UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
Facultad de Ciencias
Escuela Profesional de Matemática

PROGRAMACION LINEAL ENTERA PURA

- Algoritmo Fraccional de Gomory
- Algoritmo Totalmente Entero de Gomory

Tesis para optar el Título de:

LICENCIADO EN MATEMATICAS

Presentado por:

ROLANDO RAUL PALOMINO VILDOSO

Asesor:

Mstro. HECTOR CARLOS GUIMARAY HUERTA

LIMA - PERU

1995

INDICE

INTRODUCCION

El objetivo de la presente es implementar dos de los Algoritmos para solucionar Programas Lineales Enteros Puros ambos de GOMORY, basados en los **Planos de Corte** como son:

- **Algoritmo Fraccional**
- **Algoritmo Totalmente Entero**

Respecto al Algoritmo Fraccional éste genera Planos de Corte (nueva restricción) con coeficientes fraccionarios si al aplicar el Método Simplex la Solución Optima no es entera (no negativa); pues de serlo resulta ser la solución buscada.

El Algoritmo Totalmente Entero parte de una tabla Dual Admisible, si la tabla no es Primal Admisible entonces se añade el Plano de Corte (nueva restricción) con coeficientes enteros, de lo contrario se obtiene la tabla Optima deseada.

Además se presenta una comparación con otro algoritmo (Ramificación y Acotación) que soluciona el mismo tipo de problema. Finalmente se presenta en el ANEXO los dos Algoritmos escritos en Lenguaje C, con una pequeña aplicación.

¿ **Para qué se utilizan estos algoritmos** ?

Pues en muchas situaciones prácticas, los valores no enteros pueden carecer de sentido. Así, por ejemplo, para una Empresa que fabrica pantalones de los tipos A y B el saber que para maximizar la ganancia necesita fabricar semanalmente 45.3 pantalones del tipo A y 55.7 pantalones del tipo B, aunque constituya una solución óptima, no resulta una solución útil. Lógicamente, la Empresa necesitará tener una solución expresada en números enteros.

ALGORITMO FRACCIONAL DE GOMORY

Sean los programas:

$$L: \quad \min\ c^T x \qquad\qquad L: \quad \text{Máx}\ b^T u$$
$$Ax > b \qquad\qquad A^T u = c$$
$$x \text{ entero} \qquad\qquad u \geq 0 \text{ , entero}$$

donde $c \in R^n$. $b \in R^m$ y A una matriz de orden mxn.

Tabla Símplex del Programa Lineal: Primal-Dual.

$c^T x_B$	d^T	
u_B	$(A^T_B)^{-1} A^T$	B

donde $x_B = A_B^{-1} b_B$, $u_B = (A_B^{-1})^T c$, $d = A x_B - b$, A_B matriz base y B conjunto de índices de la base.

Cuya Tabla óptima correspondiente es:

$c^T x_B$	d^T		
$\hat{u}_B$	I	T_N	B

donde $\hat{u}_B$ es la solución óptima del Dual, I es la matriz identidad y T_N resultado de haber operado en la tabla anterior.

Propiedad

Si $\hat{x}$ es solución óptima del Programa Lineal Continuo L_a (asociado a L) entonces $\hat{x}$ es solución óptima del Programa Lineal Entero L.

Prueba Sean:

$$S = \{ x \in R^n / \ Ax > b \}$$

$$R = \{ x \in Z^n / \ Ax > b \}$$

Se sabe que $\inf L_a = c^T \hat{x}$.

También $\hat{x} \in R$, luego $\inf L < c^T \hat{x}$.

Por otra parte $R \subset S$, entonces

$$\inf L_a \leq \inf L$$

Luego, $\inf L = c^T \hat{x}$.

Pero $\inf L < c^T x$, $\forall x \in R$. Es decir, $\hat{x}$ es solución óptima de L.

Propiedad

Siendo $\hat{u}_B$ solución básica óptima y $u = (u_B , u_N)$ variables del dual, se tiene que

$$\hat{u}_B = u_B + T_N u_N$$

Prueba

Se sabe que:

$$A^T u = c$$

$$\left(A_B^T\right)^{-1} A^T u = \left(A_B^T\right)^{-1} c$$

$$\left(A_B^T\right)^{-1} \begin{bmatrix} A_B^T & A_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_N \end{bmatrix} = \hat{u}_B$$

$$\begin{bmatrix} I & \left(A_B^T\right)^{-1} A_N^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_N \end{bmatrix} = \hat{u}_B$$

$$\begin{bmatrix} I & T_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_N \end{bmatrix} = \hat{u}_B$$

De donde:

$$\hat{u}_B = u_B + T_N u_N$$

Observación

Siendo r un número real, se tiene que

$$r = \| r \| + f_r$$

donde $0 < f_r < 1$, $\| r \|$ representa el máximo entero de r .

Propiedad

Sean $T_N = \| T_N \| + F_N$, $\hat{u}_B = \| \hat{u}_B \| + f_B$ entonces $f_B < F_N u_N$.

Prueba

Por la propiedad anterior, se sabe que:

$$\hat{u}_B = u_B + T_N u_N$$

Luego reemplazando los datos:

$$\begin{aligned} \| \hat{u}_B \| + f_B &= u_B + (\| T_N \| + F_N) u_N \\ \| \hat{u}_B \| + f_B &= u_B + T_N u_N + F_N u_N \\ \Rightarrow \quad f_B - F_N u_N &= u_N + \| T_N \| u_N - \| \hat{u}_B \| \end{aligned}$$

Puesto que u_B , u_N son variables enteras, se deduce que f_B - $\mathbf{F_N u_N}$ es entero.
Ahora, puesto que F_N y u_N son mayores o iguales a 0, se tiene que :

$$f_B - F_N u_N \leq f_B.$$

Además: $f_B < 1$.

$$\Rightarrow f_B - F_N u_N < 1$$

Por lo tanto, puesto que el primer miembro de la desigualdad es entero entonces:

$$f_B - F_N u_N \leq 0.$$

Definición

Sean :

$$T_N = \| T_N \| + F_N$$
$$\hat{u}_B = | \hat{u}_B | + f_B$$

entonces las filas de **$- F_N u_N + S = - f_B$** se llaman **planos de corte**.

Propiedad

Sean los Programas Lineales:

P: $\quad \text{Máx } b^T u$
$\quad A^T u = c$
$\quad u \geq 0$

Q: $\quad \text{Máx } b^T u$
$\quad A^T u = c$
$\quad - F_N u_N + S = - f_B$
$\quad u \geq 0$
$\quad S \geq 0$

Luego, si u es solución entera de P entonces es solución entera de Q. Más aún, siendo $\hat{u}$ óptimo no entero de P se tiene que $\hat{u}$ no es admisible de Q.

Prueba

Sea $u = \begin{vmatrix} u_B \\ u_N \end{vmatrix}$ solución entera de P, entonces se sabe que :

$$f_B \leq F_N u_N.$$

De donde, considerando la variable de holgura S se tiene:

$$- F_N u_N + S = - f_B \qquad (*)$$

Deduciendose que u es solución entera de Q.

Por otra parte siendo $\hat{u}$ óptimo no entero se tiene que:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} \hat{u}_B \\ \hat{u}_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{u}_B \\ 0 \end{bmatrix}$$

Luego, reemplazando en (✳) , $\hat{u}_N = 0$, se tiene que:

$$S = -f_B < 0$$

Es decir, $S < 0$, implicando que $\hat{u}$ no es solución admisible de Q.

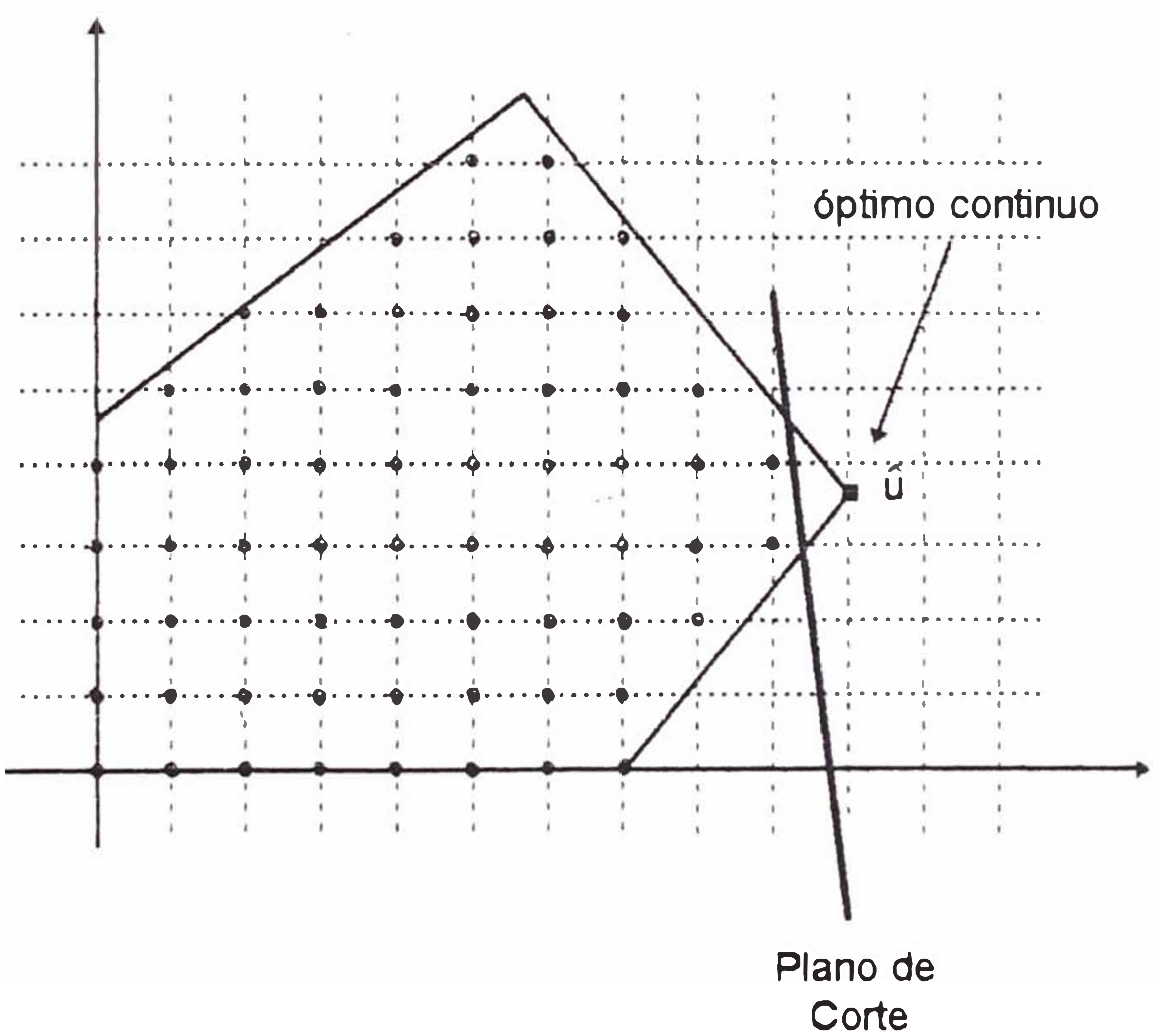


Figura 1.

<u>**Definición**</u>

Siendo $-F_N u_N + S = -f_B$, consideremos los planos de corte:

$$-\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, u_{N_j} + S_i = -f_{B_i}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} F_{kj}\, u_{N_j} + S_k = -f_{B_k} \quad , \qquad T_{ij} = \; T_{ij} \,\Vert + F_{ij}$$

asociados a las variables básicas fraccionarias $\hat{u}_{B_i}$, $\hat{u}_{B_k}$. Luego, se dice que el **plano de corte** asociado a la **i-ésima** es **más fuerte** que el asociado a la **k-ésima** si:

1) $f_{B_i} \geq f_{B_k}$

2) $F_{ij} \leq F_{kj}$, $\forall\, j$ (Desigualdad estricta para algún j).

<u>**Propiedad**</u>

Sean los planos de corte:

$$-\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, u_{N_j} + S_i = -f_{B_i}$$

$$-\sum_{j=1}^{n} F_{kj}\, u_{N_j} + S_k = -f_{B_k}$$

asociados a las variables básicas fraccionarias $\hat{u}_{B_i}$, $\hat{u}_{B_k}$ donde el plano de corte asociado a la i-ésima es más fuerte que la asociada a la k-ésima. Luego, si se cumple el primer plano entonces también se cumple el otro.

<u>**Prueba**</u>

Se tiene que $$-\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, u_{N_j} + S_i = -f_{B_i}$$

De donde:

$$\sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, u_{N_j} - f_{B_i} = S_i > 0$$

$$\Rightarrow f_{B_i} \leq \sum_{j=1}^{n} F_{ij}\, u_{N_j}$$

Usando 2) $$f_B < \sum_{j=1}^{n} F_{kj} u_{N_j}$$

Más aún, considerando 1)

$$f_{B_k} < \sum_{j=1}^{n} F_{kj} u_{N_j}$$

Es decir: $$-\sum_{j=1}^{n} F_{kj}\, u_{N_j} + S_k \quad -f_{B_k}$$

NOTA: Esta propiedad nos permite obviar ciertos planos de corte.

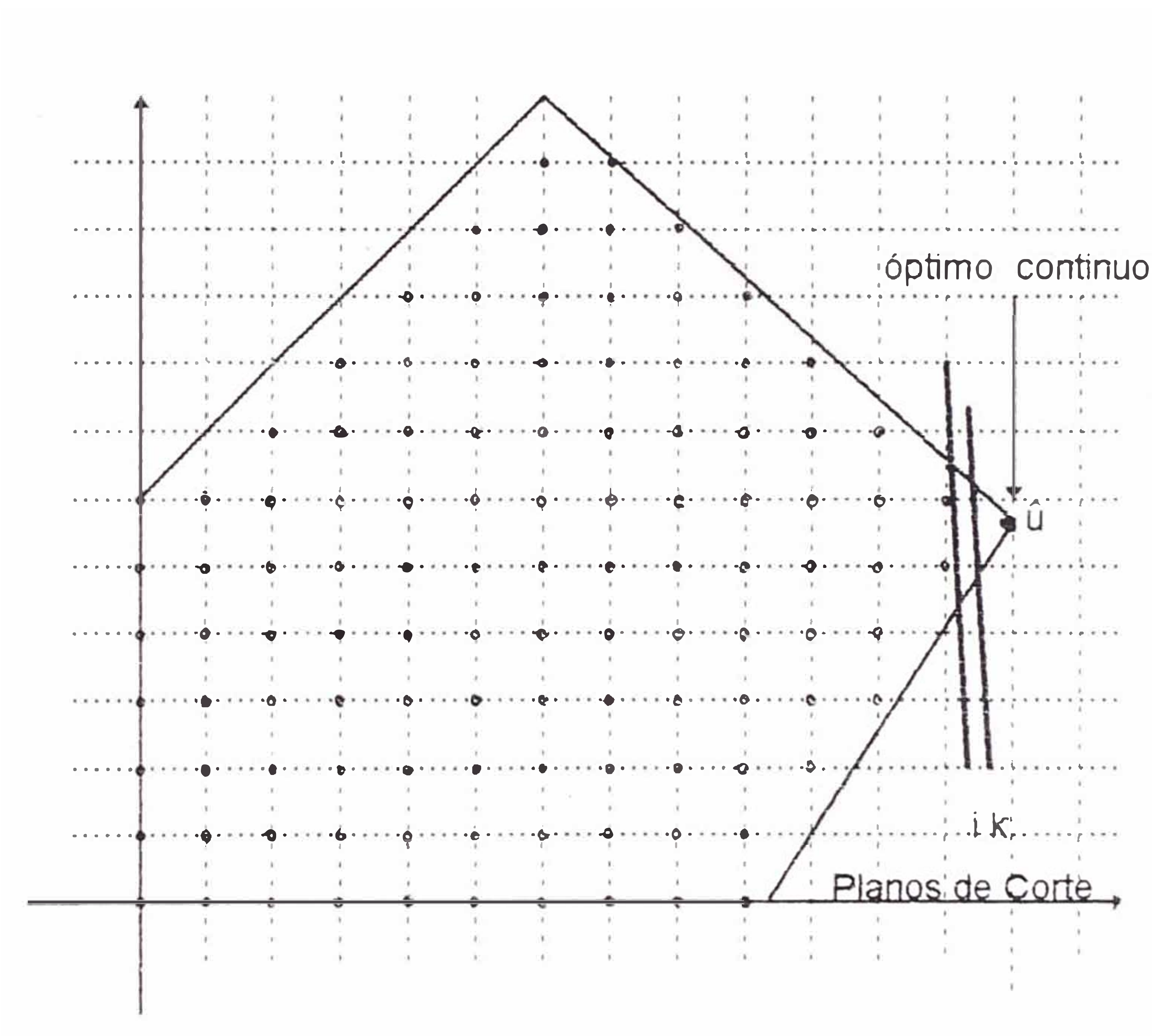


Figura 2.

Elección del Plano de Corte

Se considerará el Plano de Corte asociado al subíndice de f_{B_r} si se cumple:

$$1)\quad \underset{i}{\text{Máx}} \left\{ f_{B_i} \right\}$$

$$2)\quad \underset{i}{\text{Máx}} \left\{ \frac{f_{B_i}}{\sum_{j=1}^{n} F_{ij}} \right\}$$

donde $\hat{u}_{B_r} = \left\| \hat{u}_{B_r} \right\| + f_{B_r}$ es la variable básica fraccionaria.

Ahora el Programa queda como:

$$\begin{aligned} \text{Máx} \quad & b^T u \\ & A^T u = c \\ -\sum_{j=1}^{n} F_{rj} u_{N_j} & + S_r = -f_{B_r} \\ & u \geq 0 \\ & S_r \geq 0 \end{aligned}$$

Observación

El Plano de Corte asociado al subíndice f_{B_r} no siempre es el más fuerte.

Ejemplo

Sea el Programa:

$$\begin{aligned} \text{Máx} \quad & u_1 \\ 6u_1 - 5u_2 & \leq 18 \\ 8u_1 + 11u_2 & \leq 77 \\ u_1 \geq 0 \,&,\, u_2 \geq 0 \\ u_1, u_2 & \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Consideremos la base $B = \{ 3,4 \}$ y las variables de holgura u_3, u_4.

$$A^T = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 8 & 11 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 18 \\ 77 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u_B = \left(A_B^T\right)^{-1} c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 77 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 77 \end{bmatrix} \geq 0$$

$\therefore$ B es admisible. Construyamos la Tabla Dual Simplex:

$$b_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_B = A_B^{-1} b_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c^T x_B = 0, \quad d^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$u_B = \begin{bmatrix} 18 \\ 77 \end{bmatrix}, \quad \left(A_B^T\right)^{-1} A^T = \begin{bmatrix} 6 & -5 & 1 & 0 \\ 8 & 11 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se presenta en forma gráfica para una mejor comprensión del P.L.E.

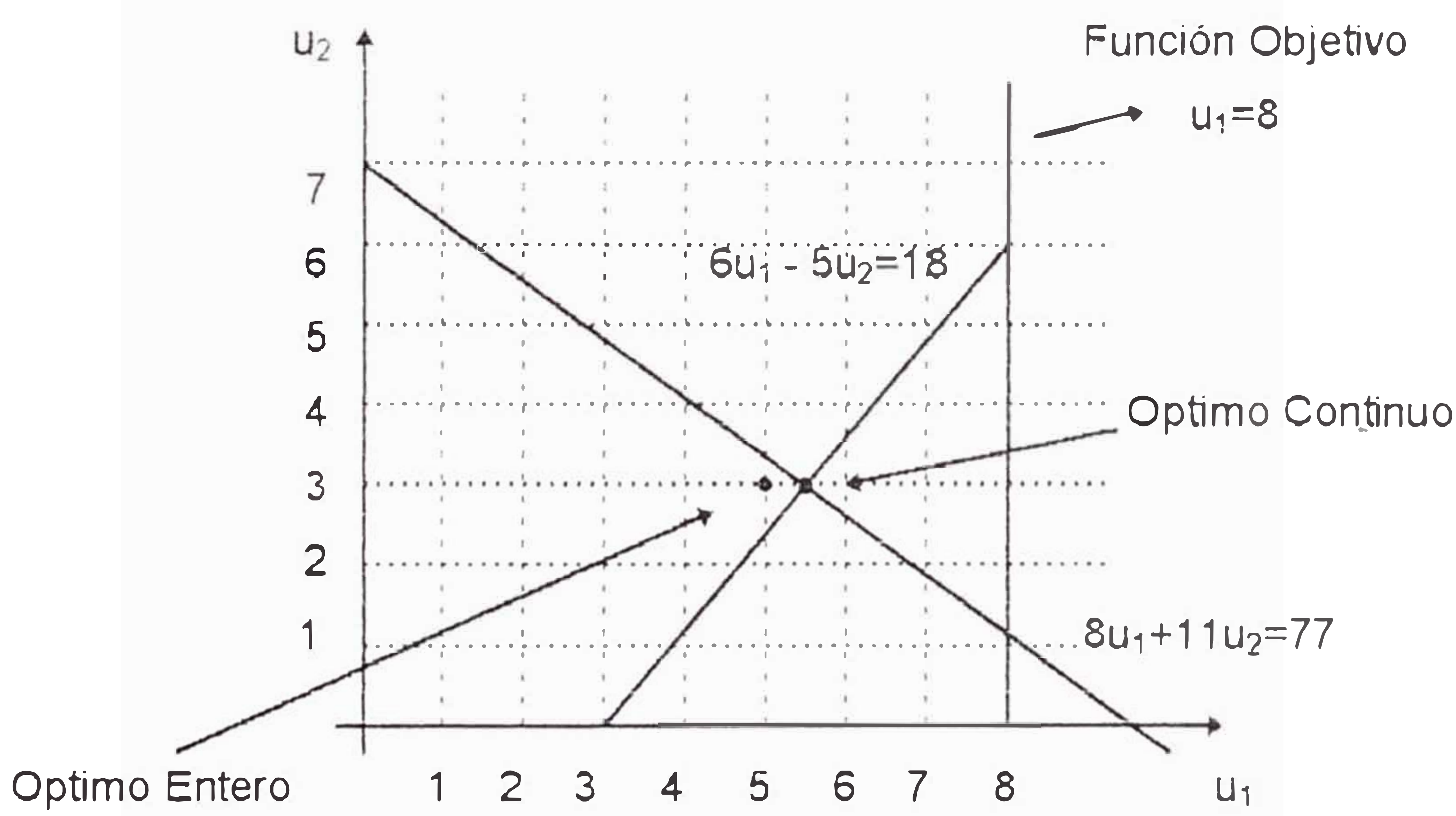


Figura 3.

0	-1	0	0	0	
18	6✓	-5	1	0	3
77	8	11	0	1	4

Pues: $\min \{ 18/6 , 77/8 \} = 3$

Nota: ✓ indica el pivot

3	0	-5/6	1/6	0	
3	1	-5/6	1/6	0	1
53	0	53/3✓	-8/6	1	4

Pues: $\min \left\{ \frac{53}{53/3} \right\} = 3$

11/2	0	0	11/106	5/106	
11/2	1	0	11/106	5/106	1
3	0	1	- 4/53	3/53	2

➪ El Optimo continuo es (11/2 , 3)

Para hallar el óptimo entero, agregamos el plano de corte a la tabla símplex:

$-1/2 = -11/106\ u_3 - 5/106\ u_4 + u_5$ (Primer Plano de Corte)

11/2	0	0	11/106	5/106	0	
11/2	1	0	11/106	5/106	0	1
3	0	1	- 4/53	3/53	0	2
-1/2	0	0	- 11/106	- 5/106✓	1	6

Pues:

$\operatorname{Max} \left\{ \frac{11/106}{-11/106}, \frac{5/106}{-5/106} \right\} = -1$

5	0	0	0	0	1	
5	1	0	0	0	1	1
12/5	0	1	-1/5	0	6/5	2
53/5	0	0	11/5	1	-106/5	4

(☆)

Todavía no llegamos al óptimo entero, luego agregamos el Plano de Corte:

$-3/5 = -1/5\ u_3 - 4/5\ u_5 + u_6$ (Segundo Plano de Corte)

5	0	0	0	0	1	0	
5	1	0	0	0	1	0	1
12/5	0	1	-1/5	0	6/5	0	2
53/5	0	0	11/5	1	-106/5	0	4
-3/5	0	0	-1/5✓	0	-4/5	1	6

Pues:

$$\text{Max}\left\{\frac{0}{-1/5}, \frac{1}{-4/5}\right\} = 0$$

5	0	0	0	0	1	0	
5	1	0	0	0	1	0	1
3	0	1	0	0	2	-1	2
4	0	0	0	1	-30	11	4
3	0	0	1	0	4	-5	3

El óptimo entero es:

(5 , 3)

Observación

En el ejemplo analizado se tiene que el plano de corte asociado al subíndice

f_{B_r}, el cual corresponde a $\text{Max}\{f_{B_i}\}$, no necesariamente es más fuerte que los otros planos de corte. Pues, considerando:

1) $f_{B_i} \geq f_{B_k}$

2) $F_{ij} \leq F_{kj}$ Para todo j

en la tabla (☆) se tiene :

$f_{B_2} = 3/5 \geq f_{B_3} = 2/5$

$F_{23} = 4/5 \leq F_{33} = 1/5$ $\Rightarrow\Leftarrow$ (Contradicción)

$F_{25} = 1/5 \leq F_{35} = 4/5.$

Es decir, para j =3 no se cumple.

<u>Filas y columnas constantes en la tabla simplex</u>

Al adicionar planos de corte se aumenta el número de filas y columnas en la Tabla Símplex; sin embargo, dicha Tabla se puede presentar de manera que el número de filas y columnas sea constante, debido a que se introduce la ecuación del plano de corte y luego se retira.

Consideremos los Programas Primal - Dual:

$$\begin{array}{ll} \text{mín } c^T x & \\ \quad Ax \geq b & \\ \quad x \geq 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \text{Máx } b^T u & \\ \quad A^T u \leq c & \\ \quad u \geq 0 & \end{array}$$

Del Programa Dual se tiene:

$$\begin{array}{ll} \text{Máx } b^T u & \\ \quad A^T u \leq c & \\ \quad u \geq 0 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ll} \text{Máx } b^T u & \\ \quad v = c - A^T u & (\Re) \\ \quad u \geq 0 & \\ \quad v \geq 0 & \end{array}$$

Lueao denotando

$w = (u, v)$, $u = (w_1, w_2, \ldots\ldots, w_n)$ y $v = (w_{n+1}, w_{n+2}, \ldots\ldots, w_{n+m})$.

<u>Se construye la siguiente Tabla</u>

Siendo A_B una base se tiene que:

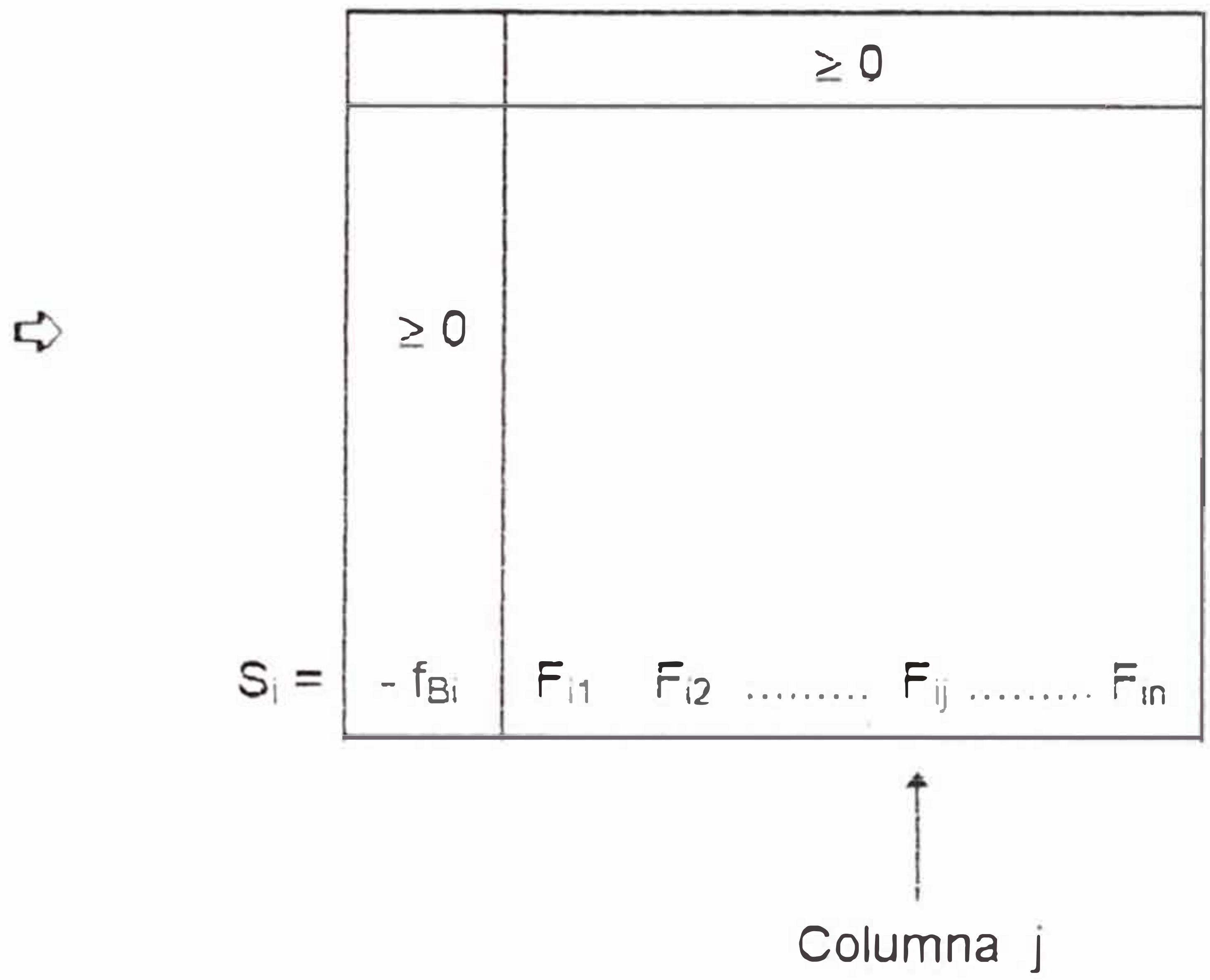
$$x_B = A_B^{-1} b_B,\; d^T = (A\,x_B - b)^T = -\,b^T$$

		1	$-w_1$	$-w_2$	....	$-w_n$	
w_0	=	0	$-b_1$	$-b_2$	....	$-b_n$	
w_1	=	0	-1	0	....	0	Aumentando
.		.	.	.		.	ecuaciones
.		.	.	.		.	triviales
.		.	.	.		.	
w_n	=	0	0	0	....	-1	
w_{n+1}	=	c_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	
.		.	.	.		.	
.		.	.	.		.	
.		.	.	.		.	
w_{n+m}	=	c_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	

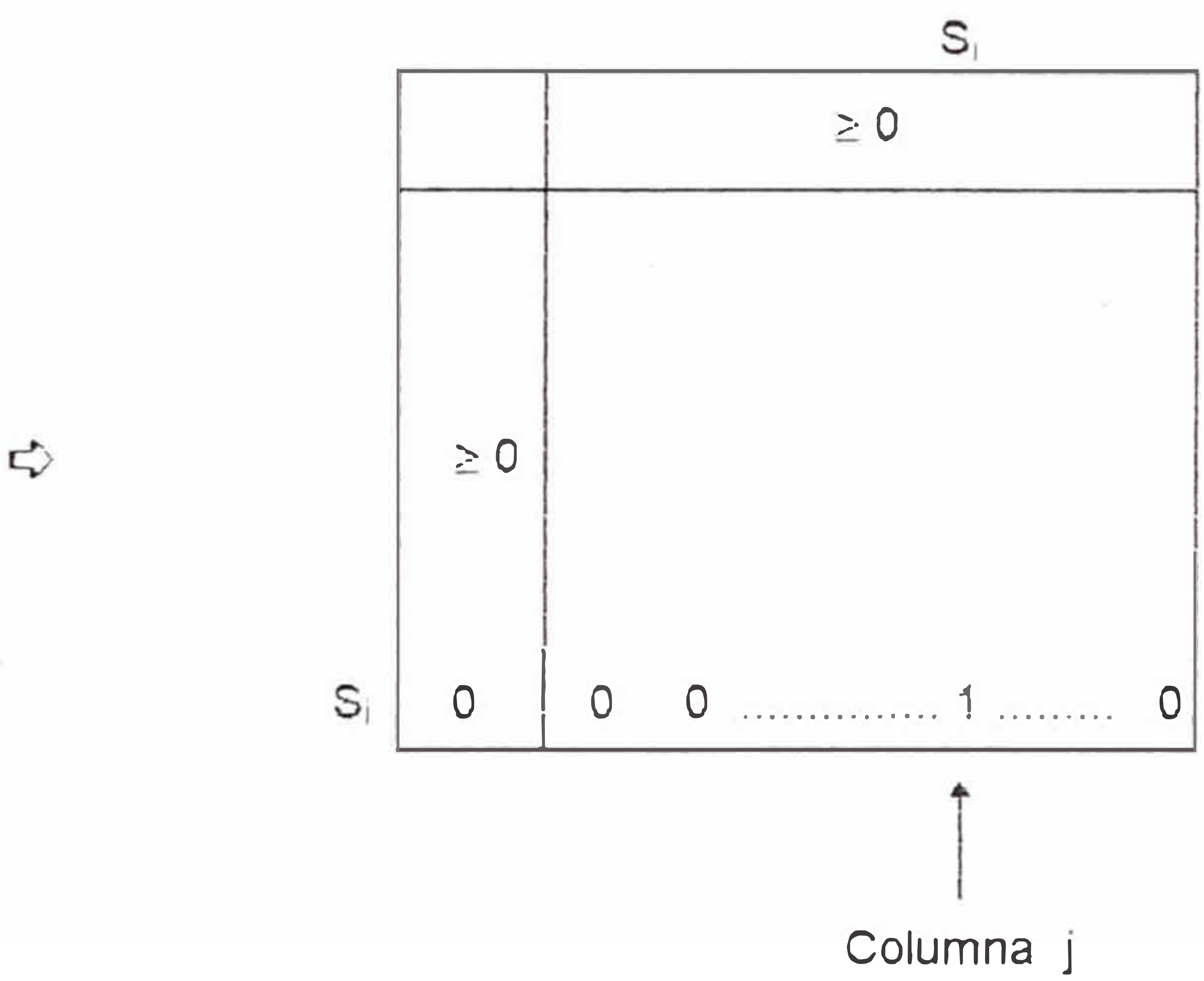
Donde por ejemplo: $w_{n+1} = c_1 - a_{11}w_1 - a_{12}w_2 - \ldots\ldots\ldots\ldots - a_{1n}w_n$
es una ecuación de restricción del Programa ($\Re$)

Cuando la Tabla es óptima pero no entera, se aumenta el plano de corte

$$S_i = -f_{B_i} + \sum_{j=1}^{n} F_{ij} u_j$$



Según la Tabla al pivotear respecto a la columna j se obtiene la siguiente Tabla:



Debido a que se obtiene una ecuación trivial se omite, introduciendo un nuevo plano de corte, siempre que no se obtenga una solución óptima entera.

Ejemplo:

Sea el Programa:

$$\text{Máx} \quad -u_1 + 3u_2$$

$$-2u_1 + 3u_2 < 3$$

$$4u_1 + 5u_2 \geq 10$$

$$u_1 + 2u_2 < 5$$

$$u_1 \geq 0,\ u_2 \geq 0$$

$$u_1, u_2 \in Z$$

Se construye la Tabla sabiendo que:

$$A_B = I \quad \text{y} \quad B = \{3, 4, 5\}$$

		$-u_1$	$-u_2$
	0	1	-3
u_1	0	-1	0
u_2	0	0	-1
u_3	3	-2	3✓
u_4	-10	-4	-5
u_5	5	1	2

$$\min\left\{\frac{3}{3}, \frac{5}{2}\right\} = 1$$

		$-u_1$	$-u_3$
	3	-1	1
u_1	0	-1	0
u_2	1	-2/3	1/3
u_3	0	0	-1
u_4	-5	-22/3	5/3
u_5	3	7/3✓	-2/3

$$\min\left\{\frac{3}{7/3}\right\} = 9/7$$

➪ E l Optimo continuo es: (9/7 , 13/7)

Para encontrar el óptimo entero agregamos el Plano de corte:

$S_1 = -6/7 - 2/7\,(-u_5) - 1/7\,(-u_3)$ (Primer plano)

		$-u_5$	$-u_3$
	30/7	3/7	5/7
u_1	9/7	3/7	-2/7
u_2	13/7	2/7	1/7
u_3	0	0	-1
u_4	31/7	22/7	-3/7
u_5	0	-1	0
S_1	-6/7	-2/7✓	-1/7

$$\text{Max}\left\{\frac{3/7}{-2/7}, \frac{5/7}{-1/7}\right\} = -3/2$$

		$-S_1$	$-u_3$
	3	3/2	1/2
u_1	0	3/2	-1/2
u_2	1	1	0
u_3	0	0	-1
u_4	-5	11	-2✓
u_5	3	-7/2	1/2
S_1	0	-1	0

$$\text{Max}\left\{\frac{1/2}{-2}\right\} = -1/4$$

		$-S_1$	$-u_4$
	7/4	17/4	1/4
u_1	5/4	-5/4	-1/4
u_2	1	1	0
u_3	5/2	-11/2	-1/2
u_4	0	0	-1
u_5	7/4	-3/4	1/4
S_1	0	-1	0

$\longrightarrow$ Sale

Agregamos el plano de corte: $S_2 = -3/4 -1/4\,(-S_1) -1/4\,(-u_4)$

		$-S_1$	$-u_4$
	7/4	17/4	1/4
u_1	5/4	-5/4	-1/4
u_2	1	1	0
u_3	5/2	-11/2	-1/2
u_4	0	0	-1
u_5	7/4	-3/4	1/4
S_2	-3/4	-1/4	-1/4✓

$$\text{Max}\left\{\frac{17/4}{-1/4}, \frac{1/4}{-1/4}\right\} = -1$$

		$-S_1$	$-S_2$
	1	4	1
u_1	2	-1	-1
u_2	1	1	0
u_3	4	-5	-2
u_4	3	1	-4
u_5	1	-1	1
S_2	0	0	-1

El óptimo entero es (2 , 1)

Convergencia del algoritmo fraccional

Definición

Se dice que un vector α es lexicográficamente positivo ($\alpha \succ 0$), si su primer elemento diferente de cero es positivo. Un vector β es lexicográficamente negativo si $-\beta \succ 0$.

Más aún, α es lexicográficamente mayor que β ($\alpha \succ \beta$), si $\alpha - \beta \succ 0$.

Considerando el Programa Primal:

$$
\begin{aligned}
\min \quad & c^T x \\
& Ax \geq b \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

se tiene la respectiva Tabla Dual:

	$-u_N$
0	$-b$
0	$-I$
c	A

Sea x_S la variable que sale de la base $A_B = (T_k)$, además se define:

$$
\beta_k = \begin{pmatrix} T_{0k} \\ T_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{0k} \\ T_{1k} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{sk} \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{nk} \end{pmatrix}, \qquad K = \{ k \,/\, T_{sk} < 0 \}
$$

$\beta_K = \beta_K / T_{sK}$, $k \in K$.

$$\underline{\beta_k} = \begin{pmatrix} T_{0k} / T_{sk} \\ T_{1k} / T_{sk} \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{nk} / T_{sk} \end{pmatrix} , \quad k \in K$$

Para el caso de maximización, siendo:

$\underline{\beta_r} = \ell\text{- Máx} \{ \underline{\beta_k} \ / \ k \in K \}$ se tiene que x_r entra a la base.

Veamos:

Se sabe que:

$$\underline{\beta_r} \ \underline{\succ} \ \underline{\beta_k} , \quad \forall\, k \in K$$

$$\underline{\beta_r} - \underline{\ } \ \underline{\succ} \ 0 , \forall\, k \quad K$$

$$\underline{\beta_r} - \underline{\beta_k} \succeq 0 \qquad , \quad \forall \ T_{sk} < 0$$

$$\begin{pmatrix} T_{0r} / T_{sr} \\ T_{1r} / T_{sr} \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{nr} / T_{sr} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} T_{0k} / T_{sk} \\ T_{1k} / T_{sk} \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{nk} / T_{sk} \end{pmatrix} \succ 0 \quad , \quad \forall \ T_{sk} < 0$$

$$\begin{pmatrix} T_{0r}/T_{sr} - T_{0k}/T_{sk} \\ T_{1r}/T_{sr} - T_{1k}/T_{sk} \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ T_{nr}/T_{sr} - T_{nk}/T_{sk} \end{pmatrix} \succeq 0 \quad , \quad \forall\ T_{sk} < 0$$

① $T_{0r} / T_{sr} - T_{0k} / T_{sk} < 0 \qquad \Rightarrow\Leftarrow$

② $T_{0r} / T_{sr} - T_{0k} / T_{sk} \geq 0 \quad , \quad \forall\ T_{sk} < 0$

Multiplicando por $T_{sr}\, T_{sk} > 0$ la parte ② se obtiene:

$$\Rightarrow T_{0r}\, T_{sk} - T_{0k}\, T_{sr} \geq 0 \quad , \quad \forall\ T_{sk} < 0$$

$$\Rightarrow T_{0r}\, T_{sk} \geq T_{0k}\, T_{sr} \quad , \quad \forall\ T_{sk} < 0$$

Dividiendo por $T_{sk}\, T_{sr} > 0$ la expresión anterior:

$$\Rightarrow \frac{T_{0r}}{T_{sr}} \geq \frac{T_{0k}}{T_{sk}} \quad , \quad \forall\ T_{sk} < 0$$

$$\Rightarrow \frac{T_{0r}}{T_{sr}} = \operatorname{Max} \left\{ \frac{T_{0k}}{T_{sk}} \;/\; T_{sk} < 0 \right\}$$

Por lo tanto x_r entra a la base.

Ahora veamos que el vector solución es decreciente.

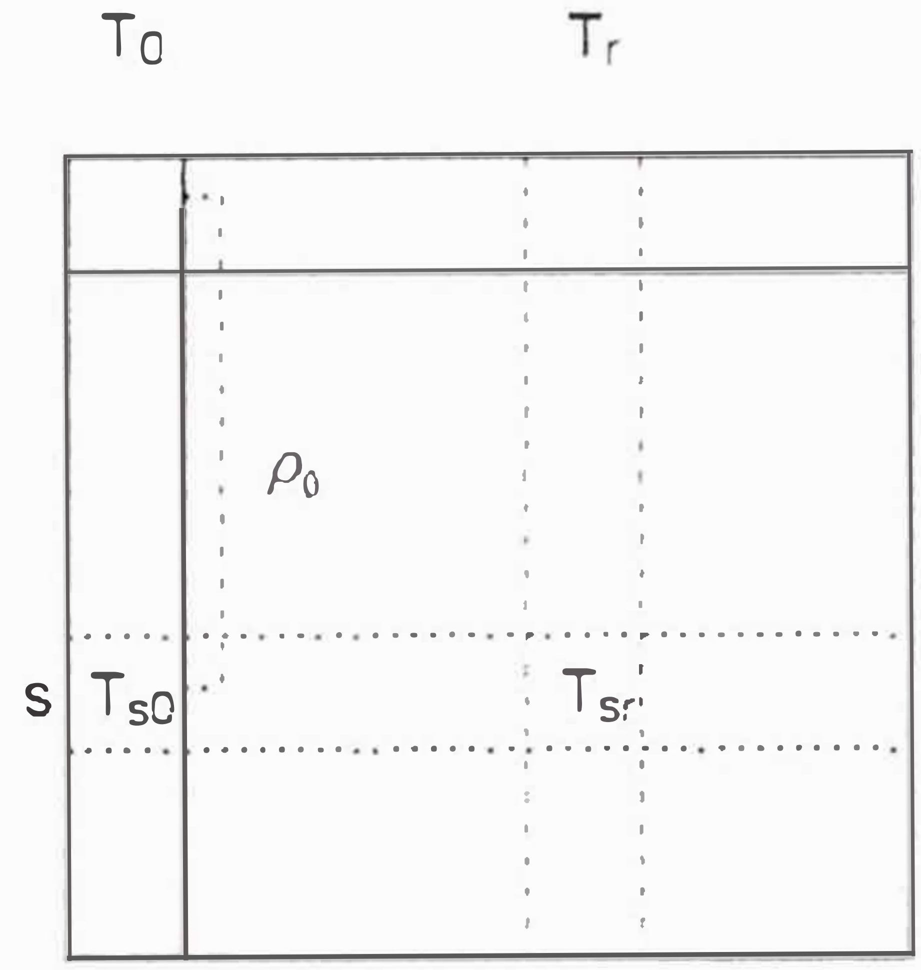
Considerando la **iteración k**, sea:

$T_0 \Rightarrow$ Columna solución

$T_r \Rightarrow$ Columna Pivot

$\rho_0 \Rightarrow$ Primeros s-elementos de T_0

$\rho_r \Rightarrow$ Primeros s-elementos de T_r



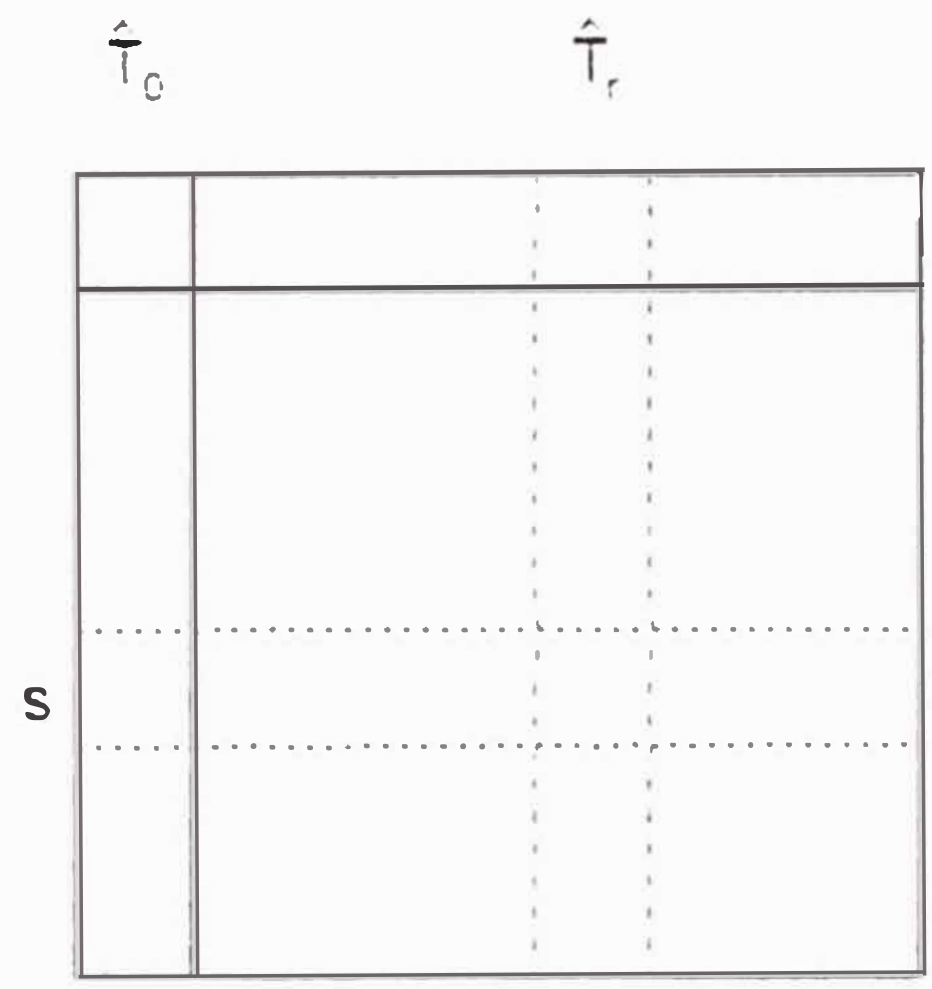
Después del **pivotaje** se tiene:

$T_0 \Rightarrow$ Columna solución

$T_r \Rightarrow$ Columna Pivot

$\hat{\rho}_0 \Rightarrow$ Primeros s-elementos de $\hat{T}_0$

$\hat{\rho}_r \Rightarrow$ Primeros s-elementos de $\hat{T}_r$



Se tiene que: $\hat{\rho}_0 = \rho_0 + T_{s0} \dfrac{\rho_r}{|T_{sr}|}$

puesto que: $\hat{\rho}_r = \dfrac{\rho_r}{|T_{sr}|} \succ 0$ (pues $\rho_r \succ 0$)

y $T_{s0} < 0$ entonces $\hat{\rho}_0$ decrece.

T_0 es decreciente.

Es decir no ocurre el ciclo en las sucesivas iteraciones.

Formulación (Algoritmo Fraccional)

1) Solucionar el Programa Lineal Continuo asociado por el Método Simplex.
2) Si la solución óptima es entera termina. De lo contrario ir a 3).
3) Generar el Plano de Corte y añadir a la tabla óptima.
4) Resolver la nueva tabla por el Método Simplex.
5) Si la solución óptima es entera termina. De lo contrario regresar a 3), omitiendo el Plano de Corte anterior.

ALGORITMO TOTALMENTE ENTERO DE GOMORY

Sean los programas:

$$L: \quad \min c^T x \qquad\qquad L^*: \quad \text{Máx } b^T u$$
$$Ax \geq b \qquad\qquad A^T u \leq c$$
$$x \geq 0 \qquad\qquad u \geq 0$$

donde $c \in R^m$, $b \in R^n$ y A^T una matriz de orden mxn.

Considerando el Programa Dual se tiene su respectiva Tabla Dual:

		- u
z	0	$-b^T$
u	0	$-I$
v	c	A^T

$\Rightarrow$. $v = c - A^T u$

Donde para cada iteración k se tendrá:

$$v_k = c_k - \sum_{j=1}^{n} T_{kj} u_j \text{ .... (R)}$$

Dividiendo la expresión anterior (R) por un número real $\lambda \neq 0$ se tiene:

$$\frac{v_k}{\lambda} = \frac{c_k}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n} \frac{T_{kj}}{\lambda} u_j$$

<u>Observación</u>:

Siendo r un número real , se tiene que:

$$r = \| r \| + f_r$$

donde $0 < f_r < 1$, $\| r \|$ representa el máximo entero de r .

Luego tendremos que:

$$\left(\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| + f_{\lambda}\right) v_k = \frac{c_k}{\lambda} - \sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\frac{T_{kj}}{\lambda}\right\| + f_{kj}\right) u_j$$

Entonces obviando la parte fraccionaria se deduce lo siguiente:

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| v_k + \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{T_{kj}}{\lambda}\right\| u_j \leq \frac{c_k}{\lambda}$$

Como todas las variables v_k y u_j, deben ser enteras; se tiene que el primer miembro de la desigualdad debe ser entero. en consecuencia; tomando máximo entero miembro a miembro se obtiene:

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| v_k + \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{T_{kj}}{\lambda}\right\| u_j \leq \left\|\frac{c_k}{\lambda}\right\| \text{................ (S)}$$

Multiplicando la expresión (R) por $\left\|\frac{1}{\lambda}\right\|$ se tiene:

$$\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| v_k + \sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| T_{kj} u_j = \left\|\frac{1}{\lambda}\right\| c_k \text{ .... (T)}$$

Restando de (S) la expresión (T) se tiene:

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|\frac{T_{kj}}{\lambda}\right\| - \left\|\frac{1}{\lambda}\right\| T_{kj}\right) u_j \leq \left\|\frac{c_k}{\lambda}\right\| - \left\|\frac{1}{\lambda}\right\| c_k$$

Considerando $\lambda > 1$ entonces $\left\|\frac{1}{\lambda}\right\| = 0$, e introduciendo la variable de holgura S_k se tiene la siguiente expresión:

$$\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\| u_j + S_k = \left\| \frac{c_k}{\lambda} \right\|$$

Definición:

Consideremos el programa dual, cuya iteración k es:

$$v_k = c_k - \sum_{j=1}^{n} T_{kj}\, u_j$$

luego: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\| u_j + S_k = \left\| \frac{c_k}{\lambda} \right\|$ se llama Plano de Corte.

Propiedad:

Sea $\lambda = \text{Max}\left\{ \dfrac{-T_{kj}}{\mu_j} \;/\; T_{kj} < 0 \right\}$ donde $\mu_j = \left\| \dfrac{T_{mj}}{T_{mr}} \right\|$, $T_{mr} = \min\{ T_{mj} \;/\; T_{mj} > 0 \}$

Luego: $\lambda > 1$ y $\dfrac{T_r}{\left\| \dfrac{T_{kr}}{\lambda} \right\|} = \ell - \min\left\{ \dfrac{T_j}{-\left\| \dfrac{T_{kj}}{\lambda} \right\|} \;/\; T_{kj} < 0 \right\}$

Prueba:

$\lambda = \text{Max}\left\{ \dfrac{-T_{kj}}{\mu_j} \;/\; T_{kj} < 0 \right\}$ donde $\mu_j = \left\| \dfrac{T_{mj}}{T_{mr}} \right\|$. $1 \leq j \leq n$

=> $\lambda \geq -\dfrac{T_{kj}}{\mu_j}$, en particular para $j = r$.

luego: $\mu_r = \left\| \dfrac{T_{mr}}{T_{mr}} \right\| = 1$, $T_{mr} \neq 0$.

es decir: $\mu_r = 1$.

$$\Rightarrow \quad \lambda \geq -\frac{T_{kr}}{1} \quad \Rightarrow \lambda \geq -T_{kr} \geq 1 \text{ ; pues } T_{kj} < 0 \text{ y entero.}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \geq 1, \text{ en nuestro caso } \lambda > 1 \text{ pues, para } \lambda = 1 \text{ sería trivial.}$$

Además $\lambda = \mathrm{Max}\left\{ \frac{-T_{kj}}{\mu_j} \ / \ T_{kj} < 0 \right\}$ donde $\mu_j = \left\| \frac{T_{mj}}{T_{mr}} \right\|$. $\quad 1 \leq j \leq n$

$$\Rightarrow \quad \lambda \geq -\frac{T_{kj}}{\mu_j}, \quad \forall j \ / \ T_{kj} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \mu_j \geq -\frac{T_{kj}}{\lambda}$$

$-\mu_j \leq \frac{T_{kj}}{\lambda}$. Tomando máximo entero a ambos miembros se obtiene:

$$-\mu_j \leq \left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|$$

$$\Rightarrow \quad \mu_j \geq -\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_j} \leq \frac{1}{-\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|}, \quad \forall j \ / \ T_{kj} < 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T_j}{\mu_j} \preceq \frac{T_j}{-\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|}, \quad \text{donde } T_r = \ell - \min\{T_j \ \forall j \ / \ T_{kj} < 0\} \text{ ....(1)}$$

Sea T_{mr} el primer elemento positivo del vector T_r (columna pivot), teniendo en cuenta que:

$$T_r \preceq T_j \quad \forall j / T_{kj} < 0$$

Puede ocurrir:

a) Por una parte que exista q tal que $1 < q < m-1$, de forma que $T_{qj} > 0$.

$\therefore \ \mu_j = \infty$.

en cuyo caso: $$T_r \preceq \frac{1}{\mu_j} T_j \quad \forall \mu_j > 0 .$$

b) Por otra parte que el primer elemento estrictamente mayor que cero del vector T_j sea T_{mj}, de donde:

$$\mu_j = \left\| \frac{T_{mj}}{T_{mr}} \right\| \leq \frac{T_{mj}}{T_{mr}} \quad \forall j \ / \ T_{kj} < 0$$

$$\Rightarrow \ T_{mr} \leq \frac{1}{\mu_j} T_{mj} \quad \forall j \ / \ T_{kj} < 0$$

$$\therefore T_r \preceq \frac{1}{\mu_j} T_j$$

Por (1) $$\Rightarrow \ T_r \preceq \frac{T_j}{-\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|}$$

$$\Rightarrow \ \frac{T_r}{-[-1]} \preceq \frac{T_j}{-\left\| \frac{T_{kj}}{\lambda} \right\|}$$

$$\therefore \quad \frac{T_r}{-\left\|\frac{T_{kr}}{\lambda}\right\|} = \ell - \min \left\{ \frac{T_j}{-\left\|\frac{T_{kj}}{\lambda}\right\|} \;/\; T_{kj} < 0 \right\}, \text{ con } \left\|\frac{T_{kr}}{\lambda}\right\| = -1$$

Definición:

Sea $w = (u, v)$, donde $u = (u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n)$ y $v = (v_1, v_2, \ldots\ldots, v_m)$

Convergencia del Algoritmo

Hemos supuesto que el valor de la función a maximizar, es decir el valor de z esta acotado inferiormente en el Conjunto de Programas por una cantidad z^*, conocida apriori.

Una vez introducido un Plano de Corte (Iteración «i») asociado a la variable w_k se tiene:

$$z_i = z_{i-1} - \left(\frac{\left\|\frac{T_{k0}}{\lambda}\right\|}{\left\|\frac{T_{kr}}{\lambda}\right\|} \right) T_{0r} \quad , \; i \in N$$

se sabe que: $\left\|\frac{T_{kr}}{\lambda}\right\| = -1$ luego reemplazando se tiene:

$$z_i = z_{i-1} + \left\|\frac{T_{k0}}{\lambda}\right\| T_{0r}$$

donde: $T_{k0} < 0$

luego $\left\|\frac{T_{k0}}{\lambda}\right\| < 0 \quad , \; (T_{0r} > 0)$

$z_i < z_{i-1}$, $\forall i \in N$

=> Se forma una serie monótona no creciente, acotada inferiormente:

$$z_0 \geq z_1 \geq z_2 \geq \ldots\ldots\ldots > z^*$$

la serie es convergente.

Ejemplo:

Resolver el siguiente Programa:

$$\text{Máx} \quad -3u_1-5u_2-4u_3$$

$$\begin{aligned} -u_1-2u_2+2u_3 &\leq -9 \\ -5u_1-4u_2-4u_3 &\leq -18 \\ -6u_1+u_2+u_3 &\leq -20 \end{aligned}$$

$u_j \geq 0$ enteras, $j = 1, \ldots, 3$

La tabla Dual Factible inicial para el problema planteado es:

		$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$
z	0	3	5	4
u_1	0	-1	0	0
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-9	-1	-2	2
u_5	-18	-5	-4	-4
u_6	-20	-6	1	1

$$\lambda = \text{Max}\left\{ -\frac{-6}{1} \right\} = 6 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 6$$

El Plano de Corte asociado a la variable u_6 es:

$$S_1 = \left\| \frac{-20}{6} \right\| + \left\| \frac{-6}{6} \right\| (-u_1) + \left\| \frac{1}{6} \right\| (-u_2) + \left\| \frac{1}{6} \right\| (-u_3) = -4 - (-u_1)$$

Añadiendo esta restricción se tiene: (Iteración 1)

		$-u_1$	$-u_2$	$-u_3$
z	0	3	5	4
u_1	0	-1	0	0
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-9	-1	-2	2
u_5	-18	-5	-4	-4
u_6	-20	-6	1	1
S_1	-4	-1 ✓	0	0

Pivot (✓)

=>

		$-S_1$	$-u_2$	$-u_3$
z	0	3	5	4
u_1	4	-1	0	0
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-5	-1	-2	2
u_5	2	-5	-4	-4
u_6	4	-6	1	1
S_1	0	-1	0	0

$$\lambda = \text{Max}\left\{-\frac{-1}{1}, -\frac{-2}{1}\right\} = 2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 2$$

El Plano de Corte asociado a la variable u_4 es:

$$S_2 = \left\| \frac{-5}{2} \right\| + \left\| \frac{-1}{2} \right\| (-S_1) + \left\| \frac{-2}{2} \right\| (-u_2) + \left\| \frac{2}{2} \right\| (-u_3) = -3 - (-S_1) - (-u_2) + (-u_3)$$

Añadiendo esta restricción se tiene: (Iteración 2)

		$-S_1$	$-u_2$	$-u_3$
z	-12	3	5	4
u_1	4	-1	0	0
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-5	-1	-2	2
u_5	2	-5	-4	-4
u_6	4	-6	1	1
S_2	-3	-1 ✓	-1	1

Pivot (✓)

=>

		$-S_2$	$-u_2$	$-u_3$
z	-21	3	2	7
u_1	7	-1	1	-1
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-2	-1	-1	1
u_5	17	-5	1	-9
u_6	22	-6	7	-5
S_2	0	-1	0	0

$$\lambda = Max\left\{-\frac{-1}{1}, -\frac{-1}{1}\right\} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

El Plano de Corte asociado a la variable u_4 es:

$$S_3 = \left\| \frac{-2}{1} \right\| + \left\| \frac{-1}{1} \right\| (-S_2) - \left\| \frac{-1}{1} \right\| (-u_2) + \left\| \frac{1}{1} \right\| (-u_3) = -2 - (-S_2) - (-u_2) + (-u_3)$$

Añadiendo esta restricción se tiene: (Iteración 3)

		$-S_2$	$-u_2$	$-u_3$
z	-21	3	2	7
u_1	7	-1	1	-1
u_2	0	0	-1	0
u_3	0	0	0	-1
u_4	-2	-1	-1	1
u_5	17	-5	1	-9
u_6	22	-6	7	-5
S_3	-2	-1	-1 ✓	1

Pivot (✓)

=>

		$-S_2$	$-S_3$	$-u_3$
z	-25	1	2	9
u_1	5	-2	1	0
u_2	2	1	-1	-1
u_3	0	0	0	-1
u_4	0	0	-1	0
u_5	15	-6	1	-8
u_6	8	-13	7	2
S_3	0	0	-1	0

Solución Optima Entera

(5,2,0)

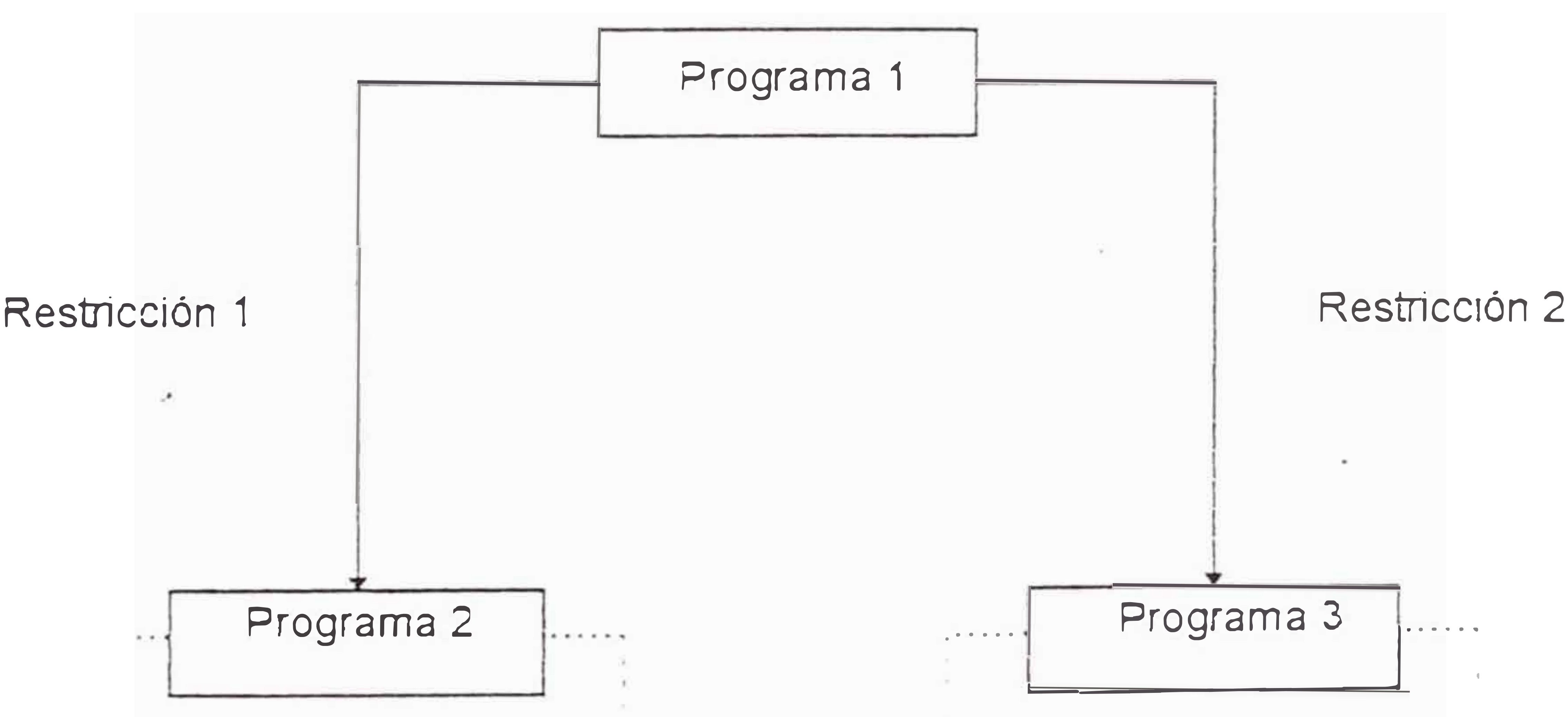
Formulación (Algoritmo Totalmente Entero)

1) Iniciar con una tabla Dual Admisible.
2) Si la tabla es Primal Admisible entonces termina.
   De lo contrario ir a 3).
3) Se añade el Plano de Corte a la tabla, con pivot -1.
4) Se resuelve la nueva tabla por el Método Simplex.
5) Si la nueva tabla es Primal Admisible termina.
   De lo contrario regresar a 3), omitiendo el Plano de Corte anterior.

Comparación de los Algoritmos con el Algoritmo de DAKIN

Los Algoritmos de Fraccional y Totalmente Entero de GOMORY basados en los Planos de Corte, permiten obtener la solución óptima de manera directa, es decir añadiendo una nueva restricción a la tabla solamente a diferencia del Algoritmo de DAKIN (Ramificación y Acotamiento) en donde se subdivide los dominios de los programas ; más aún haciéndose necesario hallar las cotas que dan un criterio acerca de la búsqueda de la solución óptima.

ALGORITMO DE DAKIN



CONCLUSIONES

- El Algoritmo Fraccional produce errores de redondeo computacionales, pues se opera con números reales.

- Por los errores de redondeo tal vez nunca se llegaría al óptimo entero, por lo tanto se debe imponer un margen de error (< 0.0001, > 0.9999).

- Con el Algoritmo Totalmente Entero se evita los errores de redondeo, ya que se opera con números enteros, pues la construcción de los planos de corte tienen como pivot a -1.

- El anterior Algoritmo inicia con una base dual admisible, por esta razón solamente puede ser aplicado para un determinado tipo de problemas.

- Comparando estos dos algoritmos tratados con el algoritmo de DAKIN se puede concluir que los de GOMORY son más adecuados porque permiten llegar a una solución óptima entera de manera directa.

BIBLIOGRAFIA

- GOLDSTEIN E. G. , YUDIN D. B.
  Programación Lineal (Problemas y Aplicaciones)
  Paraninfo
  Madrid
  1977

- HU TE CHIANG
  Integer Programming
  Addison - Wesley
  New York
  1969

- KAUFMANN ARNOLD , ARNAUD HENRY - LABORDERE
  Integer and Mixed Programming Theory and Applications
  Academic Press, Inc.
  New York
  1977

- PARDO LLORENTE LEANDRO
  Programación Lineal Entera
  Ediciones Diaz de Santos S.A.
  Madrid
  1990

- SIMONNARD M.
  Programación Lineal
  Paraninfo
  Madrid
  1972

- TAHA A. HAMDY
  Integer Programming
  Academic Press, Inc.
  New York
  1975