

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
Sección de Post-Grado y 2da Especialización



**COMPOSICION Y DEFORMACION DE CURVAS,
SUPERFICIES Y VOLUMENES DE BEZIER.**

Tesis Para Optar el Grado de

MAESTRO EN CIENCIAS

Con Mención en Matemática Aplicada

PRESENTADO POR

ALESSANDRI CANCHOA QUISPE

LIMA-PERU

1998

INDICE

Introducción	01
CAPITULO 1. PRELIMINARES	04
1.1 Simplejos de Bézier	04
1.1.1 Polinomios de Bernstein y curvas de Bézier	04
Notaciones de índices	06
Producto de polinomios de Bernstein	07
1.1.2 Espacios afines	08
Dimensión y bases de un espacio afín	09
k-Simplejos	10
Coordenadas baricéntricas	10
1.1.3 Polinomios n-variante de Bernstein de grado m	12
Polinomios de grado m de Bernstein sobre un simplejo	13
Producto de polinomios multivariados de Bernstein ...	14
Simplejos de Bézier de dimensión n.....	14
1.1.4 Índices de los puntos de control	16
Índices de triángulos de Bézier	16
Índices de tetraedros de Bézier	18
1.2 Curvas B-Splines	19
1.3 Blossoms	22
Funciones afines, multiafines y simétricas	22
El principio de Blossoming (afin variante)	24
1.3.1 Los Blossoms de curvas de Bézier	24
Algoritmo de <i>de Casteljau</i> para curvas	29
1.3.2 Los Blossoms de superficies de Bézier	30
1.3.3 Los Blossoms de simplejos de Bézier	33

CAPITULO 2. DEFORMACION DE FORMAS LIBRES

2.1 Definición de una caja $Q = (P_0, U, V)$ en R^3	37
2.2 Red de puntos de control	38
2.3 Polinomios trivariantes de Bézier	38
2.4 Deformación de un objeto dentro de la caja	39
2.5 B-Splines trivariantes	39
Coordenadas Locales de un punto	40
2.6 Implementación	41
CAPITULO 3. Composición de Polinomios de Bézier.....	47
3.1 Composición de curvas de Bézier	47
Algoritmo producto para curvas	53
3.2 Composición de curvas por Blossoms	55
Algoritmo de Blossom para curvas	55
3.3 Composición de simplejos de Bézier	65
Algoritmo producto para la deformación de formas libres	70
3.4 Composición de simplejos de Bézier	70
3.5 Composición de Funciones racionales	73
CAPITULO 4. Producto Tensorial de Bézier	77
4.1 Blossom multi-afín de una superficie-BPT y volumen-BPT.....	79
Algoritmo para evaluar el blossom de una superficie-BPT	82
Algoritmo para evaluar el blossom de un volumen-BPT	84
4.2 Composición de Curvas (racionales) y Superficies-BPT (racionales)..	85
4.3 Composición de Superficies-BPT (racionales) y volumen-BPT	
4.4 (racionales)	91
4.5 Aplicación:	
Transformación de superficies rectangulares de Bézier a triangulares...	103
CONCLUSIONES	107
BIBLIOGRAFIA	108

Resumen

El presente trabajo enfoca el problema de la composición y deformación de curvas, superficies y volúmenes de Bézier. Los algoritmos para encontrar los puntos de control de la composición ($\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$) de simplejos o formas de producto tensorial de Bézier $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^d$ a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} tienen aplicaciones prácticas en el CAGD (Computer Aided Geometric Design). Estos algoritmos inicialmente fue presentado por DeRose [DeRo 88]: el algoritmo producto para la deformación de formas libres y otro llamado *algoritmo de Blossom*. Una de las aplicaciones de la composición de funciones es la deformación de formas libres, obteniéndose otro método de modelamiento geométrico, inicialmente introducido por Sederberg y Parry [Sed 86] y Bézier [Bez78]. Algunas aplicaciones simples de la composición en CAGD son la evaluación, subdivisión y reparametrización de representaciones en forma de simplejos o producto tensorial de Bézier. Una solución directa mediante la composición de funciones, es la conversión de rectángulos a triángulos (de Bézier), cuyas soluciones iniciales están dados por Goldstein [Gol 87] y también puede encontrarse en Valverde [Val 95]. Otra aplicación práctica se da en la unión de dos curvas de Bézier con continuidad geométrica de orden arbitrario.

Los objetivos de este trabajo es desarrollar los fundamentos teóricos con el fin de construir algoritmos eficientes para encontrar los puntos de control de la composición y establecer las bases para el desarrollo de un paquete de programas computacionales para ejecutar estos algoritmos con eficiencia y de manera flexible.

Mediante la teoría de los Blossoms se obtiene un enfoque distinto al presentado por Lasser [Las 93] para la composición de dos representaciones del producto tensorial de Bézier (racionales). Resultando formulaciones más sencillas y optimas, cuyas correspondientes pruebas son más cortas y a la vez más fáciles de comprender e implementar.

INTRODUCCION

El presente trabajo enfoca el problema de la composición y deformación de curvas, superficies y volúmenes de Bézier. Los algoritmos para encontrar los puntos de control de la composición ($\widehat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$) de simplejos o formas de producto tensorial de Bézier $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^d$ a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} tienen aplicaciones prácticas en el CAGD (Computer Aided Geometric Design). Una de las aplicaciones de la composición de funciones es la deformación de formas libres, obteniéndose otro método de modelamiento geométrico, inicialmente introducido por Sederberg y Parry [Sed 86] y Bézier [Bez78].

Algunas aplicaciones simples de la composición en CAGD son la evaluación, subdivisión y reparametrización de representaciones en forma de simplejos o producto tensorial de Bézier. La evaluación puede verse como la composición con una función constante. La reparametrización es, por definición, la composición con un cambio de variables. La subdivisión es un caso especial de reparametrización donde el cambio de variables es una función lineal.

Una solución directa (aunque menos obvia) mediante la composición de funciones, es la conversión de rectángulos a triángulos (de Bézier), cuyas soluciones iniciales están dados por Goldstein [Gol 87] y también puede encontrarse en Valverde [Val 95]. Otra aplicación práctica se da en la unión de dos curvas de Bézier con continuidad geométrica de orden arbitrario.

El presente trabajo tiene los siguientes objetivos:

1. Desarrollar los fundamentos teóricos con el fin de construir algoritmos eficientes para encontrar los puntos de control de la composición.
2. Analizar el manejo de índices para lograr formulaciones más sencillas, más fáciles de comprender e implementar.
3. Establecer bases para el desarrollo de un paquete de programas computacionales para ejecutar estos algoritmos con eficiencia y de manera flexible.

En el capítulo 1 se presentan los elementos básicos para el CAGD, tales como curvas y superficies de Bézier, producto de polinomios de Bernstein, espacios afines,

k-simplejos, coordenadas baricéntricas, simplejos de Bézier de dimensión n . Para los capítulos siguientes, se propone un procedimiento para el manejo de los índices de los puntos de Bézier y se da una introducción a la teoría de los blossoms que es muy importante en la construcción de ciertos algoritmos. En particular, resulta una deducción elegante del algoritmo de *de Casteljau* para curvas y simplejos de Bézier.

En el capítulo 2 se desarrollan las ideas de deformación de formas libres introducidos por Sederberg y Parry [Sed 86], cuya interpretación geométrica para deformar un objeto consiste en considerar que este objeto se encuentra en una caja transparente (consistente de un elemento elástico al igual que el objeto), de modo que si se deforma la caja el objeto también será deformado. Se presentan los procedimientos con la finalidad de deformar un objeto que se encuentra en el espacio, donde puede representarse como un conjunto de puntos que están relacionados entre sí. Además de su ubicación en el espacio el objeto puede tener otras propiedades, tales como color o intensidad, y los puntos pueden depender del tiempo. Se propone un procedimiento y los correspondientes algoritmos para solucionar este problema, al cual se le ha agregado un criterio de corrección, dado que el objeto no debe cambiar si los puntos de control no han sido movidos.

En el capítulo 3 se elaboran los fundamentos teóricos para construir algoritmos eficientes para encontrar los puntos de control de la composición $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ de dos simplejos de Bézier $\mathbf{g} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^d$ ($n \leq N < d$) a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} . Se obtienen dos tipos de algoritmos inicialmente presentados por DeRose [DeRo 88] (que son apropiados para la implementación de programas) : el algoritmo producto para la deformación de formas libres y otro llamado *algoritmo de Blossom*. Este último provee una construcción geométrica de los puntos de control de $\mathbf{F} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$, con lo cual se obtiene una idea intuitiva del manejo de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} para lograr una deformación apropiada $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ de \mathbf{g} mediante \mathbf{F} . En particular, también se desarrollan algoritmos para la composición de curvas de Bézier. Se mejoran los algoritmos de Blossom para la composición en la versión de DeRose [DeRo 88] los que se presentan en este trabajo en una forma más eficiente para la programación. Finalmente, aplicando la teoría de los Blossom, se resuelve el problema de obtener los puntos de control de la composición de dos simplejos de Bézier de manera general, extendiendo éstos resultados al caso de simplejos racionales de Bézier.

En el capítulo 4 se presenta algunos resultados de blossoms multi-afines de una superficie y un volumen de producto tensorial en base al trabajo realizado por Lasser [Lass 93] y se proponen dos algoritmos para la evaluación del blossom de estas representaciones, los cuales son necesarios en la implementación de la composición. Utilizando la teoría de los Blossoms se obtienen un enfoque distinto al presentado por Lasser [Las 93] para la composición de dos representaciones del producto tensorial de

Bézier (racionales). Resultando formulaciones más sencillas, cuyas correspondientes pruebas son más cortas y a la vez más fáciles de comprender e implementar. Con éste nuevo enfoque los puntos de control de la nueva función compuesta son expresados como una sumatoria en cuyos términos aparece el blossom multi-afín de una función. Adicionalmente, se presenta una mejora sustancial al reducir el número de términos de la sumatoria que representan a los puntos de control. Con los resultados obtenidos se tiene una formulación completa de los algoritmos para la composición de esta clase de funciones.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se presentan los conceptos básicos, definiciones, notaciones y algunos resultados que serán requeridos en el desarrollo de los capítulos siguientes. También se propone una alternativa para el manejo de los índices de triángulos y tetraedros de Bézier y se presenta una deducción interesante del algoritmo de *de Casteljau* a partir de la teoría de los Blossoms.

1.1. Simplejos de Bézier

1.1.1. Polinomios de Bernstein y Curvas de Bézier.

Definición 1.1. Los Polinomios de Bernstein de grado k son definidos por

$$B_p^k(u) := \binom{k}{p} u^p (1-u)^{k-p}, \quad p = 0, 1, \dots, k, \quad u \in [0, 1], \quad (1.1)$$

donde el coeficiente multinomial

$$\binom{k}{p} := \begin{cases} \frac{k!}{(k-p)!p!} & , p \in \{0, \dots, k\} \\ 0 & , p \notin \{0, \dots, k\}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Los polinomios de Bernstein tienen las siguientes propiedades

a)

$$B_p^k(u) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } p = k = 0 \\ 0 & , \text{ si } p < 0 \vee p > k \\ (1-u)B_p^{k-1}(u) + uB_{p-1}^{k-1}(u) & , \text{ en otro caso.} \end{cases} \quad (1.3)$$

b) Partición de la unidad:

$$\sum_{p=0}^k B_p^k(u) = 1.$$

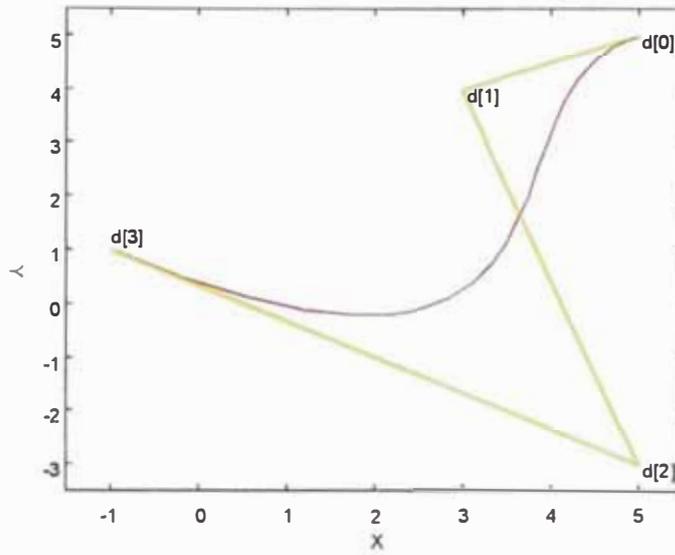


Figura 1.1: Una curva cúbica de Bézier

Se cumple que cada polinomio de grado $\leq k$ puede expresarse como

$$f(u) = \sum_{p=0}^k b_p B_p^k(u), \quad (1.4)$$

donde las constantes b_p son llamados los *coeficientes de Bernstein*.

Definición 1.2. Una curva de Bézier de grado n en u es una curva paramétrica dada en la forma de Bernstein-Bézier

$$S(u) = \sum_{p=0}^n \mathbf{d}_p B_p^n(u), \quad \forall u \in [0, 1] \quad (1.5)$$

donde $\mathbf{d}_p \in \mathbf{R}^d$, ($p = 0, 1, \dots, n$) son llamados *puntos de control* o *puntos de Bézier*. El polígono cuyos vértices consecutivos son $\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n$ es denominado *polígono de Bézier*.

Ejemplo 1. :

- En la figura 1.1, se muestra una curva cúbica de Bézier.
- En la figura 1.2, se muestra una curva de Bézier en el espacio .

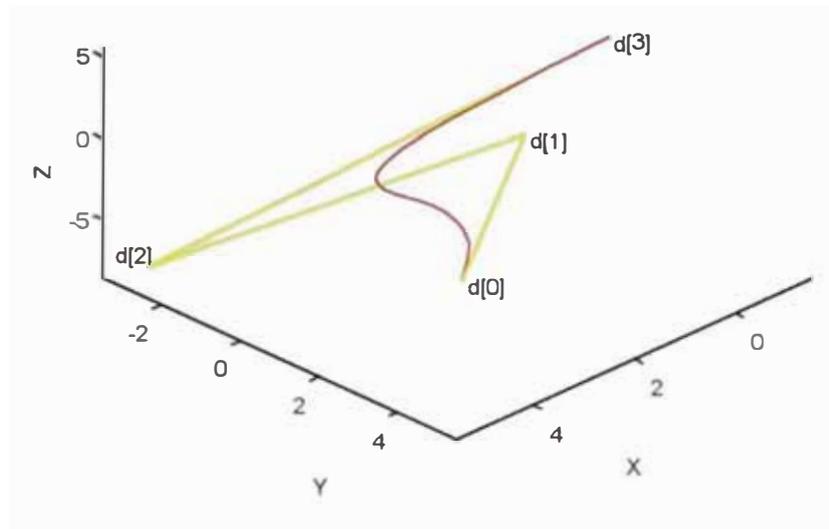


Figura 1.2: Una curva de Bézier en el espacio

Notaciones de índices:

Introduciremos un conjunto de notaciones compactas que serán utilizadas más adelante. Aunque parezca un poco tedioso familiarizarse con ellas, esta notación introducida servirá para reducir la complejidad visual al derivar los resultados, así como para exponer las estructuras fundamentales simples .

- El conjunto de todos los multi-índices $\vec{\mathbf{i}} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$, será denotado por $\mathbb{I}_{0,n}$.
- El conjunto de todos los multi-índices $\vec{\mathbf{j}} := (j_1, j_2, \dots, j_n) \in \mathbf{Z}_+^n$, será denotado por $\mathbb{I}_{1,n}$.
- La norma del multi-índice $\vec{\mathbf{i}}$ se denota por $|\vec{\mathbf{i}}|$ y se define como la suma de sus componentes.

Por ejemplo: $\vec{\mathbf{i}} = (0, 2, 5, 1, 3), |\vec{\mathbf{i}}| = 0 + 2 + 5 + 1 + 3 = 11$.

- El símbolo $\vec{\mathbf{e}}_j$ será usado para denotar un multi-índice cuyas componentes son todos cero excepto el j -ésimo componente, que es uno. Con $\vec{\mathbf{0}}$ se denotará un multi-índice cuyas componentes son todos cero.

- El conjunto de todos los multi-índices $\vec{\mathbf{i}} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_{0,n}$ tales que $|\vec{\mathbf{i}}| = i_0 + i_1 + \dots + i_n = d$, será denotado por $\mathbb{I}_{0,n}^d$. Por ejemplo:
 $\mathbb{I}_{0,2}^3 = \{(0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 0)\}$
- El conjunto de todos los multi-índices $\vec{\mathbf{j}} := (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{I}_{1,n}$ tales que $|\vec{\mathbf{j}}| = j_1 + \dots + j_n = d$, será denotado por $\mathbb{I}_{1,n}^d$. Por ejemplo:
 $\mathbb{I}_{1,3}^3 = \{(0, 0, 3), (0, 1, 2), (0, 2, 1), (0, 3, 0), (1, 0, 2), (1, 2, 0), (2, 0, 1), (2, 1, 0), (3, 0, 0)\}$
- El conjunto de todos los hiper-índices $\mathbf{I} := (\vec{\mathbf{i}}_1, \dots, \vec{\mathbf{i}}_m)$ donde $\vec{\mathbf{i}}_1, \dots, \vec{\mathbf{i}}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^d$, será denotado por $\mathbb{I}_{0,n}^{d,m}$.
- El conjunto de todos los hiper-índices $\mathbf{J} := (\vec{\mathbf{j}}_1, \dots, \vec{\mathbf{j}}_m)$ donde $\vec{\mathbf{j}}_1, \dots, \vec{\mathbf{j}}_m \in \mathbb{I}_{1,n}^d$, será denotado por $\mathbb{I}_{1,n}^{d,m}$.
- Si $\mathbf{I} := (\vec{\mathbf{i}}_1, \dots, \vec{\mathbf{i}}_m) \in \mathbb{I}_{0,n}^{d,m}$ se define el nuevo multi-índice $|\mathbf{I}| \in \mathbb{I}_{0,n}^d$ por $|\mathbf{I}| := \vec{\mathbf{i}}_1 + \dots + \vec{\mathbf{i}}_m$. Con lo cual se obtiene $\|\mathbf{I}\| = |\vec{\mathbf{i}}_1| + \dots + |\vec{\mathbf{i}}_m| = dm$.

El siguiente resultado será aplicado para obtener resultados para la composición de curvas, superficies y volúmenes (rationales) de producto tensorial.

Lema 1.3. (*Producto de polinomios de Bernstein*)

$$\prod_{k=1}^q B_{i_k}^{n_k}(u) = \frac{\prod_{k=1}^q \binom{n_k}{i_k} B_{|\vec{\mathbf{i}}|}^{|\vec{\mathbf{n}}|}(u)}{\binom{|\vec{\mathbf{n}}|}{|\vec{\mathbf{i}}|}}, \quad q = 2, 3, \dots \quad (1.6)$$

donde $\vec{\mathbf{i}} := (i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{I}_{1,q}$ y $\vec{\mathbf{n}} := (n_1, \dots, n_q) \in \mathbb{I}_{1,q}$.

Prueba: Inducción sobre q :

$q = 2$: De la definición de los polinomios de Bernstein, se cumple

$$\begin{aligned} B_{i_1}^{n_1}(u)B_{i_2}^{n_2}(u) &= \binom{n_1}{i_1} u^{i_1} (1-u)^{n_1-i_1} \binom{n_2}{i_2} u^{i_2} (1-u)^{n_2-i_2} \\ &= \frac{\binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2}}{\binom{n_1+n_2}{i_1+i_2}} \binom{n_1+n_2}{i_1+i_2} u^{i_1+i_2} (1-u)^{(n_1+n_2)-(i_1+i_2)} \\ &= \frac{\binom{n_1}{i_1} \binom{n_2}{i_2}}{\binom{n_1+n_2}{i_1+i_2}} B_{i_1+i_2}^{n_1+n_2}(u) \end{aligned}$$

Hipótesis inductiva: Supongamos que (1.6) , se cumple inclusive para q .

Veamos para $(q + 1)$: De la definición de los polinomios de Bernstein y de la Hipótesis Inductiva, se obtiene

$$\begin{aligned}
 \prod_{k=1}^{q+1} B_{i_k}^{n_k}(u) &= \prod_{k=1}^q B_{i_k}^{n_k}(u) B_{i_{q+1}}^{n_{q+1}}(u) \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^q \binom{n_k}{i_k} B_{|\vec{i}|}^{|\vec{n}|}(u)}{\binom{|\vec{n}|}{|\vec{i}|}} B_{i_{q+1}}^{n_{q+1}}(u) \\
 &= \prod_{k=1}^q \binom{n_k}{i_k} \binom{n_{q+1}}{i_{q+1}} \frac{B_{|\vec{i}|+i_{q+1}}^{|\vec{n}|+n_{q+1}}(u)}{\binom{|\vec{n}|+n_{q+1}}{|\vec{i}|+i_{q+1}}} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^{q+1} \binom{n_k}{i_k} B_{|\vec{i}'|}^{|\vec{n}'|}(u)}{\binom{|\vec{n}'|}{|\vec{i}'|}},
 \end{aligned}$$

donde $\vec{i}' := (\vec{i}, i_{q+1}) = (i_1, \dots, i_q, i_{q+1})$ y $\vec{n}' = (\vec{n}, n_{q+1}) = (n_1, \dots, n_q, n_{q+1})$. ■

1.1.2. Espacios afines

Definición 1.4. Una combinación afín (o combinación baricéntrica) de los puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ de un espacio vectorial real W es una combinación lineal de la forma $\alpha_0 \mathbf{P}_0 + \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{P}_n$, donde $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$. En caso de que $\alpha_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, se habla de combinaciones convexas. El conjunto de todas las combinaciones convexas de $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, denotado por $COC(\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\})$, es llamado la cápsula convexa de $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, esto es

$$COC(\{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}) = \left\{ \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{P}_i : \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1, \alpha_i > 0, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Definición 1.5. Si un subconjunto \mathcal{A} de un espacio vectorial real es cerrado sobre combinaciones afines se dice que \mathcal{A} es un espacio afín, es decir, \mathcal{A} es un espacio afín, si y sólo si, para cualquier conjunto de puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n \in \mathcal{A}$ y números reales $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ con $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$, se cumple que $\alpha_0 \mathbf{P}_0 + \alpha_1 \mathbf{P}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{P}_n \in \mathcal{A}$.

Ejemplo 2. Sea \mathcal{V} un subespacio vectorial de un espacio vectorial W y $\mathbf{Q}_0 \in W$. Se cumple que la traslación de \mathcal{V}

$$M := \mathbf{Q}_0 + \mathcal{V} := \{\mathbf{Q}_0 + \mathbf{v} / \mathbf{v} \in \mathcal{V}\} \tag{1.7}$$

es un espacio afín. Esto se obtiene a partir de que para cualquier conjunto de números reales $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbf{R}$ con $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ y puntos $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathcal{V}$, la correspondiente combinación afín $\mathbf{v} := \sum_{i=0}^n \alpha_i (\mathbf{Q}_0 + \mathbf{v}_i) = \mathbf{Q}_0 + \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \in \mathbf{Q}_0 + \mathcal{V}$. Recíprocamente, se puede demostrar que cualquier espacio afín M puede ser escrito en la forma dada por la ecuación (1.7).

Una manera natural de generar un espacio afín es por medio de la generación de un conjunto: Si B es un conjunto de puntos de un espacio vectorial \mathcal{V} , entonces el conjunto

$$AG(B) := \left\{ \sum_{i=0}^q \alpha_i \mathbf{b}_i / \mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_q \in B, \quad \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_q \in \mathbf{R} \text{ con } \sum_{i=0}^q \alpha_i = 1 \right\} \quad (1.8)$$

es llamado el *espacio afín generado* por el conjunto B . Se cumple que $AG(B)$ es un espacio afín.

Definición 1.6. Se dice que los puntos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ de un espacio afín \mathcal{A} son afín independientes o que están en posición general, si y sólo si los vectores

$$\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_n - \mathbf{P}_0$$

son linealmente independientes.

Definición 1.7. Un base afín de un espacio afín \mathcal{A} es un conjunto $B := \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$ de puntos en \mathcal{A} con la propiedad que cada punto $\mathbf{u} \in \mathcal{A}$ tiene una única representación $\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n u_i \mathbf{P}_i$, como una combinación afín con respecto a B .

Dado que

$$\mathbf{u} = \sum_{i=0}^n u_i \mathbf{P}_i \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n u_i (\mathbf{P}_i - \mathbf{P}_0) = \mathbf{u} - \mathbf{P}_0,$$

se cumple que $B := \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$ es una base afín de un espacio afín \mathcal{A} , si y sólo si $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$ son afín independientes.

Definición 1.8. Si $B := \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n\}$ es una base afín de un espacio afín \mathcal{A} , la dimensión de éste espacio se define como el número $n = \text{Card}(B) - 1$, donde $\text{Card}(B)$ denota al número de elementos de B .

Ejemplo 3.

- a) Una base afín de un espacio afín de dimensión 1 (una línea) tiene dos elementos.
- b) Una base afín de un espacio afín de dimensión 2 (un plano) tiene tres elementos.

NOTA:

- Se cumple que dos bases afines B_1 y B_2 cualesquiera de \mathcal{A} consisten del mismo número de puntos.
- Consideremos el espacio afín $\mathcal{A} = \mathbf{P}_0 + \mathcal{V} := \{\mathbf{P}_0 + \mathbf{v}/\mathbf{v} \in \mathcal{V}\}$, donde $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ es una base del subespacio vectorial \mathcal{V} , entonces $B := \{\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_0 + \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{P}_0 + \mathbf{v}_n\}$ es una base afín de \mathcal{A} . Cada punto $\mathbf{u} = \mathbf{P}_0 + \mathbf{v}$ tiene una única representación

$$\mathbf{u} = \left(1 - \sum_{i=1}^n u_i\right)\mathbf{P}_0 + \sum_{i=1}^n u_i(\mathbf{P}_0 + \mathbf{v}_i) \quad (1.9)$$

como una combinación afín con respecto a B . Se cumple $n = \dim(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{V})$.

Definición 1.9. Sea \mathcal{A} un n -espacio afín (espacio afín de dimensión n) y sean $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_k$ ($k \leq n$) puntos en \mathcal{A} que se encuentran en posición general. La cápsula convexa de estos puntos es llamado un k -simplejo y los puntos vértices.

Geoméricamente la familia de los simplejos tienen el siguiente significado:

- Un 1-simplejo es un segmento de línea.
- Un 2-simplejo es un triángulo.
- Un 3-simplejo es un tetraedro y así sucesivamente.

En adelante a un n -espacio afín lo denotaremos por \mathbb{A}^n . Si \mathcal{S} es un n -simplejo con vértices $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n$, entonces cada punto $\mathbf{u} \in \mathbb{A}^n$ puede representarse de manera única como una combinación afín

$$\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1 + \dots + u_n\mathbf{P}_n, \quad \text{con } u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1, \quad (1.10)$$

donde (u_0, u_1, \dots, u_n) son llamadas las *coordenadas baricéntricas* de \mathbf{u} relativo a \mathcal{S} .

Con esto se tiene una asociación de cada punto $\mathbf{u} \in \mathbb{A}^n$ con el punto $(u_0, u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Este proceso encaja al espacio afín \mathbb{A}^n como el subconjunto afín en \mathbb{R}^{n+1} .

Observación:

Las coordenadas baricéntricas de un punto \mathbf{u} relativo a un simplejo \mathcal{S} , tienen un significado geométrico.

- a) Dos puntos distintos \mathbf{P}_0 y \mathbf{P}_1 de \mathbb{R}^n , determinan un subespacio afín el cual es una recta \mathcal{L} y se encuentran en posición general. Cada punto \mathbf{u} de \mathcal{L} puede expresarse como una combinación afín de \mathbf{P}_0 y \mathbf{P}_1 , es decir, $\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1$ con $u_0 + u_1 = 1$. Si además, se cumple $u_0, u_1 \geq 0$, se tiene que $\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1$ es una combinación convexa de \mathbf{P}_0 y \mathbf{P}_1 y divide al segmento $[\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1]$ que es un 1-simplejo en la razón $u_0 : u_1$. Véase la figura 1.3

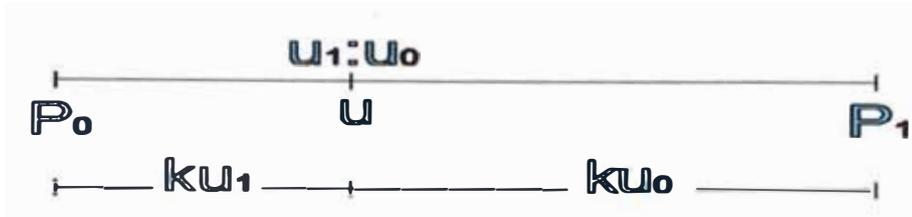


Figura 1.3: Un 1-Simplejo (segmento $[P_0, P_1]$) y la ubicación de $\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1$.

- b) Consideremos el triángulo o 2-simplejo $\Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ en \mathbb{R}^n que determina un subespacio (el plano que pasa por los vértices de este triángulo). Para cada punto $\mathbf{u} \in \Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ existen $u_0, u_1, u_2 \geq 0$ únicos con $u_0 + u_1 + u_2 = 1$ tales que $\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1 + u_2\mathbf{P}_2$, esto es, a cada punto $\mathbf{u} \in \Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ le corresponden las únicas coordenadas baricéntricas (u_0, u_1, u_2) y se cumplen las relaciones geométricas mostradas en la figura 1.4.

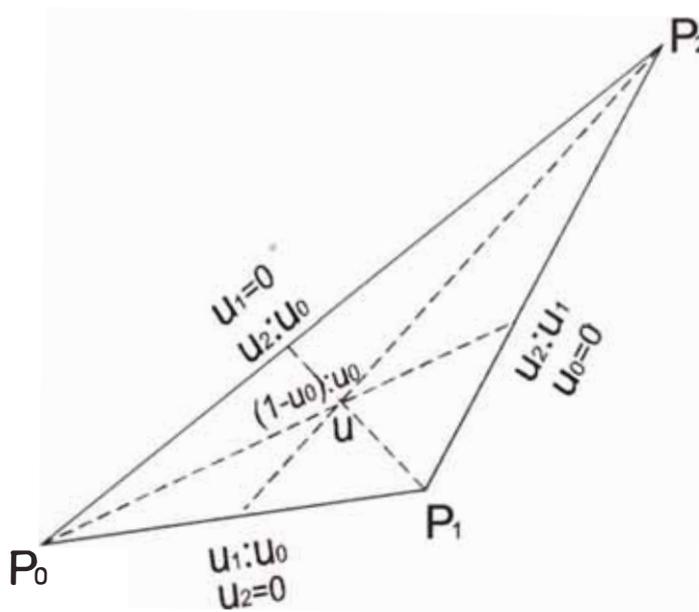


Figura 1.4: Relaciones geométricas de las coordenadas afines (u_0, u_1, u_2) de \mathbf{u} .

Para el caso particular en que se cumpla $u_0 = u_1 = u_2 = 1/3$, se tiene que $\mathbf{u} = u_0\mathbf{P}_0 + u_1\mathbf{P}_1 + u_2\mathbf{P}_2$ viene a ser el baricentro del triángulo $\Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$.

Finalmente se debe notar que aunque las coordenadas del punto $\mathbf{u} \in \Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ sean mayores a la unidad, las componentes de la coordenada baricéntrica de \mathbf{u} relativo a $\Delta\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2$ se encuentran en $[0, 1]$.

Definición 1.10. El polinomio de n-variente de Bernstein de grado m es definido por

$$B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) := \binom{m}{\vec{i}} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}, \quad \vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{I}_{0,n}^m, \quad (1.11)$$

donde

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1 \quad \text{y} \quad \binom{m}{\vec{i}} := \begin{cases} \frac{m!}{i_0! i_1! \dots i_n!}, & \text{si } |\vec{i}| = m \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (1.12)$$

De esta definición se obtiene la siguiente relación recursiva:

$$B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } m = |\vec{i}| = 0 \\ 0 & , \text{ si } |\vec{i}| \neq m \\ \sum_{\alpha=0}^n u_{\alpha} B_{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(u_0, u_1, \dots, u_n) & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (1.13)$$

donde $\vec{e}_{\alpha} = (\underbrace{0, \dots, 0}_{\alpha-1}, 1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$. En efecto:

a) Para $m = |\vec{i}| = 0$ la relación se cumple por la definición de $\binom{m}{\vec{i}}$.

b) Para $m = |\vec{i}| \geq 1$:

Sean $\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$ con $i_0 + i_1 + \dots + i_n = m$ y $\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1} \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$. De la definición de $B_{\vec{i}}^m$ se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^n u_{\alpha} B_{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(u_0, u_1, \dots, u_n) &= \sum_{\alpha=0}^n u_{\alpha} \binom{m-1}{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_{\alpha}^{i_{\alpha}-1} \dots u_n^{i_n} \\ &= \left[\frac{(m-1)!}{(i_0-1)! i_1! \dots i_n!} + \frac{(m-1)!}{i_0! (i_1-1)! \dots i_n!} + \dots \right. \\ &\quad \left. + \frac{(m-1)!}{i_0! \dots i_{(n-1)}! (i_n-1)!} \right] \times u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_{\alpha}^{i_{\alpha}} \dots u_n^{i_n} \\ &= \frac{(i_0 + i_1 + \dots + i_n)(m-1)!}{i_0! i_1! \dots i_n!} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_{\alpha}^{i_{\alpha}} \dots u_n^{i_n} \\ &= \frac{m!}{i_0! i_1! \dots i_n!} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_{\alpha}^{i_{\alpha}} \dots u_n^{i_n} \\ &= B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

De modo más general los polinomios de Bernstein son definidos en espacios afines.

Definición 1.11. Si \mathbf{u} es un punto de un n -espacio afín cuyas coordenadas baricéntricas relativas a algún n -simplejo S son (u_0, u_1, \dots, u_n) , entonces los polinomios de Bernstein de grado m definidos sobre S están dados por

$$B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}) := B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n) \quad (1.14)$$

donde $u_0 \geq 0, u_1 \geq 0, \dots, u_n \geq 0$ y $B_{\vec{i}}^m(u_0, u_1, \dots, u_n)$ es el polinomio de n -variante de Bernstein de grado m .

El siguiente Lema afirma que el producto de los polinomios de Bernstein de grado m y k puede expresarse como un polinomio de grado $(m + k)$.

Lema 1.12. (Producto de polinomios multivariados de Bernstein)

Para los polinomios de Bernstein $B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})$ y $B_{\vec{j}}^k(\mathbf{u})$ definidos sobre un n -simplejo S se cumple

$$B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})B_{\vec{j}}^k(\mathbf{u}) = \frac{\binom{m}{\vec{i}}\binom{k}{\vec{j}}}{\binom{m+k}{\vec{i}+\vec{j}}} B_{\vec{i}+\vec{j}}^{m+k}(\mathbf{u}) \quad (1.15)$$

Prueba. -El polinomio de Bernstein $B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})$ es definido como

$$B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}) = \binom{m}{\vec{i}} \mathbf{u}^{\vec{i}},$$

donde $\mathbf{u}^{\vec{i}} := u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n}$, $\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n)$, $|\vec{i}| = m$ y $u_0 + u_1 + \dots + u_n = 1$.

Usando esta notación y la definición explícita de un polinomio multivariado de Bernstein se obtiene:

$$\begin{aligned} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})B_{\vec{j}}^k(\mathbf{u}) &= \binom{m}{\vec{i}} \mathbf{u}^{\vec{i}} \binom{k}{\vec{j}} \mathbf{u}^{\vec{j}} \\ &= \binom{m}{\vec{i}} \binom{k}{\vec{j}} \mathbf{u}^{\vec{i}+\vec{j}} \\ &= \frac{\binom{m}{\vec{i}}\binom{k}{\vec{j}}}{\binom{m+k}{\vec{i}+\vec{j}}} \binom{m+k}{\vec{i}+\vec{j}} \mathbf{u}^{\vec{i}+\vec{j}} \\ &= \frac{\binom{m}{\vec{i}}\binom{k}{\vec{j}}}{\binom{m+k}{\vec{i}+\vec{j}}} B_{\vec{i}+\vec{j}}^{m+k}(\mathbf{u}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 1.13. Sean $B_{\vec{i}_1}^d(\mathbf{u}), \dots, B_{\vec{i}_m}^d(\mathbf{u})$ polinomios de Bernstein definidos sobre un k -simplejo S y sean $B_{\mathbf{I}}^{d,m}(\mathbf{u}) := B_{\vec{i}_1}^d(\mathbf{u}) \dots B_{\vec{i}_m}^d(\mathbf{u})$, $\mathbf{I} = (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m) \in \mathbb{I}_{0,q}^{d,m} := \underbrace{\mathbb{I}_{0,q}^d \times \dots \times \mathbb{I}_{0,q}^d}_m$.

Entonces se cumple

$$B_{\mathbf{I}}^{d,m}(\mathbf{u}) = K(\mathbf{I})B_{|\mathbf{I}|}^{d**m}(\mathbf{u}), \quad (1.16)$$

donde $K(\mathbf{I})$ es una constante combinatoria dado por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{\binom{|\vec{i}_1|}{\vec{i}_1} \dots \binom{|\vec{i}_m|}{\vec{i}_m}}{\binom{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{I}|}}.$$

Prueba.- Por Inducción Matemática sobre m y aplicando el Lema precedente se obtiene este resultado. ■

Definición 1.14. Una función $F : S \rightarrow \mathbf{R}^d$ en forma de Bernstein- Bézier

$$F(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m} \mathbf{d}_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in S, \quad \vec{i} := (i_0, \dots, i_n), \quad \mathbf{d}_{\vec{i}} \in \mathbf{R}^d, \quad (1.17)$$

donde S es un n -simplejo, es llamado un simplejo de Bézier de dimensión m .

Definición 1.15. Un simplejo de Bézier de dimensión 1 es llamado curva de Bézier, un simplejo de Bézier de dimensión 2 es llamado un triángulo de Bézier, un simplejo de Bézier de dimensión 3 es llamado un tetraedro de Bézier.

Una curva Bézier puede expresarse en cualquiera de las dos formas: en *forma estandar* como en (1.5), o como un simplejo de Bézier de dimensión 1:

$$F(u_0, u_1) = \sum_{|(i_0, i_1)|=m} \mathbf{d}_{(i_0, i_1)} B_{(i_0, i_1)}^m(u_0, u_1).$$

Definición 1.16. Una función $r : S \rightarrow \mathbf{R}^d$ en forma

$$r(\mathbf{u}) = \frac{\sum_{|\vec{i}|=m} w_{\vec{i}} \mathbf{d}_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})}{\sum_{|\vec{i}|=m} w_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{u})}, \quad \mathbf{u} \in S, \quad \vec{i} := (i_0, \dots, i_n), \quad \mathbf{d}_{\vec{i}} \in \mathbf{R}^d,$$

donde S es un n -simplejo y $w_{\vec{i}} \in \mathbf{R}$ son los pesos, es llamado un simplejo racional de Bézier de dimensión n .

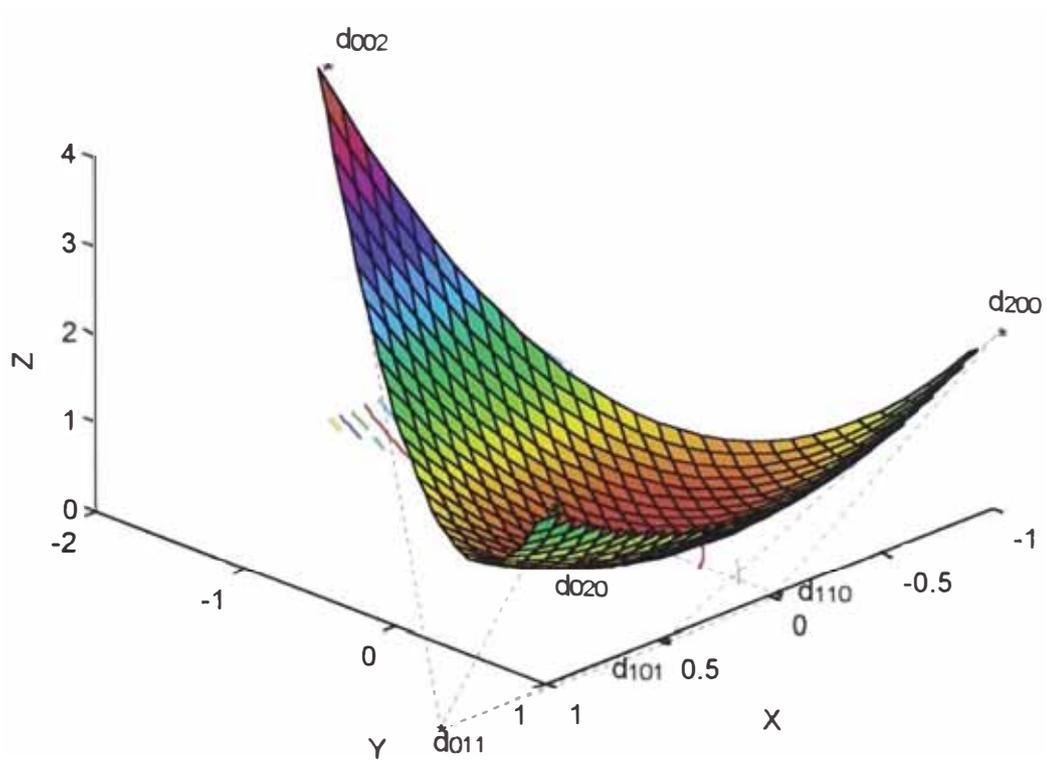


Figura 1.5: Ejemplo de una superficie cuadrática de Bézier.

1.1.3. Índices de los puntos de control

El conjunto de índices \vec{i} de los puntos de control $\mathbf{d}_{\vec{i}}$ del simplejo (1.17), está dado por

$$\mathbb{I}_{0,n}^m := \{ \vec{i} := (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1} : i_0 + \dots + i_n = m \}.$$

Introducimos una relación de orden lexicográfico ' $<$ ' para los elementos de este conjunto mediante

$$\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_n) < \vec{j} := (j_0, j_1, \dots, j_n),$$

si y sólo si $i_p < j_p$ para algún $p \in \{0, 1, \dots, n\}$ y $i_q = j_q$ para todo $q = 0, 1, \dots, p - 1$. Por ejemplo, el orden lexicográfico para los elementos de $\mathbb{I}_{0,2}^3$ es

$$(0, 0, 3) < (0, 1, 2) < (0, 2, 1) < (0, 3, 0) < (1, 0, 2) \\ < (1, 1, 1) < (1, 2, 0) < (2, 0, 1) < (2, 1, 0) < (3, 0, 0).$$

Índices de triángulos de Bézier

Para los triángulos de Bézier de grado m se usan el conjunto de índices $\mathbb{I}_{0,2}^m$. Por ejemplo, para $m = 2$ se tiene

$$\mathbb{I}_{0,2}^2 = \{(0, 0, 2), (0, 1, 1), (0, 2, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 0, 0)\}$$

cuyas componentes pueden ubicarse sobre un arreglo triangular:

$$\begin{array}{ccc} (0, 0, 2) & & \\ & (1, 0, 1) & \\ (0, 1, 1) & & (2, 0, 0) \\ & (1, 1, 0) & \\ (0, 2, 0) & & \end{array}$$

y los puntos de control deben seguir el ordenamiento del triángulo por ejemplo

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{d}_{(0,0,2)} & & \\ & \mathbf{d}_{(1,0,1)} & \\ \mathbf{d}_{(0,1,1)} & & \mathbf{d}_{(2,0,0)} \quad \mathbf{d}_{\vec{i}} \in \mathbb{R}^d \\ & \mathbf{d}_{(1,1,0)} & \\ \mathbf{d}_{(0,2,0)} & & \end{array}$$

Estos puntos de control no son necesariamente equidistantes, tal como se muestra en la figura 1.6.

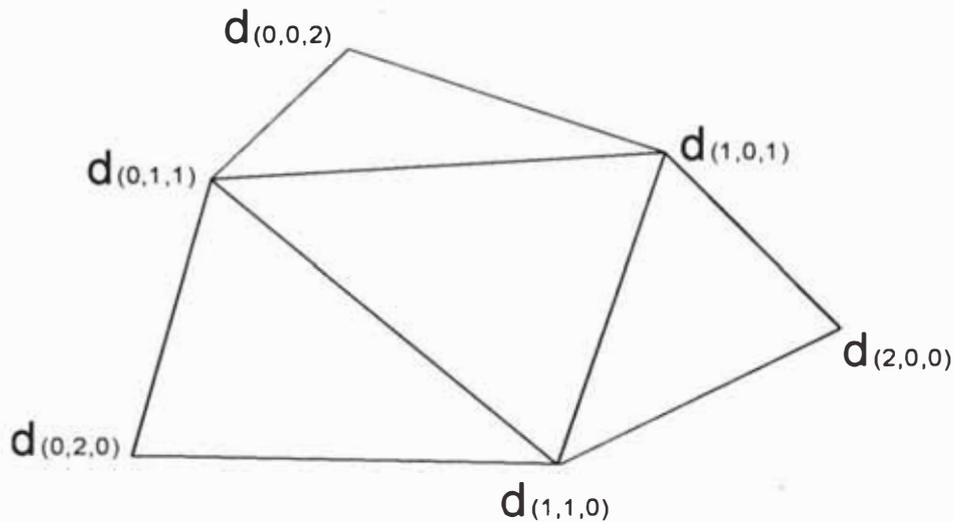


Figura 1.6: Distribución de los puntos de control

Se presenta un algoritmo para generar los elementos de $\mathbb{I}_{0,2}^m$:

```

Para i:=0:(1):m
  Para j:=0:(1):(m-i)
    escribir(i,j,m-i-j)
  fin
fin

```

Los elementos del arreglo triangular de los puntos de control $\mathbf{d}_{\vec{i}}$ podrían almacenarse en un arreglo rectangular, como sigue:

$$\mathbf{D} := (\mathbf{D}_{i,j}) := \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{(0,0,2)} & \mathbf{d}_{(1,0,1)} & \mathbf{d}_{(2,0,0)} \\ \mathbf{d}_{(0,1,1)} & \mathbf{d}_{(1,1,0)} & * \\ \mathbf{d}_{(0,2,0)} & * & * \end{bmatrix}$$

y para acceder al contenido de $\mathbf{d}_{(i,j,k)}$ se usaría $\mathbf{d}_{(i,j,k)} := \mathbf{D}_{j+1,i+1}$. Pero lamentablemente existe un desperdicio del espacio de almacenamiento; no se está usando $\mathbf{D}_{i,j}$ para $i > j$. Para evitar este problema otra posibilidad sería utilizar un arreglo unidimensional \mathbf{S} y almacenar $\mathbf{d}_{\vec{i}}$ siguiendo el orden lexicográfico de sus índices:

$$\mathbf{S} := (\mathbf{S}_p) := [d_{(0,0,2)}, d_{(0,1,1)}, d_{(0,2,0)}, d_{(1,0,1)}, d_{(1,1,0)}, d_{(2,0,0)}]^T$$

En este caso se cumple que $\mathbf{d}_{(i,j,k)} := \mathbf{S}_p$, con $p := \frac{1}{2}i(2 * m - i + 3) + j + 1$, donde m es el grado.

Indices de tetraedros de Bézier

Para los tetraedros de Bézier se usan el conjunto de índices $\mathbb{I}_{0,3}^m$. Los elementos de este conjunto pueden ser obtenidos mediante el siguiente algoritmo

```

Para i:=0:(1):m
  Para j:=0:(1):(m-i)
    Para k:=0:(1):(m-i-j)
      escribir(i,j,k,(m-i-j-k))
    fin
  fin
fin
  
```

Los elementos de $\mathbb{I}_{0,3}^m$ forman un arreglo tetraedral. Para $m=2$, el arreglo tetraedral de los puntos de control $\mathbf{d}_{\vec{i}}$ es mostrado por niveles en la siguiente figura:

Nivel cero	Nivel uno	Nivel dos
$\mathbf{d}_{(0,0,0,2)}$		
$\mathbf{d}_{(0,0,1,1)}$	$\mathbf{d}_{(1,0,0,1)}$	
$\mathbf{d}_{(0,0,2,0)}$	$\mathbf{d}_{(1,0,1,0)}$	$\mathbf{d}_{(2,0,0,0)}$
	$\mathbf{d}_{(1,1,0,0)}$	

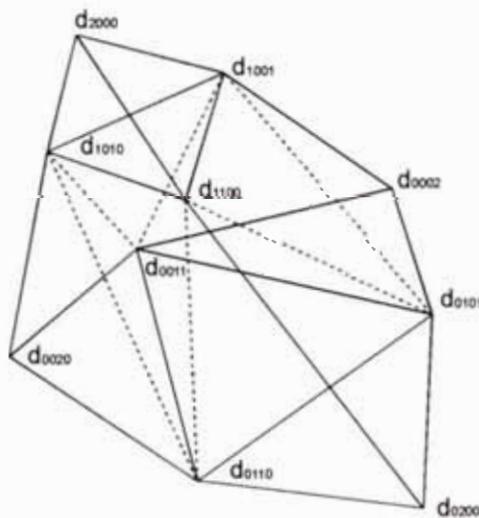


Figura 1.7: Puntos de control en un arreglo tetraedral ($m = 2$).

Los elementos del arreglo tetraedral pueden ser almacenados en un arreglo unidimensional

$$\mathbf{S} := (\mathbf{S}_i) := [\mathbf{d}_{\vec{i}_0}, \mathbf{d}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{d}_{\vec{i}_p}]^T, \quad p := \text{card}(\mathbb{I}_{0,3}^m)$$

y donde $\vec{i}_0 < \vec{i}_1 < \dots < \vec{i}_p$.

Una propuesta para acceder a los elementos $\mathbf{d}_{\vec{i}}$, sería generar un arreglo de índices $\mathbf{Ind} := [\vec{i}_0, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_p]^T$ y ubicar la posición "q" donde se encuentra \vec{i} en el arreglo \mathbf{Ind} y luego asignar $\mathbf{d}_{\vec{i}} := \mathbf{S}_q$, esta solución requiere de un gran número de búsquedas y comparaciones. Otra posibilidad de acceder de manera directa al contenido de $\mathbf{d}_{\vec{i}}$ con $\vec{i} = (i_0, i_1, i_2, i_3)$ es usando

$$\mathbf{d}_{\vec{i}} := \mathbf{S}_q, \quad q = \frac{1}{2} \sum_{p=i_0-1}^{m+1} p(p+1) + i_1(2 * i_0 - i_1 + 3) + i_2 + 1.$$

1.2. Curvas B-Splines

Definición 1.17. Se dice que $\mathbf{T} := (\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$ es una secuencia de nodos, si la sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} \subset \mathbb{R}$ es infinito, monótonamente no decreciente y tal que $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} t_i = \pm\infty$.

Definición 1.18. Dado la secuencia de nodos $\mathbf{T} := (\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$, para cada $i \in \mathbb{Z}$ y $k \in \mathbb{N}$ se definen la funciones $B_{i,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$B_{i,1}(t) := \begin{cases} 1 & , \text{ si } t_i \leq t < t_{i+1} \\ 0 & , \text{ en otro caso} \end{cases} \quad (1.18)$$

$$B_{i,k}(t) := w_{i,k}(t)B_{i,k-1}(t) + (1 - w_{i+1,k}(t))B_{i+1,k-1}(t), \quad k = 2, 3, \dots \quad (1.19)$$

donde $w_{i,k} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ están definidos por

$$w_{i,k}(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} & , \text{ si } t_i < t < t_{i+k-1} \\ 0 & , \text{ en otro caso,} \end{cases} \quad (1.20)$$

Las funciones $B_{i,k}$, $k = 1, 2, \dots$, son llamados *B-Splines de orden k* (o de grado $(k - 1)$) respecto a la secuencia de nodos \mathbf{T} .

Definición 1.19. Dado la secuencia de nodos $\mathbf{T} := (\dots, t_{-2}, t_{-1}, t_0, t_1, t_2, \dots)$ con $t_i < t_{i+k}$ para todo k en \mathbb{Z} . A la curva

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^2 \text{ o } \mathbb{R}^d \quad (1.21)$$

se denomina un Spline de orden k . Los coeficientes \mathbf{d}_i son llamados puntos de Boor o puntos de control. Si además $[a, b] \subset \mathbb{R}$, se dice que $C:\mathbf{x}[a, b]$ es una curva B-Splines de grado $(k - 1)$.

En la práctica con frecuencia se trabaja sobre un intervalo $[a, b]$ y con una secuencia de nodos finitos llamado vector nodo.

Ejemplo 4. Para el vector de nodos $T := (t_0, t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = (0, 0, 0, 1, 1, 1)$ y $k = 3$, calculamos los B-splines de orden 1, 2 y 3:

$$B_{0,1}(t) = B_{1,1}(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$B_{2,1}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{3,1}(t) = B_{4,1}(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$B_{0,2}(t) = w_{0,2}(t)B_{0,1}(t) + (1 - w_{1,2}(t))B_{1,1}(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$B_{1,2}(t) = w_{1,2}(t)B_{1,1}(t) + (1 - w_{2,2}(t))B_{2,1}(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{2,2}(t) = w_{2,2}(t)B_{2,1}(t) + (1 - w_{3,2}(t))B_{3,1}(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{3,2}(t) = w_{3,2}(t)B_{3,1}(t) + (1 - w_{4,2}(t))B_{4,1}(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}$$

$$B_{0,3}(t) = w_{0,3}(t)B_{0,2}(t) + (1 - w_{1,3}(t))B_{1,2}(t) = \begin{cases} 1 - t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{1,3}(t) = w_{1,3}(t)B_{1,2}(t) + (1 - w_{2,3}(t))B_{2,2}(t) = \begin{cases} 2t(1 - t), & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$B_{2,3}(t) = w_{2,3}(t)B_{2,2}(t) + (1 - w_{3,3}(t))B_{3,2}(t) = \begin{cases} t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$\text{De esto se obtiene } B_{i,3}(t) = B_i^2(t), \quad t \in [0, 1], \quad i = 0, 1, 2.$$

En general el B-spline $B_{i,k}(t) = 0, (i = 0, \dots, k - 1)$ de orden $k \in \mathbf{N}$ respecto al vector de nodos

$$T := (\underbrace{t_0 = 0, \dots, t_{k-1} = 0}_k, \underbrace{t_k = 1, \dots, t_{2k-1} = 1}_k),$$

restringido al intervalo $[0, 1]$ se reduce al polinomio de Bernstein $B_i^{k-1}(t)$ de grado $(k - 1)$, esto es, para $t \in [0, 1]$ se cumple

$$B_{i,k}(t) = \binom{k-1}{i} t^i (1-t)^{k-1-i} = B_i^{k-1}(t), \quad i = 0, \dots, k-1.$$

para mayores detalles revisar L. Piegl [Pie 95].

Observación:

- Para $t \in [t_j, t_{j+1}]$ en T , se cumple:

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} \mathbf{d}_i B_{i,k}(t) = \sum_{i=j-k+1}^j \mathbf{d}_i B_{i,k}(t). \quad (1.22)$$

- Si el vector nodo $\mathbf{T} := (t_p, t_{p+1}, \dots, t_{p+n+k})$ satisface

$$\underbrace{t_p = t_{p+1} = \dots = t_{p+k-1} = a}_{k} < t_{p+k} \leq \dots \leq t_{p+n} < \underbrace{t_{p+n+1} = t_{p+n+2} = \dots = t_{p+n+k} = b}_{k}, \quad (1.23)$$

se obtiene la curva *B-Splines* :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=p}^{p+n} \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^d, \quad t \in [a, b]. \quad (1.24)$$

Además esta curva pasa por los puntos de control \mathbf{d}_p y \mathbf{d}_{p+n} ($\mathbf{x}(a) = \mathbf{d}_p$ y $\mathbf{x}(b) = \mathbf{d}_{p+n}$).

Para $p = 0$, se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^d, \quad t \in [a, b]. \quad (1.25)$$

Para $p = -k + 1$, se obtiene

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=-k+1}^{n-k+1} \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^3, \quad t \in [a, b].$$

Para el vector nodo $\mathbf{T}(n, k) := (t_0, t_1, \dots, t_{n+k})$, definido por

$$t_i := \begin{cases} 0 & , \text{ para } i = 0, \dots, k-1 \\ i - k + 1 & , \text{ para } i = k, \dots, n \\ n - k + 2 & , \text{ para } i = n+1, \dots, n+k, \end{cases} \quad (1.26)$$

donde los nodos $t_0 = 0$ y $t_{n+1} = n - k + 2$ son nodos de multiplicidad k y $t_i < t_{i+1}$, $i = k, \dots, n$, se obtiene la curva *B-Splines* :

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbf{R}^3, \quad t \in [a, b] = [0, n - k + 2] \quad (1.27)$$

que pasa por los puntos de control \mathbf{d}_0 y \mathbf{d}_n .

- Usando el resultado del ejemplo anterior, se obtiene la extensión para un *B-Spline* trivariante

$$\mathbf{X}_{k_x k_y k_z}(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,k_x}(u) B_{j,k_y}(v) B_{k,k_z}(w) \quad (1.28)$$

donde

$$u \in [0, n - k_x + 2], \quad v \in [0, m - k_y + 2], \quad w \in [0, l - k_z + 2]$$

y los vectores nodos $\mathbf{T}(n, k_x)$, $\mathbf{T}(m, k_y)$ y $\mathbf{T}(l, k_z)$ están definidos por (1.26). Más adelante será utilizado este resultado.

1.3. BLOSSOMS

Definición 1.20. Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos espacios afines de dimensión finita.

Una función $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es llamado *afín*, si preserva las combinaciones afines, esto es, si

$$\mathbf{H}\left(\sum_{k=1}^m t_k \mathbf{u}_k\right) = \sum_{k=1}^m t_k \mathbf{H}(\mathbf{u}_k), \forall \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \in \mathcal{P}, t_1, \dots, t_m \in \mathbf{R}, \sum_{k=1}^m t_k = 1.$$

NOTA:

- Si $\mathcal{P} := \mathbf{P}_0 + \mathcal{V}_1 := \{\mathbf{P}_0 + \mathbf{v} / \mathbf{v} \in \mathcal{V}_1\}$ y $\mathcal{Q} := \mathbf{P}_0 + \mathcal{V}_2 := \{\mathbf{P}_0 + \mathbf{v} / \mathbf{v} \in \mathcal{V}_2\}$ son dos espacios afines representados como en la ecuación (1.7), entonces cada función $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ puede ser expresado en la forma

$$\mathbf{H}(\mathbf{P}_0 + \mathbf{v}) = \mathbf{H}(\mathbf{P}_0) + \varphi(\mathbf{v}),$$

donde $\varphi : \mathcal{V}_1 \rightarrow \mathcal{V}_2$ es una aplicación lineal. Por consiguiente, cada función lineal es una composición de una aplicación lineal y una traslación. En particular se tiene:

$$\mathbf{H} \text{ es afín} \iff \mathbf{H}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v}, \mathbf{A} \in \mathbf{R}^{d \times d}.$$

- Las funciones afines tienen un significado geométrico. Por ejemplo, para un triángulo $\Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ y $\mathbf{u} = u_0 \mathbf{P}_0 + u_1 \mathbf{P}_1 + u_2 \mathbf{P}_2 \in \Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$ se cumplen las proporciones geométricas que son mostradas en la figura 1.8.

Definición 1.21. A una función $\mathbf{h} : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ de n argumentos multiafines, se dice que es n -afín o multi-afín, si y sólo si es afín en cada uno de sus argumentos cuando los otros argumentos permanecen fijos, es decir, si $u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m \in \mathcal{P}$, se cumple

$$\mathbf{h}(u_1, \dots, u_{k-1}, (1-t)u + tv, u_{k+1}, \dots, u_m) = (1-t)\mathbf{h}(u_1, \dots, u_{k-1}, u, u_{k+1}, \dots, u_m) + t\mathbf{h}(u_1, \dots, u_{k-1}, v, u_{k+1}, \dots, u_m), \forall u, v \in \mathcal{P}, t \in \mathbf{R}$$

Definición 1.22. Se dice que una función $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es un polinomio de grado n , si es posible elegir un sistema de coordenadas cartesianas para \mathcal{P} y \mathcal{Q} donde cada coordenada de $\mathbf{H}(u)$ puede ser expresado como un polinomio de grado menor o igual a n y al menos con uno de ellos de grado n en las coordenadas del argumento del punto u .

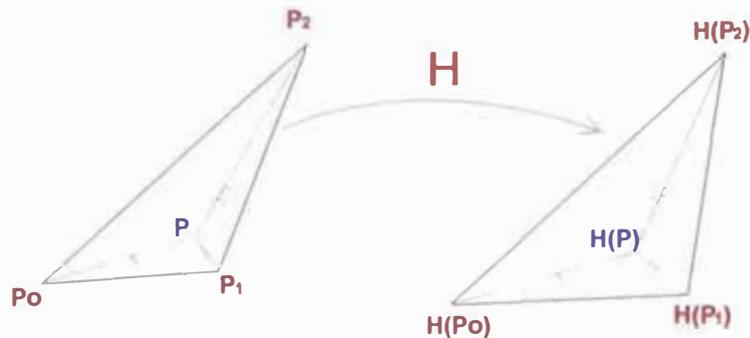


Figura 1.8: Significado geométrico de una función afín.

Ejemplo 5. Una función $H : \mathbf{R}^q \rightarrow \mathbf{R}$ es una función polinomial de grado n si y sólo si $H(u_1, \dots, u_q)$ es la suma de términos de la forma

$$c u_1^{k_1}, \dots, u_q^{k_q}, \quad k_1, \dots, k_q \in \mathbf{Z}_+, \quad \sum_{j=1}^q k_j \leq n$$

y donde c es una constante. La función polinomial $H(u_1, u_2) = 2u_1^2u_2^3 + 2u_1 + u_1^3$ es de grado 5.

Definición 1.23. Si \mathcal{P} es de dimensión uno se dice que la función polinomial $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ es una curva polinomial y cuando \mathcal{P} es de dimensión dos se dice que \mathbf{H} es una superficie polinomial.

Ejemplo 6. Para $\mathcal{P} = \mathbf{R}^2, \mathcal{Q} = \mathbf{R}^2$, la función polinomial $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ definido por $\mathbf{H}(v, w) = (v + w^2 + 1, vw + v)$ es una superficie de grado dos o superficie cuadrática.

Definición 1.24. Una función $\mathbf{h} : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ n -afín se dice que es simétrica si esta función se mantiene constante para cualquier permutación de sus argumentos, es decir, si

$$\mathbf{h}(u_1, \dots, u_i \dots, u_j \dots, u_n) = \mathbf{h}(u_1, \dots, u_j \dots, u_i \dots, u_n), \quad \forall i, j = 1, \dots, n, \quad u_1, \dots, u_j \in \mathcal{P}.$$

La prueba del siguiente resultado se puede encontrar en [Ram 87].

Proposición 1.25. *El principio de Blossoming (afín variante):*

Si \mathcal{P} y \mathcal{Q} son espacios afines de dimensión finita, entonces las funciones polinomiales $\mathbf{H} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ de grado n son equivalentes a funciones simétricas n -afines $\mathbf{h} : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$. En particular, dado una de estas funciones existe una única función del otro tipo que satisface la identidad $\mathbf{H}(u) = \mathbf{h}(u, \dots, u)$.

La función \mathbf{h} es llamado el blossom multi-afín de \mathbf{H} y a la función \mathbf{H} se le denomina la diagonal de \mathbf{h} .

1.3.1. Los Blossoms de las curvas de Bézier:

Sea $\mathbf{H} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{Q}$ una curva polinomial de grado n y sea $\mathbf{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ su blossom, esto es, \mathbf{h} es la única función simétrica n -afín que satisface $\mathbf{H}(u) = \mathbf{h}(u, \dots, u)$ para todo u en L .

Consideramos el segmento $[s, t] \subset \mathbf{R}$ y $\mathbf{h}(u_1, \dots, u_n)$ con $u_i \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$ cada argumento u_i de \mathbf{h} puede expresarse como una combinación afín de puntos s y t :

$$\begin{aligned} u_i &= \left(1 - \frac{u_i - s}{t - s}\right) s + \left(\frac{u_i - s}{t - s}\right) t \\ &= \left(\frac{t - u_i}{t - s}\right) s + \left(\frac{u_i - s}{t - s}\right) t. \end{aligned}$$

como \mathbf{h} es afín respecto a cada uno de sus argumentos u_i , se preservan las combinaciones afines, esto es,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) &= \left(\frac{t - u_i}{t - s}\right) \mathbf{h}(u_1, \dots, u_{i-1}, s, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ &+ \left(\frac{u_i - s}{t - s}\right) \mathbf{h}(u_1, \dots, u_{i-1}, t, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

Aplicando en cada uno de los argumentos de h , se obtiene:

$$\mathbf{h}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{I \cup J = \{1, 2, \dots, n\}} \prod_{i \in I} \left(\frac{t - u_i}{t - s}\right) \prod_{i \in J} \left(\frac{u_i - s}{t - s}\right) \mathbf{h}(\underbrace{s, \dots, s}_{|I|}, \underbrace{t, \dots, t}_{|J|}) \quad (1.29)$$

que es una sumatoria con 2^n términos.

A partir de esta identidad, se obtiene que la función simétrica y n -afín $\mathbf{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ está completamente determinada por los valores particulares:

$$\begin{aligned} &\mathbf{h}(s, s, \dots, s, s) \\ &\mathbf{h}(s, s, \dots, s, t) \\ &\dots\dots\dots \\ &\mathbf{h}(t, t, \dots, t, t). \end{aligned}$$

Sean $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n$ ($n + 1$) puntos en \mathcal{Q} . Una función simétrica y n -afín $\mathbf{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ definido por

$$\mathbf{h}(u_1, \dots, u_n) = \sum_{\substack{\mathbf{I} \cap \mathbf{J} = \emptyset \\ \mathbf{I} \cup \mathbf{J} = \{1, 2, \dots, n\}}} \prod_{i \in \mathbf{I}} \left(\frac{t - u_i}{t - s} \right) \prod_{i \in \mathbf{J}} \left(\frac{u_i - s}{t - s} \right) \mathbf{d}_{\#(J)}$$

tiene la propiedad

$$\mathbf{h}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-k}, \underbrace{t, \dots, t}_k) = \mathbf{d}_k,$$

donde $\#(J)$ denota el número de elementos de J y con esto se ha probado la siguiente:

Proposición 1.26. *La fórmula*

$$\mathbf{h}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-k}, \underbrace{t, \dots, t}_k) = \mathbf{d}_k, \quad k = 0, \dots, n$$

dá una correspondencia uno a uno entre la función simétrica multiafín $\mathbf{h} : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ y las $(n + 1)$ -uplas $(\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n)$ en \mathcal{Q} .

Proposición 1.27. *(Segmento de una curva de Bézier)*

La fórmula de la proposición anterior, provee una correspondencia uno a uno con la curva polinomial $\mathbf{H} : \mathbf{R} \rightarrow \mathcal{Q}$ de grado n y $(n + 1)$ -uplas $(\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n)$ de puntos en \mathcal{Q} , donde \mathbf{h} en la proposición anterior denota el blossom de \mathbf{H} . Además, los puntos $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n$ son los puntos de Bézier del arco de curva $\mathbf{H}([s, t])$.

Prueba.- Sea

$$\mathbf{H}(u) = \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_k B_k^n \left(\frac{u - s}{t - s} \right) \quad (1.30)$$

una curva de Bézier de grado n , con los puntos de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_n$.

Siendo $\mathbf{H}(u)$ la diagonal del Blossom $\mathbf{h}(u, \dots, u)$, $u \in L$, sustituyendo u para cada uno de los u_i en la ecuación (1.29), se obtiene

$$\mathbf{H}(u) = \mathbf{h}(u, \dots, u) = \sum_{k=0}^n B_k^n \left(\frac{u - s}{t - s} \right) \mathbf{h}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-k}, \underbrace{t, \dots, t}_k), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.31)$$

Comparando las fórmulas dadas por (1.30) y (1.31) se obtiene finalmente

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{h}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-k}, \underbrace{t, \dots, t}_k), \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

■

Ejemplo 7. :

La parábola $\mathbf{H}(u) = (u, u^2)$, $u \in [s, t]$, tiene como su blossom a la función $\mathbf{h}(u_1, u_2) = \left(\frac{u_1+u_2}{2}, u_1u_2\right)$ y los puntos de Bézier están dados por:

$$\mathbf{d}_0 = \mathbf{h}(s, s) = (s, s^2)$$

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{h}(s, t) = \left(\frac{s+t}{2}, st\right)$$

$$\mathbf{d}_2 = \mathbf{h}(t, t) = (t, t^2)$$

Ahora si \underline{t} divide al segmento $[s, t]$ en la razón $u_1 : u_0$ se tiene $\underline{t} = u_0s + u_1t$ y se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(s, \underline{t}) &= \mathbf{h}(\underline{t}, s) = u_0\mathbf{h}(s, s) + u_1\mathbf{h}(s, t) \\ \mathbf{h}(\underline{t}, \underline{t}) &= \mathbf{h}(\underline{t}, \underline{t}) = u_0\mathbf{h}(\underline{t}, s) + u_1\mathbf{h}(\underline{t}, t) \end{aligned}$$

De esto se obtiene

$$\mathbf{h}(\underline{t}, \underline{t}) = u_0\mathbf{h}(s, \underline{t}) + u_1\mathbf{h}(\underline{t}, t)$$

Con esto se tiene un medio geométrico para ubicar o evaluar un punto $\mathbf{H}(\underline{t}) = \mathbf{h}(\underline{t}, \underline{t})$. Para el intervalo $[s, t] := [-1, 2]$, $\underline{t} := 1$ y $u_0 = 1/3$ y $u_1 = 2/3$, esto se ilustra en figura 1.9.

A partir de una afirmación de DeRose [DeRo 88], se obtiene el siguiente resultado para curvas de Bézier.

Proposición 1.28. La función $\mathbf{h}^l : \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^p$ ($l > 0$) definido por $\mathbf{h}^l(u_1, \dots, u_l) := \mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_l; \mathbf{d})$ con i fijo es el blossom de la curva de Bézier $\mathbf{H}^l(u) = \sum_{j=0}^l \mathbf{d}_{i+j} B_j^l(u)$ donde $\mathbf{d} := (\mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_{i+l})$ y

$$\mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_l; \mathbf{d}) := \begin{cases} (1 - u_1)\mathbf{d}_i + u_1\mathbf{d}_{i+1} & , \text{ si } l = 1 \\ (1 - u_l)\mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_{l-1}; \mathbf{d}) + u_l\mathbf{h}_{i+1}(u_1, \dots, u_{l-1}; \mathbf{d}) & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Prueba.- Debido a la unicidad del Blossom de un polinomio, será suficiente probar que \mathbf{h}^l es simétrico, n -afín y $\mathbf{h}^l(u, \dots, u) = \mathbf{H}^l(u)$. Lo cuál se va a probar por inducción completa sobre l :

$l = 1$: Se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^1(u_1) &= \mathbf{h}_1(u_1; \mathbf{d}) = (1 - u_1)\mathbf{d}_i + u_1\mathbf{d}_{i+1} \\ &= \mathbf{d}_i B_0^1(u) + \mathbf{d}_{i+1} B_1^1(u) \\ &= \mathbf{H}_1(u) \end{aligned}$$

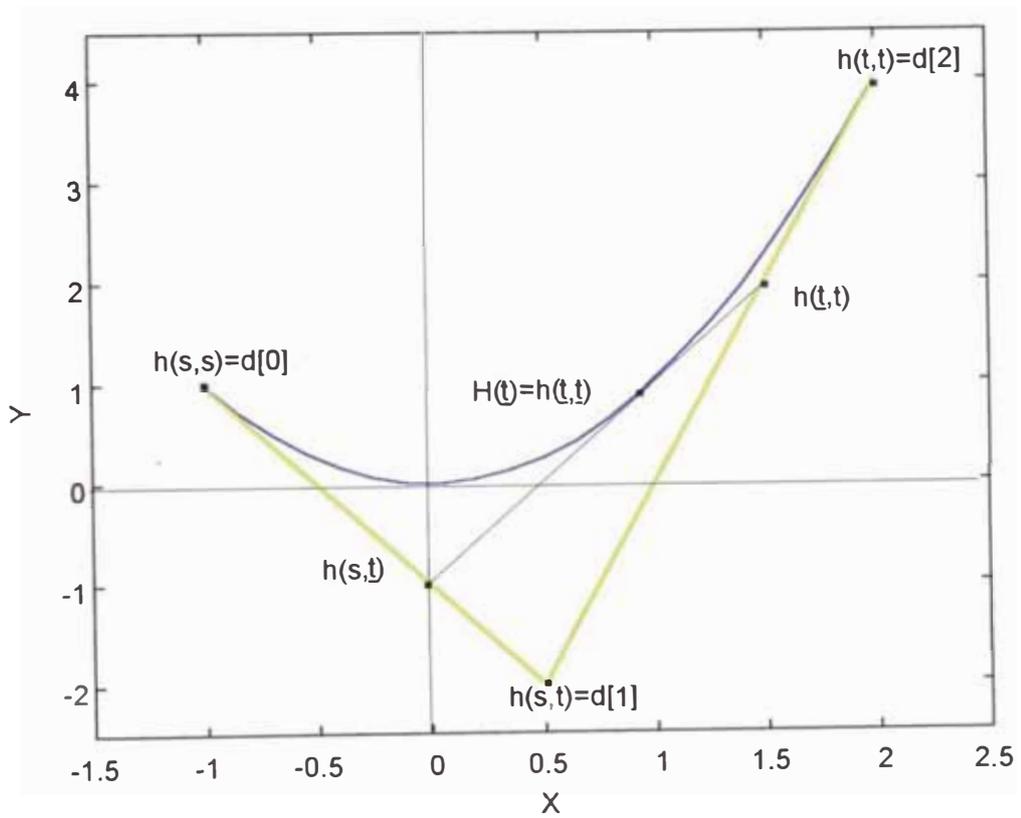


Figura 1.9:

y $\mathbf{h}^1(u_1)$ es simétrico y 1-afín.

Hipótesis Inductiva:

a) $\mathbf{h}^{l-1}(u_1, \dots, u_{l-1})$ es simétrico y $(l-1)$ -afín.

b) $\mathbf{H}_i^{l-1}(u) = \mathbf{h}_i^{l-1}(\underbrace{u, \dots, u}_{(l-1)})$.

Veamos para l :

a) De la definición de \mathbf{h}^l y la hipótesis inductiva a), se obtiene que es l -afín y para la simetría será suficiente probar que $\mathbf{h}_i(u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l; \mathbf{d}) = \mathbf{h}_i(u_l, u_2, \dots, u_{l-1}, u_1; \mathbf{d})$.

De la definición de \mathbf{h}^l y de hipótesis inductiva (a) se cumple:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_l; \mathbf{d}) &= (1 - u_l)\mathbf{h}_i(u_1, u_2, \dots, u_{l-2}, u_{l-1}; \mathbf{d}) + u_l\mathbf{h}_{i+1}(u_1, u_2, \dots, u_{l-2}, u_{l-1}; \mathbf{d}) \\
 &= (1 - u_l)\mathbf{h}_i(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}, u_1; \mathbf{d}) + u_l\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}, u_1; \mathbf{d}) \\
 &= (1 - u_l)[(1 - u_1)\mathbf{h}_i(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d}) + u_1\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d})] \\
 &\quad + u_l[(1 - u_1)\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d}) + u_1\mathbf{h}_{i+2}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d})] \\
 &= (1 - u_1)[(1 - u_l)\mathbf{h}_i(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d}) + u_l\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d})] \\
 &\quad + u_1[(1 - u_l)\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d}) + u_l\mathbf{h}_{i+2}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}; \mathbf{d})] \\
 &= (1 - u_1)\mathbf{h}_i(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}, u_l; \mathbf{d}) + u_1\mathbf{h}_{i+1}(u_{l-1}, u_2, \dots, u_{l-2}, u_l; \mathbf{d}) \\
 &= (1 - u_1)\mathbf{h}_i(u_l, u_2, \dots, u_{l-2}, u_{l-1}; \mathbf{d}) + u_1\mathbf{h}_{i+1}(u_l, u_2, \dots, u_{l-2}, u_{l-1}; \mathbf{d}) \\
 &= \mathbf{h}_i(u_l, u_2, \dots, u_{l-2}, u_{l-1}, u_1; \mathbf{d}).
 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{h}^l(\underbrace{u, \dots, u}_l) &= \mathbf{h}_i(u, \dots, u; \mathbf{d}) \\
 &= (1 - u)\mathbf{h}_i(\underbrace{u, \dots, u}_{l-1}; \mathbf{d}) + u\mathbf{h}_{i+1}(\underbrace{u, \dots, u}_{l-1}; \mathbf{d}) \\
 &= (1 - u)\mathbf{H}_i^{l-1}(u) + u\mathbf{H}_{i+1}^{l-1}(u) \\
 &= (1 - u)\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{d}_{i+j}B_j^{l-1}(u) + u\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{d}_{i+1+j}B_j^{l-1}(u) \\
 &= (1 - u)\sum_{j=0}^{l-1} \mathbf{d}_{i+j}B_j^{l-1}(u) + u\sum_{j=1}^l \mathbf{d}_{i+j}B_{j-1}^{l-1}(u) \\
 &= (1 - u)\mathbf{d}_iB_0^{l-1}(u) + \sum_{j=1}^{l-1} [(1 - u)B_j^{l-1}(u) + uB_{j-1}^{l-1}(u)]\mathbf{d}_{i+j} + u\mathbf{d}_{i+l}B_{l-1}^{l-1}(u).
 \end{aligned}$$

De la definición y propiedad recursiva de los polinomios de Bernstein, se obtiene:

$$\begin{aligned} \underbrace{\mathbf{h}^l(u, \dots, u)}_l &= B_0^l(u)\mathbf{d}_l + \sum_{j=1}^{l-1} \mathbf{d}_{i+j}B_j^l(u) + B_l^l(u)\mathbf{d}_{i+l} \\ &= \sum_{j=0}^l \mathbf{d}_{i+j}B_j^l(u) = \mathbf{H}_l(u). \end{aligned}$$

Definiendo ■

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^{(0)} &:= \mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots \\ \mathbf{b}_k^{(i)} &:= \mathbf{h}_k(\underbrace{u, \dots, u}_i; \mathbf{d}), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

se obtiene el conocido algoritmo de de Casteljau:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{d}_0 & =: & \mathbf{b}_0^{(0)} & & & & \\ & & & \mathbf{b}_0^{(1)} & & & \\ \mathbf{d}_1 & =: & \mathbf{b}_1^{(0)} & & \mathbf{b}_0^{(2)} & & \\ & & & \mathbf{b}_1^{(1)} & & \ddots & \\ \mathbf{d}_2 & =: & \mathbf{b}_2^{(0)} & & \mathbf{b}_1^{(2)} & & \dots \\ & & & \mathbf{b}_2^{(1)} & & & \mathbf{b}_0^{(l)} =: \mathbf{H}(u) \\ \mathbf{d}_3 & =: & \mathbf{b}_3^{(0)} & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & & \\ & & & \vdots & & \mathbf{b}_{l-2}^{(2)} & \\ & & \vdots & & & & \\ & & & \mathbf{b}_{l-1}^{(1)} & & & \\ \mathbf{d}_l & =: & \mathbf{b}_l^{(0)} & & & & \end{array}$$

donde $\mathbf{b}_k^{(i)} := (1 - u)\mathbf{b}_k^{(i-1)} + u\mathbf{b}_{k+1}^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots$

Corolario 1.29. (Algoritmo de de Casteljau) Sea $\mathbf{H}(u) = \sum_{j=0}^l \mathbf{d}_j B_j^l(u)$ una curva de Bézier. Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_k^{(0)} &:= \mathbf{d}_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, l \\ \mathbf{b}_k^{(i)} &:= (1 - u)\mathbf{b}_k^{(i-1)} + u\mathbf{b}_{k+1}^{(i-1)}, \quad i = 1, 2, \dots, l, \quad k = 0, \dots, l - i \end{aligned}$$

Entonces $\mathbf{H}(u) = \mathbf{b}_0^{(l)}$.

1.3.2. Los Blosssons de superficies de Bézier

Ahora se va a desarrollar algunos resultados para superficies de Bézier.

Proposición 1.30. Sean \mathcal{P} y \mathcal{Q} dos subespacios afines, $\mathbf{S} := (\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l)$ un simplejo en \mathcal{P} donde los vértices $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l$ se encuentran en posición general. Una función simétrica y n -afín $\mathbf{h} : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ está completamente determinada por sus imágenes evaluadas en los argumentos $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l$. En particular, la fórmula

$$\frac{\mathbf{h}(\underbrace{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_0}_{i_0}, \underbrace{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{\mathbf{P}_l, \dots, \mathbf{P}_l}_{i_l})}{\forall \vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{Z}_+^{l+1}, \quad |\vec{i}| = i_0 + i_1 + \dots + i_l = n,}$$

provee una correspondencia uno a uno entre funciones simétricas n -afines h y arreglos de $\binom{n+l}{l}$ puntos $(\mathbf{d}_{\vec{i}})$ en \mathcal{Q} .

Prueba.- Como $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l$ se encuentran en posición general, cada punto $\mathbf{u} \in \mathcal{P}$, puede escribirse de manera única como una combinación afín de puntos, en la forma

$$\mathbf{u} = u_0 \mathbf{P}_0 + u_1 \mathbf{P}_1 + \dots + u_l \mathbf{P}_l$$

Siendo $\mathbf{h} : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ una función simétrica y n -afín, expandiendo el primer argumento $\mathbf{u}^{(1)} = u_0^{(1)} \mathbf{P}_0 + u_1^{(1)} \mathbf{P}_1 + \dots + u_l^{(1)} \mathbf{P}_l$ de h en términos de $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_l$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) &= u_0^{(1)} \mathbf{h}(\mathbf{P}_0, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) + u_1^{(1)} \mathbf{h}(\mathbf{P}_1, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) \\ &+ \dots + u_l^{(1)} \mathbf{h}(\mathbf{P}_l, \mathbf{u}^{(2)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}). \end{aligned}$$

Expandiendo de manera similar cada uno de los argumentos $\mathbf{u}^{(i)} = u_0^{(i)} \mathbf{P}_0 + u_1^{(i)} \mathbf{P}_1 + \dots + u_l^{(i)} \mathbf{P}_l$ de h , se obtiene

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) = \sum_{q_1=0}^l \sum_{q_2=0}^l \dots \sum_{q_n=0}^l u_{q_1}^{(1)} u_{q_2}^{(2)} \dots u_{q_n}^{(n)} \mathbf{h}(\mathbf{P}_{q_1}, \mathbf{P}_{q_2}, \dots, \mathbf{P}_{q_n}).$$

De esto se deduce

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(n)}) = \sum_{I_i \in T} \prod_{i_0 \in I_0} u_0^{(i_0)} \prod_{i_1 \in I_1} u_1^{(i_1)} \dots \prod_{i_l \in I_l} u_l^{(i_l)} \mathbf{h}(\underbrace{\mathbf{P}_0, \dots, \mathbf{P}_0}_{i_0}, \underbrace{\mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{\mathbf{P}_l, \dots, \mathbf{P}_l}_{i_l}) \quad (1.32)$$

donde $T = \{I_i : I_i (i = 0, 1, \dots, l) \text{ es una partición de } \{1, 2, \dots, n\}\}$. Para $I_q = \emptyset$ se considera $\prod_{i_q \in I_q} u_q^{(i_q)} := 1$ y no debe aparecer \mathbf{P}_q en el argumento de \mathbf{h} lo que equivale a decir que aparece " $i_q := 0$ veces". La sumatoria obtenida tiene $(l+1)^n$ términos.

Proposición 1.31. Sea \mathbb{A}^l un subespacio afín de dimensión l y $S := (P_0, P_1, \dots, P_l)$ ($l \leq d$) un simplejo en \mathbb{A}^l con los vértices P_0, P_1, \dots, P_l que se encuentran en posición general. Sea $H : \mathbb{A}^l \rightarrow \mathbb{R}^d$ un polinomio de grado n y $\mathbf{h} : (\mathbb{A}^l)^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ su blossom. Entonces la red de control de Bézier de H relativo a S (de lo que corresponde a $H(S)$) son los valores del blossom:

$$\mathbf{d}_{\vec{i}} := \mathbf{h}(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l})$$

para todo $\vec{i} := (i_0, i_1, \dots, i_l) \in \mathbb{Z}_+^{l+1}$ con $|\vec{i}| = i_0 + i_1 + \dots + i_l = n$.

Prueba.- Si todos los argumentos del Blossom $\mathbf{h}(\mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(l)})$ son iguales a $\mathbf{u} = u_0 P_0 + u_1 P_1 + \dots + u_l P_l$, los $(l+1)^n$ términos de la sumatoria dado por (1.32), se reducen a

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=n} \binom{n}{|\vec{i}|} u_0^{i_0} u_1^{i_1} \dots u_l^{i_l} \mathbf{h}(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l})$$

De la definición 1.11 del polinomio l -variante de Bernstein de grado n se obtiene

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=n} B_{\vec{i}}^n(u_0, u_1, \dots, u_l) \mathbf{h}(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_{i_0}, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_{i_1}, \dots, \underbrace{P_l, \dots, P_l}_{i_l}).$$

Comparando con la definición de la representación en forma de Bernstein-Bézier, se obtiene el resultado buscado. ■

Para $l = 2$, resulta:

Corolario 1.32. (Pedazos de Superficie triangular de Bézier)

Sea $\mathbf{H} : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$ un polinomio de grado n y $\mathbf{h} : (\mathbb{A}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ su blossom. Sean P_0, P_1, P_2 los vértices de un triángulo de Bézier $\Delta P_0 P_1 P_2$, entonces los puntos de Bézier con los cuales es controlado el pedazo de superficie triangular $\mathbf{H}(\Delta P_0 P_1 P_2)$ son los valores del blossom

$$\mathbf{h}(\underbrace{P_0, \dots, P_0}_i, \underbrace{P_1, \dots, P_1}_j, \underbrace{P_2, \dots, P_2}_k)$$

con $i + j + k = n$, $i, j, k \in \mathbb{Z}_+$.

Ejemplo 8. : El paraboloides $S : z = x^2 + y^2$ está definido por el polinomio cuadrático $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{H}(u, v) = (u, v, u^2 + v^2)$. El blossom $\mathbf{h} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ de este polinomio cuadrático $\mathbf{H}(u, v)$ está dado por $\mathbf{h}(\overline{w}_1, \overline{w}_2) = (\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, u_1 u_2 + v_1 v_2)$ donde $\overline{w}_1 = (u_1, v_1)$ y $\overline{w}_2 = (u_2, v_2)$.

Consideremos el triángulo $\Delta P_0 P_1 P_2$ con $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (0,1)$, $P_2 = (1,1)$, luego se tiene que $H(\Delta P_0 P_1 P_2)$ define un pedazo triangular de la superficie cuadrática S , tal como se aprecia en la figura 1.10. Los puntos de Bézier están dados por

$$\begin{aligned} d_{(0,0,2)} &:= \mathbf{h}(P_2, P_2) = \mathbf{h}((1, 1), (1, 1)) = (1, 1, 2), \\ d_{(0,1,1)} &:= \mathbf{h}(P_1, P_2) = \mathbf{h}((0, 1), (1, 1)) = (1/2, 1, 2), \\ d_{(0,2,0)} &:= \mathbf{h}(P_1, P_1) = \mathbf{h}((0, 1), (0, 1)) = (0, 1, 1), \\ \\ d_{(1,0,1)} &:= \mathbf{h}(P_0, P_2) = \mathbf{h}((0, 0), (1, 1)) = (1/2, 1/2, 0), \\ d_{(1,1,0)} &:= \mathbf{h}(P_0, P_1) = \mathbf{h}((0, 0), (0, 1)) = (0, 1/2, 0), \\ \\ d_{(2,0,0)} &:= \mathbf{h}(P_0, P_0) = \mathbf{h}((0, 0), (0, 0)) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

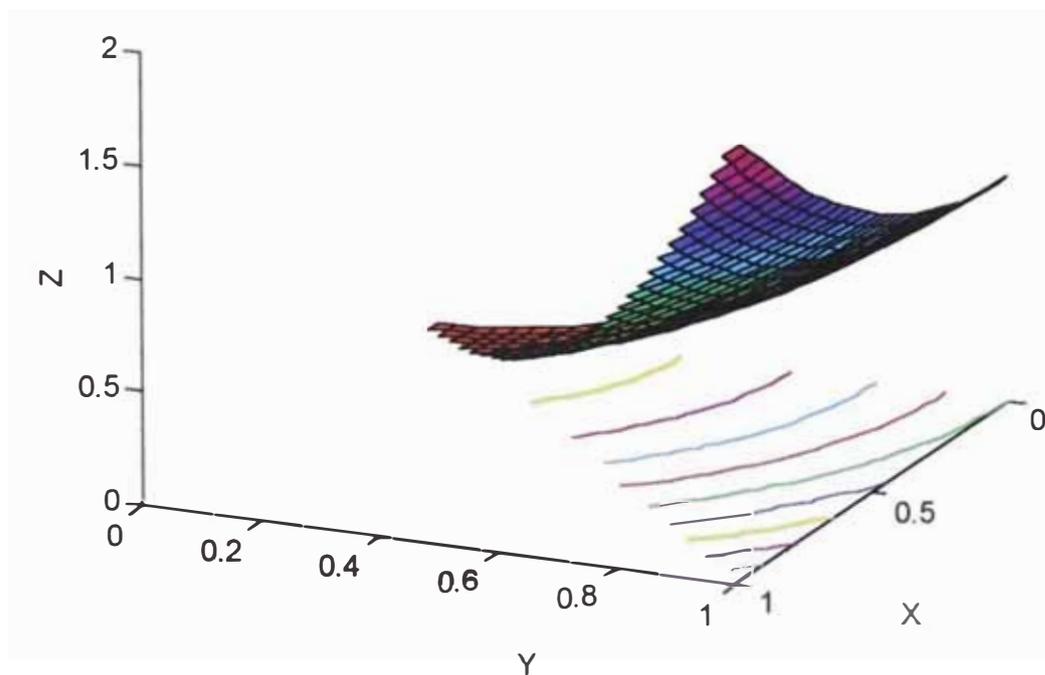


Figura 1.10:

Los Blossoms de simplejos de Bézier.

A partir de una afirmación de DeRose [DeRo 88], se obtiene el siguiente resultado para simplejos de Bézier.

Teorema 1.33. Sea $\mathbf{H}_{\vec{i}}^m: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ un simplejo de Bézier de dimensión N :

$$\mathbf{H}_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{j}|=m} \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{j}} \mathbf{B}_{\vec{j}}^m(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbb{R}^N, \quad \vec{i} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}, \quad \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{j}} \in \mathbb{R}^d, \quad \vec{i}, \vec{j} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}$$

La función $\mathbf{h}^m: (\mathbb{R}^N)^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ definido por $\mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m) := \mathbf{h}_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m; \mathbf{d})$ con \vec{i} fijo, es el blossom de $\mathbf{H}^m(\mathbf{u})$, donde

$$\mathbf{h}_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) := \begin{cases} \sum_{\alpha=0}^N u_1^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}} & , \text{ si } m = 1 \\ \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}; \mathbf{d}) & , \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\vec{i} \in \mathbb{Z}_+^{N+1}$ y u_m^0, \dots, u_m^N son las coordenadas baricéntricas de \mathbf{u}_m respecto al dominio simplejo de \mathbf{H}^m y \mathbf{d} es el vector que contiene a los puntos de control de \mathbf{H}^m .

Prueba.- La prueba es similar a la prueba de la Proposición 1.29. Debido a la unicidad del Blossom de un simplejo de Bézier, será suficiente probar que \mathbf{h}^m es simétrico, m -afín y $\mathbf{h}^m(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}) = \mathbf{H}^m(\mathbf{u})$, lo cual se va a probar por inducción completa sobre m :

$m = 1$: Se cumple que

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^1(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_{\vec{i}}^1(\mathbf{u}; \mathbf{d}) &= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}} \\ &= \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{e}_1} \mathbf{B}_{\vec{i}+\vec{e}_1}^1(\mathbf{u}) + \dots + \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{e}_{N+1}} \mathbf{B}_{\vec{i}+\vec{e}_{N+1}}^1(\mathbf{u}) B_1^1(u) \\ &= \mathbf{H}^1(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

y $\mathbf{h}^1(\mathbf{u})$ es simétrico y 1-afín.

Hipótesis Inductiva:

- $\mathbf{h}^{m-1}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1})$ es simétrico y $(m-1)$ -afín.
- $\mathbf{H}_{\vec{i}}^{m-1}(\mathbf{u}) = \mathbf{h}_{\vec{i}}^{m-1}(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m-1)})$.

Veamos para m :

a) Para la simetría será suficiente probar que

$$\mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) = \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_1; \mathbf{d})$$

De la definición de \mathbf{h}^m y de hipótesis inductiva (a) se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) &= \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_{m-1}; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_1; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha \sum_{\hat{\alpha}=0}^N u_1^{\hat{\alpha}} \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1} + \vec{e}_{\hat{\alpha}+1}}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}; \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Cambiando el orden de las sumatorias y usando la definición de \mathbf{h}^m se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) &= \sum_{\hat{\alpha}=0}^N u_1^{\hat{\alpha}} \sum_{\alpha=0}^N u_m^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\hat{\alpha}+1} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{\alpha=0}^N u_1^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente la hipótesis inductiva (a) se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_m; \mathbf{d}) &= \sum_{\alpha=0}^N u_1^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_{m-1}; \mathbf{d}) \\ &= \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_1; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Con esto queda establecido que $\mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ es simétrico. Luego, para probar que $\mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ es m -afín, será suficiente probar que ésta función es afín en su última componente; esto es, se debe probar que la función $\sigma(\mathbf{u}_m) := \mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ es afín.

Veamos que $\sigma(\mathbf{u}_m) := \mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m)$ es afín:

Sean β_1, \dots, β_p números reales tales que $\sum_{p=1}^n \beta_p = 1$. De la definición de \mathbf{h}^m se obtiene

$$\begin{aligned}
\sigma\left(\sum_{p=1}^n \beta_p \mathbf{u}_{m,p}\right) &:= \mathbf{h}^m(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{m-1}, \sum_{p=1}^n \beta_p \mathbf{u}_{m,p}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^N \left(\sum_{p=1}^n \beta_p u_{m,p}^\alpha\right) \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_{m-1}; \mathbf{d}) \\
&= \sum_{p=1}^n \beta_p \sum_{\alpha=0}^N u_{m,p}^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_{m-1}; \mathbf{d}) \\
&= \sum_{p=1}^n \beta_p \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{m-2}, \mathbf{u}_{m-1}, \mathbf{u}_{m,p}; \mathbf{d}) \\
&= \sum_{p=1}^n \beta_p \sigma(\mathbf{u}_{m,p}).
\end{aligned}$$

b) De las definiciones de \mathbf{h}_i^m , \mathbf{H}_i^m y de la hipótesis (b) se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^m(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m)}) &= \mathbf{h}_{\vec{i}}(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m)}; \mathbf{d}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m-1)}; \mathbf{d}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{H}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \sum_{|\vec{j}|=m-1} \mathbf{d}_{(\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}) + \vec{j}} \mathbf{B}_{\vec{j}}^{m-1}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

Mediante el cambio de índices $\vec{k} := \vec{e}_{\alpha+1} + \vec{j}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{h}^m(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m)}) &= \sum_{\alpha=0}^N \sum_{|\vec{j} + \vec{e}_{\alpha+1}|=m} u^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i} + (\vec{e}_{\alpha+1} + \vec{j})} \mathbf{B}_{(\vec{j} + \vec{e}_{\alpha+1}) - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(\mathbf{u}) \\
&= \sum_{\alpha=0}^N \sum_{|\vec{k}|=m} u^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i} + \vec{k}} \mathbf{B}_{\vec{k} - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(\mathbf{u}).
\end{aligned}$$

De la definición y propiedad recursiva de los polinomios de Bernstein de N -variantes (1.13), se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^m(\underbrace{\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}}_{(m)}) &= \sum_{|\vec{k}|=m} \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{k}} \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{B}_{\vec{k}-\vec{e}_{\alpha+1}}^{m-1}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|\vec{k}|=m} \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{k}} \mathbf{B}_{\vec{k}}^m(\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{H}_{\vec{i}}^m(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

A partir de éste resultado definiendo

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(0)} &:= \mathbf{d}_{\vec{k}}, \quad |\vec{k}| = m \\ \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(i)} &:= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{h}_{\vec{k}+\vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{i-1}; \mathbf{d}), \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

se obtiene el algoritmo de *de Casteljau* para simplejos de Bézier :

Corolario 1.34. (*Algoritmo de de Casteljau para simplejos de Bézier*)

Sea $\mathbf{H}_{\vec{i}}^m: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^d$ un simplejo de Bézier de dimensión N :

$$\mathbf{H}^m(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{j}|=m} \mathbf{d}_{\vec{j}} \mathbf{B}_{\vec{j}}^m(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N, \quad \mathbf{d}_{\vec{j}} \in \mathbf{R}^d, \quad \vec{j} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}$$

Sean

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(0)} &:= \mathbf{d}_{\vec{k}}, \quad \vec{k} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}, \quad |\vec{k}| = m, \\ \mathbf{b}_{\vec{k}}^{(i)} &:= \sum_{\alpha=0}^N u^\alpha \mathbf{b}_{\vec{k}+\vec{e}_{\alpha+1}}^{(i-1)}, \quad \vec{k} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad |\vec{k}| = m - i \end{aligned}$$

donde u_m^0, \dots, u_m^N son las coordenadas baricéntricas de \mathbf{u}_m respecto al dominio simplejo de \mathbf{H}^m .

Entonces $\mathbf{H}(\mathbf{u}) = \mathbf{b}_{\vec{0}}^{(m)}$.

2. DEFORMACIÓN DE FORMAS LIBRES

En ésta sección se da una corta explicación del significado de la deformación de un sólido encerrado en una caja como se encuentra descrito por Sederberg y Parry [Sed 86] y Bézier [Béz 78].

2.1. Definición de una caja $Q = (P_0, U, V, W)$ en \mathbb{R}^3

Sean U, V y W tres vectores linealmente independientes en \mathbb{R}^3 . Los vectores U, V y W con origen en el punto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ definen la caja $Q = (P_0, U, V, W)$, lo cual es ilustrado por la figura 2.1.

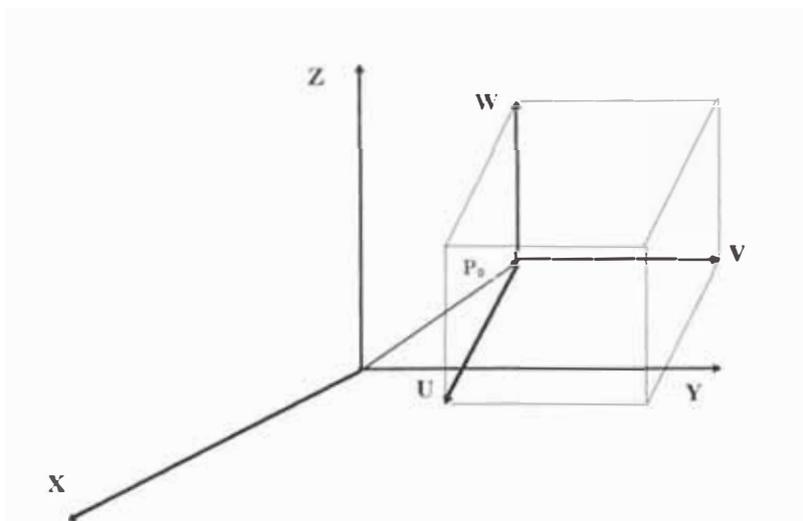


Figura 2.1:

Un punto $P(x, y, z)$ está en la caja Q sí y sólo si existen $u, v, w \in [0, 1]$, tal que

$$P := P_0 + uU + vV + wW. \quad (2.1)$$

Las coordenadas locales (u, v, w) , pueden obtenerse resolviendo el siguiente sistema lineal

$$(U, V, W) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = P - P_0. \quad (2.2)$$

En caso de que U, V, W sean ortogonales también puede utilizarse

$$u = \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W})}{\mathbf{U} \cdot (\mathbf{V} \times \mathbf{W})}, v = \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{W})}{\mathbf{V} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{W})}, w = \frac{(\mathbf{P} - \mathbf{P}_0) \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{V})}{\mathbf{W} \cdot (\mathbf{U} \times \mathbf{V})} \quad (2.3)$$

donde \cdot , \cdot 'y' \times denotan a los productos escalar y vectorial respectivamente.

2.2. Red de puntos de control de la caja

La caja Q es marcado con una red de puntos de control:

$$\mathbf{b}_{i,j,k} := \mathbf{P}_0 + \frac{i}{n}\mathbf{U} + \frac{j}{m}\mathbf{V} + \frac{k}{l}\mathbf{W} \quad (2.4)$$

con $n, m, l \in \mathbf{N}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, $0 \leq k \leq l$.

La red de puntos de control está definido por $(n + 1)$ planos que son paralelos con el plano \mathbf{VW} , $(m + 1)$ planos que son paralelos con el plano \mathbf{UW} y $(l + 1)$ planos que son paralelos con el plano \mathbf{UV} , tal como se muestra en la figura 2.2.

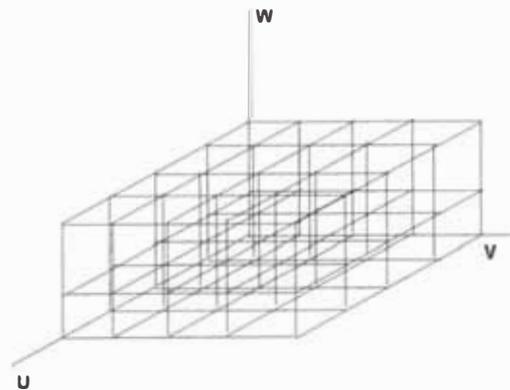


Figura 2.2:

2.3. Polinomios trivariantes de Bézier

Cada punto (u, v, w) de la caja Q puede ser representado como

$$(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \mathbf{b}_{i,j,k} B_i^n(u) B_j^m(v) B_k^l(w) \quad (2.5)$$

por $t = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$, donde $b_i = i/n$, $i = 0, \dots, n$.

Cambiando los puntos $\mathbf{b}_{i,j,k}$ definidos por 2.4, se obtiene una nueva red con nodos $\widehat{\mathbf{b}}_{i,j,k}$. Entonces las coordenadas locales de cada punto $(u, v, w) \in \mathbf{Q}$ pueden ser desplazadas al punto $(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w})$ de la siguiente manera

$$(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \widehat{\mathbf{b}}_{i,j,k} B_i^n(u) B_j^m(v) B_k^l(w). \quad (2.6)$$

El resultado es una caja-de-Bézier.

Afirmación:

- No es cierto que la caja-de-Bézier sea una combinación convexa de todos puntos $\mathbf{b}_{i,j,k}$, mientras que los puntos $(\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{w})$ son una combinación convexa de los puntos $\widehat{\mathbf{b}}_{i,j,k}$.
- Superficies que se encuentran en la caja pueden ser transformadas en una superficie de Bézier.
- De este modo cualquier superficie definida en este caja, puede ser deformada mediante éste proceso, moviendo los nodos de la red.

2.4. Deformación de un objeto dentro de la caja:

Un objeto S de forma arbitraria puede ser deformada de la siguiente manera:

Sea $\mathbf{Q} = (P_0, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$ una caja y S un objeto que está en el interior de \mathbf{Q} . Una deformación de \mathbf{Q} causa una transformación de todos los puntos interiores de \mathbf{Q} y por lo tanto de todos los puntos de S .

2.5. B-Splines trivariantes

En este caso consideraremos, por comodidad, los vectores

$$\mathbf{U} := (a, 0, 0), \quad \mathbf{V} := (0, b, 0), \quad \mathbf{W} := (0, 0, c), \quad a, b, c \in \mathbf{R}_+,$$

que son paralelos a los ejes de coordenadas. En este caso los puntos $P(x, y, z)$ de la caja \mathbf{Q} , satisfacen

$$\begin{aligned} x_0 &\leq x \leq x_0 + a \\ y_0 &< y < y_0 + b \\ z_0 &\leq z \leq z_0 + c \end{aligned}$$

Coordenadas Locales de un punto

En la sección (1.2) se da una breve introducción a los B-Splines. En el caso particular donde el vector nodo $\mathbf{T}(n, k) := (t_0, t_1, \dots, t_{n+k})$, está definido por

$$t_i := \begin{cases} 0 & , \text{ para } i = 0, \dots, k-1 \\ i - k + 1 & , \text{ para } i = k, \dots, n \\ n - k + 2 & , \text{ para } i = n + 1, \dots, n + k, \end{cases} \quad (2.7)$$

es decir, los nodos $t_0 = 0$ y $t_{n+1} = n - k + 2$ son nodos de multiplicidad k y $t_i < t_{i+1}$, $i = k, \dots, n$, se obtiene la curva *B-Spline*

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{d}_i B_{i,k}(t), \quad \mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^3, \quad t \in [a, b] = [0, n - k + 2]$$

que pasa por los puntos de control \mathbf{d}_0 y \mathbf{d}_n . De manera similar se obtiene la extensión para un *B-Spline* trivariante. Dados los ordenes k_x, k_y y k_z con $k_x < n + 2, k_y < m + 2$ y $k_z < l + 2$ de tres B-Splines se cumple

$$\mathbf{X}_{k_x k_y k_z}(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,k_x}(u) B_{j,k_y}(v) B_{k,k_z}(w)$$

donde

$$u \in [0, n - k_x + 2], \quad v \in [0, m - k_y + 2], \quad w \in [0, l - k_z + 2]$$

y los vectores nodo $\mathbf{T}(n, k_x)$, $\mathbf{T}(m, k_y)$ y $\mathbf{T}(l, k_z)$ están definidos conforme a 2.7.

Definición 2.1. : Las coordenadas locales (u, v, w) de la caja de un punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ están definidas por :

$$\begin{aligned} u &= ((x - x_0)/a)(n - k_x + 2) \\ v &= ((y - y_0)/b)(m - k_y + 2) \\ w &= ((z - z_0)/c)(l - k_z + 2). \end{aligned}$$

De esta definición se concluye de inmediato que

$$u \in [0, n - k_x + 2], \quad v \in [0, m - k_y + 2], \quad w \in [0, l - k_z + 2]$$

En este caso el punto (u, v, w) del caja \mathbf{Q} se pueden representar como

$$(u, v, w) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \mathbf{b}_{i,j,k} B_{i,k_x}^{(k_x)}(u) B_{j,k_y}^{(k_y)}(v) B_{k,k_z}^{(k_z)}(w)$$

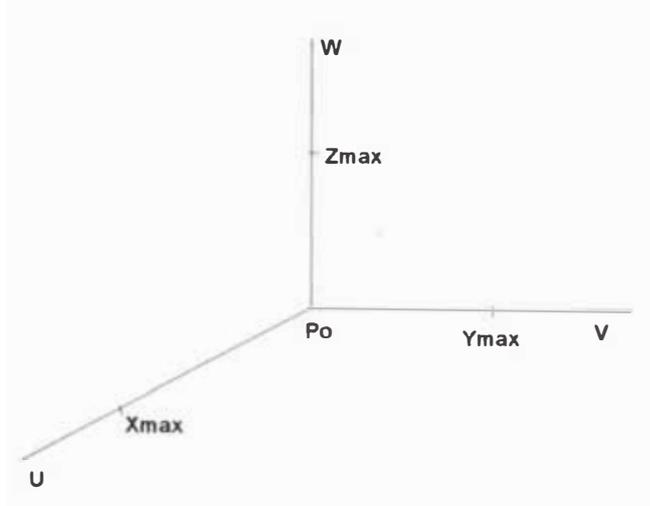


Figura 2.3: Construyendo una caja.

moviendo los puntos $\mathbf{b}_{i,j,k}$ se obtiene una nueva red con nodos $\hat{\mathbf{b}}_{i,j,k}$ y el punto (u, v, w) se desplazará al punto

$$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \hat{\mathbf{b}}_{i,j,k} B_{i,k_x}^{(k_x)}(u) B_{i,k_y}^{(k_y)}(v) B_{i,k_z}^{(k_z)}(w)$$

De este modo cualquier superficie definida en esta caja \mathbf{Q} , puede ser deformada mediante éste proceso, moviendo los nodos de la red.

La idea dada en esta sección, es también aplicable a otros tipos de representaciones de superficies.

2.6. Implementación

Dado un conjunto de puntos $\mathcal{P} = \left\{ \mathbf{P}_{\vec{i}} = (P_{\vec{i},x}, P_{\vec{i},y}, P_{\vec{i},z}) \in \mathbf{R}^3 / \vec{i} \in \mathbf{I} \right\}$ que describen a un objeto S en el espacio, donde \mathbf{I} es un conjunto de índices que relacionan a los puntos de \mathcal{P} .

Observando la figura 2.3, se obtiene el siguiente algoritmo para construir una caja $\mathbf{Q} = (\mathbf{P}_0, \mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W})$.

Algoritmo para construir una caja $Q = (P_0, U, V, W)$
ENTRADA: $\mathcal{P} = \{P_{\vec{i}} = (P_{\vec{i},x}, P_{\vec{i},y}, P_{\vec{i},z}) \in \mathbb{R}^3 / \vec{i} \in I\}$ conjunto de puntos que describen a un objeto
$x_{\min} := \min \{P_{\vec{i},x} / \vec{i} \in I\}$, $x_{\max} := \max \{P_{\vec{i},x} / \vec{i} \in I\}$ $y_{\min} := \min \{P_{\vec{i},y} / \vec{i} \in I\}$, $y_{\max} := \max \{P_{\vec{i},y} / \vec{i} \in I\}$ $z_{\min} := \min \{P_{\vec{i},z} / \vec{i} \in I\}$, $z_{\max} := \max \{P_{\vec{i},z} / \vec{i} \in I\}$
$P_0 := (x_{\min}, y_{\min}, z_{\min})$ $U := (x_{\max} - x_{\min}, 0, 0)$ $V := (0, y_{\max} - y_{\min}, 0)$ $W := (0, 0, z_{\max} - z_{\min})$
SALIDA: $Q = (P_0, U, V, W)$ la caja que contiene el objeto S .

Una vez que se ha obtenido una caja $Q = (P_0, U, V, W)$ que contiene al objeto S , se necesita marcar Q con una red de control $\mathbf{b}_{i,j,k}$ que son obtenidos por la intersección de planos paralelos a las caras de la caja Q . Esto puede realizarse mediante el siguiente algoritmo:

<i>ALGORITMO PARA OBTENER UNA RED DE CONTROL</i> Entrada: $Q = (P_0, U, V, W)$ n : indica $(n + 1)$ planos paralelos al plano VW . m : indica $(m + 1)$ planos paralelos al plano UW . l : indica $(l + 1)$ planos paralelos al plano UV .
Para $i := 0, \dots, n$
Para $j := 0, \dots, m$
Para $k := 0, \dots, l$
$\mathbf{b}_{i,j,k} := P_0 + \frac{i}{n}U + \frac{j}{m}V + \frac{k}{l}W$
Salida : Red de control $\{\mathbf{b}_{i,j,k} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l\}$ que marca la caja Q .

Resulta conveniente visualizar en el monitor de una computadora los puntos de control $\mathbf{b}_{i,j,k}$ y el objeto S que va a ser deformado, con la finalidad de poder desplazar los puntos de control $\mathbf{b}_{i,j,k}$ en $\hat{\mathbf{b}}_{i,j,k}$ y con ello desplazar cada punto $(u, v, w) \in \mathcal{P} \subset Q$ en $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$. El siguiente algoritmo tiene éste propósito:

<p>Entrada: $\mathbf{b}_{i,j,k} : 0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq m, 0 \leq k \leq l$ (red de control que marcan a una caja \mathbf{Q})</p> <p>$\mathcal{P} = \{ \mathbf{P}_{\vec{i}} = (P_{\vec{i},x}, P_{\vec{i},y}, P_{\vec{i},z}) \in \mathbf{R}^3 / \vec{i} \in \mathbf{I} \}$ conjunto de puntos que describen a un objeto S.</p>
<p>Para cada punto $\mathbf{P}_{\vec{i}} \in \mathcal{P}$</p>
<p>Resolver : $(\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}) \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{\vec{i}} - \mathbf{P}_0$</p> <p>obteniendo (u, v, w).</p>
<p>$(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}) := \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^l \hat{\mathbf{b}}_{i,j,k} B_i^n(u) B_j^m(v) B_k^l(w)$</p>
<p>$\hat{u} := \frac{\hat{u} - x_{\min}}{x_{\max} - x_{\min}}, \hat{v} := \frac{\hat{v} - y_{\min}}{y_{\max} - y_{\min}}, \hat{w} := \frac{\hat{w} - z_{\min}}{z_{\max} - z_{\min}}$</p>
<p>$\hat{\mathbf{P}}_{\vec{i}} := \mathbf{P}_0 + \hat{u}\mathbf{U} + \hat{v}\mathbf{V} + \hat{w}\mathbf{W}$</p>
<p><i>SALIDA</i> : $\hat{\mathcal{P}} = \{ \hat{\mathbf{P}}_{\vec{i}} / \vec{i} \in \mathbf{I} \}$ conjunto de puntos que describen al objeto deformado \hat{S}.</p>

Para continuar deformando el objeto \hat{S} se puede asignar $S := \hat{S}$ y $\mathcal{P} := \hat{\mathcal{P}}$ e iniciar nuevamente este procedimiento.

La sumatoria que aparece en éste algoritmo para obtener $(\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$ puede ser evaluado eficientemente usando el algoritmo de *de Casteljaou*.

El algoritmo propuesto puede ser usado para \mathbf{U}, \mathbf{V} y \mathbf{W} de módulos mayores a la unidad. Si se ejecutan todos los pasos del método, sin cambiar los puntos de control la figura no varia, lo cual es una mejora de la propuesta original presentada por Serderbeg y Parry [Sed 86].

A continuación se presentan algunos ejemplos, que han sido obtenidos utilizando el método propuesto anteriormente.

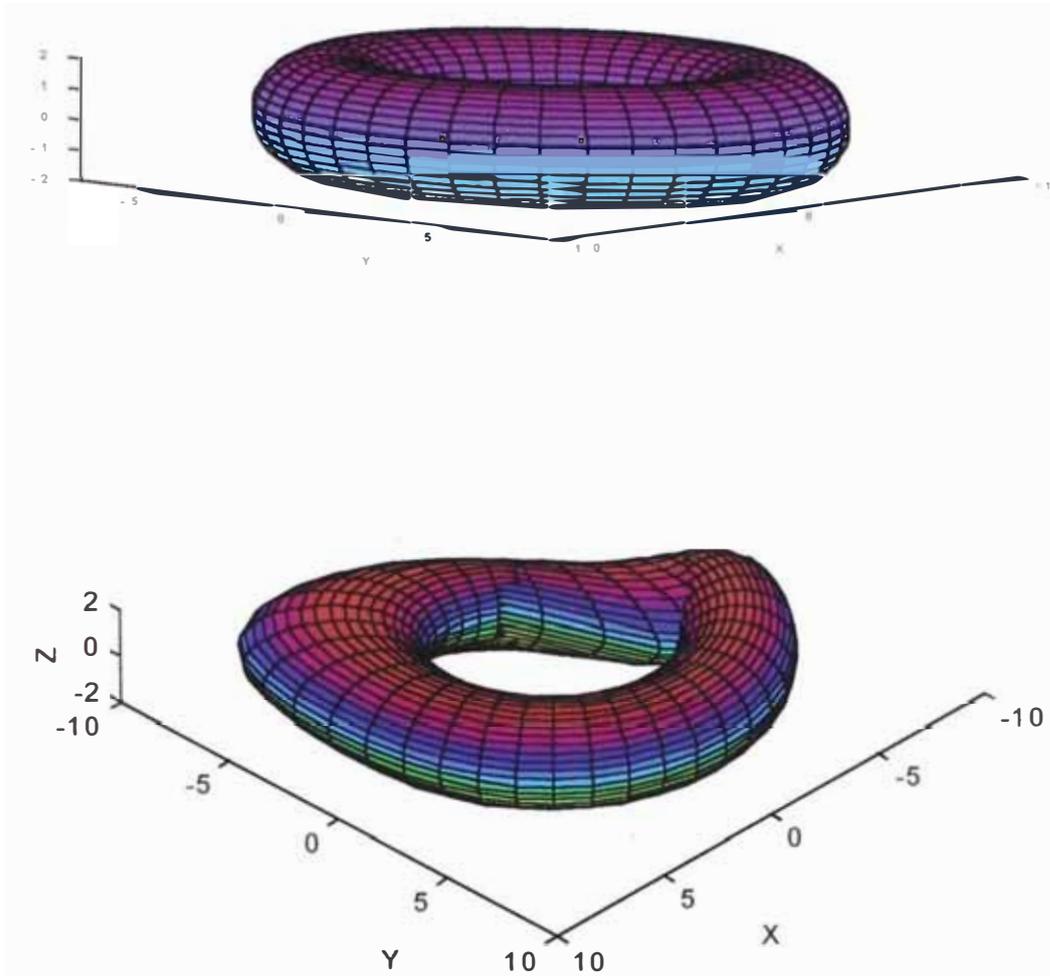


Figura 2.5: Deformación N. 01 del Toro (vista 01)

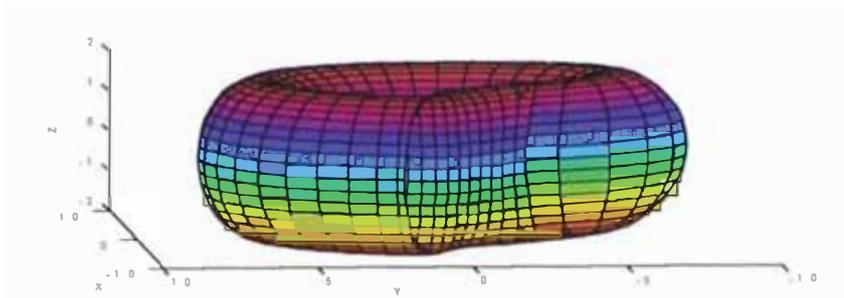


Figura 2.6: Deformación N. 01 del Toro (vista 02).

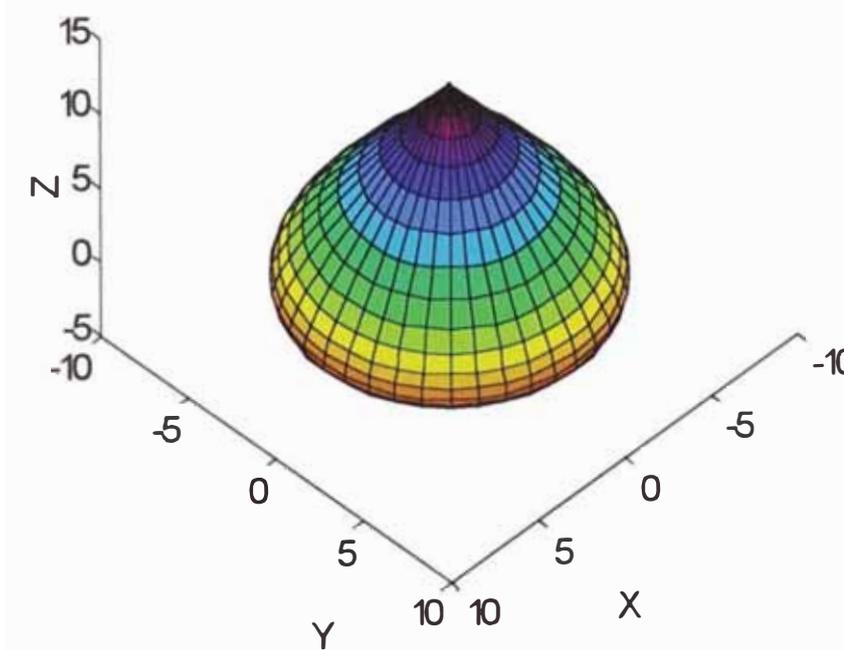


Figura 2.7: Deformación N. 02 del Toro.

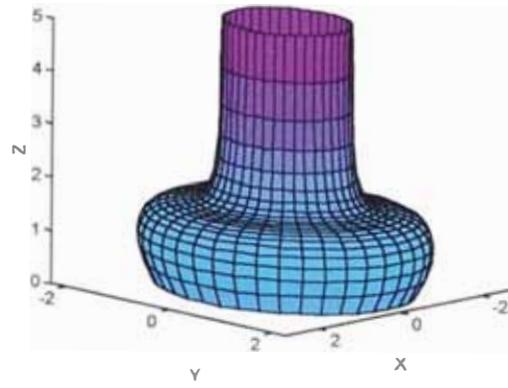


Figura 2.8: Superfície a deformar.

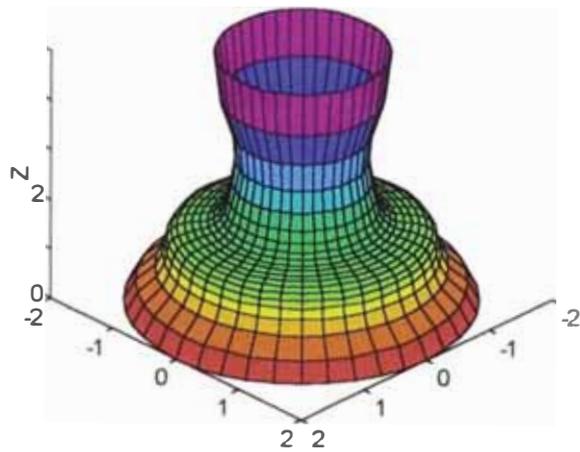


Figura 2.9: Superfície deformada.

3. COMPOSICIÓN DE POLINOMIOS DE BÉZIER

Este capítulo está basado en los trabajos de DeRose[DeRo 88] y [DeRo 93]. Se desarrollarán los fundamentos teóricos para construir algoritmos eficientes para encontrar los puntos de control de la composición $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ de dos simplejos de Bézier $\mathbf{g} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ y $\mathbf{F} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^d$ ($n < N \leq d$) a partir de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} . En general los algoritmos de composición pueden ser aplicados para resolver varios problemas, tales como: evaluación, subdivisión, reparametrización polinomial, unión de curvas de Bézier con continuidad geométrica de orden arbitrario, etc. En especial estos algoritmos pueden ser aplicados para la determinación de la red de control de pedazos de superficies y volúmenes de superficies triangulares después que han sufrido una deformación al mover los puntos de control de uno de los simplejos de Bézier. Por ejemplo, si consideramos que \mathbf{g} es una superficie a ser deformada por el volumen de Bézier \mathbf{F} , entonces $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ representa la deformación de \mathbf{g} mediante \mathbf{F} .

Se obtienen dos tipos de algoritmos que son apropiados para la implementación, uno de los cuáles llamado el *algoritmo de Blossom*, provee la construcción geométrica de los puntos de control de $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$, con lo cual se tiene una idea intuitiva del manejo de los puntos de control de \mathbf{g} y \mathbf{F} para obtener una deformación apropiada $\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$ de \mathbf{g} mediante \mathbf{F} . Este procedimiento de deformación, puede ser aplicado sucesivamente definiendo cada vez a la función \mathbf{g} como $\hat{\mathbf{F}}$ y eligiendo otra deformación \mathbf{F} .

Se presenta una mejora de los algoritmos de Blossoms para la composición. También se resuelve el problema de obtener los puntos de control de la composición de dos simplejos de Bézier de manera general aplicando la teoría de los Blossom. Finalmente se extiende éstos resultados al caso de simplejos racionales de Bézier.

3.1. Composición de curvas de Bézier

Esta sección está encaminado a la solución del problema general de composición de dos curvas de Bézier. El problema puede proponerse de la siguiente manera:

Dado: Una curva de Bézier $\mathbf{F}(\mathbf{t})$ de grado m con puntos de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$, y una función de Bézier $g(u)$ con coeficientes de Bernstein b_0, \dots, b_p .

Encontrar: Los puntos de control $\hat{\mathbf{d}}_0, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{mk}$ de la curva compuesta de Bézier $\tilde{\mathbf{F}}(u) = \mathbf{F}(g(u))$.

El siguiente Teorema es fundamental para solucionar este problema.

Teorema 3.1. Sean $g : R \rightarrow R$ y $F : R \rightarrow R^d$ dados en forma de Bernstein-Bézier:

$$g(u) = \sum_{p=0}^k b_p B_p^k(u), \quad u \in [0, 1], \quad b_p \in R, \quad (3.1)$$

$$F(t) = \sum_{i=0}^m \mathbf{d}_i B_i^m(t), \quad t \in [0, 1], \quad \mathbf{d}_i \in R^d.$$

Entonces para cada $s \in \{0, 1, \dots, m\}$ se cumple

$$\tilde{F}(u) = F(g(u)) = \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{r=0}^{ks} \mathbf{d}_{i,r}^{[s]} B_r^{ks}(u),$$

donde los puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$, $i = 0, \dots, m-s$, $r = 0, 1, \dots, ks$ son definidos recursivamente por

$$\mathbf{d}_{i,r}^{[s]} = \begin{cases} \mathbf{d}_i & , \text{ si } s = 0 \\ \frac{1}{\binom{ks}{r}} \sum_{j=0}^{k(s-1)} \binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j} \mathbf{W}_{i,j,r-j}^{[s]} & , \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

y donde

$$\mathbf{W}_{i,j,r-j}^{[s]} = (1 - b_{r-j}) \mathbf{d}_{i,j}^{[s-1]} + b_{r-j} \mathbf{d}_{i+1,j}^{[s-1]}$$

Prueba. Inducción sobre s .

$s=0$:

$$\tilde{F}(u) = \sum_{i=0}^m B_i^m(g(u)) \sum_{r=0}^0 \mathbf{d}_{i,r}^{[0]} B_r^0(u) = \sum_{i=0}^m \mathbf{d}_i B_i^m(g(u)) = F(g(u)).$$

Hipótesis Inductiva:

$$\tilde{F}(u) = \sum_{i=0}^{m-s+1} B_i^{m-s+1}(g(u)) \sum_{j=0}^{k(s-1)} \mathbf{d}_{i,j}^{[s-1]} B_j^{k(s-1)}(u). \quad (3.2)$$

Definimos

$$\mathbf{T}_i^{[s-1]}(u) := \sum_{j=0}^{k(s-1)} \mathbf{d}_{i,j}^{[s-1]} B_j^{k(s-1)}(u). \quad (3.3)$$

De la definición recursiva de los polinomios de Bernstein (1.3) se obtiene

$$B_i^{m-s+1}(g(u)) = (1 - g(u)) B_i^{m-s}(g(u)) + g(u) B_{i-1}^{m-s}(g(u)). \quad (3.4)$$

Usando (3.3) y (3.4) la ecuación (3.2) puede expresarse como

$$\tilde{\mathbf{F}}(u) = \sum_{i=0}^{m-s+1} \{(1-g(u))B_i^{m-s}(g(u)) + g(u)B_{i-1}^{m-s}(g(u))\} \mathbf{T}_i^{|s-1|}(u).$$

De la definición de los polinomios de Bernstein resulta

$$\tilde{\mathbf{F}}(u) = \sum_{i=0}^{m-s} (1-g(u))B_i^{m-s}(g(u))\mathbf{T}_i^{|s-1|}(u) + \sum_{i=1}^{m-s+1} g(u)B_{i-1}^{m-s}(g(u))\mathbf{T}_i^{|s-1|}(u).$$

Mediante un cambio de índices en la segunda sumatoria se cumple

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(u) &= \sum_{i=0}^{m-s} \{B_i^{m-s}(g(u))(1-g(u))\mathbf{T}_i^{|s-1|}(u) + B_i^{m-s}(g(u))g(u)\mathbf{T}_{i+1}^{|s-1|}(u)\} \\ &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \left[(1-g(u))\mathbf{T}_i^{|s-1|}(u) + g(u)\mathbf{T}_{i+1}^{|s-1|}(u) \right]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De la representación de Bernstein de $g(u)$ dado por (3.1) y como los polinomios de Bernstein forman una partición de la unidad ($\sum_{p=0}^k b_p B_p^k(u) = 1$), resulta

$$\tilde{\mathbf{F}}(u) = \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \left[\sum_{p=0}^k \left((1-b_p)\mathbf{T}_i^{|s-1|}(u) + b_p\mathbf{T}_{i+1}^{|s-1|}(u) \right) B_p^k(u) \right]. \quad (3.6)$$

De la definición de $\mathbf{W}_{i,j,p}^{[s]}$ y $\mathbf{T}_i^{|s-1|}$ y de la ecuación anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(u) &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \left[\sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{k(s-1)} \left((1-b_p)\mathbf{d}_{i,j}^{|s-1|} + b_p\mathbf{d}_{i+1,j}^{|s-1|} \right) B_j^{k(s-1)}(u) B_p^k(u) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{k(s-1)} \mathbf{W}_{i,j,p}^{[s]} B_j^{k(s-1)}(u) B_p^k(u). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando el Lema 1.3 (caso $q = 2$ de polinomios de Bernstein de una variable, resulta:

$$\tilde{\mathbf{F}}(u) = \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{p=0}^k \sum_{j=0}^{k(s-1)} \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{p}}{\binom{ks}{j+p}} \mathbf{W}_{i,j,p}^{[s]} B_{p+j}^{ks}(u). \quad (3.8)$$

Reagrupando los términos en el interior de las sumatorias, eligiendo los índices j y $r := j + p$, se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(u) &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{r=0}^{ks} \sum_{j=0}^{k(s-1)} \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \mathbf{W}_{i,j,r-j}^{[s]} B_r^{ks}(u) \\ &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{r=0}^{ks} \left\{ \frac{1}{\binom{ks}{r}} \sum_{j=0}^{k(s-1)} \binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j} \mathbf{W}_{i,j,r-j}^{[s]} \right\} B_r^{ks}(u) \\ &= \sum_{i=0}^{m-s} B_i^{m-s}(g(u)) \sum_{r=0}^{ks} \mathbf{d}_{i,r}^{[s]} B_r^{ks}(u). \end{aligned} \quad (3.9)$$

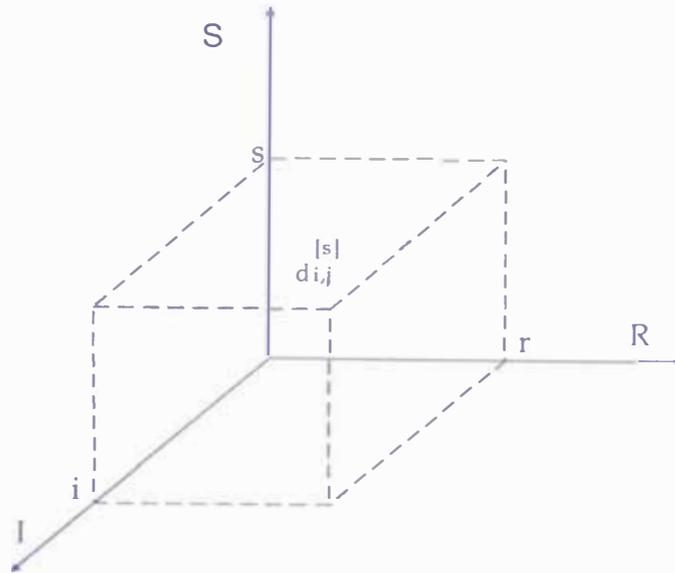


Figura 3.1: Ubicación del elemento $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$

A partir de este Teorema se obtiene el siguiente resultado que es importante para el cálculo de los puntos de control de la función compuesta.

Corolario 3.2. Sean las funciones g y \mathbf{F} como en el Teorema(3.1). Los puntos de control $\hat{\mathbf{d}}_0, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{mk}$ para la curva compuesta (reparametrizada) $\tilde{\mathbf{F}}(u)$ están dados por

$$\hat{\mathbf{d}}_r = \mathbf{d}_{o,r}^{[m]}, \quad r = 0, \dots, mk, \quad (3.10)$$

donde los puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$ están definidos en el Teorema(3.1).

Prueba. Este resultado se obtiene directamente del Teorema(3.1) con $s = m$:

$$\tilde{\mathbf{F}}(u) = \sum_{r=0}^{km} \mathbf{d}_{o,r}^{[m]} B_r^{km}(u). \quad \blacksquare$$

Discusión del Teorema

Del Teorema anterior se obtiene un algoritmo llamado *algoritmo producto*, el cuál construye un arreglo de puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$. Para entender el procedimiento ubicamos al elemento $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$ en un arreglo de tres dimensiones, tal como se muestra en la figura 3.1.

La construcción se inicia en el nivel $s = 0$, con $\mathbf{d}_{i,r}^{[0]} := \mathbf{d}_i := 0, \dots, m$ (figura 3.2):

Luego, se construye los puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[1]}$ del nivel $s = 1$ usando los puntos del nivel anterior (figura 3.3).

De este modo se construyen los otros niveles, formando un arreglo tetraedral (figura 3.4)

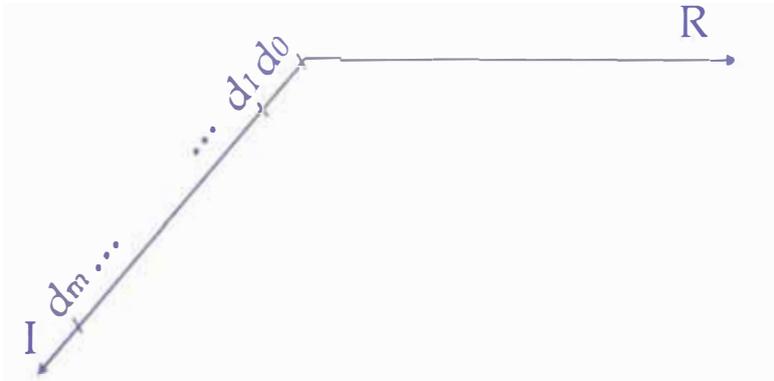


Figura 3.2: Construcción en el nivel inicial $s = 0$.

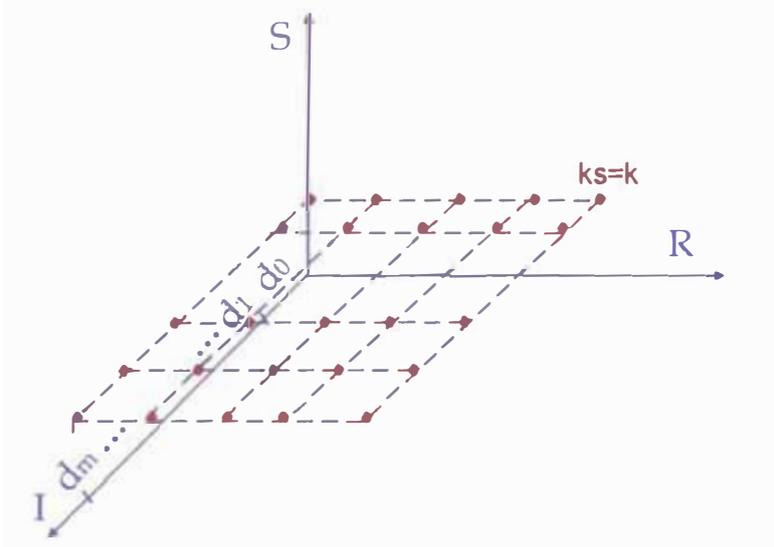


Figura 3.3: Construcción de los puntos en el nivel s .

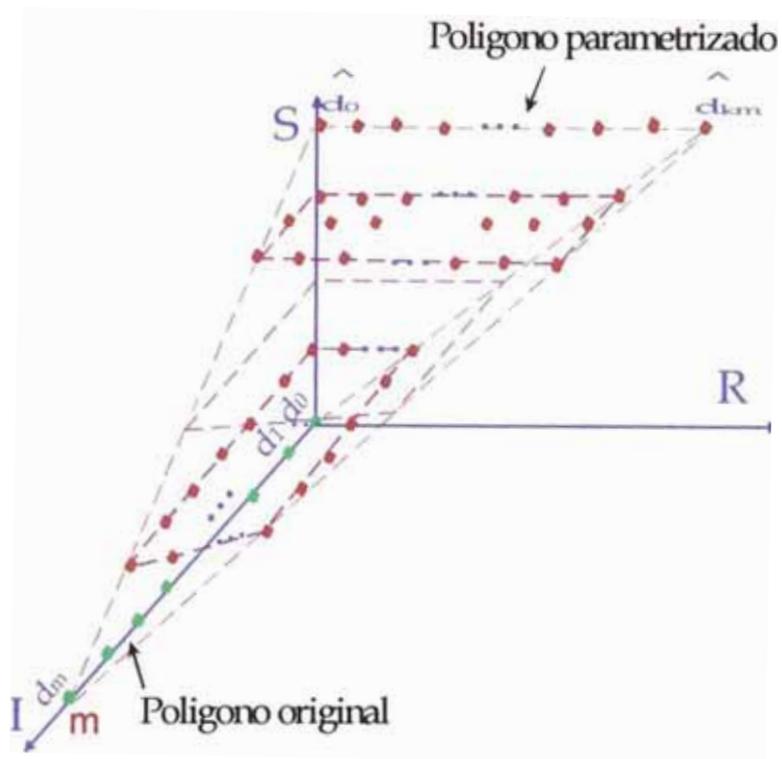


Figura 3.4: Construcción de los puntos finales.

En este arreglo tetraedral los puntos $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$ se encuentran ubicados en la parte más baja, mientras que los puntos finales $\hat{\mathbf{d}}_0, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{mk}$ se encuentra en la parte más alta.

En general, los puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$ del nivel s son construidos a partir de los puntos del nivel $(s - 1)$. Esto significa que no se tiene la necesidad de tener almacenados todos los puntos del arreglo tetraedral.

A partir del Teorema 3.1 y del Corolario 3.2 se obtiene un algoritmo, llamado el *algoritmo producto para curvas*. Una versión de éste algoritmo se presenta a continuación :

Algoritmo producto para curvas

función $\hat{\mathbf{d}} := alg_prod(\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m, m, b_0, \dots, b_k, k)$
Entrada: $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_m$: polígono de control de la curva de Bézier F b_0, \dots, b_k : coeficientes de Bernstein del polígono g
Para $i := 0, \dots, m$
$\hat{\mathbf{d}}_{i,0} := \mathbf{d}_i$
Para $s := 1, \dots, m$
Para $r := 0, \dots, ks$
Para $i := 0, \dots, (m - s)$
$\mathbf{q}_{i,r} := 0$
$jmin := \max\{0, r - k\}$
$jmax := \min\{r, k(s - 1)\}$
Para $j := jmin, \dots, jmax$
$\mathbf{q}_{i,r} := \mathbf{q}_{i,r} + \binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j} \{(1 - b_{r-j})\hat{\mathbf{d}}_{i,j} + b_{r-j}\hat{\mathbf{d}}_{i+1,j}\}$
$\mathbf{q}_{i,r} := \frac{1}{\binom{ks}{r}} \mathbf{q}_{i,r}$
Cambiar($\hat{\mathbf{d}}, \mathbf{q}$)
Salida: Polígono de control $\hat{\mathbf{d}} := (\hat{\mathbf{d}}_{0,0}, \dots, \hat{\mathbf{d}}_{0,mk})$

En este algoritmo se requiere el uso de dos matrices \hat{D} y $Q := (q_{i,r})$ de orden $[m + 1] \times [k(m + 1)]$, los cuales no se llegan a usar completamente. Se puede verificar fácilmente que es suficiente utilizar una sólo matriz \hat{D} de orden $[m + 2] \times [k(m + 1)]$ donde se comparta dos en forma simultanea, para lo cual en el algoritmo se deben realizar el cambio de $q_{i,r}$ por $\hat{D}_{m+1-i, k(m+1)-r}$.

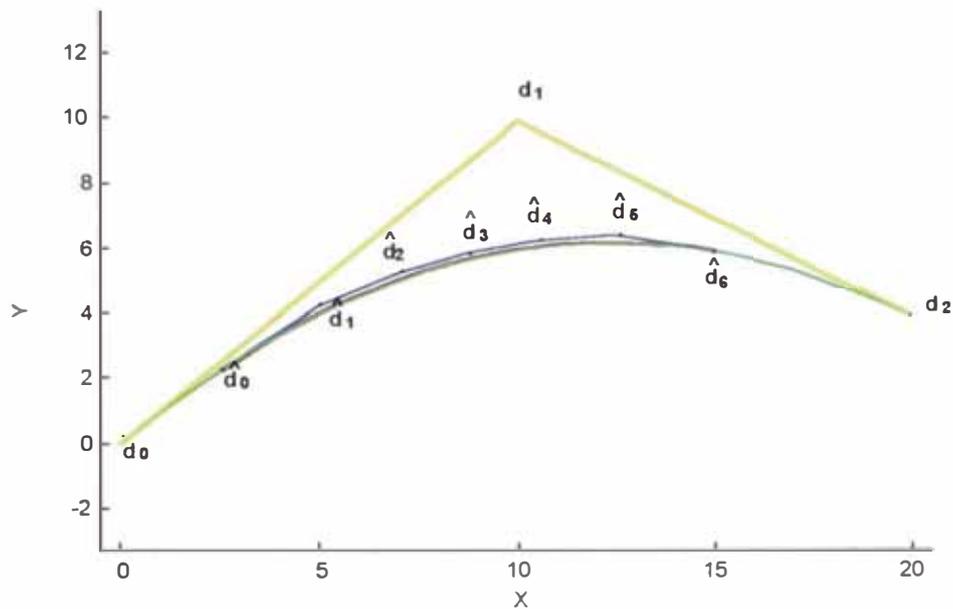


Figura 3.5: Reparametrización de una curva.

Ejemplo 9. Consideremos la curva de Bézier g con puntos de control

$$b_0 = 0.125, b_1 = 0.375, b_2 = 0.500, b_3 = 0.750 \quad (k = 3)$$

y la curva cuadrática de Bézier F con puntos de control

$$\mathbf{d}_0 = (0, 0), \mathbf{d}_1 = (10, 10), \mathbf{d}_2 = (20, 4) \quad (m = 2).$$

Mediante el algoritmo producto para curvas para la reparametrización (cúbica) de una curva cuadrática ($F \circ g$), se obtienen los puntos de control de $F \circ g$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{d}}_0 &= \mathbf{d}_{0,0}^{[2]} = (2.5, 2.25), \\ \hat{\mathbf{d}}_1 &= \mathbf{d}_{0,1}^{[2]} = (5, 4.25), \\ \hat{\mathbf{d}}_2 &= \mathbf{d}_{0,2}^{[2]} = (7.0, 5.25), \\ \hat{\mathbf{d}}_3 &= \mathbf{d}_{0,3}^{[2]} = (8.75, 5.9), \\ \hat{\mathbf{d}}_4 &= \mathbf{d}_{0,4}^{[2]} = (10.5, 6.3), \\ \hat{\mathbf{d}}_5 &= \mathbf{d}_{0,5}^{[2]} = (12.5, 6.5), \\ \hat{\mathbf{d}}_6 &= \mathbf{d}_{0,6}^{[2]} = (15, 6). \end{aligned}$$

En la figura 3.5 se muestra la ubicación de los nuevos puntos de control $\hat{\mathbf{d}}_6$ y se puede notar que la nueva curva definido por $F \circ g$ está contenida en la curva definido por F y además esta nueva curva tiene un mayor número de puntos de control.

3.2. Composición de curvas por Blossoms

3.2.1. El Algoritmo de Blossom para curvas

El algoritmo producto es relativamente eficiente computacionalmente y no es difícil de implementarlo. Sin embargo, la intuición geométrica que provee sobre el procedimiento es un tanto limitado. Puede obtenerse más intuición geométrica para este problema, describiendo una variante del algoritmo producto llamado el algoritmo de Blossom para curvas. En el capítulo 1, se encuentra una introducción a los Blossoms.

Definimos las cantidades $\mathbf{h}_i(a_1, a_2, \dots, a_l; \mathbf{d})$ por

$$\mathbf{h}_i(a_1, \dots, a_l; \mathbf{d}) := \begin{cases} (1 - a_1)\mathbf{d}_i + a_1\mathbf{d}_{i+1} & , \text{ si } l = 1 \\ (1 - a_l)\mathbf{h}_i(a_1, \dots, a_{l-1}; \mathbf{d}) + a_l\mathbf{h}_{i+1}(a_1, \dots, a_{l-1}; \mathbf{d}) & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

$a_1, \dots, a_l \in \mathbf{R}$, $\mathbf{d} := (\mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_{i+l})^T \in \mathbf{R}^{l+1}$. En la proposición (1.28), se ha visto que la función $\mathbf{h}^l: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}$ ($l > 0$) definido por $\mathbf{h}^l(u_1, \dots, u_l) := \mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_l; \mathbf{d})$ con i fijo es el blossom de la curva de Bézier $\mathbf{H}^l(u) = \sum_{j=0}^l \mathbf{d}_{i+j} B_j^l(u)$ donde $\mathbf{d} := (\mathbf{d}_i, \dots, \mathbf{d}_{i+l})$.

Teorema 3.3. Los puntos $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$ dados en el Teorema 3.1, son combinaciones convexas de todos los puntos $\mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_s}; \mathbf{d})$ con $i_1 + i_2 + \dots + i_s = r$. Más precisamente se tiene

$$\mathbf{d}_{i,r}^{[s]} := \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_s \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_s = r}} K_r(i_1, i_2, \dots, i_s) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_s}; \mathbf{d})$$

donde

$$K_r(i_1, i_2, \dots, i_s) := \frac{\binom{k}{i_1} \binom{k}{i_2} \dots \binom{k}{i_s}}{\binom{ks}{r}}.$$

Prueba.- Por inducción sobre s .

Para $s = 1$: A partir de la definición de $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[1]} &= (1 - b_r)\mathbf{d}_i + b_r\mathbf{d}_{i+1} \\ &= \mathbf{h}_i(b_r; \mathbf{d}) \\ &= K_r(r)\mathbf{h}_i(b_r; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{i_1=r} K_r(i_1)\mathbf{h}_i(b_{i_1}; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Hipótesis inductiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[s-1]} &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = r}} K_r(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}; \mathbf{d}), \\ i &= 0, \dots, (m - s + 1), \quad r = 0, 1, \dots, k(s - 1). \end{aligned}$$

Aplicando la definición recursiva de $\mathbf{d}_{i,r}^{[s]}$ resulta:

$$\mathbf{d}_{i,r}^{[s]} := \sum_{j=0}^{k(s-1)} \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \left\{ (1 - b_{r-j}) \mathbf{d}_{i,j}^{[s-1]} + b_{r-j} \mathbf{d}_{i+1,j}^{[s-1]} \right\}.$$

Sustituyendo la hipótesis inductiva para $\mathbf{d}_{i,j}^{[s-1]}$ y $\mathbf{d}_{i+1,j}^{[s-1]}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[s]} = & \sum_{j=0}^{k(s-1)} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = j}} K_j(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \cdot \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \\ & \times \left\{ (1 - b_{r-j}) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}; \mathbf{d}) + b_{r-j} \mathbf{h}_{i+1}(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}; \mathbf{d}) \right\}. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Por la definición de los \mathbf{h}_i , esto se reduce a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[s]} = & \sum_{j=0}^{k(s-1)} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = j}} K_j(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \\ & \times \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}, b_{r-j}; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Sustituyendo $r - i_s$ por j , se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[s-1]} = & \sum_{i_s} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = r - i_s}} K_{r-i_s}(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{r-i_s} \binom{k}{i_s}}{\binom{ks}{r}} \\ & \times \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}, b_{i_s}; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Dado que se cumple

$$K_r(i_1, i_2, \dots, i_s) = K_{r-i_s}(i_1, i_2, \dots, i_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{r-i_s} \binom{k}{i_s}}{\binom{ks}{r}},$$

se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{i,r}^{[s]} &= \sum_{i_s} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_{s-1} \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = j}} K_r(i_1, i_2, \dots, i_s) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s-1}}, b_{i_s}; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_s \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_s = r}} K_r(i_1, i_2, \dots, i_s) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, \dots, b_{i_s}; \mathbf{d}). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo 10. Consideremos la curva de Bézier \mathbf{g} con puntos de control

$$b_0 = 0.125, b_1 = 0.375, b_2 = 0.500, b_3 = 0.750 \quad (k = 3)$$

y la curva cuadrática de Bézier \mathbf{F} con puntos de control

$$\mathbf{d}_0 = (0, 0), \mathbf{d}_1 = (10, 10), \mathbf{d}_2 = (20, 4) \quad (m = 2).$$

Definimos $\mathbf{M}_i(i_1, i_2, \dots, i_p) := \mathbf{h}_i(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_p}; \mathbf{d})$, $p = 1, 2, \dots, m$.

El algoritmo de blossom para la reparametrización (cúbica) de una curva cuadrática (F_{0g}), geoméricamente funciona de la siguiente manera:

Paso 1: Poniendo $\mathbf{M}_i(i_1) := \mathbf{d}_{i,i_1}^{[1]} = \mathbf{h}_i(b_{i_1}; \mathbf{d}) = (1 - b_{i_1})\mathbf{d}_i + b_{i_1}\mathbf{d}_{i+1}$, $i_1 = 0, 1, \dots, k$.

En el segmento $[\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1]$ se ubican y marcan los puntos $\mathbf{M}_0(i_1)$, $i_1 = 0, 1, 2, 3$ donde $\mathbf{M}_0(i_1)$ divide a este segmento en la razón $b_i : (1 - b_i)$.

En el segmento $[\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2]$ se ubican y marcan los puntos $\mathbf{M}_1(i_1) := (1 - b_{i_1})\mathbf{d}_1 + b_{i_1}\mathbf{d}_2$, $i_1 = 0, 1, 2, 3$.

En general, en cada segmento $[\mathbf{d}_i, \mathbf{d}_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, m - 1$) se ubican y marcan en los puntos $\mathbf{M}_i(i_1) := (1 - b_{i_1})\mathbf{d}_i + b_{i_1}\mathbf{d}_{i+1}$, $i_1 = 0, 1, \dots, k$. Esto se muestra en la figuras 3.6 y 3.7. Además en la figura 3.6 se puede apreciar las proporciones con que son ubicados los puntos $\mathbf{M}_i(0)$, $\mathbf{M}_i(1)$, $\mathbf{M}_i(2)$, $\mathbf{M}_i(3)$, respecto a los puntos de Bézier b_0, b_1, b_2, b_3 .

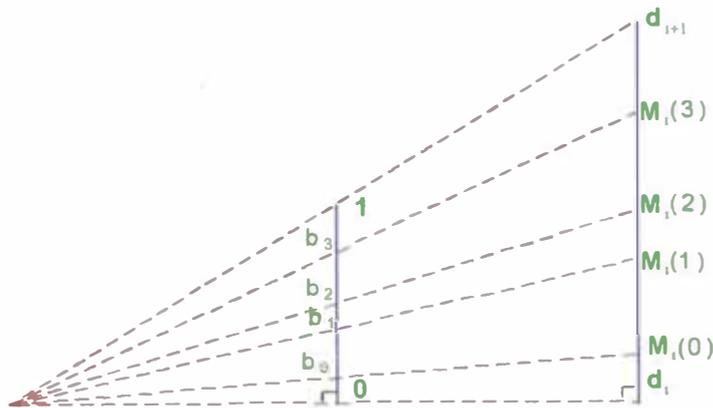


Figura 3.6: Paso N. 01 de la composición de curvas.

Para el ejemplo se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0(0) &= (1 - b_0)\mathbf{d}_0 + b_0\mathbf{d}_1 = (1.25, 1.25) \\
\mathbf{M}_0(1) &= (1 - b_1)\mathbf{d}_0 + b_1\mathbf{d}_1 = (3.75, 3.75) \\
\mathbf{M}_0(2) &= (1 - b_2)\mathbf{d}_0 + b_2\mathbf{d}_1 = (5.0, 5.0) \\
\mathbf{M}_0(3) &= (1 - b_3)\mathbf{d}_0 + b_3\mathbf{d}_1 = (7.5, 7.5) \\
\mathbf{M}_1(0) &= (1 - b_0)\mathbf{d}_1 + b_0\mathbf{d}_2 = (11.25, 9.25) \\
\mathbf{M}_1(1) &= (1 - b_1)\mathbf{d}_1 + b_1\mathbf{d}_2 = (13.75, 7.75) \\
\mathbf{M}_1(2) &= (1 - b_2)\mathbf{d}_1 + b_2\mathbf{d}_2 = (15.0, 7.0) \\
\mathbf{M}_1(3) &= (1 - b_3)\mathbf{d}_1 + b_3\mathbf{d}_2 = (17.5, 5.5)
\end{aligned}$$

Paso 2: En cada segmento $[\mathbf{M}_0(i_1), \mathbf{M}_1(i_1)]$ ($i_1 = 0, 1, 2, 3$) se ubican y marcan los puntos $\mathbf{M}_0(i_1, i_2) := (1 - b_{i_2})\mathbf{M}_0(i_1) + b_{i_2}\mathbf{M}_1(i_1)$. $i_2 = 0, 1, 2, 3$, que divide a éste segmento en la razón $b_{i_2} : (1 - b_{i_2})$. Esto se muestra en la figuras 3.8 y 3.9 en el cual también se aprecia que los puntos $\mathbf{M}_0(i_1, i_2)$ y $\mathbf{M}_0(i_2, i_1)$ coinciden, debido a la simetría de $\mathbf{M}_0(i_1, i_2)$.

En general, cada segmento $[\mathbf{M}_i(i_1), \mathbf{M}_{i+1}(=i_1)]$ ($i = 0, \dots, m - 2$) $i_1 = 0, 1, \dots, i$ se marcan los puntos $\mathbf{M}_i(i_1, i_2) := (1 - b_{i_2})\mathbf{M}_i(i_1) + b_{i_2}\mathbf{M}_{i+1}(i_1)$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_0(0, 0) &= (1 - b_0)\mathbf{M}_0(0) + b_0\mathbf{M}_1(0) = (2.5, 2.25) \\
\mathbf{M}_0(0, 1) &= (1 - b_1)\mathbf{M}_0(0) + b_1\mathbf{M}_1(0) = (5.0, 4.25) \\
\mathbf{M}_0(0, 2) &= (1 - b_2)\mathbf{M}_0(0) + b_2\mathbf{M}_1(0) = (6.25, 5.25) \\
\mathbf{M}_0(0, 3) &= (1 - b_3)\mathbf{M}_0(0) + b_3\mathbf{M}_1(0) = (8.75, 7.25) \\
\mathbf{M}_0(1, 0) &= (1 - b_0)\mathbf{M}_0(1) + b_0\mathbf{M}_1(1) = (5.0, 4.25) \\
\mathbf{M}_0(1, 1) &= (1 - b_1)\mathbf{M}_0(1) + b_1\mathbf{M}_1(1) = (7.5, 5.25) \\
\mathbf{M}_0(1, 2) &= (1 - b_2)\mathbf{M}_0(1) + b_2\mathbf{M}_1(1) = (8.75, 5.75) \\
\mathbf{M}_0(1, 3) &= (1 - b_3)\mathbf{M}_0(1) + b_3\mathbf{M}_1(1) = (11.25, 6.75) \\
\mathbf{M}_0(2, 1) &= (1 - b_1)\mathbf{M}_0(2) + b_1\mathbf{M}_1(2) = (8.75, 5.75) \\
\mathbf{M}_0(2, 2) &= (1 - b_2)\mathbf{M}_0(2) + b_2\mathbf{M}_1(2) = (10.0, 6.0) \\
\mathbf{M}_0(2, 3) &= (1 - b_3)\mathbf{M}_0(2) + b_3\mathbf{M}_1(2) = (12.5, 6.5) \\
\mathbf{M}_0(3, 0) &= (1 - b_0)\mathbf{M}_0(3) + b_0\mathbf{M}_1(3) = (8.75, 7.25) \\
\mathbf{M}_0(3, 1) &= (1 - b_1)\mathbf{M}_0(3) + b_1\mathbf{M}_1(3) = (11.25, 6.25) \\
\mathbf{M}_0(3, 2) &= (1 - b_2)\mathbf{M}_0(3) + b_2\mathbf{M}_1(3) = (12.5, 6.5) \\
\mathbf{M}_0(3, 3) &= (1 - b_3)\mathbf{M}_0(3) + b_3\mathbf{M}_1(3) = (15.0, 6.0)
\end{aligned}$$

Paso 3: Este ejemplo, termina en este paso. Los puntos de control \mathbf{d}_r de la composición F_0g son las combinaciones convexas de los $\mathbf{M}_0(i_1, i_2)$ ($i_1 + i_2 = r$) porque

$$\sum_{\substack{i_1, i_2 \in \{0, \dots, 3\} \\ i_1 + i_2 = r}} K_r(i_1, i_2) = 1.$$

De esto se obtienen los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{d}_{0,0}^{[2]} &= K_0(0,0)\mathbf{M}_0(0,0) = \mathbf{M}_0(0,0) \\
&= (2.5, 2.25), \\
\widehat{\mathbf{d}}_1 = \mathbf{d}_{0,1}^{[2]} &= K_1(0,1)\mathbf{M}_0(0,1) + K_1(1,0)\mathbf{M}_0(1,0) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{M}_0(0,1) + \frac{1}{2}\mathbf{M}_0(1,0) \\
&= (5, 4.25), \\
\widehat{\mathbf{d}}_2 = \mathbf{d}_{0,2}^{[2]} &= K_2(0,2)\mathbf{M}_0(0,2) + K_2(1,1)\mathbf{M}_0(1,1) + K_2(2,0)\mathbf{M}_0(2,0) \\
&= \frac{1}{5}\mathbf{M}_0(0,2) + \frac{3}{5}\mathbf{M}_0(1,1) + \frac{1}{5}\mathbf{M}_0(2,0) \\
&= (7.0, 5.25), \\
\widehat{\mathbf{d}}_3 = \mathbf{d}_{0,3}^{[2]} &= K_3(0,3)\mathbf{M}_0(0,3) + K_3(1,2)\mathbf{M}_0(1,2) + K_3(2,1)\mathbf{M}_0(2,1) \\
&\quad + K_3(3,0)\mathbf{M}_0(3,0) \\
&= \frac{1}{20}\mathbf{M}_0(0,3) + \frac{9}{20}\mathbf{M}_0(1,2) + \frac{9}{20}\mathbf{M}_0(2,1) + \frac{1}{20}\mathbf{M}_0(3,0) \\
&= (8.75, 5.9), \\
\widehat{\mathbf{d}}_4 = \mathbf{d}_{0,4}^{[2]} &= K_4(1,3)\mathbf{M}_0(1,3) + K_4(2,2)\mathbf{M}_0(2,2) + K_4(3,1)\mathbf{M}_0(3,1) \\
&= \frac{1}{5}\mathbf{M}_0(1,3) + \frac{3}{5}\mathbf{M}_0(2,2) + \frac{1}{5}\mathbf{M}_0(3,1) \\
&= (10.5, 6.3), \\
\widehat{\mathbf{d}}_5 = \mathbf{d}_{0,5}^{[2]} &= K_5(2,3)\mathbf{M}_0(2,3) + K_5(3,2)\mathbf{M}_0(3,2) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{M}_0(2,3) + \frac{1}{2}\mathbf{M}_0(3,2) \\
&= (12.5, 6.5), \\
\widehat{\mathbf{d}}_6 = \mathbf{d}_{0,6}^{[2]} &= K_0(0,0)\mathbf{M}_0(0,0) = \mathbf{M}_0(0,0) \\
&= (15, 6).
\end{aligned}$$

Dados los puntos de control $\mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{mk} \in \mathbf{R}^d$ de una curva de Bézier $\mathbf{F}(t)$ y los coeficientes de Bernstein $b_0, \dots, b_k \in \mathbf{R}$ de una función $g(u)$, por el Corolario 3.2 y la Afirmación 3.3 se obtiene que los puntos de control de la curva compuesta de Bézier $\widetilde{\mathbf{F}}(u) = \mathbf{F}(g(u))$ están dados por

$$\widehat{\mathbf{d}}_r = \mathbf{d}_{0,r}^{[m]} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_m \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_m = r}} K_r(i_1, i_2, \dots, i_m) \mathbf{h}_0(b_{i_1}, \dots, b_{i_m}; \mathbf{d}), \quad r = 0, 1, \dots, km$$

$$K_r(i_1, i_2, \dots, i_m) := \frac{\binom{k}{i_1} \binom{k}{i_2} \dots \binom{k}{i_m}}{\binom{km}{r}} \quad (3.12)$$

En la proposición 1.26 se ha visto que la función $\mathbf{M}_i(u_1, \dots, u_m) := \mathbf{h}_i(u_1, \dots, u_m; \mathbf{d})$ es el blossom de una curva de Bézier, por consiguiente la función

$$\varphi(i_1, i_2, \dots, i_m) := K_r(i_1, i_2, \dots, i_m) \mathbf{h}_i(b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_m}; \mathbf{d})$$

es simétrica porque $K_r(i_1, i_2, \dots, i_m)$ es obviamente simétrica, luego \mathbf{d}_r puede expresarse como

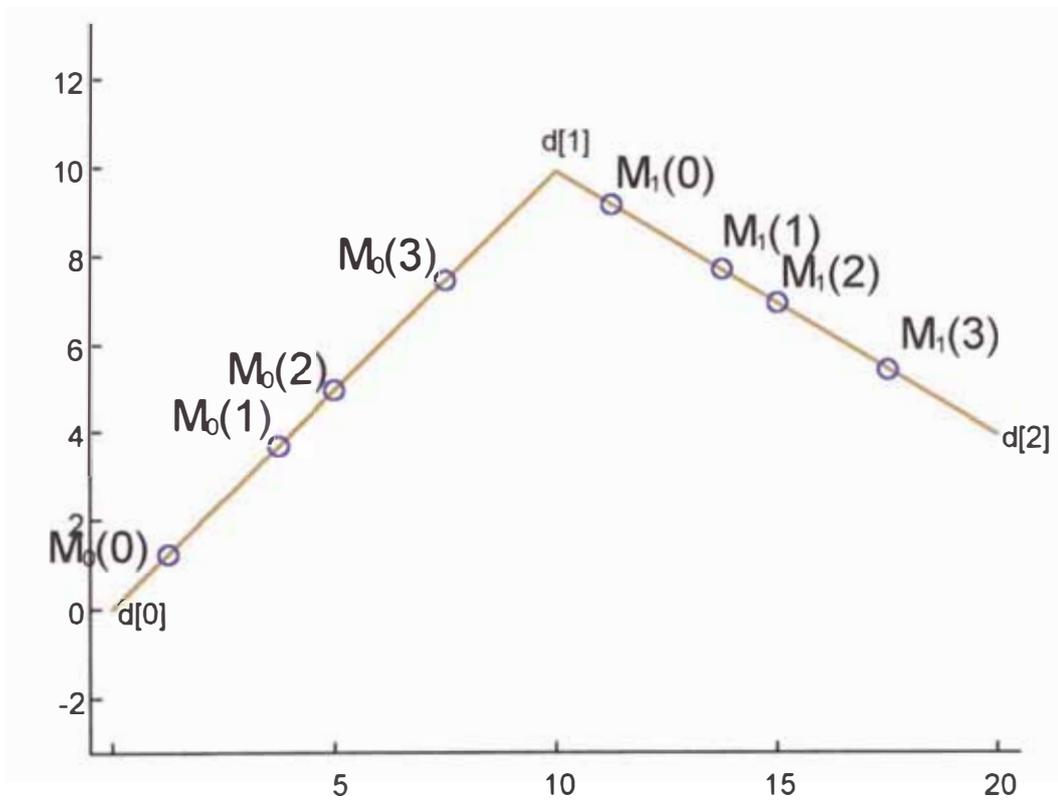


Figura 3.7: Paso N. 02 de la composición de curvas.

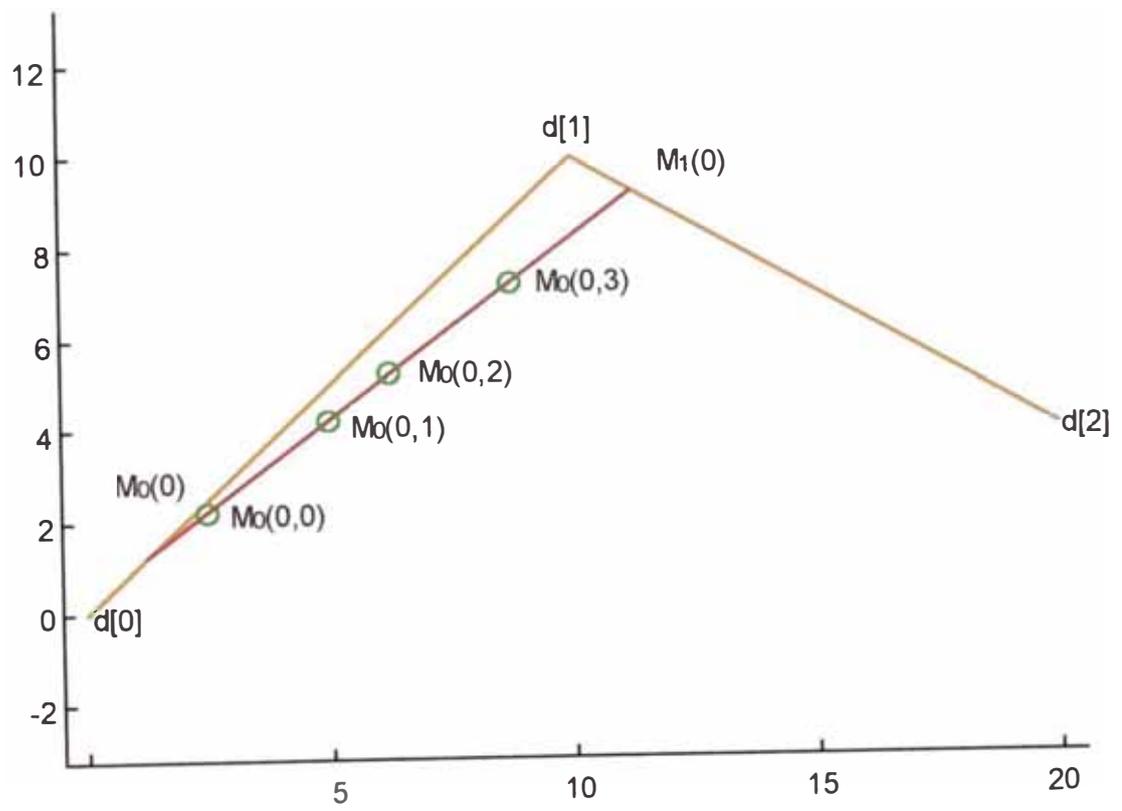


Figura 3.8: Paso 02.

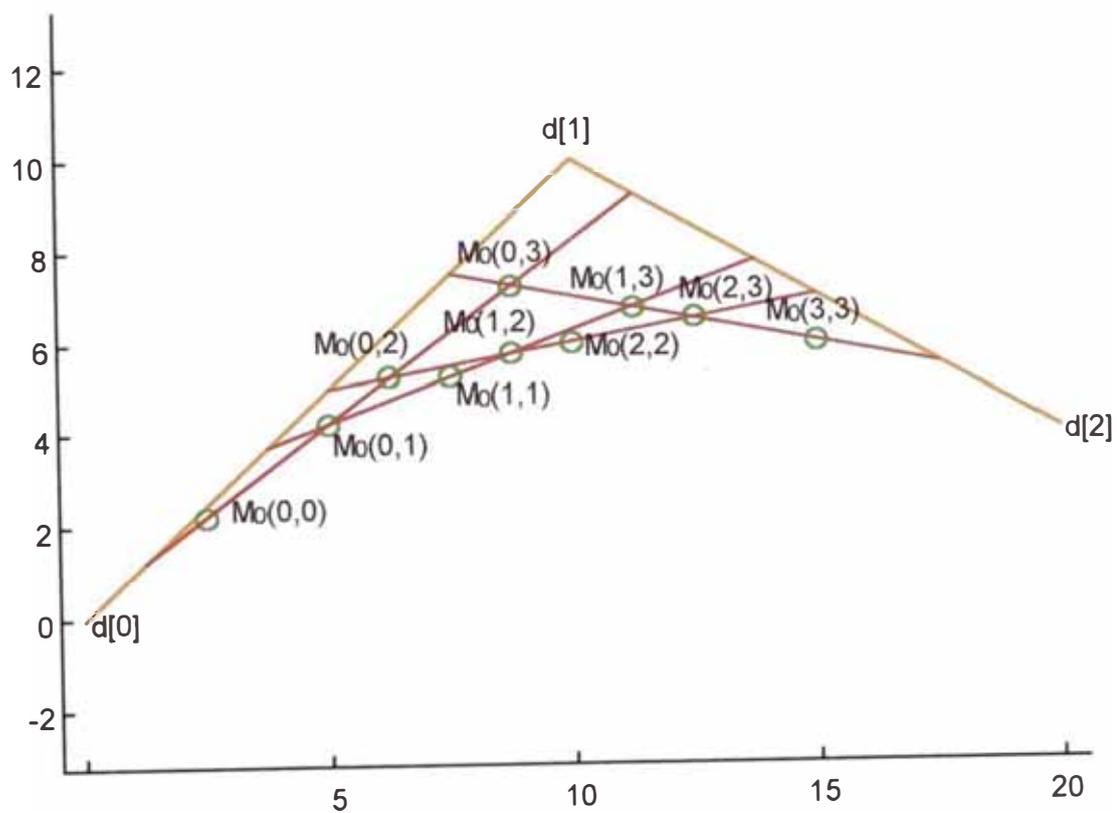


Figura 3.9: Paso N. 02

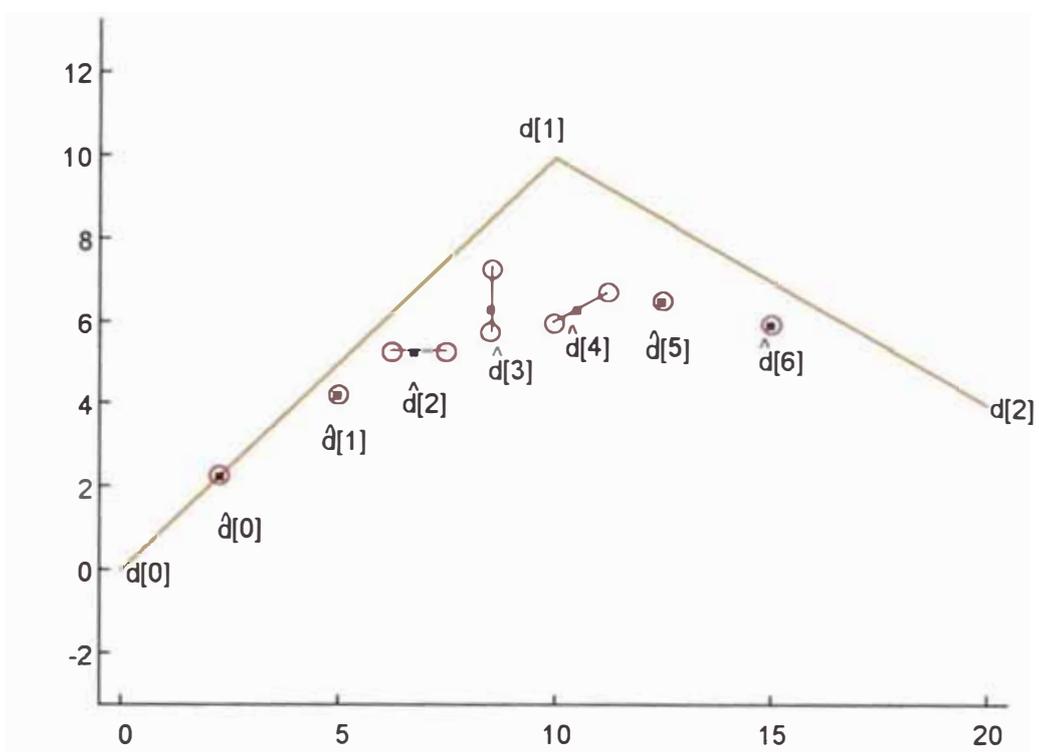


Figura 3.10: Puntos de control de la nueva curva. Las marcas cuadradas indican los nuevos puntos de control, que son una combinación convexa de aquellos marcados con círculos.

$$\widehat{\mathbf{d}}_r = \mathbf{d}_{0,r}^{[m]} = \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_m \in \{0, \dots, k\} \\ i_1 + i_2 + \dots + i_m = r \\ i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m}} \text{Per}(i_1, i_2, \dots, i_m) K_r(i_1, i_2, \dots, i_m) \mathbf{M}_0(i_1, i_2, \dots, i_m), \quad (3.13)$$

donde $\text{Per}(i_1, i_2, \dots, i_m)$ representa el número de permutaciones de (i_1, i_2, \dots, i_m) .

Con esta representación se ha mejorado el algoritmo original de Blossom para la composición.

Ejemplo 11. Para el ejemplo anterior se tendría que calcular

$$\widehat{\mathbf{d}}_0 = \text{Per}(0, 0) K_0(0, 0) \mathbf{M}_0(0, 0) = 1 \times 1 \times \mathbf{M}_0(0, 0) = (2.5, 2.25),$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_1 = \text{Per}(0, 1) K_1(0, 1) \mathbf{M}_0(0, 1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \mathbf{M}_0(0, 1) = (5, 4.25),$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{d}}_2 &= \text{Per}(0, 2) K_2(0, 2) \mathbf{M}_0(0, 2) + \text{Per}(1, 1) K_2(1, 1) \mathbf{M}_0(1, 1) \\ &= 2 \times \frac{1}{5} \times \mathbf{M}_0(0, 2) + 1 \times \frac{3}{5} \mathbf{M}_0(1, 1) = (7.0, 5.25), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{d}}_3 &= \text{Per}(0, 3) K_3(0, 3) \mathbf{M}_0(0, 3) + \text{Per}(1, 2) K_3(1, 2) \mathbf{M}_0(1, 2) \\ &= 2 \times \frac{1}{20} \mathbf{M}_0(0, 3) + 2 \times \frac{9}{20} \mathbf{M}_0(1, 2) = (8.75, 5.9), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{d}}_4 &= \text{Per}(1, 3) K_4(1, 3) \mathbf{M}_0(1, 3) + \text{Per}(2, 2) K_4(2, 2) \mathbf{M}_0(2, 2) \\ &= 2 \times \frac{1}{5} \times \mathbf{M}_0(1, 3) + 1 \times \frac{1}{5} \mathbf{M}_0(2, 2) = (10.5, 6.3), \end{aligned}$$

$$\mathbf{d}_5 = \text{Per}(2, 3) K_5(2, 3) \mathbf{M}_0(2, 3) = 2 \times \frac{1}{2} \times \mathbf{M}_0(2, 3) = (12.5, 6.5).$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_6 = \text{Per}(3, 3) K_6(3, 3) \mathbf{M}_0(3, 3) = 1 \times 1 \times \mathbf{M}_0(3, 3) = (15, 6).$$

En este caso $\widehat{\mathbf{d}}_3$ está representado por dos sumandos, con la primera versión del algoritmo de blossom \mathbf{d}_3 tendría $\text{Per}(0, 3) + \text{Per}(1, 2) = 2 + 2 = 4$ sumandos.

Ejemplo 12. Para $\mathbf{b} := (b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$, $k = 4$ y $\mathbf{d} := (\mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \mathbf{d}_3)$, $m = 3$ se tiene $\widehat{\mathbf{d}}_r$, $r = 0, 1, \dots, mk = 12$

$$\widehat{\mathbf{d}}_2 = \text{Per}(0, 0, 2) K_2(0, 0, 2) \mathbf{M}_0(0, 0, 2) + \text{Per}(0, 1, 1) K_2(0, 1, 1) \mathbf{M}_0(0, 1, 1),$$

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{d}}_8 &= \text{Per}(0, 4, 4) K_8(0, 4, 4) \mathbf{M}_0(0, 4, 4) + \text{Per}(1, 3, 4) K_8(1, 3, 4) \mathbf{M}_0(1, 3, 4) \\ &\quad + \text{Per}(2, 2, 4) K_8(2, 2, 4) \mathbf{M}_0(2, 2, 4) + \text{Per}(2, 3, 3) K_8(2, 3, 3) \mathbf{M}_0(2, 3, 3), \end{aligned}$$

$$\widehat{\mathbf{d}}_{10} = \text{Per}(2, 4, 4) K_{10}(2, 4, 4) \mathbf{M}_0(2, 4, 4) + \text{Per}(3, 3, 4) K_{10}(3, 3, 4) \mathbf{M}_0(3, 3, 4).$$

En este caso $\widehat{\mathbf{d}}_8$ está representado por cuatro sumandos. con la versión original de DeRose del algoritmo de blossom $\widehat{\mathbf{d}}_8$ tendría $\text{Per}(0, 4, 4) + \text{Per}(1, 3, 4) + \text{Per}(2, 2, 4) + \text{Per}(2, 3, 3) = 3 + 6 + 3 + 3 = 15$ sumandos.

3.3. Composición de simplejos de Bézier

Teorema 3.4. Sean $g : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^N$ y $F : \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}^d$ simplejos de Bézier de dimensión n y N , respectivamente,

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{p}|=k} b_{\vec{p}} B_{\vec{p}}^k(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{p} \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \quad b_{\vec{p}} \in \mathbf{R}^N, \quad (3.14)$$

$$F(\mathbf{t}) = \sum_{|\vec{i}|=m} d_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(\mathbf{t}), \quad \mathbf{t} \in \mathbf{R}^N, \quad \vec{i} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}, \quad d_{\vec{i}} \in \mathbf{R}^d.$$

Entonces para cada $s \in \{0, 1, \dots, m\}$ se cumple

$$\begin{aligned} \tilde{F}(\mathbf{u}) := F(g(\mathbf{u})) &= \sum_{|\vec{i}|=m-s} B_{\vec{i}}^{m-s}(g(\mathbf{u})) \sum_{|\vec{r}|=ks} d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} B_{\vec{r}}^{ks}(\mathbf{u}), \\ \vec{i} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}, \quad \vec{r} \in \mathbf{Z}_+^{n+1}, \end{aligned}$$

donde los puntos $d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]}$, $|\vec{i}| = m - s$, $|\vec{r}| = ks$, son definidos recursivamente por

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} = \begin{cases} d_{\vec{i}} & , \text{ si } s = 0 \\ \frac{1}{\binom{ks}{\vec{r}}} \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r} - \vec{j}} W_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{r} - \vec{j}}^{[s]} & , \text{ en otro caso} \end{cases}$$

con $\vec{j} \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$ y con

$$W_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{r} - \vec{j}}^{[s]} = \sum_{\alpha=0}^N b_{\vec{r} - \vec{j}}^{\alpha} d_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]},$$

donde $b_{\vec{p}}^0, b_{\vec{p}}^1, \dots, b_{\vec{p}}^N$ denotan las coordenadas baricéntricas de $b_{\vec{p}}$ relativo al dominio simplejo de F .

Prueba - Por inducción sobre s

Para $s = 0$:

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m} B_{\vec{i}}^m(g(\mathbf{u})) \sum_{|\vec{r}|=0} d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[0]} B_{\vec{r}}^0(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m} d_{\vec{i}} B_{\vec{i}}^m(g(\mathbf{u})) = F(g(\mathbf{u})).$$

Hipótesis inductiva:

$$\tilde{F}(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m-s+1} B_{\vec{i}}^{m-s+1}(g(\mathbf{u})) T_{\vec{i}}^{[s-1]}(\mathbf{u}), \quad (3.15)$$

donde

$$\mathbf{T}_{\vec{i}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) := \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{j}}^{[s-1]} B_{\vec{j}}^{k(s-1)}(\mathbf{u}). \quad (3.16)$$

Sean $g^0(\mathbf{u}), g^1(\mathbf{u}), \dots, g^N(\mathbf{u})$, las coordenadas afines de $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ relativas al dominio simplejo de \mathbf{F} , entonces de la definición recursiva de los polinomios multivariados de Bernstein se obtiene según (1.9)

$$B_{\vec{i}}^{m-s+1}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) B_{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})), \quad (3.17)$$

donde $\sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) = 1$.

Además, siendo $b_{\vec{p}}^0, b_{\vec{p}}^1, \dots, b_{\vec{p}}^N$, las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{b}_{\vec{p}}$ relativo al dominio simplejo de \mathbf{F} , se tiene

$$g^\alpha(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{p}|=k} b_{\vec{p}}^\alpha B_{\vec{p}}^k(\mathbf{u}). \quad (3.18)$$

De (3.15) y (3.17) resulta

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{i}|=m-s+1} \mathbf{T}_{\vec{i}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) B_{\vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})).$$

Realizando dos cambios de índices $\vec{h} = \vec{i} - \vec{e}_{\alpha+1}$ y $\vec{i} = \vec{h}$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) &= \sum_{|\vec{h} + \vec{e}_{\alpha+1}|=m-s+1} \mathbf{T}_{\vec{h} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) B_{\vec{h}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \\ &= \sum_{|\vec{h}|=m-s} \mathbf{T}_{\vec{h} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) B_{\vec{h}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \\ &= \sum_{|\vec{i}|=m-s} B_{\vec{i}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{T}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

De (3.17), (3.18) y de la definición de $\mathbf{T}_{\vec{i}}^{[s-1]}(\mathbf{u})$ se cumple

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{T}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) &= \sum_{\alpha=0}^N \left\{ \sum_{|\vec{p}|=k} b_{\vec{p}}^\alpha B_{\vec{p}}^k(\mathbf{u}) \right\} \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \mathbf{d}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]} B_{\vec{j}}^{k(s-1)}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|\vec{p}|=k} \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \left\{ \sum_{\alpha=0}^N b_{\vec{p}}^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]} \right\} B_{\vec{j}}^{k(s-1)}(\mathbf{u}) B_{\vec{p}}^k(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Aplicando el Lema 1.12 y de la definición de $\mathbf{W}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{p}}^{[s]}$ se obtiene

$$\sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{T}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) = \sum_{|\vec{p}|=k} \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \mathbf{W}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{p}}^{[s]} \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{p}}}{\binom{ks}{\vec{j} + \vec{p}}} B_{\vec{j} + \vec{p}}^{ks}(\mathbf{u}).$$

Eligiendo los índices \vec{j} y $\vec{r} := \vec{j} + \vec{p}$ y de la definición $\mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{p}}^{[s]}$ resulta

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=0}^N g^\alpha(\mathbf{u}) \mathbf{T}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}^{[s-1]}(\mathbf{u}) &= \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \sum_{|\vec{r}|=ks} \mathbf{W}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{r}-\vec{j}}^{[s]} \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r}-\vec{j}}}{\binom{ks}{\vec{r}}} B_{\vec{r}}^{ks}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|\vec{r}|=ks} \left\{ \frac{1}{\binom{ks}{\vec{r}}} \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r}-\vec{j}} \mathbf{W}_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{r}-\vec{j}}^{[s]} \right\} B_{\vec{r}}^{ks}(\mathbf{u}) \\ &= \sum_{|\vec{r}|=ks} \mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} B_{\vec{r}}^{ks}(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.19) se obtiene finalmente

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) := \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{|\vec{i}|=m-s} B_{\vec{i}}^{m-s}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \sum_{|\vec{r}|=ks} \mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} B_{\vec{r}}^{ks}(\mathbf{u}). \quad \blacksquare$$

Corolario 3.5. *Se cumple*

$$\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{|\vec{r}|=mk} \tilde{\mathbf{d}}_{\vec{r}} B_{\vec{r}}^{mk}(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^n, \quad \vec{r} \in \mathbf{Z}_+^{n+1}$$

donde $\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{r}} = \mathbf{d}_{\vec{0}, \vec{r}}^{[m]}$, y $\vec{0} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}$ es el multi-índice consistente enteramente de ceros.

Prueba.-

Para la prueba es suficiente tomar $s := m$ en el teorema anterior.

Definimos las cantidades $\mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l; \mathbf{d})$ por

$$\mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_l; \mathbf{d}) := \begin{cases} \sum_{\alpha=0}^N a_1^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}} & , \text{ si } l = 1 \\ \sum_{\alpha=0}^N a_l^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i} + \vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{l-1}; \mathbf{d}) & , \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

donde $\vec{i} \in \mathbf{Z}_+^{N+1}$ y a_l^0, \dots, a_l^N son las coordenadas baricéntricas de \mathbf{a}_l respecto al dominio simplejo de \mathbf{F} .

En la práctica se utilizan n, N y d tales que $n \leq N \leq d \leq 3$.

Teorema 3.6. *Los puntos $\mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]}$ dados en el Teorema 3.4, son combinaciones convexas de todos los puntos $\mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_s}; \mathbf{d})$ con $\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \dots + \vec{i}_s = \vec{r}$. Más precisamente se tiene*

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_s|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_s=\vec{r}}} K_{\vec{r}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_s) h_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_s}; \mathbf{d}),$$

donde

$$K_{\vec{r}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_s) := \frac{\binom{k}{i_1} \binom{k}{i_2} \dots \binom{k}{i_s}}{\binom{ks}{r}}.$$

Prueba.- Por inducción sobre s .

Para $s = 1$, puede verificarse directamente a partir de la definición de $d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]}$:

$$\begin{aligned} d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[1]} &:= \frac{1}{\binom{k}{r}} \sum_{\vec{j}} \binom{0}{j} \binom{k}{r-j} W_{\vec{i}, \vec{j}, \vec{r}-\vec{j}}^{[1]} \\ &= \sum_{\alpha=0}^N K_r^\alpha d_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}} \\ &= h_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{r}}; \mathbf{d}) \\ &= K_{\vec{r}}(\vec{r}) h_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{r}}; \mathbf{d}) \\ &= \sum_{\vec{i}_1=\vec{r}} K_{\vec{r}}(\vec{i}_1) h_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Hipótesis inductiva:

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s-1]} := \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_{s-1}|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_{s-1}=\vec{r}}} K_{\vec{r}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_{s-1}) h_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}; \mathbf{d}).$$

Aplicando la definición recursiva de $d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]}$, donde $|\vec{i}| = m - s$, $|\vec{r}| = ks$

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \sum_{\alpha=0}^N b_{\vec{r}-\vec{j}}^\alpha d_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]},$$

sustituyendo la hipótesis inductiva para $d_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]}$, se obtiene

$$\begin{aligned} d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} &:= \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \frac{\binom{k(s-1)}{j} \binom{k}{r-j}}{\binom{ks}{r}} \sum_{\alpha=0}^N b_{\vec{r}-\vec{j}}^\alpha \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_{s-1}|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_{s-1}=\vec{j}}} K_{\vec{j}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_{s-1}) \\ &\quad \times h_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}; \mathbf{d}). \end{aligned}$$

Cambiando el orden de la sumatoria

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_{s-1}|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_{s-1}=\vec{j}}} K_{\vec{j}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r}-\vec{j}}}{\binom{ks}{\vec{r}}} \\ \times \sum_{\alpha=0}^N b_{\vec{r}-\vec{j}}^\alpha \mathbf{h}_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}; \mathbf{d}),$$

y utilizando la definición de $\mathbf{h}_{\vec{i}}$, se obtiene

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \sum_{|\vec{j}|=k(s-1)} \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_{s-1}|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_{s-1}=\vec{j}}} K_{\vec{j}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_{s-1}) \\ \times \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r}-\vec{j}}}{\binom{ks}{\vec{r}}} \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}, \mathbf{b}_{\vec{r}-\vec{j}}; \mathbf{d}).$$

Sustituyendo \vec{j} por $(\vec{r} - \vec{i}_s)$ se obtiene

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} = \sum_{\vec{i}_s} \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_{s-1}|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_{s-1}=\vec{r}-\vec{i}_s}} K_{\vec{r}-\vec{i}_s}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{r}-\vec{i}_s} \binom{k}{\vec{i}_s}}{\binom{ks}{\vec{r}}} \\ \times \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}, \mathbf{b}_{\vec{i}_s}; \mathbf{d}) \\ = \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_s|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_s=\vec{r}}} K_{\vec{r}-\vec{i}_s}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{r}-\vec{i}_s} \binom{k}{\vec{i}_s}}{\binom{ks}{\vec{r}}} \\ \times \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_{s-1}}, \mathbf{b}_{\vec{i}_s}; \mathbf{d}).$$

Se cumple

$$K_{\vec{r}}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_s) = K_{\vec{r}-\vec{i}_s}(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{s-1}) \frac{\binom{k(s-1)}{\vec{r}-\vec{i}_s} \binom{k}{\vec{i}_s}}{\binom{ks}{\vec{r}}}.$$

Por consiguiente se obtiene finalmente

$$d_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \sum_{\substack{|\vec{i}_1|=|\vec{i}_2|=\dots=|\vec{i}_s|=k \\ \vec{i}_1+\vec{i}_2+\dots+\vec{i}_s=\vec{r}}} K_{\vec{r}}(\vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_s) \mathbf{h}_{\vec{i}}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_s}; \mathbf{d}). \quad \blacksquare$$

A partir del Teorema 3.4, se obtiene el siguiente algoritmo:

Algoritmo producto para la deformación de formas libres.

<p>Entrada: $\{\mathbf{d}_{\vec{i}}\}_{ \vec{i} =m} \subset \mathbb{R}^3$: red de control que describe un tetraedro de Bézier F (la deformación).</p> <p>$\{\mathbf{b}_{\vec{p}}\}_{ \vec{p} =k} \subset \mathbb{R}^3$: red de control que describe un triángulo de Bézier g.</p> <p>Nota: Los multi-índices \vec{i} y $\vec{e}_\alpha \in \mathbb{Z}_+^4$ tienen cuatro componentes y los otros multi-índices tienen tres componentes.</p> <p>$b_{\vec{p}}^0, b_{\vec{p}}^1, b_{\vec{p}}^2, b_{\vec{p}}^3$ son las coordenadas baricéntricas de $\mathbf{b}_{\vec{p}}$ respecto al dominio tetraedral de F.</p>
<p>Para todo \vec{i} tal que $\vec{i} = m$ hacer</p>
$\mathbf{d}_{\vec{i}, (0,0,0)}^{[0]} := \mathbf{d}_{\vec{i}}$
<p>Para $s := 1, \dots, m$</p>
<p>Para todo \vec{i} tal que $\vec{i} = m - s$ hacer</p>
<p>Para todo \vec{r} tal que $\vec{r} = ks$ hacer</p>
$\mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[0]} := 0$
<p>Para todo \vec{j} tal que $\vec{j} = k(s - 1)$ hacer</p>
$\mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} + \binom{k(s-1)}{\vec{j}} \binom{k}{\vec{r}-\vec{j}} \sum_{\alpha=0}^3 b_{\vec{r}-\vec{j}}^\alpha \mathbf{d}_{\vec{i}+\vec{e}_{\alpha+1}, \vec{j}}^{[s-1]}$
$\mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} := \mathbf{d}_{\vec{i}, \vec{r}}^{[s]} / \binom{ks}{\vec{r}}$
<p>Para todo \vec{r} tal que $\vec{r} = mk$ hacer</p>
$\hat{\mathbf{d}}_{\vec{r}} := \mathbf{d}_{(0,0,0,0), \vec{r}}^{[m]}$
<p>Salida: Red de control $\{\hat{\mathbf{d}}_{\vec{r}} : \vec{r} = mk\}$ que describen $F \circ g$.</p>

3.4. Composición de Simplejos de Bézier por Blossoms

El siguiente resultado es una generalización de la composición de dos simplejos de Bézier basados en [DeRo 93].

Teorema 3.7. *Dados los espacios afines \mathcal{P}_n de dimensión n , \mathcal{Q}_N de dimensión N y \mathcal{R} de dimensión arbitraria. Sean $\{\mathbf{b}_{\vec{i}} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,n}^k\}$ los puntos de control que definen*

un simplejo de Bézier de grado k , $\mathbf{g} : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{Q}_N$ relativo al dominio simplejo $\Delta_{\mathcal{P}_n} \subset \mathcal{P}_n$ y $\{\mathbf{d}_{\vec{i}} : \vec{i} \in \mathbb{I}_{0,N}^m\}$ los puntos de control que definen un simplejo de Bézier de grado m , $\mathbf{F} : \mathcal{Q}_N \rightarrow \mathcal{R}$ relativo al dominio simplejo $\Delta_{\mathcal{Q}_N} \subset \mathcal{Q}_N$ y sea $\mathbf{f} : \mathcal{Q}_N^m \rightarrow \mathcal{R}$ el blossom de \mathbf{F} . Entonces los puntos de control $\{\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} : \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k*m}\}$ del simplejo de Bézier $\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u}))$ de grado $m * k$ relativo al simplejo $\Delta_{\mathcal{P}_n}$ están dados por

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{1,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} K(\mathbf{I}) \mathbf{f}(\mathbf{b}_{\mathbf{I}}), \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k*m}, \quad (3.20)$$

donde $K(\mathbf{I})$ son las constantes combinatorias dados por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{\binom{|\vec{i}_1|}{|\vec{i}_j|} \cdots \binom{|\vec{i}_m|}{|\vec{i}_j|}}{\binom{|\mathbf{I}|}{|\mathbf{I}|}} \quad (3.21)$$

y $\mathbf{b}_{\mathbf{I}} := (\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_m})$ con

$$\mathbf{I} := (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m), \quad \vec{i}_p \in \mathbb{I}_{0,n}^1 := \{ \vec{i} = (i_0, \dots, i_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1} : i_0 + \dots + i_n = l \}$$

y $|\mathbf{I}| = |(\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_m)| = \vec{i}_1 + \dots + \vec{i}_m$.

Prueba.- Como $\mathbf{f} : \mathcal{Q}_N^m \rightarrow \mathcal{R}$ es el blossom de \mathbf{F} se cumple que

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \mathbf{f}(\underbrace{g(u), \dots, g(u)}_m). \quad (3.22)$$

Sustituyendo la forma de Bézier- Bernstein de $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{f} \left(\sum_{\vec{i}_1 \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_1} B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u}), \dots, \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_m} B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u}) \right). \quad (3.23)$$

Dado que los polinomios de Bernstein suman uno, se tiene que el primer argumento es una combinación afín de los puntos $\mathbf{b}_{\vec{i}_1}$ y siendo \mathbf{f} una función afín en cada uno de sus argumentos, se obtiene

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{i}_1 \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{f}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{b}_{\vec{i}_m} B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u})) B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u}). \quad (3.24)$$

Usando el mismo criterio en el resto de los argumentos, resulta la expresión

$$\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{i}_1 \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \dots \sum_{\vec{i}_m \in \mathbb{I}_{0,n}^k} \mathbf{f}(\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_m}) B_{\vec{i}_1}^k(\mathbf{u}) \dots B_{\vec{i}_m}^k(\mathbf{u}). \quad (3.25)$$

Utilizando la notación de hiper-índices, escribimos

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} f(\mathbf{b}_I) B_I^{k,m}(\mathbf{u}). \quad (3.26)$$

Aplicando el Teorema 2.13 para el producto de polinomios de Bernstein, se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} f(\mathbf{b}_I) K(\mathbf{I}) B_{|\mathbf{I}|}^{k+m}(\mathbf{u}). \quad (3.27)$$

El \vec{j} -ésimo coeficiente de Bézier es el coeficiente que multiplica a $B_{\vec{j}}^{k+m}(\mathbf{u})$. Estos puntos pueden ser obtenidos agrupando todos los términos tales que $|\mathbf{I}| = \vec{j}$, obteniendo

$$D(\mathbf{u}) = \sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}} \left(\sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} f(\mathbf{b}_I) K(\mathbf{I}) \right) B_{\vec{j}}^{k+m}(\mathbf{u}) \quad (3.28)$$

y como los polinomios de Bernstein son linealmente independientes se obtiene finalmente que los puntos de control están dados por

$$\tilde{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} f(\mathbf{b}_I) K(\mathbf{I}), \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k+m}. \quad (3.29)$$

■

OBSERVACION:

En este teorema no aparecen explícitamente los puntos de control del simplejo de Bézier \mathbf{F} , sin embargo ellos son requeridos para evaluar el blossom \mathbf{f} de \mathbf{F} en cualquier punto.

Para la implementación computacional se necesita evaluar el blossom \mathbf{f} de la función \mathbf{F} en cualquier punto. A continuación se presenta un algoritmo para evaluar el blossom \mathbf{f} de una función \mathbf{F} :

EvalBlossom($\mathbf{V}, \mathbf{u}, d, \Delta\mathbf{Q}$)
Entrada: \mathbf{V} : Red de control de un simplejo de Bézier \mathbf{Q} de dimensión k . $\mathbf{u} := (\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$: Punto donde va a ser evaluado el blossom \mathbf{q} de \mathbf{Q} . d : grado de \mathbf{Q} . $\Delta\mathbf{Q}$: dominio simplejo de \mathbf{Q} .
Para todo $\vec{\mathbf{i}} \in \mathbb{I}_{0,k}^d$
$\mathbf{W}_{\vec{\mathbf{i}}}^{[0]} := \mathbf{V}_{\vec{\mathbf{i}}}$
Para $p := 1, \dots, d$
(b_0, \dots, b_k) : coordenadas baricentricas de \mathbf{u} relativo al dominio simplejo $\Delta\mathbf{Q}$.
Para todo $\vec{\mathbf{i}} \in \mathbb{I}_{1,k}^{d-p}$
$\mathbf{W}_{\vec{\mathbf{i}}}^{[p]} := b_0 \mathbf{W}_{\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{e}}_1}^{[p-1]} + \dots + b_k \mathbf{W}_{\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{e}}_{k+1}}^{[p-1]}$
$\mathbf{q}(\mathbf{u}) := \mathbf{W}_{\vec{\mathbf{0}}}^{[d]}$
Salida: $\mathbf{q}(\mathbf{u})$

donde $\vec{\mathbf{e}}_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_i, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}_+^{k+1}$ y

$$\mathbb{I}_{1,k}^d := \{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_k) \in \mathbb{Z}_+^k : i_1 + \dots + i_k = d \}.$$

3.5. Composición de Funciones Racionales

Consideremos los espacios afines \mathcal{M}_m y \mathcal{N}_n de dimensión m y n respectivamente. A cada punto \mathbf{u} de \mathcal{M}_m le asociamos el punto $(u_0, \dots, u_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$, donde (u_0, \dots, u_m) son las coordenadas baricéntricas de \mathbf{u} relativo a algún simplejo $\Delta_{\mathcal{M}_m} \subset \mathcal{M}_m$. De esta manera el subespacio afín \mathcal{M}_m se puede "encajonar" como un subconjunto en \mathbf{R}^{m+1} cuya ecuación es

$$u_0 + \dots + u_m = 1, \quad (u_0, \dots, u_m) \in \mathbf{R}^{m+1} \quad (3.30)$$

Análogamente \mathcal{N}_n también puede "encajonarse" sobre el subconjunto afín $w_0 + \dots + w_n = 1$ en \mathbf{R}^{n+1} . Por consiguiente una función racional $\mathbf{r} : \mathcal{M}_m \rightarrow \mathcal{N}_n$ de grado d , puede ser tratado como una función de \mathbf{R}^{m+1} en \mathbf{R}^{n+1} expresados como el cociente de dos polinomios $\hat{\mathbf{r}} : \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ y $c : \mathbf{R}^{m+1} \rightarrow \mathbf{R}$, ambos de grado d

$$\mathbf{r}(\mathbf{u}) = \frac{\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} = \left(\frac{\hat{r}_0(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})}, \dots, \frac{\hat{r}_n(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} \right) \quad (3.31)$$

donde $\hat{r}_0, \dots, \hat{r}_n$ son las funciones componentes de $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$. Dado que \mathbf{r} mapea en el subespacio afín de \mathbf{R}^{n+1} , se tiene que

$$\frac{\hat{r}_0(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} + \dots + \frac{\hat{r}_n(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})} = 1 \quad (3.32)$$

o equivalentemente,

$$c(\mathbf{u}) = \hat{r}_0(\mathbf{u}) + \dots + \hat{r}_n(\mathbf{u}) \quad (3.33)$$

Definimos la función proyección $\mathbf{Proy} : \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}^{n+1}$ mediante

$$\mathbf{Proy}(x_0, \dots, x_n) := \frac{(x_0, \dots, x_n)}{x_0 + \dots + x_n} \quad (3.34)$$

De (3.31) y (3.33) se obtiene que $\mathbf{Proy}(\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})) = \mathbf{r}(\mathbf{u})$, esto significa que $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ es la proyección de $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$ sobre el subespacio afín $x_0 + \dots + x_n = 1$. Además, se cumple

$$\mathbf{Proy}(ax) = \mathbf{Proy}(x), \quad \forall x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \quad a \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \quad (3.35)$$

Si $\mathbf{r}(\mathbf{u})$ está dado en forma de simplejo racional de Bézier con los puntos de control $\mathbf{b}_{\bar{i}}$ y pesos $w_{\bar{i}}$, entonces $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$ está dado por

$$\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u}) = \sum_{\bar{i} \in \mathcal{I}_{0,k}^d} w_{\bar{i}} \mathbf{b}_{\bar{i}} B_{\bar{i}}^d(\mathbf{u}) \quad (3.36)$$

donde cada uno de los puntos de control $\mathbf{b}_{\bar{i}}$ está representado por las coordenadas baricéntricas $(b_{\bar{i},0}, \dots, b_{\bar{i},n})$. En general es más conveniente usar la notación

$$\hat{\mathbf{b}}_{\bar{i}} := w_{\bar{i}} \mathbf{b}_{\bar{i}} := (w_{\bar{i}} b_{\bar{i},0}, \dots, w_{\bar{i}} b_{\bar{i},n}) \quad (3.37)$$

El hecho de que los polinomios multivariantes de Bernstein son polinomios homogéneos de grado d , se tiene que $\hat{\mathbf{r}}$, la homogenización de \mathbf{r} , es un polinomio de grado d .

Se tiene que asociado con cada polinomio homogéneo de grado d , existe una función multilinear y simétrica que en su diagonal coincide con este polinomio. este resultado se puede ver en Ramshaw [Ram 89]. Por consiguiente, la función \mathbf{r} está asociada con el blossom multilinear $\mathbf{R}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d)$ de $\hat{\mathbf{r}}$. La homogeneidad de $\hat{\mathbf{r}}$ es producido por el "encajonamiento" dado por la ecuación (3.30) y es por ello útil.

Una consecuencia importante de la forma homogénea de $\hat{\mathbf{r}}$ es que

$$\mathbf{r}(a\mathbf{u}) = \mathbf{r}(\mathbf{u}), \quad \forall a \neq 0 \quad (3.38)$$

En efecto, dado que $\hat{\mathbf{r}}$ es una función homogénea de grado d , se tiene $\hat{\mathbf{r}}(a\mathbf{u}) = a^d \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})$ y por (3.35) se cumple:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(a\mathbf{u}) &= \mathbf{Proy}(\hat{\mathbf{r}}(a\mathbf{u})) \\ &= \mathbf{Proy}(a^d \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})) \\ &= \mathbf{Proy}(\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{u})) \\ &= \mathbf{r}(\mathbf{u}) \end{aligned}$$

Teorema 3.8. Sea $g : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ un simplejo de Bézier racional de grado k ,

$$g(\mathbf{u}) = \frac{\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})}, \quad (3.39)$$

con los puntos de control $\{\mathbf{b}_{\vec{i}}\}$ y pesos $w_{\vec{i}}$ y sea $F : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ un simplejo de Bézier racional de grado m con homogenización \widehat{F} . Entonces, los pesos $w_{\vec{i}}$ y los puntos de control $\mathbf{d}_{\vec{j}}$ del simplejo de Bézier racional $D = F \circ g$ de grado $k * m$ están dados por

$$w_{\vec{j}} := d_{\vec{j},0} + \dots + d_{\vec{j},p}, \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_n^{k*m} \quad (3.40)$$

y

$$\mathbf{d}_{\vec{j}} := \text{Proy}(\widehat{\mathbf{d}}_{\vec{j}}) = \frac{\mathbf{d}_{\vec{j}}}{w_{\vec{j}}}, \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_n^{k*m} \quad (3.41)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,k}^{l,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} \widehat{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{b}}_{\mathbf{I}}) K(\mathbf{I}), \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m}, \quad \widehat{\mathbf{b}}_{\mathbf{I}} := (\mathbf{b}_{\vec{i}_1}, \dots, \mathbf{b}_{\vec{i}_m}), \quad (3.42)$$

$\widehat{\mathbf{b}}_{\vec{i}} := w_{\vec{i}} \mathbf{b}_{\vec{i}} := (w_{\vec{i}} b_{\vec{i},0}, \dots, w_{\vec{i}} b_{\vec{i},N})$ y $\widehat{\mathbf{f}}$ es el blossom multilinear de \widehat{F} .

Prueba.- Dado que D es el cociente de dos polinomios homogéneos, usando (3.38) se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = F(g(\mathbf{u})) = F\left(\frac{\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u})}{c(\mathbf{u})}\right) = F(\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u})).$$

Usando el operador proyección **Proy** definido por (3.34) y de esto se obtiene

$$D(\mathbf{u}) = F(\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u})) = \text{Proy}(\widehat{F}(\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u}))). \quad (3.43)$$

La función $\widehat{D}(\mathbf{u}) = \widehat{F}(\widehat{\mathbf{g}}(\mathbf{u}))$ es un polinomio homogéneo de grado $k * m$ que es el resultado de la composición de dos polinomios (homogéneos) \widehat{F} y $\widehat{\mathbf{g}}$.

Aplicando el Teorema 3.7. para \widehat{F} y $\widehat{\mathbf{g}}$ se obtiene que los puntos de control de $\widehat{D} = \widehat{F} \circ \widehat{\mathbf{g}}$ están dados por

$$\widehat{\mathbf{d}}_{\vec{j}} = \sum_{\substack{\mathbf{I} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k,m} \\ |\mathbf{I}| = \vec{j}}} \widehat{\mathbf{f}}(\widehat{\mathbf{b}}_{\mathbf{I}}) K(\mathbf{I}), \quad \vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{k*m} \quad (3.44)$$

y donde $\widehat{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^{N*m} \rightarrow \mathbb{R}^{N*m}$ es el blossom de F .

Reemplazando en (3.43)

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}(\mathbf{u}) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) &= \text{Proy} \left(\sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}} \hat{\mathbf{d}}_{\vec{j}} B_{\vec{j}}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}(\mathbf{u}) \right) \\
&= \frac{\sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}} \hat{\mathbf{d}}_{\vec{j}} B_{\vec{j}}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}(\mathbf{u})}{\sum_{l=0}^p \sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}} \hat{d}_{\vec{j},l} B_{\vec{j}}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}(\mathbf{u})} \\
&= \frac{\sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}} \sum_{l=0}^d \hat{d}_{\vec{j},l} \left(\frac{\hat{\mathbf{d}}_{\vec{j}}}{\sum_{l=0}^p \hat{d}_{\vec{j},l}} \right) B_{\vec{j}}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}(\mathbf{u})}{\sum_{\vec{j} \in \mathbb{I}_{0,n}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}} \sum_{l=0}^d \hat{d}_{\vec{j},l} B_{\vec{j}}^{\mathbf{k} \cdot \mathbf{m}}(\mathbf{u})}
\end{aligned}$$

De esto se obtiene finalmente que los pesos están dados por $w_{\vec{j}} = \sum_{l=0}^p \hat{d}_{\vec{j},l}$ y los puntos de control por $\mathbf{d}_{\vec{j}} = \frac{\hat{\mathbf{d}}_{\vec{j}}}{w_{\vec{j}}} = \text{Proy}(\hat{\mathbf{d}}_{\vec{j}})$. ■

4. PRODUCTO TENSORIAL DE BEZIER

En éste capítulo se presentan algunos resultados y algoritmos para la composición de curvas, superficies y volúmenes (racionales) de producto tensorial. El manejo de los puntos de control de estos tipos de representaciones resulta más sencillo que en el caso de los simplejos de Bézier.

Se presenta un enfoque distinto al presentado por Lasser [Las 93], para la composición de dos representaciones de producto tensorial (racional). Utilizando la teoría de los Blossoms se obtienen formulaciones más sencillas, cuyas correspondientes pruebas resultan más cortas y a la vez más fáciles de comprender. Con éste nuevo enfoque los puntos de control de la nueva función compuesta son expresados como una sumatoria en cuyos términos aparece el blossom multi-afín de una función. Por éste motivo se han desarrollado dos algoritmos para evaluar el blossom multi-afín de una función en cualquier punto. Adicionalmente se presenta una mejora sustancial al reducir el número de términos de la sumatoria que representan a los puntos de control. Estos resultados nos dan una formulación completa de los algoritmos para la composición de esta clase de funciones.

Definición 4.1. Una superficie de Bézier de producto tensorial (*Superficie-BPT*) de grado (l, m) está definida por

$$S(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \mathbf{b}_{i,j} \in \mathbf{R}^3, \quad i = 0, \dots, l, \quad j = 0, \dots, m. \quad (4.1)$$

Definición 4.2. Un volumen de Bézier de producto tensorial (*Volumen-BPT*) de grado (l, m, n) está definido por

$$V(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{b}_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0, 1], \mathbf{b}_{i,j,k} \in \mathbf{R}^3, \\ i = 0, \dots, l, \quad j = 0, \dots, m, \quad k = 0, \dots, n. \quad (4.2)$$

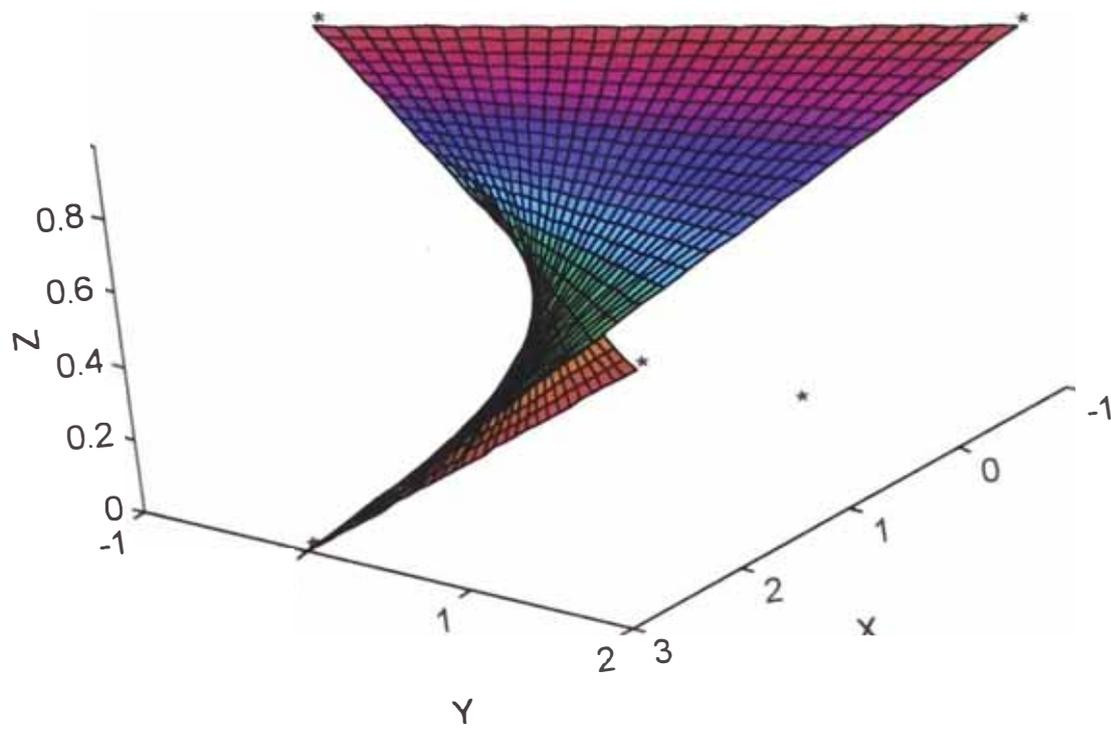


Figura 4.1: Una superficie de Bézier de producto tensorial.

Por la definición del producto tensorial las propiedades de las superficies y volúmenes de Bézier son similares a algunas de las de curvas y pueden deducirse fácilmente a partir de las propiedades del esquema fundamental de las curvas de Bézier, tales como la propiedad de la cápsula convexa, las curvas frontera de las superficies rectangulares de Bézier son curvas de Bézier entre otras propiedades.

Debido a la definición del producto tensorial los algoritmos conmutan en u , v y w , y el resultado es independiente del orden de éstos.

Definición 4.3. Una curva racional de Bézier de grado l en u está definido por

$$\mathbf{r}(u) = \frac{\sum_{i=0}^l \beta_i \mathbf{b}_i B_i^l(u)}{\sum_{i=0}^l \beta_i B_i^l(u)}, \quad u \in [0, 1], \mathbf{b}_i \in \mathbf{R}^d \quad (4.3)$$

donde $\beta_i \in \mathbf{R}$ son los pesos.

Las Superficies-BPT y Volúmenes-BPT racionales son definida de manera similar. En el caso de que los pesos son positivos, se tienen todas las propiedades de algoritmos para curvas, superficies y volúmenes racionales de Bézier que se cumplen para las representaciones no racionales.

4.1. Blossom multi-afín de una superficie-BPT y volumen-BPT

En la sección 1.3 se dio una breve introducción al Blossom multi-afín $h : \mathcal{P}^n \rightarrow \mathcal{Q}$ de una función $H : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$. Ahora se extenderá este concepto para superficies y volúmenes de Bézier de producto tensorial, con la finalidad de obtener pruebas más concisas y claras de la composición de curvas, superficies y volúmenes.

Definición 4.4. El Blossom multiafín de una superficie bpolinomial $F : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ de grado $(l:m)$ es una función multi-afín $\mathbf{f} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ tal que es simétrico en los primeros l argumentos . simétrico en los últimos m argumentos y que satisface la identidad $F(u, v) = \mathbf{f}(u, \dots, u; v, \dots, v)$.

Según la Proposición 1.25 se tiene que cada superficie polinomial tiene un único blossom multi-afín. Según esta Proposición y eligiendo los intervalos de referencia $[a, b]$ y $[c, d]$, cada uno de los primeros argumentos de \mathbf{f} puede ser expresado como una combinación afín de a y b , mientras que los últimos m argumentos están como combinación afín de c y d . Los puntos de control de Bézier están dados por los valores

$$\mathbf{f}\left(\underbrace{a, \dots, a}_{l-1}, \underbrace{b, \dots, b}_1, \underbrace{c, \dots, c}_{m-j}, \underbrace{d, \dots, d}_j\right), \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (4.4)$$

Ejemplo 13. Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ una superficies-BPT polinomial de grado (l, m) ,

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.5)$$

y $f : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ su correspondiente blossom. En este caso los puntos de Bézier satisfacen

$$\mathbf{d}_{i,j} = \mathbf{f}\left(\underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{m-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j\right), \quad i = 0, 1, \dots, l, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (4.6)$$

Ejemplo 14. La superficie cuadrática $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, definido por

$$F(u, v) = (u, v, u^2 + v^2), \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad (4.7)$$

de grado $(2, 2)$ tiene como su blossom multi-afín a la función $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\mathbf{f}(u_1, u_2; v_1, v_2) = \left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, u_1 u_2 + v_1 v_2 \right) \quad (4.8)$$

y sus correspondientes puntos de Bézier por

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{0,0} &= \mathbf{f}(-1, -1; -1, -1) = (-1, -1, 2), \\ \mathbf{d}_{1,0} &= \mathbf{f}(-1, 1; -1, -1) = (0, -1, 0), \\ \mathbf{d}_{2,0} &= \mathbf{f}(1, 1; -1, -1) = (1, -1, 2), \\ \\ \mathbf{d}_{0,1} &= \mathbf{f}(-1, -1; -1, 1) = (-1, 0, 0), \\ \mathbf{d}_{1,1} &= \mathbf{f}(-1, 1; -1, 1) = (0, 0, -2), \\ \mathbf{d}_{2,1} &= \mathbf{f}(1, 1; -1, 1) = (1, 0, 0), \\ \\ \mathbf{d}_{0,2} &= \mathbf{f}(-1, -1; 1, 1) = (-1, 1, 2), \\ \mathbf{d}_{1,2} &= \mathbf{f}(-1, 1; 1, 1) = (0, 1, 0), \\ \mathbf{d}_{2,2} &= \mathbf{f}(1, 1; 1, 1) = (1, 1, 2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

El algoritmo de *de Casteljau* para superficies bpolinomiales \mathbf{F} , calcula el valor del blossom $\mathbf{f}(u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_m)$ ejecutando $(l + m)$ etapas de interpolaciones lineales empezando con los puntos de Bézier. En la Figura 4.2 se muestra la gráfica de una porción de una superficie bpolinomial S de grado $(2, 2)$ del ejemplo anterior.

Debe notarse que

$$S : \mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l\left(\frac{u+1}{2}\right) B_j^m\left(\frac{v+1}{2}\right), \quad u, v \in [-1, 1]. \quad (4.10)$$

Ejemplo 15.

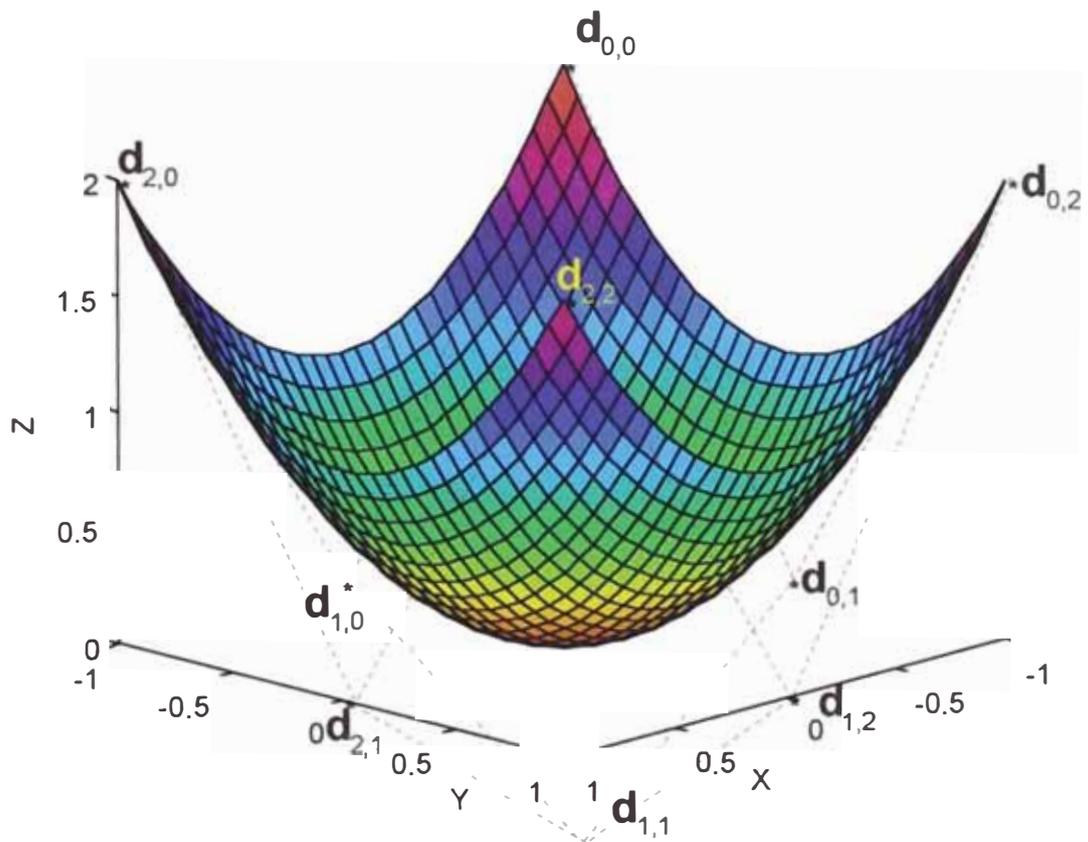


Figura 4.2: Puntos de control de una superficie-BPT

$$S : \widehat{\mathbf{F}}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(\widehat{u}) B_j^m(\widehat{v}), \quad \widehat{u}, \widehat{v} \in [0, 1], \quad (4.11)$$

por lo cual, es suficiente trabajar en el intervalo $[0, 1]$.

A continuación se presenta un algoritmo para evaluar el blossom $\mathbf{f}(u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_m)$ de la función

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1]. \quad (4.12)$$

Este algoritmo es una generalización del algoritmo de *de Casteljau* para curvas (Corolario 1.29).

<p>Algoritmo para evaluar el blossom $\mathbf{f}(u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_m)$</p> <p>Entrada:</p> <p>$\mathbf{d}_{i,j} \in \mathbf{R}^d$ ($i = 0, \dots, l$, $j = 0, \dots, m$) puntos de Bézier que definen un volumen-BPT polinomial $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$ de grado (l, m) cuyo blossom es \mathbf{f}.</p> <p>$(u_0, \dots, u_l; v_0, \dots, v_m)$: parámetros donde será evaluado \mathbf{f}.</p>	
<p>Para $i := 0, \dots, l$</p>	
<p style="padding-left: 20px;">Para $j := 0, \dots, m$</p>	
<p style="padding-left: 40px;">$\mathbf{a}_{i,j} := \mathbf{d}_{i,j}$</p>	
<p>Para $i := 0, \dots, l$</p>	(4.13)
<p style="padding-left: 20px;">Para $j := 1, \dots, m$</p>	
<p style="padding-left: 40px;">Para $p := 0, \dots, m - j$</p>	
<p style="padding-left: 60px;">$\mathbf{a}_{i,p} := (1 - v_j)\mathbf{a}_{i,p} + v_j\mathbf{a}_{i,p+1}$</p>	
<p>Para $i := 1, \dots, l$</p>	
<p style="padding-left: 20px;">Para $p := 0, \dots, l - i$</p>	
<p style="padding-left: 40px;">$\mathbf{a}_{p,0} := (1 - u_i)\mathbf{a}_{p,0} + u_i\mathbf{a}_{p+1,0}$</p>	
<p>SALIDA: $\mathbf{f}(u_0, \dots, u_l; v_0, \dots, v_m) := \mathbf{a}_{0,0}$</p>	

Estos resultados pueden ser generalizados para un volúmen de Bézier de producto tensorial (Volúmen-BPT) de grado (l, m, n) ,

$$\mathbf{F}(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0, 1], \mathbf{d}_{i,j,k} \in \mathbf{R}^d, \quad (4.14)$$

cuyo correspondiente blossom $\mathbf{f} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^d$ es una función multi-afín que es simétrico en los primeros l argumentos, simétrico en los siguientes m argumentos, simétrico en los últimos n argumentos, y que satisface la identidad

$$\mathbf{F}(u, v, w) = \mathbf{f}(u, \dots, u; v, \dots, v; w, \dots, w). \quad (4.15)$$

En este caso se cumple

$$\mathbf{d}_{i,j,k} = \mathbf{f}(\underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{m-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k), \quad (4.16)$$

$$i = 0, \dots, l, \quad j = 0, \dots, m, \quad k = 0, \dots, n.$$

A continuación se presenta un algoritmo para evaluar el blossom $\mathbf{f}(\ ; \ ; \)$ en cualquier punto.

Algoritmo para evaluar el blossom $\mathbf{f}(u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_m; w_1, \dots, w_n)$	
Entrada:	
$\mathbf{d}_{i,j,k} \in \mathbf{R}^d$ ($i = 0, \dots, l, j = 0, \dots, m, k = 0, \dots, n$) puntos de Bézier que definen un volumen-BPT polinomial $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$, de grado (l, m, n) cuyo blossom es \mathbf{f} .	
$(u_0, \dots, u_l; v_0, \dots, v_m; w_0, \dots, w_n)$: parámetros donde será evaluado \mathbf{f}	
Para $i := 0, \dots, l$	
Para $j := 0, \dots, m$	
Para $k := 0, \dots, n$	
$\mathbf{a}_{i,j,k} := \mathbf{d}_{i,j,k}$	
Para $i := 0, \dots, l$	
Para $j := 0, \dots, m$	
Para $k := 1, \dots, n$	
Para $p := 0, \dots, n - k$	
$\mathbf{a}_{i,j,p} := (1 - w_k)\mathbf{a}_{i,j,p} + w_k\mathbf{a}_{i,j,p+1}$	
Para $i := 0, \dots, l$	
Para $j := 1, \dots, m$	
Para $p := 0, \dots, m - j$	
$\mathbf{a}_{i,p,0} := (1 - v_j)\mathbf{a}_{i,p,0} + v_j\mathbf{a}_{i,p+1,0}$	
Para $i := 1, \dots, l$	
Para $p := 0, \dots, l - i$	
$\mathbf{a}_{p,0,0} := (1 - u_i)\mathbf{a}_{p,0,0} + u_i\mathbf{a}_{p+1,0,0}$	
SALIDA: $\mathbf{f}(u_0, \dots, u_l; v_0, \dots, v_m; w_0, \dots, w_n) := \mathbf{a}_{0,0,0}$	

Observación:

Es fácil notar que los algoritmos para evaluar el blossom de una función son una generalización de los algoritmos de *de Casteljau*. También se puede notar que al evaluar el blossom de una función se efectúan varios pasos del algoritmo de *de Casteljau*.

Los algoritmos presentados para evaluar el blossom, son sumamente importantes para la implementación computacional de los resultados que se van a presentar más adelante.

4.2. Composición de Curvas Racionales de Bézier y Superficies-BPT

Por comodidad definimos los siguientes conjuntos de índices:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{I}}_{1,p}(L) &:= \left\{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p : 0 \leq i_1, \dots, i_p \leq L \right\}, \\ \hat{\mathbb{I}}_{1,p}(L) &:= \left\{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p : 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq L \right\}.\end{aligned}$$

Por ejemplo para $p = 3$ y $L = 1$ se tienen los conjuntos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{I}}_{1,3}(1) &= \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}, \\ \hat{\mathbb{I}}_{1,3}(1) &= \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1)\},\end{aligned}$$

y para $p = 3$ y $L = 2$ resultan los conjuntos de índices

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{I}}_{1,3}(2) = \{ & (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 2), (0, 2, 0), \\ & (2, 0, 0), (0, 2, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1), (1, 2, 2), \\ & (2, 1, 2), (2, 2, 1), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2) \},\end{aligned}$$

$$\hat{\mathbb{I}}_{1,3}(2) = \{ (0, 0, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 2, 2), (1, 1, 2), (1, 2, 2), (0, 0, 0), (1, 1, 1), (2, 2, 2) \}.$$

También definimos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{I}}_{1,p}^q(L) &:= \left\{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p : 0 \leq i_1, \dots, i_p \leq L, |\vec{\mathbf{i}}| = q \right\}, \\ \hat{\mathbb{I}}_{1,p}^q(L) &:= \left\{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p : 0 \leq i_1 \leq \dots \leq i_p \leq L, |\vec{\mathbf{i}}| = q \right\},\end{aligned}$$

donde $|\vec{\mathbf{i}}| = |(i_1, \dots, i_p)| = i_1 + \dots + i_p$.

Por ejemplo, para $p = 3$, $L = 2$ y $q = 4$ se tienen los conjuntos de índices

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{I}}_{1,3}^4(2) &= \{(0, 2, 2), (2, 0, 2), (2, 2, 0), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1)\} \\ \hat{\mathbb{I}}_{1,3}^4(2) &= \{(0, 2, 2), (1, 1, 2)\}.\end{aligned}$$

Recordemos también la definición de la norma

$$\|(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})\| = \|((i_1, \dots, i_p), (j_1, \dots, j_q))\| = |\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}| = i_1 + \dots + i_p + j_1 + \dots + j_q.$$

También definimos

$$\mathbf{u}_{\vec{\mathbf{i}}} := \mathbf{u}_{(i_1, \dots, i_p)} = (u_{i_1}, \dots, u_{i_p}) \text{ para } \vec{\mathbf{i}} \in \mathbb{I}_{1,p} := \left\{ \vec{\mathbf{i}} = (i_1, \dots, i_p) \in \mathbb{Z}_+^p \right\}$$

y

$$\mathbf{v}_{\vec{j}} := \mathbf{v}_{(j_1, \dots, j_q)} = (v_{j_1}, \dots, v_{j_q}) \text{ para } \vec{j} \in \mathbb{I}_{1,q} := \left\{ \vec{j} = (j_1, \dots, j_q) \in \mathbb{Z}_+^q \right\}.$$

Los siguientes teoremas son basados en el trabajo de Lasser [Lass 93] y por motivos ya mencionados han sido transformados por la aplicación de los blossoms.

Teorema 4.5. (*Curvas Racionales de Bézier y Superficies-BPT*)

Sea $\mathbf{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva de Bézier racional de grado L

$$\mathbf{g}(s) = \frac{\sum_{i=0}^L \beta_i \mathbf{b}_i B_i^L(s)}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)}, \quad s \in [0, 1], \quad (4.18)$$

donde $\mathbf{g}(s) = (u(s), v(s))$ y con los puntos de Bézier $\mathbf{b}_i = (u_i, v_i)$ y los pesos $\beta_i \in \mathbb{R}$. Sea $\mathbf{H} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ una superficies-BPT polinomial de grado (l, m) ,

$$\mathbf{H}(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \alpha_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.19)$$

y sea $\mathbf{h} : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ el blossom de \mathbf{H} . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s) \right)^{l+m}} \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s) \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \end{aligned} \quad (4.20)$$

donde

$$\text{per}(\mathbf{I}) = \text{per}((\vec{i}_u, \vec{i}_v)) = \text{per}(\vec{i}_u) \text{per}(\vec{i}_v), \quad (4.21)$$

$$K^{l,m}(L, \mathbf{I}) = \frac{\prod_{p=1}^l \beta_{i_p^u} \binom{L}{i_p^u} \prod_{q=1}^m \beta_{i_q^v} \binom{L}{i_q^v}}{\binom{(l+m)L}{\|\mathbf{I}\|}}, \quad (4.22)$$

con $\mathbf{I} = (\vec{i}_u, \vec{i}_v) = (i_1^u, \dots, i_l^u; i_1^v, \dots, i_m^v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) := \widehat{\mathbb{I}}_{1,l}(L) \times \widehat{\mathbb{I}}_{1,m}(L)$.

Prueba.- Como $\mathbf{h} : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ es el blossom de \mathbf{H} se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) &= \mathbf{H}(u(s), v(s)) \\ &= \mathbf{h}(\underbrace{u(s), \dots, u(s)}_l; \underbrace{v(s), \dots, v(s)}_m). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Sustituyendo la forma de Bézier de $u(s)$ en la primera componente de \mathbf{h}

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) &= \mathbf{h}\left(\frac{\sum_{i_1^u=0}^L \beta_{i_1^u} u_{i_1^u} B_{i_1^u}^L(s)}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)}, \dots, u(s); v(s), \dots, v(s)\right) \\
&= \mathbf{h}\left(\sum_{i_1^u=0}^L \left(\frac{\beta_{i_1^u}}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)} B_{i_1^u}^L(s)\right) u_{i_1^u}, \dots, u(s); v(s), \dots, v(s)\right).
\end{aligned}
\tag{4.24}$$

Dado que $\sum_{i_1^u=0}^L \frac{\beta_{i_1^u}}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)} B_{i_1^u}^L(s) = 1$, se tiene que el primer argumento es una combinación afín de los puntos $u_{i_1^u}$ y siendo \mathbf{h} una función afín en cada uno de sus argumentos, se obtiene

$$\widehat{\mathbf{H}}(s) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) = \sum_{i_1^u=0}^L \left(\frac{\beta_{i_1^u}}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)}\right) B_{i_1^u}^L(s) \mathbf{h}(u_{i_1^u}, \underbrace{u(s), \dots, u(s)}_{l-1}; v(s), \dots, v(s)).
\tag{4.25}$$

Usando el mismo criterio en el resto de los argumentos, resulta la expresión

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)\right)^{l+m}} \sum_{i_1^u=0}^L \beta_{i_1^u} B_{i_1^u}^L(s) \dots \sum_{i_l^u=0}^L \beta_{i_l^u} B_{i_l^u}^L(s) \sum_{i_1^v=0}^M \beta_{i_1^v} B_{i_1^v}^L(s) \dots \sum_{i_m^v=0}^M \beta_{i_m^v} B_{i_m^v}^L(s) \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) \\
&= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)\right)^{l+m}} \sum_{i_1^u=0}^L \dots \sum_{i_l^u=0}^L \sum_{i_1^v=0}^M \dots \sum_{i_m^v=0}^M B_{i_1^u}^L(s) \dots B_{i_l^u}^L(s) B_{i_1^v}^L(s) \dots B_{i_m^v}^L(s) \\
&\quad \times \prod_{p=1}^l \beta_{i_p^u} \prod_{q=1}^m \beta_{i_q^v} \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \text{ donde } (\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \tilde{\mathbb{I}}_{l,m}(L)
\end{aligned}
\tag{4.26}$$

Aplicando el Lema 1.3 para el producto de polinomios de Bernstein, se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)\right)^{l+m}} \sum_{i_1^u=0}^L \cdots \sum_{i_l^u=0}^L \sum_{i_1^v=0}^M \cdots \sum_{i_m^v=0}^M \frac{\prod_{p=1}^l \binom{L}{i_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{L}{i_q^v}}{\binom{(l+m)L}{i_1^u+\dots+i_l^u+i_1^v+\dots+i_m^v}} B_{i_1^u+\dots+i_l^u+i_1^v+\dots+i_m^v}^{(l+m)L}(s) \\ &\quad \times \prod_{p=1}^l \beta_{i_p^u} \prod_{q=1}^m \beta_{i_q^v} \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}, \mathbf{v}_{\vec{i}_v}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Utilizando la notación de hiper-índices, de (4.22) y de esto se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s)) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)\right)^{l+m}} \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} K^{l,m}(L, \mathbf{I}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s) \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Siendo \mathbf{h} el blossom de \mathbf{H} , se tiene que

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) = \mathbf{h}(\mathbf{u}_{(i_1^u, \dots, i_l^u)}; \mathbf{v}_{(i_1^v, \dots, i_m^v)}) = \mathbf{h}((u_{i_1^u}, \dots, u_{i_l^u}); (v_{i_1^v}, \dots, v_{i_m^v}))$$

es simétrico respecto a los argumentos $(u_{i_1^u}, \dots, u_{i_l^u})$ y $(v_{i_1^v}, \dots, v_{i_m^v})$, con lo cual se concluye la prueba. ■

Para los pesos $\beta_i = 1$, $i = 0, \dots, L$, $\mathbf{H} \equiv \mathbf{F}$. se obtiene

Corolario 4.6. (*Curvas de Bézier y Superficies de Bézier de Producto Tensorial*)

Sea $\mathbf{g} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva de Bézier polinomial plana de grado L .

$$\mathbf{g}(s) = \sum_{l=0}^L \mathbf{b}_l B_l^L(s), \quad s \in [0, 1], \quad (4.29)$$

donde $\mathbf{g}(s) = (u(s), v(s))$ y con los puntos de Bézier $\mathbf{b}_l = (u_l, v_l) \in \mathbf{R}^2$.

Sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$ una superficies-BPT polinomial de grado (l, m) ,

$$\mathbf{F}(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.30)$$

donde $\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ y $\mathbf{d}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ son los puntos de Bézier y sea $\mathbf{f} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ el blossom de \mathbf{F} . Entonces

$$\widehat{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s)) = \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s) \mathbf{f}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \quad (4.31)$$

donde

$$\text{per}(\mathbf{I}) = \text{per}((\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v)) = \text{per}(\vec{\mathbf{i}}_u) \text{per}(\vec{\mathbf{i}}_v), \quad (4.32)$$

$$K^{l,m}(L, \mathbf{I}) = \frac{\prod_{p=1}^l \binom{L}{i_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{L}{i_q^v}}{\binom{(l+m)L}{\|\mathbf{I}\|}}, \quad \mathbf{I} \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L). \quad (4.33)$$

Teorema 4.7. (Curvas Racionales de Bézier y Superficies-BPT racional)

Sea $\mathbf{g} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ una curva de Bézier racional de grado L

$$\mathbf{g}(s) = \frac{\sum_{i=0}^L \beta_i \mathbf{b}_i B_i^L(s)}{\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s)}, \quad s \in [0, 1], \quad (4.34)$$

con $\mathbf{g}(s) = (u(s), v(s))$ y con los puntos de Bézier $\mathbf{b}_i = (u_i, v_i)$ y los pesos $\beta_i \in \mathbf{R}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$ una superficie-BPT polinomial racional de grado (l, m) ,

$$\mathbf{F}(u, v) := \frac{\mathbf{Q}(u, v)}{C(u, v)}, \quad u, v \in [0, 1], \quad (4.35)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(u, v) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \\ C(u, v) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \omega_{i,j} B_i^l(u) B_j^m(v), \quad u, v \in [0, 1], \end{aligned} \quad (4.36)$$

donde $\mathbf{F}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ y $\mathbf{d}_{i,j} = (x_{i,j}, y_{i,j}, z_{i,j})$ (caso $d = 3$) son los puntos de Bézier y pesos $\omega_{i,j} \in \mathbf{R}$. En el caso de que $d = 2$ (Sólido-2D) tenemos : $z_{i,j} = 0$ para todo i, j . Sean $\mathbf{q} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ el blossom de \mathbf{Q} y $c : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$ el blossom de C . Entonces

$$\widehat{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s)) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{g}(s))}{C(\mathbf{g}(s))} = \frac{\sum_{k=0}^{(l+m)L} \tilde{w}_k \tilde{\mathbf{d}}_k B_k^{(l+m)L}(s)}{\sum_{k=0}^{(l+m)L} \tilde{w}_k B_k^{(l+m)L}(s)}, \quad (4.37)$$

donde los pesos están dados por

$$\tilde{w}_k := \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) c(\mathbf{u}_{\vec{\mathbf{i}}_u}; \mathbf{v}_{\vec{\mathbf{i}}_v}), \quad k = 0, \dots, (l+m)L, \quad (4.38)$$

los puntos de control por

$$\tilde{\mathbf{d}}_k := \left(\frac{1}{\tilde{w}_k} \right) \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{\mathbf{i}}_u}; \mathbf{v}_{\vec{\mathbf{i}}_v}), \quad k = 0, \dots, (l+m)L, \quad (4.39)$$

el coeficiente por

$$K^{l,m}(L, \mathbf{I}) = \frac{\prod_{p=1}^l \beta_{i_p^u} \binom{L}{i_p^u} \prod_{q=1}^m \beta_{i_q^v} \binom{L}{i_q^v}}{\binom{(l+m)L}{\|\mathbf{I}\|}}, \quad \mathbf{I} = (\vec{i}_u, \vec{i}_v) = (i_1^u, \dots, i_l^u; i_1^v, \dots, i_m^v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}^L, \quad (4.40)$$

el conjunto de super-índices por

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) &:= \widehat{\mathbb{I}}_{1,l}(L) \times \widehat{\mathbb{I}}_{1,m}(L) \\ &= \{ \vec{i}_u = (i_1^u, \dots, i_l^u) \in \mathbb{Z}_+^l : 0 \leq i_1^u \leq \dots \leq i_l^u \leq L \} \\ &\quad \times \{ \vec{i}_v = (i_1^v, \dots, i_m^v) \in \mathbb{Z}_+^m : 0 \leq i_1^v \leq \dots \leq i_m^v \leq L \} \end{aligned}$$

$$y \quad (\mathbf{u}_{\vec{i}_u}, \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) := (u_{i_1^u}, \dots, u_{i_l^u}; v_{i_1^v}, \dots, v_{i_m^v}).$$

Prueba.- Siendo $\mathbf{q} : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^d$ el blossom de \mathbf{Q} y $c : \mathbb{R}^l \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ el blossom de C , por el Teorema 4.5 se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(\mathbf{g}(s)) &= \mathbf{Q}(u(s), v(s)) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s) \right)^{n+m}} \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\begin{aligned} C(\mathbf{g}(s)) &= C(u(s), v(s)) = \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \beta_i B_i^L(s) \right)^{n+m}} \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Dividiendo se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(s) &= \mathbf{F}(\mathbf{g}(s)) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{g}(s))}{C(\mathbf{g}(s))} \\ &= \frac{\sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s)}{\sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L)} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m)L}(s)}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

El i -ésimo punto de Bézier es el coeficiente que multiplica a $B_k^{(l+m)L}(s)$. Estos

puntos pueden ser obtenidos agrupando los términos tales que $\|\mathbf{I}\| = k$, obteniendo

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(s) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s)) &= \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{g}(s))}{C(\mathbf{g}(s))} \\ &= \frac{\sum_{k=0}^{(l+m)L} \left(\sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) \right) B_k^{(l+m)L}(s)}{\sum_{k=0}^{(l+m)L} \left(\sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}) \right) B_k^{(l+m)L}(s)}, \end{aligned} \quad (4.44)$$

De esto se obtiene que los pesos están dados por

$$\tilde{w}_k := \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \quad k = 0, \dots, (l+m)L \quad (4.45)$$

y los puntos de control por

$$\tilde{\mathbf{d}}_k := \left(\frac{1}{\tilde{w}_k} \right) \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m}(L) \\ \|\mathbf{I}\|=k}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m}(L, \mathbf{I}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v}), \quad k = 0, \dots, (l+m)L. \quad (4.46)$$

■

4.3. Composición de Superficies-BPT racional y volúmenes-BPT

Consideramos también los conjuntos de hiper-índices

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M) &= \left\{ \mathbf{J} := (\vec{\mathbf{j}}_u, \vec{\mathbf{j}}_v, \vec{\mathbf{j}}_w) \in \tilde{\mathbb{I}}_{1,l}(M) \times \tilde{\mathbb{I}}_{1,m}(M) \times \tilde{\mathbb{I}}_{1,n}(M) \right\} \\ \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L) &:= \left\{ \mathbf{I} := (\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{i}}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{1,l}(L) \times \widehat{\mathbb{I}}_{1,m}(L) \times \widehat{\mathbb{I}}_{1,n}(L) \right\} \end{aligned}$$

donde la norma $\|\cdot\|$ está definido por

$$\|\mathbf{I}\| := \|(\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{i}}_w)\| = |\vec{\mathbf{i}}_u| + |\vec{\mathbf{i}}_v| + |\vec{\mathbf{i}}_w| = i_1^u + \dots + i_l^u + i_1^v + \dots + i_m^v + i_1^w + \dots + i_n^w,$$

también denotaremos

$$\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u} := (u_{i_1^u, j_1^u}, \dots, u_{i_l^u, j_l^u}), \quad \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v} := (v_{i_1^v, j_1^v}, \dots, v_{i_m^v, j_m^v}), \quad \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w} := (w_{i_1^w, j_1^w}, \dots, w_{i_n^w, j_n^w}),$$

y definimos

$$\text{per}(\mathbf{I}) := \text{per}((\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{i}}_w)) := \text{per}(\vec{i}_u) \text{per}(\vec{i}_v) \text{per}(\vec{i}_w).$$

Teorema 4.8. (Superficies-BPT racional y volúmenes-BPT) Sea $\mathbf{g} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una superficie-BPT racional de grado (L, M) ,

$$\mathbf{g}(s, t) = \frac{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t)}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t)}, \quad s, t \in [0, 1] \quad (4.47)$$

donde $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t), w(s, t))$ y con puntos de Bézier $\mathbf{b}_{i,j} = (u_{i,j}, v_{i,j}, w_{i,j}) \in \mathbf{R}^3$ y pesos $\beta_{i,j} \in \mathbf{R}$. Sea $\mathbf{H} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, un volúmen-BPT polinomial de grado (l, m, n) . Sea $\mathbf{h} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ el blossom de \mathbf{H} . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t)) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t) \right)^{l+m+n}} \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L) \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M)}} \text{per}(\mathbf{I}) \\ &\quad \times K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{V}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}) B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m+n)L}(s) B_{\|\mathbf{J}\|}^{(l+m+n)M}(t), \end{aligned} \quad (4.48)$$

donde

$$K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) := \frac{\prod_{p=1}^l \binom{L}{i_p^u} \binom{M}{j_p^u} \beta_{i_p^u, j_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{L}{i_q^v} \binom{M}{j_q^v} \beta_{i_q^v, j_q^v} \prod_{r=1}^n \binom{L}{i_r^w} \binom{M}{j_r^w} \beta_{i_r^w, j_r^w}}{\binom{(l+m+n)L}{\|\mathbf{I}\|} \binom{(l+m+n)L}{\|\mathbf{J}\|}}, \quad (4.49)$$

$$\mathbf{I} = (\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) = (i_1^u, \dots, i_l^u; i_1^v, \dots, i_m^v; i_1^w, \dots, i_n^w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L),$$

$$\mathbf{J} = (\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) = (j_1^u, \dots, j_l^u; j_1^v, \dots, j_m^v; j_1^w, \dots, j_n^w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M).$$

Prueba.- Como $\mathbf{h} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ es el blossom de \mathbf{H} se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s, t) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t)) &= \mathbf{H}(u(s, t), v(s, t), w(s, t)) \\ &= \mathbf{h}(\underbrace{u(s, t), \dots, u(s, t)}_l; \underbrace{v(s, t), \dots, v(s, t)}_m; \underbrace{w(s, t), \dots, w(s, t)}_n) \end{aligned} \quad (4.50)$$

Sustituyendo la forma racional de Bézier de $u(s, t)$ en la primera componente de \mathbf{h} , resulta

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s, t) &= \mathbf{h} \left(\frac{\sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \beta_{i_1^u, j_1^u} u_{i_1^u, j_1^u} B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^M(t)}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t)}, \dots, u(s, t); v(s, t), \dots, v(s, t); w(s, t), \dots, w(s, t) \right) \\ &= \mathbf{h} \left(\sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \left(\frac{\beta_{i_1^u, j_1^u}}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t)} B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^M(t) \right) u_{i_1^u, j_1^u}, \right. \\ &\quad \left. \dots, u(s, t); v(s, t), \dots, v(s, t); w(s, t), \dots, w(s, t) \right). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Dado que $\sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \frac{\beta_{i_1^u, j_1^u}}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t)} B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^M(t) = 1$, se tiene que el primer argumento es una combinación afín de los puntos $u_{i_1^u, j_1^u}$ y siendo \mathbf{h} una función afín en cada uno de sus argumentos, se obtiene

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t)) \\ &= \sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \left(\frac{\beta_{i_1^u, j_1^u}}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t)} \right) B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^M(t) \\ &\quad \times \mathbf{h} \left(u_{i_1^u, j_1^u}, \underbrace{u(s, t), \dots, u(s, t)}_{l-1}; v(s, t), \dots, v(s, t); w(s, t), \dots, w(s, t) \right). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Usando el mismo criterio en los siguientes $(l - 1)$ argumentos, resulta la expresión

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}(s, t) &= \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t)) \\ &= \frac{\sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \beta_{i_1^u, j_1^u} B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^L(t) \dots \sum_{i_1^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \beta_{i_1^u, j_1^u} B_{i_1^u}^L(s) B_{j_1^u}^M(t)}{\left(\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t) \right)^l} \\ &\quad \times \mathbf{h}(\mathbf{u}_{i_u, j_u}^u; v(s, t), \dots, v(s, t); w(s, t), \dots, w(s, t)) \end{aligned}$$

Reordenando se obtiene

$$\widehat{\mathbf{H}}(s, t) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t))$$

$$= \frac{\sum_{i_1^u=0}^L \dots \sum_{i_l^u=0}^L \sum_{j_1^u=0}^M \dots \sum_{j_m^u=0}^M \prod_{p=1}^l \prod_{q=1}^l \beta_{i_p^u, j_q^u} \prod_{p=1}^l B_{i_p^u}^L(s) \prod_{q=1}^l B_{j_q^u}^M(t)}{\left(\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t) \right)^l} \quad (4.53)$$

$$\times \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; v(s, t), \dots, v(s, t); w(s, t), \dots, w(s, t)).$$

Usando el mismo criterio en el resto de argumentos, aplicando el Lema 1.3 para el producto de polinomios de Bernstein y usando la notación de hiper-índices, se obtiene

$$\widehat{\mathbf{H}}(s, t) = \mathbf{H}(\mathbf{g}(s, t))$$

$$= \frac{1}{\left(\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^L(t) \right)^{l+m+n}} \sum_{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \tilde{\mathbf{I}}_{l,m,n}^L} \sum_{\mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \tilde{\mathbf{I}}_{l,m,n}^M} B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m+n)L}(s)$$

$$\times B_{\|\mathbf{J}\|}^{(l+m+n)M}(t) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{V}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}), \quad (4.54)$$

donde $K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J})$ está definido por (4.49).

Siendo \mathbf{h} es el blossom de \mathbf{H} , se tiene que

$$\mathbf{h}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{V}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}) = \mathbf{h}(u_{i_1^u, j_1^u}, \dots, u_{i_l^u, j_l^u}; v_{i_1^v, j_1^v}, \dots, v_{i_m^v, j_m^v}; w_{i_1^w, j_1^w}, \dots, w_{i_n^w, j_n^w}),$$

es simétrico respecto a los argumentos $(u_{i_1^u, j_1^u}, \dots, u_{i_l^u, j_l^u})$, $(v_{i_1^v, j_1^v}, \dots, v_{i_m^v, j_m^v})$ y $(w_{i_1^w, j_1^w}, \dots, w_{i_n^w, j_n^w})$ se concluye la prueba. ■

Para $\beta_{i,j} = 1$, $i = 0, \dots, L$, $j = 0, \dots, M$ y $\mathbf{H} := \mathbf{F}$ se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 4.9. (Superficies-BPT y volúmenes-BPT)

Sea $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie-BPT polinomial de grado (L, M) ,

$$\mathbf{g}(s, t) = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \mathbf{b}_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t), \quad s, t \in [0, 1], \quad (4.55)$$

donde $\mathbf{g}(s, t) = (u(s, t), v(s, t), w(s, t))$ y con puntos de Bézier $\mathbf{b}_{l,j} = (u_{l,j}, v_{l,j}, w_{l,j}) \in \mathbb{R}^3$.
Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un volumen-BPT polinomial de grado (l, m, n) ,

$$\mathbf{F}(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0, 1], \quad (4.56)$$

donde $\mathbf{F}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ y $\mathbf{d}_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ son los puntos de Bézier. Sea $\mathbf{f} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ el blossom multi-afín de $\mathbf{F} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$; $\mathbf{f}(u_1, \dots, u_l; v_1, \dots, v_m; w_1, \dots, w_n)$ tiene las propiedades: \mathbf{f} es multi-afín en cada argumento, \mathbf{f} es simétrico en u_1, \dots, u_l , \mathbf{f} es simétrico en v_1, \dots, v_m , \mathbf{f} es simétrico en w_1, \dots, w_n , y $\mathbf{F}(u, v, w) = \mathbf{f}(u, \dots, u; v, \dots, v; w, \dots, w)$.

Entonces

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) = \sum_{P=0}^{(l+m+n)L} \sum_{Q=0}^{(l+m+n)M} \widetilde{\mathbf{d}}_{P,Q} B_P^{(l+m+n)L}(s) B_Q^{(l+m+n)M}(t) \quad (4.57)$$

con los puntos de control

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{d}}_{P,Q} = & \sum_{\substack{\mathbf{I} := (\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \|\mathbf{I}\| = P \\ \mathbf{J} := (\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M), \|\mathbf{J}\| = Q \\ \text{para } i = 0, \dots, (l+m+n)L, j = 0, \dots, (l+m+n)M,}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L; \mathbf{I}) K^{l,m,n}(M; \mathbf{J}) \mathbf{f}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}) \end{aligned} \quad (4.58)$$

las constantes

$$K^{l,m,n}(L; \mathbf{I}) = \frac{\prod_{p=1}^l \binom{L}{i_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{L}{i_q^v} \prod_{r=1}^n \binom{L}{i_r^w}}{\binom{(l+m+n)L}{\|\mathbf{I}\|}}, \quad (4.59)$$

$$\mathbf{I} := (\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) = ((i_1^u, \dots, i_l^u), (i_1^v, \dots, i_m^v), (i_1^w, \dots, i_n^w)) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L),$$

y

$$K^{l,m,n}(M; \mathbf{J}) = \frac{\prod_{p=1}^l \binom{M}{j_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{M}{j_q^v} \prod_{r=1}^n \binom{M}{j_r^w}}{\binom{(l+m+n)M}{\|\mathbf{J}\|}}, \quad (4.60)$$

$$\mathbf{J} := (\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) = ((j_1^u, \dots, j_l^u), (j_1^v, \dots, j_m^v), (j_1^w, \dots, j_n^w)) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M).$$

Ejemplo 16. Para $(L, M) := (2, 2)$ y $(l, m, n) := (2, 2, 1)$ los puntos de control $\widetilde{\mathbf{d}}_{P,Q}$ de la superficie-BPT polinomial de grado $((l+m+n)L, (l+m+n)M) = (10, 10)$,

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) = \sum_{P=0}^{10} \sum_{Q=0}^{10} \widetilde{\mathbf{d}}_{P,Q} B_P^{10}(s) B_Q^{10}(t),$$

son obtenidos mediante el corolario 4.9.

Para $P = 2$ y $Q = 1$, los índices $\mathbf{I} := (\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{i}}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{2,2,2}(2)$, $\|\mathbf{I}\| = P = 2$, están dados por la siguiente tabla

$\vec{\mathbf{i}}_u$	$\vec{\mathbf{i}}_v$	$\vec{\mathbf{i}}_w$	$K^{2,2,1}(2; \mathbf{I})$	$per(\mathbf{I})$
0 0	0 0	2	1/45	1
0 0	0 1	1	4/45	2
0 0	0 2	0	1/45	2
0 0	1 1	0	4/45	1
0 1	0 0	1	4/45	2
0 1	0 1	0	4/45	4
0 2	0 0	0	1/45	2
1 1	0 0	0	4/45	1

y los índices $\mathbf{J} := (\vec{\mathbf{j}}_u, \vec{\mathbf{j}}_v, \vec{\mathbf{j}}_w) \in \widetilde{\mathbb{I}}_{2,2,1}(2)$, $\|\mathbf{J}\| = Q = 1$ por

$\vec{\mathbf{j}}_u$	$\vec{\mathbf{j}}_v$	$\vec{\mathbf{j}}_w$	$K^{2,2,1}(2, \mathbf{J})$
0 0	0 0	1	2/45
0 0	0 1	0	2/45
0 0	1 0	0	2/45
0 1	0 0	0	2/45
1 0	0 0	0	2/45

Recordando que para los sub-índices

$$\mathbf{I} := (\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{i}}_w) = ((i_1^u, i_2^u), (i_1^v, i_2^v), (i_1^w))$$

y

$$\mathbf{J} := (\vec{\mathbf{j}}_u, \vec{\mathbf{j}}_v, \vec{\mathbf{j}}_w) = ((j_1^u, j_2^u), (j_1^v, j_2^v), (j_1^w))$$

se tiene

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}_{\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{j}}_u}^{\vec{\mathbf{i}}_u, \vec{\mathbf{j}}_u}; \mathbf{v}_{\vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{j}}_v}^{\vec{\mathbf{i}}_v, \vec{\mathbf{j}}_v}; \mathbf{w}_{\vec{\mathbf{i}}_w, \vec{\mathbf{j}}_w}^{\vec{\mathbf{i}}_w, \vec{\mathbf{j}}_w}) = \mathbf{f}(u_{i_1^u, j_1^u}, u_{i_2^u, j_2^u}; v_{i_1^v, j_1^v}, v_{i_2^v, j_2^v}; w_{i_1^w, j_1^w}).$$

En particular se obtiene

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{P,Q} = & \text{per}(0,0;0,0;2) K^{2,2,1}(2; (0,0;0,0;2)) [\\
& K^{2,2,1}(2; (0,0;0,0;1)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{2,1}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;0,1;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{0,1}; w_{2,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;1,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,1}, v_{0,0}; w_{2,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,1;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,1}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{2,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (1,0;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,1}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{2,0})] \\
& + \text{per}(0,0;0,1;1) K^{2,2,1}(2; (0,0;0,1;1)) [\\
& K^{2,2,1}(2; (0,0;0,0;1)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{1,0}; w_{1,1}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;0,1;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{1,1}; w_{1,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;1,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,0}; v_{0,1}, v_{1,0}; w_{1,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,1;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,0}, u_{0,1}; v_{0,0}, v_{1,0}; w_{1,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (1,0;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{0,1}, u_{0,0}; v_{0,0}, v_{1,0}; w_{1,0})] \\
& + \dots + \\
& \text{per}(1,1;0,0;0) K^{2,2,1}(2; (0,0;0,1;1)) [\\
& K^{2,2,1}(2; (0,0;0,0;1)) \mathbf{f}(u_{1,0}, u_{1,0}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{0,1}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;0,1;0)) \mathbf{f}(u_{1,0}, u_{1,0}; v_{0,0}, v_{0,1}; w_{0,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,0;1,0;0)) \mathbf{f}(u_{1,0}, u_{1,0}; v_{0,1}, v_{0,0}; w_{0,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (0,1;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{1,0}, u_{1,1}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{0,0}) \\
& + K^{2,2,1}(2; (1,0;0,0;0)) \mathbf{f}(u_{1,1}, u_{1,0}; v_{0,0}, v_{0,0}; w_{0,0})]
\end{aligned}$$

Teorema 4.10. (*Superficies-BPT racionales y volúmenes-BPT racionales*)

Sea $\mathbf{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una superficie-BPT racional de grado (L,M).

$$\mathbf{g}(s,t) = \frac{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} \mathbf{b}_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t)}{\sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \beta_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t)}, \quad s, t \in [0,1], \quad (4.61)$$

donde $\mathbf{g}(s,t) = (u(s,t), v(s,t), w(s,t))$ y con puntos de Bézier $\mathbf{b}_{I,J} = (u_{I,J}, v_{I,J}, w_{I,J}) \in \mathbb{R}^3$ y pesos $\beta_{I,J} \in \mathbb{R}$. Sea $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un volumen-BPT racional de grado (l, m, n) ,

$$\mathbf{F}(u,v,w) := \frac{R(u,v,w)}{C(u,v,w)}, \quad u, v, w \in [0,1], \quad (4.62)$$

con

$$\begin{aligned}
Q(u,v) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n w_{i,j,k} \mathbf{d}_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0,1], \quad \text{y} \\
C(u,v) &= \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n w_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0,1],
\end{aligned} \quad (4.63)$$

donde $\mathbf{F}(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ y $\mathbf{d}_{i,j,k} = (x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})$ son los puntos de Bézier y los pesos $w_{i,j,k} \in \mathbf{R}$. Sean $\mathbf{q} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ el blossom de \mathbf{Q} y $c : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ el blossom de C . Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{F}}(s, t) &= \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) \\ &= \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{g}(s, t))}{C(\mathbf{g}(s, t))} \\ &= \frac{\sum_{p=0}^{(l+m+n)L} \sum_{q=0}^{(l+m+n)M} \tilde{w}_{p,q} \tilde{\mathbf{d}}_{p,q} B_p^{(l+m+n)L}(s) B_q^{(l+m+n)M}(t)}{\sum_{p=0}^{(l+m+n)L} \sum_{q=0}^{(l+m+n)M} \tilde{w}_{p,q} B_p^{(l+m+n)L}(s) B_q^{(l+m+n)M}(t)}, \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde los pesos están dados

$$\begin{aligned} \tilde{w}_{p,q} &:= \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \|\mathbf{I}\|=p \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M), \|\mathbf{J}\|=q}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}), \\ p &= 0, \dots, (l+m+n)L, \quad q = 0, \dots, (l+m+n)M, \end{aligned} \quad (4.65)$$

los puntos de control por

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{d}}_k &:= \left(\frac{1}{w_{p,q}} \right) \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \|\mathbf{I}\|=p \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M), \|\mathbf{J}\|=q}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}), \\ p &= 0, \dots, (l+m+n)L, \quad q = 0, \dots, (l+m+n)M, \end{aligned} \quad (4.66)$$

el coeficiente por

$$\begin{aligned} K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) &:= \frac{\prod_{p=1}^l \binom{L}{i_p^u} \binom{M}{i_p^v} \beta_{i_p^u, j_p^u} \prod_{q=1}^m \binom{L}{i_q^v} \binom{M}{j_q^v} \beta_{i_q^v, j_q^v} \prod_{r=1}^n \binom{L}{i_r^w} \binom{M}{j_r^w} \beta_{i_r^w, j_r^w}}{\binom{(l+m+n)L}{\|\mathbf{I}\|} \binom{(l+m+n)L}{\|\mathbf{J}\|}}, \quad (4.67) \\ \mathbf{I} &:= (\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) = (i_1^u, \dots, i_l^u; i_1^v, \dots, i_m^v; i_1^w, \dots, i_n^w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \\ \mathbf{J} &:= (\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) = (j_1^u, \dots, j_l^u; j_1^v, \dots, j_m^v; j_1^w, \dots, j_n^w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(M). \end{aligned}$$

Prueba.- Siendo $\mathbf{q} : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ el blossom de \mathbf{Q} y $c : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ el blossom de C , por el Teorema anterior se tiene que

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{g}(s, t))}{C(\mathbf{g}(s, t))}, \quad (4.68)$$

donde

$$Q(g(s, t)) = \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L) \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M)}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}^{\rightarrow}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}^{\rightarrow}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}^{\rightarrow}) \\ \times B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m+n)L}(s) B_{\|\mathbf{J}\|}^{(l+m+n)M}(t), \quad (4.69)$$

$$C(g(s, t)) = \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L) \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M)}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}^{\rightarrow}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}^{\rightarrow}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}^{\rightarrow}) \\ \times B_{\|\mathbf{I}\|}^{(l+m+n)L}(s) B_{\|\mathbf{J}\|}^{(l+m+n)M}(t). \quad (4.70)$$

El punto de Bézier $\tilde{\mathbf{d}}_{p,q}$ es el coeficiente que multiplica a $B_p^{(l+m)L}(s)B_q^{(l+m)L}(t)$. Estos puntos pueden ser obtenidos agrupando términos tales que $\|\mathbf{I}\| = p$ y $\|\mathbf{J}\| = q$, obteniendo

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(g(s, t)) \\ = \frac{\sum_{p=0}^{(l+m+n)L} \sum_{q=0}^{(l+m+n)M} \tilde{w}_{p,q} \tilde{\mathbf{d}}_k B_p^{(l+m+n)L}(s) B_q^{(l+m+n)M}(t)}{\sum_{p=0}^{(l+m+n)L} \sum_{q=0}^{(l+m+n)M} \tilde{w}_{p,q} B_p^{(l+m+n)L}(s) B_q^{(l+m+n)M}(t)} \quad (4.71)$$

donde los pesos están dados por

$$\tilde{w}_{p,q} := \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \|\mathbf{I}\|=p \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M), \|\mathbf{J}\|=q}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) c(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}^{\rightarrow}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}^{\rightarrow}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}^{\rightarrow}), \\ p = 0, \dots, (l+m+n)L, q = 0, \dots, (l+m+n)M, \quad (4.72)$$

y los puntos de control por

$$\tilde{\mathbf{d}}_k := \left(\frac{1}{\tilde{w}_{p,q}} \right) \sum_{\substack{\mathbf{I}=(\vec{i}_u, \vec{i}_v, \vec{i}_w) \in \widehat{\mathbb{I}}_{l,m,n}(L), \|\mathbf{I}\|=p \\ \mathbf{J}=(\vec{j}_u, \vec{j}_v, \vec{j}_w) \in \widehat{\mathbb{J}}_{l,m,n}(M), \|\mathbf{J}\|=q}} \text{per}(\mathbf{I}) K^{l,m,n}(L, M, \mathbf{I}, \mathbf{J}) \mathbf{q}(\mathbf{u}_{\vec{i}_u, \vec{j}_u}^{\rightarrow}; \mathbf{v}_{\vec{i}_v, \vec{j}_v}^{\rightarrow}; \mathbf{w}_{\vec{i}_w, \vec{j}_w}^{\rightarrow}). \\ p = 0, \dots, (l+m+n)L, q = 0, \dots, (l+m+n)M. \quad (4.73)$$

■

Observación

En la implementación computacional de cualquier algoritmo siempre se requieren de datos de prueba para verificar si vamos por un camino correcto y también para verificar los programas. En nuestro caso para la composición de una superficie-BPT y

volúmen-BPT, los datos de prueba pueden ser obtenidos mediante los siguientes pasos

i) Elegir dos funciones polinomiales $\mathbf{g} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ de grado (L, M) y $\mathbf{F} : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ de grado (l, m, n) .

ii) Obtener los blossoms multi-afín $\mathbf{g}_b : \mathbf{R}^L \times \mathbf{R}^M \rightarrow \mathbf{R}^3$ de \mathbf{g} , $\mathbf{F}_b : \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ de \mathbf{F} y $\mathbf{H}_b : \mathbf{R}^{(l+m+n)L} \times \mathbf{R}^{(l+m+n)M} \rightarrow \mathbf{R}^3$ de $\mathbf{H} := \mathbf{F} \circ \mathbf{g}$.

iii) Hallar los puntos de control $\mathbf{b}_{i,j}, i = 0, \dots, L, j = 0, \dots, M$ de

$$\mathbf{g}(s, t) = \sum_{i=0}^L \sum_{j=0}^M \mathbf{b}_{i,j} B_i^L(s) B_j^M(t), \quad s, t \in [0, 1],$$

mediante

$$\mathbf{b}_{i,j} = \mathbf{g}_b(\underbrace{0, \dots, 0}_{L-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{M-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j), \quad i = 0, 1, \dots, L, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Hallar los puntos de control $\mathbf{d}_{i,j,k}$ de

$$\mathbf{F}(u, v, w) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{d}_{i,j,k} B_i^l(u) B_j^m(v) B_k^n(w), \quad u, v, w \in [0, 1],$$

mediante

$$\mathbf{d}_{i,j,k} = \mathbf{F}_b(\underbrace{0, \dots, 0}_{l-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{m-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j; \underbrace{0, \dots, 0}_{n-k}, \underbrace{1, \dots, 1}_k),$$

$$i = 0, \dots, l, \quad j = 0, \dots, m, \quad k = 0, \dots, n.$$

Hallar los puntos de control $\tilde{\mathbf{d}}_{i,j,k}$ de

$$\mathbf{H}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) = \sum_{P=0}^{(l+m+n)L} \sum_{Q=0}^{(l+m+n)M} \tilde{\mathbf{d}}_{P,Q} B_P^{(l+m+n)L}(s) B_Q^{(l+m+n)M}(t)$$

mediante

$$\tilde{\mathbf{d}}_{P,Q} = \mathbf{H}_b(\underbrace{0, \dots, 0}_{(l+m+n)L-i}, \underbrace{1, \dots, 1}_i; \underbrace{0, \dots, 0}_{(l+m+n)M-j}, \underbrace{1, \dots, 1}_j), \quad i = 0, 1, \dots, (l+m+n)L,$$

$$j = 0, 1, \dots, (l+m+n)M.$$

Esto se muestra mediante el siguiente ejemplo.

Ejemplo 17. Sea $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ una superficie polinomial de grado $(L, M) = (2, 2)$ definido por $g(s, t) = (s, t, \frac{2}{5}(\frac{3}{2}s^2 - t^2 + t + s))$, $s, t \in [0, 1]$. El blossom $g_b: \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ de esta función está definido por

$$g_b(s_1, s_2; t_1, t_2) = \left(\frac{s_1 + s_2}{2}, \frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{2}{5} \left(\frac{3}{2} - s_1 s_2 - t_1 t_2 + \frac{t_1 + t_2}{2} + \frac{s_1 + s_2}{2} \right) \right)$$

y los puntos de Bézier son

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,0} &= g_b(0, 0; 0, 0) = \left(0, 0, \frac{3}{5} \right), \\ \mathbf{b}_{1,0} &= g_b(0, 1; 0, 0) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{4}{5} \right), \\ \mathbf{b}_{2,0} &= g_b(1, 1; 0, 0) = \left(1, 0, \frac{3}{5} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,1} &= g_b(0, 0; 0, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right), \\ \mathbf{b}_{1,1} &= g_b(0, 1; 0, 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right), \\ \mathbf{b}_{2,1} &= g_b(1, 1; 0, 1) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{4}{5} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{0,2} &= g_b(0, 0; 1, 1) = \left(0, 1, \frac{3}{5} \right), \\ \mathbf{b}_{1,2} &= g_b(0, 1; 1, 1) = \left(\frac{1}{2}, 1, \frac{4}{5} \right), \\ \mathbf{b}_{2,2} &= g_b(1, 1; 1, 1) = \left(1, 1, \frac{3}{5} \right). \end{aligned}$$

con esto se tiene definido la superficie-BPT polinomial de grado $(L, M) = (2, 2)$,

$$g(s, t) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \mathbf{b}_{i,j} B_i^2(s) B_j^2(t), \quad s, t \in [0, 1],$$

La función polinomial $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ de grado $(l, m, n) = (2, 2, 1)$ definido por

$$F(u, v, w) = (u, v, w(u^2 + v^2)), \quad u, v, w \in [0, 1]$$

tiene su blossom multi-afín a la función $F_b: \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^3$ dado por

$$F_b(u_1, u_2; v_1, v_2; w_1) = \left(\frac{u_1 + u_2}{2}, \frac{v_1 + v_2}{2}, w_1(u_1 u_2 + v_1 v_2) \right),$$

y sus puntos de Bézier

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{0,0,0} &= F_b(0, 0; 0, 0; 0) = (0, 0, 0) & \mathbf{d}_{0,0,1} &= F_b(0, 0; 0, 0; 1) = (0, 0, 0) \\ \mathbf{d}_{1,0,0} &= F_b(0, 1; 0, 0; 0) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) & \mathbf{d}_{1,0,1} &= F_b(0, 1; 0, 0; 1) = \left(\frac{1}{2}, 0, 0 \right) \\ \mathbf{d}_{2,0,0} &= F_b(1, 1; 0, 0; 0) = (1, 0, 0) & \mathbf{d}_{2,0,1} &= F_b(1, 1; 0, 0; 1) = (1, 0, 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{0,1,0} &= F_b(0, 0; 0, 1; 0) = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) & \mathbf{d}_{0,1,1} &= F_b(0, 0; 0, 1; 1) = \left(0, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ \mathbf{d}_{1,1,0} &= F_b(0, 1; 0, 1; 0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) & \mathbf{d}_{1,1,1} &= F_b(0, 1; 0, 1; 1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \\ \mathbf{d}_{2,1,0} &= F_b(1, 1; 0, 1; 0) = \left(1, \frac{1}{2}, 0 \right) & \mathbf{d}_{2,1,1} &= F_b(1, 1; 0, 1; 1) = \left(1, \frac{1}{2}, 1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{0,2,0} &= F_b(0, 0; 1, 1; 0) = (0, 1, 0) & \mathbf{d}_{0,2,1} &= F_b(0, 0; 1, 1; 1) = (0, 1, 1) \\ \mathbf{d}_{1,2,0} &= F_b(0, 1; 1, 1; 0) = \left(\frac{1}{2}, 1, 0 \right) & \mathbf{d}_{1,2,1} &= F_b(0, 1; 1, 1; 1) = \left(\frac{1}{2}, 1, 1 \right) \\ \mathbf{d}_{2,2,0} &= F_b(1, 1; 1, 1; 0) = (1, 1, 0) & \mathbf{d}_{2,2,1} &= F_b(1, 1; 1, 1; 1) = (1, 1, 2) \end{aligned}$$

que definen el volumen-BPT polinomial de grado $(l, m, n) = (2, 2, 1)$,

$$\mathbf{F}(u, v, w) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \sum_{k=0}^1 \mathbf{d}_{i,j,k} B_i^2(u) B_j^2(v) B_k^1(w), \quad u, v, w \in [0, 1],$$

Para la función polinomial $\mathbf{H} := \mathbf{F} \circ \mathbf{g} : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ definido por

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(s, t) &:= \mathbf{F}(\mathbf{g}(s, t)) \\ &= \mathbf{F}\left(s, t, \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2} - s^2 - t^2 + t + s\right)\right) \\ &= \left(s, t, \frac{2}{5}\left(\frac{3}{2} - s^2 - t^2 + t + s\right)(s^2 + t^2)\right) \\ &= \left(s, t, \frac{3}{5}(s^2 + t^2) - \frac{2}{5}(s^4 + 2s^2t^2 + t^4) + \frac{2}{5}(s^3 + st^2 + ts^2 + t^3)\right), \end{aligned}$$

se ha determinado de manera similar su correspondiente blossom multi-afín considerandolo a éste polinomio de grado $((l + m + n)L, (l + m + n)M) = (10, 10)$ y tambien los puntos de Bézier $\tilde{\mathbf{d}}_{P,Q}$, $P, Q = 0, \dots, 10$ (en total, 121 puntos). los cuales han coincidido con los puntos obtenidos mediante la implementación correspondiente.

NOTA:

Cuando se trata de deformar un objeto mediante la composición de funciones en la forma de producto tensorial de Bézier, se tiene que encontrar los puntos de control de la función $\mathbf{g}_1 := \mathbf{F}_1 \circ \mathbf{g}_0$ y luego mostrar en el monitor de una computadora la nueva imagen y la nueva red de control. Para poder elegir los nuevos puntos de control de la nueva función de la deformación \mathbf{F}_2 , moviendo los puntos de control de \mathbf{F}_1 . Luego se hallan los puntos de control de $\mathbf{g}_2 := \mathbf{F}_2 \circ \mathbf{g}_1$ y se procede de la misma manera hasta obtener la forma del objeto que se busca. Esto significa que se tiene que hallar los puntos de control de las funciones $\mathbf{g}_{k+1} := \mathbf{F}_{k+1} \circ \mathbf{g}_k$ con $\mathbf{g}_0 := \mathbf{g}$ y donde \mathbf{F}_k son funciones de deformación.

En los resultados obtenidos en ésta sección los dominios de las funciones \mathbf{g} y \mathbf{F} son intervalos, cuadrados ó cubos unitarios, esto no dá mucha flexibilidad cuando se trata de deformar un objeto, debido a que formalmente el rango de \mathbf{g} debería estar siempre contenido en el dominio de \mathbf{F} ($\text{rango}(\mathbf{g}) \subset \text{Dom}(\mathbf{F})$).

Por ejemplo, para las funciones

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : [0, 1] &\rightarrow \mathbf{R}^2, \mathbf{g}(t) = \sum_{i=0}^l \mathbf{b}_i B_i^l(t), \\ \mathbf{F} : [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow \mathbf{R}^d, \mathbf{F}(s, t) = \sum_{j=0}^m \sum_{i=0}^l \mathbf{d}_{i,j} B_i^l(s) B_j^m(t), \end{aligned}$$

la función $F \circ g$ estará bien definida, si $CO(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l) \subset [0, 1] \times [0, 1]$, dado que la imagen de g se encuentra en la cápsula convexa de sus puntos de control \mathbf{b}_i . A pesar de que se cumpla

$$CO(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_l) \subset [0, 1] \times [0, 1]$$

en el primer paso, no se puede garantizar que los puntos de control de $F \circ g$ se encuentren en el dominio $[0, 1] \times [0, 1]$ de la nueva función de deformación. Para evitar este inconveniente se puede utilizar la función auxiliar $h: [a, b] \rightarrow [0, 1]$, definido por $h(t) = \frac{t-a}{b-a}$ que satisface $h(a) = 0$, $h(b) = 1$ y $h([a, b]) = [0, 1]$ y definir $g_{k+1} := F_{k+1} \circ (g_k \circ h)$ para el procedimiento de deformación sin tener que preocuparse de la elección de los puntos de control de la función de deformación F_k .

4.4. Aplicación : Transformación de superficies rectangulares de Bézier a triangulares.

Una aplicación de la composición de funciones es la conversión de rectángulos de Bezier a triángulos de Bézier. Este problema puede plantearse de la siguiente manera:

Dada una superficie-BPT polinomial de grado (l, m) , $F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^d$, $d = 2, 3$,

$$F(u, v) = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^m \mathbf{d}_{i,j} B_i^l \left(\frac{u-a}{b-a} \right) B_j^m \left(\frac{v-c}{d-c} \right), \quad u \in [a, b], v \in [c, d],$$

se busca una representación en forma de simplejo de Bézier.

Este problema puede ser solucionado considerando la función identidad $g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ y llevandolo a su forma de simplejo de Bézier de dimensión 2 y primer grado,

$$g(\mathbf{u}) = \sum_{|\mathbf{i}|=1} \mathbf{b}_{\mathbf{i}} B_{\mathbf{i}}^1(\mathbf{u}), \quad \mathbf{u} \in \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{i} = (i_0, i_1, i_2) \in Z_+^3, \quad \mathbf{b}_{\mathbf{i}} \in \mathbf{R}^2,$$

donde $g(\mathbf{u}) = (u(s), v(s))$ con los puntos de Bézier $\mathbf{b}_{\mathbf{i}} = (u_{\mathbf{i}}, v_{\mathbf{i}})$.

Considerando que los puntos $\mathbf{P}_0 = (a, c)$, $\mathbf{P}_1 = (b, c)$, $\mathbf{P}_2 = (a, d)$ son puntos de control de g y considerando que se encuentra definido en el simplejo $\Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$, se cumple que $F \circ g$, definido en el simplejo $\Delta \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2$, representa un triángulo de Bézier (ver figura 4.3).

Sea $f: \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^d$ el correspondiente blossom multi-afín de F . Luego, se tiene

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\mathbf{u}) &= F(g(\mathbf{u})) = F(u(\mathbf{u}), v(\mathbf{u})) \\ &= f(\underbrace{u(\mathbf{u}), \dots, u(\mathbf{u})}_l; \underbrace{v(\mathbf{u}), \dots, v(\mathbf{u})}_m). \end{aligned}$$

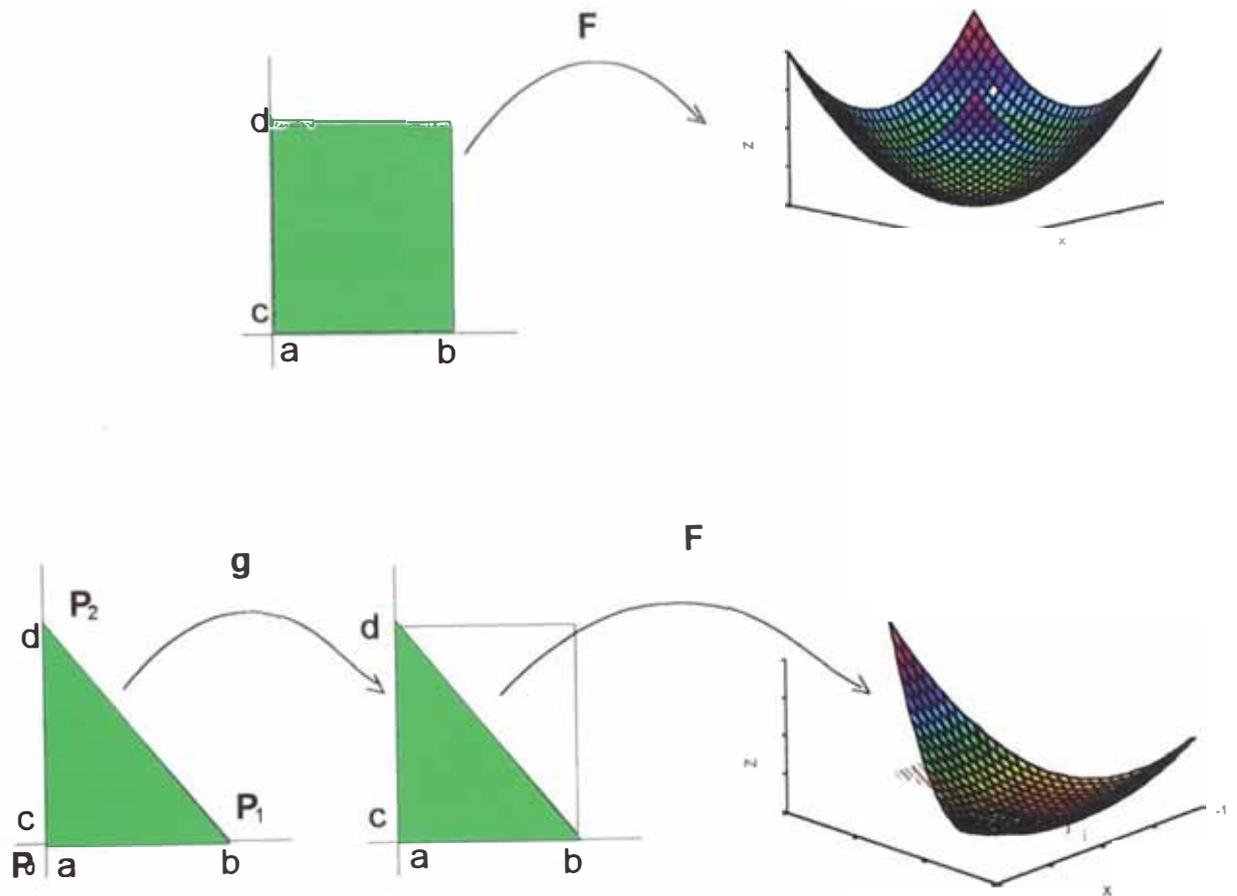


Figura 4.3:

Sustituyendo la forma de simplejo de Bézier de $u(\mathbf{u})$ en la primera componente de \mathbf{f} , resulta

$$\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}\left(\sum_{|\vec{i}_1|=1} u_{\vec{i}_1} B_{\vec{i}_1}^1(\mathbf{u}), \dots, u(\mathbf{u}); v(\mathbf{u}), \dots, v(\mathbf{u}); w(\mathbf{u}), \dots, w(\mathbf{u})\right).$$

Dado que $\sum_{|\vec{i}_1|=1} B_{\vec{i}_1}^1(\mathbf{u}) = 1$, se tiene que el primer argumento es una combinación afín de los puntos $u_{\vec{i}_1}$, siendo \mathbf{f} una función afín en cada uno de sus argumentos. Se obtiene

$$\begin{aligned}\widehat{\mathbf{F}}(\mathbf{u}) &= \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) \\ &= \sum_{|\vec{i}_1|=1} B_{\vec{i}_1}^1(\mathbf{u}) \mathbf{f}(u_{\vec{i}_1}, \dots, u(\mathbf{u}); v(\mathbf{u}), \dots, v(\mathbf{u})).\end{aligned}$$

Usando el mismo criterio en los siguientes $(l-1)$ argumentos, resulta la expresión

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{|\vec{i}_1|=1} \dots \sum_{|\vec{i}_l|=1} B_{\vec{i}_1}^1(\mathbf{u}) \dots B_{\vec{i}_l}^1(\mathbf{u}) \mathbf{f}(u_{\vec{i}_1}, \dots, u_{\vec{i}_l}; v(\mathbf{u}), \dots, v(\mathbf{u})).$$

Usando el mismo criterio en el resto de argumentos y aplicando el Teorema 1.13 para el producto de polinomios de Bernstein obtenemos:

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{|\mathbf{I}|=l} \sum_{|\mathbf{J}|=m} K(\mathbf{I}) K(\mathbf{J}) B_{|\mathbf{I}|}^l(\mathbf{u}) B_{|\mathbf{J}|}^m(\mathbf{u}) \mathbf{f}(u_{\vec{i}_1}, \dots, u_{\vec{i}_l}; v_{\vec{j}_1}, \dots, v_{\vec{j}_m}). \quad (4.74)$$

donde

$$\mathbf{I} = (\vec{i}_1, \dots, \vec{i}_l) \in \mathbb{I}_{0,2}^{1,l} := \mathbb{I}_{0,2}^1 \times \dots \times \mathbb{I}_{0,2}^1,$$

$$\mathbf{J} = (\vec{j}_1, \dots, \vec{j}_m) \in \mathbb{I}_{0,2}^{1,m} := \mathbb{I}_{0,2}^1 \times \dots \times \mathbb{I}_{0,2}^1,$$

y las constantes combinatorias dados por

$$K(\mathbf{I}) = \frac{1}{\binom{l}{|\mathbf{I}|}}, \quad K(\mathbf{J}) = \frac{1}{\binom{m}{|\mathbf{J}|}}$$

Por el Lema 1.12 para los polinomios de Bernstein $B_{|\mathbf{I}|}^l(\mathbf{u})$ y $B_{|\mathbf{J}|}^m(\mathbf{u})$, definidos sobre un 2-simplejo \mathcal{S} , se cumple

$$B_{|\mathbf{I}|}^l(\mathbf{u}) B_{|\mathbf{J}|}^m(\mathbf{u}) = \frac{\binom{l}{|\mathbf{I}|} \binom{m}{|\mathbf{J}|}}{\binom{l+m}{|\mathbf{I}+\mathbf{J}|}} B_{|\mathbf{I}+\mathbf{J}|}^{l+m}(\mathbf{u}). \quad (4.75)$$

De esto y de (4.74) se obtiene

$$\widehat{\mathbf{F}}(s, t) = \mathbf{F}(\mathbf{g}(\mathbf{u})) = \sum_{\|\mathbf{I}, \mathbf{J}\| = l+m} \frac{1}{\binom{l+m}{|\mathbf{I}|+|\mathbf{J}|}} B_{|\mathbf{I}, \mathbf{J}|}^{l+m}(\mathbf{u}) \mathbf{f}(u_{\vec{i}_1}, \dots, u_{\vec{i}_l}; v_{\vec{j}_1}, \dots, v_{\vec{j}_m}),$$

y los puntos de Bézier están dados por

$$\widehat{\mathbf{d}}_{\vec{i}} := \frac{1}{\binom{l+m}{|\mathbf{I}|+|\mathbf{J}|}} \mathbf{f}(u_{\vec{i}_1}, \dots, u_{\vec{i}_l}; v_{\vec{j}_1}, \dots, v_{\vec{j}_m}), \quad \vec{i} = |\mathbf{I}| + |\mathbf{J}|, \text{ con } |\vec{i}| = l + m.$$

Nota:

De manera similar se puede tratar para el caso de transformación de superficies triangulares a rectangulares.

CONCLUSIONES

Para la composición $(\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$ de dos representaciones de producto tensorial de Bézier \mathbf{F} y \mathbf{g} se requiere que se cumpla $\text{Rang}(\mathbf{g}) \subset \text{Dom}(\mathbf{F})$, lo cual en algunos casos no es muy flexible en la práctica, mientras que usando representaciones de simplejos de Bézier no se tiene este problema, dado que se trabaja con las coordenadas afines. Sin embargo, el manejo de los índices en las representaciones BPT resulta más sencillo que el de los simplejos de Bézier. Por la existencia de este último inconveniente se da una propuesta del manejo de índices de los puntos de control de los simplejos de Bézier.

Se ha obtenido la representación del blossom de un simplejo de Bézier. A partir de ella se han obtenido derivaciones inmediatas del algoritmo de de Casteljau correspondiente.

Los puntos de control de la composición $(\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$ de dos representaciones de Bézier \mathbf{F} y \mathbf{g} pueden expresarse como una sumatoria, cuyos términos dependen del blossom de \mathbf{F} . El número de términos ha sido reducido por la simetría del blossom de \mathbf{F} , con lo cual se obtienen mejoras de los algoritmos de blossom para la composición.

En el caso de representaciones de PTB, mediante los blossoms multi-afín, se han simplificado los resultados para la composición presentados por Lasser [Lass 93]. Consiguiendo pruebas más sencillas y disminuyendo el número de operaciones. A partir de los resultados obtenidos pueden deducirse fácilmente los respectivos algoritmos.

El número de puntos de control de la función compuesta $(\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$, crece rápidamente respecto al número de puntos de control de \mathbf{F} y \mathbf{g} . Para las curvas de Bézier \mathbf{F} y \mathbf{g} con $(l + 1)$ y $(m + 1)$ puntos de control respectivamente, la función compuesta $(\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$ tiene $(l * m + 1)$ puntos de control.

En la deformación de una curva o superficie o volumen de Bézier \mathbf{g} mediante la composición (usando la deformación \mathbf{F}), cada paso de deformación equivale a la realización de una composición $\mathbf{g} := (\mathbf{F} \circ \mathbf{g})$, lo cual implica que en cada paso se tiene un crecimiento del número de puntos de control en la nueva representación \mathbf{g} .

Otra alternativa (más general) es la propuesta presentada del procedimiento basado en los trabajos iniciales de Sederberg y Parry, con lo cual se han logrado algunos ejemplos interesantes. Mediante la composición se han obtenido una formulación sencilla para la transformación de superficies rectangulares a triangulares (de Bézier), cuyos algoritmos pueden deducirse fácilmente.

BIBLIOGRAFÍA

- [Bez 78] Bézier, P., *General distortion of an ensemble of biparametric surfaces*. Computer-Aided design, Vol. 10, N. 2, March 1978, pag. 116-120.
- [Boch 93] Boehm, W., *An affine representation of de Casteljaus and de Boors rational algorithms*, Computer Aided Geometric Design 10 (1993) 175-180.
- [DeRo 88] DeRose, T.D., *Composing Bézier simplexes*. ACM Trans. Graph. 7,3 (July 1988), 198-221.
- [DeRo 93] DeRose, T.D.; Goldman, R. N.; Hagen, H.; Mann, S.; *Functional Composition Algorithms via Blossoming*, ACM Transaction on Graphics, vol 12. N. 2. April 1993 Pages 113-135.
- [Far 86] Farin. G.. *Triangular Bernstein-Bézier patches*. Computer Aided Geometric Design 3 (1986) 83-127.
- [Far 93] Farin. G., *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press Inc, San Diego (1993).
- [Gri 89] Griessmair, J., Purgathofer, W.. *Deformation of Solids with Trivariate B-Splines*, EUROGRAPHICS, 1989.
- [Hos 93] Hoschek. J., Lasser D., *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peteres Ltd. Wellesley, Massachusetts,1993.
- [Knu 73] Knuth, D.E., *Fundamental Algorithms*, Volume 1 of The Art of Computer Programing. Addison-Wesley (Second edition, 1973).
- [Las 93] Lasser, D., *Composition of Tensor Product Bézier Representations*. Computing Suppl. 8, 155-172 (1993).
- [Lip 87] Lipschutz, S., *Estructura de Datos*, Mc Graw-Hill de México. 1987.
- [Pie 95] Piegl L., Tiller W., *The Nurbs Book*. Springer. 1995.
- [Ram 87] Ramshaw, L., *Blossoming A Connect-the-Dots Approach to Splines*. Tech. Rep. 19. Digital Systems Research Center, Palo Alto. Calif.. 1987.

- [Ram 89] Ramshaw, L., *Blossoms are polar forms*, Computer Aided Geometric Design 6 (1989) 323-358.
- [Sed 86] Sederberg, T.W., Parry, S. R., *Free-Form Deformation of Solid Geometric Models*. In Proceedings of SIGGRAPH '86 (Aug. 1986). ACM, New York, 1986, pp. 151-160.
- [Sei 93] Seidel, H.-P., *Polar Forms for Geometrically Continuous Spline Curves of Arbitrary Degree*. ACM Transactions on Graphics, Vol. 12, No. 1, January 1993, pag. 1-34.
- [Val 95] Valverde, J. M., *Conversión entre triángulos y rectángulos de Bézier*. Tesis para optar el título profesional de licenciado en la especialidad de matemática. Universidad Nacional de Ingeniería (1995).
- [Way 95] Wayle, L.P., *The NURBS Book* Springer-Verlag, 1995.