

UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA



**CURVAS DE BEZIER Y B-SPLINE MEDIANTE
LOS BLOSSOMS**

TESIS PARA OPTAR EL TITULO DE LICENCIADO EN CIENCIAS
CON MENCIÓN EN MATEMÁTICA

PRESENTADA POR :

JUAN DUEÑAS BEJAR

LIMA-PERU

1996

INDICE

Introducción	1
CAPITULO 1. CURVAS DE BEZIER Y CURVAS B-SPLINES	
1.1 Curvas de Bézier	4
1.2 Curvas B-spline	8
CAPITULO 2. BLOSSOMS	
2.1 Principio de los Blossoms	12
2.2 Determinación de los puntos de Bézier	25
2.3 Determinación de los puntos de de Boor	31
CAPITULO 3. APLICACIONES	
3.1 Inserción de Nodos	53
Algoritmo de Boehm	53
Inserción de Nodos múltiples	58
Algoritmo de Oslo	60
3.2 Elevación de grado	
Elevación de Grado en Curvas de Bézier	63
Elevación de Grado en Curvas B-spline	64
BIBLIOGRAFIA	70

INTRODUCCION

El Diseño Geométrico Asistido por Computadora (CAGD) esta relacionado con la representación, manipulación y el diseño de objetos por computador tales como: curvas, superficies y sólidos.

Las herramientas matemáticas del CAGD son principalmente el análisis matemático, el análisis numérico, cálculo variacional, geometría diferencial, etc. Las principales aplicaciones se encuentran donde se necesitan métodos para describir matemáticamente los objetos que van a ser manufacturados por máquinas controladas por computador, como por ejemplo: en la industria aérea(diseño de alas, fuselajes de un avión, etc), automotriz(diseño de las partes de un auto), etc. Otras aplicaciones se encuentran en los gráficos por computador, visualización científica (para describir los fenómenos físicos, geológicos, médicos, etc).

En las aplicaciones del diseño de una curva ó superficie a menudo se define especificando interactivamente un conjunto de puntos, denominados puntos de control, los cuales nos determinan la forma de dicha curva.

Las curvas y superficies de Bézier y B-spline son muy usados en muchos sistemas de CAGD. Las curvas de Bézier inicialmente fueron estudiados por P.Casteljau aproximadamente en 1959 y por P. Bézier aproximadamente en 1962. La teoría matemática esta basada en el concepto de polinomios de Bernstein. De Casteljau estudió todas las relaciones que habían con estos polinomios, pero no fue antes de 1970 que R. Forest descubrió la relación

entre el trabajo de Bézier y los polinomios de Bérnstein. Bézier y de Casteljaou desarrollaron sus teorías como partes de sistemas de CAD las cuales fueron usadas por compañías francesas de autos: Renault, Citroën.

Por otro lado, J.Ferguson [Ferguson '64] estudió las curvas polinomiales con ciertas restricciones de diferenciabilidad y fue el primero en presentar ese tipo de trabajo en los sistemas de CAGD, dichos sistemas fueron usados por la Compañía Boeing en 1963. Aproximadamente en ese tiempo C. de Boor y W. Gordon estudiaron estas curvas en la General Motor. Gordon y Riesenfeld [Gordon et al. '74] demostraron que las curvas B-spline son una generalización de la curva de Bézier.

Los B-splines pueden ser enfocados desde diferentes puntos de vista [Farin '93],[Hoschek et al. '93] tales como: por integrales, por proyecciones de simplejos k dimensionales, métodos estadísticos, blossoming, etc.

Un principio clásico en matemática es que los polinomios de una sola variable de grado p son equivalentes a aplicaciones p -afines simétricas [Ramshaw '87, '89]. Lyle Ramshaw aplicó este principio en la teoría de curvas y superficies de Bézier y B-spline y a la aplicación p -afin simétrica de un polinomio de grado p lo llamó como **BLOSSOM**.

Mediante este nuevo enfoque fácilmente se puede entender y explicar los teoremas clásicos relacionados con las curvas y superficies de Bézier y B-spline.

El objetivo de este trabajo es utilizar la técnica de los blossoms en el estudio de las curvas de Bézier y B-spline para obtener algoritmos que nos permitan tener mayor flexibilidad sobre dichas curvas es decir obtener nuevos puntos de control de manera que la curva dada no cambie de forma.

Los algoritmos que nos permiten tener mayor flexibilidad sobre las curvas son:

- i) Inserción de nodos
- ii) Elevación de grado

En el anexo describiremos algunas rutinas y programas que se han realizado.

CAPITULO 1

CURVAS DE BEZIER Y CURVAS B-SPLINE

1.1 Curvas de Bézier

Definición 1.1 Los **polinomios de Bernstein** de grado n se definen como:

$$B_i^n(t) := \binom{n}{i} \left(\frac{t-a}{b-a} \right)^i \left(\frac{b-t}{b-a} \right)^{n-i} \quad i=0..n, t \in [a,b]$$

$$\text{donde } \binom{n}{i} := \begin{cases} \frac{n!}{(n-i)!i!} & ; i \in \{0, 1, \dots, n\} \\ 0 & ; i \notin \{0, 1, \dots, n\} \end{cases}$$

TEOREMA 1.1 Los Polinomios de Bernstein definidos en $[0, 1]$ cumplen lo siguiente:

- 1) $B_i^n(0) = B_i^n(1) = 0, i \neq 0, i \neq n.$
- 2) $B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1$
- 3) $B_0^n(1) = B_n^n(0) = 0$
- 4) $B_i^n(t) > 0 \quad \forall t \in (0, 1)$
- 5) $\max_{t \in [0, 1]} (B_i^n(t)) = B_i^n(i/n)$
- 6) $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$
- 7) $B_i^n(t) = B_{n-1}^n(1-t)$
- 8) Fórmula de Reducción: $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$

Prueba:

1), 2), 3), 4), 5), 7) y 8) son obvios.

6) Por la fórmula binómica:

$$1 = (t + 1 - t)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} = \sum_{i=0}^n B_i^n(t)$$

Definición 1.2 El Polinomio de Bezier de grado n, es una curva paramétrica definida por:

$$\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \quad \forall t \in [a, b]$$

donde: $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^d$, $d=2, 3$.

Los puntos \mathbf{b}_i se llaman puntos de Bezier o puntos de control.

El polígono de Bézier es aquel polígono que se obtiene al unir los puntos de control consecutivos mediante segmentos.

TEOREMA 1.2 Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) \quad \forall t \in [0, 1]$. Entonces:

- 1) $\mathbf{F}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{F}(1) = \mathbf{b}_n$.
- 2) La curva de Bézier se encuentra en la cápsula convexa de los puntos de Bézier: $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$.
- 3) Los segmentos $\overline{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$, y $\overline{\mathbf{b}_{n-1} \mathbf{b}_n}$ son tangentes a la curva de Bezier en $t=0$ y $t=1$ respectivamente.
- 4) $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) = t$.

5) Precisión Lineal:

Sean $\mathbf{p} \neq \mathbf{q}$ puntos de \mathbb{R}^d ($\in \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$) y los puntos \mathbf{b}_j están distribuidos uniformemente en el segmento pq , es decir:

$$\mathbf{b}_j = \left(1 - \frac{j}{n}\right) \mathbf{p} + \frac{j}{n} \mathbf{q}, \quad j = 0, \dots, n$$

Entonces $\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t) = \mathbf{p} + t(\mathbf{q} - \mathbf{p})$.

$$6) \text{ Simetría: } \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(1-t).$$

7) La curva de Bézier es invariante bajo transformaciones afines, es decir para obtener una transformación afín sobre toda la curva de Bézier solamente tenemos que realizar la transformación afín en los puntos de control.

8) La curva de Bézier es invariante bajo transformaciones afines de parámetros, es decir:

$$\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(u)$$

$$\text{donde } t \in [0, 1], u \in [a, b], t = \frac{u-a}{b-a}.$$

Prueba:

1), 2), 3) son obvios.

$$\begin{aligned} 4) \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(t) &= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(i+1)}{n} \frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{i!(n-i-1)!} t^{i+1} (1-t)^{n-i-1} \\ &= t \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} t^i (1-t)^{n-1-i} = t \sum_{i=0}^{n-1} B_i^{n-1}(t) \\ &= t \text{ (por Teorema 1.1(6)).} \end{aligned}$$

5) Se tiene usando 4).

$$\begin{aligned} 6) \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) &= b_0 B_0^n(t) + \dots + b_n B_n^n(t) \\ &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_{n-i}^n(t) \text{ (por Teorema 1.1(7)).} \\ &= \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(1-t). \end{aligned}$$

7) y 8) son obvios.

Ejemplo 1: Las figuras muestran las propiedades enunciadas en el teorema 1.2.

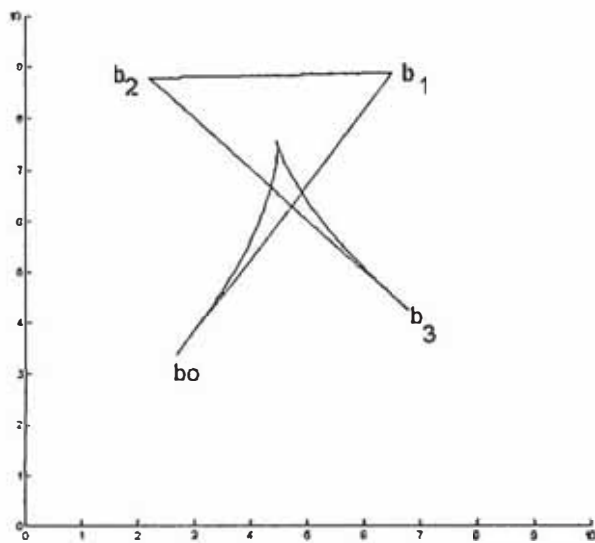


Figura 1.a

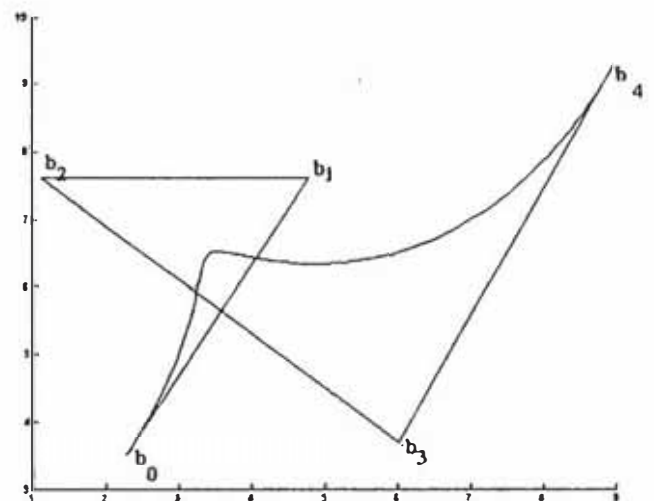


Figura 1.b

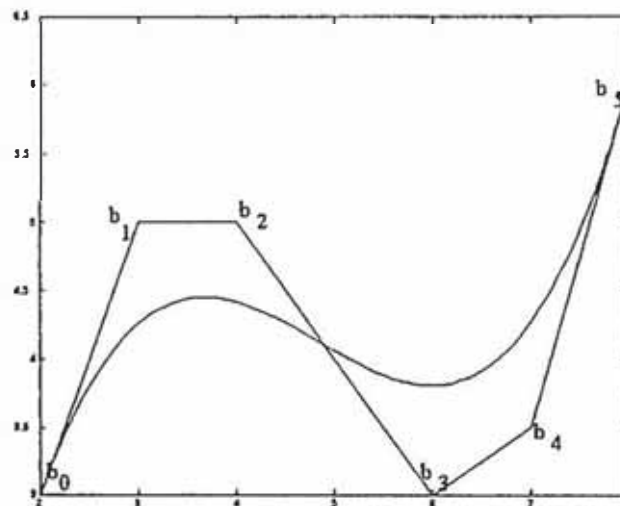


Figura 1.c

Ejemplo 2: Las figuras 2.a, 2.b muestran las propiedades de transformaciones afines.

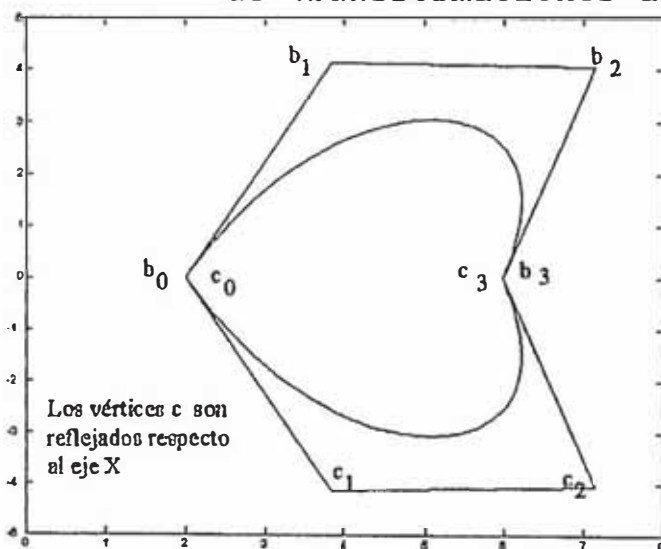


Figura 2a.

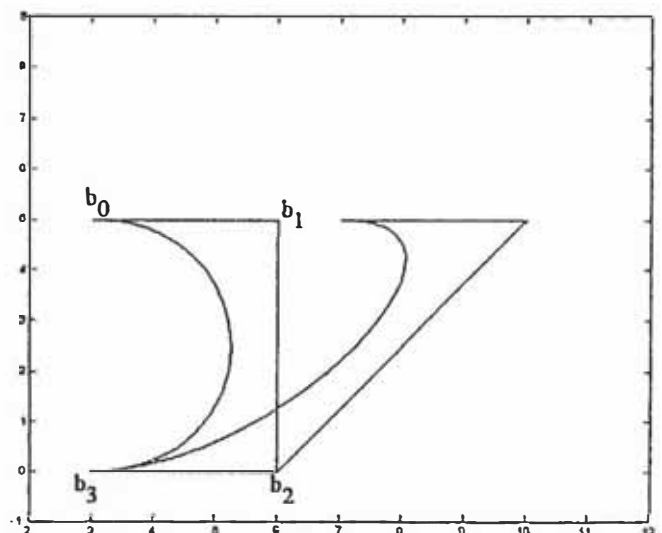


Figura 2b.

1.2 Curvas B-splines

Definición 1.3 Un **vector nodo** T es una sucesión no decreciente de números reales, es decir:

$$T := (t_1, \dots, t_m) \text{ tal que } t_i \leq t_{i+1}, \quad i=1, \dots, m-1.$$

A cada t_i se conoce como nodo donde $i=1, \dots, m$.

Sí $t_{i-1} < t_i < t_{i+1}$ se dice que t_i es un nodo simple.

Sí $t_{i-1} < t_i = \dots = t_{i+r-1} < t_{i+r}$ se dice que t_i es un nodo de multiplicidad r .

Definición 1.4 Los **B-splines normalizados de grado**¹ p , denotado por N_i^p , sobre el vector nodo T se definen recursivamente:

$$N_i^0(u) := \begin{cases} 1 & ; \quad t_i \leq u < t_{i+1} \\ 0 & ; \quad \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$N_i^r(u) := \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_i^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{r-1}(u), \quad 1 < r < p$$

Convención: $0/0 \equiv 0$

TEOREMA 1.3 Sea $T = (t_1, \dots, t_{m+p+1})$ un vector nodo tal que $p < m$. Entonces

- 1) $N_i^p(u) > 0$ sí $u \in \langle t_i, t_{i+p+1} \rangle \neq \emptyset$, $i=1, \dots, m$.
- 2) $N_i^p(u) = 0$ sí $u \notin [t_i, t_{i+1+p}]$, $i=1, \dots, m$.
- 3) $\sum_{i=1}^m N_i^p(u) = 1$ sí $u \in [t_{p+1}, t_{m+1}]$

Prueba:

- 1), 2) son obvios (por inducción matemática).
- 3) Ver [Stoer et al. '80, pp.109].

Observación: Si $u \in [t_j, t_{j+1}]$ entonces las funciones B-spline básicas no nulas podrían ser:

$$N_{j-p}^p(u), \dots, N_j^p(u).$$

¹ orden - $p+1$

Ejemplo Calcularemos $N_i^2(u)$, $i=1,2,3,4$. sobre el vector nodo $T=(0,0,0,1,2,2,2)$.

$$\text{Si } 0 \leq u \leq 1: \quad N_1^0(u)=0 \quad i \neq 3; \quad N_3^0(u)=1 \\ N_2^1(u)=1-u; \quad N_3^1(u)=u; \quad N_i^1(u)=0, \quad i \neq 2,3$$

$$N_1^2(u)=(1-u)^2; \quad N_2^2(u)=u(1-u) + \frac{(2-u)u}{2}$$

$$N_3^2(u)=\frac{u^2}{2}; \quad N_i^2(u)=0, \quad i \neq 1,2,3.$$

$$\text{Si } 1 \leq u < 2: \quad N_1^0(u)=0 \quad i \neq 4; \quad N_4^0(u)=1$$

$$N_3^1(u)=2-u; \quad N_4^1(u)=u-1; \quad N_i^1(u)=0, \quad i \neq 3,4$$

$$N_2^2(u)=\frac{(2-u)^2}{2}; \quad N_3^2(u)=\frac{u(2-u)}{2} + (2-u)(u-1)$$

$$N_4^2(u)=(u-1)^2; \quad N_i^2(u)=0, \quad i \neq 2,3,4.$$

TIPOS DE VECTORES NODOS

VECTOR NODO UNIFORME: Se dice así cuando los nodos se encuentran equidistanciados.

Ejemplos: $T=(0,1,2,3,4)$,
 $T=(-8,-7,-6,-5,-4)$.
 $T=(0,0.25,0.5,0.75,1.0)$ se conoce como un vector nodo uniforme normalizado entre 0 y 1.

VECTOR NODO UNIFORME ABIERTO: Se dice así cuando los nodos extremales son de multiplicidad igual al orden de la función B-spline básica y los nodos son uniformes.

Ejemplos: orden=2 : $T=(0,0,1,2,3,4,4)$
orden=4 : $T=(0,0,0,0,0,1,2,3,4,4,4,4)$
orden=2 : $T=(0,0,1/4,1/2,3/4,1,1)$
orden=3 : $T=(0,0,0,1/3,2/3,1,1,1)$.

Sea p el grado de una función B-spline tal que $n \geq p+1$. Formalmente un vector nodo uniforme puede estar dado por:

$$t_i = \begin{cases} 0 & ; 1 \leq i \leq p+1 \\ i-p-1 & ; p+2 \leq i \leq n \\ n-p & ; n+1 \leq i \leq n+p+1 \end{cases}$$

Definición 1.5 N_i^p es un **B-spline uniforme** si los nodos se encuentran equidistanciados.

Definición 1.6 N_i^p es un **B-spline no uniforme** si los nodos no se encuentran equidistanciados.

Definición 1.7 La curva **B-spline de grado p** con respecto a un vector nodo $T = (t_1, \dots, t_{m+p+1})$, tal que $t_i < t_{i+p+1}$ es una curva polinomial por tramos y esta definido:

$$F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u), \quad u \in [t_{p+1}, t_{m+1}], \quad d_i \in \mathbb{R}^d.$$

$$d = 1, 2, 3.$$

Los puntos d_i se llaman **puntos de Boor** ó puntos de control.

El polígono de Boor es aquel polígono que se obtiene al unir los puntos de control consecutivos mediante segmentos.

Ejemplo 1: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (6, 3)$, $d_2 = (7, 8)$, $d_3 = (12, 5)$, $d_4 = (9, 0)$, $d_5 = (1, 0)$, $d_6 = (0, 6)$, $d_7 = (3, 8)$, $d_8 = (4, 4)$ (ver figura 3).

Ejemplo 2: Una curva B-spline cúbica sobre el vector nodo $T = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$ cuyos puntos de control son: $d_1 = (0, 0)$, $d_2 = (3, 9)$, $d_3 = (6, 3)$, $d_4 = (9, 6)$ (ver figura 4).

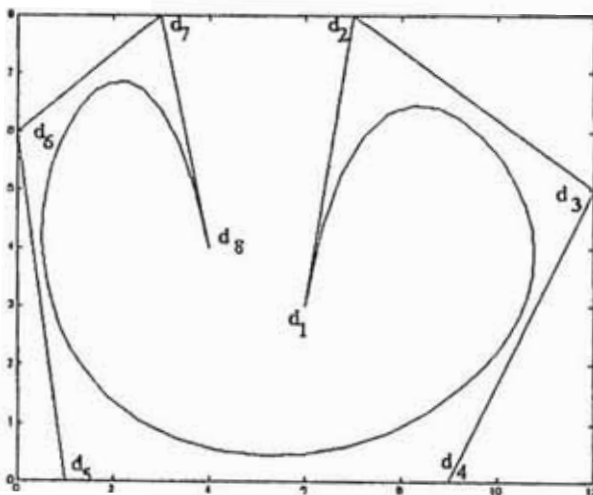


Figura 3

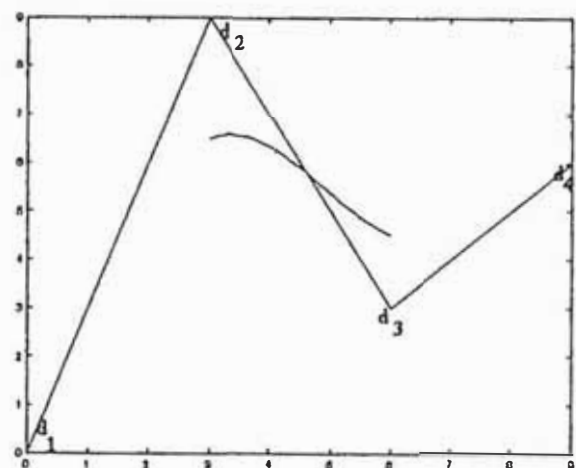


Figura 4

CAPITULO 2 BLOSSOMS

Un teorema clásico en matemática dice que los polinomios de grado "n" son equivalentes a las aplicaciones n-afines simétricas. Lyle Ramshaw aplicó este principio a la teoría de curvas y superficies de Bézier y B-spline.

Definición 2.1 Una aplicación $f: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$ se dice **AFIN**, si se cumple:

$$f\left(\sum_{i=1}^n a_i t_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i f(t_i) \quad \forall a_1 \dots a_n \in \mathcal{R}: \sum_{i=1}^n a_i = 1. \\ n \in \mathbb{N}$$

Definición 2.2 Una aplicación $f: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^d$ se dice **m-AFIN** ó simplemente **multiafín** si es afín en cada uno de sus argumentos cuando los otros argumentos se mantienen fijos, es decir:

Sean $u_1 \dots u_{j-1}, u_{j+1} \dots u_m \in \mathcal{R}$:

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_i t_i, u_{j+1} \dots u_m) = \sum_{i=1}^n a_i f(u_1 \dots u_{j-1}, t_i, u_{j+1} \dots u_m) \\ \forall a_1 \dots a_n \in \mathcal{R}: \sum_{i=1}^n a_i = 1.$$

Definición 2.3 Una aplicación $f: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^d$ es **multilineal**, si la aplicación es lineal en cada uno de sus argumentos cuando los otros argumentos se mantienen constantes, es decir:

Sean $u_1 \dots u_{j-1}, u_{j+1} \dots u_m \in \mathcal{R}$:

$$f(u_1, \dots, u_{j-1}, \sum_{i=1}^n a_i t_i, u_{j+1} \dots u_m) = \sum_{i=1}^n a_i f(u_1 \dots u_{j-1}, t_i, u_{j+1} \dots u_m) \\ \forall a_1 \dots a_n \in \mathcal{R}$$

Definición 2.4 Una función multivariante es **simétrica** si la función se mantiene constante para cualquier permutación de sus argumentos, es decir:

$f: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}^d: (u_1, \dots, u_m) \rightarrow f(u_1, \dots, u_m)$ es simétrica si

$$f(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) = f(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_m) \\ \forall i, j \text{ tal que } 1 \leq i, j \leq m.$$

Definición 2.5 Sean P, Q espacios finitos dimensionales. La función $F: P \rightarrow Q$ es un **polinomio de grado "n"**, si existe una componente de $F(u)$ puede ser escrita como un polinomio de grado "n" y las demás componentes puede ser escrita como un polinomio de grado menor o igual que "n", para cualquier base para P y Q y orígenes.

Si el dominio P es unidimensional el polinomio se llama curva polinomial.

Si el dominio P es bidimensional el polinomio se llama superficie polinomial.

Ejemplos: de curvas y superficies polinomiales.

$F(t) = (t^5, 2t)$ es una curva polinomial de grado 5,
 $F(t, s) = (s, t, s^2 + t^2)$ es una superficie polinomial de grado 2,
 $F(t) = (t^2 + 0t^3, 2t)$ se dice curva polinomial degenerada de grado 3.

2.1 PRINCIPIO DE LOS BLOSSOMS

TEOREMA 2.1

Las funciones polinomiales $F: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$ de grado n son equivalentes a funciones n -afines simétricas $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^d$.

Si $F: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$ es un polinomio de grado n definido por $F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ entonces existe una única función simétrica n -afin $f: \mathcal{R}^n \rightarrow \mathcal{R}^d$ tal que $F(t) = f(t, \dots, t)$ y viceversa.
 n veces

A la función f se dice forma polar o **blossom** de F .

La función F es la **forma diagonal** de f .

Al proceso de encontrar la forma polar se conoce como **blossoming** [Ramshaw '87, '89].

Nota: Un teorema conocido en algebra lineal es:

Para cada forma cuadrática $F: V \rightarrow \mathcal{R}$ sobre un espacio vectorial V existe una única forma bilineal simétrica $f: V \times V \rightarrow \mathcal{R}$ tal que $F(v) = f(v, v)$. Este teorema es analogo al teorema 2.1 para polinomios de la forma:

$$F(v) = \sum_{i=1}^n c_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i < j} c_{ij} x_i x_j$$

donde $v = (x_1, \dots, x_n) \in V \subset \mathcal{R}^n$, $c_{ij} \in \mathcal{R}$, es decir polinomios multivariantes homogéneos de grado 2.

Prueba del teorema:

=>) Sea $F(t) = \sum_{i=0}^n c_i t^i$ una función polinomial de grado n .

$$\text{Afirmamos que: } f(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{p_i(t_1, \dots, t_n)}{\binom{n}{i}}$$

$$\text{donde } p_i(t_1, \dots, t_n) = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}, \quad j_r \in \{0, 1\}$$

es la aplicación multiafín simétrica buscada.

Veamos:

i) f es simétrica (obvio)

ii) f es multiafín:

Sin pérdida de generalidad probaremos que es afín con respecto al primer argumento.

$$\text{Sea } \{\lambda_k, v_k\} \subset \mathfrak{R} \text{ tal que } \sum_k \lambda_k = 1. \quad (1)$$

$$f\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, t_n\right) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{p_i(\sum_k \lambda_k v_k, t_2, \dots, t_n)}{\binom{n}{i}}, \quad (*)$$

$$\text{pero } p_i\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, t_n\right) = \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=i \\ j_1 \geq 1}} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}$$

donde $j_r \in \{0, 1\}, r \in \{1, \dots, n\}$

$$= \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=i \\ j_1 \geq 1}} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^1 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} + \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=i \\ j_1=0}} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}$$

$$(1) \\ = \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=i \\ j_1 \geq 1}} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right) t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}$$

$$+ \sum_k \lambda_k \sum_{\substack{j_1+j_2+\dots+j_n=i \\ j_1=0}} \left(\sum_k \lambda_k v_k\right)^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}$$

$$= \sum_k \lambda_k \left(\sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ j_1, j_2, \dots, j_n \geq 0}} v_k^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \right) = \sum_k \lambda_k p_i(v_k, \dots, t_n). \quad (**)$$

$$(**) \text{ en } (*): \mathbf{f} \left(\sum_k \lambda_k v_k, t_2, \dots, t_n \right) = \sum_k \lambda_k \mathbf{f}(v_k, t_2, \dots, t_n).$$

iii) Diagonalidad:
$$\mathbf{f}(t, \dots, t) = \sum_{i=0}^n c_i \frac{p_i(t, \dots, t)}{\binom{n}{i}}$$

$$= \sum_{i=0}^n \frac{c_i}{\binom{n}{i}} \sum_{j_1 + \dots + j_n = i} t^{j_1} t^{j_2} \dots t^{j_n}$$

Pero $\sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ j_1, j_2, \dots, j_n \geq 0}} 1 = \binom{n}{i}$. Esto implica $\mathbf{f}(t, \dots, t) = \mathbf{F}(t)$.

iv) f es única (obvio).

De (i), (ii), (iii) y (iv) concluye la prueba.

\Leftarrow) Sea \mathbf{f} una función n -afín.

Se deduce que toda función n -afín es de la forma:

$$\mathbf{f}(t_1, \dots, t_n) = \sum_{i=0}^n d_i \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ j_1, j_2, \dots, j_n \geq 0}} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} \text{ donde } j_r \in \{0, 1\}.$$

Luego $\mathbf{f}(t, \dots, t) = \sum_{i=0}^n d_i t^i \binom{n}{i}$ el cual es un polinomio de

grado n .

Una forma de obtener más puntos de control en una curva B-spline sin que la curva no cambie de forma es elevando el grado el cual se verá más adelante. En dicha teoría usaremos los blossoms degenerados para obtener nuevos puntos de control.

TEOREMA 2.2 (Blossoms degenerados)

Sea $\mathbf{F}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$ un polinomio de grado n cuyo blossom es \mathbf{f} . Si \mathbf{F} es considerado como un polinomio degenerado

de grado $n+1$, es decir: $F(t) = \sum_{i=0}^{n+1} a_i t^i + 0t^{n+1}$ entonces el blossom degenerado f^* de F esta dado por:

$$f^*(u_1, \dots, u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(u_1, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1})$$

donde $\overset{*}{u}_i$ indica que el i -ésimo argumento no aparece [Ramshaw '87].

Prueba

i) f^* es simétrica:

Sin pérdida de generalidad probaremos que es simétrica con respecto a u_1, u_2 .

$$f^*(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(u_1, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1}) \quad (*)$$

$$\begin{aligned} f^*(u_2, u_1, \dots, u_{n+1}) &= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(u_2, u_1, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1}) \\ &= \frac{1}{n+1} [f(u_1, u_3, \dots, u_{n+1}) + f(u_2, u_3, \dots, u_{n+1}) + \\ &\quad \sum_{i=3}^{n+1} f(u_2, u_1, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1})] \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{simetría}}{=} \frac{1}{n+1} [f(u_1, u_3, \dots, u_{n+1}) + f(u_2, u_3, \dots, u_{n+1})$$

$$+ \sum_{i=3}^{n+1} f(u_1, u_2, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1})]$$

$$\stackrel{\text{reorden.}}{=} \frac{1}{n+1} [f(u_2, u_3, \dots, u_{n+1}) + f(u_1, u_3, \dots, u_{n+1})$$

$$+ \sum_{i=3}^{n+1} f(u_1, u_2, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1})]$$

$$= \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} f(u_1, u_2, \dots, \overset{*}{u}_i, \dots, u_{n+1}) \quad (*) = f^*(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}).$$

ii) \mathcal{F}^* es multiafín:

Sin pérdida de generalidad probaremos que es afín con respecto al primer argumento.

Sea $\{\lambda_k, v_k\} \subset \mathcal{R}$ tal que $\sum_k \lambda_k = 1$. (1)

$$\mathcal{F}^*\left(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, u_{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \mathcal{F}(u_2, u_3, \dots, u_{n+1})$$

$$+ \sum_{i=2}^{n+1} \mathcal{F}(\sum_k \lambda_k v_k, \dots, u_i, \dots, u_{n+1})$$

$$\mathcal{F} \text{ es multiafín } \frac{1}{n+1} \left[\sum_k \lambda_k \mathcal{F}(u_2, u_3, \dots, u_{n+1}) + \sum_{i=2}^{n+1} \sum_k \lambda_k \mathcal{F}(v_k, \dots, u_i, \dots, u_{n+1}) \right]$$

$$\frac{1}{n+1} \sum_k \lambda_k \left[\mathcal{F}(u_2, u_3, \dots, u_{n+1}) + \sum_{i=2}^{n+1} \mathcal{F}(v_k, \dots, u_i, \dots, u_{n+1}) \right]$$

$$= \sum_k \lambda_k \left[\frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{n+1} \mathcal{F}(v_k, \dots, u_i, \dots, u_{n+1}) \right] = \sum_k \lambda_k \mathcal{F}^*(v_k, \dots, u_{n+1}).$$

iii) Diagonalidad: $\mathcal{F}^*(u, u, \dots, u) = \mathcal{F}(u)$.

De (i), (ii), (iii) concluye la prueba.

Ejemplo: El blossom de la función degenerada

$\mathcal{F}(t) = (t, t^2 + 0t^3)$ es:

$$\mathcal{F}(t_1, t_2, t_3) = \left(\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3}, \frac{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}{3} \right)$$

Definición 2.6 Sea $\mathcal{F}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$, un polinomio de grado n

definido por: $\mathcal{F}(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^i$. El **polinomio bivariente**

homogeneo de $\mathcal{F}(t)$, denotado por $\mathcal{F}_*(t, w)$, esta definido

por: $\mathcal{F}_*(t, w) = \sum_{i=0}^n a_i t^i w^{n-i}$.

TEOREMA 2.3

Sea $\mathbf{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$, un polinomio de grado n definido por

$\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i$ y $\mathbf{F}_*(t, w) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i w^{n-i}$ el polinomio bivalente homogéneo de $\mathbf{F}(t)$. Entonces existe una única aplicación multilinear simétrica $\mathbf{f}_*: (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:

$$i) \mathbf{f}_*[(u_1, 1), \dots, (u_n, 1)] = \mathbf{f}(u_1, \dots, u_n) \quad (2.3)$$

$$ii) \mathbf{f}_*[(t, 1), \dots, (t, 1)] = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i = \mathbf{F}_*(t, 1) = \mathbf{F}(t)$$

donde \mathbf{f} es el blossom de $\mathbf{F}(t)$.

A la aplicación multilinear de este principio se conoce como **el blossom multilinear de $\mathbf{F}(t)$** .

Prueba:

Afirmamos que:

$$\mathbf{f}_*[(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)] = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{p_{i*}[(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)]}{\binom{n}{i}}$$

donde

$$p_{i*}[(t_1, s_1), \dots, (t_n, s_n)] = \sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ j_r \in \{0, 1\}}} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} s_1^{1-j_1} \dots s_n^{1-j_n}$$

es la aplicación multilinear simétrica buscada.

Veamos:

a) \mathbf{f}_* es simétrica (obvio).

b) \mathbf{f}_* es multilinear:

Sin pérdida de generalidad probaremos que es lineal con respecto al primer argumento.

Sea $\{\lambda_k, u_k, v_k\} \subset \mathbb{R}$:

$$\mathbb{E}_*[(\sum_k \lambda_k(u_k, v_k)), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)] =$$

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{p_{i*}[(\sum_k \lambda_k(u_k, v_k)), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)]}{\binom{n}{i}} \quad (*)$$

Pero:

$$p_{i*}[(\sum_k \lambda_k(u_k, v_k)), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)] =$$

$$= p_{i*}[(\sum_k \lambda_k u_k, \sum_k \lambda_k v_k), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)]$$

$$= \sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} (\sum_k \lambda_k u_k)^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} (\sum_k \lambda_k v_k)^{1-j_1} s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n}$$

$$= \sum_{1+j_2+\dots+j_n=i} (\sum_k \lambda_k u_k) t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} (\sum_k \lambda_k v_k)^0 s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n}$$

$$+ \sum_{0+j_2+\dots+j_n=i} (\sum_k \lambda_k u_k)^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} (\sum_k \lambda_k v_k)^1 s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n}$$

$$= \sum_k \lambda_k \left(\sum_{1+j_2+\dots+j_n=i} u_k t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} v_k^0 s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n} \right)$$

$$+ \sum_k \lambda_k \left(\sum_{0+j_2+\dots+j_n=i} u_k^0 t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} v_k^1 s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n} \right)$$

$$= \sum_k \lambda_k \left(\sum_{j_1+j_2+\dots+j_n=i} u_k^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n} v_k^{1-j_1} s_2^{1-j_2} \dots s_n^{1-j_n} \right)$$

$$= \sum_k \lambda_k p_{i*}[(u_k, v_k), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)]. \quad (**)$$

(**) en (*) tenemos:

$$\mathbb{E}_*[(\sum_k \lambda_k(u_k, v_k)), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)] =$$

$$= \sum_k \lambda_k \mathbb{E}_*[(u_k, v_k), (t_2, s_2), \dots, (t_n, s_n)].$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \mathbf{f}_* [(u_1, 1), \dots, (u_n, 1)] &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{p_i * [(t_1, 1), \dots, (t_n, 1)]}{\binom{n}{i}} \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{\sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}}} t_1^{j_1} t_2^{j_2} \dots t_n^{j_n}}{\binom{n}{i}} = \mathbf{f}(u_1, \dots, u_n)
 \end{aligned}$$

(por el Teorema 2.1).

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \mathbf{f}_* [(t, 1), \dots, (t, 1)] &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{p_i * [(t, 1), \dots, (t, 1)]}{\binom{n}{i}} \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{\sum_{\substack{j_1 + j_2 + \dots + j_n = i \\ t^{j_1 + j_2 + \dots + j_n}}} t^{j_1 + j_2 + \dots + j_n}}{\binom{n}{i}} \\
 &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i \quad (\text{por el Teorema 2.1}).
 \end{aligned}$$

e) Unicidad: Supongamos que existen dos formas multilinea-

$$\begin{aligned}
 \text{les: } \mathbf{f}_* [(t, 1), \dots, (t, 1)] &= \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i \frac{p_i * [(t, 1), \dots, (t, 1)]}{\binom{n}{i}} \\
 \mathbf{g}_* [(t, 1), \dots, (t, 1)] &= \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i \frac{p_i * [(t, 1), \dots, (t, 1)]}{\binom{n}{i}}
 \end{aligned}$$

tales que verifiquen (2.3). Luego

$$\mathbf{f}_* [(t, 1), \dots, (t, 1)] - \mathbf{g}_* [(t, 1), \dots, (t, 1)] = \mathbf{F}(t)$$

De esto se tiene: $\mathbf{a}_i = \mathbf{b}_i \quad \forall i=1, \dots, n$.

De (a), (b), (c), (d) y (e) concluye la prueba.

Nota: Mediante este principio se obtendrá una nueva técnica para analizar la diferenciabilidad de curvas mediante las forma polares.

Ejemplo: Sea $F(t)=t^2+3t+4$. Su polinomio bivariente homogéneo es $F_*(t,s)=t^2+3ts+4s^2$. El blossom multilinear es:

$$f_*((t_1, s_1), (t_2, s_2)) = t_1 t_2 + 3(t_1 s_2 + t_2 s_1)/2 + 4s_1 s_2.$$

TEOREMA 2.4

Sea $f_* [(t_1, w_1), (t_2, w_2), \dots, (t_n, w_n)]$ una función multilinear simétrica. Entonces

$$f_*(\underbrace{\bar{t} + h\bar{\delta}, \dots, \bar{t} + h\bar{\delta}}_{n \text{ veces}}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k \text{ veces}}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k \text{ veces}}) h^k$$

donde $\bar{t} := (t, 1)$, $\bar{\delta} := (1, 0)$ [Goldman et al. '93].

Prueba:

Lo probaremos por inducción matemática sobre el número de argumentos

$n=1$: Evidente.

Hipótesis inductiva:

$$f_*(\bar{t} + h\bar{\delta}, \dots, \bar{t} + h\bar{\delta}, \circ) = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k \text{ veces}}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-k \text{ veces}}, \circ) h^k$$

$$\begin{aligned} f_*(\bar{t} + h\bar{\delta}, \dots, \bar{t} + h\bar{\delta}, \bar{t} + h\bar{\delta}) &= f_*(\bar{t} + h\bar{\delta}, \dots, \bar{t} + h\bar{\delta}, \bar{t}) \\ &\quad + h f_*(\bar{t} + h\bar{\delta}, \dots, \bar{t} + h\bar{\delta}, \bar{\delta}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-k}, t) h^k + \\ &\quad h \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k+1}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-k}) h^k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) h^k + \\ &\quad \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) h^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{f}_*(\bar{t}, \dots, \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) h^k \\
&\quad + \mathbf{f}_*(\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}) h^n. \\
&= \mathbf{f}_*(\bar{t}, \dots, \bar{t}) + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) h^k \\
&\quad + \mathbf{f}_*(\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}) h^n \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) h^k.
\end{aligned}$$

COROLARIO 2.5

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i$ una curva polinomial de grado n donde $\mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d$. Entonces $\mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k})$ donde \mathbf{f}_* es el blossom multilinear de la homogenización de \mathbf{F} [Seidel '91], [Goldman et al. '93].

Prueba: Sin pérdida de generalidad podemos suponer $d=1$.

Por el teorema de Taylor:

$$\mathbf{F}(t+h) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{F}^{(k)}(t)}{k!} h^k \quad \text{donde } h \text{ es cualquier número real.}$$

$$\text{Homogenizando } \mathbf{F}_*(t+h, w) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{F}^{(k)}(t)}{k!} h^k w^{n-k}.$$

$$\text{Pero } (t+h, 1) = \bar{t} + h\bar{\delta}. \text{ De esto: } \mathbf{F}_*(\bar{t} + h\bar{\delta}) = \sum_{k=0}^n \frac{\mathbf{F}^{(k)}(t)}{k!} h^k \quad (\alpha)$$

Por otro lado por el principio existe un blossom multilineal único $\mathbf{f}_* : (\mathbb{R}^2)^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$i) \mathbf{f}_*[(u_1, 1), \dots, (u_n, 1)] = \mathbf{f}(u_1, \dots, u_n)$$

$$ii) \mathbf{f}_*[(t, 1), \dots, (t, 1)] = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i = \mathbf{F}_*(t, 1) = \mathbf{F}(t)$$

donde \mathbf{f} es el blossom de $\mathbf{F}_*(t, 1) = \mathbf{F}(t)$.

$$\begin{aligned} \text{De esto: } \mathbf{F}_*(t+h, 1) &= \mathbf{f}_*[(t+h, 1), \dots, (t+h, 1)] \\ &= \mathbf{f}_*[\bar{t}+h\bar{\delta}, \dots, \bar{t}+h\bar{\delta}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Teo.24} \quad & \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k \text{ veces}}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k \text{ veces}}) h^k. \quad (\beta) \\ &= \end{aligned}$$

De (α) y (β) : Se tiene dos polinomios iguales respecto de la variable h . Esto implica que sus coeficientes deben ser iguales. Por lo tanto:

$$\mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}).$$

COROLARIO 2.6

La k -ésima derivada de un polinomio $\mathbf{F}: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^d$ de grado n esta dado por:

$$\mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \mathbf{f}(t, \dots, t, \underbrace{t+1, \dots, t+1}_i)$$

$n-1$ veces i veces

donde \mathbf{f} es el blossom de \mathbf{F} [Seidel '89].

Prueba: Por el corolario anterior se tiene:

$$\mathbf{F}^{(k)}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \mathbf{f}_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) \quad (*)$$

donde \mathbf{f}_* es el blossom multilinear de \mathbf{F} que satisface:

$$i) \quad \mathbf{f}_*[(u_1, 1), \dots, (u_n, 1)] = \mathbf{F}(u_1, \dots, u_n) \quad (**)$$

$$ii) \quad \mathbf{f}_*[(t, 1), \dots, (t, 1)] = \sum_{i=0}^n a_i t^i = \mathbf{F}_*(t, 1) = \mathbf{F}(t)$$

siendo \mathbf{f} el blossom de $\mathbf{F}_*(t, 1)$.

Afirmamos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_*(\underbrace{*, \dots, *}_{k-j}, \underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_j, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) &= \\ &= \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} (-1)^{j-i} \mathbf{f}_*(\underbrace{*, \dots, *}_{k-j}, \underbrace{t+1, \dots, t+1}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k+j-i}) \end{aligned}$$

para $j=1, \dots, k$

donde $\overline{t+1} := \bar{t} + \bar{\delta}$,

y * representará un argumento cualquiera.

Lo demostraremos por inducción sobre j.

Para j=1: La afirmación es obvia.

Hipótesis inductiva: La afirmación es verdadera para j=k-1
es decir:

$$f_*(\ast, \underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} f_*(\ast, \underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-i})$$

Ahora lo demostraremos para j=k

Como: $\bar{\delta} = \bar{t} + \bar{\delta} - \bar{t}$ entonces $\bar{\delta} = \overline{t+1} - \bar{t}$. Luego:

$$\begin{aligned} f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) &= f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \overline{t+1} - \bar{t}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) \\ &- f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \overline{t+1}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) - f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \bar{t}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k+1}) \\ &- f_*(\overline{t+1}, \underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) - f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_{k-1}, \bar{t}, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k+1}) \text{ (pues } f_* \text{ es} \\ &\text{simétrica)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} f_*(\overline{t+1}, \underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-i}) \\ &- \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} f_*(\bar{t}, \underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-1-i}) \text{ (por hipótesis} \\ &\text{inductiva)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k \binom{k-1}{i-1} (-1)^{k-i} f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}) \\ &+ \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} (-1)^{k-1-i} f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{k-1}{0} f_*(\underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_n) + \sum_{i=1}^{k-1} \left[\binom{k-1}{i-1} + \binom{k-1}{i} \right] (-1)^{k-i} \\
&\quad f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}) + \binom{k}{k} f_*(\underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}). \\
&= \binom{k-1}{0} f_*(\underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_n) + \sum_{i=1}^{k-1} \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}) \\
&\quad + \binom{k}{k} f_*(\underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) \\
&= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}).
\end{aligned}$$

Por (**) se tiene:

$$f_*(\underbrace{\overline{t+1}, \dots, \overline{t+1}}_i, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-i}) = f(\underbrace{t+1, \dots, t+1}_i, \underbrace{t, \dots, t}_{n-i}).$$

Luego tenemos que:

$$f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f(\underbrace{t+1, \dots, t+1}_i, \underbrace{t, \dots, t}_{n-i})$$

$$f_*(\underbrace{\bar{\delta}, \dots, \bar{\delta}}_k, \underbrace{\bar{t}, \dots, \bar{t}}_{n-k}) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f(\underbrace{t, \dots, t}_{n-i}, \underbrace{t+1, \dots, t+1}_i)$$

(pues f es simétrica).

De esto y de (*) concluye la prueba del corolario.

2.2 DETERMINACION DE LOS PUNTOS DE BEZIER

TEOREMA 2.7

Sea $\mathbf{F}(t)$ una curva polinomial de grado n y de blossom \mathbf{f} . Entonces $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$, $t \in [a, b]$, es la representación de Bézier de \mathbf{F} , donde $\mathbf{b}_i = \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i)$ son los puntos de Bézier.

Prueba: Afirmamos que:

$$\mathbf{f}(\underbrace{t, \dots, t}_n) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i)$$

Lo demostraremos por inducción matemática sobre el número de argumentos k .

$$k=1: t = \frac{b-t}{b-a} a + \frac{t-a}{b-a} b \text{ es una combinación afín de } a \text{ y } b.$$

$$\mathbf{f}(t, \circ, \dots, \circ) \stackrel{\text{f es afín}}{=} \frac{b-t}{b-a} \mathbf{f}(a, \circ, \dots, \circ) + \frac{t-a}{b-a} \mathbf{f}(b, \circ, \dots, \circ)$$

Hipotesis inductiva: $k=n-1$

$$\mathbf{f}(\underbrace{t, \dots, t}_{n-1}, \circ) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-1-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, \circ)$$

Ahora probaremos para $k=n$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\underbrace{t, \dots, t}_{n-1}, t) &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-1-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, t) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-1-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \left[\frac{b-t}{b-a} \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i, t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{t-a}{b-a} \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_{i+1}) \right] \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i) \\ &\quad + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-1-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^{i+1} \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{i+1}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{n-1}{0} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^n \mathbf{f}(a, \dots, a) + \\
&\sum_{i=1}^{n-1} \left[\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} \right] \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i) \\
&+ \binom{n-1}{n-1} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^n \mathbf{f}(b, \dots, b).
\end{aligned}$$

Pero: $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1} = \binom{n}{i}$. De esto se tiene:

$$\mathbf{f}(t, \dots, t) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \left[\frac{b-t}{b-a} \right]^{n-i} \left[\frac{t-a}{b-a} \right]^i \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i).$$

En el campo del diseño de superficies y curvas el algoritmo de de Casteljau es el más importante y el más elemental. Este algoritmo se usa para evaluar la curva de Bézier en un punto .

TEOREMA 2.8 (Algoritmo de Casteljau)

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$, $t \in [a, b]$ una curva de Bézier.

Definiendo:

$$\mathbf{b}_i^0(t) := \mathbf{b}_i, \quad i=0, \dots, n \quad (1)$$

$$\mathbf{b}_i^r(t) := \left(1 - \frac{t-a}{b-a}\right) \mathbf{b}_i^{r-1}(t) + \frac{t-a}{b-a} \mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t) \quad (2)$$

$$r=1, \dots, n, \quad i=0, \dots, n-r.$$

Entonces el valor de $\mathbf{F}(t)$ se determina como $\mathbf{F}(t) = \mathbf{b}_0^n(t)$

Prueba:

$$\mathbf{b}_1^r(t) = \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-1}, \underbrace{t, \dots, t}_r, \underbrace{b, \dots, b}_i) \quad (*)$$

donde \mathbf{f} es el blossom de \mathbf{F} .

Afirmamos que (*) verifica (1) y (2).

$$\mathbf{b}_1^0(t) = \mathbf{f}(\underbrace{a, \dots, a}_{n-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i) = \mathbf{b}_i \quad (\text{por Teorema 2.7}).$$

$$\begin{aligned}
b_i^r(t) &= f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{t, \dots, t}_r, \underbrace{b, \dots, b}_i) \\
&= f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \underbrace{\frac{b-t}{b-a}a + \frac{t-a}{b-a}b, b, \dots, b}_i) \\
&= \frac{b-t}{b-a} f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-(r-1)-i}, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \underbrace{b, \dots, b}_i) + \frac{t-a}{b-a} f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-r-i}, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{i+1}) \\
&= \frac{b-t}{b-a} b_i^{r-1}(t) + \frac{t-a}{b-a} b_{i+1}^{r-1}(t).
\end{aligned}$$

Finalmente:

$$b_0^n(t) = f(\underbrace{a, \dots, a}_{n-n-0}, \underbrace{t, \dots, t}_n, \underbrace{b, \dots, b}_0) = f(t, \dots, t) = F(t).$$

Ejemplo: Sea $F(t) = (t, t^3)$, $t \in [-1, 2]$

Hallaremos los puntos de Bézier.

El blossom de $F(t)$ es: $f(t_1, t_2, t_3) = (\frac{t_1+t_2+t_3}{3}, t_1 t_2 t_3)$

Los puntos de Bézier son: $f(-1, -1, -1) = (-1, -1)$

$$f(-1, -1, 2) = (0, 2)$$

$$f(-1, 2, 2) = (1, -4)$$

$$f(2, 2, 2) = (2, 8)$$

Luego la representación de Bézier es:

$$F(t) = \sum_{i=0}^3 b_i B_i^3(t), t \in [-1, 2] \text{ (ver figura 5).}$$

Esquema de Casteljau desde el punto de vista de los blossoms

$1 - (t+1)/3$ $(t+1)/3$	$b_0 = f(-1, -1, -1)$ $b_1 = f(-1, -1, 2) \quad f(-1, -1, t)$ $b_2 = f(-1, 2, 2) \quad f(-1, t, 2) \quad f(-1, t, t)$ $b_3 = f(2, 2, 2) \quad f(t, 2, 2) \quad f(2, t, t) \quad f(t, t, t)$
----------------------------	--

Observación: Para calcular $F(t)$ se debe efectuar $n(n+1)/2$ operaciones combinaciones afines. Para el ejemplo se ha efectuado 6 combinaciones afines.

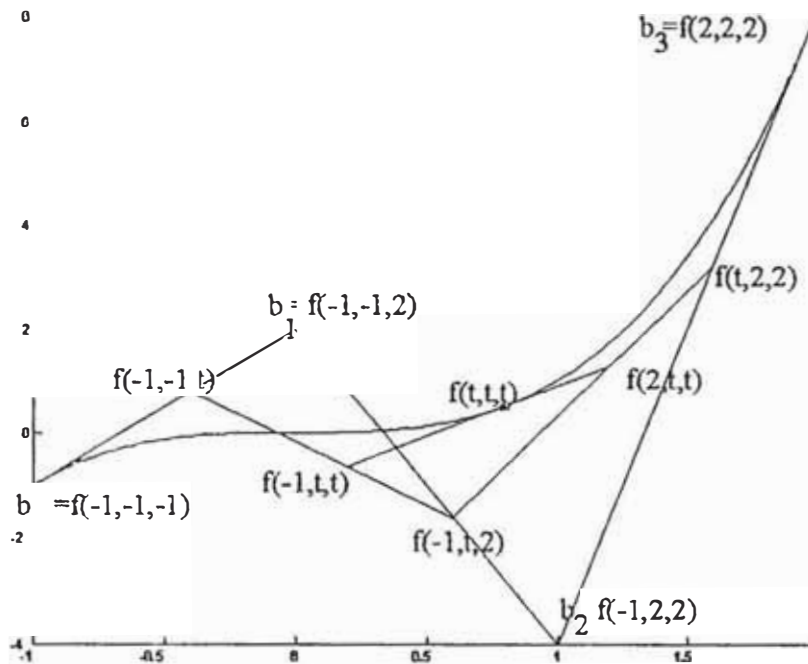


Figura 5

TEOREMA 2.9

Sean $(r, s], [s, t)$ dos intervalos no vacíos y $\mathbf{F}: (r, s] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $\mathbf{G}: [s, t) \rightarrow \mathbb{R}^p$ dos curvas polinomiales de grado n cuyos blossoms son \mathbf{f} , \mathbf{g} respectivamente.

Entonces $\mathbf{F}^{(i)}(s) = \mathbf{G}^{(i)}(s) \quad \forall i=0, \dots, m$ si y solo si

$$\mathbf{f}(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = \mathbf{g}(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) \quad \forall \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathbb{R}$$

[Ramshaw '87].

Prueba

=>) De la hipótesis: $\mathbf{F}^{(i)}(s) = \mathbf{G}^{(i)}(s), \quad i=0, \dots, m.$

Afirmamos que:

$$\mathbf{F}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-1}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) = \mathbf{G}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-1}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) \quad (*)$$

para $0 \leq i \leq m.$

Por inducción matemática lo probaremos .

$i=0:$ $\mathbf{F}^{(0)}(s) = \mathbf{G}^{(0)}(s).$

Entonces $\mathbf{F}(s) = \mathbf{G}(s) \Rightarrow \mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_n) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_n).$

Hipótesis inductiva:

$$\mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i)$$

para $0 \leq i < m$.

Ahora probaremos (*) que es verdadero para $i=m$.

$$\text{De la hipótesis: } \mathbf{F}^{(m)}(s) = \mathbf{G}^{(m)}(s). \quad (1)$$

Pero por Corolario 2.6 tenemos:

$$\mathbf{F}^{(m)}(s) = \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^{m-i} \mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) \quad (2)$$

$$\mathbf{G}^{(m)}(s) = \frac{n!}{(n-m)!} \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^{m-i} \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i). \quad (3)$$

De (2), (3) en (1) y aplicando la hipótesis inductiva tenemos:

$$\mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-m}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_m) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_{n-m}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_m).$$

De (*):

$$i=0: \mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}),$$

$$i=1: \mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_{m-1}, \underbrace{s+1, s, \dots, s}_{n-m}) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_{m-1}, \underbrace{s+1, s, \dots, s}_{n-m}),$$

$$i=2: \mathbf{f}(\underbrace{s, \dots, s}_{m-2}, \underbrace{s+1, s+1, s, \dots, s}_{n-m}) = \mathbf{g}(\underbrace{s, \dots, s}_{m-2}, \underbrace{s+1, s+1, s, \dots, s}_{n-m}),$$

⋮
⋮
⋮

$$i=m: \mathbf{f}(\underbrace{s+1, \dots, s+1}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = \mathbf{g}(\underbrace{s+1, \dots, s+1}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}).$$

Luego se tiene $m+1$ ecuaciones que son precisamente los puntos de Bézier de las curvas polinomiales \mathbf{F}_* y \mathbf{G}_* de grado m definidos en el intervalo $[s, s+1]$ cuyos blossoms respectivos estan dados por:

$$\mathbf{f}_* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p : (u_1, \dots, u_m) \rightarrow \mathbf{f}(u_1, \dots, u_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m})$$

$$\mathbf{g}_* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p : (u_1, \dots, u_m) \rightarrow \mathbf{g}(u_1, \dots, u_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m})$$

Como \mathbf{F}_* y \mathbf{G}_* tienen los mismos puntos de Bézier entonces $\mathbf{F}_*(u) = \mathbf{G}_*(u) \forall u \in [s, s+1]$. Por lo tanto sus blossoms deben ser iguales:

$$f(u_1, \dots, u_m) = g(u_1, \dots, u_m),$$

$$f(u_1, \dots, u_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = g(u_1, \dots, u_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}).$$

$$\Leftrightarrow \text{Por hipótesis: } f(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = g(\underbrace{u_1, \dots, u_m}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) \\ \forall \{u_1, \dots, u_m\} \subset \mathcal{R}.$$

$$u_1 = s+1, u_2 = \dots = u_m = s:$$

$$f(s+1, \underbrace{s, \dots, s}_{m-1}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = g(s+1, \underbrace{s, \dots, s}_{m-1}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m})$$

$$u_1 = u_2 = s+1, u_3 = \dots = u_m = s:$$

$$f(s+1, s+1, \underbrace{s, \dots, s}_{m-2}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = g(s+1, s+1, \underbrace{s, \dots, s}_{m-2}, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m})$$

Así sucesivamente $u_1 = \dots = u_m = s+1$:

$$f(\underbrace{s+1, \dots, s+1}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m}) = g(\underbrace{s+1, \dots, s+1}_m, \underbrace{s, \dots, s}_{n-m})$$

Luego obtenemos:

$$f(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) = g(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) \\ \forall i=0, \dots, k, k \leq m.$$

De esto se tiene:

$$\frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} f(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i) = \\ = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} g(\underbrace{s, \dots, s}_{n-i}, \underbrace{s+1, \dots, s+1}_i)$$

$$F^{(k)}(s) = G^{(k)}(s), \quad k=0, \dots, m.$$

2.3 DETERMINACION DE LOS PUNTOS DE BOOR

Sea $F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u)$ una curva B-spline sobre el vector

nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$.

$N_{i,j}^p(u)$ denotará la restricción del B-spline $N_i^p(u)$ en el intervalo no vacío $I_j := [t_j, t_{j+1})$ con $j \in \{p+1, \dots, m\}$.

NOTA: Para $1 \leq k \leq m$ tenemos $t_k < t_{k+p+1}$. Por eso existe $j \in \mathbb{N}$: $k \leq j \leq k+p$ tal que $t_j < t_{j+1}$. En caso contrario sería $t_k = t_{k+1} = \dots = t_{k+p} = t_{k+p+1}$ un nodo de multiplicidad $p+2$ lo que implicaría una contradicción con la condición del vector nodo.

TEOREMA 2.10

Sea $I_j = [t_j, t_{j+1})$ un intervalo no vacío donde $j \in \{p+1, \dots, m\}$.

Para $i=1, \dots, m$, el blossom $n_{i,j}^r$ de $N_{i,j}^r$ satisface la siguiente relación de recurrencia:

$$n_{i,j}^0(u) = \delta_{i,j},$$

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_r) = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1})$$

$$\text{para } 1 \leq r \leq p. \quad (2.10.1)$$

Prueba:

a) Afirmamos que: $n_{i,j}^r$ es una aplicación r -afín.

Por inducción matemática lo probaremos.

$r=1$ (Obvio).

Hipotesis Inductiva: Supongamos que $n_{i,j}^{r-1}$ es $r-1$ afín (α)

Deseamos probar que $n_{i,j}^r$ es r -afín es decir afín en cada variable u_1, u_2, \dots, u_r .

i) Sea $\sum \lambda_k a_k$ una combinación afín, es decir $\sum \lambda_k = 1$.

$$\begin{aligned}
n_{i,j}^r(u_1, \dots, \sum_k \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}, u_r) &= \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, \sum_k \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}) \\
&+ \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, \sum_k \lambda_k a_k, \dots, u_{r-1}) \\
&\stackrel{(\alpha)}{=} \sum_k \lambda_k n_{i,j}^r(u_1, \dots, a_k, \dots, u_{r-1}, u_r).
\end{aligned}$$

De esto se tiene que $n_{i,j}^r$ es afín en cada variable

u_1, u_2, \dots, u_{r-1} .

$$\begin{aligned}
\text{ii) } n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, \sum \lambda_k a_k) &= \frac{\sum \lambda_k a_k - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}) \\
&+ \frac{t_{i+r+1} - \sum \lambda_k a_k}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-1}).
\end{aligned}$$

Pero $\sum \lambda_k = 1$ implica que $t_i = \sum \lambda_k t_i$ y $t_{i+r+1} = \sum \lambda_k t_{i+r+1}$.

Luego se tiene:

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, \sum \lambda_k a_k) = \sum \lambda_k n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-1}, a_k).$$

De esto se tiene que $n_{i,j}^r$ es afín en la variable u_r .

De (i) y (ii) concluye la prueba de la afirmación.

b) Afirmamos que $n_{i,j}^r$ es simétrica

Por inducción matemática lo probaremos.

$r=0$ (obvio).

Hipótesis Inductiva:

$$\text{Sea } n_{i,j}^{r-1} \text{ simétrica en } u_1, u_2, \dots, u_{r-1}. \quad (\beta)$$

Deseamos probar que $n_{i,j}^r$ es simétrica en u_1, u_2, \dots, u_r .

i) Sean $k, m \in \mathbb{N}$ tal que: $1 < k, m < r-1$.

$$n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1}, u_r) = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_k, \dots, u_m, \dots, u_{r-1}) \\
& = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_{r-1}) \\
& + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_{r-1}) \\
& = n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_m, \dots, u_k, \dots, u_r).
\end{aligned}$$

Entonces $n_{i,j}^r$ es simétrica en u_1, u_2, \dots, u_{r-1} .

ii) Ahora probaremos $n_{i,j}^r$ es simétrica en u_{r-1}, u_r , es decir:

$$n_{i,j}^r(u_1, u_2, \dots, u_r, u_{r-1}) = n_{i,j}^r(u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r)$$

Veamos: $n_{i,j}^r(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r, u_{r-1}) = \frac{u_{r-1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r)$

$$\begin{aligned}
& + \frac{t_{i+r+1} - u_{r-1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_r) \\
& = \frac{u_{r-1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \left(\frac{u_r - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{t_{i+r} - u_r}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right) + \\
& \quad \frac{t_{i+r+1} - u_{r-1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \left(\frac{u_r - t_{i+1}}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+2}} n_{i+2,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right) \\
& = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} \left[\frac{u_{r-1} - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) + \right.
\end{aligned}$$

$$\left. \frac{(u_{r-1} - t_i)(t_{i+r} - u_r)}{t_{i+r} - t_i} + \frac{(t_{i+r+1} - u_{r-1})(u_r - t_{i+1})}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \right] \frac{n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2})}{t_{i+r} - t_{i+1}}$$

$$+ \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \left(\frac{t_{i+r+1} - u_{r-1}}{t_{i+r+1} - t_{i+2}} \right) n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}). \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Pero: } & \frac{(u_{r-1} - t_i)(t_{i+r} - u_r)}{t_{i+r} - t_i} + \frac{(t_{i+r+1} - u_{r-1})(u_r - t_{i+1})}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} = \\ & \frac{(u_r - t_i)(t_{i+r} - u_{r-1})}{t_{i+r} - t_i} + \frac{(t_{i+r+1} - u_r)(u_{r-1} - t_{i+1})}{t_{i+r+1} - t_{i+1}}. \quad (**) \end{aligned}$$

(**) en (*) y reagrupando:

$$\begin{aligned} & = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} \left[\frac{u_{r-1} - t_i}{t_{i+r-1} - t_i} n_{i,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{t_{i+r} - u_{r-1}}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right] + \\ & \quad \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \left[\frac{u_{r-1} - t_{i+1}}{t_{i+r} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right. \\ & \quad \left. + \frac{t_{i+r+1} - u_{r-1}}{t_{i+r+1} - t_{i+2}} n_{i+2,j}^{r-2}(u_1, \dots, u_{r-2}) \right] \\ & = \frac{u_r - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u_r}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_1, \dots, u_{r-2}, u_{r-1}) \\ & = n_{i,j}^r(u_1, u_2, \dots, u_{r-1}, u_r). \end{aligned}$$

Luego de (i) y (ii) se tiene que $n_{i,j}^r$ es simétrica en

u_1, u_2, \dots, u_r .

c) Afirmamos que $n_{i,j}^r$ es diagonal es decir:

$$n_{i,j}^r(\underbrace{u, u, \dots, u}_r \text{ veces}) = N_{i,j}^r(u).$$

Por inducción lo probaremos:

$r=0$ (obvio).

Hipótesis inductiva:

$N_{i,j}^{r-1}$ es la diagonal de $n_{i,j}^{r-1}$ es decir:

$$n_{i,j}^{r-1}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{r-1}) = N_{i,j}^{r-1}(u). \quad (\gamma)$$

Ahora probaremos que (γ) es cierto para r .

$$\begin{aligned} n_{i,j}^r(\underbrace{u, \dots, u}_r) &= \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(\underbrace{u, \dots, u}_{r-1}) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(\underbrace{u, \dots, u}_{r-1}) \\ &\stackrel{(\gamma)}{=} \frac{u - t_i}{t_{i+r} - t_i} N_{i,j}^{r-1}(u) + \frac{t_{i+r+1} - u}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} N_{i+1,j}^{r-1}(u) = N_{i,j}^r(u). \end{aligned}$$

Luego de (a), (b), (c) y del teorema 2.1 se tiene que $n_{i,j}^r$ es el blossom de $N_{i,j}^r(u)$ y por lo tanto el teorema queda demostrado.

COROLARIO 2.11

Sea $F(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ una curva B-spline sobre el vector

nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$. Entonces en el intervalo no vacío

$I_j = [t_j, t_{j+1})$ el blossom $n_{i,j}^r$ de $N_{i,j}^r$ satisface la ecuación:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r}) = \delta_{i,k} \quad \text{si } k=j-r, \dots, j.$$

Prueba: Por inducción sobre r en (2.10.1)

$r=1$: Debemos probar que $n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \delta_{i,j}$ para $k=j-1, \dots, j$.

$$2.10.1 \quad n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} n_{i,j}^0() + \frac{t_{i+2} - t_{k+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^0()$$

$$= \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,j} + \frac{t_{i+2} - t_{k+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} \delta_{i+1,j}. \quad (1)$$

Si $k=j-1$:

Casos:

$i=j-1$: En (1) tenemos:

$$n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \frac{t_{i+2} - t_{k+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} = \frac{t_{i+2} - t_{i+1}}{t_{i+2} - t_{i+1}} - 1 \quad (1)'$$

$i \neq j-1$: En (1) tenemos:

$$n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,j}$$

Subcasos:

$$\text{Si } i=j: n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} \delta_{i,j}$$

$$= \frac{t_i - t_i}{t_{k+1} - t_i} \delta_{i,i} = 0. \quad (2)'$$

$$\text{Si } i \neq j: n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+1} - t_i} 0 = 0. \quad (2)''$$

De (1)', (2)', (2)'' se tiene que:

$$n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \delta_{i,j-1} = \delta_{i,k}.$$

Analogamente se prueba para $k=j$.

Por lo tanto queda demostrado que:

$$n_{i,j}^1(t_{k+1}) = \delta_{i,k} \quad \text{si } k=j-1, \dots, j.$$

Hipótesis Inductiva: $n_{i,j}^{r-1}(t_{k+1}, \dots, t_{k+r-1}) = \delta_{i,k} \quad (*)$

si $k=j-(r-1), \dots, j$.

Debemos probar que: $n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \delta_{i,k}$ si $k=j-r, \dots, j$.

CASO1: Si $j-r < k \leq j$:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r-1}, t_{k+r}) = \frac{t_{k+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{k+1}, \dots, t_{k+r-1}) \\ + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{k+1}, \dots, t_{k+r-1}).$$

$$j-r < k \Rightarrow j-r \leq k-1 \Rightarrow j-(r-1) \leq k \leq j. \quad (**)$$

De (*) y (**) se obtiene:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \delta_{i,k} + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \delta_{i+1,k}. \quad (\alpha)'$$

Caso 1.1: $i=k$ $n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = 1 * 1 + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} * 0 = 1.$

Caso 1.2: $i \neq k.$

Caso 1.2.1: $i=k-1.$

$$\text{En } (\alpha)' \quad n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} * 0 + 0 * 1 = 0.$$

Caso 1.2.2: $i \neq k-1.$

$$\text{En } (\alpha)' : n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+r} - t_i}{t_{i+r} - t_i} * 0 + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+r}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} * 0 = 0.$$

De los casos 1.1 y 1.2 se concluye que:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \delta_{i,k} \quad \text{si } j-r < k \leq j.$$

CASO2: Si $j-r=k$ donde $r \neq 0$

$$n_{i,j}^r(u_1, u_2, \dots, u_r) = n_{i,j}^r(u_r, u_2, \dots, u_{r-i}, u_1) \\ = \frac{u_1 - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(u_r, u_2, \dots, u_{r-1}) \\ + \frac{t_{i+r+1} - u_1}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} n_{i+1,j}^{r-1}(u_r, u_2, \dots, u_{r-1}).$$

Luego:

$$\begin{aligned}
n_{i,j}^r(t_{k+r}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r-1}, t_{k+1}) &= \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{k+r}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r-1}) \\
&\quad + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+1}}{t_{i+r+1} - t_i} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{k+r}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r-1}) \\
&= \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} n_{i,j}^{r-1}(t_{k+2}, t_{k+3}, \dots, t_{k+r-1}, t_{k+r}) \\
&\quad + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+1}}{t_{i+r+1} - t_i} n_{i+1,j}^{r-1}(t_{k+2}, t_{k+3}, \dots, t_{k+r-1}, t_{k+r-1}).
\end{aligned} \tag{\beta}$$

$$j-r=k \Rightarrow j-(r-1) \leq k+1 \leq j. \tag{\gamma}$$

De (*), (γ) en (β):

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} \delta_{i,k+1} + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} \delta_{i+1,k+1}$$

Caso 2.1: Si $i=k$: $n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} * 0 + 1 * 1 = 1.$

Caso 2.2: Si $i \neq k$:

Caso 2.2.1: Si $i=k+1$:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} * 1 + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+1}}{t_{i+r+1} - t_{i+1}} * 0 = 0.$$

Caso 2.2.2: Si $i \neq k+1$:

$$n_{i,j}^r(t_{k+1}, \dots, t_{k+r}) = \frac{t_{k+1} - t_i}{t_{i+r} - t_i} * 0 + \frac{t_{i+r+1} - t_{k+1}}{t_{i+r+1} - t_i} * 0 = 0.$$

Entonces $n_{i,j}^r(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+r}) = \delta_{i,k}$ si $k=j-r$.

Del CASO1 y CASO2 concluye la prueba.

COROLARIO 2.12

Sea $s=t_{j+1}=t_{j+2}=\dots=t_{j+u}$ un nodo de multiplicidad $u \leq p+1$ en el vector nodo T . Entonces N_1^p es "p-u" veces continuamente diferenciable en $t=s$.

Prueba:

Como "s" es de multiplicidad u entonces:

$$t_j < t_{j+1} \wedge t_{j+u} < t_{j+u+1}$$

Esto implica $t_j < t_{j+1} \wedge j-u < j < j+1$. Luego por el corolario 2.11 tenemos que: $n_{i,j}^u(t_{j+1}, \dots, t_{j+u}) = \delta_{i,j}$.

También es $t_{j+u} < t_{j+u+1} \wedge j+u-u \leq j \leq j+1$. Por el corolario 2.11 tenemos que: $n_{i,j+u}^u(t_{j+1}, \dots, t_{j+u}) = \delta_{i,j}$.

Por lo tanto: $n_{i,j}^u(t_{j+1}, \dots, t_{j+u}) = n_{i,j+u}^u(t_{j+1}, \dots, t_{j+u})$,

$$n_{i,j}^u(s, \dots, s) = n_{i,j+u}^u(s, \dots, s) \quad \forall i=1, \dots, m.$$

Usando (2.10.1) obtenemos:

$$n_{i,j}^p(u_1, \dots, u_{p-u}, \underbrace{s, \dots, s}_u) = n_{i,j+u}^p(u_1, \dots, u_{p-u}, \underbrace{s, \dots, s}_u).$$

Como $N_{i,j}^p: [t_j, t_{j+1}] \rightarrow \mathcal{R}$ y $N_{i,j+u}^p: [t_{j+u}, t_{j+u+1}] \rightarrow \mathcal{R}$, tenemos por el teorema 2.9 que N_i^p es de "p-u" veces continuamente diferenciable en el punto s.

A continuación se verá que los puntos de de Boor están determinados en función de los blossom sobre una sucesión consecutiva de nodos.

TEOREMA 2.13

Sea $F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u)$ una curva B-spline de grado p sobre

el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$. Sea F_j la restricción F en el intervalo no vacío $I_j := [t_j, t_{j+1})$ y f_j el blossom de F_j .

Entonces los puntos de Boor d_k están dados por:

$$d_k = f_j(t_{k+1}, \dots, t_{k+p}), \quad k = j-p, \dots, j.$$

Prueba: $F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u)$ una curva B-spline.

La restricción F_j de F en el intervalo no vacío

$I_j = [t_j, t_{j+1})$ está dado por:

$F_j(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_{i,j}^p(u)$. Luego su blossom respectivo es:

$$f_j(u_1, u_2, \dots, u_p) = \sum_{i=1}^m d_i n_{i,j}^p(u_1, u_2, \dots, u_p)$$

Cor.2.11

$$f_j(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+p}) = \sum_{i=1}^m d_i n_{i,j}^p(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+p}) = \sum_{i=1}^m d_i \delta_{i,k}$$

$$f_j(t_{k+1}, t_{k+2}, \dots, t_{k+p}) = d_k.$$

Ejemplo de aplicación:

Sea la curva B-spline de grado 3, $F(t) = \sum_{i=1}^8 d_i N_i^3(u)$ sobre

el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$. Determinaremos los puntos de Boor en términos de los blossoms.

Para $t_4=0 < 1=t_5$ tenemos $d_k = f_4(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3})$; $k=4-3, \dots, 4$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0),$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1),$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 2),$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 2, 4),$$

Para $t_8=5 < t_9=6$ tenemos $d_k = f_8(t_{k+1}, t_{k+2}, t_{k+3})$; $k=8-3, \dots, 8$

$$d_5 = f_8(t_6, t_7, t_8) = f_8(2, 4, 5),$$

$$d_6 = f_8(t_7, t_8, t_9) = f_8(4, 5, 6),$$

$$d_7 = f_8(t_8, t_9, t_{10}) = f_8(5, 6, 6),$$

$$d_8 = f_8(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_8(6, 6, 6).$$

COROLARIO 2.14

Dado el vector nodo $T=(t_1, \dots, t_{p+1}, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$. Entonces los B-splines $\{N_i^p / i=1, 2, \dots, m\}$ sobre T son linealmente independientes.

Prueba:

$F(u) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(u) \equiv 0$ donde $d_i \in \mathbb{R}$. Debemos probar que

$d_1=d_2=\dots=d_m=0$. Como F es una función nula entonces F_j y su blossom f_j también son funciones nulas para todo intervalo no vacío $[t_j, t_{j+1})$.

Para $j-p \leq k \leq j \wedge t_j < t_{j+1}$ tenemos por el teorema 2.13 tenemos: $d_k=f_j(t_{k+1}, \dots, t_{k+p})=0$, entonces $d_1=d_2=\dots=d_m=0$.

Definición 2.7 Sea $\{e_i\}_{i=1}^{k+1} \subset \mathbb{R}$ una sucesión estrictamente creciente tal que: $a=e_1 < \dots < e_{k+1}=b$. Una función $F:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ se dice función **seccionalmente polinómica de grado p sobre $[a,b]$** respecto a $\{e_i\}_{i=1}^{k+1}$ si $F(t)$ es de la forma:

$$F(t) = \begin{cases} F_1(t) ; e_1 \leq t < e_2 \\ F_2(t) ; e_2 \leq t < e_3 \\ \vdots \\ F_k(t) ; e_k \leq t \leq e_{k+1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{donde } F_i \text{ son funciones} \\ \text{polinómicas de grado no mayor} \\ \text{que } p \end{array}$$

Cada e_i , $i=1, \dots, k+1$, se conoce como punto de quiebre de $F(t)$.

Nota: A las funciones seccionalmente polinómicas también se conocen como **spline**.

LEMA 2.15 Dada la sucesión de nodos $e_1 < e_2 < \dots$; sea

$H_{j,i}^p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$H_{j,i}^p(t) = \begin{cases} (t - e_i)^{p+1-j} & ; t \geq e_i \\ 0 & ; t < e_i \end{cases} \text{ donde } j=1, \dots, p+1.$$

Denotaremos con:

$H_{j,i}^{p,r}(t)$ la r -ésima derivada de $H_{j,i}^{p,r}$ en t ,

$H_{j,i}^{p,r}(t_+)$ la r -ésima derivada lateral derecha de $H_{j,i}^{p,r}$ en t ,

$H_{j,i}^{p,r}(t_-)$ la r -ésima derivada lateral izquierda de $H_{j,i}^{p,r}$ en t .

$$H_{j,i}^{p,0} := H_{j,i}^p$$

Entonces se cumple:

1) Para $t < e_i$: $H_{j,i}^{p,r}(t) = 0$, $r=0, 1, 2, \dots$

$H_{j,i}^{p,r}(t_-) = H_{j,i}^{p,r}(t_+) = 0$, $r=0, 1, 2, \dots$

2) Para $e_i < t$: $H_{j,i}^{p,r}(t) = (t - e_i)^{p+1-j-r} \prod_{k=0}^{r-1} (p + 1 - j - k)$

$$= H_{j,i}^{p,r}(t_-) = H_{j,i}^{p,r}(t_+)$$

donde $r=1, 2, \dots, p+1-j$.

3) Para $i < k$: $H_{1,i}^{p,p}(e_{k-}) = p! = H_{1,i}^{p,p}(e_{k+})$

4) $H_{1,i}^{p,p}(e_{i+}) = p!$

5) $H_{1,i}^{p,p}(e_{i-}) = 0$

Prueba:

Obvio usando la definición de límites.

Definición 2.8 Sea $T=(e_1 < e_2 < \dots < e_k < e_{k+1})$. Definiremos $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ como el espacio vectorial de todas las funciones seccionalmente polinómicas de grado p tal que $F : [e_1, e_{k+1}] \rightarrow \mathfrak{R}$ sea $(p-u_i)$ -veces continuamente diferenciable en los puntos de quiebre e_i donde $i=2, \dots, k$.

TEOREMA 2.16

Dado el vector nodo $T=(\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+1}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+1})$

donde:

- i) u_i es la multiplicidad del nodo e_i tal que $u_i \leq p+1$;
 $i=1, \dots, k+1$.
- ii) $m := p+1 + \sum_{j=2}^k u_j$.

Entonces resulta:

- 1) Las funciones $(1-e_1)^0, \dots, (1-e_1)^p$,
 $H_{j,i}^p(t)$, $i=2, \dots, k$, $j=1, \dots, u_i$,

forman una base para $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$.

- 2) La dimensión del espacio $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ es igual a m .

Prueba:

- 1) Es suficiente con probar que F tiene una representación única.

Para $F \in S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ definimos $G \in S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ como:

$$G(t) = \sum_{j=0}^p \frac{F^{(j)}(e_1)}{j!} (t-e_1)^j + \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{u_i} \frac{F^{(p+1-j)}(e_{i+}) - F^{(p+1-j)}(e_{i-})}{(p+1-j)!} H_{j,i}^p(t). \quad (2.16.1)$$

Para $r \in \{e_2, \dots, e_k\}$ se tiene por lema 2.15 que:

$$i) \quad G^{(p)}(e_{r+}) = F^{(p)}(e_1) + \sum_{i=2}^r \frac{F^{(p)}(e_{i+}) - F^{(p)}(e_{i-})}{1}.$$

$$\text{ii) } G^{(p)}(e_{r-}) = F^{(p)}(e_1) + \sum_{i=2}^{r-1} \frac{F^{(p)}(e_{i+}) - F^{(p)}(e_{i-})}{1} .$$

$$\begin{aligned} \text{De (ii), (i) se tiene: } G^{(p)}(e_{r+}) &= G^{(p)}(e_{r-}) + F^{(p)}(e_{r+}) - F^{(p)}(e_{r-}) \\ (G-F)^{(p)}(e_{r+}) &= (G-F)^{(p)}(e_{r-}) . \end{aligned}$$

Por otro lado es $(G-F)^{(i)}(e_1) = 0$, $i=0, \dots, p$. Entonces $G-F$ tiene un cero en e_1 de multiplicidad $p+1$. Pero $(G-F)$ es un polinomio de grado a lo más p , entonces $(G-F)$ tiene a lo más p -raíces reales.

Por lo tanto $(G-F) \equiv 0$ entonces $F=G$.

$$2) \dim(S) = p + 1 + \sum_{j=2}^k u_j = m .$$

El principal problema en la representación (2.16.1) es que las funciones $(1-e_1)^0, \dots, (1-e_1)^p, H_{1,2}^p(t), \dots, H_{u_2,2}^p(t), \dots, H_{1,k}^p(t), \dots, H_{u_k,k}^p(t)$ forman una base mal condicionada la cual es inconveniente en el cálculo numérico. En el próximo teorema probaremos que los B-splines básicos también son una base para los splines, con lo cual obtendremos la estabilidad numérica [Dierckx '95, pp.5].

TEOREMA 2.17 (CURRY-SCHOENBERG)

Sea el vector nodo $T = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+1}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+1})$

donde:

i) u_i es la multiplicidad del nodo e_i tal que $u_i \leq p+1$ donde $i=1, \dots, k+1$.

$$\text{ii) } m \equiv p + 1 + \sum_{j=2}^k u_j .$$

Entonces el espacio vectorial $S_T^p := \left\{ \sum_{i=1}^m d_i N_i^p / d_i \in \mathbb{R} \right\}$ de los B-spline de grado p sobre el vector nodo T coincide con $S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$ [Seidel '91].

Prueba:

Por el corolario 2.12 es evidente que $S_T^p \subset S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p$. (1)

Por el teorema anterior se tiene que $\dim(S_{[e_1, e_{k+1}], T}^p) = m$. (2)

Reindexando el vector nodo obtenemos:

$$\begin{aligned} T &= (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+1}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+1}) \\ &= (t_1 = t_2 = \dots = t_{p+1}, t_{p+2}, \dots, t_m, t_{m+1} = t_{m+2} = \dots = t_{m+p+1}). \end{aligned}$$

Por el corolario 2.14 se tiene $\dim(S_T^p) = m$, (3)

pues $\{N_i^p / i=1, \dots, m\}$ es una base de S_T^p .

Luego de (1), (2) y (3): $S_T^p = F_{T, p-u}^p$.

Observación: Este teorema nos indica que cualquier spline de grado p , es decir cualquier función seccionalmente polinómica de grado p sobre $e_1 < e_2 < \dots < e_{k+1}$ tal que es v_i veces continuamente en e_i , $i=2, \dots, k$, puede representarse como un B-spline único de grado p sobre el vector nodo: $T = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+1}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{p-v_i}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+1})$ donde cada nodo interior e_i aparece con multiplicidad $u_i := p - v_i$.

Ejemplo: Sea $F(t) = \begin{cases} t^2 & , t \in [0, 1] \\ t^3 & , t \in [1, 2] \\ 12t - 16 & , t \in [2, 3] \end{cases}$ un spline de grado 3 (ver figura 6).

Expresaremos F como un B-spline.

Veamos: F es una función de grado 3 que está definida sobre $e_1=0 < e_2=1 < e_3=2 < e_4=3$.

Analizaremos la diferenciabilidad de $F(t)$.

i) $t \in [0, 1]$: $F(t) = t^2$. Luego su blossom es:

$$f^0(t_1, t_2, t_3) = (t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3) / 3.$$

$t \in [1, 2]$: $F(t) = t^3$. Luego su blossom es:

$$f^1(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3.$$

Tenemos $f^0(1, 1, 1) = f^1(1, 1, 1)$

$$f^0(t_1, 1, 1) \neq f^1(t_1, 1, 1) \text{ para algún } t_1 \in \mathcal{R}.$$

De esto F es solamente continua en $t=1$ (por teorema 2.9).

ii) $t \in [1, 2]$: $F(t) = t^3$. Luego su blossom es:

$$f^1(t_1, t_2, t_3) = t_1 t_2 t_3.$$

$t \in [2, 3]$: $F(t) = 12t - 16$. Luego su blossom es:

$$f^2(t_1, t_2, t_3) = 4(t_1 + t_2 + t_3) - 16$$

Pero $f^1(2, 2, 2) = f^2(2, 2, 2)$

$$f^1(t_1, 2, 2) = f^2(t_1, 2, 2) \quad \forall t_1 \in \mathcal{R}.$$

$$f^1(t_1, t_2, 2) \neq f^2(t_1, t_2, 2) \text{ para algún } t_1 \in \mathcal{R}$$

De esto F es continuamente diferenciable en $t=2$ (por teorema 2.9).

Luego por el teorema 2.17 el vector nodo será:

$$T = (0, 0, 0, 0, \underset{3-0}{1}, \dots, \underset{3-1}{1}, 2, \dots, 2, 3, 3, 3, 3),$$

$$T = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3).$$

Los puntos de Boor son:

$$0 = t_4 < t_5 = 1: d_i = f_4(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3}), \text{ si } 4-3 \leq i \leq 4.$$

$$\begin{aligned} \text{Pero } F_4(t) &= F \Big|_{[t_4, t_5]} = t^2 \\ &\Rightarrow f_4(x_1, x_2, x_3) = (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) / 3. \end{aligned}$$

$$d_1 = f_4(t_2, t_3, t_4) = f_4(0, 0, 0) = 0,$$

$$d_2 = f_4(t_3, t_4, t_5) = f_4(0, 0, 1) = 0,$$

$$d_3 = f_4(t_4, t_5, t_6) = f_4(0, 1, 1) = 1/3,$$

$$d_4 = f_4(t_5, t_6, t_7) = f_4(1, 1, 1) = 1.$$

$1=t_7 < t_8=2$: $d_i = f_7(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3})$, si $7-3 \leq i \leq 7$, donde

$$f_7(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3.$$

$$d_4 = f_7(t_5, t_6, t_7) = 1,$$

$$d_5 = f_7(t_6, t_7, t_8) = f_7(1, 1, 2) = 2,$$

$$d_6 = f_7(t_7, t_8, t_9) = f_7(1, 2, 2) = 4,$$

$$d_7 = f_7(t_8, t_9, t_{10}) = f_7(2, 2, 3) = 12.$$

$2=t_9 < t_{10}=3$: $d_i = f_9(t_{i+1}, t_{i+2}, t_{i+3})$, si $9-2 \leq i \leq 9$

$$\text{donde } f_9(x_1, x_2, x_3) = 4(x_1 + x_2 + x_3) - 16$$

$$d_8 = f_9(t_9, t_{10}, t_{11}) = f_9(2, 3, 3) = 16,$$

$$d_9 = f_9(t_{10}, t_{11}, t_{12}) = f_9(3, 3, 3) = 20,$$

Entonces $F(t) = \sum_{i=1}^9 d_i N_i^3(t)$.

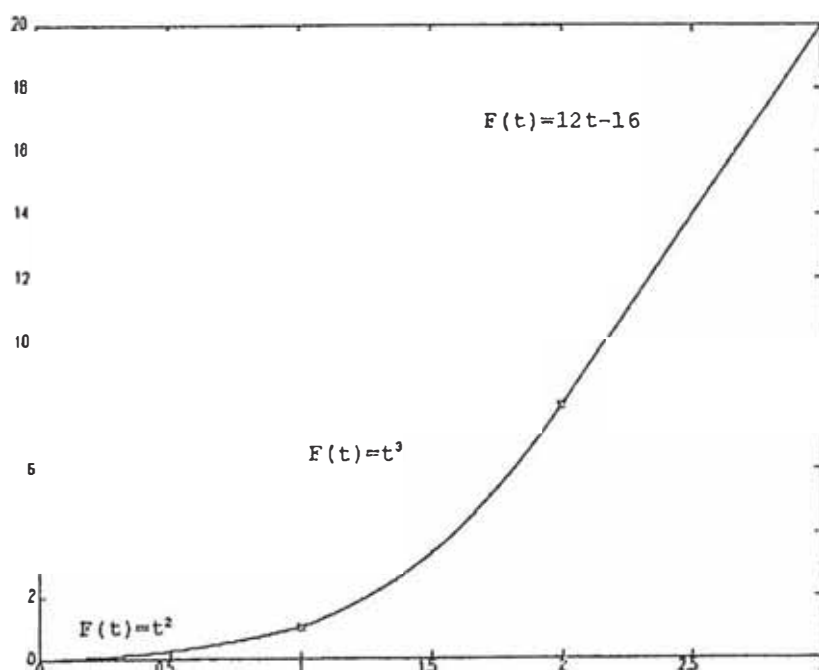


figura 6

Para determinar los puntos sobre la curva B-spline tenemos que usar la relación de recurrencia de los B-splines básicos. El algoritmo de de Boor es otra alternativa que nos permite determinar las coordenadas de un punto sobre la curva B-spline sin usar los B-splines básicos.

TEOREMA 2.18 (ALGORITMO DE DE BOOR)

Sea $F(t) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(t)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector nodo

$T = (t_1, \dots, t_{k-p} \leq \dots \leq t_k < t_{k+1} \leq \dots \leq t_{k+p+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que:

- i) $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$,
- ii) $p+1 < m$.

Para $t \in [t_k, t_{k+1})$ consideramos la siguiente recurrencia:

$$d_i^0(t) := d_i, \quad i=k-p, \dots, k,$$

(*)

$$d_i^r(t) := w_i^r d_i^{r-1} + (1 - w_i^r) d_{i-1}^{r-1}, \quad r=1, \dots, p, \quad i=k-p+r, \dots, k,$$

$$\text{donde } w_i^r(t) := \begin{cases} \frac{t - t_i}{t_{i+p+1-r} - t_i} & \text{si } t_i \neq t_{i+p-r+1} \\ 0 & \text{si } t_i = t_{i+p-r+1}. \end{cases} \quad (2.17.1)$$

Entonces el valor de la función $F(t)$ se determina como:

$$F(t) = d_k^p(t).$$

Prueba:

Afirmamos que:

$$d_k^r = f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r \text{ veces}}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}), \quad r=1, \dots, p, \quad (1)$$

donde f_k es el blossom de F_k (F_k es la restricción de F en el intervalo $I_k = [t_k, t_{k+1})$), satisface (*).

En efecto:

a) Como $t_k < t_{k+1}$ tenemos por el teorema 2.13 que:

$$d_i = f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p}), \quad i = k-p, \dots, k,$$

$$d_i = \underbrace{f_k(t_{i+1}, \dots, t_{i+p})}_{d_i^0}, \quad i = k - p, \dots, k,$$

$$d_i = d_i^0, \quad i = k - p + 0, \dots, k.$$

b)

$$\begin{aligned} f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_r, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) &= \\ f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_i + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) &= \\ = \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_i, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) &+ \\ + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{i+p-r+1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) & \end{aligned}$$

(pues f_k es afín)

$$\begin{aligned} &= \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} f_k(t_i, t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \\ &+ \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, \underbrace{t, \dots, t}_{r-1}, t_{k+1}, \dots, t_{k+p-r}, t_{i+p-r+1}) \\ &= \frac{t_{i+p-r+1} - t}{t_{i+p-r+1} - t_i} d_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} d_i^{r-1} \\ &= \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i}\right) d_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+p-r+1} - t_i} d_i^{r-1} = d_i^r. \end{aligned}$$

Luego obtenemos de (a) y (b):

$$d_i^r = f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t, \dots, t, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-r}) \text{ lo que verifica } (*).$$

$$\text{Por lo tanto: } d_i^p = f_k(\underbrace{t, \dots, t}_p) = F_k(t) = F(t).$$

El algoritmo de Boor puede representarse mediante la siguiente tabla:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{d}_{k-p}^0 & \searrow & \\ \mathbf{d}_{k-p+1}^0 & \longrightarrow & \mathbf{d}_{k-p+1}^1 \end{array}$$

⋮
⋮
⋮

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{d}_{k-1}^0 & \searrow & \mathbf{d}_{k-1}^1 \\ \mathbf{d}_k^0 & \longrightarrow & \mathbf{d}_k^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbf{d}_{k-1}^{p-1} & \searrow & \\ \mathbf{d}_k^{p-1} & \longrightarrow & \mathbf{d}_k^p \end{array}$$

En la dirección horizontal multiplicamos por w_i^r y en la dirección diagonal por $1 - w_i^r$. El factor w_i^r está definido en (2.17.1)

Ejemplo de Aplicación:

Sea $F(t) = \sum_{i=1}^4 d_i N_i^2(t)$ sobre el vector nodo $T=(0,0,0,1,2,2,2)$

donde: $\mathbf{d}_1=(1,1)$, $\mathbf{d}_2=(2,3)$, $\mathbf{d}_3=(4,3)$, $\mathbf{d}_4=(3,1)$.

Calculamos $F(0.8)$.

Tenemos: $t_3 = 0 < 0.8 < 1 = t_4$. En este caso es $k=3$ y $p=2$.

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = k - p, \dots, k.$$

$$\mathbf{d}_i^0 = \mathbf{d}_i, \quad i = 1, \dots, 3.$$

$$\mathbf{d}_i^r = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+2+1-r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+2+1-r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad k - p + r \leq i \leq k$$

$$\mathbf{d}_i^r = \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \right) \mathbf{d}_{i-1}^{r-1} + \frac{t - t_i}{t_{i+3-r} - t_i} \mathbf{d}_i^{r-1}, \quad 1 + r \leq i \leq 3$$

$r=1:$

$2 \leq i \leq 3:$

$$\mathbf{d}_2^1 = 0.2 \mathbf{d}_1^0 + 0.8 \mathbf{d}_2^0 = 0.2(2, 3) + 0.8(2, 3) = (1.8, 2.6)$$

$$\mathbf{d}_3^1 = 0.6 \mathbf{d}_2^0 + 0.4 \mathbf{d}_3^0 = 0.6(2, 3) + 0.4(4, 3) = (2.8, 3.0)$$

$r=2:$ $\mathbf{d}_3^2 = 0.2 \mathbf{d}_2^1 + 0.8 \mathbf{d}_3^1 = (2.6, 2.92).$

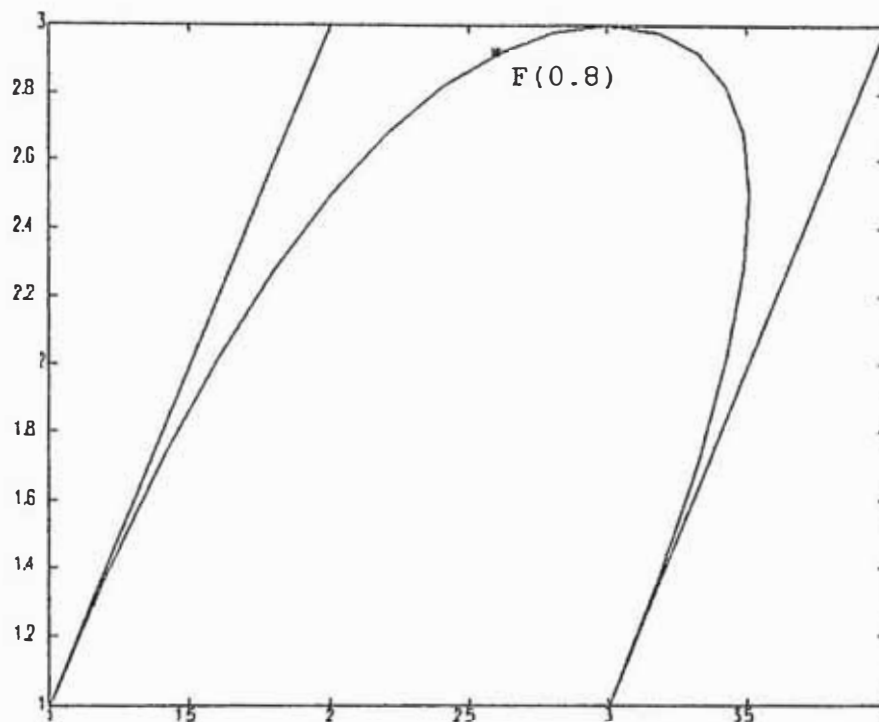


Figura 7

TEOREMA 2.19

Sea $F(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ una curva B-spline de grado p sobre el vector nodo $T = (t_1, \dots, t_{j-p} < t_{j-p+1} = \dots = t_j < t_{j+1} = \dots < t_{j+p} < t_{j+p+1}, \dots, t_{m+p+1})$ tal que:

- i) $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$,
- ii) $p+1 \leq m$.

Entonces los puntos de Bézier respecto al intervalo $I_j := [t_j, t_{j+1})$ coinciden con los puntos de de Boor apropiado. Concretamente el i -ésimo punto de Bézier \mathbf{b}_i de F_j es igual al $j-p+i$ ésimo punto de de Boor \mathbf{d}_{j-p+i} es decir: $\mathbf{b}_i = \mathbf{d}_{j-p+i}$.

Prueba:

Los puntos de Bézier \mathbf{b}_i en el intervalo $I_j := [t_j, t_{j+1})$ están dados por:

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{f}_j(\underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p-i}, \underbrace{t_{j+1}, \dots, t_{j+1}}_i) \text{ donde } i=0, \dots, p.$$

Por hipótesis tenemos $t_j < t_{j+1}$, entonces $j-p \leq j-(p-i) \leq j$
 Por el teorema 2.13 tenemos que los puntos de Boor están dados por:

$$\mathbf{d}_{j-(p-i)} = \mathbf{f}_j(t_{j-(p-i)+1}, t_{j-(p-i)+2}, \dots, t_{j-(p-i)+p})$$

donde $j-(p-i) = j-p, \dots, j$.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{j-(p-i)} &= \mathbf{f}_j(t_{j-(p-i)+1}, t_{j-(p-i)+2}, \dots, t_{j-(p-i)+p}) \\ &= \mathbf{f}_j(\underbrace{t_{j-(p-i)+1}, \dots, t_j}_{p-i}, \underbrace{t_{j+1}, \dots, t_{j+i}}_i) \\ &= \mathbf{f}_j(\underbrace{t_j, \dots, t_j}_{p-i}, \underbrace{t_{j+1}, \dots, t_{j+1}}_i) = \mathbf{b}_i, \quad i=0, \dots, p. \end{aligned}$$

Nota: Si $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ una curva B-spline de grado p

sobre el vector nodo: $T = (a=t_1=\dots=t_{p+1}, t_{p+2}=\dots=t_{2p+2}=b)$

entonces $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{d}_i N_i^p(t) = \sum_{i=0}^p \mathbf{b}_i B_i^p(t)$, donde $\mathbf{d}_i = \mathbf{b}_{i-1}$

para $i=1, \dots, p+1$.

CAPITULO 3 APLICACIONES

Se sabe que una curva B-spline puede cambiar de forma si: se varía el grado del B-spline, se cambia algún punto de control, aumenta el conjunto de puntos de control, se disminuye el conjuntos de puntos de control, se modifica el vector nodo.

Nuestro objetivo es aumentar el número de puntos de control de manera que no se modifique la curva dada. Con ello se tendrá una mayor control local sobre las curvas.

3.1 Inserción de Nodos

Uno de los métodos para obtener nuevos puntos de control de modo que la curva dada no se modifique es mediante la técnica de inserción de nodos.

Los algoritmos más difundidos son:

- i) Algoritmo de Boehm: consiste en insertar un nodo.
- ii) Algoritmo de Oslo: consiste en insertar un conjunto de nodos en forma simultánea.

ALGORITMO DE BOEHM

TEOREMA 3.1

Sea $F(t) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(t)$ una curva B-spline sobre el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$.

Después de insertar un nodo nuevo u en el intervalo no vacío $[t_k, t_{k+1})$ donde $p+1 < k \leq m$, la curva $F(t)$ tiene la

siguiente representación: $F(t) = \sum_{i=1}^{m+1} d_i^* N_i^{*p}(t)$ sobre el

vector nodo $T^* = (t_1, \dots, t_k, u, t_{k+1}, \dots, t_{m+p+1})$
 $= (t_1^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, t_{k+2}^*, \dots, t_{m+p+2}^*)$

donde $N_i^{*p}(t)$ son los B-splines normalizados sobre T^* y los nuevos puntos de de Boor d_i estan dados por:

$$d_i^* = a_i d_i + (1-a_i) d_{i-1} \quad (*)$$

$$\text{donde } a_i := \begin{cases} 1 & ; 1 \leq i \leq k - p \\ \frac{u - t_i}{t_{i+p} - t_i} & ; k - p + 1 \leq i \leq k \\ 0 & ; k + 1 \leq i \leq m + 1. \end{cases}$$

(El diagrama de la figura 8 nos muestra el proceso para obtener los d_{k-p+1}^* hasta d_k^*)

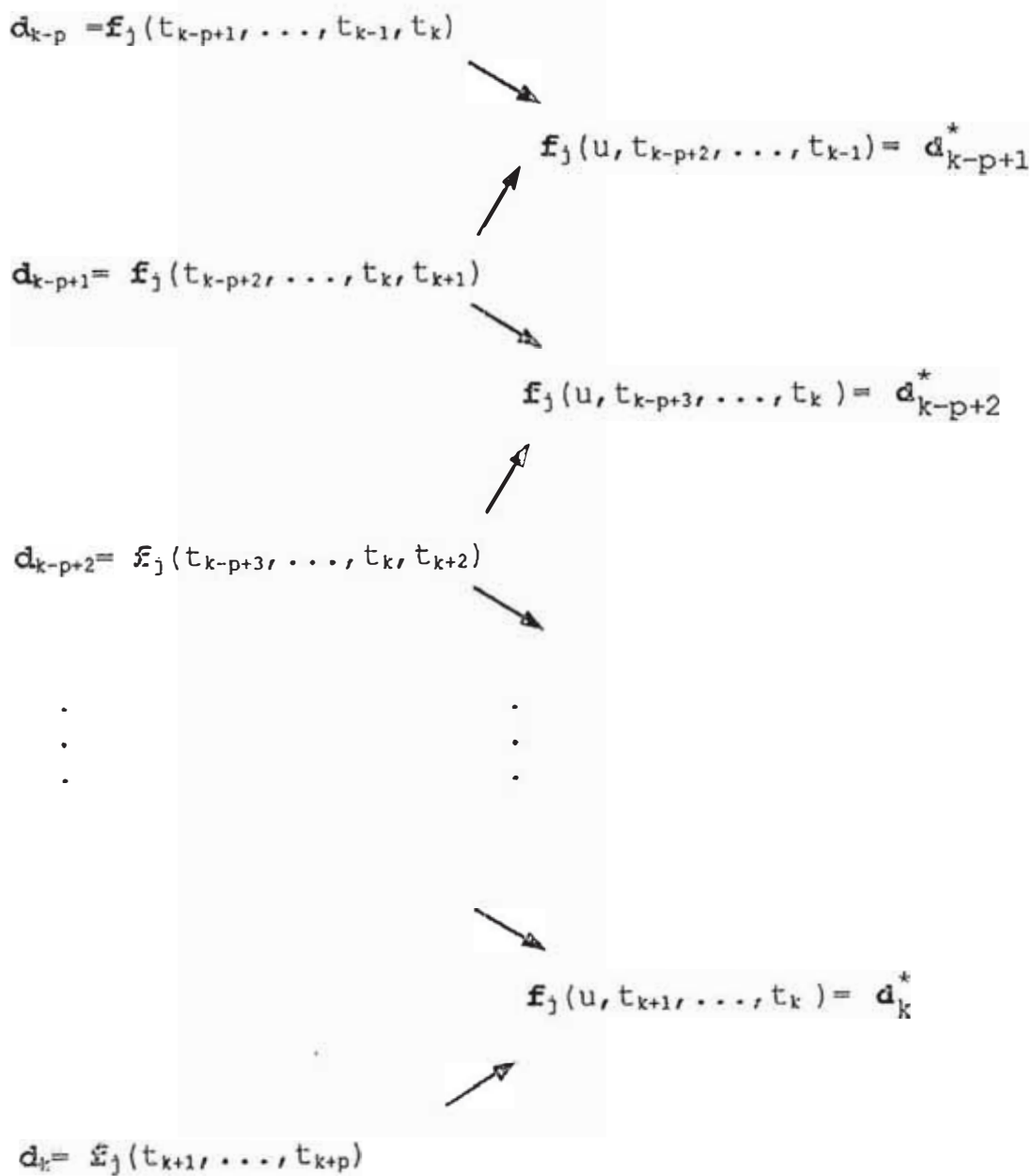


Figura 8: Algoritmo de Boehm. El nodo u es insertado en $t_k \leq u < t_{k+1}$

Donde los nuevos elementos se determinan de acuerdo al siguiente esquema:

$$\begin{array}{c}
 \mathbb{F}_j(a, x_1, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) \\
 \searrow \\
 \mathbb{F}_j(x_1, \dots, x_{p-1}, c) = \frac{b-c}{b-a} \mathbb{F}_j(a, x_1, \dots, x_{p-2}, x_{p-1}) \\
 \quad + \frac{c-a}{b-a} \mathbb{F}_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, b) \\
 \nearrow \\
 \mathbb{F}_j(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, b)
 \end{array}$$

Figura 8 a.

NOTA1: En el diagrama de la figura 8 se observa que para insertar un nodo se determinan p nuevos puntos de control desde d_{k-p+1}^* hasta d_k^* mediante p combinaciones afines.

Prueba del teorema:

Por el teorema 2.17 (Curry-Schoenberg) \mathbb{F} tiene una representación única:

$$\mathbb{F}(t) = \sum_{i=1}^{m+1} d_i^* N_i^{*p}(t) \text{ sobre el vector nodo}$$

$$T^* = (t_1, \dots, t_k, u, t_{k+1}, \dots, t_{m+p+1})$$

$$= (t_1^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, t_{k+2}^*, \dots, t_{m+p+1}^*).$$

Para $t_j^* < t_{j+1}^*$. Denotaremos \mathbb{F}_j^* como la restricción de \mathbb{F} en el intervalo no vacío $[t_j^*, t_{j+1}^*)$ y sea \mathbb{f}_j^* el blossom de \mathbb{F}_j^* .

Consideremos la subsucesión $t_k = t_k^* \leq u = t_{k+1}^* < t_{k+2}^* = t_{k+1}$ del nuevo vector nodo T^* .

$$\text{Si } t_j^* < t_{j+1}^* \text{ se tiene que } \mathbb{F}_j^* = \begin{cases} \mathbb{F}_j & , j \leq k \\ \mathbb{F}_{j-1} & , j > k. \end{cases}$$

De esto se tendrá que: $f_j^* = \begin{cases} f_j, & j \leq k \\ f_{j-1}, & j > k. \end{cases}$ (1)

Caso 1: $i \leq k-p, i \leq j \leq i+p \Rightarrow i \leq k-p, j-p \leq i \leq j$

Por el teorema 2.13:

$$d_i^* = f_j^*(t_{i+1}^*, t_{i+2}^*, \dots, t_{i+p}^*).$$

Pero $i+p < k \Rightarrow t_{i+r}^* = t_{i+r}$ para $r = 0, \dots, p$.

De esto: $d_i^* = f_j^*(t_{i+1}^*, \dots, t_{i+p}^*) = f_j(t_{i+1}, \dots, t_{i+p}) = d_i$.

Caso 2: $k-p+1 \leq i \leq k, t_k^* < t_{k+1}^*$:

Por el teorema 2.13:

$$\begin{aligned} d_i^* &= f_k^*(t_{i+1}^*, t_{i+2}^*, \dots, t_{i+k-1}^*, t_{k+1}^*, t_{k+2}^*, \dots, t_{i+p}^*) \\ &= f_k(t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_{i+k-1}, u, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}). \end{aligned} \quad (2)$$

Pero u puede expresarse como combinación afín de t_{i+p} y t_i

es decir: $u = a_1 t_{i+p} + (1-a_1) t_i$ (3)

donde $a = \frac{u-t_i}{t_{i+p}-t_i}$.

Luego de (2) y (3) tenemos:

$$\begin{aligned} d_i^* &= f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, a_1 t_{i+p} + (1-a_1) t_i, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}) \\ &= a_1 f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t_{i+p}, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}) + \\ &\quad (1-a_1) f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t_i, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}) \\ &= a_1 f_k(t_{i+1}, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}, t_{i+p}) + \\ &\quad (1-a_1) f_k(t_i, t_{i+1}, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_{i+p-1}) \\ &= a_1 d_i + (1-a_1) d_{i-1}. \end{aligned}$$

Caso 3: $k+1 \leq i, i \leq j+1 < i+p$:

Luego para $t_{j+1}^* < t_{j+2}^*$, $j+1-p \leq i \leq j+1$ se tiene

que:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_i^* &= \mathbf{f}_{j+1}(t_{i+1}^*, t_{i+2}^*, \dots, t_{i+p}^*) \\ &- \mathbf{f}_{j+1-1}(t_{i+1}^*, t_{i+2}^*, \dots, t_{i+p}^*) \\ &- \mathbf{f}_j(t_i, t_{i+1}, \dots, t_{i+p-1}) - \mathbf{d}_{i-1}. \end{aligned}$$

De los tres casos concluye la prueba.

Ejemplo 3.1

Sea $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^8 \mathbf{d}_i N_i^3(u)$ una curva B-spline cúbico sobre el vector nodo $T = (0, 0, 0, 0, 1, 2, 4, 5, 6, 6, 6, 6)$ con los puntos de de Boor: $\mathbf{d}_1 = (6, 3)$, $\mathbf{d}_2 = (7, 8)$, $\mathbf{d}_3 = (12, 5)$, $\mathbf{d}_4 = (9, 0)$, $\mathbf{d}_5 = (1, 0)$, $\mathbf{d}_6 = (0, 6)$, $\mathbf{d}_7 = (3, 8)$, $\mathbf{d}_8 = (4, 4)$.

Determinaremos los nuevos puntos de Boor después de insertar el nodo $u=3$.

Como $t_6=2 < 3 < t_7 \Rightarrow k=6$.

Luego:

$$\mathbf{d}_i^* = a_i \mathbf{d}_i + (1-a_i) \mathbf{d}_{i-1} \text{ si } 4 \leq i \leq 6$$

$$\text{donde } a_i = \frac{u-t_i}{t_{i+p}-t_i} = \frac{3-t_i}{t_{i+3}-t_i}, \text{ entonces}$$

$$\mathbf{d}_4^* = \frac{3}{4} \mathbf{d}_4 + \frac{1}{4} \mathbf{d}_3 = (9.75, 1.25),$$

$$\mathbf{d}_5^* = \frac{1}{2} \mathbf{d}_5 + \frac{1}{2} \mathbf{d}_4 = (5, 0),$$

$$\mathbf{d}_6^* = \frac{1}{4} \mathbf{d}_6 + \frac{3}{4} \mathbf{d}_5 = (0.75, 1.5).$$

Además:

$$\mathbf{d}_i^* = \mathbf{d}_i \text{ para } i=1, \dots, 3,$$

$$\mathbf{d}_i^* = \mathbf{d}_{i-1}, \text{ para } i=7, \dots, 9.$$

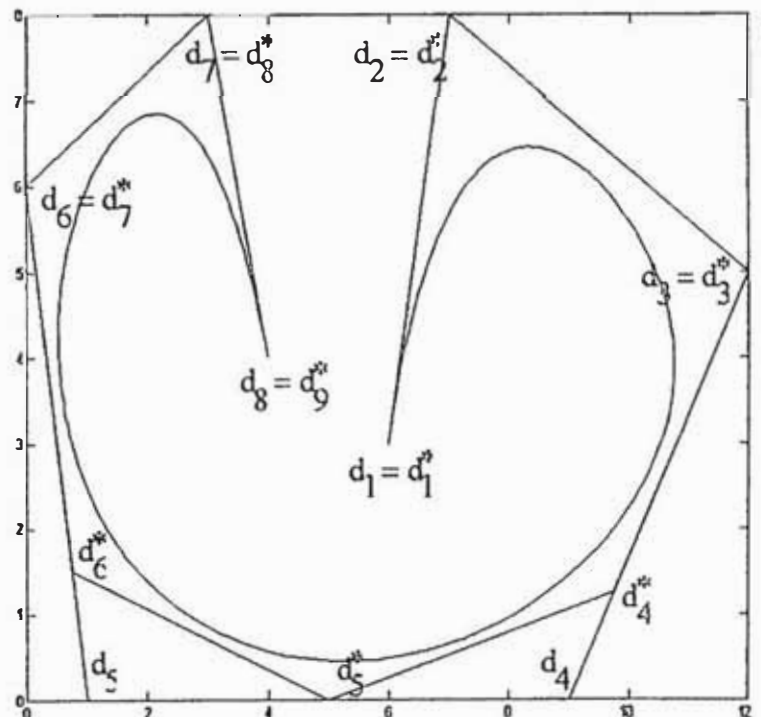


Figura 9

Inserción de nodos múltiples

Sabemos que para insertar un nodo en una curva B-spline de grado p usando el algoritmo de Boehm se determinará p nuevos puntos de control efectuando p combinaciones afines.

Para insertar r nodos mediante este algoritmo se obtendrá rp nuevos puntos de control mediante rp combinaciones afines.

Para insertar r nodos tradicionalmente se inserta el primer nodo y luego se actualiza el vector nodo y los puntos de control, luego se inserta el segundo nodo y se actualiza el vector nodo y los puntos de control, así sucesivamente hasta insertar el último nodo y se actualiza el vector nodo y los puntos de control. De este modo se obtiene rp nuevos puntos de control.

A continuación mejoraremos el algoritmo de Boehm para insertar r nodos iguales, de modo que efectuemos el menor número de combinaciones afines, es decir menor que rp combinaciones afines.

Sea $\mathbf{F}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(t)$ una curva B-spline sobre el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1} \forall i = 1, \dots, m$

Después de insertar $r \leq p$ nodos iguales $u_1 = \dots = u_r$ en el intervalo no vacío $[t_k, t_{k+1})$ donde $k \in \{p+1, \dots, m\}$.

Se tendrá como nuevo vector nodo:

$$\begin{aligned} T^* &= (t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_r, t_{k+1}, \dots, t_{m+p+1}) \\ &= (t_1^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{k+r}^*, t_{k+r+1}^*, \dots, t_{m+p+1+r}^*) \end{aligned}$$

y como nuevos puntos de control:

$$\mathbf{d}_i^* = \begin{cases} \mathbf{d}_i & ; 1 \leq i \leq k - p \\ \mathbf{f}_k(t_{i+1}^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{i+p}^*) & ; k - p + 1 \leq i \leq k + (r - 1) \\ \mathbf{d}_{i-r} & ; k + r \leq i \leq m + 1 \end{cases}$$

donde $\mathbf{f}_k(t_{i+1}^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{i+p}^*)$ se determinan de acuerdo al diagrama de la figura 10.

Los elementos de cada columna de la figura 10 se determina mediante el mismo esquema de la figura 8a.

Del diagrama de la figura 10 se observa que en los bordes de dicho diagrama se encuentran los nuevos puntos de control desde d_{k-p+1}^* hasta d_{k+r-1}^* .

Además se ve que en primer nivel se realiza "p" combinaciones afines, en el segundo nivel se realiza "p-1" combinaciones afines, ..., en el nivel r (el último nivel) se realiza "p-r+1" combinaciones afines. De esto para insertar r nodos iguales se requiere efectuar: $p + (p-1) + (p-2) + \dots + (p-r+1) = \frac{r(2p - r + 1)}{2} < rp$. Evidentemente se obtiene los mismos puntos de control con menos combinaciones afines que el método tradicional.

ALGORITMO DE OSLO [Goldman '90, '93]

Sea $F(t) = \sum_{i=1}^m d_i N_i^p(t)$ una curva B-spline sobre el vector nodo $T = (t_1, t_2, \dots, t_{m+p+1})$ tal que $t_i < t_{i+p+1}$, $i=1, \dots, m$.

Después de insertar r nodos $u_1 \leq \dots \leq u_r$ en el intervalo no vacío $[t_k, t_{k+1})$, donde $k \in \{p+1, \dots, m\}$, la nueva representación de $F(t)$ esta dada por:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{m+r} d_i^* N_i^{*p}(t) \text{ sobre el vector}$$

Se tendrá como nuevo vector nodo:

$$\begin{aligned} T^* &= (t_1, \dots, t_k, u_1, \dots, u_r, t_{k+1}, \dots, t_{m+p+1}) \\ &= (t_1^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{k+r}^*, t_{k+r+1}^*, \dots, t_{m+p+1+r}^*) \end{aligned}$$

y como nuevos puntos de control:

$$d_i^* = \begin{cases} d_i & ; 1 \leq i \leq k - p \\ f_k(t_{i+1}^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{i+p}^*) & ; k - p + 1 \leq i \leq k + (r - 1) \\ d_{i-r} & ; k + r \leq i \leq m + 1 \end{cases}$$

donde $f_k(t_{i+1}^*, \dots, t_k^*, t_{k+1}^*, \dots, t_{i+p}^*)$ se determinan de acuerdo al diagrama de la figura 11.

En la primera columna de la figura anterior se tiene los puntos de control "antiguos". A partir de la segunda columna se inserta un nuevo nodo el cual es usado como argumento del blossom. El valor del blossom en cada columna se encuentra como combinación afín de los blossoms de las columnas anteriores. La combinación afín se realiza de acuerdo al esquema de la figura 8a. El arreglo triangular de la figura 11 se conoce como **triángulo de Oslo**.

NOTA 2 En el esquema de la figura 11 se observa que para calcular un nuevo punto se necesita realizar $\frac{p(p+1)}{2}$ combinaciones afines. Si insertamos "r" nodos entonces tendremos (r+p-1) nuevos puntos de control. Por lo tanto se efectuarán $\frac{(r+p-1)p(p+1)}{2}$ combinaciones afines.

DIFERENCIAS ENTRE EL ALGORITMO DE BOEHM Y EL ALGORITMO DE OSLO

- 1) El algoritmo de Boehm inserta un nodo a la vez.
- 2) El algoritmo de Oslo inserta un conjunto de nodos en forma simultánea.
- 3) Para insertar r nodos diferentes el algoritmo de Boehm realizará rp combinaciones afines. En cambio el algoritmo de Oslo realizará $\frac{(r+p-1)p(p+1)}{2}$ combinaciones afines. Evidentemente el algoritmo de Boehm es mas eficiente.
- 4) Para insertar r nodos iguales el algoritmo de Boehm para nodos repetidos realizará $\frac{r(2p - r + 1)}{2} < rp$ combinaciones afines. En cambio el algoritmo de Oslo realizará $\frac{(r+p-1)p(p+1)}{2}$ combinaciones afines.

Actualmente existe el algoritmo de Oslo mejorado en la cual requiere el mismo número de cálculos como el algoritmo de Boehm [Goldman '90].

3.2 Elevación de grado

Hemos visto que para tener una mayor flexibilidad sobre las curvas B-spline se puede usar la técnica de inserción de nodos. Otras de las técnicas para obtener los mismos resultados es elevar el grado, dicha técnica consiste en elevar el grado de una curva B-spline obteniéndose así una nueva representación de manera que la curva inicial no varíe.

TEOREMA 3.2 (Elevación de grado en curvas de Bézier)

Sea $F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ una curva de Bézier de grado p definido por $F(u) = \sum_{i=0}^p b_i B_i^p(u)$. Entonces $F(u)$ puede ser representado como una curva de Bézier de grado $p+1$, es

decir: $F(u) = \sum_{i=0}^{p+1} b_i^* B_i^{p+1}(u)$ donde:

$$b_0^* = b_0,$$

$$b_i^* = \frac{i}{p+1} b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{p+1}\right) b_i, \quad i=1, \dots, p,$$

$$b_{p+1}^* = b_p.$$

[Hoschek et al. '93, pp.134]

Prueba:

Por el teorema 2.7 sabemos que:

$$b_i = f(\underbrace{a, \dots, a}_{p-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i), \quad i=0, \dots, p,$$

donde f es el blossom de F .

Considerando a F como un polinomio degenerado de grado $p+1$ entonces por el teorema 2.2 su blossom está dado por:

$$f^*(u_1, \dots, u_{p+1}) = \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} f(u_1, \dots, \overset{\cdot}{u_j}, \dots, u_{p+1})$$

donde $\overset{\cdot}{u}$ significa que el i -ésimo argumento no aparece.

Luego los puntos de Bézier están dados por:

$$b_i^* = f^*(\underbrace{a, \dots, a}_{p+1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i), \quad i=0, \dots, p+1.$$

$$i=0: \mathbf{b}_0^* = \mathbf{f}^*(a, \dots, a) = \frac{1}{p+1} \underbrace{[\mathbf{f}(a, \dots, a) + \dots + \mathbf{f}(a, \dots, a)]}_{p+1} = \mathbf{b}_0$$

$$i=p+1: \mathbf{b}_{p+1}^* = \mathbf{f}^*(b, \dots, b) = \frac{1}{p+1} \underbrace{[\mathbf{f}(b, \dots, b) + \dots + \mathbf{f}(b, \dots, b)]}_{p+1} = \mathbf{b}_p$$

Para $i=1, \dots, p$:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^* &= \mathbf{f}^*(\underbrace{a, \dots, a}_{p+1-i}, \underbrace{b, \dots, b}_i) = \\ &= \frac{1}{p+1} \left[\underbrace{\mathbf{f}(a, \dots, a, \underbrace{b, \dots, b}_i)}_{1^{\text{er}} \text{ sum.}} + \dots + \underbrace{\mathbf{f}(a, \dots, a, \underbrace{b, \dots, b}_i)}_{p+1-i \text{ sum.}} \right] \\ &+ \\ &= \frac{1}{p+1} \left[\underbrace{\mathbf{f}(a, \dots, a, \underbrace{b, \dots, b}_{i-1})}_{p+2-i \text{ sum.}} + \dots + \underbrace{\mathbf{f}(a, \dots, a, \underbrace{b, \dots, b}_{i-1})}_{p+1 \text{ sum.}} \right] \\ &= \frac{1}{p+1} \left[\underbrace{\mathbf{b}_i + \dots + \mathbf{b}_i}_{p+1-i \text{ veces}} + \underbrace{\mathbf{b}_{i-1} + \dots + \mathbf{b}_{i-1}}_i \right] \\ &= \frac{1}{p+1} [(p+1-i)\mathbf{b}_i + i \mathbf{b}_{i-1}] \end{aligned}$$

Luego concluye la prueba.

TEOREMA 3.3 (Elevación de grado en curvas B-spline)

Sea $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ una curva B-spline sobre el vector

nodo $T = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+1=u_1}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+1=u_{k+1}})$ tal que

$$u_i \leq p+1 \text{ donde } m = p+1 + \sum_{i=2}^k u_i.$$

Si $\mathbf{F}(u)$ es considerado como un polinomio de grado $p+1$

entonces $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{d}_i^* N_i^{p+1}(u)$ sobre el vector nodo

$$\begin{aligned} T^* &= (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+2}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i+1}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+2}) \\ &= (t_1^*, \dots, t_{p+2}^*, \dots, t_{m+p+1+k}^*) \end{aligned}$$

donde:
$$\mathbf{d}_r^* = \frac{1}{p+1} \sum_{i=1}^{p+1} \mathbf{f}(t_{r+1}^*, \dots, \hat{t}_{r+i}^*, \dots, t_{r+p+1}^*)$$

$r=1, \dots, m+k,$

[Seidel '91].

Prueba: $\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^m \mathbf{d}_i N_i^p(u)$ es una curva B-spline de grado p sobre el vector nodo T . Luego por el Teorema de Curry-Schoenberg $\mathbf{F}(u)$ es una función polinomial seccional de grado p donde sus puntos de quiebre son: $e_1 < e_2 < \dots < e_{k+1}$ de manera que es $(p-u_i)$ -veces continuamente diferenciable en $u=e_i$.

Si consideramos a $\mathbf{F}(u)$ como un polinomio de grado $p+1$ sus puntos de quiebre siguen siendo $e_1 < e_2 < \dots < e_{k+1}$ de manera que es de clase $(p+1)-(u_i+1)$. Luego por el Teorema Curry-Schoenberg $\mathbf{F}(u)$ esta representado por:
$$\mathbf{F}(u) = \sum_{i=1}^{m+k} \mathbf{d}_i^* N_i^{p+1}(u)$$
 sobre el vector nodo $T^* = (\underbrace{e_1, \dots, e_1}_{p+2}, \dots, \underbrace{e_i, \dots, e_i}_{u_i+1}, \dots, \underbrace{e_{k+1}, \dots, e_{k+1}}_{p+2})$

$$T^* = (t_1^*, \dots, t_{p+2}^*, \dots, t_{m+p+1+k}^*).$$

Sea $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq m+k$.

Entonces $\exists i \in \mathbb{N}: u_1 + \dots + u_{i-1} + i < r < u_1 + \dots + u_i + i$. (*)

Por otro lado:

Como $e_i < e_{i+1}$ se tiene en el vector nodo T :

$$t_{u_1+u_2+\dots+u_i} = e_i < e_{i+1} = t_{u_1+u_2+\dots+u_i+1},$$

en el vector nodo T^* :

$$t_{u_1+u_2+\dots+u_i+i}^* = e_i < e_{i+1} = t_{u_1+u_2+\dots+u_i+i+1}^*.$$

Como $u_i \leq p+1$ esto implica que

$$u_1 + \dots + u_{i-1} + u_i + i - (p+1) < r \leq u_1 + \dots + u_{i-1} + u_i + i.$$

Definiendo $j := u_1 + \dots + u_{i-1} + u_i + i$, se tendrá que

$$t_j^* = e_i < t_{j+1}^* = e_{i+1}, \quad r = j - (p+1), \dots, j.$$

$$d_r^* = f_j^*(t_{r+1}^*, \dots, t_{r+p+1}^*),$$

y por el Teorema 2.2:

$$d_r^* = \frac{1}{p+1} \sum_{v=1}^{p+1} f(t_{r+1}^*, \dots, \hat{t}_{r+v}^*, \dots, t_{r+p+1}^*).$$

Ejemplo: Sea la curva B-spline $F(t) = \sum_{i=1}^6 d_i B_i^3(t)$ sobre el vector nodo $T=(0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3, 3)$, cuyos puntos de control son: $d_1 = (2, -1)$, $d_2 = (3, -1)$, $d_3 = (11, 3)$, $d_4 = (5, 3)$, $d_5 = (1, -1)$, $d_6 = (1, 3)$ (ver figura 12).

Elevando el grado tenemos:

$$T^* = (0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 3),$$

y los nuevos puntos de control son:

$$d_1^* = [4 f(0, 0, 0)]/4 = f(0, 0, 0) = d_1 = (2, -1),$$

$$d_2^* = [3f(0, 0, 1) + f(0, 0, 0)]/4 = (3d_2 + d_1)/4 = (2.75, -1),$$

$$\begin{aligned} d_3^* &= [2f(0, 1, 1) + 2f(0, 0, 1)]/4 \\ &= [f(0, 0, 1) + f(0, 1, 2) + 2f(0, 0, 1)]/4 = (3d_2 + d_3)/4 = (5, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_4^* &= [f(0, 1, 1) + f(1, 1, 2) + 2f(0, 1, 2)]/4 \\ &= [0.5f(0, 0, 1) + 0.5f(0, 1, 2) + \\ &\quad (2f(0, 1, 2) + f(1, 2, 3))/3 + 2f(0, 1, 2)]/4 \\ &= [3f(0, 0, 1) + 19f(0, 1, 2) + 2f(1, 2, 3)]/24 \\ &= [2d_4 + 19d_3 + 3d_2]/24 = (9.5, 2.5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_5^* &= [2f(1, 1, 2) + 2f(1, 2, 2)]/2 \\ &= [2\{2f(0, 1, 2) + f(1, 2, 3)\}/3 + 2\{f(0, 1, 2) + 2f(1, 2, 3)\}/3]/2 \\ &= [d_4 + d_3]/2 = (8, 3), \end{aligned}$$

$$d_6^* = [3d_5 + 19d_4 + 2d_3]/24 = (5.25, 5),$$

$$d_7^* = [3d_5 + d_4]/4 = (2, 0),$$

$$d_8^* = [d_6 + 3d_5]/4 = (1, 0),$$

$$d_9^* = d_6 = (1, 3).$$

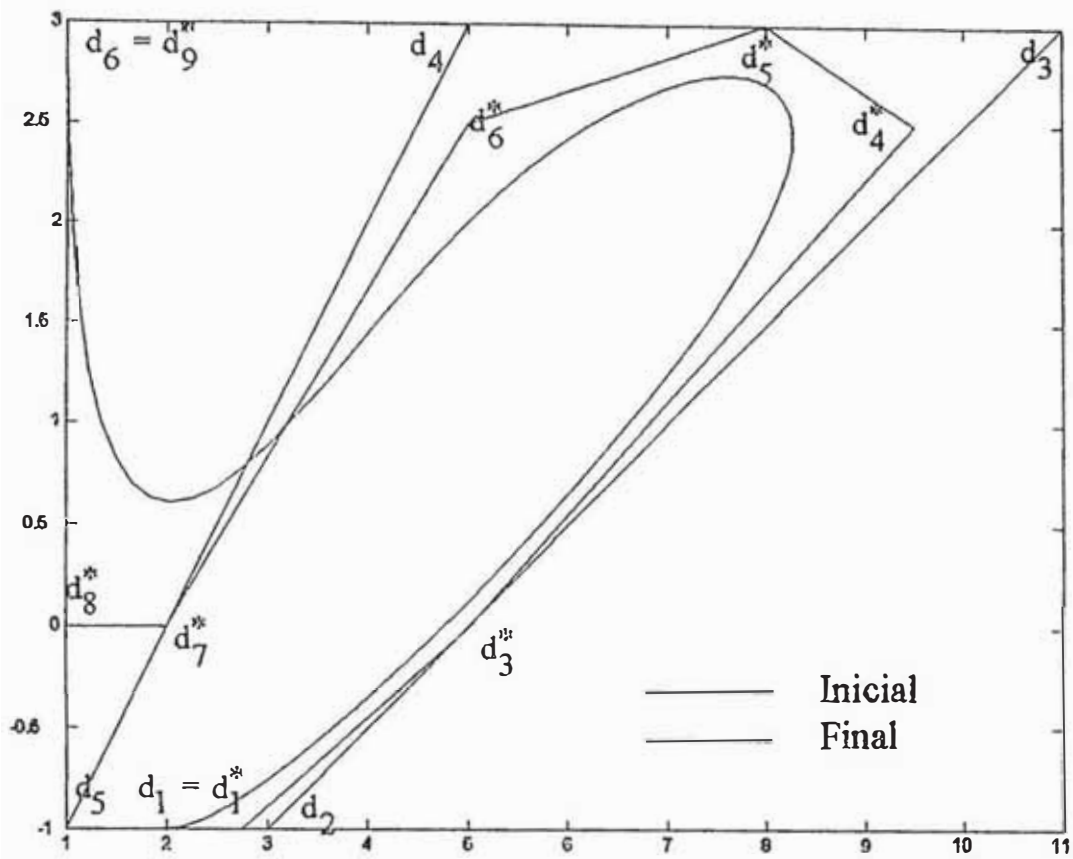


Figura 12: Elevación de grado de una curva B-spline cúbica a una curva B-spline de grado 4.

Conclusiones

En el CAGD para obtener las curvas de Bézier ó B-spline se tiene que dar como dato los puntos de control¹. Mediante los **blossoms** se puede obtener lo recíproco, es decir, dado la curva spline (polinomio seccional) se puede encontrar los puntos de control de manera que la curva generada por esos puntos de control nos genere la curva dada.

Los Blossoms también pueden ser usados como una herramienta teórica para obtener algoritmos más eficientes.

También se han obtenido los algoritmos de inserción de nodos y elevación de grado los cuales nos permiten tener una mayor flexibilidad sobre la curva.

Con respecto a las técnicas de inserción de nodos se tiene que el algoritmo de Boehm es más eficiente que el algoritmo de Oslo pues realiza menos combinaciones afines.

Además, si insertamos p nodos iguales $u_1 = \dots = u_p = t$ se tendrá exactamente el valor de la función $F(t)$ mediante el algoritmo de de Boor.

Una solución para los problemas de transferencia de datos entre sistemas de CAD incompatibles, la unión (patching) de dos curvas o superficies, será encontrar una representación común de los splines de diferentes grados, es decir debemos elevar el grado.

¹ Además ,en los Bspline se tiene que dar como dato el grado y el vector nodo.

Bibliografía

1. Barnhill R.E. and Riesenfeld, R.F., eds. (1974), *Computer Aided Geometric Design*, Academic Press, New York.
2. Boehm, W., Farin G., Kahmann J. (1984), A survey of curve and surface methods in CAGD. *Computer Aided Geometric Design* 1, pp. 1-60.
3. Boehm, W. (1988), On the Boor-like algorithms and blossoming. *Computer Aided Design* 5, pp. 71-79.
4. de Boor, C. (1972), On calculating with B-splines, *J. Approx. Theory* 6, 50-62.
5. Dierckx, P. (1995), *Curve and Surface Fitting with splines*. Clarendon, Press Oxford.
6. Farin, G. (1993), *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. Academic Press Inc, San Diego.
7. Ferguson, J.C. (1964), Multivariable curve interpolation, *J. ACM* II/2, 221-280.
8. Goldman, R. (1990), Blossoming and Knot insertion algorithms for B-spline curves. *Computer Aided Geometric Design* 7, pp. 69-81.
9. Goldman, R., Lyche, T. (1993), *Knot insertion and deletion algorithms for B-spline curves and surfaces*. SIAM. Philadelphia.
10. Gordon, W. and Riesenfeld, R.E. (1974), B-splines curves and surfaces, in: [Barnhill et al. '74].
11. Hoschek, J., Lasser D. (1993), *Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*. A K Peters Ltd. Wellesley, Massachusetts.
12. Prautzsch, H. (1984), Degree elevation of B-splines curves. *Computer Aided Design* 1, pp. 193-198.
13. Prautzsch, H.; Piper, B. (1991), A fast algorithm to raise degree of spline curves. *Computer Aided Design* 8 pp 253-265.
14. Ramshaw, L. (1987), Bézier and B-splines as multiaffine maps in: *Theoretical Foundation of Computer Graphics and CAD*. Springer, New York. pp:757-776.

15. Ramshaw, L. (1989), Blossom are polar forms". Computer Aided Geometric Design 6, pp 323-358.
16. Rogers, D.F., Adams, J.A. (1990), Mathematical Elements for Computer Graphics. MacGraw Hill.
17. Seidel, H-P. (1988), Knot insertion from a blossoming point of view. Computer Aided Design 5, pp. 81-86.
18. Seidel, H-P. (1989), A new multiaffine approach to B-splines. Computer Aided Design 6, pp. 23-32.
19. Seidel, H-P. (1991), Computing B-spline control points using polar forms. Computer Aided Design 23, pp. 634- 640.
20. Stoer, J., Bulirsch R. (1980), Introduction to Numerical Analysis. New York: Springer-Verlag.