

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE INGENIERIA CIVIL
SECCION DE POST-GRADO**



**ANALISIS VIBRATORIO DE ESTRUCTURA
TIPO CAJON**

**TESIS PARA OPTAR EL GRADO DE MAGÍSTER E
CIE CIAS CO ME CIÓ E INGENIERÍA
ESTRUCTURAL**

ING. VIRGILIO ALEJANDRO PEÑA HARO

LIMA - PERÚ

1999

RESUMEN

Se estudia el comportamiento dinámico de una guitarra (estructura compuesta por una caja de resonancia y un mástil), modelándola con elementos finitos.

Una de las maderas con las que está hecha esta guitarra es la denominada “Pino Báltico”, para la cual se realizó unos ensayos en el laboratorio de estructuras con la finalidad de obtener sus constantes elásticas. Se comprueban los resultados, usando un método indirecto asistido por el ordenador.

Con el modelo de elementos finitos de la guitarra, se realizó un análisis estático, al que se le consideró las cargas producidas por la tensión de las cuerdas, y el peso del brazo; y luego el análisis dinámico, donde se obtuvo las formas de modo y sus respectivas frecuencias de vibración.

Finalmente, se realizaron ensayos en un laboratorio de acústica, con tres modelos de guitarra, para obtener los niveles de intensidad acústica. Con estos resultados se planteó una fórmula recursiva, que fue verificada con tres modelos de guitarra adicionales, verificando la confiabilidad de los resultados.

Se concluye que se puede diseñar los planos de construcción de una guitarra, con la certeza de que la respuesta acústica es la deseada.

ÍNDICE ANALÍTICO

RESUMEN(CASTELLANO).

RESUMEN(INGLES).

DEDICATORIA.

AGRADECIMIENTO.

ÍNDICE ANALÍTICO.

INTRODUCCIÓN (CASTELLANO).

CAPÍTULO 1 ANTECEDENTES. 1

1.1 Nobles Vibraciones 2
1.2 Voces Ancestrales. 5
1.3 La Guitarra. 11
1.4 Revisión Bibliográfica. 16
1.5 Objetivo de la Tesis. 18

CAPÍTULO 2 ANÁLISIS ESTÁTICO. 19

2.1 Estado General de Anisotropía en Medio Linealmente Elástico. 19
2.2 Medio Continuo Ortotrópico 23
2.3 Constantes Elásticas en General 28
2.3.1 Módulos de Elasticidad 30
2.3.2 Módulos de Young y Razones de Poisson 31
2.3.3 Módulos de Rigidez o de Corte³²
2.3.4 Determinación de las Características del Material: Módulos de Young, Corte y Poisson 33
2.4 Forma de la Función de Energía de Deformación 33
2.5 Determinación de Esfuerzos en un Cuerpo 36
2.6 Limitaciones de la Teoría Matemática de la Elasticidad 38

CAPÍTULO 3 ANÁLISIS DINÁMICO 40

3.1 Teoremas Generales 40
3.1.1 Ecuación Variacional del Movimiento 40
3.1.2 Problema General de Equilibrio 44
3.1.3 Problema General de las Vibraciones 45
3.2 Consideraciones Finales para Realizar un Análisis Dinámico Elástico 46

| | |
|------------------------------------------------------------------------------|-----|
| CAPÍTULO 7 APLICACIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑO DE UNA ESTRUCTURA TIPO CAJÓN | 120 |
| 7.1 Estructura Analizada | 121 |
| 7.2 Modelación de la Estructura | 121 |
| 7.3 Análisis Estático Realizado | 124 |
| 7.3.1 Determinación de las Fuerzas Producidas por las Cuerdas de la Guitarra | 125 |
| 7.3.2 Determinación de la Fuerza Producida por el Brazo de un Hombre | 125 |
| 7.3.3 Resultados Obtenidos | 126 |
| 7.3.3.1 Esfuerzos Existentes en la Estructura | 126 |
| 7.3.3.2 Desplazamientos en la Estructura | 128 |
| 7.4 Análisis Dinámico Realizado | 130 |
| 7.5 Análisis Acústico Realizado | 138 |
| 7.6 Efecto de la Madera de Borde | 143 |
| 7.7 Modelación de la tapa de la Guitarra | 147 |
| 7.8 Ensayos Experimentales Finales | 149 |
| 7.9 Consideraciones Finales | 152 |
| 8.0 Resumen | 153 |
| | |
| CAPÍTULO 8 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES | 155 |
| 8.1 Conclusiones. | 155 |
| 8.2 Recomendaciones. | 156 |
| | |
| BIBLIOGRAFÍA | |
| | |
| APÉNDICE 1 RESULTADOS DE EXPERIMENTOS | |
| APÉNDICE 2 GRAFICOS | |
| APÉNDICE 3 FORMAS DE MODO | |
| APÉNDICE 4 PLANOS | |

CAPÍTULO 4 MODELOS EXPERIMENTALES Y MÉTODO INDIRECTO

| | | |
|-------|-----------------------------------------------------------------|----|
| 4.1 | Método Clásico de Determinación de las Propiedades del Material | 50 |
| 4.2 | La Madera | 51 |
| 4.2.1 | Consideraciones Generales | 51 |
| 4.2.2 | Determinación Experimental de las Constantes Elásticas | 52 |
| 4.2.3 | Determinación Experimental de los Módulos de Young | 54 |
| 4.2.4 | Determinación de los Módulos de Rigidez o de Corte | 58 |
| 4.2.5 | Determinación de los Módulos de Poisson | 63 |
| 4.3 | Determinación de las Constantes Elásticas Virtualmente | 69 |
| 4.3.1 | Método Indirecto | 69 |
| 4.3.2 | Constantes Elásticas del Pino Báltico | 71 |
| 4.3.3 | Propiedades Físico-Mecánicas de otras Maderas | 71 |
| 5.0 | Resumen | 72 |

CAPÍTULO 5 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

| | | |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 5.1 | Elección del Método | 73 |
| 5.2 | El Método de los Elementos Finitos | 75 |
| 5.2.1 | Definición del Problema | 76 |
| 5.2.2 | Principio de Energía Mínima Potencial | 79 |
| 5.2.3 | Determinación de las Ecuaciones de Euler para el Funcional de Mínima Energía Potencial | 80 |
| 5.2.3.1 | Análisis Estático | 82 |
| 5.2.3.2 | Análisis Dinámico | 83 |
| 5.3 | Elemento Finito Tridimensional | 87 |
| 5.3.1 | Ecuaciones de Elasticidad | 87 |
| 5.3.2 | Función de Forma del Elemento Finito Tridimensional | 89 |
| 5.3.3 | Matriz de Rigidez | 90 |

CAPÍTULO 6 ANÁLISIS ACÚSTICO

| | | |
|--------|---------------------------------------|-----|
| 6.1 | Origen y Formación del Sonido | 92 |
| 6.1.1 | Movimiento Periódico | 92 |
| 6.1.2 | Movimiento Armónico | 93 |
| 6.1.3 | Formación y Propagación del Sonido | 95 |
| 6.1.4 | Velocidad del Sonido | 101 |
| 6.2 | Características del Sonido | 103 |
| 6.2.1 | Tono | 103 |
| 6.2.2 | Intensidad | 106 |
| 6.2.3 | Ondas | 108 |
| 6.2.4 | Intensidad Acústica | 111 |
| 6.2.5 | Impedancia Acústica Específica | 111 |
| 6.2.6 | Diferenciación de Frecuencias | 113 |
| 6.2.7 | Diferenciación de Intensidades | 113 |
| 6.2.8 | Diferenciación de Tiempos | 114 |
| 6.2.9 | El Decibelímetro | 115 |
| 6.2.10 | Unidades Sonoras | 115 |
| 6.2.11 | Decrecimiento Sonoro con la Distancia | 116 |
| 6.3 | Principio de Huygens | 117 |
| 7.0 | Resumen | 124 |

INTRODUCCIÓN.

El tema de la tesis es “Análisis Vibratorio de Estructura Tipo Cajón”, y analiza el comportamiento de esta estructura con aplicación al uso de madera como material de la misma, sujeta a sollicitaciones acústicas.

Cabe mencionar que la estructura a la que se refiere esta Tesis es una guitarra, estructura compuesta por una caja de resonancia (cajón), y un mástil.

Los objetivos de esta Tesis, son:

- Hallar los niveles de intensidad acústica bajo un mismo patrón de frecuencias y tensiones en una guitarra, y.
- Hallar las frecuencias de vibración natural que dan inicio a una sollicitación acústica.

Lo que se pretende modelar es una guitarra desarrollada en el Perú, haciendo uso del Método de los Elementos Finitos, y hallar el comportamiento estructural de los mismos, es decir, considerando a la guitarra como una estructura sometida a fuerzas externas, se puede hallar una distribución de esfuerzos para cada modelo; si se resuelve el problema de los valores propios, podemos hallar las frecuencias y modos de vibración naturales en la estructura. Si además, se realiza unos ensayos en un estudio de sonido que nos permita

hallar los niveles de intensidad acústica y frecuencias correspondientes a cada uno de los modelos de estudio, vamos a obtener lo que se desea: hallar la relación de la respuesta estructural con la respuesta acústica del instrumento. El gran inconveniente en este punto, radica en el altísimo costo de realizar estos ensayos en los laboratorios de estructuras, para hallar las propiedades elásticas; y de acústica para hallar los niveles de intensidad.

El Capítulo I Antecedentes a la Investigación hace una mención histórica del proceso de desarrollo cultural del hombre, ligándolo con el respectivo proceso tecnológico. El Capítulo II, Análisis Estático, condensa la teoría indispensable para realizar un análisis estático lineal en una determinada estructura. Aquí se presentan las ecuaciones generales que definen un material elástico anisotrópico. El Capítulo III, Análisis Dinámico, presenta el planteamiento y solución del problema de valores característicos. El Capítulo IV, Modelos Experimentales y Método Indirecto, presenta la aplicación de la teoría recopilada en los capítulos anteriores, para la determinación de las constantes elásticas de la madera llamada Pino Báltico en forma experimental. Se concluye haciendo uso de un método virtual asistido por la computadora. El Capítulo V, Método de los Elementos Finitos, presenta la formulación de este método y su aplicación en problemas lineales estáticos y dinámicos. El Capítulo VI, Análisis Acústico, menciona algunos conceptos de Acústica, de los cuales, el de Nivel de Intensidad Acústica refleja la forma la sencilla de cuantificar el efecto sonoro. El Capítulo VII, Aplicación al Análisis y Diseño

de una Estructura Tipo Cajón, muestra la manera como se analizó una guitarra, instrumento compuesto por un mástil y una caja de resonancia, y de cuyos resultados obtuvimos la relación importante entre el comportamiento dinámico de la misma, con su respuesta acústica. El Capítulo VIII, presenta las Conclusiones y Recomendaciones de la investigación realizada en esta Tesis.

CAPÍTULO I

ANTECEDENTES

La única limitación que tiene el ser humano es su propia imaginación. Tenemos que recordar que hace muchos años, en la Antigua Grecia, era obligación de la gente que gobernaba la nación, saber y dominar las “Siete Artes de la Sabiduría y la Imaginación”: Historia, Astronomía, Música, etc, que le proporcionaban la suficiente capacidad de discernimiento para enfrentarse a un día cotidiano de aquella época.

Este capítulo pretende mostrar en forma narrativa el desarrollo del intelecto humano a través del tiempo, de tal forma que se entienda la motivación del tema en estudio.

El estado de arte actual en todas las especialidades avanza a pasos agigantados cada día que pasa. Lo que el día de hoy es novedad, el día de mañana ya no lo es. El desarrollo de los equipos de cómputo actuales permiten en la actualidad hacer modelos matemáticos que involucran grandes cantidades de información, y realizar análisis que hasta hace unas décadas parecían imposibles.

Esta tesis combina por primera vez la relación que existe entre el desempeño dinámico de una guitarra de concierto, y el desempeño acústico de la misma.

particular se busca una posible fórmula de recurrencia. Esto no presenta limitación alguna para poder estudiar un pórtico, una losa, un edificio, un puente, una presa de tierra, una bocatoma, etc.

1.1 NOBLES VIBRACIONES

La expresión “me canta al oído” puede no referirse en absoluto a la música, pero es muy elocuente respecto a nuestra idea de ella y del papel que debe desempeñar. Aunque la música ha servido para incitar al hombre a la violencia, arrullar a los niños e incluso para anestesiar pacientes, ha detentado siempre una importante función social: la de hacer feliz a la gente. Hoy en día, además, unos sofisticados instrumentos científicos, entre ellos el osciloscopio, que mide las vibraciones del sonido, han confirmado algo que los músicos y filósofos sabían de siempre: que la música nace de ordenar los sonidos desordenados del mundo. Ciertos ruidos no nos suenan bien: pero se ven muy bonitos con la ayuda del osciloscopio. En este siglo de experimentos y revoluciones nos consuela pensar que la música mantiene un firme compromiso con esas nobles vibraciones.

Los instrumentos más antiguos son los que hacen ruido al ser simplemente golpeados. En los yacimientos prehistóricos aparecen a cada rato sonajas y rascadores de todo tipo, algunos ideados no cabe duda para un empleo extramusical. Una variedad de rascador sigue en uso en los ritos confucianos

de Oriente; consiste en un bloque de madera de unos 30 cm. tallado en forma de tigre con muescas a lo largo del lomo. Como parte del ritual se le golpea tres veces la cabeza con una baqueta de bambú que se pasa después por las muescas, percutiéndolas; al sonido resultante se le atribuye un significado místico.

La familia de los instrumentos de percusión se puede clasificar de varios modos distintos. El más usual consiste en dividirlos en sólo dos categorías: los que producen una nota definida (de sonido determinado), como el xilófono, y aquellos que simplemente hacen ruido, como el bombo y los platillos (de sonido indeterminado). Otra clasificación los agrupa según los materiales de que están hechos: madera, metal o cuero. Casi todos los instrumentos del arsenal orquestal de hoy en día entran en estas categorías, y la mayoría de las excepciones exóticas, como el sonoro *ch'ien* de Jade, son demasiado grandes y poco prácticos para aspirar a un empleo universal.

Los instrumentos de percusión más importantes, hablando orquestalmente, son los timbales. Los compositores clásicos o del barroco solían bastarse con un par de ellos, pero al plantearse desde mediados del siglo XIX demandas musicales cada vez mayores, los cuatro timbales se convirtieron en un requisito básico de la orquesta sinfónica.

El bombo, la caja, los timbales y el triángulo habían estado asociados hasta el siglo XVIII con las bandas militares. Cuando los compositores empezaron a ampliar el espectro tímbrico, esos nuevos matices orquestales se introdujeron a su vez, juntos o por separado, en las partituras de la orquesta; “La Sinfonía Militar” de Haydn es el mejor ejemplo. En la Opera “Preciosa” de Weber tenemos una utilización orquestal precoz de la pandereta y también en el siglo XIX se convirtieron las castañuelas en elemento muy importante de la música española.

Al adquirir la vida cultural un sello cada vez más exótico con el correr del siglo, la orquesta no se quedó atrás, e incluyó en su sistema, gongs, yunques y woodblocks. En el siglo XX la influencia del jazz y la música latinoamericana ha añadido el güiro, las maracas, las claves y bongós a la música de baile y concierto. El empleo de la percusión de sonido determinado es más antiguo de lo que podría suponerse. Tocadas por medio de un teclado, las campanas de metal reciben los nombres de tubalcaín -se trata de hecho de un glockenspiel- (empleado por Haendel en *Saúl*), carillón o celesta. Se consiguen sonidos más profundos tañendo tubos largos de metal colgados; de hecho campanas tubulares. La cantata *Schlage doch* (atribuida a Bach) usa dos. Recibe el nombre de glockenspiel un instrumento más simple, compuesto de placas pequeñas de metal golpeadas a mano con baquetas; lo utilizó con gran efecto Wagner en varias de sus obras. El xilófono es tan conocido que no requiere

descripción. Lo inmortalizó Saint-Saëns en su *Danza Macabra* y los *Fósiles*, del *Carnaval de los Animales*.

1.2 VOCES ANCESTRALES

La música es tan antigua como la civilización y tal vez más que el hombre mismo. El canto de los pájaros es una forma melódica primitiva, y algunas especies - el zorzal, por ejemplo - llegan a seleccionar sus llamadas, ya sea imitando sin más otro canto que han oído o bien componiendo de hecho su propia llamada. Al decir un motivo particular con preferencia a otro, el ave nos revela una forma indiscutible de evaluación musical. Cuando un principio estético no está confinado al hombre, sino que se halla en especies millones de años más antiguas que él, ¿no deduciremos que la música puede ser más antigua que el ser humano?.

El hecho de que la música desempeñó un papel importante en la vida del primer hombre sería deducible aunque no nos quedasen restos milenarios de instrumentos musicales, pinturas y tallas de flautas y arpas y referencias a la música en añejos escritos. Tendríamos siempre la evidencia viva de sociedades primitivas de nivel paleolítico existentes hoy día en parajes tan distantes como Nueva Guinea y el Amazonas. Aunque no se puede negar la antigüedad de la música, no se la puede datar tampoco. Pinturas rupestres de un mínimo de 40000 años nos muestran sin duda alguna la hombre bailando. Aunque la

danza en si no supone necesariamente la existencia de la música (los animales retozan de un modo que, tomado en instantánea, parece un baile), la elegante sofisticación de las pinturas sugiere una forma de cultura avanzada que conlleva probablemente el desarrollo de alguna clase de música.

Los intentos de datar la música se enfrentan a una paradoja. La existencia misma de instrumentos musicales en cualquier período infiere la existencia de una tradición añeja en el momento de hacerlos. Como existen pinturas y otras representaciones de instrumentos que datan de 4000 años A.C., la música tiene que haber florecido mucho antes. No escasea el material referente a los instrumentos que se tocaban en aquel tiempo: aparte de los murales, figurillas y bajorrelieves, se han hecho descubrimientos prodigiosos de verdaderos instrumentos al exhumar enterramientos en Sumer y dondequiera . Pinturas egipcias posteriores muestran grandes arpas tocadas junto con instrumentos pequeños, tipo guitarras y flautas. Esos instrumentos al ser de tamaños distintos, producirían sonidos de altura diferente, distantes tal vez dos octavas o más. Se deduce que tiene que haber existido algún tipo de armonía mucho más simple.

Además de los grabados, hay numerosas referencias a la música en los escritos antiguos, siendo la Biblia una fuente de singular riqueza. Se ha hecho un descubrimiento interesante en una tabla sumeria como del año 1400 A.C., que había quedado sin descifrar muchos años hasta que se evidenció que se trataba

de una canción con notación musical. En la antigua Grecia hubo festivales y concursos de música desde el siglo VIII A.C., y en el siglo VII había ya músicos poetas profesionales. Ha llegado hasta nosotros la obra de alguno de ellos, como Arquíloco, Safo o Anacreonte. La cultura griega habría sido muy influenciada por los egipcios. Incluso la palabra música, que nos llega de la mano de las musas griegas (diosas de las artes y originalmente espíritus del agua), provienen de la palabra egipcia mos=agua. La teoría y la práctica musicales estaban ya muy desarrolladas en los siglos VI y V. Platón y Euclides ampliaron y elaboraron las teorías de la escuela de Pitágoras.

En la antigua Roma, la música desempeñó un papel muy importante, tanto a nivel público como doméstico. Escritores como Suetonio y Petronio hacen referencias frecuentes a su ejecución. Al describir las diversiones de la época se habla de cantantes y músicos traídos desde Grecia (se atribuía cierta cotización esnobista a los actores y músicos griegos, cuya cultura se consideraba superior en general a la romana). Pintamos a menudo a Nerón como todo un aficionado, cantando y tocando el arpa a la usanza griega. Participó en muchos certámenes, y aunque nos es obvio que tenía el éxito asegurado, da la impresión de que no caía en la cuenta de que los jueces de aquellos juegos florales antepondrían el valor del propio pellejo a un resultado de su agrado.

¿Es posible imaginar cómo sonaría la música antigua?. El estudio de sociedades primitivas actualmente existentes en distintos estadios de desarrollo social es un modo de formar una conjetura bastante precisa de cómo se ejecutaba la música de ayer. El compositor Matyás Seiber fue uno de los primeros en darse cuenta de la notable semejanza existente entre la ejecución de ciertos tipos de música folklórica de la Macedonia yugoslava (que fuera provincia de la antigua Grecia) y las descripciones que nos da Platón de la ejecución de las baladas heroicas en el siglo V A.C..

A veces las tradiciones y ritos conservan fragmentos de música que nos dan acceso a la música de la época en que nacieron esas tradiciones. Los ejemplos más notables son tal vez los ocho tonos salmódicos del canto gregoriano. Se basaron en antiquísimos cantos de la Sinagoga. Y es incluso muy probable que los cantos judíos estuvieran moldeados por la salmodía del antiguo Egipto al haberse demostrado que algunos de los viejos textos fueron en su origen himnos rituales egipcios al dios Sol.

¿Cómo se desarrolló la música?. Desde una perspectiva lógica, es de suponer que la primera melodía tendría sólo una nota, acompañada la inflexión natural de ascenso y caída de la voz cantante por un monótono golpeado en un hueso o un tronco hueco resonante. Algunas sociedades primitivas de hoy día tienen un tipo de cantinela que no es más que eso. El canto de los hinchas del fútbol y los gritos y aplausos de los *clagues* en el teatro son otro ejemplo de una forma

embrionaria de hacer música. La adición de una segunda nota fue un gran paso adelante. Aunque parecerá que hay infinitas posibilidades en cuanto a la colocación y altura de esa segunda nota, se situaba sin duda justo un intervalo pequeño debajo de la primera. A ese intervalo (tercera menor) se le considera en general como el intervalo “natural” de la música. Es el sonido del canto de cuco, el que hace la madre al llamar a su hijo, o el que hace un niño al llamar a su amigo. La siguiente nota a añadir quedaba sobre la principal, pero a un intervalo menor sobre ella que el que la separaba de la segunda nota inferior. La razón probable de ello reside en que cantar una nota más alta exige una tensión mayor de las cuerdas vocales. Las sencillas melodías de tres notas de los juegos y cantos infantiles deben ser familiares a todos, motivos basados en esta fórmula dan comienzo a miles de melodías populares en el mundo entero.

Los instrumentos melódicos primitivos evolucionaron al lado de la música vocal. Sus notas fijas dictaban las direcciones que podía hacer uso del ilimitado número de notas que quedaban entre las voces fijas de los instrumentos. Pero la música vocal, por florida que fuese, tendía a “anidar” sobre alguna de las tres notas básicas.

Con la adición de notas arriba y abajo de las tres básicas se formó una escala de cinco notas (equivalente a la que nos dan las teclas negras del piano). La posibilidades que ofrece esta escala de cinco notas (pentatónica) fueron tan ricas para muchas culturas, que creyeron innecesario desarrollarla más. Los

repertorios musicales de muchas culturas orientales, incluyendo los de China y Japón; las de culturas andinas de Perú y Bolivia, emplean todavía un vocabulario melódico basado en la escala pentatónica, aunque sus instrumentos son capaces de tocar toda la gama entera de la escala cromática. Estas notas cromáticas se empleaban a pesar de todo, cuando era necesario *transportar la melodía*. La evidencia nos sugiere que los chinos pueden haber experimentado en una etapa, con un tipo de música que emplearía notas situadas fuera de la escala pentatónica, pero chocarían con el problema de *armonizarla*. La práctica china consistió y consiste en armonizar la melodía con otro instrumento que toca una melodía similar, paralela a la principal. Una armonía tan primitiva sólo tiene problemas al cruzar las fronteras de la escala pentatónica.

El uso de la escala pentatónica está muy difundido. Muy lejanos de la música oriental, los repertorios de los espirituales negros (“Deep River”), la música escocesa (“The Skye Boat Song), la música en los Andes Peruanos (“Qachuas”, “Huaynos”, “Yaravies”, “Huaylarsh”, “Mulizas”, etc.) se basan en esta escala, y los autores de las melodías de “Ol’ Man River”, “The Bluebells of Scotland”, “Huérfano Pajarillo”, “Melgar”, “El Cóndor Pasa”, “Falsía”, etc., han empleado expresamente las notas de la escala pentatónica para darles un sonido auténtico.

Mientras las culturas orientales se contentaban con una escala de cinco notas, las civilizaciones del Mediterráneo se preocuparon por el desarrollo de una

serie de siete. Esta escala (correspondiente a las teclas blancas del piano) se conoce como “diatónica”, y demostró ser suficiente para todo el repertorio musical de los mil años siguientes. La evolución de la armonía progresó siguiendo líneas lógicas; con su desarrollo, las notas se acercaron entre sí. El canto a la *octava* se hizo necesario cuando cantaban juntos hombres y mujeres, seguido por un canto paralelo a intervalos entre las *octavas* - nivel alcanzado ya para cuando se empezó a escribir la música en Occidente. El canto a *media octava* (*en cuartas o quintas*) se les ocurre espontáneamente a los niños que notan que tienen la voz un poco más baja de tono que sus compañeros de escuela. Al aparecer naturalmente estos *intervalos* en las escalas, ya se empieza a hablar de la *Armonía*, que sobrevive hasta el día de hoy.

1.3 LA GUITARRA

La música en el Perú siempre ha ocupado un lugar preponderante en la vida cotidiana de sus habitantes. Desde épocas muy remotas ha constituido un elemento indispensable en el desarrollo de sus actividades agrarias, sociales y comunitarias. De este modo ha surgido una cultura musical propia, estrechamente ligada a las vivencias de sus pueblos, siendo por ello parte de su identidad cultural.

Con la llegada de los españoles, a partir de la Conquista, se produce el proceso de asimilación de la cultura occidental, proceso que abarca también el campo de la música, dando lugar al surgimiento de géneros musicales mestizos. Desde

entonces la música peruana se ha desarrollado siguiendo varias vertientes: La música andina, la más desarrollada y que corresponde a las poblaciones de la región serrana del país; la música criolla en la costa y; las diversas expresiones musicales de las comunidades nativas de la región amazónica, poco conocidas. A ello debe agregarse un cierto cultivo de la Música Europea, limitada a grupos sociales muy restringidos. Estas vertientes se han desarrollado en forma paralela, con diferentes ritmos e intensidades según las épocas. En la actualidad todavía no se divisa el halo de una simbiosis entre ellas; pues las propias instituciones oficiales encargadas de la formación académica musical, no han dado aún el paso necesario que les permita concretar un rumbo coherente.

Desde el inicio de la conquista la guitarra y sus ancestros se constituyeron en instrumentos de singular importancia dentro de la actividad musical del país. La *Vihuela*, pariente muy cercano de la guitarra, se encuentra entre los primeros instrumentos que llegan al Perú con la conquista española. Así se tiene registrado que el Virrey Toledo hace un pedido de cuerdas de *Vihuela de arco* en el año 1569. Y, más adelante, hacia 1612 Huamán Poma incluye en su crónica una lámina con un ejecutante de *Vihuela de mano*, que acompaña al canto.

En España, a mediados del siglo XVI, la Vihuela se encuentra en plena eclosión, tal como lo señala el maestro de la guitarra y musicólogo Emilio Pujol:

“El repertorio vihuelístico es por si solo la demostración plena de una brillante floración. Aparecen en él composiciones originales y adaptaciones instrumentales de obras vocales pertenecientes a los géneros: sacro y profano. Cada uno de ellos es profusamente tratado para Vihuela o dos Vihuelas; para Vihuela y canto a una o a dos voces, y para guitarra o canto acompañado de guitarra, abarcando gran variedad de formas musicales”.

Es más, cabe indicar que las primeras obras musicales impresas son justamente para la Vihuela. Esta Vihuela, o guitarra en transición transportada a Sud-América, desarraigada de su lugar de origen, iría poco a poco transformando su personalidad. La habilidad musical de los indios y mestizos a quienes, desde muy temprano le era encomendada la música que intervenía en las comedias, iría haciendo su parte. Esto no obstante las restricciones que la Iglesia impuso sobre los nativos, tal como nos lo dice José María Arguedas:

“La guitarra no se les enseña a tocarla a los indios, era calificada por la Iglesia como sensual, fue patrimonio de señores y luego de mestizos”.

Luego en las constituciones proclamadas en 1613 en Lima, para proteger la música eclesiástica, queda precisado:

“...prohibimos, que ninguno dance ni cante cantares deshonestos, ni profanos en bodas, misas nuevas ni en otras fiestas, ni que ellas tañen viguelas o instrumentos para que canten; quien fuera hallado de noche o a cualquier hora, que sea, con algunos instrumentos músicos, será preso por diez días, y multado en otros diez pesos, ademásde ser perdidos dichos instrumentos...” (Andrés Sas, “La Música en La Catedral de Lima durante el Virreynato”).

Pensamos que las prohibiciones mencionadas, serían observadas en un principio, y que luego entre la tolerancia de algunas autoridades eclesiásticas y la resuelta complicidad de muchos clérigos se fueron olvidando paulatinamente.

La evolución que la Vihuela (o guitarra en transición) pudo tener en el Perú es difícil de seguir. Es uno de los pocos instrumentos traídos de España que no de menciona en la lista de instrumentistas para la Capilla de música de la Catedral de Lima. La información con la que se cuenta es muy escasa, se reduce a algunas hojas y uno que otro cuaderno escrito para guitarra, algunos originales y arreglos. Estos hallazgos pertenecen sobretodo al siglo XIX. Se encuentran también láminas, dibujos y algunos artículos, que nos permiten decir que la guitarra es una parte integrante de casi todas las formaciones de música grupal. Su difusión cubre todo el país y es usada por las diferentes clases sociales, aún

cuando en mayor proporción en los sectores mestizos. Todo esto es corroborado por información proveniente de la tradición oral.

Es bueno mencionar de manera especial que el vasto y rico repertorio de la guitarra en el Perú fluye esencialmente de manera espontánea e intuitiva, y que va unido de manera ejemplar al legado tradicional que dicta el alma de su pueblo, legado que es tradición viviente del que escucha, y al que la escritura musical le es ajena.

Podríamos decir que el Perú es uno de los países más atrasados en cuanto a formación musical académica. La Academia musical durante el dominio español si bien era para la élite, tuvo bastante actividad y coherencia, pero fue decayendo notablemente durante la República, y hasta nuestros días. Pareciera que la pobreza y el abandono de este lado se hallaran compensados ampliamente por la fertilidad y creatividad del genio musical popular.

En el Perú, el ritmo de evolución de la guitarra bajo la influencia española, en los aspectos fundamentales de su estructura, técnica de ejecución y estética musical, se dio con bastante retraso en relación a otros países americanos, pero de manera singular. Ello, sin embargo, con algunas variaciones al interior del país, observándose una mayor influencia en Arequipa, Ayacucho, Cosqo y Lima, ciudades donde incluso es posible encontrar métodos extranjeros y algunas páginas propias dedicadas a la guitarra.

En países como el Perú, la guitarra, como muchos instrumentos de cuerda, ha seguido en gran medida una evolución distinta. Si bien se puede creer que aún son instrumentos europeos, en realidad en su interior ya no lo son, pues la tradición española ha ido cediendo ante el uso de los materiales autóctonos y de la nueva factura. La sonoridad ha ido tomando su propio cauce según las exigencias y posibilidades de momento y lugar. A esto se suma el nuevo hombre que lo pulsaría. La necesidad de hacerla cantar en su propio idioma lo llevaría a la búsqueda de otras soluciones técnicas e interpretativas que han resultado originales y sentado las bases de una tradición casi paralela a la europea.

Si ahora, en 1999, escucháramos a cualquier intérprete ejecutando cualquier composición en una guitarra hecha en el Perú, podemos estar satisfechos de lo que se ha producido aquí. Ya estamos en la condición de decir que el Perú tiene un estilo propio en la construcción de guitarras, comparables solamente con las mejores del mundo. Ese proceso de mestizaje ha logrado esto.

1.4 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

No existe ninguna investigación realizada hasta la fecha que relacione el comportamiento dinámico de una Guitarra (en particular el inicio de vibración

de la caja de resonancia – ver Capítulo 7-) con su respuesta acústica (nivel de intensidad acústica – ver Capítulo 7-).

Se hace uso del Método de los Elementos Finitos para la modelación de la guitarra, para lo cual se revisó el reporte “Finite Element Methods in Continuum Mechanics” de Theodore Pian y Pin Tong (7), donde se puede obtener la información necesaria para realizar un análisis lineal y estático de una estructura. Además, fue valioso el aporte del texto “El Método de los Elementos Finitos” de O. C. Zienkiewicz (9,10), al que considero indispensable en esta investigación, junto con el texto “Numerical Methods in Finite Element Analysis” de Bathe y Wilson (11), que lo complementa, entre otros muchos reportes sobre el tema que se citan en la Bibliografía.

Para la obtención de las propiedades de la madera, fueron indispensables los reportes: “The Determination of Poisson’s Ratio and the Dynamics Modulus of Elasticity From the Frequencies of Natural Vibration in thin Circular Plates”, de Gustav Martićek (21); y “The Influence of the Shear Forces and the Rotatory inertia on the Vibration of an Anisotropic Plate” de Z. Kaczkowski (22), quien resuelve la ecuación diferencial de vibración en flexión en losas, planteando las ecuaciones de las frecuencias circulares de vibración natural de las mismas, y que permitió determinar los valores del módulo de Poisson que se necesitaba.

Para la parte acústica, un buen texto fue el de Pérez Miñana (24), e indispensable los reportes de Beddoe (23), Pretlove(28), Doak(30) y Ram(32) quienes muestran cómo usaron la acústica para resolver ciertos problemas aplicados en ingeniería.

1.5 OBJETIVO DE LA TESIS

Como se mencionó en la introducción, se desea hallar la relación que existe entre la respuesta estructural con la respuesta acústica del instrumento. Para esto se necesita:

- Hallar los niveles de intensidad acústica que se producen bajo un mismo patrón de frecuencias y tensiones en una guitarra (afinación de las cuerdas);
y.
- Hallar las frecuencias de vibración natural que dan inicio a una sollicitación acústica.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS ESTÁTICO

Este capítulo presenta la teoría que permite realizar un análisis de tipo elástico y estático, presentándonos las ecuaciones que rigen este comportamiento.

2.1.- ESTADO GENERAL DE ANISOTROPÍA EN MEDIO LINEALMENTE ELÁSTICO

Sea un medio continuo elástico no-isotrópico referido a un sistema coordenado cartesiano (ver Fig. 2.1).

Sean σ y ε los tensores que definen el estado de esfuerzos y deformaciones en un punto cualesquiera del medio, P1,

$$\begin{aligned}\sigma &= \hat{n}_i \hat{n}_j \sigma_{ij} \\ \varepsilon &= \hat{n}_i \hat{n}_j \varepsilon_{ij}\end{aligned}\quad (2.1)$$

Los componentes de los esfuerzos y de las deformaciones se obtendrán de las expresiones:

$$\begin{aligned}\sigma_{ns} &= \hat{n}_i \cdot \sigma \cdot \hat{n}_j \\ \varepsilon_{ns} &= \hat{n}_i \cdot \varepsilon \cdot \hat{n}_j\end{aligned}\quad (2.2)$$

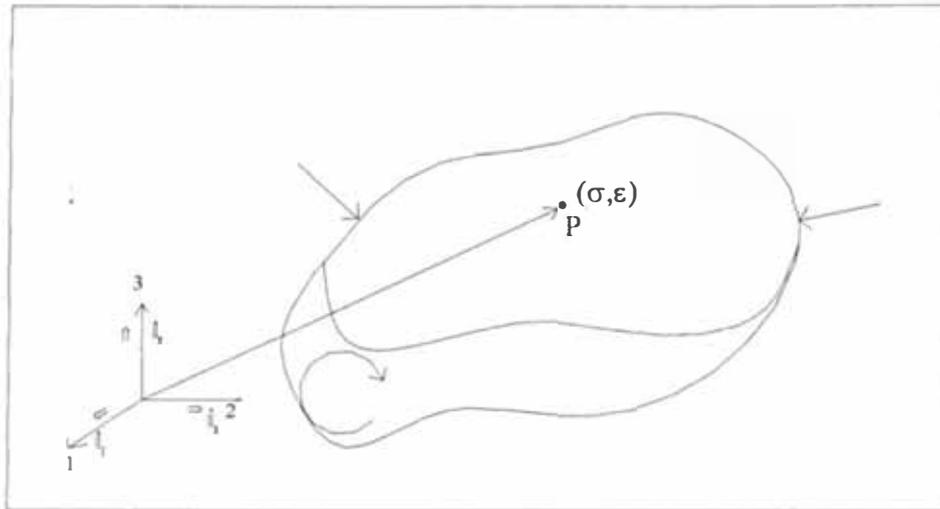


Figura 2.1 Punto P referido al sistema coordenado cartesiano 123

Si los desplazamientos u_i en el medio satisfacen la condición $u_{i,j} \ll 1$, las relaciones esfuerzos-deformaciones estarán dadas por las expresiones:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + A_{ijpq} \varepsilon_{pq} + B_{ijpqrs} \varepsilon_{pq} \varepsilon_{rs} + \dots \quad (2.3)$$

donde :

$\sigma_{ij}(0)$ son los esfuerzos presentes en el medio correspondientes al estado de deformación nulo.

$A_{ijpq}, B_{ijpqrs}, \dots$ son parámetros elásticos que caracterizan el medio continuo.

Considerando medios elásticos donde los esfuerzos son función lineal de las deformaciones, se tiene:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(0) + A_{ijpq} \varepsilon_{pq}$$

y limitando el análisis al caso $\sigma_{ij}(0) = 0$, resultan las relaciones.

$$\sigma_{ij} = A_{ij\rho q} \varepsilon_{\rho q} \dots \dots \dots (2.4)$$

que requiere de 81 parámetros.

Siendo los tensores σ, ε simétricos,

$$A_{ij\rho q} = A_{jiq\rho}$$

y considerando que la energía almacenada en el medio es una función de las deformaciones y que $u_{i,j} \ll 1$,

$$A_{ij\rho q} = A_{pqij}$$

lo cual reduce a 21 el número de parámetros $A_{ij\rho q}$ necesarios para definir las relaciones esfuerzos-deformaciones.

Luego, el estado general de anisotropía en un medio continuo linealmente elástico quedará definido por 21 constantes elásticas. Este resultado es el que corresponde a un medio constituido por cristales triclínicos.

Cambiando de notación para los esfuerzos y las deformaciones,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sigma_{11} & \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11} \\
\sigma_2 &= \sigma_{22} & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22} \\
\sigma_3 &= \sigma_{33} & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33} \\
\sigma_4 &= \sigma_{23} & \varepsilon_4 &= 2\varepsilon_{23} \\
\sigma_5 &= \sigma_{13} & \varepsilon_5 &= 2\varepsilon_{13} \\
\sigma_6 &= \sigma_{12} & \varepsilon_6 &= 2\varepsilon_{12}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

la expresión (2.4) resulta:

$$\sigma_m = c_{nm} \varepsilon_n \tag{2.6}$$

$$(c_{nm} = A_{ijpq} = A_{pqij} = c_{nm})$$

La cual expresada en forma matricial es:

$$[\sigma] = [c][\varepsilon] \tag{2.7}$$

donde: $[\sigma], [\varepsilon]$ son los vectores de esfuerzos y deformaciones respectivamente.

$[c]$ es la matriz que define los parámetros elásticos (matriz simétrica 6x6).

2.2 MEDIO CONTINUO ORTOTRÓPICO.

Sea un medio continuo linealmente elástico tal que posea tres planos de simetría en sus constantes elásticas, esto es que pueda ser representado como constituido por cristales orto-rómbicos, y que esté referido a un sistema coordenado cartesiano (ver fig 2.2).

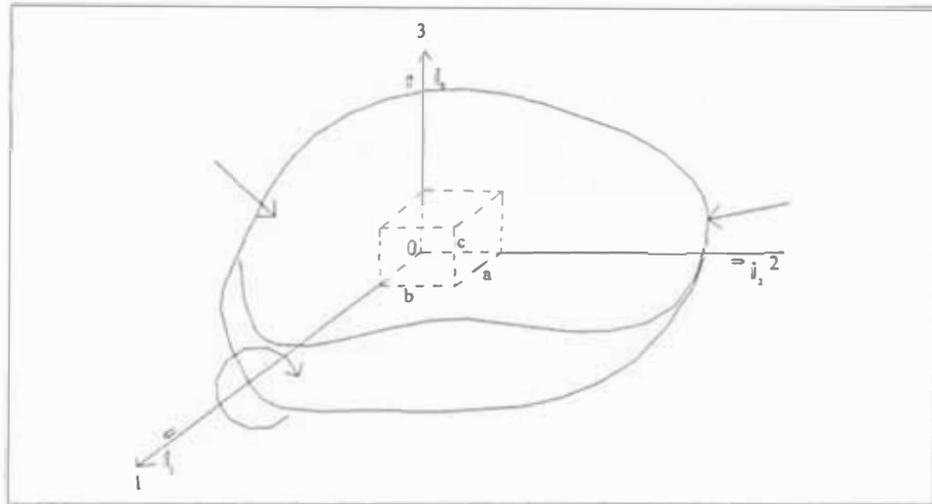


Fig 2.2: Sólido referido a un sistema coordenado cartesiano 123

Los estados de esfuerzo y de deformaciones unitarias quedan definidas mediante las expresiones (2.1), y (2.2), y sus relaciones correspondientes con la expresión (2.7).

Considérese asimismo los sistemas coordenados $1'2'3'$, y $1''2''3''$. Por existir coincidencia de los ejes de los cristales con los ejes coordenados de los tres sistemas, se tiene:

$$[\sigma'] = [c][\varepsilon'] \quad (2.8)$$

$$[\sigma''] = [c][\varepsilon'']$$

Aplicando sucesivamente las expresiones (2.1), (2.2), (2.5) y (2.6), (2.7), (2.8)

se logran las siguientes igualdades para los elementos c_{mn} de la matriz c ,

$$c_{14} = c_{15} = c_{16} = 0$$

$$c_{24} = c_{25} = c_{26} = 0$$

$$c_{34} = c_{35} = c_{36} = 0 \quad (2.9)$$

$$c_{45} = c_{46} = 0$$

$$c_{56} = 0$$

Luego el medio ortotrópico linealmente elástico requiere de nueve parámetros.

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & c_{44} & 0 & 0 \\ & & & & c_{55} & 0 \\ & & & & & c_{66} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

utilizando las expresiones (2.7), (2.9) y (2.10)

$$[\varepsilon] = \frac{1}{B} \begin{bmatrix} (c_{22}c_{33} - c_{23}^2) & (c_{13}c_{23} - c_{12}c_{33}) & (c_{12}c_{23} - c_{13}c_{22}) & 0 & 0 & 0 \\ & (c_{11}c_{33} - c_{13}^2) & (c_{12}c_{13} - c_{11}c_{23}) & 0 & 0 & 0 \\ & & (c_{11}c_{22} - c_{12}^2) & 0 & 0 & 0 \\ & & & \left(\frac{B}{c_{44}}\right) & 0 & 0 \\ & & & & \left(\frac{B}{c_{55}}\right) & 0 \\ & & & & & \left(\frac{B}{c_{66}}\right) \end{bmatrix} \quad \text{sim.} \quad (2.11)$$

siendo:

$$B = c_{11}(c_{22}c_{33} - c_{23}^2) - c_{12}(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23}) + c_{13}(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) \quad (2.12)$$

Definiendo:

$$E_1 = \frac{B}{(c_{22}c_{33} - c_{23}^2)}$$

$$E_2 = \frac{B}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)}$$

$$E_3 = \frac{B}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)}$$

$$v_1 = \frac{(c_{12}c_{33} - c_{13}c_{23})}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)} \quad G_1 = c_{44}$$

$$v_2 = \frac{(c_{11}c_{23} - c_{12}c_{13})}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \quad G_2 = c_{55}$$

$$v_3 = \frac{(c_{13}c_{22} - c_{12}c_{23})}{(c_{11}c_{22} - c_{12}^2)} \quad G_3 = c_{66}$$

y reemplazando en (2.11)

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{\nu_1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & \frac{1}{G_1} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{G_2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{G_3} \end{bmatrix} [\sigma] \quad (2.13)$$

donde los nueve parámetros independientes son:

E_1, E_2, E_3 módulos de elasticidad

ν_1, ν_2, ν_3 módulos de Poisson

G_1, G_2, G_3 módulos de corte

Estos parámetros quedan definidos por la expresión (2.13) o por el esquema siguiente, fig. 2.3:

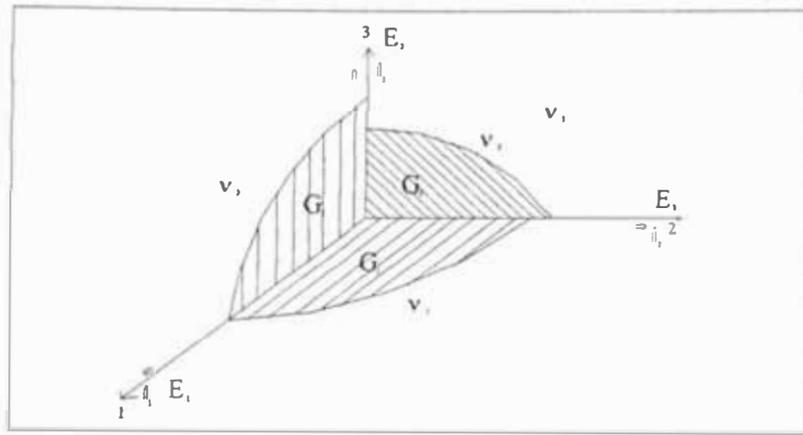


Fig.2.3

$$\nu_1 = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{22}}$$

$$\nu_2 = -\frac{\epsilon_{22}}{\epsilon_{33}}$$

$$\nu_3 = -\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{33}}$$

De la expresión (2.13) se obtiene:

$$[\sigma] = \frac{E_1}{D} \begin{bmatrix} (m - \nu_2^2 n) & (m\nu_1 + n\nu_2\nu_3) & m(\nu_1\nu_2 + \nu_3) & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - \nu_3^2 n) & (\nu_2 + \nu_1\nu_3 m) & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{m}{n}(1 - \nu_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ & sim. & & \frac{G_1 D}{E_1} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{G_2 D}{E_1} & 0 \\ & & & & & \frac{G_3 D}{E_1} \end{bmatrix} [\epsilon]$$

(2.14)

en la que:

$$m = \frac{E_1}{E_2}$$

$$n = \frac{E_1}{E_3}$$

$$D = m(1 - \nu_1^2 m) - n\nu_2^2 - mn\nu_3(2\nu_1\nu_2 + \nu_3)$$

2.3 CONSTANTES ELÁSTICAS EN GENERAL

Materiales tales como cristales naturales o la madera no son isotrópicos, y se denominan anisotrópicos. La expresión analítica de la Ley de Hooke en un cuerpo sólido anisotrópico es afectado por las constantes c_{ij} , $i=1,\dots,6$, $j=1,\dots,6$ arriba indicadas. En notación matricial, se puede escribir las ecuaciones de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{51} & c_{52} & c_{53} & c_{54} & c_{55} & c_{56} \\ c_{61} & c_{62} & c_{63} & c_{64} & c_{65} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11} & e_{22} & e_{33} & e_{23} & e_{31} & e_{12} \end{pmatrix}$$

donde $c_{rs} = c_{sr}$, $(r, s = 1, 2, \dots, 6)$.

Estas ecuaciones pueden ser resueltas, para expresar las componentes de la deformación en términos de las componentes de esfuerzo. Si Π denota el

determinante de las cantidades c_{rs} , y C_{rs} denota el menor determinante que corresponde con c_{rs} , tal que:

$$\Pi = c_{r1}C_{r1} + c_{r2}C_{r2} + c_{r3}C_{r3} + c_{r4}C_{r4} + c_{r5}C_{r5} + c_{r6}C_{r6}$$

Las ecuaciones que dan las componentes de deformación en términos de las componentes de esfuerzos puede ser escrita como:

$$\Pi(e_{11}, e_{22}, e_{33}, e_{23}, e_{31}, e_{12}) = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix} (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{31}, \sigma_{12})$$

donde $C_{rs} = C_{sr}$ ($r, s = 1, 2, \dots, 6$).

Las cantidades $\frac{1}{2}c_{11}, \dots, c_{12}, \dots$ son los coeficientes de una función cuadrática homogénea de e_{11}, \dots . Esta función es la función de energía de deformación expresada en términos de componentes de deformación.

Las cantidades $\frac{1}{2}C_{11}/\Pi, \dots, C_{12}/\Pi, \dots$ son los coeficientes de una función cuadrática homogénea de σ_{11}, \dots . Esta función es la función de energía de deformación expresada en términos de componentes de esfuerzo.

2.3.1 MÓDULOS DE ELASTICIDAD

Se debe definir de distintas maneras los tipos de esfuerzo y deformación. Por ejemplo, tensión simple (σ_{11}), esfuerzo cortante (σ_{33}), esfuerzo promedio ($\frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$) son tipos de esfuerzos. Los correspondientes tipos de deformación son extensión simple (e_{11}), deformación por cortante (e_{23}), dilatación cúbica ($e_{11} + e_{22} + e_{33}$). Se puede expresar la deformación de cualquiera de esos tipos que acompaña un esfuerzo del correspondiente tipo, cuando no hay otro esfuerzo, por una ecuación de la forma:

$$\text{esfuerzo} = M \times (\text{deformación correspondiente})$$

Luego M es llamado un “módulo de elasticidad”. Las cantidades Π/C_{11} , Π/C_{44} son ejemplos de tales módulos.

El módulo que corresponde con la tensión simple es llamado módulo de Young para la dirección relacionada con la tensión. El módulo que corresponde con el esfuerzo de corte sobre un par de planos ortogonales es conocido como la rigidez para el par de direcciones relacionadas (las normales al plano). El módulo que corresponde con la tensión promedio o presión es conocido como el módulo de compresión.

2.3.2 MÓDULOS DE YOUNG Y RAZONES DE POISSON

Suponiendo que todas las componentes de esfuerzo desaparecen excepto X_x , luego tenemos que $\Pi = C_{11}\sigma_{11}$, tal que Π/C_{11} es el módulo de Young correspondiente a la dirección “x”. De la misma forma, la razón de Poisson de la contracción en la dirección de el eje “y” a la extensión en la dirección de los ejes de “x” es $-C_{12}/C_{11}$. El valor de la razón de Poisson depende de la dirección de la contracción transversal lineal de los elementos tanto como de las extensiones longitudinales. En el caso general debemos considerar los esfuerzos para la tensión σ'_{11} que cruzan el plano $x' = \text{constante}$, cuya normal sigue la dirección (l, m, n) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= l^2 \sigma'_{11}, & \sigma_{22} &= l^2 \sigma'_{22}, & \sigma_{33} &= l^2 \sigma'_{33} \\ \sigma_{23} &= mn \sigma'_{11}, & \sigma_{13} &= nl \sigma'_{11}, & \sigma_{12} &= lm \sigma'_{11} \end{aligned}$$

y también se tiene:

$$e_{11} = e_{11}l^2 + e_{22}m^2 + e_{33}n^2 + e_{23}mn + e_{13}nl + e_{12}lm$$

y se deduce que el módulo de Young E correspondiente con esta dirección es:

$$\Pi \div (C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{23}, C_{31}, C_{12})(l^2, m^2, n^2, mn, nl, lm)^2$$

donde el denominador es una función cuadrática completa de los seis argumentos l^2, \dots con coeficientes C_{11}, \dots

Si (l', m', n') es cualquier dirección de x' , la contracción, $-e_{2'2'}$, en esta dirección está dada por la ecuación:

$$e_{2'2'} = e_{11}l'^2 + e_{22}m'^2 + e_{33}n'^2 + e_{23}m'n' + e_{13}n'l' + e_{12}l'm'$$

y la correspondiente razón de Poisson ν es expresable en la forma:

$$\nu = -\frac{1}{2\phi} \left[l'^2 \frac{\partial \phi}{\partial (l'^2)} + m'^2 \frac{\partial \phi}{\partial (m'^2)} + n'^2 \frac{\partial \phi}{\partial (n'^2)} + m'n' \frac{\partial \phi}{\partial (mn)} + n'l' \frac{\partial \phi}{\partial (nl)} + l'm' \frac{\partial \phi}{\partial (lm)} \right]$$

donde ϕ es la función cuadrática arriba mencionada de los argumentos l^2, \dots , y los coeficientes diferenciales está formados como si esos argumentos fueran independientes.

2.3.3 MÓDULOS DE RIGIDEZ O DE CORTE

Se puede suponer que todas las componentes de esfuerzo desaparecen excepto Y_z y como consecuencia se tiene que $\Pi e_{23} = C_{44} \sigma_{23}$, tal que Π / C_{44} es la rigidez correspondiente con el par de direcciones y, z .

Si el esfuerzo cortante está relacionado a las dos direcciones ortogonales (l, m, n) y (l', m', n') , la rigidez puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\Pi \div (C_{11}, C_{22}, \dots, C_{12}, \dots)(2ll', 2mm', 2nn', mn' + m'n, nl' + n'l, lm' + l'm)$$

donde el denominador es una función cuadrática completa de los seis argumentos $2ll', \dots$ con coeficientes C_{11}, C_{22}, \dots

2.3.4 DETERMINACIÓN DE LAS CARACTERÍSTICAS DEL MATERIAL: MÓDULOS DE YOUNG, CORTE Y POISSON.

Como se ha podido observar, se requiere para el análisis, el conocimiento de los valores de las propiedades inherentes al material del que está constituido el sólido. Por tratarse de un tema de importancia para el presente trabajo, y haber elegido un material en particular (madera del tipo pino báltico), se tratará en el capítulo 4.

2.4 FORMA DE LA FUNCIÓN DE ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Los experimentos con los cuales se llega a la enunciación de la ley de Hooke no constituyen una prueba de la verdad de la ley.

Cuando un cuerpo es suavemente deformado por la aplicación gradual de una carga, y la temperatura permanece constante, las componentes de esfuerzo son una función lineal de las componentes de la deformación, y ellas son también coeficientes de las derivadas parciales de una función (W) de las componentes de la deformación. La función de la energía de deformación, W , es de aquí una función cuadrática homogénea de las componentes de la deformación.

La conocida teoría de ondas y sonido llega a nosotros para mostrar que cuando un cuerpo está ejecutando pequeñas vibraciones, el movimiento toma ubicación tan rápidamente para una porción de cuerpo para perder o ganar alguna cantidad sensible de calor. En este caso también hay una función de energía de deformación; y si nosotros asumimos que la ley de Hooke fija la función, ésta es una función cuadrática homogénea de los componentes de la deformación.

La función W posee diferentes coeficientes que le permiten expresarse como una función cuadrática de las componentes de la deformación. Estos coeficientes son las constantes elásticas, y existen discrepancias en la determinación de ellas, dependiendo del método usado en el laboratorio.

De acuerdo a la ley generalizada de Hooke, las seis componentes de esfuerzo en cualquier punto de un cuerpo sólido elástico son conectados con las seis componentes de deformación en un punto por ecuaciones de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c_{11}e_{11} + c_{12}e_{22} + c_{13}e_{33} + c_{14}e_{23} + c_{15}e_{13} + c_{16}e_{12} \\ c_{21}e_{11} + c_{22}e_{22} + c_{23}e_{33} + c_{24}e_{23} + c_{25}e_{13} + c_{26}e_{12} \\ c_{31}e_{11} + c_{32}e_{22} + c_{33}e_{33} + c_{34}e_{23} + c_{35}e_{13} + c_{36}e_{12} \\ c_{41}e_{11} + c_{42}e_{22} + c_{43}e_{33} + c_{44}e_{23} + c_{45}e_{13} + c_{46}e_{12} \\ c_{51}e_{11} + c_{52}e_{22} + c_{53}e_{33} + c_{54}e_{23} + c_{55}e_{13} + c_{56}e_{12} \\ c_{61}e_{11} + c_{62}e_{22} + c_{63}e_{33} + c_{64}e_{23} + c_{65}e_{13} + c_{66}e_{12} \end{Bmatrix}$$

Los coeficientes en esas ecuaciones, c_{11}, \dots , son las constantes elásticas del material

Elas son los coeficientes de una función cuadrática homogénea $2W$, donde W es la función de energía de deformación; y ellas se relacionan de tal manera que aseguren la existencia de dicha función. Esas relaciones son de la forma :

$$c_{rs} = c_{sr} \quad , \quad (r, s = 1, 2, \dots, 6),$$

y el número de constantes es reducido por esas ecuaciones de 36 a 21.

Nosotros escribimos la para $2W$ en la forma:

$$\begin{aligned} 2W = & c_{11}e_{11}^2 + 2c_{12}e_{11}e_{22} + 2c_{13}e_{11}e_{33} + 2c_{14}e_{11}e_{23} + 2c_{15}e_{11}e_{13} + 2c_{16}e_{11}e_{12} \\ & + c_{22}e_{22}^2 + 2c_{23}e_{22}e_{33} + 2c_{24}e_{22}e_{23} + 2c_{25}e_{22}e_{13} + 2c_{26}e_{22}e_{12} \\ & + c_{33}e_{33}^2 + 2c_{34}e_{33}e_{23} + 2c_{35}e_{33}e_{13} + 2c_{36}e_{33}e_{12} \\ & + c_{44}e_{23}^2 + 2c_{45}e_{23}e_{13} + 2c_{46}e_{23}e_{12} \\ & + c_{55}e_{13}^2 + 2c_{56}e_{13}e_{12} \\ & + c_{66}e_{12}^2 \end{aligned}$$

La teoría de la elasticidad ha sido algunas veces basada en hipótesis consistentes a la constitución de la materia, de acuerdo a las cuales son consideradas como hechas de materia en todos los puntos, y esos puntos se supone que actúan sobre otros a una determinada distancia, la ley de fuerza que establece que la fuerza entre dos puntos es función de la distancia entre los puntos y actúa en la línea que los une. Es una consecuencia de esta hipótesis que los coeficientes en la función W son conectados por seis relaciones adicionales, de donde su número es reducido a 15. Estas relaciones son:

$$\left. \begin{aligned} c_{23} = c_{44}, \quad c_{31} = c_{55}, \quad c_{12} = c_{66} \\ c_{14} = c_{56}, \quad c_{25} = c_{46}, \quad c_{45} = c_{36} \end{aligned} \right\}$$

2.5 DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS EN UN CUERPO

Si nosotros deseamos conocer el estado de esfuerzos en un cuerpo (ver figura 2.4) para el cual, cargas dadas son aplicadas, sea como fuerzas de cuerpo o como tracciones de superficie, se tiene que resolver las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos, tales como:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho X &= \rho f_{x_1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho Y &= \rho f_{x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho Z &= \rho f_{x_3} \end{aligned} \right\}$$

donde X_1, X_2, X_3 son las fuerzas de cuerpo en las direcciones 1,2 y 3 respectivamente.

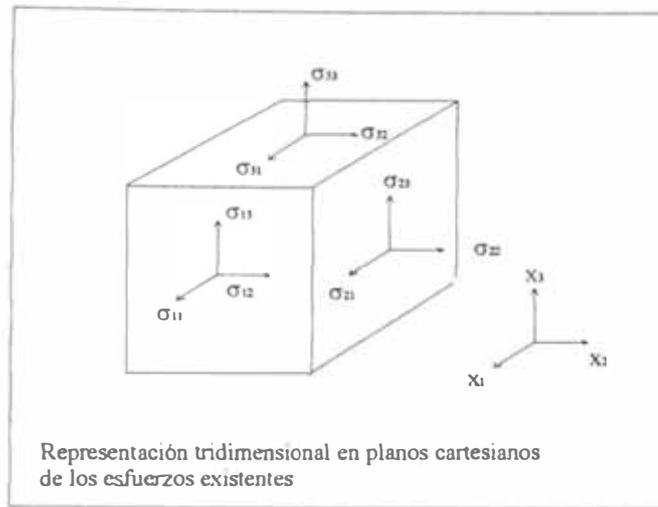


Figura 2.4

Si el cuerpo está fijo en equilibrio, f_{x1}, f_{x2}, f_{x3} son cero, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 &= 0_{x_1} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho Y &= 0_{x_2} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho Z &= 0_{x_3} \end{aligned} \right\}$$

donde $\sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12}$ ha sido escrito por el equivalente $\sigma_{32}, \sigma_{31}, \sigma_{21}$.

Si el cuerpo se mueve tal que el desplazamiento (u, v, w) de cualquier partícula es siempre muy pequeño, se puede escribir como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

en vez de f_{x1}, f_{x2}, f_{x3} , el tiempo denotado por t ; las ecuaciones para movimientos pequeños son

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + \rho X_1 &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + \rho X_2 &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho X_3 &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{aligned} \right\}$$

2.6 LIMITACIONES DE LA TEORÍA MATEMÁTICA DE LA ELASTICIDAD.

La teoría está desarrollada para cuerpos deformados gradualmente a una temperatura constante, desde un estado inicial de no esfuerzo a un estado final de esfuerzo tan pequeño respecto al estado no esforzado, que los cuadrados y productos de los desplazamientos son despreciables según lo establece la Ley de Hooke (ver ecuación 2.3). Es conocido que muchos materiales usados en estructuras de ingeniería como el acero, piedra, cemento, no obedecen la Ley de Hooke para alguna deformación más grande que alguna observada. Se sabe también que aquellos materiales que no obedecen la ley para medidas de deformación pequeñas no la obedecen para grandes.

La restricción de la teoría para condiciones en las cuales las deformaciones desaparecen una vez retiradas las cargas, es usualmente expresada diciendo que el cuerpo debe estar deformado dentro de los límites de la “elasticidad perfecta”. La restricción para condiciones en las cuales la deformación medida es proporcional a la carga es algunas veces expresada diciendo que el cuerpo debe estar deformado dentro de los límites de la “elasticidad lineal”. La expresión “límite de elasticidad” es usada algunas veces en alguna de estas expresiones y algunas en otras, y los límites son algunas veces especificados como de un “esfuerzo” o una “tracción”, por una carga por unidad de área, y algunas veces por una deformación medida.

El establecimiento de que las deformaciones desaparecen después de aplicada la carga, es absolutamente necesario para las hipótesis de esta teoría matemática; pero es conocido que los límites de deformación, o de carga, en las cuales esta condición permanece correcta son relativamente cercanos.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DINÁMICO

Se ha establecido la teoría necesaria para realizar el análisis elástico y estático de una estructura. Se presenta a continuación la teoría necesaria para realizar un análisis elástico y dinámico, mostrando las ecuaciones que gobiernan este comportamiento.

3.1.1 TEOREMAS GENERALES

3.1.1 ECUACIÓN VARIACIONAL DEL MOVIMIENTO

Desde que la función de energía y deformación W existe (véase Item 2.4), se puede deducir la ecuación de movimiento desde el principio de Hamilton. Para la expresión de este principio, sea T la energía cinética total de un cuerpo, y sea V la energía potencial de deformación, tal que V es el volumen integral de W . Por reglas de Cálculo de Variaciones, consideremos la variación de la integral $\int (T - V) dt$, tomada entre los valores inicial y final t_0 y t_1 para t . Dentro de la integral se asumirá que solamente los desplazamientos están sujetos a variación, y que sus valores en los instantes inicial y final son conocidos. Se denota la variación así formada por:

$$\delta \int (T - V) dt$$

Se denota por δW_1 al trabajo realizado por las fuerzas externas cuando el desplazamiento es variado. Entonces el principio es expresado por la ecuación:

$$\delta \int (T - V) dt + \int \delta W_1 dt = 0 \quad \dots\dots\dots(3.1)$$

Se debe obtener la variación de $\int T dt$. Así se obtiene:

$$T = \iiint \frac{1}{2} \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} dx dy dz$$

y de aquí:

$$\begin{aligned} \delta \int T dt &= \int dt \iiint \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \dots + \dots \right) dx dy dz \\ \delta \int T dt &= \int_{t_0}^{t_1} \iiint \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} \delta u + \frac{\partial v}{\partial t} \delta v + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right) dx dy dz \\ &- \int dt \iiint \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) dx dy dz \dots(3.2) \end{aligned}$$

Aquí t_0 y t_1 son los valores inicial y final de t , y $\delta u, \dots$ desaparecen para esos valores. El primer término debe ser omitido; y la ecuación (3.1) es entonces transformada en una ecuación variacional del movimiento. Además, δV es

$\iiint \delta W dx dy dz$, y δW_1 está dado por la ecuación:

$$\delta W_i = \iiint \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dx dy dz + \iint (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS.$$

De aquí la ecuación variacional del movimiento es de la forma:

$$\begin{aligned} & \iiint \left\{ \rho \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \delta u + \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \delta v + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right) + \delta W \right\} dx dy dz \\ & - \iint \rho (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w) dx dy dz - \iint (X_v \delta u + Y_v \delta v + Z_v \delta w) dS = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Además, la variación de la función de energía de deformación es:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \delta e_{xx} + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \delta e_{yy} + \dots + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \delta e_{xy},$$

donde, por ejemplo, $\delta e_{xx} = \partial \delta u / \partial x$. De aquí $\iiint \delta W dx dy dz$ debe transformada por integración por partes, en la suma de una integral de superficie y una integral de volumen. Así se obtiene:

$$\begin{aligned} \iiint \delta W dx dy dz = \iint \left[\left\{ \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \cos(z, \nu) \right\} \delta u \right. \\ \left. + \dots + \dots \right] dS \end{aligned}$$

$$- \iiint \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \right) \delta u + \dots + \dots \right] dx dy dz \dots (3.4)$$

Los coeficientes de las variaciones $\delta u, \dots$ entre los signos de integración de volumen e integración de superficie en la ecuación (3.3), cuando se transforma en la ecuación (3.4), producen tres ecuaciones diferenciales de movimiento que se cumplen en todos los puntos del cuerpo de volumen V , y tres condiciones de borde. Las ecuaciones de movimiento son del tipo:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \dots (3.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho Y + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} \dots (3.6)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho Z + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \dots (3.7)$$

y las condiciones de borde son del tipo:

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \cos(z, \nu) = X_\nu \dots (3.8)$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} \cos(z, \nu) = Y_\nu \dots (3.9)$$

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \cos(z, \nu) = Z_\nu \dots (3.10)$$

3.1.2 PROBLEMA GENERAL DE EQUILIBRIO

Se busca determinar el estado de esfuerzo y deformación en un cuerpo de forma dada, el cual está sujeto a fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Para esto se tiene que expresar las ecuaciones del tipo

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \dots (3.11)$$

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} \dots (3.12)$$

$$\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho X + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial W}{\partial e_{yz}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} \dots (3.13)$$

como un sistema de ecuaciones para determinar las componentes del desplazamiento u , v , w ; y la solución debe ser adaptada para satisfacer ciertas condiciones en la superficie S de el cuerpo. En general esas condiciones son: (a) los desplazamientos están dados en todos los puntos de S , o (b) las fuerzas de superficie están dadas en todos los puntos de S . En el caso (a), las cantidades u , v , w han dado valores a S ; en el caso (b) las cantidades del tipo:

$$\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \cos(x, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \cos(y, \nu) + \frac{\partial W}{\partial e_{xz}} \cos(z, \nu) = X_\nu \dots (3.14)$$

han dado valores a S . Es claro que, si cualquier desplazamiento a sido encontrado, el cual satisface la ecuación del tipo (3.7), y produce los valores prescritos por las fuerzas de superficie, un pequeño desplazamiento que sería posible en un cuerpo rígido debe ser superpuesto y las ecuaciones aún serán satisfechas; la deformación y los esfuerzos no son alterados por la superposición de este desplazamiento. Se sigue que, en el caso (b), la solución de la ecuación es indeterminada, en el sentido que un pequeño desplazamiento que debería ser posible en un cuerpo rígido, debe ser superpuesto sobre cualquier desplazamiento que satisface la ecuación.

3.1.3 PROBLEMA GENERAL DE LAS VIBRACIONES

Cuando un cuerpo sólido está sujeto a un estado de deformación, y las fuerzas que mantienen la deformación cesan de actuar, movimientos relativos internos se generan. Tales movimientos pueden tal vez ser por la acción de fuerzas que varían con el tiempo. Este último caso puede ser descrita como un movimiento forzado. En problemas de movimiento forzado, las condiciones en la superficie deben ser condiciones de desplazamiento o condiciones de fuerzas. Cuando no hay fuerzas, y la superficie del cuerpo está libre de fuerzas, los movimientos que puede tomar el cuerpo son vibraciones libres. Ellas son determinadas resolviendo las ecuaciones del tipo:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial W}{\partial e_{xx}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial W}{\partial e_{xy}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial W}{\partial e_{zx}} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \dots (3.15)$$

y una forma adaptada para satisfacer las condiciones del tipo:

$$\cos(x, \nu) \frac{\partial W}{\partial e_{xx}} + \cos(y, \nu) \frac{\partial W}{\partial e_{yy}} + \cos(z, \nu) \frac{\partial W}{\partial e_{zz}} = 0 \dots (3.16)$$

en la superficie del cuerpo. Hay un número infinito de modos de vibración, y se puede adaptar la solución de las ecuaciones para satisfacer las condiciones de desplazamiento y velocidad dadas en el estado inicial.

3.2 CONSIDERACIONES FINALES PARA REALIZAR UN ANÁLISIS DINÁMICO ELÁSTICO.

En la teoría de las pequeñas oscilaciones de sistemas dinámicos con un número finito de grados de libertad, se demuestra que el más pequeño movimiento general de un sistema, el cual es ligeramente disturbado desde una posición de equilibrio estable, está capacitado de un número de pequeños movimientos periódicos dentro del respectivo análisis, que podrían ser ejecutados independientemente unos de otros. El número de esos tipos especiales de movimiento es igual al número de grados de libertad del sistema. Cada uno de ellos está caracterizado por las siguientes propiedades:

- (i) El movimiento de toda partícula del sistema es armónico simple.
- (ii) El período y fase del movimiento armónico simple son los mismos para todas las partículas.

(iii) El desplazamiento de cualquier partícula desde su posición de equilibrio, estimada en cualquier posición, fija una razón definida para el desplazamiento de cualquier otra partícula.

Cuando el sistema está en movimiento en uno de los casos especiales, se dice que está oscilando en modo un principal o normal. Los movimientos consecuentes a cualquier disturbio pequeño puede ser representado como el resultado de movimientos superpuestos en los diferentes modos normales. Cuando se generaliza esta teoría, para ser aplicada a sistemas con infinitos grados de libertad, se inicia por la búsqueda de los modos normales de vibración. Tomando $p/2\pi$ para la frecuencia de un modo de vibración, se asume para el desplazamiento la fórmula:

$$u = u' \cos(pt + \varepsilon), \quad v = v' \cos(pt + \varepsilon), \quad w = w' \cos(pt + \varepsilon)$$

en el cual u' , v' , w' son funciones de x , y , z , pero no de t , y p y ε son constantes. Las ecuaciones de movimiento que se deben cumplir son de la forma:

$$\frac{\partial X'_x}{\partial x} + \frac{\partial X'_y}{\partial y} + \frac{\partial X'_z}{\partial z} + \rho p^2 u' = 0,$$

y las condiciones de frontera, cuando la superficie está libre de esfuerzos es de la forma:

$$\cos(x, \nu) X'_x + \cos(y, \nu) X'_y + \cos(z, \nu) X'_z = 0,$$

Estas ecuaciones y condiciones de frontera son suficientes para determinar u' , v' , w' como funciones de x , y , z con un multiplicador arbitrario constante, y esas funciones también involucran a p . Las condiciones de frontera llevan a una ecuación para p , en general trascendental y teniendo un infinito número de raíces. Esta ecuación es conocida como la ecuación de frecuencias. Se concluye que un cuerpo sólido elástico posee un número infinito de modos normales de vibración. Sea p_1, p_2, \dots las raíces de la ecuación de frecuencias, y los modos normales de vibración con período $2\pi/p_r$ se expresan por las ecuaciones:

$$u = A_r u_r \cos(p_r t + \varepsilon_r), \quad v = A_r v_r \cos(p_r t + \varepsilon_r), \quad w = A_r w_r \cos(p_r t + \varepsilon_r)$$

en las cuales A_r es un multiplicador constante arbitrario. Las funciones u_r , v_r , w_r son llamadas funciones normales. El resultado de la superposición de movimientos en los diferentes modos normales sería un movimiento expresado por ecuaciones del tipo:

$$u = \sum u_r \phi_r, \quad v = \sum v_r \phi_r, \quad w = \sum w_r \phi_r$$

en las cuales ϕ_r corresponde a la función $A_r \cos(p_r t + \varepsilon_r)$.

CAPÍTULO IV

MODELOS EXPERIMENTALES Y MÉTODO INDIRECTO

Este capítulo presenta la forma como se obtuvieron las constantes físico-mecánicas de la madera llamada pino báltico, necesarias para realizar el posterior análisis estructural, empezando con un método experimental con muchas simplificaciones, para continuar con un método más sencillo apoyado por la computadora.

4.1 MÉTODO CLÁSICO DE DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

El método clásico de determinación de las propiedades del material es tomar una muestra del material (o muestras si se está analizando un objeto que está formado por más de un material) y usar una máquina de prueba que mida fuerzas, deformaciones y desplazamientos. Con esos resultados, las propiedades del material pueden ser calculadas.

Aunque se tenga una máquina de pruebas a nuestra disposición, obtener resultados puede ser costoso y requerir mucho tiempo, haciendo al método tradicional, no factible económicamente. Si se observa un objeto el cual está compuesto de más de un material y son muchas las consideraciones respecto a su comportamiento en conjunto, el conocimiento de las propiedades del

material de cada una de sus partes puede no ser muy relevante como el tener las propiedades de todo el conjunto.

Otro factor es el tipo de material con el cual se está trabajando. Mientras las propiedades del material para los metales son muy bien definidas, las propiedades del material para los plásticos o materiales orgánicos, tales como la madera o el cuero, son usualmente definidos como un promedio, o se establece un rango.

Por cualquiera de esas razones, se puede desear usar un modelo matemático que simule lo experimental.

4.2 LA MADERA.

4.2.1 CONSIDERACIONES GENERALES

En la madera se pueden reconocer tres direcciones principales que pueden considerarse ortogonales entre si; estas direcciones son la longitudinal, la tangencial y la radial ¹. En la figura 4.1, puede observarse que la dirección

¹ *La madera es un polímero natural compuesto por células en forma de tubos largos y delgados con extremos ahusados. La pared de la célula consiste en celulosa cristalina, paralelamente alineada con el eje de la célula. La Celulosa natural típica tiene varios miles de unidades moleculares de $C_6H_{10}O_5$ en cada cadena.*

El tronco del árbol crece por el desarrollo de capas concéntricas de células en el exterior de la madera y bajo la corteza. El ciclo anual de crecimiento, ocasionado por las variaciones estacionales en temperatura y humedad, produce los conocidos anillos y vetas de la madera.

La mayoría de las células en la madera están orientadas en sentido vertical, pero algunas están orientadas en sentido radial, para servir como refuerzo en contra de la diseminación de las fibras verticales bajo la carga natural de compresión del tronco del árbol. Debido a su estructura de células dirigidas, la madera tiene mayor resistencia y rigidez en la dirección longitudinal que en los otros sentidos.

radial y la tangencial son perpendiculares al grano. En la práctica se consideran dos direcciones: la dirección longitudinal o paralela a la fibra y la dirección transversal o perpendicular al grano. En esta tesis se considera las tres direcciones.

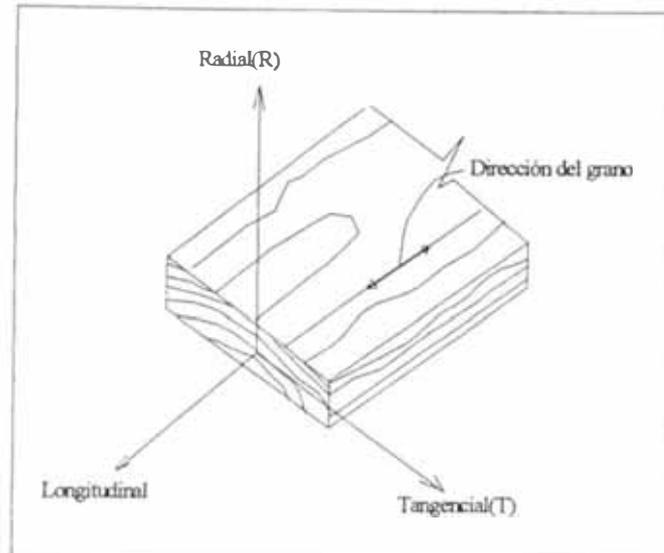


Fig. 4.1

La madera como material ortotrópico tiene tres módulos de elasticidad, tres módulos de corte y tres módulos de Poisson, orientados y definidos según los tres ejes ortogonales.

4.2.2 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS .

Como la madera es un material ortotrópico, es necesario determinar las nueve constantes elásticas que definen su comportamiento estructural elástico.

La madera tiene tres ejes de simetría perpendiculares entre si: longitudinal o paralelo a la veta , tangencial y radial. La resistencia y las propiedades elásticas difieren en estas tres direcciones debido a la orientación estructural de las células de la madera. Los valores del módulo de elasticidad en las dos direcciones perpendiculares a la veta están entre 1/20 y 1/12 del valor paralelo a la veta, según el Profesor Eisaias Harbauer de la Universidad de Munich

Dependiendo del corte de la madera, podemos obtener tres ejes de simetría que disponen de diferente manera a las fibras, como son: corte longitudinal, corte transversal, y corte radial (Ver figuras 4.2, 4.3 y 4.4)².

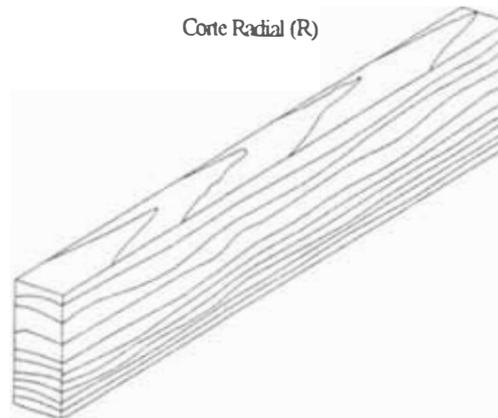


Fig.4.2

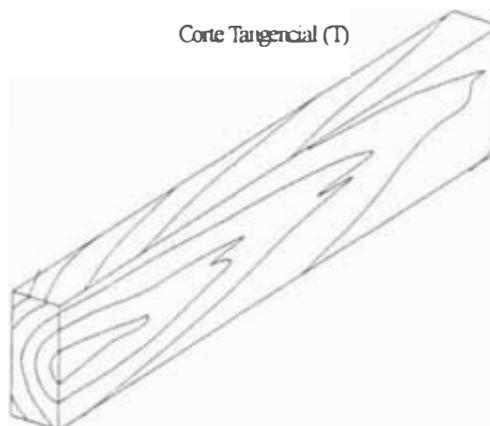


Fig.4.3

² En este punto del análisis es importante mencionar que los ensayos realizados en el pino báltico fueron hechos a condiciones climáticas características de la zona del Departamento de Lima. Como es sabido, la humedad en Lima es del orden del 98%, factor que influye en el comportamiento de las maderas que conforman la guitarra (Pino Báltico, Caoba y Ébano).

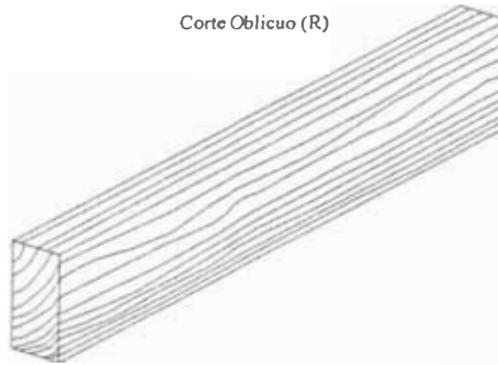


Fig.4.4

4.2.3 DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DE LOS MÓDULOS DE YOUNG. Denominación de la Madera: Pino Báltico³.

Se realizaron ensayos en 90 probetas de este tipo de madera en el Laboratorio de Estructuras de la Universidad, tal como lo muestra la figura 1. De las 90 muestras, 30 consideraban la dirección longitudinal, 30 la dirección transversales y 30 la dirección radial⁴.

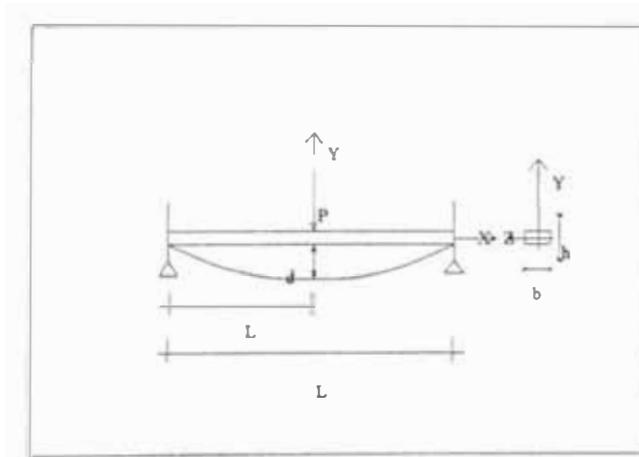


Fig. 4.5: Ensayo típico en cada dirección de las fibras.

³ Las muestras procedieron de un lote adquirido por el Luthier Antenor Ramos Obregón y que amablemente las cedió. Al momento de recepcionarlas estas muestras estaban secas.

⁴ Para realizar los ensayos se consideró que la dimensión más larga era la que controlaba la resistencia a la flexión, considerando despreciable la contribución que las otras direcciones ofrecían. Es así que para relacionar la deflexión obtenida experimentalmente con las propiedades del material, se consideró al medio como unidimensional, para así poder usar las ecuaciones 4.1 y 4.2, según recomendación del Laboratorio.

Los ensayos nos permitían hallar la deflexión en el centro de la viga simplemente apoyada. Tal deflexión, según la resistencia de materiales es:

$$d = \frac{PL^3}{48EI}, \quad (4.1)$$

donde:

P= carga aplicada.

L= longitud de la viga en la dirección de estudio.

E= módulo de elasticidad en la dirección de estudio.

$$I = \frac{1}{12}bh^3 = \text{momento de inercia de la sección.}$$

Los ensayos permitían hallar las deflexiones de las vigas en el centro de sus dimensiones mayores, y relacionarlos con la ecuación (4.1). Despejando el valor del módulo de elasticidad de (4.1), obtenemos:

$$E = \frac{PL^3}{48dI}, \quad (4.2)$$

La fórmula (4.2) es usada para determinar los módulos de elasticidad en las tres direcciones principales de la madera. Así obtenemos los resultados para la dirección X-X (longitudinal), Y-Y (tangencial) y Z-Z (Radial).

La madera en estudio es el denominado *Pino Báltico*. Fueron usadas 30 muestras para la determinación de los módulos de elasticidad en cada una de las direcciones, es decir 30 fueron requeridas para la dirección longitudinal, otras 30 para la tangencial, y las 30 finales para la dirección radial.

Las dimensiones de las probetas fueron:

Longitud: $L=30.00$ cm.

Ancho : $b= 5.00$ cm.

Espesor : $h=0.50$ cm.

Carga : $P= 0.5$, a 5 kg.

Los resultados de los experimentos realizados se pueden revisar en el Apéndice

1. De la evaluación de los resultados obtenidos, se obtiene las siguientes tablas

Tabla 4.1 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Desplazamiento (cm) | Módulo de Elasticidad Longitudinal (kg/cm ²) |
|---------------------|---------------------|----------------------------------------------------------|
| 1 | 0.129 | 84426.042 |
| 2 | 0.251 | 85094.948 |
| 3 | 0.386 | 84426.094 |
| 4 | 0.515 | 84426.122 |
| 5 | 0.644 | 84426.117 |

Tabla 4.2 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Desplazamiento (cm) | Módulo de Elasticidad Radial (kg/cm ²) |
|---------------------|---------------------|----------------------------------------------------|
| 1 | 0.632 | 17518.071 |
| 2 | 1.264 | 17517.867 |
| 3 | 1.903 | 17453.870 |
| 4 | 2.829 | 17511.362 |
| 5 | 3.100 | 18098.604 |

Tabla 4.3 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Desplazamiento (cm) | Módulo de Elasticidad Tangencial (kg/cm ²) |
|---------------------|---------------------|--------------------------------------------------------|
| 0.50 | 0.955 | 5716.515 |
| 1.00 | 1.908 | 5719.663 |
| 1.50 | 2.866 | 5711.223 |
| 2.00 | 3.795 | 5787.081 |
| 2.50 | 4.757 | 5735.096 |

Y gráficos:

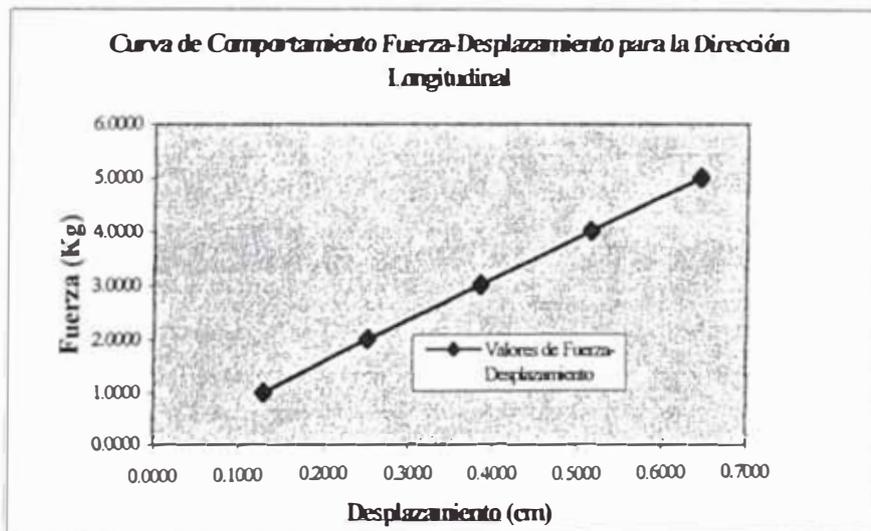


Gráfico 4.1 Curva de comportamiento fuerza – desplazamiento del pino báltico en la dirección longitudinal al realizar los ensayos mostrados en la figura 4.5.

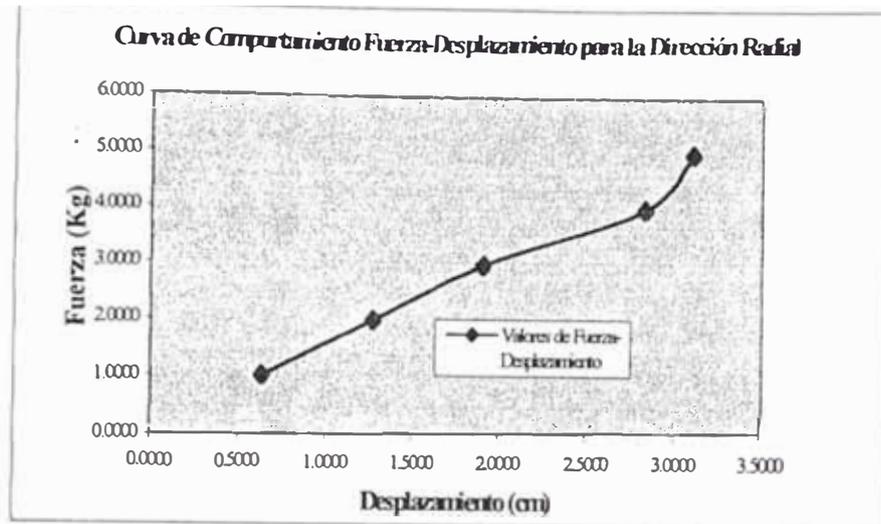
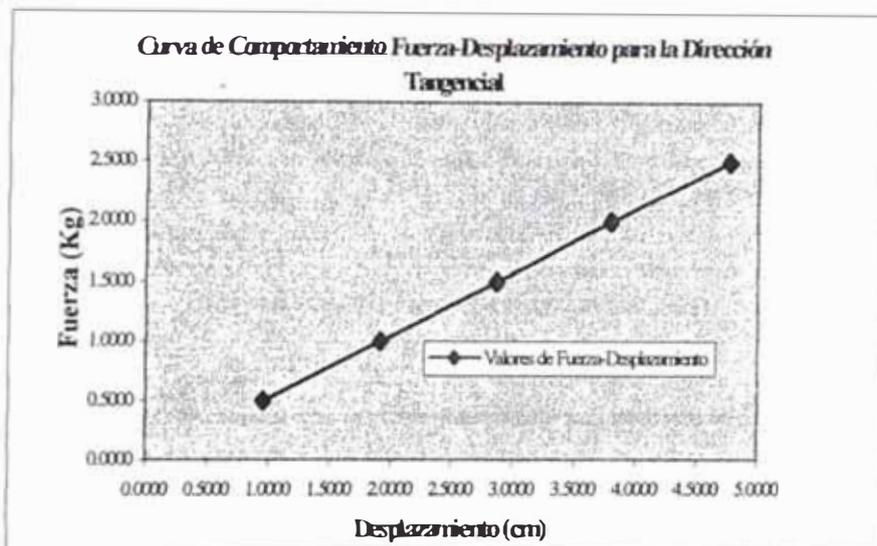


Gráfico 4.2 Curva de comportamiento fuerza – desplazamiento del pino báltico en la dirección radial al realizar los ensayos mostrados en la figura 4.5.



V Gráfico 4.3 Curva de comportamiento fuerza – desplazamiento del pino báltico en la dirección tangencial al realizar los ensayos mostrados en la figura 4.5.

4.2.4 DETERMINACIÓN DE LOS MÓDULOS DE RIGIDEZ O DE CORTE.

Denominación de la Madera: Pino Báltico.

Se realizaron ensayos en 90 probetas de este tipo de madera en el Laboratorio de Estructuras de la Pontificia Universidad Católica del Perú, tal como lo muestra la figura 2, 30 consideraban las fibras longitudinales, 30 las fibras transversales y 30 las radiales.

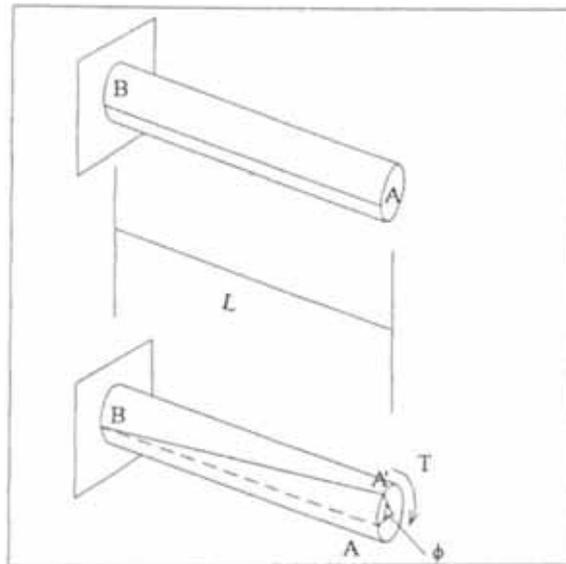


Figura 4.6 Ensayo típico en cada dirección de las fibras

Los ensayos permitían hallar las deformaciones angulares indirectamente que sufría la probeta, al aplicársele un momento M , y así relacionarlos con las expresiones siguientes:

$$\phi = \frac{TL}{JG}$$

$$J = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$G = \left(\frac{TL}{J}\right) \frac{1}{\phi}$$

Para generar el momento torsor T , se aplicó una carga P , tal como lo muestra la siguiente figura:

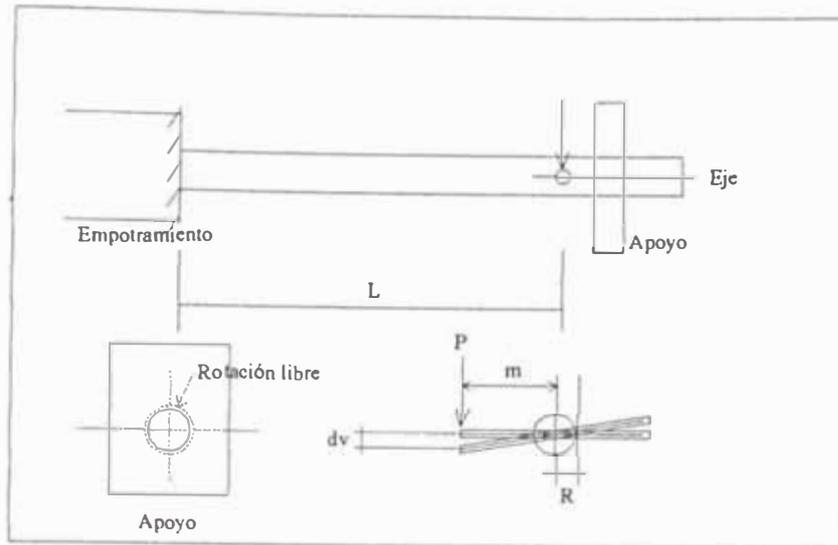


Figura 4.7. Aplicación de la Carga "P" para generar un momento torsor "T"

Para medir las deformaciones angulares, se mide el desplazamiento vertical dv , y se le relaciona con la siguiente expresión:

$$\phi = \text{ArcTang}\left(\frac{dv}{m}\right)$$

Las dimensiones de las probetas fueron:

Longitud: $L=30.00$ cm.

Radio : $R= 5.00$ cm.

Longitud de Brazo de Palanca : $m=20.00$ cm.

Carga : $P= 1$ a 5 kg.

Los resultados de los experimentos realizados se pueden revisar en el Apéndice 1. De la evaluación de los resultados obtenidos, se obtiene las siguientes tablas y gráficos:

Tabla 4.4 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Giro (radianes) $\times(10^{-4})$ | Módulo de Rigidez en en plano perpendicular al Plano Longitudinal-Radial (kg/cm ²) |
|---------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 1.29 | 4777.537 |
| 2 | 2.60 | 4735.323 |
| 3 | 3.86 | 4777.54 |
| 4 | 5.15 | 4777.234 |
| 5 | 6.44 | 4777.559 |

Tabla 4.5 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Giro (radianes) $\times(10^{-4})$ | Módulo de Rigidez en en plano perpendicular al Plano Longitudinal-Tangencial (kg/cm ²) |
|---------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 1.47 | 4262.627 |
| 2 | 2.94 | 4123.125 |
| 3 | 4.41 | 4089.560 |
| 4 | 5.88 | 4256.120 |
| 5 | 7.21 | 4403.937 |

Tabla 4.6 Valores Promedio de Módulo de Elasticidad para cada valor de carga

| Carga Aplicada (kg) | Giro (radianes) $\times(10^{-3})$ | Módulo de Rigidez en en plano perpendicular al Plano Radial-Tangencial (kg/cm ²) |
|---------------------|-----------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1 | 1.16 | 531.876 |
| 2 | 2.32 | 531.932 |
| 3 | 3.48 | 535.944 |
| 4 | 4.62 | 533.87 |
| 5 | 5.81 | 529.931 |

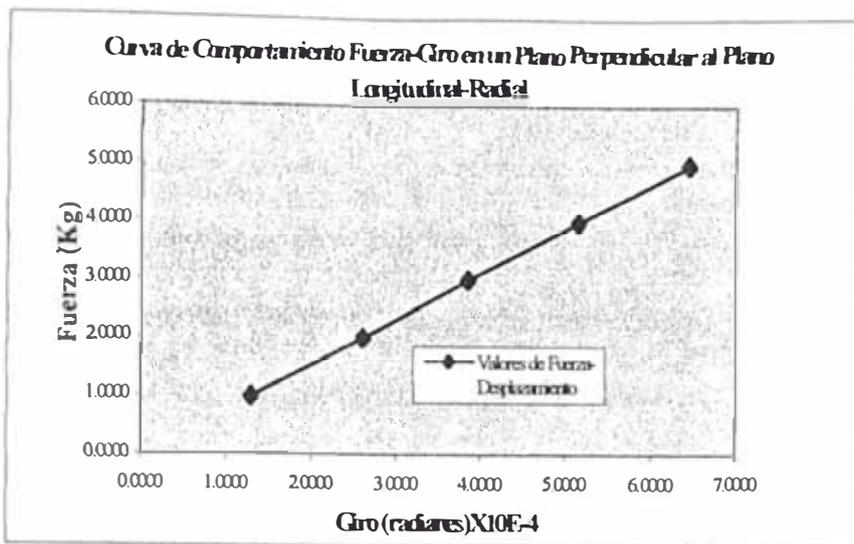


Gráfico 4.4 Curva de comportamiento fuerza-giro del pino báltico en un plano perpendicular al plano Longitudinal-Radial según los ensayos mostrados en la figura 4.6.

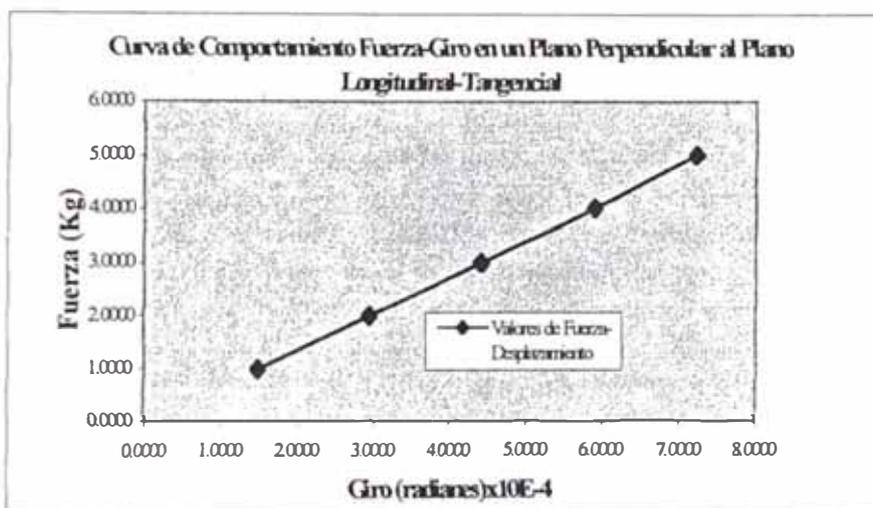


Gráfico 4.5 Curva de comportamiento fuerza-giro del pino báltico en un plano perpendicular al plano Longitudinal-Tangencial según los ensayos mostrados en la figura 4.6.

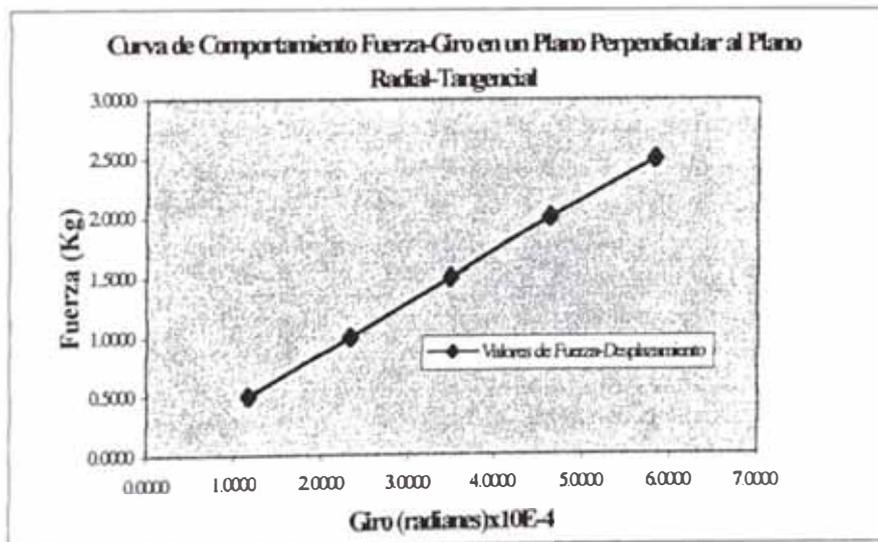


Gráfico 4.6 Curva de comportamiento fuerza-giro del pino báltico en un plano perpendicular al plano Radial-Tangencial según los ensayos mostrados en la figura 4.6.

4.2.5 DETERMINACIÓN DE LOS MÓDULOS DE POISSON.

Denominación de la Madera: Pino Báltico.

Se realizaron ensayos en 9 probetas de este tipo de madera en el Laboratorio de Física de la Pontificia Universidad Católica del Perú, tal como lo muestran las figuras 4.8, 4.9, 4.10, los cuales consideraban el módulo de Poisson en los planos: Longitudinal-Radial, Longitudinal-Tangencial, y Radial-Tangencial.

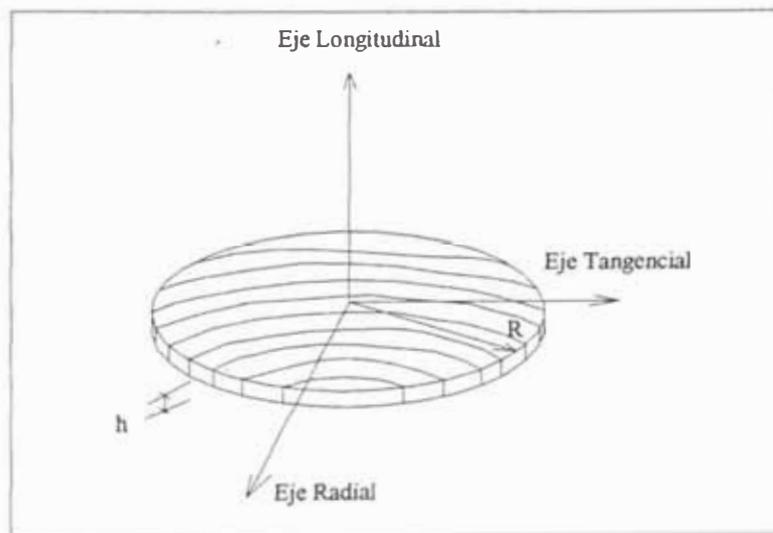


Figura 4.8: Círculo de madera de radio R. Plano Radial-Tangencial

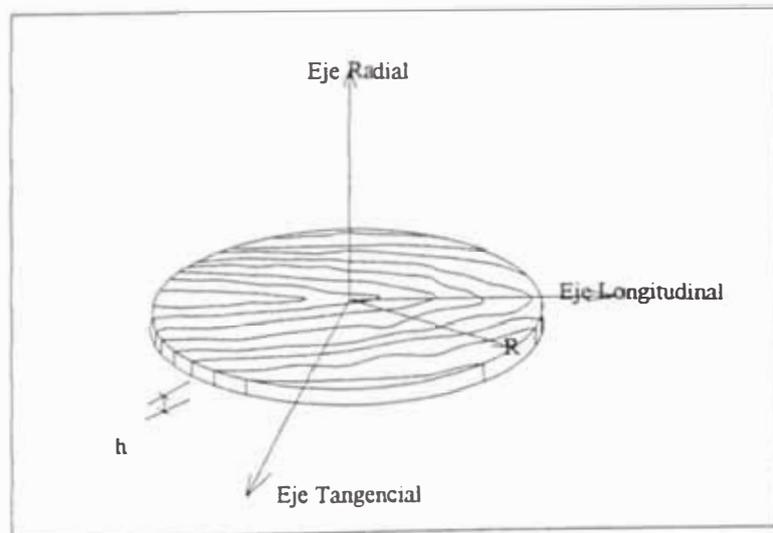


Figura 4.9: Círculo de madera de radio R. Plano Longitudinal-Tangencial

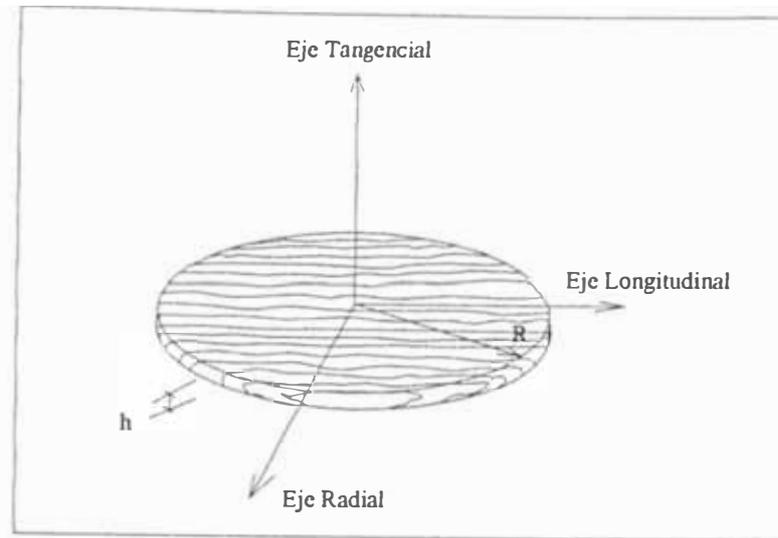


Figura 4.10: Círculo de madera de radio R. Plano Longitudinal-Radial

Las propiedades elásticas de los materiales son halladas de una manera no destructiva, usando un método de resonancia dinámica planteado por Gustáv Martincek⁵.

El método planteado por Gustáv Martincek, permite hallar el valor del módulo de Poisson en el plano que definen dos ejes perpendiculares de un material cualquiera, en particular ortotrópico (como es el caso de la madera). Para esto, el material debe tener forma circular, espesor pequeño y bordes libres, para someterlo a un ensayo de resonancia dinámica en laboratorio, y medir sus dos primeras frecuencias de vibración natural.

² *Gustáv Martincek, "The Determination of Poisson's Ratio and the Dynamic Modulus of Elasticity From the Frequencies of Natural Vibration in Thin Circular Plates", Institute of Construction and Architecture of the Slovak Academy of Sciences, Bratislava, Obráncov mieru 41, Czechoslovakia, 1994. Martincek usa un método de resonancia dinámica para hallar las propiedades elásticas de un material. La ventaja de este método, es que se plantean pruebas de tipo no destructivo: basta medir las frecuencias de vibración natural del espécimen (en particular de forma circular) y relacionar la mismas, con las ecuaciones correspondientes a las frecuencias circulares de vibración natural del espécimen.*

El espécimen de prueba, en forma de losa circular, es apoyado sobre un material suave, rugoso y poroso. El arreglo de la unidad generadora (G) y el gancho (P), con respecto al espécimen, genera vibraciones con respecto a un modo natural de vibración, cuyas frecuencias f_1 y f_2 son medidas. Cuando se mide la frecuencia f_1 el arreglo mostrado en la figura 4.11.(a) es usado, y cuando se mide la frecuencia f_2 el arreglo mostrado en la figura 4.11.(b) es usado.

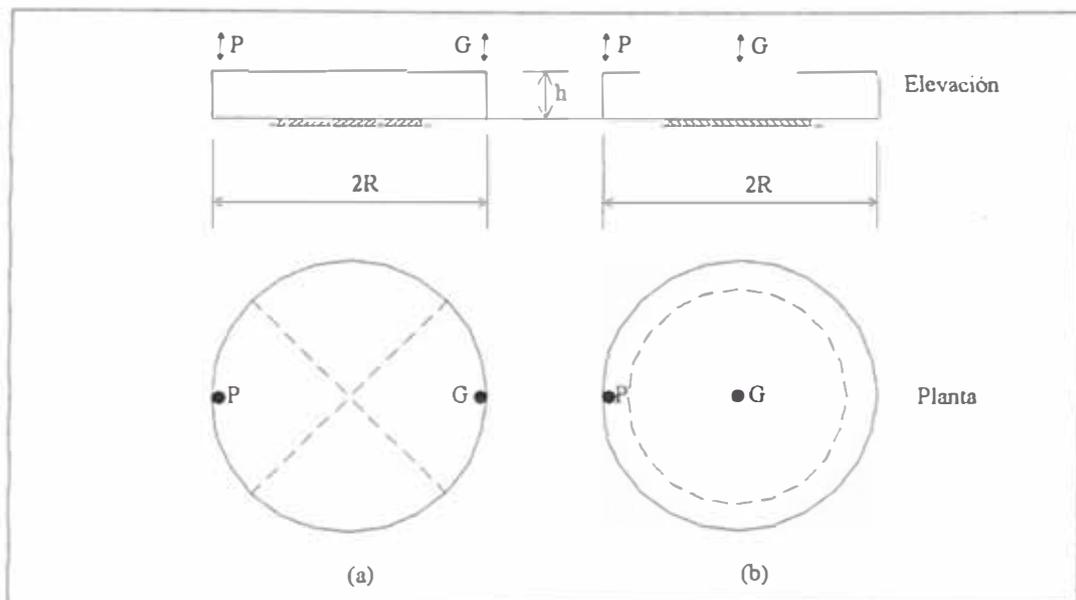


Figura 4.11. Arreglo del generador y gancho para los dos modos de vibración natural. G, generador; P, gancho.

El procedimiento usual en el método de resonancia es medir el valor de las frecuencias naturales f_1 y f_2 en ciclos/seg. Martincek relaciona estas frecuencias, con las siguientes relaciones:

$$\omega = \frac{\bar{\omega}}{\sqrt{\rho \times R}} \times k_1$$

$$\omega = \frac{\lambda}{\sqrt{\rho h \times R^2}} \times k_2$$

donde ω y λ están tabulados en las siguientes tablas; ρ es la densidad del material; h es el espesor de la plancha circular; R es el radio del círculo; y k_1 y k_2 son constantes que relacionan los módulos de elasticidad en las dos direcciones que definen el plano de la plancha de madera⁶.

Tabla 4.7

Valores de w^* para la primera vibración natural

| | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.000 | 0.010 | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.100 |
| $\nu = 0.000$ | 0.000 | 0.028 | 0.067 | 0.118 | 0.153 | 0.176 |
| $\nu = 0.150$ | 0.000 | 0.027 | 0.064 | 0.112 | 0.145 | 0.167 |
| $\nu = 0.300$ | 0.000 | 0.026 | 0.062 | 0.108 | 0.139 | 0.160 |
| $\nu = 0.500$ | 0.000 | 0.024 | 0.057 | 0.100 | 0.130 | 0.150 |

Tabla 4.8

Valores de w^* para la segunda vibración natural

| | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.000 | 0.010 | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.100 |
| $\nu = 0.000$ | 0.000 | 0.084 | 0.143 | 0.180 | 0.205 | 0.222 |
| $\nu = 0.150$ | 0.000 | 0.088 | 0.151 | 0.189 | 0.213 | 0.231 |
| $\nu = 0.300$ | 0.000 | 0.095 | 0.160 | 0.200 | 0.225 | 0.242 |
| $\nu = 0.500$ | 0.000 | 0.108 | 0.177 | 0.218 | 0.242 | 0.260 |

Tabla 4.9

" λ " (para la primera vibración natural)

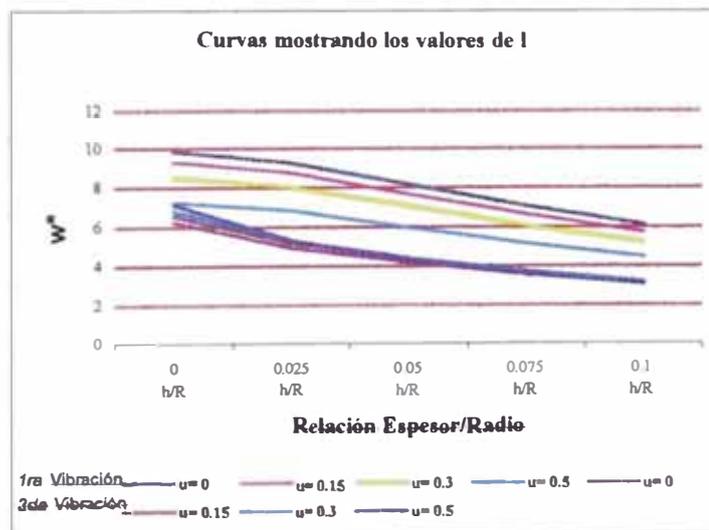
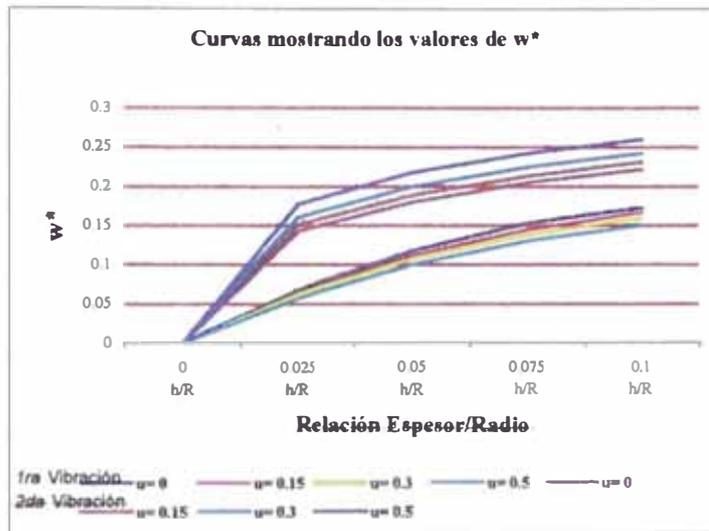
| | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.000 | 0.010 | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.100 |
| $\nu = 0.000$ | 9.862 | 9.734 | 9.271 | 8.168 | 7.049 | 6.090 |
| $\nu = 0.150$ | 9.319 | 9.143 | 8.775 | 7.672 | 6.617 | 5.722 |
| $\nu = 0.300$ | 8.536 | 8.456 | 8.040 | 7.017 | 6.042 | 5.211 |
| $\nu = 0.500$ | 7.257 | 7.177 | 6.841 | 5.946 | 5.131 | 4.460 |

³ La determinación de estos dos valores, k_1 y k_2 , fueron dadas por Z. Kaczkowski en su reporte "The influence of the shear forces and the rotatory inertia on the vibration of an anisotropic plate". Kaczkowski resuelve la ecuación diferencial de vibración en flexión en losas, planteando las ecuaciones de las frecuencias circulares de vibración natural de las mismas.

Tabla 4.10

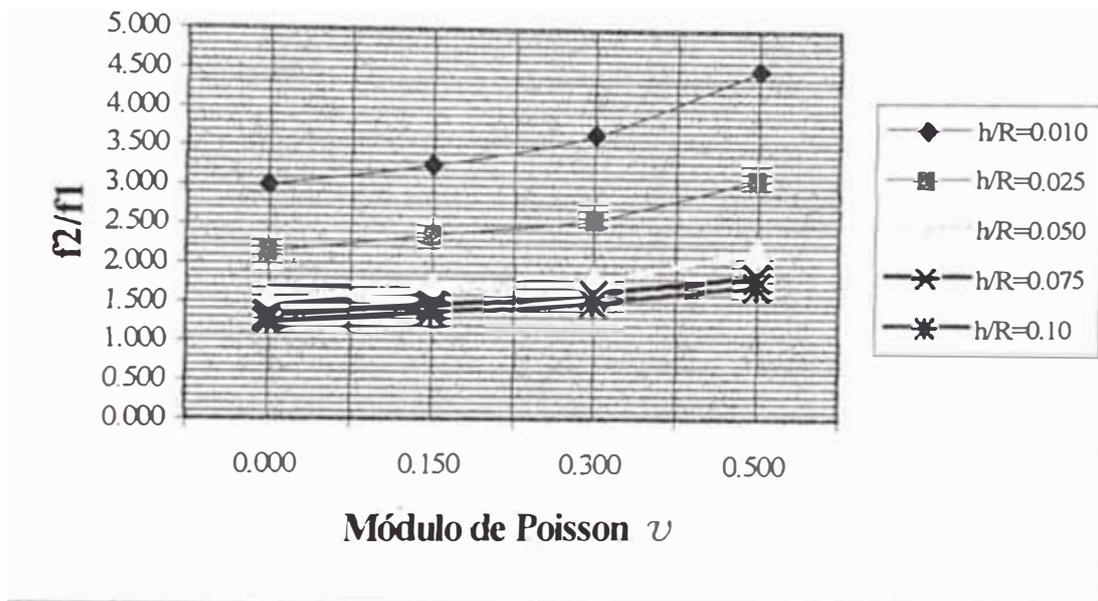
"I" (para la segunda vibración natural)

| | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R | h/R |
|-----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | 0.000 | 0.010 | 0.025 | 0.050 | 0.075 | 0.100 |
| u = 0.000 | 6.242 | 5.810 | 4.939 | 4.159 | 3.545 | 3.068 |
| u = 0.150 | 6.545 | 6.053 | 5.174 | 4.303 | 3.644 | 3.166 |
| u = 0.300 | 6.818 | 6.272 | 5.272 | 4.394 | 3.712 | 3.189 |
| u = 0.500 | 7.136 | 6.477 | 5.310 | 4.356 | 3.629 | 3.113 |



Como las frecuencias circulares de vibración son proporcionales a las frecuencias de vibración natural, y basándonos en las tablas 4.7 y 4.8, se plantea el siguiente gráfico:

Curvas para Determinar el módulo de Poisson



Los ensayos realizados involucraban probetas con las siguientes características:

Geometría: circular

Radio de la circunferencia: 15 cm.

Espesor de la muestra: 1.5 cm.

Los ensayos arrojaron los siguientes resultados:

Tabla 4.11: Valores de la relación $f2/f1$ para cada plano

| | $f2/f1$ | | | |
|-------------------------------|----------|----------|----------|----------|
| | Ensayo 1 | Ensayo 2 | Ensayo 3 | Promedio |
| Plano Longitudinal Radial | 1.9846 | 1.9756 | 1.9956 | 1.9853 |
| Plano Longitudinal Tangencial | 1.7534 | 1.7547 | 1.7599 | 1.7560 |
| Plano Radial Tangencial | 1.7508 | 1.7499 | 1.7501 | 1.7503 |

Haciendo uso de la “Curva para determinar el Módulo de Poisson”, con $h/R=0.10$, se obtienen los siguientes resultados:

Tabla 4.12: Valores del Modulo de Poisson

| | Módulo de Poisson |
|-------------------------------|-------------------|
| Plano Longitudinal Radial | 0.3875 |
| Plano Longitudinal Tangencial | 0.2059 |
| Plano Radial Tangencial | 0.2030 |

4.3 DETERMINACIÓN DE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS VIRTUALMENTE.

Las propiedades de los materiales han sido obtenidas por tradición desde algún tipo de experimento. Los ingenieros tienen varias opciones cuando escogen un método, y muchos de estos son simples o complicados. A continuación se presenta un método para hallar las constantes físico-mecánicas de un material, simulando en el ordenador la prueba física.

4.3.1 MÉTODO INDIRECTO.

Por ejemplo, digamos que deseamos conocer las propiedades de un material “X”.

El método a seguir es el siguiente:

- 1) Realizar una prueba física de la más simple, que resultará en un desplazamiento que pueda ser medido.

- 2) Según sea el caso, se aplicará una fuerza y se medirá el desplazamiento producido en algún punto.
- 3) Se modelará analíticamente la prueba física (ver figura de la siguiente página), por ejemplo usando el método de los elementos finitos (ver Capítulo V).
- 4) Para las propiedades del material, asuma un valor haciendo uso de lo mejor de su criterio, o busque los rangos en algún manual, o invénteselos. Estos valores de las propiedades del material, serán un primer “juego dato” de valores.
- 5) Compárese los desplazamientos obtenidos del análisis con los desplazamientos obtenidos de la prueba física.
- 6) Repetir los pasos 4 y 5, ajustando sus propiedades del material en cada iteración. Cuando sus resultados estén dentro de las cantidades aceptables, se han hallado los valores de las propiedades del material de trabajo.

Los resultados obtenidos haciendo uso de este método⁴ se presentan en la siguientes tabla:

Constantes Elásticas del Pino Báltico

| Módulo de Elasticidad | | | Módulo de Corte | | | Módulo de Poisson | | |
|-----------------------|----------|---------|-----------------|-----------|----------|-------------------|-----------|----------|
| Long. | Radial | Tang. | Long-Rad | Long-Tang | Rad-Tang | Long-Rad | Long-Tang | Rad-Tang |
| 85952.13 | 16983.13 | 5962.43 | 4598.85 | 4075.81 | 595.57 | 0.39 | 0.20 | 0.20 |

⁴Para determinar las constantes elásticas usando el método indirecto, se utilizó uno de los resultados hallados de los ensayos físicos. El método indirecto respecto de los métodos físicos, tiene la ventaja de ser muy económico. No niega la realización de los métodos de ensayo físico, ya que necesita de por lo menos uno de éstos para medir una deflexión o desplazamiento. Además tiene la ventaja de ahorrar tiempo, debido a que se hace más fácil programar al ordenador para hallar tal o cual calidad.

4.3.2 CONSTANTES ELÁSTICAS DEL PINO BÁLTICO

Recopilando todo lo hallado en las páginas líneas anteriores tenemos el siguiente cuadro que muestra los valores de las constantes elásticas del Pino Báltico.

Propiedades Físico-Mecánicas del Pino Báltico

| Parte | Módulos de Elasticidad | | | Módulos de Corte | | | Módulos de Poisson | | | Densidad gr/cm ³ |
|--------------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------|--------------|--------------------------------|
| | <i>E(LL)</i> | <i>E(RR)</i> | <i>E(TT)</i> | <i>G(LR)</i> | <i>G(LT)</i> | <i>G(RT)</i> | <i>U(LR)</i> | <i>U(LT)</i> | <i>U(RT)</i> | |
| | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | | | | |
| Experimental | 84559.86 | 17619.95 | 5733.92 | 4769.04 | 4227.07 | 532.71 | 0.39 | 0.21 | 0.20 | 0.523 |
| Indirecto | 85952.13 | 16983.13 | 5962.43 | 4598.85 | 4075.81 | 595.57 | 0.39 | 0.20 | 0.20 | 0.523 |

El valor de las Constantes Elásticas y la densidad del Pino Báltico, se hallaron en la realización de esta tesis

Los valores experimentales que se muestran en el cuadro de arriba, son el promedio de todos los experimentos realizados para su determinación. De aquí en adelante utilizaré los valores obtenidos en forma indirecta, como constantes de mis cálculos.

4.3.2 PROPIEDADES FÍSICO-MECÁNICAS DE OTRAS MADERAS

Colocando la información de la bibliografía⁵, las propiedades elásticas de otros dos tipos de madera se presentan en la siguiente tabla:

⁵ Los valores de las constantes elásticas de la caoba y el ébano fueron proporcionadas por Christian Bucher, quien me comentó que dichos valores fueron hallados usando un método experimental basado en ultrasonido. El método está implementándose en Alemania.

Propiedades Mecánicas de algunas maderas

| Tipo | Modulos de Elasticidad | | | Modulos de Corte | | | Módulos de Poisson | | | Densidad ρ /cm ³ |
|-------|------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|-------|-------|-------------------------------------|
| | E(LL) | E(RR) | E(TT) | G(LR) | G(LT) | G(RT) | U(LR) | U(LT) | U(RT) | |
| | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | kg/cm ² | | | | |
| Ébano | 135000 | 27000 | 9000 | 5400 | 1080 | 360 | 0.256 | 0.286 | 0.218 | 1.35 |
| Caoba | 120000 | 25531 | 8510 | 4800 | 1021 | 340 | 0.185 | 0.201 | 0.213 | 1.20 |

*Las propiedades del Ébano y la Caoba se obtuvieron por intermedio del candidato a Doctor Dipl. Ing. Christian Bucher del UNIVERSITÄT DER BUNDESWEHR-MÜNCHEN; Institut für Mechanik und Statik

5.0 RESUMEN

- Se obtienen las propiedades Mecánicas del Pino Báltico. Para esto, se hicieron ensayos en el Laboratorio para determinar la deflexión de una barra de madera causada por la aplicación de una carga determinada. Por las dimensiones de las muestras, se hacen hipótesis para calcular las propiedades elásticas en cada una de las direcciones del material.
- Se comparan los resultados hallados haciendo uso del Método de los Elementos Finitos. Para esto se modeló las muestras, y se obtuvo las propiedades del material que producían una deflexión determinada.

CAPÍTULO V

MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Cuando se tiene que resolver cualquier problema que involucre las ecuaciones diferenciales páginas atrás mencionadas, se tiene que tener en consideración que, durante muchas décadas se aplicaron para resolver casos simplificados de lo que en realidad existía, en lo que se refiere a la geometría de la estructura, materiales que lo componen, condiciones de borde, propiedades físico-mecánicas, etc. Gracias al desarrollo tecnológico de las computadoras, la complejidad de ciertos problemas que involucran cantidades enormes de ecuaciones, han podido resolverse sin mayor obstáculo haciendo uso del método de los elementos finitos.

El presente capítulo presenta la formulación del método de los elementos finitos en la solución de problemas de elasticidad, usando el principio variacional de energía potencial.

5.1 ELECCIÓN DEL MÉTODO

Los métodos de solución que fueron empleados durante muchas décadas son: las series de Fourier y Diferencias Finitas. Para aplicar Series de Fourier es necesario que sea posible una separación completa de las condiciones de contorno existentes en el problema a resolver. Éstas deben satisfacerse

separadamente para cada uno de los términos del desarrollo de la serie. La introducción de un desplazamiento nulo en la formulación final del problema reducido implica de hecho que dicho desplazamiento es por definición nulo a lo largo de la dirección de ese desplazamiento. Así pues, debe tenerse cuidado para no tratar a la matriz final como si se tratase de un simple problema reducido. Esto constituye en realidad una de las limitaciones del procedimiento descrito.

La principal dificultad en el uso de el método convencional de la diferencias finitas es la incorporación de las condiciones de borde. Desde el análisis, las ecuaciones de equilibrio del sistema (aproximadas directamente por el esquema de las diferencias) deben satisfacer en la diferenciación tanto de las condiciones geométricas, como de las condiciones naturales de frontera. Esto puede ser difícil e bordes arbitrarios, desde que la topología de la malla de diferencias finitas restringe la forma de diferenciación que pueda ser requerida, y puede ser difícil para mantener las propiedades de simetría en la matriz de coeficientes.

En la actualidad se puede resolver una gran variedad de problemas haciendo uso del Método de los Elementos Finitos, considerando que es un método numérico aproximado cuyos resultados dependen de la información que proporcione el usuario.

La principal ventaja del método de los elementos finitos es que el procedimiento puede ser usado efectivamente en programas de análisis de

propósito general. Las diferencias finitas son aplicadas a problemas específicos, mientras que los elementos finitos pueden ser aplicados a problemas inusuales. Normalmente se usan para analizar muchos elementos, para virtualmente representar cualquier medio continuo con condiciones de borde y carga complejos.

En la realización de esta Tesis se escogió realizar el análisis de la estructura en estudio haciendo uso del Método de los Elementos Finitos por las siguientes razones:

- La facilidad de programación en el ordenador.
- Capacidad de trabajar con mucha cantidad de información.
- La posibilidad de resolver las ecuaciones en forma eficiente aprovechando la simetría de la matriz que se genera.
- La posibilidad de repetir análisis de una forma rápida, modificando ciertos datos de entrada.

5.2 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El Método de los Elementos Finitos tuvo sus inicios en los años 50 de este siglo, y con la amplia difusión y uso de las computadoras digitales ha ganado considerablemente a otros métodos numéricos aproximados. El Método de los Elementos Finitos puede ser visto como un aproximado Método de Ritz combinado con un Principio Variacional aplicado a Mecánica Continua. En

contraste con las aproximaciones precedentes, en el método de los elementos finitos, el continuo sólido es discretizado por un número finito de elementos conectados no solamente en sus nudos, sino que también considera la hipotética frontera entre los bordes: la compatibilidad y equilibrio nodal como en un convencional análisis estructural (es claro que la compatibilidad debe también ser satisfecha a lo largo del borde entre los elementos). Aproximaciones alternativas para realizar el análisis estructural son de este modo empleados. Una diferencia esencial existente entre el análisis con elementos finitos y con diferencias finitas, es que en esta última, las ecuaciones diferenciales que describen el estado del continuo que gobierna cantidades como esfuerzo o deflexión son aproximadas por un juego de ecuaciones escritas para un número limitado de nudos. En el otro caso, la aproximación con elementos finitos se produce con un ensamble de elementos que reemplazan la estructura continua, y sus ecuaciones de interpolación son de orden local

5.2.1 DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

Los problemas de elasticidad lineal están gobernados por tres juegos de ecuaciones:

(a) Ecuaciones de equilibrio de esfuerzos.

$$\sigma_{i,j} + F_i = 0 \quad i = 1,2,3 \quad (5.1)$$

(b) Relaciones de esfuerzo-deformación

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \text{o} \quad (5.2)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.3)$$

(c) Relaciones desplazamiento- deformación

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (5.4)$$

donde :

σ_{ij} componente del tensor de esfuerzo.

ε_{ij} componente del tensor de deformación.

F_i componente de las fuerzas de cuerpo.

C_{ijkl} componente de proporcionalidad elástica.

S_{ijkl} componente de flexibilidad elástica.

$$\sigma_{y,j} = \frac{\partial \sigma_y}{\partial x_j}$$

Un problema de elasticidad resuelve las ecuaciones anteriores para el dominio V , el cual, a lo largo de su borde S_σ las tracciones de superficie son prescritas, y a lo largo de la frontera restante S_u , los desplazamientos u_i son prescritos. Las tracciones de superficie son relacionadas a los esfuerzos por

$$\sigma_{ij} v_j = T_i \quad (5.5)$$

donde ν_j es el coseno director de la superficie normal.

Esta ecuación puede ser interpretada como la condición de equilibrio entre los esfuerzos y las tracciones de superficie. La figura 5.1 muestra la representación tridimensional de los esfuerzos que se presentan en los tres planos coordenados x_1, x_2, x_3 .

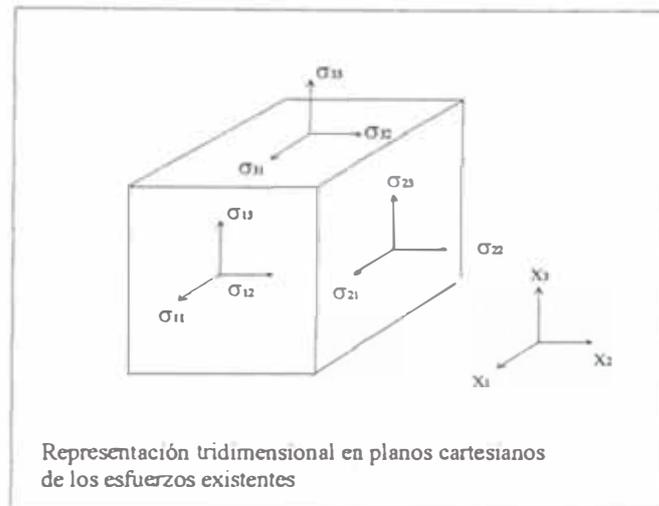


Figura 5.1 : Representación de los esfuerzos asociados a los planos coordenados x_1, x_2, x_3

Se usará las formulaciones variacionales para expresar dichas ecuaciones de elasticidad. Los tres principios variacionales comúnmente usados para desplazamientos pequeños según la teoría de la elasticidad, son:

(I) Principio de Energía Potencial Mínima.

Este principio puede ser derivado directamente del principio de trabajos virtuales y para el cual, el único campo de variables, los desplazamientos, deben ser continuos dentro del dominio.

(II) Principio de Energía Complementaria Mínima

Según el cual, el único campo de variables, los esfuerzos, deben satisfacer las ecuaciones de equilibrio.

(III) Principio Variacional de Reissner

Este principio incluye los desplazamientos y esfuerzos como el campo de variables.

5.2.2 PRINCIPIO DE ENERGÍA MÍNIMA POTENCIAL .

La formulación del elemento finito basado en el principio de energía potencial mínima, puede ser establecida como la disipación o cancelación de la variación del siguiente funcional:

$$\pi_p = \sum_n \left[\int_{V_n} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right) dV - \int_{S_{u_n}} \bar{T}_i u_i dS \right] \quad (5.6)$$

donde :

F_i representa las fuerzas existentes sobre el cuerpo.

T_i representa las fuerzas de superficie prescritas.

S_{u_n} se refiere a la porción de la frontera ∂V_n del elemento n-ésimo sobre el cual los desplazamiento en la superficie u_i son prescritos.

Este principio variacional exige que se cumplan las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos y que las tracciones en la interface de dos vecindades entre elementos estén en equilibrio.

Un modelo de elemento finito basado en este principio y usa funciones de esfuerzo como campo de variables es llamado modelo de equilibrio, porque en esta formulación las condiciones de equilibrio son satisfechas en cualquier lugar.

5.2.3 DETERMINACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EULER PARA EL FUNCIONAL DE MÍNIMA ENERGÍA POTENCIAL.

Con el funcional de energía mínima potencial

$$\pi_p = \sum_n \left[\int_{V_n} \left(\frac{1}{2} C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - \bar{F}_i u_i \right) dV - \int_{S_{s_n}} \bar{T}_i u_i dS \right] \quad (5.7)$$

Los desplazamientos asumidos para el n-ésimo elemento pueden ser escritos en forma matricial como:

$$u = N q_n \quad (5.8)$$

donde q_n es una matriz columna de los desplazamientos generalizados del elemento, y N es una matriz de funciones de interpolación.

La relación de esfuerzo-deformación puede ser escrita en forma matricial como:

$$\underline{\sigma} = C \underline{\varepsilon} \quad (5.9)$$

donde:

$$\sigma = \{ \sigma_{11} \quad \sigma_{22} \quad \sigma_{33} \quad \sigma_{12} \quad \sigma_{23} \quad \sigma_{31} \}$$

$$\varepsilon = \{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{31} \}$$

y C es la matriz de constantes elásticas, la cual es simétrica y está relacionando los esfuerzos con las deformaciones. La relación deformación-desplazamiento puede ser escrita como:

$$\underline{\varepsilon} = D \underline{u} \quad (5.10)$$

donde D está definida por:

$$D = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_1 & 0 \\ 0 & \partial/\partial x_3 & \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 & 0 & \partial/\partial x_1 \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

Sustituyendo estas últimas relaciones en la expresión variacional, se obtiene:

$$\pi_p = \sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{2} q_n^T k_n q_n - q_n^T \bar{Q}_n \right) \quad (5.12)$$

donde:

$$k_n = \int_{V_n} (DN)^T C (DN) dV \quad (5.13)$$

$$Q_n = \int_{V_n} N^T \bar{F} dV + \int_{S_{\sigma_n}} N^T \bar{T} dS \quad (5.14)$$

y M es el número total de elementos.

Minimizando la expresión variacional hallada, es decir hallando:

$$\frac{\partial \pi_p(q)}{\partial q} = 0$$

se obtiene:

$$k_n q_n - \bar{Q}_n = 0 \quad (5.15)$$

donde:

k_n representa la matriz de rigidez del elemento n ; y,

Q_n representa las fuerzas aplicadas sobre el mismo elemento.

5.2.3.1 ANÁLISIS ESTÁTICO

Para realizar un análisis estático y elástico usando elementos finitos basados en el principio de energía potencial, se considerará a las fuerzas existentes sobre el cuerpo, como sigue:

$$F_i = \bar{b}_i \text{ los efectos de las fuerzas de cuerpo}$$

donde \bar{b}_i representa los efectos de las fuerzas de cuerpo del elemento i .

Reemplazando en (5.14) obtenemos las fuerzas aplicadas en el elemento i .

Para continuar con el método de los elementos finitos, se debe realizar la operación indicada en la ecuación (5.13), que representa la matriz de rigidez del elemento i . Una vez realizado esto último, se procederá a sumar (ensamblar) la contribución de cada uno de los elementos, que se manifestará en una matriz de rigidez que contenga los términos de rigidez de toda la estructura, y otra los términos que representan las fuerzas aplicadas al sistema, para luego despejar los desplazamientos nodales de la estructura.

5.2.3.2 ANÁLISIS DINÁMICO

Para realizar un análisis dinámico y elástico usando elementos finitos basados en el principio de energía potencial, se considerará a las fuerzas existentes sobre el cuerpo, como sigue:

$$\bar{F}_i = \bar{b}_i - \rho_i \bar{u}_i - \mu_i \dot{u}_i$$

donde:

b_i representa los efectos de las fuerzas de cuerpo; $\rho_i \ddot{u}_i$ las fuerzas producidas por la aceleración del terreno, donde ρ_i , es la densidad del elemento i , y \ddot{u}_i es la aceleración del elemento i en el tiempo t ; $\mu_i \dot{u}_i$ las fuerzas de amortiguamiento, donde μ_i es la viscosidad del elemento i ; y u_i , es el desplazamiento del elemento i en el tiempo t .

La ecuación que se obtiene luego de sustituir y minimizar el principio de energía potencial es:

$$\left(\int_{V_n} (N^T \rho_i N) dV_n \right) \ddot{q} + \left(\int_{V_n} (N^T \mu_i N) dV_n \right) \dot{q} + Kq - \int_{S_{\sigma_n}} T N dS + \int_{V_n} b_i N dV_n = 0$$

que puede escribirse como:

$$\bar{M} \ddot{q} + \bar{C} \dot{q} + \bar{K} q + T I = 0 \quad (5.16)$$

donde

$\bar{M} = \left(\int_{V_n} (N^T \rho_i N) dV_n \right)$: representa la matriz de masa del elemento

$\bar{C} = \left(\int_{V_n} (N^T \mu_i N) dV_n \right)$: representa la matriz de amortiguamiento del elemento

$\bar{K} = K$: representa la matriz de rigidez del elemento

$$TI = \int_{S_n} TNdS - \int_{V_n} b_i Nd(V_n) : \text{términos independientes.}$$

Las matrices resultantes K , M y C tienen un ancho de banda que es determinado por la numeración de los puntos nodales de los elementos finitos. De aquí que la topología de la malla de elementos finitos determina el orden y ancho de banda del sistema de matrices.

Para resolver (5.16) se usará la siguiente transformación sobre los desplazamientos del elemento finito:

$$q_{(t)} = PX_{(t)} \quad (5.17)$$

donde P es una matriz cuadrada y $X_{(t)}$ es un vector dependiente del tiempo de orden n . La matriz de transformación P es aún desconocida y será determinada. Los componentes de X son referidos como desplazamientos generalizados, sustituyendo en (5.16), y premultiplicando por P^T , se obtiene:

$$\tilde{M}\ddot{q} + \tilde{C}\dot{q} + \tilde{K}q + \tilde{T} = 0 \quad (5.18)$$

donde:

$$\tilde{M} = P^T \overline{M} P, \quad \tilde{C} = P^T \overline{C} P, \quad \tilde{K} = P^T \overline{K} P, \quad \tilde{T} = P^T T I$$

El objetivo de esta transformación es obtener nuevo sistema de matrices de rigidez, masa y amortiguamiento, que tendrá un ancho de banda más pequeño que el original, y la matriz P debe ser seleccionada convenientemente

Para efectos de esta tesis se considera los resultados que se obtienen de la vibración libre con amortiguamiento despreciado:

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (5.19)$$

La solución de (5.19) puede ser postulada (véase ítem 3.2) para ser de la forma:

$$q = \phi \sin \omega(t-t_0) \quad (5.20)$$

donde ϕ es un vector de orden n ; t es la variable tiempo; t_0 un tiempo constante, y ω una constante identificada para representar la frecuencia de vibración de el vector ϕ .

Sustituyendo (5.20) en (5.19), se obtiene el problema generalizado de valores propios, donde φ y ω deben ser determinadas:

$$K\phi = \omega^2 M\phi \quad (5.21)$$

La ecuación (5.21) produce las n soluciones que involucran el problema de valores propios, de la forma: $(\omega_1^2, \phi_1), (\omega_2^2, \phi_2), \dots, (\omega_n^2, \phi_n)$, tal que se cumple:

$$\left. \begin{aligned} \phi_i^T M \phi_j &= 1; & i = j \\ &= 0; & i \neq j \end{aligned} \right\} \text{ y;}$$

$$0 \leq \omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \omega_3^2 \dots \leq \omega_n^2$$

El vector ϕ_i es llamado el vector *i-ésima forma de modo*, y ω_i es su correspondiente frecuencia de vibración.

5.3 ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL

Un elemento sólido tridimensional permite la solución de problemas generales que involucra la teoría de la elasticidad. Tal tipo de elementos puede representar muy aproximadamente estructuras masivas tales como presas de concreto o gravedad, bocatomas, etc., para que luego del respectivo análisis se obtenga en detalle esfuerzos y desplazamientos en los nudos especificados.

5.3.1 ECUACIONES DE ELASTICIDAD

Las relaciones básicas para elementos sólidos son:

Ecuaciones de equilibrio:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \rho Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Ecuaciones de deformación y desplazamiento:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (5.17)$$

Ecuaciones de esfuerzo deformación:

$$[\sigma] = \frac{E_1}{D} \begin{bmatrix} (m - \nu_2^2 n) & (m\nu_1 + n\nu_2\nu_3) & n(\nu_1\nu_2 + \nu_3) & 0 & 0 & 0 \\ & (1 - \nu_3^2 n) & (\nu_2 + \nu_1\nu_3 m) & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{m}{n}(1 - \nu_1^2) & 0 & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & \frac{G_1 D}{E_1} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{G_2 D}{E_1} & 0 \\ & & & & & \frac{G_3 D}{E_1} \end{bmatrix} [\varepsilon]$$

o expresado en forma matricial:

$$\sigma = [C] \varepsilon \quad (5.18)$$

5.3.2 FUNCIÓN DE FORMA DEL ELEMENTO FINITO TRIDIMENSIONAL

El elemento finito sólido tridimensional, esta definido por ocho nudos que forman las aristas de un hexaedro, tal como lo muestra la figura 5.2.

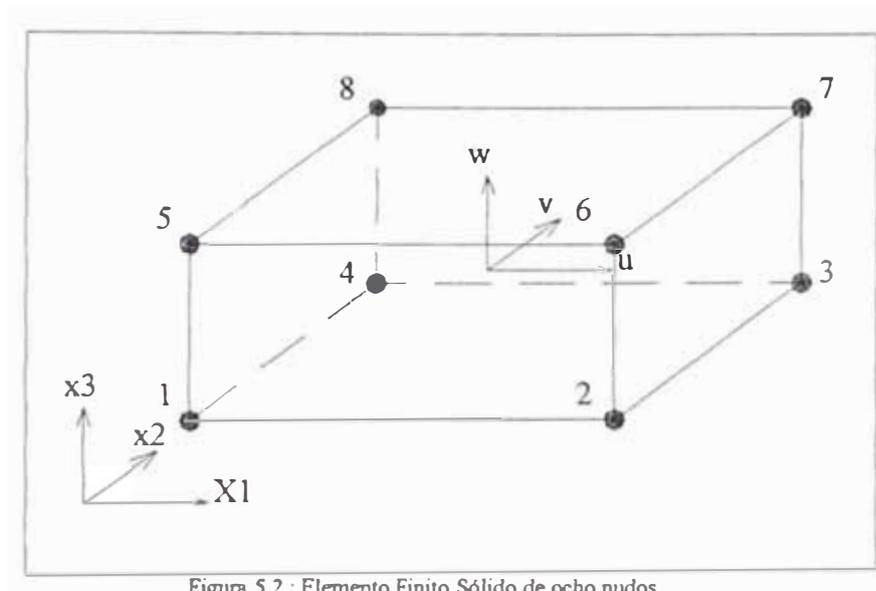


Figura 5.2 : Elemento Finito Sólido de ocho nudos

Cada nudo tiene tres grados de libertad, que son los desplazamientos en las direcciones x_1 , x_2 , x_3 . El origen de coordenadas es precisamente el centroide del elemento, y las funciones de forma del mismo son lineales, de la siguiente forma:

$$u = N q_n$$

donde:

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} u(x_1, x_2, x_3) \\ v(x_1, x_2, x_3) \\ w(x_1, x_2, x_3) \end{Bmatrix}$$

$$\{u\} = \{u_1 \quad \dots \quad u_8\}^T, \{v\} = \{v_1 \quad \dots \quad v_8\}^T, \{w\} = \{w_1 \quad \dots \quad w_8\}^T$$

$$\underline{q}_n = \begin{Bmatrix} \{u\} \\ \{v\} \\ \{w\} \end{Bmatrix}$$

$$N_i = \frac{1}{8}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(1 + \zeta\zeta_i)$$

5.3.3 MATRIZ DE RIGIDEZ

Usando el principio de energía potencial mínima arriba descrito se halla la matriz de rigidez para el elemento finito sólido.

Definiendo las deformaciones en forma lineal como (5.8, 5.9, 5.10):

$$\underline{\varepsilon} = D \underline{u}$$

donde:

: es la matriz que contiene las deformaciones nodales.

$[D]$: es una matriz de coeficientes que relaciona los esfuerzos con las deformaciones del elemento.

$\{\Delta\}$: es la matriz que contiene los desplazamientos nodales.

La matriz de rigidez se obtiene minimizando la expresión variacional respectiva tal como se explicó arriba. Así tenemos que:

$$[K] = \left[\int_{vol} [DN]^T [C] [DN] d[vol] \right]$$

es la matriz de rigidez del elemento finito deseada.

CAPÍTULO VI

ANÁLISIS ACÚSTICO

Resulta indudable que el constante y acelerado proceso tecnológico al que estamos asistiendo, motiva una permanente ampliación de cualquier disciplina de carácter técnico. Esta continua ampliación trae consigo, la mayoría de las veces, la fusión de distintas ramas técnicas, cuyo entrelazamiento ofrece y hace posible un más completo y coherente conocimiento de la materia objeto de estudio.

La Acústica se halla de pleno en este proceso expansivo y aglutinante. Su teoría física puede decirse que pasa a ser utilizada con fines prácticos, gracias a las investigaciones de W.C. Sabine a fines del siglo pasado. Desde entonces y en rápida sucesión, multitud de descubrimientos han dilatado el campo de la Acústica, principalmente el proceso industrial en la fabricación de una gama extensa de materiales a utilizar en los acondicionamientos acústicos y la electrónica, además de conducir a un insospechado estudio del fenómeno sonoro, hace que surja la electroacústica.

6.1 ORIGEN Y FORMACIÓN DEL SONIDO

6.1.1 MOVIMIENTO PERIÓDICO

Es el que realiza un cuerpo que repite un determinado movimiento. El tiempo, o intervalo fijo, que media entre dos posiciones idénticas del cuerpo es su período.

Las moléculas del aire, cuando en el mismo se produce una perturbación o sonido, oscilan realizando movimientos periódicos de tipo armónico.

El *movimiento armónico* es un caso particular del *movimiento periódico*.

6.1.2 MOVIMIENTO ARMÓNICO

Un sistema material, sometido a una fuerza recuperadora, está animado de un *movimiento armónico* respecto a un punto fijo, cuando describe ciclos idénticos en tiempos iguales.

Si se prende una pequeña bola metálica a un muelle, o resorte, que se supone perfectamente elástico, éste, luego de sufrir un alargamiento, quedará en equilibrio (Figura 6.1).

Si llevamos la bola hasta la posición B' , al soltarla seguirá hasta la B'' , que (si prescindimos del rozamiento) será simétrica de B' respecto a B . En B' posee una energía potencial determinada que se convierte en energía cinética a medida que se acerca a B , donde la energía potencial se anula y la cinética llega a su máximo. Esta energía cinética es la que impulsa a la bola hasta B'' , donde queda nula convirtiéndose en potencial. Se inicia el descenso a impulso de esta energía potencial, que se disipa al llegar al punto de equilibrio B transformada en cinética, gracias a la cual la bola vuelve a ocupar la posición B' y de nuevo aparece la energía potencial. Se ha realizado el ciclo. En

$$f = \frac{1}{T}$$

La frecuencia se mide en hertzios y es el número de oscilaciones completas, o ciclos que se realizan por segundo.

Si los movimientos armónicos son rápidos (esto es, de alta frecuencia) se les llama *vibratorios*.

6.1.3 FORMACIÓN Y PROPAGACIÓN DEL SONIDO

Dado que todos los fenómenos acústicos a que me voy a referir en este capítulo se verificarán en el seno del aire, se centrará el estudio en su formación y propagación en este medio.

El aire consta, principalmente, de oxígeno (21%), nitrógeno (78%) y pequeñas cantidades de gases inertes, impurezas y vapor de agua (que completan el 1% restante). Las moléculas de estos elementos se hallan en dispersión homogéneamente mezcladas, por lo que el aire es un medio isótropo, esto es, presenta iguales propiedades en todas direcciones.

Este conjunto de moléculas permanece en equilibrio, mientras no haya una causa que lo turbe, y constituye un medio elástico de extraordinaria fluidez

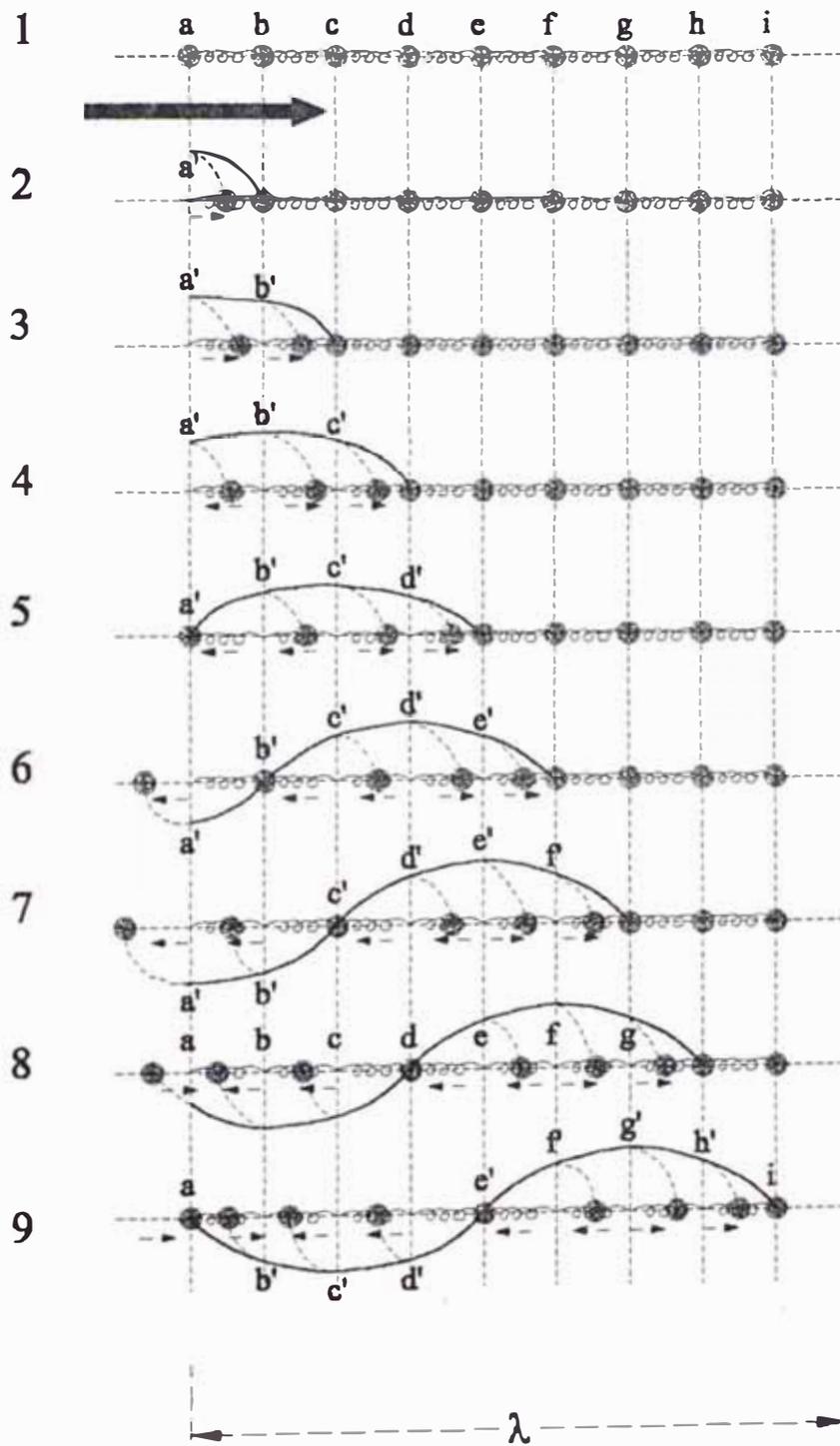


Figura 6.2

Supongamos (fig. 6.2) que sean $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, una serie de moléculas que en 1 están en equilibrio y equidistantes. Si, tal como se indica en 2, se le imprime a a un desplazamiento hacia la derecha, debido a la propiedades elásticas este desplazamiento se transmite a b tal como se ve en 3, mientras que a ha alcanzado un desplazamiento máximo. En 4, a oscila hacia la izquierda buscando de equilibrio, mientras que b se halla en su máxima desviación de avance y c ha iniciado la oscilación. En 5, a ha recuperado su posición primitiva, pero sigue retrocediendo tal como se aprecia en 6, llegando en 7 al punto de máximo retroceso, c está en la máxima elongación y d ya se ha visto afectada. Así sucesivamente se va transmitiendo el movimiento a lo largo de todas las moléculas mediante movimientos armónicos de todas ellas, realizados sobre la línea recta de propagación del movimiento. En 9, a ha realizado una oscilación completa y se halla en la posición inicial; excepto i (que va a iniciar el movimiento) todas las moléculas se han visto afectadas.

Cuando la perturbación se extingue (ha pasado la onda), las moléculas recobran su posición inicial. Lo que se desplaza, pues, es el movimiento, no el medio material que se ve afectado.

Si se observan las distintas fases se aprecia que la propagación del movimiento ha sido producida por un acercamiento o compresión de las moléculas, que avanza, seguido a continuación por un alejamiento o expansión de las mismas.

En 9 se aprecia la forma simétrica en que se hallan distribuidas respecto a la

central e ; se han formado dos zonas de compresión con una de expansión entre las mismas. Este conjunto se llama *onda longitudinal* (pues las oscilaciones se desarrollan longitudinalmente), y su período T es el tiempo que ha necesitado para generarse. *Longitud de Onda* es la distancia que separa a las moléculas extremas de una onda completa.

Es decir, la *longitud de onda* es el espacio necesario para que se verifique un ciclo de la perturbación en su totalidad; si no dispone de éste, la onda no se podrá generar de forma completa. Esta simple consecuencia tiene una amplia repercusión en la acústica aplicada, al relacionar la dimensión de los elementos que intervienen en el medio donde se propaga el sonido con la longitud de las ondas que lo constituyen. Así, el tamaño de un obstáculo o de un plano reflectante, o el diámetro de un altavoz, no será independiente de la longitud de la onda.

Comprendiendo las audiofrecuencias longitudinales de onda que van desde 1,7 cm a los 21.00 m (véase tabla 6.1) es fácil imaginar el dispar comportamiento que puede presentar un elemento cualquiera con relación a la banda de audiofrecuencias.

Tabla 6.1: Frecuencias audibles

| | Frecuencias Hertzios | Longitud de onda (cm) | | |
|---------------------------------|-------------------------|--------------------------|----------------------|-------------------|
| Infrasonidos: | | | | |
| Nivel inferior de audición..... | 16 | 2125 | Bajas Frecuencias | Audio Frecuencias |
| | 32 | 1063 | | |
| | 64 | 531 | | |
| | 128 | 266 | | |
| | 256 | 133 | | |
| | 512 | 66 | Frecuencias | |
| | 1024 | 33 | Medias | |
| | 2048 | 17 | Altas Frecuencias | |
| | 4096 | 8.3 | | |
| | 8192 | 4.1 | | |
| | 16384 | 2 | | |
| Nivel superior de audición | 20000 | 1.7 | | |
| Ultrasonidos | | | | |

Si sobre las perpendiculares a los puntos de equilibrio llevamos la magnitud de la desviación (superiormente si el desplazamiento fue hacia la derecha, e inferiormente si la molécula se halla a la izquierda). De su situación inicial, obtendremos los puntos a' , b' , c' , d' , etc., que unidos proporcionan en 3 un cuarto de onda, en 5 una semionda y en 9 la onda completa. La curva así obtenida es una senoide.

Los puntos a , c , i se llaman *nodos* y las partes comprendidas por los mismos, *vientres*. Los puntos de amplitud máxima (c' y g' en la figura 6.2) constituyen las *crestas*.

Esta forma de representar las oscilaciones moleculares facilita el estudio y comprensión del movimiento ondulatorio y es como normalmente se representa, ya que representar la onda por una serie de puntos más o menos

separados resulta, además de enojoso, de muy difícil utilización. Sin embargo, si representamos los desplazamientos que sufren estos puntos sobre verticales a la recta en la cual se mueven, tal como se ha indicado, se obtiene una elocuente imagen gráfica a la que se pueden aplicar todas las propiedades que de su forma se derivan. Por su construcción, esta curva es cualitativa y cuantitativa; esto es, y según se ha dibujado, la parte de curva por debajo, o de arriba, de la horizontal nos indica si las moléculas están a la izquierda o a la derecha de su punto de equilibrio; siendo la distancia de la curva la elongación del punto considerado. Fácilmente se podrá obtener a partir de la curva, la situación de las moléculas sobre la recta de propagación.

La propagación de las ondas sobre la superficie del agua, provocadas al arrojar sobre ésta una piedra, se le relaciona como fenómeno análogo a la propagación de las ondas sonoras. Inconscientemente se asocia la línea ondulada que resulta al seccionar la superficie del agua con la clásica senoide que acompaña a toda explicación de lo que supone longitud de onda sonora. El resultado de esta inconsciente y general asociación es un concepto confuso de la forma de propagarse el sonido, que enturbia la comprensión de los fenómenos sonoros y su ulterior aplicación.

El desequilibrio producido en el agua por una perturbación es distinto al producido en el aire. Las moléculas del agua se mueven de forma ascendente y descendente siguiendo una ley sinusoidal, mientras que en el aire la senoide es

una representación puramente convencional y analógica de los avances y retrocesos que realizan sus moléculas. Lo único que hay de aprovechable en el símil es la forma circular y en capas concéntricas de la propagación.

Si de un grupo de moléculas, puestas en línea recta, pasamos a todas las que comprende un plano, el movimiento ondulatorio se desplazará radialmente, y las compresiones y expansiones se realizarán en forma de coronas cuyo centro será el punto donde se ha producido el desequilibrio.

Pero si el desequilibrio se verifica en el seno del aire, el movimiento molecular se genera en el espacio de tres dimensiones; la perturbación avanzará en forma esférica mediante la sucesión de una serie de capas alternas compresivas y expansivas, que con radio creciente permanecen concéntricas con el punto donde se ha producido la perturbación. En las capas compresivas, a causa de estar en ellas las moléculas más próximas, habrá un aumento en la densidad del aire y, consecuentemente, una disminución en las expansivas. Es de gran importancia observar que el paso de la capa compresiva supondrá una sobrepresión que medirá el aumento de densidad. El registro de esta sobrepresión, que será proporcional a la amplitud de las oscilaciones o intensidad del movimiento, es lo que posibilita la audición y medición del sonido.

El sonido se propaga, pues, en forma de esfera pulsante, con variaciones periódicas en la densidad del aire que ésta comprende y, por lo tanto, en oscilaciones de presión. Las moléculas que se encuentran en el mismo estado de vibración se dice que oscilan o vibran en acuerdo de fase, y gracias a la isotropía del aire se hallan sobre una superficie esférica, que se llama superficie de onda. Cualquier normal a esta superficie de onda pasa por el centro de perturbación e indica la dirección de propagación.

6.1.4 VELOCIDAD DEL SONIDO

El aire puede verse afectado por cambios de presión, temperatura y humedad; estos cambios influyen en la velocidad del sonido que se produce en su seno.

En función de la presión a que está sometido el aire, la velocidad viene dada por la fórmula:

$$V = \sqrt{1.4 \times \frac{P}{D}} \quad (6.1)$$

siendo P la presión y D la densidad.

Pero, según la ley de Boyle, los volúmenes son inversamente proporcionales a las presiones en los gases perfectos; o, lo que es lo mismo, las presiones son directamente proporcionales a las densidades. Por tanto, el cociente P/D permanecerá constante; por lo que V será invariable.

La presión no ha de exceder en mucho a la atmosférica, pues si se comprime mucho el aire, sus moléculas sufren una aproximación notable; y aparecen entonces las llamadas fuerzas de Van der Waals, el aire deja de comportarse como un gas perfecto y se pierde la proporcionalidad entre aumento de presión e incremento de densidad. Por lo demás, los cambios de presión no afectan a la velocidad del sonido.

Las variaciones de temperatura, por el contrario, sí que la afectan. Las moléculas que constituyen cualquier materia están en constante oscilación, siendo la velocidad de este movimiento molecular proporcional a la temperatura absoluta a que se halle dicha materia. Por tanto, cuando a las moléculas del aire se les imprime un movimiento oscilatorio, éste se superpone a las oscilaciones térmicas propias que tiene el gas por su temperatura; resultando que para el mismo estímulo la velocidad de propagación será tanto mayor cuanto más intensa sea su oscilación térmica, esto es, su temperatura.

La humedad atmosférica, es decir, la cantidad de vapor de agua contenida en el aire, también modifica la velocidad de propagación.

La densidad del aire es de 0.0013 g/cm^3 , y la del vapor de agua, 0.0008 gm/cm^3 , notablemente menor. La humedad supone, por tanto, una disminución en la densidad de aire (sin aumento de presión). Si en la fórmula 6.1 disminuye D , crece la cantidad subradical y, por lo tanto, aumenta V .

No obstante, el cálculo demuestra que este incremento de velocidades es pequeño: 2 m/seg como máximo.

En la siguiente tabla se indican las distintas velocidades del sonido según su temperatura. Se supone una humedad relativa del 50%.

VELOCIDADES DEL SONIDO
SEGÚN SU TEMPERATURA

| Grados Absolutos (°K) | Grados Centígrados (°C) | Velocidad del sonido (m/seg) |
|-----------------------|-------------------------|------------------------------|
| 253 | -20 | 319 |
| 263 | -10 | 326 |
| 273 | 0 | 332 |
| 283 | 10 | 338 |
| 293 | 20 | 344 |
| 313 | 40 | 355 |

Para cálculos normales se suele tomar la cifra 340m/seg.

6.2 CARACTERÍSTICAS DEL SONIDO

6.2.1 TONO

El período T es el tiempo necesario para generar una longitud de onda completa λ . Siendo el espacio igual a la velocidad por el tiempo se podrá escribir, llamando V a la velocidad del sonido, $\lambda = VT$.

Pero el período es la inversa de la frecuencia $\lambda = \frac{1}{f}$.

Sustituyendo en la expresión anterior, resulta:

$$\lambda = V \frac{1}{f} \text{ de donde } \lambda \times f = V .$$

Siendo V una constante, ha de permanecer invariable el producto $\lambda \times f$, lo que supone que la frecuencia y la longitud de onda son cantidades recíprocas; esto es, que un sonido de elevada frecuencia tendrá muy corta longitud de onda, y, viceversa, un sonido de baja frecuencia poseerá una longitud de onda larga.

El tono de un sonido lo caracteriza su frecuencia; son denominados sonidos graves los de baja frecuencia, y agudos los de alta. La descripción de la rueda de Savart ilustra al respecto.

Consiste en una rueda dentada que, al girar, hace vibrar una cartulina cuyo canto se apoya sobre los dientes. Al ponerla en movimiento cada diente supondrá una vibración de la cartulina, lo cual excitará las moléculas del aire circundante originando la correspondiente onda. El período de cada onda será el tiempo que media entre dos impulsos de la cartulina y su frecuencia el número de impulsos por segundo. Como cada vibración o impulso corresponde al paso de un diente, para hallar la frecuencia bastará multiplicar el número de vueltas que da la rueda por segundo por la cantidad de dientes que hay en su periferia.

obstáculos que se interponen en su propagación proyectan una *sombra* o zona en la que no penetra el sonido.

Sencillas experiencias demuestran esta propiedad. Si entre un altavoz y el que escucha se interpone alguien, se notará la obstaculización si el altavoz emite agudos, pero no en sonidos graves.

El silbido, como sonido agudo, es direccional. Si cualquier persona hace registrar su voz en una cinta magnetofónica, al oír la reproducción, por fiel que ésta sea, le parecerá que no tiene la voz tan aguda como su reproducción revela. Ello es debido a que, al hablar, los componentes agudos de nuestra voz, debido a su direccionalidad, se alejan de nosotros, mientras que los graves tienden a envolvernos; en consecuencia, sobre el oído propio inciden principalmente éstos últimos y de ahí el convencimiento de creernos con un voz mas grave.

6.2.2 INTENSIDAD

Según el vigor que la perturbación produce en las moléculas el sonido será más o menos intenso. Este vigor se traduce en una mayor o menor amplitud A de oscilación en la vibración molecular.

Dependiendo la intensidad I de la oscilación de las moléculas, la representación gráfica de un sonido que, manteniendo fija la frecuencia, aumenta su intensidad será de la forma de la figura 6.4; el incremento de la oscilación, o amplitud, queda reflejado así cuantitativamente.

La dimensión de esta oscilación es pequeñísima; para un sonido de intensidad media es del orden de una centésima de milímetro.

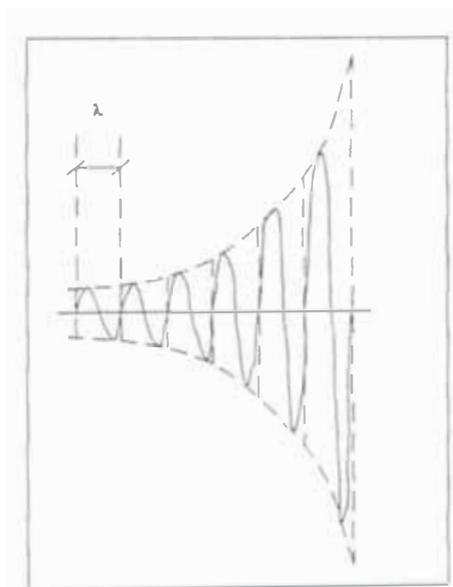


Fig.6.4 Representacion de un sonido cuya intensidad aumenta

Como el sonido consiste en un transporte de energía, comunicada por la perturbación del aire, podrá definirse su intensidad como la cantidad de energía que por segundo atraviesa la unidad de superficie (1 cm^2) colocada perpendicularmente a la dirección de propagación.

La intensidad del sonido es:

$$I = 2\pi^2 \rho V f^2 A^2$$

siendo ρ la densidad del aire.

El interés de esta fórmula es más teórico que práctico; para el caso concreto de pretender hallar la intensidad de determinado sonido, resultará muy difícil de averiguar el valor de A .

Existe otra fórmula de mayor eficacia práctica. Se sabe que el sonido avanza en forma de onda compresiva ocasionando un exceso de presión asociado a la onda, siendo esta sobrepresión tanto más elevada cuanto mayor es la intensidad sonora. Llamando P a esta sobrepresión en su valor máximo, la intensidad del sonido viene dada por la fórmula:

$$I = \frac{P^2}{2\rho V}$$

Para la aplicación de esta fórmula bastará medir con un decibelímetro las variaciones de presión del aire en un punto determinado (con lo cual se conocerá P), para saber la intensidad del sonido existente.

6.2.3 ONDAS

El potencial gravitacional en espacio libre satisface la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

En un fluido uniforme y compresible el potencial de velocidad satisface:

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$$

donde c es la velocidad del sonido, considerando que las velocidades son pequeñas. Para ondas elásticas en un sólido uniforme, la misma ecuación es satisfecha por el escalar y vector potencial, las cuales dan los desplazamientos longitudinal y transversal respectivamente, con dos valores diferentes de c .

Si en lugar de propagarse el sonido en forma de ondas esféricas, fuesen ondas planas, perpendiculares al eje de propagación, entonces la intensidad de las mismas (prescindiendo del amortiguamiento) se mantendría constante en su avance al no ser éste de tipo espacial, con lo que la energía no se repetiría cada vez en mayores superficies.

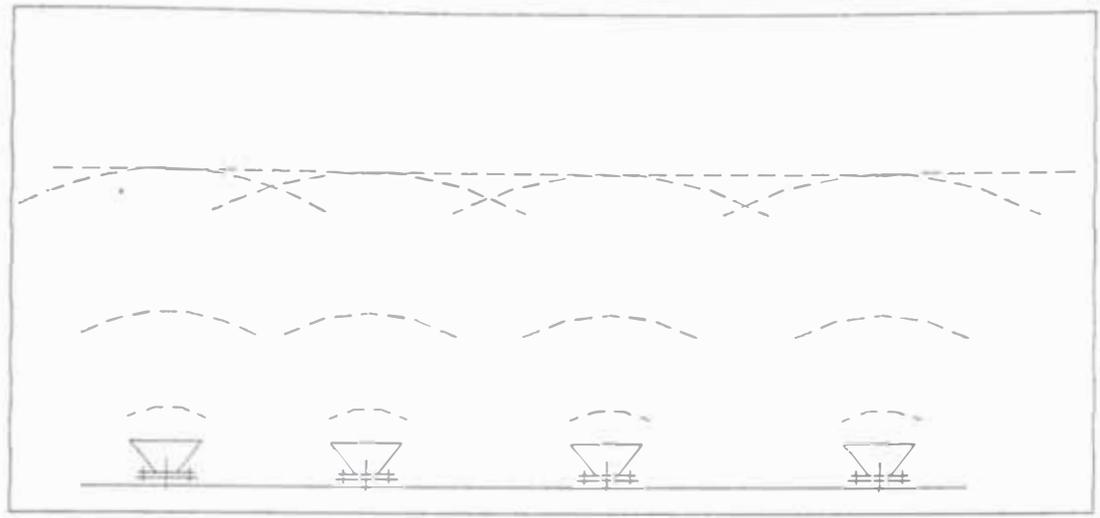


Fig.6.5 Propagación de las ondas

Si consideramos el potencial $\phi = u = f(x, y, t)$, la ecuación diferencial de la vibración de u en el plano x - y , es:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

La ecuación de onda en tres dimensiones (x, y, z) es, considerando el potencial

$\phi = u = f(x, y, z, t)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

La posibilidad de resolver esta ecuación de onda radica claramente en el hecho que son separables en varios sistemas de coordenadas

6.2.4 INTENSIDAD ACÚSTICA

La intensidad acústica I de una onda sonora, está definida como la potencia promedio transmitida por unidad de área en la dirección de propagación de la onda.

$$I = \frac{P_{rms}}{\rho c} \quad w/m^2$$

donde p_{rms} es la presión efectiva (promedio cuadrático) en nt/m^2 ; ρ es la densidad en kg/m^3 ; w representa 1 watio, y c es la velocidad del sonido en m/seg .

6.2.5 IMPEDANCIA ACÚSTICA ESPECÍFICA.

La impedancia acústica específica z de un medio, se define como la razón (real o compleja) entre la presión del sonido y la velocidad de la partícula:

$$z = p/v \quad kg/m^2 - seg \quad o \quad rayls$$

en donde p es la presión del sonido en nt/m^2 ; y v es la velocidad de la partícula en m/seg .

Para la onda acústica plana armónica que se traslada en la dirección positiva de x ,

$$z = \frac{-\rho c w A}{-w A} = \rho c \quad \text{rayls}$$

y para la onda acústica plana armónica que se traslada en la dirección negativa de x,

$$z = -\frac{\rho c w A}{w A} = -\rho c \quad \text{rayls}$$

Donde ρ es la densidad en kg/m^3 ; c es la velocidad del sonido en m/seg . ; y ρc se conoce con el nombre de impedancia característica o resistencia del medio ambiente en rayls. A presión atmosférica normal y a 20°C , por ejemplo, la densidad del aire es $1,21 \text{ kg/m}^3$, la velocidad del sonido es de 343 m/seg , de tal forma que la impedancia característica del aire es $1,21 \cdot (343)$ ó 415 rayls . Para el agua destilada a presión atmosférica normal y 20°C , la densidad es de 998 kg/m^3 y la velocidad del sonido es de 1480 m/seg ; entonces la impedancia característica es de $1,48 \cdot (10)^6 \text{ rayls}$.

El concepto mecánico de impedancia sirve para relacionar la presión, velocidad y amplitud que rigen el movimiento oscilatorio de un elemento material.

La generación de una onda acústica es debida al movimiento de las moléculas de aire; éstas vibran con una determinada velocidad y amplitud, originando una

presión acústica. Por tanto es factible la asimilación de este concepto en el campo de la acústica o impedancia acústica.

6.2.6 DIFERENCIACIÓN DE FRECUENCIAS

Si a intensidad constante un sonido varía su frecuencia (vibrato), esta variación ha de tener una cuantía mínima para ser apercibida por el oído. Si la frecuencia de emisión es f y la variación es Δf , el porcentaje de variación será $\Delta f / f$. Este tanto por ciento mínimo necesario para que el oído pueda separar dos sonidos consecutivos, recibe el nombre de sensibilidad diferencial para las frecuencias. Esta sensibilidad no es constante para todos los valores de f ; a lo largo de las audiodfrecuencias presenta los valores máximos en las bajas frecuencias; entre los 500 y 5000 hertzios se mantiene prácticamente constante con una cuantía mínima aproximada de 0.3%; para las altas frecuencias crece de nuevo. (Para $f=16000$ hertzios, el valor de $\Delta f / f$ es del 0.8%)

6.2.7 DIFERENCIACIÓN DE INTENSIDADES

Si manteniendo la frecuencia cambia la intensidad (trémolo), este cambio ha de tener cierto valor para ser escuchado por el oído. Si la intensidad de emisión es I y la variación es ΔI , el porcentaje de variación será $\Delta I / I$ y su valor mínimo para que el oído lo distinga se llama sensibilidad diferencial para las intensidades.

Esta sensibilidad no es constante para todos los valores de I ; su valor es mayor para las intensidades bajas y a partir de los 10^{-3} erg/cm² se mantiene prácticamente constante.

Con un generador de frecuencias y unos auriculares pueden realizarse de forma personal estas pruebas audiométricas.

6.2.8 DIFERENCIACIÓN DE TIEMPOS

Desde que la onda sonora llega al oído hasta que se produce la sensación existe un lapso de tiempo; el valor de este tiempo de reacción al estímulo acústico queda comprendido entre las 12 y las 15 centésimas de segundo.

Para distinguir dos sonidos consecutivos, han de transcurrir entre la recepción de uno y otro alrededor de 2 centésimas de segundo.

Extinguida la captación sonora, la sensación persiste durante un corto intervalo; los sonidos que lleguen al oído diferenciados en este intervalo se superpondrán produciendo la sensación de que se ha registrado un solo sonido. Este intervalo es $1/15$ de segundo para los sonidos secos y de $1/10$ para los pastosos o musicales.

6.2.9 EL DECIBELÍMETRO

Un micrófono transforma las variaciones de presión acústica que registra, en variaciones proporcionales de tensión eléctrica. Convertidas las pulsaciones sonoras en fluctuaciones eléctricas gracias a un micrófono, podrá conocerse la intensidad de aquéllas midiendo éstas. Para ello se utiliza el *decibelímetro*.

En síntesis, consiste en un voltímetro al que se ha incorporado un micrófono, cuyas oscilaciones de tensión mide. Calibrado el indicador en decibelios, se realizará la lectura directamente en estas unidades.

Las características del micrófono son las que determina la captación del sonido, siendo, por lo tanto, la pieza fundamental del decibelímetro. En los decibelímetros de precisión se recurre en ocasiones, por su fidelidad, al micrófono electrostático. Para que la captación sonora se realice con la máxima independencia de la dirección de donde proceda el sonido, el micrófono ha de ser omnidireccional.

6.2.10 UNIDADES SONORAS

Las unidades usuales para la medición del sonido son: de intensidad, I , el watio/cm²; de presión, p , la baria; y el decibelio como medida fisiológica o de nivel sonoro, N , ajustado a nuestra característica de audición.

Para pasar de unas unidades a otras puede hacerse uso de las siguientes fórmulas de conversión; en todas ellas, I , viene dado en wátios/cm², P en barías y N en decibelios.

$$N = 20 \times \log P + 74$$

$$N = 10 \times \log I + 160$$

$$P = 2 \times 10^4 \sqrt{I}$$

$$\log P = \frac{N - 74}{20}$$

$$I = \frac{P^2}{4} \times 10^{-8}$$

$$\log I = \frac{N - 160}{10}$$

6.2.11 DECREMENTO SONORO CON LA DISTANCIA

Conocida la intensidad I_1 a una distancia d_1 de la fuente sonora, a una distancia d_2 su intensidad I_2 será:

$$I_2 = \frac{I_1 \times d_1^2}{d_2^2} \quad \text{wátios/cm}^2$$

Si lo que se conoce es la presión P_1 a una distancia d_1 del foco sonoro, a una distancia d_2 dicha presión será:

$$P_2 = \frac{P_1 \times d_1}{d_2} \quad \text{barias}$$

Si lo que se mide es el nivel sonoro N_1 en decibelios en un decibelímetro a una distancia d_1 , el nivel sonoro N_2 alcanzado a una distancia d_2 será:

$$N_2 = N_1 + 20 \log \frac{d_1}{d_2} \quad \text{decibeles}$$

6.3 PRINCIPIO DE HUYGENS

La imagen gráfica de una molécula de aire sacudida por avances y retrocesos no es suficiente para explicar satisfactoriamente ciertos fenómenos acústicos que requieren una interpretación no tan simplista del sonido.

Hace unos 300 años, el científico holandés Huygens enunció que, en la propagación de todo movimiento, cada punto de un frente de onda engendra una nueva onda; la envolvente a todas estas ondas secundarias será el nuevo frente de onda.

Huygens estableció este supuesto para explicar la propagación de las ondas luminosas, pero por generalización se aplica también al avance y comportamiento de las ondas acústicas.

Si A_1B_1 (fig. 6.6) es un frente de onda procedente del foco sonoro F , según este principio todas las moléculas que lo constituyen serán a su vez focos engendrados de nuevas ondas secundarias; el arco A_2B_2 , tangente a todas ellas, representará gráficamente la idea concebida por Huygens para generarse un nuevo frente de onda. Repitiendo sobre A_2B_2 lo anterior, se obtendrá una nueva onda A_3B_3 , y así sucesivamente. Se ha llegado así a la misma conclusión ya enunciada al principio; el sonido se propaga en forma de frentes de onda esféricos, concéntricos al punto de emisión. Pero la propagación adquiere un concepto de radiación omnidireccional; el fluido sonoro parece así más envolvente al sustituir la vibración rectilínea de las moléculas por infinitesimales frentes esféricos. La dualidad de ambos supuestos permite justificar el comportamiento del sonido en los diversos fenómenos que origina.

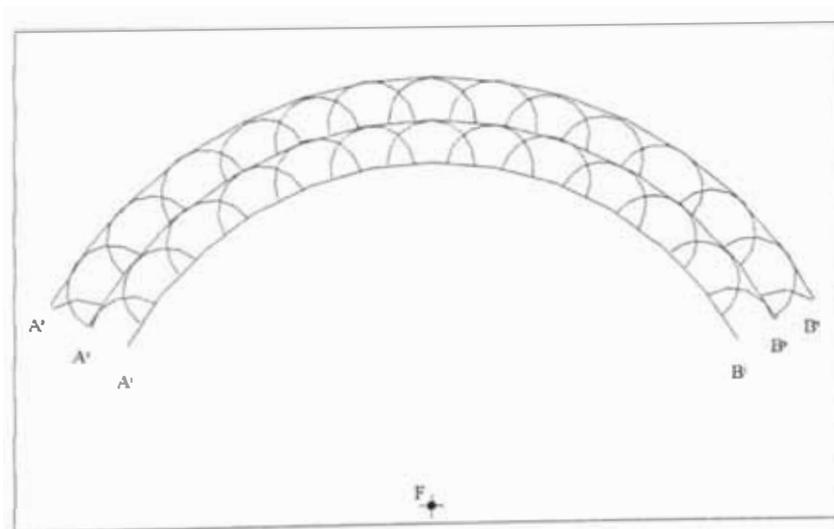


Fig 6.6 . Representación de un frente de onda. F=FOCO

fueron hechos haciendo uso del Software ALGOR, proporcionado amablemente por el M.Sc. Ing. Adolfo Gálvez Villacorta.



Figura 7.1 Vista isométrica de la Guitarra en estudio

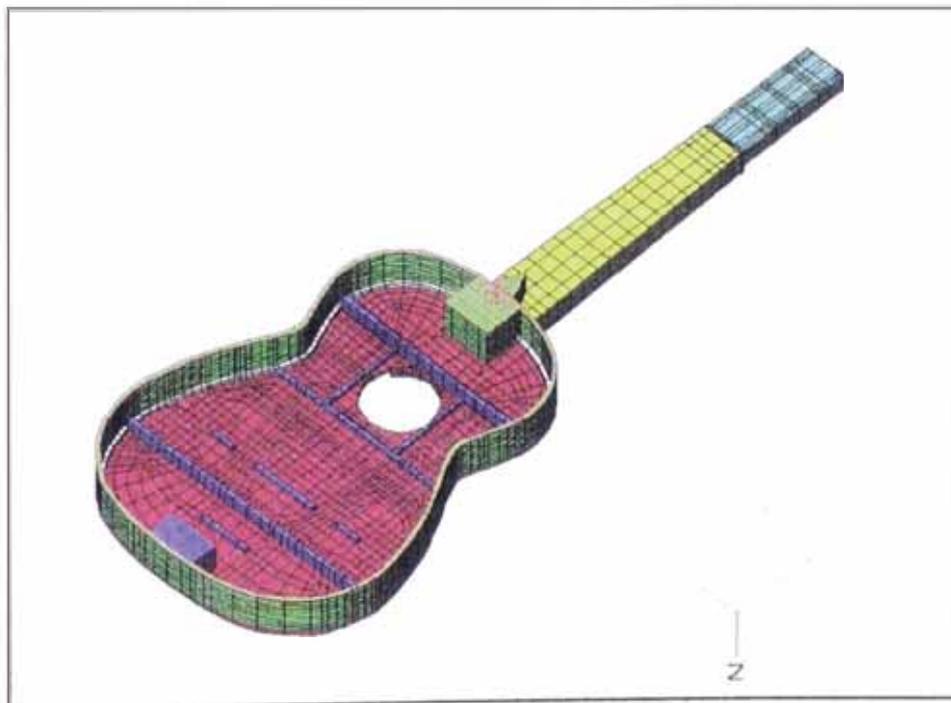


Figura 7.2 Vista interior de la Guitarra en estudio. Tapa Anterior

6.0 RESUMEN

- Se presenta la teoría acústica indispensable para analizar el efecto sonoro.
Se procura dar una explicación al efecto vibratorio que ocurre cuando se produce un sonido.

CAPÍTULO VII

APLICACIÓN AL ANÁLISIS Y DISEÑO DE UNA ESTRUCTURA TIPO CAJÓN

Gracias al desarrollo tecnológico actual, es posible realizar operaciones lógicas que hasta hace unos años eran imposibles debido a la capacidad de memoria que el ordenador disponía.

En el capítulo IV se hace mención a un método llamado indirecto, que sirve para la determinación de las constantes elásticas de la madera, que es un método virtual que simula un experimento físico. El método indirecto tiene la ventaja de ser más económico, porque a pesar de necesitar algún resultado experimental físico, éstos no tienen porqué ser muchos para llegar a alguna conclusión respecto del material que se está estudiando.

En el capítulo anterior mencionamos algunos conceptos de acústica, de los cuales el de “Nivel de Intensidad Acústica” es al que se le va a dar más importancia, debido a que involucra el resultado de todos los tipos de onda que se generan debido al efecto sonoro que se produce al pulsar las cuerdas, y que es en definitiva lo que perciben nuestros oídos.

Como aplicación se estudiará en este capítulo una guitarra de concierto, determinando su frecuencia de vibración natural, y el volumen producido.

7.1 ESTRUCTURA ANALIZADA

La estructura analizada es una guitarra de concierto, el cual es un instrumento finísimo, muy delicado, cuyos efectos sonoros se aprecian en el equilibrio de las notas graves con las notas agudas. Físicamente está compuesto por un cajón de resonancia y un mástil, al que se le tensan unas cuerdas, que al ser pulsadas, producen unos sonidos muy característicos. Gracias al ordenador se pudo simular virtualmente la guitarra y analizarla estática y dinámicamente

7.2 MODELACIÓN DE LA ESTRUCTURA

La estructura analizada, debido a su complejidad (Ver anexo 2), fue modelada con elementos finitos tridimensionales, y debido a la complejidad del modelo físico, se tuvo que preparar un programa que genere automáticamente la malla, con el único propósito de ahorrar el trabajo mecánico de dibujar una malla y ubicar físicamente los nudos. El diagrama de flujo puede verse en la siguiente página.

Las figuras 7.1, 7.2, 7.3, y 7.4 muestran la estructura analizada en su totalidad. Los elementos finitos son del tipo tridimensional indicado en el capítulo V¹. Puede apreciarse la complejidad del modelo, que está compuesto por 16456 nudos y 12536 elementos finitos. Los análisis estático y dinámico realizados,

¹Existen procedimientos más complejos para generar mallas automáticamente, como los procedimientos "P-adaptivos" o "H-adaptivos" ya implementados en softwares comerciales.

Cada una de sus partes ha sido modelada con elementos finitos sólidos tridimensionales de ocho nudos, como lo muestran las figuras del anexo 2. Cabe mencionar que la guitarra está formada por tres tipos de madera: Caoba, Pino Báltico y Ébano. Las tapas posterior y superior son hechas de Pino Báltico; el mango es hecho de ébano, y el resto de las partes de caoba.

Las condiciones de contorno (apoyo en este caso), procuran simular las que se observan en las fotos del anexo 3.

Las cargas estáticas aplicadas sobre la estructura, son las producidas por la tensión de las cuerdas y por el peso del brazo.

7.3 ANÁLISIS ESTÁTICO REALIZADO.

Al modelo de elementos finitos se le realizará un análisis estático para la determinación de los esfuerzos a los que esta sometido cada una de sus partes debido a las fuerzas producidas por las cuerdas de la guitarra que se tensan para producir una determinada nota musical (frecuencia). Las cargas producidas por el peso del brazo que se ha supuesto aproximadamente en 1.5 kg, aplicado en la madera de borde. Este valor ha sido hallado midiendo el peso del brazo en una balanza².

² *La guitarra en un instrumento de cuerda pulsada. La afinación típica produce unas determinadas frecuencias que en términos musicales se llaman "notas". Estas "notas" se producen debido a que las cuerdas tienen una determinada tensión, que le permiten vibrar para producir la frecuencia adecuada.*

Cabe mencionar que existen otras afinaciones que pueden variar el "tono" de la guitarra, pero que siempre tienen un patrón único de generación de sonido: la cuerda pulsada. Respecto al efecto de pulsar la cuerda, éste varía mucho de acuerdo al interprete, debido a que todos no

7.3.1 DETERMINACIÓN DE LAS FUERZAS PRODUCIDAS POR LAS CUERDAS DE LA GUITARRA

En ensayos realizados en el Laboratorio de Acústica de la Pontificia Universidad Católica, se obtuvieron los siguientes resultados respecto a la tensión necesaria que habría que darle a las cuerdas para producir una frecuencia determinada (afinación):

Fuerzas producidas por las cuerdas de la Guitarra

| Cuerda | Longitud (cm) | Diámetro (mm) | Tensión (kg) |
|--------|---------------|---------------|--------------|
| E(1ra) | 98 | 0.74 | 7.4363 |
| B(2da) | 98 | 0.85 | 5.6679 |
| G(3ra) | 98 | 1.06 | 5.8493 |
| D(4ta) | 98 | 0.76 | 7.3910 |
| A(5ta) | 98 | 0.91 | 7.2096 |
| E(6ta) | 98 | 1.14 | 7.1189 |

*Las cuerdas son de la marca D'Addario Pro-Arté, J4604 Hard Tension

**Se hicieron ensayos con 20 juegos de estas cuerdas

7.3.2 DETERMINACIÓN DE LA FUERZA PRODUCIDA POR EL BRAZO DE UN HOMBRE

Debido a lo aleatorio en la determinación del peso del brazo de una persona, se consideró un valor promedio de 1.5 kg, que se aplican en forma distribuida sobre la madera de borde de la guitarra (Ver anexo 3). Es importante considerar

tienen la misma masa muscular, fuerza, y fisionomía, importante al momento de ejecutar una determinada pieza.

la ubicación de esta carga, porque depende mucho de la forma como se dispone el intérprete a colocarse el instrumento para pulsar las cuerdas (ver anexo 3).

7.3.3 RESULTADOS OBTENIDOS

7.3.3.1 ESFUERZOS EXISTENTES EN LA ESTRUCTURA

En las figuras 5, 6 y 7 se puede observar gráficamente la influencia de las cargas estáticas debido a las cuerdas aplicadas sobre la guitarra y al peso del brazo. Se aprecia que no ejercen más influencia que en la propia zona de aplicación de las mismas.

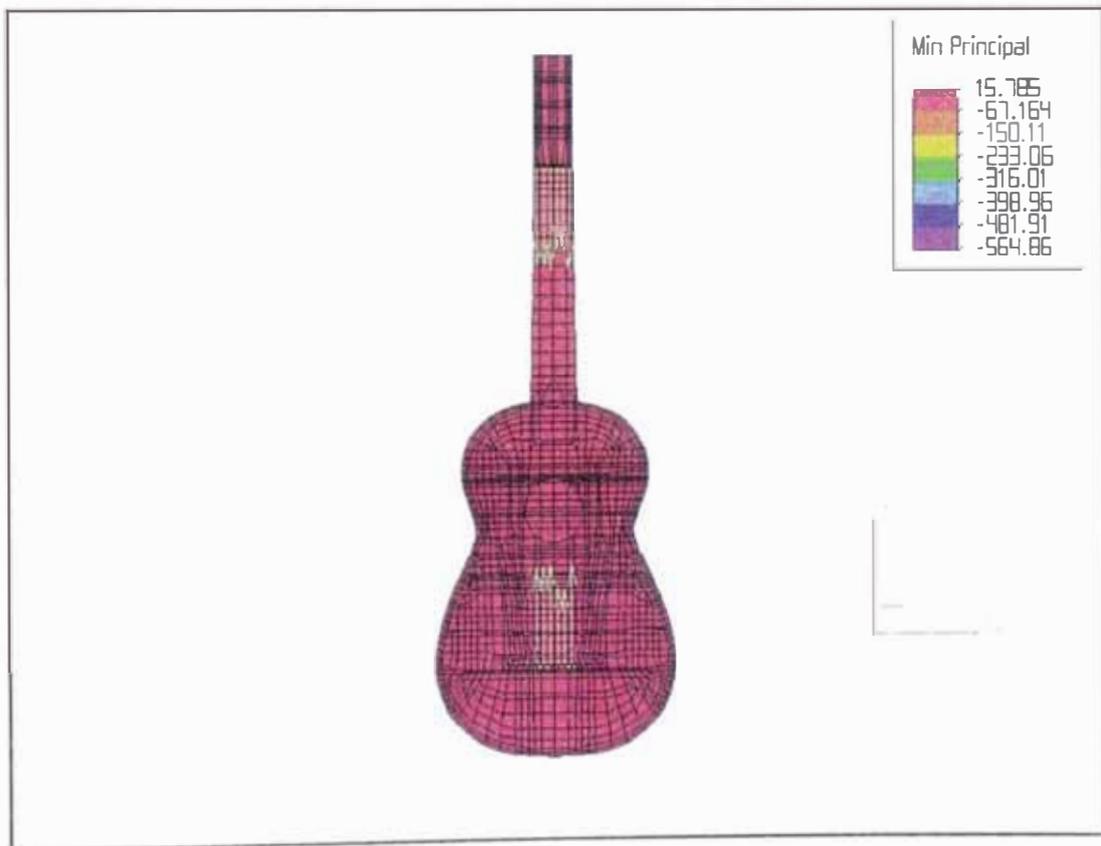


Figura 5 Esfuerzos principales en la guitarra debido a la tensión de las cuerdas y al peso del brazo.

De los resultados obtenidos, se puede apreciar que la influencia de las cargas externas aplicadas sobre la guitarra no es de mucha significación en su comportamiento. La estructura no está sometida a grandes esfuerzos que impliquen posibles agrietamientos en alguna zona de la misma³.

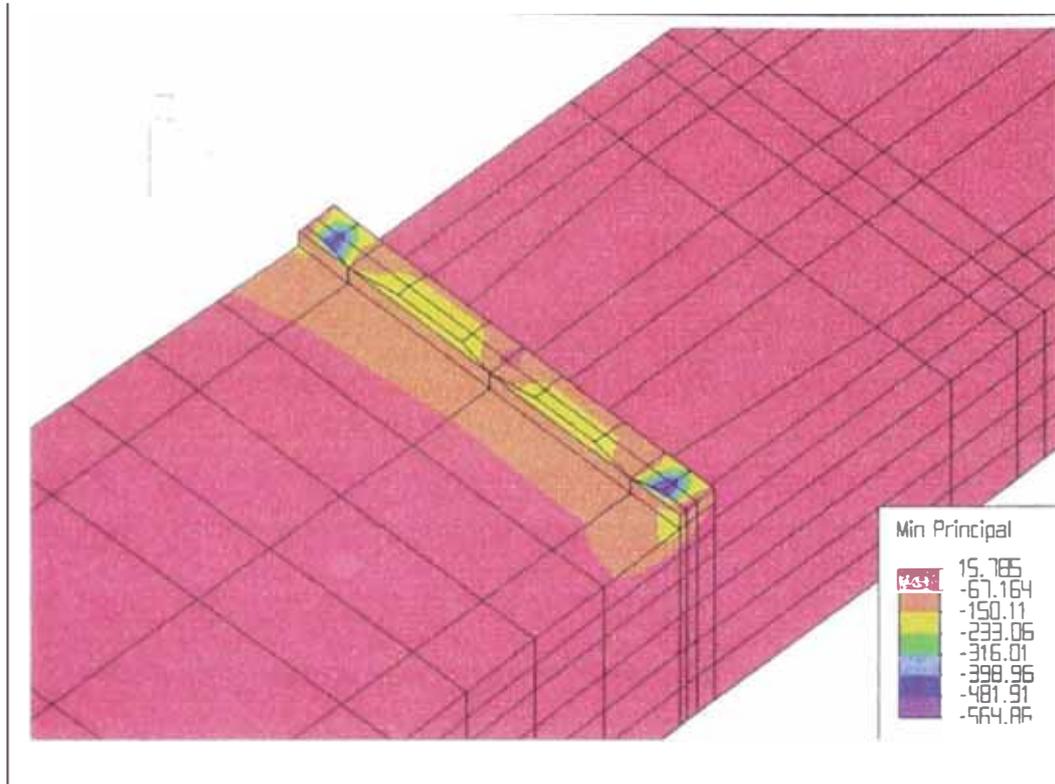


Figura 6 Esfuerzos principales en la zona del clavijero de la guitarra debido a la tensión de las cuerdas.

Los esfuerzos en la zona del clavijero y del puente, sirven, en todo caso, como un valor necesario que debe cumplir el pegamento para unir con la tapa anterior de la guitarra, esas respectivas partes. Debido a detalles constructivos, el puente y el “diente del clavijero”, son pegados encima de la tapa anterior de la guitarra, dando la posibilidad de colocar una cuerda, pulsarla, y tener espacio suficiente para que la misma vibre y no se golpee con el mango de ébano.

³ Es muy conocido entre los constructores de guitarras, que la construcción de estos instrumentos es muy regional, debido a las condiciones climáticas de cada lugar. Si una guitarra construida en el Departamento de Lima, se lleva al Departamento de Arequipa, las tapas anterior y posterior empiezan a agrietarse, malogrando totalmente el instrumento.

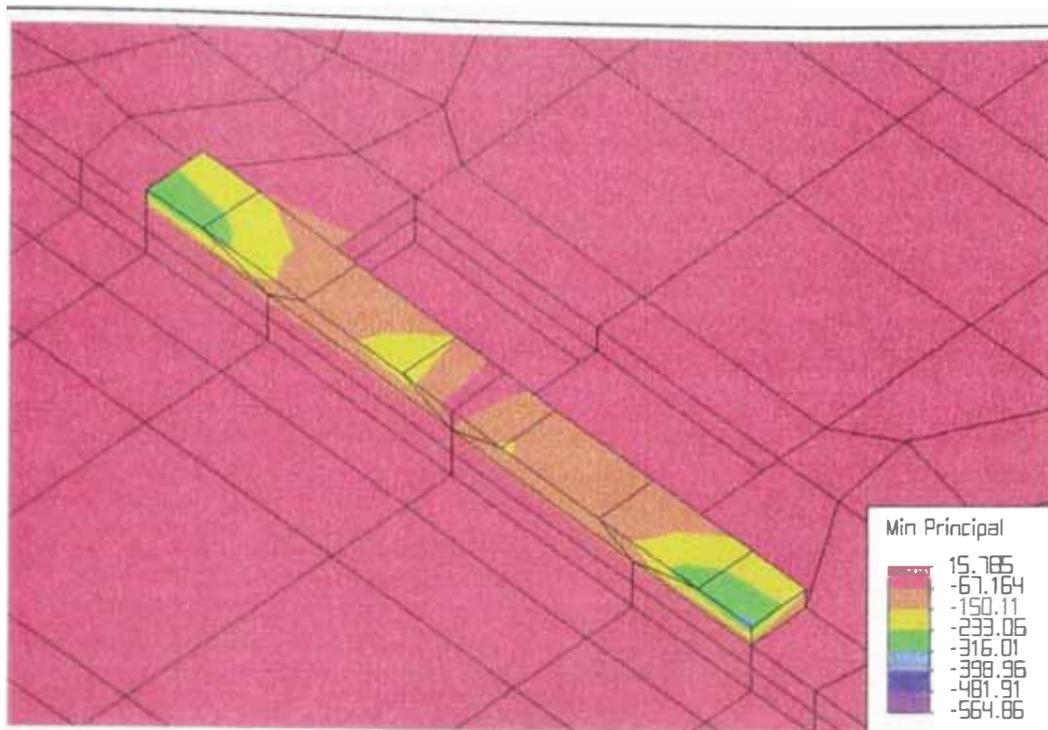


Figura 7 Esfuerzos principales en la zona del puente de la guitarra debido a la tensión de las cuerdas

Respecto al efecto que ejerce el peso del brazo sobre la madera de borde de las guitarra, éste es despreciable. No se considera importante en el desempeño estructural de la guitarra. En todo caso, de lo obtenido, para fines prácticos, el brazo se comporta más como otra condición de apoyo (articulación), que como una fuerza que se distribuye en la madera de borde.

7.3.3.2 DESPLAZAMIENTOS EN LA ESTRUCTURA

La figura 8 muestra los desplazamientos producidos por la acción de la tensión que ejercen las cuerdas.

Se puede apreciar que los desplazamientos son insignificantes. El efecto de las fuerzas aplicadas sobre la estructura en análisis es despreciable. Queda claro

que, en esta estructura, los mayores desplazamientos se producen en el mástil, y en todo caso, son la Caoba y el Ébano en conjunto, las que deberían soportar este efecto.

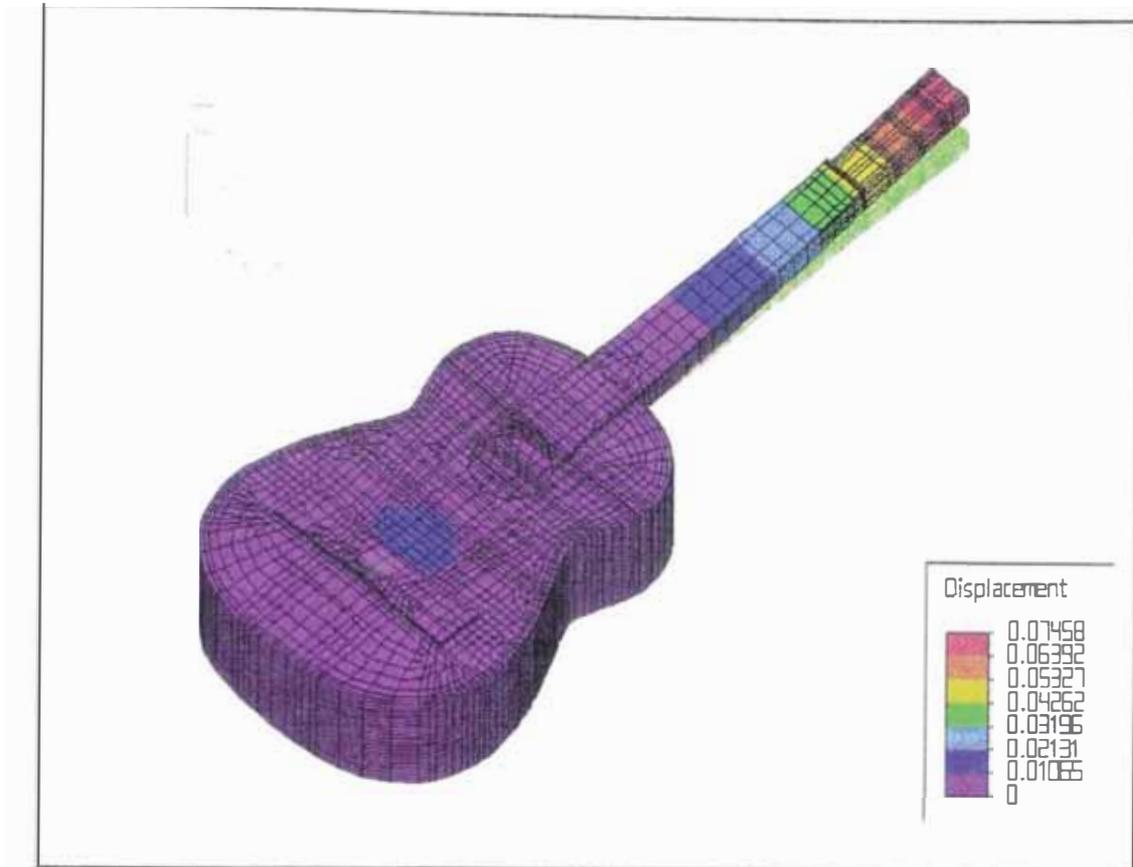


Figura 8· Desplazamiento en centímetros, debido a la tensión de las cuerdas

Se llega a la conclusión que la estructura es bastante rígida, y que un análisis estático nos da valores que sirven para determinar las fuerzas de contacto entre superficies, y que serán absorbidas por algún pegamento adecuado.

Se puede observar que la estructura es bastante rígida. Si vemos la figura 9, apreciamos la configuración de la madera de borde cuya función es servir de unión con las tapas anterior y posterior, formando la llamada caja de

resonancia, y también el bloque de rigidez, que prolonga el mástil hasta el interior de la caja de resonancia. La madera de borde y el bloque de rigidez están fabricadas de caoba (ver anexo 4), y parte de su contorno sirve de condición de apoyo de la estructura.

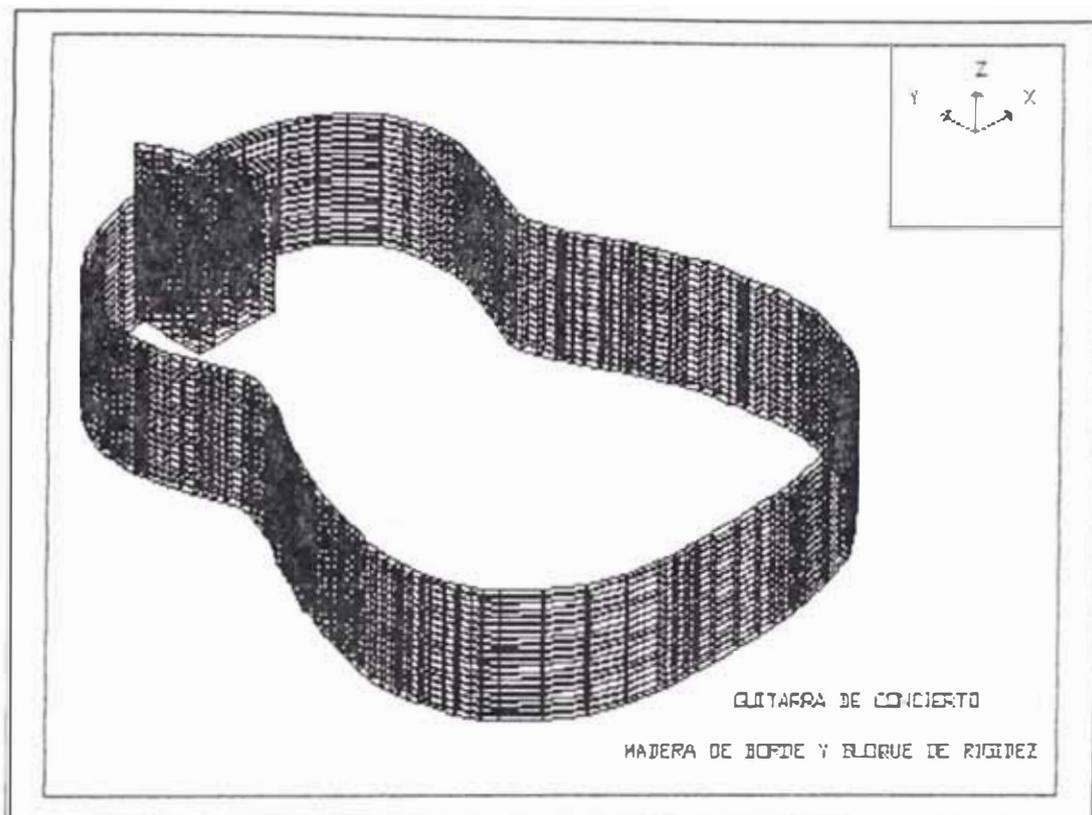


Figura 9: Madera de borde y bloque de rigidez

7.4 ANÁLISIS DINÁMICO REALIZADO.

Terminado de realizar el análisis estático, y como el objetivo de la Tesis es relacionar el comportamiento estructural de la guitarra con su respuesta acústica, se procedió a realizar el respectivo análisis dinámico. Es importante

recalcar que, estáticamente, la influencia de las cargas aplicadas en las guitarra se disipan en una zona muy pequeña alrededor de la aplicación de las mismas.

Físicamente, la estructura modelada tiene una forma externa que no va a modificarse, debido a factores que escapan al alcance de esta tesis, pero en su interior existe toda una compleja distribución de barras de refuerzo.

Se realizó el análisis dinámico en tres tipos de guitarra, que se definen páginas más adelante en razón de la distribución interna de las barras de refuerzo.

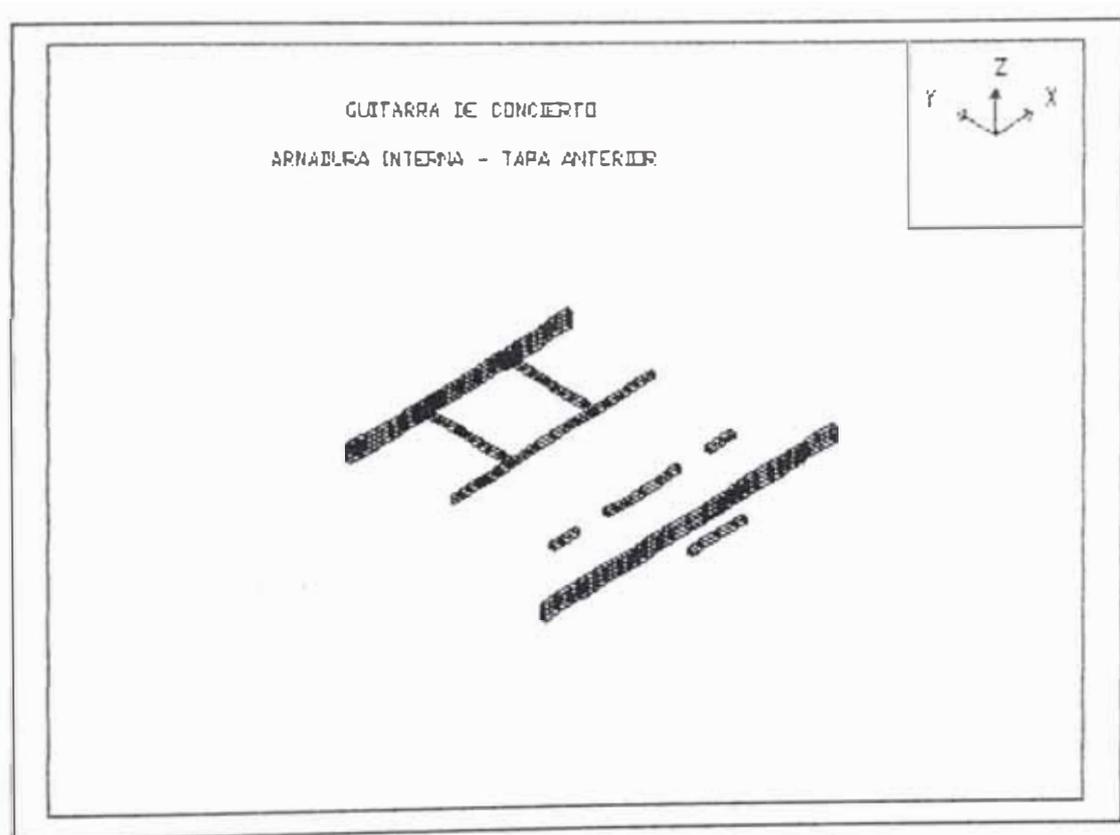


Figura 10: Armadura interna de la Guitarra en la Tapa Anterior

La figura 10 muestra la distribución de las barras de refuerzo en el interior de la tapa anterior de la guitarra motivo de esta tesis (ver anexo 4). Puede

observarse que, superpuesta con la tapa anterior (ver anexos 2 y 4), el orificio característico del instrumento está reforzado por barras de madera, simulando a unas vigas de borde alrededor del mismo.

La figura 11 muestra la armadura interna de la Guitarra en la tapa posterior (ver anexos 2 y 4). Se puede apreciar las maderas de refuerzo en la dirección perpendicular al mástil. Asimismo se observa un listón que se encuentra inclinado y que cruza varios listones orientados en la dirección X, pero a los que no llega a tocar. Este detalle es constructivamente muy delicado, y es la novedad que se plantea en la construcción de este instrumento. Respecto a los listones de refuerzo, fijese que no son la proyección de los listones que se encuentran en la tapa anterior de la guitarra, .

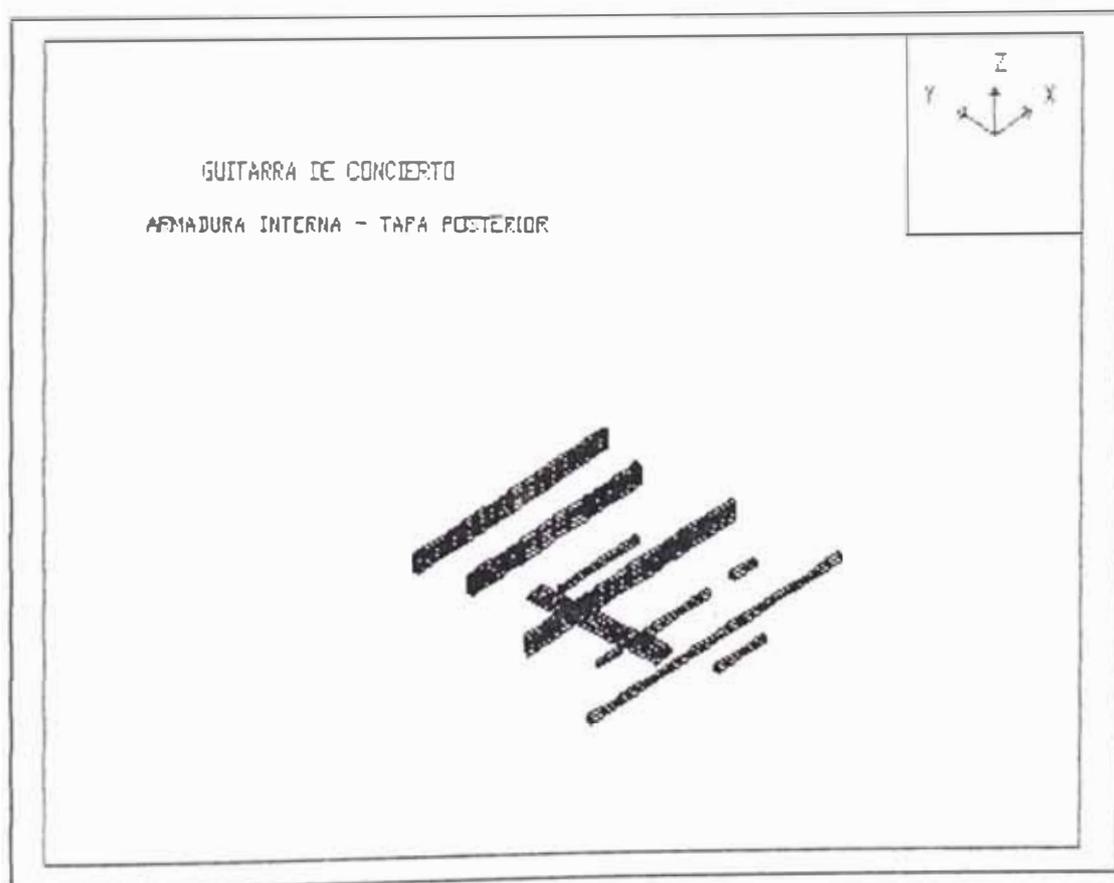


Figura 11: Armadura interna de la Guitarra en la Tapa posterior

La figura 12 muestra los listones de borde de la Guitarra, que tienen por finalidad unir las tapas anterior y posterior, con la madera de borde y el bloque de rigidez (ver anexos 2 y 4). Como se observa, la unión que se produce es continua, no como tradicionalmente se realiza.

Hasta el momento se tiene totalmente definido el tipo de guitarra que se está estudiando y se procederá a realizar el análisis dinámico de la estructura con la finalidad de obtener las formas de modo con sus respectivas frecuencias de vibración⁴.

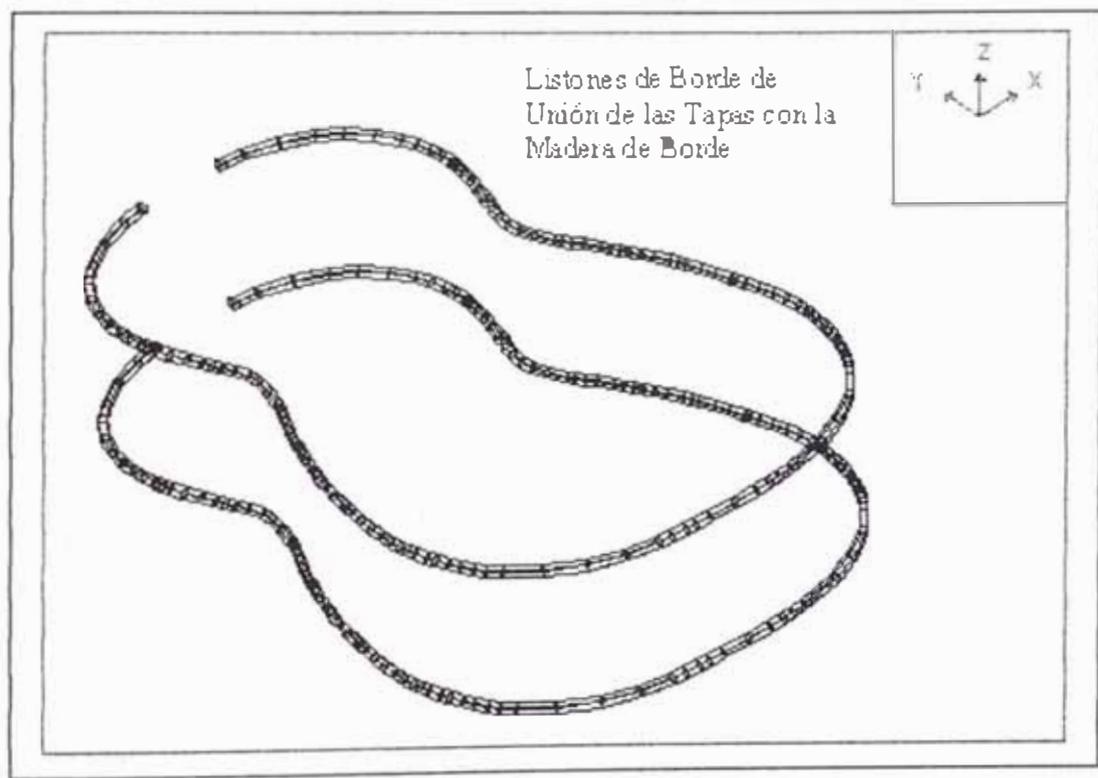


Figura 12: Listones de Borde en el interior de la Guitarra

⁴ El algoritmo de solución para el problema de valores característicos fue la iteración en el sub-espacio.

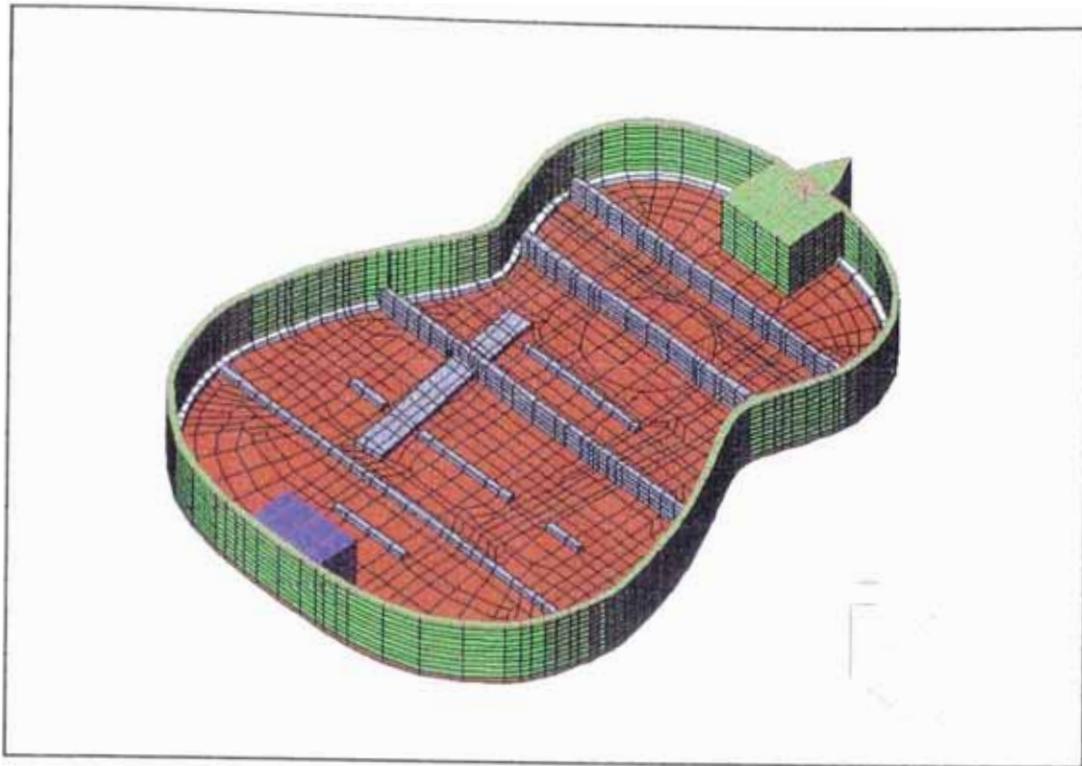


Figura 13: Interior de la Guitarra Tapa Posterior Véase los listones y la s barras.

Usando el mismo modelo con elementos finitos, se procedió a realizar un análisis dinámico de la estructura. El cuadro de la siguiente página presenta los resultados obtenidos para los 20 primeros modos de vibración.

Los resultados obtenidos que se muestran en dicho cuadro, expresan el comportamiento dinámico y elástico de la estructura. Algo muy importante es la forma de modo que caracteriza cada uno de los determinados valores de frecuencia. El anexo 3 muestra gráficamente cada forma de modo. Puede apreciarse que las primeras formas corresponden a una vibración del mástil, simulando una viga en voladizo. A partir de la quinta forma de modo, comienza a participar la caja de resonancia, cuyos valores de frecuencia en particular nos interesan.

RESULTADOS DEL ANÁLISIS DINÁMICO

| Número de modo | Frecuencia circular (rad/seg) | Frecuencia (Hertz) | Periodo (seg) |
|----------------|-------------------------------|--------------------|---------------|
| 1 | 3.6910E+02 | 5.8744E+01 | 1.7023E-02 |
| 2 | 6.3670E+02 | 1.0133E+02 | 9.8683E-03 |
| 3 | 1.5424E+03 | 2.4547E+02 | 4.0738E-03 |
| 4 | 1.7398E+03 | 2.7690E+02 | 3.6114E-03 |
| 5 | 1.7574E+03 | 2.7970E+02 | 3.5753E-03 |
| 6 | 1.9543E+03 | 3.1104E+02 | 3.2150E-03 |
| 7 | 2.3250E+03 | 3.7003E+02 | 2.7025E-03 |
| 8 | 2.6565E+03 | 4.2279E+02 | 2.3652E-03 |
| 9 | 2.8115E+03 | 4.4747E+02 | 2.2348E-03 |
| 10 | 2.9655E+03 | 4.7198E+02 | 2.1187E-03 |
| 11 | 3.1313E+03 | 4.9837E+02 | 2.0066E-03 |
| 12 | 3.3715E+03 | 5.3660E+02 | 1.8636E-03 |
| 13 | 3.6872E+03 | 5.8683E+02 | 1.7041E-03 |
| 14 | 4.0183E+03 | 6.3953E+02 | 1.5637E-03 |
| 15 | 4.1502E+03 | 6.6052E+02 | 1.5140E-03 |
| 16 | 4.4290E+03 | 7.0490E+02 | 1.4186E-03 |
| 17 | 4.4443E+03 | 7.0733E+02 | 1.4138E-03 |
| 18 | 4.5067E+03 | 7.1726E+02 | 1.3942E-03 |
| 19 | 4.7447E+03 | 7.5515E+02 | 1.3242E-03 |
| 20 | 4.8313E+03 | 7.6892E+02 | 1.3005E-03 |

Al momento en que el intérprete de guitarra comienza a ejecutar una pieza, si suponemos que es diestro, la mano izquierda servirá para sujetar el mástil, impidiendo de alguna manera la vibración como viga en voladizo, y la mano derecha para pulsar las cuerdas, en la zona próxima a la caja de resonancia. Mi principal interés en este nivel, era obtener la frecuencia de vibración natural en que la caja de resonancia comenzaba a ser solicitada, en este caso a los 279.70 Hertz.

La figura 14 muestra la forma de modo de la guitarra al iniciar la participación dinámica de la caja de resonancia, a la frecuencia de 279.70 hertz. A esta

frecuencia, la zona que empieza a vibrar es la tapa anterior de la caja de resonancia, que justamente es el lugar que recibe inicialmente el efecto acústico de pulsar las cuerdas.

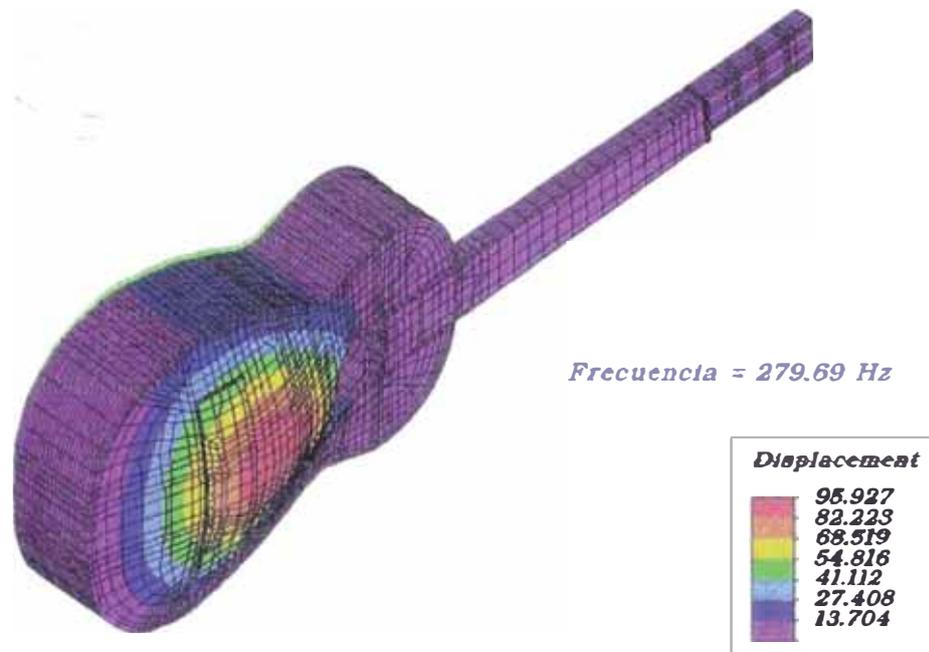


Figura 14. Forma de modo en que comienza a vibrar la Caja de Resonancia de la Guitarra

De los resultados obtenidos, se determina que la tapa anterior de la caja de resonancia de la guitarra empieza a vibrar a una frecuencia de 279.70 Hertz, y la tapa posterior a 311.04 Hertz.

Como puede apreciarse en los anexos 2 y 4 la complejidad de la estructura se encuentra dividida por cada uno de sus componentes. Tradicionalmente no se puede cambiar la forma de la guitarra; es decir, exteriormente todas las guitarras se ven iguales a simple vista. Pero ¿a qué se debe la mejor producción de efectos sonoros?

De aquí en adelante, la guitarra analizada hasta este momento y que es motivo de esta tesis, será llamada Guitarra 1. Se llamará Guitarra 2 a la que no posea la armadura interna ni los listones de borde que posee la Guitarra 1; y, Guitarra3 a la que no tenga el listón de borde, pero que si tenga las armaduras internas que posee la Guitarra1.

Modelando con elementos finitos estas tres estructuras, y resolviendo el problema de valores característicos, se obtiene que las frecuencias en las que se inicia la vibración natural de la caja de resonancia son:

Frecuencias de Inicio de Vibración de la Caja de Resonancia

| | Frecuencia de inicio de vibración de laTapa Anterior (Hertz) | Frecuencia de inicio de vibración de laTapa Posterior (Hertz) |
|------------|---------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Guitarra 1 | 279.7 | 311.04 |
| Guitarra 2 | 230.56 | 277.23 |
| Guitarra 3 | 256.49 | 292.49 |

Se observa que las frecuencias de vibración natural de las Guitarras 1, 2 y 3, varían debido a la estructura en conjunto de la misma (en este caso, debido a la adición o no, de esos listones y armaduras internas). Si analizamos la ubicación del centro de gravedad de las tres guitarras obtenemos los siguientes valores que se muestran en la siguiente tabla:

Ubicación del centro de gravedad *

| | Coordenadas | | |
|------------|-------------|-----------|-----------|
| | X | Y | Z |
| | (cm) | (cm) | (cm) |
| Guitarra 1 | -0.026871 | 21.771226 | -4.438542 |
| Guitarra 2 | -2.598645 | 18.562981 | -6.738963 |
| Guitarra 3 | -1.7356921 | 17.268214 | -6.097235 |

*Referido al sistema XYZ. Ver anexo 4

7.5 ANÁLISIS ACÚSTICO REALIZADO.

Se realizó el análisis acústico en las tres guitarras con el fin de determinar los niveles de intensidad y de frecuencias que nos permitan hallar alguna relación con los datos dinámicos ya obtenidos para cada una de ellas. Se pretende determinar los niveles de intensidad acústica de cada una de las guitarras, bajo los mismos niveles de frecuencia acústica. La explicación radica en que la afinación estándar de la guitarra es universal, es decir, las notas musicales que se producirán, van a ser las mismas que en cualquier parte del mundo. Los niveles de intensidad, es decir, cómo y cuánto sonarán, dependiendo de la estructura misma de la guitarra son lo que se pretende hallar. Un patrón de frecuencias que produce las distintas notas musicales de diferentes octavas es el que se muestra en el cuadro siguiente:

Frecuencias en Hertz producidas por las distintas notas musicales en diferentes octavas.

| | do(n) | re | mi | fa | sol | la | si | do(n+1) |
|-----------|---------|---------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| Octava 1a | 66.00 | 74.25 | 82.50 | 88.00 | 99.00 | 110.00 | 123.75 | 132.00 |
| Octava 2a | 132.00 | 148.50 | 165.00 | 176.00 | 198.00 | 220.00 | 247.50 | 264.00 |
| Octava 3a | 264.00 | 297.00 | 330.00 | 352.00 | 396.00 | 440.00 | 495.00 | 528.00 |
| Octava 4a | 528.00 | 594.00 | 660.00 | 702.00 | 792.00 | 880.00 | 990.00 | 1056.00 |
| Octava 5a | 1056.00 | 1188.00 | 1320.00 | 1408.00 | 1584.00 | 1760.00 | 1980.00 | 2112.00 |
| Octava 6a | 2112.00 | 2376.00 | 2640.00 | 2816.00 | 3168.00 | 3520.00 | 3960.00 | 4224.00 |
| Octava 7a | 4224.00 | 4752.00 | 5280.00 | 5632.00 | 6336.00 | 7040.00 | 7920.00 | 8448.00 |
| Octava 8a | 8448.00 | 9504.00 | 10560.00 | 11264.00 | 12672.00 | 14080.00 | 15840.00 | 16896.00 |

Los resultados del análisis acústico permitieron obtener valores de “nivel de intensidad acústico” distintos para cada tipo de guitarra. Así, realizados los ensayos en un estudio de sonido⁵ se obtuvo por ejemplo, para la nota E4 (mi de cuarta octava, equivalente a la nota producida por la primera cuerda pulsada al aire), los siguientes resultados:

Resultados de Frecuencias y Niveles de Intensidad

| | Nota Producida | Frecuencia Teórica (Hertz) | Frecuencia Experimental (Hertz) | Desviación Estandar +/- (Hertz) | Nivel de Intensidad Acústica a 0.5 mt (db) |
|------------|----------------|----------------------------|---------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------|
| Guitarra 1 | E4 | 660 | 656.26 | 7 | 79.89 |
| Guitarra 2 | E4 | 660 | 658.18 | 5 | 49.42 |
| Guitarra 3 | E4 | 660 | 656.49 | 6 | 62.89 |

⁵ Los ensayos acústicos fueron realizados en el Laboratorio de Acústica – Sección Física, de la Facultad de Ciencias, de la Pontificia Universidad Católica del Perú, cuyo Coordinador es el Licenciado Jorge Moreno Ruiz.

Se puede observar, cómo los niveles de intensidad varían de acuerdo al tipo de guitarra, manteniéndose los mismos patrones de frecuencia. En este caso, la Guitarra 1 produce el mayor nivel de intensidad.

El siguiente cuadro muestra los resultados para las frecuencias que se producen al tocar las cuerdas al aire:

| Guitarra | Cuerda al aire | Frecuencia Teórica (Hertz) | Frecuencia en laboratorio (Hertz) | Desviación Estándar (Hertz) | Nivel de Intensidad a 0.5 mt de distancia (db) | Nivel de Intensidad relativo respecto a Guitarra 1 (db/db) |
|----------|----------------|----------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1 | 1ra | 660 | 656.26 | 7.00 | 79.89 | 1.0000 |
| 2 | | 660 | 656.18 | 5.00 | 49.42 | 0.6186 |
| 3 | | 660 | 656.22 | 6.00 | 62.89 | 0.7872 |
| 1 | 2da | 495 | 493.00 | 8.00 | 77.89 | 1.0000 |
| 2 | | 495 | 493.28 | 3.00 | 48.12 | 0.6178 |
| 3 | | 495 | 493.12 | 6.00 | 61.89 | 0.7946 |
| 1 | 3ra | 396 | 391.16 | 4.00 | 79.19 | 1.0000 |
| 2 | | 396 | 391.23 | 9.00 | 48.98 | 0.6185 |
| 3 | | 396 | 391.46 | 3.00 | 62.47 | 0.7889 |
| 1 | 4ta | 297 | 296.06 | 2.00 | 80.46 | 1.0000 |
| 2 | | 297 | 299.46 | 6.00 | 49.42 | 0.6142 |
| 3 | | 297 | 293.50 | 7.00 | 62.89 | 0.7816 |
| 1 | 5ta | 220 | 218.46 | 3.00 | 79.89 | 1.0000 |
| 2 | | 220 | 215.13 | 8.00 | 49.52 | 0.6199 |
| 3 | | 220 | 217.89 | 5.00 | 62.19 | 0.7784 |
| 1 | 6ta | 165 | 162.56 | 4.00 | 79.81 | 1.0000 |
| 2 | | 165 | 161.06 | 9.00 | 49.39 | 0.6188 |
| 3 | | 165 | 162.49 | 2.00 | 64.13 | 0.8035 |

El valor promedio de los resultados se presentan en el siguiente cuadro:

Valores promedio para los resultados obtenidos en cada una de las Guitarras

| | Guitarra 1 | Guitarra 2 | Guitarra 3 |
|--------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|
| Nivel de Intensidad acústica Promedio (db) | 79.52 | 49.14 | 62.74 |
| Frecuencia natural de Vibración de la tapa Anterior (Hertz) | 279.70 | 230.56 | 256.49 |
| Frecuencia natural de Vibración de la tapa posterior (Hertz) | 311.04 | 277.23 | 292.49 |

Graficando los valores hallados en la última tabla, obtenemos la siguiente figura:

Niveles de Intensidad y de Frecuencias

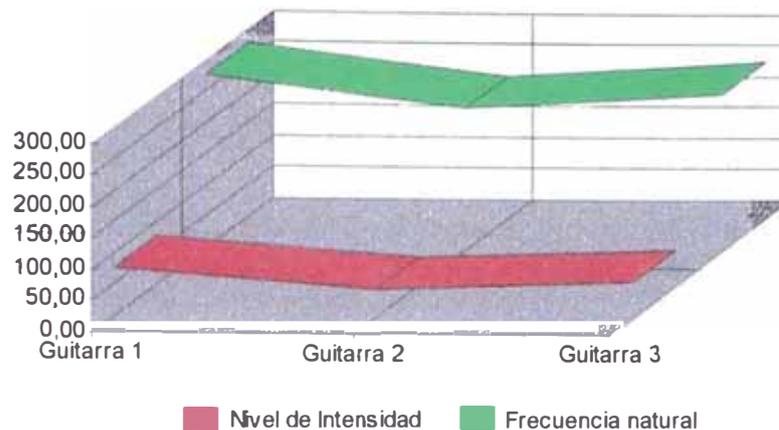


Figura 15 Gráfico Nivel de Intensidad - Frecuencia de Vibración – Tipo de Guitarra

Los valores de frecuencias natural de vibración, como los de nivel de intensidad acústica, varían de acuerdo a la estructura interna de la guitarra. En este punto de la tesis se ha llegado a la conclusión de que, el comportamiento dinámico de la estructura en estudio, está ligado con su respuesta acústica. Se observa cómo el volumen producido por una guitarra, varía de acuerdo a la utilización o no, de una estructura interna que permita controlar la ubicación del centro de gravedad de la misma, así como de la frecuencia de vibración de la caja de resonancia.

Es muy importante mencionar que no se busca diferenciar las ondas que se superponen en la caja de resonancia, que de alguna u otra manera influyen en

la mayor o menor producción del sonido. Sólo se analiza el resultado de todos los efectos físicos, con una cantidad muy fácil y económica de medir.

Con los valores promedios de niveles de intensidad y con las frecuencias obtenidas para la vibración de la tapa anterior (es el inicio de la vibración de la caja de resonancia), se plantea la siguiente fórmula recursiva, que relaciona ambos parámetros:

$$NI=5.1815250604*EXP(9.76471441568E-3*FREC1)$$

donde:

NI= Nivel de Intensidad en decibelios

FREC1= Frecuencia de Vibración Natural (inicio de vibración de la caja de resonancia), en Hertz.

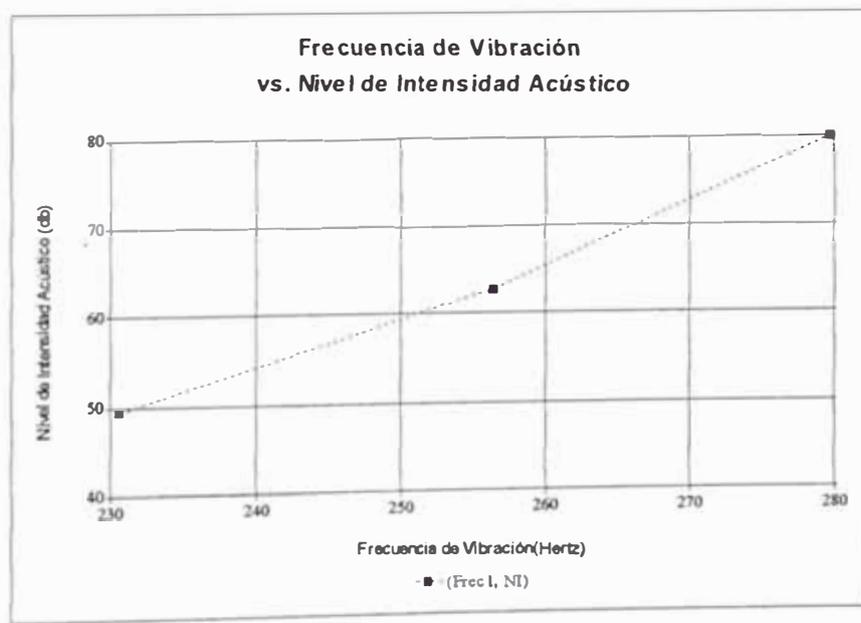


Figura 16: CURVA : $NI=5.1815250604*EXP(9.76471441568E-3*FREC1)$

Hasta el momento se ha determinado lo que se estaba buscando: la existencia de una relación entre el comportamiento dinámico de la estructura (Guitarra), con el comportamiento acústico del mismo. Esta relación se ve reflejada en la fórmula recursiva planteada en esta tesis.

7.6 EFECTO DE LA MADERA DE BORDE.

Las características del diseño de la guitarra desarrollada en esta tesis se encuentran en los planos del anexo 4. Muchas de las características físicas externas de la misma, se deben a la búsqueda de la comodidad anatómica del guitarrista, y que por tradición (cerca de tres siglos) se mantienen aún.

El problema en analizar una guitarra, como se ha visto, está en la modelación matemática de la misma. El análisis estructural realizado en la guitarra incluye muchos elementos finitos, lo que trae en consecuencia una gran cantidad de grados de libertad, pero, de los resultados obtenidos, sabemos que los producidos por el análisis dinámico nos proporciona la información indispensable para un posterior diseño.

En búsqueda de un modelo con menos elementos, a continuación se muestra los resultados obtenidos al disminuir la discretización en la madera de borde.

La figura 17 muestra la modelación de la madera de borde considerando como un solo elemento la altura de la misma. El modelo contiene 336 elementos

finitos. Se realizó el análisis dinámico para hallar las primeras 20 frecuencias de vibración (para poder comparar con nuestro modelo inicial), tanto de este modelo como de otros que consideraban mayor cantidad de elementos finitos.

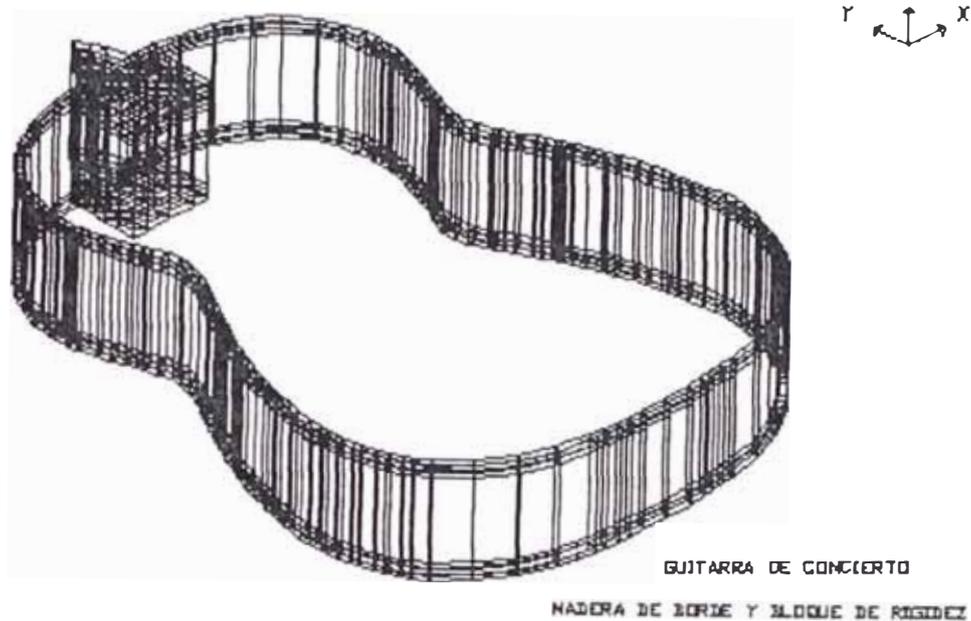


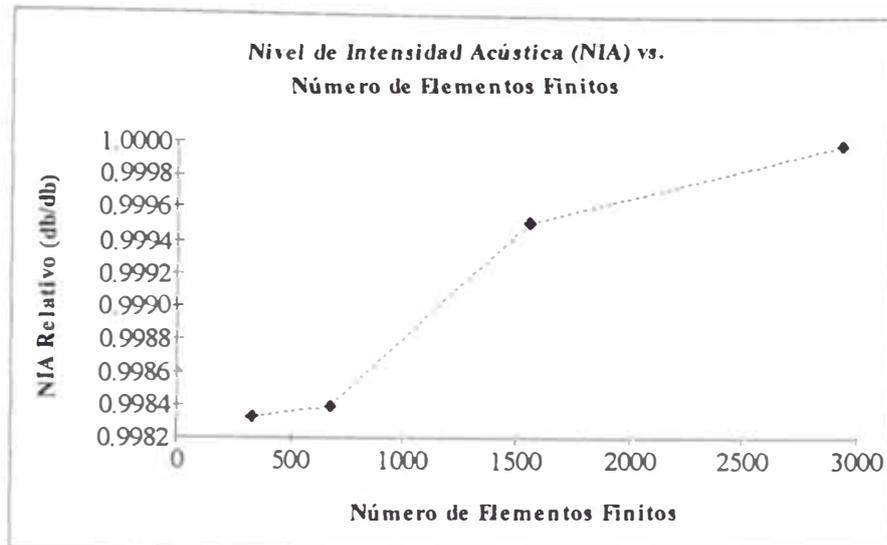
Figura 17: Modelo de elementos finitos para la madera de borde, disminuyendo la cantidad de los mismos: 648 elementos

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos, así como el tiempo de ordenador requerido.

Resultados Obtenidos al Variar la Cantidad de Elementos Finitos en la Madera de Borde

| Cantidad de Elementos Finitos # | Frecuencia de Vibración | | | | | | | Tiempo requerido (minutos) |
|---------------------------------|-------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------------------|
| | 1er Modo (Hertz) | 2do Modo (Hertz) | 3er Modo (Hertz) | 4to Modo (Hertz) | 5to Modo (Hertz) | 6to Modo (Hertz) | 7mo Modo (Hertz) | |
| 2934 | 58.744 | 101.330 | 245.470 | 276.900 | 279.700 | 311.040 | 370.030 | 692.7 |
| 1558 | 58.724 | 101.253 | 245.454 | 276.887 | 279.651 | 311.002 | 369.925 | 385.21 |
| 672 | 58.696 | 100.260 | 245.158 | 276.360 | 279.536 | 310.950 | 369.890 | 117.86 |
| 334 | 58.696 | 100.257 | 245.153 | 276.349 | 279.529 | 310.934 | 369.820 | 93.2 |

El siguiente gráfico muestra cómo varía el Nivel de Intensidad Acústico al variar el grado de discretización de la malla de elementos finitos en la madera de borde.



Como se puede observar, la modelación con elementos finitos sólidos de la madera de borde no requiere mucha discretización. De aquí en adelante se considerará 334 elementos para modelarla.

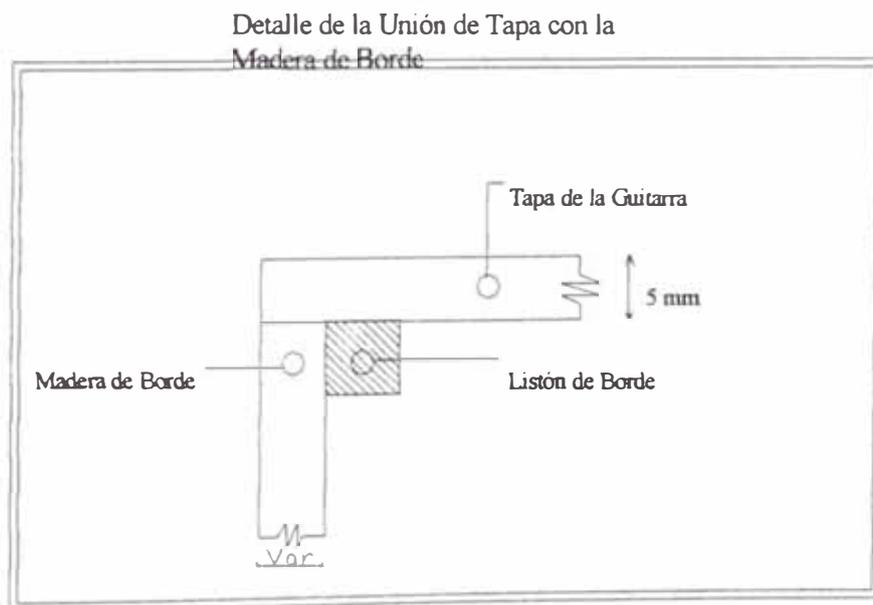


Figura 18: Detalle de la unión de la tapa con la madera de borde

A continuación se presentan los resultados obtenidos cuando variamos el espesor de la madera de borde considerando el modelo matemático de elementos finitos tridimensionales. La figura 18 muestra el detalle de lo realizado en el borde.

Frecuencia de Inicio de Vibración de la Caja de Resonancia
Dependiendo del Espesor de la la Madera de Borde

| Espesor (mm) | Frecuencia de Vibración Modelo Tridimensional (Hertz) |
|-----------------|-------------------------------------------------------------|
| 8.33 | 330.85 |
| 8.00 | 323.45 |
| 7.67 | 315.52 |
| 7.33 | 309.87 |
| 7.00 | 304.59 |
| 6.67 | 298.2 |
| 6.33 | 295.3 |
| 6.00 | 282.6 |
| 5.67 | 280.2 |
| 5.33 | 279.5 |
| 5.00 | 279.5 |
| 4.67 | 279.3 |
| 4.33 | 272.9 |
| 4.00 | 270.09 |
| 3.67 | 263.03 |
| 3.33 | 259.46 |
| 3.00 | 251.13 |
| 2.67 | 246.44 |
| 2.33 | 240.12 |
| 2.00 | 236.11 |
| 1.67 | 230.46 |

Se observa que para el rango espesor de 4.33mm – 5.677 mm , los valores de frecuencia de vibración para el modelo tridimensional son muy aproximados. En ese rango de valores, y bajo esos resultados de frecuencia natural de vibración, existe la posibilidad de que la estructura se comporte acústicamente

de una manera predecible. Aplicando la fórmula recursiva planteada en esta tesis, los valores de nivel de intensidad acústica serían:

Possible Respuesta Acústica Dependiendo del Espesor de la la Madera de Borde

| Espesor (mm) | Frecuencia de Vibración Modelo Tridimensional (Hertz) | Posible Nivel de Intensidad Acústico (db) |
|--------------|-------------------------------------------------------|-------------------------------------------|
| 6.67 | 298.2 | 95.2912 |
| 6.33 | 295.3 | 92.6356 |
| 6.00 | 282.6 | 81.8278 |
| 5.67 | 280.2 | 79.9316 |
| 5.33 | 279.5 | 79.3871 |
| 5.00 | 279.5 | 79.3794 |
| 4.67 | 279.3 | 79.2323 |
| 4.33 | 272.9 | 74.4323 |
| 4.00 | 270.09 | 72.4177 |
| 3.67 | 263.03 | 67.5935 |
| 3.33 | 259.46 | 65.2778 |
| 3.00 | 251.13 | 60.1783 |

Es importante mencionar que, los valores de intensidad acústica mostrados en la tabla anterior por encima de 79.3794 db, no son representativos, toda vez que son producto de la extrapolación del ingreso de frecuencia de vibración.

7.7 MODELACIÓN DE LA TAPA DE LA GUITARRA.

El modelo original de la Tapa Anterior de la Guitarra contiene 1529 elementos finitos tridimensionales. Se realizó el análisis dinámico respectivo con menos elementos tal como lo muestra la tabla de la página siguiente:

Resultados Obtenidos al Variar la Cantidad de Elementos Finitos en la Tapa Anterior de la Guitarra

| Cantidad de Elementos Finitos # | Frecuencia de Vibración | | | | | | | Tiempo requerido (minutos) |
|---------------------------------|-------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|----------------------------|
| | 1er Modo (Hertz) | 2do Modo (Hertz) | 3er Modo (Hertz) | 4to Modo (Hertz) | 5to Modo (Hertz) | 6to Modo (Hertz) | 7mo Modo (Hertz) | |
| 1529 (*) | 58.744 | 101.330 | 245.470 | 276.900 | 279.700 | 311.040 | 370.030 | 692.7 |
| 1529 (**) | 58.696 | 100.257 | 245.153 | 276.349 | 279.529 | 310.934 | 369.820 | 93.2 |
| 1475 | 56.457 | 98.018 | 242.914 | 274.110 | 278.950 | 308.695 | 367.581 | 90.961 |
| 812 | 54.471 | 96.032 | 240.928 | 272.124 | 276.964 | 306.709 | 365.595 | 78.975 |
| 658 | 49.303 | 90.864 | 235.760 | 266.956 | 271.796 | 301.541 | 360.427 | 73.807 |
| 195 | 44.043 | 85.604 | 230.500 | 261.696 | 266.536 | 296.281 | 355.167 | 38.547 |

* Considerando el modelo total para la Madera de Borde

** Considerando el modelo reducido para la Madera de Borde

Podemos observar que a medida que disminuimos la cantidad de elementos finitos, los resultados se alejan de 279.529 Hz. (obtenido para un modelo con poca discretización en la madera de borde). De los resultados obtenidos se llega a la conclusión que considerar 1529 elementos para la modelación de la Tapa Anterior es apropiado. Al disminuir ésta cantidad se pierde mucha precisión

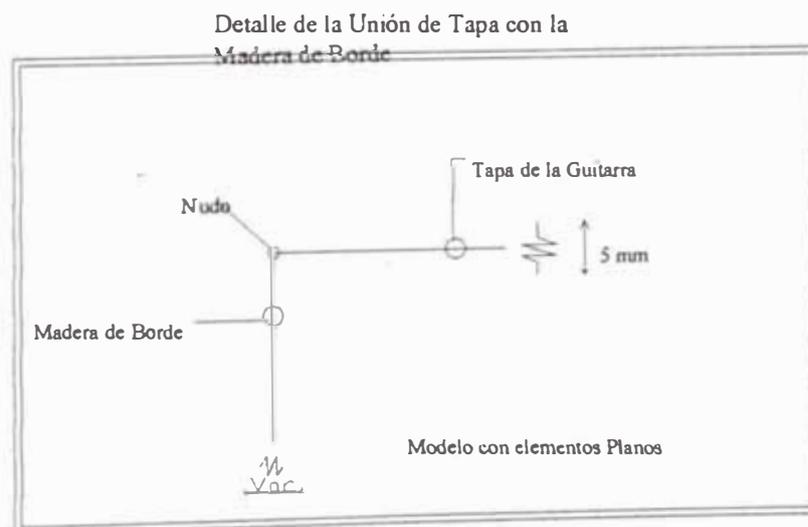


Figura 19. Modelación con elementos planos

Procurando una aproximación con el modelo inicial, se realizó una posible modelación con elementos planos de la tapa anterior de la guitarra, simulando el borde empotrado, tal como de muestra en la figura 19.

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos para la frecuencia de vibración correspondiente al primer modo de vibración de la Tapa Anterior, como consecuencia de modificar la cantidad de elementos planos para su modelación.

Frecuencia de Inicio de Vibración de la Caja de Resonancia
(Inicio de Vibración de la Tapa Anterior)

| Número de Elementos Finitos Planos | Frecuencia de Vibración de la Tapa Anterior (1er Modo) (Hertz) |
|------------------------------------|----------------------------------------------------------------|
| 1529 | 230.12 |
| 1475 | 229.16 |
| 812 | 228.65 |
| 658 | 216.23 |
| 195 | 205.49 |
| 101 | 195.23 |

Nota: Solo se consideraron las propiedades elásticas en el plano de la Tapa Anterior.

De los resultados obtenidos, podemos concluir que la modelación con elementos planos no es eficiente.

7.8 ENSAYOS EXPERIMENTALES FINALES

Para mejorar nuestra posibilidad de predicción de resultados, se hicieron tres ensayos adicionales para determinar su frecuencia de inicio de vibración de la

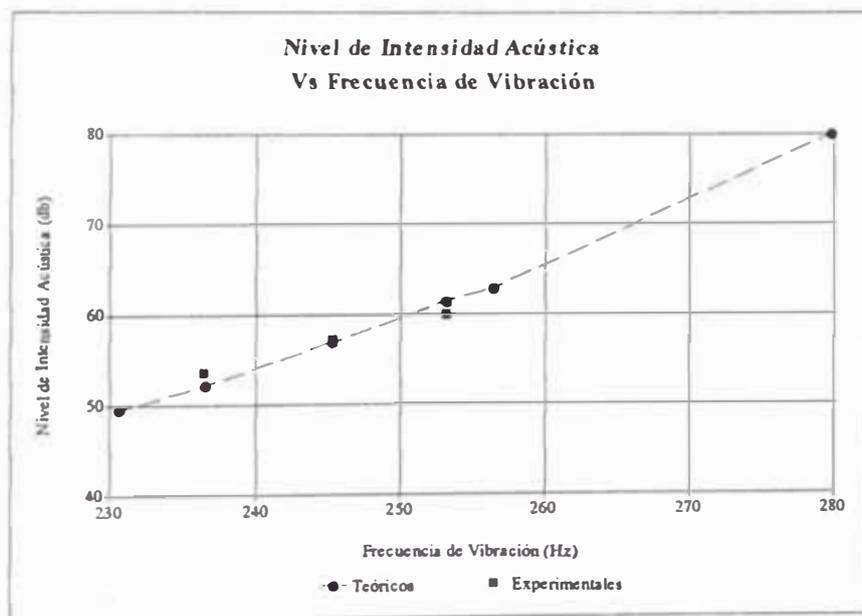
caja de resonancia y el nivel de intensidad acústico de tres guitarras hechas de caoba, a las que llamaré Guitarra 4, Guitarra 5 y Guitarra 6. Las tres guitarras se modelaron con elementos tridimensionales, y los resultados de los análisis dinámico y acústico se muestran en el siguiente cuadro:

Resultados obtenidos en cada una de las Guitarras

| | Guitarra 4 | Guitarra 5 | Guitarra 6 |
|-------------------------------------------------------------|------------|------------|------------|
| Nivel de Intensidad Acústica Experimental (db) | 57.04 | 60.02 | 53.56 |
| Nivel de Intensidad Acústica Esperada (db) * | 56.79 | 61.40 | 52.14 |
| Frecuencia natural de Vibración de la tapa Anterior (Hertz) | 245.20 | 253.19 | 236.45 |

*Según Fórmula planteada en esta Tesis

Ploteando los valores obtenidos obtenemos el siguiente gráfico:



Se puede observar que los resultados esperados se acercan mucho a los experimentales. Es importante mencionar que los Niveles de Intensidad Acústica están aproximadamente 25 decibelios por debajo de la Guitarra 1.

La ubicación de los centros de gravedad se presenta en el siguiente cuadro:

Ubicación del centro de gravedad *

| | Coordenadas | | |
|------------|-------------|-----------|------------|
| | X (cm) | Y (cm) | Z (cm) |
| Guitarra 4 | -2.5312896 | 19.236981 | -5.9956321 |
| Guitarra 5 | -1.9865321 | 16.268951 | -5.2389641 |
| Guitarra 6 | -2.095621 | 17.268325 | -6.106892 |

*Referido al sistema XYZ. Ver anexo 4

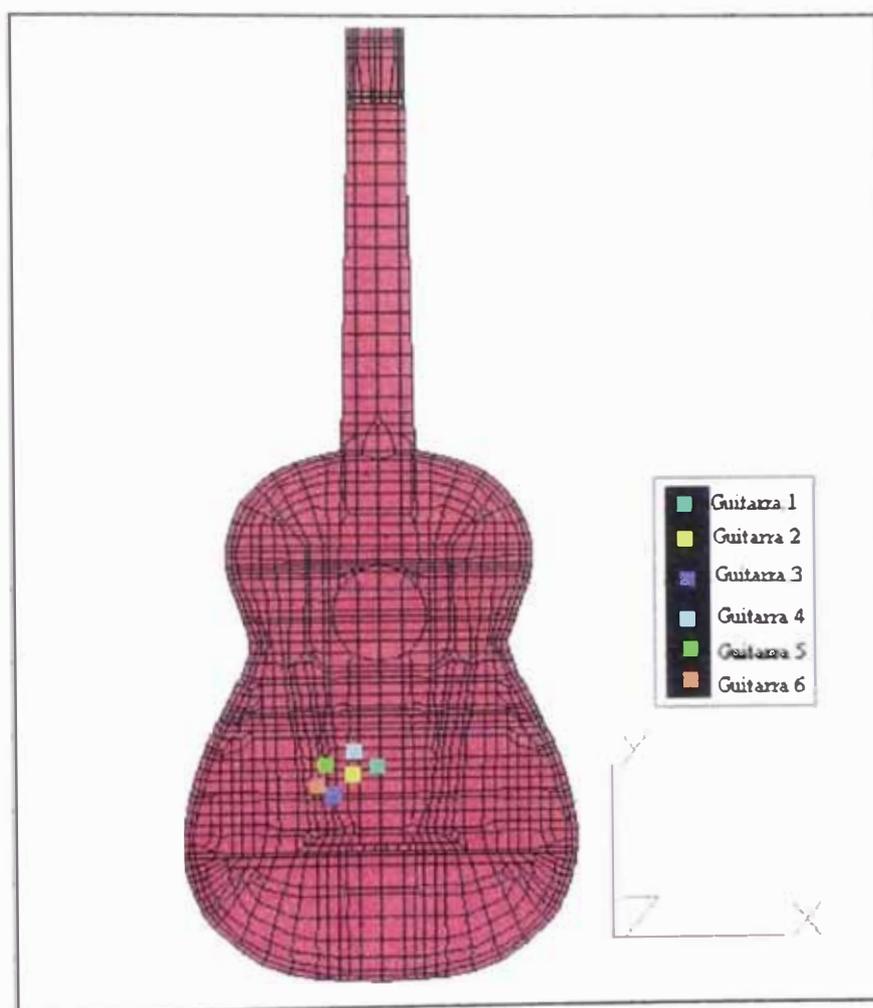


Figura 20: Ubicación en planta del centro de Gravedad de las guitarras.

Se observa que la coordenada "Z" del centro de gravedad, se encuentra en el tercio adyacente a la Tapa Posterior de la Guitarra (cabe mencionar que la a

guitarra 1 lo tiene ubicado en el tercio central de la altura de la caja de resonancia, muy cerca de la altura media de la misma), como se puede apreciar en las figuras 20 y 21.



Figura 21. Ubicación en elevación del centro de Gravedad de las guitarras.

7.9 CONSIDERACIONES FINALES

La Guitarra es un instrumento musical cuya construcción es realizada por los Luthieres, nobles artesanos que debido a la experiencia adquirida por décadas, obtienen diseños muy buenos en lo que se refiere a la calidad acústica de los sonidos que produce. Para esto, lo usual es construir muchos prototipos de guitarras hasta obtener el óptimo de los diseños.

Son muchos los luthieres de guitarras en el Perú, que invierten tiempo y dinero en este noble oficio muy ligado a la experiencia, y que están muy ajenos a los avances científicos y tecnológicos de esta época. El aporte de esta tesis está dirigido directamente a ellos, que son parte del Patrimonio Cultural de Nuestra Nación, y que trabajan humildemente para enriquecerla.

Finalmente, de acuerdo al análisis realizado en la guitarra, se ha podido observar que, con el método propuesto, se puede dimensionar y ubicar todos los elementos que la constituyen – diseño -, los mismos que intervendrán en la respuesta acústica que se desee. De esta manera se pueden elaborar con anticipación, los planos de construcción del instrumento, con la certeza que se tendrá el comportamiento previsto, y por ende la calidad de Guitarra deseada.

8.0 RESUMEN

- Se ha analizado una Guitarra de Concierto haciendo uso del Método de los Elementos Finitos, obteniéndose como resultado las frecuencias y modos de vibración naturales. También se realizó el análisis para otras Guitarras.
- Se ha realizado el Análisis Acústico para determinar el Nivel de Intensidad Acústica de la Guitarra de Concierto y de otros prototipos.
- Se ha obtenido una Fórmula Recursiva que relaciona la Frecuencia de Inicio de Vibración de la Caja de Resonancia de la Guitarra. Los valores experimentales y esperados tienen buena aproximación.

- Se observa que la Respuesta Acústica de la Guitarra depende de la ubicación de su Centro de Gravedad.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Del análisis de los resultados obtenidos en el capítulo anterior se llega a concluir que existe una estrecha relación entre su comportamiento dinámico y su respuesta acústica. A continuación se presentan las conclusiones a las que se llegó, así como recomendaciones para futuras investigaciones

8.1 CONCLUSIONES

1.- Los métodos experimentales para la determinación de las constantes elásticas requieren bastante cantidad de pruebas físicas, que involucran una dedicación importante de tiempo y en muchos casos mucha inversión de dinero. El método indirecto o virtual, sólo requiere unos pocos resultados experimentales, para obtener resultados muy aproximados a los hallados con un modelo físico, con la ventaja de ahorrar bastante tiempo y dinero.

2.-El Método de los Elementos Finitos se presta para la modelación de estructuras tan complejas como la analizada en esta Tesis, involucrando todos los grados de libertad que deseemos. Es un método muy versátil que genera una gran cantidad de información, que hace que se requiera en muchos casos una buena salida gráfica en el ordenador para poder apreciar mejor los resultados obtenidos.

3.-Queda demostrado que existe una relación estrecha entre el comportamiento dinámico de la estructura analizada en esta Tesis, y su respuesta acústica.

4.-Se ha podido comprobar que la respuesta acústica de la guitarra depende de la presencia y ubicación de la armadura interna de la misma.

5.- Se aprecia que los refuerzos internos de la guitarra, al rigidizarla y cambiar la ubicación del centro de gravedad, modifican los niveles de intensidad acústica, debido a que la rigidizan, y cambian la ubicación del centro de gravedad de la misma.

6.- Se puede predecir la respuesta acústica para cualquier tipo de material que conforma la guitarra.

7.- Finalmente se concluye que haciendo uso del modelo propuesto se puede diseñar una guitarra, preparando los planos que permitan su construcción, para obtener una determinada respuesta acústica.

8.2 RECOMENDACIONES

1.- Estudiar el efecto de la superposición de ondas como producto de pulsar las cuerdas, y la relación que tienen con la estructura interna de la guitarra.

2.- Analizar el efecto de impacto (Tambora en términos musicales) producido por un guitarrista sobre la tapa anterior y madera de borde de la guitarra.

3.- Se debe estudiar la respuesta estructural y acústica cambiando la condiciones climáticas que rodeen a la guitarra.

4.- Investigar el efecto acústico que produce la variación de la madera inclinada que se encuentra en la estructura interna de la guitarra (tapa posterior).

5.- Investigar con otros tipos de materiales, como por ejemplo polímeros, para la posible producción en serie de este instrumento (y quizás otros instrumentos), con la finalidad de reducir costos de fabricación, y ofrecer un instrumento mucho más barato al público interesado (músicos académico y aficionados), con la seguridad de que producirán la respuesta acústica deseada.

6.- Plantear una posible escala sísmica relativa, en base a los Niveles de Intensidad Acústica que se generen en un suceso sísmico.

7.- Plantear la posibilidad de evaluación del estado de conservación de las calles y avenidas de una determinada ciudad, basándonos en el Nivel de Intensidad Acústico que le corresponde a alguna de ellas.

BIBLIOGRAFÍA

- (1) H.JEFFREYS, B. SWIRLES, "Methods of Mathematical Physics", Third edition, The Syndics of the Cambridge University Press, 1962.
- (2) H.JEFFREYS, "Cartesian Tensors", 1st.ed., The Syndics of the Cambridge University Press, 1931.
- (3) G.E.MASE, "Theory and Problems of Continuum Mechanics", 1ra ed., McGraw-Hill, 1987.
- (4) Hwei. P. Hsu, "Análisis de Fourier", 1ra ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 1987.
- (5) A.E.H.LOVE, "Mathematical Theory of Elasticity", Second Edition, Fourth Edition, Dover Publications, 1927.
- (6) I.S. SOKOLNIKOFF, "Mathematical Theory of Elasticity", Second Edition, McGraw-Hill, 1956.
- (7) T. H. H. PIAN, P TONG, "Finite Element Methods in Continuum Mechanics", Department of Aeronautics and Astronautics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts.
- (8) I.S. SOKOLNIKOFF, "Mathematical Theory of Elasticity", Second Edition, McGraw-Hill, 1956.
- (9) O.C.ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR, "El Método de los Elementos Finitos", 4ta. edición, Volumen 1, McGraw-Hill, 1994.
- (10) O.C.ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR, "El Método de los Elementos Finitos", 4ta. edición, Volumen 2, McGraw-Hill, 1996.

- (11) G. DAHLQUIST, A. BJORK, "Numerical Methods", 1st.ed., PrenticeHall, 1974.
- (12) G.C. WRIGHT, G.A. MILES, "An Economical Methods for Determining the Smallest Eigenvalues of Large Linear Systems", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pags. 25-33, 1971.
- (13) ALAN JENNINGS, D.R. LORR, "Application of the Simultaneous Iteration Methods to Undamped Vibration Problems", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pags. 13-24, 1971.
- (14) A. RAZZAQUE, "Automatic Rreduction of Frontwidth for Finite Element Analysis", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 15, pags. 1315-1324, 1980.
- (15) R.J COLLINS, "Bandwidth Reduction by Automatic Renumbering", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 6, pags. 345-356, 1973
- (16) H.R. GROOMS, "Algorith for Matrix Bandwidth Reduction", ASCE, Journal of the Structural Division, Vol. 98(ST1), pags. 203-214, 1972.
- (17) O.C. ZIENKIEWICZ, V. PHILLIPS, "An Automatic Mesh Generation Scheme For Plane and Curved Surfaces by 'Isoparametric' Co-ordinates", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pags. 519-528, 1971.
- (18) O.C. ZIENKIEWICZ, B.M. IRONS, J. ERGATOUDIS, S. AHMAD and F. C. SCOTT "Techniques in Cuadrilateral Mesh Generation for Plane Surfaces", Tapir Press, Trondheim, 1978, chap. 13

- (19). RENE A. TINAWI, "Anisotropic Tapered Elements Using Displacement Models", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 4, pags. 475-489, 1972.
- (20)J.COUNTS, J.G.BENNET, "Axial Wave Propagation in Membrane Shells of Revolution", International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 3, pags. 181-198, 1971.
- (21)GUSTÁV MARTINCĚK, "The Determination of Poisson's Ratio and The Dynamics Modulus of Elasticity From the Frequencies of Natural Vibration in Thin Circular Plates", Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, pags. 116-127, 1998
- (22)Z. KACZKOWSKI, "The Influence of the Shear Forces and the Rotatory Inertia on the Vibration of an Anisotropic Plate", Arch. Mech.Stos, Vol. 4, pags. 531, 1960
- (23)B.BEDDOE, "Propagation of Elastic Stress Waves in a Necked Rod", Journal of Sound and Vibration, Vol. 29, pags. 236-251, 1998
- (24)J.PÉREZ MIÑANA, "Compendio de Acústica", Editorial Labor, 5ta edición, 1997.
- (25)A. ROCCARD, "Propagation et Absorption du Son", Editorial Hermann, 2da. Edición, 1996.
- (26)L.BARANECK, "Acoustics", Editorial McGraw-Hill, 1997.
- (27)W.SETO, "Acústica", Editorial McGraw-Hill, 1971.
- (28)A.J.PRETLOVE, "Bond Stresses in a Randomly Vibrating Sandwich Plate: Multi-Modal Theory", Journal of Sound and Vibration, Vol. 2, pags. 2-12, 1965

- (29) V. MANGULIS, "On the Effects of a non-rigid Strip in a Baffle on the Propagation of Sound", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 5, pags. 212-235, 1966
- (30) P.E. DOAK, "Analysis of Internally Generated Sound in Continuous Materials: (I) Inhomogeneous Acoustic Wave Equations", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 2, pags. 53-73, 1966
- (31) B. BEDDOE, "Propagation of Elastic Waves in a Necked Rod", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 12, pags. 201-212, 1972
- (32) G. S. RAM, "A Note on Calculation of the Lowest Eigenvalue of a Continuum in Which Wave Speed is a Function of Position", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 27, pags. 223-256, 1998