UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA

FACULTAD DE CIENCIAS

TESIS
RESPUESTAS DINÁMICAS EN SISTEMAS CONCENTRADOS Y DISTRIBUIDOS CON APLICACIÓN A UNA VIGA DE TIPO EULER-BERNOULLI SOMETIDA A UNA FUERZA AXIAL

PARA OBTENER EL TÍTULO PROFESIONAL DE:
LICENCIADO EN MATEMÁTICA

ELABORADO POR:
JOSÉ ANDRÉS ALCALDE SOSA

ASESOR:
Mg. FIDEL JARA HUANCA

LIMA–PERÚ

2018

Dedicatoria

A mis padres Victor y Nelsa,
a mis hermanos Manuel y Teresa,
a mis sobrinos Piero, Harumi y Emily.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, Victor y Nelsa, por sus sabios consejos y por el amor tan grande que me han dado.

A mis hermanos por su paciencia y comprensión.

A mi asesor Fidel Jara Huanca, que sin su valiosa ayuda no se hubiera podido realizar este trabajo.

A Alessandri Canchoa Quispe, que me ayudo en la parte final del trabajo.

Además quiero agradecer a todos los que hicieron posible que este trabajo se concluyera.

Resumen

La teoría de señales y sistemas juegan un rol importante en las diversas áreas de las ciencias e ingeniería es así que los conceptos de la transformada de Laplace en el tiempo continuo y la transformada Z en el tiempo discreto surgen como un instrumento adecuado en las diversas aplicaciones de dichas áreas.

En el contexto discreto o continuo la respuesta impulso nos facilita el estudio directo de sistemas concentrados, discretos y distribuidos de orden arbitrario. Lo anterior nos ayuda a desarrollar un entorno unificado para obtener sus respectivas respuestas dinámicas. Asimismo, las respuestas que se obtienen de los sistemas se descomponen en una respuesta permanente y en una respuesta transitoria.

Teniendo en cuenta la base dinámica obtenida por la respuesta impulso de forma estándar y normalizada se desarrolla una teoría de manera mas general y directa para los sistemas de n-ésimo orden, mas aún sin tener en cuenta una formulación de nuestros sistemas en variables de estado. Para ello se han considerado sistemas de primer orden para mostrar varios resultados que en la literatura está dada a través de la formulación de la variable de estado.

Dado que deseamos clasificar los métodos para el cálculo de la respuesta impulso en este trabajo se han tenido en cuenta los métodos espectrales como no espectrales y numéricos. En el presente trabajo se hace énfasis en

los métodos no espectrales ya que la respuesta impulso solo admite una expresión en la que tenemos que usar tres ecuaciones características de tipo algebraico, diferencial y en diferencias.

Se ha realizado una simulación numérica en el contexto de sistemas distribuidos, considerando el modelo de Euler-Bernoulli sometido a una fuerza axial, sujeto a una entrada oscilatoria con amplitud triangular. Las soluciones permanentes se han calculado empleando la función de Green espacial. La respuesta impulso ha sido aproximada con el uso del método espectral.

Índice de figuras

Índice de cuadros

Índice general

Capítulo 1

Introducción

En el contexto de la teoría de vibraciones y de control, los sistemas con parámetros discretos, concentrados y distribuidos es un tema amplio y de permanente interés en las ciencias e ingeniería. Existe una vasta literatura, tanto desde el punto de vista teórico como práctico, véase [22], [12]. En la mayoría de las situaciones, por conveniencia teórica y dificultad del análisis, se asume que el sistema no posee amortiguamiento. Por este motivo, en el estudio de la dinámica de sistemas, la técnica de desacoplamiento por modos normales ha sido la mas empleada. Por ejemplo, todos los sistemas físicos poseen amortiguamiento sin importar cuan pequeño sea, pero se desprecia debido a que el tiempo de observación es pequeño [32].

Los modelos continuos para sistemas vibratorios y de control son vistos como modelos reales, pues sus propiedades están en el contexto de sistemas con parámetros distribuidos, en lugar de ser concentradas en puntos discretos. Dichos modelos generan una mayor complejidad en la formulación y resolución del mismo. Para modelos concentrados las ecuaciones de movimiento son sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, mientras que para modelos distribuidos son utilizadas las ecuaciones diferenciales parciales, véase [21]. Las principales dificultades son los factores computacionales y el poco énfasis encontrado en la literatura respecto a la analogía existente entre ambos tipos de ecuaciones. El uso de la computación digital motiva la incorporación de modelos totalmente discretos, en el tiempo y el espacio, descritos por ecuaciones en diferencias. Ellas permiten obtener resultados numéricos aproximados para la dinámica de los sistemas concentrados y distribuidos.

Continuando con los trabajos de [3], [7], [4], [5], [14], [31], [9] [10], [15], entre otros, se ha desarrollado una formulación general, en el dominio tiempo, para sistemas concentrados, discretos y distribuidos. Una ventaja de esta metodología es que diferentes sistemas son tratados sistemáticamente de un manera compacta, simple y conveniente para la simulación numérica en el tratamiento de datos. Además de eso, a diferencia de la mayoría de los trabajos encontrados en la literatura de control y de algunas áreas en ingeniería, esta metodología se desarrolla en su propio espacio físico, esto es, sin pasar por la formulación de espacio estado, que transforma todas las ecuaciones a primer orden, ampliamente utilizada en el estudio de sistemas de control; como referencia véase [20]. Recientemente, en [28] se ha considerado el uso del espacio físico para el control óptimo de sistemas vibratorios.

En este trabajo, se da énfasis a una formulación de la respuesta dinámica para sistemas de parámetros concentrados, discretos y distribuidos en términos de la respuesta impulso. Una adecuada formulación en el dominio temporal tiene una inmediata aplicación, tanto en el dominio de frecuencia como en las aplicaciones. Por ejemplo, el control activo de las vibraciones de sistemas giroscópicos ha recibido mucha atención debido a su importante aplicación en la robótica, dinámica de motores, maquinaria de alta velocidad y precisión y en grandes estructuras espaciales. En varios problemas de control es necesario obtener la respuesta en frecuencias de vigas delgadas sujetas a una distribución de fuerza arbitrariamente armónica, conforme a los trabajos de [33], [12] .

En el capítulo 2, se presenta un resumen acerca de la teoría de sistemas y modelos así como su respectiva clasificación. Una versión del Teorema de Existencia y Unicidad para sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer orden con coeficientes constantes es dado con uso de la exponencial de una matriz. Se presentan los conceptos y algunas propiedades importantes de la transformada de Laplace y de la transformada zeta y de sus respectivas inversas. Finalmente se caracteriza a los sistemas lineales invariantes en el tiempo (LTI) en el caso discreto.

En el capítulo 3, se presenta un estudio de sistemas concentrados y discretos en términos de la respuesta impulso y la base dinámica generada por la misma. Este estudio se ha desarrollado utilizando una formulación directa a través del método operacional en términos de una respuesta fundamental, denominada también de solución dinámica del sistema, véase [3], [7], [6], [4].

En el capítulo 4, se calcula la respuesta dinámica o total mediante métodos espectrales y no espectrales. En particular se consideran sistemas de primer orden concentrados y discretos. También se presentan técnicas básicas de obtención de la respuesta dinámica de sistemas concentrados y discretos de orden superior. Se discute la representación en el espacio de estado a través de la matriz compañera.

En el capítulo 5, se ha realizado el calculo simbólico de respuestas permanentes de sistemas concentrados sujetos a diferentes tipo de entradas, tales como: lineales, escalón, polinomiales, armónicas, exponenciales y seccionalmente definidas. La respuesta forzada de sistemas concentrados, de acuerdo a [4], y discretos es descompuesta como la suma de una respuesta permanente y una respuesta libre inducida por las condiciones iniciales de la respuesta permanente.

Finalmente, en los capítulos 6 y 7, se presenta una teoría directa para sistemas distribuidos, en términos de la respuesta impulso o función de Green temporal y se realiza una descomposición de respuestas forzadas. Esta descomposición es considerada para una viga fija apoyada con fuerza axial, de acuerdo a la teoría de Euler-Bernoulli, para entradas oscilatorias en el tiempo y triangular en el espacio.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Señales y sistemas

Los conceptos de la teoría de señales y sistemas son necesarios en los diversos campos de la ingeniería y en diversas disciplinas de las ciencias. En esta sección introduciremos una formulación matemática para describir, representar y clasificar señales y sistemas. En particular, se definen algunas señales básicas importantes para nuestro estudio. En esta sección hemos considerado el punto de vista de [18].

2.1.1. Señales y su clasificación

Una señal es una función que representa una variable o cantidad física, y típicamente, contiene información sobre el comportamiento o naturaleza del fenómeno. Por ejemplo, en un circuito RC la señal puede representar el voltaje a través del capacitor o el flujo de corriente a través de la resistencia. Matemáticamente, una señal es una función de una variable independiente t y denotada por $x(t)$. Usualmente t representa el tiempo. Los valores de $x(t)$ pueden ser escalares, vectoriales con n componentes escalares o funcionales.

Señales en tiempo continuo y tiempo discreto

Una señal $x(t)$ es denominada *continua* o *analógica* cuando el tiempo t es una variable real continua. Si t es una variable discreta, esto es, $t_n = nT$, donde n es un número entero, T un valor escalar constante, entonces $x(t)$ es denominada una *señal discreta* o *digital en tiempo discreto*, teniendo esto en consideración, una señal discreta muchas veces se identifica como una sucesión de números, denotada por $\{x_n\}$ o $[x_n]$ o $x[n]$, donde n es un entero.

Una señal en tiempo discreto $x[n]$ puede representar un fenómeno para el cual la variable independiente es inherentemente discreta. Por ejemplo, el cierre diario promedio de los mercados es por su naturaleza una señal que evoluciona en puntos discretos en el tiempo (esto es, al cierre de cada día). Por otro lado una señal en tiempo discreto $x[n]$ puede ser obtenida muestreando una señal en tiempo continuo $x(t)$ tal como:

$$x(t_0), x(t_1), \cdots, x(t_n), \cdots$$

o de forma mas abreviada como:

$$x[0], x[1], \cdots, x[n], \cdots$$

o

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots$$

donde se sobreentiende que:

$$x_n = x[n] = x(t_n)$$

y los x_n son llamados *muestras* y los intervalos de tiempo entre ellos son llamados *intervalos de muestreo*. Cuando los intervalos de muestreo son iguales (muestreo uniforme), entonces:

$$x_n = x[n] = x(n\,T_m)$$

donde la constante T_m es el intervalo de muestreo.

La suma y producto de dos señales discretas siguen las definiciones usuales de las sucesiones:

$$\begin{array}{lll} \{c_n\} = \{a_n\} + \{b_n\} & \to c_n = a_n + b_n & \\ \{c_n\} = \{a_n\}\{b_n\} & \to c_n = a_n\, b_n & \\ \{c_n\} = \alpha\,\{a_n\} & \to c_n = \alpha\, a_n, & \alpha: \text{ constante} \end{array}$$

Señales analógicas y digitales

Una señal analógica usualmente se refiere a una variable física que depende del tiempo variando continuamente y que es convertida en señal eléctrica, en la cual el voltaje, la corriente o el contenido de frecuencia, representan la información de un determinado fenómeno. En la práctica, la variable física es convertida en una señal analógica con el uso de un transductor. La duración del tiempo en una señal analógica puede ser de naturaleza finita o infinita, esto es, la señal en tiempo continuo $x(t)$ está definida en un intervalo continuo $\langle a, b\rangle$, donde a puede ser ser $-\infty$ y b puede ser $+\infty$. En lo que sigue, una señal en tiempo continuo $x(t)$ será llamada una *señal analógica* cuando representa mediciones físicas en tiempo real (*continuo*).

Una señal digital se refiere a una señal eléctrica analógica (*tiempo y amplitud variando de manera continua*) que ha sido muestreada en el tiempo (*señal discreta*) y que su amplitud ha sido cuantificada: solo asume uno de los N niveles de un cuantificador previamente definido. En el caso de procesamiento por computadores es el sistema binario. Así, una señal digital es normalmente referida a una señal discreta en tiempo y amplitud. En lo que sigue, una señal en tiempo discreto $x[n]$ será llamada una *señal digital* cuando representa solamente un muestreo en el tiempo. Al igual que las señales analógicas, las señales discretas o digitales tienen duración finita (número limitado de tiempos) o infinita (número ilimitado de tiempos).

Señales reales y complejas

Una señal $x(t)$ es una señal real si su valor es un número real y una señal $x(t)$ es una señal compleja si su valor es un número complejo. En general una señal compleja $x(t)$ es una función de la forma:

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)\, i \tag{2.1}$$

donde $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son señales reales y cabe resaltar que t puede ser una variable continua o discreta.

Señales determinísticas y aleatorias

Las señales determinísticas son aquellas señales cuyos valores son especificados completamente para algún intervalo de tiempo dado. Por lo tanto una señal determinística puede ser modelada por una función conocida del tiempo t. Las señales aleatorias son aquellas señales que pueden tomar valores aleatorios en cualquier tiempo dado y deben ser caracterizados estadísticamente.

Señales periódicas y no periódicas

Se dice que una señal en tiempo continua $x(t)$ es *periódica* con período T si existe un valor positivo T diferente de cero tal que:

$$x(t+T) = x(t), \text{ para todo } t. \tag{2.2}$$

El *período fundamental* T_0 de $x(t)$ es el menor valor positivo de T para el cual se cumple la ecuación (2.2), note que esta definición no sirve para una señal constante. Una señal en tiempo continuo la cual no es periódica es llamada *señal no periódica* (o *aperiódica*).

Las señales periódicas en tiempo discreto son definidas análogamente. Una sucesión (señal en tiempo discreto) $x[n]$ es periódica con período N si existe un entero positivo para el cual:

$$x[n+N] = x[n], \text{ para todo } n. \tag{2.3}$$

El período fundamental N_0 de $x[n]$ es el menor valor positivo entero N para el cual se cumple la ecuación (2.3). Una sucesión la cual no es periódica es llamada señal no periódica (o aperiódica).

Hay que notar que una sucesión obtenida por muestreo uniforme de una señal periódica en tiempo continuo puede no ser periódica. Además la suma de dos señales periódicas en tiempo continuo puede no ser periódica pero la suma de dos sucesiones periódicas es siempre periódica.

2.1.2. Señales básicas en tiempo continuo

La función escalón unitario

La función escalón unitario $u(t)$ es definida como:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \tag{2.4}$$

la cual es discontinua en cero. De manera mas general tenemos la función escalón unitario desplazada $u(t - t_0)$ definida como:

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 1, & t > t_0 \\ 0, & t < t_0 \end{cases}. \tag{2.5}$$

Distribuciones

A continuación hemos considerado el punto de vista de [29].

Definición 2.1.1 *Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, se define:*

$$\mathcal{D}_K = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : sop\ \varphi \subset K\}.$$

Definición 2.1.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, se define el espacio de funciones de prueba por:*

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega} \mathcal{D}_K, \quad K \text{ subconjunto compacto de } \Omega.$$

Definición 2.1.3 *A los elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, el dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, los llamaremos distribuciones (o funciones generalizadas)*

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}/T \text{ es lineal y continuo}\}.$$

La función impulso unitario

La función *impulso unitario* $\delta(t)$, también conocida como la función *delta de Dirac*, juega un papel importante en el análisis de sistemas. Usualmente

$\delta(t)$ es definida como el límite de una función convencional elegida adecuadamente que tiene área unitaria sobre un intervalo de tiempo infinito y posee las siguientes propiedades:

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

y

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t)\, dt = 1.$$

Pero una función ordinaria la cual es cero en toda parte excepto en un solo punto debe tener integral cero (en el sentido de Riemann). Por lo tanto, $\delta(t)$ no puede ser una función ordinaria y matemáticamente se define como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, \delta(t)\, dt = \phi(0) \tag{2.6}$$

donde $\phi(t)$ es cualquier función continua regular en $t = 0$.

Una definición alternativa de $\delta(t)$ es dada por:

$$\int_{a}^{b} \phi(t)\, \delta(t)\, dt = \begin{cases} \phi(0), & a < 0 < b \\ 0, & a < b < 0 \;\text{ o }\; 0 < a < b \\ \text{no definida}, & a = 0 \;\text{ o }\; b = 0 \end{cases}. \tag{2.7}$$

Hay que resaltar que (2.6) o (2.7) es una representación simbólica y no se debería considerar como la integral de Riemann ordinaria. En ese sentido, $\delta(t)$ es muchas veces denominada una *función generalizada* y $\phi(t)$ es conocida como la *función de prueba*. De manera similar la función delta desplazada $\delta(t - t_0)$ es definida por:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\, \delta(t - t_0)\, dt = \phi(t_0) \tag{2.8}$$

donde $\phi(t)$ es cualquier función regular continua en $t = t_0$.

Si $x(t)$ es continua en $t = 0$ tenemos las siguientes propiedades para $\delta(t)$:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\, \delta(t) \tag{2.9}$$

$$\delta(-t) = \delta(t) \tag{2.10}$$

$$x(t)\, \delta(t) = x(0)\, \delta(t) \tag{2.11}$$

Si $x(t)$ es continua en $t = t_0$:

$$x(t)\,\delta(t-t_0) = x(t_0)\,\delta(t-t_0). \tag{2.12}$$

De (2.8) se tiene que cualquier señal $x(t)$ en tiempo continuo se puede expresar como:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(\tau - t)\,d\tau. \tag{2.13}$$

Derivadas generalizadas

Si $g(t)$ es una función generalizada, su n-ésima derivada generalizada, esto es:

$$g^{(n)}(t) = \frac{d^n g(t)}{dt^n}$$

se define por la siguiente relación:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,g^{(n)}(t)\,dt = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \phi^{(n)}(t)\,g(t)\,dt \tag{2.14}$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba, la cual se puede derivar una cantidad arbitraria de veces y se anula fuera de algún intervalo fijo y $\phi^{(n)}(t)$ es la n-ésima derivada de $\phi(t)$. Por lo tanto de (2.14) y (2.6), se puede definir la derivada de $\delta(t)$ como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\,\delta'(t)\,dt = -\phi'(0) \tag{2.15}$$

donde $\phi(t)$ es una función de prueba la cual es continua en $t = 0$ y se anula fuera de algún intervalo fijo y $\phi'(0) = \left.\frac{d\phi(t)}{dt}\right|_{t=0}$. De (2.14) se puede demostrar que la derivada de $u(t)$ es $\delta(t)$, esto es:

$$\delta(t) = u'(t) = \frac{du(t)}{dt}. \tag{2.16}$$

Entonces la función escalón unitario $u(t)$ se puede expresar como:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau. \tag{2.17}$$

Note que la función escalón unitario $u(t)$ es discontinua en $t = 0$, por lo tanto la derivada que figura en (2.16) no es la derivada de una función en el sentido ordinario y se debe considerar como una derivada generalizada en el sentido de funciones generalizadas. De (2.17) vemos que la función $u(t)$ no está definida en $t = 0$ y por (2.7), donde $\phi(t) = 1$, tenemos:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}.$$

Este resultado es consistente con la definición de $u(t)$ dada en (2.4).

Señales exponenciales complejas

La señal exponencial compleja:

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} \tag{2.18}$$

es un ejemplo importante de señal compleja. Usando la fórmula de Euler, esta señal se puede definir como:

$$x(t) = e^{i\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + i \operatorname{sen}(\omega_0 t) \tag{2.19}$$

Esto es, $x(t)$ es una señal compleja cuya parte real es $\cos(\omega_0 t)$ y parte compleja es $\operatorname{sen}(\omega_0 t)$. Una propiedad importante de la señal compleja exponencial $x(t)$ en la ecuación (2.18) es que es periódica y su período fundamental T_0 es:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{2.20}$$

1. Señales exponenciales complejas generales
   Sea el número complejo $s = \sigma + i\omega$, se define $x(t)$ como:

   $$x(t) = e^{st} = e^{(\sigma+i\omega)t} = e^{\sigma t}(\cos(\omega t) + i \operatorname{sen}(\omega t)). \tag{2.21}$$

   La señal $x(t)$ en (2.21) es conocida como una señal exponencial compleja general cuya parte real $e^{\sigma t}\cos(\omega t)$ y parte imaginaria $e^{\sigma t}\operatorname{sen}(\omega t)$ son señales sinusoidales exponencialmente crecientes ($\sigma > 0$) o decrecientes ($\sigma < 0$).

2. Señales exponenciales reales generales
   Si $s = \sigma$ (s es real), entonces (2.21) se reduce a una señal exponencial real:
   $$x(t) = e^{\sigma t}. \tag{2.22}$$
   Si $\sigma > 0$, entonces $x(t)$ crece exponencialmente y si $\sigma < 0$ entonces $x(t)$ deccrece exponencialmente.

Señales sinusoidales

Una señal sinusoidal en tiempo continuo se puede expresar como:

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \theta) \tag{2.23}$$

donde A es la amplitud (real), ω_0 es la frecuencia (en radianes por segundo) y θ es el ángulo de fase (en radianes). Esta señal es periódica con período fundamental:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \tag{2.24}$$

El recíproco del período fundamental es denominado *frecuencia fundamental* f_0 (en hertz):

$$f_0 = \frac{1}{T_0}. \tag{2.25}$$

De (2.24) y (2.25) se tiene:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{2.26}$$

la cual es denominada *frecuencia angular fundamental*. Usando la fórmula de Euler, la señal sinusoidal (2.23) se puede expresar como:

$$A\cos(\omega_0 t + \theta) = A\,Re\left(e^{i(\omega_0 t + \theta)}\right) \tag{2.27}$$

donde Re denota la parte real. También se usa la notación Im para denotar la parte imaginaria, por lo tanto:

$$A\,\mathrm{sen}(\omega_0 t + \theta) = A\,Im\left(e^{i(\omega_0 t + \theta)}\right) \tag{2.28}$$

2.1.3. Señales básicas en tiempo discreto

La sucesión escalón unitario

La sucesión escalón unitario $u[n]$ es definida como:

$$u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}, \tag{2.29}$$

de manera mas general tenemos la función escalón unitario desplazada $u[n-k]$ definida como:

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & n \geq k \\ 0, & n < k \end{cases}. \tag{2.30}$$

La sucesión impulso unitario

La sucesión impulso unitario $\delta[n]$ es definida como:

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}, \tag{2.31}$$

de manera mas general tenemos la función impulso unitario desplazada, denotada por $\delta[n-k]$, definida como sigue:

$$\delta[n-k] = \begin{cases} 1, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases}. \tag{2.32}$$

De (2.31) y (2.32) se tiene que:

$$x[n]\,\delta[n] = x[0]\,\delta[n] \tag{2.33}$$

$$x[n]\,\delta[n-k] = x[k]\,\delta[n-k]. \tag{2.34}$$

De las definiciones (2.29) a (2.32) se tienen las siguientes relaciones entre $u[n]$ y $\delta[n]$:

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{2.35}$$

$$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]. \tag{2.36}$$

Usando la definición (2.32), cualquier sucesión se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]. \tag{2.37}$$

Sucesiones exponenciales complejas

La sucesión exponencial compleja es de la forma:

$$x[n] = e^{i\omega_0 n}. \tag{2.38}$$

Usando de nuevo la fórmula de Euler, $x[n]$ se puede expresar como:

$$x[n] = e^{i\omega_0 n} = \cos(\omega_0 n) + i\,\mathrm{sen}(\omega_0 n). \tag{2.39}$$

Esto es, $x[n]$ es una señal compleja cuya parte real es $\cos(\omega_0 n)$ y su parte compleja es $\mathrm{sen}(\omega_0 n)$. Esta señal es periódica solo si $\omega_0/2\pi$ es un número racional y el período fundamental de la sucesión $x[n]$ de (2.38) es:

$$N_0 = m\left(\frac{2\pi}{\omega_0}\right). \tag{2.40}$$

Otra diferencia importante entre las señales en tiempo continuo y tiempo discreto es que las señales $e^{i\omega_0 t}$ son todas distintas para valores diferentes de ω_0 pero ese no es el caso para las señales $e^{i\omega_0 n}$.

Consideremos las sucesiones exponenciales complejas con frecuencia $(\omega_0 + 2\pi k)$, donde k es un entero, entonces:

$$e^{i(\omega_0+2\pi k)n} = e^{i\omega_0 n} e^{i2\pi kn} = e^{i\omega_0 n} \tag{2.41}$$

De esta última ecuación vemos que la sucesión exponencial compleja con frecuencia ω_0 coincide con las que tienen frecuencias $(\omega_0 \pm 2\pi)$, $(\omega_0 \pm 4\pi)$ y así sucesivamente. Por lo tanto cuando trabajemos con señales exponenciales en tiempo continuo, solo necesitaremos considerar un intervalo de longitud 2π en el cual debemos escoger ω_0. Usualmente se usa el intervalo $[0, 2\pi\rangle$ o el intervalo $[-\pi, \pi\rangle$.

1. Sucesiones Exponenciales Complejas Generales
   La sucesión exponencial compleja general es a menudo definida como:
   $$x[n] = C\alpha^n. \tag{2.42}$$
   donde C y α son número complejos en general. Note que (2.38) es un caso particular de (2.42) con $C = 1$ y $\alpha = e^{i\omega_0}$.

2. Sucesiones Exponenciales Reales
   Si C y α son reales en (2.42) entonces $x[n]$ es una sucesión exponencial real. Note que si $\alpha = 1$, $x[n]$ es una sucesión constante y si $\alpha = -1$, $x[n]$ alterna su valor entre C y $-C$.

Sucesiones sinusoidales

Una sucesión sinusoidal se puede expresar como:

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \theta). \tag{2.43}$$

Si n es adimensional, entonces ω_0 y θ están en radianes. La señal sinusoidal (2.43) se puede expresar como:

$$A\cos(\omega_0 n + \theta) = A\,Re\left(e^{i(\omega_0 n+\theta)}\right). \tag{2.44}$$

2.1.4. Sistemas y clasificación de sistemas

Representación de sistemas

Un sistema es un modelo matemático de un proceso físico que relaciona una señal de entrada (o excitación) y una señal de salida (o respuesta).
Sean x e y las señales de entrada y salida de un sistema respectivamente. Entonces el sistema es visto como la transformación (aplicación) de x hacia y. Esta transformación se representa matemáticamente como:

$$y = \mathbf{T}x \tag{2.45}$$

donde $\mathbf{T}$ es el operador que representa alguna relación bien definida por la cual x es transformado en y.

Sistemas en tiempo continuo y sistemas en tiempo discreto

Si las señales de entrada y salida son señales en tiempo continuo, entonces el sistema se denomina *sistema en tiempo continuo*. Si las señales de entrada y salida son señales en tiempo discreto o sucesiones, entonces el sistema se denomina *sistema en tiempo discreto*.

Sistemas con memoria y sin memoria

Se dice que un sistema es *sin memoria* si la salida en cualquier instante depende solo de la entrada en el mismo instante. De otra manera se dice que el sistema tiene *memoria*. Un ejemplo de un sistema sin memoria es un resistor R, tomando la corriente como la entrada $x(t)$ y el voltaje como la salida $y(t)$. La relación entrada-salida de un resistor (ley de Ohm) viene dada por:

$$y(t) = R\,x(t). \tag{2.46}$$

Un ejemplo de un sistema con memoria es un capacitor C con la corriente como entrada $x(t)$ y el voltaje como la salida $y(t)$, entonces:

$$y(t) = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau. \tag{2.47}$$

Otro ejemplo de un sistema con memoria es un sistema en tiempo discreto cuyas sucesiones de entrada y salida están relacionados por:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]. \tag{2.48}$$

Sistemas causales y no causales

Un sistema es denominado *causal* si su salida en cualquier instante de tiempo $t = t_0$, depende solo de la entrada $x(t)$ para $t \leq t_0$. Esto es, la salida de un sistema causal en el tiempo presente solo depende de los valores presentes y/o pasados de la entrada, no de sus valores futuros. Además, en un sistema causal no es posible obtener una salida si una entrada no es aplicada al sistema. Un sistema es denominado *no causal* si no es causal. Un ejemplo de sistema no causal es:

$$y(t) = x(t+1).$$

Note que todos los sistemas son causales, pero no viceversa.

Sistemas lineales y no lineales

Si el operador $\mathbf{T}$ en (2.45) satisface las siguientes condiciones:

1. **Aditividad**: Sean $\mathbf{T}x_1 = y_1$ y $\mathbf{T}x_2 = y_2$, entonces

$$\mathbf{T}(x_1 + x_2) = y_1 + y_2 \tag{2.49}$$

para cualquier señal x_1 y x_2.

2. **Homogeneidad**:

$$\mathbf{T}(\alpha x) = \alpha y \tag{2.50}$$

para cualquier señal x y escalar α.

Entonces $\mathbf{T}$ se denomina *operador lineal* y el sistema representado por dicho operador lineal $\mathbf{T}$ se denomina *sistema lineal*.

Cualquier sistema que no satisface (2.49) y/o (2.50) es clasificado como un sistema *no lineal* . Se pueden combinar las condiciones (2.49) y (2.50) en una sola condición:

$$\mathbf{T}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 \tag{2.51}$$

donde α_1 y α_2 son escalares arbitrarios. A (2.51) se le conoce como *propiedad de superposición*. Ejemplos de sistemas lineales son el resistor (2.46) y el capacitor (2.47). Ejemplos de sistemas no lineales son:

$$y = x^2,\ y = \cos x$$

Note que una consecuencia de la propiedad de homogeneidad de sistemas lineales es que cuando la entrada es cero también se obtiene cero en la salida.

Sistemas invariantes en el tiempo y variantes en el tiempo

Un sistema es denominado *invariante en el tiempo*, si un desplazamiento en el tiempo (retraso o adelanto) en la señal de entrada produce el mismo desplazamiento en la señal de salida. Por lo tanto, para un sistema en tiempo continuo, el sistema es invariante en el tiempo si:

$$\mathbf{T}(x(t-\tau)) = y(t-\tau) \tag{2.52}$$

para cualquier valor real de τ. Para un sistema en tiempo discreto, el sistema es invariante en el tiempo (o invariante por desplazamiento) si:

$$\mathbf{T}(x[n-k]) = y[n-k] \tag{2.53}$$

para cualquier k número entero. Un sistema el cual no satisface (2.52) o (2.53) es denominado sistema *variante en el tiempo*. Para verificar si un sistema es invariante en el tiempo, podemos comparar el desplazamiento en la salida con la salida producida por el desplazamiento en la entrada.

Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Si un sistema es lineal y a la vez invariante en el tiempo, entonces dicho sistema se denomina *sistema lineal invariante en el tiempo*, lo cual se abrevia como "LTI"(Linear Time Invariant) por sus siglas en inglés.

Sistemas estables

Un sistema es BIBO (bounded in/bounded output) estable para cualquier entrada x acotada, esto es:

$$|x| \leq k_1 \tag{2.54}$$

la correspondiente salida y también es acotada, esto es:

$$|y| \leq k_2 \tag{2.55}$$

donde k_1 y k_2 son constantes reales finitas.

Sistemas retroalimentados

Una clase especial de sistemas de gran importancia consiste de los sistemas que tienen *retroalimentación*. En un *sistema retroalimentado*, la señal de salida es realimentada y agregada a la entrada del sistema.

2.1.5. Sistemas lineales invariantes en el tiempo

Las propiedades mas importantes en el estudio de sistemas son la linealidad y la invariancia en el tiempo. A continuación desarrollamos las relaciones fundamentales entre entrada y salida para sistemas que tienen estas propiedades. Se muestra que las relaciones entre la entrada y salida de sistemas LTI está descrita en términos de la convolución. La importancia de la convolución en sistemas LTI se deriva del hecho de que conociendo la respuesta de un sistema LTI a la entrada impulso unitario, esto nos permite hallar su salida para cualquier señal de entrada. Además se estudia las relaciones entre la entrada y salida para sistemas LTI definidas por ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias.

Respuesta de un sistema LTI en tiempo continuo y la convolución mediante la integral

1. **Respuesta impulso**

   La *respuesta impulso* $h(t)$ de un sistema LTI en tiempo continuo (representado por $\mathbf{T}$) es definido como la respuesta del sistema cuando la entrada es $\delta(t)$, esto es:

   $$h(t) = \mathbf{T}(\delta(t)) \tag{2.56}$$

2. **Respuesta a una entrada arbitraria**

   De (2.13) la entrada $x(t)$ se puede expresar como:

   $$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.57}$$

Dado que el sistema es lineal, la respuesta $y(t)$ del sistema a una entrada $x(t)$ arbitraria se puede expresar como:

$$y(t) = \mathbf{T}(x(t)) = \mathbf{T}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,\mathbf{T}(\delta(t-\tau))\,d\tau. \tag{2.58}$$

Dado que el sistema es invariante en el tiempo, tenemos:

$$h(t-\tau) = \mathbf{T}(\delta(t-\tau)). \tag{2.59}$$

Sustituyendo (2.59) en (2.58) se obtiene:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.60}$$

Esto último nos indica que un sistema LTI en tiempo continuo está caracterizado completamente por su respuesta impulso $h(t)$.

3. **Convolución de dos señales en tiempo continuo**

   La convolución de dos señales en tiempo continuo $x(t)$ y $h(t)$ es denotada por:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,h(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.61}$$

   A (2.61) se le denomina la *convolución*. Por lo tanto tenemos que la salida de cualquier sistema LTI en tiempo continuo es la convolución de la entrada $x(t)$ con la respuesta impulso $h(t)$ del sistema.

Propiedades de la convolución

La convolución tiene las siguientes propiedades:

1. **Conmutativa**:

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t). \tag{2.62}$$

2. **Asociativa**:

$$(x(t) * h_1(t)) * h_2(t) = x(t) * (h_1(t) * h_2(t)). \tag{2.63}$$

3. **Distributiva**:

$$x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t). \tag{2.64}$$

Operaciones del integrando de la convolución

Aplicando (2.62) a (2.61) obtenemos:

$$y(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.65}$$

Lo cual puede ser a veces mas fácil de evaluar que (2.61). Luego de (2.61) observamos que la convolución implica los siguientes cuatro pasos:

1. La respuesta impulso $h(\tau)$ en inversión temporal es $h(-\tau)$ y entonces es desplazada t para formar $h(t-\tau) = h(-(\tau - t))$ la cual es una función de τ con parámetro t.

2. Las señales $x(\tau)$ y $h(t-\tau)$ son multiplicadas juntas para todos los valores de τ con t fijo en algún valor.

3. El producto $x(\tau)h(t-\tau)$ es integrado sobre todo τ para producir una salida $y(t)$ con valor único.

4. Los pasos 1 a 3 se repiten cuando t varía de $-\infty$ a ∞ para producir la salida $y(t)$ completa.

Respuesta escalón

Se define la *respuesta escalón* $s(t)$ de un sistema LTI en tiempo continuo (representado por $\mathbf{T}$) como la respuesta del sistema cuando la entrada es $u(t)$, esto es:

$$s(t) = \mathbf{T}(u(t)). \tag{2.66}$$

En muchas aplicaciones, la respuesta escalón $s(t)$ es también una caracterización del sistema. La respuesta escalón $s(t)$ se puede determinar fácilmente por (2.65), esto es:

$$s(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau. \tag{2.67}$$

Por lo tanto, la respuesta escalón $s(t)$ se puede obtener integrando la respuesta impulso $h(t)$. Derivando (2.67) con respecto a t se obtiene:

$$h(t) = s'(t) = \frac{ds(t)}{dt}. \tag{2.68}$$

Entonces la respuesta impulso $h(t)$ se puede determinar derivando la respuesta escalón $s(t)$.

2.1.6. Propiedades de sistemas LTI en tiempo continuo

Sistemas con o sin memoria

Dado que la salida $y(t)$ de un sistema sin memoria depende únicamente de la entrada presente $x(t)$, entonces, si el sistema es LTI, esta relación solo puede ser de la forma:

$$y(t) = K\,x(t) \tag{2.69}$$

donde K es una constante. Además, la correspondiente respuesta impulso $h(t)$ simplemente es:

$$h(t) = K\,\delta(t). \tag{2.70}$$

Por lo tanto, si $h(t_0) \neq 0$ para $t_0 \neq 0$, el sistema LTI en tiempo continuo tiene memoria.

Causalidad

Como se sabe un sistema causal no responde a una entrada hasta que el evento ocurre actualmente. Por lo tanto, para un sistema LTI causal en tiempo continuo, tenemos la condición de causalidad:

$$h(t) = 0, \quad t < 0. \tag{2.71}$$

Aplicando esta condición a (2.65), la salida de un sistema LTI causal en tiempo continuo es expresado como:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau)\,x(t-\tau)\,d\tau. \tag{2.72}$$

Si aplicamos la condición (2.71) a (2.61), se tiene:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.73}$$

De esto último, vemos que los únicos valores de la entrada $x(t)$ usados para evaluar la salida $y(t)$ son aquellos donde $\tau \leq t$. Basados en la condición de causalidad (2.71) cualquier señal $x(t)$ es llamada *causal* si:

$$x(t) = 0, \quad t < 0. \tag{2.74}$$

y *anticausal* si:

$$x(t) = 0, \quad t > 0. \tag{2.75}$$

Por lo tanto de (2.72), (2.73) y (2.74), cuando tenemos una entrada causal $x(t)$, la salida $y(t)$ de un sistema LTI causal en tiempo continuo es:

$$y(t) = \int_{0}^{t} h(\tau)\, x(t-\tau)\, d\tau = \int_{0}^{t} x(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau. \tag{2.76}$$

Estabilidad

La estabilidad BIBO de sistema LTI se puede verificar fácilmente a partir de su respuesta impulso. Se puede demostrar que un sistema LTI en tiempo continuo es estable BIBO si su respuesta impulso es absolutamente integrable, esto es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\, d\tau < \infty. \tag{2.77}$$

2.1.7. Autofunciones de sistemas LTI en tiempo continuo

Las autofunciones de sistemas LTI en tiempo continuo representados por $\mathbf{T}$ son las funciones exponenciales complejas e^{st}, con $s \in \mathbb{C}$. Esto es:

$$\mathbf{T}(e^{st}) = \lambda\, e^{st} \tag{2.78}$$

donde λ es el autovalor de $\mathbf{T}$ asociado con e^{st}. Haciendo $x(t) = e^{st}$ en (2.65), tenemos:

$$y(t) = \mathbf{T}(e^{st}) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{s(t-\tau)}\, d\tau = \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau\right] e^{st} = H(s)\, e^{st} = \lambda\, e^{st} \tag{2.79}$$

donde:

$$\lambda = H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, e^{-s\tau}\, d\tau. \tag{2.80}$$

Por lo tanto, el autovalor de un sistema LTI en tiempo continuo asociado con la autofunción e^{st} es dado por $H(s)$, el cual es una constante compleja, cuyo valor es determinado por el valor de s usando (2.80). De (2.79) se tiene que $y(0) = H(s)$.

2.1.8. Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales

Ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes de orden N (N-ésimo orden) está dada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{2.81}$$

donde los coeficientes a_k y b_k son constantes reales. El orden N se refiere a la mayor derivada de $y(t)$ y M la mayor derivada de $x(t)$ en (2.81). Estas ecuaciones diferenciales juegan un rol importante en describir las relaciones de entrada y salida de una gran cantidad de sistemas mecánicos, eléctricos, biológicos, etc. La solución general de (2.81) para una entrada particular es dada por:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \tag{2.82}$$

donde $y_p(t)$ es una *solución particular* que satisface (2.81) y $y_h(t)$ es una *solución homogénea* que satisface la ecuación diferencial homogénea:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y_h(t)}{dt^k} = 0. \tag{2.83}$$

La forma exacta de $y_h(t)$ es determinada por N condiciones auxiliares. Note que en (2.81) no se especifica completamente la salida $y(t)$ en términos de la entrada $x(t)$ a menos que las condiciones auxiliares sean especificadas. En general, un conjunto de N condiciones auxiliares son los valores de:

$$y(t), \frac{dy(t)}{dt}, \cdots, \frac{d^{N-1}y(t)}{dt^{N-1}}$$

en el mismo instante de tiempo.

Linealidad

El sistema (2.81) es lineal si:

i) El sistema posee la propiedad de superposición.

ii) El sistema posee la propiedad de la homogeneidad.

Causalidad

El sistema (2.81) es causal si todas las condiciones iniciales son cero. Es decir $x(t) = 0$ cuando $t \leq t_0$, entonces $y(t) = 0$ cuando $t \leq t_0$. Por lo tanto la respuesta para $t > t_0$ puede ser calculada a partir de (2.81) con las condiciones iniciales:

$$y(t_0) = \frac{dy(t_0)}{dt} = \cdots = \frac{d^{N-1}y(t_0)}{dt^{N-1}} = 0$$

donde:

$$\frac{d^k y(t_0)}{dt^k} = \left.\frac{d^k y(t)}{dt^k}\right|_{t=t_0}.$$

Claramente en el reposo inicial $y_{zi}(t) = 0$.

Invariancia en el tiempo

En un sistema lineal causal, las condiciones auxiliares iguales a cero implican la invariancia en el tiempo.

Respuesta impulso

La respuesta impulso $h(t)$ de un sistema lineal LTI en tiempo continuo descrito por (2.81) satisface la ecuación diferencial:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k h(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k \delta(t)}{dt^k} \tag{2.84}$$

con las condiciones auxiliares iguales a cero.

2.1.9. Respuesta de un sistema LTI en tiempo discreto y la convolución

Respuesta impulso

La *respuesta impulso* (o *respuesta impulso unitaria*) $h[n]$ de un sistema LTI en tiempo discreto (representado por $\mathbf{T}$) se define como la respuesta del sistema cuando la entrada es $\delta[n]$, esto es:

$$h[n] = \mathbf{T}(\delta[n]). \tag{2.85}$$

Respuesta a una entrada arbitraria

De (2.37) la entrada $x[n]$ se puede expresar como:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]. \tag{2.86}$$

Dado que el sistema es lineal, la respuesta $y[n]$ del sistema a una entrada arbitraria $x[n]$ se puede expresar como:

$$y[n] = \mathbf{T}(x[n]) = \mathbf{T}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\delta[n-k]\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\,\mathbf{T}(\delta[n-k]). \tag{2.87}$$

Dado que el sistema es invariante en el tiempo, tenemos:

$$h[n-k] = \mathbf{T}(\delta[n-k]). \tag{2.88}$$

Reemplazando (2.88) en (2.87) se tiene:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]. \tag{2.89}$$

Esto último nos indica que un sistema LTI en tiempo discreto es caracterizado completamente por su respuesta impulso $h[n]$.

Convolución

A partir de (2.89) se define la *convolución* de dos sucesiones $x[n]$ y $h[n]$ denotado por:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\, h[n-k]. \tag{2.90}$$

A (2.90) normalmente se le denomina *convolución*. Por lo tanto, tenemos el resultado fundamental de que *la salida de cualquier sistema LTI en tiempo discreto es la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta impulso $h[n]$ del sistema.*

Propiedades de la convolución

Las siguientes propiedades de convolución en tiempo discreto son análogas a las propiedades ya dadas de la convolución en tiempo continuo:

1. **Conmutativa**:
$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n]. \tag{2.91}$$

2. **Asociativa**:
$$(x([n] * h_1[n]) * h_2[n] = x[n] * (h_1[n] * h_2[n]). \tag{2.92}$$

3. **Distributiva**:
$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]. \tag{2.93}$$

Operaciones de la convolución

Aplicando (2.91) a (2.90) obtenemos:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, x[n-k]. \tag{2.94}$$

lo cual puede ser a veces mas fácil de evaluar que (2.90). Similar al caso en tiempo continuo, la convolución (2.90) implica los siguientes cuatro pasos:

1. La respuesta impulso $h[k]$ en inversión temporal es $h[-k]$ y entonces desplazada n para formar $h[n-k] = h[-(k-n)]$ la cual es una función de k con parámetro n.

2. Las sucesiones $x[k]$ y $h[n-k]$ son multiplicadas juntas para todos los valores de k con n fijo en algún valor.

3. El producto $x([k]\, h[n-k]$ es sumado sobre todo k para producir una salida simple $y[n]$.

4. Los pasos 1 a 3 se repiten cuando n varía de $-\infty$ a ∞ para producir la salida completa $y[n]$.

Respuesta escalón

La *respuesta escalón* $s[n]$ de un sistema LTI en tiempo discreto con la respuesta impulso $h[n]$ se obtiene de (2.94):

$$s[n] = h[n] * u[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, u[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k]. \tag{2.95}$$

De esta última relación se obtiene:

$$h[n] = s[n] - s[n-1]. \tag{2.96}$$

2.1.10. Propiedades de sistemas LTI en tiempo discreto

Sistemas con o sin memoria

Dado que la salida $y[n]$ de un sistema sin memoria depende únicamente de la entrada presente $x[n]$, entonces, si el sistema es lineal e invariante en el tiempo, esta relación solo puede ser de la forma:

$$y[n] = K\, x[n] \tag{2.97}$$

donde K es una constante. La respuesta impulso $h[n]$ es:

$$h[n] = K\, \delta[n]. \tag{2.98}$$

Por lo tanto, si $h[n_0] \neq 0$ para $n_0 \neq 0$, el sistema LTI en tiempo discreto tiene memoria.

Causalidad

De manera similar que en el caso continuo, la condición de causalidad para un sistema LTI en tiempo discreto es:

$$h[n] = 0, \quad n < 0. \tag{2.99}$$

Aplicando esta condición a (2.94), la salida de un sistema LTI causal en tiempo discreto es expresado como:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]\, x[n-k]. \tag{2.100}$$

Si también aplicamos la condición (2.99) a (2.90), se tiene:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]\, h[n-k]. \tag{2.101}$$

De esto último vemos que los únicos valores de la entrada $x[n]$ usados para evaluar la salida $y[n]$ son aquellos donde $k \leq n$. Como en el caso continuo, diremos que cualquier sucesión $x[n]$ es llamada *causal* si:

$$x[n] = 0, \quad n < 0. \tag{2.102}$$

y *anticausal* si:

$$x[n] = 0, \quad n \geq 0. \tag{2.103}$$

Por lo tanto, cuando la entrada $x[n]$ es causal, la salida $y[n]$ de un sistema LTI causal en tiempo discreto viene dada por:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} h[k]\,x[n-k] = \sum_{k=0}^{n} x[k]\,h[n-k]. \tag{2.104}$$

Estabilidad

Se puede demostrar que un sistema LTI en tiempo discreto es BIBO estable si su respuesta impulso es absolutamente sumable, esto es:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty. \tag{2.105}$$

2.1.11. Autofunciones de sistemas LTI en tiempo discreto

Las autofunciones de sistemas LTI en tiempo discreto representados por $\mathbf{T}$ son los exponenciales complejos z^n, con $z \in \mathbb{C}$, esto es:

$$\mathbf{T}(z^n) = \lambda\, z^n \tag{2.106}$$

donde λ es el autovalor de $\mathbf{T}$ asociado con z^n. Haciendo $x[n] = z^n$ en (2.94), tenemos:

$$y[n] = \mathbf{T}(z^n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,z^{n-k} = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,z^{-k}\right] z^n = H(z)\,z^n = \lambda\,z^n \tag{2.107}$$

donde:

$$\lambda = H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\,z^{-k}. \tag{2.108}$$

Por lo tanto el autovalor de un sistema LTI en tiempo discreto asociado con la autofunción z^n es dado por $H(z)$ el cual es una constante compleja cuyo valor es determinado por el valor de z usando (2.108). De (2.107) se tiene que $y[0] = H(z)$.

2.1.12. Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias

Así como las ecuaciones diferenciales son importantes en sistemas en tiempo continuo, las ecuaciones en diferencia son importantes en sistemas en tiempo discreto.

Ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de orden N (N-ésimo orden) es dada por:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] \tag{2.109}$$

donde los coeficientes a_k y b_k son constantes reales. El orden N se refiere al mayor retraso de $y[n]$ en (2.109). De manera análoga al caso en tiempo continuo, la solución de (2.109) y todas las propiedades de sistemas, tales como linealidad, causalidad y la invariancia en el tiempo, se puede desarrollar siguiendo una aproximación de manera similar que se desarrollo para las ecuaciones diferenciales. Enfatizamos que los sistemas descritos por (2.109) serán causales y LTI si el sistema tiene condiciones auxiliares iguales a cero.

Formulación recursiva

Se tiene una aproximación alternativa y simple para la solución de (2.109), despejando $y[n]$, como sigue:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k\, y[n-k]\right\} \tag{2.110}$$

por lo tanto obtenemos una expresión para calcular la salida en el instante n en términos de la entrada presente y los valores previos de la entrada y salida. De (2.110) vemos la necesidad de condiciones auxiliares y que para calcular $y[n]$ empezando en $n = n_0$, se deben tener los valores de $y[n_0 - 1], y[n_0 - 2], \cdots, y[n_0 - N]$, así como la entrada $x[n]$ para $n \geq n_0 - M$.

La forma general de (2.110) se denomina *ecuación recursiva* debido a que especifica un procedimiento recursivo para determinar la salida en términos de las entradas y salidas previas. En el caso particular cuando $N = 0$, de (2.109) tenemos:

$$y[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k] \right\} \tag{2.111}$$

la cual es una *ecuación no recursiva* dado que los valores de las salidas previas no son requeridos para calcular la salida presente. Por lo tanto en este caso no son necesarias las condiciones auxiliares para determinar $y[n]$.

Respuesta impulso

A diferencia del caso en tiempo continuo, la respuesta impulso $h[n]$ de un sistema LTI en tiempo discreto descrito por (2.109), o equivalentemente, por (2.110) se puede determinar fácilmente como:

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \left\{ \sum_{k=0}^{M} b_k \, \delta[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k \, h[n-k] \right\}. \tag{2.112}$$

Para sistemas descritos por (2.111) la respuesta impulso $h[n]$ está dada por:

$$h[n] = \frac{1}{a_0} \sum_{k=0}^{M} b_k \, \delta[n-k] = \begin{cases} b_n/a_0, & 0 \leq n \leq M \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{2.113}$$

Notamos que la respuesta impulso para este sistema tiene una cantidad finita de términos, esto es, solo diferente de cero para un instante de tiempo finito. Por esta propiedad, el sistema especificado por (2.111) se conoce como sistema de *respuesta impulso finita* (IFR). Por otro lado, un sistema cuya respuesta impulso es diferente de cero para un tiempo infinito se dice que es un sistema de *respuesta impulso infinita* (IIR).

2.2. Sistemas y modelos

Para Las definiciones de esta sección hemos considerado el punto de vista de [11].

Definición 2.2.1 *Por proceso se entenderá una realidad física cualquiera que conlleva, en algún intervalo de tiempo, un cambio de estado que exhiben sus componentes esenciales.*

Definición 2.2.2 *Un sistema es una abstracción de una realidad física de acuerdo a los objetivos de estudio planteados. Tener en cuenta que a un mismo proceso pueden asociarse variados sistemas. La asociación depende de cuáles sean los objetivos de análisis considerados.*

Definición 2.2.3 *Las variables de entrada son aquellas mediante las cuales se actúa desde el exterior sobre el proceso y a total voluntad. Éstas permiten determinar las principales características de comportamiento del proceso.*

Definición 2.2.4 *Las variables de salida constituyen el medio que permite efectuar el análisis del proceso, mediante la evaluación directa de los objetivos de estudio.*

Definición 2.2.5 *Las perturbaciones son variables que también actúan desde el exterior pero que no son manejables a voluntad y cuyo efecto sobre el proceso siempre es conocido. Introducen una componente de incertidumbre en el estudio.*

Definición 2.2.6 *Las variables de estado son aquellas variables que definen totalmente la condición del sistema, desde el punto de vista de los objetivos de estudio, en cuanto a la información contenida en éste y a su evolución frente a una acción del medio.*

Definición 2.2.7 *Los parámetros son cantidades que fijan ciertas características del proceso, estableciendo un marco al cual estará condicionado su comportamiento; se consideran fijos cuando el resto está sujeto a variaciones.*

Definición 2.2.8 *Un modelo es una representación de un sistema. Además el modelo es una herramienta usada para el análisis de procesos, a través del análisis de sistemas. En este caso vamos a usar los modelos matemáticos los cuales a su vez pueden ser:*

- *Analíticos, los cuales representan un conjunto de ecuaciones asociadas a la descripción de un sistema.*

- *Numéricos, que representan un conjunto de algoritmos que no tiene necesariamente un equivalente analítico.*

2.2.1. Parámetros concentrados y distribuidos

Un modelo de parámetros concentrados considera que las propiedades en un proceso asumen valores que son independientes de su ubicación espacial, ya sea porque se considera homogénea o porque se define una característica representativa de ella. Por el contrario, un modelo distribuido pone en evidencia explícita la dependencia espacial de estas propiedades. Los primeros se rigen, ya sea por ecuaciones algebraicas o diferenciales ordinarias; los segundos por ecuaciones diferenciales parciales. La solución de modelos de parámetros concentrados es bastante más simple que aquellas usadas en la solución de modelos de parámetros distribuidos. En algunos casos, la solución de éstos se logra luego de resolver un conjunto de aproximaciones a modelos de parámetros concentrados.

2.3. La exponencial matricial en sistemas concentrados de primer orden

A continuación consideramos um sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias con coeficientes constantes

$$\begin{array}{rcl} x' & = & Ax \\ x(0) & = & x_0 \end{array}, \qquad (2.114)$$

donde A es una matriz constante $n \times n$ y x un vector $n \times 1$, siendo un modelo concentrado baśico el cual es descrito en términos de la función exponencial de una matriz.

Usando el método de Cauchy de la series de potencias, suponemos que la solución de (2.114) es de la forma:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k. \tag{2.115}$$

Substituyendo esta, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[c_{k+1} - Ac_k\right] t^k = 0,$$

y por lo tanto, $c_{k+1} = Ac_k$, $k = 0, 1, \cdots$.

Por consiguiente haciendo uso de la recursión se obtiene:

$$c_k = A^k c_0.$$

Finalmente cualquier solución es de la forma:

$$x(t) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} t^k \right) c_0 \tag{2.116}$$

donde $c_0 = x(0)$.

Por otro lado de manera compacta, se tiene:

$$x(t) = e^{tA} x(0) \tag{2.117}$$

donde:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{2.118}$$

representa la función exponencial de una matriz cuadrada A.

La convergencia de esta serie se detalla a continuación.

Si $||A||$ denota una norma matricial, ella posee la propiedad $||AB|| \leq ||A|| ||B||$, así, obtenemos que las sumas parciales son acotadas superiormente, esto es:

$$\left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{||A||^k}{k!} \leq e^{||A||}$$

y por lo tanto, la serie matricial de potencias (2.118) es absolutamente convergente para cualquier matriz A de orden $n \times n$.

Definición 2.3.1 *Dada la matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se define la función real con valores matriciales*

$$\begin{aligned}\Phi_A : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^{n\times n}\\ t &\to \Phi_A(t) = e^{tA}.\end{aligned}$$

Se observa que Φ_A es un camino en el espacio de matrices cuadradas $n\times n$.

La siguiente proposición nos dice que Φ_A es diferenciable.

Proposicion 2.1 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, entonces:*

$$\Phi_A'(t) = e^{tA}A = A\,e^{tA}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Demostración Por definición de derivada:

$$\begin{aligned}\Phi_A'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\Phi_A(t+h)-\Phi_A(t)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{(t+h)A}-e^{tA}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA+hA}-e^{tA}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}\,e^{hA}-e^{tA}}{h}\end{aligned}$$

Luego:

$$\Phi_A'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{e^{tA}(e^{hA}-I)}{h}. \tag{2.119}$$

Pero $e^{hA} - I = hA + \frac{1}{2!}(hA)^2 + \frac{1}{3!}(hA)^3 + \cdots$, luego:

$$\frac{e^{hA}-I}{h} = A + \frac{1}{2!}hA^2 + \frac{1}{3!}h^2A^3 + \cdots$$

reemplazando en (2.119):

$$\Phi_A'(t) = \lim_{h\to 0} e^{tA}\left(A + \frac{1}{2!}hA^2 + \frac{1}{3!}h^2A^3 + \cdots\right) = e^{tA}A.$$

De manera similar se prueba $\Phi_A'(t) = A\,e^{tA}$.

Corolario 2.1 *La función $\Phi_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ es de clase C^∞ en $\mathbb{R}$.*

Teorema 2.1 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la única solución del Problema de Valor Inicial (P.V.I.):*

$$\begin{cases} x' &= A\,x \\ x(0) &= x_0 \end{cases} \tag{2.120}$$

es dada por:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to \varphi(t) = e^{tA}\,x_0. \end{aligned}$$

Demostración Por la proposición 2.1:

$$\varphi'(t) = (Ae^{tA})\,x_0 = A\,(e^{tA}\,x_0) = A\,\varphi(t), \forall\, t \in \mathbb{R},$$

además:

$$\varphi(0) = e^{0A}\,x_0 = e^{\theta}\,x_0 = x_0, \text{ donde } e^{\theta} = I.$$

Por lo tanto φ es solución del P.V.I. (2.120).

Para probar la unicidad, sea $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ otra solución del P.V.I. (2.120).

Ahora definimos:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ t &\to f(t) = e^{-tA}\,\psi(t). \end{aligned}$$

De donde:

$$f'(t) = e^{-tA}\,(-A)\,\psi(t) + e^{-tA}\,\psi'(t) = -e^{-tA}\,A\,\psi(t) + e^{-tA}\,A\,\psi(t) = 0,$$

por lo tanto $f'(t) = 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Se sigue que $f(t) = C \in \mathbb{R}^n$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. En particular $C = f(0) = e^{-0A}\,\psi(0) = I\,x_0 = x_0$, de donde $f(t) = x_0$.
De esta manera $e^{-tA}\,\psi(t) = x_0$, es decir $\psi(t) = e^{tA}\,x_0 = \varphi(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Se debe observar que en el teorema anterior, el instante inicial $t = 0$ puede ser reemplazado por cualquier $t = t_0 \in \mathbb{R}$, esto es precisamente lo que nos indica el siguiente corolario:

Corolario 2.2 *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y $t_0 \in \mathbb{R}$, entonces la única solución del P.V.I.:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' &=& A\,x \\ x(t_0) &=& x_0 \end{array}\right. \tag{2.121}$$

es dada por:

$$\begin{array}{rcl} \varphi:\mathbb{R} &\to& \mathbb{R}^n \\ t &\to& \varphi(t) = e^{(t-t_0)A}\,x_0. \end{array}$$

Corolario 2.3 *El P.V.I. lineal homogéneo de orden n:*

$$\left\{\begin{array}{l} x^{(n)} + a_1\,x^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}\,x' + a_n\,x = 0, \\ x(t_0) = x_0^0,\, x'(t_0) = x_0^1, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1} \end{array}\right.$$

donde $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ y $t_0, x_0^0, \ldots, x_0^{n-1} \in \mathbb{R}$, admite una única solución en $\mathbb{R}$.

Revisar [1].

2.4. La transformada de Laplace

En esta sección hemos considerado el punto de vista de [11].

2.4.1. Conceptos

Definición 2.4.1 *La integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ se dice que converge en forma simple si se tiene que $\displaystyle\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\right| \leq M < \infty$ y se dice que converge de forma absoluta si $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\,dt \leq M < \infty$, para algún $M > 0$.*

Definición 2.4.2 *Se define la transformada de Laplace unilateral de una función $f(t)$, como:*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{+\infty} f(t)\,e^{-st}\,dt,$$

donde: $f(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y $s = \sigma + \omega\,i \in \mathbb{C}$.

Definición 2.4.3 *Se define la abscisa de convergencia absoluta de la transformada de Laplace de una función $f(t)$, al valor σ_c, tal que $\mathcal{L}\{f(t)\}$ converge $\forall\, \sigma > \sigma_c$.*

Lema 2.1 *La abscisa de convergencia absoluta de toda función acotada y con soporte compacto es $\sigma_c = -\infty$.*

Definición 2.4.4 *Se define la transformada de Laplace unilateral inversa de una función $F(s)$, como:*

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi\, i} \int_{c_1-\infty i}^{c_1+\infty i} F(s)\, e^{ts}\, ds,$$

donde: $c_1 > \sigma_c$.

Definición 2.4.5 *Se define la transformada de Laplace bilateral de una función $f(t)$, como:*

$$\mathcal{L}_2\{f(t)\} = F_2(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt,$$

donde: $f(t) \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ y $s = \sigma + \omega\, i \in \mathbb{C}$.

2.4.2. Propiedades

- Linealidad: Sean $f(t)$ y $g(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente, y además sean α_1 y α_2 constantes reales, entonces:
$$\mathcal{L}\{\alpha_1\, f(t) + \alpha_2\, g(t)\} = \alpha_1\, F(s) + \alpha_2\, G(s).$$
- Escalamiento en el tiempo: Sean $f(t)$, su transformada de Laplace $F(s)$ y a una constante real, entonces:
$$\mathcal{L}\{f(at)\} = \frac{1}{a}\, F\left(\frac{s}{a}\right).$$
- Desplazamiento en el tiempo: Sean $f(t)$ (soporte positivo), su transformada de Laplace $F(s)$ y a una constante real, entonces:
$$\mathcal{L}\{f(t-a)\} = e^{-as}\, F(s).$$

- Desplazamiento en la frecuencia: Sea $f(t)$, su transformada de Laplace $F(s)$ y a una constante real, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a).$$

- Derivación: Sea $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\,F(s) - f(t)|_{t=0}.$$

- Integración: Sea $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

- Teorema del valor inicial: Sea $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$f(t)|_{t=0} = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to+\infty} s\,F(s).$$

- Teorema del valor final: Sea $f(t)$ y su transformada de Laplace $F(s)$, entonces:

$$f(t)|_{t=+\infty} = \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} s\,F(s).$$

- Señales periódicas: Sea $f_0(t)$, su transformada de Laplace $F_0(s)$ y la señal periódica $f(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} f_0(t - jT)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F_0(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

- Convolución: Sean $f(t)$ y $g(t)$ y sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$, respectivamente entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = F(s)\,G(s).$$

2.5. La transformada Z

Para esta sección hemos tomado como referencia [13].

2.5.1. Conceptos

Definición 2.5.1 *Para una señal en tiempo discreto $x[n]$, la transformada Z de $x[n]$, que se denota como $X[z]$, se define como:*

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{2.122}$$

donde $z \in \mathbb{C}$. Simbólicamente se expresa como:

$$X(z) = Z\{x[n]\} \quad \text{o} \quad x[n] \leftrightarrow X(z).$$

A la transformada Z definida en (2.122) con frecuencia se le denomina la transformada Z bilateral, para distinguirla de la transformada Z unilateral, la cual se define como:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n}. \tag{2.123}$$

Definición 2.5.2 *Las series dadas en (2.122) y (2.123) puede no converger (existir) para todos los valores de z. La región en el plano complejo, para los cuales la serie converge (o existe) se denomina región de existencia o región de convergencia para $X(z)$.*

2.5.2. Propiedades

- Linealidad: Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos sucesiones y $X_1(z)$ y $X_2(z)$, sus respectivas transformadas Z, con regiones de convergencia R_1 y R_2, considerando α_1 y α_2 constantes reales, entonces:

  $$\alpha_1\, x_1[n] + \alpha_2\, x_2[n] \leftrightarrow \alpha_1\, X_1(z) + \alpha_2\, X_2(z)$$

  con región de convergencia $R \subset R_1 \cap R_2$.

- Desplazamiento en el tiempo: Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada Z con región de convergencia R, entonces:

  $$x[n - n_0] \leftrightarrow z^{-n_0}\, X(z)$$

  con región de convergencia $R' = R \cap \{0 < |z| < \infty\}$.

- Inversión en el tiempo: Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada Z con región de convergencia R, entonces:

$$x[-n] \leftrightarrow X\left(\frac{1}{z}\right)$$

con región de convergencia $R' = \dfrac{1}{R}$.

Por ejemplo si

$$R = \{z \in \mathbb{C} / r_{min} < |z| < r_{max}\}$$

entonces

$$R' = \{z \in \mathbb{C} / \frac{1}{r_{max}} < |z| < \frac{1}{r_{min}}\}.$$

- Desplazamiento en la frecuencia: Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada Z con región de convergencia R, entonces:

$$z_0^n\, x[n] \leftrightarrow X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

con región de convergencia $R' = |z_0|\, R$.

- Derivación: Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada Z con región de convergencia R, entonces:

$$n\, x[n] \leftrightarrow -z\, \frac{dX(z)}{dz}$$

con región de convergencia $R' = R$.

- Acumulación: Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada Z con región de convergencia R, entonces:

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \leftrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}\, X(z) = \frac{z}{z-1}\, X(z)$$

con región de convergencia $R' \supset R \cap \{|z| > 1\}$.

- Convolución: Sean $x_1[n]$ y $x_2[n]$ dos sucesiones con $X_1(z)$ y $X_2(z)$, sus respectivas transformadas Z, con regiones de convergencia R_1 y R_2, entonces la transformada de la convolución de estas sucesiones está dada por:

$$x_1[n] * x_2[n] \leftrightarrow X_1(z)\, X_2(z)$$

con región de convergencia $R \supset R_1 \cap R_2 \cap \{|z| > 1\}$.

2.5.3. La transformada Z Inversa

Se define la transformada zeta inversa de $X(z)$ como:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} X(z)\, z^{n-1}\, dz \tag{2.124}$$

donde $\mathcal{C}$ es un contorno de integración con sentido antihorario que contiene al origen. Simbólicamente se denota como:

$$x[n] = Z^{-1}\{X(z)\}. \tag{2.125}$$

Expansión en series de potencias

La expresión que define la transformada Z (2.122) es una serie de potencias donde los valores de la sucesión $x[n]$ son los coeficientes de z^{-n}, esto es:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} = \cdots + x[-2]\, z^2 + x[-1]\, z + x[0] + x[1]\, z^{-1} + x[2]\, z^{-2} + \cdots \tag{2.126}$$

entonces podemos determinar cualquier valor particular de la sucesión determinando el coeficiente de la potencia apropiada de z.

Expansión en fracciones parciales

De manera similar que el caso de la transformada de Laplace inversa, el método de expansión de fracciones parciales generalmente proporciona la manera mas útil para hallar la transformada Z inversa, especialmente cuando $X(z)$ es una función racional de la forma:

$$X(z) = \frac{N(z)}{D(z)} = K\frac{(z-z_1)\,(z-z_2)\cdots(z-z_m)}{(z-p_1)\,(z-p_2)\cdots(z-p_n)}. \tag{2.127}$$

Suponiendo que el grado de $D(z)$ sea mayor que el de $N(z)$ y que todos los polos son sencillos, entonces la fracción $X(z)/z$ es una función propia y puede ser expandida en fracciones parciales:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z-p_1} + \frac{c_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} = \frac{c_0}{z} + \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{z-p_k}.$$

donde:

$$c_0 = X(z)|_{z=0} \quad c_k = (z-p_k)\,\frac{X(z)}{z}\bigg|_{z=p_k}.$$

Por lo tanto obtenemos:

$$X(z) = c_0 + c_1\,\frac{z}{z-p_1} + c_2\,\frac{z}{z-p_2} + \cdots + c_n\,\frac{z}{z-p_n} = c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k\,\frac{z}{z-p_k}. \tag{2.128}$$

Determinando la región de convergencia para cada término en la ecuación (2.128) a partir de la región de convergencia total de $X(z)$, se puede hallar la transformada inversa de cada término y luego la transformada Z inversa completa.

Si $m > n$ en la ecuación (2.127), entonces se debe añadir un polinomio en z de grado $(m-n)$ al lado derecho de la ecuación (2.128), luego la expresión en fracciones parciales tendría la forma:

$$X(z) = \sum_{q=0}^{m-n} b_q\, z^q + \sum_{k=1}^{n} c_k\,\frac{z}{z-p_k}. \tag{2.129}$$

Si $X(z)$ tiene polos de orden múltiple, sea p_i el polo con multiplicidad r, entonces la expansión de $X(z)/z$ consistirá de términos de la forma:

$$\frac{\lambda_1}{z-p_i} + \frac{\lambda_2}{(z-p_i)^2} + \cdots + \frac{\lambda_r}{(z-p_i)^r}$$

donde:

$$\lambda_{r-k} = \frac{1}{k!}\,\frac{d^k}{dz^k}\left[(z-p_i)^r\,\frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=p_i};$$

$k = 0, 1, \ldots, r-1.$

2.5.4. La función del sistema: sistemas LTI en tiempo discreto

La función del sistema

La salida $y[n]$ de un sistema LTI de tiempo discreto es igual a la convolución de la entrada $x[n]$ con la respuesta al impulso $h[n]$, esto es:

$$y[n] = x[n] * h[n].$$

Aplicando la propiedad de la convolución de la transformada Z, se obtiene:

$$Y(z) = X(z)\,H(z) \tag{2.130}$$

donde $Y(z)$, $X(z)$ y $H(z)$ son las transformadas Z de $y[n]$, $x[n]$ y $h[n]$ respectivamente. La ecuación (2.130) se puede expresar como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}. \tag{2.131}$$

A $H(z)$ se le conoce como *función del sistema* (o *función de transferencia del sistema*).

Caracterización de sistemas LTI en tiempo discreto

- Causalidad: Para un sistema LTI de tiempo discreto, tenemos que:

  $$h[n] = 0, \quad n < 0.$$

  Como $h[n]$ es una señal unilateral derecha, el requisito correspondiente sobre $H(z)$ es que su región de convergencia es de la forma:

  $$|z| > r_{max}.$$

Es decir la región de convergencia es el exterior de un círculo que contiene todos los polos de $H(z)$ en el plano z. De forma similar, si el sistema es anticausal, es decir:

$$h[n] = 0, \quad n \geq 0,$$

entonces $h[n]$ es una señal unilateral izquierda y la región de convergencia de $H(z)$ es de la forma:

$$|z| < r_{min}.$$

Es decir la región de convergencia es el interior de un círculo que no contiene a los polos de $H(z)$ en el plano z.

- Estabilidad: Un sistema LTI de tiempo discreto es estable si y solo si:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty.$$

  El requisito correspondiente sobre $H(z)$ es que su región de convergencia contenga al círculo unitario, es decir, $|z| = 1$.

- Sistemas causales y estables: Si el sistema es causal y estable, entonces todos los polos de $H(z)$ deben de estar ubicados en el círculo unitario del plano z, debido a que la región de convergencia es de la forma $|z| > r_{max}$, y como el círculo unitario está incluido en la región de convergencia, debemos tener $r_{max} < 1$.

Función del sistema para sistemas LTI descritos por ecuaciones en diferencias lineales con coeficientes constantes

Para un sistema LTI de tiempo discreto para el cual la entrada $x[n]$ y la salida $y[n]$ satisfacen la ecuación en diferencias lineal con coeficientes constantes de la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k \, x[n-k]. \tag{2.132}$$

Aplicando la transformada Z y usando las propiedades de desplazamiento en el tiempo y de linealidad de la transformada Z, se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}\, Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}\, X(z).$$

o

$$Y(z) \sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}. \tag{2.133}$$

Así pues:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k\, z^{-k}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k\, z^{-k}}. \tag{2.134}$$

Por lo tanto $H(z)$ es racional, observamos que la región de convergencia de $H(z)$ no es especificada por la ecuación (2.134) sino ella debe inferirse con los requerimientos adicionales sobre el sistema, requerimientos como la causalidad o la estabilidad.

Interconexión de sistemas

Para dos sistemas LTI (con respuestas al impulso $h_1[n]$ y $h_2[n]$ respectivamente) en serie, la respuesta al impulso total $h[n]$ está dada por:

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n]$$

Por lo tanto las funciones de los sistemas están dadas por el producto:

$$H(z) = H_1(z)\, H_2(z). \tag{2.135}$$

De manera similar, la respuesta al impulso de una combinación en paralelo de dos sistemas LTI está dada por:

$$h[n] = h_1[n] + h_2[n],$$

de donde:

$$H(z) = H_1(z) + H_2(z). \tag{2.136}$$

tanto en (2.135) como en (2.136) las regiones de convergencia de $H_1(z)$, $H_2(z)$ y $H(z)$ son R_1, R_2 y R respectivamente y además satisfacen: $R \supset R_1 \cap R_2$.

2.5.5. La transformada Z unilateral

Definición 2.5.3 *Para una señal en tiempo discreto general $x[n]$, la transformada Z unilateral de $x[n]$, que se denota como $X_U(z)$, se define como:*

$$X_U(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \tag{2.137}$$

la cual se diferencia de la transformada bilateral en que la serie se calcula solamente para $n \geq 0$. Así, la transformada Z unilateral de $x[n]$ puede considerarse como la transformada bilateral de $x[n]\,u[n]$. Como $x[n]\,u[n]$ es una sucesión lateral derecha, la región de convergencia de $X_U(z)$ está siempre fuera de un círculo en el plano z.

Propiedades

Se cumplen las mismas propiedades que la transformada Z bilateral.

La transformada unilateral es útil en el cálculo de la respuesta de un sistema causal a una entrada causal cuando el sistema es descrito por una ecuación en diferencias lineal de coeficientes constantes con condiciones iniciales diferentes de cero.

Una propiedad de gran utilidad de la transformada Z unilateral es la propiedad de desplazamiento en el tiempo, la cual es diferente de la misma propiedad para la transformada bilateral.

- **Propiedad de desplazamiento en el tiempo**:

Sea $x[n]$ y su respectiva transformada Z unilateral $X_U(z)$ con región de convergencia R, entonces para $m \geq 0$, se tiene:

$$x[n-m] \leftrightarrow z^{-m}\,X_U(z) + z^{-m+1}\,x[-1] + z^{-m+2}\,x[-2] + \cdots + x[-m] \tag{2.138}$$

$$x[n+m] \leftrightarrow z^{m}\,X_U(z) - z^{m}\,x[0] - z^{m-1}\,x[1] - \cdots - zx[m-1]. \tag{2.139}$$

La función del sistema

De manera similar al caso del sistema LTI en tiempo continuo, para la transformada Z unilateral se define la la función del sistema:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

bajo la condición de que el sistema está en reposo, es decir, todas las condiciones iniciales son iguales a cero.

Valores inicial y final

- **Teorema del valor inicial**:

Sea $x[n]$ y $X(z)$ su respectiva transformada zeta. Entonces se tiene:

$$x[0] = \lim_{z\to+\infty} X(z) \tag{2.140}$$

el cual es el teorema del valor inicial para la transformada Z.
Como $x[n] = 0$ para $n < 0$, tenemos que:

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} = x[0] + x[1]\,z^{-1} + x[2]\,z^{-2} + \cdots$$

y cuando $z \to +\infty$ se tiene $z^{-n} \to 0$ para $n > 0$ y tenemos (2.141).

- **Teorema del valor final**:

Sea $x[n]$ una sucesión causal y $X(z)$ su respectiva transformada zeta. Entonces, si $X(z)$ es una función racional con todos sus polos estrictamente en el interior del círculo unitario excepto posiblemente un polo de primer orden en $z = 1$, se tiene que:

$$\lim_{N\to+\infty} x[N] = \lim_{z\to1}(1 - z^{-1})\,X(z) \tag{2.141}$$

el cual es el teorema del valor final para la transformada Z.
Usando la propiedad de desplazamiento en el tiempo, de (2.138) tenemos:

$$Z\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - z^{-1})\, X(z)$$

el lado izquierdo de esta última ecuación se puede escribir como:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{x[n] - x[n-1]\}\, z^{-n} = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \{x[n] - x[n-1]\}\, z^{-n}.$$

Si hacemos $z \to 1$, entonces se tiene:

$$\lim_{z \to 1} (1 - z^{-1})\, X(z) = \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \{x[n] - x[n-1]\}\, z^{-n} = \lim_{N \to +\infty} x[N] = x[\infty].$$

Capítulo 3

Representación dinámica de sistemas lineales concentrados y discretos invariantes en el tiempo

Algunas aplicaciones de la dinámica estructural en la ingeniería mecánica, aeroespacial y civil tienen esencialmente los mismos principios y técnicas de resolución. En este capítulo enfatizamos una formulación de la respuesta dinámica en tiempo continuo o discreto en términos de la respuesta impulso.

3.1. Sistemas concentrados

Definición 3.1.1 *Los sistemas lineales concentrados son representados mediante una ecuación diferencial de la siguiente forma:*

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = r(t), \tag{3.1}$$

donde los coeficientes A_j son matrices constantes de orden n (independientes del tiempo), A_N es no singular, $y(t)$ es el vector de salida de orden n y $r(t)$ es el vector de entrada de orden n.

Los sistemas concentrados de tipo (3.1) son denominados de *múltiple entrada con múltiple salida* cuando $n > 1$, lo cual lo denotaremos por MIMO *(multiple input - multiple output)*. En particular, para $n = 1$ estos sistemas son denominados sistemas de *entrada simple con salida simple*, lo cual denotaremos con SISO (*simple input - simple output*).

Usualmente, $r(t)$ puede representar una entrada forzada simple:

$$r(t) = f(t), \tag{3.2}$$

o una entrada que describa una dinámica de control:

$$r(t) = \sum_{j=0}^{M} B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t). \tag{3.3}$$

Donde los coeficientes B_j son matrices constantes de orden $n \times p$ y $u(t)$ es un vector de orden p. Se asume que $N \geq M$.

Con el propósito de considerar ambos tipos de sistemas, se asume que $r(t)$ es una combinación lineal de ambos, esto es:

$$r(t) = \sum_{j=0}^{M} B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t) + f(t). \tag{3.4}$$

Por conveniencia nos referiremos a $f(t)$ como entrada forzante y a $u(t)$ como entrada de control.

3.1.1. Solución fundamental

Definición 3.1.2 *La respuesta libre del sistema (3.1) es la solución de la ecuación diferencial ordinaria homogénea:*

$$r(t) = \sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = 0, \tag{3.5}$$

que corresponde al sistema con entrada idénticamente nula.

Denominaremos *respuesta forzada* en el instante $t = t_0$ a la solución de la ecuación diferencial (3.1) cuando todas las condiciones iniciales:

$$y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \ldots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(t_0), \tag{3.6}$$

son idénticamente nulas.

Definición 3.1.3 *La respuesta total está dada por la suma de la respuesta libre y la respuesta forzada.*

Definición 3.1.4 *La solución fundamental o solución dinámica del sistema (3.1) es la respuesta libre $h_d = h_d(t)$ que satisface las condiciones iniciales:*

$$h_d(0) = 0, \frac{dh_d}{dt}(0) = 0, \ldots, \frac{d^{N-2}h_d}{dt^{N-2}}(0) = 0, A_N \frac{d^{N-1}h_d}{dt^{N-1}}(0) = I. \tag{3.7}$$

Donde I es la matriz identidad de orden n.

3.1.2. Respuesta a un impulso y función del sistema

Usando el método operacional se puede caracterizar la respuesta total del sistema (3.1) para $t > 0$, con condiciones iniciales presentes en $t = 0$ y suponiendo la condición de reposo $y(t) = 0$ para $t < 0$.

Aplicando la transformada de Laplace en (3.1) se tiene la siguiente ecuación operacional:

$$\left(\sum_{j=0}^{N} s^j A_j \right) Y(s) - \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} \, A_j \, y_0^i = R(s), \tag{3.8}$$

donde $y_0^i = y^{(i)}(0)$ denota las condiciones iniciales de salida en el instante $t = 0$.

Y tenemos las transformadas de Laplace de la salida $y(t)$ y del término forzante $r(t)$ dadas por :

$$Y(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} y(t) dt \;\; \text{y} \;\; R(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st} r(t) dt, \tag{3.9}$$

Luego la transformada de la salida $y(t)$ se puede expresar como:

$$Y(s) = H(s) \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i} \, A_j \, y_0^i \right) + H(s) \, R(s). \tag{3.10}$$

donde $H(s)$ se define como sigue:

Definición 3.1.5 *A la matriz*

$$H(s) = \left(\sum_{j=0}^{N} s^j \, A_j \right)^{-1}, \tag{3.11}$$

se le denomina función del sistema representado por la ecuación (3.1).

Definición 3.1.6 *A la inversa de la transformada de Laplace de la matriz $H(s)$ se le denomina respuesta a un impulso del sistema (3.1), y se denota por $h(t)$ (es una matriz de orden n).*

Teorema 3.1 *La matriz $h(t)$, para $t > 0$, satisface el sistema:*

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \, h^{(j)}(t) = 0, \tag{3.12}$$

sujeto a las condiciones iniciales:

$$h(0^+) = 0, h'(0^+) = 0, \ldots, h^{(N-2)}(0^+) = 0, A_N h^{(N-1)}(0^+) = I. \tag{3.13}$$

Teorema 3.2 *La matriz $h(t)$, para $t > 0$ y considerando $h(t) = 0$ para $t < 0$, satisface la ecuación:*

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \, h^{(j)}(t) = \delta(t) \, I, \tag{3.14}$$

sujeta a las condiciones iniciales de reposo:

$$h(0^-) = 0, h'(0^-) = 0, \ldots, h^{(N-2)}(0^-) = 0, h^{(N-1)}(0^-) = 0. \tag{3.15}$$

Se observa que $h(t)$ es la respuesta del sistema en reposo cuando se aplica el impulso $r(t) = \delta(t)$.

Por lo tanto tenemos:

$$h(t) = \begin{cases} h_d(t) & , t \geq 0 \\ 0 & , t < 0 \end{cases}. \tag{3.16}$$

Teorema 3.3 *Sea el polinomio matricial:*

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^{N} s^j \, A_j, \tag{3.17}$$

con inversa $H(s)$, por (3.11), entonces se tiene que $h(t)$ es una solución por la izquierda y por la derecha, esto es:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \, h^{(j)}(t) = \sum_{j=0}^{N} h^{(j)}(t) \, A_j = 0. \tag{3.18}$$

Teorema 3.4 *Aplicando la transformada inversa de Laplace en (3.10) y empleando el hecho de que:*

$$\mathcal{L}(h^{(j)}(t)) = s^j \, H(s), \ \text{para } j = 0, \ldots, N-1. \tag{3.19}$$

Considerando las condiciones iniciales de $h(t)$, se obtiene una expresión para la respuesta total del sistema (3.1) en términos de la respuesta a un impulso asociado al sistema.

Por lo tanto la salida está dada por:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t) \, A_j \, y_0^i + \int_0^t h(t-\tau) \, r(\tau) \, d\tau. \tag{3.20}$$

Observación:
El primer término del segundo miembro corresponde a la respuesta libre del sistema y el segundo viene a ser la respuesta forzada. La respuesta se expresa en función de las condiciones iniciales y de la entrada del sistema (3.1).

Introduciendo las funciones matriciales:

$$h_j(t) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t)\, A_{j+1+i}, \text{ para } j = 0, \dots, N-1, \tag{3.21}$$

las cuales pueden ser denotadas matricialmente por:

$$\begin{pmatrix} h_0(t) & h_1(t) & \cdots & h_{N-1}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(t) & h'(t) & \cdots & h^{(N-1)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_N \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.22}$$

la salida se puede expresar de manera explícita en relación a los valores iniciales, esto es:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t)\, y_0^j + \int_0^t h(t-\tau)\, r(\tau)\, d\tau. \tag{3.23}$$

Estrictamente, las fórmulas (3.20) o (3.23) son válidas para $t \geq 0$.

Substituyendo $h(t)$ por $h_d(t)$ en (3.1), se verifica que:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} h_d^{(j-1-i)}(t)\, A_j\, y_0^i + \int_0^t h_d(t-\tau)\, r(\tau)\, d\tau, \tag{3.24}$$

es una solución de (3.1), con condiciones iniciales dadas en $t = 0$ y $r(t)$ actuando en todo instante de tiempo t real.

Similarmente, introduciendo:

$$h_{d,j}(t) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_d^{(i)}(t)\, A_{j+1+i}, \text{ para } j = 0, \dots, N-1, \tag{3.25}$$

tenemos:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{j-1} h_{d,j}(t)\, y_0^j + \int_0^t h_d(t-\tau)\, r(\tau)\, d\tau, \; -\infty < t < \infty. \tag{3.26}$$

Respuesta al impulso y la función de transferencia

En el caso de los sistemas de control en los que $r(t)$ viene dado por la expresión:

$$r(t) = \sum_{j=0}^{M} B_j \frac{d^j u}{dt^j}(t). \tag{3.27}$$

Conforme a lo descrito en (3.3), la respuesta total se puede expresar en términos de u y de sus valores iniciales.

Integrando por partes la expresión:

$$\int_0^t h(t-\tau)\, r(\tau)\, d\tau, \tag{3.28}$$

y utilizando los valores iniciales de $h(t)$, se tiene:

$$\int_0^t h(t-\tau) \left(\sum_{j=0}^{M} B_j \frac{d^j u}{dt^j}(\tau) \right) d\tau = \int_0^t g(t-\tau)\, u(\tau)\, d\tau - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t)\, B_j\, u_0^i, \tag{3.29}$$

donde:

$$g(t-\tau) = \sum_{j=0}^{M} h^{(j)}\,(t-\tau)\, B_j, \tag{3.30}$$

y los $u_0^i = u^{(i)}(0)$ son los valores iniciales asociadas al vector de control, teniendo en cuenta a la función $g(t)$ como la *respuesta al impulso* del sistema de control.

La expresión (3.30) también se puede obtener a través del cálculo de la transformada inversa de Laplace del término:

$$H(s)\, R(s) = \sum_{j=0}^{M} s^j\, H(s)\, B_j U(s) - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=0}^{j-1} s^{(j-1-i)}\, H(s)\, B_j\, U_0^i \tag{3.31}$$

y usando (3.19).

Teniendo en cuenta las condiciones iniciales nulas, tanto de entrada como de salida, a partir de (3.10) se tiene que:

$$Y(s) = G(s)\, U(s), \tag{3.32}$$

donde:

$$G(s) = H(s) \sum_{j=0}^{M} s^j \, B_j = \sum_{j=0}^{M} s^j \, H(s) \, B_j, \tag{3.33}$$

es la *función de transferencia* del sistema de control, que relaciona las transformadas de entrada y de salida.

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la ecuación (3.33) y utilizando la propiedad (3.19) se obtiene la *respuesta impulso* (3.30) del sistema.

En el caso de que las condiciones de entrada y de salida sean nulas ($y_0^j = 0$ y $u_0^j = 0$), la respuesta forzada del sistema se puede expresar a través de la convolución:

$$y(t) = \int_0^t g(t-\tau) \, u(\tau) \, d\tau. \tag{3.34}$$

Las fórmulas de variación de parámetros son dadas por las expresiones (3.20) y (3.23), con el término integral en $r(t)$ sustituido por la integral (3.29).

Observaciones

1. La función de transferencia $G(s)$, se puede considerar como la transformada de Laplace de salida simultánea correspondiente a las entradas impulsivas concentradas por componentes, es decir, dada la entrada $u_k(t) = e_k \, \delta(t)$ para $k = 1, \ldots, p$, se tiene que la transformada de salida, expresada por:

   $$Y_k(s) = G(s) \, e_k, \tag{3.35}$$

   es la k-ésima columna de la matriz $G(s)$.

   Luego para la entrada matricial:

   $$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_p(t) \end{bmatrix} = \delta(t) \, I, \tag{3.36}$$

   donde I denota la matriz identidad de orden p, se tiene que $U(s) = I$.

   Por lo tanto, la salida matricial $Y(s)$ correspondiente es la función de transferencia.

2. Para sistemas simples del tipo:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = u(t), \tag{3.37}$$

la respuesta impulso $g(t)$ coincide con la respuesta $h(t)$. Por este motivo muchas veces se usa indistintamente la denominación función del sistema o función de transferencia.

3.1.3. Bases dinámicas

A partir de las ecuaciones (3.24) y (3.26), se tiene que la respuesta libre ($r = 0$) dependerá de $h_d(t)$ y de sus derivadas hasta de orden $N-1$.

Como los sistemas considerados son invariantes en el tiempo, cualquier respuesta libre se puede expresar de la forma:

$$y(t) = h_d(t - t_0)\, c_0 + h'_d(t - t_0)\, c_1 + \cdots + h_d^{(N-1)}(t - t_0)\, c_{N-1}, \tag{3.38}$$

donde $h_d(t)$ satisface la ecuación (3.5) sujeta a las condiciones iniciales dadas por (3.7), o también se puede expresar como:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{d,j}(t - t_0)\, y_0^j, \tag{3.39}$$

donde $h_{d,j}(t)$ son definidas en (3.25).

Los vectores constantes c_k en (3.38) se calculan usando las condiciones iniciales, resolviendo el sistema:

$$\begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_{N-2} \\ c_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_N \\ A_2 & A_3 & \cdots & A_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{N-1} & A_N & 0 & \cdots & 0 \\ A_N & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y'_0 \\ \vdots \\ y_0^{N-2} \\ y_0^{N-1} \end{pmatrix} \tag{3.40}$$

donde los datos y_0^j son proporcionados por la función $y(t)$ en el instante $t = t_0$.

Luego la expresión de variación de parámetros dada por (3.24), se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_{d,j}(t-t_0)\, y_0^j + \int_{t_0}^{t} h_d(t-\tau)\, r(\tau)\, d\tau, \tag{3.41}$$

para salidas con valores iniciales dados en $t = t_0$ dentro del dominio de $r(t)$.

La función dinámica o fundamental $h_d(t)$ y la respuesta a un impulso $h(t)$, generan los siguientes sistemas de funciones matriciales:

$$\{h_d(t), h_d'(t), \ldots, h_d^{N-1}(t)\} \text{ y } \{h(t), h'(t), \ldots, h^{N-1}(t)\}, \tag{3.42}$$

a los cuales denominaremos *base dinámica* y *base impulso* respectivamente.

De manera similar, a las funciones matriciales $\{h_{d,j}(t)\}$ para $j = 0, \ldots, N-1$ y $\{h_j(t)\}$, para $j = 0, \ldots, N-1$, los denominaremos *base dinámica normalizada* y *base impulso normalizada*, respectivamente.

Observaciones

1. Cabe recalcar que en el caso donde los coeficientes varían con el tiempo, una solución y sus derivadas no siempre forman una base [17]. Sin embargo, la respuesta impulso $h(t, \tau)$ de un sistema lineal variante en el tiempo siempre genera una base de soluciones, véase [23].

2. Por [3], se tiene que la solución dinámica $h(t)$ puede ser calculada simbólicamente en términos de las tres ecuaciones características: algebraica (polinomio característico), diferencial (cuyos coeficientes son los mismos del polinomio característico) y en diferencias (ecuación discreta). Para sistemas de orden arbitrario y sin el uso de la formulación de estado véase [4].

Esta metodología, en términos de la base dinámica, será desarrollada en la siguiente sección para sistemas discretos y en el capítulo 6 para sistemas distribuidos.

3.2. Sistemas discretos

Sea el sistema discreto:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\, y_{k+j} = \sum_{j=0}^{M} B_j\, u_{k+j} + f_k,\; N \geq M, \tag{3.43}$$

donde los coeficientes A_j y B_j son matrices de orden $n \times n$ y $n \times p$, respectivamente y $y_j = y(j)$ y $u_j = u(j)$ son los vectores de *salida* de orden n y de *entrada* de orden p, respectivamente.

Por simplicidad, estudiamos las entradas que son nulas para el tiempo negativo.

Considerando $u_k = r_k$, $f_k = 0$, $B_0 = I$ y $B_j = 0$ para $j = 1, \ldots, M$ en el sistema (3.43), se tiene:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\, y_{k+j} = r_k \tag{3.44}$$

El sistema (3.43) se puede analizar usando la transformada de Laplace en tiempo discreto, denominada transformada zeta o combinando la formulación continua de la sección anterior con el uso de serie de potencias, conforme a [7]. En este trabajo, usaremos la segunda opción.

Para el tiempo positivo, se tiene $h_d(t) = h(t)$. Así:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k \frac{t^k}{k!},\; h_k = h_d^k(0). \tag{3.45}$$

Reemplazando (3.45) en la ecuación (3.12), tenemos que h_k es solución del siguiente problema inicial discreto:

$$\begin{aligned} &A_N\, h_{k+N} + A_{N-1}\, h_{k+N-1} + \cdots + A_1\, h_{k+1} + A_0\, h_k = 0 \\ &h_0 = 0, h_1 = 0, \ldots, h_{N-2} = 0, A_N\, h_{N-1} = I, \end{aligned} \tag{3.46}$$

donde I es la matriz identidad de orden n.

A esta solución matricial la denominaremos *solución dinámica discreta* del sistema (3.43) cuando considera $k \in \mathbb{Z}$ o *respuesta a un impulso discreto* cuando se asume que es nula para el tiempo negativo.

Cuando el tiempo es positivo ambas coinciden.

De (3.18) se tiene que h_k también satisface:

$$h_{k+N}\,A_N + h_{k+N-1}\,A_{N-1} + \cdots + h_{k+1}\,A_1 + h_k\,A_0 = 0, \tag{3.47}$$

Por lo tanto h_k es una solución tanto a la izquierda como a la derecha. Además para $k > 0$ el problema inicial dado por (3.46) es equivalente al problema inicial:

$$\begin{aligned} &A_N\,h_{k+N} + A_{N-1}\,h_{k+N-1} + \cdots + A_1\,h_{k+1} + A_0\,h_k = \delta(k) \\ &h_0 = 0, h_1 = 0, \ldots, h_{N-2} = 0, h_{N-1} = 0, \end{aligned} \tag{3.48}$$

donde:

$$\delta(k) = \begin{cases} 1, & \text{para } k = 0 \\ 0, & \text{para } k \neq 0 \end{cases},$$

Por unicidad, se verifica que si los coeficientes A_k son simétricos, la solución h_k es una matriz simétrica.

Del estudio realizado para sistemas concentrados en las secciones anteriores, cuando $y_k = y^{(k)}(0)$, se tiene que la solución del problema inicial asociado al sistema (3.43) con condiciones iniciales $y_j = y_j^0$, para $j = 0, \ldots, N-1$, es dada por:

$$y_k = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i}\,A_j\,y_i^0 - \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i}\,B_j\,u_i^0 + \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{M} h_{j+k-1-i}\,B_j\,u_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-i-1}\,f_i. \tag{3.49}$$

Los dos primeros términos del segundo miembro corresponden a la respuesta libre del sistema, introducida por las condiciones iniciales de salida y de entrada y los dos últimos términos forman la respuesta forzada, debido a las entradas u_k y f_k, respectivamente.

Introduciendo las funciones:

$$h_{k,j} = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_{k+i}\, A_{j+1+i}, \text{ para } j = 0, \ldots, N-1, \tag{3.50}$$

de modo que $h_{k,N-1} = h_k\, A_N$, se tiene que la respuesta libre del sistema (3.43) viene dada por:

$$y_k = \sum_{j=0}^{N-1} h_{k,j}\, y_j^0 - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=0}^{j-1} h_{j-1-i}\, B_j\, u_i^0 \tag{3.51}$$

Considerando las condiciones iniciales nulas, tanto de entrada como de salida, de (3.49) se tiene que la respuesta forzada es dada por la convolución discreta:

$$y_k = \sum_{i=0}^{k-1} \left(\sum_{j=0}^{M} h_{j+k-1-i}\, B_j \right) u_i + \sum_{i=0}^{k-1} h_{k-1-i}\, f_i = g_k * u_k + h_k * f_k \tag{3.52}$$

donde:

$$g_k = \sum_{j=0}^{M} h_{k+j}\, B_j, \tag{3.53}$$

corresponde a la *respuesta impulso discreta.*

Para entradas de tipo exponencial, $u_k = z^k\, v$ y $f_k = 0$, se tienen salidas del mismo tipo, $y_k = z^k\, G(z)\, v$, donde $G(z)$ corresponde a la función de transferencia dada por:

$$G(z) = \sum_{j=0}^{M} z^{j-1}\, H(z)\, B_j, \tag{3.54}$$

donde:

$$H(z) = z \left(\sum_{i=0}^{N} A_i z^i \right)^{-1}, \tag{3.55}$$

es denominada la *función del sistema.*

Cabe resaltar que la solución dinámica discreta, h_k, genera las bases:

$$[h_{k,0}, h_{k,1}, \ldots, h_{k,N-1}] \quad \text{y} \quad [h_k, h_{k+1}, \ldots, h_{k+N-1}],$$

pues el Casoratiano (Wronskiano en el contexto discreto) es diferente de cero.

Capítulo 4

Cálculo de la respuesta dinámica de sistemas lineales concentrados y discretos invariantes en el tiempo

La respuesta dinámica o total de un sistema lineal invariante en el tiempo (LTI) usualmente se calcula de forma simbólica o numérica. Cabe resaltar que en el cálculo simbólico, la gran diferencia entre una y otra técnica es el uso o no de autovectores (modos). Por lo tanto las técnicas en este contexto se pueden agrupar en tres métodos:

- Modal o espectral.
- No modal o no espectral.
- Numérico.

Generalmente en la teoría de control mediante un cambio de variable adecuado se transforma el sistema original a un sistema de primer orden en el tiempo el cual es denominado *sistema en el espacio de estado*. Por lo tanto las técnicas que se desarrollan en la próxima sección resuelven problemas que usan la formulación de espacio de estado. Por simplicidad, estudiamos primero la resolución de sistemas de primer orden y después se realiza la generalización para sistemas de orden arbitrario.

4.1. Resolución de sistemas de primer orden

4.1.1. Sistemas concentrados

Sean los sistemas lineales continuos de primer orden:

$$A_1 \frac{dy}{dt}(t) + A_0\, y(t) = g(t), \tag{4.1}$$

con condición inicial $y(0) = y_0$.

El sistema (4.1) usualmente se escribe de forma normal como sigue:

$$\frac{dy}{dt}(t) = Ay(t) + f(t), \tag{4.2}$$

donde $A = -A_1^{-1} A_0$ y $f(t) = A_1^{-1} g(t)$, este sistema es equivalente al sistema anterior. De (4.2) podemos obtener todas las derivadas de y de manera directa.

Se puede emplear la ecuación de respuesta impulso $h(t)$ dada por:

$$h'(t) = A\, h(t), \tag{4.3}$$

con condición inicial:

$$h(0) = I, \tag{4.4}$$

para obtener las derivadas de orden arbitrario de $h(t)$ en el punto $t = 0$.

Por lo tanto la expansión en serie de Taylor de la respuesta impulso se puede escribir:

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}\, t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}. \tag{4.5}$$

Como la última serie corresponde a la expansión de Taylor de la exponencial de una matriz A, se tiene:

$$h(t) = e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}, \tag{4.6}$$

la cual es solución del problema de valor inicial conformado por las ecuaciones (4.3)-(4.4).

De manera análoga al caso escalar, se escribe:

$$y(t) = e^{tA}\, y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\, f(\tau)\, d\tau. \tag{4.7}$$

Otra derivación de esta fórmula se realiza por el método de variación de parámetros.

En la formulación de espacio de estado, la matriz A corresponde a la matriz compañera, mientras que para este caso la matriz exponencial en (4.6) fue identificada por [7], [4], en términos de los elementos de la base dinámica $[h_0, h_1, \cdots, h_{N-1}]$ para ecuaciones de orden N, donde $h_{N-1} = h(t)$ es la respuesta impulso del sistema. Mas aún:

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & \cdots & h_{N-2} & h(t)A_N \\ h_0' & h_1' & \cdots & h_{N-2}' & h(t)'A_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_0^{(N-1)} & h_1^{(N-1)} & \cdots & h_{N-2}^{(N-1)} & h^{(N-1)}(t)A_N \end{bmatrix}. \tag{4.8}$$

A continuación, se presenta de forma detallada, algunos métodos para la resolución de sistemas lineales de primer orden.

Métodos espectrales

Los métodos espectrales se aplican en la resolución de sistemas lineales asociados a una matriz que es diagonalizable, en otras palabras, que genere una base de autovectores.

Consideremos una matriz A diagonalizable de orden n, con autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ y sus respectivos autovectores $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

- **Superposición lineal**

  Para el sistema (4.2) buscamos una solución de la forma:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t), \tag{4.9}$$

  con condición inicial $y(0) = y_0$.

  Donde la solución homogénea $y_h(t)$ se escribe como combinación lineal de las n autofunciones del tipo $e^{\lambda t}\, v$, esto es:

$$y_h(t) = c_1\, e^{\lambda_1 t}\, v_1 + c_2\, e^{\lambda_2 t}\, v_2 + \cdots + c_n\, e^{\lambda_n t}\, v_n. \tag{4.10}$$

  Una solución particular del sistema se puede descomponer como una sumatoria de n soluciones particulares, teniendo cada una de ellas la misma forma que las correspondientes componentes de entrada f, escrita como combinación lineal de los autovectores. En otras palabras, se escribe en primer lugar el término forzante f como combinación lineal de la base de los autovectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, esto es:

$$f = PP^{-1}f = d_1\, v_1 + d_2\, v_2 + \cdots + d_n\, v_n, \tag{4.11}$$

  donde P corresponde a la matriz modal denotada por:

$$P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \text{ y } P^{-1} = \begin{bmatrix} w_1^T \\ w_2^T \\ \vdots \\ w_n^T \end{bmatrix}. \tag{4.12}$$

  Así, $w_i^T\, v_j = \delta_{i,j}$ para $i, j = 1, \ldots, n$ y $d_i = w_i^T f$ para cada $i = 1, \ldots, n$. En el caso que la matriz A sea simétrica el cálculo se simplifica, pues $P^{-1} = P^T$, donde $d_j = v_j^T\, f$.

  Por lo tanto se busca una solución particular de la forma:

$$y_p(t) = y_1^p(t) + y_2^p(t) + \cdots + y_m^p(t), \tag{4.13}$$

donde $y_j^p(t)$ es del mismo tipo del componente $d_j(t)\,v_j$ del forzante f, relativa al autovector v_j.

Luego las j-ésimas soluciones particulares son de la forma:

$$y_j^p(t) = g_j(t)\,v_j. \tag{4.14}$$

Por otro lado, para determinar los valores de los coeficientes $g_j(t)$ se resuelve el siguiente sistema desacoplado:

$$\frac{dg_j}{dt}(t) = \lambda_j\,g_j(t) + d_j, \text{ para cada } j = 1, \ldots, n, \tag{4.15}$$

que se obtiene al sustituir la expresión (4.14) en el sistema (4.2).

Una solución particular no homogénea para la ecuación (4.15) tiene la siguiente forma:

$$g_j(t) = \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)}\,d_j\,d\tau. \tag{4.16}$$

Las constantes de la parte homogénea (4.10) son calculadas a partir de $y(t)$ en $t = 0$ con el valor inicial dado, de donde se obtiene:

$$c = P^{-1}(y_0 - y_p(0)),$$

donde c es el vector de constantes de la parte homogénea $y_h(t)$.

- **Variación de parámetros**
  Se busca la solución del sistema (4.2) expresado como combinación lineal de las autofunciones del sistema, esto es:

  $$y(t) = c_1(t)\,e^{\lambda_1 t}\,v_1 + c_2(t)\,e^{\lambda_2 t}\,v_2 + \cdots + c_n(t)\,e^{\lambda_n t}\,v_n, \tag{4.17}$$

  donde los coeficientes también dependen de la variable temporal t.

Como en el método anterior P denota la matriz nodal, cuyas columnas son los autovectores asociados a los autovalores de la matriz A y la entrada f es descompuesta en la base espectral. Para el cálculo de los coeficientes $c_j(t)$ relativos a la solución (4.17), se necesitan las derivadas de $y(t)$ las cuales substituyéndolas en el sistema, se obtienen n ecuaciones escalares de primer orden desacopladas, denotadas por:

$$\frac{dc_j}{dt}(t) = e^{-\lambda_j t}\, d_j, \text{ para } j = 1, \ldots, n. \tag{4.18}$$

Por lo tanto:

$$c_j(t) = \int_0^t e^{-\lambda_j \tau}\, d_j\, d\tau + c_j(0), \tag{4.19}$$

dado que los coeficientes $c_j(t)$ para $t = 0$ son obtenidos empleando la condición inicial. Por consiguiente tenemos que el vector de estos coeficientes definido por c_0 es igual a $P^{-1}y_0$.

- **Desacoplamiento matricial usando cambio de variables**
  Asumiendo que la matriz A es diagonalizable, esto es $A = PDP^{-1}$. La matriz D, denominada *matriz espectral*, es una matriz diagonal, cuyos elementos de la diagonal son los autovalores de A, denotados por $(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ y la matriz modal P tiene en sus columnas los autovectores asociados al problema de autovalor.

Multiplicando el sistema (4.2) por P^{-1} a ambos lados, se tiene:

$$P^{-1}\frac{dy}{dt}(t) = DP^{-1}y(t) + P^{-1}f(t). \tag{4.20}$$

Considerando los cambios de variable:

$$q(t) = P^{-1}y(t), \tag{4.21}$$

$$g(t) = P^{-1}f(t), \tag{4.22}$$

se tiene un sistema equivalente desacoplado (diagonal) como sigue:

$$\frac{dq}{dt}(t) = D\, q(t) + g(t), \tag{4.23}$$

lo que nos permite obtener cada componente $q_j(t)$ resolviendo las n ecuaciones desacopladas:

$$\frac{dq_j}{dt}(t) = \lambda_j\, q_j(t) + g_j(t), \text{ para } j = 1, \ldots, n. \tag{4.24}$$

Mas aún:

$$q_j(t) = e^{\lambda_j(t)}\, q_j(0) + \int_0^t e^{\lambda_j(t-\tau)}\, g_j(\tau)\, d\tau, \tag{4.25}$$

donde $q_j(0)$ se determinan a partir de la ecuación (4.21), esto es, el vector $q(0)$ es igual a $P^{-1}y_0$. Por consiguiente la solución del sistema queda determinada por:

$$y(t) = P\, q(t). \tag{4.26}$$

- **Desacoplamiento matricial a través de la fórmula de variación de parámetros**

  De acuerdo con la fórmula de variación de parámetros, la solución del sistema de primer orden (4.2) con valores iniciales en $t = 0$ se expresa como sigue:

  $$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\, f(\tau)\, d\tau. \tag{4.27}$$

  Dado que la matriz A es diagonalizable, se tiene que $A = PDP^{-1}$. Por lo tanto, el cálculo de la exponencial se hace mas simple, esto es:

  $$e^{tA} = e^{tPDP^{-1}} = Pe^{tD}P^{-1}. \tag{4.28}$$

  Obteniéndose la siguiente expresión:

  $$y(t) = Pe^{tD}P^{-1}y_0 + P\int_0^t e^{(t-\tau)D}\, P^{-1}\, f(\tau)\, d\tau, \tag{4.29}$$

  donde:

  $$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix} \tag{4.30}$$

Métodos no espectrales

Estos métodos no emplean autovectores. Serán descritos los métodos operacionales (transformada de Laplace), variación de parámetros, la fórmula analítica y el método polinomial.

- **Método operacional**

  Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados del sistema (4.2) y empleando la condición inicial dada, se tiene que:

  $$(Is - A)Y(s) - y_0 = F(s). \tag{4.31}$$

  Denotando $\Delta(s) = Is - A$, como una función matricial de primer orden, en la variable s, se tiene que:

  $$Y(s) = H(s)\, y_0 + H(s)\, F(s), \tag{4.32}$$

  donde $H(s) = \Delta(s)^{-1}$.

  Observamos que $H(s)$ es el factor de transferencias para entradas del tipo $f(t) = e^{st}\, v$, cuyas salidas correspondientes son del tipo $y(t) = e^{st}\, w$, de donde se obtiene que $w = H(s)\, v$.

  Finalmente, aplicando la transformada inversa de Laplace se retorna a la variable original del problema.

- **Fórmula de variación de parámetros utilizando una base cualquiera**

  Escribiendo la solución del sistema (4.2) como sigue:

  $$y(t) = e^{tA}\, c(t) \tag{4.33}$$

  y substituyéndola en la ecuación obtenemos:

  $$e^{tA}\, c'(t) = f(t). \tag{4.34}$$

  Luego aplicando la propiedad:

  $$e^{tA}\, e^{\tau A} = e^{(t+\tau)A}, \tag{4.35}$$

  se tiene: $e^{-tA} = [e^{tA}]^{-1}$ y $e^0 = I$.

Por lo tanto de la ecuación (4.34) obtenemos:

$$c'(t) = e^{-tA} f(t). \tag{4.36}$$

Luego integrando la expresión, obtenemos:

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-\tau A}\, f(\tau)\, d\tau. \tag{4.37}$$

Donde el valor inicial $c(0)$ es el valor inicial de $y(t)$, como $y(0) = I\, c(0)$. Finalmente reemplazando (4.37) en (4.33) obtenemos:

$$y(t) = e^{tA}\, y_0 + \int_0^t e^{(t-\tau)A}\, f(\tau)\, d\tau. \tag{4.38}$$

- **Fórmula analítica**

  Teniendo en cuenta el sistema representado por la ecuación (4.1) y el método de variación de parámetros se obtiene una fórmula para la solución, la cual esta en función de la solución dinámica del sistema, como sigue:

  $$y(t) = h(t)\, A_1\, y_0 + \int_0^t h(t-\tau)\, g(\tau)\, d\tau, \tag{4.39}$$

  donde la función $h(t)$ llamada *solución dinámica del sistema* satisface el problema homogéneo:

  $$A_1\, h'(t) + A_0\, h(t) = 0, \tag{4.40}$$

  con condición inicial $A_1\, h(0) = I$.

  Por otro lado, la solución del problema homogéneo se puede expresar como:

  $$h(t) = e^{-t(A_1^{-1} A_0)} A_1^{-1}. \tag{4.41}$$

  Teniendo en cuenta $A = -A_1^{-1}\, A_0$ y $f(t) = A_1^{-1}\, g(t)$ el sistema lineal (4.1) se puede reescribir en la forma normal:

  $$\frac{dy}{dt}(t) = A\, y(t) + f(t), \tag{4.42}$$

cuya solución viene dada por:

$$y(t) = h(t)y_0 + \int_0^t h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau, \tag{4.43}$$

donde $h(t) = e^{tA}$.

La función matricial $h(t)$ se puede obtener como un caso particular de la fórmula analítica obtenida por [7] para ecuaciones de orden arbitrario. La cual es definida por la expresión:

$$h(t) = e^{tA} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=0}^{j-1} b_{n-k}\, d^{(j-1-k)}(t)\, h_{n-j} \right). \tag{4.44}$$

La ecuación (4.44) relaciona tres ecuaciones características del tipo algebraico, diferencial y en diferencias.

La ecuación algebraica corresponde al polinomio característico:

$$P(s) = \det(Is - A) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, s^k, \tag{4.45}$$

asociado al sistema (4.42) el cual nos proporciona los valores de los coeficientes b_k.

La función temporal $d(t)$ cuyas derivadas aparecen en la ecuación (4.44), satisface el problema de valor inicial dado por:

$$b_n\, d^{(n)}(t) + b_{n-1}\, d^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\, d'(t) + b_0\, d(t) = 0, \tag{4.46}$$

con las condiciones iniciales:

$$d(0) = 0, d'(0) = 0, \ldots, d^{(n-2)}(0) = 0, b_n\, d^{(n-1)}(0) = 1. \tag{4.47}$$

Finalmente, la función en el contexto discreto h_k satisface la ecuación matricial en diferencias:

$$h_{k+1} = A\, h_k, \tag{4.48}$$

donde $h_k = h^{(k)}(0)$ y considerando el valor inicial $h_0 = I$.

- **Método polinomial**

  Las funciones matriciales de la forma:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\,\frac{A^k}{k!}, \tag{4.49}$$

  son obtenidas a partir de las series de potencias del tipo:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(0)\,\frac{x^k}{k!}, \tag{4.50}$$

  reemplazando la variable x por la variable matricial A de orden n, se pueden calcular empleando el teorema de Cayley-Hamilton.

  De la división:

$$\frac{f(x)}{p(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{p(x)}, \tag{4.51}$$

  tenemos:

$$f(x) = p(x)\,q(x) + r(x), \tag{4.52}$$

  donde:

$$p(x) = \det[Ix - A],$$

  corresponde al polinomio característico de la matriz A, de grado n y además:

$$r(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k}\,x^{n-k}, \tag{4.53}$$

  es un polinomio de grado $n-1$. Por lo tanto se tiene:

$$f(A) = q(A)\,p(A) + r(A) = r(A), \tag{4.54}$$

  dado que, por el teorema de Cayley-Hamilton, $p(A) = 0$. Por lo tanto obtenemos la siguiente expresión para $f(A)$:

$$f(A) = r(A) = a_{n-1}\,A^{n-1} + a_{n-2}\,A^{n-2} + \cdots + a_1\,A + a_0\,I, \tag{4.55}$$

  donde los escalares $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ se obtienen teniendo en cuenta lo siguiente:

Para cada autovalor λ_j de A, de (4.52) tenemos que:

$$f(\lambda_j) = r(\lambda_j), \tag{4.56}$$

pues $p(\lambda_j) = 0$.

Si λ_j es un autovalor de A de multiplicidad dos, se considera:

$$p(\lambda_j) = 0, p'(\lambda_j) = 0, p''(\lambda_j) \neq 0. \tag{4.57}$$

A partir de (4.52), se obtiene:

$$f'(\lambda_j) = p(\lambda_j)\, q'(\lambda_j) + p'(\lambda_j)\, q(\lambda_j) + r'(\lambda_j) = r'(\lambda_j).$$

Por inducción para cada autovalor λ de multiplicidad k, siendo $k \geq 1$, se tienen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc} f'(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_j} & = & r'(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_j} \\ f''(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_j} & = & r''(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_j} \\ \vdots & = & \vdots \\ f^{k-1}(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_j} & = & r^{k-1}(\lambda)\,|_{\lambda=\lambda_j} \end{array} \tag{4.58}$$

que relacionan las derivadas de $f(\lambda)$ y $r(\lambda)$ con respecto a λ.

Resolviendo el sistema de n ecuaciones (4.58), para los s autovalores distintos λ_j, con multiplicidad m_j, $j = 1, \ldots, k$, tales que $m_1+m_2+\cdots+m_k = n$, se obtiene los valores de los coeficientes a_k y así, obtenemos $f(A)$ teniendo en cuenta la ecuación (4.55).

4.1.2. Sistemas discretos

Considerando los sistemas lineales discretos de primer orden, denotados por:

$$A_1\, y_{k+1} + A_0\, y_k = g_k, \tag{4.59}$$

con la condición inicial $y_0 = y(0)$.

En general, el sistema (4.59) se escribe en la forma normal, como sigue:

$$y_{k+1} = A\, y_k + f_k \tag{4.60}$$

donde $A = -A_1^{-1} A_0$ y $f_k = A_1^{-1} g_k$. Por lo tanto todas las traslaciones de y_k se pueden obtener directamente de la ecuación y luego emplearse en el método que se requieran.

Por ejemplo, a partir de la solución de la ecuación:

$$h_{k+1} = A\, h_k, \tag{4.61}$$

con condición inicial $h_0 = I$, se obtiene mediante iteraciones las potencias de la matriz A, esto es, la solución de este problema corresponde a la respuesta impulso discreto h_k, dada por:

$$h^k = A^k. \tag{4.62}$$

De manera análoga al caso continuo, la fórmula de variación de parámetros en el contexto discreto se escribe como:

$$y_k = A^k y_0 + \sum_{j=0}^{k-1} A^{k-1-j} f_j. \tag{4.63}$$

En la formulación del espacio de estado la matriz A del sistema (4.60), corresponde a la matriz compañera de orden N, denotada por (3.44), cuyas potencias han sido identificadas por [7], [4], en términos de los elementos de la base dinámica $[h_{0,k}, h_{1,k}, \cdots, h_{N-1,k}]$, donde $h_{N-1,k} = h_k$ corresponde a la respuesta impulso del sistema (3.44), expresado por:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\, y_{k+j} = f_k. \tag{4.64}$$

Mas aún:

$$A^k = \begin{bmatrix} h_{0,k} & h_{1,k} & \cdots & h_{N-2,k} & h_k A_N \\ h_{0,k+1} & h_{1,k+1} & \cdots & h_{N-2,k+1} & h_{k+1} A_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ h_{0,k+N-1} & h_{1,k+N-1} & \cdots & h_{N-2,k+N-1} & h_{k+N-1} A_N \end{bmatrix} \tag{4.65}$$

A continuación se presentan algunos métodos para la resolución de sistemas lineales de primer orden en el contexto discreto.

Métodos espectrales

Los métodos espectrales se aplican en la resolución de los sistemas lineales discretos siempre y cuando la matriz asociada al sistema sea diagonalizable, en otras palabras que genere una base de autovectores. Vamos a suponer que la matriz A es diagonalizable de orden n, cuyos autovalores son denotados por $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ con sus autovectores correspondientes $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$.

- **Superposición lineal**

  A continuación buscamos la solución del sistema discreto (4.60) de la forma:

  $$y_k = y_k^h + y_k^p, \tag{4.66}$$

  considerando la condición inicial $y_0 = y(0)$.

  La solución homogénea se expresa como la combinación lineal de las n autofunciones del tipo $\lambda^k v$, esto es:

  $$y_k^h = c_1\lambda_1^k v_1 + c_2\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_n\lambda_n^k v_n. \tag{4.67}$$

  En el caso de que haya un autovalor nulo, $\lambda_1 = 0$, se considera $\delta_{0,k}$, en lugar de λ_1^k. Una solución particular del sistema se puede descomponer como la suma de n soluciones particulares, siendo cada una de ellas del mismo tipo que las correspondientes componentes de la entrada f_k, escrita como combinación lineal de los autovectores de la base, esto es:

  $$f_k = PP^{-1}f_k = d_{1,k}v_1 + d_{2,k}v_2 + \cdots + d_{n,k}v_n, \tag{4.68}$$

  donde P y P^{-1} vienen expresados por (4.12) y $w_i^T v_j = \delta_{i,j}$ para $i, j = 1, \ldots, n$ y $d_{i,k} = w_i^T f_k$ para cada $i = 1, \ldots, n$. En caso de que la matriz A sea simétrica, el cálculo se simplifica, pues $P^{-1} = P^T$ y se obtiene $d_{j,k} = v_j^T f_k$

  Hallando ahora una solución particular de la forma:

  $$y_k^p = y_{1,k}^p + y_{2,k}^p + \cdots + y_{n,k}^p \tag{4.69}$$

donde $y^p_{j,k}$ es del mismo tipo que la componente $d_{j,k}v_j$ de la función forzante f_k, relativa al autovector v_j. Luego las j-ésimas soluciones particulares cumplen:

$$y^p_{j,k} = g_{j,k}v_j. \tag{4.70}$$

Para determinar los valores de los coeficientes $g_{j,k}$, se resuelve el sistema equivalente desacoplado:

$$g_{j,k+1} = \lambda_j g_{j,k} + d_{j,k}, \text{ para } j = 1, \ldots, n, \tag{4.71}$$

que se obtiene al reemplazar $y^p_{j,k}$ dada en la expresión (4.70), en el sistema original (4.60). Luego la solución particular no homogénea para la ecuación discreta (4.71) es dada como sigue:

$$g_{j,k} = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-r} d_{j,r}. \tag{4.72}$$

Las constantes c_k de (4.67) se calculan a partir del valor inicial de la solución y_0, resultando el vector:

$$c = P^{-1}(y_0 - y^p_0),$$

generado por esas constantes.

- **Variación de parámetros**

  Vamos a expresar la solución del sistema (4.60) como combinación lineal de las autofunciones del sistema, esto es:

  $$y_k = c_{1,k}\lambda_1^k v_1 + c_{2,k}\lambda_2^k v_2 + \cdots + c_{n,k}\lambda_n^k v_n, \tag{4.73}$$

  teniendo en cuenta que los coeficientes son funciones en la variable discreta k.

  De manera similar que en el item anterior, la entrada f_k se descompone en la base espectral. El cálculo de los coeficientes $c_{j,k}$ de la solución (4.73) se obtiene a partir de una traslación unitaria en esta expresión con la substitución de los resultados en el sistema (4.60), obteniendo así

n ecuaciones escalares discretas de primer orden desacopladas, dadas por:

$$c_{j,k+1} = c_{j,k} + \lambda_j^{-k-1} d_{j,k}, \text{ para } j = 1, \dots, n, \tag{4.74}$$

cuya solución viene dada por:

$$c_{j,k} = \sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{-r-1} d_{j,r} + c_{j,0}. \tag{4.75}$$

Los coeficientes $c_{j,0}$ para $j = 1, \dots, n$ se obtienen aplicando la condición inicial del problema. Finalmente el vector compuesto por estos coeficientes es denotado por c_0 y es igual a $P^{-1}y_0$.

- **Desacoplamiento matricial empleando cambio de variables**
  Suponiendo que la matriz A es diagonalizable, esto es $A = PDP^{-1}$, donde la matriz D es una matriz diagonal denominada *matriz espectral*, los elementos de su diagonal son los autovalores de A y la matriz P es una matriz modal.

Premultiplicando el sistema (4.60) por P^{-1} a ambos lados, se obtiene:

$$P^{-1}y_{k+1} = DP^{-1}y_k + P^{-1}f_k \tag{4.76}$$

Considerando los cambios de variable:

$$q_k = P^{-1}y_k, \tag{4.77}$$

$$g_k = P^{-1}f_k, \tag{4.78}$$

obtenemos un sistema discreto diagonal equivalente que se expresa como sigue:

$$q_{k+1} = Dq_k + g_k, \tag{4.79}$$

lo que nos permite obtener las componentes $q_{j,k}$ resolviendo las n ecuaciones desacopladas de la forma:

$$q_{j,k+1} = \lambda_j q_{j,k} + g_{j,k} \text{ para } j = 1, \dots, n, \tag{4.80}$$

cuya solución tiene la forma:

$$q_{j,k} = \lambda_j^k q_{j,0} + \left(\sum_{r=0}^{k-1} \lambda_j^{k-1-r} g_{j,k} \right), \tag{4.81}$$

donde los términos $q_{j,0}$, para $j = 0, \ldots, n$, son calculados a partir de la ecuación (4.77), esto es, el vector q_0 generado por estos términos es igual a $P^{-1}y_0$.

Finalmente la solución del sistema (4.60) se determina a partir de:

$$y_k = Pq_k. \tag{4.82}$$

- **Desacoplamiento matricial a través de la fórmula recurrente del método de variación de parámetros**
  De acuerdo con el método de variación de parámetros, buscamos una solución para el sistema (4.60) de la forma:

$$y_k = A^k c_k. \tag{4.83}$$

Entonces tenemos la expresión:

$$y_k = A^k y_0 + \left(\sum_{r=0}^{k-1} A^{k-1-r} f_r \right). \tag{4.84}$$

Considerando la matriz A diagonalizable, se tiene que $A = PDP^{-1}$. De esta forma el cálculo de las potencias de A se hace mas simple, esto es:

$$A^k = (PDP^{-1})^k = PD^k P^{-1}. \tag{4.85}$$

Finalmente la solución de (4.60) viene dada como sigue:

$$y_k = PD^k P^{-1} y_0 + \left(\sum_{r=0}^{k-1} PD^{k-1-r} P^{-1} f_r \right), \tag{4.86}$$

donde:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{bmatrix} \tag{4.87}$$

Métodos no espectrales

Los métodos no espectrales que analizaremos son: el método operacional discreto (transformada Z), la fórmula discreta y el método polinomial, teniendo en cuenta que estos métodos no utilizan los autovectores asociados al sistema.

- **Método operacional**
  Aplicando la transformada Z en ambos lados del sistema (4.60) y teniendo en cuenta la condición inicial dada, se obtiene:

  $$(Iz - A)Y(z) - zy_0 = F(z). \tag{4.88}$$

  Denotando:

  $$\Delta(z) = Iz - A, \tag{4.89}$$

  como una función matricial de primer orden en la variable z, se tiene que:

  $$Y(z) = H(z)y_0 + H(z)\frac{F(z)}{z}, \tag{4.90}$$

  donde:

  $$H(z) = z\,\Delta(z)^{-1}. \tag{4.91}$$

  Observación
  El término $\Delta(z)^{-1}$ corresponde al factor de transferencia para las entradas de tipo $f_k = z^k v$, cuya salida es del mismo tipo, denotada por $y_k = z^k w$, donde operando tenemos:

  $$w = \frac{H(z)}{z}v.$$

  Finalmente, se aplica la transformada Z inversa para regresar a la variable original del problema.

- **Fórmula discreta**
  Teniendo en cuenta el sistema representado por la ecuación (4.59) y el método de variación de parámetros se obtiene una expresión para la

solución, la cual está en función de la solución dinámica del sistema, esto es:

$$y_k = h_k A_1 y_0 + \left(\sum_{r=0}^{k-1} h_{k-1-r} g_r \right), \tag{4.92}$$

donde la función h_k satisface el problema discreto de valor inicial:

$$A_1 h_{k+1} + A_0 h_k = 0, \tag{4.93}$$

con la condición inicial $A_1 h_0 = I$.

Podemos expresar la solución de este problema homogéneo como sigue:

$$h_k = (-1)^k (A_1^{-1} A_0)^k A_1^{-1}. \tag{4.94}$$

Por conveniencia, consideraremos el sistema lineal (4.59) escrito de la forma:

$$y_{k+1} = A y_k + f_k, \tag{4.95}$$

cuya solución viene dada por:

$$y_k = h_k y_0 + \sum_{r=0}^{k-1} h_{k-1-r} f_r, \tag{4.96}$$

donde $h_k = A^k$.

La función matricial h_k se puede obtener a partir de la extensión de la fórmula analítica, por la expresión (4.44), dado que:

$$A^k = \frac{d^k e^{tA}}{dt^k}\Big|_{t=0}. \tag{4.97}$$

Luego:

$$A^k = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{l=0}^{j-1} b_{n-l} d^{(k+j-1-l)}(0) h_{n-j} \right). \tag{4.98}$$

Haciendo $d_k = d^{(k)}\ (0)$, de (4.44), tenemos que d_k satisface la ecuación en diferencias de orden n:

$$b_n d_{k+n} + b_{n-1} d_{k+n-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_k = 0, \tag{4.99}$$

con valores iniciales:

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \cdots, d_{n-2} = 0, b_n d_{n-1} = 1. \tag{4.100}$$

Los parámetros b_k son los coeficientes del polinomio característico:

$$P(z) = \det(Iz - A) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k \tag{4.101}$$

Y la función discreta $h_k = h^{(k)}(0)$ satisface la ecuación matricial en diferencias:

$$h_{k+1} = Ah_k, \tag{4.102}$$

cuyo valor inicial es $h_0 = I$.

- **Método polinomial**
  Una dificultad para la obtención de la solución del sistema de primer orden (4.60) es el cálculo de las potencias de la matriz A. Por ende el método polinomial, presentado para el caso continuo, nos permite calcular dichas potencias usando la función $f(z) = z^k$. Entonces se tiene que:

  $$f(A) = A^k = r(A) = a_{n-1}A^{n-1} + a_{n-2}A^{n-2} + \cdots + a_1 I + a_0 I, \tag{4.103}$$

  donde los escalares $a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1, a_0$ son determinados de forma análoga que en el caso continuo, esto es, se resuelve el sistema de n ecuaciones dado por (4.58) para los s autovalores distintos λ_j con multiplicidad m_j, $j = 1, \ldots, m$, tales que $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = n$. Por lo tanto se puede calcular $f(A)$.

4.2. Sistemas lineales de orden superior

A continuación desarrollamos algunas técnicas analíticas generales para resolver sistemas lineales concentrados y discretos de orden superior mediante los métodos espectrales y no espectrales.

4.2.1. Técnicas básicas de resolución para sistemas concentrados

Vamos a considerar sistemas lineales concentrados de orden N de la forma:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \tag{4.104}$$

con las condiciones iniciales:

$$y(t_0), \frac{dy}{dt}(t_0), \ldots, \frac{d^{(N-1)}y}{dt^{(N-1)}}(t_0) \tag{4.105}$$

Métodos espectrales

Para poder aplicar el método espectral en la resolución de sistemas descritos por la ecuación (4.104), se debe cumplir que el problema asociado de autovalor:

$$\left(\sum_{j=0}^{N} A_j \lambda^j\right) v = 0, \text{ para } v \neq 0, \tag{4.106}$$

genera a partir de sus Nn autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{Nn})$ y sus autovectores correspondientes $(v_1, v_2, \ldots, v_{Nn})$ una matriz V de orden Nn, denotada por:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 D \\ \vdots \\ V_0 D^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{4.107}$$

cuyas columnas son linealmente independientes. Donde D es la matriz espectral, la cual es una matriz diagonal de orden Nn cuyos elementos son los los autovalores del problema y V_0 es una matriz, cuyas columnas son los autovectores asociados al problema, esto es:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ y } V_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \end{bmatrix} \tag{4.108}$$

En particular, este resultado se satisface cuando el sistema posee todos sus autovalores distintos.

La técnica de superposición lineal se usa usualmente cuando se tiene una entrada simple de tipo exponencial, trigonométrica o polinomial, sin embargo el método de variación de parámetros se aplica a cualquier tipo de entrada.

- **Cálculo de la respuesta libre a través del método de superposición lineal**
  En este contexto se buscan las respuestas libres de la forma:
  $$y(t) = \sum_{j=0}^{Nn} c_j e^{\lambda_j t} v_j, \tag{4.109}$$
  donde las constantes c_j se obtienen resolviendo el siguiente sistema:
  $$\begin{cases} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} v_{Nn} & = & y_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} & = & y_0' \\ \vdots & = & \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} & = & y_0^{(N-1)} \end{cases}$$
  cuya matriz de coeficientes corresponde a la matriz V.

- **Cálculo de la respuesta total del sistema a través del método de variación de parámetros usando la base espectral**
  Para el sistema (4.104) se busca una solución de la forma:
  $$y(t) = c_1(t) e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2(t) e^{\lambda_2 t} v_2 + \cdots + c_{Nn}(t) e^{\lambda_{Nn} t} v_{Nn}. \tag{4.110}$$
  El cálculo de las derivadas de $y(t)$ se simplifica empleando las condiciones de Lagrange como sigue:
  $$\sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t) \lambda_j^{k-1} e^{\lambda_j t} v_j = 0 \text{ para } k = 1, \ldots, N-1, \tag{4.111}$$
  de modo que:
  $$y^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{Nn} c_j(t) \lambda_j^k e^{\lambda_j t} v_j \text{ para } k = 1, \ldots, N-1. \tag{4.112}$$

Reemplazando $y(t)$ y sus derivadas (4.112) en la ecuación (4.104), se obtiene:

$$A_N \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\lambda_j^{N-1} e^{\lambda_j t} v_j = f(t). \tag{4.113}$$

Por lo tanto las N ecuaciones descritas por (4.111) y (4.113) generan el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t) e^{\lambda_j t} v_j & = & 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\lambda_j e^{\lambda_j t} v_j & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\lambda_j^{N-2} e^{\lambda_j t} v_j & = & 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\lambda_j^{N-1} e^{\lambda_j t} A_N v_j & = & f(t) \end{cases}$$

el cual también se puede expresar de forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{Nn} t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{Nn}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \ddots \\ 0 \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix} \tag{4.114}$$

Este sistema también se puede representar de forma abreviada como sigue:

$$V e^{Dt} c'(t) = \mathcal{F}(t), \tag{4.115}$$

donde:

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 D \\ \vdots \\ V_0 D^{N-1} \end{bmatrix}, e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_{Nn} t} \end{bmatrix}, \tag{4.116}$$

$$c' = \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{Nn}'(t) \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ A_N^{-1} f(t) \end{bmatrix}. \tag{4.117}$$

Resolviendo (4.115) en términos de los componentes del vector $c'(t)$, obtenemos:

$$c' = (Ve^{Dt})^{-1}\mathcal{F}(t) \tag{4.118}$$

Por lo tanto la solución de esta ecuación diferencial matricial de primer orden, para $t = 0$, se puede expresar como sigue:

$$c(t) = c(0) + \int_0^t e^{-D\tau} V^{-1} \mathcal{F}(\tau) d\tau. \tag{4.119}$$

Luego, la solución (4.110) se puede escribir como sigue:

$$y(t) = V_0 e^{Dt} c(0) + \int_0^t V_0 e^{D(t-\tau)} V^{-1} \mathcal{F}(\tau) d\tau, \tag{4.120}$$

donde el vector inicial $c(0)$ es obtenido a partir de las condiciones iniciales del problema, esto es:

$$c(0) = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.121}$$

Métodos no espectrales

A continuación se desarrollan el método de variación de parámetros, utilizando una base cualquiera y el método operacional que utiliza la transformada de Laplace, ya descrito en sistemas de primer orden. Mediante el uso del método operacional [7] obtuvo una fórmula para la respuesta al impulso.

- **Cálculo de la respuesta total a través del método de variación de parámetros empleando una base cualquiera**

La respuesta total para sistemas concentrados del tipo (4.104) se puede escribir de la siguiente forma:

$$y(t) = c_1(t)\phi_1(t) + c_2(t)\phi_2(t) + \cdots + c_{Nn}(t)\phi_{Nn}(t) = \Phi(t)c(t), \quad (4.122)$$

donde $\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{Nn} \end{bmatrix}$ es una base del sistema.

Se asumen las condiciones de Lagrange:

$$\Phi(t)c^{(k)}(t) = 0, \text{ para } k = 1, \ldots, N-1, \quad (4.123)$$

para determinar las funciones $c_j(t)$.

Luego al realizar las k-ésimas derivadas de $y(t)$ se obtiene una expresión de la forma:

$$y^{(k)}(t) = \Phi^{(k)}(t)c(t) = 0, \text{ para } k = 1, \ldots, N-1. \quad (4.124)$$

Reemplazando $y(t)$ y sus derivadas (4.124) en la ecuación (4.104), se obtiene:

$$A_N\Phi^{(N-1)}(t)c'(t) = f(t). \quad (4.125)$$

Por lo tanto las N ecuaciones descritas por (4.123) y (4.125) generan el siguiente sistema lineal:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\phi_j(t)v_j & = & 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\phi_j'(t)v_j & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\phi_j^{(N-2)}(t)v_j & = & 0 \\ \sum_{j=1}^{Nn} c_j'(t)\phi_j^{(N-1)}(t)v_jA_Nv_j & = & f(t) \end{cases}$$

el cual también se puede expresar de forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \phi_1(t)v_1 & \phi_2(t)v_2 & \cdots & \phi_{Nn}(t)v_{Nn} \\ \phi_1'(t)v_1 & \phi_2'(t)v_2 & \cdots & \phi_{Nn}'(t)v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1^{(N-1)}(t)v_1 & \phi_2^{(N-1)}(t)v_2 & \cdots & \phi_{Nn}^{(N-1)}(t)v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{Nn}'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f(t) \end{bmatrix}. \tag{4.126}$$

Este sistema también se puede representar de forma abreviada de la siguiente manera:

$$Vc'(t) = \mathcal{F}(t). \tag{4.127}$$

donde:

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0' \\ \vdots \\ V_0^{(N-1)} \end{bmatrix}, c' = \begin{bmatrix} c_1'(t) \\ c_2'(t) \\ \vdots \\ c_{Nn}'(t) \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f(t) \end{bmatrix} \tag{4.128}$$

Resolviendo el sistema en términos de las componentes del vector $c'(t)$, se obtiene:

$$c'(t) = V^{-1}\mathcal{F}(t). \tag{4.129}$$

Por lo tanto la solución de esta ecuación para $t = 0$ está dada por:

$$c(t) = c(0) + \int_0^t V^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau. \tag{4.130}$$

Finalmente la solución (4.110) se puede escribir como sigue:

$$y(t) = V_0 c(0) + \int_0^t V_0(\tau)V^{-1}(\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau, \tag{4.131}$$

donde el vector inicial $c(0)$ se obtiene a partir de las condiciones iniciales del problema, esto es:

$$c(0) = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.132}$$

- **Fórmula analítica**
  Mediante el uso del método operacional, [3] obtuvo un resultado en el contexto no modal para la solución dinámica de sistemas de segundo orden. Además se obtuvieron varias propiedades de las soluciones dinámicas. En el trabajo de [7], este resultado fue extendido para sistemas de orden arbitrario y luego [4] obtuvo de manera directa estos resultados, esto es, sin el uso del artificio de utilizar la reducción de Hamilton para una ecuación de estado de primer orden, véase [26], [27].

Las técnicas numéricas se consideran en dos grandes grupos: aquellos que consideran el cálculo aproximado de fórmulas y propiedades para $h(t)$ y, los que de manera directa, integran numéricamente la ecuación del sistema con el uso de diferencias finitas o interpolación. Los sistemas de primer orden han sido estudiados exhaustivamente, véase [24], [16].

La solución dinámica $h(t)$ y la matriz de transferencia $H(s)$, han sido establecidas en los trabajos de [3], [7] y [4], a través de fórmulas que involucran ecuaciones características de los tipos algebraico, diferencial y en diferencias. Mas aún:

$$h(t) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-i-1)}(t) h_{Nn-j}, \tag{4.133}$$

donde $h_k = h^{(k)}(0)$ satisface la siguiente *ecuación matricial en diferencias*:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j h_{k+j} = 0, \tag{4.134}$$

considerando los valores iniciales:

$$h_0 = 0, h_1 = 0, \cdots, h_{N-2} = 0, A_N h_{N-1} = I.$$

El polinomio de grado Nn, denotado por:

$$P(s) = \det \left[\sum_{j=0}^{N} s^j A_j \right] = \sum_{k=0}^{Nn} b_k s^k, \tag{4.135}$$

corresponde al *polinomio característico* asociado al sistema y $d(t)$ representa la solución del *problema de valor inicial* expresado por:

$$b_{Nn} d^{(Nn)}(t) + b_{Nn-1} d^{(Nn-1)}(t) + \cdots + b_1 d'(t) + b_0 d(t) = 0, \tag{4.136}$$

considerando los valores iniciales:

$$d(0) = 0, d'(0) = 0, \ldots, d^{(Nn-2)}(0) = 0, b_{Nn} d^{(Nn-1)}(0) = 1. \tag{4.137}$$

Aplicando la transformada de Laplace a (4.133), se obtiene la matriz de transferencia, dada por la expresión (3.11), también se puede escribir como sigue:

$$H(s) = \left(\sum_{j=0}^{N} s^j A_j \right)^{-1} = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i \frac{s^{j-i-1}}{P(s)} h_{Nn-j} = \frac{Q(s)}{P(s)}, \tag{4.138}$$

donde:

$$Q(s) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i s^{j-i-1} h_{Nn-j}. \tag{4.139}$$

Una propiedad importante de la solución finita fue obtenida por [Claeyssen, 1999], que corresponde a la traslación de las derivadas de la solución dinámica $h(t)$ con respecto al tiempo hacia las derivadas discretas de h_k, por lo tanto podemos escribir la k-ésima derivada de $h(t)$ como sigue:

$$h^{(k)}(t) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i+k)}(t) h_{Nn-j} = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d^{(j-1-i)}(t) h_{Nn-j+k}, \text{ para cualquier } k. \tag{4.140}$$

4.2.2. Técnicas básicas de resolución para sistemas discretos

Consideremos los sistemas lineales discretos representados de la siguiente forma:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j y_{k+j} = f_k, \tag{4.141}$$

teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}. \tag{4.142}$$

Métodos espectrales

Para poder aplicar el método espectral en la resolución de sistemas discretos descritos por la ecuación (4.141), se debe cumplir que el problema asociado de autovalor:

$$\left(\sum_{j=0}^{N} A_j \lambda_j\right) v = 0, \text{ para } v \neq 0, \tag{4.143}$$

genera a partir de sus Nn autovalores $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{Nn})$ y sus autovectores correspondientes $(v_1, v_2, \cdots, v_n)$ una matriz V de orden Nn, dada por:

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1} v_1 & \lambda_2^{N-1} v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 D \\ \vdots \\ V_0 D^{N-1} \end{bmatrix}, \tag{4.144}$$

cuyas columnas son linealmente independientes. Donde D es la matriz espectral, la cual es una matriz diagonal de orden Nn cuyos elementos son los los autovalores del problema y V_0 es una matriz, cuyas columnas son los autovectores asociados al problema, esto es:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn} \end{bmatrix} \text{ y } V_0 = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \end{bmatrix}. \tag{4.145}$$

En particular, este resultado se satisface cuando el sistema posee todos sus autovalores distintos.

La técnica de superposición lineal se usa usualmente cuando se tiene una entrada simple de tipo exponencial, trigonométrica o polinomial, sin embargo el método de variación de parámetros se aplica a cualquier tipo de entrada.

- **Cálculo de la respuesta libre a través de la técnica de superposición lineal**
  En este contexto se buscan las respuestas libres de la forma:

$$y_k = \sum_{j=0}^{Nn} c_j \lambda_j^k v_j. \tag{4.146}$$

  Donde las constantes c_j se obtienen resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} v_{Nn} & = & y_0 \\ c_1 \lambda_1 v_1 + c_2 \lambda_2 v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn} v_{Nn} & = & y_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ c_1 \lambda_1^{N-1} v_1 + c_2 \lambda_2^{N-1} v_2 + \cdots + c_{Nn} \lambda_{Nn}^{N-1} v_{Nn} & = & y_{N-1} \end{cases}$$

  cuya matriz de coeficientes corresponde a la matriz V.

- **Cálculo de la respuesta total del sistema a través del método de variación de parámetros utilizando una base espectral**
  Para el sistema (4.141) se busca una respuesta total de la forma:

$$y_k = c_{1,k} \lambda_1^k v_1 + c_{2,k} \lambda_2^k v_2 + \cdots + c_{Nn,k} \lambda_{Nn}^k v_{Nn}. \tag{4.147}$$

  Expresando y_{k+1} como sigue:

$$y_{k+1} = \sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+1} v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k} \lambda_j^{k+1} v_j$$

  y considerando la condición de Lagrange:

$$\sum_{j=1}^{Nn} (c_{j,k+1} - c_{j,k}) \lambda_j^{k+1} v_j = 0.$$

De manera análoga, expresando y_{k+2} como:

$$y_{k+2} = \sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+2}v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+2}v_j,$$

y considerando la condición de Lagrange:

$$\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+2}v_j = 0.$$

Teniendo en cuenta el principio de inducción tenemos:

$$y_{k+m} = \sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+m}v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+m}v_j, \tag{4.148}$$

con su respectiva condición de Lagrange como sigue:

$$\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+m}v_j = 0, \text{ para } m = 1, \ldots, N-1. \tag{4.149}$$

Tenemos entonces que:

$$y_{k+N} = \sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+N}v_j + \sum_{j=0}^{Nn} c_{j,k}\lambda_j^{k+N}v_j$$

Reemplazando las expresiones $y_k, y_{k+1}, \ldots, y_{k+N}$, obtenidas a partir de (4.147), tenemos que:

$$A_N\left[\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1} - c_{j,k})\lambda_j^{k+N}v_j\right] = f_k. \tag{4.150}$$

De esta manera el sistema lineal formado por las N ecuaciones (4.149) y (4.150) está definido por:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1}-c_{j,k})\lambda_j^{k+1}v_j & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1}-c_{j,k})\lambda_j^{k+2}v_j & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn}(c_{j,k+1}-c_{j,k})\lambda_j^{k+N-1}v_j & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn}A_N(c_{j,k+1}-c_{j,k})\lambda_j^{k+N}v_j & = & f_k \end{cases}$$

Teniendo en cuenta las variables en diferencias $\Delta c_{j,k} = c_{j,k+1} - c_{j,k}$, el sistema se puede representar de forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{Nn} \\ \lambda_1 v_1 & \lambda_2 v_2 & \cdots & \lambda_{Nn} v_{Nn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{N-1}v_1 & \lambda_2^{N-1}v_2 & \cdots & \lambda_{Nn}^{N-1}v_{Nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn}^{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix} \tag{4.151}$$

el sistema anterior también se puede representar de forma abreviada como sigue:

$$VD^{k+1}\Delta\mathcal{C}_k = \mathcal{F}_k, \tag{4.152}$$

donde:

$$V = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_0 D \\ \vdots \\ V_0 D^{N-1} \end{bmatrix},\ D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{Nn}^k \end{bmatrix},\ \Delta\mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}. \tag{4.153}$$

Denotando:

$$c_{k+1} = \begin{bmatrix} c_{1,k+1} \\ c_{2,k+1} \\ \vdots \\ c_{Nn,k+1} \end{bmatrix} \text{ y } c_k = \begin{bmatrix} c_{1,k} \\ c_{2,k} \\ \vdots \\ c_{Nn,k} \end{bmatrix},$$

la expresión (4.152) es equivalente a la siguiente ecuación en diferencias de primer orden:

$$c_{k+1} = c_k + (VD^{k+1})^{-1}\mathcal{F}_k, \tag{4.154}$$

donde la solución tiene la forma:

$$c_k = c_0 + \sum_{j=1}^{k}(VD^j)^{-1}\mathcal{F}_j.$$

El valor del vector c_0 se obtiene a partir de las condiciones iniciales $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$, luego:

$$c_0 = V^{-1}\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.155}$$

Finalmente, se puede obtener la respuesta total del sistema a partir de la expresión:

$$y_k = V_0 D^k c_0 + \sum_{j=1}^{k} V_0 D^{k-1-j} V^{-1}\mathcal{F}_j, \tag{4.156}$$

Métodos no espectrales

Para sistemas discretos emplearemos el método de variación de parámetros para una base cualquiera y el método operacional empleando la transformada Z la cual nos permite obtener una fórmula para la respuesta impulso discreta.

- **Método de variación de parámetros empleando una base cualquiera**

Aplicando el método al sistema (4.141), podemos escribir la respuesta total de la forma:

$$y_k = c_{1,k}\phi_{1,k} + c_{2,k}\phi_{2,k} + \cdots + c_{Nn,k}\phi_{Nn,k} = \Phi_k c_k, \tag{4.157}$$

donde $\Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{1,k} & \phi_{2,k} & \cdots & \phi_{Nn,k} \end{bmatrix}$ es una base del sistema discreto libre.

Para determinar las funciones $c_{j,k}$, se asumen las condiciones de Lagrange:

$$\Phi_{k+m}\Delta C_k = 0, \text{ para } m = 1, \ldots, N-1, \tag{4.158}$$

donde $\Delta\mathcal{C}_k = c_{k+1} - c_k$.

Luego:

$$y_{k+m} = \Phi_{k+m}\Delta c_k, \text{ para } m = 1, \ldots, N-1. \tag{4.159}$$

Reemplazando y_k y sus respectivas traslaciones dadas por (4.159) en el sistema (4.141) y considerando el hecho de que cada columna de Φ_k es solución, tenemos que:

$$A_N\Phi_{k+N}\Delta C_k = f_k. \tag{4.160}$$

Por lo tanto las expresiones (4.158) y (4.160) forman el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k}\phi_{j,k+1} & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k}\phi_{j,k+2} & = & 0 \\ \vdots & = & \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn} \Delta c_{j,k}\phi_{j,k+N-1} & = & 0 \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{Nn} A_N\Delta c_{j,k}\phi_{j,k+N} & = & f_k \end{cases},$$

el cual se puede escribir de forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k+1} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta c_1 \\ \Delta c_2 \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix} \tag{4.161}$$

Este sistema también se puede representar de forma abreviada como sigue:

$$V \Delta \mathcal{C}_k = \mathcal{F}_k. \tag{4.162}$$

Donde:

$$V = \begin{bmatrix} \phi_{1,k+1} & \phi_{2,k+1} & \cdots & \phi_{Nn,k+1} \\ \phi_{1,k+2} & \phi_{2,k+2} & \cdots & \phi_{Nn,k+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1,k+N} & \phi_{2,k+N} & \cdots & \phi_{Nn,k+N} \end{bmatrix}, \Delta \mathcal{C}_k = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,k} \\ \Delta c_{2,k} \\ \vdots \\ \Delta c_{Nn,k} \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f_k \end{bmatrix}, \tag{4.163}$$

Resolviendo el sistema en términos de las componentes del vector $\Delta \mathcal{C}_k$, se obtiene:

$$c_{k+1} = c_k + V^{-1} \mathcal{F}_k. \tag{4.164}$$

La solución de la ecuación en diferencias en el contexto matricial de primer orden (4.164) viene dada por:

$$c_k = c_0 + \sum_{j=0}^{k-1} V^{-1} \mathcal{F}_j. \tag{4.165}$$

Por lo tanto la solución del sistema (4.141) se puede escribir como:

$$y_k = \Phi_k c_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \Phi_k V^{-1} \mathcal{F}_j. \tag{4.166}$$

El vector c_0 se obtiene a partir de las condiciones iniciales del problema, esto es:

$$c_0 = V^{-1} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.167}$$

- **Fórmula discreta**

  A continuación presentamos una extensión del caso continuo a sistemas discretos de orden N. Como se realizo anteriormente, la respuesta impulso discreta h_k es obtenida de forma directa, sin emplear la formulación del espacio de estado.

  La respuesta impulso discreta corresponde a la solución del problema de valor inicial discreto, dado por la siguiente ecuación matricial en diferencias:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j h_{k+j} = 0, \tag{4.168}$$

  donde $h_k = h^{(k)}(0)$ y considerando las condiciones iniciales:

$$h_0 = 0, h_1 = 0, \ldots, h_{N-2} = 0, A_N h_{N-1} = I. \tag{4.169}$$

  La fórmula discreta desarrollada es:

$$h_k = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i d_{k+j-i-1} h_{Nn-j}, \tag{4.170}$$

  donde los parámetros b_i son los coeficientes del polinomio característico asociado al sistema, denotado por:

$$P(z) = \det\left[\sum_{j=0}^{N} A_j z^j\right] = \sum_{k=0}^{Nn} b_k z^k, \tag{4.171}$$

  la función discreta $d_k = d^{(k)}(0)$, corresponde a la solución de la ecuación en diferencias:

$$b_{Nn} d_{k+Nn} + b_{Nn-1} d_{k+Nn-1} + \cdots + b_1 d_{k+1} + b_0 d_0 = 0, \tag{4.172}$$

  con valores iniciales:

$$d_0 = 0, d_1 = 0, \ldots, d_{Nn-2} = 0, b_{Nn} d_{Nn-1} = 1. \tag{4.173}$$

  Aplicando la transformada Z a (4.170) se obtiene la matriz de transferencia, cuya expresión es como sigue:

$$H(z) = z\left(\sum_{j=0}^{N} A_j z^j\right)^{-1} = \frac{Q(z)}{P(z)}, \tag{4.174}$$

donde:

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{Nn} \sum_{i=0}^{j-1} b_i z^{j-i-1} h_{Nn-j}. \tag{4.175}$$

4.3. Representación en el espacio de estado para sistemas lineales concentrados y discretos de orden superior

4.3.1. Sistemas concentrados

Considerando los sistemas lineales concentrados de la forma:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j} = f(t), \tag{4.176}$$

donde los coeficientes A_j son matrices de orden n, la salida $y(t)$ y la entrada $f(t)$ del sistema son funciones matriciales en t, con las siguientes condiciones iniciales:

$$y(0) = y_0, \frac{dy}{dt}(0) = y_1, \ldots, \frac{d^{N-1}y}{dt^{N-1}}(0) = y_{N-1}. \tag{4.177}$$

Definimos la sucesión de N vectores de orden n, denotados por:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1 & = & y \\ z_2 & = & y' \\ \vdots & = & \vdots \\ z_N & = & y^{(N-1)} \end{array} \right. . \tag{4.178}$$

Por lo tanto podemos escribir la ecuación (4.176) como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} z_1' & = & z_2 \\ z_2' & = & z_3 \\ \vdots & = & \vdots \\ z_{N-1}' & = & z_N \\ z_N' & = & -A_N^{-1}A_0 z_1 - A_N^{-1}A_1 z_2 - \cdots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1} - A_N^{-1}A_{N-1}z_N + A_N^{-1}f \end{array} \right. . \tag{4.179}$$

Finalmente las N ecuaciones en el contexto matricial originan una ecuación diferencial matricial de primer orden denotada por:

$$\mathcal{Z}' = \mathcal{A}\mathcal{Z} + \mathcal{F}, \tag{4.180}$$

donde:

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_N \end{bmatrix}, \mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1} f \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \cdots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.181}$$

A la matriz $\mathcal{A}$ y al vector $\mathcal{Z}$ se les denomina *matriz compañera* y *vector de estado* respectivamente.

A partir de la teoría desarrollada en la sección 4.1.1, se tiene que la solución de una ecuación no homogénea arbitraria de primer orden del tipo (4.180) es dada por la expresión:

$$\mathcal{Z}(t) = h(t)\mathcal{Z}(0) + \int_0^t h(t-\tau)\mathcal{F}(\tau)d\tau, \tag{4.182}$$

donde $h(t)$ es la solución matricial del problema de valor inicial:

$$h'(t) = \mathcal{A}h(t),\ h(0) = I. \tag{4.183}$$

4.3.2. Sistemas discretos

Para sistemas discretos de orden n, de la forma:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j y_{k+j} = f_k, \tag{4.184}$$

donde los coeficientes A_j son matrices de orden n, y_k y f_k son funciones vectoriales en k, con condiciones iniciales dadas por: $y_0, y_1, \ldots, y_{N-1}$.

Definimos la sucesión de N vectores de orden n, denotados por:

$$\begin{cases} z_{1,k} &= y_k \\ z_{2,k} &= y_{k+1} \\ \quad\vdots &= \vdots \\ z_{N,k} &= y_{k+N-1} \end{cases} \tag{4.185}$$

Por lo tanto podemos expresar la ecuación discreta (4.184) como sigue:

$$\begin{cases} z_{1,k+1} &= z_{2,k} \\ z_{2,k+1} &= z_{3,k} \\ \quad\vdots &= \vdots \\ z_{N-1,k+1} &= z_{N,k} \\ z_{N,k+1} &= -A_N^{-1}A_0 z_{1,k} - A_N^{-1}A_1 z_{2,k} - \cdots - A_N^{-1}A_{N-2}z_{N-1}z_{N,k} + A_N^{-1}f_k \end{cases}. \tag{4.186}$$

Finalmente podemos expresar las N ecuaciones en forma matricial por una ecuación en diferencias matricial de primer orden:

$$\mathcal{Z}_{k+1} = \mathcal{A}\mathcal{Z}_k + \mathcal{F}_k, \tag{4.187}$$

donde:

$$\mathcal{Z}_k = \begin{bmatrix} z_{1,k} \\ z_{2,k} \\ \vdots \\ z_{N,k} \end{bmatrix}, \mathcal{F}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ A_N^{-1}f_k \end{bmatrix}, \text{ y } \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & I \\ -A_N^{-1}A_0 & -A_N^{-1}A_1 & -A_N^{-1}A_2 & \cdots & -A_N^{-1}A_{N-1} \end{bmatrix}. \tag{4.188}$$

A la matriz $\mathcal{A}$ y al vector $\mathcal{Z}_k$ se les denomina *matriz compañera discreta* y *vector de estado discreto* respectivamente, para mayores detalles revise [22], [27].

De la teoría desarrollada en la sección (3.1.3), se obtiene que la solución de una ecuación no homogénea discreta de primer orden está dada como sigue:

$$\mathcal{Z}_k = h_k\,\mathcal{Z}_0 + \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-1-j}\mathcal{F}_k, \tag{4.189}$$

donde h_k es la solución matricial del problema de valor inicial discreto:

$$h_{k+1} = \mathcal{A}\, h_k,\; h_0 = I. \tag{4.190}$$

Capítulo 5

Cálculo simbólico de respuestas forzadas para sistemas concentrados y discretos

En este capítulo, se considera la obtención de respuestas libres en torno de las respuestas dinámicas o en particular de las respuestas forzadas. Como las componentes libres de la respuesta dinámica de una máquina, contiene informaciones valiosas acerca de las propiedades del sistema. Tales informaciones pueden ser empleadas para monitorear y diagnosticar problemas en la misma, véase [34]. Tanto para un sistema concentrado o como para un sistema discreto, la respuesta forzada se descompone como la suma de una respuesta permanente y una respuesta libre, la cual depende directamente de los valores iniciales de la respuesta permanente, actuando esta última como una retroalimentación del sistema.

5.1. Descomposición de la respuesta forzada para sistemas concentrados

La *respuesta forzada* de un sistema concentrado que corresponde a la solución del sistema matricial:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \tag{5.1}$$

con las siguientes condiciones iniciales nulas:

$$y(t_0) = 0, y'(t_0) = 0, \ldots, y^{(N-1)}(t_0) = 0, \tag{5.2}$$

viene dada por la *integral de convolución*:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau. \tag{5.3}$$

En la práctica, el cálculo de esta integral siempre presenta una respuesta permanente y puede incluir respuestas libres. A continuación, se mostrará que estas respuestas libres son introducidas por las respuestas permanentes como una retroalimentación en el sistema. Su caracterización se obtiene con el uso de la base dinámica generada por la respuesta impulso $h(t)$ y de sus derivadas. Por lo tanto, la respuesta forzada dada por (5.3) es descompuesta en una solución homogénea, $y_h(t)$, y en una solución no homogénea, $y_p(t)$, esto es:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = y_h(t) + y_p(t). \tag{5.4}$$

Como $\{h(t), h'(t), \ldots, h^{N-1}(t)\}$ forman una base de soluciones de la ecuación homogénea:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = 0, \tag{5.5}$$

la integral (5.3), que corresponde a una solución no homogénea, la cual se puede escribir como sigue:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(t-t_0)\, a_j + y_p(t), \tag{5.6}$$

donde los parámetros a_j son vectores que son determinados a partir de las condiciones iniciales nulas de $y(t)$ en $t = t_0$, es decir resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 0 &= \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} h^{(j)}(0)\, a_j + y_p(t_0) \\ 0 &= \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+1)}(0)\, a_j + y_p'(t_0) \\ &\vdots \\ 0 &= \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} h^{(j+N-1)}(0)\, a_j + y_p^{(N-1)}(t_0) \end{cases}. \tag{5.7}$$

Sabemos que la respuesta impulso satisface la ecuación (5.5), con condiciones iniciales $h(0) = 0, h'(0) = 0, \ldots, A_N\, h^{(N-1)}(0) = I$. Usando este resultado determinamos los valores de $h^{(j)}(0)$, para $j \geq N+1$. Por lo tanto se tiene que:

$$\begin{cases} a_{N-1} &= -A_N\, y_p(t_0) \\ a_{N-2} &= -A_{N-1}\, y_p(t_0) - A_N\, y_p'(t_0) \\ a_{N-3} &= -A_{N-2}\, y_p(t_0) - A_{N-1}\, y_p'(t_0) - A_N\, y_p''(t_0) \\ &\vdots \\ a_1 &= -A_2\, y_p(t_0) - A_3\, y_p'(t_0) - \cdots - A_N\, y_p^{(N-2)}(t_0) \\ a_0 &= -A_1\, y_p(t_0) - A_2\, y_p'(t_0) - \cdots - A_N\, y_p^{(N-1)}(t_0) \end{cases}. \tag{5.8}$$

o de forma abreviada:

$$a_j = -\sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j}\, y_p^{(k-1)}(t_0), \text{ para } j = 0, \ldots, N-1. \tag{5.9}$$

Por lo tanto la respuesta libre introducida por la convolución es:

$$y_h(t) = -\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{(j)}(t - t_0)\, A_{k+j}\, y_p^{(k-1)}(t_0). \tag{5.10}$$

Empleando la base impulso normalizada descrita en (3.21), se tiene que:

$$y_h(t) = -\sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_0)\, y_p^{(j)}(t_0). \tag{5.11}$$

Esta expresión nos indica que, siendo conocidas las condiciones iniciales de una solución no homogénea, $y_p(t)$, la solución homogénea, $y_h(t)$, queda determinada con ayuda de la respuesta impulso $h(t)$.

De esta manera, el cálculo de la respuesta forzada se reduce a obtener la respuesta particular, $y_p(t)$, y se tiene la siguiente expresión para la respuesta forzada del sistema (5.1), la cual caracteriza la descomposición de la convolución:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)\, f(\tau)\, d\tau = y_p(t) - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0)\, y_p^{(j)}(t_0). \tag{5.12}$$

Está fórmula se puede emplear para entradas donde $y_p(t)$ se puede calcular fácilmente. Por ejemplo, para entradas lineales, exponenciales o armónicas, donde se puede utilizar el método de los coeficientes indeterminados. En este caso la respuesta permanente $y_p(t)$ es del mismo tipo, implicando una combinación lineal de la entrada y de una cantidad de sus derivadas. Así, los valores iniciales de $y_p(t)$, dependen directamente de los valores iniciales de la entrada. Esto último se considerará posteriormente en un contexto de entradas arbitrarias.

En la próxima subsección, se estudia la descomposición de la respuesta forzada del sistema, sujeto a los diferentes tipos de entradas.

5.1.1. Descomposición de la respuesta forzada para diferentes tipos de entrada

Entrada lineal

Cuando la excitación es lineal, $f(t) = c\,t + d$, donde c y d son vectores escalares de orden n, se puede expresar una solución particular como sigue:

$$y_p(t) = \alpha\, t + \beta, \tag{5.13}$$

donde los vectores α y β se obtienen al resolver los sistemas lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} A_0\,\alpha & = & c \\ A_0\,\beta & = & d - A_1\,\alpha \end{array} \right. \tag{5.14}$$

resultado de la sustitución de (5.13) en el sistema (5.1). Para A_0 no singular tenemos:

$$y_p(t) = A_0^{-1}\,[c\,t + d - A_1\,A_0^{-1}\,c]. \tag{5.15}$$

Con las siguientes condiciones iniciales:

$$\left\{\begin{array}{lcl} y_p(t_0) & = & A_0^{-1}\,[c\,t_0 + d - A_1\,A_0^{-1}\,c] \\ y_p'(t_0) & = & A_0^{-1}\,c \\ y_p^{(j)}(t_0) & = & 0 \text{ para } j = 2,\ldots,N-1 \end{array}\right. . \tag{5.16}$$

La respuesta forzada dada en (5.12), sujeta a una entrada lineal y con condiciones iniciales nulas en $t = t_0$ está dada por:

$$y(t) = y_p(t) - h_0(t - t_0)\,y_p(t_0) - h_1(t - t_0)\,y_p'(t - t_0) \tag{5.17}$$

donde $y_p(t)$ está definida por la expresión (5.15).

Entrada escalón

En particular, para una entrada escalón:

$$f(t) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & t < t_0 \\ d, & t > t_0 \end{array}\right. , \tag{5.18}$$

se tiene una respuesta forzada del mismo tipo:

$$y(t) = \left\{\begin{array}{cl} 0, & t < t_0 \\ A_0^{-1}\,d - h_0(t - t_0)\,A_0^{-1}\,d, & t > t_0 \end{array}\right. , \tag{5.19}$$

Entrada polinomial

Consideramos una entrada polinomial homogénea definida por:

$$f(t) = t^m\,v,\ m \leq N, \tag{5.20}$$

buscamos una solución no homogénea polinomial del mismo tipo:

$$y_p(t) = \sum_{k=0}^{m} \frac{t^k}{k!}\,c_k, \tag{5.21}$$

donde los vectores constantes, c_k, son obtenidos por el método de los coeficientes indeterminados. Por lo tanto después de reemplazar (5.21) en el sistema (5.1), se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{bmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_m \\ 0 & A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-1} \\ 0 & 0 & A_0 & \cdots & A_{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ m!v \end{bmatrix}, \tag{5.22}$$

el cual se resuelve por *retro-sustitución*.

En particular para una entrada cuadrática, $f(t) = t^2\, v$, se tiene una respuesta permanente como sigue:

$$y_p(t) = A_0^{-1}\,(t^2 - 2t\, A_1\, A_0^{-1} + 2(A_1\, A_0^{-1})^2 - 2A_2\, A_0^{-1})\, v, \tag{5.23}$$

por lo tanto la respuesta forzada es de la forma:

$$y(t) = y_p(t) - h_0(t-t_0)\, y_p(t_0) - h_1(t-t_0)\, y_p'(t-t_0) - h_2(t-t_0)\, y_p''(t_0). \tag{5.24}$$

Entrada armónica

Sea una entrada armónica:

$$f(t) = e^{i\omega t}\, v, \tag{5.25}$$

donde ω es la frecuencia, denominada *frecuencia de entrada* y v un vector constante conocido.

Supongamos que la solución permanente del mismo tipo:

$$y_p(t) = e^{i\omega t}\, w, \tag{5.26}$$

luego sustituyendo en la ecuación (5.1) se tiene que:

$$y_p(t) = H(i\omega)\, e^{i\omega t}\, v, \tag{5.27}$$

donde:

$$H(i\omega) = \left(\sum_{j=0}^{N} (i\omega)^j\, A_j \right)^{-1}, \tag{5.28}$$

es la *respuesta en frecuencia del sistema.*

Por lo tanto el sistema (5.1) para una entrada armónica con amplitud v y frecuencia ω tiene como respuesta forzada a:

$$y(t) = e^{i\omega t} H(i\omega)\, v - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0)\, [(i\omega)^{k-1}\, e^{i\omega t_0}\, H(i\omega)\, v]. \tag{5.29}$$

Por lo tanto empleando el principio de la superposición lineal, se tiene que para una entrada del tipo:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{i\omega_k t}\, v_k, \tag{5.30}$$

la repuesta es:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{i\omega_k t}\, H(i\omega_k)\, v_k. \tag{5.31}$$

Entrada exponencial

Para entradas del tipo exponencial:

$$f(t) = e^{\lambda t}\, v, \tag{5.32}$$

donde λ es un escalar y v es un vector constante conocido, buscamos soluciones permanentes del mismo tipo:

$$y_p(t) = e^{\lambda t}\, w, \tag{5.33}$$

por lo tanto al sustituir en (5.1) se obtiene:

$$y_p(t) = H(\lambda)\, e^{\lambda t}\, v, \tag{5.34}$$

donde:

$$H(\lambda) = \left(\sum_{j=0}^{N} (\lambda)^j\, A_j \right)^{-1}, \tag{5.35}$$

es la función de transferencia del sistema.

Por lo tanto el sistema (5.1), para una entrada exponencial con amplitud v y exponente λ, tiene una respuesta forzada como sigue:

$$y(t) = e^{\lambda t} H(\lambda)\, v - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_0)[(\lambda)^{k-1} e^{\lambda t_0} H(\lambda)\, v]. \tag{5.36}$$

Por lo tanto por el principio de superposición lineal para entradas del tipo:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{i\omega_k t}\, v_k, \tag{5.37}$$

obtenemos una respuesta de la forma:

$$y(t) = \sum_{k=0}^{N} e^{\lambda_k t} H(\lambda_k)\, v_k. \tag{5.38}$$

Entrada seccionalmente continua

Sea el sistema:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{d^j y}{dt^j}(t) = f(t), \tag{5.39}$$

donde el término forzante $f(t)$, es del tipo:

$$f(t) = \begin{cases} f_k(t) & , \quad t_k < t < t_{k+1},\ k = 0, \dots, N-1 \\ 0 & , \quad t \geq t_N \end{cases} \tag{5.40}$$

donde $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$. Las funciones $f_k(t)$ son tales que es sencillo construir una correspondiente respuesta particular, $y_{p,k}(t)$, del sistema en el intervalo $[t_k, t_{k+1}]$. Por la fórmula de variación de parámetros, dada por la expresión (3.20), se tiene que en cada subintervalo $[t_k, t_{k+1}]$ la respuesta total viene dada por:

$$y(t) = \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t-t_0)\, y^{(j)}(t_k) + \int_{t_k}^{t} h(t-\tau)\, f_k(\tau)\, d\tau, \ \text{ para } t \in [t_k, t_{k+1}]. \tag{5.41}$$

Por la descomposición de la respuesta forzada descrita en (5.12), se tiene que:

$$y(t) = y_{p,k}(t) - \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t - t_k)\, [y_k^{(j)}(t_k) - y_{p,k}^{(j)}(t_k)] \tag{5.42}$$

para $t \in [t_k, t_{k+1}]$.

5.2. Descomposición de la respuesta forzada para sistemas discretos

La *respuesta forzada* de un sistema discreto corresponde a la solución del sistema matricial:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\, y_{k+j} = f_j, \tag{5.43}$$

con las condiciones iniciales nulas:

$$y_0 = 0,\ y_1 = 0,\ \ldots, y_{N-1} = 0. \tag{5.44}$$

Empleando la *convolución discreta* se obtiene:

$$y_k = \sum_{j=0}^{k-1} h_{k-j-1}\, f_j. \tag{5.45}$$

Por lo tanto la respuesta se puede descomponer en la forma siguiente:

$$y_k = y_{h,k} + y_{p,k}, \tag{5.46}$$

donde $y_{p,k}$ es la solución permanente y $y_{h,k}$ es la respuesta libre. Las respuestas libres, análogamente que en el caso de sistemas concentrados son introducidas por las respuestas permanentes como una retroalimentación al sistema. Ellas se pueden caracterizar empleando la base dinámica generada por la respuesta impulso discreta, h_k y de sus traslaciones. Por simplicidad se utiliza la descomposición desarrollada para sistemas concentrados, y a partir de estos resultados se obtiene la respuesta dinámica discreta por simple diferenciación, esto es, haciendo $y_k = y^{(k)}(0)$ en (5.12), se tiene que la descomposición para la respuesta forzada discreta es dada por:

$$y_k = y_{p,k} - \sum_{j=0}^{N-1} h_{j,k}\, y_{p,k+j}, \tag{5.47}$$

donde:

$$h_{j,k} = \sum_{i=0}^{N-j-1} h_{k+i}\, A_{j+1+i}, \qquad \text{para } j = 0, \ldots, N-1,$$

y h_k es la respuesta impulso discreta.

Esta descomposición es práctica cuando la respuesta permanente se puede obtener fácilmente.

Capítulo 6

Sistemas distribuidos

En este capítulo, consideraremos sistemas distribuidos como sigue:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t,x) = r(t,x), \tag{6.1}$$

donde las funciones $y(t,x)$ y $r(t,x)$, que dependen del tiempo t y del espacio x, corresponden a la salida y a la entrada del sistema, respectivamente.

En particular, para sistemas distribuidos con dinámica de control consideramos:

$$r(t,x) = \sum_{j=0}^{M} B_j \frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t,x) + f(t,x), \tag{6.2}$$

donde $u(x,t)$ y $f(t,x)$ también dependen del tiempo t y del espacio x. Los coeficientes A_j y B_j son operadores espaciales que contienen únicamente las derivadas con respecto a la variable x definidos como sigue:

$$A_j w(x) = \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k},\ j = 0, \ldots, N, \tag{6.3}$$

$$B_j w(x) = \sum_{k=0}^{b_j} q_{jk}(x) \frac{d^k w}{dx^k},\ j = 0, \ldots, M. \tag{6.4}$$

El valor del parámetro $m = \text{máx}\{m_1, \ldots, m_N\}$ corresponde al orden espacial del sistema distribuido, esto es, el valor máximo de las derivadas que figuran en los coeficientes A_j, descritos por los operadores de la parte espacial

(6.3). De forma similar, $m_b = \text{máx}\{b_1, \ldots, b_M\}$ corresponde al orden espacial relativo a la entrada del sistema, esto es, el valor máximo de las derivadas que figuran en los coeficientes B_j, descritos por los operadores de la parte espacial (6.4). Se asume que $N \geq M$.

La respuesta libre del sistema es la solución de la ecuación diferencial (6.1) cuando la entrada $r(t, x)$ es idénticamente nula.

La respuesta forzada en el instante $t = t_0$ corresponde a la solución de la ecuación diferencial cuando todas las condiciones iniciales:

$$y(t_0, x), \frac{\partial y}{\partial t}(t_0, x), \ldots, \frac{\partial^{N-1} y}{\partial t^{N-1}}(t_0, x), \tag{6.5}$$

son idénticamente nulas. Si además de las condiciones iniciales también se satisfacen condiciones de frontera genéricas, véase [10], [25], denotadas por:

$$\begin{aligned} \alpha_{0k}\, y(t, 0) + \alpha_{1k}\, \frac{\partial y(t, 0)}{\partial x} + \cdots + \alpha_{m-1k}\, \frac{\partial^{m-1} y(t, 0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k}\, y(t, L) + \\ + \beta_{1k}\, \frac{\partial y(t, L)}{\partial x} + \cdots + \beta_{m-1k}\, \frac{\partial^{m-1} y(t, L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \text{ para } k = 1, \ldots, m. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Aplicando la transformada de Laplace en (6.1), se tiene que:

$$\sum_{j=0}^{N} s^j \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x)\, \frac{\partial^k Y(s, x)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\, A_j\, y_0^i + R(s, x). \tag{6.7}$$

Reordenando la expresión (6.7), se obtiene:

$$\sum_{k=0}^{m} p_k(x, s)\, \frac{\partial^k Y(s, x)}{\partial x^k} = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\, A_j\, y_0^i + R(s, x). \tag{6.8}$$

para ciertas funciones $p_k(x, s)$. Aquí, $y_0^i = \frac{\partial^i}{\partial t^i} y(0, x)$, denota las condiciones iniciales de la salida del sistema, $Y(s, x)$ y $R(s, x)$ denotan las transformadas de Laplace de la salida $y(t, x)$ y de la entrada $r(t, x)$ del sistema, respectivamente. Aplicando la transformada de Laplace a las condiciones de frontera dadas por la expresión (6.6), se tiene que:

$$\alpha_{0k}\, Y(s,0) + \alpha_{1k}\, \frac{\partial Y(s,0)}{\partial x} + \cdots + \alpha_{m-1k}\, \frac{\partial^{m-1} Y(s,0)}{\partial x^{m-1}} + \beta_{0k}\, Y(s,L) + \\ + \beta_{1k}\, \frac{\partial Y(s,L)}{\partial x} + \cdots + \beta_{m-1k}\, \frac{\partial^{m-1} Y(s,L)}{\partial x^{m-1}} = 0, \text{ para } k = 1, \ldots, m. \tag{6.9}$$

Definiendo:

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^{N} s^j\, A_j = \sum_{j=0}^{N} s^j \sum_{k=0}^{m_j} p_{jk}(x)\, \frac{d^k}{dx^k} = \sum_{k=0}^{m} p_k(x,s)\, \frac{d^k}{dx^k}.$$

Por lo tanto el problema de frontera (6.8) se puede escribir de forma reducida como sigue:

$$\Delta(s)\, Y(s,x) = \mathtt{F}(s,x), \tag{6.10}$$

donde:

$$\mathtt{F}(s,x) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\, A_j\, y_0^i + R(s,x), \tag{6.11}$$

para funciones $Y(s,x)$ que satisfacen las condiciones de frontera (6.9).

Por otro lado considerando $H(s,x,\xi)$ la función de Green del problema (6.10), se obtiene que:

$$Y(s,x) = \int_0^L H(s,x,\xi) \left[\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\, A_j\, y_0^i(\xi) \right] d\xi + \int_0^L H(s,x,\xi)\, R(s,\xi)\, d\xi, \tag{6.12}$$

esto es:

$$Y(s,x) = \int_0^L H(s,x,\xi)\, \mathtt{F}(s,\xi)\, d\xi. \tag{6.13}$$

Definiendo:

$$h(t,x,\xi) = \mathcal{L}^{-1}[H(s,x,\xi)] \tag{6.14}$$

y considerando la propiedad:

$$\begin{array}{rclcl} h(0,x,\xi) & = & \lim\limits_{x\to\infty} s\,H(s,x,\xi) & = & 0 \\ h'(0,x,\xi) & = & \lim\limits_{x\to\infty} s^2\,H(s,x,\xi) & = & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \\ h^{(N-2)}(0,x,\xi) & = & \lim\limits_{x\to\infty} s^{N-1}\,H(s,x,\xi) & = & 0 \\ A_N\,h^{(N-1)}(0,x,\xi) & = & A_N \lim\limits_{x\to\infty} s^N\,H(s,x,\xi) & = & \delta(x-\xi) \end{array} \tag{6.15}$$

para la función $h(t,x,\xi)$ de modo que:

$$s^k\,H(s,x,\xi) = \mathcal{L}(h^{(k)}(t,x,\xi)), \text{ para } k = 0,\ldots,N-1. \tag{6.16}$$

Por lo tanto la salida del sistema se puede expresar como:

$$y(t,x) = \int_0^L \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t,x,\xi)\,A_j\,y_0^i(\xi) \right) d\xi + \int_0^L \int_0^t h(t-\tau,x,\xi)\,r(\tau,\xi)\,d\tau\,d\xi \tag{6.17}$$

o de la forma:

$$y(t,x) = \int_0^L \left(\sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t,x,\xi)\,A_j\,y_0^i(\xi) + \int_0^L \int_0^t h(t-\tau,x,\xi)\,r(\tau,\xi)\,d\tau \right) d\xi. \tag{6.18}$$

Esta representación nos muestra una distribución espacial de la salida del sistema, la cual podemos simplificar introduciendo la solución dinámica $h(t)$ del sistema distribuido definida a través del operador integral:

$$\mathtt{h}(t)\,\phi(x) = \int_0^L h(t,x,\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi, \tag{6.19}$$

donde $h(t,x,\xi)$ es la transformada inversa de Laplace de la función de Green $H(s,x,\xi)$ del problema de frontera, definida por las ecuaciones (6.9) y (6.10).

Teniendo en cuenta la solución dinámica, la salida del sistema se puede escribir en la forma evolutiva como sigue:

$$\mathtt{y}(t) = \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=0}^{j-1} \mathtt{h}^{(j-1-i)}(t)\,A_j\,y_0^i + \int_0^t \mathtt{h}(t-\tau)\,\mathtt{r}(\tau)\,d\tau, \tag{6.20}$$

donde $\mathtt{y}(t)$ es una función con valores distribuidos, esto es, para cada t fijo, $\mathtt{y}(t)$ es una función que depende de la variable espacial y cuyo valor es $\mathtt{y}(t)(x) = y(t,x)$. Análogamente, para $\mathtt{r}(t)$ se tiene $\mathtt{r}(t)(x) = r(t,x)$.

Aplicando la transformada de Laplace a la solución dinámica (6.19) obtenemos el *operador de transferencia* $\mathtt{H}(s)$ que actúa sobre funciones de variable espacial como sigue:

$$\mathtt{H}(s)\,\phi(x) = \int_0^L H(s,x,\xi)\,\phi(\xi)\,d\xi, \tag{6.21}$$

que viene a ser el operador inverso del operador:

$$\Delta(s) = \sum_{j=0}^{N} s^j\,A_j, \tag{6.22}$$

definido sobre funciones que satisfacen las condiciones de frontera (6.9), esto es:

$$\Delta(s)\,\mathtt{H}(s) = \mathtt{H}(s)\,\Delta(s) = \mathtt{I}. \tag{6.23}$$

Por lo tanto, la relación (6.12) con condiciones iniciales nulas, se puede escribir como:

$$\mathtt{Y}(s) = \mathtt{H}(s)\,\mathtt{R}(s), \tag{6.24}$$

donde $\mathtt{Y}(s)$ y $\mathtt{R}(s)$ son funciones con valores distribuidos espacialmente, esto es, $\mathtt{Y}(s)(x) = Y(s,x)$ y $\mathtt{R}(s)(x) = R(s,x)$.

El sistema distribuido de control dinámico definido por:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j\,\frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t,x) = \sum_{j=0}^{M} B_j\,\frac{\partial^j u}{\partial t^j}(t,x), \tag{6.25}$$

lo analizaremos de manera análoga.

Aplicando la transformada de Laplace a (6.25) obtenemos:

$$\left(\sum_{j=0}^{N} s^j A_j\right) Y(s,x) - \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\,A_j\,y_0^i = \left(\sum_{j=0}^{M} s^j\,B_j\right) U(s,x) - \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\,B_j\,u_0^i, \tag{6.26}$$

donde u_0^i denotan las condiciones iniciales de la entrada del sistema en el instante $t = 0$. Entonces:

$$Y(s,x) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\,\mathtt{H}(s)\,A_j\,y_0^i + \sum_{j=0}^{M} s^j\,\mathtt{H}(s)\,B_j\,U(s,x) - \sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1} s^{j-1-i}\,\mathtt{H}(s)\,B_j\,u_0^i. \tag{6.27}$$

Empleando la expresión (6.21) obtenemos:

$$\begin{aligned} Y(s,x) = &\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=0}^{j-1}\left(s^{j-1-i}\,H(s,x,\xi)\,A_j\,y_0^i(\xi)\,d\xi\right) + \sum_{j=0}^{M}\left(\int_0^L s^j\,H(s,x,\xi)\,B_j\,U(s,\xi)\,d\xi\right)\\ &-\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1}\left(\int_0^L s^{j-1-i}\,H(s,x,\xi)\,B_j\,u_0^i(\xi)\,d\xi\right) \end{aligned} \tag{6.28}$$

Por lo tanto tenemos que en el dominio temporal, la salida del sistema está dada por:

$$\begin{aligned} y(t,x) = \int_0^L &\left(\sum_{j=0}^{N-1} h_j(t,x,\xi)\,y_0^j\,(\xi) + \int_0^t \sum_{j=0}^{M} h^{(j)}(t-\tau,x,\xi)\,B_j\,u(\tau,\xi)\,d\tau\right.\\ &\left.-\sum_{j=1}^{M}\sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t,x,\xi)\,B_j\,u_0^i(\xi)\right)d\xi \end{aligned} \tag{6.29}$$

donde:

$$h_j(t,x,\xi) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t,x,\xi)\,A_{j+1+i}, \text{ para } j = 0,\ldots,N-1. \tag{6.30}$$

Considerando condiciones iniciales nulas tanto para la entrada como para la salida del sistema respectivamente, a partir de (6.27) obtenemos:

$$Y(s,x) = \mathtt{G}(s)\,U(s,x), \tag{6.31}$$

donde:

$$\mathtt{G}(s) = \sum_{j=0}^{M} s^j\,\mathtt{H}(s)\,B_j, \tag{6.32}$$

es denominada la *función de transferencia* del sistema de control, la cual relaciona las transformadas de entrada y salida del sistema.

Aplicando la transformada inversa de Laplace a la expresión (6.32) y teniendo en cuenta que $\mathcal{L}[\mathtt{h}^{(j)}(t)] = s^j\, \mathtt{H}(s)$, para $j = 0, \ldots, N-1$, obtenemos:

$$\mathtt{g}(t) = \sum_{j=0}^{M} \mathtt{h}^{(j)}(t)\, B_j. \tag{6.33}$$

Considerando las condiciones iniciales nulas de entrada y de salida del sistema ($y_0^j = 0$ y $u_0^j = 0$) la respuesta del sistema se puede expresar como sigue:

$$\mathtt{y}(t) = \int_0^t \mathtt{g}(t-\tau)\, \mathtt{u}(\tau)\, d\tau. \tag{6.34}$$

Para sistemas del tipo (6.25) a la función temporal $\mathtt{g}(t)$ se le conoce como *respuesta impulso*. Esta denominación se puede justificar considerando la entrada como una función impulso temporal $u(t,x) = \delta(t)\,\mathtt{I}$, donde $\mathtt{I}$ denota el operador espacial identidad, esto es, $\mathtt{I}w(x) = w(x)$. En particular, para sistemas distribuidos simples dados por la ecuación (6.1), la respuesta impulso coincide con la solución dinámica. Los resultados anteriores han sido, por conveniencia, establecidos para un dominio espacial unidimensional $\Omega = [0, L]$. Sin embargo, con la transformación del tiempo t en un parámetro s, se obtiene la ecuación operacional espacial:

$$\begin{aligned} y(t,x) = \int_{\partial\Omega} \Bigg(& \sum_{j=0}^{N-1} h_j(t,x,\xi)\, y_0^j(\xi) + \int_0^t \sum_{j=0}^{M} h^{(j)}(t-\tau,x,\xi)\, B_j\, u(\tau,\xi)\, d\tau \\ & - \sum_{j=1}^{M} \sum_{i=0}^{j-1} h^{(j-1-i)}(t,x,\xi)\, B_j\, u_0^i(\xi) \Bigg)\, d\xi \end{aligned} \tag{6.35}$$

donde:

$$h_j(t,x,\xi) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(t,x,\xi)\, A_{j+1+i}, \ \text{ para } j = 0, \ldots, N-1 \tag{6.36}$$

y $\partial\Omega$ denota la frontera de la región Ω en dos o tres dimensiones, véase [2].

Capítulo 7

Cálculo simbólico de respuestas forzadas para sistemas distribuidos

En este capítulo consideramos la obtención de respuestas libres a partir de respuestas dinámicas, en particular de respuestas forzadas. Para un sistema distribuido la respuesta forzada es descompuesta como la suma de una respuesta permanente y de una respuesta libre, que depende directamente de los valores iniciales de la respuesta permanente, actuando esta última como una retroalimentación del sistema. Para entradas temporales armónicas el cálculo de la respuesta permanente, en este caso la respuesta frecuencia, se puede realizar con el uso de la función de Green Espacial.

7.1. Descomposición de la respuesta forzada para sistemas distribuidos

La solución del siguiente sistema matricial:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t,x) = f(t,x), \tag{7.1}$$

con condiciones iniciales nulas:

$$y(t_0, x) = 0, y'(t_0, x) = 0, \ldots, \frac{\partial^{N-1} y}{\partial t^{N-1}}(t_0, x) = 0, \tag{7.2}$$

se denomina *solución de respuesta forzada* en $t = t_0$, la cual está determinada por la siguiente integral de convolución:

$$\mathtt{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathtt{h}(t-\tau)\, \mathtt{f}(\tau)\, d\tau, \tag{7.3}$$

donde $\mathtt{y}(t)$ es una función con valores distribuidos, esto es, para cada t fijo, $\mathtt{y}(t)$ es una función que depende de la variable espacial y cuyo valor es $\mathtt{y}(t)(x) = y(t, x)$, análogamente para $\mathtt{f}(t) = f(t, x)$.

La respuesta impulso $\mathtt{h}(t)$ fue definida en (6.19) a través del operador integral:

$$\mathtt{h}(t)\phi(x) = \int_0^L h(t, x, \xi)\, \phi(\xi)\, d\xi, \tag{7.4}$$

donde $h(t, x, \xi)$ corresponde a la *función de Green temporal*, esto es, la inversa de la transformada de Laplace de la función de Green espacial $H(s, x, \xi)$ del problema de frontera (6.9) - (6.10).

Teniendo en cuenta estas funciones, la respuesta forzada dada en (7.3) lo escribimos en la forma usual:

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} \left[\int_0^L h(t-\tau, x, \xi)\, f(\tau, \xi)\, d\xi \right] d\tau. \tag{7.5}$$

Para efectos de la descomposición en el tiempo, es conveniente trabajar en forma evolutiva (7.3) y luego escribir el resultado en la forma usual.

La respuesta forzada se puede descomponer en una respuesta libre $\mathtt{y}_h(t)$ y en una respuesta particular (*permanente*) $\mathtt{y}_p(t)$, esto es:

$$\mathtt{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathtt{h}(t-\tau)\, \mathtt{f}(\tau)\, d\tau = \mathtt{y}_h(t) + \mathtt{y}_p(t), \tag{7.6}$$

donde $\mathtt{y}_h(t)(x) = y_h(t, x)$ y $\mathtt{y}_p(t)(x) = y_p(t, x)$.

Dado que el conjunto $\{\mathtt{h}(t), \mathtt{h}'(t), \ldots, \mathtt{h}^{N-1}(t)\}$ forma una base de soluciones de la ecuación homogénea:

$$\sum_{j=0}^{N} A_j \frac{\partial^j y}{\partial t^j}(t,x) = 0, \tag{7.7}$$

Por lo tanto la integral (7.3), que corresponde a una solución no homogénea, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\mathtt{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathtt{h}(t-\tau)\,\mathtt{f}(\tau)\,d\tau = \sum_{j=0}^{N-1} \mathtt{h}^{(j)}(t-t_0)\,a_j + \mathtt{y}_p(t), \tag{7.8}$$

donde los a_j son funciones de variable espacial que son determinadas a partir de las condiciones iniciales nulas de $\mathtt{y}(t)$ en $t = t_0$.

De esta forma, se obtiene el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{lcl} 0 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \mathtt{h}^{(j)}(0)\,a_j + \mathtt{y}_p(t_0) \\ 0 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \mathtt{h}^{(j+1)}(0)\,a_j + \mathtt{y}'_p(t_0) \\ & \vdots & \\ 0 & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{N-1} \mathtt{h}^{(j+N-1)}(0)\,a_j + \mathtt{y}_p^{(N-1)}(t_0) \end{array}\right. \tag{7.9}$$

Los valores de $\mathtt{h}^{(j)}(0)$, para $j \geq N+1$ son determinados a partir de la ecuación diferencial, que es satisfecha por $\mathtt{h}(t)$ con condiciones iniciales en $t = 0$.

Por lo tanto:

$$\left\{\begin{array}{ccl} a_{N-1} & = & -A_N\,\mathtt{y}_p(t_0) \\ a_{N-2} & = & -A_{N-1}\,\mathtt{y}_p(t_0) - A_N\,\mathtt{y}'_p(t_0) \\ a_{N-3} & = & -A_{N-2}\,\mathtt{y}_p(t_0) - A_{N-1}\,\mathtt{y}'_p(t_0) - A_N\,\mathtt{y}''_p(t_0) \\ & \vdots & \\ a_1 & = & -A_2\,\mathtt{y}_p(t_0) - A_3\,\mathtt{y}'_p(t_0) - \cdots - A_N\,\mathtt{y}_p^{(N-2)}(t_0) \\ a_0 & = & -A_1\,\mathtt{y}_p(t_0) - A_2\,\mathtt{y}'_p(t_0) - \cdots - A_N\,\mathtt{y}_p^{(N-1)}(t_0) \end{array}\right. \tag{7.10}$$

o de forma simplificada:

$$a_j = -\sum_{k=1}^{N-j} A_{k+j}\, y_p^{(k-1)}(t_0, x), \text{ para } j = 0, \ldots, N-1. \tag{7.11}$$

Luego la respuesta libre introducida por la convolución, viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathtt{y}_h(t) &= -\sum_{j=0}^{N-1} \mathtt{h}^{(j)}(t-t_0) \sum_{n=1}^{N-j} A_{k+j}\, \mathtt{y}_p^{(k-1)}(t_0) \\ &= -\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \mathtt{h}^{(k-1)}(t-t_0)\, A_{k+j}\, \mathtt{y}_p^{(j)}(t_0), \end{aligned} \tag{7.12}$$

donde:

$$\mathtt{h}^{(j)}(t)\, \phi(x) = \int_\Omega \frac{\partial^j h}{\partial t^j}(t, x, \xi)\, \phi(\xi)\, d\xi. \tag{7.13}$$

Por consiguiente en el dominio original tenemos:

$$y_h(t, x) = -\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} \int_\Omega \frac{\partial^{k-1} h}{\partial t^{k-1}}(t, x, \xi)\, A_{k+j}\, y_p^{(j)}(t_0, \xi)\, d\xi. \tag{7.14}$$

De esta expresión deducimos que empleando las condiciones iniciales de una solución no homogénea $y_p(t,x)$, la solución homogénea $y_h(t,x)$ queda determinada usando la respuesta impulso funcional $\boldsymbol{h}(t)$.

Por lo tanto, el cálculo de la respuesta forzada se reduce a la obtención de la respuesta particular $\mathtt{y}_p(t)$, la cual se expresa como sigue:

$$\mathtt{y}(t) = \int_{t_0}^{t} \mathtt{h}(t-\tau)\, \mathtt{f}(\tau)\, d\tau = y_p(t) - \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=1}^{N-j} h^{(k-1)}(t-t_0)\, A_{k+j}\, \mathtt{y}_p^{(j)}(t_0) \tag{7.15}$$

donde se observa la descomposición de la convolución.

A continuación a través de un modelo de una viga fija apoyada sujeta a perturbación oscilatoria en el tiempo mostramos la descomposición de la respuesta forzada para sistemas distribuidos.

7.2. Modelo de una viga de Euler-Bernoulli con fuerza axial

En las formulaciones de las teorías de estructuras clásicas para vigas las descripciones geométricas son simplificadas a una dimensión (longitud), una propiedad de la sección transversal (área o momento de inercia) y una propiedad constitutiva (Young o cizallamiento), para mayores detalles véase [8]. Para el análisis infinitesimal de vigas isotrópicas, esto es, que presentan las mismas propiedades físicas, se considera en la presente tesis que, cualquiera que sean las direcciones de propagación de los fenómenos que inciden sobre la viga, se van a despreciar las fuerzas de cizallamiento y de inercia de rotación, esto es, se va seguir el modelo de Euler-Bernoulli.

La teoría de Euler-Bernoulli considera un campo de desplazamiento en el que cualquier sección transversal de la viga permanece siempre plana, con la misma forma y perpendicular al eje de la misma, esto es, la curvatura es proporcional al momento.

El modelo matemático para una viga flexible sometida a la acción de una fuerza axial constante que interactúa con los desplazamientos laterales, de acuerdo a la teoría de Euler-Bernoulli, está dado por la siguiente expresión:

$$\rho\, A\, \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + E\, I\, \frac{\partial^4 y(t,x)}{\partial x^4} + N\, \frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial x^2} = F(t,x) \tag{7.16}$$

que corresponde a una ecuación diferencial evolutiva de segundo orden con respecto al tiempo y de cuarto orden con respecto al espacio, sujeta a las condiciones iniciales:

$$y(0,x) = y_0(x) \quad \text{y} \quad y_t(0,x) = y_0'(x). \tag{7.17}$$

Donde A es el área transversal de la viga, E es el módulo de Young, I es el momento de Inercia del área de la sección transversal, N es la fuerza axial, ρ es la densidad.

En la figura (7.1) se presenta un viga con condiciones de frontera fija-libre, que satisface el modelo de Euler-Bernoulli. Para la deducción del modelo véase [19], También se puede encontrar una breve descripción en los trabajos de [30] y [15] .

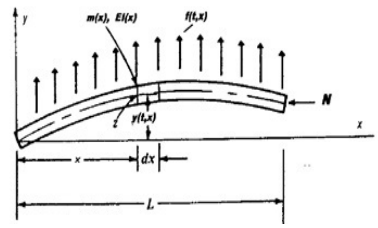

Figura 7.1: Viga fija libre bajo la acción de una fuerza axial N

Las condiciones de frontera del modelo se pueden escribir de forma genérica como sigue:

$$\begin{aligned} B_j(y) &= \alpha_{1j} y(t,0) + \alpha_{2j} y_x(t,0) + \alpha_{3j} y_{xx}(t,0) + \alpha_{4j} y_{xxx}(t,0) + \\ &\quad \beta_{1j} y(t,L) + \beta_{2j} y_x(t,L) + \beta_{3j} y_{xx}(t,L) + \beta_{4j} y_{xxx}(t,L) \text{ para } j = 1,\dots,4 \end{aligned} \tag{7.18}$$

de manera similar de forma matricial se puede expresar por $\mathbf{B}\mathcal{Y} = \mathbf{0}$, donde:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} & \alpha_{41} & \beta_{11} & \beta_{21} & \beta_{31} & \beta_{41} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} & \alpha_{42} & \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{32} & \beta_{42} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} & \alpha_{43} & \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} & \beta_{43} \\ \alpha_{14} & \alpha_{24} & \alpha_{34} & \alpha_{44} & \beta_{14} & \beta_{24} & \beta_{34} & \beta_{44} \end{bmatrix} \text{ y } \mathcal{Y} = \begin{bmatrix} y(t,0) \\ y_x(t,0) \\ y_{xx}(t,0) \\ y_{xxx}(t,0) \\ y(t,L) \\ y_x(t,L) \\ y_{xx}(t,L) \\ y_{xxx}(t,L) \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

7.2.1. Cálculo modal

Asumiendo que la fuerza externa ($F(t,x) = 0$) es nula obtenemos que la solución del problema corresponde a la vibración libre del sistema.

El método espectral nos proporciona soluciones del tipo oscilatorio de la forma:

$$y(t,x) = e^{i\omega t}\,\phi(x) \tag{7.20}$$

a $\phi(x)$ se le denomina *modo* o *autofunción asociada al autovalor* $\lambda = i\omega$.

Estas soluciones también se pueden representar como sigue:

$$y(t,x) = [a\cos(\omega t) + b\,\mathrm{sen}(\omega t)]\,\phi(x). \tag{7.21}$$

Sustituyendo la expresión oscilatoria (7.20) en la ecuación homogénea asociada a (7.16) se obtiene:

$$\mathcal{M}\,\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + \mathcal{K}y(t,x) = 0, \tag{7.22}$$

donde:

$$\mathcal{M} = \rho A \mathcal{I}, \tag{7.23}$$

es un operador constante, $\mathcal{I}$ denota a la identidad, además:

$$\mathcal{K} = E\,I\,\frac{d^4}{dx^4} + N\,\frac{d^2}{dx^2}, \tag{7.24}$$

es un operador diferencial lineal espacial de cuarto orden, que actúa sobre funciones que satisfacen las condiciones de frontera (7.18), se obtiene:

$$\mathcal{K}\,\phi(x) - \mathcal{M}\,\omega^2\,\phi(x) = 0. \tag{7.25}$$

A partir de los operadores diferenciales descrito en (7.23) y (7.24) se obtiene la ecuación modal del problema:

$$\phi^{(iv)}(x) + p^2\phi^{(ii)}(x) - q^4\,\phi(x) = 0, \tag{7.26}$$

donde:

$$p^2 = \frac{N}{E\,I} \quad \text{y} \quad q^4 = \frac{\rho\,A\,\omega^2}{E\,I} \tag{7.27}$$

y con condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} B_j(y) \;=\; & \alpha_{1j}\phi(0) + \alpha_{2j}\phi'(0) + \alpha_{3j}\phi''(0) + \alpha_{4j}\phi'''(0) + \\ & \beta_{1j}\phi(L) + \beta_{2j}\phi'(L) + \beta_{3j}\phi''(L) + \beta_{4j}\phi'''(L) \text{ para } j = 1,\ldots,4. \end{aligned} \tag{7.28}$$

La solución de la ecuación diferencial homogénea (7.26) se expresa como la siguiente combinación lineal:

$$\phi(x) = c_1\,\phi_1(x) + c_2\,\phi_2(x) + c_3\,\phi_3(x) + c_4\,\phi_4(x) = \Phi\,c, \tag{7.29}$$

donde las columnas de la matriz $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3 \ \phi_4]$ forman una base de soluciones de (7.26) y c corresponde al vector de variables. Para la solución del problema se usa la base espectral o la base dinámica.

En el presente trabajo de tesis se considera el uso de la base dinámica la cual es generada a partir de la respuesta impulso o solución dinámica espacial $h(x)$ y de sus derivadas hasta el tercer orden.

Por definición, se tiene que $h(x)$ satisface el problema:

$$h^{(iv)}(x) + p^2 h^{(ii)}(x) - q^4\, h(x) = 0, \tag{7.30}$$

con las condiciones iniciales:

$$h(0) = 0, h'(0) = 0, h''(0) = 0, h'''(0) = 1. \tag{7.31}$$

Por lo tanto la respuesta impulso del sistema esta dada por:

$$h(x) = \frac{\delta\ \mathrm{senh}(\varepsilon\, x) - \varepsilon\ \mathrm{sen}(\delta\, x)}{\delta\, \varepsilon\, (\varepsilon^2 + \delta^2)} \tag{7.32}$$

donde los parámetros ε y δ se originan a partir del cálculo de las raíces del siguiente polinomio característico asociado al sistema como sigue:

$$P(\lambda) = \lambda^4 + p^2\, \lambda^2 - q^4, \tag{7.33}$$

cuyas raíces proporcionan los autovalores λ, dados por:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\delta \quad \text{y} \quad \lambda_{3,4} = \pm\varepsilon, \tag{7.34}$$

donde:

$$\delta = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} + \frac{p^2}{2}} \quad \text{y} \quad \varepsilon = \sqrt{\sqrt{q^4 + \frac{p^4}{4}} - \frac{p^2}{2}}. \tag{7.35}$$

A partir de los parámetros del problema obtenemos las frecuencias de los modos de vibración, la cuales se expresan de la siguiente manera:

$$(\omega_n)_m = q_m^2 \sqrt{\frac{E\, I}{\rho\, A}}, \text{ para } m = 1, 2, \ldots. \tag{7.36}$$

Por lo tanto los elementos de la base dinámica Φ_D se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcccl} \phi_1(x) & = & h(x) & = & \dfrac{\delta \ \mathrm{senh}(\varepsilon\, x) - \varepsilon \ \mathrm{sen}(\delta\, x)}{\delta\, \varepsilon\, (\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_2(x) & = & h'(x) & = & \dfrac{\cosh(\varepsilon\, x) - \cos(\delta\, x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_3(x) & = & h''(x) & = & \dfrac{\varepsilon\, \mathrm{senh}(\varepsilon\, x) + \delta\, \mathrm{sen}(\delta\, x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_4(x) & = & h'''(x) & = & \dfrac{\varepsilon^2 \cosh(\varepsilon\, x) + \delta^2 \cos(\delta\, x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \end{array} . \tag{7.37}$$

Por otro lado los elementos de la base normalizada Φ_{DN} son obtenidos a partir de la expresión:

$$h_j(x) = \sum_{i=0}^{N-j-1} h^{(i)}(x) a_{j+1+i} \text{ para } j = 0, \ldots, N-1, \tag{7.38}$$

donde los a_k corresponden a los coeficientes de la ecuación del problema. De esta manera, los elementos de la base normalizada están dados por:

$$\begin{array}{rcl} h_0(x) & = & p^2\, h'(x) + h'''(x) \\ h_1(x) & = & p^2\, h(x) + h''(x) \\ h_2(x) & = & h'(x) \\ h_3(x) & = & h(x) \end{array} . \tag{7.39}$$

Reemplazando las expresiones (7.37) en (7.39), se obtiene:

$$\begin{array}{rcccl} \phi_{1N}(x) & = & h_0(x) & = & \dfrac{\delta^2 \cosh(\varepsilon\, x) + \varepsilon^2 \cos(\delta\, x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_{2N}(x) & = & h_1(x) & = & \dfrac{\delta^3 \ \mathrm{senh}(\varepsilon\, x) + \varepsilon^3 \ \mathrm{sen}(\delta\, x)}{\delta\, \varepsilon\, (\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_{3N}(x) & = & h_2(x) & = & \dfrac{\cosh(\varepsilon\, x) - \cos(\delta\, x)}{(\varepsilon^2 + \delta^2)} \\ \phi_{4N}(x) & = & h_3(x) & = & \dfrac{\delta\, \mathrm{senh}(\varepsilon\, x) - \varepsilon\, \mathrm{sen}(\delta\, x)}{\delta\, \varepsilon\, (\varepsilon^2 + \delta^2)} \end{array} . \tag{7.40}$$

Los coeficientes c_j de la solución (7.29) se determinan resolviendo el sistema lineal obtenido de las condiciones de frontera del problema espacial (7.26), denominado problema modal algebraico, denotado por:

$$\mathtt{U}\ c = 0. \tag{7.41}$$

Donde $U = \mathbf{B}\Upsilon$, siendo $\mathbf{B}$ la matriz de los coeficientes de las condiciones de frontera (7.19) y Υ la matriz de la base, definida por:

$$\Upsilon = \begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) \\ h'''(0) & h^{(iv)}(0) & h^{(v)}(0) & h^{(vi)}(0) \\ h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h'(L) & h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \\ h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) & h^{(vi)}(L) \end{bmatrix} \text{ y } c = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix}. \tag{7.42}$$

Finalmente las raíces ω se determinan a partir de la ecuación característica

$$\Delta = \det(\mathtt{U}) = 0.$$

7.2.2. Cálculo de la función de Green espacial

La ecuación (7.16) se puede expresar de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}\,\frac{\partial^2 y(t,x)}{\partial t^2} + \mathcal{K}y(t,x) = F(t,x), \tag{7.43}$$

donde:

$$\mathcal{M} = \rho A \mathcal{I}, \tag{7.44}$$

es un operador constante, $\mathcal{I}$ denota al operador identidad y:

$$\mathcal{K} = E\,I\,\frac{d^4}{dx^4} + N\,\frac{d^2}{dx^2}, \tag{7.45}$$

es un operador diferencial lineal espacial de cuarto orden, que actúa sobre funciones que satisfacen las condiciones de frontera (7.18).

Considerando una entrada de tipo armónica:

$$F(t,x) = e^{i\omega t} f(x),$$

tenemos la respuesta en frecuencia de la forma:

$$y(t,x) = e^{i\omega t}\phi(x), \tag{7.46}$$

donde $\phi(x)$ satisface el problema de frontera espacial:

$$\mathcal{K}\,\phi(x) - \mathcal{M}\omega^2\,\phi(x) = f(x), \tag{7.47}$$

es decir, el problema de frontera no homogéneo de la forma:

$$\begin{array}{lcl} \phi^{(iv)}(x) + p^2\,\phi''(x) - q^4\,\phi(x) = f(x), & & \\ B_j(y) & = & \alpha_{1j}\phi(0) + \alpha_{2j}\phi'(0) + \alpha_{3j}\phi''(0) + \alpha_{4j}\phi'''(0) + \\ & & \beta_{1j}\phi(L) + \beta_{2j}\phi'(L) + \beta_{3j}\phi''(L) + \beta_{4j}\phi'''(L) \text{ para } j = 1,\ldots,4. \end{array} \tag{7.48}$$

Cuya solución es expresada en términos de la siguiente integral:

$$\phi(x) = [\mathcal{K} - \mathcal{M}\omega^2]^{-1} f(x) = \int_0^L G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi, \tag{7.49}$$

la función de Green espacial $G(x,\xi)$ está dada por:

$$G(x,\xi) = \frac{H(x,\xi)}{\Delta}, \tag{7.50}$$

$$H(x,\xi) = \det\begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & g(x,\xi) \\ B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) & B_1(g) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) & B_2(g) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) & B_3(g) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) & B_4(g) \end{bmatrix}, \tag{7.51}$$

$$\Delta = \det\begin{bmatrix} B_1(h_0) & B_1(h_1) & B_1(h_2) & B_1(h_3) \\ B_2(h_0) & B_2(h_1) & B_2(h_2) & B_2(h_3) \\ B_3(h_0) & B_3(h_1) & B_3(h_2) & B_3(h_3) \\ B_4(h_0) & B_4(h_1) & B_4(h_2) & B_4(h_3) \end{bmatrix} \tag{7.52}$$

y

$$g(x,\xi) = \frac{\text{sgn }(x-\xi)}{2W(\xi)} \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) \\ h_0''(\xi) & h_1''(\xi) & h_2''(\xi) & h_3''(\xi) \\ h_0'(\xi) & h_1'(\xi) & h_2'(\xi) & h_3'(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}, \tag{7.53}$$

donde:

$$W(\xi) = \det \begin{bmatrix} h_0'''(\xi) & h_1'''(\xi) & h_2'''(\xi) & h_3'''(\xi) \\ h_0''(\xi) & h_1''(\xi) & h_2''(\xi) & h_3''(\xi) \\ h_0'(\xi) & h_1'(\xi) & h_2'(\xi) & h_3'(\xi) \\ h_0(\xi) & h_1(\xi) & h_2(\xi) & h_3(\xi) \end{bmatrix}. \tag{7.54}$$

A partir de (7.50), se obtienen diferentes expresiones para la función de Green, pues ella está condicionada a las condiciones de frontera del problema. Para mayores detalles véase las referencias [25], [2], [23].

7.2.3. Descomposición de la respuesta forzada

Por lo anteriormente desarrollado se puede establecer que la respuesta forzada del sistema se puede descomponer de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} y(t,x) &= y_p(t,x) + y_h(t,x) \\ &= y_p(t,x) - \int_0^L \left[h(t,x,\xi)\,\rho\,A\left(\frac{\partial}{\partial t} y_p\right)(0,\xi) + \rho\,A\,y_p(0,\xi)\left(\frac{\partial}{\partial t} h\right)(t,x,\xi)\right] d\xi, \end{aligned} \tag{7.55}$$

donde $y_h(t,x)$ es la respuesta libre inducida por la respuesta permanente $y_p(t,x)$.

En la próxima subsección presentamos simulaciones numéricas para una viga fija apoyada, en el que la respuesta impulso expresada de forma modal [15], como sigue:

$$h(t,x,\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(\omega_n\,t)}{\omega_n}\,\frac{1}{m}\left(\frac{X_n(\xi)\,X_n(x)}{\|X_n\|^2}\right), \tag{7.56}$$

donde $\|X_n\|$ es la norma integral cuadrática del modo X_n, obtenido al resolver la ecuación modal algebraica (7.41).

Considerando entradas del tipo:

$$F(t,x) = e^{i\omega t}\, f(x),$$

en el sistema distribuido (7.16), a partir de (7.46) y (7.49), se tiene que la respuesta permanente la podemos expresar como:

$$y_p(t,x) = e^{i\omega t} \int_0^L G(x,\eta)\, f(\eta)\, d\eta. \tag{7.57}$$

Finalmente la respuesta forzada del sistema es:

$$\begin{aligned} y(t,x) \;\; &= \;\; e^{i\omega t} \int_0^L G(x,\eta)\, f(\eta)\, d\eta - \\ & \rho\, A \left[\int_0^L \left(i\omega\, h(t,x,\xi) + \frac{\partial}{\partial t} h(t,x,\xi) \right) \left(\int_0^L G(\xi,\eta)\, f(\eta)\, d\eta \right) d\xi \right] \end{aligned} \tag{7.58}$$

Descomposición de la respuesta forzada para una viga fija apoyada

En esta sección consideramos condiciones de frontera de tipo fija apoyada para una viga de Euler-Bernoulli con fuerza axial descrita por la ecuación (7.16), conforme a lo mostrado en la figura (7.2):

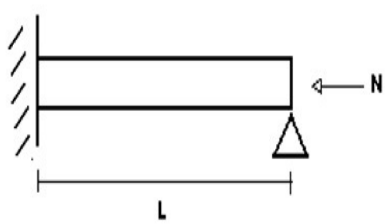

Figura 7.2: Viga fija apoyada

Para una viga de este tipo tenemos las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0, & \phi'(0) = 0 \\ \phi(L) = 0, & \phi''(L) = 0 \end{cases} \tag{7.59}$$

y la ecuación modal algebraica (7.41), `U c` $= 0$, es dada por:

$$\begin{bmatrix} h(0) & h'(0) & h''(0) & h'''(0) \\ h'(0) & h''(0) & h'''(0) & h^{(iv)}(0) \\ h(L) & h'(L) & h''(L) & h'''(L) \\ h''(L) & h'''(L) & h^{(iv)}(L) & h^{(v)}(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sustituyendo $h(x)$ y sus derivadas en $x = 0$ y $x = L$, el sistema de cuatro ecuaciones se simplifica a un sistema de dos ecuaciones, en este caso, al obtenerse $c_3 = c_4 = 0$. Luego, la ecuación modal se reduce a:

$$\begin{bmatrix} h(L) & h'(L) \\ h''(L) & h'''(L) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

De esta expresión se tiene que la ecuación característica es:

$$\Delta = h(L)\, h'''(L) - h'(L)\, h''(L) = 0. \tag{7.60}$$

Resolviendo la ecuación modal para las raíces de (7.60), se tiene que la forma de los modos para estas condiciones de frontera es:

$$X(x) = h'(x) + \sigma\, h(x), \quad \text{donde } \sigma = -\frac{h'''(L)}{h''(L)}. \tag{7.61}$$

Empleando la base dinámica normalizada se tiene que la expresión de los modos se escribe como sigue:

$$X(x) = h_2(x) + \sigma\, h_3(x), \quad \text{donde } \sigma = -\frac{h_0(L) - p^2 h_2(L)}{h_1(L) - p^2 h_3(L)}. \tag{7.62}$$

Reemplazando:

$$h(x) = \frac{\delta\, \sinh(\varepsilon\, x) - \varepsilon\, \operatorname{sen}(\delta\, x)}{\delta\, \varepsilon\, (\varepsilon^2 + \delta^2)},$$

en (7.60), obtenemos la ecuación característica correspondiente:

$$\sqrt{\varepsilon^2 + p^2}\, \tanh(\varepsilon L) - \varepsilon \tan(\sqrt{\varepsilon^2 + p^2} L) = 0. \tag{7.63}$$

A partir de (7.63) se obtienen los valores de ε y por consiguiente se determinan los parámetros q y δ descritos como:

$$q = \sqrt{\sqrt{\left(\varepsilon^2 + \frac{p^2}{2}\right)^2 - \frac{p^4}{4}}} \quad \text{y} \quad \delta^2 = \varepsilon^2 + p^2.$$

Por lo tanto las frecuencias naturales, ω_n, del sistema son obtenidas a partir de la siguiente expresión:

$$q^4 = \frac{\rho\, A\, \omega_n^2}{E\, I},$$

donde $q = q(\varepsilon)$ para $\varepsilon = \varepsilon_m$ y $m = 1, 2, \ldots$.

Considerando la la base dinámica normalizada $\Phi_{DN} = [h_0, h_1, h_2, h_3]$ en la función de Green dada en la expresión (7.50) obtenemos:

$$H(x,\xi) = \det \begin{bmatrix} h_0(x) & h_1(x) & h_2(x) & h_3(x) & g(x,\xi) \\ 1 & 0 & 0 & 0 & g(0,\xi) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & g_x(0,\xi) \\ h_0(L) & h_1(L) & h_2(L) & h_3(L) & g(L,\xi) \\ h_0''(L) & h_1''(L) & h_2''(L) & h_3''(L) & g_{xx}(L,\xi) \end{bmatrix}, \tag{7.64}$$

y

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ h_0(L) & h_1(L) & h_2(L) & h_3(L) \\ h_0''(L) & h_1''(L) & h_2''(L) & h_3''(L) \end{bmatrix}. \tag{7.65}$$

Por lo tanto estas expresiones se hacen realizables empleando la base dinámica normalizada.

La función $g(x,\xi)$ calculada a través de la expresión (7.53) es:

$$g(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(x-\xi)) - \delta\,\mathrm{senh}(\varepsilon(x-\xi))}{\varepsilon\,\delta(\delta^2+\varepsilon^2)}, & x < \xi \\ -\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(x-\xi)) - \delta\,\mathrm{senh}(\varepsilon(x-\xi))}{\varepsilon\,\delta(\delta^2+\varepsilon^2)}, & \xi < x \end{array} \right. . \tag{7.66}$$

Finalmente, calculando las expresiones (7.64) y (7.65) se obtiene la función de Green espacial para una viga fija apoyada, denotada por:

$$G(x,\xi) = \left\{ \begin{array}{ll} G_1(x,\xi), & 0 \le x \le \xi \\ G_2(x,\xi), & \xi < x \le L, \end{array} \right. \tag{7.67}$$

donde:

$$\begin{aligned}
G_1(x,\xi) &= -\left[\frac{-\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-\xi))\cos(\delta x)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)+\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-\xi))\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-x))}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\right.\\
&\quad+\frac{\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\cosh(\varepsilon x)\,\mathrm{senh}(\varepsilon(\xi-L))+\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-x))\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-\xi))}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\\
&\quad\left.+\frac{\delta^2\cos(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon x)\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-\xi))+\varepsilon^2\,\mathrm{sen}(\delta x)\,\mathrm{sen}(\delta(L-\xi))\cosh(\varepsilon L)}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\right]
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
G_2(x,\xi) &= -\left[\frac{-\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-x))\cos(\delta\xi)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)+\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-x))\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-\xi))}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\right.\\
&\quad+\frac{\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\cosh(\varepsilon\xi)\,\mathrm{senh}(\varepsilon(x-L))+\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta(L-\xi))\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-x))}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\\
&\quad\left.+\frac{\delta^2\cos(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon\xi)\,\mathrm{senh}(\varepsilon(L-x))+\varepsilon^2\,\mathrm{sen}(\delta\xi)\,\mathrm{sen}(\delta(L-x))\cosh(\varepsilon L)}{\delta^2\varepsilon^2\left[-\delta^2+\varepsilon^2+(\delta^2-\varepsilon^2)\cos(\delta L)\cosh(\varepsilon L)-2\delta\varepsilon\,\mathrm{sen}(\delta L)\,\mathrm{senh}(\varepsilon L)\right]}\right].
\end{aligned}$$

En la simulación numérica se ha considerado una entrada continua por intervalos, en la parte espacial, es decir:

$$f(x)=\begin{cases} f_1(x), & 0<x<L/2 \\ f_2(x), & L/2<x<L \end{cases}. \tag{7.68}$$

De este modo la respuesta espacial permanente puede ser escrita de forma adecuada:

$$\phi(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_0^x G_2(x,\xi)f_1(\xi)\,d\xi+\int_x^{\frac{L}{2}} G_1(x,\xi)f_1(\xi)\,d\xi+\int_{\frac{L}{2}}^L G_1(x,\xi)f_2(\xi)\,d\xi, & 0\le x\le L/2 \\ \displaystyle\int_0^{\frac{L}{2}} G_2(x,\xi)f_1(\xi)\,d\xi+\int_{\frac{L}{2}}^x G_2(x,\xi)f_2(\xi)\,d\xi+\int_x^L G_1(x,\xi)f_2(\xi)\,d\xi, & L/2<x\le L \end{cases}. \tag{7.69}$$

7.2.4. Simulación numérica

Los valores numéricos de los parámetros usados en las simulaciones se encuentran en el cuadro 7.1.

L	E
$1\ m$	$8000\ N/m^2$
I	ρ
$1\ m^4$	$300\ 000\ Kg/m^3$
A	N
$0.01\ m^2$	$16000\ N$

Cuadro 7.1: Valores de los parámetros empleados en la simulación del modelo de viga

Para estos valores, se han calculado las raíces ε_m, para $m = 1, \ldots, 5$, de la ecuación característica (7.63) y se han determinado los correspondientes valores de q_m, δ_m y $(\omega_n)_m$, los cuales se encuentran en el cuadro 7.2.

m	ε_m	q_m	$(\omega_n)_m$	δ_m
1	3.699351189	3.827677072	23.92516533	3.960454421
2	6.936058637	7.007048374	80.17788531	7.078764682
3	10.11664554	10.16571093	168.7562547	10.21501429
4	13.27949641	13.31698936	289.5986091	13.35458816
5	16.43447034	16.46481008	442.6880688	16.49520583

Cuadro 7.2: Valores calculados para los parámetros ε, q, ω_n y δ

También se ha calculado los cinco primeros modos de vibración del sistema, a partir de (7.62), es decir usando:

$$X_m(x) = h'_{[m]}(x) + \sigma_m\, h_{[m]}(x),\ \sigma_m = -\frac{h'''_{[m]}(L)}{h''_{[m]}(L)}, \tag{7.70}$$

donde $h_{[m]}(x)$ es la solución dinámica $h(x)$, obtenida a partir de la resolución del problema de valor inicial (7.30)-(7.31), correspondiente a cada parámetro

q_m asociado a la frecuencia natural $(\omega_n)_m$, resultando:

$$h_{[m]}(x) = \frac{\delta_m \operatorname{senh}(\varepsilon_m\, x) - \varepsilon_m \operatorname{sen}(\delta_m\, x)}{\delta_m\, \varepsilon_m\, (\delta_m^2 + \varepsilon_m^2)}, \tag{7.71}$$

Los modos se presentan en la figura (7.3).

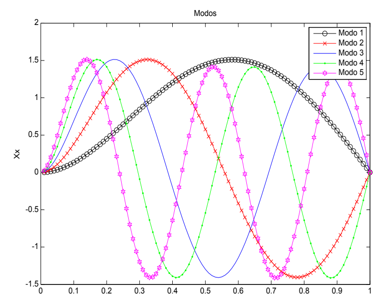

Figura 7.3: Cinco primeros modos del sistema

Entrada triangular en el espacio

Vamos a considerar la entrada del sistema oscilatoria en el tiempo y triangular en el espacio, expresada por:

$$F(t,x) = \begin{cases} \dfrac{5x}{2}\ \operatorname{sen}(\omega t), & 0 < x < 1/2 \\ \left(\dfrac{5}{2} - \dfrac{5x}{2}\right) \operatorname{sen}(\omega t), & 1/2 < x < 1 \end{cases} \tag{7.72}$$

y para la frecuencia ω igual a 289.5986, cuyo valor es cercano de la cuarta frecuencia natural del sistema

La función de Green espacial del problema para las frecuencias consideradas se presentan en la figura (7.4):

En la Figura (7.5) presenta la parte espacial de la entrada $f(x)$.

En las figuras (7.6) la parte espacial de la respuesta permanente del sistema $\phi(x)$, para la frecuencia de entrada considerada.

En la figura (7.7) graficamos la excitación.

En la figura (7.8) graficamos la respuesta permanente:

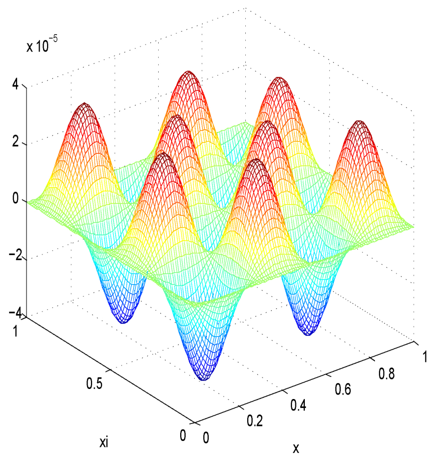

Figura 7.4: Función de Green espacial (frecuencia = 289.5986)

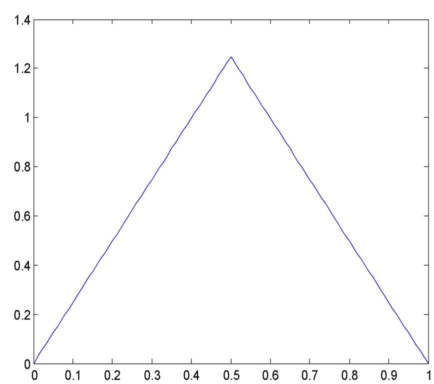

Figura 7.5: Excitación - parte espacial

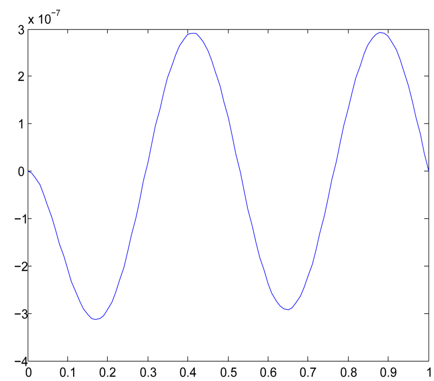

Figura 7.6: Respuesta permanente - parte espacial (frecuencia = 289.5986)

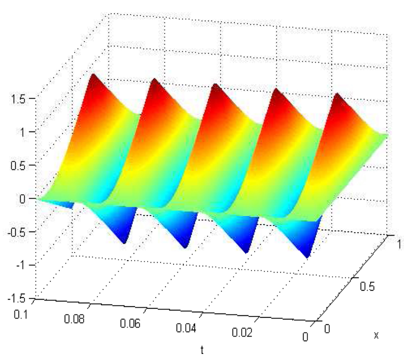

Figura 7.7: Excitación

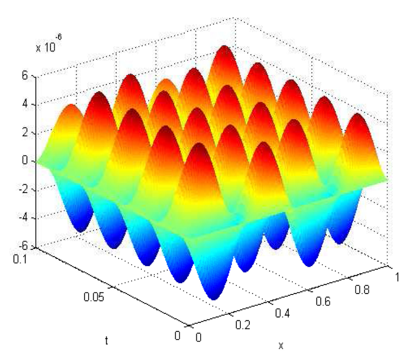

Figura 7.8: Respuesta Permanente

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo se desarrolla una plataforma unificada para el estudio de sistemas concentrados, discretos y distribuidos, en términos de la respuesta impulso. Una ventaja de esta metodología es que, diferentes sistemas evolutivos y de orden arbitrario se pueden tratar sistemáticamente de una manera compacta, simple y conveniente para la simulación numérica y procesamiento de datos. El uso de la respuesta impulso permite observar la introducción transitoria en la respuesta forzada, debido a la excitación en el sistema.

La metodología desarrollada fue probada con diversas aplicaciones para obtener las respuestas dinámicas de los sistemas, donde estos cálculos fueron realizados directamente en el espacio físico del problema, sin transformarlo en un sistema de primer orden. Cabe resaltar que, la reducción de un sistema de n-ésimo orden a un sistema de primer orden, muchas veces, ocasiona pérdidas importantes como la simetría o la positividad de los coeficientes del sistema. Pero, como los sistemas de primer orden poseen muchas técnicas para su estudio, ellos merecen especial atención.

El uso de la respuesta impulso ha sido fundamental en la integración simbólica de sistemas de tiempo continuo con excitaciones lineales por intervalos. Los resultados de la descomposición de la respuesta dinámica en cargas armónicas y no armónicas, fueron expuestos detalladamente. Para sistemas distribuidos, se considero el modelo de una viga Euler-Bernoulli con fuerza axial, con entrada oscilatoria en el tiempo y entrada triangular en el espacio. La función espacial de Green fue empleada para la obtención de la distribución de amplitud espacial. Se registro la introducción de las contribuciones libres debido a cada cambio de intervalo en la entrada.

Se consideraron sistemas discretos de primer orden, en particular, por su uso en la dinámica estructural a través del método de las matrices de transferencia. Se desarrollaron sistemas discretos de orden superior, pues no se encontraron muchos trabajos con un enfoque directo, sin utilizarse la reducción del espacio de estado. Muchos de los esquemas iterativos utilizados, para la integración numérica de sistemas no lineales para el estado permanente, se consideran condiciones iniciales nulas, esto es, se calcula teóricamente una respuesta de tipo forzada. Sin embargo no se discute sobre como es que la no linealidad influye en la introducción de respuestas libre.

La metodología desarrollada nos permite en el futuro continuar el trabajo, a través del estudio de sistemas distribuidos con amortiguamiento, del estudio de problemas de control óptimo en vibraciones, sin el uso del espacio de estado, realizar simulaciones numéricas con sistemas que poseen una geometría simétrica plana y espacial y considerarse además sistemas concentrados y discretos singulares, los cuales son de interés para problemas con restricciones tales como los encontrados en el área de la robótica.

Bibliografía

[1] R. Benazic, *Tópicos de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*, Universidad Nacional de Ingeniería, Lima, 2007.

[2] A. G. Butkovsky, *Structural Theory of Distributed Systems*, John Wiley, New York, 1983.

[3] J. R. Claeyssen, *On predicting the response of non-conservative linear vibrating systems by using the dynamical matrix solution*, Journal of Sound and Vibration, 140 (1990), pp. 73–84.

[4] ——, *The matrix impulse response in vibrating systems*, Nonlinear Dynamics, Chaos, Control and their Applications to Engineering Sciences, 2 (1999), pp. 122–135.

[5] J. R. Claeyssen, L. D. Chiwiacowsky, and G. S. Suazo, *The impulse response in the symbolic computating of modes for beams and plates*, Applied Numerical Mathematics, 40 (2002), pp. 119–135.

[6] J. R. Claeyssen and V. Shuckman, *On the minimal extension on c_0-semigroup for second-order damped equations*, Mathematics Analysis and Applications, 211 (1997), pp. 213–222.

[7] J. R. Claeyssen and T. Tsukazan, *Dynamic solutions of linear matrix differential equations*, Quarterly of Applied Mathematics, 48 (1990), pp. 169–179.

[8] R. Clough and J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, New York, 1993.

[9] R. D. Copetti, *Sistemas concentrados e Distribuídos através da Análise Modal Adjunta*, PhD thesis, Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2002.

[10] S. Costa, *Problemas de contorno de ordem superior e cálculo da função de green*, 2001.

[11] J. R. Espinoza and D. G. Sbárbaro, *Apuntes Sistemas Lineales Dinámicos - 543 214*, 2018.

[12] C. R. Fuller, S. J. Elliot, and P. A. Nelson, *Active Control of Vibration*, Academic Press, New York, 1997.

[13] R. A. Gable and R. A. Roberts, *Signals and Linear Systems*, Wiley, 1987.

[14] E. Gallicchio, *Sistemas Vibratórios: Um Enfoque através da Solução Dinâmica e a Matriz de Transferência*, PhD thesis, Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 1999.

[15] M. K. Giareta, *Vibrações forçadas com força axial num modelo de euler-bernoulli para vigas*, 2001.

[16] G. H. Golub and C. F. V. Loan, *Matrix Computations*, John Hopkins University Press, Baltimore, 1996.

[17] L. A. Howland, *A type of homogeneous linear diferential equation*, in Annals of Mathematics, Waterloo,Canada, 1911.

[18] H. P. Hsu, *Signals and systems*, McGraw-Hill Education, 2014.

[19] D. Inman, *Engineering Vibration*, Prentice Hall, New Jersey, 1994.

[20] T. Kailath, *Linear System*, Prentice Hall, New Jersey, 1980.

[21] H. Leipholz, *Stability of Elastic Systems*, Sijthoff & Noordhoff, 1980.

[22] L. Meirovitch, *Principles and Techniques of Vibrations*, Prentice Hall, New Jersey, 1997.

[23] K. S. Miller, *Linear Differential Equations in the Real Domain*, Routledge, London, 1963.

[24] C. Moler and C. V. Loan, *Nineteen dubious ways of computing the exponential of a matrix*, SIAM Review, (1978).

[25] M. A. Naimark, *Linear Differential Operators*, Frederick Ungar Pub., New York, 1967.

[26] D. E. Newland, *Mechanical Vibration Analysis and Computation*, Longman Scientific & Technical, London, 1989.

[27] K. Ogata, *Engenharia de Controle Moderno*, Prentice-Hall do Brasil, Rio de Janeiro, 1998.

[28] Y. M. Ram and D. J. Inman, *Optimal control for vibrating systems*, Mechanical Systems and Signal Processing, 13 (1999), pp. 879–892.

[29] M. Sabri, *Functional Analysis II*, 2014.

[30] R. A. Soder, *Modos flexurais sob a influẽncia de uma força axial*, 2000.

[31] G. C. Suazo, *A resposta impulso em problemas vibratórios evolutivos e modais*, PhD thesis, Promec, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2000.

[32] J. Woodhouse, *Linear damping models for structural vibration*, Journal of Sound and Vibration, 215 (1998), pp. 547–569.

[33] B. Yang, *Vibration control of gyroscopic systems via direct velocity feedback*, Journal of Sound and Vibration, 175 (1994), pp. 525–534.

[34] W. Zheng and M. R. Kujath, *Extraction of transient signals from nonperiodic dynamic responses*, Journal Dynamic Systems, Measurement and Control, 117 (1995), pp. 270–276.