (satisfaciendo ciertas restricciones: biológicas, económicas, etc.) la forestación y así no llegar por ejemplo a la extinción de estos recursos. Para tal efecto abstraemos tal problema mediante una formulación de un sistema de control modelando un recurso renovable estructurado por clases de edades mediante la siguiente ecuación en diferencia [1], [3], [4], [7]:

$$\begin{cases} x(t+1) = f(x(t), h(t)), & t = 0, 1, \dots \\ x(0) \text{ dada,} \end{cases} \quad (1)$$

donde la variable $x(t)$ pertenece al espacio de estado de dimensión finita $\mathbb{X} = \mathbb{R}^{n_x}$ y la variable $h(t)$ pertenece al espacio de control, también de dimensión finita, $\mathbb{U} = \mathbb{R}^{n_u}$. La función $f : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ representa la evolución del sistema.

En nuestro caso, la dinámica f será modelada mediante la siguiente función afín $\mathbb{X} \times \mathbb{U} \ni (x, h) \rightarrow f(x, h) := Ax + bh$, donde A es una matriz del tipo Leslie [4], [7],

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_n & 1 - \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - \alpha_1 \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix}.$$

En este caso, $h \in \mathbb{U}$ representa el nivel de extracción de estas especies.

La herramienta básica matemática de estudio en este trabajo es el análisis de *núcleo de viabilidad* para el caso discreto [1], [3], [4], que está estrechamente relacionado, en este caso, con la sostenibilidad (hasta un tiempo prefijado: finito o infinito) de estas especies.

La teoría de la viabilidad fué desarrollada a principios de los años 1990 por el matemático francés Jean-Pierre Aubin [1] y sus colaboradores. Inicialmente este fué presentado para problemas continuos asociados a la inclusión dinámica del tipo

$$x'(t) \in F(x(t)) \quad \text{para casi todo } t \geq 0, \quad (2)$$

donde $F : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ es considerada una multifunción arbitraria. En este caso, se dice que un subconjunto $K \subset \text{dom}(F)$ es un dominio de viabilidad de F si

$$F(x) \cap T_K(x) \neq \emptyset \quad \text{para todo } x \in K,$$

donde $T_K(x)$ denota el cono contingente de K en x definido por

$$T_K(x) = \left\{ v : \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{d(x + hv, K)}{h} = 0 \right\},$$

denotando $d(z, K)$ la distancia (Euclidiana) de z a K , $d(z, K) = \inf_{w \in K} \|z - w\|$.

Se define el núcleo de viabilidad (para este caso continuo) como el mayor (en el sentido de inclusión) dominio de viabilidad K de F (este puede ser vacío).

Asociado a la dinámica (2), se dice, para $K \subset \text{dom}(F)$, que una función $x(\cdot) : I \rightarrow \mathbb{X}$ es viable en K sobre el intervalo I si

$$x(t) \in K \quad \text{para todo } t \in I.$$

El siguiente hecho muestra la relación existente entre núcleo de viabilidad y función viable ([1]). En este caso la multifunción F es considerada una multifunción Marchaud: F es semicontinua superior con $\text{dom}(F) \neq \emptyset$ tal que

$$\|F(x)\| \leq c(\|x\| + 1) \quad \text{para todo } x \in \text{dom}(F)$$

para algún $c > 0$.

Teorema 0.0.1 *Considerando F Marchaud, sea $K \subset \text{dom}(F)$ cerrado. El núcleo de viabilidad de K es igual al conjunto de puntos iniciales x_0 tal que existe $x(\cdot)$ solución de (2) con $x(0) = x_0$, viable en K sobre $I = [0, +\infty[$.*

La definición de núcleo de viabilidad para el caso discreto ([1]), se sigue directamente de la definición para el caso continuo haciendo uso la aproximación de Euler para la derivada ([6]):

Para $\rho > 0$ (fijo arbitrario) y asociado a la dinámica (2), se define la dinámica en tiempo discreto

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{\rho} \in F(x_k) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

Denotando $G_\rho = I + \rho F$, el sistema (3) puede ser escrito como

$$x_{k+1} \in G_\rho(x_k) \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

En este caso (ver [1], [8]), reemplazando G_ρ por G , se dice que un subconjunto V es un dominio de viabilidad (discreto) de G si

$$G(x) \cap V \neq \emptyset \quad \text{para todo } x \in V.$$

En este caso el núcleo de viabilidad de G respecto a un conjunto K es el mayor (en el sentido de inclusión) dominio de viabilidad de G contenido en K .

En particular, si se considera la siguiente dinámica gobernada por la ecuación en diferencia

$$\begin{cases} x_{k+1} = f(x_k, u_k), & k = 0, 1, \dots \\ x_0, & \text{dado} \end{cases} \quad (5)$$

con $f : \mathbb{X} \times \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{X}$ una función arbitraria, entonces definiendo $F : \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{X}$ tal que

$$G(x_k) := \{f(x_k, u_k) : (x_k, u_k) \in \mathbb{D}\} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

con $\mathbb{D} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{U}$, se tiene que el núcleo de viabilidad de G respecto a un conjunto $K = \text{Proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{D})$ es

$$\left\{ x_0 \in \mathbb{X} \left| \begin{array}{l} \exists (u_0, u_1, \dots) \text{ y } (x_0, x_1, \dots) \text{ satisfaciendo (5)} \\ \text{y } (x_k, u_k) \in \mathbb{D} \text{ para todo } k = 0, 1, \dots \end{array} \right. \right\}.$$

A continuación pasamos a describir los capítulos de esta tesis:

En el primer capítulo, estudiaremos las matrices de Leslie, explicaremos bajo que condiciones la población cumple la dinámica de población de Leslie.

En el segundo capítulo, formulamos el problema y damos algunas definiciones básicas: conjuntos deseables, núcleo de viabilidad, núcleo de viabilidad hasta el periodo k (finito), etc. Establecemos en esta parte que determinar el núcleo de viabilidad está estrechamente relacionado con el análisis de convergencia de sucesiones del tipo $\{A^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ (cuando $x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$) y de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} A^j b$.

En el tercer capítulo, que es el capítulo que contiene los resultados principales de este trabajo, establecemos, además del estudio de la convergencia de las sucesiones antes mencionadas, que para matrices del tipo Leslie primitiva, determinar el núcleo de viabilidad mediante un algoritmo finito (haciendo uso los núcleos de viabilidad de periodos finitos) está estrechamente relacionado con que el punto límite de la sucesión $A^i x + (\sum_{j=0}^{i-1} A^j b)h$ esté en el interior relativo del poliedro

$$\mathbb{R}_{\gamma+}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n x_j = \gamma\}.$$

Finalmente en el Capítulo 4, damos algunos ejemplos particulares para determinar el núcleo de viabilidad. Este hecho lo desarrollamos numéricamente haciendo uso de Matlab 7.5.

Capítulo 1

Modelo de Leslie

Cuando la variación de una población se realiza en función del tiempo, obtenemos un proceso (continuo o discreto) que recibe el nombre de dinámica de la población. El objetivo de la dinámica de poblaciones es estudiar los cambios numéricos que sufren las poblaciones, determinar sus causas, predecir su comportamiento y analizar sus consecuencias ecológicas. Estudiaremos un importante modelo de dinámica de poblaciones denominado modelo de Leslie en honor al autor del método, el fisiólogo Patrick Holt Leslie (1900-1974).

Los modelos que estudian el crecimiento independientemente de la densidad de dichas poblaciones, corresponden a los casos más simples. Existen dos procesos que afectan al cambio del tamaño de la población: los nacimientos y las migraciones, que aumentan su tamaño, y las defunciones y las emigraciones que la disminuyen. En los modelos más simplistas podemos suponer que estamos estudiando una población en la que no intervienen ninguno de esos procesos. Las hipótesis más simplistas que podemos plantear serían del tipo:

- Todos los individuos son iguales (especialmente lo que hace referencia a la natalidad y a la supervivencia).
- Los recursos disponibles son ilimitados.

Es evidente que estas hipótesis serán válidas solamente en un número limitado de casos. Parece que la tasa de mortalidad será mayor entre los individuos de mayor edad que entre los más jóvenes. Asimismo la tasa de fecundidad depende también

de la edad (por ejemplo las hembras demasiado jóvenes no podrán tener hijos en los primeros estadios de su vida).

Con carácter general, podemos suponer que la población consiste enteramente de hembras. En realidad, para la mayoría de las especies la cantidad de machos es prácticamente la misma que la de hembras. Por otra parte, en lo que respecta a las cuestiones reproductivas, el papel determinante es jugado por las hembras y no por los machos.

Vamos a plantear en esta sección modelos para el estudio de una población en los que se tienen en cuenta características particulares de cada uno de los individuos. Según estas características los agruparemos en clases que sean homogéneas a efectos reproductivos y de supervivencia.

Como ya hemos comentado, normalmente el número de descendientes producidos depende de la edad de los adultos. Por ejemplo, en una población humana la mujer adulta con un promedio de edad de 50 años tendrá menos hijos que la mujer con un promedio de 21 años. A fin de superar esta dificultad es necesario introducir un modelo que permita el agrupamiento por edades con diferentes tasas de fertilidad. Este es el modelo que comúnmente utilizan los demógrafos para el crecimiento de una población (humana o animal). Como en muchas de las poblaciones estudiadas es muy difícil determinar la paternidad, ya hemos mencionado también que, por regla general, sólo se analiza la evolución de la población de hembras. Cuando la población que tenemos que estudiar es tal que el número de hembras y machos es muy diferente, entonces esta hipótesis supone una gran restricción sobre el modelo, pero por lo general, esta circunstancia no suele darse en la mayoría de los casos. Por tanto, el modelo de Leslie describe el crecimiento de la parte femenina de una población clasificando a las hembras por edades en intervalos de igual número de años. Supongamos que la edad máxima alcanzada por una hembra de una población sea L años y que esta población la dividimos en n clases de edades. Cada clase, es evidente que tendrá $L = n$ años de duración. Por lo tanto, podemos construir la siguiente tabla

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \dots & [0, \frac{L}{n}) \\
 2 & & [\frac{L}{n}, \frac{2L}{n}) \\
 & & \dots \\
 n-1 & \dots & [(\frac{n-2}{n})L, (\frac{n-1}{n})L) \\
 n & \dots & [(\frac{n-1}{n})L, L)
 \end{array}$$

Supongamos que en el momento inicial ($t = 0$) conocemos el número de hembras que hay en cada uno de los intervalos. Llamaremos $x_i(0)$ al número de hembras existentes en el intervalo i -ésimo en el momento inicial. Podemos construir el vector

$$x(0) = (x_1(0), x_2(0), \dots, x_n(0)),$$

conocido con el nombre de **vector de distribución inicial de las edades**. Al pasar el tiempo, por causas biológicas (nacimientos, envejecimiento, muertes), el número de hembras que hay en cada una de las clases se va modificando. Lo que pretendemos es ver como evoluciona el vector $x(0)$ de distribución inicial con el tiempo.

La manera más fácil de proceder, para estudiar el proceso de envejecimiento es hacer observaciones de la población en tiempos discretos $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$. El modelo de Leslie requiere que la duración entre dos tiempos consecutivos de observación sea igual a la duración de los intervalos de edad; esto es:

$$t_0 = 0; t_1 = \frac{L}{n}, t_2 = \frac{2L}{n}; \dots; t_k = \frac{kL}{n}; \dots$$

Bajo esta hipótesis todas las hembras de la clase $(i + 1)$ en el tiempo t_{k+1} estaban en la clase i en el tiempo t_k (suponiendo que no existen muertes ni nacimientos).

Los procesos de nacimiento y muerte entre dos tiempos consecutivos de observación se pueden describir mediante los siguientes parámetros demográficos:

- **Al promedio del número de hijas** que tiene una hembra durante el tiempo que permanece en la clase de orden i , lo llamaremos a_i con $i = 1, 2, \dots, n$.
- **La fracción de las hembras** que están en la clase i y se espera que sobrevivan y pasen a la clase de orden $i + 1$ la llamaremos b_i con $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Es evidente, según las definiciones dadas que

1. $a_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.
2. $0 < b_i \leq 1$ con $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

El caso $b_i = 0$, no puede ocurrir ya que esto supondría que ninguna hembra viviría mas allá de la clase i . También supondremos que hay al menos un $a_i > 0$ lo que garantiza que habrá nacimientos. A la clase donde $a_i > 0$ la llamaremos la clase fértil.

Sea $x(k) = (x_1(k), x_2(k), \dots, x_n(k))$ el vector distribución de las edades en el tiempo

El número de hembras de la primera clase en el tiempo t_k vendrá dado, únicamente por las nacidas entre los tiempos t_{k-1} y t_k . Podemos escribir,

$$x_1(k) = a_1x_1(k-1) + a_2x_2(k-1) + \dots + a_nx_n(k-1) \quad (1.1)$$

Por otro lado, el número de hembras en la clase de orden $i+1$ con $i = 1, 2, \dots, n-1$ en el tiempo t_k es igual al número de hembras de la clase de orden i en el tiempo t_{k-1} que todavía están vivas en el tiempo t_k .

$$x_{i+1}(k) = b_ix_i(k-1), \quad i = 1, 2, \dots, n-1. \quad (1.2)$$

1.1 Matrices de Leslie

Expresando matricialmente (1.1) y (1.2) tenemos,

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \\ \vdots \\ x_n(k-1) \end{pmatrix}$$

o de una forma vectorial,

$$x(k) = Lx(k-1) \quad (1.3)$$

donde

$$L = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

es lo que se denomina matriz de Leslie. De (1.3) se tiene que

$$x(k) = L^k x(0)$$

De este modo, conocida la distribución inicial $x(0)$ y la matriz L , se puede determinar la distribución de las hembras en cualquier tiempo futuro.

Capítulo 2

Formulación del Problema

En esta Tesis estudiaremos el siguiente sistema en tiempo discreto modelando un recurso renovable estructurado por clases de edades y expresado mediante la ecuación en diferencia

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}h(t), & t = 0, 1, \dots \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x}(t)$ pertenece al espacio de estado de dimensión finita $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ y la variable $h(t)$ pertenece al espacio de control, también de dimensión finita, $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$. \mathbf{b} es un vector columna, por ejemplo $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$ y A es una matriz de evolución natural (esto es, sin extracción). Ejemplos típicos de estas matrices A son aquellas del tipo Leslie:

$$\begin{pmatrix} 1 - \alpha_n & 1 - \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 - \alpha_1 \\ \beta_n & \beta_{n-1} & \beta_{n-2} & \dots & \beta_2 & \beta_1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

donde α_i, β_i son números en $[0, 1]$. Los parámetros α_i representan la mortalidad natural del recurso en estudio, y los β_i el reclutamiento (natural o artificial).

Para $t = 0, 1, \dots$, cada componente $x_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) del vector $\mathbf{x}(t)$ en el sistema (2.1) representa la cantidad de individuos cuya edad en el tiempo t están es $j-1$ y j , y la componente $x_n(t)$ representa la cantidad de individuos (adultos) cuya edad en el tiempo t son mayores que $n-1$. En este caso, $\mathbf{x}(t)$ representa la cantidad

de individuos por clases de edades en el tiempo t .

Así por ejemplo, si en el sistema (2.1) la matriz A es la matriz de Leslie (2.2) con $\beta_i = \alpha_i$ (para todo $i = 1, 2, \dots, n$) y el vector \mathbf{b} de la forma $\begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$, entonces la cantidad de individuos por clases de edades en el periodo $t + 1$ son:

- i) EL TOTAL DE ADULTOS: $x_n(t + 1) = (1 - \alpha_n)x_n(t) + (1 - \alpha_{n-1})x_{n-1}(t)$:= la suma de adultos sobrevivientes más el total de individuos (pre-adultos) sobrevivientes de edad entre $n - 2$ y $n - 1$, todos del periodo t .
- ii) EL TOTAL DE INDIVIDUOS DE EDAD $i = 2, \dots, n - 1$: $x_i(t + 1) = (1 - \alpha_{i-1})x_{i-1}(t)$:= el total de individuos sobrevivientes de edad entre $i - 2$ y $i - 1$ del periodo t .
- iii) EL TOTAL DE JUVENILES: $x_1(t + 1) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t)$:= el total de individuos reclutados (naturalmente o artificialmente) que coincide con el total de individuos muertos (también, naturalmente o artificialmente) de todas las edades en el periodo t .

2.1 Conjuntos deseables y el núcleo de viabilidad

Un conjunto deseable del sistema (2.1) es un subconjunto no vacío \mathbb{D} de $\mathbb{X} \times \mathbb{U}$ satisfaciendo:

$$(\mathbf{x}(t), h(t)) \in \mathbb{D} \quad \text{para todo } t = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

El conjunto de los estados deseables y controles deseables son las proyecciones del conjunto \mathbb{D} sobre los espacios \mathbb{X} y \mathbb{U} , respectivamente. Esto es,

$$\text{El conjunto de los estados deseables} \equiv \text{Proj}_{\mathbf{x}}(\mathbb{D}).$$

$$\text{El conjunto de los controles deseables} \equiv \text{Proj}_{\mathbb{U}}(\mathbb{D}).$$

Definición 2.1.1 *Se dice que un subconjunto \mathbb{V} de \mathbb{X} es debilmente invariante (o un dominio de viabilidad) respecto al sistema (2.1) y a un conjunto deseable \mathbb{D} , si*

$$\forall x \in \mathbb{V}, \exists h \in \mathbb{U} \quad \text{con } (x, h) \in \mathbb{D} \quad \text{tal que } Ax + bh \in \mathbb{V}.$$

Se sigue de la definición que si para algún $(x, h) \in \mathbb{D}$ se cumple $x = Ax + bh$, entonces el conjunto unitario $\{x\}$ es un dominio de viabilidad del sistema (2.1) con respecto a \mathbb{D} . Este punto x es llamado un punto de equilibrio deseable del sistema (2.1) con respecto a \mathbb{D} . En general, denotando

$$\mathbb{E} := \{x \in \mathbb{X} : \exists h \in \mathbb{U} \text{ tal que } (x, h) \in \mathbb{D} \text{ y } x = Ax + bh\},$$

entonces, \mathbb{E} también es un dominio de viabilidad del sistema (2.1) con respecto a \mathbb{D} .

El *núcleo de viabilidad* del sistema (2.1) con respecto a \mathbb{D} es el mayor dominio de viabilidad (en el sentido de inclusión) del sistema (2.1) con respecto a \mathbb{D} . Denotando por

$$\mathbb{X} \times \mathbb{U} \ni (x, h) \rightarrow f(x, h) := Ax + bh, \quad (2.4)$$

denotemos a tal núcleo de viabilidad por $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$. Entonces,

$$\mathbb{V}(f, \mathbb{D}) = \left\{ x_0 \in \mathbb{X} \left| \begin{array}{l} \exists (h(0), h(1), \dots) \text{ y } (x_0 = x(0), x(1), \dots) \\ \text{satisfaciendo (2.1) y (2.3) para todo } t = 0, 1, \dots \end{array} \right. \right\}. \quad (2.5)$$

Debido a que cada $x \in \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ implica $(x, h) \in \mathbb{D}$ para algún h en \mathbb{U} , se tiene

$$\mathbb{V}(f, \mathbb{D}) \subset \mathbb{V}^0 := \text{Proj}_{\mathbb{X}}(\mathbb{D});$$

pero, en general la inclusión es estricta.

Conocer el núcleo de viabilidad tiene un interés muy importante, ya que describe en nuestro caso, el conjunto de biomazas iniciales (en el instante $t = 0$) para el cual puede ser controlada (variando sobre el conjunto de controles factibles $\text{Proj}_{\mathbb{U}}(\mathbb{D})$) y mantenerse por siempre (para $t = 1, 2, \dots$) en una situación deseable (respecto a \mathbb{D}) y así evitar por ejemplo la extinción de las especies en estudio. No obstante, calcular este núcleo de manera explícita no es una tarea fácil en general. En esta tesis mostraremos que bajo ciertas condiciones razonables, este núcleo de viabilidad puede ser obtenida mediante un algoritmo finito. En particular, para el caso cuando la matriz asociada al sistema (2.1) es del tipo Leslie (con $\beta_i = \alpha_i = \alpha$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$), entonces este algoritmo consta de a lo más $n - 2$ iteraciones. También mostraremos mediante un ejemplo que si $\beta_i \neq \alpha_i$ para algún i , entonces el algoritmo anterior termina en más de $n - 2$ iteraciones.

Para construir tal algoritmo, el hecho de introducir el *núcleo de viabilidad* hasta el periodo $k = 1, 2, \dots$, es necesario.

Definición 2.1.2 Con las mismas notaciones anteriores en la definición de núcleo de viabilidad, se define el núcleo de viabilidad hasta el periodo $k \in \mathbb{N}$, como el conjunto

$$\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) := \left\{ x_0 \left| \begin{array}{l} \exists (h(0), h(1), \dots, h(k)) \text{ y } (x_0 = x(0), x(1), \dots, x(k)) \\ \text{satisfaciendo (2.1) para } t = 0, 1, \dots, k-1 \\ \text{y (2.3) para } t = 0, 1, \dots, k \end{array} \right. \right\}. \quad (2.6)$$

Por definición,

$$\mathbb{V}(f, \mathbb{D}) \subset \mathbb{V}_{k+1}(f, \mathbb{D}) \subset \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) \subset \mathbb{V}_0(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}^0. \quad (2.7)$$

Además, por inducción, los núcleos de viabilidad hasta el instante k satisfacen la siguiente relación de programación dinámica,

$$\mathbb{V}_0(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}^0,$$

$$\mathbb{V}_{k+1}(f, \mathbb{D}) = \left\{ x \in \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) \left| \begin{array}{l} \exists h \in \mathbb{U}, (x, h) \in \mathbb{D} \\ \text{y } f(x, h) \in \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) \end{array} \right. \right\}.$$

Debido a la relación (2.7), se tiene la aproximación siguiente:

$$\mathbb{V}(f, \mathbb{D}) \subset \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}).$$

Además (ver [5]), si la sucesión $\{\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})\}_{k=0,1,2,\dots}$ se estabiliza, esto es, si para algún k se tiene $\mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}_{\bar{k}+1}(f, \mathbb{D})$, entonces para $p \geq 1$ se tiene $\mathbb{V}_{\bar{k}+p}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D})$ y además $\mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D})$ coincide exactamente con $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$.

Esto se resume en el siguiente teorema [5]:

Teorema 2.1.1 Respecto a una iteración arbitraria finita k , las siguientes dos relaciones son equivalentes:

i) $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}_{k+1}(f, \mathbb{D})$.

ii) $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$.

Así, para encontrar el núcleo de viabilidad se deben hallar en cada iteración los conjuntos $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})$ y ver en que momento se obtiene la igualdad en i). Pero, a menudo, no es una tarea fácil expresar explícitamente estos conjuntos $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})$. En efecto, la

dificultad radica en el hecho que en cada iteración surgen nuevas restricciones ya sea sobre la variable de estado o sobre la variable de control (o ambos), y aún teniendo la igualdad en i), puede ocurrir que $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ no quede expresado explícitamente; esto dependerá mucho del conjunto deseable \mathbb{D} y de la dinámica f que intervienen en el problema. Más adelante veremos que para la dinámica y los conjuntos deseables estudiados en este trabajo, este núcleo de viabilidad se obtiene de manera explícita haciendo uso el Teorema 2.1.1.

2.2 Iterando los conjuntos $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})$

En lo que sigue de esta tesis, el conjunto admisible \mathbb{D} asociado al sistema (2.1) será de la forma

$$\mathbb{D} = \mathbb{R}_{\gamma+}^n \times \{h\}, \quad (2.8)$$

donde γ y h son dos números reales no negativos con $\gamma > 0$, y

$$\mathbb{R}_{\gamma+}^n := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n : \sum_{j=1}^n x_j = \gamma\}.$$

De (2.6), se sigue

$$\begin{aligned} \mathbb{V}_0(f, \mathbb{D}) &= \{x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n\} \\ \mathbb{V}_1(f, \mathbb{D}) &= \{x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n : Ax + bh \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n\} \\ \mathbb{V}_2(f, \mathbb{D}) &= \{x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n : Ax + bh \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n, A^2x + (Ab + b)h \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n\} \\ &\vdots \\ \mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) &= \{x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n : A^i x + \left(\sum_{j=0}^{i-1} A^j b\right)h \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n \text{ para todo } i = 1, 2, \dots, k\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Así, para garantizar la existencia del núcleo de viabilidad $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ y, si es posible, la expresión de este, las expresiones de estos $\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D})$ nos lleva a estudiar la convergencia de las sucesiones $\{A^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ (cuando $x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$) y de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} A^j b$. Mostraremos en el capítulo siguiente, que para matrices Markov A (en particular, para matrices

Leslie (3.5) con $\beta_i = \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$) y para vectores \mathbf{b} en la que la suma de sus componentes suman cero, estas sucesiones (para todo $x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$) y esta serie, son convergentes. En efecto, en este caso, la convergencia de la sucesión $\{A^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ no depende de x y que su límite es de la forma $\gamma \mathbf{v}$, donde \mathbf{v} es un autovector de la matriz A cuyo autovalor correspondiente es $\mu = 1$. En este caso (y es único con esta propiedad), las componentes de este vector \mathbf{v} son todas estrictamente positivas y cuya suma es igual a 1. Denotando $\mathbf{c} = \sum_{j=0}^{\infty} A^j \mathbf{b}$, entonces $\mathbf{x} := \gamma \mathbf{v} + \mathbf{c}h$ es un punto fijo (en realidad mostraremos en la Proposición 3.5.1 que este es el único punto fijo) de la función $\mathbb{R}_{\gamma+}^n \ni x \rightarrow Ax + \mathbf{b}h$:

$$\mathbf{x} = A\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{b}h. \quad (2.9)$$

Capítulo 3

Deteminación del Núcleo de Viabilidad

Con las notaciones del capítulo anterior, mostraremos en esta parte, además de las convergencias mencionadas en la última parte del capítulo anterior, los siguientes items: denotando \mathbf{x} el punto fijo definido en (2.9),

- \mathbf{x} pertenece siempre a \mathbb{R}_γ^n .
- $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$ si y sólo si $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ es no vacío.
- si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\gamma++}^n := \mathbb{R}_{\gamma+}^n \cap \mathbb{R}_{++}^n$, entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathbb{V}_{k_0}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D}).$$

En este caso, si denotamos $\mathbb{D}_h := \mathbb{R}_{\gamma+}^n \times \{h\}$ (en este caso $\mathbb{D}_{\bar{h}} = \mathbb{D}$), existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall h, |h - \bar{h}| < \delta \text{ se tiene } \mathbb{V}(f, \mathbb{D}_h) \neq \emptyset,$$

- para $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$ tal que al menos una de sus componentes es cero, entonces existe una sucesión $\{h_j\}_{j \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+$ con $h_j \rightarrow h$ tal que $\mathbb{V}(f, \mathbb{D}_{h_j}) = \emptyset$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Asociado al sistema (2.1), haremos uso de la siguiente hipótesis:

Hipótesis H1: Asumamos las siguientes condiciones sobre la matriz A y el vector \mathbf{b} :

$$a) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, \quad a_{ij} \geq 0 \quad \text{y} \quad \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1.$$

$$b) \sum_{i=1}^n b_i = 0.$$

Observación 3.0.1 La condición a) de la Hipótesis H1 aplicado a la matriz de Leslie (3.5) implica que $\beta_i = \alpha_i$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Gran parte de las definiciones y notaciones de este capítulo son dadas de [9].

3.1 Conjunto invariante

Definición 3.1.1 Se dice que un subconjunto $\mathbb{V} \subset \mathbb{X}$ es invariante por la dinámica (2.1) con nivel $h \in \mathbb{R}_+$, si para todo \mathbf{x} perteneciente a \mathbb{V} se tiene que $A\mathbf{x} + \mathbf{b}h$ también pertenece a \mathbb{V} . Esto es,

$$A\mathbb{V} + \mathbf{b}h \subset \mathbb{V}.$$

Proposición 3.1.1 Asumiendo las condiciones de la Hipótesis H1, el conjunto \mathbb{R}_γ^n es invariante por la dinámica (2.1) con nivel h , para todo $h \in \mathbb{R}_+$.

Demostración Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ y $h \in \mathbb{R}_+$, entonces

$$A\mathbf{x} + \mathbf{b}h = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}x_k + b_1.h \\ \sum_{k=1}^n a_{2k}x_k + b_2.h \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{nk}x_k + b_n.h \end{pmatrix}.$$

Considerando ahora $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\gamma^n$ y denotando $\mathbf{y} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}h$, se tiene, por Hipótesis H1 y por el hecho que $\sum_{k=1}^n x_k = \gamma$,

$$\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k + \left(\sum_{k=1}^n b_k\right)h = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^n x_k = \gamma.$$

Por lo tanto $A\mathbf{x} + \mathbf{b}h \in \mathbb{R}_\gamma^n$. ■

Corolario 3.1.1 Asumiendo las condiciones de la Hipótesis H1, el conjunto $\mathbb{R}_{\gamma+}^n$ es invariante por la dinámica (2.1) con nivel $h = 0$ (sin extracción).

Demostración Por lo visto en la proposición 1 solo basta demostrar que si $\mathbf{x} \geq 0$ entonces $A\mathbf{x} \geq 0$, pero este se sigue del hecho que todas las componentes a_{ij} de A son no negativos. ■

3.2 Matriz de Markov

Las matrices de Markov surgen de manera natural en biología, psicología, economía, demografía y en muchas otras áreas de estudio, por lo que son una aplicación importante del algebra lineal y de la probabilidad. El nombre, matriz de Markov se debe al matemático ruso Andrei Andreevich Markov (1856 -1922), quien las definió por primera vez en un artículo de 1906 que trataba la ley de los grandes números y posteriormente demostró muchos resultados estandar sobre ellas. Su interés en estas sucesiones se originó en las necesidades de la teoría de la probabilidad; Markov nunca trato sus aplicaciones a las ciencias.

Definición 3.2.1 Una matriz real cuadrada de orden n , $A = [a_{ij}]$, es llamada una **matriz de Markov** o **matriz estocástica por filas** si su traspuesta A^t satisface la condición a) de la Hipótesis H1, es decir

$$a_1) \forall i, j \in \{1, \dots, n\}, a_{ij} \geq 0.$$

$$a_2) \forall i \in \{1, \dots, n\}, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1.$$

Observación 3.2.1 - La condición $a_2)$ es equivalente a la relación $A\mathbf{p} = \mathbf{p}$, donde $\mathbf{p} = [1, \dots, 1]^t$. De esto se tiene que $\mu = 1$ es siempre un autovalor de una matriz de Markov.

- La traspuesta de las matrices de Leslie (3.5), son matrices de Markov si y solo si $\alpha_i = \beta_i$ para $i = 1, \dots, n$.

- Más tarde veremos que para este último tipo de matrices Leslie, estos también tienen la propiedad de ser matrices primitivas (ver definición más adelante).

Proposición 3.2.1 Cada autovalor λ de una matriz de Markov satisface $|\lambda| \leq 1$.

Demostración Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ un autovalor de A y \mathbf{x} su correspondiente autovector, entonces

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{3.1}$$

Sea k tal que $|x_j| \leq |x_k|$ para todo $j \in \{1, \dots, n\}$. Entonces considerando la k -ésima componente del sistema (3.1) se tiene

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = \lambda x_k \quad (3.2)$$

y por lo tanto,

$$|\lambda| \cdot |x_k| = |\lambda x_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_k| = |x_k| \quad (3.3)$$

de donde se obtiene $|\lambda| \leq 1$. ■

Ahora estudiemos la convergencia de las sucesiones $\{A^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ (cuando $x \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$) y de la serie $\sum_{j=0}^{\infty} A^j b$ mencionadas en el capítulo anterior. Una condición suficiente para que la sucesión $\{A^i x\}_{i \in \mathbb{N}}$ sea convergente es que la sucesión de matrices $\{A^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ lo sea. Este último no se consigue solo suponiendo la condición a) de la Hipótesis H1, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.1 *consideremos*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz cumple la condición a) de la Hipótesis H1 pero la sucesión $\{A^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ no es convergente, pues para i par, $A^i = I$ y para i impar, $A^i = A$. Es por ello que necesitamos una condición adicional.

3.3 Matriz de Markov positiva

Definición 3.3.1 *Una matriz Markov positiva es una matriz de Markov con todas sus componentes estrictamente positivas. Para tal matriz A escribiremos $A > 0$.*

Proposición 3.3.1 *Si A es una matriz Markov positiva, entonces 1 es el único autovalor de A de módulo 1. Más aún, el subespacio asociado a este autovalor 1 es de dimensión 1. Esto es, $\dim(\text{Nu}(A - I_n)) = 1$.*

Demostración Sea $|\lambda| = 1$ y $x \neq 0$ tal que $Ax = \lambda x$. Entonces, similar a la desigualdad (3.3) se tiene

$$|x_k| = \left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{kj}|x_k| = |x_k|. \quad (3.4)$$

Entonces, por el hecho que $a_{kj} > 0$ para todo j ,

$$|x_j| = |x_k| \quad \text{para todo } j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Además, de (3.4),

$$\left| \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{kj}x_j|,$$

se tiene que todos los números complejos $a_{kj}x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$) están en la misma dirección y sentido del número complejo $a_{kk}x_k$: para todo $j = 1, 2, \dots, n$, existe $t_j > 0$ tal que $a_{kj}x_j = t_j a_{kk}x_k$. De donde $x_j = \tau_j x_k$ para $\tau_j = (t_j)a_{kk}/a_{kj} > 0$.

Luego de la ecuación (3.5), se tiene $\tau_j = 1$ y por lo tanto $x_j = x_k$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$.

De esto, $x = x_k \mathbf{p}$ con $\mathbf{p} = [1, \dots, 1]^T$ y por lo tanto $\text{Nu}(A - I_n) = \langle \{\mathbf{p}\} \rangle$ (el subespacio generado por \mathbf{p}).

Finalmente, la ecuación (3.2) implica

$$\sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = \lambda x_k = \sum_{j=1}^n a_{kj}x_k = x_k,$$

y por lo tanto $\lambda = 1$. ■

El siguiente corolario es importante y hace uso de la proposición anterior con A^T en lugar de A .

Corolario 3.3.1 *Si A es una matriz de Markov y además positiva, entonces todos los autovalores de A^T tienen módulo menor o igual a 1, y 1 es el único autovalor de módulo 1. Además, $\dim(\text{Nu}(A^T - I_n)) = 1$.*

Demostración Como los autovalores (incluyendo las multiplicidades) de A^T y A , coinciden, entonces por la Proposición 3.2.1, los autovalores de A^T son todos menores o iguales a 1 y que $\mu = 1$ es el único autovalor de A^T cuyo subespacio asociado tiene dimensión 1. ■

Haciendo uso del algebra lineal, sabemos que toda matriz A posee una forma canónica de Jordan J_A y una matriz inversible P de tal manera que $A = P^{-1}J_AP$, donde

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, r_{\lambda_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & J_{\lambda_3, r_{\lambda_3}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}} \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Aquí, para cada $k = 1, 2, \dots, n$, $J_{\lambda_k, r_{\lambda_k}}$ es el bloque cuadrado de orden r_k correspondiente al autovalor λ_k . Dichos bloques tienen la siguiente forma $J_{\lambda_k, r_{\lambda_k}} = D_{\lambda_k} + N_{r_{\lambda_k}, m}$ donde D_{λ_k} es una matriz diagonal cuyos elementos de dicha diagonal son los autovalores λ_k y $N_{r_{\lambda_k}, m}$ es una matriz nilpotente, de orden r_{λ_k} con orden de nilpotencia m .

Recordemos por la Observación 3.2.1, si A es Markov, entonces $\mu = 1$ es un autovalor de esta matriz y por lo tanto existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ en la descomposición (3.6) tal que $\lambda_j = 1$. Así el bloque asociado de esta descomposición es de la forma $J_{\lambda_j, r_{\lambda_j}} = J_{1, r_1}$

Proposición 3.3.2 *Si A es una matriz de Markov positiva, entonces*

i) $r_1 = 1$.

ii) $A^m \rightarrow B$ cuando $m \rightarrow \infty$, donde $B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T \end{pmatrix}$ es una matriz de Markov positiva, siendo \mathbf{x} es el único vector cuyas componentes son todas estrictamente positivas cuya suma es 1, y satisfaciendo $A^T \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

Demostración Como $\dim(\text{Nu}(A - I_n)) = 1$, la forma canónica de Jordan de A tiene la forma

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{1, r_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & J_{\lambda_3, r_{\lambda_3}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}} \end{pmatrix} = J_{1, r_1} \oplus J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}} \oplus \dots \oplus J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}}$$

donde, por la Proposición 3.2.1, $|\lambda_i| < 1$ para todo $i \neq 1$. De esto deducimos que para todo $i = 2, 3, \dots, n$, $J_{\lambda_i, r_{\lambda_i}}^m \rightarrow 0_{r_{\lambda_i} \times r_{\lambda_i}}$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Para la descomposición $J_A = P^{-1}AP$, se tiene, para todo $m \in \mathbb{N}$

$$P^{-1}A^mP = J_{1, r_1}^m \oplus J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}}^m \oplus \dots \oplus J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}}^m.$$

i) Supongamos, por contradicción, que $r_1 > 1$. Como el subespacio asociado al autovalor $\mu = 1$ de la matriz A tiene dimensión 1, entonces el bloque J_{1, r_1} es de la forma

$$J_{1, r_1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para $m \in \mathbb{N}$, la matriz J_{1, r_1}^m tiene un bloque (submatriz) de orden 2×1 de la forma $\begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}$. Luego $\left\| \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \rightarrow \infty$ cuando $m \rightarrow \infty$.

Por otro lado, como la matriz A es Markov, entonces para todo $m \in \mathbb{N}$, la matriz A^m también es Markov. Luego existe $L > 0$ (finito) tal que $\|A^m\| \leq L$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Consecuentemente, las componentes de $P^{-1}A^mP$ son acotadas cuando $m \rightarrow \infty$. Esto es una contradicción, y por lo tanto se debe tener que $r_1 = 1$.

ii) Por la parte i) tenemos la convergencia

$$P^{-1}A^mP \rightarrow I_1 \oplus 0 \quad \text{y} \quad A^m \rightarrow B := P(I_1 \oplus 0)P^{-1} \quad \text{cuando } m \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

La matriz B es de la forma

$$B = \begin{pmatrix} t_1 \mathbf{x}^t \\ \vdots \\ t_n \mathbf{x}^t \end{pmatrix}$$

para algún vector columna \mathbf{x} y números reales t_1, \dots, t_n . Como B es una matriz de Markov (ya que para todo $m \in \mathbb{N}$, A^m lo es), podemos asumir que las componentes de \mathbf{x} son todas positivas cuya suma es 1. Entonces se sigue que $t_1 = \dots = t_n = 1$ y

por lo tanto

$$B = \begin{pmatrix} \mathbf{x}^t \\ \vdots \\ \mathbf{x}^t \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Ahora, de $A^m \rightarrow B$ y $A^{m+1} = A^m A \rightarrow BA$ cuando $m \rightarrow \infty$, se tiene $B = BA$ y

$$A^t B^t = B^t. \quad (3.9)$$

De las ecuaciones (3.8) y (3.9) se tiene

$$A^t[\mathbf{x} | \cdots | \mathbf{x}] = [\mathbf{x} | \cdots | \mathbf{x}]$$

y por lo tanto $A^t \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Ahora como $\mathbf{x} \geq 0$ y $A^t > 0$ (ya que A es positiva), concluimos que $\mathbf{x} = A^t \mathbf{x} > 0$.

En cuanto a la unicidad de $\mathbf{x} > 0$ con suma de sus componentes igual a 1, se sigue del hecho que el subespacio $\text{Nu}(A^t - I_n)$ es de dimensión 1. ■

Observación 3.3.1 *El vector \mathbf{x} de la proposición anterior es llamado vector estacionario de la matriz de Markov A .*

En el siguiente ejemplo comprobamos parte de la proposición anterior

Ejemplo 3.3.1 *Consideremos la siguiente matriz de Markov*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Entonces $A^T - I_3$ reducida por filas nos da

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{4}{9} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De esto

$$\text{Nu}(A^t - I_3) = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle = \left\langle \left\langle \begin{pmatrix} \frac{4}{19} \\ \frac{6}{19} \\ \frac{9}{19} \end{pmatrix} \right\rangle \right\rangle.$$

Por otro lado tenemos

$$\lim_{m \rightarrow \infty} A^m = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 4 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \\ 4 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Se observa en este caso que el polonomio característico de A es dado por

$$P_A = (x - 1)(x^2 - 1/24).$$

3.4 Matriz primitiva

Por definición, la matriz de Leslie (3.5) con $\beta_i = \alpha_i$ (para todo $i = 1, 2, \dots, n$) no es una matriz positiva y en consecuencia las proposiciones enunciadas anteriormente respecto a este último tipo de matriz no podrían en principio ser aplicadas. No obstante, la matriz de Leslie cumple la propiedad de ser primitiva, y como veremos luego, propiedades similares a las proposiciones anteriores se verifican para este tipo de matrices.

Definición 3.4.1 Se dice que una matriz A es llamada regular o primitiva si existe $k \geq 1$ tal que $A^k > 0$.

Proposición 3.4.1 Si A es una matriz de Markov primitiva, entonces A satisface las mismas propiedades enunciadas en las Proposiciones 3.3.1 y 3.3.2 para matrices de Markov positivas.

Demostración Supongamos que $A^k > 0$ y como

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)^{a_1}(x - \lambda_2)^{a_2} \cdots (x - \lambda_p)^{a_p},$$

entonces

$$P_{A^k}(x) = (x - \lambda_1^k)^{a_1}(x - \lambda_2^k)^{a_2} \cdots (x - \lambda_p^k)^{a_p}.$$

Como A^k es una matriz de Markov positiva, existe un único j tal que $\lambda_j^k = 1$ y $a_j = 1$, entonces concluimos que $\lambda_j = 1$ pues si fuera complejo entonces tanto λ_j^k como $\overline{\lambda_j^k}$ tendrían módulo igual a 1, es decir A^k tuviera dos autovalores con módulo igual a 1, esto sería una contradicción con la Proposición (3.3.1), entonces

$$P_A(x) = (x - \lambda_1)^{a_1}(x - \lambda_2)^{a_2} \cdots (x - 1)^1 \cdots (x - \lambda_p)^{a_p}$$

donde $\lambda_i \neq 1$ para $i \neq j$. Con esto quedaría demostrado la proposición (3.3.1) y el item i) de la Proposición 3.3.2. Para demostrar el item ii) de la Proposición 3.3.2 solo necesitamos darnos cuenta que

$$\lim_{s \rightarrow \infty} (A^k)^s = B = \lim_{s \rightarrow \infty} A^{ks} = \lim_{m \rightarrow \infty} A^m.$$

Para mostrar que $\mathbf{v} > 0$, observemos que si $A^t \mathbf{v} = \mathbf{v}$, entonces $(A^k)^t \mathbf{v} = \mathbf{v}$. ■

La siguiente proposición muestra que para matrices primitivas A , la sucesión $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, con

$$y_k := A^k x_0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \quad (3.10)$$

converge a un único punto independiente de $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$.

Proposición 3.4.2 Sea $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$ y A una matriz primitiva satisfaciendo la condición a) de la Hipótesis H1, entonces la sucesión y_k dada en (3.10) es convergente y converge a $\gamma \mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$, donde \mathbf{v} es el vector estacionario de la matriz A .

Demostración Sea $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, entonces por el item i) de la Proposición 3.3.2, $A^k \rightarrow B$ cuando $k \rightarrow \infty$, donde

$$B = \begin{pmatrix} v_1 & v_1 & \dots & v_1 \\ v_2 & v_2 & \dots & v_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_n & v_n & \dots & v_n \end{pmatrix}.$$

De esto, $B\mathbf{x} = \gamma \mathbf{v}$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_\gamma^n$ y como $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$ y $\gamma > 0$, entonces $\gamma \mathbf{v} \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$. ■

Proposición 3.4.3 Sea A una matriz de tipo Leslie (3.5) con tasa de mortalidad $0 < \alpha_i < 1$. Si A satisface el item a) de la Hipótesis H1, entonces esta es una matriz primitiva

Demostración Una matriz de Leslie que cumple el item a) de la Hipótesis H1 satisface $\beta_i = \alpha_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_n & 1 - \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 - \alpha_1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Mostraremos que $A^{n-1} > 0$ donde n es el orden de la matriz A , para ello notemos que si A^p tiene una fila de elementos positivos entonces A^{p+1} posee la misma propiedad en la misma fila, esto es debido a que la matriz de Leslie no posee ninguna columna nula. Por cuestiones de notaciones usaremos $*$ para dicha fila. Entonces

$$A^2 = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_n)^2 & (1 - \alpha_n)(1 - \alpha_{n-1}) & ((1 - \alpha_{n-2})(1 - \alpha_{n-1}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (1 - \alpha_1)(\alpha_n) & (1 - \alpha_1)(\alpha_{n-1}) & (1 - \alpha_1)(\alpha_{n-2}) & \vdots & (1 - \alpha_1)(\alpha_1) \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

De esto vemos que la penultima fila es positiva y usando nuestra notación obtenemos

$$A^2 = \begin{pmatrix} (1 - \alpha_n)^2 & (1 - \alpha_n)(1 - \alpha_{n-1}) & ((1 - \alpha_{n-2})(1 - \alpha_{n-1}) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ * & * & * & \vdots & * \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Siguiendo este proceso obtenemos que $A^{n-1} > 0$. ■

Proposición 3.4.4 *Sea A una matriz primitiva satisfaciendo el ítem a) de la Hipótesis H1 y un vector \mathbf{b} satisfaciendo el ítem b) de la Hipótesis H1, entonces la serie $\sum_{i=0}^{\infty} A^i \mathbf{b}$ es convergente.*

Demostración Se sabe que la descomposición de Jordan J_A tiene la forma

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{\lambda_1, r_{\lambda_1}} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & J_{\lambda_3, r_{\lambda_3}} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}} \end{pmatrix}$$

donde $J_{\lambda_p, r_{\lambda_p}}$ es el bloque correspondiente al autovalor λ_p , es decir

$$J_{\lambda_p, r_{\lambda_p}} = D_{\lambda_p} + N,$$

siendo D_{λ_p} una matriz diagonal cuyos elementos de dicha diagonal son todos iguales al autovalor λ_p , y N es una matriz nilpotente de orden de nilpotencia r_{λ_p} .

Analizemos la convergencia de la siguiente serie:

$$\sum_{j=1}^{\infty} A^j b = \sum_{j=1}^{\infty} P^{-1} J_A^j P b. \quad (3.12)$$

Demostraremos que Pb es de la forma $\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$, donde $*$ indica números arbitrarios.

Debido a este hecho, sólo nos interesará analizar la convergencia de la siguiente serie

$$\sum_{j=1}^{\infty} P^{-1} (\tilde{J}_A)^j P b$$

donde

$$\tilde{J}_A = \begin{pmatrix} J_{\lambda_2, r_{\lambda_2}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_3, r_{\lambda_3}} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_{\lambda_n, r_{\lambda_n}} \end{pmatrix}.$$

Denotando

$$S := \sum_{i=0}^{\infty} J_{\lambda_p, r_{\lambda_p}}^i = \sum_{i=0}^{\infty} (D_p + N_m)^i,$$

$$S = \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} D_p^i + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} D_p^{i-1} N_m + \dots + \sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} i \\ m-1 \end{pmatrix} D_p^{i-m+1} N_m^{m-1} + 0 + \dots.$$

De esto, es suficiente estudiar la convergencia de

$$\sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} D_{\lambda_p}^{i-k} N_m^k$$

e incluso solo de

$$\sum_{i=0}^{\infty} \begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix} D_{\lambda_p}^{i-k}$$

para un valor fijo de $k < m$. Debido a que $D_{\lambda_p}^{i-k}$ es una matriz diagonal, es suficiente probar la convergencia de

$$\sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{k} \lambda_p^{i-k}.$$

Para tal efecto utilizando el criterio de la razón, se tiene

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{(i+1)! \lambda_p^{i-k} k!(i-k)!}{k!(i+1-k)! i! \lambda_p^{i-k-1}} = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{|\lambda_p|}{1 - \left(\frac{k}{i+1}\right)} = |\lambda_p| < 1$$

y por lo tanto la serie anterior (y en consecuencia (3.12)) es convergente.

Ahora solo nos resta probar que $P\mathbf{b}$ es de la forma

$$\begin{pmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}.$$

Como $A^k \mathbf{b} \rightarrow B\mathbf{b} = \mathbf{0}$ cuando $k \rightarrow \infty$, entonces $P^{-1} J_A^k P \mathbf{b} \rightarrow \mathbf{0}$ cuando $m \rightarrow \infty$. Sea $C = \lim_{k \rightarrow \infty} P^{-1} J_A^k = P^{-1} \lim_{k \rightarrow \infty} J_A^k$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

De esto, denotando $P\mathbf{b} = (u_1, u_2, \dots, u_n)^T$,

$$\mathbf{0} = CP\mathbf{b} = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}u_1 \\ p_{21}u_1 \\ \vdots \\ p_{n1}u_1 \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Pero como los $p_{j,1}$ (para $j = 1, 2, \dots, n$) son las componentes de la primera columna de la matriz inversible P , entonces $p_{j,1} \neq 0$ para algún j . Luego de (3.13), $u_1 = 0$. ■

Observación 3.4.1 De las Proposiciones 3.4.2 y 3.4.4 se tiene que las sucesiones $\{y_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ y $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con

$$y_k = A^k x_0 \quad y \quad z_k = \sum_{i=0}^{k-1} A^i \mathbf{b} \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N} \quad (3.14)$$

son convergentes. En este caso la primera sucesión converge a $\gamma \mathbf{v}$ (independiente del punto inicial $x_0 \in \mathbb{R}^n$) y denotando c el límite de la segunda sucesión, la sucesión $\{y_k + (z_k)h\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge a $\gamma \mathbf{v} + ch$ para todo $h \in \mathbb{R}_+$.

Por inducción,

$$x_k := y_k + (z_k)h \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

satisface la siguiente relación de programación dinámica

$$x_k = Ax_{k-1} + bh \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}$$

Se sigue de la Proposición 3.1.1, para todo $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$,

$$x_k \in \mathbb{R}_\gamma^n \quad \text{para todo } k \in \mathbb{N}.$$

De esto, $\gamma \mathbf{v} + ch \in \mathbb{R}_\gamma^n$.

3.5 Resultados principales

Ahora ya estamos en condiciones de enunciar nuestros resultados principales de este trabajo

Proposición 3.5.1 Sea $h \geq 0$ y A una matriz primitiva satisfaciendo la condición a) de la Hipótesis H1 y \mathbf{b} un vector satisfaciendo condición b) de la Hipótesis H1. El vector $\mathbf{x} = \gamma \mathbf{v} + ch$ es el único punto fijo de la función $\mathbb{R}_\gamma^n \ni x \rightarrow Ax + bh$:

$$\mathbf{x} = A\mathbf{x} + bh. \quad (3.15)$$

En este caso, para todo $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$, la sucesión $\{x_k\}_{k=0,1,\dots}$ con $x_k = Ax_{k-1} + bh$ para todo $k = 1, 2, \dots$, converge a x .

Demostración Por la Observación 3.4.1 y la continuidad de A , el vector $\gamma\mathbf{v} + \mathbf{c}h$ satisface (3.15). Ahora sea $\hat{\mathbf{w}}$ satisfaciendo (3.15). Por inducción,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{w}} &= \lim_{j \rightarrow \infty} [A^j \hat{\mathbf{w}} + (\sum_{i=0}^{j-1} A^i \mathbf{b})h] \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} A^j \hat{\mathbf{w}} + \lim_{j \rightarrow \infty} (\sum_{i=0}^{j-1} A^i \mathbf{b})h \\ &\quad (\text{ y por la Observación 3.4.1}) \\ &= \gamma\mathbf{v} + \mathbf{c}h = \bar{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

El resultado se sigue. ■

En lo que sigue de este capítulo haremos uso de las notaciones dadas en las ecuaciones (2.4) y (2.8) del Capítulo 1:

$$\mathbb{X} \times \mathbb{U} \ni (x, h) \rightarrow f(x, h) := Ax + bh \quad \text{y} \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}_{\gamma+}^n \times \{h\} \quad (h > 0).$$

La siguiente proposición muestra la relación entre el núcleo de viabilidad y el punto fijo.

Proposición 3.5.2 *Con las hipótesis de la Proposición 3.5.1, sea $\mathbf{w}(h)$ el único punto fijo de la función $\mathbb{R}_{\gamma}^n \ni x \rightarrow Ax + \mathbf{b}h$, entonces las dos relaciones son equivalentes:*

i) $\mathbb{V}(f, \mathbb{D}) \neq \emptyset$.

ii) $\mathbf{w}(h) > 0$.

Demostración Por la Observación 3.4.1, $\mathbf{w}(h) \in \mathbb{R}_{\gamma}^n$. Sea $x \in \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x}_k(x) := A^k x + (\sum_{j=0}^{k-1} A^j \mathbf{b})h > 0$. Tomando límite deducimos que $\mathbf{w}(h) > 0$. Esto muestra que *i)* implica *ii)*. Ahora sea $\mathbf{w}(h) > 0$, como $\mathbf{w}(h) = A^k \mathbf{w}(h) + (\sum_{j=1}^k A^j \mathbf{b})h$, se tiene $\mathbf{w}(h) \in \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ y por lo tanto *ii)* implica *i)*. ■

Recordemos por la Observación 3.4.1, la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k = Ax_{k-1} + bh$ converge al único punto fijo $\mathbf{w}(h)$ de la función $\mathbb{R}_{\gamma}^n \ni x \rightarrow Ax + \mathbf{b}h$ ($h > 0$) para

todo $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$. La siguiente proposición muestra que si $\mathbf{w}(h) \in \mathbb{R}_{\gamma^{++}}^n$ entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in \mathbb{R}_{\gamma^{++}}^n \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}_{\gamma^+}^n \text{ y para todo } k \geq k.$$

Para $w \in \mathbb{R}^n$, denotemos por $B_\delta(w)$ la bola abierta de \mathbb{R}^n de centro w y radio $\delta > 0$.

Proposición 3.5.3 Denotemos $\mathbf{w}(h)$ como en la Proposición 3.5.2. Supongamos que existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta(\mathbf{w}(h)) := B_\delta(\mathbf{w}(h)) \cap \mathbb{R}_\gamma^n \subset \mathbb{R}_{\gamma^+}^n$, entonces existe un k dependiendo sólo de δ tal que $x_k := Ax_{k-1} + bh \in V_\delta(\mathbf{w}(h))$ para todo $x_0 \in \mathbb{R}_{\gamma^+}^n$ y para todo $k \geq k$.

Demostración Sea $\{\gamma e_j\}_{j=1,2,\dots,n}$ la colección de todos los vectores de $\mathbb{R}_{\gamma^+}^n$, entonces para $j = 1, 2, \dots, n$ existe $k_j \in \mathbb{N}$ de tal

$$\|(A^i(\gamma e_j) + (\sum_{j=0}^{i-1} A^j \mathbf{b})\bar{h} - \mathbf{w}(\bar{h}))\| < \delta \quad \text{para todo } i > k_j.$$

Sea $x \in \mathbb{R}_{\gamma^+}^n = \{\sum_{j=1}^n a_j \gamma e_j : (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sum_{j=1}^n a_j = 1\}$, entonces para algún $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ con $\sum_{j=1}^n a_j = 1$,

$$x = \sum_{j=1}^n a_j \gamma e_j. \tag{3.16}$$

Considerando $x_0 = x$, se tiene

$$x_1 = Ax_0 + b\bar{h} = \sum_{j=1}^n a_j (A\gamma e_j + b\bar{h})$$

$$x_2 = Ax_1 + b\bar{h} = A^2x + (Ab + b)\bar{h} = \sum_{j=1}^n a_j [A^2\gamma e_j + (Ab + b)\bar{h}]$$

En general, para $k \in \mathbb{N}$

$$x_k = A^k x + \sum_{i=0}^{k-1} (A^i \mathbf{b})\bar{h} = \sum_{j=1}^n a_j [A^k \gamma e_j + \sum_{i=0}^{k-1} (A^i \mathbf{b})\bar{h}].$$

De donde

$$\begin{aligned}\|x_k - w(\bar{h})\| &= \left\| \sum_{j=1}^n a_j (A^k \gamma e_j + \sum_{i=0}^{k-1} (A^i \mathbf{b}) \bar{h}) - w(\bar{h}) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^n a_j \left\| (A^k \gamma e_j + \sum_{i=0}^{k-1} (A^i \mathbf{b}) \bar{h}) - w(\bar{h}) \right\|.\end{aligned}$$

Es decir,

$$\|x_k - w(\bar{h})\| \leq \sum_{j=1}^n a_j \left\| (A^k \gamma e_j + \sum_{i=0}^{k-1} (A^i \mathbf{b}) \bar{h}) - w(\bar{h}) \right\|. \quad (3.17)$$

Tomando $k_0 = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, tenemos de (3.17),

$$\|x_k - w(\bar{h})\| \leq \sum_{j=1}^n a_j \delta = \delta \quad \text{para todo } k \geq \bar{k}.$$

El resultado se sigue. ■

Esta proposición nos motiva introducir la siguiente condición sobre la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k = x_{k-1} + b\bar{h}$ y $x_0 \in \mathbb{R}_\gamma^n$:

Asumamos que existe $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n \quad \text{para todo } x_0 \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n \text{ y para todo } k \geq \bar{k}. \quad (3.18)$$

Entonces, como $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converge al punto fijo de $\mathbb{R}_\gamma^n \ni x \rightarrow Ax + b\bar{h}$, este punto fijo pertenece a $\mathbb{R}_{\gamma+}^n$.

Teorema 3.5.1 *Con las hipótesis de la Proposición 3.5.1 y \bar{k} satisfaciendo (3.18), se tiene*

$$\mathbb{V}_{\bar{k}-1}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D}). \quad (3.19)$$

Así, por el Teorema 2.1.1, $\mathbb{V}_{\bar{k}-1}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$.

Demostración Recordemos en este caso, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{V}_k(f, \mathbb{D}) = \left\{ z \left| \begin{array}{l} \exists (z_0, z_1, \dots, z_k) \text{ con } z_0 = z \\ \text{satisfaciendo } z_j \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n \text{ para } j = 0, 1, \dots, k \\ \text{y } z_j = Az_{j-1} + b\bar{h} \text{ para } j = 1, \dots, k \end{array} \right. \right\}. \quad (3.20)$$

Demostraremos la igualdad en (3.19) por doble inclusión. Como $\mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D}) \subseteq \mathbb{V}_{\bar{k}-1}(f, \mathbb{D})$, solo faltaría demostrar que $\mathbb{V}_{\bar{k}-1}(f, \mathbb{D}) \subseteq \mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D})$.

Sea $x_0 \in \mathbb{V}_{\bar{k}-1}(f, \mathbb{D})$ entonces $x_j \in \mathbb{R}_{\gamma+}^n$ para todo $j \in \{0, 1, \dots, \bar{k} - 1\}$. Como $x_{\bar{k}} = Ax_{\bar{k}-1} + b\bar{h}$, por (3.18) se tiene $x_0 \in \mathbb{V}_{\bar{k}}(f, \mathbb{D})$. ■

Observación 3.5.1 Para la matriz A del tipo Leslie (2.1) satisfaciendo $\beta_i = \alpha_i = \alpha \in [0, 1]$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, y $b = (-1, 0, \dots, 0, 1)^T$, la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ con $x_k = Ax_{k-1} + b\bar{h}$ (para $\bar{h} \geq 0$) satisface (por inducción) para todo $x_0 \in \mathbb{R}_{\gamma}^n$ y para todo $k \geq n - 1$,

$$x_k = \begin{pmatrix} (1 - \alpha)^{n-1}\gamma \\ \alpha(1 - \alpha)^{n-2}\gamma \\ \vdots \\ \alpha(1 - \alpha)\gamma \\ \alpha\gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\sum_{i=0}^{n-2} (1 - \alpha)^i}{(1 - \alpha)^{n-2}} \\ \vdots \\ (1 - \alpha) \\ 1 \end{pmatrix} \bar{h}. \quad (3.21)$$

Así, para este caso particular:

- El punto fijo de $\mathbb{R}_{\gamma}^n \ni x \rightarrow Ax + b\bar{h}$ es el vector suma a la derecha de la igualdad de (3.21).
- Si este punto fijo pertenece a $\mathbb{R}_{\gamma+}^n$, entonces por (3.21), la sucesión $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ satisface la condición (3.18) con $\bar{k} = n - 1$. Por lo tanto, por el Teorema 3.5.1, $\mathbb{V}_{n-2}(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$.

Concluimos este capítulo expresando explícitamente el punto fijo mencionado en la Proposición 3.5.1 cuando la matriz A es del tipo Leslie.

Proposición 3.5.4 Si en la Proposición 3.5.1 la matriz A es del tipo Leslie (2.2), $b = (-1, 0, \dots, 0, 1)^T$ y $h \geq 0$, entonces el único punto fijo $w(h)$ es $(w_n, w_{n-1}, \dots, w_1)^T$, donde

$$w_n = \frac{\gamma\pi_{n-1} - h \sum_{j=0}^{n-2} \pi_j}{\alpha_n(\sum_{j=0}^{n-2} \pi_j) + \pi_{n-1}} \quad \text{con} \quad \pi_r = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2) \cdots (1 - \alpha_r)$$

$$w_j = \frac{\alpha_n x_n + h}{\prod_{i=j}^{n-1} (1 - \alpha_i)} \quad \text{para} \quad j = n - 1, \dots, 1.$$

Demostración Como $w(h)$ satisface $w(h) = Aw(h) + bh$, entonces

$$\begin{pmatrix} w_n \\ w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \alpha_n & 1 - \alpha_{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \alpha_{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 - \alpha_1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \dots & \alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_n \\ w_{n-1} \\ w_{n-2} \\ \vdots \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -h \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ h \end{pmatrix}.$$

El cual nos genera $n - 1$ igualdades, es decir:

$$\begin{aligned} w_n &= (1 - \alpha_n)w_n + (1 - \alpha_{n-1})w_{n-1} - h \\ w_{n-1} &= (1 - \alpha_{n-2})w_{n-2} \\ w_{n-2} &= (1 - \alpha_{n-3})w_{n-3} \\ &\vdots \\ w_2 &= (1 - \alpha_1)w_1. \end{aligned}$$

De la cual obtenemos

$$\begin{aligned} w_{n-1} &= \frac{\alpha_n w_n + h}{(1 - \alpha_{n-1})} \\ w_{n-2} &= \frac{\alpha_n w_n + h}{(1 - \alpha_{n-2})(1 - \alpha_{n-1})} \\ w_{n-3} &= \frac{\alpha_n w_n + h}{(1 - \alpha_{n-3})(1 - \alpha_{n-2})(1 - \alpha_{n-1})} \\ &\vdots \\ w_1 &= \frac{\alpha_n w_n + h}{(1 - \alpha_1) \dots (1 - \alpha_{n-3})(1 - \alpha_{n-2})(1 - \alpha_{n-1})}. \end{aligned}$$

Ahora solo faltaría hallar el valor de x_n , para el cual adicionaremos la ecuación que nos genera la invarianza del conjunto \mathbb{R}_γ^n (Proposición 3.1.1), es decir:

$$w_n + w_{n-1} + w_{n-2} + \dots + w_1 = \gamma.$$

multiplicando por (π_{n-1}) a la ecuación anterior obtenemos:

$$w_n \pi_{n-1} + w_{n-1} \pi_{n-1} + w_{n-2} \pi_{n-1} + \dots + w_1 \pi_{n-1} = \gamma \pi_{n-1}.$$

Reemplazando los valores de w_j $j = 1, 2, \dots, n-1$ hallados en las últimas expresiones, se obtiene

$$(\alpha_n w_n + h) + (\alpha_n w_n + h)\pi_1 + (\alpha_n w_n + h)\pi_2 + \dots + (\alpha_n w_n + h)\pi_{n-2} + w_n \pi_{n-1} = \gamma \pi_{n-1},$$

de donde

$$(\alpha_n w_n + h)[\pi_0 + \pi_1 + \dots + \pi_{n-2}] + w_n \pi_{n-1} = \gamma \pi_{n-1},$$

y por lo tanto

$$w_n [\alpha_n (\sum_{j=0}^{n-2} \pi_j) + \pi_{n-1}] = \gamma \pi_{n-1} - h (\sum_{j=0}^{n-2} \pi_j).$$

De esto se tiene que

$$w_n = \frac{\gamma \pi_{n-1} - h \sum_{j=0}^{n-2} \pi_j}{\alpha_n (\sum_{j=0}^{n-2} \pi_j) + \pi_{n-1}}.$$

La expresión explícita de $w(h)$ se sigue. ■

Como consecuencia directa de la proposición anterior, se tiene la siguiente expresión explícita de $w(h)$ cuando la matriz de Leslie A satisface $\beta_i = \alpha_i = \alpha$ para todo $i = 1, \dots, n$.

Corolario 3.5.1 *Con las condiciones de la Proposición 3.5.4 además con $\alpha_i = \alpha \in (0, 1)$ se tiene*

$$w(h) = \begin{pmatrix} w_n \\ \frac{\alpha w_n + h}{(1-\alpha)} \\ \frac{\alpha w_n + h}{(1-\alpha)^2} \\ \vdots \\ \frac{\alpha w_n + h}{(1-\alpha)^{n-1}} \end{pmatrix}$$

con

$$w_n = \gamma(1 - \alpha^{n-1}) - h \frac{(1 - (1 - \alpha)^{n-1})}{\alpha}.$$

Capítulo 4

Implementación Numérica para Determinar el Núcleo de Viabilidad: Ejemplos Particulares

En esta parte daremos tres ejemplos asociados a la dinámica (2.1) vista en el Capítulo 1:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}h(t), & t = 0, 1, \dots \\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.1)$$

El primero de estos ejemplos será considerado sin extracción y los otros dos con extracciones $h = 1$ y $h = 2$.

En estos tres ejemplos la matriz A y el vector \mathbf{b} asociados a la dinámica (4.1) serán:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Además en estos tres casos el nivel de población γ asociado al conjunto admisible $\mathbb{D} = \mathbb{R}_\gamma^3 \times \{h\}$ será considerado siempre $\gamma = 12$.

4.1 Ejemplo sin extracción

Vemos que A y \mathbf{b} cumple la Hipótesis H1, pues son elementos no negativos cuya suma de sus columnas es igual a 1 y además al ser una matriz del tipo Leslie ($\alpha_1 = \beta_1 = \frac{1}{8}, \alpha_2 = \beta_2 = \frac{1}{4}, \alpha_3 = \beta_3 = \frac{1}{2}$) la Proposición 3.4.3 afirma que A es primitiva y además la Proposición 3.4.2 nos dice que el autovector $\gamma \mathbf{v} = 9 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

es un punto fijo atractor de la dinámica (4.1) con $h = 0$

$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	3	4.13	5.11	5.55	5.78	5.89	5.94	...	6
	2	2	1.44	1.23	1.11	1.06	1.03	...	1
	4	2.88	2.45	2.23	2.11	2.06	2.03	...	2
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	6	5.63	5.86	5.92	5.96	5.98	...	6
	8	0.50	1.25	1.06	1.04	1.02	1.00	...	1
	1	2.50	2.13	2.08	2.04	2.02	2.00	...	2
$x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	4	6.50	6.06	6.05	6.02	6.01	6.01	...	6
	4	0.50	1.00	0.97	0.99	0.99	1.00	...	1
	1	2.00	1.94	1.98	1.99	1.99	2.00	...	2
$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	8	7.75	6.78	6.40	6.20	6.10	6.05	...	6
	1	0.00	0.63	0.80	0.90	0.95	0.98	...	1
	0	1.25	1.59	1.80	1.90	1.95	1.98	...	2
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	0.75	3.66	4.79	5.40	5.70	5.85	...	6
	1	4.00	2.13	1.61	1.30	1.15	1.08	...	1
	8	4.25	3.22	2.60	2.30	2.15	2.08	...	2

Todos estos datos se pueden apreciar mejor en la Figura (4.1) donde cada condición inicial esta representada por colores diferentes y la linea de mayor grosor es el autoespacio correspondiente al autovalor \mathbf{v}

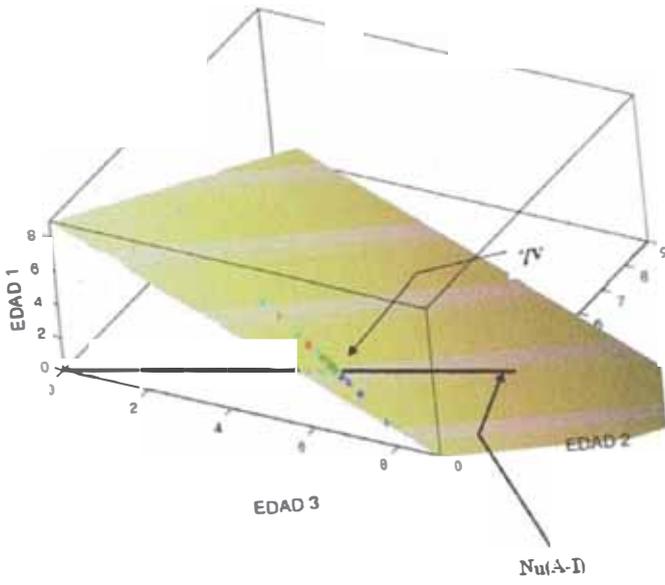


Figure 4.1: Gráfico del punto fijo sin extracción

4.2 Ejemplo con extracción $h = 1$

En este ejemplo veremos que en presencia de una extracción $h = 1$ todos los valores

de x_0 se siguen acumulando en único punto fijo $w(1) = \begin{pmatrix} 3.33 \\ 1.89 \\ 3.78 \end{pmatrix}$

$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	3	3.13	3.23	3.28	3.31	3.32	3.33	...	3.33
	2	2.00	1.94	1.91	1.90	1.90	1.89	...	1.89
	4	3.88	3.83	3.80	3.79	3.78	3.78	...	3.78
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	5.00	3.75	3.59	3.46	3.40	3.36	...	3.33
	8	1.75	1.75	1.75	1.83	1.86	1.87	...	1.89
	1	3.50	3.50	3.66	3.71	3.75	3.76	...	3.78
$x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	4	5.50	4.19	3.79	3.56	3.45	3.39	...	3.33
	4	0.50	1.50	1.66	1.78	1.83	1.86	...	1.89
	1	3.00	3.31	3.55	3.67	3.72	3.75	...	3.78
$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	8	6.75	4.91	4.14	3.73	3.53	3.43	...	3.33
	1	0.00	1.13	1.48	1.69	1.79	1.84	...	1.89
	0	2.25	2.97	3.38	3.58	3.68	3.73	...	3.78
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	-0.25	1.78	2.53	2.93	3.13	3.23	...	3.33
	1	4	1.13	2.30	2.09	1.99	1.94	...	1.89
	8	5.25	4.59	4.18	3.98	3.88	3.83	...	3.78

4.3 Ejemplo con extracción $h = 2$

Al igual que en el ejemplo anterior se tiene que en presencia de una extracción, ahora de $h = 2$ todos los valores de x_0 se siguen acumulando en único punto fijo

$$w(2) = \begin{pmatrix} 0.67 \\ 2.78 \\ 5.56 \end{pmatrix}$$

$x_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	3	2.13	1.36	1.02	0.84	0.75	0.71	...	0.67
	2	2.00	2.44	2.60	2.69	2.73	2.76	...	2.78
	4	4.88	5.20	5.38	5.47	5.51	5.53	...	5.56
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	4.00	1.88	1.33	0.99	0.83	0.75	...	0.67
	8	0.50	2.25	2.44	2.62	2.70	2.74	...	2.78
	1	4.50	4.88	5.23	5.39	5.47	5.51	...	5.56
$x_0 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	4	4.50	2.31	1.52	1.09	0.88	0.77	...	0.67
	4	0.50	2.00	2.34	2.34	2.67	2.72	...	2.78
	1	4.00	4.69	5.13	5.13	5.45	5.50	...	5.56
$x_0 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	8	5.75	3.03	1.87	1.27	0.97	0.82	...	0.67
	1	0.00	1.63	2.17	2.48	2.63	2.70	...	2.78
	0	3.25	4.34	4.96	5.26	5.41	5.48	...	5.56
$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$	x_0	x_1	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	...	x_∞
	0	-1.25	-0.09	0.26	0.47	0.57	0.62	...	0.67
	1	4.00	3.13	2.99	2.88	2.83	2.80	...	2.78
	8	6.25	5.97	5.75	5.66	5.61	5.58	...	5.56

Como hemos podido observar tanto para una extracción $h = 1$ como para $h = 2$ las poblaciones siguen tendiendo a un punto fijo $w = w(h)$ independiente de la condición inicial x_0 como lo muestra la Figura(4.2), dicho punto fijo tiene la forma $w = v\gamma + ch$.

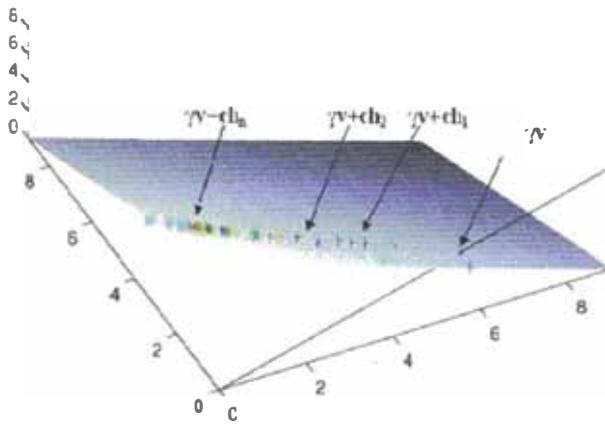


Figure 4.2: Gráfico de los punto fijos con extracción

4.4 Programación hecho para Matlab 7.5

Este programa nos va a servir para hallar gráficamente los núcleos de viabilidad hasta el tiempo k y por la proposición 3.5.1 también el núcleo de viabilidad.

```
m=1/8;n=1/4;p=1/2;
A=[1-m 1-n 0; 0 0 1-p; m n p];
n=input('Ingrese el valor de k para hallar el Nucleo de Viabilidad
hasta el tiempo k ');
h=input('Ingrese el valor de la extraccion h '); hold on
S=12;
AXIS([0 S 0 S 0 S])
for k=1:100000

r=round(2*rand+1);
u=S*rand;
v=(S-u)*rand;
w=S-u-v;
if(r==1)
x=u;
y=v;
z=w;
end
if(r==2)
x=v;
y=w;
z=u;
end
if(r==3)
x=w;
y=u;
z=v;
end
```

```

for i=1:n

    x1=[x;y;z];
x0=x1;
B=[0; -1 ;1];

    j=0;
k=0;
while (k < n+1)
k=k+1;
x0=A*x0+B*h;
if (min(x0)<0)
j=j+1;
break
end
end if (j==1)
plot3(x1(1),x1(2),x1(3),'+r');
end if (j==0)
plot3(x1(1),x1(2),x1(3),'+g');
end
end
end
view(-10,-26)
hold off

```

4.5 Núcleos de Viabilidad hasta el tiempo k y Núcleos de Viabilidad

Dada la dinámica (2.1) del Capítulo 1

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}h \\ \mathbf{x}_0 \text{ dado.} \end{cases}$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 12 \quad \text{y} \quad h = 3$$

Nos daremos cuenta con los gráficos siguientes que la convergencia de conjuntos de la Proposición 3.5.1 acaba para $\bar{k} = n - 2$.

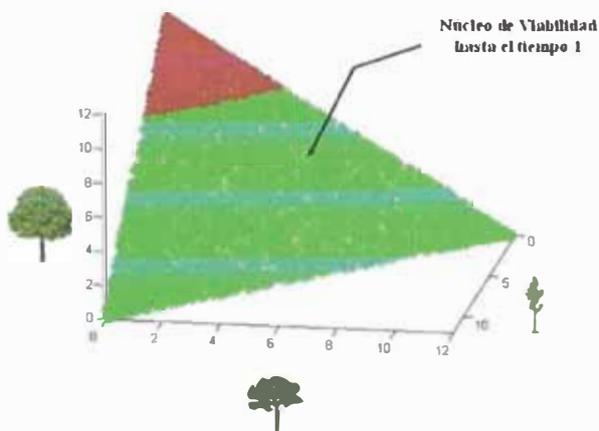


Figure 4.3: Gráfico de $\mathbb{V}_1(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 3$

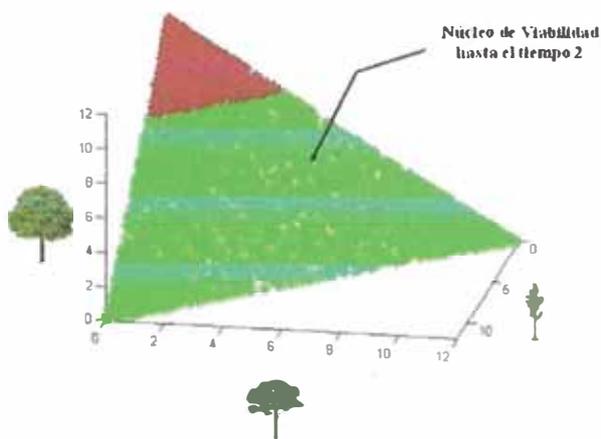


Figure 4.4: Gráfico de $\mathbb{V}_2(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}_1(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 3$

Dada la dinámica (2.1) del Capítulo 1

$$\begin{cases} \mathbf{x}(t+1) = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}h \\ \mathbf{x}_0 \text{ dado.} \end{cases}$$

$$\text{con } A = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma = 12 \quad \text{y} \quad h = 4.1$$

En las gráficas siguientes se muestran los Núcleos de Viabilidad hasta el tiempo k y nos daremos cuenta que es una sucesión decreciente de conjuntos que converge en forma finita $k = 5$ al Núcleo de Viabilidad $\mathbb{V}(f, \mathbb{D})$.

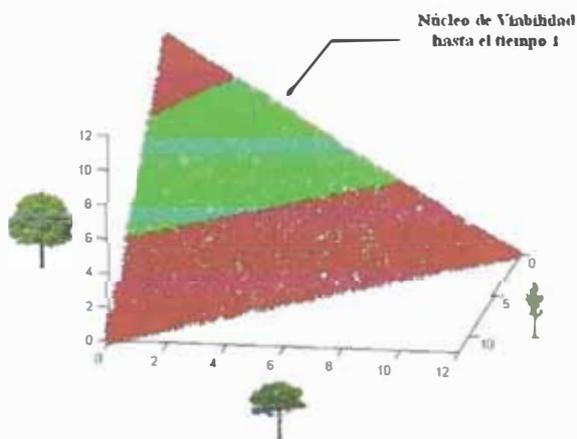


Figure 4.5: Gráfico de $\mathbb{V}_1(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 4.1$

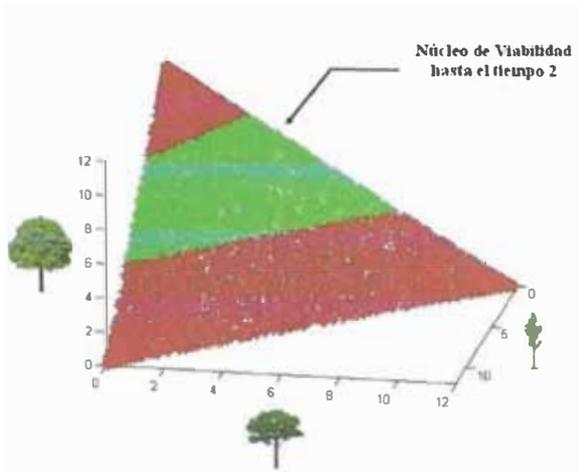


Figure 4.6: Gráfico de $\mathbb{V}_2(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 4.1$

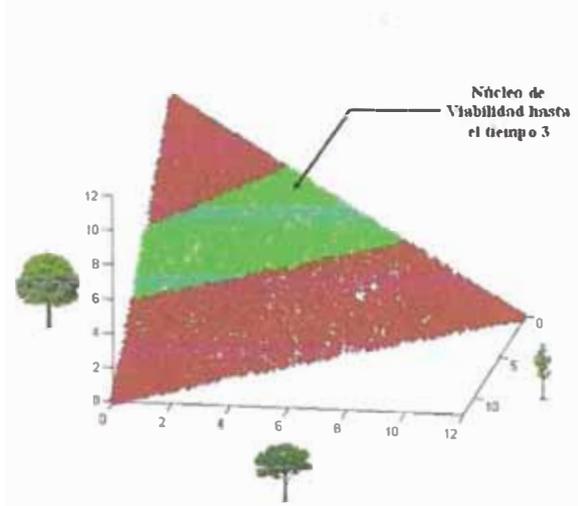


Figure 4.7: Gráfico de $\mathbb{V}_3(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 4.1$

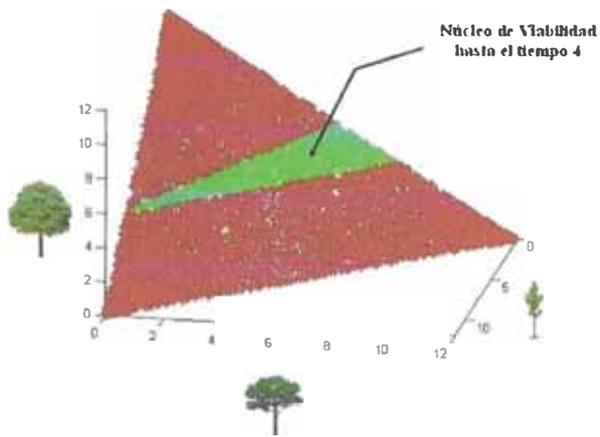


Figure 4.8: Gráfico de $\mathbb{V}_4(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 4.1$

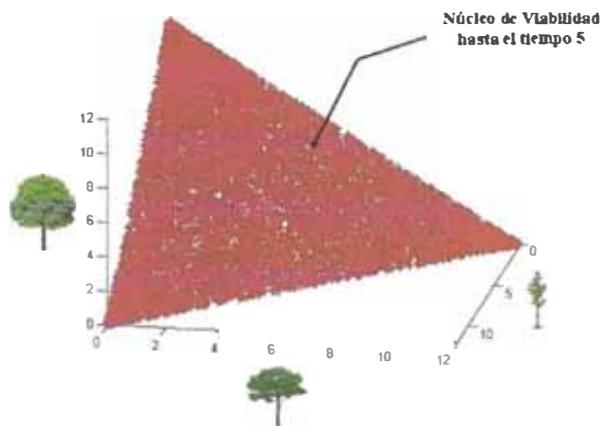


Figure 4.9: Gráfico de $\mathbb{V}_5(f, \mathbb{D}) = \mathbb{V}(f, \mathbb{D})$ para $\gamma = 12$ y $h = 4.1$

Conclusiones

En este trabajo hemos estudiado una dinámica vectorial del tipo $x'(t) = Ax(t) + hb$ en donde A es una matriz de tipo Leslie y hemos utilizado una herramienta nueva como es el núcleo de viabilidad $V(f, \mathcal{D})$ y unos conjuntos $V_k(f, \mathcal{D})$ los cuales convergen en un número finito de pasos hacia el núcleo de Viabilidad.

Se ha estudiado el caso donde $b \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante cuya suma de coordenadas sea distinto de cero, nos queda la inquietud de averiguar que pasa cuando $b = b(t)$, es decir depende del tiempo o el caso donde b sea constante pero la suma de sus coordenadas sea distinto de cero.

Hemos tomado ejemplo en 3 dimensiones para poder visualizarlos pero se podría realizar analíticamente para más dimensiones.

Creo que se ha hecho un gran aporte en el área de la bioeconomía pero sabemos que aún falta mucho por hacer, y espero algún día poder continuar con este trabajo.

Bibliografía

- [1] J-P. Aubin, *Viability Theory*. Birkhäuser, Boston, 1991. 542 pp.
- [2] Noel Bonneuil, *Computing the Viability kernel in large state dimension*. journal of mathematical analysis and application, elsevier 323 (2006) 1444-1454.
- [3] Colin W. Clark, *Mathematical Bioeconomics*. A Wiley interscience publication, Inc, 381 pp.
- [4] M. De Lara, L. Doyen. *Sustainable Management of Natural Resources. Mathematical Models and Methods*. Springer, 2008.
- [5] E. Ocaña, M. De Lara, et al. *Explicit Construction of Viability Kernels for Sustainable Management of Ecosystems with an Application to the Hake-Anchovy Peruvian Fisheries*. To appear in the journal of Mathematical Biology, Springer.
- [6] Marc quincampoix, Patrick Saint-Pierre *An Algorithm for Viability Kernels in Holderian Case: Approximation by Discrete Dynamical Systems*. Journal of Mathematical System, Estimation, and Control, Vol5, No 1, 1995, pp. 1-13
- [7] A. Rapaport, J.P. Terreaux, L. Doyen, *Viability analysis for the sustainable management of renewable resources*. Mathematics and Computer Modeling, 43, 2006, 466-484.
- [8] P. Saint-Pierre, *Discrete approximation of the viability kernel*, submitted.
- [9] E. Seneta *Nonnegative Matrices and Markov Chains*. Springer Series in Statistics, 2006.